工 程 控 制 原 理

2. 数学模型与传递函数

2.4 典型环节的传递函数

主讲：李敏

上海大学
机电工程与自动化学院

2.4 典型环节的传递函数

控制系统一般由若干元件以一定形式连接而成，从控制理论来看，物理本质和工作原理不同的元件可以有完全相同的数学模型。

在控制工程中，一般将具有某种确定信息传递关系的元件、元件组或元件的一部分称为一个环节，经常遇到的环节称为典型环节。

复杂控制系统常常由一些简单的典型环节组成，求出这些典型环节的传递函数，就可以获得整个系统的传递函数。

2.4 典型环节的传递函数

控制系统中常用的典型环节有：比例环节、惯性环节、微分环节、积分环节、振荡环节和延时环节等。

2.4.1 比例环节

如果一个环节的输出与输入成正比例，既不失真也不延时，则称此环节为比例环节，也称放大环节。其数学模型为

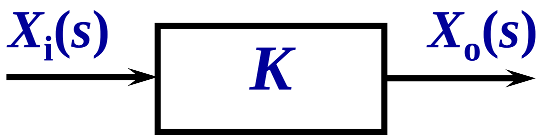
$$x_o(t) = K\, x_i(t)$$

比例环节的传递函数为

$$G(s) = \frac{X_o(s)}{X_i(s)} = K$$

比例环节的增益，或称放大环节的放大系数

比例环节的方框图



例题 求图示一齿轮传动副的传递函数。n_i、n_o 分别为输入轴及输出轴转速，z_1 和 z_2 为齿轮齿数 (假定系统为：齿轮副无传动间隙，且传动系统刚性无穷大的理想状态)。

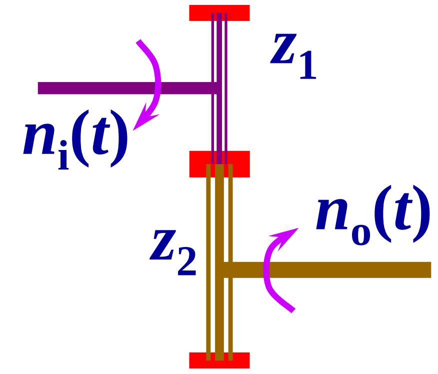
解： 因为

$$z_1 n_i(t) = z_2 n_o(t)$$

经拉氏变换后

$$z_1 N_i(s) = z_2 N_o(s)$$

齿轮传动副



$$G(s) = \frac{N_o(S)}{N_i(S)} = \frac{z_1}{z_2} = K$$

$\boxed{\text{齿轮副的传动比}}$

比例环节：略去弹性的杠杆、作为测量元件的测速发电机(输入为转速、输出为电压)、电子放大器，等等

2.4 典型环节的传递函数

2.4.2 惯性环节

凡运动方程为一阶微分方程：

$$T\frac{\mathrm{d}x_{\mathrm{o}}(t)}{\mathrm{d}t}+x_{\mathrm{o}}(t)=K\,x_{\mathrm{i}}(t)$$

形式的环节称为惯性环节。其传递函数为：

$$G(s)=\frac{X_{\mathrm{o}}(s)}{X_{\mathrm{i}}(s)}=\frac{K}{Ts+1}$$

惯性环节的增益，或称放大系数

表征环节的惯性，与环节结构参数有关

惯性环节的时间常数

惯性环节的方框图

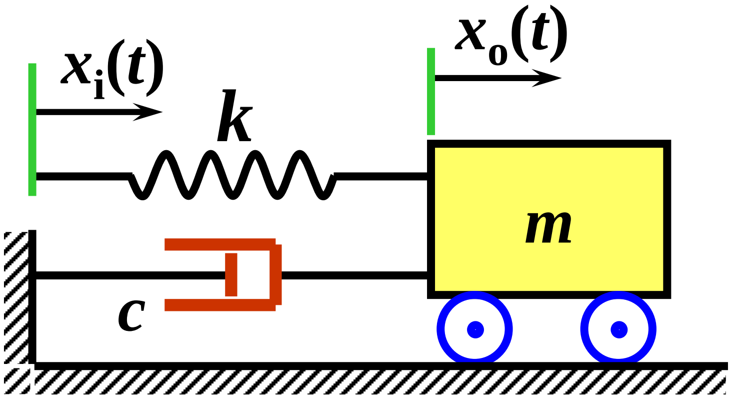
$$X_i(s)\longrightarrow\boxed{\frac{K}{Ts+1}}\longrightarrow X_o(s)$$

