

# Impact théorique de la multirésolution adaptative sur la convergence temporelle des méthodes des lignes

Alexandre Edeline

22 juillet 2025

## Résumé

Nous analysons, sur un cas test simple, les effets de la multirésolution adaptative sur l'ordre de convergence temporel d'une méthode des lignes. Nous montrons que les erreurs induites par la structure adaptative peuvent polluer l'intégration en temps, réduisant l'ordre global de la méthode.

## 1 Introduction

Nous allons résoudre un problème classique de diffusion par méthode des lignes avec multirésolution adaptative. La multirésolution est une méthode de compression de maillage très efficace pour accélérer les calculs et réduire les contraintes mémoires. Elle repose sur une compression par transformée en ondelette et sur des interpolateurs polynomiaux permettant une reconstruction-prédiction des données au niveau de précision choisi<sup>1</sup>.

La multirésolution adaptative détruit intrinsèquement l'information en deçà d'un certain seuil<sup>2</sup>. De même si l'opérateur de reconstruction-prédiction n'est pas parfait et son ordre dépend d'un *stencil*<sup>3</sup>. Ainsi la multirésolution vient aux prix de deux sources d'erreur pilotées par  $\varepsilon$  le seuil de compression et par  $s$  le stencil de l'opérateur de reconstruction-prédiction.

Nous nous proposons d'étudier, en calculant des équations équivalentes les impacts théoriques de la multirésolution adaptative. Il semble que la multirésolution adaptative pourrait altérer significativement l'ordre de convergence temporel des méthodes des lignes.

---

1. Il s'agit d'une opération de décompression

2. Le seuil de compression

3. Le stencil désigne le nombre de cellules entrée du prédicteur. Un grand stencil donne un bon ordre de précision mais le coût de la reconstruction augmente linéairement avec ce dernier.

## 2 Problème cible

Nous cherchons à résoudre le problème de diffusion suivant :

$$\partial_t u = D \partial_{xx} u. \quad (1)$$

Nous ignorons les problématiques de conditions de bords.

### 2.1 Méthode des lignes utilisée

Pour résoudre cette équation aux dérivées partielles, nous utilisons une méthode des lignes. D'abord un schéma volume fini pour la discrétisation spatiale menant à l'équation semi-discrétisée suivante :

$$\partial_t U(t) = \frac{D}{\Delta x} \left( \frac{U_{k+1} - 2U_k + U_{k-1}}{\Delta x} \right) \quad (2)$$

Puis une méthode de Runge und Kutta explicite d'ordre deux sur l'opérateur linéaire donne :

$$\begin{aligned} U_k^{n+1} = & U_k^n \\ & + D \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \frac{U_{k+1} - 2U_k + U_{k-1}}{\Delta x} \right) \\ & + D^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \left( \frac{U_{k+2} - 4U_{k+1} + 6U_k - 4U_{k-1} + U_{k-2}}{\Delta x^2} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Cela se remet sous la forme d'un schéma conservatif sous du type :

$$u_k^{n+1} = u_k^n + \lambda \left( \Phi_{k+1/2}^n - \Phi_{k-1/2}^n \right) \quad (4)$$

Avec :

$$\lambda = D \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \quad (5)$$

$$\Phi_{k+1/2}^n = u_{k+1}^n - u_k^n + \frac{1}{2} \lambda (u_{k+2}^n - 3u_{k+1}^n + 3u_k^n - u_{k-1}^n), \quad (6)$$

$$\Phi_{k-1/2}^n = u_k^n - u_{k-1}^n + \frac{1}{2} \lambda (u_{k+1}^n - 3u_k^n + 3u_{k-1}^n - u_{k-2}^n). \quad (7)$$

### 2.2 multirésolution adaptative

La multirésolution adaptative consiste à compresser le maillage, puis à effectuer les calculs sur le maillage compressé. Le schéma classique est le suivant :

1. Partir d'un état compressé au pas de temps  $n$ .
2. Calculer la solution au pas de temps  $n + 1$
3. Compresser de nouveau selon un seuil de compression  $\varepsilon$  grâce à une transformée multiéchelle.

