

Введение

Одним из стандартных способов задания функций k -значной логики являются поляризованные полиномиальные формы (ППФ), которые также называются обобщенными формами Рида-Мюллера, или каноническими поляризованными полиномами. В ППФ каждая переменная имеет определенную поляризацию. Длиной полиномиальной формы называется число попарно различных слагаемых в ней. Длиной функции F в классе ППФ называется наименьшая длина среди длин всех поляризованных полиномиальных форм, реализующих F . Функция Шеннона $L_k^K(n)$ длины определяется как наибольшая длина среди всех функций k -значной логики в классе K от n переменных, если K опущено, то подразумевается класс ППФ. Практическое применение ППФ нашли при построении программируемых логических матриц (ПЛМ) [1, 2], сложность ПЛМ напрямую зависит от длины ППФ, по которой она построена. Поэтому в ряде работ исследуется сложность ППФ различных функций.

В 1993 В. П. Супрун [3] получил первые оценки функции Шеннона для функций алгебры логики :

$$\begin{aligned} L_2(n) &\geq C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}, \\ L_2(n) &< 3 \cdot 2^{n-1}. \end{aligned}$$

где $\lfloor a \rfloor$ обозначает целую часть a .

Точное значение функции Шеннона для функций алгебры логики в 1995 г. было найдено Н. А. Перязевым [4] :

$$L_2(n) = \left\lceil \frac{2^{n+1}}{3} \right\rceil.$$

Функции k -значных логик являются естественным обобщением функций алгебры логики. Для функций k -значной логики верхняя оценка функции Шеннона была получена в 2002 г. С. Н. Селезневой [5] :

$$L_k(n) < \frac{k(k-1)}{k(k-1)+1} k^n.$$

При построении ПЛМ рассматривают и другие полиномиальные формы. Например класс обобщенных полиномиальных форм. В классе обобщенных полиномиальных форм, в отличие от класса поляризованных полиномиальных форм, переменные могут иметь различную поляризацию в разных слагаемых. В статье К. Д. Кириченко [6], опубликованной в 2005 г., получена верхняя оценка функции Шеннона в классе обобщенных полиномиальных форм функций алгебры логики :

$$L_2^{\text{О.П.}}(n) < \frac{2^{n+1}(\log_2 n + 1)}{n}.$$

Верхняя оценка функции Шеннона в классе обобщенных полиномиальных форм функций k -значной логики была получена С. Н. Селезневой А. Б. Дайняком в 2008 г. [7]:

$$L_k^{\text{О.П.}}(n) \lesssim 2 \cdot \frac{k^n}{n} \cdot \ln n \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

В 2012 г. Н. К. Маркеловым была получена нижняя оценка функции Шеннона для функции трехзначной логики в классе поляризованных полиномов [8]:

$$L_3(n) \geq \left\lceil \frac{3}{4} 3^n \right\rceil.$$

Основные определения

Пусть $k \geq 2$ – натуральное число, $E_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$. Весом набора $\alpha = (a_1, \dots, a_n) \in E_k^n$ назовем число $|\alpha| = \sum_{i=1}^n a_i$. Моном $\prod_{a_i \neq 0} x_i^{a_i}$ назовем соответствующим набору $\alpha = (a_1, \dots, a_n) \in E_k^n$ и обозначим через K_α . По определению положим, что константа 1 соответствует набору из всех нулей. Функцией k -значной логики называется отображение $f^{(n)} : E_k^n \rightarrow E_k$, $n = 0, 1, \dots$. Множество всех k -значных функций обозначим через P_k , множество всех k -значных функций, зависящих от переменных x_1, \dots, x_n , обозначим через P_k^n .

Если k – простое число, то каждая функция k -значной логики $f(x_1, \dots, x_n)$ может быть однозначно задана формулой вида

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\alpha \in E_k^n : c_f(\alpha) \neq 0} c_f(\alpha) K_\alpha,$$

где $c_f(\alpha) \in E_k$ – коэффициенты, $\alpha \in E_k^n$, и операции сложения и умножения рассматриваются по модулю k . Это представление функций k -значной логики называется ее полиномом по модулю k . При простых k однозначно определенным полином по модулю k для функции k -значной логики f будем обозначать через $P(f)$.

Определим поляризованные полиномиальные формы по модулю k . Поляризованной переменной x_i с поляризацией d , $d \in E_k$, назовем выражение вида $(x_i + d)$. Поляризованным мономом по вектору поляризации δ , $\delta = (d_1, \dots, d_n) \in E_k^n$, назовем произведение вида $(x_{i_1} + d_{i_1})^{m_1} \cdots (x_{i_r} + d_{i_r})^{m_r}$, где $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$, и $1 \leq m_1, \dots, m_r \leq k-1$. Обычный моном является мономом, поляризованным по вектору $\tilde{0} = (0, \dots, 0) \in E_k^n$.

Выражение вида $\sum_{i=1}^l c_i \cdot K_i$, где $c_i \in E_k \setminus \{0\}$ – коэффициенты, K_i – попарно различные мономы, поляризованные по вектору $\delta = (d_1, \dots, d_n) \in E_k^n$, $i = 1, \dots, l$, назовем поляризованной полиномиальной нормальной формой (ППФ) по вектору поляризации δ . Мы будем

считать, что константа 0 является ППФ по произвольному вектору поляризации. Заметим, что при простых k для каждого вектора поляризации каждую функцию k -значной логики можно однозначно представить ППФ по этому вектору поляризации [5]. При простых k однозначно определенную ППФ по вектору поляризации $\delta \in E_k^n$ для функции $f \in P_k^n$ будем обозначать через $P^\delta(f)$.

Длиной $l(p)$ ППФ p назовем число попарно различных слагаемых в этой ППФ. Положим, что $l(0) = 0$. При простых k длиной функции k -значной логики в классе ППФ называется величина $l^{\text{ППФ}}(f) = \min_{\delta \in E_k^n} l(P^\delta(f))$.

Сложностью системы ППФ, имеющих один и тот же вектор поляризации, называется число попарно различных слагаемых, встречающихся во всех этих ППФ. При простых k сложностью $L_k^{\text{ППФ}}(F)$ системы функций k -значной логики $F = \{f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)\}$ в классе ППФ называется минимальная сложность среди всех таких систем ППФ $\{p_1, \dots, p_m\}$, что все ППФ p_1, \dots, p_m имеют один и тот же вектор поляризации, и ППФ p_j реализует функцию f_j , $j = 1, \dots, m$. Понятно, что для произвольной системы функций k -значной логики $F = \{f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)\}$ верна оценка $L_k^{\text{ППФ}}(F) \leq k^n$.

