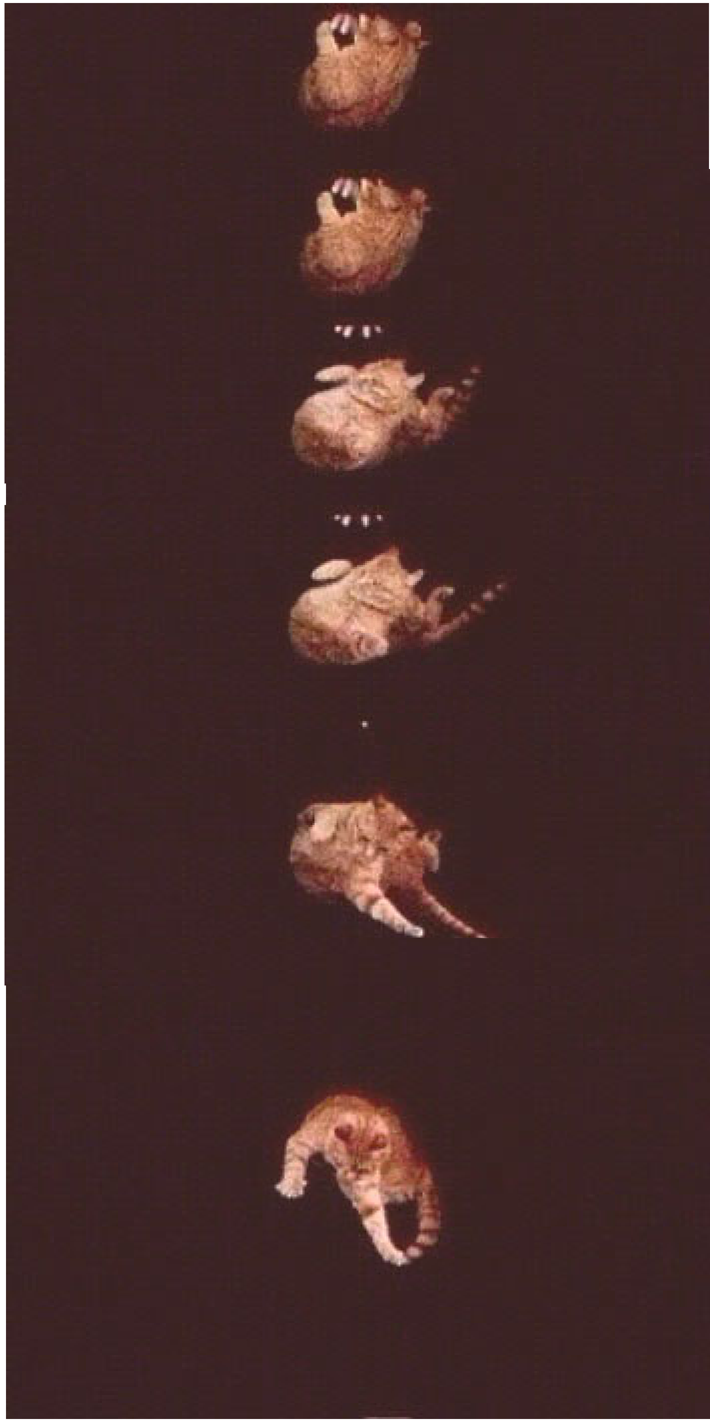
动力学

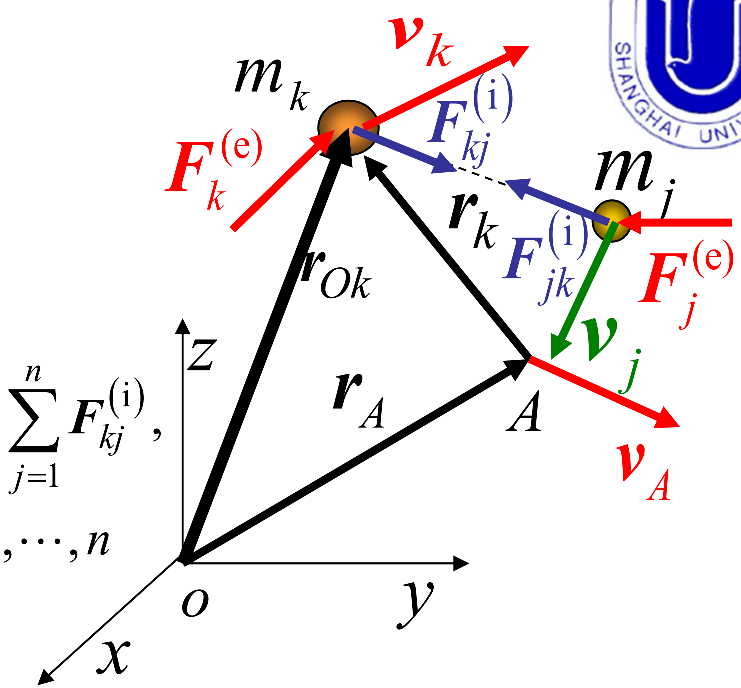
3 动量矩定理



动力学

(1) 动量矩定理

研究质点系中任意质点(第k个)。



质点运动微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_k \boldsymbol{v}_k) = \boldsymbol{F}_k^{(e)} + \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{F}_{kj}^{(i)}$,

$$\boldsymbol{r}_k \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_k \boldsymbol{v}_k) = \boldsymbol{r}_k \times \boldsymbol{F}_k^{(e)} + \boldsymbol{r}_k \times \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{F}_{kj}^{(i)}, \quad k = 1, \cdots, n$$

对质点系求和 (k从1到n)

$$\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{r}_k \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_k \boldsymbol{v}_k) = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{r}_k \times \boldsymbol{F}_k^{(e)} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{r}_k \times \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{F}_{kj}^{(i)}}_{=0} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{r}_k \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_k \boldsymbol{v}_k) = \boldsymbol{M}_A^{(e)}$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}_k = \boldsymbol{v}_k - \boldsymbol{v}_A$$

$$\dot{\boldsymbol{L}}_A = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \boldsymbol{r}_k \times m_k \boldsymbol{v}_k + \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{r}_k \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_k \boldsymbol{v}_k) = \sum_{k=1}^{n} (\boldsymbol{v}_k - \boldsymbol{v}_A) \times m_k \boldsymbol{v}_k + \boldsymbol{M}_A^{(e)} = \boldsymbol{M}_A^{(e)} - \boldsymbol{v}_A \times m \boldsymbol{v}_C$$

$$\Downarrow$$

$$\dot{\boldsymbol{L}}_A = \boldsymbol{M}_A^{(e)} + m \boldsymbol{v}_C \times \boldsymbol{v}_A$$

$$\dot{\boldsymbol{L}}_A = \boldsymbol{M}_A^{(\mathrm{e})} + m\boldsymbol{v}_C \times \boldsymbol{v}_A$$

动量矩定理: 质点系对任意点的<u>动量矩时间变化率</u>等于作用于该质点系上外力系对同一点的主矩与质点系动量与该点速度矢积的矢量和。

➢ 动量矩定理对动轴的投影

对单位矢量为$\boldsymbol{u}$的动轴 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{L}_A \cdot \boldsymbol{u}\right) = \boldsymbol{M}_A^{(\mathrm{e})} \cdot \boldsymbol{u} + \left(m\boldsymbol{v}_C \times \boldsymbol{v}_A\right) \cdot \boldsymbol{u} + \boldsymbol{L}_A \cdot \dot{\boldsymbol{u}}$

$$\dot{\boldsymbol{L}}_A \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{M}_A^{(\mathrm{e})} \cdot \boldsymbol{u} + \left(m\boldsymbol{v}_C \times \boldsymbol{v}_A\right) \cdot \boldsymbol{u}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{L}_A \cdot \boldsymbol{u}\right) = \dot{\boldsymbol{L}}_A \cdot \boldsymbol{u} + \boldsymbol{L}_A \cdot \dot{\boldsymbol{u}}$$

