# Práctica 2 – La Transformada de Fourier en Tiempo Discreto (DTFT): Modulación y Enventanado.



| Primer Apellido | Segundo Apellido | Nombre | Grupo | |
|---|---|---|---|---|
| Álvarez | Ocete | José Antonio | **Puesto** | |
| Sáez | Maldonado | Francisco Javier | **Fecha** | |



El objetivo de esta práctica es mostrar la utilidad práctica de algunas de las propiedades de la DTFT. En concreto se mostrará la utilidad de las propiedades de modulación y enventanado de la DTFT.

## 1. Introducción

La representación de Fourier de una señal a través de la DTFT directa e inversa es un punto clave del análisis de señales. Las siguientes ecuaciones son las ecuaciones de análisis y síntesis, respectivamente.

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

De forma similar, la respuesta en frecuencia de un sistema, que es la DTFT de la respuesta al impulso, proporciona una descripción concisa de un sistema LTI considerado como un filtro. La DTFT es una función compleja periódica en ω de periodo 2π. El periodo que se suele considerar es el que va de -π a +π.

En el contexto de MATLAB, donde la computabilidad es muy importante, la DTFT presenta dos problemas:

1. Su definición es válida para señales infinitamente largas.
2. Es una función de una variable continua ω.

El primer problema es un problema porque cualquier vector o señal en MATLAB debe ser de longitud finita. Tenemos, por tanto, el problema de que MATLAB no va a ser capaz de calcular la DTFT de una señal de duración infinita.

El segundo problema se resuelve, como todo problema de señales continuas en MATLAB, mediante muestreado de la DTFT en un número finito de puntos de frecuencia. Normalmente podemos elegir un número elevado de frecuencias, de forma que nuestros gráficos resulten aproximaciones suficientemente suaves a la verdadera DTFT. La mejor opción para una computación eficiente es un conjunto de puntos equiespaciados en el intervalo de -π a +π. Con este muestreo la DTFT directa queda como:

$$X(e^{j\omega_k}) = X(e^{j\frac{2\pi k}{N}}) = \sum_{n=0}^{L-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi k}{N}n}, \quad k = 0, \ldots, N-1$$

La periodicidad de la DTFT implica que los valores entre $-\pi$ y 0 son los correspondientes a $k>N/2$.

La fórmula anterior es computable porque es una suma finita de términos evaluada en un número finito de frecuencias $\omega_k=2k\pi/N$. Para aplicar esta fórmula, la longitud de la señal debe ser finita y de duración inferior o igual a L.

Al muestrear la DTFT asumiremos que vamos a calcular la DTFT en más frecuencias que puntos tenía la señal original, es decir que siempre supondremos que N>=L.

## 2. Función para calcular la DTFT (Resultado: `dtft.m`)

En Matlab sólo podemos calcular un muestreo de la DTFT, y eso se calcula de forma muy eficiente mediante un algoritmo que se conoce como Fast Fourier Transform (FFT). Para ello generaremos una función `dtft(h,N)` que calcule la DTFT de una secuencia h en N puntos de frecuencia.

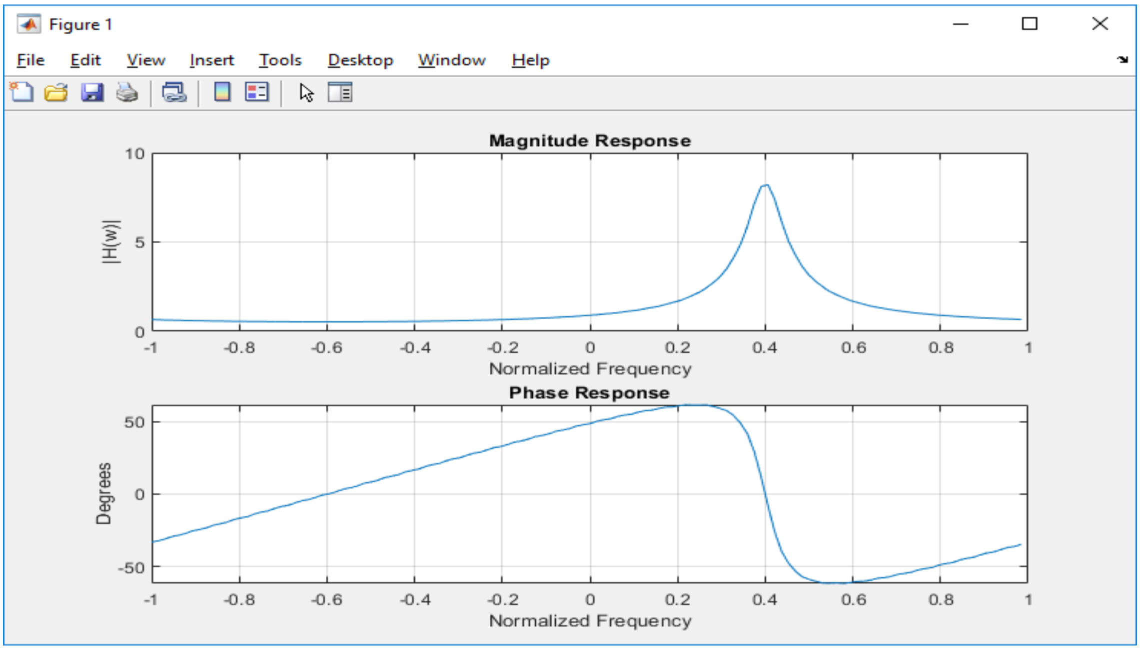
A continuación aparece la función que debemos escribir (para evitar perder el tiempo copiando esta función se puede descargar de la página Moodle de la asignatura, pero conviene al menos leer la función para tener una idea de cómo funciona):

```
function [H,W] = dtft( h, N )
%DTFT calculate DTFT at N equally spaced frecuencies
%   usage: H = dtft( h, N )
%       h: finite-length input vector, whose length is L
%       N: number of frequencies for evaluation over [-pi, pi)
%         ==> constraint: N>=L
%
%       H: DTFT values (complex)
%       W: (2nd output) vector of freqs where DTFT is computed
%
N=fix(N);
L=length(h) ; h=h( : ); %<-- for vectors ONLY!!!
if (N<L)
  error('DTFT: # data samples cannot exceed # freq samples')
end
W = (2*pi/N) * [0:(N-1)]';
mid=ceil(N/2) + 1;
W(mid:N)=W(mid:N)-2*pi; %<-- move [pi, 2pi) to [-pi, 0)
W=fftshift(W);
H=fftshift(fft(h,N)); %<-- move negative freq components.
```

