工 程 控 制 原 理

3. 瞬态响应及误差分析

3.4 瞬态响应的性能指标

主讲：李敏

上海大学
机电工程与自动化学院

3.4 瞬态响应的性能指标

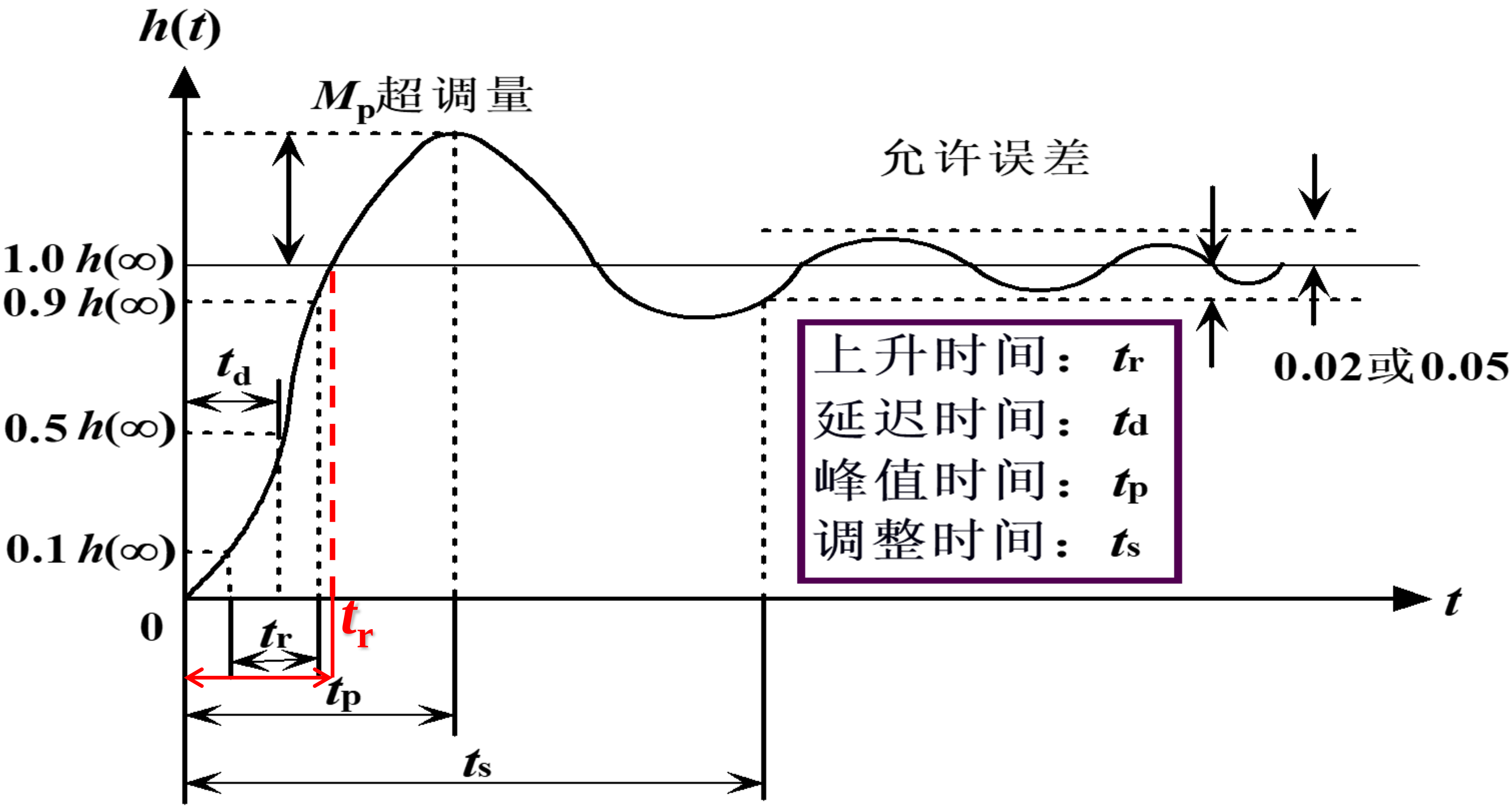
控制系统的性能指标是评价系统动态品质的定量指标，通常用几个特征量来表示。二阶系统是最普遍的控制系统，其瞬态响应过程往往以衰减振荡的形式出现。

