Océane Li
Adam Boumessaoud

Master 1 BIM

PROJET N°6
-
Réseau de Hopfield : Modèle de la mémoire associative

Année académique
2023/2024

Introduction

La mémoire est un phénomène complexe, sous-tendu par une série de mécanismes neuronaux qui nous permettent de stocker, de récupérer et d'associer des informations de manière efficace. Parmi les différentes formes de mémoire, la mémoire associative se distingue par sa capacité à lier des éléments entre eux, permettant ainsi la récupération d'informations à partir de stimuli partiels ou incomplets. Ce type de mémoire joue un rôle essentiel dans de nombreuses fonctions cognitives, telles que la communication et la reconnaissance de motifs. Une illustration classique de la mémoire associative est le modèle du réseau de Hopfield, qui offre un cadre théorique pour comprendre comment les connexions neuronales peuvent stocker et récupérer des informations de manière associative. Dans ce contexte, se pose la question fondamentale du mécanisme neuronal sous-tendant la mémoire associative. Nous suivrons donc le fil conducteur de cette problématique afin de mieux comprendre le fonctionnement de ce réseau ainsi que ses limites d'apprentissage.

Construction du modèle

Le modèle du réseau de Hopfield est une approche classique de la mémoire associative, développée par le physicien américain John Hopfield dans les années 1980. Ce modèle repose sur l'idée que les connexions synaptiques entre les neurones d'un réseau peuvent être ajustées de manière à stocker et à récupérer des motifs spécifiques à partir de stimuli partiels ou bruités. Dans ce modèle, chaque neurone du réseau est représenté par une unité de traitement qui peut être dans un état actif ou inactif. La dynamique du réseau est décrite par des équations différentielles qui régissent l'évolution temporelle de l'état de chaque neurone en fonction des états des autres neurones et des poids synaptiques qui les relient.

Ici, nous avons choisi de construire un réseau de Hopfield avec $K = 25$ neurones.

Dans un premier temps, on a défini une première équation qui exprime la dynamique du potentiel de membrane pour chaque neurone k du réseau. Cette équation décrit comment le potentiel de membrane y_k évolue au fil du temps en réponse à l'activation des autres neurones, pondérée par les poids synaptiques w_{ki} qui déterminent la force des connexions synaptiques entre les neurones k et i.

$$\frac{dy_k}{dt} = -y_k + g\left(\sum_{i=1}^{K} w_{ki} y_i\right) \tag{1}$$

- $\frac{dy_k}{dt}$: la dérivée temporelle du potentiel de membrane du neurone k.
- y_k : le potentiel de membrane du neurone k à un instant donné. Il représente l'état d'activation ou d'inactivation du neurone.
- $\sum_{i=1}^{K} w_{ki} y_i$: la somme pondérée des potentiels de membrane des neurones connectés au

neurone k. Chaque terme $w_{ki}y_i$ représente la contribution d'un neurone i au potentiel de membrane du neurone k. Cette somme s'étend sur tous les neurones du réseau.

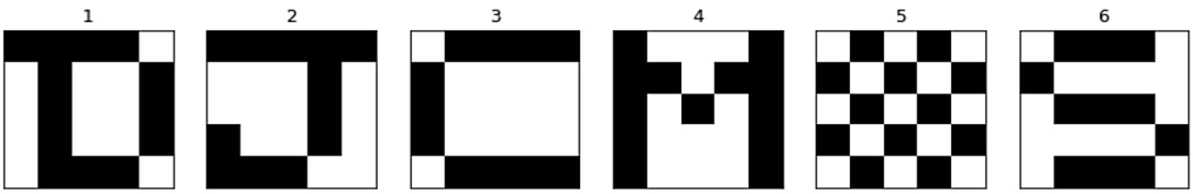
- $-y_k$: un terme de régulation négative qui assure que le potentiel de membrane du neurone k tende vers 0 lorsque le potentiel de membrane est positif, et vers 1 lorsqu'il est négatif. Cela garantit que le potentiel de membrane reste dans une plage valide et évite les valeurs extrêmes.

