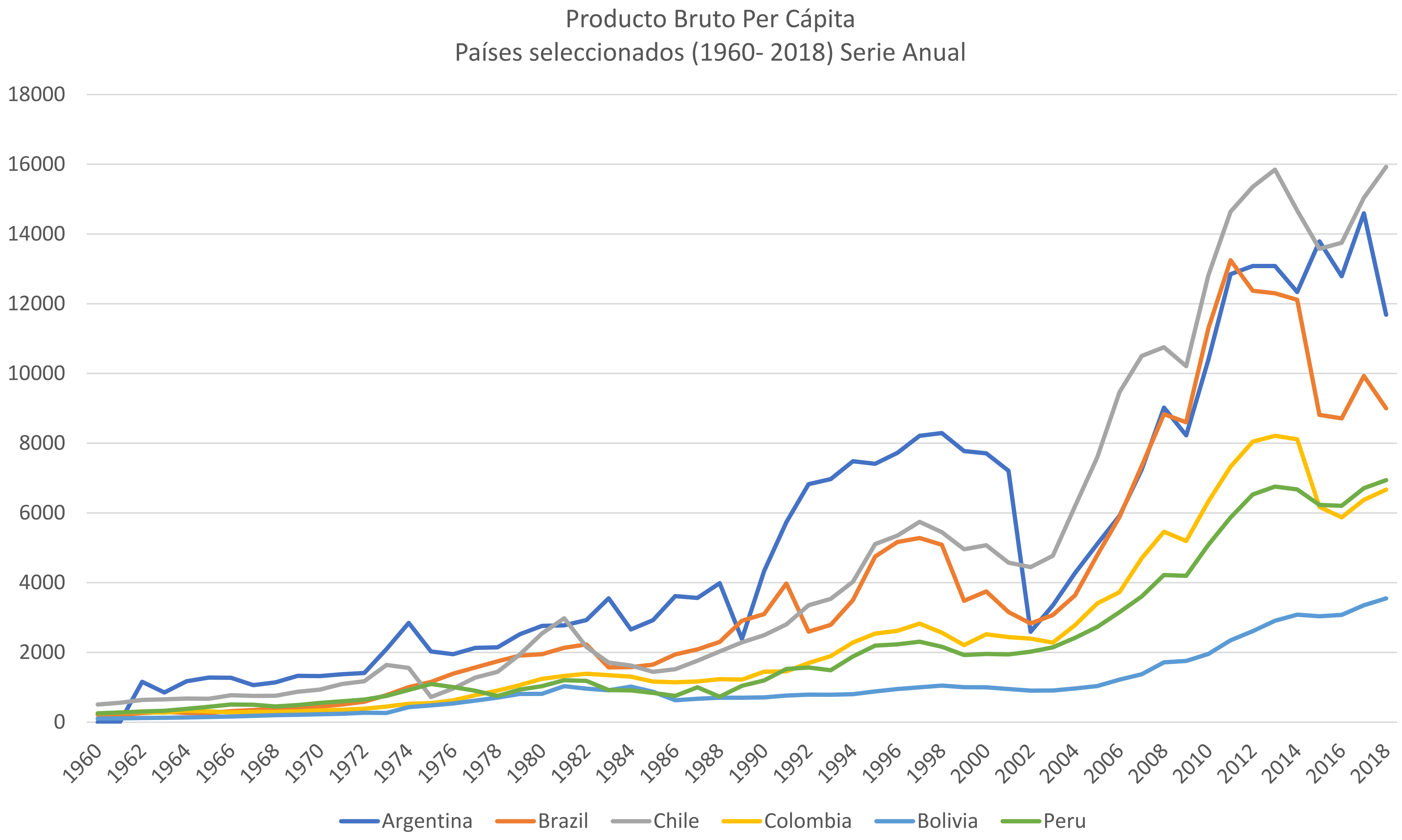
Series de Tiempo

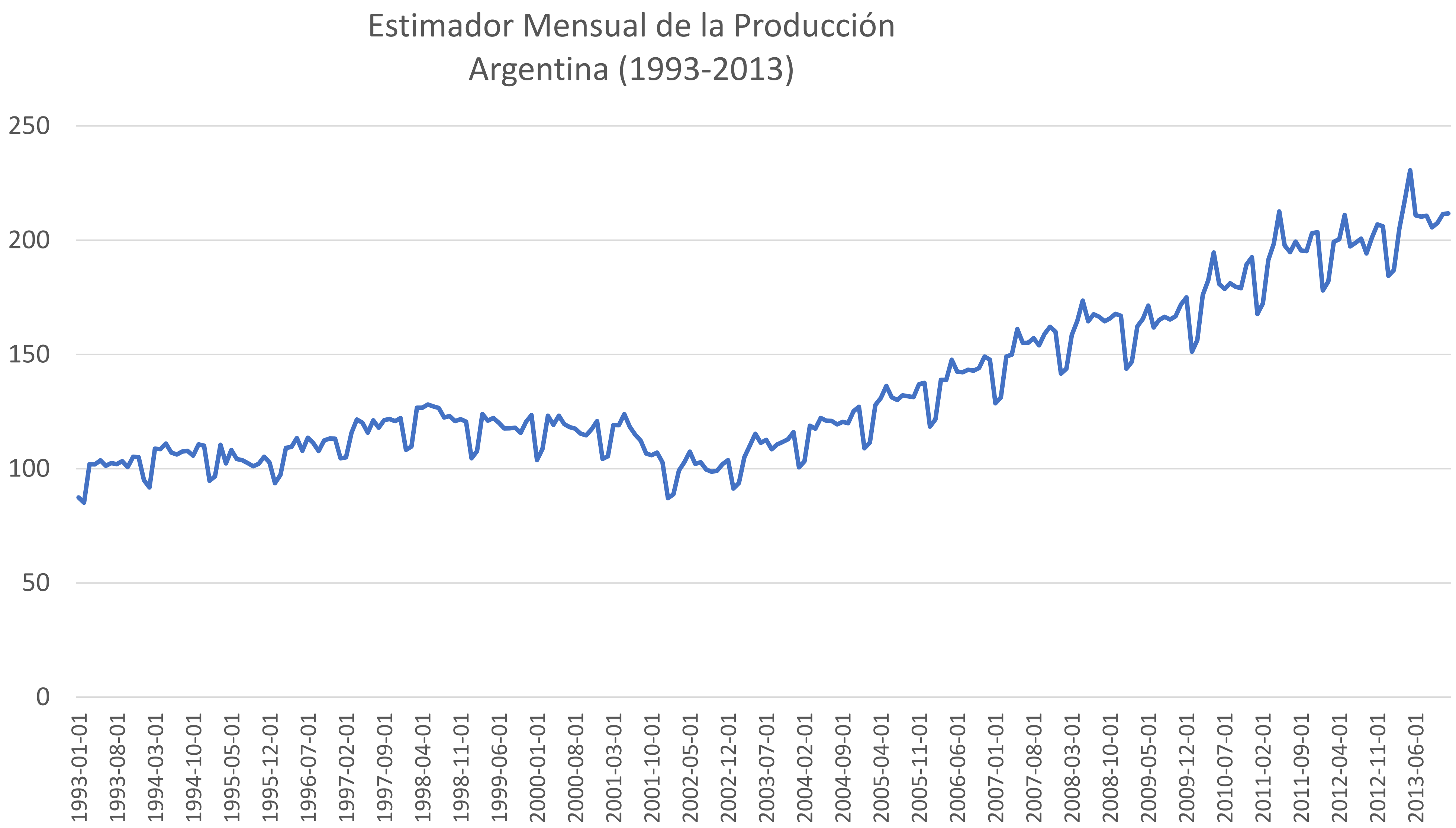
Econometría

Profesor Ricardo Pasquini

Ejemplos de series de tiempo



Ejemplos de series de tiempo

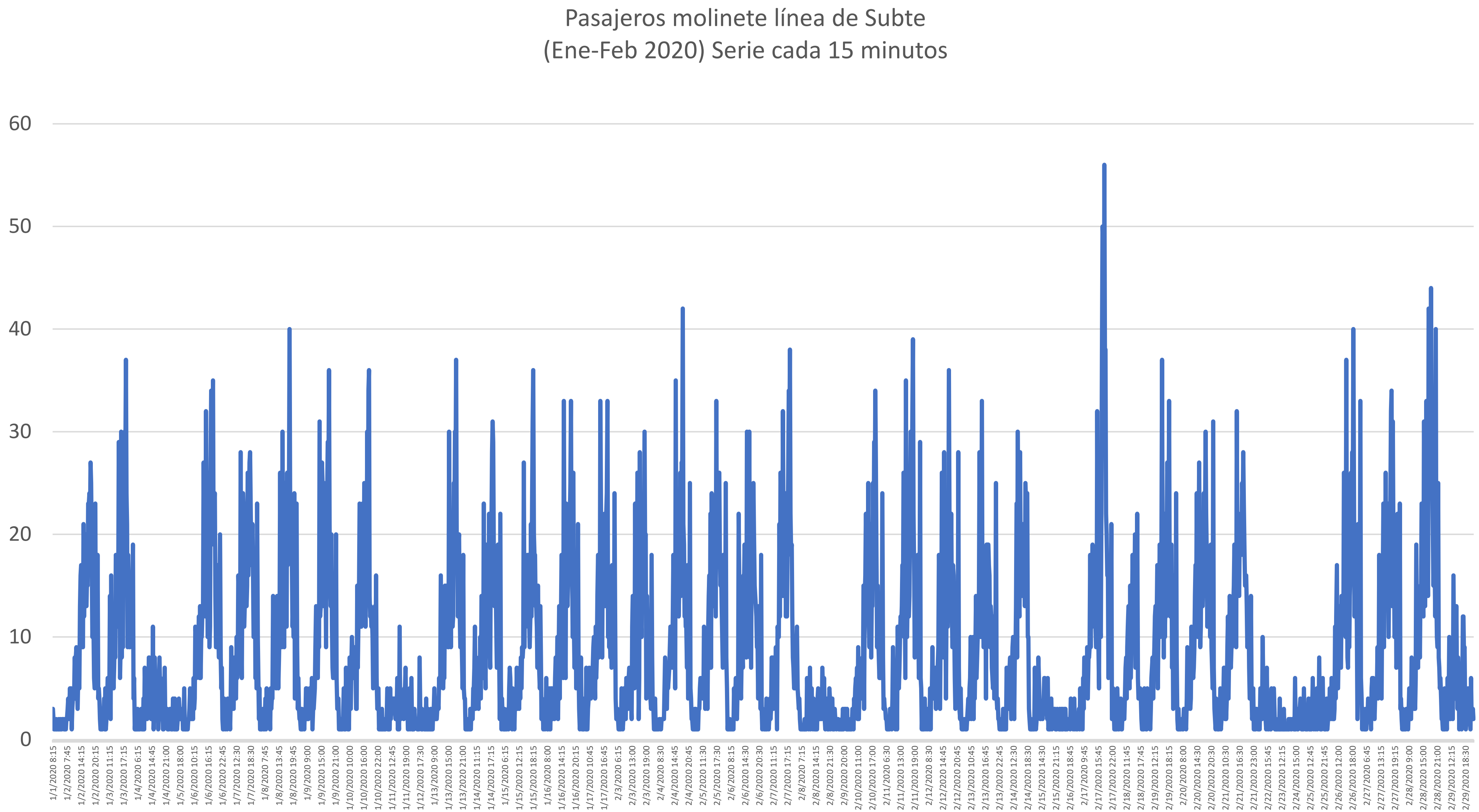


Ejemplos de series de tiempo

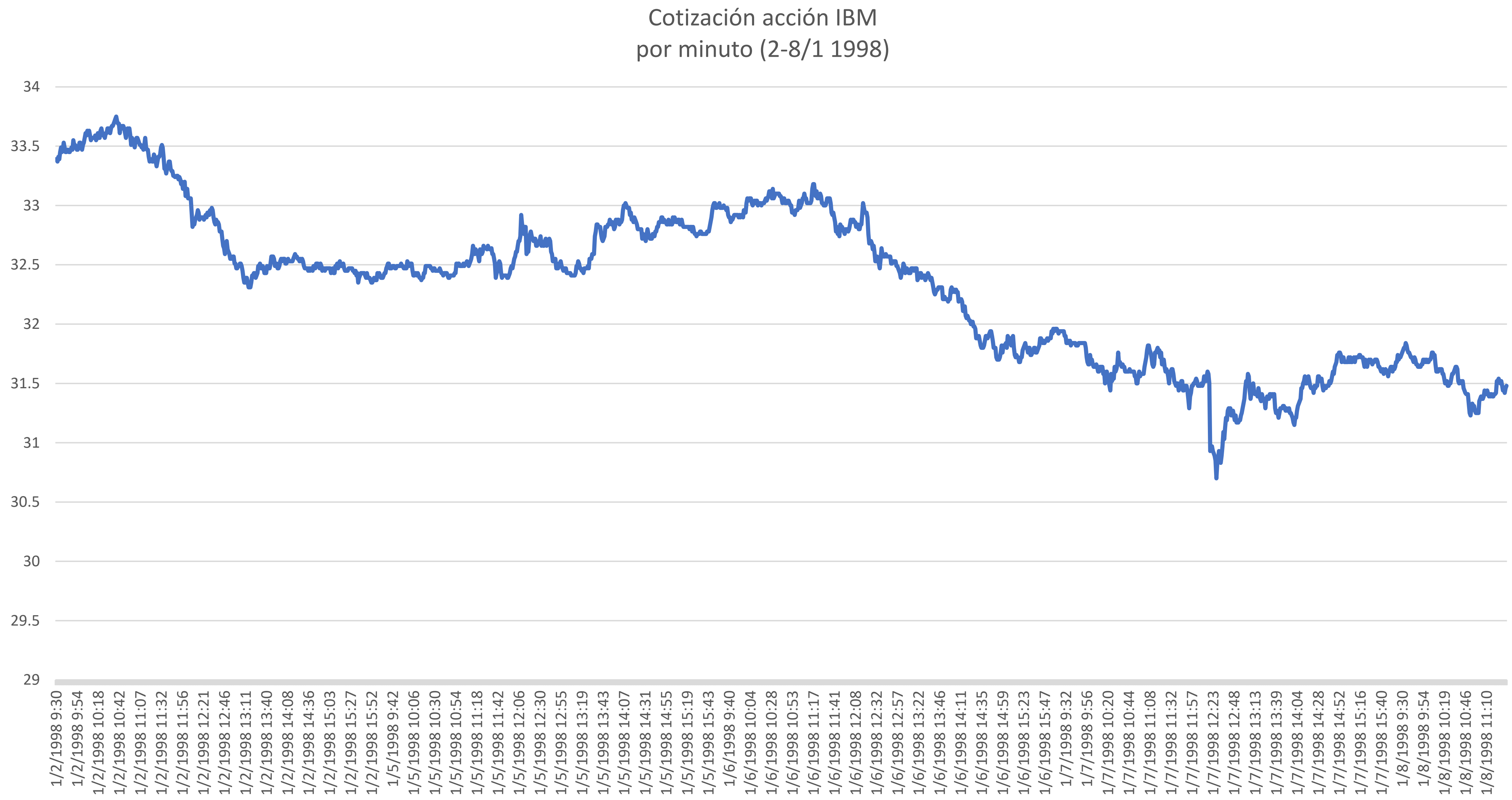
Ejemplos de series de tiempo

Ejemplos de series de tiempo

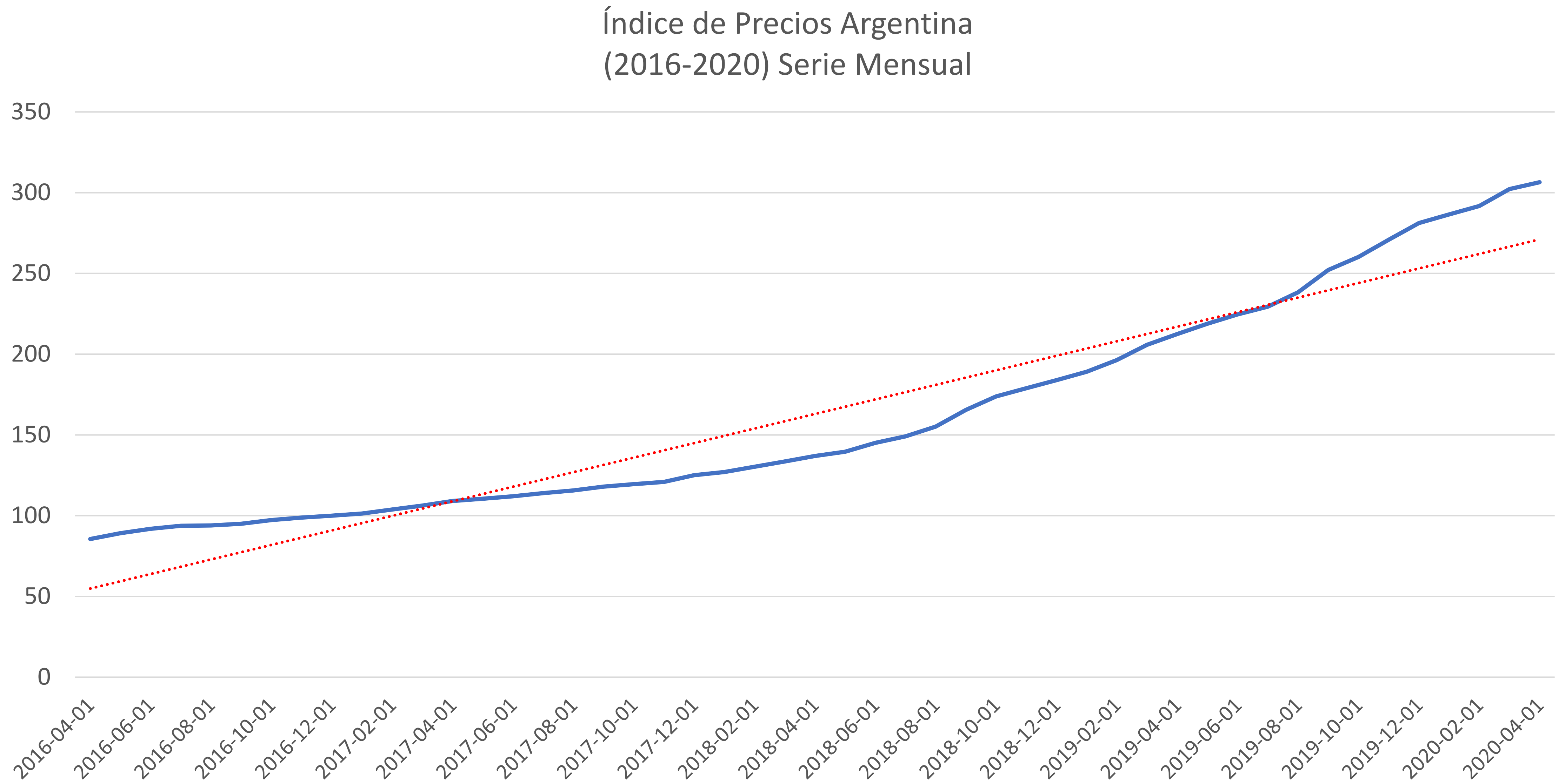
Ejemplos de series de tiempo



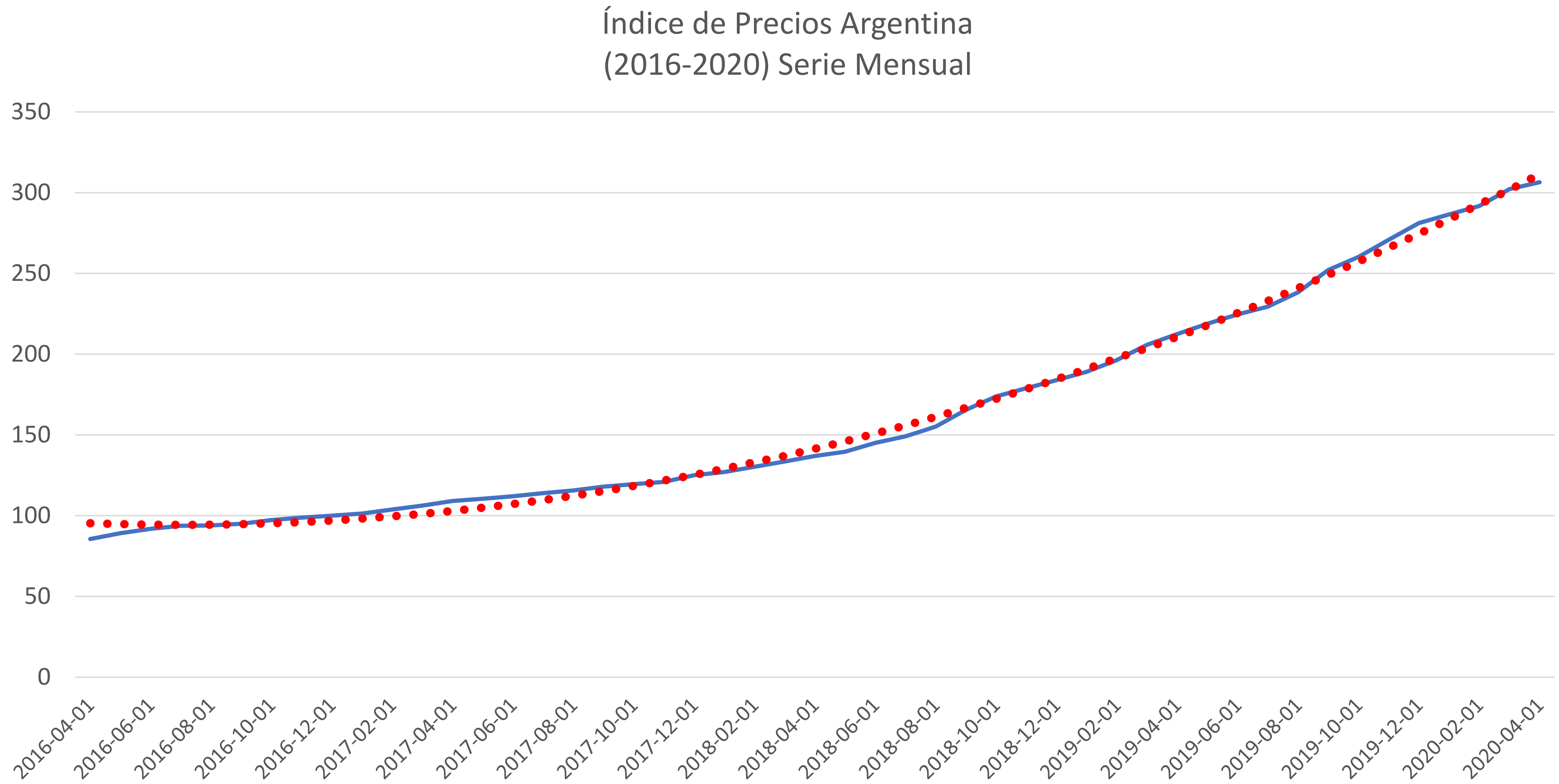
Ejemplos de series de tiempo



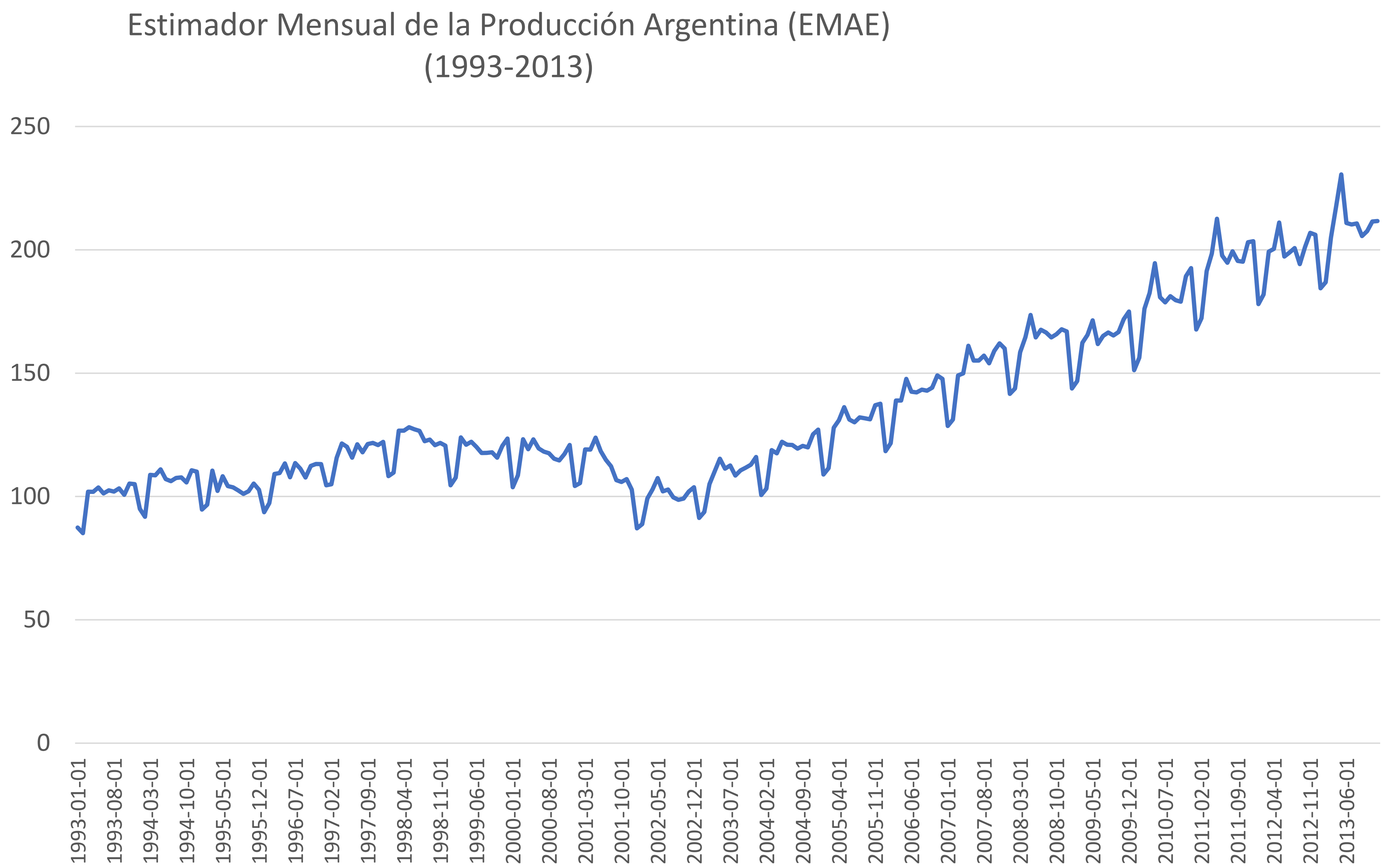
Componentes: Tendencia



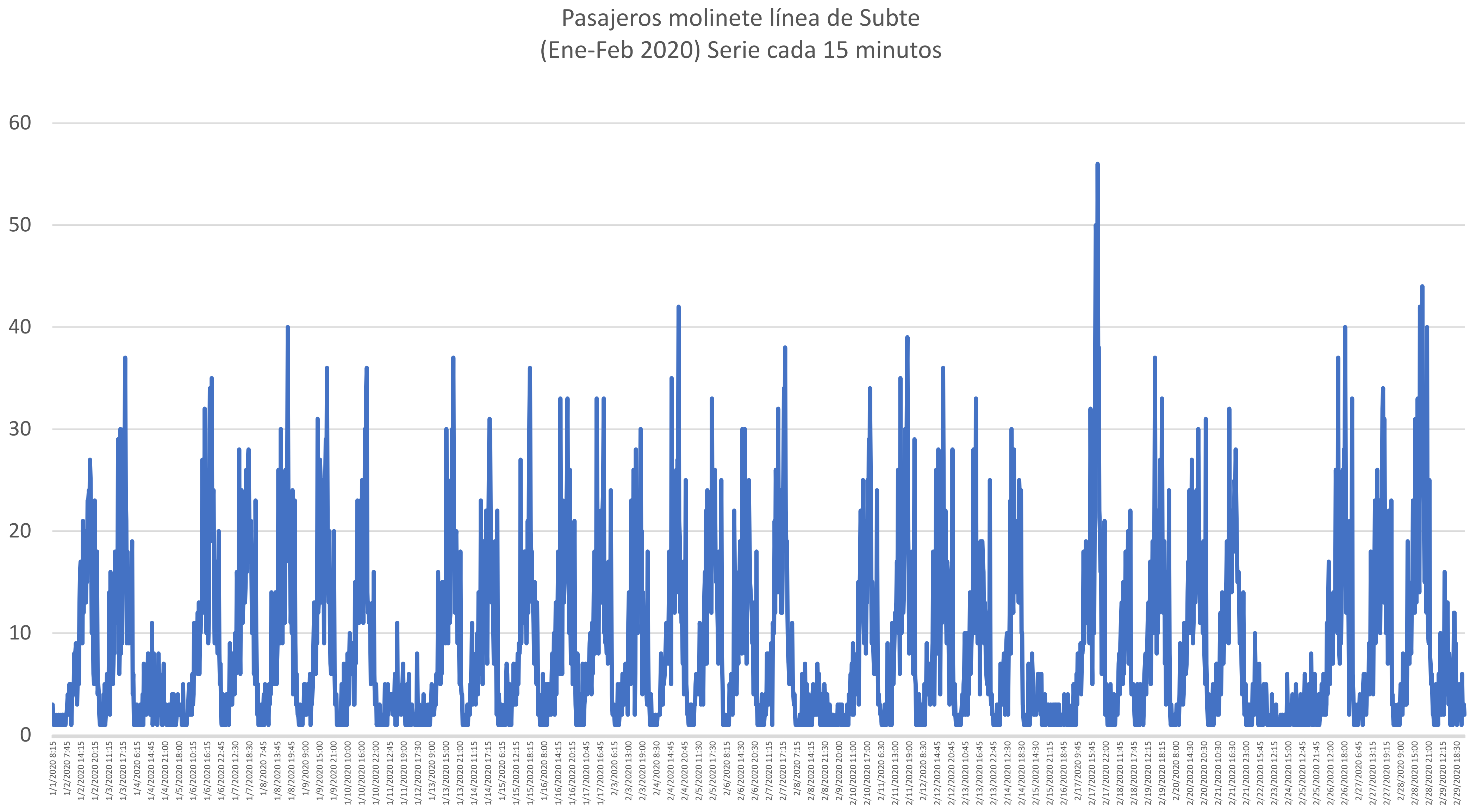
Componentes: Tendencia



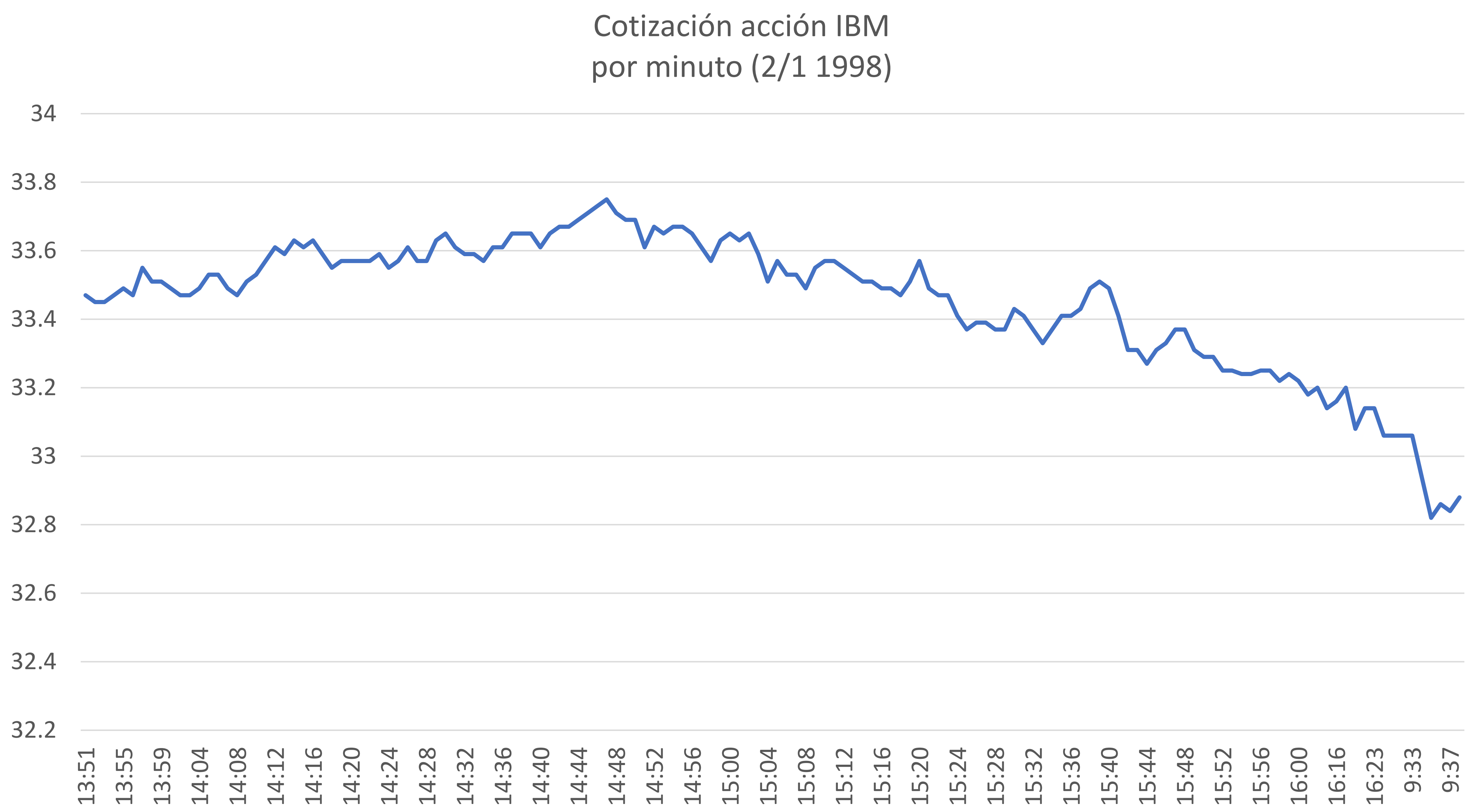
Componentes: Seasonality / Estacionalidad



Componentes: Seasonality / Estacionalidad



Componentes: Autocorrelación



Simulando series

- Separamos las series de tiempo en componentes: tendencia, estacionalidad, autocorrelación, ruido

