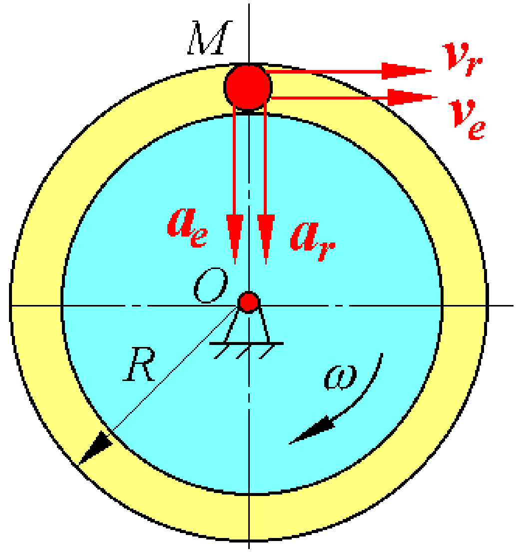
运动学

目 录

6.3 加速度合成定理

1 实例分析

滚珠轴承在环形轨道中以相对速度v_r运动。 轨道以角速度ω运动。试确定绝对加速度相对加速度间的关系。



以滚珠轴承*M*为动点。将动参考系固连到轨道上。

速度分析

$$v_e = \omega R$$

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$$

$$v_a = v_e + v_r = \omega R + v_r$$

加速度分析

$$a_a = \frac{v_a^2}{R} = R\omega^2 + \frac{v_r^2}{R} + 2\omega v_r = a_e + a_r + 2\omega v_r$$

附加项 $2\omega v_r$?

猜想: 参考系旋转的影响

运动学

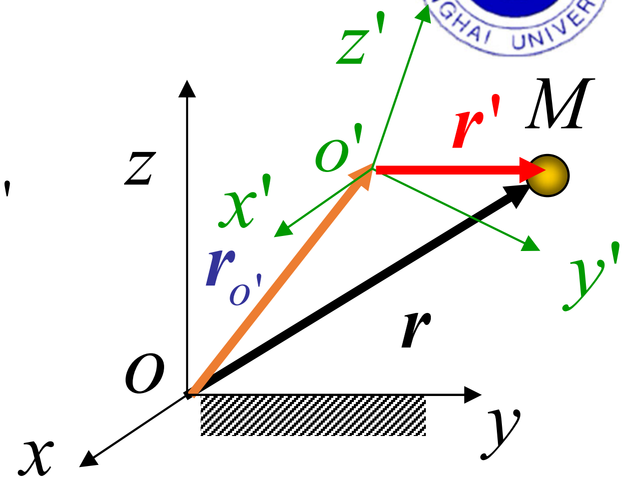
$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_{O'}+\boldsymbol{r}'$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}=\dot{\boldsymbol{r}}_{O'}+\dot{\boldsymbol{r}}'$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}'=\dot{x}'\boldsymbol{i}'+x'\dot{\boldsymbol{i}}'+\dot{y}'\boldsymbol{j}'+y'\dot{\boldsymbol{j}}'+\dot{z}'\boldsymbol{k}'+z'\dot{\boldsymbol{k}}'$$

$$=x'\dot{\boldsymbol{i}}'+y'\dot{\boldsymbol{j}}'+z'\dot{\boldsymbol{k}}'+\dot{\tilde{\boldsymbol{r}}}'$$

2 加速度合成定理



由 6.2.1 $\qquad \dot{\boldsymbol{r}}=\dot{\boldsymbol{r}}_{O'}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'+\dot{\tilde{\boldsymbol{r}}}'$

$$\dot{\boldsymbol{r}}'=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'+\dot{\tilde{\boldsymbol{r}}}' \qquad \dot{\tilde{\boldsymbol{r}}}'=\dot{x}'\boldsymbol{i}'+\dot{y}'\boldsymbol{j}'+\dot{z}'\boldsymbol{k}'$$

在定参考系中求导

$$\ddot{\boldsymbol{r}}=\ddot{\boldsymbol{r}}_{O'}+\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{\omega}\times\left(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'+\dot{\tilde{\boldsymbol{r}}}'\right)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dot{\tilde{\boldsymbol{r}}}'$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dot{\tilde{\boldsymbol{r}}}'=\ddot{x}'\boldsymbol{i}'+\dot{x}'\dot{\boldsymbol{i}}'+\ddot{y}'\boldsymbol{j}'+y'\dot{\boldsymbol{j}}'+\ddot{z}'\boldsymbol{k}'+\dot{z}'\dot{\boldsymbol{k}}'=\ddot{\tilde{\boldsymbol{r}}}'+\boldsymbol{\omega}\times\dot{\tilde{\boldsymbol{r}}}'$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}}=\ddot{\boldsymbol{r}}_{O'}+\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{\omega}\times\left(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'\right)+\ddot{\tilde{\boldsymbol{r}}}'+2\boldsymbol{\omega}\times\dot{\tilde{\boldsymbol{r}}}'$$

对作平面运动的动参考系, $\quad \ddot{\boldsymbol{r}}_{O'}+\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{\omega}\times\left(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'\right)$

为牵连点的加速度, 被称作牵连加速度。

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{a}}=\boldsymbol{a}_{\mathrm{e}}+\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}+\boldsymbol{a}_{\mathrm{C}}$$

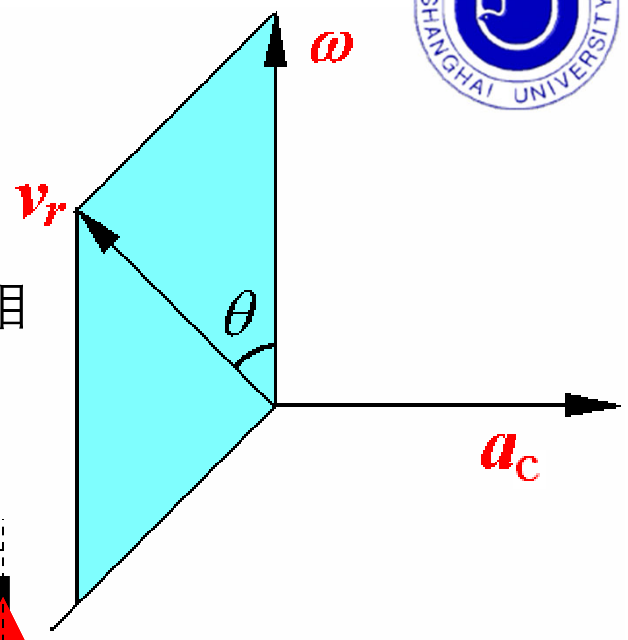
其中最后一项称作科氏加速度

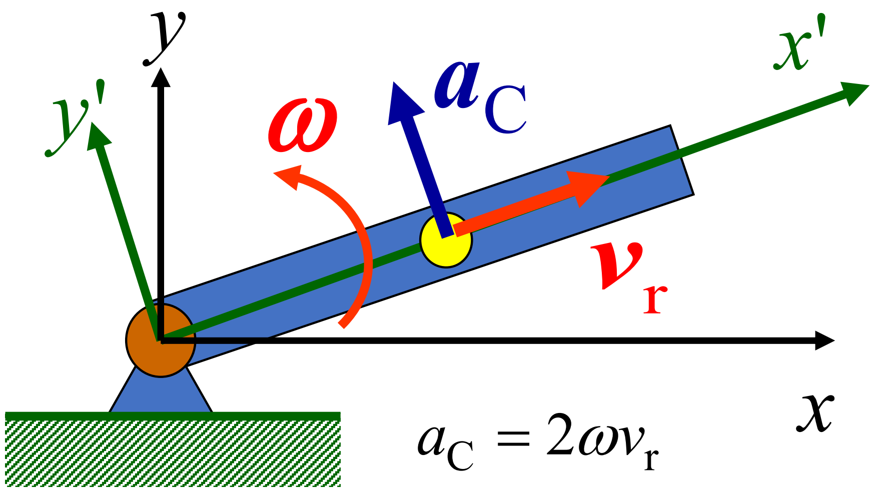
$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{C}}=2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}$$

3 关于科氏加速度

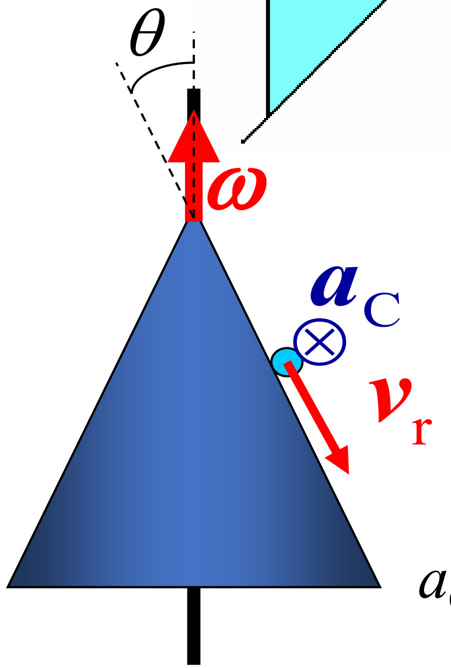
$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{C}} = 2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}$$

科氏加速度表示*动参考系**角速度***和**动点**<u>*相对运动速度*</u>的相互影响。





$$a_{\mathrm{C}} = 2\omega v_{\mathrm{r}}$$



$$a_{\mathrm{C}} = 2\omega v_{\mathrm{r}}\sin\theta$$

当$\boldsymbol{\omega}$和$\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}$平行或者其中一个为零即(瞬时)平移$\boldsymbol{\omega}=\mathbf{0}$ 或者相对静止$\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}=\mathbf{0}$时，科氏加速度为零。

运动学

4 平动参考系

当牵连运动为平移运动时, $\boldsymbol{\omega}=\mathbf{0}$， 因此 $\boldsymbol{a}_{\mathrm{C}}=\mathbf{0}$。

直接证明

$$\dot{\boldsymbol{i}}'=\mathbf{0},\ \dot{\boldsymbol{j}}'=\mathbf{0},\ \dot{\boldsymbol{k}}'=\mathbf{0}$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}'=\dot{x}'\boldsymbol{i}'+x'\dot{\boldsymbol{i}}'+\dot{y}'\boldsymbol{j}'+y'\dot{\boldsymbol{j}}'+\dot{z}'\boldsymbol{k}'+z'\dot{\boldsymbol{k}}'$$

$$=x'\dot{\boldsymbol{i}}'+y'\dot{\boldsymbol{j}}'+z'\dot{\boldsymbol{k}}'+\dot{\tilde{\boldsymbol{r}}}'$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}'=\dot{\tilde{\boldsymbol{r}}}',\ \ddot{\boldsymbol{r}}'=\ddot{\tilde{\boldsymbol{r}}}'$$