惯性环节元件中，总含有**储能元件**。对于突变形式的输入而言，输出总落后于输入。

例题1 求图示质量–弹簧–阻尼器环节传递函数。

解： 若质量m相对很小，可略去其影响(忽略惯性力)。此时的系统动力学方程为

$$c\frac{\mathrm{d}x_o(t)}{\mathrm{d}t}+kx_o(t)=kx_i(t)$$



质量–弹簧–阻尼器系统模型

经拉氏变换后

$$csX_o(s)+kX_o(s)=kX_i(s)$$

系统传递函数为

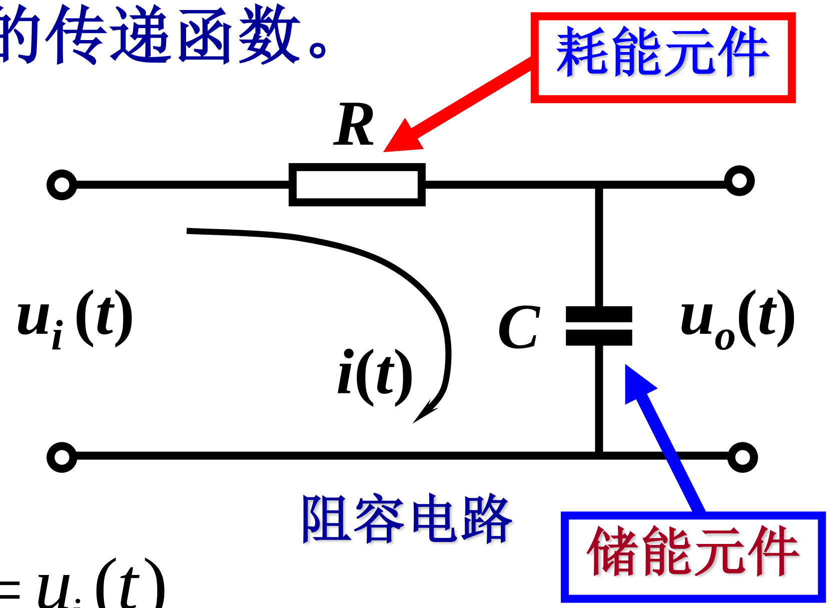
$$G(s)=\frac{X_o(s)}{X_i(s)}=\frac{k}{cs+k}=\frac{1}{Ts+1}$$

惯性环节的时间常数

$$\boxed{T=\frac{c}{k}}$$

2.4.2 惯性环节

例题2 求图示简单阻容电路的传递函数。



阻容电路

解： 电路方程为

$$u_i(t)=R\cdot i(t)+\frac{1}{C}\int i(t)\cdot \mathrm{d}t$$

$$u_o(t)=\frac{1}{C}\int i(t)\cdot \mathrm{d}t$$

$$RC\frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{o}}(t)}{\mathrm{d}t}+u_{\mathrm{o}}(t)=u_{\mathrm{i}}(t)$$

