工 程 控 制 原 理

3. 瞬态响应及误差分析

3.2 一阶系统的时间响应

主讲：李敏

3.2 一阶系统的时间响应

凡是能够用一阶微分方程描述的系统称为一阶系统。因为一阶系统的惯性较大，故一阶系统又称为惯性系统。

3.2.1 一阶系统的数学模型

一阶微分方程的一般形式为

$$T\frac{\mathrm{d}x_{\mathrm{o}}(t)}{\mathrm{d}t}+x_{\mathrm{o}}(t)=x_{\mathrm{i}}(t)$$

其传递函数为

$$G(s)=\frac{X_{\mathrm{o}}(s)}{X_{\mathrm{i}}(s)}=\frac{1}{Ts+1}$$

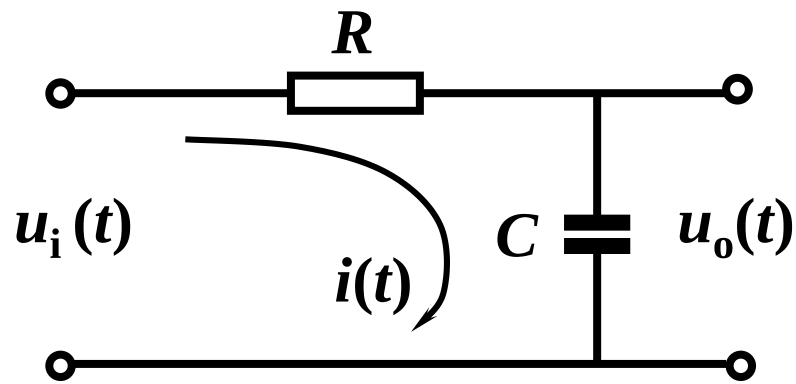
式中，T 称为一阶系统的时间常数，是一阶系统的特征参数，表达了一阶系统本身与外界作用无关的固有特性。

3.2 一阶系统的时间响应

3.2.1 一阶系统的数学模型

例如：电路系统

$$RC\frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{o}}}{\mathrm{d}t}+u_{\mathrm{o}}=u_{\mathrm{i}}(t)$$



阻容电路

经拉氏变换后

$$RCsU_{\mathrm{o}}(s)+U_{\mathrm{o}}(s)=U_{\mathrm{i}}(s)$$

系统传递函数为

$$G(s)=\frac{U_{\mathrm{o}}(s)}{U_{\mathrm{i}}(s)}=\frac{1}{RCs+1}=\frac{1}{Ts+1}$$

电路的时间常数

$$\boxed{T=RC}$$

3.2.2 一阶系统的单位阶跃响应

单位阶跃信号为 $x_i(t)=1$ 　拉氏变换为 $X_i(s)=\dfrac{1}{s}$

考虑一阶系统的传递函数

$$G(s)=\frac{X_o(s)}{X_i(s)}=\frac{1}{Ts+1}$$

一阶系统的单位阶跃响应为

$$X_o(s)=\frac{1}{Ts+1}X_i(s)=\frac{1}{Ts+1}\frac{1}{s}$$

取拉氏反变换可得

$$x_o(t)=L^{-1}\left(\frac{1}{Ts+1}\frac{1}{s}\right)=L^{-1}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1/T}\right)$$

