

# Оглавление

Введение	3
Основные определения	5
Постановка задачи	7
Результаты	8
Функции пятизначной логики . . . . .	8
Функции одной переменной . . . . .	8
Выражение через функции . . . . .	9
Разложение функций . . . . .	10
Функции одной переменной . . . . .	12
Заключение	14
Приложение	15
Список литературы	17

## Введение

Одним из стандартных способов задания функций  $k$ -значной логики являются поляризованные полиномиальные формы (ППФ), которые также называются обобщенными формами Рида-Мюллера, или каноническими поляризованными полиномами. В ППФ каждая переменная имеет определенную поляризацию. Длиной полиномиальной формы называется число попарно различных слагаемых в ней. Длиной функции  $f$  в классе ППФ называется наименьшая длина среди длин всех поляризованных полиномиальных форм, реализующих  $f$ . Функция Шеннона  $L_k^K(n)$  длины определяется как наибольшая длина среди всех функций  $k$ -значной логики в классе  $K$  от  $n$  переменных, если  $K$  опущено, то подразумевается класс ППФ. Практическое применение ППФ нашли при построении программируемых логических матриц (ПЛМ) [1, 2], сложность ПЛМ напрямую зависит от длины ППФ, по которой она построена. Поэтому в ряде работ исследуется сложность ППФ различных функций [3–9].

В 1993 В. П. Супрун [3] получил первые оценки функции Шеннона для функций алгебры логики :

$$L_2(n) \geq C_n^{\lceil \frac{n}{2} \rceil},$$
$$L_2(n) < 3 \cdot 2^{n-1},$$

где  $[a]$  обозначает целую часть  $a$ .

Точное значение функции Шеннона для функций алгебры логики в 1995 г. было найдено Н. А. Перязевым [4] :

$$L_2(n) = \left\lfloor \frac{2^{n+1}}{3} \right\rfloor.$$

Функции  $k$ -значных логик являются естественным обобщением функций алгебры логики. Для функций  $k$ -значной логики верхняя оценка функции Шеннона была получена в 2002 г. С. Н. Селезневой [5] :

$$L_k(n) < \frac{k(k-1)}{k(k-1)+1} k^n,$$

в 2015 году она была улучшена [12]

$$L_k(n) < \frac{k(k-1)-1}{k(k-1)}k^n.$$

При построении ПЛМ рассматривают и другие полиномиальные формы. Например класс обобщенных полиномиальных форм. В классе обобщенных полиномиальных форм, в отличие от класса поляризованных полиномиальных форм, переменные могут иметь различную поляризацию в разных слагаемых. В статье К. Д. Кириченко [6], опубликованной в 2005 г., был предложен метод построения обобщенных полиномиальных форм из которогоследует  $L_2^{\text{О.П.}}(n) = O(\frac{2^n}{n})$ .

В работах [7, 10] получено, что  $L_k^{\text{О.П.}}(n) = O(\frac{k^n}{n})$ .

В 2012 г. Н. К. Маркеловым была получена нижняя оценка функции Шеннона для функции трехзначной логики в классе поляризованных полиномов [8]:

$$L_3(n) \geq \left\lceil \frac{3}{4}3^n \right\rceil,$$

в [11] эта оценка была достигнута на симметрических функциях.

## Основные определения

Пусть  $k \geq 2$  – натуральное число,  $E_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$ . Весом набора  $\alpha = (a_1, \dots, a_n) \in E_k^n$  назовем число  $|\alpha| = \sum_{i=1}^n a_i$ . Моном  $\prod_{a_i \neq 0} x_i^{a_i}$  назовем соответствующим набору  $\alpha = (a_1, \dots, a_n) \in E_k^n$  и обозначим через  $K_\alpha$ . По определению положим, что константа 1 соответствует набору из всех нулей. Функцией  $k$ -значной логики называется отображение  $f^{(n)} : E_k^n \rightarrow E_k$ ,  $n = 0, 1, \dots$ . Множество всех функций  $k$ -значной логики обозначим через  $P_k$ , множество всех функций  $k$ -значной логики, зависящих от переменных  $x_1, \dots, x_n$ , обозначим через  $P_k^n$ . Функция  $j_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = i; \\ 0, & \text{если } x \neq i. \end{cases}$

