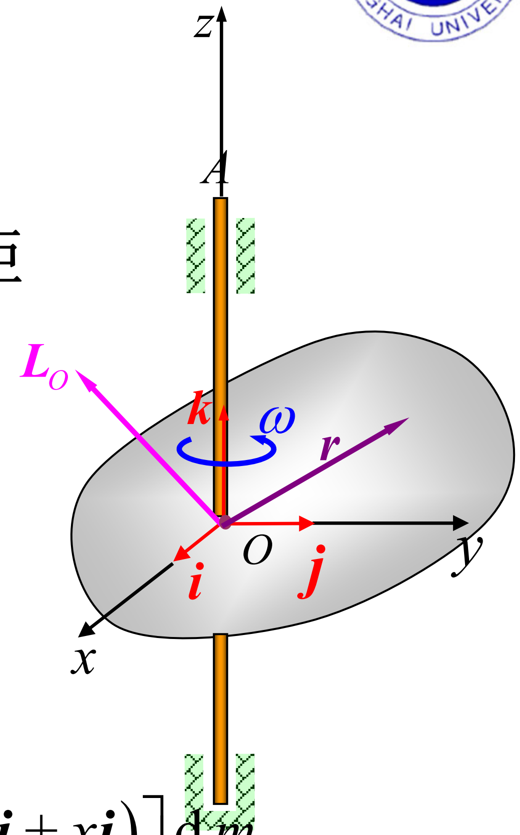
8.2 刚体动力学

1 刚体的转动惯量和惯性积

(1) 定轴转动刚体关于定轴上一点的动量矩



引入坐标系$Oxyz$，设$\boldsymbol{\omega}=\omega\boldsymbol{k}$

刚体上任意一点 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}=\omega\boldsymbol{k}\times\left(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}\right)=\omega\left(-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}\right)$$

动量矩

$$\boldsymbol{L}_O=\int_M \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}m=\int_M\left(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}\right)\times\left[\omega\left(-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}\right)\right]\mathrm{d}m$$

$$=\int_M\omega\left[-xz\boldsymbol{i}-yz\boldsymbol{j}+\left(x^2+y^2\right)\boldsymbol{k}\right]\mathrm{d}m=-J_{xz}\,\omega\boldsymbol{i}-J_{yz}\,\omega\boldsymbol{j}+J_z\,\omega\boldsymbol{k}$$

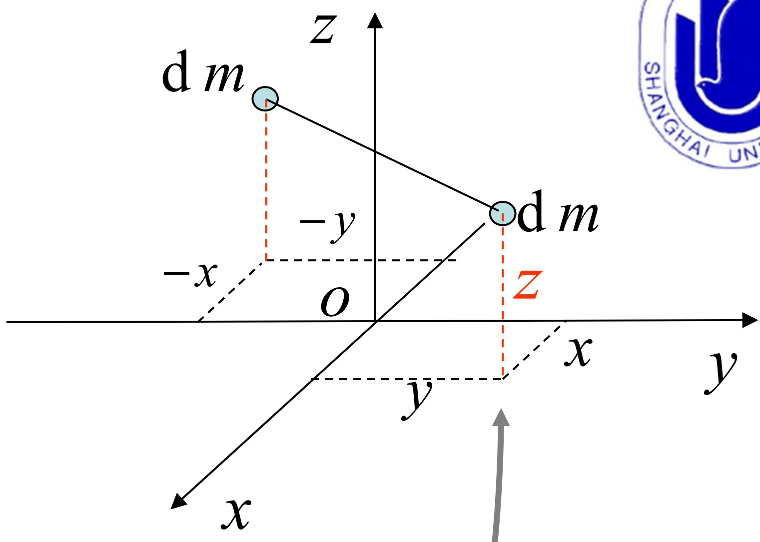
转动惯量

$$J_z=\int_M\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}m$$

惯性积

$$J_{xz}=\int_M xz\,\mathrm{d}m \qquad J_{xz}=\int_M yz\,\mathrm{d}m$$

(2) 刚体的主轴



当且仅当J_{xz}=0和J_{yz}=0时，$\boldsymbol{L}_O$与$\boldsymbol{\omega}$方向相同。

$$\boldsymbol{L}_O = J_z \boldsymbol{\omega}$$

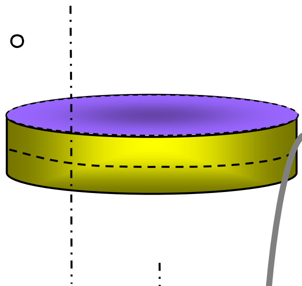
若J_{xz}=0和J_{yz}=0，称z为刚体的主轴。

$$J_{xz} = \int_M xz\,\mathrm{d}\,m$$

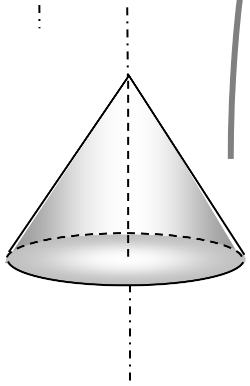
$$J_{xz} = \int_M yz\,\mathrm{d}\,m$$

常见主轴

- 垂直质量对称面
  $(x,y,z) \Longleftrightarrow (x,y,-z)$



- 对称轴
  $(x,y,z) \Longleftrightarrow (-x,-y,\ z)$



可以证明刚体上任意点存在三根正交主轴

过质心的惯量主轴→中心惯量主轴

(3) 转动惯量

$$J_z = \int_M \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}\, m$$

转动惯量表达了关于物体绕轴线质量的分布信息。 转动惯量是旋转惯性的量度,它是由于质量绕轴的径向分布产生的对旋转速度改变的抵抗。

若刚体质量离散分布, 则

$$J_z = \sum m_{ii} \left(x_i^2 + y_i^2\right)$$

将转动惯量的值除以质量 然后计算这个商值的平方根, 就可得到工程应用问题中的回转半径

$$\rho_z = \sqrt{\frac{J_z}{m}}$$

动力学

确定转动惯量的基本方法基于该概念的定义。这种方法适用于所有具有**规则几何形状的均质刚体**。

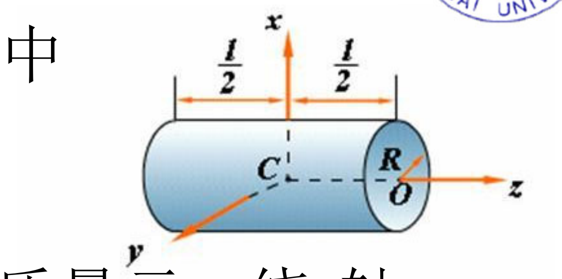
$$J_z = \int_V \rho \left(x^2 + y^2 \right) \mathrm{d}V$$

复合体的转动惯量是所有单个元件绕同一个固定轴转动惯量的总和。为方便处理，将复合体定义为正量和负量。负量的转动惯量，如去掉材料以形成空穴，必须作为负数量处理。

动力学

例 16

计算一个质量为m半径为R的均质右旋的圆柱对中心轴的转动惯量和回转半径。



解: 在半径为r处取厚度为dr的一层圆筒作为质量元。绕z轴的转动惯量为

$$J_z = \int_V \rho r^2 \,\mathrm{d}V = \int_0^R \rho r^2 \cdot 2\pi r \cdot l \,\mathrm{d}r = 2\pi\rho l \left(\frac{1}{4} r^4\right)\Bigg|_0^R = \frac{1}{2}\pi\rho l R^4$$

