Universidade do Minho

Opção UMinho
Matemática das Coisas
2014/2015

Soma de Riemann

Octávio Maia

a71369

20 de Junho de 2015

Conteúdo

1 Introdução **3**

2 Desenvolvimento **4**

2.1 Utilização na Matemática 4

2.2 Definição da Soma de Riemann 4

2.3 Exemplo prático 5

2.4 Implementação em MATLAB 6

3 Conclusão **8**

1 Introdução

Este relatório terá como base um tema importantíssimo para a matemática moderna. Este tema foi abordado em profundidade nas aulas de Análise.

Trata-se da Soma de Riemann, um método essencial para a definição de integral.

Este método é usado extensivamente para o cálculo de áreas de funções, através da divisão da área da mesma em áreas mais pequenas, através de retângulos. Isto permite calcular a área aproximada com um nível de fiabilidade elevadíssimo, sendo então um fundamento essencial para as Engenharias.

Neste relatório irei explicar o funcionamento da Soma de Riemann, utilizando para este efeito um exemplo prático e a implementação desta função em MATLAB.

2 Desenvolvimento

2.1 Utilização na Matemática

A Soma de Riemann tem como principio calcular a área abaixo de uma função matemática, ***f(x)***, num intervalo **[a,b]**. Este intervalo **[a,b]** será dividido em **n** divisões, de igual comprimento, **x**. De notar que quanto maior for o espetro de divisões **n** mais correta será a aproximação à área real da função.

A cada divisão será desenhado um retângulo, correspondente à aproximação da área da função no intervalo **x**. No final iremos somar todas as áreas dos retângulos para obter uma aproximação da área total da função ***f(x)***.

Na Figura 1 podemos verificar um exemplo da Soma de Riemann.

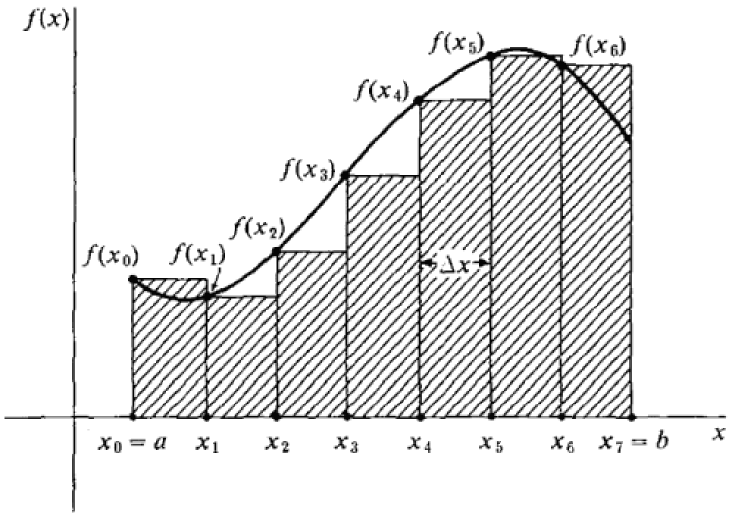

Figura 1: Exemplo da implementação da Soma da Riemann com 7 divisões.

2.2 Definição da Soma de Riemann

Seja ***f*** a função representada na Figura 1 e **n** o número de divisões da mesma. A área dos retângulos pode ser calculada através da altura no ponto x_i, dada por ***f(***x_i***)*** multiplicada pela diferença entre os pontos x_i e x_{i-1}, dada por ***(***x_i-x_{i-1}***)***.

A Soma de Riemann, **S**, pode ser definida através do somatório das áreas dos retângulos através da seguinte fórmula.

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1})$$

Figura 2: Definição da Soma de Riemann.

2.3 Exemplo prático

Neste exemplo prático iremos utilizar a função ***f=2+sin x***, definida no intervalo **[-3,6]**. Esta função possui uma área de 16.05 u.a.

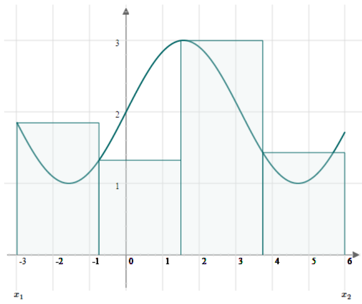

Figura 3: Soma de Riemann usando aproximação a 4 retângulos.

Na Figura 3 podemos ver a aproximação usando 4 retângulos, resultando numa área de 17.059 u.a. Podemos concluir que, para obter uma maior fiabilidade, devemos aumentar o número de retângulos, ou seja aumentar as **n** divisões.

