第七章 质点动力学

目 录

动力学

7.0 动力学概述

动力学研究位置变化与力的作用关系。

模型： 质点系
- 离散型——散体
- 连续型——刚体、固体、流体

应用的广泛性：适用于一切系统的动力学问题

(包括刚体、机构、流体等)

内容：
- 矢量方法——牛顿定律、动量(矩)定理等
- 能量方法——动能定理、拉格朗日方程

意 义：
1. 力学学科的动力学基础
2. 机械、航天、航空工程的动力学基础

动力学

7.1 质点运动的动力学建模

1 牛顿运动定律: 表述

第一定律: “每个物体都保持其静止、或匀速直线运动的状态，除非有外力作用于它迫使它改变那个状态。”

第二定律: “运动的变化正比于外力，变化的方向沿外力作用的直线方向。”

第三定律: “每一种作用都有一个相等的反作用；或者，两个物体之间的相互作用总是相等的，而且指向相反。”

动力学

2 牛顿运动定律: 解释

第一定律也被称为惯性定律或惯性原理。 它由伽利略发现，并由惠更斯进行了进一步阐述。 该定律实际上定义了一个特殊参考系, 惯性参考系，在这个参考系内牛顿第一定律成立。

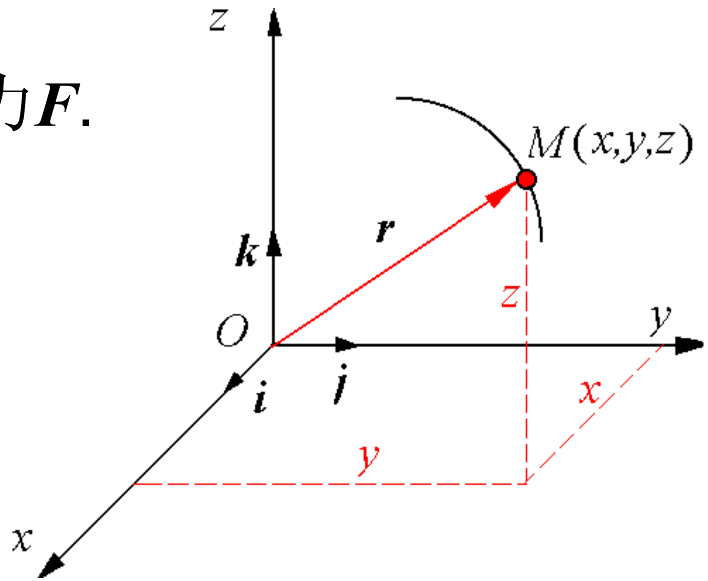
牛顿第二定律把质量的概念引入到力学中“物质的量是物质的度量, 可由密度和体积共同求出。” 质量是惯性或者抵抗物体运动改变的定量度量。 “运动的量是运动的度量，可由速度和物质的量共同求出。”

牛顿第三定律表明力总是成对存在，而且大小相等方向相反。该定律揭示了进一步研究质点系动力学的可能性。

动力学

3 质点运动微分方程

运动的质点, 其质量为m, 受到合外力$\boldsymbol{F}$.



矢量形式

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F} \qquad m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{F}$$

