

工程控制原理

5. 系统的稳定性

5.3 Nyquist稳定判据

主讲：李敏



5. 系统的稳定性

5.3 Nyquist稳定判据

Routh-Hurwitz稳定判据是基于系统的微分方程或传递函数等参数模型。但在工程中，比较原始、直接的资料是用实验得到的频率特性等实验数据，而且，频率特性具有更清晰的物理意义。所以，工程技术人员更希望直接用实验得到的系统频率特性等来分析、设计系统。

1932年，美国Bell实验室的奈奎斯特(Nyquist)提出了一种应用开环频率特性曲线来判别闭环系统稳定性的判据，即**奈奎斯特判据**，简称奈氏判据。



5.3 Nyquist稳定判据

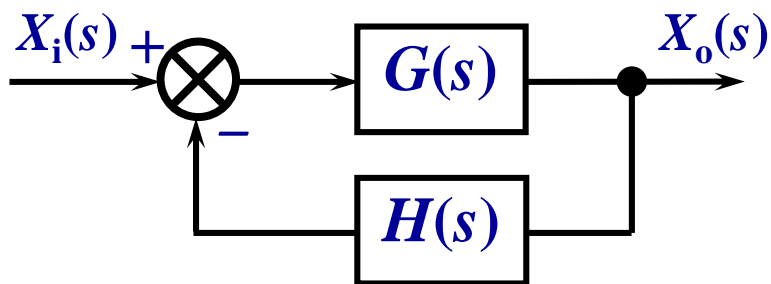
在系统初步设计和校正中经常采用频率特性的图解方法，这就为用奈氏图或Bode图判断系统的稳定性带来了方便。因为这时系统的参数尚未最后确定，一些元件的数学表达式常常是未知的，仅有在实验中得到的频率特性曲线可供采用，无法采用Hurwitz稳定判据或者Routh稳定判据。

应用奈氏判据，无论是由解析法还是由实验方法获得的开环频率特性曲线，都可用来分析系统的稳定性。



5.3 Nyquist稳定判据

奈氏判据仍然是根据系统稳定的充分必要条件导出的一种方法。对于下图所示的负反馈系统，闭环传递函数 $\Phi(s)$ 与开环传递函数 $G(s)H(s)$ 之间存在着确定的关系。



$$\Phi(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

欲使系统稳定，必须满足系统特征方程的根(即闭环极点)全部位于 s 复平面的左半部，奈氏判据正是将开环频率特性 $G(j\omega)H(j\omega)$ 与系统的闭环极点联系起来的判据。



5.3 Nyquist稳定判据

利用奈奎斯特稳定判据不但可以判断系统是否稳定(绝对稳定性)，也可以确定系统的稳定程度(相对稳定性)，还可以用于分析系统的动态性能以及指出改善系统性能指标的途径。因此，奈奎斯特稳定判据是一种重要而实用的稳定性判据，工程上应用十分广泛。



5.3 Nyquist稳定判据

5.3.1 Nyquist判据的理论基础

由于闭环系统的稳定性取决于闭环特征根的性质，因此，运用开环频率特性研究闭环系统的稳定性时，首先应明确开环频率特性与闭环特征方程之间的关系，然后，进一步寻找它与闭环特征根之间的规律性。

正是闭环传递函数的分母 $1+G(s)H(s)$ 联系着开环、闭环之间的零点与极点。开环传递函数 $G(s)H(s)$ 一般为分式：

$$G(s)H(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)}$$

上式分子为 m 阶多项式，分母为 n 阶多项式，通常 $m \leq n$ 。



5.3.1 Nyquist判据的理论基础

闭环传递函数的分母 $1+G(s)H(s)$ 与开环传递函数 $G(s)H(s)$ 是分母相同的分式，即

$$\begin{aligned} 1+G(s)H(s) &= 1 + \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1s + b_0}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)} \\ &= \frac{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\cdots(s-\lambda_n)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)} \end{aligned}$$

由此可以看出， $1+G(s)H(s)$ 的极点 p_i ($i=1, 2, \cdots, n$) 就是 $G(s)H(s)$ 的极点，而 $1+G(s)H(s)$ 的零点 λ_i ($i=1, 2, \cdots, n$) 正是闭环传递函数 $\Phi(s)$ 的极点，因为 $s=\lambda_i$ 时， $1+G(s)H(s)=0$ 。

建立这一关系是证明奈氏判据的第一步。

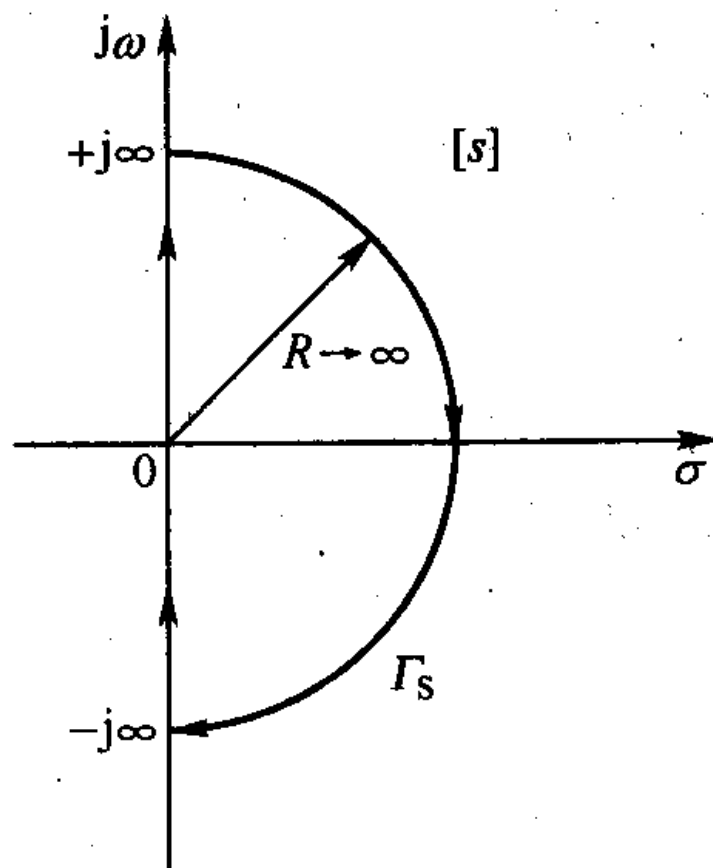


5.3.1 Nyquist判据的理论基础

奈式判据的理论基础是复变函数中的幅角定理，也称映射定理，它是幅角定理在工程控制中的具体应用。

根据复变函数的保角映射关系，对于复平面 $[s]$ 上的一条连续封闭线，在 $[1+G(s)H(s)]$ 复平面上必有一条封闭曲线与之对应。

在证明奈氏判据时，取复平面 $[s]$ 上的封闭曲线 Γ_s 包围整个 $[s]$ 平面的右半部，即沿着虚轴由 $-j\infty \rightarrow +j\infty$ 再沿着半径为 ∞ 的半圆构成封闭曲线。



5.3.1 Nyquist判据的理论基础

若将 $1+G(s)H(s)$ 的零点 λ_i ($i=1, 2, \dots, n$) 和极点 p_i ($i=1, 2, \dots, n$) 画在 $[s]$ 复平面上, 那么, 封闭曲线 Γ_s 把实部为正的极点和零点都包围进去了, 即包围了所有实部为正的开环极点和闭环极点 (也可称为开环右极点和闭环右极点)。

$[s]$ 复平面上 Γ_s 曲线沿虚轴的部分, 即当变量 s 沿 $[s]$ 平面的虚轴从 $-\infty \rightarrow +\infty$ 变化时, 对应地映射到 $1+G(s)H(s)$ 平面上是 $1+G(j\omega)H(j\omega)$ 曲线。而 $G(j\omega)H(j\omega)$ 曲线正是系统的开环奈氏图。



5.3.1 Nyquist判据的理论基础

在复平面 $[1+G(s)H(s)]$ 和 $[G(s)H(s)]$ 之间的实轴坐标相差 1, $[1+G(s)H(s)]$ 复平面 (简写成 $[1+GH]$ 平面) 的坐标原点正是 $[G(s)H(s)]$ 复平面 (简写成 $[GH]$ 平面) 上的 $(-1, j0)$ 点。如果由 Γ_s 映射的曲线在 $[1+GH]$ 平面上包围其坐标原点, 在 $[GH]$ 平面上则包围 $(-1, j0)$ 点。即当 $1+G(j\omega)H(j\omega) = 0$ 时, 有 $G(j\omega)H(j\omega) = -1$ 。

Γ_s 曲线的另一部分即无穷大半圆部分, 映射到 $[GH]$ 平面上的原点 (当 $n > m$ 时), 或映射到 $[GH]$ 平面的实轴上某定点 (当 $n = m$ 时)。



5.3 Nyquist稳定判据

5.3.2 Nyquist稳定判据

根据幅角定理可以证明（证明从略）：

$$Z = P - N$$

式中， Z ——闭环右极点个数，正整数或零；

P ——开环右极点个数，正整数或零；

N —— ω 从 $-\infty \rightarrow 0 \rightarrow +\infty$ 变化时， $G(j\omega)H(j\omega)$ 封闭曲线在 $[GH]$ 平面内包围 $(-1, j0)$ 点的次数。

- ① 当 $N > 0$ 时，是按逆时针方向包围的情况；
- ② 当 $N < 0$ 时，是顺时针包围的情况；
- ③ 当 $N = 0$ 时，表示曲线不包围 $(-1, j0)$ 点。

