Modern Quantum Mechanics

J. J. SAKURAI

2026 年 2 月 12 日

1　[1.4.5 Exercise] スピン $1/2$ 系における不確定性関係の検証

不確定性関係の一般式は

$$\langle(\Delta A)^2\rangle\langle(\Delta B)^2\rangle \geq \frac{1}{4}|\langle[A,B]\rangle|^2 \tag{1}$$

S_z の固有状態 $|+z\rangle$ における各演算子の期待値を求める.

$$\langle S_x\rangle = \langle +z|S_x|+z\rangle = 0 \tag{2}$$

$$\langle S_y\rangle = \langle +z|S_y|+z\rangle = 0 \tag{3}$$

それぞれの分散は $\langle S_i^2\rangle = \frac{\hbar^2}{4}$ より自明にわかるから,

$$((1)LHS) = \langle(\Delta S_x)^2\rangle\langle(\Delta S_y)^2\rangle = \frac{\hbar^2}{4}\cdot\frac{\hbar^2}{4} = \left(\frac{\hbar^2}{4}\right)^2 \tag{4}$$

また,

$$\langle[S_x,S_y]\rangle = \langle i\hbar S_z\rangle = i\hbar\langle +z|S_z|+z\rangle = i\hbar(\frac{\hbar}{2}) = \frac{i\hbar}{2} \tag{5}$$

より,

$$((1)RHS) = \frac{1}{4}|\langle[S_x,S_y]\rangle|^2 = \frac{1}{4}\left|\frac{i\hbar^2}{2}\right|^2 = \left(\frac{\hbar^2}{4}\right)^2 \tag{6}$$

よって $A = S_x$, $B = S_y$ のときに不確定性関係が成り立つことが示された.

2　ユニタリ演算子 (unitary operator)

定理 3.

正規直交性と完全性を満たす 2 組の基底ケットが与えられている．このときユニタリ演算子 U が存在して

$$|b^{(1)}\rangle = U|a^{(1)}\rangle, |b^{(2)}\rangle = U|a^{(2)}\rangle, \dots, |b^{(N)}\rangle = U|a^{(N)}\rangle \tag{7}$$

が成立する．ここで, ユニタリ演算子とは, 条件

$$U^\dagger U = 1 \tag{8}$$

および

$$UU^\dagger = 1 \tag{9}$$

を満たす演算子.

証明:

$$U = \sum_k |b^{(k)}\rangle\langle a^{(k)}| \tag{10}$$

という演算子が U の役割を果たすものとし, この U を $|a^{(l)}\rangle$ に掛け算すると,

$$U|a^{(l)}\rangle = \sum_k \langle b^{(k)}|\langle a^{(k)}|a^{(l)}\rangle \tag{11}$$

$k = l$ のときのみ, $\langle a^{(k)}|a^{(l)}\rangle = 1$ だから,

$$U|a^{(l)}\rangle = \langle b^{(l)}| \tag{12}$$

となることが $\{|a'\rangle\}$ の正規直交性から保証される．ちなむと

$$U^\dagger U = \sum_k \sum_l |a^{(l)}\rangle\langle b^{(l)}|b^{(k)}\rangle\langle a^{(k)}| = \sum_k |a^{(k)}\rangle\langle a^{(k)}| = 1 \tag{13}$$