工程控制原理

2. 数学模型与传递函数

2.2 拉普拉斯变换

主讲：李敏

2.2 拉普拉斯变换

系统的数学模型以微分方程的形式表达输出与输入的关系。经典控制理论的系统分析方法：时域法、频域法。

时域分析法 —— 求解数学模型微分方程，获得系统输出随时间变化的规律。

频域分析法 —— 借助于系统频率特性分析系统的性能，拉普拉斯变换是其数学基础。

频域分析法是经典控制理论的核心，被广泛采用，该方法间接地运用系统的开环频率特性分析闭环响应。

2.2.1 复数和复变函数

复数的概念

复数 $s=\sigma+j\omega$

$j=\sqrt{-1}$ 称为虚数单位

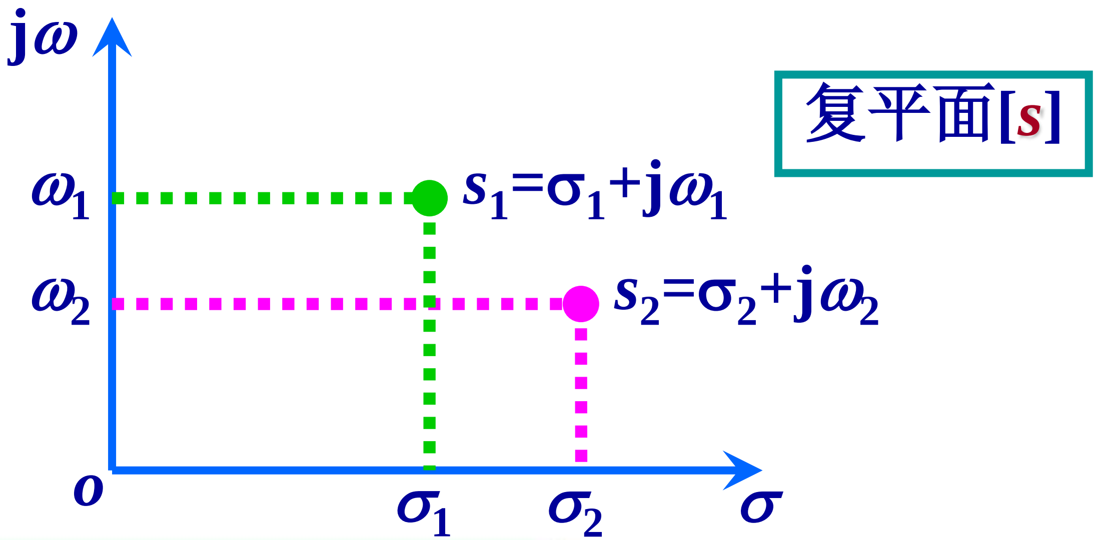
（有一个实部σ和一个虚部ω，σ和ω均为实数）

两个复数相等：	当且仅当它们的实部和虚部分别相等。
一个复数为零：	当且仅当它的实部和虚部同时为零。

复数的表示法

对于复数 $s=\sigma+j\omega$

复平面：以σ 为横坐标(实轴)、ω 为纵坐标(虚轴)所构成的平面称为复平面或[s]平面。复数 $s=\sigma+j\omega$ 可在复平面[s]中用点(σ, ω)表示：一个复数对应于复平面上的一个点。



① 复数的向量表示法

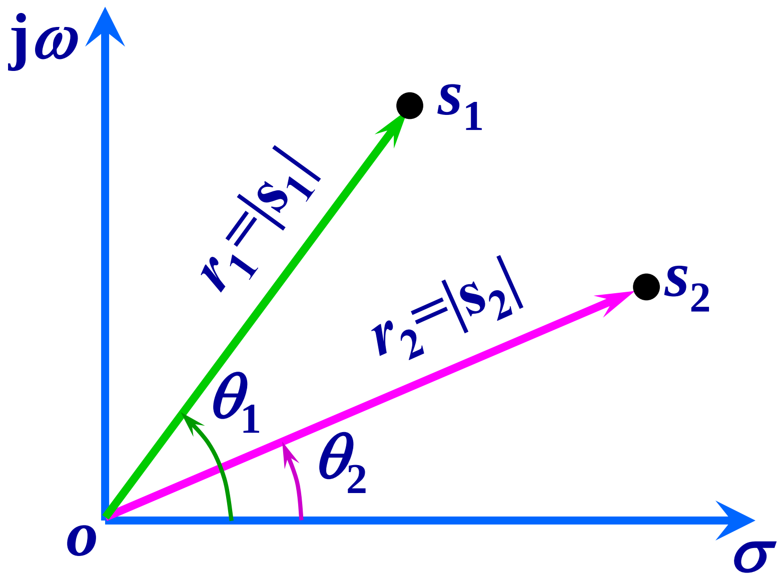
复数 $s=\sigma+j\omega$ 可以用从原点指向点(σ, ω)的向量表示。

