Ecuații diferențiale

Metode cu pași separați

Runge - Kutta 2

$$y_{i+1} = y_i + \frac{K_1 + K_2}{2}$$

$$\boxed{h = \frac{b-a}{n}}$$

$$K_1 = h \cdot f(t_i, y_i)$$

$$K_2 = h \cdot f(t_i + h_i, y_i + K_1)$$

- funcția calculează y în n puncte

Runge - Kutta 4

$$y_{i+1} = y_i + \frac{K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4}{6}$$

$$K_1 = h \cdot f(t_i, y_i)$$

$$K_2 = h \cdot f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_1}{2}\right)$$

$$K_3 = h \cdot f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_2}{2}\right)$$

$$K_4 = h\, f(t_i + h, y_i + K_3)$$

Scanned with CamScanner

$\boxed{\text{exemplu}}$

$y'(t) = y(t)\sin(t) - 1$

$[a \quad b] = [0 \quad 1]$, $n=2$

$h = \frac{1-0}{2} = \frac{1}{2}$

$y_0 = y(t_0) = 0$

$\boxed{RK_2}$

pas 1:

$y_1 = y_0 + \frac{K_1 + K_2}{2}$

$K_1 = h \cdot f(t_0, y_0) = \frac{1}{2} \cdot (y(t_0) \cdot \sin t_0 - 1) = \frac{1}{2}(0-1) = -\frac{1}{2}$

$K_2 = h \cdot f(t_0 + h, y_0 + K_1) =$

$= \frac{1}{2} \cdot ((y_0 + K_1) \cdot \sin(t_0 + h) - 1) = \frac{1}{2}((0 + (-\frac{1}{2})) \cdot \sin(0 + \frac{1}{2}) - 1$

$= \frac{1}{2}(-\frac{1}{2} \cdot \sin(\frac{1}{2}) - 1) = -0.62$

$y_1 = 0 + \frac{-0.62 - 0.5}{2} = -0.56$

pas 2:

$$y_2 = y_1 + \frac{K_1 + K_2}{2}$$

$$K_1 = \frac{1}{2}\cdot(y_1 \sin t_1 - 1) = \frac{1}{2}\left(-0.56\cdot \sin\frac{1}{2} - 1\right) = -0.63$$

$$K_2 = \frac{1}{2}\left((y_1 + K_1)\cdot \sin(t_1 + h) - 1\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left((-0.56 - 0.63)\cdot \sin 1 - 1\right) = -1$$

$$y_2 = -0.56 + \frac{-0.63 - 1}{2} = -1.375$$

Sisteme de ecuații diferențiale

Dacă aveți un sistem de tipul:

$$y_1'(t) = f_1(t, y_1(t), y_2(t))$$
$$y_2'(t) = f_2(t, y_1(t), y_2(t))$$

Putem rezolva sistemul folosind metodele Runge-Kutta

$\boxed{RK2}$

$$y_1^{(i+1)} = y_1^{(i)} + \frac{K_{11} + K_{12}}{2}$$

$$y_2^{(i+1)} = y_2^{(i)} + \frac{K_{21} + K_{22}}{2} \longrightarrow$$ primul indice este cel care ne indică numărul ecuației

$K_{11} = h \cdot f_1(t_i, y_1^{(i)}, y_2^{(i)})$, unde $y_1^{(i)} = y_1$ la pasul i

