

數學中，矩陣乘法（英語：matrix multiplication）是一種根據兩個矩陣得到第三個矩陣的二元運算，第三個矩陣即前兩者的乘積，稱為矩陣積（英語：matrix product）。設 A 是 $n \times m$ 的矩陣， B 是 $m \times p$ 的矩陣，則它們的矩陣積 AB 是 $n \times p$ 的矩陣。 A 中每一行的 m 個元素都與 B 中對應列的 m 個元素對應相乘，這些乘積的和就是 AB 中的一個元素。

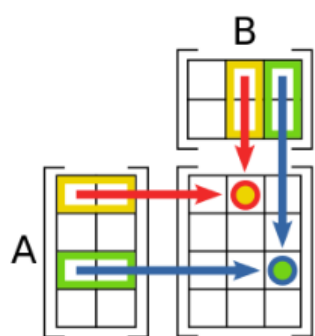
矩陣可以用來表示線性映射，矩陣乘積則可以用來表示線性映射的複合。因此，矩陣乘法是線性代數的基礎工具，不僅在數學中有大量應用，在應用數學、物理學、工程學等領域也有廣泛使用。

矩陣相乘最重要的方法是一般矩陣乘積。它只有在第一個矩陣的行數（column，中國大陸作列數）和第二個矩陣的列數（row，中國大陸作行數）相同時才有定義。一般單指矩陣乘積時，指的便是一般矩陣乘積。若 A 為 $m \times n$ 矩陣， B 為 $n \times p$ 矩陣則他們的乘積 AB （有時記做 $A \cdot B$ ）會是一個 $m \times p$ 矩陣。其乘積的元素如下面式子得出：

$$(AB)_{ij} = \sum_{r=1}^n a_{ir}b_{rj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

以上是用矩陣單元的代數系統來說明這類乘法的抽象性質。本節以下各種運算法都是這個公式的不同角度理解，運算結果相等：

由定義直接計算



左邊的圖表示出要如何計算 AB 的 $(1, 2)$ 和 $(3, 3)$ 元素，當 A 是個 4×2 矩陣和 B 是個 2×3 矩陣時。分別來自兩個矩陣的元素都依箭頭方向而兩兩配對，把每一對中的兩個元素相乘，再把這些乘積加總起來，最後得到的值即為箭頭相交位置的值。

$$(AB)_{1,2} = \sum_{r=1}^2 a_{1,r}b_{r,2} = a_{1,1}b_{1,2} + a_{1,2}b_{2,2}$$

$$(AB)_{3,3} = \sum_{r=1}^2 a_{3,r}b_{r,3} = a_{3,1}b_{1,3} + a_{3,2}b_{2,3}$$

向量方法

這種矩陣乘積亦可由稍微不同的觀點來思考：把向量和各係數相乘後相加起來。

設 A 和 B 是兩個給定如下的矩陣：

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

則

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} a_{1,1}[b_{1,1} \ b_{1,2} \ \dots] + a_{1,2}[b_{2,1} \ b_{2,2} \ \dots] + \dots \\ a_{2,1}[b_{1,1} \ b_{1,2} \ \dots] + a_{2,2}[b_{2,1} \ b_{2,2} \ \dots] + \dots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

舉個例子來說：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1[3 \ 1] + 0[2 \ 1] + 2[1 \ 0] \\ -1[3 \ 1] + 3[2 \ 1] + 1[1 \ 0] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [3 \ 1] + [0 \ 0] + [2 \ 0] \\ [-3 \ -1] + [6 \ 3] + [1 \ 0] \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

左面矩陣的列為係數表，右邊矩陣為向量表。例如，第一行是 $[1 \ 0 \ 2]$ ，因此將1 乘上第一個向量，0 乘上第二個向量，2 則乘上第三個向量。

向量表方法

一般矩陣乘積也可以想為是行向量和列向量的內積。若 A 和 B 為給定如下的矩陣：

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad \text{且}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} & \dots \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} & \dots \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = [B_1 \ B_2 \ B_3 \ \dots]$$

其中

A_1 是由所有 $a_{1,x}$ 元素所組成的向量， A_2 是由所有 $a_{2,x}$ 元素所組成的向量，以此類推。

B_1 是由所有 $b_{x,1}$ 元素所組成的向量， B_2 是由所有 $b_{x,2}$ 元素所組成的向量，以此類推。

則

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \vdots \end{bmatrix} \times [B_1 \quad B_2 \quad B_3 \quad \dots] = \begin{bmatrix} (A_1 \cdot B_1) & (A_1 \cdot B_2) & (A_1 \cdot B_3) & \dots \\ (A_2 \cdot B_1) & (A_2 \cdot B_2) & (A_2 \cdot B_3) & \dots \\ (A_3 \cdot B_1) & (A_3 \cdot B_2) & (A_3 \cdot B_3) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

性質

矩陣乘法是不可交換的（即 $AB \neq BA$ ），除了一些較特別的情況。很清楚可以知道，不可能在改變部分的向量後還能得到相同的結果，而且第一個矩陣的列數必須要和第二個矩陣的行數相同，也可以看出為什麼矩陣相乘的順序會影響其結果。

雖然矩陣乘法是不可交換的，但 AB 和 BA 的行列式總會是一樣的（當 A 、 B 是同樣大小的方陣時）。當 A 、 B 可以被解釋為線性算子，其矩陣乘積 AB 會對應為兩個線性算子的複合函數，其中 B 先作用。