Metode de interpolare

Metoda Neville

Dacă avem o fct despre care știm valorile în doar câteva puncte și vrem să calculăm funcția facem în felul următor:

$$\boxed{P_{ij} = \frac{x - x_j}{x_i - x_j} P_{i,j-1} + \frac{x_i - x}{x_i - x_j} \cdot P_{i+1,j}}, \quad 0 \le i < j \le n$$

Pt $P_{ii} = f(x_i)$

Ce înseamnă asta?:

$$\begin{array}{lll}
P_{00} & & \\
 & P_{01} & \\
P_{11} & & P_{02} \\
 & P_{12} & \\
P_{22} & &
\end{array}$$

exemplu

x	0	2	5
$f(x)$	1	3	7

$P_{00} = 1 \qquad P_{11} = 3 \qquad P_{22} = 7$

$$P_{01} = \frac{x-2}{0-2} \cdot P_{00} + \frac{0-x}{0-2} \cdot P_{11} = \frac{x-2}{-2} \cdot 1 + \frac{-x}{-2} \cdot 3 = \frac{2x+2}{2}$$

$$= x+1$$

$$P_{12} = \frac{x-5}{2-5} \cdot P_{11} + \frac{2-x}{2-5} \cdot P_{22} = \frac{x-5}{-3} \cdot 3 + \frac{2-x}{-3} \cdot 7 =$$

$$= \frac{-14 + 7x - 3x + 15}{3} = \frac{4x+1}{3}$$

Scanned with CamScanner

$$P_{02} = \frac{x-5}{0-5} \cdot P_{01} + \frac{0-x}{0-5} \cdot P_{12} =$$

$$= \frac{5-x}{5} \cdot (x+1) + \frac{x}{5} \cdot \frac{4x+1}{3} = \frac{3(5x+5-x^2-x) + 4x^2+x}{15} =$$

$$= \frac{-3x^2+12x+15+4x^2+x}{15} = \frac{x^2+13x+15}{15}$$

Metoda de interpolare cu spline cubic C1

Această metodă funcționează dacă cunoaștem $f(x_0) \ldots, f(x_n)$ și derivatele $f'(x_0) \ldots f'(x_n)$

Vom studia comportamentul pe intervale $[x_0, x_1]; [x_1, x_2] \ldots [x_{n-1}, x_n]$

Pt fiecare interval $[x_i, x_{i+1}]$ avem polinomul:

$$s_i = a_i + b_i(x-x_i) + c_i(x-x_i)^2 + d_i(x-x_i)^3$$

Folosim baza Bernstein:

$$(1-t)^3, \ 3t(1-t)^2, \ 3t^2(1-t), \ t^3$$

$$s_i(t) = a_i'(1-t)^3 + 3b_i'(1-t)^2 t + 3c_i'(1-t) \cdot t^2 + d_i' t^3$$

Scanned with CamScanner

Condiții de continuitate și corectitudine a funcților

$$\begin{cases} s_i(x_i) = f(x_i), & i = 0:n-1 \\ s_{n-1}(x_n) = f(x_n) \\ s_i'(x_i) = f'(x_i), & i = 0:n-1 \\ s_{n-1}'(x_n) = f'(x_n) \end{cases}$$

$$\begin{cases} s_i(x_{i+1}) = s_{i+1}(x_{i+1}), & i = 0:n-2 \\ s_i'(x_{i+1}) = s'_{i+1}(x_{i+1}), & i = 0:n-2 \end{cases}$$

Se rezolvă relațiile de mai sus și se obține:

$$\begin{cases} a_i' = f(x_i), & i = 0:n-1 \\ d_i' = f(x_{i+1}), & i = 0:n-1 \\ b_i' = f(x_i) + \frac{h_i}{3} \cdot f'(x_i), & i = 0:n-1 \\ c_i' = f(x_{i+1}) - \frac{h_i}{3} \cdot f'(x_{i+1}), & i = 0:n-1 \end{cases}$$

$\boxed{h_i = x_{i+1} - x_i}$ $\boxed{t = \frac{x - x_i}{h_i}}$

Scanned with CamScanner

$\boxed{\text{exemplu}}$

x	0	2	5
$f(x)$	1	3	2
$f'(x)$	0	1	-2

Calculăm s_0 pentru $[0, 2]$, $h_0 = 2 - 0 = 2$

$$\begin{cases} a_0' = 1 \\ d_0' = 3 \\ b_0' = 1 + \frac{2}{3} \cdot 0 = 1 \\ c_0' = 3 - \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{7}{3} \end{cases}$$

$$t_0 = \frac{x - 0}{2} = \frac{x}{2}$$

$$s_0 = 1 \cdot \left(1 - \frac{x}{2}\right)^3 + 1 \cdot 3 \frac{x}{2} \cdot \left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 + \frac{7}{3} \cdot 3 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{x}{2}\right) + 3 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^3$$

