Eliminare Gaussiană

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2-\frac{3}{2}L_1} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{21}{2} \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3-\frac{5}{2}L_1} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{21}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{27}{2} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3-3L_2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{21}{7} \\ 0 & 0 & 18 \end{bmatrix}$$

Gauss cu pivotare parțială GPP

Algoritm:

- la fiecare pas (coloană) ne uităm la numerele de sub diagonala principală, inclusiv la cel de pe diagonală, și alegem elementul cu modulul maxim și facem interschimbarea între rândul respectiv și rândul curent
- după interschimbare se aplică Gauss pt a face 0 sub diagonala principală.

ex

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ \boxed{-3} & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_1} \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2-\frac{2}{(-3)}L_1} \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{11}{3} \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3-0L_1} \begin{bmatrix} \text{la fel} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{\frac{5}{3}} & \frac{11}{3} \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{11}{3} \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3-\frac{3}{5}L_2} \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{11}{3} \\ 0 & 0 & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

Gauss cu pivotare și pivot scalat (GPPS)

Algoritm

- pe fiecare linie din matrice se alege maximul, iar apoi se împarte elementul de pe coloana curentă la acel maxim (și maximul și raportul sunt făcute pe numerele în modul)
- se alege linia cu raportul maxim și se interschimbă cu linia curentă
- apoi se aplică Gauss pe coloana respectivă
- se repetă până la final

Notă: După ce s-a aplicat un pas de GPPS, linia și coloana curentă rămân la fel, așa că practic se aplică pe submatricea obținută eliminând linia și coloana. Cel mai bine se vede pe exemplu:

Ex: $A = \begin{bmatrix} 3 & -13 & 9 \\ -6 & 4 & 1 \\ 6 & -2 & 7 \end{bmatrix}$

Calculăm maximele modulelor pe linii

$$\max\{|3|, |-13|, |9|\} = \{3, 13, 9\} \xrightarrow{\max} 13$$

$$\max\{6, 4, 1\} = 6$$

$$\max\{6, 2, 7\} = 7$$

Se iau elementele de pe coloană și se împart la maxime și facem modul:

linia 1: $\frac{3}{13}$

linia 2: $\left|\frac{-6}{6}\right| = 1$ → maximul, deci facem $L_2 \leftrightarrow L_1$

linia 3: $\frac{6}{7}$

$$A \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_1} \begin{bmatrix} -6 & 4 & 1 \\ 3 & -13 & 9 \\ 6 & -2 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 + \frac{1}{2} L_1} \begin{bmatrix} -6 & 4 & 1 \\ 0 & -11 & \frac{19}{2} \\ 6 & -2 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 + L_1}$$

$$\begin{bmatrix} -6 & 4 & 1 \\ 0 & -11 & \frac{19}{2} \\ 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

Facem maximele:

$$\max\{|-11|, |\tfrac{19}{2}|\} = 11$$

$$\max\{2, 8\} = 8$$

Calculăm rapoartele

$$\left.\begin{aligned} \text{linia 2: } & \left|\frac{-11}{11}\right| = 1 \\ \text{linia 3: } & \left|\frac{2}{8}\right| = \frac{1}{4} \end{aligned}\right\} \max\{1, \tfrac{1}{4}\} = 1 \Rightarrow$$ interschimbăm $L_2 \leftrightarrow L_2$ (rămâne la fel)

Aplicăm Gauss pe ce avem:

$$\begin{bmatrix} -6 & 4 & 1 \\ 0 & -11 & \frac{19}{2} \\ 0 & 2 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 + \frac{2}{11} L_2} \begin{bmatrix} -6 & 4 & 1 \\ 0 & -11 & \frac{19}{2} \\ 0 & 0 & 8 + \frac{19}{11} \end{bmatrix}$$

Gauss cu pivotare totală (GPT)

Algoritm:

- se găsește maximul din matrice și se interschimbă liniile și coloanele a.î. maximul să ajungă pe $A(p,p)$
- se aplică Gauss

Notă: Maximul se caută în submatrice ca în exemplu:

ex

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & \boxed{7} \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{C_1 \leftrightarrow C_3} \begin{bmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 - \frac{4}{7}L_1} \begin{bmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{3}{7} & \boxed{\frac{27}{7}} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{3}{7} & \frac{27}{7} \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{C_2 \leftrightarrow C_3} \begin{bmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 0 & \frac{27}{7} & \frac{3}{7} \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 - \frac{7}{9}L_2}$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 0 & \frac{27}{7} & \frac{3}{7} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Thomas

Este o eliminare Gaussiană când A e tridiagonală:

$$
\begin{bmatrix}
b_1 & c_1 & & & 0 \\
a_2 & b_2 & c_2 & & \\
0 & a_3 & b_3 & c_3 & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots \\
0 & & & a_n & b_n
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}
$$

a_1 e considerat 0, c_n e considerat și el tot 0.

$$
c'_i = \begin{cases} \dfrac{c_i}{b_i}, & i = 1 \\[2ex] \dfrac{c_i}{b_i - c'_{i-1} a_i}, & i = 2 : n-1 \end{cases}
$$

$$
d'_i = \begin{cases} \dfrac{d_i}{b_i}, & i = 1 \\[2ex] \dfrac{d_i - d'_{i-1}\, a_i}{b_i - c'_{i-1}\, a_i} & i = 2 ; n \end{cases}
$$

$$
\begin{cases} x_n = d'_n \\ x_i = d'_i - c'_i x_{i+1}, & i = n-1 : -1 : 1 \end{cases}
$$