Stratégies modernes pour l'intégration des équations d'advection-réaction-diffusion

(ImEx & MultiRésolution Adaptative)

Alexandre EDELINE

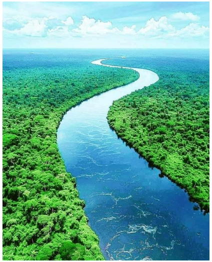
ENSTA Paris
Laboratoire : CMAP
Tuteurs laboratoire : Marc MASSOT, Christian TENAUD
Tuteur ENSTA : Patrick CIARLET

Avril - Octobre 2025

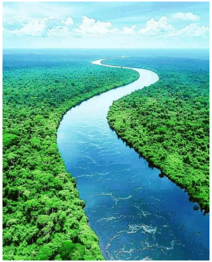
Plan

Plan

Equations d'ADR
Applications Physiques



Equations d'ADR
Applications Physiques



$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) = \overbrace{\underbrace{Au}_{c\partial_x u}}^{\text{Advection}} + \overbrace{\underbrace{Du}_{\partial_x(\eta\partial_x u)}}^{\text{Diffusion}} + \overbrace{\underbrace{R(u)}_{\text{Non-lin.}}}^{\text{Réaction}}, \\ u(x,0) = u_0. \end{cases} \tag{1}$$

Le couplage des opérateurs

Les trois opérateurs ont des propriétés très différentes :

- Advection : Peu raide, raisonnant (spectre autour de $i\mathbb{R}$).
- Diffusion : Moyennement raide, spectre autour de $\mathbb{R}^-$.
- Réaction : Très raide, hautement non-linéaire, local.

$\Longrightarrow$ les approches monolithiques peinent

Le couplage des opérateurs

Les trois opérateurs ont des propriétés très différentes :

- Advection : Peu raide, raisonnant (spectre autour de $i\mathbb{R}$).
- Diffusion : Moyennement raide, spectre autour de $\mathbb{R}^-$.
- Réaction : Très raide, hautement non-linéaire, local.

$\Longrightarrow$ les approches monolithiques peinent

Les solutions multi-échelles

- plusieurs échelles de temps
- plusieurs échelles d'espace

Stratégie $n^o 1$: Différencier le traitement sur chaque opérateurs

Ne pas faire un schéma monolithique.

- Séparation d'opérateurs (*splitting*)
- Méthodes ImEx (Additive Runge et Kutta)

Stratégie n^o1 **: Différencier le traitement sur chaque opérateurs**

Ne pas faire un schéma monolithique.

- Séparation d'opérateurs (*splitting*)
- Méthodes ImEx (Additive Runge et Kutta)

Stratégie n^o2 **: Adaptation en espace**

La multirésolution adaptative :

- Des grilles de *résolution multiples*,
- Deux opérateurs de *projection/reconstruction*,
- Représentation de la solution comme une suite de *détails*,
- Une stratégie d'*adaptation*.

<table>
<tr><td>Niveau de résolution $j = 1$</td><td colspan="4">u_0^1</td><td colspan="4">u_1^1</td></tr>
<tr><td>Niveau de résolution $j = 2$</td><td colspan="2">d_0^2</td><td colspan="2">d_1^2</td><td colspan="2">d_2^2</td><td colspan="2">d_3^2</td></tr>
<tr><td>Niveau de résolution $j = 3$</td><td>d_0^3</td><td>d_1^3</td><td>d_2^3</td><td>d_3^3</td><td>d_4^3</td><td>d_5^3</td><td>d_6^3</td><td>d_7^3</td></tr>
</table>

$\xrightarrow{\hspace{6em}}$ x

Plan

Problématique

Présentation des contributions

Contribution $n^o 1$ **- Comparaison ImEx-splitting :**

- Équation de réaction-diffusion (*Nagumo spatiale 1D*).
- Étude de stabilité.
- Convergence avec et sans adaptation spatiale.

Présentation des contributions

Contribution n^o1 **- Comparaison ImEx-splitting :**

- Équation de réaction-diffusion (*Nagumo spatiale 1D*).
- Étude de stabilité.
- Convergence avec et sans adaptation spatiale.

Contribution n^o2 **- Calcul des équations équivalentes de schémas adaptés :**

- Diffusion pure, linéaire, 1D.
- Méthode des lignes : *volume finis* + *Runge Kutta explicite.*
- Différents schémas de *multirésolution*.

Présentation des contributions

Contribution n^o1 **- Comparaison ImEx-splitting :**

- Équation de réaction-diffusion (*Nagumo spatiale 1D*).
- Étude de stabilité.
- Convergence avec et sans adaptation spatiale.

Contribution n^o2 **- Calcul des équations équivalentes de schémas adaptés :**

- Diffusion pure, linéaire, 1D.
- Méthode des lignes : *volume finis + Runge Kutta explicite.*
- Différents schémas de *multirésolution*.

Contribution n^o3 **- Expérience numérique :**

- Comparaison de la convergence selon le schéma de *multirésolution*.
- Extensions : méthodes stabilisées et étude de stabilité.
- Mise en relation avec les équations équivalentes.

Présentation des contributions

Contribution n^o1 **- Comparaison ImEx-splitting :**

- Équation de réaction-diffusion (*Nagumo spatiale 1D*).
- Étude de stabilité.
- Convergence avec et sans adaptation spatiale.

Contribution n^o2 **- Calcul des équations équivalentes de schémas adaptés :**

- Diffusion pure, linéaire, 1D.
- Méthode des lignes : *volume finis + Runge Kutta explicite.*
- Différents schémas de *multirésolution*.

Contribution n^o3 **- Expérience numérique :**

- Comparaison de la convergence selon le schéma de *multirésolution*.
- Extensions : méthodes stabilisées et étude de stabilité.
- Mise en relation avec les équations équivalentes.

Complément :

- Mise à lépreuve d'une conjecture issue de la *contribution* n^o3.

Plan

Objectifs Principaux :

- Comprendre les méthodes *ImEx* : méthodes, intérêt, mise en oeuvre, stabilité.
- Comparaison empirique de l'impact de la *multirésolution adaptative* sur ces méthodes et sur le *splitting*.

L'équation de Nagumo 1D :

Il s'agit d'une équation de diffusion-réaction faisant apparaître des dynamiques de fronts :

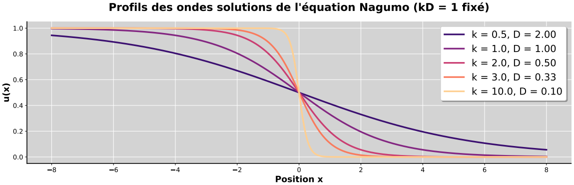
$$\partial_t u = \underbrace{D\partial_{xx} u}_{\text{diffusion}} - \underbrace{ku(1-u^2)}_{\text{réaction non. lin.}} \qquad k, D \in \mathbb{R}_+^*. \tag{2}$$

L'équation de Nagumo 1D :
Il s'agit d'une équation de diffusion-réaction faisant apparaître des dynamiques de fronts :

$$\partial_t u = \underbrace{D\partial_{xx} u}_{\text{diffusion}} - \underbrace{ku(1-u^2)}_{\text{réaction non. lin.}} \qquad k, D \in \mathbb{R}_+^*. \tag{2}$$

Les solutions :
En domaine infini, cette équation admet des solutions sous forme d'ondes progressives :

$$u(x-ct) = \frac{e^{\sqrt{\frac{k}{2D}}\left((x-x_0)-ct\right)}}{1+e^{-\sqrt{\frac{k}{2D}}\left((x-x_0)-ct\right)}}, \quad c = \sqrt{\frac{kD}{2}}. \tag{3}$$



Méthode ImEx232 :

Schéma à trois étages explicites et deux étages implicites, avec $\gamma = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ et $\delta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$:

$$\text{Explicite :}\ \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 1 & \delta & 1-\delta & 0 \\ \hline & 0 & 1-\gamma & \gamma \end{array} \qquad \text{Implicite :}\ \begin{array}{c|cc} \gamma & \gamma & 0 \\ 1 & 1-\gamma & \gamma \\ \hline & 1-\gamma & \gamma \end{array}$$

