9.1 力的功

1 功的概念和计算

力的元功定义 $d'W = \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 力沿曲线C的功 $W=\int_C \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$

力系的总元功 $d'W=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_i$ 力系的功 $W=\sum_{i=1}^{n}\int_{C_i}\boldsymbol{F}_i\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_i$

弹性力的功与力作用点的路径无关，仅取决于弹簧初始和末了变形λ_1和λ_2，即 $W=\frac{1}{2}\left(\lambda_1^2-\lambda_2^2\right)$

力在定轴转动刚体上所作的元功 $d'W=M_z\left(\boldsymbol{F}\right)\mathrm{d}\varphi$

外力系对绕固定轴转动的刚体的功 $W=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}M_z\,\mathrm{d}\varphi$

其中M_z为外力系主矩在轴z的投影，φ_1和φ_2分别为刚体的初始和终止位置。

2 内力的功

$d'W=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1(\neq i)}^{n}\boldsymbol{F}_{ij}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_{ij}$

点P_i至点P_j矢径 $\boldsymbol{r}_{ij}=\boldsymbol{r}_j-\boldsymbol{r}_i$

要点回顾

动力学

9.2 虚功原理

1 虚位移和约束

虚位移：在给定瞬时，质点系满足约束条件的无限小假想位移，记作 $\delta \boldsymbol{r}_i$

要点回顾

虚功：$\delta W = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i$

2 理想约束 $\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_{\mathrm{N}i} \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0$

其中$\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}i}$为作用在第$i$个质点$P_i$上的约束力，$\delta \boldsymbol{r}_i$为质点的虚位移。

理想约束例：柔索约束、光滑面约束和光滑活动铰链支座约束、光滑固定铰链支座、固定端约束、光滑铰链、刚性二力杆、有摩擦的固定面对在其上作纯滚动刚体的约束等。

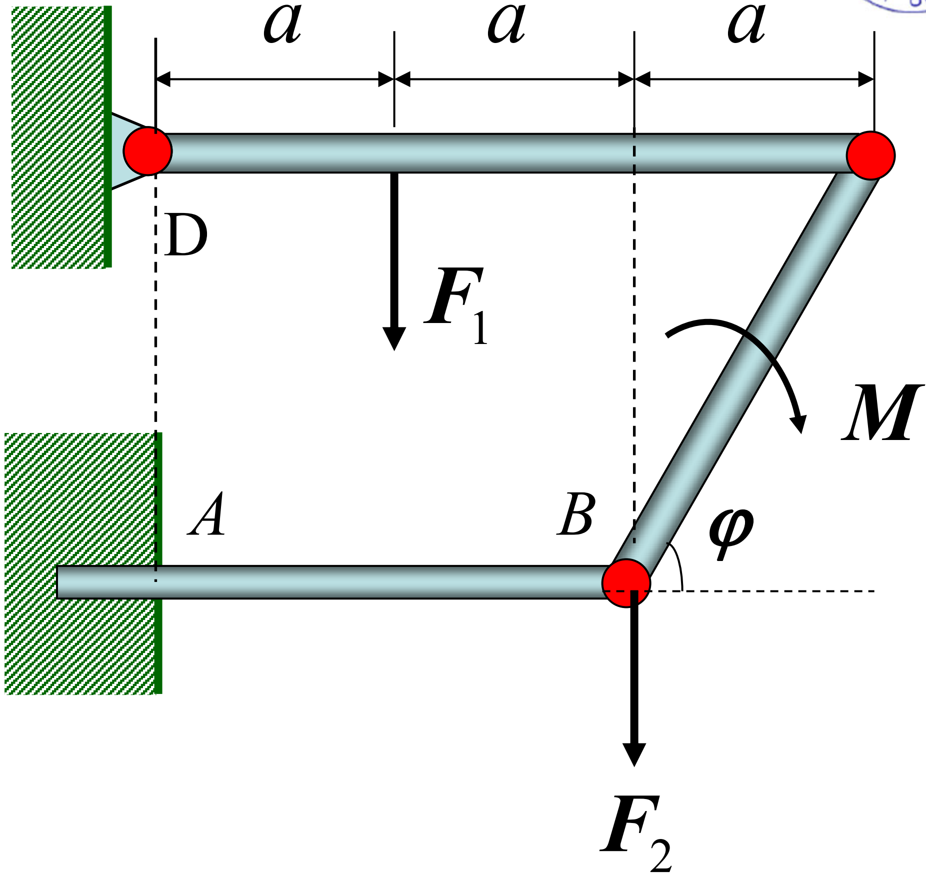
3 虚功原理（虚位移原理） $\sum_{i=1}^{n} \left(F_{xi} \delta x_i + F_{yi} \delta y_i + F_{zi} \delta z_i \right) = 0$

受理想约束的质点系，其平衡的充分必要条件是系统内所有主动力对于质点系的任意虚位移所作的元功之和为零，即 $\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0$