Пусть k – простое число, и $A_k \subseteq P_k$, а $A_k^n = A_k \cap P_k^n$. Введем функцию Шеннона $L_{A_k}^{\text{ППФ}}(m, n)$ сложности систем функций k -значной логики, принадлежащих множеству A , в классе ППФ:

$$L_{A_k}^{\text{ППФ}}(m, n) = \max_{B \subseteq A_k^n, |B|=m} L_k^{\text{ППФ}}(B).$$

Если $A_k = P_k$, то функцию Шеннона будем обозначать через $L_{A_k}^{\text{ППФ}}(m, n)$.

Функция k -значной логики $f(x_1, \dots, x_n)$ называется симметрической, если

$$f(\pi(x_1), \dots, \pi(x_n)) = f(x_1, \dots, x_n)$$

для произвольной перестановки π на множестве переменных $\{x_1, \dots, x_n\}$. Множество всех симметрических функций k -значной логики обозначим через S_k . Симметрическая функция $f(x_1, \dots, x_n)$ называется периодической с периодом $\tau = (\tau_0 \tau_1 \dots \tau_{T-1}) \in E_k^T$, если $f(\alpha) = \tau_j$ при $|\alpha| = j \pmod{T}$ для каждого набора $\alpha \in E_k^n$. При этом число T называется длиной периода. Периодическую функцию k -значной логики $f(x_1, \dots, x_n)$ с периодом $\tau = (\tau_0 \tau_1 \dots \tau_{T-1}) \in E_k^T$ будем обозначать через $f_{(\tau_0 \tau_1 \dots \tau_{T-1})}^{(n)}$. Понятно, что такое обозначение полностью определяет эту функцию.

Введем функцию $rol(\alpha, i) \in E_k^n \times E_k \rightarrow E_k^n$, производящую циклический сдвиг вектора α влево. Пусть $\alpha = (a_1, \dots, a_n)$, тогда $rol(\alpha, i) = (a_{(1+i) \bmod k}, \dots, a_{(n+i) \bmod k})$.

Результаты

Теорема 1. При $n \geq 1$ для периодических функций пятизначной логики $f_n = f_{(1144)}^{(n)}$, $g_n = f_{(1441)}^{(n)}$ верны следующие равенства:

$$\begin{aligned} f_{n+1} &= j_0(x_{n+1})f_n + j_1(x_{n+1})g_n + 4j_2(x_{n+1})f_n + 4j_3(x_{n+1})g_n + j_4(x_{n+1})f_n = \\ &= 4f_n x_{n+1}^4 + (3f_n + 2g_n)x_{n+1}^3 + 3(f_n + g_n)x_{n+1}^2 + (4f_n + g_n)x_{n+1} + f_n = \\ &= 4f_n(x_{n+1} + 1)^4 + 2(f_n + g_n)(x_{n+1} + 1)^3 + (3f_n + 2g_n)(x_{n+1} + 1)^2 + (f_n + g_n)(x_{n+1} + 1) + f_n = \\ &= 4f_n(x_{n+1} + 2)^4 + (f_n + 2g_n)(x_{n+1} + 2)^3 + (f_n + g_n)(x_{n+1} + 2)^2 + 3g_n(x_{n+1} + 2) + 4g_n = \\ &= 4f_n(x_{n+1} + 3)^4 + 2g_n(x_{n+1} + 3)^3 + 2f_n(x_{n+1} + 3)^2 + 2g_n(x_{n+1} + 3) + 4f_n = \\ &= 4f_n(x_{n+1} + 4)^4 + 2(2f_n + g_n)(x_{n+1} + 4)^3 + (f_n + 4g_n)(x_{n+1} + 4)^2 + 3g_n(x_{n+1} + 4) + g_n = \end{aligned}$$

Доказательство. Первое равенство следует из теоремы 1.

При поляризации x_{n+1} , когда $d_{n+1} = 0$

$$\begin{aligned} f_{n+1}(\bar{x}_n, 0) &= 0 + 0 + 0 + 0 + f_n = f_n \\ f_{n+1}(\bar{x}_n, 1) &= 4f_n + 3f_n + 2g_n + 3f_n + 3g_n + 4f_n + g_n + f_n = g_n \\ f_{n+1}(\bar{x}_n, 2) &= 4f_n + 4f_n + g_n + 2f_n + 2g_n + 3f_n + 2g_n + f_n = 4f_n \\ f_{n+1}(\bar{x}_n, 3) &= 4f_n + f_n + 4g_n + 2f_n + 2g_n + 2f_n + 3g_n + f_n = 4g_n \\ f_{n+1}(\bar{x}_n, 4) &= 4f_n + 2f_n + 3g_n + 3f_n + 3g_n + f_n + 4g_n + f_n = f_n \end{aligned}$$

При поляризации x_{n+1} , когда $d_{n+1} = 1$

$$\begin{aligned} f_{n+1}(\bar{x}_n, 0) &= 4f_n + 2f_n + 2g_n + 3f_n + 2g_n + f_n + g_n + f_n = f_n \\ f_{n+1}(\bar{x}_n, 1) &= 4f_n + f_n + g_n + 2f_n + 3g_n + 2f_n + 2g_n + f_n = g_n \\ f_{n+1}(\bar{x}_n, 2) &= 4f_n + 4f_n + 4g_n + 2f_n + 3g_n + 3f_n + 3g_n + f_n = 4f_n \\ f_{n+1}(\bar{x}_n, 3) &= 4f_n + 3f_n + 3g_n + 3f_n + 2g_n + 4f_n + 4g_n + f_n = 4g_n \\ f_{n+1}(\bar{x}_n, 4) &= 0 + 0 + 0 + 0 + f_n = f_n \end{aligned}$$

При поляризации x_{n+1} , когда $d_{n+1} = 2$

$$\begin{aligned} f_{n+1}(\bar{x}_n, 0) &= 4f_n + 3f_n + g_n + 4f_n + 4g_n + g_n + 4g_n = f_n \\ f_{n+1}(\bar{x}_n, 1) &= 4f_n + 2f_n + 4g_n + 4f_n + 4g_n + 4g_n + 4g_n = g_n \\ f_{n+1}(\bar{x}_n, 2) &= 4f_n + 4f_n + 3g_n + f_n + g_n + 2g_n + 4g_n = 4f_n \\ f_{n+1}(\bar{x}_n, 3) &= 0 + 0 + 0 + 0 + 4g_n = 4g_n \\ f_{n+1}(\bar{x}_n, 4) &= 4f_n + f_n + 2g_n + f_n + g_n + 3g_n + 4g_n = f_n \end{aligned}$$

