Euclidiens

Exercice 1 Soit $\varphi : ((x,y),(x',y')) \mapsto 2xx' + xy' + x'y + yy'$

☞ Montrer que φ est un PS sur $\mathbb{R}^2$

☞ Déterminer les vecteurs orthogonaux à $(1,1)$ pour ce PS

Exercice 2 Soit $\varphi : (P,Q) \mapsto \int_0^1 tP(t)Q(t)dt$

☞ Montrer que φ est un PS sur $\mathbb{R}[X]$

☞ Déterminer tous les polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$ orthogonaux à X^2

Exercice 3 ☞ Montrer que $\varphi : ((x,y),(x',y')) \mapsto xx' + 2xy' + 2x'y + 5yy'$ est un PS sur $\mathbb{R}^2$

☞ Construire une BON pour φ

Exercice 4 ☞ Montrer que $\varphi : ((x,y,z),(x',y',z')) \mapsto xx' + xy' + yx' + 2yy' + xz' + zx' + 2yz' + 2y'z + 3zz'$ est un PS sur $\mathbb{R}^3$

☞ Construire une BON pour φ

Exercice 5 ☞ Montrer que $\varphi : (P,Q) \mapsto \int_{-1}^1 t^2P(t)Q(t)dt$ est un PS sur $\mathbb{R}[X]$

☞ On note

- ➪ $\langle .|. \rangle$ ce produit scalaire
- ➪ $\|.\|$ la norme euclidienne associée
- ➪ P la famille de polynômes de coefficients dominant 1 obtenus par la méthode d'orthogonalisation de Gram-Schmidt à partir de la base canonique de $\mathbb{R}[X]$

☞ Calculer P_0, P_1, P_2 et P_3

☞ Montrer que P_n a la même parité que n

☞ Montrer que pour tout entier naturel n on a $P_{n+1} = XP_n - \frac{\|P_n\|^2}{\|P_{n-1}\|^2} \cdot P_{n-1}$

☞ Montrer que P_n a n racines simples comprises strictement entre -1 et 1

Exercice 6 ☞ Soient a,b,c,d des réels

☞ On suppose que $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = ab + bc + cd + da$
Montrer que $a = b = c = d$

Exercice 7 ☞ Soit $N : (x,y) \mapsto \sqrt{x^2 + xy + y^2}$

☞ Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$

Exercice 8 Soient

☞ E un $\mathbb{R}$-ev

☞ $u \in L(E)$

☞ $\|.\|$ une norme sur E

☞ $N : x \mapsto \|u(x)\|$

Donner une CNS pour que N soit une norme sur E

Exercice 9 Soient

☞ E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

☞ $N : E \to \mathbb{R}$

On suppose :

☞ $\forall x \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, N(\lambda.x) = |\lambda|.N(x)$

☞ $\forall x, y \in E \quad N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$

Montrer que :

☞ $N(0) = 0$

☞ $\forall x \in E \quad N(x) \geqslant 0$

Exercice 10 L'application $N : (x, y, z) \mapsto \sqrt{x^2 + 2y^2 + 4z^2}$ est-elle une norme sur $\mathbb{R}^3$?

Exercice 11 La norme $\|.\|_1$ dans $\mathbb{R}^2$ est-elle une norme euclidienne ?

Exercice 12 ☞ $\begin{array}{rccc} N: & \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R} \\ & P & \mapsto & \sqrt{\int_0^1 P^2(t) + P'^2(t)dt} \end{array}$ est-elle une norme ?

Exercice 13 ☞ Soit E un espace vectoriel réel

☞ Soit N une norme sur E

☞ la boule de centre 0 et de rayon 1 est $B_N(0,1) = \{x \in E / N(x) \leqslant 1\}$
On demande de dessiner dans $\mathbb{R}^2$ la boule de centre 0 et de rayon 1 pour :

☞ $\|.\|_1$

☞ $\|.\|_2$

☞ $\|.\|_\infty$

Exercice 14 ☞ On pose $\langle (x, y, z) | (x', y', z') \rangle = xx' + xy' + yx' + 2yy' + zz'$

☞ Vérifier que $\langle . | . \rangle$ est un PS dans $\mathbb{R}^3$

☞ Trouver une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ pour ce PS

Exercice 15 ☞ Montrer que $\langle P | Q \rangle = \int_{-1}^1 (1-t^2)P(t)Q(t)dt$ définit un produit scalaire dans $\mathbb{R}[X]$

