

Введение

Одним из стандартных способов задания функций k -значной логики являются поляризованные полиномиальные формы (ППФ), которые также называются обобщенными формами Рида-Мюллера, или каноническими поляризованными полиномами. В ППФ каждая переменная имеет определенную поляризацию. Длиной полиномиальной формы называется число попарно различных слагаемых в ней. Длиной функции F в классе ППФ называется наименьшая длина среди длин всех поляризованных полиномиальных форм, реализующих F . Функция Шеннона $L_k^K(n)$ длины определяется как наибольшая длина среди всех функций k -значной логики в классе K от n переменных, если K опущено, то подразумевается класс ППФ. Практическое применение ППФ нашли при построении программируемых логических матриц (ПЛМ) [1, 2], сложность ПЛМ напрямую зависит от длины ППФ, по которой она построена. Поэтому в ряде работ исследуется сложность ППФ различных функций.

В 1993 В. П. Супрун [3] получил первые оценки функции Шеннона для функций алгебры логики :

$$\begin{aligned} L_2(n) &\geq C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}, \\ L_2(n) &< 3 \cdot 2^{n-1}. \end{aligned}$$

где $\lfloor a \rfloor$ обозначает целую часть a .

Точное значение функции Шеннона для функций алгебры логики в 1995 г. было найдено Н. А. Перязевым [4] :

$$L_2(n) = \left\lceil \frac{2^{n+1}}{3} \right\rceil.$$

Функции k -значных логик являются естественным обобщением функций алгебры логики. Для функций k -значной логики верхняя оценка функции Шеннона была получена в 2002 г. С. Н. Селезневой [5] :

$$L_k(n) < \frac{k(k-1)}{k(k-1)+1} k^n.$$

При построении ПЛМ рассматривают и другие полиномиальные формы. Например класс обобщенных полиномиальных форм. В классе обобщенных полиномиальных форм, в отличие от класса поляризованных полиномиальных форм, переменные могут иметь различную поляризацию в разных слагаемых. В статье К. Д. Кириченко [6], опубликованной в 2005 г., получена верхняя оценка функции Шеннона в классе обобщенных полиномиальных форм функций алгебры логики :

$$L_2^{\text{О.П.}}(n) < \frac{2^{n+1}(\log_2 n + 1)}{n}.$$

Верхняя оценка функции Шеннона в классе обобщенных полиномиальных форм функций k -значной логики была получена С. Н. Селезневой А. Б. Дайняком в 2008 г. [7]:

$$L_k^{\text{О.П.}}(n) \lesssim 2 \cdot \frac{k^n}{n} \cdot \ln n \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

В 2012 г. Н. К. Маркеловым была получена нижняя оценка функции Шеннона для функции трехзначной логики в классе поляризованных полиномов [8]:

$$L_3(n) \geq \left\lceil \frac{3}{4} 3^n \right\rceil.$$

Основные определения

Пусть $k \geq 2$ – натуральное число, $E_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$. Весом набора $\alpha = (a_1, \dots, a_n) \in E_k^n$ назовем число $|\alpha| = \sum_{i=1}^n a_i$. Моном $\prod_{a_i \neq 0} x_i^{a_i}$ назовем соответствующим набору $\alpha = (a_1, \dots, a_n) \in E_k^n$ и обозначим через K_α . По определению положим, что константа 1 соответствует набору из всех нулей. Функцией k -значной логики называется отображение $f^{(n)} : E_k^n \rightarrow E_k$, $n = 0, 1, \dots$. Множество всех k -значных функций обозначим через P_k , множество всех k -значных функций, зависящих от переменных x_1, \dots, x_n , обозначим через P_k^n .

Если k – простое число, то каждая функция k -значной логики $f(x_1, \dots, x_n)$ может быть однозначно задана формулой вида

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\alpha \in E_k^n : c_f(\alpha) \neq 0} c_f(\alpha) K_\alpha,$$

где $c_f(\alpha) \in E_k$ – коэффициенты, $\alpha \in E_k^n$, и операции сложения и умножения рассматриваются по модулю k . Это представление функций k -значной логики называется ее полиномом по модулю k . При простых k однозначно определенным полином по модулю k для функции k -значной логики f будем обозначать через $P(f)$.

Определим поляризованные полиномиальные формы по модулю k . Поляризованной переменной x_i с поляризацией d , $d \in E_k$, назовем выражение вида $(x_i + d)$. Поляризованным мономом по вектору поляризации δ , $\delta = (d_1, \dots, d_n) \in E_k^n$, назовем произведение вида $(x_{i_1} + d_{i_1})^{m_1} \cdots (x_{i_r} + d_{i_r})^{m_r}$, где $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$, и $1 \leq m_1, \dots, m_r \leq k-1$. Обычный моном является мономом, поляризованным по вектору $\tilde{0} = (0, \dots, 0) \in E_k^n$.

Выражение вида $\sum_{i=1}^l c_i \cdot K_i$, где $c_i \in E_k \setminus \{0\}$ – коэффициенты, K_i – попарно различные мономы, поляризованные по вектору $\delta = (d_1, \dots, d_n) \in E_k^n$, $i = 1, \dots, l$, назовем поляризованной полиномиальной нормальной формой (ППФ) по вектору поляризации δ . Мы будем считать, что константа 0 является ППФ по произвольному вектору поляризации. Заметим, что при простых k для каждого вектора поляризации каждую функцию k -значной логики можно однозначно представить ППФ по этому вектору поляризации [5]. При простых k однозначно определенную ППФ по вектору поляризации $\delta \in E_k^n$ для функции $f \in P_k^n$ будем обозначать через $P^\delta(f)$.

Длиной $l(p)$ ППФ p назовем число попарно различных слагаемых в этой ППФ. Положим, что $l(0) = 0$. При простых k длиной функции k -значной логики в классе ППФ называется величина $l^{\text{ППФ}}(f) = \min_{\delta \in E_k^n} l(P^\delta(f))$.

Сложностью системы ППФ, имеющих один и тот же вектор поляризации, называется число попарно различных слагаемых, встречающихся во всех этих ППФ. При простых k сложностью $L_k^{\text{ППФ}}(F)$ системы функций k -значной логики $F = \{f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)\}$ в классе ППФ называется минимальная сложность среди всех таких систем ППФ $\{p_1, \dots, p_m\}$, что все ППФ p_1, \dots, p_m имеют один и тот же вектор поляризации, и ППФ p_j реализует функцию f_j , $j = 1, \dots, m$. Понятно, что для произвольной системы функций k -значной логики $F = \{f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)\}$ верна оценка $L_k^{\text{ППФ}}(F) \leq k^n$.

Пусть k – простое число, и $A_k \subseteq P_k$, а $A_k^n = A_k \cap P_k^n$. Введем функцию Шеннона $L_{A_k}^{\text{ППФ}}(m, n)$ сложности систем функций k -значной логики, принадлежащих множеству A , в классе ППФ:

$$L_{A_k}^{\text{ППФ}}(m, n) = \max_{B \subseteq A_k^n, |B|=m} L_k^{\text{ППФ}}(B).$$

Если $A_k = P_k$, то функцию Шеннона будем обозначать через $L_{A_k}^{\text{ППФ}}(m, n)$.

Функция k -значной логики $f(x_1, \dots, x_n)$ называется симметрической, если

$$f(\pi(x_1), \dots, \pi(x_n)) = f(x_1, \dots, x_n)$$

для произвольной перестановки π на множестве переменных $\{x_1, \dots, x_n\}$. Множество всех симметрических функций k -значной логики обозначим через S_k . Симметрическая функция $f(x_1, \dots, x_n)$ называется периодической с периодом $\tau = (\tau_0 \tau_1 \dots \tau_{T-1}) \in E_k^T$, если $f(\alpha) = \tau_j$ при $|\alpha| = j \pmod T$ для каждого набора $\alpha \in E_k^n$. При этом число T называется длиной периода. Периодическую функцию k -значной логики $f(x_1, \dots, x_n)$ с периодом $\tau = (\tau_0 \tau_1 \dots \tau_{T-1}) \in E_k^T$ будем обозначать через $f_{(\tau_0 \tau_1 \dots \tau_{T-1})}^{(n)}$. Понятно, что такое обозначение полностью определяет эту функцию.

Введем функцию $\text{rol}(\alpha, i) \in E_k^n \times E_k \rightarrow E_k^n$, производящую циклический сдвиг вектора α влево. Пусть $\alpha = (a_1, \dots, a_n)$, тогда $\text{rol}(\alpha, i) = (a_{(1+i) \bmod k}, \dots, a_{(n+i) \bmod k})$.

Класс функций A называется вырожденным, если при $n \rightarrow \infty$ для любой функции $f_n \in A_n$ выполняется: $l(f_n) = \bar{o}(5^n)$.

