

# 第六章

# 点的合成运动

运动学



# 目录

6.1 运动合成概述

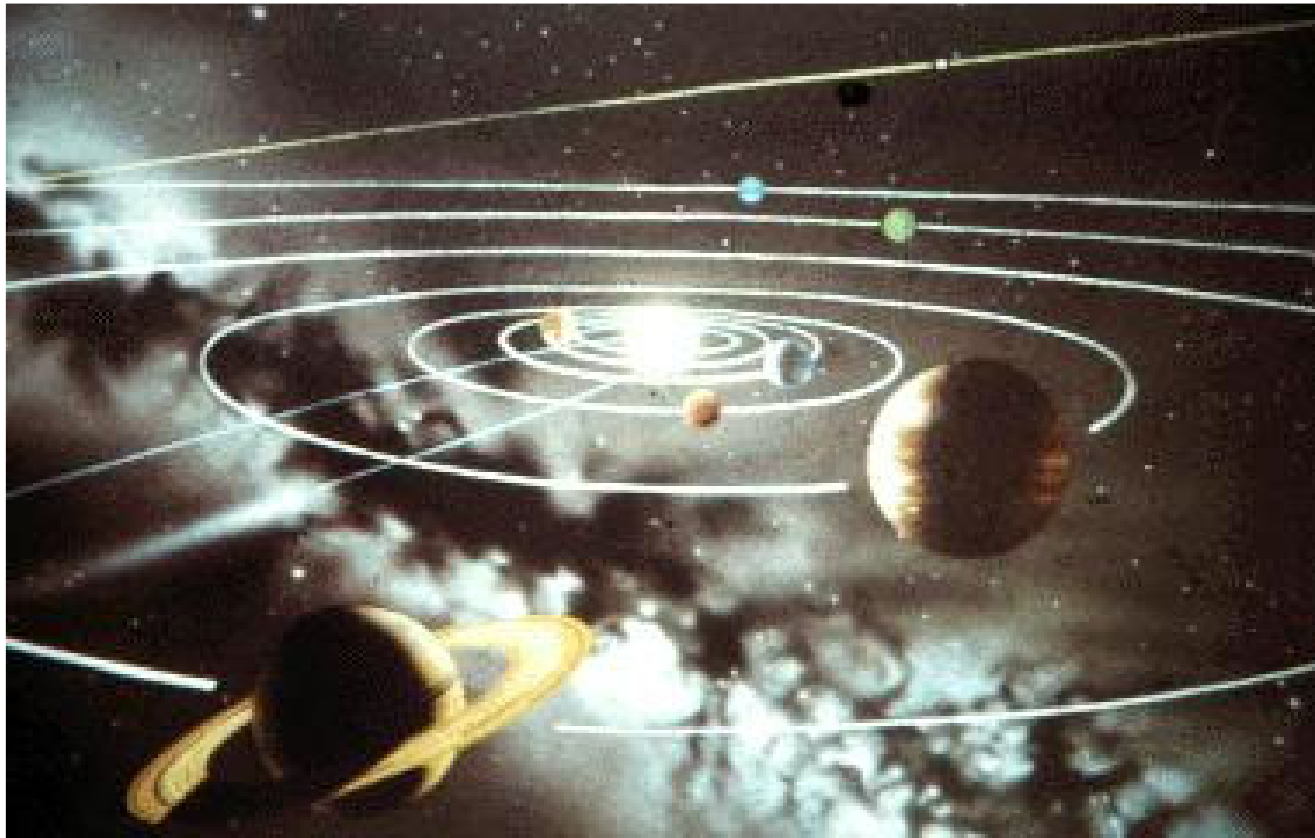
6.2 速度合成定理

6.3 加速度合成定理

6.4 习题讨论课

# 运动学

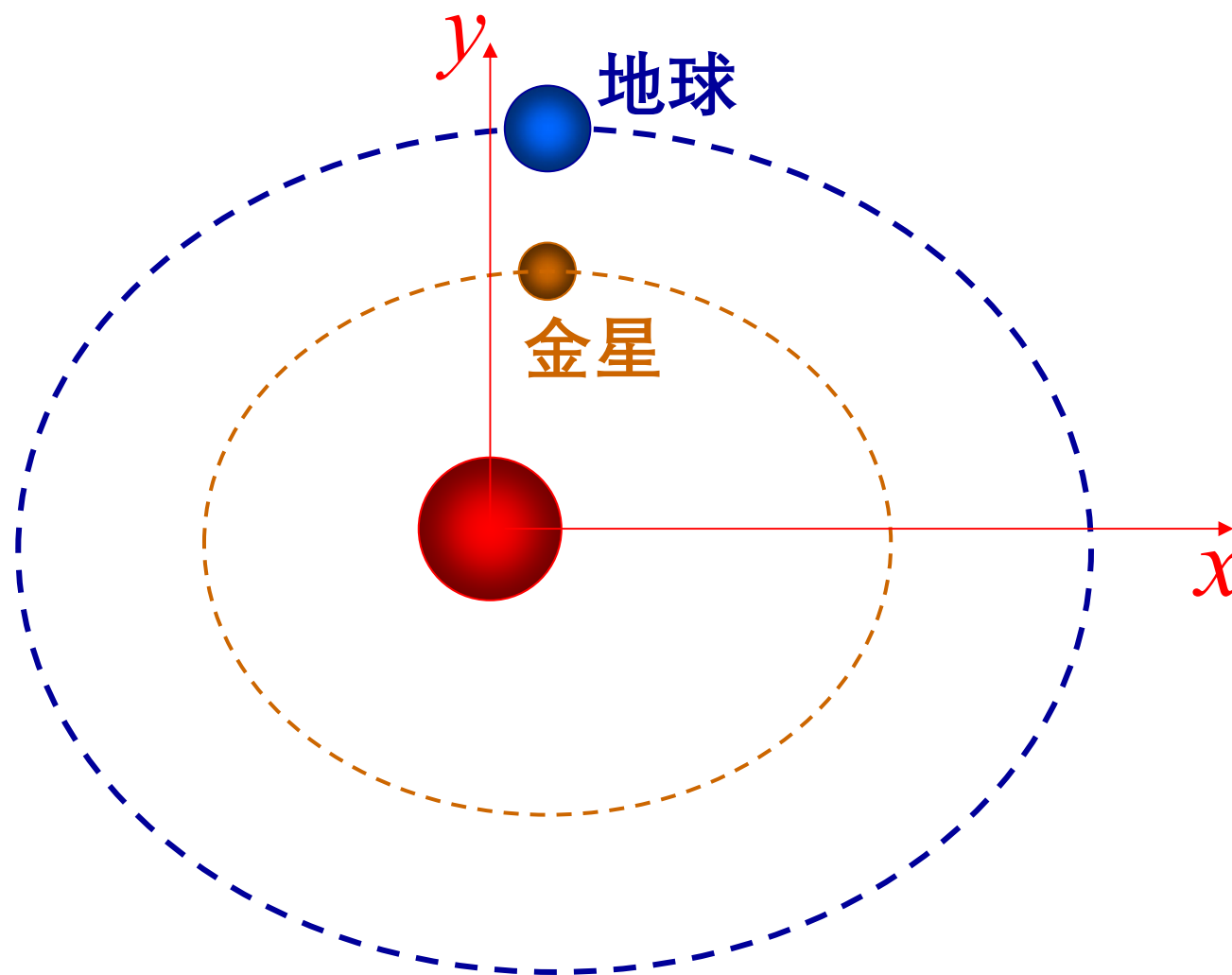
## 问题的提出



# 运动学



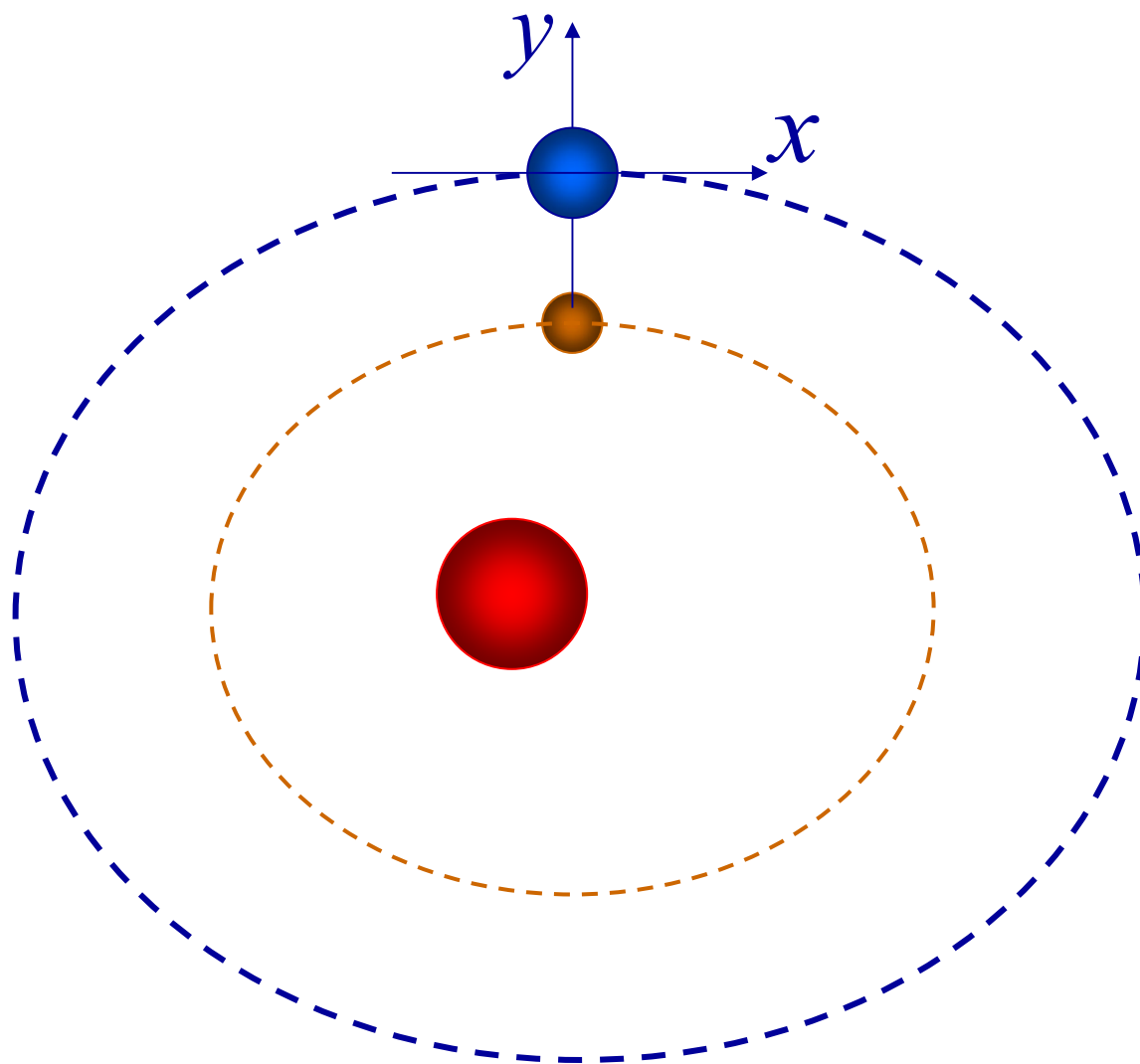
日心参考系中行星的运动轨迹



# 运动学



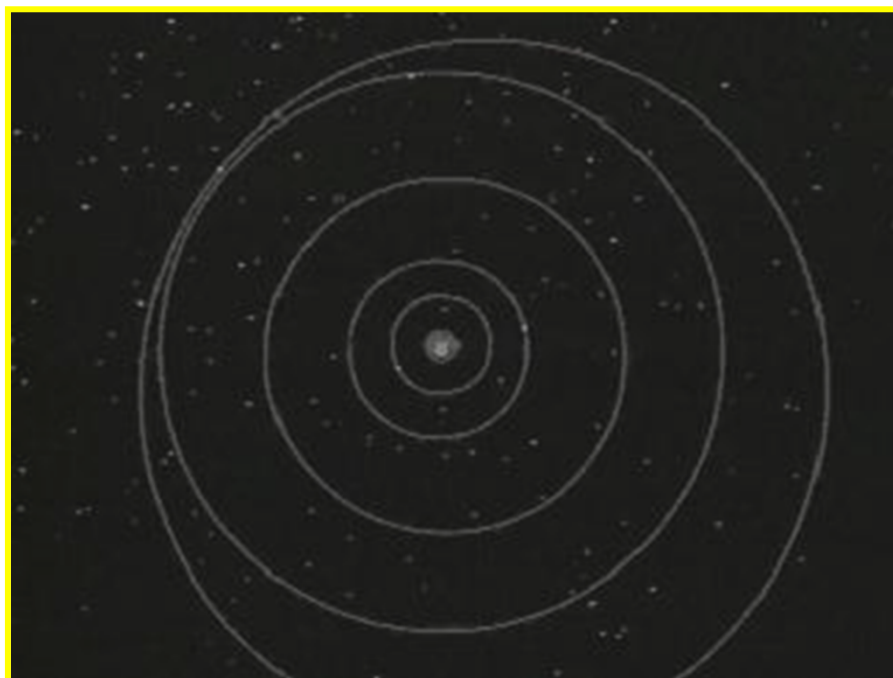
地心参考系中行星的运动



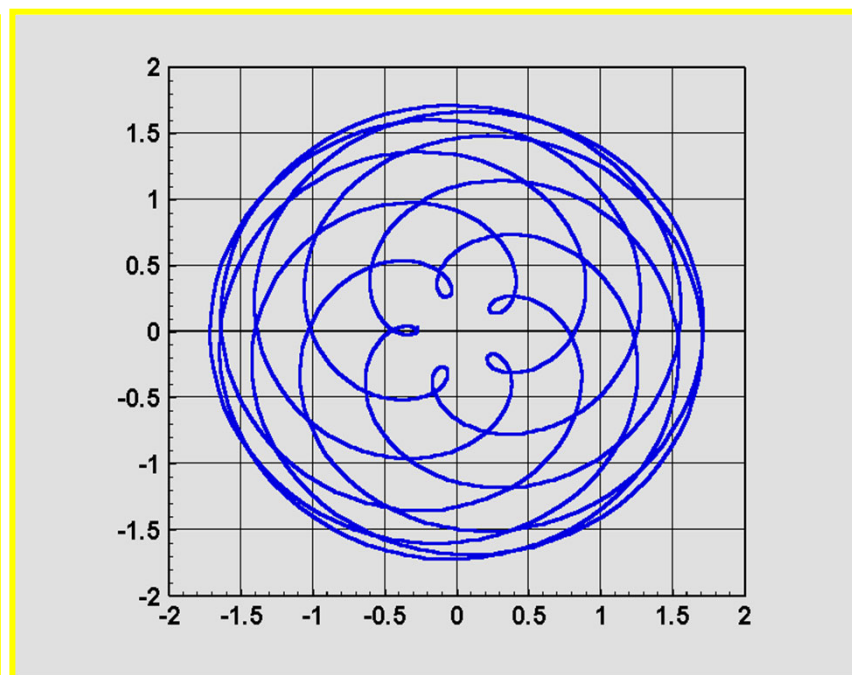
# 运动学



日心参考系中行星的运动轨迹



地心参考系中金星的运动轨迹



选取适当的参考系，可使描述运动的形式简单

运动学



# 目录

6.1 运动合成概述

6.2 速度合成定理

6.3 加速度合成定理

6.4 习题讨论课

## 6.1 运动合成概述

### 1 两个参考系: 定参考系和动参考系

假定为静止的参考为**定参考系**。在一般工程问题上, 习惯上将其固结在地球上。

**动参考系**相对于定参考系运动。

### 2 三种运动: 绝对运动、相对运动和牵连运动

动点相对于定参考系的运动(观察所得或实验所得) 称为**绝对运动**。