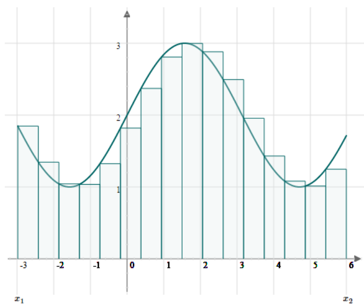

Figura 4: Soma de Riemann usando aproximação a 16 retângulos.

Na Figura 4 podemos ver a aproximação usando 16 retângulos, resultando numa área de 15.568 u.a. Podemos concluir que o aumento do número de divisões leva a uma maior fiabilidade no cálculo de áreas através da Soma de Riemann.

2.4 Implementação em MATLAB

Para calcular a Soma de Riemann em MATLAB utilizamos a função já definida: ***rsums(f,a,b)***.

- f - A função que iremos utilizar.
- a - O limite inferior do integral.
- b - O limite superior do integral.

Aqui deixo o exemplo da implementação em MATLAB:

```
>> syms f
>> syms x
>> f = sin(x) + 2

f =

sin(x) + 2

>> rsums(f,-3,6)
```

Após a execução da função ***rsums***, o MATLAB[1] gera automaticamente uma figura mostrando o resultado das somas dos **n** retângulos.

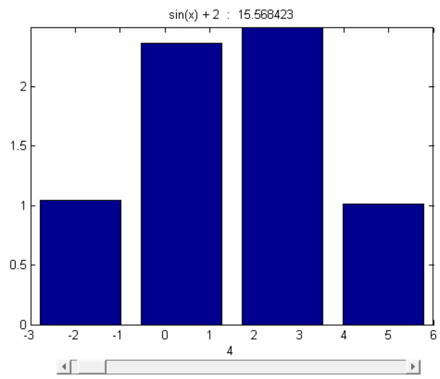

Figura 5: Soma de Riemann usando aproximação em MATLAB a 4 retângulos.

Podemos verificar que a aproximação a 4 retângulos em MATLAB não é muito próxima do valor real.

[1] Ter em consideração que o MATLAB apenas utiliza a aproximação média e este relatório foi baseado na aproximação à esquerda (método utilizado na disciplina de Análise).

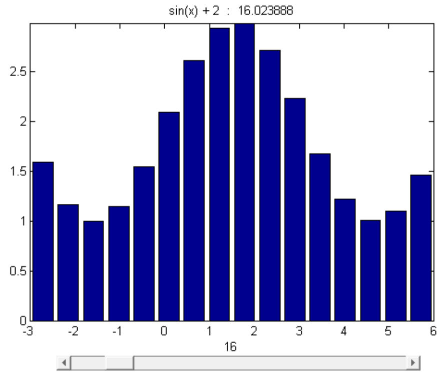

Figura 6: Soma de Riemann usando aproximação em MATLAB a 16 retângulos.

Comparando com a aproximação a 16 retângulos, estamos muito próximos do valor pretendido. Para aumentar a fiabilidade deste calculo decidi aumentar o número de retângulos para 128 *(máximo permitido no MATLAB).*

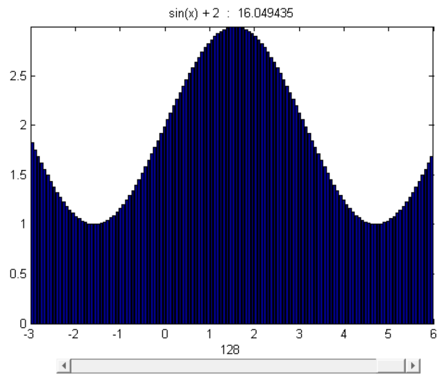

Figura 7: Soma de Riemann usando aproximação em MATLAB a 128 retângulos.

A aproximação a 128 retângulos possui o maior nível de fiabilidade, possuindo uma área total de 16.049435, sendo a área total de 16.05.

3 Conclusão

Após a realização deste relatório reforcei o meu conhecimento neste tema muito importante, a Soma de Riemann. Aprendi também a utilizar a ferramenta MATLAB, que me ajudou imenso na realização deste mesmo relatório.

Trata-se de um tema matemático fundamental para o estudo da Engenharia que pode ser facilmente explicado através desta implementação em MATLAB.

Foi um tema divertido de trabalhar e que me mostrou as inúmeras capacidades desta ferramenta extraordinária.