On définit également la fonction d'activation $g(a)$, qui est une tangente hyperbolique. Cette dernière est utilisée pour introduire une non-linéarité dans la dynamique du réseau.

$$g(a) = tanh(a) = \frac{e^a - e^{-a}}{e^a + e^{-a}} \tag{2}$$

La tangente hyperbolique est le rapport entre la différence et la somme de 2 exponentielles. En utilisant les propriétés de croissance et de décroissance des exponentielles, cette expression aboutit à une fonction qui renvoie une valeur comprise entre -1 et $+1$ quelque soit la valeur de a.

Afin de tester notre modèle, nous utiliserons les 6 motifs suivants :



Chaque motif correspond au vecteur d'activités $\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_k)$ avec $y_k = -1$ pour les pixels noirs et $y_k = +1$ pour les pixels blancs. Enfin, on fixe les poids synaptiques aux valeurs hebbiennes pour stocker un nombre N de motifs dans la mémoire :

$$w_{ki} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} y_k^{(n)} y_i^{(n)} \tag{3}$$

- N : le nombre de motifs à stocker dans la mémoire.
- $y_k^{(n)}$ et $y_i^{(n)}$: activations des neurones k et i respectivement pour le motif n.
- w_{ki} : le poids synaptique entre les neurones k et i.

Cette 3^e équation spécifie comment les poids synaptiques sont déterminés pour stocker des motifs dans la mémoire du réseau. Elle met en œuvre la règle de Hebb, qui stipule que les connexions synaptiques entre deux neurones sont renforcées si ces neurones sont activés simultanément de manière répétée. Ainsi, les poids synaptiques sont ajustés pour refléter les corrélations entre les activations observées des neurones dans les motifs mémorisés.

De ce fait, nous possédons un modèle nous permettant de simuler et de comprendre les mécanismes sous-jacents de la mémoire associative et de concevoir des systèmes capables de récupérer des informations à partir de stimuli incomplets ou bruités.

Simulation et analyse du modèle

Tout d'abord, nous avons transformé les 6 motifs à tester sur notre modèle en matrices de valeurs binaires ($+1$ pour les pixels blancs et -1 pour les pixels noirs). Chaque élément de la matrice correspond à un pixel dans une représentation bidimensionnelle du motif.

Toutefois, il paraît évident que le réseau ne peut pas stocker un nombre illimité de motifs. On cherche donc à déterminer la capacité de ce modèle de mémoire. Pour ce faire, nous pouvons, dans un premier temps, tester la performance de notre réseau avec $N = 1$ motif.

Nous avons défini plusieurs fonctions pour mettre en œuvre notre modèle de réseau :

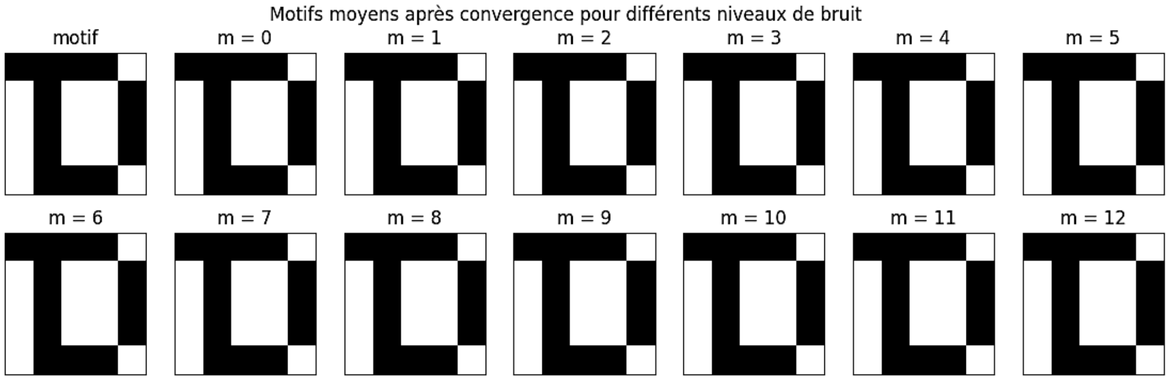
- La fonction d'activation tangente hyperbolique $g(a)$.
- Le calcul de la matrice des poids synaptiques $initialise\_W(K, N, motifs)$, en utilisant la règle de Hebb avec les motifs fournis. Elle parcourt chaque paire de neurones et calcule les poids synaptiques selon l'équation (3).
- La fonction $generate\_noisy\_pattern(pattern, m)$ qui génère un motif bruité en inversant les valeurs de m éléments (soit le niveau de bruit) du motif original de manière aléatoire.
- La fonction $compute\_precision\_error(pattern, noisy\_pattern)$ qui calcule l'erreur de précision de la mémoire entre le motif original et le motif récupéré par le réseau.

