工 程 控 制 原 理

4. 频 率 特 性 分 析

主讲：李敏

上海大学
机电工程与自动化学院

4. 频率特性分析

控制系统除了可以作时域分析外，还可以进行频域分析。**频域分析法**借助于系统的频率特性来分析系统的性能，因而也称为**频率特性**或**频率法**。

频域分析法是应用频率特性研究线性系统性能的经典方法。它不必直接求解系统的微分方程，而是间接地运用系统的开环频率特性分析闭环响应。

频域分析法也是一种**图解法**。

4.1 频率特性的基本概念

4.1.1 频率响应

系统对正弦输入信号（或谐波信号）的稳态响应称为频率响应。它是随输入信号的频率而变化的特性。

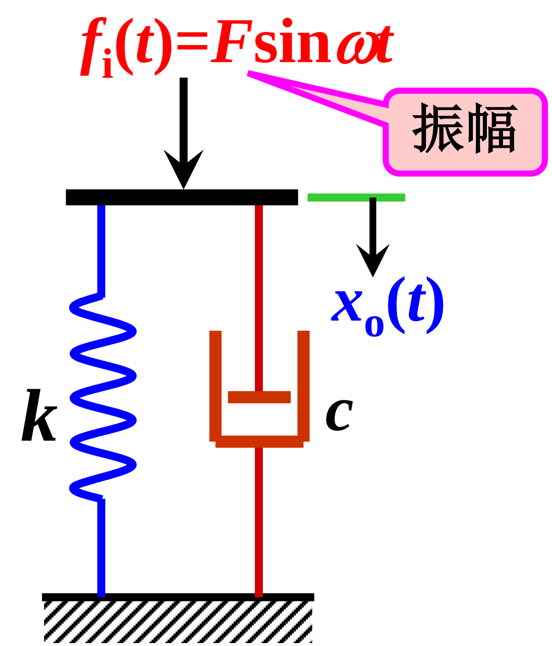
线性定常系统的频率响应也包含：瞬态响应及稳态响应。

频率响应的瞬态响应部分不是正弦波形；稳态响应部分是和输入的正弦信号频率相同的正弦波形，但振幅及相位都与输入信号不同。

4.1 频率特性的基本概念

4.1.1 频率响应

例题： 求图示机械振动系统中位移 $x_o(t)$ 的稳态输出。



弹簧-阻尼系统

解： 系统传递函数为

$$G(s)=\frac{X_o(s)}{F_i(s)}=\frac{1}{cs+k}=\frac{1/k}{Ts+1}$$

时间常数
$T=c/k$

输入信号 $f_i(t)$ 的拉氏变换

$$F_i(s)=F\omega/(s^2+\omega^2)$$

因此

$$X_o(s)=\frac{1/k}{Ts+1}\cdot\frac{F\omega}{s^2+\omega^2}=\frac{a}{Ts+1}+\frac{bs+d}{s^2+\omega^2}$$

求得待定系数*a*、*b*、*d* 分别为

$$a=\frac{F}{k}\cdot\frac{\omega T^2}{1+\omega^2T^2}$$

$$b=-\frac{F}{k}\cdot\frac{\omega T}{1+\omega^2T^2}$$

$$d=\frac{F}{k}\cdot\frac{\omega}{1+\omega^2T^2}$$

输出信号写成

$$X_o(s)=\frac{F/k}{1+\omega^2T^2}\cdot\frac{(\omega-\omega Ts)}{s^2+\omega^2}+\frac{F/k}{1+\omega^2T^2}\cdot\frac{\omega T^2}{Ts+1}$$

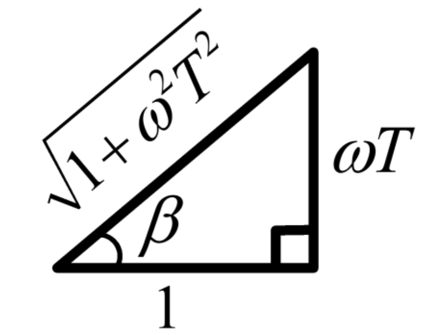
拉氏反变换

$$x_o(t)=\frac{F/k}{1+\omega^2T^2}(\sin\omega t-\omega T\cos\omega t)+\frac{\omega T(F/k)}{1+\omega^2T^2}e^{-t/T}$$