При поляризации x_{n+1} , когда $d_{n+1} = 3$

$$\begin{aligned} f_{n+1}(\bar{x}_n, 0) &= 4f_n + 4g_n + 3f_n + g_n + 4f_n = f_n \\ f_{n+1}(\bar{x}_n, 1) &= 4f_n + 3g_n + 2f_n + 3g_n + 4f_n = g_n \\ f_{n+1}(\bar{x}_n, 2) &= 0 + 0 + 0 + 0 + 4f_n = 4f_n \\ f_{n+1}(\bar{x}_n, 3) &= 4f_n + 2g_n + 2f_n + 2g_n + 4f_n = 4g_n \\ f_{n+1}(\bar{x}_n, 4) &= 4f_n + g_n + 3f_n + 4g_n + 4f_n = f_n \end{aligned}$$

При поляризации x_{n+1} , когда $d_{n+1} = 4$

$$\begin{aligned} f_{n+1}(\bar{x}_n, 0) &= 4f_n + f_n + 3g_n + f_n + 4g_n + 2g_n + g_n = f_n \\ f_{n+1}(\bar{x}_n, 1) &= 0 + 0 + 0 + 0 + g_n = g_n \\ f_{n+1}(\bar{x}_n, 2) &= 4f_n + 4f_n + 2g_n + f_n + g_n + 3g_n + g_n = 4f_n \\ f_{n+1}(\bar{x}_n, 3) &= 4f_n + 2f_n + g_n + 4f_n + g_n + g_n + g_n = 4g_n \\ f_{n+1}(\bar{x}_n, 4) &= 4f_n + 3f_n + 4g_n + 4f_n + g_n + 4g_n + g_n = f_n \end{aligned}$$

□

Теорема 2. При $n \geq 1$ для периодических функций пятизначной логики $f_n = f_{(1144)}^{(n)}$, $g_n = f_{(1441)}^{(n)}$ верны следующие равенства:

$$\begin{aligned} g_{n+1} &= j_0(x_{n+1})g_n + 4j_1(x_{n+1})f_n + 4j_2(x_{n+1})g_n + j_3(x_{n+1})f_n + j_4(x_{n+1})g_n = \\ &= 4g_n x_{n+1}^4 + 3(f_n + g_n)x_{n+1}^3 + (2f_n + 3g_n)x_{n+1}^2 + 4(f_n + g_n)x_{n+1} + g_n = \\ &= 4g_n(x_{n+1} + 1)^4 + (3f_n + 2g_n)(x_{n+1} + 1)^3 + 3(f_n + g_n)(x_{n+1} + 1)^2 + (4f_n + g_n)(x_{n+1} + 1) + g_n = \\ &= 4g_n(x_{n+1} + 2)^4 + (3f_n + g_n)(x_{n+1} + 2)^3 + (4f_n + g_n)(x_{n+1} + 2)^2 + 2f_n(x_{n+1} + 2) + f_n = \\ &= 4g_n(x_{n+1} + 3)^4 + 3f_n(x_{n+1} + 3)^3 + 2g_n(x_{n+1} + 3)^2 + 3f_n(x_{n+1} + 3) + 4g_n = \\ &= 4g_n(x_{n+1} + 4)^4 + (3f_n + 4g_n)(x_{n+1} + 4)^3 + (f_n + g_n)(x_{n+1} + 4)^2 + 2f_n(x_{n+1} + 4) + 4f_n = \end{aligned}$$

Доказательство. Первое равенство следует из теоремы 1.

При поляризации x_{n+1} , когда $d_{n+1} = 0$

$$\begin{aligned} g_{n+1}(\bar{x}_n, 0) &= 0 + 0 + 0 + 0 + g_n = g_n \\ g_{n+1}(\bar{x}_n, 1) &= 4g_n + 3f_n + 3g_n + 2f_n + 3g_n + 4f_n + 4g_n + g_n = 4f_n \\ g_{n+1}(\bar{x}_n, 2) &= 4g_n + 4f_n + 4g_n + 3f_n + 2g_n + 3f_n + 3g_n + g_n = 4g_n \\ g_{n+1}(\bar{x}_n, 3) &= 4g_n + f_n + g_n + 3f_n + 2g_n + 2f_n + 2g_n + g_n = f_n \\ g_{n+1}(\bar{x}_n, 4) &= 4g_n + 2f_n + 2g_n + 2f_n + 3g_n + f_n + g_n + g_n = g_n \end{aligned}$$

При поляризации x_{n+1} , когда $d_{n+1} = 1$

$$\begin{aligned} g_{n+1}(\bar{x}_n, 0) &= 4g_n + 3f_n + 2g_n + 3f_n + 3g_n + 4f_n + g_n + g_n = g_n \\ g_{n+1}(\bar{x}_n, 1) &= 4g_n + 4f_n + g_n + 2f_n + 2g_n + 3f_n + 2g_n + g_n = 4f_n \\ g_{n+1}(\bar{x}_n, 2) &= 4g_n + f_n + 4g_n + 2f_n + 2g_n + 2f_n + 3g_n + g_n = 4g_n \\ g_{n+1}(\bar{x}_n, 3) &= 4g_n + 2f_n + 3g_n + 3f_n + 3g_n + f_n + 4g_n + g_n = f_n \\ g_{n+1}(\bar{x}_n, 4) &= 0 + 0 + 0 + 0 + g_n = g_n \end{aligned}$$

При поляризации x_{n+1} , когда $d_{n+1} = 2$

$$\begin{aligned} g_{n+1}(\bar{x}_n, 0) &= 4g_n + 4f_n + 3g_n + f_n + 4g_n + 4f_n + f_n = g_n \\ g_{n+1}(\bar{x}_n, 1) &= 4g_n + f_n + 2g_n + f_n + 4g_n + f_n + f_n = 4f_n \\ g_{n+1}(\bar{x}_n, 2) &= 4g_n + 2f_n + 4g_n + 4f_n + g_n + 3f_n + f_n = 4g_n \\ g_{n+1}(\bar{x}_n, 3) &= 0 + 0 + 0 + 0 + f_n = f_n \\ g_{n+1}(\bar{x}_n, 4) &= 4g_n + 3f_n + g_n + 4f_n + g_n + 2f_n + f_n = g_n \end{aligned}$$

