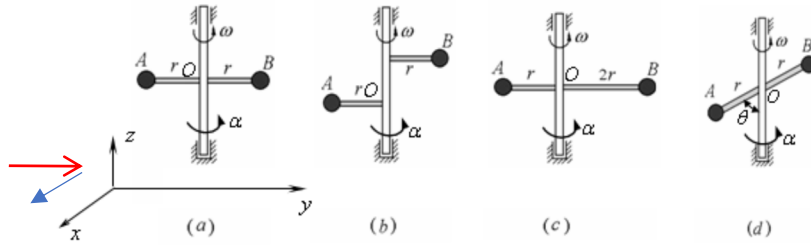


**8-45** 质量不计的刚性轴上固连着两个质量各为  $m$  的小球  $A$  和  $B$ ，在图示瞬时，刚性轴的角速度为  $\omega$ ，角加速度为  $\alpha$ 。试求图示各种情况中的惯性力系向点  $O$  简化的结果，并指出哪些是静平衡，哪些是动平衡。



题 8-45 图

**解：**a) 小球  $A$  和  $B$  的加速度为：

$$\text{法向加速度： } a_n = r\omega^2, \text{ 切向加速度： } a_t = r\alpha;$$

$$\text{法向惯性力： } F_n^I = ma_n, \text{ 切向惯性力： } F_t^I = ma_t;$$

将此惯性力系向  $O$  点简化，得到：

$$\text{惯性力系的主矢： } F_R^I = 0; \text{ 惯性力系的主矩： } M_O^I = 2mra_t = 2mr^2\alpha.$$

故此，该惯性力系的主矩不会引起轴承的动反力，即 (a) 为动平衡。

(b) 小球  $A$  和  $B$  的加速度和惯性力大小与 a) 相同，将此惯性力系向  $O$  点简化，得到

$$\text{惯性力系的主矢： } F_R^I = 0;$$

惯性力系的主矩：

$$M_{O_z}^I = 2mra_t = 2mr^2\alpha, \quad M_{O_x}^I = mha_n = mrh\omega^2, \quad M_{O_y}^I = mha_t = mrh\alpha$$

$$M_O^I = \sqrt{(M_{O_x}^I)^2 + (M_{O_y}^I)^2 + (M_{O_z}^I)^2} = mr\sqrt{h^2\omega^4 + 4r^2\alpha^2 + h^2\alpha^2}$$

由此可见，该转轴并非中心惯量主轴，即惯性力系的主矩  $M_{O_x}^I$ 、 $M_{O_y}^I$  将引起轴承的动反力，

所以，(b) 为静平衡，但非动平衡。

(c) 小球  $A$  和  $B$  的加速度为

$$\text{法向加速度： } a_{An} = r\omega^2, \quad a_{Bn} = 2r\omega^2;$$

$$\text{切向加速度： } a_{At} = r\alpha, \quad a_{Bt} = 2r\alpha.$$

$$\text{法向惯性力： } F_{An}^I = ma_{An}, \quad F_{Bn}^I = ma_{Bn},$$

$$\text{切向惯性力： } F_{At}^I = ma_{At}, \quad F_{Bt}^I = ma_{Bt}.$$

将此惯性力系向  $O$  点简化，得到：

惯性力系的主矢：  $F_{Ry}^I = mr\omega^2$  （与  $y$  轴同向），  $F_{Rx}^I = mr\alpha$  （与  $x$  轴同向）；

$$F_I = \sqrt{\left(F_{Rx}^I\right)^2 + \left(F_{Ry}^I\right)^2} = mr\sqrt{\omega^4 + \alpha^2}$$

惯性力系的主矩：  $M_O^I = M_{Oz}^I = 5mr^2\alpha$

所以，该惯性力系无法动平衡，因质心不在转轴上，因此也难于静平衡。

（d）小球  $A$  和  $B$  的加速度为：

法向加速度：  $a_n = r\omega^2 \sin \theta$ ，切向加速度：  $a_t = r\alpha \sin \theta$ ；

法向惯性力：  $F_n^I = ma_n$ ，切向惯性力：  $F_t^I = ma_t$ ；

将此惯性力系向  $O$  点简化，得到：

注意到：①法向惯性力与  $y$  轴平行，且与  $z$  轴相交，故仅对  $x$  轴存在非零的力矩；②切向惯性力仅与  $x$  轴平行，故对  $y$  轴和  $z$  轴均存在非零的力矩。

惯性力系的主矢：  $F_R^I = 0$ ；

惯性力系的主矩：  $M_{Ox}^I = 2F_n^I r \cos \theta = 2mr^2\omega^2 \sin \theta \cos \theta$ ，

$$M_{Oy}^I = 2F_t^I r \sin \theta = 2mr^2\alpha \sin^2 \theta, \quad M_{Oz}^I = 2F_t^I r \cos \theta = 2mr^2\alpha \sin \theta \cos \theta.$$

$$M_O^I = \sqrt{\left(M_{Ox}^I\right)^2 + \left(M_{Oy}^I\right)^2 + \left(M_{Oz}^I\right)^2} = 2mr^2 \sin \theta \sqrt{\omega^4 \cos^2 \theta + \alpha^2 \sin^2 \theta}$$

因此，此惯性力系无法保持动平衡，只能静平衡。