Cálculo de Programas
Trabalho Prático
MiEI+LCC — Ano Lectivo de 2016/17

Departamento de Informática
Universidade do Minho

Junho de 2017

Grupo nr.	51
a70922	Francisco Sampaio da Costa
a71489	João Luís Martins Areal Vieira
a71369	Octávio José Azevedo Maia

Conteúdo

1 Preâmbulo

A disciplina de Cálculo de Programas tem como objectivo principal ensinar a programação de computadores como uma disciplina científica. Para isso parte-se de um repertório de *combinadores* que formam uma álgebra da programação (conjunto de leis universais e seus corolários) e usam-se esses combinadores para construir programas *composicionalmente*, isto é, agregando programas já existentes.

Na sequência pedagógica dos planos de estudo dos dois cursos que têm esta disciplina, restringe-se a aplicação deste método ao desenvolvimento de programas funcionais na linguagem Haskell.

O presente trabalho tem por objectivo concretizar na prática os objectivos da disciplina, colocando os alunos perante problemas de programação que deverão ser abordados composicionalmente e implementados em Haskell. Há ainda um outro objectivo: o de ensinar a documentar programas e a produzir textos técnico-científicos de qualidade.

2 Documentação

Para cumprir de forma integrada os objectivos enunciados acima vamos recorrer a uma técnica de programação dita "literária" [3], cujo princípio base é o seguinte:

> *Um programa e a sua documentação devem coincidir.*

Por outras palavras, o código fonte e a sua documentação deverão constar do mesmo documento (ficheiro).

O ficheiro `cp1617t.pdf` que está a ler é já um exemplo de programação literária: foi gerado a partir do texto fonte `cp1617t.lhs`[1] que encontrará no material pedagógico desta disciplina descompactando o ficheiro `cp1617t.zip` e executando

```
lhs2TeX cp1617t.lhs > cp1617t.tex
pdflatex cp1617t
```

em que `lhs2tex` é um pre-processador que faz "pretty printing" de código Haskell em LaTeX e que deve desde já instalar a partir do endereço

`https://hackage.haskell.org/package/lhs2tex`.

Por outro lado, o mesmo ficheiro `cp1617t.lhs` é executável e contém o "kit" básico, escrito em Haskell, para realizar o trabalho. Basta executar

```
ghci cp1617t.lhs
```

para ver que assim é:

```
GHCi, version 8.0.2: http://www.haskell.org/ghc/  :? for help
[ 1 of 11] Compiling Show             ( Show.hs, interpreted )
[ 2 of 11] Compiling ListUtils        ( ListUtils.hs, interpreted )
[ 3 of 11] Compiling Probability      ( Probability.hs, interpreted )
[ 4 of 11] Compiling Cp               ( Cp.hs, interpreted )
[ 5 of 11] Compiling Nat              ( Nat.hs, interpreted )
[ 6 of 11] Compiling List             ( List.hs, interpreted )
[ 7 of 11] Compiling LTree            ( LTree.hs, interpreted )
[ 8 of 11] Compiling St               ( St.hs, interpreted )
[ 9 of 11] Compiling BTree            ( BTree.hs, interpreted )
[10 of 11] Compiling Exp              ( Exp.hs, interpreted )
[11 of 11] Compiling Main             ( cp1617t.lhs, interpreted )
Ok, modules loaded: BTree, Cp, Exp, LTree, List, ListUtils, Main, Nat,
Probability, Show, St.
```

O facto de o interpretador carregar as bibliotecas do material pedagógico da disciplina, entre outras, deve-se ao facto de, neste mesmo sítio do texto fonte, se ter inserido o seguinte código Haskell:

```
import Cp
import List
```

[1] O suffixo 'lhs' quer dizer *literate Haskell*.

```
import Nat
import Exp
import BTree
import LTree
import St
import Probability hiding (cond)
import Data.List
import Test.QuickCheck hiding ((×))
import System.Random hiding ⟨·,·⟩
import GHC.IO.Exception
import System.IO.Unsafe
```

Abra o ficheiro `cp1617t.lhs` no seu editor de texto preferido e verifique que assim é: todo o texto que se encontra dentro do ambiente

```
\begin{code}
...
\end{code}
```

vai ser seleccionado pelo GHCi para ser executado.

3 Como realizar o trabalho

Este trabalho teórico-prático deve ser realizado por grupos de três alunos. Os detalhes da avaliação (datas para submissão do relatório e sua defesa oral) são os que forem publicados na página da disciplina na *internet*. Recomenda-se uma abordagem equilibrada e participativa dos membros do grupo de trabalho por forma a poderem responder às questões que serão colocadas na defesa oral do relatório.