Méthode ImEx232 :
Schéma à trois étages explicites et deux étages implicites, avec $\gamma = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ et $\delta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$:

$$\text{Explicite :}\ \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 1 & \delta & 1-\delta & 0 \\ \hline & 0 & 1-\gamma & \gamma \end{array} \qquad \text{Implicite :}\ \begin{array}{c|cc} \gamma & \gamma & 0 \\ 1 & 1-\gamma & \gamma \\ \hline & 1-\gamma & \gamma \end{array}$$

Méthode ImEx222 :
Schéma à deux étages explicites et deux étages implicites, avec $\gamma = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ et $\delta = 1 - \frac{1}{2\gamma}$:

$$\text{Explicite :}\ \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 1 & 1-\delta & \delta & 0 \\ \hline & 1-\delta & \delta & 0 \end{array} \qquad \text{Implicite :}\ \begin{array}{c|cc} \gamma & \gamma & 0 \\ 1 & 1-\gamma & \gamma \\ \hline & 1-\gamma & \gamma \end{array}$$

Méthode ImEx232 :
Schéma à trois étages explicites et deux étages implicites, avec $\gamma = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ et $\delta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$:

$$\text{Explicite :}\ \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 1 & \delta & 1-\delta & 0 \\ \hline & 0 & 1-\gamma & \gamma \end{array} \qquad \text{Implicite :}\ \begin{array}{c|cc} \gamma & \gamma & 0 \\ 1 & 1-\gamma & \gamma \\ \hline & 1-\gamma & \gamma \end{array}$$

Méthode ImEx222 :
Schéma à deux étages explicites et deux étages implicites, avec $\gamma = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ et $\delta = 1 - \frac{1}{2\gamma}$:

$$\text{Explicite :}\ \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 1 & 1-\delta & \delta & 0 \\ \hline & 1-\delta & \delta & 0 \end{array} \qquad \text{Implicite :}\ \begin{array}{c|cc} \gamma & \gamma & 0 \\ 1 & 1-\gamma & \gamma \\ \hline & 1-\gamma & \gamma \end{array}$$

Méthode Splitting :
Splitting de Strang | Réaction : ERK2 (Heun) | Diffusion : SDIRK2 (celle des méthode ImEx).

Méthode ImEx232 :

Schéma à trois étages explicites et deux étages implicites, avec $\gamma = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ et $\delta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$:

$$\text{Explicite :}\quad \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 1 & \delta & 1-\delta & 0 \\ \hline & 0 & 1-\gamma & \gamma \end{array} \quad \text{Implicite :}\quad \begin{array}{c|cc} \gamma & \gamma & 0 \\ 1 & 1-\gamma & \gamma \\ \hline & 1-\gamma & \gamma \end{array} \;\textbf{équation cible générique :}\; \partial_t u = f_E(u) + f_I(u) \mid \textbf{objectif :}\; u^n \to u^{n+1}. \tag{4}$$

Méthode ImEx232 :

Schéma à trois étages explicites et deux étages implicites, avec $\gamma = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ et $\delta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$:

$$\text{Explicite :} \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 1 & \delta & 1-\delta & 0 \\ \hline & 0 & 1-\gamma & \gamma \end{array} \quad \text{Implicite :} \begin{array}{c|cc} \gamma & \gamma & 0 \\ 1 & 1-\gamma & \gamma \\ \hline & 1-\gamma & \gamma \end{array} \quad \textbf{équation cible générique :} \ \partial_t u = f_E(u) + f_I(u) \mid \textbf{objectif :} \ u^n \to u^{n+1}. \tag{4}$$

Calcul :

Méthode ImEx232 :

Schéma à trois étages explicites et deux étages implicites, avec $\gamma = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ et $\delta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$:

$$\text{Explicite : } \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 1 & \delta & 1-\delta & 0 \\ \hline & 0 & 1-\gamma & \gamma \end{array} \quad \text{Implicite : } \begin{array}{c|cc} \gamma & \gamma & 0 \\ 1 & 1-\gamma & \gamma \\ \hline & 1-\gamma & \gamma \end{array} \quad \textbf{équation cible générique : } \partial_t u = f_E(u) + f_I(u) \mid \textbf{objectif : } u^n \to u^{n+1}. \tag{4}$$

Calcul :

Initialisation

$u_0 = u^n$,

1^{er} étage

$k_1^E = f_E(u_0)$, $k_1^I = f_I(u_1)$.

Méthode ImEx232 :

Schéma à trois étages explicites et deux étages implicites, avec $\gamma = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ et $\delta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$:

$$\text{Explicite :} \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 1 & \delta & 1-\delta & 0 \\ \hline & 0 & 1-\gamma & \gamma \end{array} \quad \text{Implicite :} \begin{array}{c|cc} \gamma & \gamma & 0 \\ 1 & 1-\gamma & \gamma \\ \hline & 1-\gamma & \gamma \end{array} \quad \textbf{équation cible générique :}\ \partial_t u = f_E(u) + f_I(u) \mid \textbf{objectif :}\ u^n \to u^{n+1}. \tag{4}$$

Calcul :

Initialisation

$u_0 = u^n$,

1^{er} étage

$k_1^E = f_E(u_0)$, $k_1^I = f_I(u_1)$.

$$u_1 = u_0 + \gamma \Delta t k_1^E + \gamma \Delta t \overbrace{f_I(u_1)}^{=k_1^I},$$

Méthode ImEx232 :

Schéma à trois étages explicites et deux étages implicites, avec $\gamma = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ et $\delta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$:

$$\text{Explicite :}\ \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 1 & \delta & 1-\delta & 0 \\ \hline & 0 & 1-\gamma & \gamma \end{array} \quad \text{Implicite :}\ \begin{array}{c|cc} \gamma & \gamma & 0 \\ 1 & 1-\gamma & \gamma \\ \hline & 1-\gamma & \gamma \end{array} \quad \textbf{équation cible générique :}\ \partial_t u = f_E(u) + f_I(u) \mid \textbf{objectif :}\ u^n \to u^{n+1}. \tag{4}$$

Calcul :

Initialisation

$u_0 = u^n$,

1^{er} étage

$k_1^E = f_E(u_0)$, $k_1^I = f_I(u_1)$.

$$u_1 = u_0 + \gamma \Delta t k_1^E + \gamma \Delta t \overbrace{f_I(u_1)}^{=k_1^I},$$

$$\implies u_1 = \left[Id - \gamma \Delta t f_I(\cdot) \right]^{-1} (u_0 + \gamma \Delta t k_1^E),$$

Méthode ImEx232 :

Schéma à trois étages explicites et deux étages implicites, avec $\gamma = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ et $\delta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$:

$$\text{Explicite : } \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 1 & \delta & 1-\delta & 0 \\ \hline & 0 & 1-\gamma & \gamma \end{array} \quad \text{Implicite : } \begin{array}{c|cc} \gamma & \gamma & 0 \\ 1 & 1-\gamma & \gamma \\ \hline & 1-\gamma & \gamma \end{array} \quad \textbf{équation cible générique : } \partial_t u = f_E(u) + f_I(u) \mid \textbf{objectif : } u^n \to u^{n+1}. \tag{4}$$

Calcul :

Initialisation

$u_0 = u^n,$

1^{er} étage

$k_1^E = f_E(u_0),\ k_1^I = f_I(u_1).$

$$u_1 = u_0 + \gamma \Delta t k_1^E + \gamma \Delta t \overbrace{f_I(u_1)}^{=k_1^I},$$

$$\implies u_1 = \Big[Id - \gamma \Delta t f_I(\cdot)\Big]^{-1} (u_0 + \gamma \Delta t k_1^E),$$

$$\implies k_1^I = f_I(u_1).$$

Méthode ImEx232 :

Schéma à trois étages explicites et deux étages implicites, avec $\gamma = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ et $\delta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$:

$$\text{Explicite : } \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 1 & \delta & 1-\delta & 0 \\ \hline & 0 & 1-\gamma & \gamma \end{array} \quad \text{Implicite : } \begin{array}{c|cc} \gamma & \gamma & 0 \\ 1 & 1-\gamma & \gamma \\ \hline & 1-\gamma & \gamma \end{array} \quad \textbf{équation cible générique : } \partial_t u = f_E(u) + f_I(u) \mid \textbf{objectif : } u^n \to u^{n+1}. \tag{4}$$

Calcul :

Initialisation

$u_0 = u^n$,

1^{er} étage

$k_1^E = f_E(u_0)$, $k_1^I = f_I(u_1)$.

$$u_1 = u_0 + \gamma\Delta t k_1^E + \gamma\Delta t \overbrace{f_I(u_1)}^{=k_1^I},$$

$$\implies u_1 = \Big[Id - \gamma\Delta t f_I(\cdot)\Big]^{-1}(u_0 + \gamma\Delta t k_1^E),$$

$$\implies k_1^I = f_I(u_1).$$

2^{eme} étage

$k_2^E = f_E(u_1)$, $k_2^I = f_I(u_2)$.