Lors de la compression, transformée multiéchelle représente la solution sur plusieurs niveaux de détails, du plus global, au plus local. Plus le niveau est profond, c'est à dire plus il est local, moins les détails associés portent d'information. Alors, s'ils passent sous un certain seuil<sup>4</sup>, ils sont ignorés[3] c'est à dire compressés. Ce seuil  $\varepsilon$  n'est pas l'unique juge pour la compression, des heuristiques reposant sur la quantité d'information des détails de niveau supérieur sont utilisées pour ne pas seuiller systématiquement. L'objectif est en quelque sorte d'anticiper le besoin de détails<sup>5</sup>. La plus connue est l'heuristique d'Ami Harten [2]. Plusieurs stratégies sont utilisées pour réaliser le calcul d'un pas de temps à l'autre. Généralement, on estime les quantités au temps  $n + 1$  aux niveaux courants, à partir des quantités au niveau courant au temps  $n$ . Ensuite une opération de reconstruction-prédiction détermine le niveau de finesse requis de la solution au temps  $n + 1$ . Il serait envisageable par exemple de calculer les quantités du temps  $n + 1$  au niveau courant, à

4. Typiquement  $2^{\Delta l} \varepsilon$  où  $\Delta l$  est le niveau de détail en question et  $\varepsilon$  le seuil de compression global fixé par l'utilisateur.

5. Même si la quantité d'information laisse entendre que certains détails ne sont pas nécessaires, l'intuition physique pose son veto et force certains détails à être conservés en prévention par exemple de l'arrivée d'un front d'onde.

partir des quantités au temps  $n$  **reconstruites à un niveau plus fin**. Bien que cela aie une faible efficacité computationnelle, cela réduirait les erreurs liées à la multirésolution selon la qualité du prédicteur employé comme discuté en [1]. Ici nous allons étudier théoriquement les erreurs dans un contexte similaire. Nous nous plaçons sur une cellule à un niveau de détail fixé, l'on calcule les flux à partir de quantités reconstruites à un niveau de détails  $\Delta l$  plus fin. Le raisonnement et les ressources de calcul formel de [1] ont été d'une aide précieuse.

**Calcul du flux au travers de  $\Delta l$  niveaux** Lorsque l'on applique le procédé de multirésolution, étant donné une cellule à un niveau de détail donné  $l$ , on cherche à faire évoluer la valeur à l'étape  $n$  vers la valeur à l'étape  $n + 1$ . Pour ce faire, il faut évaluer les flux à partir des cellules voisines. Dès lors plusieurs choix s'offrent à nous. Où bien on utilise les cellules voisines à leurs niveaux courants, où bien on use de l'opérateur de reconstruction afin d'estimer les cellules voisines à des niveaux plus fins.

Dans un premier temps le stencil est choisi égal à 1. L'opérateur de prédiction d'un niveau à l'autre s'écrit alors :

$$\begin{aligned}\hat{u}_{2k}^{l+1} &= +\frac{1}{8}u_{k-1}^l + u_k^l - \frac{1}{8}u_{k+1}^l, \\ \hat{u}_{2k+1}^{l+1} &= -\frac{1}{8}u_{k-1}^l + u_k^l + \frac{1}{8}u_{k+1}^l.\end{aligned}$$

Puis en notant  $\hat{u}_{(\cdot)}^{l+\Delta l}$  cet opérateur de prédiction itéré au travers de  $\Delta l$  niveaux<sup>6</sup> :

$$\begin{bmatrix} \hat{\hat{u}}_{2^{\Delta l}k-2}^{(l+\Delta l)} \\ \hat{\hat{u}}_{2^{\Delta l}k-1}^{(l+\Delta l)} \\ \hat{\hat{u}}_{2^{\Delta l}k}^{(l+\Delta l)} \\ \hat{\hat{u}}_{2^{\Delta l}k+1}^{(l+\Delta l)} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} +1/8 & 1 & -1/8 & 0 \\ -1/8 & 1 & +1/8 & 0 \\ 0 & +1/8 & 1 & -1/8 \\ 0 & -1/8 & 1 & +1/8 \end{bmatrix}}_{\text{Matrice de passage } P \text{ pour } s=1.}^{\Delta l} \begin{bmatrix} u_{k-2}^l \\ u_{k-1}^l \\ u_k^l \\ u_{k+1}^l \end{bmatrix}$$

