Введение

Одним из стандартных способов задания функций k-значной логики являются поляризованные полиномиальные формы (ППФ), которые также называются обобщенными формами Рида-Мюллера, или каноническими поляризованными полиномами. В ППФ каждая переменная имеет определенную поляризацию. Длиной полиномиальной формы называется число попарно различных слагаемых в ней. Длиной функции F в классе ППФ называется наименьшая длина среди длин всех поляризованных полиномиальных форм, реализующих F. Функция Шеннона $L_k^K(n)$ длины определяется как наибольшая длина среди всех функций k-значной логики в классе K от n переменных, если K опущено, то подразумевается класс ППФ. Практическое применение ППФ нашли при построении программируемых логических матриц (ПЛМ) [1, 2], сложность ПЛМ напрямую зависит от длины ППФ, по которой она построена. Поэтому в ряде работ исследуется сложность ППФ различных функций.

В 1993 В. П. Супрун [3] получил первые оценки функции Шеннона для функций алгебры логики :

$$L_2(n) \geqslant C_n^{[\frac{n}{2}]},$$
$$L_2(n) < 3 \cdot 2^{n-1}.$$

где $[a]$ обозначает целую часть a.

Точное значение функции Шеннона для функций алгебры логики в 1995 г. было найдено Н. А. Перязевым [4] :

$$L_2(n) = \left[\frac{2^{n+1}}{3}\right].$$

Функции k-значных логик являются естественным обобщением функций алгебры логики. Для функций k-значной логики верхняя оценка функции Шеннона была получена в 2002 г. С. Н. Селезневой [5] :

$$L_k(n) < \frac{k(k-1)}{k(k-1)+1} k^n.$$

При построении ПЛМ рассматривают и другие полиномиальные формы. Например класс обобщенных полиномиальных форм. В классе обобщенных полиномиальных форм, в отличие от класса поляризованных полиномиальных форм, переменные могут иметь различную поляризацию в разных слагаемых. В статье К. Д. Кириченко [6], опубликованной в 2005 г., получена верхняя оценка функции Шеннона в классе обобщенных полиномиальных форм функций алгебры логики :

$$L_2^{\text{О.П.}}(n) < \frac{2^{n+1}(\log_2 n + 1)}{n}.$$

Верхняя оценка функции Шеннона в классе обобщенных полиномиальных форм функций k-значной логики была получена С. Н. Селезневой А. Б. Дайняком в 2008 г. [7]:

$$L_k^{\text{О.П.}}(n) \lesssim 2 \cdot \frac{k^n}{n} \cdot \ln n \text{ при } n \to \infty.$$

В 2012 г. Н. К. Маркеловым была получена нижняя оценка функции Шеннона для функции трехзначной логики в классе поляризованных полиномов [8]:

$$L_3(n) \geqslant \left[\frac{3}{4}3^n\right].$$

Основные определения

Пусть $k \geqslant 2$ – натуральное число, $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$. Весом набора $\alpha = (a_1, \ldots, a_n) \in E_k^n$ назовем число $|\alpha| = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$. Моном $\prod\limits_{a_i \neq 0} x_i^{a_i}$ назовем соответствующим набору $\alpha = (a_1, \ldots, a_n) \in E_k^n$ и обозначим через K_α. По определению положим, что константа 1 соответствует набору из всех нулей. Функцией k-значной логики называется отображение $f^{(n)} : E_k^n \to E_k$, $n = 0, 1, \ldots$. Множество всех k-значных функций обозначим через P_k , множество всех k-значных функций, зависящих от переменных $x_1, \ldots, x_n$, обозначим через P_k^n .

Если k – простое число, то каждая функция k-значной логики $f(x_1, \ldots, x_n)$ может быть однозначно задана формулой вида

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\alpha \in E_k^n : c_f(\alpha) \neq 0} c_f(\alpha) K_\alpha ,$$

где $c_f(\alpha) \in E_k$ – коэффициенты, $\alpha \in E_k$, и операции сложения и умножения рассматриваются по модулю k. Это представление функций k-значной логики называется ее полиномом по модулю k. При простых k однозначно определенный полином по модулю k для функции k-значной логики f будем обозначать через $P(f)$.

Определим поляризованные полиномиальные формы по модулю k. Поляризованной переменной x_i с поляризацией d, $d \in E_k$, назовем выражение вида $(x_i + d)$. Поляризованным мономом по вектору поляризации δ, $\delta = (d_1, \ldots, d_n) \in E_k^n$, назовем произведение вида $(x_{i_1} + d_{i_1})^{m_1} \cdots (x_{i_r} + d_{i_r})^{m_r}$, где $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_r \leqslant n$, и $1 \leqslant m1, \ldots, m_r \leqslant k-1$. Обычный моном является мономом, поляризованным по вектору $\tilde{0} = (0, \ldots, 0) \in E_k^n$

Выражение вида $\sum\limits_{i=1}^{l} c_i \cdot K_i$, где $c_i \in E_k \setminus \{0\}$ – коэффициенты, K_i – попарно различные мономы, поляризованные по вектору $\delta = (d_1, \ldots, d_n) \in E_k^n$, $i = 1, \ldots, l$, назовем поляризованной полиномиальной нормальной формой (ППФ) по вектору поляризации δ. Мы будем считать, что константа 0 является ППФ по произвольному вектору поляризации. Заметим, что при простых k для каждого вектора поляризации каждую функцию k-значной логики можно однозначно представить ППФ по этому вектору поляризации [5]. При простых k однозначно определенную ППФ по вектору поляризации $\delta \in E_k^n$ для функции $f \in P_k^n$ будем обозначать через $P^\delta(f)$.

Длиной $l(p)$ ППФ p назовем число попарно различных слагаемых в этой ППФ. Положим, что $l(0) = 0$. При простых k длиной функции k-значной логики в классе ППФ называется величина $l^{\text{ППФ}}(f) = \min\limits_{\delta \in E_k^n} l(P^\delta(f))$.

Сложностью системы ППФ, имеющих один и тот же вектор поляризации, называется число попарно различных слагаемых, встречающихся во всех этих ППФ. При простых k сложностью $L_k^{\text{ППФ}}(F)$ системы функций k-значной логики $F = \{f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)\}$ в классе ППФ называется минимальная сложность среди всех таких систем ППФ $\{p_1, \ldots, p_m\}$, что все ППФ $p_1, \ldots, p_m$ имеют один и тот же вектор поляризации, и ППФ p_j реализует функцию f_j, $j = 1, \ldots, m$. Понятно, что для произвольной системы функций k-значной логики $F = \{f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)\}$ верна оценка $L_k^{\text{ППФ}}(F) \leqslant k^n$.

Пусть k – простое число, и $A_k \subseteq P_k$, а $A_k^n = A_k \cap P_k^n$. Введем функцию Шеннона $L_{A_k}^{\text{ППФ}}(m, n)$ сложности систем функций k-значной логики, принадлежащих множеству A, в классе ППФ:

$$L_{A_k}^{\text{ППФ}}(m, n) = \max_{B \subseteq A_k^n, |B| = m} L_k^{\text{ППФ}}(B).$$

Если $A_k = P_k$, то функцию Шеннона будем обозначать через $L_{A_k}^{\text{ППФ}}(m, n)$.