其中ρ为圆柱密度, 则

$$J_z = \frac{1}{2} m R^2$$

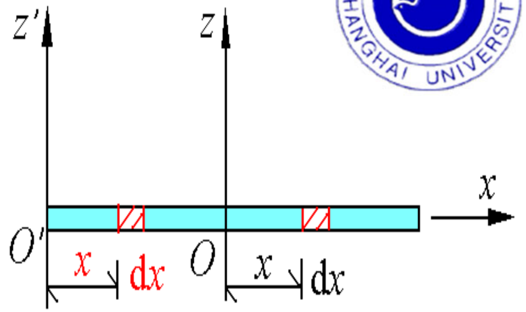
回转半径为

$$\rho_z = \sqrt{\frac{J_z}{m}} = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

动力学

例17

计算一个质量为长度为的细长均质杆对轴z和轴z'转动惯量分别是多少。



解: 取长为dx的小段杆作为质量元，其对轴z和轴z'的转动惯量为

$$J_z = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 \frac{m}{l} dx = \frac{1}{12} ml^2$$

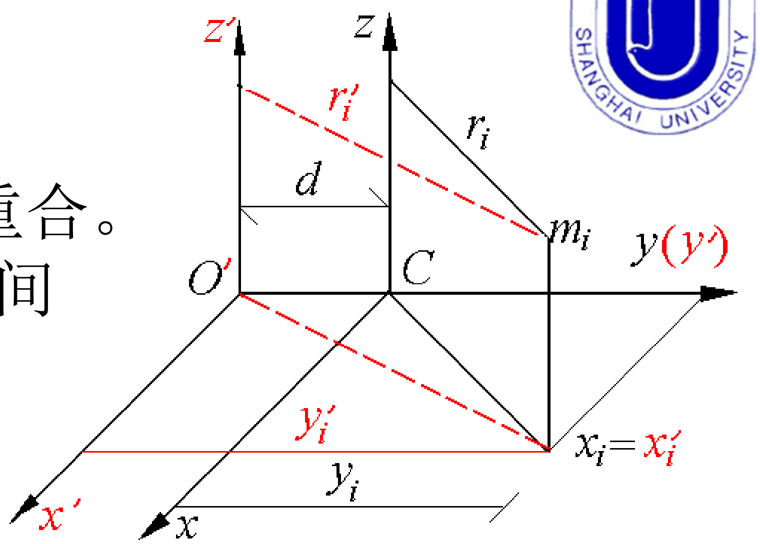
$$J_{z'} = \int_{0}^{l} x^2 \frac{m}{l} dx = \frac{1}{3} ml^2$$

讨论: 对平行轴的转动惯量之间的关系?

动力学

➢ 平行轴定理

令 xy和$x'y'$平面 以及 y和y'轴 分别重合。记刚体质心为C。两平行轴 z和z'之间距离为d。



坐标变换

$$x_i = x_i',\quad y_i' = y_i + d$$

过对C轴z的转动惯量

$$J_{Cz} = \int_M \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}m$$

对z'轴的转动惯量

$$J_z = \int_M \left(x'^2 + y'^2\right) \mathrm{d}m = \int_M \left[x^2 + \left(y + d\right)^2\right] \mathrm{d}m$$

$$= \int_M \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}m + 2d\int_M y\mathrm{d}m + d^2 \int_M \mathrm{d}m$$

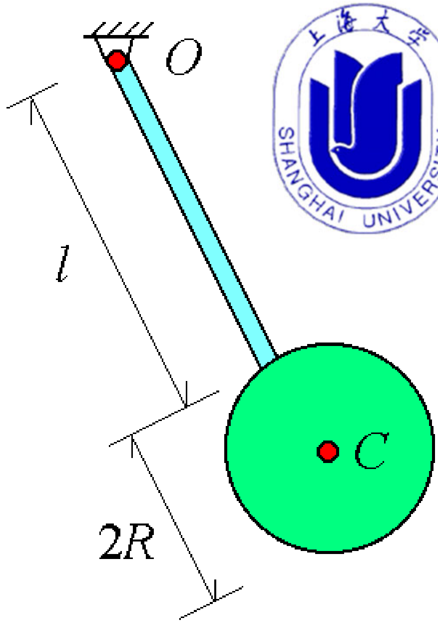
$$J_z = J_{Cz} + md^2$$

最小绕轴的转动惯量过质心。

动力学

例 18

钟摆由质量为m_1、长为l的均质杆和质量为m_2半径为R均质盘组成。试求对固定轴O的转动惯量。



解: 计算杆和圆盘转动惯量的总和。

平行轴定理

$$J_O = J_{O\,\mathrm{rod}} + J_{O\,\mathrm{disc}}$$

$$= J_{O\,\mathrm{rod}} + J_{C\,\mathrm{disc}} + m_{disc} l_{CO}^2$$

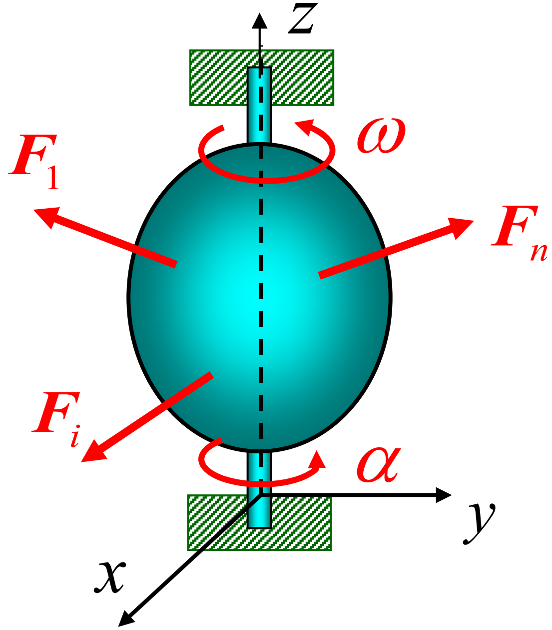
$$= \frac{1}{3}m_1 l^2 + \frac{1}{2}m_2 R^2 + m_2\left(l+R\right)^2$$

$$= \frac{1}{3}m_1 l^2 + \frac{1}{2}m_2\left(3R^2 + 2l^2 + 4lR\right)$$

2 定轴转动刚体

刚体动量矩对z轴的投影

$$L_z = J_z \omega$$



应用动量矩定理

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(J_z \omega) = M_z^{(e)}$$

定轴转动刚体的运动微分方程

$$J_z \ddot{\varphi} = M_z^{(e)}$$

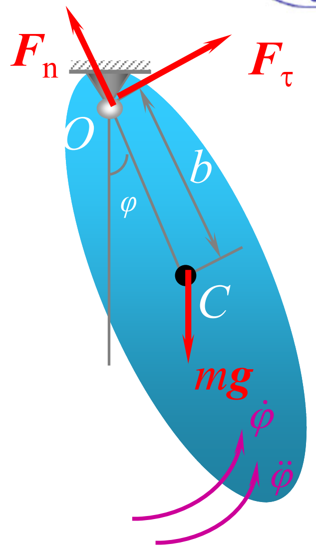
数学形式与直线运动质点的运动微分方程较类似

$$m\ddot{x} = F_x$$

动力学

例 19

复摆是绕定轴旋转的刚体。 复摆质量为m 对轴O的惯性矩为J_O。在**小角度**φ_0处释放刚体。求复摆运动。



解:　以复摆为研究对象。

定轴转动刚体运动微分方程

$$J_O\ddot{\varphi} = -mgb\sin\varphi$$

$$\sin\varphi \doteq \varphi$$

线性化

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgb}{J_O}\varphi = 0$$

运动方程

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos\left(\sqrt{\frac{mgb}{J_O}}t\right)$$

