动力学

第八章

质点系统动力学：矢量方法

目 录

8.0 质点系动力学概述

8.1 动量定理和动量矩定理

8.2 刚体动力学

~~8.3 碰撞~~

8.4 动静法

8.0 质点系动力学概述

问题的提出：为什么需要质点系动力学?

❖ 理论上,可将整个质点系分解成系统所包含的全部单个质点, 并且每个质点可以用不同的运动微分方程建模分析。因此包含 n 个质点的质点系运动由 $3n$个常微分方程描述。

❖ 在n很大的情况下, $3n$ 个耦合的微分方程很难求解。特别是，有些解对初始条件依赖特别敏感，这样的解被称为混沌。

❖ 实际上, 许多工程问题通常并不需要知道质点系内每个质点的运动。

❖ 从必要性和可能性两方面看, 质点系动力学都不是单纯的每个质点的动力学。

动力学

问题的转化：研究质点系动力学的思路

- 研究反映系统作为一个整体时运动特性的动力学量。这些量分别为动量、动量矩和动能。
- 研究系统作为整体的受力情况，例如系统的主矢和主矩及其时间空间的叠加，即冲量和功与。
- 建立反映系统整体运动特性的动力学量与系统所受“有效”作用之间的关系。

关键的问题: 什么是“有效”？

将力分类，然后剔除“无效”部分。力可以分为**外力和内力** (适于本章中的矢量方法), 或者**自动力和约束力** (适于后面两章中的能量法)。

动力学

8.1 动量定理和动量矩定理

1 动量和动量矩

(1) 动量的定义与计算

- 质点在某一瞬时的动量定义为该质点质量与速度的乘积。动量是矢量，其方向与速度矢量相同。

- 设质点系由 n 个质点组成。某一质点(第i个)的动量为$\boldsymbol{p}_i=m_i\boldsymbol{v}_i$, 其中 m_i 为质点质量, $\boldsymbol{v}_i$ 为质点速度。质点系内各质点动量的矢量和称为质点系动量，即

$$\boldsymbol{p}=\sum_{i=1}^{n}m_i\boldsymbol{v}_i$$

- 若 m 为质点系总质量，$\boldsymbol{v}_C$ 为质点系质心C点的速度，则 $\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}_C$

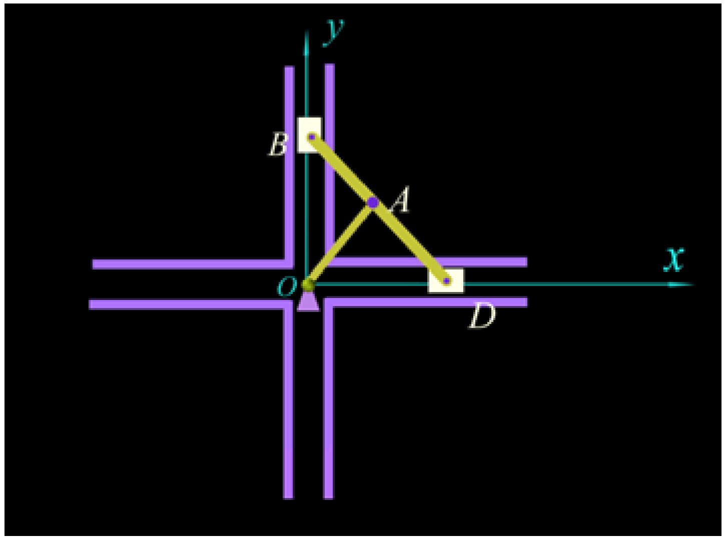
- 动量可坐标轴投影，该投影乘以坐标轴方向的单位矢量称为质点沿坐标轴方向的分量

$$p_x=\sum_{i=1}^{n}m_i v_{ix}=mv_{Cx},\ p_y=\sum_{i=1}^{n}m_i v_{iy}=mv_{Cy},\ p_z=\sum_{i=1}^{n}m_i v_{iz}=mv_{Cz}$$

