1 Теорема

Рассмотрим функции

$$h = hx^{k-1} + tx^{k-2} + \dots + tx + t$$
$$t = tx^{k-1} + ehx^{k-2} + \dots + ehx + eh, \text{ где}$$

e – некоторый коэффициент.

Через C_{hi}^{hd} обозначим коэффициент у функции h при i слагаемом, при функции h, поляризация d.

Через C_{ti}^{hd} обозначим коэффициент у функции h при i слагаемом, при функции t, поляризация d.

Через C_{hi}^{td} обозначим коэффициент у функции t при i слагаемом, при функции h, поляризация d.

Через C_{ti}^{td} обозначим коэффициент у функции t при i слагаемом, при функции t, поляризация d.

$$C_{hi}^{hd} = \binom{k-1}{i}(-d)^{k-1-i}$$

$$C_{ti}^{hd} = \sum_{j=i}^{k-2}\binom{j}{i}(-d)^{j-i}$$

$$C_{hi}^{td} = \sum_{j=i}^{k-2}e\binom{j}{i}(-d)^{j-i}$$

$$C_{ti}^{td} = \binom{k-1}{i}(-d)^{k-1-i}$$

Заметим, что $\binom{k-1}{i} \neq 0 \pmod k$, тогда у функции h при любой поляризации присутствует слагаемое с h, а у функции t при любой поляризации присутствует слагаемое с t.

Пусть $f_a = h + at$, где $a \in [1..k-1]$.

Теорема 1. *Для любых d и a у полинома функции $f_a^{(d)}$ k слагаемых, если e – квадратичный невычет по модулю k.*

Доказательство. Пусть существуют a, d, i такие, что $f_a^{(d)}[i] = 0$, тогда C_{hi}^{hd} должно быть равно $-aC_{hi}^{td}$, а C_{ti}^{hd} должно быть равно $-aC_{ti}^{td}$.

$$\begin{cases} \binom{k-1}{i}(-d)^{k-1-i} & = & -a\sum\limits_{j=i}^{k-2}e\binom{j}{i}(-d)^{j-i} \\ \sum\limits_{j=i}^{k-2}\binom{j}{i}(-d)^{j-i} & = & -a\binom{k-1}{i}(-d)^{k-1-i} \end{cases}$$

$\sum\limits_{j=i}^{k-2}\binom{j}{i}(-d)^{j-i} \neq 0$ так как $\binom{k-1}{i}(-d)^{k-1-i} \neq 0$. Следовательно

$$a^{-1}\sum_{j=i}^{k-2}\binom{j}{i}(-d)^{j-i} = a\sum_{j=i}^{k-2}e\binom{j}{i}(-d)^{j-i}$$

Значит $e = (a^{-1})^2$, что противоречит с тем, что e – квадратичный невычет по модулю k. $\square$

2 Гипотеза

Также были рассмотрены следующие функции h и t одной переменной:

$$h = ex^{k-1} + (x+1)^{k-1}$$
$$t = x^{k-1} + e(x+1)^{k-1}$$

Возможно, доказать для этих функций будет проще, но пока мне не удалость это сделать. Зато было получено, что эти функции задают сложные системы для всех простых k от 5 до 79, если $e \in [2..k-2]$.