В данной работе рассматривается класс функций \mathcal{A} , состоящий из всех линейных комбинаций функций f и g , где f – это периодическая симметрическая функция с периодом $(1, 1, 4, 4)$, а g – это периодическая симметрическая функция с периодом $(1, 4, 4, 1)$. А также его подкласс \mathcal{F} состоящий из следующих четырех функций: $f, g, f + g, f + 4g$.

Результаты

Поляризованные полиномы для функций из класса \mathcal{A}

Теорема 1. При $n \geq 1$ для периодических функций пятизначной логики $f_n = f_{(1144)}^{(n)}$, $g_n = f_{(1441)}^{(n)}$ верны следующие равенства:

$$\begin{aligned} f_{n+1} &= j_0(x_{n+1})f_n + j_1(x_{n+1})g_n + 4j_2(x_{n+1})f_n + 4j_3(x_{n+1})g_n + j_4(x_{n+1})f_n = \\ &4f_nx_{n+1}^4 + (3f_n + 2g_n)x_{n+1}^3 + 3(f_n + g_n)x_{n+1}^2 + (4f_n + g_n)x_{n+1} + f_n = \\ &4f_n(x_{n+1} + 1)^4 + 2(f_n + g_n)(x_{n+1} + 1)^3 + (3f_n + 2g_n)(x_{n+1} + 1)^2 + (f_n + g_n)(x_{n+1} + 1) + f_n = \\ &4f_n(x_{n+1} + 2)^4 + (f_n + 2g_n)(x_{n+1} + 2)^3 + (f_n + g_n)(x_{n+1} + 2)^2 + 3g_n(x_{n+1} + 2) + 4g_n = \\ &4f_n(x_{n+1} + 3)^4 + 2g_n(x_{n+1} + 3)^3 + 2f_n(x_{n+1} + 3)^2 + 2g_n(x_{n+1} + 3) + 4f_n = \\ &4f_n(x_{n+1} + 4)^4 + 2(2f_n + g_n)(x_{n+1} + 4)^3 + (f_n + 4g_n)(x_{n+1} + 4)^2 + 3g_n(x_{n+1} + 4) + g_n = \end{aligned}$$

Доказательство. Первое равенство следует из теоремы 1.

При поляризации x_{n+1} , когда $d_{n+1} = 0$

$$\begin{aligned} f_{n+1}(\bar{x}_n, 0) &= 0 + 0 + 0 + 0 + f_n = f_n \\ f_{n+1}(\bar{x}_n, 1) &= 4f_n + 3f_n + 2g_n + 3f_n + 3g_n + 4f_n + g_n + f_n = g_n \\ f_{n+1}(\bar{x}_n, 2) &= 4f_n + 4f_n + g_n + 2f_n + 2g_n + 3f_n + 2g_n + f_n = 4f_n \\ f_{n+1}(\bar{x}_n, 3) &= 4f_n + f_n + 4g_n + 2f_n + 2g_n + 2f_n + 3g_n + f_n = 4g_n \\ f_{n+1}(\bar{x}_n, 4) &= 4f_n + 2f_n + 3g_n + 3f_n + 3g_n + f_n + 4g_n + f_n = f_n \end{aligned}$$

При поляризации x_{n+1} , когда $d_{n+1} = 1$

$$\begin{aligned} f_{n+1}(\bar{x}_n, 0) &= 4f_n + 2f_n + 2g_n + 3f_n + 2g_n + f_n + g_n + f_n = f_n \\ f_{n+1}(\bar{x}_n, 1) &= 4f_n + f_n + g_n + 2f_n + 3g_n + 2f_n + 2g_n + f_n = g_n \\ f_{n+1}(\bar{x}_n, 2) &= 4f_n + 4f_n + 4g_n + 2f_n + 3g_n + 3f_n + 3g_n + f_n = 4f_n \\ f_{n+1}(\bar{x}_n, 3) &= 4f_n + 3f_n + 3g_n + 3f_n + 2g_n + 4f_n + 4g_n + f_n = 4g_n \\ f_{n+1}(\bar{x}_n, 4) &= 0 + 0 + 0 + 0 + f_n = f_n \end{aligned}$$

При поляризации x_{n+1} , когда $d_{n+1} = 2$

$$\begin{aligned} f_{n+1}(\bar{x}_n, 0) &= 4f_n + 3f_n + g_n + 4f_n + 4g_n + g_n + 4g_n = f_n \\ f_{n+1}(\bar{x}_n, 1) &= 4f_n + 2f_n + 4g_n + 4f_n + 4g_n + 4g_n + 4g_n = g_n \\ f_{n+1}(\bar{x}_n, 2) &= 4f_n + 4f_n + 3g_n + f_n + g_n + 2g_n + 4g_n = 4f_n \\ f_{n+1}(\bar{x}_n, 3) &= 0 + 0 + 0 + 0 + 4g_n = 4g_n \\ f_{n+1}(\bar{x}_n, 4) &= 4f_n + f_n + 2g_n + f_n + g_n + 3g_n + 4g_n = f_n \end{aligned}$$

При поляризации x_{n+1} , когда $d_{n+1} = 3$

$$\begin{aligned} f_{n+1}(\bar{x}_n, 0) &= 4f_n + 4g_n + 3f_n + g_n + 4f_n = f_n \\ f_{n+1}(\bar{x}_n, 1) &= 4f_n + 3g_n + 2f_n + 3g_n + 4f_n = g_n \\ f_{n+1}(\bar{x}_n, 2) &= 0 + 0 + 0 + 0 + 4f_n = 4f_n \\ f_{n+1}(\bar{x}_n, 3) &= 4f_n + 2g_n + 2f_n + 2g_n + 4f_n = 4g_n \\ f_{n+1}(\bar{x}_n, 4) &= 4f_n + g_n + 3f_n + 4g_n + 4f_n = f_n \end{aligned}$$

При поляризации x_{n+1} , когда $d_{n+1} = 4$

$$\begin{aligned} f_{n+1}(\bar{x}_n, 0) &= 4f_n + f_n + 3g_n + f_n + 4g_n + 2g_n + g_n = f_n \\ f_{n+1}(\bar{x}_n, 1) &= 0 + 0 + 0 + 0 + g_n = g_n \\ f_{n+1}(\bar{x}_n, 2) &= 4f_n + 4f_n + 2g_n + f_n + g_n + 3g_n + g_n = 4f_n \\ f_{n+1}(\bar{x}_n, 3) &= 4f_n + 2f_n + g_n + 4f_n + g_n + g_n + g_n = 4g_n \\ f_{n+1}(\bar{x}_n, 4) &= 4f_n + 3f_n + 4g_n + 4f_n + g_n + 4g_n + g_n = f_n \end{aligned}$$

□

Теорема 2. При $n \geq 1$ для периодических функций пятизначной логики $f_n = f_{(1144)}^{(n)}$, $g_n = f_{(1441)}^{(n)}$ верны следующие равенства:

$$\begin{aligned} g_{n+1} &= j_0(x_{n+1})g_n + 4j_1(x_{n+1})f_n + 4j_2(x_{n+1})g_n + j_3(x_{n+1})f_n + j_4(x_{n+1})g_n = \\ &= 4g_n x_{n+1}^4 + 3(f_n + g_n)x_{n+1}^3 + (2f_n + 3g_n)x_{n+1}^2 + 4(f_n + g_n)x_{n+1} + g_n = \\ &= 4g_n(x_{n+1} + 1)^4 + (3f_n + 2g_n)(x_{n+1} + 1)^3 + 3(f_n + g_n)(x_{n+1} + 1)^2 + (4f_n + g_n)(x_{n+1} + 1) + g_n = \\ &= 4g_n(x_{n+1} + 2)^4 + (3f_n + g_n)(x_{n+1} + 2)^3 + (4f_n + g_n)(x_{n+1} + 2)^2 + 2f_n(x_{n+1} + 2) + f_n = \\ &= 4g_n(x_{n+1} + 3)^4 + 3f_n(x_{n+1} + 3)^3 + 2g_n(x_{n+1} + 3)^2 + 3f_n(x_{n+1} + 3) + 4g_n = \\ &= 4g_n(x_{n+1} + 4)^4 + (3f_n + 4g_n)(x_{n+1} + 4)^3 + (f_n + g_n)(x_{n+1} + 4)^2 + 2f_n(x_{n+1} + 4) + 4f_n = \end{aligned}$$

Доказательство. Первое равенство следует из теоремы 1.

