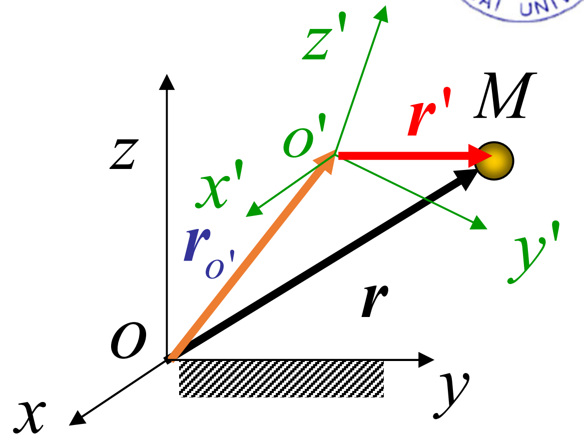
运动学

目 录

运动学

内容回顾



在定参考系中

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

绝对速度和加速度

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}} = \dot{\boldsymbol{r}} = \dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j} + \dot{z}\boldsymbol{k} \qquad \boldsymbol{a}_{\mathrm{a}} = \ddot{\boldsymbol{r}} = \ddot{x}\boldsymbol{i} + \ddot{y}\boldsymbol{j} + \ddot{z}\boldsymbol{k}$$

在动参考系中

$$\boldsymbol{r}' = x'\boldsymbol{i}' + y'\boldsymbol{j}' + z'\boldsymbol{k}'$$

相对速度和加速度

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}} = \tilde{\dot{\boldsymbol{r}}}' = \dot{x}'\boldsymbol{i}' + \dot{y}'\boldsymbol{j}' + \dot{z}'\boldsymbol{k}' \qquad \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} = \tilde{\ddot{\boldsymbol{r}}}' = \ddot{x}'\boldsymbol{i}' + \ddot{y}'\boldsymbol{j}' + \ddot{z}'\boldsymbol{k}'$$

速度合成定理

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}} = \boldsymbol{v}_{\mathrm{e}} + \boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}$$

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{\boldsymbol{r}}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}' + \tilde{\dot{\boldsymbol{r}}}'$$

加速度合成定理

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{a}} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{e}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{C}}$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \ddot{\boldsymbol{r}}_{O'} + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}') + \tilde{\ddot{\boldsymbol{r}}}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \tilde{\dot{\boldsymbol{r}}}'$$

解题步骤

1. 作出系统中重要部分简图， 选取所要研究的刚体或质点。

2. 选取动点，并选取运动刚体将动系固连其上，明确牵连点。

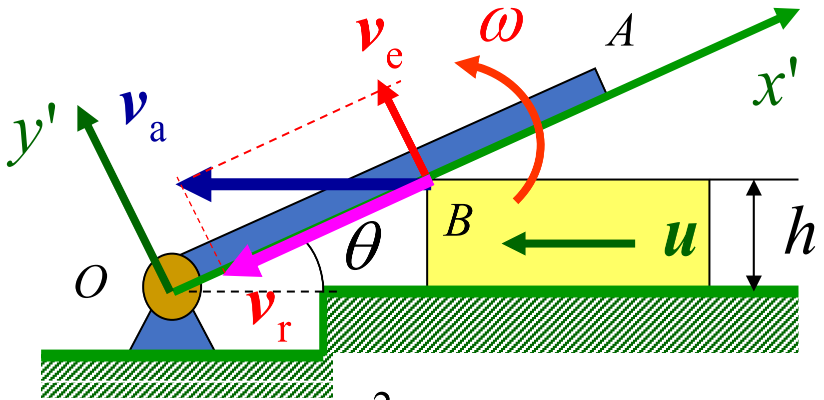
3. 分析三种速度，即绝对速度、相对速度和牵连速度。

4. 按平行四边形法则对速度进行矢量的几何分析，以此来求出未知速度以及角速度。

5. 作出矢量图进行加速度分析，角速度和角加速度等相关的未知量要尽可能通过适当的投影使之成为独立的未知量，进而解决所求。

运动学

例5 已知滑块以匀速 u 平移，求在图示位置时，杆的角速度和角加速度。



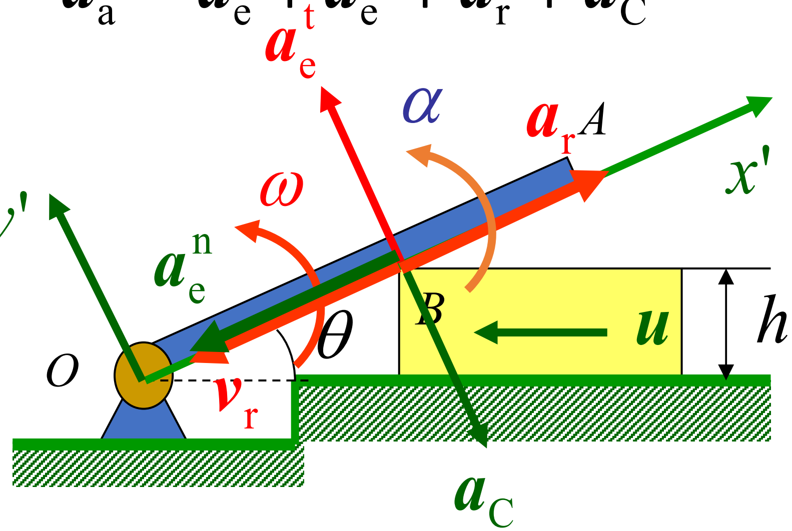
解：动点：　　板上与杆的接触点B

　　动系：　　OA杆

速度分析：　　$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r$

$$v_e = v_a \sin\theta \qquad v_r = v_a \cos\theta \qquad \omega = \frac{v_e}{OB} = \frac{u\sin^2\theta}{h}$$

加速度分析：　　$\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_e + \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_C \qquad \boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_e^t + \boldsymbol{a}_e^n + \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_C$



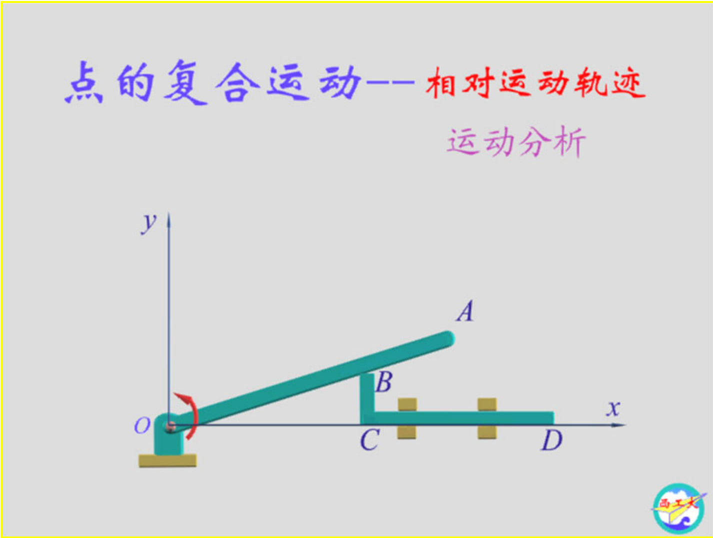
$$y':\quad 0 = a_e^t + 0 + 0 - a_C$$

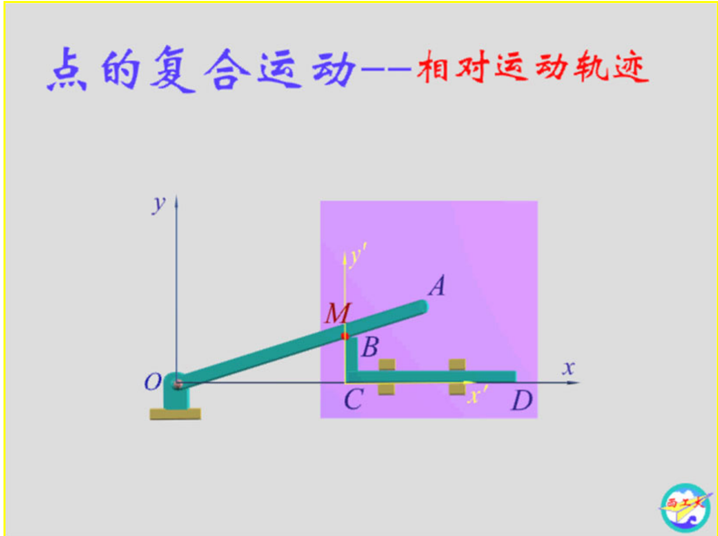
$$a_e^t = a_C$$

$$\alpha = \frac{a_e^t}{OB} = \frac{a_C}{OB} = \frac{2\omega v_r}{OB} = \frac{u^2\sin 2\theta \sin^2\theta}{h^2}$$

