

# Оглавление

Введение	4
Основные определения	6
Постановка задачи	9
Результаты	10
Поляризованные полиномы для функций из класса $\mathcal{A}$ . . . . .	10
Обобщение результатов в таблицах . . . . .	25
Оценки для функций из класса $\mathcal{F}$ . . . . .	28
Нижняя оценка . . . . .	28
Верхняя оценка . . . . .	31
Заключение	33
Математические результаты . . . . .	33
Программные результаты . . . . .	33
Список литературы	35

# Введение

Одним из стандартных способов задания функций  $k$ -значной логики являются поляризованные полиномиальные формы (ППФ), которые также называются обобщенными формами Риды-Мюллера, или каноническими поляризованными полиномами. В ППФ каждая переменная имеет определенную поляризацию. Длиной полиномиальной формы называется число попарно различных слагаемых в ней. Длиной функции  $f$  в классе ППФ называется наименьшая длина среди длин всех поляризованных полиномиальных форм, реализующих  $f$ . Функция Шеннона  $L_k^K(n)$  длины определяется как наибольшая длина среди всех функций  $k$ -значной логики в классе  $K$  от  $n$  переменных, если  $K$  опущено, то подразумевается класс ППФ. Практическое применение ППФ нашли при построении программируемых логических матриц (ПЛМ) [1, 2], сложность ПЛМ напрямую зависит от длины ППФ, по которой она построена. Поэтому в ряде работ исследуется сложность ППФ различных функций ref [3–9].

В 1993 В. П. Супрун [3] получил первые оценки функции Шеннона для функций алгебры логики :

$$L_2(n) \geq C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor},$$
$$L_2(n) < 3 \cdot 2^{n-1}.$$

где  $[a]$  обозначает целую часть  $a$ .

Точное значение функции Шеннона для функций алгебры логики в 1995 г. было найдено Н. А. Перязевым [4] :

$$L_2(n) = \left\lceil \frac{2^{n+1}}{3} \right\rceil.$$

Функции  $k$ -значных логик являются естественным обобщением функций алгебры логики. Для функций  $k$ -значной логики верхняя оценка функции Шеннона была получена в 2002 г. С. Н. Селезневой [5] :

$$L_k(n) < \frac{k(k-1)}{k(k-1)+1} k^n.$$

При построении ПЛМ рассматривают и другие полиномиальные формы. Например класс обобщенных полиномиальных форм. В классе обобщенных полиномиальных форм, в отличие от класса поляризованных полиномиальных форм, переменные могут иметь различную поляризацию в разных слагаемых. В статье К. Д. Кириченко [6], опубликованной в 2005 г., получена верхняя оценка функции Шеннона в классе обобщенных полиномиальных форм функций алгебры логики :

$$L_2^{\text{О.П.}}(n) \leq \frac{2^{n+1}(\log_2 n + 1)}{n}.$$

Верхняя оценка функции Шеннона в классе обобщенных полиномиальных форм функций  $k$ -значной логики была получена С. Н. Селезневой А. Б. Дайняком в 2008 г. [7]:

$$L_k^{\text{О.П.}}(n) \lesssim 2 \cdot \frac{k^n}{n} \cdot \ln n \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

В 2012 г. Н. К. Маркеловым была получена нижняя оценка функции Шеннона для функции трехзначной логики в классе поляризованных полиномов [8]:

$$L_3(n) \geq \left\lceil \frac{3}{4} 3^n \right\rceil.$$

## Основные определения

Пусть  $k \geq 2$  – натуральное число,  $E_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$ . Весом набора  $\alpha = (a_1, \dots, a_n) \in E_k^n$  назовем число  $|\alpha| = \sum_{i=1}^n a_i$ . Моном  $\prod_{a_i \neq 0} x_i^{a_i}$  назовем соответствующим набору  $\alpha = (a_1, \dots, a_n) \in E_k^n$  и обозначим через  $K_\alpha$ . По определению положим, что константа 1 соответствует набору из всех нулей. Функцией  $k$ -значной логики называется отображение  $f^{(n)} : E_k^n \rightarrow E_k$ ,  $n = 0, 1, \dots$ . Множество всех функций  $k$ -значной логики обозначим через  $P_k$ , множество всех функций  $k$ -значной логики, зависящих от переменных  $x_1, \dots, x_n$ , обозначим через  $P_k^n$ . Функция  $j_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = i; \\ 0, & \text{если } x \neq i. \end{cases}$

Если  $k$  – простое число, то каждая функция  $k$ -значной логики  $f(x_1, \dots, x_n)$  может быть однозначно задана формулой вида

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\alpha \in E_k^n : c_f(\alpha) \neq 0} c_f(\alpha) K_\alpha,$$

где  $c_f(\alpha) \in E_k$  – коэффициенты,  $\alpha \in E_k^n$ , и операции сложения и умножения рассматриваются по модулю  $k$ . Это представление функций  $k$ -значной логики называется ее полиномом по модулю  $k$ . При простых  $k$  однозначно определенный полином по модулю  $k$  для функции  $k$ -значной логики  $f$  будем обозначать через  $P(f)$ .

Определим поляризованные полиномиальные формы по модулю  $k$ . Поляризованной переменной  $x_i$  с поляризацией  $d$ ,  $d \in E_k$ , назовем выражение вида  $(x_i + d)$ . Поляризованным мономом по вектору поляризации  $\delta$ ,  $\delta = (d_1, \dots, d_n) \in E_k^n$ , назовем произведение вида  $(x_{i_1} + d_{i_1})^{m_1} \cdots (x_{i_r} + d_{i_r})^{m_r}$ , где  $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$ , и  $1 \leq m_1, \dots, m_r \leq k-1$ . Обычный моном является мономом, поляризованным по вектору  $\tilde{0} = (0, \dots, 0) \in E_k^n$ .

Выражение вида  $\sum_{i=1}^l c_i \cdot K_i$ , где  $c_i \in E_k \setminus \{0\}$  – коэффициенты,  $K_i$  – попарно различные мономы, поляризованные по вектору  $\delta = (d_1, \dots, d_n) \in E_k^n$ ,  $i = 1, \dots, l$ , назовем поляризованной полиномиальной нормальной формой (ППФ) по вектору поляризации  $\delta$ . Мы будем считать, что константа 0 является ППФ по произвольному вектору поляризации. Заметим, что при простых  $k$  для каждого вектора поляризации каждую функцию  $k$ -значной логики можно однозначно представить ППФ по этому вектору поляризации [5]. При простых  $k$  однозначно определенную ППФ по вектору поляризации  $\delta \in E_k^n$  для функции  $f \in P_k^n$  будем обозначать через  $P^\delta(f)$ .

Длиной  $l(p)$  ППФ  $p$  назовем число попарно различных слагаемых в этой ППФ. Положим, что  $l(0) = 0$ . При простых  $k$  длиной функции  $k$ -значной логики в классе ППФ называется величина  $l^{\text{ППФ}}(f) = \min_{\delta \in E_k^n} l(P^\delta(f))$ .

Функция  $k$ -значной логики  $f(x_1, \dots, x_n)$  называется симметрической, если

$$f(\pi(x_1), \dots, \pi(x_n)) = f(x_1, \dots, x_n)$$

для произвольной перестановки  $\pi$  на множестве переменных  $\{x_1, \dots, x_n\}$ . Множество всех симметрических функций  $k$ -значной логики обозначим через  $S_k$ . Симметрическая функция  $f(x_1, \dots, x_n)$  называется периодической с периодом  $\tau = (\tau_0 \tau_1 \dots \tau_{T-1}) \in E_k^T$ , если  $f(\alpha) = \tau_j$  при  $|\alpha| = j \pmod{T}$  для каждого набора  $\alpha \in E_k^n$ . При этом число  $T$  называется длиной периода. Периодическую функцию  $k$ -значной логики  $f(x_1, \dots, x_n)$  с периодом  $\tau = (\tau_0 \tau_1 \dots \tau_{T-1}) \in E_k^T$  будем обозначать через  $f_{(\tau_0 \tau_1 \dots \tau_{T-1})}^{(n)}$ . Понятно, что такое обозначение полностью определяет эту функцию.

Введем функцию  $\text{rol}(\alpha, i) \in E_k^n \times E_k \rightarrow E_k^n$ , производящую циклический сдвиг вектора  $\alpha$  влево. Пусть  $\alpha = (a_1, \dots, a_n)$ , тогда  $\text{rol}(\alpha, i) = (a_{(1+i) \bmod k}, \dots, a_{(n+i) \bmod k})$ .

Пусть  $T \geq 1$ ,  $\Pi = \{\tau_1, \dots, \tau_s | \tau_i \in E_k^T\}$ ,  $A_\Pi = \{f_\tau^{(n)} | \tau \in \Pi, n \geq 1\}$ . Класс  $A_\Pi$  называется вырожденным, если  $\forall \tau \in \Pi$  верно, что  $l(f_\tau^{(n)}) = \bar{o}(k^n)$ , при  $n \rightarrow \infty$ .

