

# О длине некоторых периодических функций пятизначной логики в классе поляризованных полиномиальных форм

Михаил Гордеев

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики

12 апреля 2015 г.

# Введение

В данной работе рассматривается класс функций  $\mathcal{A}$ , состоящий из всех линейных комбинаций функций  $f$  и  $g$ , где  $f$  – это периодическая симметрическая функция с периодом  $(1,1,4,4)$ , а  $g$  – это периодическая симметрическая функция с периодом  $(1,4,4,1)$ . А также его подкласс  $\mathcal{F}$  состоящий из следующих четырех функций:  $f, g, f + g, f + 4g$ .

# Введение

В данной работе рассматривается класс функций  $\mathcal{A}$ , состоящий из всех линейных комбинаций функций  $f$  и  $g$ , где  $f$  – это периодическая симметрическая функция с периодом  $(1,1,4,4)$ , а  $g$  – это периодическая симметрическая функция с периодом  $(1,4,4,1)$ . А также его подкласс  $\mathcal{F}$  состоящий из следующих четырех функций:  $f, g, f + g, f + 4g$ .

## Определение

*Класс функций  $\mathcal{A}$  называется вырожденным, если при  $n \rightarrow \infty$  для любой функции  $f_n \in \mathcal{A}_n$  длина этой функции есть  $\bar{o}(5^n)$ .*

# Основные теоремы и леммы

Длина функций  $s^2$  и  $s^3$

## Теорема 1

При  $n \geq 1$  и  $s_n$  любой из функций  $s_n^2 = f_n + 2g_n$ ,  $s_n^3 = f_n + 3g_n$  длина полинома периодической функции пятизначной логики  $s_n$  при поляризации  $\delta = (d_1, \dots, d_n)$  выражается следующей формулой:

$$l(P^\delta(s_n)) = 5^{n-m} \cdot 4^m,$$

где  $m = \begin{cases} \text{количество 4 в векторе } \delta, & \text{если } s_n = s_n^2; \\ \text{количество 2 в векторе } \delta, & \text{если } s_n = s_n^3. \end{cases}$

# Основные теоремы и леммы

## Нижняя оценка

### Лемма 1

*При векторе поляризации*

$\delta = (d_1, \dots, d_n)$ ,  $d_i \in \{0, 1, 3, 4\}$ ,  $i = 1, \dots, n$  и  $\varphi_n$  – любой функции из  $\mathcal{F}^n$  верно:

$$I(P^\delta(\varphi_n)) \geq \frac{2}{5} \cdot 5^n.$$

# Основные теоремы и леммы

## Нижняя оценка

### Лемма 1

При векторе поляризации

$\delta = (d_1, \dots, d_n)$ ,  $d_i \in \{0, 1, 3, 4\}$ ,  $i = 1, \dots, n$  и  $\varphi_n$  — любой функции из  $\mathcal{F}^n$  верно:

$$I(P^\delta(\varphi_n)) \geq \frac{2}{5} \cdot 5^n.$$

### Лемма 2

При векторе поляризации

$\delta = (d_1, \dots, d_n)$ ,  $d_i = 2$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $d_i = 4$ ,  $i = n - m + 1, \dots, n$  и  $\varphi_n$  — любой функции из  $\mathcal{F}^n$  верно:

$$I(P^\delta(\varphi_n)) \geq \left( \left( \frac{5}{4} \right)^m - \frac{3}{2} \right) \cdot 4^n + 4^m \cdot 5^{n-m}.$$

# Основные теоремы и леммы

## Нижняя оценка

### Теорема 2

При векторе поляризации  $\delta = (d_1, \dots, d_n)$  и  $\varphi_n$  — любой функции из  $\mathcal{F}^n$  верно:

$$I(P^\delta(\varphi_n)) \geq \left( \left( \left( \frac{5}{4} \right)^{m_2} - \frac{3}{2} \right) \cdot 4^{m_2+m_4} + 4^{m_2} \cdot 5^{m_4} \right) \cdot 5^{n-m_2-m_4},$$

где  $m_2$  — число 2 в  $\delta$ , а  $m_4$  — число 4.

