工 程 控 制 原 理

4. 频率特性分析

4.3 典型环节的频率特性

主讲：李敏

4.3 典型环节的频率特性

一般系统都是由典型环节组成的，熟悉典型环节的频率特性是了解和分析系统频率特性的基础。

4.3.1 比例环节的频率特性

比例环节（放大环节）的传递函数为

$$G(s)=K$$

比例环节的频率特性为

$$G(\mathrm{j}\omega)=K$$

(1) 比例环节的极坐标图（Nyquist图）

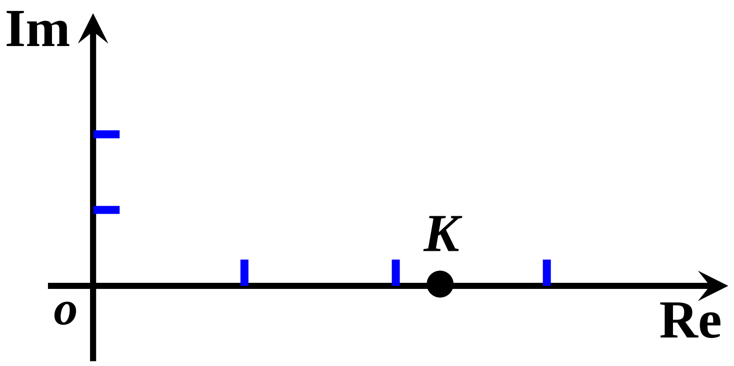
由频率特性求得比例环节的幅频特性及相频特性为

$$A(\omega) = K$$

$$\varphi(\omega) = 0^\circ$$

比例环节的奈氏图

不管频率为何值，比例环节的幅相频率特性曲线都是实轴上的一点。



比例环节的极坐标图

4.3.1 比例环节的频率特性

(2) 比例环节的对数坐标图（Bode图）

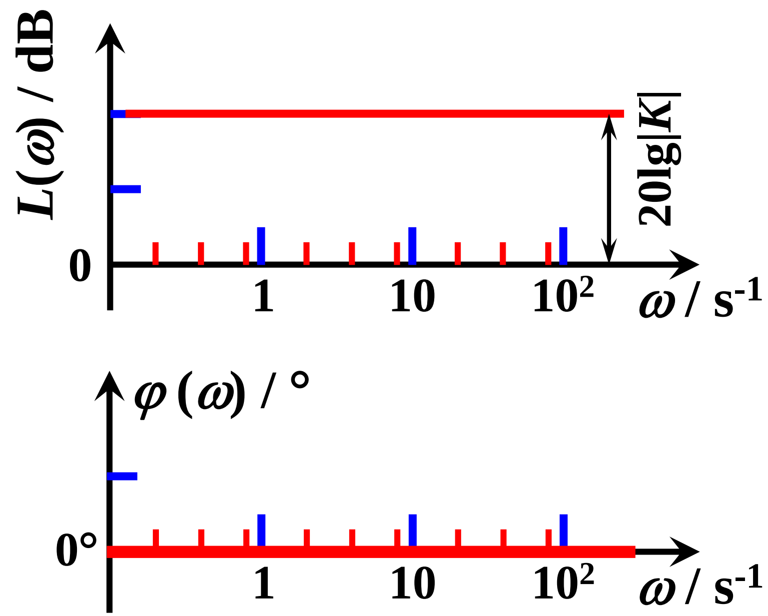
由上述关系可以求得比例环节的对数幅频特性及对数相频特性为

$$L(\omega) = 20\lg K$$

$$\varphi(\omega) = 0^\circ$$

比例环节的**幅频特性**是常量（K），与 ω 无关，在Bode图中是一条数值为 20lgK（dB）平行于横轴的直线。

相频特性也与ω无关，是一条与横轴重合的直线。



比例环节的对数坐标图

4.3.2 积分环节的频率特性

积分环节的传递函数为 $G(s)=1/s$

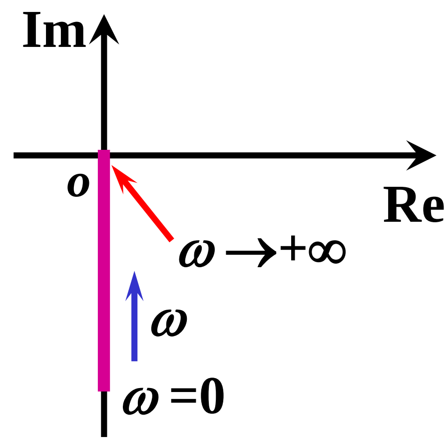
相应的频率特性为 $G(\mathrm{j}\omega)=\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega}=\dfrac{-\mathrm{j}}{\omega}$