Observe que no es necesario proporcionar la longitud de la señal de entrada. Se obtiene directamente de la señal. Como la DTFT es periódica, la región de $\pi$ a $2\pi$ se transforma en la región de $-\pi$ a 0. La función `fftshift` de MATLAB permite hacer esa transformación de frecuencias y de valores de la DTFT.

## 3. Programación de la función `plot_dtft(h,N)` (Resultado: `plot_dtft.m`)

Genere una función `plot_dtft(h,N)` que, llamando a la función `dtft(h,N)`, muestre el diagrama de respuesta en amplitud y respuesta en fase que se muestra a continuación:




El diagrama anterior ha sido conseguido con `N=128` y la señal de entrada `xn` definida como:

```
nn = 0:40;
a = 0.88 * exp(j*2*pi/5);
xn = a.^nn;
```

Emplee dicha señal para comprobar que el diagrama de magnitud y fase coinciden, de forma que compruebe la ausencia de errores en la función realizada.

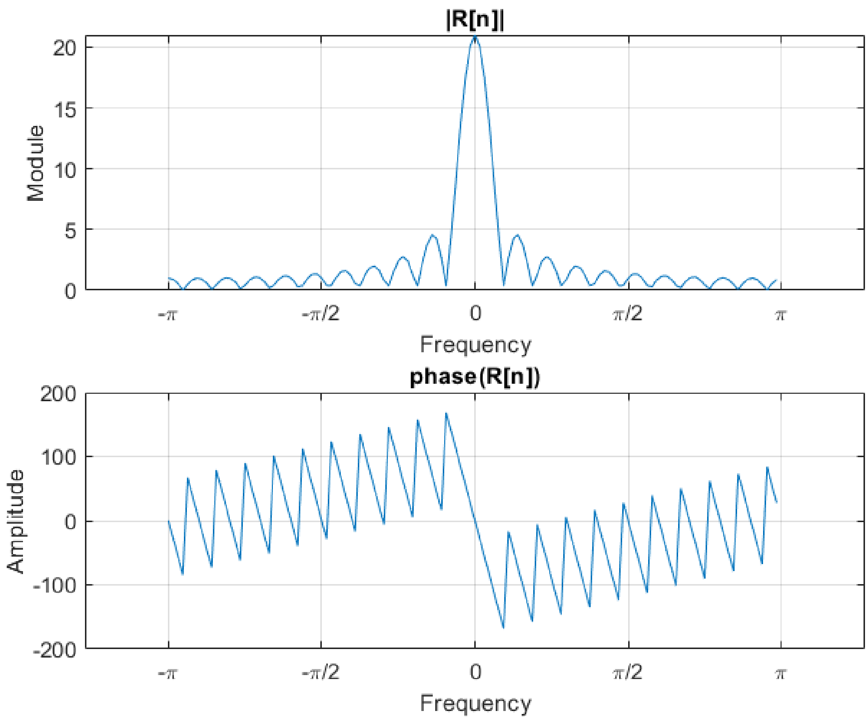
NOTA: La frecuencia normalizada es ω/π

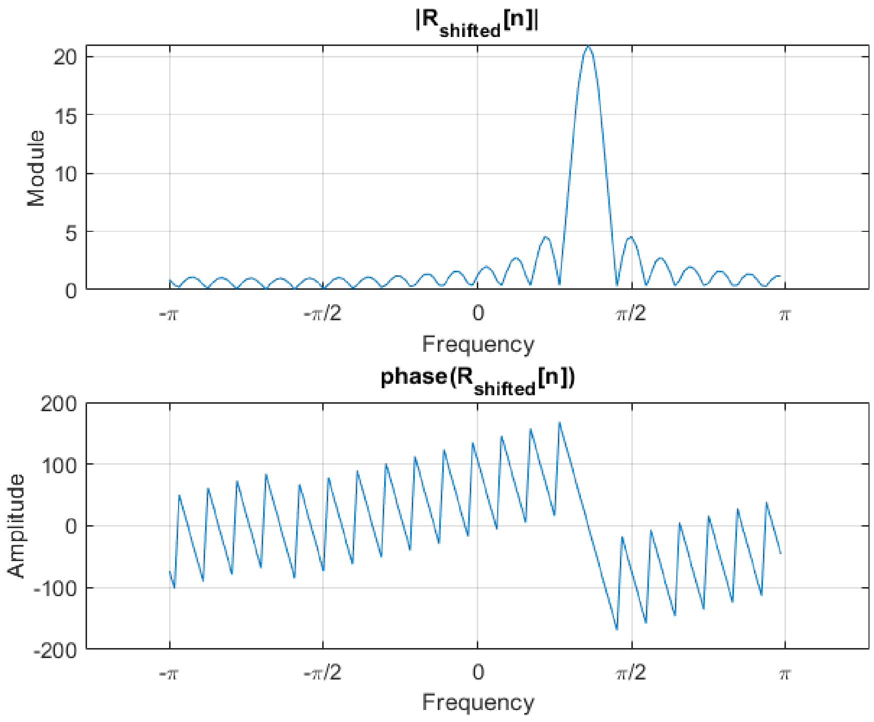
## 4. Propiedad de Modulación (Resultado: `ejercicio_4.m`)

