Examen de Procesos Estocásticos 2020-2021. [entrega: 2021/01/13, 20:00]

**Apellidos:** **Nombre:**
**Grupo:**

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | T |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | |

- **El trabajo debe ser individual. No obstante, se permite utilizar el material del curso, así como información, excepto código, de otras fuentes.**
- Para que la entrega sea válida es necesario rellenar la declaración de autoría, firmarla y entregarla.
- El examen comprende 4 ejercicios, siendo el último opcional.
- El plazo de realización del examen es de 9:00 a 20:00.
- Se permite la entrega hasta las 20:30.
- La entrega consiste en un único fichero .zip, con el siguiente nombre

  `<apellido1>_<apellido2>_<nombre>_PE_2020_2021.zip`

  No utilicéis espacios, mayúsculas, o tildes. Por ejemplo,

  `suarez_gonzalez_alberto_PE_2020_2021.zip`

  Este fichero comprimido debe incluir, al menos, los siguientes ficheros:

  – Un único fichero en formato *pdf* con las soluciones de los ejercicios que requieran alguna explicación o derivación. Puede ser escaneado a partir de un documento manuscrito. Los apartados a los que se debe responder en este fichero aparecen en el examen indicados como [PDF].

  – Cuaderno (*notebook*) de python con las soluciones de ejercicios que requieran gráficas, simulaciones, etc. Los apartados a los que se debe responder en este cuaderno aparecen en el examen indicados como [IPYNB]. En lugar del PDF, las derivaciones se pueden realizar en celdas de tipo *markdown* dentro del cuaderno de python.

  – Fichero .py en el que se incluyen las funciones que es necesario elaborar para realizar simulaciones. Los apartados a los que se debe responder en este fichero aparecen en el examen indicados como [PY].

  – Otros ficheros .py necesarios para se pueda ejecutar el código del cuaderno de python.

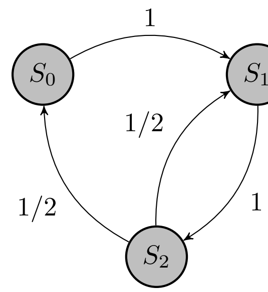
  – La declaración de autoría rellena y firmada. La firma puede ser escaneada.

  Se proporcionan plantillas tanto para el cuaderno de python como para el fichero .py.

  Algunos de los ejercicios están respondidos parcialmente en el cuaderno. Se trata de guías que proporcionan indicaciones sobre cómo responder a los apartados siguientes.

- **Indicad vuestro nombre y apellidos y fecha de realización al principio de todos los ficheros entregados [PDF, IPYNB & PI].**

1. Consideremos el diagrama de transiciones de una cadena de Markov.




Suponiendo que se trata de una cadena de Markov en tiempo continuo con $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 3$.

(a) Escribe la matriz de transiciones para el proceso de saltos subyacente (*jump process*). [PDF o IPYNB]

(b) Deriva la distribución estacionaria para el proceso de saltos. [PDF o IPYNB]

(c) Deriva la distribución estacionaria para la cadena de Markov en tiempo continuo. [PDF o IPYNB]

(d) Deriva el correspondiente generador infinitesimal. [PDF o IPYNB]

(e) A partir del generador infinitesimal deriva la distribucón estacionaria del proceso y compárala con el resultado anterior. [PDF o IPYNB]

(f) Simula trayectorias del proceso para suponiendo que en el instante $t = 0$ el sistema se encuentra en el estado $S_0 = 0$. [PY & IPYNB]

(g) Utilizando la secuencia de estados de la cadena de Markov en el régimen estacionario:

i. Estima la distribución estacionaria del proceso de saltos subyacente a partir de una única trayectoria de la cadena de Markov en tiempo continuo. [IPYNB]

ii. Estima la distribución estacionaria de la cadena de Markov en tiempo continuo a partir de una única trayectoria del proceso. [IPYNB]

iii. Estima la distribución de la cadena de Markov en tiempo continuo en el límite $t \to \infty$ a partir de los estados finales en $M = 1000$ trayectorias simuladas. [IPYNB]

iv. Comenta los resultados de los apartados anteriores. [IPYNB]

