

Введение

Одним из стандартных способов задания функций k -значной логики являются поляризованные полиномиальные формы (ППФ), которые также называются обобщенными формами Риды-Мюллера, или каноническими поляризованными полиномами. В ППФ каждая переменная имеет определенную поляризацию. Длиной полиномиальной формы называется число попарно различных слагаемых в ней. Длиной функции F в классе ППФ называется наименьшая длина среди длин всех поляризованных полиномиальных форм, реализующих F . Функция Шеннона $L_k^K(n)$ длины определяется как наибольшая длина среди всех функций k -значной логики в классе K от n переменных, если K опущено, то подразумевается класс ППФ. Практическое применение ППФ нашли при построении программируемых логических матриц (ПЛМ) [1, 2], сложность ПЛМ напрямую зависит от длины ППФ, по которой она построена. Поэтому в ряде работ исследуется сложность ППФ различных функций.

В 1993 В. П. Супрун [3] получил первые оценки функции Шеннона для функций алгебры логики :

$$L_2(n) \geq C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor},$$
$$L_2(n) < 3 \cdot 2^{n-1}.$$

где $[a]$ обозначает целую часть a .

Точное значение функции Шеннона для функций алгебры логики в 1995 г. было найдено Н. А. Перязевым [4] :

$$L_2(n) = \left\lceil \frac{2^{n+1}}{3} \right\rceil.$$

Функции k -значных логик являются естественным обобщением функций алгебры логики. Для функций k -значной логики верхняя оценка функции Шеннона была получена в 2002 г. С. Н. Селезневой [5] :

$$L_k(n) < \frac{k(k-1)}{k(k-1)+1} k^n.$$

При построении ПЛМ рассматривают и другие полиномиальные формы. Например класс обобщенных полиномиальных форм. В классе обобщенных полиномиальных форм, в отличие от класса поляризованных полиномиальных форм, переменные могут иметь различную поляризацию в разных слагаемых. В статье К. Д. Кириченко [6], опубликованной в 2005 г., получена верхняя оценка функции Шеннона в классе обобщенных полиномиальных форм функций алгебры логики :

$$L_2^{\text{О.П.}}(n) < \frac{2^{n+1}(\log_2 n + 1)}{n}.$$

Верхняя оценка функции Шеннона в классе обобщенных полиномиальных форм функций k -значной логики была получена С. Н. Селезневой А. Б. Дайняком в 2008 г. [7]:

$$L_k^{\text{О.П.}}(n) \lesssim 2 \cdot \frac{k^n}{n} \cdot \ln n \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

В 2012 г. Н. К. Маркеловым была получена нижняя оценка функции Шеннона для функции трехзначной логики в классе поляризованных полиномов [8]:

$$L_3(n) \geq \left\lceil \frac{3}{4} 3^n \right\rceil.$$

Теоремы

Теорема 1. При $n \geq 1$ для периодических функций пятизначной логики $f_n = f_{(1144)}^{(n)}$, $g_n = f_{(1441)}^{(n)}$ верны следующие равенства:

$$\begin{aligned} f_{n+1} &= j_0(x_{n+1})f_n + j_1(x_{n+1})g_n + 4j_2(x_{n+1})f_n + 4j_3(x_{n+1})g_n + \\ &+ j_4(x_{n+1})f_n = 4f_n x_{n+1}^4 + (3f_n + 2g_n)x_{n+1}^3 + 3(f_n + g_n)x_{n+1}^2 + \\ &+ (4f_n + g_n)x_{n+1} + f_n = 4f_n(x_{n+1} + 1)^4 + 2(f_n + g_n)(x_{n+1} + 1)^3 + \\ &+ (3f_n + 2g_n)(x_{n+1} + 1)^2 + (f_n + g_n)(x_{n+1} + 1) + f_n = 4f_n(x_{n+1} + 2)^4 + \\ &+ (f_n + 2g_n)(x_{n+1} + 2)^3 + (f_n + g_n)(x_{n+1} + 2)^2 + 3g_n(x_{n+1} + 2) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
+ 4 g_n &= 4 f_n(x_{n+1} + 3)^4 + 2 g_n(x_{n+1} + 3)^3 + 2 f_n(x_{n+1} + 3)^2 + \\
+ 2 g_n(x_{n+1} + 3) + 4 f_n &= 4 f_n(x_{n+1} + 4)^4 + 2 (2 f_n + g_n)(x_{n+1} + 4)^3 + \\
+ (f_n + 4 g_n)(x_{n+1} + 4)^2 &+ 3 g_n(x_{n+1} + 4) + g_n
\end{aligned}$$

Доказательство.

