

# Modelos de Clasificación

Ricardo Pasquini

8 Mayo 2023

# Modelos de Clasificación

- ▶ Hasta aquí hemos trabajado con variables continuas como variables a explicar/predecir, pero en una gran cantidad de aplicaciones las predicciones son discretas.
- ▶ Estos modelos también son conocidos como modelos de clasificación

# Modelos de Clasificación Binaria

- ▶ Ejemplo: Entidad crediticia otorga préstamos personales.
- ▶ Variable objetivo: 1 si no-pago, 0 de otro modo.

The diagram illustrates a binary classification model for default probability. It features a central equation:  $P(Y_i = 1) = \alpha + \text{Monto} + \text{Género} + \dots + \varepsilon_i$ . The terms 'Monto' and 'Género' are enclosed in grey rounded rectangles. Below 'Monto' is the label  $X_i$ , and below 'Género' is the label  $Z_i$ . A horizontal bracket spans the width of these two variables, with the text 'Variables explicativas' centered underneath it. To the left of the equation, the text 'Probabilidad de default' is aligned with the  $P(Y_i = 1)$  term.

$$P(Y_i = 1) = \alpha + \text{Monto} + \text{Género} + \dots + \varepsilon_i$$

Probabilidad de default

$X_i$   $Z_i$

Variables explicativas

Figure 1: Default

# Modelos de Clasificación Binaria

- ▶ En general la variable  $y_i \in \{0, 1\}$ , representando un resultado “Sí” / “No”.
- ▶ El objetivo es describir  $P(y_i = 1|x_i)$  (Notar que esto determinaría la completa distribución condicional)
- ▶ Si proponemos un modelo lineal:

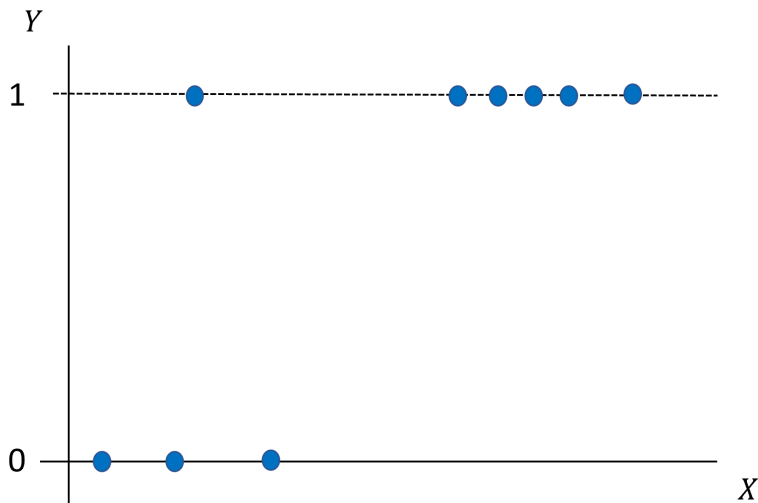
$$P(y_i = 1|x_i) = x_i' \beta$$

- ▶ Notemos también que  $P(y_i = 1|x_i) = E(Y_i|x_i)$  por lo tanto podríamos estimar

$$y_i = x_i' \beta + e_i$$

## Modelos de Clasificación Binaria

- Sin embargo, notemos que en un caso de observaciones binarias tendríamos algo como:



# Modelo Lineal para Clasificación

► El resultado devolvería:

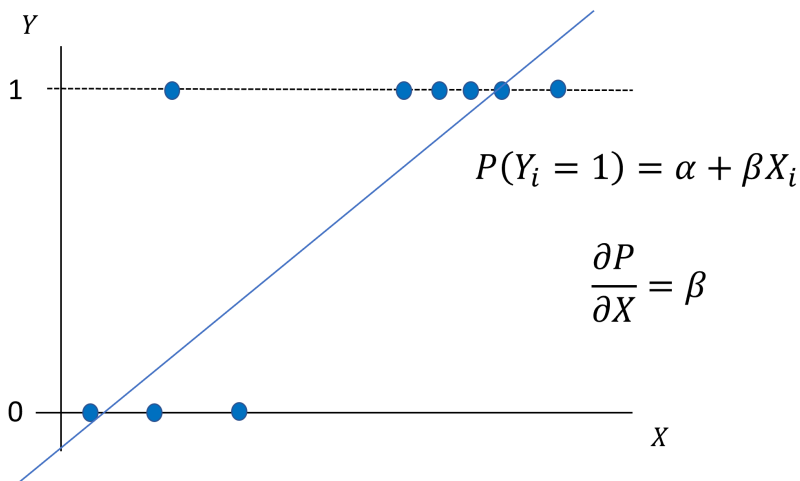


Figure 3: Modelo lineal

# Modelos de Clasificación

- ▶ Es deseable imponer una restricción adicional, que
$$0 \leq P(y_i = 1|x_i) \leq 1$$
- ▶ Por eso la alternativa estándar es proponer un modelo como:

$$y_i = F(x'_i\beta) + e_i$$

donde  $F(\cdot)$  es una función que cumple la restricción, como por ejemplo una Función de Densidad Acumulativa.

