Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп’ютерних наук і кібернетики

Звіт
з лабораторної роботи №1
«Розв’язування нелінійних рівнянь»

Виконав:
Студент групи ІПС-32
Гончаренко Ілля Сергійович

Київ
2024

Завдання:

Знайти найменший по модулю від'ємний корінь нелінійного рівняння $x^3 - 10x^2 + 44x + 29 = 0$ методом простої ітерації та методом Ньютона з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$. Знайти апріорну та апостеріорну оцінку кількості кроків. Початковий проміжок та початкове наближення обрати однакове для обох методів (якщо це можляво), порівняти результати роботи методів між собою.

Теорія:

Якщо розглянути задачу знаходження коренів рівняння $f(x) = 0$

де $f(x)$ - задана функція дійсного змінного.

І вирішення даної задачі виконати за допомогою таких кроків як:

1. Дослідження розташування коренів (в загальному випадку на комплексній прощині) та їх кратність.
2. Відділення коренів, тобто виділення областей, що містять тільки один корінь.
3. Обчислення кореня з заданою точність за допомогою одного з ітераційних алгоритмів

Далі ми розглянемо ті ітераційні алгоритми що стосуються нашої задачі

Метод простої ітерації - застосовується для розв'язування нелінійного рівняння вигляду

$$x = \varphi(x)$$

Для переходу до рівняння можна багатьма способами, одним з прикладів буде

$$\varphi(x) = x + \psi(x)f(x)$$

де $\psi(x)$ - довільна знакостала неперервна функція.

І після цього ми обравши нульове наближення x_0 можемо обраховувати наступні(наближення) за допомогою формули

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), n = 0,1,2,....$$

Теорема 1.

Нехай для вибраного початкового наближення x_0 на проміжку

$$S = \{x : |x - x_0| \le \delta\}$$

функція $\varphi(x)$ *задовільняє умові Ліпшиця*

$$|\varphi(x' - (x''))| \le q|x' - x''|, x', x'' \in S$$

де $0 < q < 1$*, і виконується нерівність*

$$|\varphi(x_0) - x_0| \le (1-q)\delta$$

Тоді рівняння $x = \varphi(x)$ *має на проміжку S єдиний корінь* x_**, до якого збігається послідовність* $x_{n+1} = \varphi(x_n), n = 0,1,2,....$, причому швидкість збіжності визначається нерівністю

$$|x_n - x_*| \le \frac{q^n}{1-q}|\varphi(x_0) - x_0|$$

Зауваження: якщо функція $\varphi(x)$ має на проміжку S неперервну похідну $\varphi'(x)$, яка задовільняє умові

$$|\varphi'(x)| \le q < 1,$$

то функція $\varphi(x)$ буде задовольняти умові
$|\varphi(x' - (x''))| \le q|x' - x''|, x', x'' \in S$, теореми 1.

З $|x_n - x_*| \le \frac{q^n}{1-q}|\varphi(x_0) - x_0|$ можна отримати оцінку кількості ітерацій які потрібно проветс для знаходження розв'язку задачі $x = \varphi(x)$ з наперед заданою точність ε:

$$n \ge [\frac{\ln \frac{|\varphi(x_0) - x_0|}{(1-q) * \varepsilon}}{\ln(1/q)}] + 1$$

Наведемо ще одну оцінку. що характеризує збіжність методу простої ітерації:

$$|x_n - x_*| \le \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}|$$

Метод Ньютона застосовується до розв'язування задачі $f(x) = 0$, де $f(x)$ є неперервно- диференційованою функцією. На початку обчислень вибирається початкове наближення x_0. Наступні наближення обчислюються за формулою

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, n = 0,1,2,..., f'(x) \neq 0$$

З геометричної точки зору x_{n+1} є значенням абсциси точки перетину дотичної до кривої $y=f(x)$ в точці $(x_n, f(x_n))$ з віссю абсцис. Тому метод Ньютона називають також методом дотичних.

