

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп'ютерних наук і кібернетики

Звіт
з лабораторної роботи №3
«Розв'язування систем нелінійних рівнянь»

Виконав:
Студент групи ІПС-32
Гончаренко Ілля Сергійович

Київ
2024

Мета:

Метою роботи є розв’язок системи нелінійних рівнянь за допомогою таких методів:

- Проста ітерація
- Ньютона

Теорія:

Нехай потрібно розв'язати систему нелінійних рівнянь

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \\ \dots\dots\dots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) = 0. \end{cases}$$

Запишемо її у вигляді векторного рівняння

$$\vec{F}(\vec{x}) = \vec{0}$$

Де $\vec{F} = (f_1, \dots, f_n)^T, \vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$.

Метод простої ітерації:

Зведемо векторне рівняння до вигляду

$$\vec{x} = \vec{\Phi}(\vec{x})$$

Це можна зробити , наприклад, узявши

$$\vec{\Phi}(\vec{x}) = \vec{x} - C\vec{F}(\vec{x}), \text{ де } C - \text{невироджена матриця}$$

Метод простої ітерації для рівняння $\vec{x} = \vec{\Phi}(\vec{x})$ полягає в обчисленні наближень за формулою $\vec{x}^{k+1} = \vec{\Phi}(\vec{x}^k)$ для заданого x^0 .

Умови збіжності методу має теорема про стискальні відображення:

$$||\Phi'(\vec{x})|| \leq q, q < 1$$

де $\Phi'(\vec{x}) = (\frac{\delta \phi_i}{\delta x_j})_{i,j=1}^n$ - матриця Якобі вектора правих частин $\vec{\Phi}(\vec{x})$.

Правдива така оцінка точності:

$$||\vec{x}^k - \vec{x}|| \leq \varepsilon$$

Метод Ньютона:

Лінеаризуючи рівняння $\vec{F}(\vec{x}) = \vec{0}$ в околі наближення до розв'язку \vec{x} , отримаємо систему лінійних рівнянь відносно нового наближення \vec{x}^{k+1} :