$$f_{n+1}(0) = 0 + 0 + 0 + 0 + f_n = f_n$$

$$f_{n+1}(1) = 4 f_n + 3 f_n + 2 g_n + 3 f_n + 3 g_n + 4 f_n + g_n + f_n = g_n$$

$$f_{n+1}(2) = 4 f_n + 4 f_n + g_n + 2 f_n + 2 g_n + 3 f_n + 2 g_n + f_n = 4 f_n$$

$$f_{n+1}(3) = 4 f_n + f_n + 4 g_n + 2 f_n + 2 g_n + 2 f_n + 3 g_n + f_n = 4 g_n$$

$$f_{n+1}(4) = 4 f_n + 2 f_n + 3 g_n + 3 f_n + 3 g_n + f_n + 4 g_n + f_n = f_n$$

$$f_{n+1}(0) = 4 f_n + 2 f_n + 2 g_n + 3 f_n + 2 g_n + f_n + g_n + f_n = f_n$$

$$f_{n+1}(1) = 4 f_n + f_n + g_n + 2 f_n + 3 g_n + 2 f_n + 2 g_n + f_n = g_n$$

$$f_{n+1}(2) = 4 f_n + 4 f_n + 4 g_n + 2 f_n + 3 g_n + 3 f_n + 3 g_n + f_n = 4 f_n$$

$$f_{n+1}(3) = 4 f_n + 3 f_n + 3 g_n + 3 f_n + 2 g_n + 4 f_n + 4 g_n + f_n = 4 g_n$$

$$f_{n+1}(4) = 0 + 0 + 0 + 0 + f_n = f_n$$

$$f_{n+1}(0) = 4 f_n + 3 f_n + g_n + 4 f_n + 4 g_n + g_n + 4 g_n = f_n$$

$$f_{n+1}(1) = 4 f_n + 2 f_n + 4 g_n + 4 f_n + 4 g_n + 4 g_n + 4 g_n = g_n$$

$$f_{n+1}(2) = 4 f_n + 4 f_n + 3 g_n + f_n + g_n + 2 g_n + 4 g_n = 4 f_n$$

$$f_{n+1}(3) = 0 + 0 + 0 + 0 + 4 g_n = 4 g_n$$

$$f_{n+1}(4) = 4 f_n + f_n + 2 g_n + f_n + g_n + 3 g_n + 4 g_n = f_n$$

$$f_{n+1}(0) = 4 f_n + 4 g_n + 3 f_n + g_n + 4 f_n = f_n$$

$$f_{n+1}(1) = 4 f_n + 3 g_n + 2 f_n + 3 g_n + 4 f_n = g_n$$

$$\begin{aligned}
f_{n+1}(2) &= 0 + 0 + 0 + 0 + 4f_n = 4f_n \\
f_{n+1}(3) &= 4f_n + 2g_n + 2f_n + 2g_n + 4f_n = 4g_n \\
f_{n+1}(4) &= 4f_n + g_n + 3f_n + 4g_n + 4f_n = f_n \\
\\
f_{n+1}(0) &= 4f_n + f_n + 3g_n + f_n + 4g_n + 2g_n + g_n = f_n \\
f_{n+1}(1) &= 0 + 0 + 0 + 0 + g_n = g_n \\
f_{n+1}(2) &= 4f_n + 4f_n + 2g_n + f_n + g_n + 3g_n + g_n = 4f_n \\
f_{n+1}(3) &= 4f_n + 2f_n + g_n + 4f_n + g_n + g_n + g_n = 4g_n \\
f_{n+1}(4) &= 4f_n + 3f_n + 4g_n + 4f_n + g_n + 4g_n + g_n = f_n
\end{aligned}$$

□

Теорема 2. При $n \geq 1$ для периодических функций пятизначной логики $f_n = f_{(1144)}^{(n)}$, $g_n = f_{(1441)}^{(n)}$ верны следующие равенства:

$$\begin{aligned}
g_{n+1} &= j_0(x_{n+1})g_n + 4j_1(x_{n+1})f_n + 4j_2(x_{n+1})g_n + j_3(x_{n+1})f_n + \\
&+ j_4(x_{n+1})g_n = 4g_n x_{n+1}^4 + 3(f_n + g_n)x_{n+1}^3 + (2f_n + 3g_n)x_{n+1}^2 + \\
&+ 4(f_n + g_n)x_{n+1} + g_n = 4g_n(x_{n+1} + 1)^4 + (3f_n + 2g_n)(x_{n+1} + 1)^3 + \\
&+ 3(f_n + g_n)(x_{n+1} + 1)^2 + (4f_n + g_n)(x_{n+1} + 1) + g_n = 4g_n(x_{n+1} + 2)^4 + \\
&+ (3f_n + g_n)(x_{n+1} + 2)^3 + (4f_n + g_n)(x_{n+1} + 2)^2 + 2f_n(x_{n+1} + 2) + \\
&+ f_n = 4g_n(x_{n+1} + 3)^4 + 3f_n(x_{n+1} + 3)^3 + 2g_n(x_{n+1} + 3)^2 + \\
&+ 3f_n(x_{n+1} + 3) + 4g_n = 4g_n(x_{n+1} + 4)^4 + (3f_n + 4g_n)(x_{n+1} + 4)^3 + \\
&+ (f_n + g_n)(x_{n+1} + 4)^2 + 2f_n(x_{n+1} + 4) + 4f_n
\end{aligned}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
g_{n+1}(0) &= 0 + 0 + 0 + 0 + g_n = g_n \\
g_{n+1}(1) &= 4g_n + 3f_n + 3g_n + 2f_n + 3g_n + 4f_n + 4g_n + g_n = 4f_n \\
g_{n+1}(2) &= 4g_n + 4f_n + 4g_n + 3f_n + 2g_n + 3f_n + 3g_n + g_n = 4g_n \\
g_{n+1}(3) &= 4g_n + f_n + g_n + 3f_n + 2g_n + 2f_n + 2g_n + g_n = f_n \\
g_{n+1}(4) &= 4g_n + 2f_n + 2g_n + 2f_n + 3g_n + f_n + g_n + g_n = g_n
\end{aligned}$$

