Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра математической кибернетики

Гордеев Михаил Михайлович

О длине некоторых периодических функций пятизначной логики в классе поляризованных полиномиальных форм

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

Научный руководитель:
к.ф-м.н., доцент
С.Н.Селезнева

Москва, 2015

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра математической кибернетики

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
СТУДЕНТА 418 ГРУППЫ
Гордеева Михаила Михайловича

Тема работы:

«О длине некоторых периодических функций пятизначной логики в классе поляризованных полиномиальных форм»

Заведующий кафедрой
математической кибернетики
профессор, д.ф.-м.н.
В. Б. Алексеев

Научный руководитель
доцент, к.ф.-м.н.
С.Н. Селезнева

К защите допускаю
«____» ________________ 2015 г.

К защите рекомендую
«____» ________________ 2015 г.

Оглавление

Введение

Одним из стандартных способов задания функций k-значной логики являются поляризованные полиномиальные формы (ППФ), которые также называются обобщенными формами Рида-Мюллера, или каноническими поляризованными полиномами. В ППФ каждая переменная имеет определенную поляризацию. Длиной полиномиальной формы называется число попарно различных слагаемых в ней. Длиной функции f в классе ППФ называется наименьшая длина среди длин всех поляризованных полиномиальных форм, реализующих f. Функция Шеннона $L_k^K(n)$ длины определяется как наибольшая длина среди всех функций k-значной логики в классе K от n переменных, если K опущено, то подразумевается класс ППФ. Практическое применение ППФ нашли при построении программируемых логических матриц (ПЛМ) [1, 2], сложность ПЛМ напрямую зависит от длины ППФ, по которой она построена. Поэтому в ряде работ исследуется сложность ППФ различных функций [3–9].

В 1993 В. П. Супрун [3] получил первые оценки функции Шеннона для функций алгебры логики :

$$L_2(n) \geqslant C_n^{[\frac{n}{2}]},$$

$$L_2(n) < 3 \cdot 2^{n-1},$$

где $[a]$ обозначает целую часть a.

Точное значение функции Шеннона для функций алгебры логики в 1995 г. было найдено Н. А. Перязевым [4] :

$$L_2(n) = \left[\frac{2^{n+1}}{3}\right].$$

Функции k-значных логик являются естественным обобщением функций алгебры логики. Для функций k-значной логики верхняя оценка функции Шеннона была получена в 2002 г. С. Н. Селезневой [5] :

$$L_k(n) < \frac{k(k-1)}{k(k-1)+1}k^n.$$

При построении ПЛМ рассматривают и другие полиномиальные формы. Например класс обобщенных полиномиальных форм. В классе обобщенных полиномиальных форм, в отличие от класса поляризованных полиномиальных форм, переменные могут иметь различную поляризацию в разных слагаемых. В статье К. Д. Кириченко [6], опубликованной в 2005 г., получена верхняя оценка функции Шеннона в классе обобщенных полиномиальных форм функций алгебры логики :

$$L_2^{\text{О.П.}}(n) \leqslant \frac{2^{n+1}(\log_2 n + 1)}{n}.$$

Верхняя оценка функции Шеннона в классе обобщенных полиномиальных форм функций k-значной логики была получена С. Н. Селезневой и А. Б. Дайняком в 2008 г. [7]:

$$L_k^{\text{О.П.}}(n) \lesssim 2 \cdot \frac{k^n}{n} \cdot \ln n \text{ при } n \to \infty.$$

В 2012 г. Н. К. Маркеловым была получена нижняя оценка функции Шеннона для функции трехзначной логики в классе поляризованных полиномов [8]:

$$L_3(n) \geqslant \left[\frac{3}{4}3^n\right].$$

Основные определения

Пусть $k \geqslant 2$ – натуральное число, $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$. Весом набора $\alpha = (a_1, \ldots, a_n) \in E_k^n$ назовем число $|\alpha| = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$. Моном $\prod\limits_{a_i \neq 0} x_i^{a_i}$ назовем соответствующим набору $\alpha = (a_1, \ldots, a_n) \in E_k^n$ и обозначим через K_α. По определению положим, что константа 1 соответствует набору из всех нулей. Функцией k-значной логики называется отображение $f^{(n)} : E_k^n \to E_k$, $n = 0, 1, \ldots$. Множество всех функций k-значной логики обозначим через P_k , множество всех функций k-значной логики, зависящих от переменных $x_1, \ldots, x_n$, обозначим через P_k^n. Функция $j_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = i; \\ 0, & \text{если } x \neq i. \end{cases}$

Если k – простое число, то каждая функция k-значной логики $f(x_1, \ldots, x_n)$ может быть однозначно задана формулой вида

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\alpha \in E_k^n : c_f(\alpha) \neq 0} c_f(\alpha) K_\alpha \ ,$$

где $c_f(\alpha) \in E_k$ – коэффициенты, $\alpha \in E_k$, и операции сложения и умножения рассматриваются по модулю k. Это представление функций k-значной логики называется ее полиномом по модулю k. При простых k однозначно определенный полином по модулю k для функции k-значной логики f будем обозначать через $P(f)$.

Определим поляризованные полиномиальные формы по модулю k. Поляризованной переменной x_i с поляризацией d, $d \in E_k$, назовем выражение вида $(x_i + d)$. Поляризованным мономом по вектору поляризации δ, $\delta = (d_1, \ldots, d_n) \in E_k^n$, назовем произведение вида $(x_{i_1} + d_{i_1})^{m_1} \cdots (x_{i_r} + d_{i_r})^{m_r}$, где $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_r \leqslant n$, и $1 \leqslant m_1, \ldots, m_r \leqslant k-1$. Обычный моном является мономом, поляризованным по вектору $\tilde{0} = (0, \ldots, 0) \in E_k^n$.

Выражение вида $\sum\limits_{i=1}^{l} c_i \cdot K_i$, где $c_i \in E_k \setminus \{0\}$ – коэффициенты, K_i – попарно различные мономы, поляризованные по вектору $\delta = (d_1, \ldots, d_n) \in E_k^n$, $i = 1, \ldots, l$, назовем поляризованной полиномиальной нормальной формой (ППФ) по вектору поляризации δ. Мы будем считать, что константа 0 является ППФ по произвольному вектору поляризации. Заметим, что при простых k для каждого вектора поляризации каждую функцию k-значной логики можно однозначно представить ППФ по этому вектору поляризации [5]. При простых k однозначно определенную ППФ по вектору поляризации $\delta \in E_k^n$ для функции $f \in P_k^n$ будем обозначать через $P^\delta(f)$.

Длиной $l(p)$ ППФ p назовем число попарно различных слагаемых в этой ППФ. Положим, что $l(0) = 0$. При простых k длиной функции k-значной логики в классе ППФ называется величина $l^{\text{ППФ}}(f) = \min\limits_{\delta \in E_k^n} l(P^\delta(f))$.

Функция k-значной логики $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется симметрической, если

$$f(\pi(x_1), \ldots, \pi(x_n)) = f(x_1, \ldots, x_n)$$

для произвольной перестановки π на множестве переменных $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Множество всех симметрических функций k-значной логики обозначим через S_k. Симметрическая функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется периодической с периодом $\tau = (\tau_0\tau_1 \ldots \tau_{T-1}) \in E_k^T$, если $f(\alpha) = \tau_j$ при $|\alpha| = j \pmod T$ для каждого набора $\alpha \in E_k^n$. При этом число T называется длиной периода. Периодическую функцию k-значной логики $f(x_1, \ldots, x_n)$ с периодом $\tau = (\tau_0\tau_1 \ldots \tau_{T-1}) \in E_k^T$ будем обозначать через $f^{(n)}_{(\tau_0\tau_1\ldots\tau_{T-1})}$. Понятно, что такое обозначение полностью определяет эту функцию.

Пусть $T \geqslant 1$, $s \geqslant 1$, $\Pi = \{\tau_1, \ldots, \tau_s | \tau_i \in E_k^T\}$, $A_\Pi = \{f_\tau^{(n)} | \tau \in \Pi, n \geqslant 1\}$. Класс A_Π называется вырожденным, если для любого $\tau \in \Pi$ верно, что $l(f_\tau^{(n)}) = \bar{o}(k^n)$, при $n \to \infty$.

В данной работе рассматривается класс функций пятизначной логики – $\mathcal{A}$, состоящий из всех линейных комбинаций функций f_n и g_n, где f_n – это периодическая симметрическая функция с периодом (1,1,4,4), а g_n – это периодическая симметрическая функция с периодом (1,4,4,1). А также его подкласс $\mathcal{F}$ состоящий из следующих функций: $c \cdot f_n$,$c \cdot g_n$,$c \cdot (f_n + g_n)$,$c \cdot (f_n + 4g_n)$, где $c \in \{1,2,3,4\}$. И классы $\mathcal{A}^n = \mathcal{A} \cap P_k^n$, $\mathcal{F}^n = \mathcal{F} \cap P_k^n$.

Постановка задачи

1. Изучить литературу по теме дипломной работы;

2. Написать программу вычисляющую длину в классе поляризованных полиномиальных форм всех функций с заданным периодом от ограниченного числа переменных;

3. Установить закономерности, получить теоретические оценки длины некоторых функций в классе ППФ.

Результаты

Поляризованные полиномы для функций из класса $\mathcal{A}$

В k-значной логике, если k – простое чило, для $j_i(x)$ верно следующее представление: $j_i(x) = 1 - (x-i)^{k-1}$. Докажем несколько теорем, в которых представлено выражение всех функций от $n+1$ переменной из $\mathcal{A}$ через функции n переменных из $\mathcal{A}$, в зависимости от различных поляризаций x_{n+1}. Положим d_{n+1} – поляризация x_{n+1}, $\bar{x}_n$ – вектор из первых n переменных.