Méthode ImEx232 :

Schéma à trois étages explicites et deux étages implicites, avec $\gamma = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ et $\delta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$:

$$\text{Explicite : } \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 1 & \delta & 1-\delta & 0 \\ \hline & 0 & 1-\gamma & \gamma \end{array} \quad \text{Implicite : } \begin{array}{c|cc} \gamma & \gamma & 0 \\ 1 & 1-\gamma & \gamma \\ \hline & 1-\gamma & \gamma \end{array} \quad \textbf{équation cible générique : } \partial_t u = f_E(u) + f_I(u) \mid \textbf{objectif : } u^n \rightarrow u^{n+1}. \tag{4}$$

Calcul :

Initialisation

$u_0 = u^n$,

1^{er} étage

$k_1^E = f_E(u_0)$, $k_1^I = f_I(u_1)$.

$$u_1 = u_0 + \gamma\Delta t k_1^E + \gamma\Delta t \overbrace{f_I(u_1)}^{=k_1^I},$$

$$\implies u_1 = \Big[Id - \gamma\Delta t f_I(\cdot)\Big]^{-1} (u_0 + \gamma\Delta t k_1^E),$$

$$\implies k_1^I = f_I(u_1).$$

2^{eme} étage

$k_2^E = f_E(u_1)$, $k_2^I = f_I(u_2)$.

$$u_2 = u_0 + \delta\Delta t k_1^E + (1-\delta)\Delta t k_2^E + (1-\gamma)\Delta t k_1^I + \overbrace{\gamma\Delta t f_I(u_2)}^{=k_2^I},$$

$$\implies u_1 = \Big[Id - \gamma\Delta t f_I(\cdot)\Big]^{-1} \Big(u_0 + \delta\Delta t k_1^E + (1-\delta)\Delta t k_2^E + (1-\gamma)\Delta t k_1^I\Big),$$

$$\implies k_2^I = f_I(u_2).$$

Méthode ImEx232 :

Schéma à trois étages explicites et deux étages implicites, avec $\gamma = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ et $\delta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$:

$$\text{Explicite : } \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 1 & \delta & 1-\delta & 0 \\ \hline & 0 & 1-\gamma & \gamma \end{array} \quad \text{Implicite : } \begin{array}{c|cc} \gamma & \gamma & 0 \\ 1 & 1-\gamma & \gamma \\ \hline & 1-\gamma & \gamma \end{array} \quad \textbf{équation cible générique : } \partial_t u = f_E(u) + f_I(u) \mid \textbf{objectif : } u^n \to u^{n+1}. \tag{4}$$

Calcul :

Initialisation

$u_0 = u^n$,

1^{er} étage

$k_1^E = f_E(u_0)$, $k_1^I = f_I(u_1)$.

$$u_1 = u_0 + \gamma\Delta t k_1^E + \gamma\Delta t \overbrace{f_I(u_1)}^{=k_1^I},$$

$$\implies u_1 = \left[Id - \gamma\Delta t f_I(\cdot)\right]^{-1}(u_0 + \gamma\Delta t k_1^E),$$

$$\implies k_1^I = f_I(u_1).$$

2^{eme} étage

$k_2^E = f_E(u_1)$, $k_2^I = f_I(u_2)$.

$$u_2 = u_0 + \delta\Delta t k_1^E + (1-\delta)\Delta t k_2^E + (1-\gamma)\Delta t k_1^I + \overbrace{\gamma\Delta t f_I(u_2)}^{=k_2^I},$$

$$\implies u_1 = \left[Id - \gamma\Delta t f_I(\cdot)\right]^{-1}\left(u_0 + \delta\Delta t k_1^E + (1-\delta)\Delta t k_2^E + (1-\gamma)\Delta t k_1^I\right),$$

$$\implies k_2^I = f_I(u_2).$$

3^{eme} étage

$k_3^E = f_E(u2)$.

Méthode ImEx232 :

Schéma à trois étages explicites et deux étages implicites, avec $\gamma = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ et $\delta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$:

$$\text{Explicite : } \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 1 & \delta & 1-\delta & 0 \\ \hline & 0 & 1-\gamma & \gamma \end{array} \quad \text{Implicite : } \begin{array}{c|cc} \gamma & \gamma & 0 \\ 1 & 1-\gamma & \gamma \\ \hline & 1-\gamma & \gamma \end{array} \quad \textbf{équation cible générique : } \partial_t u = f_E(u) + f_I(u) \mid \textbf{objectif : } u^n \to u^{n+1}. \tag{4}$$

Calcul :

Initialisation

$$u_0 = u^n,$$

1^{er} étage

$$k_1^E = f_E(u_0),\ k_1^I = f_I(u_1).$$

$$u_1 = u_0 + \gamma\Delta t k_1^E + \gamma\Delta t \overbrace{f_I(u_1)}^{=k_1^I},$$

$$\implies u_1 = \left[Id - \gamma\Delta t f_I(\cdot)\right]^{-1}(u_0 + \gamma\Delta t k_1^E),$$

$$\implies k_1^I = f_I(u_1).$$

2^{eme} étage

$$k_2^E = f_E(u_1),\ k_2^I = f_I(u_2).$$

$$u_2 = u_0 + \delta\Delta t k_1^E + (1-\delta)\Delta t k_2^E + (1-\gamma)\Delta t k_1^I + \overbrace{\gamma\Delta t f_I(u_2)}^{=k_2^I},$$

$$\implies u_1 = \left[Id - \gamma\Delta t f_I(\cdot)\right]^{-1}\left(u_0 + \delta\Delta t k_1^E + (1-\delta)\Delta t k_2^E + (1-\gamma)\Delta t k_1^I\right),$$

