工 程 控 制 原 理

4. 频率特性分析

4.4 系统的频率特性

主讲：李敏

4.4 系统的频率特性

在掌握了典型环节频率特性的基础上，可以作出系统的开环频率特性曲线，即开环Nyquist图和开环Bode图，进而利用这些图形研究相应的控制系统性能。

闭环频率特性由于徒手作图比较困难，需要借助于计算机以及专用格式的图表。

两个环节串联时，其传递函数和频率特性都是相乘的关系，而对数幅频特性则是相加的关系，这给幅频特性的作图带来了方便，也正是Bode图比Nyquist图优越的地方。

4.4.1 系统伯德图的绘制

Bode图是利用对数坐标和渐近线来绘制的，绘制系统Bode图的一般步骤为：

① 将系统传递函数*G*(*s*)转化为若干(标准形式)典型环节传递函数乘积的形式(将惯性、一阶微分、振荡、二阶微分环节中的常数项化为1)；

② 由传递函数*G*(*s*)求出频率特性*G*(j*ω*);

③ 找出各典型环节的转折频率；

④ 作出各典型环节对数幅频特性的渐近线；

4.4.1 系统伯德图的绘制

⑤ 根据误差修正曲线对渐近线进行修正，得到各环节对数幅频特性的精确曲线；

⑥ 将各环节的对数幅频特性叠加（不包括系统总的增益 K）；

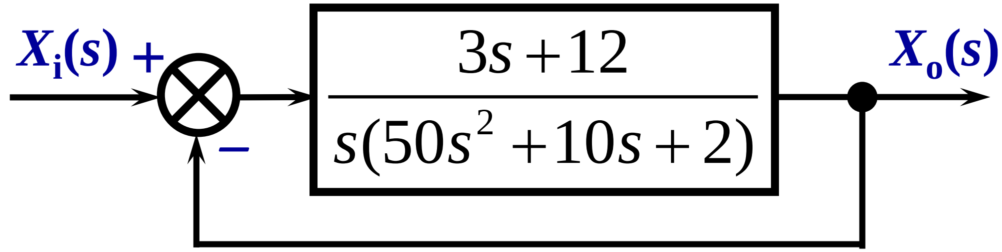
⑦ 将叠加后的曲线垂直移动20lgK，得到系统的对数幅频特性曲线；

⑧ 作各环节的对数相频特性图，然后叠加成系统总的相频特性曲线；

⑨ 存在延时环节时，对数幅频特性曲线不变，对数相频特性应加上 $-\tau\omega$ 。

4.4.1 系统伯德图的绘制

例题： 绘制图示单位反馈系统的开环Bode图



解： ① 将$G(s)$转化为

$$G(s)=\frac{3s+12}{s(50s^2+10s+2)}$$

$$=\frac{6(0.25s+1)}{s\left[(5s)^2+5s+1\right]}$$

> $G(s)$由比例、积分、振荡、一阶微分四个环节组成

② 系统开环频率特性为

$$G(\mathrm{j}\omega)=\frac{6(0.25\mathrm{j}\omega+1)}{(\mathrm{j}\omega)\left[(5\mathrm{j}\omega)^2+5\mathrm{j}\omega+1\right]}$$