动点相对于动参考系的运动(观察所得或实验所得) 称为**相对运动**。

动参考系相对于定参考系的运动称为 **牵连运动**, 牵连运动不是点的运动而是刚体的运动。



# 运动学

起重机负载上一点



# 运动学



飞机螺旋桨上一点

动点: 螺旋桨上点 $P$

动参考系: 飞机



该图片由 雁偶兵佐德 上传至 SonibBS.com, 图片版权归原创作者所有

# 运动学



直升机螺旋桨上一点

动点:螺旋桨上点 $P$

动参考系: 直升机



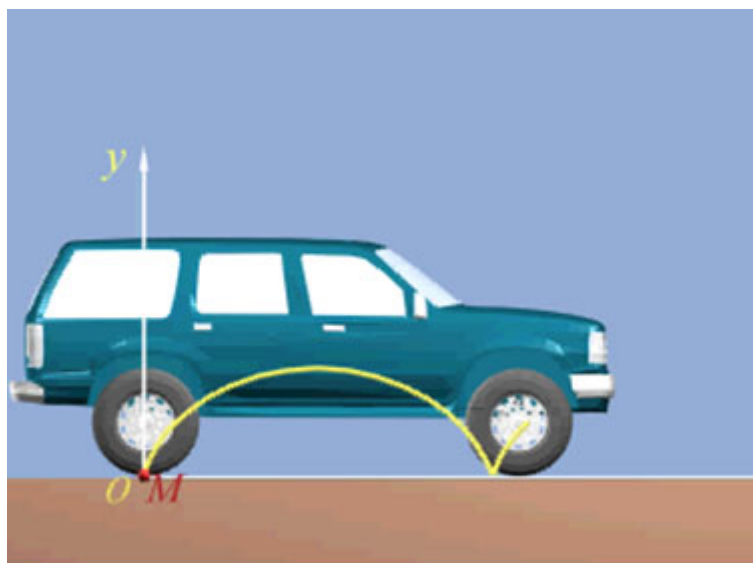
# 运动学

车轮上一点



动点: 车轮边缘上点  $M$

动参考系: 车



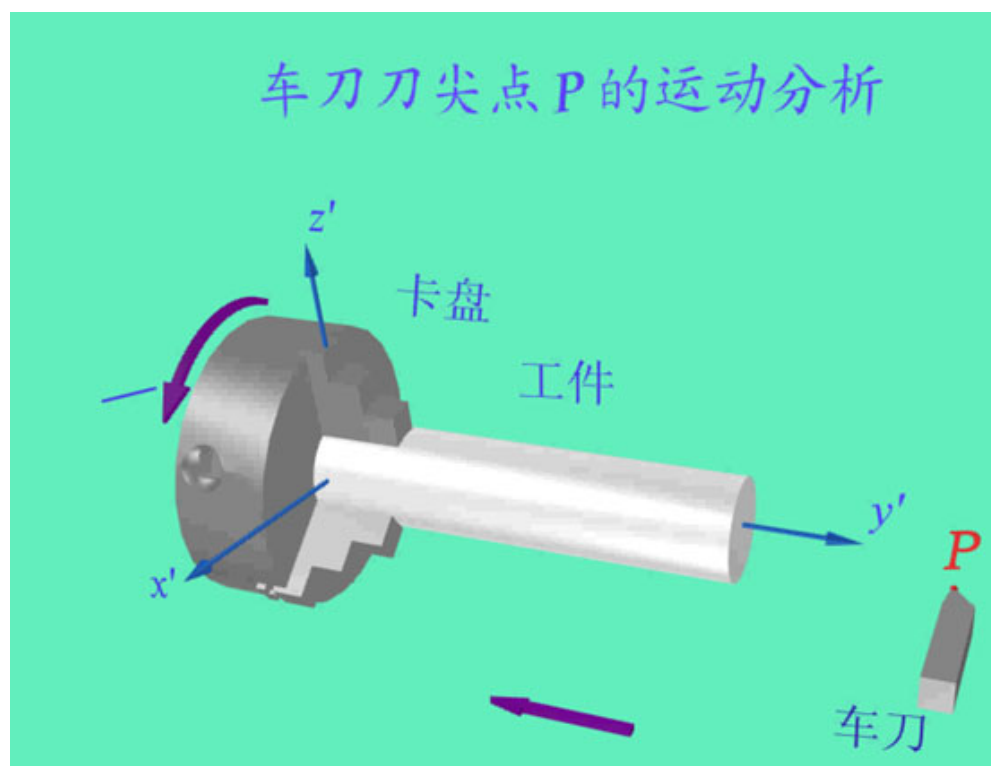
# 运动学

车刀上一点



动点: 刀尖上点 $P$

动参考系: 工件



# 运动学



## 3 速度和加速度: 绝对 & 相对

在定参考系内

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

绝对速度和加速度

$$\mathbf{v}_a = \dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k} \quad \mathbf{a}_a = \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k}$$