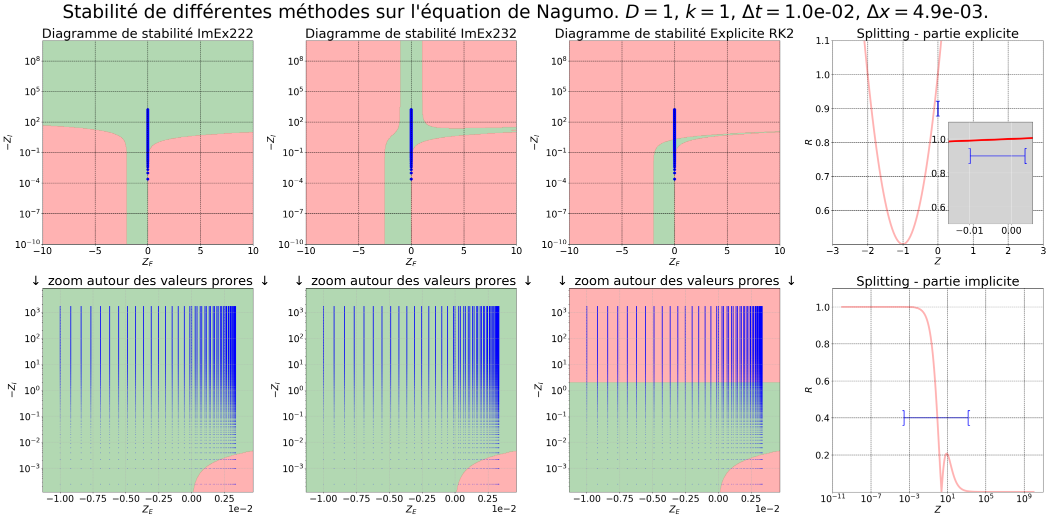
$$\implies k_2^I = f_I(u_2).$$

3^{eme} étage

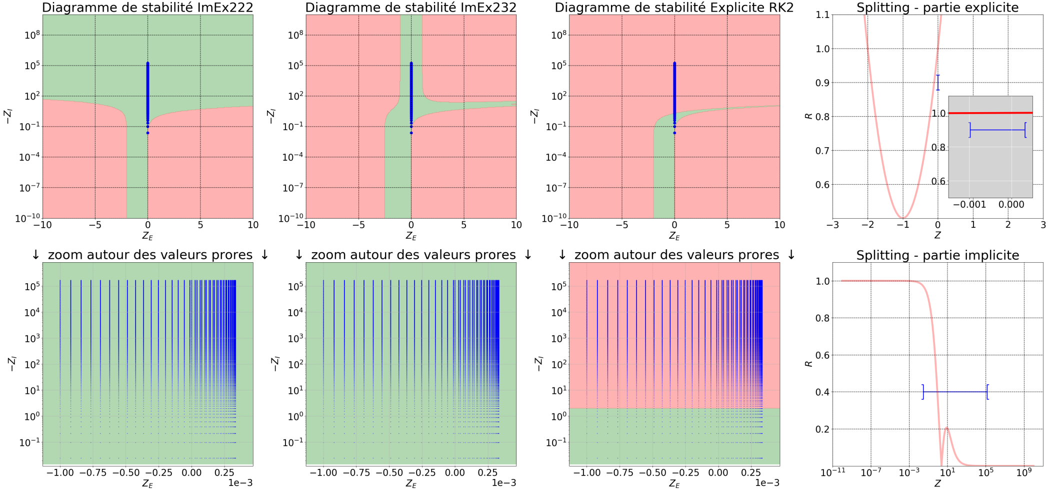
$$k_3^E = f_E(u2).$$

Recombinaison des etages

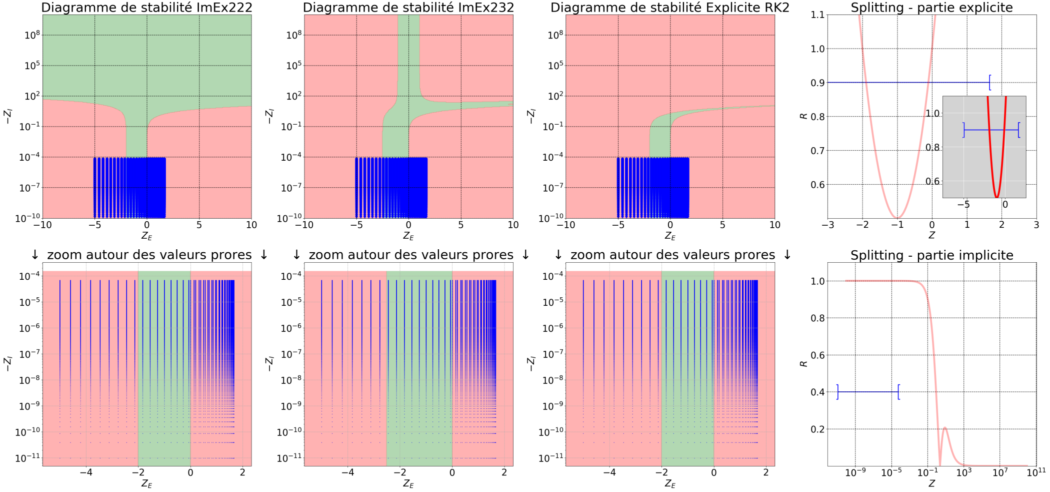
$$u^{n+1} = u^n + \Delta t\left((1-\gamma)k_2^E + \gamma k_3^E + (1-\gamma)k_1^I + \gamma k_2^I\right).$$

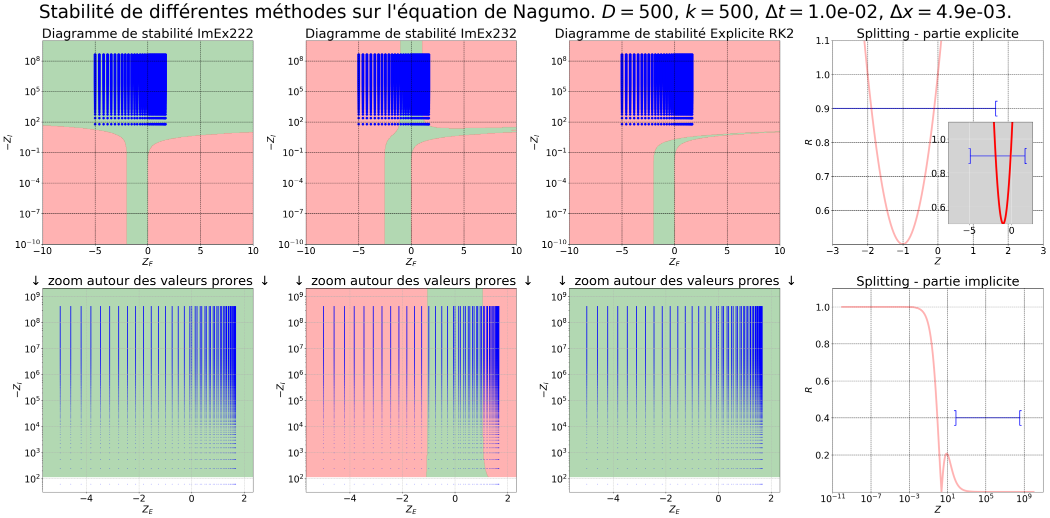

Stabilité de différentes méthodes sur l'équation de Nagumo. $D = 1$, $k = 1$, $\Delta t = 1.0\text{e-}02$, $\Delta x = 4.9\text{e-}03$.
Diagramme de stabilité ImEx222
Diagramme de stabilité ImEx232
Diagramme de stabilité Explicite RK2
Splitting - partie explicite
↓ zoom autour des valeurs prores ↓
↓ zoom autour des valeurs prores ↓
↓ zoom autour des valeurs prores ↓
Splitting - partie implicite
$-Z_I$
Z_E
R
Z
1e−2

Stabilité de différentes méthodes sur l'équation de Nagumo. $D = 10$, $k = 0.1$, $\Delta t = 1.0\text{e-}02$, $\Delta x = 4.9\text{e-}03$.



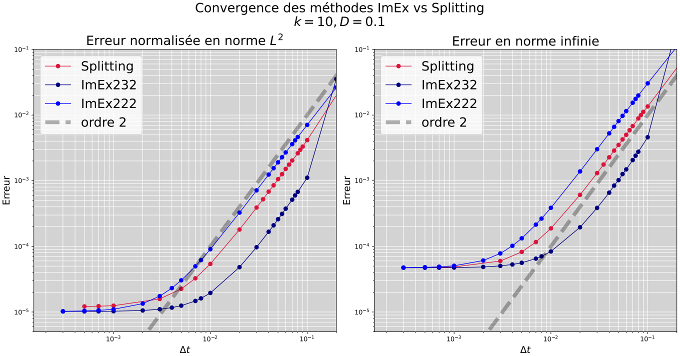
Stabilité de différentes méthodes sur l'équation de Nagumo. $D = 0.0002$, $k = 500$, $\Delta t = 1.0\text{e-}02$, $\Delta x = 4.9\text{e-}03$.