Теорема 2. *Якщо* $f(x) \in C^2[a,b], f(a)f(b) < 0$, *а* $f''(x)$ *не змінює знака на*

[a,b], *то виходячи з початкового наближення* $x_0 \in [a,b]$, *що задовольняє умові*

$f(x_0)f''(x_0) > 0$, *можна обчислити методом Ньютона єдиний корінь* x_* *рівняння (1) з будь-якою степінню точності.*

Теорема 3. *Нехай* x_* *– простий дійсний корінь рівняння* $f(x) = 0$ *і* $f(x) \in C^2(S)$, *де* $S = \{x : x - x^* \leq \delta\}$,

$$0 < m_1 = \min_{x \in S} |f'(x)|, M = \max_{x \in S} |f''(x)|,$$

причому

$$q = \frac{M_2 |x_0 - x_*|}{2m_1} < 1$$

Тоді для $x_0 \in S$ *метод Ньютона збігається, причому для похибки справедлива оцінка*

$$|x_n - x_*| \leq q^{2^n - 1} |x_0 - x_*|$$

З оцінки $|x_n - x_*| \leq q^{2^n - 1} |x_0 - x_*|$ видно, що метод Ньютона має квадратичну збіжність, тобто похибка на $(n+1)$-й ітерації пропорційна квадрату похибки на n-й ітерації.

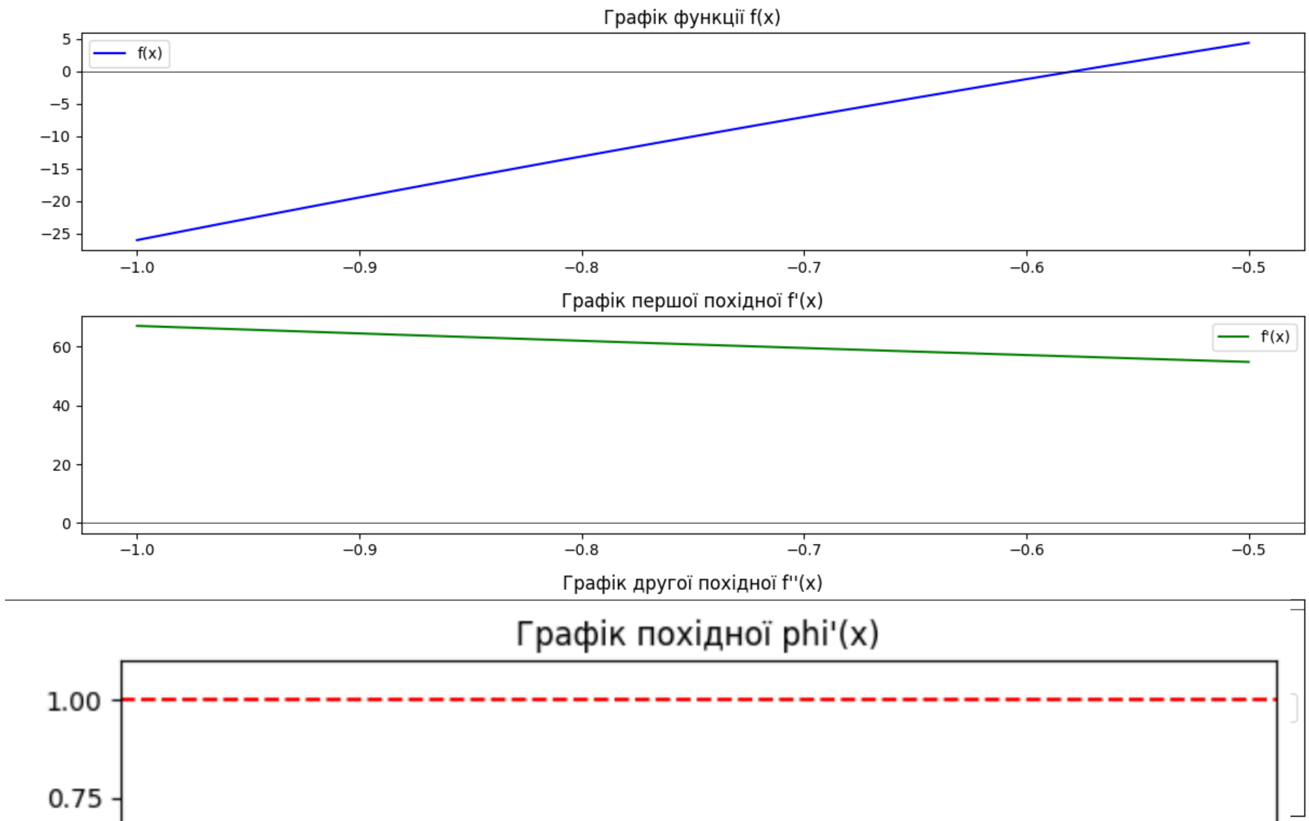
Кількість ітерацій, які потрібно провести для знаходження розв'язку задачі з заданою точність ε задовільняє нерівності

