

Integration

Exercice 1 Soit

$$\text{☞ } f \in C(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$$

$$\text{☞ } G : x \mapsto \int_x^{2x} f(t) dt$$

On demande de :

1. Trouver l'ensemble de définition de G .
2. Montrer que G est dérivable sur son ens de définition
3. Calculer la dérivée de G

Exercice 2 Calculer

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$$

Exercice 3 Calculer

$$\int_0^1 \arctan x dx$$

Exercice 4 Calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^{\pi/6} \frac{dx}{\cos^4 x + \sin^4 x}$$

Exercice 5 Calculer

$$I = \int_0^\pi \sin x \cdot \operatorname{sh} x dx$$

Exercice 6 Calculer

$$I = \int_1^2 \frac{dx}{x^4(x^6+1)^2}$$

Exercice 7 calculer

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

Exercice 8 Étudier la parité de

$$f : x \mapsto \int_x^{3x} e^{t^2} dt$$

Exercice 9 Calculer

$$\int \frac{x^3 dx}{(1+x^2)^3}$$

Exercice 10 Calculer

$$I = \int_2^8 \frac{x^2 dx}{(10+2x+x^2)^3}$$

Exercice 11 Calculer

$$\int (\sin^2 x) e^{-x} dx$$

☞ En utilisant des fonctions à valeurs complexes

☞ En utilisant une IPP

Exercice 12 Calculer

$$I = \int_0^{\pi/6} \frac{dx}{\cos x \sqrt{1 - \sin x}}$$

Exercice 13 Calculer

$$I = \int_0^1 \frac{1 + \sqrt{x}}{1 + \sqrt[3]{x}} dx$$

Exercice 14 Calculer

$$I = \int_0^1 \frac{x dx}{(1+x)^2(2+x)(1+x^2)}$$

Exercice 15 Calculer

$$\int \frac{1}{\operatorname{ch} x} dx$$

Exercice 16 Calculer

$$I = \int_1^e x \ln x dx$$

Exercice 17 Calculer

$$I = \int_0^{2\pi} \sin^6 x \cos^3 x dx$$

Exercice 18 Calculer les primitives de

$$x \mapsto \frac{e^x}{1 + e^{3x}}$$

Exercice 19 Calculer

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{(2 + 2x + x^2)^4}$$

Exercice 20 Calculer

$$\int \tan^4 x dx$$

Exercice 21 Calculer

$$I = \int_0^\pi \frac{dt}{2 + \sin t}$$

Exercice 22 Calculer

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin^2 x + \cos x} dx$$

Exercice 23 Calculer

$$I = \int_0^\pi \frac{dx}{1 + \cos^2 x}$$

Exercice 24 Calculer

$$I = \int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}} dx$$

Exercice 25 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx$$

On demande

☞ d'étudier la convergence de la suite (I_n)

☞ de déterminer un équivalent en $+\infty$ de $\int_0^1 x^n \ln(1+x^2) dx$

Exercice 26 Soit $f \in C([a, b], \mathbb{R})$ tel que

$$\forall x \in [a, b] \quad f(x) = f(a+b-x)$$

1. Montrer que

$$\int_a^b x f(x) dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx$$

2. Calculer

$$I = \int_0^\pi \frac{x \sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}} dx$$

Exercice 27 Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $-1 < a < 1$.

Étudier la suite

$$\left(\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1} a^k}{k} \right)$$

Exercice 28 On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin nx}{\sin x} dx$

1. Justifier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'existence de u_n

2. Calculer $u_{n+1} - u_{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

3. En déduire u_{2n+1} pour tout $n \in \mathbb{N}$

4. Montrer que la suite de terme général $u_{2n+1} - u_{2n}$ est cgte vers 0

5. Conclure pour la suite (u_n)

Exercice 29 Soit $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$ tel que

$$\int_0^1 f^2(t) dt = \int_0^1 f^3(t) dt = \int_0^1 f^4(t) dt$$

Déterminer f .

Exercice 30 Calculer en fonction de $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \int_0^{2\pi} \frac{\cos nx}{5+3\cos x} dx$$

Exercice 31 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = \exp x$$

Exercice 32 Calculer

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x + 7 \sin x}{2 \cos x + 3 \sin x} dx$$

Exercice 33 Calculer les primitives de

$$x \mapsto \frac{1}{5 + 3 \cos x}$$

Exercice 34 Soit

$$\text{⌚ } a, b \in \mathbb{R}_+^*$$

$$\text{⌚ } f \text{ une fonction paire continue sur } [-a, a]$$

$$\text{⌚ } I = \int_{-a}^a \frac{f(x)+1}{b^x+1} dx$$

Montrer que

$$I = a + \int_0^a f(x) dx$$

Exercice 35 Calculer $I = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}} dx$.

Exercice 36 Soit f une fonction vérifiant $\forall x \in [0, e] \quad x = f(x)e^{f(x)}$.
Calculer

$$\int_0^e f(x) dx$$

Exercice 37 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$I_n = \int_0^{2\pi} \cos(x) \cos(2x) \cdots \cos(nx) dx$$

Déterminer les entiers n tel que $I_n \neq 0$.

Exercice 38 Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$
Déterminer

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_{ax}^{bx} \frac{\cos t}{t} dt$$

Exercice 39 1. Montrer : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists ! y \in \mathbb{R} \quad \int_x^y \exp(t^2) dt = 1$.

On pose $y = f(x)$

2. Donner un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$

Exercice 40 Soit $g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $f : x \mapsto \int_0^x \sin(x-t) \cdot g(t) dt$

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f .

2. En transformant $\sin(x-t)$, donner une nouvelle expression de f .

3. Montrer que f est dérivable sur D .

4. Calculer sa dérivée.

5. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $y'' + y = g$.

Exercice 41 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1-x^2} \ln x dx$

1. Justifier l'existence de I_n
2. Étudier la convergence de la suite (I_n)
3. Donner un équivalent de (I_n)

Exercice 42 Calculer

$$K = \int_0^{\sqrt{\pi}} \frac{t \sin(t^2)}{3 + \sin^2(t^2)} dt$$

Exercice 43 ☞ Soit $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $\int_0^1 f(t) dt = 0$

☞ On pose $m = \inf_{[0,1]} f$ et $M = \sup_{[0,1]} f$

1. Que dire de la fonction $g = (M - f)(f - m)$?
2. Prouver que $\int_0^1 f^2(t) dt \leq -mM$
3. Montrer que f s'annule au moins une fois.

Exercice 44 On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x+n} dx$

1. Donner la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.
2. Donner un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 45 Soit

☞ $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$

☞ $f \in C^2([a, b], \mathbb{R})$ telle que $f(a) = f(b) = 0$.

Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $\int_a^b f(t) dt = -\frac{f''(c)}{12}(b-a)^3$

Exercice 46 Soit $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$ telle que

☞ f est strictement croissante

☞ $f(0) = 0$

☞ $f(1) = 1$

Calculer $\int_0^1 (f(x) + f^{-1}(x)) dx$