(1) 积分环节的极坐标图（Nyquist图）

由频率特性求得积分环节的幅频特性及相频特性为

$$A(\omega)=1/\omega$$

$$\varphi(\omega)=-90^\circ$$



积分环节的极坐标图

当 ω 由0→+∞时，积分环节的幅频特性由 −∞ 衰减到0；相频特性为常量（−90°），与 ω 无关。

(2) 积分环节的对数坐标图（Bode图）

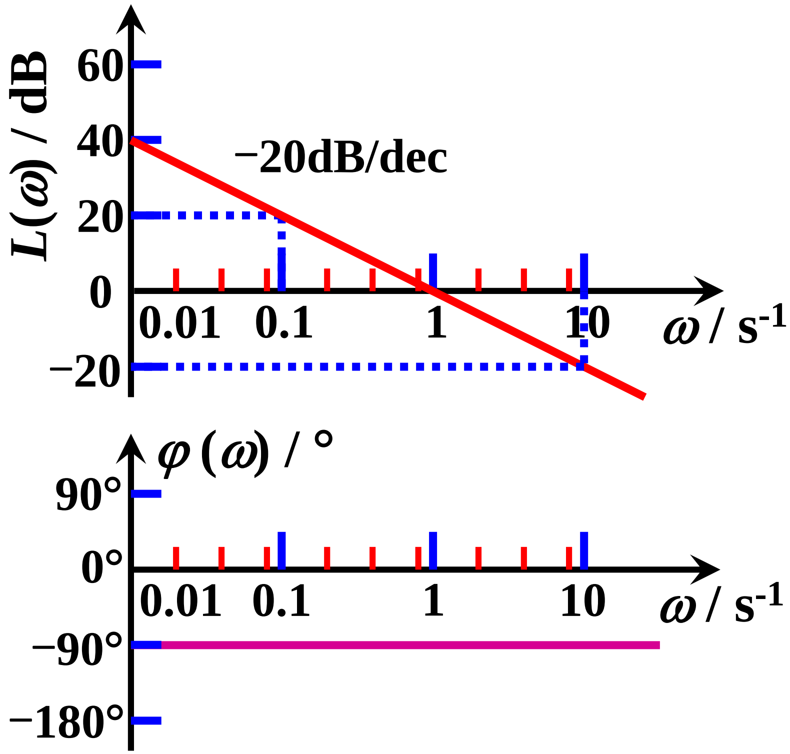
由上述关系可以求得积分环节的对数幅频特性为

$$L(\omega)=20\lg\left|G(\mathrm{j}\omega)\right|=20\lg(1/\omega)=-20\lg\omega$$

频率ω每增加10倍，对数幅频特性就下降20dB。积分环节的对数幅频特性曲线是一条过横轴上点（1，0）斜率为−20dB/dec的直线。

$$\varphi(\omega)=-90^\circ$$

相频特性与ω无关，是一条与横轴平行的直线。



积分环节的对数坐标图

4.3.3 微分环节的频率特性

微分环节的传递函数为 $G(s)=s$

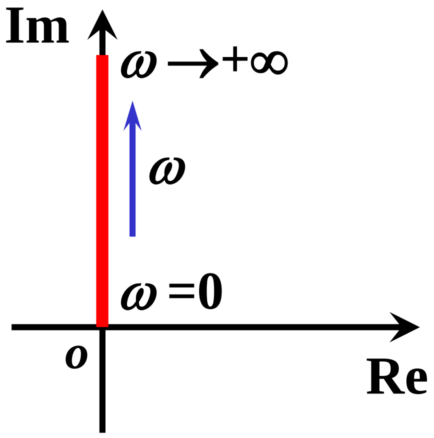
微分环节的频率特性为 $G(\mathrm{j}\omega)=\mathrm{j}\omega$

(1) 微分环节的极坐标图（Nyquist图）

由频率特性求得微分环节的幅频特性及相频特性为

$$A(\omega)=\omega$$

$$\varphi(\omega)=90^\circ$$



微分环节的极坐标图

当 ω 由0→+∞时，微分环节的幅频特性也由 0 增加到+∞；相频特性为常量（90°），与 ω 无关。

(2) 微分环节的对数坐标图（Bode图）

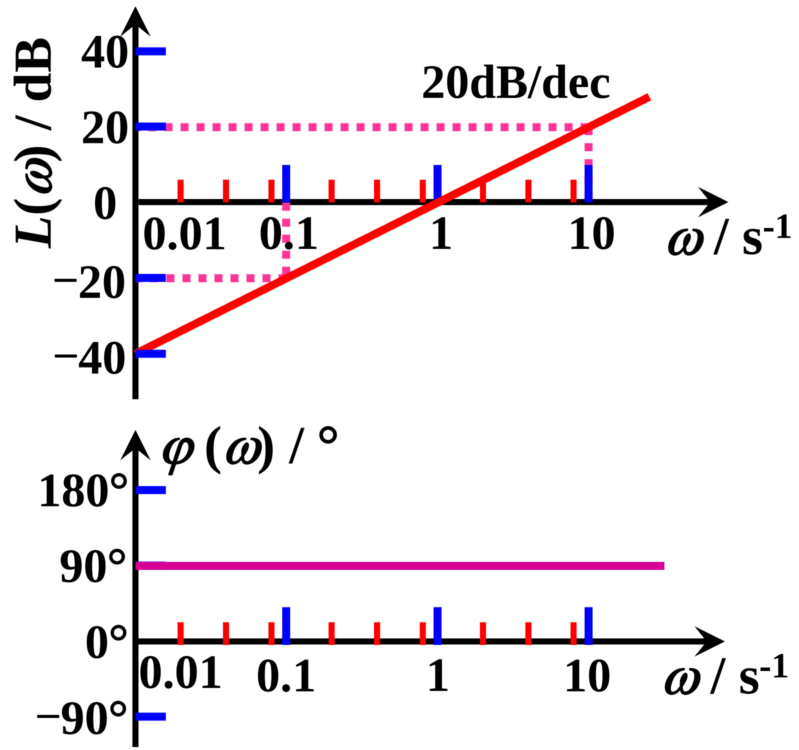
由上述关系可以求得微分环节的对数幅频特性为

$$L(\omega)=20\lg\left|G(\mathrm{j}\omega)\right|=20\lg\omega$$

频率ω每增加10倍，对数幅频特性就上升20dB。微分环节的对数幅频特性曲线是一条过横轴上点（1，0）斜率为20dB/dec的直线。

$$\varphi(\omega)=90^\circ$$

相频特性与ω无关，是一条与横轴平行的直线。



微分环节的对数坐标图

4.3.4 惯性环节的频率特性

惯性环节的传递函数为 $G(s)=\dfrac{1}{Ts+1}$

惯性环节的频率特性为

$$G(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{1+\mathrm{j}\omega T}=\frac{1}{1+\omega^2T^2}-\mathrm{j}\frac{\omega T}{1+\omega^2T^2}=\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2T^2}}e^{-\mathrm{j}\arctan\omega T}$$

幅频特性为

$$A(\omega)=\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2T^2}}$$

相频特性为

$$\varphi(\omega)=-\arctan\omega T$$

实频特性为

$$U(\omega)=\frac{1}{1+\omega^2T^2}$$

虚频特性为

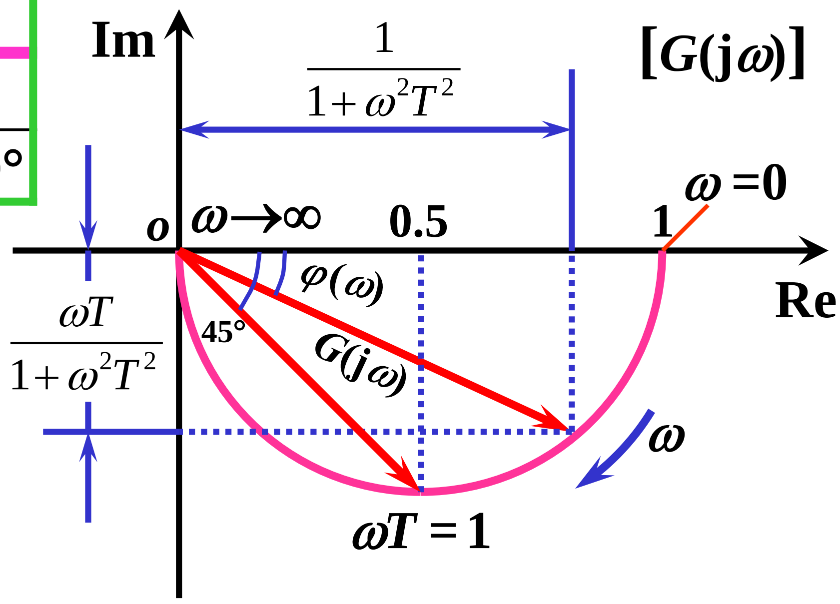
$$V(\omega)=\frac{-\omega T}{1+\omega^2T^2}$$

(1) 惯性环节的极坐标图（Nyquist图）

当 ω 由0→∞时，计算出$U(\omega)$和$V(\omega)$，或者$A(\omega)$和$\varphi(\omega)$

ω	0	0.5/T	1/T	2/T	3/T	∞
$U(\omega)$	1	0.8	0.5	0.2	0.1	0
$V(\omega)$	0	−0.4	−0.5	−0.4	−0.3	0
$A(\omega)$	1	0.894	0.707	0.447	0.316	0
$\varphi(\omega)$	0°	−26.6°	−45°	−63.4°	−71.6°	−90°