本节有关性能指标的定义及计算公式，是在欠阻尼二阶系统单位阶跃响应情况下导出的。

有关性能指标的定义

① 上升时间t_r：响应曲线从零时刻出发首次到达稳态值所需时间。对无超调系统，上升时间一般定义为响应曲线从稳态值的10%上升到90%所需的时间。

3.4 瞬态响应的性能指标



表示性能指标t_d, t_r, t_p, M_p和t_s的单位阶跃响应曲线

3.4 瞬态响应的性能指标

② **延迟时间t_d**：单位阶跃响应 $x_o(t)$ 达到其稳态值的50%所需的时间。

③ **峰值时间t_p**：响应曲线从零上升到第一个峰值所需时间。

④ **最大超调量M_p**：响应曲线的最大峰值与稳态值之差。通常用百分数表示：

$$\sigma\% = \frac{x_o(t_p) - x_o(\infty)}{x_o(\infty)} \times 100\%$$

对于衰减振荡曲线，其最大超调量发生在第一个峰值处。

3.4 瞬态响应的性能指标

⑤ **调整时间t_s**：响应曲线到达并保持在允许误差范围（稳态值的±2%或±5%）内所需的时间。

t_r、t_d、t_p、t_s用来评定系统的快速性（灵敏性）；

M_p用来评定系统的相对平稳性。

(1) 上升时间t_r

欠阻尼二阶系统单位阶跃响应为

$$x_o(t)=1-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_d t+\beta) \qquad (t\geq 0)$$

根据定义，当 $t=t_r$ 时 $x_o(t_r)=1$，得

$$1-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t_r}\sin(\omega_d t_r+\beta)=1$$

因为 $e^{-\zeta\omega_n t_r}\neq 0$

所以 $\sin\left(\omega_d t_r+\arctan\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)=0$

3.4 瞬态响应的性能指标

由于上升时间是输出响应首次达到稳态值的时间，故

$$\omega_{\mathrm{d}} t_{\mathrm{r}} + \arctan\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} = \pi$$

$$t_{\mathrm{r}} = \frac{1}{\omega_{\mathrm{d}}}\left(\pi - \arctan\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right) = \frac{1}{\omega_{\mathrm{n}}\sqrt{1-\zeta^2}}\left(\pi - \arccos\zeta\right)$$

由此可知：当 ζ 一定时，增大 ω_{n}，t_{r} 就减小；当 ω_{n} 一定时，增大 ζ，t_{r} 就增大。

(2) 峰值时间t_p

欠阻尼二阶系统单位阶跃响应为

$$x_o(t)=1-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_d t+\beta)\qquad (t\geq 0)$$

根据 t_p 的定义，将 $x_o(t)$ 对时间求导并令其为零

$$\left.\frac{\mathrm{d}x_o(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_p}=0$$

整理后，得

$$\zeta\sin(\omega_d t_p+\beta)-\sqrt{1-\zeta^2}\cos(\omega_d t_p+\beta)=0$$

3.4 瞬态响应的性能指标

即

$$\tan(\omega_d t_p + \beta) = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} = \tan\beta$$

由于峰值时间对应于振荡第一个周期内的极大值，所以

$$\omega_d t_p = \pi$$

即

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

结论：峰值时间等于阻尼振荡周期 $2\pi/\omega_d$ 的一半。当ζ一定时，增大 ω_n，t_p 就减小；当 ω_n一定时，增大 ζ，t_p 就增大。(与 t_r 有相同的变化规律)

(3) 最大超调量M_p

$$x_o(t)=1-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_d t+\beta) \qquad (t\ge 0)$$

根据 M_p 的定义，将 $t=t_p=\pi/\omega_d$ 代入上式，得

$$M_p=\frac{x_o(t_p)-x_o(\infty)}{x_o(\infty)}=x_o(t_p)-1$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n\pi/\omega_d}\sin(\omega_d\pi/\omega_d+\beta)$$

