Los siguientes ejercicios deben realizarse con el programa que consideres más adecuado (o, preferiblemente, con varios y así poder comparar).

Ejercicio 1.1. Dibuja en la misma gráfica las curvas de ecuaciones: $(x^2+y^2-1)^3 - x^2y^3 = 0$ e $y = 2x^2$. Calcula los puntos de intersección de ambas.

Ejercicio 1.2. Considera las funciones

$$f_1(x) := \texttt{ x^x^x}; f_2(x) := \texttt{x^(x^x)}; f_3(x) := \texttt{(x^x)^x}$$

Grafícalas simultáneamente; ¿cuales son iguales?. Comprueba que el valor de las tres funciones coincide en 1 y también su derivada. Dibuja la recta tangente común en ese punto. Busca otro punto de coincidencia.

Observa que `x^x^x` tiene un significado distinto en Maxima y en Matlab ¿y en Phyton?

Ejercicio 1.3. Calcula la factorización prima de tu número de DNI y de tu móvil. Si los dos son primos, tienes premio. (`factor`)

Ejercicio 1.4. Considera la parábola $\mathscr{P} : y = x^2 + \frac{a}{9}x + \frac{a}{2}$ (donde a te lo dice el profesor) y la recta $\mathscr{R} : y = x + 5$

• Calcula las dos rectas tangentes a la parábola $\mathscr{P}$ en sus puntos de corte con la recta $\mathscr{R}$.

• Calcula el punto de corte de las dos rectas tangentes del apartado anterior, resolviendo preferiblemente un sistema lineal. Serán (x_1, y_1) y (x_2, y_2).

• Representa en una sola gráfica la parábola $\mathscr{P}$, la recta $\mathscr{R}$, las dos tangentes halladas y una recta horizontal pasando por el punto de corte de las tangentes. Para la gráfica, utiliza como rango de variación de la x el intervalo $[x_1, x_2]$.

• Haz todo lo anterior (salvo las gráficas) considerando un valor de a arbitrario. El punto final resultante exprésalo tras simplificar su expresión.

Ejercicio 1.5. Define la función siguiente (o ponle nombre a la expresión)

$$f(x) := \sin^2(x+1) + \sin(x)\cos^{13}(x)$$

• Calcula su derivada; llámala `pepe`; calcula una primitiva de `pepe` y compárala con $f(x)$ (simplifica hasta encontrar que su diferencia es ...)

• Calcula una primitiva de $f(x)$; llámala `pepa`; calcula la derivada de `pepa` y compárala con $f(x)$ (simplifica hasta encontrar que su diferencia es ...)

• Calcula $f(0)$ con 50 cifras decimales exactas. Comprueba que la sucesión formada por estas cifras aparece registrada en `La Enciclopedia On-Line de las Secuencias de Números Enteros`, en adelante, **OEIS**.

Ejercicio 1.6. Se define el superfactorial de n como $\mathfrak{sf}(n) := \prod_{i=1}^{n} i! = 1! \cdot 2! \cdot 3! \cdots n!$. Construye la lista con los valores de los superfectoriales de los 10 primeros números naturales. Comprueba que la sucesión aparece registrada en la **OEIS**.

Ejercicio 1.7. Construye una función $M(n)$ que devuelva una matrix cuadrada $n \times n$ cuyos elementos son $a_{ij} := i^j$ con $i, j =, 1, 2, ..., n$. Construye la lista para los 20 primeros valores de n y comprueba que la sucesión de sus determinantes coincide con la de los superfactoriales.

Ejercicio 1.8. Calcular

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Calcula los errores relativo y absoluto cometidos al considerar solamente 1000 sumandos.

Ejercicio 1.9. Muestra en pantalla la expresión completa de 999^{1000}. ¿Cuántas cifras tiene?. Calcula las 3 últimas cifras de $\texttt{movil}^{\texttt{DNI}}$. `(floor, mod, power_mod, log)`

Ejercicio 1.10. Dada $f(x) := sin(x^2) + sin^2(x) + sin(sin(x))$. Construye una lista con las 15 primeras derivadas evaluadas en 0. Construye el polinomio de Taylor de grado 15 en torno al cero a partir de ellas. Dibuja la gráfica de $f(x)$ junto a la del polinomio de Taylor utilizando como rango de variación de la x el intervalo $[-3, 3]$.

Ejercicio 1.11. Construye una lista aleatoria con números naturales del intervalo $[1, 100]$. Calcula la media aritmética de un millón de números enteros elegidos aleatoriamente en $[0, 100]$. ¿qué habría que cambiar para que la media saliera muy cercana a 50. (`random`)

Ejercicio 1.12. Calcular la cifra que ocupa el lugar 100 (centésimo) de la expresión decimal del número π.