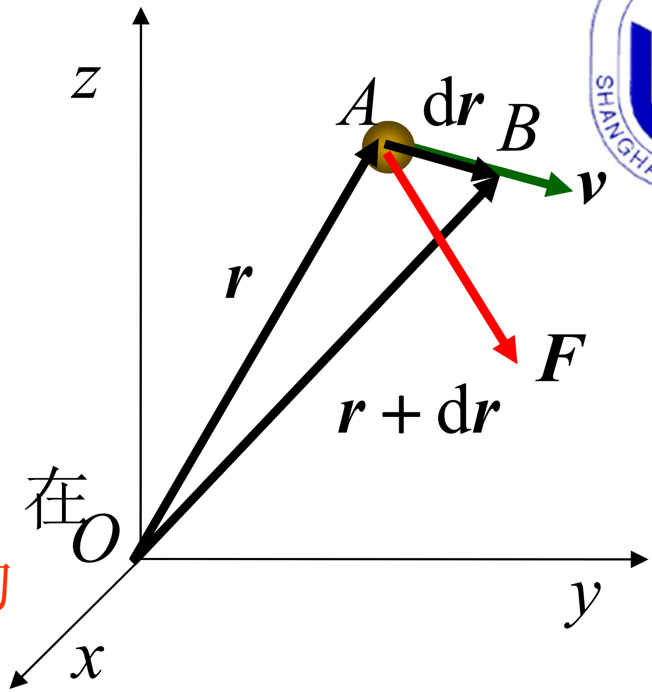
动力学

9.1 力的功

1 力的功

1.1 元功

在变力作用下的质点沿曲线运动。在矢径增量d$\boldsymbol{r}$下，功的增量或称元功



$$d'W = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$$

其中用d\`而不是d表示元功,表明d\` W 通常不是函数W 的全微分，而仅仅只是一个无限小的表达式。

直角坐标系表示

$$\boldsymbol{F} = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} + F_z\boldsymbol{k},$$

$$d\boldsymbol{r} = d x\boldsymbol{i} + d y\boldsymbol{j} + d z\boldsymbol{k}$$

$$\Rightarrow \quad d'W = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz$$

自然坐标系表示

$$\boldsymbol{F} = F_n\boldsymbol{n} + F_\tau\boldsymbol{\tau} + F_b\boldsymbol{b},\ d\boldsymbol{r} = d s\boldsymbol{\tau} \quad \Rightarrow \quad d'W = F_\tau\,ds = F\cos\alpha\,ds$$

1.2 功

质点在的$\boldsymbol{F}$作用下从点A运动到点B相应的功为

一般情况下，与运动路径相关 $W_{A\to B}(\boldsymbol{F}) = \int_{AB} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$

与运动路径无关时 $W_{A\to B}(\boldsymbol{F}) = \int_{A}^{B} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$

直角坐标系表示

$$W_{A\to B}(\boldsymbol{F}) = \int_{AB} \left(F_x\,\mathrm{d}x + F_y\,\mathrm{d}y + F_z\,\mathrm{d}z\right)$$

自然坐标系表示

$$W_{A\to B}(\boldsymbol{F}) = \int_{AB} F_\tau\,\mathrm{d}s$$

2 力系的功

$\boldsymbol{F}_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$ 作用在矢径为$\boldsymbol{r}_i$的各质点上质点。力系的元功为

$$\mathrm{d}'W=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i$$

力系的功为

$$W_{A_i\to B_i}(\boldsymbol{F})=\sum_{i=1}^{n}\int_{A_iB_i}\boldsymbol{F}_i\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i$$

