

# Stratégies modernes pour l'intégration des équations d'advection-réaction-diffusion

(ImEx & MultiRésolution Adaptative)

**Alexandre EDELINE**

ENSTA Paris

Laboratoire : CMAP

Tuteurs laboratoire : Marc MASSOT, Christian TENAUD

Tuteur ENSTA : Patrick CIARLET

Avril - Octobre 2025



# Plan

Introduction

Les équations d'advection-diffusion-réaction (ADR)

Problématique

1<sup>ère</sup> contribution

2<sup>ème</sup> contribution

3<sup>ème</sup> contribution

Compléments

# Plan

Introduction

Les équations d'advection-diffusion-réaction (ADR)

Problématique

1<sup>ère</sup> contribution

2<sup>ème</sup> contribution

3<sup>ème</sup> contribution

Compléments

# Introduction

Motivations et objectifs

# Plan

Introduction

Les équations d'advection-diffusion-réaction (ADR)

Problématique

1<sup>ère</sup> contribution

2<sup>ème</sup> contribution

3<sup>ème</sup> contribution

Compléments

# Equations d'ADR

## Applications Physiques



# Equations d'ADR

Applications Physiques



$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) = \underbrace{Au}_{\text{Advection } c\partial_x u} + \underbrace{Du}_{\text{Diffusion } \partial_x(\eta\partial_x u)} + \underbrace{R(u)}_{\substack{\text{Réaction} \\ \text{Non-lin.}}}, \\ u(x, 0) = u_0. \end{cases} \quad (1)$$

---

## Le couplage des opérateurs

Les trois opérateurs ont des propriétés très différentes :

- ▶ Advection : Peu raide, raisonnant (spectre autour de  $i\mathbb{R}$ ).
- ▶ Diffusion : Moyennement raide, spectre autour de  $\mathbb{R}^-$ .
- ▶ Réaction : Très raide, hautement non-linéaire, local.

⇒ les approches monolithiques peinent



---

## Le couplage des opérateurs

Les trois opérateurs ont des propriétés très différentes :

- ▶ Advection : Peu raide, raisonnant (spectre autour de  $i\mathbb{R}$ ).
- ▶ Diffusion : Moyennement raide, spectre autour de  $\mathbb{R}^-$ .
- ▶ Réaction : Très raide, hautement non-linéaire, local.

⇒ les approches monolithiques peinent

---

## Les solutions multi-échelles

- ▶ plusieurs échelles de temps
- ▶ plusieurs échelles d'espace

## **Stratégie n°1 : Différencier le traitement sur chaque opérateurs**

Ne pas faire un schéma monolithique.

- ▶ Séparation d'opérateurs (*splitting*)
- ▶ Méthodes ImEx (Additive Runge et Kutta)

## Stratégie n°1 : Différencier le traitement sur chaque opérateurs

Ne pas faire un schéma monolithique.

- ▶ Séparation d'opérateurs (*splitting*)
- ▶ Méthodes ImEx (Additive Runge et Kutta)

---

## Stratégie n°2 : Adaptation en espace

La multirésolution adaptative :

- ▶ Des grilles de *résolution multiples*,
- ▶ Deux opérateurs de *projection/reconstruction*,
- ▶ Représentation de la solution comme une suite de *détails*,
- ▶ Une stratégie d'*adaptation*.

Niveau de résolution  $j = 1$

Niveau de résolution  $j = 2$

Niveau de résolution  $j = 3$

$u_0^1$				$u_1^1$			
$d_0^2$		$d_1^2$		$d_2^2$		$d_3^2$	
$d_0^3$	$d_1^3$	$d_2^3$	$d_3^3$	$d_4^3$	$d_5^3$	$d_6^3$	$d_7^3$

$x$

# Plan

Introduction

Les équations d'advection-diffusion-réaction (ADR)

Problématique

1<sup>ère</sup> contribution

2<sup>ème</sup> contribution

3<sup>ème</sup> contribution

Compléments



# Présentation des contributions

---

**Contribution  $n^{\circ}1$  :**

---

**Contribution  $n^{\circ}2$  :**

---

**Contribution  $n^{\circ}3$  :**

# Plan

Introduction

Les équations d'advection-diffusion-réaction (ADR)

Problématique

1<sup>ère</sup> contribution

2<sup>ème</sup> contribution

3<sup>ème</sup> contribution

Compléments

# Comparaison ImEx - Splitting

## Présentation



## L'équation de Nagumo 1D :

Il s'agit d'une équation de diffusion-réaction faisant apparaître des dynamiques de fronts :

$$\partial_t u = \underbrace{D \partial_{xx} u}_{\text{diffusion}} - \underbrace{ku(1 - u^2)}_{\text{réaction non. lin.}} \quad k, D \in \mathbb{R}_+^*. \quad (2)$$

## L'équation de Nagumo 1D :

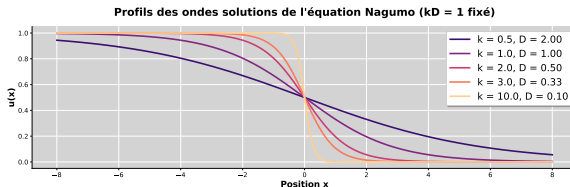
Il s'agit d'une équation de diffusion-réaction faisant apparaître des dynamiques de fronts :

$$\partial_t u = \underbrace{D \partial_{xx} u}_{\text{diffusion}} - \underbrace{ku(1-u^2)}_{\text{réaction non. lin.}} \quad k, D \in \mathbb{R}_+^*. \quad (2)$$

## Les solutions :

En domaine infini, cette équation admet des solutions sous forme d'ondes progressives :

$$u(x - ct) = \frac{e^{\sqrt{\frac{k}{2D}}((x-x_0)-ct)}}{1 + e^{\sqrt{\frac{k}{2D}}((x-x_0)-ct)}}, \quad c = \sqrt{\frac{kD}{2}}. \quad (3)$$



## Méthode ImEx232 :

Schéma à trois étages explicites et deux étages implicites, avec  $\gamma = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$  et  $\delta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$  :

$$\begin{array}{l} \text{Explicite :} \end{array} \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 1 & \delta & 1-\delta & 0 \\ \hline & 0 & 1-\gamma & \gamma \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Implicite :} \end{array} \begin{array}{c|cc} \gamma & \gamma & 0 \\ 1 & 1-\gamma & \gamma \\ \hline & 1-\gamma & \gamma \end{array}$$

## Méthode ImEx232 :

Schéma à trois étages explicites et deux étages implicites, avec  $\gamma = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$  et  $\delta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$  :

$$\begin{array}{l} \text{Explicite :} \end{array} \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 1 & \delta & 1-\delta & 0 \\ \hline & 0 & 1-\gamma & \gamma \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Implicite :} \end{array} \begin{array}{c|ccc} \gamma & & & \\ 1 & \gamma & 0 & \\ \hline & 1-\gamma & \gamma & \\ & 1-\gamma & \gamma & \end{array}$$