经拉氏变换后

$$RCsU_{\mathrm{o}}(s)+U_{\mathrm{o}}(s)=U_{\mathrm{i}}(s)$$

系统传递函数为

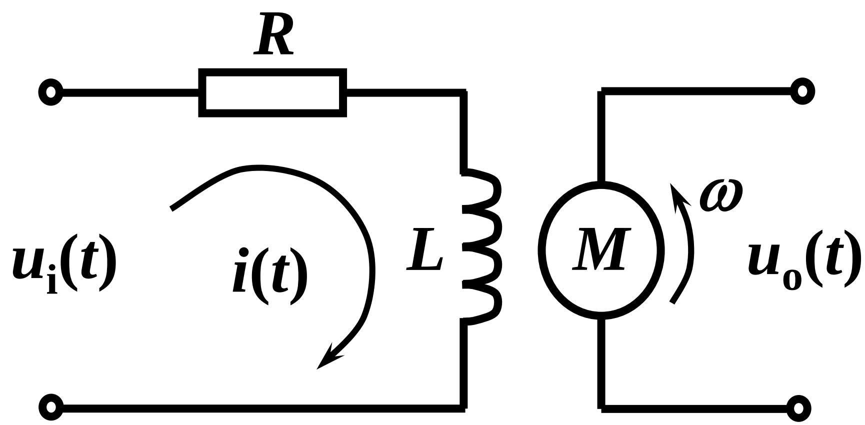
$$G(s)=\frac{U_{\mathrm{o}}(s)}{U_{\mathrm{i}}(s)}=\frac{1}{RCs+1}=\frac{1}{Ts+1}$$

电路的时间常数

$$T=RC$$

例题3 图示为简化了的直流发电机电路。转子恒速转动，输入为励磁电压u_i，输出为电压u_o，求此系统的传递函数。

解： 励磁电路电压方程为



$$u_i(t)=Ri(t)+L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$$

输出电路中转子恒速，故

$$u_o(t)=K_1 i(t)$$

常数

$$u_i(t)=\frac{R}{K_1}u_o(t)+\frac{L}{K_1}\frac{\mathrm{d}u_o(t)}{\mathrm{d}t}$$

经拉氏变换后，系统传递函数为

$$G(s)=\frac{U_o(s)}{U_i(s)}=\frac{K_1}{Ls+R}=\frac{K}{Ts+1}$$

惯性环节的增益

$$K=\frac{K_1}{R}$$

惯性环节的时间常数

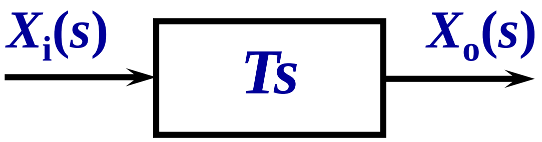
$$T=\frac{L}{R}$$

2.4.3 微分环节

理想微分环节的输出量正比于输入量的微分，即

$$x_{\mathrm{o}}(t)=T\frac{\mathrm{d}x_{\mathrm{i}}(t)}{\mathrm{d}t}$$

微分环节的方框图



因此，理想微分环节的传递函数为

微分环节的时间常数

$$G(s)=\frac{X_{\mathrm{o}}(s)}{X_{\mathrm{i}}(s)}=Ts$$

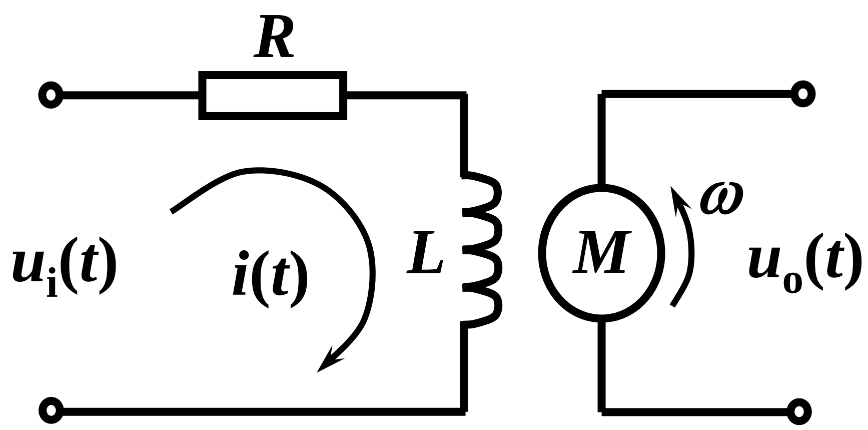
当输入量为阶跃函数时，理论上输出量将是一个幅值为无穷大而时间宽度为零的脉冲，实际上不可能。