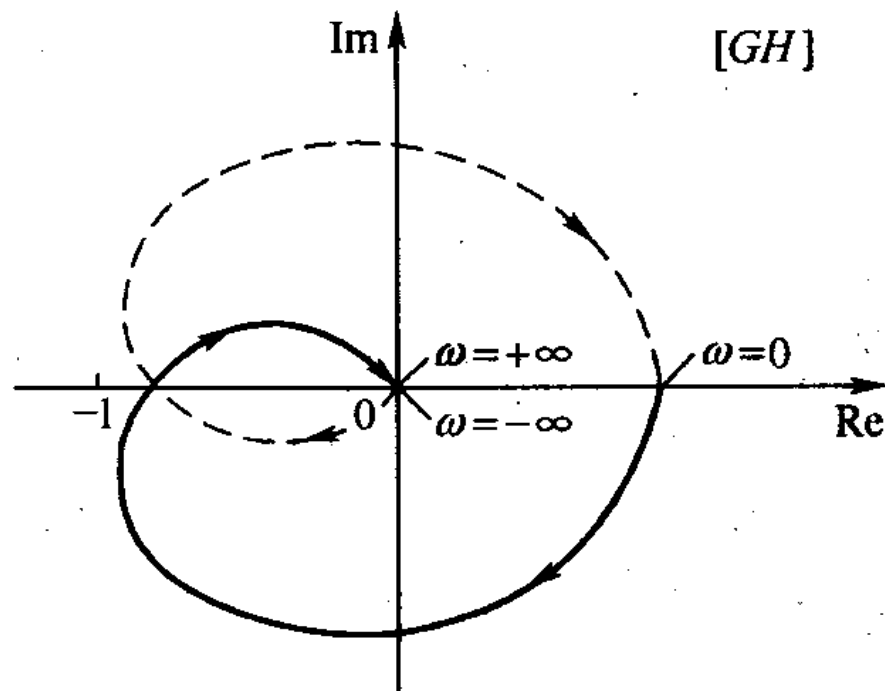


5.3.2 Nyquist稳定判据

由上式，可根据开环右极点个数 P 和开环奈氏曲线对 $(-1, j0)$ 点的包围次数 N ，来判断闭环右极点数 Z 是否等于零。若要系统稳定，闭环不能有右极点，即必须使 $Z = 0$ ，也就是要求 $N = P$ 。

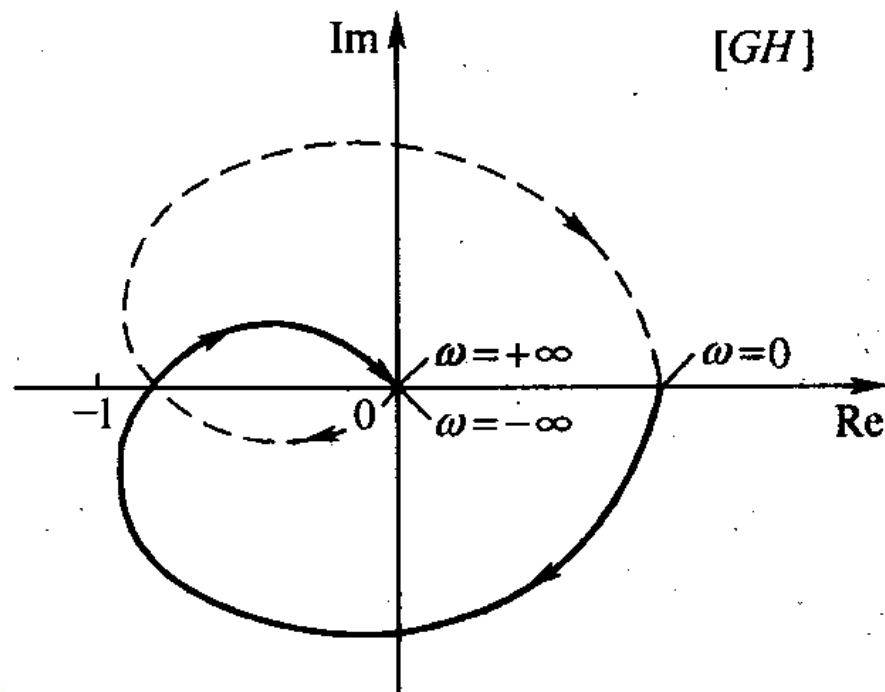
开环传递函数 $G(s)H(s)$ 通常是一些简单环节串联相乘的形式，因此开环右极点数 P 容易求出。

N 的确定则须画出开环奈氏图。



5.3.2 Nyquist稳定判据

ω 从 $-\infty \rightarrow 0 \rightarrow +\infty$ 的开环奈氏图是一条关于实轴对称的封闭曲线，只要画出 ω 从 $0 \rightarrow +\infty$ 的那一半曲线，按镜像对称原则便可得到 ω 从 $-\infty \rightarrow 0$ 的另一半曲线（如下图所示），奈氏曲线对 $(-1, j0)$ 点的包围情况 N 即可得出。有了 P 和 N ，便可确定 Z 。



5.3.2 Nyquist稳定判据

为了简单起见，通常只画出 ω 从 $0 \rightarrow +\infty$ 的 $G(j\omega)H(j\omega)$ 曲线，当仅用正半部分奈氏曲线判别系统的稳定性时，包围次数应当增加一倍才符合式 $Z = P - N$ 的关系。即把式 $Z = P - N$ 改写为

$$Z = P - 2N$$

式中， N —— ω 从 $0 \rightarrow +\infty$ 变化时， $G(j\omega)H(j\omega)$ 封闭曲线在 $[GH]$ 平面内包围 $(-1, j0)$ 点的次数。

- ① 当 $N > 0$ 时，是按逆时针方向包围的情况；
- ② 当 $N < 0$ 时，是顺时针包围的情况；
- ③ 当 $N = 0$ 时，表示曲线不包围 $(-1, j0)$ 点。



5.3.2 Nyquist稳定判据

因此，系统稳定（即当 $Z=0$ ）时，应满足

$$P = 2N$$

或者

$$N = \frac{P}{2}$$

归纳上述，按上式的关系给出奈氏判据的结论：

当 ω 从 $0 \rightarrow \infty$ 变化时，开环频率特性曲线 $G(j\omega)H(j\omega)$ 逆时针包围点 $(-1, j0)$ 的次数 N 如果等于开环右极点数的一半 $P/2$ ，则闭环系统是稳定的，否则系统不稳定。



5.3.2 Nyquist稳定判据

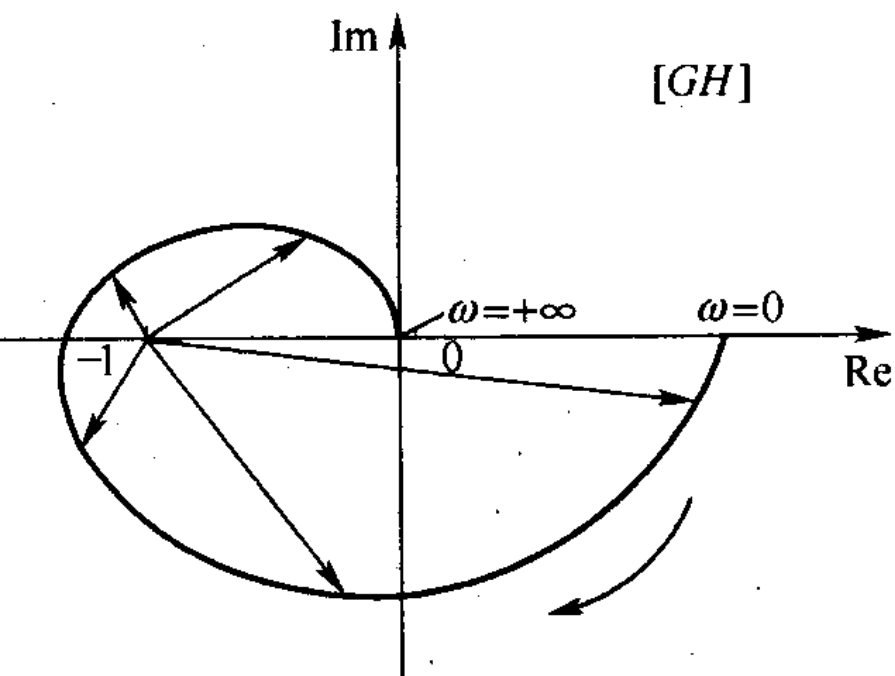
应用奈氏判据判断系统稳定性的一般步骤如下：

首先，绘制 ω 从 $0 \rightarrow \infty$ 变化时的开环频率特性曲线，即开环奈氏图，并在曲线上标出 ω 从 $0 \rightarrow \infty$ 增加的方向。

根据曲线包围 $(-1, j0)$ 点的次数和方向，求出 N 的大小及正负。为此可从 $(-1, j0)$ 点向 $G(j\omega)H(j\omega)$ 曲线上作一矢量，并计算这个矢量当 ω 从 $0 \rightarrow \infty$ 变化时相应转过的“净”角度，规定逆时针旋转方向为正角度方向，并按转过 360° 折算 $N=1$ ，转过 -360° 折算 $N=-1$ 。要注意 N 的正负及 $N=0$ 的情况，见下图。

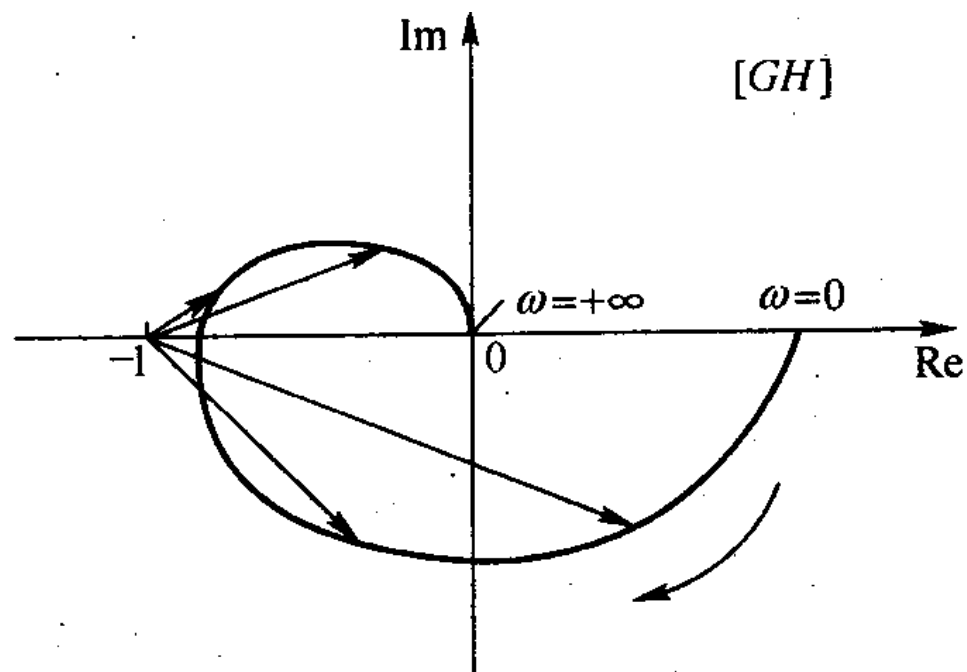


5.3.2 Nyquist稳定判据



(a)

$$N = -1$$



(b)

