工 程 控 制 原 理

5. 系统的稳定性

5.4 稳定性裕量

主讲：李敏

上海大学
机电工程与自动化学院

5.4 稳定性裕量

奈氏稳定判据可以定性判别系统是否稳定，稳定性裕量可以定量地确定系统离开稳定边界的远近，是评价系统稳定性好坏的性能指标，是系统动态设计的重要依据之一。

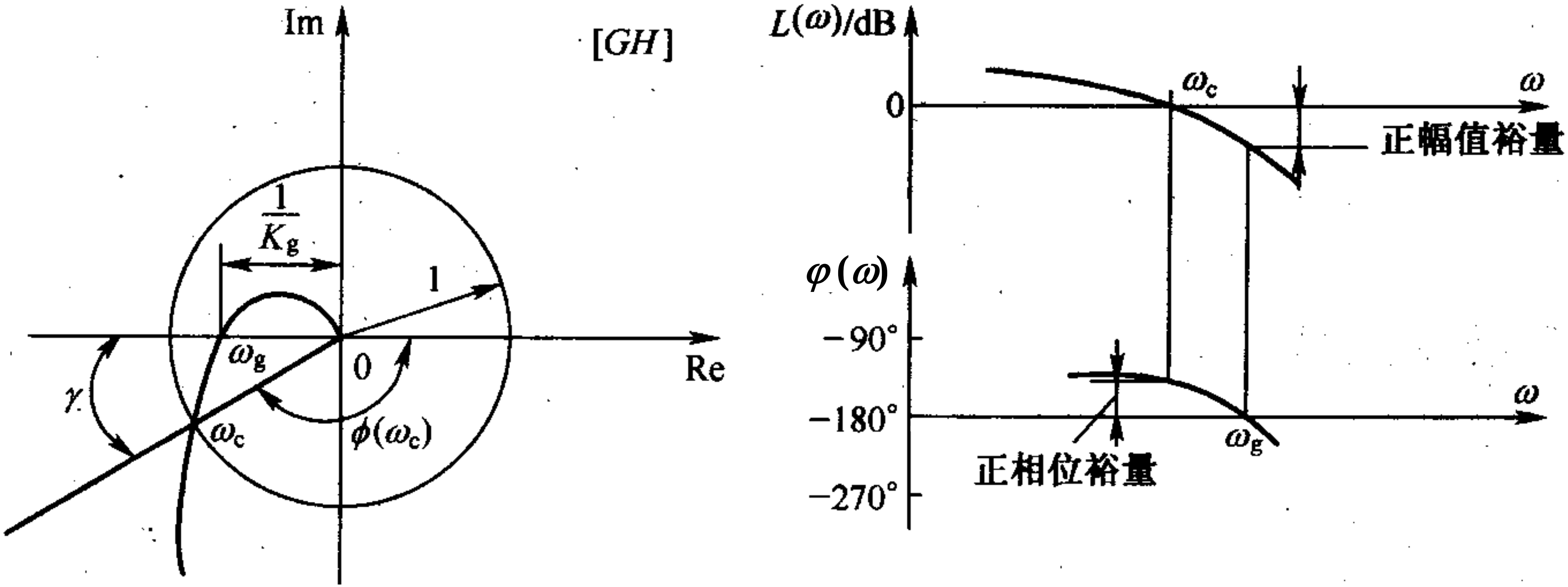
由Nyquist稳定判据可知，若系统开环传递函数没有右极点，且闭环系统是稳定的，开环系统的Nyquist曲线离(−1, j0)点越远，则闭环系统的稳定程度越高；开环系统的Nyquist曲线离(−1, j0)点越近，则闭环系统的稳定程度越低，这就是通常所说的相对稳定性。通过Nyquist曲线对点(−1, j0)的靠近程度来度量，其定量表示为相位裕量（相位裕度）γ 和幅值裕量（幅值裕度）K_g。