运动学

思考：为什么不选取 OA 杆上的B点为动点，滑块为动系？

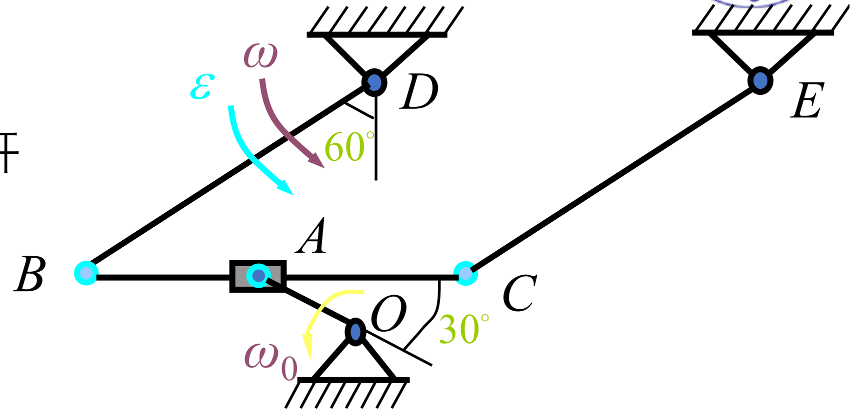


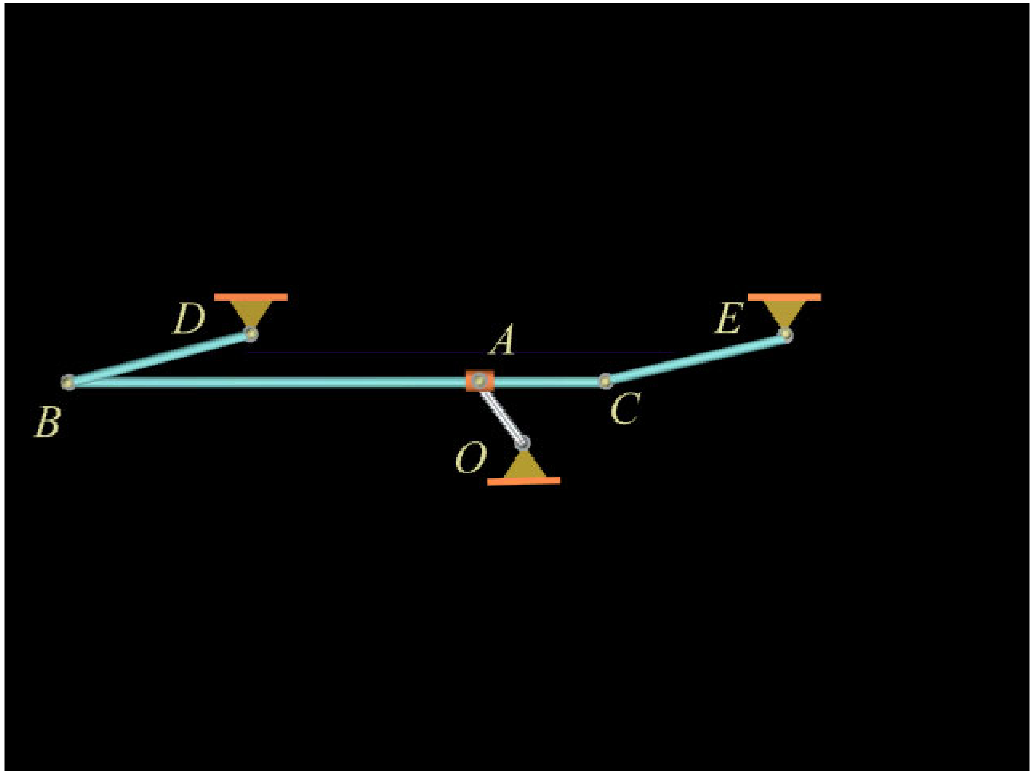


运动学

例 6

曲柄 OA 以恒定角速度ω_0旋转。套筒 A 沿BC运动。$OA=r$, $BC=DE$, 且 $BD=CE=l$。 计算在图示位置处杆BD的速度和加速度。





运动学

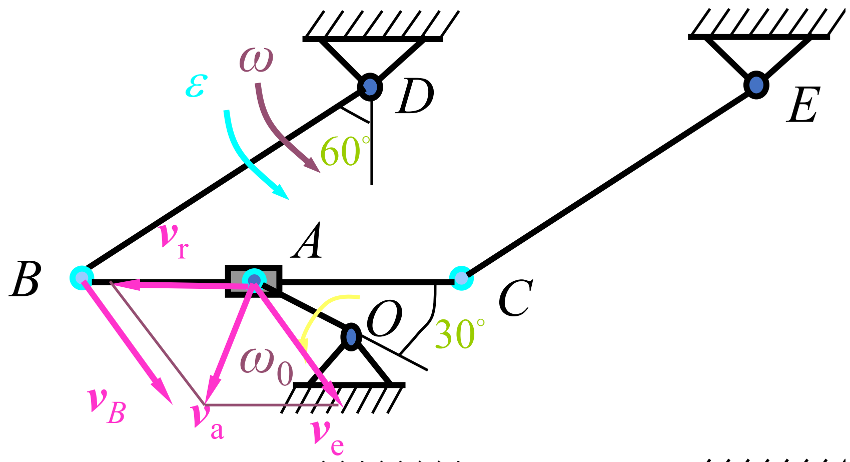
解:

以摇杆OA上点A为动点。将动参考系固连到BC上。牵连运动为平移运动。

速度

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}} = \boldsymbol{v}_{\mathrm{e}} + \boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}$$

$$v_{\mathrm{e}} = v_{\mathrm{r}} = v_{\mathrm{a}} = \omega_0 r \qquad \omega = \frac{v_B}{l} = \frac{v_{\mathrm{e}}}{l} = \frac{\omega_0 r}{l}$$



加速度

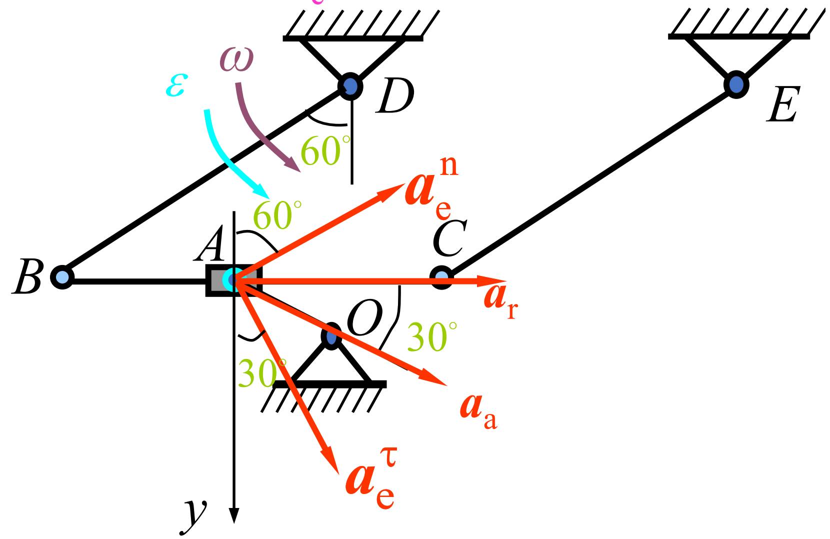
$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{a}} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{e}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{n}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{e}}^{\tau} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$$

投影到BC垂直方向

$$a_{\mathrm{a}} \sin 30^\circ = -a_{\mathrm{e}}^{\mathrm{n}} \sin 30^\circ + a_{\mathrm{e}}^{\tau} \cos 30^\circ$$

$$a_{\mathrm{e}}^{\tau} = \frac{\left(a_{\mathrm{a}} + a_{\mathrm{e}}^{\mathrm{n}}\right) \sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{\sqrt{3}\omega_0^2 \left(lr + r^2\right)}{3l}$$