当ω由0→+∞时，惯性环节的幅频特性也由1衰减到0，在ω=1/T处，其值为$1/\sqrt{2}$；相频特性由0°变到90°，在ω=1/T处，其值为−45°。



惯性环节的极坐标图

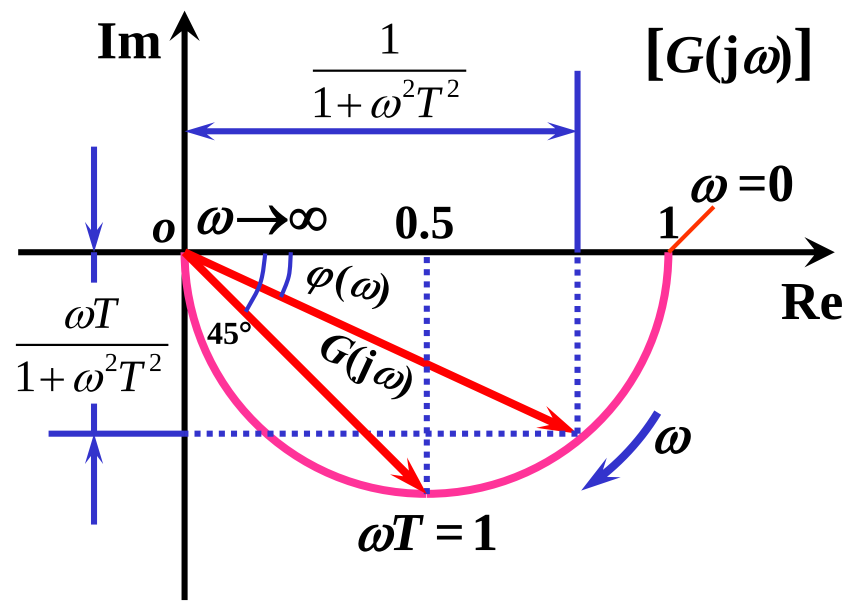
(1) 惯性环节的极坐标图（Nyquist图）

由奈氏图可看出，在低频区域，输入信号通过惯性环节后幅值衰减得慢；在高频区域衰减得快。惯性环节体现出“低通”特性。惯性环节还是一种相位滞后环节，最大滞后相角为90°。

注意到

$$[U(\omega)-0.5]^2+[V(\omega)]^2=0.5^2$$

即惯性环节的奈氏图为圆心在(0.5，0)处，半径为0.5的一个半圆。



惯性环节的极坐标图

4.3.4 惯性环节的频率特性

(2) 惯性环节的对数坐标图（Bode图）

惯性环节的对数幅频特性为

$$L(\omega)=20\lg\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2T^2}}=-20\lg\sqrt{1+\omega^2T^2}$$

① 在低频段，$\omega<<1/T$，即$\omega T<<1$，$L(\omega)\approx 0$。低频段对数幅频特性曲线可近似为 0 dB的水平线，称为低频渐近线。

② 在高频段，$\omega>>1/T$，即$\omega T>>1$，$L(\omega)\approx -20\lg\omega T$。高频段对数幅频特性曲线可近似为斜率为−20dB/dec的直线，称为高频渐近线。

③ 低频渐近线和高频渐近线的相交处的频率点 $\omega=1/T$，称为转折频率。

(2) 惯性环节的对数坐标图（Bode图）

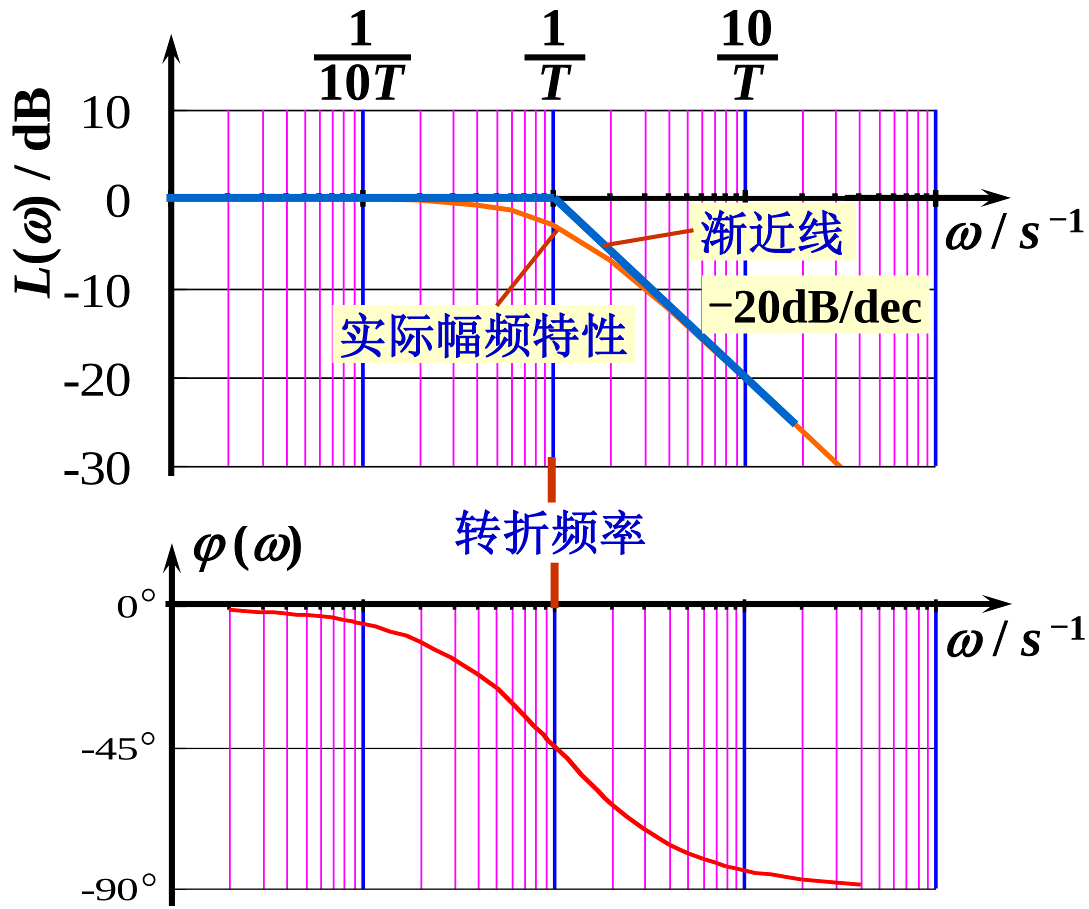
惯性环节的相频特性为

$$\varphi(\omega) = -\arctan \omega T$$

ω	0	1/T	∞
$\varphi(\omega)$	0°	−45°	−90°

对数相频特性曲线对称于点(1/T，−45°)。

Bode图上明显看出惯性环节的“低通”特性和相位滞后作用。



(2) 惯性环节的对数坐标图（Bode图）

惯性环节的对数幅频特性渐近线与实际特性曲线之间的误差为

$$\Delta L(\omega)=\begin{cases}-20\lg\sqrt{1+\omega^2T^2} & (\omega\le 1/T)\\ -20\lg\sqrt{1+\omega^2T^2}+20\lg(\omega T) & (\omega\ge 1/T)\end{cases}$$