动力学

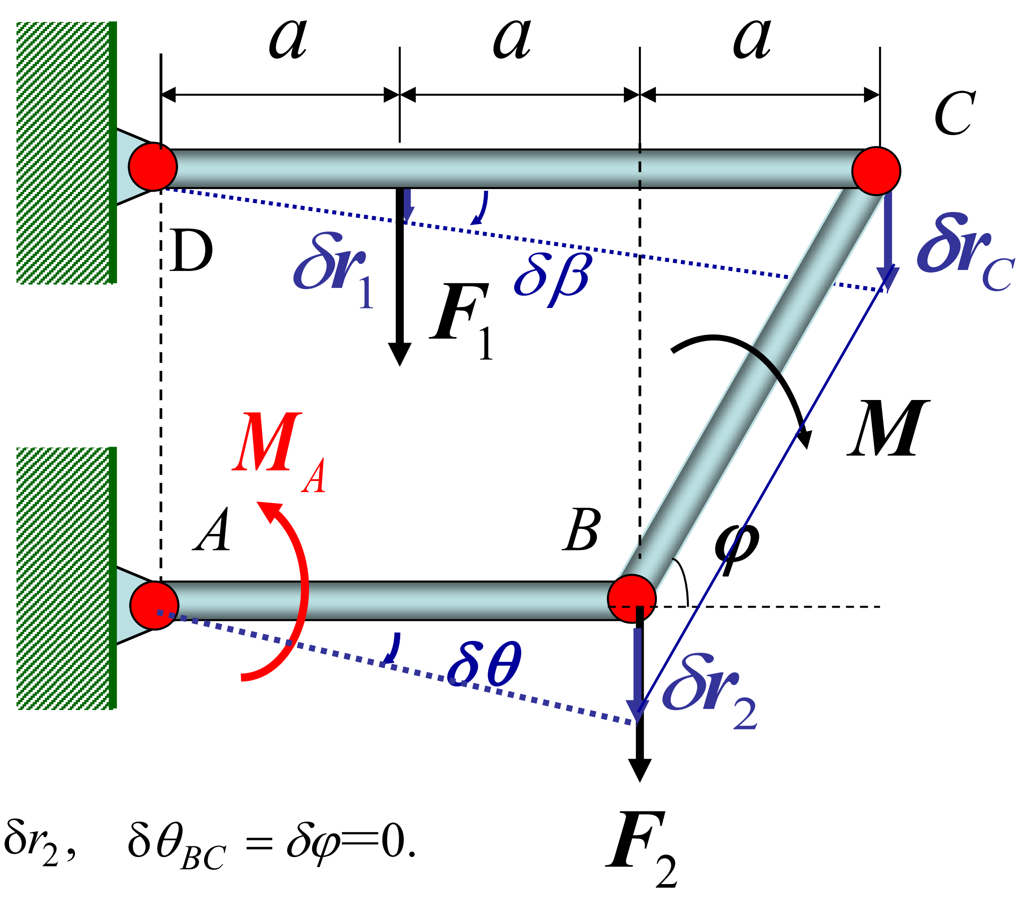
例 4

力F_1、F_2和力偶M作用在图示结构上。求固定端A处的约束力偶。



例 4

力F_1、F_2 和力偶M作用在图示结构上。求固定端A处的约束力偶。



解: 研究系统。所受约束均为理想约束。解出所求约束力偶的约束，把约束力偶变为主动力偶，固定端变为固定铰链支座。

对系统应用虚功原理

$$F_1\delta r_1 + F_2\delta r_2 + M\delta\varphi - M_A\delta\theta = 0.$$

虚位移之间的关系

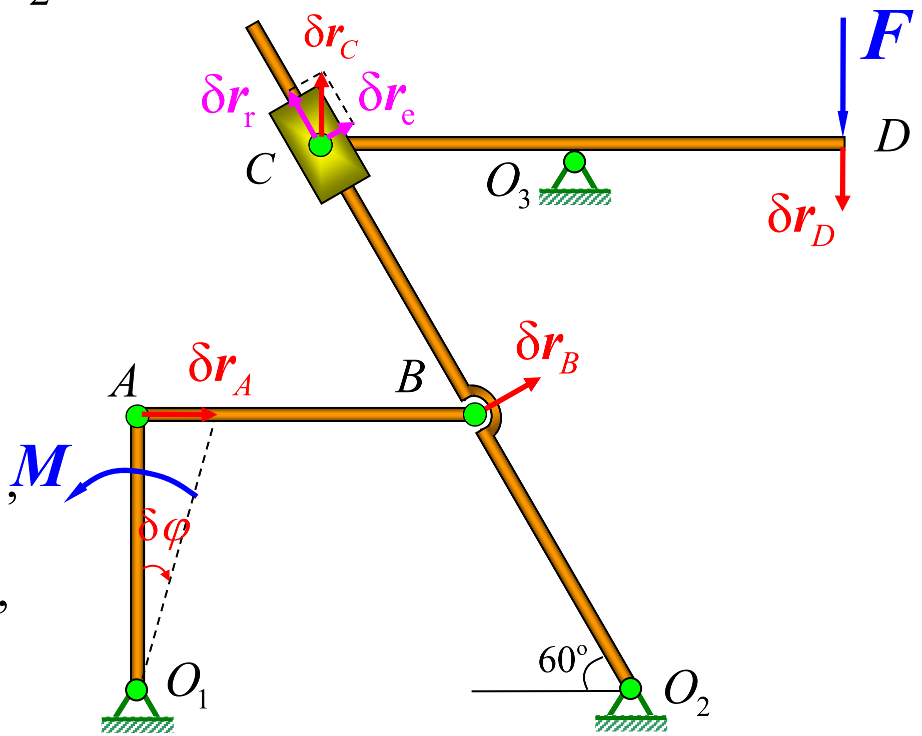
$$\delta r_2 = 2a\delta\theta, \quad \delta r_1 = \frac{a}{3a}\delta r_C, \quad \delta r_C = \delta r_2, \quad \delta\theta_{BC} = \delta\varphi=0.$$

$$\left(F_1\frac{2a}{3} + 2aF_2 - M_A\right)\delta\theta = 0. \quad \xrightarrow{\delta\theta \neq 0.} \quad M_A = 2a\left(\frac{1}{3}F_1 + F_2\right).$$

动力学

例 5

图示机构中，$O_1A=O_3C=O_3D=l$，套筒C可在O_2C杆上滑动，图示位置O_1A铅直，杆CD、AB水平，$O_2B=BC$。已知力偶矩$\boldsymbol{M}$，求平衡时的力$\boldsymbol{F}$。



解: 研究系统。约束均为理想约束。

应用虚功原理 $F\delta r_D - M\delta\varphi = 0.$

虚位移关系(运动学分析)

$$\delta\varphi = \frac{\delta r_A}{l}, \quad \delta r_A = \delta r_B \cdot \cos 30^\circ, \ \delta r_C = \delta r_D,$$

$$\delta \boldsymbol{r}_C = \delta \boldsymbol{r}_e + \delta \boldsymbol{r}_r, \quad \delta r_e = \frac{1}{2}\delta r_C, \quad \delta r_B = \frac{1}{2}\delta r_e,$$