Muchas propiedades de la DTFT tienen interpretaciones y aplicaciones útiles. Una de estas propiedades es la propiedad de modulación (compleja), que encuentra aplicación en los campos de comunicaciones y radar. Si una señal x[n] se multiplica por una exponencial compleja, $e^{j\omega_0 n}$, el resultado en el dominio transformado es un desplazamiento en frecuencia de $\omega_0$; $X(e^{j\omega})$ se convierte en $X(e^{j(\omega-\omega_0)})$.

a) Demostrar esta propiedad para un pulso rectangular. Tomar la longitud del pulso (número de muestras a 1) como L=21 y tomar $\omega_0$=2π/sqrt(31). Dibujar la DTFT del pulso rectangular, así como la DTFT del pulso modulado empleando la función `plot_dtft(h,N)` desarrollada en el apartado anterior. Emplee un valor de N=128. Dibuje en el espacio siguiente ambas gráficas (representando magnitud y fase) y compruebe que el pico de la DTFT se ha movido a $\omega_0$. En el script que genere como resultado, dado que no puede emplear la función `subplot` combinada con la función `plot_dtft` del ejercicio anterior, separe cada llamada a la función `plot_dtft` con una sentencia `pause` y emplee sentencias `disp` para mostrar por consola lo que está dibujando en cada momento. Otra alternativa es emplear la función `figure` para representar cada gráfica en una ventana distinta.

Gráficas:



Comentarios:

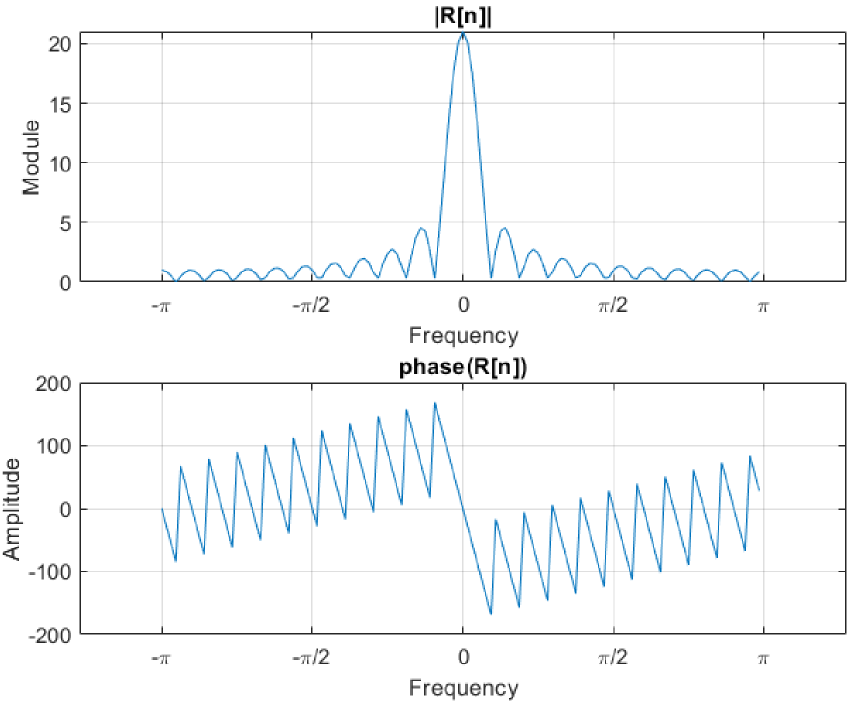
Aplicamos que si tenemos una DTFT, el desplazamiento en la frecuencia se produce de la forma:

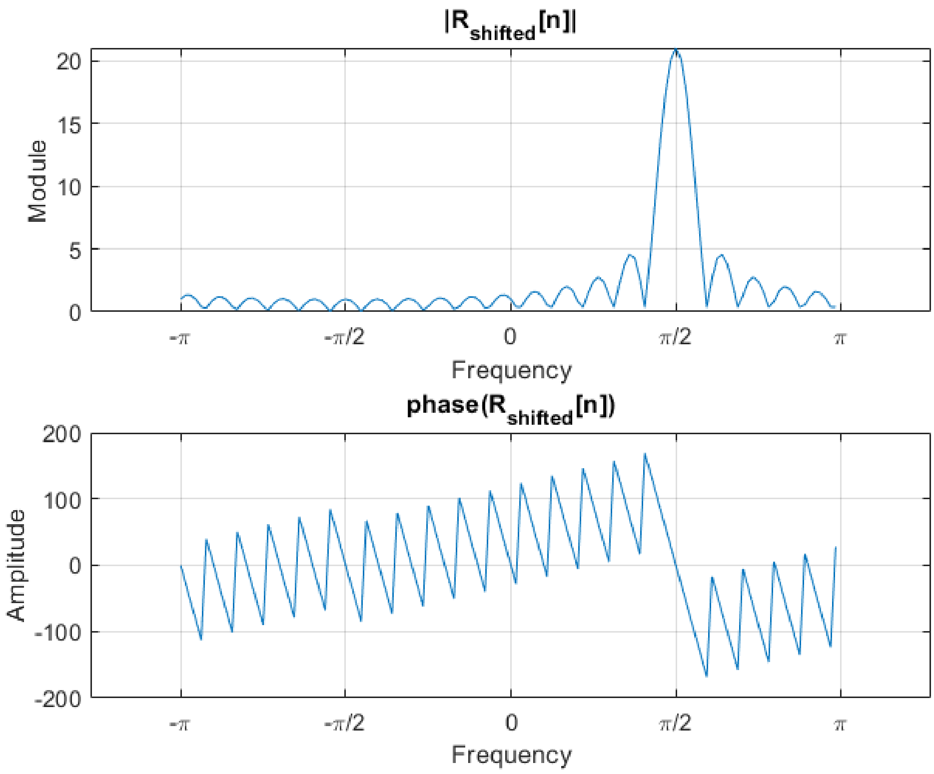
$$e^{j\omega_0 n}x[n] \leftrightarrow X(e^{j(\omega-\omega_0)})$$

Vemos cómo se aplica un desplazamiento en la frecuencia de la señal.

b) Utilizando un valor $\omega_0 = 5\pi/2$ repetir el apartado anterior y explicar lo que sucede.

