Determinants

Exercice 1 Soient

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

2. $B(a) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$

3. $C(a) = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}$

4. $D(a) = \begin{pmatrix} 2-a & 3 \\ 1 & 4-a \end{pmatrix}$

☞ Calculer les déterminants de chaque matrice

☞ Donner leur inverse lorsqu'elles sont inversibles

Exercice 2 Calculer

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Exercice 3 Quel est le déterminant d'une matrice $A \in A_3(\mathbb{K})$?

Exercice 4 Donner si elle existe, l'inverse de la matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 5 Soit $V = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$.

Donner une expression factorisée de $\det V$.

Exercice 6 Soient

☞ $\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$

☞ $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$

☞ Simplifier $\det(\Omega A)$

☞ en déduire une expression factorisée de $\det A$

Exercice 7 Calculer

$$\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$$

Exercice 8 Calculer

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & a+c & a+b \\ bc & ac & ab \end{vmatrix}$$

Exercice 9 Calculer $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$
où a, b et c sont les racines du polynôme $X^3 - X + 1$.

Exercice 10 Calculer

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos(x) & \cos(y) & \cos(z) \\ \cos(2x) & \cos(2y) & \cos(2z) \end{vmatrix}$$

Exercice 11 ☞ Soit $A \in A_4(\mathbb{K})$.

☞ Écrire $\det A$ comme le carré d'une expression simple (Pfaffien).

Exercice 12 Calculer

$$\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix}$$

Exercice 13 Soit $A_n \in M_n(\mathbb{R})$ définie par

☞ $\forall i \in [\![1, n]\!] \quad (A_n)_{i,i} = 5$

☞ $\forall i \in [\![2, n]\!] \quad (A_n)_{i-1,i} = (A_n)_{i,i-1} = 2$

☞ $\forall i, j \in [\![1, n]\!] \quad |i - j| > 1 \Rightarrow (A_n)_{i,j} = 0$

Calculer $\det A_n$

Exercice 14 Soit $A_n \in M_n(\mathbb{R})$ définie par $\forall i, j \in [\![1, n]\!] \quad (A_n)_{i,j} = |i - j|$.
Calculer $\det(A_n)$

Exercice 15 Calculer le déterminant de Vandermonde :

$$V(a_1, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Exercice 16 Soient

☞ $(a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant 3 \\ 1 \leqslant j \leqslant 3}}$ une famille de fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

☞ $f(x) = \begin{vmatrix} a_{1,1}(x) & a_{1,2}(x) & a_{1,3}(x) \\ a_{2,1}(x) & a_{2,2}(x) & a_{2,3}(x) \\ a_{3,1}(x) & a_{3,2}(x) & a_{3,3}(x) \end{vmatrix}$

Exercice 17 ☞ Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ définie par $\forall i, j \in [\![1, n]\!] \quad A_{i,j} = i^2 + j^2$

☞ Calculer le déterminant de A.

Exercice 18 ☞ Vérifier que $b = ((1,2),(2,3))$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

☞ b et bc définissent-elles la même orientation ?

☞ Soit $F = ((1,-1),(-1,2))$ et $F' = ((2,-1),(-4,2))$.

☞ Calculer les déterminants de F et F' relativement aux bases b et bc

Exercice 19 ☞ Soit $a \in \mathbb{R}$

☞ Soit $b = ((1,2,a),(2,a,4),(-1,1,-3))$

☞ Donner une CNS sur a pour que b soit une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 20 ☞ Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

☞ Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A.

1. Calculer en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$ le déterminant de $g - \lambda \mathrm{id}$.
2. Lorsque ce déterminant est nul, préciser une base de $\ker(g - \lambda \mathrm{id})$.
3. Montrer que la réunion de ces bases est une base b de $\mathbb{R}^3$.
4. Écrire la matrice A' de g dans la base b.
5. Quel lien y a-t-il entre A et A' ?
6. En déduire l'expression de A^n.

Exercice 21 ☞ Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ définie par $f(P) = P(0)(1 + X^2) + 2P'$.

☞ Calculer $\det f$

Exercice 22 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ -4 & -4 & -4 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les réels λ tels que $f - \lambda \mathrm{id}$ ne soit pas inversible.
2. Trouver $u \in \ker(f + \mathrm{id}) \setminus \{0\}$.
3. Trouver $w \in \ker(f^2) \setminus \ker(f)$ et $v = f(w)$.
4. Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
5. Écrire la matrice de f dans cette base.

Exercice 23 ☞ Soit $f_n : P \mapsto X^2 P' - 2XP + P(1)$

☞ Déterminer n pour que f_n soit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$

☞ Calculer alors son déterminant.

Exercice 24 ☞ Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = (x+y, y+z, x-y-z)$

☞ Calculer $\det f$.

Exercice 25 Résoudre le système linéaire, avec et sans les formules de Cramer, et comparer l'efficacité des méthodes

$$\left\{\begin{array}{rrcr} 2x & +3y & = & 5 \\ 3x & -6y & = & 7 \end{array}\right.$$

Exercice 26 Résoudre le système linéaire, avec et sans les formules de Cramer, et comparer l'efficacité des méthodes

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x & +y & +z & = & 2 \\ 2x & +3y & +4z & = & 5 \\ 3x & +5y & +9z & = & 10 \end{array}\right.$$

Exercice 27 Soit a un paramètre réel.

Résoudre le système linéaire, avec et sans les formules de Cramer, et comparer l'efficacité des méthodes

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x & +y & +z & = & 1 \\ x & -y & +3z & = & 1 \\ 3x & -y & +7z & = & a \end{array}\right.$$

Exercice 28 Soit a un paramètre complexe.

Résoudre le système suivant en utilisant les formules de Cramer quand c'est possible.

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x & +ay & & = & 1 \\ & y & +az & = & a \\ ax & & +z & = & a^2 \end{array}\right.$$