

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики

О длине некоторых периодических функций
пятизначной логики в классе поляризованных
полиномиальных форм

Михаил Гордеев

Научный руководитель – доц. Селезнева С.Н.

Основные определения

Определение

Пусть $k \geq 2$ – натуральное число, $E_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$.

Определение

$f^{(n)} : E_k^n \rightarrow E_k$ называется функцией k -значной логики.

Определение

P_k^n – множество всех функций k -значной логики, зависящих от n переменных.

Определение

Поляризованным мономом K^δ по вектору поляризации $\delta = (d_1, \dots, d_n) \in E_k^n$, назовем $(x_{i_1} + d_{i_1})^{m_1} \dots (x_{i_r} + d_{i_r})^{m_r}$.

Основные определения

Определение

Поляризованная полиномиальная нормальная форма (ППФ) по вектору поляризации δ – это $\sum_{i=1}^l c_i \cdot K_i^\delta$; $c_i \in E_k \setminus \{0\}$, $K_i^\delta \neq K_j^\delta, i \neq j$. Число l называется длиной ППФ.

Определение

$P^\delta(f)$ – это поляризованная по δ ППФ, реализующая f , $l(P^\delta(f))$ – длина этой ППФ.

Определение

$L_k(n) = \max_{f \in P_k^n} \min_{\delta \in E_k^n} l(P^\delta(f))$ – функция Шеннона длины.

Известные оценки

Супрун В. П. [1993г.], Sasao T. [1990г.] – получили некоторые оценки для функций алгебры логики в классе ППФ.

$$\text{Перязев Н. А. [1995г.]} - L_2(n) = \left\lceil \frac{2^{n+1}}{3} \right\rceil.$$

$$\text{Селезнева С. Н. [2002 г.]} - L_k(n) < \frac{k(k-1)}{k(k-1)+1} k^n.$$

$$\text{Маркелов Н. К. [2012 г.]} - L_3(n) \geq \left\lceil \frac{3}{4} 3^n \right\rceil.$$

Селезнева С. Н. [2015 г.] – $L_3(n) \geq \left\lceil \frac{3}{4} 3^n \right\rceil$, для симметрических функций.

Введение

Определение

Функция k -значной логики $f(x_1, \dots, x_n)$ называется симметрической, если $f(\pi(x_1), \dots, \pi(x_n)) = f(x_1, \dots, x_n)$ для произвольной перестановки π на множестве переменных.

Определение

Симметрическая функция $f(x_1, \dots, x_n)$ называется периодической с периодом $\tau = (\tau_0 \tau_1 \dots \tau_{T-1}) \in E_k^T$, если $f(\alpha) = \tau_j, |\alpha| = j \pmod{T} \forall \alpha = (a_1, \dots, a_n) \in E_k^n; |\alpha| = \sum_{i=1}^n a_i$.

Определение

Пусть $T \geq 1$, $\Pi = \{\tau_1, \dots, \tau_s | \tau_i \in E_k^T\}$,
 $A_\Pi = \{f_\tau^{(n)} | \tau \in \Pi, n \geq 1\}$. Класс A_Π называется вырожденным, если $\forall \tau \in \Pi$ верно, что $I(f_\tau^{(n)}) = \bar{o}(k^n)$ при $n \rightarrow \infty$.

Введение

Рассмотрим функции f_n и g_n – периодические симметрические функции с периодами $(1,1,4,4)$ и $(1,4,4,1)$ соответственно, $n \geq 1$.

Введем класс \mathcal{A} функций вида $a \cdot f_n + b \cdot g_n$, $a, b \in E_k$, $a \neq 0$ или $b \neq 0$.

И его подкласс \mathcal{F} состоящий из функций:

$c \cdot f_n, c \cdot g_n, c \cdot (f_n + g_n), c \cdot (f_n + 4g_n), c \in \{1,2,3,4\}$.

Основные теоремы и леммы

Длина функций s^2 и s^3

Теорема 1

При $n \geq 1$ и s_n любой из функций $s_n^2 = f_n + 2g_n$, $s_n^3 = f_n + 3g_n$ длина полинома периодической функции пятизначной логики s_n при поляризации $\delta = (d_1, \dots, d_n)$ выражается следующей формулой:

$$l(P^\delta(s_n)) = 5^{n-m} \cdot 4^m,$$

где $m = \begin{cases} \text{количество «4» в векторе } \delta, & \text{если } s_n = s_n^2; \\ \text{количество «2» в векторе } \delta, & \text{если } s_n = s_n^3. \end{cases}$

Основные теоремы и леммы

Нижняя оценка

Лемма 1

При векторе поляризации

$\delta = (d_1, \dots, d_n)$, $d_i \in \{0, 1, 3, 4\}$, $i = 1, \dots, n$ и φ_n – любой функции из \mathcal{F}^n верно:

$$I(P^\delta(\varphi_n)) \geq \frac{2}{5} \cdot 5^n.$$

Основные теоремы и леммы

Нижняя оценка

Лемма 1

При векторе поляризации

$\delta = (d_1, \dots, d_n)$, $d_i \in \{0, 1, 3, 4\}$, $i = 1, \dots, n$ и φ_n – любой функции из \mathcal{F}^n верно:

$$I(P^\delta(\varphi_n)) \geq \frac{2}{5} \cdot 5^n.$$

Лемма 2

При векторе поляризации

$\delta = (d_1, \dots, d_n)$, $d_i = 2$, $i = 1, \dots, m$, $d_i = 4$, $i = n - m + 1, \dots, n$ и φ_n – любой функции из \mathcal{F}^n верно:

$$I(P^\delta(\varphi_n)) \geq \left(\left(\frac{5}{4} \right)^m - \frac{3}{2} \right) \cdot 4^n + 4^m \cdot 5^{n-m}.$$