## Méthode ImEx222 :

Schéma à deux étages explicites et deux étages implicites, avec  $\gamma = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$  et  $\delta = 1 - \frac{1}{2\gamma}$  :

$$\begin{array}{l} \text{Explicite :} \end{array} \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 1 & 1-\delta & \delta & 0 \\ \hline & 1-\delta & \delta & 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Implicite :} \end{array} \begin{array}{c|ccc} \gamma & & & \\ 1 & \gamma & 0 & \\ \hline & 1-\gamma & \gamma & \\ & 1-\gamma & \gamma & \end{array}$$

## Méthode ImEx232 :

Schéma à trois étages explicites et deux étages implicites, avec  $\gamma = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$  et  $\delta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$  :

$$\begin{array}{l} \text{Explicite :} \end{array} \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 1 & \delta & 1-\delta & 0 \\ \hline & 0 & 1-\gamma & \gamma \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Implicite :} \end{array} \begin{array}{c|ccc} \gamma & & & \\ 1 & \gamma & 0 & \\ \hline & 1-\gamma & \gamma & \\ & 1-\gamma & \gamma & \end{array}$$

## Méthode ImEx222 :

Schéma à deux étages explicites et deux étages implicites, avec  $\gamma = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$  et  $\delta = 1 - \frac{1}{2\gamma}$  :

$$\begin{array}{l} \text{Explicite :} \end{array} \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 1 & 1-\delta & \delta & 0 \\ \hline & 1-\delta & \delta & 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Implicite :} \end{array} \begin{array}{c|ccc} \gamma & & & \\ 1 & \gamma & 0 & \\ \hline & 1-\gamma & \gamma & \\ & 1-\gamma & \gamma & \end{array}$$

## Méthode Splitting :

Splitting de Strang | Réaction : ERK2 (Heun) | Diffusion : SDIRK2 (celle des méthode ImEx).

## Méthode ImEx232 :

Schéma à trois étages explicites et deux étages implicites, avec  $\gamma = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$  et  $\delta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$  :

$$\begin{array}{c} \text{Explicite :} \end{array} \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 1 & \delta & 1-\delta & 0 \\ \hline & 0 & 1-\gamma & \gamma \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{Implicite :} \end{array} \begin{array}{c|ccc} \gamma & & & \\ 1 & \gamma & 0 & \\ \hline & 1-\gamma & \gamma & \end{array} \quad \text{équation cible générique : } \partial_t u = f_E(u) + f_I(u) \mid \text{objectif : } u^n \rightarrow u^{n+1}. \quad (4)$$

## Méthode ImEx232 :

Schéma à trois étages explicites et deux étages implicites, avec  $\gamma = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$  et  $\delta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$  :

$$\text{Explicite : } \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 1 & \delta & 1-\delta & 0 \\ \hline & 0 & 1-\gamma & \gamma \end{array} \quad \text{Implicite : } \begin{array}{c|cc} \gamma & \gamma & 0 \\ 1 & 1-\gamma & \gamma \\ \hline & 1-\gamma & \gamma \end{array} \quad \text{équation cible générique : } \partial_t u = f_E(u) + f_I(u) \mid \text{objectif : } u^n \rightarrow u^{n+1}. \quad (4)$$

## Calcul :

## Méthode ImEx232 :

Schéma à trois étages explicites et deux étages implicites, avec  $\gamma = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$  et  $\delta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$  :

$$\text{Explicite : } \begin{array}{c|ccc} & 0 & 0 & 0 \\ \gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 1 & \delta & 1-\delta & 0 \\ \hline & 0 & 1-\gamma & \gamma \end{array} \quad \text{Implicite : } \begin{array}{c|ccc} \gamma & & & \\ 1 & \gamma & 0 & \\ \hline & 1-\gamma & \gamma & \end{array} \quad \text{équation cible générique : } \partial_t u = f_E(u) + f_I(u) \mid \text{objectif : } u^n \rightarrow u^{n+1}. \quad (4)$$

## Calcul :

Initialisation

$$u_0 = u^n,$$

1<sup>er</sup> étage

$$k_1^E = f_E(u_0), k_1^I = f_I(u_1).$$



## Méthode ImEx232 :

Schéma à trois étages explicites et deux étages implicites, avec  $\gamma = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$  et  $\delta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$  :

$$\text{Explicite : } \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 1 & \delta & 1-\delta & 0 \\ \hline & 0 & 1-\gamma & \gamma \end{array} \quad \text{Implicite : } \begin{array}{c|cc} \gamma & \gamma & 0 \\ 1 & 1-\gamma & \gamma \\ \hline & 1-\gamma & \gamma \end{array} \quad \text{équation cible générique : } \partial_t u = f_E(u) + f_I(u) \mid \text{objectif : } u^n \rightarrow u^{n+1}. \quad (4)$$

## Calcul :

Initialisation

$$u_0 = u^n,$$

1<sup>er</sup> étage

$$k_1^E = f_E(u_0), k_1^I = f_I(u_1).$$

$$u_1 = u_0 + \gamma \Delta t k_1^E + \gamma \Delta t \underbrace{f_I(u_1)}_{=k_1^I},$$

## Méthode ImEx232 :

Schéma à trois étapes explicites et deux étapes implicites, avec  $\gamma = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$  et  $\delta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$  :

$$\text{Explicite : } \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 1 & \delta & 1-\delta & 0 \\ \hline & 0 & 1-\gamma & \gamma \end{array} \quad \text{Implicite : } \begin{array}{c|cc} \gamma & \gamma & 0 \\ 1 & 1-\gamma & \gamma \\ \hline & 1-\gamma & \gamma \end{array} \quad \text{équation cible générique : } \partial_t u = f_E(u) + f_I(u) \mid \text{objectif : } u^n \rightarrow u^{n+1}. \quad (4)$$

## Calcul :

Initialisation

$$u_0 = u^n,$$

1<sup>er</sup> étage

$$k_1^E = f_E(u_0), k_1^I = f_I(u_1).$$

$$u_1 = u_0 + \gamma \Delta t k_1^E + \gamma \Delta t \overbrace{f_I(u_1)}^{=k_1^I},$$

$$\Rightarrow u_1 = \left[ Id - \gamma \Delta t f_I(\cdot) \right]^{-1} (u_0 + \gamma \Delta t k_1^E),$$

## Méthode ImEx232 :

Schéma à trois étapes explicites et deux étapes implicites, avec  $\gamma = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$  et  $\delta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$  :

$$\text{Explicite : } \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma & \gamma & 0 & 0 \\ \hline 1 & \delta & 1-\delta & 0 \\ & 0 & 1-\gamma & \gamma \end{array} \quad \text{Implicite : } \begin{array}{c|ccc} \gamma & \gamma & 0 & \\ \hline 1 & 1-\gamma & \gamma & \\ & 1-\gamma & \gamma & \end{array} \quad \text{équation cible générique : } \partial_t u = f_E(u) + f_I(u) \mid \text{objectif : } u^n \rightarrow u^{n+1}. \quad (4)$$