Теорема 1. *При $n \geqslant 1$ для периодических функций пятизначной логики $f_n = f^{(n)}_{(1144)}$, $g_n = f^{(n)}_{(1441)}$ верны следующие равенства:*

$$
\begin{aligned}
&f_{n+1} = j_0(x_{n+1})f_n + j_1(x_{n+1})g_n + 4\,j_2(x_{n+1})f_n + 4\,j_3(x_{n+1})g_n + j_4(x_{n+1})f_n = \\
&4\,f_n x_{n+1}^4 + (3\,f_n + 2\,g_n)x_{n+1}^3 + 3\,(f_n + g_n)x_{n+1}^2 + (4\,f_n + g_n)x_{n+1} + f_n = \\
&4\,f_n(x_{n+1}+1)^4 + 2\,(f_n + g_n)(x_{n+1}+1)^3 + (3\,f_n + 2\,g_n)(x_{n+1}+1)^2 + \\
&+(f_n + g_n)(x_{n+1}+1) + f_n = \\
&4\,f_n(x_{n+1}+2)^4 + (f_n + 2\,g_n)(x_{n+1}+2)^3 + (f_n + g_n)(x_{n+1}+2)^2 + \\
&+3\,g_n(x_{n+1}+2) + 4\,g_n = \\
&4\,f_n(x_{n+1}+3)^4 + 2\,g_n(x_{n+1}+3)^3 + 2\,f_n(x_{n+1}+3)^2 + 2\,g_n(x_{n+1}+3) + 4\,f_n = \\
&4\,f_n(x_{n+1}+4)^4 + 2\,(2\,f_n + g_n)(x_{n+1}+4)^3 + (f_n + 4\,g_n)(x_{n+1}+4)^2 + \\
&+3\,g_n(x_{n+1}+4) + g_n
\end{aligned}
$$

Доказательство. Первое равенство следует из определения функции $j_i(x)$.

При поляризации x_{n+1}, когда $d_{n+1} = 0$

$$f_{n+1}(\bar{x}_n, 0) = 0 + 0 + 0 + 0 + f_n = f_n$$
$$f_{n+1}(\bar{x}_n, 1) = 4\,f_n + 3\,f_n + 2\,g_n + 3\,f_n + 3\,g_n + 4\,f_n + g_n + f_n = g_n$$
$$f_{n+1}(\bar{x}_n, 2) = 4\,f_n + 4\,f_n + g_n + 2\,f_n + 2\,g_n + 3\,f_n + 2\,g_n + f_n = 4\,f_n$$
$$f_{n+1}(\bar{x}_n, 3) = 4\,f_n + f_n + 4\,g_n + 2\,f_n + 2\,g_n + 2\,f_n + 3\,g_n + f_n = 4\,g_n$$
$$f_{n+1}(\bar{x}_n, 4) = 4\,f_n + 2\,f_n + 3\,g_n + 3\,f_n + 3\,g_n + f_n + 4\,g_n + f_n = f_n$$

При поляризации x_{n+1}, когда $d_{n+1} = 1$

$$f_{n+1}(\bar{x}_n, 0) = 4\,f_n + 2\,f_n + 2\,g_n + 3\,f_n + 2\,g_n + f_n + g_n + f_n = f_n$$
$$f_{n+1}(\bar{x}_n, 1) = 4\,f_n + f_n + g_n + 2\,f_n + 3\,g_n + 2\,f_n + 2\,g_n + f_n = g_n$$
$$f_{n+1}(\bar{x}_n, 2) = 4\,f_n + 4\,f_n + 4\,g_n + 2\,f_n + 3\,g_n + 3\,f_n + 3\,g_n + f_n = 4\,f_n$$
$$f_{n+1}(\bar{x}_n, 3) = 4\,f_n + 3\,f_n + 3\,g_n + 3\,f_n + 2\,g_n + 4\,f_n + 4\,g_n + f_n = 4\,g_n$$
$$f_{n+1}(\bar{x}_n, 4) = 0 + 0 + 0 + 0 + f_n = f_n$$

При поляризации x_{n+1}, когда $d_{n+1} = 2$

$$f_{n+1}(\bar{x}_n, 0) = 4\,f_n + 3\,f_n + g_n + 4\,f_n + 4\,g_n + g_n + 4\,g_n = f_n$$
$$f_{n+1}(\bar{x}_n, 1) = 4\,f_n + 2\,f_n + 4\,g_n + 4\,f_n + 4\,g_n + 4\,g_n + 4\,g_n = g_n$$
$$f_{n+1}(\bar{x}_n, 2) = 4\,f_n + 4\,f_n + 3\,g_n + f_n + g_n + 2\,g_n + 4\,g_n = 4\,f_n$$
$$f_{n+1}(\bar{x}_n, 3) = 0 + 0 + 0 + 0 + 4\,g_n = 4\,g_n$$
$$f_{n+1}(\bar{x}_n, 4) = 4\,f_n + f_n + 2\,g_n + f_n + g_n + 3\,g_n + 4\,g_n = f_n$$

При поляризации x_{n+1}, когда $d_{n+1} = 3$

$$
\begin{aligned}
f_{n+1}(\bar{x}_n, 0) &= 4\, f_n + 4\, g_n + 3\, f_n + g_n + 4\, f_n = f_n \\
f_{n+1}(\bar{x}_n, 1) &= 4\, f_n + 3\, g_n + 2\, f_n + 3\, g_n + 4\, f_n = g_n \\
f_{n+1}(\bar{x}_n, 2) &= 0 + 0 + 0 + 0 + 4\, f_n = 4\, f_n \\
f_{n+1}(\bar{x}_n, 3) &= 4\, f_n + 2\, g_n + 2\, f_n + 2\, g_n + 4\, f_n = 4\, g_n \\
f_{n+1}(\bar{x}_n, 4) &= 4\, f_n + g_n + 3\, f_n + 4\, g_n + 4\, f_n = f_n
\end{aligned}
$$

При поляризации x_{n+1}, когда $d_{n+1} = 4$

$$
\begin{aligned}
f_{n+1}(\bar{x}_n, 0) &= 4\, f_n + f_n + 3\, g_n + f_n + 4\, g_n + 2\, g_n + g_n = f_n \\
f_{n+1}(\bar{x}_n, 1) &= 0 + 0 + 0 + 0 + g_n = g_n \\
f_{n+1}(\bar{x}_n, 2) &= 4\, f_n + 4\, f_n + 2\, g_n + f_n + g_n + 3\, g_n + g_n = 4\, f_n \\
f_{n+1}(\bar{x}_n, 3) &= 4\, f_n + 2\, f_n + g_n + 4\, f_n + g_n + g_n + g_n = 4\, g_n \\
f_{n+1}(\bar{x}_n, 4) &= 4\, f_n + 3\, f_n + 4\, g_n + 4\, f_n + g_n + 4\, g_n + g_n = f_n
\end{aligned}
$$

□

Теорема 2. *При $n \geqslant 1$ для периодических функций пятизначной логики*

$f_n = f^{(n)}_{(1144)}$, $g_n = f^{(n)}_{(1441)}$ *верны следующие равенства:*

$$
\begin{aligned}
&g_{n+1} = j_0(x_{n+1})g_n + 4\,j_1(x_{n+1})f_n + 4\,j_2(x_{n+1})g_n + j_3(x_{n+1})f_n + j_4(x_{n+1})g_n = \\
&4\,g_n x_{n+1}^4 + 3\,(f_n + g_n)x_{n+1}^3 + (2\,f_n + 3\,g_n)x_{n+1}^2 + 4\,(f_n + g_n)x_{n+1} + g_n = \\
&4\,g_n(x_{n+1}+1)^4 + (3\,f_n + 2\,g_n)(x_{n+1}+1)^3 + 3\,(f_n + g_n)(x_{n+1}+1)^2 + \\
&+(4\,f_n + g_n)(x_{n+1}+1) + g_n = \\
&4\,g_n(x_{n+1}+2)^4 + (3\,f_n + g_n)(x_{n+1}+2)^3 + (4\,f_n + g_n)(x_{n+1}+2)^2 + \\
&+2\,f_n(x_{n+1}+2) + f_n = \\
&4\,g_n(x_{n+1}+3)^4 + 3\,f_n(x_{n+1}+3)^3 + 2\,g_n(x_{n+1}+3)^2 + 3\,f_n(x_{n+1}+3) + 4\,g_n = \\
&4\,g_n(x_{n+1}+4)^4 + (3\,f_n + 4\,g_n)(x_{n+1}+4)^3 + (f_n + g_n)(x_{n+1}+4)^2 + \\
&+2\,f_n(x_{n+1}+4) + 4\,f_n
\end{aligned}
$$

Доказательство. Первое равенство следует из определения функции $j_i(x)$.