Stabilité de différentes méthodes sur l'équation de Nagumo. $D = 500$, $k = 500$, $\Delta t = 1.0$e-02, $\Delta x = 4.9$e-03.
Diagramme de stabilité ImEx222
Diagramme de stabilité ImEx232
Diagramme de stabilité Explicite RK2
Splitting - partie explicite
↓ zoom autour des valeurs prores ↓
Splitting - partie implicite
Z_E
$-Z_I$
Z
R

Contexte :

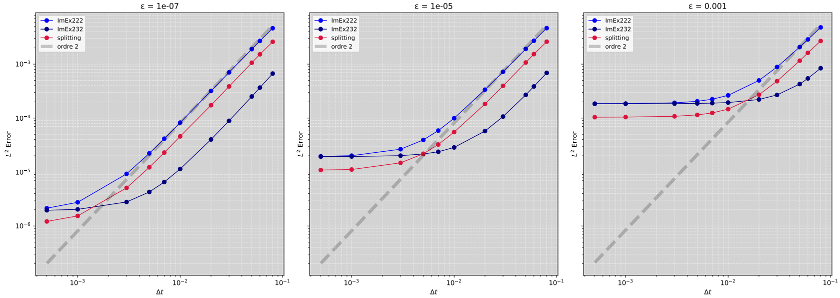
- $k = 10,\ D = 0.1$,
- $\Delta x = 2.4\,10^{-3}$,
- conditions de Neumann au bord (quasi infini).



Contexte :

- $k = 10, \ D = 0.1$,
- Solution représentée du 12 ($\Delta x = 9\,10^{-3}$) à 6,
- conditions de Neumann au bord (quasi infini).

Convergence d'un schéma MRA combiné à différentes méthodes de découplage (ImEx/splitting).



Apprentissage personnel :

- Étude de la théorie des ImEx [3, 1, 4] et des schémas pour lois de conservation [5].
- Familiarisation avec l'étude de stabilité linéaire pour les ImEx ($(z_E, z_I) \in \mathbb{C}^2$).
- Code par volume fini en C++ grâce à la libraire Samurai.

Résultat empirique

Le schéma de *splitting* est plus robuste à la *multirésolution adaptative* que les ImEx.
Cela n'est pas forcément généralisale, c'est un cas particulier.

Plan

$$\textbf{Équation cible : } \partial_t u = \partial_x \left(D \partial_x u \right), \quad D > 0. \tag{5}$$

Schéma numérique

Méthode des lignes : Volumes finis ordre deux + Runge Kutta explicite d'ordre deux.

- **Semi-discrétisation spatiale :** Sur un maillage 1D constitué de cellules C_j de tailles Δx :

$$\forall j, \quad \int_{C_j} u(x,t)\mathrm{d}x = \partial_x \int_{C_j} \partial_x u(x,t)\mathrm{d}x. \tag{6}$$

$$\forall j, \quad U_j(t) = \frac{D}{\Delta x} \left[\partial_x u(x,t) \right]_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \tag{7}$$

$$\forall j, \quad U_j(t) = \underbrace{\frac{D}{\Delta x} \left[\frac{U_{j+1}(t) - U_j(t)}{\Delta x} - \frac{U_j(t) - U_{j-1}(t)}{\Delta x} \right]}_{\text{noté : } \mathcal{D}} + \mathcal{O}(\Delta x^2) \tag{8}$$

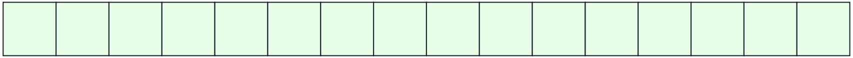
- **Intégration en temps :** Pour un pas de temps Δt :

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t \mathcal{D} u^n + \frac{\Delta t^2}{2} \mathcal{D}^2 u^n \rightarrow \text{stabilité : } \lambda = \frac{D \Delta t}{\Delta x^2} < \frac{1}{2}. \tag{9}$$

Flux numériques :

$$\Phi_k^+ = \frac{u_{k+1} - u_k}{\Delta x}$$

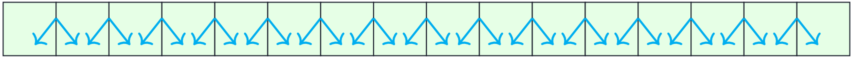
$$\Phi_k^- = \frac{u_k - u_{k-1}}{\Delta x}$$



Flux numériques :

$$\Phi_k^+ = \frac{u_{k+1} - u_k}{\Delta x}$$

$$\Phi_k^- = \frac{u_k - u_{k-1}}{\Delta x}$$

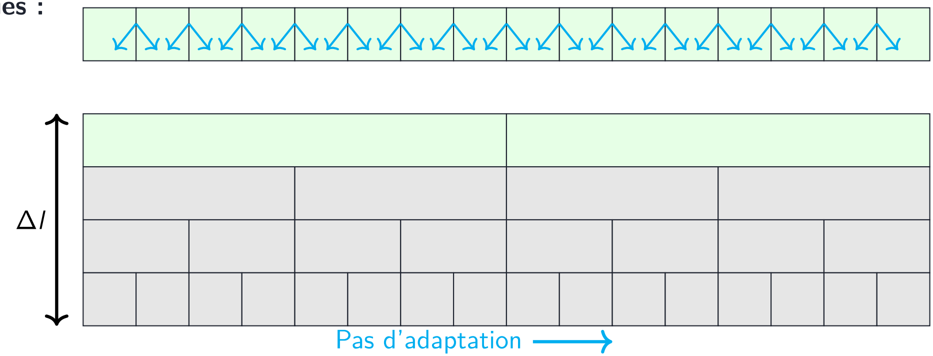


Pas d'adaptation $\longrightarrow$

Flux numériques :

$$\Phi_k^+ = \frac{u_{k+1} - u_k}{\Delta x}$$

$$\Phi_k^- = \frac{u_k - u_{k-1}}{\Delta x}$$

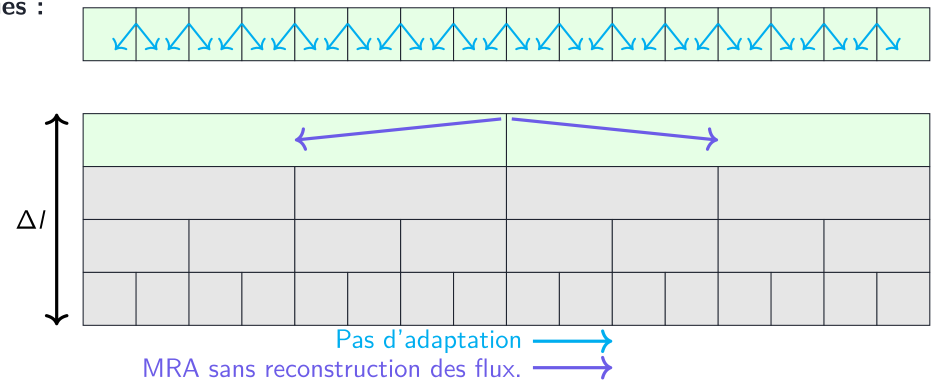


Prédicteur polynomial à trois points.

Flux numériques :

$$\Phi_k^+ = \frac{u_{k+1} - u_k}{\Delta x}$$

$$\Phi_k^- = \frac{u_k - u_{k-1}}{\Delta x}$$

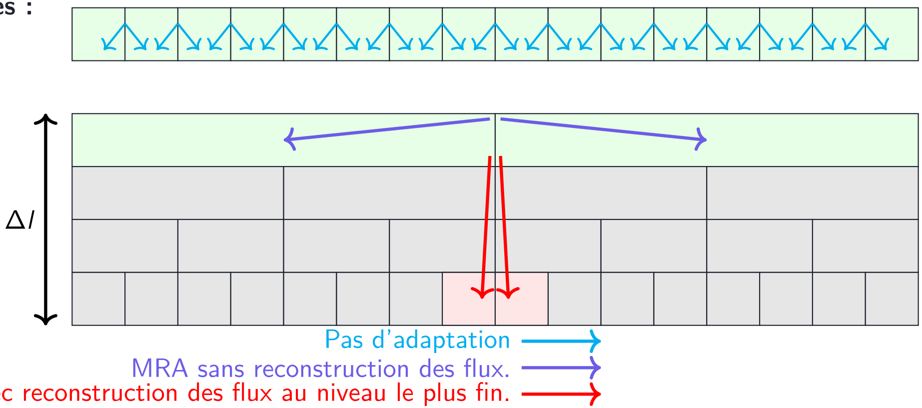


Prédicteur polynomial à trois points.