直角坐标系下

$$m\ddot{x} = F_x, m\ddot{y} = F_y, m\ddot{z} = F_z$$

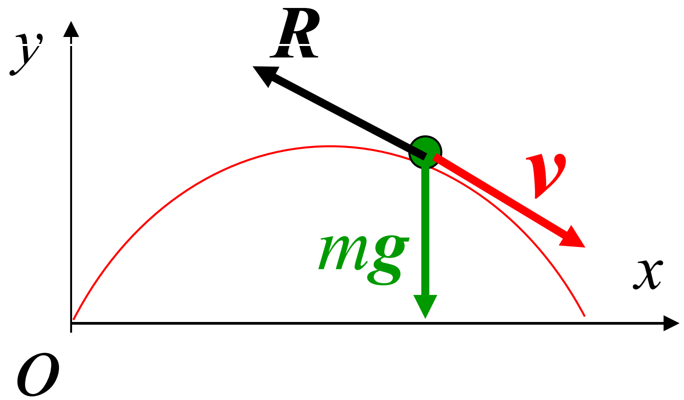
自然坐标系下

$$m\frac{\dot{s}^2}{\rho} = F_\mathrm{n}, m\ddot{s} = F_\tau, 0 = F_\mathrm{b}$$

$s=s(t)$ 用弧长坐标描述质点运动, F_n, F_t 和F_b为合外力$\boldsymbol{F}$ 在法向、切向和副法线方向的投影。

动力学

例1　建立抛体的运动微分方程。(设空气阻力的大小与速度的平方成正比。)



解：取炮弹为研究对象。

应用质点运动微分方程矢量形式

$$m\boldsymbol{a} = m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{R}$$

$$m\boldsymbol{a} = m\boldsymbol{g} + (-cv\boldsymbol{v})$$

可以写作直角坐标形式

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

运动微分方程

$$m\ddot{x} = -c\dot{x}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

$$m\ddot{y} = -mg - c\dot{y}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

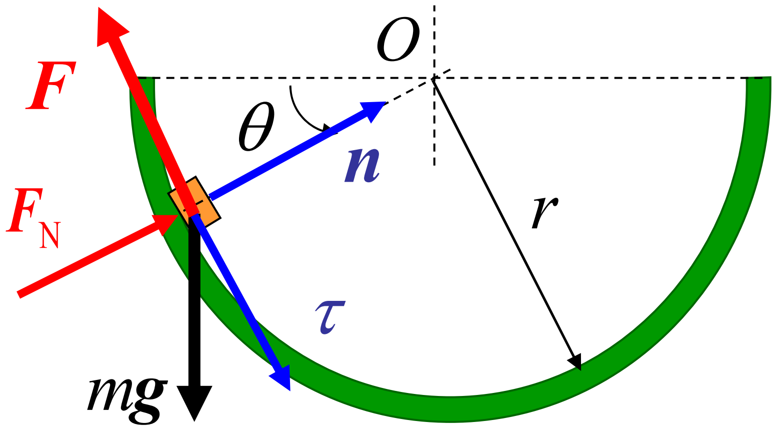
应用实例：1、炮弹的运动；2、空降物体的运动。

动力学

例2: 质点与圆柱面间的动滑动摩擦因数为 f，圆柱半径为 r。建立质点的运动微分方程。

解：取质点为研究对象。

当 $\dot{\theta} > 0$ 受力图如图示。



应用质点运动微分方程

$$m\boldsymbol{a} = m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{N}}$$

分别向切向和法向投影

$$mr\ddot{\theta} = mg\cos\theta - F \qquad (1)$$

$$mr\dot{\theta}^2 = -mg\sin\theta + F_{\mathrm{N}} \qquad (2)$$

由式(2)解得 $F_{\mathrm{N}} = mr\dot{\theta}^2 + mg\sin\theta \qquad (F = f\,F_{\mathrm{N}})$

代入式(1) $mr\ddot{\theta} = mg\cos\theta - f(mr\dot{\theta}^2 + mg\sin\theta)$

同理，当 $\dot{\theta} < 0$ 时 $mr\ddot{\theta} = mg\cos\theta + f(mr\dot{\theta}^2 + mg\sin\theta)$

7.2 质点运动的动力学分析

1 质点动力学第一类基本问题

第一类问题: 质点的运动是给定的或者可以由已知运动条件确定的, 来求作用于质点的力。

经典例子：万有引力定律的发现

哥白尼（1473－1543）的日心学说

开普勒（1571－1630）的三大定律

牛　顿（1642－1727）的牛顿运动定律和万有引力定律

“我之所以看得远，是因为我站在巨人的肩膀之上。”

