工 程 控 制 原 理

5. 系统的稳定性

主讲：李敏

上海大学
机电工程与自动化学院

5. 系统的稳定性

稳定性是控制及动力学系统的一项重要性能指标。本章仅研究线性定常系统的稳定性问题，介绍线性系统稳定性的概念、稳定的条件及常用的几种稳定性判据：**劳斯-赫尔维茨（Routh-Hurwitz）稳定判据**和**奈奎斯特（Nyquist）稳定判据**，最后介绍系统的相对稳定性及其表示形式。

5.1 系统稳定的条件

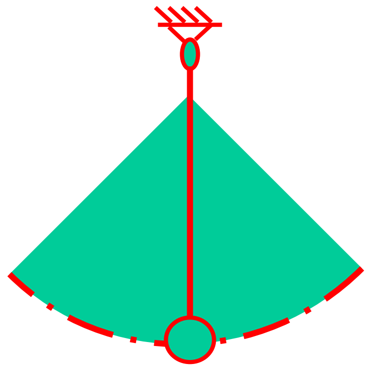
5.1.1 稳定性的概念

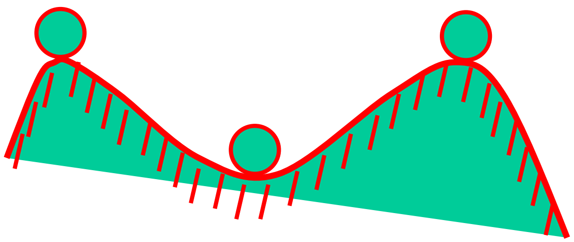
系统的稳定性是指系统受到扰动作用偏离平衡状态后，当扰动消失，系统经过自身调节能否以一定的准确度恢复到原平衡状态的性能。

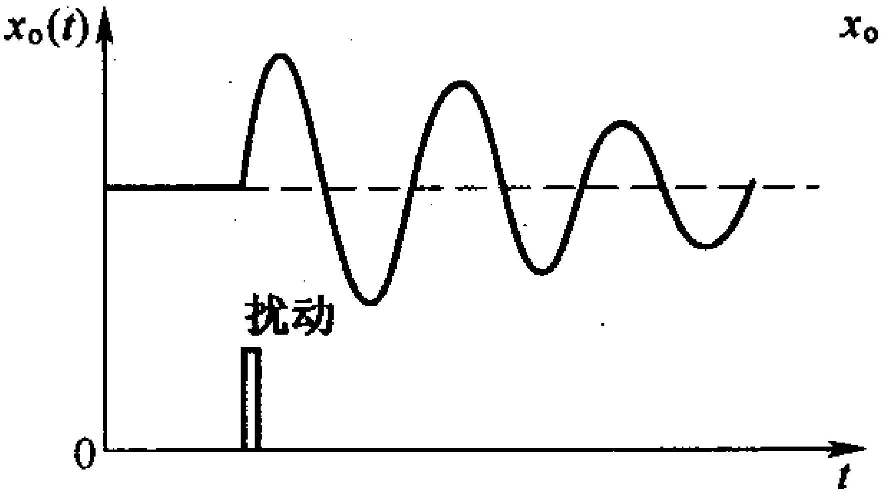
若当扰动消失后，系统能自动恢复到原平衡状态，则称系统是稳定的，否则称系统为不稳定。

5.1 系统稳定的条件

5.1.1 稳定性的概念

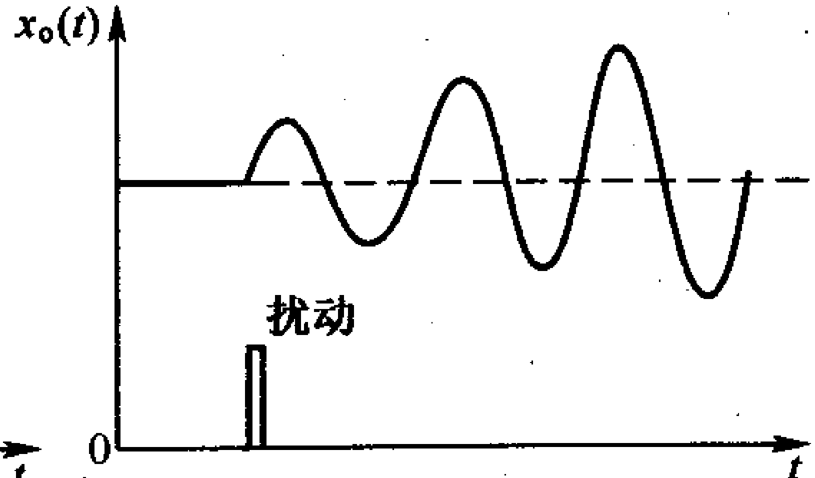






（a）

稳定系统



（b）

不稳定系统

5.1 系统稳定的条件

5.1.1 稳定性的概念

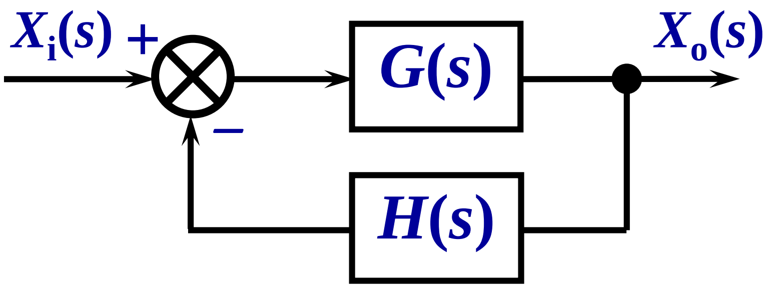
稳定是控制系统正常运行的首要条件，对系统进行各类品质指标的分析必须在系统稳定的前提下进行。

