Entrega 3

José Antonio Álvarez

30 de octubre de 2017

Ejercicio 27. Construir expresiones regulares para los siguientes lenguajes sobre el alfabeto $\{0,1\}$:

1. Palabras en las que el número de símbolos 0 es múltiplo de 3.

$$(1^*01^*01^*01^*)^*$$

2. Palabras que contienen como subcadena a 1100 ó a 00110.

$$(1+0)^*(1100+00110)(1+0)^*$$

3. Palabras en las que cada cero forma parte de una subcadena de 2 ceros y cada 1 forma parte de una subcadena de 3 unos.

   Por este enunciado entiendo que se refiere a que para cada 0 existe una subcadena de longitud 2 contenida en la palabra a la que pertenece el 0. Es decir, la subcadenas serán de 2 ceros o más, ya que para cada 0 dentro de dicha cadena podemos encontrar una subcadena de dos ceros. De igual forma apra los unos:

$$(00^+ + 111^+)^*$$

4. Palabras en las que el número de ocurrencias de la subcadena 011 es menor o igual que el de ocurrencias de la subcadena 110.

   Este lenguaje no es regular y por tanto no se puede construir una expresión regular para él. Veamos que no lo es por el lema de bombeo.

   Sea L el lenguaje definido en el enunciado y $u = (011)^n(110)^n \in L$. Tomando $v = (011)^N$ y $w = (110)^N$, tomando $i = 2$ $\forall n \in N$,

$$v^i w = (011)^{2n}(110)^n \notin L$$

   .

   Como esto es válido para todo n, L no es regular.

Ejercicio 29. Encuentra para cada uno de los siguientes lenguajes una gramática de tipo 3 que lo genere o un autómata finito que lo reconozca:

1. $L_1 = \{u \in \{0,1\}^* : u \text{ no contiene la subcadena } 0101\}$
2. $L_2 = \{0^i 1^j 0^k : i \geq 1, j \geq 2, k \geq 0, i \text{ impar}, k \text{ múltiplo de } 3\}$

Diseña el AFD minimal que reconoce el lenguaje $(L_1 \cap L_2)$.

Primero veamos que $L_2 \subset L_1$ y que por tanto $L_2 = (L_1 \cap L_2)$. Sin embargo esto es obvio: una palabra de la forma $0^i 1^j 0^k$ no puede contener a la sucadena 0101. Por tanto nos limitaremos a dar un AFD minimal para cada lenguaje.

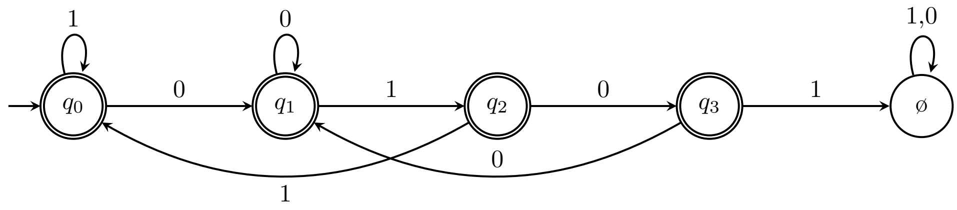

Figura 1: Autómata finito determinista minimal que reconoce L_1.

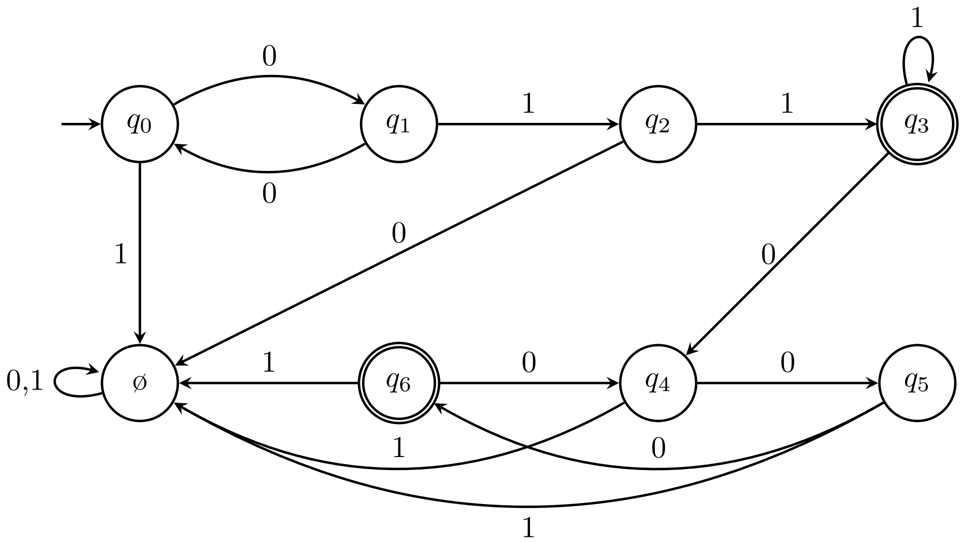

Figura 2: Autómata finito determinista minimal que reconoce L_2.