$K_{12} = h \cdot f_1(t_i + h, y_1^{(i)} + K_{11}, y_2^{(i)} + K_{21})$

$K_{21} = h \cdot f_2(t_i, y_1^{(i)}, y_2^{(i)})$

$K_{22} = h \cdot f_2(t_i + h, y_1^{(i)} + K_{11}, y_2^{(i)} + K_{21})$

$\boxed{RK4}$

$$y_1^{(i+1)} = y_1^{(i)} + \frac{K_{11} + 2K_{12} + 2K_{13} + K_{14}}{6}$$

$$y_2^{(i+1)} = y_2^{(i)} + \frac{K_{21} + 2K_{22} + 2K_{23} + K_{24}}{6}$$

$K_{11} = h \cdot f_1(t_i, y_1^{(i)}, y_2^{(i)})$

$K_{21} = h \cdot f_2(t_i, y_1^{(i)}, y_2^{(i)})$

$K_{12} = h \cdot f_1(t_i + \frac{h}{2}, y_1^{(i)} + \frac{K_{11}}{2}, y_2^{(i)} + \frac{K_{21}}{2})$

$K_{22} = h \cdot f_2(-11-)$

$K_{13} = h \cdot f_1(t_i + \frac{h}{2}, y_1^{(i)} + \frac{K_{12}}{2}, y_2^{(i)} + \frac{K_{22}}{2})$

$K_{23} = h \cdot f_2(-11-)$

$K_{14} = h \cdot f_1(t_i + h, y_1^{(i)} + K_{13}, y_2^{(i)} + K_{23})$

$K_{24} = h \cdot f_2(-11-)$

Dacă erau mai multe ecuații în sistem, doar se mai adăugau mai mulți K.

$\boxed{\text{Ecuații diferențiale de ordin superior}}$

Dacă avem o ecuație de genul

$y^{(m)} = f(t, y, y', \dots, y^{(m-1)})$

Vom crea un sistem de ecuații diferențiale:

$$\begin{array}{l} u_1(t) = y(t) \\ u_2(t) = y'(t) \\ \vdots \\ u_m(t) = y^{(m-1)}(t) \end{array} \Rightarrow \begin{cases} u_1'(t) = u_2 \\ u_2'(t) = u_3 \\ \vdots \\ u_m'(t) = y^{(m)} = f(t, y, \dots, y^{(m-1)}) \end{cases}$$

$\boxed{\text{exemplu}}$

$y''' + 8y'' + 8y' + y = 4\sin(t)$

$\Downarrow$

$y''' = -8y'' - 8y' - y + 4\sin(t)$

$y(0) = y'(0) = 1, \ y''(0) = -1, \ h = 0.1, \ [0, 1]$

$$\begin{array}{l} u_1 = y \\ u_2 = y' \\ u_3 = y'' \end{array} \Rightarrow \begin{cases} u_1' = u_2 = f_1 \\ u_2' = u_3 = f_2 \\ u_3' = y''' = f_3 = 4\sin(t) - 8u_3 - 8u_2 - u_1 \end{cases}$$

Apoi aplicăm metodele Runge-Kutta

spre ex:

RK2:

$$u_1^{(1)} = u_1^{(0)} + \frac{K_{11}+K_{12}}{2}$$

$$u_2^{(1)} = u_2^{(0)} + \frac{K_{21}+K_{22}}{2}$$

$$u_3^{(1)} = u_3^{(0)} + \frac{K_{31}+K_{32}}{2}$$

$K_{11} = h f_1(t_0, u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, u_3^{(0)})$

$K_{21} = h f_2(-\,//\,-)$

⋮

Pentru a scrie un program în Octave care să rezolve ecuația vom avea nevoie de 2 funcții:

~~function date_f h~~

```
function [f1, f2, f3, u10, u20, u30, a, b, h] = functi
  u10 = 1;
  u20 = 1;     } sunt date de problemă
  u30 = -1;
  a=0; b=1;  → date de problemă
  f1 = @(t, u1, u2, u3) u2;
  f2 = @(t, u1, u2, u3) u3;
  f3 = @(t, u1, u2, u3) 4*sin(t)-8*u3-8*u2-u1;
endfunction
```

function y = RK2 (f_1, f_2, f_3, u10, u20, u30, a, b, h)

u1(1) = u10;

u2(1) = u20;

u3(1) = u30;

În rest, este fix rezolvarea unui sistem de ecuații diferențiale.