误差最大值出现在 $\omega=1/T$ 处，其值为

$$\Delta L(1/T)=-20\lg\sqrt{2}=3.01\quad(\text{dB})$$

惯性环节幅频特性渐近线在 $\omega=(0.1\sim10)/T$ 区间的误差

ωT	0.1	0.25	0.4	0.5	1	2	2.5	4	10
误差 / dB	−0.04	−0.32	−0.65	−1	−3.01	−1	−0.65	−0.32	−0.04

4.3.5 振荡环节的频率特性

振荡环节的传递函数为

$$G(s)=\frac{1}{T^2s^2+2\zeta Ts+1}=\frac{\omega_{\mathrm{n}}^2}{s^2+2\zeta\omega_{\mathrm{n}}s+\omega_{\mathrm{n}}^2}\qquad \text{其中，}\ \omega_{\mathrm{n}}=\frac{1}{T}$$

欠阻尼振荡环节： $0<\zeta<1$

振荡环节的频率特性为

$$G(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{1-\omega^2T^2+\mathrm{j}\,2\zeta\omega T}$$

$$=\frac{1-\omega^2T^2}{\left(1-\omega^2T^2\right)^2+\left(2\zeta\omega T\right)^2}-\mathrm{j}\frac{2\zeta\omega T}{\left(1-\omega^2T^2\right)^2+\left(2\zeta\omega T\right)^2}$$

4.3.5 振荡环节的频率特性

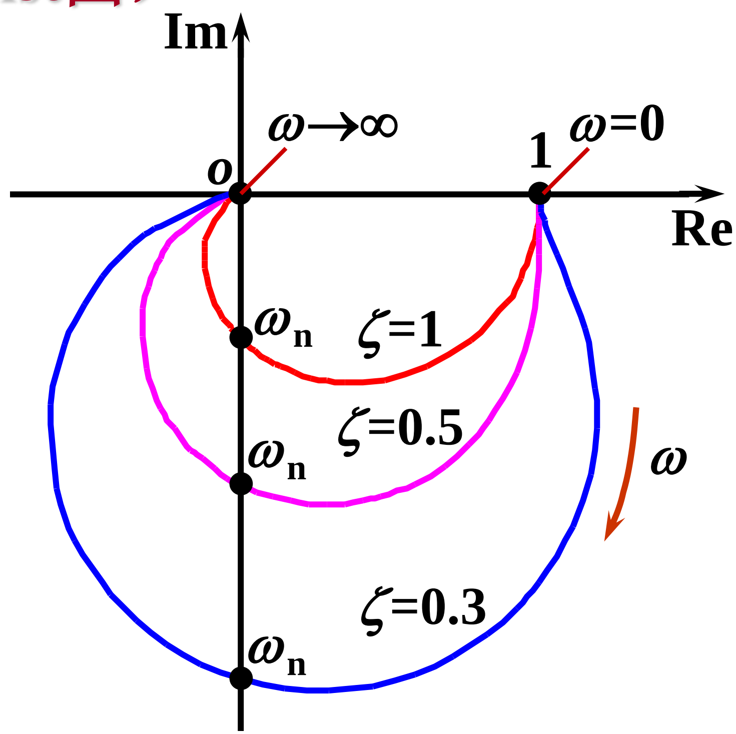
幅频特性为 $A(\omega)=\dfrac{1}{\sqrt{\left(1-\omega^2T^2\right)^2+\left(2\zeta\omega T\right)^2}}$

相频特性为 $\varphi(\omega)=\begin{cases}-\arctan\dfrac{2\zeta\omega T}{1-\omega^2T^2} & \left(\omega<\dfrac{1}{T}\right)\\ -\dfrac{\pi}{2} & \left(\omega=\dfrac{1}{T}\right)\\ -\arctan\dfrac{2\zeta\omega T}{1-\omega^2T^2}-\pi & \left(\omega>\dfrac{1}{T}\right)\end{cases}$

实频特性为 $U(\omega)=\dfrac{1-\omega^2T^2}{\left(1-\omega^2T^2\right)^2+\left(2\zeta\omega T\right)^2}$

虚频特性为 $V(\omega)=\dfrac{-2\zeta\omega T}{\left(1-\omega^2T^2\right)^2+\left(2\zeta\omega T\right)^2}$

(1) 振荡环节的极坐标图（Nyquist图）



振荡环节的幅相频率特性是角频率 ω 和阻尼比 ζ 的二元函数。

$\omega=0$时，$A(\omega)=1$，$\varphi(\omega)=0°$；

$\omega=\omega_n$时，$A(\omega)=1/2\zeta$，$\varphi(\omega)=-90°$；

$\omega\to\infty$时，$A(\omega)\to 0$，$\varphi(\omega)\to -180°$；

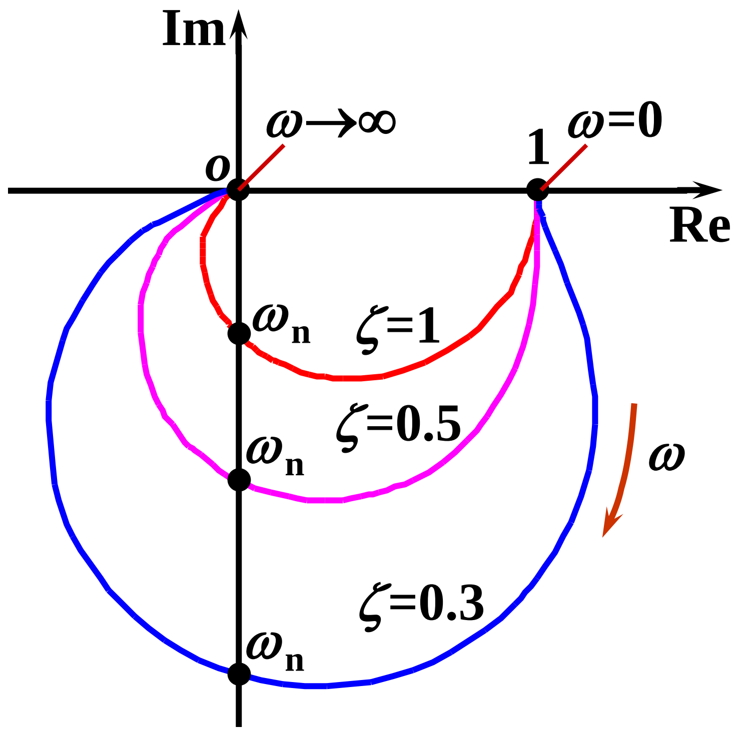
当$\omega=0\to+\infty$时，$A(\omega)$由$1\to 0$，$\varphi(\omega)$由$0°\to -180°$。

