Stochastic Systems --- Discrete Time Systems

Ejercicios --- Conjunto final

Fecha de entrega: 13 de Diciembre de 2021

I.

En los apuntes hay el ejemplo del *gambler's ruin* como cadena de Markov. Hacer un gráfico del número medio de jugadas que el jugador puede hacer antes de arruinarse en función del dinero inicial. En cada jugada se juega 1 Euro, y el juego es ecuo (el jugador tiene una probabilidad 1/2 de ganar).

Estimar media y varianza (usar unas 20 ejecuciones... deberían ser más que suficientes) considerando un dinero inicial de $1, \dots, 50$ Euros. Indicar media y varianza. ¿Cómo varian la media y la varianza cuando aumenta el dinero inicial? Dar una estimación de la función $T(e)$ que da el tiempo medio necesario para arruinarse en función de la cantidad inicial de dinero, e. Según esta función, ¿cuánto tarda el jugador en arruinarse si empipeza a jugar con 200 Euros?

III.

a. Crear cuatro sistemas dinámicos del tipo

$$x_{t+1} = \mathbf{A}x_t + \mathbf{B}u_t + w_t z_t \quad = \mathbf{C}x_t + v_t \tag{1}$$

con $x_t \in \mathbb{R}^4$, $u_t \in \mathbb{R}$, $z_t \in \mathbb{R}^2$, y

$$\begin{aligned} \mathbb{B} &= [1, 1, 1, 1]' \\ \mathbb{C} &= \left[\begin{array}{c} 1, 0, 0, 0 \\ 0, 1, 0, 0 \end{array} \right] \end{aligned} \tag{2}$$

Los sistema se distinguen por la matrix $\mathbf{A}$, que es, por cada sistema una de las cuatro matrices generadas usando la función mk_mat (en el fichero kalman_aux) a partir de las siguientes listas de autovalores:

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= [0.2, 0.1, 0.0, -0.1] \\ \Lambda_2 &= [0.99, 0.1, 0.0, -0.1] \\ \Lambda_3 &= [1, 0.1, 0.0, -0.1] \\ \Lambda_4 &= [0.2, 0.1, 0.0, -1] \end{aligned} \tag{3}$$

Los ruidos $w_t \in \mathbb{R}^4$ y $v_t \in \mathbb{R}^2$ son gausiano y tienen matrices de covarianza

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \sigma_w^2 \mathbf{I}_4 \\ \mathbf{R} &= \sigma_v^2 \mathbf{I}_2 \end{aligned} \tag{4}$$

donde $\mathbf{I}_n$ es la matriz identidad de órden n.

El fichero kalman_aux.py define las matrices $\mathbb{B}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$, y proporciona la función mk_mat para crear la matriz $\mathbb{A}$ dada la lista de autovalores[1]

b. Por cada uno de los sistemas generados, crear un filtro de Kalman para estimar el estado de este sistema utilizando como función de input la función

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 50 \\ 1 & t > 50 \end{cases}$$

(el fichero también contiene una función auxiliaria u_f(t) que define la función).

Se haga la simulación con $t = 0, \ldots, 99$ y se dibuje un gráfico del error relativo

$$e(t) = \sum_{k=1}^{t} \frac{\|\hat{x}_t - x_t\|^2}{\|x_t\|^2} \tag{5}$$

c. Discutir como los autovalores afectan el error.

Nota. La presencia de u_t supone un pequeño cambio en la ecuación que calcula $\bar{x}_{t+1}$. La recursión del filtro es:

Compute the Kalman Gain	$K_t = \bar{\mathbf{P}}_t\mathbf{C}'(\mathbf{C}\bar{\mathbf{P}}_t\mathbf{C}' + \mathbf{R})^{-1}$
Update the estimate	$\hat{x}_t = \bar{x}_t + K_t(z_t - \mathbf{C}\bar{x}_t)$
Update the covariance	$\mathbf{P}_t = (\mathbf{I} - K_t\mathbf{C})\bar{\mathbf{P}}_t$
Compute the priors	$\bar{x}_{t+1} = \mathbf{A}\bar{x}_t + \mathbf{B}u_t$
	$\bar{\mathbf{P}}_{t+1} = \mathbf{A}\mathbf{P}_t\mathbf{A}' + \mathbf{Q}$

La ecuación de K_t supone una inversión de una matriz. En este caso de trata de una matrix 2×2, por tanto no debería suponer problemas. Se puede hacer a mano:

$$\left[\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right]^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\left[\begin{array}{cc} d & -b \\ -c & a \end{array}\right] \tag{6}$$

o, para los vagos que aman usar librerías incluso cuando no hacen falta, usando numpy. También se puede transformar la ecuación en un sistema lineal

$$K_t(\mathbf{C}\bar{\mathbf{P}}_t\mathbf{C}' + \mathbf{R}) = \bar{\mathbf{P}}_t\mathbf{C}'$$

donde K_t es la incógnita. Esta manera de calcular es en general más estable, pero en este caso lo más sencillo es probablemente invertir la matrix.

[1] La matriz $\mathbb{A}$ tiene autovectores generados aleatoriamente, por tanto cada llamada a la función con los mismos autovalores generará matriz diferentes que tienen esos autovalores.