

# Euclidiens

**Exercice 1** Soit  $\varphi : ((x, y), (x', y')) \mapsto 2xx' + xy' + x'y + yy'$

- ☞ Montrer que  $\varphi$  est un PS sur  $\mathbb{R}^2$
- ☞ Déterminer les vecteurs orthogonaux à  $(1, 1)$  pour ce PS

**Exercice 2** Soit  $\varphi : (P, Q) \mapsto \int_0^1 tP(t)Q(t)dt$

- ☞ Montrer que  $\varphi$  est un PS sur  $\mathbb{R}[X]$
- ☞ Déterminer tous les polynômes de  $\mathbb{R}_2[X]$  orthogonaux à  $X^2$

**Exercice 3** ☞ Montrer que  $\varphi : ((x, y), (x', y')) \mapsto xx' + 2xy' + 2x'y + 5yy'$  est un PS sur  $\mathbb{R}^2$

- ☞ Construire une BON pour  $\varphi$

**Exercice 4** ☞ Montrer que  $\varphi : ((x, y, z), (x', y', z')) \mapsto xx' + xy' + yx' + 2yy' + xz' + zx' + 2yz' + 2y'z + 3zz'$  est un PS sur  $\mathbb{R}^3$

- ☞ Construire une BON pour  $\varphi$

**Exercice 5** ☞ Montrer que  $\varphi : (P, Q) \mapsto \int_{-1}^1 t^2 P(t)Q(t)dt$  est un PS sur  $\mathbb{R}[X]$

- ☞ On note
  - ☞  $\langle . | . \rangle$  ce produit scalaire
  - ☞  $\| . \|$  la norme euclidienne associée
  - ☞  $P$  la famille de polynômes de coefficients dominant 1 obtenus par la méthode d'orthogonalisation de Gram-Schmidt à partir de la base canonique de  $\mathbb{R}[X]$
- ☞ Calculer  $P_0, P_1, P_2$  et  $P_3$
- ☞ Montrer que  $P_n$  a la même parité que  $n$
- ☞ Montrer que pour tout entier naturel  $n$  on a  $P_{n+1} = XP_n - \frac{\|P_n\|^2}{\|P_{n-1}\|^2} \cdot P_{n-1}$
- ☞ Montrer que  $P_n$  a  $n$  racines simples comprises strictement entre  $-1$  et  $1$

**Exercice 6** ☞ Soient  $a, b, c, d$  des réels

- ☞ On suppose que  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = ab + bc + cd + da$   
Montrer que  $a = b = c = d$

**Exercice 7** ☞ Soit  $N : (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + xy + y^2}$

- ☞ Montrer que  $N$  est une norme sur  $\mathbb{R}^2$

**Exercice 8** Soient

- ☞  $E$  un  $\mathbb{R}$ -ev
- ☞  $u \in L(E)$

☞  $\|\cdot\|$  une norme sur  $E$

☞  $N : x \mapsto \|u(x)\|$

Donner une CNS pour que  $N$  soit une norme sur  $E$

**Exercice 9** Soient

☞  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel

☞  $N : E \rightarrow \mathbb{R}$

On suppose :

☞  $\forall x \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, N(\lambda.x) = |\lambda|.N(x)$

☞  $\forall x, y \in E \quad N(x + y) \leq N(x) + N(y)$

Montrer que :

☞  $N(0) = 0$

☞  $\forall x \in E \quad N(x) \geq 0$

**Exercice 10** L'application  $N : (x, y, z) \mapsto \sqrt{x^2 + 2y^2 + 4z^2}$  est-elle une norme sur  $\mathbb{R}^3$  ?

**Exercice 11** La norme  $\|\cdot\|_1$  dans  $\mathbb{R}^2$  est-elle une norme euclidienne ?

**Exercice 12** ☞ 
$$\begin{array}{ccc} N : \mathbb{R}[X] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & \sqrt{\int_0^1 P^2(t) + P'^2(t) dt} \end{array}$$
 est-elle une norme ?

**Exercice 13** ☞ Soit  $E$  un espace vectoriel réel

☞ Soit  $N$  une norme sur  $E$

☞ la boule de centre 0 et de rayon 1 est  $B_N(0, 1) = \{x \in E / N(x) \leq 1\}$

On demande de dessiner dans  $\mathbb{R}^2$  la boule de centre 0 et de rayon 1 pour :

☞  $\|\cdot\|_1$

☞  $\|\cdot\|_2$

☞  $\|\cdot\|_\infty$

**Exercice 14** ☞ On pose  $\langle (x, y, z) | (x', y', z') \rangle = xx' + xy' + yx' + 2yy' + zz'$

☞ Vérifier que  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  est un PS dans  $\mathbb{R}^3$

☞ Trouver une base orthonormée de  $\mathbb{R}^3$  pour ce PS

**Exercice 15** ☞ Montrer que  $\langle P | Q \rangle = \int_{-1}^1 (1 - t^2) P(t) Q(t) dt$  définit un produit scalaire dans  $\mathbb{R}[X]$

