工 程 控 制 原 理

3. 瞬态响应及误差分析

3.3 二阶系统的时间响应

主讲：李敏

上海大学
机电工程与自动化学院

3.3 二阶系统的时间响应

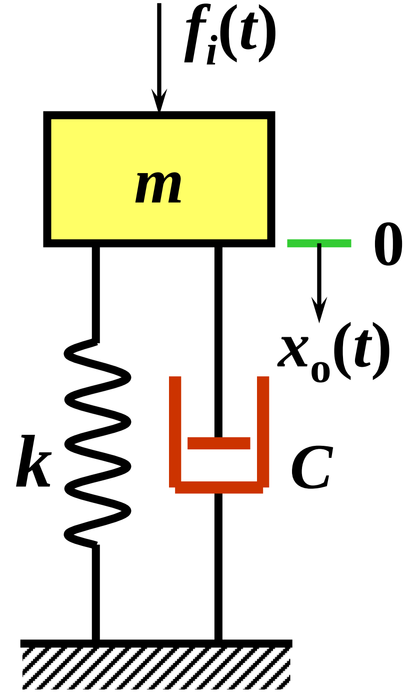
凡是以二阶微分方程作为运动方程的控制系统，称为二阶系统。实际物理问题有很多二阶系统，许多高阶系统在一定条件下可近似为二阶系统来研究。

3.3.1 典型二阶系统的数学模型

$$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x_o(t)+C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_o(t)+kx_o(t)=f_i(t)$$

$$G(S)=\frac{1}{ms^2+Cs+k}=\frac{1/k}{T^2s^2+2\zeta Ts+1}$$

式中， $T=\sqrt{\frac{m}{k}}$ ， $\zeta=\frac{C}{2\sqrt{mk}}$



机械平衡系统

3.3 二阶系统的时间响应

3.3.1 典型二阶系统的数学模型

二阶系统的传递函数的标准形式为：

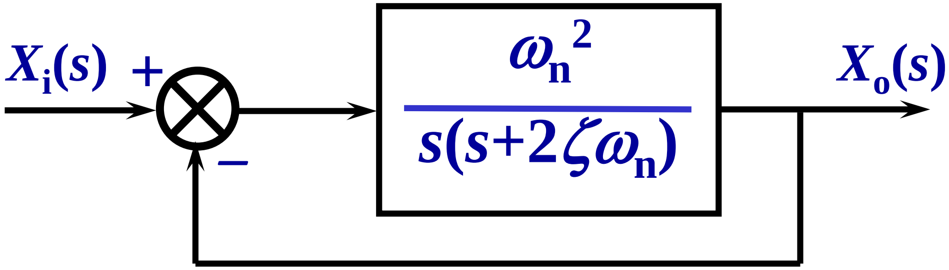
$$G(s)=\frac{1}{T^2s^2+2\zeta Ts+1}=\frac{\omega_n^{\ 2}}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^{\ 2}}$$

其中，T—为时间常数，也称为无阻尼自由振荡周期。

ω_n —自然频率（或无阻尼固有频率）

ζ—阻尼比（相对阻尼系数）

二阶系统的标准形式，相应的方框图如图所示

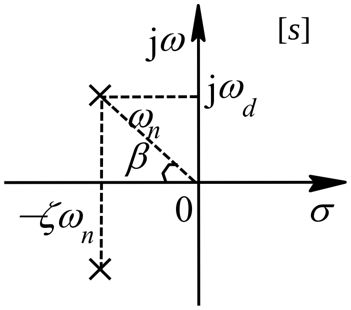


3.3.2 二阶系统的单位阶跃响应

二阶系统的特征方程： $s^2+2\zeta\omega_{\mathrm{n}}s+\omega_{\mathrm{n}}{}^2=0$

特征根为： $s_{1,2}=-\zeta\omega_{\mathrm{n}}\pm\omega_{\mathrm{n}}\sqrt{\zeta^2-1}$

下面分四种情况进行说明：



(1) 欠阻尼 $0<\zeta<1$

$$s_{1,2}=-\zeta\omega_{\mathrm{n}}\pm \mathrm{j}\omega_{\mathrm{n}}\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$=-\sigma\pm \mathrm{j}\omega_{\mathrm{d}}$$