Em que consiste, então, o *relatório* a que se refere o parágrafo anterior? É a edição do texto que está a ser lido, preenchendo o anexo C com as suas respostas. O relatório deverá conter ainda a identificação dos membros do grupo de trabalho, no local respectivo da folha de rosto.

Para gerar o PDF integral do relatório deve-se ainda correr os comando seguintes, que actualizam a bibliografia (com BibTEX) e o índice remissivo (com `makeindex`),

```
bibtex cp1617t.aux
makeindex cp1617t.idx
```

e recompilar o texto como acima se indicou. Dever-se-á ainda instalar o utilitário QuickCheck [2] que ajuda a validar programas em Haskell.

Problema 1

O controlador de um processo físico baseia-se em dezenas de sensores que enviam as suas leituras para um sistema central, onde é feito o respectivo processamento.

Verificando-se que o sistema central está muito sobrecarregado, surgiu a ideia de equipar cada sensor com um microcontrolador que faça algum pré-processamento das leituras antes de as enviar ao sistema central. Esse tratamento envolve as operações (em vírgula flutuante) de soma, subtracção, multiplicação e divisão.

Há, contudo, uma dificuldade: o código da divisão não cabe na memória do microcontrolador, e não se pretende investir em novos microcontroladores devido à sua elevada quantidade e preço.

Olhando para o código a replicar pelos microcontroladores, alguém verificou que a divisão só é usada para calcular inversos, $\frac{1}{x}$. Calibrando os sensores foi possível garantir que os valores a inverter estão entre $1 < x < 2$, podendo-se então recorrer à série de Maclaurin

$$\frac{1}{x} = \sum_{i=0}^{\infty} (1-x)^i$$

para calcular $\frac{1}{x}$ sem fazer divisões. Seja então

$$inv\ x\ n = \sum_{i=0}^{n} (1-x)^i$$

[2] Para uma breve introdução ver e.g. https://en.wikipedia.org/wiki/QuickCheck.

a função que aproxima $\frac{1}{x}$ com n iterações da série de MacLaurin. Mostre que $inv\ x$ é um ciclo-for, implementando-o em Haskell (e opcionalmente em C). Deverá ainda apresentar testes em QuickCheck que verifiquem o funcionamento da sua solução. (**Sugestão:** inspire-se no problema semelhante relativo à função ns da secção 3.16 dos apontamentos [4].)

Problema 2

Se digitar $man\ wc$ na shell do Unix (Linux) obterá:

```
NAME
     wc -- word, line, character, and byte count

SYNOPSIS
     wc [-clmw] [file ...]

DESCRIPTION
    The wc utility displays the number of lines, words, and bytes contained in
    each input file,  or standard input (if no file is specified) to the stan-
    dard  output.  A line is defined as  a string of characters delimited by a
    <newline> character.  Characters beyond the final <newline> character will
    not be included in the line count.
    (...)
    The following options are available:
    (...)
        -w   The number of words in each input file is written to the standard
             output.
    (...)
```

Se olharmos para o código da função que, em C, implementa esta funcionalidade [2] e nos focarmos apenas na parte que implementa a opção `-w`, verificamos que a poderíamos escrever, em Haskell, da forma seguinte:

$$
\begin{array}{l}
wc\_w :: [Char] \to Int \\
wc\_w\ [\,] = 0 \\
wc\_w\ (c : l) = \\
\quad \textbf{if}\ \neg\ (sep\ c) \wedge lookahead\_sep\ l \\
\quad \textbf{then}\ wc\_w\ l + 1 \\
\quad \textbf{else}\ wc\_w\ l \\
\quad\quad \textbf{where} \\
\quad\quad\quad sep\ c = (c \equiv \texttt{' '} \vee c \equiv \texttt{'\textbackslash n'} \vee c \equiv \texttt{'\textbackslash t'}) \\
\quad\quad\quad lookahead\_sep\ [\,] = True \\
\quad\quad\quad lookahead\_sep\ (c : l) = sep\ c
\end{array}
$$

Re-implemente esta função segundo o modelo *worker/wrapper* onde *wrapper* deverá ser um catamorfismos de listas. Apresente os cálculos que fez para chegar a essa sua versão de wc_w e inclua testes em QuickCheck que verifiquem o funcionamento da sua solução. (**Sugestão:** aplique a lei de recursividade múltipla às funções wc_w e $lookahead\_sep$.)

