

О длине некоторых периодических функций пятизначной логики в классе поляризованных полиномиальных форм

Михаил Гордеев

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики

22 апреля 2015 г.

Основные определения

Пусть $k \geq 2$ – натуральное число, $E_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$.

$f^{(n)} : E_k^n \rightarrow E_k$ называется функцией k -значной логики.

Поляризованным мономом K^δ по вектору поляризации $\delta = (d_1, \dots, d_n) \in E_k^n$, назовем $(x_{i_1} + d_{i_1})^{m_1} \cdots (x_{i_r} + d_{i_r})^{m_r}$.

Поляризованная полиномиальная нормальная форма (ППФ) по вектору поляризации δ – это $\sum_{i=1}^l c_i \cdot K_i^\delta$; $K_i^\delta \neq K_j^\delta, i \neq j$. Число l называется длиной ППФ.

$P^\delta(f)$ – это минимальная по длине, поляризованная по δ ППФ, реализующая f .

Известные оценки

Супрун [1993г.], Sasao [1990г.] – получили некоторые оценки для функций алгебры логики в классе ППФ.

Известные оценки

Супрун [1993г.], Sasao [1990г.] – получили некоторые оценки для функций алгебры логики в классе ППФ.

Перязев [1995г.] – получил $L_2(n) = \left\lceil \frac{2^{n+1}}{3} \right\rceil$.

Известные оценки

Супрун [1993г.], Sasao [1990г.] – получили некоторые оценки для функций алгебры логики в классе ППФ.

Перязев [1995г.] – получил $L_2(n) = \left\lceil \frac{2^{n+1}}{3} \right\rceil$.

Супрун [1993г.], Sasao [1990г.] – получили некоторые оценки для функций алгебры логики в классе ППФ.

Известные оценки

Супрун [1993г.], Sasao [1990г.] – получили некоторые оценки для функций алгебры логики в классе ППФ.

Перязев [1995г.] – получил $L_2(n) = \left\lceil \frac{2^{n+1}}{3} \right\rceil$.

Супрун [1993г.], Sasao [1990г.] – получили некоторые оценки для функций алгебры логики в классе ППФ.

Супрун [1993г.], Sasao [1990г.] – получили некоторые оценки для функций алгебры логики в классе ППФ.

Введение

В данной работе рассматривается класс функций \mathcal{A} , состоящий из всех линейных комбинаций функций f и g , где f – это периодическая симметрическая функция с периодом $(1,1,4,4)$, а g – это периодическая симметрическая функция с периодом $(1,4,4,1)$. А также его подкласс \mathcal{F} состоящий из следующих четырех функций: $f, g, f + g, f + 4g$.

Введение

В данной работе рассматривается класс функций \mathcal{A} , состоящий из всех линейных комбинаций функций f и g , где f – это периодическая симметрическая функция с периодом $(1,1,4,4)$, а g – это периодическая симметрическая функция с периодом $(1,4,4,1)$. А также его подкласс \mathcal{F} состоящий из следующих четырех функций: $f, g, f + g, f + 4g$.

Определение

Класс функций \mathcal{A} называется вырожденным, если при $n \rightarrow \infty$ для любой функции $f_n \in \mathcal{A}_n$ длина этой функции есть $\bar{o}(5^n)$.

Основные теоремы и леммы

Длина функций s^2 и s^3

Теорема 1

При $n \geq 1$ и s_n любой из функций $s_n^2 = f_n + 2g_n$, $s_n^3 = f_n + 3g_n$ длина полинома периодической функции пятизначной логики s_n при поляризации $\delta = (d_1, \dots, d_n)$ выражается следующей формулой:

$$l(P^\delta(s_n)) = 5^{n-m} \cdot 4^m,$$

где $m = \begin{cases} \text{количество 4 в векторе } \delta, & \text{если } s_n = s_n^2; \\ \text{количество 2 в векторе } \delta, & \text{если } s_n = s_n^3. \end{cases}$

Основные теоремы и леммы

Нижняя оценка

Лемма 1

При векторе поляризации

$\delta = (d_1, \dots, d_n)$, $d_i \in \{0, 1, 3, 4\}$, $i = 1, \dots, n$ и φ_n – любой функции из \mathcal{F}^n верно:

$$I(P^\delta(\varphi_n)) \geq \frac{2}{5} \cdot 5^n.$$

Основные теоремы и леммы

Нижняя оценка

Лемма 1

При векторе поляризации

$\delta = (d_1, \dots, d_n)$, $d_i \in \{0, 1, 3, 4\}$, $i = 1, \dots, n$ и φ_n – любой функции из \mathcal{F}^n верно:

$$I(P^\delta(\varphi_n)) \geq \frac{2}{5} \cdot 5^n.$$

Лемма 2

При векторе поляризации

$\delta = (d_1, \dots, d_n)$, $d_i = 2$, $i = 1, \dots, m$, $d_i = 4$, $i = n - m + 1, \dots, n$ и φ_n – любой функции из \mathcal{F}^n верно:

$$I(P^\delta(\varphi_n)) \geq \left(\left(\frac{5}{4} \right)^m - \frac{3}{2} \right) \cdot 4^n + 4^m \cdot 5^{n-m}.$$