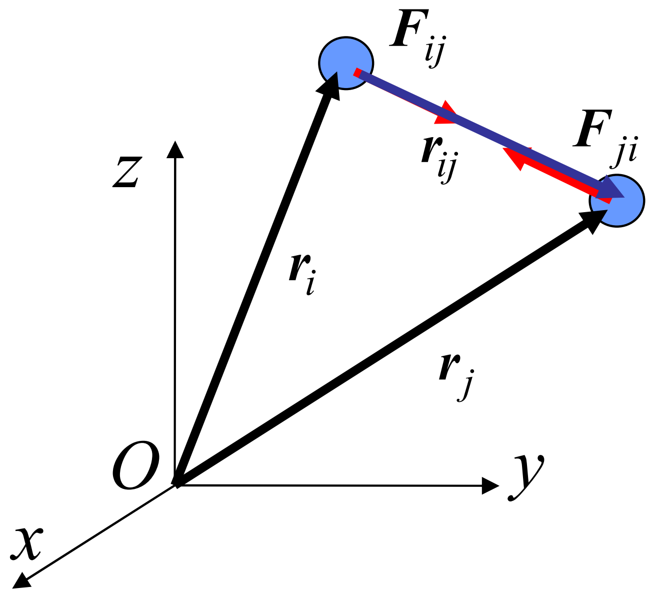
力系的(元)功为该力系所有力的(元)功的代数和。

动力学

例 1

讨论质点系内力的元功。

解：　考虑一对内力



$$\mathrm{d}'W=\boldsymbol{F}_{ij}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i+\boldsymbol{F}_{ji}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_j=\boldsymbol{F}_{ij}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{F}_{ij}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_j=\boldsymbol{F}_{ij}\cdot\mathrm{d}\left(\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j\right)=\boldsymbol{F}_{ij}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{ij}$$

当且仅当两质点间的距离不变时，非零内力的元功为零。

弹簧

$\mathrm{d}l\neq 0$

刚性杆

$\mathrm{d}l=0$

不可拉伸绳

$\mathrm{d}l\neq 0,\boldsymbol{F}=\boldsymbol{0}$

$\mathrm{d}l=0,\boldsymbol{F}\neq\boldsymbol{0}$

内力做功的例子：

发动机内力作正功，汽车加速行驶；制动器中内摩擦作负功，转化为热能；

人骑自行车, 内力作功，加速行驶；　外力使弹性体变形，内力作负功。

➢ 力偶的功

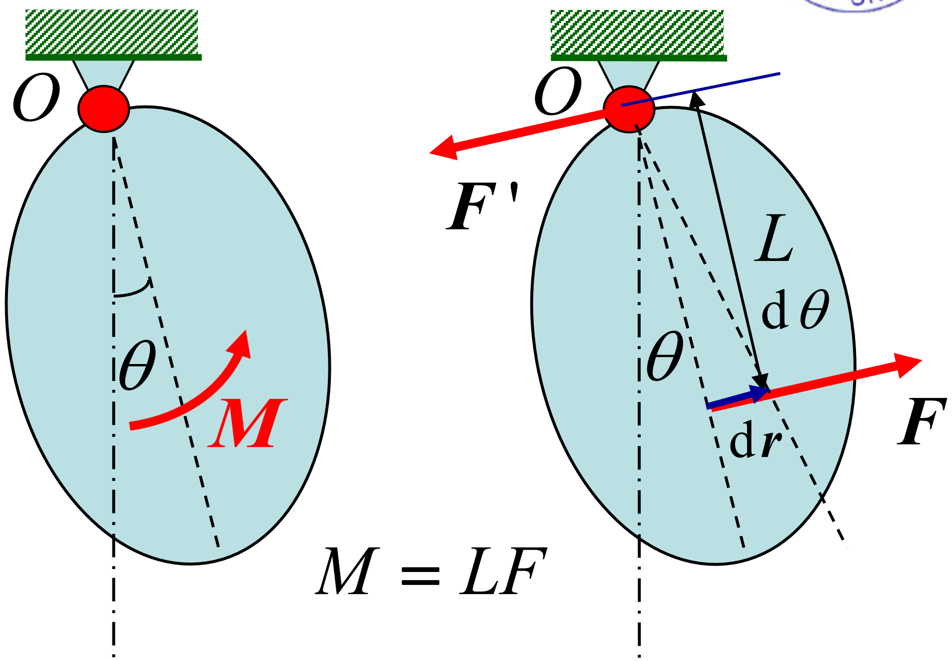
力偶$\boldsymbol{M}$所做的元功.

$$\mathrm{d}'W = \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = FL\,\mathrm{d}\theta = M\,\mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}'W = \boldsymbol{M}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}$$

力矩的功

$$W(\theta_1\to\theta_2) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M\,\mathrm{d}\theta$$



➢ 作用在刚体上力的元功

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i = \mathrm{d}\boldsymbol{r}_A + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_A)\,\mathrm{d}t$$

