Optimisation TD 1
Descente de gradient et méthode de Newton

C. Frindel

October 21, 2016

Le but du TP est d'implémenter et de comparer deux méthodes d'optimisation vues en cours : la descente de gradient et la méthode de Newton, toutes deux étant des méthodes dites de descente. Les fichiers `surface3d_demo.py` et `lines3d_demo.py` permettent, respectivement, de représenter une surface et une trajectoire en 3-D avec la bibliothèque matplotlib. Ils constitueront donc des outils de visualisation particulièrement adaptés à cette étude.

1 Cas 1 : Fonction convexe de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$

On se propose de rechercher le minimum de la fonction $f(x, y) = (x - y)^4 + 2x^2 + y^2 - x + 2y$.

1. Tracer avec `matplotlib` la fonction et repérer le minimum global et (éventuellement) les minima locaux. S'inspirer des fonctions de démonstration fournies. Commenter.

2. Calculer le gradient g de la fonction f. Quelle est son expression ?

3. Implémenter la méthode de descente de gradient. Tester les différents critères d'arrêt vus en cours et commenter (commencer par le plus simple !).

4. Faire tourner l'algorithme pour le point de départ $(x_0, y_0) = (1, 1)$ et pour un pas de 0.09.

5. En combien d'itérations estimez-vous que l'algorithme a convergé ? Quelle est la solution renvoyée par l'algorithme et la norme L_1 du gradient pour cette solution ?

6. Tracer avec `matplotlib` la trajectoire $[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ de l'algorithme ainsi que la fonction f. Faire varier les paramètres de l'algorithme (point de départ, critères d'arrêt, norme du pas) et étudier les trajectoires produites.

7. Calculer la Hessienne de la fonction f. Quelle est son expression ?

8. Implémenter la méthode de Newton. L'arrêt du calcul sera conditionné par les mêmes conditions définies pour la méthode de descente de gradient.

9. Faire tourner l'algorithme pour le point de départ $(x_0, y_0) = (1, 1)$.

10. En combien d'itérations converge l'algorithme ? De même, quelle est la solution renvoyée par l'algorithme et la norme L_1 du gradient pour cette solution ?

11. Tracer avec `matplotlib` la trajectoire $[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ de l'algorithme ainsi que la fonction f. Faire varier les paramètres de l'algorithme (point de départ, critères d'arrêt, norme du pas) et étudier les trajectoires produites.

12. Comparer les résultats des deux méthodes.

2 Cas 2 : Fonction non convexe de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$

On se propose de rechercher le minimum de la fonction $f(x, y) = x^2 - y^2$.

1. Tracer avec `matplotlib` la fonction et repérer le minimum global et (éventuellement) les minima locaux. Justifier ce que vous voyez.

2. Faire tourner l'algorithme de descente de gradient avec les mêmes conditions d'arrêt du calcul que précédemment. Prendre un pas de 0.01. Tester les points de départ $(x_0, y_0) = (0, 0)$ et $(x_0, y_0) = (-5, 5)$. Commenter vos résultats.

3. Faire tourner l'algorithme de Newton avec les mêmes conditions d'arrêt. Tester les mêmes points de départ. Commenter vos résultats.

4. Comparer les résultats des deux méthodes. Et expliquer pourquoi elles n'ont pas le même comportement pour le point de départ $(x_0, y_0) = (-5, 5)$.

3 Cas 3 : Fonction non convexe de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$

On se propose finalement de rechercher le minimum de la fonction $f(x, y) = x^4 - x^3 - 20x^2 + x + 1 + y^4 - y^3 - 20y^2 + y + 1$.

1. Tracer avec `matplotlib` la fonction et repérer le minimum global et (éventuellement) les minima locaux. Justifier ce que vous voyez.

2. Faire tourner l'algorithme de descente de gradient avec les mêmes conditions d'arrêt du calcul que précédemment. Prendre un pas de 0.01. Tester les points de départ $(x_0, y_0) = (3, 4)$, $(x_0, y_0) = (-3, -3)$ et $(x_0, y_0) = (-4, -3)$. Commenter vos résultats.

3. Faire tourner l'algorithme de Newton avec les mêmes conditions d'arrêt du calcul que précédemment. Tester les mêmes points de départ. Commenter vos résultats.

4. Expliquer pourquoi la solution renvoyée par les deux algorithmes dépend du point de départ choisi. Quelle devrait être la solution à renvoyer dans tous les cas ?

5. Conclure sur les avantages/inconvénients les méthodes dites de descente.