向量的长度称为复数的 **模**：

$$|s| = r = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2}$$

向量与σ 轴的夹角θ 称为复数 s 的 **幅角**：

$$\theta = \arctan(\omega / \sigma)$$



② 复数的三角函数表示法与指数表示法

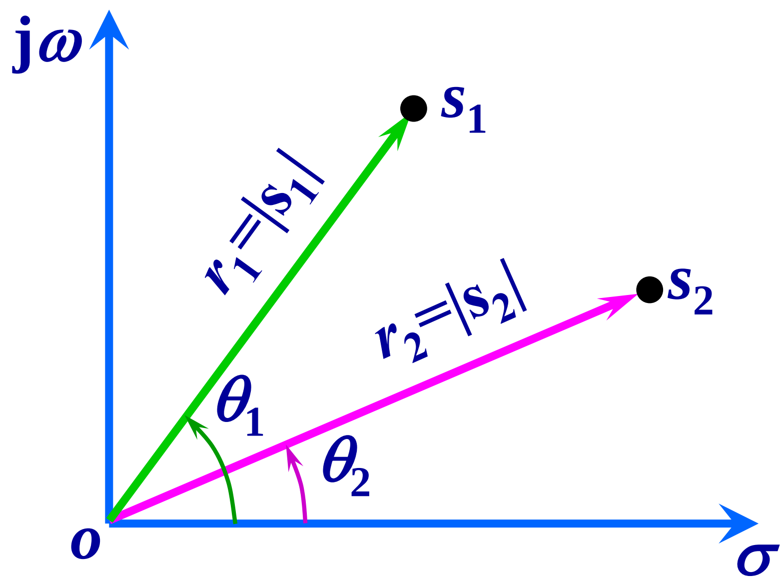
根据复平面的图示可得：$\sigma = r\cos\theta$，$\omega = r\sin\theta$

复数的三角函数表示法：

$$s = r(\cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta)$$

欧拉公式：

$$e^{\mathrm{j}\theta} = \cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta$$



复数的指数表示法：

$$s = re^{\mathrm{j}\theta}$$

③ 复变函数、极点与零点的概念

以复数$s=\sigma+j\omega$为自变量构成的函数$G(s)$称为复变函数：

$$G(s) = u + jv$$

式中：u、v 分别为复变函数的实部和虚部。

通常，在线性控制系统中，复变函数$G(s)$是复数s的单值函数。即：对应于s的一个给定值，$G(s)$就有一个唯一确定的值与之相对应。

当复变函数表示成 $G(s)=\dfrac{k\Pi(s+z_i)}{\Pi(s+p_j)}$

分子为零

(a) 当$s=-z_i$时，$G(s)=0$，则$s_i=-z_i$称为$G(s)$的零点；

(b) 当$s=-p_j$时，$G(s)\to\infty$，则$s_j=-p_j$称为$G(s)$的极点。

分母为零

例：

当$s=\sigma+j\omega$时，求复变函数$G(s)=s^2+1$的实部u和虚部υ。

解：

$$G(s)=s^2+1=(\sigma+j\omega)^2+1$$
$$=\sigma^2+j(2\sigma\omega)-\omega^2+1$$
$$=(\sigma^2-\omega^2+1)+j(2\sigma\omega)$$

复变函数的实部 $u=\sigma^2-\omega^2+1$

复变函数的虚部 $\upsilon=2\sigma\omega$

2.2.2 拉普拉斯变换的定义

拉氏变换是控制工程中的一个基本数学方法，其优点是能将时间函数的导数经拉氏变换后，变成复变量**s**的乘积，将时间表示的微分方程，变成以**s**表示的代数方程。