(h) ¿Coinciden las distribuciones estacionarias de una cadena de Markov en tiempo discreto con el mismo diagrama de transición y la derivada para el proceso en tiempo continuo? En caso de que coincidan indica la razón. En caso de que no coincidan, define una cadena de Markov en tiempo continuo con el mismo diagrama de transiciones que tenga la misma distribución estacionaria que la correspondiente en tiempo discreto. [IPYNB]

2. Consideremos el puente browniano estándar, $BB_{std}(t)$, definido en $[0,1]$, con $BB_{std}(0) = BB_{std}(1) = 0$, y $\sigma = 1$. La evolución de $BB_{std}(t)$ se puede expresar en función de un proceso de Wiener (browniano estándar), $BB_{std}(t) = W(t) - W(1)t$

   (a) Deriva el valor esperado del proceso: $m(t) = \mathbb{E}\left[BB_{std}(t)\right]$.

   (b) Deriva la función de autocovarianzas

   $$\gamma(s,t) = \mathbb{E}\left[\left(BB_{std}(s) - \mathbb{E}\left[BB_{std}(s)\right]\right)\left(BB_{std}(t)\right] - \mathbb{E}\left[BB_{std}(t)\right]\right).$$

   (a) Deriva las expresiones de la función de media $m(t)$ y de la función de autocovarianzas $\gamma(s,t)$ para un puente robwniano en $[t_0, t_1]$ con $BB(t_0) = BB_0$, $BB(t_1) = BB_1$, sabiendo que

   $$BB(t) = B(t) + (BB_1 - B(t_1))\frac{t - t_0}{t_1 - t_0},$$

   donde $B(t)$ es un browniano con $\mu = 0$, $\sigma > 0$, y $B(t_0) = BB_0$. [PDF o IPYNB]

   (b) Estima el valor de las autocovarianzas $\gamma(t, t_{ref})$ de un puente browniano en $[4.0, 7.0]$, de forma $BB(t_0 = 4.0) = 1.0$, $BB(t_1 = 7.0) = 3.0$ y $\sigma = 2.0$, para $t_{ref} = 5.3$ a partir de una simulación de $M$ trayectorias en $N = 100$ pasos de tiempo. El número de trayectorias simuladas debe ser suficientemente grande, de forma que las estimaciones de los estadísticos a calcular sea precisa. [PY & IPYNB]

3. Consideremos una cantidad $\sigma(t)$, cuya evolución temporal está descrita por la ecuación diferencial estocástica

$$
\begin{aligned}
d\sigma(t) &= -\alpha(\sigma(t) - \sigma_\infty)dt + \xi dW(t), \quad \alpha > 0, && (1) \\
\sigma(t_0) &= \sigma_0, && (2)
\end{aligned}
$$

donde $\alpha > 0$, $\xi > 0$ y $W(t)$ es un proceso de Wiener.

(a) Escribe la ecuación diferencial estocástica para $X(t) = \sigma(t) - \sigma_\infty$.

(b) A partir de esta ecuación diferencial estocástica, deriva una ecuación diferencial ordinaria para $\mathbb{E}[X(t)]$ y obtén su solución por el método de separación de variables para un proceso cuyo valor en el instante $t_0$ es $X_0 = \sigma_0 - \sigma_\infty$.

(c) A partir de la expresión obtenida para $\mathbb{E}[X(t)]$, deriva la solución para $\mathbb{E}[\sigma(t)]$.

(d) Utilizando el lema de Itō, deriva una ecuación diferencial estocástica para $Y(t) = X^2(t)$. [PDF o IPYNB]

(e) A partir de esta ecuación, deriva una ecuación diferencial ordinaria para $\mathbb{E}[Y(t)]$ y obtén su solución por el método de separación de variables para un proceso cuyo valor en el instante $t_0$ es $Y_0 = X_0^2$. [PDF o IPYNB]

(f) A partir de la expresión obtenida en los apartados anteriores, deriva la solución para $\mathrm{Var}[\sigma(t)]$. [PDF o IPYNB]

(g) Deriva para este proceso la expresión de la densidad de probabilidad

$$\mathrm{pdf}\left(\sigma(t) = \sigma \,|\, \sigma(t_0) = \sigma_0\right). \tag{3}$$