$\boxed{y = u1;}$

Metoda predictor corector

- vom avea o metodă explicită care calculează o aproximație
- vom avea și o metodă implicită care corectează aproximația inițială

Adams - Bashforth

e o metodă explicită

$$y^{(i+1)} = y^{(i)} + h \cdot \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j \cdot f_{i-j}$$

Adams - Moulton

e o metodă implicită

$$y^{(i+1)} = y^{(i)} + h \cdot \sum_{j=-1}^{n-1} \beta_j f_{i-j}$$

$\boxed{\text{exemple}}$:

AB de ordin 3: $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12}(23f_i - 16f_{i-1} + 5f_{i-2})$

AM3: $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}(9f_{i+1} + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2})$

Cum calculăm β pt o metodă?

$\boxed{\text{exemplu}}$

vom face pt Adams-Bashforth de ordin 3.

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot \sum_{j=0}^{r-1} \beta_j f_{i-j}$$

vom avea deci

$$y_{i+1} = y_i + \underbrace{\beta_0 f_i + \beta_1 f_{i-1} + \beta_2 f_{i-2}}_{f}$$

alegem punctele: $x_{i-2} = 0$, $x_{i-1} = 1$, $x_i = 2$, $x_{i+1} = 3$, $h = 1$

vrem ca formula să fie exactă pt:

$y(x) = 1, x, x^2, x^3$

$y(x) = 1 \Rightarrow f(x,y) = y'(x) = 0$

$y(x) = x \Rightarrow f(x,y) = y'(x) = 1 \Rightarrow y_{i+1} = y_i + \beta_0 + \beta_1 + \beta_2$

$y_{i+1} = y(x_{i+1}) = 3$, $y_i = y(x_i) = 2$

$\Downarrow$

$3 = 2 + \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 \Rightarrow \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 = 1$

$$y(x) = x^2 \Rightarrow f(x,y) = y'(x) = 2x$$

$\Downarrow$

$$y_{i+1} = y_i + 2 \cdot x_i \beta_0 + 2x_{i-1}\beta_1 + 2x_{i-2}\beta_2$$

$\Downarrow$

$$3^2 = 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot \beta_0 + 2 \cdot 1 \beta_1 + 2 \cdot 0 \cdot \beta_2 \Rightarrow 9 = 4 + 4\beta_0 + 2\beta_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\beta_0 + 2\beta_1 = 5$$

$$y(x) = x^3 \Rightarrow f(x,y) = y'(x) = 3x^2$$

$$y_{i+1} = y_i + 3 \cdot x_i^2 \cdot \beta_0 + 3 \cdot x_{i-1}^2 \beta_1 + 3x_{i-2}^2 \beta_2$$

$$3^3 = 2^3 + 3 \cdot 4 \cdot \beta_0 + 3\beta_1 + 3 \cdot 0 \cdot \beta_2 \Rightarrow$$

$$19 = 12\beta_0 + 3\beta_1$$

$$\begin{cases} \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 = 1 \\ 4\beta_0 + 2\beta_1 = 5 \quad / \cdot 3 \\ 12\beta_0 + 3\beta_1 = 19 \end{cases} -$$

$$6\beta_1 - 3\beta_1 = 15 - 19 \Rightarrow 3\beta_1 = -4 \Rightarrow \beta_1 = -\frac{4}{3}$$

$$4\beta_0 - \frac{8}{3} = 5 \Rightarrow 4\beta_0 = 5 + \frac{8}{3} = \frac{23}{3} \Rightarrow \beta_0 = \frac{23}{12}$$

$$\beta_0 + \beta_1 + \beta_2 = \frac{23}{12} - \frac{16}{12} + \beta_2 = \frac{7}{12} + \beta_2 = 1 \Rightarrow \beta_2 = \frac{5}{12}$$

$\Downarrow$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12}\left(23 f_i - 16 f_{i-1} + 5 f_{i-2}\right)$$