Nous pouvons à présent construire notre fonction générale pour coordonner la simulation du modèle de réseau de Hopfield :$Hopfield(patterns, num\_simulations = 100, noise\_list = range(12), affichage = False)$. Dans cette fonction, on itère sur le nombre de motifs mémorisés N dans la liste $patterns$, et pour chaque nombre de motifs N, on initialise la matrice des poids synaptiques avec la fonction $initialise\_W$. Ensuite, on effectue plusieurs simulations pour chaque niveau de bruit m, et on initialise le réseau avec un motif bruité généré à partir du motif original, puis on fait converger le réseau en mettant à jour les activations des neurones jusqu'à ce qu'il atteigne un état stable. L'erreur moyenne est calculée pour chaque niveau de bruit et stockée dans une matrice `error_by_N`.

Les paramètres de stimulation sont indiqués par l'énoncé :

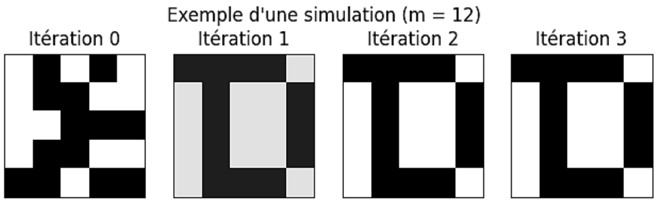
- $K = pattern.size = 25$: nombre de neurones dans le réseau (nombre de pixels dans le motif).
- $N = 1$: nombre de motifs mémorisés (dans ce cas, on en mémorise un seul).
- $num\_simulations = 100$: nombre de simulations à effectuer pour chaque niveau de bruit.
- $levels\_of\_noise$: liste des niveaux de bruit, allant de 0 à $K/2$ (arrondi au-dessous).

En faisant appel à la fonction $Hopfield$, on obtient donc les erreurs moyennes des simulations (`Error`), et si l'affichage est demandé, les motifs moyens obtenus après convergence pour chaque niveau de bruit (`Images`), ainsi que les états du système pendant l'une des simulations (`Simulation`). Voici les résultats obtenus :



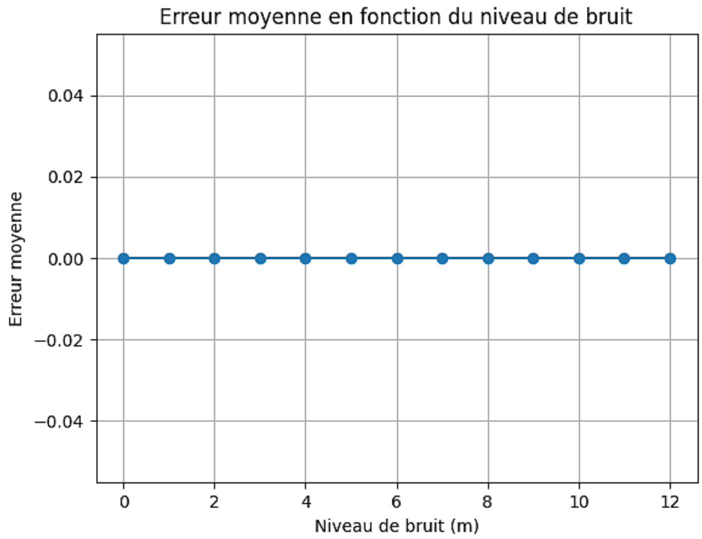
<u>Figure 1</u> : Motifs moyens après convergence en fonction du bruit

On observe que quel que soit le niveau de bruit m, le réseau de Hopfield parvient toujours à converger vers l'état du motif unique qu'il a mémorisé.



