Введение

Одним из стандартных способов задания функций k-значной логики являются поляризованные полиномиальные формы (ППФ), которые также называются обобщенными формами Рида-Мюллера, или каноническими поляризованными полиномами. В ППФ каждая переменная имеет определенную поляризацию. Длиной полиномиальной формы называется число попарно различных слагаемых в ней. Длиной функции F в классе ППФ называется наименьшая длина среди длин всех поляризованных полиномиальных форм, реализующих F. Функция Шеннона $L_k^K(n)$ длины определяется как наибольшая длина среди всех функций k-значной логики в классе K от n переменных, если K опущено, то подразумевается класс ППФ. Практическое применение ППФ нашли при построении программируемых логических матриц (ПЛМ) [1, 2], сложность ПЛМ напрямую зависит от длины ППФ, по которой она построена. Поэтому в ряде работ исследуется сложность ППФ различных функций.

В 1993 В. П. Супрун [3] получил первые оценки функции Шеннона для функций алгебры логики :

$$L_2(n) \geqslant C_n^{[\frac{n}{2}]},$$

$$L_2(n) < 3 \cdot 2^{n-1}.$$

где $[a]$ обозначает целую часть a.

Точное значение функции Шеннона для функций алгебры логики в 1995 г. было найдено Н. А. Перязевым [4] :

$$L_2(n) = \left[\frac{2^{n+1}}{3}\right].$$

Функции k-значных логик являются естественным обобщением функций алгебры логики. Для функций k-значной логики верхняя оценка функции Шеннона была получена в 2002 г. С. Н. Селезневой [5] :

$$L_k(n) < \frac{k(k-1)}{k(k-1)+1}k^n.$$

При построении ПЛМ рассматривают и другие полиномиальные формы. Например класс обобщенных полиномиальных форм. В классе обобщенных полиномиальных форм, в отличие от класса поляризованных полиномиальных форм, переменные могут иметь различную поляризацию в разных слагаемых. В статье К. Д. Кириченко [6], опубликованной в 2005 г., получена верхняя оценка функции Шеннона в классе обобщенных полиномиальных форм функций алгебры логики :

$$L_2^{\text{О.П.}}(n) < \frac{2^{n+1}(\log_2 n + 1)}{n}.$$

Верхняя оценка функции Шеннона в классе обобщенных полиномиальных форм функций k-значной логики была получена С. Н. Селезневой А. Б. Дайняком в 2008 г. [7]:

$$L_k^{\text{О.П.}}(n) \lesssim 2 \cdot \frac{k^n}{n} \cdot \ln n \text{ при } n \to \infty.$$

В 2012 г. Н. К. Маркеловым была получена нижняя оценка функции Шеннона для функции трехзначной логики в классе поляризованных полиномов [8]:

$$L_3(n) \geqslant \left[\frac{3}{4} 3^n\right].$$

Теоремы

Теорема 1. *При $n \geqslant 1$ для периодических функций пятизначной логики $f_n = f_{(1144)}^{(n)}$, $g_n = f_{(1441)}^{(n)}$ верны следующие равенства:*

$$f_{n+1} = j_0(x_{n+1})f_n + j_1(x_{n+1})g_n + 4\,j_2(x_{n+1})f_n + 4\,j_3(x_{n+1})g_n + j_4(x_{n+1})f_n = 4\,f_n x_{n+1}^4 + (3\,f_n + 2\,g_n)x_{n+1}^3 + 3\,(f_n + g_n)x_{n+1}^2 + (4\,f_n + g_n)x_{n+1} + f_n = 4\,f_n(x_{n+1}+1)^4 + 2\,(f_n+g_n)(x_{n+1}+1)^3 + (3\,f_n + 2\,g_n)(x_{n+1}+1)^2 + (f_n+g_n)(x_{n+1}+1) + f_n = 4\,f_n(x_{n+1}+2)^4 + (f_n + 2\,g_n)(x_{n+1}+2)^3 + (f_n+g_n)(x_{n+1}+2)^2 + 3\,g_n(x_{n+1}+2) +$$

