Derivare numerică

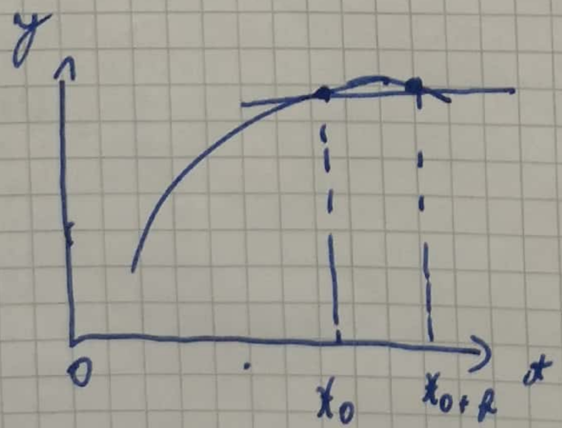
Definiția derivatei: $f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$

Vrem deci să aproximăm $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$

two point formula

Dacă știm funcția f în 2 puncte (în x_0 și x_0+h) putem aplica formula:

$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$, preferabil h să fie mic



- această formulă reprezintă practic panta secantei care unește $f(x_0)$ și $f(x_0+h)$

three - point formula

- avem nevoie să știm funcția în x_0, x_0+h, x_0+2h

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}\left(f(x_0+h) - f(x_0-h)\right)$$

- aici reducerea lui h duce la micșorarea erorii, dar duce la creșterea erorilor de aproximație

exemple

Fie $f(x) = 3e^x + x$, $x_0 = 2$, $h = 0.01$

$f(2) = 24,17$, $f(2.01) = 24.4$, $f(1.99) = 23.9$

2 - point

$$f'(x) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{24.4 - 24.17}{0.01} = \frac{0.23}{0.01} = 23$$

3 - point

$$f'(x) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} = \frac{24.4 - 23.9}{2 \cdot 0.01} = \frac{0.5}{0.02} = 25$$

adevărat:

$f'(x) = 3e^x + 1$, $f'(2) = 3e^2 + 1 = 23.17$

Integrare numerică

Metoda Newton - Cotes

$$i = \int_a^b f(x) \cdot w(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} A_i \cdot f(x_i) + R_n$$

eroare

La aceste metode alegem punctele

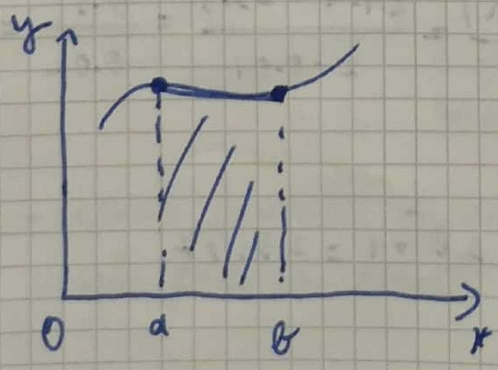
$$x_i = a + i\,\frac{(b-a)}{n}, \quad i = 0:n$$

Se folosesc din nou polinoamele Lagrange.

Metoda trapezelor

acest termen este pus pentru ca eroarea să fie 0.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left(f(a) + f(b)\right) - \frac{h^3 f''(\xi)}{12}, \quad h = b - a$$

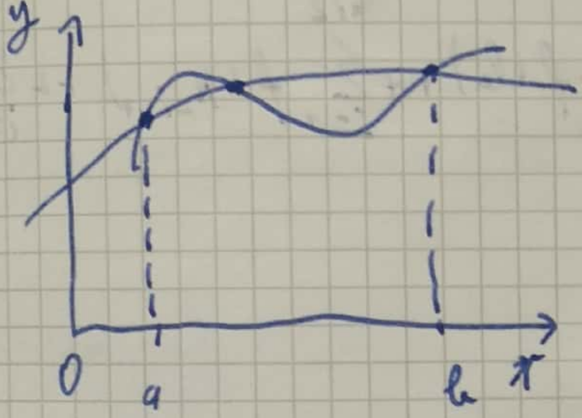


- se unesc cu o dreaptă $f(a)$ și $f(b)$ și se face aria trapezului

Simpson

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) - \overbrace{\frac{h^5 f^{(4)}(\xi)}{90}}^{\text{eroarea}}$$