En particulier, si la cellule étudiée est au niveau courant  $l$  alors on choisira d'aller approximer le flux au niveau le plus fin, c'est à dire avec  $\overline{\Delta l} = \bar{l} - l$ . Dès lors les flux approximés au niveau fins sont :

$$\hat{\hat{\Phi}}_{k-1/2} = u_{2^{\overline{\Delta l}}k}^{l+\overline{\Delta l}} - u_{2^{\overline{\Delta l}}k-1}^{l+\overline{\Delta l}} + \frac{1}{2}\lambda(u_{2^{\overline{\Delta l}}k+1}^{l+\overline{\Delta l}} - 3u_{2^{\overline{\Delta l}}k}^{l+\overline{\Delta l}} + 3u_{2^{\overline{\Delta l}}k-1}^{l+\overline{\Delta l}} - u_{2^{\overline{\Delta l}}k-2}^{l+\overline{\Delta l}}), \quad (8)$$

$$\hat{\hat{\Phi}}_{k+1/2} = u_{2^{\overline{\Delta l}}(k+1)}^{l+\overline{\Delta l}} - u_{2^{\overline{\Delta l}}(k+1)-1}^{l+\overline{\Delta l}} + \frac{1}{2}\lambda(u_{2^{\overline{\Delta l}}(k+1)+1}^{l+\overline{\Delta l}} - 3u_{2^{\overline{\Delta l}}(k+1)}^{l+\overline{\Delta l}} + 3u_{2^{\overline{\Delta l}}(k+1)-1}^{l+\overline{\Delta l}} - u_{2^{\overline{\Delta l}}(k+1)-2}^{l+\overline{\Delta l}}) \quad (9)$$

Attention ici  $\lambda$  n'est plus exactement le nombre de Courrant mais un nombre de Courrant effectif. En effet la différence de flux est normalisée par la taille de la cellule du niveau courant, c'est à dire :  $2^{\Delta l}\Delta x$ , en revanche, le gradient d'une interface à l'autre est calculé au niveau le plus fin donc la différence entre les cellules de part et d'autre de l'interface est  $\Delta x$  (niveau le plus fin). Ainsi dans ce qui suit :  $\lambda = \frac{1}{2^{\Delta l}} \frac{D\Delta t}{\Delta x^2}$ . Et donc d'un point de vu matriciel, le flux au niveau le plus fin avec un stencil  $s = 1$  s'écrit :

$$\begin{aligned}\hat{\hat{\Phi}}_{k-1/2} &= \begin{bmatrix} -\frac{\lambda}{2} & (\frac{3}{2}\lambda - 1) & (1 - \frac{3}{2}\lambda) & \frac{\lambda}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +1/8 & 1 & -1/8 & 0 \\ -1/8 & 1 & +1/8 & 0 \\ 0 & +1/8 & 1 & -1/8 \\ 0 & -1/8 & 1 & +1/8 \end{bmatrix}^{\overline{\Delta l}} \begin{bmatrix} u_{k-2}^l \\ u_{k-1}^l \\ u_k^l \\ u_{k+1}^l \end{bmatrix} \\ \hat{\hat{\Phi}}_{k+1/2} &= \begin{bmatrix} -\frac{\lambda}{2} & (\frac{3}{2}\lambda - 1) & (1 - \frac{3}{2}\lambda) & \frac{\lambda}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +1/8 & 1 & -1/8 & 0 \\ -1/8 & 1 & +1/8 & 0 \\ 0 & +1/8 & 1 & -1/8 \\ 0 & -1/8 & 1 & +1/8 \end{bmatrix}^{\overline{\Delta l}} \begin{bmatrix} u_{k-1}^l \\ u_k^l \\ u_{k+1}^l \\ u_{k+2}^l \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Attention le schéma est légèrement différent car il fait ici intervenir deux pas d'espace :  $\Delta x$  le pas au niveau le plus fin et  $\tilde{\Delta x} = 2^{\Delta l}\Delta x$  le pas du niveau courant. Ainsi le schéma final est :