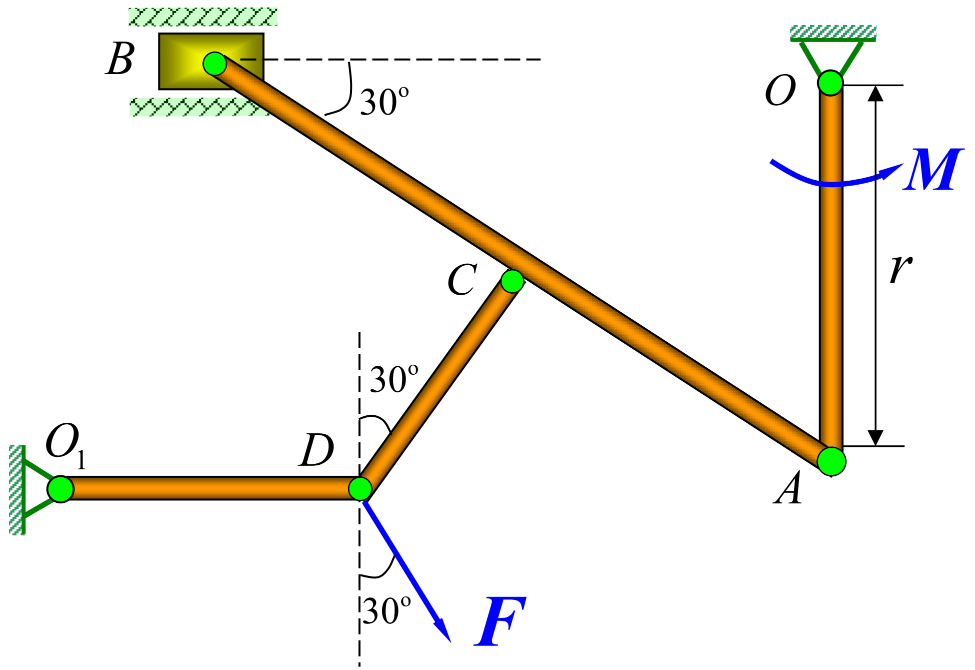
$$\delta\varphi = \frac{\sqrt{3}}{8l}\delta r_D,$$

$$F\delta r_D - M\frac{\sqrt{3}}{8l}\delta r_D = 0. \quad \Longrightarrow \quad F = \frac{\sqrt{3}M}{8l}.$$

$\delta r_D \neq 0.$

习题2

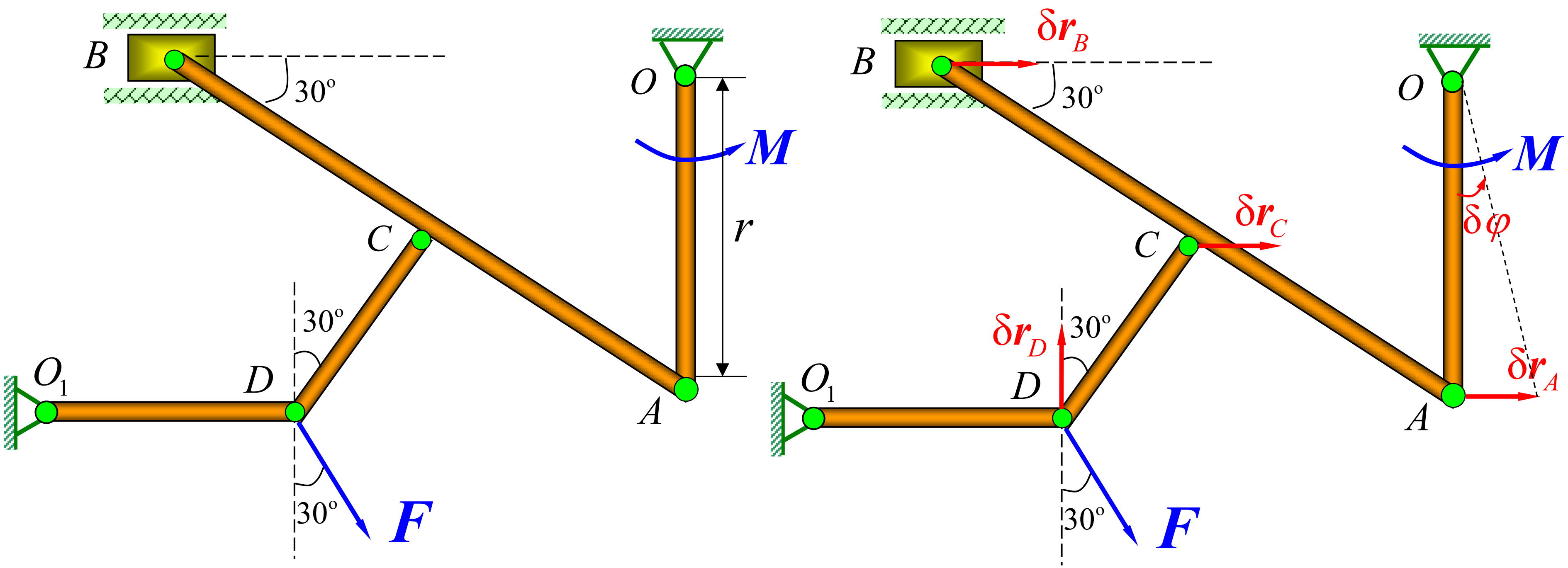
图示滑块连杆机构，已知$OA=r$，力偶矩$\boldsymbol{M}$，求平衡时力$\boldsymbol{F}$。



动力学

练习

图示滑块连杆机构，已知$OA=r$，力偶矩$\boldsymbol{M}$，求平衡时力$\boldsymbol{F}$。



动力学

目 录

9.3 广义坐标

1 约束及其分类

约束

在很多物理和工程问题中, 质点系并非自由的，而是受运动学条件约束限制了自由运动。例如，大部分刚体运动因为与相邻机构连接而受到限制。

限制刚体运动(包括位置、速度、甚至加速度)的条件被称为约束。

约束可以看作是阻碍物体运动的周围物体。(第一章)