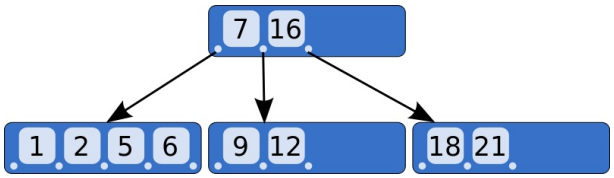
Problema 3

Uma "B-tree"é uma generalização das árvores binárias do módulo BTree a mais do que duas sub-árvores por nó:

$$\textbf{data}\ \mathsf{B\text{-}tree}\ a = Nil \mid Block\ \{leftmost :: \mathsf{B\text{-}tree}\ a, block :: [(a, \mathsf{B\text{-}tree}\ a)]\}\ \textbf{deriving}\ (Show, Eq)$$

Por exemplo, a B-tree[3]

[3]Créditos: figura extraída de https://en.wikipedia.org/wiki/B-tree.



é representada no tipo acima por:

$$
\begin{array}{l}
t = Block\ \{ \\
\quad leftmost = Block\ \{ \\
\quad\quad leftmost = Nil, \\
\quad\quad block = [(1, Nil), (2, Nil), (5, Nil), (6, Nil)]\}, \\
\quad block = [\\
\quad\quad (7, Block\ \{ \\
\quad\quad\quad leftmost = Nil, \\
\quad\quad\quad block = [(9, Nil), (12, Nil)]\}), \\
\quad\quad (16, Block\ \{ \\
\quad\quad\quad leftmost = Nil, \\
\quad\quad\quad block = [(18, Nil), (21, Nil)]\}) \\
\quad\quad]\}
\end{array}
$$

Pretende-se, neste problema:

1. Construir uma biblioteca para o tipo B-tree da forma habitual (in + out; ana + cata + hylo; instância na classe $Functor$).

2. Definir como um catamorfismo a função $inordB\_tree$ :: B-tree $t \rightarrow [t]$ que faça travessias "inorder"de árvores deste tipo.

3. Definir como um catamorfismo a função $largestBlock$ :: B-tree $a \rightarrow Int$ que detecta o tamanho do maior bloco da árvore argumento.

4. Definir como um anamorfismo a função $mirrorB\_tree$ :: B-tree $a \rightarrow$ B-tree a que roda a árvore argumento de 180º

5. Adaptar ao tipo B-tree o hilomorfismo "quick sort"do módulo BTree. O respectivo anamorfismo deverá basear-se no gene $lsplitB\_tree$ cujo funcionamento se sugere a seguir:

$$
\begin{array}{l}
lsplitB\_tree\ [\,] = i_1\ () \\
lsplitB\_tree\ [7] = i_2\ ([\,], [(7, [\,])]) \\
lsplitB\_tree\ [5, 7, 1, 9] = i_2\ ([1], [(5, [\,]), (7, [9])]) \\
lsplitB\_tree\ [7, 5, 1, 9] = i_2\ ([1], [(5, [\,]), (7, [9])])
\end{array}
$$

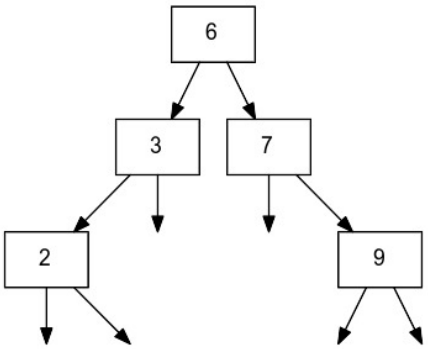
6. A biblioteca Exp permite representar árvores-expressão em formato DOT, que pode ser lido por aplicações como por exemplo Graphviz, produzindo as respectivas imagens. Por exemplo, para o caso de árvores BTree, se definirmos

$$
\begin{array}{l}
dotBTree :: Show\ a \Rightarrow \mathsf{BTree}\ a \rightarrow \mathsf{IO}\ ExitCode \\
dotBTree = dotpict \cdot bmap\ nothing\ (Just \cdot show) \cdot cBTree2Exp
\end{array}
$$

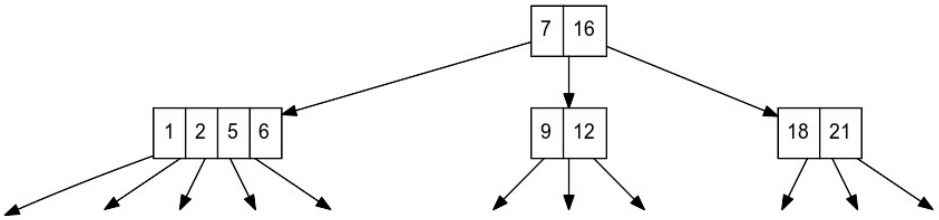
executando $dotBTree\ t$ para

$$t = Node\ (6, (Node\ (3, (Node\ (2, (Empty, Empty)), Empty)), Node\ (7, (Empty, Node\ (9, (Empty, Empty))))))$$

obter-se-á a imagem



Escreva de forma semelhante uma função $dotB\_tree$ que permita mostrar em Graphviz[4] árvores B-tree tal como se ilustra a seguir,



para a árvora dada acima.

