动力学

8.4 动静法

解题要领

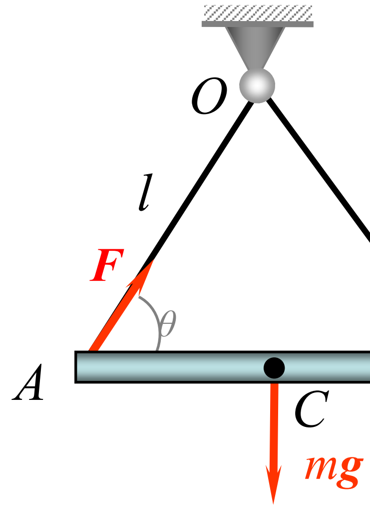
1. 求解力与加速度的关系可以用达朗贝尔原理；
2. 根据运动形式在研究对象上虚加惯性力，此惯性力不是物体受到的作用力；
3. 因独立的运动学参数个数与系统得自由度相同，因此，常常还需根据约束情况建立运动学补充方程，方程组才封闭。

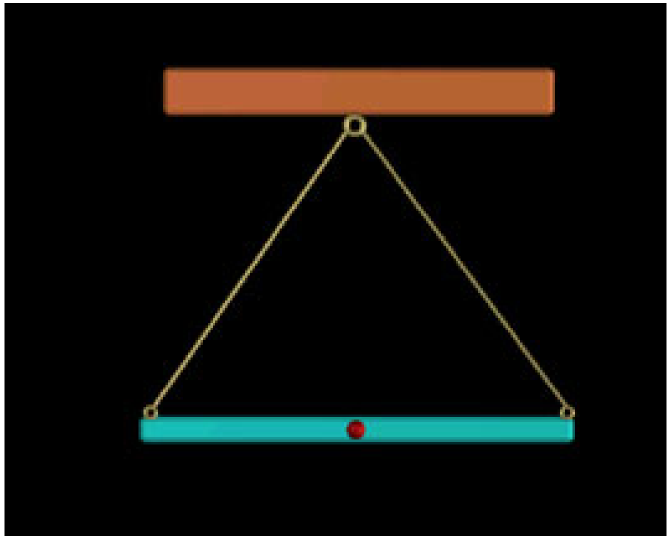
要点回顾

动力学

例 36

质量为m长为l的均质杆AB 如图通过固定点O用两根绳悬挂。当杆静止时，剪断绳 OB 。求该时刻另一绳的张力。





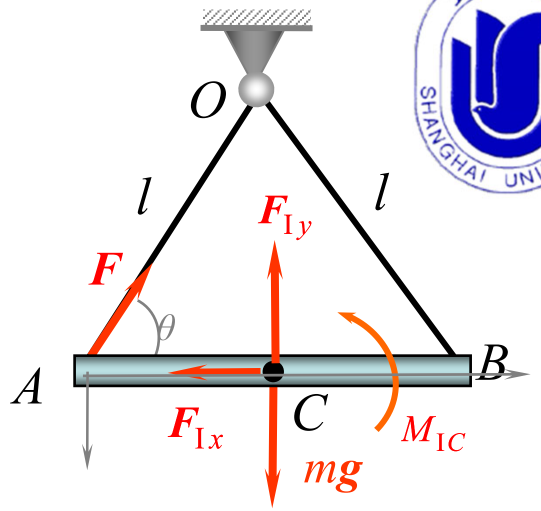
动力学

解:

研究杆， 刚剪断*OB*时， $\omega=0,\ \alpha\neq 0.$

加惯性力

$$F_{\mathrm{I}x}=ma_{Cx},\ F_{\mathrm{I}y}=ma_{Cy},\ M_{\mathrm{I}C}=J_C\alpha$$



应用平衡方程

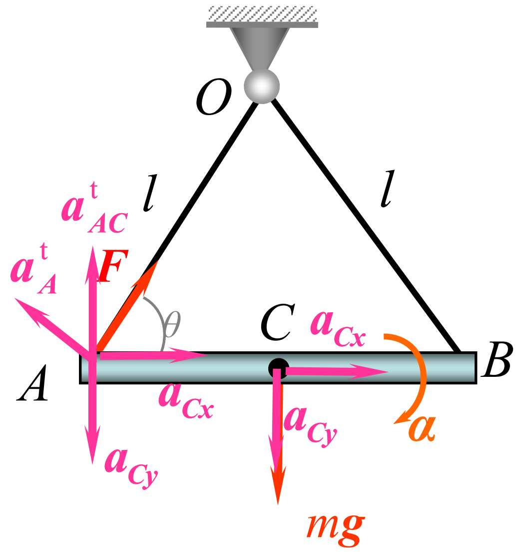
$$\sum F_x=0:\quad -\underline{ma_{Cx}}\ \underline{+F}\cos\theta=0$$

$$\sum F_y=0:\quad -\underline{ma_{Cy}}+mg-F\sin\theta=0$$

$$\sum M_C(\boldsymbol{F})=0:\quad -\underline{J_C}\alpha+F\frac{l}{2}\sin\theta=0$$