考虑

$$\sin\beta = \frac{\omega T}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}}$$



$$\tan\beta = \omega T \quad \rightarrow \quad \beta = \arctan\omega T$$

$$x_o(t) = \frac{F/k}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}}(\sin\omega t\cos\beta - \cos\omega t\sin\beta) + \frac{\omega T(F/k)}{1+\omega^2 T^2}e^{-t/T}$$

$$x_o(t) = \frac{F/k}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}}\sin(\omega t - \arctan\omega T) + \frac{\omega T(F/k)}{1+\omega^2 T^2}e^{-t/T}$$

稳态响应分量
(等幅振荡)

瞬态响应分量 (指数衰减)
t→∞时，衰减为零

4.1.1 频率响应

位移输出的稳态分量为

$$x_o(t)=\boxed{\frac{F/k}{\sqrt{1+\omega^2T^2}}}\sin(\omega t-\arctan\omega T)$$

$$=A(\omega)F\sin\left[\omega t+\varphi(\omega)\right]=X_o\sin\left[\omega t+\varphi(\omega)\right]$$

位移输出的振幅

式中 $X_o=A(\omega)F$

$$A(\omega)=\frac{1/k}{\sqrt{1+\omega^2T^2}}=\frac{X_o}{F}$$

$$\varphi(\omega)=-\arctan\omega T$$

比例系数

相位角

都是频率ω的函数

由此看出：频率响应是时间响应的一种特例。

4.1.2 频率特性

频率特性：指线性系统或环节在正弦信号作用下，稳态输出与输入之比对频率的关系特性。又称正弦传递函数。

系统稳态输出与输入的振荡幅值比和相位差随频率变化(ω由0→∞)而变化的情况。

频率特性是个复数，可以分别用幅值和相位角来表示。

对于传递函数为$G(s)$的线性系统，若输入为一正弦信号

$$x_{\mathrm{i}}(t)=X_{\mathrm{i}}\sin\omega t$$

输出信号的稳态分量为

$$x_{\mathrm{o}}(t)=X_{\mathrm{o}}\sin\left[\omega t+\varphi(\omega)\right]$$

将输入信号表示为复数形式

$$x_{\mathrm{i}}(t)=X_{\mathrm{i}}\sin\omega t=X_{\mathrm{i}}\operatorname{Im}e^{\mathrm{j}\omega t}$$

表示取复数 $e^{\mathrm{j}\omega t}=\cos\omega t+\mathrm{j}\sin\omega t$ 的虚部

式中的Im
也可省去

同样，将输出信号的稳态分量表示为复数形式

$$x_{\mathrm{o}}(t)=X_{\mathrm{o}}\sin\left[\omega t+\varphi(\omega)\right]=X_{\mathrm{o}}\operatorname{Im}e^{\mathrm{j}\left[\omega t+\varphi(\omega)\right]}$$

频率特性 $G(\mathrm{j}\omega)$ 表示为复数形式

$$G(\mathrm{j}\omega)=\frac{x_{\mathrm{o}}(t)}{x_{\mathrm{i}}(t)}=\frac{X_{\mathrm{o}}\operatorname{Im}e^{\mathrm{j}\left[\omega t+\varphi(\omega)\right]}}{X_{\mathrm{i}}\operatorname{Im}e^{\mathrm{j}\omega t}}=A(\omega)\cdot e^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}$$

4.1.2 频率特性

上式中

$$A(\omega)=\left|G(\mathrm{j}\omega)\right|=\frac{X_\mathrm{o}}{X_\mathrm{i}}$$

$$\varphi(\omega)=\angle G(\mathrm{j}\omega)$$

$A(\omega)$是$G(\mathrm{j}\omega)$的模，称为系统的幅频特性

$\varphi(\omega)$是$G(\mathrm{j}\omega)$的幅角，称为系统的相频特性

频率特性 $G(\mathrm{j}\omega)$ 包含了输出与输入的振幅比和相位差，故又称为幅相频率特性。

4.1.3 频率特性的求取方法

频率特性一般可以通过如下三种方法得到。

① 在已知系统的微分方程或传递函数的情况下，当输入为正弦函数时，求其稳态解，再求 $G(j\omega)$（输出稳态分量与输入正弦函数的复数之比）；

② 将传递函数中的 s 换成 $j\omega$ 来求取；

③ 实验法（对实际系统求取频率特性的一种常用而又重要的方法）。如果在不知道系统的传递函数或数学模型时，只有采用实验法。

经常采用后两种方法进行频率特性的求取。

4.1.3 频率特性的求取方法

比如：对于弹簧-阻尼组成的机械振动系统，其传递函数为

$$G(s)=\frac{1/k}{Ts+1}$$

采用第②种方法，将传递函数中的复变量 s 用纯虚数 $\mathrm{j}\omega$ 代替，可得频率特性的表达式

$$G(\mathrm{j}\omega)=\frac{1/k}{\mathrm{j}\omega T+1}=\frac{1/k}{1+\omega^2T^2}(1-\mathrm{j}\omega T)$$