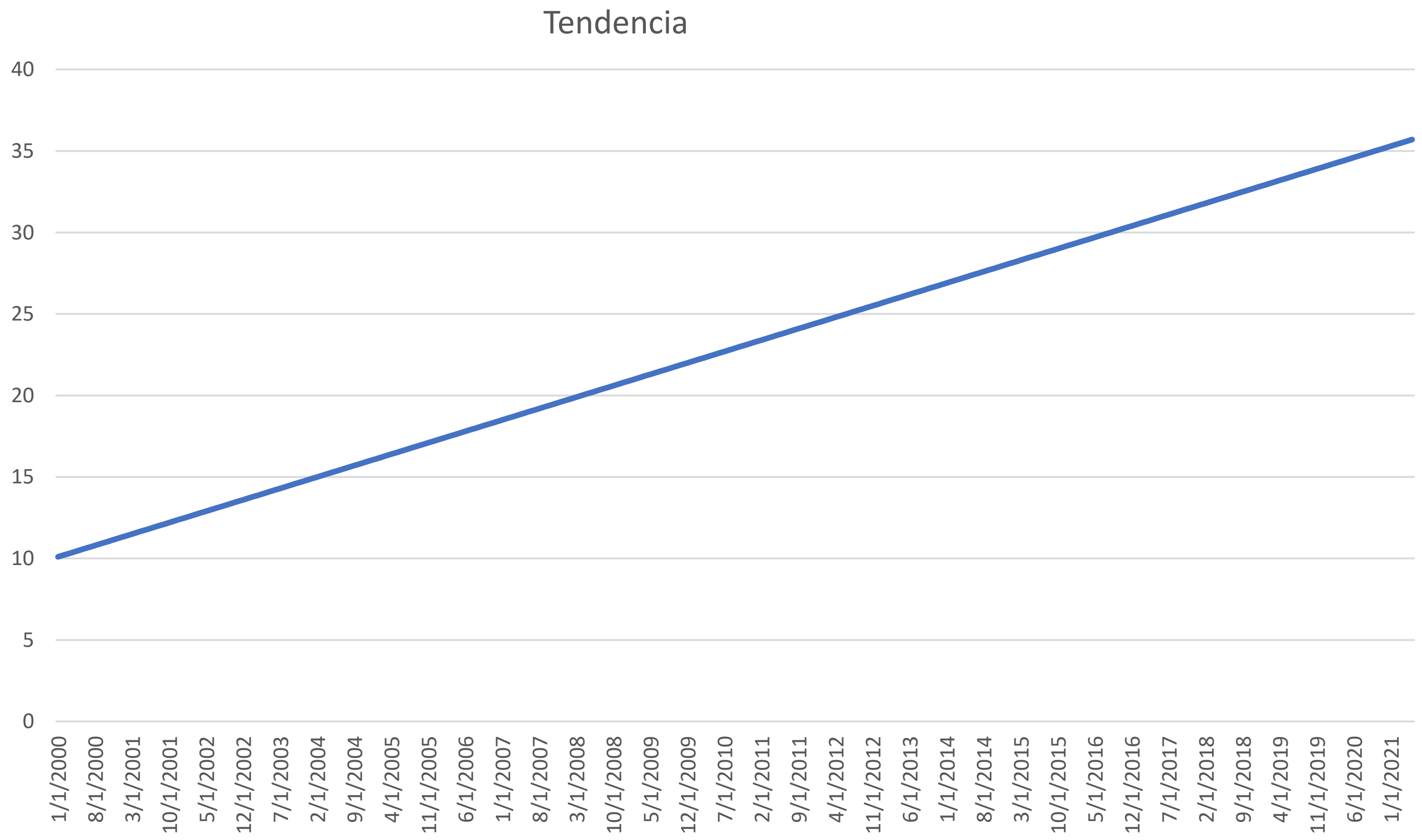
- Para poder ajustar los componentes respectivos con un modelo, es útil comenzar simulando modelos para entender mejor cómo funcionarán.

Tendencia

- Una tendencia lineal

$$tendencia = \alpha + \beta t$$

$$tendencia = 10 + 0.1t$$

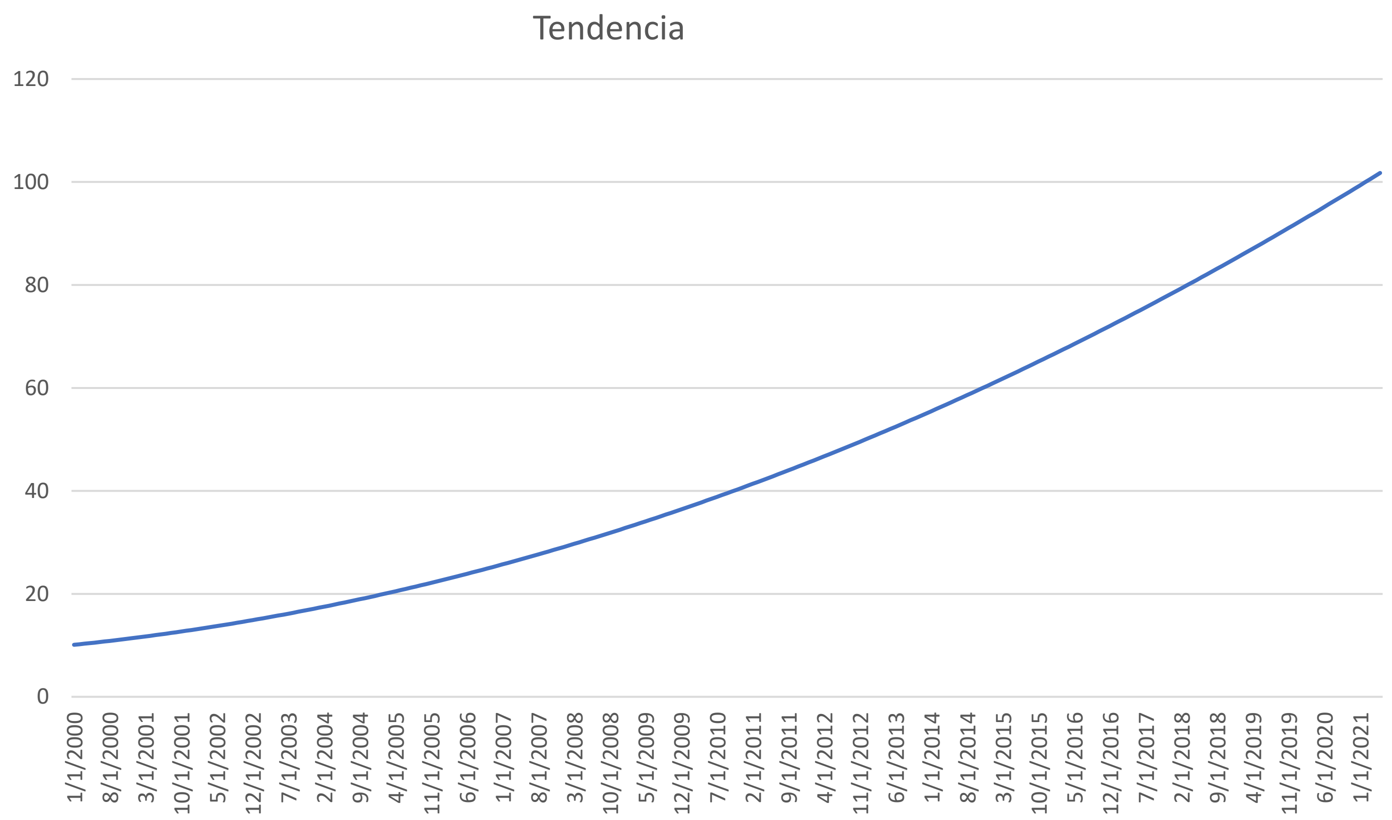


Tendencia

- Una tendencia cuadrática

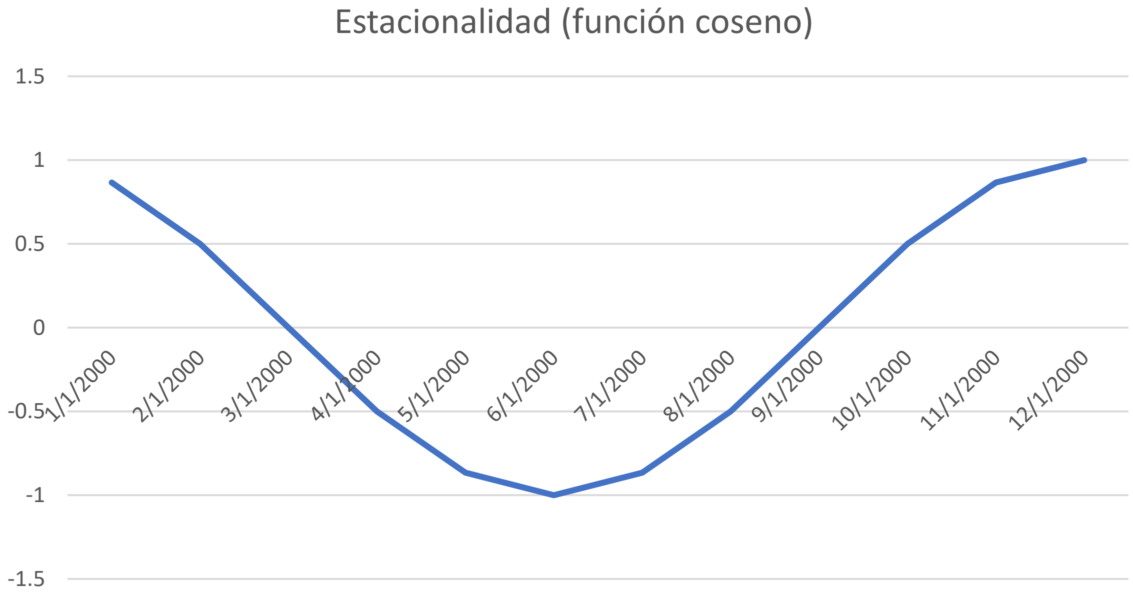
$$tendencia = \alpha + \beta t^2$$

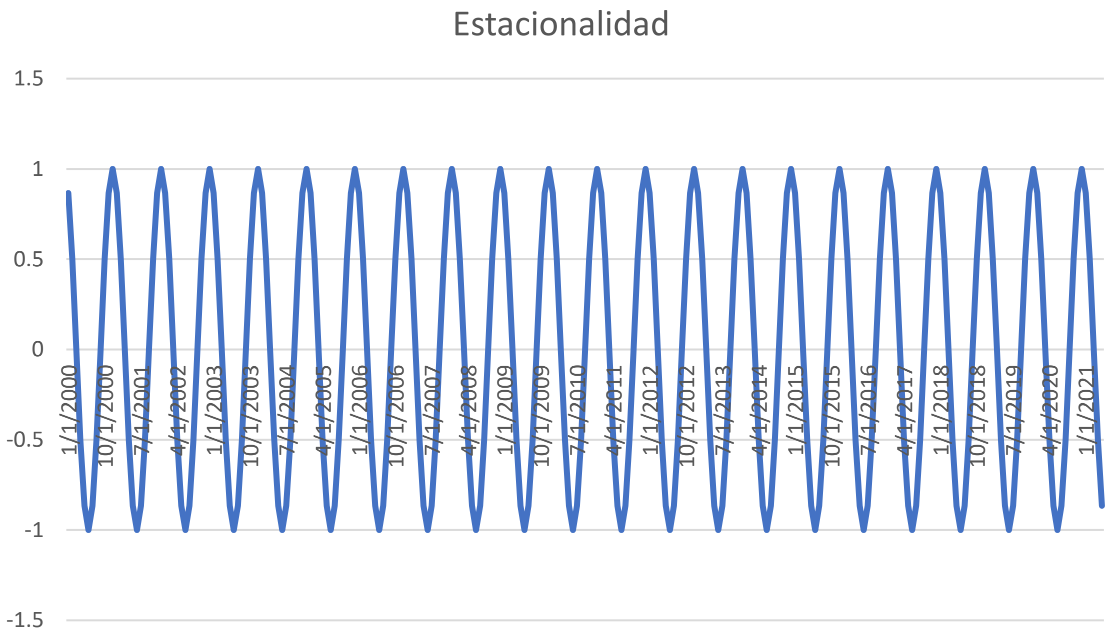
$$tendencia = 10 + 0.001 t^2$$



Estacionalidad

$$\text{estacionalidad} = \cos(2\pi \frac{mes}{12})$$





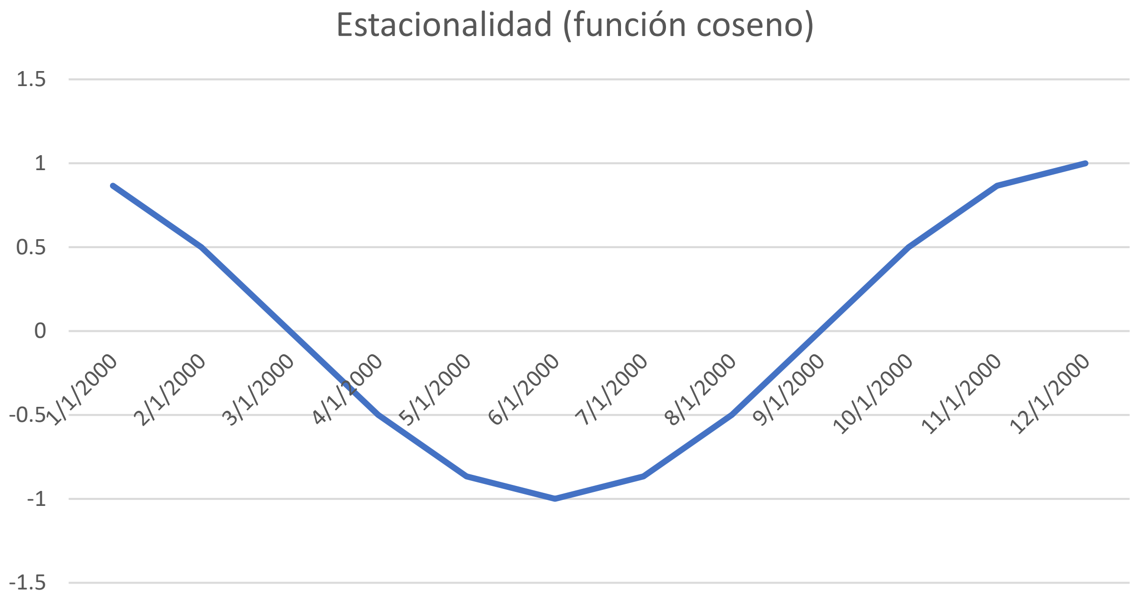
Estacionalidad

$$\text{estacionalidad} = \cos(2\pi \frac{mes}{12})$$

$$\text{estacionalidad} = \text{sen}(2\pi \frac{mes}{12})$$

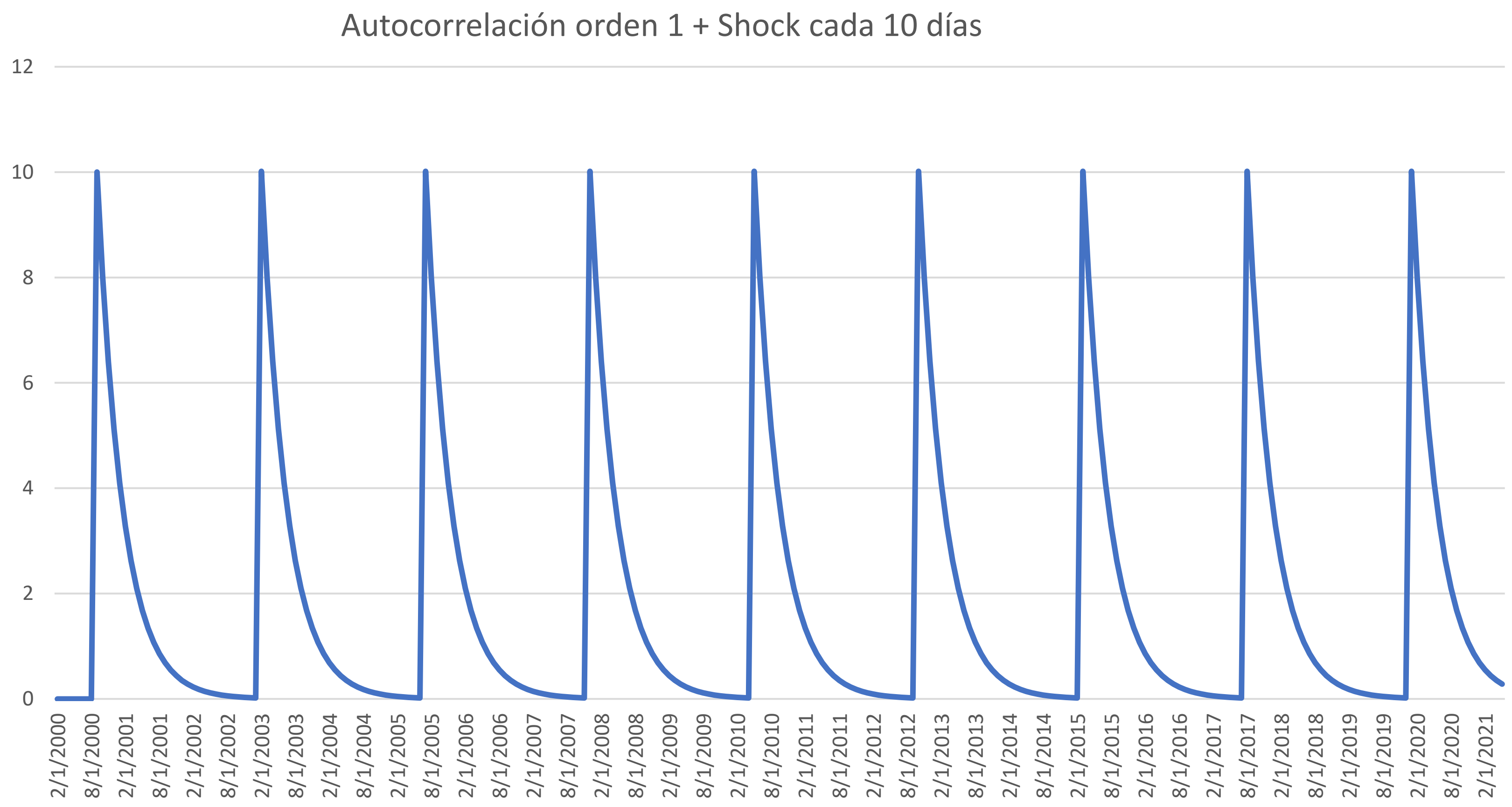
Una expresión más general:

$$\text{estacionalidad} = \gamma \ast \cos(2\pi \frac{mes}{12}) + \delta \ast \text{sen}(2\pi \frac{mes}{12})$$