$$g_{n+1}(0) = 4g_n + 3f_n + 2g_n + 3f_n + 3g_n + 4f_n + g_n + g_n = g_n$$

$$g_{n+1}(1) = 4g_n + 4f_n + g_n + 2f_n + 2g_n + 3f_n + 2g_n + g_n = 4f_n$$

$$g_{n+1}(2) = 4g_n + f_n + 4g_n + 2f_n + 2g_n + 2f_n + 3g_n + g_n = 4g_n$$

$$g_{n+1}(3) = 4g_n + 2f_n + 3g_n + 3f_n + 3g_n + f_n + 4g_n + g_n = f_n$$

$$g_{n+1}(4) = 0 + 0 + 0 + 0 + g_n = g_n$$

$$g_{n+1}(0) = 4g_n + 4f_n + 3g_n + f_n + 4g_n + 4f_n + f_n = g_n$$

$$g_{n+1}(1) = 4g_n + f_n + 2g_n + f_n + 4g_n + f_n + f_n = 4f_n$$

$$g_{n+1}(2) = 4g_n + 2f_n + 4g_n + 4f_n + g_n + 3f_n + f_n = 4g_n$$

$$g_{n+1}(3) = 0 + 0 + 0 + 0 + f_n = f_n$$

$$g_{n+1}(4) = 4g_n + 3f_n + g_n + 4f_n + g_n + 2f_n + f_n = g_n$$

$$g_{n+1}(0) = 4g_n + f_n + 3g_n + 4f_n + 4g_n = g_n$$

$$g_{n+1}(1) = 4g_n + 2f_n + 2g_n + 2f_n + 4g_n = 4f_n$$

$$g_{n+1}(2) = 0 + 0 + 0 + 0 + 4g_n = 4g_n$$

$$g_{n+1}(3) = 4g_n + 3f_n + 2g_n + 3f_n + 4g_n = f_n$$

$$g_{n+1}(4) = 4g_n + 4f_n + 3g_n + f_n + 4g_n = g_n$$

$$g_{n+1}(0) = 4g_n + 2f_n + g_n + f_n + g_n + 3f_n + 4f_n = g_n$$

$$g_{n+1}(1) = 0 + 0 + 0 + 0 + 4f_n = 4f_n$$

$$g_{n+1}(2) = 4g_n + 3f_n + 4g_n + f_n + g_n + 2f_n + 4f_n = 4g_n$$

$$g_{n+1}(3) = 4g_n + 4f_n + 2g_n + 4f_n + 4g_n + 4f_n + 4f_n = f_n$$

$$g_{n+1}(4) = 4g_n + f_n + 3g_n + 4f_n + 4g_n + f_n + 4f_n = g_n$$

□

Теорема 3. При $n \geq 1$ для периодических функций пятизначной логики $f_n = f_{(1144)}^{(n)}$, $g_n = f_{(1441)}^{(n)}$ верны следующие равенства:

$$\begin{aligned} s_{n+1}^1 &= f_{n+1} + g_{n+1} = (4f_n + 4g_n)x^4 + f_nx^3 + g_nx^2 + 3f_nx + \\ &+ f_n + g_n = (4f_n + 4g_n)(x+1)^4 + 4g_n(x+1)^3 + f_n(x+1)^2 + \\ &+ 2g_n(x+1) + f_n + g_n = (4f_n + 4g_n)(x+2)^4 + (4f_n + 3g_n)(x+2)^3 + \\ &+ 2g_n(x+2)^2 + (2f_n + 3g_n)(x+2) + f_n + 4g_n = (4f_n + 4g_n)(x+3)^4 + \\ &+ (3f_n + 2g_n)(x+3)^3 + 2(f_n + g_n)(x+3)^2 + (3f_n + 2g_n)(x+3) + \\ &+ 4f_n + 4g_n = (4f_n + 4g_n)(x+4)^4 + (2f_n + g_n)(x+4)^3 + 2f_n(x+4)^2 + \\ &+ (2f_n + 3g_n)(x+4) + 4f_n + g_n \end{aligned}$$