在定参考系与动参考系中相同

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_{O'}+\boldsymbol{r}' \qquad \ddot{\boldsymbol{r}}=\ddot{\boldsymbol{r}}_{O'}+\ddot{\tilde{\boldsymbol{r}}}' \qquad \boldsymbol{a}_{\mathrm{a}}=\boldsymbol{a}_{\mathrm{e}}+\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$$

当牵连运动为平移运动时, 动点的绝对加速度 等于牵连加速度和相对加速度的矢量和。

牵连运动为平移运动

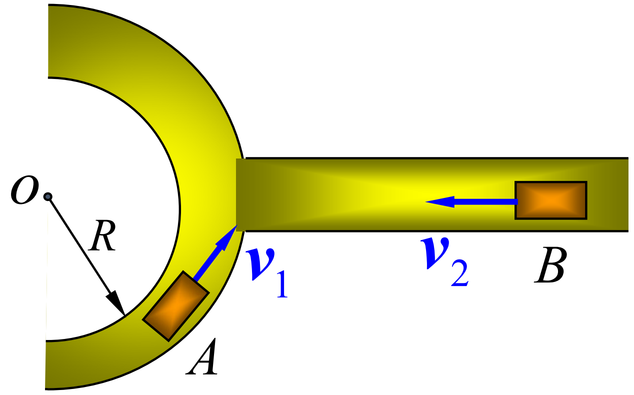
$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}}=\boldsymbol{v}_{\mathrm{e}}+\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}} \Rightarrow \boldsymbol{v}_{B}=\boldsymbol{v}_{A}+\boldsymbol{v}_{B/A}$$

?

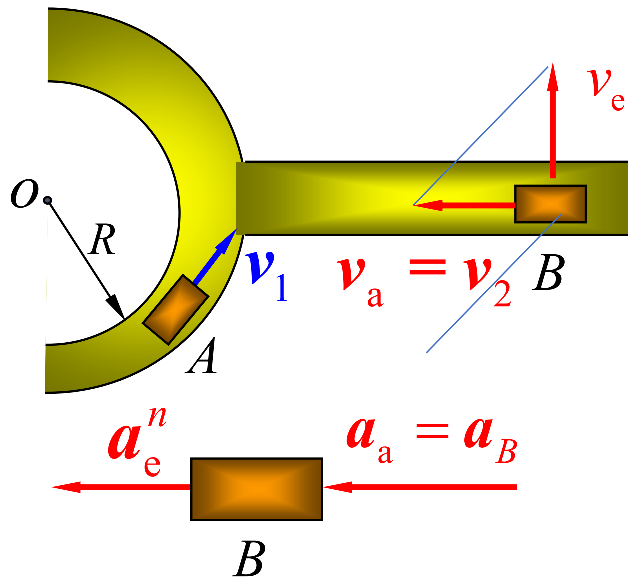
$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{a}}=\boldsymbol{a}_{\mathrm{e}}+\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \Rightarrow \boldsymbol{a}_{B}=\boldsymbol{a}_{A}+\boldsymbol{a}_{B/A}$$

$$\boldsymbol{a}_{B}=\boldsymbol{a}_{A}+\boldsymbol{a}_{B/A}^{\tau}+\boldsymbol{a}_{B/A}^{\mathrm{n}}$$

分析如下动点的三种速度和加速度。

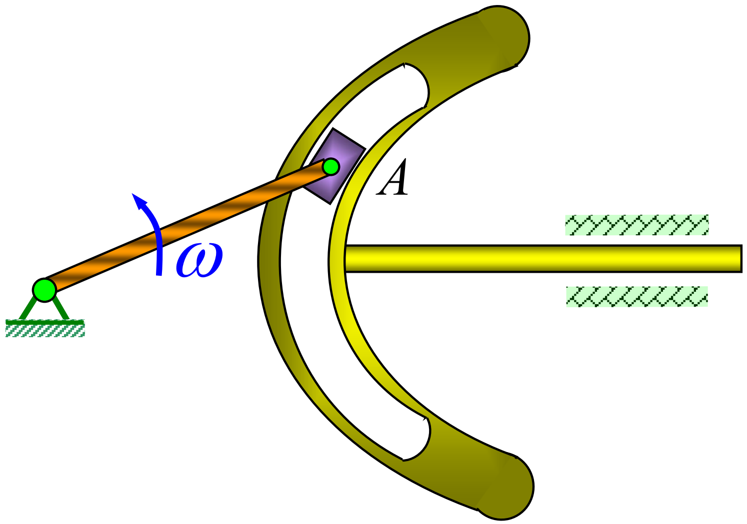


A为动系，B为动点



$$v_{e}=\frac{v_{1}}{R}\cdot OB$$

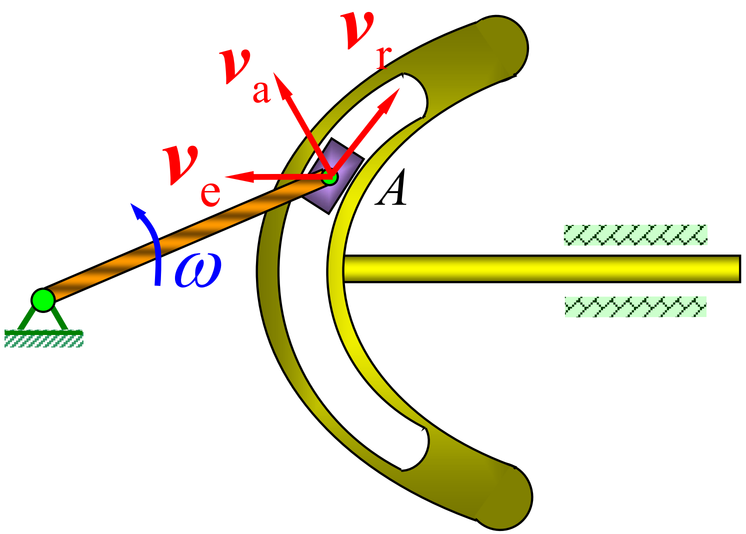
$$a_{e}^{n}=OB\cdot\left(\frac{v_{1}}{R}\right)^{2}$$

