



PHS4700
Physique pour les applications multimédia
Automne 2019

PAGE COUVERTURE **OBLIGATOIRE** POUR TOUS LES DEVOIRS

Numéro du groupe : 1

Numéro de l'équipe : 14

Numéro de devoir :

| | | |
|-------------------------------------|-----------------------|--------------------|
| Nom: O'Neill | Prénom : Jonathan | matricule: 1844649 |
| Signature : <i>Jonathan O'Neill</i> | | |
| Nom: Benouniche | Prénom : Yacine | matricule: 1733049 |
| Signature : <i>Benouniche</i> | | |
| Nom: Kamate | Prénom : Salah-Eddine | matricule: 1805984 |
| Signature : <i>[Signature]</i> | | |
| Nom: | Prénom : | matricule: |
| Signature : | | |

Table des matières

| | | |
|--------------------|---|------------------|
| <i>I.</i> | <i>Introduction.....</i> | <i>2</i> |
| <i>II.</i> | <i>Théorie et équations.....</i> | <i>2</i> |
| <i>III.</i> | <i>Méthode de simulation numérique et atteinte des critères de précision</i> | <i>4</i> |
| 3.1. | Méthode de simulation | 4 |
| 3.2. | Paramètres de simulation qui assure la précision des résultats..... | 6 |
| 3.3. | Vérification des méthodes et paramètres choisis..... | 7 |
| <i>IV.</i> | <i>Présentation et analyse des résultats.....</i> | <i>8</i> |
| 4.1. | Simulation 1 | 11 |
| 4.2. | Simulation 2 | 13 |
| 4.3. | Simulation 3 | 14 |
| <i>V.</i> | <i>Conclusion</i> | <i>15</i> |

I. Introduction

Dans le cadre du cours de Physique pour les applications multimédia, nous avons été amenés à étudier la trajectoire d'une balle de golf subissant différents types de forces. Le premier cas que nous avons analysé est le cas où la seule force agissant sur la balle est la force gravitationnelle. Le second cas, deux forces agissaient sur la balle, soit la force gravitationnelle et une force de frottement visqueux. Finalement, le troisième cas où trois forces agissaient sur la balle de golf : la force gravitationnelle, une force de frottement visqueux et la force Magnus. Pour nous permettre d'analyser ces trois cas, 4 paramètres nous ont été fournis en entrée : "*option*" représentant les différents cas mentionnés ci-haut, "*xy0*" pour préciser la position initiale en x et y de la balle, "*vb0*" pour la vitesse initiale de la balle et finalement "*wb0*" pour la vitesse angulaire initiale. Ainsi, dans les prochains paragraphes, il sera question d'aborder les équations utilisées et les résultats obtenus.

II. Théorie et équations

L'équation de base sur laquelle ce laboratoire repose est la deuxième loi de Newton qui s'écrit comme :

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a} \quad (1)$$

Avec :

- \vec{F}_i : force i qui agit sur la balle,
- m : masse de la balle,
- \vec{a} : accélération de la balle.

En effet, comme nous l'avons expliqué précédemment nous avons considéré trois situations différentes avec trois configurations de forces différentes appliquées à la balle. Ainsi ayant la vitesse initiale de la balle et sa vitesse angulaire (constante durant toute la simulation) nous avons utilisé la méthode de Runge-Kutta pour déterminer numériquement une approximation de l'accélération de la balle à un instant t + un certain pas déterminé expérimentalement. Nous avons utilisé la méthode de Runge-Kutta d'ordre quatre :

$$v_{n+1} = v_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad [m/s] \quad (2)$$

Avec :

- | | |
|---|--|
| - $k_1 = f(t_n, v_n)$ | - $k_4 = f(t_n + h, v_n + hk_3)$ |
| - $k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, v_n + \frac{h}{2}k_1\right)$ | - h : pas d'avancement dans le temps |
| - $k_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, v_n + \frac{h}{2}k_2\right)$ | - v_n : vitesse à l'instant t (en m/s) |
| | - v_{n+1} : vitesse à l'instant $t + 1$ (en m/s) |

Grâce à cette méthode, on réduit l'erreur d'approximation en calculant la moyenne sur 4 calculs d'accélération. De plus, la fonction $f(t_n, v_n)$ utilisée dépend de l'option choisie. En effet si on avait choisi l'option 1, où on rappelle, uniquement la force de gravitation agit sur la balle on aurait eu donc la force f_g qui s'écrit comme :

$$\vec{F}_g = m_b \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -9.8 \end{bmatrix} \quad [N] \quad (3)$$

En utilisant la deuxième loi de Newton, on a :

$$\begin{aligned} \sum_i \vec{F}_i &= m_b \vec{a} \Rightarrow \vec{F}_g = m_b \vec{a} \Rightarrow m_b \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -9.8 \end{bmatrix} = m_b \vec{a} \\ \Rightarrow \vec{a} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -9.8 \end{bmatrix} \quad [m/s^2] \end{aligned}$$

Ainsi l'accélération avec la première option est toujours constante et donc sachant que la fonction $f(t_n, v_n)$ nous retourne l'accélération de la balle :

$$f(t_n, v_n) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -9.8 \end{bmatrix} \quad [m/s^2]$$

Concernant l'option 2, on a une accélération qui dépend de la force gravitationnelle, mais également de frottement visqueux qui s'exprime sous la forme :

$$\vec{F}_v(\vec{v}_b) = -\frac{\rho C_v A}{2} |\vec{v}_b| \vec{v}_b \quad [N] \quad (4)$$

Avec :

- \vec{v}_b : Vitesse de la balle (en m/s),
- ρ : Masse volumique de l'air (en kg/m^3),
- C_v : Constante donnée dans l'énoncé,
- A : Aire de la balle (en m^2).