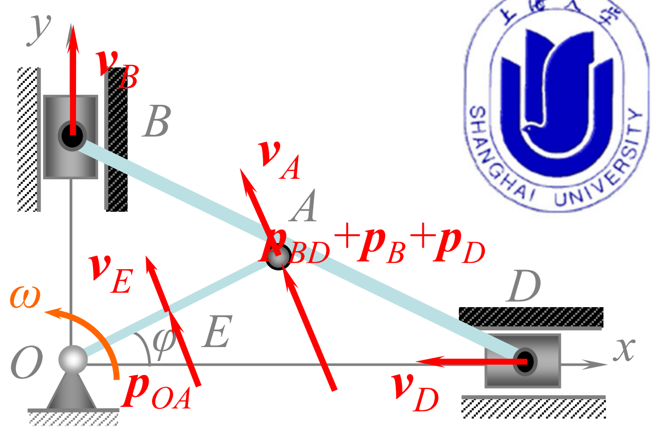
动力学

例 1

椭圆规由一均质曲柄OA, 均质直尺BD和两个滑块B与D构成。曲柄长为l质量为m_1在中心A处与长为$2l$质量为$2m_1$的直尺BD铰接。两个滑块的质量都为m_2, 假设曲柄OA 以角速度ω旋转，求在给定位置即曲柄与x轴夹角为φ 处时系统的总动量。



动力学



解:

以整个系统为研究对象。每一部分质心速度如图所示。

总动量为

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_{OA} + \boldsymbol{p}_{BD} + \boldsymbol{p}_{B} + \boldsymbol{p}_{D}$$

其中$\boldsymbol{p}_{OA}=m\boldsymbol{v}_E$ 方向如图所示，大小为

$$p_{OA} = m_1 v_E = m_1 l\omega/2$$

注意到A是由直尺和滑块构成的子系统的质心。因此它的动量为

$$\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{p}_{BD} + \boldsymbol{p}_{B} + \boldsymbol{p}_{D} = 2(m_1 + m_2)\boldsymbol{v}_A$$

该系统的总动量方向与OA动量方向相同；其大小为

$$p = p_{OA} + p' = \frac{1}{2}m_1 l\omega + 2(m_1 + m_2)l\omega = \frac{1}{2}(5m_1 + 4m_2)l\omega.$$

(2) 动量矩的定义与计算

质点对任意点的动量矩定义为该点到质点的矢径与质点动量的矢量积。动量矩是矢量，其方向垂直于矢径和动量形成的平面，指向按右手定则确定。

设质点系由 n 个质点组成。使m_i为某一质点(第i个)的质量, $\boldsymbol{v}_i$ 为其速度。质点对A点的动量矩为$\boldsymbol{L}_{iA}= \boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i$, 其中$\boldsymbol{r}_i$ 为质点相对于A点的矢径。每个质点对同一点动量矩的矢量和称为质点系对该点的动量矩; 即

$$\boldsymbol{L}_A = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{L}_{iA} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i$$

动量矩也被称为角动量. 相应的，为区分角动量，动量被称为线动量。然而，由于并非只有在角运动或旋转运动中才产生角动量，动量矩更精确的表述了其作为矢量矩的物理特性。

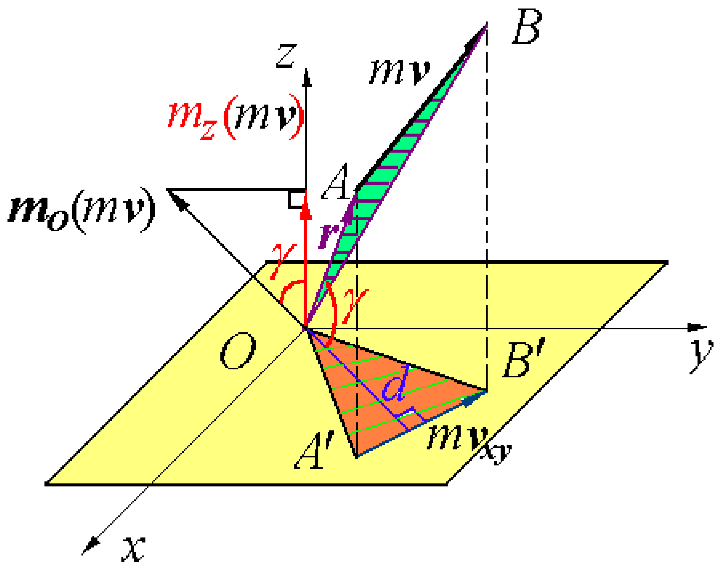
动力学

动量矩都可以向坐标轴进行投影，该投影等于质点对坐标轴的动量矩。即

$$L_{Ax}=\sum_{i=1}^{n}m_i\left[\left(y_i-y_A\right)v_{iz}-\left(z_i-z_A\right)v_{iy}\right],$$

$$L_{Ay}=\sum_{i=1}^{n}m_i\left[\left(z_i-z_A\right)v_{ix}-\left(x_i-x_A\right)v_{iz}\right],$$

