工 程 控 制 原 理

2. 数学模型与传递函数

2.6 信号流图及梅逊公式

主讲：李敏

上海大学
机电工程与自动化学院

2.6 控制系统的信号流图

系统方框图是一种很有用的系统数学模型图解形式。

但是，对于复杂的控制系统，方框图的简化过程仍较复杂，且易出错。

Mason提出的信号流图，既能表示系统的特点，而且还能直接应用梅逊公式方便的写出系统的传递函数。因此，信号流图在控制工程中也被广泛地应用。

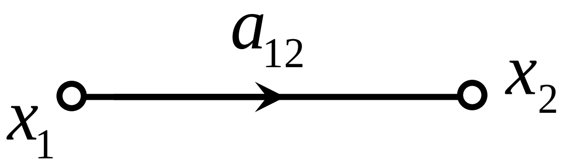
2.6 控制系统的信号流图

2.6.1 信号流图

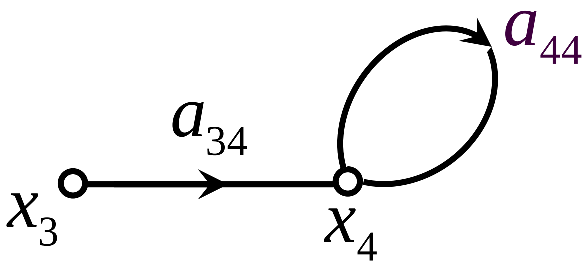
信号流图是一种有向图，它是线性代数方程（组）的拓扑表示。

$$y_{\mathrm{i}} = \sum_{j=1}^{n} a_{\mathrm{ij}} y_{\mathrm{j}} \qquad i = 1,2,3,\cdots,n$$

$$x_2 = a_{12} x_1$$

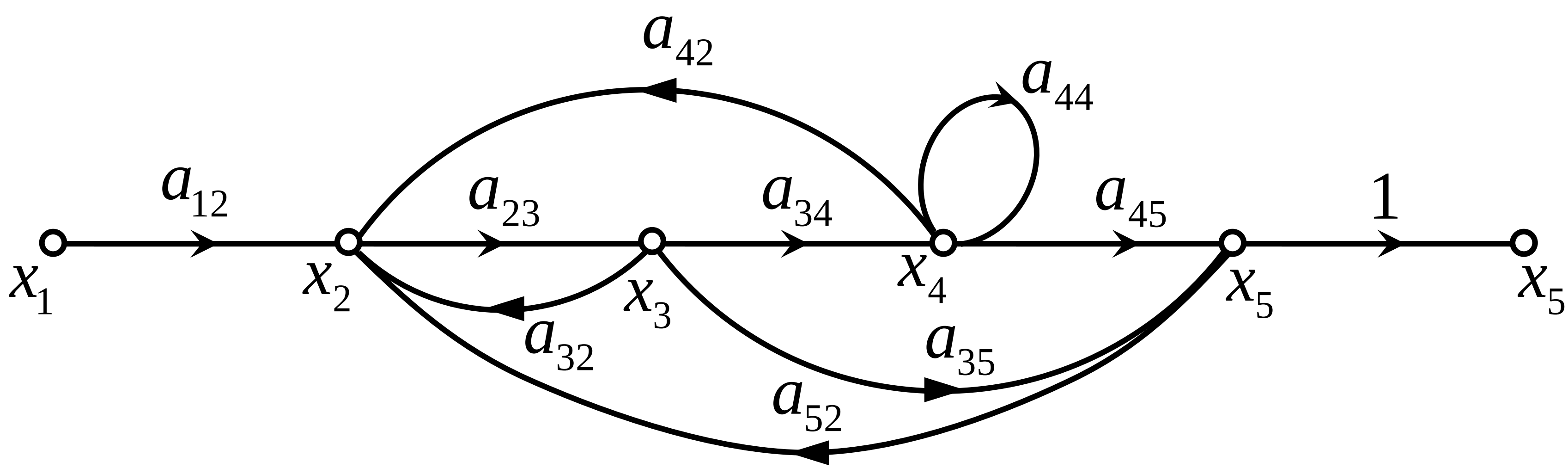


$$x_4 = a_{34} x_3 + a_{44} x_4$$



2.6.1 信号流图

$$\left.\begin{aligned}
x_2 &= a_{12}x_1 + a_{32}x_3 + a_{42}x_4 + a_{52}x_5 \\
x_3 &= a_{23}x_2 \\
x_4 &= a_{34}x_3 + a_{44}x_4 \\
x_5 &= a_{35}x_3 + a_{45}x_4
\end{aligned}\right\}$$