5.4 稳定性裕量

在下面的两幅图中，$G(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)$曲线与单位圆相交时的频率 ω_c 称为**幅值交界频率**，当 $\omega=\omega_c$ 时，$|G(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)|=1$。在Bode图上 ω_c 是对数幅频特性曲线与 0dB 线相交时的频率。ω_c 也称**幅值穿越频率**或开环截止频率、开环剪切频率。

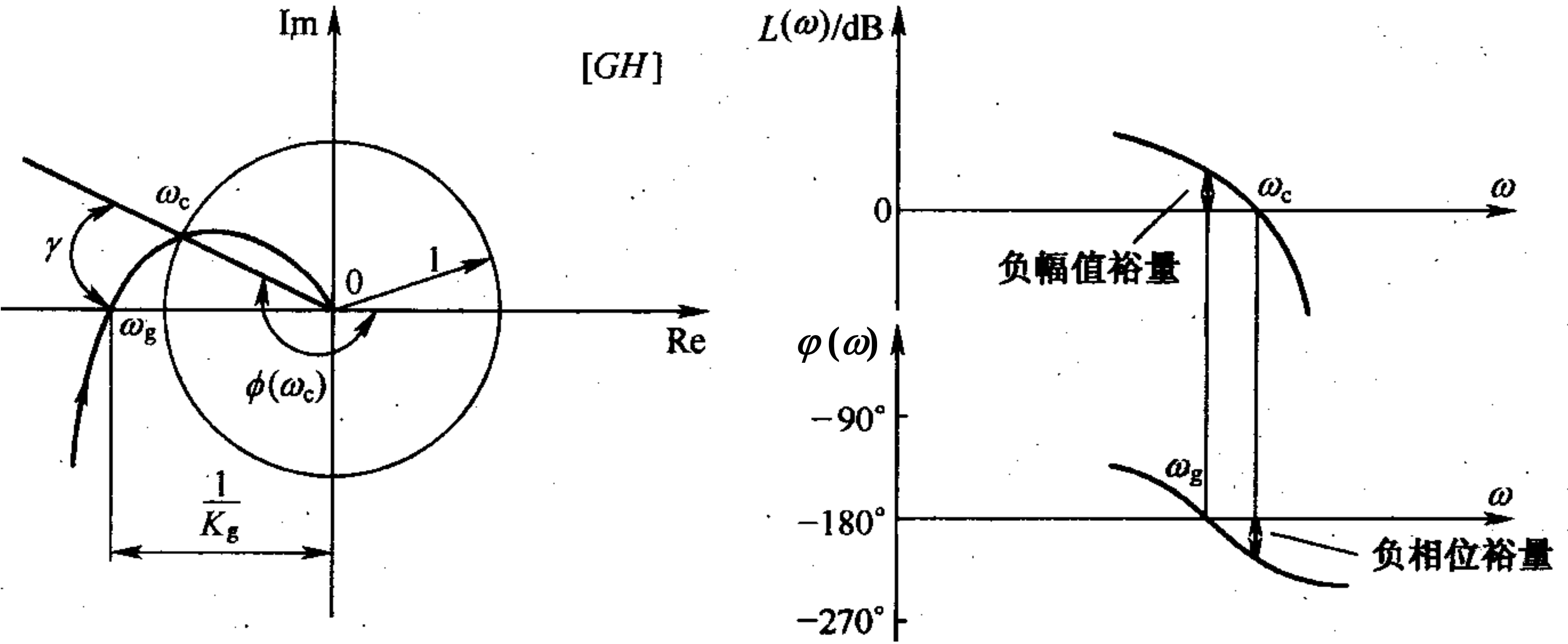
ω_g称作相位交界频率。当$\omega=\omega_g$时，$\angle G(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)=-180°$。此时开环奈氏曲线与负实轴相交。对数相频特性曲线在 ω_g 处穿越 $-180°$ 线，ω_g 也称**相位穿越频率**。