<u>Figure 2</u> : Un exemple de simulation

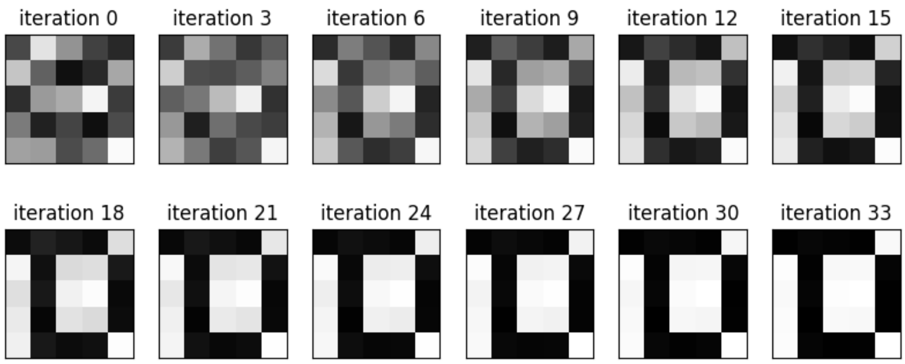
La figure 2 montre un exemple d'une simulation au niveau de bruit $m = 12$, et on remarque que même si le motif d'entrée est très bruité, notre réseau de Hopfield parvient très rapidement à se remémorer le motif qu'il a appris (dès la 1ère itération, les proportions des valeurs sont parfaites).



<u>Figure 3</u> : Représentation graphique de l'erreur moyenne en fonction du niveau de bruit

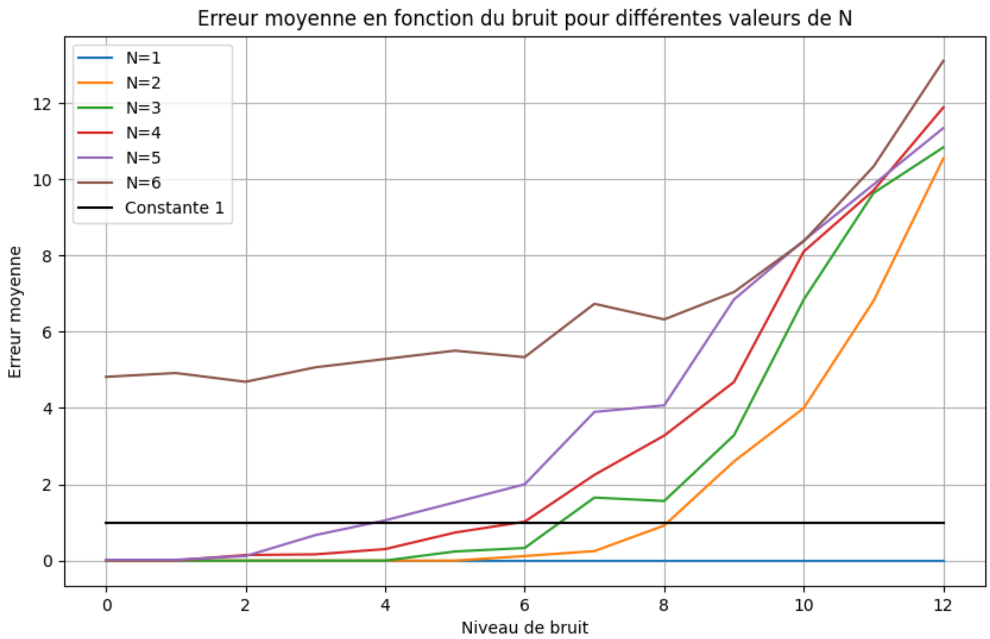
Tout comme les résultats des figures 1 et 2, on observe que pour un seul motif mémorisé, quel que soit le niveau de bruit (de 0 à 12 pixels variants), l'erreur moyenne de précision de la mémoire est toujours nulle. Cela signifie que quel que soit le niveau de perturbation, le système parvient toujours à converger vers l'état exact du motif mémorisé lorsqu'un seul motif est à apprendre. Le réseau a donc réussi à récupérer avec précision le motif mémorisé même en présence de bruit. Ce résultat ne paraît pas surprenant, puisqu'un seul motif a été encodé dans le système, ce qui signifie qu'il n'y a qu'un seul bassin attracteur. Il est donc logique que n'importe quel motif initial finisse par converger vers le motif appris.