令 $\sigma=\zeta\omega_{\mathrm{n}}$ —衰减系数

$\omega_{\mathrm{d}}=\omega_{\mathrm{n}}\sqrt{1-\zeta^2}$ —阻尼振荡角频率

3.3.2 二阶系统的单位阶跃响应

考虑单位阶跃信号，$X_{\mathrm{i}}(s)=\dfrac{1}{s}$，得

$$X_{\mathrm{o}}(s)=G(s)X_{\mathrm{i}}(s)=\frac{\omega_{\mathrm{n}}{}^{2}}{s^{2}+2\zeta\omega_{\mathrm{n}}s+\omega_{\mathrm{n}}{}^{2}}\cdot\frac{1}{s}$$

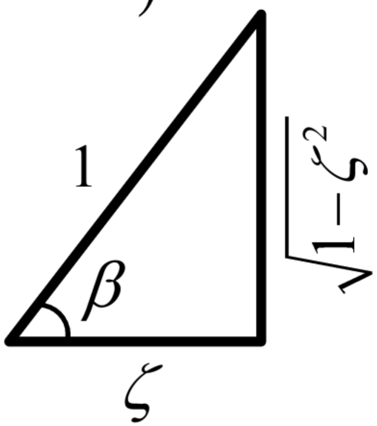
$$=\frac{1}{s}-\frac{s+\zeta\omega_{\mathrm{n}}}{(s+\zeta\omega_{\mathrm{n}})^{2}+\omega_{\mathrm{d}}{}^{2}}-\frac{\zeta\omega_{\mathrm{n}}}{(s+\zeta\omega_{\mathrm{n}})^{2}+\omega_{\mathrm{d}}{}^{2}}$$

$$x_{\mathrm{o}}(t)=1-e^{-\zeta\omega_{\mathrm{n}}t}\left(\cos\omega_{\mathrm{d}}t+\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^{2}}}\sin\omega_{\mathrm{d}}t\right)\qquad(t\geq 0)$$

3.3.2 二阶系统的单位阶跃响应

$$\beta = \arctan\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} = \arccos\zeta = \arcsin\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$x_o(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_d t + \beta) \qquad (t \geq 0)$$



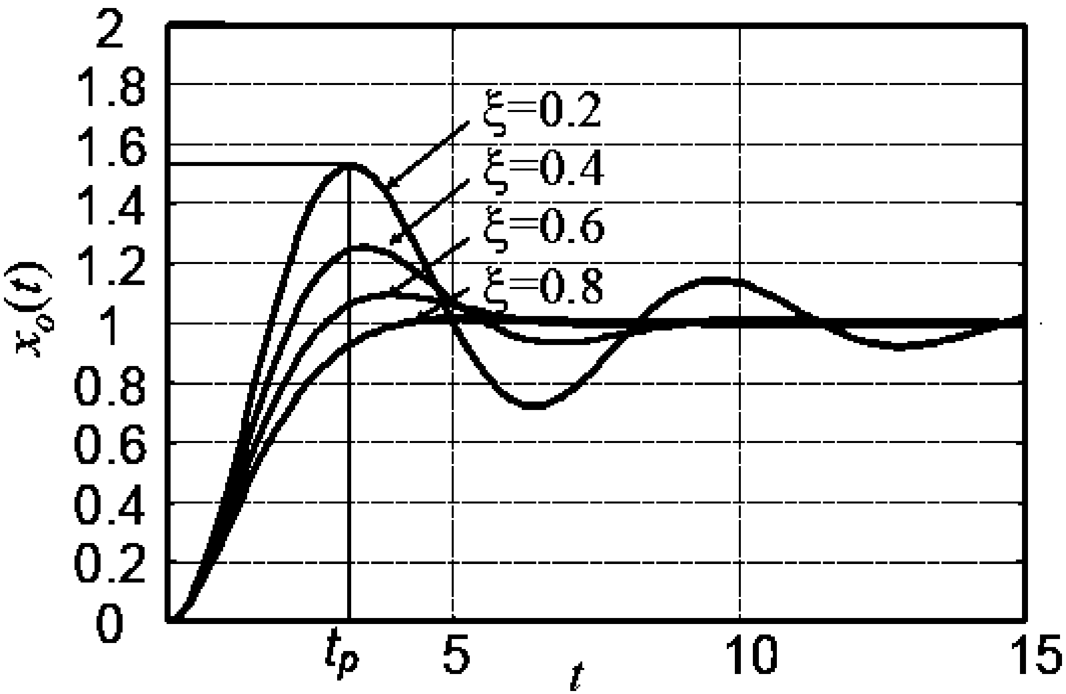
上式表明，系统的响应由稳态分量和瞬态分量组成，稳态分量数值等于1，瞬态分量是一个随时间增长而衰减的振荡过程。

$$\zeta\omega_n = \omega_d\frac{\zeta\omega_n}{\omega_d} = \omega_d\frac{\zeta\omega_n}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = \omega_d\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