Если  $k$  – простое число, то каждая функция  $k$ -значной логики  $f(x_1, \dots, x_n)$  может быть однозначно задана формулой вида

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\alpha \in E_k^n : c_f(\alpha) \neq 0} c_f(\alpha) K_\alpha,$$

где  $c_f(\alpha) \in E_k$  – коэффициенты,  $\alpha \in E_k^n$ , и операции сложения и умножения рассматриваются по модулю  $k$ . Это представление функций  $k$ -значной логики называется ее полиномом по модулю  $k$ . При простых  $k$  однозначно определенный полином по модулю  $k$  для функции  $k$ -значной логики  $f$  будем обозначать через  $P(f)$ .

Определим поляризованные полиномиальные формы по модулю  $k$ . Поляризованной переменной  $x_i$  с поляризацией  $d$ ,  $d \in E_k$ , назовем выражение вида  $(x_i + d)$ . Поляризованным мономом по вектору поляризации  $\delta$ ,  $\delta = (d_1, \dots, d_n) \in E_k^n$ , назовем произведение вида  $(x_{i_1} + d_{i_1})^{m_1} \cdots (x_{i_r} + d_{i_r})^{m_r}$ , где  $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$ , и  $1 \leq m_1, \dots, m_r \leq k-1$ . Обычный моном является мономом, поляризованным по вектору  $\tilde{0} = (0, \dots, 0) \in E_k^n$ .

Выражение вида  $\sum_{i=1}^l c_i \cdot K_i$ , где  $c_i \in E_k \setminus \{0\}$  – коэффициенты,  $K_i$  – попарно различные мономы, поляризованные по вектору  $\delta = (d_1, \dots, d_n) \in E_k^n$ ,  $i = 1, \dots, l$ , назовем поляризованной полиномиальной нормальной формой (ППФ) по вектору поляризации  $\delta$ . Мы будем считать, что константа 0 является ППФ по произвольному вектору поляризации. Заметим, что при простых  $k$  для каждого вектора поляризации каждую функцию  $k$ -значной логики можно однозначно представить ППФ по этому вектору поляризации [5]. При простых  $k$  однозначно определенную ППФ по вектору поляризации  $\delta \in E_k^n$  для функции  $f \in P_k^n$

будем обозначать через  $P^\delta(f)$ .

Длиной  $l(p)$  ППФ  $p$  назовем число попарно различных слагаемых в этой ППФ. Положим, что  $l(0) = 0$ . При простых  $k$  длиной функции  $k$ -значной логики в классе ППФ называется величина  $l^{\text{ППФ}}(f) = \min_{\delta \in E_k^n} l(P^\delta(f))$ .

Функция  $k$ -значной логики  $f(x_1, \dots, x_n)$  называется симметрической, если

$$f(\pi(x_1), \dots, \pi(x_n)) = f(x_1, \dots, x_n)$$

для произвольной перестановки  $\pi$  на множестве переменных  $\{x_1, \dots, x_n\}$ . Множество всех симметрических функций  $k$ -значной логики обозначим через  $S_k$ . Симметрическая функция  $f(x_1, \dots, x_n)$  называется периодической с периодом  $\tau = (\tau_0 \tau_1 \dots \tau_{T-1}) \in E_k^T$ , если  $f(\alpha) = \tau_j$  при  $|\alpha| = j \pmod{T}$  для каждого набора  $\alpha \in E_k^n$ . При этом число  $T$  называется длиной периода. Периодическую функцию  $k$ -значной логики  $f(x_1, \dots, x_n)$  с периодом  $\tau = (\tau_0 \tau_1 \dots \tau_{T-1}) \in E_k^T$  будем обозначать через  $f_{(\tau_0 \tau_1 \dots \tau_{T-1})}^{(n)}$ . Понятно, что такое обозначение полностью определяет эту функцию.