工程中的第一类基本问题，已知运动规律，设计作用力。

动力学

2 质点动力学第二类基本问题

第二类问题: 已知作用于质点的力，求质点的运动。

数学上, 第二类问题可能相对复杂,因为积分可能难以计算，特别是当力是两个或两个以上运动变量的函数时。

工程中的第二类基本问题有运动预测，例如预测小行星撞击地球的时间和地点，飞行器着陆的时间和地点等。

第一类问题被称为动力学中逆问题, 第二类问题被称为 动力学正问题。

动力学

3 两类问题综合

综合问题: 已知质点部分运动和部分力, 确定未知的运动和力。

已知：发动机输出扭矩、车的重力、车沿直线行驶。

待求：地面约束力，车身的运动(前行速度，上下振动)。

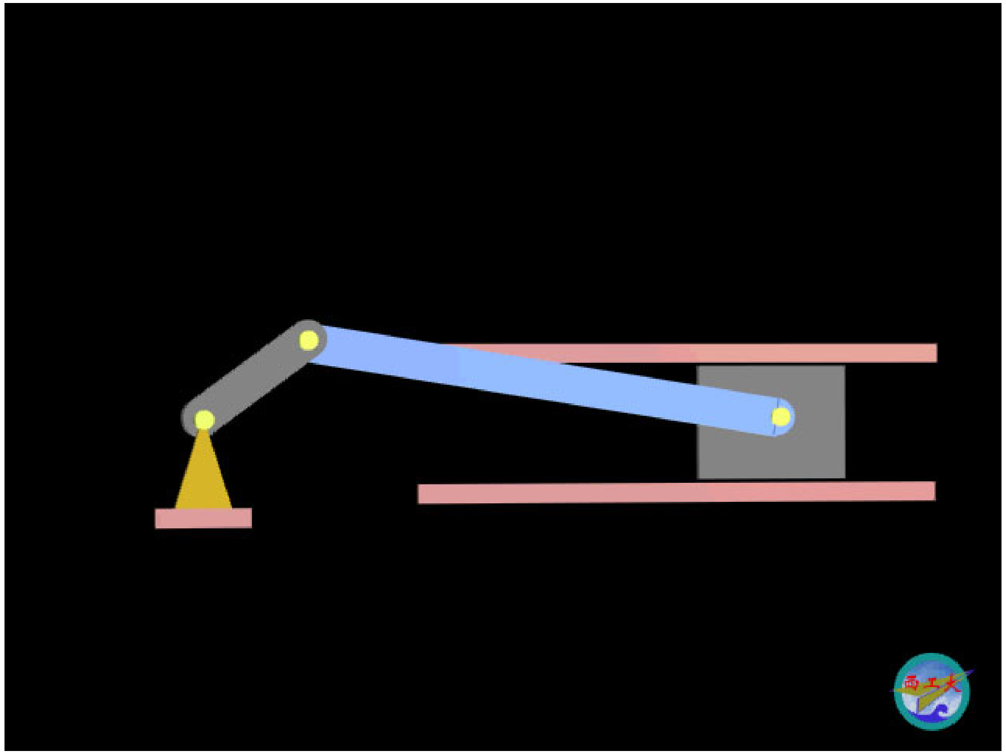
解题步骤

1. 画出分离体受力图。如果几个机构连接到一起,则分别绘制每个机构的受力图, 各分离体间作用力与反作用力满足牛顿第三定律。每个机构只能通过力来约束。
2. 在分离体受力图上标记处所有已知力和运动量的信息。
3. 选择一个坐标系来表述矢量分量, 在分离体受力图中标记出相关的单位矢量。 坐标系的选择基于系统相关的运动学量和系统所受的力。
4. 基于运动学关系,在前面选择的坐标系中表示各机构的加速度。
5. 对各单位矢量方向上求和分力使其与相应的ma分量相等。检查方程数目与未知量数目是否相等。不等的常见原因：有力没有考虑, 有已知量没有用到, 或者有运动约束没有考虑。
6. 求解方程。