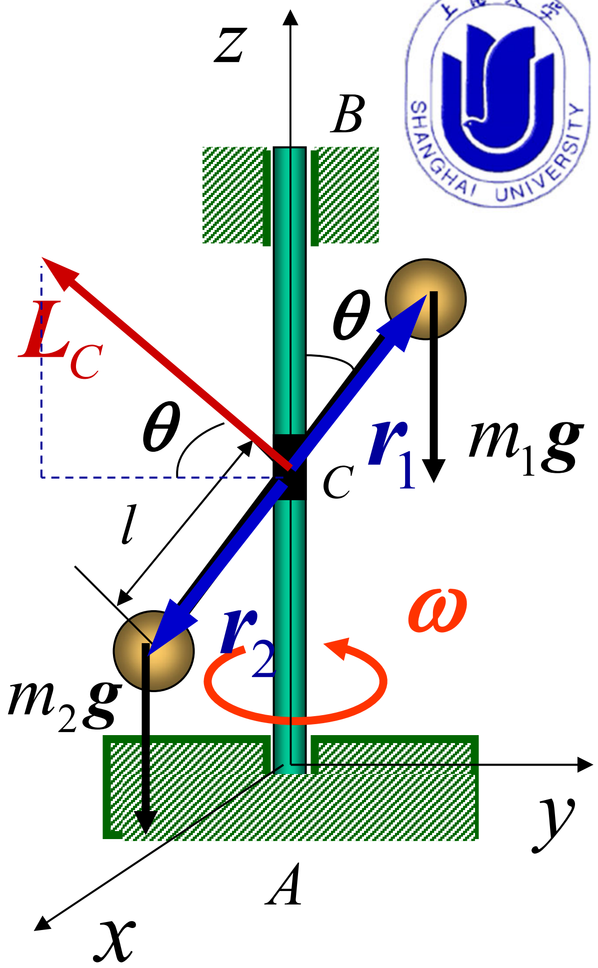
$$L_{Az}=\sum_{i=1}^{n}m_i\left[\left(x_i-x_A\right)v_{iy}-\left(y_i-y_A\right)v_{ix}\right]$$



动力学

例 2

图示系统, 计算对点C 和轴z 的动量矩



解: 以系统为研究对象. 由定义知

$$\boldsymbol{L}_C=\boldsymbol{r}_1\times m_1\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{r}_2\times m_2\boldsymbol{v}_2$$

$$=\boldsymbol{r}_1\times m_1\boldsymbol{v}_1+[-\boldsymbol{r}_1\times m_2(-\boldsymbol{v}_1)]=2\boldsymbol{r}_1\times m\boldsymbol{v}_1$$

大小为

$$L_C=2lm(\omega l\sin\theta)=2\omega ml^2\sin\theta$$

向轴z投影

$$L_z=L_C\sin\theta=2\omega ml^2\sin^2\theta$$

当 $\theta=90^0$时

$$L_C=L_z$$

动力学

➢质点系对不同两点动量矩的关系

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_A + \boldsymbol{r}_i'$$

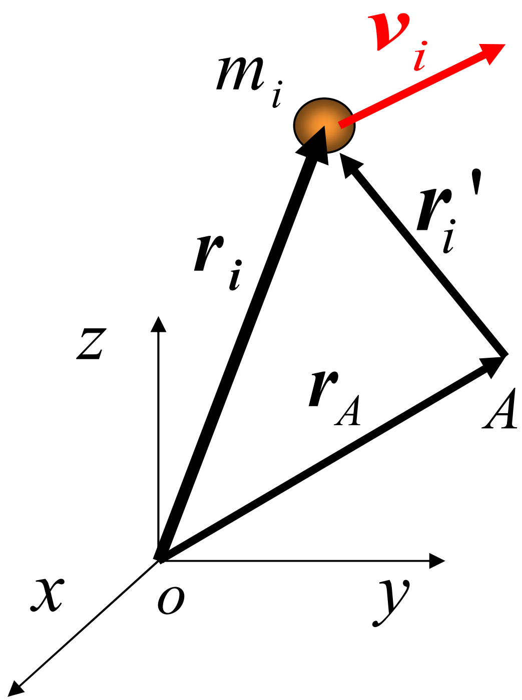
质点系对点O和A的动量矩

$$\boldsymbol{L}_O = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i \qquad \boldsymbol{L}_A = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i' \times m_i \boldsymbol{v}_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{r}_A + \boldsymbol{r}_i') \times m_i \boldsymbol{v}_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i' \times m_i \boldsymbol{v}_i + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_A \times m_i \boldsymbol{v}_i$$

$$= \boldsymbol{L}_A + \boldsymbol{r}_A \times \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{v}_i$$