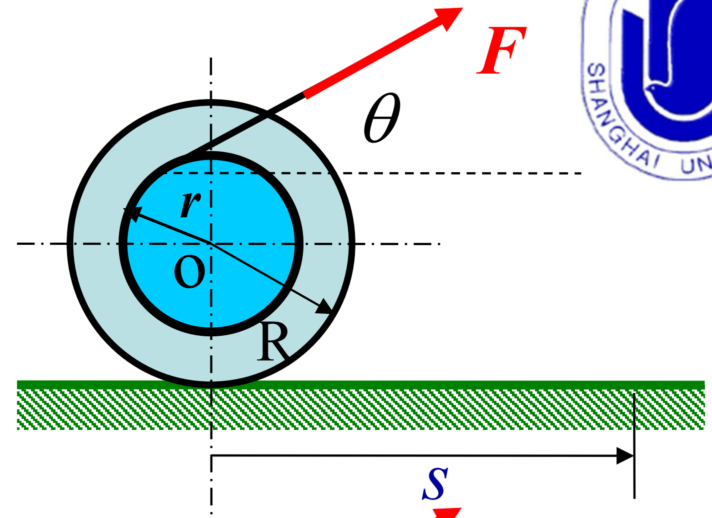
$$\mathrm{d}'W = \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i\cdot\left[\mathrm{d}\boldsymbol{r}_A + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_A)\,\mathrm{d}t\right] = \left(\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i\cdot\right)\mathrm{d}\boldsymbol{r}_A + \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i\times(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_A)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}$$

$$\mathrm{d}'W = \boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_A + \boldsymbol{M}_A\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}$$

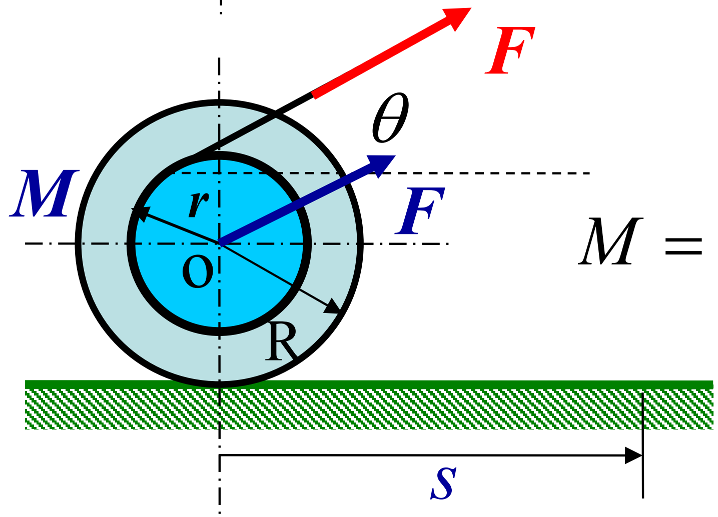
动力学

例 2

轮在水平面上做无滑移滚动. 一恒力如示作用在轮上。当轮心平移距离为s时求力的功。



解: 将力向运动已知的点O简化。



$$M = Fr$$

元功

$$\mathrm{d}'W = \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + M\,\mathrm{d}\varphi$$

$$= F\cos\theta\,\mathrm{d}s + Fr\,\mathrm{d}\varphi$$

功

$$W = \int_{12} \mathrm{d}'W = \int_{12} \left(F\cos\theta\,\mathrm{d}s + Fr\,\mathrm{d}\varphi\right) = \int_0^s F\cos\theta\,\mathrm{d}s + \int_0^{s/R} Fr\,\mathrm{d}\varphi$$