③ 找出各环节的转折频率

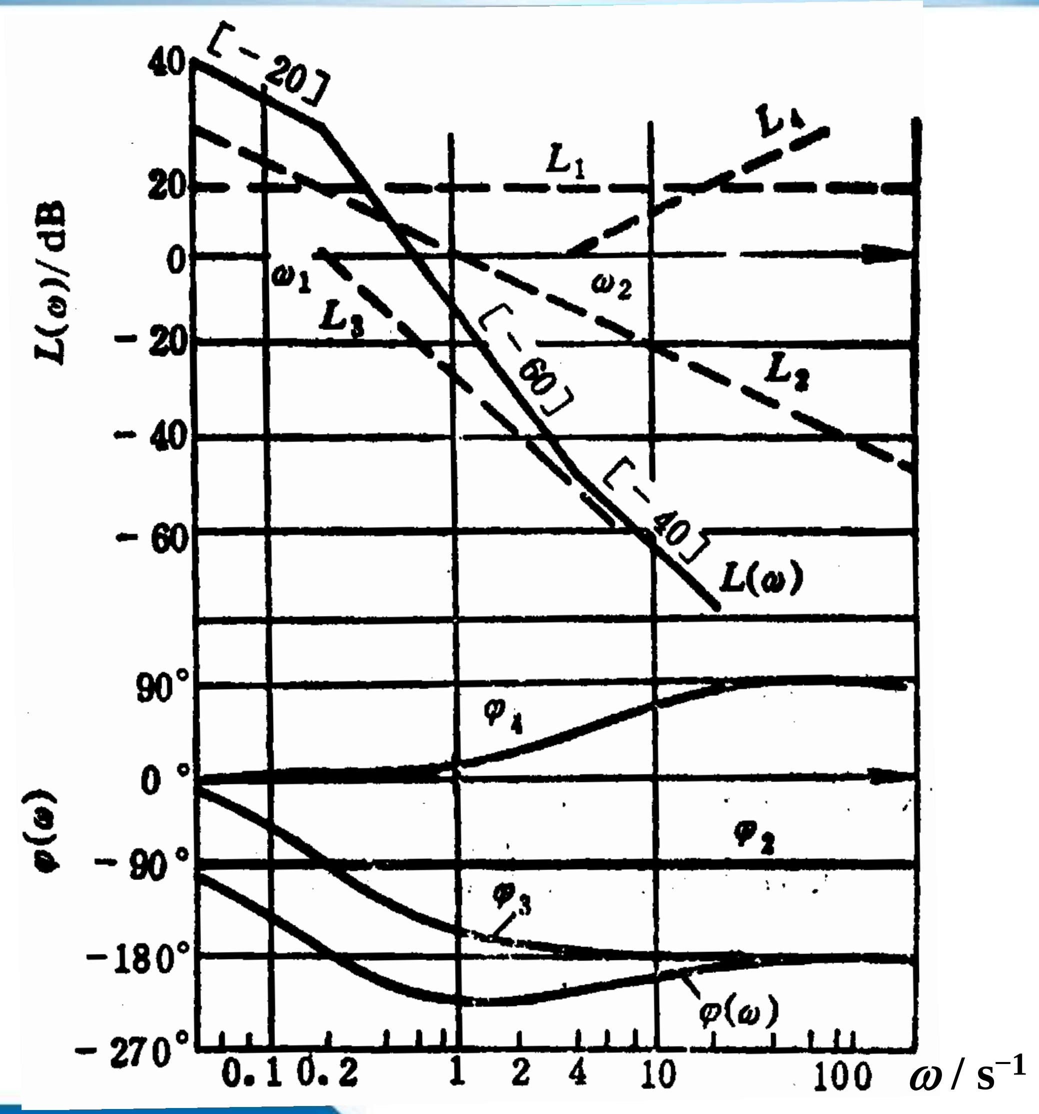
放大环节：$G_1(j\omega)=6$，$L_1(\omega)=20\lg 6\ \text{dB}=15.5\ \text{dB}$，幅频特性曲线为一条水平线，无转折频率；相角为0°。

积分环节：$G_2(j\omega)=1/j\omega$，$L_2(\omega)=-20\lg\omega$，幅频特性曲线为一条过(ω=1，0dB)斜率为−20dB/dec的直线，无转折频率；相角为−90°。

振荡环节：$G_3(j\omega)=1/(1-25\omega^2+5j\omega)$，$L_3(\omega)$的两条渐近线分别为0dB线和斜率为−40dB/dec的直线，转折频率ω_1=0.2，ζ=0.5；相频$\varphi_3(\omega)$由0°→180°，转折频率ω_1=0.2处的相角为−90°。