Afin de mieux visualiser la convergence de notre modèle, nous avons repris la méthode d'Euler (vue en TME) pour un exemple de simulation (cette méthode est plus lente que celle que nous avons utilisée plus haut). On peut noter que le modèle peut converger soit vers le motif, soit vers son opposé (inversement des pixels blancs et noirs), en fonction des conditions initiales.



<u>Figure 4</u> : Visualisation des états du système pendant la dynamique avec la méthode d'Euler

Tous les résultats précédents attestent que la mémorisation d'un seul motif ne pose aucun problème à notre modèle de réseau. Il serait alors intéressant de voir maintenant jusqu'à combien de motifs il peut mémoriser en faisant le moins d'erreurs possible. Pour ce faire, nous avons répété la même procédure pour N = 2, …, 6 motifs et nous avons représenté sur un même graphique les courbes d'erreur moyenne en fonction des niveaux de bruit pour différentes valeurs de N. Voici les résultats obtenus :



<u>Figure 5</u> : L'erreur moyenne en fonction du niveau de bruit pour différents nombres de motifs mémorisés

Avec 100 simulations, on observe que l'erreur moyenne entre le motif obtenu après convergence et le motif original mémorisé augmente avec le nombre de motifs appris N. En d'autres termes : plus le réseau a de de motifs en mémoire, moins il saura reconnaître les motifs bruités, et plus les erreurs apparaîtront facilement.

Pour un niveau de bruit $m = 6$, le réseau peut retenir entre 3 et 4 motifs avec une moyenne d'erreur de mémoire < 1 pixel. Si on relance plusieurs fois le modèle, on peut voir que la courbe $N = 4$ descend parfois en dessous de 1 pour $m = 6$. Afin d'estimer plus précisément la moyenne de l'erreur, on peut augmenter le nombre de simulations à 20000 par exemple. Avec 20000 simulations, la moyenne d'erreur du modèle pour $N = 4$ et $m = 6$ est d'environ 1.1298 > 1 pixel. Donc en moyenne, le réseau peut mémoriser efficacement 3 motifs.

La capacité du réseau est définie comme le nombre maximal de motifs pouvant être mémorisés sans erreur (N_{max}), divisé par le nombre de neurones K dans le réseau ($m = 0$ bruit, avec une erreur de mémoire < 1 pixel) :

$$C = \frac{N_{max}}{K}$$

D'après la figure 5, l'erreur moyenne à $m = 0$ bruit est inférieur à 1 pixel jusqu'à $N = 5$ motifs. Ainsi, la capacité du réseau serait de :

$$C_{réseau} = \frac{5}{25} = 0.2$$

Ce résultat a également été vérifié par code informatique, où N_{max} est calculé en comptant le nombre de lignes où la première valeur est inférieure à 1 (ce qui signifie que l'erreur moyenne est inférieure à 1 pour un niveau de bruit de 0) dans la matrice d'erreurs moyennes renvoyée par la fonction $Hopfield$.

Conclusion

Le réseau de Hopfield, inspiré du fonctionnement du cerveau, est un modèle de mémoire associative capable de stocker et de récupérer des motifs à partir de motifs partiels ou bruités. Il repose sur des neurones interconnectés dont les poids synaptiques sont ajustés pour refléter les corrélations entre les activations neuronales observées dans les motifs mémorisés. Après avoir étudié la dynamique du réseau, nous avons pu la simuler et observer comment les activations des neurones convergent vers des états stables correspondant aux motifs mémorisés. En testant la performance du réseau avec différents niveaux de bruit et nombres de motifs en mémoire, nous avons également évalué sa capacité à récupérer les motifs dans des conditions plus variées. L'analyse graphique des erreurs moyennes nous a permis de mieux comprendre comment la performance du réseau varie en fonction de la complexité de la tâche de mémorisation. Ainsi, le réseau de Hopfield offre un modèle puissant pour la mémoire associative, avec des applications potentielles dans le stockage et la récupération d'informations dans divers domaines, allant de la reconnaissance de motifs à la résolution de problèmes d'optimisation combinatoire.