$$\vec{F}(\vec{x}^k) + F'(\vec{x}^k)(\vec{x}^{k+1} - \vec{x}^k) = \vec{0}.$$

Можна запропонувати такий алгоритм розв'язання рівняння

$$\vec{F}(\vec{x}^k) + F'(\vec{x}^k)(\vec{x}^{k+1} - \vec{x}^k) = \vec{0} . :$$

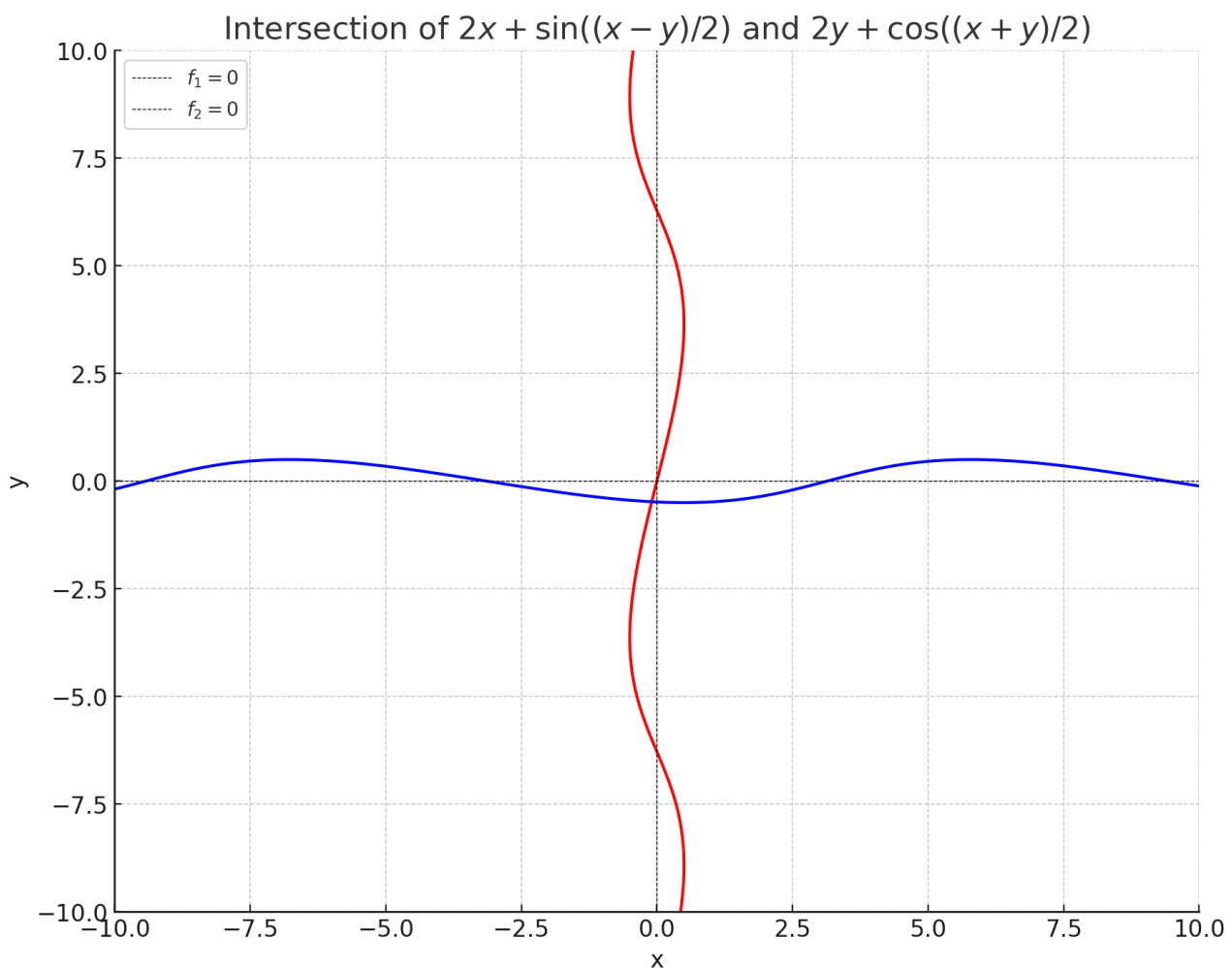
1. Задати початкове наближення \vec{x}^0 ;
2. Обчислимо матрицю Якобі $A_k = \left(\frac{\delta f_i}{\delta x_j}(\vec{x}^k) \right)_{i,j=1}^n$;
3. Розв'язати СЛАР $A_k \vec{z}^k = -\vec{F}(\vec{x}^k)$;
4. Обчислити нове наближення $\vec{x}^{k+1} = \vec{x}^k + \vec{z}^k$;
5. Перевірити умову $||\vec{z}^k|| \leq \epsilon$; якщо її виконано, припинити процес, а не то повторити обчислення, починаючи з п.2.

Як і для одного рівняння, метод Ньютона збігається, якщо початкове наближення \vec{x}^0 близьке до розв'язку \vec{x} . Для систем зберігається властивість квадратичної швидкості збіжності в околі розв'язку.

Оскільки для реалізації методу Ньютона потрібно розв'язувати СЛАР, то в разі довільної матриці A_k застосовують метод Гаусса, для чого потрібно виконати $\frac{2}{3}n^3 + O(n^2)$ арифметичних операцій.

Хід роботи:

$$\text{Система: } \begin{cases} 2x + \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) = 0, \\ 2x + \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) = 0 \end{cases}$$



Обрана точність 10^{-5}

Метод простої ітерації:

1. Ініціалізується початковий вектор $x_0 = [0, 0.5]$.

2. Обчислюється матриця Якобі для функцій:

$$\text{Якобіан} = \begin{bmatrix} 1.5155 & 0.4844 \\ 0 & 2.0842 \end{bmatrix}.$$

3. Визначається матриця C як обернена до Якобіану:

$$C = \begin{bmatrix} 0.6723 & -0.1534 \\ -0.0392 & 0.4798 \end{bmatrix}.$$

4. Перевіряється норма Якобіану для $\Phi(x)$:

$$\|\Phi'(x)\| = 1.83 \times 10^{-16}.$$

5. Визначається максимальне значення похідної $\Phi(x)$ на проміжку $[0, 0.5]$:

$$q_{\max} = 0.2187.$$

6. Починається ітераційний процес:

$$x = [-0.16157356, 0.49477309]$$

Ітерація 1:

$$\text{Критерій зупинки} = 0.16165807979184715,$$

$$\text{Якобіан} = \begin{bmatrix} 0.66319964 & -0.15070359 \\ -0.02640052 & 0.48609528 \end{bmatrix},$$

$$x = [-0.16051012, 0.49310234],$$

Ітерація 2:

$$\text{Критерій зупинки} = 0.0019804750037164124,$$

$$\text{Якобіан} = \begin{bmatrix} 0.66328583 & -0.15080403 \\ -0.02635816 & 0.48612338 \end{bmatrix},$$

$$x = [-0.16050991, 0.49310231],$$

Ітерація 3:

$$\text{Критерій зупинки} = 2.0886495362465268e - 07.$$

$$\text{Якобіан} = \begin{bmatrix} 0.66328585 & -0.15080404 \\ -0.02635818 & 0.48612337 \end{bmatrix},$$

