工 程 控 制 原 理

4. 频率特性分析

4.5 最小相位系统

主讲：李敏

上海大学
机电工程与自动化学院

4.5 最小相位系统

引入最小相位系统的概念，能够说明幅频特性与相频特性之间的关系。

4.5.1 最小相位系统的定义

在右半 s 平面内既无极点也无零点的传递函数，称为最小相位传递函数；具有最小相位传递函数的系统称为最小相位系统。

在右半 s 平面内有极点和（或）零点的传递函数，称为非最小相位传递函数。具有非最小相位传递函数的系统，称为非最小相位系统。

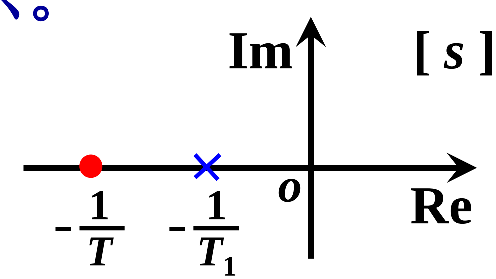
4.5.1 最小相位系统的定义

系统中含有延迟环节或者存在不稳定的小回环时，就是非最小相位系统。

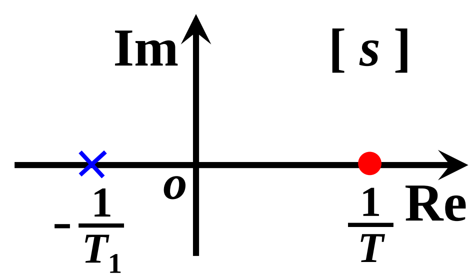
例如：两个单位反馈控制系统的传递函数分别为

$$G_1(s)=\frac{Ts+1}{T_1s+1} \qquad G_2(s)=\frac{-Ts+1}{T_1s+1} \qquad \left(0<T<T_1\right)$$

$G_1(s)$的零点为$z_1=-1/T$，极点为$p_1=-1/T_1$，属于最小相位系统；$G_2(s)$的零点为$z_2=1/T$，极点为$p_2=-1/T_1$，为非最小相位系统。如图所示。



$G_1(s)$系统的零、极点



$G_2(s)$系统的零、极点

4.5.2 最小相位系统的特点

对于稳定系统，根据最小相位传递函数的定义可知，最小相位系统的相位变化范围最小。这是因为

$$G(\mathrm{j}\omega)=\frac{K(\tau_1\mathrm{j}\omega+1)(\tau_2\mathrm{j}\omega+1)\cdots(\tau_\mathrm{m}\mathrm{j}\omega+1)}{(T_1\mathrm{j}\omega+1)(T_2\mathrm{j}\omega+1)\cdots(T_\mathrm{n}\mathrm{j}\omega+1)}$$

对于稳定系统，$T_1, T_2, \cdots, T_\mathrm{n}$均为正值；$\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_\mathrm{m}$可正可负，而最小相位系统的$\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_\mathrm{m}$均为正值。所以有