5.4 稳定性裕量



(a) 正的相位裕量和幅值裕量

相位裕量和幅值裕量图



(b) 负的相位裕量和幅值裕量

相位裕量和幅值裕量图

5.4.1 相位裕量

在幅值交界频率上，使系统达到不稳定边缘所需要附加的相角滞后量(或超前量)，称为相位裕量，记作 γ。

$$\gamma=\varphi(\omega_c)-(-180°)=180°+\varphi(\omega_c)$$

式中，$\varphi(\omega_c)$是开环频率特性在幅值交界频率 ω_c 上的相角。

最小相位系统稳定时，开环奈氏曲线不包围(−1，j0)点，即$\varphi(\omega_c)$ 不应小于 −180°。

根据上式，最小相位系统稳定时应当有正的相位裕量，即 $\gamma>0$，见前面图(a)。

5.4.2 幅值裕量

在相位交界频率处开环频率特性幅值的倒数，称为幅值裕量，记为K_g。

$$K_{\mathrm{g}}=\frac{1}{\left|G(\mathrm{j}\omega_{\mathrm{g}})H(\mathrm{j}\omega_{\mathrm{g}})\right|}$$

在Bode图上，幅值裕量以分贝值表示，可记作K_g (dB)。

$$K_{\mathrm{g}}(\mathrm{dB})=20\lg K_{\mathrm{g}}=20\lg\frac{1}{\left|G(\mathrm{j}\omega_{\mathrm{g}})H(\mathrm{j}\omega_{\mathrm{g}})\right|}$$

$$=-20\lg\left|G(\mathrm{j}\omega_{\mathrm{g}})H(\mathrm{j}\omega_{\mathrm{g}})\right|$$

5.4.2 幅值裕量

最小相位系统闭环状态下稳定时，其开环奈氏曲线不能包围(−1, j0)点，因此，$|G(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)|<1$，即$K_g>1$，$K_g(\mathrm{dB})>0\mathrm{dB}$，这种情况称系统具有正幅值裕量。和这种情况相反，则为负幅值裕量。

需要注意，在Bode图上，$K_g>1$是用 $20\lg|G(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)|$ 来表示的，因为$|G(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)|<1$，也就是正幅值裕量必须在0dB线的下边，见前图(a)。前图(b)表示负相位裕量和负幅值裕量的情况。

5.4.2 幅值裕量

一阶、二阶系统的开环奈氏曲线与负实轴不相交，其幅值裕量为无穷大，理论上它们不可能不稳定。但如果有延时环节的作用，一阶、二阶系统也会变得不稳定。若把建立数学模型过程中被略去的一些小的延时环节考虑进去，所谓的一阶、二阶系统也可能变成不稳定的。

对于开环传递函数中存在右极点的系统，只有开环奈氏曲线包围(−1, j0)点时系统才能稳定，否则不能满足稳定条件。因此，非最小相位系统($P\neq0$的系统)稳定的时候，将具有负的相位裕量和幅值裕量。

5.4.3 关于相位裕量和幅值裕量的几点说明

(1) 控制系统的相位裕量和幅值裕量是开环奈氏曲线对(−1, j0)点靠近的度量，因此，这两个裕量可以用作设计准则。

(2) 为了得到满意的性能，相位裕量应在30°～60°之间，幅值裕量应当大于6dB。

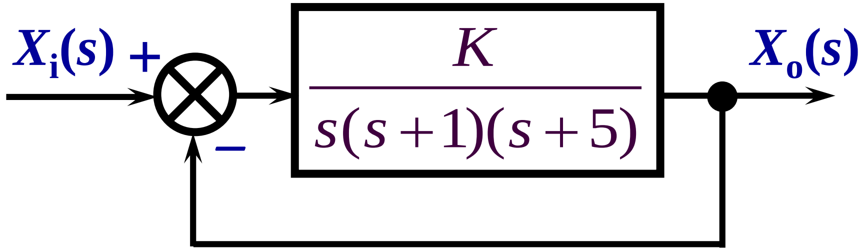
(3) 对于最小相位系统，只有当相位裕量和幅值裕量都为正时，系统才是稳定的。为了确定系统的稳定性储备，必须同时考虑相位裕量和幅值裕量两项指标，只用其中一项指标不足以说明系统的相对稳定性。