Основные теоремы и леммы

Нижняя оценка

Теорема 2

При векторе поляризации $\delta = (d_1, \dots, d_n)$ и φ_n — любой функции из \mathcal{F}^n верно:

$$I(P^\delta(\varphi_n)) \geq \left(\left(\left(\frac{5}{4} \right)^{m_2} - \frac{3}{2} \right) \cdot 4^{m_2+m_4} + 4^{m_2} \cdot 5^{m_4} \right) \cdot 5^{n-m_2-m_4},$$

где m_2 — число «2» в δ , а m_4 — число «4».

Основные теоремы и леммы

Верхняя оценка

Теорема 3

Для любой функции φ_n из \mathcal{F}^n , при n четном верно:

$$I(\varphi_n) \leqslant 5^n \left(2 \cdot \left(\frac{4}{5} \right)^{\frac{n}{2}} - \left(\frac{4}{5} \right)^n \right).$$

Основные теоремы и леммы

Верхняя оценка

Теорема 3

Для любой функции φ_n из \mathcal{F}^n , при n четном верно:

$$I(\varphi_n) \leqslant 5^n \left(2 \cdot \left(\frac{4}{5} \right)^{\frac{n}{2}} - \left(\frac{4}{5} \right)^n \right).$$

Следствие

Класс функций \mathcal{A} является вырожденным.

Результаты

Математические результаты

- 1 Для всех функций из класса \mathcal{A} были построены все поляризованные полиномы, выражающие функции от $n + 1$ переменных через функции от n переменных также принадлежащих классу \mathcal{A} ;

Результаты

Математические результаты

- 1 Для всех функций из класса \mathcal{A} были построены все поляризованные полиномы, выражающие функции от $n + 1$ переменных через функции от n переменных также принадлежащих классу \mathcal{A} ;
- 2 Установлена точная длина, в зависимости от поляризации, для функций: s_n^2 и s_n^3 ;

Результаты

Математические результаты

- 1 Для всех функций из класса \mathcal{A} были построены все поляризованные полиномы, выражающие функции от $n + 1$ переменных через функции от n переменных также принадлежащих классу \mathcal{A} ;
- 2 Установлена точная длина, в зависимости от поляризации, для функций: s_n^2 и s_n^3 ;
- 3 Доказано несколько теорем и лемм, из которых получается нижняя оценка для функций из класса \mathcal{F} ;

Результаты

Математические результаты

- 1 Для всех функций из класса \mathcal{A} были построены все поляризованные полиномы, выражающие функции от $n + 1$ переменных через функции от n переменных также принадлежащих классу \mathcal{A} ;
- 2 Установлена точная длина, в зависимости от поляризации, для функций: s_n^2 и s_n^3 ;
- 3 Доказано несколько теорем и лемм, из которых получается нижняя оценка для функций из класса \mathcal{F} ;
- 4 Установлена верняя оценка для функций из класса \mathcal{F} ;

Результаты

Математические результаты

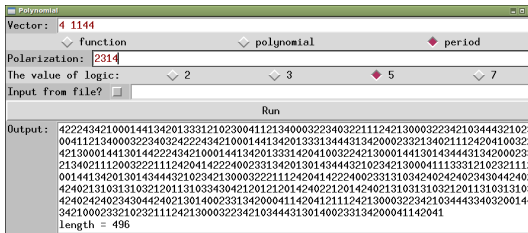
- ❶ Для всех функций из класса \mathcal{A} были построены все поляризованные полиномы, выражающие функции от $n + 1$ переменных через функции от n переменных также принадлежащих классу \mathcal{A} ;
- ❷ Установлена точная длина, в зависимости от поляризации, для функций: s_n^2 и s_n^3 ;
- ❸ Доказано несколько теорем и лемм, из которых получается нижняя оценка для функций из класса \mathcal{F} ;
- ❹ Установлена верняя оценка для функций из класса \mathcal{F} ;
- ❺ Доказана вырожденность класса \mathcal{A} .

Результаты

Программные результаты

Для получения результатов были написаны следующие программы:

- Программа на языке C++, реализующая построение поляризованных полиномов по модулю k , где $k \in 2, 3, 5, 7$;
- Для этой программы был написан интерфейс на языке Perl, представленный на рисунке;



Результаты

Программные результаты

Для получения результатов были написаны следующие программы:

- Программа на языке C++, осуществляющая для заданного числа переменных n "быстрый" поиск функций длина которых, в классе поляризованных полиномов, больше заданного порога, среди заданного класса симметрических функций от n переменных;
- С помощью системы компьютерной алгебры Sage были произведены: получение полиномиальных форм, поляризованных по разным векторам поляризации и подстановка значений в полиномы для проверки правильности их построения.

Спасибо за внимание