➢ 动量矩定理对直角坐标轴的投影

$$\dot{L}_{Ax} = M_{Ax}^{(\mathrm{e})} + m\left(v_{Cy}v_{Az} - v_{Cz}v_{Ay}\right),$$

$$\dot{L}_{Ay} = M_{Ay}^{(\mathrm{e})} + m\left(v_{Cz}v_{Ax} - v_{Cx}v_{Az}\right),$$

$$\dot{L}_{Az} = M_{Az}^{(\mathrm{e})} + m\left(v_{Cx}v_{Ay} - v_{Cy}v_{Ax}\right)$$

$$\dot{\boldsymbol{L}}_A = \boldsymbol{M}_A^{(\mathrm{e})} + m\boldsymbol{v}_C \times \boldsymbol{v}_A$$

➢ 积分形式及其投影

积分形式

假设质点系在时刻t_1和t_2对点A的动量矩分别为 $\boldsymbol{L}_{A1}$和$\boldsymbol{L}_{A2}$。

$$\boldsymbol{L}_{A2} - \boldsymbol{L}_{A1} = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{M}_A^{(\mathrm{e})}\,\mathrm{d}t + m\int_{t_1}^{t_2} (\boldsymbol{v}_C \times \boldsymbol{v}_A)\,\mathrm{d}t$$

在直角坐标轴上的投影

$$L_{Ax2} - L_{Ax1} = \int_{t_1}^{t_2} M_{Ax}^{(\mathrm{e})}\,\mathrm{d}t + m\int_{t_1}^{t_2} \left(v_{Cy}v_{Az} - v_{Cz}v_{Ay}\right)\mathrm{d}t,$$

$$L_{Ay2} - L_{Ay1} = \int_{t_1}^{t_2} M_{Ay}^{(\mathrm{e})}\,\mathrm{d}t + m\int_{t_1}^{t_2} \left(v_{Cz}v_{Ax} - v_{Cx}v_{Az}\right)\mathrm{d}t,$$

$$L_{Az2} - L_{Az1} = \int_{t_1}^{t_2} M_{Az}^{(\mathrm{e})}\,\mathrm{d}t + m\int_{t_1}^{t_2} \left(v_{Cx}v_{Ay} - v_{Cy}v_{Ax}\right)\mathrm{d}t$$

(2) 动量矩定理的重要特例

$$\dot{\boldsymbol{L}}_A = \boldsymbol{M}_A^{(\mathrm{e})} + \underset{=0}{\underline{m\boldsymbol{v}_C \times \boldsymbol{v}_A}} \;? \quad \Rightarrow \quad \dot{\boldsymbol{L}}_A = \boldsymbol{M}_A^{(\mathrm{e})}$$

① A 为固定点, 则$\boldsymbol{v}_A$=0; $\dot{\boldsymbol{L}}_A = \boldsymbol{M}_A^{(\mathrm{e})}$

② A 为动点，但速度满足$\boldsymbol{v}_A \times \boldsymbol{v}_C = 0$.

i. 取A点为质心C，$\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_C$

ii. $\boldsymbol{v}_A \parallel \boldsymbol{v}_C$

$$\dot{\boldsymbol{L}}_C = \boldsymbol{M}_C^{(\mathrm{e})}$$

动量矩定理: 质点系对定点或质心的动量矩时间变化率等于作用于该质点系上外力系对同一点的主矩。

动力学

关于固定点 关于质心

$$\dot{\boldsymbol{L}}_A = \boldsymbol{M}_A^{(\mathrm{e})} \qquad \dot{\boldsymbol{L}}_C = \boldsymbol{M}_C^{(\mathrm{e})}$$

- 动量矩定理对动轴的投影

对单位矢量为$\boldsymbol{u}$的动轴
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{L}_A \cdot \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{M}_A^{(\mathrm{e})} \cdot \boldsymbol{u} + \boldsymbol{L}_A \cdot \dot{\boldsymbol{u}} + (m\boldsymbol{v}_C \times \boldsymbol{v}_A) \cdot \boldsymbol{u}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{L}_A \cdot \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{M}_A^{(\mathrm{e})} \cdot \boldsymbol{u} + \boldsymbol{L}_A \cdot \dot{\boldsymbol{u}} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{L}_C \cdot \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{M}_C^{(\mathrm{e})} \cdot \boldsymbol{u} + \boldsymbol{L}_C \cdot \dot{\boldsymbol{u}}$$

对直角坐标轴

$$\dot{L}_{Ax} = M_{Ax}^{(\mathrm{e})}, \qquad \dot{L}_{Cx} = M_{Cx}^{(\mathrm{e})},$$
$$\dot{L}_{Ay} = M_{Ay}^{(\mathrm{e})}, \qquad \dot{L}_{Cy} = M_{Cy}^{(\mathrm{e})},$$
$$\dot{L}_{Az} = M_{Az}^{(\mathrm{e})} \qquad \dot{L}_{Cz} = M_{Cz}^{(\mathrm{e})}$$

关于固定点

$$\dot{\boldsymbol{L}}_A = \boldsymbol{M}_A^{(\mathrm{e})}$$

关于质心

$$\dot{\boldsymbol{L}}_C = \boldsymbol{M}_C^{(\mathrm{e})}$$

- **动量矩定理积分形式** $\boldsymbol{L}_{A2} - \boldsymbol{L}_{A1} = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{M}_A^{(\mathrm{e})}\,\mathrm{d}t + m\int_{t_1}^{t_2} (\boldsymbol{v}_C \times \boldsymbol{v}_A)\,\mathrm{d}t$

假设质点系在时刻t_1和t_2对点A(质心C)的动量矩分别为 $\boldsymbol{L}_{A1}$ 和$\boldsymbol{L}_{A2}$ ($\boldsymbol{L}_{C1}$和$\boldsymbol{L}_{C2}$)。

$$\boldsymbol{L}_{A2} - \boldsymbol{L}_{A1} = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{M}_A^{(\mathrm{e})}\,\mathrm{d}t \qquad \boldsymbol{L}_{C2} - \boldsymbol{L}_{C1} = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{M}_C^{(\mathrm{e})}\,\mathrm{d}t$$

在有限时间间隔 $[t_1, t_2]$内,质点系对定点或质心的动量矩改变量等于该质点系上外力系对同一点的冲量矩。

直角坐标轴上投影

$$L_{Ax2} - L_{Ax1} = \int_{t_1}^{t_2} M_{Ax}^{(\mathrm{e})}\,\mathrm{d}t, \qquad L_{Cx2} - L_{Cx1} = \int_{t_1}^{t_2} M_{Cx}^{(\mathrm{e})}\,\mathrm{d}t,$$

$$L_{Ay2} - L_{Ay1} = \int_{t_1}^{t_2} M_{Ay}^{(\mathrm{e})}\,\mathrm{d}t, \qquad L_{Cy2} - L_{Cy1} = \int_{t_1}^{t_2} M_{Cy}^{(\mathrm{e})}\,\mathrm{d}t,$$

$$L_{Az2} - L_{Az1} = \int_{t_1}^{t_2} M_{Az}^{(\mathrm{e})}\,\mathrm{d}t \qquad L_{Cz2} - L_{Cz1} = \int_{t_1}^{t_2} M_{Cz}^{(\mathrm{e})}\,\mathrm{d}t$$