При поляризации x_{n+1} , когда $d_{n+1} = 3$

$$\begin{aligned} g_{n+1}(\bar{x}_n, 0) &= 4g_n + f_n + 3g_n + 4f_n + 4g_n = g_n \\ g_{n+1}(\bar{x}_n, 1) &= 4g_n + 2f_n + 2g_n + 2f_n + 4g_n = 4f_n \\ g_{n+1}(\bar{x}_n, 2) &= 0 + 0 + 0 + 0 + 4g_n = 4g_n \\ g_{n+1}(\bar{x}_n, 3) &= 4g_n + 3f_n + 2g_n + 3f_n + 4g_n = f_n \\ g_{n+1}(\bar{x}_n, 4) &= 4g_n + 4f_n + 3g_n + f_n + 4g_n = g_n \end{aligned}$$

При поляризации x_{n+1} , когда $d_{n+1} = 4$

$$\begin{aligned} g_{n+1}(\bar{x}_n, 0) &= 4g_n + 2f_n + g_n + f_n + g_n + 3f_n + 4f_n = g_n \\ g_{n+1}(\bar{x}_n, 1) &= 0 + 0 + 0 + 0 + 4f_n = 4f_n \\ g_{n+1}(\bar{x}_n, 2) &= 4g_n + 3f_n + 4g_n + f_n + g_n + 2f_n + 4f_n = 4g_n \\ g_{n+1}(\bar{x}_n, 3) &= 4g_n + 4f_n + 2g_n + 4f_n + 4g_n + 4f_n + 4f_n = f_n \\ g_{n+1}(\bar{x}_n, 4) &= 4g_n + f_n + 3g_n + 4f_n + 4g_n + f_n + 4f_n = g_n \end{aligned}$$

□

Теорема 3. При $n \geq 1$ для периодических функций пятизначной логики $f_n = f_{(1144)}^{(n)}$, $g_n = f_{(1441)}^{(n)}$ верны следующие равенства:

$$\begin{aligned} s_{n+1}^1 &= f_{n+1} + g_{n+1} = \\ &= (4f_n + 4g_n)x^4 + f_n x^3 + g_n x^2 + 3f_n x + f_n + g_n = \\ &= (4f_n + 4g_n)(x+1)^4 + 4g_n(x+1)^3 + f_n(x+1)^2 + 2g_n(x+1) + f_n + g_n = \\ &= (4f_n + 4g_n)(x+2)^4 + (4f_n + 3g_n)(x+2)^3 + 2g_n(x+2)^2 + (2f_n + 3g_n)(x+2) + f_n + 4g_n = \\ &= (4f_n + 4g_n)(x+3)^4 + (3f_n + 2g_n)(x+3)^3 + 2(f_n + g_n)(x+3)^2 + (3f_n + 2g_n)(x+3) + 4f_n + 4g_n = \\ &= (4f_n + 4g_n)(x+4)^4 + (2f_n + g_n)(x+4)^3 + 2f_n(x+4)^2 + (2f_n + 3g_n)(x+4) + 4f_n + g_n = \end{aligned}$$

Доказательство. Первое равенство следует из теоремы 1.

При поляризации x_{n+1} , когда $d_{n+1} = 0$

$$\begin{aligned} s_{n+1}^1(\bar{x}_n, 0) &= 0 + 0 + 0 + 0 + f_n + g_n = f_n + g_n \\ s_{n+1}^1(\bar{x}_n, 1) &= 4f_n + 4g_n + f_n + g_n + 3f_n + f_n + g_n = 4f_n + g_n \\ s_{n+1}^1(\bar{x}_n, 2) &= 4f_n + 4g_n + 3f_n + 4g_n + f_n + f_n + g_n = 4f_n + 4g_n \\ s_{n+1}^1(\bar{x}_n, 3) &= 4f_n + 4g_n + 2f_n + 4g_n + 4f_n + f_n + g_n = f_n + 4g_n \\ s_{n+1}^1(\bar{x}_n, 4) &= 4f_n + 4g_n + 4f_n + g_n + 2f_n + f_n + g_n = f_n + g_n \end{aligned}$$

При поляризации x_{n+1} , когда $d_{n+1} = 1$

$$\begin{aligned} s_{n+1}^1(\bar{x}_n, 0) &= 4f_n + 4g_n + 4g_n + f_n + 2g_n + f_n + g_n = f_n + g_n \\ s_{n+1}^1(\bar{x}_n, 1) &= 4f_n + 4g_n + 2g_n + 4f_n + 4g_n + f_n + g_n = 4f_n + g_n \\ s_{n+1}^1(\bar{x}_n, 2) &= 4f_n + 4g_n + 3g_n + 4f_n + g_n + f_n + g_n = 4f_n + 4g_n \\ s_{n+1}^1(\bar{x}_n, 3) &= 4f_n + 4g_n + g_n + f_n + 3g_n + f_n + g_n = f_n + 4g_n \\ s_{n+1}^1(\bar{x}_n, 4) &= 0 + 0 + 0 + 0 + f_n + g_n = f_n + g_n \end{aligned}$$

При поляризации x_{n+1} , когда $d_{n+1} = 2$

$$\begin{aligned} s_{n+1}^1(\bar{x}_n, 0) &= 4f_n + 4g_n + 2f_n + 4g_n + 3g_n + 4f_n + g_n + f_n + 4g_n = f_n + g_n \\ s_{n+1}^1(\bar{x}_n, 1) &= 4f_n + 4g_n + 3f_n + g_n + 3g_n + f_n + 4g_n + f_n + 4g_n = 4f_n + g_n \\ s_{n+1}^1(\bar{x}_n, 2) &= 4f_n + 4g_n + f_n + 2g_n + 2g_n + 3f_n + 2g_n + f_n + 4g_n = 4f_n + 4g_n \\ s_{n+1}^1(\bar{x}_n, 3) &= 0 + 0 + 0 + 0 + f_n + 4g_n = f_n + 4g_n \\ s_{n+1}^1(\bar{x}_n, 4) &= 4f_n + 4g_n + 4f_n + 3g_n + 2g_n + 2f_n + 3g_n + f_n + 4g_n = f_n + g_n \end{aligned}$$

