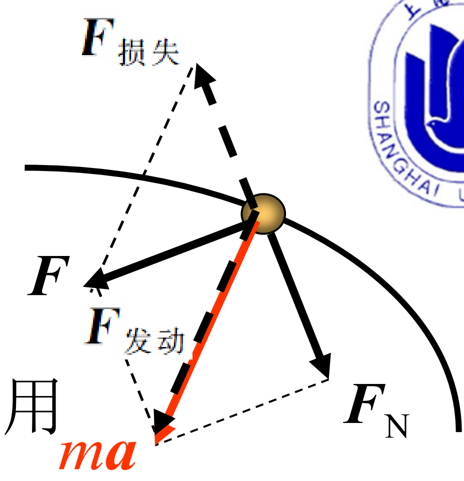
动力学

8.4 动静法

1 达朗贝尔原理



质量为m的质点，受外力$\boldsymbol{F}$与约束力$\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}}$作用

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{N}}$$

达朗贝尔认为外力可以分解为主动力和损失力

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_{发动} + \boldsymbol{F}_{损失}$$

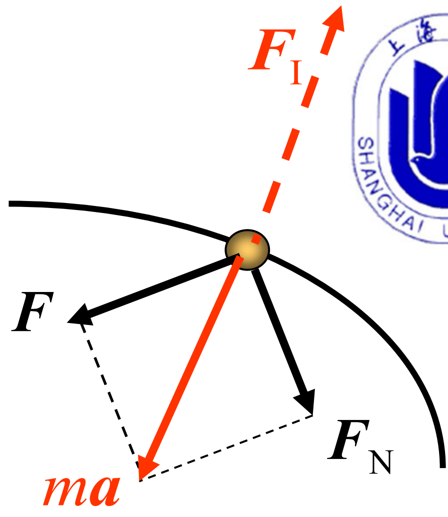
主动力产生加速度　　$\boldsymbol{F}_{发动} = m\boldsymbol{a}$

损失力与约束力平衡　　$\boldsymbol{F}_{损失} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{N}} = \boldsymbol{0}$

达朗贝尔原理: 在质点运动的每一瞬间，作用在质点上的损失力，被约束反力所平衡。

动力学

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{F}_{损失} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{N}} &= \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{F} &= \boldsymbol{F}_{发动} + \boldsymbol{F}_{损失} \\ \boldsymbol{F}_{发动} &= m\boldsymbol{a} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{F} + (-m\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{F}_{\mathrm{N}} = \boldsymbol{0}$$



引入(达朗贝尔)惯性力，大小为质量与加速度乘积，方向与加速度相反

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}} = -m\boldsymbol{a}$$

则

$$\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{N}} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{I}} = \boldsymbol{0}$$

在质点运动的每一瞬间，作用在质点上的主动力、约束反力和惯性力在形式上构成一平衡力系。

达朗贝尔惯性力不同于非惯性系中的惯性力(有真实效应)。

动力学

考虑由n个质量为m_k (k=1,2, ...,n)的质点构成的质点系，质点m_k受外力 $\boldsymbol{F}_k^{(e)}$ 和内力 $\boldsymbol{F}_k^{(i)}$。在每个质点上引入虚拟的惯性力 $\boldsymbol{F}_{Ik}=-m_k\boldsymbol{a}_k$。则

$$\boldsymbol{F}_k^{(e)} + \boldsymbol{F}_k^{(i)} + \boldsymbol{F}_{Ik} = \boldsymbol{0}$$

所有内力都是以大小相等、方向相反的形式成对出现，为一平衡力系。因此研究质点系时可以忽略不计内力。

达朗贝尔原理: 质点系运动的任意瞬时，作用在质点系上的外力和质点的惯性力形式上构成一平衡力系。

2 动静法

通过对每个质点引入虚拟的惯性力可以将质点系运动转化为一个平衡问题

平衡的充分必要条件

$$\boldsymbol{F}_R=\sum_{k=1}^{n}\left(\boldsymbol{F}_k^{(\mathrm{e})}+\boldsymbol{F}_k^{(\mathrm{i})}+\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}k}\right)=\boldsymbol{0},$$

$$\boldsymbol{M}_O=\sum_{k=1}^{n}\left(\boldsymbol{M}_O\left(\boldsymbol{F}_k^{(\mathrm{e})}\right)+\boldsymbol{M}_O\left(\boldsymbol{F}_k^{(\mathrm{i})}\right)+\boldsymbol{M}_O\left(\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}k}\right)\right)=\boldsymbol{0}$$

