О длине некоторых периодических функций пятизначной логики в классе поляризованных полиномиальных форм

Гордеев Михаил Михайлович

Студент

Факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: gordmisha@gmail.com

Одним из стандартных способов задания функций k-значной логики являются поляризованные полиномиальные формы (ППФ). В ППФ каждая переменная имеет определенную поляризацию. попарно различных слагаемых в ней. Практическое применение ППФ нашли при построении программируемых логических матриц (ПЛМ) [1], сложность ПЛМ напрямую зависит от длины ППФ, по которой она построена. Поэтому в ряде работ исследуется сложность ППФ различных функций [2-4].

Пусть $k \geqslant 2$ – натуральное число, $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$, отображение $f^{(n)} : E_k^n \to E_k$ называется функцией k-значной логики. Обозначим через P_k^n множество всех функций k-значной логики, зависящих от n переменных. Поляризованным мономом K^δ по вектору поляризации $\delta = (d_1, \ldots, d_n) \in E_k^n$, назовем выражение вида $(x_{i_1} + d_{i_1})^{m_1} \cdots (x_{i_r} + d_{i_r})^{m_r}$. Поляризованная полиномиальная нормальная форма (ППФ) по вектору поляризации δ – это выражение вида $\sum\limits_{i=1}^{l} c_i \cdot K_i^\delta$, где $c_i \in E_k \backslash \{0\}$, и $K_i^\delta \neq K_j^\delta$ при $i \neq j$. Число l называется длиной ППФ.

Известно, что при каждом простом k каждая функция k-значной логики $f(x_1, \ldots, x_n)$ задается однозначной ППФ $P^\delta(f)$ по каждому вектору поляризации $\delta \in E_k^n$. Пусть $l(P)$ обозначает длину ППФ P, $l(f)$ обозначает наименьшую длину среди всех ППФ, представляющих функцию k-значной логики f. Введем функцию Шеннона $L_k(n)$ длины функций k-значной логики в классе ППФ: $L_k(n) = \max\limits_{f \in P_k^n} \min\limits_{\delta \in E_k^n} l(P^\delta(f))$. Перязев Н. А. в 1995 г. получил точное значение функции Шеннона для функций алгебры логики: $L_2(n) = \left[\frac{2^{n+1}}{3}\right]$. Селезнева С. Н. в 2002 г. нашла верхнюю оценку функции Шеннона для функций k-значной логики при простых k: $L_k(n) < \frac{k(k-1)}{k(k-1)+1} k^n$. Маркелов Н. К. в 2012 г. получил нижнюю оценку функции Шеннона для функций трехзначной логики: $L_3(n) \geqslant \left[\frac{3}{4} 3^n\right]$.

Функция k-значной логики $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется симметрической, если $f(\pi(x_1),\ldots,\pi(x_n)) = f(x_1,\ldots,x_n)$ для произвольной перестановки π на множестве переменных $\{x_1,\ldots,x_n\}$. Симметрическая функция $f_\tau^{(n)}$ называется периодической с периодом $\tau = (\tau_0\tau_1\ldots\tau_{T-1}) \in E_k^T$, если $f(\alpha) = \tau_j$ при $|\alpha| = j \pmod T$ для всех $\alpha = (a_1,\ldots,a_n) \in E_k^n$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^n a_i$. Пусть $T \geqslant 1$, $\Pi = \{\tau_1,\ldots,\tau_s|\tau_i \in E_k^T\}$, $A_\Pi = \{f_\tau^{(n)}|\tau \in \Pi, n \geqslant 1\}$. Класс A_Π называется вырожденным, если для всех периодов $\tau \in \Pi$ верно, что $l(f_\tau^{(n)}) = \bar{o}(k^n)$ при $n \to \infty$.

Рассмотрим периодические симметрические функции $f_n = f_{(1,1,4,4)}^{(n)} \in P_5^n$ и $g_n = f_{(1,4,4,1)}^{(n)} \in P_5^n$ с периодами $(1,1,4,4)$ и $(1,4,4,1)$ соответственно, $n \geqslant 1$. Введем класс $\mathcal{A}$ функций пятизначной логики вида $a \cdot f_n + b \cdot g_n$, $a, b \in E_5$, $a \neq 0$ или $b \neq 0$. И его подкласс $\mathcal{F}$, состоящий из функций $c \cdot f_n, c \cdot g_n, c \cdot (f_n + g_n), c \cdot (f_n + 4g_n), c \in \{1,2,3,4\}$.

В работе получены следующие результаты.

Теорема 1. *Если $n \geqslant 1$, $\varphi_n = f_n + 2\,g_n \in P_5^n$ или $\varphi_n = f_n + 3\,g_n \in P_5^n$, то для любого вектора поляризации $\delta = (d_1,\ldots,d_n) \in E_5^n$ верно*

$$l(P^\delta(\varphi_n)) = 5^{n-m} \cdot 4^m,$$

$$\text{где } m = \begin{cases} \text{количество «4» в векторе } \delta, \text{ если } \varphi_n = f_n + 2\,g_n; \\ \text{количество «2» в векторе } \delta, \text{ если } \varphi_n = f_n + 3\,g_n. \end{cases}$$

Теорема 2. *Если $n \geqslant 1$, $\varphi_n(x_1,\ldots,x_n) \in \mathcal{F}$ и n четно, то*

$$l(\varphi_n) \leqslant 5^n \left(2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{n}{2}} - \left(\frac{4}{5}\right)^n\right).$$

Следствие. *Класс функций $\mathcal{A}$ является вырожденным.*

Литература

1. Sasao T., Besslich P. *On the complexity of mod-2 sum PLA's.* IEEE Trans.on Comput. 39. №2. 1990. P. 262–266.

2. Перязев Н. А. *Сложность булевых функций в классе полиномиальных поляризованных форм.* Алгебра и логика. 34. №3. 1995. С. 323–326.

3. Селезнева С. Н. *О сложности представления функций многозначных логик поляризованными полиномами.* Дискретная математика. 14. №2. 2002. С. 48–53.

4. Маркелов Н. К. *Нижняя оценка сложности функций трехзначной логики в классе поляризованных полиномов.* Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. №3. 2012. С. 40–45.