В данной работе рассматривается класс функций  $\mathcal{A}$ , состоящий из всех линейных комбинаций функций  $f_n$  и  $g_n$ , где  $f_n$  – это периодическая симметрическая функция с периодом  $(1,1,4,4)$ , а  $g_n$  – это периодическая симметрическая функция с периодом  $(1,4,4,1)$ . А также его подкласс  $\mathcal{F}$  состоящий из следующих функций:  $c \cdot f_n, c \cdot g_n, c \cdot (f_n + g_n), c \cdot (f_n + 4g_n)$ , где  $c \in \{1,2,3,4\}$ . И классы  $\mathcal{A}^n = \mathcal{A} \cap P_k^n$ ,  $\mathcal{F} = \mathcal{F} \cap P_k^n$ .

## Постановка задачи

1. Изучить литературу по теме дипломной работы;
2. Написать программу вычисляющую длину в классе поляризованны полиномиальных форм всех функций с заданным периодом от ограниченного числа переменных;
3. Установить закономерности, получить теоретические оценки длины некоторых функций в классе ППФ.

# Результаты

## Поляризованные полиномы для функций из класса $\mathcal{A}$

**Теорема 1.** При  $n \geq 1$  для периодических функций пятизначной логики  $f_n = f_{(1144)}^{(n)}$ ,  $g_n = f_{(1441)}^{(n)}$  верны следующие равенства:

$$\begin{aligned} f_{n+1} &= j_0(x_{n+1})f_n + j_1(x_{n+1})g_n + 4j_2(x_{n+1})f_n + 4j_3(x_{n+1})g_n + j_4(x_{n+1})f_n = \\ &= 4f_n x_{n+1}^4 + (3f_n + 2g_n)x_{n+1}^3 + 3(f_n + g_n)x_{n+1}^2 + (4f_n + g_n)x_{n+1} + f_n = \\ &= 4f_n(x_{n+1} + 1)^4 + 2(f_n + g_n)(x_{n+1} + 1)^3 + (3f_n + 2g_n)(x_{n+1} + 1)^2 + \\ &+ (f_n + g_n)(x_{n+1} + 1) + f_n = \\ &= 4f_n(x_{n+1} + 2)^4 + (f_n + 2g_n)(x_{n+1} + 2)^3 + (f_n + g_n)(x_{n+1} + 2)^2 + \\ &+ 3g_n(x_{n+1} + 2) + 4g_n = \\ &= 4f_n(x_{n+1} + 3)^4 + 2g_n(x_{n+1} + 3)^3 + 2f_n(x_{n+1} + 3)^2 + 2g_n(x_{n+1} + 3) + 4f_n = \\ &= 4f_n(x_{n+1} + 4)^4 + 2(2f_n + g_n)(x_{n+1} + 4)^3 + (f_n + 4g_n)(x_{n+1} + 4)^2 + \\ &+ 3g_n(x_{n+1} + 4) + g_n \end{aligned}$$

*Доказательство.* Первое равенство следует из определения функции  $j_i(x)$ .

При поляризации  $x_{n+1}$ , когда  $d_{n+1} = 0$

$$\begin{aligned} f_{n+1}(\bar{x}_n, 0) &= 0 + 0 + 0 + 0 + f_n = f_n \\ f_{n+1}(\bar{x}_n, 1) &= 4f_n + 3f_n + 2g_n + 3f_n + 3g_n + 4f_n + g_n + f_n = g_n \\ f_{n+1}(\bar{x}_n, 2) &= 4f_n + 4f_n + g_n + 2f_n + 2g_n + 3f_n + 2g_n + f_n = 4f_n \\ f_{n+1}(\bar{x}_n, 3) &= 4f_n + f_n + 4g_n + 2f_n + 2g_n + 2f_n + 3g_n + f_n = 4g_n \\ f_{n+1}(\bar{x}_n, 4) &= 4f_n + 2f_n + 3g_n + 3f_n + 3g_n + f_n + 4g_n + f_n = f_n \end{aligned}$$



При поляризации  $x_{n+1}$ , когда  $d_{n+1} = 1$

$$\begin{aligned}
f_{n+1}(\bar{x}_n, 0) &= 4f_n + 2f_n + 2g_n + 3f_n + 2g_n + f_n + g_n + f_n = f_n \\
f_{n+1}(\bar{x}_n, 1) &= 4f_n + f_n + g_n + 2f_n + 3g_n + 2f_n + 2g_n + f_n = g_n \\
f_{n+1}(\bar{x}_n, 2) &= 4f_n + 4f_n + 4g_n + 2f_n + 3g_n + 3f_n + 3g_n + f_n = 4f_n \\
f_{n+1}(\bar{x}_n, 3) &= 4f_n + 3f_n + 3g_n + 3f_n + 2g_n + 4f_n + 4g_n + f_n = 4g_n \\
f_{n+1}(\bar{x}_n, 4) &= 0 + 0 + 0 + 0 + f_n = f_n
\end{aligned}$$

При поляризации  $x_{n+1}$ , когда  $d_{n+1} = 2$

$$\begin{aligned}
f_{n+1}(\bar{x}_n, 0) &= 4f_n + 3f_n + g_n + 4f_n + 4g_n + g_n + 4g_n = f_n \\
f_{n+1}(\bar{x}_n, 1) &= 4f_n + 2f_n + 4g_n + 4f_n + 4g_n + 4g_n + 4g_n = g_n \\
f_{n+1}(\bar{x}_n, 2) &= 4f_n + 4f_n + 3g_n + f_n + g_n + 2g_n + 4g_n = 4f_n \\
f_{n+1}(\bar{x}_n, 3) &= 0 + 0 + 0 + 0 + 4g_n = 4g_n \\
f_{n+1}(\bar{x}_n, 4) &= 4f_n + f_n + 2g_n + f_n + g_n + 3g_n + 4g_n = f_n
\end{aligned}$$

При поляризации  $x_{n+1}$ , когда  $d_{n+1} = 3$

$$\begin{aligned}
f_{n+1}(\bar{x}_n, 0) &= 4f_n + 4g_n + 3f_n + g_n + 4f_n = f_n \\
f_{n+1}(\bar{x}_n, 1) &= 4f_n + 3g_n + 2f_n + 3g_n + 4f_n = g_n \\
f_{n+1}(\bar{x}_n, 2) &= 0 + 0 + 0 + 0 + 4f_n = 4f_n \\
f_{n+1}(\bar{x}_n, 3) &= 4f_n + 2g_n + 2f_n + 2g_n + 4f_n = 4g_n \\
f_{n+1}(\bar{x}_n, 4) &= 4f_n + g_n + 3f_n + 4g_n + 4f_n = f_n
\end{aligned}$$

При поляризации  $x_{n+1}$ , когда  $d_{n+1} = 4$

$$\begin{aligned}
f_{n+1}(\bar{x}_n, 0) &= 4f_n + f_n + 3g_n + f_n + 4g_n + 2g_n + g_n = f_n \\
f_{n+1}(\bar{x}_n, 1) &= 0 + 0 + 0 + 0 + g_n = g_n \\
f_{n+1}(\bar{x}_n, 2) &= 4f_n + 4f_n + 2g_n + f_n + g_n + 3g_n + g_n = 4f_n \\
f_{n+1}(\bar{x}_n, 3) &= 4f_n + 2f_n + g_n + 4f_n + g_n + g_n + g_n = 4g_n \\
f_{n+1}(\bar{x}_n, 4) &= 4f_n + 3f_n + 4g_n + 4f_n + g_n + 4g_n + g_n = f_n
\end{aligned}$$

□

**Теорема 2.** При  $n \geq 1$  для периодических функций пятизначной логики  $f_n = f_{(1144)}^{(n)}$ ,  $g_n = f_{(1441)}^{(n)}$  верны следующие равенства:

$$\begin{aligned}
g_{n+1} &= j_0(x_{n+1})g_n + 4j_1(x_{n+1})f_n + 4j_2(x_{n+1})g_n + j_3(x_{n+1})f_n + j_4(x_{n+1})g_n = \\
&= 4g_n x_{n+1}^4 + 3(f_n + g_n)x_{n+1}^3 + (2f_n + 3g_n)x_{n+1}^2 + 4(f_n + g_n)x_{n+1} + g_n = \\
&= 4g_n(x_{n+1} + 1)^4 + (3f_n + 2g_n)(x_{n+1} + 1)^3 + 3(f_n + g_n)(x_{n+1} + 1)^2 + \\
&+ (4f_n + g_n)(x_{n+1} + 1) + g_n = \\
&= 4g_n(x_{n+1} + 2)^4 + (3f_n + g_n)(x_{n+1} + 2)^3 + (4f_n + g_n)(x_{n+1} + 2)^2 + \\
&+ 2f_n(x_{n+1} + 2) + f_n = \\
&= 4g_n(x_{n+1} + 3)^4 + 3f_n(x_{n+1} + 3)^3 + 2g_n(x_{n+1} + 3)^2 + 3f_n(x_{n+1} + 3) + 4g_n = \\
&= 4g_n(x_{n+1} + 4)^4 + (3f_n + 4g_n)(x_{n+1} + 4)^3 + (f_n + g_n)(x_{n+1} + 4)^2 + \\
&+ 2f_n(x_{n+1} + 4) + 4f_n
\end{aligned}$$

*Доказательство.* Первое равенство следует из определения функции  $j_i(x)$ .