[PDF o IPYNB]

(h) Utiliza el método de Euler estocástico para simular $M = 10000$ trayectorias con $N = 100$ subintervalos de tiempo en $[t_0, t_0 + T]$ con $t_0 = 2.5$ y $T = 17.5$. Los parámetros del proceso son $\sigma_0 = 2.0,\ \sigma_\infty = 0.5,\ \alpha = 0.3,\ \xi = 0.2$. [PY & IPYNB]

i. Haz una gráfica para la evolución de 50 de entre las trayectorias simuladas. [IPYNB]

ii. Sobre la gráfica anterior dibuja la evolución de la media sobre la muestra de $M \gg 50$ trayectorias simuladas y del intervalo que, en promedio, incluye al 99% de las trayectorias. [IPYNB]

iii. Haz una gráfica comparando la evolución de la estimación muestral de media (es decir, el promedio sobre las trayectorias simuladas) y el valor teórico (es decir, $\mathbb{E}[\sigma(t)]$). [IPYNB]

iv. Haz una gráfica comparando la evolución de la estimación muestral de la desviación estándar y el valor teórico (es decir, $\mathrm{std}[\sigma(t)]$).[IPYNB]

v. Haz una gráfica de la pdf empírica (histograma normalizado) de $\sigma(t)$ en el límite $t \to \infty$ y compáralo con la pdf teórica

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{pdf}\left(\sigma(t) = \sigma \,|\, \sigma(t_0) = \sigma_0\right). \tag{4}$$

[IPYNB]

4. Valoración de productos derivados dentro del modelo Black-Scholes

   [**punto extra. Sencillo, a pesar de lo largo del enunciado**].

   El campo de las finanzas cuantitativas se encuentra entre las áreas de aplicación más importantes de los procesos estocásticos. En concreto, se utilizan para la estimación de riesgos. Por ejemplo, para realizar los test de estrés para los bancos comerciales que periódicamente realiza el Banco Central Europeo y que determinan la capacidad de dichos bancos para hacer frente a una crisis.

   Otra aplicación importante en esta área es la valoración (es decir, la estimación del precio) de un producto derivado. En finanzas, un producto derivado consiste en una transacción que involucra el precio de un activo (el subyacente; por ejemplo, acciones) en el futuro. Muchos de estos productos son opciones. En una opción el comprador adquiere el derecho a realizar una transacción que involucra al subyacente en el futuro, pero cuyas condiciones se especifican en el presente ($t_0$).

   En una opción europea el comprador debe elegir ejercer o no dicha opción a vencimiento, en $t_0 + T$. El producto es de tipo americano si este derecho puede ser ejercido en cualquier momento durante la vida de la opción ($[t_0, t_0 + T]$). Las opciones de tipo vainilla son productos con condiciones estandarizadas, que únicamente involucran comprar (*call*) o vender (*put*) a vencimiento (en $t_0 + T$) una cantidad especificada de subyacente, a un precio también prefijado (el precio de ejercicio, $K$).

   Las especificaciones de las opciones exóticas son más complejas. Ejemplos de exóticas son las opciones con barrera, en las que el derecho a realizar la transacción depende de si el subyacente ha alcanzado una determinada cota (por arriba o por abajo) durante el tiempo de vida de la opción. Otro tipo de exóticas son las asiáticas, en las que el pago que se realiza a vencimiento depende de toda la trayectoria del subyacente, no solo de su precio final. Ejemplos de asiáticas son aquellas en las que los pagos se realizan en función de la media aritmética de precios del producto durante el tiempo de vida de la opción.

   En este ejercicio, vamos a valorar una *call* europea para un subyacente cuyo precio de mercado a tiempo $t_0$ es $S(t_0)$. Para simular la evolución futura del subyacente, se utiliza el modelo de Black-Scholes. En este modelo se asume que el precio del subyacente sigue un browniano geométrico. Es decir, un posible valor para precio de mercado del subyacente a tiempo $t_0 + \Delta T$, en el futuro, es

   $$S(t_0 + \Delta T) = S_0 \exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta T + \sigma\sqrt{\Delta T}Z\right\}, \quad Z \sim N(0,1),$$

   donde $S(t_0) = S_0$ es el precio actual, $\mu$ es el rendimiento esperado y $\sigma$ es la volatilidad del subyacente. En la valoración la simulación se realiza en la medida de riesgo neutro, por lo que en la expresión del browniano geométrico, en lugar de $\mu$ se utiliza $r$, el tipo de interés libre de riesgo (por ejempo, el Euríbor).