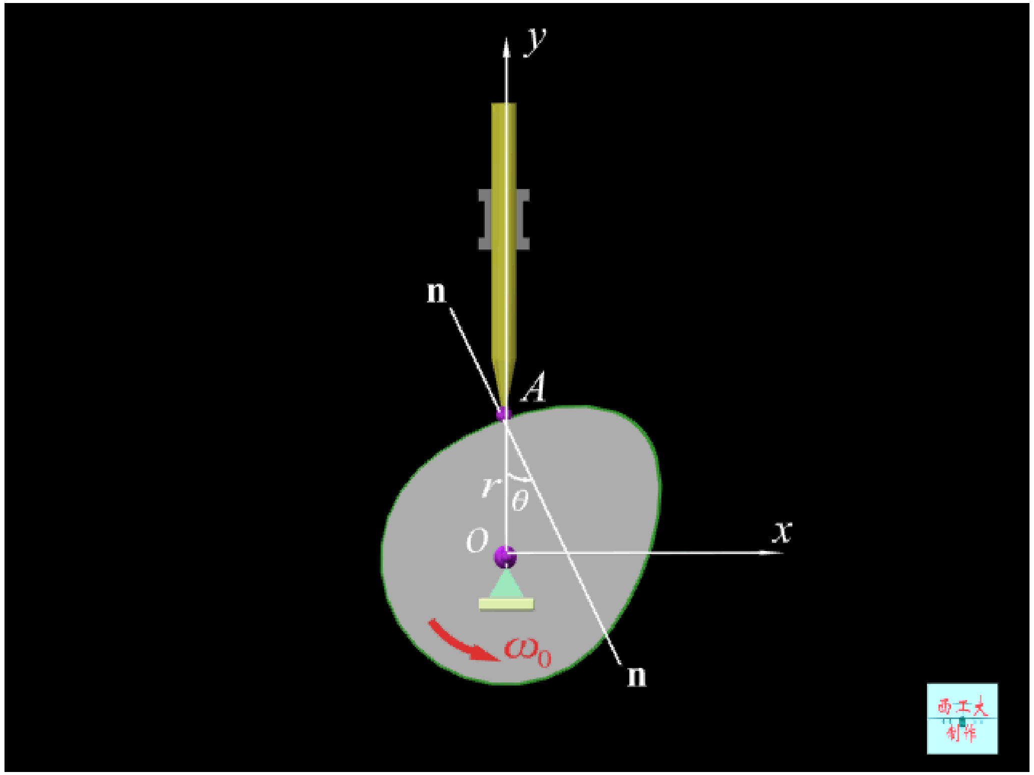
$$\varepsilon = \frac{a_{\mathrm{e}}^{\tau}}{l} = \frac{\sqrt{3}\omega_0^2 \left(lr + r^2\right)}{3l^2}$$

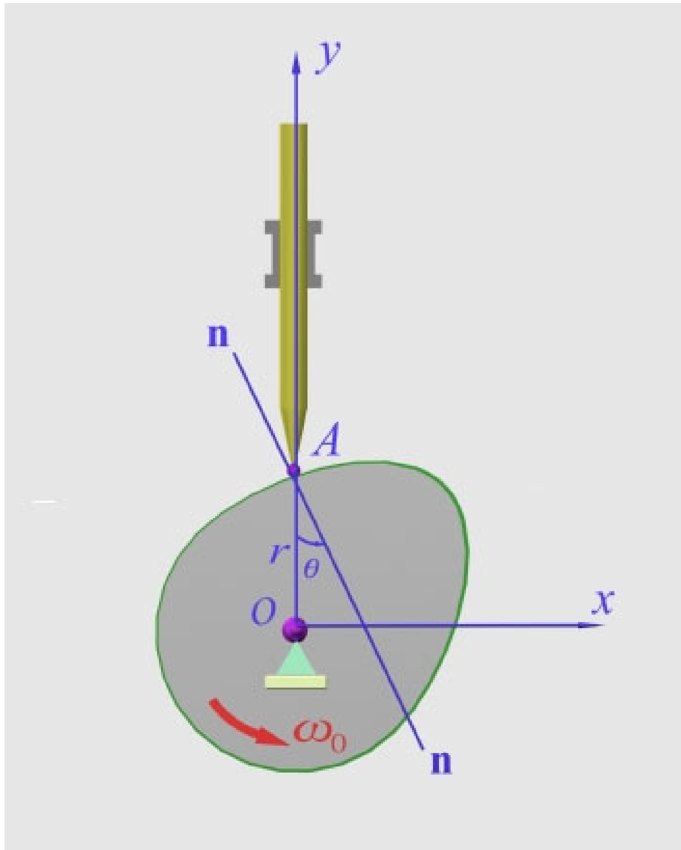


运动学

例 7

凸轮 O 以恒定角速度ω_0旋转， 在图示位置处， 凸轮在A点的曲率半径为ρ, 法线方向与OA夹角为θ, 且OA=r。 计算顶杆的速度和加速度。

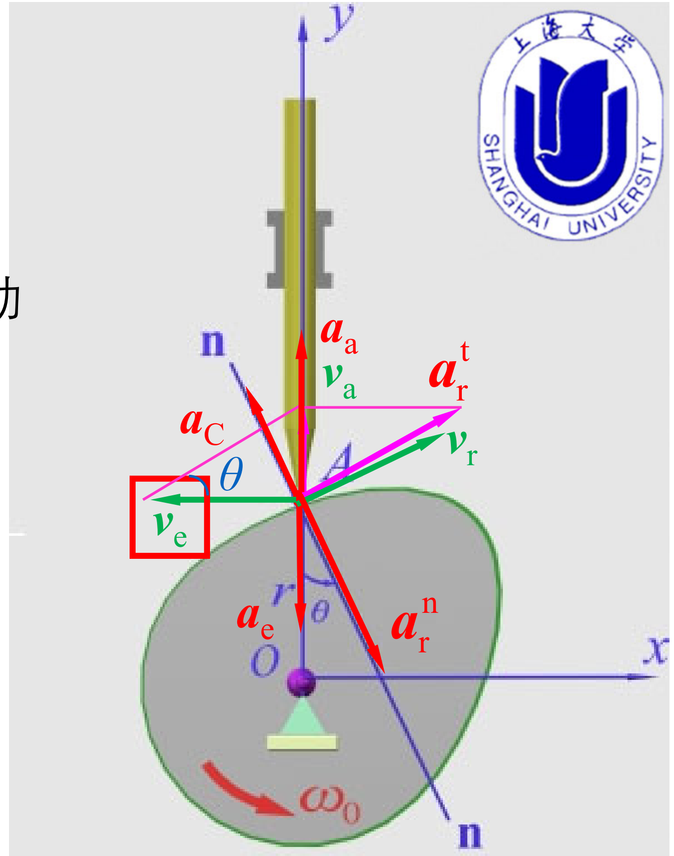




运动学

解:

以顶杆上点A 为动点，将动参考系固连到凸轮上。牵连运动为**一般平面运动**。



速度分析

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}} = \boldsymbol{v}_{\mathrm{e}} + \boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}$$

$$v_{\mathrm{a}} = v_{\mathrm{e}} \tan\theta = \omega_0 r \tan\theta \qquad v_{\mathrm{r}} = \frac{v_{\mathrm{e}}}{\cos\theta} = r\omega_0 \sec\theta$$

加速度分析

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{a}} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{e}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{n}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}^{\tau} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{C}}$$

其中所有方向如图所示, 并且

$$a_{\mathrm{e}} = r\omega_0{}^2,\ a_{\mathrm{r}}^{\mathrm{n}} = \frac{v_{\mathrm{r}}^2}{\rho} = \frac{r^2\omega_0^2}{\rho}\sec^2\theta, a_{\mathrm{C}} = 2\omega_0 v_{\mathrm{r}} = 2r\omega_0^2 \cdot \sec\theta.$$

投影到法线方向上

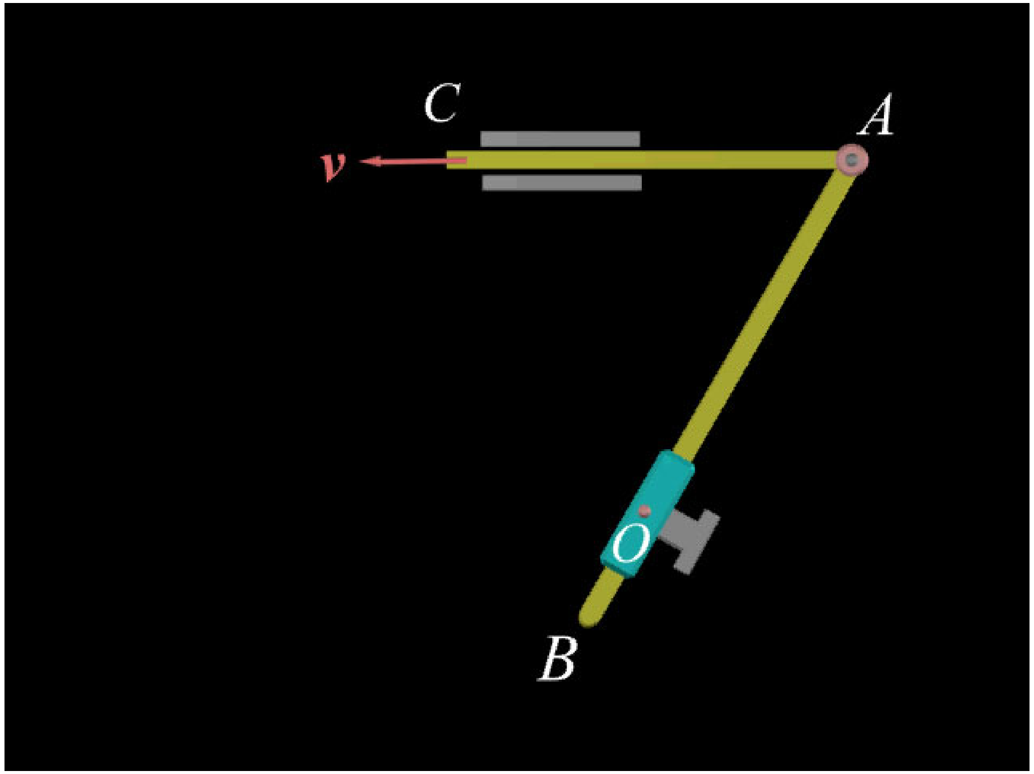
$$-a_{\mathrm{a}}\cos\theta = a_{\mathrm{e}}\cos\theta + a_{\mathrm{r}}^{\mathrm{n}} - a_{\mathrm{C}}$$