约束的数学表示为约束方程，虽然必要时也需要不等式。

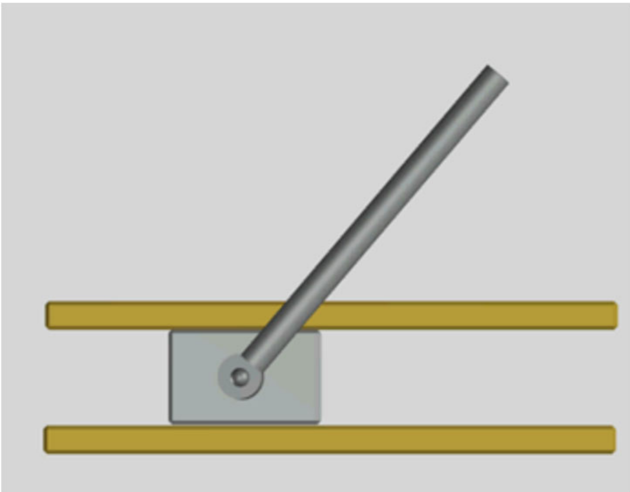
动力学

分类和实例

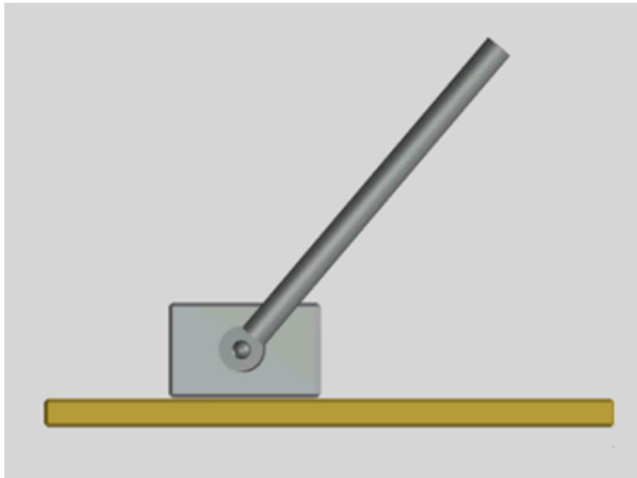
- 等式或不等式?

用等式形式表示的约束称为双面约束。

用不等式形式表示的约束称为单面约束。



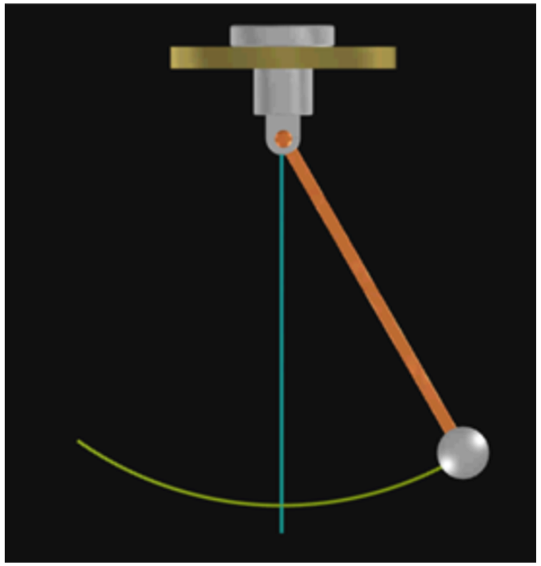
$y = 0$



$y \geq 0$

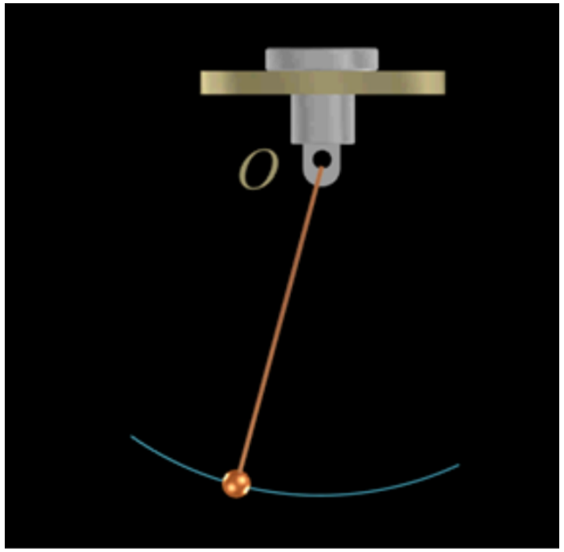
动力学

双面约束和单面约束的例子



$$x^2 + y^2 = l^2$$

双面约束



$$x^2 + y^2 \le l^2$$

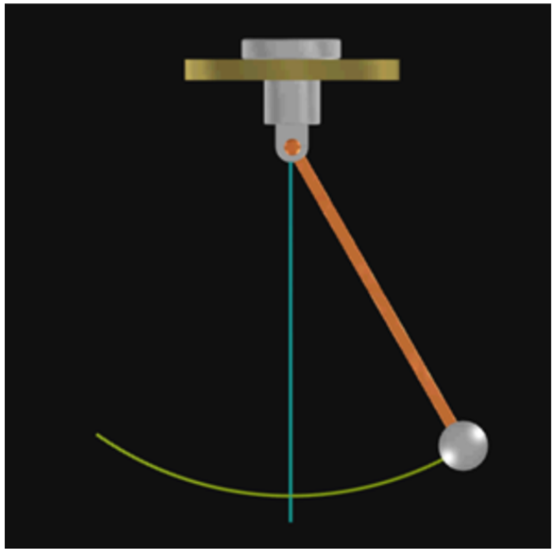
单面约束

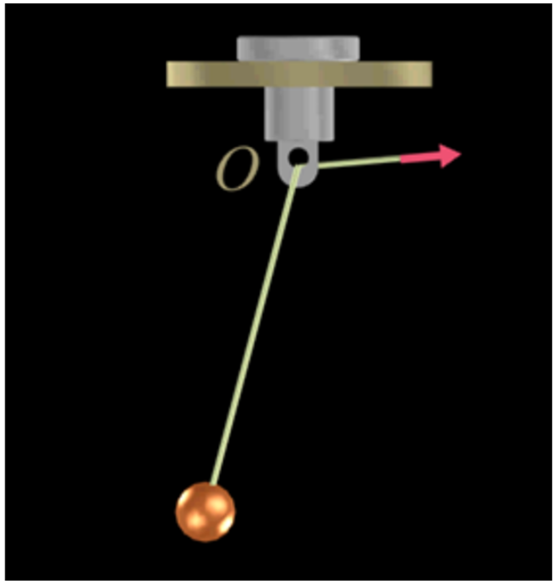
动力学

➢ 自治或非自治?

数学表达式不显含时间的约束称为定常约束。

数学表达式显含时间的约束称为非定常约束。





$$x^2 + y^2 = l^2$$

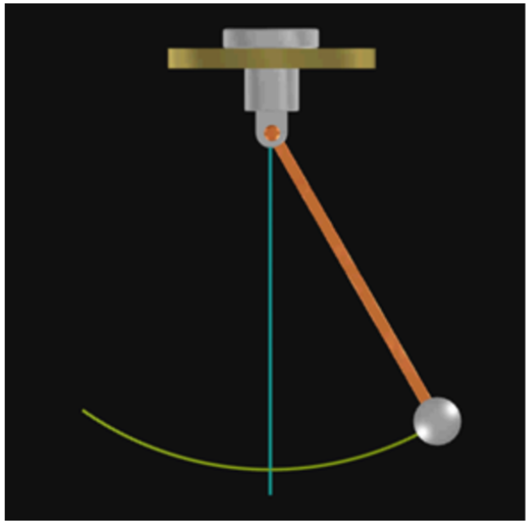
$$x^2 + y^2 \le (l_0 - vt)^2$$

动力学

➢ 可积或不可积?