При поляризации x_{n+1} , когда $d_{n+1} = 3$

$$\begin{aligned} s_{n+1}^1(\bar{x}_n, 0) &= 4f_n + 4g_n + f_n + 4g_n + 3f_n + 3g_n + 4f_n + g_n + 4f_n + 4g_n = f_n + g_n \\ s_{n+1}^1(\bar{x}_n, 1) &= 4f_n + 4g_n + 2f_n + 3g_n + 2f_n + 2g_n + 2f_n + 3g_n + 4f_n + 4g_n = 4f_n + g_n \\ s_{n+1}^1(\bar{x}_n, 2) &= 0 + 0 + 0 + 0 + 4f_n + 4g_n = 4f_n + 4g_n \\ s_{n+1}^1(\bar{x}_n, 3) &= 4f_n + 4g_n + 3f_n + 2g_n + 2f_n + 2g_n + 3f_n + 2g_n + 4f_n + 4g_n = f_n + 4g_n \\ s_{n+1}^1(\bar{x}_n, 4) &= 4f_n + 4g_n + 4f_n + g_n + 3f_n + 3g_n + f_n + 4g_n + 4f_n + 4g_n = f_n + g_n \end{aligned}$$

При поляризации x_{n+1} , когда $d_{n+1} = 4$

$$\begin{aligned} s_{n+1}^1(\bar{x}_n, 0) &= 4f_n + 4g_n + 3f_n + 4g_n + 2f_n + 3f_n + 2g_n + 4f_n + g_n = f_n + g_n \\ s_{n+1}^1(\bar{x}_n, 1) &= 0 + 0 + 0 + 0 + 4f_n + g_n = 4f_n + g_n \\ s_{n+1}^1(\bar{x}_n, 2) &= 4f_n + 4g_n + 2f_n + g_n + 2f_n + 2f_n + 3g_n + 4f_n + g_n = 4f_n + 4g_n \\ s_{n+1}^1(\bar{x}_n, 3) &= 4f_n + 4g_n + f_n + 3g_n + 3f_n + 4f_n + g_n + 4f_n + g_n = f_n + 4g_n \\ s_{n+1}^1(\bar{x}_n, 4) &= 4f_n + 4g_n + 4f_n + 2g_n + 3f_n + f_n + 4g_n + 4f_n + g_n = f_n + g_n \end{aligned}$$

□

Теорема 4. При $n \geq 1$ для периодических функций пятизначной логики $f_n = f_{(1144)}^{(n)}$, $g_n = f_{(1441)}^{(n)}$ верны следующие равенства:

$$\begin{aligned} s_{n+1}^2 &= f_{n+1} + 2g_{n+1} = \\ &= (4f_n + 3g_n)x^4 + (4f_n + 3g_n)x^3 + (2f_n + 4g_n)x^2 + (2f_n + 4g_n)x + f_n + 2g_n = \\ &= (4f_n + 3g_n)(x+1)^4 + (3f_n + g_n)(x+1)^3 + (4f_n + 3g_n)(x+1)^2 + (4f_n + 3g_n)(x+1) + f_n + 2g_n = \\ &= (4f_n + 3g_n)(x+2)^4 + (2f_n + 4g_n)(x+2)^3 + (4f_n + 3g_n)(x+2)^2 + (4f_n + 3g_n)(x+2) + 2f_n + 4g_n = \\ &= (4f_n + 3g_n)(x+3)^4 + (f_n + 2g_n)(x+3)^3 + 2(f_n + 2g_n)(x+3)^2 + (f_n + 2g_n)(x+3) + 4f_n + 3g_n = \\ &= (4f_n + 3g_n)(x+4)^4 + (3f_n + g_n)(x+4)^2 + (4f_n + 3g_n)(x+4) + 3f_n + g_n = \end{aligned}$$

Доказательство. Первое равенство следует из теоремы 1.

При поляризации x_{n+1} , когда $d_{n+1} = 0$

$$\begin{aligned} s_{n+1}^2(\bar{x}_n, 0) &= 0 + 0 + 0 + 0 + f_n + 2g_n = f_n + 2g_n \\ s_{n+1}^2(\bar{x}_n, 1) &= 4f_n + 3g_n + 4f_n + 3g_n + 2f_n + 4g_n + 2f_n + 4g_n + f_n + 2g_n = 3f_n + g_n \\ s_{n+1}^2(\bar{x}_n, 2) &= 4f_n + 3g_n + 2f_n + 4g_n + 3f_n + g_n + 4f_n + 3g_n + f_n + 2g_n = 4f_n + 3g_n \\ s_{n+1}^2(\bar{x}_n, 3) &= 4f_n + 3g_n + 3f_n + g_n + 3f_n + g_n + f_n + 2g_n + f_n + 2g_n = 2f_n + 4g_n \\ s_{n+1}^2(\bar{x}_n, 4) &= 4f_n + 3g_n + f_n + 2g_n + 2f_n + 4g_n + 3f_n + g_n + f_n + 2g_n = f_n + 2g_n \end{aligned}$$

При поляризации x_{n+1} , когда $d_{n+1} = 1$

$$\begin{aligned} s_{n+1}^2(\bar{x}_n, 0) &= 4f_n + 3g_n + 3f_n + g_n + 4f_n + 3g_n + 4f_n + 3g_n + f_n + 2g_n = f_n + 2g_n \\ s_{n+1}^2(\bar{x}_n, 1) &= 4f_n + 3g_n + 4f_n + 3g_n + f_n + 2g_n + 3f_n + g_n + f_n + 2g_n = 3f_n + g_n \\ s_{n+1}^2(\bar{x}_n, 2) &= 4f_n + 3g_n + f_n + 2g_n + f_n + 2g_n + 2f_n + 4g_n + f_n + 2g_n = 4f_n + 3g_n \\ s_{n+1}^2(\bar{x}_n, 3) &= 4f_n + 3g_n + 2f_n + 4g_n + 4f_n + 3g_n + f_n + 2g_n + f_n + 2g_n = 2f_n + 4g_n \\ s_{n+1}^2(\bar{x}_n, 4) &= 0 + 0 + 0 + 0 + f_n + 2g_n = f_n + 2g_n \end{aligned}$$