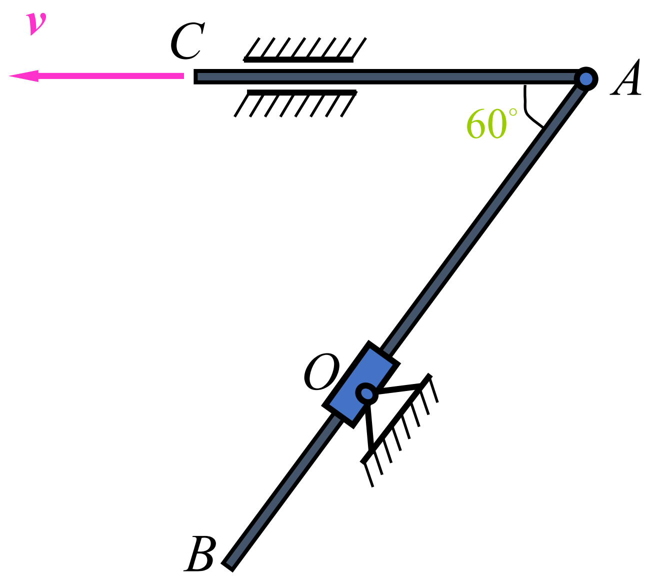
$$a_{\mathrm{a}} = \frac{-1}{\cos\theta}\left(r\omega_0{}^2\cos\theta + \frac{r^2}{\rho}\omega_0{}^2\sec^2\theta - 2r\omega_0{}^2\sec\theta\right) = -r\omega_0{}^2\left(1 + \frac{r}{\rho}\sec^3\theta - 2\sec^2\theta\right)^2$$

运动学

例 8

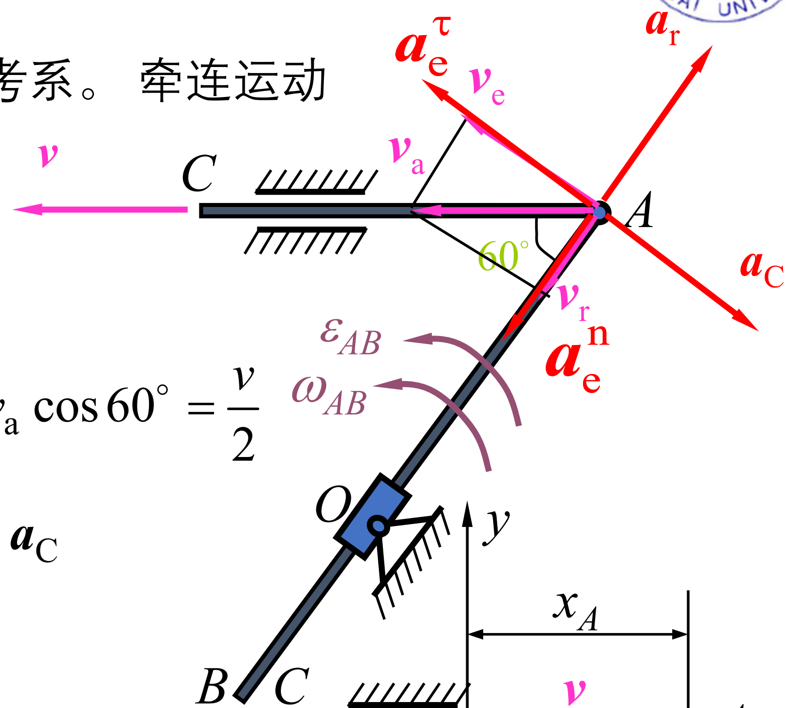
杆AC 以恒定速度$\boldsymbol{v}$沿轨道平移。杆 AB 与AC杆在A处铰接, 通过旋转套筒O运动。O 与杆 AC 间距离为 l. 计算图示位置处杆AB的速度和加速度。





解:

以AC杆上的A点为动点. 并以套筒O所在方向为动参考系。 牵连运动为转动。



速度分析

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r$$

$$v_e = v_a \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} v \qquad \omega_{AB} = \omega_O = \frac{v_e}{AO} = \frac{3v}{4l} \qquad v_r = v_a \cos 60^\circ = \frac{v}{2}$$

加速度分析

$$\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_e^n + \boldsymbol{a}_e^\tau + \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_C$$

加速度方向如图所示, 并有

$$\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{0}, a_C = 2\omega_O v_r = \frac{3v^2}{4l}.$$

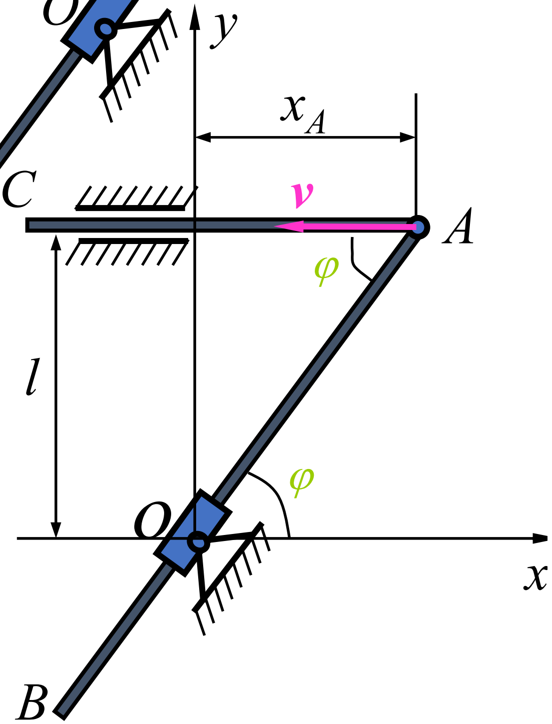
在垂直于AB杆的方向上的投影:

$$a_e^\tau = a_C = \frac{3v^2}{4l} \qquad \varepsilon_{AB} = \varepsilon_O = \frac{a_e^\tau}{AO} = \frac{3\sqrt{3}v^2}{8l^2}$$

另解

对任意位置，有

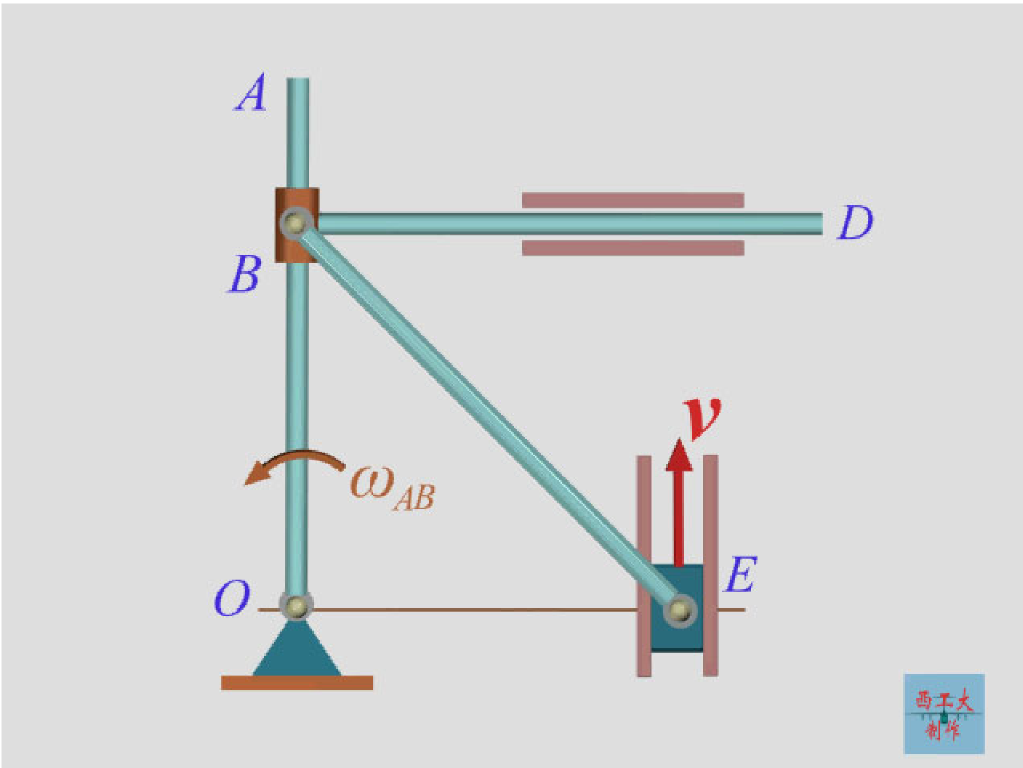
$$x_A = l\cot\varphi, \dot{x}_A = -v, \ddot{x}_A = 0$$