On a alors :

$$\begin{aligned} \sum_i \vec{F}_i &= m_b \vec{a} \Rightarrow \vec{F}_g + \vec{F}_v(\vec{v}_b) = m_b \vec{a} \Rightarrow m_b \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -9.8 \end{bmatrix} + \left(-\frac{\rho C_v A}{2} |\vec{v}_b| \vec{v}_b \right) = m_b \vec{a} \\ \Rightarrow f(t_n, v_n) &= \vec{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -9.8 \end{bmatrix} + \left(-\frac{\rho C_v A}{2 m_b} |\vec{v}_b| \vec{v}_b \right) \quad [m/s^2] \end{aligned}$$

Enfin avec l'option 3, nous reprenons l'accélération de l'option 2 et on lui ajoute la force de Magnus tel que :

$$\vec{F}_M(\vec{v}_b, \vec{\omega}_b) = \frac{\rho C_M(|\vec{\omega}_b|)A}{2} |\vec{v}_b|^2 \frac{\vec{\omega}_b \times \vec{v}_b}{|\vec{\omega}_b \times \vec{v}_b|} \quad [N] \quad (5)$$

Avec :

- \vec{v}_b : Vitesse de la balle (en m/s),
- $\vec{\omega}_b$: Vitesse angulaire de la balle (en rad/s),
- ρ : Masse volumique de l'air (en kg/m^3),
- $C_M(|\vec{\omega}_b|)$: Coefficient de Magnus, donné par : $C_M(|\vec{\omega}_b|) = 0.000791|\vec{\omega}_b|$
- A : Aire de la balle (en m^2).

Ce qui nous donne donc :

$$\begin{aligned} \sum_i \vec{F}_i &= m_b \vec{a} \Rightarrow \vec{F}_g + \vec{F}_v(\vec{v}_b) + \vec{F}_M(\vec{v}_b, \vec{\omega}_b) = m_b \vec{a} \\ \Rightarrow m_b \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -9.8 \end{bmatrix} + \left(-\frac{\rho C_v A}{2} |\vec{v}_b| \vec{v}_b \right) + \frac{\rho C_M(|\vec{\omega}_b|)A}{2} |\vec{v}_b|^2 \frac{\vec{\omega}_b \times \vec{v}_b}{|\vec{\omega}_b \times \vec{v}_b|} &= m_b \vec{a} \\ \Rightarrow f(t_n, v_n) = \vec{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -9.8 \end{bmatrix} + \left(-\frac{\rho C_v A}{2m_b} |\vec{v}_b| \vec{v}_b \right) + \frac{\rho C_M(|\vec{\omega}_b|)A}{2m_b} |\vec{v}_b|^2 \frac{\vec{\omega}_b \times \vec{v}_b}{|\vec{\omega}_b \times \vec{v}_b|} & \quad [m/s^2] \end{aligned}$$

III. Méthode de simulation numérique et atteinte des critères de précision

3.1. Méthode de simulation

Notre méthode de simulation consistait à exécuter le script RouleDevoir2. En premier lieu, on initialise les paramètres nécessaires aux différentes simulations.

Ces paramètres sont : l'option de l'actuelle simulation qui détermine quelles forces agissent sur la balle, les positions initiales en x et y de la balle, la vitesse initiale de la balle ainsi que sa vitesse angulaire. Dépendamment de l'option de simulation, ces paramètres sont fournis au script Devoir2.

Dans le script devoir 2, nous avons défini notre intervalle temps dt afin de faire appel à la fonction rangeKutta pour obtenir la vitesse au temps t. De plus, la masse et le rayon de la balle étaient fournis dans l'énoncé.

Aussi, concernant l'accélération de la balle, nous avons implémenté une fonction pour chaque option en tenant compte de la vitesse, l'accélération angulaire, la masse ainsi que le rayon de la balle. Par exemple, la fonction de calcul de l'accélération pour l'option 3 nous retourne une

accélération qui tient compte de la gravité, la force de frottement visqueux ainsi que la force de Magnus.

Dans un autre script, nous avons implémenté une fonction qui vérifie que la position actuelle de la balle ne remplit pas les conditions d'arrêt. Ainsi, la fonction principale du script prend en paramètre une position et se sert des différentes formes et dimensions du terrain pour faire les vérifications. Cette fonction retourne un entier entre -1 et 3. Et où chaque valeur correspond à une situation dans laquelle la balle se trouve (aucune condition, dans trou, sur vert, sur terrain et pas sur vert, sortie du terrain).

Par la suite, nous avons implémenté une boucle qui exécute les instructions suivantes, tant que nous ne remplissons pas les conditions d'arrêt :

- Afin d'obtenir la vitesse actuelle, nous exécutons la fonction RangeKutta en utilisant les paramètres : vitesse actuelle, vitesse angulaire, dt , masse, rayon ainsi que l'accélération de la balle.
- Par la suite, en ce qui concerne la position actuelle, nous calculons la position au temps t dépendamment de la position précédente et de la vitesse actuelle obtenue par la fonction RangeKutta.
- Nous enregistrons les temps et les positions obtenus sur chaque itération dans un tableau.
- La dernière étape de la boucle consiste à vérifier que la balle ne remplissait pas les conditions d'arrêt imposées définies dans le script CaluclerCoup.m.

