工 程 控 制 原 理

2. 数学模型与传递函数

2.3 传递函数

主讲：李敏

上海大学
机电工程与自动化学院

2.3 传递函数

微分方程的求解十分繁琐，而且从其本身很难分析研究系统的动态性能，尤其是对复杂的系统及高阶微分方程。

如果对微分方程进行拉氏变换，得到代数方程(复数域)，将使解算简化而方便。传递函数是在拉普拉斯变换基础上产生的，可以用来方便直观地描述零初始条件下的单输入单输出系统，是对元件及系统进行分析、研究与综合的有力工具。根据传递函数在复平面上的形状可以直接判断系统的动态性能，找出改善系统品质的方法。传递函数是经典控制理论的基础，是极其重要的基本概念。

2.3.1 传递函数的定义

线性定常系统的传递函数，定义为零初始条件下，系统（或环节）输出量的拉氏变换与输入量的拉氏变换之比。

$$\text{传递函数} = \left.\frac{\text{输出信号的拉氏变换}}{\text{输入信号的拉氏变换}}\right|_{\text{零初始条件}}$$

即 $$G(s) = \frac{L\left[x_o(t)\right]}{L\left[x_i(t)\right]} = \frac{X_o(s)}{X_i(s)} \quad \Rightarrow \quad X_o(s) = X_i(s)G(s)$$

可见传递函数是描述系统的一种数学方式。

输入信号经系统(或环节)传递[乘以 $G(s)$]，得到输出信号。

$$X_i(s) \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow X_o(s)$$

称$G(s)$为传递函数

2.3.2 传递函数的求法

设线性定常系统（或环节）由下述n阶线性常微分方程描述

$$a_{\mathrm{n}}\frac{\mathrm{d}^{n}x_{\mathrm{o}}(t)}{\mathrm{d}t^{n}}+a_{\mathrm{n-1}}\frac{\mathrm{d}^{\mathrm{n-1}}x_{\mathrm{o}}(t)}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_{1}\frac{\mathrm{d}x_{\mathrm{o}}(t)}{\mathrm{d}t}+a_{0}x_{\mathrm{o}}(t)$$

$$=b_{\mathrm{m}}\frac{\mathrm{d}^{m}x_{\mathrm{i}}(t)}{\mathrm{d}t^{m}}+b_{\mathrm{m-1}}\frac{\mathrm{d}^{m-1}x_{\mathrm{i}}(t)}{\mathrm{d}t^{m-1}}+\cdots+b_{1}\frac{\mathrm{d}x_{\mathrm{i}}(t)}{\mathrm{d}t}+b_{0}x_{\mathrm{i}}(t)$$

式中，$n\geqslant m$。

2.3.2 传递函数的求法

当初始条件全为零，即：$x_i(t)$和$x_o(t)$及其各阶导数在 $t=0$ 的值均为零时，对上式进行拉氏变换

$$\left(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0\right) X_o(s)$$
$$= \left(b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0\right) X_i(s)$$

得到系统（或环节）传递函数的一般形式

$$G(s) = \frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

由此可知，只要知道系统微分方程，就可求出其传递函数。

2.3.3 传递函数的特点

(1) 传递函数的分母是系统的特征多项式，代表系统的固有特性，分子代表输入与输出的关系。因此，传递函数表达了系统本身的动态性能，与输入量的大小及性质无关。

(2) 传递函数不说明被描述系统的物理结构。只要动态性能相似，不同的系统可以用同一类型的传递函数描述。

(3) 传递函数可以是无量纲的，也可以是有量纲的，这要看系统输入、输出量的量纲，以及两者的比值。

(4) 传递函数是复变量s的有理真分式，$m \le n$，且所具有复变函数的所有性质。

(5) 传递函数的拉氏反变换为系统的脉冲响应。

2.3 传递函数

传递函数分母中的最高阶次，等于输出量最高阶导数的阶次。如果 **s** 的最高阶次等于 ***n***，则称这种系统为 ***n*** 阶系统。

例题 已知系统微分方程，求其传递函数。

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x_0(t)}{\mathrm{d}t^2}+D\frac{\mathrm{d}x_0(t)}{\mathrm{d}t}+kx_0(t)=f_i(t)$$

