工程控制原理

6. 系统的综合与校正 6.2 串联校正

主讲:李敏

6. 系统的综合与校正

6.2 串联校正

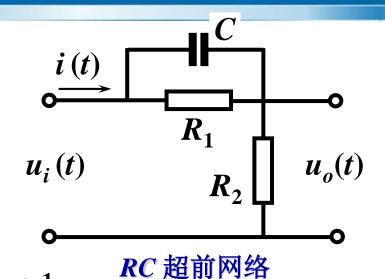
本节分别介绍相位超前、滞后、滞后一超前三种校正元件的线路、数学模型及其在系统中所起的作用,并举例说明用Bode图分析计算串联校正装置的方法。

6.2 串联校正

6.2.1 相位超前校正

(1) 超前校正装置的特性

如图所示为RC超前网络, 其传递函数为



$$G_{c}(s) = \frac{U_{o}(s)}{U_{i}(s)} = \frac{R_{2}}{R_{1} + R_{2}} \frac{R_{1}Cs + 1}{\frac{R_{2}}{R_{1} + R_{2}}} \frac{RC B M A}{R_{1}Cs + 1}$$

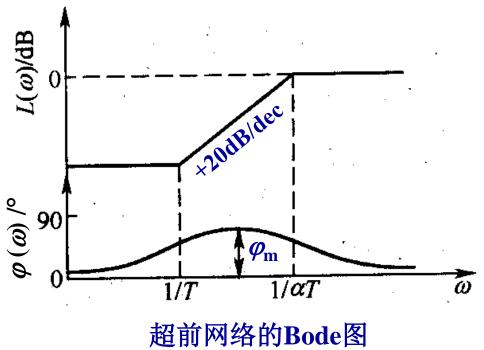
设

$$R_1C = T$$

$$R_2 / (R_1 + R_2) = \alpha < 1$$

$$G_{c}(s) = \alpha \frac{Ts+1}{\alpha Ts+1}$$

网络的频率特性如图所示。其对数幅频渐近线曲线具有 正斜率段,相频曲线具有正相位移。正相位移表明,网络在 正弦信号输入时的稳态输出在相位上超前于输入,故称超前 网络。



超前网络的幅频特性为

$$|G_{c}(j\omega)| = \alpha \frac{\sqrt{1 + (\omega T)^{2}}}{\sqrt{1 + (\alpha \omega T)^{2}}}$$

相频特性为

$$\angle G_{c}(j\omega) = \varphi = \operatorname{arctg}(\omega T) - \operatorname{arctg}(\alpha \omega T)$$

根据上式可以算出超前网络所提供的最大超前角为

$$\varphi_{\rm m} = \arcsin \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$$

 $\varphi_{\rm m}$ 发生在两个转折频率 1/T 和 $1/(\alpha T)$ 的几何中点,对应的角频率 $\omega_{\rm m}$ 可通过下式计算求得:

$$\lg \omega_{\rm m} = \frac{1}{2} \left(\lg \frac{1}{T} + \lg \frac{1}{\alpha T} \right) \qquad \omega_{\rm m} = \frac{1}{\sqrt{\alpha T}}$$

由Bode图可以看出,超前网络基本上是一个高通滤波器。 超前校正装置的主要作用是改变频率特性曲线的形状, 产生足够大的相位超前角,以补偿原来系统中元件造成的过 大的相角滞后。

(2) 相位超前校正网络的作用

相位超前校正装置具有以下作用:

- ① 通常情况下,相位超前校正可以增加闭环系统的阻尼,降低上升时间和调整时间;
 - ②增加闭环系统的相角稳定裕量;
 - ③ 增加闭环系统的幅值稳定裕量;
 - ④ 提高闭环系统的带宽,加快系统的响应速度;
 - ⑤通过增益修正,不影响系统的稳态误差。

相位超前校正网络不是对所有的系统都有效,当计划采用相位超前校正网络时,需要考虑下面几点:

- ① 带宽的考虑: 如果原系统不稳定,或者稳定裕量很小,那么相位超前校正所要做的相位补偿 φ_m 就会非常大,参数 α 很小,导致校正器的带宽增加,这将给系统带来附加噪声,可能导致设计失败。另外,参数 α 很小可能导致鲁棒性问题,即校正器的指标对环境参数过于敏感。
- ② 对于不稳定或者稳定裕度很小的系统,如果参数 α 很小,导致增益补偿过大,高增益放大器意味着高成本。
- ③ 当未校正系统的相角稳定裕度需要90°以上的相角补偿时,无法使用单阶相位超前校正网络进行校正。