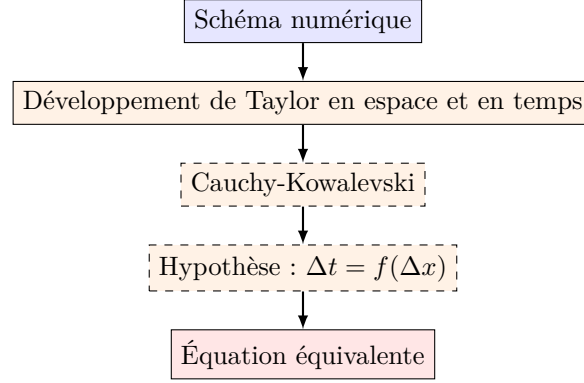
$$\hat{\hat{u}}_k^{n+1} = \hat{\hat{u}}_k^n + \frac{\lambda}{2^{\Delta l}} (\hat{\hat{\Phi}}_{k+1/2}^n - \hat{\hat{\Phi}}_{k-1/2}^n) \quad (10)$$

6. Au sens où l'on applique le prédicteur à des données déjà issues d'une prédiction.

### 3 Équations équivalentes

Dans cette partie nous calculons les équations équivalentes du schéma numérique avec et sans multirésolution adaptative. L'équation équivalente d'un schéma est l'EDP dont la solution satisfait le schéma. Elle est calculée formellement par des développements de Taylor. Comparer l'équation équivalente et l'équation cible fait alors naturellement apparaitre les termes d'erreur. Dans les parties suivante beaucoup de calculs ont été réalisés grâce à librairie de calcul formel Sympy<sup>7</sup>

#### Processus de d'obtention d'une équation équivalente



#### 3.1 Équation équivalente sans multirésolution

$$\frac{\partial u}{\partial t} = + D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \Delta x^2 \frac{D}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \Delta t^2 \frac{D^3}{6} \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} - \Delta t^3 \frac{D^4}{24} \frac{\partial^8 u}{\partial x^8}. \quad (11)$$

Le schéma de base est donc bien d'ordre deux en espace et en temps. En supposant une relation de stabilité du type  $\lambda = \frac{D \Delta t}{\Delta x^2}$  :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \Delta x^2 \frac{D}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \Delta x^4 \frac{D \lambda^2}{6} \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} - \Delta x^6 \frac{D \lambda^3}{24} \frac{\partial^8 u}{\partial x^8}. \quad (12)$$

#### 3.2 Équation équivalente avec multirésolution

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} = & D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ & - \frac{\Delta t}{2} D^2 (2^{2\Delta l} - 1) \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \Delta t^2 \frac{D^3}{6} \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} - \Delta t^3 \frac{D^4}{24} \frac{\partial^8 u}{\partial x^8} \\ & + 2^{2\Delta l} \frac{D \Delta x^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - 2^{2\Delta l} \frac{D \Delta l \Delta x^2}{4} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \end{aligned} \quad (13)$$

Nous constatons que formellement le schéma est formellement d'ordre un. Cela suggère donc que théoriquement, la multirésolution devrait faire perdre l'ordre de convergence temporelle de la méthode des lignes. Cependant en pratique pour des raisons de stabilité on impose  $\lambda = \frac{D \Delta t}{\Delta x^2}$ . Cela masque la perte en ordre<sup>8</sup> puisque cela mène à l'équation équivalente :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} = & + D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ & + \Delta x^2 \left( \frac{2^{2\Delta l} D \lambda \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}}{2} - \frac{2^{2\Delta l} D \Delta l \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}}{4} - \frac{D \lambda \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}}{2} + \frac{2^{2\Delta l} D \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}}{12} \right) \\ & - \Delta x^6 \frac{D \lambda^3 \frac{\partial^8 u}{\partial x^8}}{24} - \Delta x^4 \frac{D \lambda^2 \frac{\partial^6 u}{\partial x^6}}{6} \end{aligned} \quad (14)$$