设有时间函数 $f(t)$，当 $t<0$ 时，$f(t)=0$；在 $t\geq 0$时定义函数 $f(t)$ 的拉普拉斯变换为：

$$F(s)=L\left[f(t)\right]=\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

象函数　拉氏变换符号　原函数　复变量

拉普拉斯变换：在一定条件下，把实数域中的实变函数 $f(t)$ 变换到复数域内与之等价的复变函数 $F(s)$ 。

2.2.2 拉普拉斯变换的定义

拉氏变换是否存在取决于定义的积分是否收敛。拉氏变换存在的条件：

① 当$t \geq 0$时，$f(t)$ 分段连续，只有有限个间断点；

② 当$t \to \infty$时，$f(t)$ 的增长速度不超过某一指数函数，即

$$\left| f(t) \right| \leq Me^{at}$$

式中：M、a为实常数。

在复平面上，对于$\mathrm{Re}\,s > a$的所有复数s (Res表示s的实部)都使积分式绝对收敛，故$\mathrm{Re}\,s > a$是拉普拉斯变换的定义域，a称为收敛坐标。

2.2.3 典型时间函数的拉普拉斯变换

(1) 单位阶跃函数

单位阶跃函数定义：

$$1(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & t\ge 0\end{cases}$$

其拉普拉斯变换为：

$$L[1(t)]=\int_0^{\infty}1(t)e^{-st}\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}e^{-st}\mathrm{d}t=-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^{\infty}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)-\left(-\frac{1}{s}e^{-0}\right)=\frac{1}{s}$$

(2) 单位脉冲函数

单位脉冲函数定义：

$$\delta(t)=\begin{cases}\infty, & t=0\\ 0, & t\neq 0\end{cases}$$

且：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)f(t)\mathrm{d}t=f(0)$$

其拉普拉斯变换为：

$$L[\delta(t)]=\int_{0}^{\infty}\delta(t)e^{-st}\mathrm{d}t=e^{-st}\Big|_{t=0}=1$$

(3) 单位速度函数（单位斜坡函数）

单位速度函数定义：

$$f(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ t, & t\geq 0\end{cases}$$

其拉普拉斯变换为：

$$L[t]=\int_0^{\infty} te^{-st}\mathrm{d}t=-\frac{1}{s}\int_0^{\infty} t\mathrm{d}e^{-st}$$

$$=-\frac{1}{s}te^{-st}\Big|_0^{\infty}+\frac{1}{s}\int_0^{\infty} e^{-st}\mathrm{d}t=-\frac{1}{s^2}e^{-st}\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{s^2}$$

(4) 指数函数

指数函数表达式：

$$f(t)=e^{-at}$$

式中：*a*是常数。

其拉普拉斯变换为：

$$L\left[e^{-at}\right]=\int_0^{\infty}e^{-at}e^{-st}\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}e^{-(s+a)t}\mathrm{d}t=\frac{1}{s+a}$$

(5) 正弦信号函数

正弦信号函数定义：

$$f(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ \sin\omega t, & t\geq 0\end{cases}$$

$$e^{\mathrm{j}\omega t}=\cos\omega t+\mathrm{j}\sin\omega t$$

$$e^{-\mathrm{j}\omega t}=\cos\omega t-\mathrm{j}\sin\omega t$$

两式相减

由欧拉公式，正弦函数表达为：

$$\sin\omega t=\frac{1}{2\mathrm{j}}\left(e^{\mathrm{j}\omega t}-e^{-\mathrm{j}\omega t}\right)$$

其拉普拉斯变换为：

$$L[\sin\omega t]=\int_0^{\infty}\sin\omega t\cdot e^{-st}\mathrm{d}t=\frac{1}{2\mathrm{j}}\int_0^{\infty}\left(e^{\mathrm{j}\omega t}-e^{-\mathrm{j}\omega t}\right)\cdot e^{-st}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2\mathrm{j}}\int_0^{\infty}\left[e^{-(s-\mathrm{j}\omega)t}-e^{-(s+\mathrm{j}\omega)t}\right]\mathrm{d}t=\frac{1}{2\mathrm{j}}\left(\frac{1}{s-\mathrm{j}\omega}-\frac{1}{s+\mathrm{j}\omega}\right)=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

(6) 余弦信号函数

余弦信号函数定义：

$$f(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ \cos\omega t, & t\geq 0\end{cases}$$

$$e^{\mathrm{j}\omega t}=\cos\omega t+\mathrm{j}\sin\omega t$$

$$e^{-\mathrm{j}\omega t}=\cos\omega t-\mathrm{j}\sin\omega t$$

两式相加

由欧拉公式，余弦函数表达为：

$$\cos\omega t=\frac{1}{2}\left(e^{\mathrm{j}\omega t}+e^{-\mathrm{j}\omega t}\right)$$

