О длине некоторых периодических функций пятизначной логики в классе поляризованных полиномиальных форм

Михаил Гордеев

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики

22 апреля 2015 г.

Основные определения

Пусть $k \geqslant 2$ – натуральное число, $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$.

$f^{(n)} : E_k^n \to E_k$ называется функцией k-значной логики.

Поляризованным мономом K^δ по вектору поляризации $\delta = (d_1, \ldots, d_n) \in E_k^n$, назовем $(x_{i_1} + d_{i_1})^{m_1} \cdots (x_{i_r} + d_{i_r})^{m_r}$.

Поляризованная полиномиальная нормальная форма (ППФ) по вектору поляризации δ – это $\sum\limits_{i=1}^{l} c_i \cdot K_i^\delta$; $K_i^\delta \neq K_j^\delta, i \neq j$. Число l называется длиной ППФ.

$P^\delta(f)$ – это минимальная по длине, поляризованная по δ ППФ, реализующая f.

Известные оценки

Супрун [1993г.], Sasao [1990г.] – получили некоторые оценки для функций алгебры логики в классе ППФ.

Известные оценки

Супрун [1993г.], Sasao [1990г.] – получили некоторые оценки для функций алгебры логики в классе ППФ.

Перязев [1995г.] – $L_2(n) = \left[\frac{2^{n+1}}{3}\right]$.

Известные оценки

Супрун [1993г.], Sasao [1990г.] – получили некоторые оценки для функций алгебры логики в классе ППФ.

Перязев [1995г.] – $L_2(n) = \left[\frac{2^{n+1}}{3}\right]$.

Селезнева [2002 г.] – $L_k(n) < \frac{k(k-1)}{k(k-1)+1}k^n$.

Известные оценки

Супрун [1993г.], Sasao [1990г.] – получили некоторые оценки для функций алгебры логики в классе ППФ.

Перязев [1995г.] – $L_2(n) = \left[\frac{2^{n+1}}{3}\right]$.

Селезнева [2002 г.] – $L_k(n) < \frac{k(k-1)}{k(k-1)+1}k^n$.

Маркелов [2012 г.] – $L_3(n) \geqslant \left[\frac{3}{4}3^n\right]$.

Введение

Определение

Функция k-значной логики $f(x_1, \dots, x_n)$ называется симметрической, если $f(\pi(x_1), \dots, \pi(x_n)) = f(x_1, \dots, x_n)$ для произвольной перестановки π на множестве переменных.

Определение

Симметрическая функция $f(x_1, \dots, x_n)$ называется периодической с периодом $\tau = (\tau_0 \tau_1 \dots \tau_{T-1}) \in E_k^T$, если $f(\alpha) = \tau_j$ при $|\alpha| = j \pmod{T}$ для каждого набора $\alpha \in E_k^n$.

Введение

Рассмотрим функции f *и* g *– периодические симметрические функции с периодами* $(1,1,4,4)$ *и* $(1,4,4,1)$ *соответственно. Введем класс* $\mathcal{A}$ *функций вида* $a \cdot f + a \cdot g$, $a,b \in E_k$, $a \neq 0$ *или* $b \neq 0$. *И его подкласс подкласс* $\mathcal{F}$ *состоящий из функций:* $\mathrm{c} \cdot f, c \cdot g, c \cdot (f+g), c \cdot (f+4g)$, $c \in \{1,2,3,4\}$.

Определение

Класс функций A *называется вырожденным, если при* $n \to \infty$ *для любой функции* $f_n \in A_n$ *длина этой функции есть* $\overline{o}(5^n)$.

Основные теоремы и леммы

Длина функций s^2 и s^3

Теорема 1

При $n \geqslant 1$ *и* s_n *любой из функций* $s_n^2 = f_n + 2\,g_n$, $s_n^3 = f_n + 3\,g_n$ *длина полинома периодической функции пятизначной логики* s_n *при поляризации* $\delta = (d_1, \ldots, d_n)$*выражается следующей формулой:*

$$l(P^{\delta}(s_n)) = 5^{n-m} \cdot 4^m,$$

$$\text{где } m = \begin{cases} \text{количество } 4 \text{ в векторе } \delta, & \text{если } s_n = s_n^2; \\ \text{количество } 2 \text{ в векторе } \delta, & \text{если } s_n = s_n^2. \end{cases}$$

Основные теоремы и леммы

Нижняя оценка

Лемма 1

При векторе поляризации
$\delta = (d_1, \ldots, d_n), d_i \in \{0,1,3,4\}, i = 1, \ldots, n$ *и* φ_n *– любой функции из* $\mathcal{F}^n$ *верно:*

$$I(P^{\delta}(\varphi_n)) \geqslant \frac{2}{5} \cdot 5^n.$$

Основные теоремы и леммы

Нижняя оценка

Лемма 1

При векторе поляризации $\delta = (d_1, \ldots, d_n)$, $d_i \in \{0,1,3,4\}$, $i = 1, \ldots, n$ и φ_n – любой функции из $\mathcal{F}^n$ верно:

$$l(P^{\delta}(\varphi_n)) \geqslant \frac{2}{5} \cdot 5^n.$$

Лемма 2

При векторе поляризации $\delta = (d_1, \ldots, d_n)$, $d_i = 2$, $i = 1, \ldots, m$, $d_i = 4$, $i = n - m + 1, \ldots, n$ и φ_n – любой функции из $\mathcal{F}^n$ верно:

$$l(P^{\delta}(\varphi_n)) \geqslant \left(\left(\frac{5}{4}\right)^m - \frac{3}{2}\right) \cdot 4^n + 4^m \cdot 5^{n-m}.$$

