Vectori și valori proprii

Vectorii proprii ale unei matrici A sunt vectorii x:

$Ax = \lambda x$, unde λ este o valoare proprie

- vectorii proprii îl luăm cu norma 1.

- în Octave pentru a afla vectorii și valorile proprii se folosește funcția $\boxed{\text{eig}}$.

$\boxed{\text{Metoda puterii directe}}$ (MPD)

Dacă avem spectru $\rho = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ și
$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$

Vom calcula cel mai mare valoare proprie λ_1.

Se pornește de la o aproximare y_0 a vectorului propriu.

for $k = 1 : max$

$$z = A \cdot y^{(k-1)}$$

$$y^{(k)} = \frac{z}{\|z\|}$$

$$\lambda^{(k)} = (y^{(k)})^T \cdot A \cdot y^{(k)}$$

$\boxed{\text{exemplu}}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad y_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Pas 1

$$z = A \cdot y^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$y^{(1)} = \frac{z}{\sqrt{9+49}} = \frac{z}{\sqrt{58}} = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.9 \end{bmatrix}$$

$$\lambda^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.1 & 4.4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.9 \end{bmatrix}$$

$$= 5.2$$

Metoda Puterii Inverse (MPi)

$\rho(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$

$\rho(A^{-1}) = \left\{\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}\right\}$

Avem nevoie de $y^{(0)}$, dar și de μ care e aproximarea unei val. proprii.

Algoritmul calculează λ minim.

Se va aplica MPD pe matricea $B = (A - \mu I)^{-1}$

for $k = 1 : max$

$B = (A - \mu I)^{-1}$

$z = B \cdot y^{(k-1)}$

$y^{(k)} = \frac{z}{\|z\|}$

$\lambda^{(k)} = (y^{(k)})^T \cdot A \cdot y^{(k)}$

$\mu = \lambda^{(k)}$

exemplu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$y_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mu = 0.5$$

Pas 1

$$A - \mu I = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 2 \\ 3 & 3.5 \end{bmatrix}$$

$$B = (A - \mu I)^{-1} = \begin{bmatrix} -0.8 & 0.5 \\ 0.7 & -0.1 \end{bmatrix}$$

$$z = B \cdot y^{(0)} = \begin{bmatrix} -0.8 & 0.5 \\ 0.7 & -0.1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.3 \\ 0.6 \end{bmatrix}$$

$$y^{(1)} = \frac{z}{\|z\|} = \begin{bmatrix} -0.4 \\ 0.9 \end{bmatrix}$$

$$\lambda^{(1)} = y^{(1)T} \cdot A \cdot y^{(1)} = 1.4$$

$$\mu = 1.4$$

Metoda deflației

- calculează toate valorile proprii, folosind MPD.

P_p: $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \ldots > |\lambda_n|$

Folosind MPD găsim λ_1 și x_1.

Construim matricea B:

$$B = (I_n - x_1 \cdot y^T) \cdot A \quad , \quad y^T \cdot x = 1$$

Matricea B are valorile proprii $\{0, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$

Dacă eliminăm prima linie și prima coloană din B vom obține o nouă matrice cu valorile proprii $\{\lambda_2, \ldots \lambda_n\}$ pe care se poate aplica din nou MPD, și tot așa.