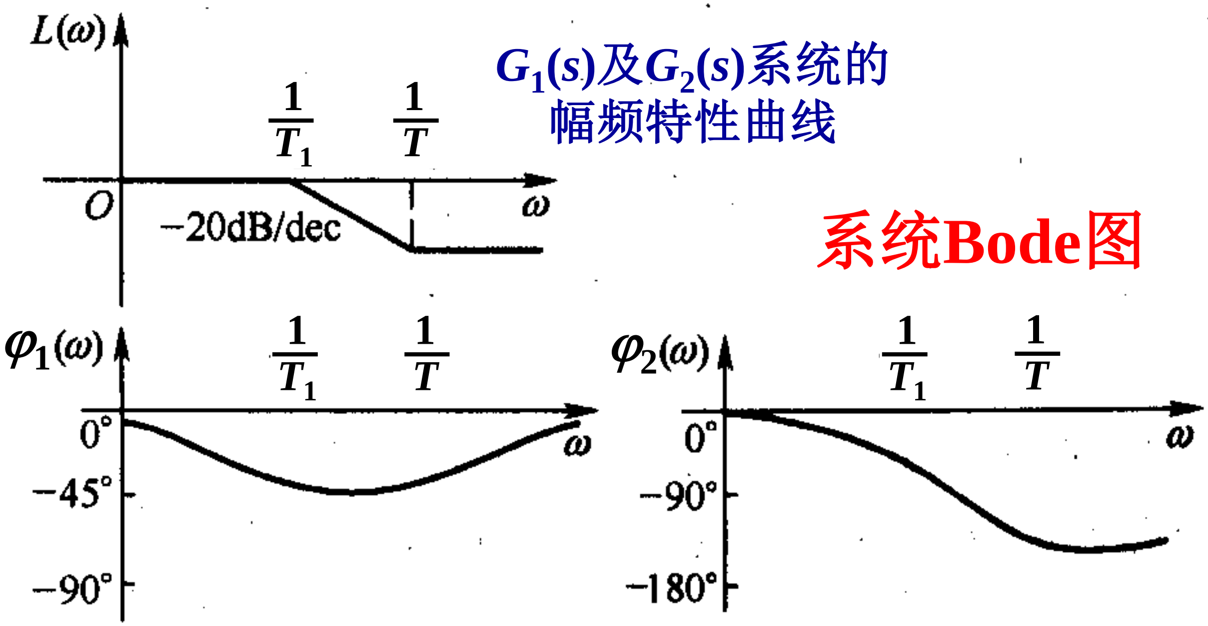
$$\varphi(\omega)=\sum_{i=1}^{m}\arctan\tau_i\omega-\sum_{j=1}^{n}\arctan T_j\omega$$

4.5.2 最小相位系统的特点

对于非最小相位系统，若有q个零点在s平面的右半平面，则

$$\varphi(\omega)=\sum_{i=q+1}^{m}\arctan\tau_i\omega-\sum_{k=1}^{q}\arctan\tau_k\omega-\sum_{j=1}^{n}\arctan T_j\omega$$

上面例子中的两个系统，它们具有相同的幅频特性，相频特性却差别很大，如右图。



$G_1(s)$系统的相频特性

$G_2(s)$系统的相频特性

4.5.2 最小相位系统的特点

由上述系统Bode图看出，最小相位系统的对数幅频特性曲线斜率增加时（由−20dB/dec变为0dB/dec），相角也随之增加（由某一负角增加到0°），两者变化趋势一致，在整个频率范围内的幅频特性与相频特性之间具有确定的单值对应关系。非最小相位系统则不满足这种关系。

另外，可以通过检验系统Bode图上幅频特性的高频渐近线和频率为无穷大时的相位，来判断该系统是否为最小相位系统。

4.5.2 最小相位系统的特点

当频率趋于无穷大时，如果对数幅频特性的渐近线斜率为$-20(n-m)$dB/dec，而相角为$-90°(n-m)$，则该系统为最小相位系统，否则为非最小相位系统。

非最小相位系统在高频时的相角滞后大，启动性能不佳，响应迟缓。因此，在要求响应比较快的系统中，就不能选用非最小相位元件。

4.5.3 产生非最小相位的一些环节

(1) 延迟环节 $e^{-\tau s}$

将延迟环节传递函数展开成级数，得

$$e^{-\tau s}=1-\tau s+\frac{1}{2!}\tau^2 s^2-\frac{1}{3!}\tau^3 s^3+\cdots$$

因该式中有些项的系数为负值，故可分解成

$$(s+a)(s-b)(s+c)\cdots$$

其中，$a, b, c, \cdots$均为正值。

若延迟环节串联在系统中，则系统开环传递函数的分子有正根，表示延迟环节使系统有零点位于 s 平面的右半平面，也就是使系统成为非最小相位系统。

4.5.3 产生非最小相位的一些环节

(2) 不稳定的一阶微分环节 $1-Ts$

(3) 不稳定的二阶微分环节 $\dfrac{s^2}{\omega_n^2}-\dfrac{2\zeta s}{\omega_n}+1$

有零点位于右半平面

(4) 不稳定的惯性环节 $\dfrac{1}{1-Ts}$

(5) 不稳定的振荡环节 $\dfrac{\omega_n^2}{s^2-2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$

有极点位于右半平面

上述环节串联在系统中，均会使系统开环传递函数有零点或极点位于 s 平面的右半平面。