取其模和幅角

$$A(\omega)=\left|G(\mathrm{j}\omega)\right|=\frac{1/k}{\sqrt{1+\omega^2T^2}}$$

$$\varphi(\omega)=-\arctan\omega T$$

频率特性就是传递函数的一种特殊情况，即：$s=\sigma+\mathrm{j}\omega$ 中 $\sigma=0$ 的情况。

4.1.3 频率特性的求取方法

系统的频率特性可以由其传递函数直接获得，因此，频率特性可写成输出与输入之比的一般形式

$$G(\mathrm{j}\omega)=\frac{X_{\mathrm{o}}(\mathrm{j}\omega)}{X_{\mathrm{i}}(\mathrm{j}\omega)}$$

a) 频率特性能像传递函数一样表示控制系统的性能；

b) 有关传递函数的公式对频率特性也同样适用；

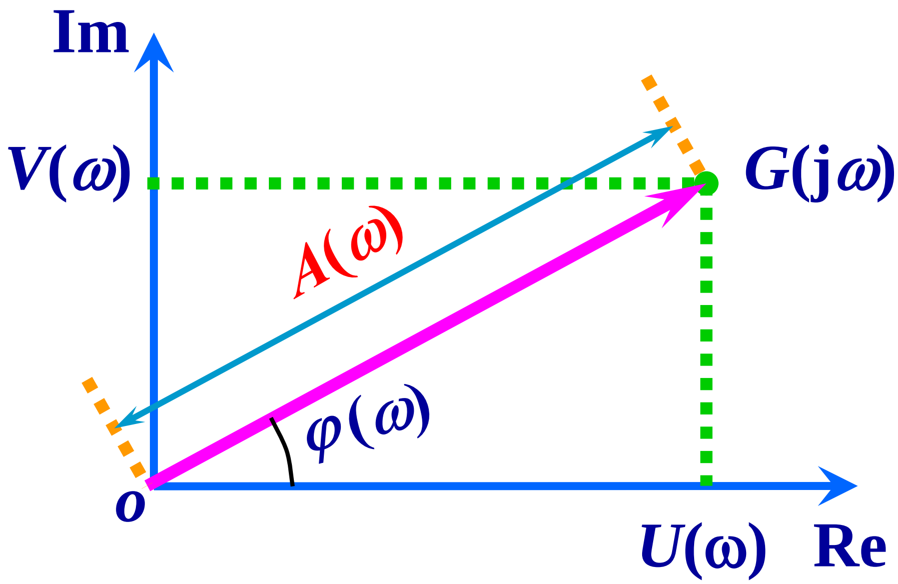
c) 频率特性的量纲即为输出与输入之比的量纲。

由于频率特性 $G(j\omega)$ 是一个复变函数，可以在复平面上用复数表示，即

$$G(\mathrm{j}\omega)=U(\omega)+\mathrm{j}V(\omega)$$

$U(\omega)$ 是 $G(j\omega)$ 的实部，
是 ω 的偶函数，
称为**实频特性**；

$V(\omega)$ 是 $G(j\omega)$ 的虚部，
是 ω 的奇函数，
称为**虚频特性**。



4.1.3 频率特性的求取方法

频率特性 $G(j\omega)$ 的模、幅角、实部、虚部间的换算关系

$$\begin{cases} A(\omega)=|G(j\omega)|=\sqrt{[U(\omega)]^2+[V(\omega)]^2} \\ \varphi(\omega)=\angle G(j\omega)=\arctan\dfrac{V(\omega)}{U(\omega)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} U(\omega)=\operatorname{Re}G(j\omega)=A(\omega)\cos\varphi(\omega) \\ V(\omega)=\operatorname{Im}G(j\omega)=A(\omega)\sin\varphi(\omega) \end{cases}$$

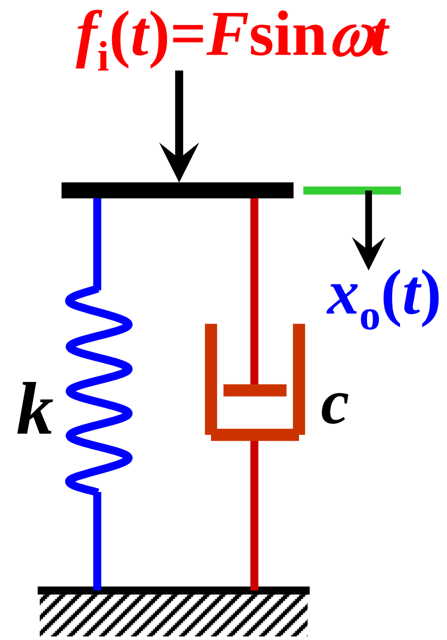
$$G(j\omega)=A(\omega)\cdot e^{j\varphi(\omega)}=A(\omega)\left[\cos\varphi(\omega)+j\sin\varphi(\omega)\right]$$