7. Метод завершується, оскільки критерій зупинки стає меншим за $\text{tol} = 10^{-5}$. Розв'язок:

$$x = [-0.16050991 \quad 0.49310231]$$

8. Перевіримо розв'язок:

$$1. 2 \cdot (-0.16050991) - \sin\left(\frac{-0.16050991 - 0.49310231}{2}\right) \approx 5.58 \cdot 10^{-9} \approx 0.000000005582147910576651$$

$$2. 2 \cdot 0.49310231 - \cos\left(\frac{-0.16050991 + 0.49310231}{2}\right) \approx -2.88 \cdot 10^{-9} \approx 0.0000000028769262527816863$$

Метод Ньютона:

1. Ініціалізується початковий вектор $x_0 = [0, 0.5]$.

2. Починається ітераційний процес:

Ітерація 1:	Обчислюється Якобіан:	$J = \begin{bmatrix} 1.5155 & 0.4844 \\ 0 & 2.0842 \end{bmatrix}.$
	Значення z :	$z = [0.1616, 0.0052].$
	Оновлюється x :	$x = [-0.1616, 0.4948].$
	Критерій зупинки:	$ z = 0.1617.$
Ітерація 2:	Обчислюється Якобіан:	$J = \begin{bmatrix} 1.5267 & 0.4733 \\ 0 & 2.0572 \end{bmatrix}.$
	Значення z :	$z = [-0.0011, 0.0017].$
	Оновлюється x :	$x = [-0.1605, 0.4931].$
	Критерій зупинки:	$ z = 0.00198.$
Ітерація 3:	Обчислюється Якобіан:	$J = \begin{bmatrix} 1.5265 & 0.4735 \\ 0 & 2.0571 \end{bmatrix}.$
	Значення z :	$z = [-2.07 \times 10^{-7}, 3.04 \times 10^{-8}].$
	Оновлюється x :	$x = [-0.1605, 0.4931].$
	Критерій зупинки:	$ z = 2.09 \times 10^{-7}.$

3. Метод завершується, оскільки критерій зупинки стає меншим за $\text{tol} = 10^{-5}$. Розв'язок:

$$x = [-0.16050991 \quad 0.49310231]$$

8. Перевіримо розв'язок:

$$1. 2 \cdot (-0.16050991) - \sin\left(\frac{-0.16050991 - 0.49310231}{2}\right) \approx 5.58 \cdot 10^{-9} \approx 0.000000005582147910576651$$

$$2. 2 \cdot 0.49310231 - \cos\left(\frac{-0.16050991 + 0.49310231}{2}\right) \approx -2.88 \cdot 10^{-9} \approx 0.0000000028769262527816863$$

Висновок:

У результаті виконання двох числових методів розв'язання нелінійної системи рівнянь — **методу простої ітерації** та **методу Ньютона** — було отримано однаковий розв'язок:
 $x = [-0.16050991 \quad 0.49310231]$

Порівняння методів:

1. Метод простої ітерації:

- Досяг збіжності за **3 ітерацій**.
- Використовує обчислення матриці Якобі лише на початку, що може бути перевагою при обмежених обчислювальних ресурсах.
- Збіжність залежить від вибору параметрів, таких як початкове наближення та норма Якобіана.

2. Метод Ньютона:

- Досяг збіжності за **3 ітерації**, що значно швидше.
- На кожній ітерації обчислюється нова матриця Якобі та розв'язується система лінійних рівнянь, що може збільшувати обчислювальні витрати.
- Збіжність швидша завдяки квадратній природі методу за умови коректності початкового наближення.

Рекомендації:

- Метод Ньютона рекомендується використовувати для задач, де важлива швидка збіжність, і є можливість ефективного обчислення Якобіана.
- Метод простої ітерації може бути зручним у випадках, коли обчислення Якобіана є обмеженням, але необхідно враховувати можливість повільнішої збіжності.

Обидва методи показали високу точність, підтвердивши коректність числового розв'язання задачі.