

Entrega 3

José Antonio Álvarez

27 de diciembre de 2017

Ejercicio 13. Encuentra una gramática libre de contexto en forma normal de Chomsky que genere el siguiente lenguaje:

$$L = \{ucv : u, v \in \{0, 1\} \text{ y n}^\circ \text{ de subcadenas } 01 \text{ en } u \text{ es igual al n}^\circ \text{ de subcadenas } 10 \text{ en } v\}$$

Comprueba con el algoritmo **CYK** si la cadena $010c101$ pertenece al lenguaje generado por la gramática.

1. Gramática libre del contexto que genere el lenguaje:

$$S \rightarrow S_1AS_1|S_1BS_0|S_0CS_1|S_0DS_0|YXY$$

$$Y \rightarrow S_1|S_0|\varepsilon$$

$$S_0 \rightarrow 0|0S_0$$

$$S_1 \rightarrow 1|1S_1$$

$$A \rightarrow 1A|A1|B0|0C|X|c$$

$$B \rightarrow 1B|B0|0D|X|c$$

$$C \rightarrow 0C|C1|C0|X|c$$

$$D \rightarrow 0D|D0|X|c$$

$$X \rightarrow 01A10$$

Donde A siempre tendrá 1 a ambos lados; B , 1 a la izquierda y 0 a la derecha; C , 0 a la izquierda y 1 a la derecha; y por último D , 0 a ambos lados.

S y sus transiciones son introducidos (en vez de empezar directamente en A) para que tanto u como v no sean vacías.

Y ha sido incluida para aquellas palabras que del tipo $0001c10$, donde v (lo mismo para u con otras palabras) no está vacía pero no incluye ningún elemento además de la subcadena 10. Estas palabras no están contempladas si no incluimos este estado.

2. Gramática en forma normal de Chomsky que genere el lenguaje:

$$S \rightarrow S_1E_2|S_0E_3|YX|XY|S_0X_0$$

$$E_2 \rightarrow AS_1|BS_0$$

$$E_3 \rightarrow CS_1|DS_0$$

$$S_0 \rightarrow 0|S_0S_0$$

$$\begin{aligned}
S_1 &\rightarrow 1|S_1S_1 \\
A &\rightarrow S_1A|AS_1|BS_0|S_0C|S_0X_0|c \\
B &\rightarrow S_1B|BS_0|S_0D|S_0X_0|c \\
C &\rightarrow S_0C|CS_1|DS_0|S_0X_0|c \\
D &\rightarrow S_0D|DS_0|S_0X_0|c \\
X &\rightarrow S_0X_0 \\
X_0 &\rightarrow S_1X_1 \\
X_1 &\rightarrow AX_2 \\
X_2 &\rightarrow S_1S_0
\end{aligned}$$

3. Apliquemos ahora **CYK** para la cadena $010c010$:

Tabla 1: **CYK** - ejercicio 13

0	1	0	c	0	1	0
S_0	S_1	S_0	A, B, C, D	S_0	S_1	S_0
	X_2	A, B, C, D	A, B, C, D, E_2, E_3		X_2	
	A, B	S, A, B, C, D, E_2, E_3	A, C, E_-, E_3			
	S, A, B, E_2	S, A, C, E_2, E_3	X_1			
	S, A	X_1				
	X_0, X_1					
S						

Ejercicio 15. Encuentra una gramática libre de contexto en forma normal de Chomsky que genere los siguientes lenguaje definidos sobre el alfabeto $\{a, 0, 1\}$:

$$L_1 = \{auava : u, v \in \{0, 1\}^+ \text{ y } u^{-1} = v\}$$

$$L_2 = \{uvu : u, v \in \{0, 1\}^+ \text{ y } u^{-1} = v\}$$

Comprueba con el algoritmo **CYK** si la cadena $a0a0a$ pertenece a L_1 y la cadena 011001 pertenece al lenguaje L_2 .

1. Gramática libre del contexto que genera L_1 :

$$\begin{aligned}
S &\rightarrow aAa \\
A &\rightarrow XAX|a \\
X &\rightarrow 0|1
\end{aligned}$$

2. Gramática en forma normal de Chomsky que genera L_1 :

$$\begin{aligned}
S &\rightarrow AE_1 \\
E_1 &\rightarrow BA \\
A &\rightarrow a \\
B &\rightarrow XE_2|a \\
E_2 &\rightarrow BX \\
X &\rightarrow 0|1
\end{aligned}$$

3. Apliquemos ahora **CYK** para la cadena $a0a0a$:

Tabla 2: **CYK** - ejercicio 15

a	0	a	0	a
A, B	X	A, B	X	A, B
E_2		E_2		
	B			
	E_1			
S				

4. L_2 no es libre del contexto. Lo demostraremos utilizando el lema de bombeo y la cadena $f = 0^n 1^n 1^n 0^n 0^n 1^n$ (obviamente del lenguaje tomando $u = 0^n 1^n$) Reescribamos el lenguaje para que la prueba sea más sencilla:

$$L_2 = \{u_1 v u_2 : u_1, u_2, v \in \{0, 1\}^+, u_1^{-1} = v, u_1 = u_2\}$$

Aplicando el lema de bombeo, sea una descomposición de f de la forma $f = abcde$ donde $|bcd| \leq n$, $|b| \geq 1$ y $|d| \geq 1$. Llamemos $x = bcd$.

- a) Si x unicamente toma elementos de u_1 , no se cumple ni que $v = u_1$ ni que $u_1 = u_2$.
- b) Si x toma elementos tanto de u_1 como de v , entonces $x = 1^k, k \in \{1, \dots, n\}$. Bombeando unicamente unos, $u_1 \neq u_2$.
- c) Si x toma elementos tanto de v como de u_2 , entonces $x = 0^k, k \in \{1, \dots, n\}$. Bombeando unicamente ceros, $u_1 \neq u_2$.
- d) Finalmente, si x unicamente toma elementos de u_2 , no se cumple ni que $v = u_1$ ni que $u_1 = u_2$.

Por tanto el lenguaje no es libre del contexto. Es obvio entonces que no podemos encontrar una gramática en forma normal de Chomsky que lo genere. Como el algoritmo **CYK** unicamente se aplica a gramáticas de esta forma, no puedo aplicarlo. Aún así es obvio que la cadena 011001 pertenece al lenguaje (de hecho es f para $n = 1$).