José Antonio Álvarez Ocete
77553417Q
joseantonio.alvarezo@estudiante.uam.es

Ejercicio 2.

Enunciado. Sea $X_1, \dots, X_n$ una muestra de n observaciones *iid* de una distribución F con esperanza μ y varianza σ^2, y sea $X_1^*, \dots, X_n^*$ una muestra de n observaciones de la distribución empírica de la muestra original F_n. Calcula las siguientes cantidades:

a) $\mathbb{E}_{F_n}(\bar{X}_n^*) := \mathbb{E}(\bar{X}_n^* | X_1, \dots, X_n)$
Esta esperanza nos supone un cálculo directo utilizando la linealidad de la esperanza:

$$\mathbb{E}_{F_n}(\bar{X}_n^*) = \mathbb{E}_{F_n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^*\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}_{F_n}(X_i^*) \overset{\text{iid}}{=} \frac{1}{n} \cdot n\, \mathbb{E}_{F_n}(X_1^*) = \bar{x}$$

b) $\mathbb{E}_F(\bar{X}_n^*)$
Por un proceso análogo al anterior podemos obtener que:

$$\mathbb{E}_F(\bar{X}_n^*) = \mathbb{E}_F\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^*\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}_F(X_i^*) \overset{\text{iid}}{=} \frac{1}{n} \cdot n\, \mathbb{E}_F(X_1^*) = \mathbb{E}_F(X_1^*)$$

Sin embargo, $\mathbb{E}_F(X_1^*)$ no se puede calcular directamente pues depende de la muestra tomada $X_1, \dots, X_n$. Podemos utilizar la **ley de la esperanza iterada**$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X))$ y el valor calculado en el apartado anterior:

$$\mathbb{E}_F(X_1^*) = \mathbb{E}_F(\mathbb{E}(X_1^*|X_1, \dots, X_n)) = \mathbb{E}_F(\mathbb{E}_{F_n}(X_1^*)) = \mathbb{E}_F(\bar{x}) = \mu$$

c) $\text{Var}_{F_n}(\bar{X}_n^*) := Var(\bar{X}_n^*|X_1, \dots, X_n)$
Expresaremos esta varianza en función de la varianza muestra insesgada:

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_i x_i^2 - n\bar{x}^2\right) = \frac{n}{n-1}\left(\frac{1}{n}\sum_i x_i^2 - \bar{x}^2\right)$$

Al ser insesgada, sabemos que $\mathbb{E}[s^2] = \sigma^2$. Esto nos será útil en el último apartado. Procedamos con el cálculo de la varianza:

$$\begin{aligned}
\text{Var}_{F_n}(\bar{X}_n^*) &\overset{\text{iid}}{=} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \text{Var}_{F_n}(X_i^*) \\
&\overset{\text{iid}}{=} \frac{1}{n^2} \cdot n\, \text{Var}_{F_n}(X_1^*) \\
&= \frac{1}{n}\left(\mathbb{E}_{F_n}(X_1^{*2}) - \mathbb{E}_{F_n}(X_1^*)^2\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{x}^2\right) \\
&= \frac{n-1}{n^2}\underbrace{\frac{n}{n-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{x}^2\right)}_{s^2} \\
&= \frac{n-1}{n^2}s^2
\end{aligned}$$

d) $Var_F(\bar{X}_n^*)$

Para este último apartado haremos uso de la **ley de la varianza total**:

$$\text{Var}(Y) = \mathbb{E}(\text{Var}(Y|X)) + \text{Var}(\mathbb{E}(Y|X))$$

Procedemos con el cálculo de la varianza:

$$\begin{aligned}
\text{Var}_F(\bar{X}_n^*) &= \mathbb{E}_F(\underbrace{\text{Var}_{F_n}(\bar{X}^*)}_{\frac{n-1}{n^2}s^2}) + \text{Var}_F(\underbrace{\mathbb{E}_{F_n}(\bar{X}^*)}_{\bar{x}}) \\
&= \frac{n-1}{n^2}\mathbb{E}_F(s^2) + \text{Var}_F(\bar{x}) \\
&\overset{\text{iid}}{=} \frac{n-1}{n^2}\sigma^2 + \frac{1}{n}\text{Var}_F(X_1) \\
&= \frac{n-1}{n^2}\sigma^2 + \frac{1}{n}\sigma^2 \\
&= \frac{2n-1}{n^2}\sigma^2
\end{aligned}$$