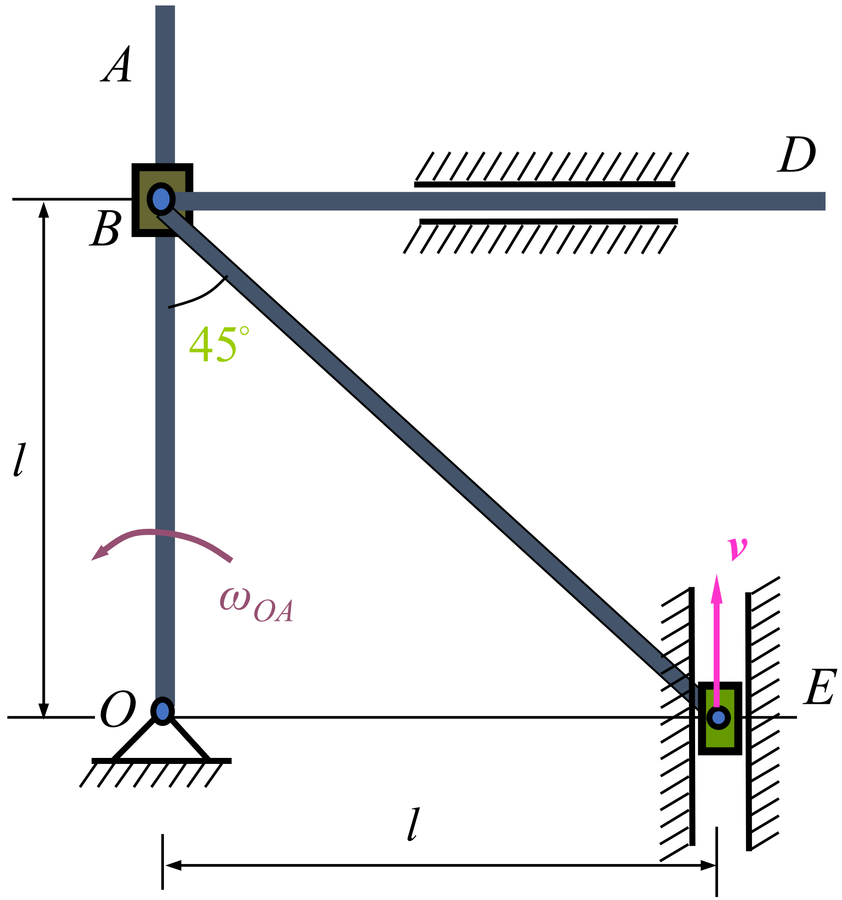


$$\dot{\varphi} = \frac{v}{l}\sin^2\varphi \qquad \ddot{\varphi} = \frac{v\dot{\varphi}}{l}\sin 2\varphi = \frac{v^2}{l^2}\sin^2\varphi \sin 2\varphi$$

例 9

BE,BD杆上铰接有滑块B。滑块B沿OA杆运动，杆BD只能作水平运动。滑块E以恒定速度v沿竖直方向运动，试求OA杆在图示位置时的角速度和加速度。





运动学

解:

BE杆的速度瞬心为O,

$$\omega_{BE}=\frac{v}{OE}=\frac{v}{l},\ v_B=\omega_{BE}\cdot OB=v$$

BE杆中以E为基点,

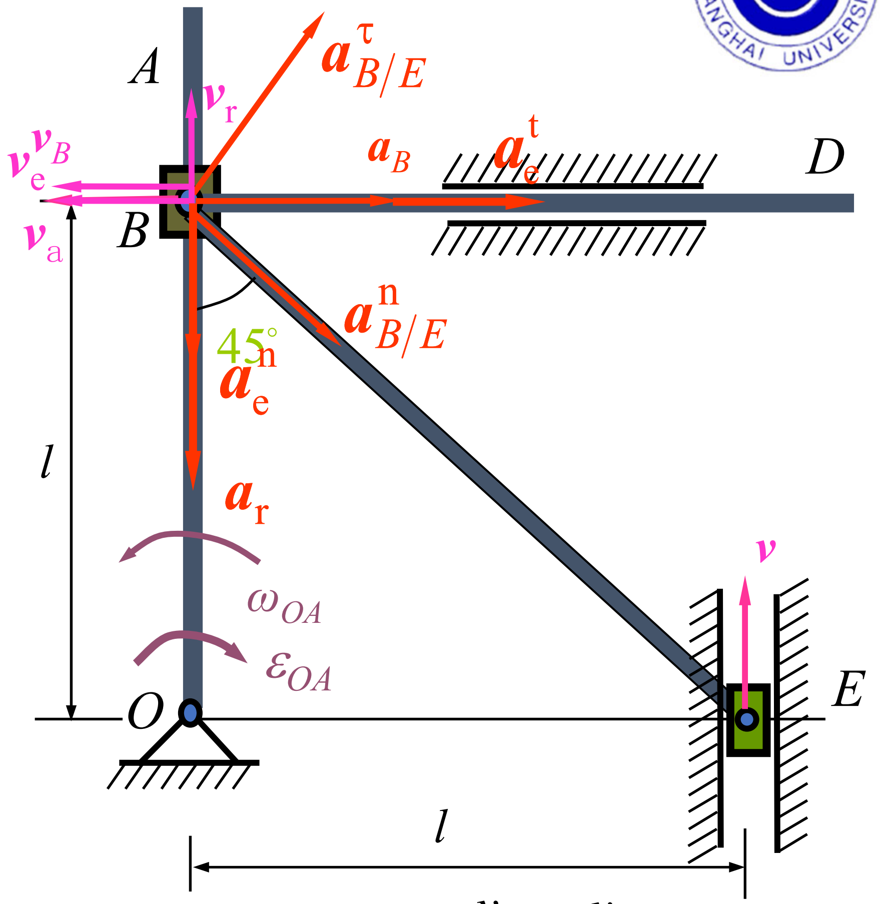
$$\boldsymbol{a}_B=\boldsymbol{a}_E+\boldsymbol{a}_{B/E}^{\tau}+\boldsymbol{a}_{B/E}^{\mathrm{n}}$$

其中 $\boldsymbol{a}_E$=0 并有

$$a_{BE}^{\mathrm{n}}=\omega_{BE}^2\cdot BE=\frac{\sqrt{2}v^2}{l}.$$

投影到BE方向

$$a_B\cos 45^\circ=a_{BE}^{\mathrm{n}}\qquad a_B=\frac{a_{BE}^{\mathrm{n}}}{\cos 45^\circ}=\frac{2v^2}{l}$$



以杆BE上点 B为动点， 将动参考系固连到OA上。

速度 $$\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}}=\boldsymbol{v}_{\mathrm{e}}+\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}\qquad \boldsymbol{v}_{\mathrm{e}}=\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}}=\boldsymbol{v}_B,\ \boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}=\boldsymbol{0}\qquad \omega_{OA}=\frac{v_{\mathrm{e}}}{OB}=\frac{v}{l}$$

