コンピュータビジョンA

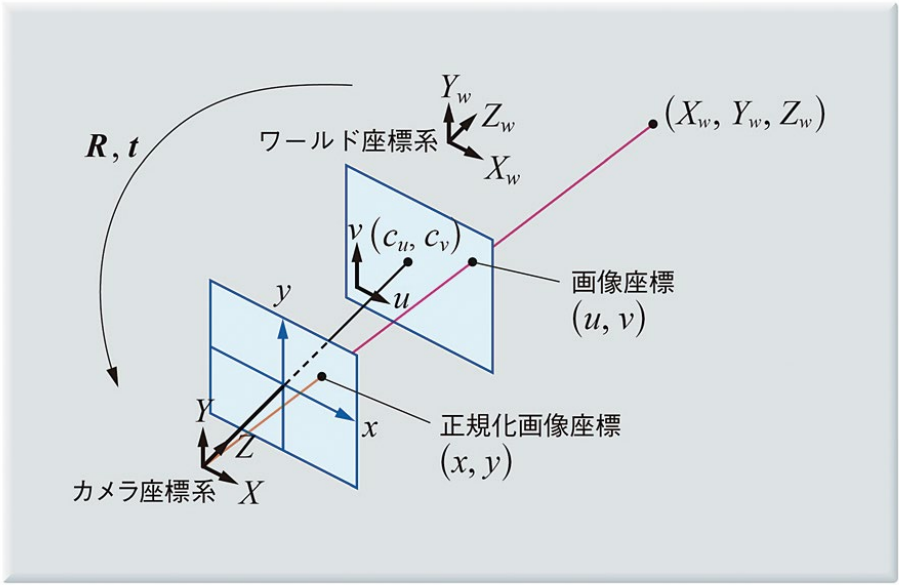
第11回

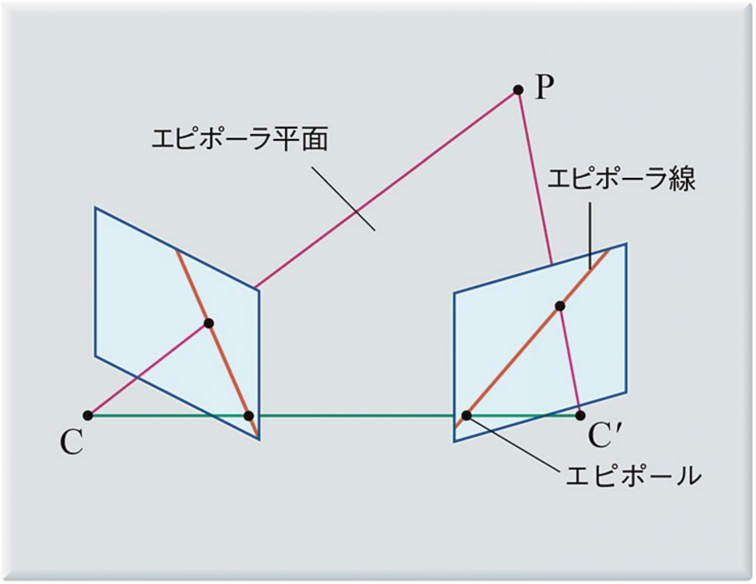
2025年11月11日

峰松翼

画像と空間の幾何学的関係

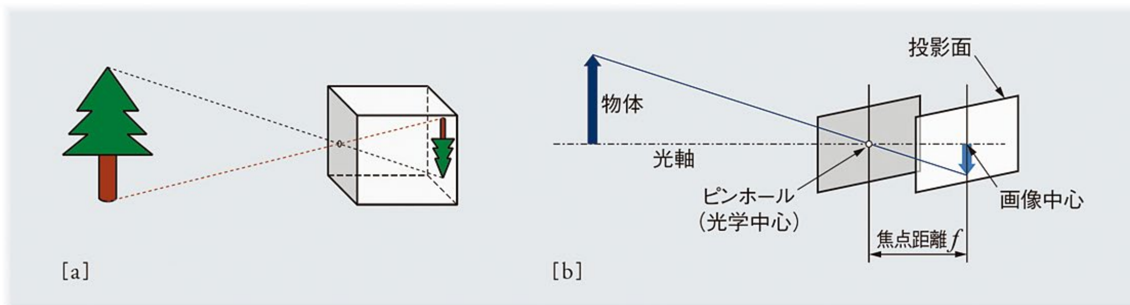
- 3次元空間座標と2次元画像座標の関係
  - 透視投影モデルに基づく幾何学的関係の記述
  - 同次座標を用いた記述
  - エピポーラ幾何（2つのカメラ or 2枚の画像）



