

Impact théorique de la multirésolution adaptative sur la convergence temporelle des méthodes des lignes

Alexandre Edeline

23 juillet 2025

Résumé

Nous analysons, sur un cas test simple, les effets de la multirésolution adaptative sur l'ordre de convergence temporel d'une méthode des lignes. Nous montrons que les erreurs induites par la structure adaptative peuvent polluer l'intégration en temps, réduisant l'ordre global de la méthode.

1 Introduction

Nous allons résoudre un problème classique de diffusion par méthode des lignes avec multirésolution adaptative. La multirésolution est une méthode de compression de maillage très efficace pour accélérer les calculs et réduire les contraintes mémoires. Elle repose sur une compression par transformée en ondelette et sur des interpolateurs polynomiaux permettant une reconstruction-prédiction des données au niveau de précision choisi¹.

La multirésolution adaptative détruit donc intrinsèquement l'information en deçà d'un certain seuil². De même l'opérateur de reconstruction-prédiction n'est pas exacte, son ordre dépend d'un *stencil*³. Ainsi la multirésolution vient aux prix de deux sources d'erreur pilotées par ε le seuil de compression et par s le stencil de l'opérateur de reconstruction-prédiction.

Nous nous proposons d'étudier, en calculant des équations équivalentes les impacts théoriques de la multirésolution adaptative sur une méthode des lignes pour la diffusion. Il semble que la multirésolution adaptative pourrait altérer l'ordre de convergence temporel des méthodes des lignes.

1. C'est l'opération permettant de décompresser l'information

2. Le seuil de compression

3. Le stencil désigne le nombre de cellules entrées du prédicteur. Un grand stencil donne un bon ordre de précision mais le coût de la reconstruction augmente linéairement avec ce dernier.

2 Problème cible

Nous cherchons à résoudre le problème de diffusion suivant :

$$\partial_t u = D \partial_{xx} u. \quad (1)$$

Nous ignorons les problématiques de conditions de bords.

2.1 Méthode des lignes utilisée

Pour résoudre cette équation aux dérivées partielles, nous utilisons une méthode des lignes. D'abord un schéma volume fini pour la discrétisation spatiale menant à l'équation semi-discrétisée suivante :

$$\partial_t U(t) = \frac{D}{\Delta x} \left(\frac{U_{k+1} - 2U_k + U_{k-1}}{\Delta x} \right) \quad (2)$$

Puis une méthode de Runge und Kutta explicite d'ordre deux sur l'opérateur linéaire donne :

$$\begin{aligned} U_k^{n+1} = & U_k^n \\ & + D \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\frac{U_{k+1} - 2U_k + U_{k-1}}{\Delta x} \right) \\ & + D^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \left(\frac{U_{k+2} - 4U_{k+1} + 6U_k - 4U_{k-1} + U_{k-2}}{\Delta x^2} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Cela s'écrit sous la forme conservative suivante :

$$u_k^{n+1} = u_k^n + \lambda \left(\Phi_{k+1/2}^n - \Phi_{k-1/2}^n \right) \quad (4)$$

Avec :

$$\lambda = D \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \quad (5)$$

$$\Phi_{k+1/2}^n = u_{k+1}^n - u_k^n + \frac{1}{2} \lambda (u_{k+2}^n - 3u_{k+1}^n + 3u_k^n - u_{k-1}^n), \quad (6)$$

$$\Phi_{k-1/2}^n = u_k^n - u_{k-1}^n + \frac{1}{2} \lambda (u_{k+1}^n - 3u_k^n + 3u_{k-1}^n - u_{k-2}^n). \quad (7)$$

2.2 multirésolution adaptative

La multirésolution adaptative consiste à compresser le maillage, puis à effectuer les calculs sur le maillage compressé. Le schéma classique est le suivant :

1. Partir d'un état compressé au pas de temps n .
2. Calculer la solution au pas de temps $n + 1$
3. Compresser de nouveau selon un seuil de compression ε grâce à une transformée multiéchelle.

Lors de la compression, la transformée multiéchelle représente la solution sur plusieurs niveaux de détails, du plus global, au plus local. Plus le niveau est profond, c'est à dire plus il est local, moins les détails associés portent d'information. L'opération de compression est réalisée en supprimant en chaque cellules, les niveaux dont la valeur des détails passent sous un certain seuil⁴ [3].