При поляризации x_{n+1}, когда $d_{n+1} = 0$

$$
\begin{aligned}
&g_{n+1}(\bar{x}_n, 0) = 0 + 0 + 0 + 0 + g_n = g_n \\
&g_{n+1}(\bar{x}_n, 1) = 4\,g_n + 3\,f_n + 3\,g_n + 2\,f_n + 3\,g_n + 4\,f_n + 4\,g_n + g_n = 4\,f_n \\
&g_{n+1}(\bar{x}_n, 2) = 4\,g_n + 4\,f_n + 4\,g_n + 3\,f_n + 2\,g_n + 3\,f_n + 3\,g_n + g_n = 4\,g_n \\
&g_{n+1}(\bar{x}_n, 3) = 4\,g_n + f_n + g_n + 3\,f_n + 2\,g_n + 2\,f_n + 2\,g_n + g_n = f_n \\
&g_{n+1}(\bar{x}_n, 4) = 4\,g_n + 2\,f_n + 2\,g_n + 2\,f_n + 3\,g_n + f_n + g_n + g_n = g_n
\end{aligned}
$$

При поляризации x_{n+1}, когда $d_{n+1} = 1$

$$
\begin{aligned}
&g_{n+1}(\bar{x}_n, 0) = 4\,g_n + 3\,f_n + 2\,g_n + 3\,f_n + 3\,g_n + 4\,f_n + g_n + g_n = g_n \\
&g_{n+1}(\bar{x}_n, 1) = 4\,g_n + 4\,f_n + g_n + 2\,f_n + 2\,g_n + 3\,f_n + 2\,g_n + g_n = 4\,f_n \\
&g_{n+1}(\bar{x}_n, 2) = 4\,g_n + f_n + 4\,g_n + 2\,f_n + 2\,g_n + 2\,f_n + 3\,g_n + g_n = 4\,g_n \\
&g_{n+1}(\bar{x}_n, 3) = 4\,g_n + 2\,f_n + 3\,g_n + 3\,f_n + 3\,g_n + f_n + 4\,g_n + g_n = f_n \\
&g_{n+1}(\bar{x}_n, 4) = 0 + 0 + 0 + 0 + g_n = g_n
\end{aligned}
$$

При поляризации x_{n+1}, когда $d_{n+1} = 2$

$$\begin{aligned}
g_{n+1}(\bar{x}_n, 0) &= 4\,g_n + 4\,f_n + 3\,g_n + f_n + 4\,g_n + 4\,f_n + f_n = g_n\\
g_{n+1}(\bar{x}_n, 1) &= 4\,g_n + f_n + 2\,g_n + f_n + 4\,g_n + f_n + f_n = 4\,f_n\\
g_{n+1}(\bar{x}_n, 2) &= 4\,g_n + 2\,f_n + 4\,g_n + 4\,f_n + g_n + 3\,f_n + f_n = 4\,g_n\\
g_{n+1}(\bar{x}_n, 3) &= 0 + 0 + 0 + 0 + f_n = f_n\\
g_{n+1}(\bar{x}_n, 4) &= 4\,g_n + 3\,f_n + g_n + 4\,f_n + g_n + 2\,f_n + f_n = g_n
\end{aligned}$$

При поляризации x_{n+1}, когда $d_{n+1} = 3$

$$\begin{aligned}
g_{n+1}(\bar{x}_n, 0) &= 4\,g_n + f_n + 3\,g_n + 4\,f_n + 4\,g_n = g_n\\
g_{n+1}(\bar{x}_n, 1) &= 4\,g_n + 2\,f_n + 2\,g_n + 2\,f_n + 4\,g_n = 4\,f_n\\
g_{n+1}(\bar{x}_n, 2) &= 0 + 0 + 0 + 0 + 4\,g_n = 4\,g_n\\
g_{n+1}(\bar{x}_n, 3) &= 4\,g_n + 3\,f_n + 2\,g_n + 3\,f_n + 4\,g_n = f_n\\
g_{n+1}(\bar{x}_n, 4) &= 4\,g_n + 4\,f_n + 3\,g_n + f_n + 4\,g_n = g_n
\end{aligned}$$

При поляризации x_{n+1}, когда $d_{n+1} = 4$

$$\begin{aligned}
g_{n+1}(\bar{x}_n, 0) &= 4\,g_n + 2\,f_n + g_n + f_n + g_n + 3\,f_n + 4\,f_n = g_n\\
g_{n+1}(\bar{x}_n, 1) &= 0 + 0 + 0 + 0 + 4\,f_n = 4\,f_n\\
g_{n+1}(\bar{x}_n, 2) &= 4\,g_n + 3\,f_n + 4\,g_n + f_n + g_n + 2\,f_n + 4\,f_n = 4\,g_n\\
g_{n+1}(\bar{x}_n, 3) &= 4\,g_n + 4\,f_n + 2\,g_n + 4\,f_n + 4\,g_n + 4\,f_n + 4\,f_n = f_n\\
g_{n+1}(\bar{x}_n, 4) &= 4\,g_n + f_n + 3\,g_n + 4\,f_n + 4\,g_n + f_n + 4\,f_n = g_n
\end{aligned}$$

$\square$

Теорема 3. *При $n \geqslant 1$ для периодических функций пятизначной логики*

$f_n = f^{(n)}_{(1144)}$, $g_n = f^{(n)}_{(1441)}$ *верны следующие равенства:*

$$\begin{aligned}
&s^1_{n+1} = f_{n+1} + g_{n+1} = \\
&(4\,f_n + 4\,g_n)x^4 + f_n x^3 + g_n x^2 + 3\,f_n x + f_n + g_n = \\
&(4\,f_n + 4\,g_n)(x+1)^4 + 4\,g_n(x+1)^3 + f_n(x+1)^2 + 2\,g_n(x+1) + f_n + g_n = \\
&(4\,f_n + 4\,g_n)(x+2)^4 + (4\,f_n + 3\,g_n)(x+2)^3 + 2\,g_n(x+2)^2 + \\
&+(2\,f_n + 3\,g_n)(x+2) + f_n + 4\,g_n = \\
&(4\,f_n + 4\,g_n)(x+3)^4 + (3\,f_n + 2\,g_n)(x+3)^3 + 2\,(f_n + g_n)(x+3)^2 + \\
&+(3\,f_n + 2\,g_n)(x+3) + 4\,f_n + 4\,g_n = \\
&(4\,f_n + 4\,g_n)(x+4)^4 + (2\,f_n + g_n)(x+4)^3 + 2\,f_n(x+4)^2 + \\
&+(2\,f_n + 3\,g_n)(x+4) + 4\,f_n + g_n
\end{aligned}$$

Доказательство. При поляризации x_{n+1}, когда $d_{n+1} = 0$

$$\begin{aligned}
&s^1_{n+1}(\bar{x}_n, 0) = 0 + 0 + 0 + 0 + f_n + g_n = f_n + g_n \\
&s^1_{n+1}(\bar{x}_n, 1) = 4\,f_n + 4\,g_n + f_n + g_n + 3\,f_n + f_n + g_n = 4\,f_n + g_n \\
&s^1_{n+1}(\bar{x}_n, 2) = 4\,f_n + 4\,g_n + 3\,f_n + 4\,g_n + f_n + f_n + g_n = 4\,f_n + 4\,g_n \\
&s^1_{n+1}(\bar{x}_n, 3) = 4\,f_n + 4\,g_n + 2\,f_n + 4\,g_n + 4\,f_n + f_n + g_n = f_n + 4\,g_n \\
&s^1_{n+1}(\bar{x}_n, 4) = 4\,f_n + 4\,g_n + 4\,f_n + g_n + 2\,f_n + f_n + g_n = f_n + g_n
\end{aligned}$$

При поляризации x_{n+1}, когда $d_{n+1} = 1$

$$\begin{aligned}
&s^1_{n+1}(\bar{x}_n, 0) = 4\,f_n + 4\,g_n + 4\,g_n + f_n + 2\,g_n + f_n + g_n = f_n + g_n \\
&s^1_{n+1}(\bar{x}_n, 1) = 4\,f_n + 4\,g_n + 2\,g_n + 4\,f_n + 4\,g_n + f_n + g_n = 4\,f_n + g_n \\
&s^1_{n+1}(\bar{x}_n, 2) = 4\,f_n + 4\,g_n + 3\,g_n + 4\,f_n + g_n + f_n + g_n = 4\,f_n + 4\,g_n \\
&s^1_{n+1}(\bar{x}_n, 3) = 4\,f_n + 4\,g_n + g_n + f_n + 3\,g_n + f_n + g_n = f_n + 4\,g_n \\
&s^1_{n+1}(\bar{x}_n, 4) = 0 + 0 + 0 + 0 + f_n + g_n = f_n + g_n
\end{aligned}$$

При поляризации x_{n+1}, когда $d_{n+1} = 2$

$$s^1_{n+1}(\bar{x}_n, 0) = 4\,f_n + 4\,g_n + 2\,f_n + 4\,g_n + 3\,g_n + 4\,f_n + g_n + f_n + 4\,g_n = f_n + g_n$$
$$s^1_{n+1}(\bar{x}_n, 1) = 4\,f_n + 4\,g_n + 3\,f_n + g_n + 3\,g_n + f_n + 4\,g_n + f_n + 4\,g_n = 4\,f_n + g_n$$
$$s^1_{n+1}(\bar{x}_n, 2) = 4\,f_n + 4\,g_n + f_n + 2\,g_n + 2\,g_n + 3\,f_n + 2\,g_n + f_n + 4\,g_n =$$
$$= 4\,f_n + 4\,g_n$$
$$s^1_{n+1}(\bar{x}_n, 3) = 0 + 0 + 0 + 0 + f_n + 4\,g_n = f_n + 4\,g_n$$
$$s^1_{n+1}(\bar{x}_n, 4) = 4\,f_n + 4\,g_n + 4\,f_n + 3\,g_n + 2\,g_n + 2\,f_n + 3\,g_n + f_n + 4\,g_n = f_n + g_n$$

