`Métodos de Punto Fijo.` Dada la ecuación $\mathbf{g}(x) = x$, bajo ciertas condiciones que os han explicado en teoría,

$$x_{n+1} = \mathbf{g}(x_n)$$

converge a una solución.

En concreto, esto ocurre, por ejemplo, cuando g es ***contractiva*** en un intervalo $[a,b]$; esto es:

$$|f(x) - f(y)| \leq K \cdot |x - y| \text{ con } 0 < K < 1$$

$$\text{(esto está garantizado cuando } \mathbf{g} \text{ es derivable y } \mathbf{g}'(x) < K < 1 \ \ \forall x \in [a,b])$$

En estas condiciones, llamando ϑ al punto fijo de $\mathbf{g}$,

$$|x_n - \vartheta| < \frac{K^n}{1-K}|x_1 - x_0|$$

Si tenemos la ecuación $f(x) = 0$, haremos $\mathbf{g}(x) = x + f(x)$ y tendremos que $\mathbf{g}(x) = x \Longleftrightarrow f(x) = 0$; de modo que podemos hacer

$$x_{n+1} = x_n + f(x_n)$$

También podemos considerar $\mathbf{g}(x) = x \pm$ (algo no nulo) $\cdot f(x)$

$$x_{n+1} = x_n \pm (\text{algo no nulo}) \cdot f(x_n)$$

`Método de la secante`

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n)$$

`Método de Newton-Raphson`

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Ejercicio 1.1. Buscar una raíz aproximada (llamémosla θ) de la ecuación $xe^x - 1 = 0$ (recordar que esto es en realidad $\theta \approx W(1) = \mathsf{ProductLog}(1)$) utilizando y comparando los distintos métodos que conoces. Pondremos como toleracia para la solución aproximada que θ satisfaga

$$|\theta e^{\theta} - 1 < 10^{-10}|.$$

Pensad cómo actuar y las limitaciones que tenemos con `Matlab` y `Maxima` con tolerancias mucho más pequeñas.

Ejercicio 1.2. Buscar una raíz aproximada con 100 cifras decimales exactas de la ecuación $\frac{\sin(x)}{x} = \frac{1}{2}$ Utiliza el método del punto fijo con cierta función que es contractiva en un cierto intervalo. Hazlo con otros métodos con los que seas capaz.

Comprueba si el resultado coincide con los dígitos que aparecen en la **OEIS**.

Pensad cómo actuar y las limitaciones que tenemos en `Matlab` y `Maxima` para lograr mayores precisiones.

Ejercicio 1.3. • Calcula de modo simbólico/exacto los puntos fijos de la función $f : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$

$$f(x,y,z) := \left(\frac{x^2}{3}+\frac{1}{3}, x+y+\frac{z}{4}, x^2-y^2+\frac{z^2}{4}\right)$$

• Encuentra alguno de modo aproximado usando el método del punto fijo comenzando con la semilla $x_0 = \{0,0,0\}$ y calculando x_{100}. Hazlo 100 veces usando semillas aleatorias (las tres coordenadas en el intervalo $[0,1]$) y .... a ver qué pasa.

Ejercicio 1.4. Sobre la marcha, ya veremos