

Оглавление

Введение	3
Основные определения	5
Постановка задачи	9
Результаты	10
Теоремы	10
Пример	11
Заключение	16
Приложение	17
Список литературы	19

Введение

Одним из стандартных способов задания функций k -значной логики являются поляризованные полиномиальные формы (ППФ), которые также называются обобщенными формами Риды-Мюллера, или каноническими поляризованными полиномами. В ППФ каждая переменная имеет определенную поляризацию. Длиной полиномиальной формы называется число попарно различных слагаемых в ней. Длиной функции f в классе ППФ называется наименьшая длина среди длин всех поляризованных полиномиальных форм, реализующих f . Функция Шеннона $L_k^K(n)$ длины определяется как наибольшая длина среди всех функций k -значной логики в классе K от n переменных, если K опущено, то подразумевается класс ППФ. Практическое применение ППФ нашли при построении программируемых логических матриц (ПЛМ) [1, 2], сложность ПЛМ напрямую зависит от длины ППФ, по которой она построена. Поэтому в ряде работ исследуется сложность ППФ различных функций [3–9].

В 1993 В. П. Супрун [3] получил первые оценки функции Шеннона для функций алгебры логики :

$$L_2(n) \geq C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor},$$
$$L_2(n) < 3 \cdot 2^{n-1},$$

где $[a]$ обозначает целую часть a .

Точное значение функции Шеннона для функций алгебры логики в 1995 г. было найдено Н. А. Перязевым [4] :

$$L_2(n) = \left\lceil \frac{2^{n+1}}{3} \right\rceil.$$

Функции k -значных логик являются естественным обобщением функций алгебры логики. Для функций k -значной логики верхняя оценка функции Шеннона была получена в 2002 г. С. Н. Селезневой [5] :

$$L_k(n) < \frac{k(k-1)}{k(k-1)+1} k^n,$$

в 2015 году она была улучшена [12]

$$L_k(n) < \frac{k(k-1)-1}{k(k-1)} k^n.$$

При построении ПЛМ рассматривают и другие полиномиальные формы. Например класс обобщенных полиномиальных форм. В классе обобщенных полиномиальных форм, в отличие от класса поляризованных полиномиальных форм, переменные могут иметь различную поляризацию в разных слагаемых. В статье К. Д. Кириченко [6], опубликованной в 2005 г., был предложен метод построения обобщенных полиномиальных форм из которого следует $L_2^{\text{О.П.}}(n) = O(\frac{2^n}{n})$.

В работах [7, 10] получено, что $L_k^{\text{О.П.}}(n) = O(\frac{k^n}{n})$.

В 2012 г. Н. К. Маркеловым была получена нижняя оценка функции Шеннона для функции трехзначной логики в классе поляризованных полиномов [8]:

$$L_3(n) \geq \left\lceil \frac{3}{4} 3^n \right\rceil,$$

в [11] эта оценка была достигнута на симметрических функциях.

Основные определения

Пусть $k \geq 2$ – натуральное число, $E_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$. Весом набора $\alpha = (a_1, \dots, a_n) \in E_k^n$ назовем число $|\alpha| = \sum_{i=1}^n a_i$. Моном $\prod_{a_i \neq 0} x_i^{a_i}$ назовем соответствующим набору $\alpha = (a_1, \dots, a_n) \in E_k^n$ и обозначим через K_α . По определению положим, что константа 1 соответствует набору из всех нулей. Функцией k -значной логики называется отображение $f^{(n)} : E_k^n \rightarrow E_k$, $n = 0, 1, \dots$. Множество всех функций k -значной логики обозначим через P_k , множество всех функций k -значной логики, зависящих от переменных x_1, \dots, x_n , обозначим через P_k^n . Функция $j_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = i; \\ 0, & \text{если } x \neq i. \end{cases}$

Если k – простое число, то каждая функция k -значной логики $f(x_1, \dots, x_n)$ может быть однозначно задана формулой вида

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\alpha \in E_k^n : c_f(\alpha) \neq 0} c_f(\alpha) K_\alpha,$$

где $c_f(\alpha) \in E_k$ – коэффициенты, $\alpha \in E_k^n$, и операции сложения и умножения рассматриваются по модулю k . Это представление функций k -значной логики называется ее полиномом по модулю k . При простых k однозначно определенный полином по модулю k для функции k -значной логики f будем обозначать через $P(f)$.