Problema 4

Nesta disciplina estudaram-se funções mutuamente recursivas e como lidar com elas. Os tipos indutivos de dados podem, eles próprios, ser mutuamente recursivos. Um exemplo dessa situação são os chamados L-Systems.

Um L-System é um conjunto de regras de produção que podem ser usadas para gerar padrões por re-escrita sucessiva, de acordo com essas mesmas regras. Tal como numa gramática, há um axioma ou símbolo inicial, de onde se parte para aplicar as regras. Um exemplo célebre é o do crescimento de algas formalizado por Lindenmayer[5] no sistema:

Variáveis: A e B
Constantes: nenhuma
Axioma: A
Regras: $A \rightarrow A\ B, B \rightarrow A$.

Quer dizer, em cada iteração do "crescimento"da alga, cada A deriva num par $A\ B$ e cada B converte-se num A. Assim, ter-se-á, onde n é o número de iterações desse processo:

- $n = 0$: A
- $n = 1$: $A\ B$
- $n = 2$: $A\ B\ A$
- $n = 3$: $A\ B\ A\ A\ B$
- etc

[4]Como alternativa a instalar Graphviz, podem usar WebGraphviz num browser.
[5]Ver https://en.wikipedia.org/wiki/Aristid_Lindenmayer.

Este L-System pode codificar-se em Haskell considerando cada variável um tipo, a que se adiciona um caso de paragem para poder expressar as sucessivas iterações:

$$\begin{aligned}&\textbf{type } Algae = A\\&\textbf{data } A = \text{NA} \mid A\ A\ B \textbf{ deriving } Show\\&\textbf{data } B = \text{NB} \mid B\ A \textbf{ deriving } Show\end{aligned}$$

Observa-se aqui já que A e B são mutuamente recursivos. Os isomorfismos in/out são definidos da forma habitual:

$$\begin{aligned}&inA :: 1 + A \times B \to A\\&inA = [\underline{\text{NA}}, \widehat{A}]\\&outA :: A \to 1 + A \times B\\&outA\ \text{NA} = i_1\ ()\\&outA\ (A\ a\ b) = i_2\ (a, b)\\&inB :: 1 + A \to B\\&inB = [\underline{\text{NB}}, B]\\&outB :: B \to 1 + A\\&outB\ \text{NB} = i_1\ ()\\&outB\ (B\ a) = i_2\ a\end{aligned}$$

O functor é, em ambos os casos, $\mathsf{F}\ X = 1 + X$. Contudo, os catamorfismos de A têm de ser estendidos com mais um gene, de forma a processar também os B,

$$\begin{aligned}&(\!|\cdot\ \cdot|\!)_A :: (1 + c \times d \to c) \to (1 + c \to d) \to A \to c\\&(\!|ga\ gb|\!)_A = ga \cdot (id + (\!|ga\ gb|\!)_A \times (\!|ga\ gb|\!)_B) \cdot outA\end{aligned}$$

e a mesma coisa para os Bs:

$$\begin{aligned}&(\!|\cdot\ \cdot|\!)_B :: (1 + c \times d \to c) \to (1 + c \to d) \to B \to d\\&(\!|ga\ gb|\!)_B = gb \cdot (id + (\!|ga\ gb|\!)_A) \cdot outB\end{aligned}$$

Pretende-se, neste problema:

1. A definição dos anamorfimos dos tipos A e B.
2. A definição da função

   $$generateAlgae :: Int \to Algae$$

   como anamorfismo de $Algae$ e da função

   $$showAlgae :: Algae \to String$$

   como catamorfismo de $Algae$.
3. Use QuickCheck para verificar a seguinte propriedade:

   $$\mathsf{length} \cdot showAlgae \cdot generateAlgae = fib \cdot \mathsf{succ}$$

Problema 5

O ponto de partida deste problema é um conjunto de equipas de futebol, por exemplo:

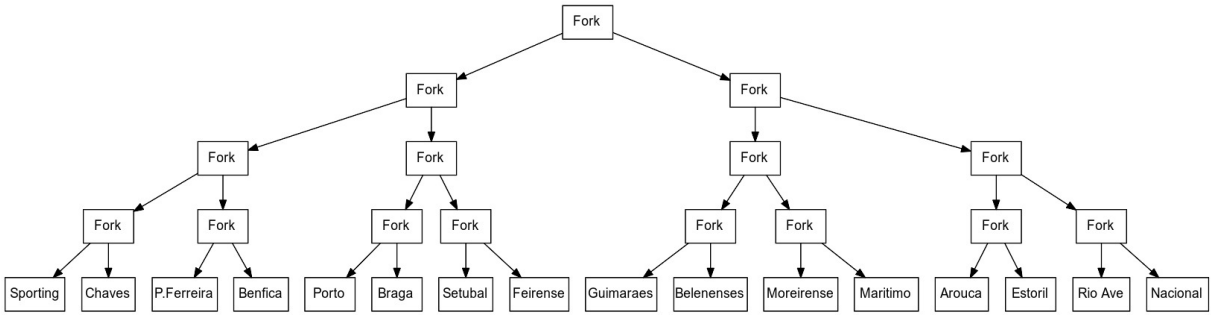
```
equipas :: [Equipa]
equipas = [
  "Arouca","Belenenses","Benfica","Braga","Chaves","Feirense",
  "Guimaraes","Maritimo","Moreirense","Nacional","P.Ferreira",
  "Porto","Rio Ave","Setubal","Sporting","Estoril"
  ]
```

Assume-se que há uma função $f\ (e_1, e_2)$ que dá — baseando-se em informação acumulada historicamente, e.g. estatística — qual a probabilidade de e_1 ou e_2 ganharem um jogo entre si.[6] Por exemplo, f (`"Arouca"`, `"Braga"`) poderá dar como resultado a distribuição

$$\begin{array}{ll} \mathit{Arouca} & 28.6\% \\ \mathit{Braga} & 71.4\% \end{array}$$

indicando que há 71.4% de probabilidades de `"Braga"` ganhar a `"Arouca"`.

Para lidarmos com probabilidades vamos usar o mónade Dist a que vem descrito no apêndice A e que está implementado na biblioteca Probability [1] — ver definição (1) mais adiante. A primeira parte do problema consiste em sortear *aleatoriamente* os jogos das equipas. O resultado deverá ser uma LTree contendo, nas folhas, os jogos da primeira eliminatória e cujos nós indicam quem joga com quem (vencendo), à medida que a eliminatória prossegue:



A segunda parte do problema consiste em processar essa árvore usando a função

$$\mathit{jogo} :: (\mathit{Equipa}, \mathit{Equipa}) \to \mathsf{Dist}\ \mathit{Equipa}$$

que foi referida acima. Essa função simula um qualquer jogo, como foi acima dito, dando o resultado de forma probabilística. Por exemplo, para o sorteio acima e a função *jogo* que é dada neste enunciado[7], a probabilidade de cada equipa vir a ganhar a competição vem dada na distribuição seguinte:

$$\begin{array}{ll} \mathit{Porto} & 21.7\% \\ \mathit{Sporting} & 21.4\% \\ \mathit{Benfica} & 19.0\% \\ \mathit{Guimaraes} & 9.4\% \\ \mathit{Braga} & 5.1\% \\ \mathit{Nacional} & 4.9\% \\ \mathit{Maritimo} & 4.1\% \\ \mathit{Belenenses} & 3.5\% \\ \mathit{Rio\ Ave} & 2.3\% \\ \mathit{Moreirense} & 1.9\% \\ \mathit{P.Ferreira} & 1.4\% \\ \mathit{Arouca} & 1.4\% \\ \mathit{Estoril} & 1.4\% \\ \mathit{Setubal} & 1.4\% \\ \mathit{Feirense} & 0.7\% \\ \mathit{Chaves} & 0.4\% \end{array}$$

Assumindo como dada e fixa a função *jogo* acima referida, juntando as duas partes obteremos um *hilomorfismo* de tipo $[\mathit{Equipa}] \to \mathsf{Dist}\ \mathit{Equipa}$,

$$\begin{array}{l} \mathit{quem\_vence} :: [\mathit{Equipa}] \to \mathsf{Dist}\ \mathit{Equipa} \\ \mathit{quem\_vence} = \mathit{eliminatoria} \cdot \mathit{sorteio} \end{array}$$

com características especiais: é aleatório no anamorfismo (sorteio) e probabilístico no catamorfismo (eliminatória).

[6] Tratando-se de jogos eliminatórios, não há lugar a empates.

[7] Pode, se desejar, criar a sua própria função *jogo*, mas para efeitos de avaliação terá que ser usada a que vem dada neste enunciado. Uma versão de *jogo* realista teria que ter em conta todas as estatísticas de jogos entre as equipas em jogo, etc etc.

O anamorfismo $sorteio :: [Equipa] \to \mathsf{LTree}\ Equipa$ tem a seguinte arquitectura, [8]

$$sorteio = anaLTree\ lsplit \cdot envia \cdot permuta$$

reutilizando o anamorfismo do algoritmo de "merge sort", da biblioteca LTree, para construir a árvore de jogos a partir de uma permutação aleatória das equipas gerada pela função genérica

$$permuta :: [a] \to \mathsf{IO}\ [a]$$

A presença do mónade de IO tem a ver com a geração de números aleatórios[9].