При поляризации x_{n+1}, когда $d_{n+1} = 3$

$$s^1_{n+1}(\bar{x}_n, 0) = 4\,f_n + 4\,g_n + f_n + 4\,g_n + 3\,f_n + 3\,g_n + 4\,f_n + g_n + 4\,f_n + 4\,g_n =$$
$$= f_n + g_n$$
$$s^1_{n+1}(\bar{x}_n, 1) = 4\,f_n + 4\,g_n + 2\,f_n + 3\,g_n + 2\,f_n + 2\,g_n + 2\,f_n + 3\,g_n + 4\,f_n + 4\,g_n =$$
$$= 4\,f_n + g_n$$
$$s^1_{n+1}(\bar{x}_n, 2) = 0 + 0 + 0 + 0 + 4\,f_n + 4\,g_n = 4\,f_n + 4\,g_n$$
$$s^1_{n+1}(\bar{x}_n, 3) = 4\,f_n + 4\,g_n + 3\,f_n + 2\,g_n + 2\,f_n + 2\,g_n + 3\,f_n + 2\,g_n + 4\,f_n + 4\,g_n =$$
$$= f_n + 4\,g_n$$
$$s^1_{n+1}(\bar{x}_n, 4) = 4\,f_n + 4\,g_n + 4\,f_n + g_n + 3\,f_n + 3\,g_n + f_n + 4\,g_n + 4\,f_n + 4\,g_n =$$
$$= f_n + g_n$$

При поляризации x_{n+1}, когда $d_{n+1} = 4$

$$s^1_{n+1}(\bar{x}_n, 0) = 4\,f_n + 4\,g_n + 3\,f_n + 4\,g_n + 2\,f_n + 3\,f_n + 2\,g_n + 4\,f_n + g_n =$$
$$= f_n + g_n$$
$$s^1_{n+1}(\bar{x}_n, 1) = 0 + 0 + 0 + 0 + 4\,f_n + g_n = 4\,f_n + g_n$$
$$s^1_{n+1}(\bar{x}_n, 2) = 4\,f_n + 4\,g_n + 2\,f_n + g_n + 2\,f_n + 2\,f_n + 3\,g_n + 4\,f_n + g_n =$$
$$= 4\,f_n + 4\,g_n$$
$$s^1_{n+1}(\bar{x}_n, 3) = 4\,f_n + 4\,g_n + f_n + 3\,g_n + 3\,f_n + 4\,f_n + g_n + 4\,f_n + g_n = f_n + 4\,g_n$$
$$s^1_{n+1}(\bar{x}_n, 4) = 4\,f_n + 4\,g_n + 4\,f_n + 2\,g_n + 3\,f_n + f_n + 4\,g_n + 4\,f_n + g_n = f_n + g_n$$

□

Теорема 4. *При $n \geqslant 1$ для периодических функций пятизначной логики $f_n = f^{(n)}_{(1144)}$, $g_n = f^{(n)}_{(1441)}$ верны следующие равенства:*

$$s^2_{n+1} = f_{n+1} + 2\,g_{n+1} =$$
$$(4\,f_n + 3\,g_n)x^4 + (4\,f_n + 3\,g_n)x^3 + (2\,f_n + 4\,g_n)x^2 + (2\,f_n + 4\,g_n)x + f_n + 2\,g_n =$$
$$(4\,f_n + 3\,g_n)(x+1)^4 + (3\,f_n + g_n)(x+1)^3 + (4\,f_n + 3\,g_n)(x+1)^2 +$$
$$+ (4\,f_n + 3\,g_n)(x+1) + f_n + 2\,g_n =$$
$$(4\,f_n + 3\,g_n)(x+2)^4 + (2\,f_n + 4\,g_n)(x+2)^3 + (4\,f_n + 3\,g_n)(x+2)^2 +$$
$$+ (4\,f_n + 3\,g_n)(x+2) + 2\,f_n + 4\,g_n =$$
$$(4\,f_n + 3\,g_n)(x+3)^4 + (f_n + 2\,g_n)(x+3)^3 + 2\,(f_n + 2\,g_n)(x+3)^2 +$$
$$+ (f_n + 2\,g_n)(x+3) + 4\,f_n + 3\,g_n =$$
$$(4\,f_n + 3\,g_n)(x+4)^4 + (3\,f_n + g_n)(x+4)^2 + (4\,f_n + 3\,g_n)(x+4) + 3\,f_n + g_n$$

Доказательство. При поляризации x_{n+1}, когда $d_{n+1} = 0$

$$s^2_{n+1}(\bar{x}_n, 0) = 0 + 0 + 0 + 0 + f_n + 2\,g_n = f_n + 2\,g_n$$
$$s^2_{n+1}(\bar{x}_n, 1) = 4\,f_n + 3\,g_n + 4\,f_n + 3\,g_n + 2\,f_n + 4\,g_n + 2\,f_n + 4\,g_n + f_n + 2\,g_n =$$
$$= 3\,f_n + g_n$$
$$s^2_{n+1}(\bar{x}_n, 2) = 4\,f_n + 3\,g_n + 2\,f_n + 4\,g_n + 3\,f_n + g_n + 4\,f_n + 3\,g_n + f_n + 2\,g_n =$$
$$= 4\,f_n + 3\,g_n$$
$$s^2_{n+1}(\bar{x}_n, 3) = 4\,f_n + 3\,g_n + 3\,f_n + g_n + 3\,f_n + g_n + f_n + 2\,g_n + f_n + 2\,g_n =$$
$$= 2\,f_n + 4\,g_n$$
$$s^2_{n+1}(\bar{x}_n, 4) = 4\,f_n + 3\,g_n + f_n + 2\,g_n + 2\,f_n + 4\,g_n + 3\,f_n + g_n + f_n + 2\,g_n =$$
$$= f_n + 2\,g_n$$

При поляризации x_{n+1}, когда $d_{n+1} = 1$

$$s^2_{n+1}(\bar{x}_n, 0) = 4\,f_n + 3\,g_n + 3\,f_n + g_n + 4\,f_n + 3\,g_n + 4\,f_n + 3\,g_n + f_n + 2\,g_n =$$
$$= f_n + 2\,g_n$$
$$s^2_{n+1}(\bar{x}_n, 1) = 4\,f_n + 3\,g_n + 4\,f_n + 3\,g_n + f_n + 2\,g_n + 3\,f_n + g_n + f_n + 2\,g_n =$$
$$= 3\,f_n + g_n$$
$$s^2_{n+1}(\bar{x}_n, 2) = 4\,f_n + 3\,g_n + f_n + 2\,g_n + f_n + 2\,g_n + 2\,f_n + 4\,g_n + f_n + 2\,g_n =$$
$$= 4\,f_n + 3\,g_n$$
$$s^2_{n+1}(\bar{x}_n, 3) = 4\,f_n + 3\,g_n + 2\,f_n + 4\,g_n + 4\,f_n + 3\,g_n + f_n + 2\,g_n + f_n + 2\,g_n =$$
$$= 2\,f_n + 4\,g_n$$
$$s^2_{n+1}(\bar{x}_n, 4) = 0 + 0 + 0 + 0 + f_n + 2\,g_n = f_n + 2\,g_n$$

При поляризации x_{n+1}, когда $d_{n+1}=2$

$$s^2_{n+1}(\bar{x}_n,0)=4\,f_n+3\,g_n+f_n+2\,g_n+f_n+2\,g_n+3\,f_n+g_n+2\,f_n+4\,g_n=$$
$$=f_n+2\,g_n$$
$$s^2_{n+1}(\bar{x}_n,1)=4\,f_n+3\,g_n+4\,f_n+3\,g_n+f_n+2\,g_n+2\,f_n+4\,g_n+2\,f_n+4\,g_n=$$
$$=3\,f_n+g_n$$
$$s^2_{n+1}(\bar{x}_n,2)=4\,f_n+3\,g_n+3\,f_n+g_n+4\,f_n+3\,g_n+f_n+2\,g_n+2\,f_n+4\,g_n=$$
$$=4\,f_n+3\,g_n$$
$$s^2_{n+1}(\bar{x}_n,3)=0+0+0+0+2\,f_n+4\,g_n=2\,f_n+4\,g_n$$
$$s^2_{n+1}(\bar{x}_n,4)=4\,f_n+3\,g_n+2\,f_n+4\,g_n+4\,f_n+3\,g_n+4\,f_n+3\,g_n+2\,f_n+4\,g_n=$$
$$=f_n+2\,g_n$$

При поляризации x_{n+1}, когда $d_{n+1}=3$

$$s^2_{n+1}(\bar{x}_n,0)=4\,f_n+3\,g_n+2\,f_n+4\,g_n+3\,f_n+g_n+3\,f_n+g_n+4\,f_n+3\,g_n=$$
$$=f_n+2\,g_n$$
$$s^2_{n+1}(\bar{x}_n,1)=4\,f_n+3\,g_n+4\,f_n+3\,g_n+2\,f_n+4\,g_n+4\,f_n+3\,g_n+4\,f_n+3\,g_n=$$
$$=3\,f_n+g_n$$
$$s^2_{n+1}(\bar{x}_n,2)=0+0+0+0+4\,f_n+3\,g_n=4\,f_n+3\,g_n$$
$$s^2_{n+1}(\bar{x}_n,3)=4\,f_n+3\,g_n+f_n+2\,g_n+2\,f_n+4\,g_n+f_n+2\,g_n+4\,f_n+3\,g_n=$$
$$=2\,f_n+4\,g_n$$
$$s^2_{n+1}(\bar{x}_n,4)=4\,f_n+3\,g_n+3\,f_n+g_n+3\,f_n+g_n+2\,f_n+4\,g_n+4\,f_n+3\,g_n=$$
$$=f_n+2\,g_n$$

