

Stratégies modernes pour l'intégration des équations d'advection-réaction-diffusion

(ImEx & MultiRésolution Adaptative)



Alexandre EDELINE
ENSTA Paris
Laboratoire : CMAP
Tuteurs laboratoire : Marc MASSOT, Christian TENAUD
Tuteur ENSTA : Patrick CIARLET

Avril - Octobre 2025



Plan

Les équations d'advection-diffusion-réaction (ADR)

Problématique

2^{ème} contribution

3^{ème} contribution

Compléments

Annexes

Plan

Les équations d'advection-diffusion-réaction (ADR)

Problématique

2^{ème} contribution

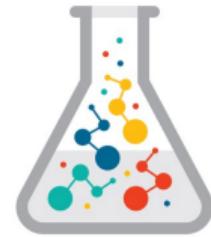
3^{ème} contribution

Compléments

Annexes

Applications Physiques

Équations d'ADR



Applications Physiques

Équations d'ADR



$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) = \underbrace{Au}_{c\partial_x u} + \underbrace{Du}_{\partial_x(\eta\partial_x u)} + \underbrace{R(u)}_{\text{Non-lin.}}, \\ u(x, 0) = u_0. \end{cases} \quad (1)$$

Des solutions multi-échelles

- ▶ plusieurs échelles de temps :
 - ▶ chimie complexe $\tau \sim 50\text{ns}$,
 - ▶ advection Mach2 sur 50cm : $\tau \sim 10\text{ms}$.
- ▶ plusieurs échelles d'espace

Des solutions multi-échelles

- ▶ plusieurs échelles de temps :
 - ▶ chimie complexe $\tau \sim 50\text{ns}$,
 - ▶ advection Mach2 sur 50cm : $\tau \sim 10\text{ms}$.
 - ▶ plusieurs échelles d'espace
-

L'intégration conjointe des opérateurs

Les trois opérateurs ont des propriétés très différentes :

- ▶ Advection : Peu raide, raisonnable (spectre autour de $i\mathbb{R}$).
 - ▶ Diffusion : Moyennement raide, spectre autour de \mathbb{R}^- .
 - ▶ Réaction : Très raide, hautement non-linéaire, local.
- ⇒ les approches monolithiques peinent.

Stratégies de simulation

Équations d'ADR

Stratégie n°1 : Différencier le traitement sur chaque opérateur

Ne pas faire un schéma monolithique.

- ▶ Séparation d'opérateurs (*splitting*) : $e^{\Delta t(A+B)} = e^{\frac{\Delta t}{2}A} \circ e^{\Delta tB} \circ e^{\frac{\Delta t}{2}A} + \mathcal{O}(\Delta t^2)$
- ▶ Méthodes ImEx (Additive Runge et Kutta) [1]

Stratégies de simulation

Équations d'ADR

Stratégie n°1 : Différencier le traitement sur chaque opérateur

Ne pas faire un schéma monolithique.

- ▶ Séparation d'opérateurs (*splitting*) : $e^{\Delta t(A+B)} = e^{\frac{\Delta t}{2}A} \circ e^{\Delta tB} \circ e^{\frac{\Delta t}{2}A} + \mathcal{O}(\Delta t^2)$
- ▶ Méthodes ImEx (Additive Runge et Kutta) [1]

Stratégie n°2 : Adaptation en espace par MRA [5, 3]

Stratégies de simulation

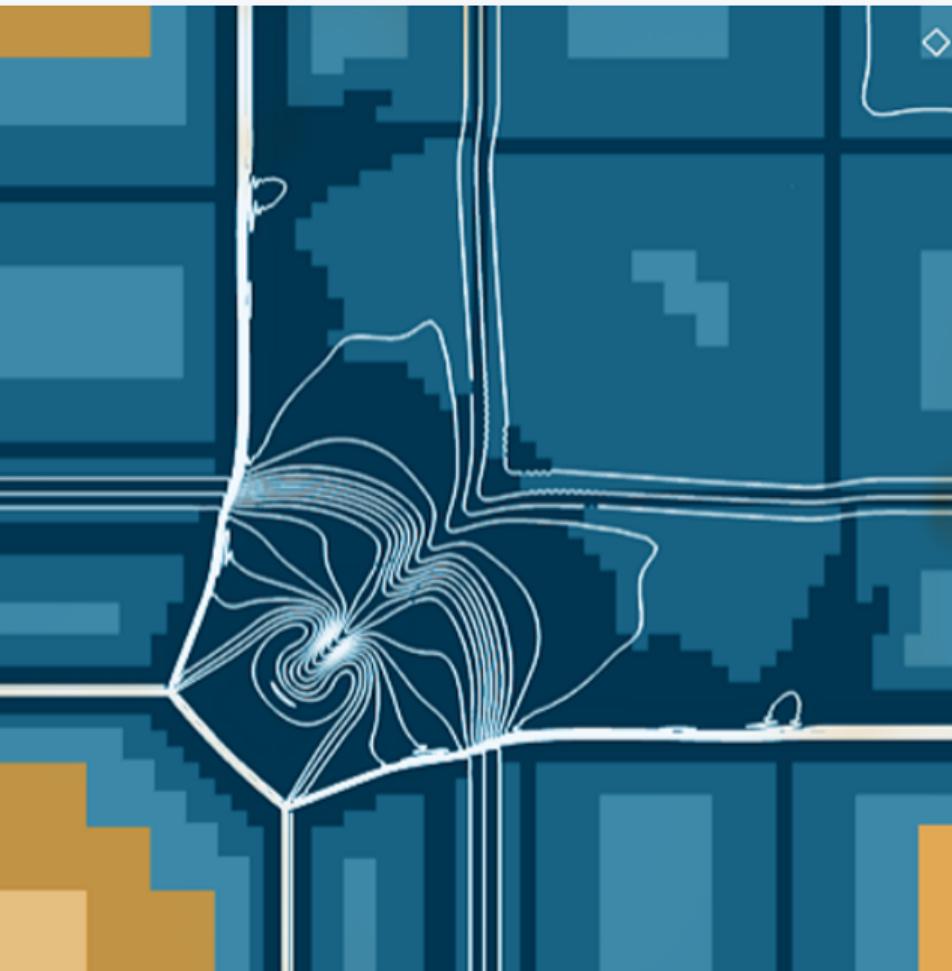
Équations d'ADR

Stratégie n°1 : Direct

Ne pas faire un schéma à $\Delta t = \Delta x^2$

- ▶ Séparation des échelles
- ▶ Méthodes IMEX

Stratégie n°2 : ADR



Stratégies de simulation

Équations d'ADR

Stratégie n°1 : Différencier le traitement sur chaque opérateur

Ne pas faire un schéma monolithique.

- ▶ Séparation d'opérateurs (*splitting*) : $e^{\Delta t(A+B)} = e^{\frac{\Delta t}{2}A} \circ e^{\Delta tB} \circ e^{\frac{\Delta t}{2}A} + \mathcal{O}(\Delta t^2)$
- ▶ Méthodes ImEx (Additive Runge et Kutta) [1]

Stratégie n°2 : Adaptation en espace par MRA [5, 3]

- ▶ Des grilles de *résolution multiples*,
- ▶ Deux opérateurs de *projection/reconstruction*,
- ▶ Représentation de la solution comme une suite de *détails*,
- ▶ Une stratégie d'*adaptation* : seuil de compression ε et seuil local $\varepsilon_j = 2^{-j}\varepsilon$

Niveau de résolution $j = 1$

u_0^1				u_1^1			
u_0^2		u_1^2		u_2^2		u_3^2	
u_0^3	u_1^3	u_2^3	u_3^3	u_4^3	u_5^3	u_6^3	u_7^3

Niveau de résolution $j = 2$

Niveau de résolution $j = 3$

Stratégies de simulation

Équations d'ADR

Stratégie n°1 : Différencier le traitement sur chaque opérateur

Ne pas faire un schéma monolithique.

- ▶ Séparation d'opérateurs (*splitting*) : $e^{\Delta t(A+B)} = e^{\frac{\Delta t}{2}A} \circ e^{\Delta tB} \circ e^{\frac{\Delta t}{2}A} + \mathcal{O}(\Delta t^2)$
- ▶ Méthodes ImEx (Additive Runge et Kutta) [1]

Stratégie n°2 : Adaptation en espace par MRA [5, 3]

- ▶ Des grilles de *Résolution multiples*,
- ▶ Deux opérateurs de *projection/reconstruction*,
- ▶ Représentation de la solution comme une suite de *détails*,
- ▶ Une stratégie d'*adaptation* : seuil de compression ε et seuil local $\varepsilon_j = 2^{-j}\varepsilon$

Niveau de résolution $j = 1$

u_0^1				u_1^1			
u_0^2		u_1^2		u_2^2		u_3^2	
u_0^3	u_1^3	u_2^3	u_3^3	u_4^3	u_5^3	u_6^3	u_7^3

Niveau de résolution $j = 2$

Niveau de résolution $j = 3$

Projection : agrégation fine \rightarrow grossier

Stratégies de simulation

Équations d'ADR

Stratégie n°1 : Différencier le traitement sur chaque opérateur

Ne pas faire un schéma monolithique.

- ▶ Séparation d'opérateurs (*splitting*) : $e^{\Delta t(A+B)} = e^{\frac{\Delta t}{2}A} \circ e^{\Delta tB} \circ e^{\frac{\Delta t}{2}A} + \mathcal{O}(\Delta t^2)$
- ▶ Méthodes ImEx (Additive Runge et Kutta) [1]

Stratégie n°2 : Adaptation en espace par MRA [5, 3]

- ▶ Des grilles de *résolution multiples*,
- ▶ Deux opérateurs de *projection/reconstruction*,
- ▶ Représentation de la solution comme une suite de *détails*,
- ▶ Une stratégie d'*adaptation* : seuil de compression ε et seuil local $\varepsilon_j = 2^{-j}\varepsilon$

Niveau de résolution $j = 1$

u_0^1				u_1^1			
u_0^2		u_1^2		u_2^2		u_3^2	
u_0^3		u_1^3		u_2^3		u_3^3	
u_0^3	u_1^3	u_2^3	u_3^3	u_4^3	u_5^3	u_6^3	u_7^3

Niveau de résolution $j = 2$

Niveau de résolution $j = 3$

Prédiction : interpolation grossier \rightarrow fin

Stratégies de simulation

Équations d'ADR

Stratégie n°1 : Différencier le traitement sur chaque opérateur

Ne pas faire un schéma monolithique.

- ▶ Séparation d'opérateurs (*splitting*) : $e^{\Delta t(A+B)} = e^{\frac{\Delta t}{2}A} \circ e^{\Delta tB} \circ e^{\frac{\Delta t}{2}A} + \mathcal{O}(\Delta t^2)$
- ▶ Méthodes ImEx (Additive Runge et Kutta) [1]

Stratégie n°2 : Adaptation en espace par MRA [5, 3]

- ▶ Des grilles de *Résolution multiples*,
- ▶ Deux opérateurs de *projection/reconstruction*, **Comment adapter ?**
- ▶ Représentation de la solution comme une suite de *détails*,
- ▶ Une stratégie d'*adaptation* : seuil de compression ε et seuil local $\varepsilon_j = 2^{-j}\varepsilon$

Niveau de résolution $j = 1$

u_0^1				u_1^1			
u_0^2		u_1^2		u_2^2		u_3^2	
u_0^3	u_1^3	u_2^3	u_3^3	u_4^3	u_5^3	u_6^3	u_7^3

Niveau de résolution $j = 2$

Niveau de résolution $j = 3$

Stratégies de simulation

Équations d'ADR

Stratégie n°1 : Différencier le traitement sur chaque opérateur

Ne pas faire un schéma monolithique.

- ▶ Séparation d'opérateurs (*splitting*) : $e^{\Delta t(A+B)} = e^{\frac{\Delta t}{2}A} \circ e^{\Delta tB} \circ e^{\frac{\Delta t}{2}A} + \mathcal{O}(\Delta t^2)$
- ▶ Méthodes ImEx (Additive Runge et Kutta) [1]

Stratégie n°2 : Adaptation en espace par MRA [5, 3]

- ▶ Des grilles de *Résolution multiples*,
- ▶ Deux opérateurs de *projection/reconstruction*, **Comment adapter ?**
- ▶ Représentation de la solution comme une suite de *détails*,
- ▶ Une stratégie d'*adaptation* : seuil de compression ε et seuil local $\varepsilon_j = 2^{-j}\varepsilon$

Où adapter ?

- ▶ Baisse de la résolution : $\rightarrow d_k^{j'} \text{ si } d_k^j < \varepsilon_j$
- ▶ Augmentation de la résolution : $d_k^{j-1} > 2\varepsilon_{j-1}$.

Niveau de résolution $j = 1$

u_0^1				u_1^1			
u_0^2		u_1^2		u_2^2		u_3^2	
u_0^3	u_1^3	u_2^3	u_3^3	u_4^3	u_5^3	u_6^3	u_7^3

Niveau de résolution $j = 2$

Niveau de résolution $j = 3$

Plan

Les équations d'advection-diffusion-réaction (ADR)

Problématique

2^{ème} contribution

3^{ème} contribution

Compléments

Annexes

Révéler et comprendre les **interactions**
entre
l'adaptation spatiale par multirésolution adaptative
et
les schémas numériques
utilisés pour simuler les équations d'advection-diffusion-réaction.

Présentation des contributions

Contribution n°1 - Comparaison ImEx-splitting :

- ▶ Équation de réaction-diffusion (*Nagumo spatiale 1D*).
- ▶ Étude de stabilité.
- ▶ Convergence avec et sans adaptation spatiale.