Функция k-значной логики $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется симметрической, если

$$f(\pi(x_1), \ldots, \pi(x_n)) = f(x_1, \ldots, x_n)$$

для произвольной перестановки π на множестве переменных $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Множество всех симметрических функций k-значной логики обозначим через S_k. Симметрическая функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется периодической с периодом $\tau = (\tau_0 \tau_1 \ldots \tau_{T-1}) \in E_k^T$, если $f(\alpha) = \tau_j$ при $|\alpha| = j(\mod T)$ для каждого набора $\alpha \in E_k^n$. При этом число T называется длиной периода. Периодическую функцию k-значной логики $f(x_1, \ldots, x_n)$ с периодом $\tau = (\tau_0 \tau_1 \ldots \tau_{T-1}) \in E_k^T$ будем обозначать через $f^{(n)}_{(\tau_0 \tau_1 \ldots \tau_{T-1})}$. Понятно, что такое обозначение полностью определяет эту функцию.

Введем функцию $\operatorname{rol}(\alpha, i) \in E_k^n \times E_k \to E_k^n$, производящую чиклический сдвиг вектора α влево. Пусть $\alpha = (a_1, \ldots, a_n)$, тогда $\operatorname{rol}(\alpha, i) = (a_{(1+i) \mod k}, \ldots, a_{(n+i) \mod k})$.

Результаты

Теоремы

Теорема 1. *При $n \geqslant 1$ для периодических функций пятизначной логики $f_n = f^{(n)}_{(1144)}$, $g_n = f^{(n)}_{(1441)}$ верны следующие равенства:*

$$
\begin{aligned}
&f_{n+1} = j_0(x_{n+1})f_n + j_1(x_{n+1})g_n + 4\,j_2(x_{n+1})f_n + 4\,j_3(x_{n+1})g_n + j_4(x_{n+1})f_n = \\
&4\,f_n x_{n+1}^4 + (3\,f_n + 2\,g_n)x_{n+1}^3 + 3\,(f_n + g_n)x_{n+1}^2 + (4\,f_n + g_n)x_{n+1} + f_n = \\
&4\,f_n(x_{n+1}+1)^4 + 2\,(f_n + g_n)(x_{n+1}+1)^3 + (3\,f_n + 2\,g_n)(x_{n+1}+1)^2 + (f_n + g_n)(x_{n+1}+1) + f_n = \\
&4\,f_n(x_{n+1}+2)^4 + (f_n + 2\,g_n)(x_{n+1}+2)^3 + (f_n + g_n)(x_{n+1}+2)^2 + 3\,g_n(x_{n+1}+2) + 4\,g_n = \\
&4\,f_n(x_{n+1}+3)^4 + 2\,g_n(x_{n+1}+3)^3 + 2\,f_n(x_{n+1}+3)^2 + 2\,g_n(x_{n+1}+3) + 4\,f_n = \\
&4\,f_n(x_{n+1}+4)^4 + 2\,(2\,f_n + g_n)(x_{n+1}+4)^3 + (f_n + 4\,g_n)(x_{n+1}+4)^2 + 3\,g_n(x_{n+1}+4) + g_n =
\end{aligned}
$$

Доказательство. Первое равенство следует из теоремы 1.

При поляризации x_{n+1}, когда $d_{n+1} = 0$

$$
\begin{aligned}
&f_{n+1}(\bar{x}_n, 0) = 0 + 0 + 0 + 0 + f_n = f_n \\
&f_{n+1}(\bar{x}_n, 1) = 4\,f_n + 3\,f_n + 2\,g_n + 3\,f_n + 3\,g_n + 4\,f_n + g_n + f_n = g_n \\
&f_{n+1}(\bar{x}_n, 2) = 4\,f_n + 4\,f_n + g_n + 2\,f_n + 2\,g_n + 3\,f_n + 2\,g_n + f_n = 4\,f_n \\
&f_{n+1}(\bar{x}_n, 3) = 4\,f_n + f_n + 4\,g_n + 2\,f_n + 2\,g_n + 2\,f_n + 3\,g_n + f_n = 4\,g_n \\
&f_{n+1}(\bar{x}_n, 4) = 4\,f_n + 2\,f_n + 3\,g_n + 3\,f_n + 3\,g_n + f_n + 4\,g_n + f_n = f_n
\end{aligned}
$$

При поляризации x_{n+1}, когда $d_{n+1} = 1$

$$
\begin{aligned}
&f_{n+1}(\bar{x}_n, 0) = 4\,f_n + 2\,f_n + 2\,g_n + 3\,f_n + 2\,g_n + f_n + g_n + f_n = f_n \\
&f_{n+1}(\bar{x}_n, 1) = 4\,f_n + f_n + g_n + 2\,f_n + 3\,g_n + 2\,f_n + 2\,g_n + f_n = g_n \\
&f_{n+1}(\bar{x}_n, 2) = 4\,f_n + 4\,f_n + 4\,g_n + 2\,f_n + 3\,g_n + 3\,f_n + 3\,g_n + f_n = 4\,f_n \\
&f_{n+1}(\bar{x}_n, 3) = 4\,f_n + 3\,f_n + 3\,g_n + 3\,f_n + 2\,g_n + 4\,f_n + 4\,g_n + f_n = 4\,g_n \\
&f_{n+1}(\bar{x}_n, 4) = 0 + 0 + 0 + 0 + f_n = f_n
\end{aligned}
$$

При поляризации x_{n+1}, когда $d_{n+1} = 2$

$$
\begin{aligned}
&f_{n+1}(\bar{x}_n, 0) = 4\,f_n + 3\,f_n + g_n + 4\,f_n + 4\,g_n + g_n + 4\,g_n = f_n \\
&f_{n+1}(\bar{x}_n, 1) = 4\,f_n + 2\,f_n + 4\,g_n + 4\,f_n + 4\,g_n + 4\,g_n + 4\,g_n = g_n \\
&f_{n+1}(\bar{x}_n, 2) = 4\,f_n + 4\,f_n + 3\,g_n + f_n + g_n + 2\,g_n + 4\,g_n = 4\,f_n \\
&f_{n+1}(\bar{x}_n, 3) = 0 + 0 + 0 + 0 + 4\,g_n = 4\,g_n \\
&f_{n+1}(\bar{x}_n, 4) = 4\,f_n + f_n + 2\,g_n + f_n + g_n + 3\,g_n + 4\,g_n = f_n
\end{aligned}
$$

При поляризации x_{n+1}, когда $d_{n+1} = 3$

$$\begin{aligned}
f_{n+1}(\bar{x}_n, 0) &= 4\,f_n + 4\,g_n + 3\,f_n + g_n + 4\,f_n = f_n \\
f_{n+1}(\bar{x}_n, 1) &= 4\,f_n + 3\,g_n + 2\,f_n + 3\,g_n + 4\,f_n = g_n \\
f_{n+1}(\bar{x}_n, 2) &= 0 + 0 + 0 + 0 + 4\,f_n = 4\,f_n \\
f_{n+1}(\bar{x}_n, 3) &= 4\,f_n + 2\,g_n + 2\,f_n + 2\,g_n + 4\,f_n = 4\,g_n \\
f_{n+1}(\bar{x}_n, 4) &= 4\,f_n + g_n + 3\,f_n + 4\,g_n + 4\,f_n = f_n
\end{aligned}$$

