Os teoremas da incompletude de Gödel

Lógica em ação

23/12/2024

O que são os teoremas da incompletude?

Escritos no Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme, os teoremas da incompletude são dois resultados fundamentais da lógica matemática que estabelecem limitações a quase todos os sistemas axiomáticos. Para entendê-los, é necessário compreender a relação entre os símbolos e seus significados.

Codificando!

Número de Gödel

Buscando uma relação entre os símbolos e seus significados, Gödel teve a brilhante ideia de codificar os símbolos separadamente. Dada uma fórmula, ele era capaz de gerar um código único para ela usando o seguinte método. Considere a fórmula:

$$\neg (s0 = 0)$$

Essa fórmula expressa que o sucessor de 0 é diferente de zero, o que sabemos ser uma verdade.

Como codificar?

Para codificar, Gödel fez uma tabela semelhante a esta:

Símbolos Constantes	Número de Gödel
7	1
\wedge	2
\vee	3

Símbolos Constantes	Número de Gödel
\rightarrow	4
∃	5
\forall	6
=	7
0	8
s	9
	10
)	11

Fatores primos

Definidos os números de Gödel para cada símbolo, Gödel podia codificar as expressões. Para garantir que fossem únicas, ele usou os fatores primos. Lembre-se de que todos os números podem ser escritos de forma única como a multiplicação de fatores primos. Para codificar, utilizamos os n primeiros primos, onde n é a quantidade de símbolos na fórmula, e elevamos cada primo ao número de Gödel do seu respectivo símbolo. Considere a fórmula:

$$\neg (s0 = 0)$$

Codificando a fórmula acima:

$$2^1 \cdot 3^{10} \cdot 5^9 \cdot 7^8 \cdot 11^7 \cdot 13^8 \cdot 17^{11} = M$$

Onde M representa o número de Gödel da expressão $\neg(s0 = 0)$. Com esse método, fica claro que podemos codificar qualquer fórmula da lógica de forma única. Observe:

Utilizando o Maxima

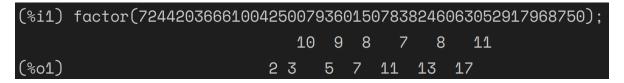


Figura 1: Fatoração de M no Maxima

Fórmulas compostas

Para fórmulas compostas, utilizamos o mesmo processo. Assim, ficaremos com:

Prova	ng das sentenças	ng da prova
$\exists x_1(x_1 = s_{x_2})$	n	$2^n \times 3^m$
$\exists x_1(x_1 = s_0)$	m	

Teoremas

Acordos

Quando uma teoria é completa? Uma teoria é completa se, no sistema definido, toda afirmação pode ser provada ou refutada.

Quando um sistema é inconsistente? Um sistema é inconsistente se nele é possível provar uma afirmação e também sua negação.

Seguindo as orientações do *Principia Mathematica*, usaremos um sistema completo e consistente.

Primeiro teorema da incompletude

"Qualquer sistema formal consistente S dentro do qual uma certa quantidade de Aritmética elementar possa ser realizada é incompleto."

Para a primeira "prova", buscando relacionar a metaritimética e os símbolos, Gödel construiu a propriedade $\operatorname{Dem}(x,y)$: a sequência de fórmulas com o número de Gödel x é uma prova para a fórmula y. Com essa relação, se tivermos $x=2^{n_1}\cdot 3^{n_2}\cdot 5^{n_3}\cdot 7^{n_4}\cdot 11^{n_5}$, podemos dizer que x e y são números de Gödel, e n_i são os números associados aos símbolos.

Para o paradoxo da autorreferência é apenas um passo. Com todo esse "sistema", Gödel escreveu a fórmula:

$$G = \forall x \neg \text{Dem}(x, \text{ng}(G))$$

Duas hipóteses

Primeira hipótese

Se pudermos definir G ("A fórmula G não pode ser demonstrada no PM") como uma verdade, ficará claro que "A fórmula G não pode ser demonstrada no PM" é uma verdade; isso entraria em contradição com o próprio G.

Segunda hipótese

Se pudermos definir $\neg G$ como uma verdade, isso implicará em "A fórmula G pode ser demonstrada no PM", o que também entra em contradição.

Segundo teorema da incompletude

"Para algum sistema formal consistente S dentro do qual uma certa quantidade de Aritmética elementar possa ser realizada, a consistência de S não pode ser provada por meio de S."

Imagine um sistema formal S que tenta provar sua própria consistência. Caso S fosse capaz de provar sua consistência, seria possível construir uma prova que contradissesse o Primeiro Teorema da Incompletude, mostrando que S é ao mesmo tempo completo e consistente. No entanto, isso é impossível, pois S não pode provar sua própria consistência sem se tornar inconsistente.