运动分析（加速度基点法）

$$\boldsymbol{a}_A=\boldsymbol{a}^{\mathrm{n}}_A+\boldsymbol{a}^{\mathrm{t}}_A=\boldsymbol{a}_{Cx}+\boldsymbol{a}_{Cy}+\boldsymbol{a}^{\mathrm{t}}_{A/C}+\boldsymbol{a}^{\mathrm{n}}_{A/C}$$



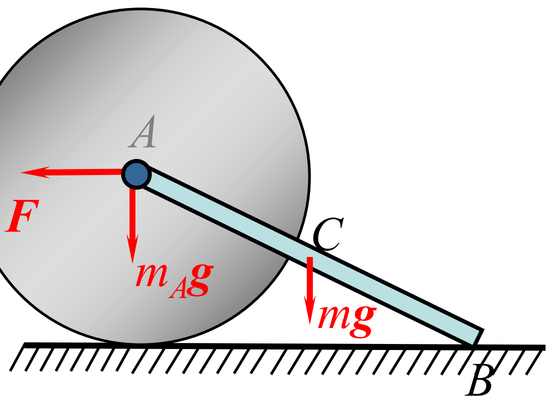
向*AO*方向投影（法向）

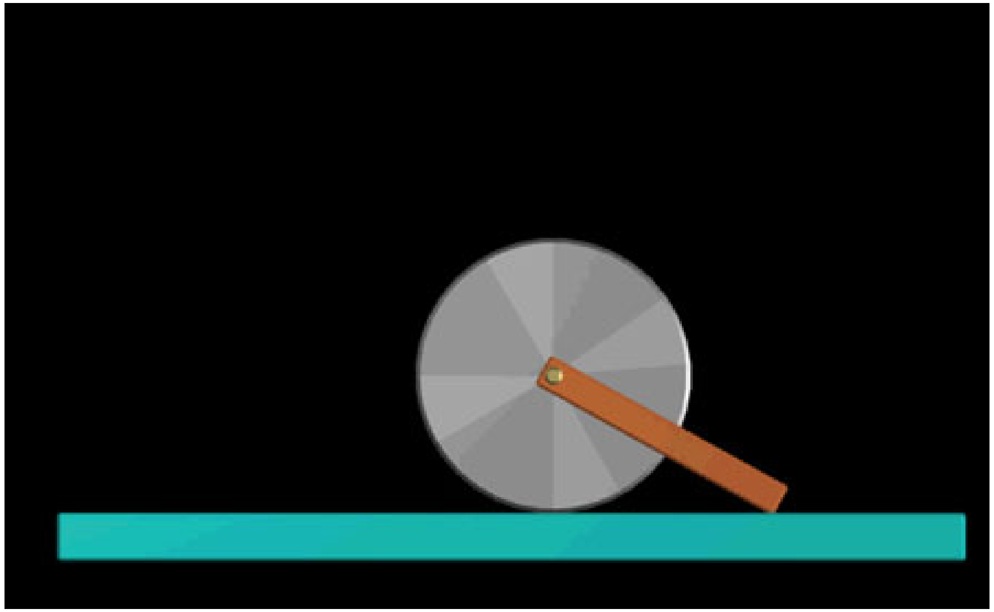
$$0=a_{Cx}\cos\theta-a_{Cy}\sin\theta+\frac{l}{2}\alpha\sin\theta$$

$$F=\frac{mg\sin\theta}{4\sin^2\theta+\cos^2\theta}=\frac{2\sqrt{3}}{13}mg$$

例 37

如图质量为m、长为$2r$均质杆AB 与一个质量为m_A、半径为r的均质圆盘的中心相连。 作用在A点的水平力F使圆盘在水平面做无滑滚动。求使 B点与地面不接触的力和和保证纯滚动的最小摩擦因数。