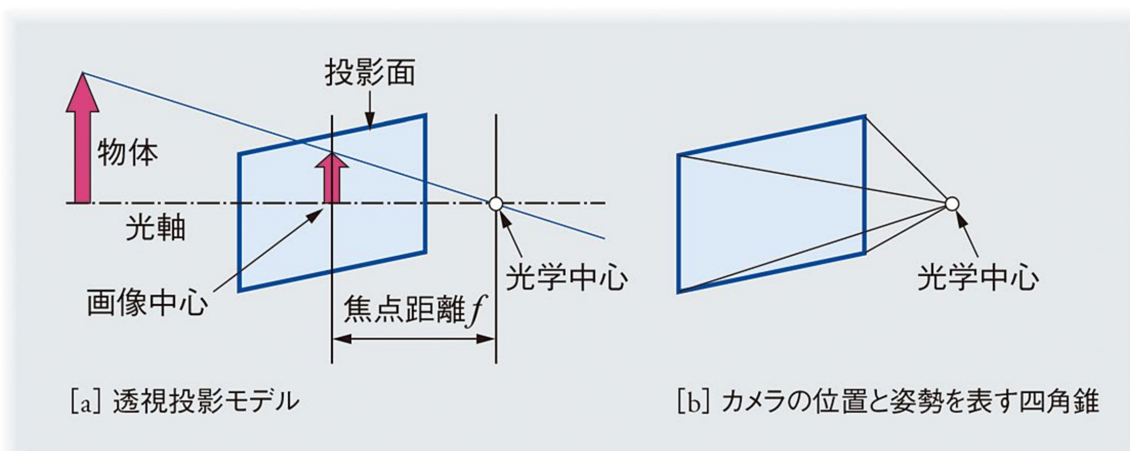


ピンホールカメラと透視投影

- ピンホールカメラモデル



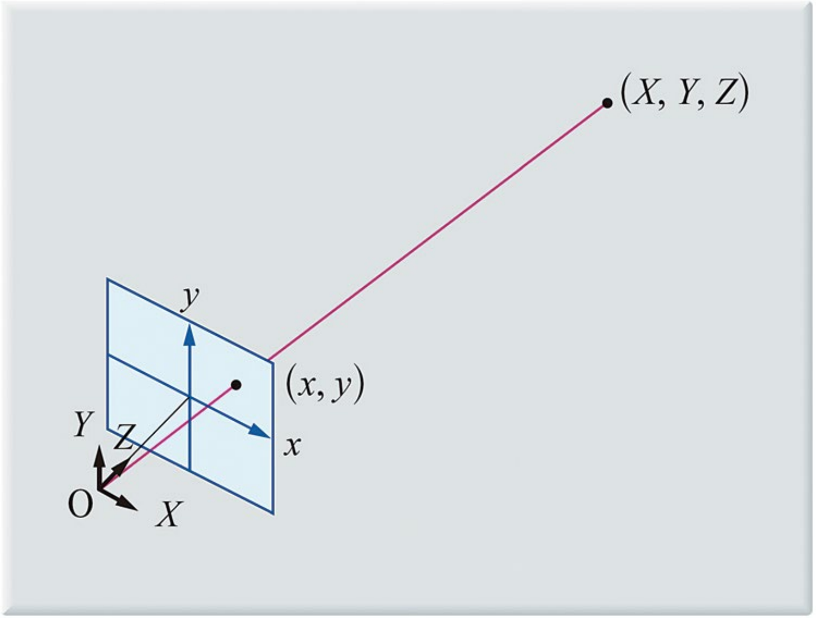
- 透視投影モデル
  - 光学中心から仮想投影面を通して3次元空間を観察



[a] 透視投影モデル　[b] カメラの位置と姿勢を表す四角錐

カメラ座標系

- Camera coordinate system
  - カメラを基準とした座標系
  - 原点:光学中心
  - z 軸:カメラの光軸方向, x・y 軸:画像の横・縦方向に平行