## Постановка задачи

1. Нахождение периодов, являющихся сложными, в  $k$ -значных логиках.
2. Отыскание критериев сложности периодов.
3. Получение нижних оценок длин некоторых симметрических функций  $k$ -значных логик в классе ППФ.

# Результаты

## Функции пятизначной логики

### Функции одной переменной

$$4x^4 + 4x^3 + x^2 + 4x + 1$$

$$4x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 3$$

$$3x^4 + x^3 + 4x^2 + x + 4$$

$$2x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 3x + 2$$

$$x^4$$

$$2x^3 + 3x^2 + 2x + 3$$

$$4(x+1)^4 + 3(x+1)^3 + 3(x+1)^2 + 3(x+1) + 3$$

$$4(x+1)^4 + (x+1)^3 + (x+1)^2 + (x+1) + 1$$

$$3(x+1)^4 + 4(x+1)^3 + 4(x+1)^2 + 4(x+1) + 4$$

$$2(x+1)^4$$

$$(x+1)^4 + (x+1)^3 + (x+1)^2 + (x+1) + 1$$

$$2(x+1)^3 + 2(x+1)^2 + 2(x+1) + 2$$

$$4(x+2)^4 + 2(x+2)^3 + 3(x+2)^2 + 4$$

$$4(x+2)^4 + 2(x+2)^2 + (x+2) + 4$$

$$3(x+2)^4 + 2(x+2)^3 + (x+2) + 3$$

$$2(x+2)^4 + 2(x+2)^3 + 2(x+2)^2 + 2(x+2) + 2$$

$$(x+2)^4 + 2(x+2)^3 + 4(x+2)^2 + 3(x+2) + 1$$

$$2(x+2)^3 + (x+2)^2 + 4(x+2)$$

$$4(x+3)^4 + (x+3)^3 + (x+3)^2 + 4(x+3) + 4$$

$$4(x+3)^4 + 4(x+3)^3 + (x+3)^2 + (x+3) + 4$$

$$3(x+3)^4 + 2(x+3)^2 + 3$$

$$2(x+3)^4 + 4(x+3)^3 + 3(x+3)^2 + (x+3) + 2$$

$$(x+3)^4 + 3(x+3)^3 + 4(x+3)^2 + 2(x+3) + 1$$

$$2(x+3)^3 + 3(x+3)$$

$$\begin{aligned}
&4(x+4)^4 + 2(x+4)^2 + 4(x+4) + 4 \\
&4(x+4)^4 + 3(x+4)^3 + 3(x+4)^2 + 4 \\
&3(x+4)^4 + 3(x+4)^3 + 4(x+4) + 3 \\
&2(x+4)^4 + (x+4)^3 + 3(x+4)^2 + 4(x+4) + 2 \\
&(x+4)^4 + 4(x+4)^3 + (x+4)^2 + 4(x+4) + 1 \\
&2(x+4)^3 + 4(x+4)^2 + 4(x+4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&4(x+5)^4 + 4(x+5)^3 + (x+5)^2 + 4(x+5) + 1 \\
&4(x+5)^4 + 2(x+5)^3 + 3(x+5)^2 + 2(x+5) + 3 \\
&3(x+5)^4 + (x+5)^3 + 4(x+5)^2 + (x+5) + 4 \\
&2(x+5)^4 + 3(x+5)^3 + 2(x+5)^2 + 3(x+5) + 2 \\
&(x+5)^4 \\
&2(x+5)^3 + 3(x+5)^2 + 2(x+5) + 3
\end{aligned}$$