Autocorrelación

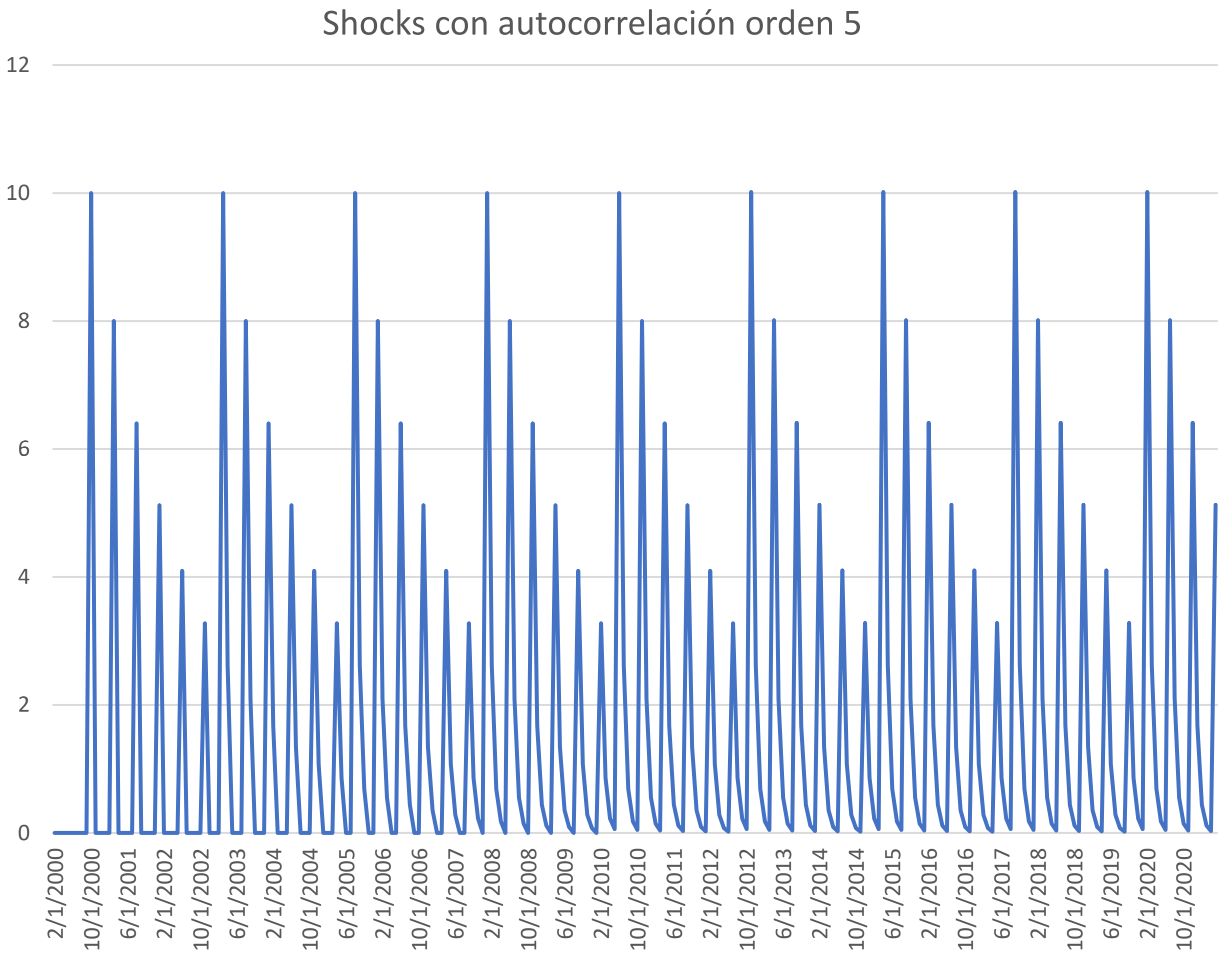
$$y_t = 0.8 \, * \, y_{t-1} + \varepsilon_t$$



Autocorrelación

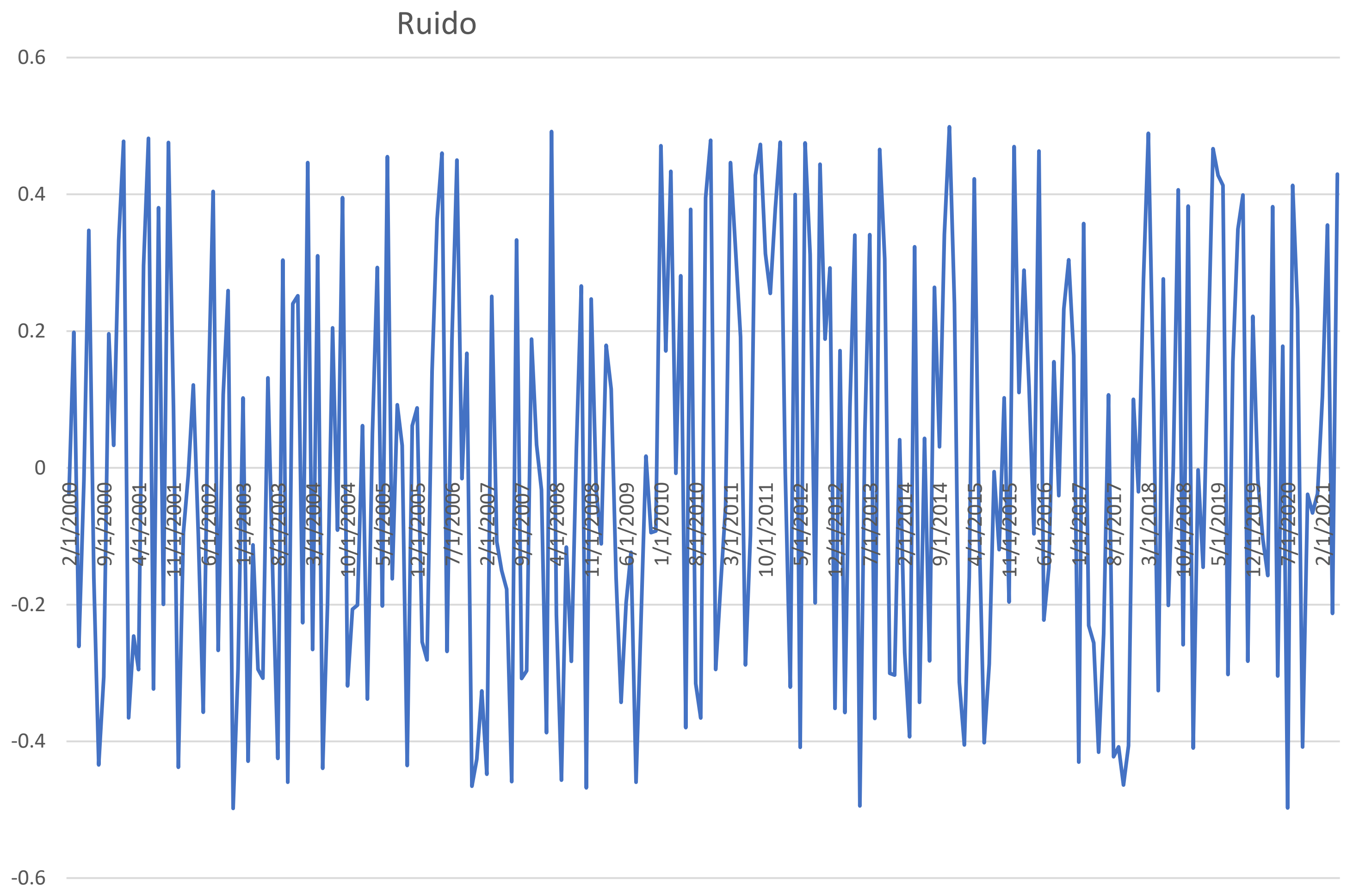
$$y_t = 0.8 \; * \; y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$y_t = 0.8 \; * \; y_{t-5} + \varepsilon_t$$



Ruido

$$ruido_t \sim U[-0.5, 0.5]$$

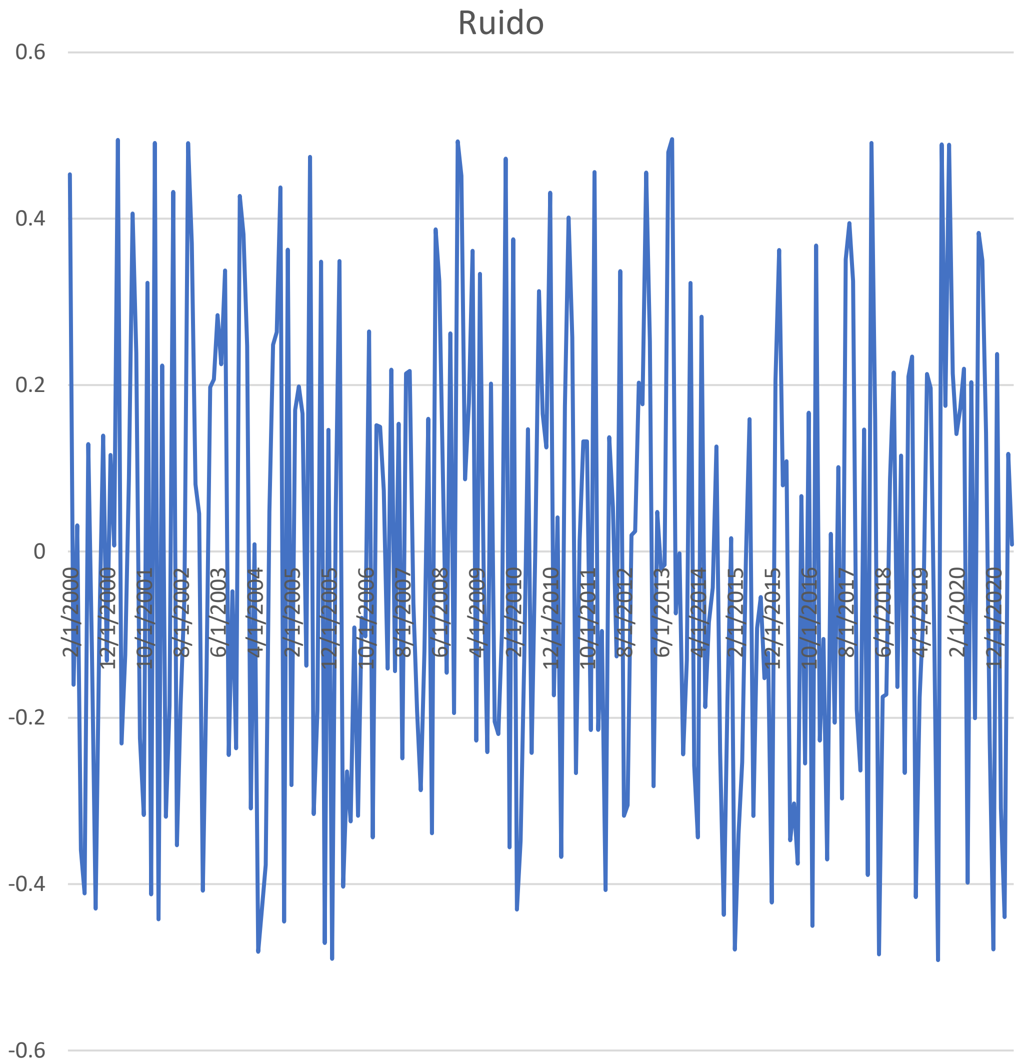


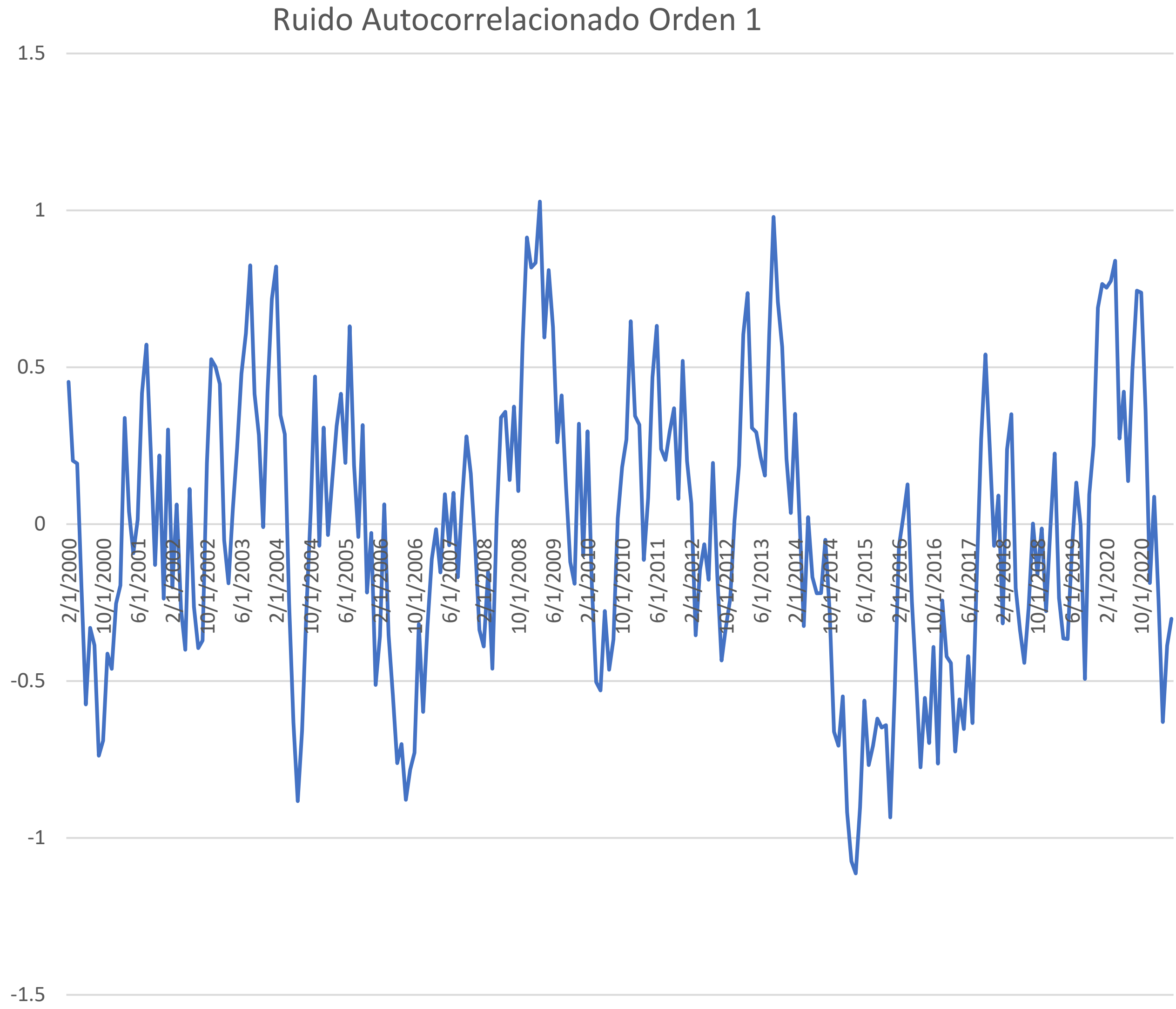
Autocorrelación

$$y_t \sim U[-0.5, 0.5]$$

$$y_t = 0.8 * y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t \sim U[-0.5, 0.5]$$

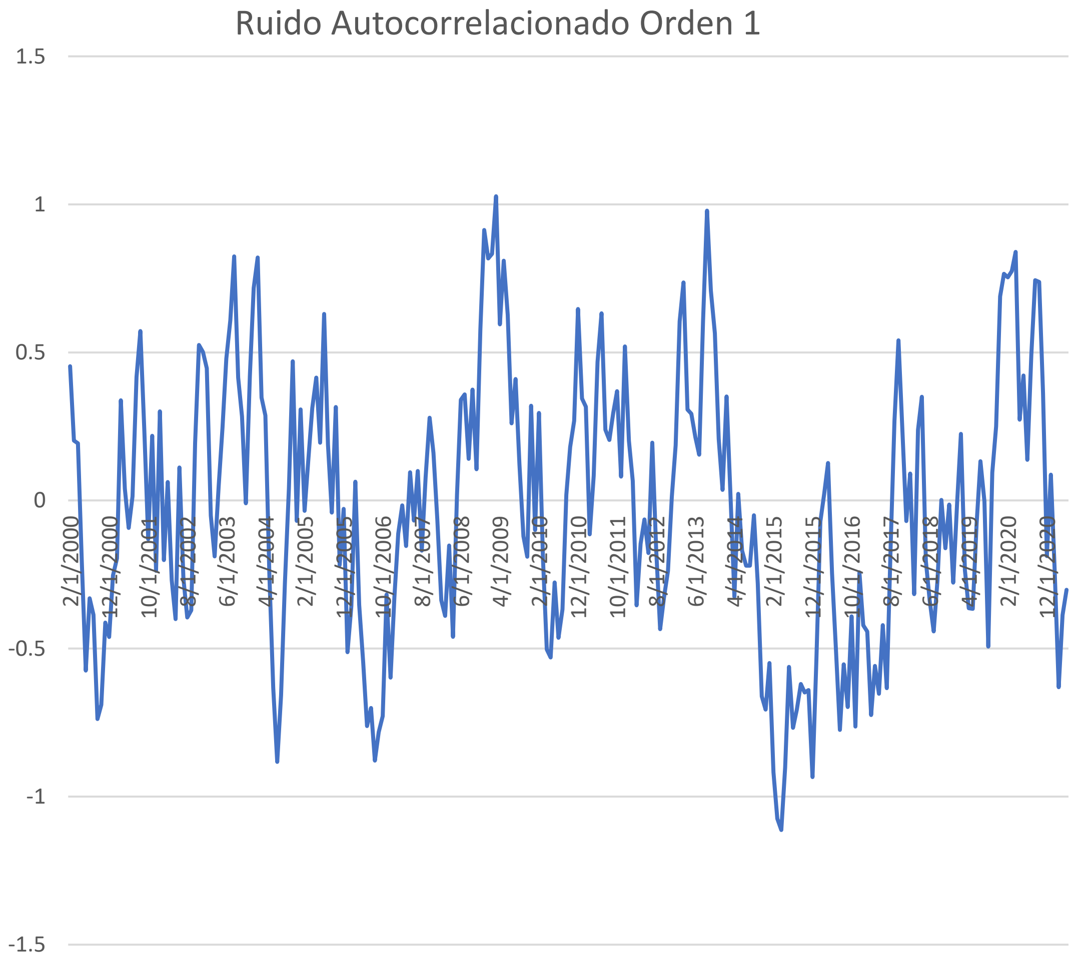


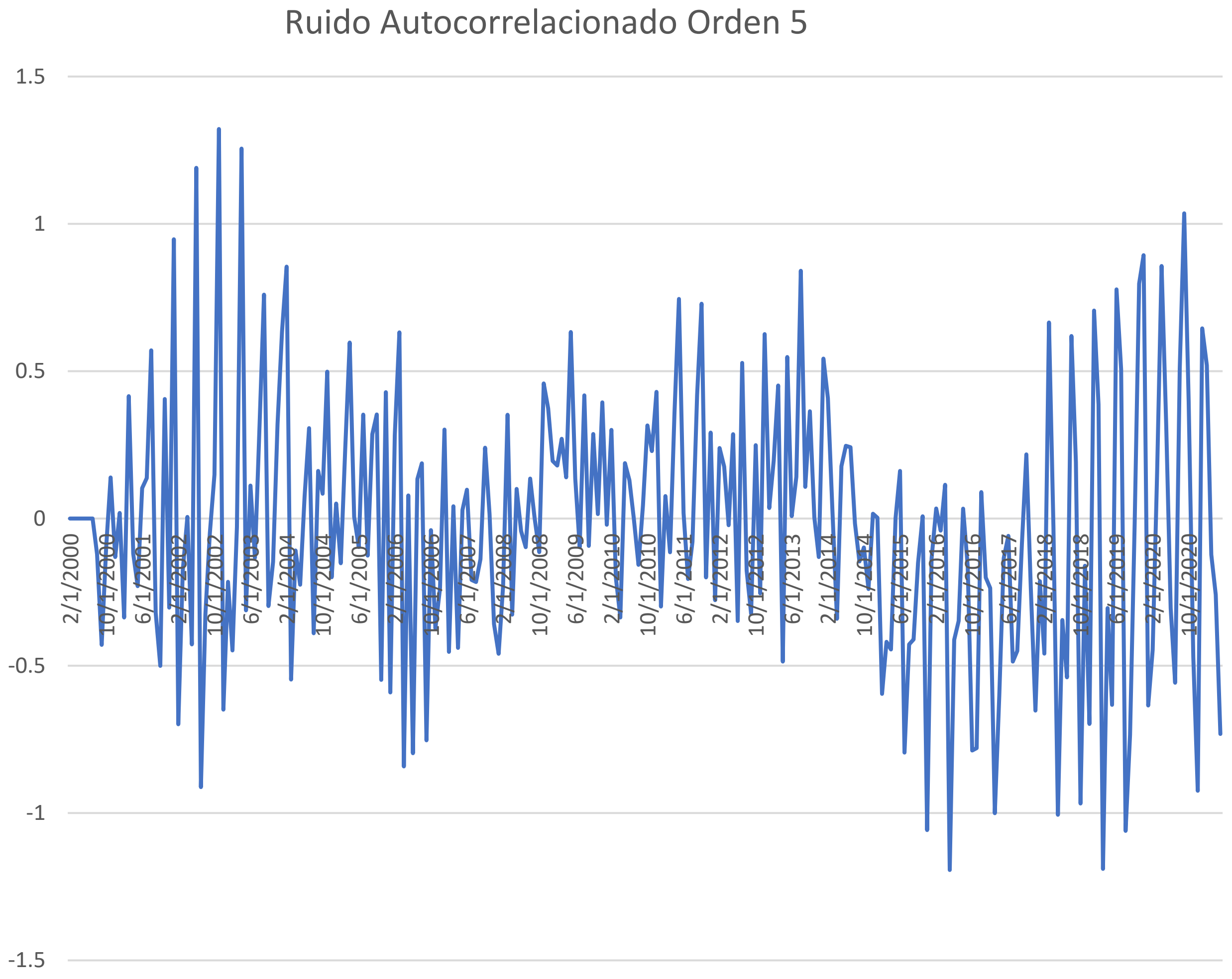


Autocorrelación

$$y_t = 0.8 * y_{t-1} + \varepsilon_t$$
$$\varepsilon_t \sim U[-0.5, 0.5]$$

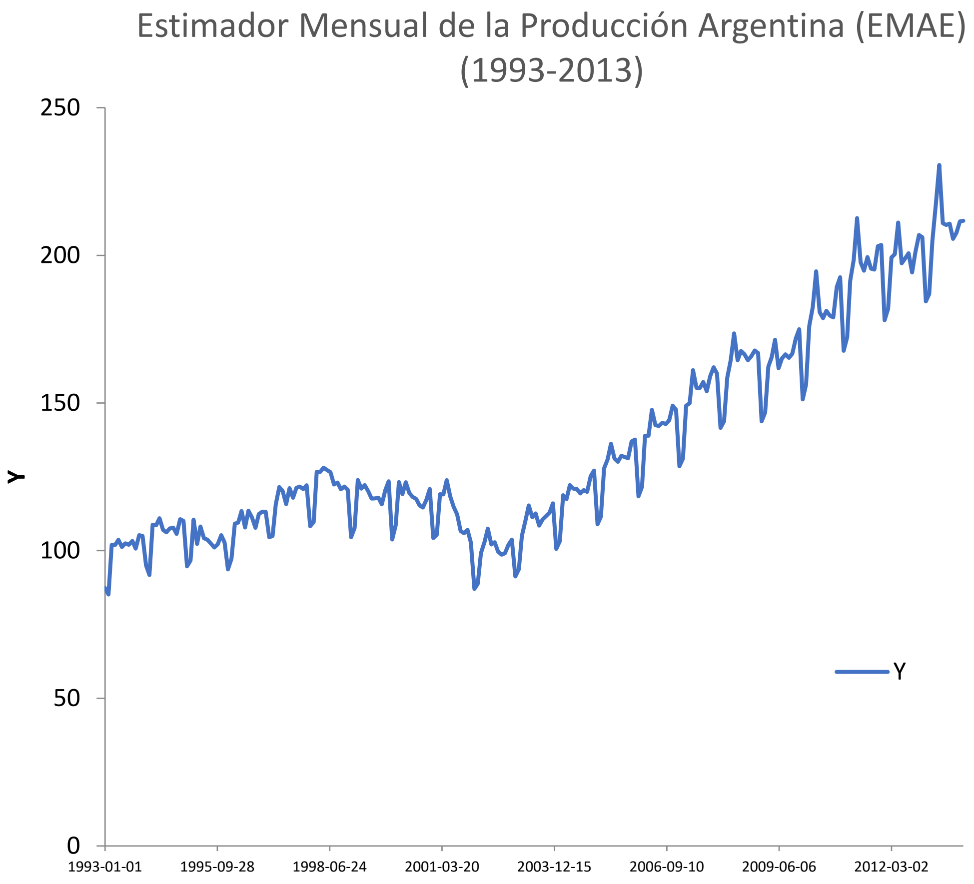
$$y_t = 0.8 * y_{t-5} + \varepsilon_t$$
$$\varepsilon_t \sim U[-0.5, 0.5]$$





Ajustando tendencia y estacionalidad

- Nuestro propósito es ajustar una serie de tiempo a un modelo.
- Modelamos a la ***tendencia*** y a la ***estacionalidad*** como componentes determinísticos (no-estocásticos).
- Vamos a tomar como ejemplo el caso del EMAE.



