




# Modeling

---

Supervised Learning: Support Vector Machines

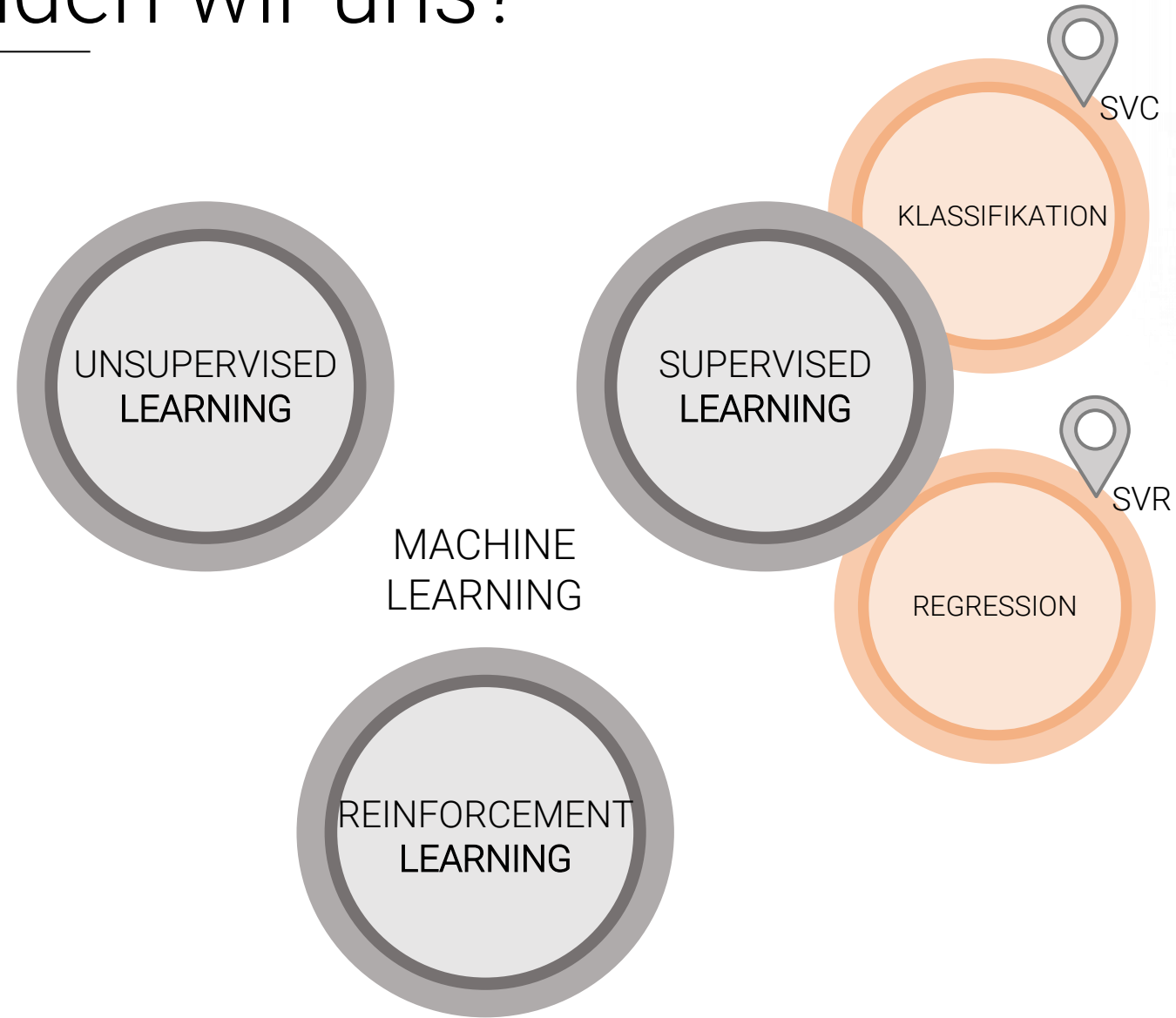
# Agenda

---

- 
1. SVM: Margin Maximierung und Support Vectors
  2. Mathematischer Hintergrund zu SVMs
  3. Soft-Margin SVM und Optimierung
  4. Nicht-lineare Probleme und Kernel-Trick

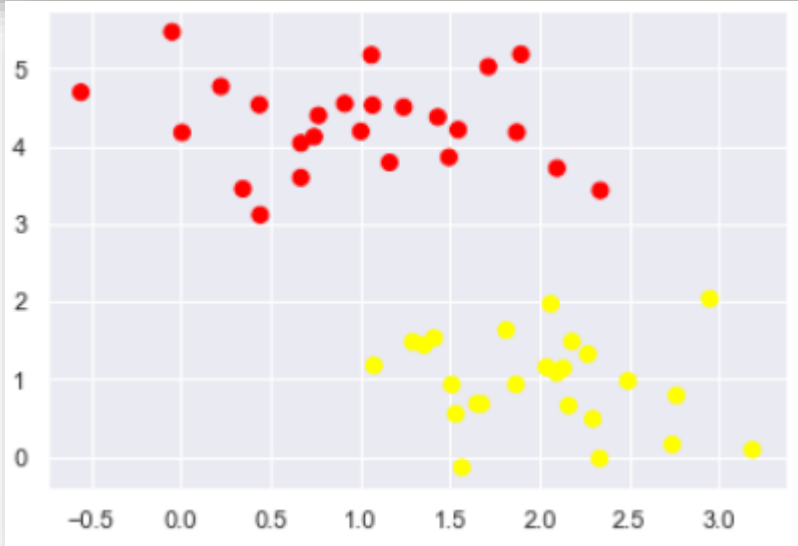
# SVM: wo befinden wir uns?

---



# SVM: allgemein

```
1 from sklearn.datasets.samples_generator import make_blobs
2 X, y = make_blobs(n_samples=50, centers=2,
3                   random_state=0, cluster_std=0.60)
4 plt.scatter(X[:, 0], X[:, 1], c=y, s=50, cmap='autumn');
```



Unsere Ausgangssituation:

Zwei Klassen in einem 2D-Feature-Raum, die wir mit einem Klassifikator zu trennen versuchen



Was denken Sie?  
Welches Problem  
sehen wir hier sofort?

- Support Vector Machines (**SVM**) sind eine der bekanntesten Modelle im Machine Learning
- Vor allem für **klein- und mittelgroße** Datensätze geeignet
- Sie sind flexibel und können für Klassifikations- und Regressionsprobleme verwendet werden
- SVMs stellen im Kontext der Klassifikation *diskriminative* Klassifikatoren dar



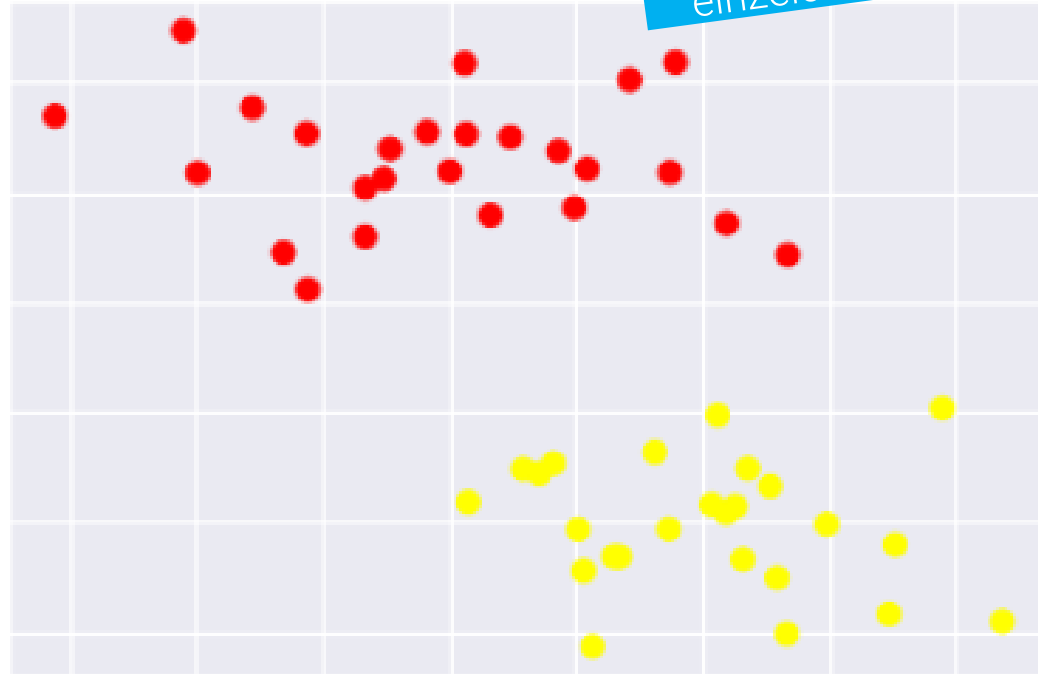
Was denken Sie?  
Was heißt  
diskriminativ?