4.4.1 系统伯德图的绘制

开环系统的Bode图



4.4.1 系统伯德图的绘制

一阶微分：$G_4(j\omega)=0.25j\omega+1$，$L_4(\omega)$的两条渐近线分别为0dB线和斜率为+20dB/dec的直线，转折频率$\omega_2=4$；相频特性$\varphi_4(\omega)$由0°→90°，转折频率$\omega_2=4$处的相角为+45°。

④ 选定坐标轴的比例尺，作出各环节的对数幅频特性渐近线。

⑤ 修正各环节的对数幅频特性渐近线（略）。

⑥ 叠加各环节的对数幅频特性。

叠加$L_1(\omega)$和$L_2(\omega)$：即将过(ω=1,0dB)斜率为−20dB/dec的直线向上平移15.5dB。

4.4.1 系统伯德图的绘制

在 $\omega<\omega_1$ 的频率范围内：$L_3(\omega)=L_4(\omega)=0$，只有 $L_1(\omega)$ 和 $L_2(\omega)$ 的叠加，对数幅频特性渐近线为一条过(ω=1, 15.5dB)斜率为 −20dB/dec 的直线。

在 $\omega_1<\omega<\omega_2$ 的频率范围内：$L_4(\omega)=0$，$L_3(\omega)$ 为斜率−40dB/dec，叠加到 $L_1(\omega)+L_2(\omega)$ 后，对数幅频特性渐近线为一条在 $\omega=\omega_1$ 处斜率变为 −60dB/dec 的直线。

在 $\omega>\omega_2$ 的频率范围内：$L_4(\omega)$ 为斜率+20dB/dec，叠加到 $L_1(\omega)+L_2(\omega)+L_3(\omega)$ 后，对数幅频特性渐近线为一条在 $\omega=\omega_2$ 处斜率变为 −40dB/dec 的直线。

⑦ 作各环节的相频特性曲线，并合成系统的对数相频特性曲线。

如果将开环传递函数表示为

$$G(s)H(s)=\frac{K(\tau_1 s+1)\cdots(\tau_p s+1)(\tau_{p+1}^2 s^2+2\xi_{p+1}\tau_{p+1}s+1)\cdots}{s^\nu(T_1 s+1)\cdots(T_q s+1)(T_{q+1}^2 s^2+2\xi_{q+1}T_{q+1}s+1)\cdots}$$