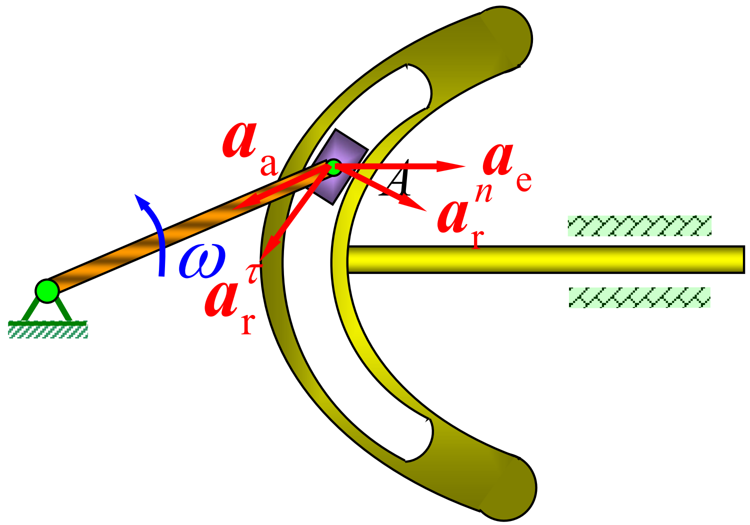


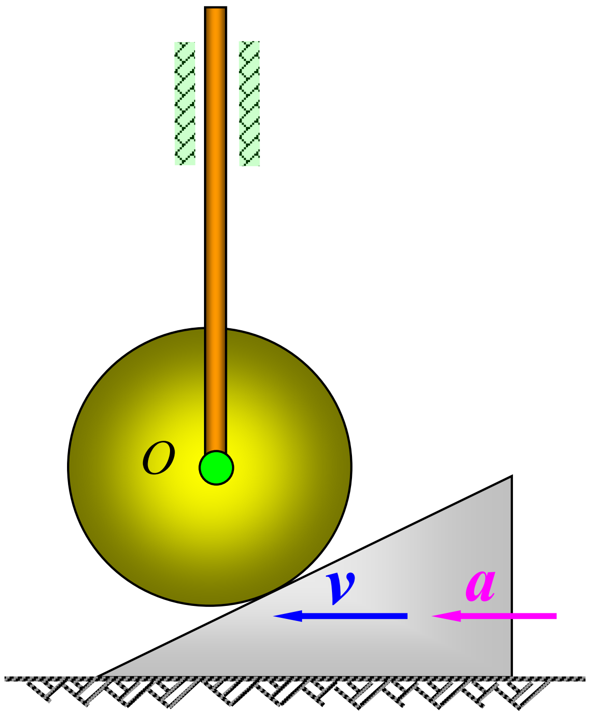
动系为滑槽，

动点为滑块A，

三种轨迹

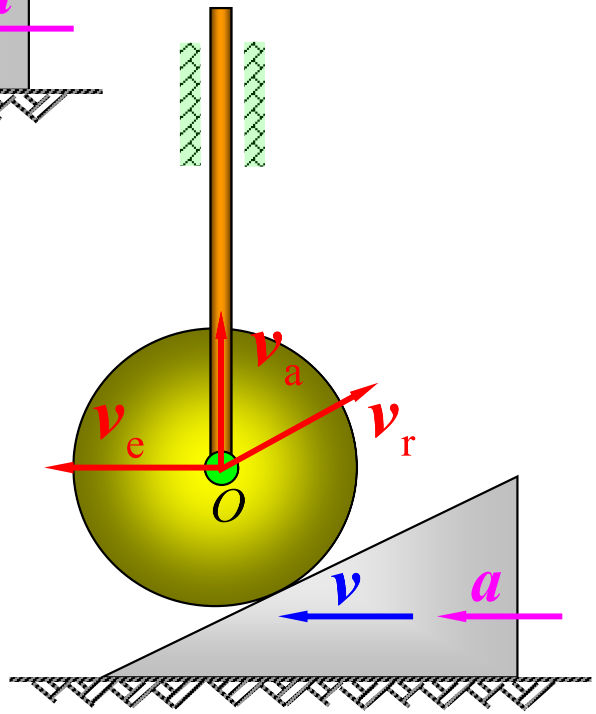


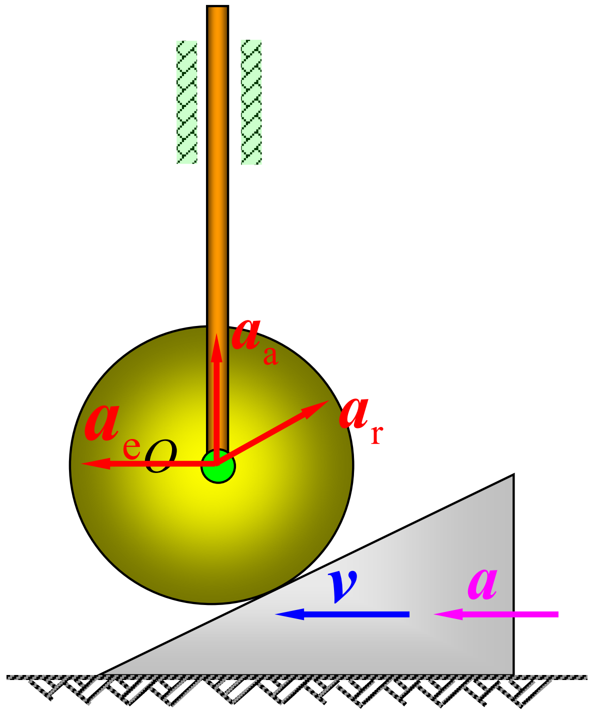




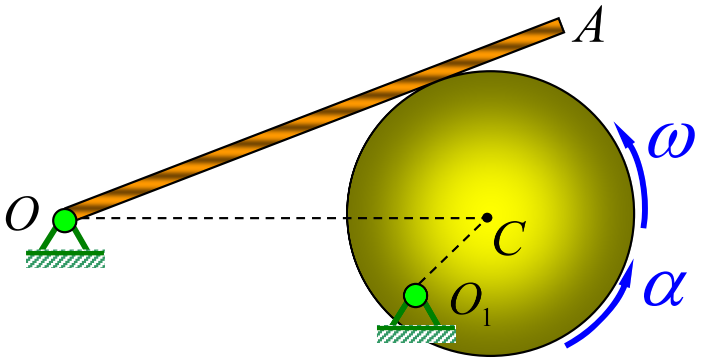
动系为斜面，

动点为轮心O。



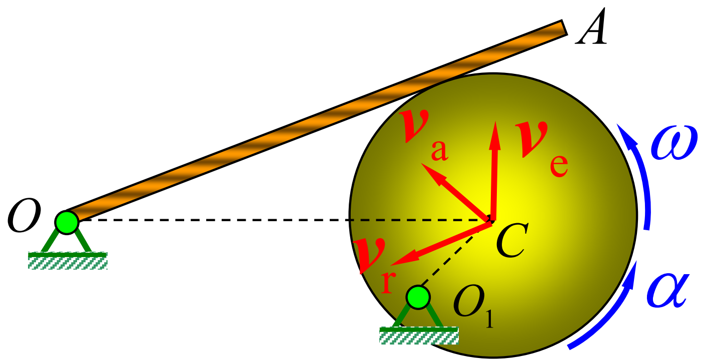


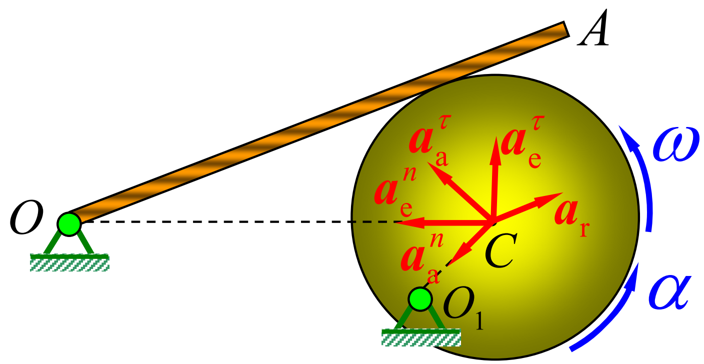
运动学

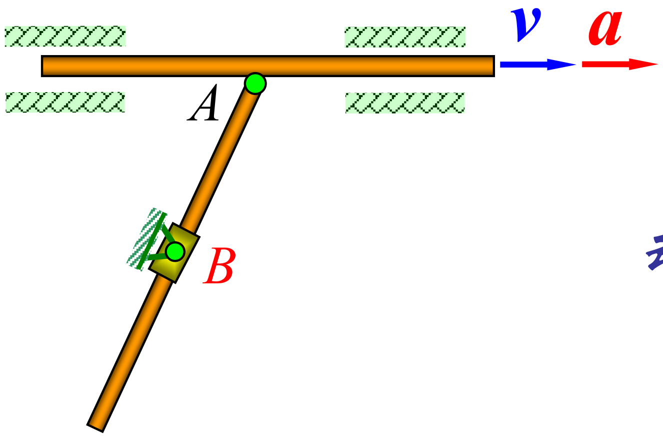


动系：OA

动点：轮心C

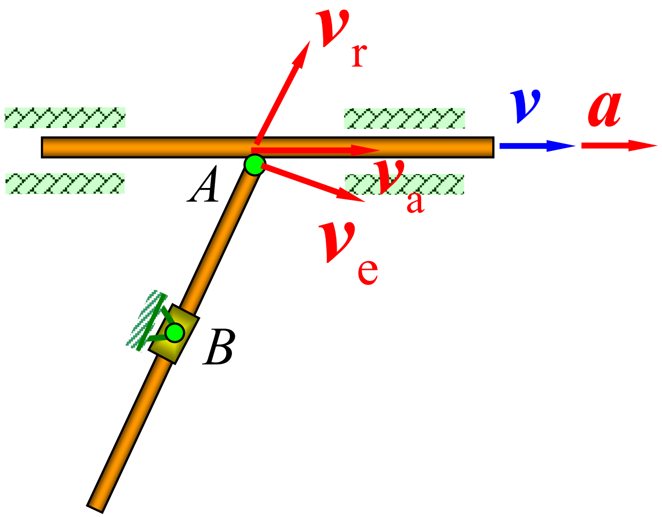


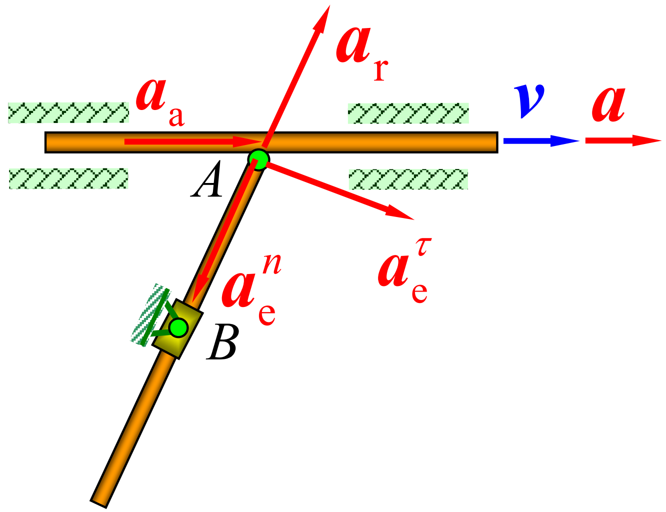


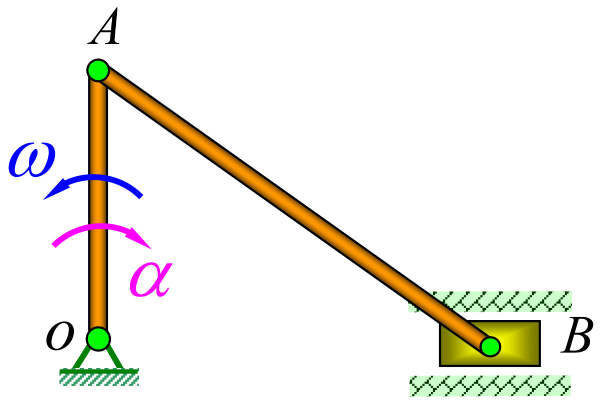


动系：套筒B

动点：铰A（横杆上）

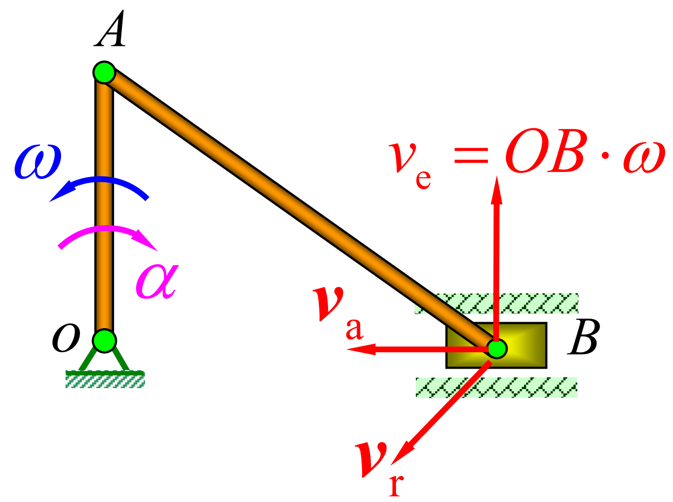


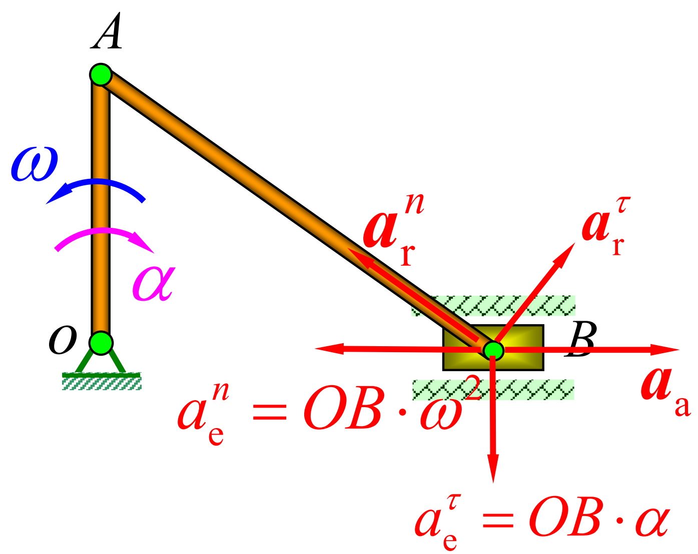



A
ω
α
O
B

动系：OA杆

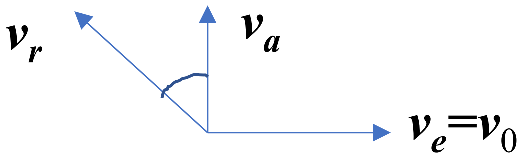
动点：滑块B

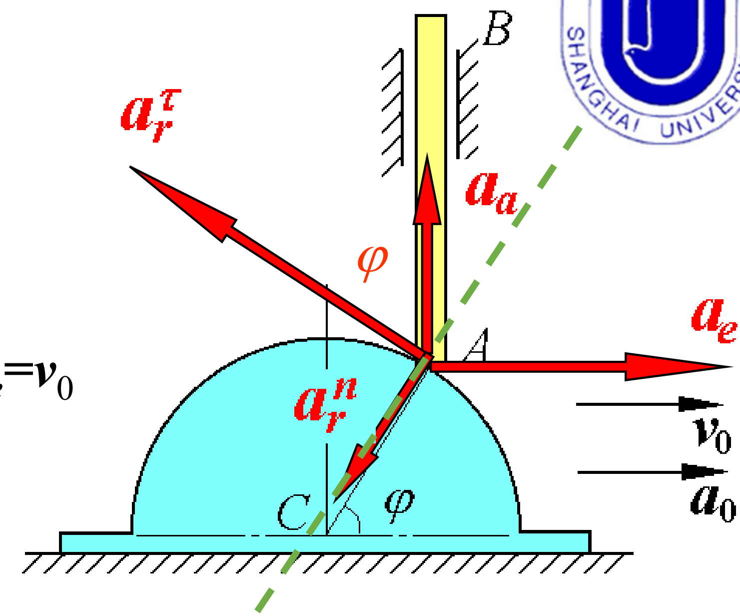

A
ω
α
O
B
$v_e = OB \cdot \omega$
$\boldsymbol{v}_a$
$\boldsymbol{v}_r$


A
ω
α
O
B
$\boldsymbol{a}_r^n$
$\boldsymbol{a}_r^\tau$
$\boldsymbol{a}_a$
$a_e^n = OB \cdot \omega^2$
$a_e^\tau = OB \cdot \alpha$

例 3

已知凸轮速度为$\boldsymbol{v}_0$、加速度$\boldsymbol{a}_0$，计算摇杆AB加速度。





解:

以摇杆AB上点 A 为动点，将动参考系固连到凸轮上。 牵连运动即为平移运动。

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{a}}=\boldsymbol{a}_{\mathrm{e}}+\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{n}}+\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}^{\tau}$$

其中所有方向如图所示,并且

$$a_{\mathrm{e}}=a_0,\ a_{\mathrm{r}}^{\mathrm{n}}=\frac{v_{\mathrm{r}}^2}{R}.$$

由速度分析知,

$$v_{\mathrm{r}}=\frac{v_{\mathrm{e}}}{\sin\varphi}=\frac{v_0}{\sin\varphi}$$

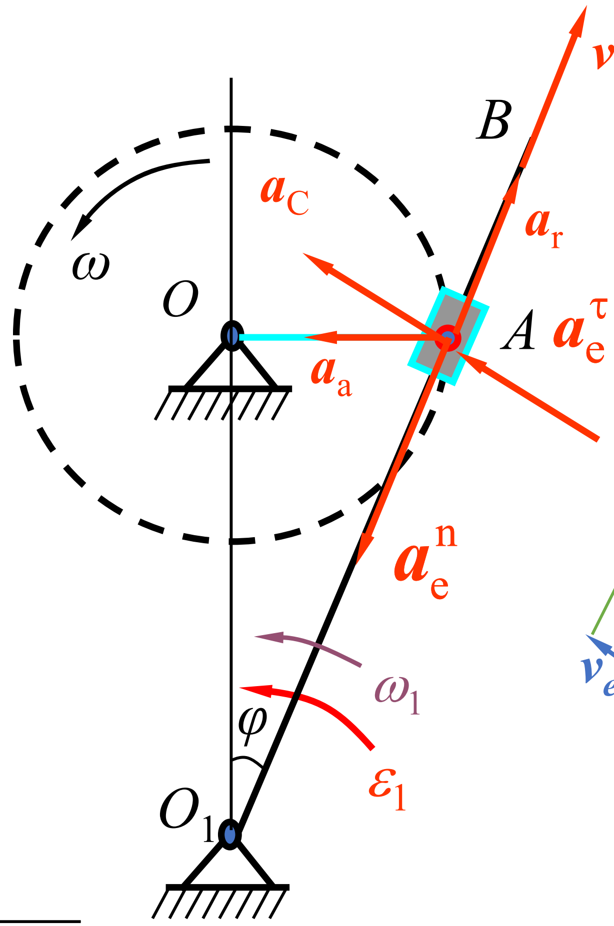
投影到法向方向

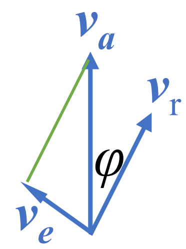
