

# 工程控制原理

## 2. 数学模型与传递函数

### 2.5 系统的方框图及其连接

主讲：李敏



## 2. 数学模型与传递函数

### 2.5 系统的方框图及其连接

系统方框图是系统数学模型的图解形式。可以形象直观地描述系统中各元件间的相互关系及其功能以及信号在系统中的传递、变换过程。



## 2.5 系统的方框图及其联接

### 2.5.1 方框图的结构要素

(1) **信号线**：带有箭头的直线，箭头表示信号的传递方向，直线旁标记信号的时间函数或象函数。

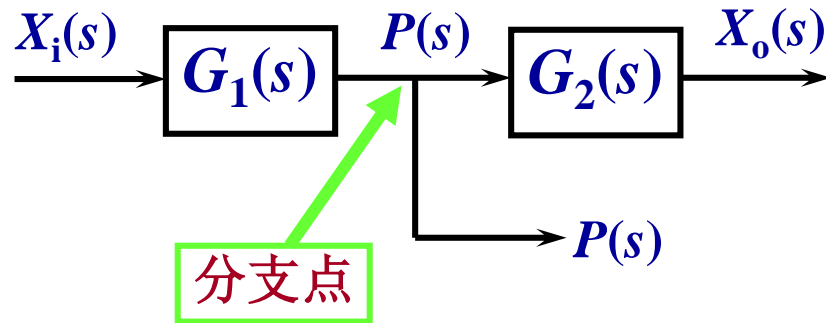
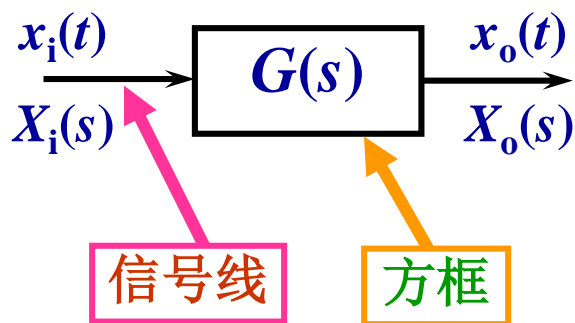
(2) **信号引出点(线)**：表示信号引出或测量的位置和传递方向。同一信号线上引出的信号，其性质、大小完全一样。

(3) **函数方框(环节)**：方框代表一个环节，箭头代表输入输出。表示输入到输出单向传输间的函数关系。

(4) **求和点(比较点、综合点)**：两个或两个以上的输入信号进行加减比较的元件。



## 2.5.1 方框图的结构要素



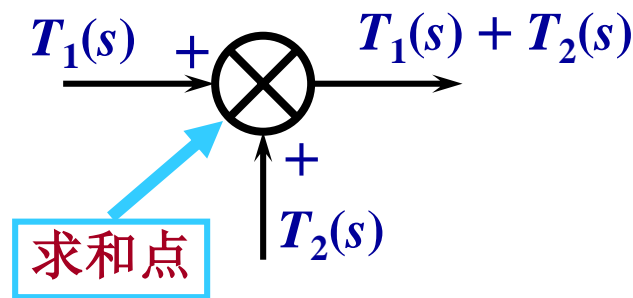
**注意:**

① 进行相加减的量，必须具有相同的量纲（量纲和谐）；

② 相邻分支点可以互换；

③ 相邻求和点可以互换、合并、分解；

④ 求和点可以有多个输入，但输出是唯一的。



## 2.5.1 方框图的结构要素

### 用方框图表示系统的优点

- ① 只要依据信号的流向，将各环节的方框连接起来，便可组成整个系统，简便，直观。
- ② 通过方框图，可揭示和评价每一个环节对系统的影响。
- ③ 由各环节的方框组成的系统框图，可以进一步将系统框图简化，便于写出整个系统的传递函数。

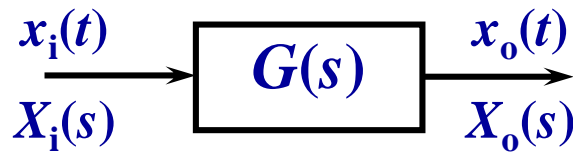


## 2.5.1 方框图的结构要素

### 绘制系统框图的一般步骤

① 写出系统中每一部件的运动方程。——要考虑相互连接部件之间的负载效应。

② 根据部件的运动方程，进行拉氏变换，写出相应的传递函数。一个部件用一个方框表示，框内填写相应的传递函数。



③ 根据信号的流向，将各方框单元依次连接起来，并把系统的输入量置于整个系统框图的最左端，输出量置于整个系统框图的最右端。



# 绘制系统框图

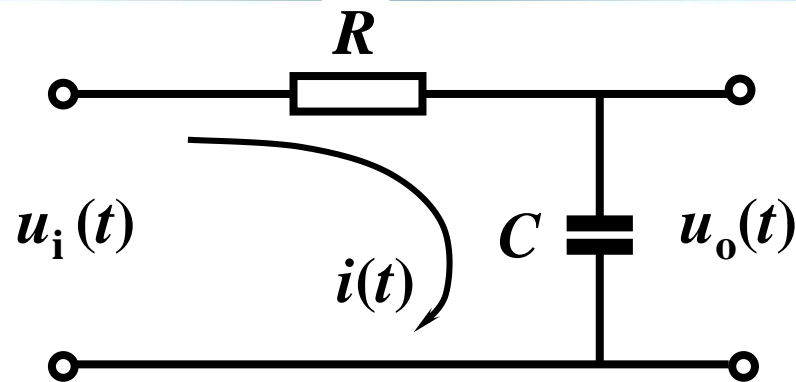
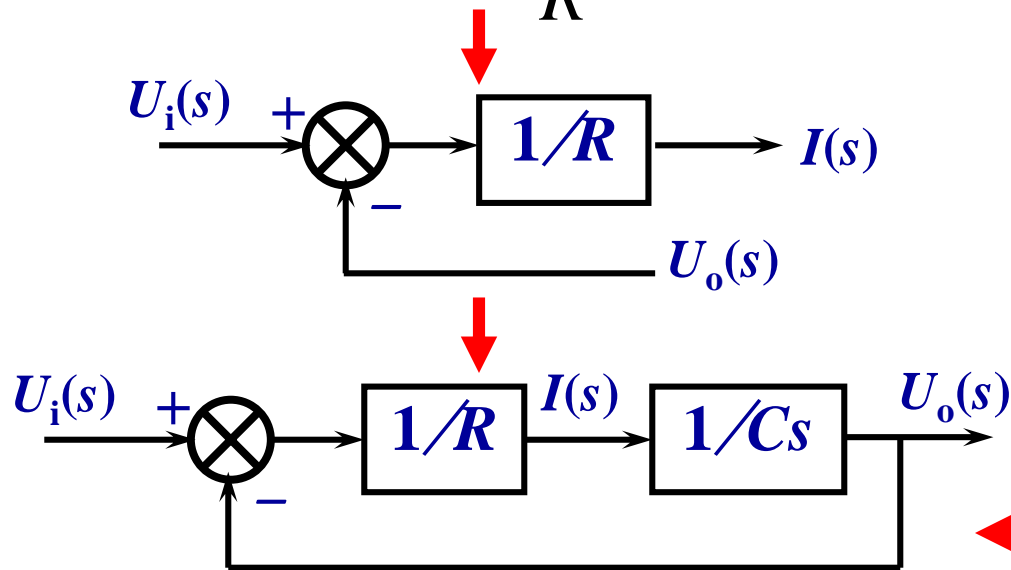
## 例题1 绘制系统方框图。