$$N = 0$$



5.3.2 Nyquist稳定判据

然后，由给定的开环传递函数确定开环右极点数 P ，并按奈氏判据判断系统的稳定性。若 $N = P/2$ ，则闭环系统稳定，否则不稳定。

如果 $G(j\omega)H(j\omega)$ 曲线刚好通过 $(-1, j0)$ 点，表明闭环系统有极点位于虚轴上，系统处于临界稳定状态，归入不稳定情况。



5.3 Nyquist稳定判据

5.3.3 Nyquist判据应用举例

在应用奈氏判据时，根据开环传递函数是否包含 $s = 0$ 的极点（即开环传递函数中是否包含积分环节），可分为以下两种情况；

(1) 开环传递函数中没有 $s=0$ 的极点

例题7： 单位负反馈系统的开环传递函数为

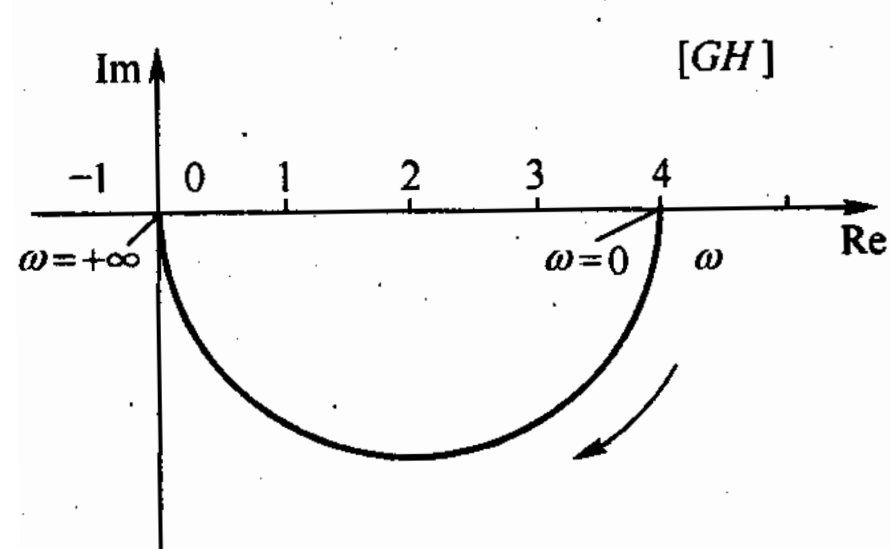
$$G(s) = \frac{K}{0.1s + 1}$$

试用奈氏判据判断 $K=4$ 和 $K=-4$ 情况下系统的稳定性。

解： 作出 $K=4$ 和 $K=-4$ 时的开环奈氏图。

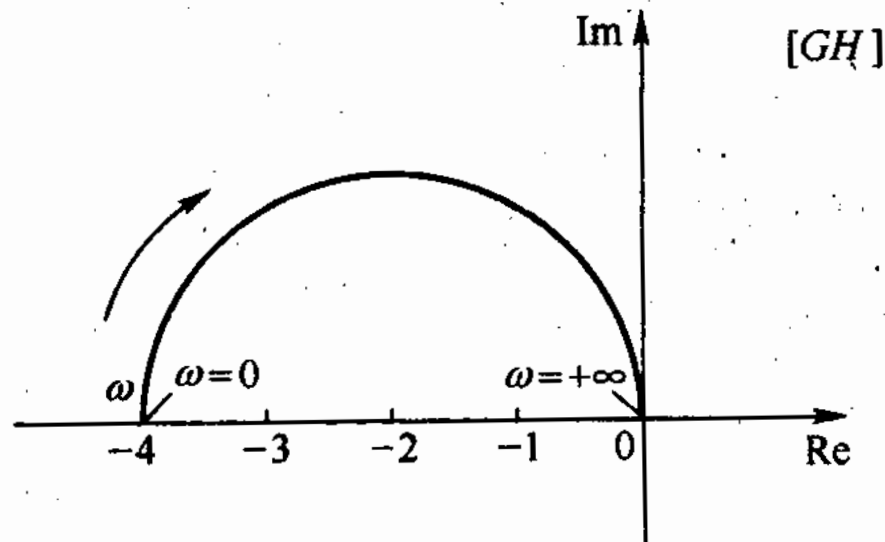


5.3.3 Nyquist判据应用举例



(a)

$K=4$



(b)

$K=-4$

$G(s) = \frac{K}{0.1s+1}$ 的奈氏图



5.3.3 Nyquist判据应用举例

① 当 $K = 4$ 时，开环奈氏图如图(a)，可以明显看出曲线不包围 $(-1, j0)$ 点，所以 $N = 0$ 。

由开环传递函数可知，开环极点为 $s = -1/T = -10$ ，因此开环无右极点， $P = 0$ 。

由奈氏判据知，系统在 $K = 4$ 时是稳定的。

② 当 $K = -4$ 时，开环奈氏图如图(b)，这时开环极点没有变化，但曲线顺时针包围 $(-1, j0)$ 点半周，即 $N = -1/2 \neq P/2$ 。

由此可见在 $K = -4$ 时系统不稳定。

本题说明，系统在开环无右极点的情况下，闭环系统是否稳定须用判据判断以后才能知晓，并不存在开环稳定 ($P = 0$) 闭环一定稳定的必然关系。



5.3.3 Nyquist判据应用举例

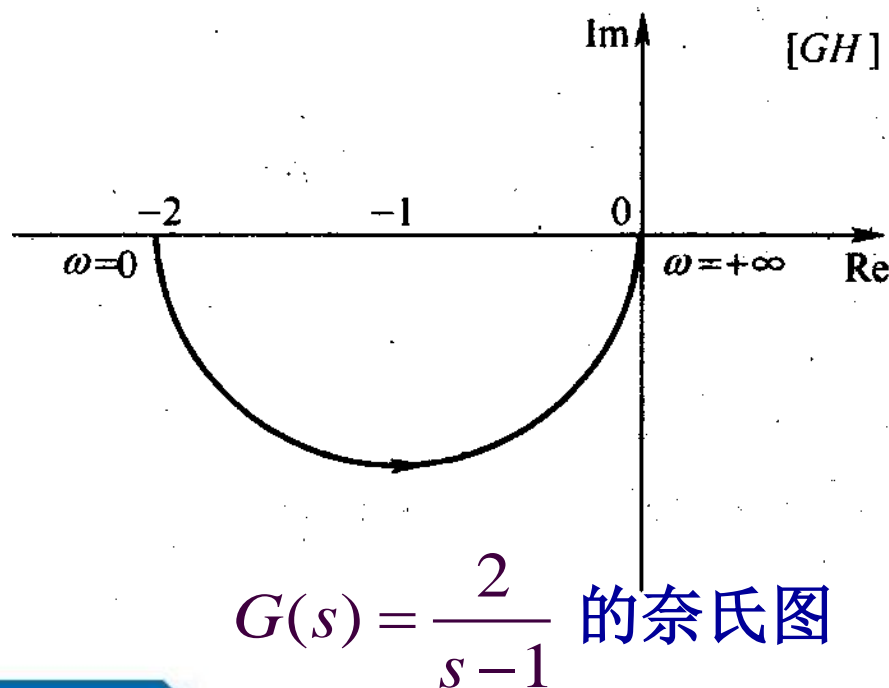
例题8： 已知单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{2}{s-1}$$

试用奈氏判据判断闭环系统的稳定性。

解： 作出开环奈氏图。

由图可见， $G(j\omega)H(j\omega)$ 正向包围 $(-1, j0)$ 点半圈，即 $N = 1/2$ ；由 $G(s)$ 可知，开环是不稳定的，有一个正根，即 $P = 1$ ，故 $N = P/2$ ，闭环系统稳定。



5.3.3 Nyquist判据应用举例

从以上两个例子可以看出：

开环系统稳定，但若各部件以及被控对象的参数选择不当，很可能保证不了闭环系统的稳定性；

而开环系统不稳定，只要合理地选择控制装置，完全能使闭环系统稳定。



5.3.3 Nyquist判据应用举例

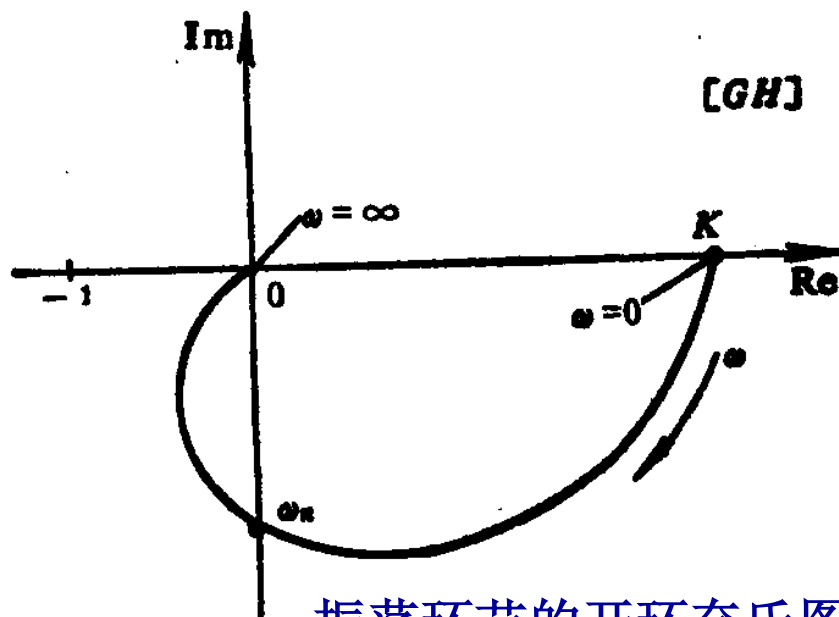
例题9： 判断一个由振荡环节

$$G(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1}$$

构成的单位负反馈系统的稳定性。

解： 作出开环奈氏图。曲线不包围 $(-1, j0)$ 点，当 K 、 ζ 、 T 为任何正值时，开环都无右极点，闭环系统都是稳定的。

无论相关参数如何变化， $G(j\omega)H(j\omega)$ 曲线的相角总是由 $0^\circ \rightarrow 180^\circ$ 变化，只经过第四、三象限，到不了第二象限，因此不可能包围 $(-1, j0)$ 点。



振荡环节的开环奈氏图



5.3.3 Nyquist判据应用举例

例题10： 设系统的开环频率特性为

$$G(s)H(s) = \frac{K}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)(T_3s + 1)}$$

试判断闭环系统的稳定性。

解： 作出开环奈氏图。

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{K}{(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)(1 + j\omega T_3)}$$

