工 程 控 制 原 理

2. 数学模型与传递函数

主讲：李敏

上海大学
机电工程与自动化学院

2. 数学模型与传递函数

建立控制系统的数学模型，并在此基础上对控制系统进行分析、综合，是机电控制工程的基本方法。如果将物理系统在信号传递过程中的动态特性用数学表达式描述出来，就得到了组成物理系统的数学模型。

经典控制理论采用的数学模型主要以传递函数为基础。而现代控制理论采用的数学模型主要以状态空间方程为基础。而以物理定律及实验规律为依据的微分方程又是最基本的数学模型，是列写传递函数和状态空间方程的基础。

2.1 控制系统的数学模型

2.1.1 数学模型

对于一个复杂的物理系统，为了对系统的动态特性进行分析和综合，必须用数学表达式来描述该系统，这个表达式称为该系统的“数学模型”。由于动态过程中有关物理量都是时间的函数，所以，通常用微分方程来描述系统。

数学模型 —— 描述系统或元件的动态特性的数学表达式

建　　模 —— 深入了解元件及系统的动态特性，准确建立它们的数学模型

2.1.1 数学模型

数学模型是描述物理系统的运动规律、特性和输入输出关系的一个或一组方程式。

系统的数学模型可分为静态和动态数学模型。

静态数学模型：反映系统处于平衡点（稳态）时，系统状态有关属性变量之间关系的数学模型。即只考虑同一时刻实际系统各物理量之间的数学关系，不管各变量随时间的演化，输出信号与过去的工作状态（历史）无关。因此，静态模型都是代数式，数学表达式中不含有时间变量。

2.1 控制系统的数学模型

2.1.1 数学模型

动态数学模型：描述动态系统瞬态与过渡态特性的模型。也可定义为描述实际系统各物理量随时间演化的数学表达式。动态系统的输出信号不仅取决于同时刻的激励信号，而且与它过去的工作状态有关。微分方程或差分方程常用作动态数学模型。

对于给定的动态系统，数学模型不是唯一的。工程上常用的数学模型包括：微分方程，传递函数和状态方程。对于线性系统，它们之间是等价的。

针对具体问题，选择不同的数学模型。

2.1.2 建立控制系统数学模型的方法

物理系统往往比较复杂，因而必须作一些理想化的假设，获得简化的数学模型。

理论分析法（解析法）：

对系统各部分的运动机理进行分析，依据系统本身所遵循的有关定律列写数学表达式，并在列写过程中进行必要的简化。

实验研究法

根据系统对某些典型输入信号的响应或其它实验数据建立数学模型。即人为施加某种测试信号，记录基本输出响应。

对于比较复杂的系统，需要通过理论分析与实验研究结合起来，才能获得适用的数学模型。

2.1.3 线性系统与非线性系统

(1) 线性系统

若描述系统的微分方程是变量及其导数的一次有理整式，则此系统称为线性系统。线性系统可以用线性微分方程描述。

如果方程的系数为常数，则为线性定常系统；如果方程的系数是时间 t 的函数，则为线性时变系统。

线性系统的线性性质是指系统满足叠加性和齐次性。

❖叠加性：指当几个激励信号同时作用于系统时，总的输出响应等于每个激励单独作用所产生的响应之和。

❖齐次性：指当输入信号乘以某常数时，响应也倍乘相同的常数。

(2) 非线性系统

不是线性系统的系统称为非线性系统。非线性系统用非线性微分方程描述。

非线性系统不满足叠加性和齐次性。

系统中只要含有一个非线性性质的元件，就成为一个非线性系统。

许多机械系统各物理量之间的关系都是非线性的，即使对所谓的线性系统来说，也只是在一定的工作范围内保持线性关系。因此，研究机械系统的某些动态特性时，必须考虑系统中的非线性特征。

例

$$y(t)=a\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2}+b\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}+cx(t)$$

其中：*a*，*b*，*c*，*d* 均为常数 —— **线性定常系统**

$$y(t)=a(t)\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2}+b(t)\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}+c(t)x(t)$$

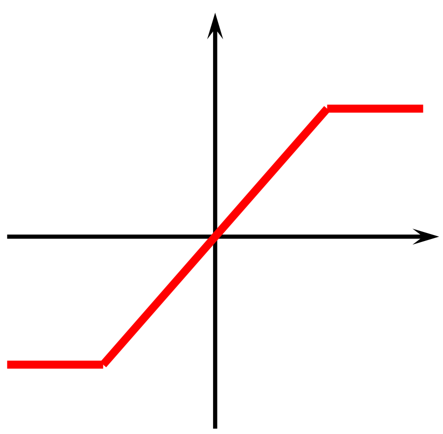
—— **线性时变系统**

$$y(t)=x^2(t)$$ —— **非线性系统**

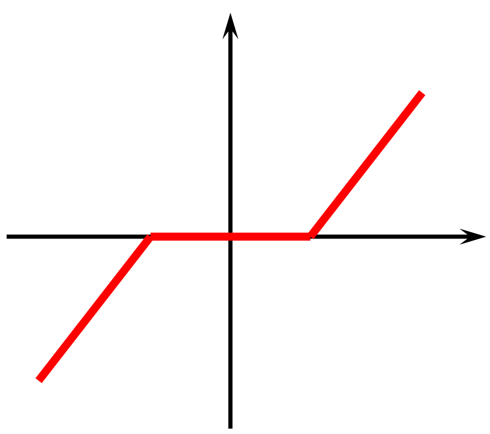
(2) 非线性系统

许多机械系统、电气系统、液压及气动系统等，其物理量之间都包含有非线性关系。例如：在大输入信号作用下，元件的输出量可能饱和(即饱和非线性)；在小信号输入下，元件没有输出量(即死区非线性)；某些元件中可能存在着平方非线性关系。如下图所示。