动力学

关于固定点

$$\dot{\boldsymbol{L}}_A = \boldsymbol{M}_A^{(\mathrm{e})}$$

关于质心

$$\dot{\boldsymbol{L}}_C = \boldsymbol{M}_C^{(\mathrm{e})}$$

➢ **动量矩守恒**

若质点系所受外力系对定点 (质心)的冲量矩为零, 则该质点系关于该定点 (质心)的动量矩保持不变。

$$\boldsymbol{L}_{A2} = \boldsymbol{L}_{A1}$$

$$\boldsymbol{L}_{C2} = \boldsymbol{L}_{C1}$$

若质点系所受外力系对过定点(质心)某一轴的冲量矩为零, 则质点系的动量矩在该轴上投影保持不变。

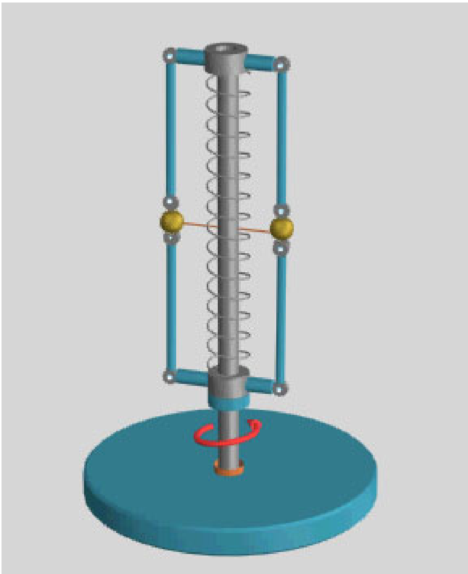
$$L_{Ax2} = L_{Ax1}$$

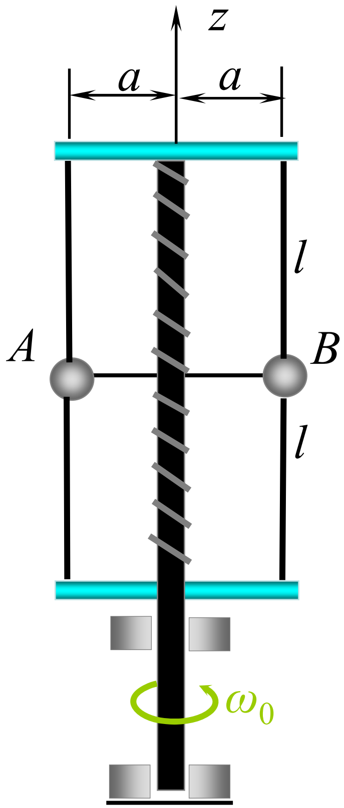
$$L_{Cx2} = L_{Cx1}$$

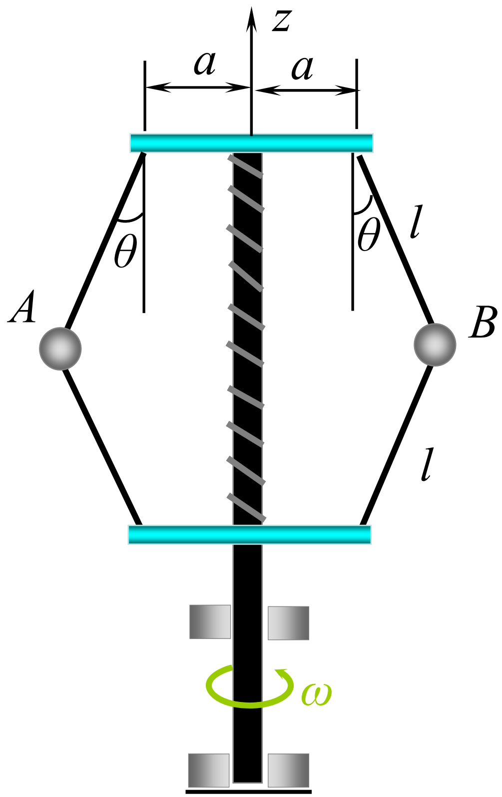
动力学

例 9

两个质量都为m 的钟摆A和B 通过一弦线连接。 其他部分质量不计，且所有摩擦忽略不计。系统以初始角速度ω_0绕z轴旋转，当弦线断掉时，求在给定角度θ处角速度ω。







动力学

解:

以整个系统为研究对象

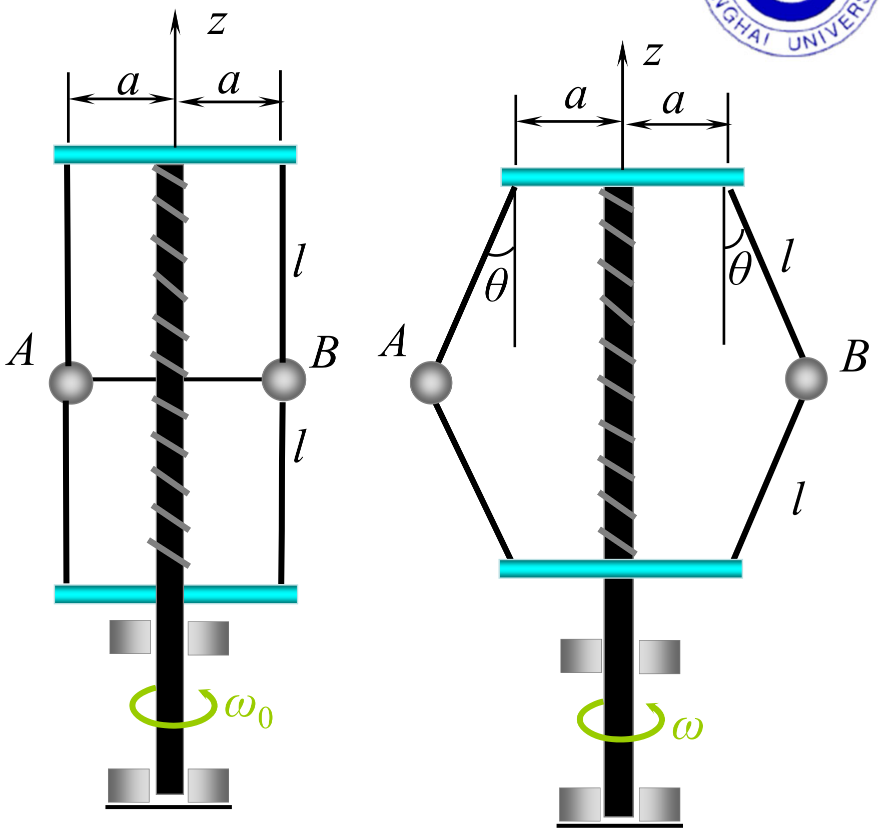
质点系对z轴守恒

$$L_{z1}=2\cdot ma\omega_0\cdot a=2ma^2\omega_0.$$

$$L_{z2}=2m(a+l\sin\theta)^2\omega.$$

由于 $L_{z1}=L_{z2}$

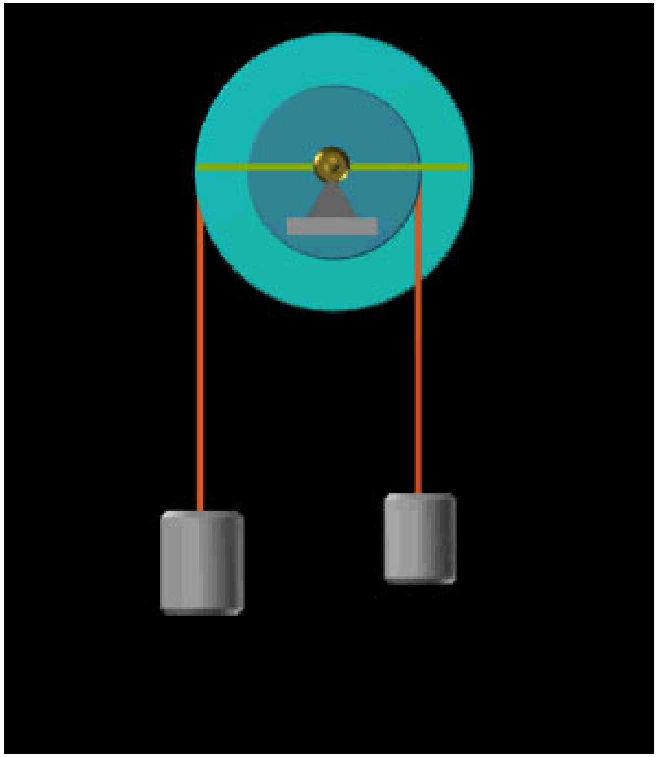
$$\omega=\frac{a^2}{(a+l\sin\theta)^2}\omega_0.$$

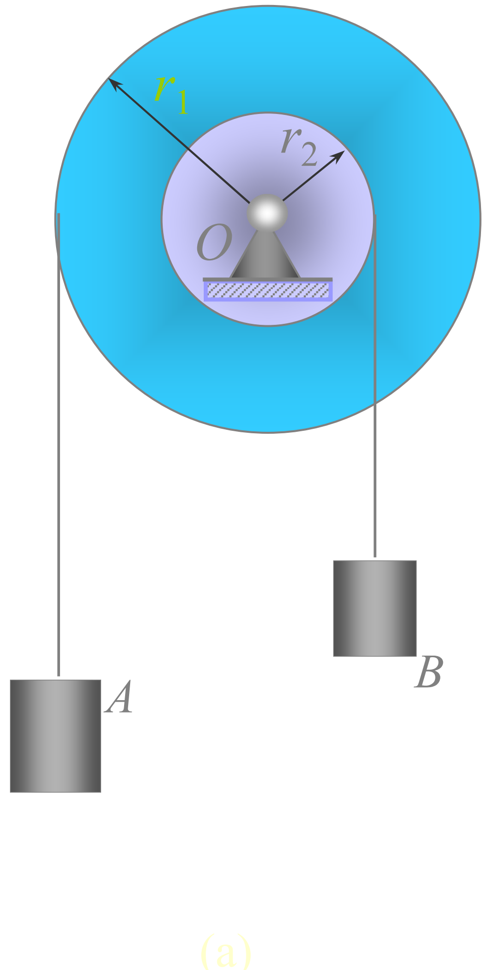


动力学

例 10

如图所示一定滑轮。 滑轮质量为 m, 其转动惯量为 J_O, 两个滑块A和B的质量分别为 m_1和m_2 $(m_1>m_2)$， 求滑轮的角加速度。





动力学

解:

以系统为研究对象

外力对z轴的矩

$$M_{Oz}=\left(m_1r_1-m_2r_2\right)g.$$

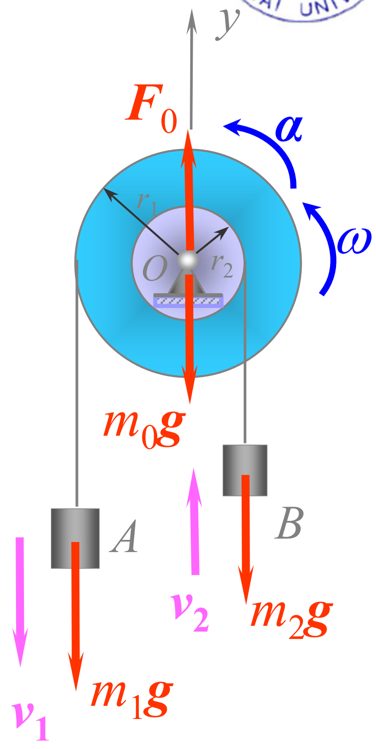
质点系对z轴的动量矩

$$L_{Oz}=J_O\omega+m_1v_1r_1+m_2v_2r_2=\left(J_O+m_1r_1^{\ 2}+m_2r_2^{\ 2}\right)\omega.$$

动量矩投影

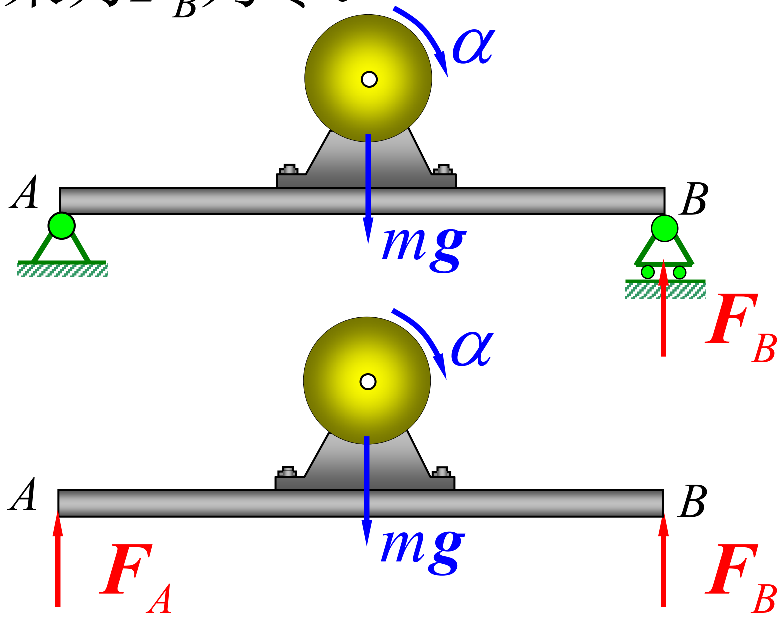
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\left(J_O+m_1r_1^{\ 2}+m_2r_2^{\ 2}\right)\omega\right]=\left(m_1r_1-m_2r_2\right)g.$$

$$\alpha=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{m_1r_1-m_2r_2}{J_O+m_1r_1^{\ 2}+m_2r_2^{\ 2}}g.$$



例 11

质量为m 、圆心转动惯量为J_O的飞轮系统，固定在图示长为l的梁中点。确定飞轮的角加速度，使得约束力$\boldsymbol{F}_B$为零。



解: 研究系统。关于A点的动量矩

$$\boldsymbol{L}_A=\boldsymbol{L}_O+\boldsymbol{r}_A\times\boldsymbol{p}\qquad L_A=L_O=J_O\omega$$

关于A点的动量矩定理投影

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(J_O\omega)=mg\frac{l}{2}-F_Bl$$