例题6-1: 设有一单位反馈系统,其开环传递函数为

$$G(s) = \frac{4K}{s(s+2)}$$

若要使系统在单位速度输入下的稳态误差 e_{ss} =0.05,相位裕量 γ 不小于50°,幅值裕量 K_g (dB)不小于10dB,试求系统的校正装置。

 \mathbf{m} : (1) 显然这是个I型系统,首先根据稳态误差的要求,确定K。

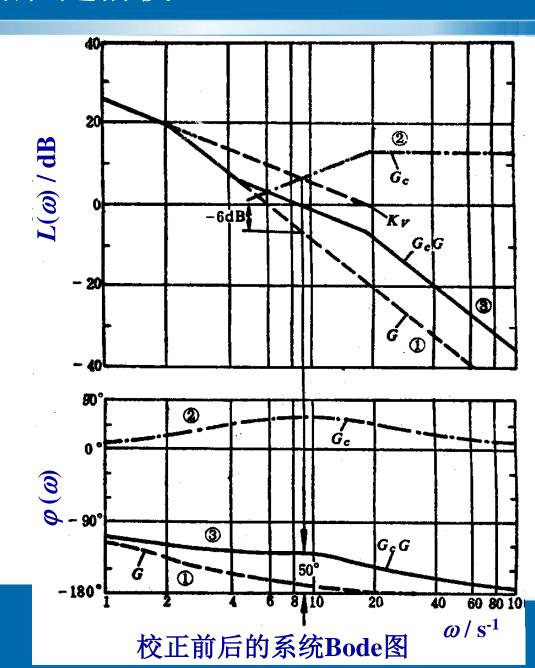
$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} s \frac{1}{1 + G(s)H(s)} \frac{1}{s^2} = \frac{1}{\lim_{s \to 0} s \frac{4K}{s(s+2)}} = \frac{1}{2K} = 0.05$$

所以 K=10

即: 当K=10时,系统可满足精度要求,此时开环传递函数

$$G(s) = \frac{40}{s(s+2)} = \frac{20}{s(0.5s+1)}$$

(2) 绘制系统的开环 波德图,如右图中的曲线 ①。



由图可见,未校正前系统的相位裕量 $\gamma = 17^\circ$,幅值裕量为 ∞ ,系统是稳定的,但因相位裕量小于50°,相对稳定性不符 合要求。

为了在不减小K的情况下满足 $\gamma \geq 50^\circ$,需要增加相位超前校正装置,其相位超前角应为 33° 。但这将影响到幅值交界频率向右移动,在新的幅值交界频率处对应的相位裕量就会小于 50° ,因此在确定补偿角度时再增加 5° ,来抵消这一影响所造成的相角滞后量。

取校正装置的最大超前角 φ_m =38°。根据 φ_m 可确定衰减系数 α ,因为 $\sin \varphi_m$ =(1- α)/(1+ α),所以

$$\alpha = \frac{1 - \sin \varphi_{m}}{1 + \sin \varphi_{m}}$$
 将 φ_{m} =38°代入,得 α =0.24。

下面确定超前装置的两个转折频率1/T和 $1/\alpha T$ 。由于最大相位超前角发生在两个转折频率的几何中点上,即 $\omega_{\rm m}=1/(\sqrt{\alpha}T)$,那么,在这一点上超前装置引起的幅值变化量应为

$$\left| \frac{1 + j\omega T}{1 + j\omega \alpha T} \right|_{\omega = 1/(\sqrt{\alpha}T)} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

用分贝表示为

$$20 \lg \frac{1}{\sqrt{\alpha}} dB = 20 \lg \frac{1}{\sqrt{0.24}} dB = 6.2 dB$$

这个幅值的变化未计入超前校正引起的幅值衰减部分。

在 $G(j\omega)$ =-6.2dB处的频率 ω =9s⁻¹,让这个频率对应最大相位超前角,那么当超前校正装置加上以后,频率为9s⁻¹处幅值为0dB,即为校正后的幅值交界频率 ω_c ,此频率处相角增加38°。

由于 $\omega_{\rm c}$ =9s-1这一频率对应于校正装置的 $\omega_{\rm m}$ =1/($\sqrt{\alpha}T$),因此 求得

$$\frac{1}{T} = \sqrt{\alpha}\omega_{\rm c} = 4.41 \text{ s}^{-1}, \quad T = 0.227$$

$$\frac{1}{\alpha T} = \frac{\omega_{c}}{\sqrt{\alpha}} = 18.4 \text{ s}^{-1}, \quad \alpha T = 0.054 \text{ s}$$