$$a_{\mathrm{a}}\sin\varphi=a_{\mathrm{e}}\cos\varphi-a_{\mathrm{r}}^{\mathrm{n}}$$

$$a_{\mathrm{a}}=a_0\cot\varphi-\frac{v_0^2}{R^2\sin^3\varphi}$$

例 4

摇杆OA的角速度ω为常量， 计算例2中摇杆O_1B的角加速度ε_1。





解:

以摇杆**OA上点A 为动点**。 将动参考系固连到 O_1B上。

$$\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_e^n + \boldsymbol{a}_e^\tau + \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_C$$

其中所有方向如图所示，并且

$$a_a = \omega^2 r,\ a_e^n = \omega_1^2\sqrt{r^2+l^2},\ a_e^\tau = \varepsilon_1\sqrt{r^2+l^2},\ a_C = 2\omega_1 v_r.$$

由速度分析知

$$v_e = v_a\sin\varphi \rightarrow \omega_1\sqrt{l^2+r^2} = r\omega\frac{r}{\sqrt{l^2+r^2}} \rightarrow \omega_1 = \frac{r^2\omega}{l^2+r^2},\ v_r = v_a\cos\varphi = \frac{\omega r l}{\sqrt{l^2+r^2}}$$

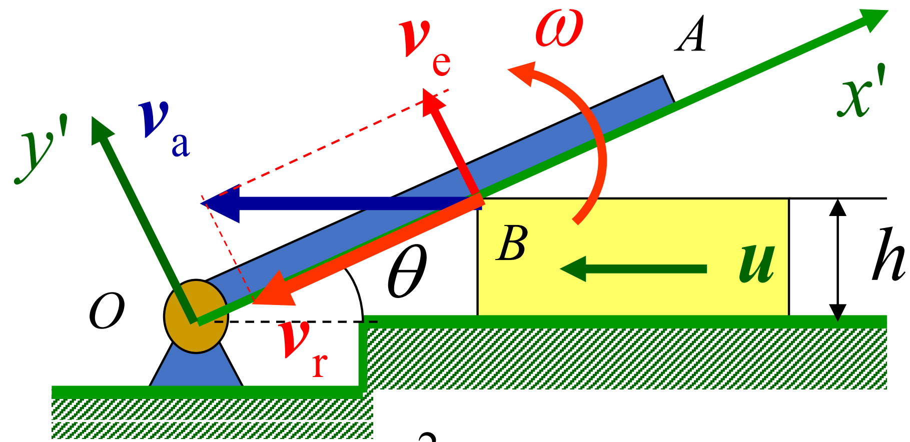
投影到O_1B垂直方向上

$$a_a\cos\varphi = a_e^\tau + a_C \qquad \omega^2 r\frac{l}{\sqrt{l^2+r^2}} = \varepsilon_1\sqrt{r^2+l^2} + 2\frac{r^2\omega}{l^2+r^2}\frac{\omega r l}{\sqrt{l^2+r^2}}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{rl(l^2-r^2)}{(l^2+r^2)^2}\omega^2$$

运动学

例5 已知滑块以匀速 u 平移，求在图示位置时，杆的角速度和角加速度。



解：动点：　板上与杆的接触点B

动系：　OA杆

速度分析：

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r$$

$$v_e = v_a \sin\theta \quad v_r = v_a \cos\theta$$

$$\omega = \frac{v_e}{OB} = \frac{u\sin^2\theta}{h}$$

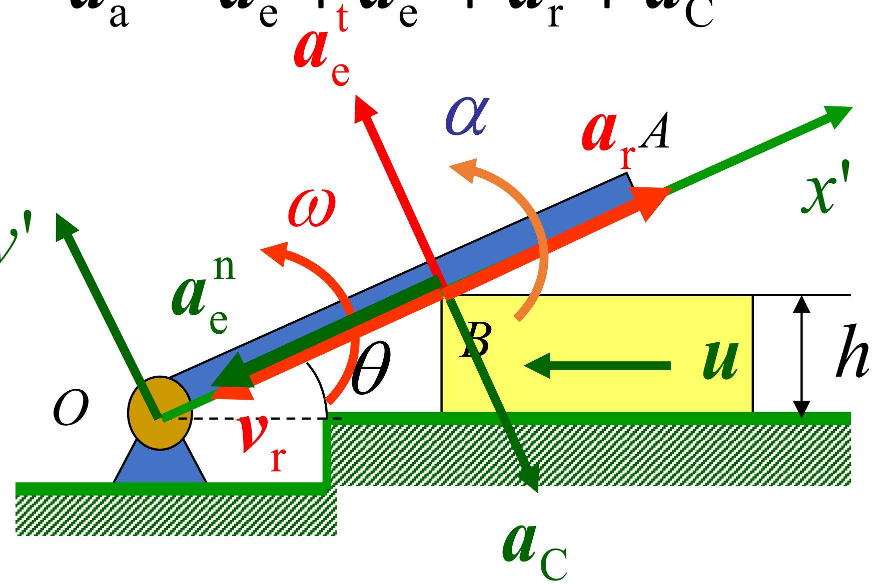
加速度分析：

$$\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_e + \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_C \qquad \boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_e^t + \boldsymbol{a}_e^n + \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_C$$