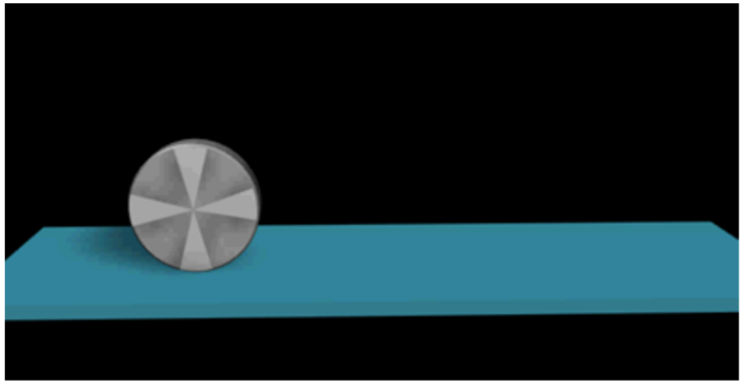
数学表达式不显含速度或可以积分为不显含速度形式的约束称为完整约束。

完全约束的例子



$$x^2 + y^2 = l^2$$

圆盘纯滚动



约束方程 $\dot{s} - R\dot{\varphi} = 0$

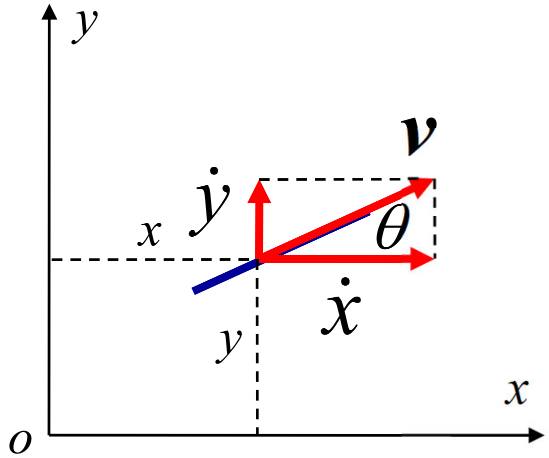
积分 $s - R\varphi + c = 0$

动力学

数学表达式显含速度且不能积分为不显含速度形式的约束称为非完整约束。

非完整约束的例子

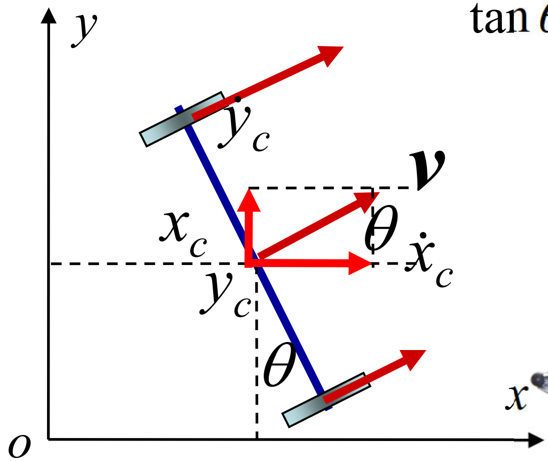
冰刀



$$\tan\theta = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

$$\sin\theta\,\dot{x} - \cos\theta\,\dot{y} = 0$$

人力运输车



$$\tan\theta = \frac{\dot{y}_c}{\dot{x}_c}$$

2 广义坐标

用来描述系统位形的独立参数称为该系统广义坐标。

广义坐标选取不唯一，可以是(线性)位移或角位移。

系统中所有质点的矢径和直角坐标为广义坐标的函数：

$$\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{r}_i\left(q_1,q_2,\cdots,q_s,t\right)\quad\left(i=1,2,\cdots,N\right)$$

$$x_i=x_i\left(q_1,q_2,\cdots,q_s,t\right),\ y_i=y_i\left(q_1,q_2,\cdots,q_s,t\right),\ z_i=z_i\left(q_1,q_2,\cdots,q_s,t\right)\quad\left(i=1,2,\cdots,N\right)$$

广义速度：广义坐标的时间导数。

$$\dot{\boldsymbol{r}}_i=\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial t}\quad\left(i=1,2,\cdots,N\right)$$

$$\dot{x}_i=\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial x_i}{\partial t},\ \dot{y}_i=\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial y_i}{\partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial y_i}{\partial t},\ \dot{z}_i=\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial z_i}{\partial t}\quad\left(i=1,2,\cdots,N\right)$$

广义加速度：广义坐标的2阶时间导数。

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_i=\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}\ddot{q}_k+\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial^2\boldsymbol{r}_i}{\partial q_k\partial q_j}\dot{q}_k\dot{q}_j+\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial^2\boldsymbol{r}_i}{\partial q_k\partial t}\dot{q}_k+\frac{\partial^2\boldsymbol{r}_i}{\partial t}\quad\left(i=1,2,\cdots,N\right)$$

3 虚位移用广义虚位移表示

实际的无穷小的位移可以用广义坐标的微分表示

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i = \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k} \mathrm{d} q_k + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t} \mathrm{d} t \quad (i = 1, 2, \cdots, N)$$

类似地，由泰勒展开得出虚位移和广义虚位移间关系

$$\delta \boldsymbol{r}_i = \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k \quad (i = 1, 2, \cdots, N) \qquad \delta t = 0$$

直角坐标表示

$$\delta x_i = \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \delta q_k, \ \delta y_i = \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \delta q_k, \ \delta z_i = \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \delta q_k, \quad (i = 1, 2, \cdots, N)$$

4 自由度

系统独立广义虚位移数目称为该系统的自由度数，简称自由度。

受完整约束系统的自由度就等于广义坐标的数目。

受非完整约束系统的自由度就等于广义坐标的数目与非完整约束数目的差。

空间中不受约束的质点位置可由3个坐标描述. 因此,受s个约束的 N个质点的质点系，其自由度m为

$$m = 3N - s$$

空间中作平移运动或一般平面运动的刚体自由度为3, 而绕固定轴旋转的刚体自由度为1.