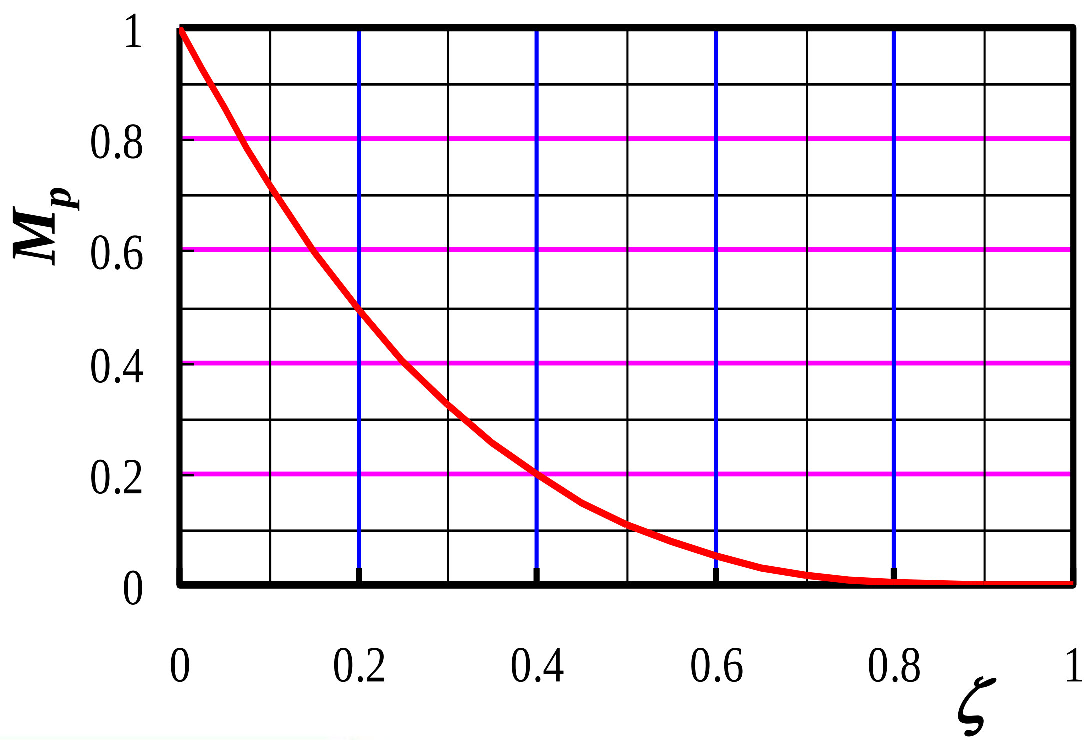
$$=\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\beta$$

3.4 瞬态响应的性能指标

$$M_\mathrm{p} = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} \qquad \left(\sin\beta = \sqrt{1-\zeta^2}\right)$$

