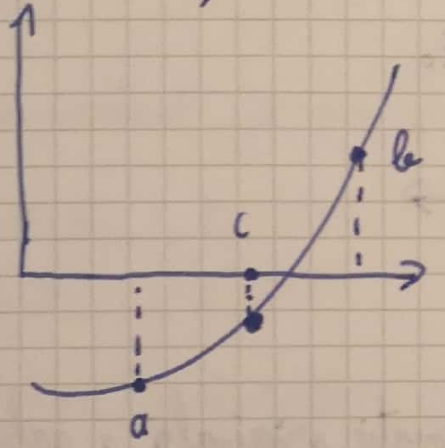
Soluția ecuației neliniare $f(x)=0$

I Metode bazate pe interval

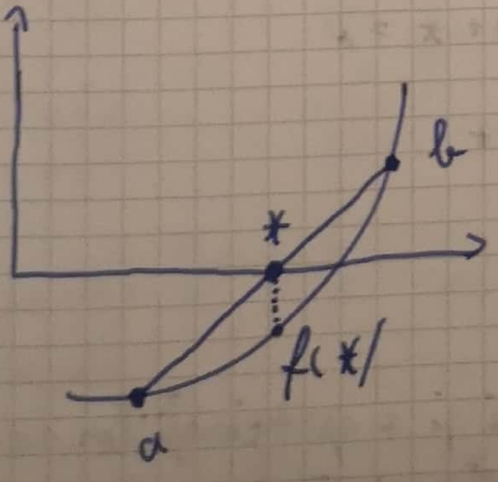
$\boxed{A}$ Metoda bisecției



Dacă $f(a) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow$ există o schimbare de semn, deci în intervalul $[a, b]$ avem o rădăcină.

Alegem c mijlocul intervalului: $c = \frac{a+b}{2}$, iar apoi înlocuim a sau b, după caz, cu c și repetăm procesul până găsim rădăcina.

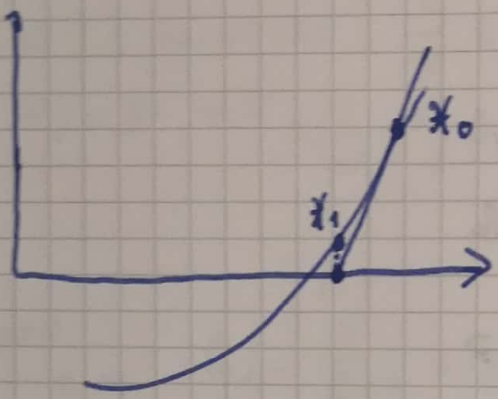
$\boxed{B}$ Metoda secantei



Alegem punctul $x_{i+1} = \frac{a \cdot f(b) - b \cdot f(a)}{f(b) - f(a)}$, iar apoi înlocuim a și b ca anterior

II Metode care nu sunt bazate pe interval

$\boxed{A}$ Metoda tangentei.



Se pornește de la o aproximație originală a soluției x_0, iar apoi se duce tangenta prin acest punct:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

$\boxed{B}$ Metoda aproximațiilor succesive

Vrem să rezolvăm:

$f(x)=0 \ /+x \Rightarrow f(x)+x=x$

Notăm $g(x)=f(x)+x$

$\Downarrow$

$x_{i+1} = g(x_i)$

$\boxed{\text{Obs}}$ Metoda tangentei și a aproximațiilor succesive converg mai repede ca cele din categoria I, dar pot să nu converge.

Metoda Newton de rezolvare a sistemelor de ecuații neliniare

sau pe scurt

Newton

Avem sistemul pe care vrem să-l rezolvăm.

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2 \ldots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1 \ldots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Dacă notăm $F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$

Soluția la pasul $k+1$ este

$x^{(k+1)} = x^{(k)} - J^{-1} \cdot F(x^{(k)})$, unde J e Jacobianul

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Se pornește tot de la o soluție inițială care va fi îmbunătățită pas cu pas.

Scanned with CamScanner

ex

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2 + 1 = 0 & f_1(x_1, x_2) \\ 2x_1^2 + 3 = 0 & f_2(x_1, x_2) \end{cases} \qquad x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = x_0 - J^{-1} \cdot F(x_0)$$

$$J = \begin{bmatrix} 2x_1 & 1 \\ 4x_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.25 \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0.025 \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_1(1,2) = 4 \\ f_2(1,2) = 5 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1.25 \\ 1.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.25 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

Scanned with CamScanner