$$= Fs\cos\theta + Fr\frac{s}{R}$$

3 常见力的功

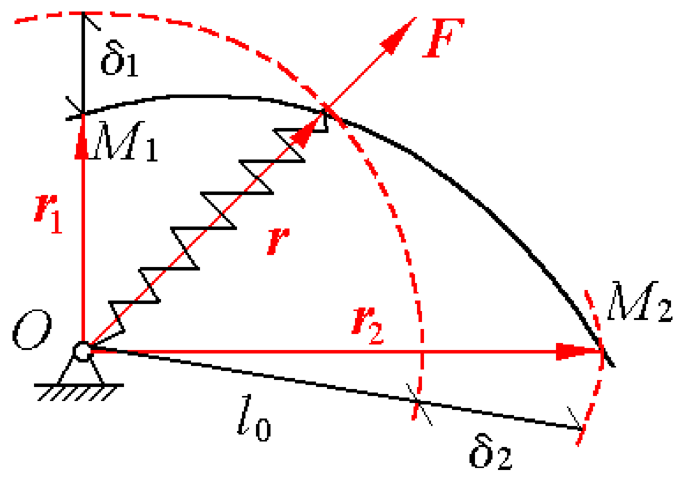
➢ 弹簧弹力

考虑刚度为k的弹簧，其弹力与弹簧的拉伸压缩变形成正比。弹簧原长为 l_0。求质点在任意位移M_1 到M_2时弹簧力作用在质点上的功。

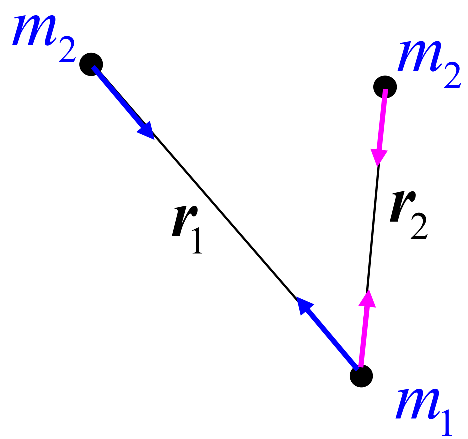
$$W = \int_{M_1M_2} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{M_1M_2} -k(r-l_0)\boldsymbol{e}_r \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

$$\boldsymbol{e}_r \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{\boldsymbol{r}}{r} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{1}{2r}\mathrm{d}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2r}\mathrm{d}(r^2) = \mathrm{d}r$$

$$W = \int_{l_0+\delta_1}^{l_0+\delta_2} -k\left(r-l_0\right)\mathrm{d}r = \frac{k}{2}\left(\delta_1^{\ 2} - \delta_2^{\ 2}\right)$$



➢ 万有引力(重力)



质量为 m_2的质点在质量为m_1的质点引力场运动。引力做功

$$W=\int_{M_1M_2}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_{M_1M_2}\frac{-Gm_1m_2}{r^2}\boldsymbol{e}_r\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

$$\boldsymbol{e}_r\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{e}_r\cdot\mathrm{d}\left(r\boldsymbol{e}_r\right)=\boldsymbol{e}_r\cdot\left(\boldsymbol{e}_r\,\mathrm{d}r+r\,\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r\right)=\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{e}_r\,\mathrm{d}r+r\boldsymbol{e}_r\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r=\mathrm{d}r$$

$$\boldsymbol{e}_r\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r=\mathrm{d}\left(\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{e}_r\right)=0$$

$$W=\int_{r_1}^{r_2}\frac{-Gm_1m_2}{r^2}\mathrm{d}r=Gm_1m_2\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)$$

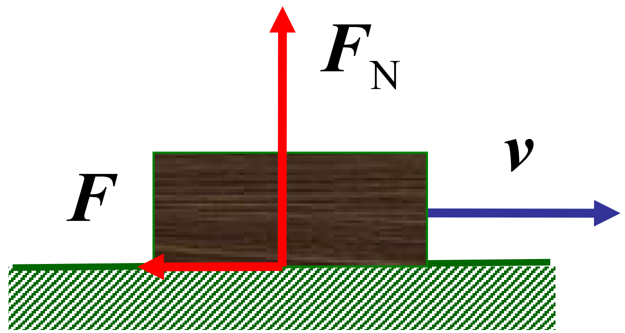
在地球的重力场内

$$W=mgR^2\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)\approx-mg\left(r_2-r_1\right)$$

动力学

➢ 摩擦力

● 平移刚体的滑动摩擦



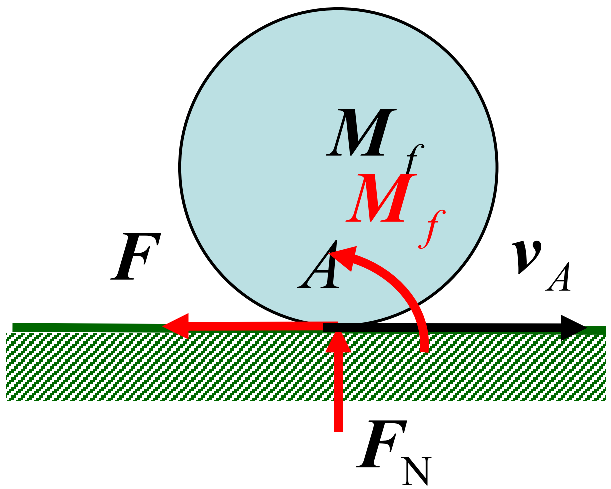
$$\mathrm{d}'W=\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=-fF_{\mathrm{N}}\,\mathrm{d}s$$

