工程控制原理

4. 频率特性分析

4.7 频率实验法估计系统的数学模型

主讲：李敏

上海大学
机电工程与自动化学院

4.7 频率实验法估计系统的数学模型

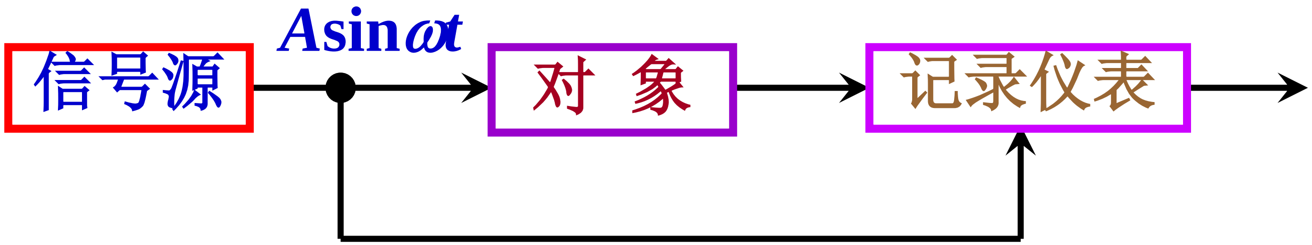
如果一个系统的结构参数已知，则可以通过理论解析的方法推演出系统的数学模型。

对于一些结构、参数和运动机理不很了解或者根本不了解的系统，却难以用分析方法建立其数学模型。

这时可以运用频率响应实验确定系统的数学模型。

属于系统辨识的内容。

4.7.1 频率响应实验法的一般步骤



频率响应实验原理图

(1) 选择信号源输出的正弦信号的幅值，以使系统处于非饱和状态。

(2) 在一定频率范围内，改变输入的正弦信号的频率，记录各频率点处系统输出信号的波形。

(3) 由稳态段的输入输出信号的幅值比和相位差绘制对数频率特性曲线（Bode图）。

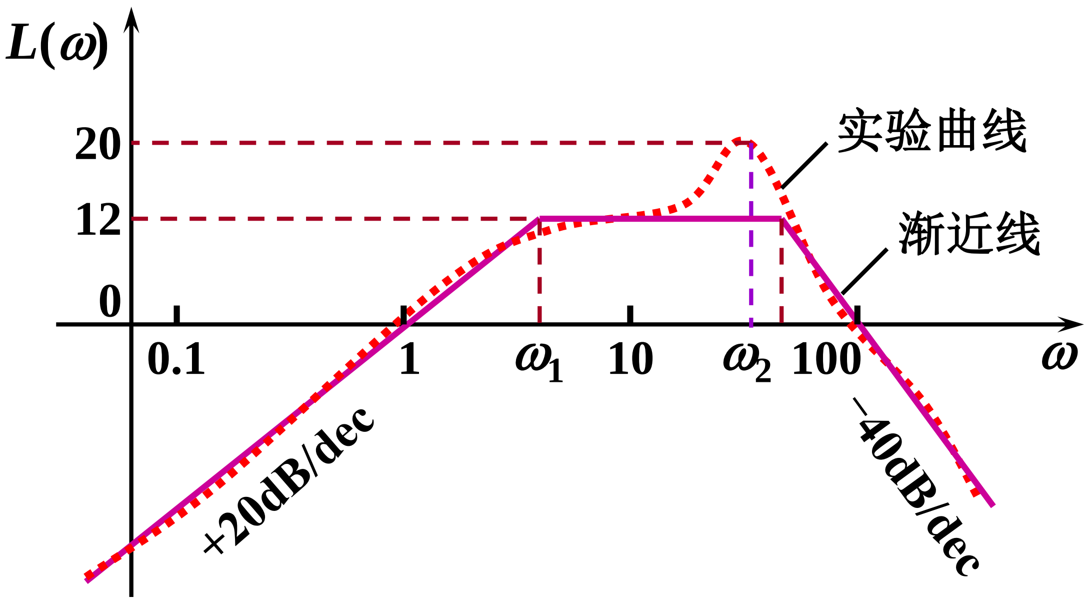
4.7.1 频率响应实验法的一般步骤

(4) 从低频段起，将实验所得的对数幅频特性曲线用斜率为0dB/dec，±20dB/dec，±40dB/dec，…等直线分段近似，获得对数幅频渐近特性曲线。

(5) 由对数幅频渐近特性曲线确定最小相位条件下系统的传递函数。

4.7.2 例题

下图为由频率响应实验获得的某最小相位系统的对数幅频特性曲线和对数幅频渐近特性曲线，试确定系统的传递函数。



系统对数幅频特性曲线与对数幅频渐近特性曲线

解：

(1) 确定系统积分或微分环节的个数。

因为对数幅频渐近特性曲线的低频渐近线斜率为 -20ν dB/dec，本系统低频渐近线斜率为 +20dB/dec，且过点 $[\omega=1, L(\omega)=0]$，故有 $\nu=-1$，即：系统含有一个微分环节。

(2) 确定系统传递函数的结构形式。

由于对数幅频渐近特性曲线为分段折线，其上各转折点对应的频率为所含一阶环节或二阶环节的转折频率，每个转折频率处斜率的变化取决于环节的种类。

本系统共有两个转折频率：

$\omega=\omega_1$ 处，斜率变化为：−20dB/dec，对应于惯性环节；

4.7 频率实验法估计系统的数学模型

$\omega=\omega_2$ 处，斜率变化为：−40dB/dec，对应于振荡环节。系统Bode图在ω_2 附近存在谐振现象，可以确定为振荡环节。

因此，本例题所述系统应具有下述传递函数：

$$G(s)=\frac{Ks}{\left(1+\dfrac{s}{\omega_1}\right)\left(\dfrac{s^2}{\omega_2^2}+2\zeta\dfrac{s}{\omega_2}+1\right)}$$