При поляризации x_{n+1}, когда $d_{n+1} = 4$

$$\begin{aligned}
f_{n+1}(\bar{x}_n, 0) &= 4\,f_n + f_n + 3\,g_n + f_n + 4\,g_n + 2\,g_n + g_n = f_n \\
f_{n+1}(\bar{x}_n, 1) &= 0 + 0 + 0 + 0 + g_n = g_n \\
f_{n+1}(\bar{x}_n, 2) &= 4\,f_n + 4\,f_n + 2\,g_n + f_n + g_n + 3\,g_n + g_n = 4\,f_n \\
f_{n+1}(\bar{x}_n, 3) &= 4\,f_n + 2\,f_n + g_n + 4\,f_n + g_n + g_n + g_n = 4\,g_n \\
f_{n+1}(\bar{x}_n, 4) &= 4\,f_n + 3\,f_n + 4\,g_n + 4\,f_n + g_n + 4\,g_n + g_n = f_n
\end{aligned}$$

$\square$

Теорема 2. *При $n \geqslant 1$ для периодических функций пятизначной логики $f_n = f^{(n)}_{(1144)}$, $g_n = f^{(n)}_{(1441)}$ верны следующие равенства:*

$$\begin{aligned}
&g_{n+1} = j_0(x_{n+1})g_n + 4\,j_1(x_{n+1})f_n + 4\,j_2(x_{n+1})g_n + j_3(x_{n+1})f_n + j_4(x_{n+1})g_n = \\
&4\,g_n x_{n+1}^4 + 3\,(f_n + g_n)x_{n+1}^3 + (2\,f_n + 3\,g_n)x_{n+1}^2 + 4\,(f_n + g_n)x_{n+1} + g_n = \\
&4\,g_n(x_{n+1}+1)^4 + (3\,f_n + 2\,g_n)(x_{n+1}+1)^3 + 3\,(f_n + g_n)(x_{n+1}+1)^2 + (4\,f_n + g_n)(x_{n+1}+1) + g_n = \\
&4\,g_n(x_{n+1}+2)^4 + (3\,f_n + g_n)(x_{n+1}+2)^3 + (4\,f_n + g_n)(x_{n+1}+2)^2 + 2\,f_n(x_{n+1}+2) + f_n = \\
&4\,g_n(x_{n+1}+3)^4 + 3\,f_n(x_{n+1}+3)^3 + 2\,g_n(x_{n+1}+3)^2 + 3\,f_n(x_{n+1}+3) + 4\,g_n = \\
&4\,g_n(x_{n+1}+4)^4 + (3\,f_n + 4\,g_n)(x_{n+1}+4)^3 + (f_n + g_n)(x_{n+1}+4)^2 + 2\,f_n(x_{n+1}+4) + 4\,f_n =
\end{aligned}$$

Доказательство. Первое равенство следует из теоремы 1.

При поляризации x_{n+1}, когда $d_{n+1} = 0$

$$\begin{aligned}
g_{n+1}(\bar{x}_n, 0) &= 0 + 0 + 0 + 0 + g_n = g_n \\
g_{n+1}(\bar{x}_n, 1) &= 4\,g_n + 3\,f_n + 3\,g_n + 2\,f_n + 3\,g_n + 4\,f_n + 4\,g_n + g_n = 4\,f_n \\
g_{n+1}(\bar{x}_n, 2) &= 4\,g_n + 4\,f_n + 4\,g_n + 3\,f_n + 2\,g_n + 3\,f_n + 3\,g_n + g_n = 4\,g_n \\
g_{n+1}(\bar{x}_n, 3) &= 4\,g_n + f_n + g_n + 3\,f_n + 2\,g_n + 2\,f_n + 2\,g_n + g_n = f_n \\
g_{n+1}(\bar{x}_n, 4) &= 4\,g_n + 2\,f_n + 2\,g_n + 2\,f_n + 3\,g_n + f_n + g_n + g_n = g_n
\end{aligned}$$

При поляризации x_{n+1}, когда $d_{n+1} = 1$

$$\begin{aligned}
g_{n+1}(\bar{x}_n, 0) &= 4\,g_n + 3\,f_n + 2\,g_n + 3\,f_n + 3\,g_n + 4\,f_n + g_n + g_n = g_n \\
g_{n+1}(\bar{x}_n, 1) &= 4\,g_n + 4\,f_n + g_n + 2\,f_n + 2\,g_n + 3\,f_n + 2\,g_n + g_n = 4\,f_n \\
g_{n+1}(\bar{x}_n, 2) &= 4\,g_n + f_n + 4\,g_n + 2\,f_n + 2\,g_n + 2\,f_n + 3\,g_n + g_n = 4\,g_n \\
g_{n+1}(\bar{x}_n, 3) &= 4\,g_n + 2\,f_n + 3\,g_n + 3\,f_n + 3\,g_n + f_n + 4\,g_n + g_n = f_n \\
g_{n+1}(\bar{x}_n, 4) &= 0 + 0 + 0 + 0 + g_n = g_n
\end{aligned}$$

При поляризации x_{n+1}, когда $d_{n+1} = 2$

$$\begin{aligned}
&g_{n+1}(\bar{x}_n, 0) = 4\,g_n + 4\,f_n + 3\,g_n + f_n + 4\,g_n + 4\,f_n + f_n = g_n\\
&g_{n+1}(\bar{x}_n, 1) = 4\,g_n + f_n + 2\,g_n + f_n + 4\,g_n + f_n + f_n = 4\,f_n\\
&g_{n+1}(\bar{x}_n, 2) = 4\,g_n + 2\,f_n + 4\,g_n + 4\,f_n + g_n + 3\,f_n + f_n = 4\,g_n\\
&g_{n+1}(\bar{x}_n, 3) = 0 + 0 + 0 + 0 + f_n = f_n\\
&g_{n+1}(\bar{x}_n, 4) = 4\,g_n + 3\,f_n + g_n + 4\,f_n + g_n + 2\,f_n + f_n = g_n
\end{aligned}$$

При поляризации x_{n+1}, когда $d_{n+1} = 3$

$$\begin{aligned}
&g_{n+1}(\bar{x}_n, 0) = 4\,g_n + f_n + 3\,g_n + 4\,f_n + 4\,g_n = g_n\\
&g_{n+1}(\bar{x}_n, 1) = 4\,g_n + 2\,f_n + 2\,g_n + 2\,f_n + 4\,g_n = 4\,f_n\\
&g_{n+1}(\bar{x}_n, 2) = 0 + 0 + 0 + 0 + 4\,g_n = 4\,g_n\\
&g_{n+1}(\bar{x}_n, 3) = 4\,g_n + 3\,f_n + 2\,g_n + 3\,f_n + 4\,g_n = f_n\\
&g_{n+1}(\bar{x}_n, 4) = 4\,g_n + 4\,f_n + 3\,g_n + f_n + 4\,g_n = g_n
\end{aligned}$$

При поляризации x_{n+1}, когда $d_{n+1} = 4$

$$\begin{aligned}
&g_{n+1}(\bar{x}_n, 0) = 4\,g_n + 2\,f_n + g_n + f_n + g_n + 3\,f_n + 4\,f_n = g_n\\
&g_{n+1}(\bar{x}_n, 1) = 0 + 0 + 0 + 0 + 4\,f_n = 4\,f_n\\
&g_{n+1}(\bar{x}_n, 2) = 4\,g_n + 3\,f_n + 4\,g_n + f_n + g_n + 2\,f_n + 4\,f_n = 4\,g_n\\
&g_{n+1}(\bar{x}_n, 3) = 4\,g_n + 4\,f_n + 2\,g_n + 4\,f_n + 4\,g_n + 4\,f_n + 4\,f_n = f_n\\
&g_{n+1}(\bar{x}_n, 4) = 4\,g_n + f_n + 3\,g_n + 4\,f_n + 4\,g_n + f_n + 4\,f_n = g_n
\end{aligned}$$