Основные теоремы и леммы
Нижняя оценка

Теорема 2

При векторе поляризации $\delta = (d_1, \ldots, d_n)$ и φ_n – любой функции из $\mathcal{F}^n$ верно:

$$I(P^{\delta}(\varphi_n)) \geqslant \left(\left(\left(\frac{5}{4}\right)^{m_2} - \frac{3}{2}\right) \cdot 4^{m_2+m_4} + 4^{m_2} \cdot 5^{m_4}\right) \cdot 5^{n-m_2-m_4},$$

где m_2 – число 2 в δ, а m_4 – число 4.

Основные теоремы и леммы

Верхняя оценка

Теорема 3

Для любой функции φ_n из $\mathcal{F}^n$, при n четном верно:

$$I(\varphi_n) \leqslant 4^n \left(2 \cdot \left(\frac{5}{4} \right)^{\frac{n}{2}} - 1 \right).$$

Основные теоремы и леммы

Верхняя оценка

Теорема 3

Для любой функции φ_n из $\mathcal{F}^n$, при n четном верно:

$$I(\varphi_n) \leqslant 4^n \left(2 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{n}{2}} - 1\right).$$

Следствие

Класс функций $\mathcal{A}$ является вырожденным.

Результаты

Математические результаты

1. Для всех функций из класса $\mathcal{A}$ были построены построены все поляризованные полиномы, выражающие функции от $n+1$ переменных через функции от n переменных также принадлежащих классу $\mathcal{A}$;

Результаты

Математические результаты

1. Для всех функций из класса $\mathcal{A}$ были построены построены все поляризованные полиномы, выражающие функции от $n+1$ переменных через функции от n переменных также принадлежащих классу $\mathcal{A}$;
2. Установле точная длина, в зависимости от поляризации, для функций: s_n^2 и s_n^3;

Результаты

Математические результаты

1. Для всех функций из класса $\mathcal{A}$ были построены построены все поляризованные полиномы, выражающие функции от $n+1$ переменных через функции от n переменных также принадлежащих классу $\mathcal{A}$;
2. Установле точная длина, в зависимости от поляризации, для функций: s_n^2 и s_n^3;
3. Доказано несколько теорем и лемм, из которых получается нижняя оценка для функций из класса $\mathcal{F}$;

Результаты

Математические результаты

1. Для всех функций из класса $\mathcal{A}$ были построены построены все поляризованные полиномы, выражающие функции от $n+1$ переменных через функции от n переменных также принадлежащих классу $\mathcal{A}$;
2. Установле точная длина, в зависимости от поляризации, для функций: s_n^2 и s_n^3;
3. Доказано несколько теорем и лемм, из которых получается нижняя оценка для функций из класса $\mathcal{F}$;
4. Установлена верняя оценка для функций из класса $\mathcal{F}$;

Результаты

Математические результаты

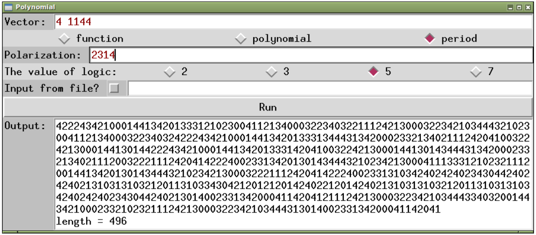
1. Для всех функций из класса $\mathcal{A}$ были построены построены все поляризованные полиномы, выражающие функции от $n+1$ переменных через функции от n переменных также принадлежащих классу $\mathcal{A}$;
2. Установле точная длина, в зависимости от поляризации, для функций: s_n^2 и s_n^3;
3. Доказано несколько теорем и лемм, из которых получается нижняя оценка для функций из класса $\mathcal{F}$;
4. Установлена верняя оценка для функций из класса $\mathcal{F}$;
5. Доказана вырожденность класса $\mathcal{A}$.

Результаты

Программные результаты

Для получения результатов были написаны следующие программы:

- Программа на языке C++, реализующая построение поляризованных полиномов по модулю k, где $k \in 2{,}3{,}5{,}7$;
- Для этой программы был написан интерфейс на языке Perl, представленный на рисунке;



Результаты

Программные результаты

Для получения результатов были написаны следующие программы:

- Программа на языке C++, осуществляющая для заданного числа пременных n "быстрый" поиск функций длина которых, в классе пляризованных полиномов, больше заданного порога, среди заданного класса симметрических функций от n переменных;
- С помощью системы компьютерной алгебры Sage были произведены: получение полиномиальных форм, поляризованных по разным векторам поляризации и подстановка значений в полиномы для проверки правильности их построения.

Спасибо за внимание