1. Defina a função monádica $permuta$ sabendo que tem já disponível

   $$getR :: [a] \to \mathsf{IO}\ (a, [a])$$

   $getR\ x$ dá como resultado um par (h, t) em que h é um elemento de x tirado à sorte e t é a lista sem esse elemento – mas esse par vem encapsulado dentro de IO.

2. A segunda parte do exercício consiste em definir a função monádica

   $$eliminatoria :: \mathsf{LTree}\ Equipa \to \mathsf{Dist}\ Equipa$$

   que, assumindo já disponível a função $jogo$ acima referida, dá como resultado a distribuição de equipas vencedoras do campeonato.

Sugestão: inspire-se na secção 4.10 (*'Monadification' of Haskell code made easy*) dos apontamentos [4].

Referências

[1] M. Erwig and S. Kollmansberger. Functional pearls: Probabilistic functional programming in Haskell. *J. Funct. Program.*, 16:21–34, January 2006.

[2] B.W. Kernighan and D.M. Richtie. *The C Programming Language*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1978.

[3] D.E. Knuth. *Literate Programming*. CSLI Lecture Notes Number 27. Stanford University Center for the Study of Language and Information, Stanford, CA, USA, 1992.

[4] J.N. Oliveira. *Program Design by Calculation*, 2008. Draft of textbook in preparation. viii+297 pages. Informatics Department, University of Minho.

[8] A função *envia* não é importante para o processo; apenas se destina a simplificar a arquitectura monádica da solução.
[9] Quem estiver interessado em detalhes deverá consultar System.Random.

Anexos

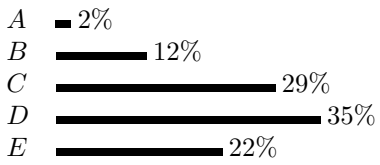
A Mónade para probabilidades e estatística

Mónades são functores com propriedades adicionais que nos permitem obter efeitos especiais em programação. Por exemplo, a biblioteca Probability oferece um mónade para abordar problemas de probabilidades. Nesta biblioteca, o conceito de distribuição estatística é captado pelo tipo

$$\textbf{newtype}\ \text{Dist}\ a = D\ \{unD :: [(a, ProbRep)]\} \tag{1}$$

em que $ProbRep$ é um real de 0 a 1, equivalente a uma escala de 0 a 100%.

Cada par (a, p) numa distribuição $d :: \text{Dist}\ a$ indica que a probabilidade de a é p, devendo ser garantida a propriedade de que todas as probabilidades de d somam 100%. Por exemplo, a seguinte distribuição de classificações por escalões de A a E,



será representada pela distribuição

$$\begin{aligned} &d1 :: \text{Dist}\ Char \\ &d1 = D\ [(\texttt{'A'}, 0.02), (\texttt{'B'}, 0.12), (\texttt{'C'}, 0.29), (\texttt{'D'}, 0.35), (\texttt{'E'}, 0.22)] \end{aligned}$$

que o GHCi mostrará assim:

```
'D'  35.0%
'C'  29.0%
'E'  22.0%
'B'  12.0%
'A'   2.0%
```

É possível definir geradores de distribuições, por exemplo distribuições *uniformes*,

$$d2 = uniform\ (words\ \texttt{"Uma frase de cinco palavras"})$$

isto é

```
    "Uma"  20.0%
  "cinco"  20.0%
     "de"  20.0%
  "frase"  20.0%
"palavras"  20.0%
```

distribuição *normais*, eg.

$$d3 = normal\ [10\,..\,20]$$

etc.[10]

Dist forma um **mónade** cuja unidade é $return\ a = D\ [(a, 1)]$ e cuja composição de Kleisli é (simplificando a notação)

$$(f \bullet g)\ a = [(y, q * p)\ |\ (x, p) \leftarrow g\ a, (y, q) \leftarrow f\ x]$$

em que $g{:}A \to \text{Dist}\ B$ e $f{:}B \to \text{Dist}\ C$ são funções **monádicas** que representam *computações probabilísticas*.

Este mónade é adequado à resolução de problemas de *probabilidades e estatística* usando programação funcional, de forma elegante e como caso particular de programação monádica.

[10] Para mais detalhes ver o código fonte de Probability, que é uma adaptação da biblioteca PHP ("Probabilistic Functional Programming"). Para quem quiser souber mais recomenda-se a leitura do artigo [1].

