Series

Exercice 1 ☞ Soit $u_n = \frac{n}{(n+1)(n+2)}$

- ☞ Étudier la convergence de la série $\sum u_n$
- ☞ Calculer si possible sa somme.

Exercice 2 ☞ Soit $u_n = \frac{n+1}{n!}$

- ☞ Étudier la convergence de la série $\sum u_n$
- ☞ Calculer si possible sa somme.

Exercice 3 ☞ $u_n = \frac{e^n}{n!}$

- ☞ Étudier la nature de la série $\sum u_n$
- ☞ Calculer sa somme éventuelle

Exercice 4 ☞ $u_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$

- ☞ Nature de la série $\sum u_n$?
- ☞ Somme éventuelle ?

Exercice 5 ☞ Montrer que $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ est convergente, on notera S sa somme.

- ☞ Donner un majorant simple du reste d'ordre n
- ☞ Écrire un programme python `somme(epsilon)` donnant une valeur approchée de S a ε près.

Exercice 6 ☞ Montrer que la série de terme général $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est convergente

- ☞ Montrer que la série de terme général $b_n = \frac{-1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$ diverge.
- ☞ En déduire la nature de la série de terme général $c_n = a_n + b_n$
- ☞ Montrer que $a_n \sim c_n$
- ☞ Y a-t-il contradiction avec le critère de comparaison avec les équivalents ?

Exercice 7 Étudier la convergence de la série $\sum \frac{1}{n \ln n}$

Exercice 8 ☞ Soient $a, b \in S(\mathbb{R})$

- ☞ On suppose que les séries $\sum a_n^2$ et $\sum b_n^2$ sont convergentes
  Montrer que la série $\sum a_n b_n$ est absolument convergente.

Exercice 9 Soient

- ☞ $v \in S(\mathbb{C})$ convergente vers 0
- ☞ $a, b, c \in \mathbb{C}$ tels que $a + b + c = 0$
- ☞ $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = av_n + bv_{n+1} + cv_{n+2}$

Étudier la convergence de la série $\sum u_n$ et calculer sa somme éventuelle.

Exercice 10 Hypothèses :

- ☞ $u \in S(\mathbb{R}_+)$
- ☞ $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \frac{1}{1+n^2 u_n}$
- ☞ $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes

Questions :

- ☞ Montrer que pour tout entier naturel n, on a $u_n v_n = \frac{1-v_n}{n^2}$.
- ☞ Trouver un équivalent simple de $\sqrt{u_n v_n}$ quand n tend vers $+\infty$.
- ☞ Que peut-on dire de la convergence de la série $\sum \sqrt{u_n v_n}$?
- ☞ Montrer que pour tout entier naturel n on a $\sqrt{u_n v_n} \leqslant \frac{u_n+v_n}{2}$.
- ☞ Déduire de la question précédente la nature de la série $\sum \sqrt{u_n v_n}$.
- ☞ Conclure.

Exercice 11 ☞ Soit $\sum u_n$ une série divergente

- ☞ Peut-on donner la nature de la série $\sum \frac{u_n}{2}$?
- ☞ Peut-on donner la nature de la série $\sum \frac{u_n}{n}$?

Exercice 12 Étudier la convergence de la série

$$\sum \frac{2}{\sqrt{n}}$$

Exercice 13 Étudier la convergence de la série

$$\sum \frac{(2n+1)^4}{(7n^2+1)^3}$$

Exercice 14 Étudier la convergence de la série

$$\sum \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$$

Exercice 15 Étudier la convergence de la série

$$\sum \left(ne^{1/n}-n\right)$$

Exercice 16 Étudier la convergence de la série

$$\sum \ln\left(1+e^{-n}\right)$$

Exercice 17 Étudier la convergence de la série

$$\sum \frac{1}{5^n}$$

Exercice 18 Étudier la convergence de la série

$$\sum \left(\frac{-1}{3}\right)^n$$

Exercice 19 Étudier la convergence de la série

$$\sum \frac{3^n}{2^{n-2}}$$

Exercice 20 Étudier la convergence de la série

$$\sum \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

Exercice 21 Étudier la convergence de la série

$$\sum \frac{n+1}{n^3 - 7}$$

Exercice 22 Étudier la convergence de la série

$$\sum \frac{1}{2n+1}$$

Exercice 23 Étudier la convergence de la série

$$\sum \frac{n+1}{n^2 - 7}$$

Exercice 24 Étudier la convergence de la série

$$\sum \frac{1}{\ln(2+n^2)}$$

Exercice 25 Étudier la convergence de la série

$$\sum \frac{n}{2^n}$$

Exercice 26

- ☞ Étudier la convergence de la série $\sum \frac{n^{10000}}{n!}$
- ☞ En cas de convergence écrire un programme python évaluant sa somme.
- ☞ Racontez vos problèmes ...

Exercice 27 Étudier la convergence de la série

$$\sum \left(\sin\frac{1}{n}\right)^n$$

Exercice 28 Étudier la convergence de la série

$$\sum \frac{1}{\lfloor \ln(n+1) \rfloor !}$$

Exercice 29 Étudier la convergence de la série

$$\sum \sin\left(\frac{n^2+1}{n}\pi\right)$$

Exercice 30 Étudier la convergence de la série

$$\sum \frac{1}{n\ln^2 n}$$

Exercice 31 Étudier la convergence de la série

$$\sum \frac{1}{n\cos^2 n}$$

Exercice 32 Étudier la convergence de la série

$$\sum \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$$

Exercice 33 ☞ Soit $u_n = \frac{1}{n}$ si $n \in \mathbb{N}^*$ est un carré parfait et $u_n = \frac{1}{n^2}$ sinon.

