Zusammenfassung - Kryptographie

Marc Meier

19. Oktober 2015

Korrektheit und Vollständigkeit der Informationen sind nicht gewährleistet. Macht euch eigene Notizen oder ergänzt/korrigiert meine Ausführungen!

Inhaltsverzeichnis

Planung der Veranstaltung

1. Wiederholung (ca 3-4 Termine)
   - Probleme, Kodierung von Problemen, Laufzeit von Algorithmen
   - P, PN, NPC...
   - Grundlegende Probleme & Algorithmen
2. Algorithmen für schwierige Probleme (ca. 15 Termine)
   - parallele / randomisierte Algorithmen
   - Approximationsalgorithmen
   - parametrisierte Algorithmen
3. Kryptographie (ca 10 Termine)
   - Public-Key-Kryptographie

1 Grundlagen und Wiederholungen

1.1 Probleme, deren Kodierung und Laufzeit von Algorithmen

Anhand einiger Beispiele soll die Wichtigkeit der Kodierung der Probleme bzw. der Eingabe verdeutlicht werden.

1.1.1 Sortieren

Eingabemenge: Natürliche Zahlen $a_1, a_2, ..., a_n$

Ausgabe: Eingabe aufsteigend sortiert

Beim Sortieren handelt es sich um ein *Suchproblem*. Beispiele für bekannte Sortieralgorithmen und deren Laufzeitkomplexität sind Bubblesort $\mathcal{O}(n^2)$ und Mergesort $\mathcal{O}(n \log n)$[1].

1.1.2 Eingabelänge N

Die Länge der Eingabe entspricht *nicht* der Anzahl der zu sortierenden Elemente n. Dies ist aufgrund der Kodierung in eine maschinenlesbare Form der Fall. Für gewöhnlich verwenden heutige Computer eine Darstellung im Binärsystem. Daher gilt:

$$N := \sum_{i=1}^{n} \log a_i \tag{1}$$

[1]Sofern nicht anders angegeben entspricht $\log n$ immer dem dualen Logarithmus von n (Basis 2)

Im Folgenden soll die Eingabe [11, 13, 113] kodiert werden. Für eine Turingmaschine mit dem Eingabealphabet $\Sigma := \{0, 1, \$\}$ würde diese folgendermaßen aussehen: 1011**$**1101**$**1110001. Um eine Lesbarkeit für Binärrechner zu ermöglichen, werden weiterhin folgende Ersetzungen durchgeführt: $1 \to 11$ $0 \to 00$ $\$ \to 01$ Die resultierende Kodierung wäre nun: 11001111**01**11110011**01**11111100000011. Sei nun L die maximale Wortlänge[2].

$$L := max_{i=1}^{n} \log a_i \tag{2}$$

Hier sollte ergänzt werden, wie man auf das $\mathcal{O}(N^3)$ kommt.

1.1.3 Primzahl

Eingabemenge: Eine natürliche Zahl n

Ausgabe: Ist n eine Primzahl?

Es handelt sich um ein *Entscheidungsproblem.* Die Eingabelänge ist $N := \log n$. Ein naiver Algorithmus wird im Folgenden beschrieben.

1: **if** $n = 2$ **then**
2:     **return** Ja
3: **else**
4:     **for** $d := 2$ **to** $n - 1$ **do**
5:         **if** $n \mod d = 0$ **then**
6:             **return** Nein
7:         **else**
8:         **end if**
9:     **end for**
10:     **return** Ja
11: **end if**

Die Komplexität lässt sich wie folgt herleiten: Für die Verzweigungen (Zeilen 1 und 5), sowie für die return-Statements in den Zeilen 2 und 6 ist eine beschränkte Komplexität $\mathcal{O}(1)$ anzunehmen. Alle Statements in der for-Schleife werden $n - 2$ mal wiederholt, die Komplexität ist $\mathcal{O}(n)$.

Die daraus resultierende Komplexität $\mathcal{O}(n)$ ist äquivalent zu $\mathcal{O}(2^{\log n})$. Weil $\log n$ der Eingabelänge N entspricht, ist die Komplexität entsprechend $\mathcal{O}(2^N)$, also exponentiell. Demnach ist der Algorithmus nicht effizient.

1.1.4 Cliquensuche im Graphen

CLIQUE

Eingabemenge: Graph $G = (V, E)$ und $k \in N$

Ausgabe: Hat G mindestens paarweise verbundene Knoten (eine Clique C mit $\geq k$ Knoten)?

CLIQUE (Suchproblem)

Eingabemenge: Graph $G = (V, E)$

Ausgabe: !!!!!!!!!!!!!!ERGÄNZEN!!!!!!!!!!!!!!!

Behauptung: Wenn CLIQUE (Entscheidungsproblem) in polynomieller Zeit lösbar ist, so ist auch die Suchversion von CLIQUE in polynomieller Zeit lösbar.[3]

Beweis

$\Leftarrow$ Zur Eingabe (G,k) von CLIQUE bestimmen wir zunächst mit dem Algorithmus für CLIQUE-Suchversion eine größte Clique C von G. Es wird verglichen, ob $|C| \geq k$ gilt. Ist dies der Fall, gibt der Algorithmus *Ja* zurück, andernfalls *Nein.* Die Laufzeit entspricht offensichtlich der Clique-Suchversion.