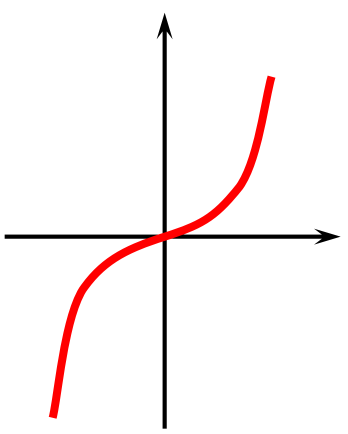
各种非线性因素的特性曲线



饱和非线性



死区非线性



平方律非线性

(2) 非线性系统

是否线性元件的判别：元件的输出与输入间关系为

一次幂函数 —— 线性元件

二次或高次幂函数、周期函数或超越函数 —— 非线性元件

判别系统数学模型微分方程是否非线性：

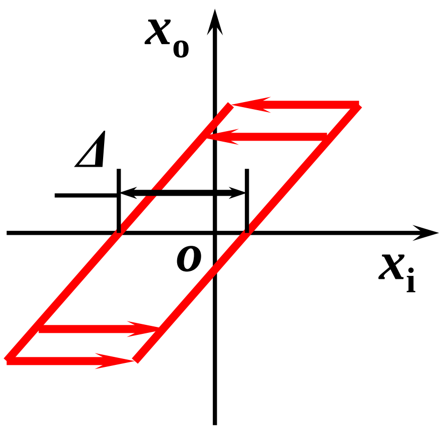
其中的函数出现高于一次的项，或者函数导数项的系数是输出量的函数。

2.1.3 线性系统与非线性系统

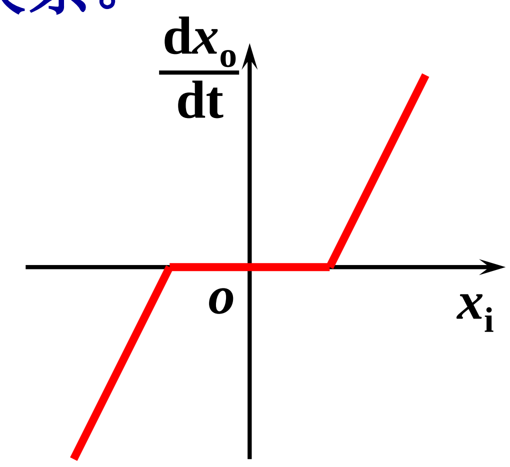
机械系统中常见的一些非线性问题

传动间隙：

由齿轮及丝杠螺母副组成的机床进给传动系统中，经常存在有传动间隙 $\varDelta$，使输入转角 x_i 和输出位移 x_o 之间有滞环关系。



传动间隙



死区

死区：

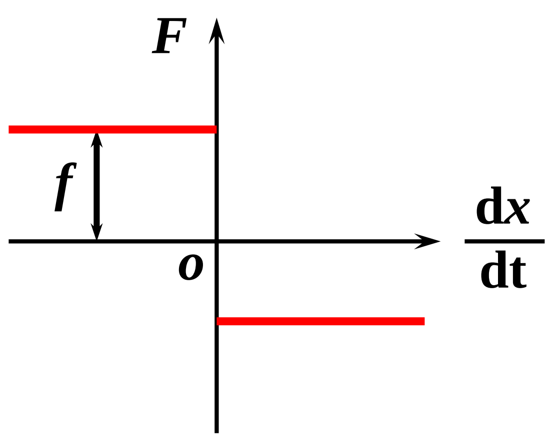
在死区范围内，系统有输入而没有输出。

例如：负开口的液压伺服阀

摩擦力：

机械滑动运动副，如：机床滑动导轨运动副、主轴套筒运动副、活塞液压缸运动副等，在运动中都存在摩擦力。

右图为**干摩擦力**（也称库伦摩擦力，其大小为 f ）与运动速度 **dx/dt** 的关系。摩擦力 f 总是与速度 **dx/dt** 的方向相反。



干摩擦力

2.1.3 线性系统与非线性系统

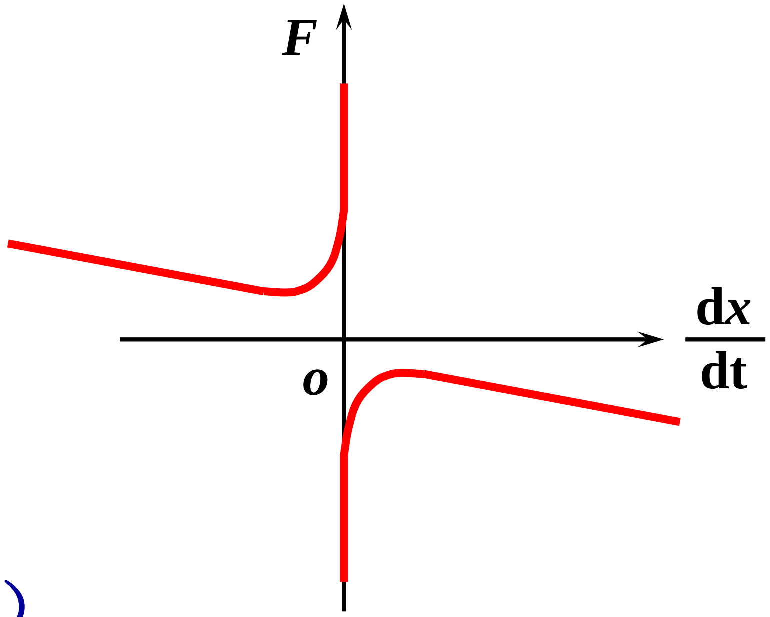
摩擦力：

实际运动副中的摩擦力与运动速度的大小有关，如右图。

*F*与dx/dt 的曲线大致分为三个阶段：

（*F*与dx/dt 的方向相反）

- 起动时的静动摩擦力；
  （摩擦力数值较大）
- 低速时的混合摩擦力；
  （摩擦力呈下降特性）
- 粘性摩擦力。
  （摩擦力随速度的增加而增加）



粘性摩擦力

2.1.4 系统非线性微分方程的线性化

工程上，绝对的线性元件和线性系统是不存在的；

数学上，非线性微分方程的求解困难，目前只能采用数值解法，但也存在较大的数值误差。

为了解决工程实际问题，必须对非线性微分方程进行线性化处理。

本质非线性性质：在工作点附近存在着不连续直线、跳跃、折线，以及非单值关系等严重非线性性质的元件或系统。

2.1.4 系统非线性微分方程的线性化

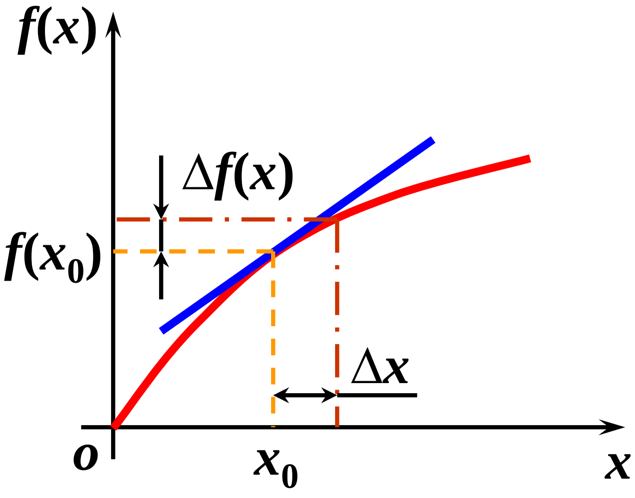
对于非本质非线性元件或系统，可以在工作点附近用切线来替代函数关系，这就是非线性数学模型的线性化方法之一（微小偏差法）。

系统正常工作时，通常都有一个预定工作点，即系统处于某一平衡位置，对于自动调节系统或随动系统，只要系统的工作状态稍一偏离此平衡位置，整个系统就会立即作出反应，并力图恢复原来的平衡位置。

2.1.4 系统非线性微分方程的线性化

具有连续变化的非线性函数的线性化，可用切线法或微小偏差法。在预定工作点处一个小范围内，将非线性特性用一断直线来代替。

一个变量的非线性函数$f(x)$，在x_0处连续可微，则可将它在该点附件用Taylor级数展开



$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots$$

增量较小时，可略去其二次以上高次幂项，则有

$$f(x)-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

2.1.4 系统非线性微分方程的线性化

两个变量的非线性函数 $f(x, y)$，在 (x_0, y_0) 处连续可微，则也可将它在该点附近用Taylor级数展开

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0)$$

$$+\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}(x-x_0)^2+2\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}(x-x_0)(y-y_0)+\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}(y-y_0)^2\right]$$

$$+\cdots$$

增量较小时，可略去其二次以上高次幂项，则有

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0)$$

2.1.4 系统非线性微分方程的线性化

✓单变量非线性函数 ***f(x)***的线性化数学模型为

$$\boxed{\Delta f(x) = k\ \Delta x}$$

式中：$\Delta f(x) = f(x) - f(x_0)$； $k = f'(x_0)$； $\Delta x = x - x_0$

✓双变量非线性函数 ***f(x , y)***的线性化数学模型为

$$\boxed{\Delta f(x,y) = k_1 \Delta x + k_2 \Delta y}$$

式中： $\Delta f(x,y) = f(x,y) - f(x_0,y_0)$； $k_1 = \dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}$；