При поляризации x_{n+1} , когда $d_{n+1} = 0$

$$\begin{aligned} g_{n+1}(\bar{x}_n, 0) &= 0 + 0 + 0 + 0 + g_n = g_n \\ g_{n+1}(\bar{x}_n, 1) &= 4g_n + 3f_n + 3g_n + 2f_n + 3g_n + 4f_n + 4g_n + g_n = 4f_n \\ g_{n+1}(\bar{x}_n, 2) &= 4g_n + 4f_n + 4g_n + 3f_n + 2g_n + 3f_n + 3g_n + g_n = 4g_n \\ g_{n+1}(\bar{x}_n, 3) &= 4g_n + f_n + g_n + 3f_n + 2g_n + 2f_n + 2g_n + g_n = f_n \\ g_{n+1}(\bar{x}_n, 4) &= 4g_n + 2f_n + 2g_n + 2f_n + 3g_n + f_n + g_n + g_n = g_n \end{aligned}$$

При поляризации x_{n+1} , когда $d_{n+1} = 1$

$$\begin{aligned} g_{n+1}(\bar{x}_n, 0) &= 4g_n + 3f_n + 2g_n + 3f_n + 3g_n + 4f_n + g_n + g_n = g_n \\ g_{n+1}(\bar{x}_n, 1) &= 4g_n + 4f_n + g_n + 2f_n + 2g_n + 3f_n + 2g_n + g_n = 4f_n \\ g_{n+1}(\bar{x}_n, 2) &= 4g_n + f_n + 4g_n + 2f_n + 2g_n + 2f_n + 3g_n + g_n = 4g_n \\ g_{n+1}(\bar{x}_n, 3) &= 4g_n + 2f_n + 3g_n + 3f_n + 3g_n + f_n + 4g_n + g_n = f_n \\ g_{n+1}(\bar{x}_n, 4) &= 0 + 0 + 0 + 0 + g_n = g_n \end{aligned}$$

При поляризации x_{n+1} , когда $d_{n+1} = 2$

$$\begin{aligned} g_{n+1}(\bar{x}_n, 0) &= 4g_n + 4f_n + 3g_n + f_n + 4g_n + 4f_n + f_n = g_n \\ g_{n+1}(\bar{x}_n, 1) &= 4g_n + f_n + 2g_n + f_n + 4g_n + f_n + f_n = 4f_n \\ g_{n+1}(\bar{x}_n, 2) &= 4g_n + 2f_n + 4g_n + 4f_n + g_n + 3f_n + f_n = 4g_n \\ g_{n+1}(\bar{x}_n, 3) &= 0 + 0 + 0 + 0 + f_n = f_n \\ g_{n+1}(\bar{x}_n, 4) &= 4g_n + 3f_n + g_n + 4f_n + g_n + 2f_n + f_n = g_n \end{aligned}$$

При поляризации x_{n+1} , когда $d_{n+1} = 3$

$$\begin{aligned} g_{n+1}(\bar{x}_n, 0) &= 4g_n + f_n + 3g_n + 4f_n + 4g_n = g_n \\ g_{n+1}(\bar{x}_n, 1) &= 4g_n + 2f_n + 2g_n + 2f_n + 4g_n = 4f_n \\ g_{n+1}(\bar{x}_n, 2) &= 0 + 0 + 0 + 0 + 4g_n = 4g_n \\ g_{n+1}(\bar{x}_n, 3) &= 4g_n + 3f_n + 2g_n + 3f_n + 4g_n = f_n \\ g_{n+1}(\bar{x}_n, 4) &= 4g_n + 4f_n + 3g_n + f_n + 4g_n = g_n \end{aligned}$$

При поляризации x_{n+1} , когда $d_{n+1} = 4$

$$\begin{aligned} g_{n+1}(\bar{x}_n, 0) &= 4g_n + 2f_n + g_n + f_n + g_n + 3f_n + 4f_n = g_n \\ g_{n+1}(\bar{x}_n, 1) &= 0 + 0 + 0 + 0 + 4f_n = 4f_n \\ g_{n+1}(\bar{x}_n, 2) &= 4g_n + 3f_n + 4g_n + f_n + g_n + 2f_n + 4f_n = 4g_n \\ g_{n+1}(\bar{x}_n, 3) &= 4g_n + 4f_n + 2g_n + 4f_n + 4g_n + 4f_n + 4f_n = f_n \\ g_{n+1}(\bar{x}_n, 4) &= 4g_n + f_n + 3g_n + 4f_n + 4g_n + f_n + 4f_n = g_n \end{aligned}$$

□

Теорема 3. При $n \geq 1$ для периодических функций пятизначной логики $f_n = f_{(1144)}^{(n)}$, $g_n = f_{(1441)}^{(n)}$ верны следующие равенства:

$$\begin{aligned} s_{n+1}^1 &= f_{n+1} + g_{n+1} = \\ &= (4f_n + 4g_n)x^4 + f_n x^3 + g_n x^2 + 3f_n x + f_n + g_n = \\ &= (4f_n + 4g_n)(x+1)^4 + 4g_n(x+1)^3 + f_n(x+1)^2 + 2g_n(x+1) + f_n + g_n = \\ &= (4f_n + 4g_n)(x+2)^4 + (4f_n + 3g_n)(x+2)^3 + 2g_n(x+2)^2 + (2f_n + 3g_n)(x+2) + f_n + 4g_n = \\ &= (4f_n + 4g_n)(x+3)^4 + (3f_n + 2g_n)(x+3)^3 + 2(f_n + g_n)(x+3)^2 + (3f_n + 2g_n)(x+3) + 4f_n + 4g_n = \\ &= (4f_n + 4g_n)(x+4)^4 + (2f_n + g_n)(x+4)^3 + 2f_n(x+4)^2 + (2f_n + 3g_n)(x+4) + 4f_n + g_n = \end{aligned}$$

Доказательство. Первое равенство следует из теоремы 1.

При поляризации x_{n+1} , когда $d_{n+1} = 0$

$$\begin{aligned} s_{n+1}^1(\bar{x}_n, 0) &= 0 + 0 + 0 + 0 + f_n + g_n = f_n + g_n \\ s_{n+1}^1(\bar{x}_n, 1) &= 4f_n + 4g_n + f_n + g_n + 3f_n + f_n + g_n = 4f_n + g_n \\ s_{n+1}^1(\bar{x}_n, 2) &= 4f_n + 4g_n + 3f_n + 4g_n + f_n + f_n + g_n = 4f_n + 4g_n \\ s_{n+1}^1(\bar{x}_n, 3) &= 4f_n + 4g_n + 2f_n + 4g_n + 4f_n + f_n + g_n = f_n + 4g_n \\ s_{n+1}^1(\bar{x}_n, 4) &= 4f_n + 4g_n + 4f_n + g_n + 2f_n + f_n + g_n = f_n + g_n \end{aligned}$$

При поляризации x_{n+1} , когда $d_{n+1} = 1$

$$\begin{aligned} s_{n+1}^1(\bar{x}_n, 0) &= 4f_n + 4g_n + 4g_n + f_n + 2g_n + f_n + g_n = f_n + g_n \\ s_{n+1}^1(\bar{x}_n, 1) &= 4f_n + 4g_n + 2g_n + 4f_n + 4g_n + f_n + g_n = 4f_n + g_n \\ s_{n+1}^1(\bar{x}_n, 2) &= 4f_n + 4g_n + 3g_n + 4f_n + g_n + f_n + g_n = 4f_n + 4g_n \\ s_{n+1}^1(\bar{x}_n, 3) &= 4f_n + 4g_n + g_n + f_n + 3g_n + f_n + g_n = f_n + 4g_n \\ s_{n+1}^1(\bar{x}_n, 4) &= 0 + 0 + 0 + 0 + f_n + g_n = f_n + g_n \end{aligned}$$

При поляризации x_{n+1} , когда $d_{n+1} = 2$

$$\begin{aligned} s_{n+1}^1(\bar{x}_n, 0) &= 4f_n + 4g_n + 2f_n + 4g_n + 3g_n + 4f_n + g_n + f_n + 4g_n = f_n + g_n \\ s_{n+1}^1(\bar{x}_n, 1) &= 4f_n + 4g_n + 3f_n + g_n + 3g_n + f_n + 4g_n + f_n + 4g_n = 4f_n + g_n \\ s_{n+1}^1(\bar{x}_n, 2) &= 4f_n + 4g_n + f_n + 2g_n + 2g_n + 3f_n + 2g_n + f_n + 4g_n = 4f_n + 4g_n \\ s_{n+1}^1(\bar{x}_n, 3) &= 0 + 0 + 0 + 0 + f_n + 4g_n = f_n + 4g_n \\ s_{n+1}^1(\bar{x}_n, 4) &= 4f_n + 4g_n + 4f_n + 3g_n + 2g_n + 2f_n + 3g_n + f_n + 4g_n = f_n + g_n \end{aligned}$$