☞ Trouver une base orthonormée de  $\mathbb{R}_2[X]$  pour ce produit scalaire

☞ Calculer la projection orthogonale de  $X^3$  sur  $\mathbb{R}_2[X]$

**Exercice 16**    Soit  $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y), (x', y') & \mapsto & xx' + \frac{1}{3}(xy' + yx' + yy') \end{array}$

1. Montrer que  $\varphi$  est un produit scalaire
2. Trouver une base orthonormée  $B$  pour  $\varphi$
3. Donner l'expression de  $\varphi(u, v)$ ,  $u$  et  $v$  étant donnés par leurs composantes dans la base  $B$

**Exercice 17** Dans  $\mathbb{R}^3$  muni de son produit scalaire usuel, construire une base orthonormée de  $P : x - y - z = 0$

**Exercice 18** Construire une base orthonormée de  $\mathbb{R}_3[X]$  muni du produit scalaire  $\langle P|Q \rangle = \int_1^3 P(t)Q(t)dt$ ,

**Exercice 19**    Soit  $E = C_{2\pi}(\mathbb{R})$  l'espace des fonctions continues périodiques de période  $2\pi$

☞  $(f, g) \mapsto \langle f|g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$  est un PS sur  $E$

☞  $c_0 : t \mapsto 1$

☞  $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad c_n : t \mapsto \sqrt{2} \cos(nt)$

☞  $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad s_n : t \mapsto \sqrt{2} \sin(nt)$

☞  $F = \{c_0\} \cup \{c_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} \cup \{s_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$

Montrer que la famille  $F$  est orthonormale

**Exercice 20** Déterminer dans  $\mathbb{R}^3$  les supplémentaires orthogonaux des sous-espaces vectoriels suivants :

☞  $A : x + y - 2z = 0$

☞  $B : \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$

**Exercice 21** Déterminer les sous-espaces orthogonaux des sous-espaces vectoriels suivants :

1.  $F = \{M \in M_2(\mathbb{R}) / \text{tr}(A) = 0\}$  (pour le produit scalaire  $\langle A|B \rangle = \text{tr}({}^tA.B)$ )

2.  $G = \{P \in \mathbb{R}_2[X] / P(1) = 0\}$  (pour le produit scalaire  $(P, Q) \mapsto \int_0^1 P(x)Q(x)dx$ )

**Exercice 22** Soient

☞  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $a < b$

☞  $F = C([a, b], \mathbb{R}_+)$

On demande

☞ Calculer  $\inf_{f \in F} \left( \int_a^b f(t)dt \right) \left( \int_a^b \frac{dt}{f(t)} \right)$

☞ Trouver les  $f$  donnant le minimum

**Exercice 23**    Soit  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$  est un vecteur unitaire de  $\mathbb{R}^3$

☞  $P : \alpha x + \beta y + \gamma z = 0$

- ☞  $\pi$  la projection orthogonale sur  $P$
- ☞  $s$  la symétrie orthogonale par rapport à  $P$
- ☞ Calculer  $M_{bc}(\pi)$  et  $M_{bc}(s)$

**Exercice 24** ☞ On suppose  $\mathbb{R}^2$  muni de son produit scalaire usuel

- ☞  $D : x - 2y = 0$
- ☞ Expliciter  $p$  la projection orthogonale sur  $D$

**Exercice 25** Dans  $\mathbb{R}^3$  on considère  $V : x + y + 2z = 0$  et  $w = (3, 2, 1)$

- ☞ Calculer la projection orthogonale de  $w$  sur  $V$ 
  - ⇔ En utilisant une BON de  $V$
  - ⇔ En utilisant la méthode des moindres carrés

**Exercice 26** Dans  $\mathbb{R}_2[X]$  on pose :

- ☞  $\langle P|Q \rangle = P(0)Q(0) + P'(0)Q'(0) + P''(0)Q''(0)$
- ☞  $F = \text{Vect}(1 - X, X^2)$
- ☞  $\pi$  la projection orthogonale sur  $F$

On demande de :

- ☞ Vérifier que  $\langle .|. \rangle$  est un PS dans  $\mathbb{R}_2[X]$
- ☞ calculer  $M_{bc}(\pi)$

**Exercice 27** ☞ Soit  $E$  un euclidien

- ☞  $(e_1, \dots, e_n)$  une BON de  $E$
- ☞  $D$  une droite de  $E$
- ☞  $p$  la projection orthogonale sur  $D$
- Montrer que  $\sum_{i=1}^n \|p(e_i)\|^2 = 1$

**Exercice 28** Soient

- ☞  $\varphi : (x, y, z), (x', y', z') \mapsto 2xx' + xy' + xz' + yx' + 2yy' + yz' + zx' + zy' + 4zz'$
- ☞  $(e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$
- ☞  $A \in M_3(\mathbb{R})$  telle que  $\forall i, j \quad A_{i,j} = \varphi(e_i, e_j)$