При поляризации x_{n+1} , когда $d_{n+1} = 2$

$$\begin{aligned} s_{n+1}^2(\bar{x}_n, 0) &= 4f_n + 3g_n + f_n + 2g_n + f_n + 2g_n + 3f_n + g_n + 2f_n + 4g_n = f_n + 2g_n \\ s_{n+1}^2(\bar{x}_n, 1) &= 4f_n + 3g_n + 4f_n + 3g_n + f_n + 2g_n + 2f_n + 4g_n + 2f_n + 4g_n = 3f_n + g_n \\ s_{n+1}^2(\bar{x}_n, 2) &= 4f_n + 3g_n + 3f_n + g_n + 4f_n + 3g_n + f_n + 2g_n + 2f_n + 4g_n = 4f_n + 3g_n \\ s_{n+1}^2(\bar{x}_n, 3) &= 0 + 0 + 0 + 0 + 2f_n + 4g_n = 2f_n + 4g_n \\ s_{n+1}^2(\bar{x}_n, 4) &= 4f_n + 3g_n + 2f_n + 4g_n + 4f_n + 3g_n + 4f_n + 3g_n + 2f_n + 4g_n = f_n + 2g_n \end{aligned}$$

При поляризации x_{n+1} , когда $d_{n+1} = 3$

$$\begin{aligned} s_{n+1}^2(\bar{x}_n, 0) &= 4f_n + 3g_n + 2f_n + 4g_n + 3f_n + g_n + 3f_n + g_n + 4f_n + 3g_n = f_n + 2g_n \\ s_{n+1}^2(\bar{x}_n, 1) &= 4f_n + 3g_n + 4f_n + 3g_n + 2f_n + 4g_n + 4f_n + 3g_n + 4f_n + 3g_n = 3f_n + g_n \\ s_{n+1}^2(\bar{x}_n, 2) &= 0 + 0 + 0 + 0 + 4f_n + 3g_n = 4f_n + 3g_n \\ s_{n+1}^2(\bar{x}_n, 3) &= 4f_n + 3g_n + f_n + 2g_n + 2f_n + 4g_n + f_n + 2g_n + 4f_n + 3g_n = 2f_n + 4g_n \\ s_{n+1}^2(\bar{x}_n, 4) &= 4f_n + 3g_n + 3f_n + g_n + 3f_n + g_n + 2f_n + 4g_n + 4f_n + 3g_n = f_n + 2g_n \end{aligned}$$

При поляризации x_{n+1} , когда $d_{n+1} = 4$

$$\begin{aligned} s_{n+1}^2(\bar{x}_n, 0) &= 4f_n + 3g_n + 0 + 3f_n + g_n + f_n + 2g_n + 3f_n + g_n = f_n + 2g_n \\ s_{n+1}^2(\bar{x}_n, 1) &= 0 + 0 + 0 + 0 + 3f_n + g_n = 3f_n + g_n \\ s_{n+1}^2(\bar{x}_n, 2) &= 4f_n + 3g_n + 0 + 3f_n + g_n + 4f_n + 3g_n + 3f_n + g_n = 4f_n + 3g_n \\ s_{n+1}^2(\bar{x}_n, 3) &= 4f_n + 3g_n + 0 + 2f_n + 4g_n + 3f_n + g_n + 3f_n + g_n = 2f_n + 4g_n \\ s_{n+1}^2(\bar{x}_n, 4) &= 4f_n + 3g_n + 0 + 2f_n + 4g_n + 2f_n + 4g_n + 3f_n + g_n = f_n + 2g_n \end{aligned}$$

□

Теорема 5. При $n \geq 1$ для периодических функций пятизначной логики $f_n = f_{(1144)}^{(n)}$, $g_n = f_{(1441)}^{(n)}$ верны следующие равенства:

$$\begin{aligned} s_{n+1}^3 &= f_{n+1} + 3g_{n+1} = \\ (4f_n + 2g_n)x^4 + (2f_n + g_n)x^3 + (4f_n + 2g_n)x^2 + (f_n + 3g_n)x + f_n + 3g_n &= \\ (4f_n + 2g_n)(x+1)^4 + (f_n + 3g_n)(x+1)^3 + (2f_n + g_n)(x+1)^2 + (3f_n + 4g_n)(x+1) + f_n + 3g_n &= \\ (4f_n + 2g_n)(x+2)^4 + (3f_n + 4g_n)(x+2)^2 + (f_n + 3g_n)(x+2) + 3f_n + 4g_n &= \\ (4f_n + 2g_n)(x+3)^4 + (4f_n + 2g_n)(x+3)^3 + 2(f_n + 3g_n)(x+3)^2 + (4f_n + 2g_n)(x+3) + 4f_n + 2g_n &= \\ (4f_n + 2g_n)(x+4)^4 + (3f_n + 4g_n)(x+4)^3 + (4f_n + 2g_n)(x+4)^2 + (f_n + 3g_n)(x+4) + 2f_n + g_n &= \end{aligned}$$

Доказательство. Первое равенство следует из теоремы 1.

При поляризации x_{n+1} , когда $d_{n+1} = 0$

$$\begin{aligned} s_{n+1}^3(\bar{x}_n, 0) &= 0 + 0 + 0 + 0 + f_n + 3g_n = f_n + 3g_n \\ s_{n+1}^3(\bar{x}_n, 1) &= 4f_n + 2g_n + 2f_n + g_n + 4f_n + 2g_n + f_n + 3g_n + f_n + 3g_n = 2f_n + g_n \\ s_{n+1}^3(\bar{x}_n, 2) &= 4f_n + 2g_n + f_n + 3g_n + f_n + 3g_n + 2f_n + g_n + f_n + 3g_n = 4f_n + 2g_n \\ s_{n+1}^3(\bar{x}_n, 3) &= 4f_n + 2g_n + 4f_n + 2g_n + f_n + 3g_n + 3f_n + 4g_n + f_n + 3g_n = 3f_n + 4g_n \\ s_{n+1}^3(\bar{x}_n, 4) &= 4f_n + 2g_n + 3f_n + 4g_n + 4f_n + 2g_n + 4f_n + 2g_n + f_n + 3g_n = f_n + 3g_n \end{aligned}$$