$k_2 = \dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}$； $\Delta x = x - x_0$； $\Delta y = y - y_0$

2.1.4 系统非线性微分方程的线性化

非线性系统线性化时的注意事项：

(1) 必须明确系统处于平衡状态的工作点，因为不同工作点所得到线性化方程的系数不同，即：非线性曲线上各点的斜率（导数）是不同的；

(2) 如果变量在较大范围内变化，则用这种线性化方法建立的数学模型，除工作点外的其他工况必定存在较大的误差。因此非线性系统线性化是有条件的：变量偏离预定工作点很小。

(3) 对于某些典型的本质非线性，如果非线性函数是不连续的，则在不连续点附近不能得到收敛的Taylor级数，此时就不能线性化。

(4) 线性化后的微分方程是以增量为基础的增量方程。

例　题

试把非线性方程 $z=xy$ 在区域 $5\le x\le 7$、$10\le y\le 12$ 上线性化。求用线性化方程来计算当 $x=5$，$y=10$ 时 z 值所产生的误差。

解：由于研究的区域为$5\le x\le 7$、$10\le y\le 12$，故选择工作点$x_0=6$，$y_0=11$。于是 $z_0=x_0y_0=6\times 11=66$。

求在点 $x_0=6$，$y_0=11$，$z_0=66$ 附近非线性方程的线性化表达式。

将非线性方程在点（x_0, y_0, z_0）处展开成泰勒级数，并忽略其高阶项，则有

例 题

$$z-z_0=k_1(x-x_0)+k_2(y-y_0)$$

$$k_1=\frac{\partial z}{\partial x}\Big/_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=y_0=11 \qquad k_2=\frac{\partial z}{\partial y}\Big/_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=x_0=6$$

因此，线性化方程式为：

$$z-66=11\times(x-6)+6\times(y-11)$$

$$z=11x+6y-66$$

当 $x=5$，$y=10$ 时，z 的精确值为： $z=xy=5\times10=50$

由线性化方程求得的z值为 $z=11x+6y-66=55+60-66=49$

因此，误差为 50-49=1，表示成百分数为 $\frac{1}{50}=2\%$

2.1.5 系统微分方程的建立

建立微分方程的步骤是：

1) 分析系统的工作原理和系统中各变量间的关系，确定出待研究元件或系统的输入量和输出量；

2) 从输入端入手（闭环系统一般从比较环节入手），依据各元件所遵循的物理、化学、生物等规律，列写各自方程式，但要注意负载效应。所谓负载效应，就是考虑后一级对前一级的影响。

3) 将所有方程联解，消去中间变量，得出系统输入输出的标准方程。

标准方程包含三方面的内容：

① 将与输入量有关的各项放在方程的右边；

② 与输出量有关的各项放在方程的左边；

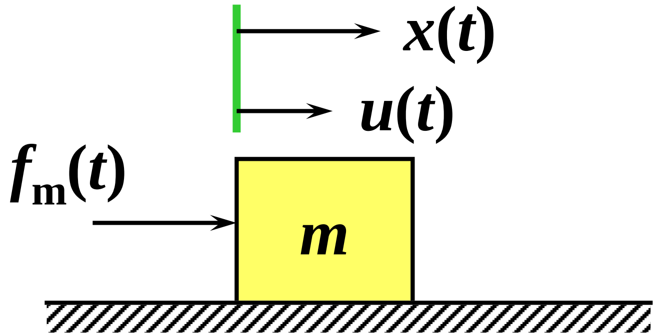
③ 各导数项按降幂排列。

2.1.5 系统微分方程的建立

(1) 机械系统微分方程的列写：

机械系统中部件的运动有直线和转动两种。机械系统中以各种形式出现的物理现象，都可简化为质量、弹簧和阻尼三个要素。列写其微分方程通常用达朗贝尔原理。即：作用于每一个质点上的合力，同质点惯性力形成平衡力系。

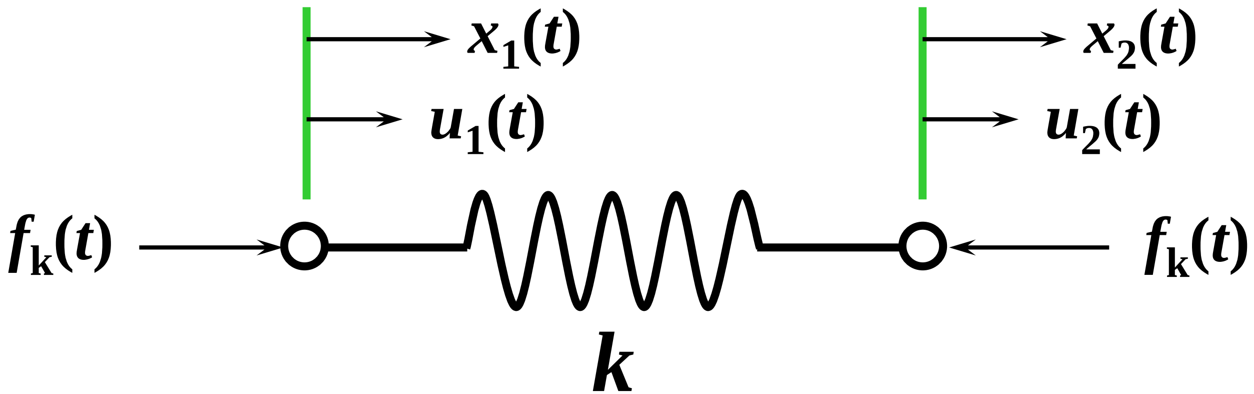
① 质量：



$$f_{\mathrm{m}}(t)=m\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}=m\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2}$$

(1) 机械系统微分方程的列写：

② 弹簧： 弹簧各点受力相同，但各点的变形量不同。



$$f_{\mathrm{k}}(t)=k\left[x_1(t)-x_2(t)\right]=k\ x(t)$$

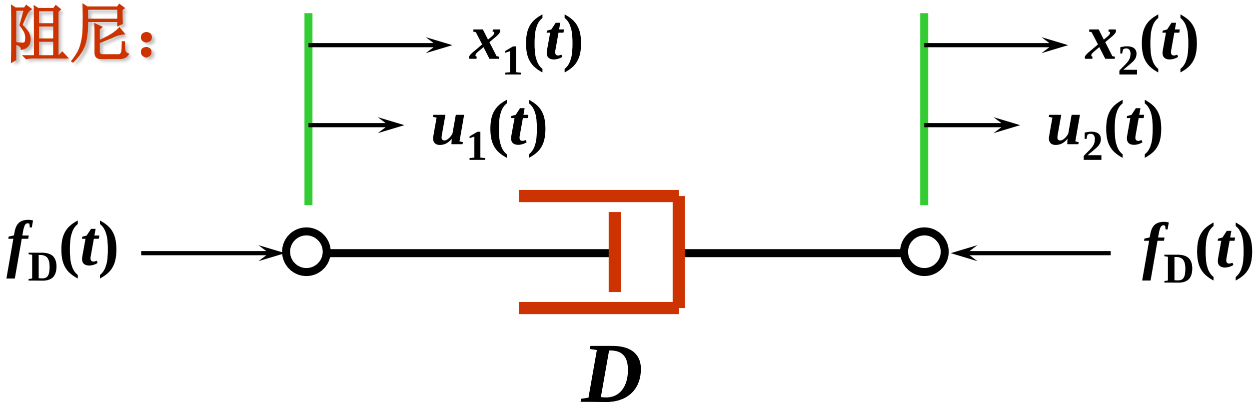
$$=k\int_{-\infty}^{t}\left[u_1(t)-u_2(t)\right]\ \mathrm{d}t$$