B Definições auxiliares

São dadas: a função que simula jogos entre equipas,

```
type Equipa = String
jogo :: (Equipa, Equipa) → Dist Equipa
jogo (e1, e2) = D [(e1, 1 − r1 / (r1 + r2)), (e2, 1 − r2 / (r1 + r2))] where
  r1 = rank e1
  r2 = rank e2
  rank = pap ranks
  ranks = [
    ("Arouca", 5),
    ("Belenenses", 3),
    ("Benfica", 1),
    ("Braga", 2),
    ("Chaves", 5),
    ("Feirense", 5),
    ("Guimaraes", 2),
    ("Maritimo", 3),
    ("Moreirense", 4),
    ("Nacional", 3),
    ("P.Ferreira", 3),
    ("Porto", 1),
    ("Rio Ave", 4),
    ("Setubal", 4),
    ("Sporting", 1),
    ("Estoril", 5)]
```

a função (monádica) que parte uma lista numa cabeça e cauda *aleatórias*,

```
getR :: [a] → IO (a, [a])
getR x = do {
  i ← getStdRandom (randomR (0, length x − 1));
  return (x !! i, retira i x)
  } where retira i x = take i x ++ drop (i + 1) x
```

e algumas funções auxiliares de menor importância: uma que ordena listas com base num atributo (função que induz uma pré-ordem),

```
presort :: (Ord a, Ord b) ⇒ (b → a) → [b] → [b]
presort f = map π2 · sort · (map (fork f id))
```

e outra que converte "look-up tables"em funções (parciais):

```
pap :: Eq a ⇒ [(a, t)] → a → t
pap m k = unJust (lookup k m) where unJust (Just a) = a
```

C Soluções propostas

Os alunos devem colocar neste anexo as suas soluções aos exercícios propostos, de acordo com o "layout" que se fornece. Não podem ser alterados os nomes das funções dadas, mas pode ser adicionado texto e / ou outras funções auxiliares que sejam necessárias.

Problema 1

```
inv x = π1 · for ⟨(+)^, ((1 − x)∗) · π2⟩ (1, 1 − x)
```

De modo a implementar o mecanismo de *QuickCheck* foi necessário gerar um **Double** entre *1.0* e *2.0*. Para este efeito utilizamos a propriedade *Gen* da biblioteca *QuickCheck*.

Após isto, foi criada a função **testProb1**, responsável por chamar a função *quickCheck* para todos os elementos gerados pelo *genDouble*. Esta função recebe como parâmetro um inteiro **n** responsável pelo número de iterações a realizar.

```
genDouble :: Gen (Double)
genDouble = Test.QuickCheck.choose (1.0, 2.0)
testProb1 n = quickCheck $ forAll genDouble check
  where check = λx → (abs ((1 / x) − (inv x n + 1))) > abs ((1 / x) − (inv x n))
```

Problema 2

```
wc_w_final :: [Char] → Int
wc_w_final = wrapper · worker
wrapper = π2
worker = cataList $ [a, b]
  where
    a = ⟨true, 0⟩
    b = ⟨sep · π1, cond (∧) · (¬ · sep × π1)) (succ · π2 · π2) (π2 · π2)⟩
    sep c = c ≡ ' ' ∨ c ≡ '\n' ∨ c ≡ '\t'
```

De modo a implementar o mecanismo de *QuickCheck* foi necessário criar a função **check** que compara o resultado da função *wc_w* (fornecida pelo professor) e a função *wc_w_final* criada por nós.
A função *check* recebe uma string como argumento, mas o *QuickCheck* tem a capacidade de gerar uma string aleatória, removendo assim a necessidade de passar um argumento.

```
check s = toInteger (wc_w s) ≡ toInteger (wc_w_final s)
testProb2 = quickCheck check
```