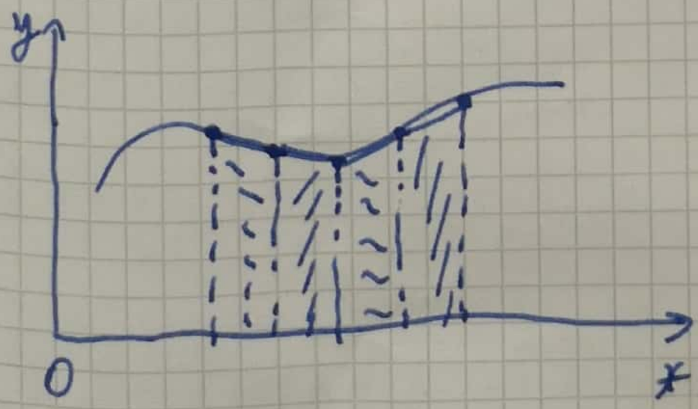
$$h = \frac{b-a}{2}$$



Trapez compus

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left(f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih)\right)$$

$$h = \frac{b-a}{n}$$



- această metodă este practic metoda trapezului aplicată pe fiecare interval $[a+ih, a+(i+1)h]$, iar apoi aceste „mini-integrale" sunt adunate pentru a da integrala mare.

$\boxed{\text{Simpson compus}}$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left(f(a) + f(b) + 4\sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{n/2-1} f(x_{2i}) \right)$$

$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$x_i = a + ih$$

exemple

$$\int_0^1 e^x + 5x\,dx = e^x + \frac{5x^2}{2}\Big|_0^1 = e + \frac{5}{2} - e^0 - 0 = 4.21$$

Trapez

$$i = \frac{h}{2}\left(f(a) + f(b)\right), \quad h = b - a$$

$$i = \frac{h}{2}\left(e^0 + 5 \cdot 0 + e^1 + 5\right) = \frac{1}{2} \cdot (6 + e) = 4.36$$

Simpson

$$i = \frac{h}{3}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right), \quad h = \frac{b-a}{2} = \frac{1}{2}$$

$$i = \frac{\frac{1}{2}}{3}\left(e^0 + 5 \cdot 0 + 4 \cdot \left(e^{1/2} + \frac{5}{2}\right) + e + 5\right) = \frac{1}{6} \cdot 25.313 =$$

$$= 4.22$$

Trapez compus

$n = 4$

$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{4}, \quad x_2 = \frac{2}{4}, \quad x_3 = \frac{3}{4}, \quad x_4 = 1$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4}$$

$$i = \frac{h}{2}\left(f(0) + f(1) + 2\left(f\left(\tfrac{1}{4}\right) + f\left(\tfrac{2}{4}\right) + f\left(\tfrac{3}{4}\right)\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{8} \cdot 33.818 = 4.22$$

$\boxed{\text{Simpson compus}}$

$n = 4$ (același ca la trapez compus)

$$i = \frac{h}{3}\left(f(0) + f(1) + 4f(x_1) + 4f(x_3) + 2f(x_2)\right) =$$

$$= \frac{1}{12}\left(f(0) + f(1) + 4f\left(\tfrac{1}{4}\right) + 4f\left(\tfrac{3}{4}\right) + 2f\left(\tfrac{2}{4}\right)\right) = \frac{1}{12} \cdot 50.620$$

$$= 4.2183$$

Rezultat adevărat: 4.218281

Cuadraturi Gaussiene

- metodele Newton-Cotes sunt exacte dacă avem polinoame de grad maxim N.

- dacă se folosesc cuadraturile Gaussiene, atunci gradul de valabilitate devine 2N+1.

Cebâșev

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{\pi}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f\left(\cos \frac{(2i+1)\pi}{2N}\right)$$

Legendre

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{N} A_{iN} f(x_{iN}) \quad , \text{ unde}$$

x_{iN} sunt rădăcinile polinomului Legendre

$$A_{iN} = \frac{2(1-x_{iN}^2)}{N^2 L_{N-1}^2(x_{iN})}$$, iar L_N este polinomul Legendre de ordin N.