При поляризации x_{n+1} , когда $d_{n+1} = 1$

$$\begin{aligned} s_{n+1}^3(\bar{x}_n, 0) &= 4f_n + 2g_n + f_n + 3g_n + 2f_n + g_n + 3f_n + 4g_n + f_n + 3g_n = f_n + 3g_n \\ s_{n+1}^3(\bar{x}_n, 1) &= 4f_n + 2g_n + 3f_n + 4g_n + 3f_n + 4g_n + f_n + 3g_n + f_n + 3g_n = 2f_n + g_n \\ s_{n+1}^3(\bar{x}_n, 2) &= 4f_n + 2g_n + 2f_n + g_n + 3f_n + 4g_n + 4f_n + 2g_n + f_n + 3g_n = 4f_n + 2g_n \\ s_{n+1}^3(\bar{x}_n, 3) &= 4f_n + 2g_n + 4f_n + 2g_n + 2f_n + g_n + 2f_n + g_n + f_n + 3g_n = 3f_n + 4g_n \\ s_{n+1}^3(\bar{x}_n, 4) &= 0 + 0 + 0 + 0 + f_n + 3g_n = f_n + 3g_n \end{aligned}$$

При поляризации x_{n+1} , когда $d_{n+1} = 2$

$$\begin{aligned} s_{n+1}^3(\bar{x}_n, 0) &= 4f_n + 2g_n + 0 + 2f_n + g_n + 2f_n + g_n + 3f_n + 4g_n = f_n + 3g_n \\ s_{n+1}^3(\bar{x}_n, 1) &= 4f_n + 2g_n + 0 + 2f_n + g_n + 3f_n + 4g_n + 3f_n + 4g_n = 2f_n + g_n \\ s_{n+1}^3(\bar{x}_n, 2) &= 4f_n + 2g_n + 0 + 3f_n + 4g_n + 4f_n + 2g_n + 3f_n + 4g_n = 4f_n + 2g_n \\ s_{n+1}^3(\bar{x}_n, 3) &= 0 + 0 + 0 + 0 + 3f_n + 4g_n = 3f_n + 4g_n \\ s_{n+1}^3(\bar{x}_n, 4) &= 4f_n + 2g_n + 0 + 3f_n + 4g_n + f_n + 3g_n + 3f_n + 4g_n = f_n + 3g_n \end{aligned}$$

При поляризации x_{n+1} , когда $d_{n+1} = 3$

$$\begin{aligned} s_{n+1}^3(\bar{x}_n, 0) &= 4f_n + 2g_n + 3f_n + 4g_n + 3f_n + 4g_n + 2f_n + g_n + 4f_n + 2g_n = f_n + 3g_n \\ s_{n+1}^3(\bar{x}_n, 1) &= 4f_n + 2g_n + f_n + 3g_n + 2f_n + g_n + f_n + 3g_n + 4f_n + 2g_n = 2f_n + g_n \\ s_{n+1}^3(\bar{x}_n, 2) &= 0 + 0 + 0 + 0 + 4f_n + 2g_n = 4f_n + 2g_n \\ s_{n+1}^3(\bar{x}_n, 3) &= 4f_n + 2g_n + 4f_n + 2g_n + 2f_n + g_n + 4f_n + 2g_n + 4f_n + 2g_n = 3f_n + 4g_n \\ s_{n+1}^3(\bar{x}_n, 4) &= 4f_n + 2g_n + 2f_n + g_n + 3f_n + 4g_n + 3f_n + 4g_n + 4f_n + 2g_n = f_n + 3g_n \end{aligned}$$

При поляризации x_{n+1} , когда $d_{n+1} = 4$

$$\begin{aligned} s_{n+1}^3(\bar{x}_n, 0) &= 4f_n + 2g_n + 2f_n + g_n + 4f_n + 2g_n + 4f_n + 2g_n + 2f_n + g_n = f_n + 3g_n \\ s_{n+1}^3(\bar{x}_n, 1) &= 0 + 0 + 0 + 0 + 2f_n + g_n = 2f_n + g_n \\ s_{n+1}^3(\bar{x}_n, 2) &= 4f_n + 2g_n + 3f_n + 4g_n + 4f_n + 2g_n + f_n + 3g_n + 2f_n + g_n = 4f_n + 2g_n \\ s_{n+1}^3(\bar{x}_n, 3) &= 4f_n + 2g_n + 4f_n + 2g_n + f_n + 3g_n + 2f_n + g_n + 2f_n + g_n = 3f_n + 4g_n \\ s_{n+1}^3(\bar{x}_n, 4) &= 4f_n + 2g_n + f_n + 3g_n + f_n + 3g_n + 3f_n + 4g_n + 2f_n + g_n = f_n + 3g_n \end{aligned}$$

□

Теорема 6. При $n \geq 1$ для периодических функций пятизначной логики $f_n = f_{(1144)}^{(n)}$, $g_n = f_{(1441)}^{(n)}$ верны следующие равенства:

$$\begin{aligned}
s_{n+1}^4 &= f_{n+1} + 4g_{n+1} = \\
&(4f_n + g_n)x^4 + 4g_nx^3 + f_nx^2 + 2g_nx + f_n + 4g_n = \\
&(4f_n + g_n)(x+1)^4 + 4f_n(x+1)^3 + 4g_n(x+1)^2 + 2f_n(x+1) + 5g_n(x+1) + f_n + 4g_n = \\
&(4f_n + g_n)(x+2)^4 + (3f_n + g_n)(x+2)^3 + 2f_n(x+2)^2 + (3f_n + 3g_n)(x+2) + 4f_n + 4g_n = \\
&(4f_n + g_n)(x+3)^4 + (2f_n + 2g_n)(x+3)^3 + 2(f_n + 4g_n)(x+3)^2 + (2f_n + 2g_n)(x+3) + 4f_n + g_n = \\
&(4f_n + g_n)(x+4)^4 + (f_n + 3g_n)(x+4)^3 + 5f_n(x+4)^2 + 3g_n(x+4)^2 + (3f_n + 3g_n)(x+4) + f_n + g_n =
\end{aligned}$$

Доказательство. Первое равенство следует из теоремы 1.