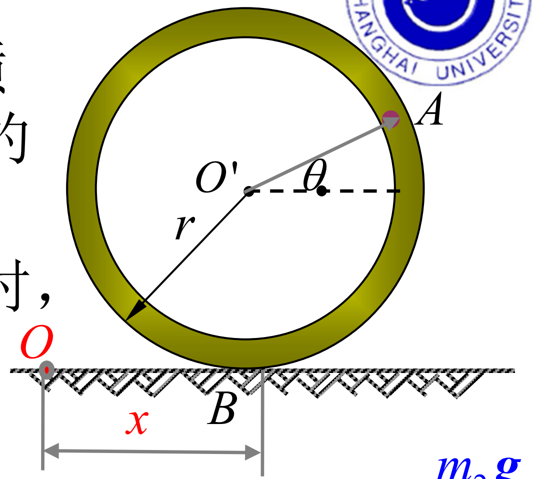
F_B=0当且仅当

$$\alpha=\frac{d\omega}{dt}=\frac{mgl}{2J_O}$$ 顺时针

动力学

例 12

质量为m_1、半径为r的均质圆环边缘上A处固定一个质量为m_2的小球。求圆环无滑动滚动到OA水平时圆环的角加速度与角速度的关系。



解: 研究圆环和小球所成的系统。设OA与水平线成角时，接触点B与与其初始位置O的距离为x,

（1）圆环对固定点O的动量矩：

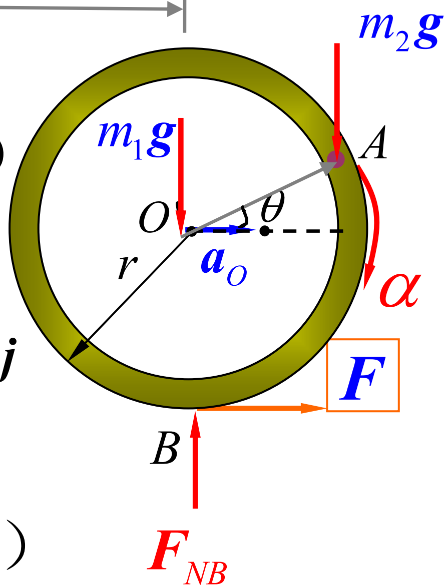
$$L_{O_1}=L_{o'}+\overline{OO'}\times\overline{p_0}=m_1r^2\cdot\omega+m_1\cdot\omega r\cdot r=2m_1r^2\omega \qquad \text{（顺时钟）}$$

（2）小球关于固定点o的矢径和速度为：

$$\boldsymbol{r}=(r\theta+r\sin\theta)\boldsymbol{i}+(r+r\cos\theta)\boldsymbol{j} \qquad \boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{r}}=r\dot{\theta}(1+\cos\theta)\boldsymbol{i}-r\dot{\theta}\sin\theta\boldsymbol{j}$$

小球对固定点O的动量矩：

$$L_{O_2}=|\boldsymbol{r}\times m_2\boldsymbol{v}|=\left[2m_2r^2(1+\cos\theta)+m_2rx\sin\theta\right]\dot{\theta} \qquad \text{（顺时钟）}$$



（3）系统对固定点O的动量矩：

$$L_O=L_{O_2}+L_{O_1}=\left[2m_1r^2+2m_2r^2(1+\cos\theta)+m_2rx\sin\theta\right]\dot{\theta}$$

动力学

（4）系统关于固定点O的动量矩对时间求导：

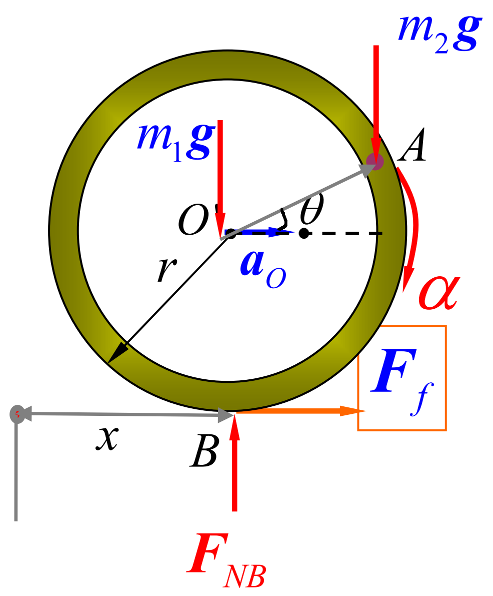
$$\frac{\mathrm{d}L_O}{\mathrm{dt}}=\left[2m_1r^2+2m_2r^2\left(1+\cos\theta\right)+m_2rx\sin\theta\right]\ddot{\theta}+m_2r\left(-r\sin\theta+xcos\theta\right)\dot{\theta}$$

将 $x=0$, $\theta=\pi/2$ 代入： $\left.\frac{\mathrm{d}L_O}{\mathrm{dt}}\right|_{\substack{x=0\\ \theta=\pi/2}}=2\left(m_1+m_2\right)r^2\ddot{\theta}-m_2r^2\dot{\theta}$

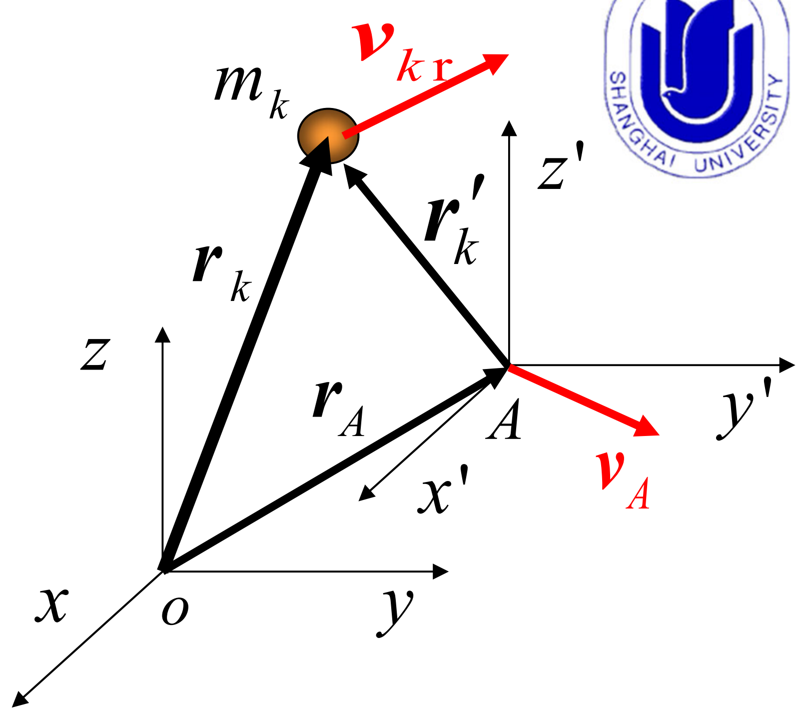
（5）利用系统关于固定点O的动量矩定理：

$$\left.\frac{\mathrm{d}L_O}{\mathrm{dt}}\right|_{\substack{x=0\\ \theta=\pi/2}}=\left.M_O^{(e)}\right|_{\substack{x=0\\ \theta=\pi/2}}\Rightarrow 2\left(m_1+m_2\right)r^2\ddot{\theta}-m_2r^2\dot{\theta}=m_2gr$$

$$2\left(m_1+m_2\right)r^2\ddot{\theta}=\frac{m_2}{2\left(m_1+m_2\right)r}\left(g-r^2\dot{\theta}\right)$$



(3) 非惯性系中的动量矩定理*



在非惯性参考系 $Ax'y'z'$ 中，

相对动量矩

$$L'_A = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{r}'_k \times m_k \boldsymbol{v}_{k\mathrm{r}}$$

外力系关于A的主矩

$$\boldsymbol{M}'^{(\mathrm{e})}_A = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{r}'_k \times \boldsymbol{F}^{(\mathrm{e})}_k$$

$\boldsymbol{L}'_A$和$\boldsymbol{M}'_A$的关系?