因此，在物理系统中微分环节不独立存在，而是和其它环节一起出现。

2.4.3 微分环节

例题1 仍考虑直流发电机电路。当励磁电压u_i恒定时，取输入为转子转角θ，输出为电枢电压u_o，求此时的传递函数。

解： 由于u_i恒定，磁通量为定值，所以电枢电压与转速成正比，即

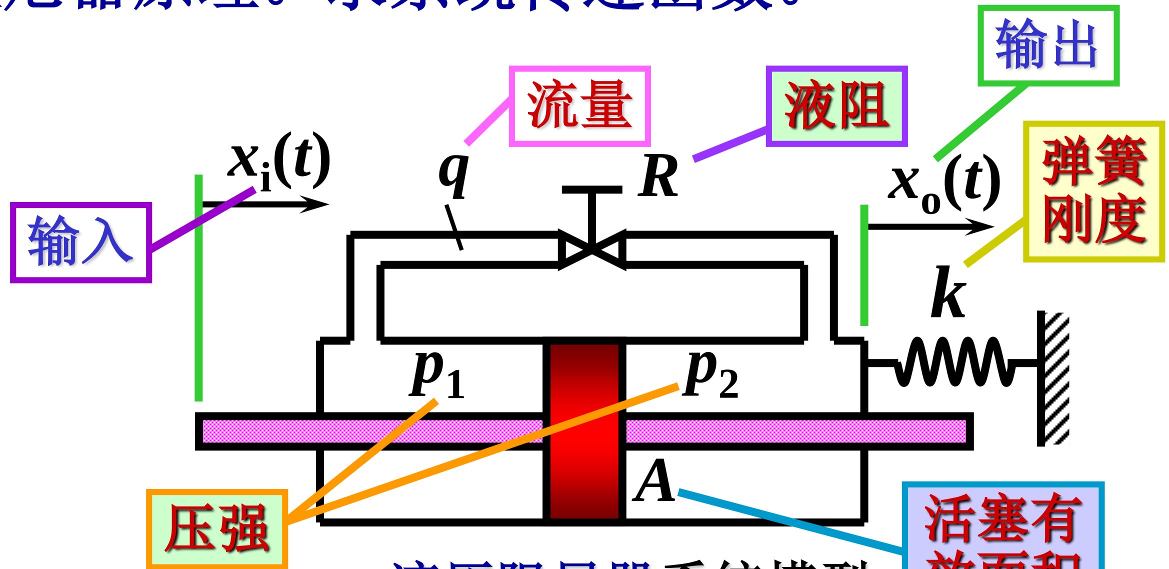


$$u_o(t) = \underbrace{K}_{\text{常数}} \frac{d\theta(t)}{dt}$$

经拉氏变换后得 $$U_o(s) = Ks\Theta(s)$$

系统传递函数为 $$G(s) = \frac{U_o(s)}{\Theta(s)} = Ks$$

例题2 图示液压阻尼器原理。求系统传递函数。



液压阻尼器系统模型

解： 液压缸力平衡方程为

$$A(p_2 - p_1) = kx_o(t)$$

过阻尼的流量方程

$$q = \frac{p_2 - p_1}{R} = A[\dot{x}_i(t) - \dot{x}_o(t)]$$

以上两式中消去p_1、p_2，得

$$\dot{x}_i(t) - \dot{x}_o(t) = \frac{k}{A^2R} x_o(t) \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_o(t) + \frac{k}{A^2R} x_o(t) = \dot{x}_i(t)$$