## Calcul :

Initialisation

$$u_0 = u^n,$$

1<sup>er</sup> étage

$$k_1^E = f_E(u_0), k_1^I = f_I(u_1).$$

$$u_1 = u_0 + \gamma \Delta t k_1^E + \gamma \Delta t \overbrace{f_I(u_1)}^{=k_1^I},$$

$$\Rightarrow u_1 = \left[ Id - \gamma \Delta t f_I(\cdot) \right]^{-1} (u_0 + \gamma \Delta t k_1^E),$$

$$\Rightarrow k_1^I = f_I(u_1).$$

## Méthode ImEx232 :

Schéma à trois étapes explicites et deux étapes implicites, avec  $\gamma = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$  et  $\delta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$  :

$$\text{Explicite : } \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 1 & \delta & 1-\delta & 0 \\ \hline & 0 & 1-\gamma & \gamma \end{array} \quad \text{Implicite : } \begin{array}{c|ccc} \gamma & \gamma & 0 & \\ 1 & 1-\gamma & \gamma & \\ \hline & 1-\gamma & \gamma & \end{array} \quad \text{équation cible générique : } \partial_t u = f_E(u) + f_I(u) \mid \text{objectif : } u^n \rightarrow u^{n+1}. \quad (4)$$

## Calcul :

Initialisation

$$u_0 = u^n,$$

1<sup>er</sup> étage

$$k_1^E = f_E(u_0), k_1^I = f_I(u_1).$$

$$u_1 = u_0 + \gamma \Delta t k_1^E + \gamma \Delta t \overbrace{f_I(u_1)}^{=k_1^I},$$

$$\Rightarrow u_1 = \left[ Id - \gamma \Delta t f_I(\cdot) \right]^{-1} (u_0 + \gamma \Delta t k_1^E),$$

$$\Rightarrow k_1^I = f_I(u_1).$$

2<sup>eme</sup> étage

$$k_2^E = f_E(u_1), k_2^I = f_I(u_2).$$

## Méthode ImEx232 :

Schéma à trois étapes explicites et deux étapes implicites, avec  $\gamma = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$  et  $\delta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$  :

$$\begin{array}{c|ccc} \text{Explicite :} & 0 & 0 & 0 \\ & \gamma & 0 & 0 \\ \hline & 1 & \delta & 1-\delta \\ & & 0 & \gamma \end{array} \quad \begin{array}{c|ccc} \text{Implicite :} & \gamma & 0 & 0 \\ & 1 & \gamma & \gamma \\ \hline & & 1-\gamma & \gamma \end{array} \quad \text{équation cible générique : } \partial_t u = f_E(u) + f_I(u) \mid \text{objectif : } u^n \rightarrow u^{n+1}. \quad (4)$$

## Calcul :

Initialisation

$$u_0 = u^n,$$

1<sup>er</sup> étage

$$k_1^E = f_E(u_0), k_1^I = f_I(u_1).$$

$$u_1 = u_0 + \gamma \Delta t k_1^E + \gamma \Delta t \overbrace{f_I(u_1)}^{=k_1^I},$$

$$\Rightarrow u_1 = \left[ Id - \gamma \Delta t f_I(\cdot) \right]^{-1} (u_0 + \gamma \Delta t k_1^E),$$

$$\Rightarrow k_1^I = f_I(u_1).$$

2<sup>eme</sup> étage

$$k_2^E = f_E(u_1), k_2^I = f_I(u_2).$$

$$u_2 = u_0 + \delta \Delta t k_1^E + (1-\delta) \Delta t k_2^E + (1-\gamma) \Delta t k_1^I + \overbrace{\gamma \Delta t f_I(u_2)}^{=k_2^I},$$

$$\Rightarrow u_1 = \left[ Id - \gamma \Delta t f_I(\cdot) \right]^{-1} \left( u_0 + \delta \Delta t k_1^E + (1-\delta) \Delta t k_2^E + (1-\gamma) \Delta t k_1^I \right),$$

$$\Rightarrow k_2^I = f_I(u_2).$$

## Méthode ImEx232 :

Schéma à trois étapes explicites et deux étapes implicites, avec  $\gamma = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$  et  $\delta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$  :

$$\text{Explicite : } \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 1 & \delta & 1-\delta & 0 \\ \hline & 0 & 1-\gamma & \gamma \end{array} \quad \text{Implicite : } \begin{array}{c|ccc} \gamma & \gamma & 0 & \\ 1 & 1-\gamma & \gamma & \\ \hline & 1-\gamma & \gamma & \end{array} \quad \text{équation cible générique : } \partial_t u = f_E(u) + f_I(u) \mid \text{objectif : } u^n \rightarrow u^{n+1}. \quad (4)$$

## Calcul :

Initialisation

$$u_0 = u^n,$$

1<sup>er</sup> étage

$$k_1^E = f_E(u_0), k_1^I = f_I(u_1).$$

$$u_1 = u_0 + \gamma \Delta t k_1^E + \gamma \Delta t \overbrace{f_I(u_1)}^{=k_1^I},$$

$$\Rightarrow u_1 = \left[ Id - \gamma \Delta t f_I(\cdot) \right]^{-1} (u_0 + \gamma \Delta t k_1^E),$$

$$\Rightarrow k_1^I = f_I(u_1).$$

2<sup>eme</sup> étage

$$k_2^E = f_E(u_1), k_2^I = f_I(u_2).$$

$$u_2 = u_0 + \delta \Delta t k_1^E + (1-\delta) \Delta t k_2^E + (1-\gamma) \Delta t k_1^I + \overbrace{\gamma \Delta t f_I(u_2)}^{=k_2^I},$$

$$\Rightarrow u_1 = \left[ Id - \gamma \Delta t f_I(\cdot) \right]^{-1} \left( u_0 + \delta \Delta t k_1^E + (1-\delta) \Delta t k_2^E + (1-\gamma) \Delta t k_1^I \right),$$

$$\Rightarrow k_2^I = f_I(u_2).$$

3<sup>eme</sup> étage

$$k_3^E = f_E(u_2).$$

## Méthode ImEx232 :

Schéma à trois étapes explicites et deux étapes implicites, avec  $\gamma = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$  et  $\delta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$  :

$$\text{Explicite : } \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 1 & \delta & 1-\delta & 0 \\ \hline & 0 & 1-\gamma & \gamma \end{array} \quad \text{Implicite : } \begin{array}{c|ccc} \gamma & \gamma & 0 & \\ 1 & 1-\gamma & \gamma & \\ \hline & 1-\gamma & \gamma & \end{array} \quad \text{équation cible générique : } \partial_t u = f_E(u) + f_I(u) \mid \text{objectif : } u^n \rightarrow u^{n+1}. \quad (4)$$