由此可以确定相位超前校正环节为

$$G_{c}(s) = \alpha \frac{Ts+1}{\alpha Ts+1} = 0.24 \frac{0.227s+1}{0.054s+1}$$

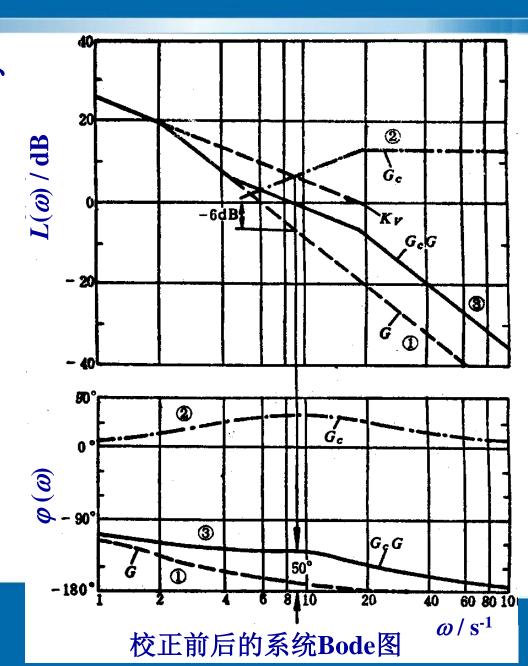
为了补偿超前校正造成的幅值衰减,须将放大器的增益 提高 1/0.24=4.17 倍,这样得到校正装置的传递函数为

$$G_{c}(s) = \frac{0.227s + 1}{0.054s + 1}$$

校正后系统的开环传递函数为

$$G_{c}(s)G(s) = \frac{0.227s + 1}{0.054s + 1} \frac{40}{s(s+2)}$$

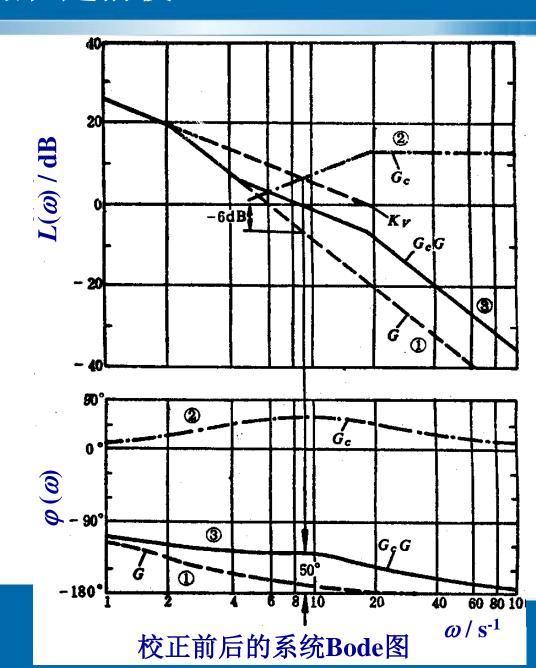
校正装置的对数幅频、 相频曲线如图中曲线②; 校正后的对数幅、相频特 性曲线见图中实线③。





超前校正装置使幅值 交界频率从 6.3s-1 增加到 9s-1。增加这一频率意味 着增加了系统的带宽,从 而说明系统的响应速度增 大,瞬态响应显著改善。

图中相位裕量约等于 50°,提高了系统的相对 稳定性。但由于系统的增 益和型次都未改变,所以 稳态精度提高较少。



- 一般要求系统响应快、超调小,可采用超前串联校正。用Bode图分析计算超前校正装置的步骤归纳如下:
- (1) 根据对稳态速度误差的要求,确定开环增益K;
- (2) 利用求得的*K*, 绘制原系统的波德图, 确定校正前的相位裕量和幅值裕量;
 - (3) 确定所需要增加的相位超前角 $\varphi_{\rm m}$;
- (4) 由 φ_m 计算衰减系数 α ,确定与校正前系统的幅值等于 $-201g(1/\alpha)$)所对应的频率 ω_c ,以此作为新的幅值交界频率;
 - (5) 确定超前校正装置的转折频率 $\omega_1=1/T$, $\omega_2=1/(\alpha T)$;
- (6) 增加一个增益等于 $1/\alpha$ 的放大器,或将原有放大器增益提高 $1/\alpha$ 倍。