2.6.1 信号流图

用信号流图分析系统时一些术语的解释

节点：用“○”表示

代表系统中的变量；

该变量等于所有流入该节点的信号之和；

自节点流出的信号不影响该节点变量的值。

支路：用“→”表示

支路是连接两个节点的有向线段。标在支路旁边的传递函数为**支路增益**，表示系统中变量之间的因果 (量化、**增益**) 关系；其方向表示信号的流向。

输入节点（源点）：

表示系统的输入；表自变量；

只有输出支路，没有信号的流入。

用信号流图分析系统时一些术语的解释

输出节点（阱点）：

表示系统的输出；

只有输入支路，没有信号的流出。

混合节点：

既有输入支路又有输出支路的节点。

通路/通道：

凡从某一个节点开始，沿着箭头方向连续经过一些支路而终止于另一个节点（或同一个节点）的路径。

前向通路：若从输入节点到输出节点的通路，经过任一节点的次数不超过一次，则称该通路为前向通路。

用信号流图分析系统时一些术语的解释

回路：

通路的终点也是通路的起点，并且通过任一其它节点的次数不超过一次。

不接触回路：如果某些回路之间没有任何公共节点，则称它们为不接触回路。

前向通路增益：

前向通路上各支路增益的乘积。

回路增益：

回路中各支路增益的乘积。

信号流图与方框图的对应关系

信号流图	方框图
源点	输入信号
阱点	输出信号
混合节点	比较点，引出点
支路	环节
支路增益	环节传递函数
前向通路	
回路	
互不接触回路	

2.6.2 信号流图的性质

(1) 信号流图仅适用于线性系统；

(2) 支路表示其相连的两个信号之间的函数关系或传递关系；信号只能沿着支路箭头的方向传递；

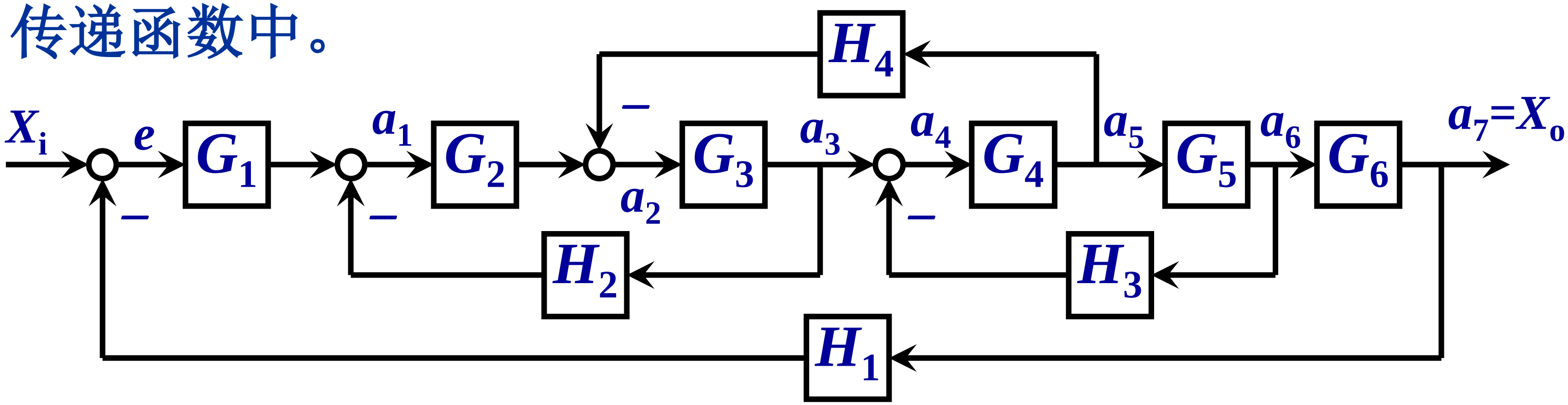
(3) 在节点上可以把所有输入支路的信号相加，并把相加后的信号传送到所有输出支路；

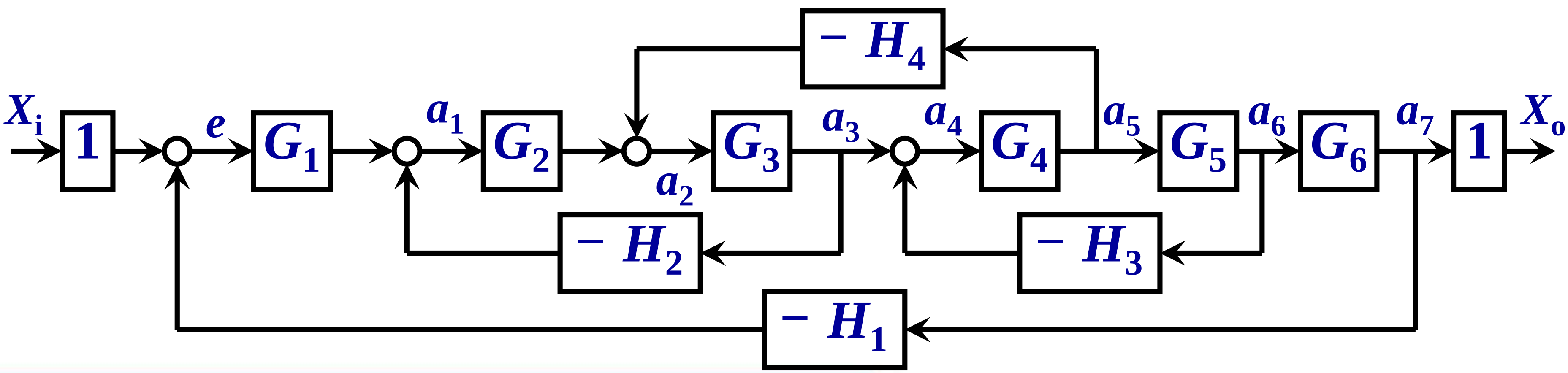
(4) 具有输入和输出支路的混合节点，通过增加一个具有单位传输的支路，可以把它变成输出节点来处理；（用这种方法不能将混合节点改变为输入节点）