最大超调量 M_p 只与阻尼比 ζ 有关，与 ω_n 无关。

当系统阻尼比 ζ 确定后，可求出最大超调量 M_p；如果给出了系统的 M_p 要求值，就可确定响应的阻尼比。

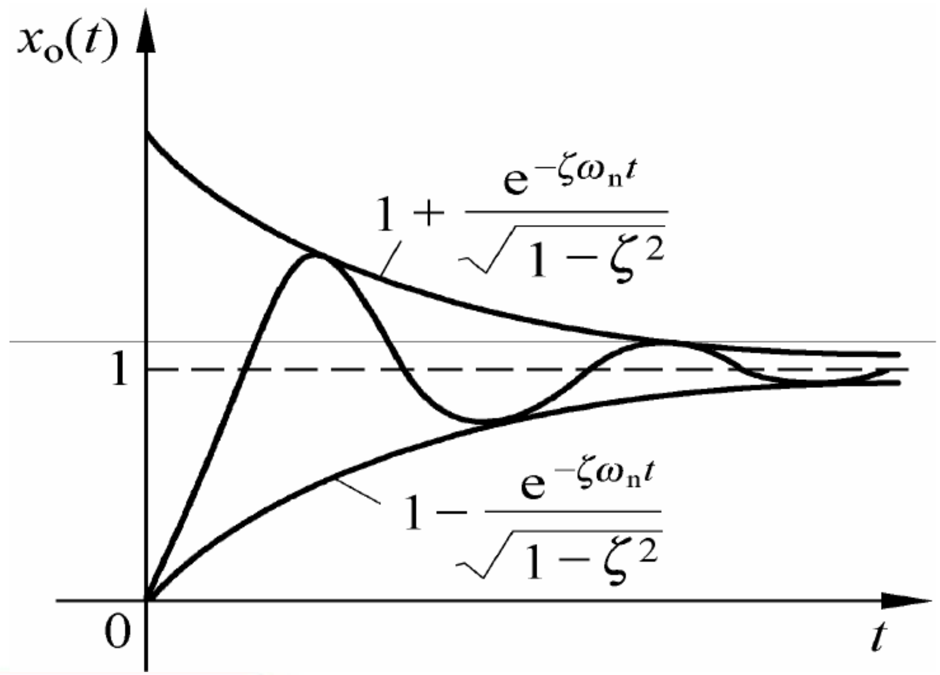


(4) 调整时间t_s

由欠阻尼二阶系统单位阶跃响应

$$x_o(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \beta) \qquad (t \geq 0)$$

可知，响应曲线的幅值总包含在一对包络线之内。包络线的衰减时间常数为 $1/\zeta\omega_n$。



3.4 瞬态响应的性能指标

由调整时间的定义，当$t \geqslant t_s$时

$$\left| x_o(t) - x_o(\infty) \right| \leq \Delta \cdot x_o(\infty)$$

允许误差 $\Delta = 0.02 \sim 0.05$

① 以进入±5%的误差范围考虑

解 $$\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 0.05$$ 得 $$t_s = \frac{-\ln 0.05 - \ln\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta\omega_n}$$

当阻尼比 ζ 较小时，有

$$t_s \approx \frac{-\ln 0.05}{\zeta\omega_n} \approx \frac{3}{\zeta\omega_n}$$

3.4 瞬态响应的性能指标

② 以进入±2%的误差范围考虑

解 $$\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}=0.02$$ 得 $$t_s=\frac{-\ln 0.02-\ln\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta\omega_n}$$

当阻尼比 ζ 较小时，有

$$t_s\approx\frac{-\ln 0.02}{\zeta\omega_n}\approx\frac{4}{\zeta\omega_n}$$

由当阻尼比 ζ 一定时，无阻尼自振角频率 ω_n 越大，控制系统调整时间 t_s 越短，系统响应越快。

注意： 当阻尼比 ζ 较大时，前述系统调整时间的两个关系式近似度降低。

3.4 瞬态响应的性能指标

当 ω_n 一定时，变化阻尼比 ζ，求 t_s 的极小值，可得：

a) 当阻尼比 $\zeta = 0.707$ 左右时，系统单位阶跃响应的调整时间 t_s 最短，即响应最快；

b) 当阻尼比 $\zeta < 0.707$ 时， ζ 愈小，调整时间 t_s 愈长；

c) 当阻尼比 $\zeta > 0.707$ 时， ζ 愈大，调整时间 t_s 愈长。

结论

二阶系统的动态性能由 ω_n 和 ζ 决定。

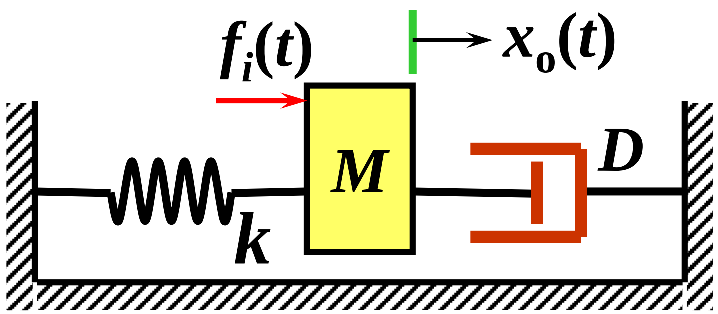
通常根据允许最大超调量确定ζ。一般选择在0.4~0.8之间，然后再调整ω_n以获得合适的瞬态响应时间。