При поляризации x_{n+1} , когда $d_{n+1} = 3$

$$\begin{aligned} s_{n+1}^1(\bar{x}_n, 0) &= 4f_n + 4g_n + f_n + 4g_n + 3f_n + 3g_n + 4f_n + g_n + 4f_n + 4g_n = f_n + g_n \\ s_{n+1}^1(\bar{x}_n, 1) &= 4f_n + 4g_n + 2f_n + 3g_n + 2f_n + 2g_n + 2f_n + 3g_n + 4f_n + 4g_n = 4f_n + g_n \\ s_{n+1}^1(\bar{x}_n, 2) &= 0 + 0 + 0 + 0 + 4f_n + 4g_n = 4f_n + 4g_n \\ s_{n+1}^1(\bar{x}_n, 3) &= 4f_n + 4g_n + 3f_n + 2g_n + 2f_n + 2g_n + 3f_n + 2g_n + 4f_n + 4g_n = f_n + 4g_n \\ s_{n+1}^1(\bar{x}_n, 4) &= 4f_n + 4g_n + 4f_n + g_n + 3f_n + 3g_n + f_n + 4g_n + 4f_n + 4g_n = f_n + g_n \end{aligned}$$

При поляризации x_{n+1} , когда $d_{n+1} = 4$

$$\begin{aligned} s_{n+1}^1(\bar{x}_n, 0) &= 4f_n + 4g_n + 3f_n + 4g_n + 2f_n + 3f_n + 2g_n + 4f_n + g_n = f_n + g_n \\ s_{n+1}^1(\bar{x}_n, 1) &= 0 + 0 + 0 + 0 + 4f_n + g_n = 4f_n + g_n \\ s_{n+1}^1(\bar{x}_n, 2) &= 4f_n + 4g_n + 2f_n + g_n + 2f_n + 2f_n + 3g_n + 4f_n + g_n = 4f_n + 4g_n \\ s_{n+1}^1(\bar{x}_n, 3) &= 4f_n + 4g_n + f_n + 3g_n + 3f_n + 4f_n + g_n + 4f_n + g_n = f_n + 4g_n \\ s_{n+1}^1(\bar{x}_n, 4) &= 4f_n + 4g_n + 4f_n + 2g_n + 3f_n + f_n + 4g_n + 4f_n + g_n = f_n + g_n \end{aligned}$$

□

Теорема 4. При $n \geq 1$ для периодических функций пятизначной логики $f_n = f_{(1144)}^{(n)}$, $g_n = f_{(1441)}^{(n)}$ верны следующие равенства:

$$\begin{aligned} s_{n+1}^2 &= f_{n+1} + 2g_{n+1} = \\ &= (4f_n + 3g_n)x^4 + (4f_n + 3g_n)x^3 + (2f_n + 4g_n)x^2 + (2f_n + 4g_n)x + f_n + 2g_n = \\ &= (4f_n + 3g_n)(x+1)^4 + (3f_n + g_n)(x+1)^3 + (4f_n + 3g_n)(x+1)^2 + (4f_n + 3g_n)(x+1) + f_n + 2g_n = \\ &= (4f_n + 3g_n)(x+2)^4 + (2f_n + 4g_n)(x+2)^3 + (4f_n + 3g_n)(x+2)^2 + (4f_n + 3g_n)(x+2) + 2f_n + 4g_n = \\ &= (4f_n + 3g_n)(x+3)^4 + (f_n + 2g_n)(x+3)^3 + 2(f_n + 2g_n)(x+3)^2 + (f_n + 2g_n)(x+3) + 4f_n + 3g_n = \\ &= (4f_n + 3g_n)(x+4)^4 + (3f_n + g_n)(x+4)^2 + (4f_n + 3g_n)(x+4) + 3f_n + g_n = \end{aligned}$$

Доказательство. Первое равенство следует из теоремы 1.

При поляризации x_{n+1} , когда $d_{n+1} = 0$

$$\begin{aligned} s_{n+1}^2(\bar{x}_n, 0) &= 0 + 0 + 0 + 0 + f_n + 2g_n = f_n + 2g_n \\ s_{n+1}^2(\bar{x}_n, 1) &= 4f_n + 3g_n + 4f_n + 3g_n + 2f_n + 4g_n + 2f_n + 4g_n + f_n + 2g_n = 3f_n + g_n \\ s_{n+1}^2(\bar{x}_n, 2) &= 4f_n + 3g_n + 2f_n + 4g_n + 3f_n + g_n + 4f_n + 3g_n + f_n + 2g_n = 4f_n + 3g_n \\ s_{n+1}^2(\bar{x}_n, 3) &= 4f_n + 3g_n + 3f_n + g_n + 3f_n + g_n + f_n + 2g_n + f_n + 2g_n = 2f_n + 4g_n \\ s_{n+1}^2(\bar{x}_n, 4) &= 4f_n + 3g_n + f_n + 2g_n + 2f_n + 4g_n + 3f_n + g_n + f_n + 2g_n = f_n + 2g_n \end{aligned}$$

При поляризации x_{n+1} , когда $d_{n+1} = 1$

$$\begin{aligned} s_{n+1}^2(\bar{x}_n, 0) &= 4f_n + 3g_n + 3f_n + g_n + 4f_n + 3g_n + 4f_n + 3g_n + f_n + 2g_n = f_n + 2g_n \\ s_{n+1}^2(\bar{x}_n, 1) &= 4f_n + 3g_n + 4f_n + 3g_n + f_n + 2g_n + 3f_n + g_n + f_n + 2g_n = 3f_n + g_n \\ s_{n+1}^2(\bar{x}_n, 2) &= 4f_n + 3g_n + f_n + 2g_n + f_n + 2g_n + 2f_n + 4g_n + f_n + 2g_n = 4f_n + 3g_n \\ s_{n+1}^2(\bar{x}_n, 3) &= 4f_n + 3g_n + 2f_n + 4g_n + 4f_n + 3g_n + f_n + 2g_n + f_n + 2g_n = 2f_n + 4g_n \\ s_{n+1}^2(\bar{x}_n, 4) &= 0 + 0 + 0 + 0 + f_n + 2g_n = f_n + 2g_n \end{aligned}$$

При поляризации x_{n+1} , когда $d_{n+1} = 2$

$$\begin{aligned} s_{n+1}^2(\bar{x}_n, 0) &= 4f_n + 3g_n + f_n + 2g_n + f_n + 2g_n + 3f_n + g_n + 2f_n + 4g_n = f_n + 2g_n \\ s_{n+1}^2(\bar{x}_n, 1) &= 4f_n + 3g_n + 4f_n + 3g_n + f_n + 2g_n + 2f_n + 4g_n + 2f_n + 4g_n = 3f_n + g_n \\ s_{n+1}^2(\bar{x}_n, 2) &= 4f_n + 3g_n + 3f_n + g_n + 4f_n + 3g_n + f_n + 2g_n + 2f_n + 4g_n = 4f_n + 3g_n \\ s_{n+1}^2(\bar{x}_n, 3) &= 0 + 0 + 0 + 0 + 2f_n + 4g_n = 2f_n + 4g_n \\ s_{n+1}^2(\bar{x}_n, 4) &= 4f_n + 3g_n + 2f_n + 4g_n + 4f_n + 3g_n + 4f_n + 3g_n + 2f_n + 4g_n = f_n + 2g_n \end{aligned}$$

При поляризации x_{n+1} , когда $d_{n+1} = 3$

$$\begin{aligned} s_{n+1}^2(\bar{x}_n, 0) &= 4f_n + 3g_n + 2f_n + 4g_n + 3f_n + g_n + 3f_n + g_n + 4f_n + 3g_n = f_n + 2g_n \\ s_{n+1}^2(\bar{x}_n, 1) &= 4f_n + 3g_n + 4f_n + 3g_n + 2f_n + 4g_n + 4f_n + 3g_n + 4f_n + 3g_n = 3f_n + g_n \\ s_{n+1}^2(\bar{x}_n, 2) &= 0 + 0 + 0 + 0 + 4f_n + 3g_n = 4f_n + 3g_n \\ s_{n+1}^2(\bar{x}_n, 3) &= 4f_n + 3g_n + f_n + 2g_n + 2f_n + 4g_n + f_n + 2g_n + 4f_n + 3g_n = 2f_n + 4g_n \\ s_{n+1}^2(\bar{x}_n, 4) &= 4f_n + 3g_n + 3f_n + g_n + 3f_n + g_n + 2f_n + 4g_n + 4f_n + 3g_n = f_n + 2g_n \end{aligned}$$