$$=k\int_{-\infty}^{t}u(t)\mathrm{d}t$$

2.1.5 系统微分方程的建立

(1) 机械系统微分方程的列写：

③ 阻尼：



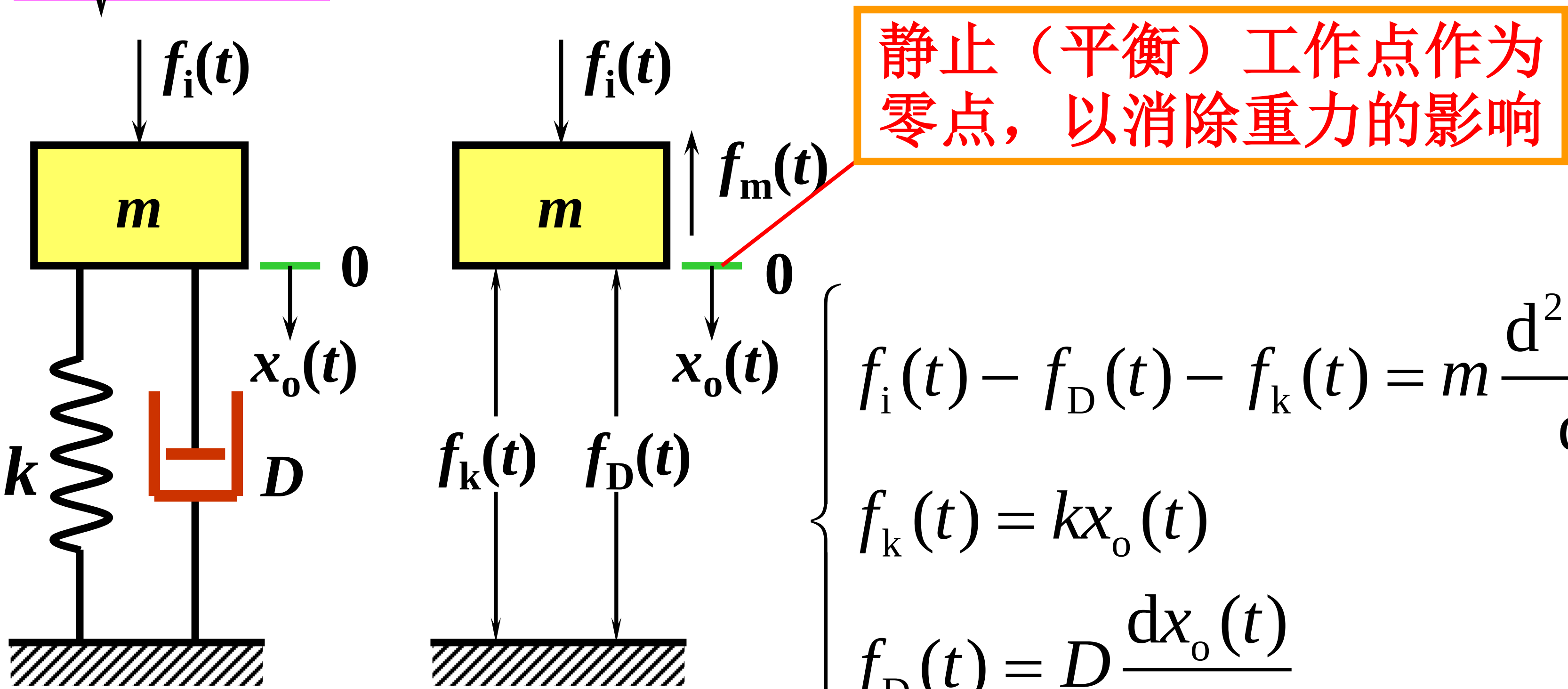
$$f_D(t) = D\left[u_1(t) - u_2(t)\right] = D\,u(t)$$

$$= D\left[\frac{dx_1(t)}{dt} - \frac{dx_2(t)}{dt}\right]$$

$$= D\frac{dx(t)}{dt}$$

(1) 机械系统微分方程的列写：

例1 直线运动（机械平移系统）



机械平衡系统及其力学模型

$$
\begin{cases}
f_i(t) - f_D(t) - f_k(t) = m\dfrac{d^2 x_o(t)}{dt^2} \\
f_k(t) = kx_o(t) \\
f_D(t) = D\dfrac{dx_o(t)}{dt}
\end{cases}
$$

(1) 机械系统微分方程的列写：

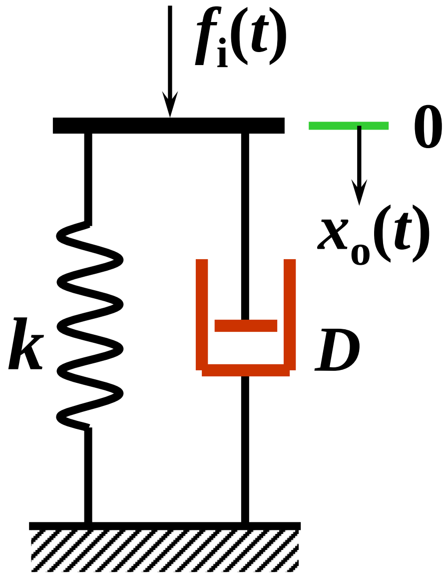
例1　直线运动（机械平移系统）

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x_\mathrm{o}(t)}{\mathrm{d}t^2}+D\frac{\mathrm{d}x_\mathrm{o}(t)}{\mathrm{d}t}+kx_\mathrm{o}(t)=f_\mathrm{i}(t)$$