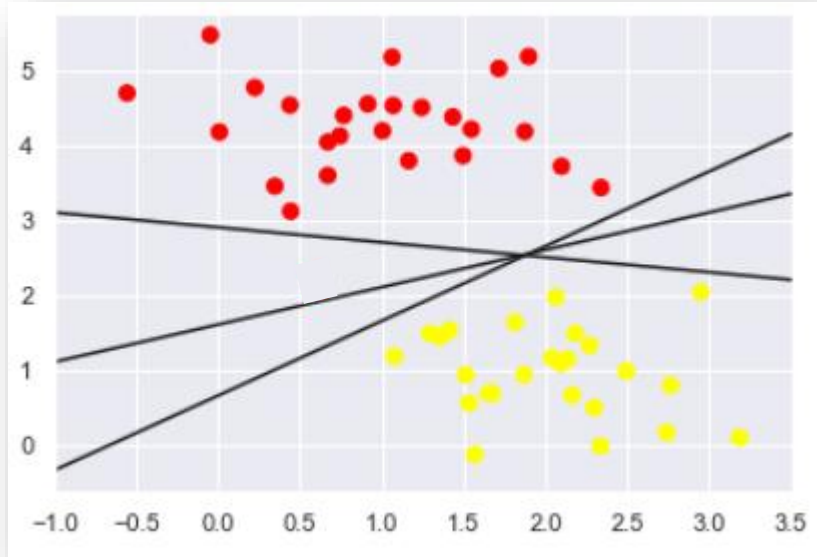
# Wir als Klassifikatoren



Was denken Sie?  
Wie würden Sie – als Klassifikator  
– eine optimale Trennlinie  
einzeichnen? (Zoom: zeichnen)



# SVM: allgemein



- Wir können also beliebig viele Geraden einzeichnen, die unsere Klassen trennen
- Alle drei Geraden separieren unsere Klassen quasi ideal
- Wie sieht es nun mit **neuen Datenpunkten** aus? Je nachdem welche Gerade wir in unsere Ausgangssituation legen, können neue Datenpunkte unterschiedlich klassifiziert werden

```
1 xfit = np.linspace(-1, 3.5)
2 plt.scatter(X[:, 0], X[:, 1], c=y, s=50, cmap='autumn')
3 plt.plot([0.6], [2.1], 'x', color='red', markeredgewidth=2, markersize=10)
4
5 for m, b in [(1, 0.65), (0.5, 1.6), (-0.2, 2.9)]:
6     plt.plot(xfit, m * xfit + b, '-k')
7
8 plt.xlim(-1, 3.5);
```



Was denken Sie?

Wie würden Sie intuitiv das „x“ zuordnen – je nach Gerade?



Was denken Sie?

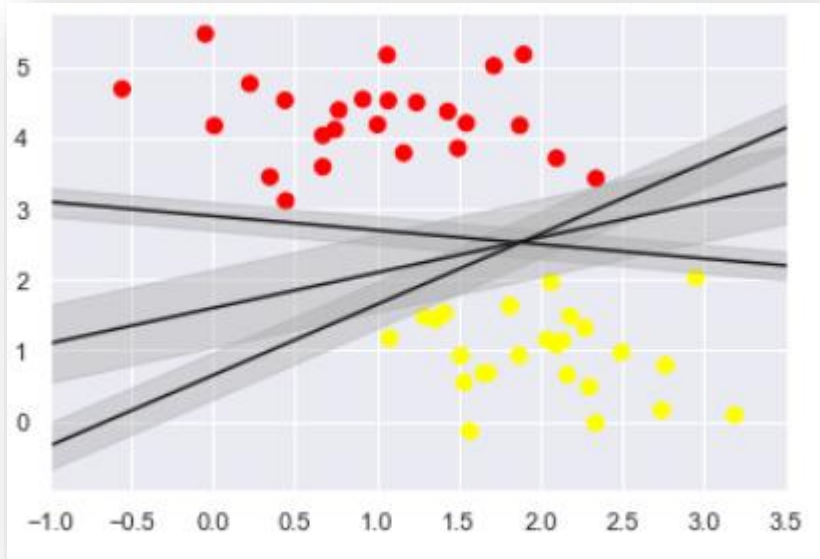
Wie würden Sie intuitiv entscheiden, welche Gerade die beste ist?

# SVM: Margin Maximierung



Was denken Sie?

Was könnte man noch tun – außer nur eine Gerade zu zeichnen?



```
1 xfit = np.linspace(-1, 3.5)
2 plt.scatter(X[:, 0], X[:, 1], c=y, s=50, cmap='autumn')
3
4 for m, b, d in [(1, 0.65, 0.33), (0.5, 1.6, 0.55), (-0.2, 2.9, 0.2)]:
5     yfit = m * xfit + b
6     plt.plot(xfit, yfit, '-k')
7     plt.fill_between(xfit, yfit - d, yfit + d, edgecolor='none',
8                     color='AAAAAA', alpha=0.4)
9
10 plt.xlim(-1, 3.5);
```

- Anstatt nur eine bloße Gerade zur Trennung der Klassen zu nutzen, wird ein sog. **Margin** (dt. Rand, Spanne) um die Gerade gelegt
- Dieser Margin wird bis zu den **nächstliegenden** Punkten der Klassen erweitert
- Die **optimale** Gerade ist dann die mit dem **größten** Margin

→ SVMs sind sog. *Maximum Margin Estimators*



Was denken Sie?

Welche Gerade wird wohl die beste sein – und warum?

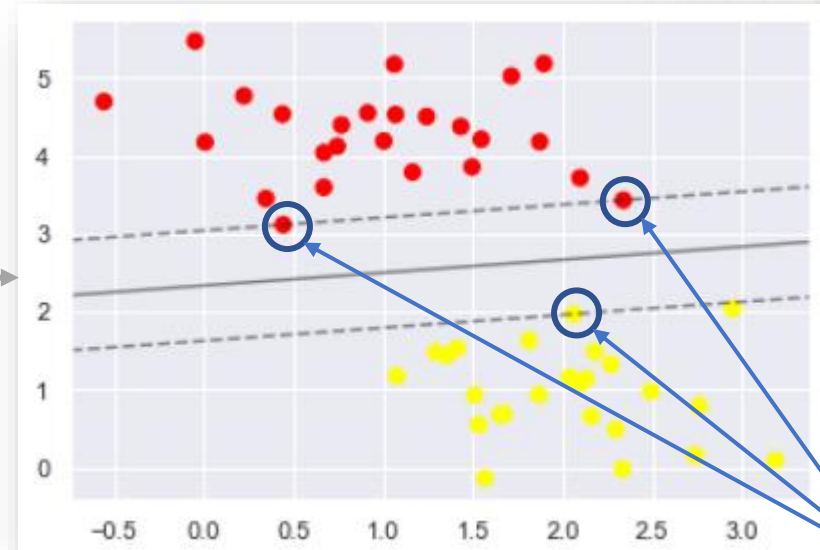
# SVM: Fitting/Training

Modell

```
1 from sklearn.svm import SVC # "Support vector classifier"
2 model = SVC(kernel='linear', C=1E10)
3 model.fit(X, y)
```



Was denken Sie?  
Können Sie sich vorstellen,  
woher das „Support  
Vector“ in SVM kommt?



Support Vectors

- Wie wir es bei der Einführung der `sklearn`-Syntax gelernt haben instanziiieren wir das SVM Modell

`SVC(kernel=<kernel_type>, C=<regularization_parameter_value>)`

Was `kernel` und `C` repräsentieren lernen wir später

- Dann können wir die `.fit()`-Methode verwenden, um das Modell auf unsere Daten in `x` (Features) und `y` (Labels) anzupassen/fitten/trainieren
- Dadurch erhalten wir die Trennlinie mit dem **maximalen Margin**, die unsere beiden Klassen am besten trennt
- `SVC` bedeutet **Support Vector Classifier** – SVMs können also auch **regressiv** verwendet werden, sehen wir später



# SVM: Support Vectors

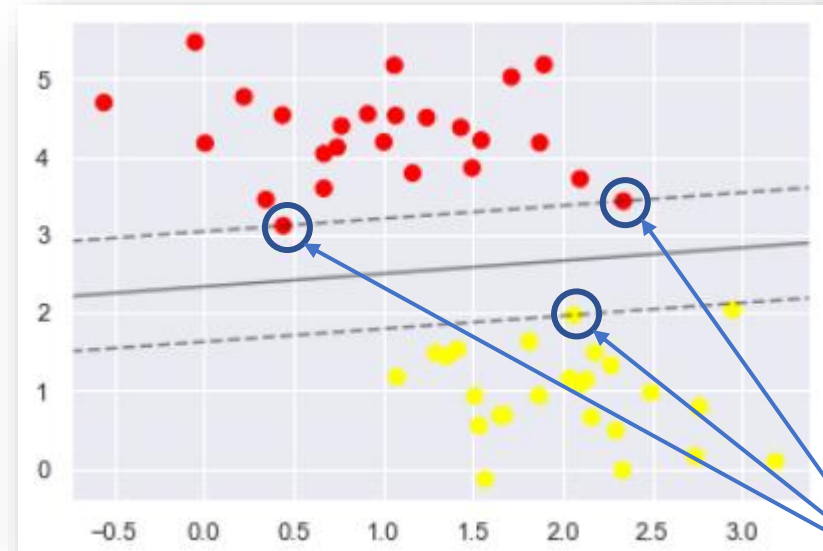


Was denken Sie?