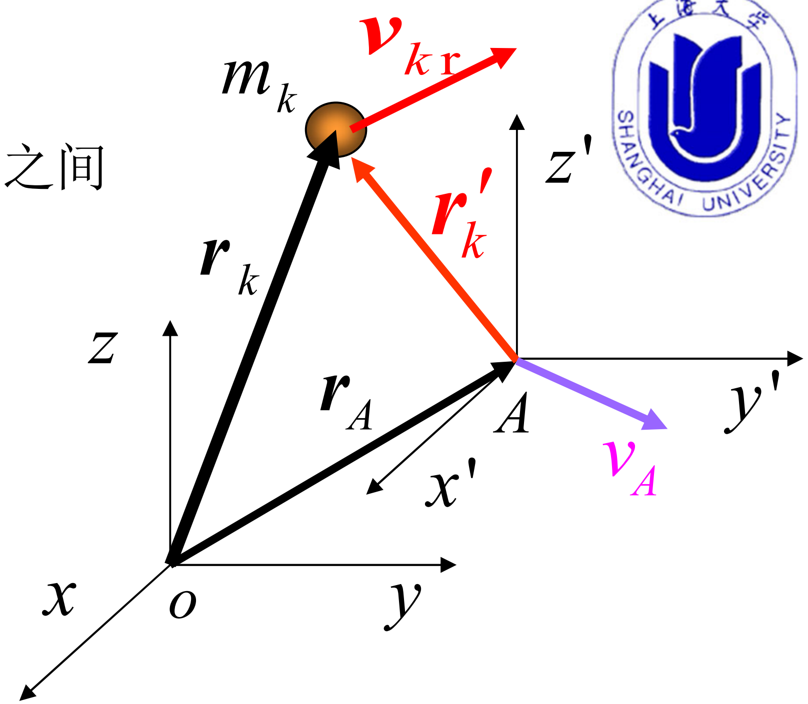
两种方法: 运动学方法和动力学方法

动力学

➢ 运动学方法

参考系$Oxyz$（定系）和$Ax'y'z'$（平移坐标系）之间速度矢量和位移矢量的关系

$$\boldsymbol{v}_k=\boldsymbol{v}_A+\boldsymbol{v}_{k\mathrm{r}} \qquad \boldsymbol{r}_k=\boldsymbol{r}_A+\boldsymbol{r}_k'$$



参考系$Oxyz$和$Ax'y'z'$之间动量矩的关系

$$\boldsymbol{L}_A'=\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{r}_k'\times m_k\boldsymbol{v}_{k\mathrm{r}}=\sum_{k=1}^{n}(\boldsymbol{r}_k-\boldsymbol{r}_A)\times m_k(\boldsymbol{v}_k-\boldsymbol{v}_A)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{r}_k\times m_k\boldsymbol{v}_k-\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{r}_A\times m_k\boldsymbol{v}_k-\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{r}_k\times m_k\boldsymbol{v}_A+\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{r}_A\times m_k\boldsymbol{v}_A$$

$$=\boldsymbol{L}_O-\boldsymbol{r}_A\times\sum_{k=1}^{n}m_k\boldsymbol{v}_k-\left(\sum_{k=1}^{n}m_k\boldsymbol{r}_k\right)\times\boldsymbol{v}_A+\left(\sum_{k=1}^{n}m_k\right)\boldsymbol{r}_A\times\boldsymbol{v}_A$$

$$=\boldsymbol{L}_O-\boldsymbol{r}_A\times m\boldsymbol{v}_C-m\boldsymbol{r}_C\times\boldsymbol{v}_A+m\boldsymbol{r}_A\times\boldsymbol{v}_A$$

$$=\boldsymbol{L}_O-\boldsymbol{r}_A\times m\boldsymbol{v}_C-m(\boldsymbol{r}_C-\boldsymbol{r}_A)\times\boldsymbol{v}_A$$

特殊情形 $\boldsymbol{r}_A=\boldsymbol{r}_C \Rightarrow \boldsymbol{L}_O=\boldsymbol{L}_C'+\boldsymbol{r}_C\times m\boldsymbol{v}_C$

动力学

$$\boldsymbol{L}_A' = \boldsymbol{L}_O - \boldsymbol{r}_A \times m\boldsymbol{v}_C - m(\boldsymbol{r}_C - \boldsymbol{r}_A) \times \boldsymbol{v}_A$$

（1）在$Ax'y'z'$参考系下对相对动量矩求一阶时间导数

$$\dot{\boldsymbol{L}}_A' = \dot{\boldsymbol{L}}_O - \dot{\boldsymbol{r}}_A \times m\boldsymbol{v}_C - \boldsymbol{r}_A \times m\dot{\boldsymbol{v}}_C - m(\dot{\boldsymbol{r}}_C - \dot{\boldsymbol{r}}_A) \times \boldsymbol{v}_A - m(\boldsymbol{r}_C - \boldsymbol{r}_A) \times \dot{\boldsymbol{v}}_A$$

$$= \dot{\boldsymbol{L}}_O - \boldsymbol{v}_A \times m\boldsymbol{v}_C - \boldsymbol{r}_A \times m\boldsymbol{a}_C - m(\boldsymbol{v}_C - \boldsymbol{v}_A) \times \boldsymbol{v}_A - m(\boldsymbol{r}_C - \boldsymbol{r}_A) \times \boldsymbol{a}_A$$

$$= \dot{\boldsymbol{L}}_O - \boldsymbol{r}_A \times m\boldsymbol{a}_C - m(\boldsymbol{r}_C - \boldsymbol{r}_A) \times \boldsymbol{a}_A$$

（2）在$Oxyz$参考系中运用动量矩定理 $\dot{\boldsymbol{L}}_O = \boldsymbol{M}_O^{(e)}$

矩心改变

$$\boldsymbol{M}_O^{(e)} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{r}_k \times \boldsymbol{F}_k^{(e)} = \sum_{k=1}^{n} (\boldsymbol{r}_A + \boldsymbol{r}_k') \times \boldsymbol{F}_k^{(e)} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{r}_A \times \boldsymbol{F}_k^{(e)} + \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{r}_k' \times \boldsymbol{F}_k^{(e)} = \underline{\boldsymbol{r}_A \times \boldsymbol{F}_\mathrm{R}^{(e)} + \boldsymbol{M}_A'^{(e)}}$$

（3）质心运动定理 $m\boldsymbol{a}_C = \boldsymbol{F}_\mathrm{R}^{(e)}$

$$\dot{\boldsymbol{L}}_A' = \boxed{\boldsymbol{M}_O^{(e)} - \boldsymbol{r}_A \times \boldsymbol{F}_\mathrm{R}^{(e)}} - m(\boldsymbol{r}_C - \boldsymbol{r}_A) \times \boldsymbol{a}_A \Rightarrow \dot{\boldsymbol{L}}_A' = \boldsymbol{M}_A'^{(e)} - m(\boldsymbol{r}_C - \boldsymbol{r}_A) \times \boldsymbol{a}_A$$

若A匀速运动, 则 $\boldsymbol{a}_A = \mathbf{0}$.

