Astrofísica Computacional

Proyectos Finales

Proyecto 1. Problema Gravitacional de los N-Cuerpos

Las ecuaciones de movimiento de N-Partículas moviendose bajo su interacción gravitacional mutua se pueden escribir en la forma

$$m_i \ddot{\mathbf{x}}_i = -G m_i \sum_{j=1, i\neq j}^{N} \frac{m_j}{|\mathbf{x}_{ij}|^2} \hat{\mathbf{x}}_{ij}, \tag{1}$$

donde $\mathbf{x}_{ij} = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$ es el vector que apunta desde la partícula j a la partícula i.

1. Implemente un código que resuelva el problema diferencial de las ecuaciónes de movimeinto (1) utilizando un método Runge-Kutta de orden 4. El algoritmo debe ser lo suficientemente general para poder incluír un número arbitrario de partículas y las condiciones deben ser leídas de un archivo.

2. Con el fin de probar el código implementado, utilice los datos iniciales para el sistema Sol-Tierra dados en el archivo *sun_earth.dat* y grafique el comportamiento del sistema a lo largo de algunos años. Comprube que la orbita no se comporta a la forma de una espiral.

3. Con el fin de asegurar la convergencia del algoitmo, implmente una rutina dentro del programa que calcule la energía total del sistema de N-partículas. Evalue el comportamiento de la energía a lo largo de la evolución y grafique para comprobar si existe algun cambio significativo. El comportamiento mejora o empeora al modificar el paso de la integración?

4. Ahora utilice su código para estudiar la evolución del sistema de 13 estrellas S0 moviendose alrededor del agujero negro supermasivo SgrA*, proporcionado en el archivo *S0stars.dat*. Verifique también el comportamiento de la energía del sistema de 13+1 partículas. Grafique las orbitas de estas estrellas a lo largo de un periodo de 100 años.

Proyecto 2. Coalesencia de un Sistema Binario Newtoniano

Los sistemas binarios compuestos por objetos compactos (agujeros negros o estrellas de neutrones) eventualmente pierden energía orbital debido a la emisión de ondas gravitacionales. En este proceso, tanto la energía como el momento angular son transportados por las ondas gravitacionales y al perderse del sistema, los componentes del binario se acercarán y en algún momento se fusionarán.

Un sistema binario, con vector de separación $\mathbf{x}(t)$ y masas m_1 y m_2, tiene un tensor de cuadrupolo reducido dado por

$$q_{ij} = \mu \left(x_i x_j - \frac{1}{3}\delta_{ij} x_k x_k \right),$$

donde $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ es la masa reducida del sistema. En la aproximación cuadrupolar, una onda gravitacional que se desplaza a lo largo del eje z esta descrita por las funciones

$$\begin{aligned} h_+ =& \frac{1}{r}\left(\ddot{q}_{xx} - \ddot{q}_{yy}\right) \\ h_\times =& \frac{2}{r}\ddot{q}_{xy}, \end{aligned}$$

que representan las dos polarizaciones dela onda gravitacional.

La razón con la que la onda transporta la energía es

$$\frac{dE}{dt} = \frac{G}{5c^5}\left(\frac{\partial^3 q_{ij}}{\partial t^3}\right)^2$$

y la razón con la que transporta el momento angular es

$$\frac{dL_z}{dt} = \frac{2G}{5c^5}\epsilon_{zjk}\left(\frac{\partial^2 q_{jm}}{\partial t^2}\frac{\partial^2 q_{km}}{\partial t^2}\right).$$

El movimiento de un sistema binario moviendose en una orbita elíptica puede ser descrito con la ecuación cónica

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 - e\cos\varphi(t)},$$

con p el semi-latus rectum y e la eccentricidad de la orbita. La conexión entre estas cantidades y la energía por unidad de masa y el momento angular por unidad de masa,

$$\begin{aligned} E =& \frac{1}{2}v^2 - \frac{GM}{r} \\ L =& r^2\dot{\varphi}, \end{aligned}$$

se presenta a través de las ecuaciones

$$\begin{aligned} p =& \frac{L^2}{GM} \\ e =& \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{(GM)^2}} \end{aligned}$$

donde $M = m_1 + m_2$ es la masa total del sistema.