Présentation des contributions

Contribution n°1 - Comparaison ImEx-splitting :

- ▶ Équation de réaction-diffusion (*Nagumo spatiale 1D*).
 - ▶ Étude de stabilité.
 - ▶ Convergence avec et sans adaptation spatiale.
-

Contribution n°2 - Calcul des équations modifiées de schémas adaptés :

- ▶ Diffusion pure, linéaire, 1D.
- ▶ Méthode des lignes : *volume finis + Runge Kutta explicite*.
- ▶ Différents schémas de *multirésolution*.

Présentation des contributions

Contribution n°1 - Comparaison ImEx-splitting :

- ▶ Équation de réaction-diffusion (*Nagumo spatiale 1D*).
 - ▶ Étude de stabilité.
 - ▶ Convergence avec et sans adaptation spatiale.
-

Contribution n°2 - Calcul des équations modifiées de schémas adaptés :

- ▶ Diffusion pure, linéaire, 1D.
 - ▶ Méthode des lignes : *volume finis + Runge Kutta explicite*.
 - ▶ Différents schémas de *multirésolution*.
-

Contribution n°3 - Expérience numérique :

- ▶ Comparaison de la convergence selon le schéma de *multirésolution*.
- ▶ Extension : méthodes stabilisées et étude de stabilité.
- ▶ Mise en relation avec les équations modifiées.

Présentation des contributions

Contribution n°1 - Comparaison ImEx-splitting :

- ▶ Équation de réaction-diffusion (*Nagumo spatiale 1D*).
 - ▶ Étude de stabilité.
 - ▶ Convergence avec et sans adaptation spatiale.
-

Contribution n°2 - Calcul des équations modifiées de schémas adaptés :

- ▶ Diffusion pure, linéaire, 1D.
 - ▶ Méthode des lignes : *volume finis + Runge Kutta explicite*.
 - ▶ Différents schémas de *multirésolution*.
-

Contribution n°3 - Expérience numérique :

- ▶ Comparaison de la convergence selon le schéma de *multirésolution*.
 - ▶ Extension : méthodes stabilisées et étude de stabilité.
 - ▶ Mise en relation avec les équations modifiées.
-

Complément :

- ▶ Mise à l'épreuve d'une conjecture issue de la *contribution n°3*.

Plan

Les équations d'advection-diffusion-réaction (ADR)

Problématique

2^{ème} contribution

3^{ème} contribution

Compléments

Annexes

Présentation générale

Contribution 2 | Équations Modifiées, diffusion et MRA

Équation cible : $\partial_t u = \partial_x (D \partial_x u), \quad D > 0.$ (2)

Schéma numérique

Méthode des lignes : Volumes finis ordre deux + Runge Kutta explicite d'ordre deux.

- o **Semi-discrétisation spatiale :** Sur un maillage 1D constitué de cellules C_j de tailles Δx :

$$\forall j, \quad \partial_t \int_{C_j} u(x, t) dx = \partial_x \int_{C_j} \partial_x u(x, t) dx. \quad (3)$$

$$\forall j, \quad \frac{d}{dt} U_j(t) = \frac{D}{\Delta x} [\partial_x u(x, t)]_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \quad (4)$$

$$\forall j, \quad \frac{d}{dt} U_j(t) = \underbrace{\frac{D}{\Delta x} \left[\frac{U_{j+1}(t) - U_j(t)}{\Delta x} - \frac{U_j(t) - U_{j-1}(t)}{\Delta x} \right]}_{\text{noté : } \mathcal{D}} + \mathcal{O}(\Delta x^2) \quad (5)$$

- o **Intégration en temps :** Pour un pas de temps Δt :

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t \mathcal{D} u^n + \frac{\Delta t^2}{2} \mathcal{D}^2 u^n \rightarrow \text{stabilité : } \lambda = \frac{D \Delta t}{\Delta x^2} < \frac{1}{2}. \quad (6)$$

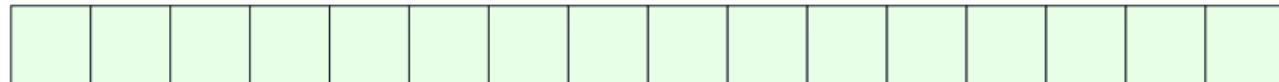
Les deux approches de MRA

Contribution 2 | Équations Modifiées, diffusion et MRA

Flux numériques :

$$\Phi_k^+ = \frac{u_{k+1} - u_k}{\Delta x}$$

$$\Phi_k^- = \frac{u_k - u_{k-1}}{\Delta x}$$



Les deux approches de MRA

Contribution 2 | Équations Modifiées, diffusion et MRA

Flux numériques :

$$\Phi_k^+ = \frac{u_{k+1} - u_k}{\Delta x}$$

$$\Phi_k^- = \frac{u_k - u_{k-1}}{\Delta x}$$



Pas d'adaptation →

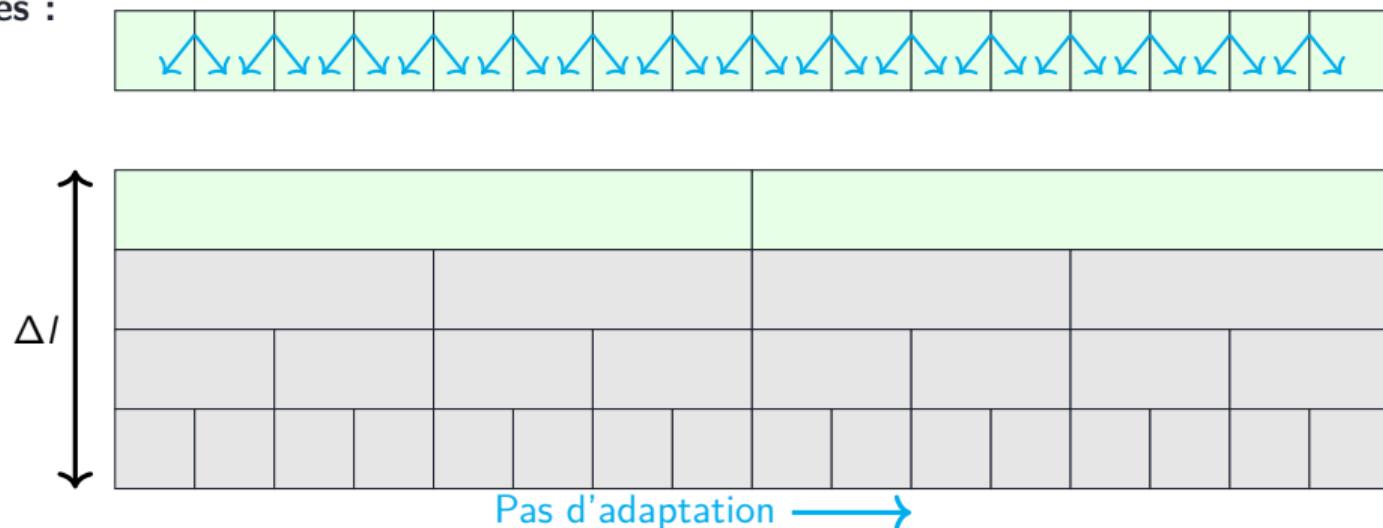
Les deux approches de MRA

Contribution 2 | Équations Modifiées, diffusion et MRA

Flux numériques :

$$\Phi_k^+ = \frac{u_{k+1} - u_k}{\Delta x}$$

$$\Phi_k^- = \frac{u_k - u_{k-1}}{\Delta x}$$



Les deux approches de MRA

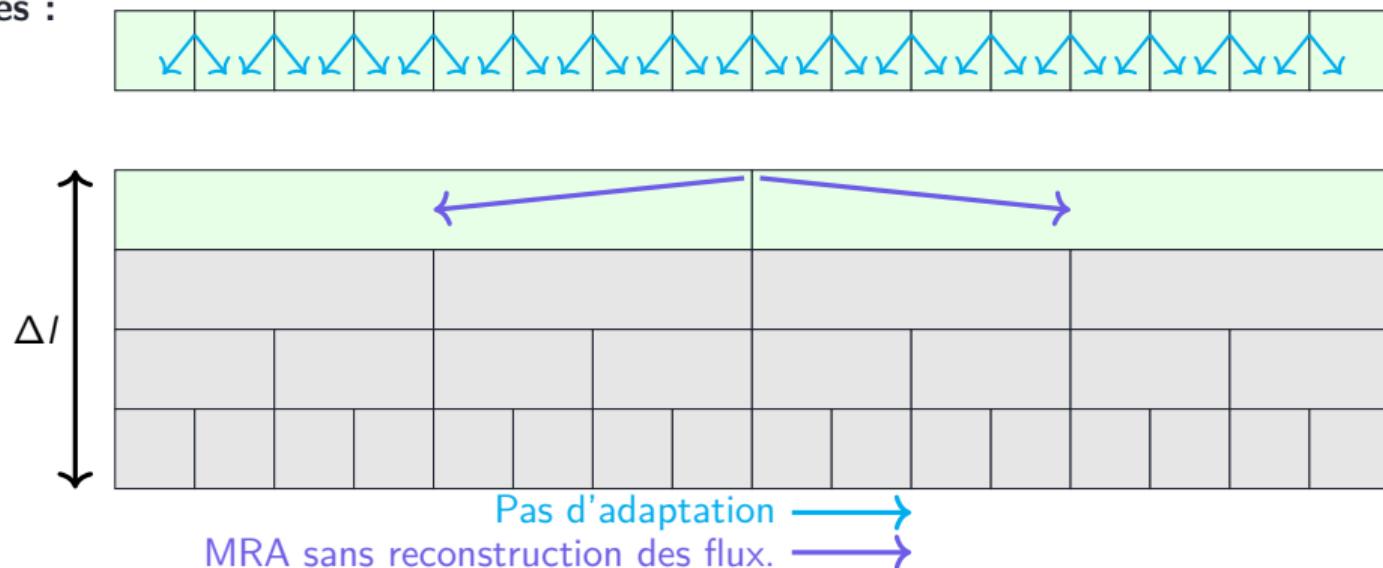
Contribution 2 | Équations Modifiées, diffusion et MRA

Prédicteur polynomial à trois points.

Flux numériques :

$$\Phi_k^+ = \frac{u_{k+1} - u_k}{\Delta x}$$

$$\Phi_k^- = \frac{u_k - u_{k-1}}{\Delta x}$$



Les deux approches de MRA

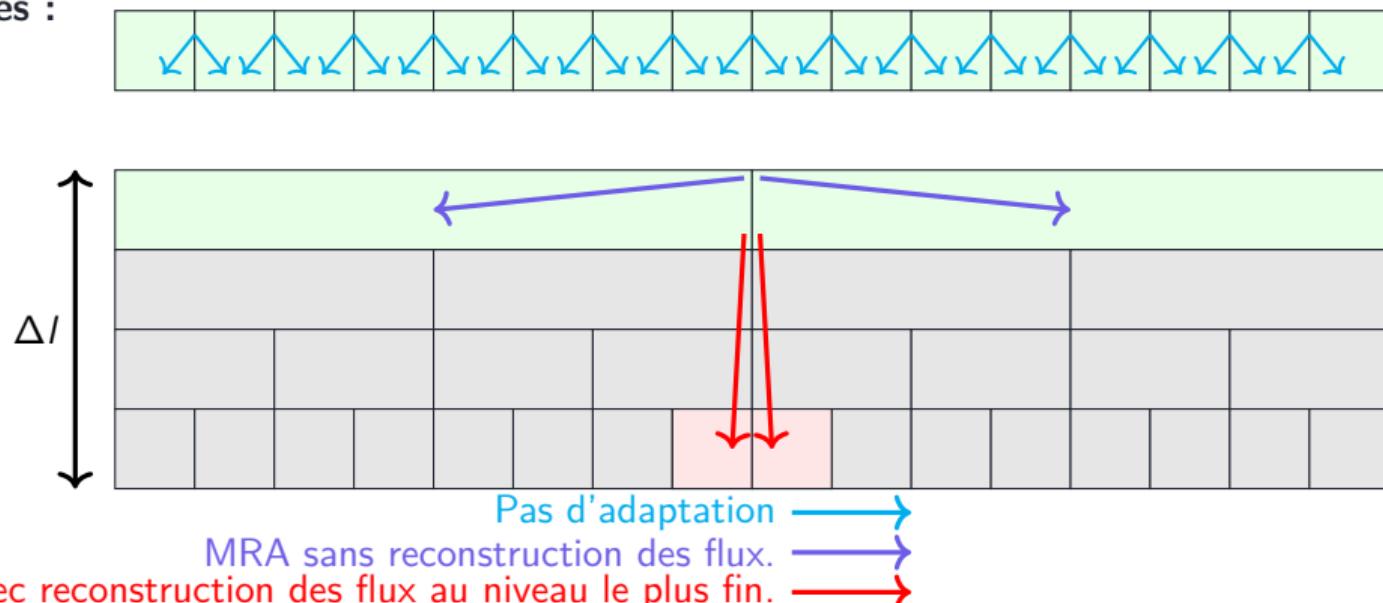
Contribution 2 | Équations Modifiées, diffusion et MRA

Prédicteur polynomial à trois points.

Flux numériques :

$$\Phi_k^+ = \frac{u_{k+1} - u_k}{\Delta x}$$

$$\Phi_k^- = \frac{u_k - u_{k-1}}{\Delta x}$$



MRA avec reconstruction des flux au niveau le plus fin.