振荡环节频率特性的极坐标图起始于点(1，j0)，终止于点(0，j0)，曲线与虚轴交点的频率就是无阻尼固有频率，此时的幅值是$1/2\zeta$。曲线在Ⅲ、Ⅳ象限，奈氏图随ζ取值而不同。

当ζ较大时，$A(\omega)$随ω的增大单调减小；ζ较小时，$A(\omega)$先随ω的增大而增大，出现一个最大值后逐渐减小。这个最大幅值称为**谐振峰值**M_r，对应的频率称为**谐振频率**ω_r。

$$\omega_r = \frac{1}{T}\sqrt{1-2\zeta^2} = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}$$

当ζ=0.707时，ω_r=0，即$A(\omega)$在ω=0处达到最大值；当ζ>0.707时，ω_r不存在(不出现峰值)；当0<ζ<0.707时，**谐振峰值**为



$$\boxed{M_r = A(\omega)_{max} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

(2) 振荡环节的对数坐标图（Bode图）

振荡环节的对数幅频特性为

$$L(\omega)=20\lg A(\omega)=-20\lg\sqrt{(1-\omega^2T^2)^2+(2\zeta\omega T)^2}$$

① 在低频段，$\omega<<1/T$，即$\omega T<<1$，$L(\omega)\approx 0$。对数幅频特性的低频渐近线是一条 0 dB的水平线。

② 在高频段，$\omega>>1/T$，即$\omega T>>1$，$L(\omega)\approx -40\lg\omega T$。对数幅频特性的高频渐近线是一条斜率为−40dB/dec的直线。

