8-17 质量为 m_1 的均质圆柱体 A，放在一不光滑的水平桌面上，柱的外缘绕一细绳，绳子绕过定滑轮 O 并悬挂一质量为 m_2 的重物 B，如图所示。 不计滑轮质量，假设圆柱只滚不滑并且圆柱体与滑轮之间的绳子是水平的，求圆柱体中心 O_1 的加速度，重物的加速度及绳中的张力。

解：1） 取圆柱体 O_1 为研究对象，圆柱体 O_1 作纯滚动，列出平面运动微分方程，

$$\sum F_x = ma_{Cx}\,,\qquad F_T - F = m_1 a_{O_1}\,, \qquad \text{（a）}$$

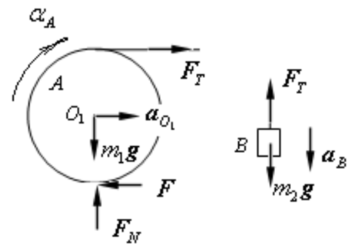
$$\sum M_{O_1} = J_{O_1}\alpha_A\,,\quad F_T r + Fr = \frac{1}{2}m_1 r^2 \alpha_{O_1}\,, \qquad \text{(b)}$$

2）取重物 B 为研究对象，列出动力学方程

$$m_2 g - F_T = m_2 a_B\,, \qquad \text{(c)}$$

上面（a）、(b)和(c)三式中含有 5 个未知数，再需列出 2 个运动学补充方程。为此，以圆柱体上 O_1 为基点，计算绳的加速度，有

$$a_{O_1} + r\alpha_A = a_B\,, \qquad \text{(d)}$$



题 8-17 受力图

圆柱体作纯滚动，

$$a_{O_1} = r\alpha_A\,, \qquad \text{(e)}$$

联立方程（a）- (d), 解得

圆柱体中心 O_1 的加速度 $a_{O_1} = \dfrac{4m_2}{3m_1 + 8m_2}g$，

重物的加速度 $a_B = \dfrac{8m_2}{3m_1 + 8m_2}g$，

绳中的张力 $F_T = \dfrac{3m_1 m_2 g}{3m_1 + 8m_2}$.

8-19 均质圆柱质量为 m,，半径为 r，以匀角速度 ω_0 绕其质心 C 转动，现将圆柱置于墙角，如图所示。如果墙面和地面与圆柱接触处的滑动摩擦系数均为 f，试求使圆柱停止转动所需要的时间。

解：取圆柱为研究对象，列出平面运动微分方程

$$\sum F_x = ma_{Cx}\,,\quad F_{NA} - F_B = 0\,,$$

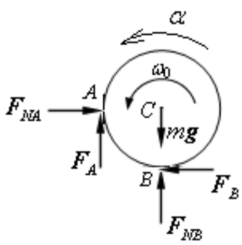
$$\sum F_y = ma_{Cy}\,,\quad F_{NB} + F_A - mg = 0\,,$$

$$\sum M_C = J_C\alpha\text{，}\ -(F_A + F_B)r = \frac{1}{2}mr^2\alpha\text{，}$$

补充方程：$F_A = fF_{NA}$，$F_B = fF_{NB}$.

解得圆柱的角加速度 $\alpha = -\dfrac{2f(1+f)}{1+f^2}\dfrac{g}{r}$，

使圆柱停止转动所需要的时间 $t = -\dfrac{\omega_0}{\alpha} = \dfrac{r\omega_0(1+f^2)}{2fg(1+f)}$.



题 8-19 受力图

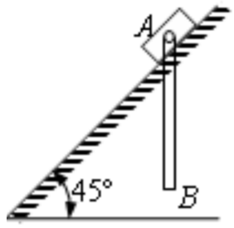
8-23 如图所示，均质杆 AB 的质量为 m_1，长为 l，A 端与小滑块铰接，滑块的质量为 m_2，不计几何尺寸，置于倾角为 45°的光滑斜面上，初始时杆位于图示的铅垂位置，处于静止状态。求此瞬时斜面对小滑块的支承力和杆 AB 的角加速度。

解： 取杆 AB 连同小滑块组成的系统为对象，初瞬时，系统各点的速度均为零. 设小滑块的加速度为 $\boldsymbol{a}_2$，杆 AB 的角加速度为 α，则杆 AB 的质心 C 相对小滑块的加速度为 $\boldsymbol{a}_1$，其大小为 $a_1 = l\alpha/2$，方向由 α 确定，如图示. 加惯性力

$$F_{I2} = m_2 a_2\text{；}$$

$$F_{ICx} = m_1 a_1 + m_1 a_2 \cos 45^\circ\text{；}$$

$$F_{ICy} = m_1 a_2 \sin 45^\circ\text{；}$$



题 8-23 图

$$M_{IC} = J_C \alpha \text{，}$$

其中 $J_C = m_1 l^2 / 12$ 为杆 AB 对其质心轴的转动惯.量。列出动静方程

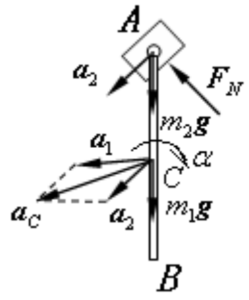
$\sum F_x = 0$，

$-F_{\mathrm{N}} \cos 45^\circ + F_{\mathrm{I}2} \sin 45^\circ + F_{ICx} = 0$；

$\sum F_y = 0$，

$F_N \sin 45^\circ - (m_1 + m_2) g + F_{\mathrm{I}2} \sin 45^\circ + F_{ICy} = 0$，

