Euclidiens

Exercice 1 Soit $\varphi : ((x,y),(x',y')) \mapsto 2xx' + xy' + x'y + yy'$

- ☞ Montrer que φ est un PS sur $\mathbb{R}^2$
- ☞ Déterminer les vecteurs orthogonaux à $(1,1)$ pour ce PS

Exercice 2 Soit $\varphi : (P,Q) \mapsto \int_0^1 tP(t)Q(t)dt$

- ☞ Montrer que φ est un PS sur $\mathbb{R}[X]$
- ☞ Déterminer tous les polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$ orthogonaux à X^2

Exercice 3 ☞ Montrer que $\varphi : ((x,y),(x',y')) \mapsto xx' + 2xy' + 2x'y + 5yy'$ est un PS sur $\mathbb{R}^2$

- ☞ Construire une BON pour φ

Exercice 4 ☞ Montrer que $\varphi : ((x,y,z),(x',y',z')) \mapsto xx' + xy' + yx' + 2yy' + xz' + zx' + 2yz' + 2y'z + 3zz'$ est un PS sur $\mathbb{R}^3$

- ☞ Construire une BON pour φ

Exercice 5 ☞ Montrer que $\varphi : (P,Q) \mapsto \int_{-1}^1 t^2 P(t)Q(t)dt$ est un PS sur $\mathbb{R}[X]$

- ☞ On note
  - ➪ $\langle . | . \rangle$ ce produit scalaire
  - ➪ $\|.\|$ la norme euclidienne associée
  - ➪ P la famille de polynômes de coefficients dominant 1 obtenus par la méthode d'orthogonalisation de Gram-Schmidt à partir de la base canonique de $\mathbb{R}[X]$
- ☞ Calculer P_0, P_1, P_2 et P_3
- ☞ Montrer que P_n a la même parité que n
- ☞ Montrer que pour tout entier naturel n on a $P_{n+1} = XP_n - \frac{\|P_n\|^2}{\|P_{n-1}\|^2} \cdot P_{n-1}$
- ☞ Montrer que P_n a n racines simples comprises strictement entre -1 et 1

Exercice 6 ☞ Soient a, b, c, d des réels

- ☞ On suppose que $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = ab + bc + cd + da$
  Montrer que $a = b = c = d$

Exercice 7 ☞ Soit $N : (x,y) \mapsto \sqrt{x^2 + xy + y^2}$

- ☞ Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$

Exercice 8 Soient

- ☞ E un $\mathbb{R}$-ev
- ☞ $u \in L(E)$

☞ $\|.\|$ une norme sur E

☞ $N : x \mapsto \|u(x)\|$

Donner une CNS pour que N soit une norme sur E

Exercice 9 Soient

☞ E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

☞ $N : E \to \mathbb{R}$

On suppose :

☞ $\forall x \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, N(\lambda.x) = |\lambda|.N(x)$

☞ $\forall x, y \in E \quad N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$

Montrer que :

☞ $N(0) = 0$

☞ $\forall x \in E \quad N(x) \geqslant 0$

Exercice 10 L'application $N : (x,y,z) \mapsto \sqrt{x^2 + 2y^2 + 4z^2}$ est-elle une norme sur $\mathbb{R}^3$?

Exercice 11 La norme $\|.\|_1$ dans $\mathbb{R}^2$ est-elle une norme euclidienne ?

Exercice 12 ☞ $\begin{array}{rccc} N : & \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R} \\ & P & \mapsto & \sqrt{\int_0^1 P^2(t) + P'^2(t)dt} \end{array}$ est-elle une norme ?

Exercice 13 ☞ Soit E un espace vectoriel réel

☞ Soit N une norme sur E

☞ la boule de centre 0 et de rayon 1 est $B_N(0,1) = \{x \in E / N(x) \leqslant 1\}$
On demande de dessiner dans $\mathbb{R}^2$ la boule de centre 0 et de rayon 1 pour :

☞ $\|\cdot\|_1$

☞ $\|\cdot\|_2$

☞ $\|\cdot\|_\infty$

Exercice 14 ☞ On pose $\langle (x,y,z) | (x',y',z') \rangle = xx' + xy' + yx' + 2yy' + zz'$

☞ Vérifier que $\langle .|. \rangle$ est un PS dans $\mathbb{R}^3$

☞ Trouver une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ pour ce PS

Exercice 15 ☞ Montrer que $\langle P|Q \rangle = \int_{-1}^1 (1-t^2)P(t)Q(t)dt$ définit un produit scalaire dans $\mathbb{R}[X]$

☞ Trouver une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire

☞ Calculer la projection orthogonale de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$

Exercice 16 ☞ Soit $\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y),(x',y') & \mapsto & xx' + \frac{1}{3}(xy' + yx' + yy') \end{array}$

1. Montrer que φ est un produit scalaire
2. Trouver une base orthonormée B pour φ
3. Donner l'expression de $\varphi(u,v)$, u et v étant donnés par leurs composantes dans la base B