Определим поляризованные полиномиальные формы по модулю k . Поляризованной переменной x_i с поляризацией d , $d \in E_k$, назовем выражение вида $(x_i + d)$. Поляризованным мономом по вектору поляризации δ , $\delta = (d_1, \dots, d_n) \in E_k^n$, назовем произведение вида $(x_{i_1} + d_{i_1})^{m_1} \cdots (x_{i_r} + d_{i_r})^{m_r}$, где $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$, и $1 \leq m_1, \dots, m_r \leq k-1$. Обычный моном является мономом, поляризованным по вектору $\tilde{0} = (0, \dots, 0) \in E_k^n$.

Выражение вида $\sum_{i=1}^l c_i \cdot K_i$, где $c_i \in E_k \setminus \{0\}$ – коэффициенты, K_i – попарно различные мономы, поляризованные по вектору $\delta = (d_1, \dots, d_n) \in E_k^n$, $i = 1, \dots, l$, назовем поляризованной полиномиальной нормальной формой (ППФ) по вектору поляризации δ . Мы будем считать, что константа 0 является ППФ по произвольному вектору поляризации. Заметим, что при простых k для каждого вектора поляризации каждую функцию k -значной логики можно однозначно представить ППФ по этому вектору поляризации [5]. При простых k однозначно определенную ППФ по вектору поляризации $\delta \in E_k^n$ для функции $f \in P_k^n$ будем обозначать через $P^\delta(f)$.

Длиной $l(p)$ ППФ p назовем число попарно различных слагаемых в этой ППФ. Положим, что $l(0) = 0$. При простых k длиной функции k -значной логики в классе ППФ называется величина $l^{\text{ППФ}}(f) = \min_{\delta \in E_k^n} l(P^\delta(f))$.

Функция k -значной логики $f(x_1, \dots, x_n)$ называется симметрической, если

$$f(\pi(x_1), \dots, \pi(x_n)) = f(x_1, \dots, x_n)$$

для произвольной перестановки π на множестве переменных $\{x_1, \dots, x_n\}$. Множество всех симметрических функций k -значной логики обозначим через S_k . Симметрическая функция $f(x_1, \dots, x_n)$ называется периодической с периодом $\tau = (\tau_0 \tau_1 \dots \tau_{T-1}) \in E_k^T$, если $f(\alpha) = \tau_j$ при $|\alpha| = j \pmod{T}$ для каждого набора $\alpha \in E_k^n$. При этом число T называется длиной периода. Периодическую функцию k -значной логики $f(x_1, \dots, x_n)$ с периодом $\tau = (\tau_0 \tau_1 \dots \tau_{T-1}) \in E_k^T$ будем обозначать через $f_{(\tau_0 \tau_1 \dots \tau_{T-1})}^{(n)}$. Понятно, что такое обозначение полностью определяет эту функцию.

Введем функцию $\text{rol}_i(\alpha) \in E_k^n \times E_k \rightarrow E_k^n$, производящую циклический сдвиг вектора α влево. Пусть $\alpha = (a_1, \dots, a_n)$, тогда $\text{rol}_i(\alpha) = (a_{(1+i) \bmod T}, \dots, a_{(n+i) \bmod T})$, где T – длина вектора α .

Функция $\text{rol}_i(\alpha) \in E_k^n \times E_k \rightarrow E_k^n$ производит циклический сдвиг вектора α вправо. Пусть T – длина вектора α , тогда $\text{rol}_i(\alpha) = \text{rol}_{(-i) \bmod T}(\alpha)$.

В [9] дается описание быстрого алгоритма построения поляризованного полинома по заданному вектору функции и поляризации d . Данный алгоритм можно использовать для получения периодов, участвующих в разложении периодической симметрической функции $f^{(n+1)}$ с периодом τ .

$$A_d \cdot F(\tau) = \begin{pmatrix} \tau_0 \\ \tau_1 \\ \vdots \\ \tau_{k-1} \end{pmatrix}, \text{ где}$$

$$f_{\tau}^{(n+1)} = f_{\tau_{k-1}}^{(n)} (x_{n+1} + d)^{k-1} + f_{\tau_{k-2}}^{(n)} (x_{n+1} + d)^{k-2} + \dots + f_{\tau_0}^{(n)} \quad (1)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k-1 & -(2^{k-2}) \bmod k & \dots & -((k-1)^{k-2}) \bmod k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k-1 & k-1 & k-1 & \dots & k-1 \end{pmatrix}$$

A_d получается из матрицы A циклическим сдвигом столбцов A влево на d столбцов или построчным применением функции rol_d к матрице A .

$$F(\tau) = \begin{pmatrix} \text{rol}_0(\tau) \\ \text{rol}_1(\tau) \\ \vdots \\ \text{rol}_{k-1}(\tau) \end{pmatrix}$$

$F(\tau)$ – матрица, в которой в i -той строке стоит сдвиг влево периода τ на i элементов.