③ 低频渐近线和高频渐近线相交点的频率 $\omega=1/T=\omega_n$，振荡环节的转折频率即为无阻尼固有频率。

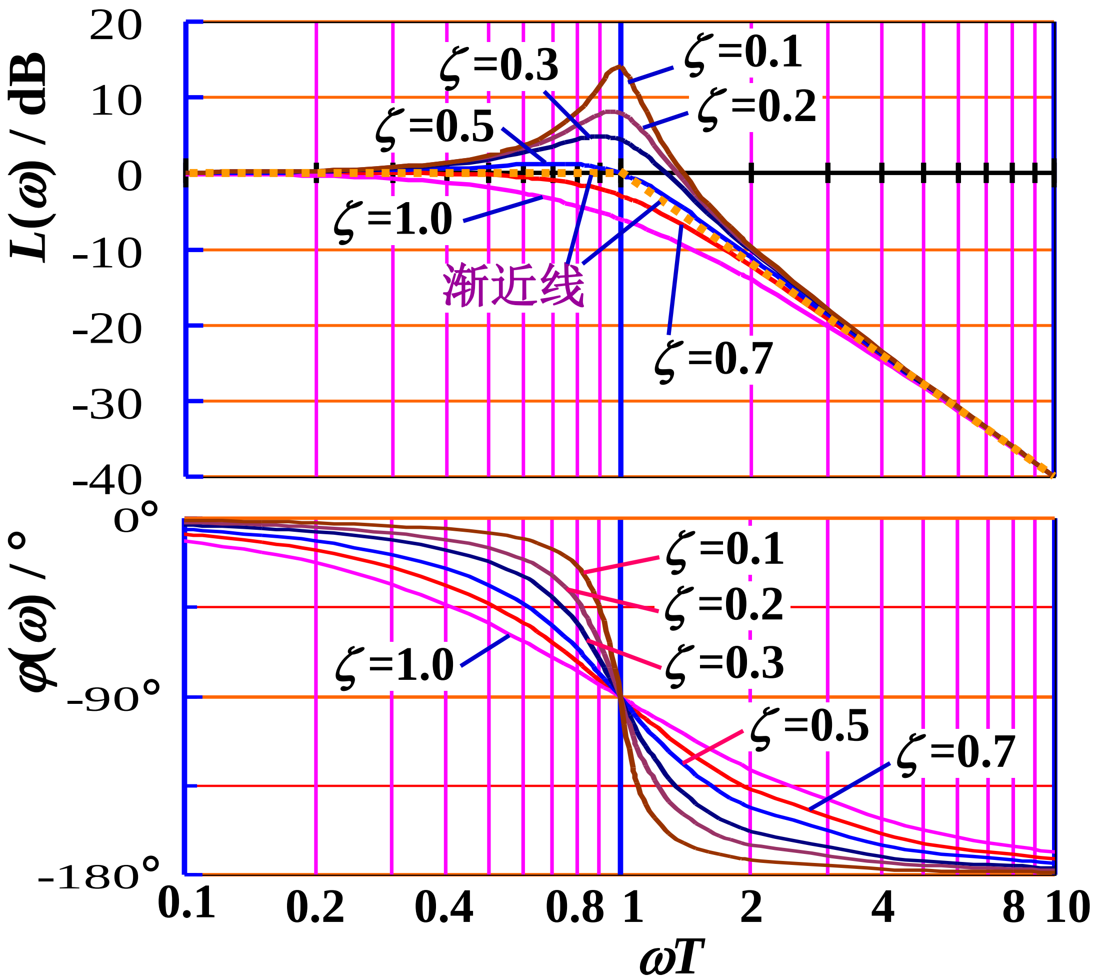
4.3.5 振荡环节的频率特性

从Bode图中可看出， 在$\zeta<0.7$时出现谐振峰值。

根据振荡环节的相频特性，有

ω	0	$1/T\ (=\omega_n)$	∞
$\varphi(\omega)$	0°	−90°	−180°

振荡环节的对数相频特性曲线对于转折点($\omega=\omega_n$， $\varphi=-90°$)是斜对称的。



(2) 振荡环节的对数坐标图（Bode图）

振荡环节的对数幅频特性渐近线与实际特性曲线之间的误差为

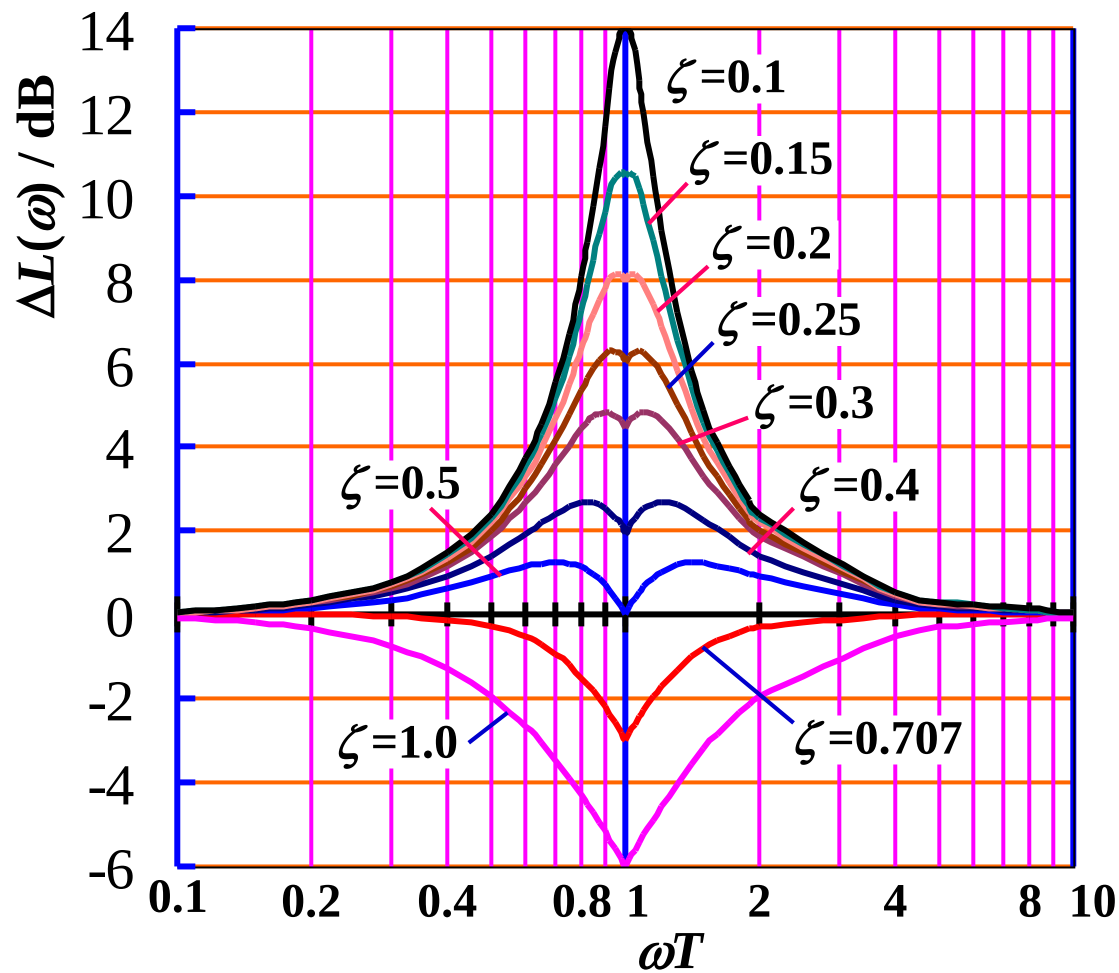
$$\Delta L(\omega)=\begin{cases}-20\lg\sqrt{(1-\omega^2T^2)^2+(2\zeta\omega T)^2} & (\omega\le 1/T)\\ -20\lg\sqrt{(1-\omega^2T^2)^2+(2\zeta\omega T)^2}+40\lg(\omega T) & (\omega\ge 1/T)\end{cases}$$

如果有谐振峰，误差最大值出现在谐振频率处：

$$\omega=\omega_{\mathrm{r}}=\frac{1}{T}\sqrt{1-2\zeta^2}=\omega_{\mathrm{n}}\sqrt{1-2\zeta^2}$$

如果没有谐振峰，误差最大值出现在转折频率 $\omega=\omega_n=1/T$ 处。

振荡环节对数幅频特性渐近线的误差



4.3.6 延迟环节的频率特性

输出信号的振幅等于输入振幅，相位滞后于输入值 (滞后量正比于ω)

延迟环节的传递函数为 $G(s)=e^{-\tau s}$

延迟环节的频率特性为

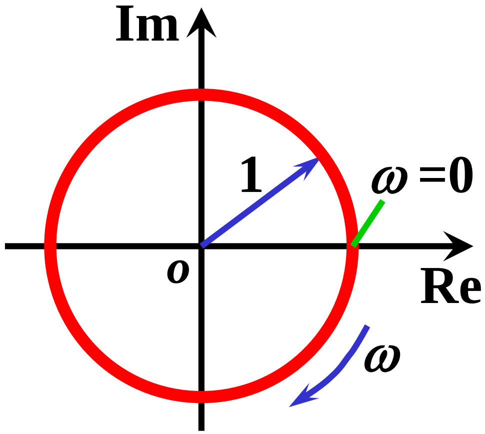
$$G(\mathrm{j}\omega)=e^{-\mathrm{j}\omega\tau}=\cos\omega\tau-\mathrm{j}\sin\omega\tau$$

(1) 延迟环节的极坐标图（Nyquist图）

由频率特性求得延迟环节的幅频特性及相频特性为

$$A(\omega)=1$$

$$\varphi(\omega)=-\omega\tau(\mathrm{rad})=-\frac{180}{\pi}\omega\tau(^\circ)$$



延迟环节的极坐标图

延迟环节的奈氏图是一单位圆。其幅值恒为1，相位则随着ω顺时针方向成正比例变化，即端点在单位圆上无限循环。

4.3.6 延迟环节的频率特性

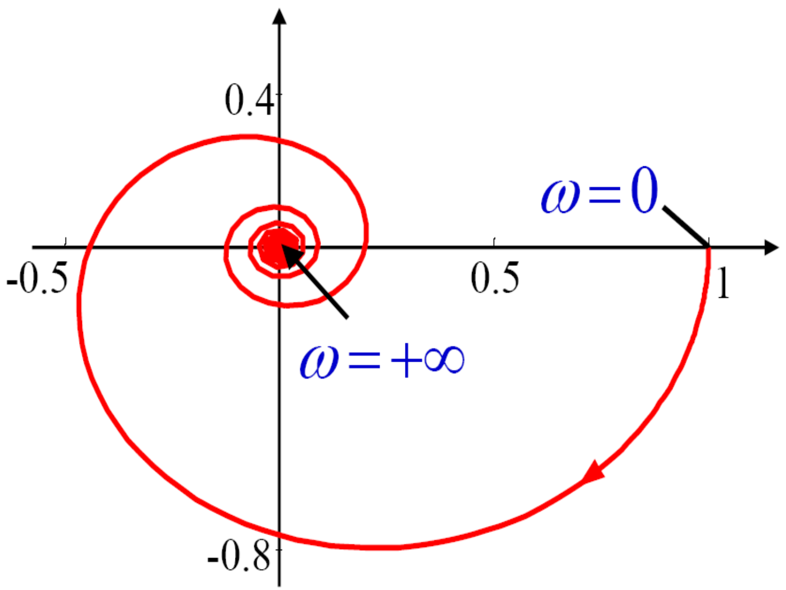
例如： 一个有时间延迟的惯性环节，其频率特性为

$$G(\mathrm{j}\omega)=\frac{e^{-\mathrm{j}\omega\tau}}{1+\mathrm{j}\omega T}$$

其幅频、相频特性分别为

$$A(\omega)=\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2T^2}}$$

$$\varphi(\omega)=-\omega\tau-\arctan\omega T$$



随着ω从$0\rightarrow+\infty$时，输出信号的幅值逐渐减小，相角从0°向负方向（顺时针）无穷增大，最终为$-\infty$，其Nyquist图呈一条平面螺旋线。