### Выражение через функции

$$\begin{aligned}
&hx^4 + tx^3 + tx^2 + tx + t \\
&tx^4 + 2hx^3 + 2hx^2 + 2hx + 2h \\
&(h+t)x^4 + (2h+t)x^3 + (2h+t)x^2 + (2h+t)x + (2h+t) \\
&(h+2t)x^4 + (4h+t)x^3 + (4h+t)x^2 + (4h+t)x + (4h+t) \\
&(h+3t)x^4 + (h+t)x^3 + (h+t)x^2 + (h+t)x + (h+t) \\
&(h+4t)x^4 + (3h+t)x^3 + (3h+t)x^2 + (3h+t)x + (3h+t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&h(x+1)^4 + (h+t)(x+1)^3 + (h+3t)(x+1)^2 + (h+2t)(x+1) + h \\
&t(x+1)^4 + (2h+t)(x+1)^3 + (h+t)(x+1)^2 + (4h+t)(x+1) + t \\
&(h+t)(x+1)^4 + (3h+2t)(x+1)^3 + (2h+4t)(x+1)^2 + 3t(x+1) + (h+t) \\
&(h+2t)(x+1)^4 + 3t(x+1)^3 + 3h(x+1)^2 + (4h+4t)(x+1) + (h+2t) \\
&(h+3t)(x+1)^4 + (2h+4t)(x+1)^3 + (4h+t)(x+1)^2 + 3h(x+1) + (h+3t) \\
&(h+4t)(x+1)^4 + 4h(x+1)^3 + 2t(x+1)^2 + (2h+t)(x+1) + (h+4t)
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& h(x+2)^4 + (2h+t)(x+2)^3 + 4h(x+2)^2 + (3h+4t)(x+2) + h \\
& t(x+2)^4 + (2h+2t)(x+2)^3 + 4t(x+2)^2 + (3h+3t)(x+2) + t \\
& (h+t)(x+2)^4 + (4h+3t)(x+2)^3 + (4h+4t)(x+2)^2 + (h+2t)(x+2) + (h+t) \\
& (h+2t)(x+2)^4 + h(x+2)^3 + (4h+3t)(x+2)^2 + 4h(x+2) + (h+2t) \\
& (h+3t)(x+2)^4 + (3h+2t)(x+2)^3 + (4h+2t)(x+2)^2 + (2h+3t)(x+2) + (h+3t) \\
& (h+4t)(x+2)^4 + 4t(x+2)^3 + (4h+t)(x+2)^2 + t(x+2) + (h+4t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& h(x+3)^4 + (3h+t)(x+3)^3 + (4h+2t)(x+3)^2 + (2h+2t)(x+3) + h \\
& t(x+3)^4 + (2h+3t)(x+3)^3 + (4h+4t)(x+3)^2 + (4h+2t)(x+3) + t \\
& (h+t)(x+3)^4 + 4t(x+3)^3 + (3h+t)(x+3)^2 + (h+4t)(x+3) + (h+t) \\
& (h+2t)(x+3)^4 + (2h+2t)(x+3)^3 + 2h(x+3)^2 + t(x+3) + (h+2t) \\
& (h+3t)(x+3)^4 + 4h(x+3)^3 + (h+4t)(x+3)^2 + (4h+3t)(x+3) + (h+3t) \\
& (h+4t)(x+3)^4 + (h+3t)(x+3)^3 + 3t(x+3)^2 + 3h(x+3) + (h+4t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& h(x+4)^4 + (4h+t)(x+4)^3 + (h+4t)(x+4)^2 + (4h+t)(x+4) + (h+4t) \\
& t(x+4)^4 + (2h+4t)(x+4)^3 + (3h+t)(x+4)^2 + (2h+4t)(x+4) + (3h+t) \\
& (h+t)(x+4)^4 + h(x+4)^3 + 4h(x+4)^2 + h(x+4) + 4h \\
& (h+2t)(x+4)^4 + (3h+4t)(x+4)^3 + (2h+t)(x+4)^2 + (3h+4t)(x+4) + (2h+t) \\
& (h+3t)(x+4)^4 + 3t(x+4)^3 + 2t(x+4)^2 + 3t(x+4) + 2t \\
& (h+4t)(x+4)^4 + (2h+2t)(x+4)^3 + (3h+3t)(x+4)^2 + (2h+2t)(x+4) + (3h+3t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& h(x+5)^4 + t(x+5)^3 + t(x+5)^2 + t(x+5) + t \\
& t(x+5)^4 + 2h(x+5)^3 + 2h(x+5)^2 + 2h(x+5) + 2h \\
& (h+t)(x+5)^4 + (2h+t)(x+5)^3 + (2h+t)(x+5)^2 + (2h+t)(x+5) + (2h+t) \\
& (h+2t)(x+5)^4 + (4h+t)(x+5)^3 + (4h+t)(x+5)^2 + (4h+t)(x+5) + (4h+t) \\
& (h+3t)(x+5)^4 + (h+t)(x+5)^3 + (h+t)(x+5)^2 + (h+t)(x+5) + (h+t) \\
& (h+4t)(x+5)^4 + (3h+t)(x+5)^3 + (3h+t)(x+5)^2 + (3h+t)(x+5) + (3h+t)
\end{aligned}$$