При поляризации  $x_{n+1}$ , когда  $d_{n+1} = 0$

$$\begin{aligned}
g_{n+1}(\bar{x}_n, 0) &= 0 + 0 + 0 + 0 + g_n = g_n \\
g_{n+1}(\bar{x}_n, 1) &= 4g_n + 3f_n + 3g_n + 2f_n + 3g_n + 4f_n + 4g_n + g_n = 4f_n \\
g_{n+1}(\bar{x}_n, 2) &= 4g_n + 4f_n + 4g_n + 3f_n + 2g_n + 3f_n + 3g_n + g_n = 4g_n \\
g_{n+1}(\bar{x}_n, 3) &= 4g_n + f_n + g_n + 3f_n + 2g_n + 2f_n + 2g_n + g_n = f_n \\
g_{n+1}(\bar{x}_n, 4) &= 4g_n + 2f_n + 2g_n + 2f_n + 3g_n + f_n + g_n + g_n = g_n
\end{aligned}$$

При поляризации  $x_{n+1}$ , когда  $d_{n+1} = 1$

$$\begin{aligned}
g_{n+1}(\bar{x}_n, 0) &= 4g_n + 3f_n + 2g_n + 3f_n + 3g_n + 4f_n + g_n + g_n = g_n \\
g_{n+1}(\bar{x}_n, 1) &= 4g_n + 4f_n + g_n + 2f_n + 2g_n + 3f_n + 2g_n + g_n = 4f_n \\
g_{n+1}(\bar{x}_n, 2) &= 4g_n + f_n + 4g_n + 2f_n + 2g_n + 2f_n + 3g_n + g_n = 4g_n \\
g_{n+1}(\bar{x}_n, 3) &= 4g_n + 2f_n + 3g_n + 3f_n + 3g_n + f_n + 4g_n + g_n = f_n \\
g_{n+1}(\bar{x}_n, 4) &= 0 + 0 + 0 + 0 + g_n = g_n
\end{aligned}$$

При поляризации  $x_{n+1}$ , когда  $d_{n+1} = 2$

$$\begin{aligned}
g_{n+1}(\bar{x}_n, 0) &= 4g_n + 4f_n + 3g_n + f_n + 4g_n + 4f_n + f_n = g_n \\
g_{n+1}(\bar{x}_n, 1) &= 4g_n + f_n + 2g_n + f_n + 4g_n + f_n + f_n = 4f_n \\
g_{n+1}(\bar{x}_n, 2) &= 4g_n + 2f_n + 4g_n + 4f_n + g_n + 3f_n + f_n = 4g_n \\
g_{n+1}(\bar{x}_n, 3) &= 0 + 0 + 0 + 0 + f_n = f_n \\
g_{n+1}(\bar{x}_n, 4) &= 4g_n + 3f_n + g_n + 4f_n + g_n + 2f_n + f_n = g_n
\end{aligned}$$

При поляризации  $x_{n+1}$ , когда  $d_{n+1} = 3$

$$\begin{aligned}
g_{n+1}(\bar{x}_n, 0) &= 4g_n + f_n + 3g_n + 4f_n + 4g_n = g_n \\
g_{n+1}(\bar{x}_n, 1) &= 4g_n + 2f_n + 2g_n + 2f_n + 4g_n = 4f_n \\
g_{n+1}(\bar{x}_n, 2) &= 0 + 0 + 0 + 0 + 4g_n = 4g_n \\
g_{n+1}(\bar{x}_n, 3) &= 4g_n + 3f_n + 2g_n + 3f_n + 4g_n = f_n \\
g_{n+1}(\bar{x}_n, 4) &= 4g_n + 4f_n + 3g_n + f_n + 4g_n = g_n
\end{aligned}$$

При поляризации  $x_{n+1}$ , когда  $d_{n+1} = 4$

$$\begin{aligned}
g_{n+1}(\bar{x}_n, 0) &= 4g_n + 2f_n + g_n + f_n + g_n + 3f_n + 4f_n = g_n \\
g_{n+1}(\bar{x}_n, 1) &= 0 + 0 + 0 + 0 + 4f_n = 4f_n \\
g_{n+1}(\bar{x}_n, 2) &= 4g_n + 3f_n + 4g_n + f_n + g_n + 2f_n + 4f_n = 4g_n \\
g_{n+1}(\bar{x}_n, 3) &= 4g_n + 4f_n + 2g_n + 4f_n + 4g_n + 4f_n + 4f_n = f_n \\
g_{n+1}(\bar{x}_n, 4) &= 4g_n + f_n + 3g_n + 4f_n + 4g_n + f_n + 4f_n = g_n
\end{aligned}$$

□

**Теорема 3.** При  $n \geq 1$  для периодических функций пятизначной логики

$f_n = f_{(1144)}^{(n)}$ ,  $g_n = f_{(1441)}^{(n)}$  верны следующие равенства:

$$\begin{aligned}
s_{n+1}^1 &= f_{n+1} + g_{n+1} = \\
&(4f_n + 4g_n)x^4 + f_nx^3 + g_nx^2 + 3f_nx + f_n + g_n = \\
&(4f_n + 4g_n)(x+1)^4 + 4g_n(x+1)^3 + f_n(x+1)^2 + 2g_n(x+1) + f_n + g_n = \\
&(4f_n + 4g_n)(x+2)^4 + (4f_n + 3g_n)(x+2)^3 + 2g_n(x+2)^2 + \\
&+ (2f_n + 3g_n)(x+2) + f_n + 4g_n = \\
&(4f_n + 4g_n)(x+3)^4 + (3f_n + 2g_n)(x+3)^3 + 2(f_n + g_n)(x+3)^2 + \\
&+ (3f_n + 2g_n)(x+3) + 4f_n + 4g_n = \\
&(4f_n + 4g_n)(x+4)^4 + (2f_n + g_n)(x+4)^3 + 2f_n(x+4)^2 + \\
&+ (2f_n + 3g_n)(x+4) + 4f_n + g_n
\end{aligned}$$

*Доказательство.* Первое равенство следует из определения функции  $j_i(x)$ .

При поляризации  $x_{n+1}$ , когда  $d_{n+1} = 0$

$$\begin{aligned}
s_{n+1}^1(\bar{x}_n, 0) &= 0 + 0 + 0 + 0 + f_n + g_n = f_n + g_n \\
s_{n+1}^1(\bar{x}_n, 1) &= 4f_n + 4g_n + f_n + g_n + 3f_n + f_n + g_n = 4f_n + g_n \\
s_{n+1}^1(\bar{x}_n, 2) &= 4f_n + 4g_n + 3f_n + 4g_n + f_n + f_n + g_n = 4f_n + 4g_n \\
s_{n+1}^1(\bar{x}_n, 3) &= 4f_n + 4g_n + 2f_n + 4g_n + 4f_n + f_n + g_n = f_n + 4g_n \\
s_{n+1}^1(\bar{x}_n, 4) &= 4f_n + 4g_n + 4f_n + g_n + 2f_n + f_n + g_n = f_n + g_n
\end{aligned}$$

При поляризации  $x_{n+1}$ , когда  $d_{n+1} = 1$

$$\begin{aligned}
s_{n+1}^1(\bar{x}_n, 0) &= 4f_n + 4g_n + 4g_n + f_n + 2g_n + f_n + g_n = f_n + g_n \\
s_{n+1}^1(\bar{x}_n, 1) &= 4f_n + 4g_n + 2g_n + 4f_n + 4g_n + f_n + g_n = 4f_n + g_n \\
s_{n+1}^1(\bar{x}_n, 2) &= 4f_n + 4g_n + 3g_n + 4f_n + g_n + f_n + g_n = 4f_n + 4g_n \\
s_{n+1}^1(\bar{x}_n, 3) &= 4f_n + 4g_n + g_n + f_n + 3g_n + f_n + g_n = f_n + 4g_n \\
s_{n+1}^1(\bar{x}_n, 4) &= 0 + 0 + 0 + 0 + f_n + g_n = f_n + g_n
\end{aligned}$$

При поляризации  $x_{n+1}$ , когда  $d_{n+1} = 2$

$$\begin{aligned}
s_{n+1}^1(\bar{x}_n, 0) &= 4f_n + 4g_n + 2f_n + 4g_n + 3g_n + 4f_n + g_n + f_n + 4g_n = f_n + g_n \\
s_{n+1}^1(\bar{x}_n, 1) &= 4f_n + 4g_n + 3f_n + g_n + 3g_n + f_n + 4g_n + f_n + 4g_n = 4f_n + g_n \\
s_{n+1}^1(\bar{x}_n, 2) &= 4f_n + 4g_n + f_n + 2g_n + 2g_n + 3f_n + 2g_n + f_n + 4g_n = \\
&= 4f_n + 4g_n \\
s_{n+1}^1(\bar{x}_n, 3) &= 0 + 0 + 0 + 0 + f_n + 4g_n = f_n + 4g_n \\
s_{n+1}^1(\bar{x}_n, 4) &= 4f_n + 4g_n + 4f_n + 3g_n + 2g_n + 2f_n + 3g_n + f_n + 4g_n = f_n + g_n
\end{aligned}$$