代表了开环系统中具有比例、一阶微分、二阶微分、…、积分、惯性、振荡、… 等等环节。

其中，ν代表了积分环节的数目。

4.4.2 系统Bode图的特点

① 最低频段的斜率取决于积分环节的数目ν，斜率为－20ν dB/dec。

② 最低频段的对数幅频特性可近似为：

$$L(\omega)=20\lg K-20\nu\lg\omega$$

当ω=1 rad/s时，$L(\omega)$=20lg$K$，即最低频段的对数幅频特性或其延长线在ω=1 rad/s时的数值等于20lg$K$。

4.4.2 系统Bode图的特点

Bode图特点

③ 如果各环节的对数幅频特性用渐近线表示，则对数幅频特性为一系列折线，折线的转折点为各环节的转折频率。

④ 对数幅频特性的渐近线每经过一个转折点，其斜率相应发生变化，斜率变化量由当前转折频率对应的环节决定。

惯 性 环 节： 斜率下降20dB/dec；

振 荡 环 节： 斜率下降40dB/dec；

一阶微分环节： 斜率上升20dB/dec；

二阶微分环节： 斜率上升40dB/dec。

4.4.3 根据Bode图求系统传递函数

① 确定对数幅频特性的渐近线。

② 根据低频段渐近线的斜率，确定系统包含的积分（或微分）环节的个数。

③ 根据低频段渐近线或其延长线在ω=1 rad/s的分贝值，确定系统开环增益。

注意到系统低频段渐近线可近似为：

$$L(\omega)=20\lg K-20v\lg\omega$$

根据Bode图求取系统的传递函数

若系统含有积分环节，则该渐近线或其延长线与0dB线(频率轴)的交点为： $\omega = \sqrt[\nu]{K}$

若系统不含积分环节，低频渐近线为20lg*K*dB的水平线，*K* 值可由该水平渐近线获得。

④ 根据渐近线转折频率处斜率的变化，确定对应的环节。

⑤ 获得系统的频率特性函数或传递函数。

4.4.4 系统Nyquist图的一般画法

绘制几个典型环节串联组成的系统Nyquist图时，需将这些环节的频率特性中对应的向量模相乘，幅角相加，然后再逐步作图。具体步骤为：

① 系统的频率特性可表达为

$$G(\mathrm{j}\omega)=\frac{K(\tau_1\mathrm{j}\omega+1)(\tau_2\mathrm{j}\omega+1)\cdots(\tau_\mathrm{m}\mathrm{j}\omega+1)}{(\mathrm{j}\omega)^{\nu}(T_1\mathrm{j}\omega+1)(T_2\mathrm{j}\omega+1)\cdots(T_{\mathrm{n}-\nu}\mathrm{j}\omega+1)}$$

