Integration

Exercice 1 Soit

☞ $f \in C(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$

☞ $G : x \mapsto \int_x^{2x} f(t)dt$

On demande de :

1. Trouver l'ensemble de définition de G.
2. Montrer que G est dérivable sur son ens de définition
3. Calculer la dérivée de G

Exercice 2 Calculer

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$$

Exercice 3 Calculer

$$\int_0^1 \arctan x dx$$

Exercice 4 Calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^{\pi/6} \frac{dx}{\cos^4 x + \sin^4 x}$$

Exercice 5 Calculer

$$I = \int_0^{\pi} \sin x \cdot \mathrm{sh} x dx$$

Exercice 6 Calculer

$$I = \int_1^2 \frac{dx}{x^4(x^6+1)^2}$$

Exercice 7 calculer

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

Exercice 8 Étudier la parité de

$$f : x \mapsto \int_x^{3x} e^{t^2} dt$$

Exercice 9 Calculer

$$\int \frac{x^3 dx}{(1+x^2)^3}$$

Exercice 10 Calculer

$$I = \int_2^8 \frac{x^2 dx}{(10+2x+x^2)^3}$$

Exercice 11 Calculer

$$\int (\sin^2 x) e^{-x} dx$$

- ☞ En utilisant des fonctions à valeurs complexes
- ☞ En utilisant une IPP

Exercice 12 Calculer

$$I = \int_0^{\pi/6} \frac{dx}{\cos x\sqrt{1-\sin x}}$$

Exercice 13 Calculer

$$I = \int_0^1 \frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx$$

Exercice 14 Calculer

$$I = \int_0^1 \frac{xdx}{(1+x)^2(2+x)(1+x^2)}$$

Exercice 15 Calculer

$$\int \frac{1}{\mathrm{ch}x}dx$$

Exercice 16 Calculer

$$I = \int_1^e x\ln x dx$$

Exercice 17 Calculer

$$I = \int_0^{2\pi} \sin^6 x\cos^3 x dx$$

Exercice 18 Calculer les primitives de

$$x \mapsto \frac{e^x}{1+e^{3x}}$$

Exercice 19 Calculer

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{(2+2x+x^2)^4}$$

Exercice 20 Calculer

$$\int \tan^4 x dx$$

Exercice 21 Calculer

$$I = \int_0^{\pi} \frac{dt}{2+\sin t}$$

Exercice 22 Calculer

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin^2 x+\cos x}dx$$

Exercice 23 Calculer

$$I = \int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\cos^2 x}$$

Exercice 24 Calculer

$$I = \int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+4x+5}}dx$$

Exercice 25 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}dx$$

On demande

- ☞ d'étudier la convergence de la suite (I_n)
- ☞ de déterminer un équivalent en $+\infty$ de $\int_0^1 x^n \ln(1+x^2)dx$

Exercice 26 Soit $f \in C([a,b],\mathbb{R})$ tel que

$$\forall x \in [a,b] \quad f(x) = f(a+b-x)$$

1. Montrer que
$$\int_a^b xf(x)dx = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$$
2. Calculer
$$I = \int_0^\pi \frac{x\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}dx$$

Exercice 27 Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $-1 < a < 1$.
Étudier la suite

$$\left(\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}a^k}{k}\right)$$

Exercice 28 On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin nx}{\sin x}dx$

1. Justifier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'existence de u_n
2. Calculer $u_{n+1} - u_{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$
3. En déduire u_{2n+1} pour tout $n \in \mathbb{N}$
4. Montrer que la suite de terme général $u_{2n+1} - u_{2n}$ est cgte vers 0
5. Conclure pour la suite (u_n)

Exercice 29 Soit $f \in C([0,1],\mathbb{R})$ tel que

$$\int_0^1 f^2(t)dt = \int_0^1 f^3(t)dt = \int_0^1 f^4(t)dt$$

Déterminer f.

Exercice 30 Calculer en fonction de $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \int_0^{2\pi} \frac{\cos nx}{5+3\cos x}dx$$

Exercice 31 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = \exp x$$

Exercice 32 Calculer
$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x + 7\sin x}{2\cos x + 3\sin x} dx$$

Exercice 33 Calculer les primitives de
$$x \mapsto \frac{1}{5 + 3\cos x}$$

Exercice 34 Soit

- ☞ $a, b \in \mathbb{R}_+^*$
- ☞ f une fonction paire continue sur $[-a, a]$
- ☞ $I = \int_{-a}^{a} \frac{f(x)+1}{b^x+1} dx$

Montrer que
$$I = a + \int_0^a f(x)dx$$

Exercice 35 Calculer $I = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}} dx$.

Exercice 36 Soit f une fonction vérifiant $\forall x \in [0, e] \quad x = f(x)e^{f(x)}$.
Calculer
$$\int_0^e f(x)dx$$

Exercice 37 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note
$$I_n = \int_0^{2\pi} \cos(x)\cos(2x)\cdots\cos(nx)dx$$

Déterminer les entiers n tel que $I_n \neq 0$.

Exercice 38 Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$
Déterminer
$$\lim_{x \to 0} \int_{ax}^{bx} \frac{\cos t}{t} dt$$

Exercice 39

1. Montrer : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists! y \in \mathbb{R} \quad \int_x^y \exp(t^2)dt = 1$.
   On pose $y = f(x)$
2. Donner un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$

Exercice 40 Soit $g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $f : x \mapsto \int_0^x \sin(x - t) \cdot g(t)dt$

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f.
2. En transformant $\sin(x - t)$, donner une nouvelle expression de f.
3. Montrer que f est dérivable sur D.
4. Calculer sa dérivée.

5. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $y'' + y = g$.

Exercice 41 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1-x^2} \ln x dx$

1. Justifier l'existence de I_n
2. Étudier la convergence de la suite (I_n)
3. Donner un équivalent de (I_n)

Exercice 42 Calculer
$$K = \int_0^{\sqrt{\pi}} \frac{t\sin(t^2)}{3+\sin^2(t^2)} dt$$

Exercice 43 ☞ Soit $f \in C([0,1],\mathbb{R})$ telle que $\int_0^1 f(t)dt = 0$

☞ On pose $m = \inf\limits_{[0,1]} f$ et $M = \sup\limits_{[0,1]} f$

1. Que dire de la fonction $g = (M-f)(f-m)$?
2. Prouver que $\int_0^1 f^2(t)dt \leqslant -mM$
3. Montrer que f s'annule au moins une fois.

Exercice 44 On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x+n} dx$

1. Donner la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.
2. Donner un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 45 Soit

☞ $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$

☞ $f \in C^2([a,b],\mathbb{R})$ telle que $f(a) = f(b) = 0$.

Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $\int_a^b f(t)dt = -\frac{f''(c)}{12}(b-a)^3$

Exercice 46 Soit $f \in C([0,1],\mathbb{R})$ telle que

☞ f est strictement croissante

☞ $f(0) = 0$

☞ $f(1) = 1$

Calculer $\int_0^1 (f(x) + f^{-1}(x))dx$