## Calcul :

Initialisation

$$u_0 = u^n,$$

1<sup>er</sup> étage

$$k_1^E = f_E(u_0), k_1^I = f_I(u_1).$$

$$u_1 = u_0 + \gamma \Delta t k_1^E + \gamma \Delta t \overbrace{f_I(u_1)}^{=k_1^I},$$

$$\Rightarrow u_1 = \left[ Id - \gamma \Delta t f_I(\cdot) \right]^{-1} (u_0 + \gamma \Delta t k_1^E),$$

$$\Rightarrow k_1^I = f_I(u_1).$$

2<sup>eme</sup> étage

$$k_2^E = f_E(u_1), k_2^I = f_I(u_2).$$

$$u_2 = u_0 + \delta \Delta t k_1^E + (1-\delta) \Delta t k_2^E + (1-\gamma) \Delta t k_1^I + \overbrace{\gamma \Delta t f_I(u_2)}^{=k_2^I},$$

$$\Rightarrow u_1 = \left[ Id - \gamma \Delta t f_I(\cdot) \right]^{-1} \left( u_0 + \delta \Delta t k_1^E + (1-\delta) \Delta t k_2^E + (1-\gamma) \Delta t k_1^I \right),$$

$$\Rightarrow k_2^I = f_I(u_2).$$

3<sup>eme</sup> étage

$$k_3^E = f_E(u_2).$$

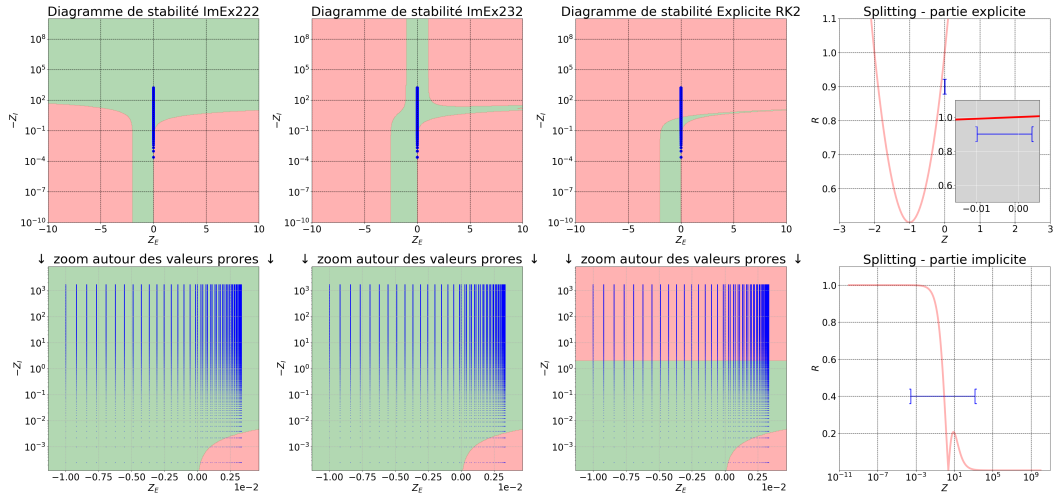
Recombinaison des etages

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t \left( (1-\gamma) k_2^E + \gamma k_3^E + (1-\gamma) k_1^I + \gamma k_2^I \right).$$

# Contribution 1 | Comparaison ImEx - Splitting

Analyse de stabilité

Stabilité de différentes méthodes sur l'équation de Nagumo.  $D = 1$ ,  $k = 1$ ,  $\Delta t = 1.0\text{e-}02$ ,  $\Delta x = 4.9\text{e-}03$ .

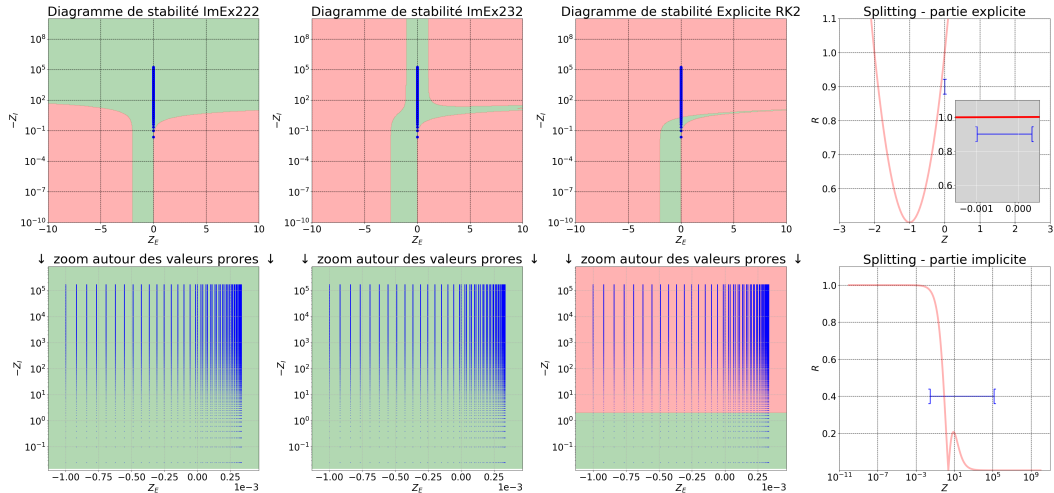




# Contribution 1 | Comparaison ImEx - Splitting

Analyse de stabilité

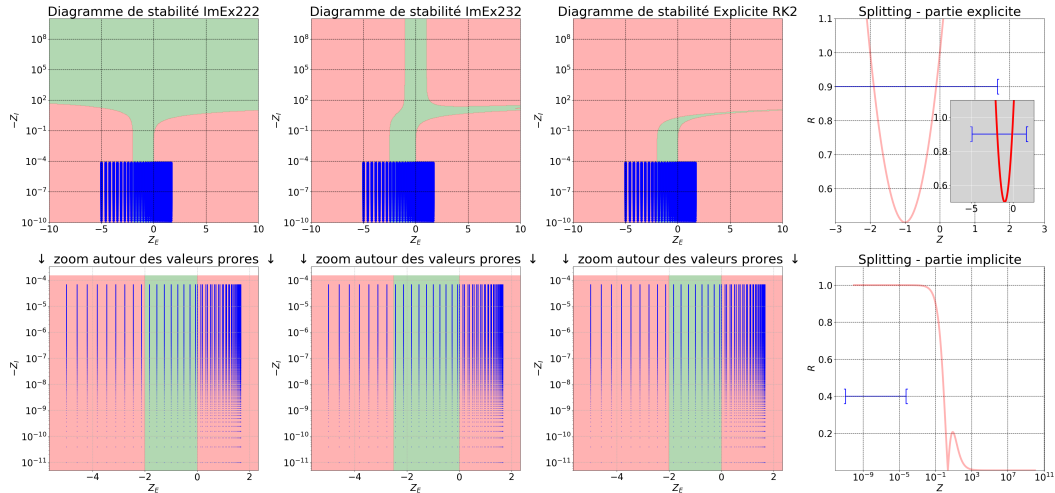
Stabilité de différentes méthodes sur l'équation de Nagumo.  $D = 10$ ,  $k = 0.1$ ,  $\Delta t = 1.0\text{e-}02$ ,  $\Delta x = 4.9\text{e-}03$ .