解： 在零初始条件下，对上式两边取拉普拉斯变换，得

$$ms^2X_{\mathrm{o}}(s)+DsX_{\mathrm{o}}(s)+kX_{\mathrm{o}}(s)=F_{\mathrm{i}}(s)$$

整理得到描述系统的传递函数

$$G(s)=\frac{X_{\mathrm{o}}(s)}{F_{\mathrm{i}}(s)}=\frac{1}{ms^2+Ds+k}$$

2.3.4 传递函数的标准形式

1. 零、极点形式（首1标准型）

将传递函数分子、分母最高次项（首项）均划为1。

系统放大系数

零点

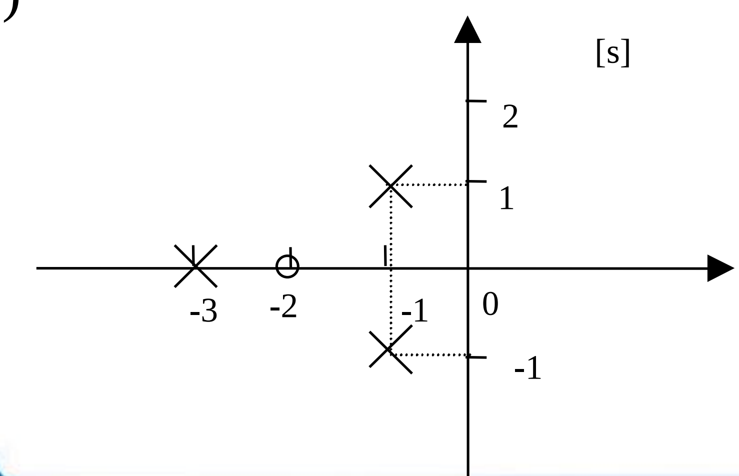
极点

$$G(s)=\frac{K^{*}\prod_{j=1}^{m}(s-z_{j})}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_{i})}$$

$$K^{*}=\frac{b_{m}}{a_{n}}$$

传递函数的零极点分布图：

$$G(s)=\frac{K^{*}(s+2)}{(s+3)(s^{2}+2s+2)}$$



2.3.4 传递函数的标准形式

2. 典型环节形式（尾1标准型）

将传递函数分子、分母最低次项（尾项）均划为1。

$$G(s)=\frac{K\prod_{k=1}^{m_1}(\tau_k s+1)\prod_{l=1}^{m_2}(\tau_l^2 s^2+2\zeta_l\tau_l s+1)}{s^r\prod_{i=1}^{n_1}(T_i s+1)\prod_{j=1}^{n_2}(T_j^2 s^2+2\zeta_j T_j s+1)}$$

K——系统增益

$$K=\frac{b_0}{a_0}=\frac{K^*\prod_{j=1}^{m}\left|z_j\right|}{\prod_{i=1}^{n}\left|p_i\right|}$$

2.3.4 传递函数的标准形式

2. 典型环节形式（尾1标准型）

$$G(s)=\frac{K\prod_{k=1}^{m_1}(\tau_k s+1)\prod_{l=1}^{m_2}(\tau_l^2 s^2+2\zeta_l\tau_l s+1)}{s^r\prod_{i=1}^{n_1}(T_i s+1)\prod_{j=1}^{n_2}(T_j^2 s^2+2\zeta_j T_j s+1)}$$

典型环节：

K	比例环节(系统增益)
$1/s$	积分环节
$1/(Ts+1)$	惯性环节或非周期环节
$1/(T^2s^2+2\zeta Ts+1)$	振荡环节
s	微分环节
$\tau s+1$	一阶复合微分环节
$\tau^2s^2+2\zeta\tau s+1$	二阶复合微分环节