式中：m、D、k 通常均为常数，故机械平移运动系统可以由上述二阶常系数微分方程描述。

(1) 机械系统微分方程的列写：

例2 弹簧–阻尼系统



弹簧-阻尼系统

$$f_i(t) = f_D(t) + f_k(t)$$

$$D\frac{dx_o(t)}{dt} + kx_o(t) = f_i(t)$$

系统运动方程为一阶常系数微分方程。

(1) 机械系统微分方程的列写：

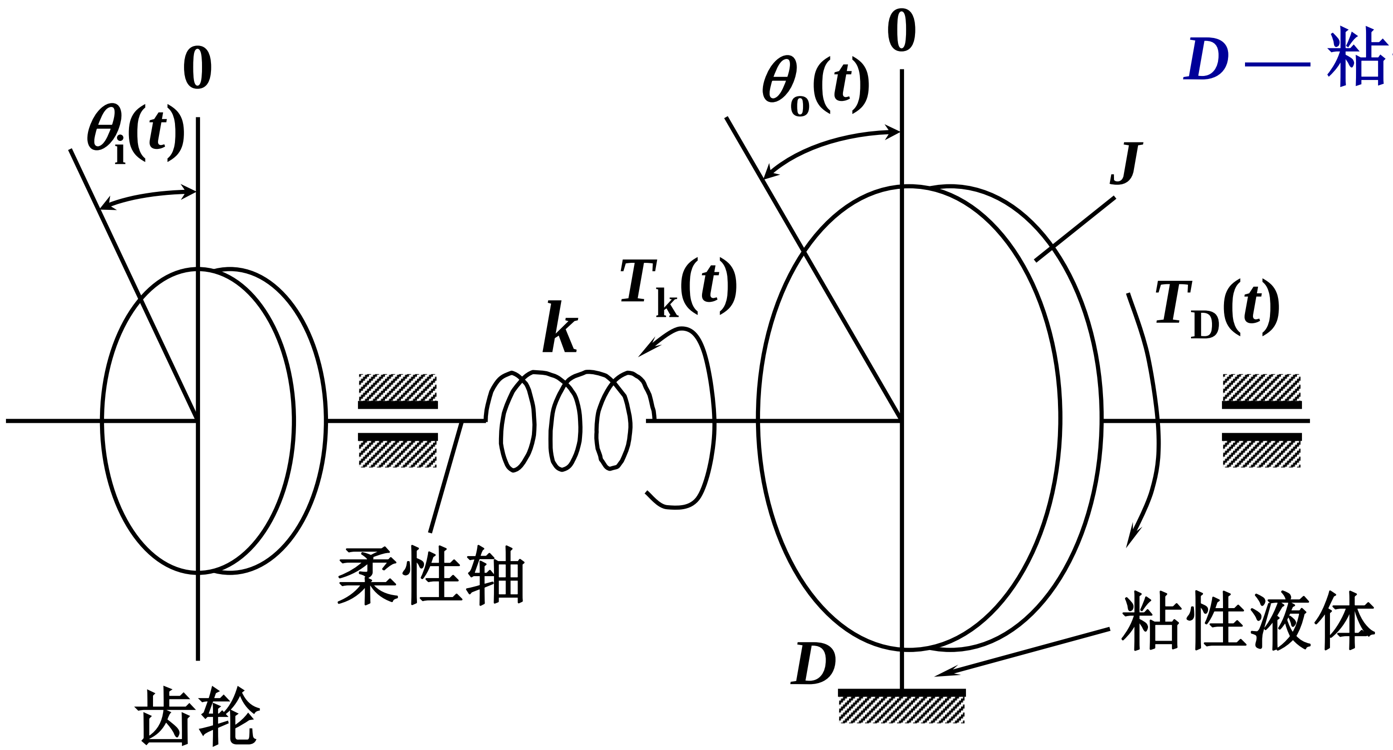
例3　机械旋转系统

图中：

J — 旋转体转动惯量；

k — 扭转刚度系数；

D — 粘性阻尼系数。



(1) 机械系统微分方程的列写：

例3 机械旋转系统

数学模型：扭矩平衡方程

$$\begin{cases} T_{\mathrm{k}}(t)=k\left[\theta_{\mathrm{i}}(t)-\theta_{\mathrm{o}}(t)\right] \\ T_{\mathrm{D}}(t)=D\dfrac{\mathrm{d}\theta_{\mathrm{o}}(t)}{\mathrm{d}t} \\ J\dfrac{\mathrm{d}^2\theta_{\mathrm{o}}(t)}{\mathrm{d}t^2}=T_{\mathrm{k}}(t)-T_{\mathrm{D}}(t) \end{cases}$$

$$J\frac{\mathrm{d}^2\theta_{\mathrm{o}}(t)}{\mathrm{d}t^2}+D\frac{\mathrm{d}\theta_{\mathrm{o}}(t)}{\mathrm{d}t}+k\theta_{\mathrm{o}}(t)=k\theta_{\mathrm{i}}(t)$$

2.1.5 系统微分方程的建立

(2) 电网络系统微分方程的列写：

电网络系统分析主要根据基尔霍夫电流定律和电压定律写出微分方程式，进而建立系统的数学模型。

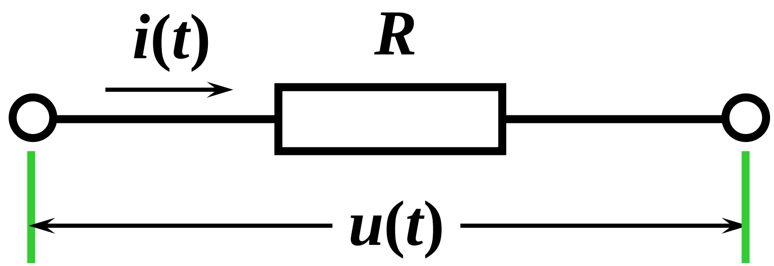
a) 基尔霍夫电流定律：汇聚到某节点的所有电流之代数和应等于0（即流出节点的电流之和等于所有流进节点的电流之和）。