Flux numériques :

$$\Phi_k^+ = \frac{u_{k+1} - u_k}{\Delta x}$$

$$\Phi_k^- = \frac{u_k - u_{k-1}}{\Delta x}$$

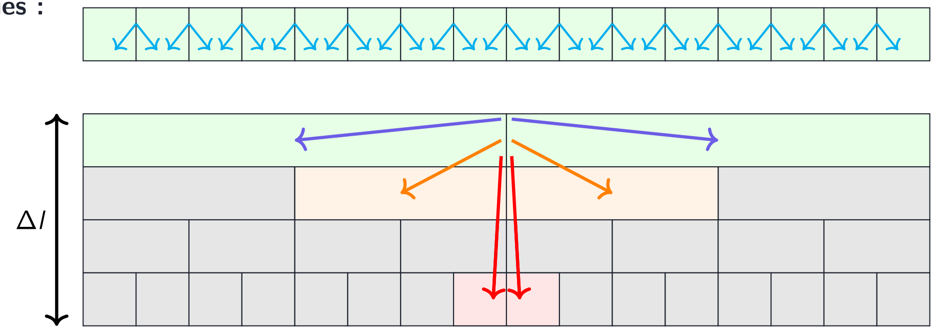


Prédicteur polynomial à trois points.

Flux numériques :

$$\Phi_k^+ = \frac{u_{k+1} - u_k}{\Delta x}$$

$$\Phi_k^- = \frac{u_k - u_{k-1}}{\Delta x}$$



Pas d'adaptation

MRA sans reconstruction des flux.

MRA avec reconstruction des flux au niveau le plus fin.

MRA avec reconstruction des flux au niveau le plus proche.

Méthode d'obtention des équations équivalentes : Automatisation via SymPy

Étape 1
Développement de Taylor
$u_{k+\delta_x}^{n+\delta_t} \leftrightarrow u(x+\delta_x\,\Delta x,\ t+\delta_t\,\Delta t)$
Développer en série de Taylor autour de (x,t).

→

Étape 2
Cauchy-Kovalevskaya
Remplacer ∂_t^k par ∂_{xx}^p via l'EDP :
$$\partial_t u = D\,\partial_{xx} u$$
$$\Rightarrow\ \partial_t^k u = D^k\,\partial_{xx}^{2k} u.$$

→

Étape 3
Relation $\Delta t \leftrightarrow \Delta x$
Introduire $\lambda = \dfrac{D\,\Delta t}{\Delta x^2}$
(Von Neumann).

Contribution 2 | Équations Équivalentes, diffusion et MRA
Méthode d'obtention des équations équivalentes

Méthode d'obtention des équations équivalentes : Automatisation via SymPy

Étape 1
Développement de Taylor
$u_{k+\delta_x}^{n+\delta_t} \leftrightarrow u(x+\delta_x\,\Delta x,\; t+\delta_t\,\Delta t)$
Développer en série de Taylor autour de (x,t).

$\rightarrow$

Étape 2
Cauchy-Kovalevskaya
Remplacer ∂_t^k par ∂_{xx}^p via l'EDP :
$$\begin{aligned} \partial_t u &= D\,\partial_{xx} u \\ \Rightarrow\ \partial_t^{\,k} u &= D^k\,\partial_{xx}^{2k} u. \end{aligned}$$

$\rightarrow$

Étape 3
Relation $\Delta t \leftrightarrow \Delta x$
Introduire $\lambda = \dfrac{D\,\Delta t}{\Delta x^2}$
(Von Neumann).

Multirésolution adaptative sans reconstruction des flux :
Remplacer Δx par $2^{\Delta l}\Delta x$.

Méthode d'obtention des équations équivalentes : Automatisation via SymPy

Étape 1	Étape 2	Étape 3
Développement de Taylor $u_{k+\delta_x}^{n+\delta_t} \leftrightarrow u(x+\delta_x\,\Delta x,\ t+\delta_t\,\Delta t)$ Développer en série de Taylor autour de (x,t).	**Cauchy-Kovalevskaya** Remplacer ∂_t^k par ∂_{xx}^p via l'EDP : $\partial_t u = D\,\partial_{xx} u$ $\Rightarrow \partial_t^k u = D^k\,\partial_{xx}^{2k} u.$	**Relation $\Delta t \leftrightarrow \Delta x$** Introduire $\lambda = \dfrac{D\,\Delta t}{\Delta x^2}$ (Von Neumann).

Multirésolution adaptative sans reconstruction des flux :
Remplacer Δx par $2^{\Delta l}\Delta x$.

Prise en compte de la reconstruction des flux :

- Reconstruction : $\left[u^{\bar{l}}_{2^{\Delta l}k-1}, u^{\bar{l}}_{2^{\Delta l}k}, u^{\bar{l}}_{2^{\Delta l}k+1}, u^{\bar{l}}_{2^{\Delta l}k+2}\right]^T = P^{\Delta l}\left[u^{\bar{l}-\Delta l}_{k-1}, u^{\bar{l}-\Delta l}_{k}, u^{\bar{l}}_{k+1}, u^{\bar{l}-\Delta l}_{k+2}\right]^T$
- Taille cellule : $2^{\Delta l}\Delta x$, Pas approximation gradient Δx .

Δl écart de niveau - $D > 0$ coefficient de diffusion - Δx pas spatial de la grille fine - Δt pas temporel

Sans multirésolution adaptative :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \Delta x^2 \frac{D}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \Delta t^2 \frac{D^3}{6}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} - \Delta t^3 \frac{D^4}{24}\frac{\partial^8 u}{\partial x^8} + \mathcal{O}(\Delta x^4, \Delta t^4). \tag{10}$$

Δl écart de niveau - $D > 0$ coefficient de diffusion - Δx pas spatial de la grille fine - Δt pas temporel

Sans multirésolution adaptative :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \Delta x^2 \frac{D}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \Delta t^2 \frac{D^3}{6}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} - \Delta t^3 \frac{D^4}{24}\frac{\partial^8 u}{\partial x^8} + \mathcal{O}(\Delta x^4, \Delta t^4). \tag{10}$$

Avec multirésolution adaptative - sans reconstruction des flux :

$$\frac{\partial}{\partial t} u = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (2^{\Delta l}\Delta x)^2 \frac{D}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \Delta t^2 \frac{D^3}{6}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} - \Delta t^3 \frac{D^4}{24}\frac{\partial^8 u}{\partial x^8} + \mathcal{O}(\Delta x^4, \Delta t^4). \tag{11}$$

Δl écart de niveau - $D > 0$ coefficient de diffusion - Δx pas spatial de la grille fine - Δt pas temporel

Sans multirésolution adaptative :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \Delta x^2 \frac{D}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \Delta t^2 \frac{D^3}{6}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} - \Delta t^3 \frac{D^4}{24}\frac{\partial^8 u}{\partial x^8} + \mathcal{O}(\Delta x^4, \Delta t^4). \tag{10}$$

Avec multirésolution adaptative - sans reconstruction des flux :

$$\frac{\partial}{\partial t}u = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (2^{\Delta l}\Delta x)^2 \frac{D}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \Delta t^2 \frac{D^3}{6}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} - \Delta t^3 \frac{D^4}{24}\frac{\partial^8 u}{\partial x^8} + \mathcal{O}(\Delta x^4, \Delta t^4). \tag{11}$$

Avec multirésolution adaptative - avec reconstruction des flux :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \Delta t \frac{D^2}{2}\left(2^{2\Delta l} - 1\right)\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \Delta t^2 \frac{D^3}{6}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} - \Delta t^3 \frac{D^4}{24}\frac{\partial^8 u}{\partial x^8} + \Delta x^2 \frac{2^{2\Delta l}D}{12}(1 - 3\Delta l)\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \mathcal{O}(\Delta x^4, \Delta t^4). \tag{12}$$