Les deux approches de MRA

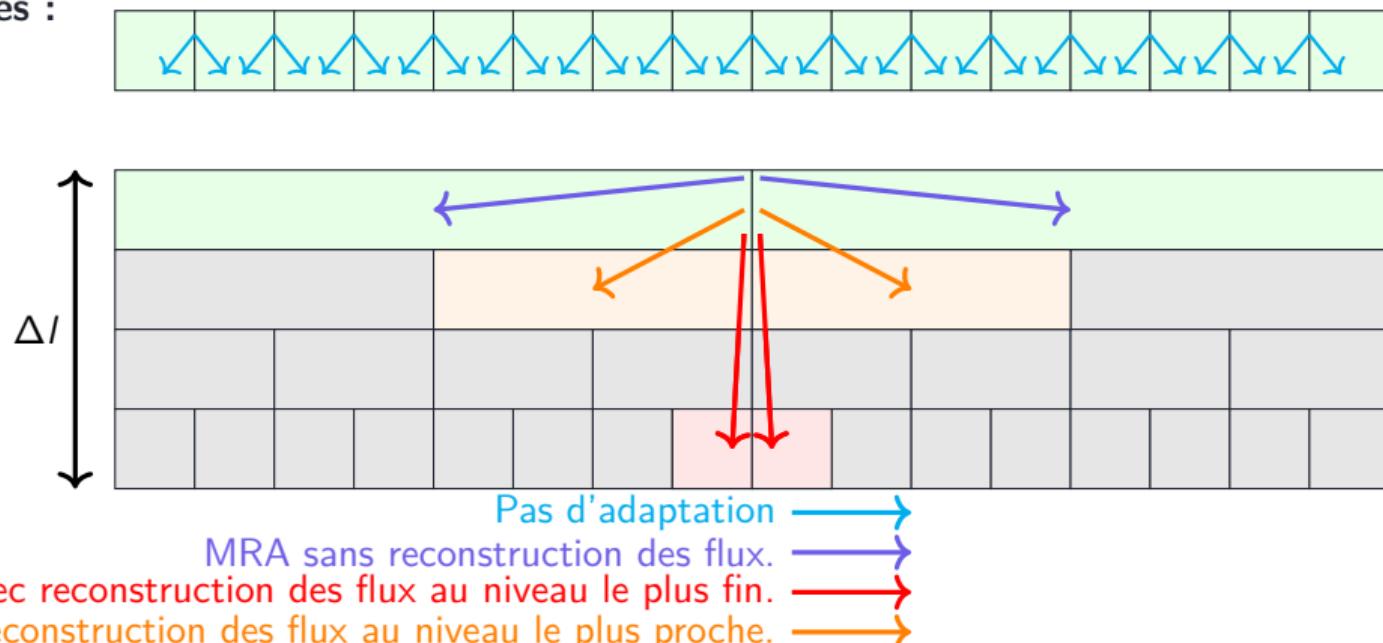
Contribution 2 | Équations Modifiées, diffusion et MRA

Prédicteur polynomial à trois points.

Flux numériques :

$$\Phi_k^+ = \frac{u_{k+1} - u_k}{\Delta x}$$

$$\Phi_k^- = \frac{u_k - u_{k-1}}{\Delta x}$$



MRA sans reconstruction des flux.
MRA avec reconstruction des flux au niveau le plus fin.
MRA avec reconstruction des flux au niveau le plus proche.

Méthode d'obtention des équations modifiées

Contribution 2 | Équations Modifiées, diffusion et MRA

Méthode d'obtention des équations modifiées : Automatisation via



SymPy

Étape 1

Développement de Taylor

$$u_{k+\delta_x}^{n+\delta_t} \leftrightarrow u(x + \delta_x \Delta x, t + \delta_t \Delta t)$$

Développer en série de Taylor autour de (x, t) .

Étape 2

Cauchy-Kovalevskaya

Remplacer ∂_t^k par ∂_{xx}^p via l'EDP :

$$\begin{aligned}\partial_t u &= D \partial_{xx} u \\ \Rightarrow \partial_t^k u &= D^k \partial_{xx}^{2k} u.\end{aligned}$$

Étape 3

Relation $\Delta t \leftrightarrow \frac{\Delta x}{D \Delta t}$

Introduire $\lambda = \frac{D \Delta t}{\Delta x^2}$ (Von Neumann).

Méthode d'obtention des équations modifiées

Contribution 2 | Équations Modifiées, diffusion et MRA

Méthode d'obtention des équations modifiées : Automatisation via



SymPy

Étape 1

Développement de Taylor

$$u_{k+\delta_x}^{n+\delta_t} \leftrightarrow u(x + \delta_x \Delta x, t + \delta_t \Delta t)$$

Développer en série de Taylor autour de (x, t) .

Étape 2

Cauchy-Kovalevskaya

Remplacer ∂_t^k par ∂_{xx}^p via l'EDP :

$$\begin{aligned}\partial_t u &= D \partial_{xx} u \\ \Rightarrow \partial_t^k u &= D^k \partial_{xx}^{2k} u.\end{aligned}$$

Étape 3

Relation $\Delta t \leftrightarrow \frac{\Delta x}{D \Delta t}$

Introduire $\lambda = \frac{D \Delta t}{\Delta x^2}$ (Von Neumann).

Multirésolution adaptative sans reconstruction des flux :

Remplacer Δx par $2^{\Delta l} \Delta x$.

Méthode d'obtention des équations modifiées

Contribution 2 | Équations Modifiées, diffusion et MRA

Méthode d'obtention des équations modifiées : Automatisation via



Étape 1
Développement de Taylor
 $u_{k+\delta_x}^{n+\delta_t} \leftrightarrow u(x + \delta_x \Delta x, t + \delta_t \Delta t)$
Développer en série de Taylor autour de (x, t) .

Étape 2
Cauchy-Kovalevskaya
Remplacer ∂_t^k par ∂_{xx}^k via l'EDP :
$$\frac{\partial_t u}{\partial_t^k u} = \frac{D \partial_{xx} u}{D^k \partial_{xx}^{2k} u}$$

Étape 3
Relation $\Delta t \leftrightarrow \frac{\Delta x}{D \Delta t}$
Introduire $\lambda = \frac{D \Delta t}{\Delta x^2}$
(Von Neumann).

Multirésolution adaptative sans reconstruction des flux :

Remplacer Δx par $2^{\Delta I} \Delta x$.

Prise en compte de la reconstruction des flux :

- ▶ Reconstruction : $\left[u_{2^{\Delta I} k - 1}^{\bar{l}}, u_{2^{\Delta I} k}^{\bar{l}}, u_{2^{\Delta I} k + 1}^{\bar{l}}, u_{2^{\Delta I} k + 2}^{\bar{l}} \right]^T = P^{\Delta I} \left[u_{k-1}^{\bar{l}-\Delta I}, u_k^{\bar{l}-\Delta I}, u_{k+1}^{\bar{l}-\Delta I}, u_{k+2}^{\bar{l}-\Delta I} \right]^T$
- ▶ Taille cellule : $2^{\Delta I} \Delta x$, Pas approximation gradient Δx .

Résultats

Contribution 2 | Équations Modifiées, diffusion et MRA

Δl écart de niveau - $D > 0$ coefficient de diffusion - Δx pas spatial de la grille fine - Δt pas temporel

Sans multirésolution adaptative :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \Delta x^2 \frac{D}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \Delta t^2 \frac{D^3}{6} \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} - \Delta t^3 \frac{D^4}{24} \frac{\partial^8 u}{\partial x^8} + \mathcal{O}(\Delta x^4, \Delta t^4). \quad (7)$$

Résultats

Contribution 2 | Équations Modifiées, diffusion et MRA

Δl écart de niveau - $D > 0$ coefficient de diffusion - Δx pas spatial de la grille fine - Δt pas temporel

Sans multirésolution adaptative :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \Delta x^2 \frac{D}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \Delta t^2 \frac{D^3}{6} \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} - \Delta t^3 \frac{D^4}{24} \frac{\partial^8 u}{\partial x^8} + \mathcal{O}(\Delta x^4, \Delta t^4). \quad (7)$$

Avec multirésolution adaptative - sans reconstruction des flux :

$$\frac{\partial}{\partial t} u = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (2^{\Delta l} \Delta x)^2 \frac{D}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \Delta t^2 \frac{D^3}{6} \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} - \Delta t^3 \frac{D^4}{24} \frac{\partial^8 u}{\partial x^8} + \mathcal{O}(\Delta x^4, \Delta t^4). \quad (8)$$

Résultats

Contribution 2 | Équations Modifiées, diffusion et MRA

Δl écart de niveau - $D > 0$ coefficient de diffusion - Δx pas spatial de la grille fine - Δt pas temporel

Sans multirésolution adaptative :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \Delta x^2 \frac{D}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \Delta t^2 \frac{D^3}{6} \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} - \Delta t^3 \frac{D^4}{24} \frac{\partial^8 u}{\partial x^8} + \mathcal{O}(\Delta x^4, \Delta t^4). \quad (7)$$

Avec multirésolution adaptative - sans reconstruction des flux :

$$\frac{\partial}{\partial t} u = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (2^{\Delta l} \Delta x)^2 \frac{D}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \Delta t^2 \frac{D^3}{6} \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} - \Delta t^3 \frac{D^4}{24} \frac{\partial^8 u}{\partial x^8} + \mathcal{O}(\Delta x^4, \Delta t^4). \quad (8)$$

Avec multirésolution adaptative - avec reconstruction des flux :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \Delta t \frac{D^2}{2} \left(2^{2\Delta l} - 1 \right) \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \Delta t^2 \frac{D^3}{6} \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} - \Delta t^3 \frac{D^4}{24} \frac{\partial^8 u}{\partial x^8} + \Delta x^2 \frac{2^{2\Delta l} D}{12} (1 - 3\Delta l) \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \mathcal{O}(\Delta x^4, \Delta t^4). \quad (9)$$

Résultats

Contribution 2 | Équations Modifiées, diffusion et MRA

Δt écart de niveau - $D > 0$ coefficient de diffusion - Δx pas spatial de la grille fine - $\lambda = D \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$ c^{ste} Von Neumann

Sans multirésolution adaptative :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \Delta x^2 \frac{D}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \lambda^2 \Delta x^4 \frac{D}{6} \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} - \lambda^3 \Delta x^6 \frac{D}{24} \frac{\partial^8 u}{\partial x^8} + \mathcal{O}(\Delta x^7). \quad (10)$$

Résultats

Contribution 2 | Équations Modifiées, diffusion et MRA

Δl écart de niveau - $D > 0$ coefficient de diffusion - Δx pas spatial de la grille fine - $\lambda = D \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$ c^{ste} Von Neumann

Sans multirésolution adaptative :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \Delta x^2 \frac{D}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \lambda^2 \Delta x^4 \frac{D}{6} \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} - \lambda^3 \Delta x^6 \frac{D}{24} \frac{\partial^8 u}{\partial x^8} + \mathcal{O}(\Delta x^7). \quad (10)$$

Avec multirésolution adaptative - sans reconstruction des flux :

$$\frac{\partial}{\partial t} u = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (2^{\Delta l} \Delta x)^2 \frac{D}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \lambda^2 \Delta x^4 \frac{D}{6} \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} - \lambda^3 \Delta x^6 \frac{D}{24} \frac{\partial^8 u}{\partial x^8} + \mathcal{O}(\Delta x^7) \quad (11)$$

Résultats

Contribution 2 | Équations Modifiées, diffusion et MRA

Δl écart de niveau - $D > 0$ coefficient de diffusion - Δx pas spatial de la grille fine - $\lambda = D \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$ c^{ste} Von Neumann

Sans multirésolution adaptative :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \Delta x^2 \frac{D}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \lambda^2 \Delta x^4 \frac{D}{6} \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} - \lambda^3 \Delta x^6 \frac{D}{24} \frac{\partial^8 u}{\partial x^8} + \mathcal{O}(\Delta x^7). \quad (10)$$

Avec multirésolution adaptative - sans reconstruction des flux :

$$\frac{\partial}{\partial t} u = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (2^{\Delta l} \Delta x)^2 \frac{D}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \lambda^2 \Delta x^4 \frac{D}{6} \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} - \lambda^3 \Delta x^6 \frac{D}{24} \frac{\partial^8 u}{\partial x^8} + \mathcal{O}(\Delta x^7) \quad (11)$$

Avec multirésolution adaptative - avec reconstruction des flux :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = + D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \Delta x^2 D \left(\frac{\lambda}{2} (2^{2\Delta l} - 1) + \frac{2^{2\Delta l}}{12} (1 - 3\Delta l) \right) \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \Delta x^4 \frac{D \lambda^2 \frac{\partial^6 u}{\partial x^6}}{6} - \Delta x^6 \frac{D \lambda^3 \frac{\partial^8 u}{\partial x^8}}{24} + \mathcal{O}(\Delta x^7). \quad (12)$$

Conclusion

Contribution 2 | Équations Modifiées, diffusion et MRA

Apprentissage personnel :

- ▶ Calcul formel grâce à la librairie Sympy.
- ▶ Développement de la compréhension de l'algorithme d'adaptation.
- ▶ Usage des *équations Modifiées* comme puissant outil d'analyse, dans la continuité de l'équipe hpc@maths [8, 2].

Résultats

- ▶ **Développement d'équations équivalentes** pour un schéma diffusif avec plusieurs types d'adaptation permettant une mise en lumière de l'erreur pour chaque contexte.
(sans MRA, MRA sans reconstruction des flux et MRA avec reconstruction des flux)
- ▶ **La reconstruction semble ajouter plus de termes d'erreurs**
+ potentiellement perte d'ordre (à confirmer).