On demande :

1. Montrer que  $\varphi$  est un PS sur  $\mathbb{R}^3$
2. Trouver les réels  $\lambda$  tels que  $\det(A - \lambda I) = 0$
3. Pour chaque solution  $\lambda$ , trouver une matrice colonne  $X$  non nulle telle que  $AX = \lambda X$

4. Trouver une base de  $\mathbb{R}^3$  qui soit à la fois orthogonale pour le produit scalaire  $\varphi$  et pour le produit scalaire usuel

**Exercice 29** On note

- ☞  $\langle . | . \rangle$  le PS de LEGENDRE dans  $\mathbb{R}[X]$
- ☞  $\| . \|$  la norme associée à  $\langle . | . \rangle$
- ☞  $L_n = \frac{d^n}{dX^n} (1 - X^2)^n$  le  $n^e$  polynôme de LEGENDRE

On demande de :

- ☞ montrer que la famille  $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est orthogonale  $\langle . | . \rangle$
- ☞ calculer  $\|L_n\|$

**Exercice 30** Soient

- ☞  $E$  un espace vectoriel euclidien
- ☞  $B = (e_1, \dots, e_n)$  une famille de vecteurs unitaires tels que pour tout  $x \in E$  :

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle x | e_i \rangle^2$$

Montrer que  $B$  est une base orthonormale de  $E$ .

**Exercice 31** Soient

- ☞  $P$  un plan euclidien
- ☞  $u$  et  $v$  deux vecteurs unitaires de  $P$
- ☞  $s = \langle u | v \rangle$

Montrer que

1.  $(u, v)$  est libre si et seulement si  $|s| \neq 1$ .
2. On suppose  $(u, v)$  libre :  
pour tout  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , il existe un unique vecteur  $x$  de  $P$  tel que  $\langle u | x \rangle = a$  et  $\langle v | x \rangle = b$

**Exercice 32** Soient

- ☞  $\varphi$  un produit scalaire sur  $\mathbb{R}^n$
- ☞  $A \in M_n(\mathbb{R})$  définie par  $A_{i,j} = \varphi(e_i, e_j)$

Montrer qu'il existe  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  telle que  $A = {}^t P P$

**Exercice 33** Soit

- ☞  $E$  un ev euclidien
- ☞  $H$  un hyperplan de  $E$

On demande

1. Montrer qu'il existe  $u \in E$  tel que  $\forall x \in H \quad \langle u|x \rangle = 0$
2. Déterminer  $H^\perp$

**Exercice 34**    Dans  $\mathbb{R}^3$  muni du ps canonique

▮  $F : x + y - 2z = 0$

Déterminer

1. une BON  $b = (b_1, b_2, b_3)$  de  $\mathbb{R}^3$  telle que  $(b_1, b_2)$  soit une base de  $F$
2. la matrice de passage de  $bc$  à  $b$  et celle de  $b$  à  $bc$

**Exercice 35** Soient

▮  $E$  un espace préhilbertien réel

▮  $F$  et  $G$  deux ssev de  $E$

Montrer

1.  $F \subset G \Rightarrow G^\perp \subset F^\perp$
2.  $F^\perp \cap G^\perp = (F + G)^\perp$
3.  $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$
4. On suppose  $E$  de dim finie et  $E = F \oplus G$

▮  $E = F^\perp \oplus G^\perp$

**Exercice 36** Soient

▮  $E = C([0, 1], \mathbb{R})$

▮  $\langle u|v \rangle = \int_0^1 u(t)v(t)dt$

▮  $H = \{u \in E \mid u(0) = 0\}$

1. Déterminer  $H^\perp$
2. Déterminer  $H^{\perp\perp}$
3. A-t-on  $E = H \oplus H^\perp$  ?

**Exercice 37** Soient

▮  $E$  un espace euclidien de dimension finie  $n \geq 3$

▮  $(a, b)$  une famille orthonormale de  $E$

▮  $f : E \rightarrow E$  définie par  $f(x) = \langle x|a \rangle b - \langle x|b \rangle a$

Montrer que  $\text{Im} f = (\ker f)^\perp$

**Exercice 38** Dans  $\mathbb{R}[X]$  muni du PS  $\langle P|Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$

1. Déterminer le projecté orthogonal de  $X^2$  sur  $\mathbb{R}_1[X]$
2. Déterminer le projecté orthogonal de  $X$  sur  $\text{Vect}X^2$

**Exercice 39** Soient

$$\text{☞ } E = C([-1, 1], \mathbb{R})$$

$$\text{☞ } \langle u|v \rangle = \int_{-1}^1 u(t)v(t)dt$$

$$\text{☞ } F = \{u \in E / u|_{[0,1]} = 0\}$$

Montrer que

$$\text{☞ } F^\perp = \{u \in E / u|_{[-1,0]} = 0\}$$

$$\text{☞ } F^{\perp\perp} = F$$

$$\text{☞ } F + F^\perp = \{u \in E / u(0) = 0\}$$