稳定性是系统的一种固有特性，它只取决于系统内部的结构和参数，而与初始条件和外部作用的大小无关。

关于运动稳定性的数学定义，是由俄国学者李雅普诺夫(Lyapunov)首先建立的。

5.1.2 系统稳定的充要条件

一般反馈系统如右图所示，系统的传递函数为



$$\Phi(s)=\frac{X_o(s)}{X_i(s)}=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

设系统传递函数的分母等于零，可得出系统的特征方程

$$1+G(s)H(s)=0$$

系统的稳定性取决于特征方程，只要能确定上式的根落在[s]复平面的左半部分，系统就是稳定的。下面将导出线性系统稳定的条件。

5.1.2 系统稳定的充要条件

设线性系统在初始条件为零时，输入一个理想单位脉冲函数$\delta(t)$，这时系统的输出称为单位脉冲响应。这相当于系统在扰动信号作用下，输出信号偏离原平衡工作点的情形。

若线性系统的单位脉冲响应函数$x_o(t)$随时间的推移趋于零，即 $\lim\limits_{t\to\infty} x_o(t)=0$ ，则系统稳定。

若 $\lim\limits_{t\to\infty} x_o(t)\to\infty$，则系统不稳定。

如果线性系统的单位脉冲响应随时间的推移趋于常数或趋于等幅振荡，这时线性系统趋于临界稳定状态。

临界稳定状态按李雅普诺夫的定义属于稳定状态，但由于系统参数变化等原因，实际上等幅振荡不能维持，系统总会由于某些因素导致不稳定。因此从工程应用角度来看，临界稳定系统属于不稳定系统，或称工程意义上的不稳定。

若系统输入理想单位脉冲函数$\delta(t)$，它的Laplace变换函数等于1，所以系统输出的Laplace变换为

$$X_{o}(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}=\frac{G(s)}{(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_n)}$$

式中，s_i(i=1, 2, ···, n)为系统特征方程的根，也就是系统的闭环极点。设n个特征根彼此不等，并将上式分解成部分分式之和的形式，即

5.1.2 系统稳定的充要条件

$$X_o(s)=\frac{c_1}{s-s_1}+\frac{c_2}{s-s_2}+\cdots+\frac{c_n}{s-s_n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{s-s_i}$$

式中，c_i (i=1，2，…，n)为待定系数，其值可由Laplace变换方法确定。

对上式进行Laplace反变换，得到系统的脉冲响应函数为

$$x_o(t)=\sum_{i=1}^{n}c_i e^{s_i t}$$

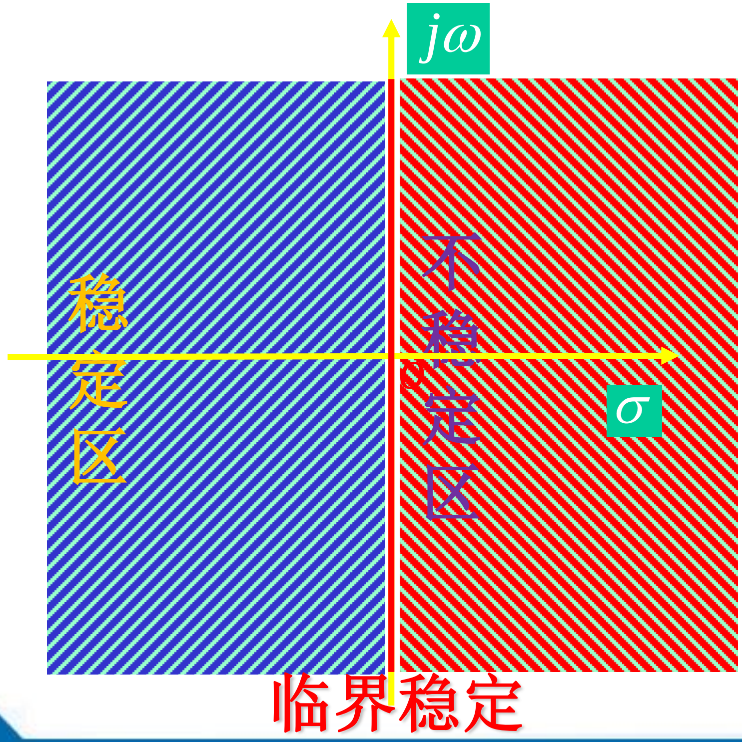
从上式可以看出，要满足条件 $\lim_{t\to\infty}x_o(t)=0$ ，只有当系统的特征根 s_i (i=1, 2, …, n) 全部具有负实部方能实现。

5.1.2 系统稳定的充要条件

因此，系统稳定的充要条件为：系统的特征方程根必须全部具有负实部。反之，若特征根中有一个以上具有正实部时，则系统必为不稳定。

或者说系统稳定的充分必要条件为：系统传递函数的极点全部位于 [*s*] 复平面的左半部。

若有部分闭环极点位于虚轴上，而其余极点全部在 [*s*] 平面左半部时，便会出现临界稳定状态。临界稳定也归为不稳定。



5.1.2 系统稳定的充要条件

一般情况下，确定系统稳定性的方法有：

① 直接计算或间接得知系统特征方程式的根。

② 确定特征方程的根具有负实部的系统参数的区域。

应用第一种类型的两种方法是：

(1) 直接对系统特征方程求解；

(2) 根轨迹法。

应用第二种类型的两种方法是：

(1) 劳斯-赫尔维茨 (Routh-Hurwitz) 判据；

(2) 奈奎斯特 (Nyquist) 判据。