6.2 串联校正

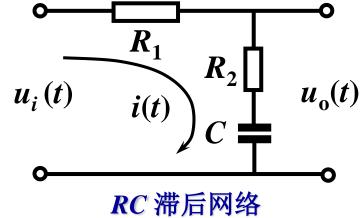
6.2.2 相位滞后校正

(1) 滞后校正装置的特性

如图所示为RC滞后网络,

其传递函数为

$$G_{c}(s) = \frac{U_{o}(s)}{U_{i}(s)} = \frac{R_{2}Cs + 1}{\frac{R_{1} + R_{2}}{R_{2}}R_{2}Cs + 1}$$

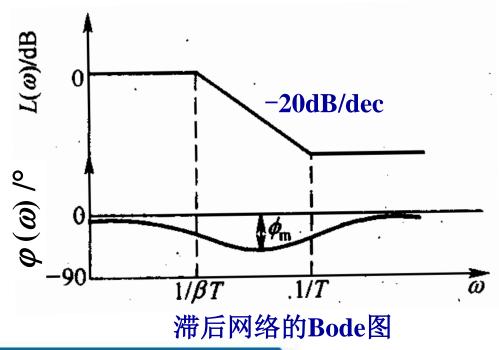


$$R_2C=T$$

$$R_2C = T$$
 $(R_1 + R_2)/R_2 = \beta > 1$

$$G_{c}(s) = \frac{Ts+1}{\beta Ts+1} = \frac{1}{\beta} \frac{s + (1/T)}{s + (1/\beta T)}$$

网络的对数频率特性如图所示。由于以上传递函数式中 βT >T, 故对数幅频渐近曲线具有负斜率段,相频曲线出现 负相移。负相移表明当正弦信号输入时,稳态输出电压在相 位上滞后于输入,故称滞后网络。



滞后网络的幅频特性为

$$|G_{c}(j\omega)| = \frac{1}{\beta} \frac{\sqrt{1 + (\omega T)^{2}}}{\sqrt{1 + (\beta \omega T)^{2}}}$$

相频特性为

$$\angle G_{c}(j\omega) = \varphi = \operatorname{arctg}(\omega T) - \operatorname{arctg}(\beta \omega T) < 0$$

滯后网络的最大滯后角 φ_m 及其对应的频率 ω_m 为

$$\varphi_{\rm m} = \arcsin \frac{\beta - 1}{\beta + 1}$$

$$\omega_{\rm m} = \frac{1}{\sqrt{\beta T}}$$

由Bode图可以看出,滞后网络基本上是一个低通滤波器。

滞后校正的作用主要是利用它的负斜率段,使被校正系统高频段幅值衰减,幅值交界频率左移,从而获得充分的相位裕量,其相位滞后特性在校正中作用并不重要。因此滞后校正环节的转折频率 1/(βT) 和 1/T 均应设置在远离幅值交界频率,靠近低频段的地方。

(2) 相位滞后校正网络的作用

相位滞后校正装置具有以下作用:

- ① 穿越频率附近的幅值增益下降,系统的相对稳定性得到提高;
- ② 同样因为穿越频率附近的幅值增益下降,系统的带宽下降;
 - ③ 带宽下降,导致系统的上升时间和调整时间加长。

例题6-2: 设有一单位反馈系统,其开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(0.5s+1)}$$

若要使系统在单位速度输入下的稳态误差 e_{ss} =0.2,相位裕量 γ 不小于40°,幅值裕量 $K_g(dB)$ 不低于10dB,试求系统的校正装置。

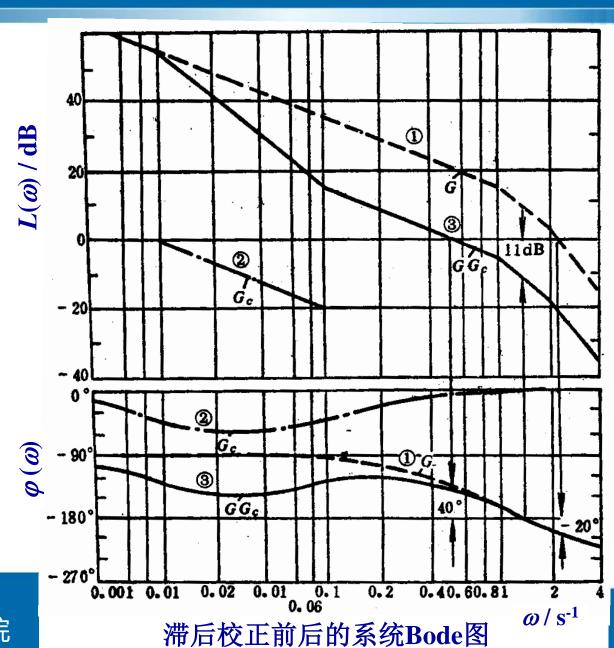
 \mathbf{m} : (1) 显然这是个I型系统,首先根据稳态误差的要求,确定K。