解：

$$i(t) = \frac{u_i(t) - u_o(t)}{R}$$

拉氏变换

$$I(s) = \frac{U_i(s) - U_o(s)}{R}$$

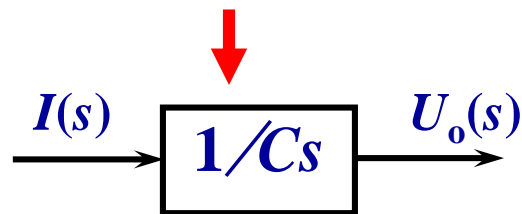


阻容电路

$$u_o(t) = \frac{1}{C} \int i(t) \cdot dt$$

拉氏变换

$$U_o(s) = \frac{1}{Cs} I(s)$$

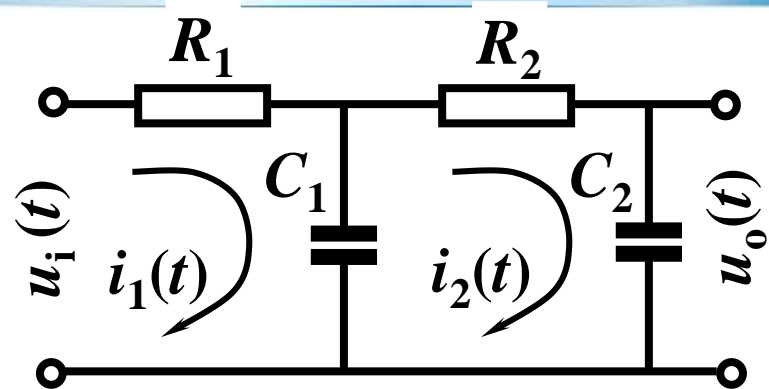
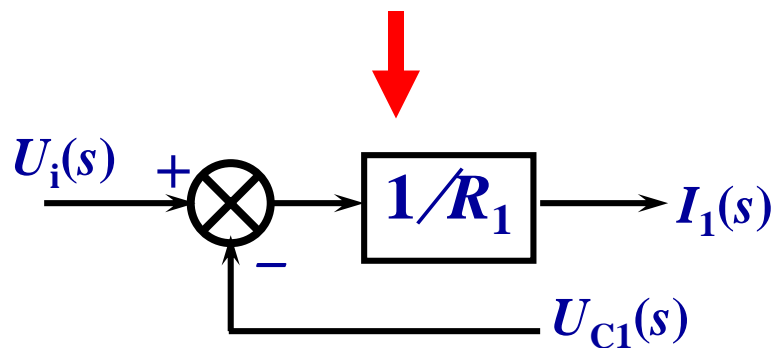


# 绘制系统框图

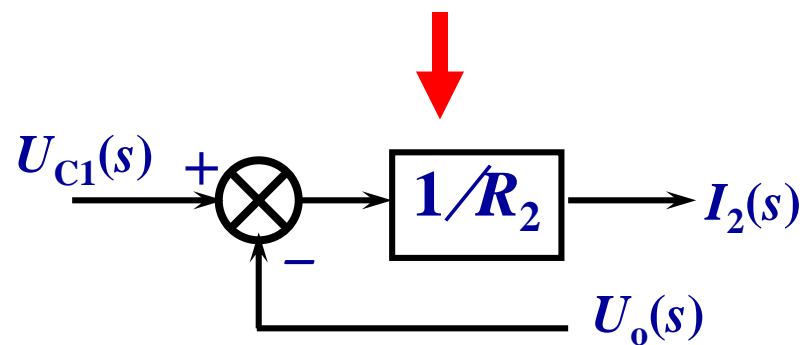
**例题2** 绘制RC网络系统方框图。

**解：**

$$I_1(s) = \frac{U_i(s) - U_{C1}(s)}{R_1}$$



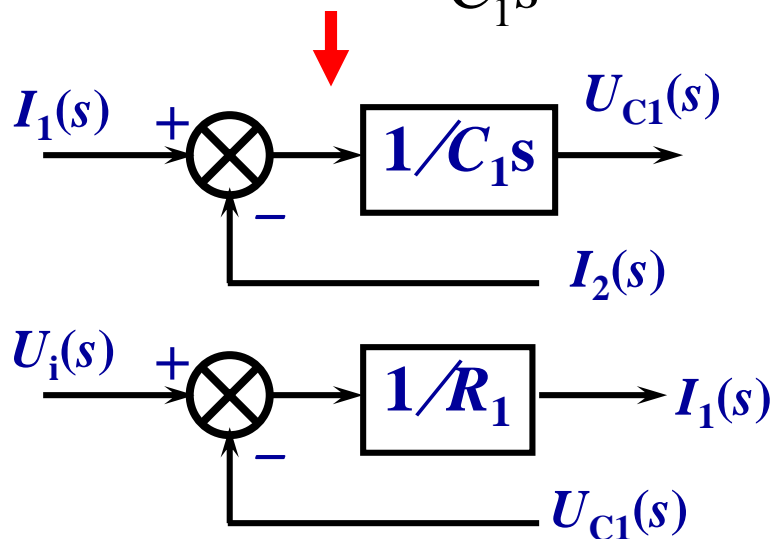
$$I_2(s) = \frac{U_{C1}(s) - U_o(s)}{R_2}$$