若A 为质心, 则$\boldsymbol{r}_A = \boldsymbol{r}_C$. $\Rightarrow$ $\dot{\boldsymbol{L}}_A' = \boldsymbol{M}_A'^{(e)}$

若$\boldsymbol{a}_A$ 与$\boldsymbol{r}_C - \boldsymbol{r}_A = \boldsymbol{r}_{AC}$平行, 则 $(\boldsymbol{r}_C - \boldsymbol{r}_A) \times \boldsymbol{a}_A = \mathbf{0}$.

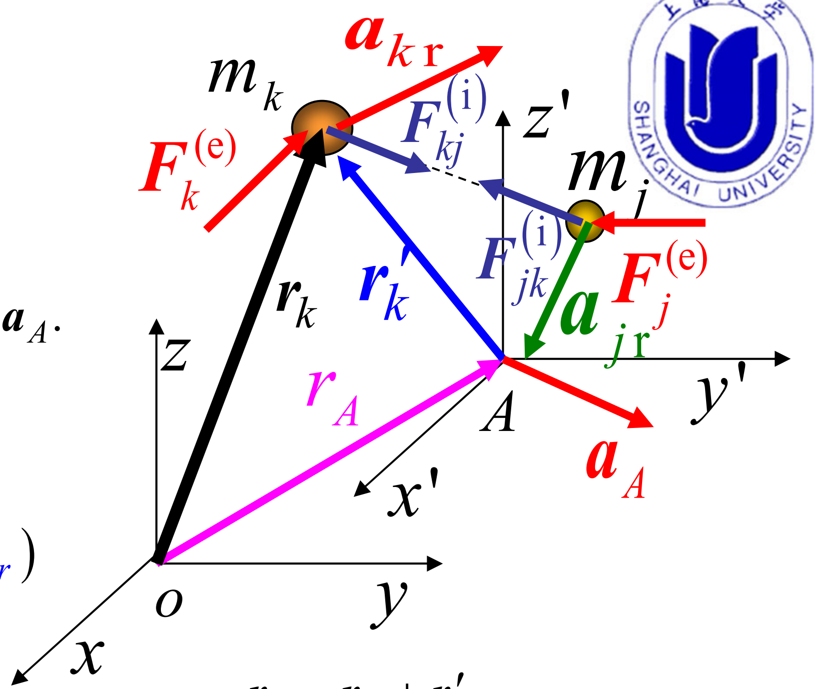
动力学

➢ 动力学方法

在非惯性系$Ax'y'z'$中

$$m_k\left(\boldsymbol{a}_{kr}+\boldsymbol{a}_A\right)=\boldsymbol{F}_k^{(\mathrm{e})}+\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{F}_{kj}^{(\mathrm{i})}$$

$$m_k\boldsymbol{a}_{kr}=\boldsymbol{F}_k^{(\mathrm{e})}+\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{F}_{kj}^{(\mathrm{i})}-m_k\boldsymbol{a}_A.$$



$$\boldsymbol{r}_k=\boldsymbol{r}_A+\boldsymbol{r}'_k$$

对在非惯性系中动量矩求时间导数

$$\dot{\boldsymbol{L}}'_A=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{r}'_k\times m_k\boldsymbol{v}_{k\mathrm{r}}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\boldsymbol{v}_{k\mathrm{r}}\times m_k v_{kr}+\boldsymbol{r}'_k\times m_k a_{kr}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{r}'_k\times\left(\boldsymbol{F}_k^{(\mathrm{e})}+\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{F}_{kj}^{(\mathrm{i})}-m_k\boldsymbol{a}_A\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n}m_k\boldsymbol{r}_k=m\boldsymbol{r}_C$$

$$=\boldsymbol{M}'^{(\mathrm{e})}_A+\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{r}'_k\times\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{F}_{kj}^{(\mathrm{i})}-\sum_{k=1}^{n}\left(\boldsymbol{r}_k-\boldsymbol{r}_A\right)\times m_k\boldsymbol{a}_A$$

$$=\boldsymbol{M}'^{(\mathrm{e})}_A+\boldsymbol{0}-\left(\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{r}_k\times m_k\boldsymbol{a}_A-\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{r}_A\times m_k\boldsymbol{a}_A\right)$$

$$=\boldsymbol{M}'^{(\mathrm{e})}_A-m\left(\boldsymbol{r}_C-\boldsymbol{r}_A\right)\times\boldsymbol{a}_A$$

即

$$\dot{\boldsymbol{L}}'_A=\boldsymbol{M}'^{(\mathrm{e})}_A-m\left(\boldsymbol{r}_C-\boldsymbol{r}_A\right)\times\boldsymbol{a}_A$$

运动学和动力学方法对比

$\boldsymbol{L}'_A$? $\boldsymbol{M}'^{(\mathrm{e})}_A$

? ?

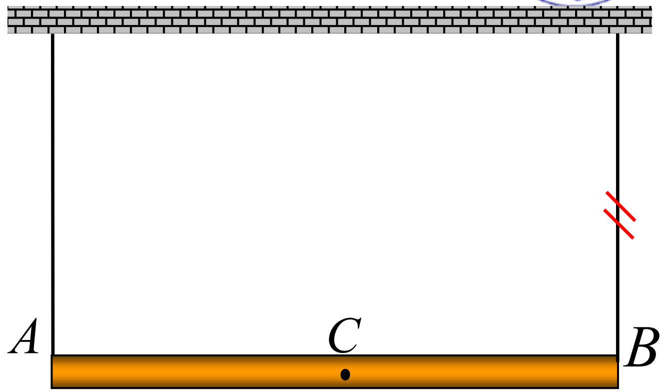
$\boldsymbol{M}^{(\mathrm{e})}_O$

$\boldsymbol{L}_O$ $\dot{\boldsymbol{L}}_O=\boldsymbol{M}_O^{(\mathrm{e})}$

动力学

例 13

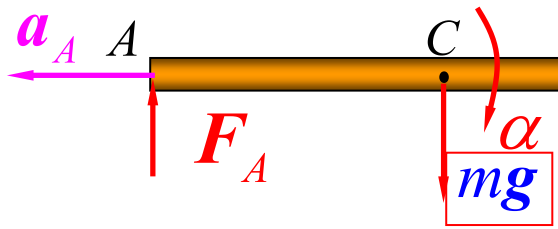
长为L的均质杆，两端由不可伸长细线吊成水平。求一线剪断瞬时杆的角加速度。（杆关于点A的转动惯量为$ml^2/3$）



解: 研究杆。

圆周运动A点在剪断瞬时只有切向分量

$$\boldsymbol{a}_A \times \boldsymbol{r}_{AC} = 0$$



关于A点的相对动量矩定理投影

$\dot{\boldsymbol{L}}'_A = \boldsymbol{M}'^{(e)}_A$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(J_A\omega)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{3}ml^2\omega\right)=mg\frac{l}{2}$$