当 $\omega=0$ 时,

$$|G(j\omega)H(j\omega)| = K \quad \angle G(j\omega)H(j\omega) = 0^\circ$$

当 $\omega=\infty$ 时,

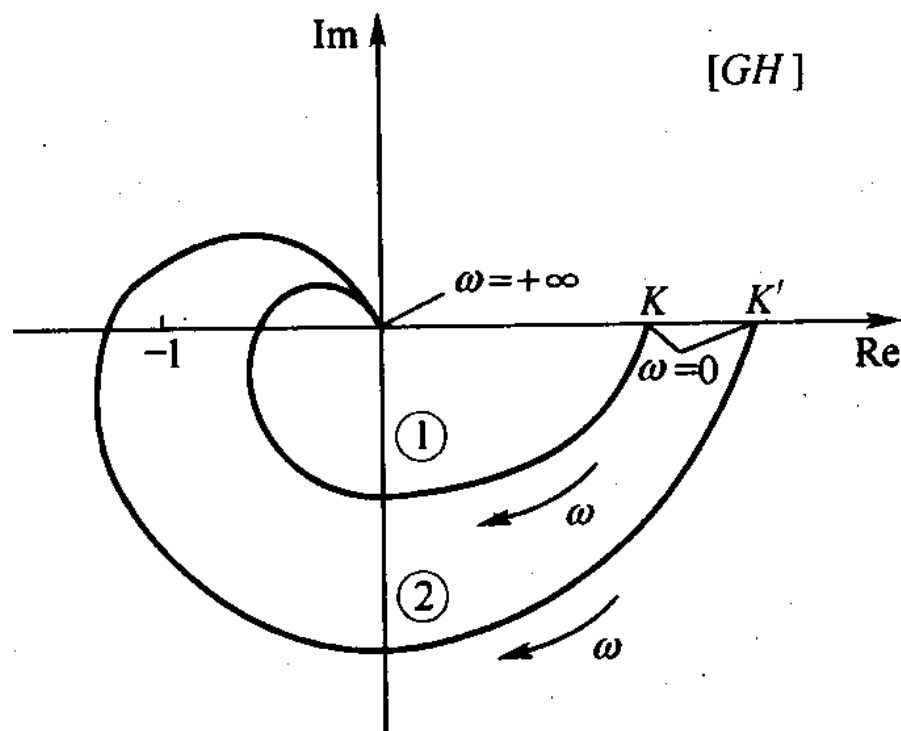
$$|G(j\omega)H(j\omega)| = 0 \quad \angle G(j\omega)H(j\omega) = -270^\circ$$



5.3.3 Nyquist判据应用举例

系统的开环奈氏图的大致形状如下图。曲线从正实轴上的 K 点开始，顺时针旋转穿过三个象限，沿 -270° 线终止于原点。当 K 值较小时如曲线①所示，不包围 $(-1, j0)$ 点， $N=0$ 。

当 K 值增大到 K' ，曲线的相位不变，仅幅值增大，如曲线②，顺时针包围 $(-1, j0)$ 点一周，即 $N=-1$ 。因为开环无右极点， $P=0$ 。所以曲线①所示情况下，闭环系统稳定。曲线②的情况系统不稳定。

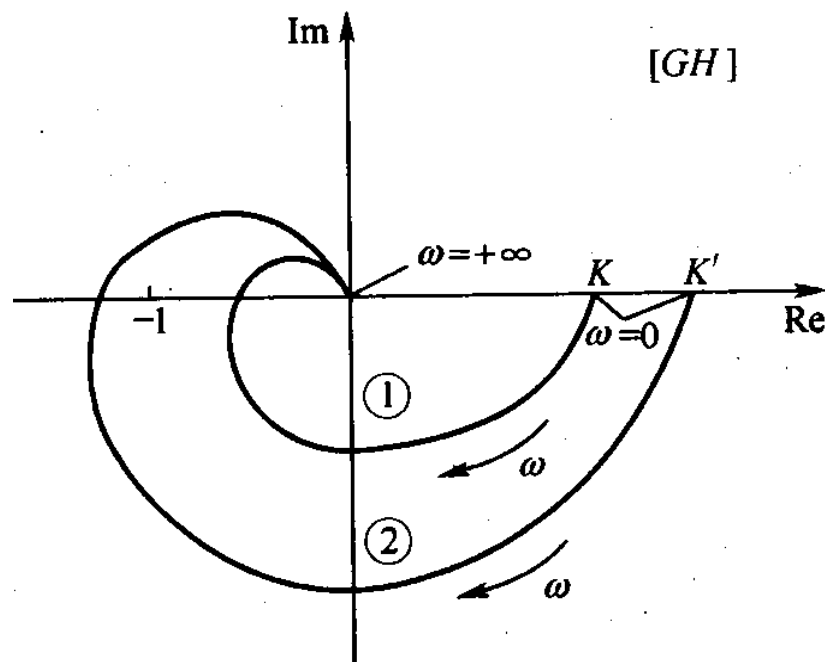


三阶系统的开环奈氏图



5.3.3 Nyquist判据应用举例

由此可见，开环增益 K 的增大，不利于系统的稳定性。从系统稳态误差的角度来说， K 的增大有利于稳态误差的减小。为了兼顾精度和稳定性，需要在系统中加补偿环节。



三阶系统的开环奈氏图

从上述两例可见，同样为最小相位的开环传递函数，并且开环增益 $K > 0$ ，只有三阶或三阶以上的闭环系统才可能不稳定。



5.3.3 Nyquist判据应用举例

(2) 开环传递函数中有 $s=0$ 的极点

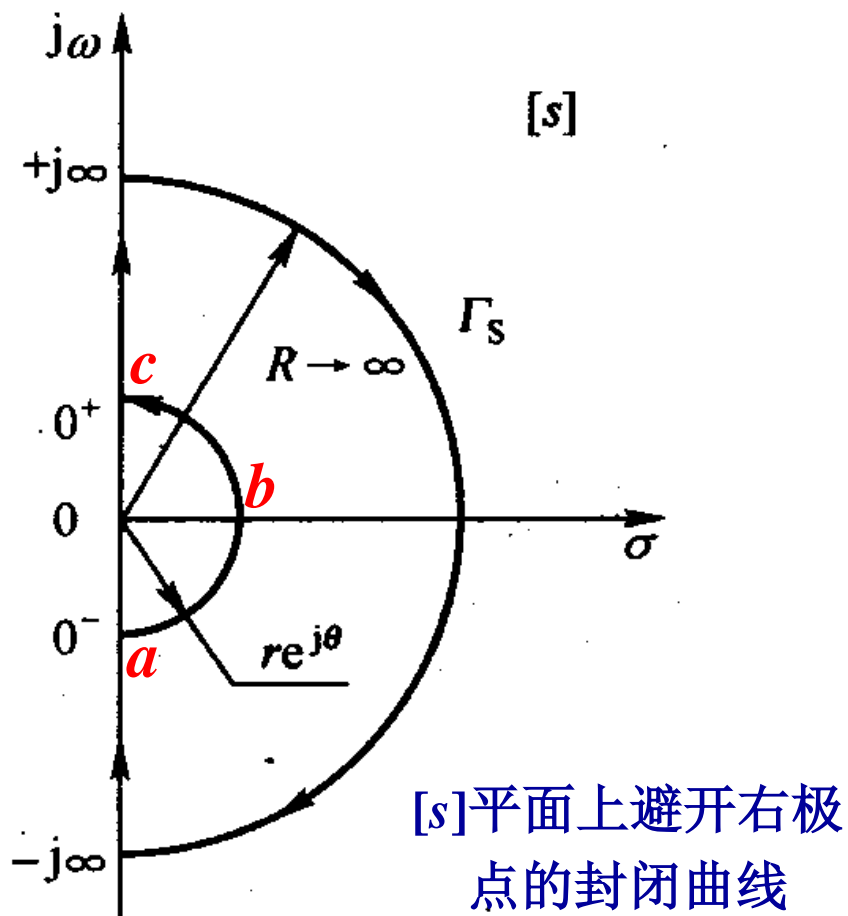
当系统中串联有积分环节，即开环传递函数有 $s=0$ 的极点时，需将奈氏判据进行如下相应的处理。

在 $[s]$ 平面上的封闭曲线 Γ_s 向 $[1+GH]$ 平面上映射时， Γ_s 是沿虚轴前进的，现在原点处有极点， Γ_s 曲线应以该点为圆心，以无穷小为半径的半圆 \widehat{abc} 按逆时针方向绕过该点，如下图所示。由于绕行半径为无限小，因此可以认为所有不在原点上的右极点和右零点仍能被包括在 Γ_s 封闭曲线之内。这时开环右极点数 P 已不再包含 $s=0$ 处的极点。



5.3.3 Nyquist判据应用举例

(2) 开环传递函数中有 $s=0$ 的极点



5.3.3 Nyquist判据应用举例

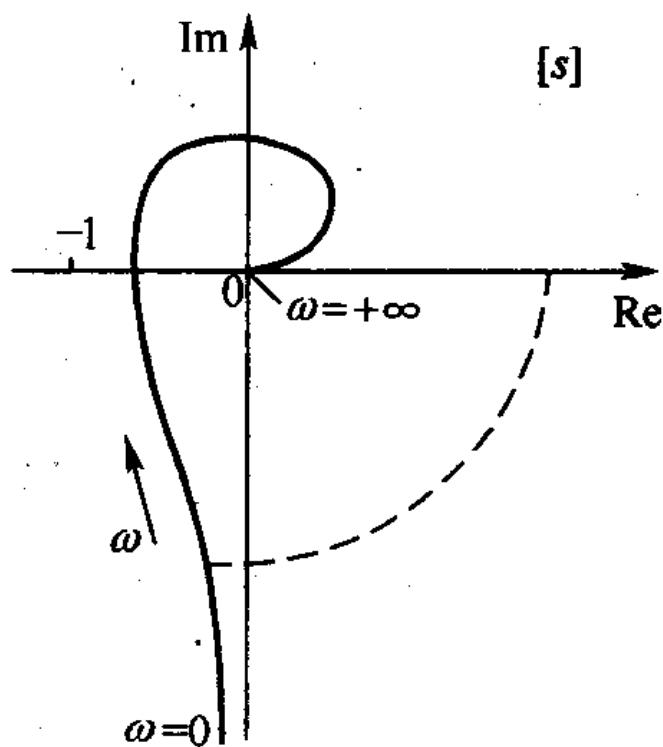
由于积分环节在 $\omega = 0$ 时的相角为 -90° ，幅值为 $+\infty$ ，其影响将使含有积分环节的开环奈氏图在 $\omega = 0$ 时的起点不是实轴上的一个定值点，而是沿某一个坐标轴趋于 ∞ 。如下图。

因此 ω 从 $-\infty \rightarrow 0 \rightarrow +\infty$ 的开环奈氏曲线不封闭，无法识别曲线对 $(-1, j0)$ 点的包围情况。遇到这种情况，可以作**辅助曲线**，如图中的虚线所示。

