# 工 程 控 制 原 理

## 5. 系统的稳定性

## 5.2 Routh-Hurwitz稳定性判据

主讲：李敏

## 5.2 Routh-Hurwitz稳定性判据

劳斯(Routh)和赫尔维茨(Hurwitz)分别于1877年和1895年独立提出了判断系统稳定性的代数判据，称为Routh-Hurwitz稳定性判据。其根据是：使系统稳定时，必须满足系统特征方程式的根全部具有负实部。

该判据并不直接对特征方程式求解，而是利用特征方程式(即高次代数方程)根与系数的代数关系，由特征方程中已知的系数，间接判别出方程的根是否具有负实部，从而判定系统是否稳定。因此又称作代数稳定性判据。

下面介绍应用代数判据分析系统的稳定性问题，关于代数判据的数学推导过程从略。

## 5.2.1 Hurwitz稳定判据

系统的特征方程式可写成下面的形式

$$1+G(s)H(s)=a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+a_{n-2}s^{n-2}+\cdots+a_1 s+a_0=0$$

式中，首项系数 $a_n>0$。

系统稳定的充要条件是：

(1) 系统特征方程式的各项系数全部为正值，即$a_i>0$ ($i$=0, 1, 2, ⋯, $n$)。（必要条件）

(2) 由各项系数组成的Hurwitz $n$阶行列式中各阶子行列式$\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n$都大于零。

# 5.2.1 Hurwitz稳定判据

系统（特征方程：$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$）满足这两个条件的系统是稳定的，否则系统不稳定。这就是**Hurwitz判据**。其中**Hurwitz**行列式如下

$$
\Delta_n = \begin{vmatrix}
a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & \cdots & 0 \\
a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & a_1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & a_2 & a_0
\end{vmatrix}
$$

$\Delta_1$, $\Delta_2$, $\Delta_3$

# 5.2.1 Hurwitz稳定判据

$\Delta_n$是按下列规则建立的：

首先在主对角线上从$a_{n-1}$开始依次写进特征方程的系数，一直写到$a_0$为止；

然后由主对角线上的系数出发，写出$\Delta_n$中每一列的各元素，每列由上到下系数 $a$ 的脚标递增，由下到上 $a$ 的脚标递减。

当写到特征方程中不存在的系数时以零代替。

**例题1：** 系统的特征方程为

$$2s^4 + s^3 + 3s^2 + 5s + 10 = 0$$

试用Hurwitz判据判别系统的稳定性。

**解：** 由特征方程知，各项系数为

$$a_4 = 2, \quad a_3 = 1, \quad a_2 = 3, \quad a_1 = 5, \quad a_0 = 10$$

均为正值。满足判据的必要条件$a_i$>0，再检查第二个条件，

$$\Delta_1 = a_3 = 1 > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ a_4 & a_2 \end{vmatrix} = a_3 a_2 - a_4 a_1 = 1\times 3 - 2\times 5 = -7 < 0$$

由于$\Delta_2$<0，因此不满足Hurwitz行列式全部为正的条件，系统不稳定，$\Delta_3$、$\Delta_4$ 可不必再进行计算。

# 5.2.1 Hurwitz稳定判据

为了减少行列式的计算工作量，经证明，如果满足$a_i>0$的条件，再计算半数的行列式，即$\Delta_{n-1}>0$，$\Delta_{n-3}>0$，$\Delta_{n-5}>0$，…，进行检验就可以了。

**例题2：** 单位反馈系统的开环传递函数$G(s)$如下式，试求使系统稳定的$K$值范围。

$$G(s)=\frac{K}{s(0.1s+1)(0.25s+1)}$$

**解：** 系统的闭环特征方程为

$$s(0.1s+1)(0.25s+1)+K=0$$

$$0.025s^3+0.35s^2+s+K=0$$

特征方程各项系数为

$$a_3=0.025,\ a_2=0.35,\ a_1=1,\ a_0=K$$

# 5.2.1 Hurwitz稳定判据

根据Hurwitz稳定判据的条件：

(1) $a_i > 0$，则要求 $K > 0$；

(2) 只须检验$\Delta_2 > 0$，即

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} = a_2 a_1 - a_3 a_0 = 0.35 \times 1 - 0.025K > 0$$

故有

$$K < 14$$

所以保证系统稳定的$K$值范围是$0 < K < 14$。

由此可以看出，$K$ 值越大，系统的稳定性越差，$K$ 值超出一定范围，系统会变得不稳定。上述判据不仅可以判断系统是否稳定，而且还可以根据稳定性的要求确定系统参数的允许范围。