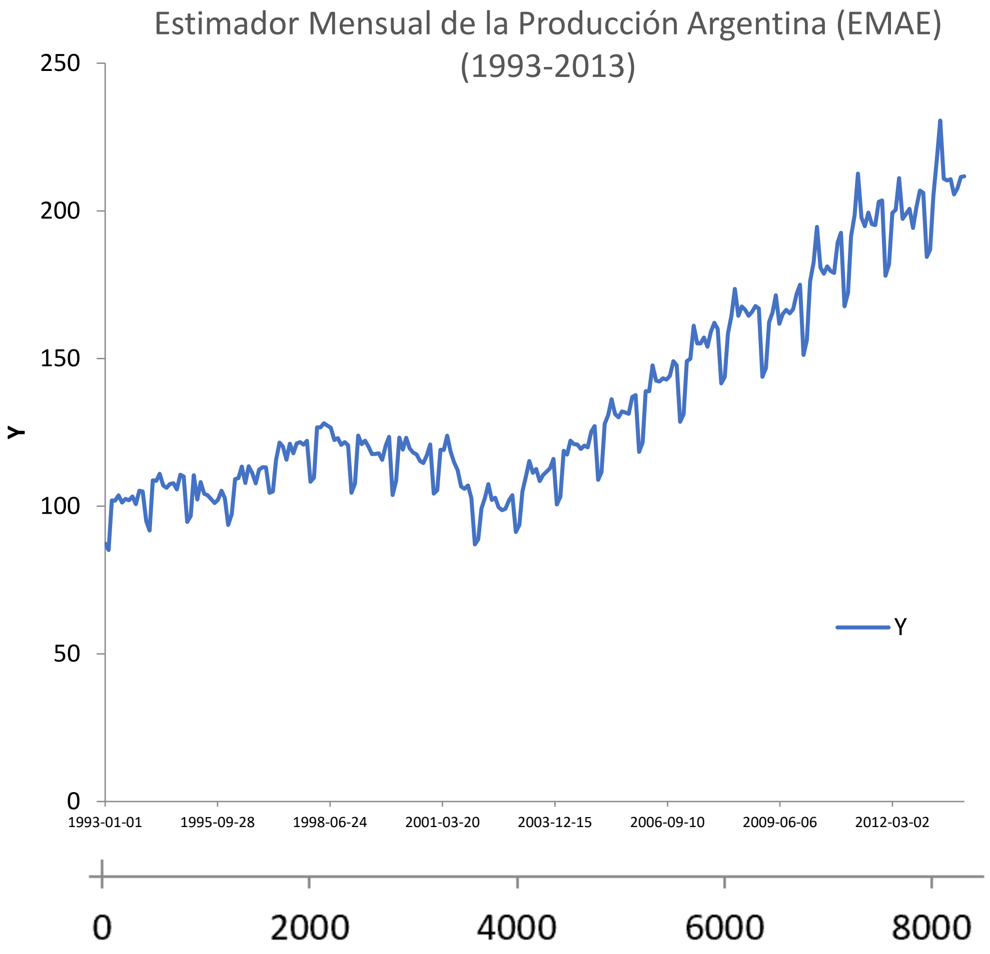
Tendencia

- Para estimar el modelo:

$$y_t = \beta_0 + \underbrace{\beta_1 t}_{variable1} + \underbrace{\beta_2 t^2}_{variable2} + \varepsilon_t$$

- Necesitamos que el tiempo esté indexado por una variable.

indice_tiempo	EMAE	t	t^2
1993-01-01	87.3897906	1	1
1993-02-01	85.1416464	31	961
1993-03-01	101.928041	59	3,481
1993-04-01	101.89024	90	8,100
1993-05-01	103.674974	120	14,400
1993-06-01	101.242521	151	22,801
1993-07-01	102.478046	181	32,761
1993-08-01	102.003683	212	44,944
1993-09-01	103.307379	243	59,049
1993-10-01	100.702473	273	74,529
1993-11-01	105.246526	304	92,416
1993-12-01	104.99468	334	111,556
1994-01-01	94.9543818	365	133,225
1994-02-01	91.7632249	396	156,816



Tendencia

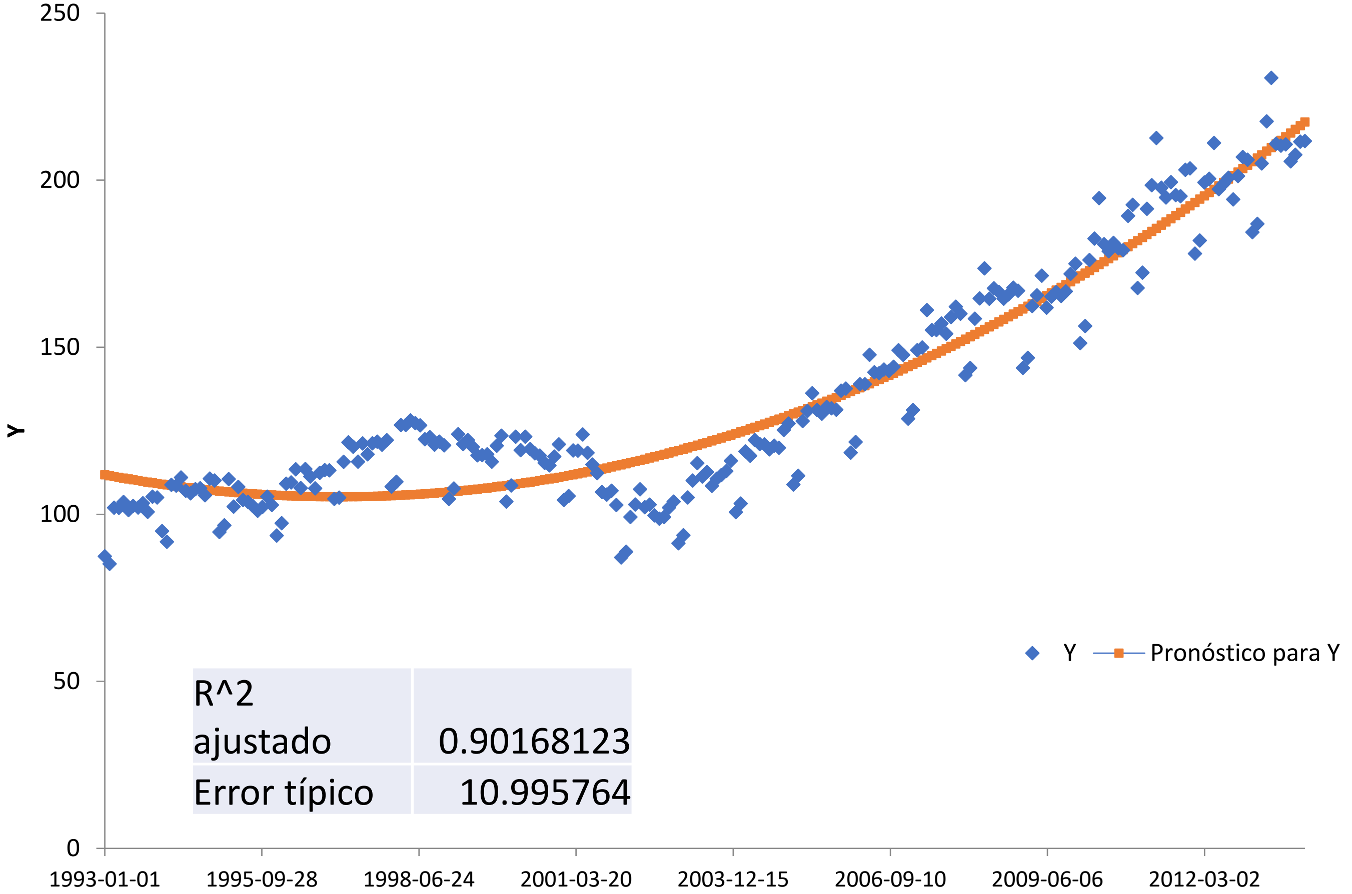
- Estimamos mediante MCO

- Predicción

$$y_t = \widehat{\beta_0} + \widehat{\beta_1} t + \widehat{\beta_2} t^2$$

Resultados regresión

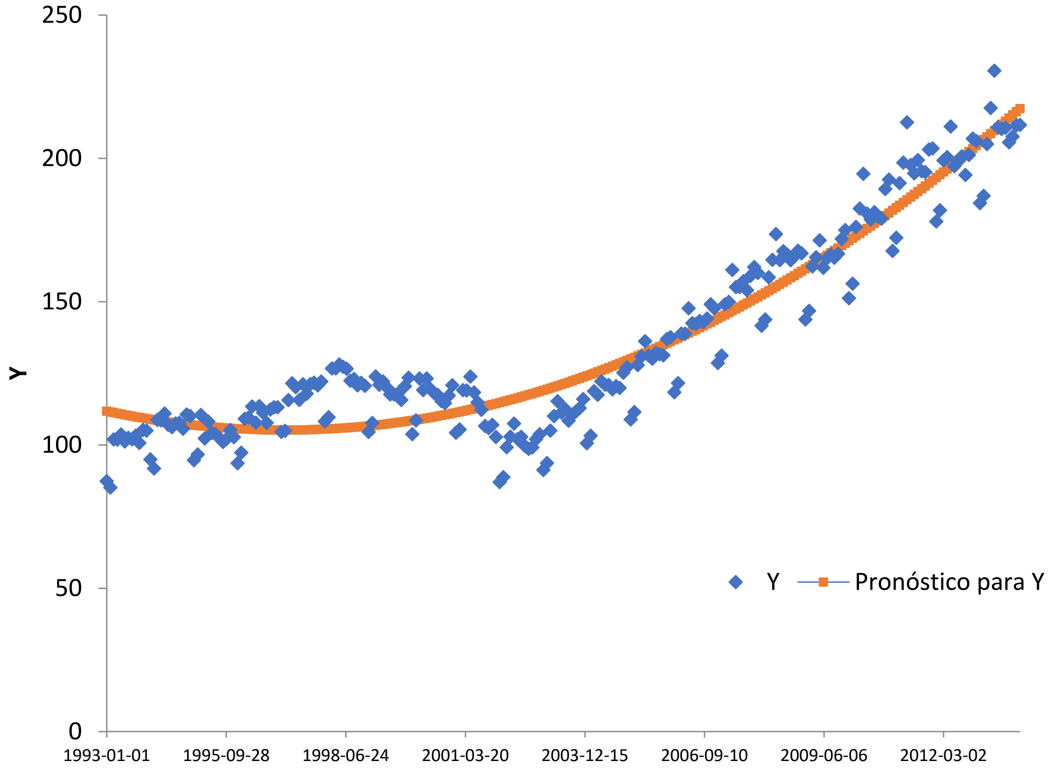
	Coeficientes	Error típico	Estadístico t	Probabilidad
Intercepción	111.812063	2.06050197	54.2644777	5.81E-140
T	-0.0088488	0.00124639	-7.0995723	1.3029E-11
T^2	2.9677E-06	1.5796E-07	18.7871091	1.2279E-49



R^2 ajustado	0.90168123
Error típico	10.995764

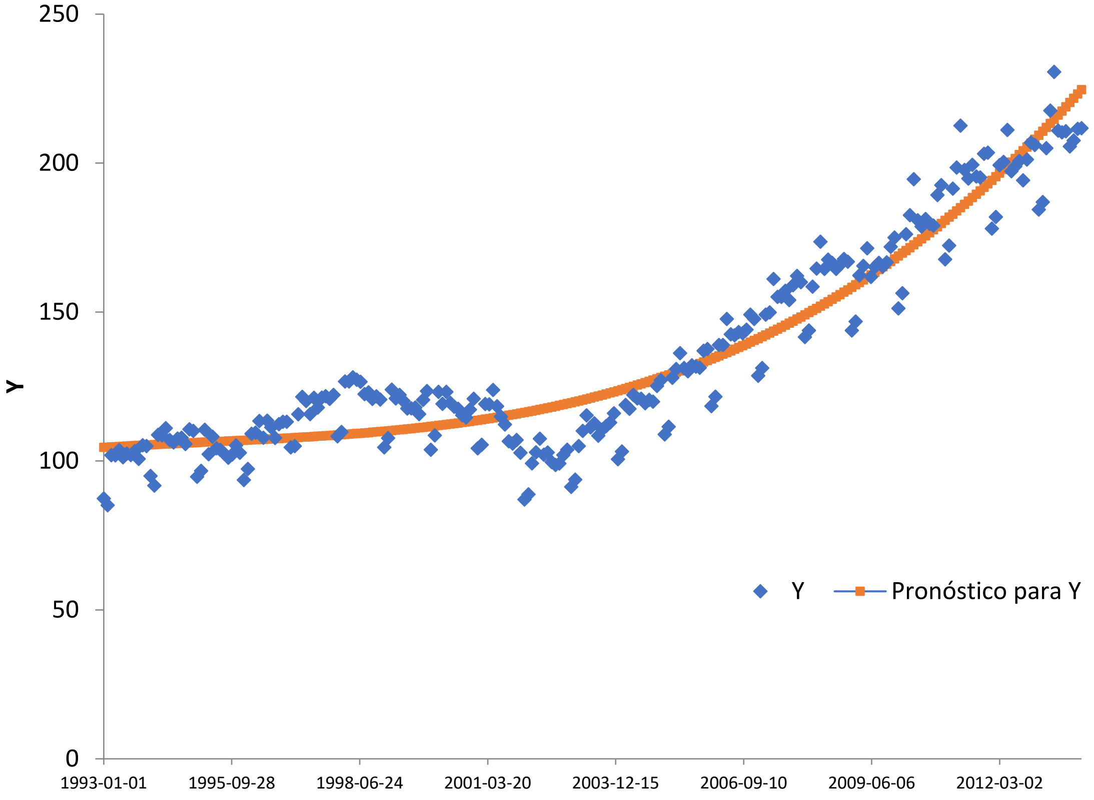
Tendencia

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \varepsilon_t$$



R^2 ajustado	0.90168123
Error típico	10.995764

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \beta_3 t^3 + \varepsilon_t$$



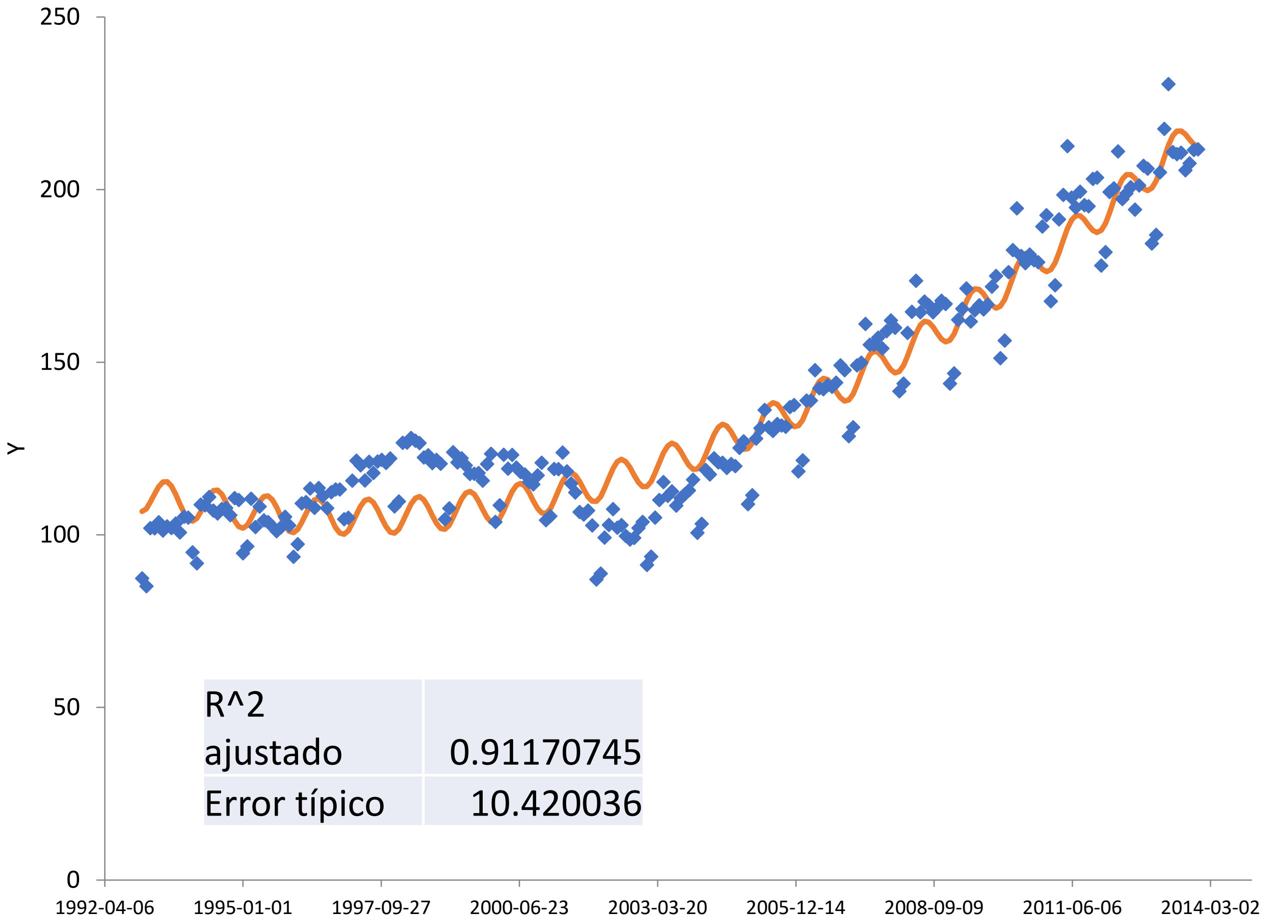
R^2 ajustado	0.90782677
Error típico	10.6465671

Estacionalidad

- Como primera aproximación modelamos la ***estacionalidad utilizando*** *las funciones basadas en Seno y coseno.*

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \beta_3 sen\left(\frac{2\pi}{12}mes\right) + \beta_4 cos\left(\frac{2\pi}{12}mes\right) + \varepsilon_t$$

indice_tiempo	mes	EMAE	seno	coseno
1993-01-01	1	87.3897906	0.5	0.8660254
1993-02-01	2	85.1416464	0.8660254	0.5
1993-03-01	3	101.928041	1	6.1257E-17
1993-04-01	4	101.89024	0.8660254	-0.5
1993-05-01	5	103.674974	0.5	-0.8660254
1993-06-01	6	101.242521	1.2251E-16	-1
1993-07-01	7	102.478046	-0.5	-0.8660254

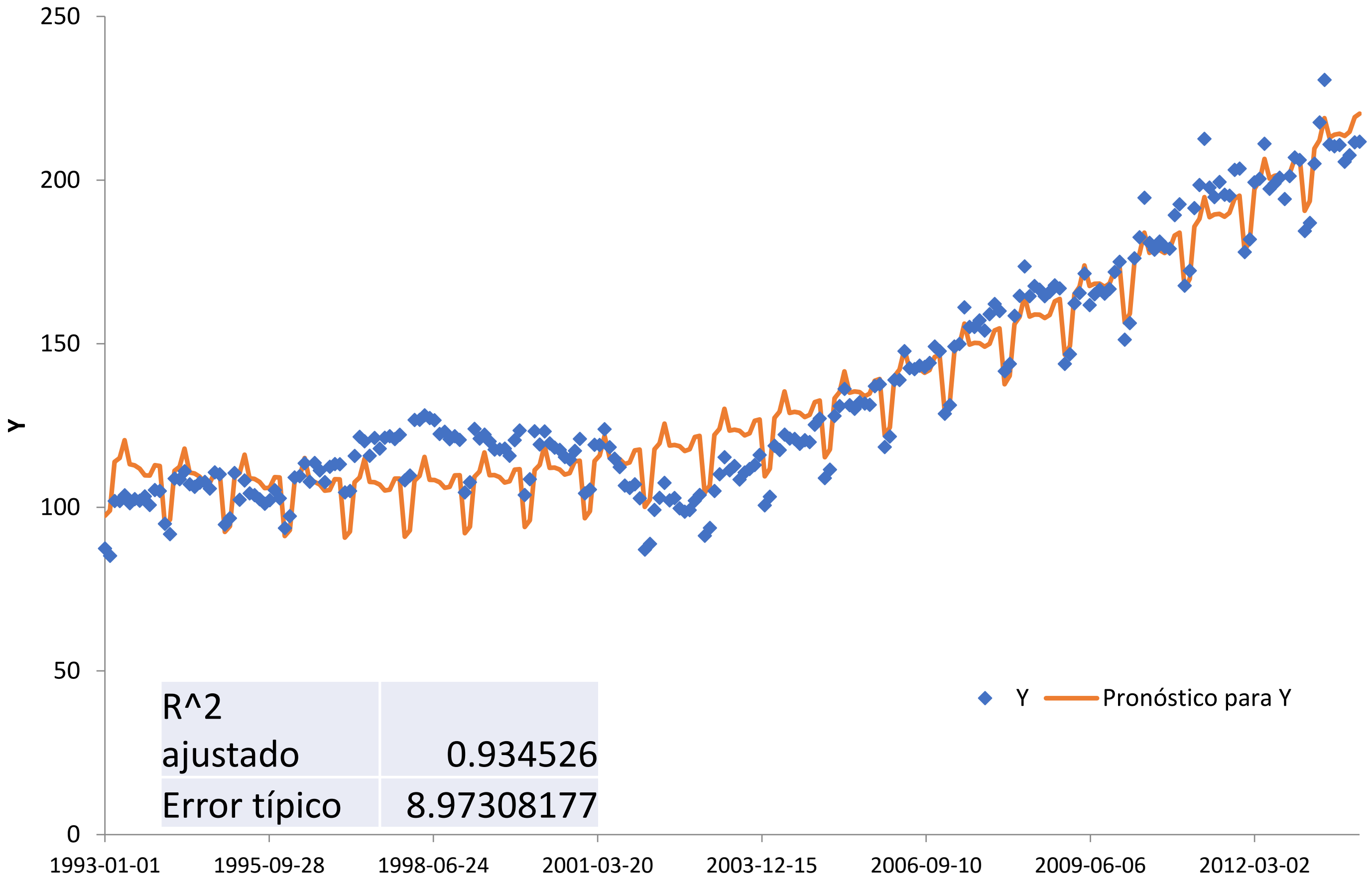


R^2 ajustado	0.91170745
Error típico	10.420036

Estacionalidad

- Como alternativa usamos variables dummys para modelar efectos mes-específicos

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \sum_{j=1}^{11} \beta_{mes} dmes + \varepsilon_t$$



R^2 ajustado	0.934526
Error típico	8.97308177

indice_tiempo	mes	EMAE	t	t^2	d1	d2	d3	d4	d5	d6
1993-01-01	1	87.3897906	1	1	1	0	0	0	0	0
1993-02-01	2	85.1416464	31	961	0	1	0	0	0	0
1993-03-01	3	101.928041	59	3,481	0	0	1	0	0	0
1993-04-01	4	101.89024	90	8,100	0	0	0	1	0	0

Autocorrelación

- Definimos la autocorrelación como la correlación de una serie consigo misma cuando esta se presenta con un rezago.

$$Corr(y_t, y_{t-1}) = \frac{Cov(y_t, y_{t-1})}{\sqrt{Var(y_t)Var(y_{t-1})}}$$

- El concepto se extiende a cualquier rezago l

$$Corr(y_t, y_{t-l}) = \frac{Cov(y_t, y_{t-l})}{\sqrt{Var(y_t)Var(y_{t-l})}}$$

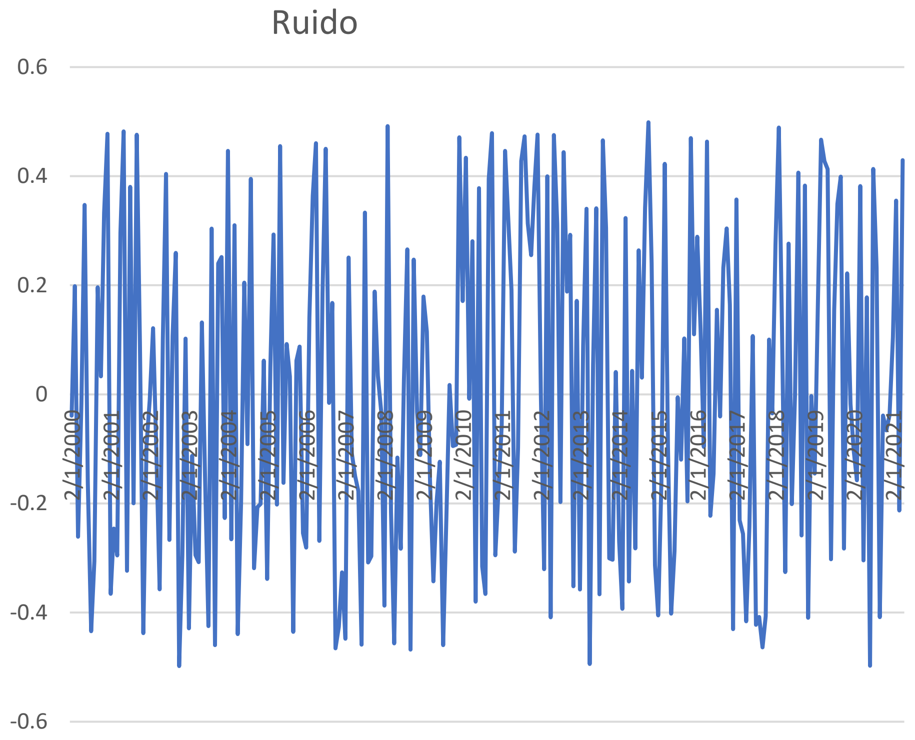
Calculando autocorrelación

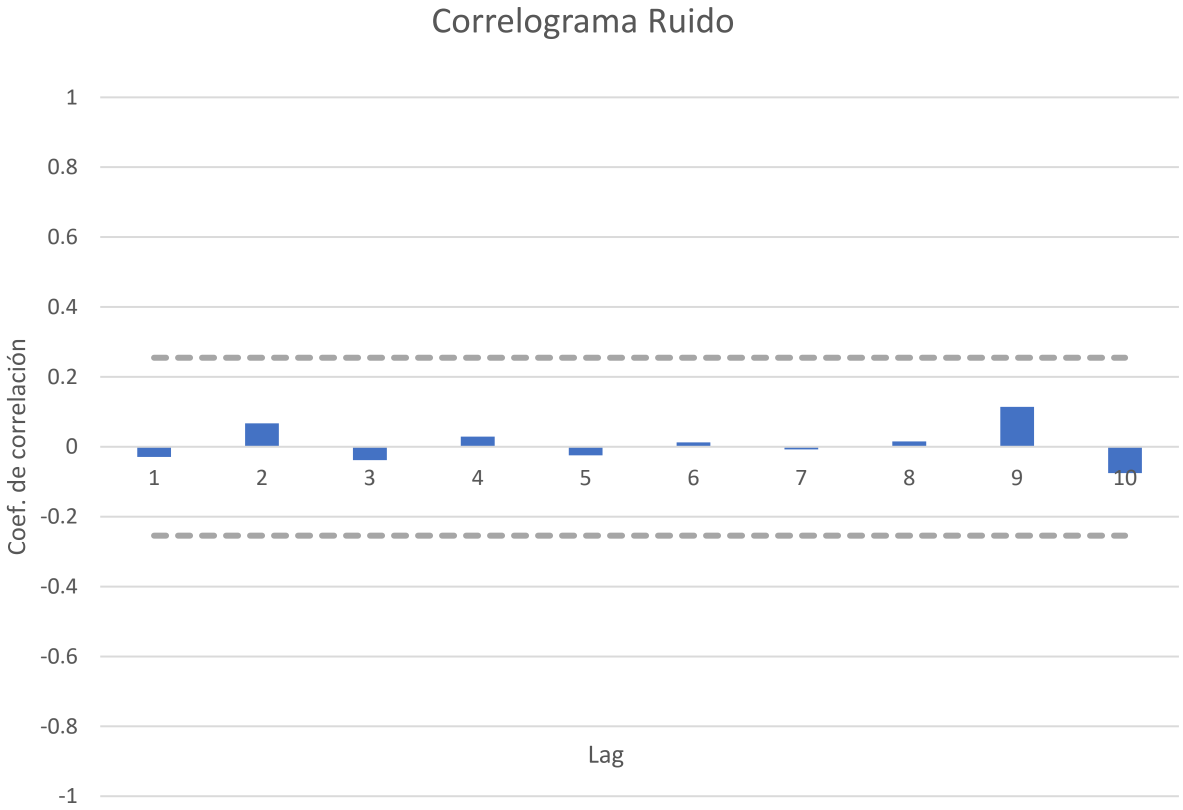
	B	C
	Serie de datos (t)	Serie (t-1)
1/1/2000	0.10821413	-0.4478578
2/1/2000	-0.4478578	0.38615868
3/1/2000	0.38615868	0.12150953
4/1/2000	0.12150953	-0.2441563
5/1/2000	-0.2441563	0.31369721
6/1/2000	0.31369721	0.03354672
7/1/2000	0.03354672	-0.3516055
8/1/2000	-0.3516055	0.33887105
9/1/2000	0.33887105	0.19783315
10/1/2000	0.19783315	-0.2597335

