

Оглавление

Введение	4
Основные определения	6
Постановка задачи	9
Результаты	10
Теоремы	10
Пример	10
Заключение	16
Список литературы	17

Введение

Одним из стандартных способов задания функций k -значной логики являются поляризованные полиномиальные формы (ППФ), которые также называются обобщенными формами Риды-Мюллера, или каноническими поляризованными полиномами. В ППФ каждая переменная имеет определенную поляризацию. Длиной полиномиальной формы называется число попарно различных слагаемых в ней. Длиной функции f в классе ППФ называется наименьшая длина среди длин всех поляризованных полиномиальных форм, реализующих f . Функция Шеннона $L_k^K(n)$ длины определяется как наибольшая длина среди всех функций k -значной логики в классе K от n переменных, если K опущено, то подразумевается класс ППФ. Практическое применение ППФ нашли при построении программируемых логических матриц (ПЛМ) [1, 2], сложность ПЛМ напрямую зависит от длины ППФ, по которой она построена. Поэтому в ряде работ исследуется сложность ППФ различных функций [3–9].

В 1993 В. П. Супрун [3] получил первые оценки функции Шеннона для функций алгебры логики :

$$L_2(n) \geq C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor},$$
$$L_2(n) < 3 \cdot 2^{n-1},$$

где $[a]$ обозначает целую часть a .

Точное значение функции Шеннона для функций алгебры логики в 1995 г. было найдено Н. А. Перязевым [4] :

$$L_2(n) = \left\lceil \frac{2^{n+1}}{3} \right\rceil.$$

Функции k -значных логик являются естественным обобщением функций алгебры логики. Для функций k -значной логики верхняя оценка функции Шеннона была получена в 2002 г. С. Н. Селезневой [5] :

$$L_k(n) < \frac{k(k-1)}{k(k-1)+1} k^n.$$

При построении ПЛМ рассматривают и другие полиномиальные формы. Например класс обобщенных полиномиальных форм. В классе обобщенных полиномиальных форм, в отличие от класса поляризованных полиномиальных форм, переменные могут иметь различную поляризацию в разных слагаемых. В статье К. Д. Кириченко [6], опубликованной в 2005 г., получена верхняя оценка функции Шеннона в классе обобщенных полиномиальных форм функций алгебры логики :

$$L_2^{\text{О.П.}}(n) \leq \frac{2^{n+1}(\log_2 n + 1)}{n}.$$

Верхняя оценка функции Шеннона в классе обобщенных полиномиальных форм функций k -значной логики была получена С. Н. Селезневой и А. Б. Дайняком в 2008 г. [7]:

$$L_k^{\text{О.П.}}(n) \lesssim 2 \cdot \frac{k^n}{n} \cdot \ln n \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

В 2012 г. Н. К. Маркеловым была получена нижняя оценка функции Шеннона для функции трехзначной логики в классе поляризованных полиномов [8]:

$$L_3(n) \geq \left\lceil \frac{3}{4} 3^n \right\rceil.$$

Основные определения

Пусть $k \geq 2$ – натуральное число, $E_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$. Весом набора $\alpha = (a_1, \dots, a_n) \in E_k^n$ назовем число $|\alpha| = \sum_{i=1}^n a_i$. Моном $\prod_{a_i \neq 0} x_i^{a_i}$ назовем соответствующим набору $\alpha = (a_1, \dots, a_n) \in E_k^n$ и обозначим через K_α . По определению положим, что константа 1 соответствует набору из всех нулей. Функцией k -значной логики называется отображение $f^{(n)} : E_k^n \rightarrow E_k$, $n = 0, 1, \dots$. Множество всех функций k -значной логики обозначим через P_k , множество всех функций k -значной логики, зависящих от переменных x_1, \dots, x_n , обозначим через P_k^n . Функция $j_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = i; \\ 0, & \text{если } x \neq i. \end{cases}$

Если k – простое число, то каждая функция k -значной логики $f(x_1, \dots, x_n)$ может быть однозначно задана формулой вида

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\alpha \in E_k^n : c_f(\alpha) \neq 0} c_f(\alpha) K_\alpha,$$

где $c_f(\alpha) \in E_k$ – коэффициенты, $\alpha \in E_k^n$, и операции сложения и умножения рассматриваются по модулю k . Это представление функций k -значной логики называется ее полиномом по модулю k . При простых k однозначно определенный полином по модулю k для функции k -значной логики f будем обозначать через $P(f)$.