分别写出开环系统中各个典型环节的幅频特性和相频特性。

② 写出开环系统的 $A(\omega)$ 和 $\varphi(\omega)$ 表达式。

4.4.4 系统Nyquist图的一般画法

③ 分别求出 $\omega=0$和$\omega\to+\infty$时的$G(j\omega)$。

④ 由 $\mathrm{Im}[G(j\omega)]=0$，求Nyquist图与实轴的交点。

⑤ 由 $\mathrm{Re}[G(j\omega)]=0$，求Nyquist图与虚轴的交点。

⑥ 必要时画出中间几个点，勾画出 Nyquist图的大致形状。

例如： 0型系统（$\nu=0$）$n>m$

$\omega=0$ 时，

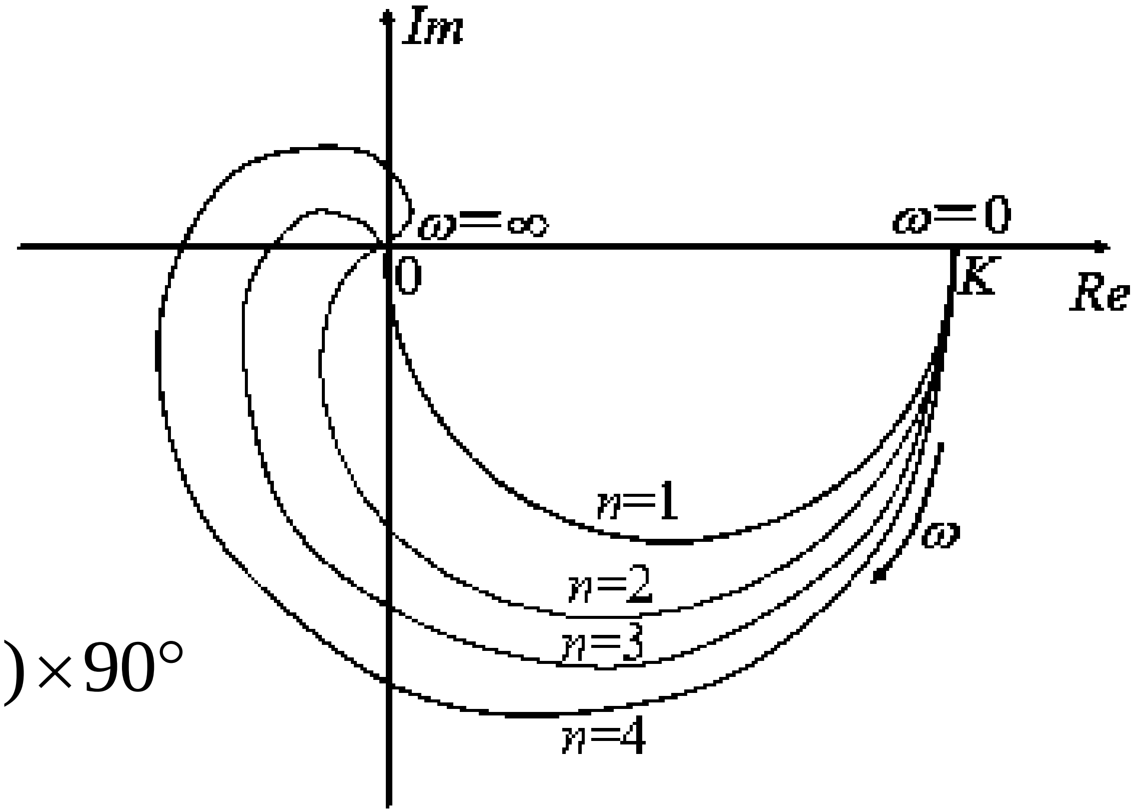
$$A(0)=K$$

$$\varphi(0)=0^\circ$$

$\omega\to+\infty$ 时，

$$A(\infty)=0$$

$$\varphi(\infty)=-(n-m)\times 90^\circ$$



只包含惯性环节的0型系统Nyquist图

4.4.4 系统Nyquist图的一般画法

例如： I型系统（$\nu=1$）$n>m$

$\omega = 0$ 时，

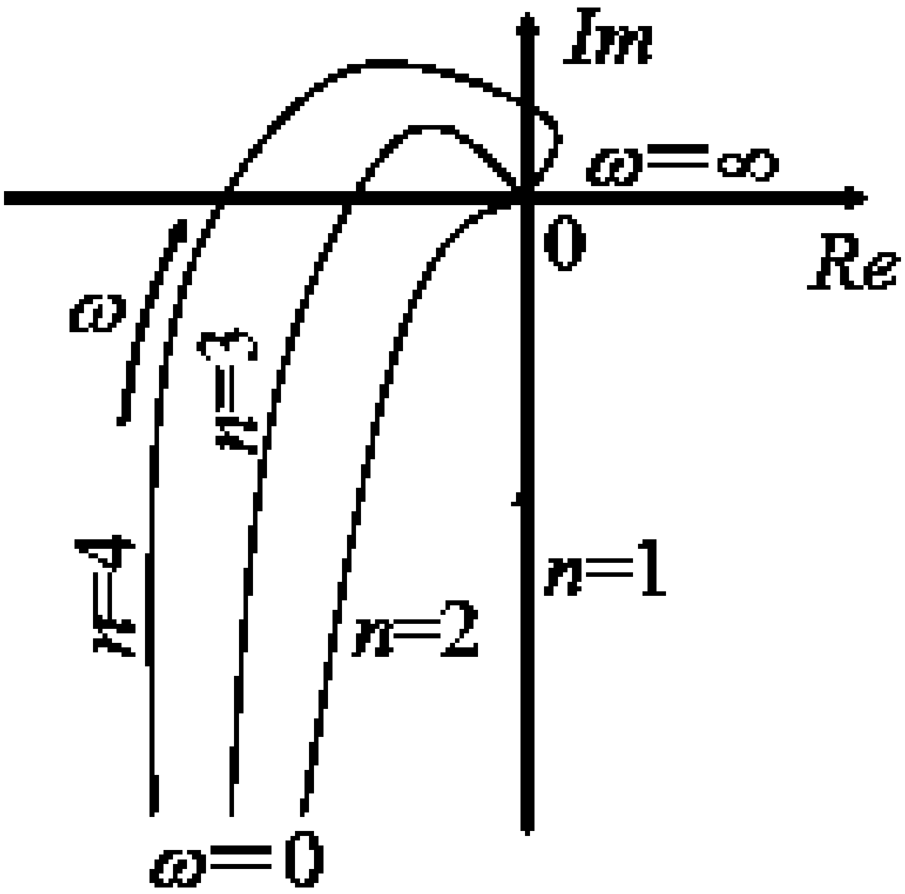
$A(0) \to -\infty$

$\varphi(0) = -90°$

$\omega \to +\infty$ 时，

$A(\infty) = 0$

$\varphi(\infty) = -(n-m)\times 90°$