5.4.3 关于稳定性裕量的几点说明

(4) 对于最小相位系统，开环幅频和相频特性之间有确定的对应关系，30°～60°的相位裕量，意味着在开环Bode图上，对数幅频特性曲线在幅值交界频率 ω_c 处的斜率必须大于 −40dB/dec。在大多数实际系统中，为保证系统稳定，要求ω_c上的斜率为 −20dB/dec，如果ω_c处的斜率为 −40dB/dec，系统即使稳定，相位裕量也较小，相对稳定性也是很差的。若ω_c处斜率为 −60dB/dec 或更陡，则系统肯定不会稳定。

5.4.3 关于稳定性裕量的几点说明

例题14： 设控制系统如下图所示。当 $K=10$ 和 $K=100$ 时，试求系统的相位、幅值裕量。

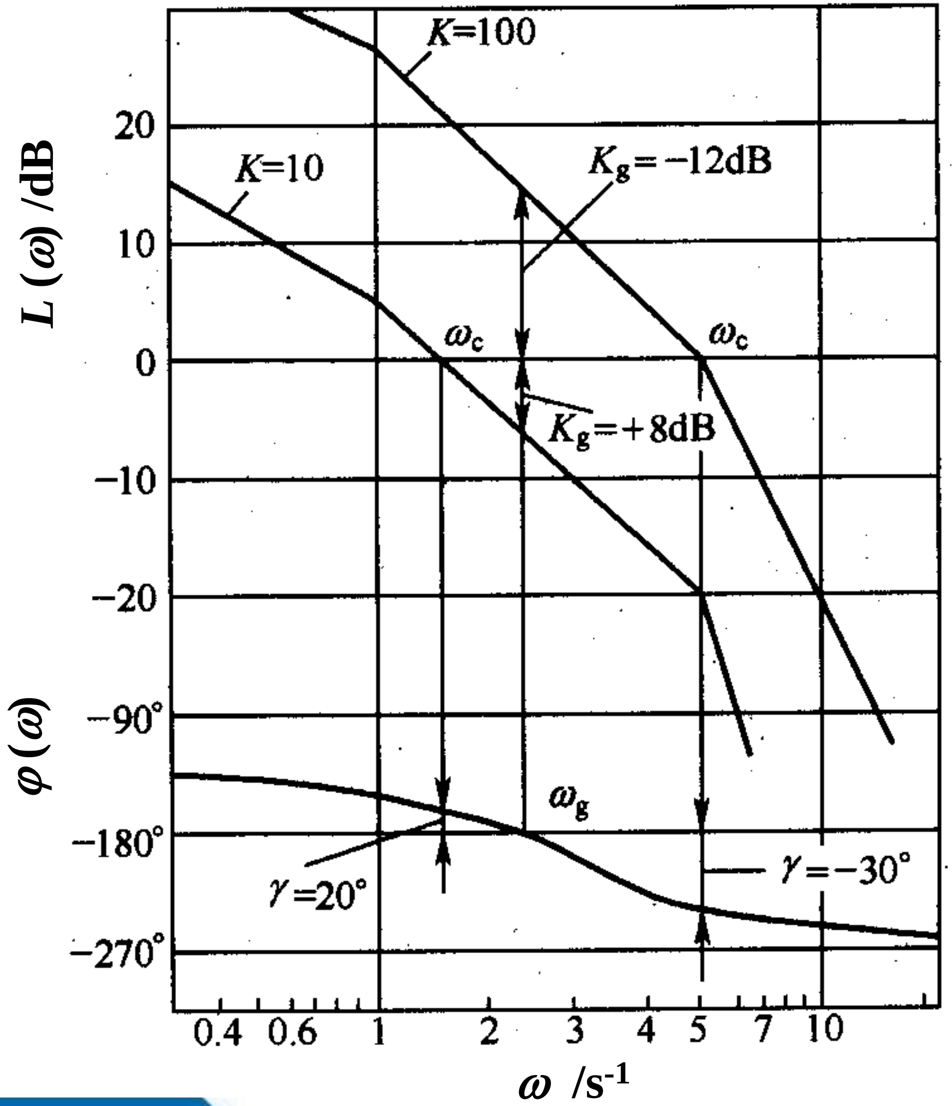


解： 根据传递函数分别作出 $K=10$ 和 $K=100$ 时的开环Bode图，如下页图所示。

5.4.3 关于稳定性裕量的几点说明

K=10与K=100的对数相频曲线相同，并且对数幅频特性曲线的形状相同。只是K=100的幅频曲线比K=10的曲线向上平移20dB，并使幅频曲线与0dB线的交点频率ω_c向右移动了。

$$\frac{K}{s(s+1)(s+5)}$$ 开环Bode图



5.4.3 关于稳定性裕量的几点说明

由图上查出K=10时相位裕量为21°，幅值裕量为8dB，都是正值。而K=100时相位裕量为−30°，幅值裕量为−12dB。

由此结果看出，K=100时，系统已经不稳定，K=10时，虽然系统稳定，但稳定裕量偏小。为了获得足够的稳定储备，必须将 γ 增大到30°～60°，这可以通过减小K值来达到。然而从稳定误差的角度考虑，不希望减小K。因此必须通过增加校正环节来满足要求。

5.4.4 相位裕量与时间响应的关系