在动参考系内

$$\mathbf{r}' = x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}'$$

相对速度和加速度

$$\mathbf{v}_r = \dot{\mathbf{r}}' = \dot{x}'\mathbf{i}' + \dot{y}'\mathbf{j}' + \dot{z}'\mathbf{k}' \quad \mathbf{a}_r = \ddot{\mathbf{r}}' = \ddot{x}'\mathbf{i}' + \ddot{y}'\mathbf{j}' + \ddot{z}'\mathbf{k}'$$

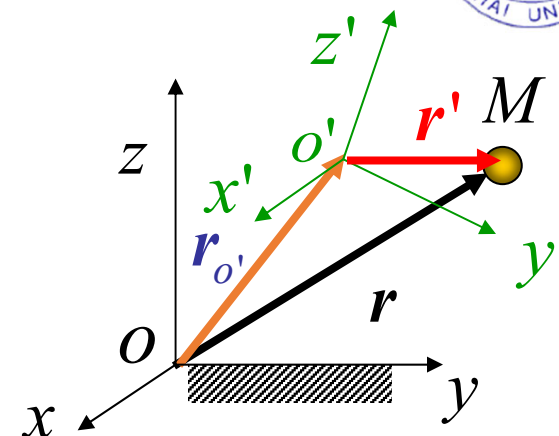
绝对位置矢量与相对位置矢量间的关系

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{o'} + \mathbf{r}'$$

其中

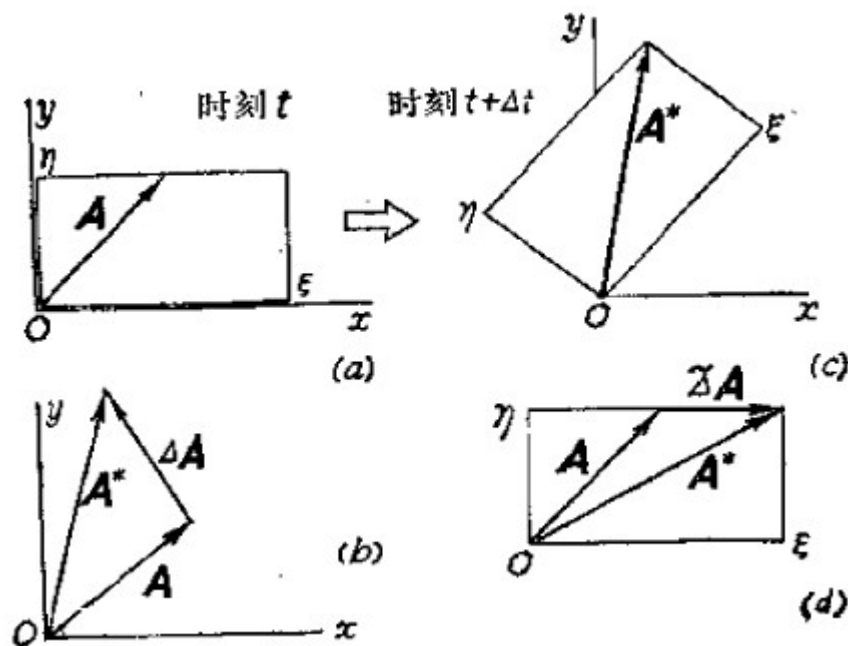
$$\mathbf{r}_{o'} = x_o\mathbf{i} + y_o\mathbf{j} + z_o\mathbf{k}$$

绝对速度加速度与相对速度加速度间的关系?