# 5.2.1 Hurwitz稳定判据

对于特征方程阶次较低 (如 $n<4$) 的系统来说，稳定条件可以写成下列简单的形式：

$n=2$：$a_2>0$，$a_1>0$，$a_0>0$；

$n=3$：$a_3>0$，$a_2>0$，$a_1>0$，$a_0>0$；$a_2a_1-a_3a_0>0$；

$n=4$：$a_4>0$，$a_3>0$，$a_2>0$，$a_1>0$，$a_0>0$；

$a_3a_2a_1-a_4a_1^2-a_3^2a_0>0$。

## 5.2.2 Routh稳定判据

系统特征方程阶次越高，利用Hurwitz判据时，计算行列式的工作量越大。对于高阶的系统，可采用**Routh判据**判别系统的稳定性。步骤如下：

(1) 列出系统特征方程为

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$$

式中，$a_n > 0$，各项系数均为实数。检查各项系数是否都大于零，若都大于零，则进行第二步。

# 5.2.2 Routh稳定判据

(2) 按系统的特征方程式 $a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$ 列写

**Routh表:**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $s^n$ | $a_n$ | $a_{n-2}$ | $a_{n-4}$ | $a_{n-6}$ | $\cdots$ |
| $s^{n-1}$ | $a_{n-1}$ | $a_{n-3}$ | $a_{n-5}$ | $a_{n-7}$ | $\cdots$ |
| $s^{n-2}$ | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | $b_4$ | $\cdots$ |
| $s^{n-3}$ | $c_1$ | $c_2$ | $c_3$ | $c_4$ | $\cdots$ |
| $s^{n-4}$ | $d_1$ | $d_2$ | $d_3$ | $d_4$ | $\cdots$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | |
| $s^0$ | $\cdots$ | | | | |

$$b_1 = -\frac{1}{a_{n-1}}\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix},$$

$$b_2 = -\frac{1}{a_{n-1}}\begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix},$$

$$b_3 = -\frac{1}{a_{n-1}}\begin{vmatrix} a_n & a_{n-6} \\ a_{n-1} & a_{n-7} \end{vmatrix},$$

……

$$c_1 = -\frac{1}{b_1}\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix},$$

$$c_2 = -\frac{1}{b_1}\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix},$$

$$c_3 = -\frac{1}{b_1}\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-7} \\ b_1 & b_4 \end{vmatrix},$$

……

# 5.2.2 Routh稳定判据

计算上述各数的公式是有**规律**的：自 $s^{n-2}$ 行以下，每行的数都可由该行上边两行的数算得，等号右边的二阶行列式中，第一列都是上两行中第一列的两个数，第二列是被算数右上方的两个数，等号右边的分母是上一行中左起第一个数。

由Routh表可以看出，Routh判据和Hurwitz判据实质上是相同的。Routh表中第一列各数的值和Hurwitz行列式之间有如下关系：

$$a_n = a_n,\ \ a_{n-1} = \Delta_1,\ \ b_1 = \Delta_2/\Delta_1,\ \ c_1 = \Delta_3/\Delta_2,\ \ d_1 = \Delta_4/\Delta_3,\ \ \cdots$$

# 5.2.2 Routh稳定判据

**(3)** 考察表中第一列各数的符号：若第一列各数均为正数，则闭环特征方程所有根具有负实部，系统稳定。如果第一列中有负数，则系统不稳定，第一列中数值符号的改变次数即等于系统特征方程含有正实部根的数目。

**Routh**判据说明了两方面的问题：

- 给出了系统稳定的判断方法；
- 给出了不稳定情况下判断系统特征方程在**[s]**右半平面根的个数。

在具体计算中为了方便，常常把表中某一行的数都乘(或除)以一个正数，而不会影响第一列数值的符号，即不影响稳定性的判别。表中空缺的项，运算时以零代入。

**例题3：** 系统的特征方程为

$$s^5+6s^4+14s^3+17s^2+10s+2=0$$

试用Routh判据判别系统是否稳定。

**解：** 列出Routh表 (下边列出两个表，左边的表为了和原Routh表的形式对照，右边一个表是为了数值计算方便，二者对判断系统稳定性的作用是一样的)。

| | | | |
|---|---|---|---|
| $s^5$ | 1 | 14 | 10 |
| $s^4$ | 6 | 17 | 2 |
| $s^3$ | 67/6 | 58/6 | |
| $s^2$ | 791/67 | 2 | |
| $s^1$ | 6150/791 | | |
| $s^0$ | 2 | | |

或者

| | | | |
|---|---|---|---|
| $s^5$ | 1 | 14 | 10 |
| $s^4$ | 6 | 17 | 2 |
| $s^3$ | 67 | 58 | (同乘以6) |
| $s^2$ | 791 | 134 | (同乘以67) |
| $s^1$ | 36900 | | (同乘以791) |
| $s^0$ | 134 | | |

由上面计算可知Routh表中第一列数值全部为正实数，所以系统是稳定的。

**例题4：** 已知系统的特征方程为

$$s^5+3s^4+2s^3+s^2+5s+6=0$$

判断系统的稳定性。

**解：** 它的所有系数均为正实数。列出Routh表

| | | | |
|---|---|---|---|
| $s^5$ | 1 | 2 | 5 |
| $s^4$ | 3 | 1 | 6 |
| $s^3$ | 5 | 9 | |
| $s^2$ | -11 | 15 | |
| $s^1$ | 174/11 | | |
| $s^0$ | 15 | | |