欠阻尼二阶系统单位阶跃响应的特点：

瞬态分量为振幅等于 $e^{-\zeta\omega_{\mathrm{n}}t}/\sqrt{1-\zeta^2}$ 的阻尼正弦振荡，其振幅衰减的快慢由 $\zeta\omega_{\mathrm{n}}$ 决定；振荡幅值随 ζ 减小而加大。

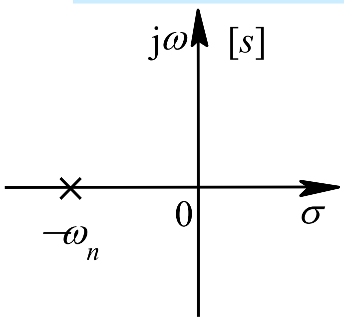
$\zeta\omega_{\mathrm{n}}$ 又称为衰减系数，或将 $1/\zeta\omega_{\mathrm{n}}$ 称为衰减时间常数。



欠阻尼二阶系统单位阶跃响应曲线

(2) 临界阻尼　$\zeta = 1$

$$x_i(t) = 1(t),\quad X_i(s) = \frac{1}{s}$$



$$X_o(s) = \frac{\omega_n^{\ 2}}{(s+\omega_n)^2}\cdot\frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{\omega_n}{(s+\omega_n)^2} - \frac{1}{s+\omega_n}$$

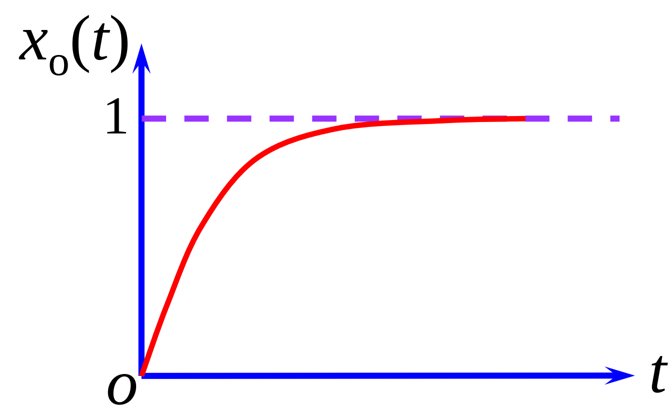
临界阻尼情况下的二阶系统的单位阶跃响应为

$$x_o(t) = 1 - e^{-\omega_n t}\omega_n t - e^{-\omega_n t} = 1 - e^{-\omega_n t}(1+\omega_n t) \qquad t \ge 0$$

特点：

※ 单调上升，无振荡、无超调

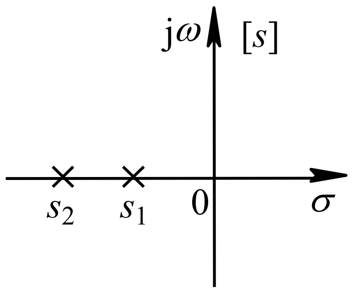
※ $\boldsymbol{x_o(\infty) = 1}$，无稳态误差。



3.3.2 二阶系统的单位阶跃响应

(3) 过阻尼　　$\zeta > 1$

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_{\mathrm{n}} \pm \omega_{\mathrm{n}}\sqrt{\zeta^2 - 1}$$



$$X_{\mathrm{o}}(s) = \frac{\omega_{\mathrm{n}}^{\ 2}}{(s-s_1)(s-s_2)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{\omega_{\mathrm{n}}^{\ 2}}{[s+\omega_{\mathrm{n}}(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})][s+\omega_{\mathrm{n}}(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})]s}$$

$$= \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s+\omega_{\mathrm{n}}(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})} + \frac{A_3}{s+\omega_{\mathrm{n}}(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})}$$