3.2.2 一阶系统的单位阶跃响应

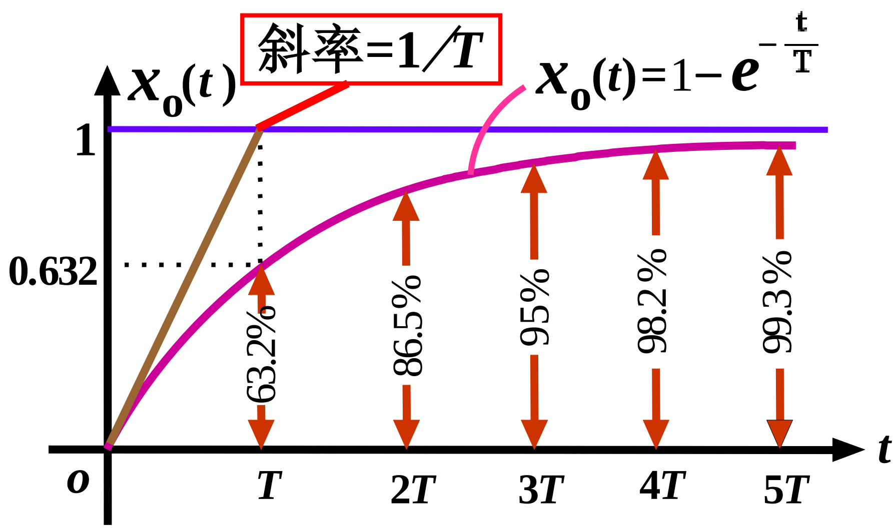
即

$$x_o(t)=1-e^{-\frac{1}{T}t}\qquad (t\geq 0)$$

单位阶跃信号响应的稳态分量，
等于单位阶跃信号的幅值

单位阶跃信号响应的瞬态分量，
当t→∞时，该分量趋于零

$x_o(t)$随时间t的变化是一条按指数规律单调上升的曲线。



由于

$$\left.\frac{\mathrm{d}x_o(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=\left.\frac{1}{T}e^{-\frac{1}{T}t}\right|_{t=0}=\frac{1}{T}$$

即：上述指数规律曲线在 $t=0$ 处的切线斜率为 $1/T$。

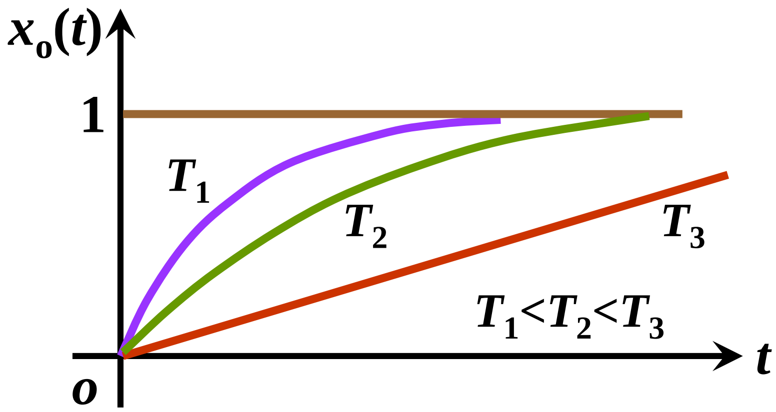
一阶系统单位阶跃响应的特点

① $x_o(0)=0$，随时间的推移，$x_o(t)$指数增大，且无振荡。$x_o(\infty)=1$，无稳态误差。

② 当$t=0$时，初始斜率为$1/T$。

可以在系统参数未知时，由一阶系统的单位阶跃响应实验曲线来确定系统的时间常数T。

③ 时间常数T是重要的特征参数，它反映了系统响应的快慢。T越小，x_o(t)响应越快，达到稳态用的时间越短，即系统的惯性越小。



一阶系统单位阶跃响应的特点

④ 通常工程中当响应曲线达到并保持在稳态值的95%～98%时，认为系统响应过程基本结束。从而惯性环节的过渡过程时间（或称调整时间）t_s 为3T～4T。

过渡过程时间（调整时间）t_s 的大小可作为评价系统响应快慢的指标。

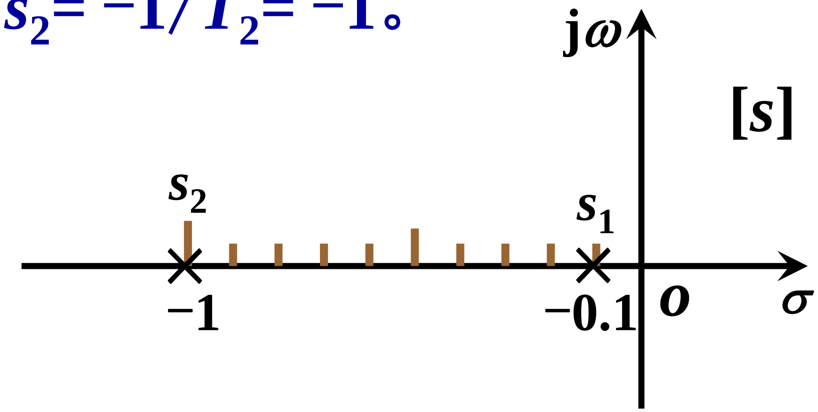
通常希望系统响应速度越快越好，调整组成系统的元件参数，减小T值，可以提高系统的快速性。