## 4 矢量求导与坐标系有关

矢量增量与坐标系有关



绝对导数

$$\dot{A} = \frac{dA}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta t}$$

相对导数

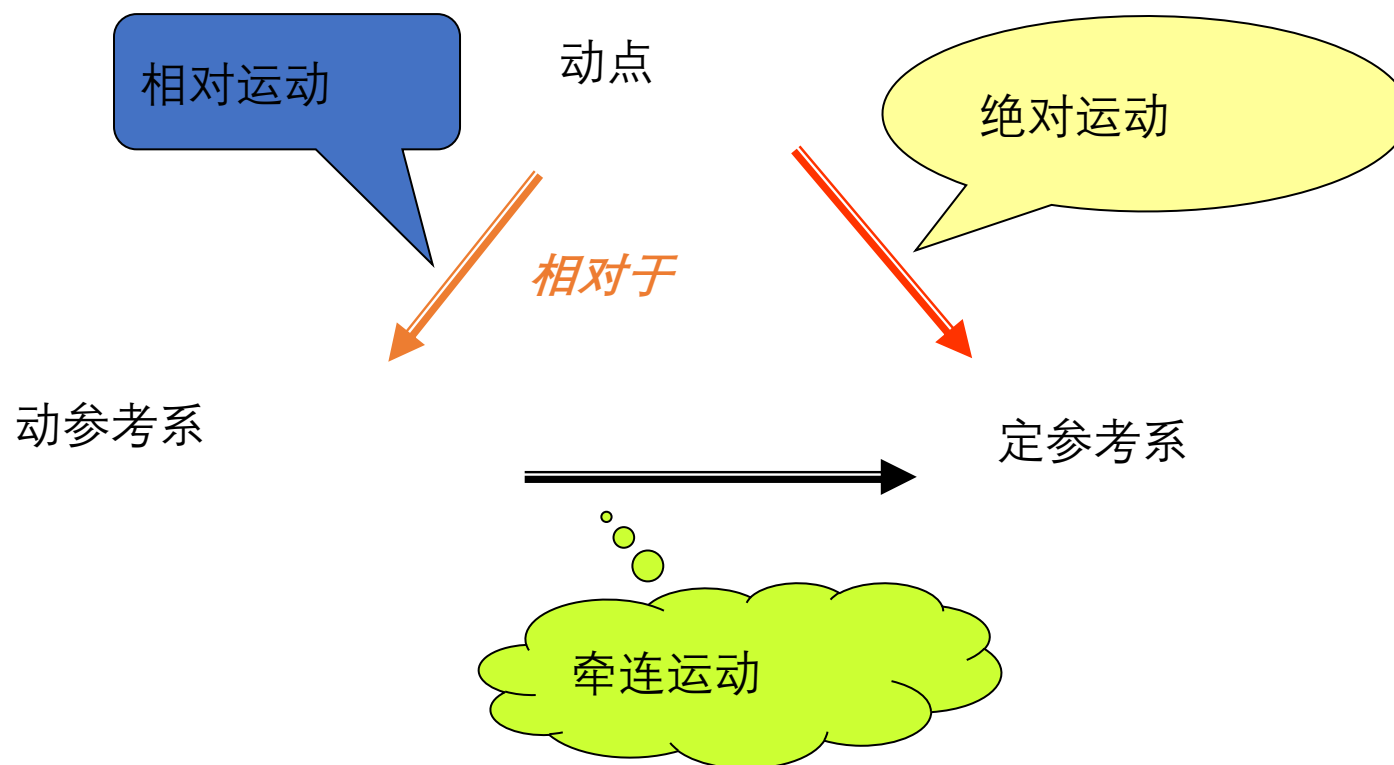
$$\tilde{\dot{A}} = \frac{\tilde{d}A}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\tilde{\Delta A}}{\Delta t}$$

# 运动学



## 5 总结

- (1) 点: 动点
- (2) 参考系: 定参考系和动参考系
- (3) 运动: 绝对、相对和牵连





运动学



# 目录

6.1 运动合成概述

6.2 速度合成定理

6.3 加速度合成定理

6.4 习题讨论课

# 运动学

## 6.2 速度合成定理

### 1 速度合成定理

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{O'} + \mathbf{r}'$$

在定参考系中求导:  $\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_{O'} + \dot{\mathbf{r}}'$

$$\mathbf{r}' = x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}'$$

$$\dot{\mathbf{r}}' = \dot{x}'\mathbf{i}' + x'\dot{\mathbf{i}}' + \dot{y}'\mathbf{j}' + y'\dot{\mathbf{j}}' + \dot{z}'\mathbf{k}' + z'\dot{\mathbf{k}}'$$

$$= x'\dot{\mathbf{i}}' + y'\dot{\mathbf{j}}' + z'\dot{\mathbf{k}}' + \dot{\mathbf{r}}'$$

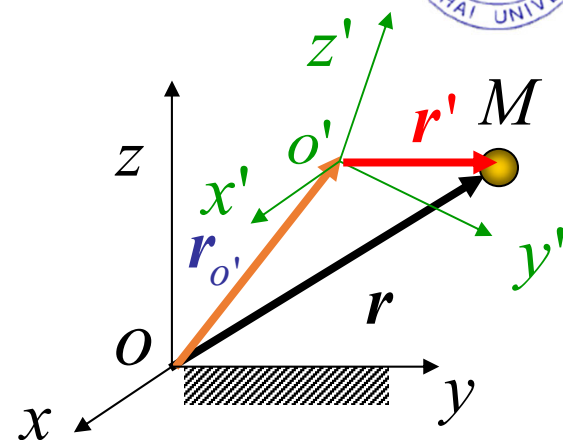
定轴转动刚体或平面运动刚体  $\dot{\mathbf{i}}' = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}'$ ,  $\dot{\mathbf{j}}' = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}'$ ,  $\dot{\mathbf{k}}' = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}'$  故

$$x'\dot{\mathbf{i}}' + y'\dot{\mathbf{j}}' + z'\dot{\mathbf{k}}' = \boldsymbol{\omega} \times (x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}') = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' + \dot{\mathbf{r}}'$$

对做定轴转动或平面运动的**动参考系**,  $\dot{\mathbf{r}}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$  为参考系上与**动点M**瞬时重合的点的速度, 称为**牵连速度**。这个点称为参考系上的**牵连点**, 记为  $\mathbf{v}_e$ 。