Gráficas:



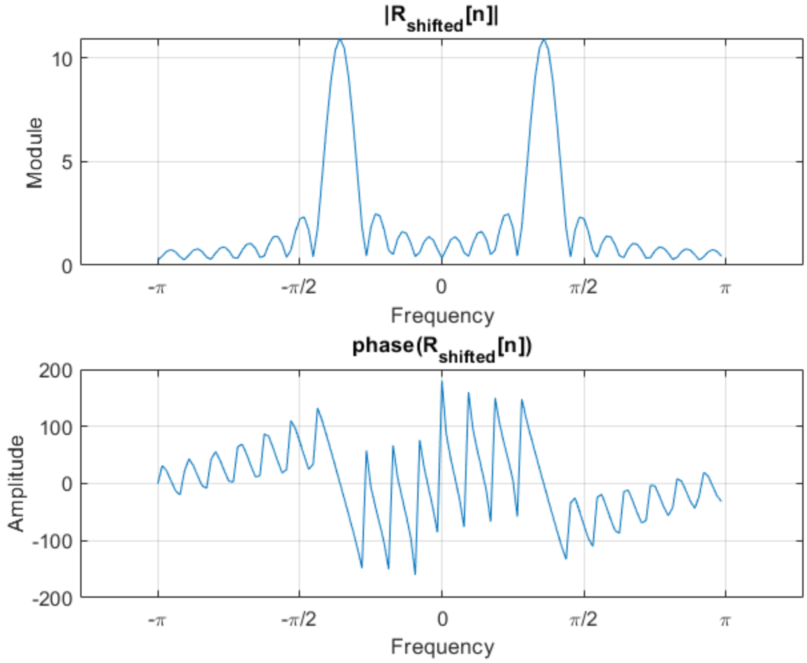



Comentarios:

Vemos que, puesto que las señales son periódicas, el valor en (5/2)pi será el mismo que en (pi/2), por lo que el desplazamiento de la frecuencia será a pi/2, por la periodicidad de la DTFT.

c) Repetir el experimento anterior multiplicando el pulso por una función coseno a la misma frecuencia que en el apartado a). Este tipo de modulación se denomina modulación AM en doble banda. Dibuje de nuevo las gráficas y explique si le parece razonable este nombre y por qué.

Gráficas:




Comentarios:

Puesto que el coseno se puede expresar como suma de exponenciales del siguiente modo:

$$\cos x = \mathrm{Re}\left(e^{ix}\right) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

Estaríamos sumando dos señales exponenciales que cada una tienen frecuencias $\pm\ \omega_0$

**5. Propiedad de Enventanado (Resultado:** `ejercicio_5.m`**)**

La propiedad de enventanado de la DTFT establece que la multiplicación de dos señales en el tiempo (.* en MATLAB) es equivalente a la convolución periódica en el dominio de la frecuencia de las DTFTs de las señales.

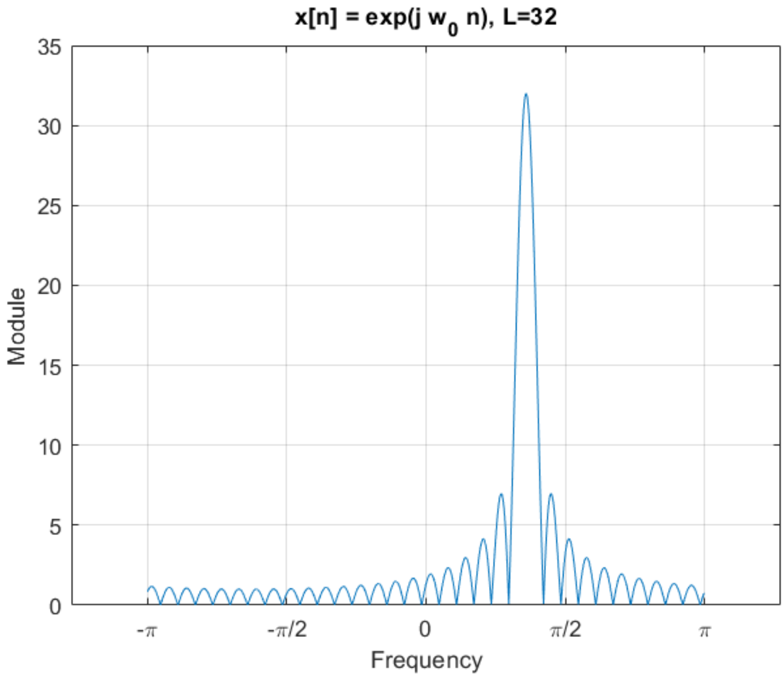
$$x[n]w[n] \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})W(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$$

Al multiplicar una señal por una ventana, en el dominio de la frecuencia la convolución emborronará la DTFT de la señal, dependiendo de la forma de la DTFT de la ventana, $W(e^{j\omega})$ , Incluso cuando parece no haberse multiplicado por ninguna ventana, el hecho de poder calcular la DTFT sólo de señales finitas con MATLAB es equivalente a multiplicar la señal por una ventana rectangular de duración igual a la duración que se haya considerado para la señal. En el caso de la ventana rectangular, la DTFT es una función *sinc* con solapamiento.