Доказательство.

$$s_{n+1}^1(0) = 0 + 0 + 0 + 0 + f_n + g_n = f_n + g_n$$

$$s_{n+1}^1(1) = 4f_n + 4g_n + f_n + g_n + 3f_n + f_n + g_n = 4f_n + g_n$$

$$s_{n+1}^1(2) = 4f_n + 4g_n + 3f_n + 4g_n + f_n + f_n + g_n = 4f_n + 4g_n$$

$$s_{n+1}^1(3) = 4f_n + 4g_n + 2f_n + 4g_n + 4f_n + f_n + g_n = f_n + 4g_n$$

$$s_{n+1}^1(4) = 4f_n + 4g_n + 4f_n + g_n + 2f_n + f_n + g_n = f_n + g_n$$

$$s_{n+1}^1(0) = 4f_n + 4g_n + 4g_n + f_n + 2g_n + f_n + g_n = f_n + g_n$$

$$s_{n+1}^1(1) = 4f_n + 4g_n + 2g_n + 4f_n + 4g_n + f_n + g_n = 4f_n + g_n$$

$$s_{n+1}^1(2) = 4f_n + 4g_n + 3g_n + 4f_n + g_n + f_n + g_n = 4f_n + 4g_n$$

$$s_{n+1}^1(3) = 4f_n + 4g_n + g_n + f_n + 3g_n + f_n + g_n = f_n + 4g_n$$

$$s_{n+1}^1(4) = 0 + 0 + 0 + 0 + f_n + g_n = f_n + g_n$$

$$s_{n+1}^1(0) = 4f_n + 4g_n + 2f_n + 4g_n + 3g_n + 4f_n + g_n + f_n + 4g_n = f_n + g_n$$

$$s_{n+1}^1(1) = 4f_n + 4g_n + 3f_n + g_n + 3g_n + f_n + 4g_n + f_n + 4g_n = 4f_n + g_n$$

$$s_{n+1}^1(2) = 4f_n + 4g_n + f_n + 2g_n + 2g_n + 3f_n + 2g_n + f_n + 4g_n = 4f_n + 4g_n$$

$$\begin{aligned}
s_{n+1}^1(3) &= 0 + 0 + 0 + 0 + f_n + 4g_n = f_n + 4g_n \\
s_{n+1}^1(4) &= 4f_n + 4g_n + 4f_n + 3g_n + 2g_n + 2f_n + 3g_n + f_n + 4g_n = f_n + g_n \\
s_{n+1}^1(0) &= 4f_n + 4g_n + f_n + 4g_n + 3f_n + 3g_n + 4f_n + g_n + 4f_n + 4g_n = f_n + g_n \\
s_{n+1}^1(1) &= 4f_n + 4g_n + 2f_n + 3g_n + 2f_n + 2g_n + 2f_n + 3g_n + 4f_n + 4g_n = 4f_n + g_n \\
s_{n+1}^1(2) &= 0 + 0 + 0 + 0 + 4f_n + 4g_n = 4f_n + 4g_n \\
s_{n+1}^1(3) &= 4f_n + 4g_n + 3f_n + 2g_n + 2f_n + 2g_n + 3f_n + 2g_n + 4f_n + 4g_n = f_n + 4g_n \\
s_{n+1}^1(4) &= 4f_n + 4g_n + 4f_n + g_n + 3f_n + 3g_n + f_n + 4g_n + 4f_n + 4g_n = f_n + g_n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_{n+1}^1(0) &= 4f_n + 4g_n + 3f_n + 4g_n + 2f_n + 3f_n + 2g_n + 4f_n + g_n = f_n + g_n \\
s_{n+1}^1(1) &= 0 + 0 + 0 + 0 + 4f_n + g_n = 4f_n + g_n \\
s_{n+1}^1(2) &= 4f_n + 4g_n + 2f_n + g_n + 2f_n + 2f_n + 3g_n + 4f_n + g_n = 4f_n + 4g_n \\
s_{n+1}^1(3) &= 4f_n + 4g_n + f_n + 3g_n + 3f_n + 4f_n + g_n + 4f_n + g_n = f_n + 4g_n \\
s_{n+1}^1(4) &= 4f_n + 4g_n + 4f_n + 2g_n + 3f_n + f_n + 4g_n + 4f_n + g_n = f_n + g_n
\end{aligned}$$