Plan

Les équations d'advection-diffusion-réaction (ADR)

Problématique

2^{ème} contribution

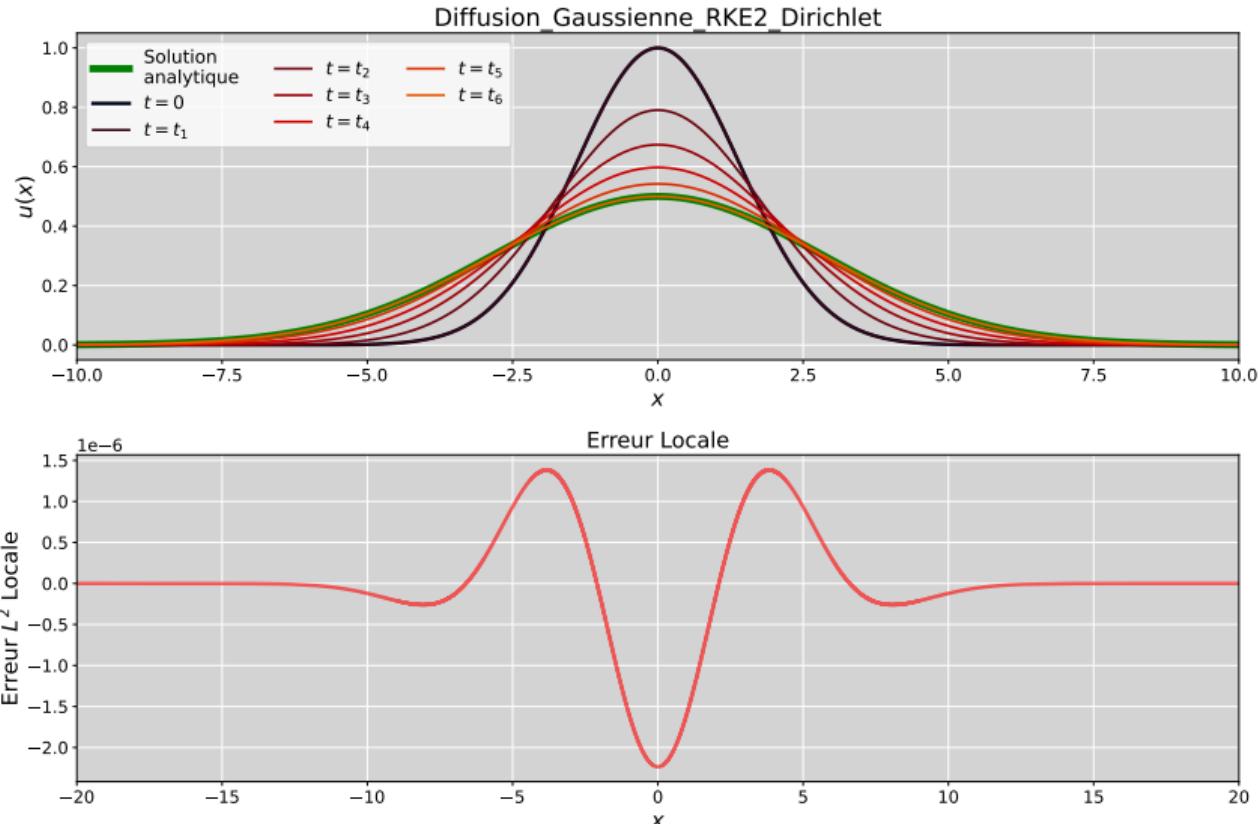
3^{ème} contribution

Compléments

Annexes

Présentation générale

Contribution 3 | Étude numérique, diffusion et MRA



Intégration avec ERK2

Contribution 3 | Étude numérique, diffusion et MRA

- ▶ Niveaux de 12 à 6 - $\varepsilon = 10^{-4}$.
- ▶ Comparaison à la solution analytique.



Intégration avec ERK2

Contribution 3 | Étude numérique, diffusion et MRA

- ▶ Niveaux de 12 à 6 - $\varepsilon = 10^{-4}$.
- ▶ Comparaison à la solution analytique.

Erreur selon la méthode d'adaptation

Schéma n°	Niveau d'évaluation des flux	Erreurs L^2
I	Ø MRA	2×10^{-5}
II	Courant	1×10^{-4}
III	Plus fin l^{\max}	3×10^{-4}
IV	Inférieur direct ($l + 1$)	2×10^{-4}



Intégration avec ERK2

Contribution 3 | Étude numérique, diffusion et MRA

- ▶ Niveaux de 12 à 6 - $\varepsilon = 10^{-4}$.
- ▶ Comparaison à la solution analytique.

Erreur selon la méthode d'adaptation

Schéma n°	Niveau d'évaluation des flux	Erreurs L^2
I	Ø MRA	2×10^{-5}
II	Courant	1×10^{-4}
III	Plus fin l^{\max}	3×10^{-4}
IV	Inférieur direct ($l + 1$)	2×10^{-4}

- ▶ On retrouve que reconstruire → problèmes.
- ▶ Forte contrainte de stabilité $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x^2} < \frac{1}{2}$.



Analyse Stabilité ?

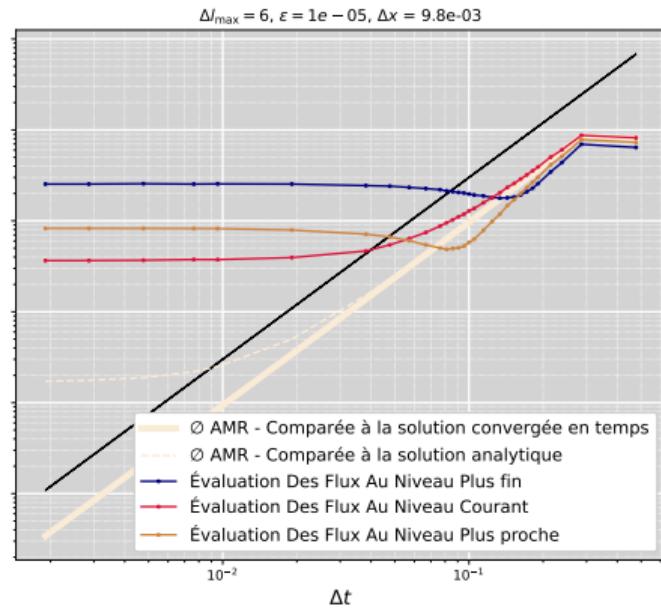
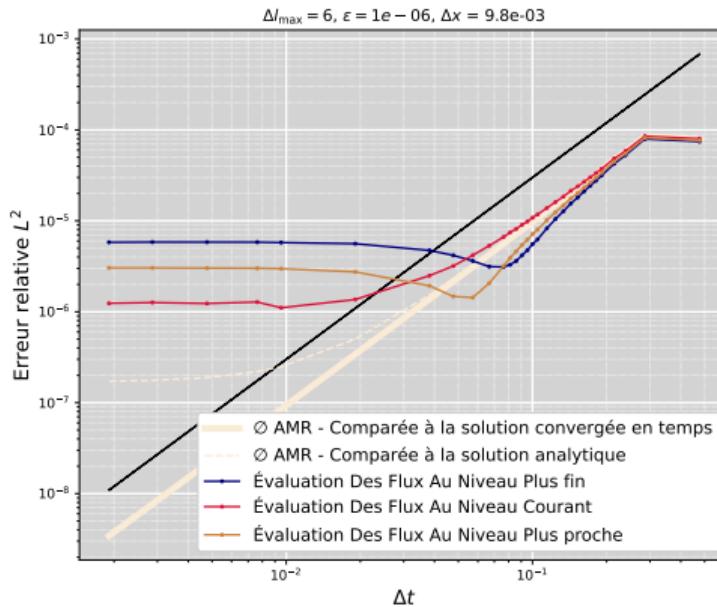
Contribution 3 | Étude numérique, diffusion et MRA

Etude de stabilité

Intégration avec ROCK2

Contribution 3 | Étude numérique, diffusion et MRA

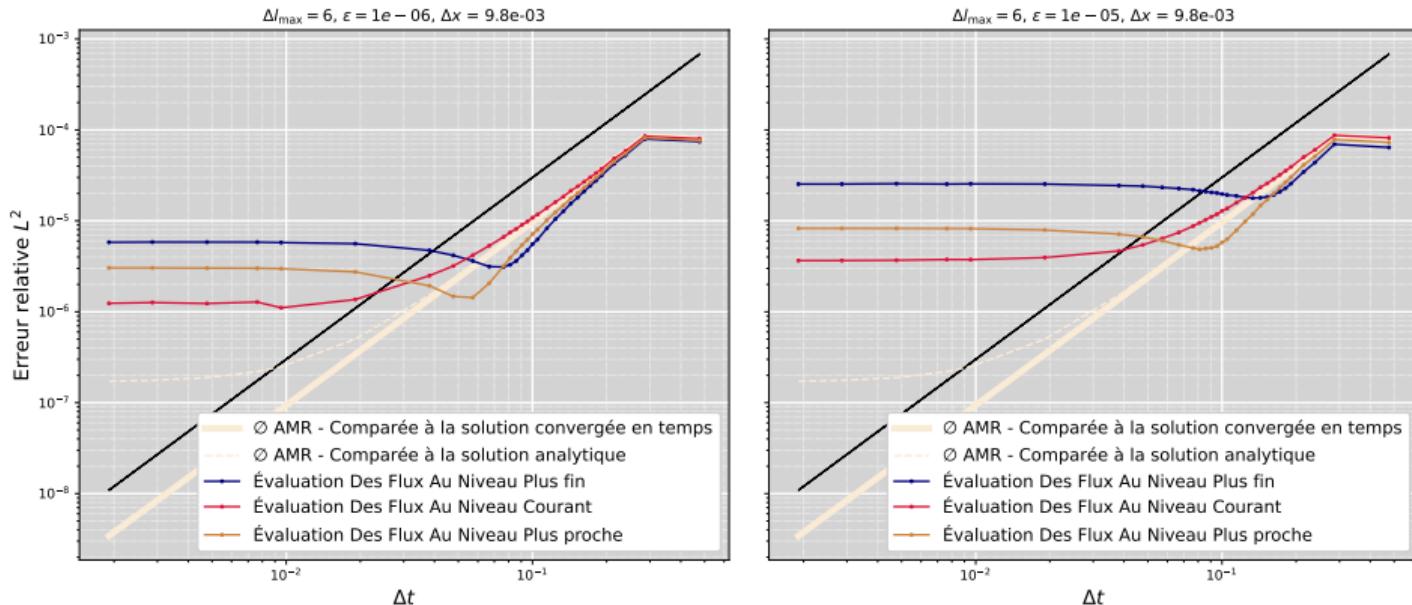
Erreurs par rapport à une solution convergée en temps selon la méthode d'évaluation des flux



Intégration avec ROCK2

Contribution 3 | Étude numérique, diffusion et MRA

Erreurs par rapport à une solution convergée en temps selon la méthode d'évaluation des flux



$$\frac{\partial u}{\partial t} = + D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \Delta x^2 D \left(\frac{\lambda}{2} (2^{2\Delta I} - 1) + \frac{2^{2\Delta I}}{12} (1 - 3\Delta I) \right) \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \Delta x^4 \frac{D \lambda^2 \frac{\partial^6 u}{\partial x^6}}{6} - \Delta x^6 \frac{D \lambda^3 \frac{\partial^8 u}{\partial x^8}}{24} + \mathcal{O}(\Delta x^7). \quad (13)$$



SAMURAI
Structured Adaptive mesh and Multi-
Resolution based on Algebra of Intervals

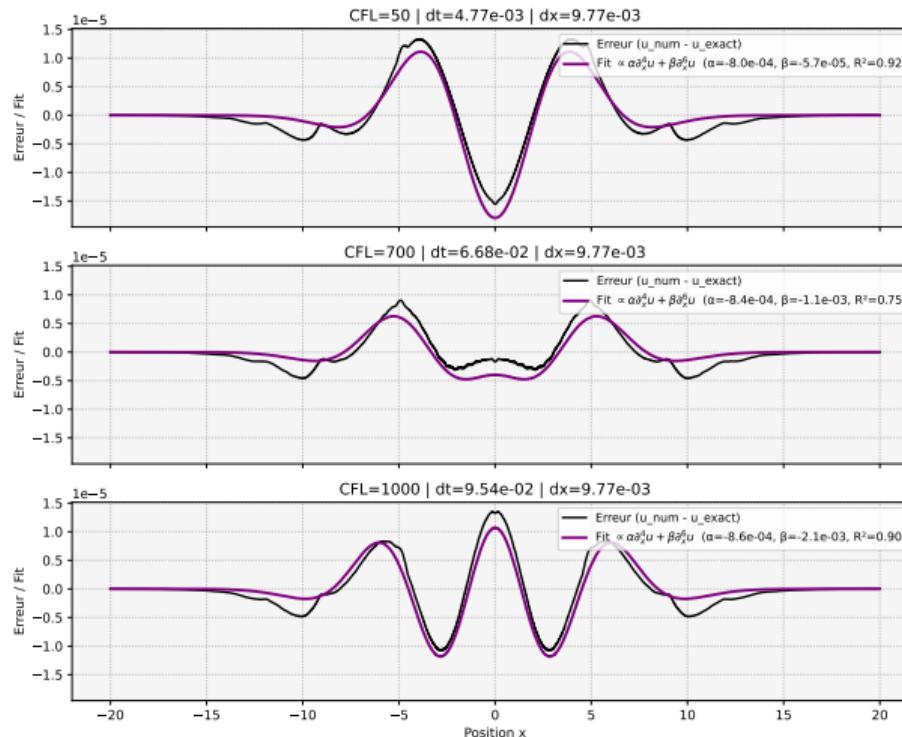
+ Ponio

[Visualisation de la distribution des erreurs.](#)

Profils d'erreur

Contribution 3 | Étude numérique, diffusion et MRA

$$\text{Correspondance Erreur Num.} \propto \alpha \partial_x^4 u + \beta \partial_x^6 u$$



Explications

Contribution 3 | Étude numérique, diffusion et MRA

Chute prématuée de l'erreur :

Les dérivées ∂_x^4 et ∂_x^6 ont des poids différents dans l'erreur selon la constante de Von Neumann λ . Leurs profils se "compensent" quand elles ont un poids comparable.