$$y': \quad 0 = a_e^t + 0 + 0 - a_C$$

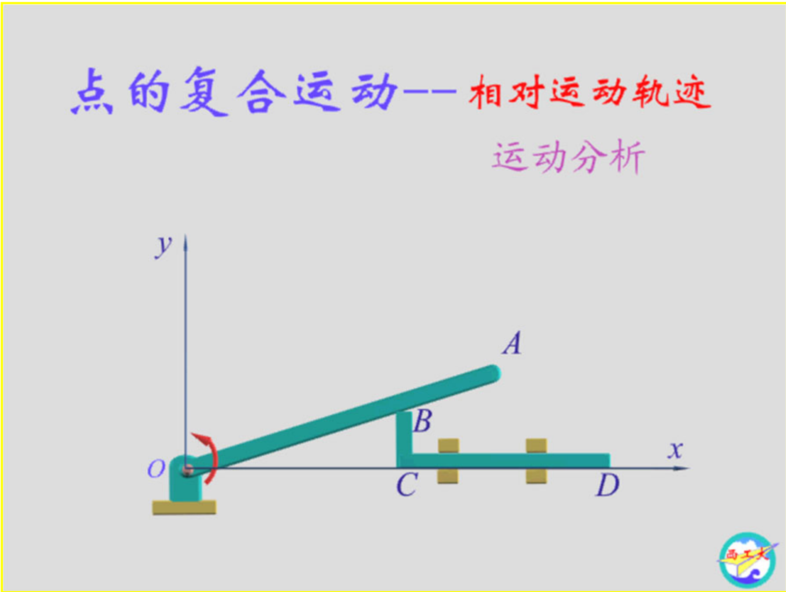
$$a_e^t = a_C$$

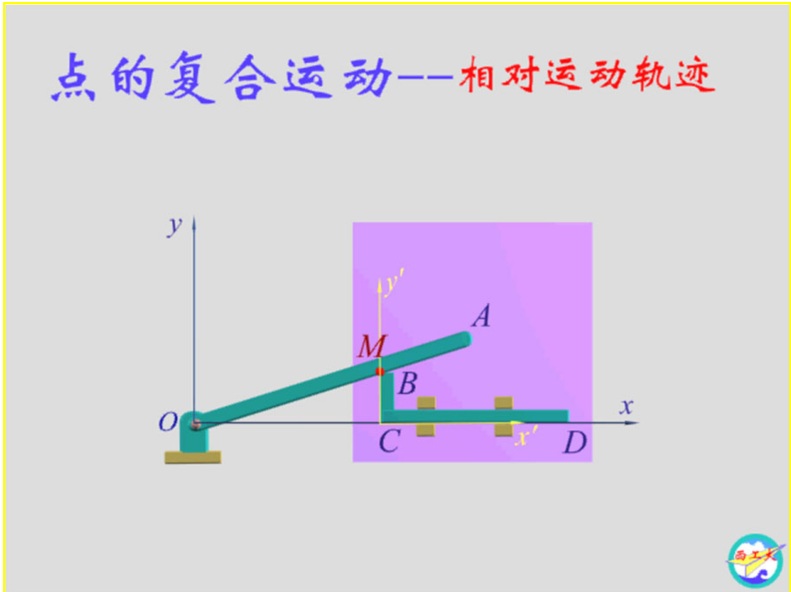
$$\alpha = \frac{a_e^t}{OB} = \frac{a_C}{OB} = \frac{2\omega v_r}{OB} = \frac{u^2 \sin 2\theta \sin^2\theta}{h^2}$$



运动学

思考：为什么不选取 OA 杆上的B点为动点，滑块为动系？

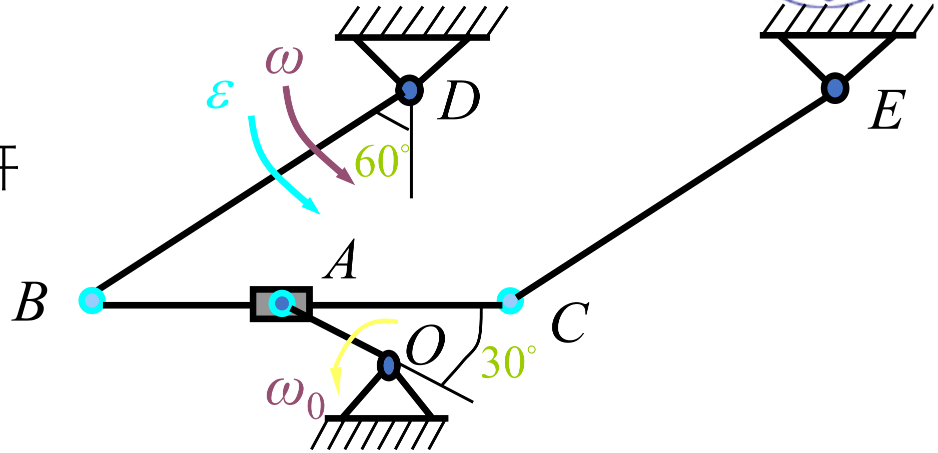


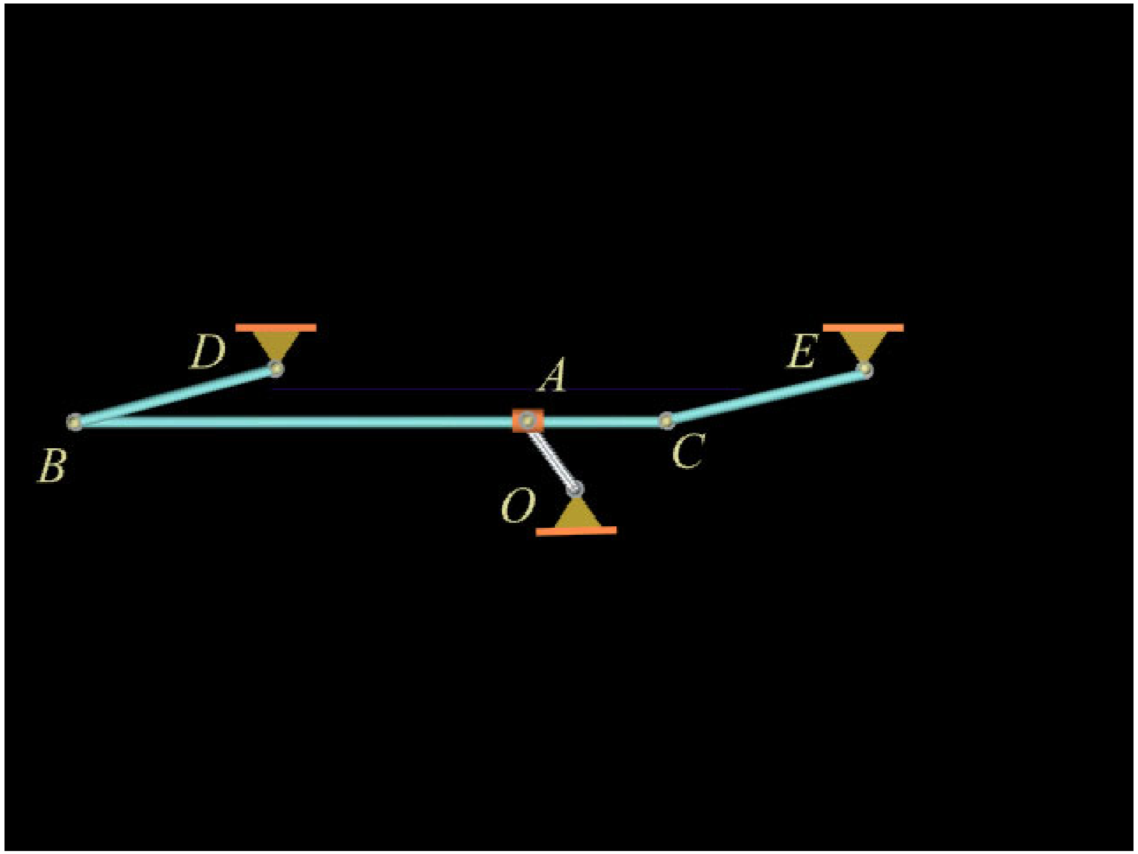


运动学

例 6

曲柄 OA 以恒定角速度ω_0旋转。套筒 A 沿BC运动。$OA=r$, $BC=DE$, 且 $BD=CE=l$。 计算在图示位置处杆BD的速度和加速度。





运动学

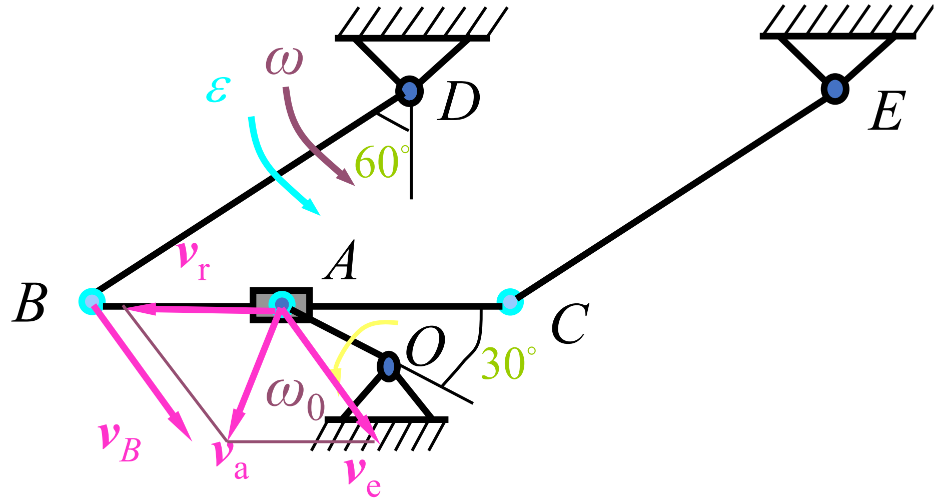
解:

以摇杆OA上点A为动点。将动参考系固连到BC上。牵连运动为平移运动。

速度

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}}=\boldsymbol{v}_{\mathrm{e}}+\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}$$

$$v_{\mathrm{e}}=v_{\mathrm{r}}=v_{\mathrm{a}}=\omega_0 r \qquad \omega=\frac{v_B}{l}=\frac{v_{\mathrm{e}}}{l}=\frac{\omega_0 r}{l}$$



加速度

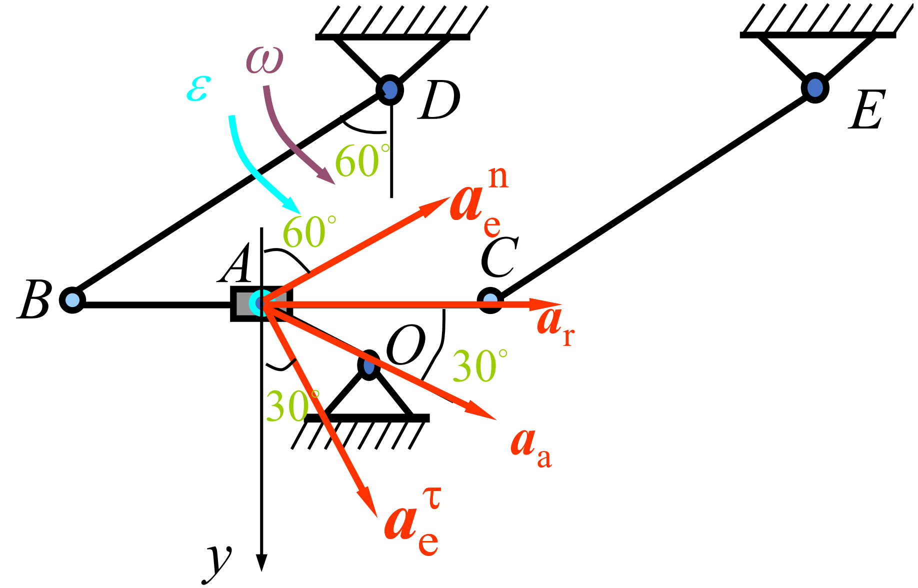
$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{a}}=\boldsymbol{a}_{\mathrm{e}}+\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}=\boldsymbol{a}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{n}}+\boldsymbol{a}_{\mathrm{e}}^{\tau}+\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$$