При поляризации x_{n+1} , когда $d_{n+1} = 4$

$$\begin{aligned} s_{n+1}^2(\bar{x}_n, 0) &= 4f_n + 3g_n + 0 + 3f_n + g_n + f_n + 2g_n + 3f_n + g_n = f_n + 2g_n \\ s_{n+1}^2(\bar{x}_n, 1) &= 0 + 0 + 0 + 0 + 3f_n + g_n = 3f_n + g_n \\ s_{n+1}^2(\bar{x}_n, 2) &= 4f_n + 3g_n + 0 + 3f_n + g_n + 4f_n + 3g_n + 3f_n + g_n = 4f_n + 3g_n \\ s_{n+1}^2(\bar{x}_n, 3) &= 4f_n + 3g_n + 0 + 2f_n + 4g_n + 3f_n + g_n + 3f_n + g_n = 2f_n + 4g_n \\ s_{n+1}^2(\bar{x}_n, 4) &= 4f_n + 3g_n + 0 + 2f_n + 4g_n + 2f_n + 4g_n + 3f_n + g_n = f_n + 2g_n \end{aligned}$$

□

Теорема 5. При $n \geq 1$ для периодических функций пятизначной логики $f_n = f_{(1144)}^{(n)}$, $g_n = f_{(1441)}^{(n)}$ верны следующие равенства:

$$\begin{aligned} s_{n+1}^3 &= f_{n+1} + 3g_{n+1} = \\ &= (4f_n + 2g_n)x^4 + (2f_n + g_n)x^3 + (4f_n + 2g_n)x^2 + (f_n + 3g_n)x + f_n + 3g_n = \\ &= (4f_n + 2g_n)(x+1)^4 + (f_n + 3g_n)(x+1)^3 + (2f_n + g_n)(x+1)^2 + (3f_n + 4g_n)(x+1) + f_n + 3g_n = \\ &= (4f_n + 2g_n)(x+2)^4 + (3f_n + 4g_n)(x+2)^2 + (f_n + 3g_n)(x+2) + 3f_n + 4g_n = \\ &= (4f_n + 2g_n)(x+3)^4 + (4f_n + 2g_n)(x+3)^3 + 2(f_n + 3g_n)(x+3)^2 + (4f_n + 2g_n)(x+3) + 4f_n + 2g_n = \\ &= (4f_n + 2g_n)(x+4)^4 + (3f_n + 4g_n)(x+4)^3 + (4f_n + 2g_n)(x+4)^2 + (f_n + 3g_n)(x+4) + 2f_n + g_n = \end{aligned}$$

Доказательство. Первое равенство следует из теоремы 1.

При поляризации x_{n+1} , когда $d_{n+1} = 0$

$$\begin{aligned} s_{n+1}^3(\bar{x}_n, 0) &= 0 + 0 + 0 + 0 + f_n + 3g_n = f_n + 3g_n \\ s_{n+1}^3(\bar{x}_n, 1) &= 4f_n + 2g_n + 2f_n + g_n + 4f_n + 2g_n + f_n + 3g_n + f_n + 3g_n = 2f_n + g_n \\ s_{n+1}^3(\bar{x}_n, 2) &= 4f_n + 2g_n + f_n + 3g_n + f_n + 3g_n + 2f_n + g_n + f_n + 3g_n = 4f_n + 2g_n \\ s_{n+1}^3(\bar{x}_n, 3) &= 4f_n + 2g_n + 4f_n + 2g_n + f_n + 3g_n + 3f_n + 4g_n + f_n + 3g_n = 3f_n + 4g_n \\ s_{n+1}^3(\bar{x}_n, 4) &= 4f_n + 2g_n + 3f_n + 4g_n + 4f_n + 2g_n + 4f_n + 2g_n + f_n + 3g_n = f_n + 3g_n \end{aligned}$$

При поляризации x_{n+1} , когда $d_{n+1} = 1$

$$\begin{aligned} s_{n+1}^3(\bar{x}_n, 0) &= 4f_n + 2g_n + f_n + 3g_n + 2f_n + g_n + 3f_n + 4g_n + f_n + 3g_n = f_n + 3g_n \\ s_{n+1}^3(\bar{x}_n, 1) &= 4f_n + 2g_n + 3f_n + 4g_n + 3f_n + 4g_n + f_n + 3g_n + f_n + 3g_n = 2f_n + g_n \\ s_{n+1}^3(\bar{x}_n, 2) &= 4f_n + 2g_n + 2f_n + g_n + 3f_n + 4g_n + 4f_n + 2g_n + f_n + 3g_n = 4f_n + 2g_n \\ s_{n+1}^3(\bar{x}_n, 3) &= 4f_n + 2g_n + 4f_n + 2g_n + 2f_n + g_n + 2f_n + g_n + f_n + 3g_n = 3f_n + 4g_n \\ s_{n+1}^3(\bar{x}_n, 4) &= 0 + 0 + 0 + 0 + f_n + 3g_n = f_n + 3g_n \end{aligned}$$

При поляризации x_{n+1} , когда $d_{n+1} = 2$

$$\begin{aligned} s_{n+1}^3(\bar{x}_n, 0) &= 4f_n + 2g_n + 0 + 2f_n + g_n + 2f_n + g_n + 3f_n + 4g_n = f_n + 3g_n \\ s_{n+1}^3(\bar{x}_n, 1) &= 4f_n + 2g_n + 0 + 2f_n + g_n + 3f_n + 4g_n + 3f_n + 4g_n = 2f_n + g_n \\ s_{n+1}^3(\bar{x}_n, 2) &= 4f_n + 2g_n + 0 + 3f_n + 4g_n + 4f_n + 2g_n + 3f_n + 4g_n = 4f_n + 2g_n \\ s_{n+1}^3(\bar{x}_n, 3) &= 0 + 0 + 0 + 0 + 3f_n + 4g_n = 3f_n + 4g_n \\ s_{n+1}^3(\bar{x}_n, 4) &= 4f_n + 2g_n + 0 + 3f_n + 4g_n + f_n + 3g_n + 3f_n + 4g_n = f_n + 3g_n \end{aligned}$$

При поляризации x_{n+1} , когда $d_{n+1} = 3$

$$\begin{aligned} s_{n+1}^3(\bar{x}_n, 0) &= 4f_n + 2g_n + 3f_n + 4g_n + 3f_n + 4g_n + 2f_n + g_n + 4f_n + 2g_n = f_n + 3g_n \\ s_{n+1}^3(\bar{x}_n, 1) &= 4f_n + 2g_n + f_n + 3g_n + 2f_n + g_n + f_n + 3g_n + 4f_n + 2g_n = 2f_n + g_n \\ s_{n+1}^3(\bar{x}_n, 2) &= 0 + 0 + 0 + 0 + 4f_n + 2g_n = 4f_n + 2g_n \\ s_{n+1}^3(\bar{x}_n, 3) &= 4f_n + 2g_n + 4f_n + 2g_n + 2f_n + g_n + 4f_n + 2g_n + 4f_n + 2g_n = 3f_n + 4g_n \\ s_{n+1}^3(\bar{x}_n, 4) &= 4f_n + 2g_n + 2f_n + g_n + 3f_n + 4g_n + 3f_n + 4g_n + 4f_n + 2g_n = f_n + 3g_n \end{aligned}$$

При поляризации x_{n+1} , когда $d_{n+1} = 4$

$$\begin{aligned} s_{n+1}^3(\bar{x}_n, 0) &= 4f_n + 2g_n + 2f_n + g_n + 4f_n + 2g_n + 4f_n + 2g_n + 2f_n + g_n = f_n + 3g_n \\ s_{n+1}^3(\bar{x}_n, 1) &= 0 + 0 + 0 + 0 + 2f_n + g_n = 2f_n + g_n \\ s_{n+1}^3(\bar{x}_n, 2) &= 4f_n + 2g_n + 3f_n + 4g_n + 4f_n + 2g_n + f_n + 3g_n + 2f_n + g_n = 4f_n + 2g_n \\ s_{n+1}^3(\bar{x}_n, 3) &= 4f_n + 2g_n + 4f_n + 2g_n + f_n + 3g_n + 2f_n + g_n + 2f_n + g_n = 3f_n + 4g_n \\ s_{n+1}^3(\bar{x}_n, 4) &= 4f_n + 2g_n + f_n + 3g_n + f_n + 3g_n + 3f_n + 4g_n + 2f_n + g_n = f_n + 3g_n \end{aligned}$$

□

Теорема 6. При $n \geq 1$ для периодических функций пятизначной логики $f_n = f_{(1144)}^{(n)}$, $g_n = f_{(1441)}^{(n)}$ верны следующие равенства:

$$\begin{aligned}
s_{n+1}^4 &= f_{n+1} + 4g_{n+1} = \\
&(4f_n + g_n)x^4 + 4g_nx^3 + f_nx^2 + 2g_nx + f_n + 4g_n = \\
&(4f_n + g_n)(x+1)^4 + 4f_n(x+1)^3 + 4g_n(x+1)^2 + 2f_n(x+1) + f_n + 4g_n = \\
&(4f_n + g_n)(x+2)^4 + (3f_n + g_n)(x+2)^3 + 2f_n(x+2)^2 + (3f_n + 3g_n)(x+2) + 4f_n + 4g_n = \\
&(4f_n + g_n)(x+3)^4 + (2f_n + 2g_n)(x+3)^3 + 2(f_n + 4g_n)(x+3)^2 + (2f_n + 2g_n)(x+3) + 4f_n + g_n = \\
&(4f_n + g_n)(x+4)^4 + (f_n + 3g_n)(x+4)^3 + 3g_n(x+4)^2 + (3f_n + 3g_n)(x+4) + f_n + g_n =
\end{aligned}$$

Доказательство. Первое равенство следует из теоремы 1.