$\square$

Теорема 3. *При $n \geqslant 1$ для периодических функций пятизначной логики $f_n = f^{(n)}_{(1144)}$, $g_n = f^{(n)}_{(1441)}$ верны следующие равенства:*

$$\begin{aligned}
&s^1_{n+1} = f_{n+1} + g_{n+1} =\\
&(4\,f_n + 4\,g_n)x^4 + f_n x^3 + g_n x^2 + 3\,f_n x + f_n + g_n =\\
&(4\,f_n + 4\,g_n)(x+1)^4 + 4\,g_n(x+1)^3 + f_n(x+1)^2 + 2\,g_n(x+1) + f_n + g_n =\\
&(4\,f_n + 4\,g_n)(x+2)^4 + (4\,f_n + 3\,g_n)(x+2)^3 + 2\,g_n(x+2)^2 + (2\,f_n + 3\,g_n)(x+2) + f_n + 4\,g_n =\\
&(4\,f_n + 4\,g_n)(x+3)^4 + (3\,f_n + 2\,g_n)(x+3)^3 + 2\,(f_n + g_n)(x+3)^2 + (3\,f_n + 2\,g_n)(x+3) + 4\,f_n + 4\,g_n =\\
&(4\,f_n + 4\,g_n)(x+4)^4 + (2\,f_n + g_n)(x+4)^3 + 2\,f_n(x+4)^2 + (2\,f_n + 3\,g_n)(x+4) + 4\,f_n + g_n =
\end{aligned}$$

Доказательство. Первое равенство следует из теоремы 1.

При поляризации x_{n+1}, когда $d_{n+1} = 0$

$$\begin{aligned}
&s^1_{n+1}(\bar{x}_n, 0) = 0 + 0 + 0 + 0 + f_n + g_n = f_n + g_n\\
&s^1_{n+1}(\bar{x}_n, 1) = 4\,f_n + 4\,g_n + f_n + g_n + 3\,f_n + f_n + g_n = 4\,f_n + g_n\\
&s^1_{n+1}(\bar{x}_n, 2) = 4\,f_n + 4\,g_n + 3\,f_n + 4\,g_n + f_n + f_n + g_n = 4\,f_n + 4\,g_n\\
&s^1_{n+1}(\bar{x}_n, 3) = 4\,f_n + 4\,g_n + 2\,f_n + 4\,g_n + 4\,f_n + f_n + g_n = f_n + 4\,g_n\\
&s^1_{n+1}(\bar{x}_n, 4) = 4\,f_n + 4\,g_n + 4\,f_n + g_n + 2\,f_n + f_n + g_n = f_n + g_n
\end{aligned}$$

При поляризации x_{n+1}, когда $d_{n+1}=1$

$$\begin{aligned}
&s^1_{n+1}(\bar{x}_n,0)=4\,f_n+4\,g_n+4\,g_n+f_n+2\,g_n+f_n+g_n=f_n+g_n\\
&s^1_{n+1}(\bar{x}_n,1)=4\,f_n+4\,g_n+2\,g_n+4\,f_n+4\,g_n+f_n+g_n=4\,f_n+g_n\\
&s^1_{n+1}(\bar{x}_n,2)=4\,f_n+4\,g_n+3\,g_n+4\,f_n+g_n+f_n+g_n=4\,f_n+4\,g_n\\
&s^1_{n+1}(\bar{x}_n,3)=4\,f_n+4\,g_n+g_n+f_n+3\,g_n+f_n+g_n=f_n+4\,g_n\\
&s^1_{n+1}(\bar{x}_n,4)=0+0+0+0+f_n+g_n=f_n+g_n
\end{aligned}$$

При поляризации x_{n+1}, когда $d_{n+1}=2$

$$\begin{aligned}
&s^1_{n+1}(\bar{x}_n,0)=4\,f_n+4\,g_n+2\,f_n+4\,g_n+3\,g_n+4\,f_n+g_n+f_n+4\,g_n=f_n+g_n\\
&s^1_{n+1}(\bar{x}_n,1)=4\,f_n+4\,g_n+3\,f_n+g_n+3\,g_n+f_n+4\,g_n+f_n+4\,g_n=4\,f_n+g_n\\
&s^1_{n+1}(\bar{x}_n,2)=4\,f_n+4\,g_n+f_n+2\,g_n+2\,g_n+3\,f_n+2\,g_n+f_n+4\,g_n=4\,f_n+4\,g_n\\
&s^1_{n+1}(\bar{x}_n,3)=0+0+0+0+f_n+4\,g_n=f_n+4\,g_n\\
&s^1_{n+1}(\bar{x}_n,4)=4\,f_n+4\,g_n+4\,f_n+3\,g_n+2\,g_n+2\,f_n+3\,g_n+f_n+4\,g_n=f_n+g_n
\end{aligned}$$

При поляризации x_{n+1}, когда $d_{n+1}=3$

$$\begin{aligned}
&s^1_{n+1}(\bar{x}_n,0)=4\,f_n+4\,g_n+f_n+4\,g_n+3\,f_n+3\,g_n+4\,f_n+g_n+4\,f_n+4\,g_n=f_n+g_n\\
&s^1_{n+1}(\bar{x}_n,1)=4\,f_n+4\,g_n+2\,f_n+3\,g_n+2\,f_n+2\,g_n+2\,f_n+3\,g_n+4\,f_n+4\,g_n=4\,f_n+g_n\\
&s^1_{n+1}(\bar{x}_n,2)=0+0+0+0+4\,f_n+4\,g_n=4\,f_n+4\,g_n\\
&s^1_{n+1}(\bar{x}_n,3)=4\,f_n+4\,g_n+3\,f_n+2\,g_n+2\,f_n+2\,g_n+3\,f_n+2\,g_n+4\,f_n+4\,g_n=f_n+4\,g_n\\
&s^1_{n+1}(\bar{x}_n,4)=4\,f_n+4\,g_n+4\,f_n+g_n+3\,f_n+3\,g_n+f_n+4\,g_n+4\,f_n+4\,g_n=f_n+g_n
\end{aligned}$$

При поляризации x_{n+1}, когда $d_{n+1}=4$

$$\begin{aligned}
&s^1_{n+1}(\bar{x}_n,0)=4\,f_n+4\,g_n+3\,f_n+4\,g_n+2\,f_n+3\,f_n+2\,g_n+4\,f_n+g_n=f_n+g_n\\
&s^1_{n+1}(\bar{x}_n,1)=0+0+0+0+4\,f_n+g_n=4\,f_n+g_n\\
&s^1_{n+1}(\bar{x}_n,2)=4\,f_n+4\,g_n+2\,f_n+g_n+2\,f_n+2\,f_n+3\,g_n+4\,f_n+g_n=4\,f_n+4\,g_n\\
&s^1_{n+1}(\bar{x}_n,3)=4\,f_n+4\,g_n+f_n+3\,g_n+3\,f_n+4\,f_n+g_n+4\,f_n+g_n=f_n+4\,g_n\\
&s^1_{n+1}(\bar{x}_n,4)=4\,f_n+4\,g_n+4\,f_n+2\,g_n+3\,f_n+f_n+4\,g_n+4\,f_n+g_n=f_n+g_n
\end{aligned}$$