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r$$



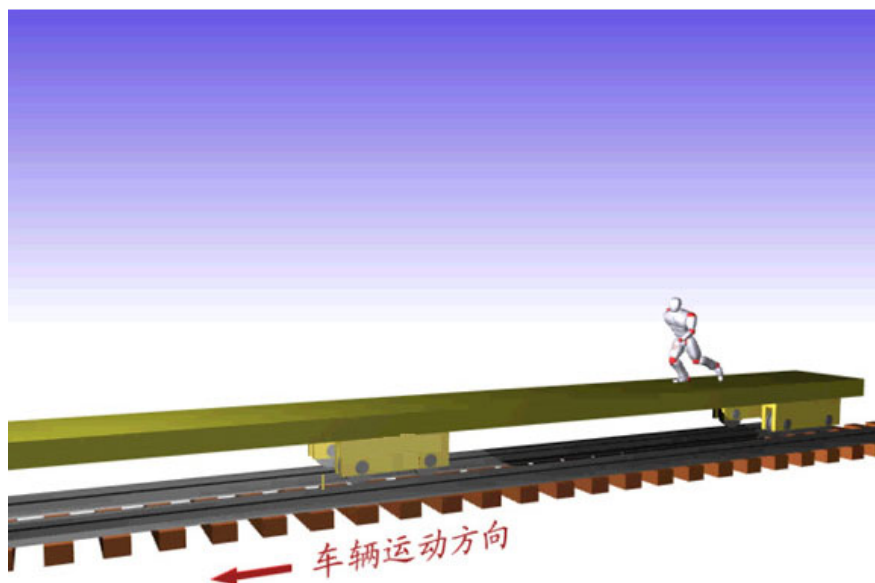
# 运动学

## 牵连点示例



动点: 运动中的人

动参考系: 行驶的车辆



由于相对运动，不同瞬时牵连点的位置也不同

# 运动学

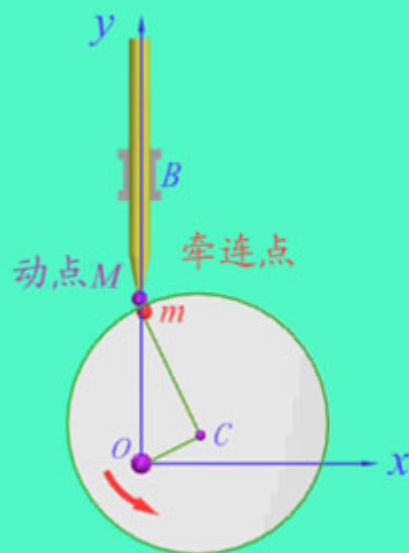
## 牵连点示例



动点: 杆底端端点

动参考系: 凸轮

### 点的复合运动——牵连点



由于相对运动，不同瞬时牵连点的位置也不同

偏心凸轮机构

# 运动学

## 牵连点示例

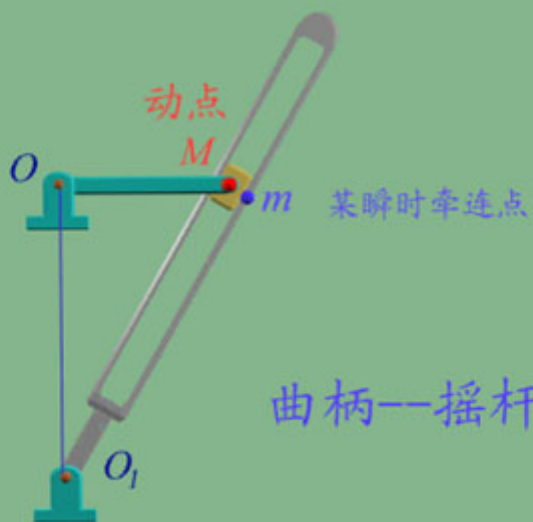


动点: 曲柄上滑块

动参考系: 导槽

## 点的复合运动——牵连点

由于相对运动，不同瞬  
时牵连点的位置也不同



曲柄—摇杆机构

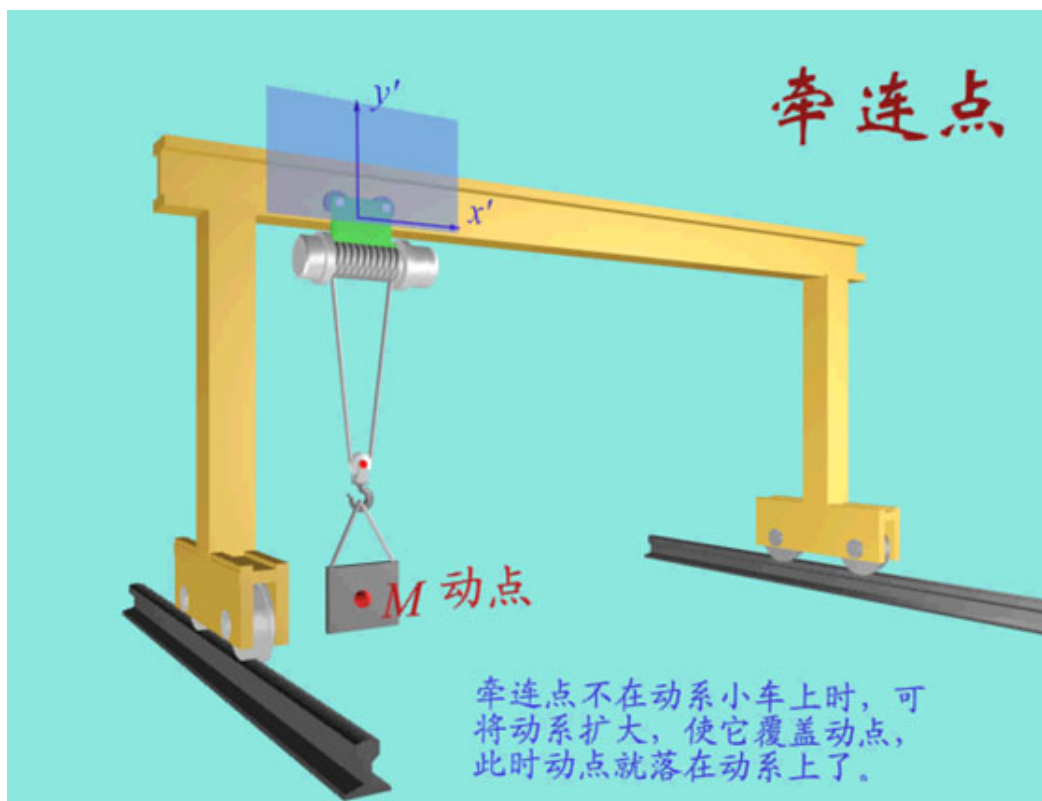
# 运动学

## 牵连点示例



动点:重物上点  $P$

动参考系: 载重架

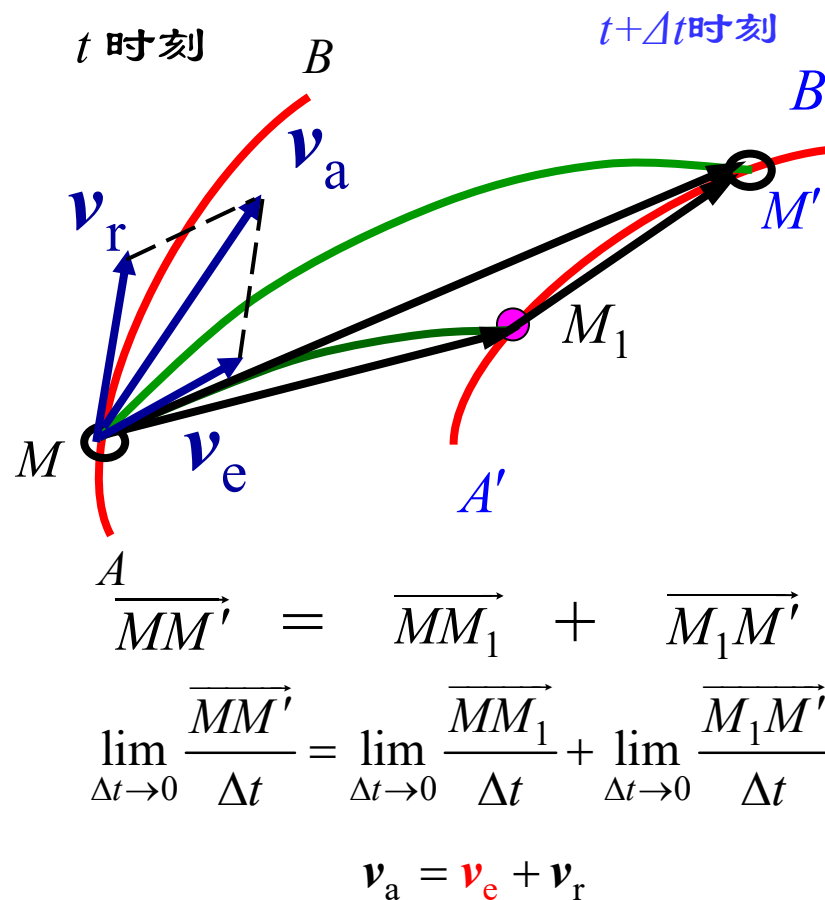
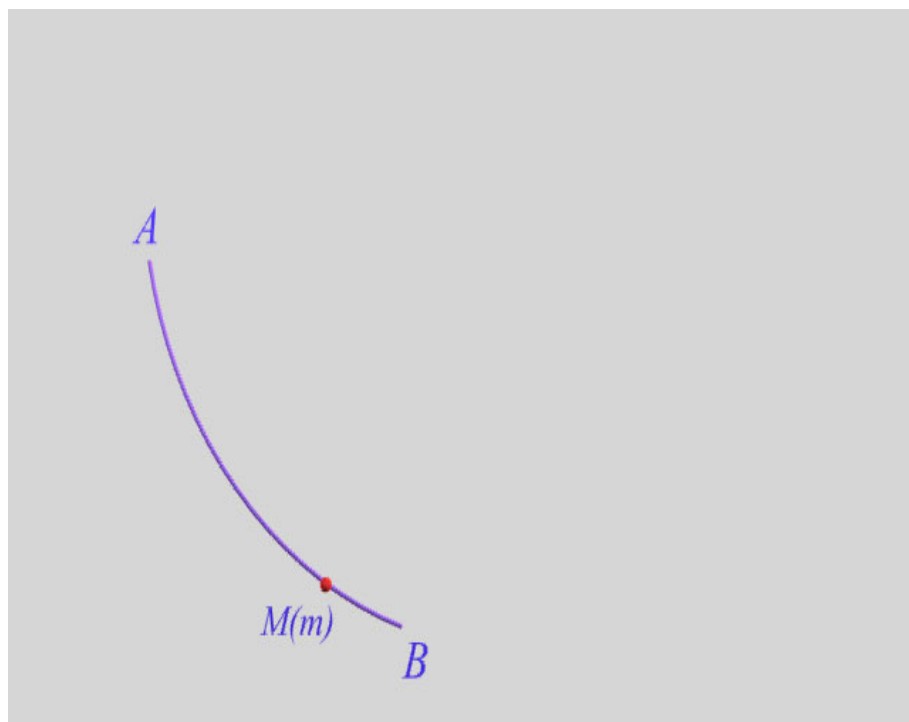