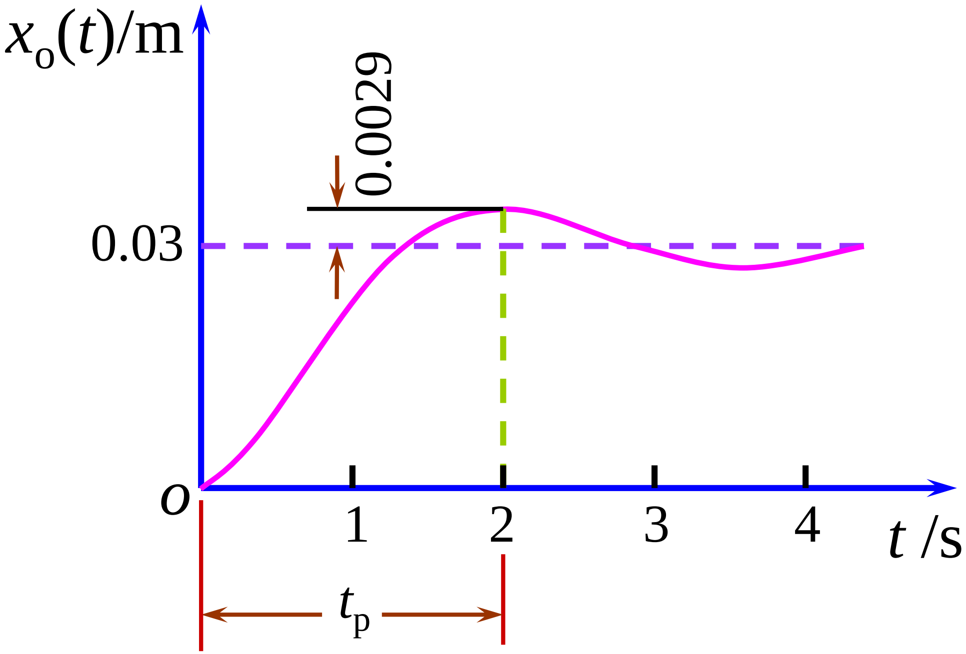
ζ一定，ω_n越大，系统响应快速性越好，t_r, t_p, t_s越小。

增加 ζ可以降低振荡，减小超调量M_p，但系统快速性降低，t_r、t_p增加。

当ζ=0.707时，系统的M_p、t_s均小，故称其为最佳阻尼比。

例题： 左图所示系统，施加 **8.9 N** 阶跃力后，记录其时间响应如右图所示。试求该系统的质量 ***M***、弹性刚度 ***k*** 和粘性阻尼系数 ***D*** 的数值。





3.4 瞬态响应的性能指标

解： 根据 Newton 第二定律

$$f_i(t) - kx_o(t) - D\dot{x}_o(t) = M\ddot{x}_o(t)$$

进行拉氏变换，并整理得

$$(Ms^2 + Ds + k)X_o(s) = F_i(s)$$

$$\frac{X_o(s)}{F_i(s)} = \frac{1}{Ms^2 + Ds + k} = \frac{(1/k)\cdot(k/M)}{s^2 + (D/M)s + (k/M)} = \frac{(1/k)\cdot\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

由 $M_p = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} = 0.0029/0.03$ 得 $\zeta = 0.6$

由 $t_p = \dfrac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = \dfrac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-0.6^2}} = 2$ 得 $\omega_n = 1.96$ (rad/s)

3.4 瞬态响应的性能指标

$$x_o(\infty)=\lim_{s\to 0} sX_o(s)=\lim_{s\to 0} s\frac{1}{Ms^2+Ds+k}F_i(s)$$

$$=\lim_{s\to 0} s\frac{1}{Ms^2+Ds+k}\cdot\frac{8.9}{s}=\frac{8.9}{k}=0.03\ \ (\mathrm{m})$$