При поляризации  $x_{n+1}$ , когда  $d_{n+1} = 3$

$$\begin{aligned}
s_{n+1}^1(\bar{x}_n, 0) &= 4f_n + 4g_n + f_n + 4g_n + 3f_n + 3g_n + 4f_n + g_n + 4f_n + 4g_n = \\
&= f_n + g_n \\
s_{n+1}^1(\bar{x}_n, 1) &= 4f_n + 4g_n + 2f_n + 3g_n + 2f_n + 2g_n + 2f_n + 3g_n + 4f_n + 4g_n = \\
&= 4f_n + g_n \\
s_{n+1}^1(\bar{x}_n, 2) &= 0 + 0 + 0 + 0 + 4f_n + 4g_n = 4f_n + 4g_n \\
s_{n+1}^1(\bar{x}_n, 3) &= 4f_n + 4g_n + 3f_n + 2g_n + 2f_n + 2g_n + 3f_n + 2g_n + 4f_n + 4g_n = \\
&= f_n + 4g_n \\
s_{n+1}^1(\bar{x}_n, 4) &= 4f_n + 4g_n + 4f_n + g_n + 3f_n + 3g_n + f_n + 4g_n + 4f_n + 4g_n = \\
&= f_n + g_n
\end{aligned}$$

При поляризации  $x_{n+1}$ , когда  $d_{n+1} = 4$

$$s_{n+1}^1(\bar{x}_n, 0) = 4f_n + 4g_n + 3f_n + 4g_n + 2f_n + 3f_n + 2g_n + 4f_n + g_n = \\ = f_n + g_n$$

$$s_{n+1}^1(\bar{x}_n, 1) = 0 + 0 + 0 + 0 + 4f_n + g_n = 4f_n + g_n$$

$$s_{n+1}^1(\bar{x}_n, 2) = 4f_n + 4g_n + 2f_n + g_n + 2f_n + 2f_n + 3g_n + 4f_n + g_n = \\ = 4f_n + 4g_n$$

$$s_{n+1}^1(\bar{x}_n, 3) = 4f_n + 4g_n + f_n + 3g_n + 3f_n + 4f_n + g_n + 4f_n + g_n = f_n + 4g_n$$

$$s_{n+1}^1(\bar{x}_n, 4) = 4f_n + 4g_n + 4f_n + 2g_n + 3f_n + f_n + 4g_n + 4f_n + g_n = f_n + g_n$$

□

**Теорема 4.** При  $n \geq 1$  для периодических функций пятизначной логики  $f_n = f_{(1144)}^{(n)}$ ,  $g_n = f_{(1441)}^{(n)}$  верны следующие равенства:

$$s_{n+1}^2 = f_{n+1} + 2g_{n+1} = \\ (4f_n + 3g_n)x^4 + (4f_n + 3g_n)x^3 + (2f_n + 4g_n)x^2 + (2f_n + 4g_n)x + f_n + 2g_n = \\ (4f_n + 3g_n)(x+1)^4 + (3f_n + g_n)(x+1)^3 + (4f_n + 3g_n)(x+1)^2 + \\ + (4f_n + 3g_n)(x+1) + f_n + 2g_n = \\ (4f_n + 3g_n)(x+2)^4 + (2f_n + 4g_n)(x+2)^3 + (4f_n + 3g_n)(x+2)^2 + \\ + (4f_n + 3g_n)(x+2) + 2f_n + 4g_n = \\ (4f_n + 3g_n)(x+3)^4 + (f_n + 2g_n)(x+3)^3 + 2(f_n + 2g_n)(x+3)^2 + \\ + (f_n + 2g_n)(x+3) + 4f_n + 3g_n = \\ (4f_n + 3g_n)(x+4)^4 + (3f_n + g_n)(x+4)^2 + (4f_n + 3g_n)(x+4) + 3f_n + g_n$$

*Доказательство.* Первое равенство следует из определения функции  $j_i(x)$ .

При поляризации  $x_{n+1}$ , когда  $d_{n+1} = 0$

$$s_{n+1}^2(\bar{x}_n, 0) = 0 + 0 + 0 + 0 + f_n + 2g_n = f_n + 2g_n$$

$$\begin{aligned} s_{n+1}^2(\bar{x}_n, 1) &= 4f_n + 3g_n + 4f_n + 3g_n + 2f_n + 4g_n + 2f_n + 4g_n + f_n + 2g_n = \\ &= 3f_n + g_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_{n+1}^2(\bar{x}_n, 2) &= 4f_n + 3g_n + 2f_n + 4g_n + 3f_n + g_n + 4f_n + 3g_n + f_n + 2g_n = \\ &= 4f_n + 3g_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_{n+1}^2(\bar{x}_n, 3) &= 4f_n + 3g_n + 3f_n + g_n + 3f_n + g_n + f_n + 2g_n + f_n + 2g_n = \\ &= 2f_n + 4g_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_{n+1}^2(\bar{x}_n, 4) &= 4f_n + 3g_n + f_n + 2g_n + 2f_n + 4g_n + 3f_n + g_n + f_n + 2g_n = \\ &= f_n + 2g_n \end{aligned}$$

При поляризации  $x_{n+1}$ , когда  $d_{n+1} = 1$

$$\begin{aligned} s_{n+1}^2(\bar{x}_n, 0) &= 4f_n + 3g_n + 3f_n + g_n + 4f_n + 3g_n + 4f_n + 3g_n + f_n + 2g_n = \\ &= f_n + 2g_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_{n+1}^2(\bar{x}_n, 1) &= 4f_n + 3g_n + 4f_n + 3g_n + f_n + 2g_n + 3f_n + g_n + f_n + 2g_n = \\ &= 3f_n + g_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_{n+1}^2(\bar{x}_n, 2) &= 4f_n + 3g_n + f_n + 2g_n + f_n + 2g_n + 2f_n + 4g_n + f_n + 2g_n = \\ &= 4f_n + 3g_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_{n+1}^2(\bar{x}_n, 3) &= 4f_n + 3g_n + 2f_n + 4g_n + 4f_n + 3g_n + f_n + 2g_n + f_n + 2g_n = \\ &= 2f_n + 4g_n \end{aligned}$$

$$s_{n+1}^2(\bar{x}_n, 4) = 0 + 0 + 0 + 0 + f_n + 2g_n = f_n + 2g_n$$



При поляризации  $x_{n+1}$ , когда  $d_{n+1} = 2$

$$\begin{aligned}
s_{n+1}^2(\bar{x}_n, 0) &= 4f_n + 3g_n + f_n + 2g_n + f_n + 2g_n + 3f_n + g_n + 2f_n + 4g_n = \\
&= f_n + 2g_n \\
s_{n+1}^2(\bar{x}_n, 1) &= 4f_n + 3g_n + 4f_n + 3g_n + f_n + 2g_n + 2f_n + 4g_n + 2f_n + 4g_n = \\
&= 3f_n + g_n \\
s_{n+1}^2(\bar{x}_n, 2) &= 4f_n + 3g_n + 3f_n + g_n + 4f_n + 3g_n + f_n + 2g_n + 2f_n + 4g_n = \\
&= 4f_n + 3g_n \\
s_{n+1}^2(\bar{x}_n, 3) &= 0 + 0 + 0 + 0 + 2f_n + 4g_n = 2f_n + 4g_n \\
s_{n+1}^2(\bar{x}_n, 4) &= 4f_n + 3g_n + 2f_n + 4g_n + 4f_n + 3g_n + 4f_n + 3g_n + 2f_n + 4g_n = \\
&= f_n + 2g_n
\end{aligned}$$

При поляризации  $x_{n+1}$ , когда  $d_{n+1} = 3$

$$\begin{aligned}
s_{n+1}^2(\bar{x}_n, 0) &= 4f_n + 3g_n + 2f_n + 4g_n + 3f_n + g_n + 3f_n + g_n + 4f_n + 3g_n = \\
&= f_n + 2g_n \\
s_{n+1}^2(\bar{x}_n, 1) &= 4f_n + 3g_n + 4f_n + 3g_n + 2f_n + 4g_n + 4f_n + 3g_n + 4f_n + 3g_n = \\
&= 3f_n + g_n \\
s_{n+1}^2(\bar{x}_n, 2) &= 0 + 0 + 0 + 0 + 4f_n + 3g_n = 4f_n + 3g_n \\
s_{n+1}^2(\bar{x}_n, 3) &= 4f_n + 3g_n + f_n + 2g_n + 2f_n + 4g_n + f_n + 2g_n + 4f_n + 3g_n = \\
&= 2f_n + 4g_n \\
s_{n+1}^2(\bar{x}_n, 4) &= 4f_n + 3g_n + 3f_n + g_n + 3f_n + g_n + 2f_n + 4g_n + 4f_n + 3g_n = \\
&= f_n + 2g_n
\end{aligned}$$