Ce seuil ε n'est pas l'unique juge lors la compression, des heuristiques reposant sur la quantité d'information des détails de niveau supérieur sont utilisées pour ne pas seuiller systématiquement. L'objectif est en quelque sorte d'anticiper le besoin de détails⁵. La plus connue est l'heuristique d'Ami Harten [2].

Plusieurs stratégies existent pour réaliser le calcul d'un pas de temps à l'autre. Généralement, on estime les quantités au temps $n + 1$ aux niveaux courants, à partir des quantités au niveau courant au temps n . Ensuite une opération de reconstruction-prédiction détermine le niveau de finesse requis de la solution au

4. Typiquement $2^{\Delta l} \varepsilon$ où Δl

5. Même si la quantité d'information laisse entendre que certains détails pourraient être ignorés, l'intuition physique pose sont veto et force certains détails à être conservés par précaution, par exemple si un front d'onde arrive.

temps $n + 1$. Il est également possible de calculer les quantités du temps $n + 1$ au niveau courant, à partir des quantités au temps n **reconstruites à un niveau plus fin**. Bien que cela aie une faible efficacité computationnelle, cela réduirait les erreurs liées à la multirésolution selon la qualité du prédicteur employé comme discuté en [1]. Ici nous allons étudier théoriquement les erreurs dans un contexte similaire. Nous nous plaçons sur une cellule à un niveau de détail fixé, les flux sont calculés à partir de quantités reconstruites à un niveau de détails Δl plus fin. Le raisonnement et les ressources de calcul formel de [1] ont été d'une aide précieuse.

Calcul du flux au travers de Δl niveaux Lorsque l'on applique le procédé de multirésolution, étant donné une cellule à un niveau de détail donné l , on cherche à faire évoluer la valeur à l'étape n vers la valeur à l'étape $n + 1$. Pour ce faire, il faut évaluer les flux à partir des cellules voisines. Dès lors plusieurs choix s'offrent à nous. Où bien on utilise les cellules voisines à leurs niveaux courants, où bien on use de l'opérateur de reconstruction afin d'estimer les cellules voisines à des niveaux plus fins.

Dans un premier temps le schéma est choisi égal à 1. L'opérateur de prédiction d'un niveau à l'autre s'écrit alors :

$$\hat{u}_{2k}^{l+1} = +\frac{1}{8}u_{k-1}^l + u_k^l - \frac{1}{8}u_{k+1}^l, \quad (8)$$

$$\hat{u}_{2k+1}^{l+1} = -\frac{1}{8}u_{k-1}^l + u_k^l + \frac{1}{8}u_{k+1}^l. \quad (9)$$

Puis en notant $\hat{u}_{(\cdot)}^{l+\Delta l}$ cet opérateur de prédiction itéré au travers de Δl niveaux⁶ :

$$\begin{bmatrix} \hat{u}_{2^{\Delta l}k-2}^{(l+\Delta l)} \\ \hat{u}_{2^{\Delta l}k-1}^{(l+\Delta l)} \\ \hat{u}_{2^{\Delta l}k}^{(l+\Delta l)} \\ \hat{u}_{2^{\Delta l}k+1}^{(l+\Delta l)} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} +1/8 & 1 & -1/8 & 0 \\ -1/8 & 1 & +1/8 & 0 \\ 0 & +1/8 & 1 & -1/8 \\ 0 & -1/8 & 1 & +1/8 \end{bmatrix}}_{\text{Matrice de passage } P \text{ pour } s=1}^{\Delta l} \begin{bmatrix} u_{k-2}^l \\ u_{k-1}^l \\ u_k^l \\ u_{k+1}^l \end{bmatrix} \quad (10)$$