Δl écart de niveau - $D > 0$ coefficient de diffusion - Δx pas spatial de la grille fine - $\lambda = D \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$ $\mathrm{c}^{\mathrm{ste}}$ Von Neumann

Sans multirésolution adaptative :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \Delta x^2 \frac{D}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \lambda^2 \Delta x^4 \frac{D}{6} \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} - \lambda^3 \Delta x^6 \frac{D}{24} \frac{\partial^8 u}{\partial x^8} + \mathcal{O}(\Delta x^7). \tag{13}$$

Δl écart de niveau - $D > 0$ coefficient de diffusion - Δx pas spatial de la grille fine - $\lambda = D\frac{\Delta t}{\Delta x^2}$ $\mathrm{c^{ste}}$ Von Neumann

Sans multirésolution adaptative :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \Delta x^2 \frac{D}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \lambda^2 \Delta x^4 \frac{D}{6}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} - \lambda^3 \Delta x^6 \frac{D}{24}\frac{\partial^8 u}{\partial x^8} + \mathcal{O}(\Delta x^7). \tag{13}$$

Avec multirésolution adaptative - sans reconstruction des flux :

$$\frac{\partial}{\partial t} u = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (2^{\Delta l}\Delta x)^2 \frac{D}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \lambda^2 \Delta x^4 \frac{D}{6}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} - \lambda^3 \Delta x^6 \frac{D}{24}\frac{\partial^8 u}{\partial x^8} + \mathcal{O}(\Delta x^7) \tag{14}$$

Δl écart de niveau - $D > 0$ coefficient de diffusion - Δx pas spatial de la grille fine - $\lambda = D\frac{\Delta t}{\Delta x^2}$ $\mathrm{c}^{\mathrm{ste}}$ Von Neumann

Sans multirésolution adaptative :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \Delta x^2 \frac{D}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \lambda^2 \Delta x^4 \frac{D}{6}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} - \lambda^3 \Delta x^6 \frac{D}{24}\frac{\partial^8 u}{\partial x^8} + \mathcal{O}(\Delta x^7). \tag{13}$$

Avec multirésolution adaptative - sans reconstruction des flux :

$$\frac{\partial}{\partial t} u = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (2^{\Delta l}\Delta x)^2 \frac{D}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \lambda^2 \Delta x^4 \frac{D}{6}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} - \lambda^3 \Delta x^6 \frac{D}{24}\frac{\partial^8 u}{\partial x^8} + \mathcal{O}(\Delta x^7) \tag{14}$$

Avec multirésolution adaptative - avec reconstruction des flux :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = + D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \Delta x^2 D\left(\frac{\lambda}{2}(2^{2\Delta l} - 1) + \frac{2^{2\Delta l}}{12}(1 - 3\Delta l)\right)\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \Delta x^4 \frac{D\lambda^2 \frac{\partial^6 u}{\partial x^6}}{6} - \Delta x^6 \frac{D\lambda^3 \frac{\partial^8 u}{\partial x^8}}{24} + \mathcal{O}(\Delta x^7). \tag{15}$$

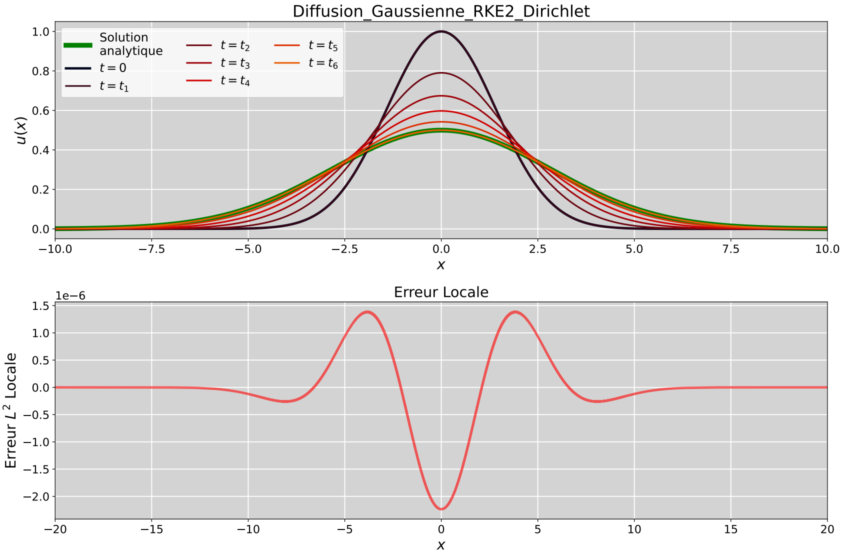
Apprentissage personnel :

- Calcul formel grâce à la libraire Sympy.
- Développement de la compréhension de l'algorithme d'adaptation.
- Usage des *équations équivalentes* comme puissant outil d'analyse, dans la continuité de l'équipe hpc@maths [6, 2].

Résultats

- **Développement d'équations équivalente** pour un schéma diffusif avec plusieurs types d'adaptation permettant une mise en lumière de l'erreur pour chaque contexte.
  (sans MRA, MRA sans reconstruction des flux et MRA avec reconstruction des flux)
- **La reconstruction semble ajouter plus de termes d'erreurs**
  + potentiellement perte d'ordre (à confirmer).

Plan


Diffusion_Gaussienne_RKE2_Dirichlet
Solution analytique
$t = 0$
$t = t_1$
$t = t_2$
$t = t_3$
$t = t_4$
$t = t_5$
$t = t_6$
$u(x)$
x
Erreur Locale
1e−6
Erreur L^2 Locale
x

- Niveaux de 12 à 6 - $\varepsilon = 10^{-5}$.
- Comparaison à la solution analytique.

SAMURAI
Structured Adaptive mesh and MUlti-Resolution based on Algebra of Intervals

- Niveaux de 12 à 6 - $\varepsilon = 10^{-5}$.
- Comparaison à la solution analytique.

Erreur selon la méthode d'adaptation

Schéma n^o	Niveau d'évaluation des flux	Erreur L^2
I	$\emptyset$ MRA	2×10^{-5}
II	Courant	1×10^{-4}
III	Plus fin l^{max}	3×10^{-4}
IV	Inférieur direct $(l+1)$	2×10^{-4}

- Niveaux de 12 à 6 - $\varepsilon = 10^{-5}$.
- Comparaison à la solution analytique.

Erreur selon la méthode d'adaptation

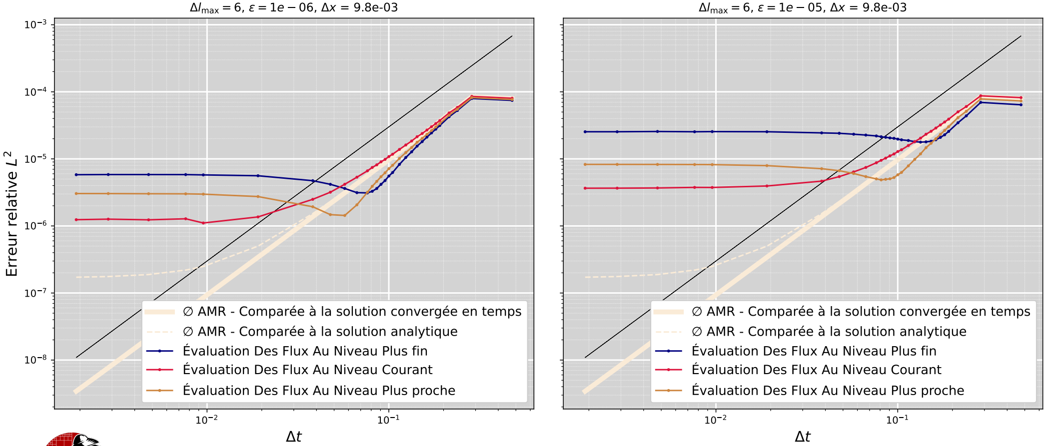
Schéma n^o	Niveau d'évaluation des flux	Erreur L^2
I	$\emptyset$ MRA	2×10^{-5}
II	Courant	1×10^{-4}
III	Plus fin l^{max}	3×10^{-4}
IV	Inférieur direct $(l+1)$	2×10^{-4}

- On retrouve que reconstruire $\to$ problèmes.
- Forte contrainte de stabilité $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x^2} < \frac{1}{2}$.