☞ Trouver une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire

☞ Calculer la projection orthogonale de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$

Exercice 16 ☞ Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y),(x',y') & \mapsto & xx'+\frac{1}{3}(xy'+yx'+yy') \end{array}$

1. Montrer que φ est un produit scalaire
2. Trouver une base orthonormée B pour φ
3. Donner l'expression de $\varphi(u,v)$, u et v étant donnés par leurs composantes dans la base B

Exercice 17 Dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel, construire une base orthonormée de P : $x-y-z=0$

Exercice 18 Construire une base orthonormée de $\mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire $\langle P|Q\rangle = \int_1^3 P(t)Q(t)dt$,

Exercice 19 ☞ Soit $E = C_{2\pi}(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues périodiques de période 2π

- ☞ $(f,g)\mapsto \langle f|g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$ est un PS sur E
- ☞ $c_0 : t\mapsto 1$
- ☞ $\forall n\in\mathbb{N}^* \quad c_n : t\mapsto \sqrt{2}\cos(nt)$
- ☞ $\forall n\in\mathbb{N}^* \quad s_n : t\mapsto \sqrt{2}\sin(nt)$
- ☞ $F = \{c_0\}\bigcup\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\bigcup\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$
  Montrer que la famille F est orthonormale

Exercice 20 Déterminer dans $\mathbb{R}^3$ les supplémentaires orthogonaux des sous-espaces vectoriels suivants :

- ☞ $A : x+y-2z=0$
- ☞ $B : \left\{\begin{array}{l} x-y+z=0 \\ 2x+3y=0 \end{array}\right.$

Exercice 21 Déterminer les sous-espaces orthogonaux des sous-espaces vectoriels suivants :

1. $F = \{M\in M_2(\mathbb{R})/\mathrm{tr(M)}=0\}$ (pour le produit scalaire $\langle A|B\rangle = \mathrm{tr}({}^t\mathrm{A.B})$)
2. $G = \{P\in\mathbb{R}_2[X]/P(1)=0\}$ (pour le produit scalaire $(P,Q)\mapsto\int_0^1 P(x)Q(x)dx$)

Exercice 22 Soient

- ☞ $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $a<b$
- ☞ $F = C([a,b],\mathbb{R}_+^*)$

  On demande

- ☞ Calculer $\inf\limits_{f\in F}\left\{\left(\int_a^b f(t)dt\right)\left(\int_a^b \frac{dt}{f(t)}\right)\right\}$
- ☞ Trouver les f donnant le minimum

Exercice 23 ☞ Soit $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$ est un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^3$

- ☞ $P : \alpha x+\beta y+\gamma z=0$

- ☞ π la projection orthogonale sur P
- ☞ s la symétrie orthogonale par rapport à P
- ☞ Calculer $M_{bc}(\pi)$ et $M_{bc}(s)$

Exercice 24 ☞ On suppose $\mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire usuel

- ☞ $D : x - 2y = 0$
- ☞ Expliciter p la projection orthogonale sur D

Exercice 25 Dans $\mathbb{R}^3$ on considère $V : x + y + 2z = 0$ et $w = (3, 2, 1)$

- ☞ Calculer la projection orthogonale de w sur V
  - ➪ En utilisant une BON de V
  - ➪ En utilisant la méthode des moindres carrés

Exercice 26 Dans $\mathbb{R}_2[X]$ on pose :

- ☞ $\langle P|Q\rangle = P(0)Q(0) + P'(0)Q'(0) + P''(0)Q''(0)$
- ☞ $F = \text{Vect}(1 - X, X^2)$
- ☞ π la projection orthogonale sur F

On demande de :

- ☞ Vérifier que $\langle .|.\rangle$ est un PS dans $\mathbb{R}_2[X]$
- ☞ calculer $M_{bc}(\pi)$

Exercice 27 ☞ Soit E un euclidien

- ☞ $(e_1, \dots, e_n)$ une BON de E
- ☞ D une droite de E
- ☞ p la projection orthogonale sur D

Montrer que $\sum\limits_{i=1}^{n} \|p(e_i)\|^2 = 1$

Exercice 28 Soient

- ☞ $\varphi : (x, y, z), (x', y', z') \mapsto 2xx' + xy' + xz' + yx' + 2yy' + yz' + zx' + zy' + 4zz'$
- ☞ (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$
- ☞ $A \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $\forall i, j \quad A_{i,j} = \varphi(e_i, e_j)$

