Московский Государственный Университет
Факультет вычислительной математики и кибернетики

Отчет по научно-исследовательской работе

«О сложности систем функций некоторых многозначных логик в классе поляризованных полиномов»

студента 618/1 группы
Гордеева Михаила Михайловича

Научный руководитель:
доцент, д.ф.-м.н. Селезнева С. Н.
Рекомендую оценку – 5 ________

Москва, 2016

1 Введение

Одним из стандартных способов задания функций k-значной логики являются поляризованные полиномиальные формы (ППФ), которые также называются обобщенными формами Рида-Мюллера, или каноническими поляризованными полиномами. В ППФ каждая переменная имеет определенную поляризацию. Длиной полиномиальной формы называется число попарно различных слагаемых в ней. Длиной функции f в классе ППФ называется наименьшая длина среди длин всех поляризованных полиномиальных форм, реализующих f. Функция Шеннона $L_k^K(n)$ длины определяется как наибольшая длина среди всех функций kзначной логики в классе K от n переменных, если K опущено, то подразумевается класс ППФ. Практическое применение ППФ нашли при построении программируемых логических матриц (ПЛМ) [1, 2], сложность ПЛМ напрямую зависит от длины ППФ, по которой она построена. Поэтому в ряде работ исследуется сложность ППФ различных функций [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]. Также рассматривают системы функций. Сложностью системы ППФ, имеющих один и тот же вектор поляризации, называется число попарно различных слагаемых, встречающихся во всех этих ППФ. Сложностью $L_k^{\text{ППФ}}(F)$ системы функций k-значной логики $F = \{f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)\}$ в классе ППФ называется минимальная сложность среди всех таких систем ППФ $\{p_1, \ldots, p_m\}$, что все ППФ $p_1, \ldots, p_m$ имеют один и тот же вектор поляризации , и ППФ p_j реализует функцию f_j, $j = 1 \ldots m$. Понятно, что для произвольной системы функций алгебры k-значной логики $F = \{f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)\}$ верна оценка $L_k^{\text{ППФ}}(F) \leqslant k^n$. Система фугнкций F называется сложной, если $L_k^{\text{ППФ}}(F) \geqslant k^n$. В данной работе найдены сложные системы функций для некоторых $k > 3$.

В 1993 В. П. Супрун [3] получил первые оценки функции Шеннона для функций алгебры логики :

$$L_2(n) \geqslant C_n^{[\frac{n}{2}]},$$

$$L_2(n) < 3 \cdot 2^{n-1},$$

где $[a]$ обозначает целую часть a.

Точное значение функции Шеннона для функций алгебры логики в 1995 г. было найдено Н. А. Перязевым [4] :

$$L_2(n) = \left[\frac{2^{n+1}}{3}\right].$$

Функции k-значных логик являются естественным обобщением функций алгебры логики. Для функций k-значной логики верхняя оценка функции Шеннона была получена в 2002 г. С. Н. Селезневой [5] :

$$L_k(n) < \frac{k(k-1)}{k(k-1)+1}k^n,$$

в 2015 году она была улучшена [12]

$$L_k(n) < \frac{k(k-1)-1}{k(k-1)}k^n.$$

При построении ПЛМ рассматривают и другие полиномиальные формы. Например класс обобщенных полиномиальных форм. В классе обобщенных полиномиальных форм, в отличие от класса поляризованных полиномиальных форм, переменные могут иметь различную поляризацию в разных слагаемых. В статье К. Д. Кириченко [6], опубликованной в 2005 г., был предложен метод построения обобщенных полиномиальных форм из которого следует $L_2^{\text{О.П.}}(n) = O(\frac{2^n}{n})$.

В работах [7, 10] получено, что $L_k^{\text{О.П.}}(n) = O(\frac{k^n}{n})$.

В 2012 г. Н. К. Маркеловым была получена нижняя оценка функции Шеннона для функции трехзначной логики в классе поляризованных полиномов [8]:

$$L_3(n) \geqslant \left[\frac{3}{4}3^n\right],$$

в [11] эта оценка была достигнута на симметрических функциях. Также в работе [11] были получены следующие оценки для систем функций. А именно, доказано существование таких систем F_2 и F_3 функций двузначной и трехзначной логики соответственно, для которых

$$L_2^{\text{ППФ}}(F_2) = 2^n,$$

$$L_3^{\text{ППФ}}(F_3) = 3^n.$$

2 Постановка задачи

- Найти сложные системы функций при некоторых k;
- Доказать существование сложных систем функций для все простых k.

3 Выполненная работа

- Была написана программа для символьного преобразования полиномов;
- С помощью этой программы получены сложные системы функций для некоторых $k(5, 7)$;
- Также с помощью программы были проверены все системы функций определенного вида для все простых k до 79;
- Доказано существование сложных систем для всех простых k.

4 План работы на весенний семестр

Завершить исследования и оформить выпускную работу.

Список литературы

1. Угрюмов Е. П. Цифровая схемотехника. СПб.: БХВ-Петербург, 2004.

2. Sasao T., Besslich P. On the complexity of mod-2 sum PLA's // IEEE Trans.on Comput. 39. N 2. 1990. P. 262–266.

3. Супрун В. П. Сложность булевых функций в классе канонических поляризованных полиномов // Дискретная математика. 5. №2. 1993. С. 111–115.

4. Перязев Н. А. Сложность булевых функций в классе полиномиальных поляризованных форм // Алгебра и логика. 34. №3. 1995. С. 323–326.

5. Селезнева С. Н. О сложности представления функций многозначных логик поляризованными полиномами. Дискретная математика. 14. №2. 2002. С. 48–53.

6. Кириченко К. Д. Верхняя оценка сложности полиномиальных нормальных форм булевых функций // Дискретная математика. 17. №3. 2005. С. 80–88.

7. Селезнева С. Н. Дайняк А. Б. О сложности обобщенных полиномов k-значных функций // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. textnumero 3. 2008. С. 34–39.

8. Маркелов Н. К. Нижняя оценка сложности функций трехзначной логики в классе поляризованных полиномов // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. №3. 2012. С. 40–45.

9. Селезнева С. Н. Маркелов Н. К. Быстрый алгоритм построения векторов коэффициэнтов поляризованных полиномов k-значных функций // Ученые записки Казанского университета. Серия Физико-математические науки. 2009. 151. №2 С. 147-151.

10. Башов М. А., Селезнева С. Н. О длине функций k-значной логики в классе полиномиальных нормальных форм по модулю k // Дискретная математика. – 2014. – Т. 26, вып. 3. – С. 3-9.

11. Селезнева С. Н. Сложность систем функций алгебры логики и систем функций трехзначной логики в классах поляризованных полиномиальных форм // Дискретная математика. – 2015. – Т. 27, вып. 1. – С. 111 – 122.

12. Балюк А. С., Янушковский Г. В. Верхние оценки функций над конечными полями в некоторых классах кронекеровых форм // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. – 2015. – Т.14. – С. 3-17.