$\square$

Теорема 4. *При $n\geqslant 1$ для периодических функций пятизначной логики $f_n=f^{(n)}_{(1144)}$, $g_n=f^{(n)}_{(1441)}$ верны следующие равенства:*

$$\begin{aligned}
&s^2_{n+1}=f_{n+1}+2\,g_{n+1}=\\
&(4\,f_n+3\,g_n)x^4+(4\,f_n+3\,g_n)x^3+(2\,f_n+4\,g_n)x^2+(2\,f_n+4\,g_n)x+f_n+2\,g_n=\\
&(4\,f_n+3\,g_n)(x+1)^4+(3\,f_n+g_n)(x+1)^3+(4\,f_n+3\,g_n)(x+1)^2+(4\,f_n+3\,g_n)(x+1)+f_n+2\,g_n=\\
&(4\,f_n+3\,g_n)(x+2)^4+(2\,f_n+4\,g_n)(x+2)^3+(4\,f_n+3\,g_n)(x+2)^2+(4\,f_n+3\,g_n)(x+2)+2\,f_n+4\,g_n=\\
&(4\,f_n+3\,g_n)(x+3)^4+(f_n+2\,g_n)(x+3)^3+2\,(f_n+2\,g_n)(x+3)^2+(f_n+2\,g_n)(x+3)+4\,f_n+3\,g_n=\\
&(4\,f_n+3\,g_n)(x+4)^4+(3\,f_n+g_n)(x+4)^2+(4\,f_n+3\,g_n)(x+4)+3\,f_n+g_n=
\end{aligned}$$

Доказательство. Первое равенство следует из теоремы 1.

При поляризации x_{n+1}, когда $d_{n+1} = 0$

$$
\begin{aligned}
&s^2_{n+1}(\bar{x}_n, 0) = 0 + 0 + 0 + 0 + f_n + 2\,g_n = f_n + 2\,g_n\\
&s^2_{n+1}(\bar{x}_n, 1) = 4\,f_n + 3\,g_n + 4\,f_n + 3\,g_n + 2\,f_n + 4\,g_n + 2\,f_n + 4\,g_n + f_n + 2\,g_n = 3\,f_n + g_n\\
&s^2_{n+1}(\bar{x}_n, 2) = 4\,f_n + 3\,g_n + 2\,f_n + 4\,g_n + 3\,f_n + g_n + 4\,f_n + 3\,g_n + f_n + 2\,g_n = 4\,f_n + 3\,g_n\\
&s^2_{n+1}(\bar{x}_n, 3) = 4\,f_n + 3\,g_n + 3\,f_n + g_n + 3\,f_n + g_n + f_n + 2\,g_n + f_n + 2\,g_n = 2\,f_n + 4\,g_n\\
&s^2_{n+1}(\bar{x}_n, 4) = 4\,f_n + 3\,g_n + f_n + 2\,g_n + 2\,f_n + 4\,g_n + 3\,f_n + g_n + f_n + 2\,g_n = f_n + 2\,g_n
\end{aligned}
$$

При поляризации x_{n+1}, когда $d_{n+1} = 1$

$$
\begin{aligned}
&s^2_{n+1}(\bar{x}_n, 0) = 4\,f_n + 3\,g_n + 3\,f_n + g_n + 4\,f_n + 3\,g_n + 4\,f_n + 3\,g_n + f_n + 2\,g_n = f_n + 2\,g_n\\
&s^2_{n+1}(\bar{x}_n, 1) = 4\,f_n + 3\,g_n + 4\,f_n + 3\,g_n + f_n + 2\,g_n + 3\,f_n + g_n + f_n + 2\,g_n = 3\,f_n + g_n\\
&s^2_{n+1}(\bar{x}_n, 2) = 4\,f_n + 3\,g_n + f_n + 2\,g_n + f_n + 2\,g_n + 2\,f_n + 4\,g_n + f_n + 2\,g_n = 4\,f_n + 3\,g_n\\
&s^2_{n+1}(\bar{x}_n, 3) = 4\,f_n + 3\,g_n + 2\,f_n + 4\,g_n + 4\,f_n + 3\,g_n + f_n + 2\,g_n + f_n + 2\,g_n = 2\,f_n + 4\,g_n\\
&s^2_{n+1}(\bar{x}_n, 4) = 0 + 0 + 0 + 0 + f_n + 2\,g_n = f_n + 2\,g_n
\end{aligned}
$$

При поляризации x_{n+1}, когда $d_{n+1} = 2$

$$
\begin{aligned}
&s^2_{n+1}(\bar{x}_n, 0) = 4\,f_n + 3\,g_n + f_n + 2\,g_n + f_n + 2\,g_n + 3\,f_n + g_n + 2\,f_n + 4\,g_n = f_n + 2\,g_n\\
&s^2_{n+1}(\bar{x}_n, 1) = 4\,f_n + 3\,g_n + 4\,f_n + 3\,g_n + f_n + 2\,g_n + 2\,f_n + 4\,g_n + 2\,f_n + 4\,g_n = 3\,f_n + g_n\\
&s^2_{n+1}(\bar{x}_n, 2) = 4\,f_n + 3\,g_n + 3\,f_n + g_n + 4\,f_n + 3\,g_n + f_n + 2\,g_n + 2\,f_n + 4\,g_n = 4\,f_n + 3\,g_n\\
&s^2_{n+1}(\bar{x}_n, 3) = 0 + 0 + 0 + 0 + 2\,f_n + 4\,g_n = 2\,f_n + 4\,g_n\\
&s^2_{n+1}(\bar{x}_n, 4) = 4\,f_n + 3\,g_n + 2\,f_n + 4\,g_n + 4\,f_n + 3\,g_n + 4\,f_n + 3\,g_n + 2\,f_n + 4\,g_n = f_n + 2\,g_n
\end{aligned}
$$

При поляризации x_{n+1}, когда $d_{n+1} = 3$

$$
\begin{aligned}
&s^2_{n+1}(\bar{x}_n, 0) = 4\,f_n + 3\,g_n + 2\,f_n + 4\,g_n + 3\,f_n + g_n + 3\,f_n + g_n + 4\,f_n + 3\,g_n = f_n + 2\,g_n\\
&s^2_{n+1}(\bar{x}_n, 1) = 4\,f_n + 3\,g_n + 4\,f_n + 3\,g_n + 2\,f_n + 4\,g_n + 4\,f_n + 3\,g_n + 4\,f_n + 3\,g_n = 3\,f_n + g_n\\
&s^2_{n+1}(\bar{x}_n, 2) = 0 + 0 + 0 + 0 + 4\,f_n + 3\,g_n = 4\,f_n + 3\,g_n\\
&s^2_{n+1}(\bar{x}_n, 3) = 4\,f_n + 3\,g_n + f_n + 2\,g_n + 2\,f_n + 4\,g_n + f_n + 2\,g_n + 4\,f_n + 3\,g_n = 2\,f_n + 4\,g_n\\
&s^2_{n+1}(\bar{x}_n, 4) = 4\,f_n + 3\,g_n + 3\,f_n + g_n + 3\,f_n + g_n + 2\,f_n + 4\,g_n + 4\,f_n + 3\,g_n = f_n + 2\,g_n
\end{aligned}
$$