- ▶ Dos funciones comunmente utilizadas son:
  - ▶ Logística:  $F(u) = \frac{1}{(1+e^{-u})} = \frac{e^u}{1+e^u}$  (resultando en el modelo llamado **Logit**)
  - ▶ Normal:  $F(u) = \Phi(u)$  (resultando en el modelo llamado **Probit**)

## Ejemplo: Logit

$$\left\{ \begin{array}{l} P(Z) = \frac{1}{1 + e^{-Z}} \\ Z = \alpha + \beta X_i \end{array} \right.$$

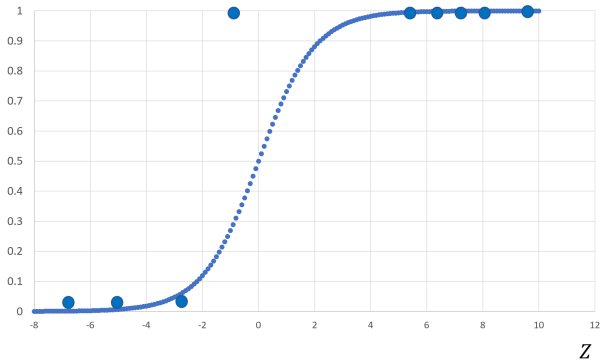


Figure 4: Logit



# Logit

- ▶ Logit también es el nombre que toma el logaritmo del ratio de chances entre dos resultados.
- ▶ En este caso, tal como fue definido, el modelo logit propone que el logaritmo del ratio de chances es la función lineal  $\alpha + \beta X$ . Esto se puede ver facilmente:

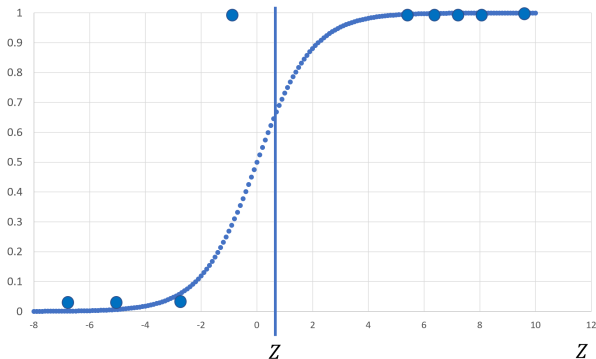
$$\ln \frac{P(y_i = 1|x_i)}{P(y_i = 0|x_i)} = \beta X$$

## Efectos marginales

- ▶ Comunmente nos interesará conocer  $\frac{\partial p}{\partial x}$ .
- ▶ Notar que debido a la transformación funcional de  $F(\cdot)$  el efecto marginal de un incremento en  $x_i$  no es constante. Por lo tanto, para conocer el efecto de un incremento marginal en  $x$  adicionalmente tendremos que especificar el nivel (de  $Z$ ) de interés.

$$\left\{ \begin{array}{l} P(Z) = \frac{1}{1 + e^{-Z}} \\ Z = \alpha + \beta X_i \end{array} \right.$$

$$\frac{\partial p}{\partial X} = \frac{e^{-Z}}{(1+e^{-Z})^2} \beta$$



# Efectos marginales

- ▶ Típicamente los paquetes estadísticos devuelven un efecto marginal que :
  - ▶ Podría estar calculado por default en el *valor promedio de las variables* (esto podría ser de interés o no).
  - ▶ Nos permiten determinar los valores de las variables explicativas donde calcular el efecto.
  - ▶ Permiten calcular un *Efecto Marginal Promedio* entendido como el promedio de los efectos marginales en los valores definidos por las observaciones en nuestra muestra.

# Estimación

- ▶ La estimación se realiza mediante Máxima Verosimilitud.
- ▶ Recordemos que la estimación mediante Máxima Verosimilitud propone buscar el valor del parámetro que maximiza la probabilidad conjunta de ocurrencia de los datos que sugieron en la muestra.

$$\max_{\beta} \prod_{i=1}^n P(Y_i, \beta)$$

donde  $p(Y_i, \beta)$  es la probabilidad de la observación i-esima en cuestión.