Например в трехзначной логике для функции с периодом $[1,1,2,2]$ получим

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Пусть матрица A состоит из строк a_i, a'_i – строка, полученная из a_i , добавлением нулей справа так, что длина строки a'_i равна T . Тогда матрица $A^{(i)}$ состоит из T циклических сдвигов вправо строки a'_i :

$$A^{(i)} = \begin{pmatrix} \text{ror}_0(a'_i) \\ \text{ror}_1(a'_i) \\ \vdots \\ \text{ror}_{T-1}(a'_i) \end{pmatrix}$$

Матрица $A^{(0)}$ – единичная матрица размера $T \times T$. Для всех τ_i из формулы (1) верно $\tau_i = A^{(i)} \cdot \tau$. Период τ называется вырожденным, если $l(f_\tau^{(n)}) = \bar{o}(k^n)$ при $n \rightarrow \infty$. Период τ называется сложным, если $\exists n_0, c > 0 : \forall n \geq n_0 \Rightarrow l(f_\tau^{(n)}) \geq c \cdot k^n$. Обозначим через $\tilde{0}$ – нулевой период.

Введем индуктивно множество периодов, порожденных периодом τ за i шагов – $\Pi_i(\tau)$. В данном случае матрицы рассматриваются, как множества строк.

$$\Pi_0(\tau) = \{\tau\}$$

$$\Pi_1(\tau) = \bigcup_{d \in E_k} A_d \cdot F(\tau)$$

$$\Pi_{i+1}(\tau) = \bigcup_{\theta \in \Pi_i(\tau)} \Pi_1(\theta)$$

Обозначим через $\Pi(\tau)$ такое $\Pi_i(\tau)$, что $\Pi_i(\tau) = \Pi_{i+1}(\tau)$.

Постановка задачи

1. Нахождение периодов, являющихся сложными, в k -значных логиках.
2. Отыскание критериев сложности периодов.
3. Получение нижних оценок длин некоторых симметрических функций k -значных логик в классе ППФ.

Результаты

Теоремы

Теорема 1. Если $\tilde{0} \notin \Pi(\tau)$, то τ сложный период.

Доказательство. Теорема 1 является следствием теоремы 2. □

Теорема 2. Если $\tilde{0} \notin \Pi(\tau)$, то $\forall \sigma \in \Pi(\tau) \forall n \geq n_0 \Rightarrow l(f_\sigma^{(n)}) \geq c \cdot k^n$, где

T – длина периода τ

$k^{n_0} > T > k^{n_0-1}$, нетрудно заметить, что $n_0 = \lceil \log_k T \rceil$

$$c = \frac{1}{k^{n_0}}$$

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по n .

Базис индукции:

$$l(f_\sigma^{(n_0)}) \geq 1 = \frac{1}{k^{n_0}} \cdot k^{n_0}$$

Индуктивный переход:

Предположим, что теорема верна для $n \geq n_0$, докажем ее для $n + 1$. Для любой поляризации $d \in E_k$ функция $f_\sigma^{(n+1)}$ выражается следующим полиномом:

$$f_\sigma^{(n+1)} = f_{\sigma_{k-1}}^{(n)} \cdot (x_{n+1} + d)^{k-1} + \dots + f_{\sigma_1}^{(n)} \cdot (x_{n+1} + d) + f_{\sigma_0}^{(n)}, \text{ где}$$

функции $f_{\sigma_i}^{(n)}$ могут быть различными при разных поляризациях d .

По предположению индукции $\forall i \in E_k \Rightarrow l(f_{\sigma_i}^{(n)}) \geq \frac{1}{k^{n_0}} \cdot k^n$, следовательно $l(f_{\sigma_i}^{(n+1)}) \geq k \cdot \frac{1}{k^{n_0}} \cdot k^n = \frac{1}{k^{n_0}} \cdot k^{n+1}$ □

Заключение

В работе получены следующие результаты:

1. Доказана теорема о нижней оценки длины функций, задаваемых сложными периодами.
2. Получено достаточное условие сложности периодов.
3. Написана программа для работы с периодами в которой реализованы функции:
 - Проверка периода на сложность
 - Построение периодов, порожденных данным
 - Построение специальных матриц, описанных в основных определениях, и функций для работы с ними.
 - Вывод полиномов функций по векторам периодов.