$+ 4\,g_n = 4\,f_n(x_{n+1}+3)^4 + 2\,g_n(x_{n+1}+3)^3 + 2\,f_n(x_{n+1}+3)^2 + 2\,g_n(x_{n+1}+3) + 4\,f_n = 4\,f_n(x_{n+1}+4)^4 + 2\,(2\,f_n+g_n)(x_{n+1}+4)^3 + (f_n+4\,g_n)(x_{n+1}+4)^2 + 3\,g_n(x_{n+1}+4) + g_n$

Доказательство.

$$f_{n+1}(0) = 4\,f_n + 3\,f_n + g_n + 4\,f_n + 4\,g_n + g_n + 4\,g_n = f_n$$

$$f_{n+1}(1) = 4\,f_n + 2\,f_n + 4\,g_n + 4\,f_n + 4\,g_n + 4\,g_n + 4\,g_n = g_n$$

$$f_{n+1}(2) = 4\,f_n + 4\,f_n + 3\,g_n + f_n + g_n + 2\,g_n + 4\,g_n = 4\,f_n$$

$$f_{n+1}(3) = 0 + 0 + 0 + 0 + 4\,g_n = 4\,g_n$$

$$f_{n+1}(4) = 4\,f_n + f_n + 2\,g_n + f_n + g_n + 3\,g_n + 4\,g_n = f_n$$

$$f_{n+1}(0) = 4\,f_n + 4\,g_n + 3\,f_n + g_n + 4\,f_n = f_n$$

$$f_{n+1}(1) = 4\,f_n + 3\,g_n + 2\,f_n + 3\,g_n + 4\,f_n = g_n$$

$$f_{n+1}(2) = 0 + 0 + 0 + 0 + 4\,f_n = 4\,f_n$$

$$f_{n+1}(3) = 4\,f_n + 2\,g_n + 2\,f_n + 2\,g_n + 4\,f_n = 4\,g_n$$

$$f_{n+1}(4) = 4\,f_n + g_n + 3\,f_n + 4\,g_n + 4\,f_n = f_n$$

□

Теорема 2. *При $n \geqslant 1$ для периодических функций пятизначной логики $f_n = f^{(n)}_{(1144)}$, $g_n = f^{(n)}_{(1441)}$ верны следующие равенства:*

$g_{n+1} = j_0(x_{n+1})g_n + 4\,j_1(x_{n+1})f_n + 4\,j_2(x_{n+1})g_n + j_3(x_{n+1})f_n + j_4(x_{n+1})g_n = 4\,g_n x_{n+1}^4 + 3\,(f_n+g_n)x_{n+1}^3 + (2\,f_n+3\,g_n)x_{n+1}^2 + 4\,(f_n+g_n)x_{n+1} + g_n = 4\,g_n(x_{n+1}+1)^4 + (3\,f_n+2\,g_n)(x_{n+1}+1)^3 + 3\,(f_n+g_n)(x_{n+1}+1)^2 + (4\,f_n+g_n)(x_{n+1}+1) + g_n = 4\,g_n(x_{n+1}+2)^4 + (3\,f_n+g_n)(x_{n+1}+2)^3 + (4\,f_n+g_n)(x_{n+1}+2)^2 + 2\,f_n(x_{n+1}+2) + f_n = 4\,g_n(x_{n+1}+3)^4 + 3\,f_n(x_{n+1}+3)^3 + 2\,g_n(x_{n+1}+3)^2 + 3\,f_n(x_{n+1}+3) + 4\,g_n = 4\,g_n(x_{n+1}+4)^4 + (3\,f_n+4\,g_n)(x_{n+1}+4)^3 + (f_n+g_n)(x_{n+1}+4)^2 + 2\,f_n(x_{n+1}+4) + 4\,f_n$

Доказательство.