(5) 对于一个给定的系统，其信号流图不是唯一的。

2.6.3 由方框图作出信号流图

(1) 比较环节的处理：将比较环节的+（或−）号移到环节传递函数中。



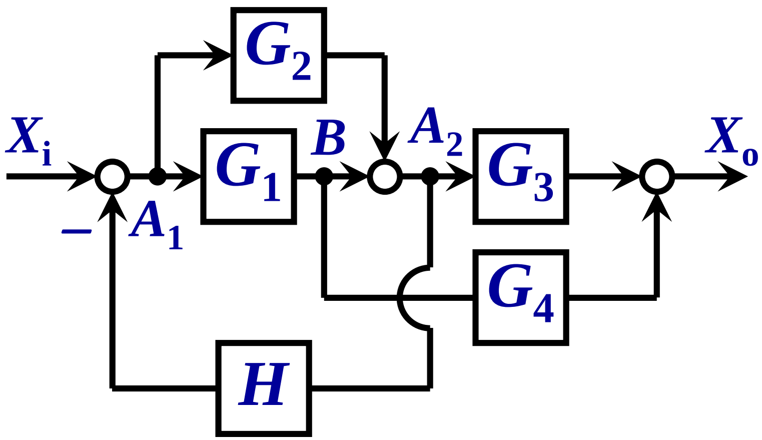


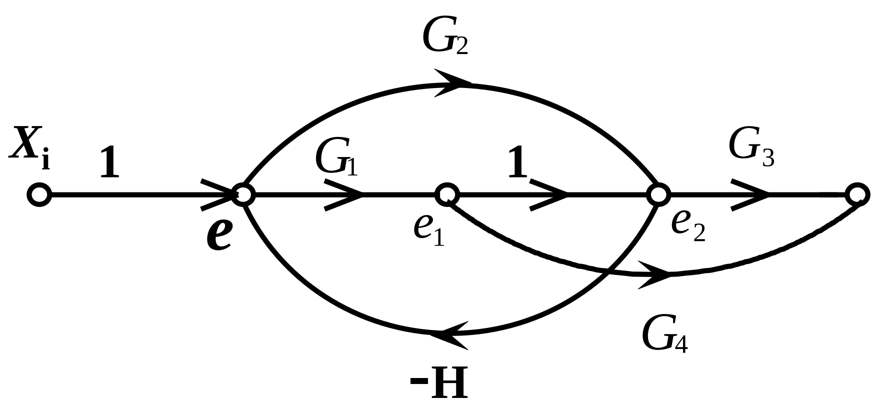
2.6.3 由方框图作出信号流图

(2) 用小圆圈表示各变量对应的节点；

(3) 在比较点之后的引出点只需在比较点后设置一个节点便可，也可以与它前面的比较点共用一个节点，如A_1、A_2。

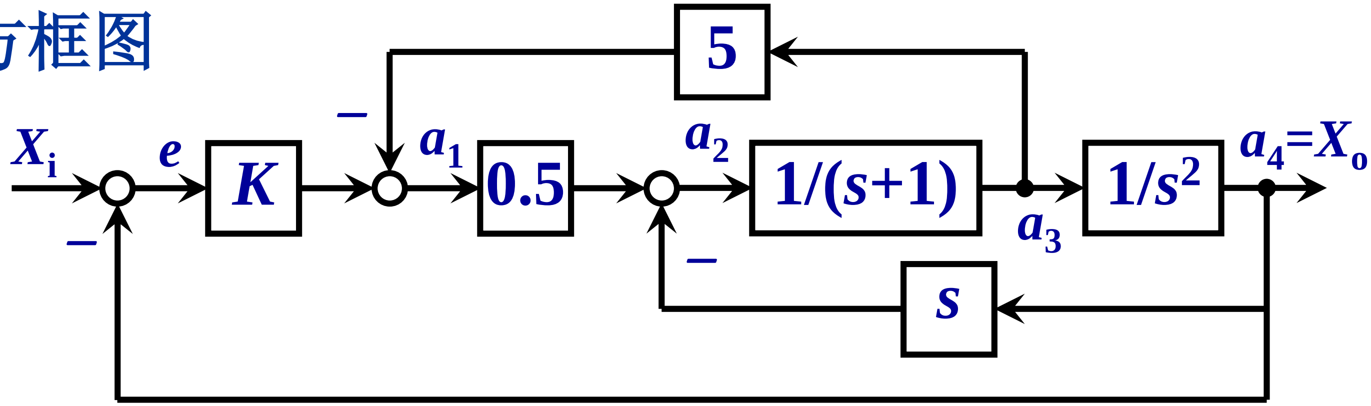
(4) 在比较点之前的引出点 B，需设置两个节点，分别表示引出点和比较点，注意图中的 e_1、e_2。