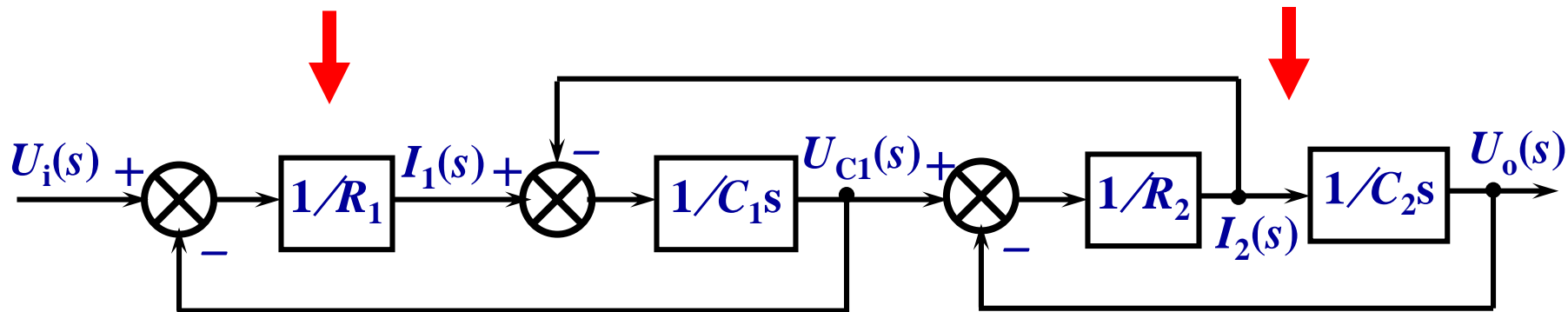
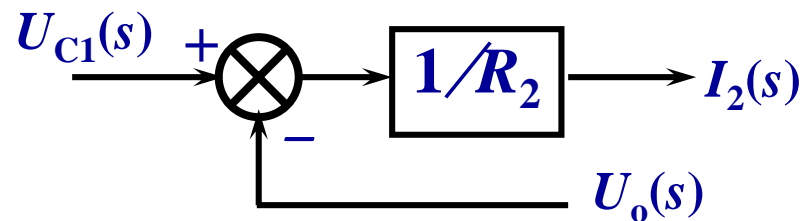
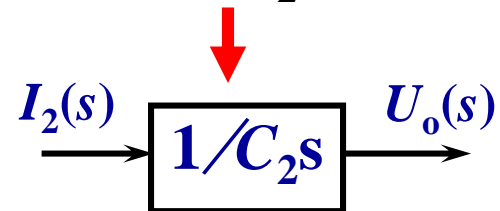


# 绘制系统框图

$$U_{C1}(s) = \frac{I_1(s) - I_2(s)}{C_1 s}$$



$$U_o(s) = \frac{1}{C_2 s} I_2(s)$$

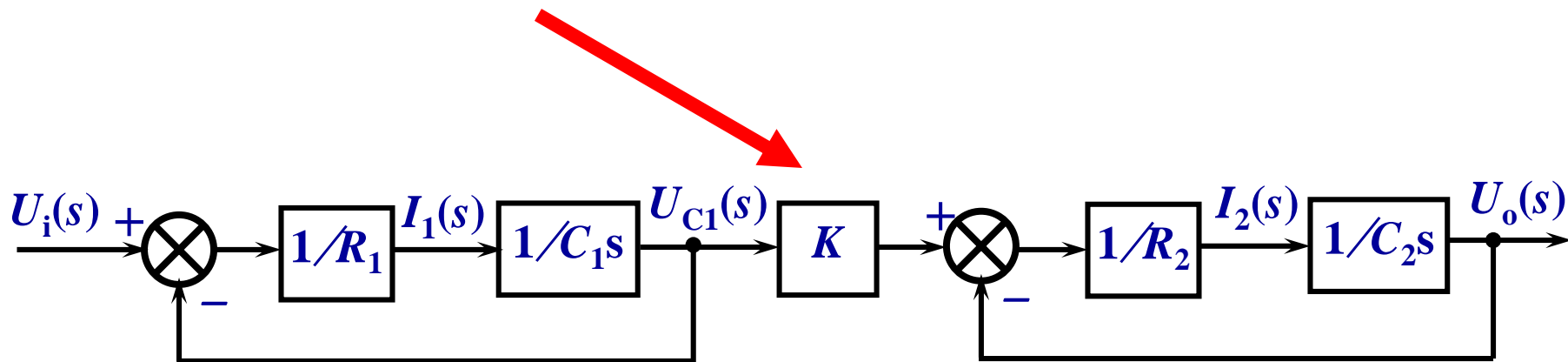
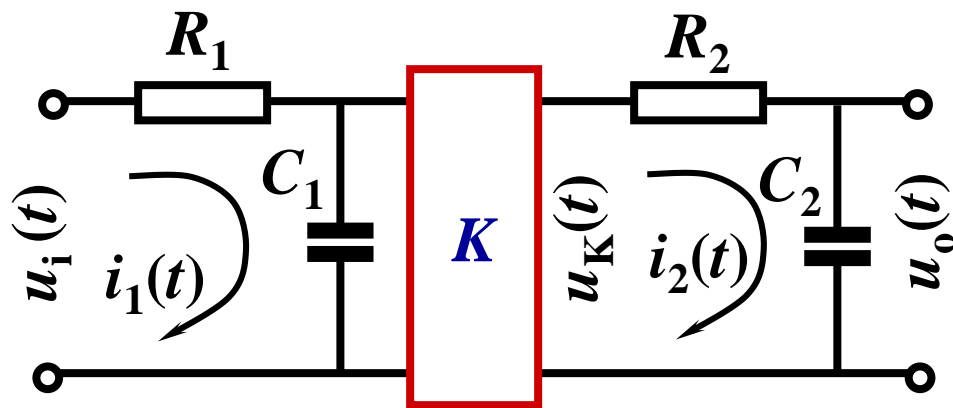


# 绘制系统框图

**例题3** 绘制放大电路系统方框图。

**解：**

$$U_K(s) = K \cdot U_{C1}(s)$$

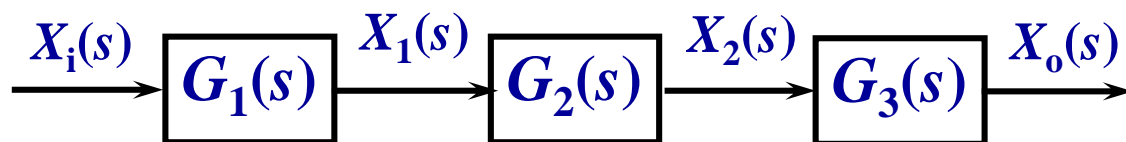


## 2.5 系统的方框图及其连接

### 2.5.2 环节的基本联系方式

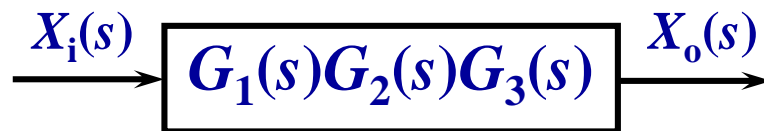
#### (1) 串联:

前一环节的输出量是后一环节的输入量



$$G_1(s) = \frac{X_1(s)}{X_i(s)} \quad G_2(s) = \frac{X_2(s)}{X_1(s)} \quad G_3(s) = \frac{X_o(s)}{X_2(s)}$$

$$G(s) = \frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{X_o(s)}{X_2(s)} \frac{X_2(s)}{X_1(s)} \frac{X_1(s)}{X_i(s)} = G_1(s)G_2(s)G_3(s)$$



## 2.5.2 环节的基本联系方式

**结论：**由串联环节所构成的系统，在没有负载效应时（负载效应是指一个元件的输出受到其后面一个元件存在的影响），它的总传递函数等于各环节传递函数的乘积。即

$$G(s) = \prod_{i=1}^n G_i(s)$$

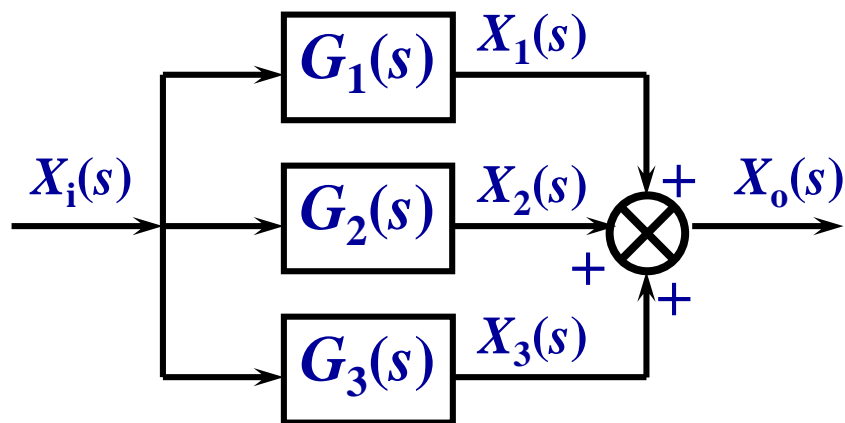
上式可理解为 $n$ 个环节串联而成为一个环节，其传递函数为 $G(s)$ ，也可看成一个环节分解成 $n$ 个串联环节。



## 2.5.2 环节的基本联系方式

### (2) 并联:

并联各环节的输入信号相同



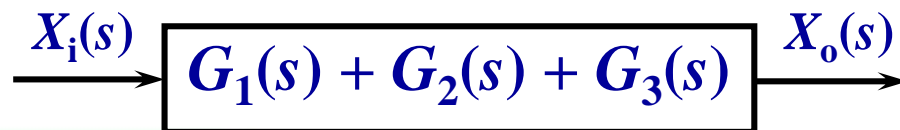
$$G_1(s) = \frac{X_1(s)}{X_i(s)}$$

$$G_2(s) = \frac{X_2(s)}{X_i(s)}$$

$$G_3(s) = \frac{X_3(s)}{X_i(s)}$$

$$X_o(s) = X_1(s) + X_2(s) + X_3(s)$$

$$G(s) = \frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{X_1(s) + X_2(s) + X_3(s)}{X_i(s)} = G_1(s) + G_2(s) + G_3(s)$$



## 2.5.2 环节的基本联系方式

**结论：**并联环节的总传递函数等于各环节传递函数之和（或差）。若把并联处都看成相加，而把可能有的减号移到环节传递函数中去，则 $n$ 个环节并联后总传递函数为：

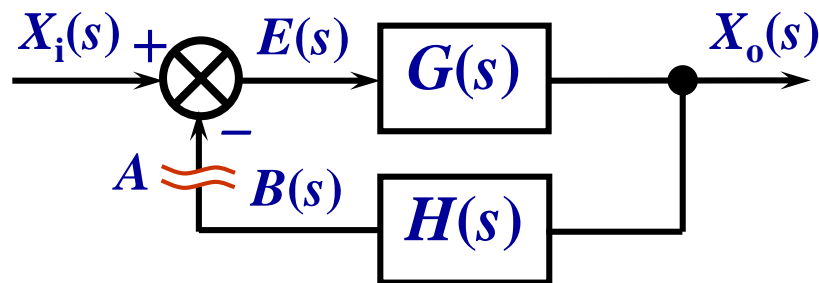
$$G(s) = \sum_{i=1}^n G_i(s)$$



## 2.5.2 环节的基本联系方式

### (3) 反馈连接:

前向通道的输出量被反馈到相加点或比较环节，并与输入量进行加减运算后，作为前向通道的输入。



各信号之间的关系如下:

$$X_o(s) = G(s)E(s)$$

$$E(s) = X_i(s) - B(s)$$

$$B(s) = H(s)X_o(s)$$

$$X_o(s) = G(s)[X_i(s) - B(s)] = G(s)[X_i(s) - H(s)X_o(s)]$$



## 2.5.2 环节的基本联系方式

### ① 闭环传递函数:

闭环传递函数定义为闭环系统输出与输入之比。

$$\Phi(s) = \frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{X_o(s)}{E(s) + B(s)} = \frac{\frac{X_o(s)}{E(s)}}{1 + \frac{B(s)}{E(s)}} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

分母为  $1+G(s)H(s)$  表示负反馈的情况，若为正反馈，分母则为  $1-G(s)H(s)$ ，我们主要研究负反馈，分母一般取  $1+G(s)H(s)$ 。

$$\Phi(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

分母中的  $G(s)H(s)$  在控制理论的研究中起着很重要的作用，为此给出以下定义





## 2.5.2 环节的基本联系方式

### ② 开环传递函数：

开环传递函数定义为闭环系统的前向通道传递函数与反馈通道传递函数的乘积。即：

$$G_o(s) = G(s)H(s)$$

**注意：**开环传递函数（不是开环系统传递函数）是闭环系统中相对闭环传递函数而言的。可以认为相当于上图闭环系统中从粉色处断开，则 $B(s)$ 与 $E(s)$ 之比即为开环传递函数。或说的全面一些， $G_o$ 称为闭环系统的开环传递函数。对于开环系统，系统的传递函数不能称为开环传递函数，而称为开环系统传递函数。开环传递函数是无量纲的，因为 $H(s)$ 的量纲是 $G(s)$ 量纲的倒数。