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} s \frac{1}{1 + G(s)H(s)} \frac{1}{s^2} = \frac{1}{K} = 0.2$$

所以 K=5

(2) 由已确定的开环增益,画出系统校正前的开环 波德图,见图中的曲线①。

由图可以求出, 校正前系统的相位 裕量γ =-20°, 这说 明系统是不稳定的。





采用滞后校正来满足系统性能指标。从图上看出,未校正时与 40° 相位裕量所对应的频率是 $\omega=0.7s^{-1}$,所以校正后的幅值交界频率应选在这一数值附近。为了防止滞后网络的时间常数T值过大,取 $\omega=1/T$ 为 $0.1s^{-1}$,即T=10s。

然而,由于 $0.1s^{-1}$ 距 $0.7s^{-1}$ 不算太远,所以在 $0.7s^{-1}$ 附近的相 位曲线变化可能较大。考虑到滞后网络的相位滞后因素,需 要在给定的相位裕量数值上再增加一个适当的角度,我们增 加12°,这样需要的相位裕量就变成52°,按这个值在未校正的 对数幅频曲线上找到 -128° 所对应的频率是 $0.5s^{-1}$,并以此作为 新的幅值交界频率 ω_c 。从图上可见,要使这一点的幅值下降 到0dB, 滞后网络应产生必要的衰减量, 使幅频曲线在这里下 降20dB。

因此

$$20\lg\frac{1}{\beta} = -20dB$$

滯后网络的另一个转折频率为 $\omega=1/(\beta T)$,即

$$\frac{1}{\beta T} = 0.01 \text{ rad/s}, \quad \beta T = 100 \text{ rad/s}, \quad T = 10 \text{ s}$$

由此可得到滯后网络的传递函数为

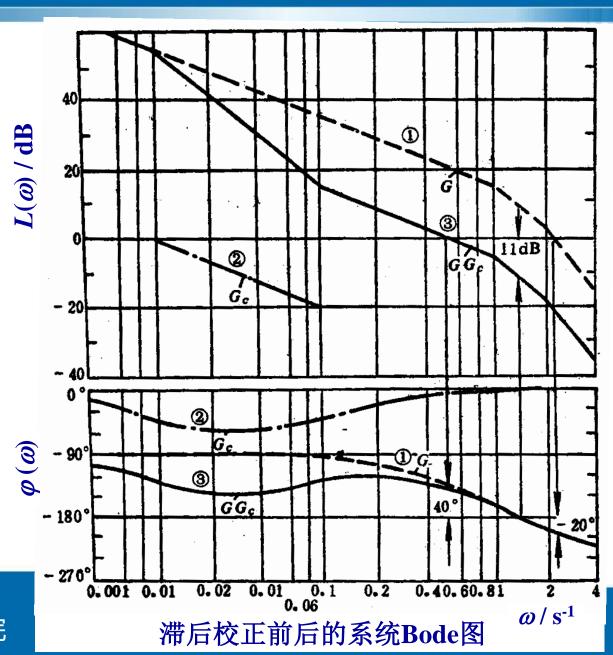
$$G_{c}(s) = \frac{1}{10} \frac{s+0.1}{s+0.01} = \frac{10s+1}{100s+1}$$

校正后系统的开环传递函数为

$$G_{c}(s)G(s) = \frac{5(10s+1)}{s(100s+1)(s+1)(0.5s+1)}$$

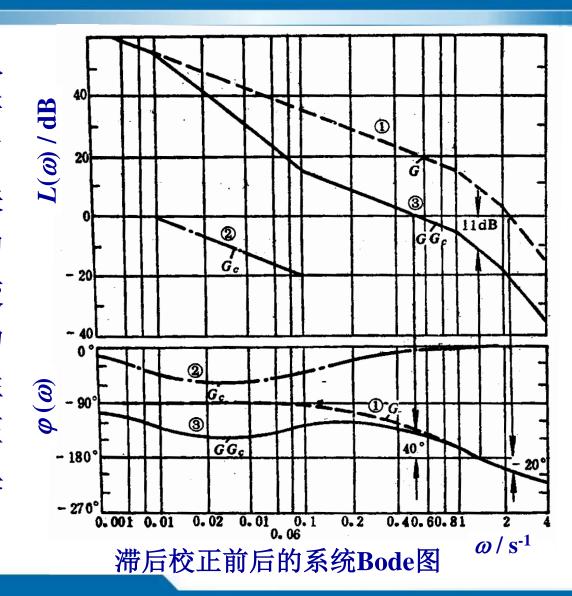
图中的曲线②表示滞后校正装置的对数频率特性,曲线③表示校正后系统的开环Bode图。