Определим поляризованные полиномиальные формы по модулю k . Поляризованной переменной x_i с поляризацией d , $d \in E_k$, назовем выражение вида $(x_i + d)$. Поляризованным мономом по вектору поляризации δ , $\delta = (d_1, \dots, d_n) \in E_k^n$, назовем произведение вида $(x_{i_1} + d_{i_1})^{m_1} \cdots (x_{i_r} + d_{i_r})^{m_r}$, где $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$, и $1 \leq m_1, \dots, m_r \leq k-1$. Обычный моном является мономом, поляризованным по вектору $\tilde{0} = (0, \dots, 0) \in E_k^n$.

Выражение вида $\sum_{i=1}^l c_i \cdot K_i$, где $c_i \in E_k \setminus \{0\}$ – коэффициенты, K_i – попарно различные мономы, поляризованные по вектору $\delta = (d_1, \dots, d_n) \in E_k^n$, $i = 1, \dots, l$, назовем поляризованной полиномиальной нормальной формой (ППФ) по вектору поляризации δ . Мы будем считать, что константа 0 является ППФ по произвольному вектору поляризации. Заметим, что при простых k для каждого вектора поляризации каждую функцию k -значной логики можно однозначно представить ППФ по этому вектору поляризации [5]. При простых k однозначно определенную ППФ по вектору поляризации $\delta \in E_k^n$ для функции $f \in P_k^n$ будем обозначать через $P^\delta(f)$.

Длиной $l(p)$ ППФ p назовем число попарно различных слагаемых в этой ППФ. Положим, что $l(0) = 0$. При простых k длиной функции k -значной логики в классе ППФ называется величина $l^{\text{ППФ}}(f) = \min_{\delta \in E_k^n} l(P^\delta(f))$.

Функция k -значной логики $f(x_1, \dots, x_n)$ называется симметрической, если

$$f(\pi(x_1), \dots, \pi(x_n)) = f(x_1, \dots, x_n)$$

для произвольной перестановки π на множестве переменных $\{x_1, \dots, x_n\}$. Множество всех симметрических функций k -значной логики обозначим через S_k . Симметрическая функция $f(x_1, \dots, x_n)$ называется периодической с периодом $\tau = (\tau_0 \tau_1 \dots \tau_{T-1}) \in E_k^T$, если $f(\alpha) = \tau_j$ при $|\alpha| = j \pmod{T}$ для каждого набора $\alpha \in E_k^n$. При этом число T называется длиной периода. Периодическую функцию k -значной логики $f(x_1, \dots, x_n)$ с периодом $\tau = (\tau_0 \tau_1 \dots \tau_{T-1}) \in E_k^T$ будем обозначать через $f_{(\tau_0 \tau_1 \dots \tau_{T-1})}^{(n)}$. Понятно, что такое обозначение полностью определяет эту функцию.

Пусть $T \geq 1$, $s \geq 1$, $\Pi = \{\tau_1, \dots, \tau_s | \tau_i \in E_k^T\}$, $A_\Pi = \{f_\tau^{(n)} | \tau \in \Pi, n \geq 1\}$. Класс A_Π называется вырожденным, если для любого $\tau \in \Pi$ верно, что $l(f_\tau^{(n)}) = \bar{o}(k^n)$, при $n \rightarrow \infty$.

Для любого простого k и любой симметрической периодической функции $f(x_1, \dots, x_n)$ k -значной логики с периодом $\tau = (\tau_0 \tau_1 \dots \tau_{T-1}) \in E_k^T$ и для любого d из E_k . Верно следующее разложение:

$$f^{(n+1)} = f_{k-1}^{(n)} \cdot (x_{n+1} + d)^{k-1} + f_{k-2}^{(n)} \cdot (x_{n+1} + d)^{k-2} + \dots + f_0^{(n)}, \text{ где}$$

$f_{k-1}^{(n)}, f_{k-2}^{(n)}, \dots, f_0^{(n)}$ – функции зависящие от переменных x_1, \dots, x_n . Для различных поляризации d это могут быть различные функции. В данном разложении будут получаться только симметрические периодические функции с периодом такой же длины.

Все функции, присутствующие в разложении функции f , хотябы с какой-либо поляризацией d назовем – порожденными f . Семейство функций, порожденных данной симметрической периодической функцией f получается по следующему алгоритму:

1. добавляем в множество F функцию f ;
2. для всех, еще не рассмотренных функций из F , добавляем порожденные ими функции в F , а сами функции помечаем, как рассмотренные;
3. повторяем второй шаг, пока не рассмотрим все функции.