При поляризации  $x_{n+1}$ , когда  $d_{n+1} = 4$

$$\begin{aligned}
s_{n+1}^2(\bar{x}_n, 0) &= 4f_n + 3g_n + 0 + 3f_n + g_n + f_n + 2g_n + 3f_n + g_n = f_n + 2g_n \\
s_{n+1}^2(\bar{x}_n, 1) &= 0 + 0 + 0 + 0 + 3f_n + g_n = 3f_n + g_n \\
s_{n+1}^2(\bar{x}_n, 2) &= 4f_n + 3g_n + 0 + 3f_n + g_n + 4f_n + 3g_n + 3f_n + g_n = 4f_n + 3g_n \\
s_{n+1}^2(\bar{x}_n, 3) &= 4f_n + 3g_n + 0 + 2f_n + 4g_n + 3f_n + g_n + 3f_n + g_n = 2f_n + 4g_n \\
s_{n+1}^2(\bar{x}_n, 4) &= 4f_n + 3g_n + 0 + 2f_n + 4g_n + 2f_n + 4g_n + 3f_n + g_n = f_n + 2g_n
\end{aligned}$$

□

**Теорема 5.** При  $n \geq 1$  для периодических функций пятизначной логики  $f_n = f_{(1144)}^{(n)}$ ,  $g_n = f_{(1441)}^{(n)}$  верны следующие равенства:

$$\begin{aligned}
s_{n+1}^3 &= f_{n+1} + 3g_{n+1} = \\
&(4f_n + 2g_n)x^4 + (2f_n + g_n)x^3 + (4f_n + 2g_n)x^2 + (f_n + 3g_n)x + f_n + 3g_n = \\
&(4f_n + 2g_n)(x+1)^4 + (f_n + 3g_n)(x+1)^3 + (2f_n + g_n)(x+1)^2 + \\
&+ (3f_n + 4g_n)(x+1) + f_n + 3g_n = \\
&(4f_n + 2g_n)(x+2)^4 + (3f_n + 4g_n)(x+2)^2 + (f_n + 3g_n)(x+2) + 3f_n + 4g_n = \\
&(4f_n + 2g_n)(x+3)^4 + (4f_n + 2g_n)(x+3)^3 + 2(f_n + 3g_n)(x+3)^2 + \\
&+ (4f_n + 2g_n)(x+3) + 4f_n + 2g_n = \\
&(4f_n + 2g_n)(x+4)^4 + (3f_n + 4g_n)(x+4)^3 + (4f_n + 2g_n)(x+4)^2 + \\
&+ (f_n + 3g_n)(x+4) + 2f_n + g_n
\end{aligned}$$

*Доказательство.* Первое равенство следует из определения функции  $j_i(x)$ .

При поляризации  $x_{n+1}$ , когда  $d_{n+1} = 0$

$$s_{n+1}^3(\bar{x}_n, 0) = 0 + 0 + 0 + 0 + f_n + 3g_n = f_n + 3g_n$$

$$\begin{aligned} s_{n+1}^3(\bar{x}_n, 1) &= 4f_n + 2g_n + 2f_n + g_n + 4f_n + 2g_n + f_n + 3g_n + f_n + 3g_n = \\ &= 2f_n + g_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_{n+1}^3(\bar{x}_n, 2) &= 4f_n + 2g_n + f_n + 3g_n + f_n + 3g_n + 2f_n + g_n + f_n + 3g_n = \\ &= 4f_n + 2g_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_{n+1}^3(\bar{x}_n, 3) &= 4f_n + 2g_n + 4f_n + 2g_n + f_n + 3g_n + 3f_n + 4g_n + f_n + 3g_n = \\ &= 3f_n + 4g_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_{n+1}^3(\bar{x}_n, 4) &= 4f_n + 2g_n + 3f_n + 4g_n + 4f_n + 2g_n + 4f_n + 2g_n + f_n + 3g_n = \\ &= f_n + 3g_n \end{aligned}$$

При поляризации  $x_{n+1}$ , когда  $d_{n+1} = 1$

$$\begin{aligned} s_{n+1}^3(\bar{x}_n, 0) &= 4f_n + 2g_n + f_n + 3g_n + 2f_n + g_n + 3f_n + 4g_n + f_n + 3g_n = \\ &= f_n + 3g_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_{n+1}^3(\bar{x}_n, 1) &= 4f_n + 2g_n + 3f_n + 4g_n + 3f_n + 4g_n + f_n + 3g_n + f_n + 3g_n = \\ &= 2f_n + g_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_{n+1}^3(\bar{x}_n, 2) &= 4f_n + 2g_n + 2f_n + g_n + 3f_n + 4g_n + 4f_n + 2g_n + f_n + 3g_n = \\ &= 4f_n + 2g_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_{n+1}^3(\bar{x}_n, 3) &= 4f_n + 2g_n + 4f_n + 2g_n + 2f_n + g_n + 2f_n + g_n + f_n + 3g_n = \\ &= 3f_n + 4g_n \end{aligned}$$

$$s_{n+1}^3(\bar{x}_n, 4) = 0 + 0 + 0 + 0 + f_n + 3g_n = f_n + 3g_n$$

При поляризации  $x_{n+1}$ , когда  $d_{n+1} = 2$

$$\begin{aligned}
s_{n+1}^3(\bar{x}_n, 0) &= 4f_n + 2g_n + 0 + 2f_n + g_n + 2f_n + g_n + 3f_n + 4g_n = f_n + 3g_n \\
s_{n+1}^3(\bar{x}_n, 1) &= 4f_n + 2g_n + 0 + 2f_n + g_n + 3f_n + 4g_n + 3f_n + 4g_n = 2f_n + g_n \\
s_{n+1}^3(\bar{x}_n, 2) &= 4f_n + 2g_n + 0 + 3f_n + 4g_n + 4f_n + 2g_n + 3f_n + 4g_n = \\
&= 4f_n + 2g_n \\
s_{n+1}^3(\bar{x}_n, 3) &= 0 + 0 + 0 + 0 + 3f_n + 4g_n = 3f_n + 4g_n \\
s_{n+1}^3(\bar{x}_n, 4) &= 4f_n + 2g_n + 0 + 3f_n + 4g_n + f_n + 3g_n + 3f_n + 4g_n = f_n + 3g_n
\end{aligned}$$

При поляризации  $x_{n+1}$ , когда  $d_{n+1} = 3$

$$\begin{aligned}
s_{n+1}^3(\bar{x}_n, 0) &= 4f_n + 2g_n + 3f_n + 4g_n + 3f_n + 4g_n + 2f_n + g_n + 4f_n + 2g_n = \\
&= f_n + 3g_n \\
s_{n+1}^3(\bar{x}_n, 1) &= 4f_n + 2g_n + f_n + 3g_n + 2f_n + g_n + f_n + 3g_n + 4f_n + 2g_n = \\
&= 2f_n + g_n \\
s_{n+1}^3(\bar{x}_n, 2) &= 0 + 0 + 0 + 0 + 4f_n + 2g_n = 4f_n + 2g_n \\
s_{n+1}^3(\bar{x}_n, 3) &= 4f_n + 2g_n + 4f_n + 2g_n + 2f_n + g_n + 4f_n + 2g_n + 4f_n + 2g_n = \\
&= 3f_n + 4g_n \\
s_{n+1}^3(\bar{x}_n, 4) &= 4f_n + 2g_n + 2f_n + g_n + 3f_n + 4g_n + 3f_n + 4g_n + 4f_n + 2g_n = \\
&= f_n + 3g_n
\end{aligned}$$

При поляризации  $x_{n+1}$ , когда  $d_{n+1} = 4$

$$\begin{aligned}
s_{n+1}^3(\bar{x}_n, 0) &= 4f_n + 2g_n + 2f_n + g_n + 4f_n + 2g_n + 4f_n + 2g_n + 2f_n + g_n = \\
&= f_n + 3g_n \\
s_{n+1}^3(\bar{x}_n, 1) &= 0 + 0 + 0 + 0 + 2f_n + g_n = 2f_n + g_n \\
s_{n+1}^3(\bar{x}_n, 2) &= 4f_n + 2g_n + 3f_n + 4g_n + 4f_n + 2g_n + f_n + 3g_n + 2f_n + g_n = \\
&= 4f_n + 2g_n \\
s_{n+1}^3(\bar{x}_n, 3) &= 4f_n + 2g_n + 4f_n + 2g_n + f_n + 3g_n + 2f_n + g_n + 2f_n + g_n = \\
&= 3f_n + 4g_n \\
s_{n+1}^3(\bar{x}_n, 4) &= 4f_n + 2g_n + f_n + 3g_n + f_n + 3g_n + 3f_n + 4g_n + 2f_n + g_n = \\
&= f_n + 3g_n
\end{aligned}$$

□

**Теорема 6.** При  $n \geq 1$  для периодических функций пятизначной логики  $f_n = f_{(1144)}^{(n)}$ ,  $g_n = f_{(1441)}^{(n)}$  верны следующие равенства:

$$\begin{aligned}
s_{n+1}^4 &= f_{n+1} + 4g_{n+1} = \\
&(4f_n + g_n)x^4 + 4g_nx^3 + f_nx^2 + 2g_nx + f_n + 4g_n = \\
&(4f_n + g_n)(x+1)^4 + 4f_n(x+1)^3 + 4g_n(x+1)^2 + 2f_n(x+1) + f_n + 4g_n = \\
&(4f_n + g_n)(x+2)^4 + (3f_n + g_n)(x+2)^3 + 2f_n(x+2)^2 + \\
&+ (3f_n + 3g_n)(x+2) + 4f_n + 4g_n = \\
&(4f_n + g_n)(x+3)^4 + (2f_n + 2g_n)(x+3)^3 + 2(f_n + 4g_n)(x+3)^2 + \\
&+ (2f_n + 2g_n)(x+3) + 4f_n + g_n = \\
&(4f_n + g_n)(x+4)^4 + (f_n + 3g_n)(x+4)^3 + 3g_n(x+4)^2 + \\
&+ (3f_n + 3g_n)(x+4) + f_n + g_n
\end{aligned}$$

*Доказательство.* Первое равенство следует из определения функции  $j_i(x)$ .