b) 基尔霍夫电压定律：电网络的闭合回路中电势的代数和等于沿回路的电压降的代数和。

电网络系统三个基本元件：电阻、电容和电感。

(2) 电网络系统微分方程的列写：

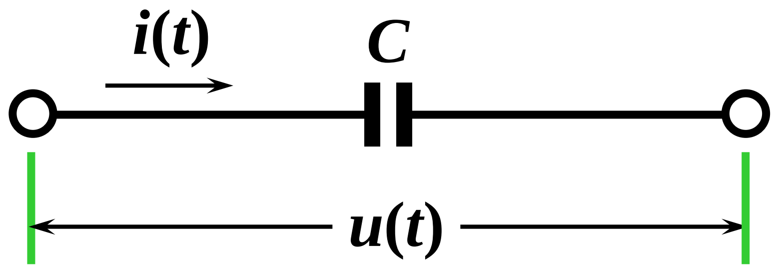
① 电阻：



电压：

$$u(t)=R\cdot i(t)$$

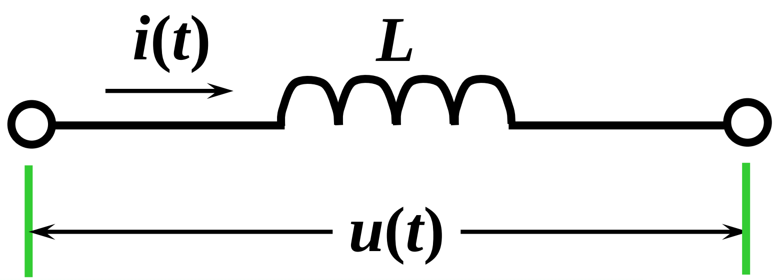
② 电容：



电压：

$$u(t)=\frac{1}{C}\int i(t)\ \mathrm{d}t$$

③ 电感：

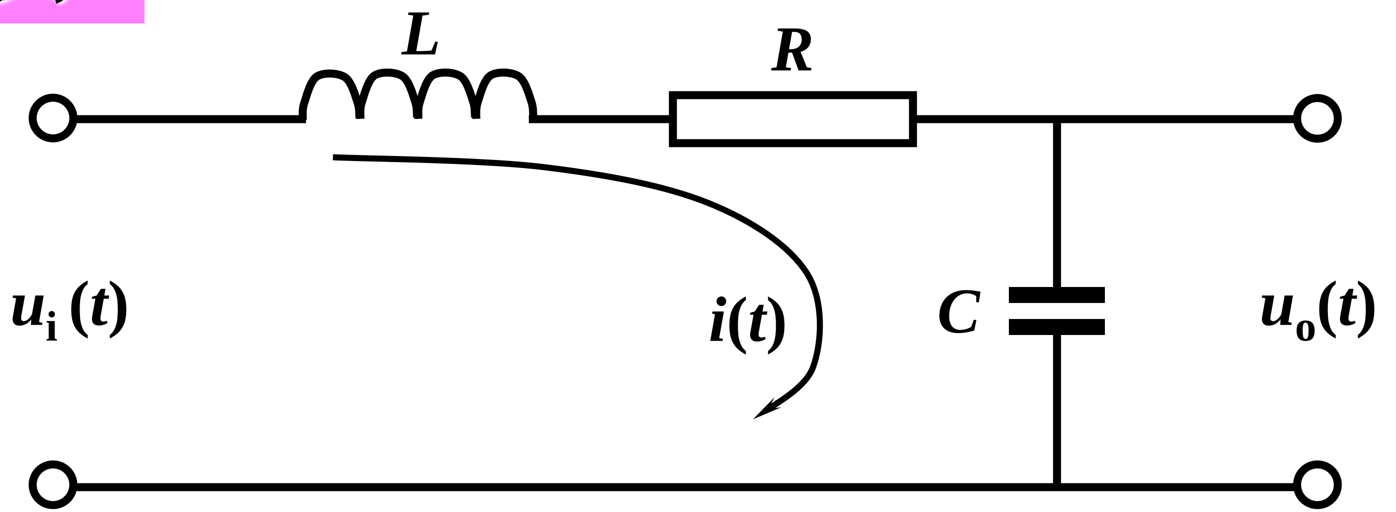


电压：

$$u(t)=L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$$

(2) 电网络系统微分方程的列写：

例1　**R−L−C 无源电路网络**



基本物理规律：

$$\begin{cases} u_{\mathrm{i}}(t) = R \cdot i(t) + L\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{C}\displaystyle\int i(t)\cdot \mathrm{d}t \\ u_{\mathrm{o}}(t) = \dfrac{1}{C}\displaystyle\int i(t)\cdot \mathrm{d}t \end{cases}$$

(2) 电网络系统微分方程的列写：

例1　R–L–C 无源电路网络

数学模型：

$$LC\frac{\mathrm{d}^2u_\mathrm{o}(t)}{\mathrm{d}t^2}+RC\frac{\mathrm{d}u_\mathrm{o}(t)}{\mathrm{d}t}+u_\mathrm{o}(t)=u_\mathrm{i}(t)$$

一般情况下，*R*、*L*、*C*均为常数，上式为二阶常系数微分方程。

若$L=0$，则系统微分方程简化为

$$RC\frac{\mathrm{d}u_\mathrm{o}(t)}{\mathrm{d}t}+u_\mathrm{o}(t)=u_\mathrm{i}(t)$$

2.1.5 系统微分方程的建立

机械平移系统：

$$m\frac{\mathrm{d}^2x_{\mathrm{o}}(t)}{\mathrm{d}t^2}+D\frac{\mathrm{d}x_{\mathrm{o}}(t)}{\mathrm{d}t}+kx_{\mathrm{o}}(t)=f_{\mathrm{i}}(t)$$

机械旋转系统：

$$J\frac{\mathrm{d}^2\theta_{\mathrm{o}}(t)}{\mathrm{d}t^2}+D\frac{\mathrm{d}\theta_{\mathrm{o}}(t)}{\mathrm{d}t}+k\theta_{\mathrm{o}}(t)=k\theta_{\mathrm{i}}(t)$$

R−L−C 无源电路网络：

$$LC\frac{\mathrm{d}^2u_{\mathrm{o}}(t)}{\mathrm{d}t^2}+RC\frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{o}}(t)}{\mathrm{d}t}+u_{\mathrm{o}}(t)=u_{\mathrm{i}}(t)$$

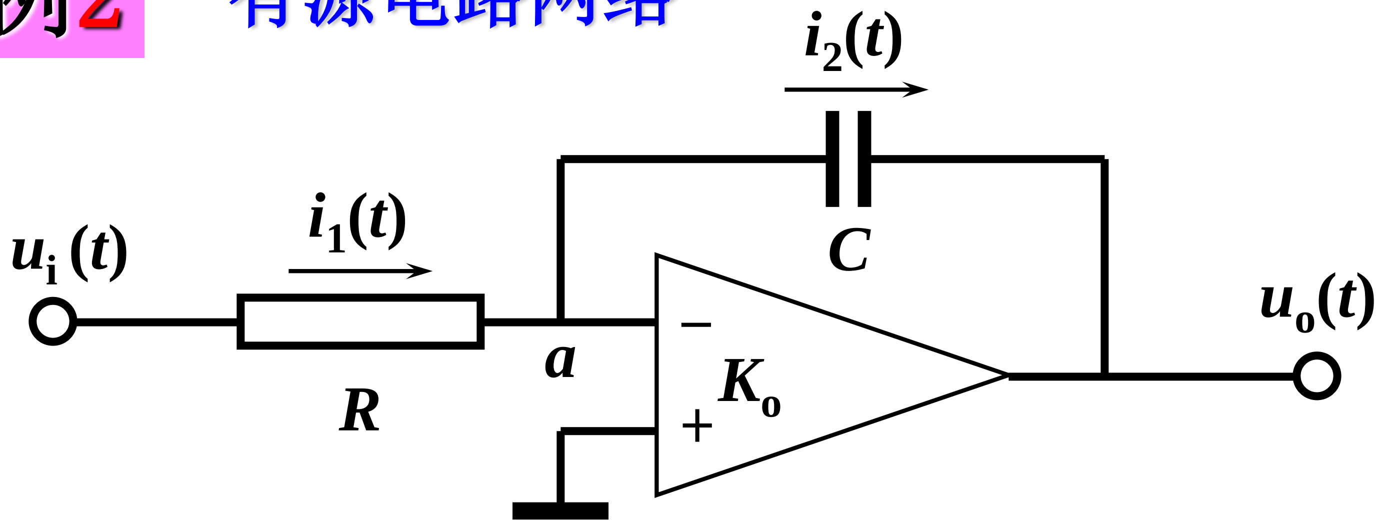
比较这三个系统，可以发现它们属于同一类型，只是系数不同。如果两个方程式的系数相同，从动态性能角度来看，两个系统是相同的。

2.1.5 系统微分方程的建立

- 虽然实际的物理系统不同，但系统的输入与输出量之间的变化规律可能相同。
- 有可能利用电气系统来模拟机械系统，进行试验研究。
- 从系统理论来说，有可能撇开系统的具体物理属性，进行普遍意义的研究