辅助曲线的作法：以无穷大为半径，从奈氏曲线的起始端沿逆时针方向绕过 $\nu 90^\circ$ 作圆和实轴相交，这个圆就是辅助曲线。 ν 是开环传递函数中含有积分环节的个数。

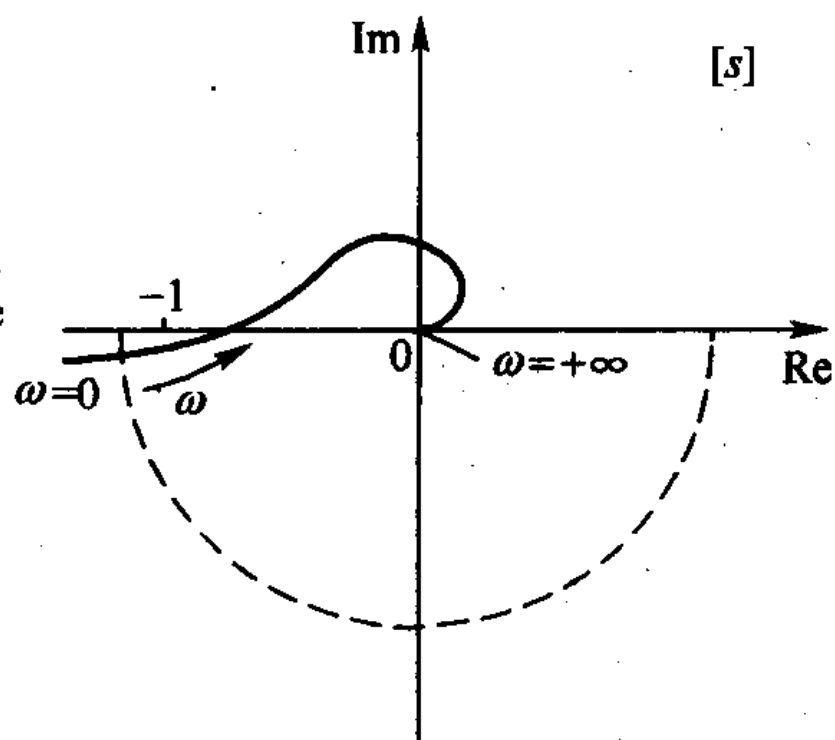


5.3.3 Nyquist判据应用举例



(a)

图(a): $\frac{K}{(j\omega)(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)(1+j\omega T_3)}$ 的奈氏曲线



(b)

图(b): $\frac{K(1+j\omega T_4)}{(j\omega)^2(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)(1+j\omega T_3)}$ 的奈氏曲线



5.3.3 Nyquist判据应用举例

这个辅助曲线是由 $[s]$ 平面上 Γ_s 封闭路径中的弧 \widehat{bc} 段映射在 $[GH]$ 平面上的图形。当变量 s 沿路径 Γ_s 前进经过 bc 时，可以表示为

$$s = re^{j\theta}$$

其中小半径 r 趋近于零，角 θ 从 $0^\circ \rightarrow 90^\circ$ 。

设系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K_1 \prod_{j=1}^m (s - z_j)}{s^\nu \prod_{i=1}^{n-\nu} (s - p_i)} = \frac{K_1 (s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{s^\nu (s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_{n-\nu})}$$

式中， ν 为开环传递函数含有积分环节的个数； z_i 为开环零点 (m 个)； p_i 为开环极点 ($n-\nu$ 个)； K_1 为比例系数 (与 K 成比例)。



5.3.3 Nyquist判据应用举例

将 $s = re^{j\theta}$ 代入上式, 并令 $r \rightarrow 0$, 得

$$G(s)H(s)\Big|_{s=re^{j\theta}} = \frac{|K'|e^{j\varphi_0}}{r^\nu e^{j\theta\nu}} = \frac{|K'|e^{j\varphi_0}}{r^\nu} e^{-j\nu\theta}$$

$$\text{式中, } K' = K_1 \frac{(-z_1)(-z_2)\cdots(-z_m)}{(-p_1)(-p_2)\cdots(-p_{n-\nu})}$$

由于复数根的共轭性, 故 K' 是实数。

φ_0 表示其它环节(除去积分环节)在 $\omega=0$ 时的相角和。对于最小相位系统 $\varphi_0 = 0^\circ$, 对于非最小相位系统 $\varphi_0 = \pm k180^\circ$ ($k=0, 1, 2, 3, \cdots$)。



5.3.3 Nyquist判据应用举例

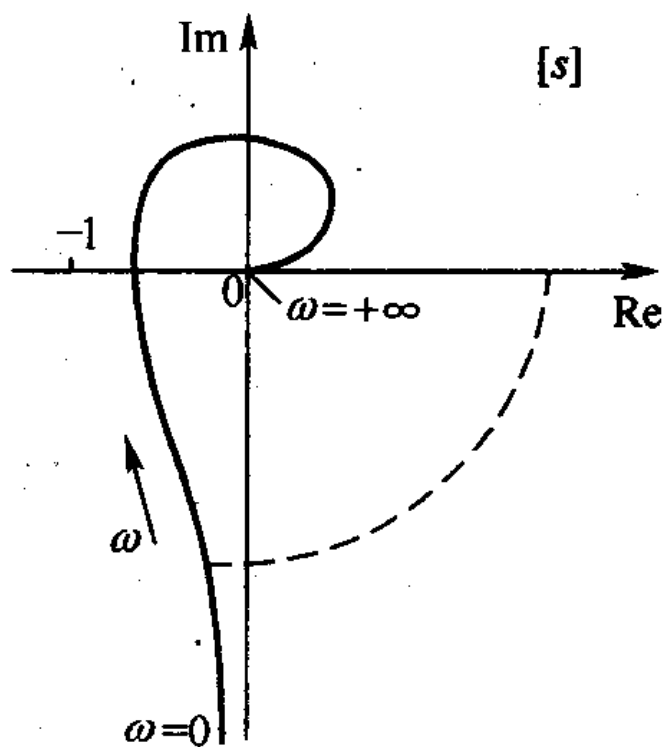
根据上式，可以确定当 s 沿小半圆从 $\omega = 0^-$ 变化到 $\omega = 0^+$ 时， $[s]$ 平面上半径为无穷小的圆弧 \widehat{bc} 映射在 $[GH]$ 平面上为无限大半径的圆弧，幅角由 φ_0 变化 $-v90^\circ$ ，复数 $G(j\omega)H(j\omega)$ 的矢量端点轨迹就是图中的虚线辅助线，即开环奈氏图的增补段。

经过以上的处理，原奈氏判据仍可使用。

例如图中的两个系统，开环均无右极点，即 $P = 0$ ，增补(加辅助线)后的开环奈氏曲线又都不包围 $(-1, j0)$ 点， $N = 0$ ，所以由奈氏判据可以判断两个系统都是稳定的。

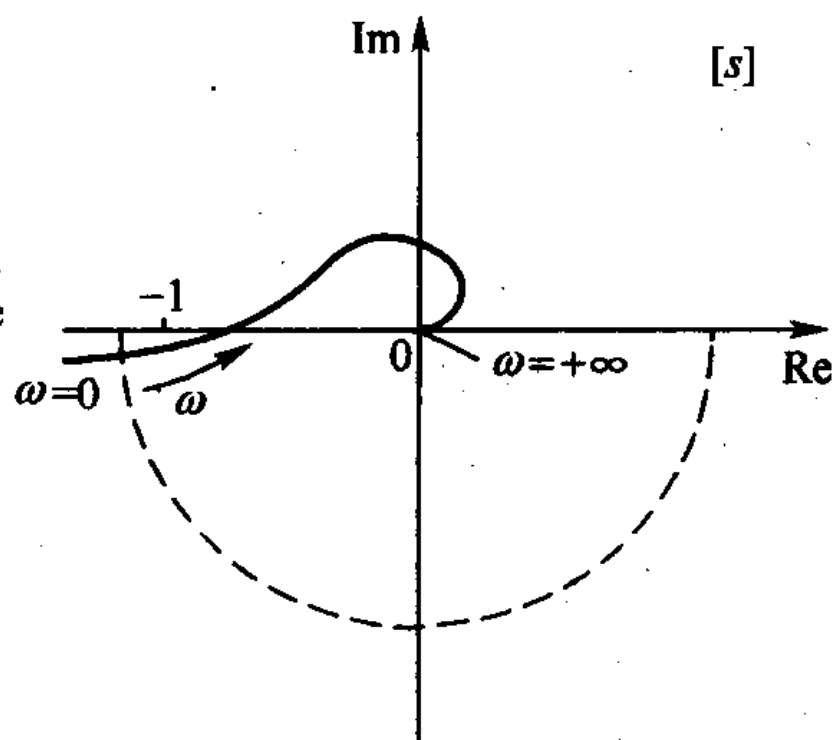


5.3.3 Nyquist判据应用举例



(a)

图(a): $\frac{K}{(j\omega)(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)(1+j\omega T_3)}$ 的奈氏曲线



(b)

图(b): $\frac{K(1+j\omega T_4)}{(j\omega)^2(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)(1+j\omega T_3)}$ 的奈氏曲线



5.3.3 Nyquist判据应用举例

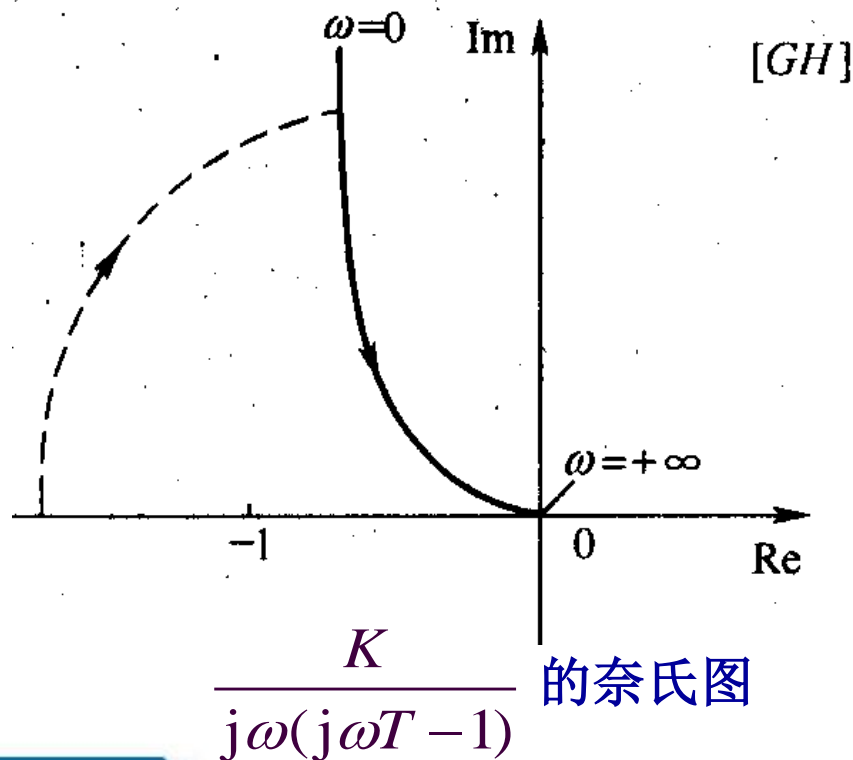
例题11： 设某非最小相位系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(Ts - 1)}$$