При поляризации x_{n+1}, когда $d_{n+1} = 4$

$$
\begin{aligned}
&s^2_{n+1}(\bar{x}_n, 0) = 4\,f_n + 3\,g_n + 0 + 3\,f_n + g_n + f_n + 2\,g_n + 3\,f_n + g_n = f_n + 2\,g_n\\
&s^2_{n+1}(\bar{x}_n, 1) = 0 + 0 + 0 + 0 + 3\,f_n + g_n = 3\,f_n + g_n\\
&s^2_{n+1}(\bar{x}_n, 2) = 4\,f_n + 3\,g_n + 0 + 3\,f_n + g_n + 4\,f_n + 3\,g_n + 3\,f_n + g_n = 4\,f_n + 3\,g_n\\
&s^2_{n+1}(\bar{x}_n, 3) = 4\,f_n + 3\,g_n + 0 + 2\,f_n + 4\,g_n + 3\,f_n + g_n + 3\,f_n + g_n = 2\,f_n + 4\,g_n\\
&s^2_{n+1}(\bar{x}_n, 4) = 4\,f_n + 3\,g_n + 0 + 2\,f_n + 4\,g_n + 2\,f_n + 4\,g_n + 3\,f_n + g_n = f_n + 2\,g_n
\end{aligned}
$$

$\square$

Теорема 5. *При $n \geqslant 1$ для периодических функций пятизначной логики $f_n = f^{(n)}_{(1144)}$, $g_n = f^{(n)}_{(1441)}$ верны следующие равенства:*

$$s^3_{n+1} = f_{n+1} + 3\,g_{n+1} =$$
$$(4\,f_n + 2\,g_n)x^4 + (2\,f_n + g_n)x^3 + (4\,f_n + 2\,g_n)x^2 + (f_n + 3\,g_n)x + f_n + 3\,g_n =$$
$$(4\,f_n + 2\,g_n)(x+1)^4 + (f_n + 3\,g_n)(x+1)^3 + (2\,f_n + g_n)(x+1)^2 + (3\,f_n + 4\,g_n)(x+1) + f_n + 3\,g_n =$$
$$(4\,f_n + 2\,g_n)(x+2)^4 + (3\,f_n + 4\,g_n)(x+2)^2 + (f_n + 3\,g_n)(x+2) + 3\,f_n + 4\,g_n =$$
$$(4\,f_n + 2\,g_n)(x+3)^4 + (4\,f_n + 2\,g_n)(x+3)^3 + 2\,(f_n + 3\,g_n)(x+3)^2 + (4\,f_n + 2\,g_n)(x+3) + 4\,f_n + 2\,g_n =$$
$$(4\,f_n + 2\,g_n)(x+4)^4 + (3\,f_n + 4\,g_n)(x+4)^3 + (4\,f_n + 2\,g_n)(x+4)^2 + (f_n + 3\,g_n)(x+4) + 2\,f_n + g_n =$$

Доказательство. Первое равенство следует из теоремы 1.

При поляризации x_{n+1}, когда $d_{n+1} = 0$

$$s^3_{n+1}(\bar{x}_n, 0) = 0 + 0 + 0 + 0 + f_n + 3\,g_n = f_n + 3\,g_n$$
$$s^3_{n+1}(\bar{x}_n, 1) = 4\,f_n + 2\,g_n + 2\,f_n + g_n + 4\,f_n + 2\,g_n + f_n + 3\,g_n + f_n + 3\,g_n = 2\,f_n + g_n$$
$$s^3_{n+1}(\bar{x}_n, 2) = 4\,f_n + 2\,g_n + f_n + 3\,g_n + f_n + 3\,g_n + 2\,f_n + g_n + f_n + 3\,g_n = 4\,f_n + 2\,g_n$$
$$s^3_{n+1}(\bar{x}_n, 3) = 4\,f_n + 2\,g_n + 4\,f_n + 2\,g_n + f_n + 3\,g_n + 3\,f_n + 4\,g_n + f_n + 3\,g_n = 3\,f_n + 4\,g_n$$
$$s^3_{n+1}(\bar{x}_n, 4) = 4\,f_n + 2\,g_n + 3\,f_n + 4\,g_n + 4\,f_n + 2\,g_n + 4\,f_n + 2\,g_n + f_n + 3\,g_n = f_n + 3\,g_n$$

При поляризации x_{n+1}, когда $d_{n+1} = 1$

$$s^3_{n+1}(\bar{x}_n, 0) = 4\,f_n + 2\,g_n + f_n + 3\,g_n + 2\,f_n + g_n + 3\,f_n + 4\,g_n + f_n + 3\,g_n = f_n + 3\,g_n$$
$$s^3_{n+1}(\bar{x}_n, 1) = 4\,f_n + 2\,g_n + 3\,f_n + 4\,g_n + 3\,f_n + 4\,g_n + f_n + 3\,g_n + f_n + 3\,g_n = 2\,f_n + g_n$$
$$s^3_{n+1}(\bar{x}_n, 2) = 4\,f_n + 2\,g_n + 2\,f_n + g_n + 3\,f_n + 4\,g_n + 4\,f_n + 2\,g_n + f_n + 3\,g_n = 4\,f_n + 2\,g_n$$
$$s^3_{n+1}(\bar{x}_n, 3) = 4\,f_n + 2\,g_n + 4\,f_n + 2\,g_n + 2\,f_n + g_n + 2\,f_n + g_n + f_n + 3\,g_n = 3\,f_n + 4\,g_n$$
$$s^3_{n+1}(\bar{x}_n, 4) = 0 + 0 + 0 + 0 + f_n + 3\,g_n = f_n + 3\,g_n$$

При поляризации x_{n+1}, когда $d_{n+1} = 2$

$$s^3_{n+1}(\bar{x}_n, 0) = 4\,f_n + 2\,g_n + 0 + 2\,f_n + g_n + 2\,f_n + g_n + 3\,f_n + 4\,g_n = f_n + 3\,g_n$$
$$s^3_{n+1}(\bar{x}_n, 1) = 4\,f_n + 2\,g_n + 0 + 2\,f_n + g_n + 3\,f_n + 4\,g_n + 3\,f_n + 4\,g_n = 2\,f_n + g_n$$
$$s^3_{n+1}(\bar{x}_n, 2) = 4\,f_n + 2\,g_n + 0 + 3\,f_n + 4\,g_n + 4\,f_n + 2\,g_n + 3\,f_n + 4\,g_n = 4\,f_n + 2\,g_n$$
$$s^3_{n+1}(\bar{x}_n, 3) = 0 + 0 + 0 + 0 + 3\,f_n + 4\,g_n = 3\,f_n + 4\,g_n$$
$$s^3_{n+1}(\bar{x}_n, 4) = 4\,f_n + 2\,g_n + 0 + 3\,f_n + 4\,g_n + f_n + 3\,g_n + 3\,f_n + 4\,g_n = f_n + 3\,g_n$$