=Coef.de.Correl(B2:B10, C2:C10)

Correlograma: Ejemplo simulado 1

$$ruido_t \sim U[-0.5, 0.5]$$

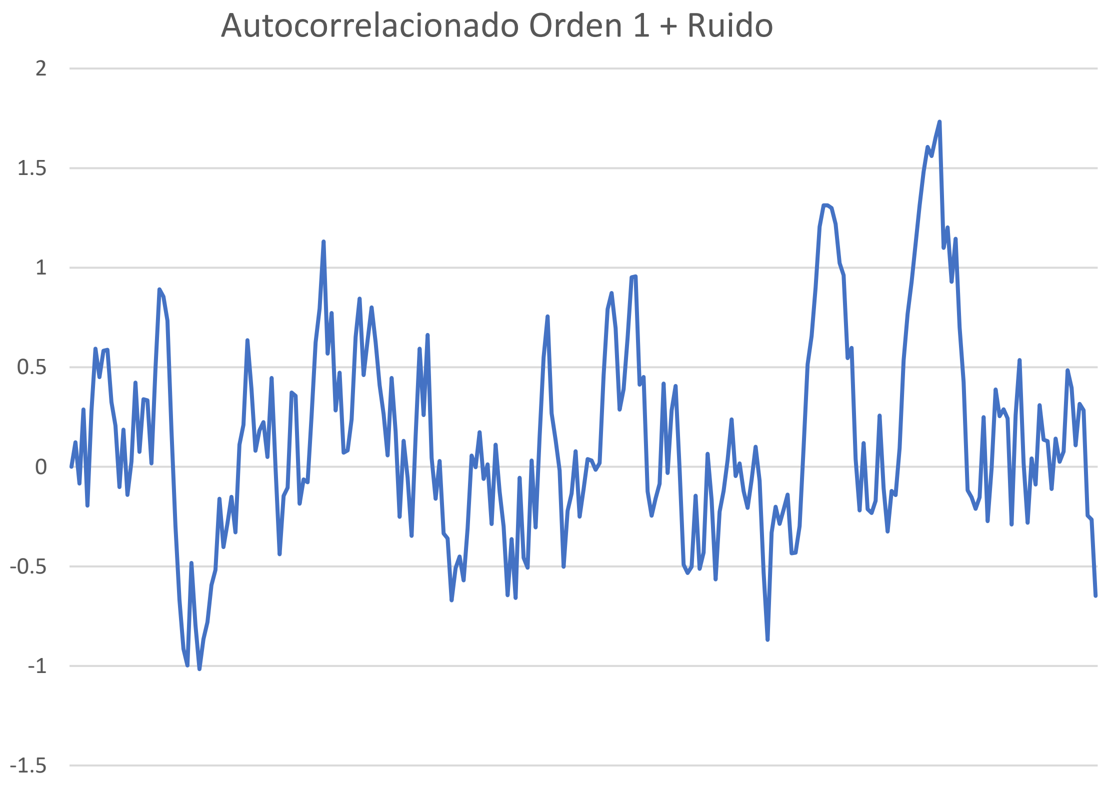


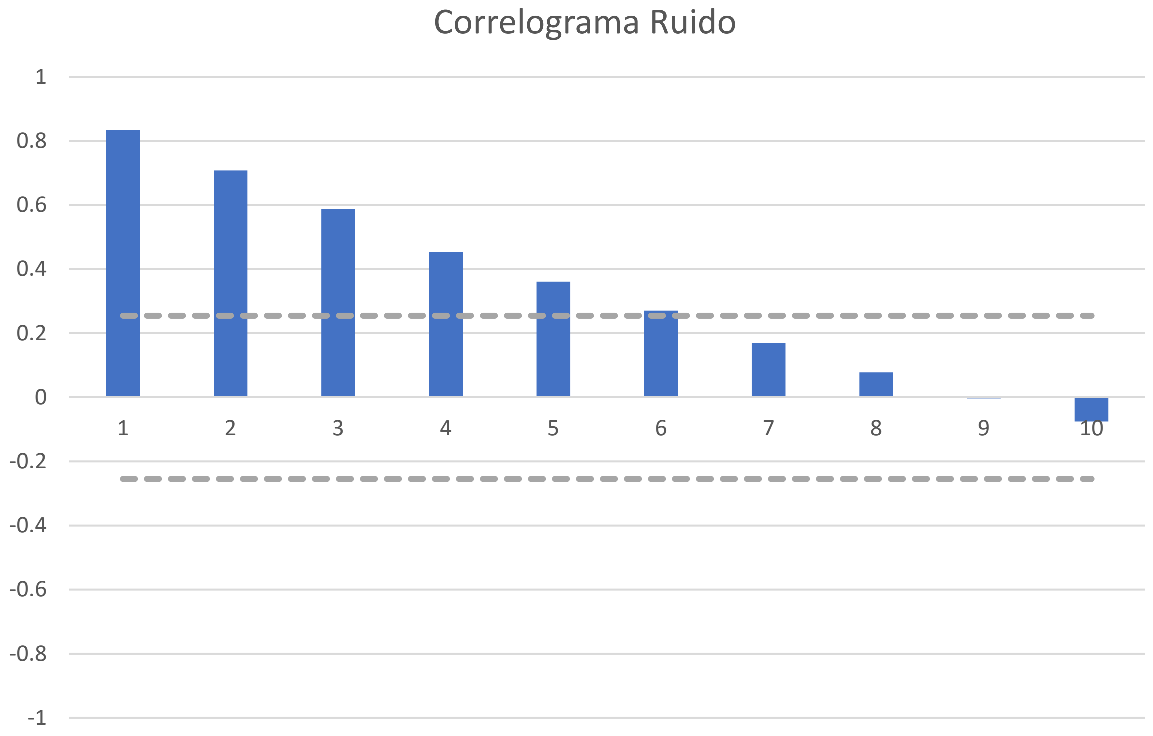


Correlograma: Ejemplo simulado 2

$$y_t = 0.8 \ * \ y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t \sim U[-0.5, 0.5]$$

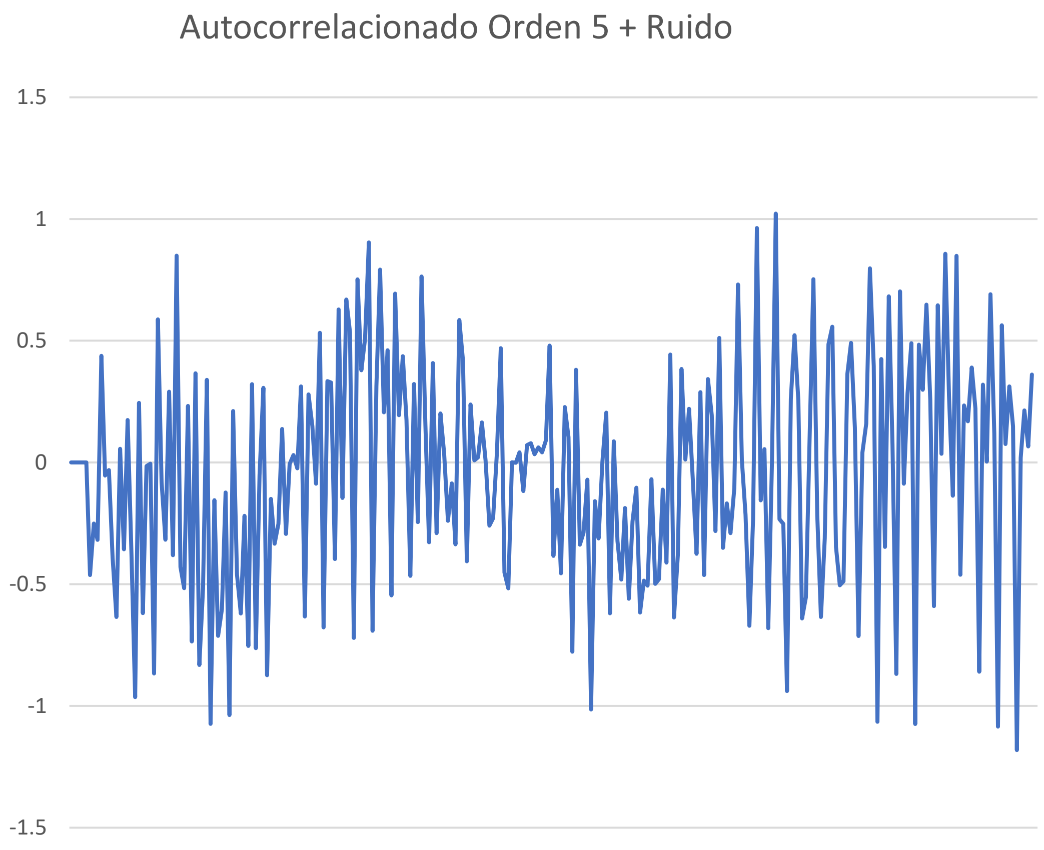


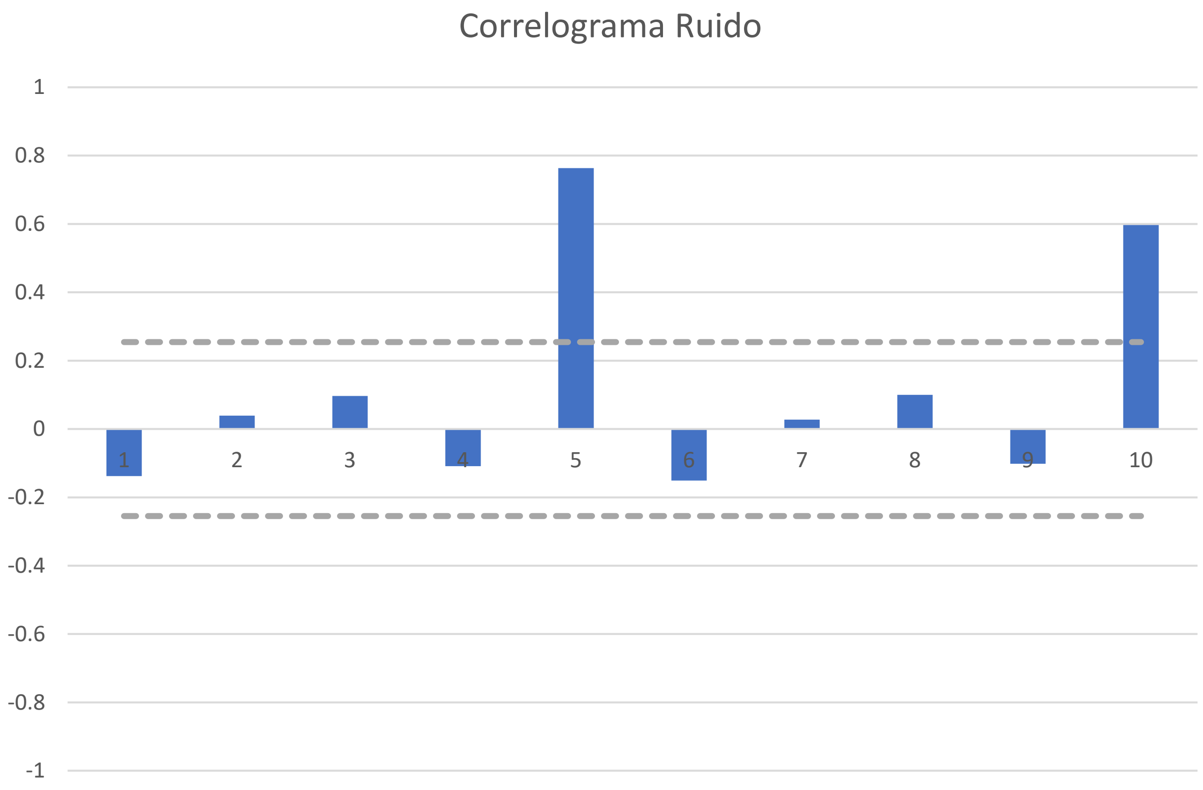


Correlograma: Ejemplo simulado 3

$$y_t = 0.8 * y_{t-5} + \varepsilon_t$$

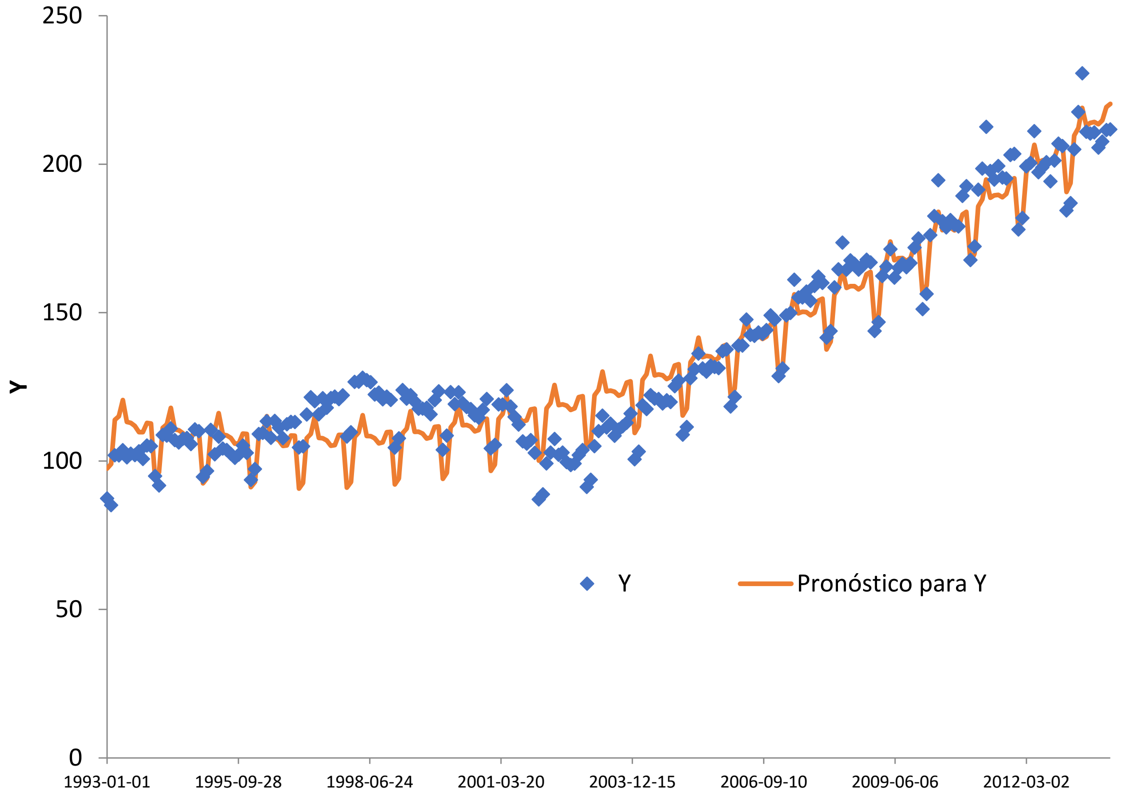
$$\varepsilon_t \sim U[-0.5, 0.5]$$



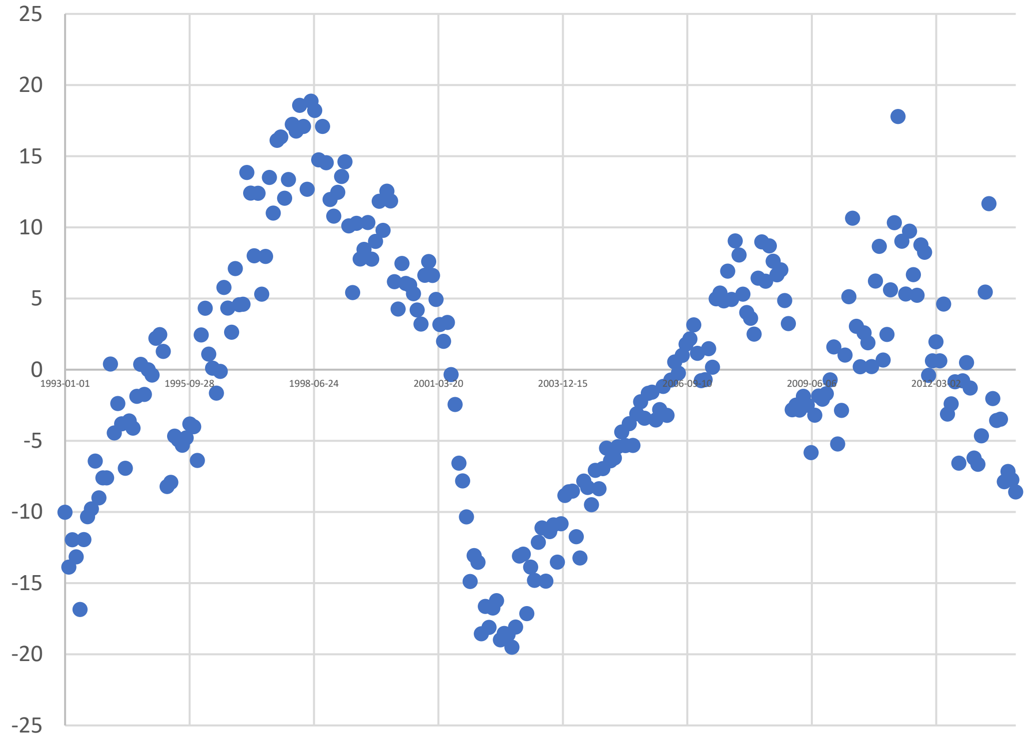


Caso EMAE: Paso 1. Removiendo tendencia y estacionalidad

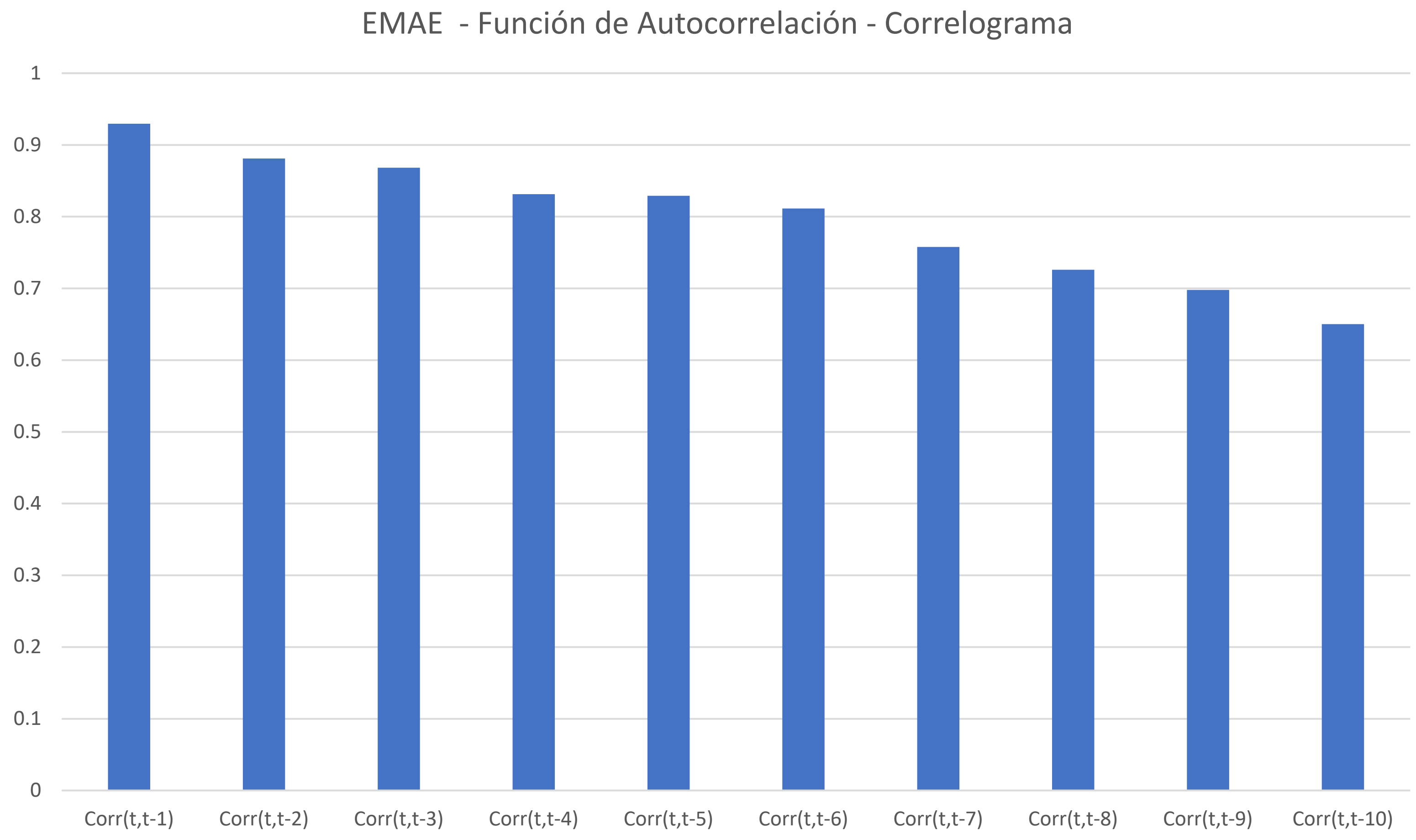
$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \sum_{j=1}^{11} \beta_{mes} dmes + \varepsilon_t$$



$$\widehat{\varepsilon_t} = y_t - \widehat{y_t} = z_t$$



Caso EMAE: Paso 2. Autocorrelación



Incluyendo Autocorrelación al Modelo: Modelo Autoregresivo Simple

- Modelo Autoregresivo de Orden 1. AR(1)

$$z_t = \theta_0 + \theta_1 z_{t-1} + \varepsilon_t$$

indice_tiempo	EMAE	Zt	Z t-1
1993-01-01	87.3897906	-10.032786	
1993-02-01	85.1416464	-13.883853	-10.032786
1993-03-01	101.928041	-11.972484	-13.883853
1993-04-01	101.89024	-13.172196	-11.972484
1993-05-01	103.674974	-16.862718	-13.172196
1993-06-01	101.242521	-11.951195	-16.862718
1993-07-01	102.478046	-10.354031	-11.951195
1993-08-01	102.003683	-9.8009403	-10.354031
1993-09-01	103.307379	-6.4433674	-9.8009403
1993-10-01	100.702473	-9.0249648	-6.4433674
1993-11-01	105.246526	-7.6239132	-9.0249648
1993-12-01	104.99468	-7.6235741	-7.6239132
1994-01-01	94.9543818	0.38813921	-7.6235741

Incluyendo Autocorrelación al Modelo: Modelo Autoregresivo Simple

- Modelo Autoregresivo de Orden 1. AR(1)

$$z_t = \theta_0 + \theta_1 z_{t-1} + \varepsilon_t$$

Estadísticas de la regresión	
Coeficiente de correlación múltiple	0.929655416
Coeficiente de determinación R^2	0.864259193
R^2 ajustado	0.863714049
Error típico	3.223572627
Observaciones	251

ANÁLISIS DE VARIANZA

	Grados de libertc	na de cuadrad	dio de los cuac	F	'alor crítico de F
Regresión	1	16474.33322	16474.33322	1585.378366	5.7182E-110
Residuos	249	2587.463699	10.39142048		
Total	250	19061.79692			

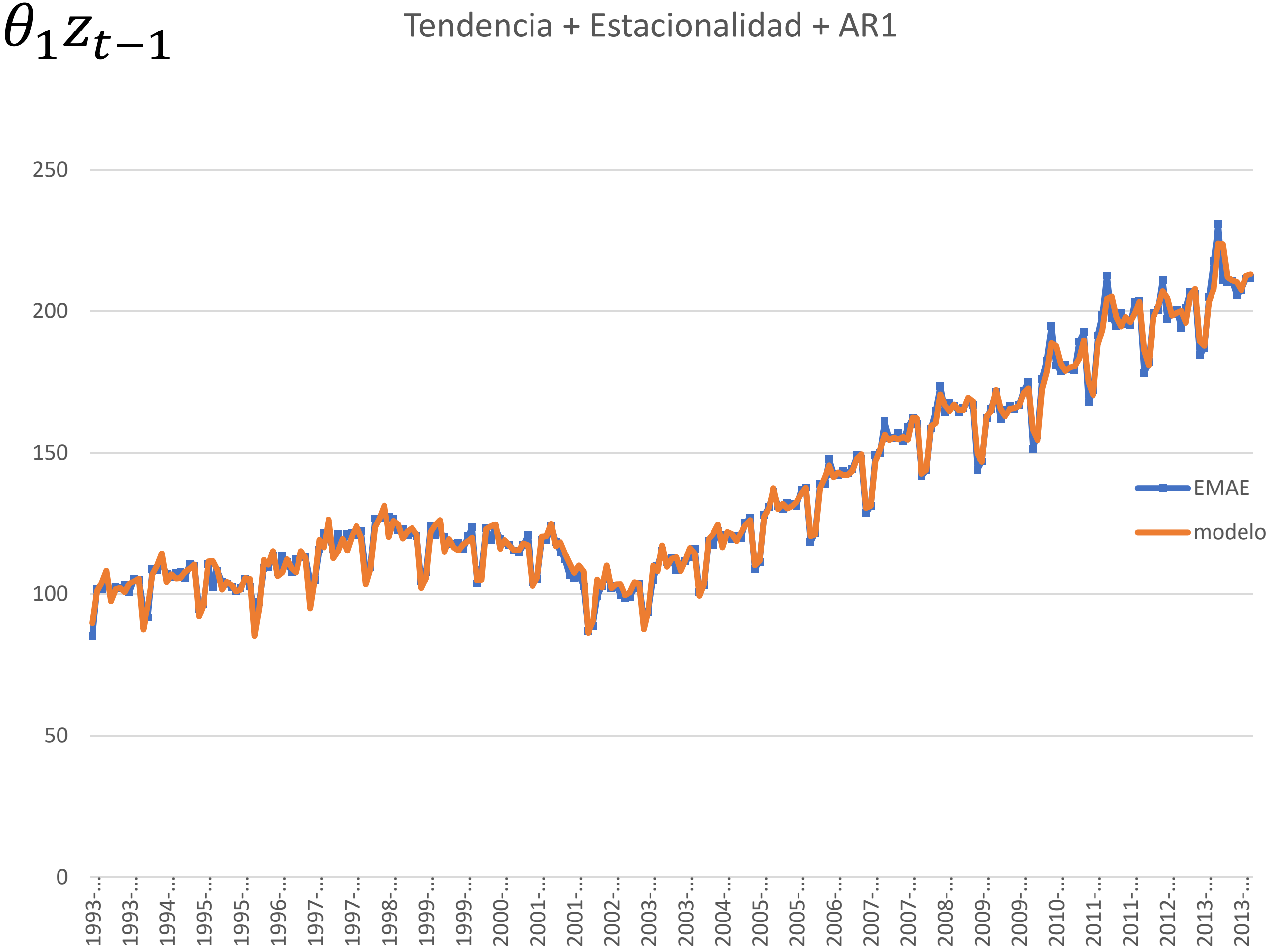
	Coeficientes	Error típico	Estadístico t	Probabilidad	Inferior 95%
Intercepción	0.008117531	0.203471673	0.03989514	0.968208695	-0.39262743
Z(t-1)	0.929005145	0.023331983	39.81681009	5.7182E-110	0.883051944