# Contribution 1 | Comparaison ImEx - Splitting

## Analyse de stabilité

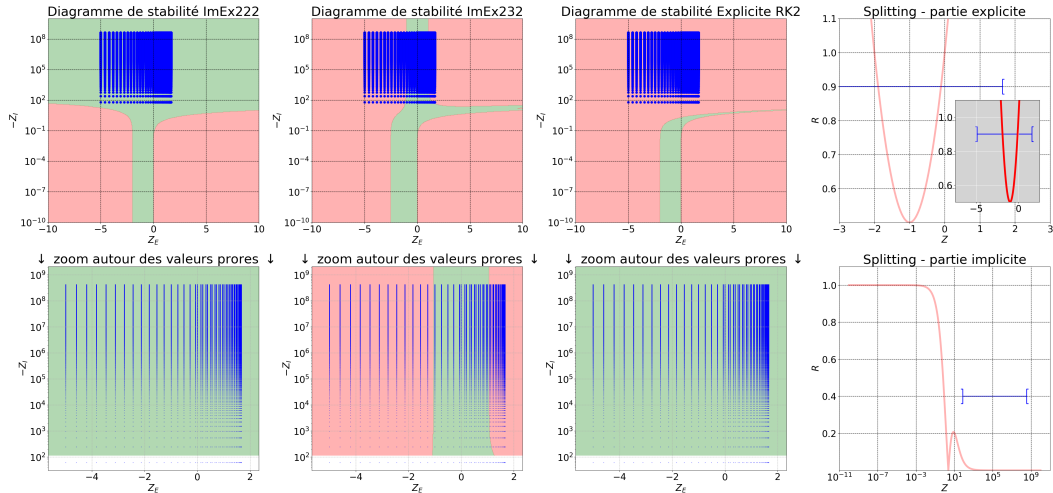
Stabilité de différentes méthodes sur l'équation de Nagumo.  $D = 0.0002$ ,  $k = 500$ ,  $\Delta t = 1.0e-02$ ,  $\Delta x = 4.9e-03$ .



# Contribution 1 | Comparaison ImEx - Splitting

Analyse de stabilité

Stabilité de différentes méthodes sur l'équation de Nagumo.  $D = 500$ ,  $k = 500$ ,  $\Delta t = 1.0\text{e-}02$ ,  $\Delta x = 4.9\text{e-}03$ .



# Contribution 1 | Comparaison ImEx - Splitting

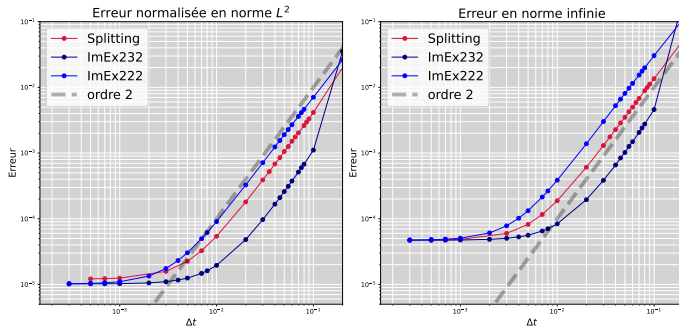
Convergence ( $\emptyset$  MRA)

## Contexte :

- ▶  $k = 10$ ,  $D = 0.1$ ,
- ▶  $\Delta x = 2.4 \cdot 10^{-3}$ ,
- ▶ conditions de Neumann au bord (quasi infini).



Convergence des méthodes ImEx vs Splitting  
 $k = 10, D = 0.1$

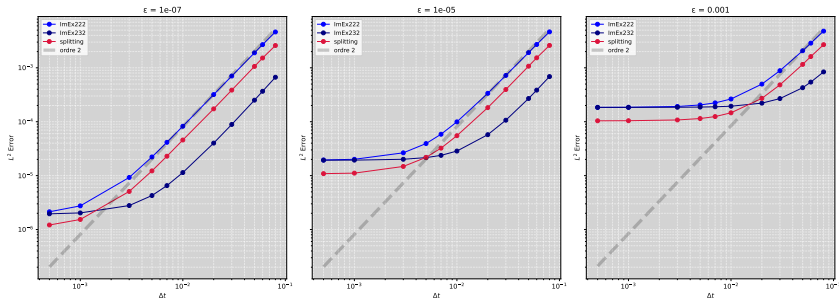


## Contexte :

- ▶  $k = 10$ ,  $D = 0.1$ ,
- ▶ Solution représentée du 12 ( $\Delta x = 9 \cdot 10^{-3}$ ) à 6,
- ▶ conditions de Neumann au bord (quasi infini).



Convergence d'un schéma MRA combiné à différentes méthodes de découplage (ImEx/splitting).





# Plan

Introduction

Les équations d'advection-diffusion-réaction (ADR)

Problématique

1<sup>ère</sup> contribution

2<sup>ème</sup> contribution

3<sup>ème</sup> contribution

Compléments

---

$$\text{Équation cible : } \partial_t u = \partial_x (D \partial_x u), \quad D > 0. \quad (5)$$

---

## Schéma numérique

Méthode des lignes : Volumes finis ordre deux + Runge Kutta explicite d'ordre deux.

○ **Semi-discrétisation spatiale** : Sur un maillage 1D constitué de cellules  $C_j$  de tailles  $\Delta x$  :

$$\forall j, \quad \int_{C_j} u(x, t) dx = \partial_x \int_{C_j} \partial_x u(x, t) dx. \quad (6)$$

$$\forall j, \quad U_j(t) = \frac{D}{\Delta x} [\partial_x u(x, t)]_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \quad (7)$$

$$\forall j, \quad U_j(t) = \underbrace{\frac{D}{\Delta x} \left[ \frac{U_{j+1}(t) - U_j(t)}{\Delta x} - \frac{U_j(t) - U_{j-1}(t)}{\Delta x} \right]}_{\text{noté : } \mathcal{D}} + \mathcal{O}(\Delta x^2) \quad (8)$$

○ **Intégration en temps** : Pour un pas de temps  $\Delta t$  :

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t \mathcal{D} u^n + \frac{\Delta t^2}{2} \mathcal{D}^2 u^n \rightarrow \text{stabilité : } \lambda = \frac{D \Delta t}{\Delta x^2} < \frac{1}{2}. \quad (9)$$



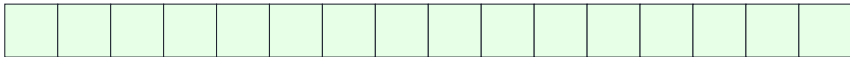
## Contribution 2 | Équations Équivalentes, diffusion et MRA

Les deux approches de MRA

**Flux numériques :**

$$\Phi_k^+ = \frac{u_{k+1} - u_k}{\Delta x}$$

$$\Phi_k^- = \frac{u_k - u_{k-1}}{\Delta x}$$



## Contribution 2 | Équations Équivalentes, diffusion et MRA

Les deux approches de MRA

**Flux numériques :**

$$\Phi_k^+ = \frac{u_{k+1} - u_k}{\Delta x}$$

$$\Phi_k^- = \frac{u_k - u_{k-1}}{\Delta x}$$



Pas d'adaptation →

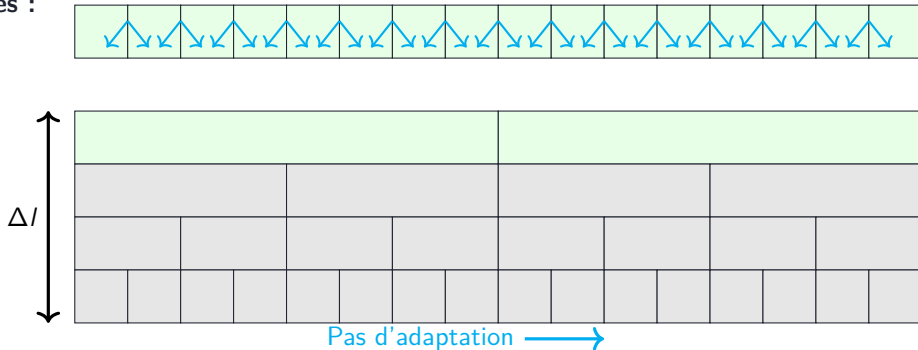
## Contribution 2 | Équations Équivalentes, diffusion et MRA