При поляризации  $x_{n+1}$ , когда  $d_{n+1} = 0$

$$\begin{aligned}
s_{n+1}^4(\bar{x}_n, 0) &= 0 + 0 + 0 + 0 + f_n + 4g_n = f_n + 4g_n \\
s_{n+1}^4(\bar{x}_n, 1) &= 4f_n + g_n + 4g_n + f_n + 2g_n + f_n + 4g_n = f_n + g_n \\
s_{n+1}^4(\bar{x}_n, 2) &= 4f_n + g_n + 2g_n + 4f_n + 4g_n + f_n + 4g_n = 4f_n + g_n \\
s_{n+1}^4(\bar{x}_n, 3) &= 4f_n + g_n + 3g_n + 4f_n + g_n + f_n + 4g_n = 4f_n + 4g_n \\
s_{n+1}^4(\bar{x}_n, 4) &= 4f_n + g_n + g_n + f_n + 3g_n + f_n + 4g_n = f_n + 4g_n
\end{aligned}$$

При поляризации  $x_{n+1}$ , когда  $d_{n+1} = 1$

$$\begin{aligned}
s_{n+1}^4(\bar{x}_n, 0) &= 4f_n + g_n + 4f_n + 4g_n + 2f_n + 0g_n + f_n + 4g_n = f_n + 4g_n \\
s_{n+1}^4(\bar{x}_n, 1) &= 4f_n + g_n + 2f_n + g_n + 4f_n + 0g_n + f_n + 4g_n = f_n + g_n \\
s_{n+1}^4(\bar{x}_n, 2) &= 4f_n + g_n + 3f_n + g_n + f_n + 0g_n + f_n + 4g_n = 4f_n + g_n \\
s_{n+1}^4(\bar{x}_n, 3) &= 4f_n + g_n + f_n + 4g_n + 3f_n + 0g_n + f_n + 4g_n = 4f_n + 4g_n \\
s_{n+1}^4(\bar{x}_n, 4) &= 0 + 0 + 0 + 0 + f_n + 4g_n = f_n + 4g_n
\end{aligned}$$

При поляризации  $x_{n+1}$ , когда  $d_{n+1} = 2$

$$\begin{aligned}
s_{n+1}^4(\bar{x}_n, 0) &= 4f_n + g_n + 4f_n + 3g_n + 3f_n + f_n + g_n + 4f_n + 4g_n = f_n + 4g_n \\
s_{n+1}^4(\bar{x}_n, 1) &= 4f_n + g_n + f_n + 2g_n + 3f_n + 4f_n + 4g_n + 4f_n + 4g_n = f_n + g_n \\
s_{n+1}^4(\bar{x}_n, 2) &= 4f_n + g_n + 2f_n + 4g_n + 2f_n + 2f_n + 2g_n + 4f_n + 4g_n = \\
&= 4f_n + g_n \\
s_{n+1}^4(\bar{x}_n, 3) &= 0 + 0 + 0 + 0 + 4f_n + 4g_n = 4f_n + 4g_n \\
s_{n+1}^4(\bar{x}_n, 4) &= 4f_n + g_n + 3f_n + g_n + 2f_n + 3f_n + 3g_n + 4f_n + 4g_n = \\
&= f_n + 4g_n
\end{aligned}$$

При поляризации  $x_{n+1}$ , когда  $d_{n+1} = 3$

$$\begin{aligned} s_{n+1}^4(\bar{x}_n, 0) &= 4f_n + g_n + 4f_n + 4g_n + 3f_n + 2g_n + f_n + g_n + 4f_n + g_n = \\ &= f_n + 4g_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_{n+1}^4(\bar{x}_n, 1) &= 4f_n + g_n + 3f_n + 3g_n + 2f_n + 3g_n + 3f_n + 3g_n + 4f_n + g_n = \\ &= f_n + g_n \end{aligned}$$

$$s_{n+1}^4(\bar{x}_n, 2) = 0 + 0 + 0 + 0 + 4f_n + g_n = 4f_n + g_n$$

$$\begin{aligned} s_{n+1}^4(\bar{x}_n, 3) &= 4f_n + g_n + 2f_n + 2g_n + 2f_n + 3g_n + 2f_n + 2g_n + 4f_n + g_n = \\ &= 4f_n + 4g_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_{n+1}^4(\bar{x}_n, 4) &= 4f_n + g_n + f_n + g_n + 3f_n + 2g_n + 4f_n + 4g_n + 4f_n + g_n = \\ &= f_n + 4g_n \end{aligned}$$

При поляризации  $x_{n+1}$ , когда  $d_{n+1} = 4$

$$\begin{aligned} s_{n+1}^4(\bar{x}_n, 0) &= 4f_n + g_n + 4f_n + 2g_n + 0f_n + 3g_n + 2f_n + 2g_n + f_n + g_n = \\ &= f_n + 4g_n \end{aligned}$$

$$s_{n+1}^4(\bar{x}_n, 1) = 0 + 0 + 0 + 0 + f_n + g_n = f_n + g_n$$

$$\begin{aligned} s_{n+1}^4(\bar{x}_n, 2) &= 4f_n + g_n + f_n + 3g_n + 0f_n + 3g_n + 3f_n + 3g_n + f_n + g_n = \\ &= 4f_n + g_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_{n+1}^4(\bar{x}_n, 3) &= 4f_n + g_n + 3f_n + 4g_n + 0f_n + 2g_n + f_n + g_n + f_n + g_n = \\ &= 4f_n + 4g_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_{n+1}^4(\bar{x}_n, 4) &= 4f_n + g_n + 2f_n + g_n + 0f_n + 2g_n + 4f_n + 4g_n + f_n + g_n = \\ &= f_n + 4g_n \end{aligned}$$

□

## Обобщение результатов в таблицах

Полученные результаты можно выразить следующей таблицей:

$q_{n+1}$	0	1	2	3	4
$f_{n+1}$	$fs^4s^1s^4f$	$fs^1s^4s^1f$	$fs^2s^1gg$	$fgfgf$	$fs^3s^4gg$
$g_{n+1}$	$gs^1s^4s^1g$	$gs^4s^1s^4g$	$gs^2s^4ff$	$gfghg$	$gs^3s^1ff$
$s_{n+1}^1$	$s^1fgfs^1$	$s^1gfgs^1$	$s^1s^2gs^4s^4$	$s^1s^4s^1s^4s^1$	$s^1s^3fs^4s^4$
$s_{n+1}^2$	$s^2s^2s^2s^2s^2$	$s^2s^2s^2s^2s^2$	$s^2s^2s^2s^2s^2$	$s^2s^2s^2s^2s^2$	$s^2s^2s^2s^2$
$s_{n+1}^3$	$s^3s^3s^3s^3s^3$	$s^3s^3s^3s^3s^3$	$s^3s^3s^3s^3$	$s^3s^3s^3s^3s^3$	$s^3s^3s^3s^3s^3$
$s_{n+1}^4$	$s^4gfgs^4$	$s^4fghs^4$	$s^4s^2fs^1s^1$	$s^4s^1s^4s^1s^4$	$s^4s^3gs^1s^1$

Таблица 1: Выражения функций

**Теорема 7.** При  $n \geq 1$  длина полинома периодической функции пятизначной логики  $s_n^2 = f_n + 2g_n$  при поляризации  $\delta = (d_1, \dots, d_n)$  выражается следующей формулой:

$$l(P^\delta(s_n^2)) = 5^{n-m} \cdot 4^m,$$

где  $m$  – количество четверок в векторе  $\delta$ .

*Доказательство.* Так как  $s_n^2$  симметрическая функция, то можно считать, что

$$d_i \in \{0,1,2,3\}, i = 1, \dots, n-m \quad d_i = 4, i = n-m+1, \dots, n.$$

Доказательство проведем индукцией по  $n$  – числу переменных функции  $s_n^2$ . При  $n = 1$  получаем если  $m = 0$ , то  $l(P^\delta(s_1^2)) = 5$ , а если  $m = 1$ , то  $l(P^\delta(s_1^2)) = 4$  – верно. Введем  $c$  – число функций  $s_{n-1}^2$ , через которые выражается  $s_n^2$ . Пусть формула верна для  $n-1$ , тогда из таблицы 1 видно, что  $s_n^2$  выражается через  $c = 5$  функций  $s_{n-1}^2$ , если  $d_n \in \{0,1,2,3\}$  и через  $c = 4$  функции  $s_{n-1}^2$ , если  $d_n = 4$  при каждой из которых  $x_n$  стоит в раз-



личных степенях. Пусть  $m'$  – количество 4 в векторе  $(d_1, \dots, n-1)$ . Поэтому  $l(P^\delta(s_n^2)) = 5^{n-1-m'} \cdot 4^{m'} \cdot c = 5^{n-m} \cdot 4^m$ .  $\square$

**Теорема 8.** При  $n \geq 1$  длина полинома периодической функции пятизначной логики  $s_n^3 = f_n + 3g_n$  при поляризации  $\delta = (d_1, \dots, d_n)$  выражается следующей формулой:

$$l(P^\delta(s_n^3)) = 5^{n-m} \cdot 4^m,$$

где  $m$  – количество двоек в векторе  $\delta$ .