其拉普拉斯变换为：

$$L[\cos\omega t]=\int_0^\infty \cos\omega t\cdot e^{-st}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^\infty\left(e^{\mathrm{j}\omega t}+e^{-\mathrm{j}\omega t}\right)\cdot e^{-st}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\infty\left[e^{-(s-\mathrm{j}\omega)t}+e^{-(s+\mathrm{j}\omega)t}\right]\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-\mathrm{j}\omega}+\frac{1}{s+\mathrm{j}\omega}\right)=\frac{s}{s^2+\omega^2}$$

拉普拉斯变换简表 (待续)

序号	原函数 $f(t)$ $(t>0)$	象函数 $F(s)=L[f(t)]$
1	1 (单位阶跃函数)	$\frac{1}{s}$
2	$\delta(t)$ (单位脉冲函数)	1
3	K (常数)	$\frac{K}{s}$
4	t (单位斜坡函数)	$\frac{1}{s^2}$

拉普拉斯变换简表（续1）

序号	原函数 $f(t)$ $(t>0)$	象函数 $F(s)=L[f(t)]$
5	t^n $(n=1, 2, \cdots)$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$
6	e^{-at}	$\dfrac{1}{s+a}$
7	$t^n e^{-at}$ $(n=1, 2, \cdots)$	$\dfrac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
8	$\dfrac{1}{T}e^{-\frac{t}{T}}$	$\dfrac{1}{Ts+1}$

拉普拉斯变换简表（续2）

序号	原函数 $f(t)$ $(t>0)$	象函数 $F(s)=L[f(t)]$
9	$\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
10	$\cos\omega t$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$
11	$e^{-at}\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
12	$e^{-at}\cos\omega t$	$\dfrac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$

拉普拉斯变换简表 (续3)

序号	原函数 $f(t)$ $(t>0)$	象函数 $F(s)=L[f(t)]$
13	$\frac{1}{a}(1-e^{-at})$	$\frac{1}{s(s+a)}$
14	$\frac{1}{b-a}(e^{-at}-e^{-bt})$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$
15	$\frac{1}{b-a}(be^{-bt}-ae^{-at})$	$\frac{s}{(s+a)(s+b)}$
16	$\sin(\omega t+\phi)$	$\frac{\omega\cos\phi+s\sin\phi}{s^2+\omega^2}$

拉普拉斯变换简表 (续4)

序号	原函数 $f(t)$ $(t>0)$	象函数 $F(s)=L[f(t)]$
17	$\dfrac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_n t}\sin\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t$	$\dfrac{\omega_n^{\ 2}}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^{\ 2}}$
18	$\dfrac{1}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_n t}\sin\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t$	$\dfrac{1}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^{\ 2}}$
19	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_n t}\sin(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t-\phi)$ $\phi=\arctan\dfrac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$	$\dfrac{s}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^{\ 2}}$

拉普拉斯变换简表（续5）

序号	原函数 $f(t)$ $(t>0)$	象函数 $F(s)=L[f(t)]$
20	$1-\dfrac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_n t}\sin(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t+\phi)$ $\phi=\arctan\dfrac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$	$\dfrac{\omega_n^2}{s(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)}$
21	$1-\cos\omega t$	$\dfrac{\omega^2}{s(s^2+\omega^2)}$
22	$\omega t-\sin\omega t$	$\dfrac{\omega^2}{s(s^2+\omega^2)}$
23	$t\sin\omega t$	$\dfrac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$

2.2.4 拉普拉斯变换的基本性质

(1) 线性定理

若α、β是任意两个复常数，且：

$$L[f_1(t)]=F_1(s)\ ,\qquad L[f_2(t)]=F_2(s)$$

则：

$$L[\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)]=\alpha F_1(s)+\beta F_2(s)$$

证明：

$$L[\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)]=\int_0^\infty[\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)]\cdot e^{-st}\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^\infty \alpha f_1(t)e^{-st}\mathrm{d}t+\int_0^\infty \beta f_2(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

$$=\alpha F_1(s)+\beta F_2(s)$$

(2) 平移定理

若：

$$L[f(t)] = F(s)$$

则：

$$L\left[e^{-at}f(t)\right] = F(s+a)$$

证明：

$$L\left[e^{-at}f(t)\right] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-at}e^{-st}\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{\infty} f(t)e^{-(s+a)t}\mathrm{d}t$$

$$= F(s+a)$$

(3) 微分定理

f(0)是 t =0 时的 f(t) 值

若： $L[f(t)]=F(s)$

则： $$L\left[\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right]=sF(s)-f(0)$$

