工 程 控 制 原 理

4. 频 率 特 性 分 析

4.6 闭环频率特性与频域性能指标

主讲：李敏

4.6 闭环频率特性与频域性能指标

利用闭环频率特性的一些特征量(如峰值和频带等)，可以对系统动态过程的平稳性和快速性作进一步分析和估算。

4.6.1 闭环频率特性

单位反馈控制系统的闭环传递函数为

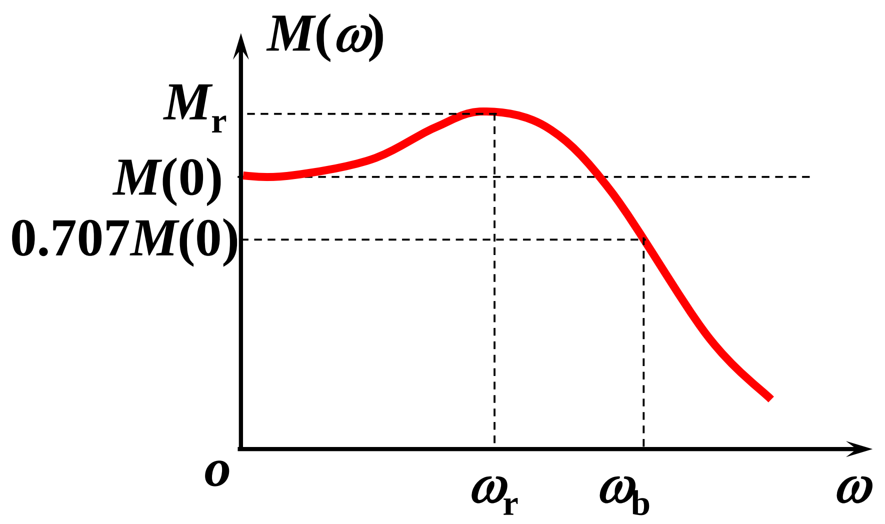
$$\Phi(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)}$$

其闭环频率特性为

$$\Phi(\mathrm{j}\omega)=\frac{G(\mathrm{j}\omega)}{1+G(\mathrm{j}\omega)} \qquad A(\omega)=\frac{|G(\mathrm{j}\omega)|}{|1+G(\mathrm{j}\omega)|}$$

4.6.2 频率特性的特征量

闭环系统的动态频域指标主要是依据其幅频特性提出来的。下图是典型反馈控制系统的闭环幅频特性曲线$M(\omega)$，它在低频段的变化比较缓慢，随着频率的升高，将出现谐振峰值，继而以较大的坡度衰减至零。