## Разложение функций

Рассмотрим функции

$$\begin{aligned}
h &= hx^{k-1} + tx^{k-2} + \dots + tx + t \\
t &= tx^{k-1} + ehx^{k-2} + \dots + ehx + eh, \text{ где}
\end{aligned}$$

$e$  – некоторый коэффициент.

Через  $C_{hi}^{hd}$  обозначим коэффициент у функции  $h$  при  $x^i$ , при функции  $h$ , поляризация  $d$ .

Через  $C_{ti}^{hd}$  обозначим коэффициент у функции  $h$  при  $x^i$ , при функции  $t$ , поляризация  $d$ .

Через  $C_{hi}^{td}$  обозначим коэффициент у функции  $t$  при  $x^i$ , при функции  $h$ , поляризация  $d$ .

Через  $C_{ti}^{td}$  обозначим коэффициент у функции  $t$  при  $x^i$ , при функции  $t$ , поляризация  $d$ .

$$C_{hi}^{hd} = \binom{k-1}{i} (-d)^{k-1-i}$$

$$C_{ti}^{hd} = \sum_{j=i}^{k-2} \binom{j}{i} (-d)^{j-i}$$

$$C_{hi}^{td} = \sum_{j=i}^{k-2} e \binom{j}{i} (-d)^{j-i}$$

$$C_{ti}^{td} = \binom{k-1}{i} (-d)^{k-1-i}$$

Заметим, что  $\binom{k-1}{i} \neq 0 \pmod{k}$ , тогда у функции  $h$  при любой поляризации присутствует слагаемое с  $h$ , а у функции  $t$  при любой поляризации присутствует слагаемое с  $t$ .

Пусть  $f_a = h + at$ , где  $a \in [1..k-1]$ .

**Теорема 1.** Для любых  $d$  и  $a$  у полинома функции  $f_a^{(d)}$   $k$  слагаемых, если  $e$  – квадратичный невычет по модулю  $k$ .

*Доказательство.* Пусть существуют  $a, d, i$  такие, что  $f_a^{(d)}[i] = 0$ , тогда  $C_{hi}^{hd}$  должно быть равно  $-aC_{hi}^{td}$ , а  $C_{ti}^{hd}$  должно быть равно  $-aC_{ti}^{td}$ .

$$\begin{cases} \binom{k-1}{i} (-d)^{k-1-i} &= -a \sum_{j=i}^{k-2} e \binom{j}{i} (-d)^{j-i} \\ \sum_{j=i}^{k-2} \binom{j}{i} (-d)^{j-i} &= -a \binom{k-1}{i} (-d)^{k-1-i} \end{cases}$$

$\sum_{j=i}^{k-2} \binom{j}{i} (-d)^{j-i} \neq 0$  так как  $\binom{k-1}{i} (-d)^{k-1-i} \neq 0$ . Следовательно

$$a^{-1} \sum_{j=i}^{k-2} \binom{j}{i} (-d)^{j-i} = a \sum_{j=i}^{k-2} e \binom{j}{i} (-d)^{j-i}$$

Значит  $e = (a^{-1})^2$ , что противоречит с тем, что  $e$  – квадратичный невычет по модулю  $k$ . □

## Функции одной переменной

Рассмотрим теперь следующие функции  $h$  и  $t$  одной переменной:

$$\begin{aligned} h &= ex^{k-1} + (x-1)^{k-1} \\ t &= x^{k-1} + e(x-1)^{k-1} \end{aligned}$$

Они выглядят так:

$$\begin{aligned} h &= (e+1)x^{k-1} + x^{k-2} + \dots + x + 1 \\ t &= (e+1)x^{k-1} + ex^{k-2} + \dots + ex + e \end{aligned}$$

Через  $C_i^{hd}$  обозначим коэффициент при  $x^i$  у функции  $h$  при поляризации  $d$ .