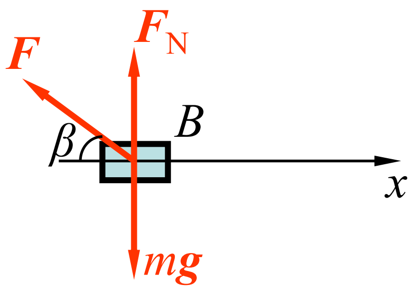
动力学

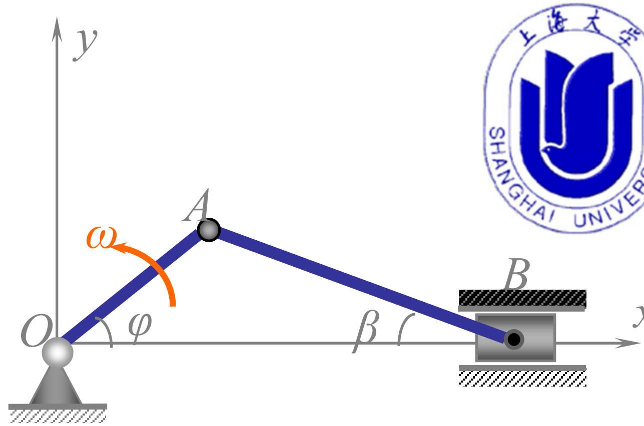
例 3 (第一类动力学问题)

连杆AB在曲柄OA驱动下运动。$OA=r$, $AB=l$, 且$\phi=\omega t$, 其中ω是常数， 求连杆AB受力。



动力学





解:

以活塞B为研究对象，其分离体受力图如示。

运动微分方程在x方向的投影。

$$m\ddot{x} = -F\cos\beta.$$

由第4章例1知

$$\ddot{x} = -\omega^2 r\cos\omega t - \frac{4\omega^2 r^2\cos 2\omega t\left(l^2 - r^2\sin^2\omega t\right) - \omega^2 r^4\sin^2 2\omega t.}{4\left(l^2 - r^2\sin^2\omega t\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

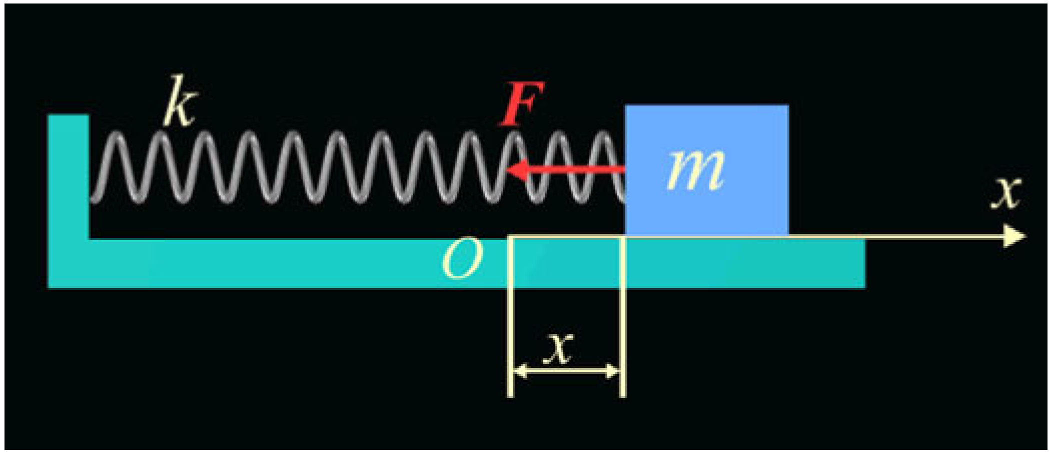
$$\cos\beta = \frac{1}{l}\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\omega\, t}.$$

$$F = \frac{m\omega^2 lr\cos\omega t}{\left(l^2 - r^2\sin^2\omega t\right)^{1/2}} + \frac{4m\omega^2 lr^2\cos 2\omega t\left(l^2 - r^2\sin^2\omega t\right) - m\omega^2 lr^4\sin^2 2\omega t}{4\left(l^2 - r^2\sin^2\omega t\right)^2}.$$