相位裕量 γ 是频域性能指标。对于二阶系统，由于 γ 与系统的阻尼比 ζ 之间存在确定的关系，因此可以用 γ 来分析系统的瞬态响应性能。

由二阶系统开环传递函数 $G(s)=\dfrac{\omega_\mathrm{n}^2}{s(s+2\zeta\omega_\mathrm{n})}$，得到其开环频率特性的幅值为

$$|G(\mathrm{j}\omega)|=\frac{\omega_\mathrm{n}^2}{\sqrt{(-\omega^2)^2+(2\zeta\omega_\mathrm{n}\omega)^2}}$$

令 $|G(\mathrm{j}\omega)|=1$，求得幅值为1时的频率即为幅值交界频率

$$\omega_\mathrm{c}=\omega_\mathrm{n}\sqrt{\sqrt{1+4\zeta^2}-2\zeta^2}$$

5.4.4 相位裕量与时间响应的关系

在此频率下，$G(j\omega)$的幅角为

$$\varphi(\omega_c)=\angle\frac{1}{j\omega}+\angle\frac{1}{j\omega+2\zeta\omega_n}$$

$$=-90^\circ-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\sqrt{1+4\zeta^4}-2\zeta^2}}{2\zeta}$$

因此，相位裕量

$$\gamma=180^\circ+\varphi(\omega_c)=90^\circ-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\sqrt{1+4\zeta^4}-2\zeta^2}}{2\zeta}$$