2.4.3 微分环节

经过拉氏变换后得到

$$sX_o(s)+\frac{k}{A^2R}X_o(s)=sX_i(s)$$

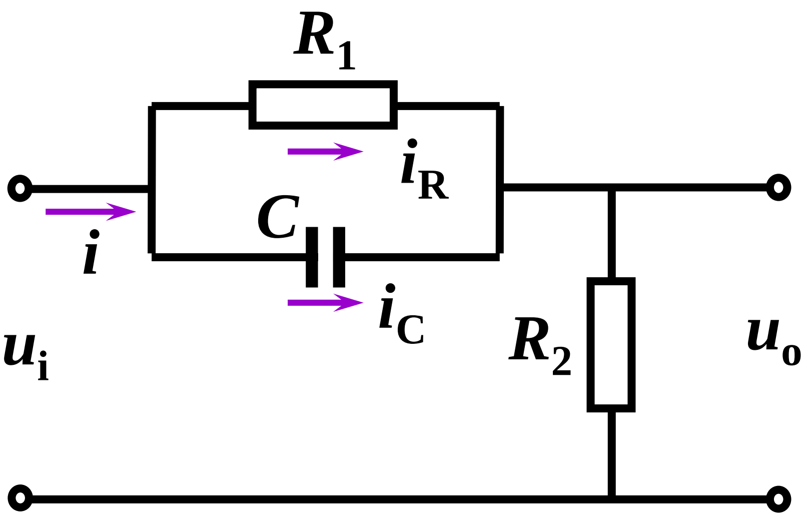
得到传递函数

$$G(s)=\frac{X_o(s)}{X_i(s)}=\frac{s}{s+\dfrac{k}{A^2R}}=\frac{Ts}{Ts+1} \qquad T=\frac{A^2R}{k}$$

由上面传递函数形式看出，液压阻尼器是包含有惯性环节和微分环节的系统，称之为具有惯性的微分环节。

若 $|Ts|\ll 1$ 时，$G(s)\approx Ts$，系统近似成为理想微分环节。

例题3 图示电路系统为具有惯性的微分环节。求此系统的传递函数。



解： 电路方程为

$$u_i = \frac{1}{C}\int i_C \mathrm{d}t + u_o$$

$$i_R = \frac{1}{R_1 C}\int i_C \mathrm{d}t$$

$$i = i_R + i_C = \frac{1}{R_1 C}\int i_C \mathrm{d}t + i_C$$

$$u_o = i \cdot R_2 = \frac{R_2}{R_1 C}\int i_C \mathrm{d}t + R_2 i_C$$

拉氏变换

$$U_i(s) = \frac{1}{Cs} I_C(s) + U_o(s)$$

$$U_o(s) = \frac{R_2}{R_1 Cs} I_C(s) + R_2 I_C(s)$$

2.4.3 微分环节

消去$I_C(s)$后，得

$$U_i(s)=\frac{R_1}{R_1Cs+1}\frac{U_o(s)}{R_2}+U_o(s)$$

得到传递函数

$$G(s)=\frac{U_o(s)}{U_i(s)}=\frac{R_2(R_1Cs+1)}{R_2(R_1Cs+1)+R_1}=\frac{K(Ts+1)}{KTs+1}$$

$$T=R_1C$$

时间常数

$$K=\frac{R_2}{R_1+R_2}$$

2.4.3 微分环节

当$R_1 \to \infty$时，

$$u_i = \frac{1}{C}\int i\mathrm{d}t + u_o \qquad u_o = iR_2$$

经拉氏变换后，得

$$U_i(s) = \left(\frac{1}{CR_2 s} + 1\right)U_o(s)$$

得到传递函数

$$G(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{R_2 Cs}{R_2 Cs + 1} = \frac{Ts}{Ts + 1}$$