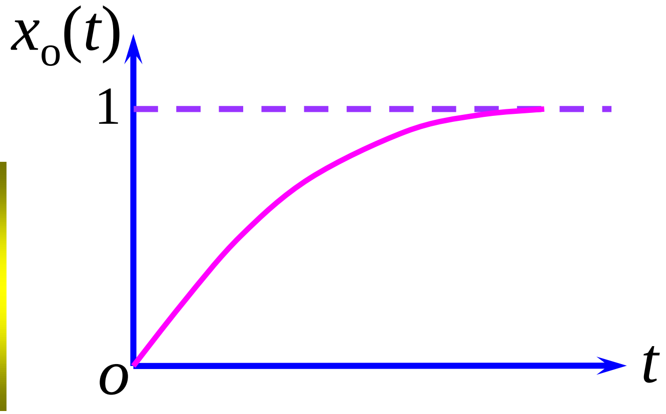
$$A_1 = 1 \qquad A_2 = \frac{-1}{2\sqrt{\xi^2-1}(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})}$$

$$A_3 = \frac{1}{2\sqrt{\xi^2-1}(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})}$$

3.3.2 二阶系统的单位阶跃响应

$$x_o(t)=1-\frac{1}{2\sqrt{\zeta^2-1}\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)}e^{-\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n t}$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{\zeta^2-1}\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)}e^{-\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n t}\qquad\left(t\ge 0\right)$$

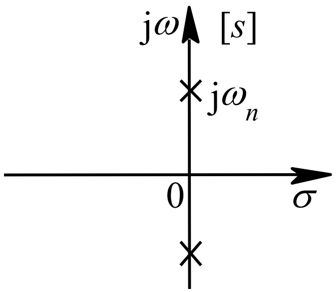


特点:

※单调上升，无振荡，过渡过程时间长

※ $x_o(\infty)=1$，无稳态误差。

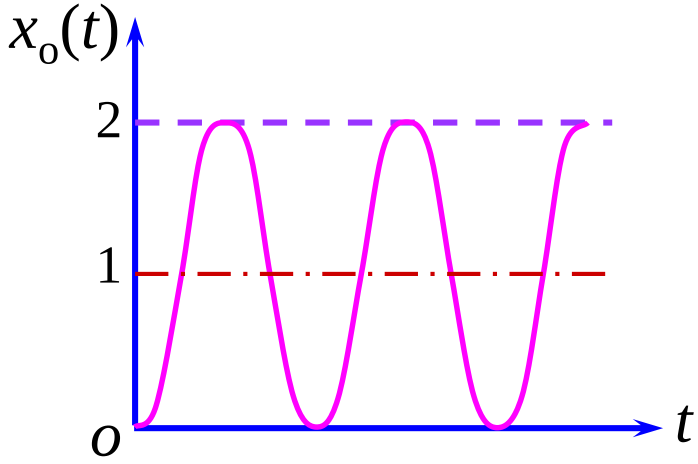
(4) 无阻尼（$\zeta=0$）状态



系统有一对共轭虚根 $s_{1,2}=\pm \mathrm{j}\omega_\mathrm{n}$

系统在无阻尼下的单位阶跃响应为：

$$x_\mathrm{o}(t)=1-\cos\omega_\mathrm{n}t \qquad (t\geq 0)$$



特点：

频率为 ω_n 的等幅震荡。

3.3.3 二阶系统的单位脉冲响应

当输入量$x_i(t)$为单位脉冲信号时，$X_i(s)=1$，二阶系统的单位脉冲响应为

$$X_o(s)=G(s)X_i(s)=\frac{\omega_n^{\ 2}}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^{\ 2}}$$