- ▶ Notemos en este caso las probabilidades son

$$\begin{cases} P(Y = 0|X) & \text{si } Y_i = 0 \\ P(Y = 1|X) & \text{si } Y_i = 1 \end{cases}$$

# Estimación

- ▶ Es decir los términos de la productoria serán

$$\begin{cases} 1 - F(x_i'\beta) & \text{si } Y_i = 0 \\ F(x_i'\beta) & \text{si } Y_i = 1 \end{cases}$$

- ▶ Siguiendo el método de máxima verosimilitud, será conveniente maximizar la función en logaritmos

$$\max_{\beta} L = \ln\left(\prod_{i=1}^n P(Y_i, \beta)\right) = \max_{\beta} \sum \ln(P(Y_i, \beta))$$

- ▶ Típicamente se utilizarán algoritmos de maximización para encontrar el máximo.

# Multinomial Logit para elecciones múltiples

- ▶ Un caso de interés es la elección entre alternativas múltiples.  
Por ejemplo:
  - ▶ Elección medio de transporte (auto, colectivo, tren, etc.).
  - ▶ Elección residencial (barrio 1, barrio 2, . . . ,barrio n).
  - ▶ Elección instrumento financiero (acción 1, acción 2 , etc.)
- ▶ Analizaremos aquí un modelo con alternativas que no tienen un orden implícito. Para alternativas ordenadas, existen otros modelo disponibles.

## Multinomial Logit para elecciones múltiples

- El modelo multinomial se puede fundamentar suponiendo que cada individuo tiene una utilidad por la  $j$ -ésima opción dada por

$$U_{ij} = \beta' z_{ij} + \epsilon_{i,j}$$

- Si el consumidor elige la  $j$ -ésima opción sobre las  $J - 1$  restantes, es porque esa opción le dió mayor utilidad. La idea de la modelización probabilística es

$$P(Y_i = j) = P(U_{ij} > U_{ik}) \quad \forall k \neq j$$

- Y se puede obtener que la probabilidad de elegir la categoría  $j$ -ésima es:

$$P(Y_i = j) = \frac{e^{\beta' z_{ij}}}{\sum_{j=1}^J e^{\beta' z_{ij}}}$$

# Multinomial Logit para elecciones múltiples

- ▶ Un supuesto implícito del modelo es la independencia de alternativas irrelevantes.
- ▶ Este supuesto pide que la preferencia por una categoría sobre otra no cambie si se considera una tercera como parte de la comparación.
- ▶ El uso de este supuesto permite que este modelo pueda implementarse como la comparación de  $K-1$  categorías contra una  $K$ -ésima. Conociendo estas preferencias puedo derivar todas las demás.



## Derivación como un conjunto de elecciones binarias

$$\ln \frac{Pr(Y_i = 1)}{Pr(Y_i = K)} = \beta_1 \cdot X_i$$

$$\ln \frac{Pr(Y_i = 2)}{Pr(Y_i = K)} = \beta_2 \cdot X_i$$

...

$$\ln \frac{Pr(Y_i = K - 1)}{Pr(Y_i = K)} = \beta_{K-1} \cdot X_i$$

## Multinomial Logit para elecciones múltiples

$$Pr(Y_i = 1) = Pr(Y_i = K) e^{\beta_1 \cdot X_i}$$

$$Pr(Y_i = 2) = Pr(Y_i = K) e^{\beta_2 \cdot X_i}$$

...

$$Pr(Y_i = K - 1) = Pr(Y_i = K) e^{\beta_{K-1} \cdot X_i}$$

$$Pr(Y_i = K) = 1 - Pr(Y_i = K) \sum_{k=1}^{K-1} e^{\beta_k \cdot X_i}$$

$$\rightarrow Pr(Y_i = K) = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{K-1} e^{\beta_k \cdot X_i}}$$

# Multinomial Logit para elecciones múltiples

Reemplazando para obtener expresiones para  $Pr(Y_i = 1)$ ,  
 $Pr(Y_i = 2)$  ..

$$Pr(Y_i = 1) = \frac{e^{\beta_1 \cdot X_i}}{1 + \sum_{k=1}^{K-1} e^{\beta_k \cdot X_i}}$$

$$Pr(Y_i = 2) = \frac{e^{\beta_2 \cdot X_i}}{1 + \sum_{k=1}^{K-1} e^{\beta_k \cdot X_i}}$$

...

$$Pr(Y_i = k) = \frac{e^{\beta_k \cdot X_i}}{1 + \sum_{k=1}^{K-1} e^{\beta_k \cdot X_i}}$$

# Estimación

- ▶ Como en el caso del Logit, se aplicará un método similar a Máxima Verosimilitud para identificar las condiciones del óptimo, y se utilizarán algoritmos numéricos iterativos para encontrar la solución.

# Resumen

- ▶ Los modelos de clasificación binaria incorporan una transformación no-lineal que garantiza que las predicciones vivan en el rango apropiado.
- ▶ Esto implica que los efectos marginales de un factor explicativo serán específicos a un nivel deseado.
- ▶ El modelo puede generalizarse

# Referencias

- ▶ Hansen, B. 2018, Econometrics , ch. 21
- ▶ Greene Análisis Econométrico ch.19