□

Теорема 4. При $n \geq 1$ для периодических функций пятизначной логики $f_n = f_{(1144)}^{(n)}$, $g_n = f_{(1441)}^{(n)}$ верны следующие равенства:

$$\begin{aligned}
s_{n+1}^2 &= f_{n+1} + 2g_{n+1} = (4f_n + 3g_n)x^4 + (4f_n + 3g_n)x^3 + \\
&+ (2f_n + 4g_n)x^2 + (2f_n + 4g_n)x + f_n + 2g_n = (4f_n + 3g_n)(x+1)^4 + \\
&+ (3f_n + g_n)(x+1)^3 + (4f_n + 3g_n)(x+1)^2 + (4f_n + 3g_n)(x+1) + \\
&+ f_n + 2g_n = (4f_n + 3g_n)(x+2)^4 + (2f_n + 4g_n)(x+2)^3 + \\
&+ (4f_n + 3g_n)(x+2)^2 + (4f_n + 3g_n)(x+2) + 2f_n + 4g_n = \\
&= (4f_n + 3g_n)(x+3)^4 + (f_n + 2g_n)(x+3)^3 + 2(f_n + 2g_n)(x+3)^2 + \\
&+ (f_n + 2g_n)(x+3) + 4f_n + 3g_n = (4f_n + 3g_n)(x+4)^4 + \\
&+ (3f_n + g_n)(x+4)^2 + (4f_n + 3g_n)(x+4) + 3f_n + g_n
\end{aligned}$$

Доказательство.

$$s_{n+1}^2(0) = 0 + 0 + 0 + 0 + f_n + 2g_n = f_n + 2g_n$$

$$s_{n+1}^2(1) = 4f_n + 3g_n + 4f_n + 3g_n + 2f_n + 4g_n + 2f_n + 4g_n + f_n + 2g_n = 3f_n + g_n$$

$$s_{n+1}^2(2) = 4f_n + 3g_n + 2f_n + 4g_n + 3f_n + g_n + 4f_n + 3g_n + f_n + 2g_n = 4f_n + 3g_n$$

$$s_{n+1}^2(3) = 4f_n + 3g_n + 3f_n + g_n + 3f_n + g_n + f_n + 2g_n + f_n + 2g_n = 2f_n + 4g_n$$

$$s_{n+1}^2(4) = 4f_n + 3g_n + f_n + 2g_n + 2f_n + 4g_n + 3f_n + g_n + f_n + 2g_n = f_n + 2g_n$$

$$s_{n+1}^2(0) = 4f_n + 3g_n + 3f_n + g_n + 4f_n + 3g_n + 4f_n + 3g_n + f_n + 2g_n = f_n + 2g_n$$

$$s_{n+1}^2(1) = 4f_n + 3g_n + 4f_n + 3g_n + f_n + 2g_n + 3f_n + g_n + f_n + 2g_n = 3f_n + g_n$$

$$s_{n+1}^2(2) = 4f_n + 3g_n + f_n + 2g_n + f_n + 2g_n + 2f_n + 4g_n + f_n + 2g_n = 4f_n + 3g_n$$

$$s_{n+1}^2(3) = 4f_n + 3g_n + 2f_n + 4g_n + 4f_n + 3g_n + f_n + 2g_n + f_n + 2g_n = 2f_n + 4g_n$$

$$s_{n+1}^2(4) = 0 + 0 + 0 + 0 + f_n + 2g_n = f_n + 2g_n$$

$$s_{n+1}^2(0) = 4f_n + 3g_n + f_n + 2g_n + f_n + 2g_n + 3f_n + g_n + 2f_n + 4g_n = f_n + 2g_n$$

$$s_{n+1}^2(1) = 4f_n + 3g_n + 4f_n + 3g_n + f_n + 2g_n + 2f_n + 4g_n + 2f_n + 4g_n = 3f_n + g_n$$

$$s_{n+1}^2(2) = 4f_n + 3g_n + 3f_n + g_n + 4f_n + 3g_n + f_n + 2g_n + 2f_n + 4g_n = 4f_n + 3g_n$$

$$s_{n+1}^2(3) = 0 + 0 + 0 + 0 + 2f_n + 4g_n = 2f_n + 4g_n$$

$$s_{n+1}^2(4) = 4f_n + 3g_n + 2f_n + 4g_n + 4f_n + 3g_n + 4f_n + 3g_n + 2f_n + 4g_n = f_n + 2g_n$$

$$s_{n+1}^2(0) = 4f_n + 3g_n + 2f_n + 4g_n + 3f_n + g_n + 3f_n + g_n + 4f_n + 3g_n = f_n + 2g_n$$

$$s_{n+1}^2(1) = 4f_n + 3g_n + 4f_n + 3g_n + 2f_n + 4g_n + 4f_n + 3g_n + 4f_n + 3g_n = 3f_n + g_n$$

$$s_{n+1}^2(2) = 0 + 0 + 0 + 0 + 4f_n + 3g_n = 4f_n + 3g_n$$

$$s_{n+1}^2(3) = 4f_n + 3g_n + f_n + 2g_n + 2f_n + 4g_n + f_n + 2g_n + 4f_n + 3g_n = 2f_n + 4g_n$$