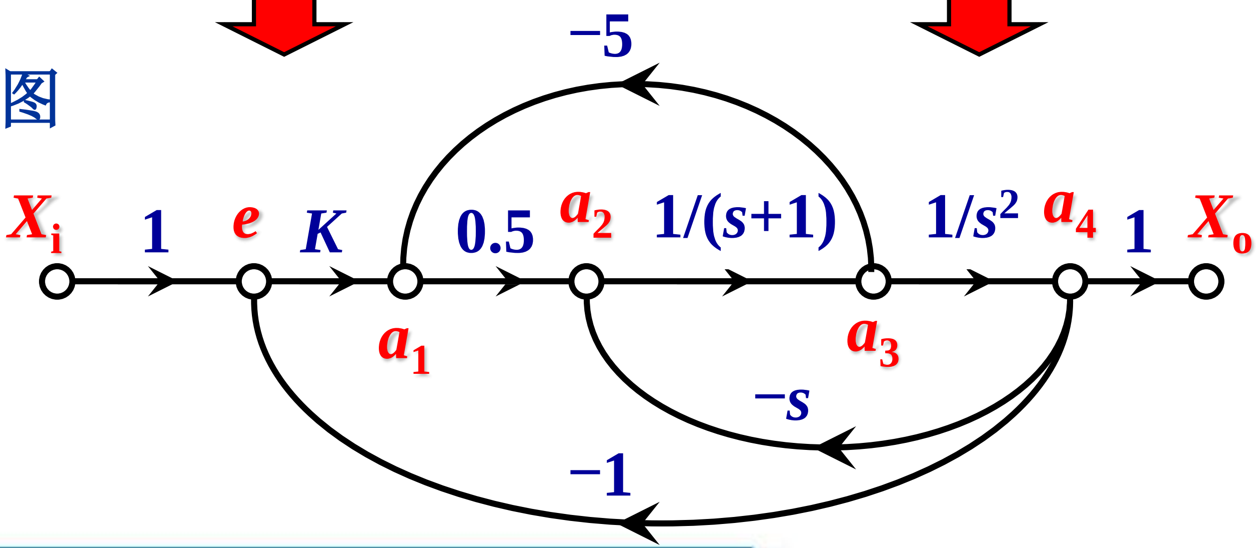


2.6.3 由方框图作出信号流图

系统方框图

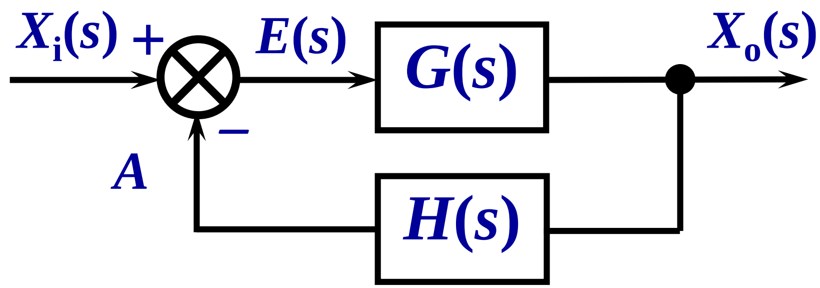


信号流图

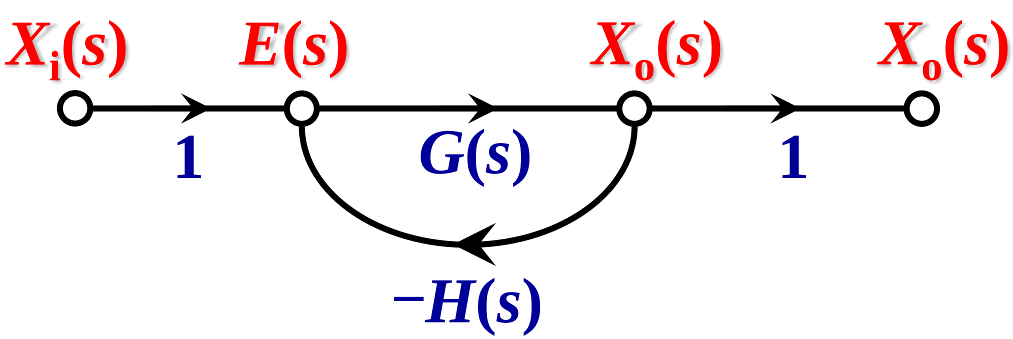


2.6.3 由方框图作出信号流图

系统方框图

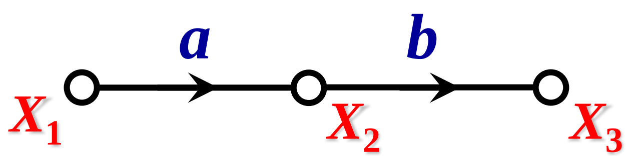
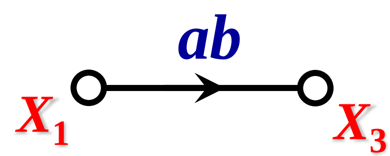
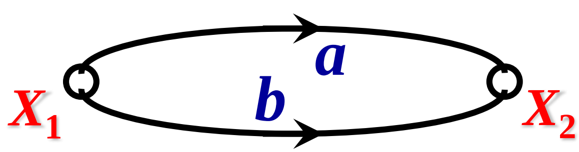
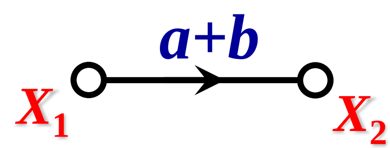
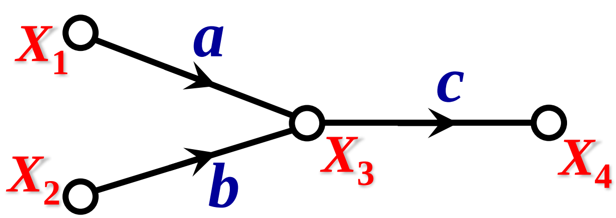
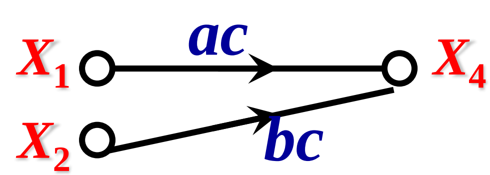
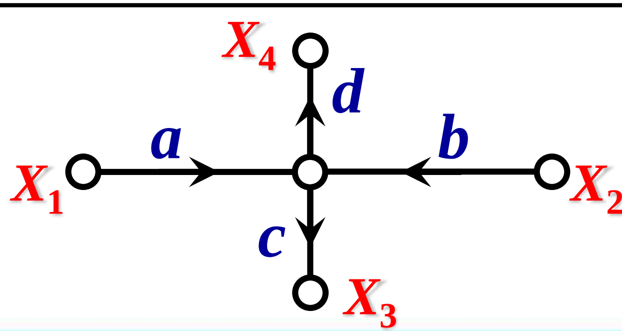
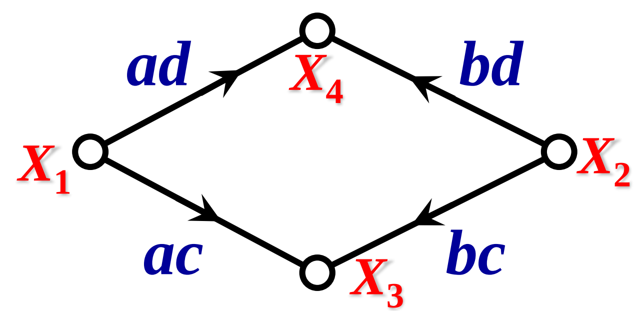