Ejercicio 45. Sea el alfabeto $A = \{0, 1, +, =\}$, demostrar que el lenguaje

$$ADD = \{x = y + z \mid x, y, z \text{ son números en binario, y } x \text{ es la suma de } y \text{ y } z\}$$

no es regular.

Lo mostraremos por el lema de bombeo. Sea $z = [1^N + 0 = 1^N] \in ADD$. Tomando $v = 1^N$ y $w = [+\, 0 = 1^N]$, $i = 2\ \forall n \in N$:

$$v^i w = [1^{2N} + 0 = 1^N] \notin ADD$$

.
Como esto es válido para todo n, ADD no es regular.

Ejercicio 46. Si L_1 y L_2 son lenguajes sobre el alfabeto A, entonces la *mezcla perfecta* de estos lenguajes se define como el lenguaje:

$$L_3 = \{w \mid w = a_1 b_1 ... a_k b_k \text{ donde } a_1 ... a_k \in L_1, b_1 ... b_k \in L_2, a_i, b_i \in A\}$$

Demostrar que si L_1 y L_2 son regulares, entonces la mezcla perfecta de L_1 y L_2 es regular.

Para resolver este ejercicio utilizaremos el teorema de Myhill-Nerode. Sean $\equiv_1$ y $\equiv_2$ las relaciones de equivalencia definidas por el teorema en L_1 y L_2 respectivamente. Como L_1 y L_2 son regulares tienen un número de clases de equivalencia finito: n_1 y n_2 respectivamente.

Por la forma en la que está definida la *mezcla perfecta* podemos suponer que unicamente uniremos palabras de L_1 y L_2 que tengan la misma longitud y unicamente obtendremos palabras pares. Es decir, $L_3 \subset P(A^*) = \{u \in A^* : |u| \text{ es par}\}\ \forall L_1, L_2 \subset A^*$.

Numeremos ahora las clases de equivalencia de L_1: $[A_i], i \in \{1, ..., n_1\}$, y de la misma forma para L_2: $[B_i], i \in \{1, ..., n_2\}$.

Definimos a continuación una nueva relación de equivalencia en L_3, $\equiv_3$ de forma tal que:

$$a = a_1...a_k \equiv_3 b = b_1...b_k \leftrightarrow \begin{cases} a_1...a_{k-1} \equiv_1 b_1...b_{k-1} \\ a_2...a_k \equiv_2 b_2...b_k \end{cases}$$

Donde k es par porque $a, b \in L_3 \subset P(A^*)$. Podemos ver de forma clara que es una relación de equivalencia:

- Reflexividad:

$$a \equiv_3 a \leftrightarrow \begin{cases} a_1...a_{k-1} \equiv_1 a_1...a_{k-1} \\ a_2...a_k \equiv_2 a_2...a_k \end{cases}$$

  Lo cual se verifica por la reflexividad de $\equiv_1$ y $\equiv_2$.

- Simetría:

$$a \equiv_3 b \leftrightarrow \begin{cases} a_1...a_{k-1} \equiv_1 b_1...b_{k-1} \\ a_2...a_k \equiv_2 b_2...b_k \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} b_1...b_{k-1} \equiv_1 a_1...a_{k-1} \\ b_2...b_k \equiv_2 a_2...a_k \end{cases} \leftrightarrow b \equiv_3 a$$

- Transitividad:

$$\begin{cases} a \equiv_3 b \\ b \equiv_3 c \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} a_1...a_{k-1} \equiv_1 b_1...b_{k-1} \\ a_2...a_k \equiv_2 b_2...b_k \\ b_1...b_{k-1} \equiv_1 c_1...c_{k-1} \\ b_2...b_k \equiv_2 c_2...c_k \end{cases} \implies \begin{cases} a_1...a_{k-1} \equiv_1 c_1...c_{k-1} \\ a_2...a_k \equiv_2 c_2...c_k \end{cases} \leftrightarrow a \equiv_3 c$$

Podemos numerar la clases de equivalencia de L_3 de la forma $[C_{ij}]$, donde:

$$a \in [C_{ij}] \leftrightarrow \begin{cases} a_1...a_{k-a} \in [A_i] \\ a_2...a_k \in [B_j] \end{cases}$$

Por tanto $\equiv_3$ define como mucho $n_1 \cdot n_2$ clases de equivalencia distintas.