При поляризации x_{n+1} , когда $d_{n+1} = 0$

$$\begin{aligned}
s_{n+1}^4(\bar{x}_n, 0) &= 0 + 0 + 0 + 0 + f_n + 4g_n = f_n + 4g_n \\
s_{n+1}^4(\bar{x}_n, 1) &= 4f_n + g_n + 4g_n + f_n + 2g_n + f_n + 4g_n = f_n + g_n \\
s_{n+1}^4(\bar{x}_n, 2) &= 4f_n + g_n + 2g_n + 4f_n + 4g_n + f_n + 4g_n = 4f_n + g_n \\
s_{n+1}^4(\bar{x}_n, 3) &= 4f_n + g_n + 3g_n + 4f_n + g_n + f_n + 4g_n = 4f_n + 4g_n \\
s_{n+1}^4(\bar{x}_n, 4) &= 4f_n + g_n + g_n + f_n + 3g_n + f_n + 4g_n = f_n + 4g_n
\end{aligned}$$

При поляризации x_{n+1} , когда $d_{n+1} = 1$

$$\begin{aligned}
s_{n+1}^4(\bar{x}_n, 0) &= 4f_n + g_n + 4f_n + 4g_n + 2f_n + 0g_n + f_n + 4g_n = f_n + 4g_n \\
s_{n+1}^4(\bar{x}_n, 1) &= 4f_n + g_n + 2f_n + g_n + 4f_n + 0g_n + f_n + 4g_n = f_n + g_n \\
s_{n+1}^4(\bar{x}_n, 2) &= 4f_n + g_n + 3f_n + g_n + f_n + 0g_n + f_n + 4g_n = 4f_n + g_n \\
s_{n+1}^4(\bar{x}_n, 3) &= 4f_n + g_n + f_n + 4g_n + 3f_n + 0g_n + f_n + 4g_n = 4f_n + 4g_n \\
s_{n+1}^4(\bar{x}_n, 4) &= 0 + 0 + 0 + 0 + f_n + 4g_n = f_n + 4g_n
\end{aligned}$$

При поляризации x_{n+1} , когда $d_{n+1} = 2$

$$\begin{aligned}
s_{n+1}^4(\bar{x}_n, 0) &= 4f_n + g_n + 4f_n + 3g_n + 3f_n + f_n + g_n + 4f_n + 4g_n = f_n + 4g_n \\
s_{n+1}^4(\bar{x}_n, 1) &= 4f_n + g_n + f_n + 2g_n + 3f_n + 4f_n + 4g_n + 4f_n + 4g_n = f_n + g_n \\
s_{n+1}^4(\bar{x}_n, 2) &= 4f_n + g_n + 2f_n + 4g_n + 2f_n + 2f_n + 2g_n + 4f_n + 4g_n = 4f_n + g_n \\
s_{n+1}^4(\bar{x}_n, 3) &= 0 + 0 + 0 + 0 + 4f_n + 4g_n = 4f_n + 4g_n \\
s_{n+1}^4(\bar{x}_n, 4) &= 4f_n + g_n + 3f_n + g_n + 2f_n + 3f_n + 3g_n + 4f_n + 4g_n = f_n + 4g_n
\end{aligned}$$

При поляризации x_{n+1} , когда $d_{n+1} = 3$

$$\begin{aligned}
s_{n+1}^4(\bar{x}_n, 0) &= 4f_n + g_n + 4f_n + 4g_n + 3f_n + 2g_n + f_n + g_n + 4f_n + g_n = f_n + 4g_n \\
s_{n+1}^4(\bar{x}_n, 1) &= 4f_n + g_n + 3f_n + 3g_n + 2f_n + 3g_n + 3f_n + 3g_n + 4f_n + g_n = f_n + g_n \\
s_{n+1}^4(\bar{x}_n, 2) &= 0 + 0 + 0 + 0 + 4f_n + g_n = 4f_n + g_n \\
s_{n+1}^4(\bar{x}_n, 3) &= 4f_n + g_n + 2f_n + 2g_n + 2f_n + 3g_n + 2f_n + 2g_n + 4f_n + g_n = 4f_n + 4g_n \\
s_{n+1}^4(\bar{x}_n, 4) &= 4f_n + g_n + f_n + g_n + 3f_n + 2g_n + 4f_n + 4g_n + 4f_n + g_n = f_n + 4g_n
\end{aligned}$$

При поляризации x_{n+1} , когда $d_{n+1} = 4$

$$\begin{aligned}
s_{n+1}^4(\bar{x}_n, 0) &= 4f_n + g_n + 4f_n + 2g_n + 0f_n + 3g_n + 2f_n + 2g_n + f_n + g_n = f_n + 4g_n \\
s_{n+1}^4(\bar{x}_n, 1) &= 0 + 0 + 0 + 0 + f_n + g_n = f_n + g_n \\
s_{n+1}^4(\bar{x}_n, 2) &= 4f_n + g_n + f_n + 3g_n + 0f_n + 3g_n + 3f_n + 3g_n + f_n + g_n = 4f_n + g_n \\
s_{n+1}^4(\bar{x}_n, 3) &= 4f_n + g_n + 3f_n + 4g_n + 0f_n + 2g_n + f_n + g_n + f_n + g_n = 4f_n + 4g_n \\
s_{n+1}^4(\bar{x}_n, 4) &= 4f_n + g_n + 2f_n + g_n + 0f_n + 2g_n + 4f_n + 4g_n + f_n + g_n = f_n + 4g_n
\end{aligned}$$

□

Обобщение результатов в таблицах

Полученные результаты можно выразить следующей таблицей:

q_{n+1}	0	1	2	3	4
f_{n+1}	$fs^4s^1s^4f$	$fs^1s^4s^1f$	fs^2s^1gg	$fgfggf$	fs^3s^4gg
g_{n+1}	$gs^1s^4s^1g$	$gs^4s^1s^4g$	gs^2s^4ff	$fgfgfg$	gs^3s^1ff
s_{n+1}^1	s^1fgfs^1	s^1gfgs^1	$s^1s^2gs^4s^4$	$s^1s^4s^1s^4s^1$	$s^1s^3fs^4s^4$
s_{n+1}^2	$s^2s^2s^2s^2s^2$	$s^2s^2s^2s^2s^2$	$s^2s^2s^2s^2s^2$	$s^2s^2s^2s^2s^2$	$s^2s^2s^2s^2$
s_{n+1}^3	$s^3s^3s^3s^3s^3$	$s^3s^3s^3s^3s^3$	$s^3s^3s^3s^3$	$s^3s^3s^3s^3s^3$	$s^3s^3s^3s^3s^3$
s_{n+1}^4	s^4gfgs^4	s^4fgfs^4	$s^4s^2fs^1s^1$	$s^4s^1s^4s^1s^4$	$s^4s^3gs^1s^1$

Таблица 1: Выражения функций

Теорема 7. При $n \geq 1$ длина полинома периодической функции пятизначной логики $s_n^2 = f_n + 2g_n$ при поляризации $\delta = (d_1, \dots, d_n)$ выражается следующей формулой:

$$l(P^\delta(s_n^2)) = 5^{n-m} \cdot 4^m,$$

где m – количество 4 в векторе δ .

Доказательство. Так как s_n^2 симметрическая функция, то можно считать, что

$$d_i \in \{0, 1, 2, 3\}, i = 1, \dots, n-m \quad d_i = 4, i = n-m+1, \dots, n.$$

Доказательство проведем индукцией по n – числу переменных функции s_n^2 . При $n = 1$ получаем если $m = 0$, то $l(P^\delta(s_1^2)) = 5$, а если $m = 1$, то $l(P^\delta(s_1^2)) = 4$ – верно. Введем c – число функций s_{n-1}^2 , через которые выражается s_n^2 . Пусть формула верна для $n-1$, тогда из таблицы 1 видно, что s_n^2 выражается через $c = 5$ функций s_{n-1}^2 , если $d_n \in \{0, 1, 2, 3\}$ и через $c = 4$ функции s_{n-1}^2 , если $d_n = 4$ при каждой из которых x_n стоит в различных степенях. Пусть m' – количество 4 в векторе $(d_1, \dots, n-1)$. Поэтому $l(P^\delta(s_n^2)) = 5^{n-1-m'} \cdot 4^{m'} \cdot c = 5^{n-m} \cdot 4^m$. □

Теорема 8. При $n \geq 1$ длина полинома периодической функции пятизначной логики $s_n^3 = f_n + 3g_n$ при поляризации $\delta = (d_1, \dots, d_n)$ выражается следующей формулой:

$$l(P^\delta(s_n^3)) = 5^{n-m} \cdot 4^m,$$

где m – количество 2 в векторе δ .