证明： $$L\left[\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right]=\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}e^{-st}\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}e^{-st}\mathrm{d}f(t)$$

$$=e^{-st}f(t)\Big|_0^{\infty}+s\int_0^{\infty}f(t)e^{-st}\mathrm{d}t=sF(s)-f(0)$$

同理，对于二阶导数的拉普拉斯变换：

$$L\left[\frac{\mathrm{d}^2f(t)}{\mathrm{d}t^2}\right]=s^2F(s)-sf(0)-\frac{\mathrm{d}f(0)}{\mathrm{d}t}$$

(3) 微分定理

推广到*n*阶导数的拉普拉斯变换：

$$L\left[\frac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n}\right]=s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\cdots-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)$$

如果：函数 *f*(*t*) 及其各阶导数的初始值均为零，即

$$f(0)=f'(0)=f''(0)=\cdots=f^{(n-2)}(0)=f^{(n-1)}(0)=0$$

则：

$$L\left[\frac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n}\right]=s^nF(s)$$

(4) 积分定理

函数 $f(t)$ 积分的初始值

若： $L[f(t)]=F(s)$

则： $$L\left[\int f(t)\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{s}F(s)+\frac{1}{s}\boxed{\int f(0)\mathrm{d}t}$$

证明：

$$L\left[\int f(t)\mathrm{d}t\right]=\int_0^{\infty}\left[\int f(t)\mathrm{d}t\right]\cdot e^{-st}\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}\left[\int f(t)\mathrm{d}t\right]\frac{1}{-s}\mathrm{d}e^{-st}$$

$$=\left[\int f(t)\mathrm{d}t\right]\frac{e^{-st}}{-s}\Bigg|_0^{\infty}-\int_0^{\infty}\frac{e^{-st}}{-s}f(t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{s}\int f(0)\mathrm{d}t+\frac{1}{s}F(s)$$

(4) 积分定理

同理，对于**n**重积分的拉普拉斯变换：

$$L\left[\int^{(n)} f(t)\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{s^n}F(s)+\frac{1}{s^n}\int f(0)\mathrm{d}t$$
$$+\frac{1}{s^{n-1}}\int^{(2)} f(0)\mathrm{d}t+\cdots+\frac{1}{s}\int^{(n)} f(0)\mathrm{d}t$$

若：函数 ***f*(*t*)** 各重积分的初始值均为零，则有

$$L\left[\int^{(n)} f(t)\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{s^n}F(s)$$

注：利用积分定理，可以求时间函数的拉普拉斯变换；利用微分定理和积分定理，可将微分-积分方程变为代数方程。

(5) 终值定理

若： $L[f(t)] = F(s)$

则： $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = \lim\limits_{s\to 0} sF(s)$

证明：根据拉普拉斯变换的微分定理，有

$$\lim_{s\to 0}\int_0^{\infty}\left[\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right]\cdot e^{-st}\mathrm{d}t = \lim_{s\to 0}[sF(s) - f(0)]$$

由于 $\lim\limits_{s\to 0} e^{-st} = 1$，上式可写成

$$\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \lim_{s\to 0} sF(s) - f(0)$$

写出左式积分

$$\lim_{t\to\infty} f(t) - f(0) = \lim_{s\to 0} sF(s) - f(0)$$

(6) 初值定理

若： $L[f(t)] = F(s)$

则： $$\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{s \to \infty} sF(s)$$

证明：根据拉普拉斯变换的微分定理，有

$$\lim_{s \to \infty} \int_0^{\infty} \left[\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} \right] \cdot e^{-st} \mathrm{d}t = \lim_{s \to \infty} [sF(s) - f(0)]$$