Le résultat retourné par la fonction principale du script Devoir2.m est un tableau contenant : la vitesse finale, un tableau des différentes valeurs de temps utilisées, ainsi qu'un tableau des positions au temps t de la balle. Nous avons aussi ajouté un paramètre indiquant la situation dans laquelle la balle se trouve. Soit : un coup d'un trou, et donc la balle est dans le trou ; la balle demeure sur le terrain et atteint le vert, la balle demeure sur le terrain sans atteindre le vert et la balle sort du terrain.

La dernière étape de la simulation consistait à utiliser les résultats obtenus pour dessiner les graphiques de chaque simulation. Sans trop entrer dans les détails, nous nous sommes servis des différentes formes et dimensions fournies afin de dessiner le terrain, par la suite, avec les

résultats obtenus par nos calculs, nous faisons ressortir la courbe représentant la trajectoire de la balle pour chaque simulation.

3.2. Paramètres de simulation qui assure la précision des résultats

Comme cité précédemment, pour démarrer la simulation, nous nous sommes servis de la position initiale en x et y de la balle, la vitesse initiale de la balle ainsi que sa vitesse angulaire. Ces 3 paramètres étaient fournis par l'énoncé. Cependant, nous avons porté une attention particulière aux chiffres significatifs. En effet, la position initiale était en mètres et la vitesse initiale était en mètres par seconde. La précision était de 5 chiffres après la virgule.

Quelques lignes plus haut, nous avons aussi parlé du rayon et de la masse de la balle qui étaient fournis. Ces paramètres sont utilisés dans le script `Devoir2.m` pour le calcul de l'accélération de la balle ainsi que là dans la fonction `RangeKutta`. Afin d'être cohérents dans nos calculs et garder la même précision, nous avons utilisé une précision similaire à celle de la position initiale ainsi que la vitesse.

Aussi, en plus de la vitesse, la vitesse angulaire, le rayon, la masse, la fonction `RangeKutta` prend en paramètre un *deltat*. C'est l'intervalle sur laquelle la fonction calcule la vitesse. Effectivement, plus cette valeur est petite, moins grande est l'intervalle sur laquelle la vitesse est calculée et plus grande est la précision. Autrement dit, une vitesse est retournée pour chaque $t + dt$ jusqu'à l'arrêt de la simulation.

À ce stade, nous avons opté pour un compromis entre la précision et temps d'exécution. En effet, au départ, nous avons essayé un dt de 0,00001 s pour nous rendre compte que la simulation prenait beaucoup de temps à s'exécuter. Nous avons donc diminué le dt à 0,0001s et l'exécution se faisait en un temps et une précision raisonnable.

Lors de la vérification des conditions d'arrêt, nous avons intégré une erreur maximale acceptable de ± 1 mm sur la position de la balle. Par exemple, la balle est sortie si elle est à ± 1 mm des limites du terrain.

3.3. Vérification des méthodes et paramètres choisis

Afin de vérifier les méthodes et paramètres choisis, nous avons en premier lieu déterminé ce qui était vérifiable et qui se devait d'être testé. De ce fait, nous avons testé la position extrême de la balle dépendamment des forces appliquées, nos conditions d'arrêt de simulation et nous avons comparé ces résultats avec les graphiques obtenus.

En premier lieu, nous avons déterminé la position finale de la balle avec les valeurs initiales données en choisissant uniquement l'option où la force gravitationnelle est appliquée en utilisant les équations suivantes du mouvement uniformément accéléré :

$$v = v_0 + at$$

$$\Delta x = \frac{v + v_0}{2} t$$

$$\Delta x = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x$$

L'étape précédente nous a permis de vérifier nos résultats finaux et confirmer que nos calculs étaient cohérents. En effet, si la position finale de nos calculs est la même que celle trouvée avec l'équation du mouvement uniformément accéléré, nous confirmons nos résultats.

De plus, nous avons ajouté un test qui nous permettait de vérifier la hauteur maximale atteinte par la balle dépendamment des forces appliquées. En effet, par exemple, on s'attend à ce que la hauteur de la balle soit plus grande si celle-ci possède une force de Magnus orientée vers le haut et inversement.

Enfin, dans la section précédente nous avons fait mention du fait que la fonction principale du script CalculerCoup.m prenait une position (x, y, z) et retournait l'état de cette position. Dans ce cas, notre test était simplement de couvrir les positions extrêmes que la balle pouvait prendre afin de nous assurer de l'exactitude du résultat. Par exemple, nous avons testé la balle à la position du trou ; sur le vert ; dans le terrain, mais pas sur le vert ; sur le terrain, mais n'a pas encore touché le sol ; à l'extérieur du terrain.

IV. Présentation et analyse des résultats

On définit les trois options utilisées dans chacune des simulations comme suit :

- Option 1 : seulement la force gravitationnelle agit sur la balle,
- Option 2 : la force gravitationnelle et une force de frottement visqueux agissent sur la balle,
- Option 3 : la force gravitationnelle, une force de frottement visqueux et la force de Magnus agissent sur la balle.

