

Modern Quantum Mechanics

J. J. SAKURAI

2026 年 2 月 12 日

1 [1.4.5 Exercise] スピン 1/2 系における不確定性関係の検証

不確定性関係の一般式は

$$\langle(\Delta A)^2\rangle\langle(\Delta B)^2\rangle \geq \frac{1}{4}|\langle[A, B]\rangle|^2 \quad (1)$$

S_z の固有状態 $|+z\rangle$ における各演算子の期待値を求める.

$$\langle S_x \rangle = \langle +z | S_x | +z \rangle = 0 \quad (2)$$

$$\langle S_y \rangle = \langle +z | S_y | +z \rangle = 0 \quad (3)$$

それぞれの分散は $\langle S_i^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{4}$ より自明にわかるから,

$$((1) LHS) = \langle(\Delta S_x)^2\rangle\langle(\Delta S_y)^2\rangle = \frac{\hbar^2}{4} \cdot \frac{\hbar^2}{4} = \left(\frac{\hbar^2}{4}\right)^2 \quad (4)$$

また,

$$\langle [S_x, S_y] \rangle = \langle i\hbar S_z \rangle = i\hbar \langle +z | S_z | +z \rangle = i\hbar \left(\frac{\hbar}{2}\right) = \frac{i\hbar}{2} \quad (5)$$

より, RHS は

$$\frac{1}{4} \quad (6)$$