试判断闭环系统的稳定性。

解： 作出开环奈氏图。

根据作辅助线的方法，由奈氏曲线的起始端($\omega=0$ 端)，以无穷大为半径，沿逆时针方向旋转 90° ，交于负实轴，形成图中的虚线部分。



5.3.3 Nyquist判据应用举例

此处没有交于正实轴，是因为开环传递函数中只有一个积分环节， $\nu=1$ ，辅助线只有 90° 范围的幅角，而除去积分环节的其它环节 $K/(Ts-1)$ 在 $\omega=0$ 时的相角和为 $\varphi_0=180^\circ$ 。

在确定奈氏曲线包围 $(-1, j0)$ 点的次数和方向时，应将虚线和实线连续起来看，整个曲线的旋转方向仍按 ω 增大的方向。这样，由图中可以看出，曲线顺时针包围 $(-1, j0)$ 点半圈，即 $N=-1/2$ 。

检查开环极点： $s_1=0$ ， $s_2=1/T$ ，其中 s_2 是正实数，是一个右极点，而 $s_1=0$ ，不算右极点。所以开环右极点数 $P=1$ 。由奈氏判据得知系统不稳定。



5.3.3 Nyquist判据应用举例

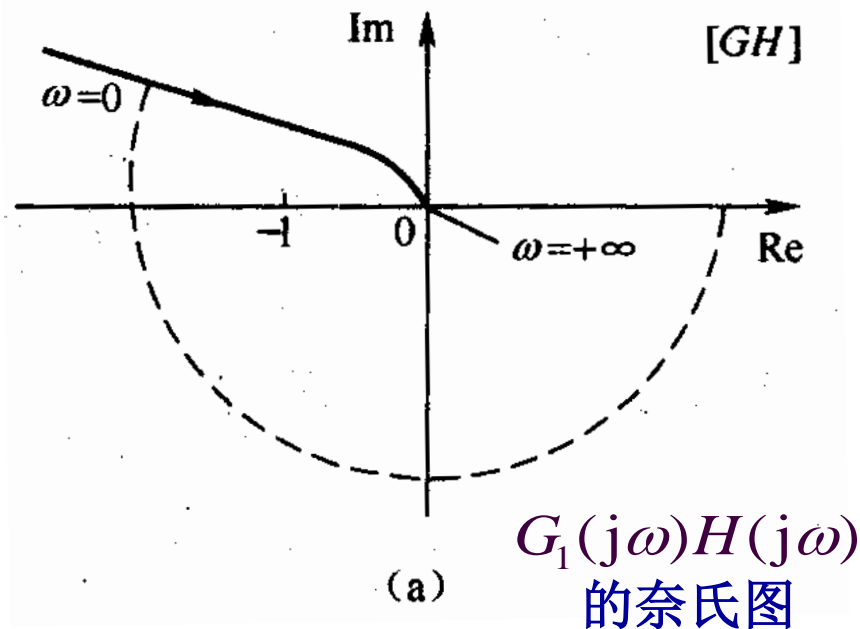
例题12: 某II型系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{10}{s^2(0.15s + 1)}$$

试判断闭环系统的稳定性。

解: 作出开环奈氏图。

由图可知, $N = -1$,
即顺时针包围 $(-1, j0)$ 点一周。开环传递函数无右极点, $P = 0$ 。所以系统不稳定。



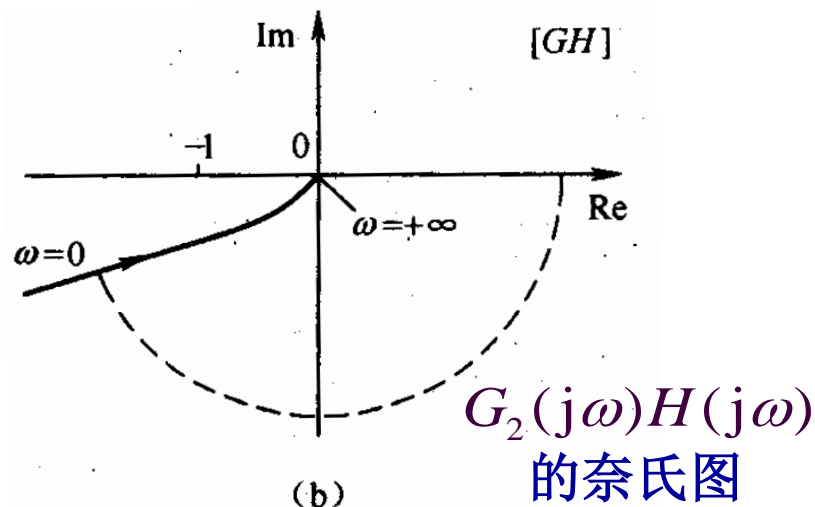
5.3.3 Nyquist判据应用举例

如果在原系统中串入一个一阶微分环节 $(2.5s + 1)$ ，使开环传递函数变成

$$G(s)H(s) = \frac{10(2.5s + 1)}{s^2(0.15s + 1)}$$

利用一阶微分环节的正相位角度，使原开环频率特性的相位滞后量减小，在开环奈氏图上希望曲线不要到达第二象限，只在第四、第三象限，就不会包围 $(-1, j0)$ 点。其开环奈氏图示于图(b)。

本例子说明，通过串联一阶微分环节的“校正”，作用，有可能使II型系统变得稳定。

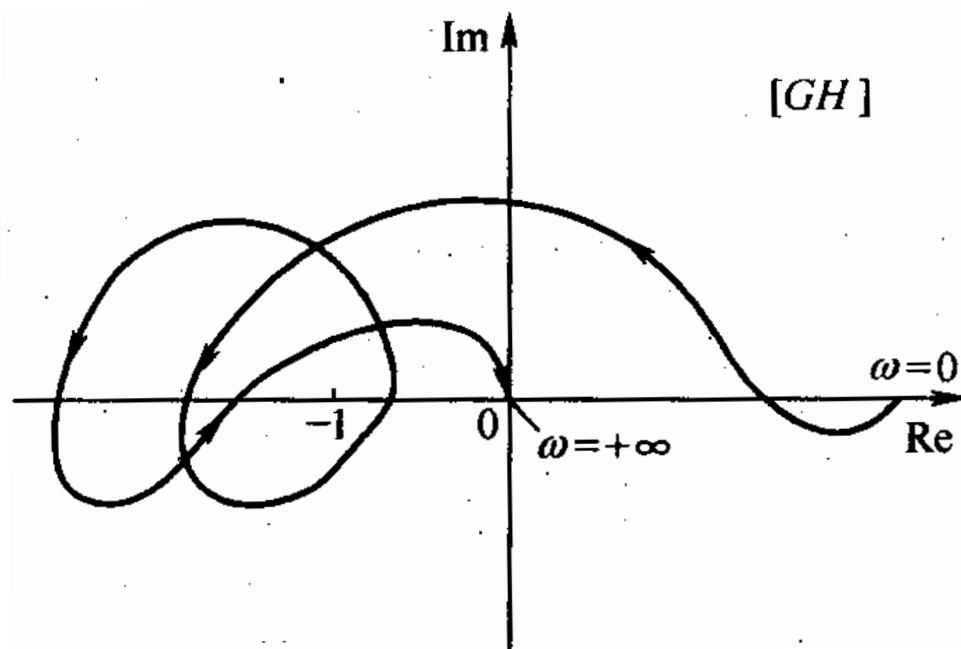


5.3.3 Nyquist判据应用举例

(3) 开环频率特性曲线比较复杂时奈氏判据的应用

如下图所示的开环奈氏图，若用对 $(-1, j0)$ 点的包围圈数来确定 N ，就很不方便，为此引出“穿越”的概念。

如下所谓“穿越”，指开环奈氏曲线穿过 $(-1, j0)$ 点左边的实轴部分。若曲线由上而下穿过 $-1 \rightarrow -\infty$ 实轴段时称“正穿越”，曲线由下而上穿过时称“负穿越”。



复杂系统的开环奈氏图



5.3.3 Nyquist判据应用举例

如下穿过 $(-1, j0)$ 以左的实轴一次，则穿越次数为 1，若曲线始于或止于 $(-1, j0)$ 以左的实轴上，则穿越次数为 1/2。

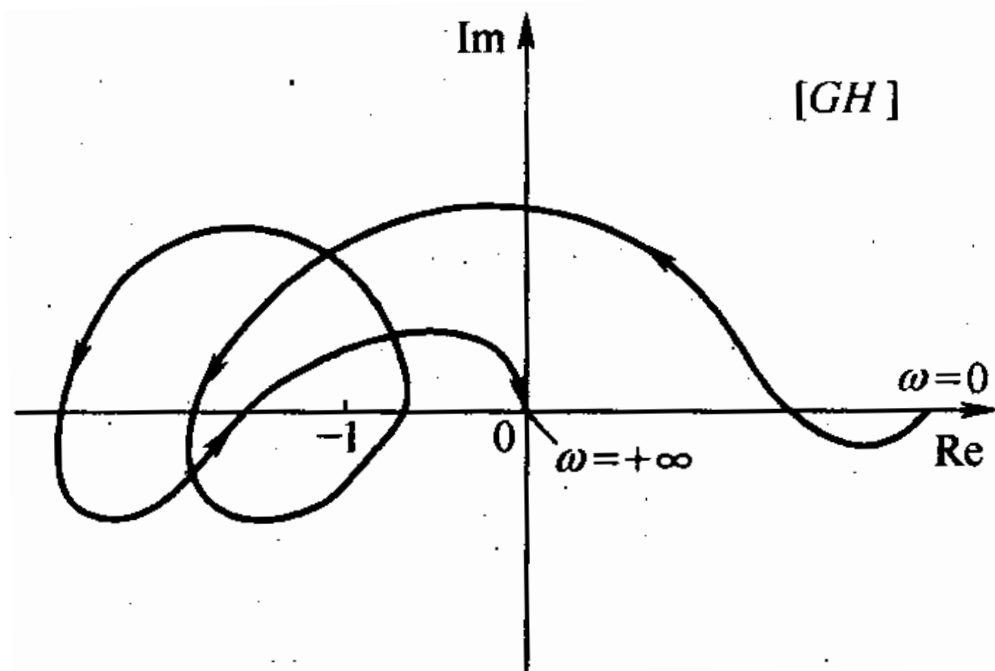
正穿越相当于奈氏曲线逆时针包围 $(-1, j0)$ 点，对应相角增大，负穿越相当于曲线顺时针包围 $(-1, j0)$ 点，对应相角减小，注意，曲线穿过 $(-1, j0)$ 点以右的实轴不谓穿越。