Доказательство. Так как s_n^3 симметрическая функция, то можно считать, что

$$d_i \in \{0, 1, 3, 4\}, i = 1, \dots, n-m \quad d_i = 2, i = n-m+1, \dots, n.$$

Доказательство проведем индукцией по n – числу переменных функции s_n^3 . При $n = 1$ получаем если $m = 0$, то $l(P^\delta(s_1^3)) = 5$, а если $m = 1$, то $l(P^\delta(s_1^3)) = 4$ – верно. Введем c – число функций s_{n-1}^3 , через которые выражается s_n^3 . Пусть формула верна для $n-1$, тогда из таблицы 1 видно, что s_n^3 выражается через $c = 5$ функций s_{n-1}^3 , если $d_n \in \{0, 1, 3, 4\}$ и через $c = 4$ функции s_{n-1}^3 , если $d_n = 2$ при каждой из которых x_n стоит в различных степенях. Пусть m' – количество 4 в векторе $(d_1, \dots, n-1)$. Поэтому $l(P^\delta(s_n^3)) = 5^{n-1-m'} \cdot 4^{m'} \cdot c = 5^{n-m} \cdot 4^m$. \square

Обозначим s^1 и s^4 через h и t соответственно. Для удобства перепишем таблицу 1 в новых обозначениях:

q_{n+1}	0	1	2	3	4
f_{n+1}	$fthtf$	$fhthf$	fs^2hgg	$fgfgf$	fs^3tgg
g_{n+1}	$ghthg$	$gthtg$	gs^2tff	$gfgfg$	gs^3hff
h_{n+1}	$hfgfh$	$hgfgh$	hs^2gtt	$hthth$	hs^3ftt
t_{n+1}	$tgfgt$	$tfght$	ts^2fhh	$ththt$	ts^3ghh

Таблица 2: Выражения функций

Рассмотрим функции f_1, g_1, h_1, t_1 . В следующей таблице приведены длины этих функций, в зависимости от поляризации:

q_1	0	1	2	3	4
f_1	3	4	5	5	4
g_1	4	3	4	5	5
h_1	5	5	3	3	3
t_1	3	3	4	2	4

Таблица 3: Длины функций

Оценки для функций из класса \mathcal{F}

Нижняя оценка

Лемма 1. При векторе поляризации $\delta = (d_1, \dots, d_n), d_i \in \{0, 1, 3\}, i = 1, \dots, n$ и φ_n – любой функции из \mathcal{F}^n верно:

$$l(P^\delta(\varphi_n)) \geq \frac{2}{5} \cdot 5^n.$$

Доказательство. Из таблицы 3 видно, что при $n = 1$, $l(P^\delta(\varphi_1)) \geq 2$. По теореме 7 $l(P^\delta(s_n^2)) = 5^n$, а по теореме 8 $l(P^\delta(s_n^3)) = 5^n$. Функция φ_n выражается (см. таблицу 2) через 5 функций из \mathcal{F}^{n-1} или через 4 функции из \mathcal{F}^{n-1} и одну из функций $\{s_{n-1}^2, s_{n-1}^3\}$, поэтому

$$l(P^\delta(\varphi_n)) \geq \min\left(\frac{2}{5} \cdot 5^{n-1} \cdot 5, \frac{2}{5} \cdot 5^{n-1} \cdot 4 + 1 \cdot 5^{n-1}\right) = \frac{2}{5} \cdot 5^n.$$

□

Лемма 2. При векторе поляризации $\delta = (d_1, \dots, d_n), d_i \in \{0, 1, 3, 4\}, i = 1, \dots, n$ и φ_n – любой функции из \mathcal{F}^n верно:

$$l(P^\delta(\varphi_n)) \geq \frac{2}{5} \cdot 5^n.$$

Доказательство. Пусть m – количество 4 в векторе δ . Так как φ_n симметрическая функция, то можно считать, что

$$d_i \in \{0, 1, 3\}, i = 1, \dots, n - m \quad d_i = 4, i = n - m + 1, \dots, n.$$

Если $m = 0$, то $l(P^\delta(\varphi_n)) \geq \frac{2}{5} \cdot 5^n$ по предыдущей лемме. Если $m \neq 0$, то по предыдущей лемме для всех $\varphi \in \{f, g, h, t\}$ $l(P^\delta(\varphi_{n-m})) \geq \frac{2}{5} \cdot 5^{n-m}$. При переходе от $n - m$ к $n - m + 1$ переменная x_{n-m+1} имеет поляризацию 4 и φ_{n-m+1} выражается через 4 функции из \mathcal{F}^{n-m} и одну функцию s_{n-m}^3 , причем по теореме 8 $l(P^{(d_1, \dots, d_{n-m})}(s_{n-m}^3)) = 5^{n-m}$, поэтому $l(P^\delta(\varphi_{n-m+1})) \geq \frac{2}{5} \cdot 5^{n-m} \cdot 4 + 5^{n-m} > \frac{2}{5} \cdot 5^{n-m+1}$. Пусть $k = n - m + 1$, пока $k < n$ продолжим аналогичные рассуждения, переходя от k к $k + 1$. Получим, что

$$l(P^\delta(\varphi_n)) \geq \frac{2}{5} \cdot 5^n.$$

□

Лемма 3. При векторе поляризации $\delta = (d_1, \dots, d_n), d_i = 2, i = 1, \dots, n$ и φ_n – любой функции из \mathcal{F}^n верно:

$$l(P^\delta(\varphi_n)) \geq 5^n - \frac{1}{2} 4^n.$$

Доказательство. При поляризации $2k+1$ -ой переменной φ_{k+1} выражается через четыре функции из \mathcal{F}^k и одну функцию s_k^2 , причем $l(P^\delta(s_k^2)) = 5^k$, а из таблицы 3 видно, что минимальная длина среди функций из \mathcal{F}^1 при поляризации 2 равна 3. Поэтому выражение для длины φ_k можно получить решая следующую линейную неоднородную задачу:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= 4x_k + 5^k \\ x_1 &= 3 \end{aligned}$$

Решая эту задачу получим $l(P^\delta(\varphi_n)) \geq 5^n - \frac{1}{2}4^n$. \square

Лемма 4. При векторе поляризации $\delta = (d_1, \dots, d_n)$, $d_i = 2$, $i = 1, \dots, m$, $d_i = 4$, $i = n - m + 1, \dots, n$ и φ_n — любой функции из \mathcal{F}^n верно:

$$l(P^\delta(\varphi_n)) \geq \left(\left(\frac{5}{4} \right)^m - \frac{3}{2} \right) \cdot 4^n + 4^m \cdot 5^{n-m}.$$

Доказательство. Если $n = m$, то утверждение этой леммы следует из леммы 3, поэтому будем считать, что $n > m$. При $k > m$ при поляризации $4k+1$ -ой переменной φ_{k+1} выражается через четыре функции из \mathcal{F}^k и одну функцию s_k^3 , причем $l(P^\delta(s_k^3)) = 5^{k-m} \cdot 4^m$, а по лемме 3 $l(P^\delta(\varphi_m)) \geq 5^m - \frac{1}{2}4^m$. Поэтому выражение для длины φ_n можно получить решая следующую линейную неоднородную задачу:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= 4x_k + 5^{k-m} \cdot 4^m \\ x_m &= 5^m - \frac{1}{2}4^m \end{aligned}$$

Решая эту задачу получим $l(P^\delta(\varphi_n)) \geq \left(\left(\frac{5}{4} \right)^m - \frac{3}{2} \right) \cdot 4^n + 4^m \cdot 5^{n-m}$. \square

Теорема 9. При векторе поляризации $\delta = (d_1, \dots, d_n)$ и φ_n — любой функции из \mathcal{F}^n верно:

$$l(P^\delta(\varphi_n)) \geq \left(\left(\left(\frac{5}{4} \right)^{m_2} - \frac{3}{2} \right) \cdot 4^{m_2+m_4} + 4^{m_2} \cdot 5^{m_4} \right) \cdot 5^{n-m_2-m_4}, \text{ где}$$

m_2 — число 2 в δ , а m_4 — число 4.