Welchen? Von was hängt das Modell ab?

```
1 model.support_vectors_  
  
array([[ 0.44359863,  3.11530945],  
       [ 2.33812285,  3.43116792],  
       [ 2.06156753,  1.96918596]])
```

- Diese Support Vectors stellen einen entscheidenden Aspekt dieses ML-Modells dar
- Der Fit des Modells hängt **nur** von diesen Datenpunkten ab!
- Wir können über das Attribut `.support_vectors_` auf diese zugreifen



Support Vectors

0

*So what?*

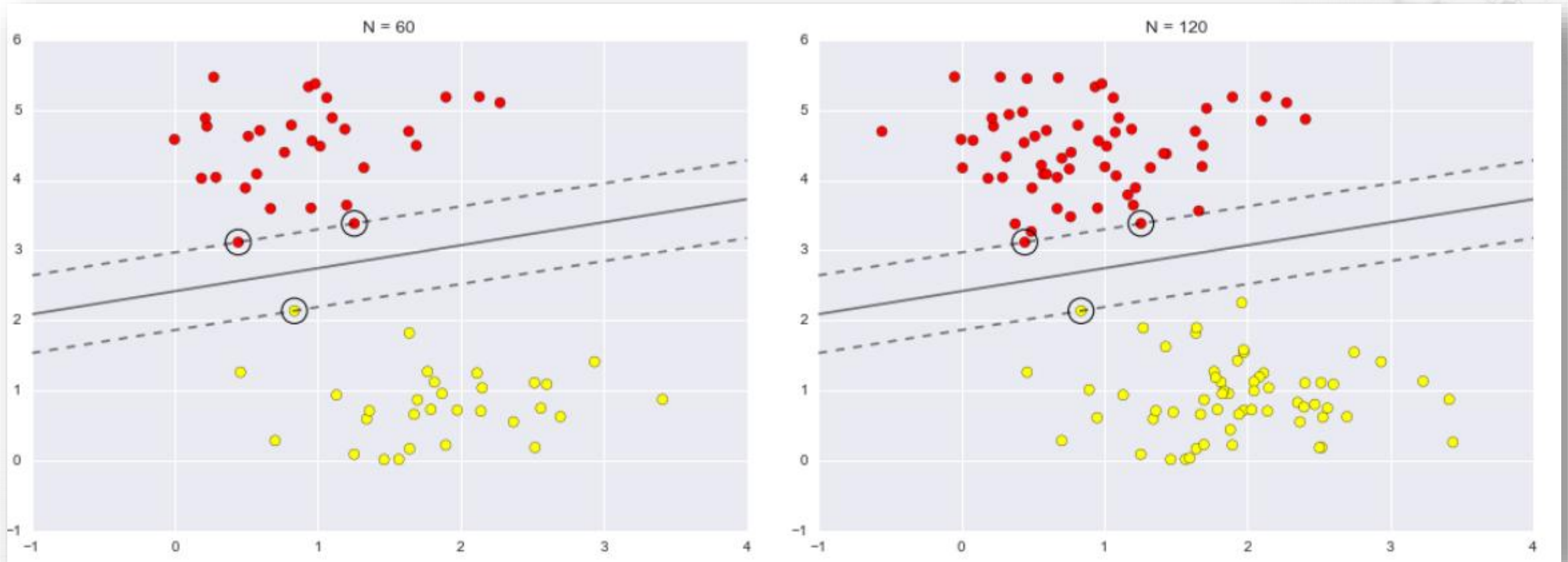
In höheren Dimensionen spricht man nicht mehr von Geraden, sondern Hyperebenen, die unsere Klassen trennen



Was denken Sie?

Wie sieht unser Modell in höheren Dimensionen aus?

# SVM: Support Vectors



0

*So what?*

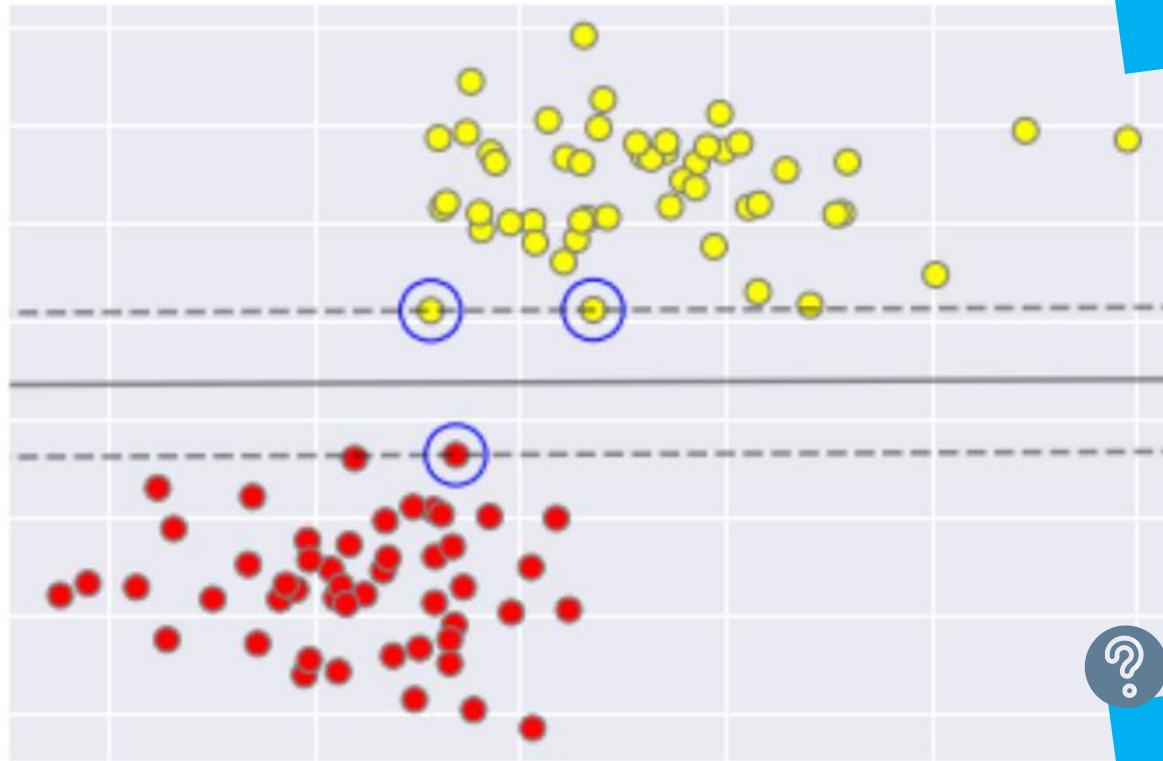
Diese Unempfindlichkeit des Modells auf entfernt liegende Punkt ist eine der Stärken dieser Art ML-Modelle

# Wir als Klassifikatoren 2.0



Was denken Sie?

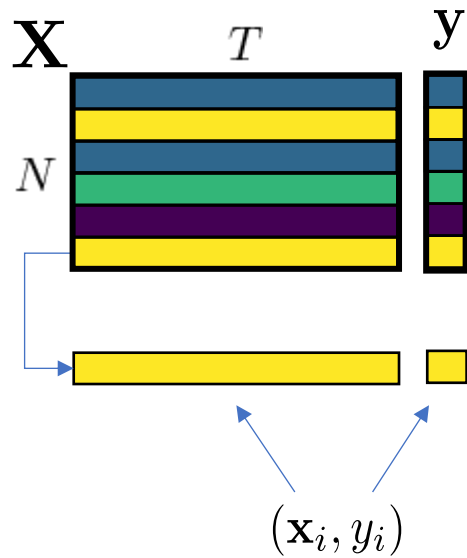
Wie würden Sie nun – als Klassifikator – eine optimale Trennlinie einzeichnen? (Zoom: zeichnen)



Was denken Sie?

Was sind die Support Vektoren? (Zoom: zeichnen)

# SVM: Mathematik



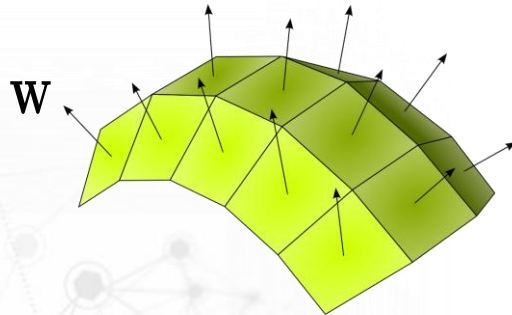
Uns liegt ein historischer Datensatz bzw. Trainingsdatensatz vor

$$\{(\mathbf{x}_i, y_i) | i = 1, \dots, N, y_i \in \{-1, 1\}\}$$

Anhand dessen wird unsere Hyperebene gelernt. Wir beschreiben unsere Hyperebene mittels des Normalenvektors  $\mathbf{W}$  durch den Ursprung

und des Abstandes vom Ursprung  $b$ , den man *Bias* nennt

Mit diesen beiden Informationen haben wir eindeutig eine Hyperebene im Raum definiert



Viele Normalenvektoren

# SVM: Mathematik



Fenster Time!

Für die Datenpunkte auf der Hyperebene gilt

$$\langle \mathbf{w}, \mathbf{x}_i \rangle + b = 0$$

Für Punkte, die nicht auf der Hyperebene liegen ist diese Gleichung nicht 0, sondern positiv (Richtung  $\mathbf{w}$ ) bzw. negativ (entgegengesetzt zu  $\mathbf{w}$ )

Wenn also eine Hyperebene **alle Punkte** unserer Klassen voneinander **trennt**, dann weisen die Punkte einer Klasse alle entweder **positive** oder **negative** Vorzeichen auf

Für unsere Klassen gilt dann also

$$y_i = \text{sgn}(\langle \mathbf{w}, \mathbf{x}_i \rangle + b)$$

$$y_i(\langle \mathbf{w}, \mathbf{x}_i \rangle + b) \geq 0$$



Unser Modell!

Aus den unendlich vielen Hyperebenen wählt man nun die, die den größten *Margin* zwischen den beiden Klassen aufweist

Was denken Sie?  
Wie drückt man das in einer Formel aus?



Was denken Sie?  
Was gilt für Punkte, die nicht auf der Hyperebene liegen?

Was denken Sie?  
Wie könnten wir das mit einer Ungleichung ausdrücken?

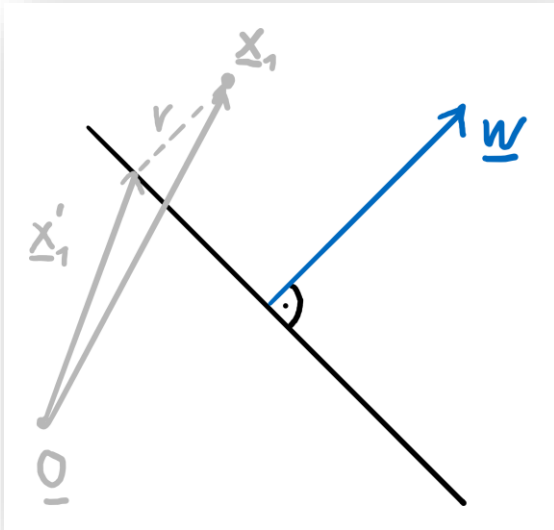
Was denken Sie?  
Warum soll der Margin maximiert werden?