由于 $\lim\limits_{s \to \infty} e^{-st} = 0$，上式可写成

$$0 = \lim_{s \to \infty} sF(s) - f(0)$$

或者 $$f(0) = \lim_{s \to \infty} sF(s)$$

(7) 卷积定理

两个时间函数 $f_1(t)$、$f_2(t)$ 卷积的拉普拉斯变换等于这两个时间函数的拉普拉斯变换。

$$L\left[\int_0^\infty f_1(t-\tau)f_2(\tau)\mathrm{d}\tau\right]=F_1(s)F_2(s)$$

式中： $L\left[f_1(t)\right]=F_1(s)$ $\quad L\left[f_2(t)\right]=F_2(s)$

而 $$\int_0^\infty f_1(t-\tau)f_2(\tau)\mathrm{d}\tau=f_1(t)*f_2(t)$$

称为函数 $f_1(t)$与$f_2(t)$ 的卷积

2.2.5 拉普拉斯反变换

(1) 拉普拉斯反变换的定义

将象函数$F(s)$变换成与之相对应的原函数$f(t)$的过程，称之为拉普拉斯反变换。其公式：

$$f(t)=\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\int_{a-\mathrm{j}\infty}^{a+\mathrm{j}\infty}F(s)e^{at}\mathrm{d}s$$

简写为：$f(t)=L^{-1}\left[F(s)\right]$

拉氏反变换的求算有多种方法，如果是简单的象函数，可直接查拉氏变换表；对于复杂的，可利用部分分式展开法。

2.2.5 拉普拉斯反变换

如果把 $f(t)$ 的拉氏变换 $F(s)$ 分成各个部分之和，即

$$F(s)=F_1(s)+F_2(s)+\cdots+F_n(s)$$

假若$F_1(s)$、$F_2(s)$，…，$F_n(s)$的拉氏反变换很容易由拉氏变换表查得，那么

$$f(t)=L^{-1}[F(s)]=L^{-1}[(F_1(s)]+L^{-1}[F_2(s)]+\cdots+L^{-1}[F_n(s)]$$

$$=f_1(t)+f_2(t)+\cdots+f_n(t)$$

当 $F(s)$ 不能很简单地分解成各个部分之和时，可采用部分分式展开将 $F(s)$ 分解成各个部分之和，然后对每一部分查拉氏变换表，得到其对应的拉氏反变换函数，其和就是要得的 $F(s)$ 的拉氏反变换 $f(t)$ 函数。

(2) 部分分式展开法

在系统分析问题中，$F(s)$常具有如下形式：

$$F(s)=\frac{A(s)}{B(s)}$$

式中$A(s)$和$B(s)$是s的多项式， $B(s)$的阶次较$A(s)$阶次要高。

对于这种称为有理真分式的象函数 $F(s)$，分母 $B(s)$ 应首先进行因子分解，才能用部分分式展开法，得到 $F(s)$ 的拉氏反变换函数。

2.2.5 拉普拉斯反变换

将分母 $B(s)$ 进行因子分解，写成：

$$F(s)=\frac{A(s)}{B(s)}=\frac{A(s)}{(s+p_1)\ (s+p_2)\ \cdots(s+p_n)}$$

式中，p_1，p_2，…，p_n称为$B(s)$的根，或$F(s)$的极点，它们可以是实数，也可能为复数。如果是复数，则一定成对共轭的。

当 $A(s)$ 的阶次高于 $B(s)$ 时，则应首先用分母$B(s)$去除分子$A(s)$，由此得到一个s的多项式，再加上一项具有分式形式的余项，其分子s多项式的阶次就化为低于分母s多项式阶次了。

① 分母*B*(*s*)无重根

此时，$F(s)$总可以展成简单的部分分式之和。即

$$F(s)=\frac{A(s)}{B(s)}=\frac{A(s)}{(s+p_1)\ (s+p_2)\ \cdots(s+p_n)}$$

$$=\frac{a_1}{s+p_1}+\frac{a_2}{s+p_2}+\cdots\frac{a_n}{s+p_n}$$

式中，$a_k(k=1,2,\cdots,n)$是常数，系数 a_k 称为极点 $s=-p_k$ 处的留数。

a_k 的值可以用在等式两边乘以 $(s+p_k)$，并把 $s=-p_k$ 代入的方法求出。即

$$\left[(s+p_k)\frac{A(s)}{B(s)}\right]_{s=-p_k}$$

$$=\left[\frac{a_1}{s+p_1}(s+p_k)+\frac{a_2}{s+p_2}(s+p_k)+\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{a_k}{s+p_k}(s+p_k)+\cdots+\frac{a_n}{s+p_n}(s+p_k)\right]_{s=-p_k}=a_k$$

2.2.5 拉普拉斯反变换

在所有展开项中，除去含有 a_k 的项外，其余项都消失了，因此留数 a_k 可由下式得到

$$a_k = \left[(s + p_k) \frac{A(s)}{B(s)} \right]_{s=-p_k}$$

因为 $f(t)$ 时间的实函数，如 p_1 和 p_2 是共轭复数时，则留数 α_1 和 α_2 也必然是共轭复数。这种情况下，上式照样可以应用。共轭复留数中，只需计算一个复留数α_1(或α_2)，而另一个复留数 α_2(或 α_1)，自然也知道了。