这样，奈氏判据可以写成：当 ω 从 0 变到 $+\infty$ 时，若开环频率特性曲线在 $(-1, j0)$ 点以左实轴上的正穿越次数减去负穿越次数等于 $P/2$ ，则系统是稳定的，否则不稳定。其中 P 为开环右极点数。



5.3.3 Nyquist判据应用举例

应用这个判据可判断图示复杂系统的稳定性，由图看出，正穿越次数为2，负穿越次数为1，开环右极点数 $P=2$ 。正穿越次数减去负穿越次数等于 $P/2$ ，所以系统稳定。



5.3.3 Nyquist判据应用举例

(4) 对数频率特性的奈氏判据

开环频率特性 $G(j\omega)H(j\omega)$ 可以用奈氏图表示，也可以用Bode图表示，这两种图形有如下对应关系：

① 奈氏图上的单位圆（圆心为坐标原点，半径为1）在Bode图的幅频特性上是零分贝线，因为单位圆上 $|G(j\omega)H(j\omega)| = 1$ 。故

$$20\lg|G(j\omega)H(j\omega)| = 20\lg 1 = 0 \text{ dB}$$

② 奈氏图上的负实轴在Bode图的相频特性上是 -180° 水平线，因为负实轴上的点，其相角是 -180° 。



5.3.3 Nyquist判据应用举例

(4) 对数频率特性的奈氏判据

根据上述“穿越”的概念，开环奈氏曲线对 $(-1, j0)$ 以左的实轴穿越时， $G(j\omega)H(j\omega)$ 向量应具备两个条件：幅值大于1，相角等于 -180° 。穿越一次，相角等于 -180° 一次。幅值小于1时无所谓“穿越”。把这两个条件转换在开环 Bode 图上，就是 $L(\omega) > 0$ dB时，相频曲线穿过 -180° 线一次，谓一次穿越， $L(\omega) < 0$ dB时无所谓“穿越”。

正穿越为角度增大，在奈氏图上，自上而下穿过时幅角增大为正穿越。在Bode图上， $L(\omega) > 0$ 下的相频曲线自下而上穿过 -180° 线时幅角增大为正穿越，反之，相频曲线由上而下穿过 -180° 线角度减小，为负穿越。



5.3.3 Nyquist判据应用举例

根据上述Bode图与Nyquist图的对应关系，对数频率特性的奈氏判据表述如下：

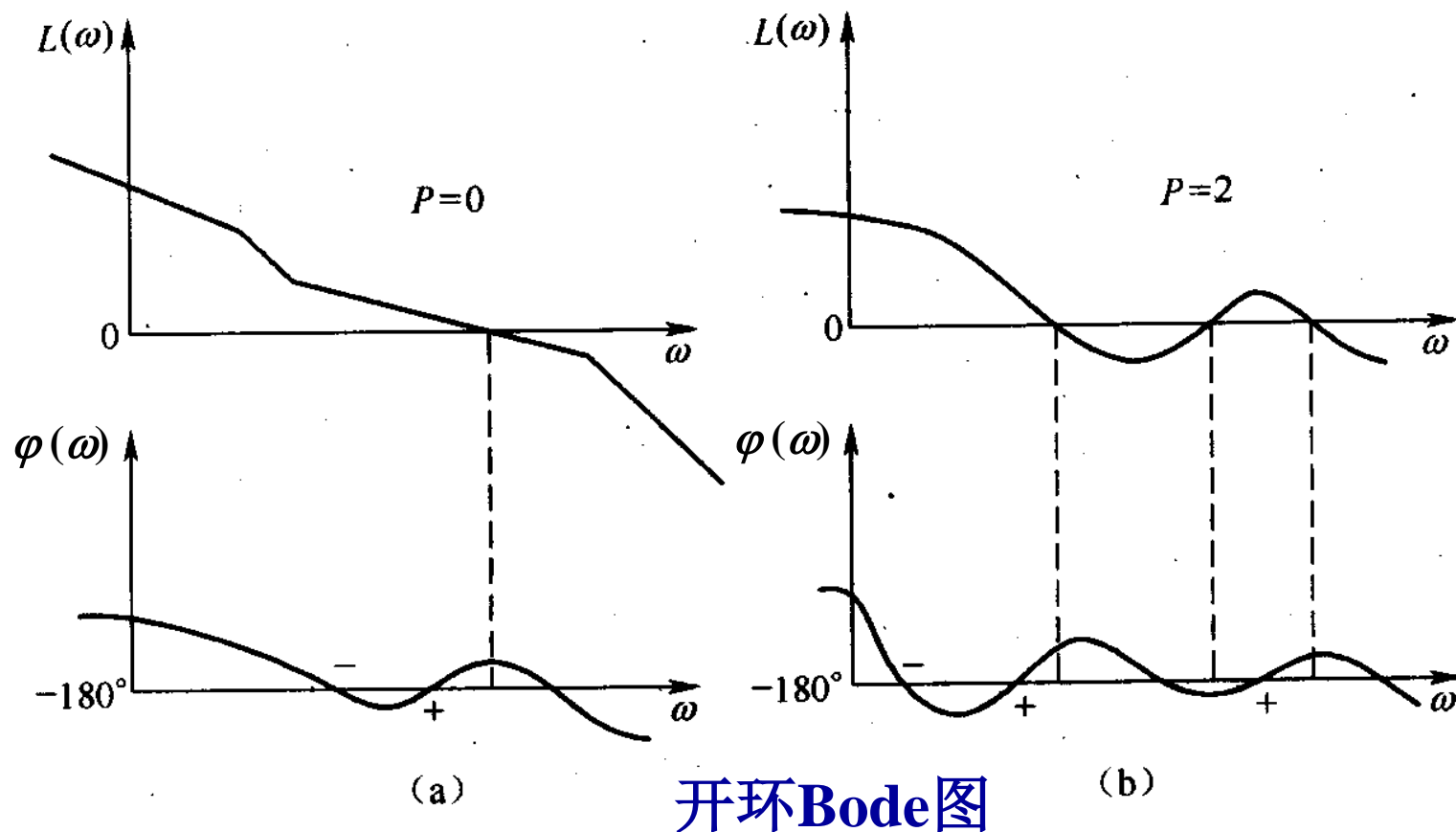
系统稳定的充要条件是：在开环Bode图上 $L(\omega) > 0$ dB 的所有频段内，相频特性曲线 $\varphi(\omega)$ 在 -180° 线上正负穿越次数之差等于 $P/2$ 。

如果恰在 $L(\omega) = 0$ dB 处相频曲线穿过 -180° 线，则系统处于临界稳定状态。



5.3.3 Nyquist判据应用举例

用上述判据，可知下图所示两个开环Bode图对应的系统，闭环状态下都是稳定的。



5.3.3 Nyquist判据应用举例

注意:

如遇到开环传递函数中含有积分环节时, 应当按上面所述开环有 $s = 0$ 的极点的情况处理, 将Bode图中对数相频曲线的起始端 ($\omega \rightarrow 0$ 端) 与其它环节 (除去积分环节) 在 $\omega \rightarrow 0$ 时的相角之和 φ_0 联接起来, 再检查是否穿越 -180° 线。此时如果 φ_0 起始于 -180° , 算半次穿越, 其正负仍按相角增加为正, 相角减小为负。



5.3.3 Nyquist判据应用举例

例题13： 试用Bode图判断具有下列开环传递函数的非最小相位系统的稳定性。

$$G(s)H(s) = \frac{10(s+3)}{s(s-1)}$$

解： (a) 将传递函数化成标准形式

$$G(s)H(s) = \frac{30(\frac{s}{3} + 1)}{s(s-1)}$$

(b) 作出开环Bode图。

把开环传递函数分解成四个基本环节：

i) 放大环节 $K=30$, $20\lg 30=29.5\text{dB}$;

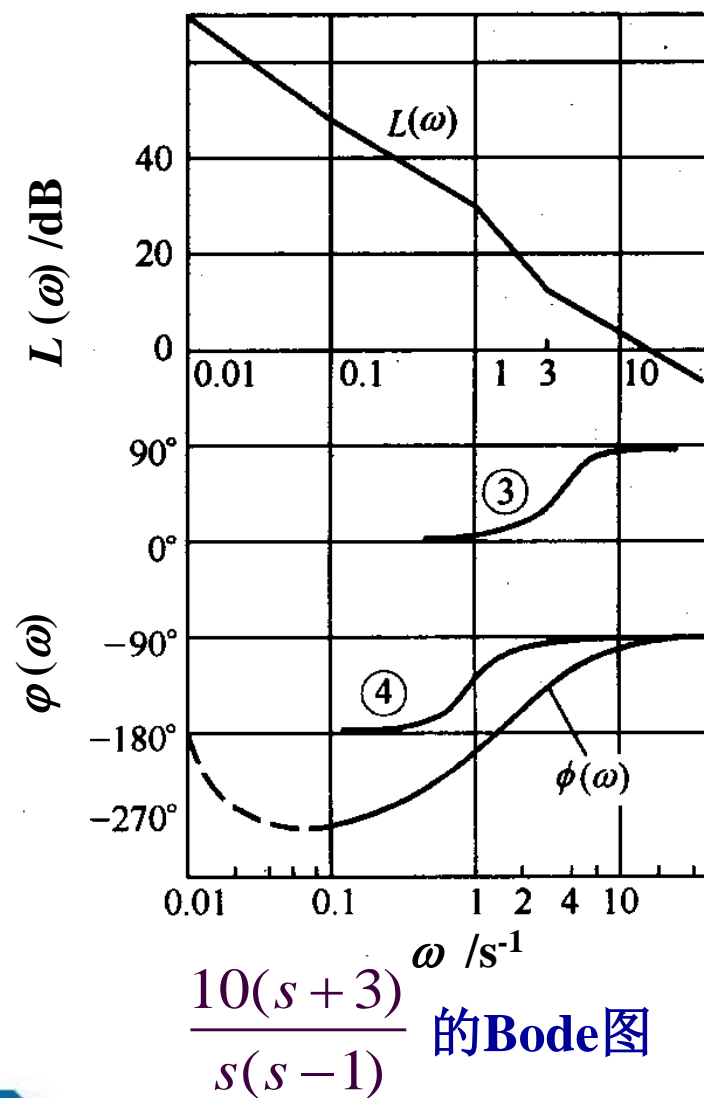
ii) 积分环节 $1/s$;