对恒定 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}}$,

$$W=-fF_{\mathrm{N}}s$$

摩擦力的功取决于质点在力作用下的实际路径。

● 滚动刚体滑动摩擦



$$\mathrm{d}'W=\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_A=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}_A\,\mathrm{d}t$$

纯滚动

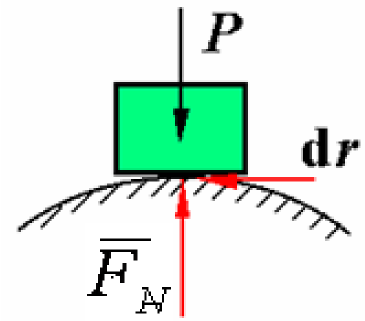
$$\mathrm{d}'W=0$$

● 滚阻力偶

$$\mathrm{d}'W=-M_{\mathrm{f}}\,\mathrm{d}\theta=-\boldsymbol{M}_{\mathrm{f}}\cdot\boldsymbol{\omega}\,\mathrm{d}t$$

4 约束力不做功的约束

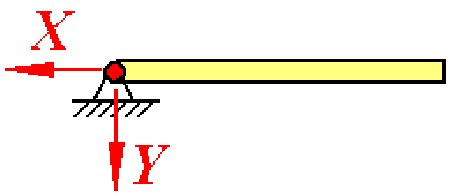
- 刚体固定光滑面上的平移:



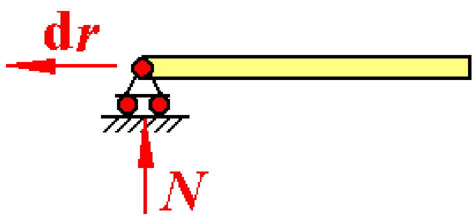
$$d'W = \boldsymbol{F}_{\rm N}\cdot d\boldsymbol{r} = 0 \qquad \boldsymbol{F}_{\rm N}\perp d\boldsymbol{r}$$

- 支座: $d\boldsymbol{r}=\boldsymbol{0}$ 或$\boldsymbol{F}_{\rm N}\perp d\boldsymbol{r}$

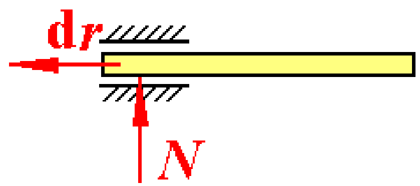
$$d'W = \boldsymbol{F}_{\rm N}\cdot d\boldsymbol{r} = 0$$



固定铰链支座



滑移支座

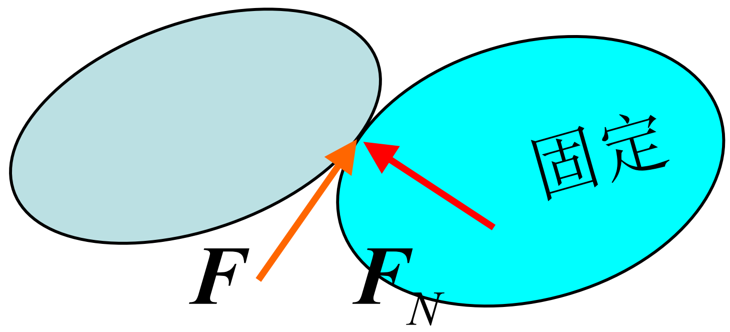


自由滑动导向

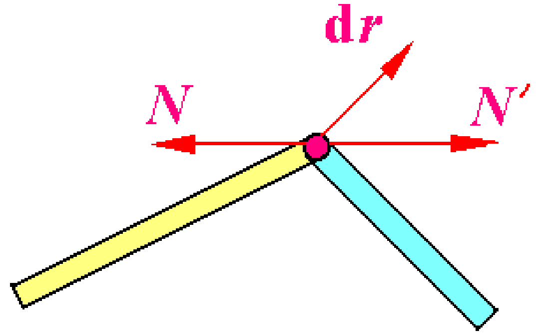
动力学

- 刚体在固定面上的无滑滚动

$$d'W = 0$$



- 活动铰链



$$\begin{aligned} d'W &= \boldsymbol{F}_{\mathrm{N}} \cdot d\boldsymbol{r} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{N}}' \cdot d\boldsymbol{r} \\ &= \boldsymbol{F}_{\mathrm{N}} \cdot d\boldsymbol{r} - \boldsymbol{F}_{\mathrm{N}} \cdot d\boldsymbol{r} \\ &= 0 \end{aligned}$$