Caso EMAE: Predicción

$$y_t = \widehat{\beta_0} + \widehat{\beta_1} t + \widehat{\beta_2} t^2 + \sum_{j=1}^{11} \widehat{\beta_{mes}} dmes$$

$$z_t = \widehat{\theta_0} + \widehat{\theta_1} z_{t-1}$$

Fecha	*Prediccion tendencia + estacionalidad*	Tendencia +estacionalidad + AR(1)
1993-02-01	99.02549961	89.71310723
1993-03-01	113.900525	101.0104714
1993-04-01	115.0624368	103.948055
1993-05-01	120.5376918	108.3087712
1993-06-01	113.1937156	97.53628153
1993-07-01	112.8320775	101.7374736
1993-08-01	111.8046231	102.1937924
1993-09-01	109.7507463	100.6537399
1993-10-01	109.7274378	103.7496339
1993-11-01	112.870439	104.4943179
1993-12-01	112.618254	105.5437169
1994-01-01	94.56624262	87.49202058
1994-02-01	96.22743371	96.59613456
1994-03-01	111.163155	107.0239997



Función de Autocorrelación Parcial: Motivación

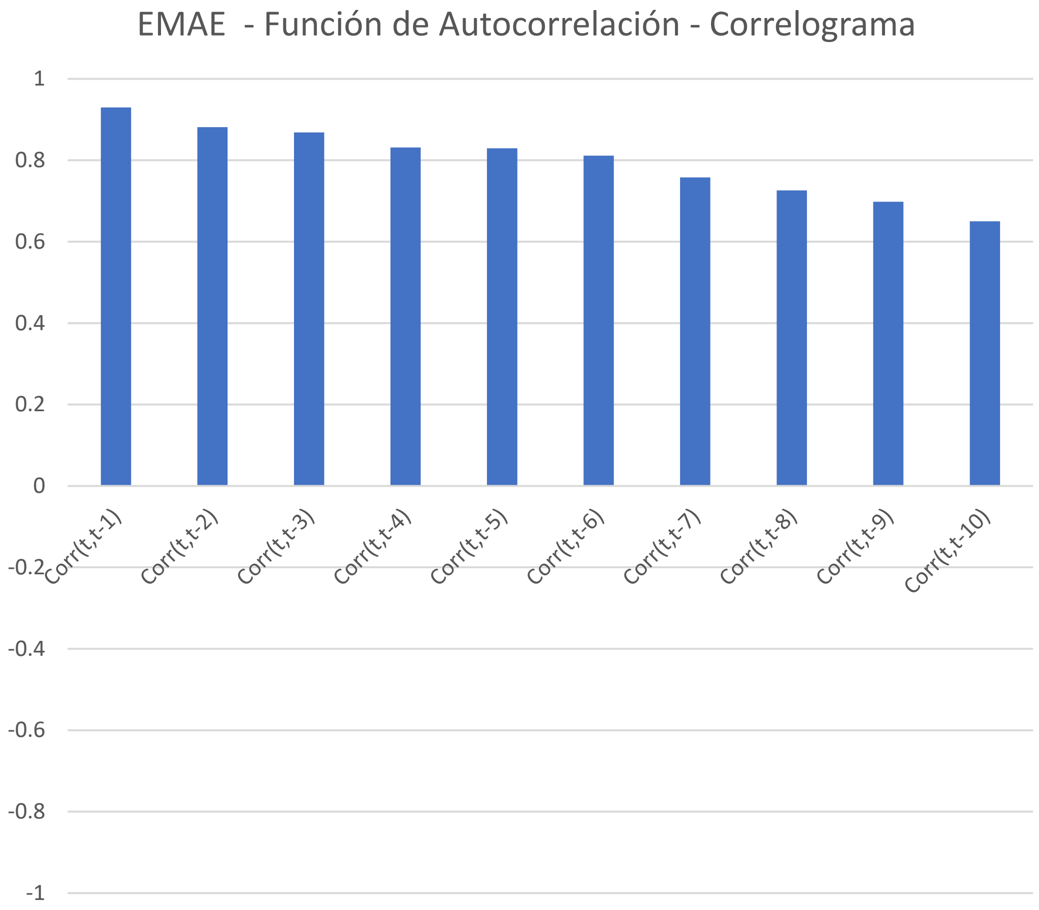
- Modelo Autoregresivo de Orden 1. AR(1)

$$z_t = \theta_0 + \theta_1 z_{t-1} + \varepsilon_t$$

- Modelo Autoregresivo de Orden 2. AR(2)

$$z_t = \theta_0 + \theta_1 z_{t-1} + \theta_2 z_{t-2} + \varepsilon_t$$

- ¿Qué función usar?



$$z_t = \theta_0 + \theta_1 z_{t-1} + \theta_2 z_{t-2} + \theta_3 z_{t-3} + .. + \varepsilon_t$$

Función de Autocorrelación Parcial: Motivación

- AR(1)

$$z_t = \theta_0 + \theta_1 z_{t-1} + \varepsilon_t$$

Efecto del período anterior sobre el contemporáneo.

- AR(2)

$$z_t = \theta_0 + \theta_1 z_{t-1} + \theta_2 z_{t-2} + \varepsilon_t$$

Efecto del rezago de dos períodos sobre el contemporáneo, pero cuando ya tuve en cuenta el efecto del período anterior.

- AR(3)

$$z_t = \theta_0 + \theta_1 z_{t-1} + \theta_2 z_{t-2} + \theta_3 z_{t-3} + \varepsilon_t$$

Efecto del rezago de dos períodos sobre el contemporáneo, pero cuando ya tuve en cuenta los dos primeros rezagos.

Función de Autocorrelación Parcial

- AR(1)

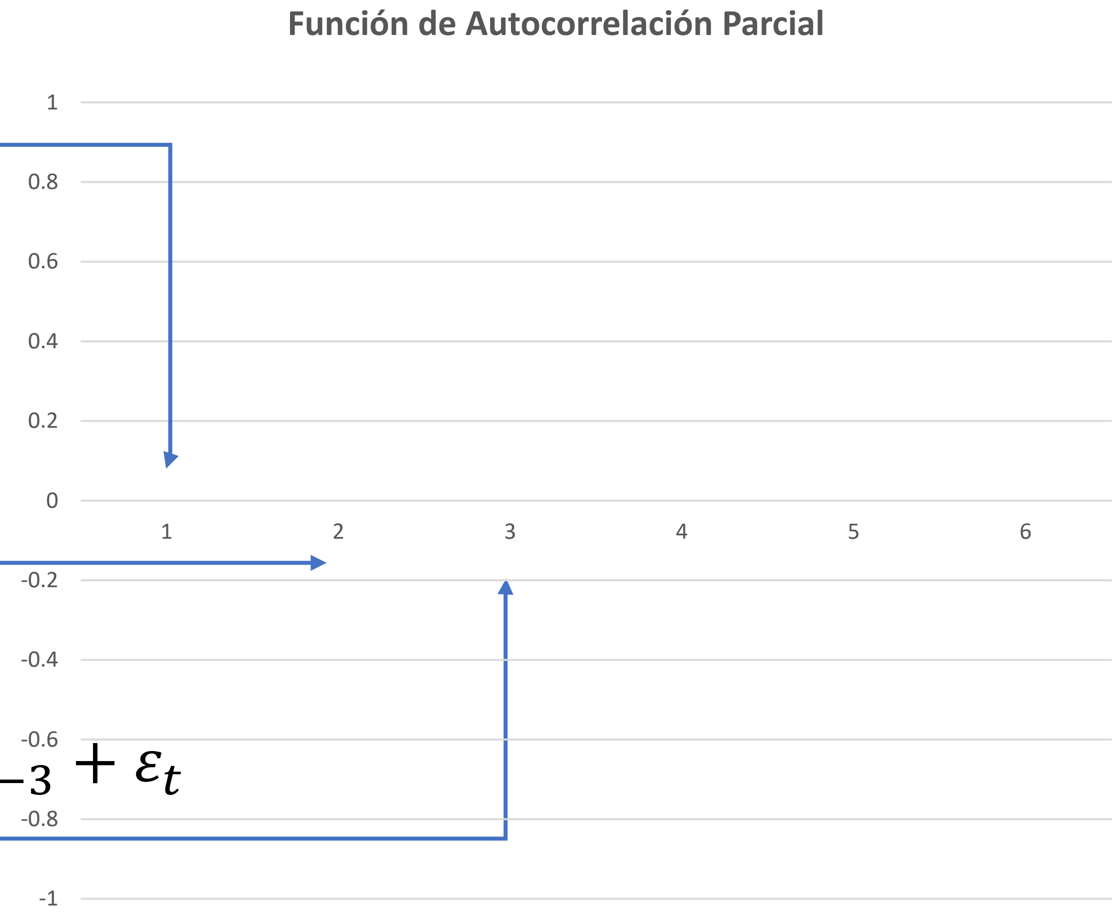
$$z_t = \theta_0 + \theta_1 z_{t-1} + \varepsilon_t$$

- AR(2)

$$z_t = \theta_0 + \theta_1 z_{t-1} + \theta_2 z_{t-2} + \varepsilon_t$$

- AR(3)

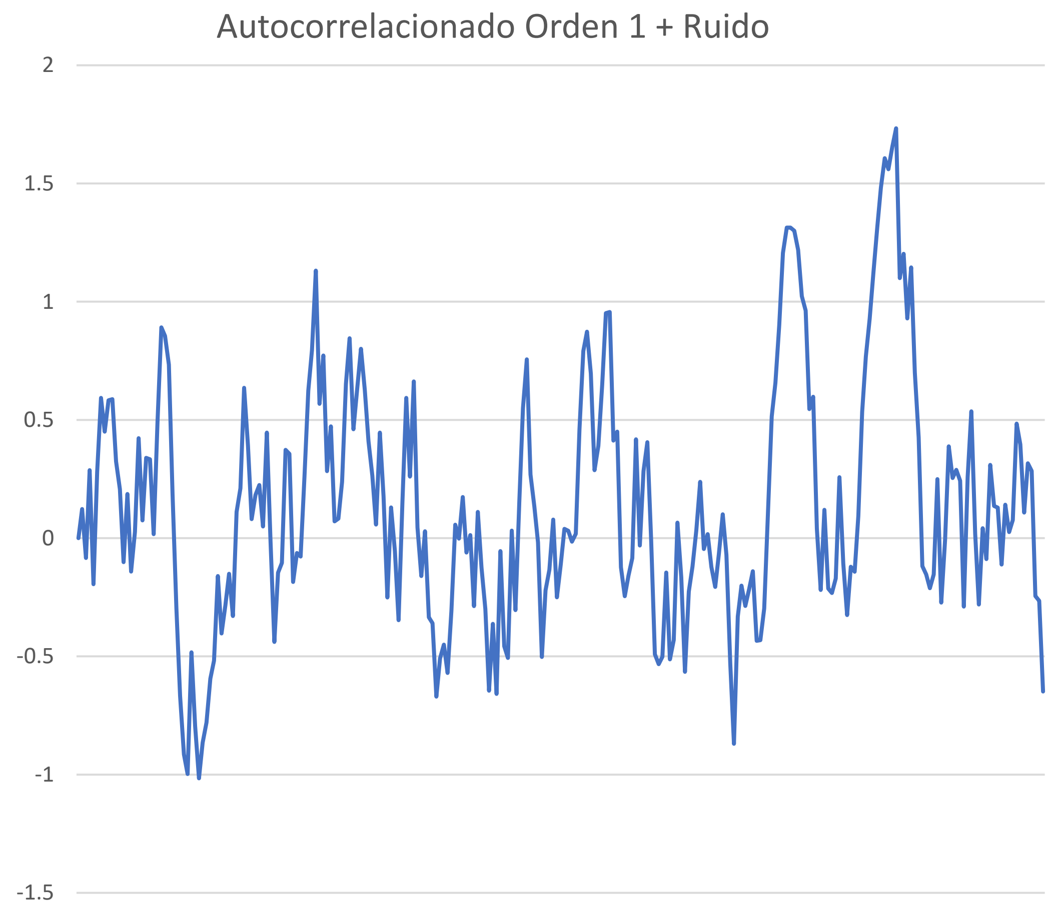
$$z_t = \theta_0 + \theta_1 z_{t-1} + \theta_2 z_{t-2} + \theta_3 z_{t-3} + \varepsilon_t$$

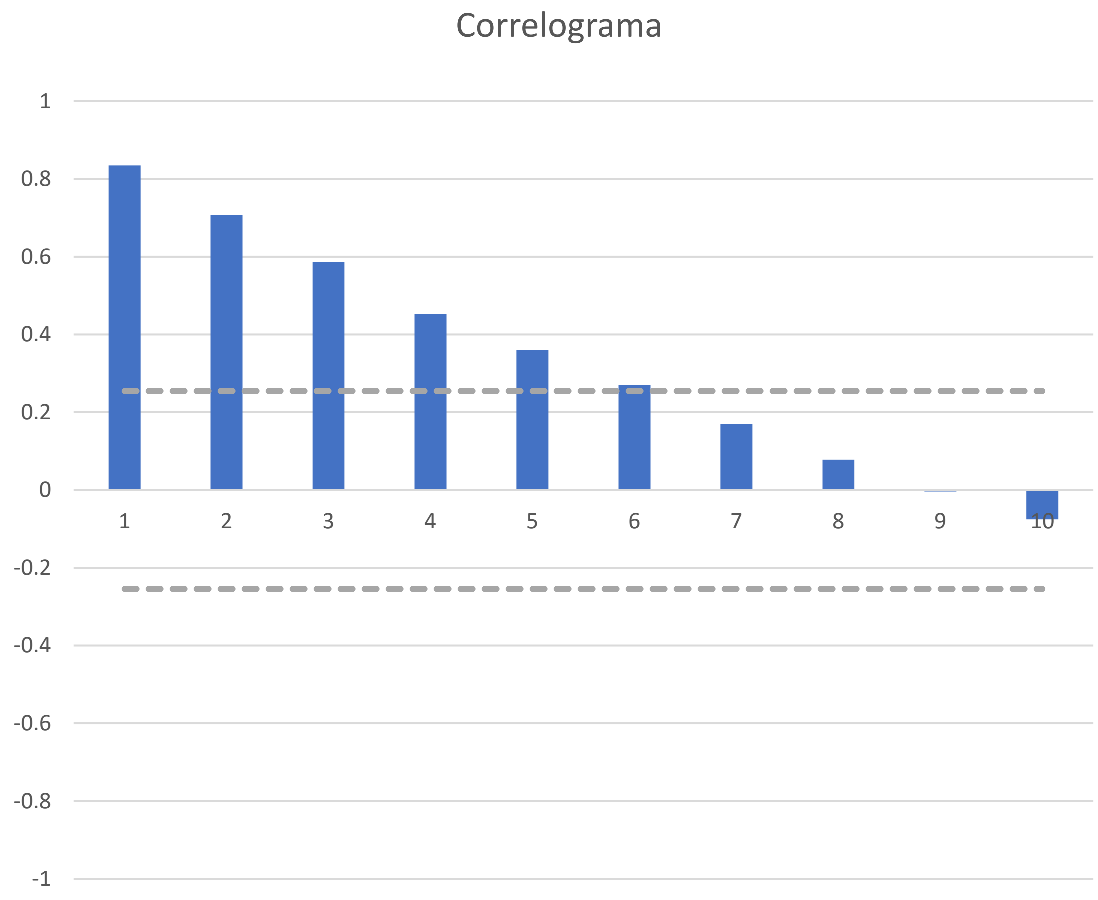


Ejemplo simulado 1: AR(1)

$$y_t = 0.8 \; * \; y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t \sim U[-0.5, 0.5]$$

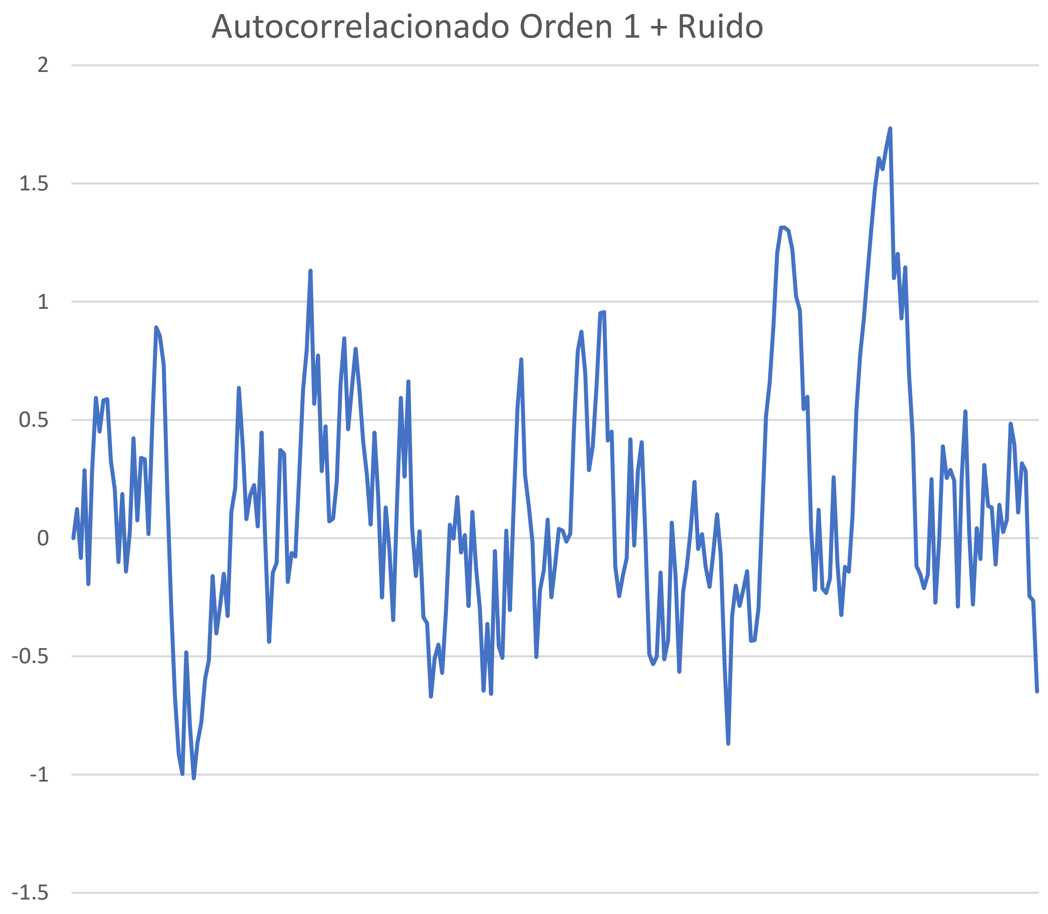


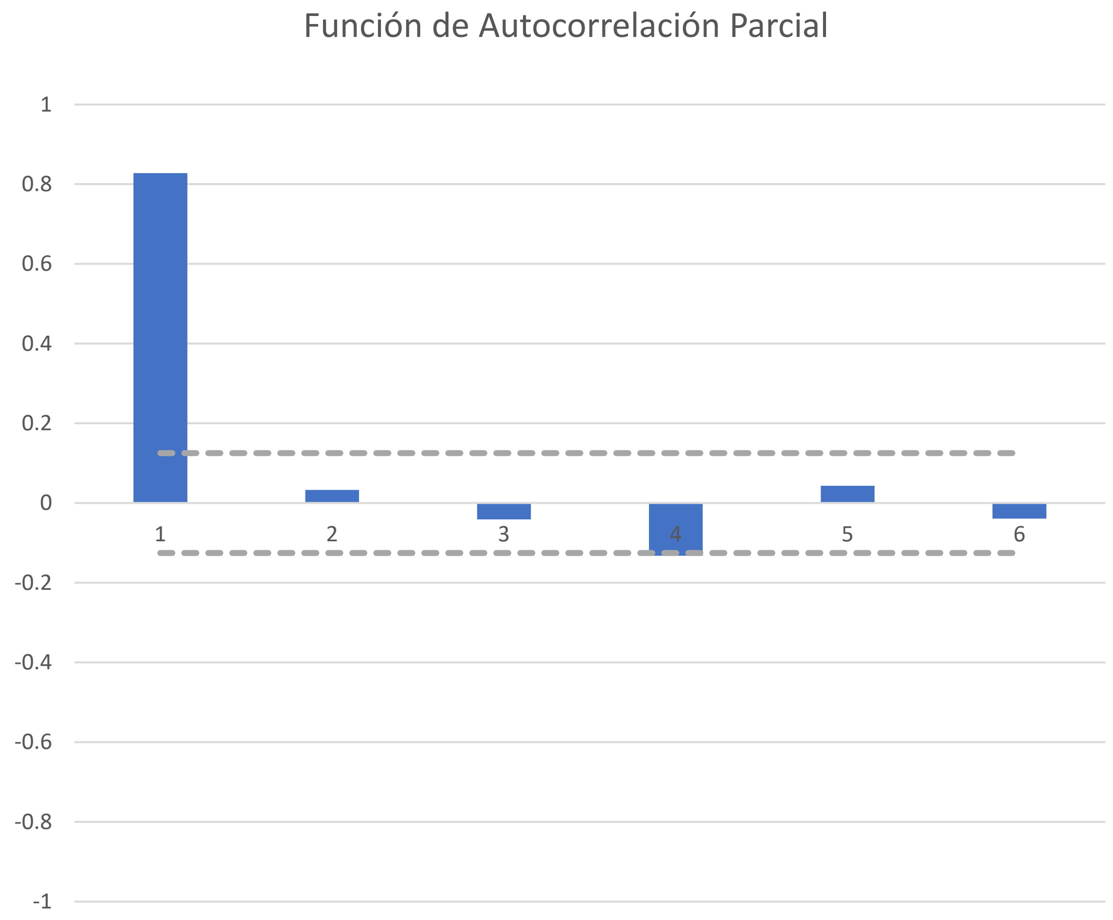


Ejemplo simulado 1: AR(1)

$$y_t = 0.8 * y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t \sim U[-0.5, 0.5]$$

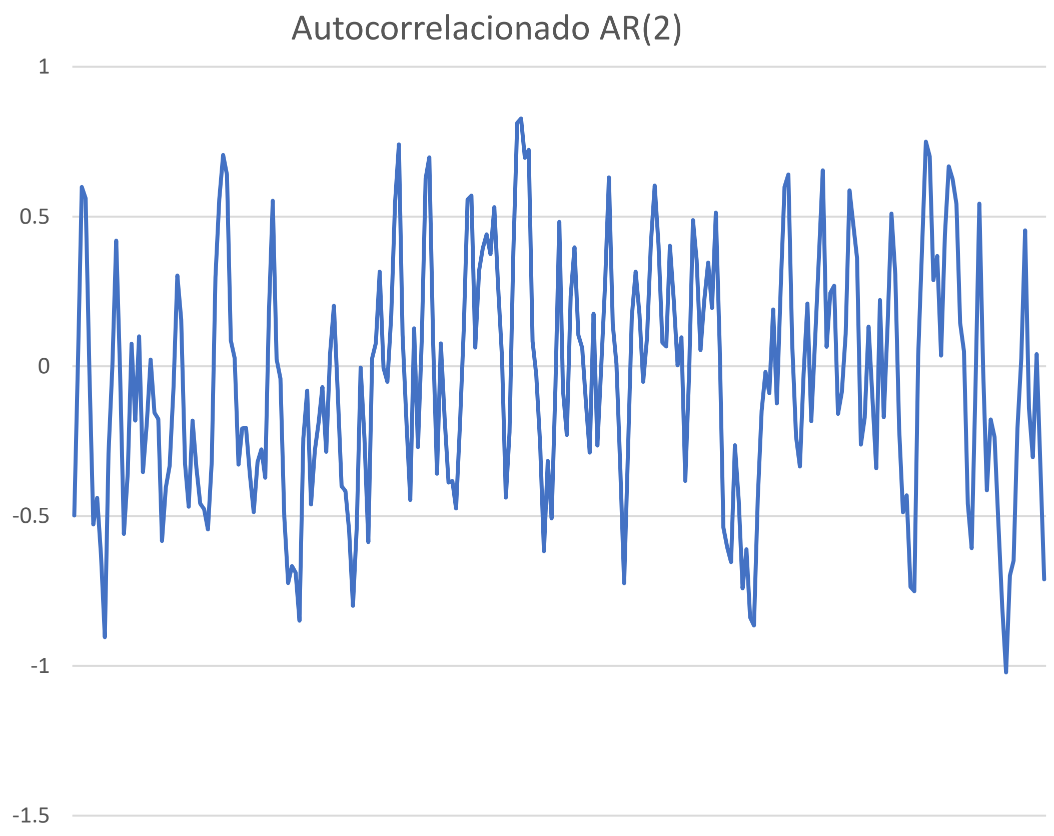


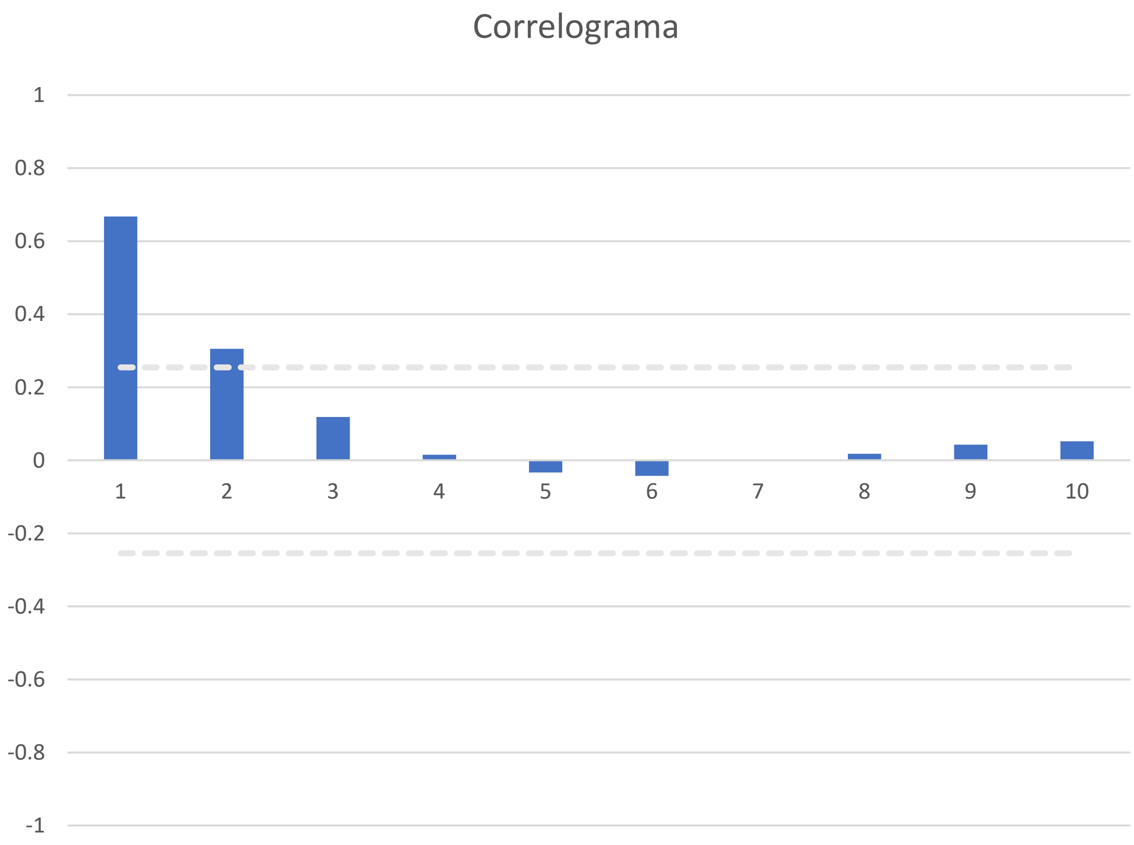


Ejemplo: AR(2)

$$y_t = 0.8 * y_{t-1} - 0.2 * y_{t-2} + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t \sim U[-0.5, 0.5]$$