При поляризации x_{n+1}, когда $d_{n+1} = 3$

$$s^3_{n+1}(\bar{x}_n, 0) = 4\,f_n + 2\,g_n + 3\,f_n + 4\,g_n + 3\,f_n + 4\,g_n + 2\,f_n + g_n + 4\,f_n + 2\,g_n = f_n + 3\,g_n$$
$$s^3_{n+1}(\bar{x}_n, 1) = 4\,f_n + 2\,g_n + f_n + 3\,g_n + 2\,f_n + g_n + f_n + 3\,g_n + 4\,f_n + 2\,g_n = 2\,f_n + g_n$$
$$s^3_{n+1}(\bar{x}_n, 2) = 0 + 0 + 0 + 0 + 4\,f_n + 2\,g_n = 4\,f_n + 2\,g_n$$
$$s^3_{n+1}(\bar{x}_n, 3) = 4\,f_n + 2\,g_n + 4\,f_n + 2\,g_n + 2\,f_n + g_n + 4\,f_n + 2\,g_n + 4\,f_n + 2\,g_n = 3\,f_n + 4\,g_n$$
$$s^3_{n+1}(\bar{x}_n, 4) = 4\,f_n + 2\,g_n + 2\,f_n + g_n + 3\,f_n + 4\,g_n + 3\,f_n + 4\,g_n + 4\,f_n + 2\,g_n = f_n + 3\,g_n$$

При поляризации x_{n+1}, когда $d_{n+1} = 4$

$$\begin{aligned}
&s^3_{n+1}(\bar{x}_n, 0) = 4\, f_n + 2\, g_n + 2\, f_n + g_n + 4\, f_n + 2\, g_n + 4\, f_n + 2\, g_n + 2\, f_n + g_n = f_n + 3\, g_n\\
&s^3_{n+1}(\bar{x}_n, 1) = 0 + 0 + 0 + 0 + 2\, f_n + g_n = 2\, f_n + g_n\\
&s^3_{n+1}(\bar{x}_n, 2) = 4\, f_n + 2\, g_n + 3\, f_n + 4\, g_n + 4\, f_n + 2\, g_n + f_n + 3\, g_n + 2\, f_n + g_n = 4\, f_n + 2\, g_n\\
&s^3_{n+1}(\bar{x}_n, 3) = 4\, f_n + 2\, g_n + 4\, f_n + 2\, g_n + f_n + 3\, g_n + 2\, f_n + g_n + 2\, f_n + g_n = 3\, f_n + 4\, g_n\\
&s^3_{n+1}(\bar{x}_n, 4) = 4\, f_n + 2\, g_n + f_n + 3\, g_n + f_n + 3\, g_n + 3\, f_n + 4\, g_n + 2\, f_n + g_n = f_n + 3\, g_n
\end{aligned}$$

□

Теорема 6. *При $n \geqslant 1$ для периодических функций пятизначной логики $f_n = f^{(n)}_{(1144)}$, $g_n = f^{(n)}_{(1441)}$ верны следующие равенства:*

$$\begin{aligned}
&s^4_{n+1} = f_{n+1} + 4\, g_{n+1} =\\
&(4\, f_n + g_n)x^4 + 4\, g_n x^3 + f_n x^2 + 2\, g_n x + f_n + 4\, g_n =\\
&(4\, f_n + g_n)(x+1)^4 + 4\, f_n(x+1)^3 + 4\, g_n(x+1)^2 + 2\, f_n(x+1) + f_n + 4\, g_n =\\
&(4\, f_n + g_n)(x+2)^4 + (3\, f_n + g_n)(x+2)^3 + 2\, f_n(x+2)^2 + (3\, f_n + 3\, g_n)(x+2) + 4\, f_n + 4\, g_n =\\
&(4\, f_n + g_n)(x+3)^4 + (2\, f_n + 2\, g_n)(x+3)^3 + 2\,(f_n + 4\, g_n)(x+3)^2 + (2\, f_n + 2\, g_n)(x+3) + 4\, f_n + g_n =\\
&(4\, f_n + g_n)(x+4)^4 + (f_n + 3\, g_n)(x+4)^3 + 3\, g_n(x+4)^2 + (3\, f_n + 3\, g_n)(x+4) + f_n + g_n =
\end{aligned}$$

Доказательство. Первое равенство следует из теоремы 1.

При поляризации x_{n+1}, когда $d_{n+1} = 0$

$$\begin{aligned}
&s^4_{n+1}(\bar{x}_n, 0) = 0 + 0 + 0 + 0 + f_n + 4\, g_n = f_n + 4\, g_n\\
&s^4_{n+1}(\bar{x}_n, 1) = 4\, f_n + g_n + 4\, g_n + f_n + 2\, g_n + f_n + 4\, g_n = f_n + g_n\\
&s^4_{n+1}(\bar{x}_n, 2) = 4\, f_n + g_n + 2\, g_n + 4\, f_n + 4\, g_n + f_n + 4\, g_n = 4\, f_n + g_n\\
&s^4_{n+1}(\bar{x}_n, 3) = 4\, f_n + g_n + 3\, g_n + 4\, f_n + g_n + f_n + 4\, g_n = 4\, f_n + 4\, g_n\\
&s^4_{n+1}(\bar{x}_n, 4) = 4\, f_n + g_n + g_n + f_n + 3\, g_n + f_n + 4\, g_n = f_n + 4\, g_n
\end{aligned}$$

При поляризации x_{n+1}, когда $d_{n+1} = 1$

$$\begin{aligned}
&s^4_{n+1}(\bar{x}_n, 0) = 4\, f_n + g_n + 4\, f_n + 4\, g_n + 2\, f_n + 0\, g_n + f_n + 4\, g_n = f_n + 4\, g_n\\
&s^4_{n+1}(\bar{x}_n, 1) = 4\, f_n + g_n + 2\, f_n + g_n + 4\, f_n + 0\, g_n + f_n + 4\, g_n = f_n + g_n\\
&s^4_{n+1}(\bar{x}_n, 2) = 4\, f_n + g_n + 3\, f_n + g_n + f_n + 0\, g_n + f_n + 4\, g_n = 4\, f_n + g_n\\
&s^4_{n+1}(\bar{x}_n, 3) = 4\, f_n + g_n + f_n + 4\, g_n + 3\, f_n + 0\, g_n + f_n + 4\, g_n = 4\, f_n + 4\, g_n\\
&s^4_{n+1}(\bar{x}_n, 4) = 0 + 0 + 0 + 0 + f_n + 4\, g_n = f_n + 4\, g_n
\end{aligned}$$

При поляризации x_{n+1}, когда $d_{n+1} = 2$

$$\begin{aligned}
&s^4_{n+1}(\bar{x}_n, 0) = 4\, f_n + g_n + 4\, f_n + 3\, g_n + 3\, f_n + f_n + g_n + 4\, f_n + 4\, g_n = f_n + 4\, g_n\\
&s^4_{n+1}(\bar{x}_n, 1) = 4\, f_n + g_n + f_n + 2\, g_n + 3\, f_n + 4\, f_n + 4\, g_n + 4\, f_n + 4\, g_n = f_n + g_n\\
&s^4_{n+1}(\bar{x}_n, 2) = 4\, f_n + g_n + 2\, f_n + 4\, g_n + 2\, f_n + 2\, f_n + 2\, g_n + 4\, f_n + 4\, g_n = 4\, f_n + g_n\\
&s^4_{n+1}(\bar{x}_n, 3) = 0 + 0 + 0 + 0 + 4\, f_n + 4\, g_n = 4\, f_n + 4\, g_n\\
&s^4_{n+1}(\bar{x}_n, 4) = 4\, f_n + g_n + 3\, f_n + g_n + 2\, f_n + 3\, f_n + 3\, g_n + 4\, f_n + 4\, g_n = f_n + 4\, g_n
\end{aligned}$$

