

# Determinants

**Exercice 1** Soient

1.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

2.  $B(a) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$

3.  $C(a) = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}$

4.  $D(a) = \begin{pmatrix} 2-a & 3 \\ 1 & 4-a \end{pmatrix}$

☞ Calculer les déterminants de chaque matrice

☞ Donner leur inverse lorsqu'elles sont inversibles

**Exercice 2** Calculer

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

**Exercice 3** Quel est le déterminant d'une matrice  $A \in A_3(\mathbb{K})$  ?

**Exercice 4** Donner si elle existe, l'inverse de la matrice :  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

**Exercice 5** Soit  $V = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$ .

Donner une expression factorisée de  $\det V$ .

**Exercice 6** Soient

☞  $\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$

☞  $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$

☞ Simplifier  $\det(\Omega A)$

☞ en déduire une expression factorisée de  $\det A$

**Exercice 7** Calculer

$$\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$$

**Exercice 8** Calculer

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & a+c & a+b \\ bc & ac & ab \end{vmatrix}$$

**Exercice 9** Calculer  $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$

où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont les racines du polynôme  $X^3 - X + 1$ .

**Exercice 10** Calculer

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos(x) & \cos(y) & \cos(z) \\ \cos(2x) & \cos(2y) & \cos(2z) \end{vmatrix}$$

**Exercice 11** ☞ Soit  $A \in A_4(\mathbb{K})$ .

☞ Écrire  $\det A$  comme le carré d'une expression simple (Pfaffien).

**Exercice 12** Calculer

$$\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix}$$

**Exercice 13** Soit  $A_n \in M_n(\mathbb{R})$  définie par

☞  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad (A_n)_{i,i} = 5$

☞  $\forall i \in \llbracket 2, n \rrbracket \quad (A_n)_{i-1,i} = (A_n)_{i,i-1} = 2$

☞  $\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad |i - j| > 1 \Rightarrow (A_n)_{i,j} = 0$

Calculer  $\det A_n$

**Exercice 14** Soit  $A_n \in M_n(\mathbb{R})$  définie par  $\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad (A_n)_{i,j} = |i - j|$ .

Calculer  $\det(A_n)$

**Exercice 15** Calculer le déterminant de Vandermonde :

$$V(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

**Exercice 16** Soient

☞  $(a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 3}}$  une famille de fonctions dérivables de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$

☞  $f(x) = \begin{vmatrix} a_{1,1}(x) & a_{1,2}(x) & a_{1,3}(x) \\ a_{2,1}(x) & a_{2,2}(x) & a_{2,3}(x) \\ a_{3,1}(x) & a_{3,2}(x) & a_{3,3}(x) \end{vmatrix}$

1. Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et que  $f'$  a pour expression

$$\begin{vmatrix} a'_{1,1}(x) & a_{1,2}(x) & a_{1,3}(x) \\ a'_{2,1}(x) & a_{2,2}(x) & a_{2,3}(x) \\ a'_{3,1}(x) & a_{3,2}(x) & a_{3,3}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,1}(x) & a'_{1,2}(x) & a_{1,3}(x) \\ a_{2,1}(x) & a'_{2,2}(x) & a_{2,3}(x) \\ a_{3,1}(x) & a'_{3,2}(x) & a_{3,3}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,1}(x) & a_{1,2}(x) & a'_{1,3}(x) \\ a_{2,1}(x) & a_{2,2}(x) & a'_{2,3}(x) \\ a_{3,1}(x) & a_{3,2}(x) & a'_{3,3}(x) \end{vmatrix}$$

2. Calculer  $f_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1+x & \dots & 1+x \\ 2+x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1+x \\ 2+x & \dots & 2+x & x \end{vmatrix}$

**Exercice 17**    ☞ Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  définie par  $\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad A_{i,j} = i^2 + j^2$

☞ Calculer le déterminant de  $A$ .

**Exercice 18**    ☞ Vérifier que  $b = ((1, 2), (2, 3))$  est une base de  $\mathbb{R}^2$ .

☞  $b$  et  $bc$  définissent-elles la même orientation ?

☞ Soit  $F = ((1, -1), (-1, 2))$  et  $F' = ((2, -1), (-4, 2))$ .

☞ Calculer les déterminants de  $F$  et  $F'$  relativement aux bases  $b$  et  $bc$

**Exercice 19**    ☞ Soit  $a \in \mathbb{R}$

☞ Soit  $b = ((1, 2, a), (2, a, 4), (-1, 1, -3))$

☞ Donner une CNS sur  $a$  pour que  $b$  soit une base de  $\mathbb{R}^3$ .

**Exercice 20**    ☞ Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

☞ Soit  $g$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  canoniquement associé à la matrice  $A$ .

1. Calculer en fonction de  $\lambda \in \mathbb{R}$  le déterminant de  $g - \lambda \text{id}$ .

2. Lorsque ce déterminant est nul, préciser une base de  $\ker(g - \lambda \text{id})$ .

3. Montrer que la réunion de ces bases est une base  $b$  de  $\mathbb{R}^3$ .

4. Écrire la matrice  $A'$  de  $g$  dans la base  $b$ .

5. Quel lien y a-t-il entre  $A$  et  $A'$  ?

6. En déduire l'expression de  $A^n$ .

**Exercice 21**    ☞ Soit  $f : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$  définie par  $f(P) = P(0)(1 + X^2) + 2P'$ .

☞ Calculer  $\det f$

**Exercice 22** Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  canoniquement associé à la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ -4 & -4 & -4 \end{pmatrix}$ .

1. Déterminer les réels  $\lambda$  tels que  $f - \lambda \text{id}$  ne soit pas inversible.
2. Trouver  $u \in \ker(f + \text{id}) \setminus \{0\}$ .
3. Trouver  $w \in \ker(f^2) \setminus \ker(f)$  et  $v = f(w)$ .
4. Montrer que  $(u, v, w)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .
5. Écrire la matrice de  $f$  dans cette base.

**Exercice 23**    ☞ Soit  $f_n : P \mapsto X^2 P' - 2XP + P(1)$

- ☞ Déterminer  $n$  pour que  $f_n$  soit un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$
- ☞ Calculer alors son déterminant.

**Exercice 24**    ☞ Soit  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par  $f(x, y, z) = (x + y, y + z, x - y - z)$

- ☞ Calculer  $\det f$ .

**Exercice 25** Résoudre le système linéaire, avec et sans les formules de Cramer, et comparer l'efficacité des méthodes

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 3x - 6y = 7 \end{cases}$$

**Exercice 26** Résoudre le système linéaire, avec et sans les formules de Cramer, et comparer l'efficacité des méthodes

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + 4z = 5 \\ 3x + 5y + 9z = 10 \end{cases}$$

**Exercice 27** Soit  $a$  un paramètre réel.

Résoudre le système linéaire, avec et sans les formules de Cramer, et comparer l'efficacité des méthodes

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + 3z = 1 \\ 3x - y + 7z = a \end{cases}$$

**Exercice 28** Soit  $a$  un paramètre complexe.

Résoudre le système suivant en utilisant les formules de Cramer quand c'est possible.

$$\begin{cases} x + ay = 1 \\ y + az = a \\ ax + z = a^2 \end{cases}$$