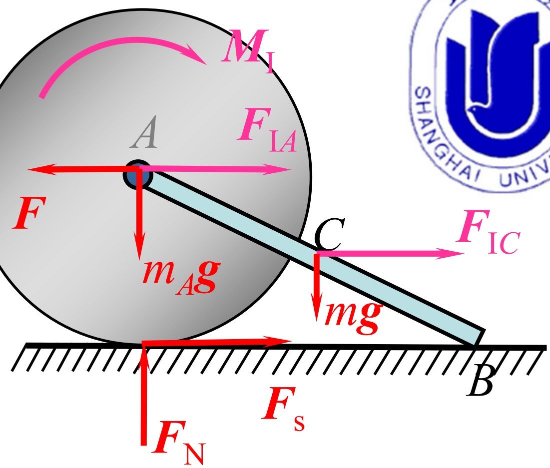


动力学

解:

研究系统。 加惯性力

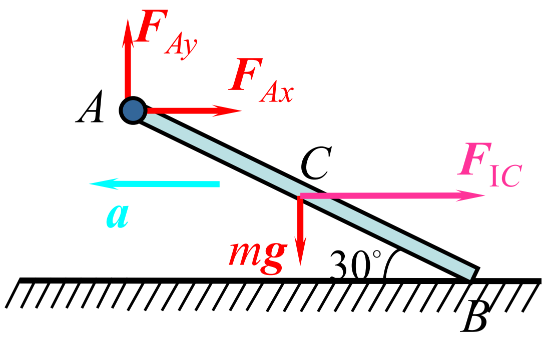
$$F_{IA}=m_A a,\ F_{IC}=ma,\ M_I=J_A a/r$$



应用平衡方程

$$\sum F_x=0:\quad F-F_{IA}+F_{IC}+F_s=0.\ \sum F_y=0:\quad F_N-m_A g-mg=0$$

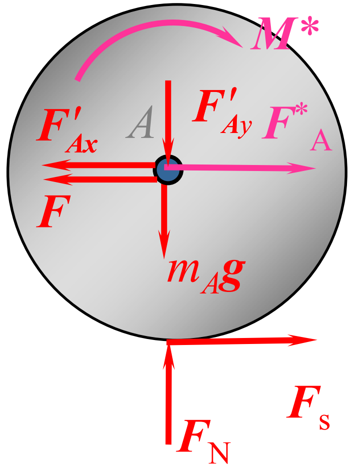
研究杆。 加惯性力



应用平衡方程

$$\sum M_A(F)=0:\quad mar\cdot\sin 30^\circ-mgr\cdot\cos 30^\circ=0$$

研究圆盘。 加惯性力.



应用平衡方程

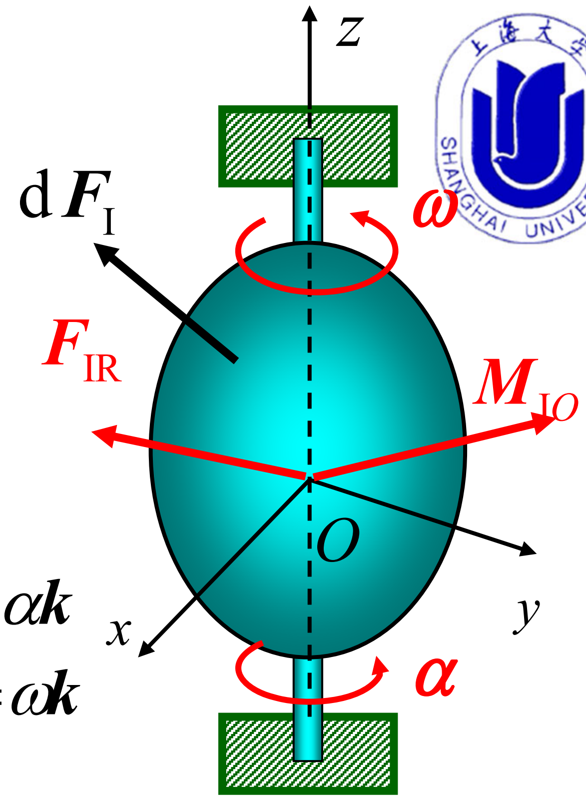
$$\sum M_A(F)=0:\quad F_s r-M_I=0$$

$$a=\sqrt{3}g,\ F_N=(m_A+m)g,\ F_s=\frac{\sqrt{3}}{2}m_A g,\ F=\left(\frac{3m_A}{2}+m\right)\sqrt{3}g$$

$$f_s\ge\frac{F_s}{F_N}=\frac{\sqrt{3}m_A}{2(m_A+m)}$$

动力学

➢ 定轴转动刚体的轴承动反力　静平衡与动平衡



惯性力系向定轴上一点O简化

主矢

$$\boldsymbol{F}_\mathrm{IR} = \int_M \mathrm{d}\boldsymbol{F}_\mathrm{I} = -\int_M \boldsymbol{a}\,\mathrm{d}m = -m\boldsymbol{a}_C$$