En particulier, si la cellule étudiée est au niveau courant l alors on choisira d'aller approximer le flux au niveau le plus fin, c'est à dire avec $\overline{\Delta l} = \bar{l} - l$. Dès lors les flux approximatés au niveau fins sont :

$$\hat{\Phi}_{k-1/2} = \hat{u}_{2^{\overline{\Delta l}}k}^{l+\overline{\Delta l}} - \hat{u}_{2^{\overline{\Delta l}}k-1}^{l+\overline{\Delta l}} + \frac{1}{2}\lambda \left(\hat{u}_{2^{\overline{\Delta l}}k+1}^{l+\overline{\Delta l}} - 3\hat{u}_{2^{\overline{\Delta l}}k}^{l+\overline{\Delta l}} + 3\hat{u}_{2^{\overline{\Delta l}}k-1}^{l+\overline{\Delta l}} - \hat{u}_{2^{\overline{\Delta l}}k-2}^{l+\overline{\Delta l}} \right), \quad (11)$$

$$\hat{\Phi}_{k+1/2} = \hat{u}_{2^{\overline{\Delta l}}(k+1)}^{l+\overline{\Delta l}} - \hat{u}_{2^{\overline{\Delta l}}(k+1)-1}^{l+\overline{\Delta l}} + \frac{1}{2}\lambda \left(\hat{u}_{2^{\overline{\Delta l}}(k+1)+1}^{l+\overline{\Delta l}} - 3\hat{u}_{2^{\overline{\Delta l}}(k+1)}^{l+\overline{\Delta l}} + 3\hat{u}_{2^{\overline{\Delta l}}(k+1)-1}^{l+\overline{\Delta l}} - \hat{u}_{2^{\overline{\Delta l}}(k+1)-2}^{l+\overline{\Delta l}} \right) \quad (12)$$

Cela s'écrit sous la forme matricielle suivante (utile pour utiliser les outils de calcul formel).

$$\hat{\Phi}_{k-1/2} = \begin{bmatrix} -\frac{\lambda}{2} & (\frac{3}{2}\lambda - 1) & (1 - \frac{3}{2}\lambda) & \frac{\lambda}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +1/8 & 1 & -1/8 & 0 \\ -1/8 & 1 & +1/8 & 0 \\ 0 & +1/8 & 1 & -1/8 \\ 0 & -1/8 & 1 & +1/8 \end{bmatrix}^{\overline{\Delta l}} \begin{bmatrix} u_{k-2}^l \\ u_{k-1}^l \\ u_k^l \\ u_{k+1}^l \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\hat{\Phi}_{k+1/2} = \begin{bmatrix} -\frac{\lambda}{2} & (\frac{3}{2}\lambda - 1) & (1 - \frac{3}{2}\lambda) & \frac{\lambda}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +1/8 & 1 & -1/8 & 0 \\ -1/8 & 1 & +1/8 & 0 \\ 0 & +1/8 & 1 & -1/8 \\ 0 & -1/8 & 1 & +1/8 \end{bmatrix}^{\overline{\Delta l}} \begin{bmatrix} u_{k-1}^l \\ u_k^l \\ u_{k+1}^l \\ u_{k+2}^l \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Attention le schéma final est légèrement différent car il fait ici intervenir deux pas d'espace : Δx le pas au niveau le plus fin et $\tilde{\Delta x} = 2^{\Delta l}\Delta x$ le pas du niveau courant. Ainsi le schéma final est :

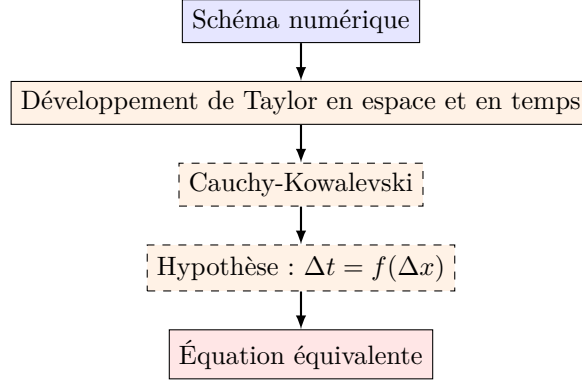
$$u_k^{n+1} = u_k^n + \frac{\lambda}{2^{\Delta l}} \left(\hat{\Phi}_{k+1/2}^n - \hat{\Phi}_{k-1/2}^n \right) \quad (15)$$

6. Au sens où l'on applique le prédicteur à des données déjà issues d'une prédiction.

3 Équations équivalentes

Dans cette partie nous calculons les équations équivalentes du schéma numérique avec et sans multirésolution adaptative. L'équation équivalente d'un schéma est l'EDP dont la solution satisfait le schéma. Elle est calculée formellement par des développements de Taylor en temps et en espace. Comparer l'équation équivalente et l'équation cible fait alors naturellement apparaître les termes d'erreur. Dans les parties suivante beaucoup de calculs ont été réalisés grâce à librairie de calcul formel Sympy⁷