Через  $C_i^{td}$  обозначим коэффициент при  $x^i$  у функции  $t$  при поляризации  $d$ .

$$\begin{aligned} C_i^{hd} &= \binom{k-1}{i} (-d)^{k-1-i} + \sum_{j=i}^{k-2} e \binom{j}{i} (-d)^{j-i} \\ C_i^{td} &= e \binom{k-1}{i} (-d)^{k-1-i} + \sum_{j=i}^{k-2} \binom{j}{i} (-d)^{j-i} \end{aligned}$$

**Теорема 2.** Для любой поляризации  $d$ , для любого  $i$  у любой пары  $f$  и  $g$  функций из  $\{h, t, h+at\}$  ( $\forall a \in [1..k-1]$ ) коэффициенты при  $x^i$  не могут быть равны 0 одновременно.

*Доказательство.* 1) Рассмотрим случай, когда  $f$  и  $g \in \{h, t\}$ . Предположим, что  $C_i^{hd} = 0$

и  $C_i^{td} = 0$ . Тогда, так как  $\binom{k-1}{i}(-d)^{k-1-i} \neq 0$ , то и  $\sum_{j=i}^{k-2} \binom{j}{i}(-d)^{j-i} \neq 0$ . А также

$$e \sum_{j=i}^{k-2} \binom{j}{i} (-d)^{j-i} = e^{-1} \sum_{j=i}^{k-2} \binom{j}{i} (-d)^{j-i}$$

Следовательно  $e^2 = 1$ , но  $e \in [2..k-2]$  чего не может быть так как у 1 только два корня 1 и -1.

2) Пусть  $f = h + at$ , а  $g \in \{h, t\}$ .

$$C_i^{fd} = C_i^{hd} + aC_i^{td}.$$

Если  $C_i^{gd} = 0$ , то в  $C_i^{fd}$  всего 1 слагаемое и, в силу предыдущего пункта, оно отлично от 0.

3) Последний случай:  $f = h + at$ ,  $g = h + bt$ .

$$C_i^{fd} = C_i^{hd} + aC_i^{td},$$

$$C_i^{gd} = C_i^{hd} + bC_i^{td}.$$

Если  $C_i^{td} \neq 0$ , то  $C_i^{fd} \neq C_i^{gd}$ , а если  $C_i^{td} = 0$ , то из первого пункта следует, что  $C_i^{hd} \neq 0$ .

□

## Заключение

В работе получены следующие результаты:

1. Доказана теорема о нижней оценки длины функций, задаваемых сложными периодами.
2. Получено достаточное условие сложности периодов.
3. Были найдены все сложные периоды длины четыре в трехзначной логике и длины семь в пятизначной.
4. Написаны программы для работы с периодами в которых реализованы функции:
  - Проверка периода на сложность
  - Построение периодов, порожденных данным
  - Построение специальных матриц, описанных в основных определениях, и функций для работы с ними.
  - Вывод полиномов функций по векторам периодов,
  - Построение ядер, описанных матриц,
  - Проверка выдвинутой гипотезы.