Moins bonne performances quand l'erreur temporelle est faible

Plus de termes d'erreur dans la contribution dominante de l'erreur :

Schéma n°	Évaluation des flux	Constante pondérant l'erreur en $\Delta x^2 \partial_x^4 u$ (dominante quand λ est petite)
I	∅ AMR	$\frac{D}{12}$
II	Sans reconstruction	$2^{\Delta I} \frac{D}{12}$
III	Avec reconstruction	$D \left(\frac{\lambda}{2} (2^{2\Delta I} - 1) + \frac{2^{2\Delta I}}{12} (1 - 3\Delta I) \right)$

Conclusion

Contribution 3 | Étude numérique, diffusion et MRA

Apprentissage personnel :

- ▶ Mise en place du calcul des flux au niveaux le plus fin grâce à l'équipe Samurai.
- ▶ Utilisation capacité de Ponio pour l'utilisation de la méthode stabilisée.

Résultats

- ▶ Mise en relation des résultats numériques et du travail sur les équations équivalentes.
- ▶ La reconstruction semble ici poser problème : prédicteur polynomial précis à l'ordre 3, permet une évaluation des gradients à l'ordre 2. Or le schéma est d'ordre 2, donc erreur de prédiction du même ordre et s'accumule.
- ▶ Conjecture il faut que le prédicteur permette d'évaluer les flux de sorte à ce que l'erreur de reconstruction portant sur les flux soit négligeable devant l'ordre du schéma.

Plan

Les équations d'advection-diffusion-réaction (ADR)

Problématique

2^{ème} contribution

3^{ème} contribution

Compléments

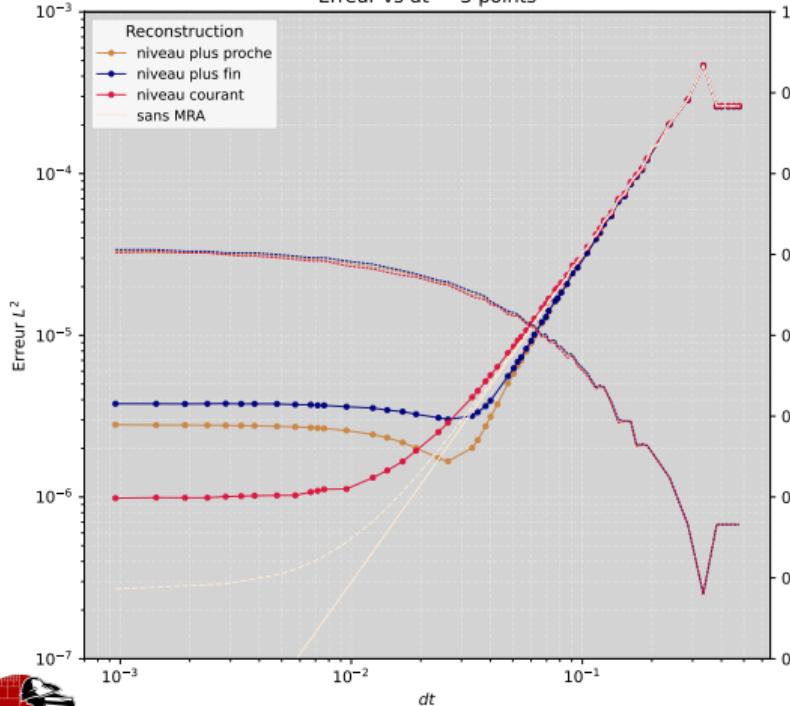
Annexes

Essais numériques - prédicteur à 5 points

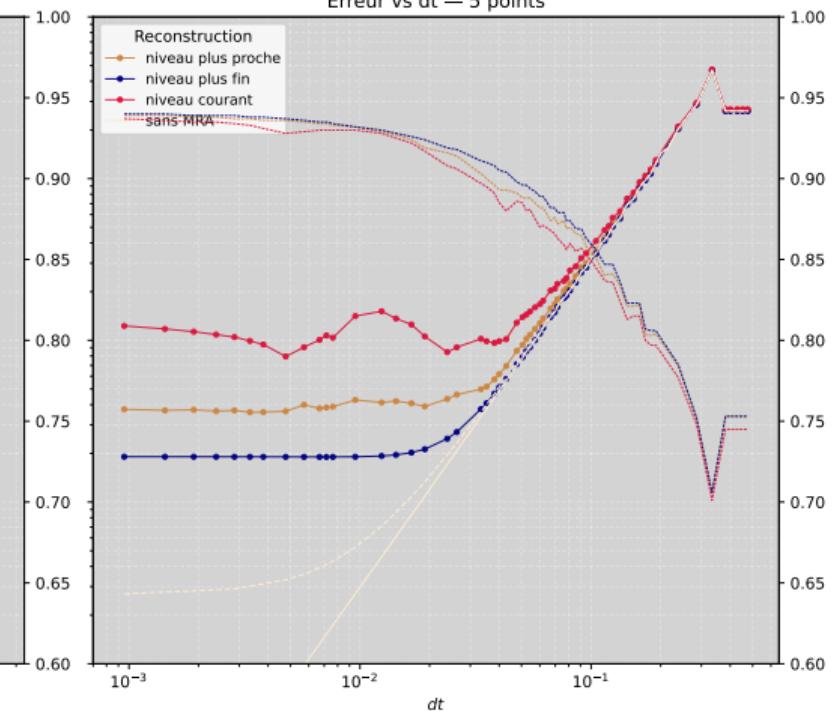
Complément

Convergence — Erreur L^2 en fonction de dt

Erreurs vs dt — 3 points



Erreurs vs dt — 5 points



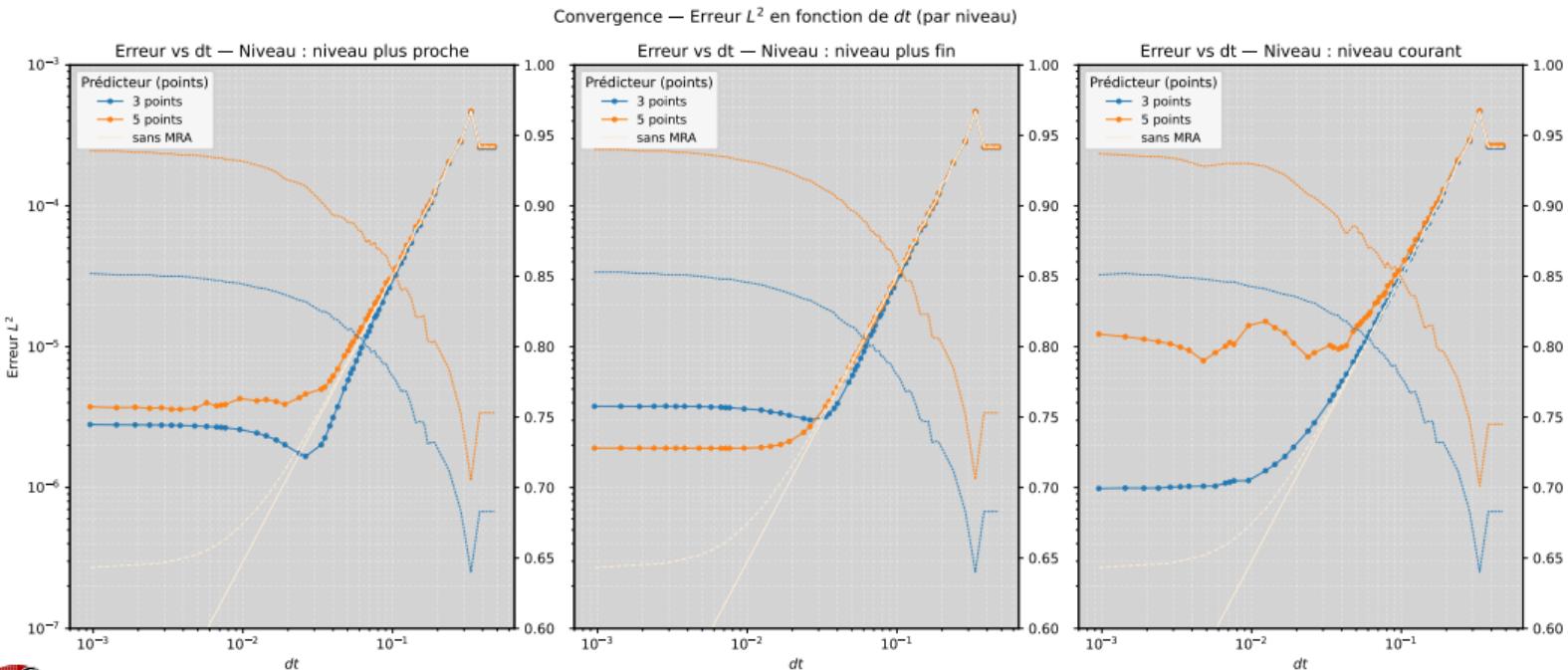
SAMURAI
Structured Adaptive mesh and Multi-Resolution based on Algebra of Intervals

+ Ponio

Essais numériques - prédicteur à 5 points

Complément

$$\varepsilon = 1e-5$$



SAMURAI + Ponio

Structured Adaptive mesh and Multi-Resolution based on Algebra of Intervals

-
- ▶ Développement d'équations équivalentes de schémas volumes finis adaptés en espace par multirésolution.
 - ▶ Confirmation des résultats théoriques par expériences numériques.
 - ▶ Mise en lumière de la nécessité de réaliser une prédiction d'ordre assez élevée par rapport à l'ordre du schéma.

Références I



Uri M. Ascher, Steven J. Ruuth, and Raymond J. Spiteri.

Implicit-explicit runge-kutta methods for time-dependent partial differential equations.

Applied Numerical Mathematics, 25(2) :151–167, 1997.

Special Issue on Time Integration.



Bellotti, Gouarin, J. Massot, M. Massot, Matalon, Séries, and Tenaud.

Modified equation and error analyses on adaptative meshes for the resolution of evolutionary pdes with finite volume schemes.

2025.

Preprint.



A. Cohen, S. M. Kaber, S. Müller, and M. Postel.

Fully adaptive multiresolution finite volume schemes for conservation laws.

Mathematics of Computation, 72, 2003.



E. Hairer.

Order conditions for numerical methods for partitioned ordinary differential equations.

Numerische Mathematik, 36(4) :431–445, 1981.



Ami Harten.

Adaptive multiresolution schemes for shock computations.

Journal of Computational Physics, 115(2) :319–338, 1994.



Christopher A. Kennedy and Mark H. Carpenter.

Additive rungekutta schemes for convectiondiffusionreaction equations.

Applied Numerical Mathematics, 44(1) :139–181, 2003.



Randall J. LeVeque.

Numerical Methods for Conservation Laws.

Lectures in Mathematics ETH Zürich. Birkhäuser Verlag, Basel, 1990.

Références II

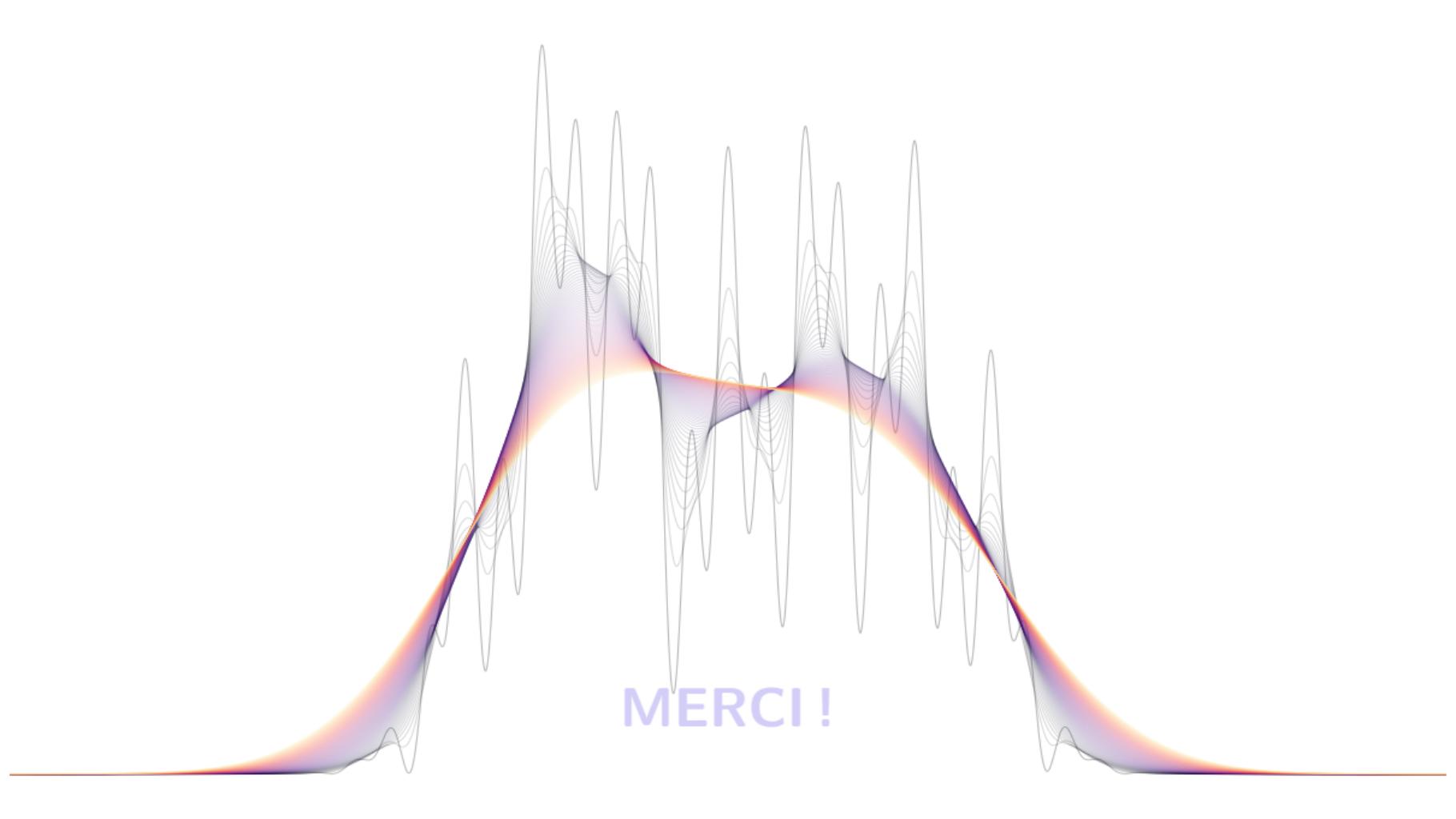


Marc Massot, Thomas Bellotti, Loïc Gouarin, Josselin Massot, Pierre Matalon, Laurent Séries, and Christian Tenaud.