(同乘以3)

(同乘以5/2)

# 5.2.2 Routh稳定判据

考察第一列数值符号的变化，数值在 $5 \to -11 \to 174/11$ 处符号发生了两次改变，所以系统不稳定，特征方程有两个正实部根。

## 5.2.3 Routh判据特殊情况

在应用Routh判据时，有时会遇到一些特殊情况，使判别无法进行下去，一般有以下两种情况：

(1) Routh表中某一行第一个数为零，而该行其余元素不全为零。

在这种情况下，计算下一行第一个元素时，该元素必将趋于无穷大，以致Routh表的计算无法进行，这时可用一个很小的正数 $\varepsilon$ 来代替这个零，从而可以使Routh表继续算下去。

# 5.2.3 Routh判据特殊情况

**例题5：** 设系统的特征方程为

$$s^4+3s^3+s^2+3s+1=0$$

试利用Routh判据判别系统的稳定性。

**解：** 特征方程的各项系数均大于零，满足系统稳定的必要条件。其Routh表为

| | | | |
|---|---|---|---|
| $S^4$ | 1 | 1 | 1 |
| $S^3$ | 3 | 3 | |
| $S^2$ | $\varepsilon$ | 1 | |
| $S^1$ | $3-3/\varepsilon$ | | |
| $S^0$ | 1 | | |

因为ε很小而且o<ε<1，则3−3/ε<0，所以表中第一列变号两次，故系统有两个正实部根，是不稳定的。

# 5.2.3 Routh判据特殊情况

(2)劳斯表中某一行的元素全为零。

在这种情况下，可以用该行上面一行的元素构成一个辅助多项式*P*(*s*)，取此辅助多项式的一阶导数所得到的一组系数来代替该行，然后继续计算Routh表中的其余各个元素，最后再按照前述方法进行判断。

**例题6：** 设系统的特征方程为

$$s^6+2s^5+8s^4+12s^3+20s^2+16s+16=0$$

试利用Routh判据判别系统的稳定性。

**解：** 特征方程的各项系数均大于零，满足系统稳定的必要条件。其Routh表为

# 5.2.3 Routh判据特殊情况

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $s^6$ | 1 | 8 | 20 | 16 |
| $s^5$ | 2 | 12 | 16 | 0 |
| $s^4$ | 2 | 12 | 16 | 0 |
| $s^3$ | $0\rightarrow 8$ | $0\rightarrow 24$ | 0 | |
| $s^2$ | 6 | 16 | 0 | |
| $s^1$ | 8/3 | 0 | | |
| $s^0$ | 16 | 0 | | |

$$P(s)=2s^4+12s^2+16$$

$$P'(s)=8s^3+24s$$

## 5.2.3 Routh判据特殊情况

由上述**Routh**表可以看出，第一列中元素的符号全为正号，说明系统的特征方程没有正实部的根，即在[$s$]平面的右半平面没有闭环极点。但是，由于 $s^3$ 行的元素全为零，则说明存在两个大小相等符号相反的实根和(或)两个共轭虚根，可由辅助多项式构成的辅助方程 $P(s)=0$ 来求得。

$$P(s)=2s^4+12s^2+16=0$$

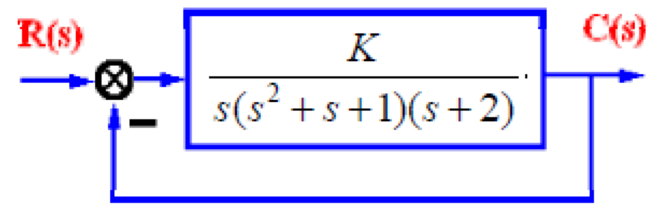
解上述辅助方程，可求得两对共轭虚根

$$p_{1,2}=\pm\sqrt{2}\mathrm{j}\,,\qquad p_{3,4}=\pm 2\mathrm{j}$$

系统存在共轭虚根，表明系统处于临界稳定状态。

# Routh判据典型应用——确定使系统稳定的参数范围

系统结构如图所示，确定使系统在$r(t)=t$作用下$e_{ss}$小于2的参数$K$的范围；




解： 1) 系统稳定要求

$$D(s)=s(s^2+s+1)(s+2)+K$$
$$=s^4+3s^3+3s^2+2s+K=0$$

$$
\begin{array}{llll}
s^4 & 1 & 3 & K \\
s^3 & 3 & 2 & \\
s^2 & 7/3 & K & \\
s^1 & 2-\dfrac{9K}{7}>0 \Rightarrow K<14/9 & & \\
s^0 & K>0 & &
\end{array}
$$

2) 稳态误差要求

$$e_{ss}=\frac{2}{K}<2 \Rightarrow K>1$$

故得$K$的范围为:

$$1<K<14/9$$

作业：p.126

5-1、 5-2