Variables-Aleatoires

Exercice 1 ☞ On jette une paire de dés bien équilibrés.

☞ On note X la VA égale au maximum des deux numéros obtenus.

1. Quel est l'univers Ω associé à cette expérience ?
2. Caractériser la pbté P sur Ω.
3. Quelle est l'image de la VA X ?
4. Quelle est la loi de pbté de X ?
5. Calculer l'espérance, la variance et l'écart type de X.
6. Effectuer avec python une simulation de cette expérience en effectuant un grand nombre de tirages et comparer les résultats théoriques et expérimentaux.

Exercice 2 ☞ On lance 3 fois de suite la même pièce truquée telle que la probabilité d'obtenir pile soit égale à $\frac{1}{3}$.

☞ Soit X la variable aléatoire égale au nombre de piles obtenus.

1. Quel est l'univers Ω associé à cette expérience aléatoire ?
2. Quelle probabilité définir sur Ω ?
3. Déterminer l'image de la variable aléatoire X.
4. Déterminer la loi de probabilité de X.
5. Calculer l'espérance, la variance et l'écart type de X.
6. Généraliser l'exercice avec n lancers.
7. Faire des simulations avec python

Exercice 3 ☞ Une boîte contenant 12 articles dont 3 sont défectueux.

☞ On tire au hasard et simultanément un échantillon de 4 articles.

☞ Soit X la VA égale au nombre d'articles défectueux obtenus.

1. Quelle est l'image de la VA X ?
2. Déterminer la loi de probabilité de X.
3. Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de X.
4. Faire des simulations avec python.

Exercice 4 ☞ On propose le jeu suivant :

☞ Le joueur lance un dé non pipé à 6 faces.

➪ S'il obtient un nombre premier il reçoit la somme indiquée par le dé

➪ dans le cas contraire, c'est lui qui doit verser cette somme.

1. Ce jeu est-il favorable au joueur ?
2. Faire une simulation avec python.

Exercice 5 ☞ On jette un dé plusieurs fois consécutivement jusqu'à la sortie d'un 6.

☞ Soit X la VA égale au nombre de lancers effectués.

1. Quelle est l'image de la VA X ?
2. Quelle est la loi de probabilité de X ?
3. Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de X.
4. Faire une simulation avec python.

Exercice 6 ☞ On lance deux dés à six faces, non truqués.

☞ Soient X et Y les VA égales resp. au minimum et au maximum obtenus.

1. Déterminer la loi de (X, Y), les lois marginales.
2. Étudier l'indépendance de X et Y.
3. Calculer les espérances de X, Y et XY.
4. Écrire un programme python simulant 1000 lancers et calculer les espérances expérimentales de X, Y et XY.

Exercice 7 ☞ On lance deux dés bien équilibrés

☞ On considère la VA X égale à la somme des deux numéros obtenus.

1. Déterminer la loi de probabilité de X
2. Calculer l'espérance et la variance de X
3. Effectuer des simulations avec python

Exercice 8 ☞ On considère une urne contenant N boules : B_1, B_2, …, B_N.

☞ On effectue N tirages avec remise, en supposant l'équipbté des résultats.

☞ $\forall i \in [\![1, n]\!]$, on note X_i la VA prenant la valeur 1 si la boule B_i sort lors du i^{e} tirage, et la valeur 0 sinon.

☞ On pose $S_N = X_1 + X_2 + \ldots + X_N$.

☞ Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $p(N, k)$ la pbté de l'événement $S_N = k$.

1. Déterminer l'esp de X_i. En déduire celle de S_N.
2. Montrer que $p(N, k) = 0$ lorsque $k > N$ et que $p(N, k) = \binom{N}{k}\left(1 - \frac{1}{N}\right)^{N-k} \frac{1}{N^k}$ si $0 \leqslant k \leqslant N$.

3. Pour $k \in \mathbb{N}$ fixé, déterminer $\lim\limits_{N \to +\infty} p(N, k)$. (On commencera par traiter les cas $k = 0$, $k = 1$ et $k = 2$.)

Exercice 9 ☞ On considère une urne contenant $N \geqslant 2$ boules : B_1, B_2, ..., B_N.

