МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики

Выпускная квалификационная работа

О длине некоторых периодических функций пятизначной логики в классе поляризованных полиномиальных форм

Михаил Гордеев

Научный руководитель – доц. Селезнева С.Н.

Основные определения

Определение

Пусть $k \geqslant 2$ – натуральное число, $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$.

Определение

$f^{(n)} : E_k^n \to E_k$ называется функцией k-значной логики.

Определение

P_k^n – множество всех функций k-значной логики, зависящих от n переменных.

Определение

Поляризованным мономом K^δ по вектору поляризации $\delta = (d_1, \ldots, d_n) \in E_k^n$, назовем $(x_{i_1} + d_{i_1})^{m_1} \cdots (x_{i_r} + d_{i_r})^{m_r}$.

Основные определения

Определение

Поляризованная полиномиальная нормальная форма (ППФ) по вектору поляризации δ – это $\sum_{i=1}^{l} c_i \cdot K_i^{\delta}$; $c_i \in E_k \setminus \{0\}$, $K_i^{\delta} \neq K_j^{\delta}, i \neq j$. *Число l называется длиной ППФ.*

Определение

$P^{\delta}(f)$ *– это поляризованная по δ ППФ, реализующая* f,
$l(P^{\delta}(f))$ *– длина этой ППФ.*

Определение

$L_k(n) = \max\limits_{f \in P_k^n} \min\limits_{\delta \in E_k^n} l(P^{\delta}(f))$ *– функция Шеннона длины.*

Известные оценки

Супрун В. П. [1993г.], Sasao T. [1990г.] – получили некоторые оценки для функций алгебры логики в классе ППФ.

Перязев Н. А. [1995г.] – $L_2(n) = \left[\frac{2^{n+1}}{3}\right]$.

Селезнева С. Н. [2002 г.] – $L_k(n) < \frac{k(k-1)}{k(k-1)+1}k^n$.

Маркелов Н. К. [2012 г.] – $L_3(n) \geqslant \left[\frac{3}{4}3^n\right]$.

Селезнева С. Н. [2015 г.] – $L_3(n) \geqslant \left[\frac{3}{4}3^n\right]$, *для симметрических функций.*

Введение

Определение

Функция k-значной логики $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется симметрической, если $f(\pi(x_1), \ldots, \pi(x_n)) = f(x_1, \ldots, x_n)$ для произвольной перестановки π на множестве переменных.

Определение

Симметрическая функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется периодической с периодом $\tau = (\tau_0 \tau_1 \ldots \tau_{T-1}) \in E_k^T$, если $f(\alpha) = \tau_j, |\alpha| = j \pmod T \ \forall \alpha = (a_1, \ldots, a_n) \in E_k^n; |\alpha| = \sum_{i=1}^n a_i$.

Определение

Пусть $T \geqslant 1$, $\Pi = \{\tau_1, \ldots, \tau_s | \tau_i \in E_k^T\}$, $A_\Pi = \{f_\tau^{(n)} | \tau \in \Pi, n \geqslant 1\}$. Класс A_Π называется вырожденным, если $\forall \tau \in \Pi$ верно, что $l(f_\tau^{(n)}) = \bar{o}(k^n)$ при $n \to \infty$.

Введение

Рассмотрим функции f_n и g_n – периодические симметрические функции с периодами $(1,1,4,4)$ и $(1,4,4,1)$ соответственно, $n \geqslant 1$.
Введем класс $\mathcal{A}$ функций вида $a \cdot f_n + b \cdot g_n$, $a,b \in E_k$, $a \neq 0$ или $b \neq 0$.
И его подкласс $\mathcal{F}$ состоящий из функций:
$c \cdot f_n, c \cdot g_n, c \cdot (f_n + g_n), c \cdot (f_n + 4g_n), c \in \{1,2,3,4\}$.

Основные теоремы и леммы

Длина функций s^2 и s^3

Теорема 1

При $n \geqslant 1$ и s_n любой из функций $s_n^2 = f_n + 2\,g_n$, $s_n^3 = f_n + 3\,g_n$ длина полинома периодической функции пятизначной логики s_n при поляризации $\delta = (d_1, \ldots, d_n)$выражается следующей формулой:

$$l(P^\delta(s_n)) = 5^{n-m} \cdot 4^m,$$

$$\text{где } m = \begin{cases} \text{количество} \;\; «4» \text{ в векторе } \delta, \;\; \text{если } s_n = s_n^2; \\ \text{количество} \;\; «2» \text{ в векторе } \delta, \;\; \text{если } s_n = s_n^3. \end{cases}$$

Основные теоремы и леммы

Нижняя оценка

Лемма 1

При векторе поляризации $\delta = (d_1, \ldots, d_n)$, $d_i \in \{0,1,3,4\}$, $i = 1, \ldots, n$ *и* φ_n *– любой функции из* $\mathcal{F}^n$ *верно:*

$$I(P^{\delta}(\varphi_n)) \geqslant \frac{2}{5} \cdot 5^n.$$

Основные теоремы и леммы

Нижняя оценка

Лемма 1

При векторе поляризации $\delta = (d_1, \ldots, d_n), d_i \in \{0,1,3,4\}, i = 1, \ldots, n$ *и* φ_n *– любой функции из* $\mathcal{F}^n$ *верно:*

$$l(P^\delta(\varphi_n)) \geqslant \frac{2}{5} \cdot 5^n.$$

Лемма 2

При векторе поляризации $\delta = (d_1, \ldots, d_n),\ d_i = 2,\ i = 1, \ldots, m,\ d_i = 4,\ i = n-m+1, \ldots, n$ *и* φ_n *– любой функции из* $\mathcal{F}^n$ *верно:*

$$l(P^\delta(\varphi_n)) \geqslant \left(\left(\frac{5}{4}\right)^m - \frac{3}{2}\right) \cdot 4^n + 4^m \cdot 5^{n-m}.$$