例题 两个时间常数T值不同的惯性环节串联在一起，求其单位阶跃响应。已知两环节串联的传递函数为

$$\frac{X_o(s)}{X_i(s)}=\frac{1}{10s+1}\cdot\frac{1}{s+1}$$

解： 由传递函数看出：$T_1=10$，$T_2=1$。

将系统传递函数的两个极点标在s复平面上，得到系统的极点分布图。$s_1=-1/T_1=-0.1$，$s_2=-1/T_2=-1$。



时间常数较大的环节的极点s_1更靠近虚轴一些。

例题

两环节串联后给系统输入单位阶跃信号，即$X_i(s)=1/s$，单位阶跃响应为

$$X_o(s)=\frac{1}{10s+1}\cdot\frac{1}{s+1}\cdot\frac{1}{s}$$

将其分解为简单因式之和，即

$$X_o(s)=-\frac{1}{0.09}\left(\frac{1}{10s+1}\right)+\frac{1}{9}\left(\frac{1}{s+1}\right)+\frac{1}{s}$$

取拉氏反变换，得到时间响应

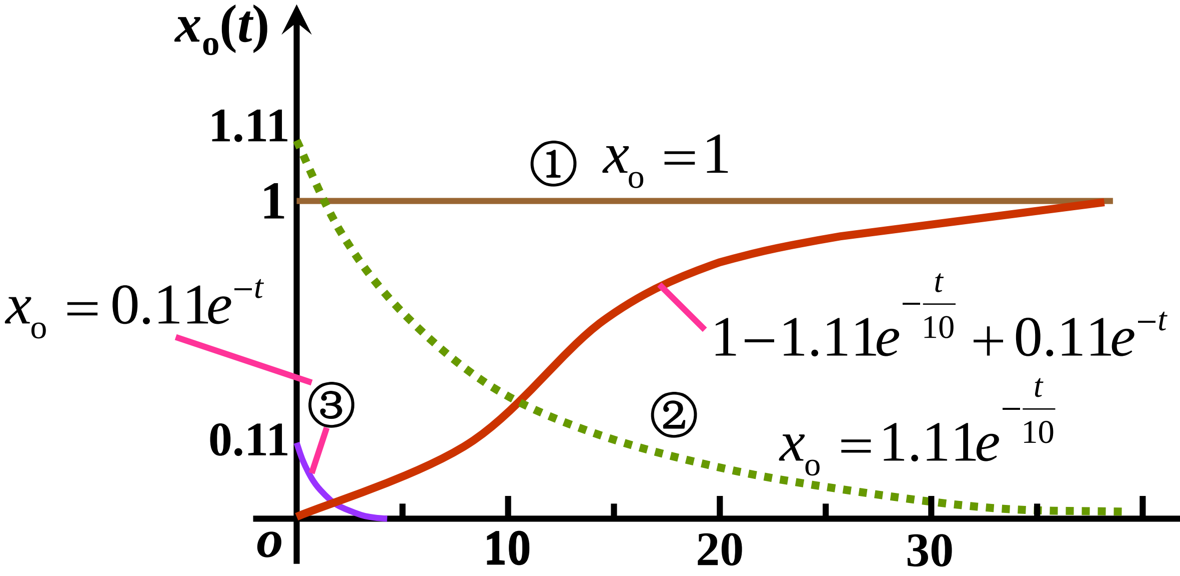
$$x_o(t)=-\frac{1}{0.9}e^{-\frac{t}{10}}+\frac{1}{9}e^{-t}+1$$