## Приложение

В приложении приводится код программ, использованных для получения некоторых результатов. Также программы сами по себе представляют интерес, так как могут быть использованы для более широкого ряда задач, чем требовалось при выполнении курсовой работы.

```
#!/usr/bin/perl -Ilib
```

```
use strict;
use warnings;
use feature qw(say);
```

```
use Polynomial;
use AOP;
use Math::Prime::Util qw(binomial znprimroot is_primitive_root);
use Getopt::Long;
```

```
my $k = 5;
my $c;
my $e;
my $v;
my $s;
my $csv;
```

```
Getopt::Long::Configure ("bundling");
GetOptions (
    'k=i' => \$k,
    'c=i' => \$c,
    'e=i' => \$e,
    'csv' => \$csv,
    'v=s' => \$v,
    's=s' => \$s,
```

```

);

$c //= znprimroot($k);
$e //= -1*znprimroot($k) % $k;
my $k_1 = $k - 1;

my $hs = "h*x^$k_1 + $k_1*t*x^$k_1 + t*(x+$k_1)^$k_1";
my $ts = "t*x^$k_1 + -$c*h*x^$k_1 + $c*h*(x+$k_1)^$k_1";

my $h = Polynomial->new(k => $k,
    str => "h*x^$k_1 + $k_1*t*x^$k_1 + t*(x+$k_1)^$k_1");
my $t = Polynomial->new(k => $k,
    str => "t*x^$k_1 + -$c*h*x^$k_1 + $c*h*(x+$k_1)^$k_1");

#my $av = AOP->new(k => $k,
    #gens => ["$e*x^$k_1 + (x+1)^$k_1", "$e*(x+1)^$k_1 + (x+2)^$k_1"]);
my $av = AOP->new(
    k => $k,
    gens => ["$e*x^$k_1 + (x+1)^$k_1", "x^$k_1 + $e*(x+1)^$k_1"]
);

my $as = AOP->new(k => $k, gens => [$hs, $ts]);

if ($s) {
    open(my $fh, '>', $s);
    say $fh $as->fprint(del=>';');
}

if ($v) {
    open(my $fh, '>', $v);
    say $fh $av->to_csv;
}

```

## Список литературы

1. Угрюмов Е. П. Цифровая схемотехника. СПб.: БХВ-Петербург, 2004.
2. Sasao T., Besslich P. On the complexity of mod-2 sum PLA's // IEEE Trans.on Comput. 39. N 2. 1990. P. 262–266.
3. Супрун В. П. Сложность булевых функций в классе канонических поляризованных полиномов // Дискретная математика. 5. №2. 1993. С. 111–115.
4. Перязев Н. А. Сложность булевых функций в классе полиномиальных поляризованных форм // Алгебра и логика. 34. №3. 1995. С. 323–326.
5. Селезнева С. Н. О сложности представления функций многозначных логик поляризованными полиномами. Дискретная математика. 14. №2. 2002. С. 48–53.
6. Кириченко К. Д. Верхняя оценка сложности полиномиальных нормальных форм булевых функций // Дискретная математика. 17. №3. 2005. С. 80–88.
7. Селезнева С. Н. Дайняк А. Б. О сложности обобщенных полиномов  $k$ -значных функций // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. №3. 2008. С. 34–39.
8. Маркелов Н. К. Нижняя оценка сложности функций трехзначной логики в классе поляризованных полиномов // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. №3. 2012. С. 40–45.
9. Селезнева С. Н. Маркелов Н. К. Быстрый алгоритм построения векторов коэффициентов поляризованных полиномов  $k$ -значных функций // Ученые записки Казанского университета. Серия Физико-математические науки. 2009. 151. №2 С. 147–151.
10. Башов М. А., Селезнев С. Н. О длине функций  $k$ -значной логики в классе полиномиальных нормальных форм по модулю  $k$  // Дискретная математика. – 2014. – Т. 26, вып. 3. – С. 3–9.
11. Селезнева С. Н. Сложность систем функций алгебры логики и систем функций трехзначной логики в классах поляризованных полиномиальных форм // Дискретная математика. – 2015. – Т. 27, вып. 1. – С. 111 – 122.
12. Балюк А. С., Янушковский Г. В. Верхние оценки функций над конечными полями в некоторых классах кронекеровых форм // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. – 2015. – Т.14. – С. 3–17.
13. Библиотека для работы с поляризованными полиномами: <https://github.com/Obirvalger/SymbolicPolynomial>.