При поляризации x_{n+1}, когда $d_{n+1} = 4$

$$
\begin{aligned}
&s^2_{n+1}(\bar{x}_n, 0) = 4\,f_n + 3\,g_n + 0 + 3\,f_n + g_n + f_n + 2\,g_n + 3\,f_n + g_n = f_n + 2\,g_n\\
&s^2_{n+1}(\bar{x}_n, 1) = 0 + 0 + 0 + 0 + 3\,f_n + g_n = 3\,f_n + g_n\\
&s^2_{n+1}(\bar{x}_n, 2) = 4\,f_n + 3\,g_n + 0 + 3\,f_n + g_n + 4\,f_n + 3\,g_n + 3\,f_n + g_n = 4\,f_n + 3\,g_n\\
&s^2_{n+1}(\bar{x}_n, 3) = 4\,f_n + 3\,g_n + 0 + 2\,f_n + 4\,g_n + 3\,f_n + g_n + 3\,f_n + g_n = 2\,f_n + 4\,g_n\\
&s^2_{n+1}(\bar{x}_n, 4) = 4\,f_n + 3\,g_n + 0 + 2\,f_n + 4\,g_n + 2\,f_n + 4\,g_n + 3\,f_n + g_n = f_n + 2\,g_n
\end{aligned}
$$

$\square$

Теорема 5. *При* $n \geqslant 1$ *для периодических функций пятизначной логики* $f_n = f^{(n)}_{(1144)}$, $g_n = f^{(n)}_{(1441)}$ *верны следующие равенства:*

$$
\begin{aligned}
&s^3_{n+1} = f_{n+1} + 3\,g_{n+1} =\\
&(4\,f_n + 2\,g_n)x^4 + (2\,f_n + g_n)x^3 + (4\,f_n + 2\,g_n)x^2 + (f_n + 3\,g_n)x + f_n + 3\,g_n =\\
&(4\,f_n + 2\,g_n)(x+1)^4 + (f_n + 3\,g_n)(x+1)^3 + (2\,f_n + g_n)(x+1)^2 +\\
&+(3\,f_n + 4\,g_n)(x+1) + f_n + 3\,g_n =\\
&(4\,f_n + 2\,g_n)(x+2)^4 + (3\,f_n + 4\,g_n)(x+2)^2 + (f_n + 3\,g_n)(x+2) + 3\,f_n + 4\,g_n =\\
&(4\,f_n + 2\,g_n)(x+3)^4 + (4\,f_n + 2\,g_n)(x+3)^3 + 2\,(f_n + 3\,g_n)(x+3)^2 +\\
&+(4\,f_n + 2\,g_n)(x+3) + 4\,f_n + 2\,g_n =\\
&(4\,f_n + 2\,g_n)(x+4)^4 + (3\,f_n + 4\,g_n)(x+4)^3 + (4\,f_n + 2\,g_n)(x+4)^2 +\\
&+(f_n + 3\,g_n)(x+4) + 2\,f_n + g_n
\end{aligned}
$$

Доказательство. При поляризации x_{n+1}, когда $d_{n+1} = 0$

$$s^3_{n+1}(\bar{x}_n, 0) = 0 + 0 + 0 + 0 + f_n + 3\,g_n = f_n + 3\,g_n$$
$$s^3_{n+1}(\bar{x}_n, 1) = 4\,f_n + 2\,g_n + 2\,f_n + g_n + 4\,f_n + 2\,g_n + f_n + 3\,g_n + f_n + 3\,g_n =$$
$$= 2\,f_n + g_n$$
$$s^3_{n+1}(\bar{x}_n, 2) = 4\,f_n + 2\,g_n + f_n + 3\,g_n + f_n + 3\,g_n + 2\,f_n + g_n + f_n + 3\,g_n =$$
$$= 4\,f_n + 2\,g_n$$
$$s^3_{n+1}(\bar{x}_n, 3) = 4\,f_n + 2\,g_n + 4\,f_n + 2\,g_n + f_n + 3\,g_n + 3\,f_n + 4\,g_n + f_n + 3\,g_n =$$
$$= 3\,f_n + 4\,g_n$$
$$s^3_{n+1}(\bar{x}_n, 4) = 4\,f_n + 2\,g_n + 3\,f_n + 4\,g_n + 4\,f_n + 2\,g_n + 4\,f_n + 2\,g_n + f_n + 3\,g_n =$$
$$= f_n + 3\,g_n$$

При поляризации x_{n+1}, когда $d_{n+1} = 1$

$$s^3_{n+1}(\bar{x}_n, 0) = 4\,f_n + 2\,g_n + f_n + 3\,g_n + 2\,f_n + g_n + 3\,f_n + 4\,g_n + f_n + 3\,g_n =$$
$$= f_n + 3\,g_n$$
$$s^3_{n+1}(\bar{x}_n, 1) = 4\,f_n + 2\,g_n + 3\,f_n + 4\,g_n + 3\,f_n + 4\,g_n + f_n + 3\,g_n + f_n + 3\,g_n =$$
$$= 2\,f_n + g_n$$
$$s^3_{n+1}(\bar{x}_n, 2) = 4\,f_n + 2\,g_n + 2\,f_n + g_n + 3\,f_n + 4\,g_n + 4\,f_n + 2\,g_n + f_n + 3\,g_n =$$
$$= 4\,f_n + 2\,g_n$$
$$s^3_{n+1}(\bar{x}_n, 3) = 4\,f_n + 2\,g_n + 4\,f_n + 2\,g_n + 2\,f_n + g_n + 2\,f_n + g_n + f_n + 3\,g_n =$$
$$= 3\,f_n + 4\,g_n$$
$$s^3_{n+1}(\bar{x}_n, 4) = 0 + 0 + 0 + 0 + f_n + 3\,g_n = f_n + 3\,g_n$$

При поляризации x_{n+1}, когда $d_{n+1} = 2$

$$s_{n+1}^3(\bar{x}_n, 0) = 4\,f_n + 2\,g_n + 0 + 2\,f_n + g_n + 2\,f_n + g_n + 3\,f_n + 4\,g_n = f_n + 3\,g_n$$
$$s_{n+1}^3(\bar{x}_n, 1) = 4\,f_n + 2\,g_n + 0 + 2\,f_n + g_n + 3\,f_n + 4\,g_n + 3\,f_n + 4\,g_n = 2\,f_n + g_n$$
$$s_{n+1}^3(\bar{x}_n, 2) = 4\,f_n + 2\,g_n + 0 + 3\,f_n + 4\,g_n + 4\,f_n + 2\,g_n + 3\,f_n + 4\,g_n =$$
$$= 4\,f_n + 2\,g_n$$
$$s_{n+1}^3(\bar{x}_n, 3) = 0 + 0 + 0 + 0 + 3\,f_n + 4\,g_n = 3\,f_n + 4\,g_n$$
$$s_{n+1}^3(\bar{x}_n, 4) = 4\,f_n + 2\,g_n + 0 + 3\,f_n + 4\,g_n + f_n + 3\,g_n + 3\,f_n + 4\,g_n = f_n + 3\,g_n$$

При поляризации x_{n+1}, когда $d_{n+1} = 3$

$$s_{n+1}^3(\bar{x}_n, 0) = 4\,f_n + 2\,g_n + 3\,f_n + 4\,g_n + 3\,f_n + 4\,g_n + 2\,f_n + g_n + 4\,f_n + 2\,g_n =$$
$$= f_n + 3\,g_n$$
$$s_{n+1}^3(\bar{x}_n, 1) = 4\,f_n + 2\,g_n + f_n + 3\,g_n + 2\,f_n + g_n + f_n + 3\,g_n + 4\,f_n + 2\,g_n =$$
$$= 2\,f_n + g_n$$
$$s_{n+1}^3(\bar{x}_n, 2) = 0 + 0 + 0 + 0 + 4\,f_n + 2\,g_n = 4\,f_n + 2\,g_n$$
$$s_{n+1}^3(\bar{x}_n, 3) = 4\,f_n + 2\,g_n + 4\,f_n + 2\,g_n + 2\,f_n + g_n + 4\,f_n + 2\,g_n + 4\,f_n + 2\,g_n =$$
$$= 3\,f_n + 4\,g_n$$
$$s_{n+1}^3(\bar{x}_n, 4) = 4\,f_n + 2\,g_n + 2\,f_n + g_n + 3\,f_n + 4\,g_n + 3\,f_n + 4\,g_n + 4\,f_n + 2\,g_n =$$
$$= f_n + 3\,g_n$$

При поляризации x_{n+1}, когда $d_{n+1} = 4$

$$s^3_{n+1}(\bar{x}_n, 0) = 4\,f_n + 2\,g_n + 2\,f_n + g_n + 4\,f_n + 2\,g_n + 4\,f_n + 2\,g_n + 2\,f_n + g_n =$$
$$= f_n + 3\,g_n$$
$$s^3_{n+1}(\bar{x}_n, 1) = 0 + 0 + 0 + 0 + 2\,f_n + g_n = 2\,f_n + g_n$$
$$s^3_{n+1}(\bar{x}_n, 2) = 4\,f_n + 2\,g_n + 3\,f_n + 4\,g_n + 4\,f_n + 2\,g_n + f_n + 3\,g_n + 2\,f_n + g_n =$$
$$= 4\,f_n + 2\,g_n$$
$$s^3_{n+1}(\bar{x}_n, 3) = 4\,f_n + 2\,g_n + 4\,f_n + 2\,g_n + f_n + 3\,g_n + 2\,f_n + g_n + 2\,f_n + g_n =$$
$$= 3\,f_n + 4\,g_n$$
$$s^3_{n+1}(\bar{x}_n, 4) = 4\,f_n + 2\,g_n + f_n + 3\,g_n + f_n + 3\,g_n + 3\,f_n + 4\,g_n + 2\,f_n + g_n =$$
$$= f_n + 3\,g_n$$

