José Antonio Álvarez Ocete
77553417Q
joseantonio.alvarezo@estudiante.uam.es

Entrega de problemas
Teoría de la Información

2021-11-04

**Ejercicio 1**

Calcula la entropía de una variable $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$.

Dada una variable aleatoria $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, utilizamos la fórmula de la entropía para una variable contínua:

$$
\begin{aligned}
H(X) = -\mathbb{E}[log(X)] &= -\int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot \log_2 \left( \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \right) dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}} f(x) \left( \log_2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} + \frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \log_2 e \right) dx \\
&= -\log_2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} f(x) dx}_{=1} + \frac{\log_2 e}{2\sigma^2} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} f(x)(x-\mu)^2 dx}_{=\sigma^2} \\
&= -\log_2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{2} \log_2 e \\
&= \log_2 \sigma\sqrt{2\pi} + \frac{1}{2} \log_2 e \\
&= \frac{1}{2} \log_2 2\pi\sigma^2 + \frac{1}{2} \log_2 e \\
&= \frac{1}{2} \log_2 (2\pi\sigma^2 e)
\end{aligned}
$$

□

**Ejercicio 2**

Prueba que la información mútua entre dos variables aleatorias es simétrica. Esto es, $MI(X, Y) = MI(Y, X)$ para cualesquiera variables aleatorias $X, Y$.

Lo probaremos para el caso discreto. Para el caso contínuo es equivalente utilizando la linealidad de la integral y los teoremas de Fubini y Tonelli. Utilizaremos el teorema de Bayes:

$$
P(A|B) = \frac{P(A|B)}{P(B)} \tag{1}
$$

Partimos de la información mútua entre $X$ e $Y$, y llegaremos a la recíproca.

$$
\begin{aligned}
MI(X, Y) &= -\sum_{x,y} P_{XY}(x, y) \log_2 \left( \frac{P_{X|Y}(x|y)}{P_X(x)} \right) \\
&\overset{(1)}{=} -\sum_{x,y} P_{XY}(x, y) \log_2 \left( \frac{P_{XY}(x, y)}{P_X(x) P_Y(y)} \right) \\
&\overset{(1)}{=} -\sum_{x,y} P_{XY}(x, y) \log_2 \left( \frac{P_{Y|X}(y|x)}{P_Y(y)} \right) = MI(Y, X)
\end{aligned}
$$

□

**Ejercicio 3**

Prueba la siguiente identidad entre información mútua y entropías: $MI(X,Y) = H(X) + H(Y) - H(X,Y)$.

Lo probaremos para el caso discreto. Para el caso contínuo es equivalente utilizando la linealidad de la integral y los teoremas de Fubini y Tonelli. Para este y otros ejercicios utilizaremos una igualdad que conviene probar por separado. Es la siguiente, fijado un $x \in X$:

$$\sum_y P_{XY}(x,y) = P_X(x) \tag{2}$$

Probar esta igualdad es sencillo:

$$\sum_y P_{XY}(x,y) \overset{(1)}{=} \sum_y P_{Y|X}(y|x) P_X(x) = P_X(x) \underbrace{\sum_y P_{Y|X}(y|x)}_{=1} = P_X(x)$$

Para demostrar la igualdad pedida, partimos de la información mútua y operamos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
MI(X,Y) &= -\sum_{x,y} P_{XY}(x,y) \log_2 \left( \frac{P_{XY}(x,y)}{P_X(x) P_Y(y)} \right) \\
&= -\sum_{x,y} P_{XY}(x,y) \Big( \log_2 P_{XY}(x,y) - \log_2 P_X(x) - \log_2 P_Y(y) \Big) \\
&= -\sum_{x,y} P_{XY}(x,y) \log_2 P_{XY}(x,y) + \sum_{x,y} P_{XY}(x,y) \log_2 P_X(x) + \sum_{x,y} P_{XY}(x,y) \log_2 P_Y(y) \\
&\overset{(2)}{=} -\sum_{x,y} P_{XY}(x,y) \log_2 P_{XY}(x,y) + \sum_x P_X(x) \log_2 P_X(x) + \sum_y P_Y(y) \log_2 P_Y(y) \\
&= -H(X,Y) + H(X) + H(Y)
\end{aligned}$$

$\square$

**Ejercicio 4**

Prueba las siguientes identidades.

- $H(X,Y) = H(X) + H(Y|X) = H(Y) + H(X|Y)$
- $MI(X,Y) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X)$
- $MI(X,X) = H(X)$

Probaremos estas igualdades para el caso discreto. Para el caso contínuo son equivalentes utilizando la linealidad de la integral y los teoremas de Fubini y Tonelli. Partimos de la entropía condicionada:

$$
\begin{aligned}
H(Y|X) &= -\sum_x P_X(x) \sum_y P_{Y|X}(y|x) \log_2 P_{Y|X}(y|x) \\
&\overset{(1)}{=} -\sum_x P_X(x) \sum_y \frac{P_{X,Y}(x,y)}{P_X(x)} \log_2 \frac{P_{X,Y}(x,y)}{P_X(x)} \\
&= -\sum_x \frac{P_X(x)}{P_X(x)} \sum_y P_{X,Y}(x,y) \Big( \log_2 P_{X,Y}(x,y) - \log_2 P_X(x) \Big) \\
&= -\sum_{x,y} P_{X,Y}(x,y) \Big( \log_2 P_{X,Y}(x,y) - \log_2 P_X(x) \Big) \\
&= -\sum_{x,y} P_{X,Y}(x,y) \log_2 P_{X,Y}(x,y) + \sum_{x,y} P_{X,Y}(x,y) \log_2 P_X(x) \\
&\overset{(2)}{=} -\sum_{x,y} P_{X,Y}(x,y) \log_2 P_{X,Y}(x,y) + \sum_x P_X(x) \log_2 P_X(x) \\
&= H(X,Y) - H(X)
\end{aligned}
$$