Was denken Sie?  
Wie berechnet man also die Klassen/Labels neuer Daten?

Was denken Sie?  
Was sucht also der Trainingsprozess?

# SVM: Mathematik

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}'_1 + r \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|}$$



Was bedeutet ein **maximaler Margin** mathematisch für uns?

Der Margin wird durch den **Abstand** zu den **nächsten** Punkten der Klassen zur Hyperebene definiert – wir brauchen also einen Abstand

Mit diesem Abstand  $r$  können wir nun unsere **Bedingung**, auf den jeweiligen Seiten der Hyperebene **nur Datenpunkte je einer Klasse** vorzufinden formulieren

$$y_i(\langle \mathbf{w}, \mathbf{x}_i \rangle + b) \geq r$$

Wir können nun ein **Optimierungsproblem** formulieren

$$\max_{\mathbf{w}, b} r$$

unter den **Bedingungen**

$$y_i(\langle \mathbf{w}, \mathbf{x}_i \rangle + b) \geq r \quad \|\mathbf{w}\| = 1 \quad r > 0$$

0

*So what?*

Wir versuchen nun sukzessive dieses Optimierungsproblem zu vereinfachen. Was heißt hier vereinfachen?



# SVM: Mathematik



Was denken Sie?

Wieso heißen  
diese Bedingungen  
Hard Margin?

Der Normalenvektor sei nun **nicht mehr normalisiert**. Um das Optimierungsproblem *berechenbar* zu machen, müssen wir eine kleine Umformung machen: durch eine **Skalierung** der Daten auf die Bedingung

$$\langle \mathbf{w}, \mathbf{x}_a \rangle + b = 1$$

mit  $\mathbf{x}_a$  als der nächste Punkt zur Hyperebene (Support Vector) und den vorher definierten Abstand kann gezeigt werden, dass

$$r = \frac{1}{\|\mathbf{w}\|}$$

und für unsere Bedingung gilt dann

$$y_i(\langle \mathbf{w}, \mathbf{x}_i \rangle + b) \geq 1$$

Damit reduziert sich unser Problem auf

$$\max_{\mathbf{w}, b} \frac{1}{\|\mathbf{w}\|} \quad \text{bzw.} \quad \min_{\mathbf{w}, b} \frac{1}{2} \|\mathbf{w}\|^2$$

unter der Bedingung

$$y_i(\langle \mathbf{w}, \mathbf{x}_i \rangle + b) \geq 1$$

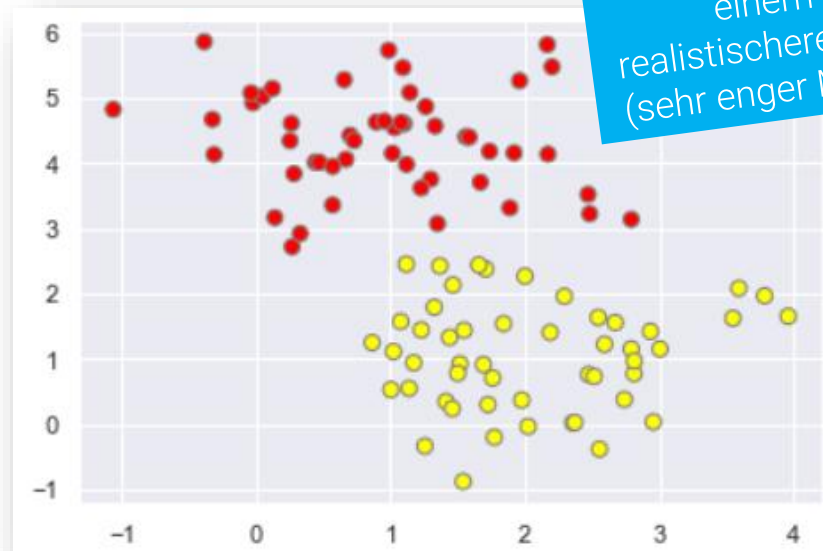


# SVM: Hard- und Soft-Margin



Was denken Sie?

Was tun Sie in so einem – realistischeren – Fall (sehr enger Margin)?

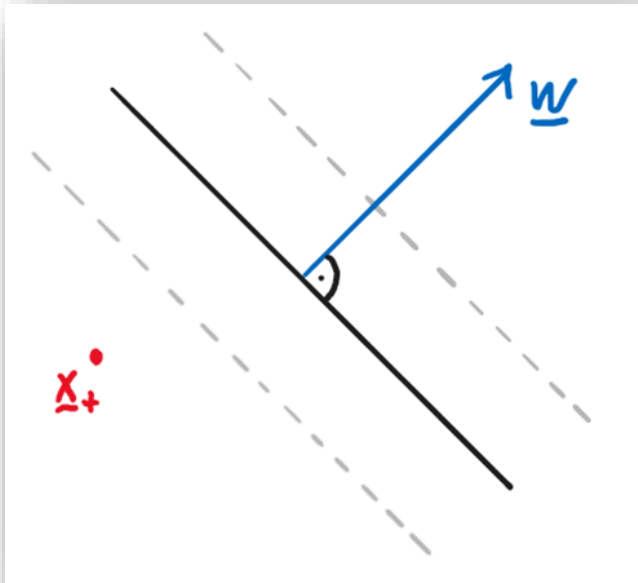


```
1 X, y = make_blobs(n_samples=100, centers=2,  
2                   random_state=0, cluster_std=0.8)  
3 plt.scatter(X[:, 0], X[:, 1], c=y, s=50, cmap='autumn', edgecolors='gray');
```

- Bei SVMs hat man die Möglichkeit die Margins entweder starr bzw. **hard** oder weich bzw. **soft** zu definieren
- In anderen Worten: lässt man zu, dass Datenpunkte **innerhalb** des Margins auftauchen dürfen – Leitfrage: **wie viele** bzw. zu welchem Ausmaß?
- Hierzu gibt es einen Hyperparameter, der getuned werden muss – in `sklearn` ist es das Argument `c`
- **Große** Werte entsprechen einem **Hard**-, **kleine** Werte einem **Soft-Margin**
- Der **optimale** Wert von `c` hängt also vom Datensatz ab und muss via z.B. Cross-Validation bestimmt werden  
→ Zuerst schauen wir, wo in der Mathematik dieses `C` zu finden ist



# SVM: Soft-Margin: Mathematik



Was denken Sie?

Was ändern wir an unseren Formulierungen? Wie quantifizieren wir Verletzungen des Margins?

Wir führen eine sog. *Slack Variable* ein, die **bestraft** wenn ein Datenpunkt innerhalb des Margins bzw. auf der falschen Seite liegt – dies ermöglicht uns im Umkehrschluss: **Verletzungen des Margins werden zugelassen!**

$$\min_{\mathbf{w}, b, \xi} \frac{1}{2} \|\mathbf{w}\|^2 + C \sum_i \xi_i$$

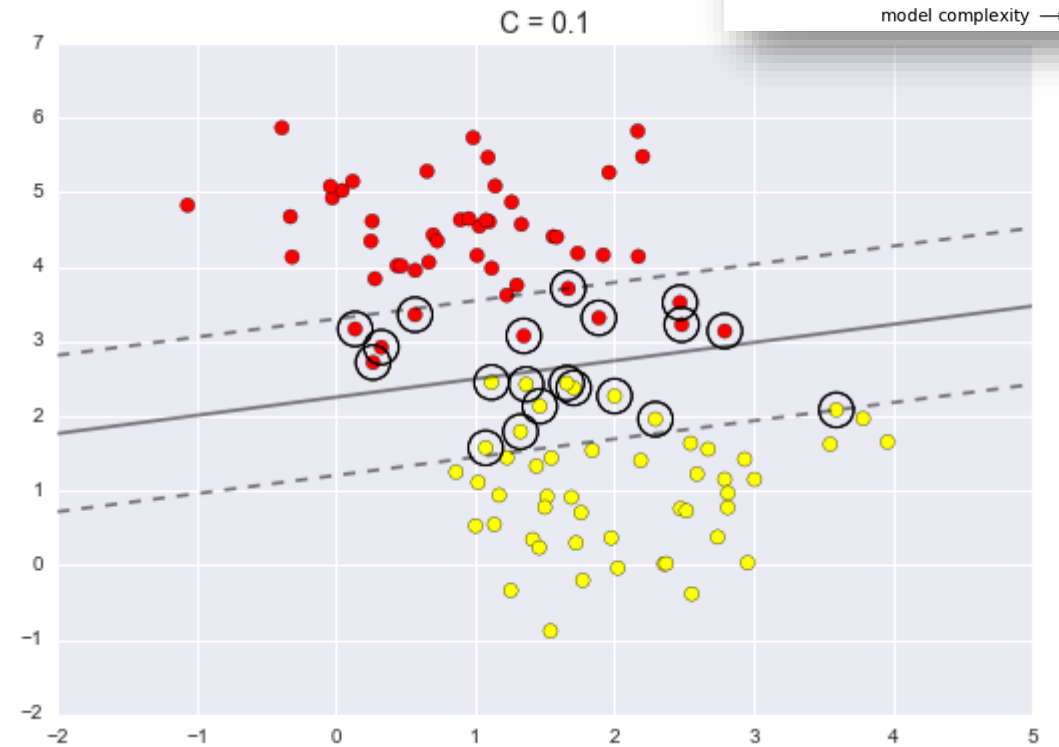
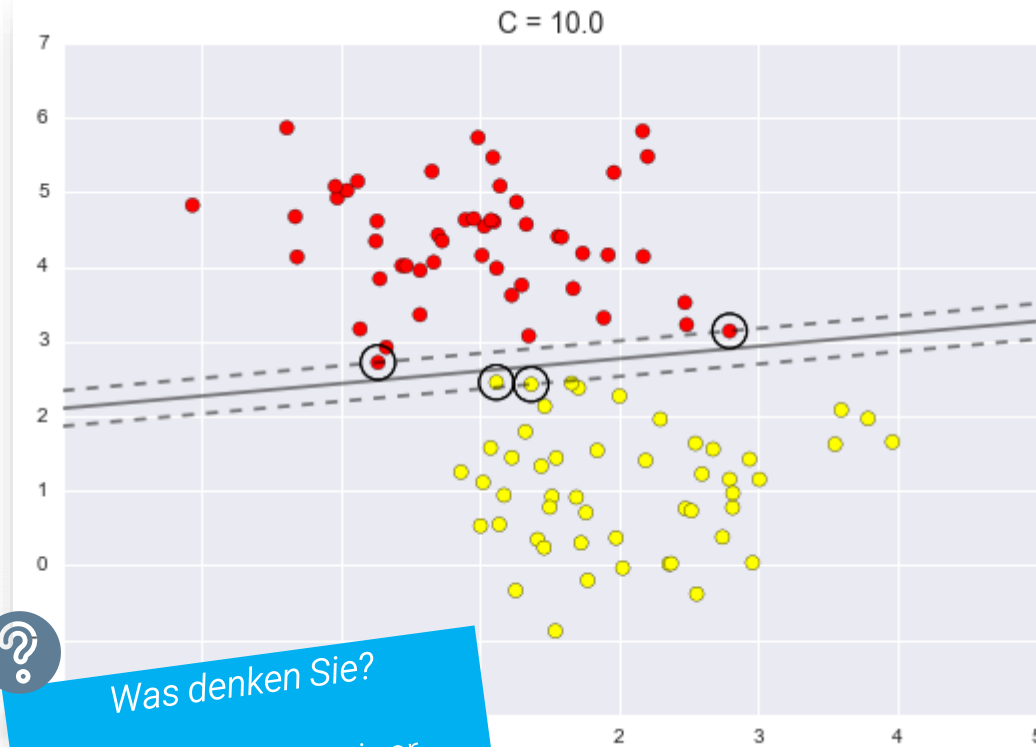
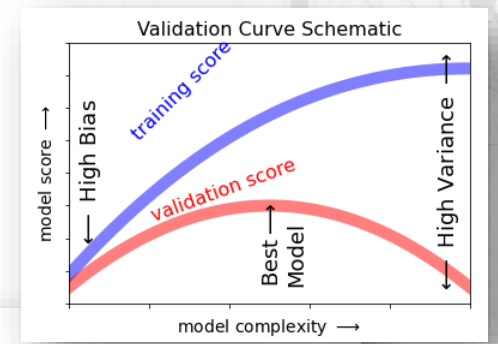
mit den Bedingungen