讨论:　测定转动惯量的实用方法

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_O}{mgb}} \Rightarrow J_O = \frac{mgbT^2}{4\pi^2}$$

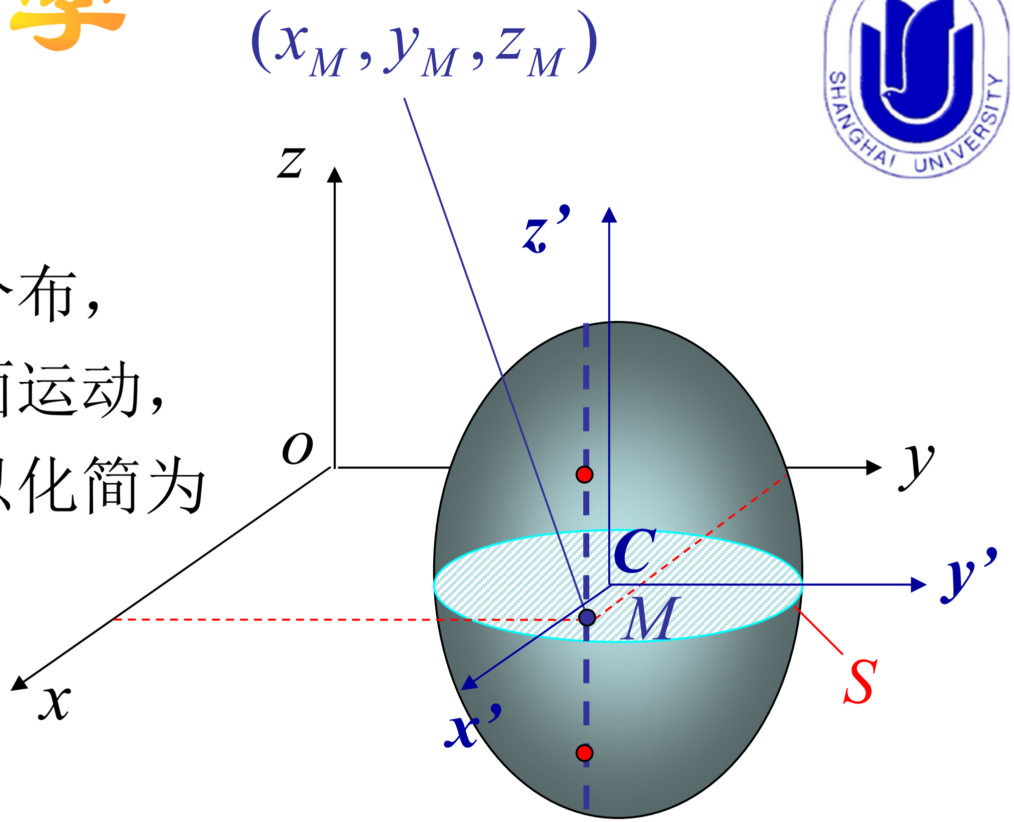
3 刚体平面运动　　动力学

力学模型

(1) 刚体质量关于一平面对称分布，

(2) 该刚体在质量对称面内平面运动，

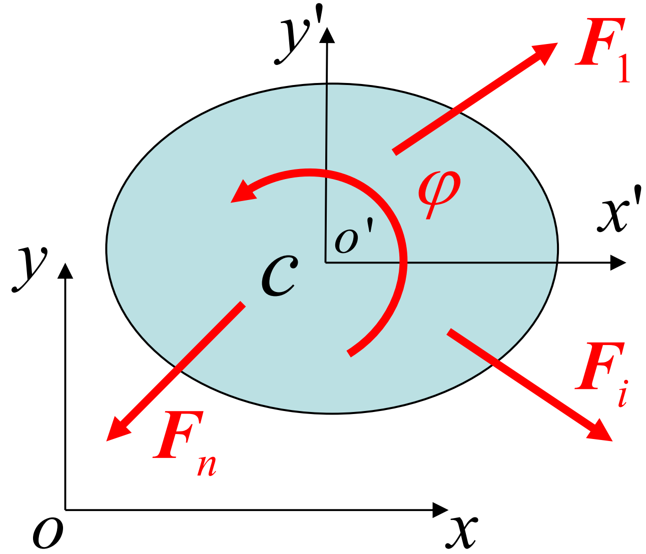
(3) 作用在刚体上的所有力可以化简为一个共面力系。



问题

1 运动与力之间的关系?

2 力共面的条件?