(2) 延迟环节的对数坐标图（Bode图）

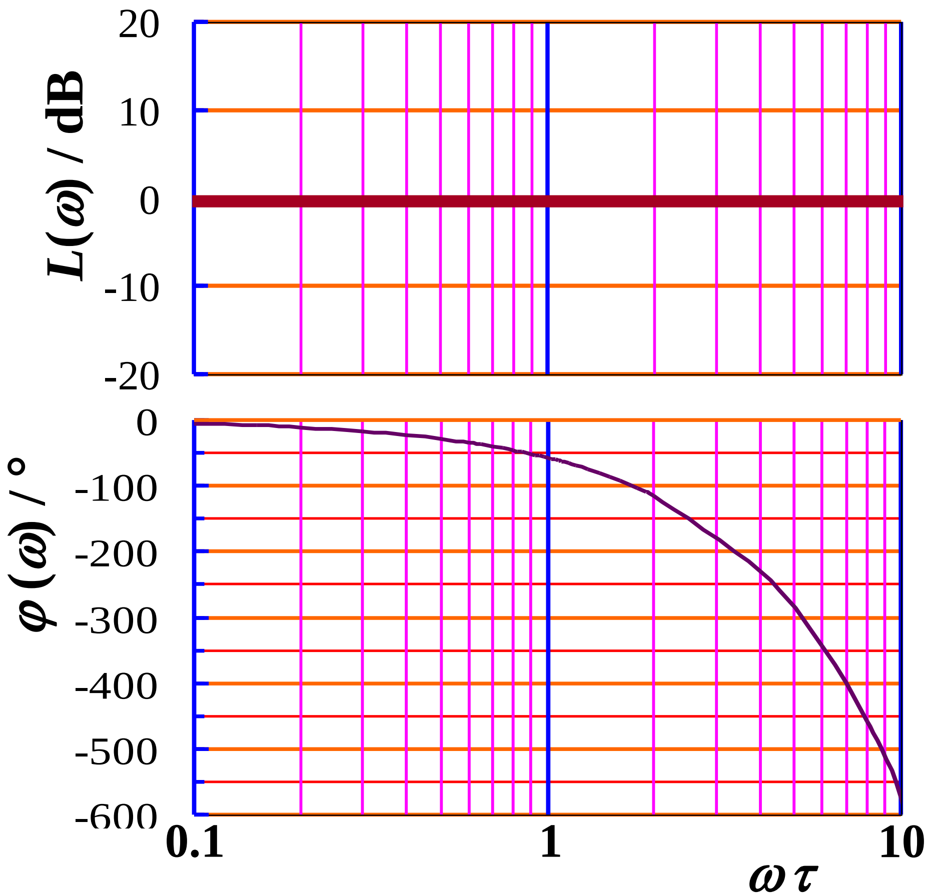
延迟环节的对数幅频特性为

$$L(\omega)=20\lg\left|G(\mathrm{j}\omega)\right|=0$$

延迟环节的**对数幅频特性曲线**是 0dB 水平直线。

$$\varphi(\omega)=-\omega\tau(\mathrm{rad})=-\frac{180}{\pi}\omega\tau(^{\circ})$$

