Euclidiens

Exercice 1 Soit $\varphi : ((x,y),(x',y')) \mapsto 2xx' + xy' + x'y + yy'$

- ☞ Montrer que φ est un PS sur $\mathbb{R}^2$
- ☞ Déterminer les vecteurs orthogonaux à $(1,1)$ pour ce PS

Exercice 2 Soit $\varphi : (P,Q) \mapsto \int_0^1 tP(t)Q(t)dt$

- ☞ Montrer que φ est un PS sur $\mathbb{R}[X]$
- ☞ Déterminer tous les polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$ orthogonaux à X^2

Exercice 3 ☞ Montrer que $\varphi : ((x,y),(x',y')) \mapsto xx' + 2xy' + 2x'y + 5yy'$ est un PS sur $\mathbb{R}^2$

- ☞ Construire une BON pour φ

Exercice 4 ☞ Montrer que $\varphi : ((x,y,z),(x',y',z')) \mapsto xx' + xy' + yx' + 2yy' + xz' + zx' + 2yz' + 2y'z + 3zz'$ est un PS sur $\mathbb{R}^3$

- ☞ Construire une BON pour φ

Exercice 5 ☞ Montrer que $\varphi : (P,Q) \mapsto \int_{-1}^1 t^2 P(t)Q(t)dt$ est un PS sur $\mathbb{R}[X]$

- ☞ On note
  - ➪ $\langle .|. \rangle$ ce produit scalaire
  - ➪ $\|.\|$ la norme euclidienne associée
  - ➪ P la famille de polynômes de coefficients dominant 1 obtenus par la méthode d'orthogonalisation de Gram-Schmidt à partir de la base canonique de $\mathbb{R}[X]$
- ☞ Calculer P_0, P_1, P_2 et P_3
- ☞ Montrer que P_n a la même parité que n
- ☞ Montrer que pour tout entier naturel n on a $P_{n+1} = XP_n - \frac{\|P_n\|^2}{\|P_{n-1}\|^2} \cdot P_{n-1}$
- ☞ Montrer que P_n a n racines simples comprises strictement entre -1 et 1

Exercice 6 ☞ Soient a, b, c, d des réels

- ☞ On suppose que $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = ab + bc + cd + da$
  Montrer que $a = b = c = d$

Exercice 7 ☞ Soit $N : (x,y) \mapsto \sqrt{x^2 + xy + y^2}$

- ☞ Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$