(2) 电网络系统微分方程的列写：

例2 有源电路网络

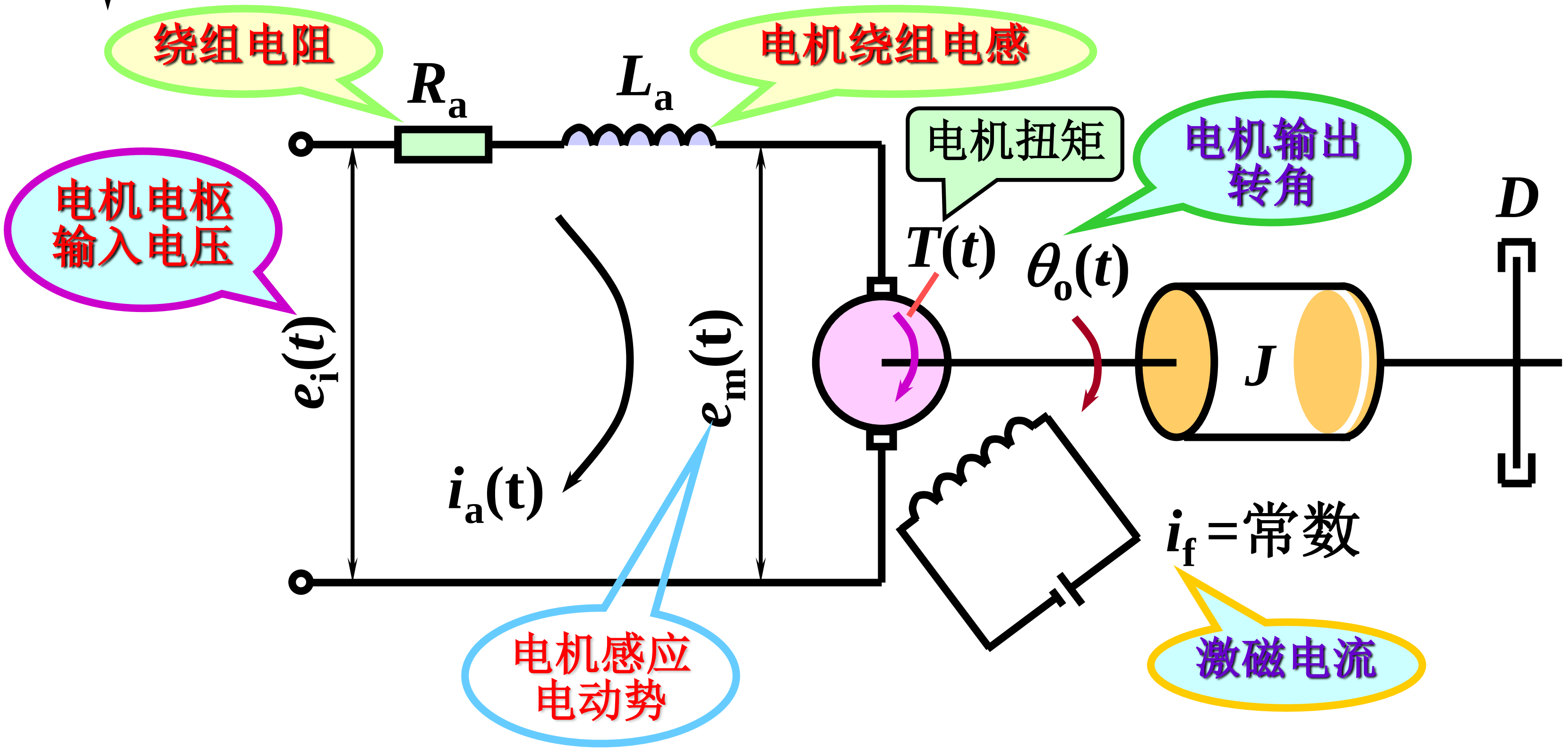


$$\begin{cases} u_a(t) \approx 0 \\ i_1(t) = i_2(t) \end{cases} \Rightarrow \frac{u_i(t)}{R} = -C\frac{du_o(t)}{dt}$$

即：$RC\frac{du_o(t)}{dt} = -u_i(t)$

(2) 电网络系统微分方程的列写：

例3 直流电动机的伺服控制系统



(2) 电网络系统微分方程的列写：

例3 直流电动机的伺服控制系统

数学模型：

$$T(t)=k_{\mathrm{T}}(t)\cdot i_{\mathrm{a}}(t)$$

$$e_{\mathrm{i}}(t)=R_{\mathrm{a}}i_{\mathrm{a}}(t)+L_{\mathrm{a}}\frac{\mathrm{d}i_{\mathrm{a}}(t)}{\mathrm{d}t}+e_{\mathrm{m}}(t)$$ —— 基尔霍夫定律

$$e_{\mathrm{m}}(t)=k_{\mathrm{e}}\frac{\mathrm{d}\theta_{\mathrm{o}}(t)}{\mathrm{d}t}$$ —— 电磁感应定律

$$T(t)-D\frac{\mathrm{d}\theta_{\mathrm{o}}(t)}{\mathrm{d}t}=J\frac{\mathrm{d}^2\theta_{\mathrm{o}}(t)}{\mathrm{d}t^2}$$ —— 扭矩平衡方程

(2) 电网络系统微分方程的列写：

例3　直流电动机的伺服控制系统

$$L_{\mathrm{a}}J\frac{\mathrm{d}^3\theta_{\mathrm{o}}(t)}{\mathrm{d}t^3}+(L_{\mathrm{a}}D+R_{\mathrm{a}}J)\frac{\mathrm{d}^2\theta_{\mathrm{o}}(t)}{\mathrm{d}t^2}+(R_{\mathrm{a}}D+k_{\mathrm{T}}k_{\mathrm{e}})\frac{\mathrm{d}\theta_{\mathrm{o}}(t)}{\mathrm{d}t}=k_{\mathrm{T}}e_{\mathrm{i}}(t)$$

电枢控制式直流电动机的控制系统动态数学模型

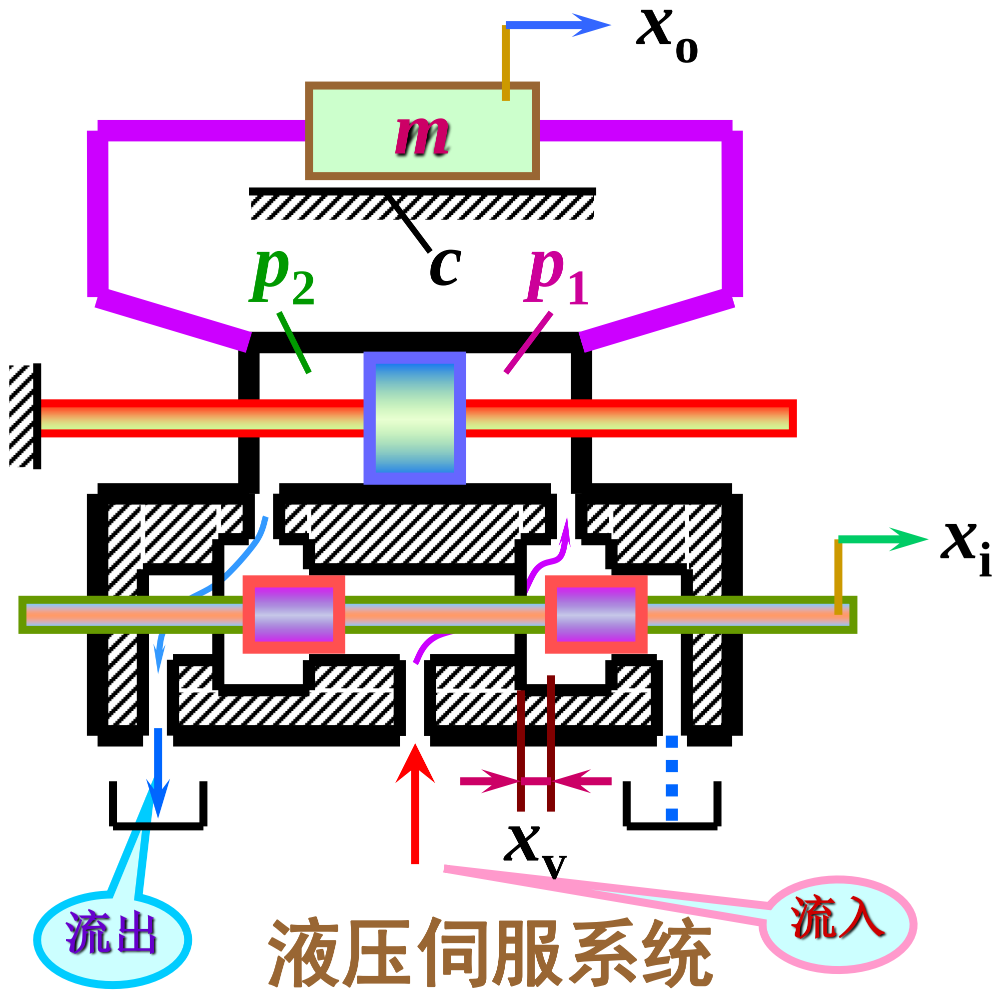
当电枢电感很小时，通常可以忽略不计，则系统微分方程可简化为

$$R_{\mathrm{a}}J\frac{\mathrm{d}^2\theta_{\mathrm{o}}(t)}{\mathrm{d}t^2}+(R_{\mathrm{a}}D+k_{\mathrm{T}}k_{\mathrm{e}})\frac{\mathrm{d}\theta_{\mathrm{o}}(t)}{\mathrm{d}t}=k_{\mathrm{T}}e_{\mathrm{i}}(t)$$