$$T = R_2 C$$

$\boxed{\text{时间常数}}$

具有惯性的微分环节

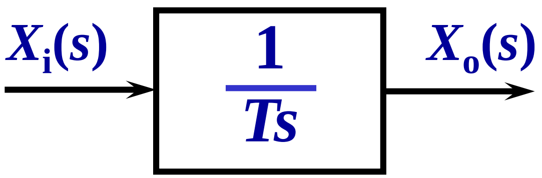
2.4 典型环节的传递函数

2.4.4 积分环节

积分环节：输出量正比于输入量对时间的积分，即

$$x_o(t)=\frac{1}{T}\int x_i(t)\mathrm{d}t$$

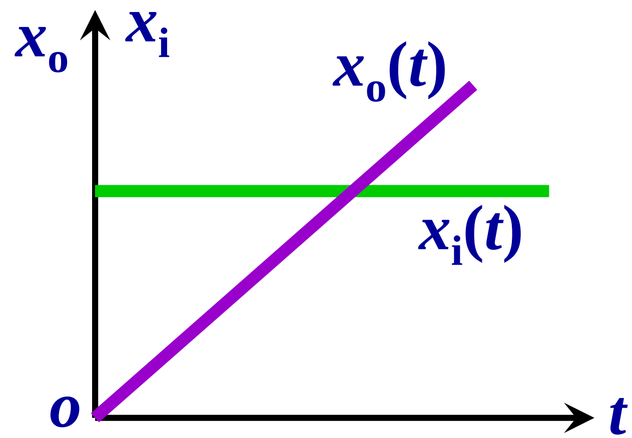
积分环节的方框图



因此，积分环节的传递函数为

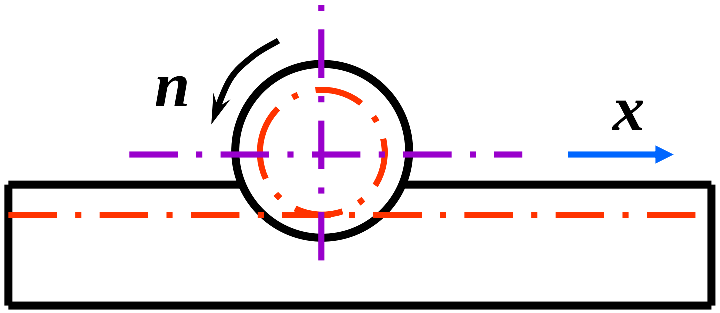
积分环节的时间常数

$$G(s)=\frac{X_o(s)}{X_i(s)}=\frac{1}{Ts}$$



当输入量x_i为定值时，输出量将正比于时间。

例题1 图示齿轮齿条传动机构，取齿轮转速n为输入量，齿条的位移量x为输出量，求此机构的传递函数。



解： 由齿轮齿条的转速关系

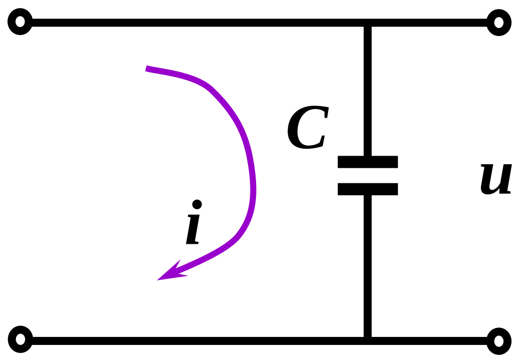
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \pi D n$$