Calculăm s_1 pentru $[2, 5]$, $h_1 = 5 - 2 = 3$

$$\begin{cases} a_1' = 3 \\ d_1' = 2 \\ b_1' = 3 + \frac{3}{3} \cdot 1 = 4 \\ c_1' = 2 - \frac{3}{3} \cdot (-2) = 4 \end{cases}$$

$$t = \frac{x - 2}{3}$$

$$s_1 = 3\cdot\left(1-\frac{x-2}{3}\right)^3 + 4\cdot\cancel{3}\cdot\frac{x-2}{\cancel{3}}\cdot\left(1-\frac{x-2}{3}\right)^2 + 4\cdot 3\cdot\left(\frac{x-2}{3}\right)^2\cdot\left(1-\frac{x-2}{3}\right)$$

$$+\,2\cdot\left(\frac{x-2}{3}\right)^3$$

Interpolare cu funcții spline C^2

- tot se calculează s_i pe $[x_i, x_{i+1}]$

Condiții Lagrange:

$$\begin{cases} s_i(x_i) = f(x_i), & i=0:n-1 \\ s_{n-1}(x_n) = f(x_n) \end{cases}$$

$$\begin{cases} s_i(x_{i+1}) = s_{i+1}(x_{i+1}), & i=0:n-2 \\ s_i'(x_{i+1}) = s_{i+1}'(x_{i+1}), & i=0:n-2 \\ s_i''(x_{i+1}) = s_{i+1}''(x_{i+1}) \end{cases}$$

spline natural:

$$\begin{cases} s_0''(x_0)=0 \\ s_{n-1}''(x_n)=0 \end{cases}$$

Scanned with CamScanner

$$\begin{cases} a_i = f(x_i), & i = 0:n \\ d_i = \dfrac{c_{i+1} - c_i}{3h_i}, & i = 0:n-1 \\ b_i = \dfrac{a_{i+1} - a_i}{h_i} - \dfrac{h_i}{3}\cdot(2c_i + c_{i+1}), & i = 0:n-1 \end{cases}$$

Pentru spline naturale se rezolvă sistemul de mai jos, pentru a obține c-urile:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & & & & 0 \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ 0 & & & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{3(a_2-a_1)}{h_1} - \dfrac{3(a_1-a_0)}{h_0} \\ \vdots \\ \dfrac{3(a_n-a_{n-1})}{h_{n-1}} - \dfrac{3(a_{n-1}-a_{n-2})}{h_{n-2}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

exemplu

x	0	2	5
$f(x)$	1	3	7
$f'(x)$	0	1	2
$f''(x)$	0	2	1

$h_0 = 2$

$h_1 = 3$

$a_0 = 1, \quad a_1 = 3, \quad a_2 = 7$

Rezolvăm sistemul pt a obține c-urile:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2\cdot(2+3) & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3(a_2-a_1)}{3} - \frac{3(a_1-a_0)}{2} \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 4 - \frac{3\cdot 2}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$-a_0)$

h_0

$a_{n-1} - a_{n-2})$

h_{n-2}

$$\begin{cases} c_0 \cdot 1 = 0 \\ 2c_0 + 10c_1 + 3c_1 = 1 \Rightarrow c_1 = \frac{1}{10} = 0.1 \\ c_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_0 = \frac{c_1 - c_0}{3\cdot 2} = \frac{0.1}{6} \\ d_1 = \frac{c_2 - c_1}{3\cdot 3} = \frac{0-0.1}{9} = -\frac{0.1}{9} \end{cases}$$

Scanned with CamScanner

$$\begin{cases} b_0 = \dfrac{a_1 - a_0}{h_0} - \dfrac{h_0}{3} \cdot (2c_0 + c_1) = \dfrac{2}{2} - \dfrac{2}{3} \cdot (2 \cdot 0 + 0.1) = 1 - \dfrac{0.2}{3} = \cancel{0.9}\ \dfrac{2.8}{3} \\ b_1 = \dfrac{4}{3} - \dfrac{3}{3} \cdot (2 \cdot 0.1 + 0) = \dfrac{4}{3} - 0.2 = \dfrac{4 - 0.6}{3} = \dfrac{3.4}{3} \end{cases}$$

$\boxed{\text{Curbe Bezier}}$

Pt a calcula un pct de pe o curbă Bezier se folosește algoritmul De Casteljau:

$$P_i^{(j)} = P_i^{(j-1)} \cdot (1 - t_0) + P_{i+1}^{(j-1)} \cdot t_0 \quad , \quad j = 1:n \, , \quad i = 0:n-j$$

e asemănător cu Neville:

$$\begin{array}{ccccc} P_0^{(0)} & \searrow & & & \\ & & P_0^{(1)} & \searrow & \\ P_1^{(0)} & \nearrow\searrow & & & P_0^{(2)} \\ & & P_1^{(1)} & \nearrow & \\ P_2^{(0)} & \nearrow & & & \end{array}$$

$$B(t) = \sum_{i=0}^{n} P_i \cdot \beta_i^n (t)$$

Dacă avem 3 puncte și $t_0 = t$ fixat.

$$P_0^{(1)} = P_0^{(0)} (1 - t) + P_1^{(0)} \cdot t$$

$$P_1^{(1)} = P_1^{(0)} (1 - t) + P_2^{(0)} t$$

$$P_0^{(2)} = P_0^{(1)} (1 - t) + P_1^{(1)} t = \left(P_0^{(0)} (1 - t) + P_1^{(0)} \cdot t\right) \cdot (1 - t) +$$
$$+ \left(P_1^{(0)} \cdot (1 - t) + P_2^{(0)} t\right) \cdot t$$

Scanned with CamScanner