方法

引入一个原点在质心的平移参考系

动力学

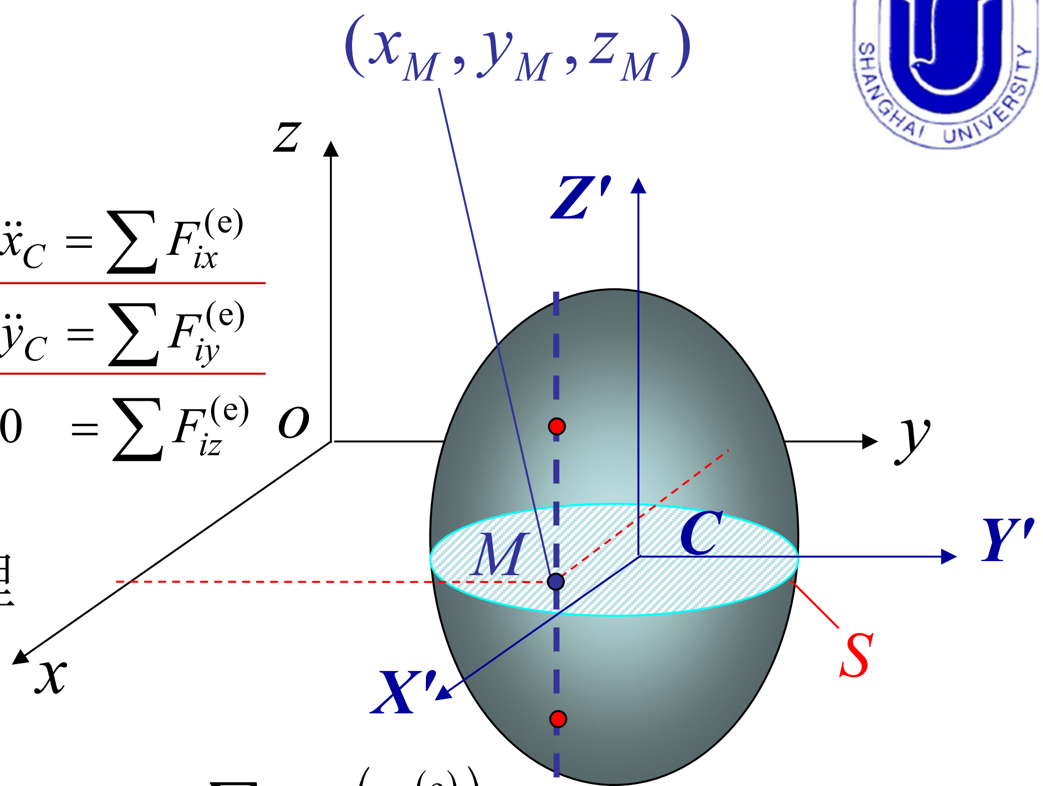
（1）运用质心运动定理

$$m\boldsymbol{a}_C=\sum \boldsymbol{F}_i^{(e)}$$

$$ma_{Cx}=m\ddot{x}_C=\sum F_{ix}^{(e)}$$

$$ma_{Cy}=m\ddot{y}_C=\sum F_{iy}^{(e)}$$

$$ma_{Cz}=\ 0\ =\sum F_{iz}^{(e)}$$



（2）相对质心运用动量矩定理

$$\dot{\boldsymbol{L}}_C'=\boldsymbol{M}_C'^{(e)}$$

$$\boldsymbol{L}_C'=0\boldsymbol{i}+0\boldsymbol{j}+J_C\dot{\varphi}\boldsymbol{k}$$

$$\dot{L}_{Cx'}=\ 0=\sum M_{x'}\left(\boldsymbol{F}_i^{(e)}\right)$$

$$\dot{L}_{Cy'}=\ 0=\sum M_{y'}\left(\boldsymbol{F}_i^{(e)}\right)$$

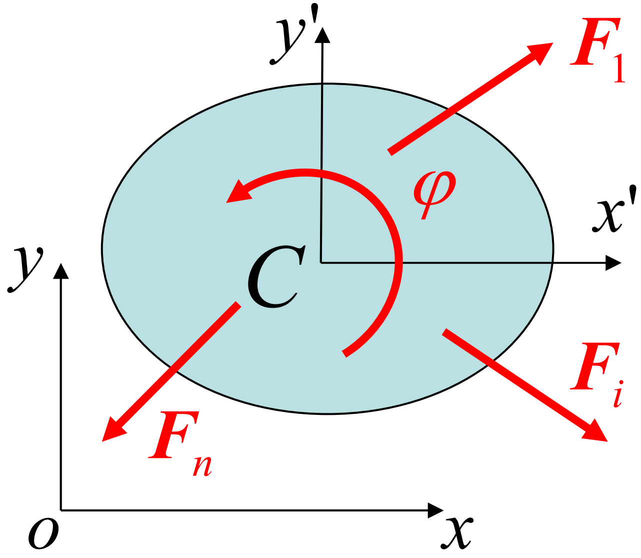
$$\dot{L}_{Cz'}=J_C\ddot{\varphi}=\sum M_{z'}\left(\boldsymbol{F}_i^{(e)}\right)$$

2个问题的答案

动力学

刚体平面运动微分方程

$$m\ddot{x}_C = \sum F_{ix}^{(e)}, m\ddot{y}_C = \sum F_{iy}^{(e)}, J_C\ddot{\varphi} = \sum M_C\left(\boldsymbol{F}_i^{(e)}\right)$$



外力条件

$$\sum F_{iz}^{(e)} = 0, \sum M_{x'}\left(\boldsymbol{F}_i^{(e)}\right) = 0, \sum M_{y'}\left(\boldsymbol{F}_i^{(e)}\right) = 0$$

外力是一个质量对称平面的共面力系。

可能的扩展（速度瞬心）

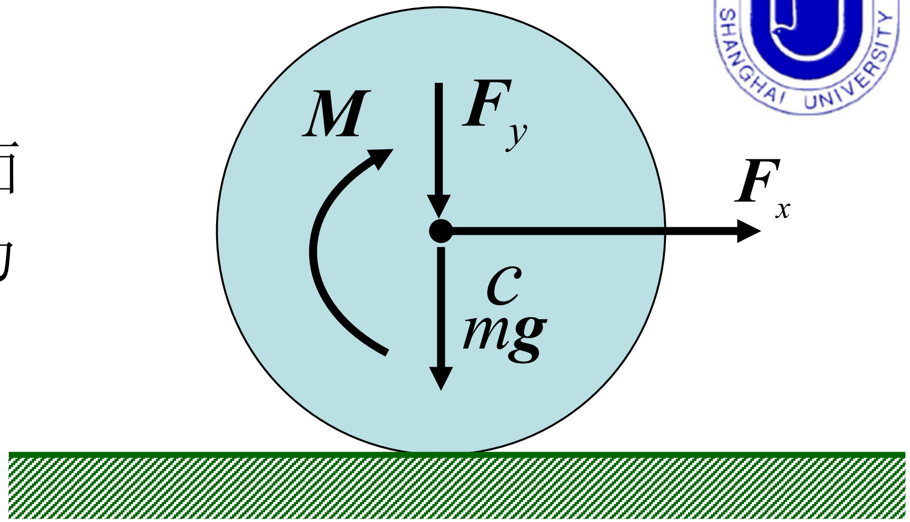
$$\boldsymbol{L}_C' = J_C\dot{\varphi}\boldsymbol{k}$$

$$\sum F_{iz}^{(e)} = 0, \sum M_{x'}\left(\boldsymbol{F}_i^{(e)}\right) = 0, \sum M_{y'}\left(\boldsymbol{F}_i^{(e)}\right) = 0$$

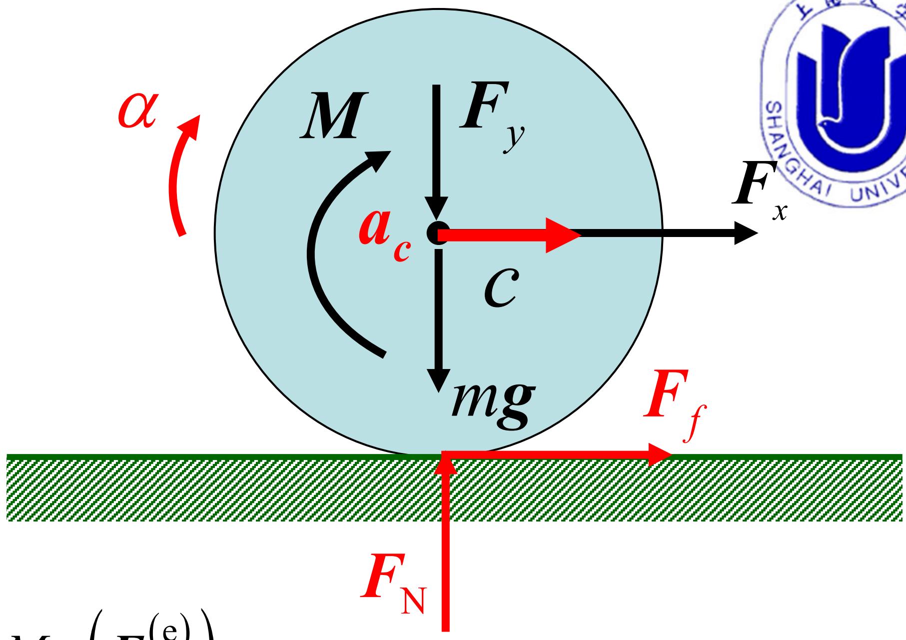
动力学

例 21

质量为m、半径为R的均质圆柱在水平面上滚动。摩擦力足够大不产生滑动。 力系F_x , F_y 和M 同时作用在圆柱上。求圆柱的角加速度和接触点的约束反力。



动力学



解:

以圆柱为研究对象， $a_C = R\alpha.$

刚体运动的微分方程

$$m\ddot{x}_C = \sum F_{ix}^{(e)},\ m\ddot{y}_C = \sum F_{iy}^{(e)},\ J_C\ddot{\varphi} = \sum M_C\left(\boldsymbol{F}_i^{(e)}\right)$$

$$m\underline{a_C} = F_x + \underline{F_f},\ 0 = \underline{F_N} - mg - F_y,\ \frac{1}{2}mR^2\underline{\alpha} = M - F_f R$$

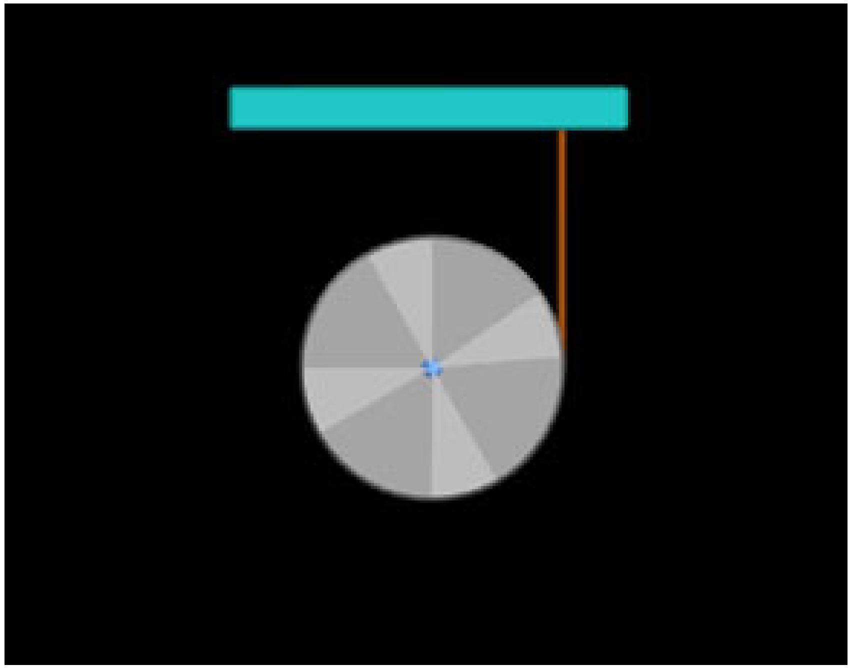
消去a_C求所需未知数

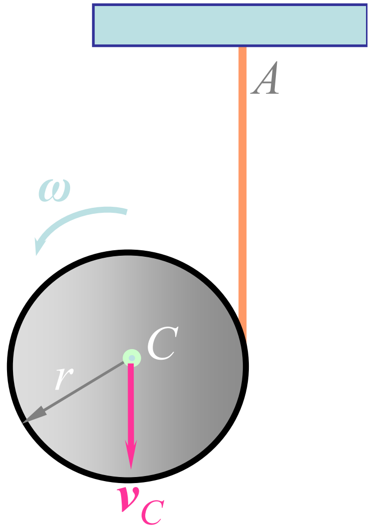
$$\alpha = \frac{2(M + F_x R)}{3mR^2},\ F_N = mg + F_y,\ F_f = \frac{2M}{3R} - \frac{F_x}{3}$$

动力学

例 22

不计质量的线缠在质量为m、半径为r的均值圆盘上。线一端固定于A点，圆盘从静止释放， 求圆盘质心C的加速度和线的张力。





动力学

解:

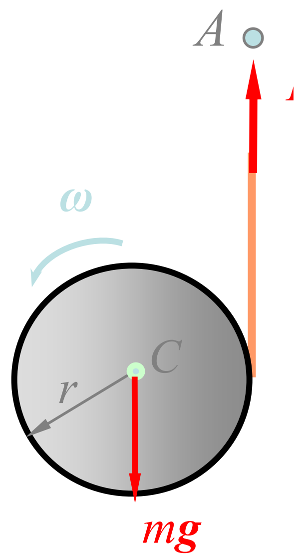
以圆盘和部分线为研究对象。 $v_C = r\omega,\ a_C = r\alpha.$

纯滚动

刚体平面运动微分方程

$$m\ddot{y}_C = \sum F_{iy}^{(e)},\ J_C\ddot{\varphi} = \sum M_C\left(\boldsymbol{F}_i^{(e)}\right)$$

$$\underline{ma_C} = mg - \underline{F},\ \frac{1}{2}mr^2 \cdot \underline{\alpha} = Fr$$



消去α求所需未知量

$$a_C = \frac{2}{3}g,\ F = \frac{1}{3}mg$$

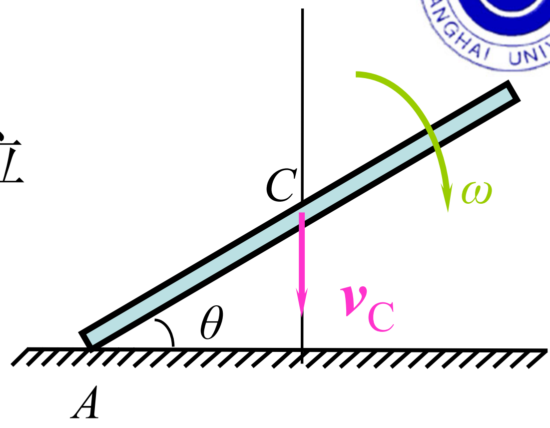
讨论: 关于定点*A*运用动量矩定理

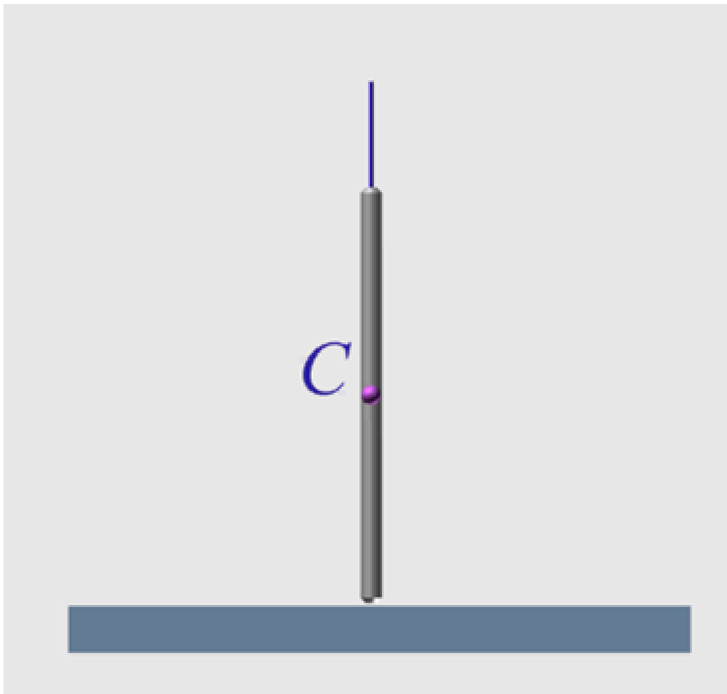
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(J_C\omega + mv_C r) = mgr$$