[2] An dieser Stelle habe ich mit Förmi geschnattert und weiß daher nicht, ob das so korrekt ist

[3] In polynomieller Zeit, abhängig von der Knotenzahl $|V|$ des Graphen

⇒ Betrachte folgende Zwischenversion für CLIQUE: Betrachte folgende Zwischenversion für CLIQUE[4]:

> **CLIQUE-Zwischenversion:**
>
> **Eingabe:** Graph G=(V,E)
>
> **Aufgabe:** Bestimme die Maximalzahl $\omega(G)$ von paarweise verbundenen Knoten in G

Behauptung: CLIQUE in polynomieller Zeit lösbar $\Rightarrow^{(1)}$ CLIQUE-Zwischenversion in polynomieller Zeit $\Rightarrow^{(2)}$ CLIQUE-Suchversion in polynomieller Zeit lösbar.

zu (1): Sei A ein Algorithmus für CLIQUE in polynomieller Zeit. Zur Eingabe G von CLIQUE-Zwischenversion wende A auf Eingaben $(G, n), (G, n-1), ..., (G, 1)$ an! Ausgabe ist $\omega(G) =$ erstes k mit $A(G, k) = Ja$

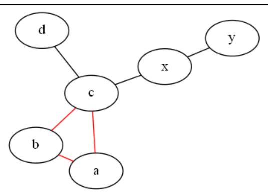
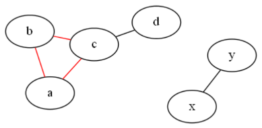
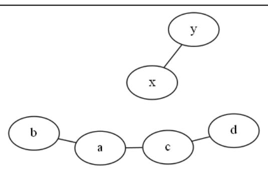
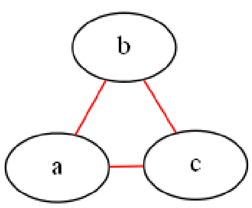
for k:= n to 1 **do**
  if A **then**(G,k) = 'ja' then return $\omega(G) = k$
  end if
end for

Laufzeit: $n \cdot \mathcal{O}(n^c) = \mathcal{O}(n^{c+1})$

zu (2): : Sei A ein polyzeit Algorithmus für Clique-Zwischenversion. d.h. $A(G) = \omega(G)$ in $\mathcal{O}(n^d)$ für eine Konstante d.

Zur Eingabe G von Clique-Suchversion wende folgendes an:

for jede Kante $e \in E$ **do**
  if $\omega(G-e) = \omega(G)$ **then** $G := G - e$
  end if
end for
return C := V(G) ohne isolierte Knoten

G	$\omega(G) = 3$		Vollständiger Graph
$G_2 := G - cx$	$\omega(G) = 3$		Nach Entfernen der Kante cx hat sich die Cliquenzahl nicht geändert, die Knoten x und y sind isoliert. Die Kante ex ist also nicht für die Clique notwendig.
$G_3 := G_2 - bc$	$\omega(G) = 2$		Nach Entfernen der Kante bc hat sich die Cliquenzahl verringert. Offensichtlich wird bc also für die Clique benötigt.
$C := \{a, b, c\}$	$\omega(G) = 3$		Im weiteren Verlauf wird (offensichtlich) noch die Kante cd entfernt. Anschließend werden die isolierten Knoten d, x und y entfernt und die Lösung $C := \{a, b, c\}$ zurückgegeben.

[4] $\omega(G) = max\{|C| : C$ ist eine Clique in $G\}$ ist die Cliquenzahl

Hinweis: Ich bin mir nicht sicher, ob es sich um das korrekte Beispiel aus der Vorlesung handelt.

Laufzeit: $m \cdot \mathcal{O}(n^d) = \mathcal{O}(n^{d+2})$

1.1.5 Gegenüberstellung „einfache Formulierung“ vs „formale Formulierung“

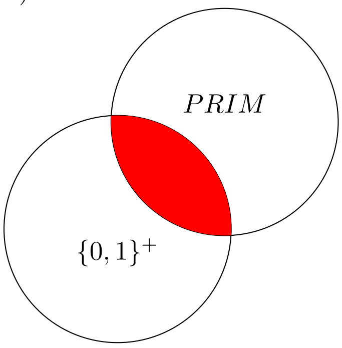
Die genaue Formulierung des Problems ist wichtig:
„Ist n prim?“
genauer:

Eingabemenge: Eine natürliche Zahl n

Ausgabe: Ist n eine Primzahl?

Formal: $PRIM^5 = \{bin(n) | n \in N \text{ ist prim}\} \subset \{0,1\}^+$

Venn-Diagramm $PRIM \subset \{0,1\}^+$ TODO (Und offensichtlich falsch, da ich noch keinen Plan von TIKZ habe)



1.2 P, PN, NPC

P = Menge aller *Entscheidungsprobleme*, für die ein (deterministischer) polynomialzeit-Algorithmus existiert (formal via Deterministischer Turing Maschine, „effizient lösbare Probleme“). Ein *Optimierungsproblem* ist lösbar, wenn die entsprechende Entscheidungsversion in P ist.

1.2.1 Grundlegende Probleme in P

- **Sortieren**
- **PRIM** - Allerdings nicht der vorgestellte Algorithmus. Effizienter Algorithmus wurde 2002 vorgestellt. Komplexität $\mathcal{O}(\log n)^{12})$, zur Zeit sogar $\mathcal{O}(\log n)^{6})$`https://de.wikipedia.org/wiki/AKS-Primzahltest`
- **2-SAT** (Modellierung mit Graphenproblem für Beweis)

Literatur

Übrige Notizen
In der Praxis ermittelt man die Komplexität der Einfachheit halber mit uniformen Kostenmaß. Sortierung: Eingabe: $a_1, a_2, ..., a_n$ beziehungsweise $bin(a_1)\#bin(a_2)\#...\#bin(a_n)$ mit Ersetzung Aufgabe: Sortiere Zahlen aufsteigend Mergesort: $\mathcal{O}(n \cdot \log n)$ Problem -¿ Eingabelänge (siehe oben, hatten wir schon)

[5] bin(n) - Binärdarstellung von n