$$y_i(\langle \mathbf{w}, \mathbf{x}_i \rangle + b) \geq 1 - \xi_i \quad \text{und} \quad \xi_i \geq 0$$

Der Parameter  $C$  versucht also eine **Balance** bzw. einen **Trade-Off** zwischen „Größe des Margins“ und „Verletzung dessen“ herzustellen

Zu diesem Parameter sagt man **Regularisierungsparameter**

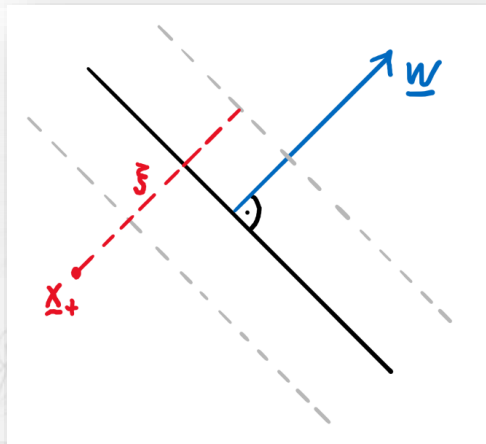
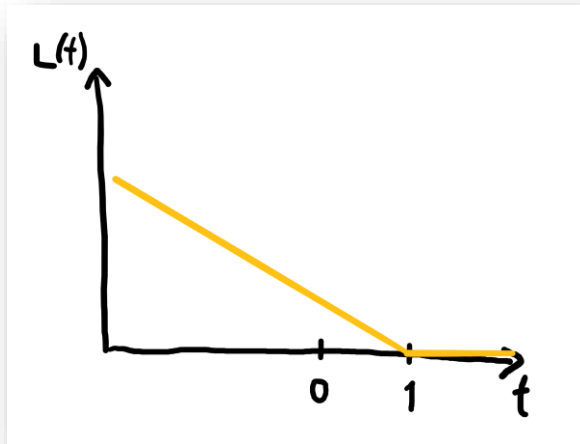
# SVM: Hard- und Soft-Margin



Was denken Sie?

Was entspricht einer hohen, was einer niedrigen Modellkomplexität?

# SVM: Optimierung mittels Loss Function



Die naheliegendste Formulierung einer Loss Function wäre die Accuracy – also: wie gut decken sich Vorhersage und Labels?

Diese ist jedoch ungeeignet, da es sich hierbei um ein sog. *kombinatorisches Optimierungsproblem* handelt

Eine *kontinuierliche Loss Function* ist also anzustreben – mögliche Formulierung: **Hinge Loss**

$$L(t) = \max\{0, 1 - t\} \quad \text{mit} \quad t = yf(\mathbf{x}) = y(\langle \mathbf{w}, \mathbf{x} \rangle + b)$$

Damit ergibt sich unser letztendlich **optimierbares** Problem zu

$$\min_{\mathbf{w}, b} \frac{1}{2} \|\mathbf{w}\|^2 + C \sum_i \max\{0, 1 - y_i(\langle \mathbf{w}, \mathbf{x}_i \rangle + b)\}$$

Hierzu sagt man auch **Regularisierung** – **Margin Maximierung** ist also Regularisierung

*So what?*

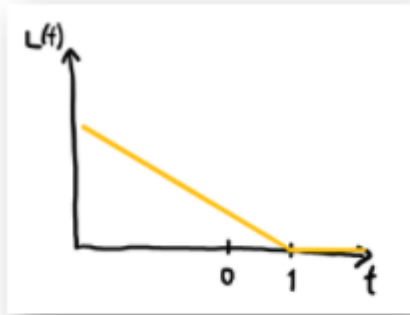
Durch diesen Hinge-Loss konnten wir die vorher eingeführte **Slack-Variable** wieder ersetzen und dadurch unser Optimierungsproblem vereinfachen.

? Was denken Sie?  
Wie würden Sie die Kostenfunktion aufstellen?

? Was denken Sie?  
Wie schaut die math. Formulierung hierzu aus?

? Was denken Sie?  
Wie leitet man die max-Funktion ab?

# Beispiel: SVM from Scratch: Loss Function



Wir haben gesehen, dass man durch ein paar mathematische Umformungen zu einem übersichtlichen Optimierungsproblem bzw. einer relativ überschaubaren Kostenfunktion gelangt. Wir wollen uns nun in diesem Beispiel damit beschäftigen die Loss Function

$$\min_{\mathbf{w}, b} \frac{1}{2} \|\mathbf{w}\|^2 + C \sum_i \max\{0, 1 - y_i(\langle \mathbf{w}, \mathbf{x}_i \rangle + b)\}$$

als Funktion in Python abzubilden.



Was denken Sie?

Ohne es hier schon behandelt zu haben: haben Sie eine Vermutung wie man damit nun die optimalen Modellparameter findet?



So what?

Nun wissen wir wie die SVM als mathematisches Modell aussieht und welche Kostenfunktion minimiert werden soll. Das Werkzeug für die Minimierung – z.B. den sog. *Gradientenabstieg* – sehen wir uns in einer späteren Veranstaltung an.

# SVM: Optimierung mittels Loss Function



Was denken Sie?

Wie geht es jetzt weiter?

Die Gradienten müssen wir abschnittsweise bestimmen – also ob eine Verletzung der Margin vorliegt oder nicht

Wenn ein Datenpunkt den Margin der SVM **nicht verletzt**, dann gilt

$$y_i(\langle \mathbf{w}, \mathbf{x}_i \rangle + b) \geq 1$$

und die zur Optimierung nötigen Gradienten sind

$$\nabla_{\mathbf{w}} E(\mathbf{w}, b) = \mathbf{w}$$

$$\nabla_b E(\mathbf{w}, b) = 0$$

Wenn ein Datenpunkt den Margin der SVM **verletzt**, dann gilt

$$y_i(\langle \mathbf{w}, \mathbf{x}_i \rangle + b) < 1$$

und die zur Optimierung nötigen Gradienten sind

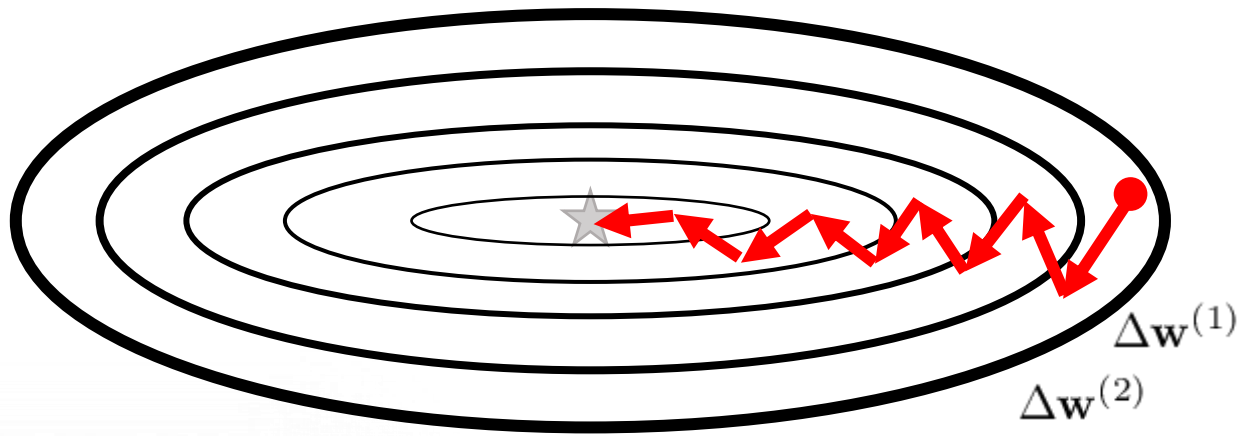
$$\nabla_{\mathbf{w}} E(\mathbf{w}, b) = \mathbf{w} - C \sum_i y_i \mathbf{x}_i$$

$$\nabla_b E(\mathbf{w}, b) = -C \sum_i y_i$$

# Session Exercise: SVM from Scratch: Gradienten

Alleine mit der Kostenfunktion kommen wir nicht weit - wir müssen die Gradienten dieser nach  $\mathbf{w}$  und  $b$  bilden. Schreiben Sie eine Funktion `svm_gradients`, die diese Gradienten basierend auf den Eingabeargumenten `X`, `y`, `w`, `b`, `C` berechnet und ausgibt.