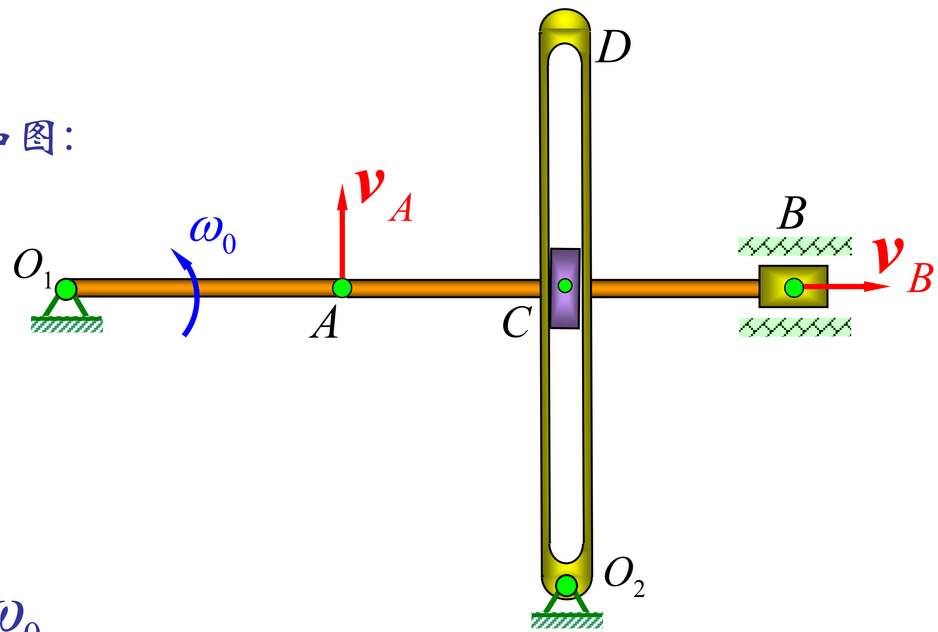
加速度 $$\boldsymbol{a}_{\mathrm{a}}=\boldsymbol{a}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{n}}+\boldsymbol{a}_{\mathrm{e}}^{\tau}+\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}+\boldsymbol{a}_{\mathrm{C}}$$

投影到 BD方向上 $$a_{\mathrm{a}}=a_{\mathrm{e}}^{\tau}\qquad \varepsilon_{OA}=\frac{a_{\mathrm{e}}^{\tau}}{OB}=\frac{a_B}{OB}=\frac{2v^2}{l^2}$$

例题 10 图示机构，销钉C将滑块固定在AB杆，在滑槽O_2D中运动，该瞬时O_1A与AB水平，O_2D铅直且 $O_1A=AC=CB=O_2C=r$，ω_0=常数，求图示位置 ω_{AB}、ω_{O_2D}、α_{AB}、α_{O_2D}。

解

A，B速度如图：



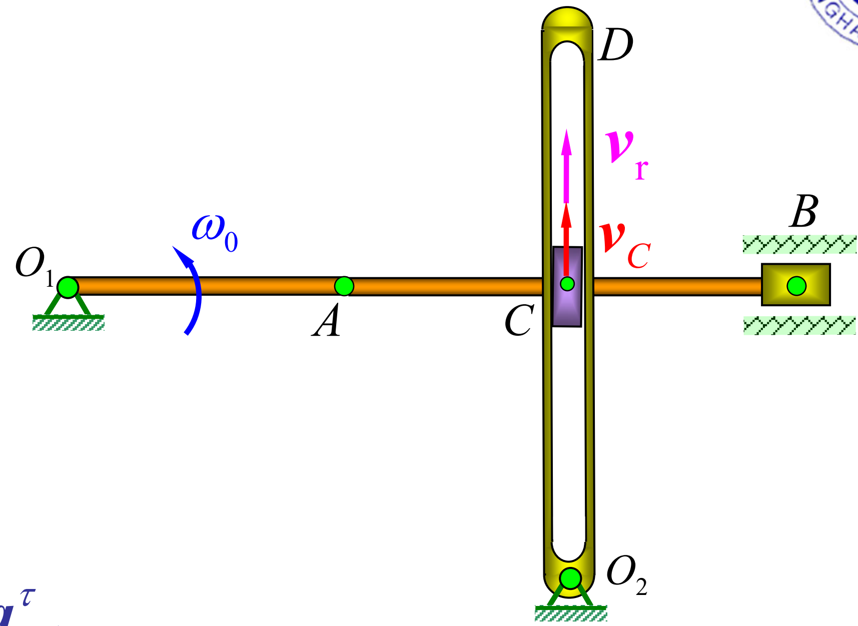
B为AB瞬心。

$$v_B = 0$$

$$v_A = r\omega_0$$

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{2r} = \frac{\omega_0}{2}$$

解　选滑块C为动点，O_2D为动系。

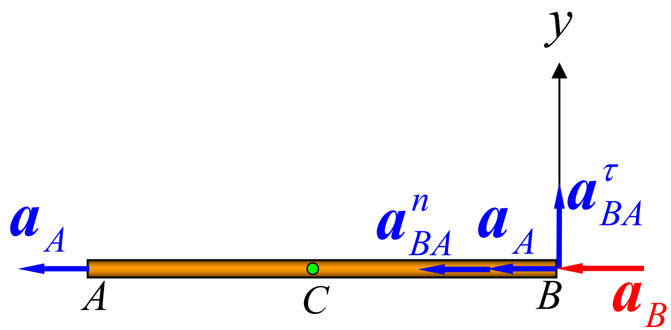


有 $\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r$

$$\therefore\ v_e = 0, \omega_{O_2D} = 0$$

对AB: A为基点,加速度如图

$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_{BA}^n + \boldsymbol{a}_{BA}^\tau$$



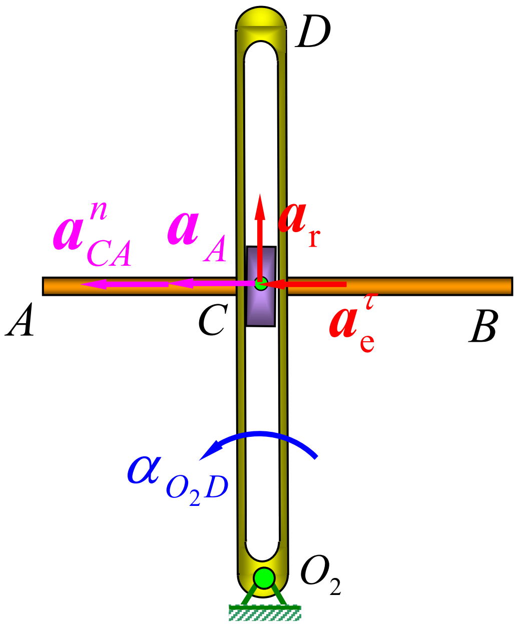
在y方向投影:

$$a_{BA}^\tau = 0$$

$$\therefore \alpha_{AB} = 0$$

运动学

选O_2D为动系，滑块C为动点。



$$\boldsymbol{a}_C=\boldsymbol{a}_A+\boldsymbol{a}_{CA}^{n}=\boldsymbol{a}_{\mathrm{e}}+\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$$

$$=\boldsymbol{a}_{\mathrm{e}}^{\tau}+\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}\qquad\left(\omega_{O_2D}=0\right)$$

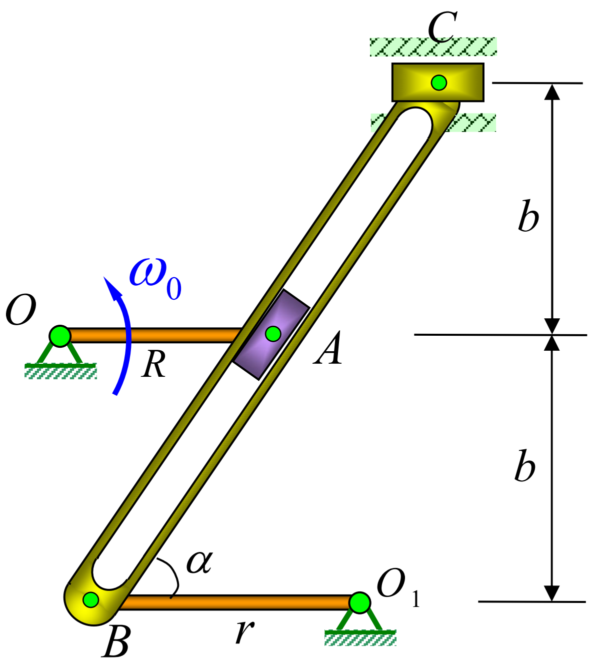
水平方向投影：

$$a_{\mathrm{e}}^{\tau}=a_A+a_{CA}^{n}$$

$$=r\omega^2+r\omega_{AB}^2=\frac{5}{4}r\omega_0^2$$

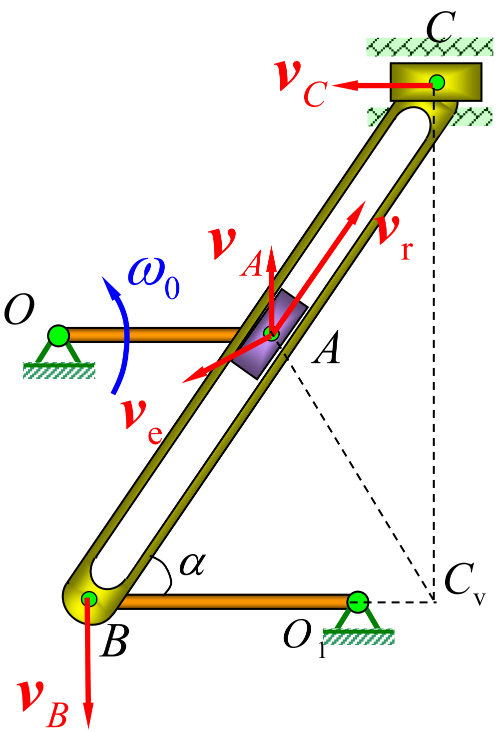
$$\therefore\quad \alpha_{O_2D}=\frac{a_{\mathrm{e}}^{\tau}}{r}=\frac{5}{4}\omega_0^2$$