或者

$$x_o(t)=1-1.11e^{-\frac{t}{10}}+0.11e^{-t}$$

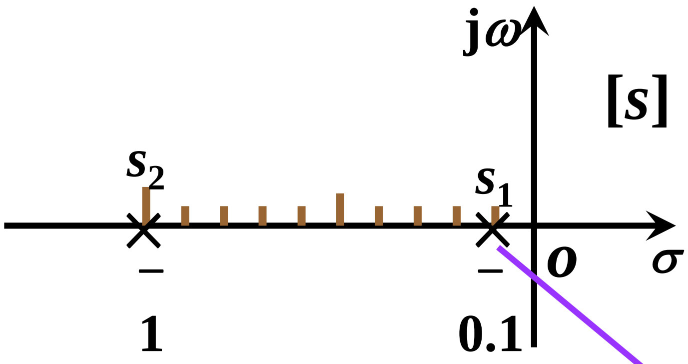
例题

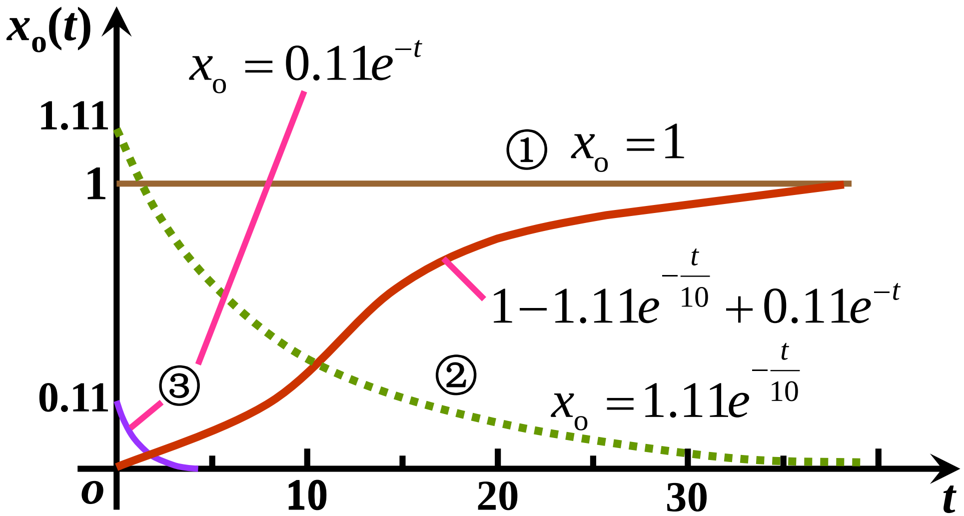
系统的单位阶跃响应曲线



整个系统的瞬态响应取决于时间常数T值大的环节，T值小的环节对系统瞬态响应的影响很小。

3.2.2 一阶系统的单位阶跃响应





靠近虚轴的极点称为**主导极点**，在系统瞬态响应中起到主导作用。离虚轴较远的极点，对瞬态响应的影响很小。

当两个极点到虚轴的垂直距离的比值超过5倍时，可以近似地只考虑主导极点的作用，忽略非主导极点的影响。

3.2.3 一阶系统的单位脉冲响应

单位脉冲信号拉氏变换为 $X_{\mathrm{i}}(s)=1$

考虑一阶系统的传递函数

$$G(s)=\frac{X_{\mathrm{o}}(s)}{X_{\mathrm{i}}(s)}=\frac{1}{Ts+1}$$

一阶系统的单位脉冲响应为

$$X_{\mathrm{o}}(s)=\frac{1}{Ts+1}X_{\mathrm{i}}(s)=\frac{1}{Ts+1}$$

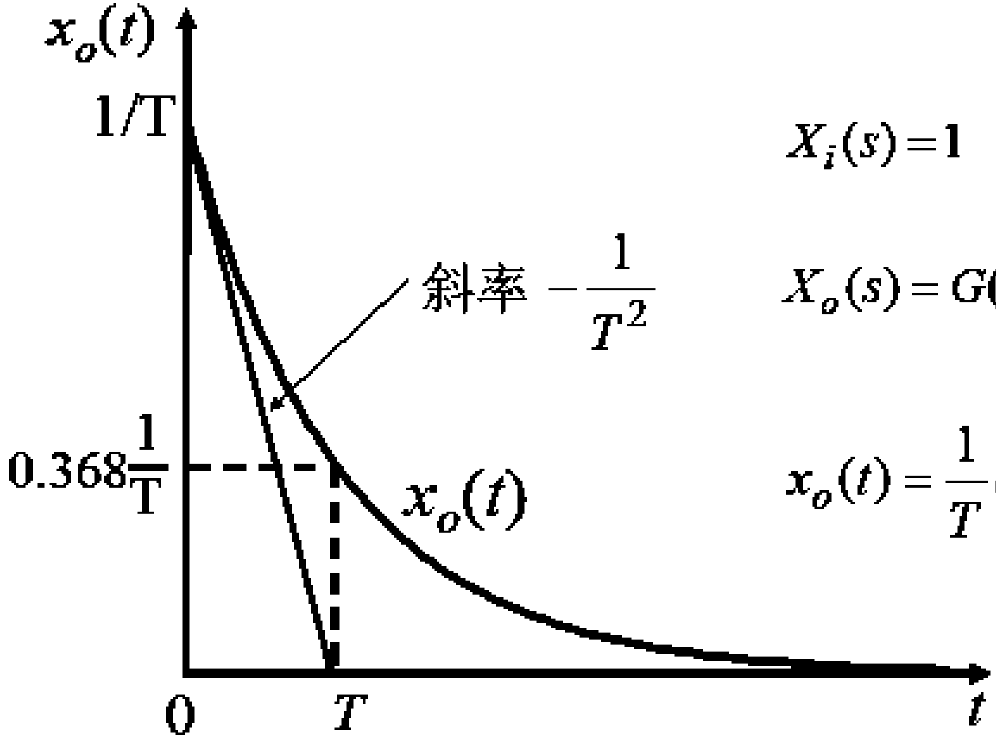
取拉氏反变换可得

$$x_{\mathrm{o}}(t)=L^{-1}\left(\frac{1}{Ts+1}\right)=L^{-1}\left(\frac{1/T}{s+1/T}\right)$$

3.2.3 一阶系统的单位脉冲响应

即 $$x_o(t) = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}} \qquad (t \geq 0)$$

$x_o(t)$随时间t的变化是一条按指数规律单调下降的曲线。



$$X_i(s) = 1$$

$$X_o(s) = G(s) = \frac{1}{T}\frac{1}{s + 1/T}$$

$$x_o(t) = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}}, \quad t \geq 0$$

一阶系统单位脉冲响应的特点

① $x_o(0)=1/T$，随时间的推移，$x_o(t)$指数衰减；

② 当$t=0$时，初始斜率为 $$\left.\frac{\mathrm{d}x_o(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=-\frac{1}{T^2}$$