On demande :

1. Montrer que φ est un PS sur $\mathbb{R}^3$
2. Trouver les réels λ tels que $\det(A - \lambda I) = 0$
3. Pour chaque solution λ, trouver une matrice colonne X non nulle telle que $AX = \lambda X$

4. Trouver une base de $\mathbb{R}^3$ qui soit à la fois orthogonale pour le produit scalaire φ et pour le produit scalaire usuel

Exercice 29 On note

- ☞ $\langle .|. \rangle$ le PS de LEGENDRE dans $\mathbb{R}[X]$
- ☞ $\|.\|$ la norme associée à $\langle .|. \rangle$
- ☞ $L_n = \frac{d^n}{dX^n}\left(1-X^2\right)^n$ le n^{e} polynôme de LEGENDRE

On demande de :

- ☞ montrer que la famille $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale $\langle .|. \rangle$
- ☞ calculer $\|L_n\|$

Exercice 30 Soient

- ☞ E un espace vectoriel euclidien
- ☞ $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une famille de vecteurs unitaires tels que pour tout $x \in E$:

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x|e_i \rangle^2$$

Montrer que B est une base orthonormale de E.

Exercice 31 Soient

- ☞ P un plan euclidien
- ☞ u et v deux vecteurs unitaires de P
- ☞ $s = \langle u|v \rangle$

Montrer que

1. (u, v) est libre si et seulement si $|s| \neq 1$.
2. On suppose (u, v) libre :
   pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, il existe un unique vecteur x de P tel que $\langle u|x \rangle = a$ et $\langle v|x \rangle = b$

Exercice 32 Soient

- ☞ φ un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$
- ☞ $e = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$
- ☞ $A \in M_n(\mathbb{R})$ définie par $A_{i,j} = \varphi(e_i, e_j)$

Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^tPP$

Exercice 33 Soit

- ☞ E un ev euclidien

☞ H un hyperplan de E

On demande

1. Montrer qu'il existe $u \in E$ tel que $H = \{x \in E / \langle u|x \rangle = 0\}$
2. Déterminer $H^\perp$

Exercice 34 ☞ Dans $\mathbb{R}^3$ muni du ps canonique

☞ $F : x + y - 2z = 0$
Déterminer

1. une BON $b = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que (b_1, b_2) soit une base de F
2. la matrice de passage de bc à b et celle de b à bc

Exercice 35 Soient

☞ E un espace préhibertien réel

☞ F et G deux ssev de E

Montrer

1. $F \subset G \Rightarrow G^\perp \subset F^\perp$
2. $F^\perp \cap G^\perp = (F + G)^\perp$
3. $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$
4. On suppose E de dim finie et $E = F \oplus G$

   ☞ $E = F^\perp \oplus G^\perp$

Exercice 36 Soient

☞ $E = C([0, 1], \mathbb{R})$

☞ $\langle u|v \rangle = \int_0^1 u(t)v(t)dt$

☞ $H = \{u \in E \ / \ u(0) = 0\}$

1. Déterminer $H^\perp$
2. Déterminer $H^{\perp\perp}$
3. A-t-on $E = H \oplus H^\perp$?

Exercice 37 Soient

☞ E un espace euclidien de dimension finie $n \geqslant 3$

☞ (a, b) une famille orthonormale de E

☞ $f : E \to E$ définie par $f(x) = \langle x|a \rangle b - \langle x|b \rangle a$

Montrer que $\mathrm{Im} f = (\ker f)^\perp$

Exercice 38 Dans $\mathbb{R}[X]$ muni du PS $\langle P|Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$

1. Déterminer le projeté orthogonal de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$
2. Déterminer le projeté orthogonal de X sur $\text{Vect}X^2$

Exercice 39 Soient

☞ $E = C([-1,1],\mathbb{R})$

☞ $\langle u|v\rangle = \int_{-1}^1 u(t)v(t)dt$

☞ $F = \{u \in E/u|_{[0,1]} = 0\}$

Montrer que

☞ $F^\perp = \{u \in E/u|_{[-1,0]} = 0\}$

☞ $F^{\perp\perp}$?

☞ $F + F^\perp = \{u \in E/u(0) = 0\}$