При поляризации x_{n+1}, когда $d_{n+1} = 3$

$$\begin{aligned}
s^4_{n+1}(\bar{x}_n, 0) &= 4\,f_n + g_n + 4\,f_n + 4\,g_n + 3\,f_n + 2\,g_n + f_n + g_n + 4\,f_n + g_n = f_n + 4\,g_n \\
s^4_{n+1}(\bar{x}_n, 1) &= 4\,f_n + g_n + 3\,f_n + 3\,g_n + 2\,f_n + 3\,g_n + 3\,f_n + 3\,g_n + 4\,f_n + g_n = f_n + g_n \\
s^4_{n+1}(\bar{x}_n, 2) &= 0 + 0 + 0 + 0 + 4\,f_n + g_n = 4\,f_n + g_n \\
s^4_{n+1}(\bar{x}_n, 3) &= 4\,f_n + g_n + 2\,f_n + 2\,g_n + 2\,f_n + 3\,g_n + 2\,f_n + 2\,g_n + 4\,f_n + g_n = 4\,f_n + 4\,g_n \\
s^4_{n+1}(\bar{x}_n, 4) &= 4\,f_n + g_n + f_n + g_n + 3\,f_n + 2\,g_n + 4\,f_n + 4\,g_n + 4\,f_n + g_n = f_n + 4\,g_n
\end{aligned}$$

При поляризации x_{n+1}, когда $d_{n+1} = 4$

$$\begin{aligned}
s^4_{n+1}(\bar{x}_n, 0) &= 4\,f_n + g_n + 4\,f_n + 2\,g_n + 0\,f_n + 3\,g_n + 2\,f_n + 2\,g_n + f_n + g_n = f_n + 4\,g_n \\
s^4_{n+1}(\bar{x}_n, 1) &= 0 + 0 + 0 + 0 + f_n + g_n = f_n + g_n \\
s^4_{n+1}(\bar{x}_n, 2) &= 4\,f_n + g_n + f_n + 3\,g_n + 0\,f_n + 3\,g_n + 3\,f_n + 3\,g_n + f_n + g_n = 4\,f_n + g_n \\
s^4_{n+1}(\bar{x}_n, 3) &= 4\,f_n + g_n + 3\,f_n + 4\,g_n + 0\,f_n + 2\,g_n + f_n + g_n + f_n + g_n = 4\,f_n + 4\,g_n \\
s^4_{n+1}(\bar{x}_n, 4) &= 4\,f_n + g_n + 2\,f_n + g_n + 0\,f_n + 2\,g_n + 4\,f_n + 4\,g_n + f_n + g_n = f_n + 4\,g_n
\end{aligned}$$

□

Таблица с функциями

q_{n+1}	0	1	2	3	4
f_{n+1}	$fs^4s^1s^4f$	$fs^1s^4s^1f$	fs^2s^1gg	$fgfgf$	fs^3s^4gg
g_{n+1}	$gs^1s^4s^1g$	$gs^4s^1s^4g$	gs^2s^4ff	$gfgfg$	gs^3s^1ff
s^1_{n+1}	s^1fgfs^1	s^1gfgs^1	$s^1s^2gs^4s^4$	$s^1s^4s^1s^4s^1$	$s^1s^3fs^4s^4$
s^2_{n+1}	$s^2s^2s^2s^2s^2$	$s^2s^2s^2s^2s^2$	$s^2s^2s^2s^2s^2$	$s^2s^2s^2s^2s^2$	$s^2s^2s^2s^2s^2$
s^3_{n+1}	$s^3s^3s^3s^3s^3$	$s^3s^3s^3s^3s^3$	$s^3s^3s^3s^3s^3$	$s^3s^3s^3s^3s^3$	$s^3s^3s^3s^3s^3$
s^4_{n+1}	s^4gfgs^4	s^4fgfs^4	$s^4s^2fs^1s^1$	$s^4s^1s^4s^1s^4$	$s^4s^3gs^1s^1$

Таблица 1: Результаты

Теорема 7. *При $n \geqslant 1$ длина периодической функции пятизначной логики $s^2_n = f_n + 2\,g_n$ выражается следующей формулой:*

$$l(s^2_n) = 5^{n-1}\,l(s^2_1) = 5^{n-1} \cdot 4.$$

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по n – числу переменных функции s^2_n. При $n = 1$ получаем $l(s^2_1) = l(s^2_1)$ – верно. Пусть формула верна для $n-1$, тогда из таблицы 1 видно, что при любой поляризации x_n, s^2_n выражается через 5 функций

s_{n-1}, при каждой из которых x_n стоит в различных степенях. Поэтому $l(s_n^2) = 5\,l(s_{n-1}^2) = 5 \cdot 5^{n-2}\,l(s_1^2) = 5^{n-1}\,l(s_1^2)$. □

Теорема 8. *При $n \geqslant 1$ длина периодической функции пятизначной логики $s_n^3 = f_n + 2\,g_n$ выражается следующей формулой:*

$$l(s_n^3) = 5^{n-1}\,l(s_1^3) = 5^{n-1} \cdot 4.$$

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по n – числу переменных функции s_n^3. При $n = 1$ получаем $l(s_1^3) = l(s_1^3)$ – верно. Пусть формула верна для $n-1$, тогда из таблицы 1 видно, что при любой поляризации x_n, s_n^3 выражается через 5 функций s_{n-1}, при каждой из которых x_n стоит в различных степенях. Поэтому $l(s_n^3) = 5\,l(s_{n-1}^3) = 5 \cdot 5^{n-2}\,l(s_1^3) = 5^{n-1}\,l(s_1^3)$. □

Обозначим s^1 и s^4 через h и t соответственно.

q_{n+1}	0	1	2	3	4
f_{n+1}	$fthtf$	$fhthf$	fs^2hgg	$fgfgf$	fs^3tgg
g_{n+1}	$ghthg$	$gthtg$	gs^2tff	$gfgfg$	gs^3hff
h_{n+1}	$hfgfh$	$hgfgh$	hs^2gtt	$hthth$	hs^3ftt
t_{n+1}	$tgfgt$	$tfgft$	ts^2fhh	$ththt$	ts^3ghh

Таблица 2: Результаты

Содержание

Список литературы

1. Угрюмов Е. П. Цифровая схемотехника. СПб.: БХВ-Петербург, 2004.

2. Sasao T., Besslich P. On the complexity of mod-2 sum PLA's // IEEE Trans.on Comput. 39. N 2. 1990. P. 262–266.

3. Супрун В. П. Сложность булевых функций в классе канонических поляризованных полиномов // Дискретная математика. 5. №2. 1993. С. 111–115.

4. Перязев Н. А. Сложность булевых функций в классе полиномиальных поляризованных форм // Алгебра и логика. 34. №3. 1995. С. 323–326.

5. Селезнева С. Н. О сложности представления функций многозначных логик поляризованными полиномами. Дискретная математика. 14. №2. 2002. С. 48–53.

6. Кириченко К. Д. Верхняя оценка сложности полиномиальных нормальных форм булевых функций // Дискретная математика. 17. №3. 2005. С. 80–88.

7. Селезнева С. Н. Дайняк А. Б. О сложности обобщенных полиномов k-значных функций // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. №3. 2008. С. 34–39.

8. Маркелов Н. К. Нижняя оценка сложности функций трехзначной логики в классе поляризованных полиномов // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. №3. 2012. С. 40–45.

9. Селезнева С. Н. Маркелов Н. К. Быстрый алгоритм построения векторов коэффициэнтов поляризованных полиномов k-значных функций // Ученые записки Казанского университета. Серия Физико-математические науки. 2009. 151. №2 С. 147-151.