Introducción a la Heterocedasticidad en Econometría

Comprensión, Diagnóstico y Remedios

Ricardo Pasquini

May 12, 2025

Resumen

- Definición de Heterocedasticidad
- Importancia en Econometría
- Objetivos de la Sesión

¿Qué es la Heterocedasticidad?

- Definición: La varianza del término de error no es constante entre observaciones
- Ejemplo: Gráfico de Dispersión de Residuos vs. Valores Ajustados

Consecuencias de la Heterocedasticidad

- Estimaciones Ineficientes
- Errores Estándar Sesgados
- Inferencia Incorrecta: Pruebas t, Pruebas F
- Impacto en Pruebas de Hipótesis y Intervalos de Confianza

Derivación Formal de la Varianza bajo Heterocedasticidad

Recordatorio: Estimador OLS de $\hat{\beta}_1$

$$\hat{\beta}_1 = \beta_1 + \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})u_i}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

Varianza bajo Heterocedasticidad

$$\begin{aligned}
\text{Var}(\hat{\beta}_1) &= \text{Var}\left(\beta_1 + \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})u_i}{\text{SST}_x}\right) \\
&= \text{Var}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})u_i}{\text{SST}_x}\right) \\
&= \frac{1}{\text{SST}_x^2}\text{Var}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})u_i\right) \\
&= \frac{1}{\text{SST}_x^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2\text{Var}(u_i)
\end{aligned}$$

Varianza en el Modelo de Regresión Múltiple

Modelo de Regresión Múltiple

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + ... + \beta_k x_{ik} + u_i$$

Varianza de $\hat{\beta}_1$ bajo Heterocedasticidad

$$\text{Var}(\hat{\beta}_1) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{i1}^2 \sigma_i^2}{\text{SST}_1 (1 - R_1^2)^2}$$

donde:

- $\hat{r}_{i1}$ son los residuos de la regresión de x_1 sobre las demás variables explicativas
- SST_1 es la suma total de cuadrados de x_1
- R_1^2 es el R^2 de la regresión de x_1 sobre las demás variables explicativas

Caso Especial: Homocedasticidad en Regresión Múltiple

Varianza bajo Homocedasticidad

Si $\sigma_i^2 = \sigma^2$ para todo i, entonces:

$$\text{Var}(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{\text{SST}_1(1 - R_1^2)}$$

Interpretación

- El término $(1 - R_1^2)$ mide la correlación parcial entre x_1 y las demás variables explicativas
- A mayor correlación, mayor varianza del estimador
- Este es el caso que se estudia en el modelo clásico de regresión lineal

Estimador Robusto de White

Problema

En la práctica, los σ_i^2 son desconocidos y necesitamos estimarlos.

Solución de White

Reemplazar σ_i^2 por los residuos al cuadrado $\hat{u}_i^2$:

$$\text{Var}(\hat{\beta}_1) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_{i1}^2 \hat{u}_i^2}{\text{SST}_1(1 - R_1^2)^2}$$

Propiedades

- Consistente bajo heterocedasticidad
- No requiere especificar la forma de la heterocedasticidad
- Los errores estándar resultantes son robustos a cualquier forma de heterocedasticidad

Diagnóstico de la Heterocedasticidad

- Inspección Visual: Gráficos de Residuos
- Prueba de Goldfeld-Quandt
- Prueba de White
- Prueba de Breusch-Pagan

Inspección Visual: Gráficos de Residuos

- Gráfico de Dispersión de Residuos vs. Valores Ajustados
- Dispersión no constante de los residuos indica heterocedasticidad
- Ejemplo de Gráfico e Interpretación

Prueba de Goldfeld-Quandt

- Procedimiento
- Hipótesis Nula: Homocedasticidad
- Hipótesis Alternativa: Heterocedasticidad
- Cálculo e Interpretación

Prueba de Heterocedasticidad de Breusch-Pagan

Suposición

La varianza del error puede expresarse como:

$$\text{Var}(u_i|x_i) = \sigma^2 h(z_i'\delta)$$

donde z_i es un vector de variables explicativas y $h(\cdot)$ es una función positiva.

Hipótesis

- $H_0 : \delta_1 = \delta_2 = ... = \delta_p = 0$ (homocedasticidad)
- H_1 : al menos un $\delta_j \neq 0$ (heterocedasticidad)

Prueba de Heterocedasticidad de Breusch-Pagan

Procedimiento

1. Estimar el modelo original: $y_i = x_i'\beta + u_i$
2. Obtener los residuos $\hat{u}_i$
3. Estimar la regresión auxiliar:

$$\hat{u}_i^2 = \alpha_0 + z_i'\delta + v_i$$

4. Calcular el estadístico:

$$LM = nR^2 \sim \chi^2_p$$

   donde R^2 es el coeficiente de determinación de la regresión auxiliar

Decisión

- Rechazar H_0 si $LM > \chi^2_{p,\alpha}$
- No rechazar H_0 si $LM \leq \chi^2_{p,\alpha}$

Remedios para la Heterocedasticidad

- Transformaciones: Logarítmica, Raíz Cuadrada
- Mínimos Cuadrados Ponderados (WLS)
- Errores Estándar Robustos
- Estimadores de Matrices de Covarianza Consistentes con la Heterocedasticidad

Conclusión

- Recapitulación de Puntos Clave
- Importancia de Abordar la Heterocedasticidad
- Próximos Pasos: Aplicación en Análisis de Regresión

Preguntas

- Espacio Abierto para Preguntas y Discusión