On définit également la valeur du paramètre "coup" comme suit :

- Coup est 0 : un trou d'un coup,
- Coup est 1 : la balle a atteint la partie verte (la calotte) du terrain,
- Coup est 2 : la balle est toujours sur le terrain sans atteindre la partie verte,
- Coup est 3 : La balle sort du terrain et se retrouve dans la partie boisée.

| Option de simulation | Position initiale (m) | Vitesse initiale (m/s) | Vitesse angulaire initiale (rad/s) | Temps final (s) | Vitesse finale (m/s) | Position finale (m) | Coup |
|----------------------|-----------------------|-------------------------------------|------------------------------------|-----------------|-------------------------------|--------------------------------|----------|
| Option 1 | [10 ; 10] | [26.5686 13.93232 16.25714] | [0 ; -45 ; 0] | 3.0877 | [26.569 13.932 -14.002] | [92.0359 53.0188 3.5009] | 0 |
| Option 2 | [10 ; 10] | [26.5686 13.93232 16.25714] | [0 ; -45 ; 0] | 3.0571 | [21.213 11.124 -13.956] | [82.4215 47.9772 1.7279] | 1 |
| Option 3 | [10 ; 10] | [26.5686; 13.93232; 16.25714] | [0 ; -45 ; 0] | 3.1775 | [21.029 11.051 -13.649] | [84.3946 49.3329 2.4318] | 1 |

Tableau 1 : Résultats pour la simulation 1 avec les trois options utilisées

| Option de simulation | Position initiale (m) | Vitesse initiale (m/s) | Vitesse angulaire initiale (rad/s) | Temps final (s) | Vitesse finale (m/s) | Position finale (m) | Coup |
|----------------------|-----------------------|---------------------------------|------------------------------------|-----------------|---------------------------------|---------------------------------|----------|
| Option 1 | [10 ; 10] | [26.0000 16.0000 18.9935] | [0 ; 0 ; -87.55] | 3.7500 | [26.000 16.000 -17.756] | [107.5000 70.0000 2.3389] | 3 |
| Option 2 | [10 ; 10] | [26.0000 16.0000 18.9935] | [0 ; 0 ; -87.55] | 3.5042 | [20.018 12.319 -15.762] | [89.7089 59.0516 2.8762] | 1 |
| Option 3 | [10 ; 10] | [26.0000 16.0000 18.9935] | [0 ; 0 ; -87.55] | 3.4642 | [21.5720 9.5081 -15.4160] | [91.9951 52.9987 3.4998] | 0 |

Tableau 2 : Résultats pour la simulation 2 avec les trois options utilisées

| Option de simulation | Position initiale (m) | Vitesse initiale (m/s) | Vitesse angulaire initiale (rad/s) | Temps final (s) | Vitesse finale (m/s) | Position finale (m) | Coup |
|----------------------|-----------------------|------------------------|------------------------------------|-----------------|----------------------------------|--------------------------------------|------|
| Option 1 | [2 ; 60] | [25 -5 21] | [-30 ; -30 ; -60] | 4.0800 | [25.0000 -5.0000 -18.9840] | [104.0000 39.6000 4.1320] | 3 |
| Option 2 | [2 ; 60] | [25 -5 21] | [-30 ; -30 ; -60] | 3.9774 | [19.2795 -3.8559 -18.2947] | [89.1120 42.5776 1.7280] | 1 |
| Option 3 | [2 ; 60] | [25 -5 21] | [-30 ; -30 ; -60] | 4.2309 | [18.4556 -5.7480 -19.2132] | [91.835997 37.373378 0.021103] | 2 |

Tableau 3 : Résultats pour la simulation 3 avec les trois options utilisées

Graphiques illustrant les trajectoires de la balle :

Simulation 1 :