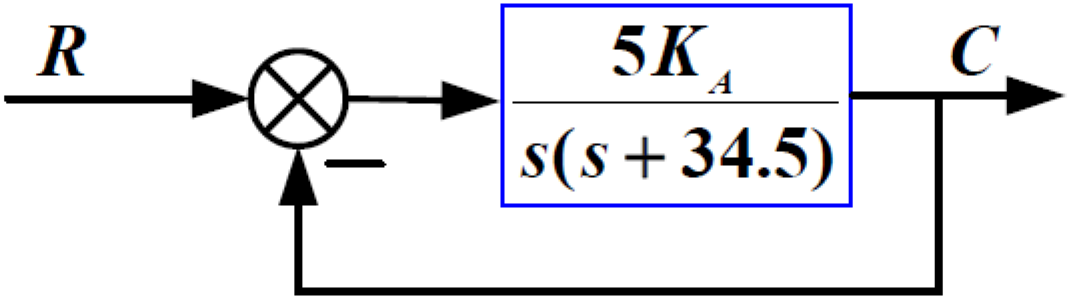
$$k=\frac{8.9}{0.03}=297\ \ (\mathrm{N/m})$$

$$M=\frac{k}{\omega_n^2}=\frac{297}{1.96^2}=77.3\ \ (\mathrm{kg})$$

$$D=2\zeta\omega_n M=2\times 0.6\times 1.96\times 77.3=181.8\ \ [\mathrm{N/(rad/s)}]$$

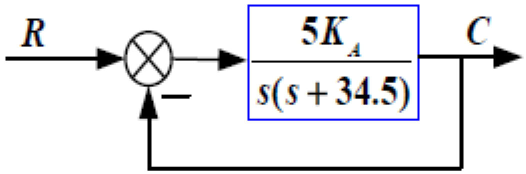
3.4 瞬态响应的性能指标

位置随动系统如图所示，当给定输入为单位阶跃时，试计算放大器增益K_A = 1500，200，13.5时，输出响应特性的性能指标：峰值时间t_p，调整时间t_s和超调量Mp。



3.4 瞬态响应的性能指标

解：单位负反馈系统



开环传递函数 $G_k(s)=\dfrac{5K_A}{s^2+34.5s}$

闭环传递函数 $\Phi(s)=\dfrac{5K_A}{s^2+34.5s+5K_A}$

输入单位阶跃 $r(t)=1(t)$ $R(s)=\dfrac{1}{s}$

3.4 瞬态响应的性能指标

1、$K_A = 1500$　　闭环传函 $\Phi(s) = \dfrac{5\times 1500}{s^2 + 34.5s + 7500}$

与标准的二阶系统传递函数对照得：

$$\omega_n = \sqrt{7500} = 86.6\ \text{rad/s} \qquad \xi = \frac{34.5}{2\omega_n} = 0.2$$

峰值时间：$t_p = \dfrac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} = 0.037\ \text{s}$

超调量：$M_p = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = 0.527$

调整时间：$t_s = \dfrac{4}{\xi\omega_n} = 0.23\ s$

3.4 瞬态响应的性能指标

2、$K_A = 200$　　闭环传函 $\Phi(s) = \dfrac{5 \times 200}{s^2 + 34.5s + 1000}$

与标准的二阶系统传递函数对照得：

$$\omega_n = \sqrt{1000} = 31.6 \text{ rad/s} \qquad \xi = \frac{34.5}{2\omega_n} = 0.546$$

峰值时间：$t_p = \dfrac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} = 0.12\ s$

超调量：$M_p = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = 0.129$

调整时间：$t_s = \dfrac{4}{\xi\omega_n} = 0.23\ s$

3.4 瞬态响应的性能指标

3、$K_A = 13.5$　　闭环传函 $\Phi(s) = \dfrac{5\times 13.5}{s^2+34.5s+67.5}$

与标准的二阶系统传递函数对照得:

$$\omega_n = \sqrt{67.5} = 8.2 \text{ rad/s} \qquad \xi = \frac{34.5}{2\omega_n} = 2.1$$