$\sum m_A = 0$，$F_{\mathrm{IC}x} \dfrac{l}{2} + M_{\mathrm{IC}} = 0$.



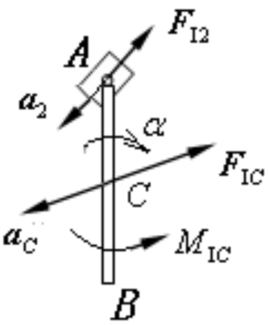
杆 *AB* 连同小滑块的受力图及加速度分析

解得

$$a_1 = -\frac{3(m_1 + m_2)}{5m_1 + 8m_2} g \quad , \quad a_2 = \frac{4\sqrt{2}(m_1 + m_2)}{5m_1 + 8m_2} g \quad ,$$

$$F_N = \frac{\sqrt{2}(m_1 + m_2)(m_1 + 4m_2)}{5m_1 + 8m_2} g .$$

杆 *AB* 的角加速度为 $\alpha = \dfrac{2a_1}{l} = -\dfrac{6(m_1 + m_2)}{(5m_1 + 8m_2)} \dfrac{g}{l}$.



杆 *AB* 连同小滑块的惯性力

8-25 具有相同质量的三根长为 l 的均质细杆，用光滑铰链连结，*A* 端用固定铰支座与天花板链接，使其保持静止状态，如图所示。某瞬时铰链 *C* 处的销钉脱落，求此瞬时三根杆的角加速度。

解：1）取 *AC* 杆为研究对象，AB 杆作定轴转动，列出定轴转动微分方程

$$\sum m_A = J_A \alpha_{AC} \text{，} \left(mg \sin 30^\circ\right) \frac{l}{2} = \frac{1}{3} m l^2 \alpha_{AC} \text{，}$$

解得 *AC* 杆的角加速度为

$$\alpha_{AC} = \frac{3g}{4l} \text{，（顺时针）}.$$

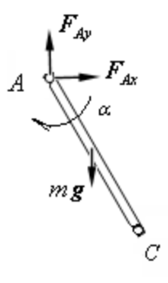
2）取 AB 杆连同 BC 杆为研究对象，AB 杆作定轴转动，BC 杆作平面运动.

在 *AB* 杆质心 *D* 点加惯性力

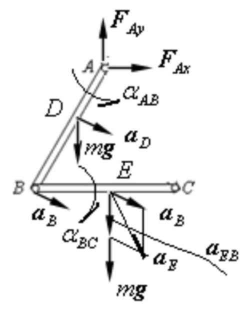
$$F_D^I = m a_D \text{，} M_D^I = J_D \alpha_{AB} \text{；}$$

其中 $a_D = \dfrac{l}{2} \alpha_{AB}$.

在 *BC* 杆质心 *E* 点加惯性力



AC 杆受力图



AB 杆连同 BC 杆的受力图

$F_{Ex}^{I}=ma_B\cos 30^{\circ}$， $F_{Ey}^{I}=m\left(a_B\sin 30^{\circ}+a_{EB}\right)$， $M_E^{I}=J_E\alpha_{BC}$，

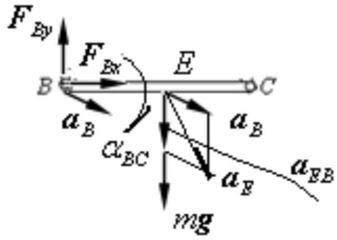
其中 $a_B=l\alpha_{AB}$， $a_{EB}=\dfrac{l}{2}\alpha_{BC}$. 惯性力（矩）的方向与（角）加速度方向相反. 列出动静方程

$$\sum m_A=0,$$

$$mg\frac{l}{2}\sin 30^{\circ}-F_D^{I}\frac{l}{2}-M_D^{I}-F_{Ex}^{I}l\cos 30^{\circ}+M_E^{I}=0,$$

3）取 BC 杆为研究对象， BC 杆作平面运动. 列出动静方程

$$\sum m_B=0,\quad \left(F_{Ey}^{I}-mg\right)\frac{l}{2}+M_E^{I}=0.$$



BC 杆受力图

联立上面两式，解得 AB 杆和 BC 杆的角加速度为

$$\alpha_{AB}=\frac{18g}{55l}，（逆时针）；\ \alpha_{BC}=\frac{69g}{55l}，（顺时针）.$$