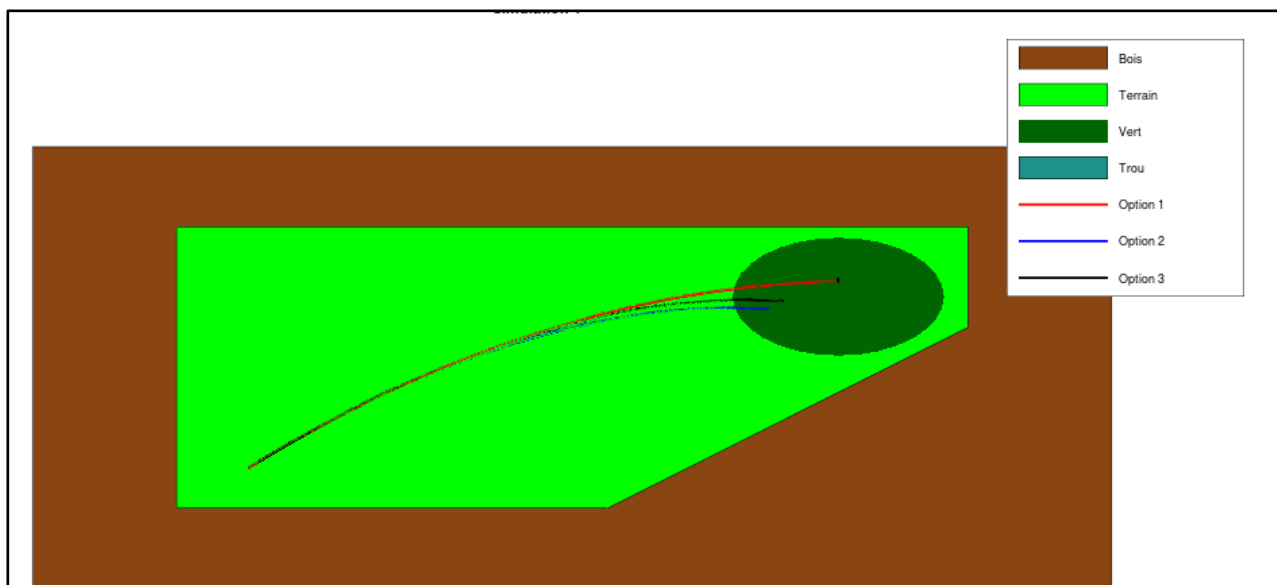


Figure 2- Vue de dessus pour la simulation 1

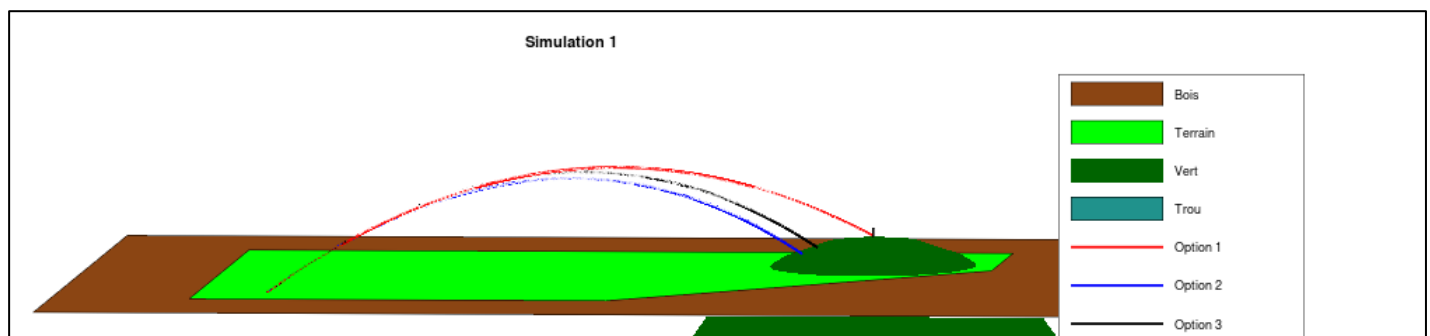


Figure 1- Vue de côté pour la simulation 1

Simulation 2 :

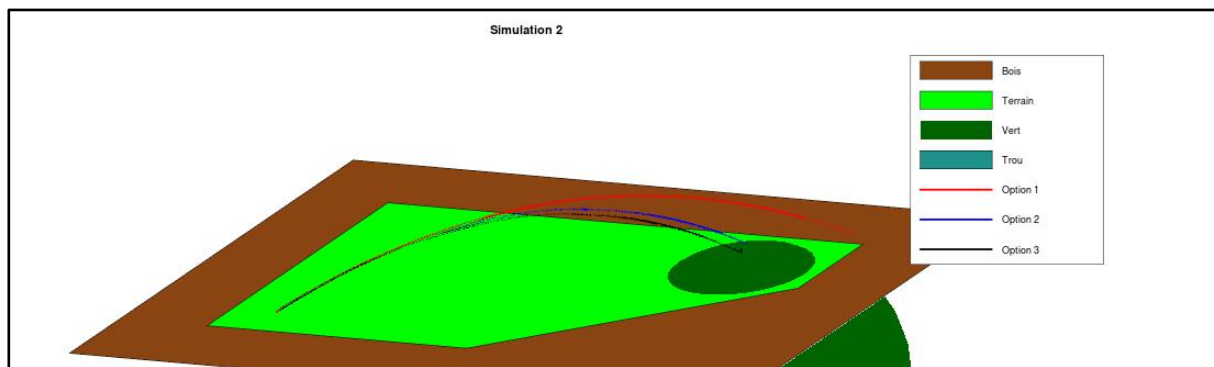


Figure 3- Vue de dessus pour la simulation 2

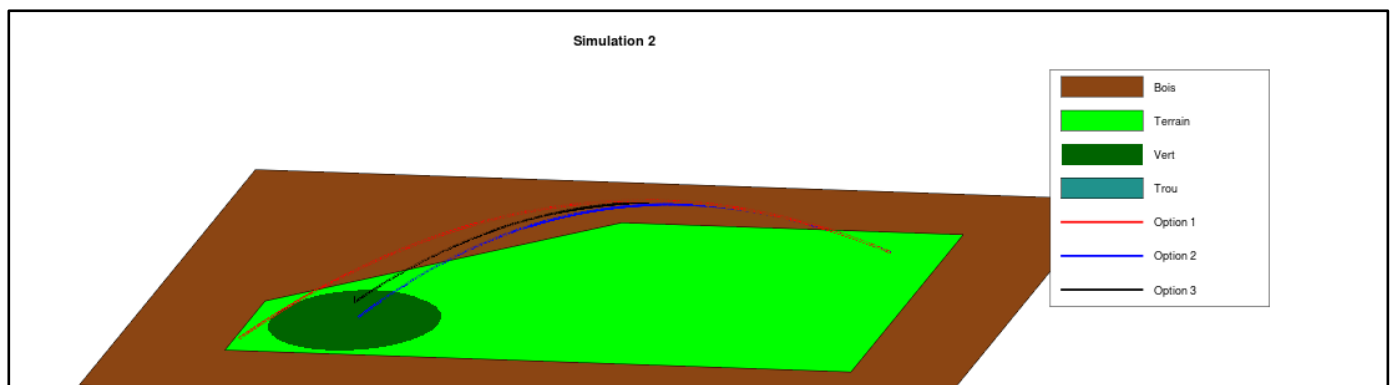


Figure 4- Vue de côté pour la simulation 2

Simulation 3 :