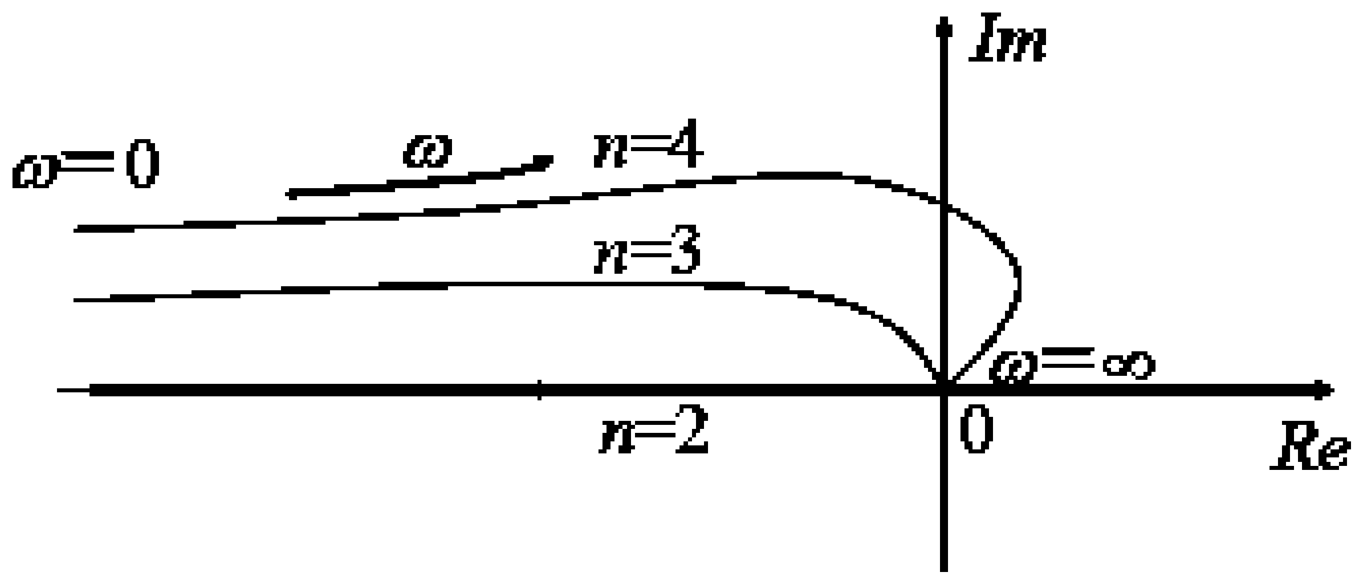


4.4.4 系统Nyquist图的一般画法

例如： II型系统（$\nu=2$）$n>m$

$\omega=0$ 时， $A(0)\to-\infty$ ， $\varphi(0)=-180°$

$\omega\to+\infty$ 时， $A(\infty)=0$ ， $\varphi(\infty)=-(n-m)\times 90°$



Nyquist图特点

$$\omega \to 0: \qquad G(\mathrm{j}\omega) = \frac{K}{\omega^{\nu}} \angle \nu(-\frac{\pi}{2})$$

$$\omega \to \infty: \qquad G(\mathrm{j}\omega) \approx \frac{K\tau_1\tau_2\tau_3\cdots}{T_1T_2T_3\cdots\omega^{n-m}} \angle (n-m)(-\frac{\pi}{2})$$

① 开环含有ν个积分环节系统，Nyquist曲线起自幅角为$-\nu 90°$的无穷远处。

② 当$n=m$时，Nyquist曲线终止于实轴上的某一有限远点。

4.4.4 系统Nyquist图的一般画法

③ 当$n>m$时，Nyquist曲线终点幅值为0，而终点的相角为 $-(n-m)\times 90^\circ$

④ 不含一阶或二阶微分环节的系统，相角滞后量单调增加。含有一阶或二阶微分环节的系统，由于相角非单调变化，Nyquist曲线可能出现凹凸。