式中，参数 ω_1，ω_2，ζ 及 K 待定。

(3) 由给定条件确定传递函数的参数。

低频渐近线的方程为

$$L_a(\omega)=20\lg\frac{K}{\omega^{\nu}}=20\lg K-20\nu\lg\omega$$

由给定点 $[\omega, L_a(\omega)] = (1, 0)$ 及 $\nu = -1$，得 $K = 1$ 。

根据直线方程式

$$L_a(\omega_a)-L_a(\omega_b)=k\left(\lg\omega_a-\lg\omega_b\right)$$

由给定点 $[\omega_a, L_a(\omega_a)] = (1, 0)$、$[\omega_b, L_a(\omega_b)] = (\omega_1, 12)$ 及 $k = 20$，得

$$\omega_1=10^{\frac{12}{20}}=3.98$$

(3) 由给定条件确定传递函数的参数。

低频渐近线的方程为

$$L_{\mathrm{a}}(\omega)=20\lg\frac{K}{\omega^{\nu}}=20\lg K-20\nu\lg\omega$$

由给定点 [ω，$L_{\mathrm{a}}(\omega)$] = (1，0) 及 ν = −1，得 K = 1 。

根据直线方程式

$$L_{\mathrm{a}}(\omega_{\mathrm{a}})-L_{\mathrm{a}}(\omega_{\mathrm{b}})=k\left(\lg\omega_{\mathrm{a}}-\lg\omega_{\mathrm{b}}\right)$$

再由给定点 [ω_{a}，$L_{\mathrm{a}}(\omega_{\mathrm{a}})$] = (−100，0)、[$\omega_{\mathrm{b}}$，$L_{\mathrm{a}}(\omega_{\mathrm{b}})$] = ($\omega_2$，12)及 k = −40，得

$$\omega_2=10^{\left(-\frac{12}{40}+\lg 100\right)}=50.1$$

4.7 频率实验法估计系统的数学模型

由已学知识，在谐振频率 ω_r 处，振荡环节的谐振峰值为

$$20\lg M_r = 20\lg\frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

根据叠加性质，本题中 20lgM_r=20−12=8 (dB)，故有

$$4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 10^{-\frac{8}{20}} = 0$$

解得

$$\zeta_1 = 0.335, \qquad \zeta_2 = 0.942,$$

因为只有在0<ζ<0.707时，存在谐振峰值，故应取

$$\zeta = 0.335$$

4.7 频率实验法估计系统的数学模型

因此，所测得系统的传递函数为

$$G(s)=\frac{s}{\left(\dfrac{s}{3.98}+1\right)\left(\dfrac{s^2}{50.1^2}+\dfrac{0.67}{50.1}s+1\right)}$$

注意： 实际系统并不都是最小相位系统，而最小相位系统可以与某些非最小相位系统具有相同的对数幅频特性曲线，因此具有非最小相位环节和延迟环节的系统，还需依据上述环节对相频特性的影响并结合实测相频特性予以确定。

本章总结

(1) 频率特性反映线性系统在正弦谐波信号作用下，系统稳态输出与输入之比与频率的关系特性。系统频率特性与传递函数具有如下的简单关系：

$$G(\mathrm{j}\omega)=G(s)\big|_{s=\mathrm{j}\omega}$$

(2) 系统的频率特性一般分为幅频特性和相频特性。

幅频特性表示系统稳态输出的幅值与输入信号的幅值之比随输入信号频率变化的关系特性；

相频特性表示系统稳态输出信号的相位与输入信号的相位之差随输入信号频率变化的关系特性。

本 章 总 结

频率特性 $$G(\mathrm{j}\omega)=A(\omega)e^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}$$

幅频特性 $$A(\omega)=\frac{\left|X_{\mathrm{o}}(\mathrm{j}\omega)\right|}{\left|X_{\mathrm{i}}(\mathrm{j}\omega)\right|}$$

相频特性 $$\varphi(\omega)=\varphi_{\mathrm{o}}(\omega)-\varphi_{\mathrm{i}}(\omega)$$

(3) 系统频率特性的图形表示方法主要有两种：极坐标图法和对数频率特性图法。

极坐标图又称Nyquist图，它是变量 s 沿复平面上的虚轴变化时在 $G(s)$ 平面上得到的映射。频率 ω 从 $0\to+\infty$ 的极坐标曲线 $G(\mathrm{j}\omega)$ 和频率 ω 从 $0\to-\infty$ 的极坐标曲线 $G(-\mathrm{j}\omega)$ 对称于 $G(s)$ 平面上的实轴。

本 章 总 结

对数频率特性图又称Bode图，它是将系统的幅频特性和相频特性分别画出的一种图形表示，分别称为对数幅频特性图和对数相频特性图。对于最小相位系统，对数幅频特性图与相频特性图具有确定的对应关系。

(4) 利用频率特性图分析系统的稳定性是频域分析方法的特色，它采用开环频率特性图来分析闭环系统的稳定性，其物理意义明确。

(5) 系统的频域响应特性与时域响应特性有着密切的关系，这种关系可归结为反映系统性能的频域指标与时域指标之间的关系。它对于一阶系统和二阶系统是确定的，而对于高阶系统，由于其复杂性很难建立起确切的关系。

作业：p.103-105

4-1、 4-2、 4-3、4-4、4-5、4-6、4-7