动力学

例 6

求图示系统的自由度并选择广义坐标系。

解:

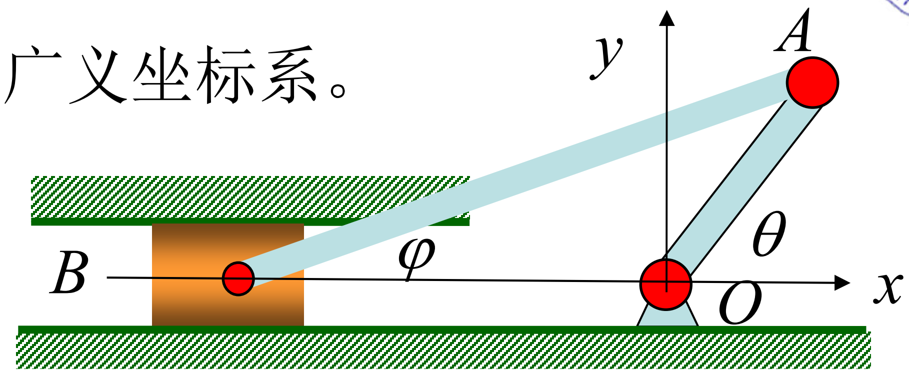


图 1

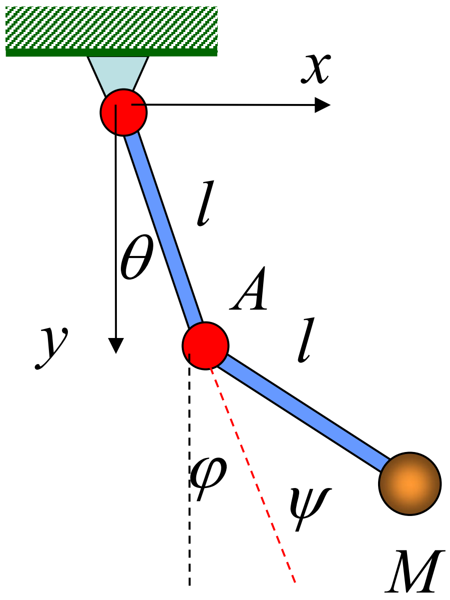


图 2

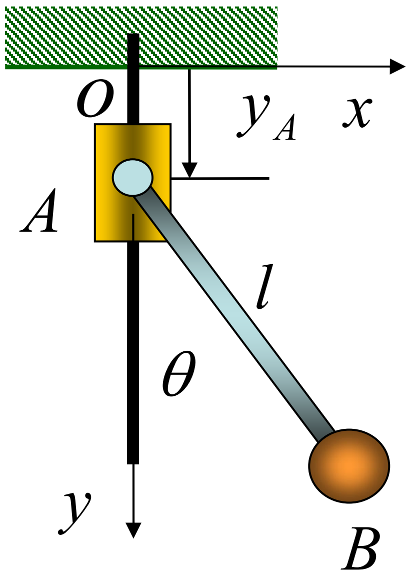


图 3

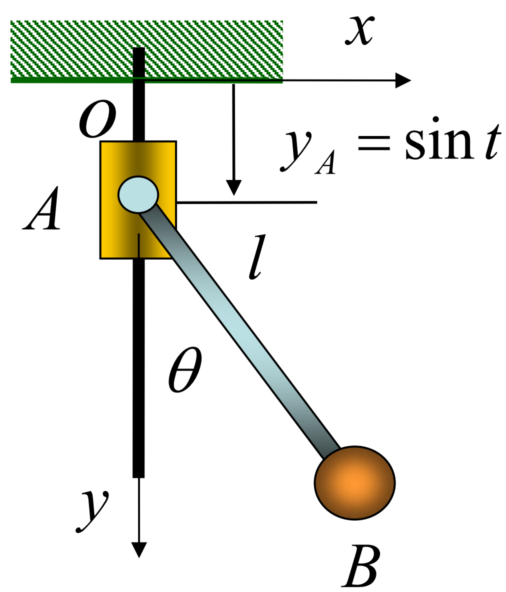
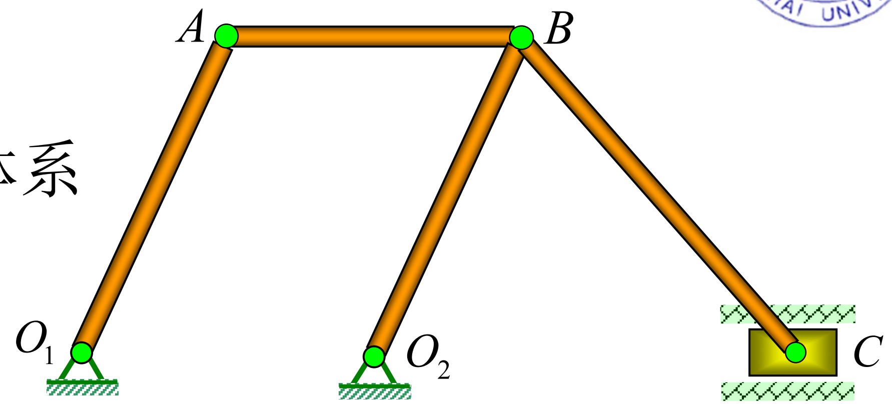


图4

例 7

将图示机构分别视作质点系和刚体系统，求其自由度。



解:　当做由3个质点A, B 和C (同一平面内)组成的质点系时

$$m = 2N - s = 2\times 3 - (4+1) = 1$$

当做由4个刚体O_1A, O_2B, AB和BC组成系统做平面运动时

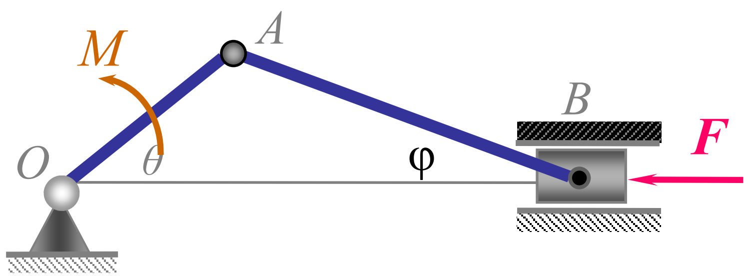
$$m = 3N - s = 3\times 4 - \left(2\times 5 + 1\right) = 1$$