信号流图

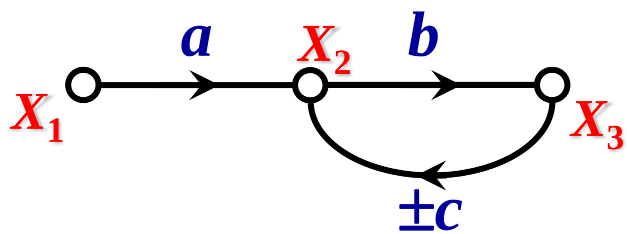
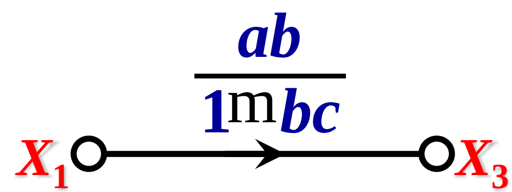
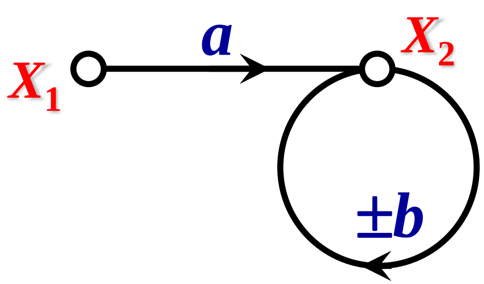
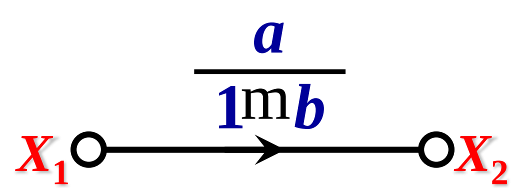


2.6 控制系统的信号流图

2.6.4 信号流图的等效变换

<table>
<tr><th></th><th>原流图</th><th>等效变换后流图</th></tr>
<tr><td>串联支路合 并</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>并联支路合 并</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">混合节点的 消 除</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>

2.6.4 信号流图的等效变换

	原流图	等效变换后流图
回路的消　除		
自回路和消除		

2.6.5 信号流图的解法——梅逊公式

信号流图的计算机自动化简算法依据梅逊（Mason）公式。

$$G(s)=\frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{n}P_k\Delta_k$$

式中：$G(s)$ — 系统总传递函数；

n — 前向通路的条数；

P_k — 第k条前向通路的总增益；

Δ — 信号流图的特征式；

Δ_k — 第k条前向通路的余子式。

2.6.5 梅逊公式

$$\Delta = 1 - \sum L_a + \sum L_b L_c - \sum L_d L_e L_f + \cdots (-1)^m L_g L_{g+1} \cdots L_{g+m-1}$$

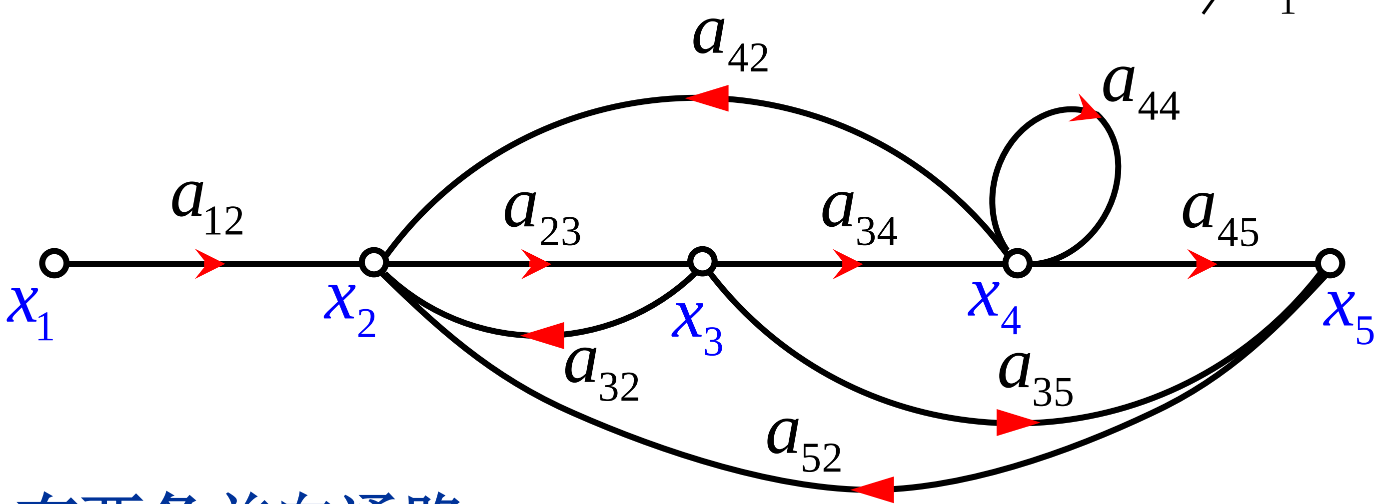
式中：ΣL_a — 所有不同回路的回路增益之和；

$\Sigma L_b L_c$ — 两两互不接触回路的回路增益乘积之和；

$\Sigma L_d L_e L_f$ — 互不接触回路中，每次取其中三个的回路增益乘积之和；

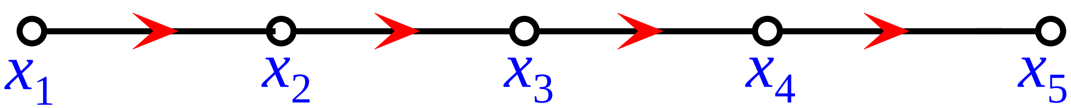
Δ_k — 把与第*k*条前向通路接触的回路去除，剩余回路构成的子特征式。即在Δ中把与第*k*条前向通路接触的回路传函赋零后剩余的部分。

例题： 求图示信号流图的总传递函数 $G(s) = {}^{x_5}\!/_{x_1}$



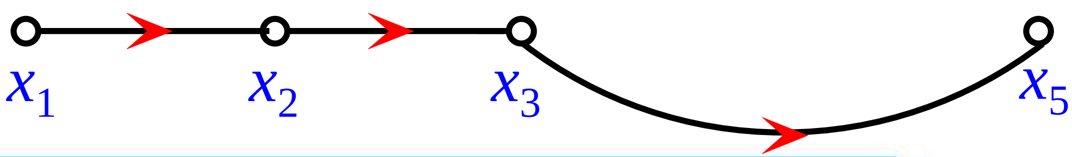
解： 有两条前向通路

(1)