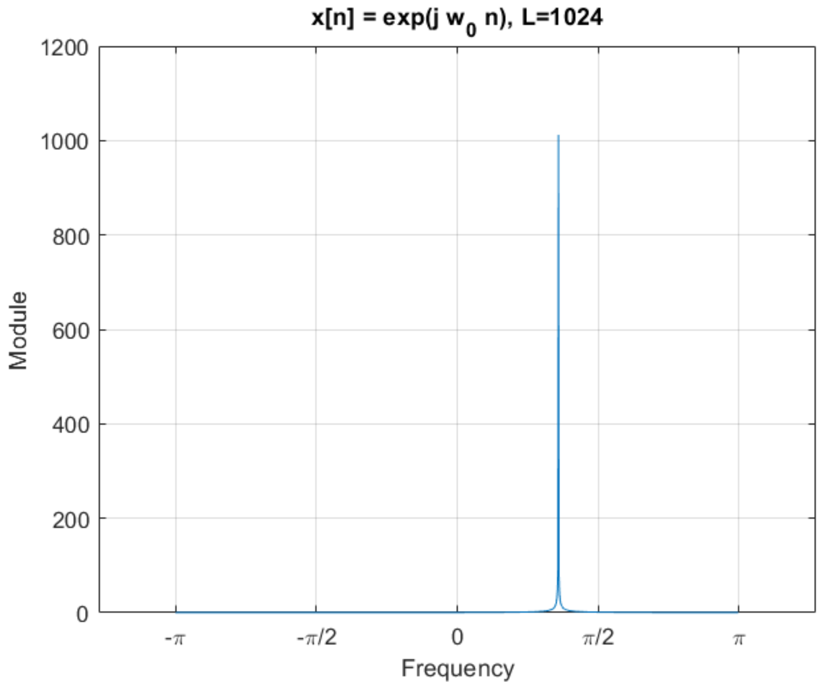
a) Un caso sencillo de analizar ocurre cuando la señal sin enventanar es una exponencial compleja, x[n]= $e^{j\omega_0 n}$. En este caso $X(e^{j\omega})$ es un impulso en la posición $\omega_0$ en frecuencia, y por tanto la convolución periódica se reduce a desplazar la DTFT de la ventana a la posición $\omega_0$. Observe que esto es exactamente igual que la propiedad de modulación. Aquí, sin embargo le damos otra interpretación. Utilizando MATLAB u otros métodos numéricos no podemos calcular la DTFT exacta de una señal x[n] de duración infinita, así que tenemos que limitar la señal en el tiempo (multiplicándola por una ventana de duración finita), y calcular la DTFT de la señal multiplicada por la ventana (que también será de duración finita). La DTFT de la señal multiplicada por la ventana no será exactamente igual a la DTFT de la señal que nos interesa, pero se aproximará si elegimos adecuadamente el tamaño y la forma de la ventana. A modo de ejemplo, generar una sinusoidal compleja x[n] = $e^{j\omega_0 n}$ con $\omega_0$=2π/sqrt(31). Multiplicarla por una ventana rectangular de longitud L=32 y dibujar la DTFT (sólo módulo) de la señal obtenida. Elija un valor de N=1024 en el cálculo de la DTFT. Comente el resultado desde el punto de vista del enventanado.

Gráficas:

L = 32, N =1024




L = 1024, N =1024:

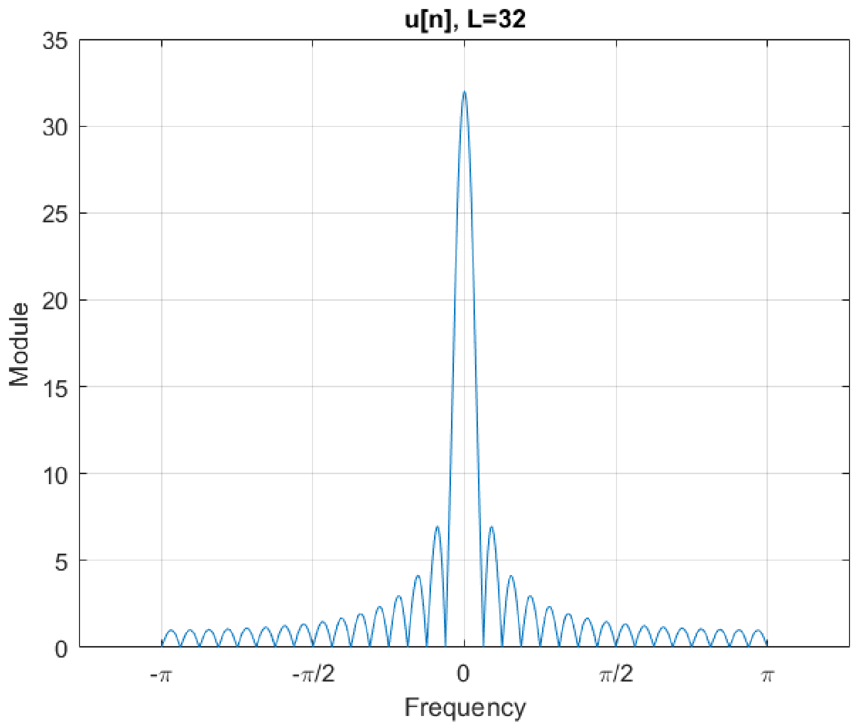



Comentarios:

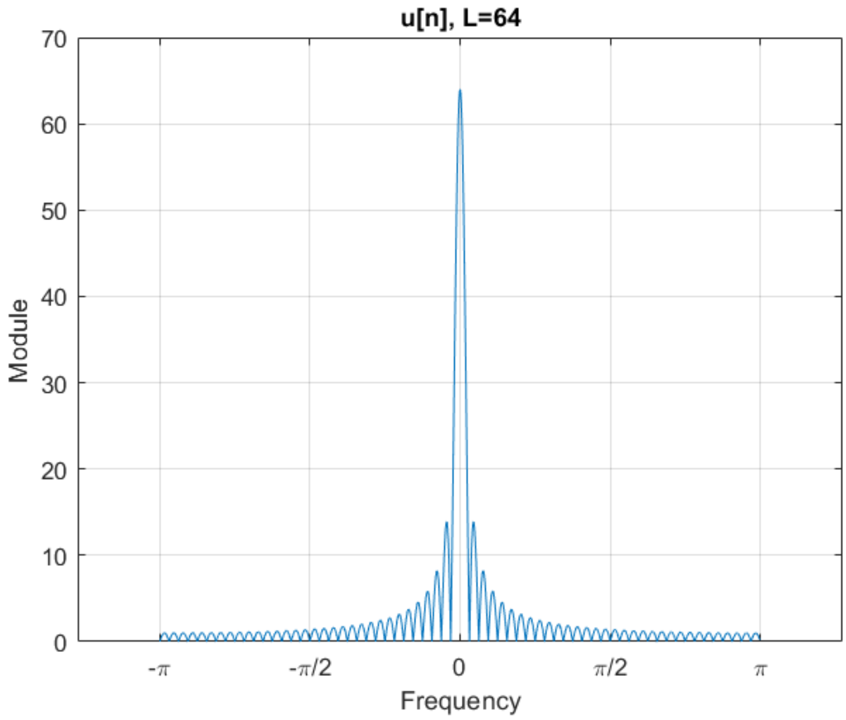
Al aumentar el tamaño de ventana por la que se multiplica la señal, la respuesta se ve menos afectada por esta multiplicación y el resultado medido se parece más al resultado real (una delta centrada en $\omega_0$).

b) Existen dos factores que afectan a la DTFT obtenida al tratar de observar el espectro de una señal de duración infinita mediante la utilización de una ventana. Uno de ellos es la longitud de la ventana con la que se observa la señal. Dibuje la DTFT (sólo amplitud) de una ventana rectangular de longitud L=32, 64, 128 y 256. Calcule la DTFT empleando un valor N=1024 en todos los casos. Dibuje, a la derecha de las DTFTs de las ventanas la DTFT (sólo amplitud) de la señal exponencial compleja del ejercicio anterior multiplicada por cada una de las 4 ventanas anteriores. Comente los resultados. ¿Qué longitud de ventana le parece más apropiada?.

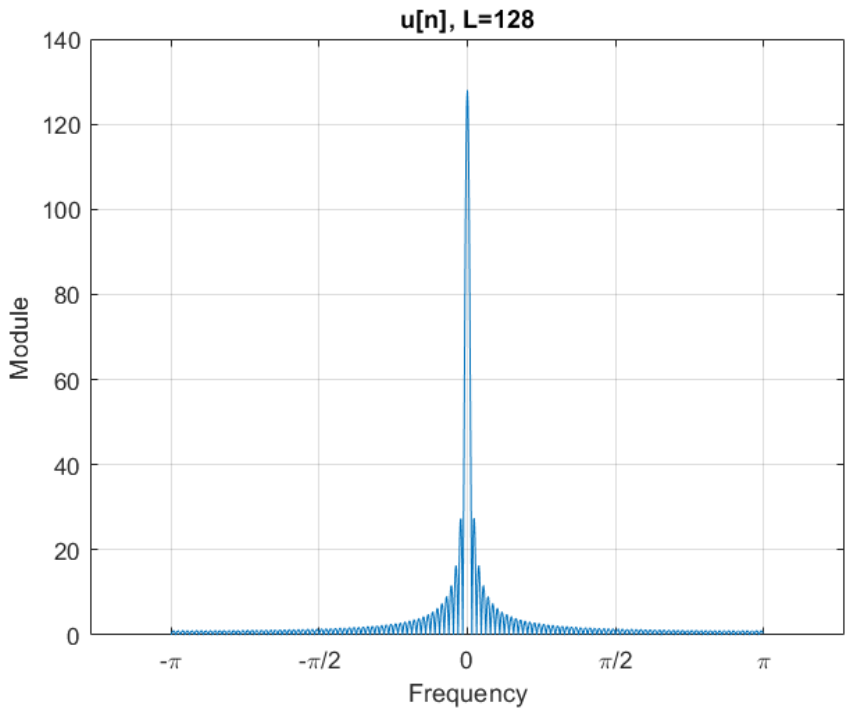
Gráficas:

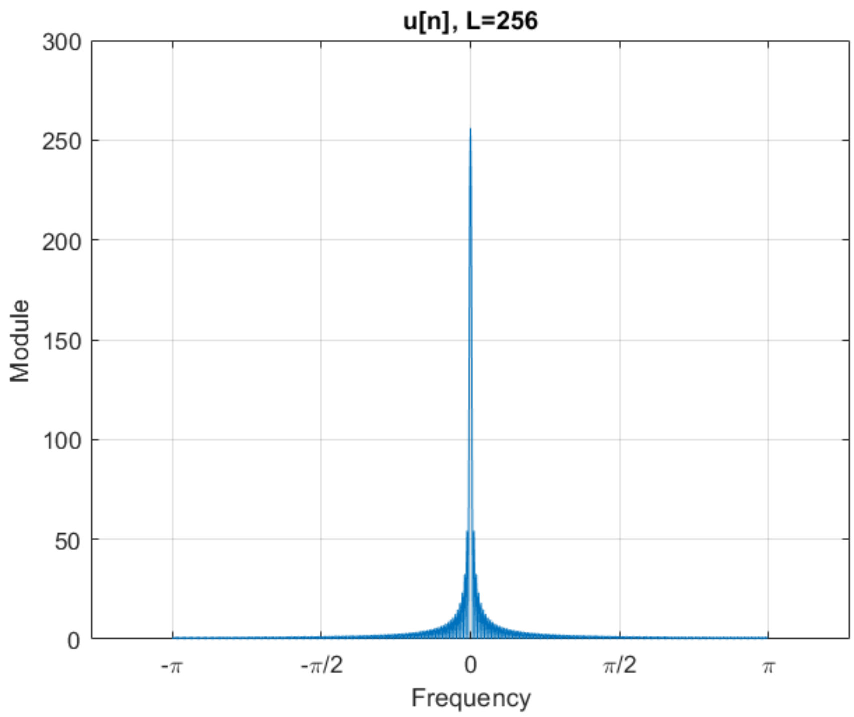


u[n], L=32
Module
Frequency
35
30
25
20
15
10
5
0
-π
-π/2
0
π/2
π

u[n], L=64
Module
Frequency
70
60
50
40
30
20
10
0
-π
-π/2
0
π/2
π


u[n], L=128
Module
Frequency
140
120
100
80
60
40
20
0
-π
-π/2
0
π/2
π


u[n], L=256
Module
Frequency
300
250
200
150
100
50
0
-π
-π/2
0
π/2
π

Comentarios:

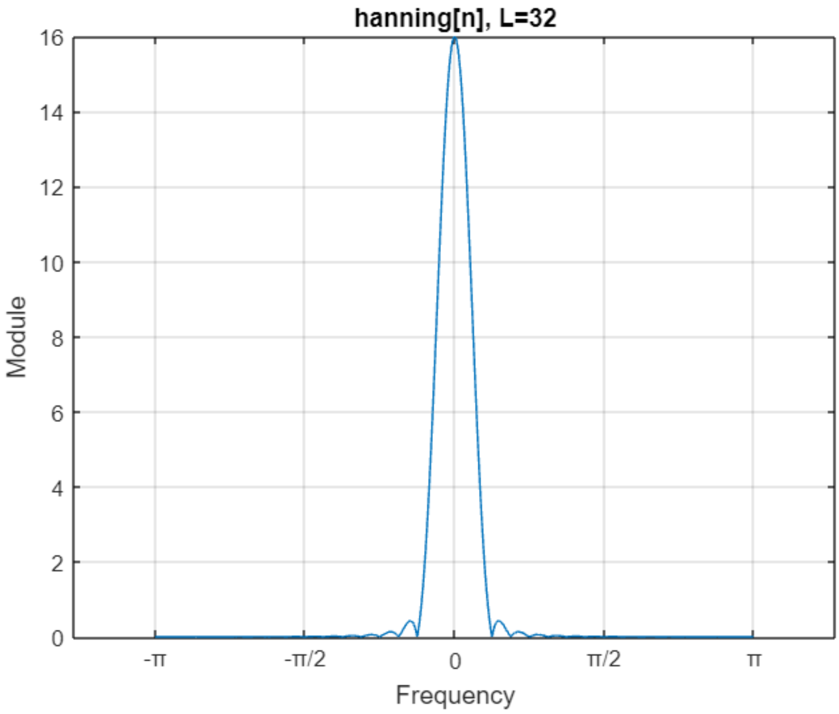
Ya comentábamos en el apartado anterior que al aumentar el tamaño L de la ventana, obtenemos señales que se parecen más a una delta centrada en $\omega_0$. Es por ello que el tamaño de ventana más adecuado será el más grande.

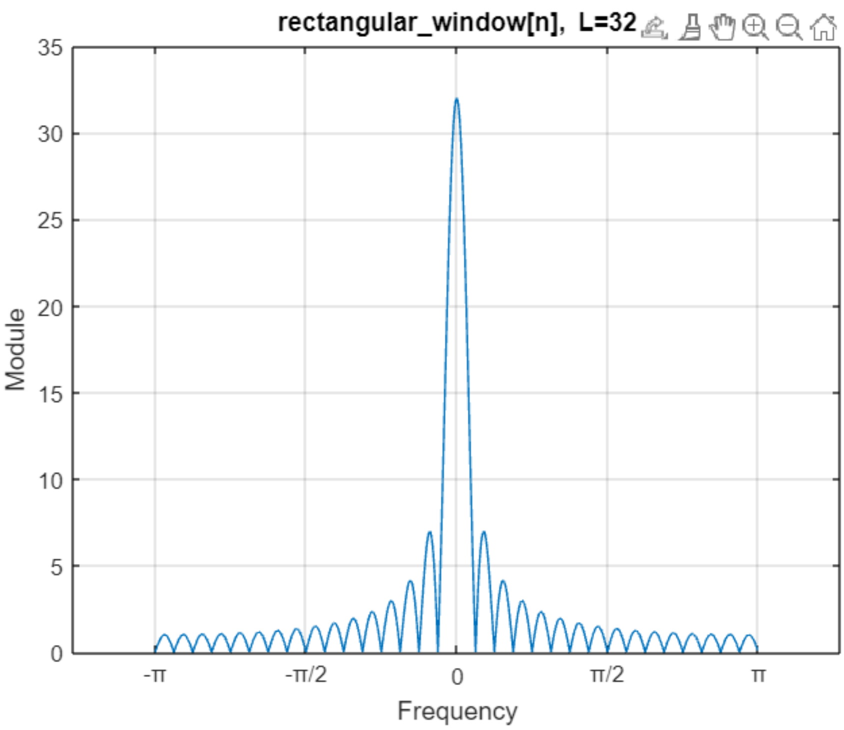
c) Otro factor que influye en la capacidad de una ventana para observar el espectro de una señal es la forma de la ventana. Ha podido comprobar en el apartado anterior que la DTFT de la ventana rectangular tiene un lóbulo principal y varios lóbulos secundarios indeseables que tienden a emborronar la DTFT de la señal enventanada. En la práctica, la ventana rectangular se emplea muy raramente. En su lugar se emplean ventanas cuyas DTFTs tienen propiedades más satisfactorias. Una de ellas es la ventana de Hanning (ver la función `hanning` de MATLAB), dada por la fórmula:

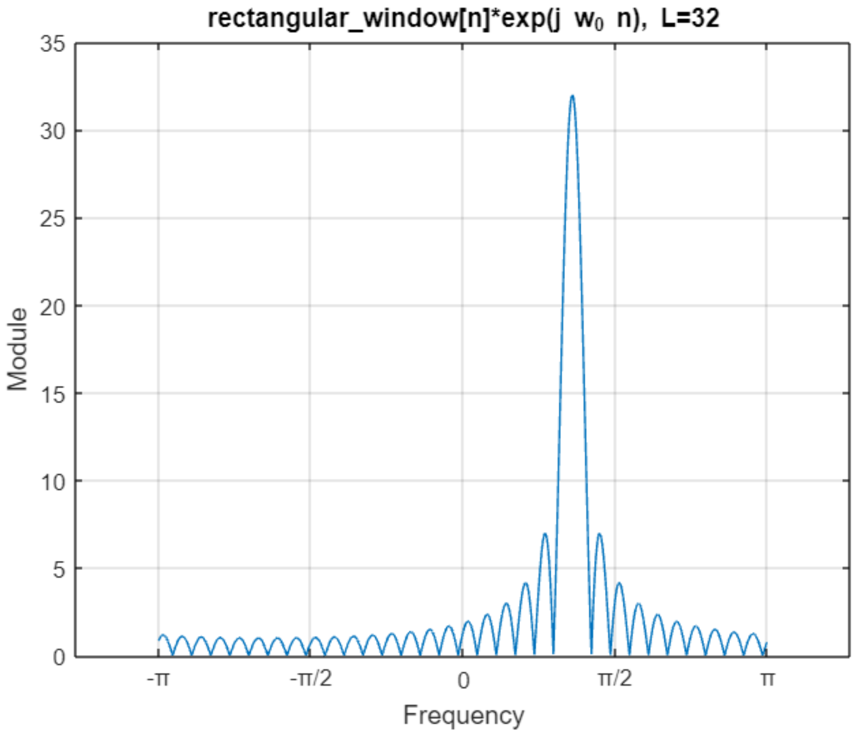
$$w[n] = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{L}n\right) & 0 \le n \le L \\ 0 & resto \end{cases}$$

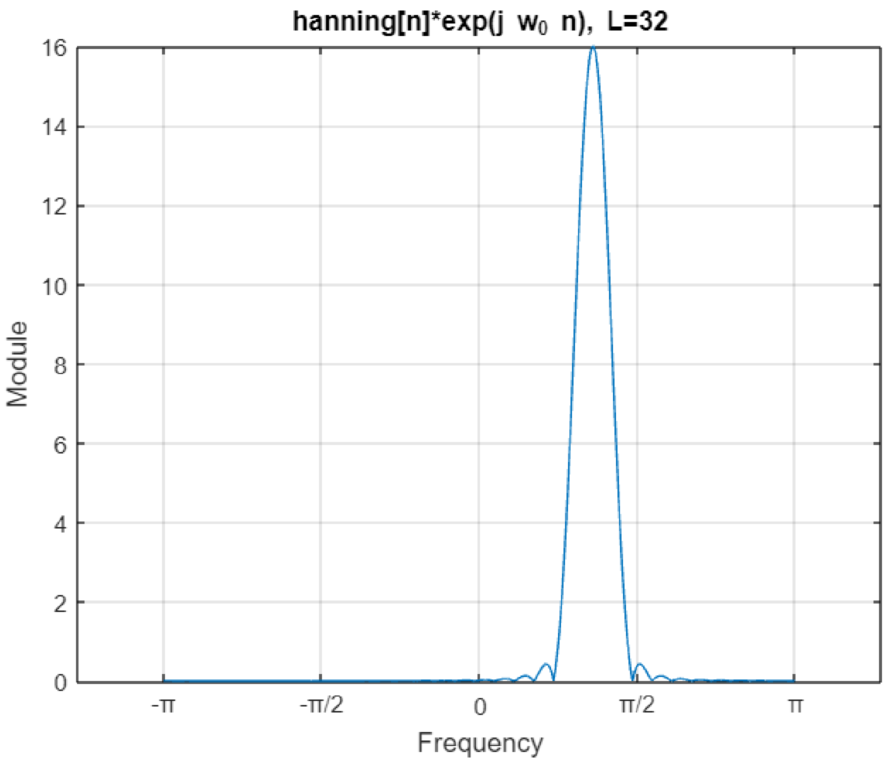
Dibuje la DTFT de una ventana de Hanning de longitud 32 y la DTFT de una ventana rectangular de longitud 32 (emplee para ello N=1024 en el cálculo de la DTFT). Comente las diferencias entre ellas. Observe sobre todo la altura y anchura del lóbulo principal, y la altura de los lóbulos secundarios. ¿Cuál cree que es más apropiada para analizar el espectro de la señal exponencial compleja del apartado anterior? Dibuje la DTFT de ambas ventanas multiplicadas por la exponencial compleja del apartado anterior y compruebe si su respuesta es correcta.

Gráficas:


hanning[n], L=32
Module
Frequency
16
14
12
10
8
6
4
2
0
-π
-π/2
0
π/2
π


rectangular_window[n], L=32
Module
Frequency
35
30
25
20
15
10
5
0
-π
-π/2
0
π/2
π




Comentarios:

Como podemos ver, la ventana de Hanning tiene unos lóbulos inferiores mucho menos pronunciados, aunque la diferencia entre el primer y segundo lóbulo es menor. Apreciamos la misma diferencia tras aplicar la convolución a la función exponencial.