$$g_{n+1}(0) = 4\,g_n + 4\,f_n + 3\,g_n + f_n + 4\,g_n + 4\,f_n + f_n = g_n$$

$$g_{n+1}(1) = 4\,g_n + f_n + 2\,g_n + f_n + 4\,g_n + f_n + f_n = 4\,f_n$$

$$g_{n+1}(2) = 4\,g_n + 2\,f_n + 4\,g_n + 4\,f_n + g_n + 3\,f_n + f_n = 4\,g_n$$

$$g_{n+1}(3) = 0 + 0 + 0 + 0 + f_n = f_n$$

$$g_{n+1}(4) = 4\,g_n + 3\,f_n + g_n + 4\,f_n + g_n + 2\,f_n + f_n = g_n$$

$$g_{n+1}(0) = 4\,g_n + f_n + 3\,g_n + 4\,f_n + 4\,g_n = g_n$$

$$g_{n+1}(1) = 4\,g_n + 2\,f_n + 2\,g_n + 2\,f_n + 4\,g_n = 4\,f_n$$

$$g_{n+1}(2) = 0 + 0 + 0 + 0 + 4\,g_n = 4\,g_n$$

$$g_{n+1}(3) = 4\,g_n + 3\,f_n + 2\,g_n + 3\,f_n + 4\,g_n = f_n$$

$$g_{n+1}(4) = 4\,g_n + 4\,f_n + 3\,g_n + f_n + 4\,g_n = g_n$$

$\square$

Теорема 3. *При $n \geqslant 1$ для периодических функций пятизначной логики $f_n = f^{(n)}_{(1144)}$, $g_n = f^{(n)}_{(1441)}$ верны следующие равенства:*

$s^1_{n+1} = f_{n+1} + g_{n+1} = (4\,f_n + 4\,g_n)x^4 + f_n x^3 + g_n x^2 + 3\,f_n x + f_n + g_n = (4\,f_n + 4\,g_n)(x+1)^4 + 4\,g_n(x+1)^3 + f_n(x+1)^2 + 2\,g_n(x+1) + f_n + g_n = (4\,f_n + 4\,g_n)(x+2)^4 + (4\,f_n + 3\,g_n)(x+2)^3 + 2\,g_n(x+2)^2 + (2\,f_n + 3\,g_n)(x+2) + f_n + 4\,g_n = (4\,f_n + 4\,g_n)(x+3)^4 + (3\,f_n + 2\,g_n)(x+3)^3 + 2\,(f_n + g_n)(x+3)^2 + (3\,f_n + 2\,g_n)(x+3) + 4\,f_n + 4\,g_n = (4\,f_n + 4\,g_n)(x+4)^4 + (2\,f_n + g_n)(x+4)^3 + 2\,f_n(x+4)^2 + (2\,f_n + 3\,g_n)(x+4) + 4\,f_n + g_n$

Теорема 4. *При $n \geqslant 1$ для периодических функций пятизначной логики $f_n = f^{(n)}_{(1144)}$, $g_n = f^{(n)}_{(1441)}$ верны следующие равенства:*

$$s_{n+1}^2 = f_{n+1} + 2\,g_{n+1} = (4\,f_n + 3\,g_n)x^4 + (4\,f_n + 3\,g_n)x^3 + (2\,f_n + 4\,g_n)x^2 + (2\,f_n + 4\,g_n)x + f_n + 2\,g_n = (4\,f_n + 3\,g_n)(x+1)^4 + (3\,f_n + g_n)(x+1)^3 + (4\,f_n + 3\,g_n)(x+1)^2 + (4\,f_n + 3\,g_n)(x+1) + f_n + 2\,g_n = (4\,f_n + 3\,g_n)(x+2)^4 + (2\,f_n + 4\,g_n)(x+2)^3 + (4\,f_n + 3\,g_n)(x+2)^2 + (4\,f_n + 3\,g_n)(x+2) + 2\,f_n + 4\,g_n = (4\,f_n + 3\,g_n)(x+3)^4 + (f_n + 2\,g_n)(x+3)^3 + 2\,(f_n + 2\,g_n)(x+3)^2 + (f_n + 2\,g_n)(x+3) + 4\,f_n + 3\,g_n = (4\,f_n + 3\,g_n)(x+4)^4 + (3\,f_n + g_n)(x+4)^2 + (4\,f_n + 3\,g_n)(x+4) + 3\,f_n + g_n$$

