Householder

Algoritm:

1/ se calculează vectorul Householder v_p

$$v_p = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ v_{pp} \\ \vdots \\ v_{mp} \end{bmatrix}$$ ← al p-lea vector

$v_{ip} = a_{ip}, \forall\ i > p$ (toate elementele de sub v_{pp} sunt cele din matricea A)

$$\sigma_p = \operatorname{sign}(a_{pp}) \cdot \sqrt{\sum_{i=p}^{m} a_{ip}^2}$$

$v_{pp} = a_{pp} + \sigma_p$

2) se calculează reflectorul Householder

$$H_p = I_m - 2 \cdot \frac{v_p \cdot v_p'}{v_p' \cdot v_p}$$

3) se calculează H și A:

$A = H_p A$

$H = H_p \cdot H$

4) se repetă până când se termină toate coloanele / liniile ($\min(m-1, n)$ pași)

5) $R = A$, $Q = H^T$, $A = QR$

Givens

Pt G_{kl}:

Pas 1) Se calculează $\rho = \sqrt{A(k,k)^2 + A(l,k)^2}$

Pas 2) Se calculează c și s

$c = \dfrac{A(k,k)}{\rho}$; $s = -\dfrac{A(l,k)}{\rho}$

!! Atenție: și pentru ρ și pt s, se folosește elementul $A(l,k)$, indicii sunt fix invers față de indicii matricii G_{kl}

Pas 3) Se construiește matricea G_{kl} care este matricea unitate și care are 4 elemente modificate, pe liniile și coloanele k și l.
Aceste elemente sunt, în ordine: $\begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}$

Pt o matrice 3×3:

ex: $G_{12} = \begin{bmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; $G_{13} = \begin{bmatrix} c & 0 & -s \\ 0 & 1 & 0 \\ s & 0 & c \end{bmatrix}$

Pas 4): Se calculează noul $A = G_{kl} \cdot A$ și $G = G_{kl} \cdot G$

Pas 5) Repetă până când s-au terminat elementele de făcut.

Pas 6) $R = A$, $Q = G^T$

exemplu Factorizăm QR folosind Givens matricea

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Calculăm G_{12}

$$\rho = \sqrt{A^2(1,1) + A^2(2,1)} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

$$c = \frac{A(1,1)}{\rho} = \frac{3}{\sqrt{10}} = 0.9$$

$$s = -\frac{A(2,1)}{\rho} = -\frac{1}{\sqrt{10}} = -0.3$$

$$G_{12} = \begin{bmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.3 & 0 \\ -0.3 & 0.9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = G_{12} \cdot A = \begin{bmatrix} 3 & 1.8 & -1.5 \\ 0 & 2.4 & 1.5 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Calculăm G_{13}

$$\rho = \sqrt{A(1,1)^2 + A(3,1)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

$$c = \frac{3}{\sqrt{13}} = 0.8 \;; \quad s = -\frac{-2}{\sqrt{13}} = 0.5$$

$$G_{13} = \begin{bmatrix} c & 0 & -s \\ 0 & 1 & 0 \\ s & 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 & -0.5 \\ 0 & 1 & \\ 0.5 & 0 & 0.8 \end{bmatrix}$$

$$A = G_{13} \cdot A = \begin{bmatrix} 3.4 & +1 & -2.7 \\ 0 & 2.4 & 1.5 \\ 0 & 1.7 & 1.7 \end{bmatrix}$$

Calculăm G_{23}

$$\rho = \sqrt{A(2,2)^2 + A(3,2)^2} = \sqrt{2.4^2 + 1.7^2} \approx 3$$

$$c = \frac{2.4}{3} = 0.8 \ ; \ s = -\frac{1.7}{3} = -0.6$$

$$G_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0.6 \\ 0 & -0.6 & 0.8 \end{bmatrix}$$

$$A = G_{23} \cdot A = \begin{bmatrix} 3.4 & 1 & -2.7 \\ 0 & 3 & 2.2 \\ 0 & 0 & 0.4 \end{bmatrix}$$

$$G = G_{23} \cdot G_{13} \cdot G_{12} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & -0.5 \\ 0.03 & 0.8 & 0.5 \\ 0.5 & -0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$

$$Q = G^T = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.03 & 0.5 \\ 0.2 & 0.8 & -0.4 \\ -0.5 & 0.5 & 0.6 \end{bmatrix}$$