取拉氏反变换，得到其时间响应$x_o(t)$。

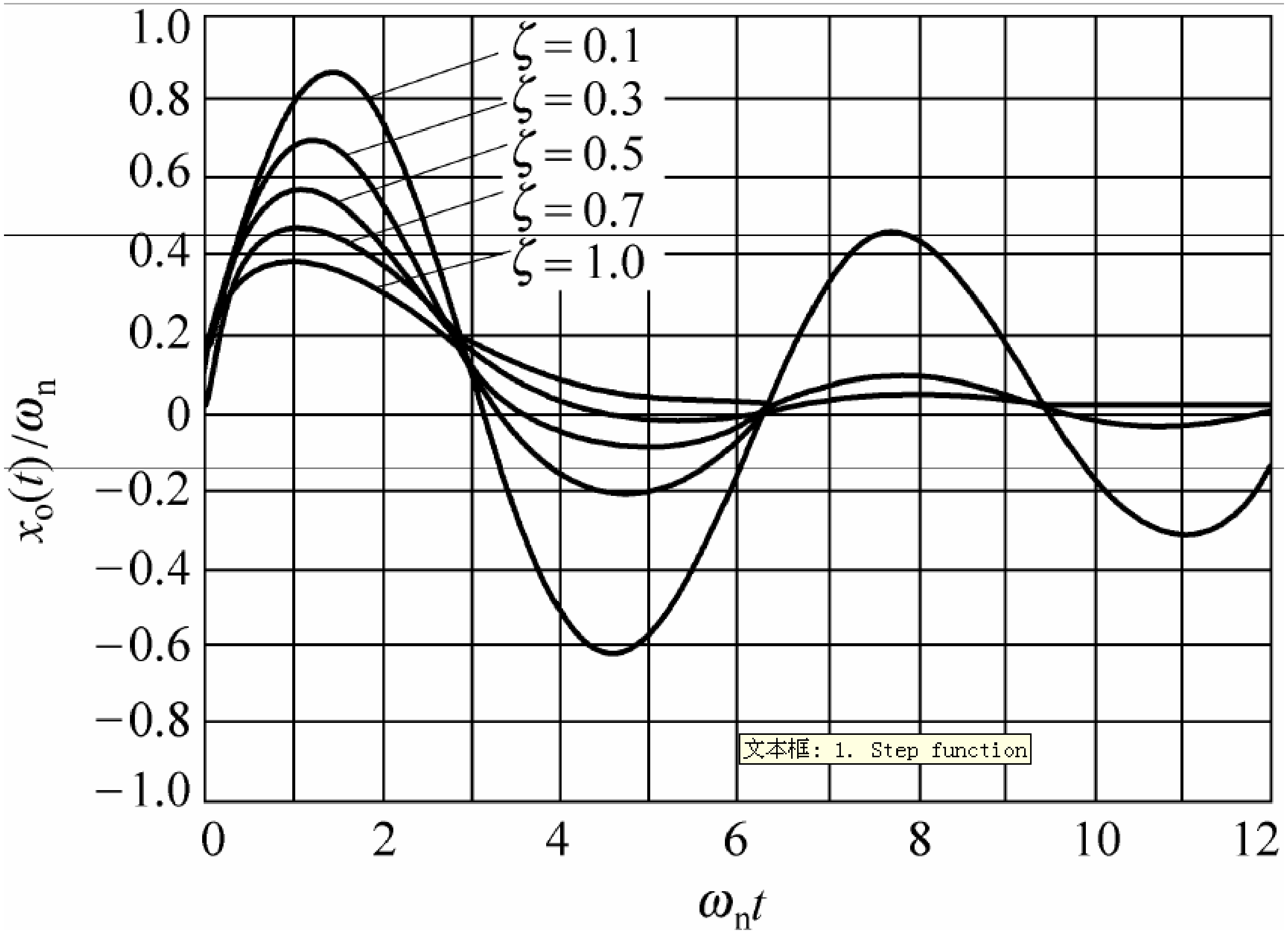
(1) 欠阻尼 $0<\zeta<1$

$$x_o(t)=\frac{\omega_n}{\sqrt{\zeta^2-1}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin\omega_d t \quad , \qquad (t\geq 0)$$