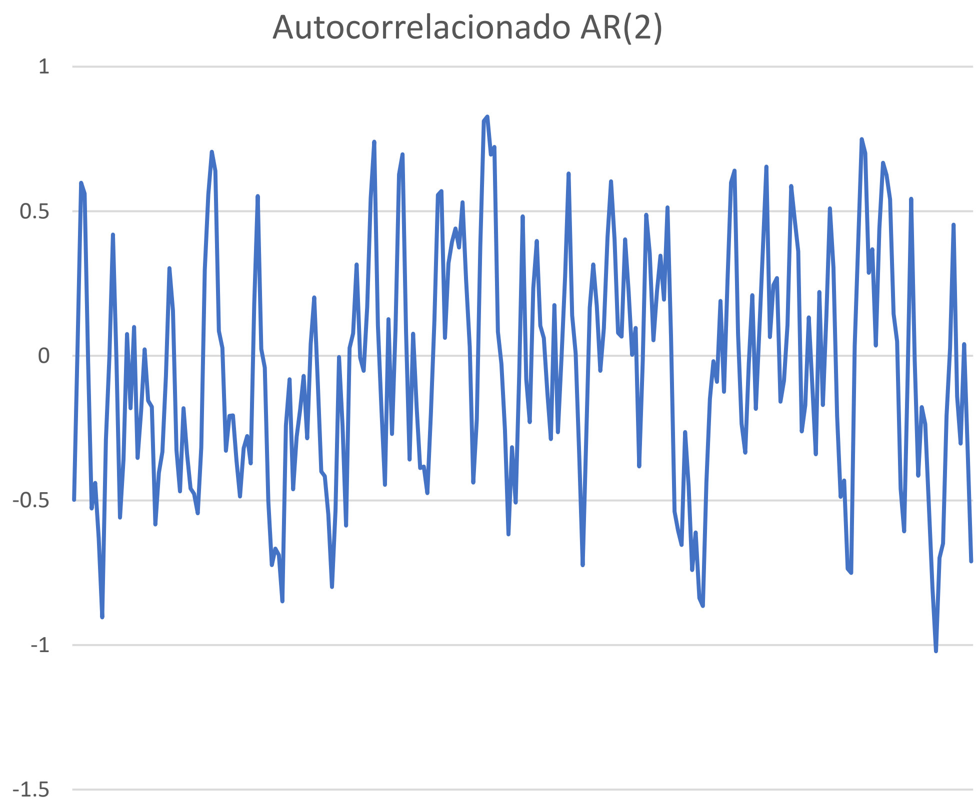


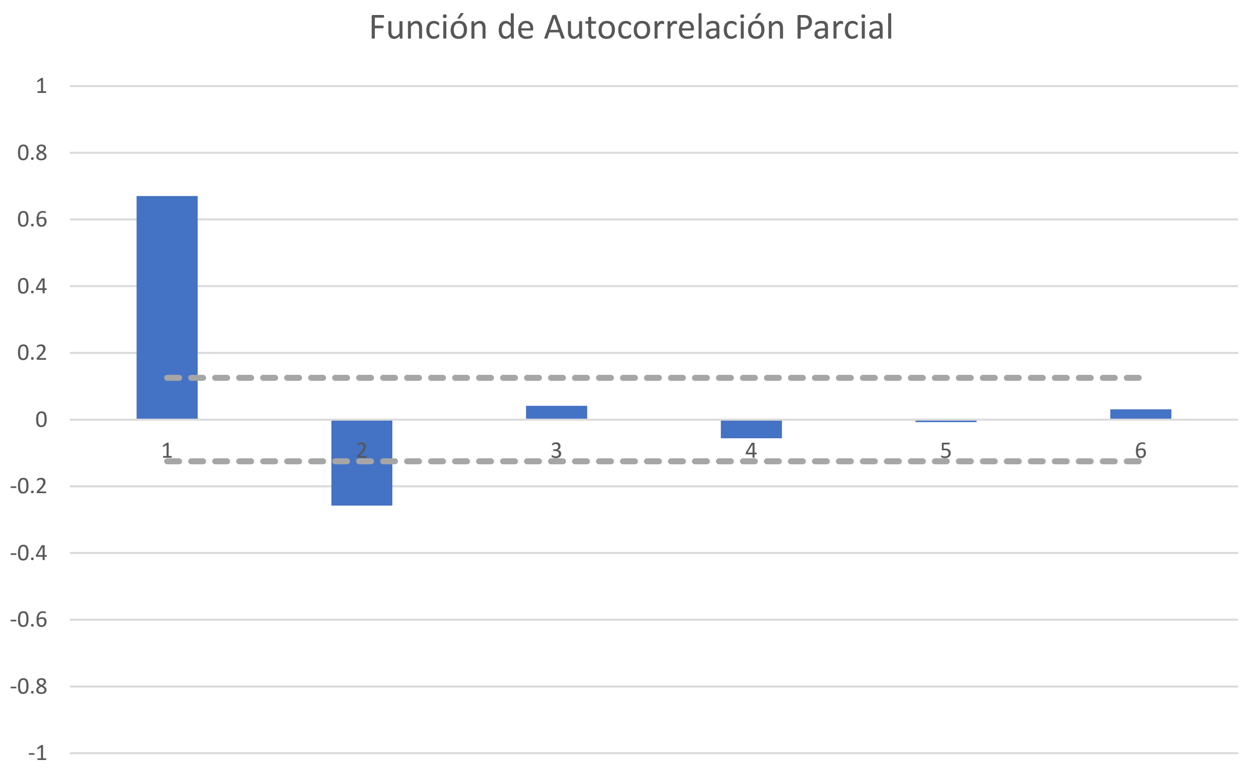


Ejemplo: AR(2)

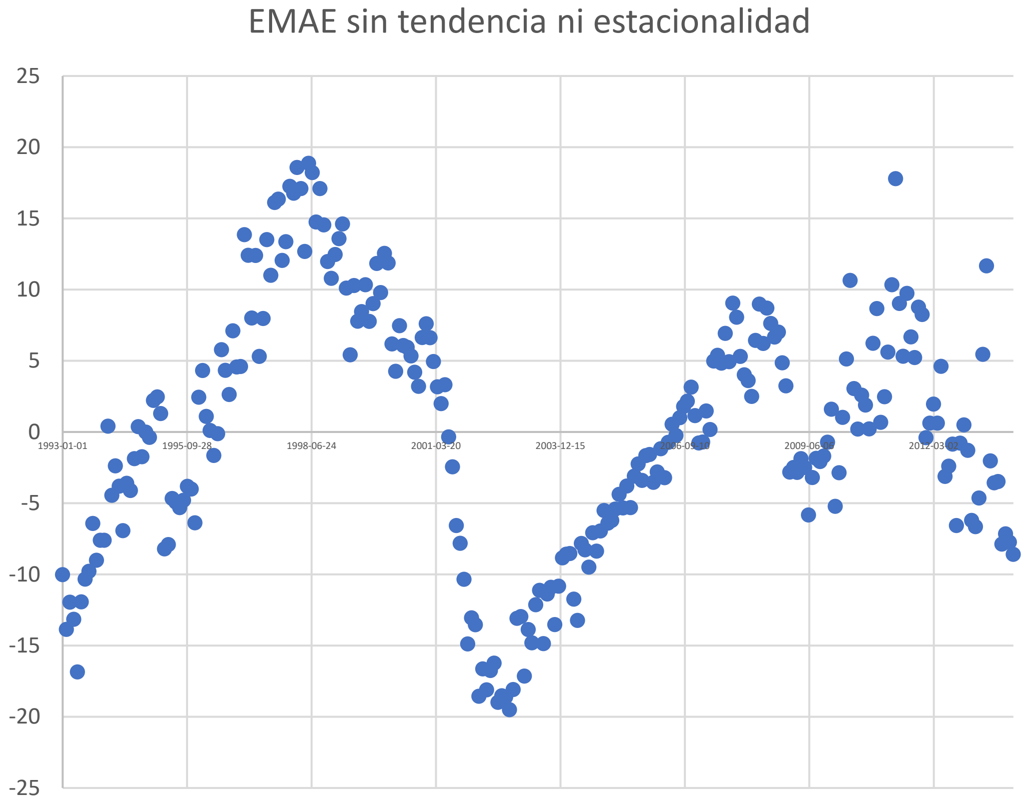
$$y_t = 0.8 * y_{t-1} - 0.2 * y_{t-2} + \varepsilon_t$$

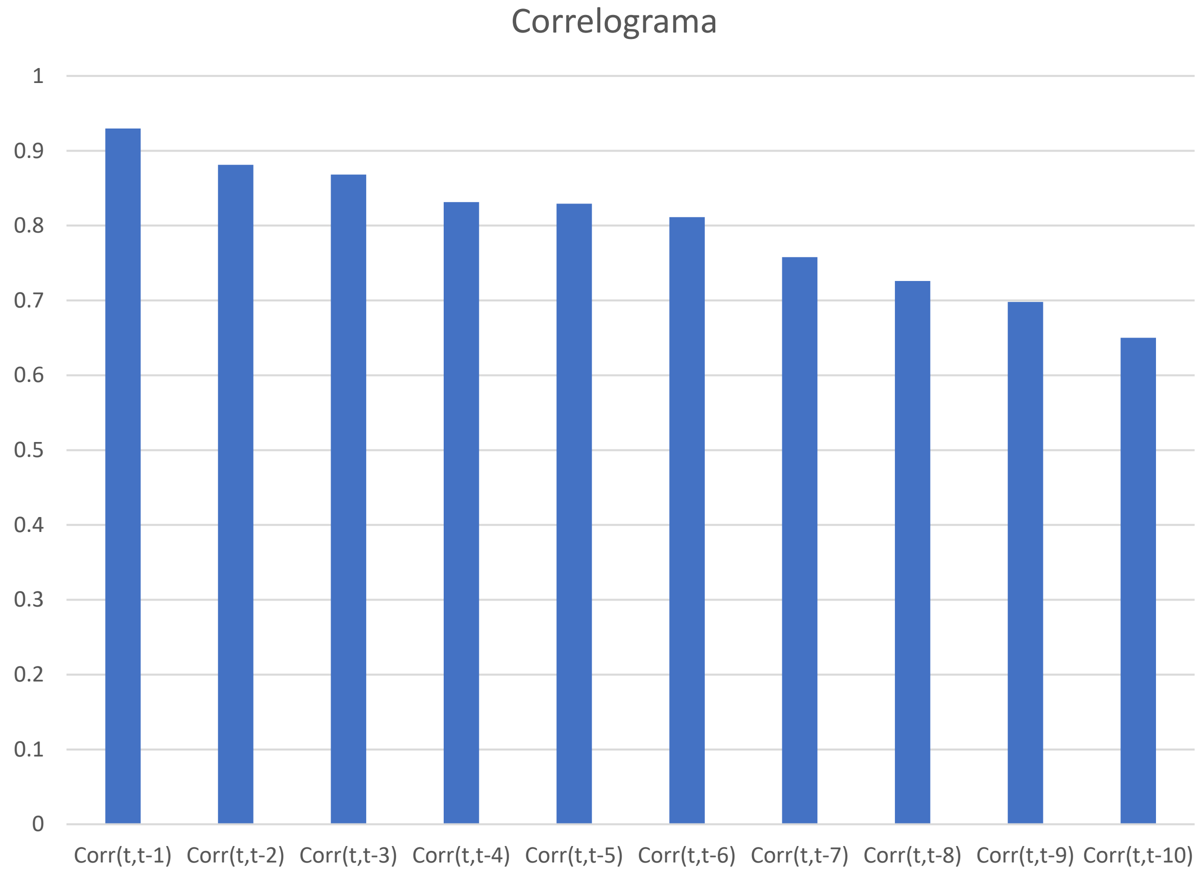
$$\varepsilon_t \sim U[-0.5, 0.5]$$





Caso real: EMAE





Caso real: EMAE. Modelo Autoregresivo ampliado

$$z_t = \theta_0 + \theta_1 z_{t-1} + \theta_3 z_{t-3} + \theta_5 z_{t-5} + \varepsilon_t$$

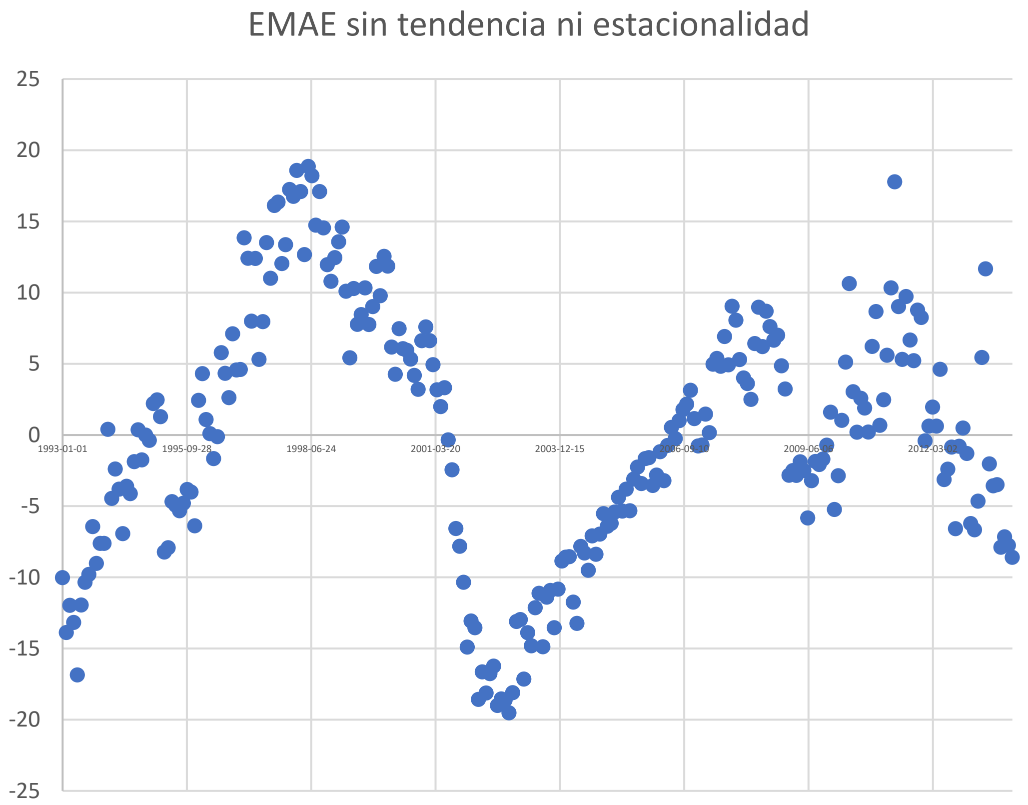
Resumen	
Estadísticas de la regresión	
Coeficiente de correlación múltiple	0.93687292
Coeficiente de determinación R^2	0.87773086
R^2 ajustado	0.87622136
Error típico	3.08361793
Observaciones	247

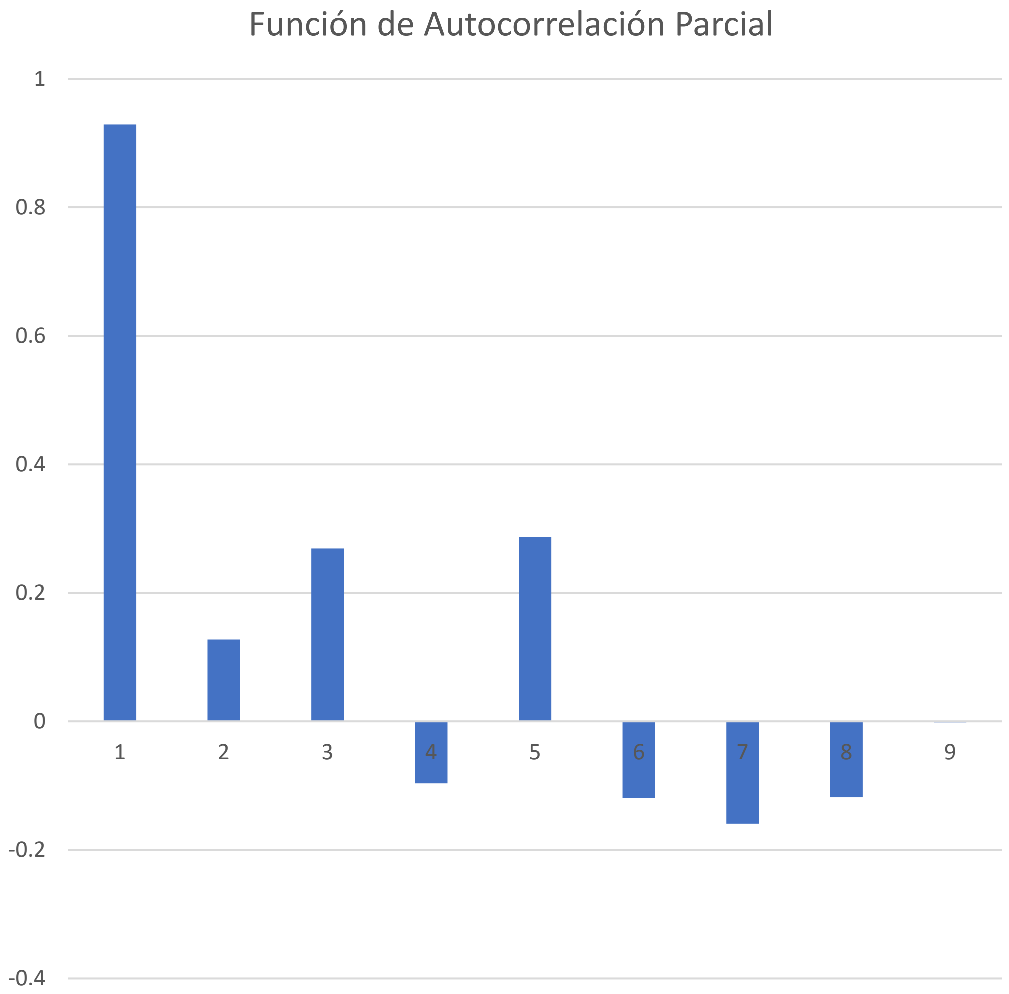
ANÁLISIS DE VARIANZA

	Grados de libertad	*Suma de cuadrados*	*Promedio de los cuadrados*	*F*
Regresión	3	16587.1552	5529.05173	581.472967
Residuos	243	2310.61399	9.50869953	
Total	246	18897.7692		

	Coeficientes	*Error típico*	*Estadístico t*	*Probabilidad*
Intercepción	-0.0396264	0.19631415	-0.2018518	0.84020146
Z (t-1)	0.70588323	0.04890759	14.4329994	1.6099E-34
Z (t-3)	0.15043487	0.05732529	2.62423237	0.00923455
Z (t-5)	0.11508766	0.04942072	2.3287328	0.02069417

Caso real: EMAE





Caso real: EMAE. Modelo Autoregresivo ampliado

$$z_t = \theta_0 + \theta_1 z_{t-1} + \theta_3 z_{t-3} + \theta_5 z_{t-5} + \varepsilon_t$$

Resumen	
Estadísticas de la regresión	
Coeficiente de correlación múltiple	0.93687292
Coeficiente de determinación R^2	0.87773086
R^2 ajustado	0.87622136
Error típico	3.08361793
Observaciones	247

ANÁLISIS DE VARIANZA

	Grados de libertad	*Suma de cuadrados*	*Promedio de los cuadrados*	*F*
Regresión	3	16587.1552	5529.05173	581.472967
Residuos	243	2310.61399	9.50869953	
Total	246	18897.7692		

	Coeficientes	*Error típico*	*Estadístico t*	*Probabilidad*
Intercepción	-0.0396264	0.19631415	-0.2018518	0.84020146
Z (t-1)	0.70588323	0.04890759	14.4329994	1.6099E-34
Z (t-3)	0.15043487	0.05732529	2.62423237	0.00923455
Z (t-5)	0.11508766	0.04942072	2.3287328	0.02069417

Estadísticas de la regresión	
Coeficiente de correlación múltiple	0.929655416
Coeficiente de determinación R^2	0.864259193
R^2 ajustado	0.863714049
Error típico	3.223572627
Observaciones	251

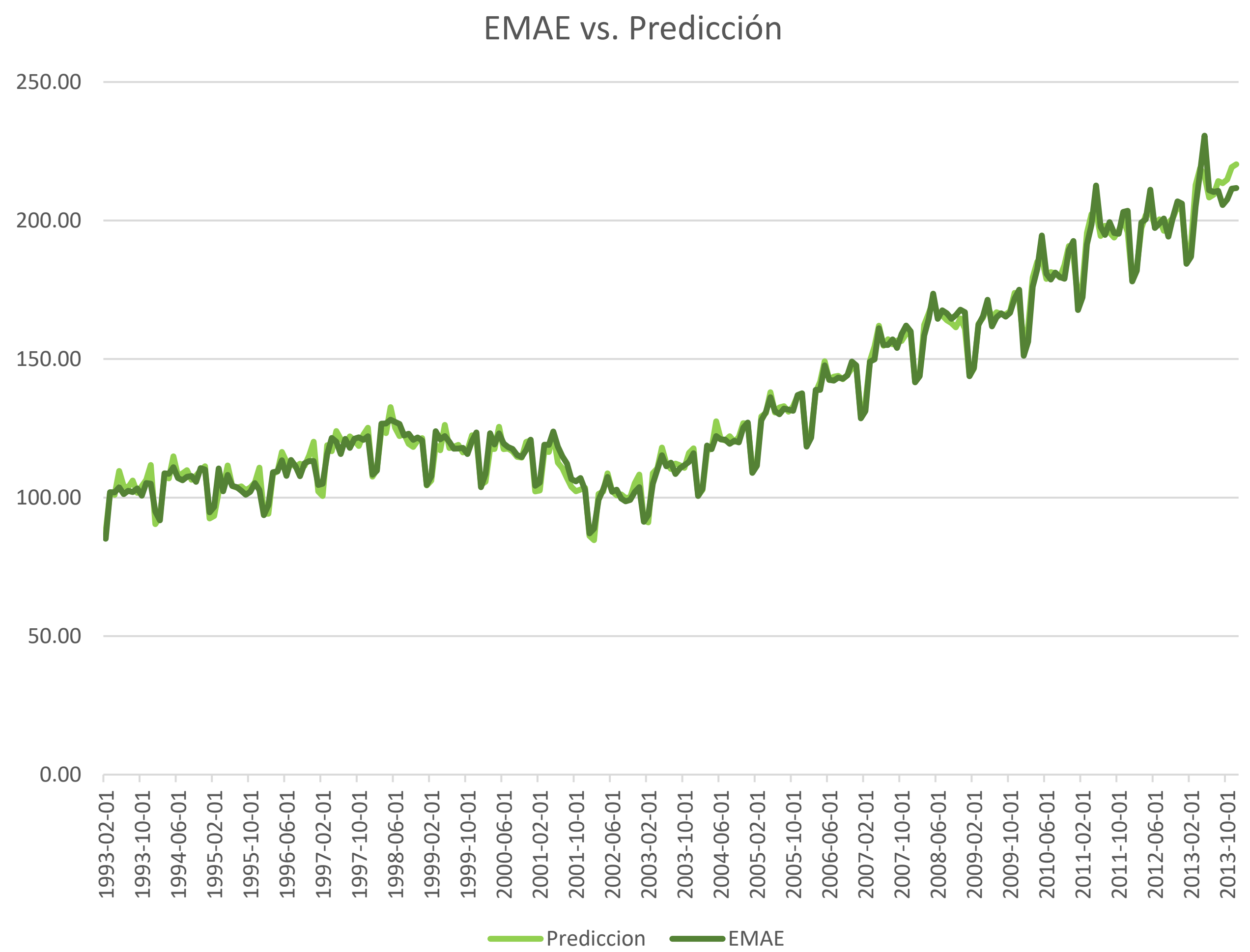
AR(1)

Caso EMAE: Sumando predicciones

$$y_t = \widehat{\beta_0} + \widehat{\beta_1}t + \widehat{\beta_2}t^2 + \sum_{j=1}^{11} \widehat{\beta_{mes}} dmes$$

$$z_t = \widehat{\theta_0} + \widehat{\theta_1} z_{t-1} + \widehat{\theta_3} z_{t-3} + \widehat{\theta_5} z_{t-5}$$