# Gradientenabstieg: Algorithmus



Ausführung: Gradientenabstieg

## 1. Initialisierung:

Randomisiere den Gewichtsvektor  $\mathbf{w}^{(1)}$ .

## 2. Schätzung Gradient:

Wähle ein Target und berechne

$$\Delta \mathbf{w}^{(i)} = -\eta \nabla \Lambda|_{\mathbf{w}^{(i)}}$$

$\eta$ : Lernrate

## 3. Update bis Konvergenz:

$$\mathbf{w}^{(i+1)} = \mathbf{w}^{(i)} + \Delta \mathbf{w}^{(i)}$$

# Session Exercise: SVM from Scratch: Gradientenabstieg

Um nun die SVM zu trainieren wählen wir eine Minimalversion des sog *Gradientenabstiegs*. Wir führen dieses in der *Full Batch* Version durch, d.h. für jeden Update-Schritt (Epoche) von `w` berechnen wir die Gradienten anhand der gesamten Daten. Wir müssen im Grunde nur

$$\mathbf{w}^{(i+1)} = \mathbf{w}^{(i)} + \Delta \mathbf{w}^{(i)}$$

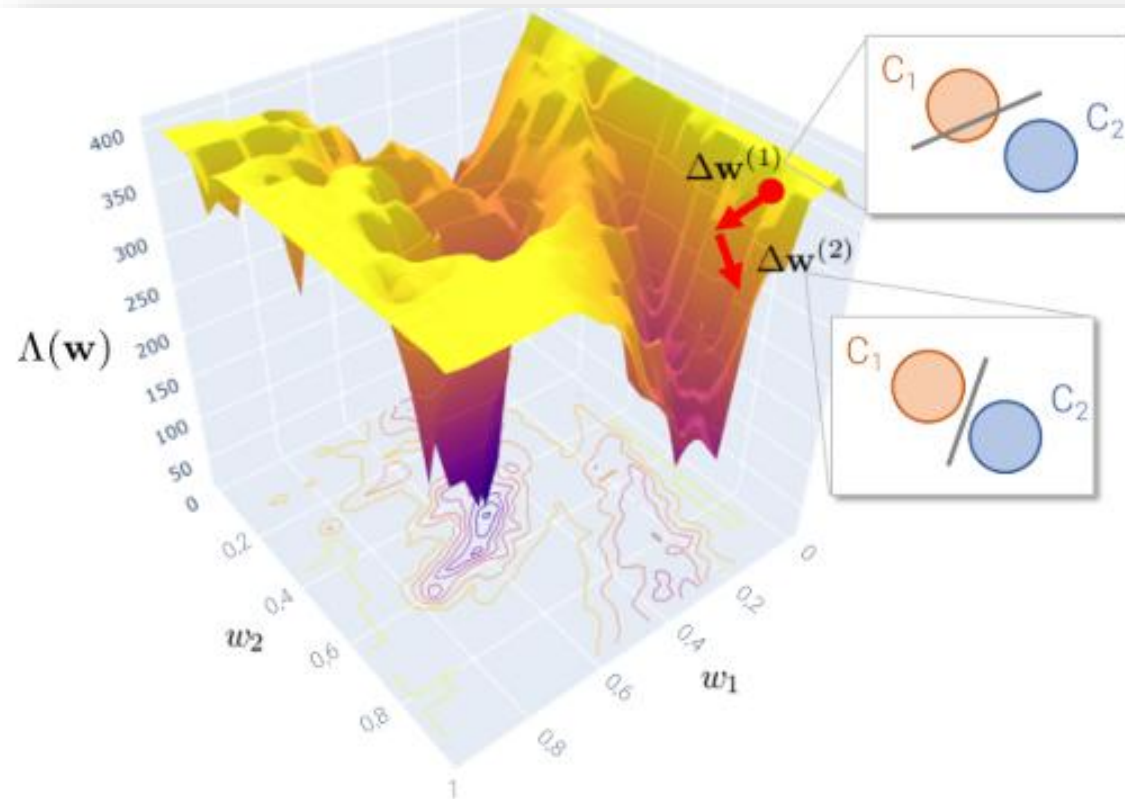
`epochs` Epochen lang ausführen und darin

$$\Delta \mathbf{w}^{(i)} = -\eta \nabla \Lambda|_{\mathbf{w}^{(i)}}$$

berechnen. D.h. unsere zu erstellende `svm_train`-Funktion benötigt noch dieses  $\eta$ , das wir nun *learning rate* nennen und mit `lr` als weiteres Eingabeargument in `svm_train` eingehen soll. Lassen Sie sich auch noch den Wert der Kostenfunktion zu jeder Epoche in eine Liste schreiben und diese - neben `w`, `b` - als Ausgabeargument ausgeben. Diese Liste plotten wir dann, um den Lernfortschritt zu visualisieren.

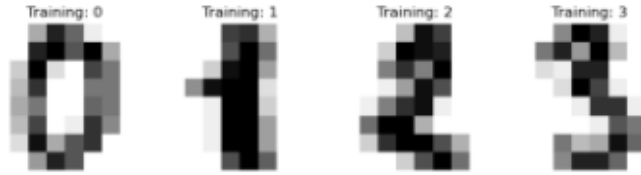


# Session Exercise: SVM from Scratch: Visualize Training



Schreiben Sie eine Funktion `visualize_svm_training`, die Ihnen die trainierten Parameter  $\mathbf{w}$ ,  $\mathbf{b}$  nach dem Gradientenabstieg aufnimmt und daraus die entsprechende Hyperebene in den Feature-Raum zeichnet. Damit die Visualisierung zumindest einigermaßen klappt, muss  $\mathbf{w}$  normalisiert werden. Bonus: wenn das funktioniert, dann können Sie versuchen eine Funktion `animate_svm_training` zu bauen, die Ihnen das Training der SVM dynamisch visualisiert. Hierzu könnten Sie z.B. die `svm_train` so anpassen, dass sie Ihnen Zwischenschritte für  $\mathbf{w}$  und  $\mathbf{b}$  in Listen abspeichert. Diese können Sie dann für die Animation verwenden.

# Beispiel: SVM zur Handschrifterkennung



Stellen Sie sich vor Sie müssten einem Modell aus handschriftlichen Notizen beibringen geschriebene Zahlen zu erkennen. Dieser Use Case kann Ihnen an vielen Stellen begegnen - z.B.

- wenn Sie als Post von Briefen die geschriebene Postleitzahl und Hausnummer digitalisieren müssten und so die Weiterverarbeitung von Briefen beschleunigen würden
- wenn in hochautomatisierten Produktionsanlagen in Bauteilen eingestanzte Seriennummern erkannt und digitalisiert werden müssen
- wenn Sie im Rahmen einer Absatzprognose Notizen von Mitarbeitern erhalten, auf denen noch Absatzzahlen handschriftlich festgehalten werden.

In diesem Beispiel wollen wir eine SVM nutzen, um genau diesen Use Case zu lösen. Hierzu nutzen wir das sog. *Digits-Dataset* aus `sklearn`, in dem eine Vielzahl handschriftlicher Zahlen in `(8, 8)` großen Arrays abgespeichert sind. Unser Ziel ist es, dass die SVM so trainiert wird, dass sie **ungesehene** handschriftliche Zahlen in die richtige Klasse (die zugrundeliegende Zahl) einordnen kann. Bemerkung: wir kommen hier mit einer *Multi-Class SVM* in Berührung.

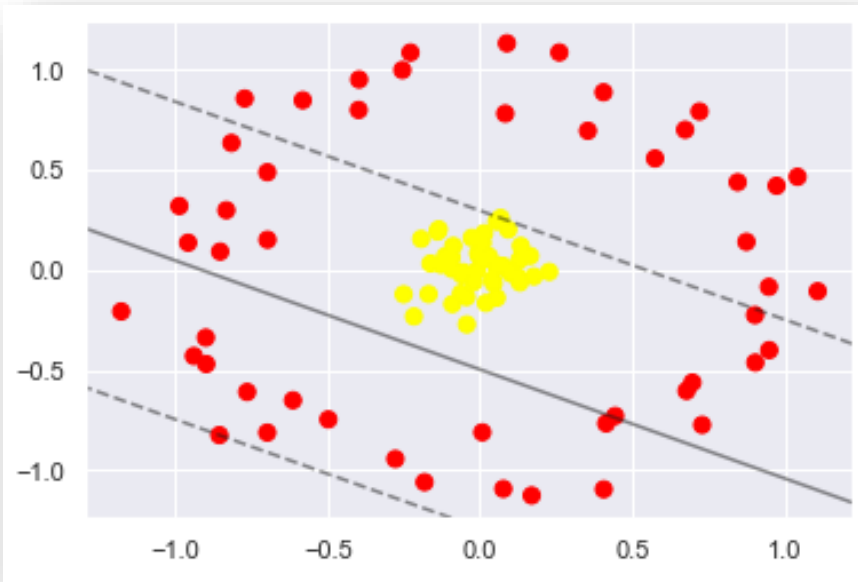
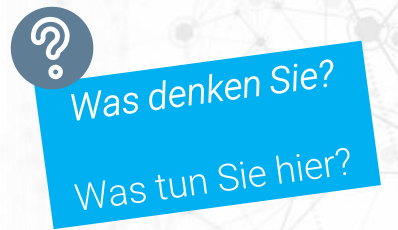
**Bonus:** schreiben Sie selbst Ziffern auf einen Zettel, fotografieren Sie diese und *scoren* sie an unserem Modell. Wie schneidet es ab?

