Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп’ютерних наук і кібернетики

Звіт
з лабораторної роботи №3
«Розв’язування систем нелінійних рівнянь»

Виконав:
Студент групи ІПС-32
Гончаренко Ілля Сергійович

Київ
2024

Мета:

Метою роботи є розв'язок системи нелінійних рівнянь за допомогою таких методів:

- Проста ітерація
- Ньютона

Теорія:

Нехай потрібно розв'язати систему нелінійних рівнянь

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) = 0. \end{cases}$$

Запишемо її у вигляді векторного рівняння

$$\overrightarrow{F}(\vec{x}) = \vec{0}$$

Де $\overrightarrow{F} = (f_1, \dots, f_n)^T, \vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$.

Метод простої ітерації:

Зведемо векторне рівняння до вигляду

$$\vec{x} = \overrightarrow{\Phi}(\vec{x})$$

Це можна зробити , наприклад, узявши

$\overrightarrow{\Phi}(\vec{x}) = \vec{x} - C\overrightarrow{F}(\vec{x})$, де C - невироджена матриця

Метод простої ітерації для рівняння $\vec{x} = \overrightarrow{\Phi}(\vec{x})$ полягає в обчисленні наближень за формулою $\vec{x}^{k+1} = \overrightarrow{\Phi}(\vec{x}^k)$ для заданого x^0.

Умови збіжності методу має теорема про стискальні відображення:

$$||\Phi^{'}(\vec{x})|| \leq q, q < 1$$

де $\Phi^{'}(\vec{x}) = (\dfrac{\delta \phi_i}{\delta x_j})_{i,j=1}^n$ - матриця Якобі вектора правих частин $\overrightarrow{\Phi}(\vec{x})$.

Правдива така оцінка точності:

$$||\vec{x}^k - \vec{x}|| \leq \frac{q^k}{1-q}||\vec{x}^1 - \vec{x}^0||$$

Метод Ньютона:

Лінеаризуючи рівняння $\overrightarrow{F}(\vec{x}) = \vec{0}$ в околі наближення до розв'язку $\vec{x}$, отримаємо систему лінійних рівнянь відносно нового наближення $\vec{x}^{k+1}$:

$$\overrightarrow{F}(\vec{x}^k) + F^{'}(\vec{x}^k)(\vec{x}^{k+1} - \vec{x}^k) = \vec{0}\,.$$

Можна запропонувати такий алгоритм роз'язання рівняння $\overrightarrow{F}(\vec{x}^k) + F^{'}(\vec{x}^k)(\vec{x}^{k+1} - \vec{x}^k) = \vec{0}\,.$:

1. Задати початкове наближення $\vec{x}^0$;
2. Обчислимо матрицю Якобі $A_k = \left(\dfrac{\delta f_i}{\delta x_j}(\vec{x}^k)\right)_{i,j=1}^{n}$;
3. Розв'язати СЛАР $A_k\vec{z}^k = \overrightarrow{F}(\vec{x}^k)$;
4. Обчислити нове наближення $\vec{x}^{k+1} = \vec{x}^k - \vec{z}^k$;
5. Перевірити умову $||\vec{z}^k|| \le \epsilon$; якщо її виконано, припинити процес, а не то повторити обчислення, починаючи з п.2.

Як і для одного рівняння, метод Ньютона збігається, якщо початкове наближення $\vec{x}^0$ близьке до розв'язку $\vec{x}$. Для систем зберігається властивість квадратичної швидкості збіжності в околі розв'язку. Оскільки для реалізації методу Ньютона потрібно розв'язувати СЛАР, то в разі довільної матриці A_k застосовують метод Гаусса, для чого потрібно виконати $\dfrac{2}{3}n^3 + O(n^2)$ арифметичних операцій.

Хід роботи:

Метод простої ітерації:

1. Ініціалізується початковий вектор $x_0 = [0, 0.5]$.