投影到BC垂直方向

$$a_{\mathrm{a}}\sin 30^\circ=-a_{\mathrm{e}}^{\mathrm{n}}\sin 30^\circ+a_{\mathrm{e}}^{\tau}\cos 30^\circ$$

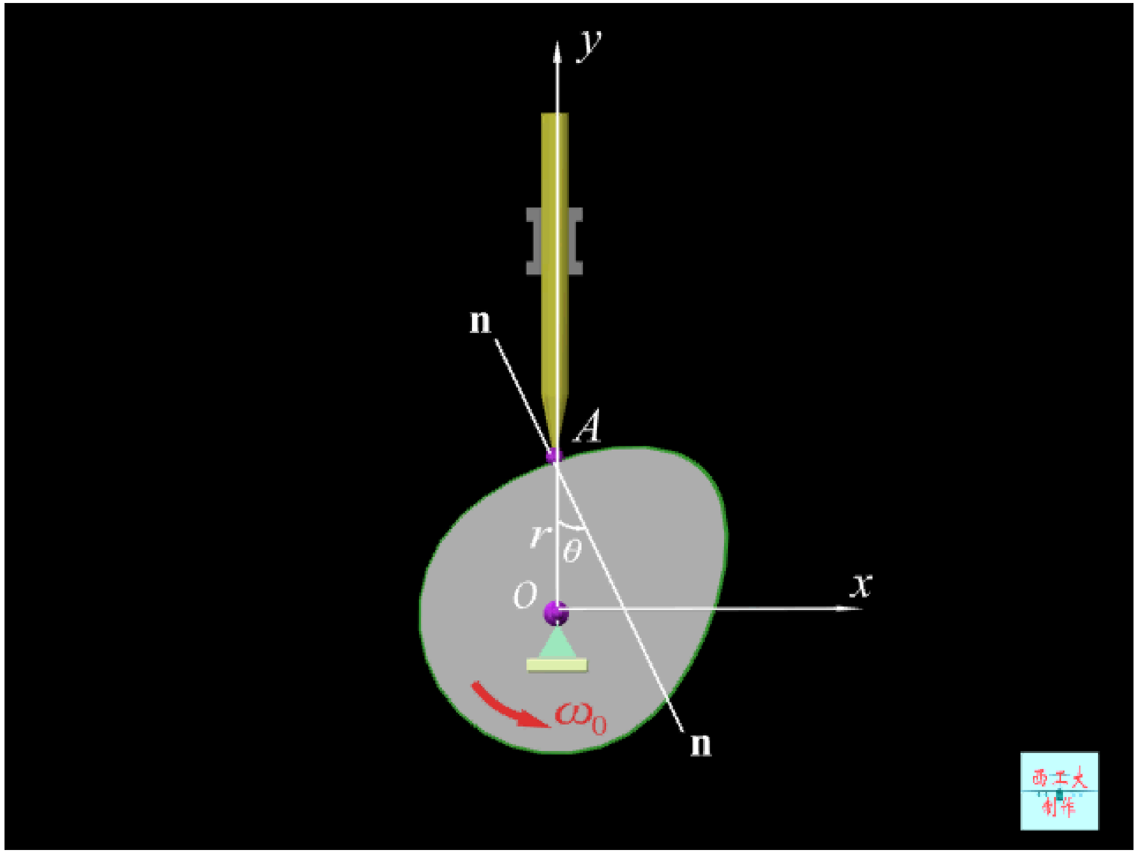
$$a_{\mathrm{e}}^{\tau}=\frac{\left(a_{\mathrm{a}}+a_{\mathrm{e}}^{\mathrm{n}}\right)\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ}=\frac{\sqrt{3}\omega_0^2(l+r)}{3l}$$

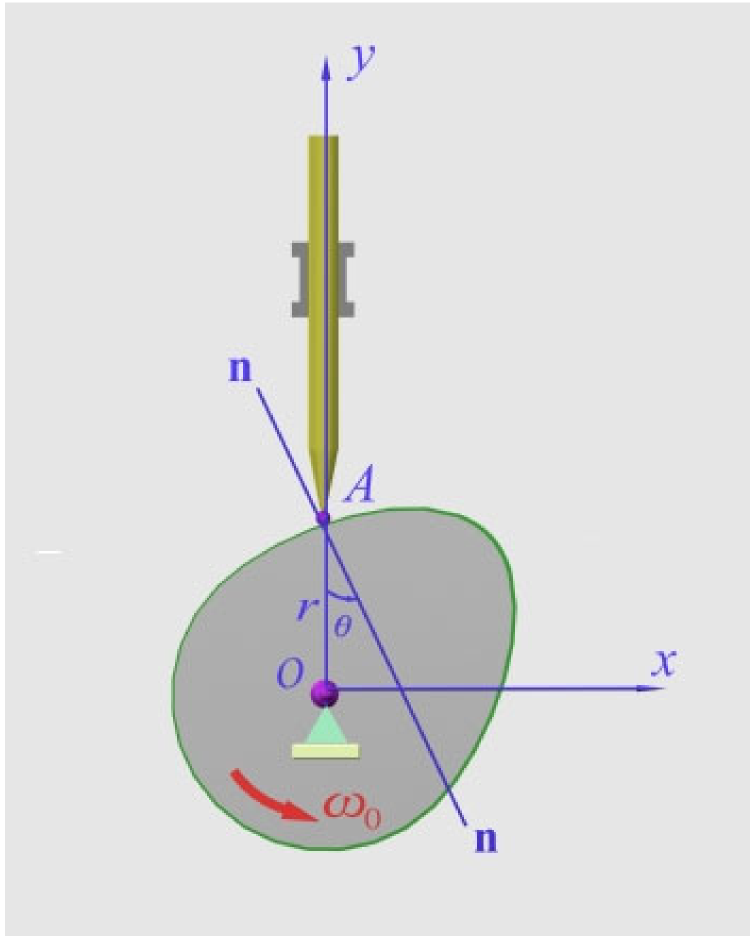
$$\varepsilon=\frac{a_{\mathrm{e}}^{\tau}}{l}=\frac{\sqrt{3}\omega_0^2(l+r)}{3l^2}$$



例 7

凸轮 O 以恒定角速度ω_0旋转， 在图示位置处， 凸轮在A点的曲率半径为ρ, 法线方向与OA夹角为θ, 且$OA=r$。 计算顶杆的速度加速度。

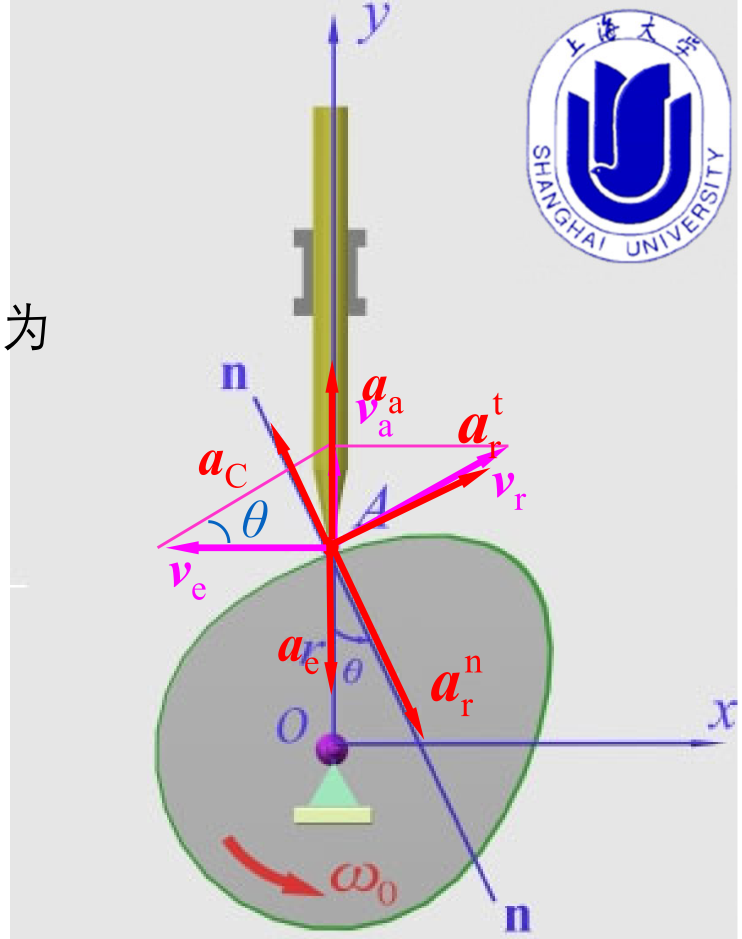




运动学

解:

以顶杆上点A 为动点. 将动参考系固连到凸轮上。 牵连运动为平移运动。



速度分析

$$\boldsymbol{v}_\mathrm{a}=\boldsymbol{v}_\mathrm{e}+\boldsymbol{v}_\mathrm{r}$$

$$v_\mathrm{a}=v_\mathrm{e}\tan\theta=\omega_0 r\tan\theta \qquad v_\mathrm{r}=\frac{v_\mathrm{e}}{\cos\theta}=r\omega_0\sec\theta$$

加速度分析

$$\boldsymbol{a}_\mathrm{a}=\boldsymbol{a}_\mathrm{e}+\boldsymbol{a}_\mathrm{r}^\mathrm{n}+\boldsymbol{a}_\mathrm{r}^\tau+\boldsymbol{a}_\mathrm{C}$$

其中所有方向如图所示, 并且

$$a_\mathrm{e}=r\omega_0{}^2,\ a_\mathrm{r}^\mathrm{n}=\frac{v_\mathrm{r}^2}{\rho}=\frac{r^2\omega_0^2}{\rho}\sec^2\theta,a_\mathrm{C}=2\omega_0 v_\mathrm{r}=2r\omega_0^2\cdot\sec\theta.$$