Основные теоремы и леммы

Нижняя оценка

Теорема 2

При векторе поляризации $\delta = (d_1, \ldots, d_n)$ и φ_n – любой функции из $\mathcal{F}^n$ верно:

$$I(P^\delta(\varphi_n)) \geqslant \left(\left(\left(\frac{5}{4}\right)^{m_2} - \frac{3}{2}\right) \cdot 4^{m_2+m_4} + 4^{m_2} \cdot 5^{m_4}\right) \cdot 5^{n-m_2-m_4},$$

где m_2 – число «2» в δ, а m_4 – число «4».

Основные теоремы и леммы

Верхняя оценка

Теорема 3

Для любой функции φ_n из $\mathcal{F}^n$, при n четном верно:

$$I(\varphi_n) \leqslant 5^n \left(2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{n}{2}} - \left(\frac{4}{5}\right)^n\right).$$

Основные теоремы и леммы

Верхняя оценка

Теорема 3

Для любой функции φ_n из $\mathcal{F}^n$, при n четном верно:

$$l(\varphi_n) \leqslant 5^n \left(2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{n}{2}} - \left(\frac{4}{5}\right)^n \right).$$

Следствие

Класс функций $\mathcal{A}$ является вырожденным.

Результаты

Математические результаты

1. Для всех функций из класса $\mathcal{A}$ были построены все поляризованные полиномы, выражающие функции от $n+1$ переменных через функции от n переменных также принадлежащих классу $\mathcal{A}$;

Результаты

Математические результаты

1. Для всех функций из класса $\mathcal{A}$ были построены все поляризованные полиномы, выражающие функции от $n+1$ переменных через функции от n переменных также принадлежащих классу $\mathcal{A}$;
2. Установлена точная длина, в зависимости от поляризации, для функций: s_n^2 и s_n^3;

Результаты

Математические результаты

1. Для всех функций из класса $\mathcal{A}$ были построены все поляризованные полиномы, выражающие функции от $n+1$ переменных через функции от n переменных также принадлежащих классу $\mathcal{A}$;
2. Установлена точная длина, в зависимости от поляризации, для функций: s_n^2 и s_n^3;
3. Доказано несколько теорем и лемм, из которых получается нижняя оценка для функций из класса $\mathcal{F}$;

Результаты

Математические результаты

1. Для всех функций из класса $\mathcal{A}$ были построены все поляризованные полиномы, выражающие функции от $n+1$ переменных через функции от n переменных также принадлежащих классу $\mathcal{A}$;
2. Установлена точная длина, в зависимости от поляризации, для функций: s_n^2 и s_n^3;
3. Доказано несколько теорем и лемм, из которых получается нижняя оценка для функций из класса $\mathcal{F}$;
4. Установлена верхняя оценка для функций из класса $\mathcal{F}$;

Результаты

Математические результаты

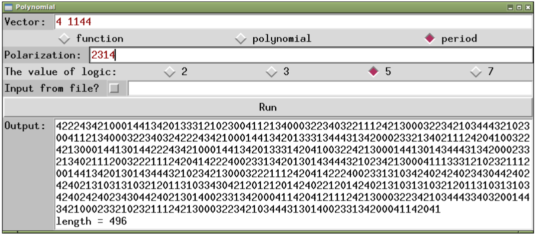
1. Для всех функций из класса $\mathcal{A}$ были построены все поляризованные полиномы, выражающие функции от $n+1$ переменных через функции от n переменных также принадлежащих классу $\mathcal{A}$;
2. Установлена точная длина, в зависимости от поляризации, для функций: s_n^2 и s_n^3;
3. Доказано несколько теорем и лемм, из которых получается нижняя оценка для функций из класса $\mathcal{F}$;
4. Установлена верхняя оценка для функций из класса $\mathcal{F}$;
5. Доказана вырожденность класса $\mathcal{A}$.

Результаты

Программные результаты

Для получения результатов были написаны следующие программы:

- Программа на языке `C++`, реализующая построение поляризованных полиномов по модулю k, где $k \in 2,3,5,7$;
- Для этой программы был написан интерфейс на языке `Perl`, передставленный на рисунке;



Результаты

Программные результаты

Для получения результатов были написаны следующие программы:

- Программа на языке C++, осуществляющая для заданного числа пременных n "быстрый" поиск функций длина которых, в классе пляризованных полиномов, больше заданного порога, среди заданного класса симметрических функций от n переменных;
- С помощью системы компьютерной алгебры Sage были произведены: получение полиномиальных форм, поляризованных по разным векторам поляризации и подстановка значений в полиномы для проверки правильности их построения.

Спасибо за внимание