例题11. 牛头刨床滑道摆杆机构。已知 ω_0=常数，$OA=R, O_1B=r, BC=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}b$，图示瞬时 OA、O_1B 水平，求：v_C, ω_{O_1B} 。



运动学

解



*A*为动点，*BC*为平面运动系，

C_v为瞬心，速度如图。

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \alpha = 60^\circ$$

由 $$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r$$

而 $$v_A = R\omega_0$$

运动学

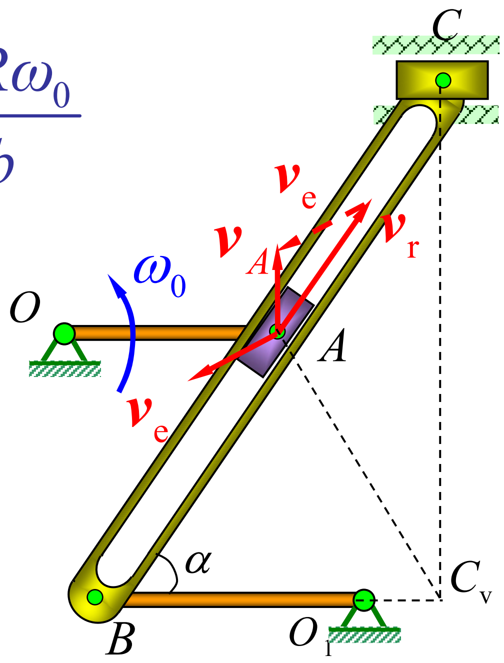
几何关系(速度△等腰，底角30°)

$$v_e = v_A = R\omega_0 \qquad \omega_{BC} = \frac{v_e}{C_v A} = \frac{\sqrt{3}R\omega_0}{2b}$$

$$\therefore v_C = \omega_{BC} \cdot C_v C = \sqrt{3}R\omega_0$$

$$v_B = C_v B \cdot \omega_{BC} = R\omega_0$$

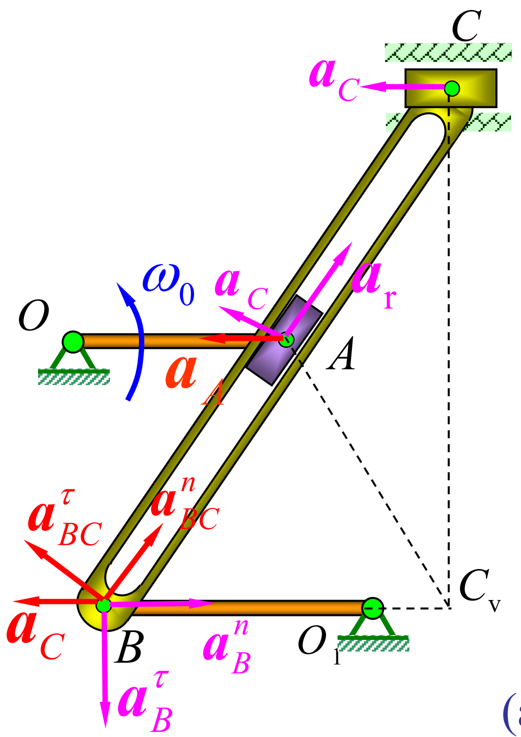
$$\omega_{O_1B} = \frac{v_B}{r} = \frac{R\omega_0}{r}$$



注8

平面运动动系： 由瞬心定牵连点的速度方向。

求 α_{O_1B}?



$$\boldsymbol{a}_A = \boldsymbol{a}_e + \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_C \qquad \text{(a)}$$

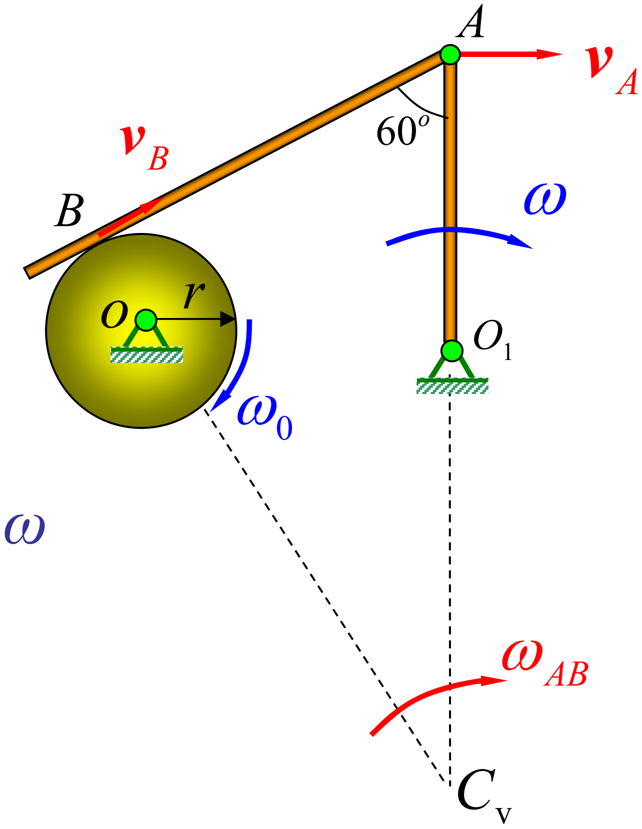
其中 $$\boldsymbol{a}_e = \boldsymbol{a}_{A'} = \boldsymbol{a}_C + \boldsymbol{a}_{A'C}^{n} + \boldsymbol{a}_{A'C}^{\tau}$$

又 $$\underbrace{\boldsymbol{a}_B}_{\boldsymbol{a}_B^n + \boldsymbol{a}_B^\tau} = \boldsymbol{a}_C + \boldsymbol{a}_{BC}^{n} + \boldsymbol{a}_{BC}^{\tau} \qquad \text{(b)}$$

(a)、(b)两式中共4个未知量，投影可解。

6. 已知 $\omega;\ O_1A = r_1,\ r,\ AB = l,$ 求ω_0 。

解



AB瞬心在C_v, $v_A = r_1\omega$,

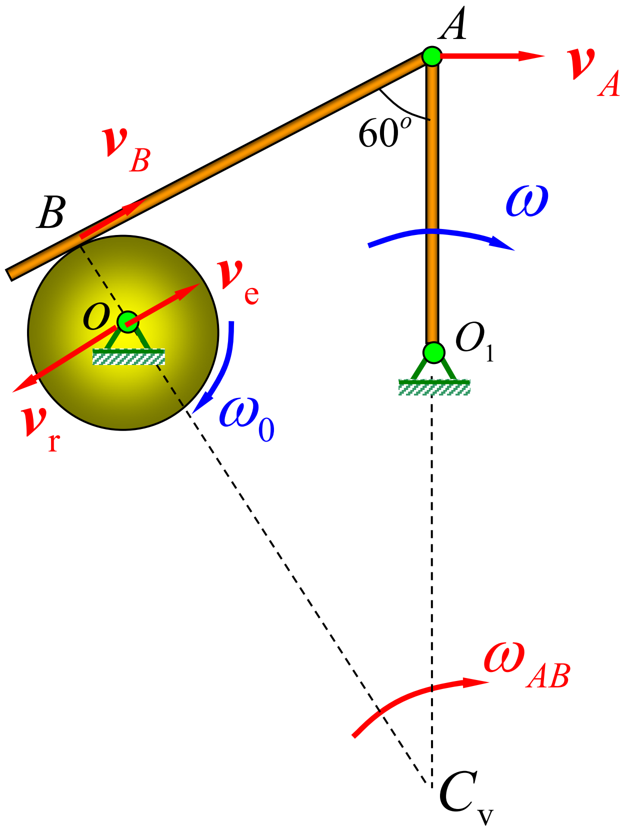
$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{C_vA} = \frac{r_1\omega}{2l}$$

$$v_B = \omega_{AB}\cdot C_vB = \frac{\sqrt{3}}{2}r_1\omega$$

$$\omega_0 = \frac{v_B}{r} = \frac{\sqrt{3}\,r_1}{2r}\omega$$

如何求α_O。

解



选AB为动系，O为动点。

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r = 0$$

$$\therefore \quad v_r = v_e = \omega_{AB} \cdot C_v O$$

又 $$\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_e + \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_C = 0$$

$$\boldsymbol{a}_e = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_{O'A}^n + \boldsymbol{a}_{O'A}^\tau$$

$$a_C = 2\omega_{AB} v_r$$

$$\therefore \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_{O'A}^n + \boldsymbol{a}_{O'A}^\tau + \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_C = 0$$