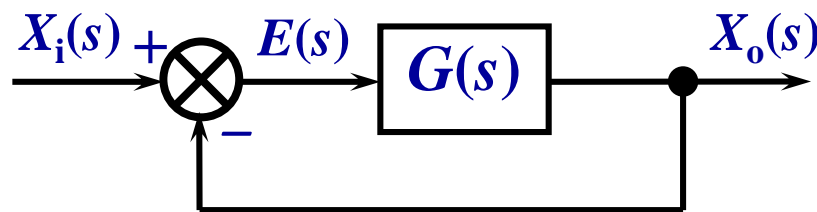


## 2.5.2 环节的基本联系方式

### ③ 单位反馈系统:

$H(s)=1$ 时的负反馈闭环系统称为单位反馈系统，其闭环传递函数为：

$$\Phi(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$

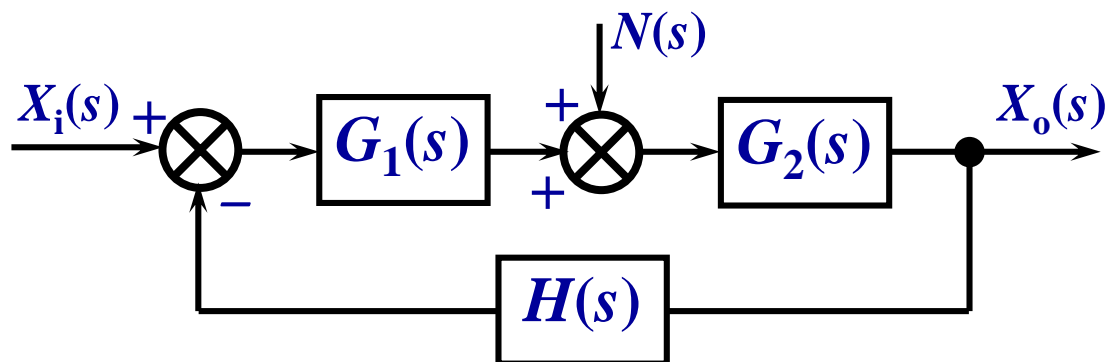


以上引入了开环传递函数 $G_o(s)$ 及闭环传递函数 $\Phi(s)$ 的概念，这都是对闭环系统而言的。若不加特别说明，当研究整个系统时，不论是开环系统还是闭环系统，均可用 $G(s)$ 来表示整个系统的传递函数。



## 2.5.2 环节的基本联系方式

### ④ 干扰作用下的闭环系统：



上图是干扰作用下的闭环系统。干扰 $N(s)$ 也是一种输入，例如：系统参数的变化、系统中的电器噪声、输入量的误差等都以干扰的形式输入系统。当输入量和干扰量同时作用于线性系统时，可以对每个量单独进行处理，然后再将两个输出量叠加起来，得到总的输出量。



## 2.5.2 环节的基本联系方式

在只有原输入 $X_i(s)$ 作用下【 $N(s)=0$ 】，系统的输出 $X_{o1}$ 为：

$$X_{o1}(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} X_i(s)$$

在只有 $N(s)$ 作用下【 $X_i(s)=0$ 】，系统的输出 $X_{o2}$ 为：

$$X_{o2}(s) = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} N(s)$$

在 $N(s)$ 与 $X_i(s)$ 共同作用下，系统的输出 $X_o$ 为：

$$\begin{aligned} X_o(s) &= X_{o1}(s) + X_{o2}(s) \\ &= \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} [G_1(s)X_i(s) + N(s)] \end{aligned}$$



## 2.5.2 环节的基本联系方式

根据以上公式表达，若设计成：

$$|G_1(s)H(s)| \gg 1 \quad |G_1(s)G_2(s)H(s)| \gg 1$$

由干扰作用引起的系统输出 $X_{o2}$ 为：

$$\begin{aligned} X_{o2}(s) &= \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} N(s) \approx \frac{G_2(s)N(s)}{G_1(s)G_2(s)H(s)} \\ &= \frac{1}{G_1(s)H(s)} N(s) = \delta \cdot N(s) \end{aligned}$$

由于 $\delta$ 很小，所以由干扰引起的误差较小。

若为开环系统， $H(s)=0$ ，干扰引起的输出为：

$$X_{o2}(s) = G_2(s)N(s)$$

$G_2(s)$ 一般不是很小的，所以 $X_{o2}(s)$ 比较大。干扰对开环系统精度影响较大。



## 2.5 系统的方框图及其联接

### 2.5.3 方框图的等效变换与简化

对系统框图进行等效变换**目的**：由系统框图直接写出其闭环传递函数。

系统框图等效变换的基本**规则**：变换前后输入输出关系保持不变。



## 2.5.3 方框图的等效变换与简化

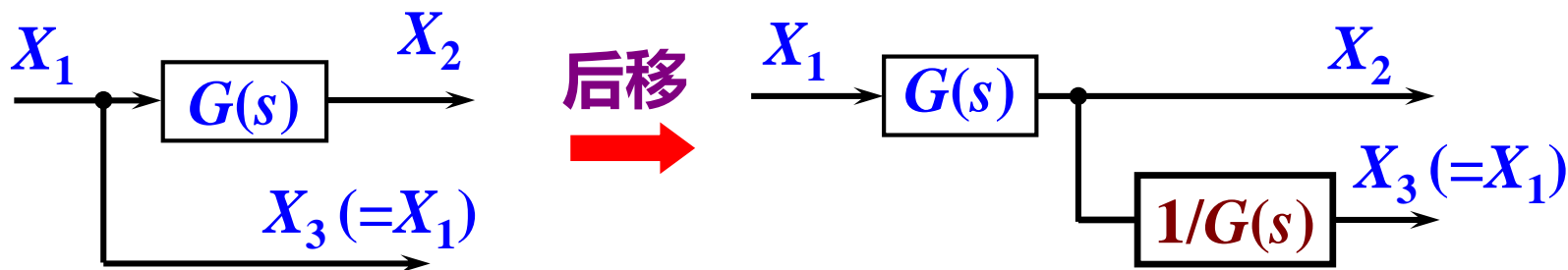
### (1) 方框图的等效变换

#### ① 分支点移动

由分支点分出的信号，其数值不变。



& 分支点在一个支路中**前移**时，必须在另一分支路中串联具有相同传递函数的方框；



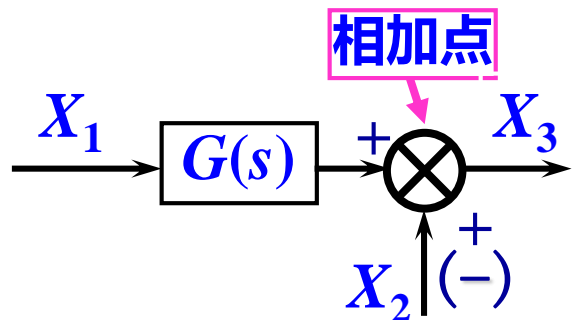
& 分支点在一个支路中**后移**时，必须在另一分支路中串联具有相同传递函数的倒数的方框。