- 柔索, 带, 链, 或绳: 不可拉伸

$$d'W = 0$$

9.2 虚功原理

1 虚位移

虚运动

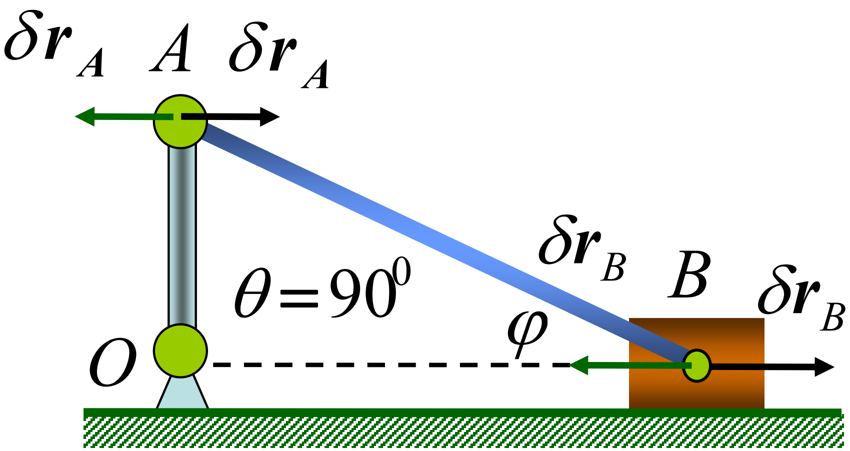
用功的概念分析处于静止的稳态系统，需引入虚运动的概念。虚是一个历史形成的修饰语，其真正意义为虚构的或假想的。

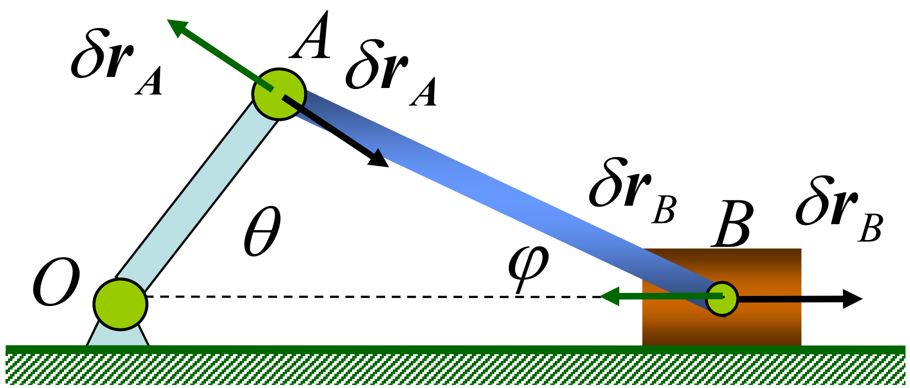
在虚运动中, 假设系统从**静平衡位置**开始运动。在虚运动中所有作用在系统上的力大小方向保持不变。力的作用点也保持不变。

虚位移

任何满足约束条件(运动学所允许)的无限小假想位移称为虚位移.

虚位移实际可能并未发生。通常用d表示的(真实的)无穷小位移。为强调虚位移的假象特性，通常用δ表示虚位移。





2 虚功

作用在质点上的任意力在虚位移下所做的功称为虚功.

$$\delta W=\boldsymbol{F}\cdot\delta\boldsymbol{r}$$

对质点系

$$\delta W=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i$$

理想约束

若质点系中约束力在质点系任意虚位移上做的虚功之和为零，则该约束称为理想约束。

$$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}i}\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0$$

平移刚体的光滑平面

滑移支座　　　　自由滑动导向

纯滚动刚体接触面

柔索，带，链，或绳　　　　铰链

3 虚功原理

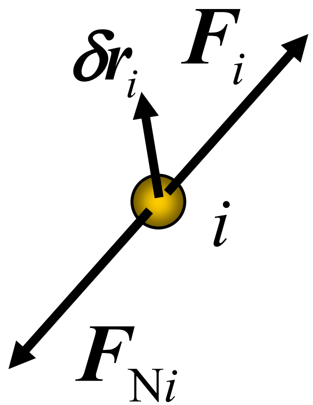
受理想约束的质点系其静平衡的充分必要条件为所有主动力在质点系的任意虚位移下所做的虚功之和为零.