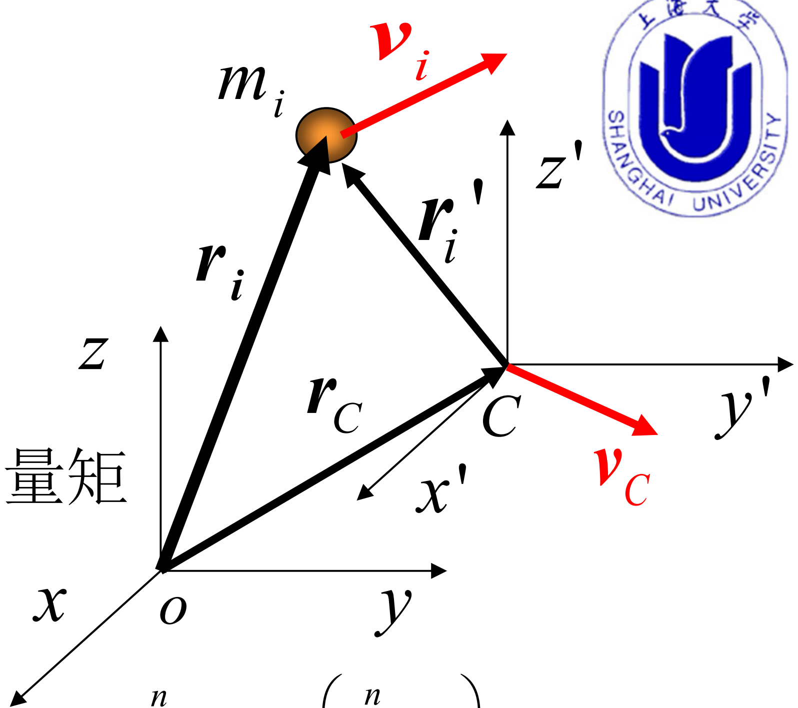
$$\boldsymbol{L}_O = \boldsymbol{L}_A + \boldsymbol{r}_A \times \boldsymbol{p}$$

动力学

➢质点系对质心的动量矩

平动坐标系原点在质心C。

质点系对质心C的绝对和相对动量矩



$$\boldsymbol{L}_C = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i' \times m_i \boldsymbol{v}_i \qquad \boldsymbol{L}_{C\mathrm{r}} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i' \times m_i \boldsymbol{v}_{i\mathrm{r}}$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}_i' = \left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right) \boldsymbol{r}_C' = \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{v}_{i\mathrm{r}}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{L}_{C\mathrm{r}} &= \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i' \times m_i \boldsymbol{v}_{i\mathrm{r}} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i' \times m_i (\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_C) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i' \times m_i \boldsymbol{v}_i - \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i' \times m_i \boldsymbol{v}_C \\
&= \boldsymbol{L}_C - \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}_i'\right)}_{=0} \times \boldsymbol{v}_C
\end{aligned}$$

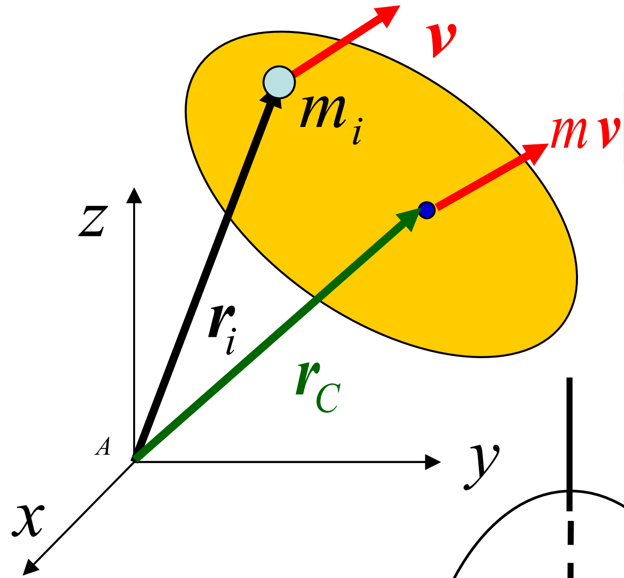
$$\boldsymbol{L}_{C\mathrm{r}} = \boldsymbol{L}_C$$