Les deux approches de MRA

Flux numériques :

$$\Phi_k^+ = \frac{u_{k+1} - u_k}{\Delta x}$$

$$\Phi_k^- = \frac{u_k - u_{k-1}}{\Delta x}$$



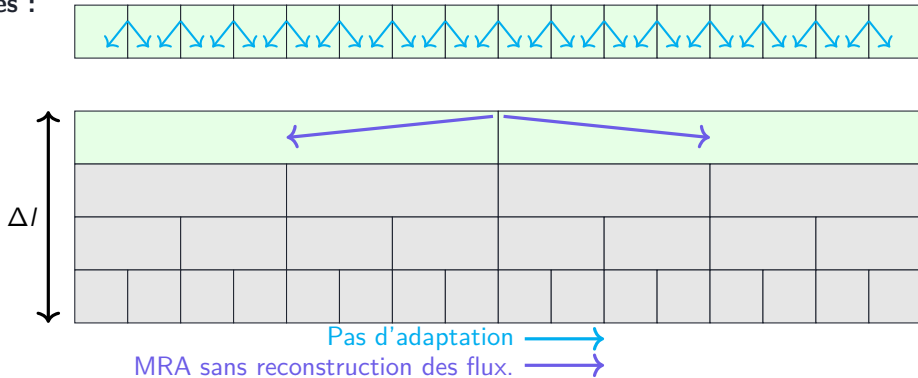
## Contribution 2 | Équations Équivalentes, diffusion et MRA

Les deux approches de MRA

Flux numériques :

$$\Phi_k^+ = \frac{u_{k+1} - u_k}{\Delta x}$$

$$\Phi_k^- = \frac{u_k - u_{k-1}}{\Delta x}$$



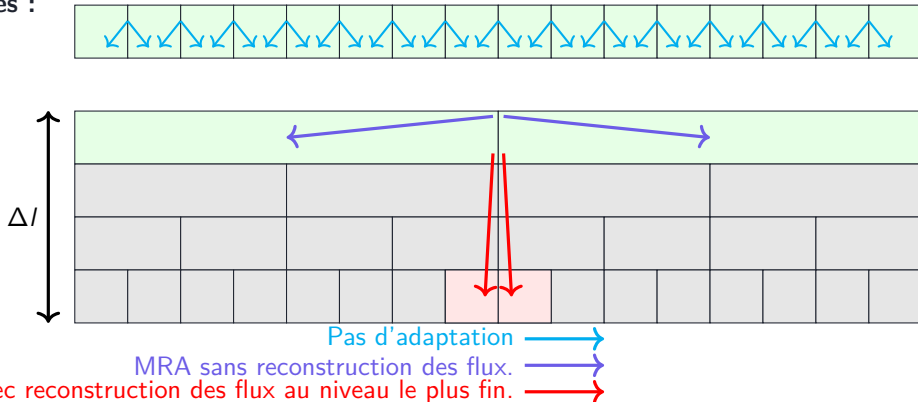
## Contribution 2 | Équations Équivalentes, diffusion et MRA

Les deux approches de MRA

Flux numériques :

$$\Phi_k^+ = \frac{u_{k+1} - u_k}{\Delta x}$$

$$\Phi_k^- = \frac{u_k - u_{k-1}}{\Delta x}$$



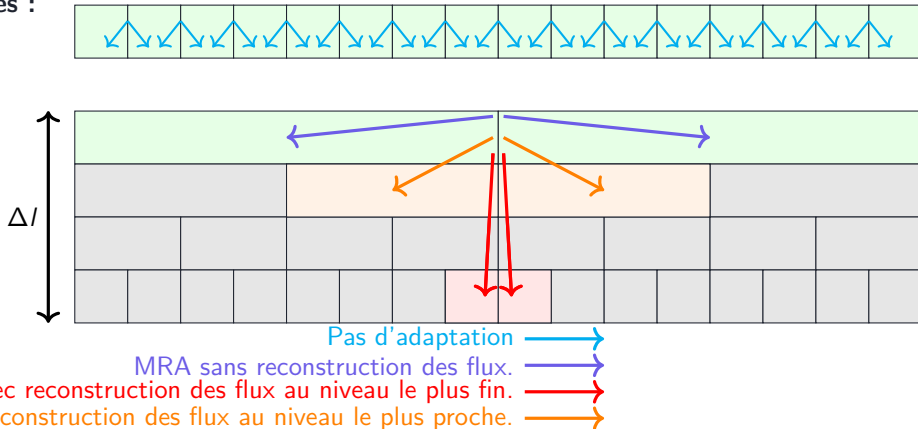
## Contribution 2 | Équations Équivalentes, diffusion et MRA

Les deux approches de MRA

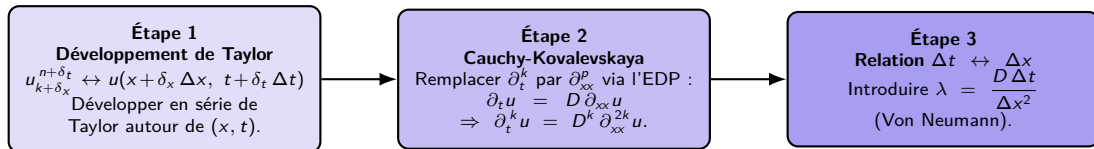
Flux numériques :

$$\Phi_k^+ = \frac{u_{k+1} - u_k}{\Delta x}$$

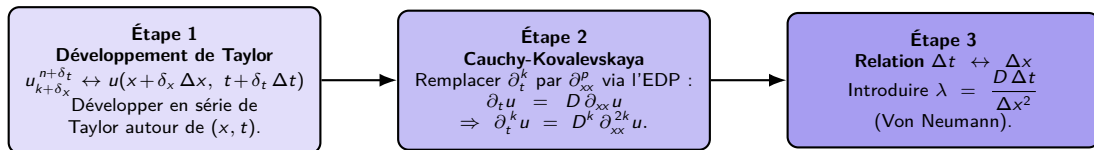
$$\Phi_k^- = \frac{u_k - u_{k-1}}{\Delta x}$$



Méthode d'obtention des équations équivalentes : Automatisation via



Méthode d'obtention des équations équivalentes : Automatisation via

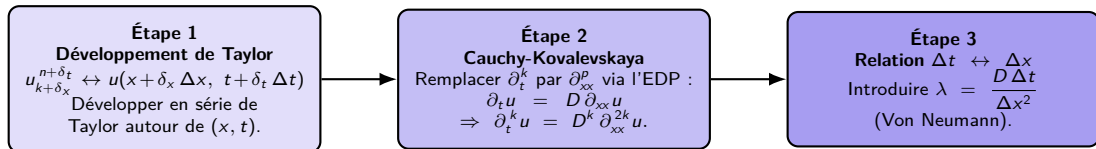


**Multirésolution adaptative sans reconstruction des flux :**

Remplacer  $\Delta x$  par  $2^{\Delta l} \Delta x$ .