Приложение

Сдесь приведен код основных функций, используемых в программе.

```
k :: Int
k = 5

rol :: [a] -> Int -> [a]
rol xs i = let (l,r) = splitAt i xs in r ++ l

ror :: [a] -> Int -> [a]
ror xs i = let (l,r) = splitAt (length xs - i) xs in r ++ l

step n v = iterate iter [v] !! n where
  iter vs = nub $
    concatMap (\v->concatMap (\d->toLists $ modkM $ aPolar d * fromPeriod v) [0..k-1]) vs

invert' k 1 = 1
invert' k p = (n * k + 1) 'div' p
  where n = p - invert' p (k 'mod' p)

invert = invert' k

allVectors n = sequence $ take (fromIntegral n) $ repeat [0..k-1]

allNormalVectors n = map (1:) $ allVectors (n-1)

normalize :: [Int] -> [Int]
normalize [] = error "Empty list"
normalize xs = normalize' xs xs where
  normalize' [] ys      = error "Zero list"
  normalize' (x:xs) ys | x == 0    = normalize' xs ys
                      | otherwise = map (\n -> n * invert x 'mod' k) ys

reverseMatrix = fromLists . reverse . toLists

modkM = fmap ('mod' k)

a_ij = uncurry a_ij' where
```

```

a_ij' i j | i == 1 && j == 1 = 1
          | i == k           = (-1) 'mod' k
          | i == 1 || j == 1 = 0
          | otherwise = (-(j-1)^((k-1-(i-1)) 'mod' k)) 'mod' k

a = matrix k k a_ij

aPolar d = fromLists $ Data.List.transpose $
  rol (Data.List.transpose $ toLists a) d

fromPeriod xs = fromLists $ map (rol xs) [0..k-1]

polarCoeffs d xs = reverse $ toLists $ modkM $ aPolar d * fromPeriod xs

allCoeffs xs = concatMap (\d -> polarCoeffs d xs) [0..k-1]

setSort = compress . sort where
  compress [] = []
  compress (x:xs) = x : (compress $ dropWhile (== x) xs)

makeAllFamily ps = makeAllFamily' [normalize ps] $ setSort $
  map normalize $ allCoeffs ps where
    makeAllFamily' xss yss | xss == yss = yss
                          | otherwise = makeAllFamily' (insert zs xss) zss where
                                zs = normalize $ firstNotIn yss xss
                                zss = setSort $ yss ++ (map normalize $ allCoeffs zs)
  firstNotIn (y:ys) (x:xs) | y < x = y
                          | y > x = firstNotIn (y:ys) xs
                          | y == x = firstNotIn ys xs
  firstNotIn (y:ys) [] = y

singular [] = putStr ""
singular (x:xs) = do
  result <- try (evaluate (makeAllFamily x)) :: IO (Either SomeException [[Int]])
  case result of
    Left ex -> putStrLn $ "Singular " ++ show x
    Right val -> putStrLn $ "Nonsingular " ++ show x ++ " " ++ (show $ length val)
  singular xs

```

Список литературы

1. Угрюмов Е. П. Цифровая схемотехника. СПб.: БХВ-Петербург, 2004.
2. Sasao T., Besslich P. On the complexity of mod-2 sum PLA's // IEEE Trans.on Comput. 39. N 2. 1990. P. 262–266.
3. Супрун В. П. Сложность булевых функций в классе канонических поляризованных полиномов // Дискретная математика. 5. №2. 1993. С. 111–115.
4. Перязев Н. А. Сложность булевых функций в классе полиномиальных поляризованных форм // Алгебра и логика. 34. №3. 1995. С. 323–326.
5. Селезнева С. Н. О сложности представления функций многозначных логик поляризованными полиномами. Дискретная математика. 14. №2. 2002. С. 48–53.
6. Кириченко К. Д. Верхняя оценка сложности полиномиальных нормальных форм булевых функций // Дискретная математика. 17. №3. 2005. С. 80–88.
7. Селезнева С. Н. Дайняк А. Б. О сложности обобщенных полиномов k -значных функций // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. №3. 2008. С. 34–39.
8. Маркелов Н. К. Нижняя оценка сложности функций трехзначной логики в классе поляризованных полиномов // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. №3. 2012. С. 40–45.
9. Селезнева С. Н. Маркелов Н. К. Быстрый алгоритм построения векторов коэффициентов поляризованных полиномов k -значных функций // Ученые записки Казанского университета. Серия Физико-математические науки. 2009. 151. №2 С. 147–151.
10. Башов М. А., Селезнев С. Н. О длине функций k -значной логики в классе полиномиальных нормальных форм по модулю k // Дискретная математика. – 2014. – Т. 26, вып. 3. – С. 3–9.

11. Селезнева С.Н. Сложность систем функций алгебры логики и систем функций трехзначной логики в классах поляризованных полиномиальных форм // Дискретная математика. – 2015. – Т. 27, вып. 1. – С. 111 – 122.
12. Балюк А.С., Янушковский Г.В. Верхние оценки функций над конечными полями в некоторых классах кронекеровых форм // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. – 2015. – Т.14. – С. 3-17.