- ☞ On effectue N tirages sans remise, en supposant l'équipbté des résultats.
- ☞ Pour tout $i \in [\![1, N]\!]$, on note Y_i la VA prenant la valeur 1 si la boule B_i sort lors du i^{e} tirage, et la valeur 0 sinon.
- ☞ On pose $T_N = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_N$.

1. Déterminer l'esp de Y_i et celle de Y_iY_j où $1 \leqslant i < j \leqslant N$.
2. Calculer la covariance de Y_i et Y_j ($\text{Cov}(Y_i, Y_j) = E(Y_iY_j) - E(Y_i)E(Y_j)$.)
3. Montrer que si deux VA sont indép, alors leur covariance est nulle. La réciproque est-elle vraie ?
4. Les VA Y_i et Y_j sont-elles indép ?
5. Déterminer $E(T_N)$ et $V(T_N)$.

Exercice 10 Soient $k, n \in \mathbb{N}$ tel que $0 < 3k \leqslant n$.

1. Démontrer que pour tout $i \in \mathbb{N}$ tel que $i \leqslant k - 1$ on a $\binom{n}{i} \leqslant \frac{1}{2}\binom{n}{i+1}$.
2. Démontrer que pour tout $i \in \mathbb{N}$ tel que $i \leqslant k$ on a $\binom{n}{i} \leqslant \frac{1}{2^{k-i}}\binom{n}{k}$.
3. En déduire que $\binom{n}{k} \leqslant \sum\limits_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \leqslant 2\binom{n}{k}$.

On suppose :

- ☞ Monsieur X vend des journaux, sur le marché, le samedi matin.
- ☞ Il propose, au choix, deux quotidiens A et B.
- ☞ Il dispose d'un stock de 40 exemplaires de A et de 40 exemplaires de B.
- ☞ Aucun client ne demande A et B.
- ☞ Si un client demande A (resp. B) alors que le stock de A (resp. B) est épuisé alors il part sans demander B (resp. A).
- ☞ Un samedi, 60 clients se présentent dans la matinée.
- ☞ Chaque client demande soit A, soit B avec la même pbté $\frac{1}{2}$.
- ☞ Y est la VA égale au nb de clients qui demandent A.
- ☞ x la pbté de “M. X ne satisfait pas à toutes les demandes”

1. Déterminer la loi de Y. Donner son esp. et sa var.
2. Exprimer x à l'aide de la loi de Y
3. Déduire de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev un majorant de x.

4. Déduire des questions préliminaires un encadrement de x

5. Comparer les résultats des deux questions précédentes.

Exercice 11 On vous propose le jeu suivant :

☞ Vous lancez un dé à six faces bien équilibré jusqu'à ce que le résultat, noté p, soit un nombre premier.

☞ Soit n le nombre de lancers effectués.

☞ Vous recevez à l'issue de ce jeu la somme $p - n$ euros (dans le cas où $p - n < 0$, c'est vous qui versez la somme $n - p$).

1. Acceptez-vous de jouer ?

2. Faire quelques simultations avec python.

Exercice 12 ☞ Une urne contient des boules, dont B sont bleues et R sont rouges.

☞ On prélève simulanément n boules de l'urne ($n \leqslant B + R$)

☞ On note X la VA égale au nb de boules bleues dans l'échantillon.

1. Quel univers peut-on associer à cette expérience aléatoire ?

2. Déterminer la loi de pbté de X. On notera $X \rightsquigarrow H(B, R, n)$

3. Calculer l'espérance de X

4. Calculer la variance de X

Exercice 13 ☞ On considère où a est un réel fixé.

☞ On considère un couple de VA (X, Y)

 ➪ dont l'image est $[\![1, n]\!]^2$
 ➪ de loi définie par $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2 \quad P(X = i, Y = j) = \frac{a \cdot i \cdot j}{n^2(n+1)^2}$

1. Déterminer la valeur de a

2. Déterminer les lois marginales de X et de Y

3. Calculer $E(X)$ et $E(Y)$

4. Calculer $V(X)$ et $V(Y)$

5. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 14 ☞ Sur des cases numérotées de 0 à n, on place un pion en position 0.

☞ À chaque instant, il a une probabilité de $\frac{1}{2}$ d'avancer d'une case.

☞ On fait le test n fois et on note sur quelle case le pion finit.