Para terminar comprobemos que si $a \equiv_3 b$ entonces $a \equiv_{MN} b$, donde $\equiv_{MN}$ es la relación de equivalencia definida por el teorema de Myhill-Nerode en L_3. Si esto es cierto, el número de clases de equivalencia definidas por $\equiv_{MN}$ será también menor o igual que $n_1 \cdot n_2$. En particular finito y por tanto L_3 será regular.

Sean $a = a_1...a_k, b = b_1...b_k$, con k par. Entonces:

$$a \equiv_3 b \leftrightarrow \begin{cases} a_1...a_{k-1} \equiv_1 b_1...b_{k-1} \\ a_2...a_k \equiv_2 b_2...b_k \end{cases} \leftrightarrow \forall x = x_1...x_t, y = y_1...y_s \begin{cases} a_1...a_{k-1}x_1...x_t \in L_1 \leftrightarrow b_1...b_{k-1}x_1...x_t \in L_1 \\ a_2...a_k y_1...y_s \in L_2 \leftrightarrow b_2...b_k y_1...y_s \in L_2 \end{cases}$$

En particular se cumple para $t = s$. Tomemos ese caso:

$$\forall x = x_1...x_t, y = y_1...y_t \begin{cases} a_1...a_{k-1}x_1...x_t \in L_1 \leftrightarrow b_1...b_{k-1}x_1...x_t \in L_1 \\ a_2...a_k y_1...y_t \in L_2 \leftrightarrow b_2...b_k y_1...y_t \in L_2 \end{cases} \implies$$

$$\begin{cases} a_1...a_{k-1}x_1...x_t \in L_1 \\ \textbf{y} \\ a_2...a_k y_1...y_t \in L_2 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} b_1...b_{k-1}x_1...x_t \in L_1 \\ \textbf{y} \\ b_2...b_k y_1...y_t \in L_2 \end{cases}$$

Por definición de *mezcla perfecta* esto es equivalente a:

$$[\ a_1a_2...a_kx_1y_1...x_ty_t \in L_3 \leftrightarrow b_1b_2...b_kx_1y_1...x_ty_t \in L_3\ ] \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow [\ \forall z = x_1y_1...x_ty_t \in P(A^*),\ \ az \in L_3 \leftrightarrow bz \in L_3\ ] \leftrightarrow a \equiv_{MN} b$$

Nota: Imagino que debe de haber una forma más sencilla de resolverlo, pero no la he encontrado.

Ejercicio 47. Minimizar el autómata:

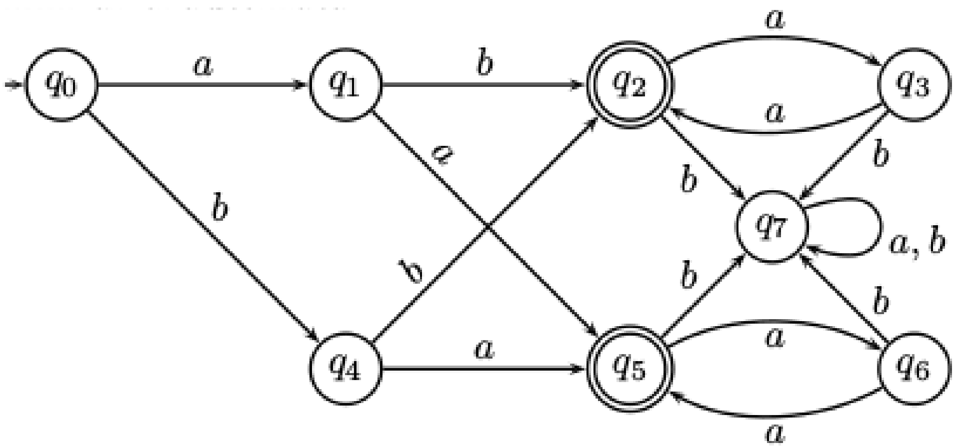

Figura 3: Autómata del enunciado

Podemos ver claramente que $q_1 \equiv q_4$, $q_2 \equiv q_5$ y $q_3 \equiv q_6$. Este es el autómata minimizado:

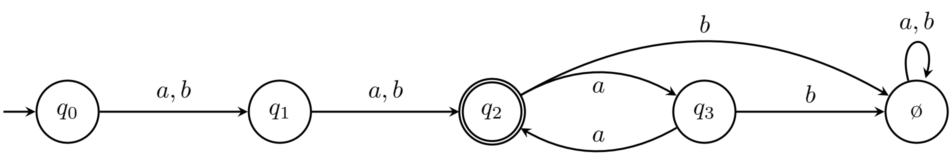

Figura 4: Autómata minimizado