# 运动学



## 2 几何解释

假设  $AB$  为相对运动轨迹



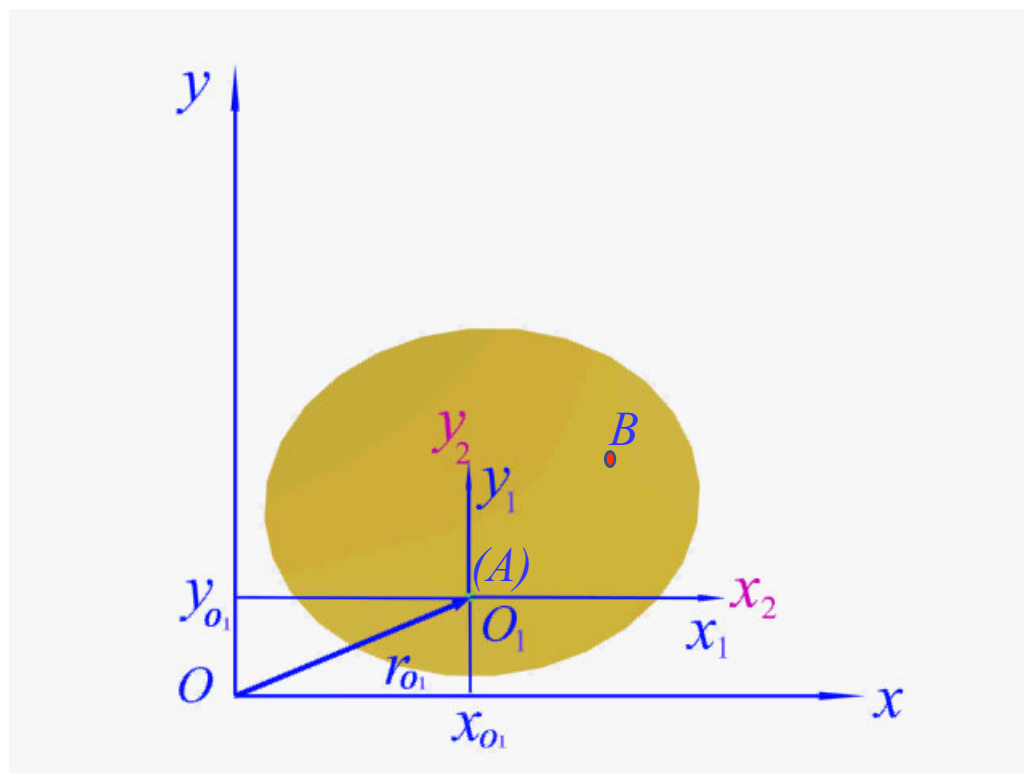
速度合成定理：动点在任意瞬时的绝对速度，等于它在该瞬时的牵连速度与相对速度的矢量和。

# 运动学



## 3 刚体平面运动: 回顾

刚体的平面运动可视作基点的平移和绕基点的相对转动合成的运动。



以刚体上点  $B$  为动点将平移参考系固结在点  $A$  上, 可知:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{v}_a = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r & \xrightarrow{\text{red arrow}} & \mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} \\ \text{red arrow with yellow question mark} & & \text{red arrow pointing down} \\ \mathbf{a}_a = \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_r & \xrightarrow{\text{red arrow}} & \mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A} \\ & & \mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}^{\tau} + \mathbf{a}_{B/A}^n \end{array}$$

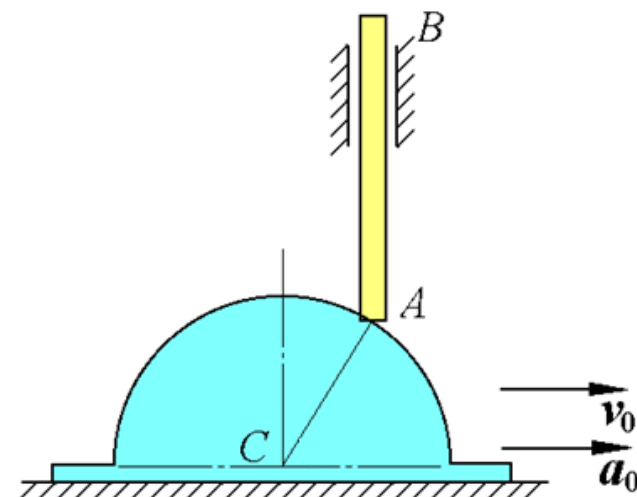
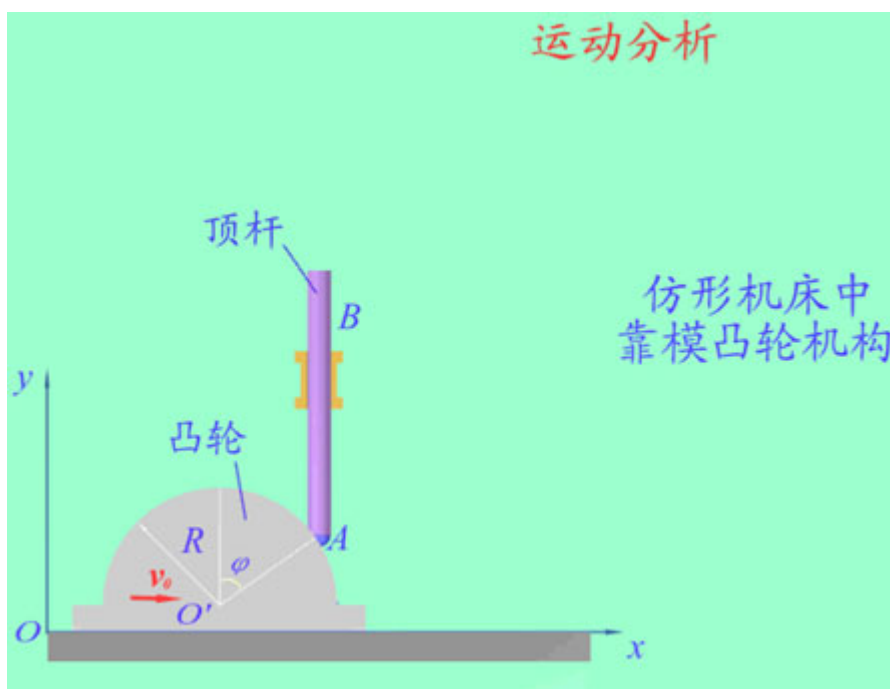