例题1 求$F(s)$的拉氏反变换，已知

$$F(s)=\frac{s+3}{s^2+3s+2}$$

解

$$F(s)=\frac{s+3}{s^2+3s+2}=\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}=\frac{\alpha_1}{s+1}+\frac{\alpha_2}{s+2}$$

由留数的计算公式，得

$$\alpha_1=[(s+1)\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}]_{s=-1}=2$$

$$\alpha_2=[(s+2)\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}]_{s=-2}=-1$$

因此

$$f(t)=L^{-1}[F(s)]=L^{-1}[\frac{2}{s+1}]+L^{-1}[\frac{-1}{s+2}]$$

查拉氏变换表，得

$$f(t)=2e^{-t}-e^{-2t}$$

例题2　求$L^{-1}[F(s)]$，已知

$$F(s)=\frac{2s+12}{s^2+2s+5}$$

解：　分母多项式可以因子分解为

$$s^2+2s+5=(s+1+\mathrm{j}2)(s+1-\mathrm{j}2)$$

进行因子分解后，可对$F(s)$展开成部分分式

$$F(s)=\frac{2s+12}{s^2+2s+5}=\frac{\alpha_1}{s+1+\mathrm{j}2}+\frac{\alpha_2}{s+1-\mathrm{j}2}$$

由留数的计算公式，得

$$\alpha_1=\left[(s+1+\mathrm{j}2)\frac{2s+12}{(s+1+\mathrm{j}2)(s+1-\mathrm{j}2)}\right]_{s=-1-\mathrm{j}2}$$

$$=\left[\frac{2s+12}{(s+1-\mathrm{j}2)}\right]_{s=-1-\mathrm{j}2}=\frac{2(-1-\mathrm{j}2)+12}{(-1-\mathrm{j}2)+1-\mathrm{j}2}$$

$$=\frac{-2-\mathrm{j}4+12}{-1-\mathrm{j}2+1-\mathrm{j}2}=\frac{10-\mathrm{j}4}{-\mathrm{j}4}=\frac{10\mathrm{j}+4}{4}=1+\mathrm{j}\frac{5}{2}$$

由于α_2与α_1共轭，故 $\alpha_2=1-\mathrm{j}\frac{5}{2}$

2.2.5 拉普拉斯反变换

所以

$$f(t)=L^{-1}[F(s)]=L^{-1}\left[\frac{1+\mathrm{j}\frac{5}{2}}{s+1+\mathrm{j}2}+\frac{1-\mathrm{j}\frac{5}{2}}{s+1-\mathrm{j}2}\right]$$

$$=L^{-1}\left[\frac{1+\mathrm{j}\frac{5}{2}}{s+1+\mathrm{j}2}\right]+L^{-1}\left[\frac{1-\mathrm{j}\frac{5}{2}}{s+1-\mathrm{j}2}\right]$$

2.2.5 拉普拉斯反变换

查拉氏变换表，得

$$f(t)=(1+\mathrm{j}\frac{5}{2})e^{-(1+\mathrm{j}2)t}+(1-\mathrm{j}\frac{5}{2})e^{-(1-\mathrm{j}2)t}$$

$$=e^{-(1+\mathrm{j}2)t}+e^{-(1-\mathrm{j}2)t}+\mathrm{j}\frac{5}{2}[e^{-(1+\mathrm{j}2)t}-e^{-(1-\mathrm{j}2)t}]$$

$$=e^{-t}(e^{-\mathrm{j}2t}+e^{\mathrm{j}2t})+\mathrm{j}\frac{5}{2}e^{-t}(e^{-\mathrm{j}2t}-e^{\mathrm{j}2t})$$

$$=2e^{-t}\left(\frac{e^{\mathrm{j}2t}+e^{-\mathrm{j}2t}}{2}\right)-\mathrm{j}^2 5e^{-t}\left(\frac{e^{\mathrm{j}2t}-e^{-\mathrm{j}2t}}{2\mathrm{j}}\right)$$

$$=2e^{-t}\cos 2t+5e^{-t}\sin 2t$$

② 分母$B(s)$有重根

若有三重根，并为p_1，则$F(s)$的一般表达式为

$$F(s)=\frac{A(s)}{(s+p_1)^3(s+p_2)(s+p_3)\cdots(s+p_n)}$$

$$=\frac{\alpha_{11}}{(s+p_1)^3}+\frac{\alpha_{12}}{(s+p_1)^2}+\frac{\alpha_{13}}{(s+p_1)}$$

$$+\frac{\alpha_2}{(s+p_2)}+\frac{\alpha_3}{(s+p_3)}+\cdots+\frac{\alpha_n}{s+p_n}$$