其中

$$\boldsymbol{a}_C = \boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{r}_C + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_C) \qquad \boldsymbol{\alpha} = \alpha\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{r}_C = x_C\boldsymbol{i} + y_C\boldsymbol{j} + z_C\boldsymbol{k} \qquad \boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{k}$$

主矢的分量表示

$$F_{\mathrm{I}x} = -m(\omega^2 x_C + \alpha y_C), F_{\mathrm{I}y} = -m(-\alpha x_C + \omega^2 y_C), F_{\mathrm{I}z} = 0$$

主矩

$$\boldsymbol{M}_\mathrm{I} = \int_M \boldsymbol{r}\times\mathrm{d}\boldsymbol{F}_\mathrm{I} = \int_M \boldsymbol{r}\times(-\boldsymbol{a}\,\mathrm{d}m)$$

其中

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \qquad \boldsymbol{a} = \boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) \qquad \boldsymbol{\alpha} = \alpha\boldsymbol{k} \qquad \boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{k}$$

主矩的分量表示

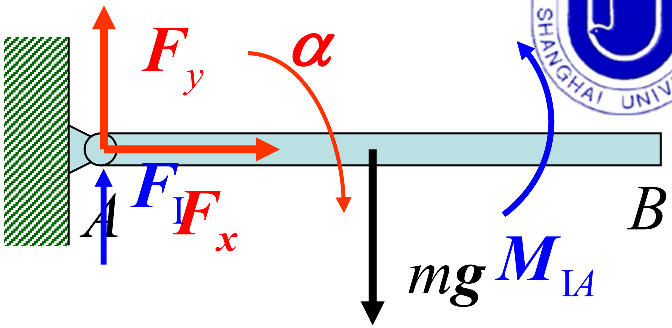
$$J_{xz} = \int_M xz\,\mathrm{d}m \qquad J_{xz} = \int_M yz\,\mathrm{d}m$$

$$M_{\mathrm{I}x} = \alpha J_{xz} - \omega^2 J_{yz}, M_{\mathrm{I}y} = \omega^2 J_{xz} + \alpha J_{yz}, M_{\mathrm{I}z} = -J_z\alpha$$

动力学

例 38

质量为m长为L的均质杆从水平位置释放，计算轴的约束反力和杆的角加速度。



解: 以杆为研究对象　　加入惯性力.

$$F_{\mathrm{I}} = m\alpha\frac{L}{2},\ M_{\mathrm{I}A} = \frac{1}{3}mL^2\alpha$$

运用平衡方程

$$\sum M_A = 0:\quad M_{\mathrm{I}A} - mg\frac{L}{2} = 0.$$

$$\sum F_x = 0:\quad F_x = 0$$

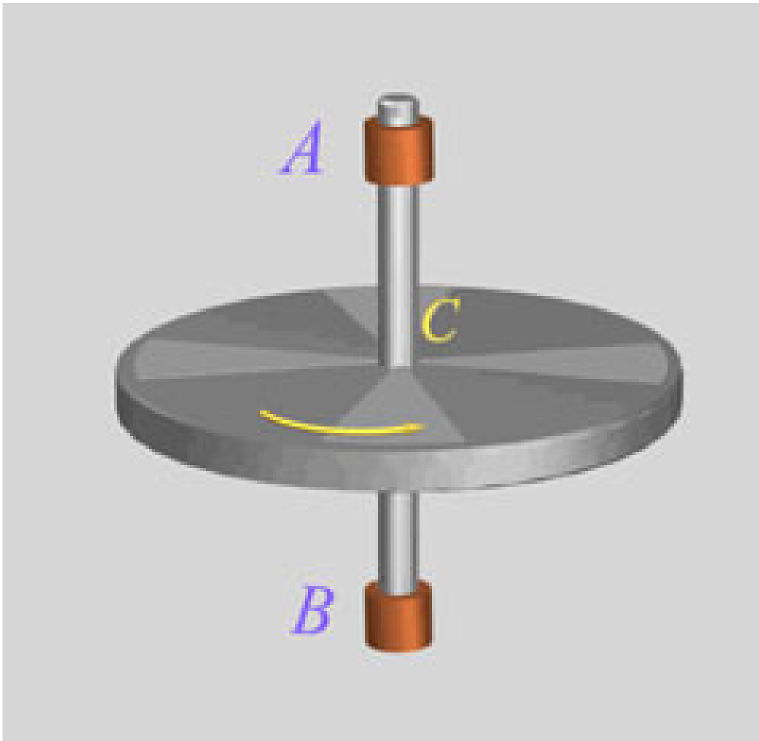
$$\sum F_y = 0:\quad F_y - mg + F_{\mathrm{I}} = 0$$