Теорема 5. *При $n \geqslant 1$ для периодических функций пятизначной логики $f_n = f_{(1144)}^{(n)}$, $g_n = f_{(1441)}^{(n)}$ верны следующие равенства:*

$$s_{n+1}^3 = f_{n+1} + 3\,g_{n+1} = (4\,f_n + 2\,g_n)x^4 + (2\,f_n + g_n)x^3 + (4\,f_n + 2\,g_n)x^2 + (f_n + 3\,g_n)x + f_n + 3\,g_n = (4\,f_n + 2\,g_n)(x+1)^4 + (f_n + 3\,g_n)(x+1)^3 + (2\,f_n + g_n)(x+1)^2 + (3\,f_n + 4\,g_n)(x+1) + f_n + 3\,g_n = (4\,f_n + 2\,g_n)(x+2)^4 + (3\,f_n + 4\,g_n)(x+2)^2 + (f_n + 3\,g_n)(x+2) + 3\,f_n + 4\,g_n = (4\,f_n + 2\,g_n)(x+3)^4 + (4\,f_n + 2\,g_n)(x+3)^3 + 2\,(f_n + 3\,g_n)(x+3)^2 + (4\,f_n + 2\,g_n)(x+3) + 4\,f_n + 2\,g_n = (4\,f_n + 2\,g_n)(x+4)^4 + (3\,f_n + 4\,g_n)(x+4)^3 + (4\,f_n + 2\,g_n)(x+4)^2 + (f_n + 3\,g_n)(x+4) + 2\,f_n + g_n$$

Теорема 6. *При $n \geqslant 1$ для периодических функций пятизначной логики $f_n = f_{(1144)}^{(n)}$, $g_n = f_{(1441)}^{(n)}$ верны следующие равенства:*

$$s_{n+1}^4 = f_{n+1} + 4\,g_{n+1} = (4\,f_n + g_n)x^4 + 4\,g_n x^3 + f_n x^2 + 2\,g_n x + f_n + 4\,g_n = (4\,f_n + g_n)(x+1)^4 + 4\,f_n(x+1)^3 + 4\,g_n(x+1)^2 + 2\,f_n(x+1) + 5\,g_n(x+1) + f_n + 4\,g_n = (4\,f_n + g_n)(x+2)^4 + (3\,f_n + g_n)(x+2)^3 + 2\,f_n(x+2)^2 + (3\,f_n + 3\,g_n)(x+2) + 4\,f_n + 4\,g_n = (4\,f_n + g_n)(x+3)^4 + (2\,f_n + 2\,g_n)(x+3)^3 + 2\,(f_n + 4\,g_n)(x+3)^2 + (2\,f_n + 2\,g_n)(x+3) + 4\,f_n + g_n = (4\,f_n + g_n)(x+4)^4 + (f_n + 3\,g_n)(x+4)^3 + 5\,f_n(x+4)^2 + 3\,g_n(x+4)^2 + (3\,f_n + 3\,g_n)(x+4) + f_n + g_n$$

Список литературы

1. Угрюмов Е. П. Цифровая схемотехника. СПб.: БХВ-Петербург, 2004.

2. Sasao T., Besslich P. On the complexity of mod-2 sum PLA's // IEEE Trans.on Comput. 39. N 2. 1990. P. 262–266.

3. Супрун В. П. Сложность булевых функций в классе канонических поляризованных полиномов // Дискретная математика. 5. №2. 1993. С. 111–115.

4. Перязев Н. А. Сложность булевых функций в классе полиномиальных поляризованных форм // Алгебра и логика. 34. №3. 1995. С. 323–326.

5. Селезнева С. Н. О сложности представления функций многозначных логик поляризованными полиномами. Дискретная математика. 14. №2. 2002. С. 48–53.

6. Кириченко К. Д. Верхняя оценка сложности полиномиальных нормальных форм булевых функций // Дискретная математика. 17. №3. 2005. С. 80–88.

7. Селезнева С. Н. Дайняк А. Б. О сложности обобщенных полиномов k-значных функций // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. №3. 2008. С. 34–39.

8. Маркелов Н. К. Нижняя оценка сложности функций трехзначной логики в классе поляризованных полиномов // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. №3. 2012. С. 40–45.

9. Селезнева С. Н. Маркелов Н. К. Быстрый алгоритм построения векторов коэффициэнтов поляризованных полиномов k-значных функций // Ученые записки Казанского университета. Серия Физико-математические науки. 2009. 151. №2 С. 147-151.