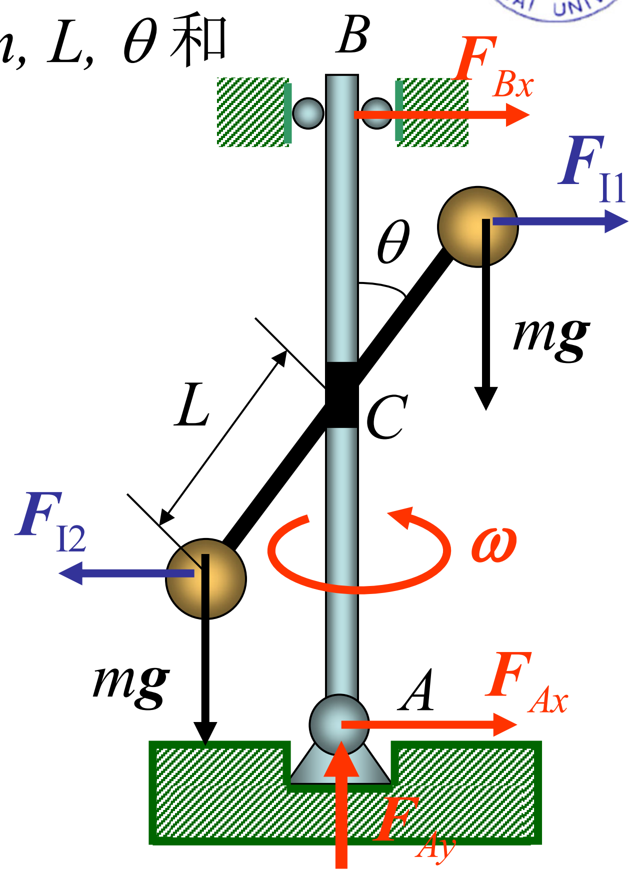
故

$$\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{F}_k^{(\mathrm{e})}+\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}k}=\boldsymbol{0},\ \sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{M}_O\left(\boldsymbol{F}_k^{(\mathrm{e})}\right)+\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{M}_O\left(\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}k}\right)=\boldsymbol{0}$$

动力学

例 34

在如图所示的系统中, $AB=h$, $AC=h/2$, 已知 m, L, θ 和 ω， 计算轴承在A和B处的约束反力。



解: 研究系统， 加入惯性力。

$$F_{I1}=F_{I2}=ma=mL\omega^2\sin\theta$$

应用平衡方程

$$\sum F_x=0: \quad F_{Bx}+F_{Ax}+F_{I1}-F_{I2}=0$$

$$\sum F_y=0: \quad F_{Ay}-2mg=0$$

$$\sum M_A=0: \quad -F_{Bx}h-F_{I1}(0.5h+L\cos\theta)-mgL\sin\theta$$
$$+F_{I2}(0.5h-L\cos\theta)+mgL\sin\theta=0$$

求解未知量

$$F_{Ax}=\frac{mL\omega^2\sin 2\theta}{h},\ F_{Ay}=2mg,\ F_{Bx}=-\frac{mL\omega^2\sin 2\theta}{h}$$

3 质点系惯性力的简化

惯性力系的主矢

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}R}=\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}k}=-\sum_{k=1}^{n}m_k\boldsymbol{a}_k=-m\boldsymbol{a}_C=-\dot{\boldsymbol{p}}$$

惯性力系对定点O的主矩

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{I}O}=\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{M}_O\left(\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}k}\right)=-\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{r}_k\times m_k\boldsymbol{a}_k=-\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{r}_k\times m_k\dot{\boldsymbol{v}}_k=-\dot{\boldsymbol{L}}_O$$

因此

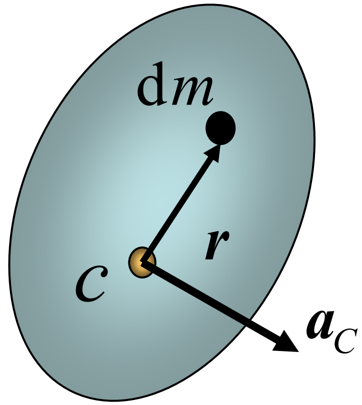
$$\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{F}_k^{(\mathrm{e})}-\dot{\boldsymbol{p}}=\boldsymbol{0},\ \sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{M}_O\left(\boldsymbol{F}_k^{(\mathrm{e})}\right)-\dot{\boldsymbol{L}}_O=\boldsymbol{0}$$