*Доказательство.* Так как  $s_n^3$  симметрическая функция, то можно считать, что

$$d_i \in \{0, 1, 3, 4\}, i = 1, \dots, n-m \quad d_i = 2, i = n-m+1, \dots, n.$$

Доказательство проведем индукцией по  $n$  – числу переменных функции  $s_n^3$ . При  $n = 1$  получаем если  $m = 0$ , то  $l(P^\delta(s_1^3)) = 5$ , а если  $m = 1$ , то  $l(P^\delta(s_1^3)) = 4$  – верно. Введем  $c$  – число функций  $s_{n-1}^3$ , через которые выражается  $s_n^3$ . Пусть формула верна для  $n-1$ , тогда из таблицы 1 видно, что  $s_n^3$  выражается через  $c = 5$  функций  $s_{n-1}^3$ , если  $d_n \in \{0, 1, 3, 4\}$  и через  $c = 4$  функции  $s_{n-1}^3$ , если  $d_n = 2$  при каждой из которых  $x_n$  стоит в различных степенях. Пусть  $m'$  – количество 4 в векторе  $(d_1, \dots, n-1)$ . Поэтому  $l(P^\delta(s_n^3)) = 5^{n-1-m'} \cdot 4^{m'} \cdot c = 5^{n-m} \cdot 4^m$ .  $\square$

Обозначим  $s^1$  и  $s^4$  через  $h$  и  $t$  соответственно. Для удобства перепишем таблицу 1 в новых обозначениях:

$q_{n+1}$	0	1	2	3	4
$f_{n+1}$	$fthtf$	$fhthf$	$fs^2hgg$	$fgfgf$	$fs^3tgg$
$g_{n+1}$	$ghthg$	$gthtg$	$gs^2tff$	$gfgfg$	$gs^3hff$
$h_{n+1}$	$hfgfh$	$hgfgh$	$hs^2gtt$	$hthth$	$hs^3ftt$

$t_{n+1}$	$tgfgt$	$tfgft$	$ts^2fhh$	$ththt$	$ts^3ghh$
-----------	---------	---------	-----------	---------	-----------

Таблица 2: Выражения функций

Рассмотрим функции  $f_1, g_1, h_1, t_1$ . В следующей таблице приведены длины этих функций, в зависимости от поляризации:

$q_1$	0	1	2	3	4
$f_1$	3	4	5	5	4
$g_1$	4	3	4	5	5
$h_1$	5	5	3	3	3
$t_1$	3	3	4	2	4

Таблица 3: Длины функций

## Оценки для функций из класса $\mathcal{F}$

### Нижняя оценка

**Лемма 1.** При векторе поляризации  $\delta = (d_1, \dots, d_n), d_i \in \{0, 1, 3\}, i = 1, \dots, n$  и  $\varphi_n$  – любой функции из  $\mathcal{F}^n$  верно:

$$l(P^\delta(\varphi_n)) \geq \frac{2}{5} \cdot 5^n.$$

*Доказательство.* Из таблицы 3 видно, что при  $n = 1, l(P^\delta(\varphi_1)) \geq 2$ . По тео-

реме 7  $l(P^\delta(s_n^2)) = 5^n$ , а по теореме 8  $l(P^\delta(s_n^3)) = 5^n$ . Функция  $\varphi_n$  выражается (см. таблицу 2) через 5 функций из  $\mathcal{F}^{n-1}$  или через 4 функции из  $\mathcal{F}^{n-1}$  и одну из функций  $\{s_{n-1}^2, s_{n-1}^3\}$ , поэтому

$$l(P^\delta(\varphi_n)) \geq \min\left(\frac{2}{5} \cdot 5^{n-1} \cdot 5, \frac{2}{5} \cdot 5^{n-1} \cdot 4 + 1 \cdot 5^{n-1}\right) = \frac{2}{5} \cdot 5^n.$$

□

**Лемма 2.** При векторе поляризации  $\delta = (d_1, \dots, d_n), d_i \in \{0, 1, 3, 4\}, i = 1, \dots, n$  и  $\varphi_n$  — любой функции из  $\mathcal{F}^n$  верно:

$$l(P^\delta(\varphi_n)) \geq \frac{2}{5} \cdot 5^n.$$

*Доказательство.* Пусть  $m$  — количество 4 в векторе  $\delta$ . Так как  $\varphi_n$  симметрическая функция, то можно считать, что

$$d_i \in \{0, 1, 3\}, i = 1, \dots, n - m \quad d_i = 4, i = n - m + 1, \dots, n.$$

Если  $m = 0$ , то  $l(P^\delta(\varphi_n)) \geq \frac{2}{5} \cdot 5^n$  по предыдущей лемме. Если  $m \neq 0$ , то по предыдущей лемме для всех  $\varphi \in \{f, g, h, t\}$   $l(P^\delta(\varphi_{n-m})) \geq \frac{2}{5} \cdot 5^{n-m}$ . При переходе от  $n - m$  к  $n - m + 1$  переменная  $x_{n-m+1}$  имеет поляризацию 4 и  $\varphi_{n-m+1}$  выражается через 4 функции из  $\mathcal{F}^{n-m}$  и одну функцию  $s_{n-m}^3$ , причем по теореме 8  $l(P^{(d_1, \dots, d_{n-m})}(s_{n-m}^3)) = 5^{n-m}$ , поэтому  $l(P^\delta(\varphi_{n-m+1})) \geq \frac{2}{5} \cdot 5^{n-m} \cdot 4 + 5^{n-m} > \frac{2}{5} \cdot 5^{n-m+1}$ . Пусть  $k = n - m + 1$ , пока  $k < n$  продолжим аналогичные рассуждения, переходя от  $k$  к  $k + 1$ . Получим, что

$$l(P^\delta(\varphi_n)) \geq \frac{2}{5} \cdot 5^n.$$

□

**Лемма 3.** При векторе поляризации  $\delta = (d_1, \dots, d_n)$ ,  $d_i = 2, i = 1, \dots, n$  и  $\varphi_n$  – любой функции из  $\mathcal{F}^n$  верно:

$$l(P^\delta(\varphi_n)) \geq 5^n - \frac{1}{2}4^n.$$

*Доказательство.* При поляризации 2  $(k+1)$ -й переменной  $\varphi_{k+1}$  выражается через четыре функции из  $\mathcal{F}^k$  и одну функцию  $s_k^2$ , причем  $l(P^\delta(s_k^2)) = 5^k$ , а из таблицы 3 видно, что длина минимальная длина среди функций из  $\mathcal{F}^1$  при поляризации 2 равна 3. Поэтому выражение для длины  $\varphi_k$  можно получить решая следующую линейную неоднородную задачу:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= 4x_k + 5^k \\ x_1 &= 3 \end{aligned}$$

Решая эту задачу получим  $l(P^\delta(\varphi_n)) \geq 5^n - \frac{1}{2}4^n$ . □

**Лемма 4.** При векторе поляризации  $\delta = (d_1, \dots, d_n)$ ,  $d_i = 2, i = 1, \dots, m, d_i = 4, i = n - m + 1, \dots, n$  и  $\varphi_n$  – любой функции из  $\mathcal{F}^n$  верно:

$$l(P^\delta(\varphi_n)) \geq \left( \left( \frac{5}{4} \right)^m - \frac{3}{2} \right) \cdot 4^n + 4^m \cdot 5^{n-m}.$$

*Доказательство.* Если  $n = m$ , то утверждение этой леммы следует из леммы 3, поэтому будем считать, что  $n > m$ . При  $k > m$  при поляризации 4  $(k+1)$ -й переменной  $\varphi_{k+1}$  выражается через четыре функции из  $\mathcal{F}^k$  и одну функцию  $s_k^3$ , причем  $l(P^\delta(s_k^3)) = 5^{k-m} \cdot 4^m$ , а по лемме 3  $l(P^\delta(\varphi_m)) \geq 5^m - \frac{1}{2}4^m$ . Поэтому выражение для длины  $\varphi_n$  можно получить решая следующую

линейную неоднородную задачу:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= 4x_k + 5^{k-m} \cdot 4^m \\ x_m &= 5^m - \frac{1}{2}4^m \end{aligned}$$

Решая эту задачу получим  $l(P^\delta(\varphi_n)) \geq \left(\left(\frac{5}{4}\right)^m - \frac{3}{2}\right) \cdot 4^n + 4^m \cdot 5^{n-m}$ .  $\square$

**Теорема 9.** При векторе поляризации  $\delta = (d_1, \dots, d_n)$  и  $\varphi_n$  — любой функции из  $\mathcal{F}^n$  верно:

$$l(P^\delta(\varphi_n)) \geq \left( \left( \left( \frac{5}{4} \right)^{m_2} - \frac{3}{2} \right) \cdot 4^{m_2+m_4} + 4^{m_2} \cdot 5^{m_4} \right) \cdot 5^{n-m_2-m_4}, \text{ где}$$

$m_2$  — число двоек в  $\delta$ , а  $m_4$  — число четверок.