校正后系统的相位裕量约等于40°,幅值裕量约等于11dB,稳态速度误差等于0.2,都满足了预先提出的指标要求。





幅值交界频率从 2.1s⁻¹降低到0.5s⁻¹,显著 减小了系统的频宽,因 此瞬态响应速度比原来 降低。由于滯后网络的 负斜率段的作用,使校 正后的 ω 。附近斜率变为 -20dB/dec,相对稳定性 提高。因此,滯后校正 是以对快速性的限制换 取了系统的稳定性。



另外,串入滞后网络并没有改变原系统低频段的特性, 故对系统的稳态精度不起破坏作用。相反,往往还允许适当 提高开环增益,进一步改善系统的稳态性能。

高稳定、高精度的系统常采用滞后校正,如恒温控制等。由Bode图计算滞后校正装置的步骤如下:

- (1) 根据对稳态误差的要求,确定系统的开环增益K值;
- (2) 根据已确定的开环增益,绘制未校正系统的开环Bode 图,测取系统的相位裕量及幅值裕量;

- (3) 若系统的相位裕量、幅值裕量不满足要求,应选择新的幅值交界频率。新的辐值交界频率应选在相角等于 -180°加上必要的相位裕量(系统要求的相位裕量再增加5~12°) 所对应的频率上;
- (4) 确定滞后网络的转折频率 $\omega=1/T$,这一点应低于新的幅值交界频率1倍到10倍频程;
- (5) 确定校正前幅频曲线在新的幅值交界频率处下降到0 dB所需要的衰减量,这一衰减量等于 $-20\lg\beta$,从而确定 β 值。然后确定另一个转折频率 $\omega=1/(\beta T)$;
- (6) 若全部指标都满足要求,把*T*和β值代入,求出滞后网络的传递函数。

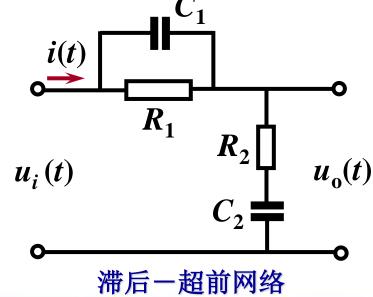
6.2 串联校正

6.2.3 相位滞后一超前校正

超前校正可以增加频宽提高快速性,以及改善相对稳定性。滞后校正可以提高平稳性及稳态精度,而降低了快速性。工程上有大量系统无法单独使用其中一种校正装置达到满意的校正效果,如果同时采用滞后和超前校正,则可全面改善系统的控制性能。 C_1

如图所示为RC滞后一超前 网络,其传递函数为

$$G_{c}(s) = \frac{(R_{1}C_{1}s+1)(R_{2}C_{2}s+1)}{(R_{1}C_{1}s+1)(R_{2}C_{2}s+1)+R_{1}C_{2}s}$$

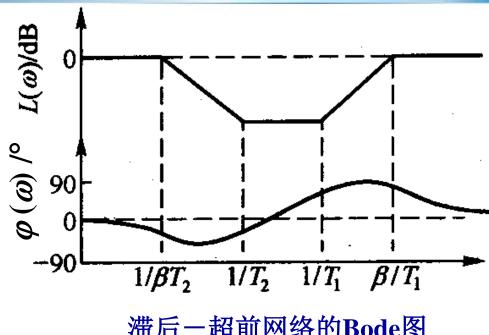


设
$$R_1C_1 = T_1$$
, $R_2C_2 = T_2$, $R_1C_1R_2C_2 = T_1T_2$ (取 $T_2 > T_1$)
并使 $R_1C_1 + R_2C_2 + R_1C_2 = \frac{T_1}{\beta} + \frac{1}{\beta}T_2$ ($\beta > 1$)
则 $G_c(s) = \frac{(T_1s+1)(T_2s+1)}{\left(\frac{T_1}{\beta}s+1\right)(\beta T_2s+1)} = \frac{T_1s+1}{T_1}\frac{T_2s+1}{\beta T_2s+1}$