相频特性随着ω的增加而线性增加，在线性坐标系中是一条直线；但在对数相频特性是一条在第四象限的曲线。



延迟环节的对数坐标图

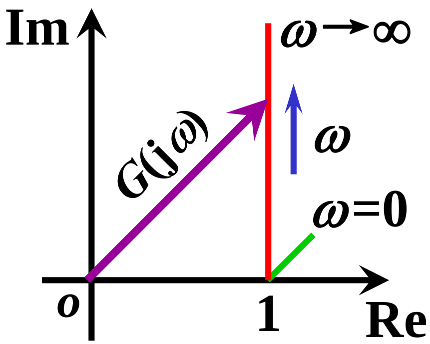
4.3.7 一阶微分环节的频率特性

一阶微分环节的传递函数为 $G(s)=\tau s+1$

一阶微分环节的频率特性为

$$G(\mathrm{j}\omega)=1+\mathrm{j}\omega\tau$$

(1) 一阶微分环节的极坐标图（Nyquist图）



一阶微分环节的极坐标图

由频率特性求得一阶微分环节的幅频特性及相频特性为

$$A(\omega)=\sqrt{1+\omega^2\tau^2} \qquad \varphi(\omega)=\arctan(\omega\tau)$$

当频率ω从0→+∞时，其实频特性始终为1，虚频特性随着ω呈线性增长；$G(\mathrm{j}\omega)$的幅值由 1→∞，相位从 0°→90°。

(2) 一阶微分环节的对数坐标图（Bode图）

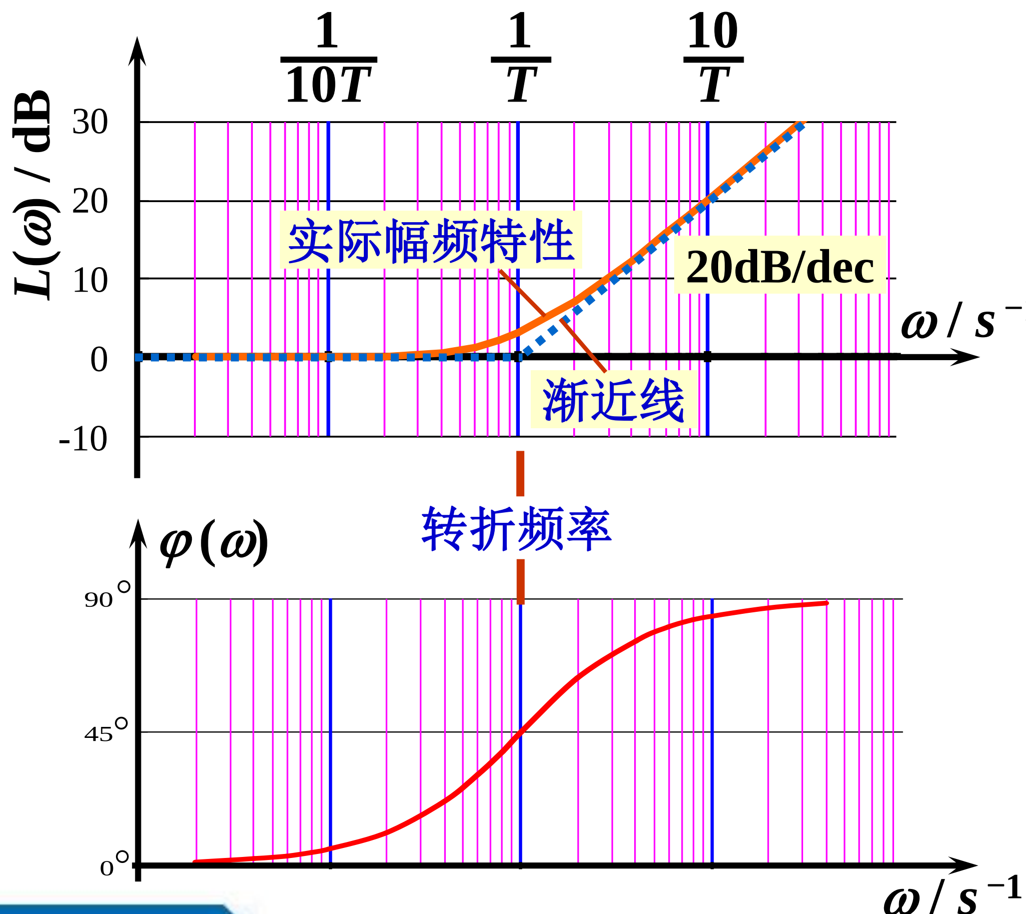
一阶微分环节的对数幅频特性为

$$L(\omega)=20\lg\sqrt{1+\omega^2\tau^2}$$

对数相频特性为

$$\varphi(\omega)=\arctan\omega\tau$$

由于一阶微分环节与惯性环节的对数幅频特性及对数相频特性相差一个负号，故它们的Bode图分别以0dB线和0度线互为镜像。



4.3.8 二阶微分环节的频率特性

二阶微分环节的传递函数为

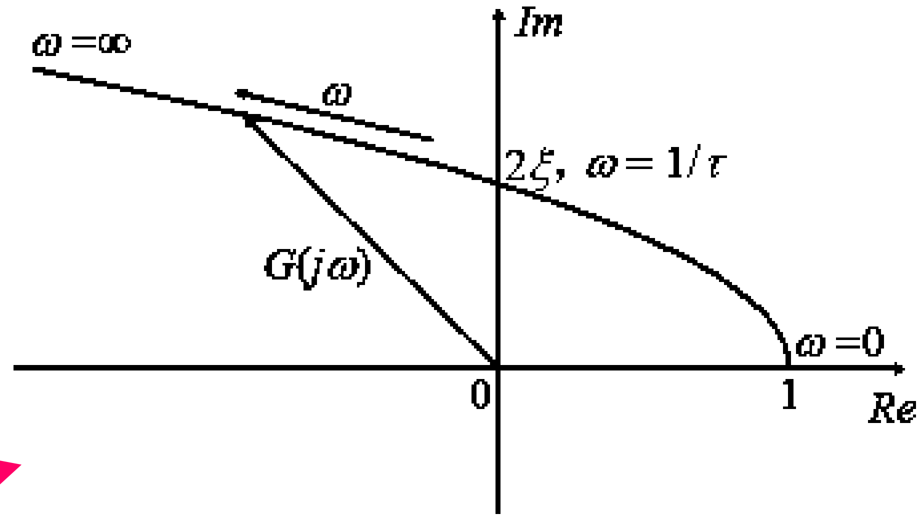
$$G(s)=T^2s^2+2\zeta Ts+1 \qquad (T=1/\omega_n)$$

$$=\frac{s^2}{\omega_n^2}+\frac{2\zeta s}{\omega_n}+1=\frac{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}{\omega_n^2}$$

二阶微分环节的频率特性为

$$G(j\omega)=\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)+j2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}$$

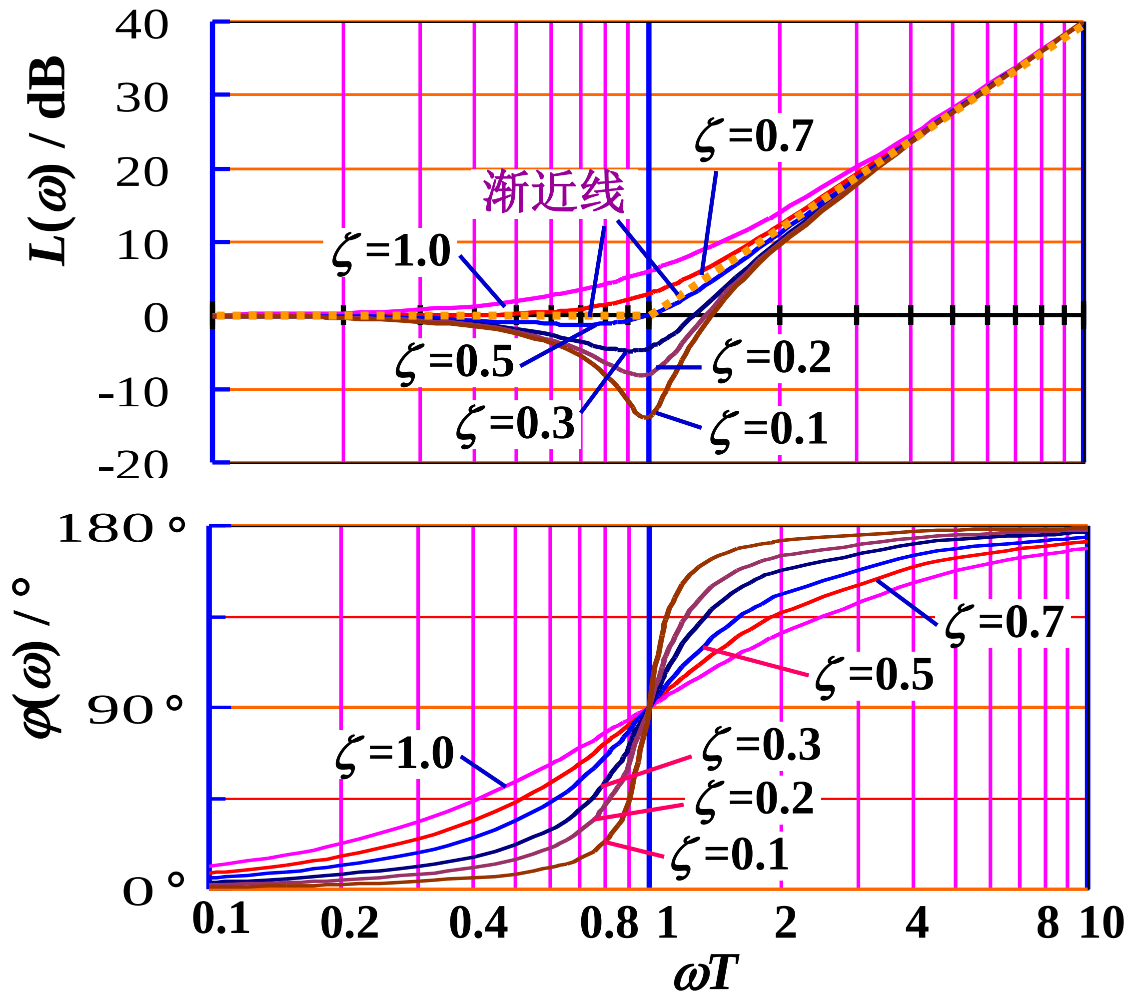
二阶微分环节的Nyquist图



二阶微分环节的Nyquist图

4.3.8 二阶微分环节的频率特性

二阶微分环节的Bode图



二阶微分环节的Bode图

由于二阶微分环节与振荡环节的传递函数互为倒数，二阶微分环节德Bode图与振荡环节Bode图也成镜像对称的形状。