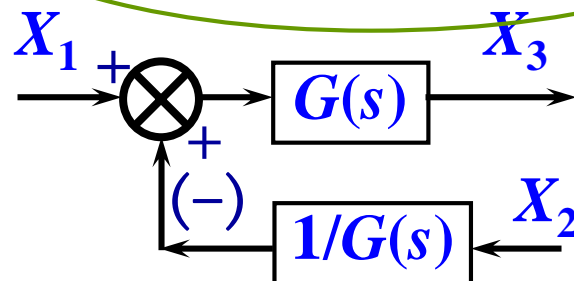
## 2.5.3 方框图的等效变换与简化

### (1) 方框图的等效变换

#### ② 综合点（相加点）移动

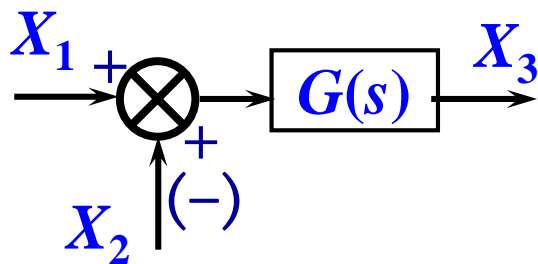


前移

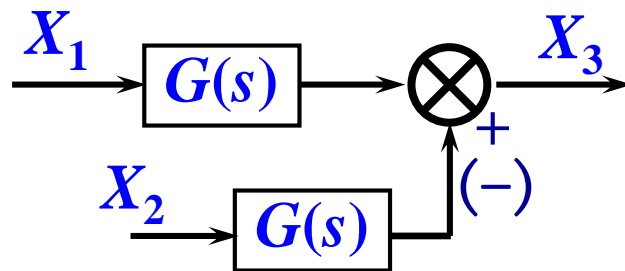


由相加点进入和出去的信号，其量纲必须是相同的，否则就不能相加减。

& 综合点在一个支路中**前移**时，必须在另一个支路中串联具有相同传递函数倒数的方框；



后移



& 综合点在一个支路中**后移**时，必须在另一个支路中串联具有相同传递函数的方框。

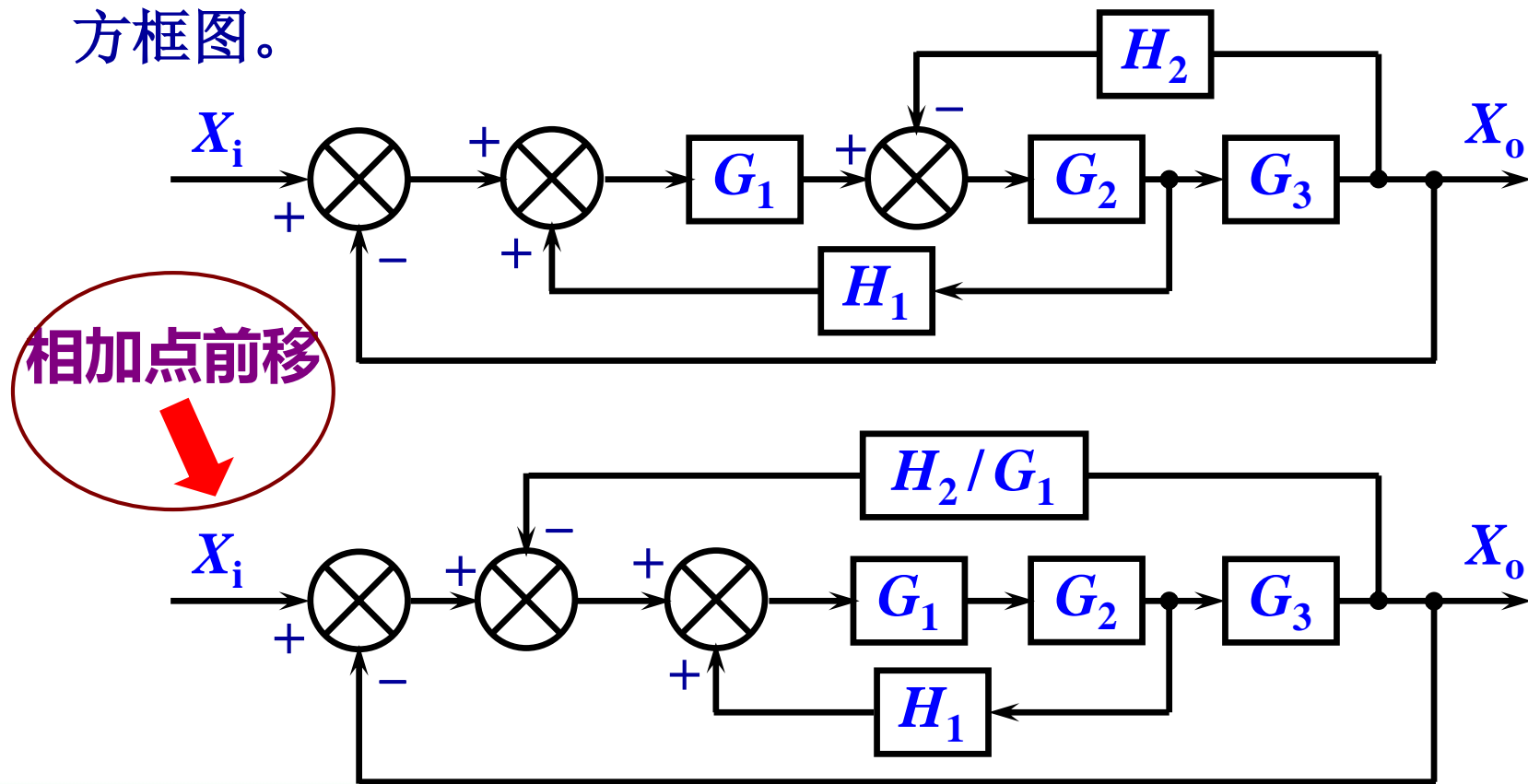




## 2.5.3 方框图的等效变换与简化

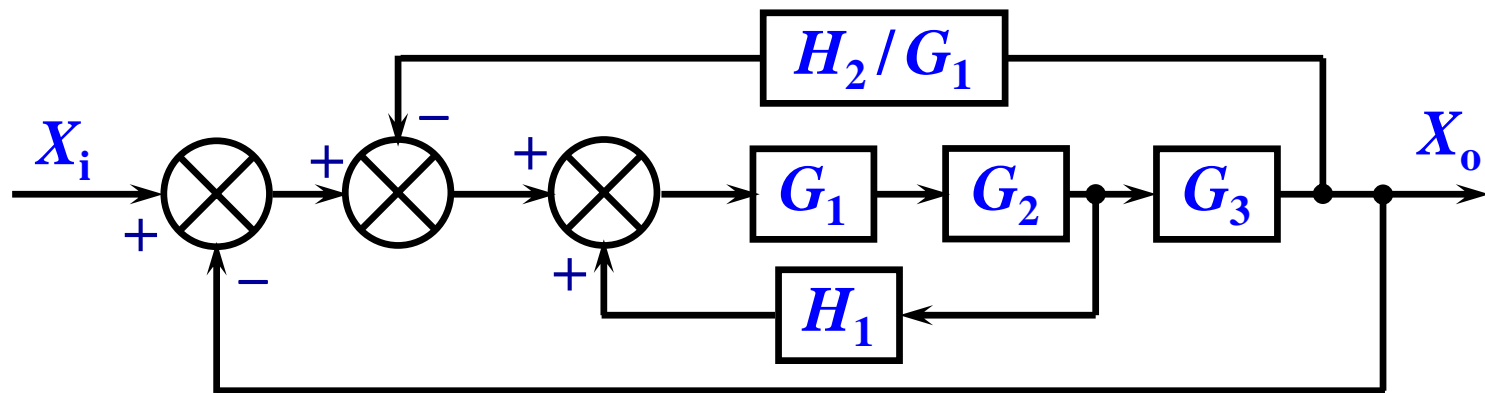
### (2) 方框图的简化

对于复杂系统，往往是多回路系统，形成回路交错或相套，为便于计算和分析，常将复杂的方框图简化为较简单的方框图。