Towards a new approach of mesh adaptation methods and its impact on accuracy for the simulation of stiff pdes.

Technical report / seminar presentation, NASA Ames Research Center, Advanced Modeling & Simulation Seminar Series, July 2025.

Version accessible en ligne.



MERCI !

Plan

Les équations d'advection-diffusion-réaction (ADR)

Problématique

2^{ème} contribution

3^{ème} contribution

Compléments

Annexes

Présentation

Comparaison ImEx - Splitting

Objectifs Principaux :

- ▶ Comprendre les méthodes *ImEx* : méthodes, intérêt, mise en oeuvre, stabilité.
- ▶ Comparaison empirique de l'impact de la *multirésolution adaptative* sur ces méthodes et sur le *splitting*.

L'équation de Nagumo 1D :

Il s'agit d'une équation de diffusion-réaction faisant apparaître des dynamiques de fronts :

$$\partial_t u = \underbrace{D \partial_{xx} u}_{\text{diffusion}} - \underbrace{ku(1-u^2)}_{\text{réaction non. lin.}} \quad k, D \in \mathbb{R}_+^*. \quad (14)$$

L'équation de Nagumo 1D :

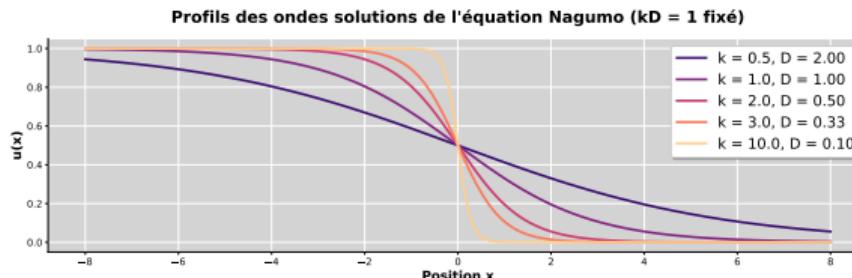
Il s'agit d'une équation de diffusion-réaction faisant apparaître des dynamiques de fronts :

$$\partial_t u = \underbrace{D \partial_{xx} u}_{\text{diffusion}} - \underbrace{ku(1-u^2)}_{\text{réaction non. lin.}} \quad k, D \in \mathbb{R}_+^*. \quad (14)$$

Les solutions :

En domaine infini, cette équation admet des solutions sous forme d'ondes progressives :

$$u(x - ct) = \frac{e^{\sqrt{\frac{k}{2D}}((x-x_0)-ct)}}{1 + e^{-\sqrt{\frac{k}{2D}}((x-x_0)-ct)}}, \quad c = \sqrt{\frac{kD}{2}}. \quad (15)$$



Méthode ImEx232 :

Schéma à trois étages explicites et deux étages implicites, avec $\gamma = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ et $\delta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$:

	Explicit : $\begin{array}{c ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \delta & 1-\delta & 0 \\ \hline 0 & 1-\gamma & \gamma \end{array}$	Implicit : $\begin{array}{c ccc} \gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 1 & 1-\gamma & \gamma & 0 \\ \hline 1-\gamma & \gamma \end{array}$
--	--	--

Méthode ImEx232 :

Schéma à trois étages explicites et deux étages implicites, avec $\gamma = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ et $\delta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$:

	0	0	0	
Explicite :	γ	γ	γ	
	1	δ	$1 - \delta$	0
	0	$1 - \gamma$	γ	

	γ	γ	0	
Implicite :	1	$1 - \gamma$	γ	
	$1 - \gamma$	γ	γ	

Méthode ImEx222 :

Schéma à deux étages explicites et deux étages implicites, avec $\gamma = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ et $\delta = 1 - \frac{1}{2\gamma}$:

	0	0	0	
Explicite :	γ	γ	γ	
	1	$1 - \delta$	δ	0
	$1 - \delta$	δ	0	

	γ	γ	0	
Implicite :	1	$1 - \gamma$	γ	
	$1 - \gamma$	γ	γ	

Présentation des méthodes

Contribution 1 | Comparaison ImEx - Splitting

Méthode ImEx232 :

Schéma à trois étages explicites et deux étages implicites, avec $\gamma = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ et $\delta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$:

	0	0	0
Explicite :	γ	γ	0
	1	δ	1 - δ
	0	$1 - \gamma$	γ

	γ	γ	0
Implicite :	1	$1 - \gamma$	γ
		1 - γ	γ

Méthode ImEx222 :

Schéma à deux étages explicites et deux étages implicites, avec $\gamma = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ et $\delta = 1 - \frac{1}{2\gamma}$:

	0	0	0
Explicite :	γ	γ	0
	1	$1 - \delta$	δ
	1 - δ	δ	0

	γ	γ	0
Implicite :	1	$1 - \gamma$	γ
		1 - γ	γ

Méthode Splitting :

Splitting de Strang | Réaction : ERK2 (Heun) | Diffusion : SDIRK2 (celle des méthode ImEx).

Présentation des méthodes

Contribution 1 | Comparaison ImEx - Splitting

Méthode ImEx232 :

Schéma à trois étages explicites et deux étages implicites, avec $\gamma = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ et $\delta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$:

$$\text{Explicite : } \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 1 & \delta & 1-\delta & 0 \\ \hline 0 & 1-\gamma & \gamma \end{array}$$

$$\text{Implicite : } \begin{array}{c|ccc} \gamma & \gamma & 0 \\ 1 & 1-\gamma & \gamma \\ \hline 1-\gamma & \gamma \end{array} \quad \text{équation cible générique : } \partial_t u = f_E(u) + f_I(u) \mid \text{objectif : } u^n \rightarrow u^{n+1}. \quad (16)$$

Présentation des méthodes

Contribution 1 | Comparaison ImEx - Splitting

Méthode ImEx232 :

Schéma à trois étages explicites et deux étages implicites, avec $\gamma = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ et $\delta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$:

$$\text{Explicite : } \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 1 & \delta & 1-\delta & 0 \\ \hline 0 & 1-\gamma & \gamma \end{array}$$

$$\text{Implicite : } \begin{array}{c|ccc} \gamma & \gamma & 0 \\ 1 & 1-\gamma & \gamma \\ \hline 1-\gamma & \gamma \end{array}$$

équation cible générique : $\partial_t u = f_E(u) + f_I(u)$ | objectif : $u^n \rightarrow u^{n+1}$. (16)

Calcul :

Présentation des méthodes

Contribution 1 | Comparaison ImEx - Splitting

Méthode ImEx232 :

Schéma à trois étages explicites et deux étages implicites, avec $\gamma = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ et $\delta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$:

$$\text{Explicite : } \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 1 & \delta & 1-\delta & 0 \\ \hline 0 & 1-\gamma & \gamma \end{array}$$

$$\text{Implicite : } \begin{array}{c|ccc} \gamma & \gamma & 0 \\ 1 & 1-\gamma & \gamma \\ \hline 1-\gamma & \gamma \end{array}$$

équation cible générique : $\partial_t u = f_E(u) + f_I(u)$ | objectif : $u^n \rightarrow u^{n+1}$. (16)

Calcul :

Initialisation

$$u_0 = u^n,$$

1^{er} étage

$$k_1^E = f_E(u_0), k_1^I = f_I(u_1).$$

Présentation des méthodes

Contribution 1 | Comparaison ImEx - Splitting

Méthode ImEx232 :

Schéma à trois étages explicites et deux étages implicites, avec $\gamma = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ et $\delta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$:

$$\text{Explicite : } \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 1 & \delta & 1-\delta & 0 \\ \hline 0 & 1-\gamma & \gamma \end{array}$$

$$\text{Implicite : } \begin{array}{c|cc} \gamma & \gamma & 0 \\ 1 & 1-\gamma & \gamma \\ \hline 1-\gamma & \gamma \end{array}$$

équation cible générique : $\partial_t u = f_E(u) + f_I(u)$ | objectif : $u^n \rightarrow u^{n+1}$. (16)

Calcul :

Initialisation

$$u_0 = u^n,$$

1^{er} étage

$$k_1^E = f_E(u_0), k_1^I = f_I(u_1).$$

$$u_1 = u_0 + \gamma \Delta t k_1^E + \gamma \Delta t \overbrace{f_I(u_1)}^{=k_1^I},$$

Présentation des méthodes

Contribution 1 | Comparaison ImEx - Splitting

Méthode ImEx232 :

Schéma à trois étages explicites et deux étages implicites, avec $\gamma = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ et $\delta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$:

$$\text{Explicite : } \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 1 & \delta & 1-\delta & 0 \\ \hline 0 & 1-\gamma & \gamma \end{array}$$

$$\text{Implicite : } \begin{array}{c|cc} \gamma & \gamma & 0 \\ 1 & 1-\gamma & \gamma \\ \hline 1-\gamma & \gamma \end{array}$$

équation cible générique : $\partial_t u = f_E(u) + f_I(u)$ | objectif : $u^n \rightarrow u^{n+1}$. (16)

Calcul :

Initialisation

$$u_0 = u^n,$$

1^{er} étage

$$k_1^E = f_E(u_0), k_1^I = f_I(u_1).$$

$$u_1 = u_0 + \gamma \Delta t k_1^E + \gamma \Delta t \overbrace{f_I(u_1)}^{=k_1^I},$$

$$\Rightarrow u_1 = \left[Id - \gamma \Delta t f_I(\cdot) \right]^{-1} (u_0 + \gamma \Delta t k_1^E),$$

Présentation des méthodes

Contribution 1 | Comparaison ImEx - Splitting

Méthode ImEx232 :

Schéma à trois étages explicites et deux étages implicites, avec $\gamma = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ et $\delta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$:

$$\text{Explicite : } \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 1 & \delta & 1-\delta & 0 \\ \hline 0 & 1-\gamma & \gamma \end{array}$$

$$\text{Implicite : } \begin{array}{c|cc} \gamma & \gamma & 0 \\ 1 & 1-\gamma & \gamma \\ \hline 1-\gamma & \gamma \end{array}$$

équation cible générique : $\partial_t u = f_E(u) + f_I(u)$ | objectif : $u^n \rightarrow u^{n+1}$. (16)

Calcul :

Initialisation

$$u_0 = u^n,$$

1^{er} étage

$$k_1^E = f_E(u_0), k_1^I = f_I(u_1).$$

$$u_1 = u_0 + \gamma \Delta t k_1^E + \gamma \Delta t \underbrace{f_I(u_1)}_{=k_1^I},$$

$$\Rightarrow u_1 = \left[Id - \gamma \Delta t f_I(\cdot) \right]^{-1} (u_0 + \gamma \Delta t k_1^E),$$

$$\Rightarrow k_1^I = f_I(u_1).$$

Présentation des méthodes

Contribution 1 | Comparaison ImEx - Splitting

Méthode ImEx232 :

Schéma à trois étages explicites et deux étages implicites, avec $\gamma = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ et $\delta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$:

$$\text{Explicite : } \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 1 & \delta & 1-\delta & 0 \\ \hline 0 & 1-\gamma & \gamma \end{array}$$

$$\text{Implicite : } \begin{array}{c|cc} \gamma & \gamma & 0 \\ 1 & 1-\gamma & \gamma \\ \hline 1-\gamma & \gamma \end{array}$$

équation cible générique : $\partial_t u = f_E(u) + f_I(u)$ | objectif : $u^n \rightarrow u^{n+1}$. (16)

Calcul :

Initialisation

$$u_0 = u^n,$$

1^{er} étage

$$k_1^E = f_E(u_0), k_1^I = f_I(u_1).$$

$$u_1 = u_0 + \gamma \Delta t k_1^E + \gamma \Delta t \underbrace{f_I(u_1)}_{=k_1^I},$$

$$\Rightarrow u_1 = \left[Id - \gamma \Delta t f_I(\cdot) \right]^{-1} (u_0 + \gamma \Delta t k_1^E),$$

$$\Rightarrow k_1^I = f_I(u_1).$$

2^{eme} étage

$$k_2^E = f_E(u_1), k_2^I = f_I(u_2).$$

Présentation des méthodes

Contribution 1 | Comparaison ImEx - Splitting

Méthode ImEx232 :