# 运动学



例 1

凸轮半径为  $R$  运动速度为  $v_0$ 。试求在给定角度  $\varphi$  处杆  $AB$  的速度。

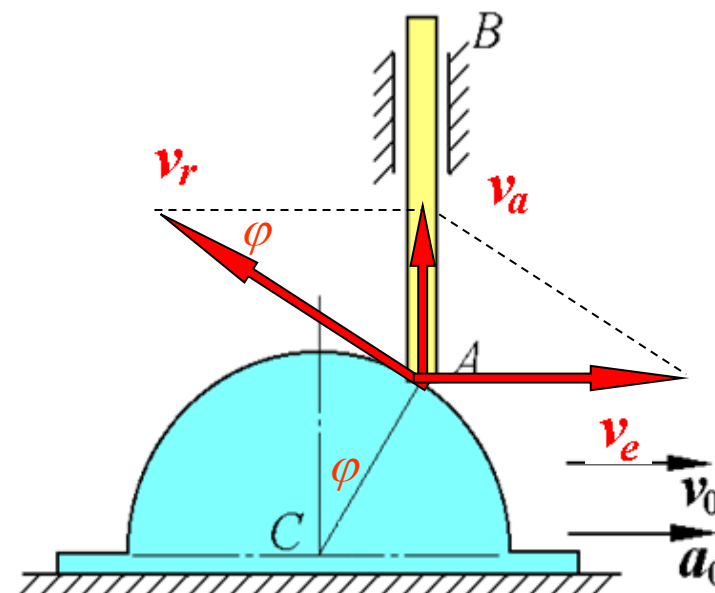
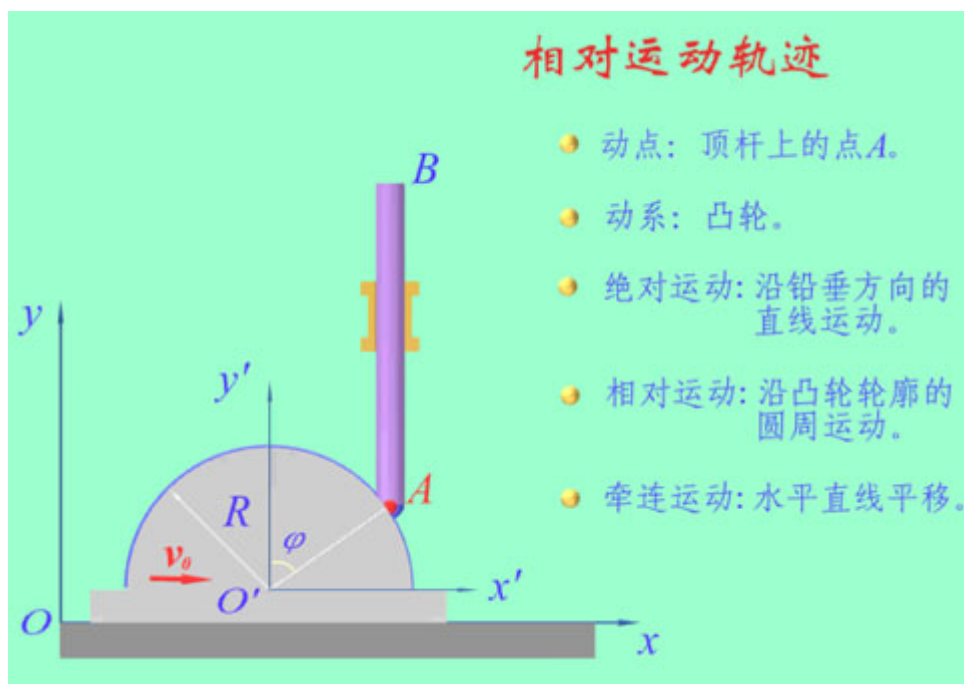


# 运动学



解:

以杆 $AB$ 上点 $A$  作为动点，将动参考系固连到凸轮上， 牵连运动即为平移运动。



$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r$$

$$v_{AB} = v_a = v_e \operatorname{tg} \varphi = v_0 \operatorname{tg} \varphi$$

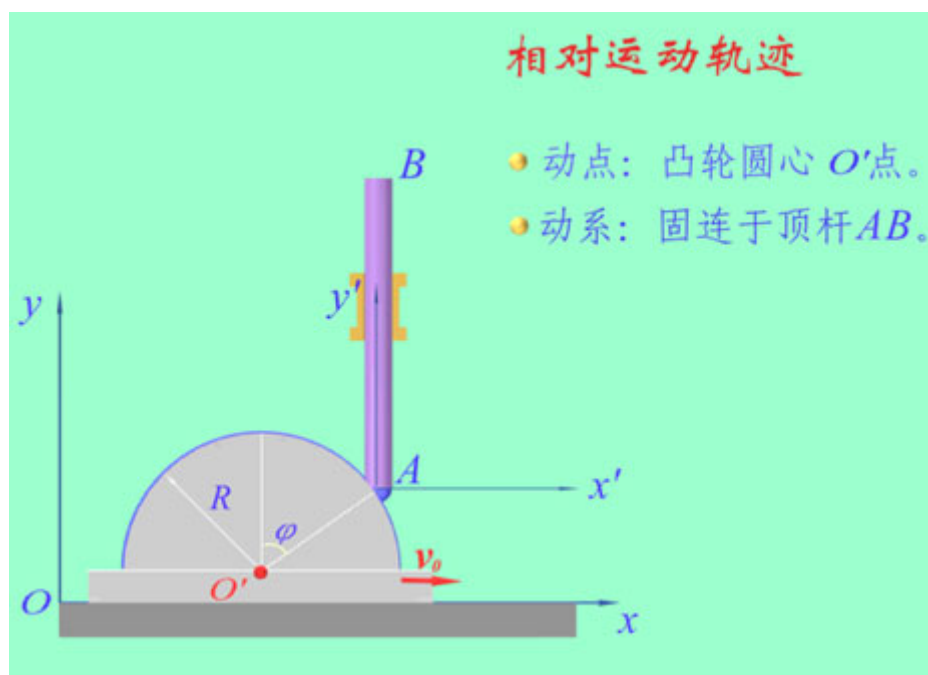
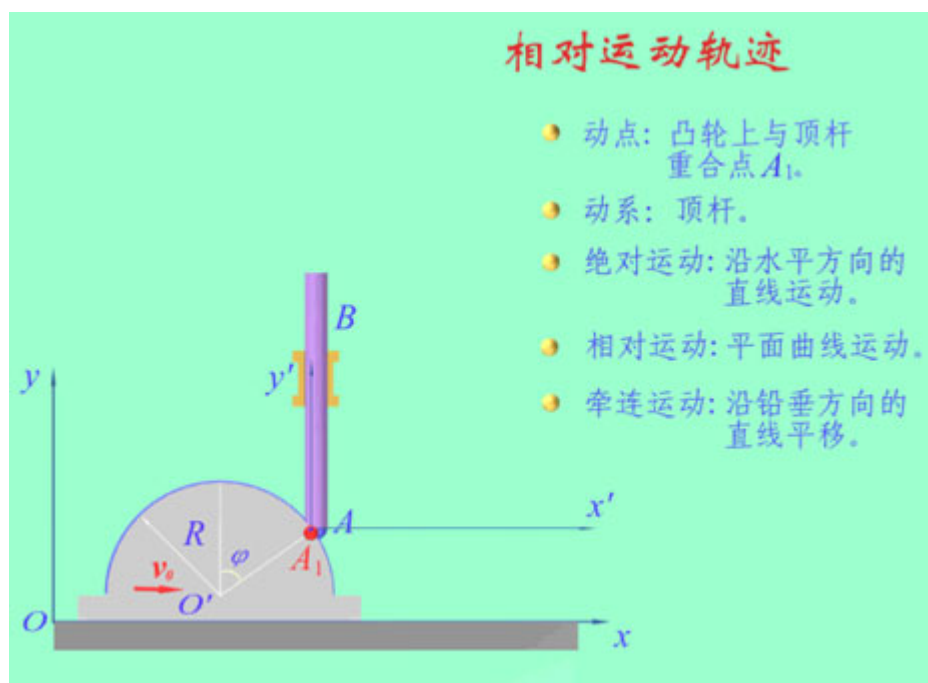
不同的动点和动参考系选择的讨论