上述变量都是频率 ω 的函数，可用曲线表示它们随频率变化的关系（频率特性曲线，能直观方便地表达频率特性）。

4.1.4 频率特性的物理意义和数学本质

由例子说明频率特性的物理意义和数学本质

在图示机械振动系统中，k=10N/m，c=10N·s/m，输入幅值为F=1N的正弦力，当 ① $f_i(t)=\sin t$ 和 ② $f_i(t)=\sin 100t$ 两种频率的输入力作用下，求系统的稳态位移输出。



弹簧-阻尼机械振动系统

解： 系统的频率特性。

$$G(\mathrm{j}\omega)=\frac{1/k}{1+\mathrm{j}\omega T}=\frac{1/k}{1+\omega^2T^2}(1-\mathrm{j}\omega T)$$

$$T=c/k=1\quad(\mathrm{s})$$

① 当 $f_i(t)=\sin t$ 时，$\omega=1\ \mathrm{s}^{-1}$，频率特性 $G(\mathrm{j}\omega)$ 的模和幅角为

$$A(\omega)=\left|\frac{1/k}{1+\mathrm{j}\omega T}\right|=\frac{1/k}{\sqrt{1+\omega^2T^2}}=\frac{1/10}{\sqrt{1+1^2\cdot 1^2}}=\frac{0.1}{\sqrt{2}}\quad (\mathrm{m/N})$$

$$\varphi(\omega)=\arctan\frac{-\omega T}{1}=-\arctan\omega T=-\arctan 1=-45^\circ$$

所以，当 $f_i(t)=\sin t$ 时的稳态位移输出为

$$x_o(t)=\frac{0.1}{\sqrt{2}}\sin(t-45^\circ)\quad (\mathrm{m})$$

4.1.4 频率特性的物理意义和数学本质

② 当 $f_i(t)=\sin 100t$ 时，$\omega=100\ \mathrm{s}^{-1}$，频率特性 $G(\mathrm{j}\omega)$ 的模和幅角为

$$A(\omega)=\left|\frac{1/k}{1+\mathrm{j}\omega T}\right|=\frac{1/k}{\sqrt{1+\omega^2T^2}}=\frac{1/10}{\sqrt{1+100^2\cdot 1^2}}=\frac{0.1}{100}\quad(\mathrm{m/N})$$

$$\varphi(\omega)=\arctan\frac{-\omega T}{1}=-\arctan\omega T=-\arctan 100=-89.4^\circ$$

所以，当 $f_i(t)=\sin 100t$ 时的稳态位移输出为

$$x_o(t)=\frac{0.1}{100}\sin(100t-89.4^\circ)\quad(\mathrm{m})$$

系统稳态输出值的振幅随输入信号频率的增大而减小；

输出值的相位滞后量随输入信号频率的增高而加大。

频率特性 $G(j\omega)$ 的物理意义：

(1) 系统频率特性的幅值 $A(\omega)$ 随着频率ω的升高而衰减。频率特性表示了系统对不同频率正弦信号的“复观能力”（或“跟踪能力”）。

在频率较低及 $\omega T << 1$时，输入信号基本上可以按原比例在输出端复现出来；在频率较高时，输入信号就被抑制而不能传递出去。

对于实际存在的控制系统，虽然其形式各不相同，但一般都有这样的“低通”滤波及相位滞后作用。

4.1.4 频率特性的物理意义和数学本质

频率特性 $G(j\omega)$ 的物理意义：

(2) 系统频率特性随频率 ω 而变化，原因是系统中含有各种储能元件。

实际控制系统中往往存在弹簧、惯量或电容、电感等储能元件，它们在能量交换时，对不同频率的信号使系统显示出不同的特性。

(3) 频率特性反映系统本身的特点。即：系统的频率特性取决于系统的本身结构，与外界因素无关。

系统元件的参数(如机械系统的k、c、m)给定以后，频率特性就完全确定，系统频率特性随ω变化的规律也完全确定。

4.1.4 频率特性的物理意义和数学本质

频率特性 $G(\mathrm{j}\omega)$ 的数学本质：

频率特性仍然是表达物理系统基本规律的数学模型。