При поляризации x_{n+1} , когда $d_{n+1} = 0$

$$\begin{aligned}
s_{n+1}^4(\bar{x}_n, 0) &= 0 + 0 + 0 + 0 + f_n + 4g_n = f_n + 4g_n \\
s_{n+1}^4(\bar{x}_n, 1) &= 4f_n + g_n + 4g_n + f_n + 2g_n + f_n + 4g_n = f_n + g_n \\
s_{n+1}^4(\bar{x}_n, 2) &= 4f_n + g_n + 2g_n + 4f_n + 4g_n + f_n + 4g_n = 4f_n + g_n \\
s_{n+1}^4(\bar{x}_n, 3) &= 4f_n + g_n + 3g_n + 4f_n + g_n + f_n + 4g_n = 4f_n + 4g_n \\
s_{n+1}^4(\bar{x}_n, 4) &= 4f_n + g_n + g_n + f_n + 3g_n + f_n + 4g_n = f_n + 4g_n
\end{aligned}$$

При поляризации x_{n+1} , когда $d_{n+1} = 1$

$$\begin{aligned}
s_{n+1}^4(\bar{x}_n, 0) &= 4f_n + g_n + 4f_n + 4g_n + 2f_n + 0g_n + f_n + 4g_n = f_n + 4g_n \\
s_{n+1}^4(\bar{x}_n, 1) &= 4f_n + g_n + 2f_n + g_n + 4f_n + 0g_n + f_n + 4g_n = f_n + g_n \\
s_{n+1}^4(\bar{x}_n, 2) &= 4f_n + g_n + 3f_n + g_n + f_n + 0g_n + f_n + 4g_n = 4f_n + g_n \\
s_{n+1}^4(\bar{x}_n, 3) &= 4f_n + g_n + f_n + 4g_n + 3f_n + 0g_n + f_n + 4g_n = 4f_n + 4g_n \\
s_{n+1}^4(\bar{x}_n, 4) &= 0 + 0 + 0 + 0 + f_n + 4g_n = f_n + 4g_n
\end{aligned}$$

При поляризации x_{n+1} , когда $d_{n+1} = 2$

$$\begin{aligned}
s_{n+1}^4(\bar{x}_n, 0) &= 4f_n + g_n + 4f_n + 3g_n + 3f_n + f_n + g_n + 4f_n + 4g_n = f_n + 4g_n \\
s_{n+1}^4(\bar{x}_n, 1) &= 4f_n + g_n + f_n + 2g_n + 3f_n + 4f_n + 4g_n + 4f_n + 4g_n = f_n + g_n \\
s_{n+1}^4(\bar{x}_n, 2) &= 4f_n + g_n + 2f_n + 4g_n + 2f_n + 2f_n + 2g_n + 4f_n + 4g_n = 4f_n + g_n \\
s_{n+1}^4(\bar{x}_n, 3) &= 0 + 0 + 0 + 0 + 4f_n + 4g_n = 4f_n + 4g_n \\
s_{n+1}^4(\bar{x}_n, 4) &= 4f_n + g_n + 3f_n + g_n + 2f_n + 3f_n + 3g_n + 4f_n + 4g_n = f_n + 4g_n
\end{aligned}$$

При поляризации x_{n+1} , когда $d_{n+1} = 3$

$$\begin{aligned}
s_{n+1}^4(\bar{x}_n, 0) &= 4f_n + g_n + 4f_n + 4g_n + 3f_n + 2g_n + f_n + g_n + 4f_n + g_n = f_n + 4g_n \\
s_{n+1}^4(\bar{x}_n, 1) &= 4f_n + g_n + 3f_n + 3g_n + 2f_n + 3g_n + 3f_n + 3g_n + 4f_n + g_n = f_n + g_n \\
s_{n+1}^4(\bar{x}_n, 2) &= 0 + 0 + 0 + 0 + 4f_n + g_n = 4f_n + g_n \\
s_{n+1}^4(\bar{x}_n, 3) &= 4f_n + g_n + 2f_n + 2g_n + 2f_n + 3g_n + 2f_n + 2g_n + 4f_n + g_n = 4f_n + 4g_n \\
s_{n+1}^4(\bar{x}_n, 4) &= 4f_n + g_n + f_n + g_n + 3f_n + 2g_n + 4f_n + 4g_n + 4f_n + g_n = f_n + 4g_n
\end{aligned}$$

При поляризации x_{n+1} , когда $d_{n+1} = 4$

$$\begin{aligned} s_{n+1}^4(\bar{x}_n, 0) &= 4f_n + g_n + 4f_n + 2g_n + 0f_n + 3g_n + 2f_n + 2g_n + f_n + g_n = f_n + 4g_n \\ s_{n+1}^4(\bar{x}_n, 1) &= 0 + 0 + 0 + 0 + f_n + g_n = f_n + g_n \\ s_{n+1}^4(\bar{x}_n, 2) &= 4f_n + g_n + f_n + 3g_n + 0f_n + 3g_n + 3f_n + 3g_n + f_n + g_n = 4f_n + g_n \\ s_{n+1}^4(\bar{x}_n, 3) &= 4f_n + g_n + 3f_n + 4g_n + 0f_n + 2g_n + f_n + g_n + f_n + g_n = 4f_n + 4g_n \\ s_{n+1}^4(\bar{x}_n, 4) &= 4f_n + g_n + 2f_n + g_n + 0f_n + 2g_n + 4f_n + 4g_n + f_n + g_n = f_n + 4g_n \end{aligned}$$

□

Список литературы

1. Угрюмов Е. П. Цифровая схемотехника. СПб.: БХВ-Петербург, 2004.
2. Sasao T., Besslich P. On the complexity of mod-2 sum PLA's // IEEE Trans.on Comput. 39. N 2. 1990. P. 262–266.
3. Супрун В. П. Сложность булевых функций в классе канонических поляризованных полиномов // Дискретная математика. 5. №2. 1993. С. 111–115.
4. Перязев Н. А. Сложность булевых функций в классе полиномиальных поляризованных форм // Алгебра и логика. 34. №3. 1995. С. 323–326.
5. Селезнева С. Н. О сложности представления функций многозначных логик поляризованными полиномами. Дискретная математика. 14. №2. 2002. С. 48–53.
6. Кириченко К. Д. Верхняя оценка сложности полиномиальных нормальных форм булевых функций // Дискретная математика. 17. №3. 2005. С. 80–88.
7. Селезнева С. Н. Дайняк А. Б. О сложности обобщенных полиномов k -значных функций // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. №3. 2008. С. 34–39.
8. Маркелов Н. К. Нижняя оценка сложности функций трехзначной логики в классе поляризованных полиномов // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. №3. 2012. С. 40–45.
9. Селезнева С. Н. Маркелов Н. К. Быстрый алгоритм построения векторов коэффициентов поляризованных полиномов k -значных функций // Ученые записки Казанского университета. Серия Физико-математические науки. 2009. 151. №2 С. 147–151.