Os teoremas da incompletude de Gödel

Lógica em ação

23/12/2024

O que são os teoremas da incompletude?

Escritos no *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme*, os teoremas da incompletude são dois resultados fundamentais da lógica matemática que estabelecem limitações a quase todos os sistemas axiomáticos. Para entendê-los, é necessário compreender a relação entre os símbolos e seus significados.

Codificando!

Número de Gödel

Buscando uma relação entre os símbolos e seus significados, Gödel teve a brilhante ideia de codificar os símbolos separadamente. Dada uma fórmula, ele era capaz de gerar um código único para ela usando o seguinte método. Considere a fórmula:

$$\neg(\mathrm{s}0 = 0)$$

Essa fórmula expressa que o sucessor de 0 é diferente de zero, o que sabemos ser uma verdade.

Como codificar?

Para codificar, Gödel fez uma tabela semelhante a esta:

Símbolos Constantes	Número de Gödel
$\neg$	1
$\wedge$	2
$\vee$	3

Símbolos Constantes	Número de Gödel
$\rightarrow$	4
$\exists$	5
$\forall$	6
$=$	7
0	8
s	9
(	10
)	11

Fatores primos

Definidos os números de Gödel para cada símbolo, Gödel podia codificar as expressões. Para garantir que fossem únicas, ele usou os fatores primos. Lembre-se de que todos os números podem ser escritos de forma única como a multiplicação de fatores primos. Para codificar, utilizamos os n primeiros primos, onde n é a quantidade de símbolos na fórmula, e elevamos cada primo ao número de Gödel do seu respectivo símbolo. Considere a fórmula:

$$\neg(\mathrm{s}0 = 0)$$

Codificando a fórmula acima:

$$2^1 \cdot 3^{10} \cdot 5^9 \cdot 7^8 \cdot 11^7 \cdot 13^8 \cdot 17^{11} = M$$

Onde M representa o número de Gödel da expressão $\neg(\mathrm{s}0 = 0)$. Com esse método, fica claro que podemos codificar qualquer fórmula da lógica de forma única. Observe:

Utilizando o Maxima

```
(%i1) factor(72442036661004250079360150783824606305291796875 0);
                              10  9  8   7   8   11
(%o1)                      2 3   5  7  11  13  17
```

Figura 1: Fatoração de M no Maxima

Fórmulas compostas

Para fórmulas compostas, utilizamos o mesmo processo. Assim, ficaremos com:

Prova	ng das sentenças	ng da prova
$\exists x_1(x_1 = s_{x_2})$	n	$2^n \times 3^m$
$\exists x_1(x_1 = s_0)$	m	

Teoremas

Acordos

Quando uma teoria é completa? Uma teoria é completa se, no sistema definido, toda afirmação pode ser provada ou refutada.

Quando um sistema é inconsistente? Um sistema é inconsistente se nele é possível provar uma afirmação e também sua negação.

Seguindo as orientações do *Principia Mathematica*, usaremos um sistema completo e consistente.

Primeiro teorema da incompletude

"Qualquer sistema formal consistente S dentro do qual uma certa quantidade de Aritmética elementar possa ser realizada é incompleto."

Para a primeira "prova", buscando relacionar a metaritimética e os símbolos, Gödel construiu a propriedade $\mathrm{Dem}(x, y)$: a sequência de fórmulas com o número de Gödel x é uma prova para a fórmula y. Com essa relação, se tivermos $x = 2^{n_1} \cdot 3^{n_2} \cdot 5^{n_3} \cdot 7^{n_4} \cdot 11^{n_5}$, podemos dizer que x e y são números de Gödel, e n_i são os números associados aos símbolos.

Para o paradoxo da autorreferência é apenas um passo. Com todo esse "sistema", Gödel escreveu a fórmula:

$$G = \forall x \neg \mathrm{Dem}(x, \mathrm{ng}(G))$$

Duas hipóteses

Primeira hipótese

Se pudermos definir G ("A fórmula G não pode ser demonstrada no PM") como uma verdade, ficará claro que "A fórmula G não pode ser demonstrada no PM" é uma verdade; isso entraria em contradição com o próprio G.

Segunda hipótese

Se pudermos definir $\neg G$ como uma verdade, isso implicará em "A fórmula G pode ser demonstrada no PM", o que também entra em contradição.

Segundo teorema da incompletude

"Para algum sistema formal consistente S dentro do qual uma certa quantidade de Aritmética elementar possa ser realizada, a consistência de S não pode ser provada por meio de S."

Imagine um sistema formal S que tenta provar sua própria consistência. Caso S fosse capaz de provar sua consistência, seria possível construir uma prova que contradissesse o Primeiro Teorema da Incompletude, mostrando que S é ao mesmo tempo completo e consistente. No entanto, isso é impossível, pois S não pode provar sua própria consistência sem se tornar inconsistente.