$\boxed{P_1 = a_{12}a_{23}a_{34}a_{45}}$ $\Delta_1 = 1$

(2)



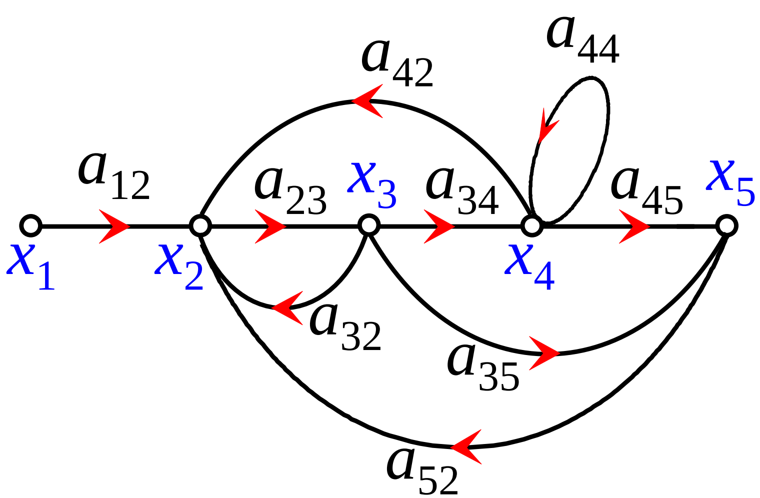
$\boxed{P_2 = a_{12}a_{23}a_{35}}$

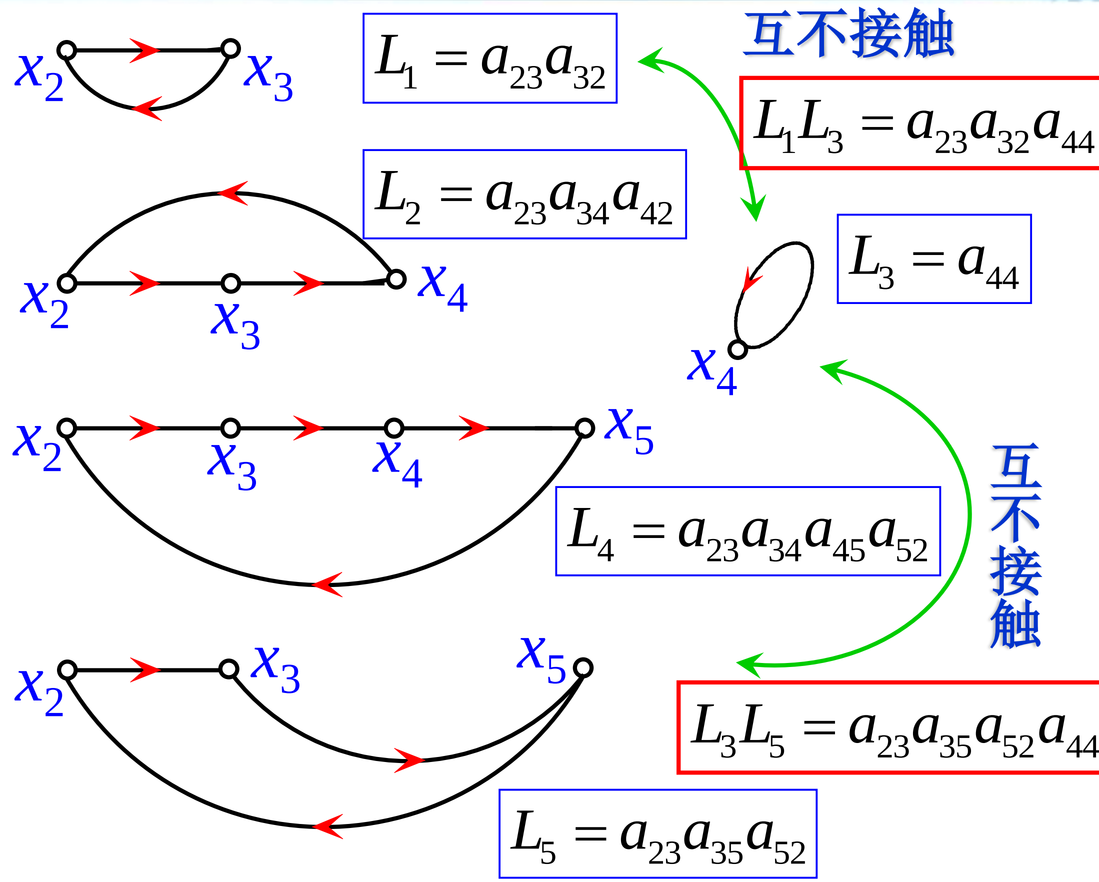
$\Delta_2 = 1 - a_{44}$

2.6.5 梅逊公式

有五条回路

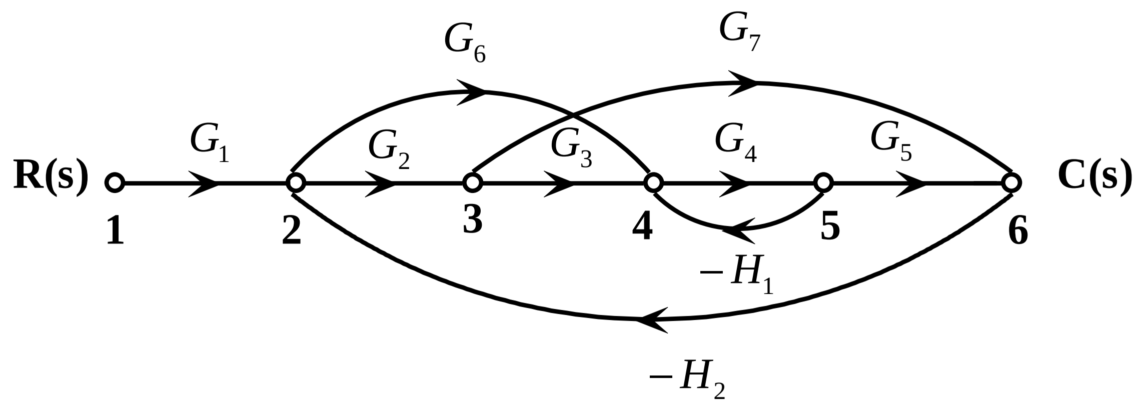
两对互不接触回路





$$G(s)=\frac{a_{12}a_{23}a_{34}a_{45}+(1-a_{44})a_{12}a_{23}a_{35}}{1-(a_{23}a_{32}+a_{23}a_{34}a_{42}+a_{44}+a_{23}a_{34}a_{45}a_{52}+a_{23}a_{35}a_{52})+a_{23}a_{32}a_{44}+a_{23}a_{35}a_{52}a_{44}}$$

例 求图所示系统的闭环传递函数。



某系统的信号流图

解： 前向通路有3个

$$1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6 \qquad P_1 = G_1G_2G_3G_4G_5 \qquad \Delta_1 = 1$$

$$1 \to 2 \to 4 \to 5 \to 6 \qquad P_2 = G_1G_6G_4G_5 \qquad \Delta_2 = 1$$