2. Обчислюється матриця Якобі для функцій:

$$\text{Якобіан} = \begin{bmatrix} 1.5155 & 0.4844 \\ 0 & 2.0842 \end{bmatrix}.$$

3. Визначається матриця C як обернена до Якобіану:

$$C = \begin{bmatrix} 0.6723 & -0.1534 \\ -0.0392 & 0.4798 \end{bmatrix}.$$

4. Перевіряється норма Якобіану для $\Phi(x)$:

$$\|\Phi'(x)\| = 1.83 \times 10^{-16}.$$

5. Визначається максимальне значення похідної $\Phi(x)$ на проміжку [0, 0.5]:

$$q_{\max} = 0.2187.$$

6. Починається ітераційний процес:

$$\begin{array}{lll}
\text{Ітерація 1:} & x = [-0.16157356, 0.49477309], & \text{Критерій зупинки} = 0.04526064516414274 \\
\text{Ітерація 2:} & x = [-0.16049344, 0.49311303], & \text{Критерій зупинки} = 0.009837869133169775 \\
\text{Ітерація 3:} & x = [-0.16051013, 0.49310285], & \text{Критерій зупинки} = 0.002152128682562234 \\
\text{Ітерація 4:} & x = [-0.16050991, 0.49310232], & \text{Критерій зупинки} = 0.0004707481905066581 \\
\text{Ітерація 5:} & x = [-0.16050991, 0.49310231], & \text{Критерій зупинки} = 0.00010296974000478634 \\
\text{Ітерація 6:} & x = [-0.16050991, 0.49310231], & \text{Критерій зупинки} = 2.2523224348175885e-05 \\
\text{Ітерація 7:} & x = [-0.16050991, 0.49310231], & \text{Критерій зупинки} = 4.9266477231461166e-06
\end{array}$$

7. Метод завершується, оскільки критерій зупинки стає меншим за $\text{tol} = 10^{-5}$. Розв'язок:

$$x = [-0.1605, 0.4931]$$

Метод Ньютона:

1. Ініціалізується початковий вектор $x_0 = [0, 0.5]$.
2. Починається ітераційний процес:

$$\begin{array}{lll}
 & \text{Обчислюється Якобіан:} & J = \begin{bmatrix} 1.5155 & 0.4844 \\ 0 & 2.0842 \end{bmatrix}. \\
\text{Ітерація 1:} & \text{Значення z:} & z = [0.1616, 0.0052]. \\
 & \text{Оновлюється x:} & x = [-0.1616, 0.4948]. \\
 & \text{Критерій зупинки:} & ||z|| = 0.1617. \\
 & \text{Обчислюється Якобіан:} & J = \begin{bmatrix} 1.5267 & 0.4733 \\ 0 & 2.0572 \end{bmatrix}. \\
\text{Ітерація 2:} & \text{Значення z:} & z = [-0.0011, 0.0017]. \\
 & \text{Оновлюється x:} & x = [-0.1605, 0.4931]. \\
 & \text{Критерій зупинки:} & ||z|| = 0.00198. \\
 & \text{Обчислюється Якобіан:} & J = \begin{bmatrix} 1.5265 & 0.4735 \\ 0 & 2.0571 \end{bmatrix}. \\
\text{Ітерація 3:} & \text{Значення z:} & z = [-2.07 \times 10^{-7}, 3.04 \times 10^{-8}]. \\
 & \text{Оновлюється x:} & x = [-0.1605, 0.4931]. \\
 & \text{Критерій зупинки:} & ||z|| = 2.09 \times 10^{-7}.
\end{array}$$

3. Метод завершується, оскільки критерій зупинки стає меншим за $\text{tol} = 10^{-5}$. Розв'язок:

$$x = [-0.1605, 0.4931].$$

Висновок:

У результаті виконання двох числових методів розв’язання нелінійної системи рівнянь — **методу простої ітерації**та **методу Ньютона** — було отримано однаковий розв’язок: x=[−0.16050991,0.49310231]

Порівняння методів:

1. **Метод простої ітерації**:
   - Досяг збіжності за **8 ітерацій**.
   - Використовує обчислення матриці Якобі лише на початку, що може бути перевагою при обмежених обчислювальних ресурсах.
   - Збіжність залежить від вибору параметрів, таких як початкове наближення та норма Якобіана.
2. **Метод Ньютона**:
   - Досяг збіжності за **3 ітерації**, що значно швидше.
   - На кожній ітерації обчислюється нова матриця Якобі та розв’язується система лінійних рівнянь, що може збільшувати обчислювальні витрати.
   - Збіжність швидша завдяки квадратній природі методу за умови коректності початкового наближення.

Рекомендації:

- Метод Ньютона рекомендується використовувати для задач, де важлива швидка збіжність, і є можливість ефективного обчислення Якобіана.
- Метод простої ітерації може бути зручним у випадках, коли обчислення Якобіана є обмеженням, але необхідно враховувати можливість повільнішої збіжності.

Обидва методи показали високу точність, підтвердивши коректність числового розв’язання задачі.