Pasamos $H(X)$ al otro miembro sumando y obtenemos la primera igualdad buscada:

$$
H(X,Y) = H(X) + H(Y|X) \tag{3}
$$

□

Para probar la segunda igualdad haremos uso de la primera:

$$
\begin{aligned}
MI(X,Y) &= H(X) + H(Y) - H(X,Y) \\
&\overset{(3)}{=} H(X) + H(Y) - (H(Y) + H(X|Y)) \\
&= H(X) - H(X|Y)
\end{aligned}
$$

□

Para probar la tercera igualdad necesitaremos un hacer uso de un resultado intermedio: La entropía de una variable aleatoria condicionada a sí misma es nula. Esto encaja con nuestra intuición, pues al fijar una variable aleatoria, la sorpresa asociada a la medición de la misma es trivial. Probemos este resultado intermedio:

$$
\begin{aligned}
H(X|X) &= -\sum_{x_1} P_X(x_1) \sum_{x_2} P_{X|X}(x_2|x_1) \log_2 P_{X|X}(x_2|x_1) \\
&= -\sum_{x_1} P_X(x_1) P_{X|X}(x_1|x_1) \underbrace{\log_2 P_{X|X}(x_1|x_1)}_{=0} = 0
\end{aligned}
$$

Donde hemos usado que:

$$
P_{X|X}(x_2|x_1) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_1 \neq x_2 \\ 1 & \text{si } x_1 = x_2 \end{cases}
$$

Conociendo este resultado, probar la igualdad pedida es sencillo:

$$
\begin{aligned}
MI(X,X) &= H(X) + H(X) - H(X,X) \\
&\overset{(3)}{=} 2H(X) - (H(X) - \underbrace{H(X|X)}_{=0}) = H(X)
\end{aligned}
$$

□

**Ejercicio 5**

TODO

**Ejercicio 6**

Prueba la siguiente identidad: $H(X, Y|Z) = H(X|Z) + H(Y|X, Z)$.

Lo probaremos para el caso discreto. Para el caso contínuo es equivalente utilizando la linealidad de la integral y los teoremas de Fubini y Tonelli. Haremos uso del teorema de Bayes para varias variables:

$$P(A, B|C) = P(A|C) \cdot P(B|A, C) \tag{4}$$

Recordemos las definiciones de entropías para varias variables que aparecen en el enunciado:

$$\begin{aligned}
H(X, Y|Z) &= -\sum_{x,y,z} P_{XYZ}(x, y, z) \log_2 P_{XY|Z}(x, y|z) \\
H(X|Z) &= -\sum_{z} P_Z(z) \sum_{x} P_{X|Z}(x|z) \log_2 P_{X|Z}(x|z) \\
H(Y|X, Z) &= -\sum_{x,z} P_{XZ}(x, z) \sum_{y} P_{Y|XZ}(y|x, z) \log_2 P_{Y|XZ}(y|x, z)
\end{aligned}$$

Obtenemos la siguiente cadena de igualdades:

$$\begin{aligned}
H(X, Y|Z) &= -\sum_{x,y,z} P_{XYZ}(x, y, z) \log_2 P_{XY|Z}(x, y|z) \\
&\overset{(4)}{=} -\sum_{x,y,z} P_{XYZ}(x, y, z) \log_2 \Big(P_{X|Z}(x|z) \cdot P_{Y|XZ}(y|x, z)\Big) \\
&= -\sum_{x,y,z} P_{XYZ}(x, y, z) \Big(\log_2 P_{X|Z}(x|z) + \log_2 P_{Y|XZ}(y|x, z)\Big) \\
&= \underbrace{-\sum_{x,y,z} P_{XYZ}(x, y, z) \log_2 P_{X|Z}(x|z)}_{(A)} \underbrace{- \sum_{x,y,z} P_{XYZ}(x, y, z) \log_2 P_{Y|XZ}(y|x, z)}_{(B)}
\end{aligned}$$

Resta probar que los términos $(A)$ y $(B)$ son $H(X|Z)$ y $H(Y|X, Z)$ respectivamente:

$$\begin{aligned}
(A) &= -\sum_{x,y,z} P_{XYZ}(x, y, z) \log_2 P_{X|Z}(x|z) \\
&= -\sum_{x,z} \log_2 P_{X|Z}(x|z) \sum_{y} P_{XYZ}(x, y, z) \\
&\overset{(2)}{=} -\sum_{x,z} P_{XZ}(x, z) \log_2 P_{X|Z}(x|z) \\
&\overset{(1)}{=} -\sum_{x,z} P_{X|Z}(x|z) P_Z(z) \log_2 P_{X|Z}(x|z) \\
&= -\sum_{z} P_Z(z) \sum_{x} P_{X|Z}(x|z) \log_2 P_{X|Z}(x|z) = H(X|Z)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(B) &= -\sum_{x,y,z} P_{XYZ}(x, y, z) \log_2 P_{Y|XZ}(y|x, z) \\
&\overset{(1)}{=} -\sum_{x,y,z} P_{Y|XZ}(y|x, z) P_{XZ}(x, z) \log_2 P_{Y|XZ}(y|x, z) \\
&= -\sum_{x,z} P_{XZ}(x, z) \sum_{y} P_{Y|XZ}(y|x, z) \log_2 P_{Y|XZ}(y|x, z) = H(Y|X, Z)
\end{aligned}$$

$\square$