当做由5个刚体O_1A, O_2B, AB, BC和C组成系统做平面运动时

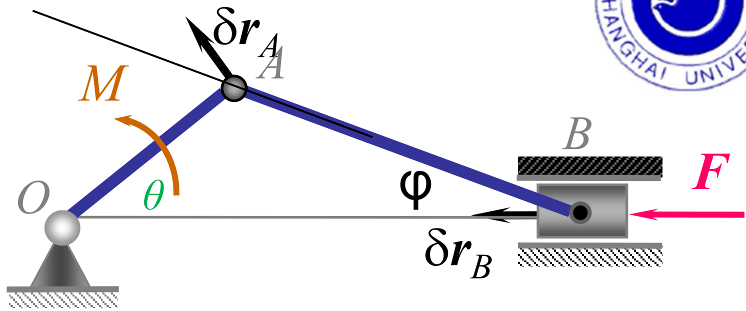
$$m = 3N - s = 3\times 5 - \left(2\times 6 + 2\right) = 1$$

例 8

曲轴的运动可以通过广义坐标θ描述。已知 $OA=r$, $AB=l$和 φ，用广义虚位移描述A和B虚位移。



动力学



解:

几何关系

$$x_A = r\cos\theta,\ y_A = r\sin\theta;$$
$$x_B = r\cos\theta + l\cos\varphi,\ y_B = 0.$$

θ 和 φ 是非独立的且满足约束方程

$$l\sin\varphi = r\sin\theta.$$

对上式进行变化，即用广义虚位移表示

$$l\cos\varphi\delta\varphi = r\cos\theta\delta\theta. \quad\Rightarrow\quad \delta\varphi = \frac{r\cos\theta}{l\cos\varphi}\delta\theta.$$

因此

$$\delta x_A = -r\sin\theta\delta\theta \qquad \delta y_A = r\cos\theta\delta\theta$$

$$\delta x_B = -r\sin\theta\delta\theta - l\sin\varphi\frac{r\cos\theta}{l\cos\varphi}\delta\theta = -\frac{r\sin(\theta+\varphi)}{\cos\varphi}\delta\theta \qquad \delta y_B = 0$$

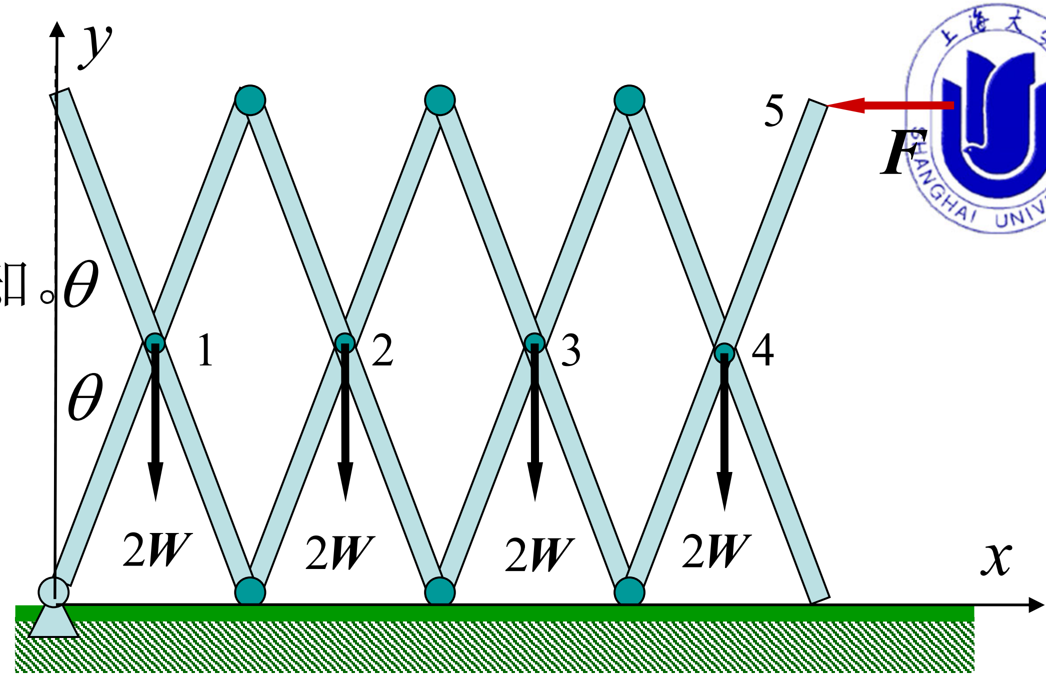
与例 3 比较

$$\delta r_A = r\delta\theta,\ \delta r_B = \frac{r\sin(\theta+\varphi)}{\cos\varphi}\delta\theta.$$

动力学

例 9

每根杆的重量为 2 W，θ已知。求保持平衡需要施加的力F。



解：研究系统。自由度为1，约束均为理想约束。

应用虚功原理

$$(-2W)\delta y_1+(-2W)\delta y_2+(-2W)\delta y_3+(-2W)\delta y_4+(-F)\delta x_5=0.$$

用选择的广义坐标 θ 下表示相应各坐标

$$y_i=\frac{L}{2}\cos\theta,\quad (i=1,2,3,4),\ x_5=4L\sin\theta.$$

用广义虚位移表示

$$\delta y_i=-\frac{L}{2}\sin\theta\delta\theta,\ \delta x_5=4L\cos\theta\delta\theta.$$

代入虚功原理

$$(4WL\sin\theta-4FL\cos\theta)\delta\theta=0.\quad \xrightarrow{\delta\theta\neq 0.}\quad F=W\tan\theta.$$

5 广义力

虚功用广义虚位移表示

$$\delta W = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k = \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{s} \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k$$

$$= \sum_{k=1}^{s} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k = \sum_{k=1}^{s} \left(\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k} \right) \delta q_k = \sum_{k=1}^{s} Q_k \delta q_k$$

定义广义坐标q_s $(s=1,2,\ldots,n)$对应的广义力

$$Q_k = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k} \quad (k = 1, 2, \cdots, s)$$

物理意义，在广义虚位移δq_k上作功的力。

直角坐标表示

$$Q_k = \sum_{i=1}^{N} \left(F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) \quad (k = 1, 2, \cdots, s)$$

例 10

计算例 3、 4 和 9中的广义力

解:

在例3中

$$Q_\theta = M + F\frac{r\sin(\theta+\varphi)}{\cos\varphi}.$$

在例4中

$$Q_\theta = F_1\frac{2a}{3} + 2aF_2 - M_A.$$

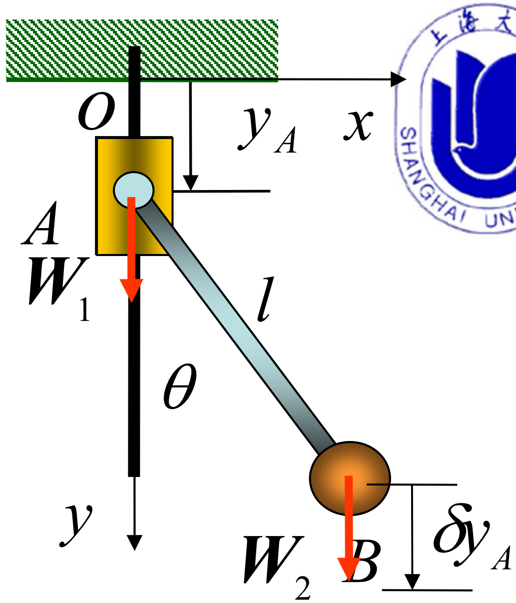
在例9中

$$Q_\theta = 4WL\sin\theta - 4FL\cos\theta.$$

动力学

例11

确定重力W_1 和 W_2 在给定的广义坐标y_A 和 θ 下的广义力 。



解: 用广义坐标表示相应力作用点的坐标。

$$y_A = y_A,\ y_B = y_A + l\cos\theta.$$

应用公式 $$Q_k = \sum_{i=1}^{N}\left(F_{ix}\frac{\partial x_i}{\partial q_k} + F_{iy}\frac{\partial y_i}{\partial q_k} + F_{iz}\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\right) \quad (k = 1, 2, \cdots, s)$$

$$Q_1 = W_1\frac{\partial y_A}{\partial y_A} + W_2\frac{\partial y_B}{\partial y_A} = W_1\frac{\partial y_A}{\partial y_A} + W_2\frac{\partial(y_A + l\cos\theta)}{\partial y_A} = W_1 + W_2,$$

$$Q_2 = W_1\frac{\partial y_A}{\partial \theta} + W_2\frac{\partial y_B}{\partial \theta} = W_1\frac{\partial y_A}{\partial \theta} + W_2\frac{\partial(y_A + l\cos\theta)}{\partial \theta} = -W_2 l\sin\theta.$$

讨论: $$\delta W = \sum_{j=1}^{k} Q_j \delta q_j = Q_1\delta y_A + Q_2\delta\theta.$$

令 $\delta y_A \neq 0$ 且 $\delta\theta = 0$. $Q_1\delta y_A = \delta W = W_1\delta y_A + W_2\delta y_A = (W_1 + W_2)\delta y_A.$ $\Rightarrow$ $Q_1 = W_1 + W_2.$

令 $\delta y_A = 0$ 且 $\delta\theta \neq 0$. $Q_2\delta\theta = \delta W = W_1\cdot 0 - W_2 l\sin\theta\delta\theta = -W_2 l\sin\theta\delta\theta.$ $\Rightarrow$ $Q_2 = -W_2 l\sin\theta.$

6 广义坐标表示的虚功原理

虚功原理

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0$$

广义力的定义

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = \sum_{k=1}^{s} Q_k \delta q_k \Rightarrow \sum_{k=1}^{s} Q_k \delta q_k = 0$$

完整系统δq_k的独立性

$$Q_k = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, s)$$

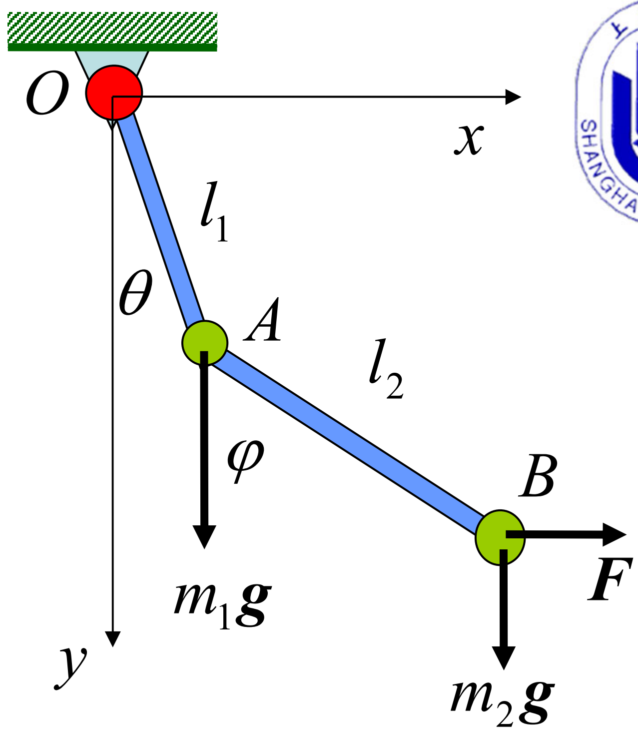
受完整理想约束系统保持静态平衡的充分必要条件是所有的广义力为零。

动力学

例12　确定平衡位置，已知

$$l_1 = l_2 = l, m_1 = m_2 = m, F = mg$$

解：力作用点直角坐标用广义坐标表示



$$y_A = l_1 \cos\theta,$$

$$y_B = l_1 \cos\theta + l_2 \cos\varphi, \quad x_B = l_1 \sin\theta + l_2 \sin\varphi$$

计算广义力

$$Q_1 = m_1 g \frac{\partial y_A}{\partial \theta} + m_2 g \frac{\partial y_B}{\partial \theta} + F \frac{\partial x_B}{\partial \theta} = -2mgl\sin\theta + mgl\cos\theta,$$

$$Q_2 = m_1 g \frac{\partial y_A}{\partial \varphi} + m_2 g \frac{\partial y_B}{\partial \varphi} + F \frac{\partial x_B}{\partial \varphi} = -mgl\sin\varphi + mgl\cos\varphi$$

完整理想约束系统，广义力表示的虚功原理

$$-2mgl\sin\theta + mgl\cos\theta = 0, \qquad \tan\theta = 1/2,$$

$$-mgl\sin\varphi + mgl\cos\varphi = 0 \qquad \tan\varphi = 1$$

第十一次课习题：9-10、9-11、9-30*

祝各位寒假一切安好！

预祝2022年新春快乐！