1. Écrire une fonction python `CaseFinale(n)` qui renvoie la case où finit le pion.

2. Faire 500 fois l'expérience et tracer un graphe représentant la fréquence d'occurrence de chaque valeur entre 0 et n, dans le cas où $n = 50$.
3. Écrire un programme `binom(n)` renoyant la liste des coefficients $\binom{n}{k}$.
4. Représenter la liste des coefficients binomiaux $\binom{50}{k}$

Exercice 15 ☞ On donne $\Omega = \{(0,1),(0,-1),(1,0),(-1,0)\}$ et $X_0 = (0,0)$

☞ X_n représente la position d'un objet dans le plan

☞ $V_n \in \Omega$ est la VA donnant le n^{e} déplacement : $X_{n+1} = X_n + V_{n+1}$

1. Écrire une fonction `deplacement` retournant un élément de Ω de manière aléatoire suivant la loi uniforme.
2. Écrire une fonction `trajectoire(n)` retournant une liste $[X_0, X_1 \ldots, X_n]$ de positions successives.
3. Tester cette fonction et afficher les trajectoires pour $n = 10$.
4. Écrire une fonction `premierretour(n)` retournant l'indice i de premier retour à l'origine de l'objet quand il en existe un, et -1 sinon.
5. On note T la VA donnant l'indice du premier retour à l'origine. Peut-on conjecturer, à l'aide d'un programme que T est bien définie ?

Exercice 16 Peut-on truquer deux dés de telle sorte que leur somme suive une loi uniforme ?

Exercice 17 ☞ Soient $X_1, \ldots, X_n$ des VA indép.

☞ $\forall i \in [\![1, n]\!] \quad X_i \rightsquigarrow B(\frac{1}{i})$

☞ On définit la VA N_n égale à :

- ➪ 0 si $X_1 = X_2 = \ldots = X_n = 1$
- ➪ $\min\{k \in [\![1, n]\!] / X_k = 0\}$ sinon

1. Trouver la loi de la VA N_n
2. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} E(N_n)$
3. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} V(N_n)$
4. Simulations python.

Exercice 18 ☞ On lance une pièce avec une pbté p de faire «pile».

☞ On note N le nb de lancers effectués pour obtenir le premier «pile».

☞ Si on obtient «pile» pour la première fois au n^{e} lancer :

- ➪ on relance n fois la pièce
- ➪ on note X le nb de «pile» obtenus au cours de ces n lancers.

1. Déterminer la loi de N
2. Déterminer la loi du couple (N, X)
3. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in]-1, 1[\quad \sum\limits_{a=k}^{\infty} \binom{a}{k} x^{a-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$
4. Déterminer la loi de X
5. Simulations python.

Exercice 19 ☞ On pioche une poignée de jetons dans une urne en contenant n, numérotés de 1 à n.

☞ On suppose que toutes les poignées (y compris la poignée vide) ont la même probabilité d'être tirées.

1. Donner l'espérance de la VA S égale à la somme des numéros tirés.
2. Simulations python

Exercice 20 ☞ la pbté d'obtenir «pile» en lançant une pièce est $p \in]0, 1]$.

☞ E_n l'évt "ne pas obtenir deux «pile» d'affilée au cours des n premiers lancers" et e_n sa pbté.

☞ T la VA égale au premier rang n où on obtient deux «pile» d'affilée.

1. Écrire un programme python qui prend n et p en paramètres et renvoie True si E_n est réalisé et False sinon.
2. Montrer que $e_{n+2} = (1-p)e_{n+1} + p(1-p)e_n$
3. En déduire que l'évt "obtenir 2 «pile» d'affilée sur un nombre infini de lancers" est presque sûr.
4. Donner la loi de probabilité T.
5. Donner la fonction génératrice de T.
6. Montrer que T admet une espérance et la calculer.
7. Écrire un programme qui vérifie la valeur de cette espérance.

Exercice 21 ☞ Les coeff. d'une matrice aléatoire $M \in M_n(\mathbb{R})$ suivent tous une loi de Bernoulli de paramètre p.

1. Donner la loi de tr(M).
2. Calculer l'espérance de $(\mathrm{tr(M)})^2$.
3. On suppose les coeff. de M indép. Ceux de M^2 le sont-ils ?