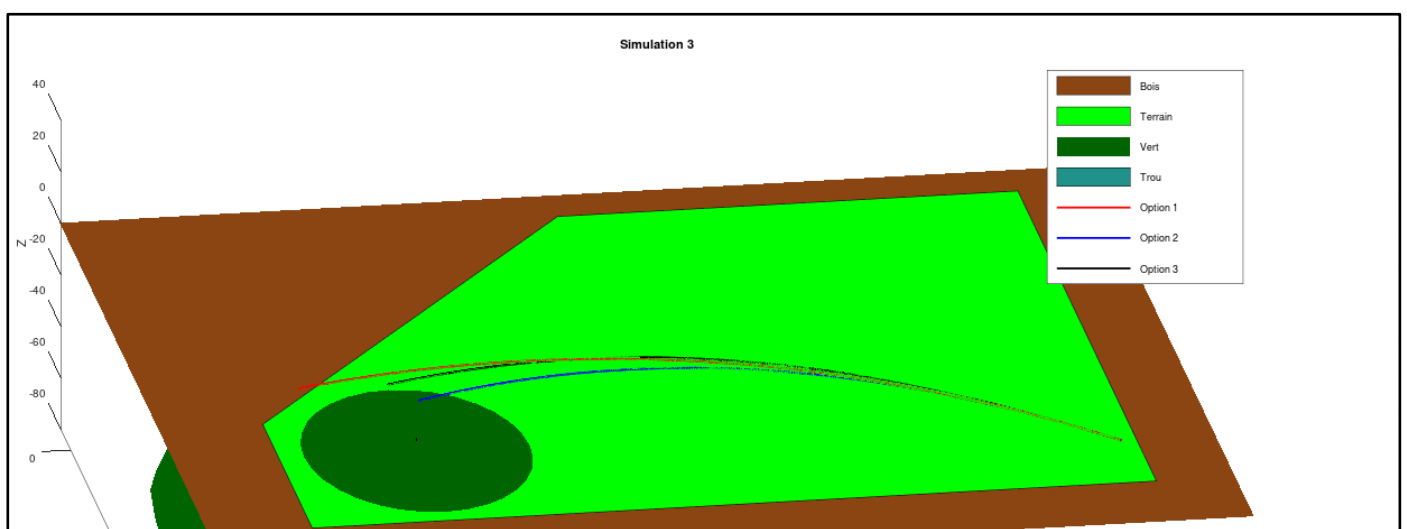


Figure 5- Vue de dessus pour la simulation 3

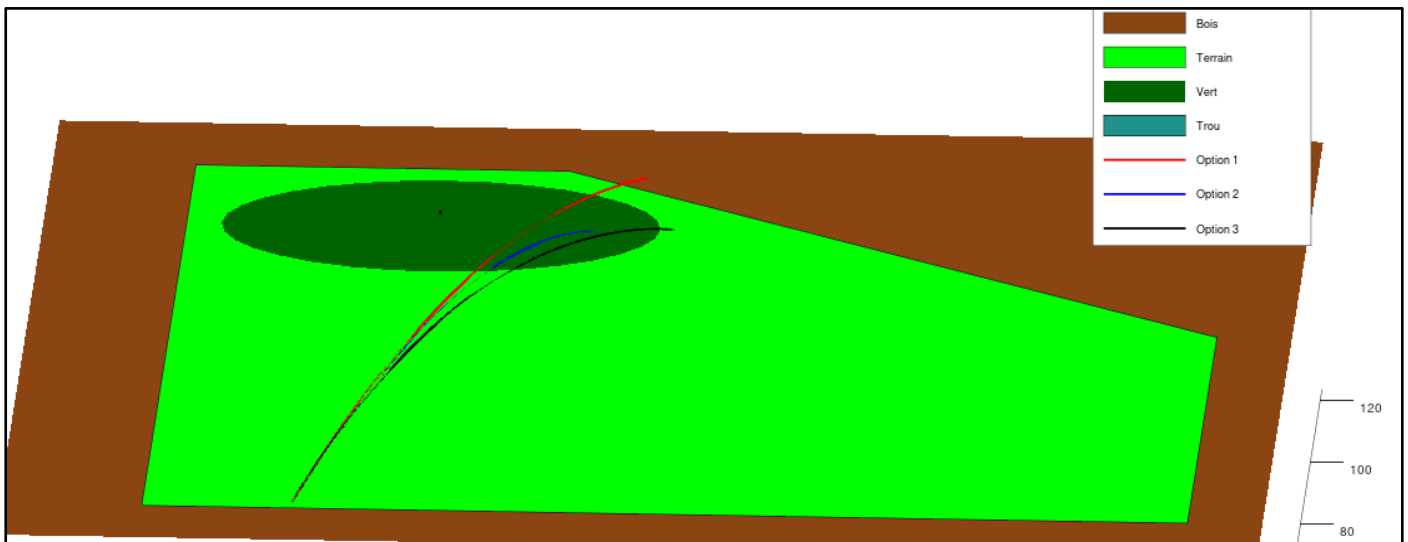


Figure 6 - Vue de côté pour la simulation 3

4.1. Simulation 1

Dans le but d'analyser les résultats que nous avons obtenus, il est plus approprié d'analyser l'effet des différentes forces sur la vitesse en fonction du temps. La vitesse initiale qui nous avait été fournie était :

$$vb0 = [26.5686; 13.93232; 16.25714] \text{ [m/s]}$$

Pour l'option 1, soit l'option où la force gravitationnelle est la seule ayant un effet sur la balle de golf, nous obtenons la vitesse finale suivante :

$$vbf = [26.569; 13.932; -14.002] \text{ [m/s]}$$

Il est possible de constater que les composantes en x et y de la vitesse finale restent inchangées par rapport à leur valeur initiale tandis que la composante en z change. Ce qui est conforme à la théorie puisque la force gravitationnelle est la seule force agissant sur la balle. La force gravitationnelle étant dirigée vers le bas, celle-ci force la balle à retomber vers le sol. La composante en z de la vitesse finale est dirigée vers le bas et est donc négative comme on peut le voir dans le résultat retranscrit ci-haut. Pour cette option, nous obtenons une valeur de 0 pour la variable "coup". La balle se retrouve donc dans le trou à la fin de la situation.