□

Теорема 6. *При $n \geqslant 1$ для периодических функций пятизначной логики $f_n = f^{(n)}_{(1144)}$, $g_n = f^{(n)}_{(1441)}$ верны следующие равенства:*

$$s^4_{n+1} = f_{n+1} + 4\,g_{n+1} =$$
$$(4\,f_n + g_n)x^4 + 4\,g_n x^3 + f_n x^2 + 2\,g_n x + f_n + 4\,g_n =$$
$$(4\,f_n + g_n)(x+1)^4 + 4\,f_n(x+1)^3 + 4\,g_n(x+1)^2 + 2\,f_n(x+1) + f_n + 4\,g_n =$$
$$(4\,f_n + g_n)(x+2)^4 + (3\,f_n + g_n)(x+2)^3 + 2\,f_n(x+2)^2 +$$
$$+(3\,f_n + 3\,g_n)(x+2) + 4\,f_n + 4\,g_n =$$
$$(4\,f_n + g_n)(x+3)^4 + (2\,f_n + 2\,g_n)(x+3)^3 + 2\,(f_n + 4\,g_n)(x+3)^2 +$$
$$+(2\,f_n + 2\,g_n)(x+3) + 4\,f_n + g_n =$$
$$(4\,f_n + g_n)(x+4)^4 + (f_n + 3\,g_n)(x+4)^3 + 3\,g_n(x+4)^2 +$$
$$+(3\,f_n + 3\,g_n)(x+4) + f_n + g_n$$

Доказательство. При поляризации x_{n+1}, когда $d_{n+1} = 0$

$$s^4_{n+1}(\bar{x}_n, 0) = 0 + 0 + 0 + 0 + f_n + 4\,g_n = f_n + 4\,g_n$$
$$s^4_{n+1}(\bar{x}_n, 1) = 4\,f_n + g_n + 4\,g_n + f_n + 2\,g_n + f_n + 4\,g_n = f_n + g_n$$
$$s^4_{n+1}(\bar{x}_n, 2) = 4\,f_n + g_n + 2\,g_n + 4\,f_n + 4\,g_n + f_n + 4\,g_n = 4\,f_n + g_n$$
$$s^4_{n+1}(\bar{x}_n, 3) = 4\,f_n + g_n + 3\,g_n + 4\,f_n + g_n + f_n + 4\,g_n = 4\,f_n + 4\,g_n$$
$$s^4_{n+1}(\bar{x}_n, 4) = 4\,f_n + g_n + g_n + f_n + 3\,g_n + f_n + 4\,g_n = f_n + 4\,g_n$$

При поляризации x_{n+1}, когда $d_{n+1} = 1$

$$s^4_{n+1}(\bar{x}_n, 0) = 4\,f_n + g_n + 4\,f_n + 4\,g_n + 2\,f_n + 0\,g_n + f_n + 4\,g_n = f_n + 4\,g_n$$
$$s^4_{n+1}(\bar{x}_n, 1) = 4\,f_n + g_n + 2\,f_n + g_n + 4\,f_n + 0\,g_n + f_n + 4\,g_n = f_n + g_n$$
$$s^4_{n+1}(\bar{x}_n, 2) = 4\,f_n + g_n + 3\,f_n + g_n + f_n + 0\,g_n + f_n + 4\,g_n = 4\,f_n + g_n$$
$$s^4_{n+1}(\bar{x}_n, 3) = 4\,f_n + g_n + f_n + 4\,g_n + 3\,f_n + 0\,g_n + f_n + 4\,g_n = 4\,f_n + 4\,g_n$$
$$s^4_{n+1}(\bar{x}_n, 4) = 0 + 0 + 0 + 0 + f_n + 4\,g_n = f_n + 4\,g_n$$

При поляризации x_{n+1}, когда $d_{n+1} = 2$

$$s^4_{n+1}(\bar{x}_n, 0) = 4\,f_n + g_n + 4\,f_n + 3\,g_n + 3\,f_n + f_n + g_n + 4\,f_n + 4\,g_n = f_n + 4\,g_n$$
$$s^4_{n+1}(\bar{x}_n, 1) = 4\,f_n + g_n + f_n + 2\,g_n + 3\,f_n + 4\,f_n + 4\,g_n + 4\,f_n + 4\,g_n = f_n + g_n$$
$$s^4_{n+1}(\bar{x}_n, 2) = 4\,f_n + g_n + 2\,f_n + 4\,g_n + 2\,f_n + 2\,f_n + 2\,g_n + 4\,f_n + 4\,g_n =$$
$$= 4\,f_n + g_n$$
$$s^4_{n+1}(\bar{x}_n, 3) = 0 + 0 + 0 + 0 + 4\,f_n + 4\,g_n = 4\,f_n + 4\,g_n$$
$$s^4_{n+1}(\bar{x}_n, 4) = 4\,f_n + g_n + 3\,f_n + g_n + 2\,f_n + 3\,f_n + 3\,g_n + 4\,f_n + 4\,g_n =$$
$$= f_n + 4\,g_n$$

При поляризации x_{n+1}, когда $d_{n+1} = 3$

$$
\begin{aligned}
& s^4_{n+1}(\bar{x}_n, 0) = 4\, f_n + g_n + 4\, f_n + 4\, g_n + 3\, f_n + 2\, g_n + f_n + g_n + 4\, f_n + g_n = \\
& = f_n + 4\, g_n \\
& s^4_{n+1}(\bar{x}_n, 1) = 4\, f_n + g_n + 3\, f_n + 3\, g_n + 2\, f_n + 3\, g_n + 3\, f_n + 3\, g_n + 4\, f_n + g_n = \\
& = f_n + g_n \\
& s^4_{n+1}(\bar{x}_n, 2) = 0 + 0 + 0 + 0 + 4\, f_n + g_n = 4\, f_n + g_n \\
& s^4_{n+1}(\bar{x}_n, 3) = 4\, f_n + g_n + 2\, f_n + 2\, g_n + 2\, f_n + 3\, g_n + 2\, f_n + 2\, g_n + 4\, f_n + g_n = \\
& = 4\, f_n + 4\, g_n \\
& s^4_{n+1}(\bar{x}_n, 4) = 4\, f_n + g_n + f_n + g_n + 3\, f_n + 2\, g_n + 4\, f_n + 4\, g_n + 4\, f_n + g_n = \\
& = f_n + 4\, g_n
\end{aligned}
$$

При поляризации x_{n+1}, когда $d_{n+1} = 4$

$$
\begin{aligned}
& s^4_{n+1}(\bar{x}_n, 0) = 4\, f_n + g_n + 4\, f_n + 2\, g_n + 3\, g_n + 2\, f_n + 2\, g_n + f_n + g_n = \\
& = f_n + 4\, g_n \\
& s^4_{n+1}(\bar{x}_n, 1) = 0 + 0 + 0 + 0 + f_n + g_n = f_n + g_n \\
& s^4_{n+1}(\bar{x}_n, 2) = 4\, f_n + g_n + f_n + 3\, g_n + 3\, g_n + 3\, f_n + 3\, g_n + f_n + g_n = \\
& = 4\, f_n + g_n \\
& s^4_{n+1}(\bar{x}_n, 3) = 4\, f_n + g_n + 3\, f_n + 4\, g_n + 2\, g_n + f_n + g_n + f_n + g_n = \\
& = 4\, f_n + 4\, g_n \\
& s^4_{n+1}(\bar{x}_n, 4) = 4\, f_n + g_n + 2\, f_n + g_n + 2\, g_n + 4\, f_n + 4\, g_n + f_n + g_n = \\
& = f_n + 4\, g_n
\end{aligned}
$$

$\square$

Обобщение результатов в таблицах

В следующей таблице представлены выражения функций от $n+1$ переменных через функции от n переменных, в зависимости от поляризации x_{n+1} по строкам записаны функции, а по столбцам поляризации x_{n+1}.

	0	1	2	3	4
f_{n+1}	$fs^4s^1s^4f$	$fs^1s^4s^1f$	fs^2s^1gg	$fgfgf$	fs^3s^4gg
g_{n+1}	$gs^1s^4s^1g$	$gs^4s^1s^4g$	gs^2s^4ff	$gfgfg$	gs^3s^1ff
s^1_{n+1}	s^1fgfs^1	s^1gfgs^1	$s^1s^2gs^4s^4$	$s^1s^4s^1s^4s^1$	$s^1s^3fs^4s^4$
s^2_{n+1}	$s^2s^2s^2s^2s^2$	$s^2s^2s^2s^2s^2$	$s^2s^2s^2s^2s^2$	$s^2s^2s^2s^2s^2$	$s^2s^2s^2s^2$
s^3_{n+1}	$s^3s^3s^3s^3s^3$	$s^3s^3s^3s^3s^3$	$s^3s^3s^3s^3$	$s^3s^3s^3s^3s^3$	$s^3s^3s^3s^3s^3$
s^4_{n+1}	s^4gfgs^4	s^4fgfs^4	$s^4s^2fs^1s^1$	$s^4s^1s^4s^1s^4$	$s^4s^3gs^1s^1$

Таблица 1: Выражения функций

Теорема 7. *При $n \geqslant 1$ длина полинома периодической функции пятизначной логики $s^2_n = f_n + 2\,g_n$ при поляризации $\delta = (d_1, \ldots, d_n)$выражается следующей формулой:*

$$l(P^\delta(s^2_n)) = 5^{n-m} \cdot 4^m,$$

где m – количество четверок в векторе δ.

Доказательство. Так как s^2_n симметрическая функция, то можно считать, что

$$d_i \in \{0,1,2,3\},\ i = 1, \ldots, n-m \quad d_i = 4,\ i = n-m+1, \ldots, n.$$

Доказательство проведем индукцией по n – числу переменных функции s^2_n.