0

*So what?*

Hier haben wir etwas neues kennengelernt: SVMs können auch für Multi-Class-Probleme verwendet werden (sprechen wir später kurz an)

# SVM: Nicht-lineare Probleme

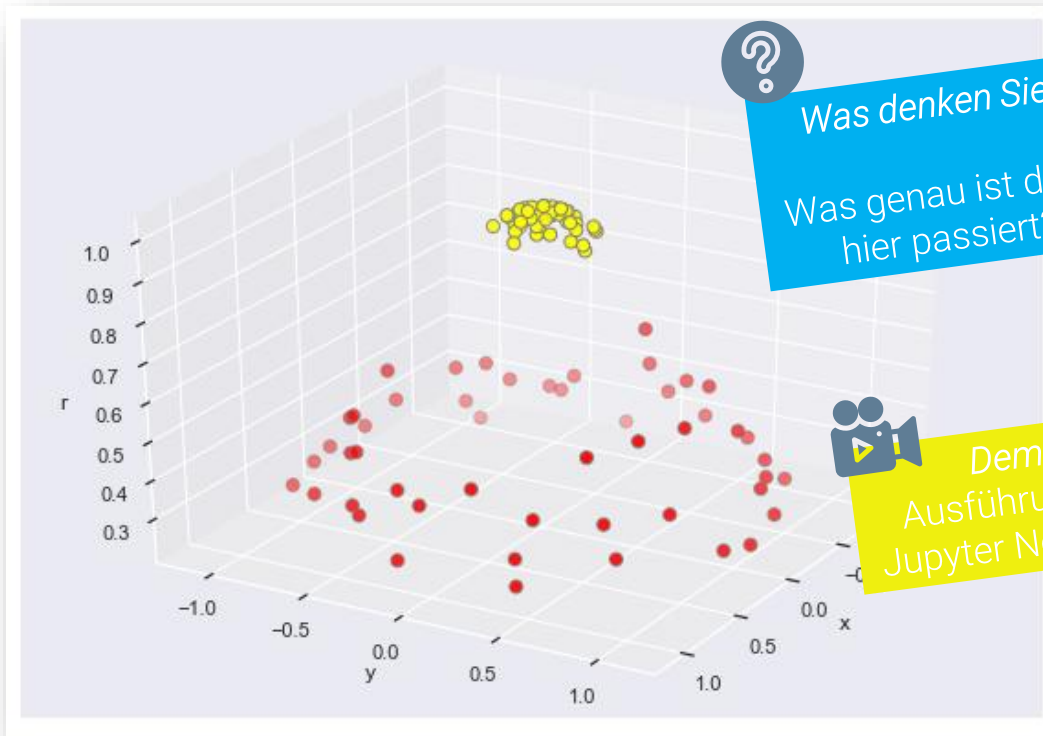


```
1 from sklearn.datasets.samples_generator import make_circles
2 X, y = make_circles(100, factor=.1, noise=.1)
3
4 clf = SVC(kernel='linear').fit(X, y)
5
6 plt.scatter(X[:, 0], X[:, 1], c=y, s=50, cmap='autumn')
7 plot_svc_decision_function(clf, plot_support=False);
```

- Bei unserem Digits-Beispiel haben wir implizit angenommen, dass wir die Klassen *linear* – also mit einer geraden Linie – trennen können. Was passiert wenn dem nicht so ist?
- Keine lineare Hyperebene wird die beiden Klassen jemals trennen können  
→ Es liegt also ein **nicht-linear separierbares** Problem vor
- SVMs sind in der Lage auch solche Probleme zu lösen

**Lösung: Projektion der Daten in einen höherdimensionalen Raum!**

# SVM: Nicht-lineare Probleme



- Eine Möglichkeit eine neue Dimension an unseren Raum hinzuzufügen ist z.B. sogenannte *Radial Basis Functions* zu verwenden
- RBFs sind skalare Funktionen  $\phi(r)$ , die nur vom Abstand zum Ursprung abhängen
- Dadurch machen wir also aus unserem 2D- einen 3D-Datensatz

→ Das Problem wird in einer höheren Dimension linear separierbar

```
1 def plot_3D(elev=30, azim=30, X=X, y=y):
2     ax = plt.subplot(projection='3d')
3     ax.scatter(X[:, 0], X[:, 1], r, c=y, s=50, cmap='autumn', edgecolors='gray')
4     ax.view_init(elev=elev, azim=azim)
5     ax.set_xlabel('x')
6     ax.set_ylabel('y')
7     ax.set_zlabel('r')
8
9 plt.figure(figsize=(10, 7))
10 plot_3D()
```

Was denken Sie?  
Welches Problem sehen Sie hier generell?

```
1 np.concatenate((X, r.reshape(-1, 1)), axis=1)

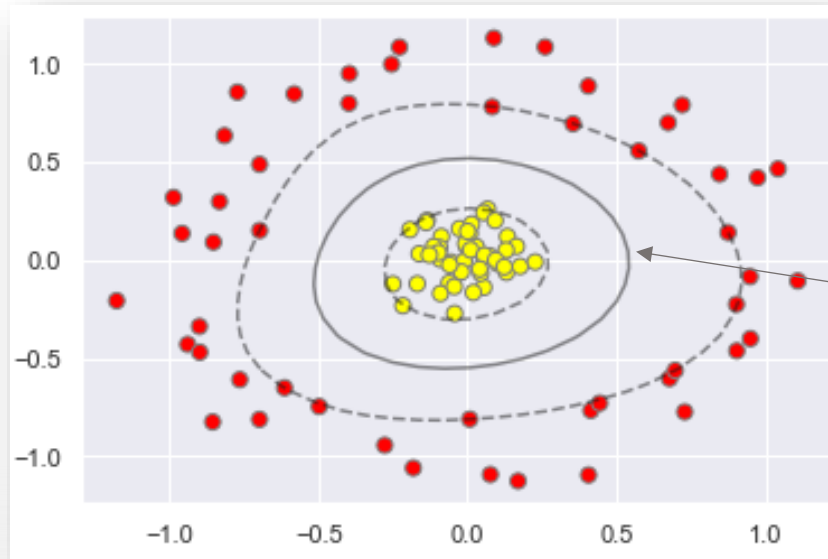
array([[ -8.98674223e-01, -3.38601143e-01,  3.97616982e-01],
       [ 1.04061333e+00,  4.64382873e-01,  2.72933376e-01],
       [ 6.75066947e-02,  2.58705545e-01,  9.31009579e-01],
       [-3.21867918e-03,  7.00834554e-02,  9.95090043e-01],
       [ 7.27800725e-01, -7.74453768e-01,  3.23203690e-01],
```

Was denken Sie?  
Wieso hängt r hier nur vom Ursprung ab?

```
1 r = np.exp(-(X ** 2).sum(1))
```

# SVM: Kernel-Trick

```
1 clf = SVC(kernel='rbf', C=1E6)
2 clf.fit(X, y)
```



- Diese Projektion in höhere Dimensionen wird durch den sog. **Kernel-Trick** auf die Spitze getrieben
- Man kann **implizit** an jeden der  $N$  Datenpunkt eine zusätzliche Dimension anfügen – ohne diese Projektion wirklich durchzuführen
- In diesem  $N$ -dimensionalen Raum wird dann eine **linear separierende** Hyperebene gesucht
- Diese lineare Hyperebene im  $N$ -dimensionalen Raum wird im **ursprünglichen**, niedrigdimensionalen Raum zu einer **nicht-linearen Hyperebene**
- In sklearn wird das mittels des Hyperparameters `kernel='rbf'` realisiert

```
1 plt.scatter(X[:, 0], X[:, 1], c=y, s=50, cmap='autumn', edgecolors='gray')
2 plot_svc_decision_function(clf)
3 plt.scatter(clf.support_vectors[:, 0], clf.support_vectors[:, 1],
4             s=300, lw=1, facecolors='none');
```

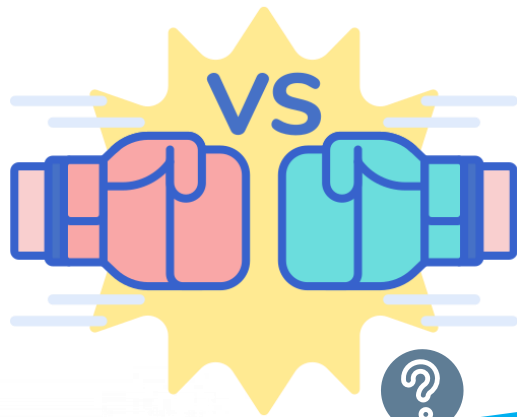


# Multi-Class SVMs



Was denken Sie?

Sie kennen jetzt eine SVM, die zwei Klassen unterscheiden kann: wie funktioniert das bei mehreren Klassen?



Was denken Sie?

Was könnte „one-versus-rest“ hier bedeuten?



Was denken Sie?

Sind die Entscheidungsgrenzen gleich?



Was denken Sie?

Wie viele SVMs müssen dann erzeugt werden?