# 运动学



以凸轮与顶杆的重合点 $A$ 为动点。将动参考系固连在顶杆 $AB$ 上。

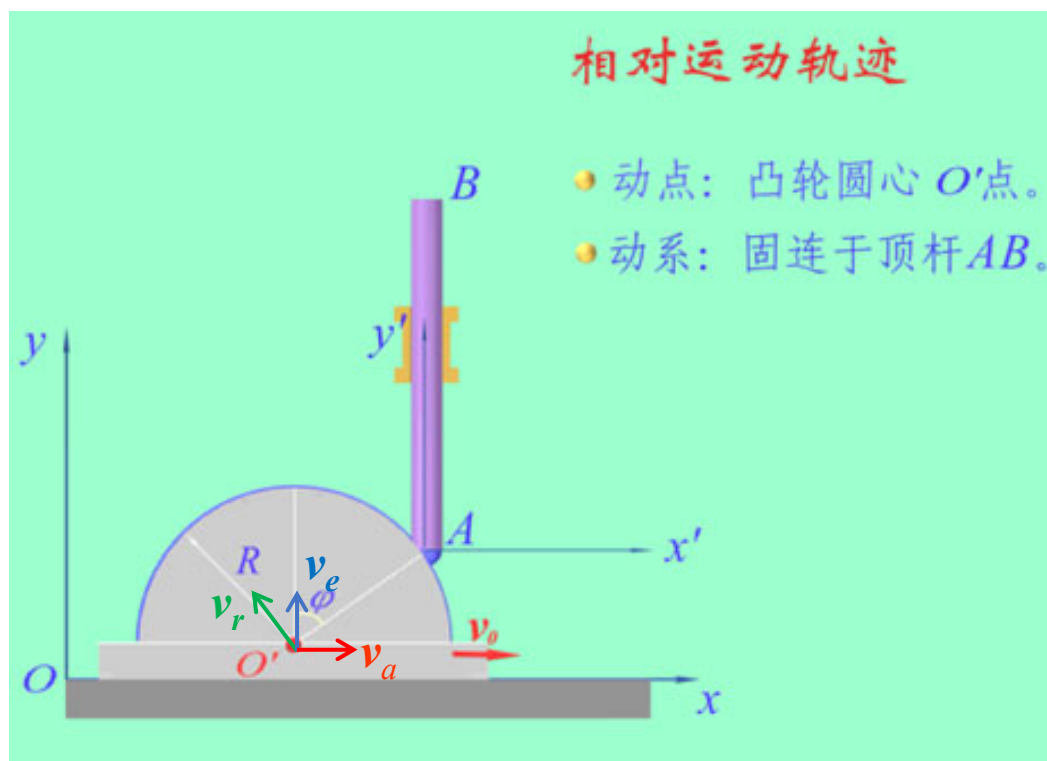
以凸轮圆心为动点。将动参考系固连与顶杆 $AB$ 上。



# 运动学



以凸轮圆心为动点。将动参考系固连与顶杆 $AB$ 上。



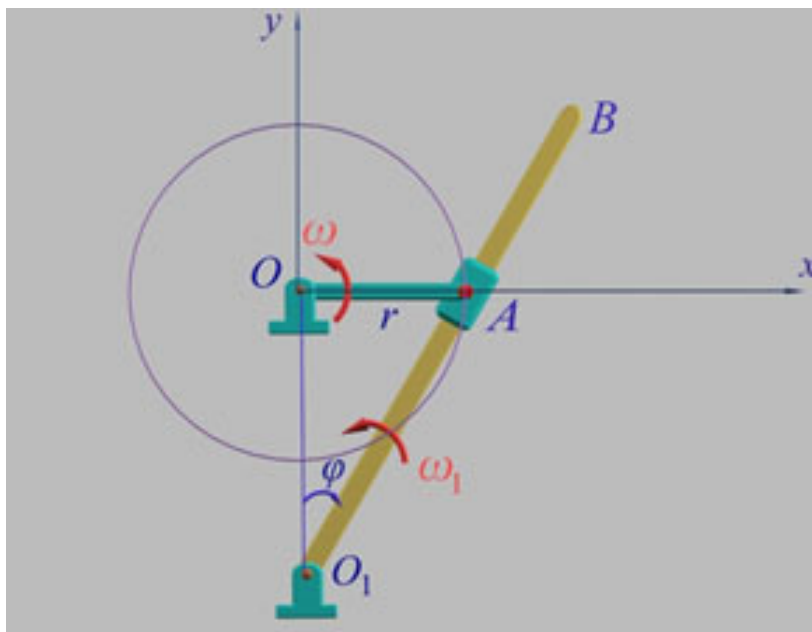
$$v_{AB} = v_e = v_a \tan \varphi = v_0 \tan \varphi$$

# 运动学



## 例 2

在急回机构中有两个摇杆 $OA$ 和 $O_1B$ 通过滑块 $A$ 连接。若摇杆 $OA$ 以如图角速度 $\omega$ 运动。已知 $OA=r$ ,  $O_1O=l$ 。试求当 $OA$ 水平时, 摇杆 $O_1B$ 角速度 $\omega_1$ 。



# 运动学



解:

以摇杆 $OA$ 上点 $A$ 为动点。将动参考系固连到摇杆 $O_1B$ 上。绕定轴 $O_1$ 的转动为牵连运动

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r$$

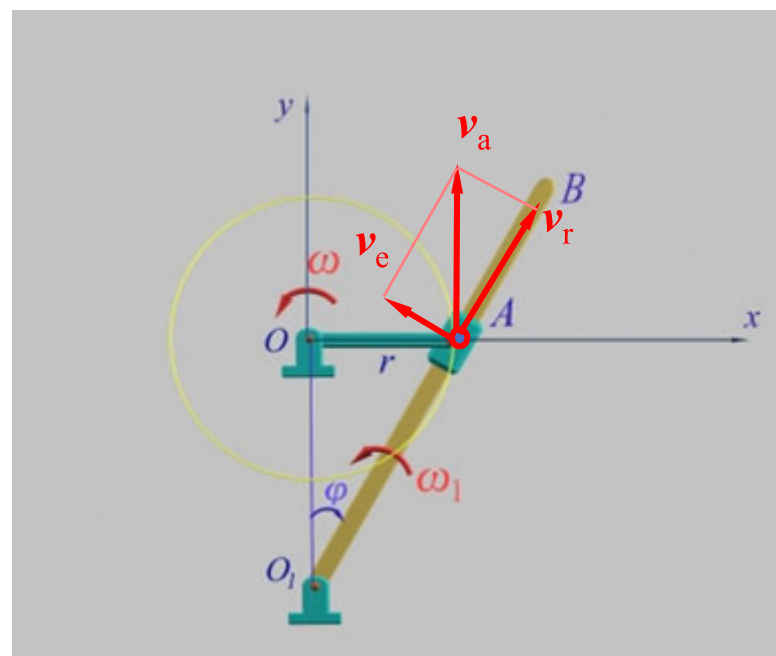
其中

$$v_a = \omega r, v_e = \omega_1 \cdot O_1A = \omega_1 \sqrt{r^2 + l^2}$$

有几何关系知

$$v_e = v_a \sin \varphi = \frac{rv_a}{\sqrt{l^2 + r^2}}$$

$$\omega_1 = \frac{r^2 \omega}{l^2 + r^2}$$

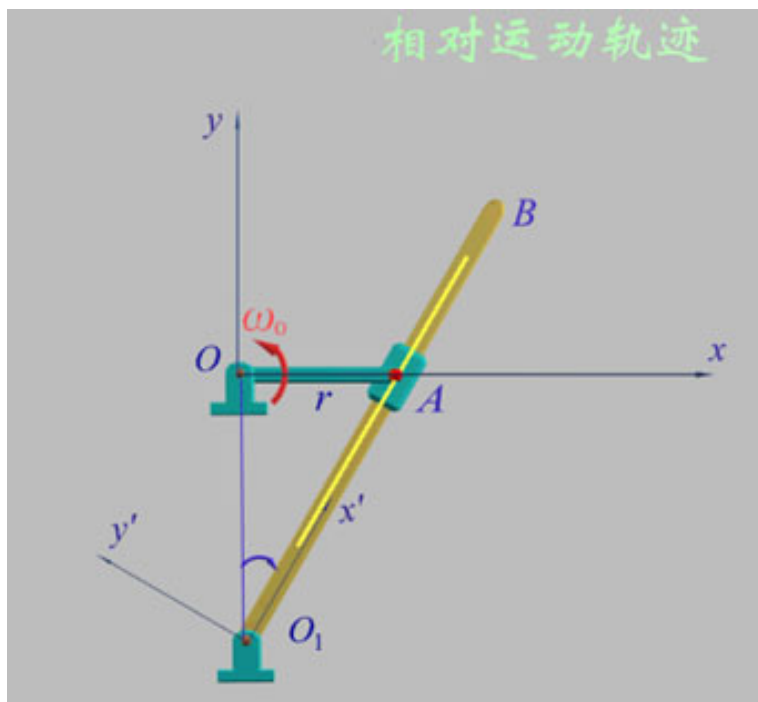


不同的动点和动参考系选择的讨论

# 运动学



以摇杆 $OA$ 上点 $A$ 为动点. 将动参考系固定到摇杆 $O_1B$ 上。



以摇杆 $O_1B$ 上点为动点, 摇杆上 $OA$ 点 $A$ 为牵连点。将动参考系固定到摇杆 $OA$ 上。