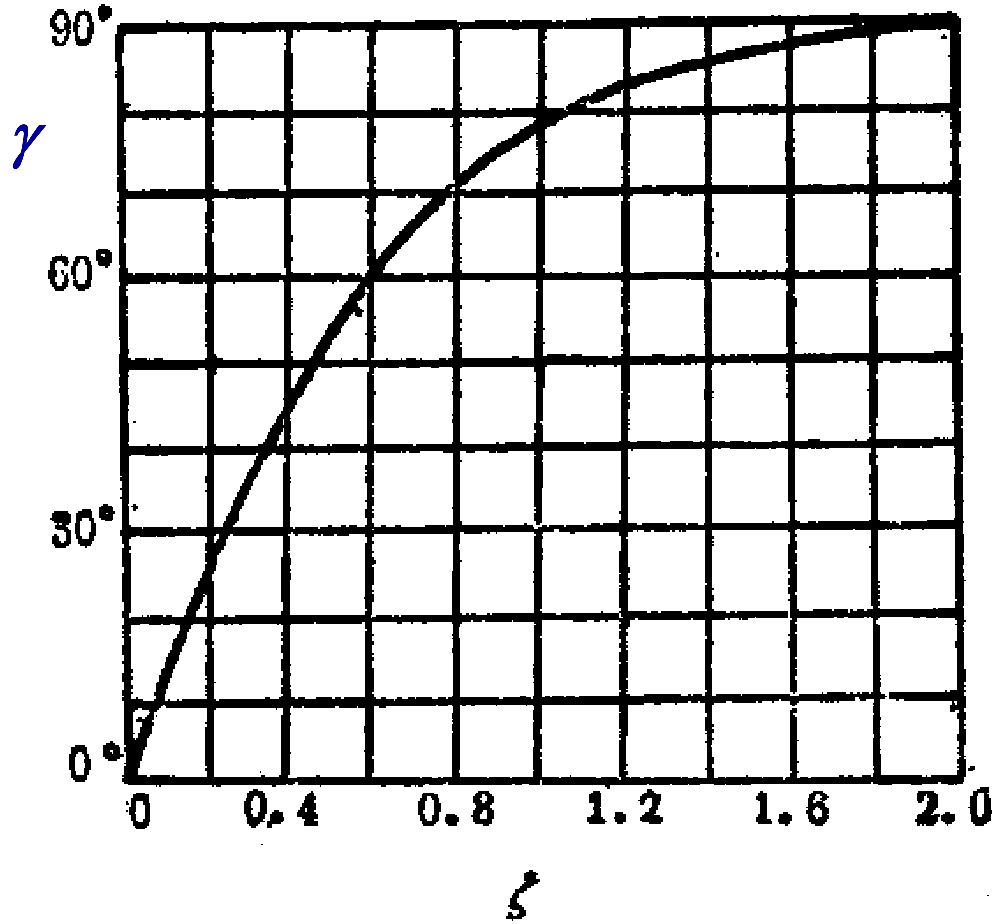
$$=\operatorname{arctg}\frac{2\zeta}{\sqrt{\sqrt{1+4\zeta^4}-2\zeta^2}}$$

为二阶系统相位裕量 γ 与阻尼比 ζ 之间的关系

5.4.4 相位裕量与时间响应的关系

由图中可以看出，相位裕量要求在30°～60°时，相当于阻尼比ζ=0.28～0.6。

由这一关系，可以根据相位裕量γ来分析二阶系统的振荡特性。



二阶系统γ与ζ的关系曲线

本章总结

本章主要介绍了时域分析法及频域分析法中关于系统稳定性分析的相关内容，需重点掌握的内容如下：

(1) 线性系统的稳定性是系统正常工作的首要条件。

(2) 线性系统稳定的充要条件是系统特征方程的根全部具有负实部，或者说系统闭环传递函数的极点均在[*s*]平面的左半平面。

系统的稳定性是系统固有的一种特性，由系统自身的结构、参数决定，而与初始条件和外部作用无关。

(3) 稳定性判别的代数判据是Routh-Hurwitz稳定判据，它是线性系统稳定性的充分必要判据，无需求解特征根，直接通过特征方程的系数即可判断特征方程是否有位于[*s*]右半平面的根，从而确定系统的绝对稳定性。

(4) Nyquist稳定判据是通过图解方法判断系统是否满足稳定的充分必要条件。因此，它是一种几何判据，可以在频域内通过系统的开环频率特性来判别闭环系统的稳定性，不仅可以用来判断闭环系统的绝对稳定性，而且还可以用来定义和估计系统的相对稳定性。

(5) 系统的相对稳定性可用稳定裕量来定量计算。稳定裕量可以确定系统离开稳定边界的远近，不但是衡量一个闭环系统稳定程度的指标，而且与系统性能有密切的关系，是系统动态设计的重要依据之一。通常有二种稳定裕量，即相角裕量γ和幅值裕量K_g。

作业：p.127-128

5-7、 5-8