$$\boldsymbol{L}_O = \boldsymbol{L}_C + \boldsymbol{r}_C \times \boldsymbol{p}$$

$$\boldsymbol{L}_O = \boldsymbol{L}_{C\mathrm{r}} + \boldsymbol{r}_C \times \boldsymbol{p}$$

动力学

➤平动刚体的动量矩



$$L_A=\sum r_i\times m_i v_i=\sum m_i r_i\times v_C=r_C\times m v_C$$

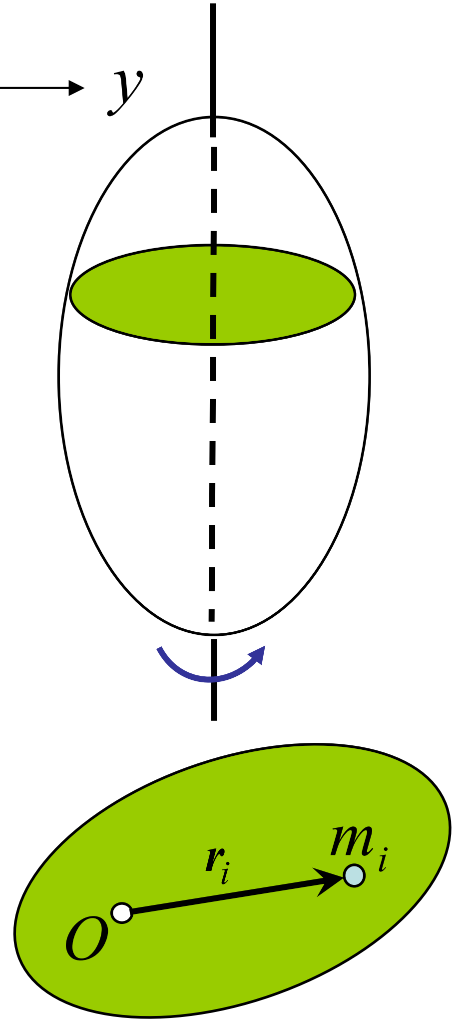
➤定轴转动刚体关于定轴的动量矩

$$L_z=M_z(m_i v_i)=\sum m_i r_i^2\cdot\omega=J_z\cdot\omega$$

$v_i = r_i\omega$

$$J_z=\sum m_i r_i^2$$

J_z 为该刚体对坐标轴z的转动惯量。



动力学

2 动量定理

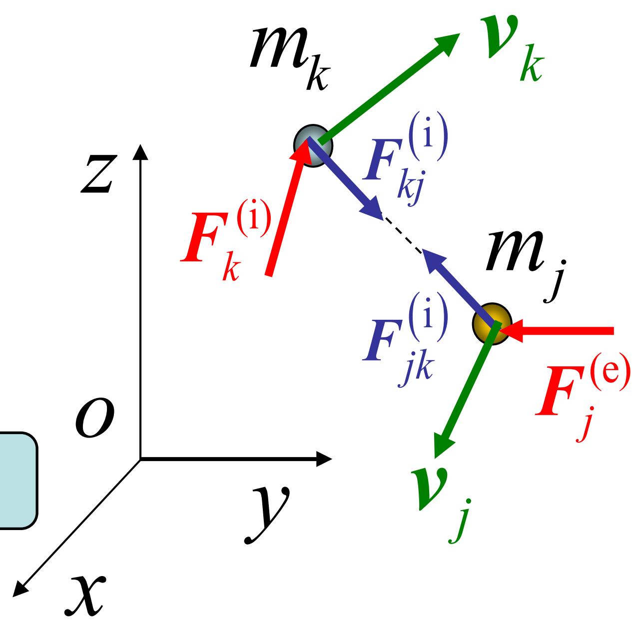
(1) 动量定理及其投影表示

对某一质点(第k个)的运动微分方程有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_k \boldsymbol{v}_k) = \boldsymbol{F}_k^{(\mathrm{e})} + \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{F}_{kj}^{(\mathrm{i})}, \quad i = 1, \cdots, n$$