$$s_{n+1}^2(4) = 4f_n + 3g_n + 3f_n + g_n + 3f_n + g_n + 2f_n + 4g_n + 4f_n + 3g_n = f_n + 2g_n$$

$$s_{n+1}^2(0) = 4f_n + 3g_n + 0 + 3f_n + g_n + f_n + 2g_n + 3f_n + g_n = f_n + 2g_n$$

$$s_{n+1}^2(1) = 0 + 0 + 0 + 0 + 3f_n + g_n = 3f_n + g_n$$

$$s_{n+1}^2(2) = 4f_n + 3g_n + 0 + 3f_n + g_n + 4f_n + 3g_n + 3f_n + g_n = 4f_n + 3g_n$$

$$s_{n+1}^2(3) = 4f_n + 3g_n + 0 + 2f_n + 4g_n + 3f_n + g_n + 3f_n + g_n = 2f_n + 4g_n$$

$$s_{n+1}^2(4) = 4f_n + 3g_n + 0 + 2f_n + 4g_n + 2f_n + 4g_n + 3f_n + g_n = f_n + 2g_n$$

□

Теорема 5. При $n \geq 1$ для периодических функций пятизначной логики $f_n = f_{(1144)}^{(n)}$, $g_n = f_{(1441)}^{(n)}$ верны следующие равенства:

$$\begin{aligned} s_{n+1}^3 &= f_{n+1} + 3g_{n+1} = (4f_n + 2g_n)x^4 + (2f_n + g_n)x^3 + \\ &+ (4f_n + 2g_n)x^2 + (f_n + 3g_n)x + f_n + 3g_n = (4f_n + 2g_n)(x+1)^4 + \\ &+ (f_n + 3g_n)(x+1)^3 + (2f_n + g_n)(x+1)^2 + (3f_n + 4g_n)(x+1) + \\ &+ f_n + 3g_n = (4f_n + 2g_n)(x+2)^4 + (3f_n + 4g_n)(x+2)^2 + \\ &+ (f_n + 3g_n)(x+2) + 3f_n + 4g_n = (4f_n + 2g_n)(x+3)^4 + \\ &+ (4f_n + 2g_n)(x+3)^3 + 2(f_n + 3g_n)(x+3)^2 + (4f_n + 2g_n)(x+3) + \\ &+ 4f_n + 2g_n = (4f_n + 2g_n)(x+4)^4 + (3f_n + 4g_n)(x+4)^3 + \\ &+ (4f_n + 2g_n)(x+4)^2 + (f_n + 3g_n)(x+4) + 2f_n + g_n \end{aligned}$$

Доказательство.

$$s_{n+1}^3(0) = 0 + 0 + 0 + 0 + f_n + 3g_n = f_n + 3g_n$$

$$s_{n+1}^3(1) = 4f_n + 2g_n + 2f_n + g_n + 4f_n + 2g_n + f_n + 3g_n + f_n + 3g_n = 2f_n + g_n$$

$$s_{n+1}^3(2) = 4f_n + 2g_n + f_n + 3g_n + f_n + 3g_n + 2f_n + g_n + f_n + 3g_n = 4f_n + 2g_n$$

$$s_{n+1}^3(3) = 4f_n + 2g_n + 4f_n + 2g_n + f_n + 3g_n + 3f_n + 4g_n + f_n + 3g_n = 3f_n + 4g_n$$

$$s_{n+1}^3(4) = 4f_n + 2g_n + 3f_n + 4g_n + 4f_n + 2g_n + 4f_n + 2g_n + f_n + 3g_n = f_n + 3g_n$$

$$s_{n+1}^3(0) = 4f_n + 2g_n + f_n + 3g_n + 2f_n + g_n + 3f_n + 4g_n + f_n + 3g_n = f_n + 3g_n$$