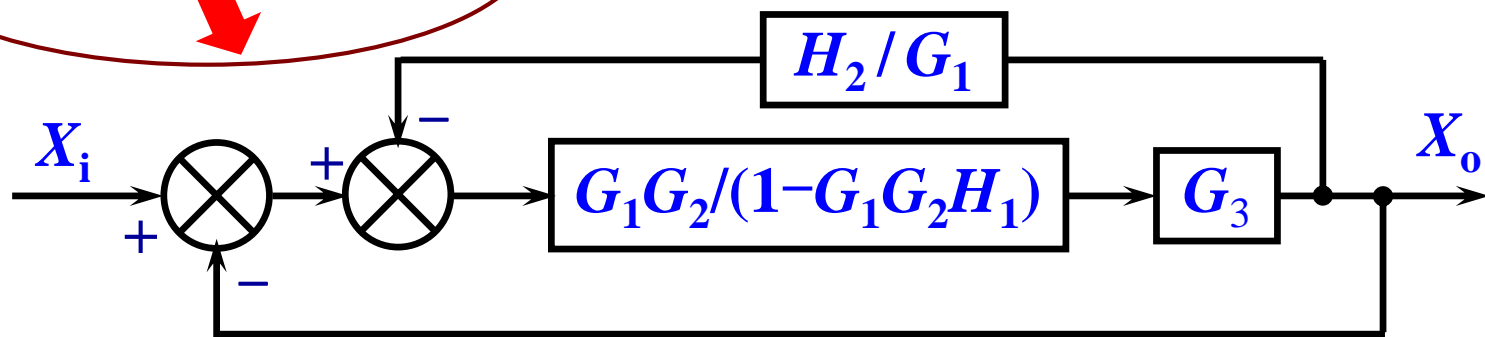


## 2.5.3 方框图的等效变换与简化

### (2) 方框图的简化

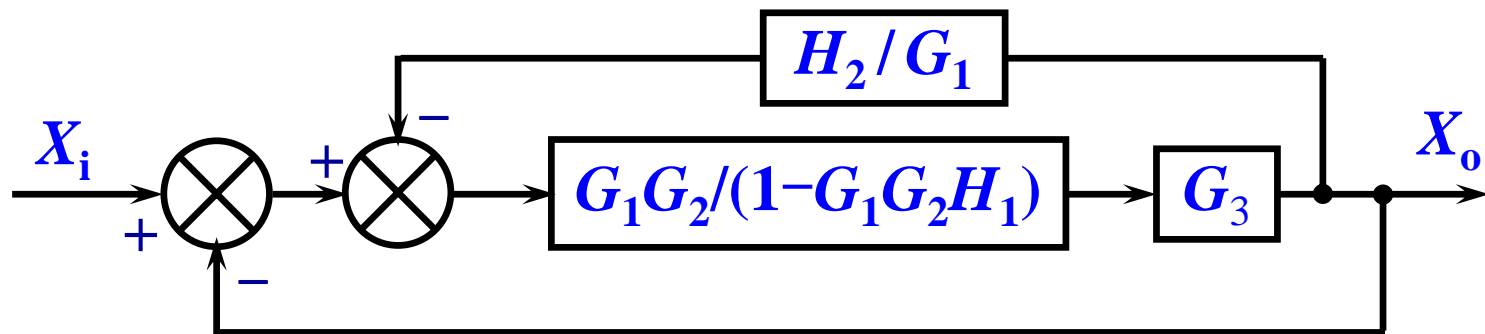


小回路化为传递函数

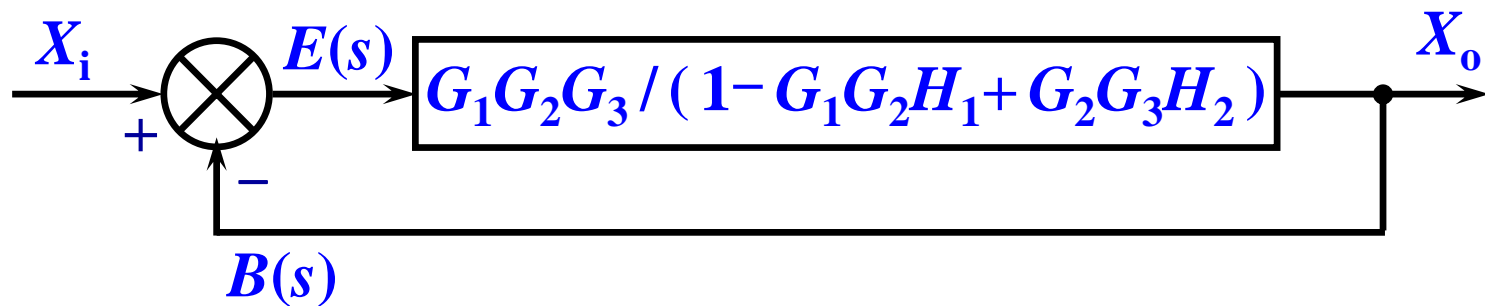


## 2.5.3 方框图的等效变换与简化

### (2) 方框图的简化

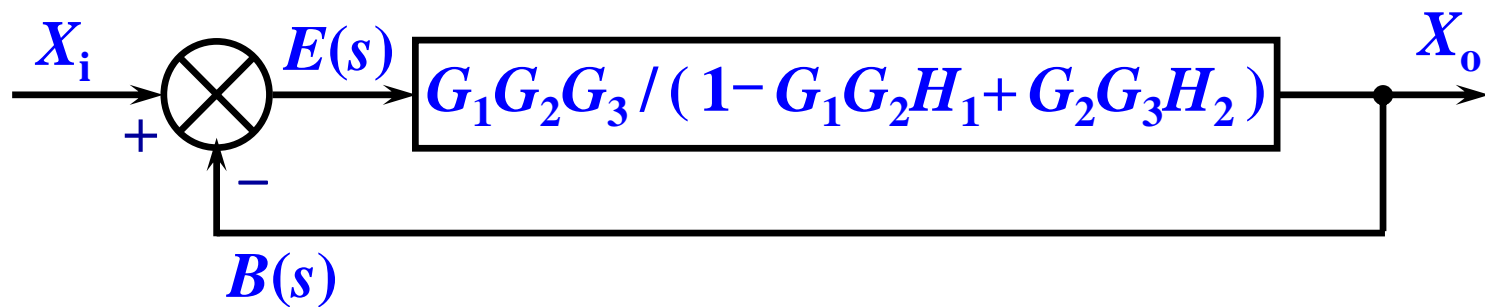


再消去一个闭环回路

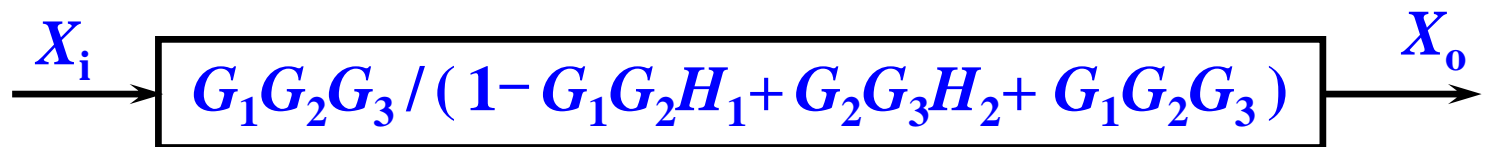


## 2.5.3 方框图的等效变换与简化

### (2) 方框图的简化

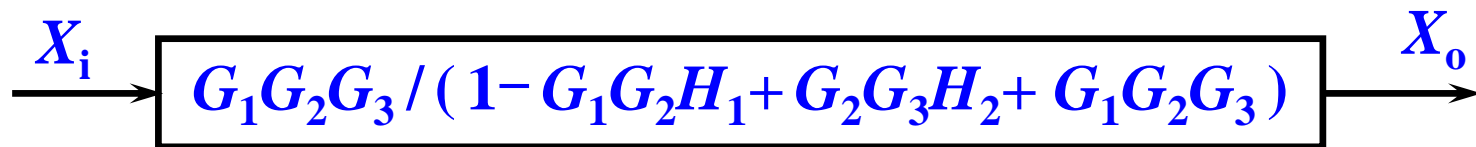


消去闭环回路



## 2.5.3 方框图的等效变换与简化

### (2) 方框图的简化



不要因为以上的表示形式而误认为原系统是开环系统，而是闭环系统简化的结果。即原系统的闭环传递函数为：

