Reduction-des-Matrices

Exercice 1 Soit

- ☞ $$A = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_n & \dots & a_n \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C})$$
- ☞ $\sigma = \sum_{k=1}^{n} a_k$
- ☞ $B = 2A - \sigma I_n$

1. Calculer A^2.
2. Donner une CNS pour que B soit inversible et préciser B^{-1}

Exercice 2 Soit

- ☞ $n \in \mathbb{N}^*$
- ☞ $A, B \in M_n(\mathbb{R})$
- ☞ $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(0) = 1$ et $AB = P(A)$.

1. Montrer que A est inversible
2. Montrer que A et B commutent.

Exercice 3 ☞ $n \in \mathbb{N}^*$

- ☞ $c \in \mathbb{C}^*$
- ☞ $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ tel que $A \cdot B - B \cdot A = c \cdot A$

1. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N} \quad A^k \cdot B - B \cdot A^k = k \cdot c \cdot A^k$
2. Montrer que A est nilpotente
$$\exists k \in \mathbb{N}^* \quad A^k = 0$$

Exercice 4 Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$ vérifiant $M^3 - 4M^2 + 4M = 0$ et $\mathrm{tr(M)} = 0$

1. Montrer que toutes les valeurs propres de M sont racines du polynôme $X^3 - 4X^2 + 4X$
2. Trouver toutes les matrices vérifiant ces hypothèses.

Exercice 5 Soit

- ☞ $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ tel que $A \cdot B = B \cdot A$ et $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A \end{pmatrix}$

1. Montrer que si
   - ☞ $U, V \in M_n(\mathbb{C})$ sont semblables
   - ☞ R un polynôme

alors $R(U)$ est semblable à $R(V)$

2. Pour $P \in \mathbb{C}[X]$, calculer $P(M)$
3. Montrer que si
   - ☞ A est diagonalisable
   - ☞ B nulle

   alors M est diagonalisable.
4. Étudier la réciproque.

Exercice 6 Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $M^3 + M^2 + M = 0$.
Montrer que tr(M) $\in \mathbb{Z}$

Exercice 7 Soit $A, B, C \in M_2(\mathbb{C})$
Montrer l'égalité de Wigner

$$(AB - BA)^2 C - C(AB - BA)^2 = 0$$

Exercice 8
1. Soit J la matrice de $M_n(\mathbb{C})$ dont tous les coefficients valent 1.
   Monter sans calcul que J est diagonalisable et la diagonaliser.
2. Soient $a, b \in \mathbb{C}$ et $M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix}$
   Montrer que $M(a,b)$ est diagonalisable et donner ses éléments propres.

Exercice 9 Soit

- ☞ $a \in \mathbb{C}$
- ☞ $n \in \mathbb{N}^*$
- ☞ $A \in M_n(\mathbb{C})$ de coefficients $A_{i,j} = a^{i+j-2}$

1. On suppose $a \in \mathbb{R}$. Montrer que A est diagonalisable.
2. On suppose $a \in \mathbb{C}$. Trouver les valeurs propres de A.
3. On suppose $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si tr(A) $\neq 0$.
4. Pour quelles valeurs de a, A n'est-elle pas diagonalisable ?

Exercice 10 Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^n

2. En déduire les expressions des suites vérifiant $\begin{cases} x_{n+1} &= 4x_n & -2y_n & -2z_n \\ y_{n+1} &= x_n & & -z_n \\ z_{n+1} &= x_n & -y_n & \end{cases}$

Exercice 11 Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que

☞ $A^T A = AA^T$

☞ $\exists k \in \mathbb{N}^* \quad A^k = 0$

Montrer que

1. $AA^T = 0$
2. $A = 0$.

Exercice 12 Soit

$$M = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/3 & 5/12 \\ 1/4 & 5/12 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Montrer que

1. M est diagonalisable et donner ses éléments propres.
2. M^n admet une limite N que l'on calculera.
3. N représente un projecteur dont on donnera les caractéristiques.

Exercice 13 Soit

☞ $n \in \mathbb{N}^*$

☞ $I = I_n$ matrice identité d'ordre n

☞ $M \in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 + M^T = I$

1. Trouver un polynôme annulateur de M de degré 4
2. Montrer que $M - I$ est inversible.
3. Caractériser toutes les matrices inversibles M vérifiant $M^2 + M^T = I$.

Exercice 14 Soit $M \in A_n(\mathbb{R})$

1. Montrer que $I + M$ est inversible.
2. Montrer que $A = (I - M)(I + M)^{-1}$ est orthogonale

Exercice 15 Soit

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que A est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 1 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$
2. Calculer A^n

Exercice 16 Soit $A, B \in M_n(\mathbb{C})$.

Si $(AB)^2 = 0$, a-t-on nécessairement $(BA)^2 = 0$?