外力

内力



求和 (k从1到n)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_k \boldsymbol{v}_k) = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F}_k^{(\mathrm{e})} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{F}_{kj}^{(\mathrm{i})}}_{=0} \Rightarrow \dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}^{(\mathrm{e})}$$

动量定理: 质点系的动量变化率等于质点系所受外力的主矢。

动力学

➢ 在固定轴上的投影

动量定理在直角坐标系的投影

$$\dot{p}_x = F_{\mathrm{R}x}^{(\mathrm{e})}, \dot{p}_y = F_{\mathrm{R}y}^{(\mathrm{e})}, \dot{p}_z = F_{\mathrm{R}z}^{(\mathrm{e})}$$

➢ 对动轴的投影

对动轴(单位矢量为$\boldsymbol{u}$)

$$\dot{p}_u = \boldsymbol{p}\cdot\dot{\boldsymbol{u}} + F_{\mathrm{R}u}^{(\mathrm{e})}$$

推导

$$\dot{p}_u = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{u}) = \dot{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{u} + \boldsymbol{p}\cdot\dot{\boldsymbol{u}}$$

$$= \boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}^{(\mathrm{e})}\cdot\boldsymbol{u} + \boldsymbol{p}\cdot\dot{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{p}\cdot\dot{\boldsymbol{u}} + F_{\mathrm{R}u}^{(\mathrm{e})}$$

(2) 动量定理的积分形式与动量守恒

假设质点系在t_1时刻和t_2时刻动量分别为$\boldsymbol{p}_1$和$\boldsymbol{p}_2$, 在时间间隔$[t_1, t_2]$上积分。

$$\boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{I}_{\mathrm{R}}^{(\mathrm{e})}, \qquad \boldsymbol{I}_{\mathrm{R}}^{(\mathrm{e})} = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}^{(\mathrm{e})}\,\mathrm{d}t$$

从t_1到t_2对力的积分称为在时间间隔$[t_1, t_2]$内力的冲量.

动量定理(积分形式)：在有限时间间隔$[t_1, t_2]$内，质点系动量的改变量为同一时间间隔内作用于质点系外力系主矢的冲量。

动量定理积分形式的投影

$$p_{2x} - p_{1x} = I_{\mathrm{R}x}^{(\mathrm{e})}, p_{2y} - p_{1y} = I_{\mathrm{R}y}^{(\mathrm{e})}, p_{2z} - p_{1z} = I_{\mathrm{R}z}^{(\mathrm{e})}$$

➢ 动量守恒

当外力系主矢的冲量（I）为零时，质点系的动量在这一时间间隔内保持不变。

$$\boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{p}_1$$ 动量守恒定律

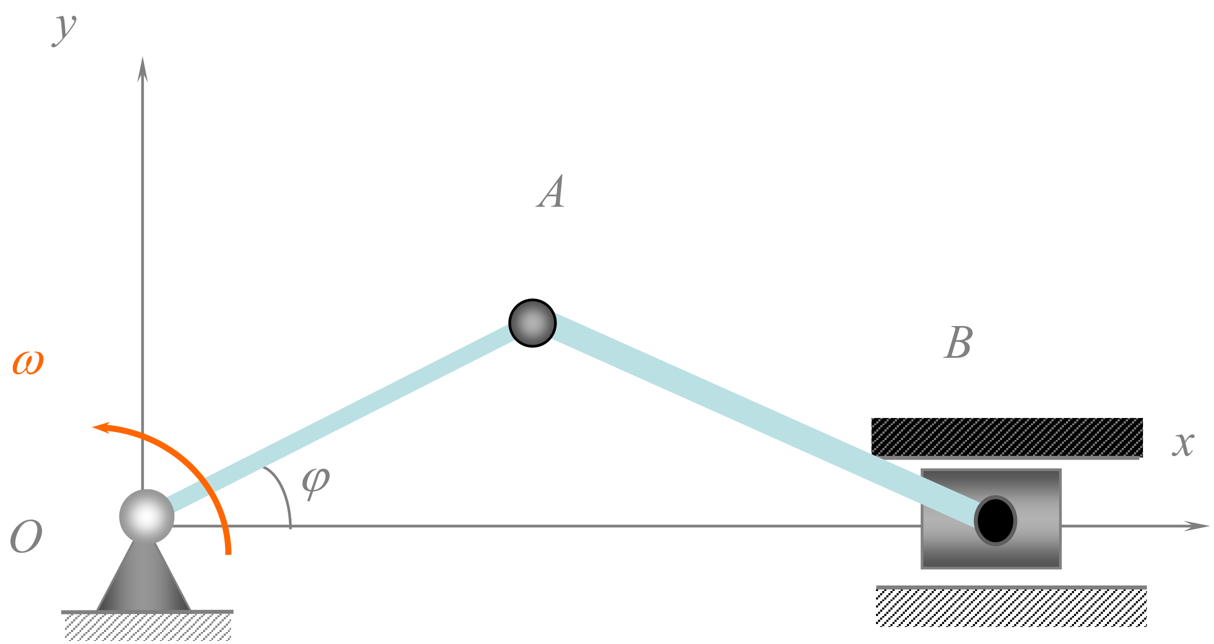
如果质点系外力系的主矢在某固定轴,例如在*x*轴上的投影恒为零，则质点系的动量在该方向上守恒。