$$1 \to 2 \to 3 \to 6 \qquad P_3 = G_1G_2G_7 \qquad \Delta_3 = 1 + G_4H_1$$

4个单独回路

$$4 \to 5 \to 4 \qquad L_1 = -G_4 H_1$$

$$2 \to 3 \to 6 \to 2 \qquad L_2 = -G_2 G_7 H_2$$

$$2 \to 4 \to 5 \to 6 \to 2 \qquad L_3 = -G_6 G_4 G_5 H_2$$

$$2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6 \to 2 \qquad L_4 = -G_2 G_3 G_4 G_5 H_2$$

1对互不接触回路 L_1与L_2 $\qquad L_1 L_2 = G_4 G_2 G_7 H_1 H_2$

$$\Delta = 1 + G_4 H_1 + G_2 G_7 H_2 + G_6 G_4 G_5 H_2 + G_2 G_3 G_4 G_5 H_2 + G_4 G_2 G_7 H_1 H_2$$

依据梅逊（Mason）公式。

$$G(s)=\frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{n}P_k\Delta_k$$

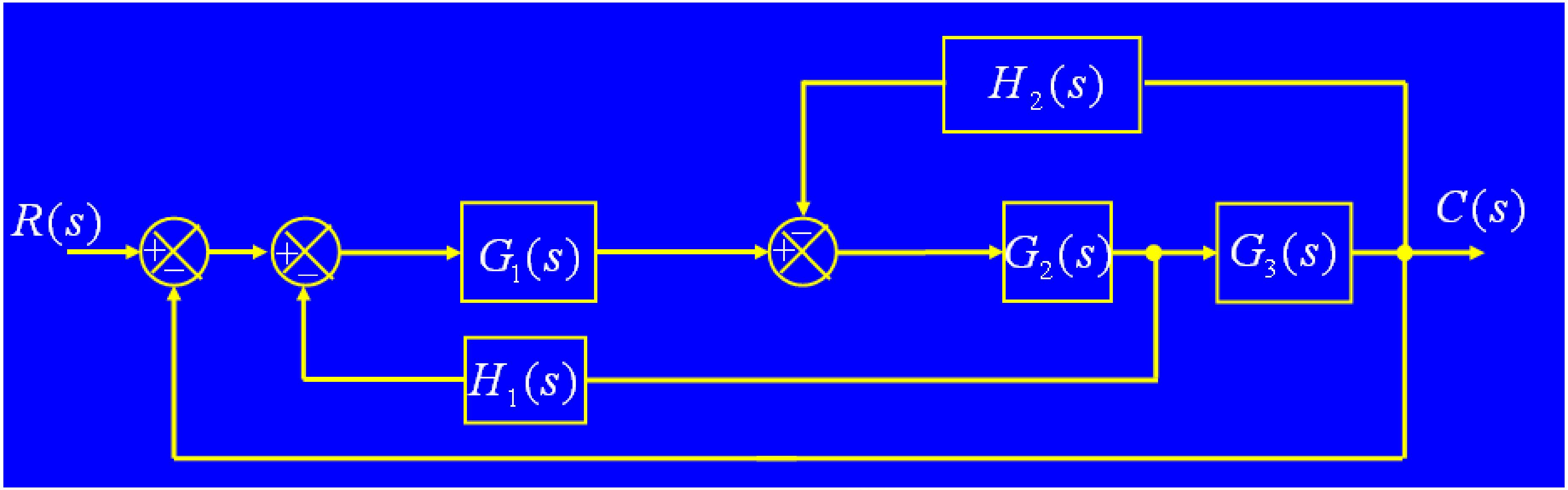
得系统闭环传递函数

$$G(s)=\frac{G_1G_2G_3G_4G_5+G_1G_6G_4G_5+(1+G_4H_1)G_1G_2G_7}{1+G_4H_1+G_2G_7H_2+G_6G_4G_5H_2+G_2G_3G_4G_5H_2+G_4G_2G_7H_1H_2}$$