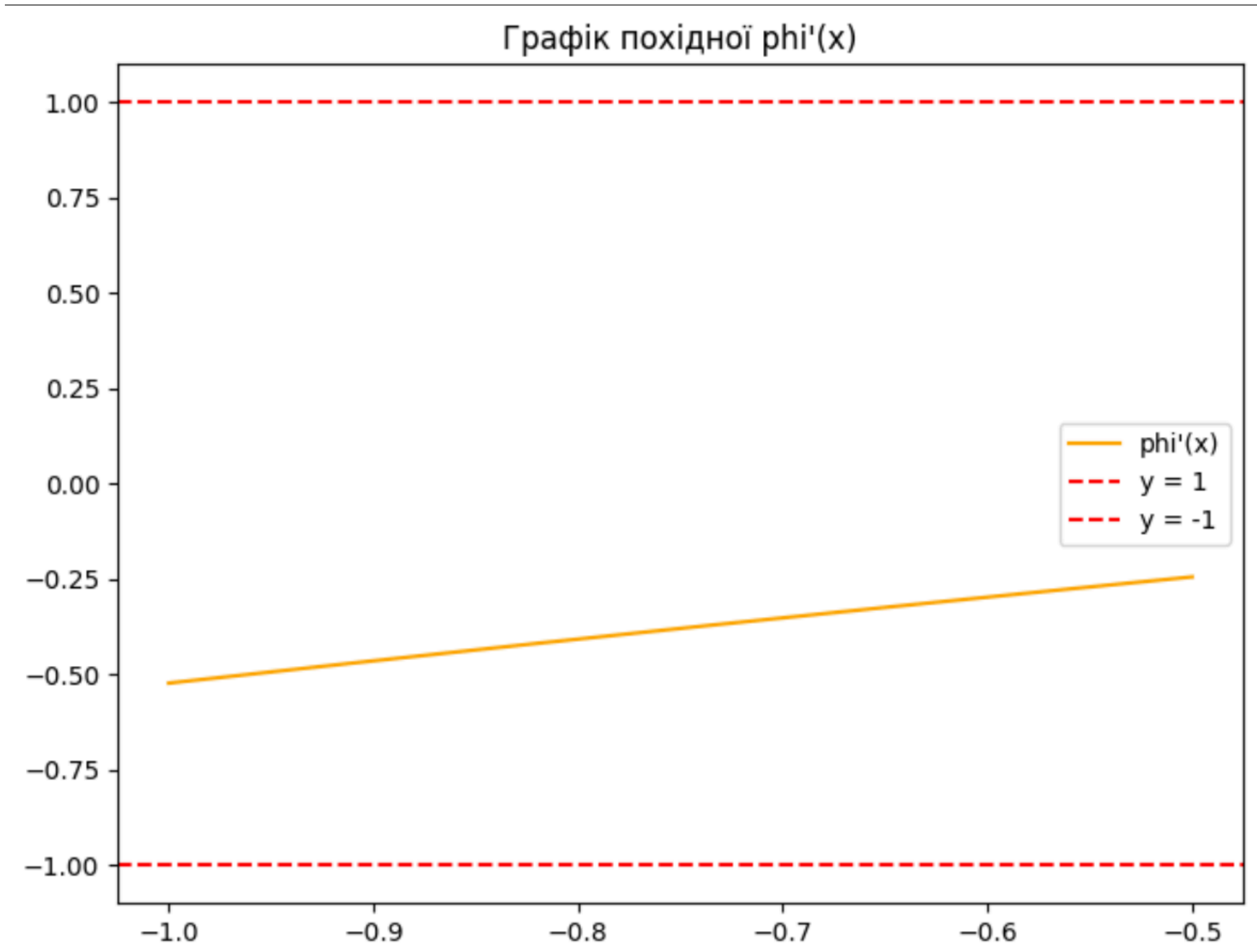
$$n \geq [\log_2(\frac{\ln(|x_0 - x_*/\varepsilon|)}{\ln(1/q)}) + 1] + 1$$