$$p_x = p_{0x}$$

动力学

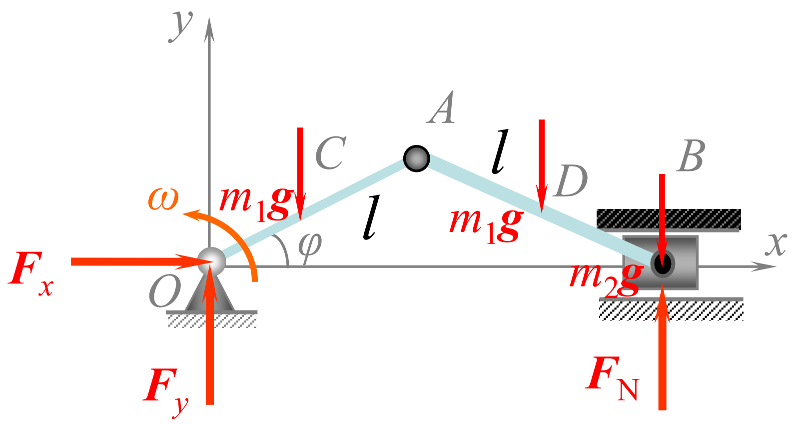
例 3

连杆AB在曲柄OA驱动下运动 $OA=AB=l$,且$\theta=\omega t$,其中ω 是常量;均质杆OA和AB 具有相同的质量m_1, 滑块B质量为m_2, 试求支点O处约束力的水平分量。



动力学

解:



以整个系统为研究对象。

杆OA和杆AB 质心为C和D。
有

$$x_C = \frac{l}{2}\cos\omega t, x_D = \frac{3l}{2}\cos\omega t, x_B = 2l\cos\omega t.$$

x方向上的动量

$$p_x = m_1\dot{x}_C + m_1\dot{x}_D + m_2\dot{x}_B = -2\left(m_1 + m_2\right)\omega l\sin\omega t$$

x方向上运用动量定理

$$\dot{p}_x = F_x$$

$$F_x = -2\left(m_1 + m_2\right)\omega^2 l\cos\omega t$$

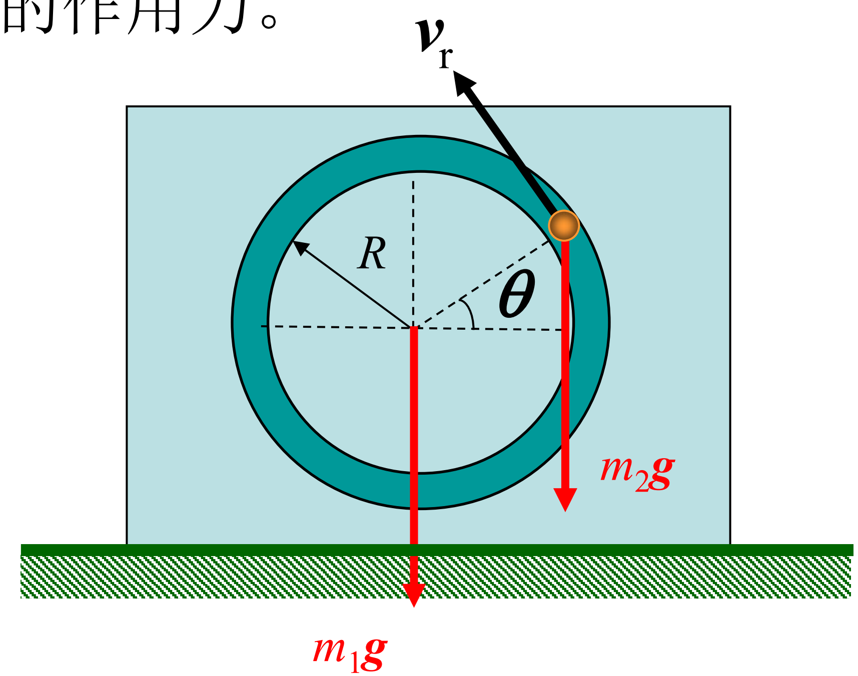
是否能运用动量定理求出F_y?