式中, $(1/\beta)<1$,相当于超前校正中的 $\alpha<1$ 。

上式右端第一项起超前网络作用,第二项起滞后网络作用。滞后一超前网络的Bode图如下。

可以看出,曲线的 低频部分具有负斜率和 负相移,起滞后校正作 用:后一段具有正斜率 和正相移, 起超前校正 作用。且高频段和低频 段均无衰减。



滞后一超前网络的Bode图

用Bode图确定滞后一超前校正装置,实际上是设计超前 装置和滞后装置两种方法的结合。

例题6-3: 设有一单位反馈系统,其开环传递函数为

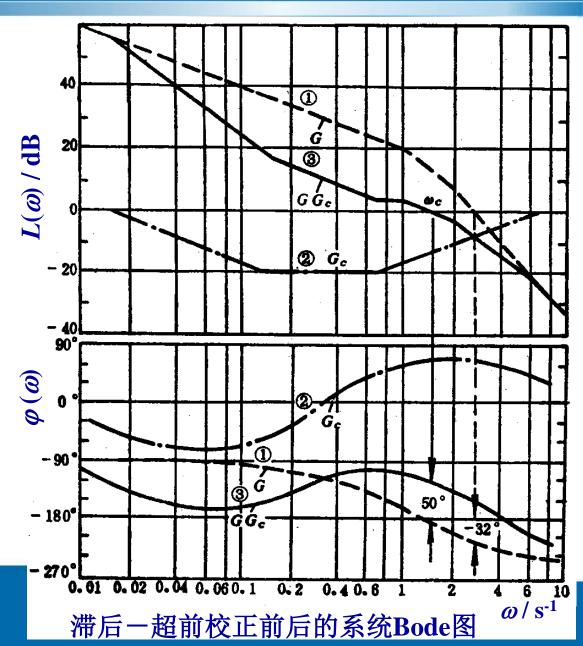
$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

要求系统在单位速度输入下稳态误差 e_{ss} =0.1,相位裕量等于 50° ,幅值裕量不低于10dB,试设计滞后一超前校正装置。

解: (1) 根据稳态误差的要求,确定K。

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} s \frac{1}{1 + G(s)H(s)} \frac{1}{s^2} = \frac{1}{\lim_{s \to 0} \frac{K}{(s+1)(s+2)}} = \frac{2}{K} = 0.1$$

所以 K=20



- (3) 选择新的幅值交界频率。从校正前的相频曲线上看,。 $\omega=1.5s^{-1}$ 时,相角 $\varphi=-180^{\circ}$,选择它作为新的幅值交界频率较为方便。这样在 $\omega_c=1.5s^{-1}$ 处应满足 50° 相位裕量的要求。使这一点相位超前 50° 角,用滞后一超前网络完全可以做到。
- (4) 确定滞后一超前网络的相位滞后部分的转折频率,选取转折频率 $\omega = 1/T_2$ 在新的幅值交界频率以下10倍频程,并取 β 等于10,则

 $1/T_2$ =0.15 s⁻¹, T_2 =6.67 s, $1/(\beta T_2)$ =0.015 s⁻¹, βT_2 =66.7 s 滞后部分的传递函数为

$$\frac{T_2s+1}{\beta T_2s+1} = \frac{6.67s+1}{66.7s+1}$$

(5) 相位超前部分可确定如下:由未校正的波德图上看,要使 ω =1.5 s -1处的幅值13dB经过校正下降到0dB,也就是让1.5 s -1成为新的幅值交界频率,需要校正装置在此处产生-13dB的幅值。按这一要求,可通过点(1.5 s -1,-13dB)处画一条斜率为[+20]的直线,与0dB线及-20dB线的两个交点,所对应的频率分别为0.7 s -1 (即 $/T_1$) 和7 s -1 (即 β / T_1),即超前部分的两个转折频率。计算出 T_1 =1.43 s , T_1/β =0.143 s , 所以超前部分的传递函数为