При $n = 1$ получаем:

$$\begin{aligned}
&s_1^2 = 2x^4 + 2x^3 + x^2 + x + 3 = \\
&2(x+1)^4 + 4(x+1)^3 + 2(x+1)^2 + 2(x+1) + 3 = \\
&2(x+2)^4 + (x+2)^3 + 2(x+2)^2 + 2(x+2) + 1 = \\
&2(x+3)^4 + 3(x+3)^3 + (x+3)^2 + 3(x+3) + 2 = \\
&2(x+4)^4 + 4(x+4)^2 + 2(x+4) + 4,
\end{aligned}$$

тогда, если $m = 0$, то $l(P^\delta(s_1^2)) = 5$, а если $m = 1$, то $l(P^\delta(s_1^2)) = 4$ – верно. Введем c – число функций s_{n-1}^2, через которые выражается s_n^2. Пусть при $n \geqslant 2$ формула верна для $n-1$, тогда из таблицы 1 видно, что s_n^2 выражается через $c = 5$ функций s_{n-1}^2, если $d_n \in \{0,1,2,3\}$ и через $c = 4$ функции s_{n-1}^2, если $d_n = 4$ при каждой из которых x_n стоит в различных степенях. Пусть m' – количество четверок в векторе $(d_1, \ldots, d_{n-1})$. Тогда $l(P^\delta(s_n^2)) = 5^{n-1-m'} \cdot 4^{m'} \cdot c = 5^{n-m} \cdot 4^m$. $\square$

Теорема 8. *При $n \geqslant 1$ длина полинома периодической функции пятизначной логики $s_n^3 = f_n + 3\,g_n$ при поляризации $\delta = (d_1, \ldots, d_n)$выражается следующей формулой:*

$$l(P^\delta(s_n^3)) = 5^{n-m} \cdot 4^m,$$

где m – количество двоек в векторе δ.

Доказательство. Так как s_n^3 симметрическая функция, то можно считать, что

$$d_i \in \{0,1,3,4\},\ i = 1, \ldots, n-m \quad d_i = 2,\ i = n-m+1, \ldots, n.$$

Доказательство проведем индукцией по n – числу переменных функции s_n^3.

При $n = 1$ получаем:

$$\begin{aligned}
&s_1^3 = x^4 + 3x^3 + x^2 + 4x + 4 = \\
&(x+1)^4 + 4(x+1)^3 + 3(x+1)^2 + 2(x+1) + 4 = \\
&(x+2)^4 + 2(x+2)^2 + 4(x+2) + 2 = \\
&(x+3)^4 + (x+3)^3 + 3(x+3)^2 + (x+3) + 1 = \\
&(x+4)^4 + 2(x+4)^3 + (x+4)^2 + 4(x+4) + 3,
\end{aligned}$$

тогда, если $m = 0$, то $l(P^\delta(s_1^3)) = 5$, а если $m = 1$, то $l(P^\delta(s_1^3)) = 4$ – верно. Введем c – число функций s_{n-1}^3, через которые выражается s_n^3. Пусть при $n \geqslant 2$ формула верна для $n-1$, тогда из таблицы 1 видно, что s_n^3 выражается через $c = 5$ функций s_{n-1}^3, если $d_n \in \{0,1,3,4\}$ и через $c = 4$ функции s_{n-1}^3, если $d_n = 2$ при каждой из которых x_n стоит в различных степенях. Пусть m' – количество двоек в векторе $(d_1, \ldots, d_{n-1})$. Поэтому $l(P^\delta(s_n^3)) = 5^{n-1-m'} \cdot 4^{m'} \cdot c = 5^{n-m} \cdot 4^m$. $\square$

Обозначим s^1 и s^4 через h и t соответственно. Для удобства перепишем таблицу 1 в новых обозначениях:

	0	1	2	3	4
f_{n+1}	$fthtf$	$fhthf$	fs^2hgg	$fgfgf$	fs^3tgg
g_{n+1}	$ghthg$	$gthtg$	gs^2tff	$gfgfg$	gs^3hff
h_{n+1}	$hfgfh$	$hgfgh$	hs^2gtt	$hthth$	hs^3ftt
t_{n+1}	$tgfgt$	$tfgft$	ts^2fhh	$ththt$	ts^3ghh

Таблица 2: Выражения функций

Рассмотрим функции f_1, g_1, h_1, t_1. В следующей таблице приведены длины этих функций, в зависимости от поляризации (данные получены с помощью программы):

	0	1	2	3	4
f_1	3	4	5	5	4
g_1	4	3	4	5	5
h_1	5	5	3	3	3
t_1	3	3	4	2	4

Таблица 3: Длины функций

Оценки для функций из класса $\mathcal{F}$

Нижняя оценка

Лемма 1. *При векторе поляризации* $\delta = (d_1, \ldots, d_n), d_i \in \{0,1,3\}, i = 1, \ldots, n$ *и* φ_n *– любой функции из* $\mathcal{F}^n$ *верно:*

$$l(P^\delta(\varphi_n)) \geqslant \frac{2}{5} \cdot 5^n.$$

Доказательство. Из таблицы 3 видно, что при $n = 1$, $l(P^\delta(\varphi_1)) \geqslant 2$. По теореме 7 $l(P^\delta(s_n^2)) = 5^n$, а по теореме 8 $l(P^\delta(s_n^3)) = 5^n$. Функция φ_n выражается (см. таблицу 2) через 5 функций из $\mathcal{F}^{n-1}$ или через 4 функции из $\mathcal{F}^{n-1}$ и одну из функций $\{s_{n-1}^2, s_{n-1}^3\}$, поэтому

$$l(P^\delta(\varphi_n)) \geqslant \min(\frac{2}{5} \cdot 5^{n-1} \cdot 5, \frac{2}{5} \cdot 5^{n-1} \cdot 4 + 1 \cdot 5^{n-1}) = \frac{2}{5} \cdot 5^n.$$

$\square$

Лемма 2. *При векторе поляризации* $\delta = (d_1, \ldots, d_n), d_i \in \{0,1,3,4\}, i = = 1, \ldots, n$ *и* φ_n *– любой функции из* $\mathcal{F}^n$ *верно:*

$$l(P^\delta(\varphi_n)) \geqslant \frac{2}{5} \cdot 5^n.$$

Доказательство. Пусть m – количество 4 в векторе δ. Так как φ_n симметрическая функция, то можно считать, что

$$d_i \in \{0,1,3\},\ i = 1, \ldots, n-m \quad d_i = 4,\ i = n-m+1, \ldots, n.$$

Если $m = 0$, то $l(P^\delta(\varphi_n)) \geqslant \frac{2}{5} \cdot 5^n$ по предыдущей лемме. Если $m \neq 0$, то по предыдущей лемме для всех $\varphi \in \{f,g,h,t\}$ $l(P^\delta(\varphi_{n-m})) \geqslant \frac{2}{5} \cdot 5^{n-m}$. При переходе от $n-m$ к $n-m+1$ переменная x_{n-m+1} имеет поляризацию 4 и φ_{n-m+1} выражается через 4 функции из $\mathcal{F}^{n-m}$ и одну функцию s^3_{n-m}, причем по теореме 8 $l(P^{(d_1,\ldots,d_{n-m})}(s^3_{n-m})) = 5^{n-m}$, поэтому $l(P^\delta(\varphi_{n-m+1})) \geqslant \frac{2}{5} \cdot 5^{n-m} \cdot 4 + + 5^{n-m} > \frac{2}{5} \cdot 5^{n-m+1}$. Пусть $k = n-m+1$, пока $k < n$ продолжим аналогичные рассуждения, переходя от k к $k+1$. Получим, что

$$l(P^\delta(\varphi_n)) \geqslant \frac{2}{5} \cdot 5^n.$$

$\square$

Лемма 3. *При векторе поляризации* $\delta = (d_1, \ldots, d_n), d_i = 2, i = 1, \ldots, n$ *и* φ_n *– любой функции из* $\mathcal{F}^n$ *верно:*

$$l(P^\delta(\varphi_n)) \geqslant 5^n - \frac{1}{2} 4^n.$$

Доказательство. При поляризации 2 $(k+1)$-й переменной φ_{k+1} выражается через четыре функции из $\mathcal{F}^k$ и одну функцию s_k^2, причем $l(P^\delta(s_k^2)) = 5^k$, а из таблицы 3 видно, что минимальная длина среди функций из $\mathcal{F}^1$ при поляризации 2 равна 3. Поэтому выражение для длины φ_k можно получить решая следующую линейную неоднородную задачу:

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= 4y_k + 5^k \\ y_1 &= 3 \end{aligned}$$

Решая эту задачу получим $l(P^\delta(\varphi_n)) \geqslant 5^n - \frac{1}{2}4^n$. □

Лемма 4. *При векторе поляризации* $\delta = (d_1, \ldots, d_n)$, $d_i = 2$, $i = 1, \ldots, m$, $d_i = 4$, $i = n - m + 1, \ldots, n$ *и* φ_n *– любой функции из* $\mathcal{F}^n$ *верно:*

$$l(P^\delta(\varphi_n)) \geqslant \left(\left(\frac{5}{4}\right)^m - \frac{3}{2}\right) \cdot 4^n + 4^m \cdot 5^{n-m}.$$

Доказательство. Если $n = m$, то утверждение этой леммы следует из леммы 3, поэтому будем считать, что $n > m$. При $n > k > m$ при поляризации 4 $(k+1)$-й переменной φ_{k+1} выражается через четыре функции из $\mathcal{F}^k$ и одну функцию s_k^3, причем $l(P^\delta(s_k^3)) = 5^{k-m} \cdot 4^m$, а по лемме 3 $l(P^\delta(\varphi_m)) \geqslant 5^m - \frac{1}{2}4^m$. Поэтому выражение для длины φ_n можно получить решая следующую линейную неоднородную задачу:

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= 4y_k + 5^{k-m} \cdot 4^m \\ y_m &= 5^m - \tfrac{1}{2}4^m \end{aligned}$$

Решая эту задачу, получим $l(P^\delta(\varphi_n)) \geqslant \left(\left(\frac{5}{4}\right)^m - \frac{3}{2}\right) \cdot 4^n + 4^m \cdot 5^{n-m}$. □

Теорема 9. *При векторе поляризации* $\delta = (d_1, \ldots, d_n)$ *и* φ_n *– любой функции* *из $\mathcal{F}^n$ верно:*

$$l(P^\delta(\varphi_n)) \geqslant \left(\left(\left(\frac{5}{4}\right)^{m_2} - \frac{3}{2}\right)\cdot 4^{m_2+m_4} + 4^{m_2}\cdot 5^{m_4}\right)\cdot 5^{n-m_2-m_4}, \textit{ где}$$

m_2 – число двоек в δ, а m_4 – число четверок.