$$\sum F_y = F_y + F_N - 2m_1 g - m_2 g = \dot{p}_y = m_1\ddot{y}_C + m_1\ddot{y}_D = -\omega^2 l m_1\sin\omega t$$

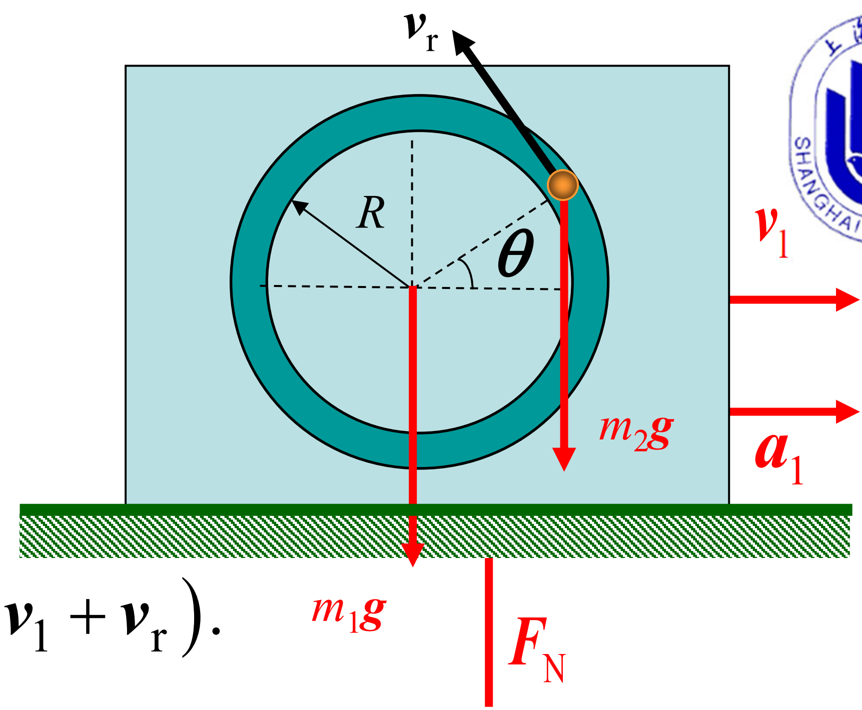
动力学

例 4

光滑水平面上放置的方块在竖直面上有一甲虫以相对速度$\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}$沿半径为$R$的圆运动。方块和甲虫质量分别为$m_1$和$m_2$。用图中角$\theta$表示甲虫位置。初始位置处，$\theta=0$，甲虫静止。确定方块速度和加速度以及光滑面的作用力。



动力学



解: 以整个系统为研究对象.

方块的速度加速度为$\boldsymbol{v}_1$和$\boldsymbol{a}_1$.

系统总动量

$$\boldsymbol{p} = m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 = m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\left(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_\mathrm{r}\right).$$

水平方向上投影

$$p_x = m_1 v_1 + m_2\left(v_1 - v_\mathrm{r}\sin\theta\right).$$

水平方向上满足动量守恒

$$p_x = m_1 v_1 + m_2\left(v_1 - v_\mathrm{r}\sin\theta\right) = p_{x0} = 0. \Longrightarrow v_1 = \frac{m_2 v_\mathrm{r}\sin\theta}{m_1 + m_2}.$$

$$a_1 = \frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t} = \frac{m_2 v_\mathrm{r}\dot{\theta}\cos\theta}{m_1 + m_2} \xrightarrow{v_\mathrm{r} = R\dot{\theta}} a_1 = \frac{m_2 v_\mathrm{r}^2\cos\theta}{(m_1 + m_2)R}$$