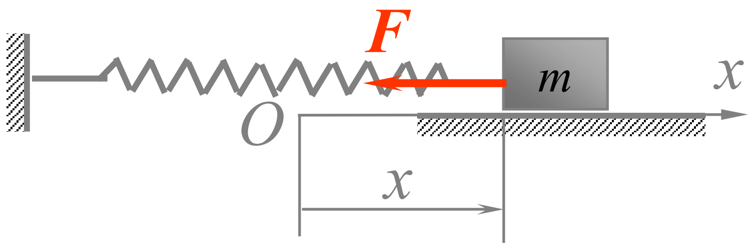
动力学

例 4 (第二类动力学问题，线性振动)

光滑水平面上一物块与弹簧相连。 物块质量为m, 弹簧刚度系数为k。其偏离平衡位置为a处释放物块。试确定物块的运动。



动力学



解:

以物块为研究对象， 弹簧对其施加一个恢复力$F=-kx$。

运动微分方程在 x 方向的投影

$$m\ddot{x} = -kx.$$

或者

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}.$$

其通解为

$$x(t) = C_1 \sin \omega_0 t + C_2 \cos \omega_0 t.$$

可由已知的初始位移和初始速度确定上式中常数

$$x(0) = a, \qquad \dot{x}(0) = 0.$$

$$C_2 \cdot 1 = a, \qquad \omega_0 C_1 \cdot 1 = 0.$$

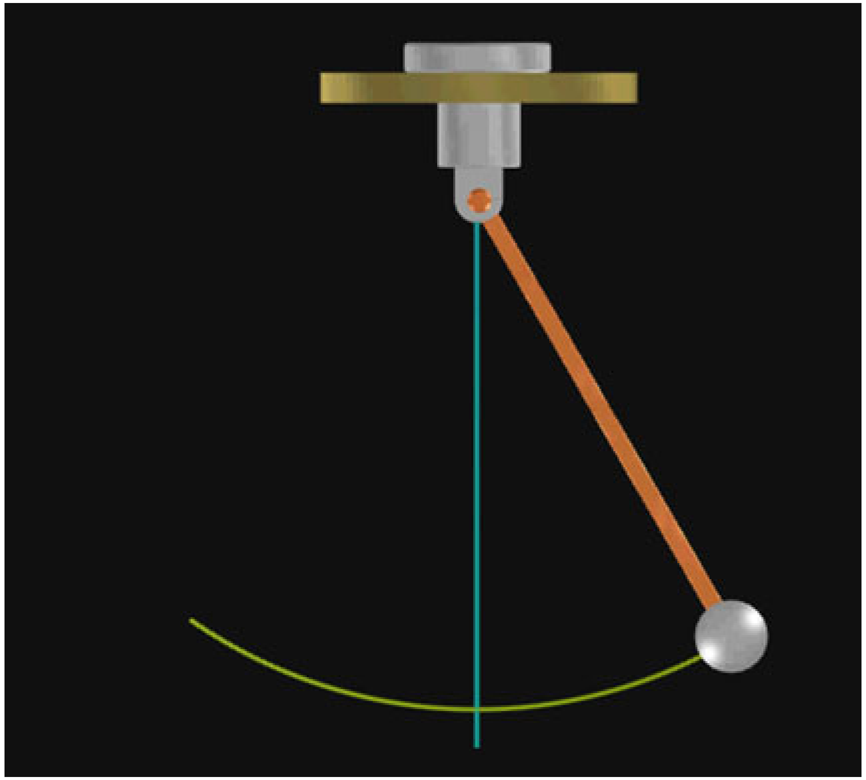
释放后物块的运动

$$x(t) = a \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t.$$

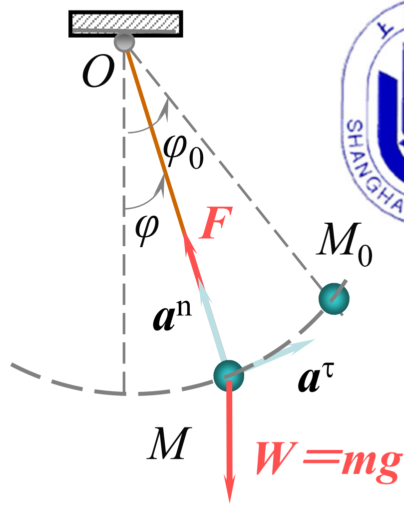
动力学

例5 (两类问题综合，非线性振动)

单摆由一重W的钟摆通过质量不计、长为l的杆固定于定点O。杆从平衡位置角位移为$\varphi_0 \leq \pi/2$时释放钟摆，试确定杆的最大张力。



动力学



解: 以钟摆为研究对象， 由运动分析知：

$$a^{n}=l\dot{\varphi}^{2},\qquad a^{\tau}=l\ddot{\varphi}.$$

运动微分方程在法向与切向投影：

$$\frac{W}{g}l\dot{\varphi}^{2}=F-W\cos\varphi,\qquad \frac{W}{g}l\ddot{\varphi}=-W\sin\varphi.\Rightarrow \ddot{\varphi}=-\frac{g}{l}\sin\varphi$$

注意到 $\ddot{\varphi}=\frac{\mathrm{d}\dot{\varphi}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\dot{\varphi}}{\mathrm{d}\varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\dot{\varphi}}{\mathrm{d}\varphi}\dot{\varphi}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\dot{\varphi}^{2}}{\mathrm{d}\varphi}.