Schéma à trois étages explicites et deux étages implicites, avec $\gamma = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ et $\delta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$:

$$\text{Explicite : } \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 1 & \delta & 1-\delta & 0 \\ \hline 0 & 1-\gamma & \gamma \end{array}$$

$$\text{Implicite : } \begin{array}{c|cc} \gamma & \gamma & 0 \\ 1 & 1-\gamma & \gamma \\ \hline 1-\gamma & \gamma \end{array}$$

équation cible générique : $\partial_t u = f_E(u) + f_I(u)$ | objectif : $u^n \rightarrow u^{n+1}$. (16)

Calcul :

Initialisation

$$u_0 = u^n,$$

1^{er} étage

$$k_1^E = f_E(u_0), k_1^I = f_I(u_1).$$

$$u_1 = u_0 + \gamma \Delta t k_1^E + \gamma \Delta t \underbrace{f_I(u_1)}_{=k_1^I},$$

$$\Rightarrow u_1 = \left[Id - \gamma \Delta t f_I(\cdot) \right]^{-1} (u_0 + \gamma \Delta t k_1^E),$$

$$\Rightarrow k_1^I = f_I(u_1).$$

2^{eme} étage

$$k_2^E = f_E(u_1), k_2^I = f_I(u_2).$$

$$\begin{aligned} u_2 &= u_0 + \delta \Delta t k_1^E + (1-\delta) \Delta t k_2^E + (1-\gamma) \Delta t k_1^I + \underbrace{\gamma \Delta t f_I(u_2)}_{=k_2^I}, \\ \Rightarrow u_1 &= \left[Id - \gamma \Delta t f_I(\cdot) \right]^{-1} \left(u_0 + \delta \Delta t k_1^E + (1-\delta) \Delta t k_2^E + (1-\gamma) \Delta t k_1^I \right), \\ \Rightarrow k_2^I &= f_I(u_2). \end{aligned}$$

Présentation des méthodes

Contribution 1 | Comparaison ImEx - Splitting

Méthode ImEx232 :

Schéma à trois étages explicites et deux étages implicites, avec $\gamma = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ et $\delta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$:

$$\text{Explicite : } \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 1 & \delta & 1-\delta & 0 \\ \hline 0 & 1-\gamma & \gamma \end{array}$$

$$\text{Implicite : } \begin{array}{c|cc} \gamma & \gamma & 0 \\ 1 & 1-\gamma & \gamma \\ \hline 1-\gamma & \gamma \end{array}$$

équation cible générique : $\partial_t u = f_E(u) + f_I(u)$ | objectif : $u^n \rightarrow u^{n+1}$. (16)

Calcul :

Initialisation

$$u_0 = u^n,$$

1^{er} étage

$$k_1^E = f_E(u_0), k_1^I = f_I(u_1).$$

$$u_1 = u_0 + \gamma \Delta t k_1^E + \gamma \Delta t \overbrace{f_I(u_1)}^{=k_1^I},$$

$$\Rightarrow u_1 = \left[Id - \gamma \Delta t f_I(\cdot) \right]^{-1} (u_0 + \gamma \Delta t k_1^E),$$

$$\Rightarrow k_1^I = f_I(u_1).$$

2^{eme} étage

$$k_2^E = f_E(u_1), k_2^I = f_I(u_2).$$

$$\begin{aligned} u_2 &= u_0 + \delta \Delta t k_1^E + (1-\delta) \Delta t k_2^E + (1-\gamma) \Delta t k_1^I + \overbrace{\gamma \Delta t f_I(u_2)}^{=k_2^I}, \\ \Rightarrow u_1 &= \left[Id - \gamma \Delta t f_I(\cdot) \right]^{-1} \left(u_0 + \delta \Delta t k_1^E + (1-\delta) \Delta t k_2^E + (1-\gamma) \Delta t k_1^I \right), \\ \Rightarrow k_2^I &= f_I(u_2). \end{aligned}$$

3^{eme} étage

$$k_3^E = f_E(u_2).$$

Présentation des méthodes

Contribution 1 | Comparaison ImEx - Splitting

Méthode ImEx232 :

Schéma à trois étages explicites et deux étages implicites, avec $\gamma = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ et $\delta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$:

$$\text{Explicite : } \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 1 & \delta & 1-\delta & 0 \\ \hline 0 & 1-\gamma & \gamma \end{array}$$

$$\text{Implicite : } \begin{array}{c|ccc} \gamma & \gamma & 0 \\ 1 & 1-\gamma & \gamma \\ \hline 1-\gamma & \gamma \end{array}$$

équation cible générique : $\partial_t u = f_E(u) + f_I(u)$ | objectif : $u^n \rightarrow u^{n+1}$. (16)

Calcul :

Initialisation
 $u_0 = u^n,$

1^{er} étage
 $k_1^E = f_E(u_0), k_1^I = f_I(u_1).$

$$u_1 = u_0 + \gamma \Delta t k_1^E + \gamma \Delta t \overbrace{f_I(u_1)}^{=k_1^I},$$

$$\Rightarrow u_1 = \left[Id - \gamma \Delta t f_I(\cdot) \right]^{-1} (u_0 + \gamma \Delta t k_1^E),$$

$$\Rightarrow k_1^I = f_I(u_1).$$

2^{eme} étage
 $k_2^E = f_E(u_1), k_2^I = f_I(u_2).$

$$u_2 = u_0 + \delta \Delta t k_1^E + (1-\delta) \Delta t k_2^E + (1-\gamma) \Delta t k_1^I + \overbrace{\gamma \Delta t f_I(u_2)}^{=k_2^I},$$

$$\Rightarrow u_1 = \left[Id - \gamma \Delta t f_I(\cdot) \right]^{-1} (u_0 + \delta \Delta t k_1^E + (1-\delta) \Delta t k_2^E + (1-\gamma) \Delta t k_1^I),$$

$$\Rightarrow k_2^I = f_I(u_2).$$

3^{eme} étage
 $k_3^E = f_E(u_2).$

Recombinaison des étages
 $u^{n+1} = u^n + \Delta t \left((1-\gamma) k_2^E + \gamma k_3^E + (1-\gamma) k_1^I + \gamma k_2^I \right).$

Analyse de stabilité

Annexe

Stabilité de différentes méthodes sur l'équation de Nagumo. $D = 1$, $k = 1$, $\Delta t = 1.0e-02$, $\Delta x = 4.9e-03$.

Diagramme de stabilité ImEx222

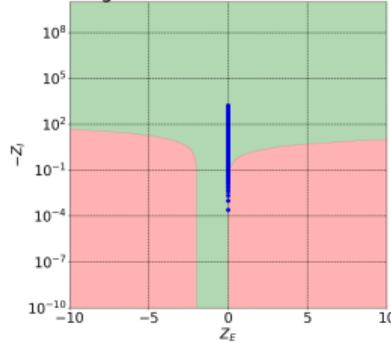


Diagramme de stabilité ImEx232

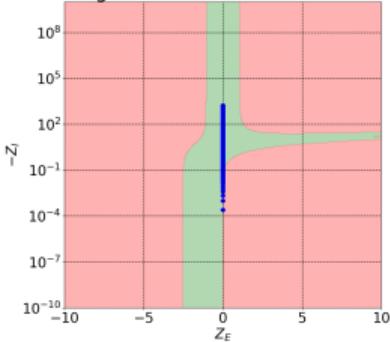
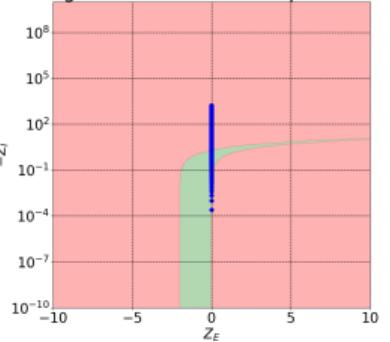
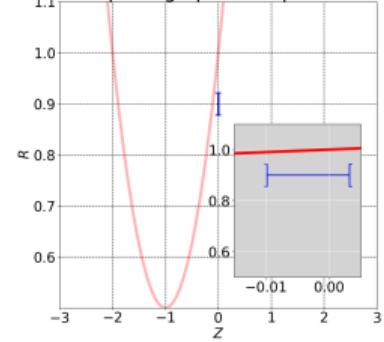


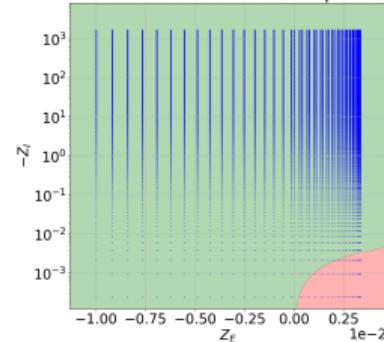
Diagramme de stabilité Explicite RK2



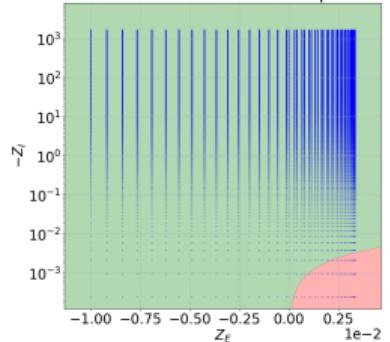
Splitting - partie explicite



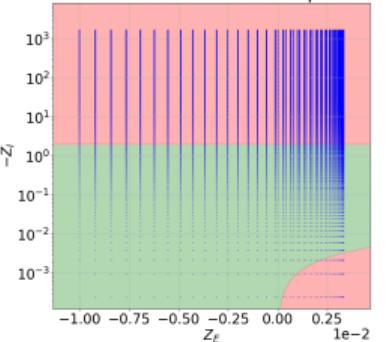
↓ zoom autour des valeurs propres ↓



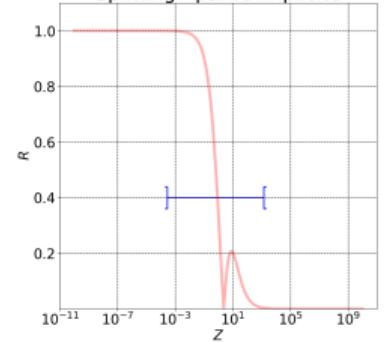
↓ zoom autour des valeurs propres ↓



↓ zoom autour des valeurs propres ↓



Splitting - partie implicite



Analyse de stabilité

Annexe

Stabilité de différentes méthodes sur l'équation de Nagumo. $D = 10$, $k = 0.1$, $\Delta t = 1.0e-02$, $\Delta x = 4.9e-03$.

Diagramme de stabilité ImEx222

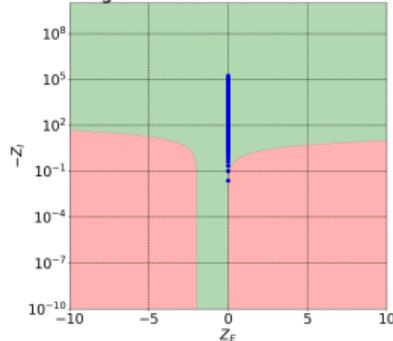


Diagramme de stabilité ImEx232

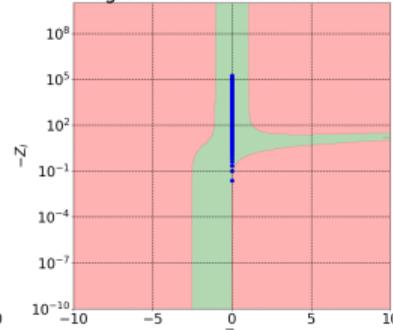
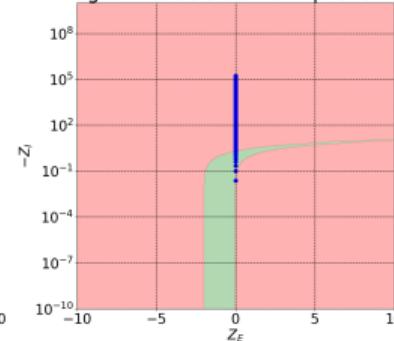
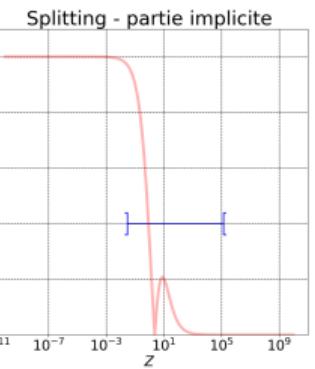
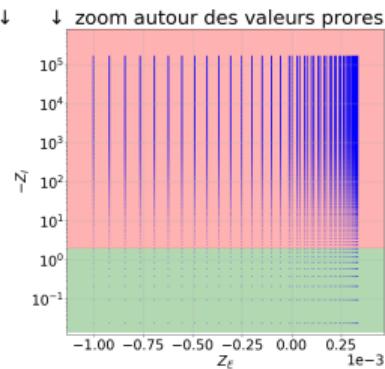
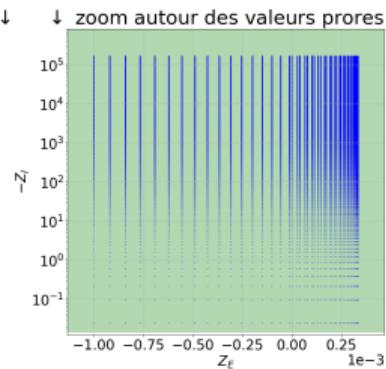
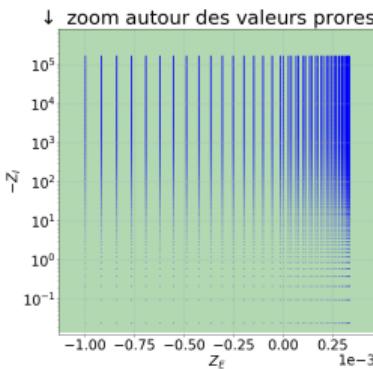
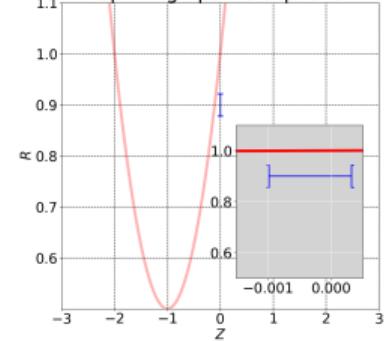


Diagramme de stabilité Explicite RK2



Splitting - partie explicite



Analyse de stabilité

Annexe

Stabilité de différentes méthodes sur l'équation de Nagumo. $D = 0.0002$, $k = 500$, $\Delta t = 1.0\text{e-}02$, $\Delta x = 4.9\text{e-}03$.