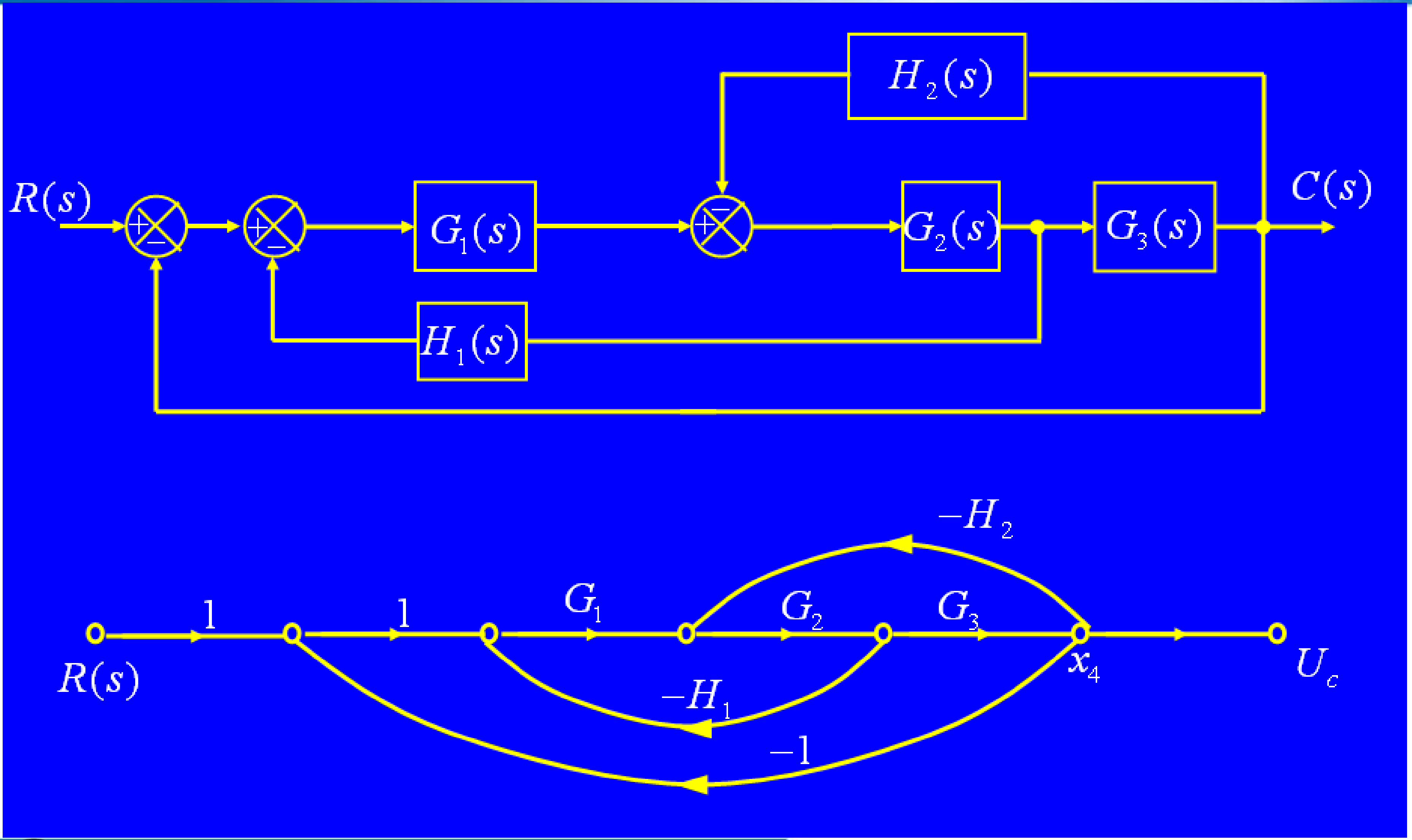
作业：用梅逊公式求闭环传递函数：

2-13

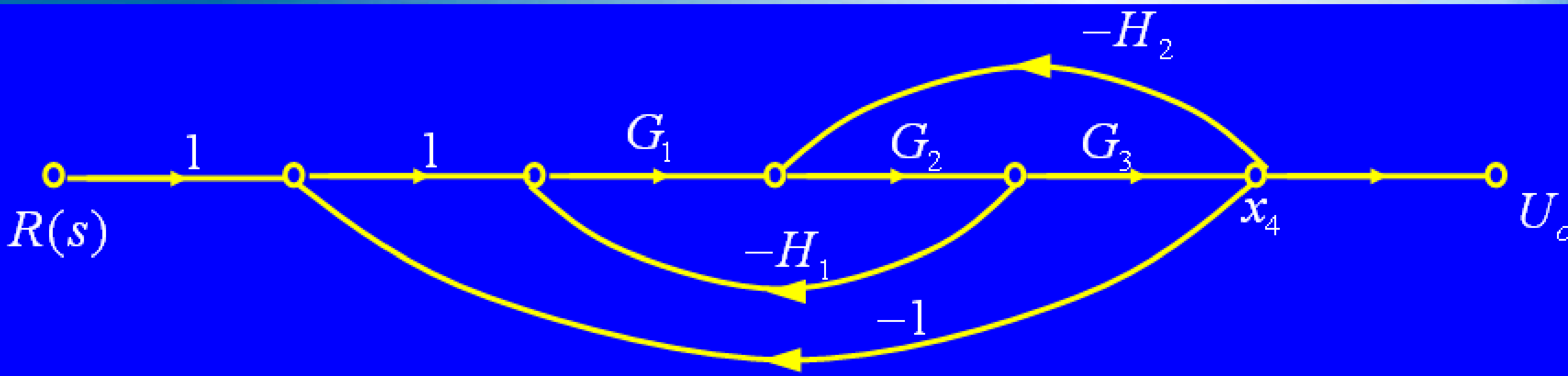
补充：



2.6.5 梅逊公式



2.6.5 梅逊公式



$$p_1 = G_1G_2G_3$$

$$\sum L_n = -G_1G_2H_1 - G_2G_3H_2 - G_1G_2G_3$$

$$\Delta = 1 - \sum L_n = 1 + G_1G_2H_1 + G_2G_3H_2 + G_1G_2G_3$$

$$\Delta_1 = 1$$

$$T = \frac{1}{\Delta} p_1\Delta_1 = \frac{G_1G_2G_3}{1 + G_1G_2H_1 + G_2G_3H_2 + G_1G_2G_3}$$