$\boxed{w(x)=1}$

$\boxed{\text{Laguerre:}}$

$\boxed{w = e^{-x}}$

$$\int_0^{\infty} e^{-x} f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{N} A_{iN} f(x_{iN})$$

x_{iN} e rădăcinile polinomului Laguerre de grad $N+1$

$$A_{iN} = \frac{x_{iN}}{(N+1)^2 G_{N+1}^2 (x_{iN})}$$, G_N e polinomul Laguerre de ordin N.

$\boxed{\text{Hermite}}$ $\boxed{w = e^{-x^2}}$

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{N} A_{iN} f(x_{iN})$$

x_{iN} sunt rădăcinile polinomului Hermite de grad $N+1$ (e $N+1$ pt că avem $x_{0N} \dots x_{NN}$, $N+1$ rădăcini, deci polinom de grad $N+1$).

$$A_{iN} = \frac{2^{N+1} N! \cdot \sqrt{\pi}}{H_{N+1}^2 (x_{iN})}$$, H_{N+1} polinomul Hermite

Metoda Romberg

Vom avea matricea Romberg:

$$\begin{bmatrix} i_{11} & & & 0 \\ i_{21} & i_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ i_{n1} & i_{n2} & \cdots & i_{nn} \end{bmatrix}$$

- fiecare element din matrice reprezintă o aproximare a integralei pe care vrem să o calculăm, iar fiecare coloană la dreapta va fi mai apropiată de rezultat ca cele din stânga, așa că rezultatul integralei va fi i_{nn}.

$i_{11}, i_{21}, \dots, i_{n1}$ sunt obținute cu ~~Simpson~~ trapez compus având $2^0, 2^1, \dots, 2^{n-1}$ intervale.

Restul elementelor se bazează pe recurența:

$$i_{kj} = \frac{4^{j-1} i_{k,j-1} - i_{k-1,j-1}}{4^{j-1} - 1}, \quad j = 2:n, \; k = j:n$$

$\boxed{\text{exemplu}}$

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \ln x \Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

răspuns corect

Aplicăm metoda Romberg pentru $\underline{n=3}$.

$$i = \begin{bmatrix} i_{11} & & 0 \\ i_{21} & i_{22} & \\ i_{31} & i_{32} & i_{33} \end{bmatrix}$$

$i_{11} \rightarrow$ ~~simpson~~ trapez compus cu $2^{1-1} = 1$ intervale

$h = b - a = 1$

$$i_{11} = \frac{h}{2}\Big(f(b) + f(a)\Big) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} = \frac{1.5}{2} = 0.75$$

$i_{21} \rightarrow$ trapez compus cu $2^{2-1} = 2$ intervale

$$h = \frac{b-a}{2} = \frac{1}{2} \quad i_{21} = \frac{h}{2}\Big(f(1) + f(2) + 2\cdot f\left(\frac{3}{2}\right)\Big) = \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + 2\cdot\frac{2}{3}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{6+3+8}{6} = \frac{17}{24}$$

$i_{31} \rightarrow$ trapez compus cu $2^{3-1} = 4$ intervale

$$h = \frac{b-a}{4} = \frac{1}{4}$$

Scanned with CamScanner

$$i_{31} = \frac{h}{2}\left(f(1)+f(2)+2\cdot\left(f\left(\frac{5}{4}\right)+f\left(\frac{6}{4}\right)+f\left(\frac{7}{4}\right)\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{8}\left(1+\frac{1}{2}+2\cdot\left(\frac{4}{5}+\frac{4}{6}+\frac{4}{7}\right)\right) = 0.69$$

$$i_{22} = \frac{4^{2-1}\cdot i_{21}-i_{11}}{4^{2-1}-1} = \frac{4\cdot i_{21}-i_{11}}{3} = \frac{4\cdot\frac{17}{24}-0.75}{3} = 0.6944$$

$$i_{32} = \frac{4^{2-1}\cdot i_{31}-i_{21}}{4^{2-1}-1} = \frac{4 i_{31}-i_{21}}{3} = \frac{4\cdot 0.69-\frac{17}{24}}{3} = 0.6839$$

$$i_{33} = \frac{4^{3-1}\cdot i_{32}-i_{22}}{4^{3-1}-1} = \frac{16 i_{32}-i_{22}}{15} = \frac{16\cdot 0.6839-0.6944}{15} =$$

$$= 0.6832$$