必要性:

$$\text{平衡} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \bullet \delta \boldsymbol{r}_i = 0$$

$$\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{F}_{\mathrm{N}i} = 0 \quad (i = 1, \cdots, n) \qquad \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{F}_{\mathrm{N}i}) \bullet \delta \boldsymbol{r}_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \bullet \delta \boldsymbol{r}_i + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_{\mathrm{N}i} \bullet \delta \boldsymbol{r}_i}_{\parallel \atop \mathbf{0}} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \bullet \delta \boldsymbol{r}_i = 0$$

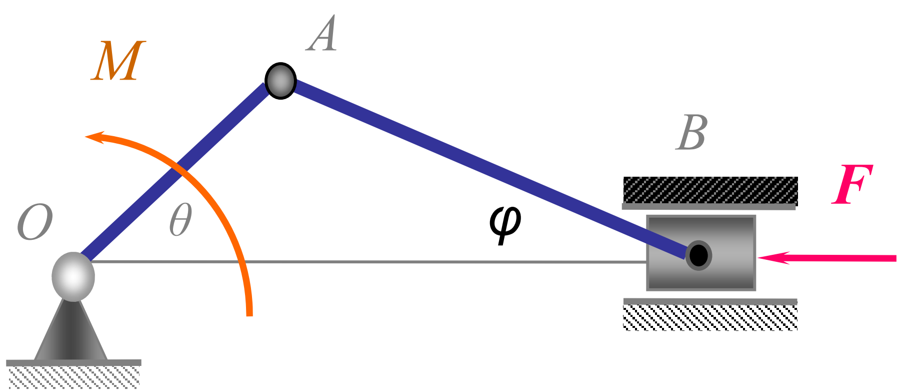


充分性?

虚功原理, 也被称为虚位移原理

例 3

力矩M作用在曲柄上,已知$OA=r$, $AB=l$, θ和φ 。求为达到平衡作用在活塞B(光滑运动)的水平压力 F。

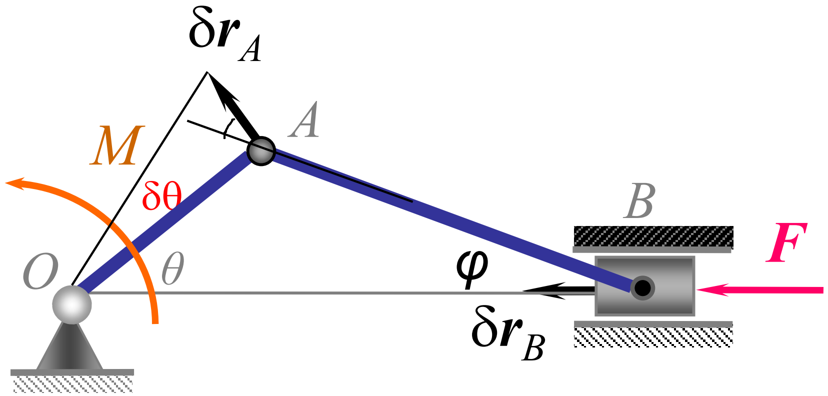


解:

研究系统,受理想约束。

应用虚功原理

$$M\delta\theta + F\delta r_B = 0.$$



虚位移之间的关系

$$\delta r_B \cos\varphi = \delta r_A \cos\left[90^\circ - (\theta+\varphi)\right],\ \delta r_A = r\delta\theta. \Rightarrow \delta r_B = \frac{r\sin(\theta+\varphi)}{\cos\varphi}\delta\theta.$$

$$M\delta\theta + F\frac{r\sin(\theta+\varphi)}{\cos\varphi}\delta\theta = 0. \xRightarrow{\delta\theta\neq 0.} M + F\frac{r\sin(\theta+\varphi)}{\cos\varphi} = 0.$$

$$F = -\frac{M\cos\varphi}{r\sin(\theta+\varphi)}.$$