因此动静法分别与动量定理和动量矩定理等价。

惯性力系对动点A的主矩

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{I}A}=-\left(\dot{\boldsymbol{L}}_A+\boldsymbol{v}_A\times\boldsymbol{p}\right)$$

4 刚体惯性力向质心简化



➢ 平移刚体

主矢

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{IR}} = \int_M \mathrm{d}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}} = -\int_M \boldsymbol{a}\,\mathrm{d}m = -m\boldsymbol{a}_C$$

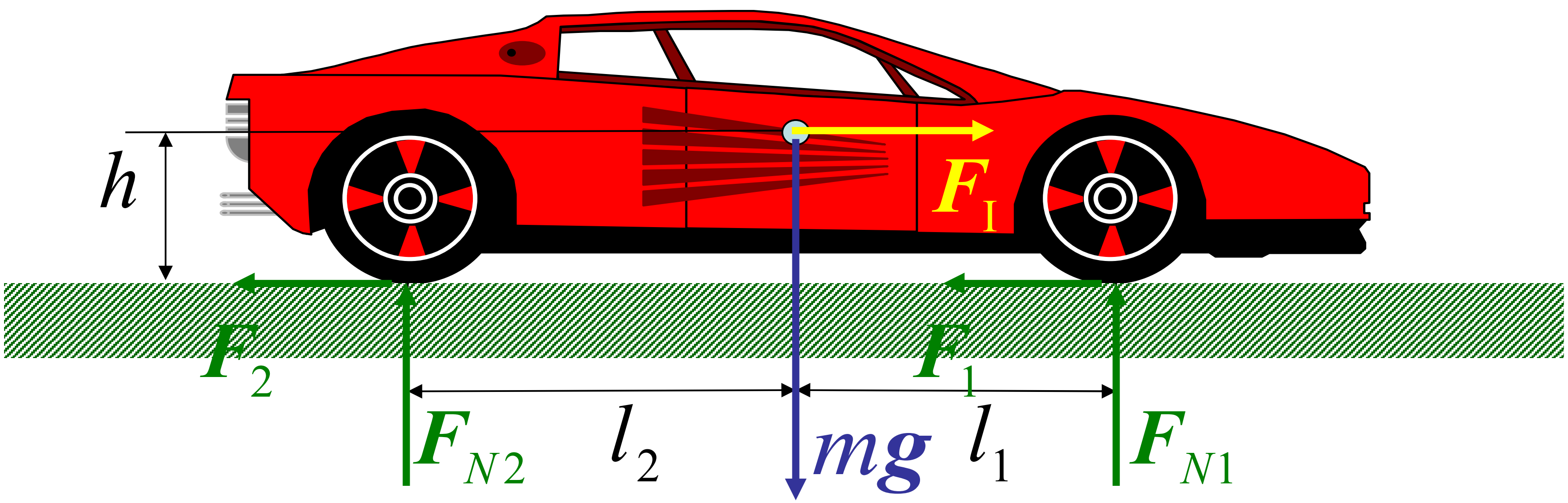
关于质心的主矩

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{I}C} = \int_M \boldsymbol{M}_C(\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}i}) = -\int_M \boldsymbol{r}\times\mathrm{d}m\boldsymbol{a}_C = -\underbrace{\int_M \boldsymbol{r}\,\mathrm{d}m}_{=0}\times\boldsymbol{a}_C = \boldsymbol{0}$$

动力学

减速汽车

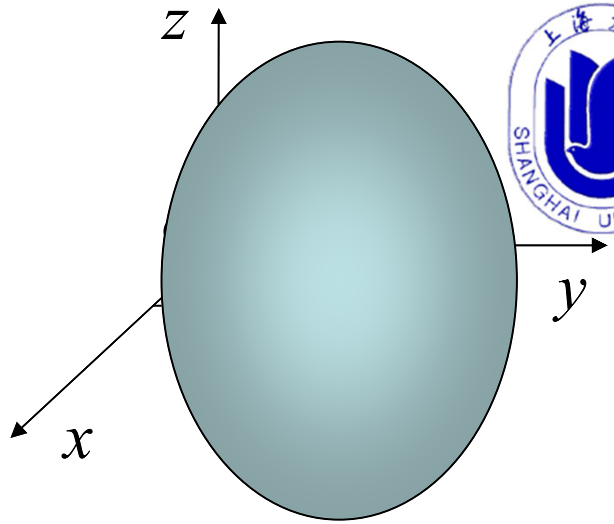
- 后轮打滑
- 前轮下沉



$$\sum M_2 = 0, \quad F_{N1}(l_1 + l_2) - mgl_2 - F_I h = 0 \quad F_{N1} = \frac{mgl_2 + F_I h}{l_1 + l_2}$$

$$\sum M_1 = 0, \quad -F_{N2}(l_1 + l_2) + mgl_1 - F_I h = 0 \quad F_{N2} = \frac{mgl_1 - F_I h}{l_1 + l_2}$$

