7-7 质量为 m 的小球以水平速度 $\boldsymbol{v}_0$ 射入静水之中。如水对小球的阻力 $\boldsymbol{F}$ 与小球速度 $\boldsymbol{v}$ 的方向相反，且与速度的大小成正比，即 $\boldsymbol{F}=-\mu\boldsymbol{v}$，$\mu$为阻尼系数。忽略水对小球的浮力，试分析小球在重力和阻力作用下的运动。

解：取小球为研究对象，列出动力学方程

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{F}+m\boldsymbol{g}\,,$$

投影式为

$$m\ddot{x}=-\mu\dot{x}\,,\quad m\ddot{y}=-\mu\dot{y}+mg$$

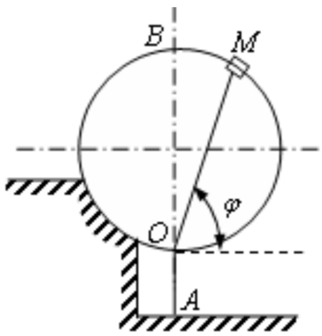
初始条件：

$$x\big|_{t=0}=y\big|_{t=0}=0\,,\quad \dot{x}\big|_{t=0}=v_0,\,\dot{y}\big|_{t=0}=0\,.$$

解上述初值问题，即可获得小球在重力和阻力作用下的运动方程为：

$$x=\frac{mv_0}{\mu}\left(1-e^{-\frac{\mu}{m}t}\right),\quad y=\frac{mg}{\mu}t-\frac{m^2g}{\mu^2}\left(1-e^{-\frac{\mu}{m}t}\right).$$

7-8 滑块 M 的质量为 m，在半径为 R 的固定光滑圆环上滑动。圆环位于铅垂平面内。滑块 M 上系有一弹性绳，它穿过圆环的点 O 固定于 A。已知当滑块在点 O 时，绳的张力为零。弹性绳每伸长 1 (cm)需力 k (N)。开始时滑块在圆环的顶端点 B，处在不稳定平衡状态，当它受到微小扰动时，沿圆环滑下，φ为绳的 OM 部分与水平线的夹角，如图所示。试求滑块 M 的下滑速度 v 与φ角的关系以及圆环的约束力。



题 7-8 图

解：取滑块 M 为研究对象，受力图如图示，列出切线和法线方向的动力学方程：

$$ma_{\mathrm{t}}=-F_{\mathrm{T}}\cos\varphi-mg\sin2\varphi \qquad \text{(a)}$$

$$ma_n=\frac{v^2}{R}=-F_{\mathrm{N}}+F_{\mathrm{T}}\sin\phi-mg\cos2\phi \qquad \text{(b)}$$

式中，$a_{\mathrm{t}}=2R\ddot{\varphi}$，$F_{\mathrm{T}}=2kR\sin\phi$。初始条件为：

$$\varphi\big|_{t=0}=\frac{\pi}{2}\,,\quad \dot{\varphi}\big|_{t=0}=0\,.$$

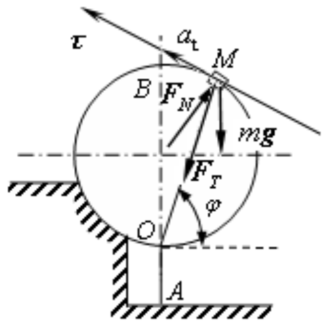
解此初值问题．关系利用 $\ddot{\varphi}=\dot{\varphi}\dfrac{\mathrm{d}\dot{\varphi}}{\mathrm{d}\varphi}$，积分式（a）

$$\int_0^{\dot{\phi}} 2mR\dot{\phi}\,\mathrm{d}\dot{\phi}=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\phi}(kR+mg)\sin 2\phi\,\mathrm{d}\phi\,,$$

$$\dot{\phi}=\pm\cos\phi\sqrt{\frac{g}{R}+\frac{k}{m}}\,,$$

得滑块 M 的下滑速度 v 与 φ 角的关系

$$v=2R\dot{\phi}=2\cos\phi\sqrt{R\left(g+\frac{kR}{m}\right)}，（与\ \boldsymbol{\tau}\ 方向相反）.$$



滑块受力图

从（b）式解得圆环的约束力

$$F_{\mathrm{N}}=2kR\sin^2\phi-4(mg+kR)\cos^2\phi-mg\cos 2\phi.$$