动力学

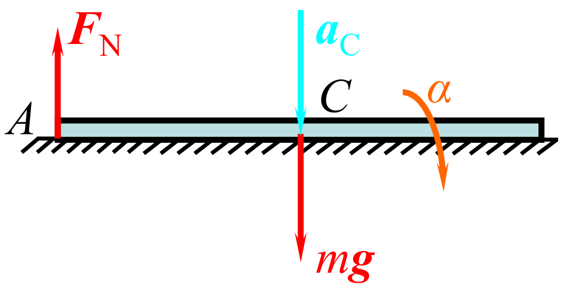
例 23

一个质量为m、长度为l的均匀细长杆从直立位置下落。试求杆落地时地面的法向反力。





动力学



解:

以杆为研究对象。

刚体平面运动微分方程

$$m\ddot{y}_C = \sum F_{iy}^{(e)},\ J_C\ddot{\varphi} = \sum M_C\left(\boldsymbol{F}_i^{(e)}\right)$$

$$ma_C = mg - F_N,\ \frac{1}{12}ml^2 \cdot \alpha = F_N\frac{l}{2}$$

对杆进行运动学分析导出补充方程

$$\boldsymbol{a}_C = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_{C/A}^{n} + \boldsymbol{a}_{C/A}^{\tau}$$

由于质心不变, $\boldsymbol{a}_C$ 沿竖直方向; $\boldsymbol{a}_A$ 沿水平方向。

垂直方向投影:

$$a_C = a_{C/A}^{\tau} = \frac{l}{2}\alpha$$

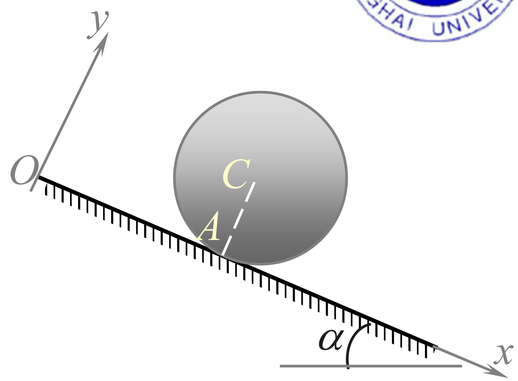
消去a_C和α求出法向反力

$$F_N = \frac{1}{4}mg$$

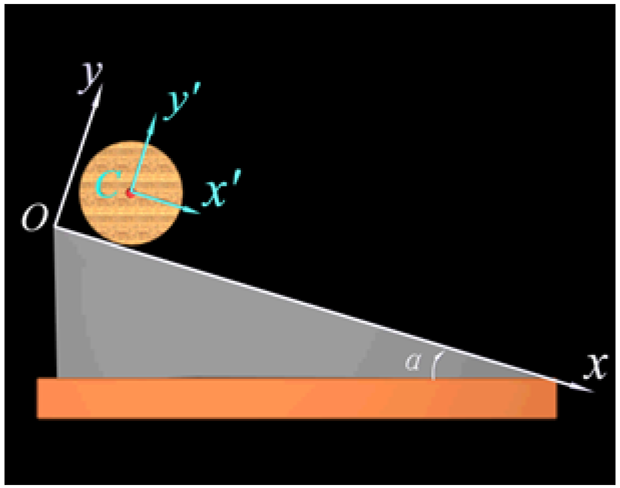
动力学

例24

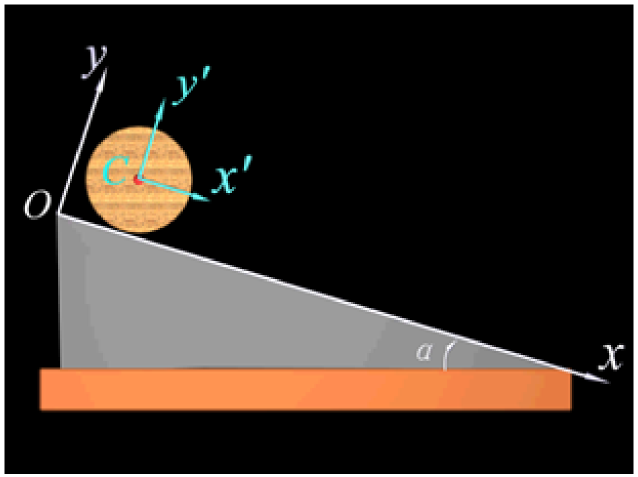
质量为m、半径为r的均质圆柱从倾斜角为α的斜面上无滑动地滚下。圆柱与斜面之间静摩擦系数为f_s。求圆柱质心C加速度和纯转动条件。



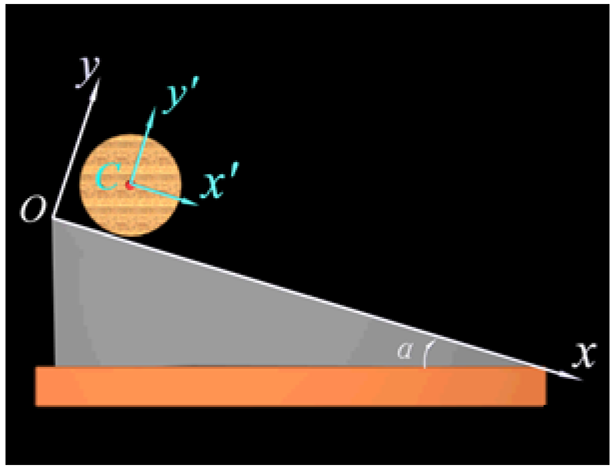
无滚动滑动



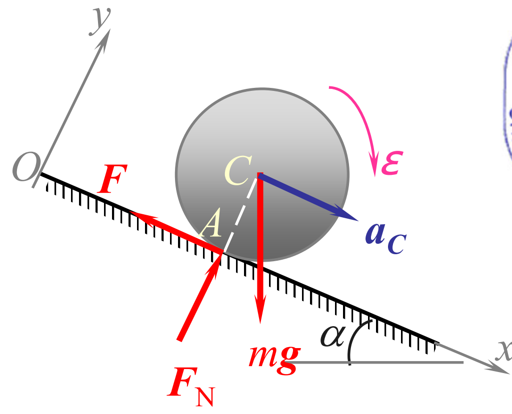
无滑动滚动



既有滚动又有滑动



动力学



解:

以圆柱为研究对象。 $a_C = r\varepsilon.$

刚体平面运动微分方程

$$m\ddot{x}_C = \sum F_{ix}^{(e)},\ m\ddot{y}_C = \sum F_{iy}^{(e)},\ J_C\ddot{\varphi} = \sum M_C\left(\boldsymbol{F}_i^{(e)}\right)$$

$$ma_C = mg\sin\alpha - F,\ 0 = F_N - mg\cos\alpha,\ \frac{1}{2}mr^2 \cdot \varepsilon = Fr$$