动力学

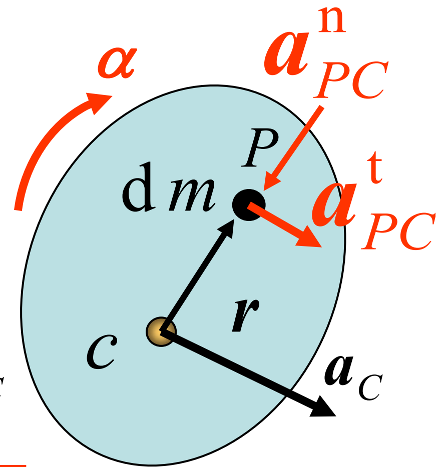


➢ 平面运动刚体

主矢

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{IR}} = \int_M \mathrm{d}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}} = -\int_M \boldsymbol{a}\,\mathrm{d}m = -m\boldsymbol{a}_C$$

关于质心的主矩



$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{IC}} = \int_M \boldsymbol{M}_C(\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{\mathrm{IP}}) = -\int_M \boldsymbol{r}\times\mathrm{d}m(\boldsymbol{a}_C + \boldsymbol{a}_{PC}^{\mathrm{t}} + \boldsymbol{a}_{PC}^{\mathrm{n}})$$

$$= \underbrace{-\int_M \boldsymbol{r}\,\mathrm{d}m\times\boldsymbol{a}_C}_{=\mathbf{0}} - \int_M \boldsymbol{r}\,\mathrm{d}m\times\boldsymbol{a}_{PC}^{\mathrm{t}} \underbrace{- \int_M \boldsymbol{r}\,\mathrm{d}m\times\boldsymbol{a}_{PC}^{\mathrm{n}}}_{=\mathbf{0}}$$

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{IC}} = -\int_M \boldsymbol{r}\,\mathrm{d}m\times\boldsymbol{a}_{PC}^{\mathrm{t}} = -\int_M \boldsymbol{r}\,\mathrm{d}m\times(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{r}) = -\left(\int_M r^2\,\mathrm{d}m\right)\boldsymbol{\alpha}\ \boxed{= -J_C\alpha}$$

$$\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\alpha})$$

动力学

➢ 平面运动刚体

简化点：	质　心C	定轴转动O
主矢	$\boldsymbol{F}_{\mathrm{IR}}=-m\boldsymbol{a}_C$	$\boldsymbol{F}_{\mathrm{IR}}=-m\boldsymbol{a}_C$
主矩	$\boldsymbol{M}_{\mathrm{I}C}=-J_C\alpha$	$\boldsymbol{M}_{\mathrm{I}O}=-J_O\alpha$

动力学

例 35

质量为半径为的圆盘在水平面上无滑滚动。圆盘存在质量偏心为e，对质心的回转半径为ρ，在图示瞬间，角速度为ω，求该时刻的角加速度。

解: 以圆盘为研究对象 $F_{\mathrm{IO}} = mR\alpha$

$F_{CO}^{\mathrm{t}} = me\alpha \quad F_{CO}^{\mathrm{n}} = me\omega^2 \quad M_{\mathrm{IC}} = m\rho^2\alpha$

$$\boldsymbol{F}_I = -m\boldsymbol{a}_C = -m(\boldsymbol{a}_O + \boldsymbol{a}_{CO}^{\mathrm{t}} + \boldsymbol{a}_{CO}^{\mathrm{n}})$$

$$= \mathbf{F}_{\mathrm{I}O} + \mathbf{F}_{\mathrm{I}CO}^{\mathrm{t}} + \mathbf{F}_{\mathrm{I}CO}^{\mathrm{n}}$$

$$\sum M_A(\boldsymbol{F}) = 0 \qquad \alpha = \frac{e(g+\omega^2 R)}{\rho^2 + R^2 + e^2}$$

$$F_{\mathrm{I}O}R + F_{\mathrm{I}CO}^{\mathrm{t}}e - F_{\mathrm{I}CO}^{\mathrm{n}}R + M_{\mathrm{IC}} - mge = 0$$

$$mR^2\alpha + me^2\alpha - me\omega^2 R + m\rho^2\alpha - mge = 0$$