Хід роботи:

(Демонстрація відбувається при базових параметрах)

Графіки функцій :





На графіках вище зображені функції перша похідна $f^{'}(x)$ і друга похідна $f^{''}(x)$ на інтервалі [-1,-0.5]. Ці графіки дозволяють нам побачити:

1. Функція $f(x)$ має нулі, які і є коренями рівняння, що ми шукаємо.

2. Перша похідна $f^{'}(x)$ показує, де функція зростає або спадає, що допомагає аналізувати методи збіжності.

3. Друга похідна $f^{''}(x)$ вказує на кривизну функції, що є ключовим фактором для методу Ньютона.

4. Графік $\varphi(x)$ дозволяє нам визначити q(фактор збіжності, точніше $|\varphi^{'}(x_{min})|$) для методу простої ітерації

Тепер можемо графічно знайти m_1, M_1, M_2

- $m_1 = 54.75$ - мінімальна абсолютна перша похідна
- $M_1 = 67$ - максимальна абсолютна перша похідна
- $M_2 = 26$ - максимальна абсолютна друга похідна
- $q = 0.2443$ - фактор збіжності, точніше $|\varphi^{'}(x_{min})|$

```
Метод Ньютона
Очікувана кількість ітерацій: 3

Індекс     Значення x           Точність              f(x)
===================================================================================
0          -0.9000000000000000                        -19.4290000000000020
1          -0.5984479279838585  0.3015520720161415   -1.1274361509248223
2          -0.5786833876640718  0.0197645403197867   -0.0045999775854959
3          -0.5786020847916699  0.0000813028724019   -0.0000000775765905

Можемо зупинитися після 3-ї ітерації, оскільки досягнута очікувана кількість ітерацій.

m1 (мін. абсолютна похідна): 54.75
M1 (макс. абсолютна похідна): 67
M2 (макс. абсолютна 2-га похідна): 26
q (фактор збіжності): 0.0950
Метод простої ітерації
Очікувана кількість ітерацій: 6

Індекс     Значення x           Точність              f(x)
===================================================================================
0          -0.6000000000000000                        -1.2159999999999975
1          -0.5723636363636364  0.0276363636363636   0.3524922747287746
2          -0.5803748244256540  0.0080111880620176   -0.1003321603213223
3          -0.5780945480547148  0.0022802763709392   0.0287114922081102
4          -0.5787470819685355  0.0006525339138207   -0.0082037401005763
5          -0.5785606333298861  0.0001864486386495   0.0023450760287957
6          -0.5786139305123587  0.0000532971824726   -0.0006702672517633

Можемо зупинитися після 6-ї ітерації, оскільки досягнута очікувана кількість ітерацій.

q (фактор збіжності): 0.2443
delta (максимальна відстань між x0 та межами інтервалу): 0.4000
```

Порівняння двух методів:

(Взято базові параметри, див. Мал. 0)

Метод простої ітерації виконав обчислення гірше(6 ітерацій проти 3 у Ньютона), проте дійшовши до такого ж результату як і метод Ньютона. Хоча цей метод є більш стабільним, через не таку високу залежність від початкового наближення.

Метод Ньютона показав високий фактор збіжності $q = 0.0831$, що підтверджує швидку збіжність методу.

Висновок:

Метод Ньютона краще підходить для задач, де потрібна швидка збіжність і точне початкове наближення є доступним. Однак його застосування складніше через необхідність обчислення похідних. **Метод простої ітерації** є більш універсальним і простим у застосуванні, але збігається повільніше і зазвичай потребує більшої кількості ітерацій для досягнення бажаної точності.