# Основные теоремы и леммы

## Верхняя оценка

### Теорема 3

*Для любой функции  $\varphi_n$  из  $\mathcal{F}^n$ , при  $n$  четном верно:*

$$I(\varphi_n) \leqslant 4^n \left( 2 \cdot \left( \frac{5}{4} \right)^{\frac{n}{2}} - 1 \right).$$



# Основные теоремы и леммы

## Верхняя оценка

### Теорема 3

*Для любой функции  $\varphi_n$  из  $\mathcal{F}^n$ , при  $n$  четном верно:*

$$I(\varphi_n) \leqslant 4^n \left( 2 \cdot \left( \frac{5}{4} \right)^{\frac{n}{2}} - 1 \right).$$

### Следствие

*Класс функций  $\mathcal{A}$  является вырожденным.*

# Результаты

## Математические результаты

- 1 Для всех функций из класса  $\mathcal{A}$  были построены построены все поляризованные полиномы, выражающие функции от  $n + 1$  переменных через функции от  $n$  переменных также принадлежащих классу  $\mathcal{A}$ ;

# Результаты

## Математические результаты

- 1 Для всех функций из класса  $\mathcal{A}$  были построены построены все поляризованные полиномы, выражающие функции от  $n + 1$  переменных через функции от  $n$  переменных также принадлежащих классу  $\mathcal{A}$ ;
- 2 Установле точная длина, в зависимости от поляризации, для функций:  $s_n^2$  и  $s_n^3$ ;

# Результаты

## Математические результаты

- 1 Для всех функций из класса  $\mathcal{A}$  были построены построены все поляризованные полиномы, выражающие функции от  $n + 1$  переменных через функции от  $n$  переменных также принадлежащих классу  $\mathcal{A}$ ;
- 2 Установле точная длина, в зависимости от поляризации, для функций:  $s_n^2$  и  $s_n^3$ ;
- 3 Доказано несколько теорем и лемм, из которых получается нижняя оценка для функций из класса  $\mathcal{F}$ ;

# Результаты

## Математические результаты

- 1 Для всех функций из класса  $\mathcal{A}$  были построены построены все поляризованные полиномы, выражающие функции от  $n + 1$  переменных через функции от  $n$  переменных также принадлежащих классу  $\mathcal{A}$ ;
- 2 Установле точная длина, в зависимости от поляризации, для функций:  $s_n^2$  и  $s_n^3$ ;
- 3 Доказано несколько теорем и лемм, из которых получается нижняя оценка для функций из класса  $\mathcal{F}$ ;
- 4 Установлена верняя оценка для функций из класса  $\mathcal{F}$ ;

# Результаты

## Математические результаты

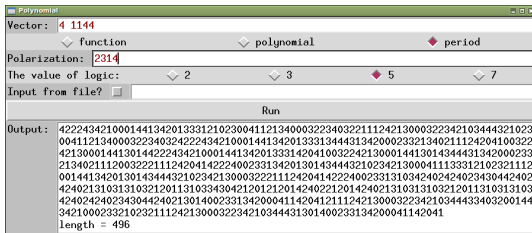
- 1 Для всех функций из класса  $\mathcal{A}$  были построены построены все поляризованные полиномы, выражающие функции от  $n + 1$  переменных через функции от  $n$  переменных также принадлежащих классу  $\mathcal{A}$ ;
- 2 Установле точная длина, в зависимости от поляризации, для функций:  $s_n^2$  и  $s_n^3$ ;
- 3 Доказано несколько теорем и лемм, из которых получается нижняя оценка для функций из класса  $\mathcal{F}$ ;
- 4 Установлена верняя оценка для функций из класса  $\mathcal{F}$ ;
- 5 Доказана вырожденность класса  $\mathcal{A}$ .

# Результаты

## Программные результаты

Для получения результатов были написаны следующие программы:

- Программа на языке C++, реализующая построение поляризованных полиномов по модулю  $k$ , где  $k \in 2, 3, 5, 7$ ;
- Для этой программы был написан интерфейс на языке Perl, представленный на рисунке;



# Результаты

## Программные результаты

Для получения результатов были написаны следующие программы:

- Программа на языке C++, осуществляющая для заданного числа переменных  $n$  "быстрый" поиск функций длина которых, в классе поляризованных полиномов, больше заданного порога, среди заданного класса симметрических функций от  $n$  переменных;
- С помощью системы компьютерной алгебры Sage были произведены: получение полиномиальных форм, поляризованных по разным векторам поляризации и подстановка значений в полиномы для проверки правильности их построения.