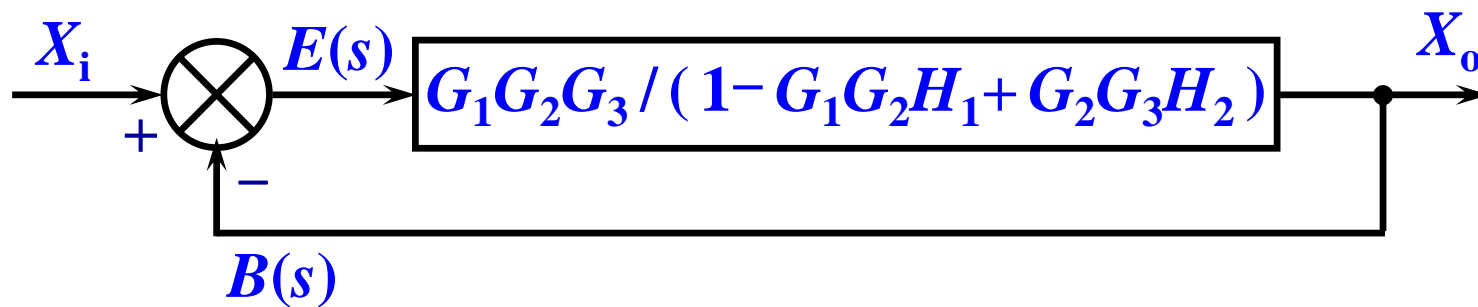
$$\Phi(s) = \frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{G_1 G_2 G_3}{1 - G_1 G_2 H_1 + G_2 G_3 H_2 + G_1 G_2 G_3}$$

上式分母中的“ $-G_1 G_2 H_1 + G_2 G_3 H_2 + G_1 G_2 G_3$ ”也不能看作是原闭环系统的开环传递函数。闭环系统的开环传递函数应根据其定义及具体方框图来确定。



## 2.5.3 方框图的等效变换与简化

### (2) 方框图的简化



该闭环系统的开环传递函数应由上图确定。即：

$$G_o(s) = \frac{B(s)}{E(s)} = \frac{G_1 G_2 G_3}{1 - G_1 G_2 H_1 + G_2 G_3 H_2}$$



作业：

2-7、 2-8、 2-9