③ 对于实际系统，通常应用具有较小脉冲宽度（脉冲宽度小于$0.1T$）和有限幅值的脉冲代替理想脉冲信号。

④ 同样满足上述规律，即T越大，响应越慢，无论哪种输入信号都如此。

3.2.4 一阶系统的单位斜坡响应

单位斜坡信号为 $x_i(t)=t$　　拉氏变换为 $X_i(s)=1/s^2$

考虑一阶系统的传递函数

$$G(s)=\frac{X_o(s)}{X_i(s)}=\frac{1}{Ts+1}$$

一阶系统的单位斜坡响应为

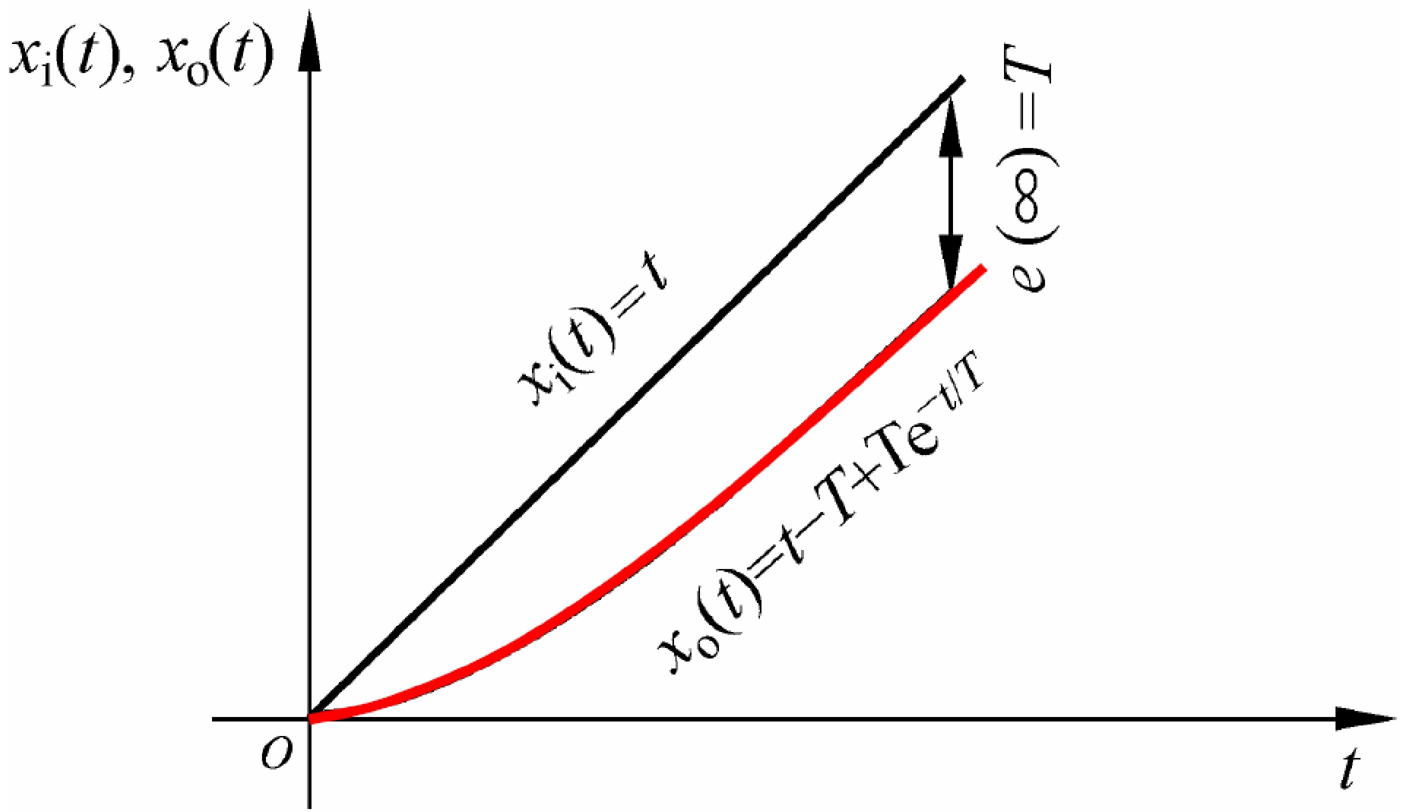
$$X_o(s)=\frac{1}{Ts+1}X_i(s)=\frac{1}{Ts+1}\cdot\frac{1}{s^2}=\frac{1}{s^2}-\frac{T}{s}+\frac{T}{s+1/T}$$

取拉氏反变换可得

$$x_o(t)=L^{-1}\left[X_o(s)\right]=t-T+Te^{-\frac{t}{T}}$$

3.2.4 一阶系统的单位斜坡响应

一阶系统单位斜坡时间响应曲线也是一条单调上升的指数规律曲线。



3.2.5 一阶系统几种响应之间的关系

已知单位脉冲信号 $\delta(t)$、单位阶跃信号 $1(t)$ 以及单位斜坡信号 t 之间的关系为

$$\delta(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[1(t)\right] \qquad 1(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}t$$

$$x_{o\delta}(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_{o1}(t) \qquad x_{o1}(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_{ot}(t)$$

$$x_{o\delta}(t)=\frac{1}{T}e^{-\frac{t}{T}} \qquad x_{o1}(t)=1-e^{-\frac{t}{T}} \qquad x_{ot}(t)=t-T+Te^{-\frac{t}{T}}$$

3.2.5 一阶系统几种响应之间的关系

系统对输入信号导数的响应等于系统对该输入信号响应的导数。

此规律是线性定常系统的重要特征，不适用于线性时变系统及非线性系统。

3.2.5 一阶系统几种响应之间的关系

	输入信号时域	输入信号频域	输出响应	传递函数
	$\delta(t)$	1	$\frac{1}{T}e^{-\frac{t}{T}} \quad (t \geq 0)$	
微分 ↑	$1(t)$	$\frac{1}{S}$	$1-e^{-\frac{t}{T}} \quad (t \geq 0)$	微分 ↑ $\frac{1}{TS+1}$
	t	$\frac{1}{S^2}$	$t-T+Te^{-\frac{t}{T}} \quad (t \geq 0)$	
	$\frac{1}{2}t^2$	$\frac{1}{S^3}$	$\frac{1}{2}t^2-Tt+T^2(1-e^{-\frac{t}{T}}) \quad (t \geq 0)$	

等价关系：系统对输入信号导数的响应，等于系统对该输入信号响应的导数；系统对输入信号积分的响应，就等于系统对该输入信号响应的积分；积分常数由零初始条件确定。