投影到法线方向上

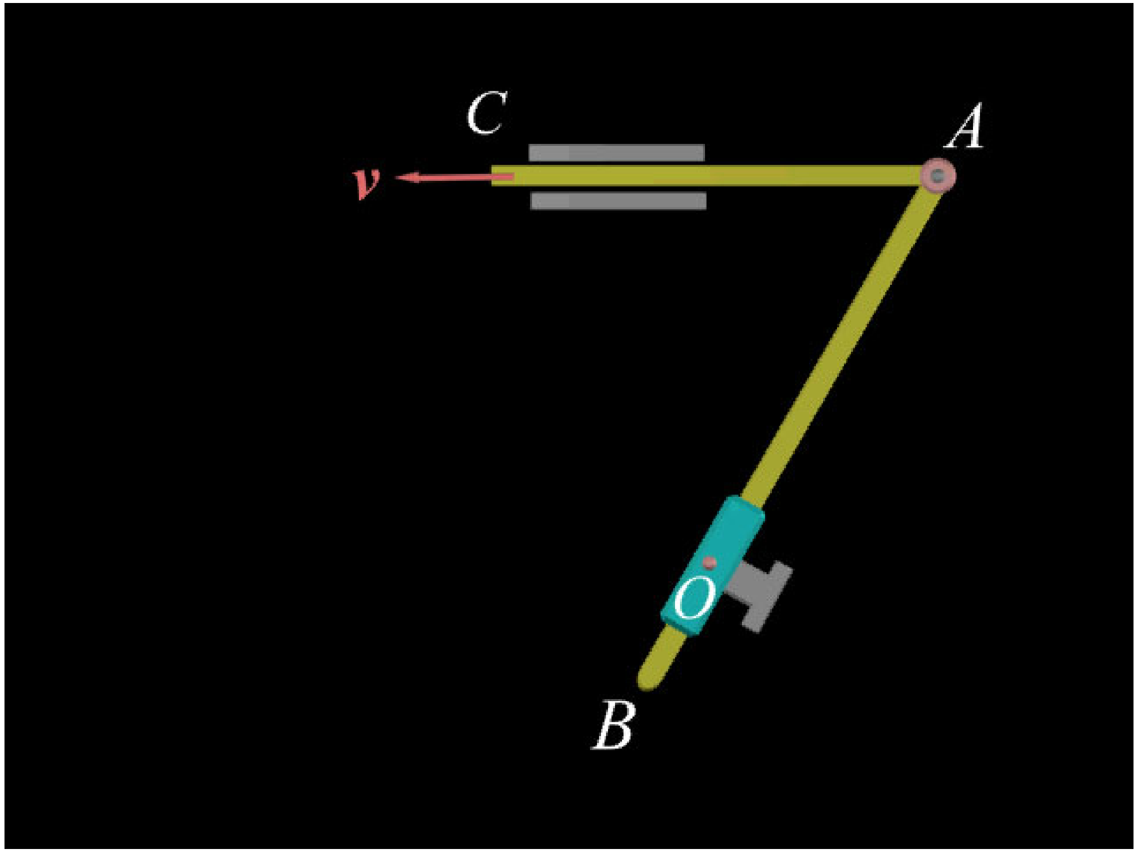
$$-a_\mathrm{a}\cos\theta=a_\mathrm{e}\cos\theta+a_\mathrm{r}^\mathrm{n}-a_\mathrm{C}$$

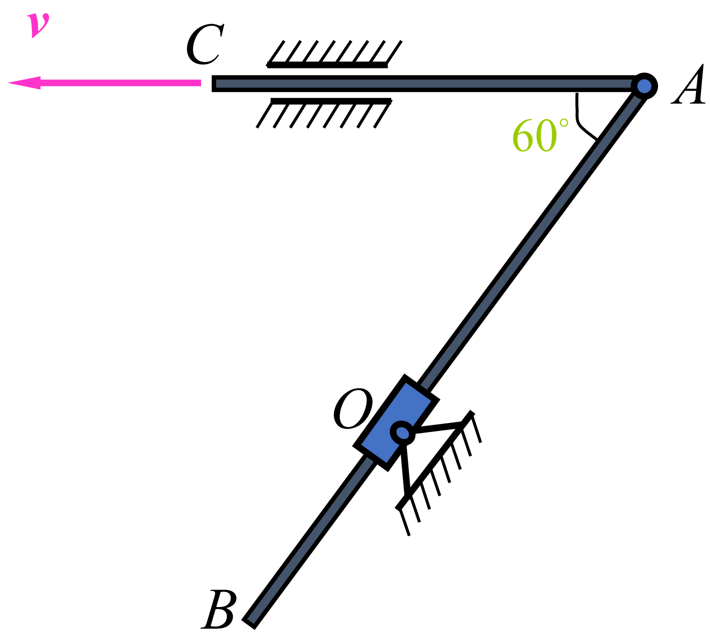
$$a_\mathrm{a}=\frac{-1}{\cos\theta}\left(r\omega_0{}^2\cos\theta+\frac{r^2}{\rho}\omega_0{}^2\sec^2\theta-2r\omega_0{}^2\sec\theta\right)=-r\omega_0{}^2\left(1+\frac{r}{\rho}\sec^3\theta-2\sec^2\theta\right)^2$$

运动学

例 8

杆AC 以恒定速度$\boldsymbol{v}$沿轨道平移。杆 AB 与AC杆在A处铰接, 通过旋转套筒O运动。O 与杆 AC 间距离为 l. 计算图示位置处杆AB的速度和加速度。

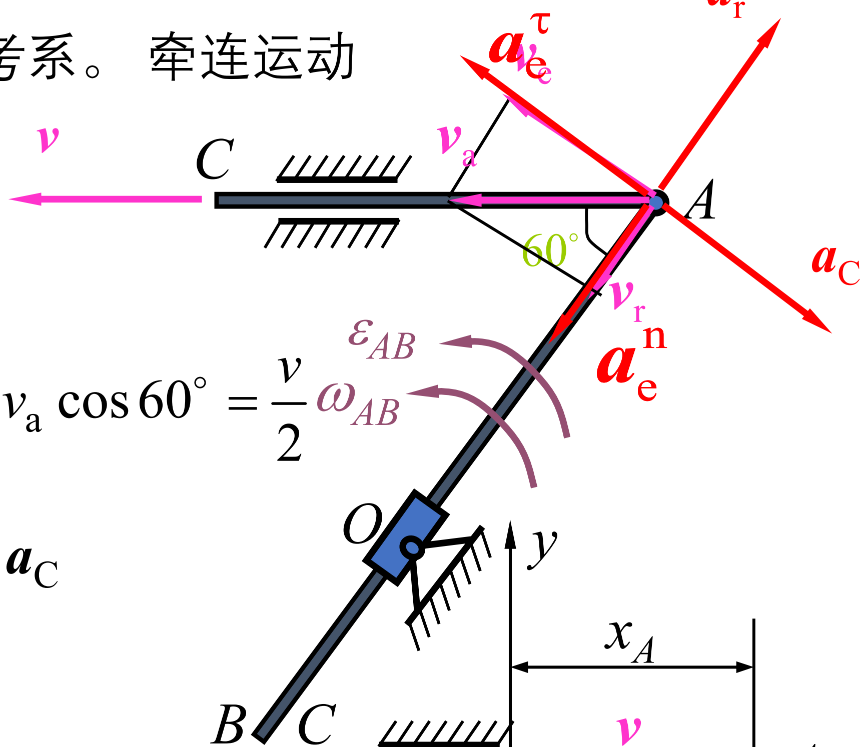




运动学

解:

以AC杆上的A点为动点. 并以套筒O所在方向为动参考系。 牵连运动为转动。



速度分析

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r$$

$$v_e = v_a \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} v \qquad \omega_{AB} = \omega_O = \frac{v_e}{AO} = \frac{3v}{4l} \qquad v_r = v_a \cos 60^\circ = \frac{v}{2}$$

加速度分析

$$\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_e^n + \boldsymbol{a}_e^\tau + \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_C$$

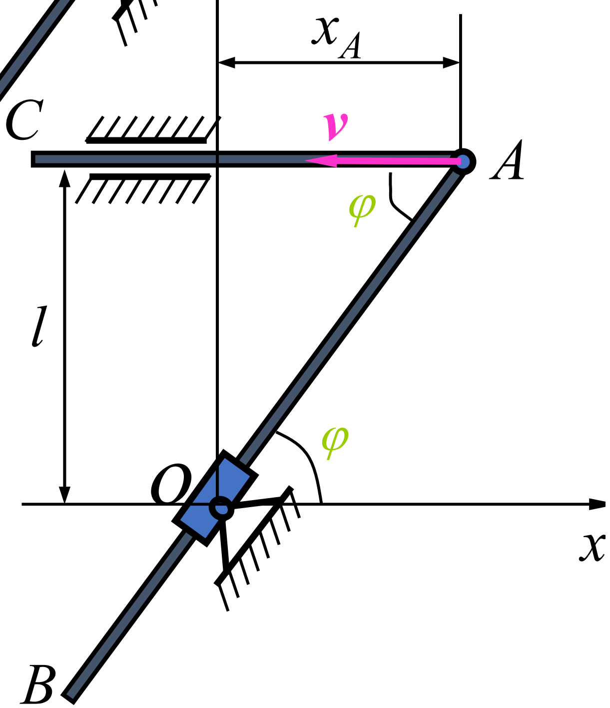
加速度方向如图所示, 并有

$$\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{0}, a_C = 2\omega_O v_r = \frac{3v^2}{4l}.$$

在垂直于AB杆的方向上的投影:

$$a_e^\tau = a_C = \frac{3v^2}{4l} \qquad \varepsilon_{AB} = \varepsilon_O = \frac{a_e^\tau}{AO} = \frac{3\sqrt{3}v^2}{8l^2}$$