$$\begin{aligned}
s_{n+1}^3(1) &= 4f_n + 2g_n + 3f_n + 4g_n + 3f_n + 4g_n + f_n + 3g_n + f_n + 3g_n = 2f_n + g_n \\
s_{n+1}^3(2) &= 4f_n + 2g_n + 2f_n + g_n + 3f_n + 4g_n + 4f_n + 2g_n + f_n + 3g_n = 4f_n + 2g_n \\
s_{n+1}^3(3) &= 4f_n + 2g_n + 4f_n + 2g_n + 2f_n + g_n + 2f_n + g_n + f_n + 3g_n = 3f_n + 4g_n \\
s_{n+1}^3(4) &= 0 + 0 + 0 + 0 + f_n + 3g_n = f_n + 3g_n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_{n+1}^3(0) &= 4f_n + 2g_n + 0 + 2f_n + g_n + 2f_n + g_n + 3f_n + 4g_n = f_n + 3g_n \\
s_{n+1}^3(1) &= 4f_n + 2g_n + 0 + 2f_n + g_n + 3f_n + 4g_n + 3f_n + 4g_n = 2f_n + g_n \\
s_{n+1}^3(2) &= 4f_n + 2g_n + 0 + 3f_n + 4g_n + 4f_n + 2g_n + 3f_n + 4g_n = 4f_n + 2g_n \\
s_{n+1}^3(3) &= 0 + 0 + 0 + 0 + 3f_n + 4g_n = 3f_n + 4g_n \\
s_{n+1}^3(4) &= 4f_n + 2g_n + 0 + 3f_n + 4g_n + f_n + 3g_n + 3f_n + 4g_n = f_n + 3g_n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_{n+1}^3(0) &= 4f_n + 2g_n + 3f_n + 4g_n + 3f_n + 4g_n + 2f_n + g_n + 4f_n + 2g_n = f_n + 3g_n \\
s_{n+1}^3(1) &= 4f_n + 2g_n + f_n + 3g_n + 2f_n + g_n + f_n + 3g_n + 4f_n + 2g_n = 2f_n + g_n \\
s_{n+1}^3(2) &= 0 + 0 + 0 + 0 + 4f_n + 2g_n = 4f_n + 2g_n \\
s_{n+1}^3(3) &= 4f_n + 2g_n + 4f_n + 2g_n + 2f_n + g_n + 4f_n + 2g_n + 4f_n + 2g_n = 3f_n + 4g_n \\
s_{n+1}^3(4) &= 4f_n + 2g_n + 2f_n + g_n + 3f_n + 4g_n + 3f_n + 4g_n + 4f_n + 2g_n = f_n + 3g_n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_{n+1}^3(0) &= 4f_n + 2g_n + 2f_n + g_n + 4f_n + 2g_n + 4f_n + 2g_n + 2f_n + g_n = f_n + 3g_n \\
s_{n+1}^3(1) &= 0 + 0 + 0 + 0 + 2f_n + g_n = 2f_n + g_n \\
s_{n+1}^3(2) &= 4f_n + 2g_n + 3f_n + 4g_n + 4f_n + 2g_n + f_n + 3g_n + 2f_n + g_n = 4f_n + 2g_n \\
s_{n+1}^3(3) &= 4f_n + 2g_n + 4f_n + 2g_n + f_n + 3g_n + 2f_n + g_n + 2f_n + g_n = 3f_n + 4g_n \\
s_{n+1}^3(4) &= 4f_n + 2g_n + f_n + 3g_n + f_n + 3g_n + 3f_n + 4g_n + 2f_n + g_n = f_n + 3g_n
\end{aligned}$$

□

Теорема 6. При $n \geq 1$ для периодических функций пятизначной логики $f_n = f_{(1144)}^{(n)}$, $g_n = f_{(1441)}^{(n)}$ верны следующие равенства:

$$\begin{aligned} s_{n+1}^4 &= f_{n+1} + 4g_{n+1} = (4f_n + g_n)x^4 + 4g_nx^3 + f_nx^2 + 2g_nx + f_n + \\ &+ 4g_n = (4f_n + g_n)(x+1)^4 + 4f_n(x+1)^3 + 4g_n(x+1)^2 + 2f_n(x+1) + \\ &+ 5g_n(x+1) + f_n + 4g_n = (4f_n + g_n)(x+2)^4 + (3f_n + g_n)(x+2)^3 + \\ &+ 2f_n(x+2)^2 + (3f_n + 3g_n)(x+2) + 4f_n + 4g_n = (4f_n + g_n)(x+3)^4 + \\ &+ (2f_n + 2g_n)(x+3)^3 + 2(f_n + 4g_n)(x+3)^2 + (2f_n + 2g_n)(x+3) + \\ &+ 4f_n + g_n = (4f_n + g_n)(x+4)^4 + (f_n + 3g_n)(x+4)^3 + 5f_n(x+4)^2 + \\ &+ 3g_n(x+4) + (3f_n + 3g_n)(x+4) + f_n + g_n \end{aligned}$$

Доказательство.

$$s_{n+1}^4(0) = 0 + 0 + 0 + 0 + f_n + 4g_n = f_n + 4g_n$$

$$s_{n+1}^4(1) = 4f_n + g_n + 4g_n + f_n + 2g_n + f_n + 4g_n = f_n + g_n$$

$$s_{n+1}^4(2) = 4f_n + g_n + 2g_n + 4f_n + 4g_n + f_n + 4g_n = 4f_n + g_n$$

$$s_{n+1}^4(3) = 4f_n + g_n + 3g_n + 4f_n + g_n + f_n + 4g_n = 4f_n + 4g_n$$

$$s_{n+1}^4(4) = 4f_n + g_n + g_n + f_n + 3g_n + f_n + 4g_n = f_n + 4g_n$$

$$s_{n+1}^4(0) = 4f_n + g_n + 4f_n + 4g_n + 2f_n + 0g_n + f_n + 4g_n = f_n + 4g_n$$