Processus de d'obtention d'une équation équivalente



3.1 Équation équivalente sans multirésolution

$$\frac{\partial u}{\partial t} = + D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \Delta x^2 \frac{D}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \Delta t^2 \frac{D^3}{6} \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} - \Delta t^3 \frac{D^4}{24} \frac{\partial^8 u}{\partial x^8}. \quad (16)$$

Le schéma de base est donc bien d'ordre deux en espace et en temps. En supposant une relation de stabilité du type $\lambda = \frac{D \Delta t}{\Delta x^2}$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \Delta x^2 \frac{D}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \Delta x^4 \frac{D \lambda^2}{6} \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} - \Delta x^6 \frac{D \lambda^3}{24} \frac{\partial^8 u}{\partial x^8}. \quad (17)$$

3.2 Équation équivalente avec multirésolution

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} = & D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ & - \frac{\Delta t}{2} D^2 (2^{2\Delta l} - 1) \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \Delta t^2 \frac{D^3}{6} \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} - \Delta t^3 \frac{D^4}{24} \frac{\partial^8 u}{\partial x^8} \\ & + 2^{2\Delta l} \frac{D \Delta x^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - 2^{2\Delta l} \frac{D \Delta l \Delta x^2}{4} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \end{aligned} \quad (18)$$

Nous constatons que formellement le schéma est formellement d'ordre un. Cela suggère donc que théoriquement, la multirésolution devrait faire perdre l'ordre de convergence temporelle de la méthode des lignes. Cependant en pratique pour des raisons de stabilité on impose $\lambda = \frac{D \Delta t}{\Delta x^2}$. Cela masque la perte en ordre⁸ puisque cela mène à l'équation équivalente :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} = & + D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ & + \Delta x^2 \left(\frac{2^{2\Delta l} D \lambda \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}}{2} - \frac{2^{2\Delta l} D \Delta l \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}}{4} - \frac{D \lambda \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}}{2} + \frac{2^{2\Delta l} D \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}}{12} \right) \\ & - \Delta x^6 \frac{D \lambda^3 \frac{\partial^8 u}{\partial x^8}}{24} - \Delta x^4 \frac{D \lambda^2 \frac{\partial^6 u}{\partial x^6}}{6} \end{aligned} \quad (19)$$

7. <https://www.sympy.org>

8. Cela à été vérifié expérimentalement

4 Mais d'où vient cette perte d'ordre ?

Un ordre de précision a été perdu en temps. Nous essayons à présent de comprendre quel mécanisme mène à cette baisse de performances. Ma démarche consiste à comparer les équations équivalentes avec et sans multirésolution, **avant** d'appliquer la procédure de Cauchy-Kovaleskaya.

4.1 Équation équivalente sans multirésolution avant Cauchy-Kovaleskaya

L'équation modifiée sans multirésolution, avant procédure de Cauchy-Kovaleskaya est :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ + \frac{1}{2} \underbrace{\left(D^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)}_{\substack{\text{Se compense par} \\ \text{la procédure de} \\ \text{Cauchy-Kovaleskaya}}} \Delta t + \frac{D}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Delta x^2 - \frac{1}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} \Delta t^3 - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \Delta t^2. \end{aligned} \quad (20)$$

La méthode est bien d'ordre un, car à l'ordre un : $\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ et donc le terme $D^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ se compense au cours de la procédure de Cauchy-Kovaleskaya.

4.2 Équation équivalente avec multirésolution avant Cauchy-Kovaleskaya

L'équation modifiée avec multirésolution, avant procédure de Cauchy-Kovaleskaya est :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ + \frac{\Delta t}{2} \underbrace{\left(2^{2\Delta l} D^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)}_{\text{Ne se compensent plus.}} - \frac{\Delta t^3}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} - \frac{\Delta t^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \frac{\Delta x^2}{12} (1 - 3\Delta l) 2^{2\Delta l} D \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \end{aligned} \quad (21)$$

Dans ce cas le terme en facteur du Δt ne se s'annule plus. En effet le terme $D^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$ est devenu au cours de la reconstruction $2^{2\Delta l} D^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$. En conséquence, la méthode perd un ordre de convergence temporel.