*Доказательство.* Пусть в векторе  $\delta$  сначала идут  $m_2$  2, затем  $m_4$  4 и  $n - m_2 - m_4$  чисел из  $\{0,1,3\}$ . Тогда по лемме 4  $l(P^\delta(\varphi_{m_2+m_4})) \geq \left(\left(\frac{5}{4}\right)^{m_2} - \frac{3}{2}\right) \cdot 4^{m_2+m_4} + 4^{m_2} \cdot 5^{m_4}$ . При поляризации из 0,1,3  $k+1$ -ой переменной  $\varphi_{k+1}$  выражается через пять функций из  $\mathcal{F}^k$ . Из этого следует, что  $l(P^\delta(\varphi_n)) \geq \left(\left(\frac{5}{4}\right)^{m_2} - \frac{3}{2}\right) \cdot 4^{m_2+m_4} + 4^{m_2} \cdot 5^{m_4} \cdot 5^{n-m_2-m_4}$ .  $\square$

## Верхняя оценка

**Теорема 10.** Для любой функции  $\varphi_n$  из  $\mathcal{F}^n$ , при  $n$  четном верно:

$$l(\varphi_n) \leq 5^n \left( 2 \cdot \left( \frac{4}{5} \right)^{\frac{n}{2}} - \left( \frac{4}{5} \right)^n \right).$$

*Доказательство.* Пусть  $m = \frac{n}{2}$ . Рассмотрим вектор  $\delta = (d_1, \dots, d_n)$ ,  $d_i = 2$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $d_i = 4$ ,  $i = m+1, \dots, n$ . Сложность любой функции от  $k$  переменных не больше  $5^k$ , поэтому  $l(P^\delta(\varphi_m)) \leq 5^m$ . При  $k > m$  при поляризации 4  $k+1$ -ой переменной  $\varphi_{k+1}$  выражается через четыре функции из

$\mathcal{F}^k$  и одну функцию  $s_k^3$ , причем  $l(P^\delta(s_k^3)) = 5^{k-m} \cdot 4^m$ . Поэтому выражение для длины  $\varphi_n$  можно получить решая следующую линейную неоднородную задачу:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= 4x_k + 5^{k-m} \cdot 4^m \\ x_m &= 5^m \end{aligned}$$

Решая эту задачу получим  $l(P^\delta(\varphi_n)) \leq \left(\left(\frac{5}{4}\right)^m - 1\right) \cdot 4^n + 4^m \cdot 5^{n-m} = 5^n \left(2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{n}{2}} - \left(\frac{4}{5}\right)^n\right)$ .  $\square$

**Следствие.** *Класс функций  $\mathcal{A}$  является вырожденным.*

*Доказательство.* По теоремам 7, 8  $l(s_n^2) = l(s_n^3) = 4^n = \bar{o}(5^n)$ . По теореме 10  $l(\varphi_n) \leq 5^n \left(2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{n}{2}} - \left(\frac{4}{5}\right)^n\right)$ , для любой функции  $\varphi_n \in \mathcal{F}_n$ . И

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n \left(2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{n}{2}} - \left(\frac{4}{5}\right)^n\right)}{5^n} = 0$ , поэтому  $5^n \left(2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{n}{2}} - \left(\frac{4}{5}\right)^n\right) = \bar{o}(5^n)$ .  $\square$

# Заключение

## Математические результаты

1. Для всех функций из класса  $\mathcal{A}$  были построены все поляризованные полиномы, выражающие функции от  $n + 1$  переменных через функции от  $n$  переменных также принадлежащих классу  $\mathcal{A}$ ;
2. Установлена точная длина, в зависимости от поляризации, для функций:  $s_n^2$  и  $s_n^3$ ;
3. Доказано несколько теорем и лемм, из которых получается нижняя оценка для функций из класса  $\mathcal{F}$ ;
4. Установлена верная оценка для функций из класса  $\mathcal{F}$ ;
5. Доказана вырожденность класса  $\mathcal{A}$ .

## Программные результаты

Для получения результатов были написаны следующие программы:

- Программа на языке C++, реализующая построение поляризованных полиномов по модулю  $k$ , где  $k \in 2, 3, 5, 7$ , в программе используется алгоритм, описанный в [9];
- Для этой программы был написан интерфейс на языке Perl, представленный на рисунке 1;
- Программа на языке C++, осуществляющая для заданного числа переменных  $n$  "быстрый" поиск функций длина которых, в классе поляри-

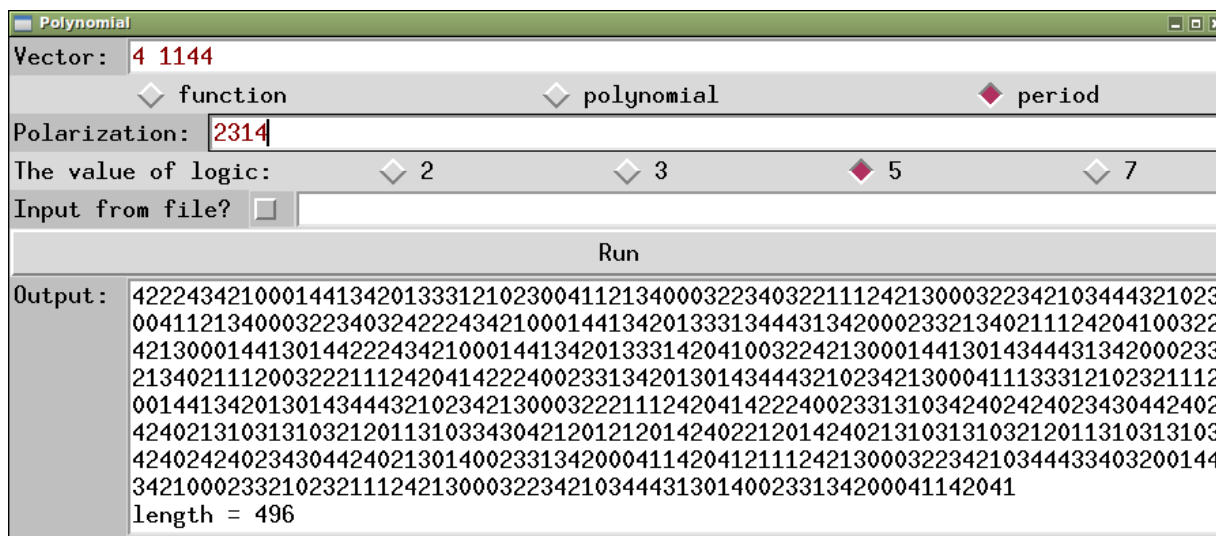


Рис. 1: Вид интерфейса

зованных полиномов, больше заданного порога, среди заданного класса симметрических функций от  $n$  переменных;

- С помощью системы компьютерной алгебры Sage [10] были произведены: получение полиномиальных форм, поляризованных по разным векторам поляризации и подстановка значений в полиномы для проверки правильности их построения.

Коды всех программ доступны в моем репозитории, расположенном по адресу: <https://www.github.com/obirvalger/diploma>.



## Список литературы

1. Угрюмов Е. П. Цифровая схемотехника. СПб.: БХВ-Петербург, 2004.
2. Sasao T., Besslich P. On the complexity of mod-2 sum PLA's // IEEE Trans.on Comput. 39. N 2. 1990. P. 262–266.
3. Супрун В. П. Сложность булевых функций в классе канонических поляризованных полиномов // Дискретная математика. 5. №2. 1993. С. 111–115.
4. Перязев Н. А. Сложность булевых функций в классе полиномиальных поляризованных форм // Алгебра и логика. 34. №3. 1995. С. 323–326.
5. Селезнева С. Н. О сложности представления функций многозначных логик поляризованными полиномами. Дискретная математика. 14. №2. 2002. С. 48–53.
6. Кириченко К. Д. Верхняя оценка сложности полиномиальных нормальных форм булевых функций // Дискретная математика. 17. №3. 2005. С. 80–88.
7. Селезнева С. Н. Дайняк А. Б. О сложности обобщенных полиномов  $k$ -значных функций // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. №3. 2008. С. 34–39.
8. Маркелов Н. К. Нижняя оценка сложности функций трехзначной логики в классе поляризованных полиномов // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. №3. 2012. С. 40–45.
9. Селезнева С. Н. Маркелов Н. К. Быстрый алгоритм построения векторов коэффициентов поляризованных полиномов  $k$ -значных функций // Ученые записки Казанского университета. Серия Физико-математические науки. 2009. 151. №2 С. 147–151.
10. [Sage] William A. Stein et al., Sage Mathematics Software (Version 6.4). The Sage Development Team, 2015, <http://www.sagemath.org>.