求解未知量

$$F_x = 0,\ F_y = \frac{1}{4}mg,\ \alpha = \frac{3g}{2L}$$

动力学

轴承上的动力学响应



动力学

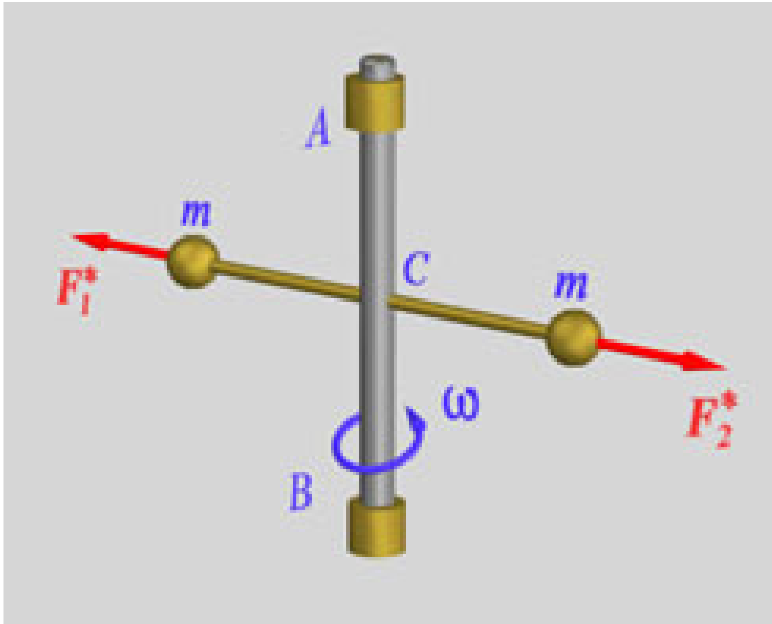
小球1和2的加速度为

法向加速度：$a_{\mathrm{n}} = r\omega^2$

切向加速度：$a_{\mathrm{t}} = r\alpha$

法向惯性力：$F_{\mathrm{n}}^{\mathrm{I}} = ma_{\mathrm{n}}$

切向惯性力：$F_{\mathrm{t}}^{\mathrm{I}} = ma_{\mathrm{t}}$



理想情况

将此惯性力系向C点简化，得到

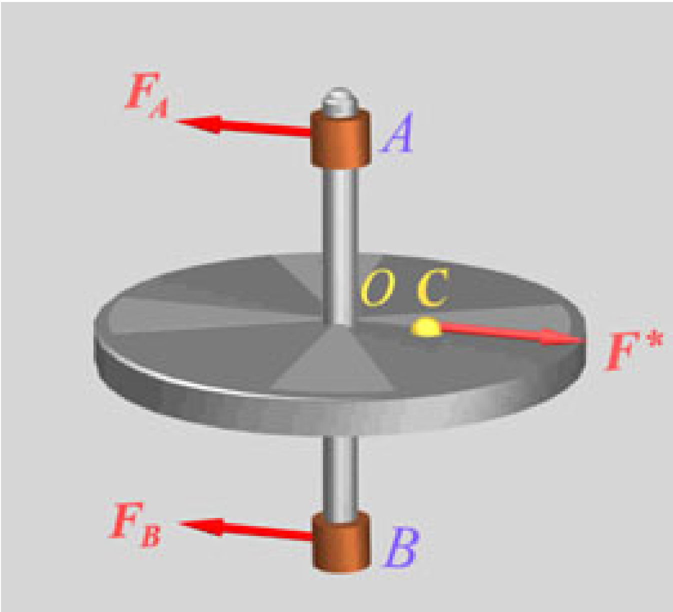
惯性力系的主矢：$F_R^{\mathrm{I}} = 0$

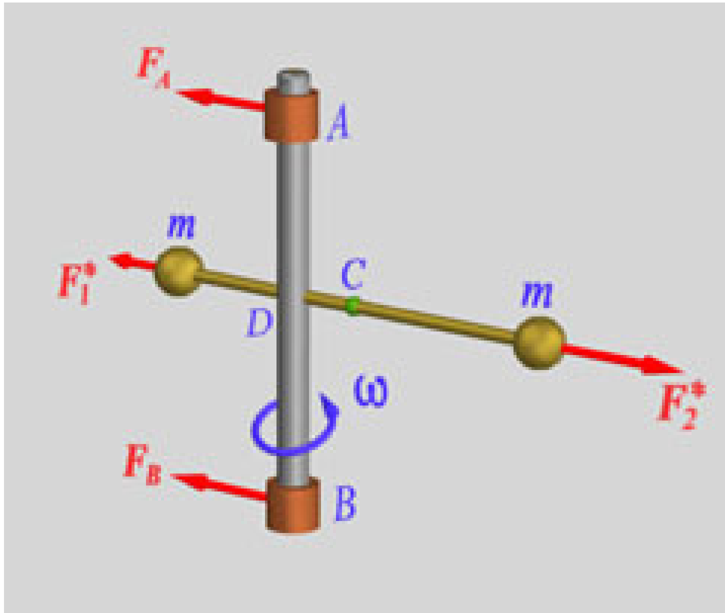