Méthode d'obtention des équations équivalentes : Automatisation via



**Multirésolution adaptative sans reconstruction des flux :**

Remplacer  $\Delta x$  par  $2^{\Delta l} \Delta x$ .

**Prise en compte de la reconstruction des flux :**

- ▶ Reconstruction :  $\left[ u_{2^{\Delta l} k-1}^{\bar{l}}, u_{2^{\Delta l} k}^{\bar{l}}, u_{2^{\Delta l} k+1}^{\bar{l}}, u_{2^{\Delta l} k+2}^{\bar{l}} \right]^T = P^{\Delta l} \left[ u_{k-1}^{\bar{l}-\Delta l}, u_k^{\bar{l}-\Delta l}, u_{k+1}^{\bar{l}}, u_{k+2}^{\bar{l}-\Delta l} \right]^T$
- ▶ Taille cellule :  $2^{\Delta l} \Delta x$ , Pas approximation gradient  $\Delta x$ .

$\Delta$  / écart de niveau -  $D > 0$  coefficient de diffusion -  $\Delta x$  pas spatial de la grille fine -  $\Delta t$  pas temporel

---

**Sans multirésolution adaptative :**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \Delta x^2 \frac{D}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \Delta t^2 \frac{D^3}{6} \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} - \Delta t^3 \frac{D^4}{24} \frac{\partial^8 u}{\partial x^8} + \mathcal{O}(\Delta x^4, \Delta t^4). \quad (10)$$

$\Delta l$  écart de niveau -  $D > 0$  coefficient de diffusion -  $\Delta x$  pas spatial de la grille fine -  $\Delta t$  pas temporel

---

### Sans multirésolution adaptative :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \Delta x^2 \frac{D}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \Delta t^2 \frac{D^3}{6} \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} - \Delta t^3 \frac{D^4}{24} \frac{\partial^8 u}{\partial x^8} + \mathcal{O}(\Delta x^4, \Delta t^4). \quad (10)$$

---

### Avec multirésolution adaptative - sans reconstruction des flux :

$$\frac{\partial}{\partial t} u = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (2^{\Delta l} \Delta x)^2 \frac{D}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \Delta t^2 \frac{D^3}{6} \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} - \Delta t^3 \frac{D^4}{24} \frac{\partial^8 u}{\partial x^8} + \mathcal{O}(\Delta x^4, \Delta t^4). \quad (11)$$

$\Delta l$  écart de niveau -  $D > 0$  coefficient de diffusion -  $\Delta x$  pas spatial de la grille fine -  $\Delta t$  pas temporel

---

### Sans multirésolution adaptative :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \Delta x^2 \frac{D}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \Delta t^2 \frac{D^3}{6} \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} - \Delta t^3 \frac{D^4}{24} \frac{\partial^8 u}{\partial x^8} + \mathcal{O}(\Delta x^4, \Delta t^4). \quad (10)$$

---

### Avec multirésolution adaptative - sans reconstruction des flux :

$$\frac{\partial}{\partial t} u = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (2^{\Delta l} \Delta x)^2 \frac{D}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \Delta t^2 \frac{D^3}{6} \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} - \Delta t^3 \frac{D^4}{24} \frac{\partial^8 u}{\partial x^8} + \mathcal{O}(\Delta x^4, \Delta t^4). \quad (11)$$

---

### Avec multirésolution adaptative - avec reconstruction des flux :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \Delta t \frac{D^2}{2} \left( 2^{2\Delta l} - 1 \right) \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \Delta t^2 \frac{D^3}{6} \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} - \Delta t^3 \frac{D^4}{24} \frac{\partial^8 u}{\partial x^8} + \Delta x^2 \frac{2^{2\Delta l} D}{12} (1 - 3\Delta l) \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \mathcal{O}(\Delta x^4, \Delta t^4). \quad (12)$$

$\Delta l$  écart de niveau -  $D > 0$  coefficient de diffusion -  $\Delta x$  pas spatial de la grille fine -  $\lambda = D \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$  c<sup>ste</sup> Von Neumann

---

**Sans multirésolution adaptative :**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \Delta x^2 \frac{D}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \lambda^2 \Delta x^4 \frac{D}{6} \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} - \lambda^3 \Delta x^6 \frac{D}{24} \frac{\partial^8 u}{\partial x^8} + \mathcal{O}(\Delta x^7). \quad (13)$$

$\Delta l$  écart de niveau -  $D > 0$  coefficient de diffusion -  $\Delta x$  pas spatial de la grille fine -  $\lambda = D \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$  c<sup>ste</sup> Von Neumann

---

### Sans multirésolution adaptative :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \Delta x^2 \frac{D}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \lambda^2 \Delta x^4 \frac{D}{6} \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} - \lambda^3 \Delta x^6 \frac{D}{24} \frac{\partial^8 u}{\partial x^8} + \mathcal{O}(\Delta x^7). \quad (13)$$

---

### Avec multirésolution adaptative - sans reconstruction des flux :

$$\frac{\partial}{\partial t} u = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (2^{\Delta l} \Delta x)^2 \frac{D}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \lambda^2 \Delta x^4 \frac{D}{6} \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} - \lambda^3 \Delta x^6 \frac{D}{24} \frac{\partial^8 u}{\partial x^8} + \mathcal{O}(\Delta x^7) \quad (14)$$

$\Delta l$  écart de niveau -  $D > 0$  coefficient de diffusion -  $\Delta x$  pas spatial de la grille fine -  $\lambda = D \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$  c<sup>ste</sup> Von Neumann

### Sans multirésolution adaptative :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \Delta x^2 \frac{D}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \lambda^2 \Delta x^4 \frac{D}{6} \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} - \lambda^3 \Delta x^6 \frac{D}{24} \frac{\partial^8 u}{\partial x^8} + \mathcal{O}(\Delta x^7). \quad (13)$$

### Avec multirésolution adaptative - sans reconstruction des flux :

$$\frac{\partial}{\partial t} u = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (2^{\Delta l} \Delta x)^2 \frac{D}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \lambda^2 \Delta x^4 \frac{D}{6} \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} - \lambda^3 \Delta x^6 \frac{D}{24} \frac{\partial^8 u}{\partial x^8} + \mathcal{O}(\Delta x^7) \quad (14)$$