$$\frac{T_1 s + 1}{(T_1 / \beta) s + 1} = \frac{1.43 s + 1}{0.143 s + 1}$$

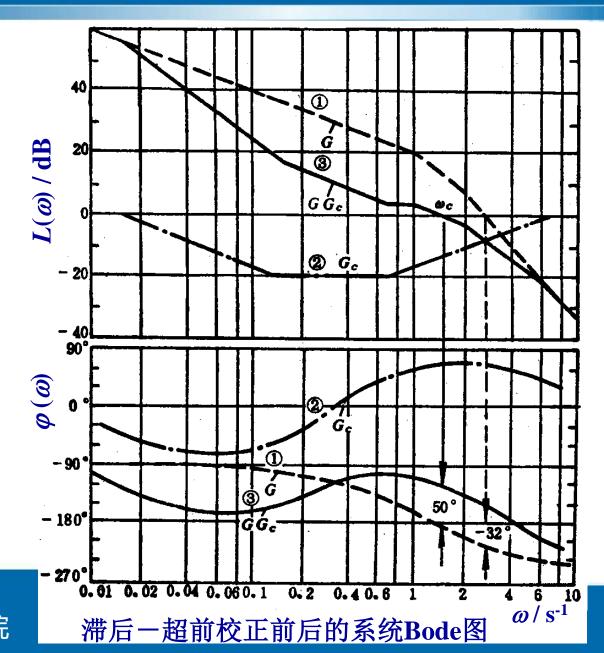
(6) 将滞后部分与超前部分的传递函数组合在一起,就是滞后一超前网络的传递函数。

$$G_{c}(s) = \frac{1.43s+1}{0.143s+1} \frac{6.67s+1}{66.7s+1}$$

校正后系统的开环传递函数为

$$G_{c}(s)G(s) = \frac{10(1.43s+1)(6.67s+1)}{s(0.143s+1)(66.7s+1)(s+1)(0.5s+1)}$$

滞后一超前校正 装置的Bode图和已校 正系统的开环Bode图 如图中曲线②和③所 示。由图看出校正后 系统相位裕量等于 50°,幅值裕量等于 16dB,稳态误差等于 0.1s-1, 所有指标要求 均已满足。





6.2 串联校正

6.2.4 P、I、D校正器

在工业自动化设备中,常采用能够实现比例、微分、积分等控制作用的控制器,这些控制器大多数是电动的或气动的、液动的。由比例(P)单元 K_P ,微分(D)单元 T_{d} s及积分(I)单元 $I/(T_i$ s)可以组成PD、PI及PID三种校正器,可以实现超前、滞后,滞后一超前的校正作用。

(1) PD校正器

又称比例一微分校正,其传递函数

$$G_{c}(s) = T_{d}s + K_{P} = K_{P} \left(\frac{T_{d}}{K_{P}}s + 1\right) = K_{P} \left(Ts + 1\right)$$

其作用相当于超前校正。

(2) PI校正器

又称比例一积分校正, 其传递函数

$$G_{c}(s) = K_{P} + \frac{1}{T_{i}s} = \frac{T_{i}K_{P}s + 1}{T_{i}s}$$

其作用相当于滞后校正。

(3) PID校正器

又称比例一微分一积分校正, 其传递函数

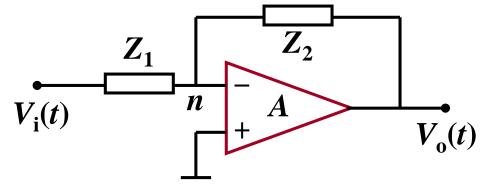
$$G_{c}(s) = K_{P} + T_{d}s + \frac{1}{T_{i}s} = \frac{T_{i}T_{d}s^{2} + T_{i}K_{P}s + 1}{T_{i}s}$$

其作用相当于滞后一超前校正。

(4) 运算放大器

由一个高增益的放大器加上四端网络反馈组成的校正装置,也称为有源校正装置。具有体积小、重量轻,参数容易调整等特点,可以组成PD、PI及PID校正装置。

运算放大器的一般形式如图所示,其放大系数A很大,输入阻抗高,它有同相(+)和反相(-)两个输入端。一般组成负反馈线路时常用反相输入。



运算放大器工作线路

分析运算放大器的工作特性时,假设放大系数 $A \to \infty$,n点流入放大器的电流为零,则运算放大器的传递函数

$$G_{c}(s) = \frac{V_{o}(s)}{V_{i}(s)} = -\frac{Z_{2}(s)}{Z_{1}(s)}$$

式中负号表示 V_0 与 V_i 的极性相反。改变式中的阻抗 $Z_1(s)$ 和 $Z_2(s)$,就可以得到不同的传递函数,因而运算放大器的功能也就不同。

下图 a、b、c表示实现比例一微分(PD)、比例一积分(PI) 和比例一微分一积分(PID)作用的放大器校正装置。