惯性力系的主矩：$M_C^{\mathrm{I}} = 2mra_t = 2mr^2\alpha$

显然，此惯性力系的主矩不会引起轴承的动反力，因此，是动平衡的。

动力学

轴承上的动力学响应





带偏心

动力学

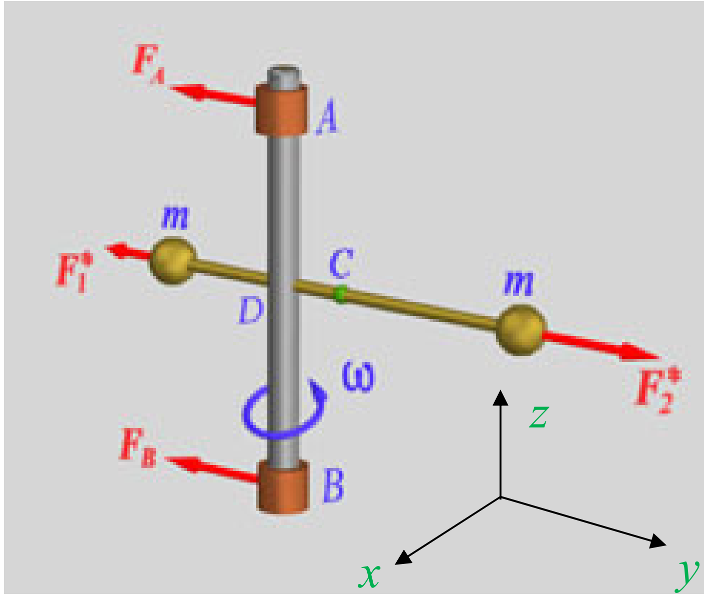
小球1和2的加速度分别为：

法向加速度：$a_{1n}=r\omega^2, a_{2n}=2r\omega^2$

切向加速度：$a_{1t}=r\alpha$，$a_{2t}=2r\alpha$

法向惯性力：$F_{1n}^{I}=ma_{1n}$，$F_{2n}^{I}=ma_{2n}$

切向惯性力：$F_{1t}^{I}=ma_{1t}$，$F_{2t}^{I}=ma_{2t}$



带偏心

将此惯性力系向C点简化，得到

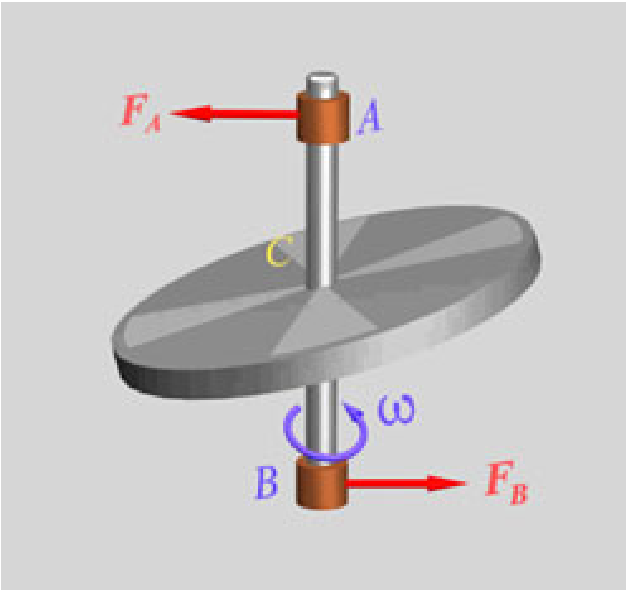
惯性力系的主矢：$F_{Ry}^{I}=mr\omega^2$（与y同向） $F_{Ry}^{I}=mr\alpha$ （与x同向）