$ 则 $\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\dot{\varphi}^{2}}{\mathrm{d}\varphi}=-\frac{g}{l}\sin\varphi.$

积分 $\int_{0}^{\dot{\varphi}}\mathrm{d}(\dot{\varphi}^{2})=\int_{\varphi_0}^{\varphi}(-\frac{2g}{l}\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi.$ $\dot{\varphi}^{2}=\frac{2g}{l}(\cos\varphi-\cos\varphi_0).$

因此

$$F=W\left(3\cos\varphi-2\cos\varphi_0\right).$$

张力在最低处即φ=0时取最大值。

$$F_{\max}=W\left(3-2\cos\varphi_0\right).$$

本章要点

- 质点运动的动力学建模
  - 动力学基本定律：牛顿三定律.
  - 质点运动微分方程：矢量形式、直角坐标形式、自然坐标形式

$$m\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{F}_i \qquad m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=\sum_{i=1}^{n}F_{xi},\quad m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=\sum_{i=1}^{n}F_{yi},\quad m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}=\sum_{i=1}^{n}F_{zi}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=\sum_{i=1}^{n}F_{ti},\quad m\frac{v^2}{\rho}=\sum_{i=1}^{n}F_{\mathrm{n}i},\quad 0=\sum_{i=1}^{n}F_{\mathrm{b}i}$$