Этот алгоритм завершается, так как число различных периодов заданной длины конечно.

Постановка задачи

Результаты

Теоремы

Теорема 1. *Если в семействе F , порожденном функцией f нет функции $\tilde{0}$, то класс функций F будет невырожденным.*

Теорема 2. *Все симметрические периодические функции пятизначной логики с периодами длины 3, отличными от $[0,0,0]$, $[1,1,1]$, $[2,2,2]$, $[3,3,3]$, $[4,4,4]$ порождают невырожденные семейства функций.*

Пример

Рассмотрим функцию $f = f_{(0,1,4)}$, эта функция порождает семейство функций F :

$$f = f_{(0,1,4)}, g = f_{(1,0,4)}, h = f_{(1,1,3)}, p = f_{(1,2,2)}, s = f_{(1,3,1)}, t = f_{(1,4,0)}$$

Для этих функций верны следующие разложения.

$$f = f_{(0,1,4)}$$

$$f_{n+1} = x_{n+1}^4 3f_n + x_{n+1}^3 t_n + x_{n+1}^2 3p_n + x_{n+1} 2g_n + f_n$$

$$f_{n+1} = (x_{n+1} + 1)^4 3f_n + (x_{n+1} + 1)^3 p_n + (x_{n+1} + 1)^2 2f_n + (x_{n+1} + 1) 4p_n + f_n$$

$$f_{n+1} = (x_{n+1} + 2)^4 3f_n + (x_{n+1} + 2)^3 g_n + (x_{n+1} + 2)^2 2p_n + (x_{n+1} + 2) 2t_n + f_n$$

$$f_{n+1} = (x_{n+1} + 3)^4 3f_n + (x_{n+1} + 3)^3 s_n + (x_{n+1} + 3)^2 4s_n + (x_{n+1} + 3) s_n + 4g_n$$

$$f_{n+1} = (x_{n+1} + 4)^4 3f_n + (x_{n+1} + 4)^3 h_n + (x_{n+1} + 4)^2 h_n + (x_{n+1} + 4) h_n + t_n$$

$$g = f_{(1,0,4)}$$

$$g_{n+1} = x_{n+1}^4 3g_n + x_{n+1}^3 4f_n + x_{n+1}^2 4s_n + x_{n+1} 2t_n + g_n$$

$$g_{n+1} = (x_{n+1} + 1)^4 3g_n + (x_{n+1} + 1)^3 3s_n + (x_{n+1} + 1)^2 2g_n + (x_{n+1} + 1) 2s_n + g_n$$

$$g_{n+1} = (x_{n+1} + 2)^4 3g_n + (x_{n+1} + 2)^3 t_n + (x_{n+1} + 2)^2 s_n + (x_{n+1} + 2) 3f_n + g_n$$

$$g_{n+1} = (x_{n+1} + 3)^4 3g_n + (x_{n+1} + 3)^3 4h_n + (x_{n+1} + 3)^2 h_n + (x_{n+1} + 3) 4h_n + 4t_n$$

$$g_{n+1} = (x_{n+1} + 4)^4 3g_n + (x_{n+1} + 4)^3 2p_n + (x_{n+1} + 4)^2 2p_n + (x_{n+1} + 4) 2p_n + 4f_n$$

$$h = f_{(1,1,3)}$$

$$h_{n+1} = x_{n+1}^4 3h_n + x_{n+1}^3 s_n + x_{n+1}^2 2t_n + x_{n+1} 4p_n + h_n$$

$$h_{n+1} = (x_{n+1} + 1)^4 3h_n + (x_{n+1} + 1)^3 4t_n + (x_{n+1} + 1)^2 2h_n + (x_{n+1} + 1) t_n + h_n$$

$$h_{n+1} = (x_{n+1} + 2)^4 3h_n + (x_{n+1} + 2)^3 2p_n + (x_{n+1} + 2)^2 3t_n + (x_{n+1} + 2) 2s_n + h_n$$

$$h_{n+1} = (x_{n+1} + 3)^4 3h_n + (x_{n+1} + 3)^3 2f_n + (x_{n+1} + 3)^2 3f_n + (x_{n+1} + 3) 2f_n + 3p_n$$

$$h_{n+1} = (x_{n+1} + 4)^4 3h_n + (x_{n+1} + 4)^3 3g_n + (x_{n+1} + 4)^2 3g_n + (x_{n+1} + 4) 3g_n + s_n$$