Ce mécanisme s'explique de la manière suivante : dans l'équation équivalente, le terme $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ apparaît indépendamment de la discrétisation spatiale⁹. La méthode des lignes initiale crée un terme *sur mesure* pour le compenser en approximant le terme spatial $D^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$. Cependant au cours du processus de compression-reconstruction, cette approximation est entachée d'un facteur $2^{2\Delta l}$. En d'autres termes le terme spatial construit pour compenser un terme temporel a été modifié par la multi-résolution, alors que le terme temporel lui n'est pas affecté par la multirésolution. Ainsi, les deux termes ne se compensent plus et l'ordre est perdu.

5 Conclusion provisoire...

Cette étude met en valeur qu'une méthode des lignes très simple, dans un contexte de multirésolution-adaptative peut mener à des couplages des erreurs espace-temps polluant l'ordre initial de la méthode. En particulier la reconstruction altère des termes spatiaux qui ne compensent plus certaines erreurs temporelles. Pour l'heure il conviendrait d'étudier ce phénomène sur d'autres méthodes, d'autres équations et surtout de l'étudier expérimentalement.

9. Il émerge de la différence $u_k^{n+1} - u_k^n$ à k fixé.

A Annexes

A.1 Principe général d’obtention des équations équivalentes.

Première étape : développement de Taylor Dans un premier temps, on suppose l’existence d’une fonction assez régulière vérifiant le schéma. Dans le schéma numérique les termes $u_{k+\delta_x}^{n+\delta_t}$ sont remplacés par leur pendant continus : $u(x + \delta_x \Delta x, t + \delta_t \Delta t)$. Puis on réalise le développement de Taylor suivant :

$$\begin{aligned} u(x + \delta_x \Delta x, t + \delta_t \Delta t) &= u(x + \delta_x \Delta x, t) + \sum_i \frac{(\delta_x \Delta x)^j}{j!} \frac{\partial^j u}{\partial t^j}(x + \delta_x \Delta x) \\ &= u(x, t) + \sum_i \frac{(\delta_x \Delta x)^i}{i!} \frac{\partial^i u}{\partial x^i}(x, t) + \sum_j \frac{(\delta_x \Delta x)^j}{j!} \frac{\partial^j u}{\partial t^j}(x, t) + \sum_{i,j} \frac{(\delta_x \Delta x)^i (\delta_t \Delta t)^j}{i! \times j!} \frac{\partial^{j+i} u}{\partial t^j \partial x^i}(x, t) \end{aligned} \quad (22)$$

L’équation au dérivée partielles qui apparait est l’équation équivalente. libre à nous de la tronquer à l’ordre qui nous convient.

Deuxième étape : procédure de Cauchy-Kovaleskaya (optionnel) Afin d’enrichir l’analyse, et permettre le développement de schéma couplé espace-temps, l’étape précédente est généralement suivie d’une procédure de Cauchy-Kovaleskaya. La procédure de Cauchy-Kovaleskaya consiste à utiliser la relation entre les dérivées en espace et en temps données par l’équation cible et remplacer les dérivées en temps par des dérivées en espace dans l’équation équivalente. Cela consiste simple à partir de l’équation : $\partial_t u = D \partial_{xx} u$ et décrire de manière itérée :

$$\begin{aligned} \partial_{tt} u &= D^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \\ \partial_{ttt} u &= D^3 \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} \\ &\vdots \\ \frac{\partial^n u}{\partial x^n} &= D^n \frac{\partial^{2n} u}{\partial x^{2n}} \end{aligned} \quad (23)$$

Ultime étape : relation entre le pas de temps et d’espace (optionnel) Lorsque l’on utilise un schéma en pratique, il est courant de supposer une relation entre les pas d’espace et de temps, par exemple une condition de stabilité du type $\Delta t \propto \frac{\Delta x^2}{D}$. Il est donc très utile d’injecter cette relation dans l’équation équivalente pour comprendre le comportement du schéma en conditions réelles.

Références

- [1] BELLOTI et al. “Modified equation and error analyses on adaptative meshes for the resolution of evolutionary PDEs with Finite Volume schemes”. In : (2025).
- [2] Amiram HARTEN. “Adaptive multiresolution schemes for shock computations”. In : *Journal of Computational Physics* (1994).
- [3] Marie POSTEL. “Approximations multiéchelles”. Polycopié, Laboratoire Jacques-Louis Lions, Université Pierre et Marie Curie.