Metoda QR

Aceste metode merg pentru matrice simetrice tridiagonale:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ b_2 & a_2 & b_3 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & \ddots & \ddots & b_n \\ & & & b_{n} & a_n \end{bmatrix}$$

Dacă $b_2 = 0$ și $b_n = 0$, atunci matricea A are valorile proprii a_1 și a_n. Dacă acestea nu sunt, atunci transformăm matricea A până când devin aproximate de 0.

Dacă $b_j = 0$, atunci putem să ne împărțim matricea în 2:

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_1 & b_2 & & 0 \\ b_2 & \ddots & \ddots & \\ 0 & \ddots & \ddots & b_{j-1} \\ & & b_{j-1} & a_{j-1} \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} a_j & b_{j+1} & & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \ddots & \ddots & b_n \\ & & & a_n \end{bmatrix}$$

Apoi aplicăm metodele QR pe cele 2 matrici și aflăm valorile proprii pentru fiecare.

QR fără deplasare

$A^{(k)} = Q \cdot R$

$A^{(k+1)} = R \cdot Q$

$\downarrow$

va fi în continuare simetrică tridiagonală

Cum obținem Q și R? $\to$ Givens.

Notăm $G_{kl} = P_l$

Facem 0-uri doar subdiagonala principală:

~~$G_{21}, G_{32}, \dots G_{n\,n-1}$~~

$G_{12}, G_{23}, \dots G_{n-1\,n}$

$$\rho_{lk} = \sqrt{A(k,k)^2 + A(l,k)^2}$$

Cum știm că avem de-a face cu matrice tridiagonală, pentru P_2 avem:

$(P_2 = G_{12})$

$$\rho = \sqrt{a_1^2 + b_2^2}$$

$$c = \frac{a_1}{\rho}, \quad s = -\frac{b_2}{\rho}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\text{exemplu}}$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 \\ \boxed{1} & 4 & 2 \\ 0 & \boxed{2} & 3 \end{bmatrix}$$

$$a = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$G_{12} = P_2$$

$$\rho = \sqrt{6^2 + 1^2} = \sqrt{37}$$

$$c = \frac{6}{\sqrt{37}} \quad , \quad s = -\frac{1}{\sqrt{37}} \quad ; \quad P_2 = \begin{bmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\cancel{G_{23} = P_3}$$

$$\cancel{\rho = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0.99 & -0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.9 & -0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.9 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 6 & 1.6 & 0.3 \\ 0 & 4.2 & 3.1 \\ 0 & 0 & 1.7 \end{bmatrix}$$

$$A^{(1)} = R \cdot Q = \begin{bmatrix} 6.3 & 0.7 & 0 \\ 0.7 & 5.2 & 08 \\ 0 & 0.8 & 1.5 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0.99 & -0.1 & 0.02 \\ 0.1 & 1 & -0.2 \\ 0 & 0.2 & 0.99 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 6.3 & 1.3 & 0 \\ 0 & 5.1 & 1 \\ 0 & 0 & 1.4 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6.4 & 0.6 & 0 \\ 0.6 & 5.2 & 0.2 \\ 0 & 0.2 & 1.3 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{eig}(A) = \begin{bmatrix} 1.35 & 5 & 6.6 \end{bmatrix}$$

Scanned with CamScanner

QR cu deplasare

Metoda cu deplasare seamănă cu cea precedentă, doar accelerează convergența. Se introduce în relație un σ:

$$A^{(k)} - \sigma \cdot I = Q \cdot R$$

$$A^{(k+1)} = R \cdot Q + \sigma \cdot I$$

σ se alege ca fiind cea mai apropiată valoare proprie de a_n din E:

$$E = \begin{bmatrix} a_{n-1} & b_n \\ b_n & a_n \end{bmatrix}$$

Astfel, b_n va converge cel mai rapid spre 0.

exemplu

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

se pot folosi MPD și MPI

$$E = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{eig } E = [1.44 \quad 5.56]$$

$$|3 - 1.44| < |3 - 5.56|$$

$$\Downarrow$$

$$\sigma = 1.44$$

Scanned with CamScanner

$$A - \sigma i = \begin{bmatrix} 4.57 & 1 & 0 \\ 1 & 2.57 & 2 \\ 0 & 2 & 1.57 \end{bmatrix} = Q \cdot R$$

$$A^{(1)} = R \cdot Q + \sigma i =$$

$$= \begin{bmatrix} 4.9 & 0.6 & 0 \\ 0.6 & 3.89 & -0.6 \\ 0 & -0.6 & -0.07 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.44 & 0 & 0 \\ 0 & 1.44 & 0 \\ 0 & 0 & 1.44 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 6.34 & 0.6 & 0 \\ 0.6 & 5.33 & -0.6 \\ 0 & -0.6 & 1.36 \end{bmatrix}$$