5.3.3 Nyquist判据应用举例

iii) 一阶微分环节 $s/3+1$ ，转折频率为3，其相频曲线如下图中曲线③所示；

iv) 一阶不稳定环节 $1/(s-1)$ ，转折频率为1，它的幅值与惯性环节 $1/(s+1)$ 的幅值相同，但 ω 从 $0 \rightarrow +\infty$ 变化时 $1/(s-1)$ 的幅角是由 -180° 变化到 -90° ，其相频曲线如图中曲线④所示。



5.3.3 Nyquist判据应用举例

(c) 判断闭环系统的稳定性。

开环传递函数中有一个右极点， $P=1$ 。

根据上述奈氏判据检查 $L(\omega) > 0$ dB 的频率范围内相频曲线在 -180° 线上的穿越情况。相频曲线起于 -270° 线，终于 -90° 线，有一次正穿越。但此时应考虑开环传递函数中有 $s = 0$ 的极点的情况，须做相应的处理。该系统开环传递函数中含有一个积分环节，而其它三个环节在 $\omega \rightarrow 0$ 时的相角和为 $\varphi_0 = -180^\circ$ 。所以应当由 -180° 与相频特性起始端连起来再进行判断。连接部分如图中虚线所示，它相当于开环奈氏图中的辅助线(增补段)。经过增补以后的相频曲线起于 -180° 线向下行，所以计入半次负穿越。



5.3.3 Nyquist判据应用举例

最后按稳定判据：

$$\text{正穿越次数} - \text{负穿越次数} = 1 - 1/2 = P/2$$

所以，这个非最小相位系统是稳定的。但是，若不按开环有 $s = 0$ 极点的情况处理，必然得到错误的结果。



5.3.3 Nyquist判据应用举例

(5) 延时系统稳定性的判别

设带有延时环节的反馈控制系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = G_1(s)H_1(s)e^{-\tau s}$$

式中, $G_1(s)H_1(s)$ 是除去延时环节的开环传递函数, τ 是延迟时间, 单位为 s。上式表明延时环节在前向通道或在反馈通道中串接, 对系统的稳定性影响是一样的。

延时环节 $e^{-\tau s}$ 的频率特性 $e^{-j\omega\tau}$ 的幅值为 1, 相角为 $-\omega\tau$ 。有延时环节的开环频率特性及幅频、相频特性为

$$G(j\omega)H(j\omega) = G_1(j\omega)H_1(j\omega)e^{-j\omega\tau}$$

$$|G(j\omega)H(j\omega)| = |G_1(j\omega)H_1(j\omega)|$$

$$\angle G(j\omega)H(j\omega) = \angle G_1(j\omega)H_1(j\omega) - \omega\tau$$



5.3.3 Nyquist判据应用举例

可见有延时环节对 $G_1(s)H_1(s)$ 的幅值无影响，只是相位比对应的没有延时环节的系统要滞后，也就是使 $G_1(j\omega)H_1(j\omega)$ 向量在每一个 ω 上都按顺时针方向多旋转 $\omega\tau$ 弧度。

应用有延时环节的开环奈氏图判断闭环系统稳定性的方法和前边奈氏判据的用法是一样的。

例如有延时环节的系统，其开环传递函数是

$$\begin{aligned} G(s)H(s) &= G_1(s)H_1(s)e^{-s\tau} \\ &= \frac{e^{-s\tau}}{s(s+1)(s+2)} \end{aligned}$$

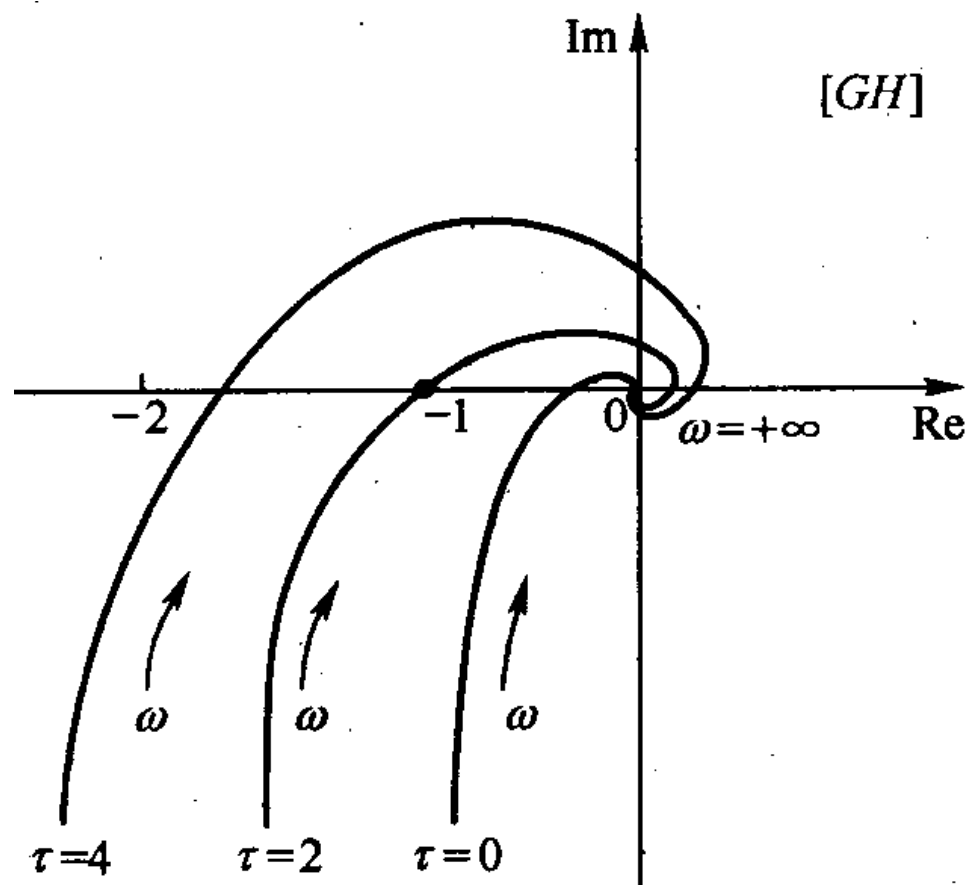
系统中加入延时环节 $e^{-s\tau}$ 后，开环奈氏图随着延时时间常数 τ 取值的不同而变化，如下图。



5.3.3 Nyquist判据应用举例

取不同 τ 值时的三条曲线进行对比。由图可见， $\tau=0$ 时，也就是没有延时环节存在时，闭环系统是稳定的。

随着 τ 的增大，系统的稳定性变坏，当 $\tau=2\text{s}$ 时， $G(j\omega)H(j\omega)$ 曲线通过 $(-1, j0)$ 点，系统处于临界稳定状态。 $\tau=4\text{s}$ 时，系统变得不稳定。



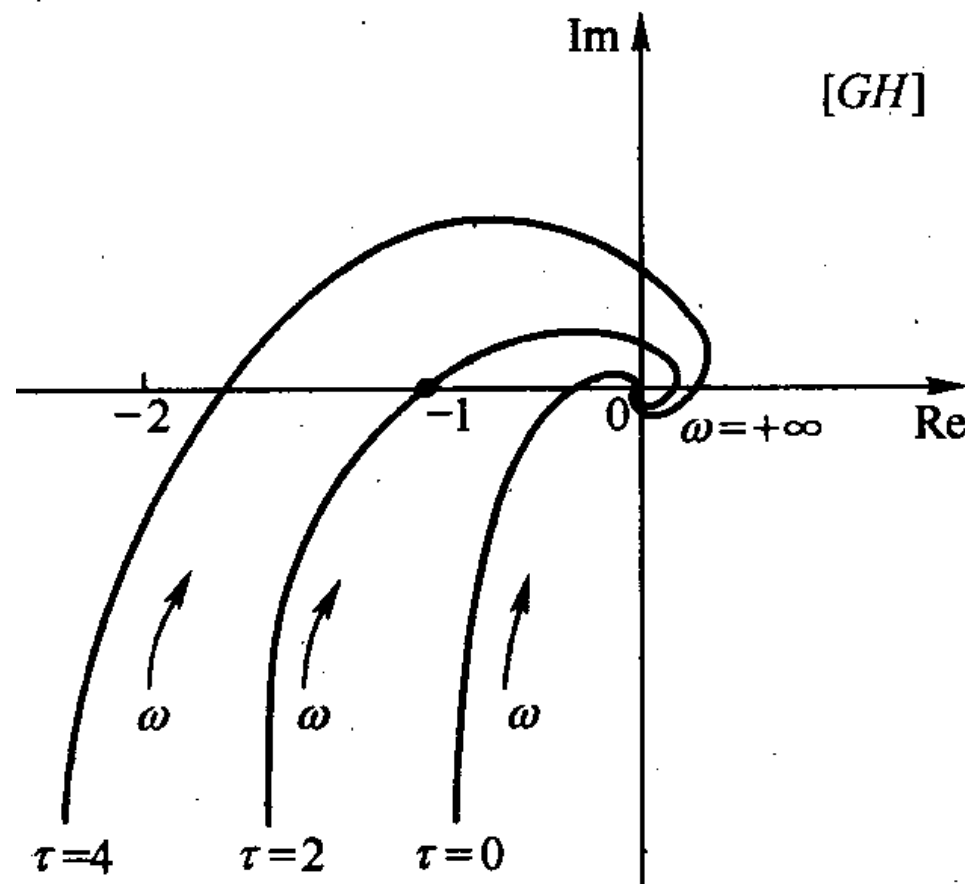
$$\frac{e^{-j\omega\tau}}{j\omega(j\omega+1)(j\omega+2)}$$
 的奈氏图



5.3.3 Nyquist判据应用举例

延时环节常常使系统的稳定性变坏，而实际系统中又经常不可避免地存在延时环节，延迟时间 τ 则几毫秒，长则数分钟。

为了提高系统的稳定性，应当尽量减小延迟时间。



$$\frac{e^{-j\omega\tau}}{j\omega(j\omega+1)(j\omega+2)}$$
 的奈氏图



作业： p.126

5-4、 5-5