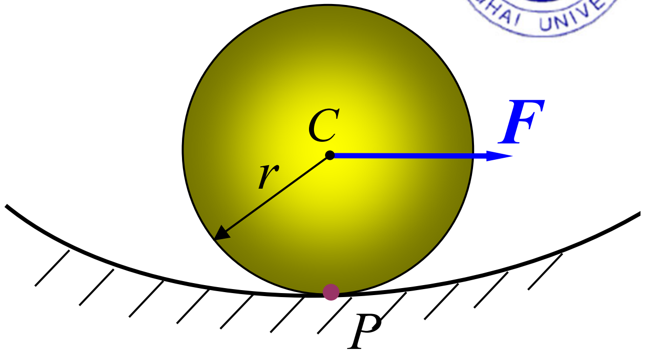
解得 $$\alpha=\frac{3g}{2l}$$ （顺时钟）

利用研究对象的运动特征，灵活运用相对动量矩定理简化计算

动力学

例 14

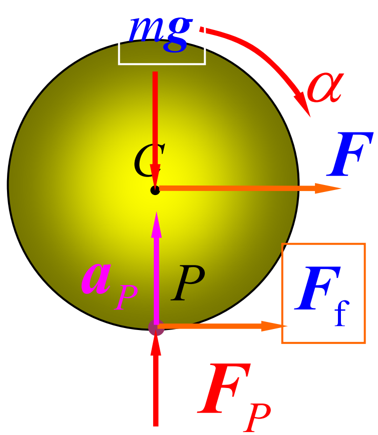
质量为、半径为L的均质圆盘，质心受与接触点和质心连线垂直的力作用，无滑动滚动。求圆盘的角加速度。圆盘关于接触点的转动惯量为$3mr^2/2$。



解: 研究圆盘。

瞬心速度为零，加速度只有法向分量

$$\boldsymbol{a}_P \times \boldsymbol{r}_{PC} = 0$$



关于P点的相对动量矩定理投影

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{3}{2}mr^2\omega\right) = Fr$$

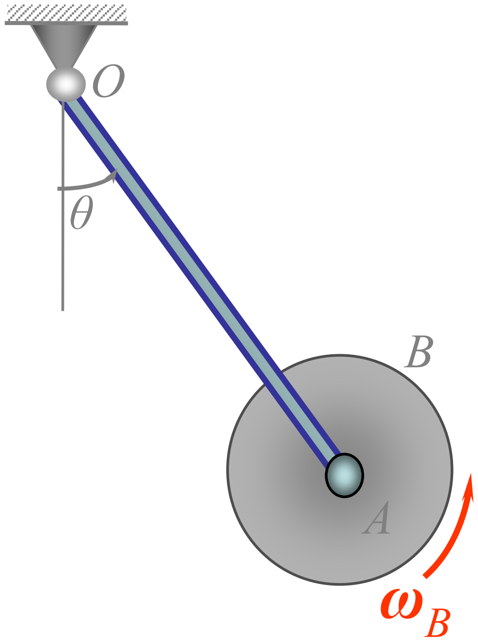
解得

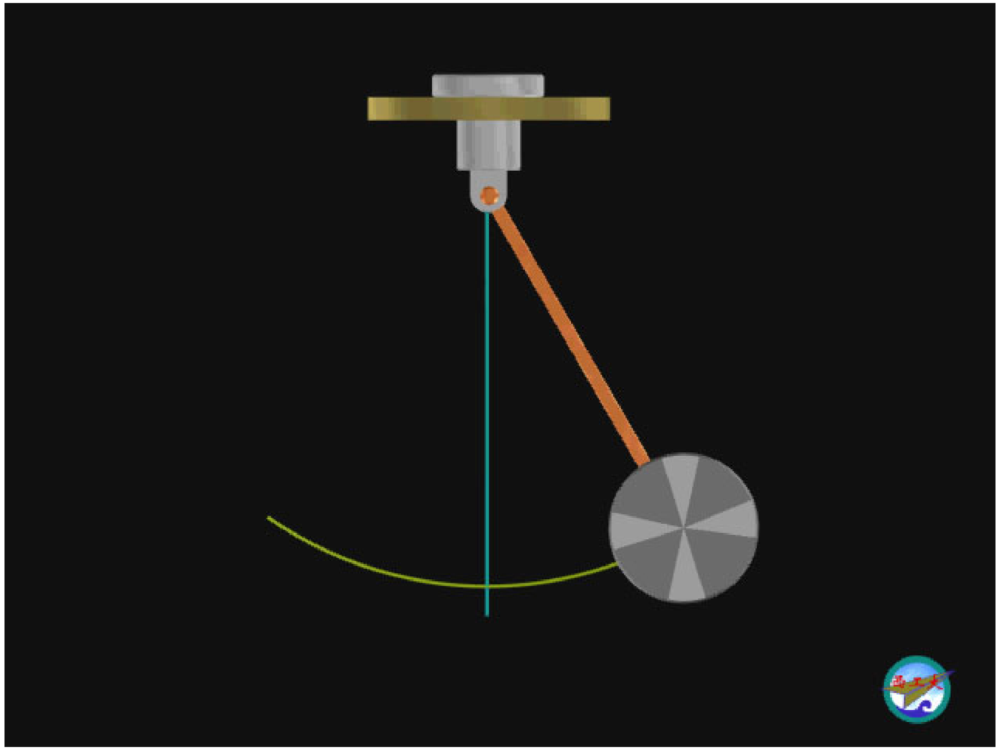
$$\alpha = \frac{2F}{3mr} \qquad （顺时钟）$$

动力学

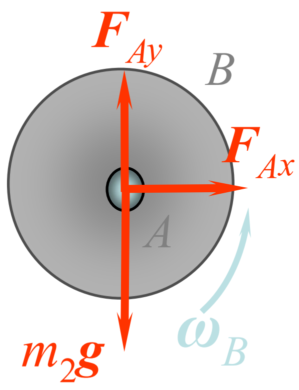
例 15

质量为m_1的杆，绕O点自由转动，对轴O的转动惯量为 J_O; 在另一端，杆上固定一质量为m_2的圆盘B，其对质心A的质量惯性矩为J_B; 在小初始角θ_0处释放杆， 试确定杆的运动。





动力学

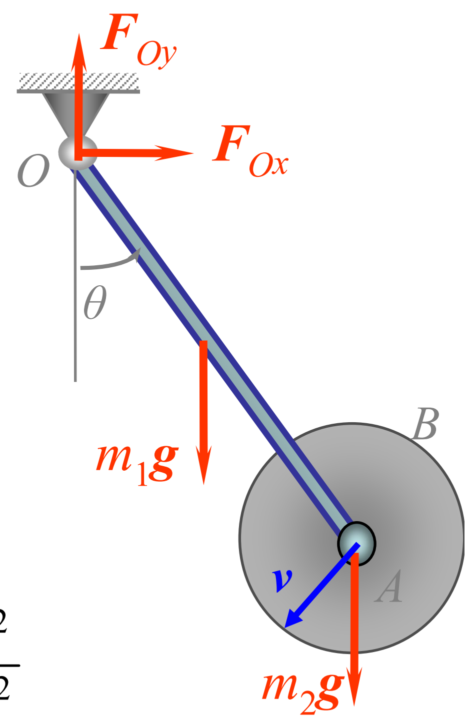


解:

（1）以圆盘B为研究对象，所有外力通过中心， 对质心应用动量矩定理有

$$J_B \dot{\omega}_B = 0.$$

（2）以系统为研究对象，对定轴O应用动量矩定理有：



$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[J_O\dot{\theta} + \left(J_B\omega_B + m_2 l\dot{\theta}\cdot l\right)\right] = -m_1 g\frac{l}{2}\sin\theta - m_2 g l\sin\theta$$

OA杆的动量矩

$$(J_O + m_2 l^2)\ddot{\theta} + \left(\frac{1}{2}m_1 + m_2\right) l g\sin\theta = 0$$

线性化 $\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$ 其中 $\omega_0^2 = \dfrac{\frac{1}{2}m_1 + m_2}{J_O + m_2 l^2}$

代入初始条件：$\theta(t)\big|_{t=0} = \theta_0$， $\dot{\theta}(t)\big|_{t=0} = 0$ ⇨ 运动方程 $\theta(t) = \theta_0\cos\omega_0 t$