SAMURAI
Structured Adaptive mesh and MUlti-Resolution based on Algebra of Intervals

Etude de stabilité

Erreur par rapport à une solution convergée en temps selon la méthode d'évaluation des flux

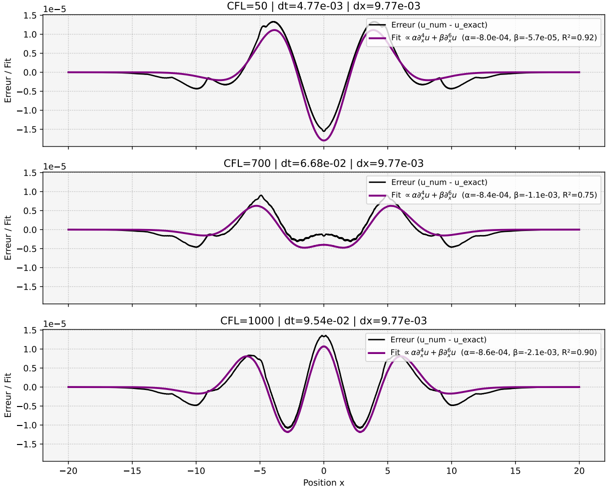


SAMURAI
Structured Adaptive mesh and MUlti-Resolution based on Algebra of Intervals

+ Ponio

Visualisation de la distribution des erreurs.

Correspondance Erreur Num. $\propto \alpha\partial_x^4 u + \beta\partial_x^6 u$



Chute prématurée de l'erreur :
Les dérivées ∂_x^4 et ∂_x^6 ont des poids différents dans lerreur selon la constante de Von Neumann λ. Leurs profils se "compensent" quand elles ont un poids comparable.

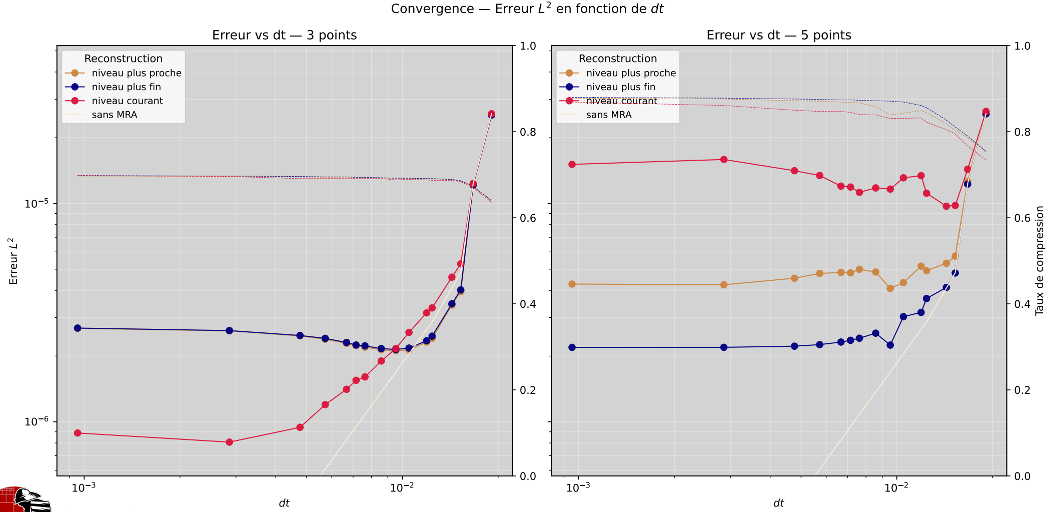
Moins bonne performances quand l'erreur temporelle est faible
Plus de termes d'erreur dans la contribution dominante de l'erreur :

Schéma nº	Évaluation des flux	Constante pondérant l'erreur en $\Delta x^2\,\partial_x^4 u$ (dominante quand λ est petite)
I	$\varnothing$ AMR	$\frac{D}{12}$
II	Sans reconstruction	$2^{\Delta l}\,\frac{D}{12}$
III	Avec reconstruction	$D\left(\frac{\lambda}{2}\left(2^{2\Delta l}-1\right)+\frac{2^{2\Delta l}}{12}\left(1-3\Delta l\right)\right)$

- La reconstruction semble ici problème car : prédicteur polynomial précis à l'ordre 3, permet une évaluation des gradients à l'ordre 2. Or le schéma est d'ordre 2, donc erreur de prédiction du même ordre et s'accumule.

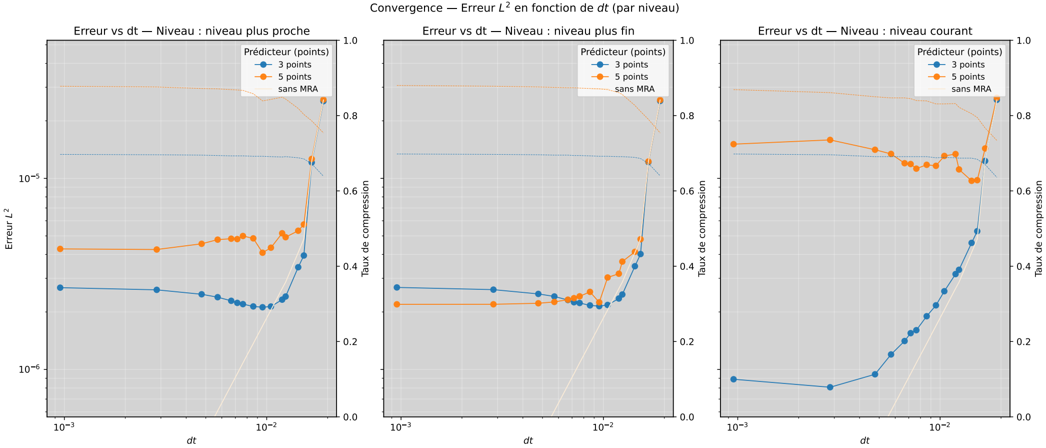
Plan

Complément
Essais numériques - prédicteur à 5 points



SAMURAI Structured Adaptive mesh and MUlti-Resolution based on Algebra of Intervals + Ponio

Complément
Essais numériques - prédicteur à 5 points



SAMURAI Structured Adaptive mesh and MUlti-Resolution based on Algebra of Intervals + Ponio

Conclusion

Références I

Uri M. Ascher, Steven J. Ruuth, and Raymond J. Spiteri.
Implicit-explicit runge-kutta methods for time-dependent partial differential equations.
Applied Numerical Mathematics, 25(2) :151–167, 1997.
Special Issue on Time Integration.

Belloti, Gouarin, J. Massot, M. Massot, Matalon, Séries, and Tenaud.
Modified equation and error analyses on adaptative meshes for the resolution of evolutionary pdes with finite volume schemes.
2025.
Preprint.

E. Hairer.
Order conditions for numerical methods for partitioned ordinary differential equations.
Numerische Mathematik, 36(4) :431–445, 1981.

Christopher A. Kennedy and Mark H. Carpenter.
Additive rungekutta schemes for convectiondiffusionreaction equations.
Applied Numerical Mathematics, 44(1) :139–181, 2003.

Randall J. LeVeque.
Numerical Methods for Conservation Laws.
Lectures in Mathematics ETH Zürich. Birkhäuser Verlag, Basel, 1990.

Marc Massot, Thomas Bellotti, Loïc Gouarin, Josselin Massot, Pierre Matalon, Laurent Séries, and Christian Tenaud.
Towards a new approach of mesh adaptation methods and its impact on accuracy for the simulation of stiff pdes.
Technical report / seminar presentation, NASA Ames Research Center, Advanced Modeling & Simulation Seminar Series, July 2025.
Version accessible en ligne.

Merci !