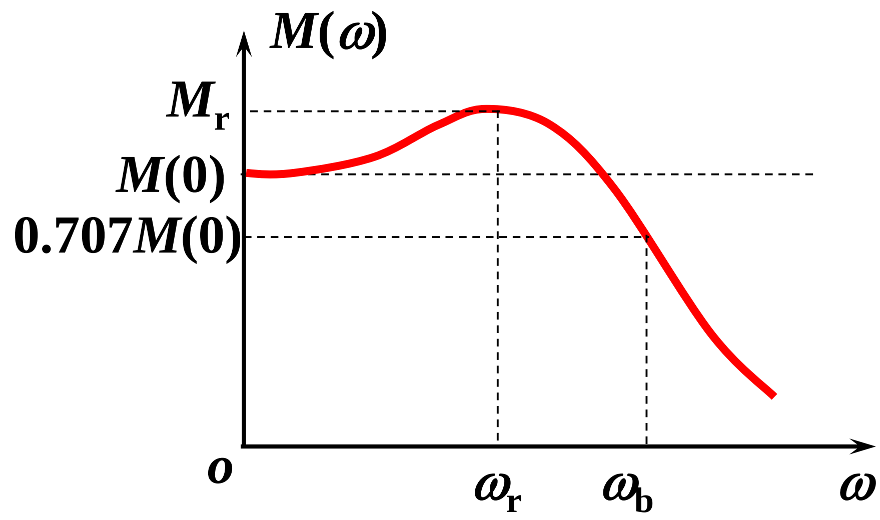


4.6.2 频率特性的特征量

(1) 零频幅值$M(0)$

频率接近于零时，系统输出幅值与输入幅值之比。

当 $\omega \to 0$ 时，若幅频值$M(0)=1$时，则输出信号幅值能完全准确地反映输入信号的幅值。

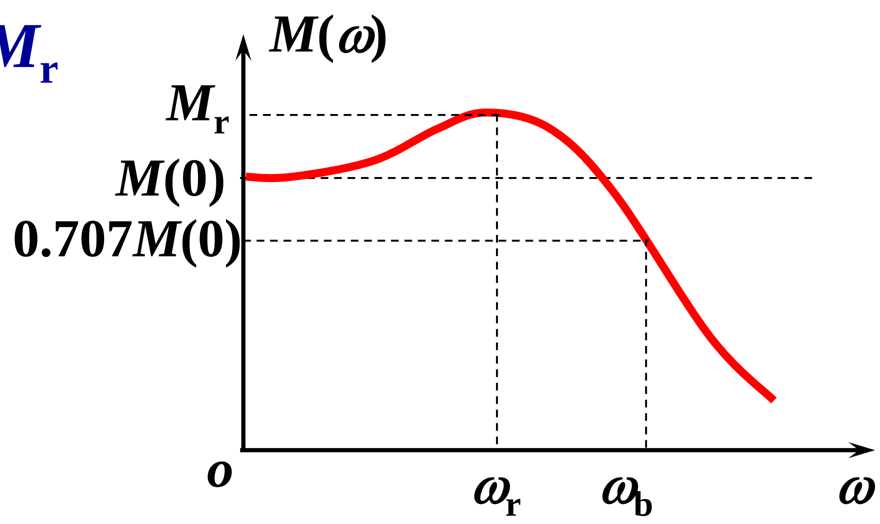


零频幅值$M(0)$越接近于1，系统的稳态误差就越小。

4.6.2 频率特性的特征量

(2) 谐振频率ω_r及谐振峰值M_r

M的最大值M_r称作**谐振峰值**，在谐振峰值处的频率ω_r称为**谐振频率**。



二阶系统的谐振频率及谐振频率

$$\omega_r=\omega_n\sqrt{1-2\xi^2} \qquad M_r=\frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}},\quad 0\le\xi\le\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 0.707$$

M_r 主要反映闭环系统的**相对稳定性**。谐振峰值越大，闭环系统的振荡越严重，系统稳定性就越差。

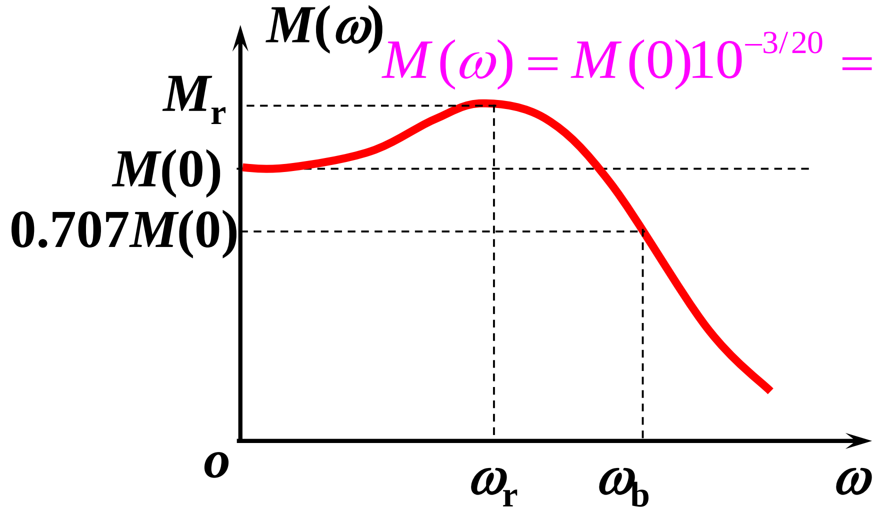
4.6.2 频率特性的特征量

(3)截止频率ω_b及带宽

$$20\lg M(\omega)=20\lg M(0)-3\ \text{dB}$$

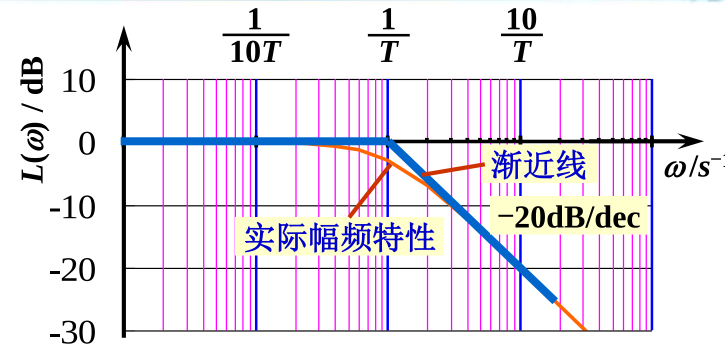
$$M(\omega)=M(0)10^{-3/20}=M(0)/\sqrt{2}$$

当闭环对数幅频特性的幅值下降到零频率值以下3分贝时，对应的频率称为**截止频率**。即$M(\omega)$衰减到$0.707M(0)$时对应的频率。截止频率表示闭环系统的工作频率范围 $0\sim\omega_b$ (带宽)。ω_b越大，闭环系统对输入的响应就越快，即调整时间越短。



闭环系统的幅值不低于-3分贝时，对应的频率范围称为系统的**带宽**。带宽表示了这样一个频率，从此频率开始，增益将从其低频时的幅值开始下降。

4.6.3 一阶系统的频域性能指标



一阶系统的传递函数 $\Phi(s)=\dfrac{1}{Ts+1}$

一阶系统的频率特性 $\Phi(\mathrm{j}\omega)=\dfrac{1}{\mathrm{j}T\omega+1}=\dfrac{1}{\sqrt{T^2\omega^2+1}}e^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}$