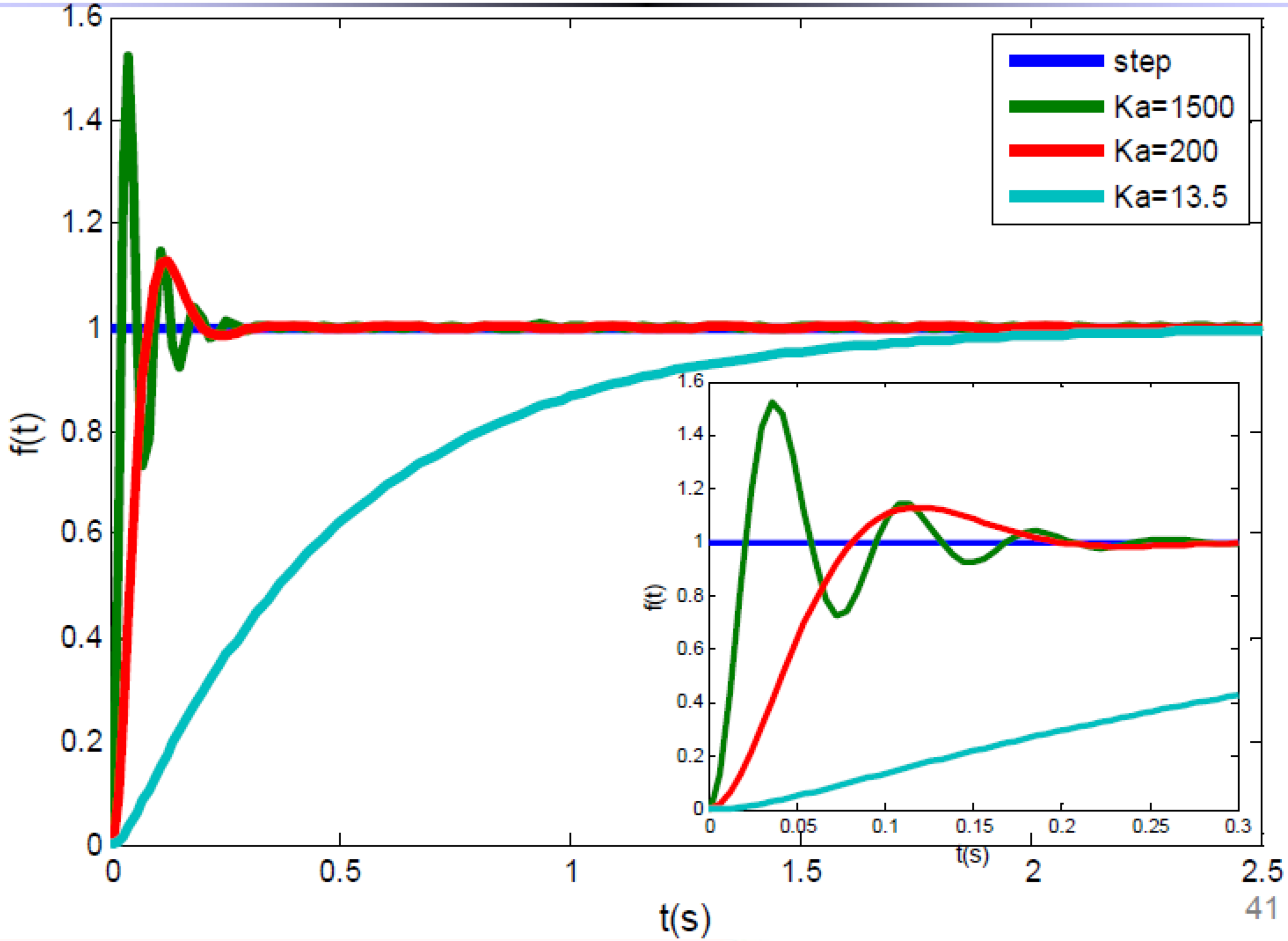
峰值时间：$t_p = ?$

$$s_1 = -2.1$$
$$s_2 = -32.4$$

超调量：$M_p = 0$

调整时间：$t_s = 4T_1 = 1.9\ s$

3.4 瞬态响应的性能指标



作业：p.75-76

3-3、 3- 4 、 3-5、 3-6、 3-7、 3-8、 3-9、 3-10