Pour l'option 2, soit l'option où la force gravitationnelle ainsi que la force de frottement visqueux agissent sur la balle, nous obtenons la vitesse finale suivante :

$$vbf = [21.213; 11.124; -13.956] \text{ [m/s]}$$

Dans ce cas-ci, les composantes en x et y ont changées par rapport à la vitesse initiale. De plus, il est intéressant de constater que la composante en z de la vitesse est également affectée. En effet, celle-ci est moins élevée que la valeur trouvée pour l'option 1 ci-dessus.

Nous sommes donc en mesure d'affirmer que la force de frottement visqueux s'oppose au mouvement de la balle dans toutes les directions (en x, y et z). On peut également déduire cela en analysant l'équation de la force de frottement (4). En effet, on remarque qu'en retirant les constantes positives, la partie déterminant la direction de la force est $-\vec{v}_b$. Ainsi la force de frottement vient bien contrer le mouvement de la balle. Enfin, nous confirmons notre affirmation en comparant la position finale de la balle entre l'option 1 et l'option 2.

$$(Option\ 1)\ position\ finale = [92.0359\ 53.0188\ 3.5009]\ [m]$$

$$(Option\ 2)\ position\ finale = [82.4215\ 47.9772\ 1.7279]\ [m]$$

Les composantes x, y et z de l'option 2 sont inférieures aux composantes de l'option 1 ce qui confirme que la balle est bel et bien déviée et que sa trajectoire a été ralentie sur les trois axes. Pour cette option, nous obtenons une valeur de 1 pour la variable "coup". La balle se retrouve donc sur le vert sans rentrer dans le trou.

Pour l'option 3, on remarque d'après l'équation de la force de Magnus énoncée précédemment que la partie indiquant la direction de la force est la dernière partie de l'équation : $\frac{\vec{\omega}_b \times \vec{v}_b}{|\vec{\omega}_b \times \vec{v}_b|}$. En effet les autres membres de l'équation ne sont que des réels positives, ainsi la seule partie qui va influencer sur la création du vecteur est le produit vectoriel entre la vitesse angulaire et la vitesse de la balle. Dans le cas de cette simulation la force de Magnus sera donc orientée dans la direction :

$$(0, -45, 0) \times (vb_x, vb_y, vb_z) = (-45 * vb_z, 0, 45 * vb_x)$$

Sachant qu'à un certain moment t la balle va atteindre le sommet de la trajectoire, à cet instant on aura $vb_z = 0$, puis elle deviendra négative contrairement à vb_x qui ne connaîtra pas une grande variation à part celle causée par le frottement de l'air. Ainsi étant donné que la vitesse initiale est [26.5686; 13.93232; 16.25714], vb_{0z} est positif donc la force de Magnus sera dirigée vers les x négatifs au début puis vers les x positifs lorsque la balle entamera sa descente (car vb_z deviendra négative). Pour ce qui est de l'axe z la force de Magnus sera toujours dirigée vers les z positifs, car vb_x ne sera jamais négative durant la simulation.

Pour avoir une meilleure vue de l'effet de la force Magnus sur la trajectoire de la balle, nous avons décidé d'analyser les altitudes maximales de cette simulation nous avons eu les résultats suivants :

$$Option\ 1: 13.5049\ m$$

$$Option\ 2: 12.3860\ m$$

$$Option\ 3: 13.0933\ m$$

On remarque que la balle avec l'aide de la force de Magnus a atteint une altitude maximale en z supérieur à l'option 2. En effet vb_x toujours positive durant la simulation donc la composante en z de la force de Magnus est toujours positive ce qui donc pousse la balle vers le haut durant son déplacement. Elle a donc pu se rendre plus loin en x et donc toucher la calotte en un point plus élevé en z. Cependant comparé à l'option 1, la balle a été ralentie par la force de Magnus en x sur la partie où la balle montait en z (lorsque vb_z positive) ainsi elle n'a pas pu se rendre jusqu'au trou et a atterri dans le vert. C'est ce qu'on peut constater sur la figure 2. Pour cette option, nous obtenons donc une valeur de 1 pour la variable "coup".

4.2. Simulation 2

Pour la simulation 2, nous retrouvons les mêmes phénomènes qu'à la simulation précédente. Les composantes x et y de la vitesse finale de l'option 1 sont inchangées, par rapport à la vitesse initiale, et la composante en z est affectée par la force gravitationnelle :

$$vb0 = [26; 16; 18.9935] \text{ [m/s]}$$

$$vf = [26.000 \ 16.000 \ -17.756] \text{ [m/s]}$$

Pour cette option, la balle est déviée à l'extérieur du terrain. Nous obtenons donc une valeur de 3 pour la variable "coup".