Problema 3

```
inB_tree = [Nil, Block]
outB_tree Nil = i1 ()
outB_tree (Block a b) = i2 (a, b)
recB_tree f = baseB_tree id f
baseB_tree g f = id + (f × (map (g × f)))
cataB_tree g = g · (recB_tree (cataB_tree g)) · outB_tree
anaB_tree g = inB_tree · (recB_tree (anaB_tree g)) · g
hyloB_tree f g = cataB_tree f · anaB_tree g
instance Functor B-tree
  where fmap f = cataB_tree (inB_tree · baseB_tree f id)
inordB_tree = cataB_tree inordB
inordB = [nil, join]
  where join = conc · (id × (foldr (++) []) · (map cons))
largestBlock = cataB_tree largestBlockAux
largestBlockAux = [0, largest]
  where largest (x, xs) = max x (max (length xs) (maximum (π2 (unzip xs))))
mirrorB_tree = anaB_tree ((id + mirrorB_treeAux) · outB_tree)
mirrorB_treeAux (x, xs) = (π2 (last xs), reverse (mirrorAux (x, reverse zip ((reverse × id) (unzip xs)))))
mirrorAux (x, (a, b) : xs) = (a, x) : xs
lsplitB_tree [] = i1 ()
lsplitB_tree [h] = i2 ([], [(h, [])])
lsplitB_tree (x : y : t)
```

```
    | x > y = let (l1, l2, l3) = auxB_tree ((∧̂) · ⟨>y, <x⟩) (>y) t in i2 (l1, (y, l2) : [(x, l3)])
    | otherwise = let (l1, l2, l3) = auxB_tree ((∧̂) · ⟨>x, <y⟩) (>x) t in i2 (l1, (x, l2) : [(y, l3)])
auxB_tree :: (a → Bool) → (a → Bool) → [a] → ([a], [a], [a])
auxB_tree π1 π2 [] = ([], [], [])
auxB_tree π1 π2 (h : t)
    | π1 h = let (s, m, l) = auxB_tree π1 π2 t in (s, h : m, l)
    | π2 h = let (s, m, l) = auxB_tree π1 π2 t in (s, m, h : l)
    | otherwise = let (s, m, l) = auxB_tree π1 π2 t in (h : s, m, l)
qSortB_tree :: Ord a ⇒ [a] → [a]
qSortB_tree = hyloB_tree inordB lsplitB_tree
dotB_tree :: Show a ⇒ B-tree a → IO ExitCode
dotB_tree = dotpict · bmap nothing (Just · show) · cB_tree2Exp
cB_tree2Exp = cataB_tree $ [nul, rest]
  where
    nul = (Var "nil")
    rest = (Term^) · ⟨(map π1) · π2, cons · ⟨π1, (map π2) · π2⟩⟩
```

Problema 4

```
⦇ga gb⦈A = inA · (id + ⦇ga gb⦈A × ⦇ga gb⦈B) · ga
⦇ga gb⦈B = inB · (id + ⦇ga gb⦈A) · gb

generateAlgae = ⦇ga gb⦈A
ga 0 = i1 ()
ga n = i2 (n − 1, n − 1)
gb 0 = i1 ()
gb n = i2 (n − 1)
showAlgae = (|l r|)A
  where
    l = ["A", conc]
    r = ["B", id]
```

De modo a implementar o mecanismo de *QuickCheck* foi necessário gerar um **Int**. Para este efeito utilizamos a propriedade *Gen* da biblioteca *QuickCheck*, na qual decidimos restringir o valor do mesmo entre 0 e 10, de modo a evitar representações de *Algaes* com demasiados nodos.
No enunciado é pedido para verificar a seguinte propriedade:

```
length · showAlgae · generateAlgae = fib · succ
```

Assim sendo, calculamos o comprimento da *Algae* gerada aleatoriamente pelo nosso *QuickCheck* e comparamos com o sucessor da série de Fibonacci. Caso ambos os valores sejam iguais passa no teste do *QuickCheck*, iterando para o resto dos valores gerados aleatoriamente.

```
genInt :: Gen (Int)
genInt = Test.QuickCheck.choose (0, 10)
checkAlgae n = a ≡ f
  where
    a = toInteger $ length (showAlgae (generateAlgae n))
    f = fib $ toInteger (succ n)
testProb4 = quickCheck $ forAll genInt checkAlgae
```

Problema 5

```
permuta [] = return []
permuta l = do {
  (h, t) ← getR l;
  x ← permuta t;
  return (h : x)
  }
```

De modo a ser possível testar a função **eliminatoria** utilizamos o exemplo fornecido, transformando-o numa *LTree*.
Assim sendo, após correr a mesma utilizando como argumento a *LTree* previamente criada, pudemos verificar que as percentagens são identicas às do enunciado, provando assim que a função está corretamente implementada.

```
eliminatoria (Leaf x) = return x
eliminatoria (Fork (x, y)) = do {
  v ← eliminatoria x;
  z ← eliminatoria y;
  jogo (v, z)
  }
listaEquipas = Fork (
  Fork (
    Fork (
      Fork (Leaf ("Sporting"), Leaf ("Chaves")),
      Fork (Leaf ("P.Ferreira"), Leaf ("Benfica"))
      )
    , Fork (
      Fork (Leaf ("Porto"), Leaf ("Braga")),
      Fork (Leaf ("Setubal"), Leaf ("Feirense"))
      )
    )
  , Fork (
    Fork (
      Fork (Leaf ("Guimaraes"), Leaf ("Belenenses")),
      Fork (Leaf ("Moreirense"), Leaf ("Maritimo"))
      )
    , Fork (
      Fork (Leaf ("Arouca"), Leaf ("Estoril")),
      Fork (Leaf ("Rio Ave"), Leaf ("Nacional"))
      )
    )
  )
```

Índice