Доказательство. Пусть в векторе δ сначала идут m_2 2, затем m_4 4 и $n - m_2 - m_4$ чисел из $\{0, 1, 3\}$. Тогда по лемме 4 $l(P^\delta(\varphi_{m_2+m_4})) \geq \left(\left(\frac{5}{4} \right)^{m_2} - \frac{3}{2} \right) \cdot 4^{m_2+m_4} + 4^{m_2} \cdot 5^{m_4}$. При поляризации из $\{0, 1, 3\}$ $k+1$ -ой переменной φ_{k+1} выражается через пять функций из \mathcal{F}^k . Из этого следует, что $l(P^\delta(\varphi_n)) \geq \left(\left(\left(\frac{5}{4} \right)^{m_2} - \frac{3}{2} \right) \cdot 4^{m_2+m_4} + 4^{m_2} \cdot 5^{m_4} \right) \cdot 5^{n-m_2-m_4}$. \square

Верхняя оценка

Теорема 10. Для любой функции φ_n из \mathcal{F}^n , при n четном верно:

$$l(\varphi_n) \leq 4^n \left(2 \cdot \left(\frac{5}{4} \right)^{\frac{n}{2}} - 1 \right).$$

Доказательство. Пусть $m = \frac{n}{2}$. Рассмотрим вектор $\delta = (d_1, \dots, d_n)$, $d_i = 2$, $i = 1, \dots, m$, $d_i = 4$, $i = m+1, \dots, n$. Сложность любой функции от k переменных не больше 5^k , поэтому $l(P^\delta(\varphi_m)) \leq 5^m$. При $k > m$ при поляризации 4 $k+1$ -ой переменной φ_{k+1} выражается через четыре функции из \mathcal{F}^k и одну функцию s_k^3 , причем $l(P^\delta(s_k^3)) = 5^{k-m} \cdot 4^m$. Поэтому выражение для длины φ_n можно получить решая следующую линейную неоднородную задачу:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= 4x_k + 5^{k-m} \cdot 4^m \\ x_m &= 5^m \end{aligned}$$

Решая эту задачу получим $l(P^\delta(\varphi_n)) \leq \left(\left(\frac{5}{4}\right)^m - 1\right) \cdot 4^n + 4^m \cdot 5^{n-m} = 4^n \left(2 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{n}{2}} - 1\right)$. □

Следствие. Класс функций \mathcal{A} является вырожденным.

Доказательство. По теоремам 7, 8 $l(s_n^2) = l(s_n^3) = 4^n = \bar{o}(5^n)$. По теореме 10 $l(\varphi_n) \leq 4^n \left(2 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{n}{2}} - 1\right)$, для любой функции $\varphi_n \in \mathcal{F}_n$. И $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n \left(2 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{n}{2}} - 1\right)}{5^n} = 0$, поэтому $4^n \left(2 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{n}{2}} - 1\right) = \bar{o}(5^n)$. □

Заключение

Математические результаты

1. Для всех функций из класса \mathcal{A} были построены все поляризованные полиномы, выражающие функции от $n + 1$ переменных через функции от n переменных также принадлежащих классу \mathcal{A} ;
2. Установлена точная длина, в зависимости от поляризации, для функций: s_n^2 и s_n^3 ;
3. Доказано несколько теорем и лемм, из которых получается нижняя оценка для функций из класса \mathcal{F} ;
4. Установлена верная оценка для функций из класса \mathcal{F} ;
5. Доказана вырожденность класса \mathcal{A} .

Программные результаты

Для получения результатов были написаны следующие программы:

- Программа на языке C++, реализующая построение поляризованных полиномов по модулю k , где $k \in 2, 3, 5, 7$, в программе используется алгоритм, описанный в [9];
- Для этой программы был написан интерфейс на языке Perl, представленный на рисунке 1;

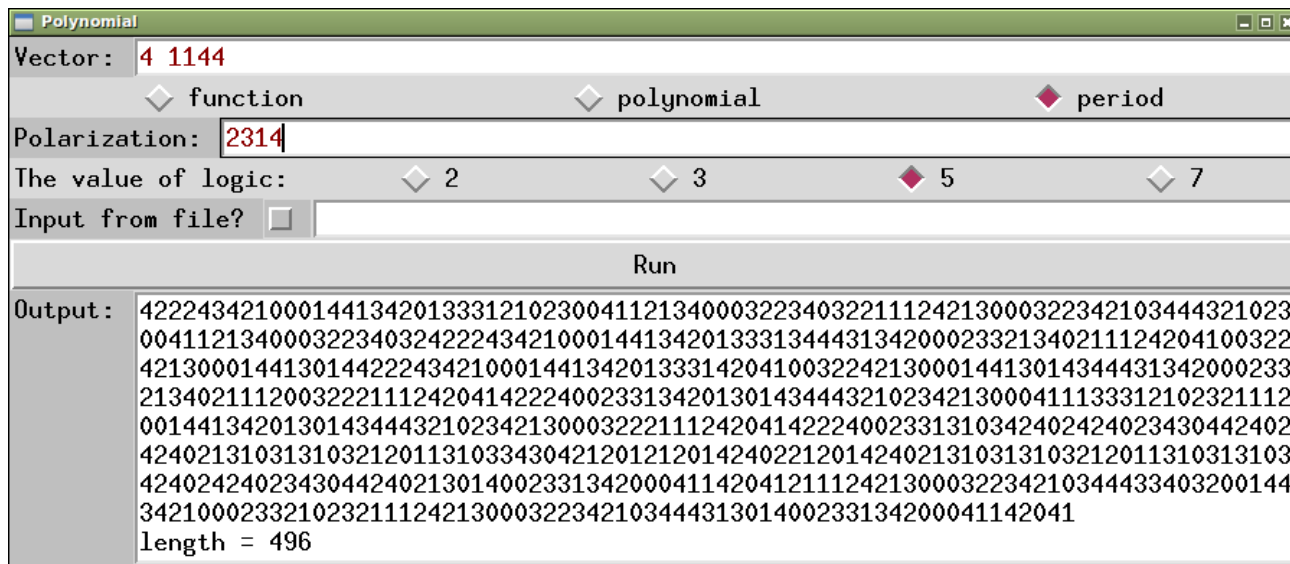


Рис. 1: Вид интерфейса

- Программа на языке C++, осуществляющая для заданного числа переменных n "быстрый" поиск функций длина которых, в классе поляризованных полиномов, больше заданного порога, среди заданного класса симметрических функций от n переменных;
- С помощью системы компьютерной алгебры Sage [10] были произведены: получение полиномиальных форм, поляризованных по разным векторам поляризации и подстановка значений в полиномы для проверки правильности их построения.

Коды всех программ доступны в моем репозитории, расположенном по адресу:
<https://www.github.com/obirvalger/diploma>.

Содержание

Введение	1
Основные определения	2
Результаты	4
Поляризованные полиномы для функций из класса \mathcal{A}	4
Обобщение результатов в таблицах	11
Оценки для функций из класса \mathcal{F}	13
Нижняя оценка	13
Верхняя оценка	14
Заключение	16
Математические результаты	16
Программные результаты	16
Список литературы	19

Список литературы

1. Угрюмов Е. П. Цифровая схемотехника. СПб.: БХВ-Петербург, 2004.
2. Sasao T., Besslich P. On the complexity of mod-2 sum PLA's // IEEE Trans.on Comput. 39. N 2. 1990. P. 262–266.
3. Супрун В. П. Сложность булевых функций в классе канонических поляризованных полиномов // Дискретная математика. 5. №2. 1993. С. 111–115.
4. Перязев Н. А. Сложность булевых функций в классе полиномиальных поляризованных форм // Алгебра и логика. 34. №3. 1995. С. 323–326.
5. Селезнева С. Н. О сложности представления функций многозначных логик поляризованными полиномами. Дискретная математика. 14. №2. 2002. С. 48–53.
6. Кириченко К. Д. Верхняя оценка сложности полиномиальных нормальных форм булевых функций // Дискретная математика. 17. №3. 2005. С. 80–88.
7. Селезнева С. Н. Дайняк А. Б. О сложности обобщенных полиномов k -значных функций // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. №3. 2008. С. 34–39.
8. Маркелов Н. К. Нижняя оценка сложности функций трехзначной логики в классе поляризованных полиномов // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. №3. 2012. С. 40–45.
9. Селезнева С. Н. Маркелов Н. К. Быстрый алгоритм построения векторов коэффициентов поляризованных полиномов k -значных функций // Ученые записки Казанского университета. Серия Физико-математические науки. 2009. 151. №2 С. 147–151.
10. [Sage] William A. Stein et al., Sage Mathematics Software (Version 6.4). The Sage Development Team, 2015, <http://www.sagemath.org>.