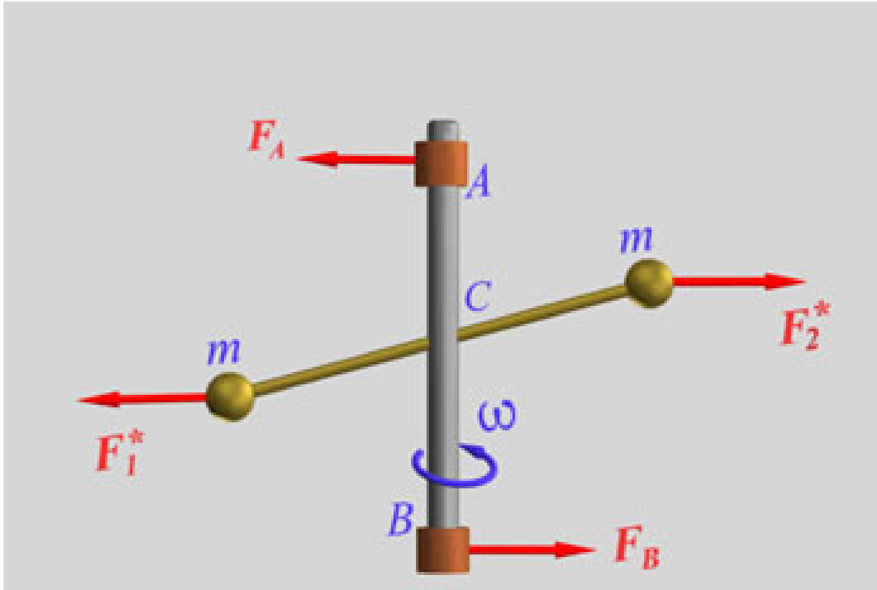
惯性力系的主矩：$M_{Cz}^{I}=5mr^2\alpha$

此惯性力系不是动平衡的，因质心不在转轴上，因此也不是静平衡的。

动力学

轴承上的动力学响应

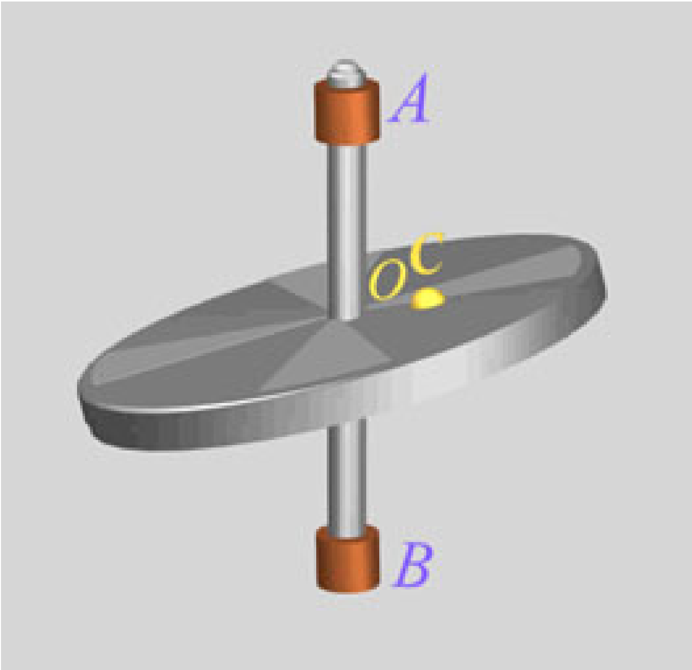


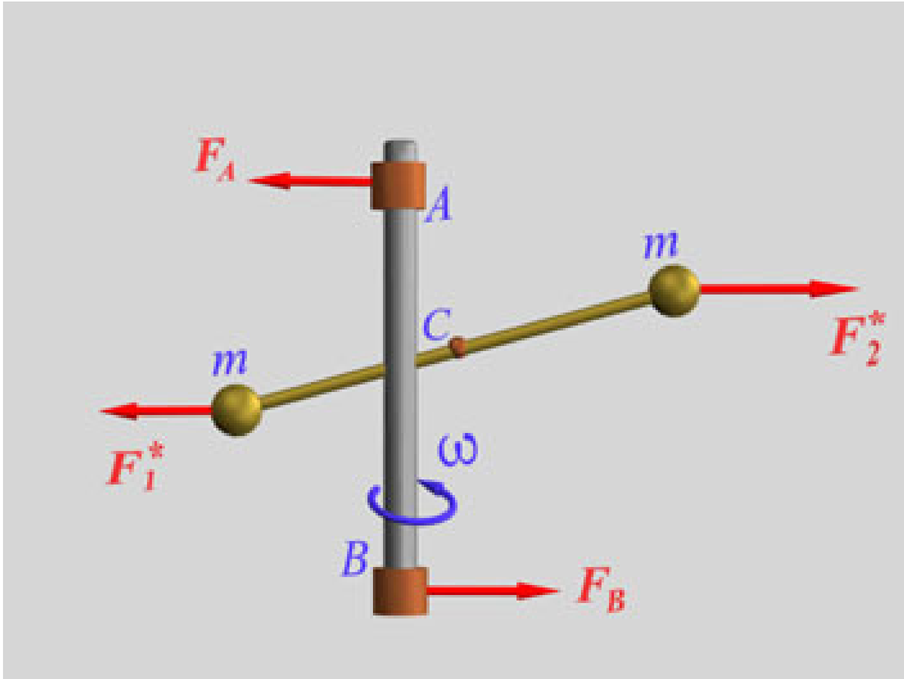


圆盘与柄有夹角

动力学

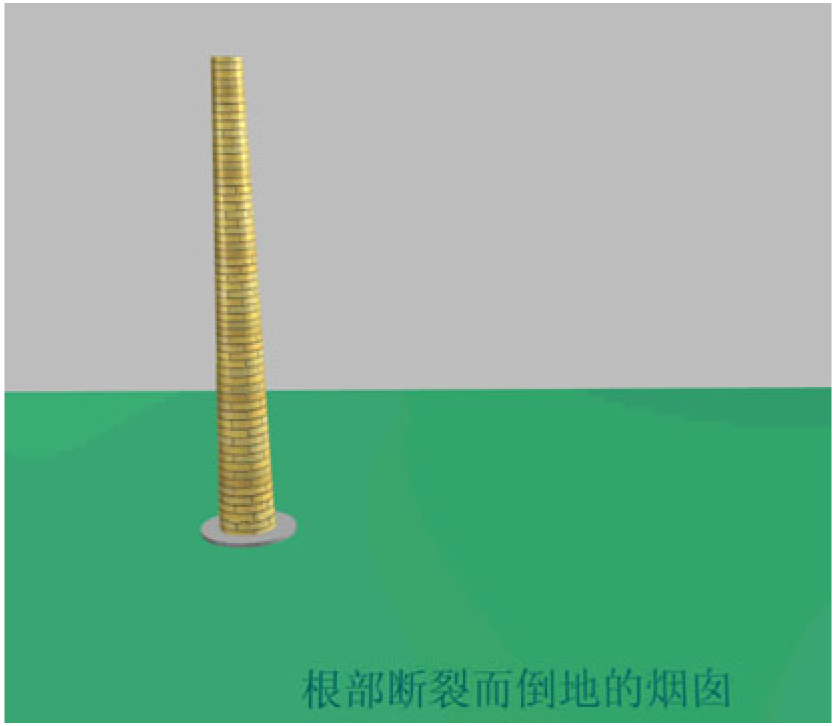
轴承上的动力学响应





一般情况

动力学



8.4.6 定轴转动刚体的轴承动约束力

要点总结

惯性力系向点O简化，其主矢和主矩分别为

$$F_{\mathrm{IR}\,x}=m\left(x_C\omega^2+y_C\alpha\right),\ F_{\mathrm{IR}\,y}=m\left(y_C\omega^2-x_C\alpha\right),\ F_{\mathrm{IR}\,z}=0$$

$$M_{\mathrm{I}\,x}=J_{xz}\alpha-J_{yz}\omega^2,\ M_{\mathrm{I}\,y}=J_{yz}\alpha+J_{xz}\omega^2,\ M_{\mathrm{I}\,z}=-J_z\alpha$$

式中 J_z 为刚体对轴 z 的转动惯量，$J_{xz}=\sum m_i x_i z_i$，$J_{yz}=\sum m_i y_i z_i$ 为刚体对轴 x，z 和轴 y，z 的惯性积。如果 $J_{xz}=J_{yz}=0$，则称 z 为惯性主轴。如惯性主轴通过质心，则称为中心惯性主轴。

（1）如果刚体有质量对称轴，则对称轴是一个惯性主轴，也是中心惯性主轴；

（2） 如果刚体有质量对称面，则垂直于对称面且原点在对称面上的坐标轴是惯性主轴；

（3）刚体绕定轴转动时，轴承动约束力为零的充要条件是，刚体的转轴是中心惯性主轴；

（4）静平衡是指除重力外，不受其它主动力作用，则刚体可以在任意位置静止不动的现象；

（5）动平衡是指转轴是中心惯性主轴时刚体转动时不会引起轴承动约束力的现象。