齿轮节圆直径

经拉氏变换后得 $sX(s) = \pi D N(s)$

系统传递函数为 $G(s) = \dfrac{X(s)}{N(s)} = \dfrac{\pi D}{s}$

例题2 图示电路系统，求此环节的传递函数。



电气积分环节

解： 取输入量为回路电流i，输出量为电容器两端电压u，则

$$u = \frac{1}{C}\int i\mathrm{d}t$$

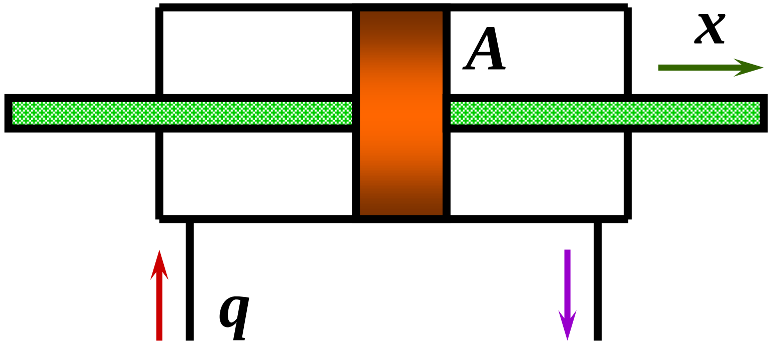
经拉氏变换后得 $$U(s) = \frac{1}{Cs} I(s)$$

系统传递函数为 $$G(s) = \frac{U(s)}{I(s)} = \frac{1/C}{s} = \frac{K}{s}$$

$$K = \frac{1}{C}$$

2.4.4 积分环节

例题3 图示液压缸，其输入为流量q，输出为活塞位移x，求此环节的传递函数。



液压积分环节

解： 活塞有效面积为A，则

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{q}{A}$$

即

$$x=\int\frac{q}{A}\mathrm{d}t$$

经拉氏变换后得

$$X(s)=\frac{1}{As}Q(s)$$

系统传递函数为

$$G(s)=\frac{X(s)}{Q(s)}=\frac{1/A}{s}=\frac{K}{s}$$

$$K=\frac{1}{A}$$

2.4.5 振荡环节

振荡环节是二阶环节，含有两个独立的储能元件，且所存储的能量能够相互转换，从而导致输出带有振荡的性质。

传递函数为

$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

ω_n：无阻尼固有频率

ζ：阻尼比

若ζ<1、输入为单位阶跃函数时，输出将是衰减振荡过程。

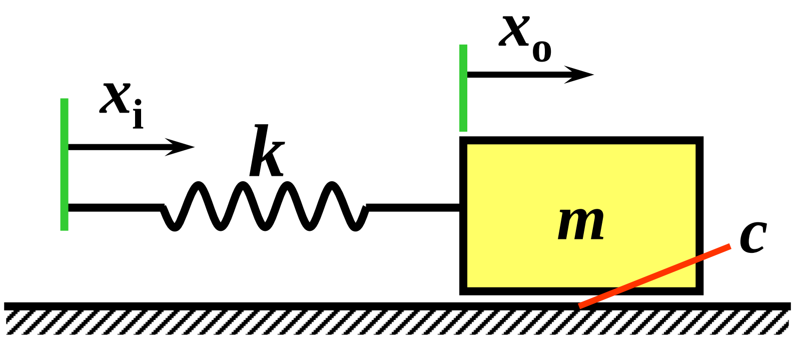
振荡环节的方框图

$$X_i(s) \longrightarrow \boxed{\frac{\omega_n^2}{S^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}} \longrightarrow X_o(s)$$

2.4.5 振荡环节

例题1 图示质量–阻尼–弹簧系统，求其传递函数。

解： 考虑质量m的影响，写出动力学方程



质量–弹簧–阻尼器系统

$$m\frac{\mathrm{d}^2x_o}{\mathrm{d}t^2}+c\frac{\mathrm{d}x_o}{\mathrm{d}t}=k\left(x_i-x_o\right)$$

或

$$m\frac{\mathrm{d}^2x_o}{\mathrm{d}t^2}+c\frac{\mathrm{d}x_o}{\mathrm{d}t}+kx_o=kx_i$$

经拉氏变换 $ms^2x_o(s)+csx_o(s)+kx_o(s)=kx_i(s)$

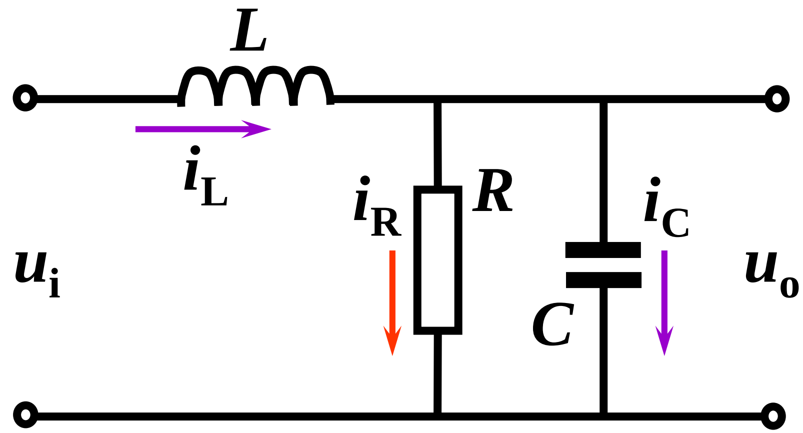
传递函数 $G(s)=\dfrac{X_o(s)}{X_i(s)}=\dfrac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$

$$\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\zeta=\frac{c}{2\sqrt{mk}}$$