Доказательство. Пусть в векторе δ сначала идут m_2 2, затем m_4 4 и $n - m_2 - m_4$ чисел из $\{0,1,3\}$. Тогда по лемме 4 $l(P^\delta(\varphi_{m_2+m_4})) \geqslant \left(\left(\frac{5}{4}\right)^{m_2} - \frac{3}{2}\right)\cdot 4^{m_2+m_4} + 4^{m_2}\cdot 5^{m_4}$. При поляризации из 0,1,3 $k+1$-ой переменной φ_{k+1} выражается через пять функции из $\mathcal{F}^k$. Из этого следует, что $l(P^\delta(\varphi_n)) \geqslant \left(\left(\left(\frac{5}{4}\right)^{m_2} - \frac{3}{2}\right)\cdot 4^{m_2+m_4} + 4^{m_2}\cdot 5^{m_4}\right)\cdot 5^{n-m_2-m_4}$. □

Верхняя оценка

Теорема 10. *Для любой функции φ_n из $\mathcal{F}^n$, при n четном верно:*

$$l(\varphi_n) \leqslant 5^n\left(2\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{n}{2}} - \left(\frac{4}{5}\right)^n\right).$$

Доказательство. Пусть $m = \frac{n}{2}$. Рассмотрим вектор $\delta = (d_1,\ldots,d_n)$, $d_i = 2$, $i = 1,\ldots,m$, $d_i = 4$, $i = m+1,\ldots,n$. Сложность любой функции от k переменных не больше 5^k, поэтому $l(P^\delta(\varphi_m)) \leqslant 5^m$. При $k > m$ при поляризации 4 $k+1$-ой переменной φ_{k+1} выражается через четыре функции из $\mathcal{F}^k$ и одну функцию s_k^3, причем $l(P^\delta(s_k^3)) = 5^{k-m}\cdot 4^m$. Поэтому выражение для длины φ_n можно оценить решая следующую линейную неоднородную задачу:

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= 4y_k + 5^{k-m}\cdot 4^m \\ y_m &= 5^m \end{aligned}$$

Решая эту задачу получим $l(P^\delta(\varphi_n)) \leqslant \left(\left(\frac{5}{4}\right)^m - 1\right)\cdot 4^n + 4^m\cdot 5^{n-m} =$

$= 5^n \left(2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{n}{2}} - \left(\frac{4}{5}\right)^n\right).$ $\square$

Следствие. *Класс функций $\mathcal{A}$ является вырожденным.*

Доказательство. По теоремам 7, 8 $l(s_n^2) = l(s_n^3) = 4^n = \bar{o}(5^n)$. По теореме 10 $l(\varphi_n) \leqslant 5^n \left(2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{n}{2}} - \left(\frac{4}{5}\right)^n\right)$, для любой функции $\varphi_n \in \mathcal{F}_n$. И $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5^n\left(2\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{n}{2}} - \left(\frac{4}{5}\right)^n\right)}{5^n} = 0$, поэтому $5^n \left(2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{n}{2}} - \left(\frac{4}{5}\right)^n\right) = \bar{o}(5^n)$. $\square$

Заключение

Математические результаты

1. Для всех функций из класса $\mathcal{A}$ были построены все поляризованные полиномы, выражающие функции от $n+1$ переменных через функции от n переменных также принадлежащих классу $\mathcal{A}$;

2. Установлена точная длина, в зависимости от поляризации, для функций: s_n^2 и s_n^3;

3. Доказано несколько теорем и лемм, из которых получается нижняя оценка для функций из класса $\mathcal{F}$;

4. Установлена верхняя оценка для функций из класса $\mathcal{F}$;

5. Доказана вырожденность класса $\mathcal{A}$.

Программные результаты

Для получения результатов были написаны следующие программы:

- Программа на языке `C++`, реализующая построение поляризованных полиномов по модулю k, где $k \in 2{,}3{,}5{,}7$, в программе используется алгоритм, описанный в [9];

- Для этой программы был написан интерфейс на языке `Perl`, передставленный на рисунке 1;

- Программа на языке `C++`, осуществляющая для заданного числа преименных n "быстрый" поиск функций длина которых, в классе пляри-

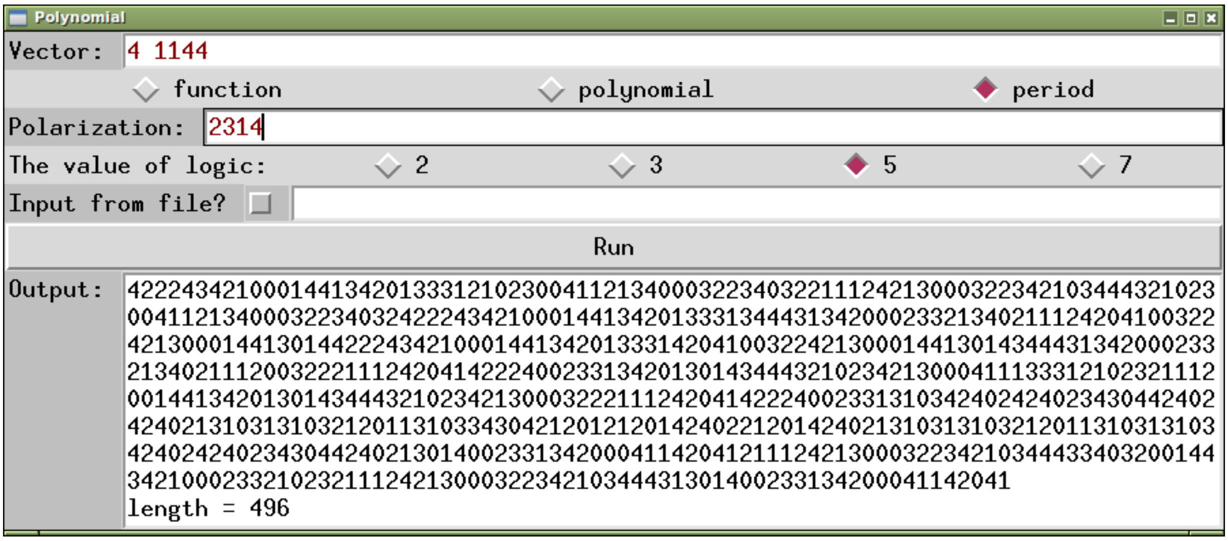

Рис. 1: Вид интерфейса

зованных полиномов, больше заданного порога, среди заданного класса симметрических функций от n переменных;

- С помощью системы компьютерной алгебры `Sage` [10] были произведены: получение полиномиальных форм, поляризованных по разным векторам поляризации и подстановка значений в полиномы для проверки правильности их построения.

Коды всех программ доступны в моем репозитории, расположенном по адресу: `https://www.github.com/obirvalger/diploma`.

Список литературы

1. Угрюмов Е. П. Цифровая схемотехника. СПб.: БХВ-Петербург, 2004.

2. Sasao T., Besslich P. On the complexity of mod-2 sum PLA's // IEEE Trans.on Comput. 39. N 2. 1990. P. 262–266.

3. Супрун В. П. Сложность булевых функций в классе канонических поляризованных полиномов // Дискретная математика. 5. №2. 1993. С. 111–115.

4. Перязев Н. А. Сложность булевых функций в классе полиномиальных поляризованных форм // Алгебра и логика. 34. №3. 1995. С. 323–326.

5. Селезнева С. Н. О сложности представления функций многозначных логик поляризованными полиномами. Дискретная математика. 14. №2. 2002. С. 48–53.

6. Кириченко К. Д. Верхняя оценка сложности полиномиальных нормальных форм булевых функций // Дискретная математика. 17. №3. 2005. С. 80–88.

7. Селезнева С. Н. Дайняк А. Б. О сложности обобщенных полиномов k-значных функций // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. №3. 2008. С. 34–39.

8. Маркелов Н. К. Нижняя оценка сложности функций трехзначной логики в классе поляризованных полиномов // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. №3. 2012. С. 40–45.

9. Селезнева С. Н. Маркелов Н. К. Быстрый алгоритм построения векторов коэффициэнтов поляризованных полиномов k-значных функций // Ученые записки Казанского университета. Серия Физико-математические науки. 2009. 151. №2 С. 147-151.

10. [Sage] William A. Stein et al., Sage Mathematics Software (Version 6.4). The Sage Development Team, 2015, http://www.sagemath.org.