(2) 无阻尼（$\zeta=0$）状态

$$x_o(t)=\omega_n\sin\omega_n t \quad , \qquad (t\geq 0)$$

3.3.3 二阶系统的单位脉冲响应



欠阻尼二阶系统的单位脉冲响应曲线

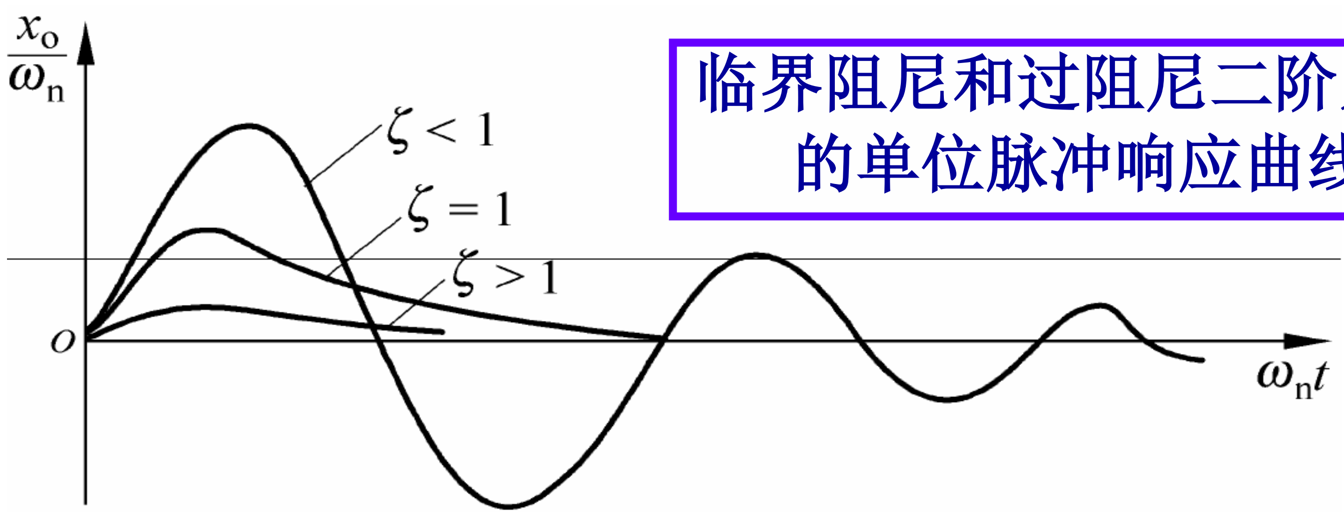
3.3.3 二阶系统的单位脉冲响应

(3) 临界阻尼 $\zeta = 1$

$$x_{\mathrm{o}}(t) = \omega_{\mathrm{n}}^2 t e^{-\omega_{\mathrm{n}} t}, \qquad (t \geq 0)$$

(4) 过阻尼 $\zeta > 1$

$$x_{\mathrm{o}}(t) = \frac{\omega_{\mathrm{n}}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}}\left[e^{-\left(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_{\mathrm{n}} t} - e^{-\left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_{\mathrm{n}} t}\right], \quad (t \geq 0)$$



临界阻尼和过阻尼二阶系统的单位脉冲响应曲线

结论

二阶系统的阻尼比ζ决定了其振荡特性：

$\zeta<0$时，系统响应发散，系统不稳定

$\zeta\geqslant 1$时，无振荡、无超调，过渡过程长

$0<\zeta<1$时，有振荡，ζ愈小，振荡愈严重，但响应愈快

$\zeta=0$时，出现等幅振荡

3.3 二阶系统的时间响应

例题： 已知系统的传递函数为 $G(s)=\dfrac{2s+1}{s^2+2s+1}$ ，

试求系统的单位阶跃响应和单位脉冲响应。

解：(1) 当输入量为单位阶跃信号时，$x_i(t)=1(t)$，$X_i(s)=1/s$，该二阶系统的单位阶跃响应为

$$X_o(s)=G(s)X_i(s)=\frac{2s+1}{s(s^2+2s+1)}=\frac{1}{s}+\frac{1}{(s+1)^2}-\frac{1}{s+1}$$

取拉氏反变换，得到其时间响应$x_o(t)$。

$$x_o(t)=L^{-1}\left[X_o(s)\right]=1+te^{-t}-e^{-t}$$

(2) 当输入量为单位脉冲信号时，$x_i(t)=\delta(t)$，$X_i(s)=1$，该二阶系统的单位脉冲响应为

$$X_o(s)=G(s)X_i(s)=\frac{2s+1}{s^2+2s+1}=\frac{2}{s+1}-\frac{1}{(s+1)^2}$$

取拉氏反变换，得到其时间响应$x_o(t)$。

$$x_o(t)=L^{-1}\left[X_o(s)\right]=2e^{-t}-te^{-t}$$

另：由于$\delta(t)$ =d[1(t)]/dt，根据线性定常系统时间响应的性质，如果系统的输入信号存在微分关系，则系统的时间响应也存在对应的微分关系，得到

$$x_o(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(1+te^{-t}-e^{-t}\right)=2e^{-t}-te^{-t}$$