例题2 由电感、电阻及电容组成的串、并联电路。u_i为输入电压时，u_o为输出电压，求此系统的传递函数。

解： 电路方程 $i_L = i_C + i_R$



$$u_i = L\frac{di_L}{dt} + u_o$$

$$u_o = Ri_R = \frac{1}{C}\int i_L dt$$

联立后得 $$u_i = LC\frac{d^2u_o}{dt^2} + \frac{L}{R}\frac{du_o}{dt} + u_o$$

拉氏变换 $$U_i(s) = LCs^2U_o(s) + \frac{L}{R}sU_o(s) + U_o(s)$$

2.4.5 振荡环节

传递函数为

$$G(s)=\frac{U_{\mathrm{o}}(s)}{U_{\mathrm{i}}(s)}=\frac{1}{LCs^2+\dfrac{L}{R}s+1}=\frac{\omega_{\mathrm{n}}^2}{s^2+2\zeta\omega_{\mathrm{n}}s+\omega_{\mathrm{n}}^2}$$

$$\omega_{\mathrm{n}}=\sqrt{\frac{1}{LC}} \qquad \zeta=\frac{1}{2R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

振荡环节的主要特征是含有两种形式的储能元件，而且能够将储存的能量相互转换，如动能与位能、电能与磁能间的转换等等。在能量转换过程中使输出量产生振荡。

2.4.6 延时环节

也称纯滞后环节。延时环节是输出量和输入量相同而仅延迟一时间τ。若输入为$x(t)$，输出则与输入的信号形状完全相同，而仅时间延迟τ，即输出为$x(t-\tau)$。

延时环节输出量$x_o(t)$与输入量为$x_i(t)$的关系为

$$x_o(t) = x_i(t-\tau)$$

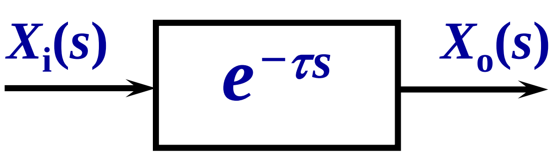
拉氏变换后得

$$X_o(s) = e^{-\tau s} X_i(s)$$

传递函数

$$G(s) = \frac{X_o(s)}{X_i(s)} = e^{-\tau s}$$

延时环节的方框图

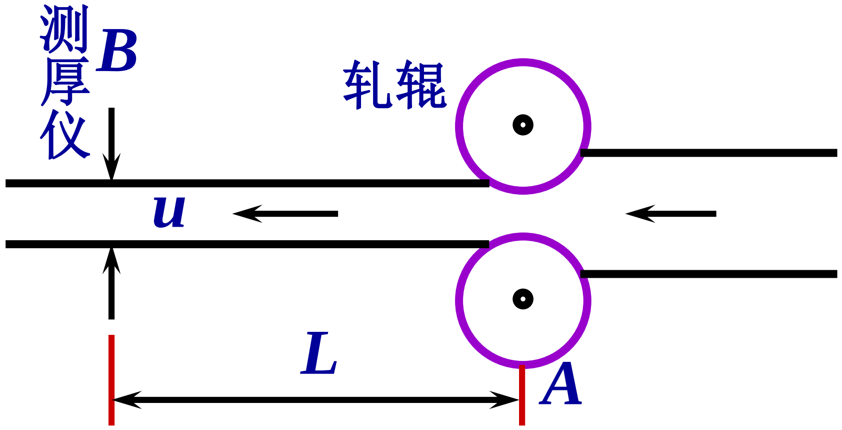


2.4.6 延时环节

工业上经常会遇到纯时间延迟或传输滞后现象。如各种传动系统（液压传动、气压传动、机械传动）和计算机控制系统，有时需要经过一定的延迟时间，才能允许输出对输入作出响应。

轧钢工艺中带钢在轧辊*A*点轧出时，由于压力系统或者轧辊本身的原因，可能产生厚度偏差，但到达*B*点时才能被测厚仪检测到。此延迟时间为

$$\tau = \frac{L}{u}$$



轧辊处带钢厚度与检测厚度之间的传递函数是一个延时环节

延时环节与惯性环节的区别

惯性环节从输入开始时刻起就已有输出，仅由于惯性，输出要滞后一段时间才接近所要求的输出值。

延时环节从输入开始之初，在0～τ 时间内没有输出，但在 $t=\tau$之后，输出完全等于输入。

作业：P45

2-1、2-2、2-3