幅频特性 $A(\omega)=\dfrac{1}{\sqrt{T^2\omega^2+1}}$ 相频特性 $\varphi(\omega)=-\arctan T\omega$

零频幅值 $M(0)=A(0)=1$

$$M(\omega_b)=\frac{1}{\sqrt{T^2\omega_b^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=0.707$$

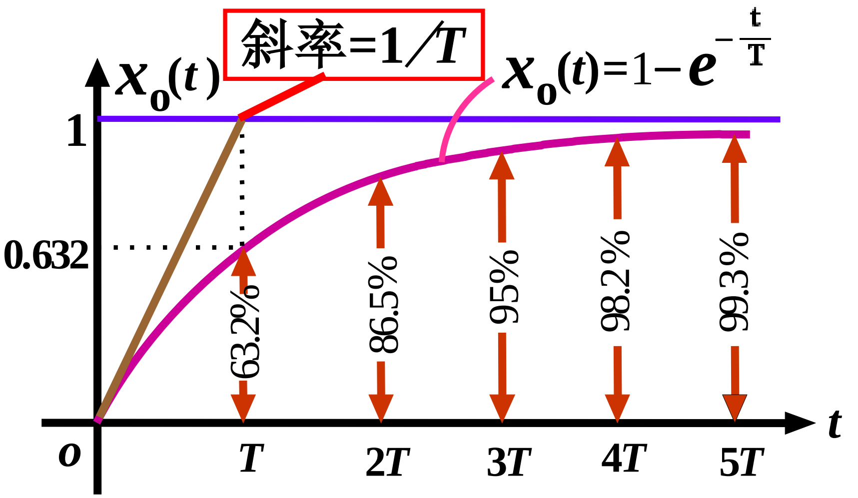
截止频率

$\omega_b=1/T$

4.6.3 一阶系统的频域性能指标

一阶系统的单位阶跃响应 $x_o(t)=1-e^{-\frac{1}{T}t}$

对无超调系统，上升时间 t_r 一般定义为响应曲线从稳态值的10%上升到90%所需的时间。



$$t_{10\%}=-\ln(1-10\%)\cdot T=0.1T$$

$$t_{90\%}=-\ln(1-90\%)\cdot T=2.3T$$

上升时间 $t_r=t_{90\%}-t_{10\%}=2.2T=2.2/\omega_b$

调整时间 $t_s=(3\sim4)T=(3\sim4)/\omega_b$

一阶系统的性能指标

4.6.4 二阶系统的频域性能指标

欠阻尼二阶系统
$(0<\zeta<1)$

二阶系统的传递函数 $\Phi(s)=\dfrac{\omega_n^{\ 2}}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^{\ 2}}$

幅频特性 $M(\omega)=\dfrac{\omega_{\mathrm{n}}^2}{\sqrt{\left(\omega_{\mathrm{n}}^2-\omega^2\right)^2+\left(2\zeta\omega_{\mathrm{n}}\omega\right)^2}}$

零频幅值 $M(0)=A(0)=1$

令 $\dfrac{\mathrm{d}M(\omega)}{\mathrm{d}\omega}=0$，可得系统存在的谐振频率 ω_r 及谐振峰值 M_r：

$(\zeta<0.707)$

$$\omega_{\mathrm{r}}=\omega_{\mathrm{n}}\sqrt{1-2\zeta^2}$$

$$M_{\mathrm{r}}=1/\left(2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}\right)$$

4.6.4 二阶系统的频域性能指标

由截止频率定义

$$M(\omega_{\mathrm{b}})=\frac{\omega_{\mathrm{n}}^{2}}{\sqrt{\left(\omega_{\mathrm{n}}^{2}-\omega_{\mathrm{b}}\right)^{2}+\left(2\zeta\omega_{\mathrm{n}}\omega_{\mathrm{b}}\right)^{2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=0.707$$

得欠阻尼二阶振荡系统的截止频率

$$\omega_{\mathrm{b}}=\omega_{\mathrm{n}}\sqrt{(1-2\zeta^{2})+\sqrt{(1-2\zeta^{2})^{2}+1}}$$

欠阻尼二阶振荡系统的上升时间和调整时间

$$t_{\mathrm{r}}=\frac{\pi-\beta}{\omega_{\mathrm{n}}\sqrt{1-\zeta^{2}}}\qquad\left(\beta=\arctan\frac{\sqrt{1-\zeta^{2}}}{\zeta}\right)$$

$$t_{\mathrm{s}}=\frac{3}{\zeta\omega_{\mathrm{n}}}\quad(\Delta=5\%)$$

带宽指标决定因素

对输入信号的再现能力：

大的带宽相应于小的上升时间，即相应于快速特性。粗略地说，带宽与响应速度成反比

对高频噪声必要的滤波特性。

为了使系统能够精确地跟踪任意输入信号，系统必须具有大的带宽。但是，从噪声的观点来看，带宽不应当太大。（门不能太大不然的话，什么东西都进来了）因此，对带宽的要求是矛盾的，好的设计通常需要折衷考虑。具有大带宽的系统需要高性能的元件，因此，元件的成本通常随着带宽的增加而增大。