Partie-Entiere

Exercice 1 Soit $x \in \mathbb{R}$.
Simplifier $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor$.

Exercice 2 Soit $f : x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$

- ☞ Montrer que f est périodique.
- ☞ Représenter f graphiquement.

Exercice 3 A-t-on $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad \lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$?

Exercice 4

- ☞ Donner une définition similaire à celle de $\lfloor x \rfloor$ pour $-\lfloor -x \rfloor$.
- ☞ Représenter la fonction correspondante.

Exercice 5 Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$.
Montrer que $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.

Exercice 6 Soit $n \in \mathbb{N}^*$
Montrer que le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de n est :

$$1 + \lfloor \log n \rfloor$$

Exercice 7 Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, établir :

$$0 \leqslant \lfloor nx \rfloor - n\lfloor x \rfloor \leqslant n - 1$$

Exercice 8 Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que

$$\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$$

Exercice 9 Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\lfloor nx \rfloor = \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor$$

Exercice 10 Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ on a

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor x + y \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$$

Exercice 11 Soient x et y deux réels non entiers tels que $x + y \in \mathbb{Z}$.
Montrer que $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor = x + y - 1$

Exercice 12 Calculer $S = \sum\limits_{k=1}^{100000} \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor$.

Exercice 13 Étudier la fonction $f : x \mapsto x\lfloor x \rfloor$.

Exercice 14 Étudier la fonction $f : x \mapsto \left\lfloor x - 2\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor \right\rfloor$

Exercice 15 Résoudre $\lfloor x^2 + \frac{1}{2} \rfloor = \lfloor x + 1 \rfloor \quad (E)$

Exercice 16 Représenter graphiquement la fonction

$$f : x \mapsto \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor - \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x - \frac{1}{2} \right\rfloor$$

Exercice 17 Soit x un réel et n un entier naturel non nul.
Montrer que $\left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor$

Exercice 18 Soient $x, y \in \mathbb{R}$.
Montrer que $\lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor \geqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x + y \rfloor$

Exercice 19 Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \cdots + \lfloor nx \rfloor}{n^2}$

Exercice 20 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left\lfloor \frac{n + 2 - \left\lfloor \frac{n}{25} \right\rfloor}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{8n + 24}{25} \right\rfloor$$

Exercice 21 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\lfloor 2x + \frac{1}{3} \rfloor = \lfloor x + \frac{4}{5} \rfloor$

Exercice 22 Soit $x \in \mathbb{R}$.

☞ La suite des valeurs décimales approchées de x par défaut est la suite d définie par $d_n = 10^{-n} \lfloor 10^n x \rfloor$

☞ La suite des valeurs décimales approchées de x par excès est la suite D définie par $D_n = d_n + 10^{-n}$.

1. Montrer que les suites d et D sont adjacentes.
2. Quelle est leur limite commune ?

Exercice 23 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\lfloor 2x - 1 \rfloor = \lfloor x - 4 \rfloor$

Exercice 24 On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (2 + \sqrt{3})^n$.
Montrer que $u_n - \lfloor u_n \rfloor = 1 - (2 - \sqrt{3})^n$.

Exercice 25 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\left\lfloor \frac{2x+1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4x+5}{6} \right\rfloor = \frac{3x-1}{2}$.

Exercice 26 Soient $m, n \in \mathbb{Z}$.
Calculer $\left\lfloor \frac{n+m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-m+1}{2} \right\rfloor$

Exercice 27 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{5} \right\rfloor = x$

Exercice 28 Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on a :

$$\left\lfloor \frac{n(n+1)}{2(2n-1)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor$$

Exercice 29 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 \lfloor x \rfloor$

☞ f est-elle injective ?

☞ f est-elle surjective ?

Exercice 30 Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Comparer $\left\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \right\rfloor$ et $\lfloor \sqrt{x} \rfloor$.

Exercice 31 ☞ Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$$

☞ En déduire la partie entière de

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{10000} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Exercice 32 Montrer que pour tout entier naturel n, $\left\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{4n+2} \right\rfloor$.

Exercice 33 Soit $a \in \mathbb{R}$.
Que dire de la parité de l'entier $\left\lfloor a + \frac{1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor a - \frac{1}{2} \right\rfloor$?

Exercice 34 ☞ Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^{*2}$ tels que p et q soient premiers entre eux.

☞ Si k est un entier, on note r_k le reste de la division euclidienne de $k \cdot p$ par q.

1. Montrer que les r_k sont deux à deux distincts quand k parcourt $\{0, 1, 2, \ldots, q-1\}$.
2. En déduire $\sum\limits_{k=1}^{q-1} r_k$.
3. Montrer la relation $\sum\limits_{k=1}^{q-1} \left\lfloor \frac{k \cdot p}{q} \right\rfloor = \frac{(q-1)\cdot(p-1)}{2}$.

Exercice 35 Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tel que $x > 1$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{x} \right\rfloor = n - 1$$

Exercice 36 Démontrer qu'il existe un unique réel a tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \lfloor a \lfloor na \rfloor \rfloor - \lfloor na \rfloor = n - 1$$

Exercice 37 Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.
Résoudre l'équation

$$\lfloor x \rfloor \cdot \{x\} = 2005 \cdot x$$

Exercice 38 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \ldots, x_n) \in [-1, 1]^n$ tels que $x_1 + \ldots + x_n = 0$.
Montrer que

$$|x_1 + 2x_2 + \ldots + nx_n| \leqslant \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$$

Exercice 39 Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$, on a :

$$\left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor + \left\lfloor \sqrt[3]{n} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \sqrt[n]{n} \right\rfloor = \lfloor \log_2 n \rfloor + \lfloor \log_3 n \rfloor + \ldots + \lfloor \log_n n \rfloor$$