消去 ε 求所需未知数

$$a_C = \frac{2}{3}g\sin\alpha,\ F = \frac{1}{3}mg\sin\alpha,\ F_N = mg\cos\alpha$$

无滑动条件: $F \le f_s F_N$

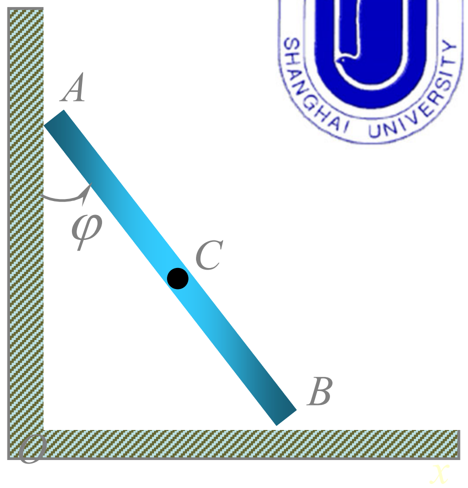
$$\frac{1}{3}mg\sin\alpha \le f_s mg\cos\alpha$$

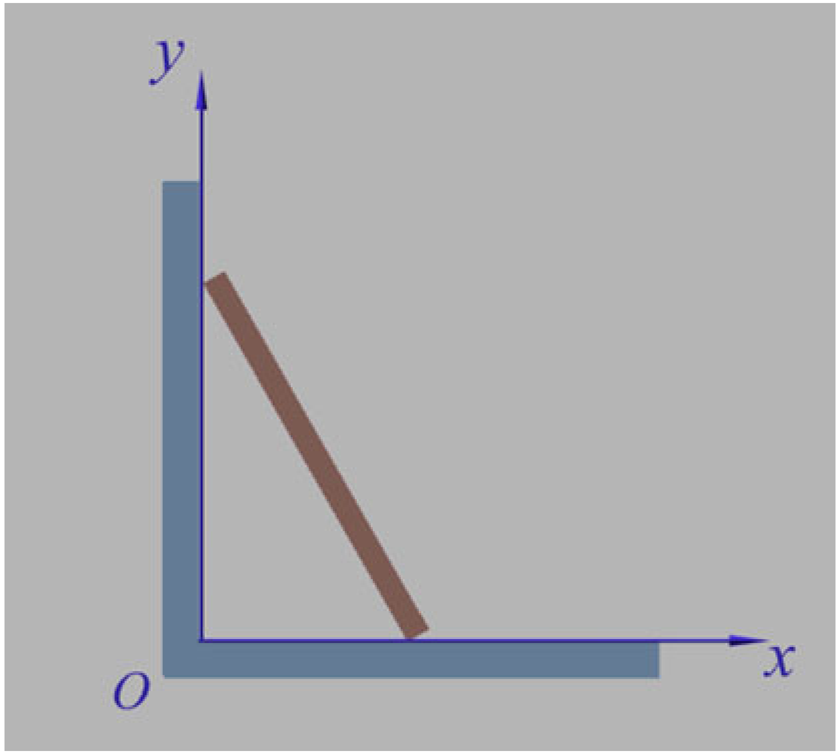
$$f_s \ge \frac{1}{3}\tan\alpha$$

动力学

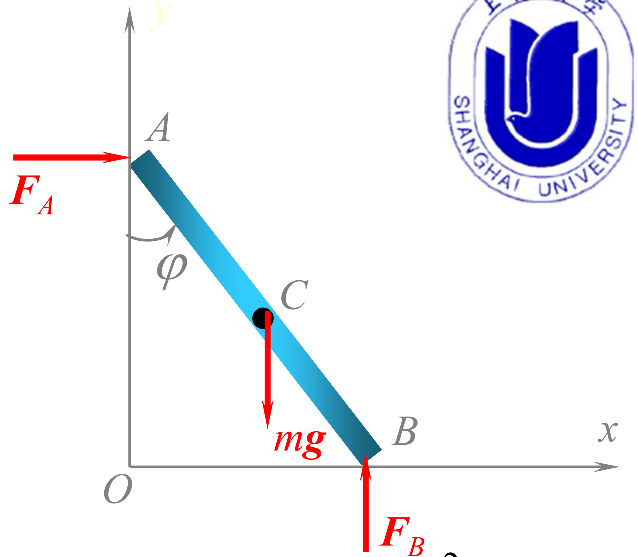
例 25

质量为m、长为$2l$的均质细长杆对光滑的地面和水平面静止。 当$\varphi=\varphi_0$时将杆由静止释放。将角速度和加速度表示为角度φ的函数，并求杆不与墙壁接触时的位置 φ_1。





动力学



解:

以杆为研究对象，刚体平面运动微分方程

$$m\ddot{x}_C = F_A,\ m\ddot{y}_C = F_B - mg,\ J_C\ddot{\varphi} = F_B l\sin\varphi - F_A l\cos\varphi$$

辅助运动方程

$$x_C = l\sin\varphi,\ y_C = l\cos\varphi \Rightarrow \ddot{x}_C = l\ddot{\varphi}\cos\varphi - l\dot{\varphi}^2\sin\varphi,\ \ddot{y}_C = -l\ddot{\varphi}\sin\varphi - l\dot{\varphi}^2\cos\varphi$$

$$\frac{1}{12}m(2l)^2\cdot\ddot{\varphi} = m\left(g - l\ddot{\varphi}\sin\varphi - l\dot{\varphi}^2\cos\varphi\right)l\sin\varphi - m\left(l\ddot{\varphi}\cos\varphi - l\dot{\varphi}^2\sin\varphi\right)l\cos\varphi$$

角加速度为φ的函数 $\quad \ddot{\varphi} = \dfrac{3g}{4l}\sin\varphi$

典型积分技巧 $\quad \ddot{\varphi} = \dfrac{\mathrm{d}\dot{\varphi}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\varphi} = \dfrac{\dot{\varphi}\,\mathrm{d}\dot{\varphi}}{\mathrm{d}\varphi} \Rightarrow \int_0^{\dot{\varphi}}\dot{\varphi}\,\mathrm{d}\dot{\varphi} = \dfrac{3g}{4l}\int_{\varphi_0}^{\varphi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi$

角速度为φ的函数 $\quad \dot{\varphi} = \sqrt{\dfrac{3g}{2l}(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)}$