Fecha	Prediccion tendencia + estacionalidad	Tendencia +estacionalidad + Modelo AR(2)
1993-02-01	99.03	87.55
1993-03-01	113.90	101.83
1993-04-01	115.06	100.98
1993-05-01	120.54	109.59
1993-06-01	113.19	104.04
1993-07-01	112.83	103.68
1993-08-01	111.80	106.15
1993-09-01	109.75	101.72
1993-10-01	109.73	104.13



Modelos de Media Móvil: Motivación

- Modelo MA(1)

$$z_t = \theta_0 + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

- Modelo MA(2)

$$z_t = \theta_0 + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t$$

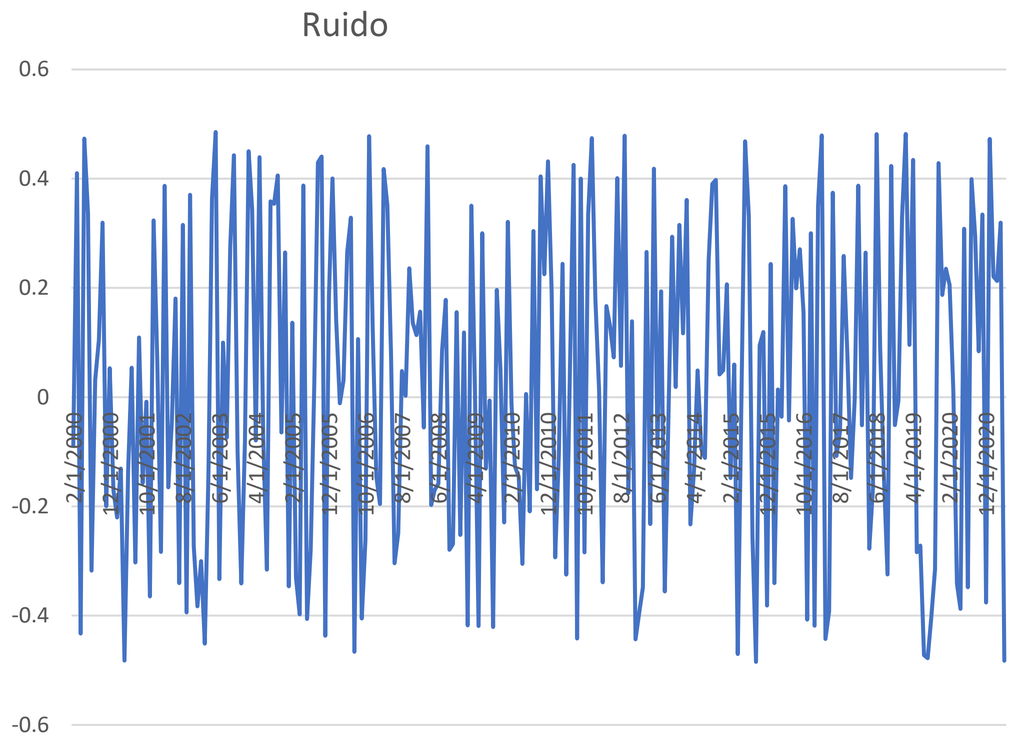
- Equivale a un AR con infinitos rezagos

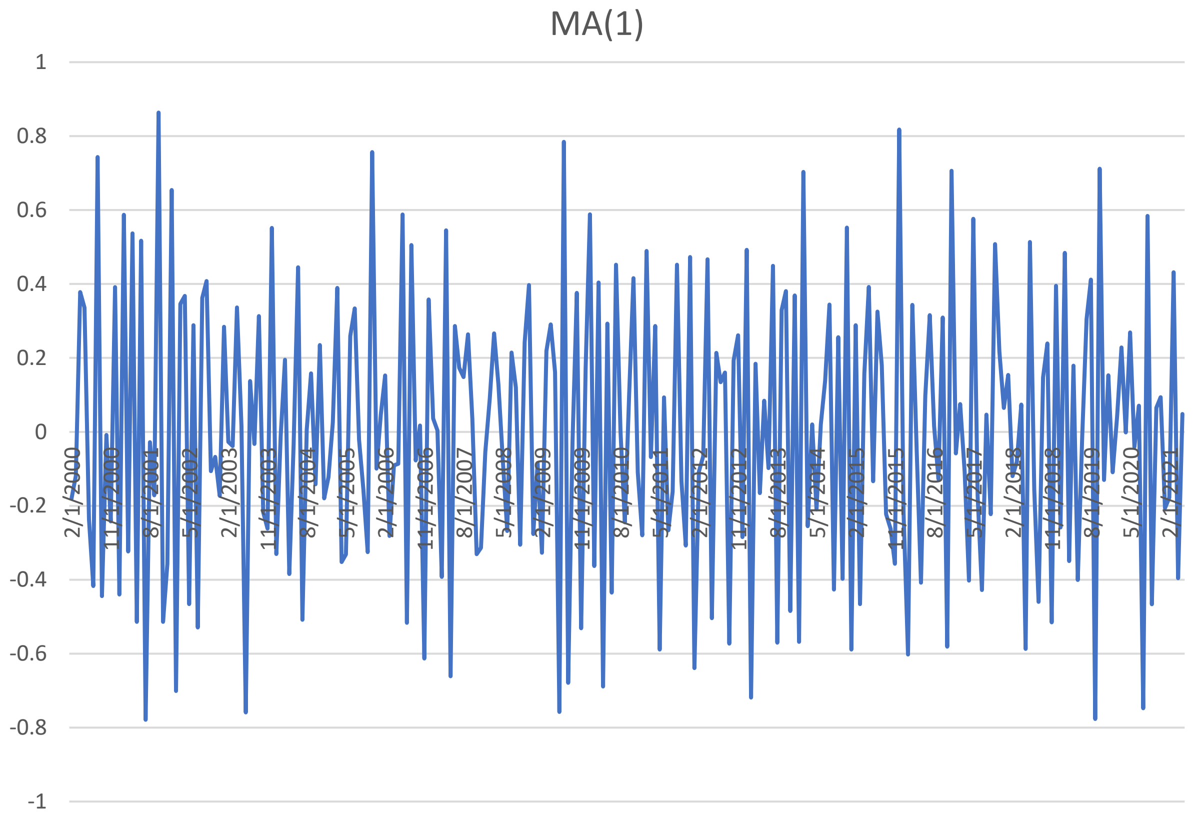
Ejemplo simulado 1: MA(1)

$$z_t = 0 - 0.8\,\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t \sim U[-0.5, 0.5]$$

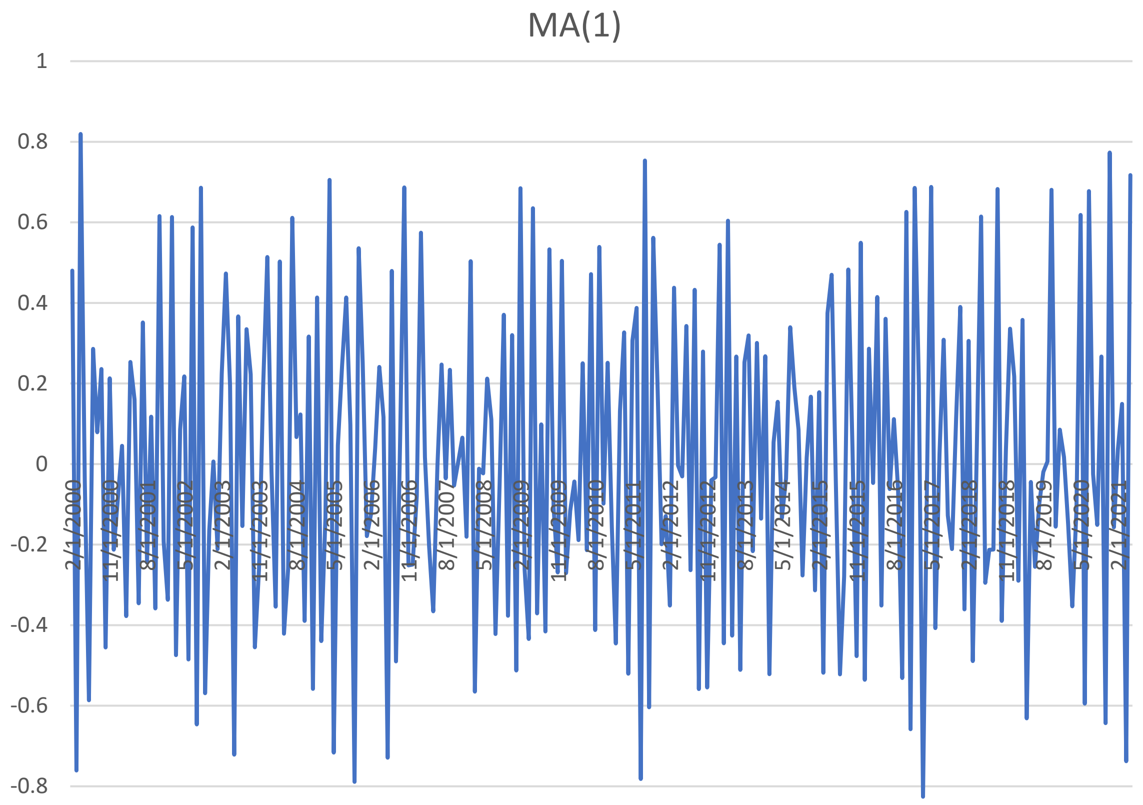
$$\varepsilon_t \sim U[-0.5, 0.5]$$



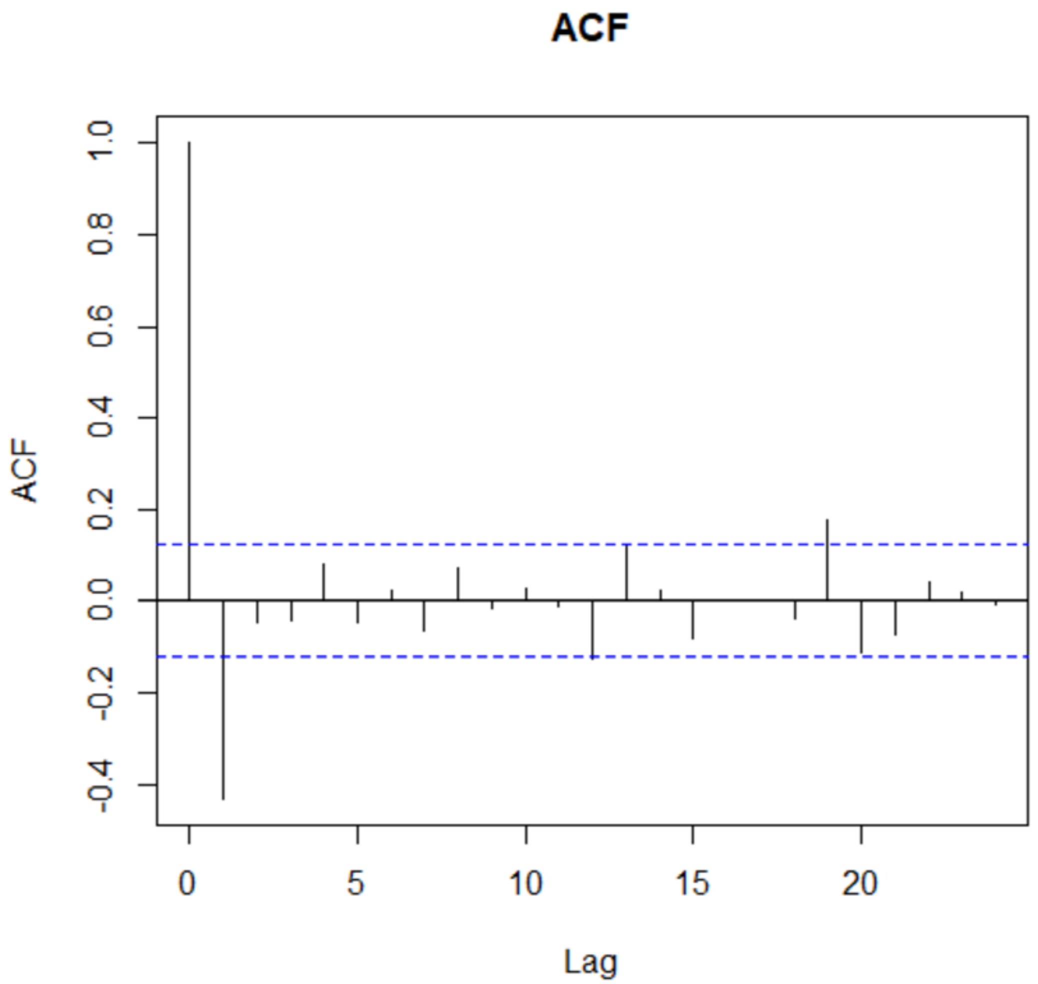


Ejemplo simulado 1: MA(1)

$$z_t = 0 - 0.8\,\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

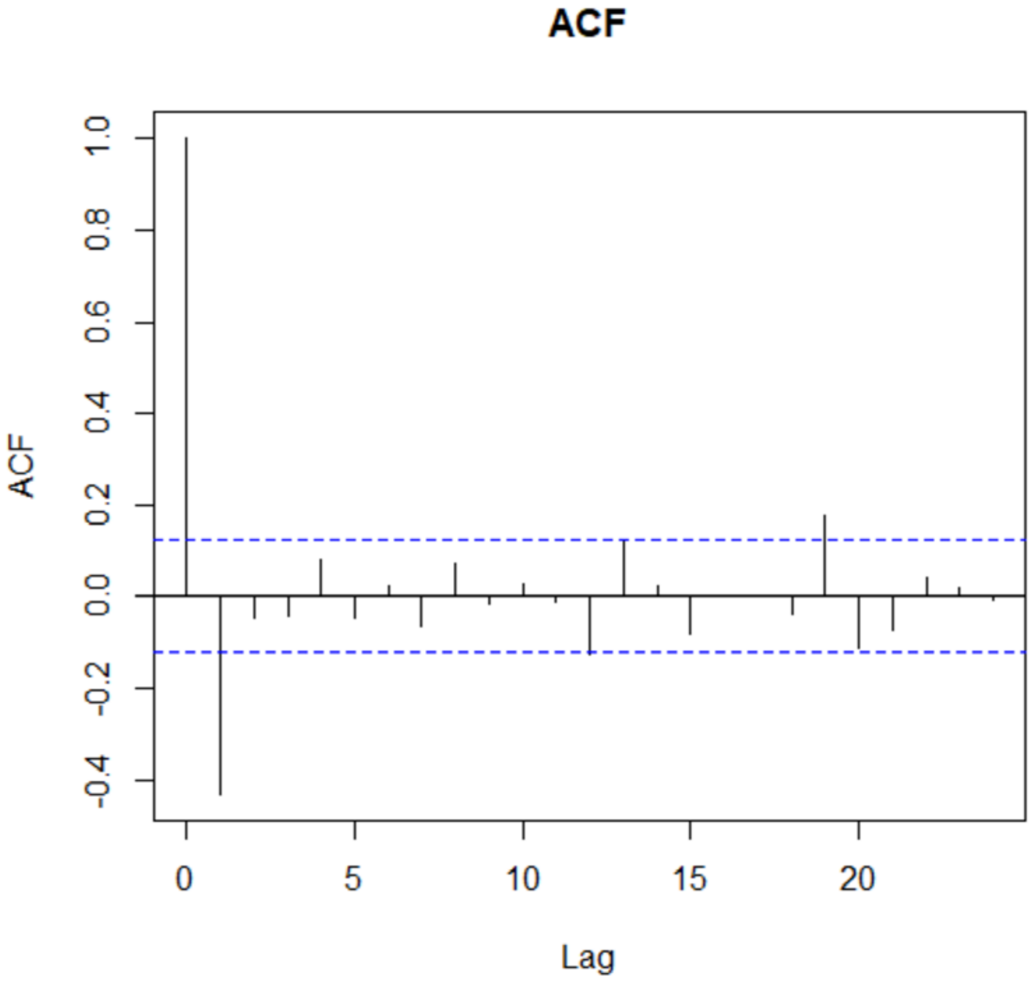


Correlograma

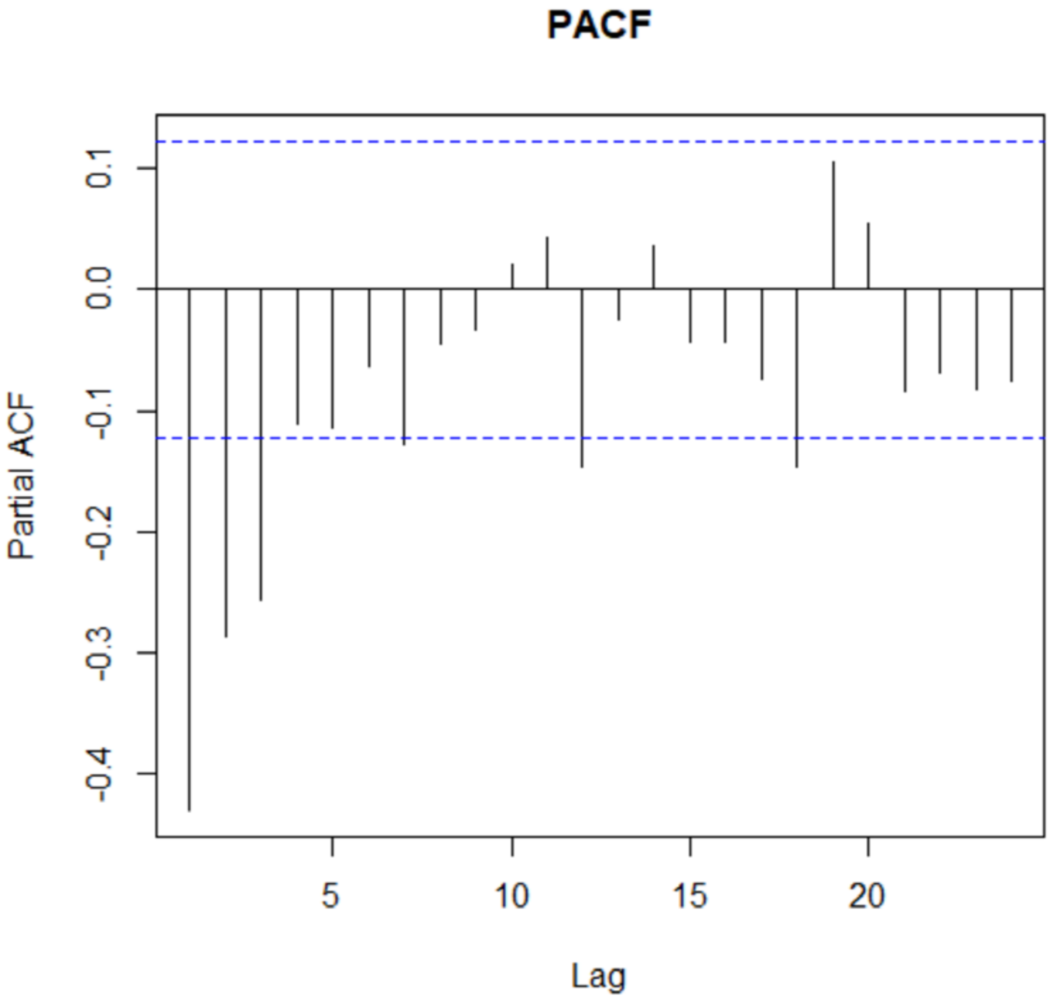


Ejemplo simulado 1: MA(1)

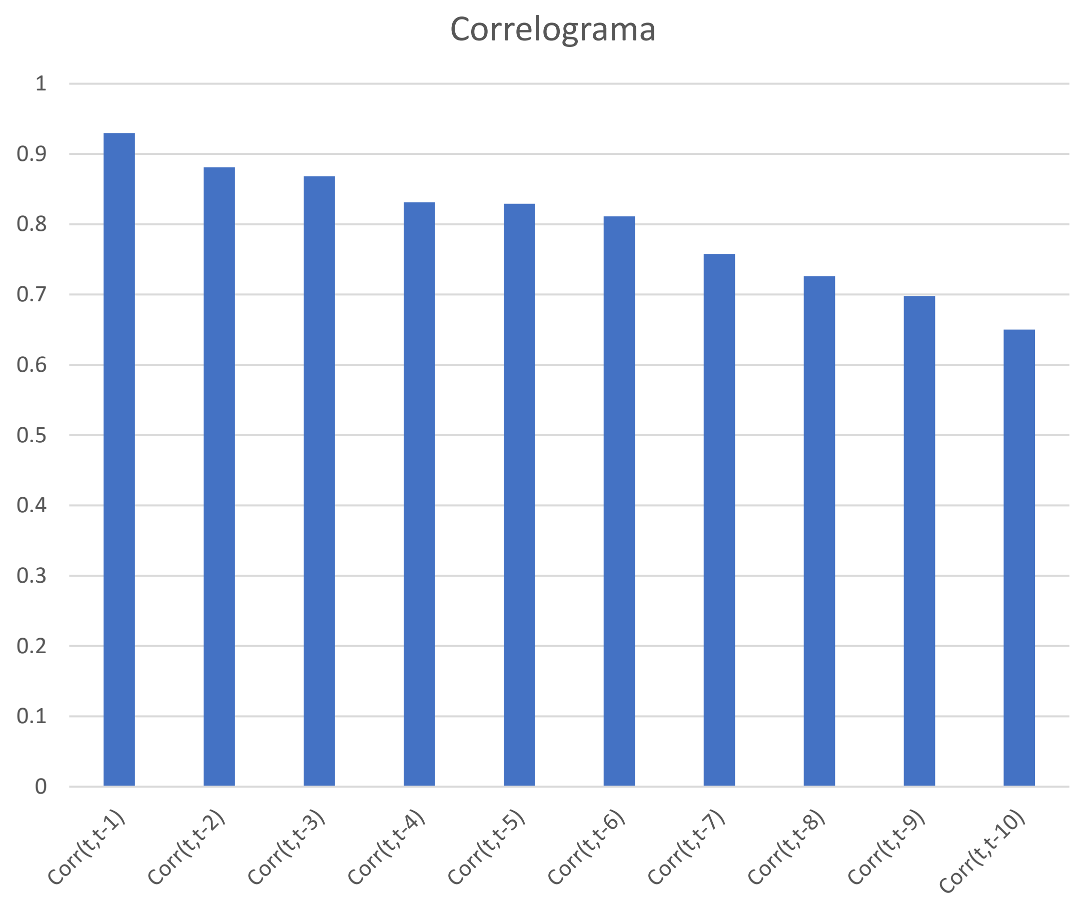
Correlograma

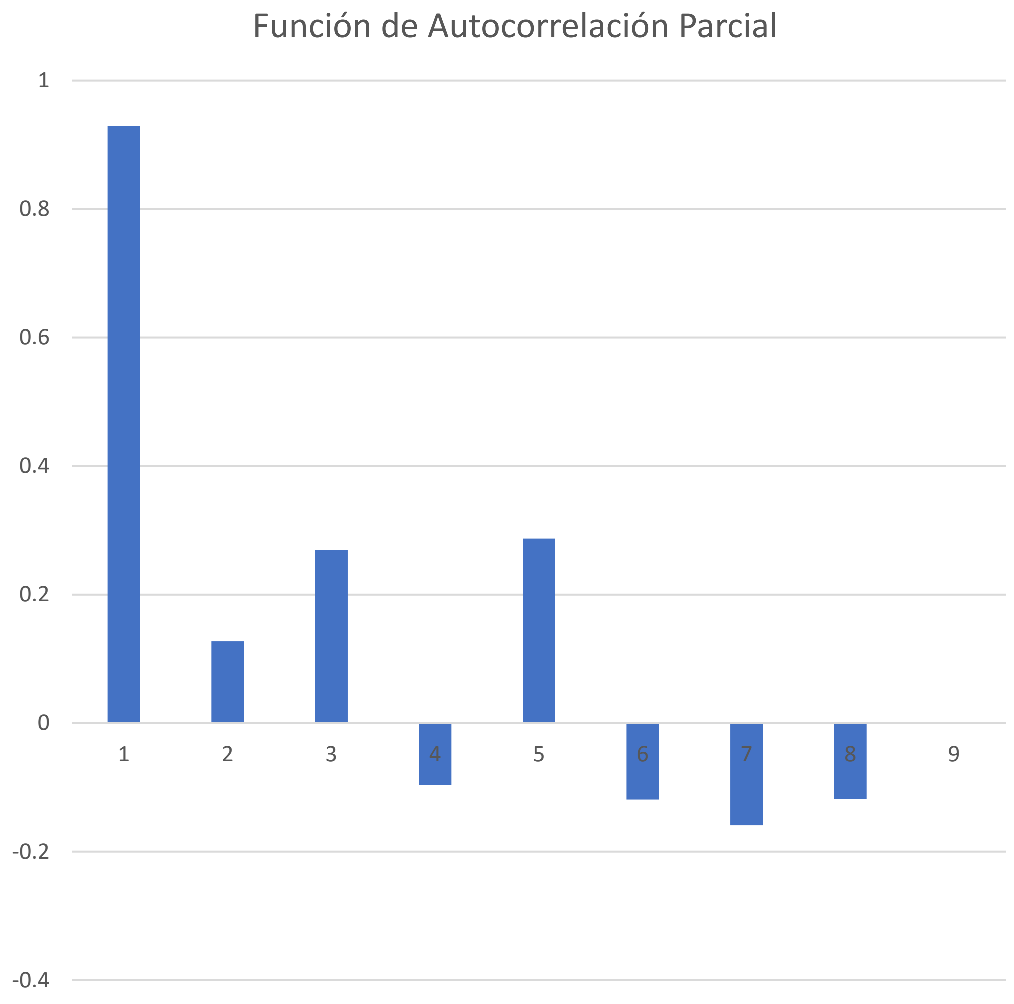


Función de Autocorrelación Parcial



Caso real: EMAE





Modelos ARMA

- ARMA(1,0) = AR(1)

$$z_t = \theta_0 + \theta_1 z_{t-1} + \varepsilon_t$$

- ARMA(0,1) = Modelo MA(1)

$$z_t = \theta_0 + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

- ARMA(2,0) = AR(2)

$$z_t = \theta_0 + \theta_1 z_{t-1} + \theta_2 z_{t-2} + \varepsilon_t$$

- ARMA(0,2) = Modelo MA(2)

$$z_t = \theta_0 + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t$$

- ARMA(1,1)

$$z_t = \theta_0 + \theta_1 z_{t-1} + \theta_3 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

- ARMA(2,2)

$$z_t = \theta_0 + \theta_1 z_{t-1} + \theta_2 z_{t-2} + \theta_3 \varepsilon_{t-1} + \theta_4 \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t$$