$$p = f_{(1,2,2)}$$

$$p_{n+1} = x_{n+1}^4 3p_n + x_{n+1}^3 2h_n + x_{n+1}^2 4f_n + x_{n+1} s_n + p_n$$

$$p_{n+1} = (x_{n+1} + 1)^4 3p_n + (x_{n+1} + 1)^3 3f_n + (x_{n+1} + 1)^2 2p_n + (x_{n+1} + 1) 2f_n + p_n$$

$$p_{n+1} = (x_{n+1} + 2)^4 3p_n + (x_{n+1} + 2)^3 3s_n + (x_{n+1} + 2)^2 f_n + (x_{n+1} + 2) 4h_n + p_n$$

$$p_{n+1} = (x_{n+1} + 3)^4 3p_n + (x_{n+1} + 3)^3 g_n + (x_{n+1} + 3)^2 4g_n + (x_{n+1} + 3) g_n + 2s_n$$

$$p_{n+1} = (x_{n+1} + 4)^4 3p_n + (x_{n+1} + 4)^3 4t_n + (x_{n+1} + 4)^2 4t_n + (x_{n+1} + 4) 4t_n + 2h_n$$

$$s = f_{(1,3,1)}$$

$$s_{n+1} = x_{n+1}^4 3s_n + x_{n+1}^3 3p_n + x_{n+1}^2 3g_n + x_{n+1} 3h_n + s_n$$

$$s_{n+1} = (x_{n+1} + 1)^4 3s_n + (x_{n+1} + 1)^3 g_n + (x_{n+1} + 1)^2 2s_n + (x_{n+1} + 1) 4g_n + s_n$$

$$s_{n+1} = (x_{n+1} + 2)^4 3s_n + (x_{n+1} + 2)^3 4h_n + (x_{n+1} + 2)^2 2g_n + (x_{n+1} + 2)p_n + s_n$$

$$s_{n+1} = (x_{n+1} + 3)^4 3s_n + (x_{n+1} + 3)^3 2t_n + (x_{n+1} + 3)^2 3t_n + (x_{n+1} + 3) 2t_n + h_n$$

$$s_{n+1} = (x_{n+1} + 4)^4 3s_n + (x_{n+1} + 4)^3 2f_n + (x_{n+1} + 4)^2 2f_n + (x_{n+1} + 4) 2f_n + 3p_n$$

$$t = f_{(1,4,0)}$$

$$t_{n+1} = x_{n+1}^4 3t_n + x_{n+1}^3 4g_n + x_{n+1}^2 h_n + x_{n+1} 3f_n + t_n$$

$$t_{n+1} = (x_{n+1} + 1)^4 3t_n + (x_{n+1} + 1)^3 2h_n + (x_{n+1} + 1)^2 2t_n + (x_{n+1} + 1) 3h_n + t_n$$

$$t_{n+1} = (x_{n+1} + 2)^4 3t_n + (x_{n+1} + 2)^3 4f_n + (x_{n+1} + 2)^2 4h_n + (x_{n+1} + 2) 3g_n + t_n$$

$$t_{n+1} = (x_{n+1} + 3)^4 3t_n + (x_{n+1} + 3)^3 3p_n + (x_{n+1} + 3)^2 2p_n + (x_{n+1} + 3) 3p_n + f_n$$

$$t_{n+1} = (x_{n+1} + 4)^4 3t_n + (x_{n+1} + 4)^3 s_n + (x_{n+1} + 4)^2 s_n + (x_{n+1} + 4) s_n + 4g_n$$

Функции одной переменной.