另解



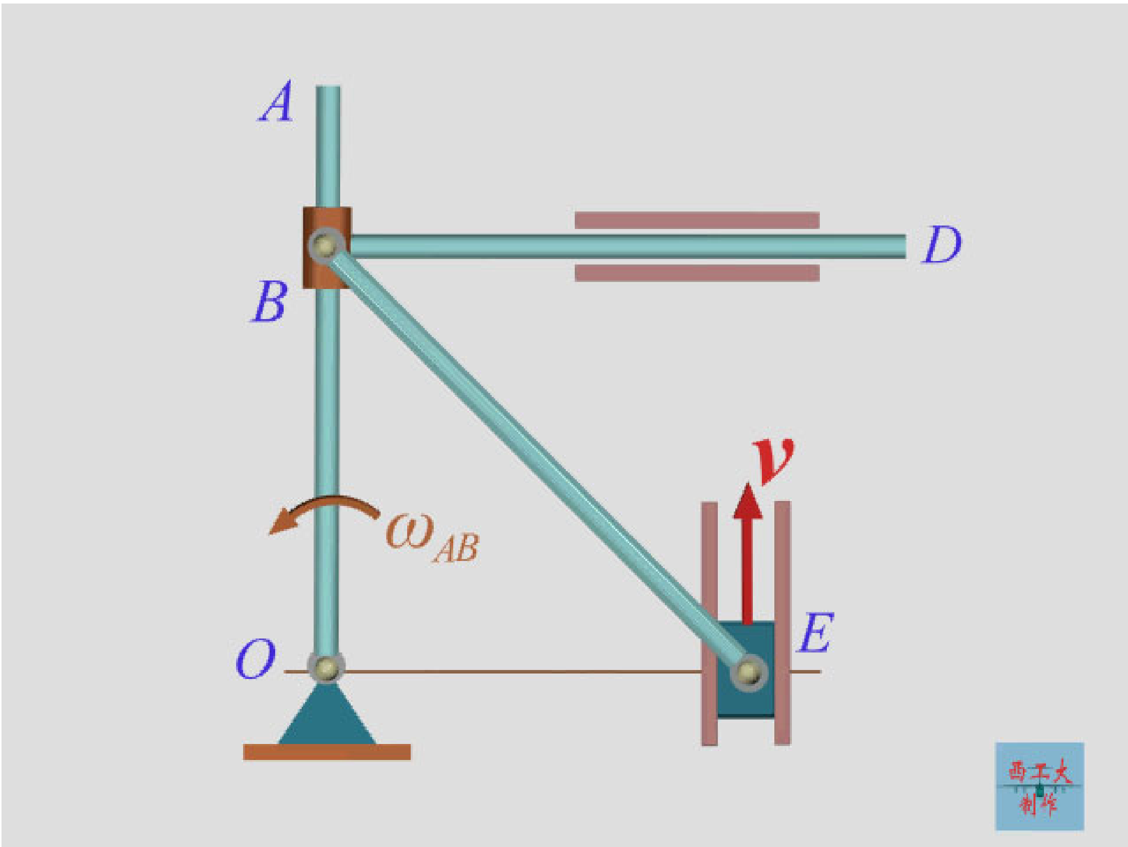
对任意位置， 有

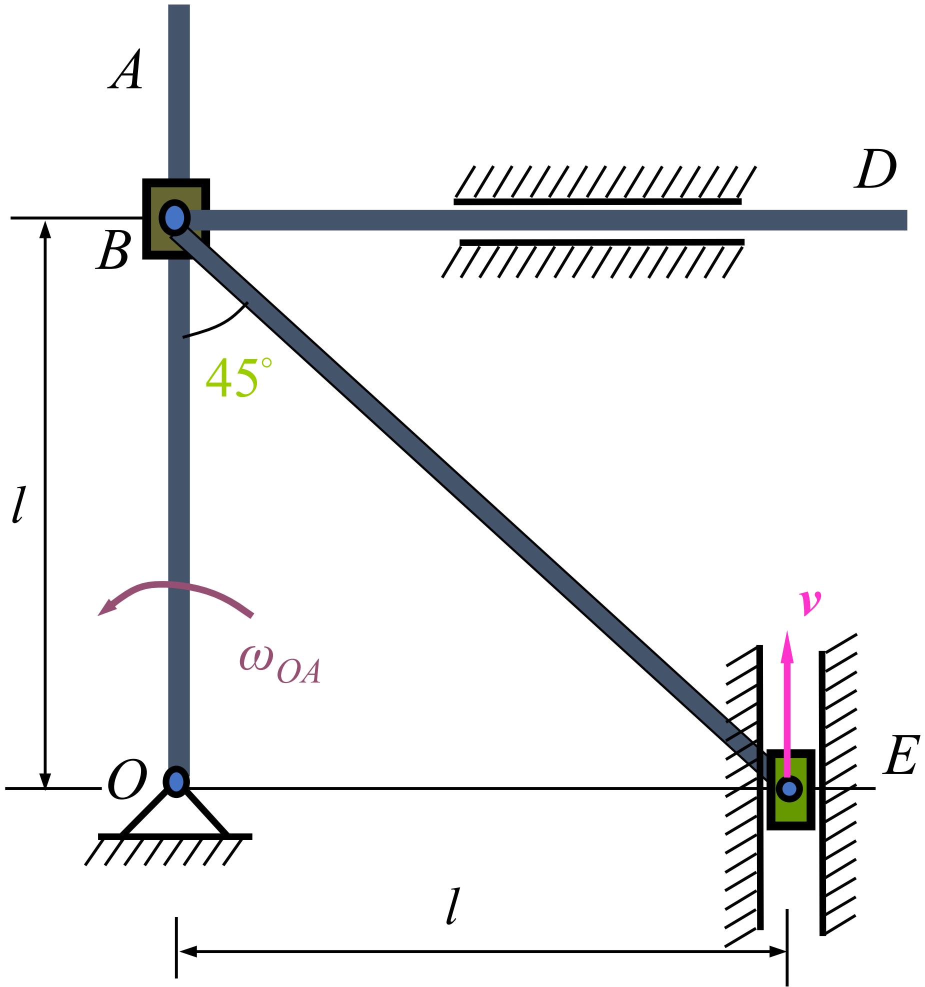
$$x_A = l\cot\varphi, \dot{x}_A = -v, \ddot{x}_A = -v$$

$$\dot{\varphi} = \frac{v}{l}\sin^2\varphi \qquad \ddot{\varphi} = \frac{v\dot{\varphi}}{l}\sin 2\varphi = \frac{v^2}{l^2}\sin^2\varphi\sin 2\varphi$$

例 9

BE,*BD*杆上铰接有滑块*B*。滑块*B*沿*OA*杆运动， 杆*BD*只能作水平运动. 滑块*E*以恒定速度*V*沿竖直方向运动. 试求*OA*杆在图示位置时的角速度和加速度。





运动学

解:

BE杆的速度瞬心为O,

$$\omega_{BE}=\frac{v}{OE}=\frac{v}{l},\ v_B=\omega_{BE}\cdot OB=v$$

BE杆中以E为基点， .

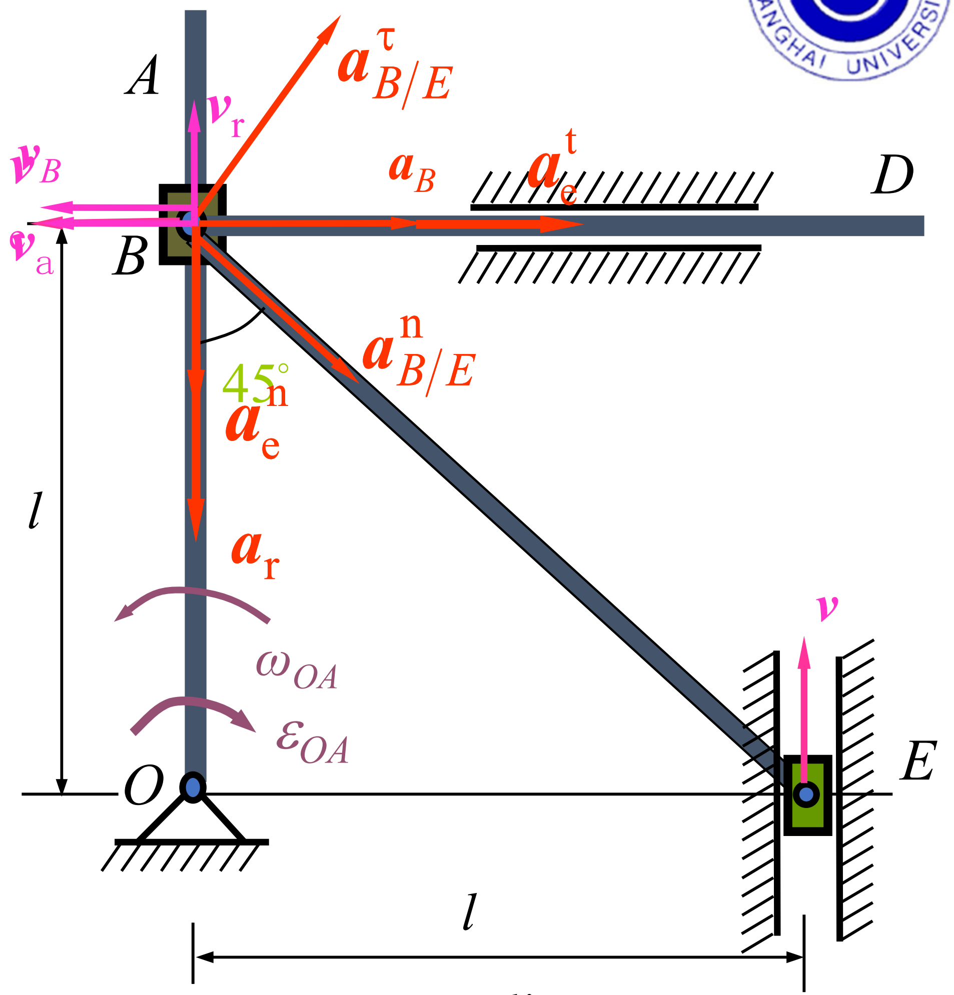
$$\boldsymbol{a}_B=\boldsymbol{a}_E+\boldsymbol{a}_{B/E}^{\tau}+\boldsymbol{a}_{B/E}^{\mathrm{n}}$$

其中 $\boldsymbol{a}_E$=0 并有 $a_{BE}^{\mathrm{n}}=\omega_{BE}^2\cdot BE=\dfrac{\sqrt{2}v^2}{l}$.

投影到BE方向

$$a_B\cos\ 45^\circ=a_{BE}^{\mathrm{n}}\qquad a_B=\frac{a_{BE}^{\mathrm{n}}}{\cos\ 45^\circ}=\frac{2v^2}{l}$$

以杆BE上点 B为动点. 将动参考系固连到OA上.



速度 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}}=\boldsymbol{v}_{\mathrm{e}}+\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}\qquad \boldsymbol{v}_{\mathrm{e}}=\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}}=\boldsymbol{v}_B,\ \boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}=\boldsymbol{0}\qquad \omega_{OA}=\dfrac{v_{\mathrm{e}}}{OB}=\dfrac{v}{l}$

加速度 $\boldsymbol{a}_{\mathrm{a}}=\boldsymbol{a}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{n}}+\boldsymbol{a}_{\mathrm{e}}^{\tau}+\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}+\boldsymbol{a}_{\mathrm{C}}$

投影到 BD方向上 $a_{\mathrm{a}}=a_{\mathrm{e}}^{\tau}\qquad \varepsilon_{OA}=\dfrac{a_{\mathrm{e}}^{\tau}}{OB}=\dfrac{a_B}{OB}=\dfrac{2v^2}{l^2}$

- 12月3日， 第二次作业：6-11、6-13*