7. <https://www.sympy.org>

8. Cela à été vérifié expérimentalement

## 4 Mais d'où vient cette perte d'ordre ?

Un ordre de précision a été perdu en temps. Nous essayons à présent de comprendre quel mécanisme mène à cette baisse de performances. Ma démarche consiste à comparer les équations équivalentes avec et sans multirésolution, **avant** d'appliquer la procédure de Cauchy-Kovaleskaya.

### 4.1 Équation équivalente sans multirésolution avant Cauchy-Kovaleskaya

L'équation modifiée sans multirésolution, avant procédure de Cauchy-Kovaleskaya est :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ + \frac{1}{2} \underbrace{\left( D^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)}_{\substack{\text{Se compense par} \\ \text{la procédure de} \\ \text{Cauchy-Kovaleskaya}}} \Delta t + \frac{D}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Delta x^2 - \frac{1}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} \Delta t^3 - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \Delta t^2. \end{aligned} \quad (15)$$

La méthode est bien d'ordre un, car à l'ordre un :  $\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  et donc le terme  $D^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$  se compense au cours de la procédure de Cauchy-Kovaleskaya.

### 4.2 Équation équivalente avec multirésolution avant Cauchy-Kovaleskaya

L'équation modifiée avec multirésolution, avant procédure de Cauchy-Kovaleskaya est :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ + \frac{\Delta t}{2} \underbrace{\left( 2^{2\Delta l} D^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)}_{\text{Ne se compensent plus}} - \frac{\Delta t^3}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} - \frac{\Delta t^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \frac{\Delta x^2}{12} (1 - 3\Delta l) 2^{2\Delta l} D \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \end{aligned} \quad (16)$$

Dans ce cas le terme en facteur du  $\Delta t$  ne se s'annule plus. En effet le terme  $D^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$  est devenu au cours de la reconstruction  $2^{2\Delta l} D^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$ . En conséquence, la méthode perd un ordre de convergence temporel.

Ce mécanisme s'explique de la manière suivante : dans l'équation équivalente, le terme  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$  apparaît indépendamment de la discrétisation spatiale<sup>9</sup>. La méthode des lignes initiale crée un terme *sur mesure* pour le compenser en approximant le terme spatial  $D^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$ . Cependant au cours du processus de compression-reconstruction, cette approximation est entachée d'un facteur  $2^{2\Delta l}$ . En d'autres termes le terme spatial construit pour compenser un terme temporel a été modifié par la multi-résolution, alors que le terme temporel lui n'est pas affecté par la multirésolution. Ainsi, les deux termes ne se compensent plus et l'ordre est perdu.

## 5 Conclusion provisoire...

Cette étude mets en valeur qu'une méthode des lignes très simple, dans un contexte de multirésolution-adaptative peut mener à des couplages des erreurs espace-temps polluant l'ordre initial de la méthode. En particulier la reconstruction altère des termes spatiaux qui ne compensent plus certaines erreurs temporelles. Pour l'heure il conviendrait d'étudier ce phénomène sur d'autres méthodes, d'autres équations et surtout de l'étudier expérimentalement.

## Références

- [1] BELLOTI et al. "Modified equation and error analyses on adaptative meshes for the resolution of evolutionary PDEs with Finite Volume schemes". In : (2025).
- [2] Amiram HARTEN. "Adaptive multiresolution schemes for shock computations". In : *Journal of Computational Physics* (1994).
- [3] Marie POSTEL. "Approximations multiéchelles". Polycopié, Laboratoire Jacques-Louis Lions, Université Pierre et Marie Curie.

---

9. Il emerge de la différence  $u_k^{n+1} - u_k^n$  à  $k$  fixé.