$$f = f_{(0,1,4)}$$

$$f_1 = 3x + 2x^2 + 2x^3 + 4x^4$$

$$f_1 = 1 + 4(x + 1) + (x + 1)^3 + 4(x + 1)^4$$

$$f_1 = (x + 2) + (x + 2)^2 + 4(x + 2)^4$$

$$f_1 = 4 + 3(x + 3) + 4(x + 3)^3 + 4(x + 3)^4$$

$$f_1 = 1 + 4(x + 4) + 2(x + 4)^2 + 3(x + 4)^3 + 4(x + 4)^4$$

$$g = f_{(1,0,4)}$$

$$g_1 = 1 + x + 4x^3 + 4x^4$$

$$g_1 = 2(x+1) + 2(x+1)^2 + 3(x+1)^3 + 4(x+1)^4$$

$$g_1 = 1 + (x+2) + 2(x+2)^2 + 2(x+2)^3 + 4(x+2)^4$$

$$g_1 = 4 + 2(x+3) + (x+3)^3 + 4(x+3)^4$$

$$g_1 = 4(x+4) + (x+4)^2 + 4(x+4)^4$$

$$h = f_{(1,1,3)}$$

$$h_1 = 1 + 4x + 2x^2 + x^3 + 3x^4$$

$$h_1 = 1 + (x+1) + 2(x+1)^2 + 4(x+1)^3 + 3(x+1)^4$$

$$h_1 = 1 + 2(x+2) + 3(x+2)^2 + 2(x+2)^3 + 3(x+2)^4$$

$$h_1 = 3 + 3(x+3)^4$$

$$h_1 = 1 + 3(x+4) + 3(x+4)^2 + 3(x+4)^3 + 3(x+4)^4$$

$$p = f_{(1,2,2)}$$

$$p_1 = 1 + 2x + 4x^2 + 3x^3 + 2x^4$$

$$p_1 = 2 + 2(x+1)^2 + 2(x+1)^4$$

$$p_1 = 1 + 3(x+2) + 4(x+2)^2 + 2(x+2)^3 + 2(x+2)^4$$

$$p_1 = 2 + 3(x+3) + 4(x+3)^3 + 2(x+3)^4$$

$$p_1 = 2 + 2(x+4) + (x+4)^3 + 2(x+4)^4$$

$$s = f_{(1,3,1)}$$

$$s_1 = 1 + x^2 + x^4$$

$$s_1 = 3 + 4(x+1) + 2(x+1)^2 + (x+1)^3 + (x+1)^4$$

$$s_1 = 1 + 4(x+2) + 2(x+2)^3 + (x+2)^4$$

$$s_1 = 1 + (x+3) + 3(x+3)^3 + (x+3)^4$$

$$s_1 = 3 + (x+4) + 2(x+4)^2 + 4(x+4)^3 + (x+4)^4$$

$$t = f_{(1,4,0)}$$

$$t_1 = 1 + 3x + 3x^2 + 2x^3$$

$$t_1 = 4 + 3(x+1) + 2(x+1)^2 + 2(x+1)^3$$

$$t_1 = 1 + (x+2)^2 + 2(x+2)^3$$

$$t_1 = 4(x+3) + 2(x+3)^3$$

$$t_1 = 4 + 4(x+4)^2 + 2(x+4)^3$$

В следующей таблице содержатся длины функций одной переменной.

	0	1	2	3	4
f_1	4	4	3	4	5
g_1	4	4	5	4	3
h_1	5	5	5	2	5
p_1	5	3	5	4	4
s_1	3	5	4	4	5
t_1	4	4	3	2	3

Теорема 3. Для любой функции $f_\tau^n \in F$ верно: $l(f_\tau^n) \geq \frac{2}{5} \cdot 5^n$.

Доказательство. Длина полиномов всех функций одной переменной из F при любой поляризации не меньше 2. В разложении каждой функции из F по любой поляризации присутствуют 5 функций из F . \square

Заключение

Список литературы

1. Угрюмов Е. П. Цифровая схемотехника. СПб.: БХВ-Петербург, 2004.
2. Sasao T., Besslich P. On the complexity of mod-2 sum PLA's // IEEE Trans.on Comput. 39. N 2. 1990. P. 262–266.
3. Супрун В. П. Сложность булевых функций в классе канонических поляризованных полиномов // Дискретная математика. 5. №2. 1993. С. 111–115.
4. Перязев Н. А. Сложность булевых функций в классе полиномиальных поляризованных форм // Алгебра и логика. 34. №3. 1995. С. 323–326.
5. Селезнева С. Н. О сложности представления функций многозначных логик поляризованными полиномами. Дискретная математика. 14. №2. 2002. С. 48–53.
6. Кириченко К. Д. Верхняя оценка сложности полиномиальных нормальных форм булевых функций // Дискретная математика. 17. №3. 2005. С. 80–88.
7. Селезнева С. Н. Дайняк А. Б. О сложности обобщенных полиномов k -значных функций // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. №3. 2008. С. 34–39.
8. Маркелов Н. К. Нижняя оценка сложности функций трехзначной логики в классе поляризованных полиномов // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. №3. 2012. С. 40–45.
9. Селезнева С. Н. Маркелов Н. К. Быстрый алгоритм построения векторов коэффициентов поляризованных полиномов k -значных функций // Ученые записки Казанского университета. Серия Физико-математические науки. 2009. 151. №2 С. 147–151.