El obejtivo final de este proyecto es calcular numéricamente la orbita del sistema binario que se fusiona, al igual que el patrón de la onda gravitacional emitida en este proceso.

Proyecto 3. La Ligadura de Energía de Einstein: Una ecuación diferencial elíptica no-lineal.

Cuando existe simetría esférica y no hay dinámica asociada, determinar la métrica del espacio-tiempo para una distribución de masa/energía conocida se reduce a resolver la ecuación diferencial elíptica no-lineal

$$\nabla^2\Psi = -2\pi G\Psi^5\rho$$

donde $\Psi = \Psi(r)$ es el factor conforme de la métrica. Esta ecuación también debe ser resuelta antes de iniciar cualquier cálculo de relatividad numérica.

En este proyecto se requiere solucionar esta ecuación diferencial para el instante justo antes del proceso de colapso gravitacional de una estrella masiva. Los perfiles de densidad requeridos para el lado derecho pueden obtenerse en la pagina http://www.stellarevolution.org. En la sección *"Non-rotating pre-supernova models from Woosley, Heger, Weaver (2002)"* puede descargar el perfil de una estrella con metalicidad solar de 40.0 masas solares.

Una revisión detallada de los datos iniciales para problemas en relatividad gneeral pueden encontrarse en *Cook, Living Reviews in Relativity, LRR-2000-5* o en *Baumgarte y Shapiro, Phys. Rep. 376:41, (2003)*.

Proyecto 4. Problema Jerarquico de los Tres Cuerpos

1. El Problema de 2-Cuerpos. La solución del problema de dos cuerpos (por ejemplo un planeta y el Sol) puede ser problematico debido a la acumulación del error de truncamiento cuando la integración se realiza por tiempos largos (por ejemplo fracciones del orden de 10^{10} años en el caso del Sistema Solar). Con el fin de lograr solucionar este tipo de problemas, se hand esarrollado algunos integradores, denominados *simplécticos*, que logran evitar la acumulación de los errores de truncamiento y con ello preservan la conservación de cantidades como la energía. Un ejemplo de integradores simplécticos es el algoritmo *Leap Frog* (LF) (mientras que el método de Runge-Kutta (RK) no es simpléctico).

Escriba un código que utilice los algoritmos RK4 y (LF) para integrar el sistema Sol-Tierra, suponiendo inicialmente que la eccentricidad de la orbita terrestre es cero. Incluya una rutina que grafique los cambios relativos de energía y momento angular orbital, $\left|\frac{\Delta E}{E}\right|$ y $\left|\frac{\Delta L}{L}\right|$. Explore los resultados que se obtienen al modificar el paso de integración para cada uno de los integradores. Ahora, introduzca una eccentricidad no-nula y estudie el comportamiento de las cantidades conservadas al realizar la integración con diferentes valores de e.

2. El Problema de 3-Cuerpos. Modifique su código para incluir un tercer cuerpo (la sugerencia es utilizar el método RK4, pero el grupo de trabajo puede decidir utilizar el algoritmo LF) y seleccione un paso de integración apropiado para que el error acumulado sea pequeño. Considere que el tercer cuerpo corresponde a la Luna, la cual posee una inclinación muy pequeña (~ 5), asi que inicialmente puede considerarla como cero al igual que su eccentricidad. Al realizar la integración, obtiene un sistema de 3 cuerpos estable? No se preocupe por tener valores exactos para el problema Sol-Tierra-Luna, pero si debe obtener un sistema estable. Estudie el comportamiento del perigeo y el apogeo en el tiempo.

3. El Mecanismo Kozai-Lidov El mecanismo de Kozai-Lidov, [Kozai ApJ 67 591 (1962)], es un fenómeno del problema de los tres cuerpos en el cual la eccentricidad y la inclinación cambian de tal forma que se retroalimentan. Para ilustrar este comportamiento, considere que la Luna se mueve inicialmente en una orbita aproximadamente circular pero con una inclinación no-nula (con respecto al plano orbital Sol-Tierra). Cambie el valor de la inclinación desde 0 hasta 90 y estudie su dinámica junto con el de la eccentricidad. No olvide revisar siempre la convergencia de su método y el comportamiento de los errores. Intente obtener un comportamiento gráfico similar al mostrado en la Figura 6 de [Ford et al. ApJ 535 385 (2000)].