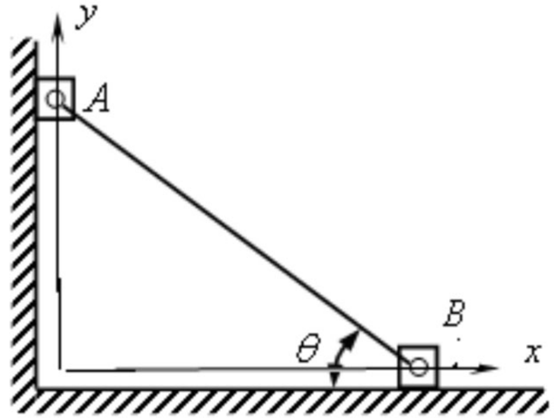
- 质点运动的动力学分析，质点动力学两类问题
  - ✓ 质点动力学基本问题可分为两类：一类是已知质点的运动，求作用于质点的力；另一类是已知作用于质点的力，求质点的运动。
  - ✓ 求解质点动力学第一类基本问题只需求两次导数得到质点的加速度，代入到质点运动方程中，得到一代数方程组，即可求解；求解质点动力学第二类基本问题在数学上归结为求解微分方程的定解问题。还要根据已知的初始条件确定积分常数。此外，有些质点动力学问题是第一类和第二类问题的综合。

解题指导

- ✓ 步骤：①根据题意选取某质点为研究对象；②分析作用在质点上的主动力和约束反力；③根据质点的运动特征，建立适当的坐标系；④选择适当的形式建立微分方程，第二类问题还需确定初始条件；⑤求解运动微分方程。
- ✓ 注意点：在建立运动微分方程时，最好将速度投影的正向取为坐标轴方向，特别注意当阻力与速度的奇次方成正比时在轴上的投影，注意各力在坐标轴上投影的正负号。
- ✓ 在3D空间，质点运动微分方程有3个投影式，只能够解3个未知量。

例题 质量皆为m的两物块A，B以无重杆光滑铰接，置于光滑的水平及铅垂面上，如图所示。当$\theta=60^\circ$时自由释放，求此瞬时杆AB所受的力。

解



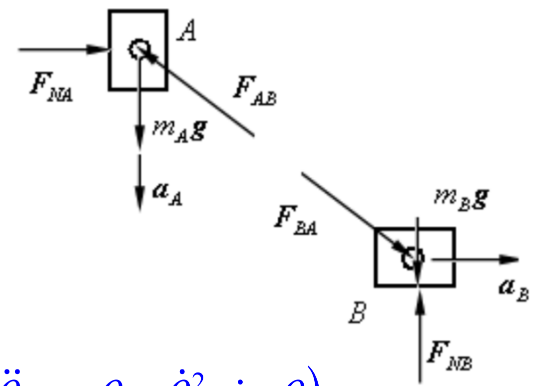
1）取物块A为研究对象，AB杆为二力杆 $F_{AB}=-F_{BA}$

受力图如图示，列出动力学方程

$$m_A g-F_{AB}\sin\theta=m_A a_A \qquad \text{（a）}$$

2）取物块B为研究对象，

$$F_{BA}\cos\theta=m_B a_B \qquad \text{（b）}$$



3）运动学分析

$$x_B=l\cos\theta,\quad y_A=l\sin\theta$$

对时间求二次导数，得

$$\dot{x}_B=-l\dot{\theta}\sin\theta,\quad \dot{y}_A=l\dot{\theta}\cos\theta \quad \ddot{x}_B=-l\left(\ddot{\theta}\sin\theta+\dot{\theta}^2\cos\theta\right),\ \ddot{y}_A=l\left(\ddot{\theta}\cos\theta-\dot{\theta}^2\sin\theta\right)$$

在初瞬时，$\dot{\theta}=0$，初加速度为 $a_A=l\ddot{\theta}\cos\theta \qquad a_B=-l\ddot{\theta}\sin\theta \qquad$（c）

由（a）、(b)、(c)三式解得 $F_{AB}=\dfrac{m_A m_B\sin\theta}{2\left(m_A\cos^2\theta+m_B\sin^2\theta\right)}g \qquad \begin{matrix} m_A=m_B \\ \theta=60^\circ \end{matrix} \qquad F_{AB}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}mg$