投影求出 $\boldsymbol{a}_{O'A}^\tau \to \alpha_{AB} \to \boldsymbol{a}_B \to \boldsymbol{a}_B^\tau \to \alpha_O$

运动学

另解:　亦可采用一动点，两动系求解

动点为接触点B，动系为AB和轮O

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}} = \boldsymbol{v}_{\mathrm{e1}} + \boldsymbol{v}_{\mathrm{r1}} = \boldsymbol{v}_{\mathrm{e2}} + \boldsymbol{v}_{\mathrm{r2}}$$

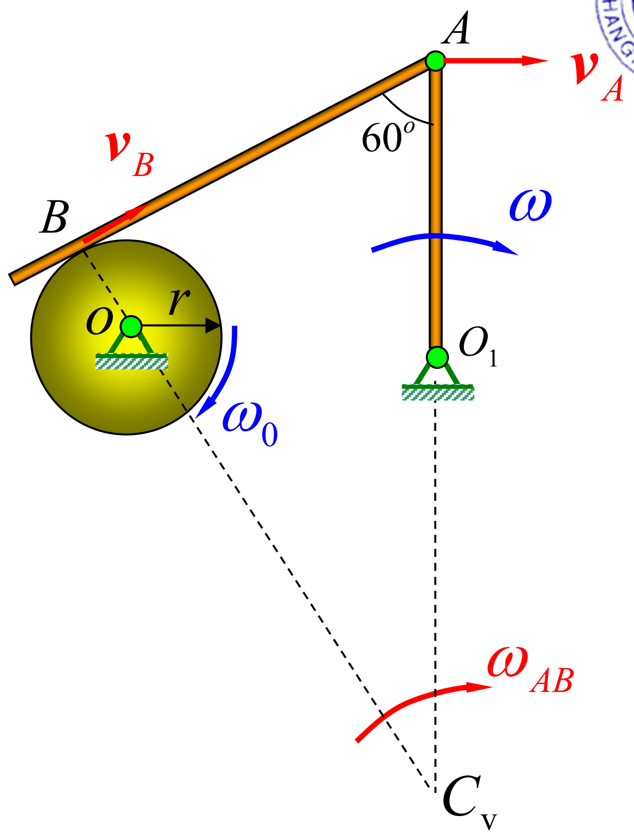
其中

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{e1}} = \boldsymbol{v}_{B}$$

$$v_{\mathrm{e1}} = v_{\mathrm{e2}} = v_B = r\,\omega_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} r_1\,\omega$$

$$v_{\mathrm{a}} = r\omega_{AB} = \frac{r r_1 \omega}{2l}$$

$$v_{\mathrm{r1}} = v_{\mathrm{r2}} = \frac{r_1\,\omega}{2}\left(\frac{r}{l} - \sqrt{3}\right)$$



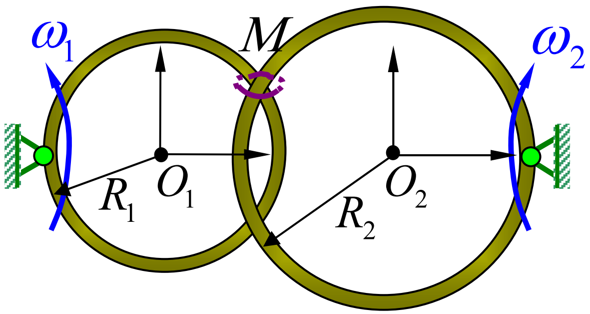
铰接及无滑动滚动连接：复合运动与平面运动混合问题，

需迂回求解“两头碰”。两套公式联立。

运动学

已知 $R_1, R_2, \omega_1, \omega_2$， 求 $\boldsymbol{v}_M$， $\boldsymbol{a}_M$ ？

在O_1和O_2分别固连平移系，环M为动点



$$\boldsymbol{v}_M = \boldsymbol{v}_{e1} + \boldsymbol{v}_{r1} = \boldsymbol{v}_{e2} + \boldsymbol{v}_{r2}$$

$$\boldsymbol{a}_M = \boldsymbol{a}_{e1}^n + \boldsymbol{a}_{r1}^n + \boldsymbol{a}_{r1}^\tau = \boldsymbol{a}_{e2}^n + \boldsymbol{a}_{r2}^n + \boldsymbol{a}_{r2}^\tau$$

$$v_{e1} = R_1\omega_1, v_{e2} = R_2\omega_2$$

$$a_{e1}^n = R_1\omega_1^2, a_{e1}^\tau = 0; a_{e2}^n = R_2\omega_2^2, a_{e2}^\tau = 0$$

动系选择经验

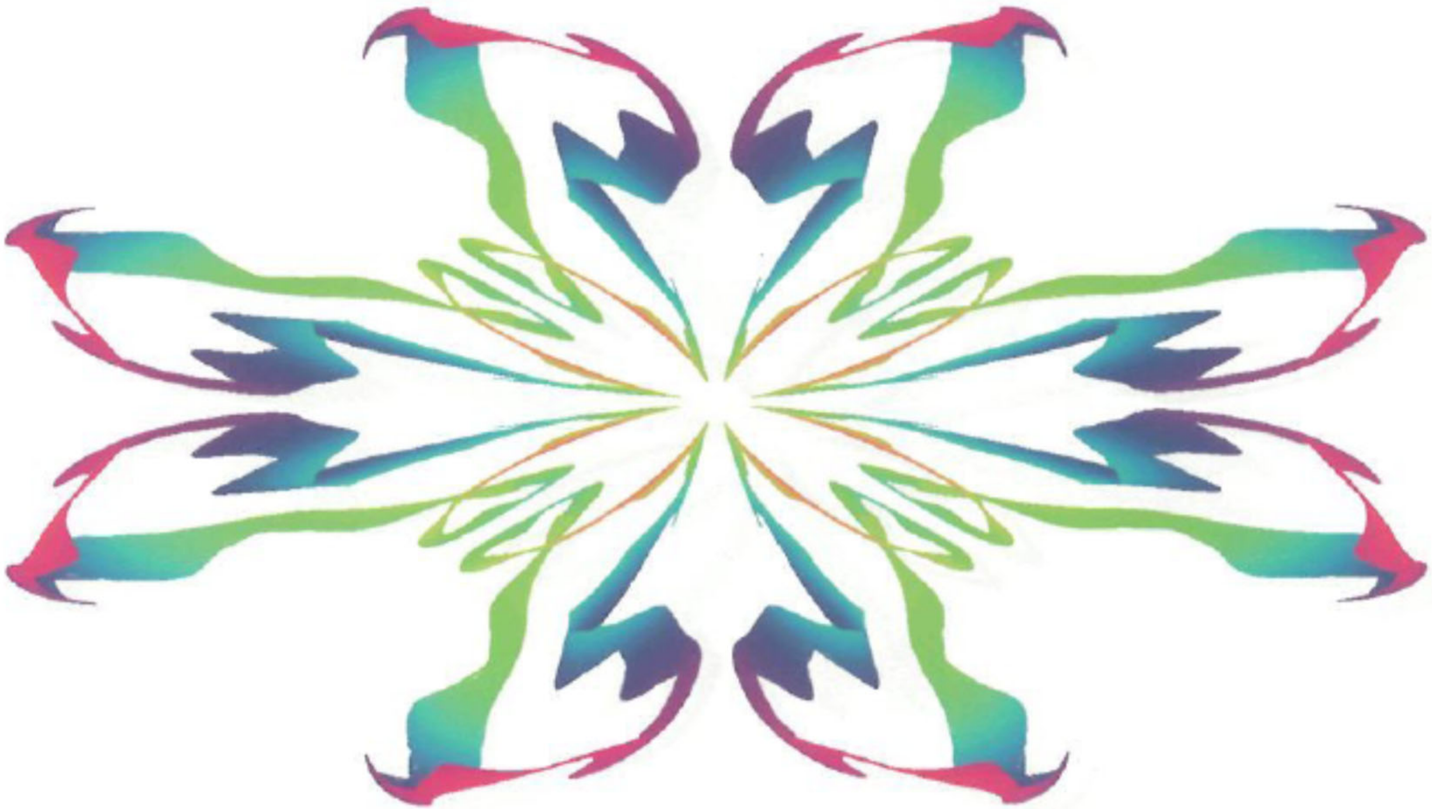
1. 无关联物体的相对运动，可将动系固连于其一。

2. 某点在运动刚体上运动且相对轨迹明显，选刚体为动系。

3. 两物接触，有一固定接触点，选该点为动点，另一物为动系。

4. 两物接触，无固定接触点，又无特殊点。采用一个动点，两个动系。

- 12月8日， 第三次作业：6-16



运动学部分结束