Pour l'option 2, les composantes en x, y et z sont affectées par rapport à l'option 1. Toutes les composantes de la vitesse finale sont affectées par la force de frottement visqueux qui s'oppose au mouvement de la balle de golf.

$$vf = [20.018 \ 12.319 \ -15.762] \text{ [m/s]}$$

Pour cette option, la balle se retrouve sur le vert (la calotte) sans entrer dans le trou. La valeur de la variable "coup" est donc de 1.

Pour l'option 3, nous avons effectué le même produit vectoriel qu'à la simulation précédente :

$$(0,0,-87.55) \times (vb_x, vb_y, vb_z) = (87.55 * vb_y, -87.55 * vb_x, 0)$$

En suivant la même logique que pour la simulation précédente, lors de son vol, la force de Magnus s'oppose au mouvement en y et est donc dirigé vers les y négatifs puisque vb_x positive durant la simulation. De plus, la force de Magnus est positive en x et donc va pousser légèrement la balle sur cet axe. Puisque le produit vectoriel ci-dessus nous donne une valeur nulle pour la composante en z, nous pouvons affirmer que la force de Magnus n'a aucun effet sur le mouvement en z. On confirme cela en analysant les altitudes maximales de chacune des options :

Option 1: 18.4262 m

Option 2: 16.6129 m

Option 3: 16.6129 m

Ainsi, nous pouvons voir la force de Magnus n'a aucun effet sur l'altitude maximale atteinte par la balle puisque l'option 2 et 3 ont la même valeur. De plus, tel que l'on peut le constater en regardant la figure 4, la balle entre dans le trou. La force de Magnus a pu corriger la trajectoire de la balle pour qu'elle atteigne la cible. Nous avons donc une valeur de 0 pour la variable "coup".

4.3. Simulation 3

Les mêmes phénomènes se reproduisent pour la simulation 3. Les composantes en x et y pour l'option 1 restent inchangées. La composante en z est, quant à elle affectée par la force gravitationnelle.

$$vb0 = [25; -5; 21] \text{ [m/s]}$$

$$vf = [25.0000; -5.0000; -18.9840] \text{ [m/s]}$$

Pour cette option, la balle se retrouve à l'extérieur du terrain dans la section boisée comme on peut le voir la figure 5. La valeur de la variable "coup" est donc de 3.

Dans le cas de l'option 2, même situation qu'à la simulation précédente. Toutes les composantes de la vitesse sont affectées. Il est donc possible de constater, une fois de plus, que la force de frottement visqueux s'oppose au mouvement de balle de golf.

$$vf = [19.2795 \quad -3.8559 \quad -18.2947] \text{ [m/s]}$$

Pour cette option, la balle demeure sur le terrain et réussit à atteindre le vert. Cependant elle n'entre pas dans le trou. La valeur de la variable "coup" est donc de 1.

Pour l'option 3, nous avons, une fois de plus, effectué le produit croisé suivant :

$$(-30, -30, -60) \times (vb_x, vb_y, vb_z) = \begin{bmatrix} 60 * vb_y - 30 * vb_z \\ -60 * vb_x + 30 * vb_z \\ 30 * vb_x - 30 * vb_y \end{bmatrix}$$

En analysant ce résultat et en prenant en compte la vitesse initiale et finale de la balle :

$$vb0 = [25; -5; 21] \text{ [m/s]}$$

$$vb_f = [18.4556; -5.7480; -19.2132] \text{ [m/s]}$$

On sait que la vitesse en z ne va faire que décroître et que les vitesses en x et y vont diminuer également, mais beaucoup plus lentement qu'en z. Ainsi ce qu'on peut prédire est que la composante en x de Magnus sera négative jusqu'à ce que vb_z sera le double de vb_y dès lors,

elle deviendra positive. Pour ce qui est du y elle sera toujours négative car la vitesse initiale en vb_{0_x} est positive et le sera durant toute la simulation et vb_z ne fait que diminuer donc $-60 * vb_x + 30 * vb_z$ sera toujours négative et ne fera que décroître. On remarque cela sur la figure 6 où la balle de golf est poussée vers les y négatifs avec la force de Magnus. Concernant la composante en z, vb_x est beaucoup plus grand que vb_y durant la simulation ainsi la force de Magnus va également pousser la balle vers le haut. Nous allons confirmer cela avec l'analyse des altitudes maximales de chacune des options :

Option 1: 22.5203 m

Option 2: 20.3285 m

Option 3: 21.2997 m

L'altitude maximale pour l'option 3 est supérieure à l'altitude maximale de l'option 2. De plus, pour cette option, la balle demeure sur le terrain, mais n'atteint pas la partie verte. La valeur de la variable "coup" est donc de 2.

V. Conclusion

En conclusion, nous avons été en mesure d'analyser les trois options différentes pour chacune des simulations qui nous ont été données. Les résultats obtenus pour les vitesses finales de chacune des simulations démontrent clairement l'effet de chacune des forces sur la balle de golf. De plus, les valeurs des positions finales viennent confirmer la cohérence des vitesses finales trouvées. La principale difficulté liée à ce travail était d'inclure les conditions d'arrêts de la simulation dans notre code. Celle-ci s'est avérée plus complexe puisque le terrain (la partie non boisée) était coupé par une partie boisée triangulaire et il fallait aussi déterminer le contact avec la calotte verte. Nous avons également éprouvé quelques difficultés à interpréter les résultats obtenus pour l'option où la force de Magnus était présente (l'option 3).