$$s_{n+1}^4(1) = 4f_n + g_n + 2f_n + g_n + 4f_n + 0g_n + f_n + 4g_n = f_n + g_n$$

$$s_{n+1}^4(2) = 4f_n + g_n + 3f_n + g_n + f_n + 0g_n + f_n + 4g_n = 4f_n + g_n$$

$$s_{n+1}^4(3) = 4f_n + g_n + f_n + 4g_n + 3f_n + 0g_n + f_n + 4g_n = 4f_n + 4g_n$$

$$s_{n+1}^4(4) = 0 + 0 + 0 + 0 + f_n + 4g_n = f_n + 4g_n$$

$$s_{n+1}^4(0) = 4f_n + g_n + 4f_n + 3g_n + 3f_n + f_n + g_n + 4f_n + 4g_n = f_n + 4g_n$$

$$s_{n+1}^4(1) = 4f_n + g_n + f_n + 2g_n + 3f_n + 4f_n + 4g_n + 4f_n + 4g_n = f_n + g_n$$

$$s_{n+1}^4(2) = 4f_n + g_n + 2f_n + 4g_n + 2f_n + 2f_n + 2g_n + 4f_n + 4g_n = 4f_n + g_n$$

$$\begin{aligned}
s_{n+1}^4(3) &= 0 + 0 + 0 + 0 + 4f_n + 4g_n = 4f_n + 4g_n \\
s_{n+1}^4(4) &= 4f_n + g_n + 3f_n + g_n + 2f_n + 3f_n + 3g_n + 4f_n + 4g_n = f_n + 4g_n \\
\\
s_{n+1}^4(0) &= 4f_n + g_n + 4f_n + 4g_n + 3f_n + 2g_n + f_n + g_n + 4f_n + g_n = f_n + 4g_n \\
s_{n+1}^4(1) &= 4f_n + g_n + 3f_n + 3g_n + 2f_n + 3g_n + 3f_n + 3g_n + 4f_n + g_n = f_n + g_n \\
s_{n+1}^4(2) &= 0 + 0 + 0 + 0 + 4f_n + g_n = 4f_n + g_n \\
s_{n+1}^4(3) &= 4f_n + g_n + 2f_n + 2g_n + 2f_n + 3g_n + 2f_n + 2g_n + 4f_n + g_n = 4f_n + 4g_n \\
s_{n+1}^4(4) &= 4f_n + g_n + f_n + g_n + 3f_n + 2g_n + 4f_n + 4g_n + 4f_n + g_n = f_n + 4g_n \\
\\
s_{n+1}^4(0) &= 4f_n + g_n + 4f_n + 2g_n + 0f_n + 3g_n + 2f_n + 2g_n + f_n + g_n = f_n + 4g_n \\
s_{n+1}^4(1) &= 0 + 0 + 0 + 0 + f_n + g_n = f_n + g_n \\
s_{n+1}^4(2) &= 4f_n + g_n + f_n + 3g_n + 0f_n + 3g_n + 3f_n + 3g_n + f_n + g_n = 4f_n + g_n \\
s_{n+1}^4(3) &= 4f_n + g_n + 3f_n + 4g_n + 0f_n + 2g_n + f_n + g_n + f_n + g_n = 4f_n + 4g_n \\
s_{n+1}^4(4) &= 4f_n + g_n + 2f_n + g_n + 0f_n + 2g_n + 4f_n + 4g_n + f_n + g_n = f_n + 4g_n
\end{aligned}$$

□

Список литературы

1. Угрюмов Е. П. Цифровая схемотехника. СПб.: БХВ-Петербург, 2004.
2. Sasao T., Besslich P. On the complexity of mod-2 sum PLA's // IEEE Trans.on Comput. 39. N 2. 1990. P. 262–266.
3. Супрун В. П. Сложность булевых функций в классе канонических поляризованных полиномов // Дискретная математика. 5. №2. 1993. С. 111–115.
4. Перязев Н. А. Сложность булевых функций в классе полиномиальных поляризованных форм // Алгебра и логика. 34. №3. 1995. С. 323–326.
5. Селезнева С. Н. О сложности представления функций многозначных логик поляризованными полиномами. Дискретная математика. 14. №2. 2002. С. 48–53.
6. Кириченко К. Д. Верхняя оценка сложности полиномиальных нормальных форм булевых функций // Дискретная математика. 17. №3. 2005. С. 80–88.
7. Селезнева С. Н. Дайняк А. Б. О сложности обобщенных полиномов k -значных функций // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. №3. 2008. С. 34–39.
8. Маркелов Н. К. Нижняя оценка сложности функций трехзначной логики в классе поляризованных полиномов // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. №3. 2012. С. 40–45.
9. Селезнева С. Н. Маркелов Н. К. Быстрый алгоритм построения векторов коэффициентов поляризованных полиномов k -значных функций // Ученые записки Казанского университета. Серия Физико-математические науки. 2009. 151. №2 С. 147–151.