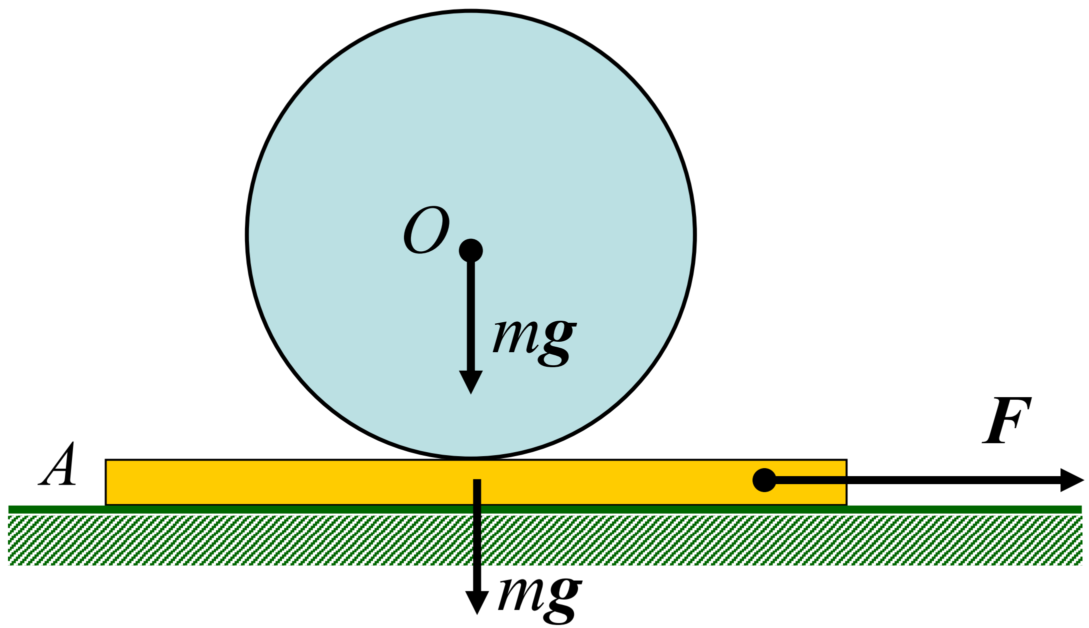
无接触 条件F_A=0 $\quad l\ddot{\varphi}\cos\varphi - l\dot{\varphi}^2\sin\varphi = 0$

$$l\frac{3g}{4l}\sin\varphi_1\cos\varphi_1 = l\frac{3g}{2l}(\cos\varphi_0 - \cos\varphi_1)\sin\varphi_1 \Rightarrow \varphi_1 = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\cos\varphi_0\right)$$

动力学

例 26

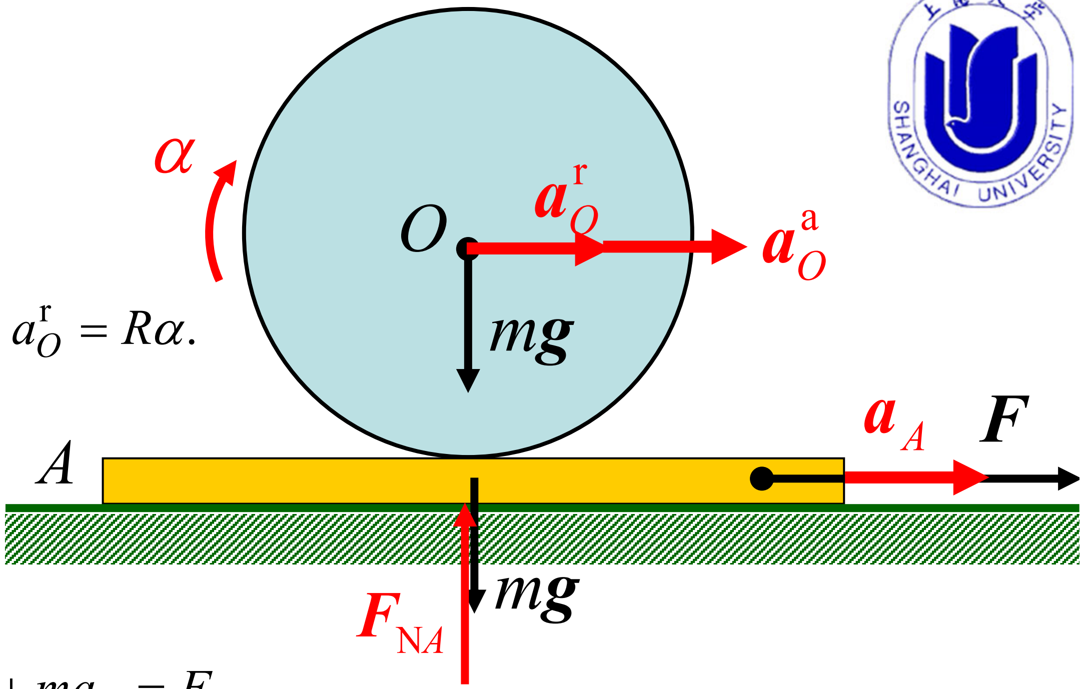
一个质量为m、半径为r的均质圆盘在水平板上作无滑滚动。质量为m的板在拉力$\boldsymbol{F}$作用下在光滑水平面上平移。求圆盘的角加速度和板的加速度。



动力学

解:

（1）以整个系统为研究对象，$a_O^{\mathrm{r}} = R\alpha.$



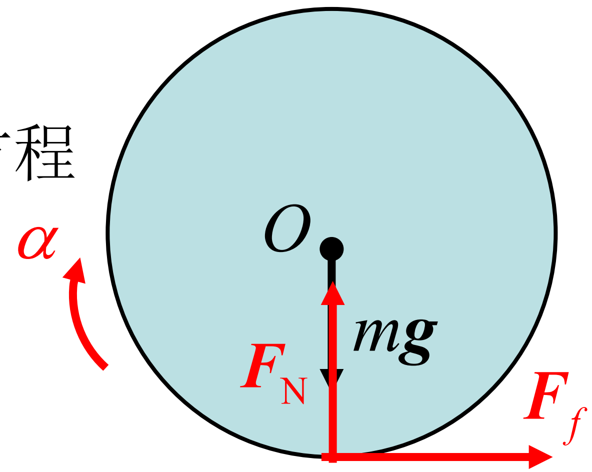
$$\boldsymbol{a}_O^{\mathrm{a}} = \boldsymbol{a}_O^{\mathrm{e}} + \boldsymbol{a}_O^{\mathrm{r}} = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_O^{\mathrm{r}}$$

质心运动定理的投影

$$m(\underline{a_A} + \underline{R\alpha}) + ma_A = F$$

（2）以圆盘为研究对象，刚体平面运动微分方程

$$m(a_A + R\alpha) = \underline{F_f},\ \frac{1}{2}mR^2 \cdot \alpha = -F_f R$$



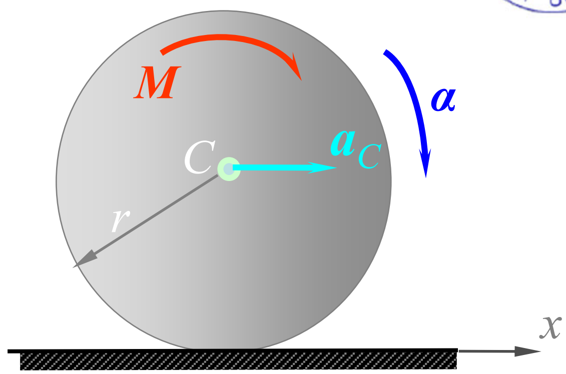
消去F_f得到所求未知量

$$\alpha = -\frac{F}{2mR},\ a_A = \frac{3F}{4m}$$

动力学

$$J_C = m\rho_C^2$$

质量为m半径为r、回转半径为 ρ_C的轮沿水平面滚动。 力矩M 作用在轮上，试求轮中心的加速度； 若轮与地面间摩擦系数为f_s, 求不出现滑动的力矩的最值。



第7次课作业：8-17、8-19*