☞ Étudier la convergence de la série $\sum u_n$.

Exercice 34 Étudier la convergence de la série

$$\sum \frac{\tan^n(3\pi/8)}{3^{n+2}}$$

Exercice 35 Étudier la convergence de la série

$$\sum \frac{1}{(3n+2)(3n+4)}$$

Exercice 36 Étudier la convergence de la série

$$\sum \frac{\ln n}{n^2}$$

Exercice 37 Étudier la convergence de la série

$$\sum \frac{n-1}{n+7}$$

Exercice 38 Étudier la convergence de la série

$$\sum \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Exercice 39 Étudier la convergence de la série

$$\sum \frac{1}{n^{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}}$$

Exercice 40 Étudier la convergence de la série

$$\sum \frac{2^n+3^n}{n^2+\ln n+5^n}$$

Exercice 41 Étudier la convergence de la série

$$\sum \frac{n^4}{n!}$$

Exercice 42 Étudier la convergence de la série

$$\sum \frac{4^n n!^2}{(2n)!}$$

Exercice 43 Étudier la convergence de la série

$$\sum \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

Exercice 44 Étudier la convergence de la série

$$\sum \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

Exercice 45 Étudier la convergence de la série

$$\sum \frac{(-1)^n}{\ln(1+\sqrt{n})}$$

Exercice 46 Étudier la convergence de la série

$$\sum (-1)^n \cdot \frac{n^3}{n!}$$

Exercice 47 Étudier la convergence de la série

$$\sum \frac{0! + 1! + \ldots + n!}{(n+2)!}$$

Exercice 48 Étudier la convergence de la série

$$\sum (-1)^n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

Exercice 49 Étudier la convergence de la série

$$\sum \frac{\sin n}{n}$$

Exercice 50 Étudier la convergence de la série

$$\sum \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

Exercice 51 Étudier la convergence de la série

$$\sum \frac{2n-1}{n(n^2-4)}$$

Exercice 52 Étudier la convergence de la série

$$\sum (-1)^n \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$$

Exercice 53 Étudier la convergence de la série

$$\sum \ln\left(1 - \frac{1}{(n+2)^2}\right)$$

Exercice 54 Étudier la convergence de la série

$$\sum \sin\left(\pi\frac{n^3+1}{n^2+1}\right)$$

Exercice 55 Étudier la convergence de la série

$$\sum \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)(\ln n)^{2020}$$

Exercice 56 Étudier la convergence de la série

$$\sum \int_0^{\pi/n} \sqrt{\sin x}dx$$

Exercice 57 Étudier la convergence de la série

$$\sum \frac{1 + (-1)^n\sqrt{n}}{1+n}$$

Exercice 58 Étudier la convergence de la série

$$\sum \frac{1}{\ln^n n}$$

Exercice 59 On pose $u_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}dx$ et $v_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

1. Simplifier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n + u_{n+1}$
2. Montrer que $\forall \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^{n} v_k = \frac{\pi}{4} + (-1)^n u_{n+1}$
3. Montrer que $\sum v_n$ est convergente et calculer sa somme.

Exercice 60 On pose $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$

1. Montrer que $u_n \sim v_n$
2. Étudier la convergence des deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

Exercice 61

1. Montrer que pour $a > b \geqslant 0$ on a $\arctan a - \arctan b = \arctan \frac{a-b}{1+ab}$
2. Montrer que la série de de terme général $u_n = \arctan(n+a) - \arctan n$ est convergente
3. On note $f(a)$ la somme de la série précédente. Montrer que f est croissante

4. Calculer $\lim\limits_{a\to+\infty} f(a)$

Exercice 62 ☞ Soit $x = 0,12\underline{345}\ldots$

☞ Écrire x comme quotient irréductibe de deux entiers

Exercice 63 Le nombre d'or admet-il un développement décimal périodique à partir d'un certain rang ?

Exercice 64 Quelle est la plus longue période du DDP de $\frac{p}{q}$.

Exercice 65 Nature de la série

$$\sum \frac{n!}{n^n}$$

Exercice 66 Hypothèses

☞ $u \in S(\mathbb{R}_+^*)$

☞ $\alpha \in \mathbb{R}$

☞ $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

Montrer que

☞ si $\alpha > 1$, $\sum u_n$ est convergente

☞ si $\alpha < 1$, $\sum u_n$ est divergente

Exercice 67 Étude de la série

$$\sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$$

Exercice 68 On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{n}e^{-u_n}$ pour tout $n \geqslant 1$

1. Nature de la série $\sum u_n$?
2. Nature de la série $\sum(-1)^n u_n$?

Exercice 69 Etudier la nature des séries

$$\sum \frac{\sin^2 n}{n} \qquad \sum \frac{\cos^2 n}{n}$$

Exercice 70 ☞ Soit (u_n) une suite à termes positifs

☞ $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$

☞ Montrer que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Exercice 71 ☞ Soit $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!k!}$

☞ Nature de $\sum u_n$?

Exercice 72 Étudier la convergence de la série $\sum \frac{(-1)^n}{(2n)!}$ et calculer si possible sa somme.

Exercice 73 Soit $\sum a_n$ une série à termes réels strictements positifs convergente.
Existe-t-il une suite (b_n) de $\mathbb{R}_+^*$ telle que les séries $\sum b_n$ et $\sum \frac{a_n}{b_n}$ soient toutes les deux convergentes ?