式中系数α_2，α_3，…，α_n仍按照上述无重根的方法(留数计算公式)，而重根的系数α_{11}, α_{12}, α_{13}可按以下方法求得。

2.2.5 拉普拉斯反变换

$$\alpha_{11}=\left[(s+p_1)^3F(s)\right]_{s=-p_1}$$

$$\alpha_{12}=\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left((s+p_1)^3F(s)\right)\right]_{s=-p_1}$$

$$\alpha_{13}=\frac{1}{2!}\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\left((s+p_1)^3F(s)\right)\right]_{s=-p_1}$$

依此类推，当 p_1 为 k 重根时，其系数为：

$$\alpha_{1\mathrm{m}}=\frac{1}{(m-1)!}\left[\frac{\mathrm{d}^{(m-1)}}{\mathrm{d}s^{(m-1)}}\left((s+p_1)^kF(s)\right)\right]_{s=-p_1}\qquad m=1,2,\cdots,k$$

例题3 已知$F(s)$，求$L^{-1}[F(s)]$。

$$F(s)=\frac{s^2+2s+3}{(s+1)^3}$$

解

$$F(s)=\frac{s^2+2s+3}{(s+1)^3}=\frac{\alpha_{11}}{(s+1)^3}+\frac{\alpha_{12}}{(s+1)^2}+\frac{\alpha_{13}}{(s+1)}$$

$p_1=-1$，p_1有三重根。

由上述公式

$$\alpha_{11}=\left[(s+1)^3\frac{s^2+2s+3}{(s+1)^3}\right]_{s=-1}=2$$

$$\alpha_{12}=\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left((s+1)^3\frac{s^2+2s+3}{(s+1)^3}\right)\right]_{s=-1}=\left[2s+2\right]_{s=-1}=0$$

$$\alpha_{13}=\frac{1}{2!}\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\left((s+1)^3\frac{s^2+2s+3}{(s+1)^3}\right)\right]_{s=-1}=\frac{1}{2}\left[2\right]_{s=-1}=1$$

因此，得：

$$f(t)=L^{-1}[F(s)]$$

$$=L^{-1}\left[\frac{2}{(s+1)^3}\right]+L^{-1}\left[\frac{0}{(s+1)^2}\right]+L^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)}\right]$$

查拉氏变换表，有

$$f(t)=t^2e^{-t}+0+e^{-t}=(t^2+1)\ e^{-t}$$

2.2.5 拉普拉斯反变换

采用拉氏反变换的方法，可以求得线性定常微分方程的全解(补解和特解)。求解微分方程，可以采用数学分析方法(经典方法)，也可以采用拉氏变换方法。采用拉氏变换法求解微分方程是带初值进行运算的，许多情况下应用更为方便。

利用拉氏变换解微分方程的步骤：

(1) 对给定的微分方程等式两端取拉氏变换，变微分方程为 s 变量的代数方程。

(2) 对以 s 为变换的代数方程加以整理，得到微分方程求解的变量的拉氏表达式。对这个变量求拉氏反变换，即得在时域中（以时间 t 为参变量）微分方程的解。

利用拉氏变换解常系数线性微分方程

例题 解方程 $\frac{d^2y(t)}{dt^2}+5\frac{dy(t)}{dt}+6y(t)=6$

其中：$\frac{dy(0)}{dt}=2,\ y(0)=2$

解： 将方程两边取拉氏变换，得

$$s^2Y(s)-sy(0)-\frac{dy(0)}{dt}+5[sY(s)-y(0)]+6Y(s)=\frac{6}{s}$$

将 $\frac{dy(0)}{dt}=2,\ y(0)=2$ 代入，并整理，得

$$Y(s)=\frac{2s^2+12s+6}{s(s+2)(s+3)}=\frac{1}{s}+\frac{5}{s+2}-\frac{4}{s+3}$$

所以

$$\boxed{y(t)=1+5e^{-2t}-4e^{-3t}}$$