Diagramme de stabilité ImEx222

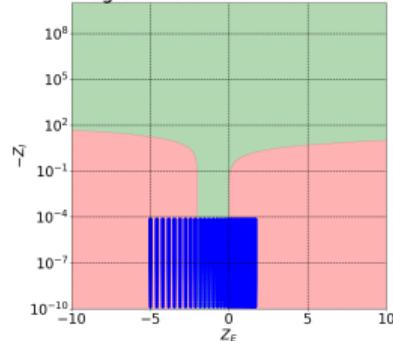


Diagramme de stabilité ImEx232

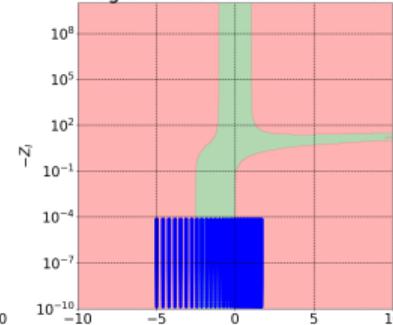
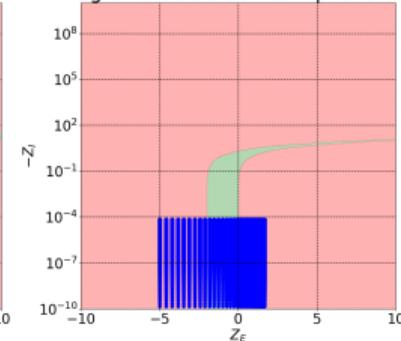
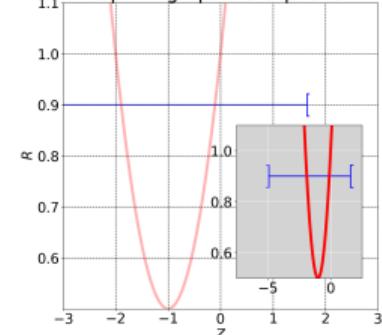


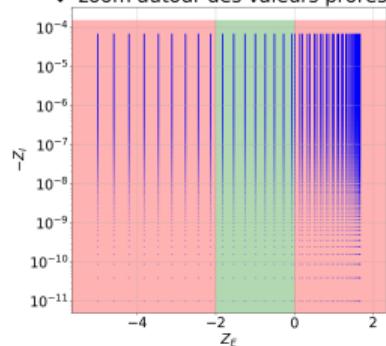
Diagramme de stabilité Explicite RK2



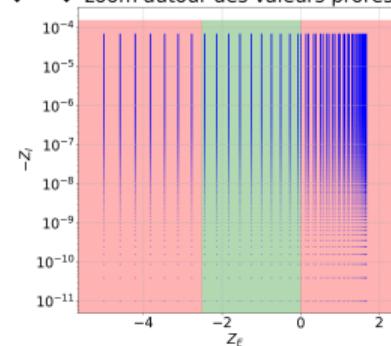
Splitting - partie explicite



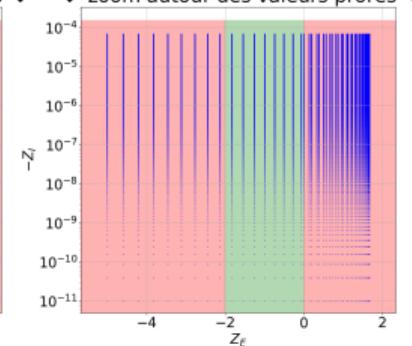
↓ zoom autour des valeurs prores ↓



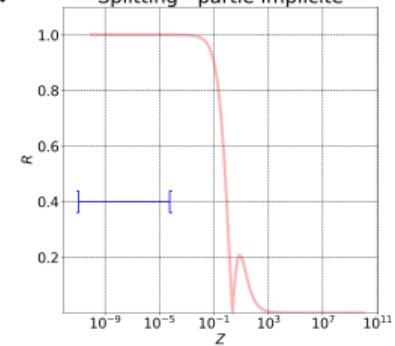
↓ zoom autour des valeurs prores ↓



↓ zoom autour des valeurs prores ↓



Splitting - partie implicite



Analyse de stabilité

Annexe

Stabilité de différentes méthodes sur l'équation de Nagumo. $D = 500$, $k = 500$, $\Delta t = 1.0e-02$, $\Delta x = 4.9e-03$.

Diagramme de stabilité ImEx222

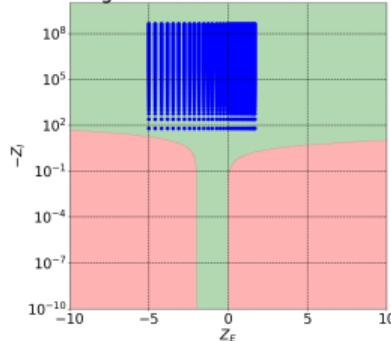


Diagramme de stabilité ImEx232

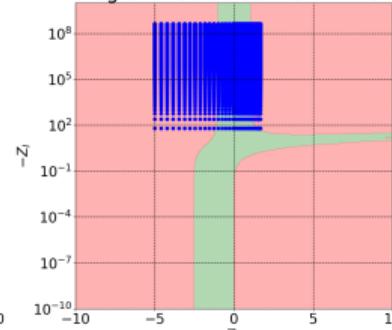
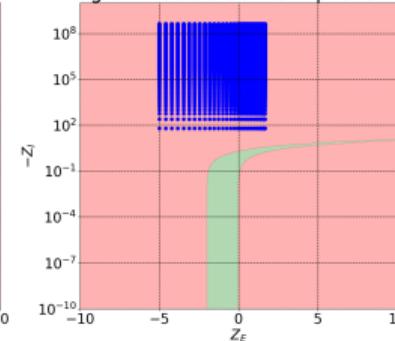
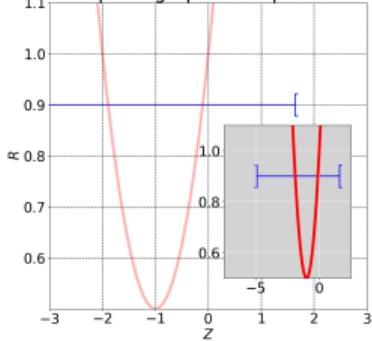


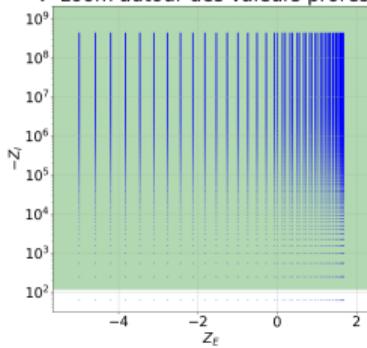
Diagramme de stabilité Explicite RK2



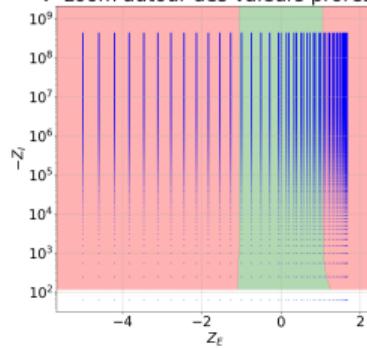
Splitting - partie explicite



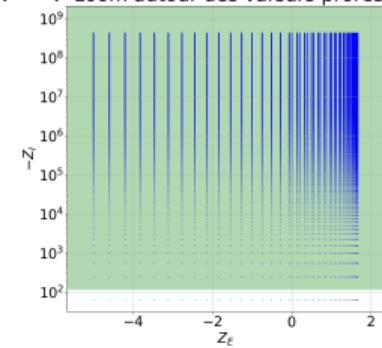
↓ zoom autour des valeurs prores ↓



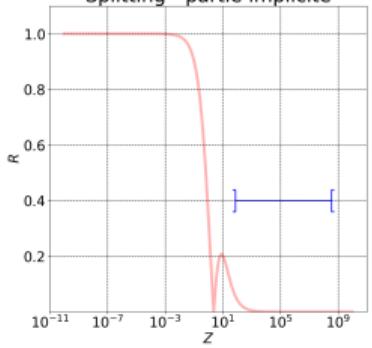
↓ zoom autour des valeurs prores ↓



↓ zoom autour des valeurs prores ↓



Splitting - partie implicite

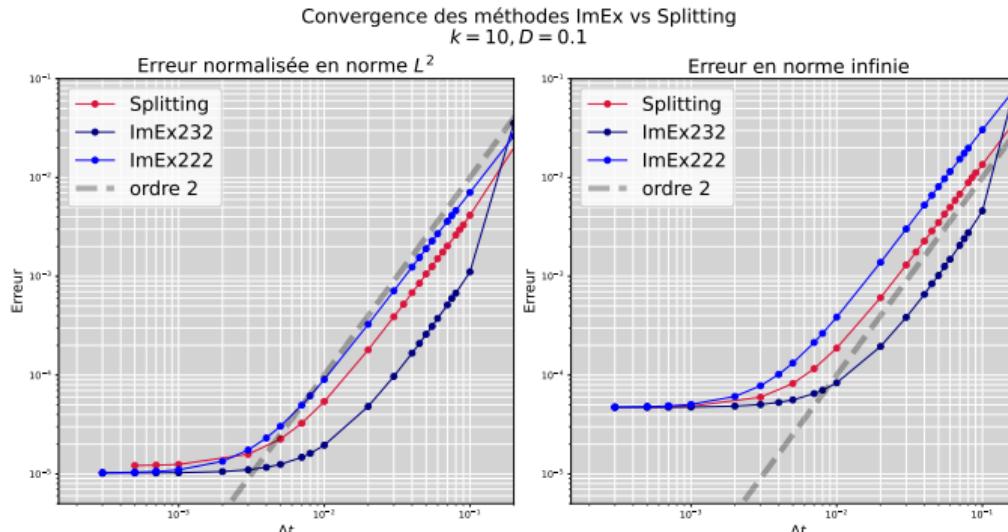


Convergence (\emptyset MRA)

Contribution 1 | Comparaison ImEx - Splitting

Contexte :

- ▶ $k = 10, D = 0.1,$
- ▶ $\Delta x = 2.4 \cdot 10^{-3},$
- ▶ conditions de Neumann au bord (quasi infini).



Convergence (avec MRA)

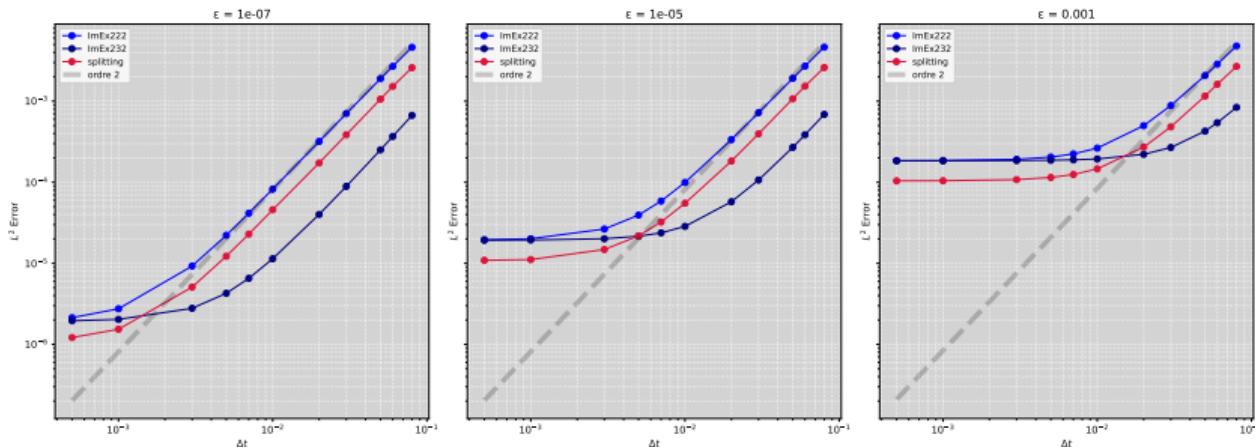
Contribution 1 | Comparaison ImEx - Splitting

Contexte :

- ▶ $k = 10$, $D = 0.1$,
- ▶ Solution représentée du 12 ($\Delta x = 9 \cdot 10^{-3}$) à 6,
- ▶ conditions de Neumann au bord (quasi infini).



Convergence d'un schéma MRA combiné à différentes méthodes de découplage (ImEx/splitting).



Conclusion

Contribution 1 | Comparaison ImEx - Splitting

Apprentissage personnel :

- ▶ Étude de la théorie des ImEx [4, 1, 6] et des schémas pour lois de conservation [7].
 - ▶ Familiarisation avec l'étude de stabilité linéaire pour les ImEx ($(z_E, z_I) \in \mathbb{C}^2$).
 - ▶ Code par volume fini en C++ grâce à la librairie Samurai.
-

Résultat empirique

Le schéma de *splitting* est plus robuste à la *multirésolution adaptative* que les ImEx.
Cela n'est pas forcément généralisable, c'est un cas particulier.