   En este tipo de opción, el comprador adtquiere en $t_0$ el derecho a comprar en tiemp $t_0 + T$ (vencimiento) una cantidad especificada del subyacente a un precio $K$.

   Dado que se trata de un derecho y no de una obligación, a vencimiento tenemos que considerar dos situaciones:

   - En el caso de que $S(t_0+T) > K$, el comprador ejercería su derecho de compra del subyacente al precio $K$ (el precio de ejercicio), e inmediatamente lo vendería al precio de mercado $S(t_0 + T)$, obteniendo un beneficio $S(t_0 + T) - K$.
   - En el caso de que $S(t_0 + T) < K$, el comprador no ejercería su derecho de compra.

   En resumen, el pago a vencimiento sería

   $$\text{Pago}(S(t_0 + T; Z)) = \max\left(S(t_0 + T; Z)) - K, 0\right).$$

   En la expresión anterior, hemos hecho explícito el hecho de que el pago es una variable aleatoria, que depende del valor de $Z \sim N(0,1)$.

   El precio que tiene la adquisición de este derecho es

   $$\text{Precio}(S(t_0 + T; Z)) = e^{-rT}\mathbb{E}_Z\left[\text{Pago}(S(t_0 + T; Z))\right],$$

   donde $e^{-rT}$ es el factor de descuento, que refleja la pérdida de valor del dinero con el tiempo.

   El ejercicio a realizar consiste en calcular este precio de dos maneras:

   (a) Mediante una cuadratura (integral) numérica

   $$\text{Precio}(S(t_0 + T)) = e^{-rT}\int_{-\infty}^{\infty} \text{Pago}(S(t_0 + T; z))\text{normpdf}(z)dz,$$

(b) Mediante el método de Monte Carlo (MC), a partir de una simulación de $M$ trayectorias de un browniano geométrico

$$\left\{ S^{(m)}(t_0), S^{(m)}(t_1), \dots S^{(m)}(t_N) \right\}_{m=1}^{M},$$

con $\{t_n = t_0 + n\Delta T\}_{n=0}^{N}$ y $\Delta T = \frac{T}{N}$. En términos de las simulaciones realizadas, el precio de esta opción es el promedio de los pagos descontados

$$\text{Precio}_{MC}^{[M]}(S(t_0+T)) = e^{-rT} \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} \text{Pago}\left( S^{(m)}(t_0+T) \right).$$

Observemos que $\text{Precio}_{MC}^{[M]}(S(t_0+T))$ es una variable aleatoria que resulta de promediar sobre una muestra de $M$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, cuya varianza es finita y no nula. Por el teorema del límite central, en el límite $M \to \infty$, la distribución de esta variable aleatoria tiende a una normal cuya media es el precio de la opción

$$\lim_{M\to\infty} \text{Precio}_{MC}^{[M]}(S(t_0+T)) = \text{Precio}(S(t_0+T)),$$

y cuya varianza es

$$\text{Var}\left[ \text{Precio}_{MC}^{[M]}(S(t_0+T)) \right] \sim \frac{1}{M} \text{Var}\left[ e^{-rT} \left\{ \text{Pago}\left( S^{(m)}(t_0+T) \right) \right\}_{m=1}^{M} \right].$$

Se puede, por tanto, cuantificar el error de la estimación Monte Carlo como un valor proporcional a la desviación estándard correspondiente

$$\text{Error}_{MC}^{[M]} \propto \text{Stdev}\left[ Precio_{MC}^{[M]}(S(t_0+T)) \right] = e^{-rT} \frac{1}{\sqrt{M}} \text{Stdev}\left[ \left\{ \text{Pago}\left( S^{(m)}(t_0+T) \right) \right\}_{m=1}^{M} \right].$$

Los prototipos de las funciones se hallan en el fichero que se ha publicado junto a este enunciado. [PY & IPYNB]