- Liegen mehr als zwei Klassen vor, so lässt sich unser obiger Ansatz nicht eins-zu-eins anwenden
- Eine Möglichkeit mehrere Klassen zu unterscheiden ist: für **jede Klassenpaarung** einen Klassifikator bzw. eine SVM zu trainieren

- Diesen Ansatz nennt man „**one-versus-one**“ – im Gegensatz zu „one-versus-rest“

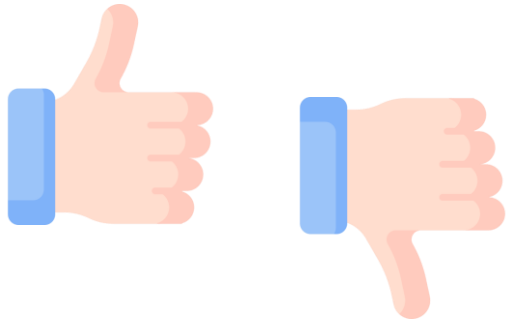
- Für  $N$  Klassen müssen dann

$$\frac{N(N - 1)}{2}$$

SVMs trainiert werden

- Die Entscheidungsgrenzen ergeben sich dann aus der Kombination aller Klassifikatoren

# Vorteile, Nachteile, Besonderheiten: SVM



## Pros:

- SVMs sind sehr effektiv bei **höherdimensionalen** Datensätzen
- SVMs helfen in Fällen, in denen die **Anzahl** der **Dimensionen größer** ist als die **Anzahl** der **Datenpunkte**
- SVMs sind **komputativ effizient**
- Pädagogisch: SVM lassen **geometrische Interpretationen** zu

## Cons:

- SVMs haben Probleme mit **sehr großen Datensätzen** (liegt an der **Kernel-Matrix** beim Kernel-Trick – diese wird zu groß)
- SVMs haben Probleme bei **stark überlappenden** Klassen bzw. **viel Rauschen** in den Daten
- **Probabilistische Interpretation nicht möglich**

# Beispiel: SVM zur Face Recognition



Wir wollen uns in diesem Beispiel gleich einem interessanten Anwendungsfall im maschinellen Lernen widmen: der Gesichtserkennung. Hierzu laden wir uns mittels eines sog. *Fetchers* aus `sklearn.datasets` einen Datensatz, der Bilder von Gesichtern berühmter Personen beinhaltet. Unser Ziel ist es eine SVM zu trainieren, die diese Gesichter erkennen - also **klassifizieren** - kann. Zu jeder Person gibt es eine Vielzahl verschiedener Aufnahmen - jede Person stellt also eine **Klasse** dar. Die Bilder haben die Dimensionalität `(62,47)` und somit ca. 3000 Pixel. Wenn jeder Pixel einer Dimension in einem Raum entsprechen würde, dann wäre ein Gesicht ein Datenpunkt in diesem Raum. Dieser Raum ist uns zu hochdimensional. Daher *projizieren* wir die Gesichter in einen niedrigdimensionaleren Raum (wir greifen hier den Themenblock PCA vorweg).

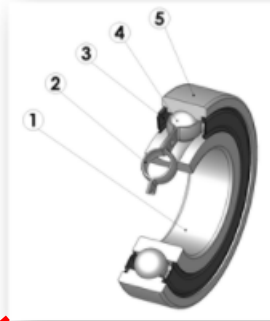
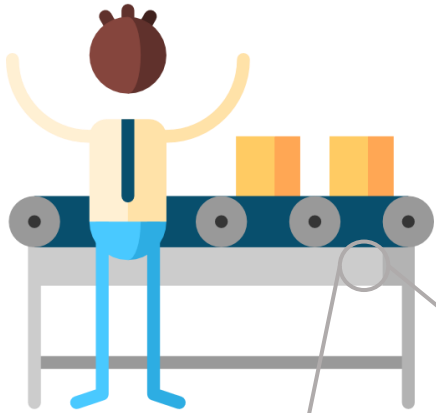
0

So what?

`accuracy_score` aus  
`sklearn.metrics`  
→ Entspricht der gewöhnlichen Genauigkeit: wie viel Prozent der Labels im Testdatensatz wurden korrekt vorhergesagt



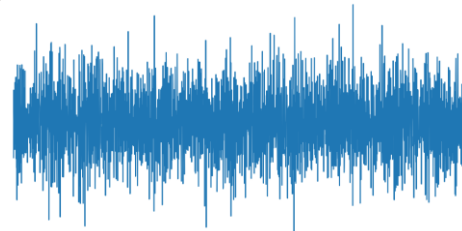
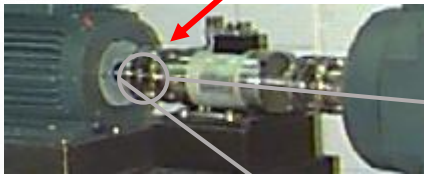
# Beispiel: Fault Classification of Bearing Faults



 **GitLab**  
Get ready to git pull

(Bildquelle: Wikipedia)

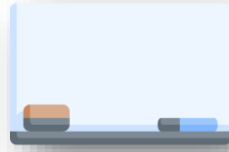
In diesem Beispiel wollen wir uns dem Aspekt der *Fault Classification* annehmen. Hierzu nutzen wir Vibrationsdaten von Kugellagern, die verschiedene Schadensklassen aufweisen. Diese Kugellager sind in einem Servomotorverbaut. Neben den "Gesunddaten" liegen uns Daten von Beschädigungen an einer Kugel (B021), des Innenrings (IR021) und des Außenrings (OR021@6) vor. Wir wollen diese Zeitserien in *Fenster* aufteilen, aus diesen dann bestimmte einfache Features extrahieren und anhand derer dann eine SVM trainieren, die uns ungesehene Daten dann klassifizieren soll.



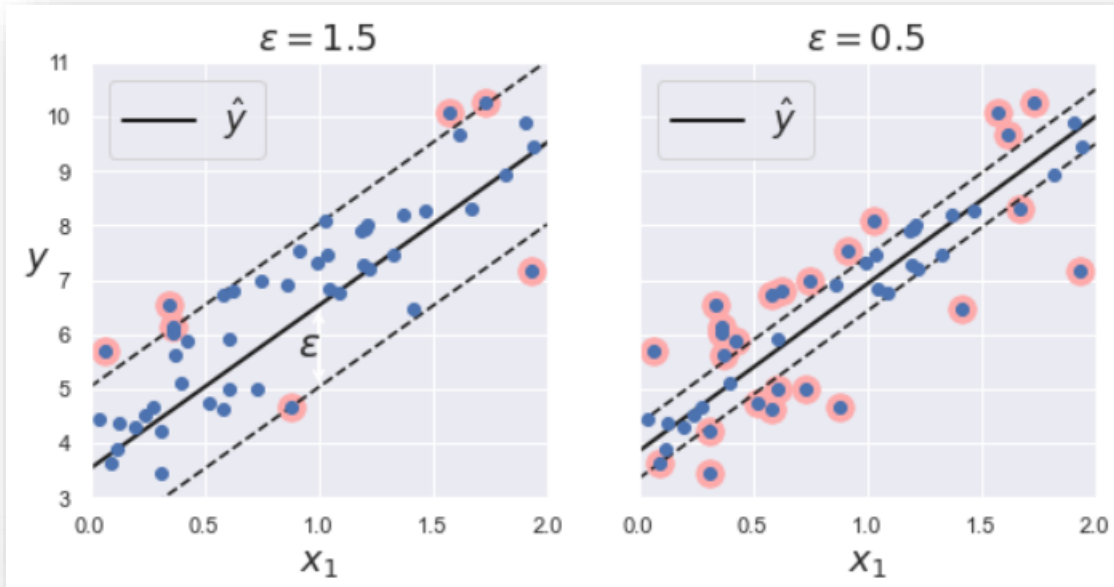
# SVR: Support Vector Regression



Was denken Sie?  
Wieso benötigen wir  
nun ein Epsilon?



Whiteboard Time!



Was denken Sie?  
Wie könnte nun unsere  
Kostenfunktion aussehen?



Was denken Sie?  
Was ist der clevere Trick, der  
uns von einer Klassifikation  
zu einer Regression bringt?

- SVMs können auch zur Regression verwendet werden – hierzu sagt man dann *Support Vector Regression*
- Hierzu kehrt man unsere Optimierungsbedingung um – wir suchen nun nach einer Hyperebene plus Margin, **innerhalb** dessen sich **so viele Datenpunkte wie möglich** befinden
- Auch die Bestrafung muss hierzu umgekehrt werden: Datenpunkte **außerhalb** des Margins führen zu Penalties!
- Uns liegen in dieser Situation **keine** wirklichen **Support Vectors** zwischen verschiedenen Klassen mehr vor → Ein weiterer **Hyperparameter**  $\epsilon$  nötig, der variiert werden muss
- Die Kostenfunktion der SVR ist dann:

$$\min_{\mathbf{w}, b} \frac{1}{2} \|\mathbf{w}\|^2 + C \sum_i \max\{0, |y_i - (\langle \mathbf{w}, \mathbf{x}_i \rangle + b)| - \epsilon\}$$

# SVR: Support Vector Regression: sklearn

```
1 # Some data
2 np.random.seed(42)
3 m = 100
4 X = 2 * np.random.rand(m, 1) - 1
5 y = (0.2 + 0.1 * X + 0.5 * X**2 + np.random.randn(m, 1)/10).ravel()
6
7 # Show
8 plt.scatter(X, y);
```



```
1 from sklearn.svm import SVR
2
3 svm_reg1 = SVR(kernel="rbf", C=100, epsilon=0.1)
4 svm_reg2 = SVR(kernel="rbf", C=0.01, epsilon=0.1)
5 svm_reg1.fit(X, y)
6 svm_reg2.fit(X, y)
```

- In sklearn haben wir eine entsprechende Klasse vorliegen

`SVR(kernel=<kernel_type>,  
C=<regularization_parameter_value>,  
epsilon=<margin_width>)`

- Auch hier gilt wieder: wir können sowohl lineare, als auch nicht-lineare Probleme lösen → der Kernel-Trick findet auch hier Anwendung