### Avec multirésolution adaptative - avec reconstruction des flux :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = + D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \Delta x^2 D \left( \frac{\lambda}{2} (2^{2\Delta l} - 1) + \frac{2^{2\Delta l}}{12} (1 - 3\Delta l) \right) \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \Delta x^4 \frac{D \lambda^2 \frac{\partial^6 u}{\partial x^6}}{6} - \Delta x^6 \frac{D \lambda^3 \frac{\partial^8 u}{\partial x^8}}{24} + \mathcal{O}(\Delta x^7). \quad (15)$$





# Plan

Introduction

Les équations d'advection-diffusion-réaction (ADR)

Problématique

1<sup>ère</sup> contribution

2<sup>ème</sup> contribution

3<sup>ème</sup> contribution

Compléments



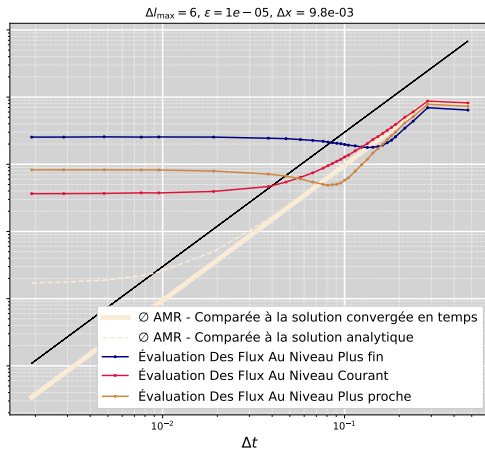
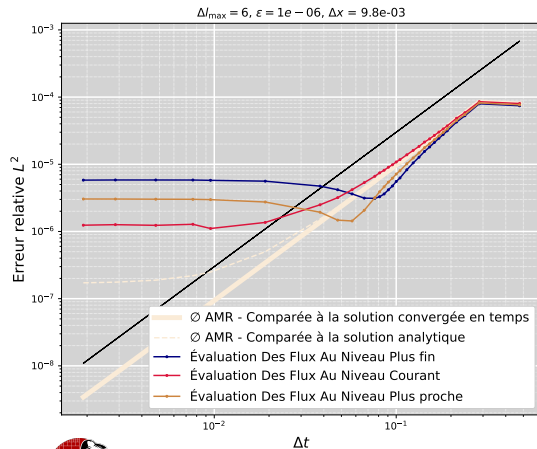
Schéma $n^o$	Niveau d'évaluation des flux	Erreur $L^2$
I	∅ MRA	$2 \times 10^{-5}$
II	Courant	$1 \times 10^{-4}$
III	Plus fin $l^{\max}$	$3 \times 10^{-4}$
IV	Inférieur direct $(l + 1)$	$2 \times 10^{-4}$

## Etude de stabilité

# Contribution 3 | Étude numérique, diffusion et MRA

Intégration avec ROCK2

Erreur par rapport à une solution convergée en temps selon la méthode d'évaluation des flux

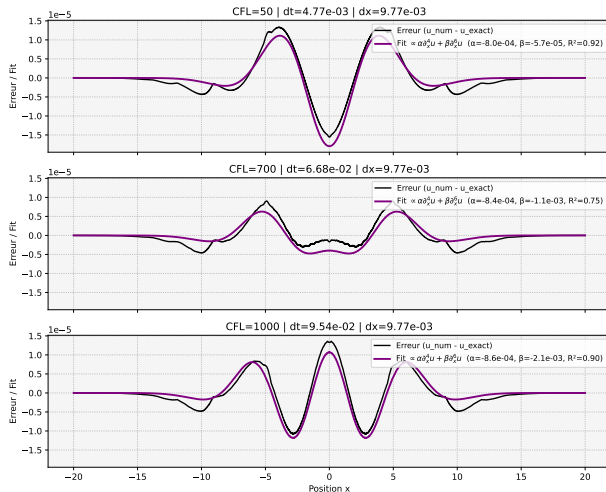


Visualisation de la distribution des erreurs.

# Contribution 3 | Étude numérique, diffusion et MRA

## Profils d'erreur

Correspondance Erreur Num.  $\propto \alpha \partial_x^4 u + \beta \partial_x^6 u$



### Chute prématurée de l'erreur :

Les dérivées  $\partial_x^4$  et  $\partial_x^6$  ont des poids différents dans l'erreur selon la constante de Von Neumann  $\lambda$ . Leurs profils se "compensent" quand elles ont un poids comparable.

### Moins bonne performances quand l'erreur temporelle est faible

Plus de termes d'erreur dans la contribution dominante de l'erreur :

Schéma n°	Évaluation des flux	Constante pondérant l'erreur en $\Delta x^2 \partial_x^4 u$ (dominante quand $\lambda$ est petite)
I	Ø AMR	$\frac{D}{12}$
II	Sans reconstruction	$2^{\Delta l} \frac{D}{12}$
III	Avec reconstruction	$D \left( \frac{\lambda}{2} (2^{2\Delta l} - 1) + \frac{2^{2\Delta l}}{12} (1 - 3\Delta l) \right)$





# Plan

Introduction

Les équations d'advection-diffusion-réaction (ADR)

Problématique

1<sup>ère</sup> contribution

2<sup>ème</sup> contribution

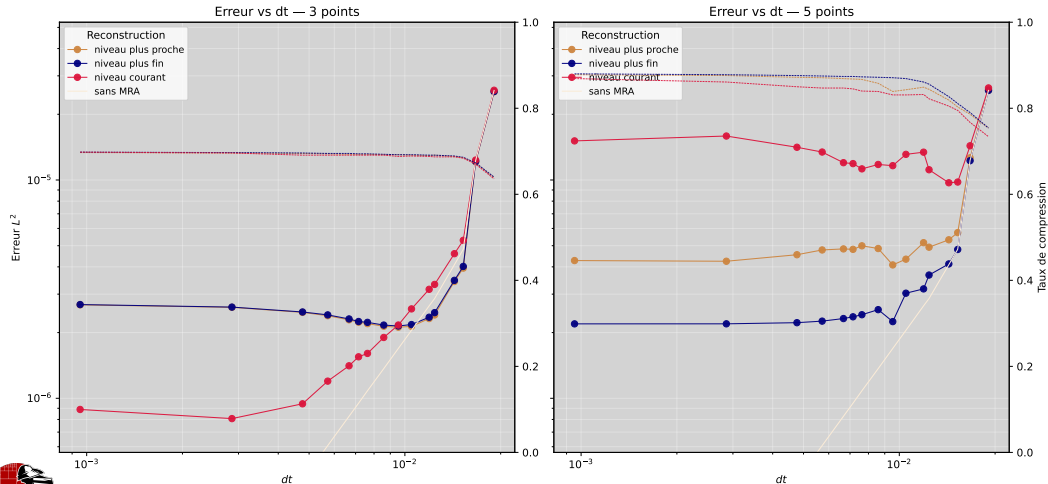
3<sup>ème</sup> contribution

Compléments

# Complément

## Essais numériques - prédicteurs à 5 points

Convergence — Erreur  $L^2$  en fonction de  $dt$



# Complément

## Essais numériques - prédicteurs à 5 points

Convergence — Erreur  $L^2$  en fonction de  $dt$  (par niveau)