例题：

右图为四边伺服阀及液压缸组成的液压伺服控制系统。

活塞杆固定，液压缸与伺服阀阀体连为一体，工作时缸体带动工作台(质量为m)移动，负载包含有惯性和粘性负载。试建立该系统的数学模型。



液压伺服系统

解：

给阀杆一位移量 x_i，此时阀口打开，液压油推动缸体并带动负载产生位移 x_o，阀体有此位移相当于给阀口开度一个反馈量 x_o，即 $x_v=x_i-x_o$ 。

该系统是输入为 x_i 、输出为 x_o 的闭环系统。

假设油液不可压缩，并忽略系统中液体的泄漏。

系统动力学方程：

粘性阻尼系数

$p=p_1-p_2$： 负载压降

负载质量

$$m\frac{\mathrm{d}^2x_o}{\mathrm{d}t^2}+c\frac{\mathrm{d}x_o}{\mathrm{d}t}=Ap$$

牛顿第二定律
(力平衡方程)

活塞有效面积

负载流量

$$q=A\frac{\mathrm{d}x_o}{\mathrm{d}t}$$

质量守恒定律
(连续性方程)

2.1 控制系统的数学模型　例题

流体流经微小开口的伺服阀时，其流量关系：

$$q = q(x_\mathrm{v}, p) \qquad \text{(a)}$$

是一非线性函数关系。由上述三个关系式得出的系统数学模型也是非线性方程。因此必须对式(a)进行线性化处理。

将式(a)在预定工作点 $(x_{\mathrm{v}0}, p_0)$ 附近进行微小偏差线性化

$$q(x_\mathrm{v}, p) \approx q(x_{\mathrm{v}0}, p_0) + \frac{\partial q(x_{\mathrm{v}0}, p)}{\partial x_\mathrm{v}}(x_\mathrm{v} - x_{\mathrm{v}0}) + \frac{\partial q(x_\mathrm{v}, p_0)}{\partial p}(p - p_0)$$

写成增量方程

$$\Delta q \approx \frac{\partial q(x_{\mathrm{v}0}, p_0)}{\partial x_\mathrm{v}} \Delta x_\mathrm{v} + \frac{\partial q(x_\mathrm{v}, p_0)}{\partial p} \Delta p$$

K_q：流量增益

$-K_\mathrm{c}$：流量–压力系数

增量方程：

$$\boxed{\Delta q = K_{\mathrm{q}}\Delta x_{\mathrm{v}} - K_{\mathrm{c}}\Delta p} \qquad \text{(b)}$$

由于随着负载压降 p 的增大，负载流量 q 将减小，因而 $\partial q/\partial p$总是负值。为使流量–压力系数 K_c 为正，定义

$$K_{\mathrm{c}} = -\frac{\partial q(x_{\mathrm{v}}, p_0)}{\partial p} \qquad K_{\mathrm{q}} = \frac{\partial q(x_{\mathrm{v0}}, p)}{\partial x_{\mathrm{v}}}$$

K_q、K_c可以根据工作点的不同，从阀的特性曲线求得。（不同的工作点，有不同的K_q、K_c）

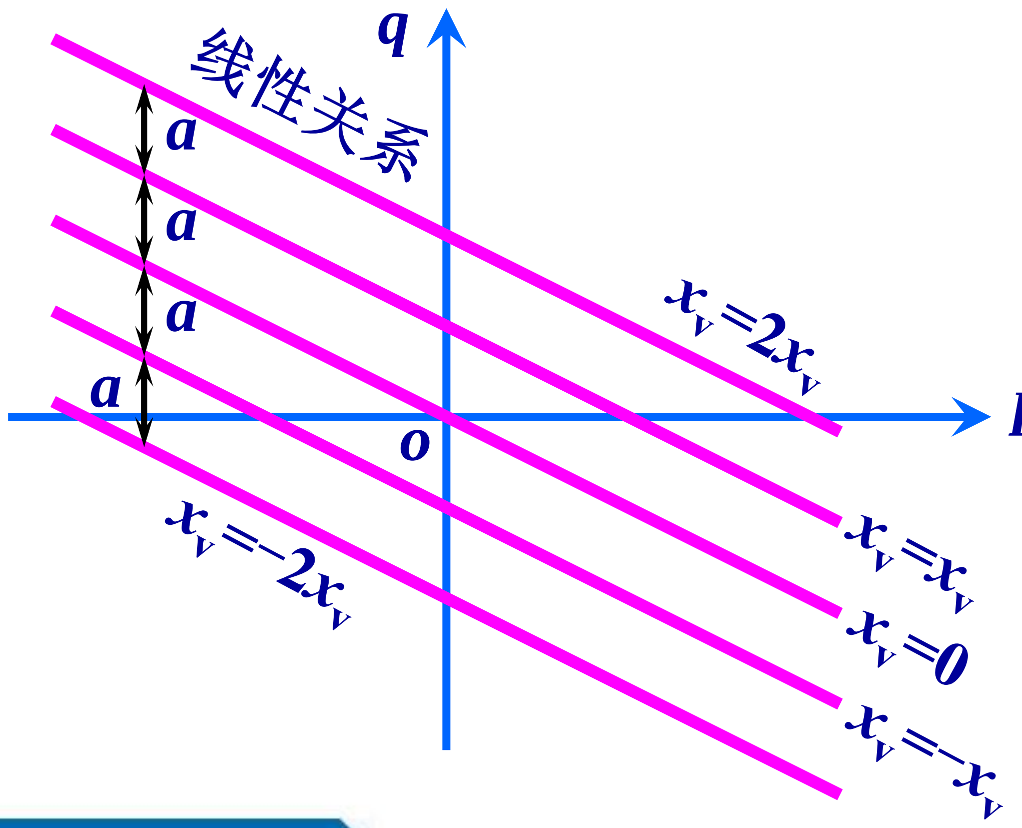
若预定工作点选在阀的零位，即：$x_{v0} = 0$，$p_0 = 0$，$q(x_{v0}, p_0) = 0$；这时 $\Delta q = q$，$\Delta x_v = x_v$，$\Delta p = p$。

此时增量方程式(b)变成：

$$\boxed{q = K_q x_v - K_c p} \qquad \text{(c)}$$

此乃预定工作点为伺服阀零位时的线性化方程。

右图为q与p的线性化关系曲线，q与x_v之间也成线性化关系。



将式(c)、质量守恒方程代入力平衡方程，消去中间变量 **q**与**p**后，得到系统的阀口开度x_v与位移输出x_o关系的线性化微分方程：

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x_o}{\mathrm{d}t^2}+\left(c+\frac{A^2}{K_c}\right)\frac{\mathrm{d}x_o}{\mathrm{d}t}=\frac{AK_q}{K_c}x_v$$

将 $x_v = x_i - x_o$ 代入上式，得到闭环系统的线性微分方程

$$\boxed{m\frac{\mathrm{d}^2 x_o}{\mathrm{d}t^2}+\left(c+\frac{A^2}{K_c}\right)\frac{\mathrm{d}x_o}{\mathrm{d}t}+\frac{AK_q}{K_c}x_o=\frac{AK_q}{K_c}x_i}$$

若考虑油液的压缩性，上式将变成三阶方程；如再考虑油液泄漏，方程将更为精确。