Основные теоремы и леммы

Нижняя оценка

Теорема 2

При векторе поляризации $\delta = (d_1, \dots, d_n)$ и φ_n — любой функции из \mathcal{F}^n верно:

$$I(P^\delta(\varphi_n)) \geq \left(\left(\left(\frac{5}{4} \right)^{m_2} - \frac{3}{2} \right) \cdot 4^{m_2+m_4} + 4^{m_2} \cdot 5^{m_4} \right) \cdot 5^{n-m_2-m_4},$$

где m_2 — число 2 в δ , а m_4 — число 4.

Основные теоремы и леммы

Верхняя оценка

Теорема 3

Для любой функции φ_n из \mathcal{F}^n , при n четном верно:

$$I(\varphi_n) \leqslant 4^n \left(2 \cdot \left(\frac{5}{4} \right)^{\frac{n}{2}} - 1 \right).$$

Основные теоремы и леммы

Верхняя оценка

Теорема 3

Для любой функции φ_n из \mathcal{F}^n , при n четном верно:

$$I(\varphi_n) \leq 4^n \left(2 \cdot \left(\frac{5}{4} \right)^{\frac{n}{2}} - 1 \right).$$

Следствие

Класс функций \mathcal{A} является вырожденным.

Результаты

Математические результаты

- 1 Для всех функций из класса \mathcal{A} были построены построены все поляризованные полиномы, выражающие функции от $n + 1$ переменных через функции от n переменных также принадлежащих классу \mathcal{A} ;

Результаты

Математические результаты

- 1 Для всех функций из класса \mathcal{A} были построены построены все поляризованные полиномы, выражающие функции от $n + 1$ переменных через функции от n переменных также принадлежащих классу \mathcal{A} ;
- 2 Установле точная длина, в зависимости от поляризации, для функций: s_n^2 и s_n^3 ;

Результаты

Математические результаты

- 1 Для всех функций из класса \mathcal{A} были построены построены все поляризованные полиномы, выражающие функции от $n + 1$ переменных через функции от n переменных также принадлежащих классу \mathcal{A} ;
- 2 Установле точная длина, в зависимости от поляризации, для функций: s_n^2 и s_n^3 ;
- 3 Доказано несколько теорем и лемм, из которых получается нижняя оценка для функций из класса \mathcal{F} ;

Результаты

Математические результаты

- 1 Для всех функций из класса \mathcal{A} были построены построены все поляризованные полиномы, выражающие функции от $n + 1$ переменных через функции от n переменных также принадлежащих классу \mathcal{A} ;
- 2 Установле точная длина, в зависимости от поляризации, для функций: s_n^2 и s_n^3 ;
- 3 Доказано несколько теорем и лемм, из которых получается нижняя оценка для функций из класса \mathcal{F} ;
- 4 Установлена верняя оценка для функций из класса \mathcal{F} ;

Результаты

Математические результаты

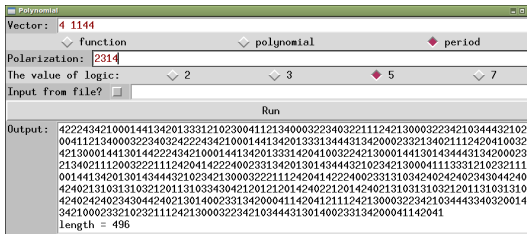
- 1 Для всех функций из класса \mathcal{A} были построены построены все поляризованные полиномы, выражающие функции от $n + 1$ переменных через функции от n переменных также принадлежащих классу \mathcal{A} ;
- 2 Установле точная длина, в зависимости от поляризации, для функций: s_n^2 и s_n^3 ;
- 3 Доказано несколько теорем и лемм, из которых получается нижняя оценка для функций из класса \mathcal{F} ;
- 4 Установлена верняя оценка для функций из класса \mathcal{F} ;
- 5 Доказана вырожденность класса \mathcal{A} .

Результаты

Программные результаты

Для получения результатов были написаны следующие программы:

- Программа на языке C++, реализующая построение поляризованных полиномов по модулю k , где $k \in 2, 3, 5, 7$;
- Для этой программы был написан интерфейс на языке Perl, представленный на рисунке;



Результаты

Программные результаты

Для получения результатов были написаны следующие программы:

- Программа на языке C++, осуществляющая для заданного числа переменных n "быстрый" поиск функций длина которых, в классе поляризованных полиномов, больше заданного порога, среди заданного класса симметрических функций от n переменных;
- С помощью системы компьютерной алгебры Sage были произведены: получение полиномиальных форм, поляризованных по разным векторам поляризации и подстановка значений в полиномы для проверки правильности их построения.

Спасибо за внимание