Домашнее задание 2.

1.

Постройте машину Тьюринга, возвращающую 1, если входное слово $x_1x_2...x_n \in \{0, 1\}^*$ является палиндромом (то есть $x_1x_2...x_n = x_n, x_{\{n-1\}}...x_1$), и 0 в противном случае. Машина должна работать за время $O(n)$.

Описание:

Для описанного ниже алгоритма потребуется дополнительная лента.
Алгоритм имеет два этапа:

1. Проход по исходному числу и копирование его на вторую ленту
2. Одновременный проход по обоим лентам в разные стороны и проверка на идентичность

Построение:

- $q_s, \begin{pmatrix} \# \\ \# \end{pmatrix} \to q_{\text{copy}}, \begin{pmatrix} \# \\ \# \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} +1 \\ 0 \end{pmatrix}$ \\ Старт
- $q_{\text{copy}}, \begin{pmatrix} 0/1 \\ \# \end{pmatrix} \to q_{\text{copy}}, \begin{pmatrix} 0/1 \\ 0/1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} +1 \\ +1 \end{pmatrix}$ \\ Копируем
- $q_{\text{copy}}, \begin{pmatrix} \# \\ \# \end{pmatrix} \to q_{\text{return}}, \begin{pmatrix} \# \\ \# \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ \\ Дошли до конца числа, теперь переходим в состояние возращения первой головки
- $q_{\text{return}}, \begin{pmatrix} 0/1 \\ \# \end{pmatrix} \to q_{\text{return}}, \begin{pmatrix} 0/1 \\ \# \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $q_{\text{return}}, \begin{pmatrix} \# \\ \# \end{pmatrix} \to q_{\text{check}}, \begin{pmatrix} \# \\ \# \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} +1 \\ -1 \end{pmatrix}$ \\ Дошли до начала первого числа, теперь переходим в состояние проверки идентичности
- $q_{\text{check}}, \begin{pmatrix} 0/1 \\ 0/1 \end{pmatrix} \to q_{\text{check}}, \begin{pmatrix} 0/1 \\ 0/1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} +1 \\ -1 \end{pmatrix}$
- $q_{\text{check}}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, a \neq b \to q_{\text{clear}}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} +1 \\ -1 \end{pmatrix}$ \\ Если символы не совпадают, переходим в состояние возвращения очистки второй ленты для записи нуля
- $q_{\text{check}}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, a \neq b \to q_{\text{clear}}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} +1 \\ -1 \end{pmatrix}$
- $q_{\text{check}}, \begin{pmatrix} \# \\ \# \end{pmatrix} \to q_{\text{check}}, \begin{pmatrix} \# \\ \# \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} +1 \\ -1 \end{pmatrix}$ \\ Если символы не совпадают, переходим в состояние возвращения 0
- $q_c, 1 \to q_a, \#, -1$ \\ Проверяем последнюю 1, если она равна первой, идем назад
- $q_a, \# \to q_{\text{accept}}, \#, 0$ \\ Если все символы совпадают, возвращаем 1
- $q_b, 1 \to q_{\text{reject}}, \#, 0$ \\ Если символы не совпадают, возвращаем 0
- $q_c, 0 \to q_{\text{reject}}, \#, 0$ \\ Если символы не совпадают, возвращаем 0

Сложность работы: $O(n)$, так как машина проходит по каждому символу дважды: один раз влево и один раз вправо.

—

2.

Докажите, что множество вычислимых на одноленточных машинах Тьюринга функций не изменится, если разрешить машине любые целочисленные сдвиги (то есть инструкции вида $q, a \to q' a' n$, где n — произвольное целое число); при этом «программа» δ остается конечной. Достаточно описать, как эмулируется шаг «расширенной» машины на обыкновенной.

Описание:

Основная идея заключается в том, что расширенная машина Тьюринга с целочисленными сдвигами может быть эмулирована стандартной одноленточной машиной Тьюринга с помощью передвижения головки в несколько шагов.

Доказательство:

Любую инструкцию расширенной машины вида $q, a \to q, a, n$ можно заменить последовательностью стандартных инструкций:

1. Если $n > 0$, то машинное состояние будет перемещаться вправо на n шагов.
2. Если $n < 0$, то машинное состояние будет перемещаться влево на $|n|$ шагов.

Алгоритм эмуляции:

1. Машина записывает промежуточные состояния на ленте, передвигаясь по ней.
2. В конечном итоге, после всех перемещений, она достигает той же позиции, что и расширенная машина, с сохранением вычислений.

Такой подход не увеличивает мощность машины Тьюринга, так как каждый шаг сдвига может быть эмулирован конечным числом стандартных шагов.

—

3.

Пусть машина Тьюринга M вычисляет функцию $f : \{0, 1\}^* \to \{0, 1\}^*$. Докажите, что существует машина Тьюринга M', вычисляющая f и имеющая не больше двадцати различных состояний.

Описание:

Для доказательства необходимо показать, что для любой машины Тьюринга с конечным числом состояний можно построить эквивалентную машину с фиксированным числом состояний, которая вычисляет ту же самую функцию f.

Доказательство:

1. Функция f может быть вычислена машиной Тьюринга M с произвольным числом состояний, но если сделать детальный разбор, то множество вычислительных шагов может быть сведено к 20 базовым состояниям.
2. Машина M' должна представлять собой автомат с более сложными переходами, каждый из которых разбивается на несколько подшагов, чтобы уложиться в 20 состояний.
3. Сложность переходов и вычислений компенсируется использованием ленты для хранения дополнительных данных о вычислительном процессе.

Таким образом, существует такая машина M, которая может реализовать любую вычислимую функцию, имея не более 20 состояний.