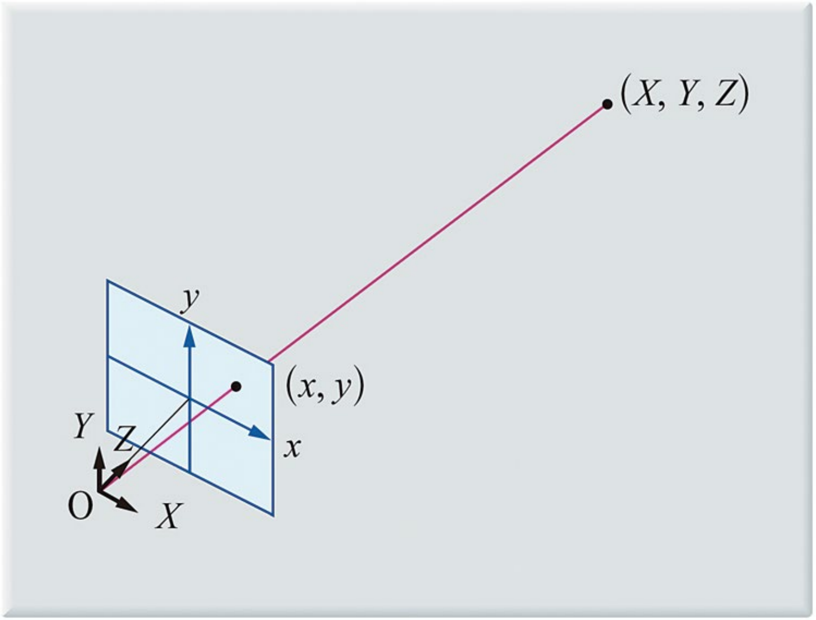


正規化画像座標

- Normalize image coordinates
  - カメラの焦点距離が1のときの投影点の座標

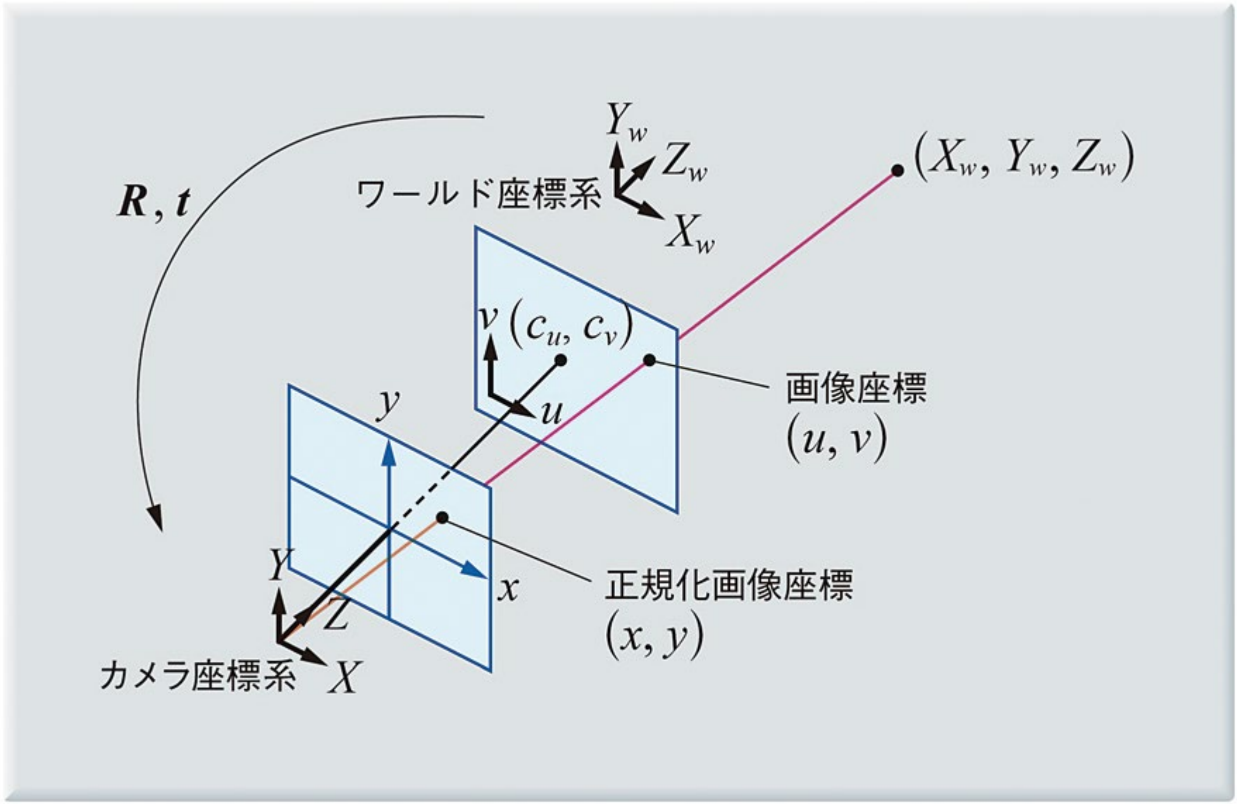
$$x = \frac{X}{Z}$$

$$y = \frac{Y}{Z}$$



ワールド座標系

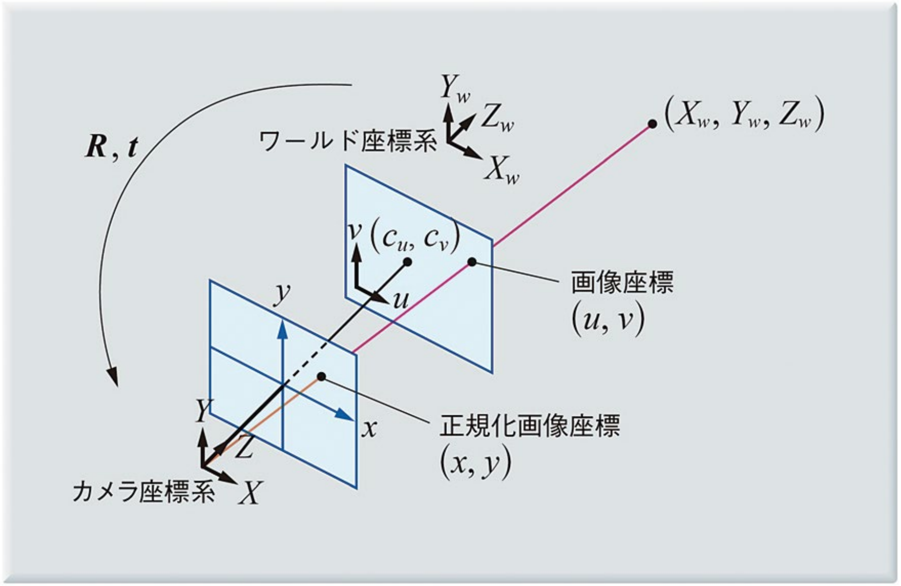
- World coordinate system
  - 空間中の適当な位置・方向を基準とした座標系



カメラ座標系とワールド座標系

- 同じ点を2つの座標系で表現
  - ワールド座標系: (X_w, Y_w, Z_w)
  - カメラ座標系: (X, Y, Z)
  - 回転行列と平行移動ベクトルを用いて関係を記述

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \boldsymbol{R} \begin{pmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \end{pmatrix} + \boldsymbol{t}$$



カメラ座標系とワールド座標系：平行移動と回転

- 平行移動ベクトル
  - カメラ座標系から見たワールド座標系の原点
- 回転行列
  - 3つの軸の周りで順に回転

$$
\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} \cos\beta\cos\gamma & -\cos\alpha\sin\gamma + \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma & \sin\alpha\sin\gamma + \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma \\ \cos\beta\sin\gamma & \cos\alpha\cos\gamma + \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma & -\sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma \\ -\sin\beta & \sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix}
$$

ワールド座標と正規化画像座標の関係

- 3次元座標と2次元座標の関係
  - ワールド座標とその投影点の座標との関係

$$x = \frac{X}{Z}$$

$$y = \frac{Y}{Z}$$

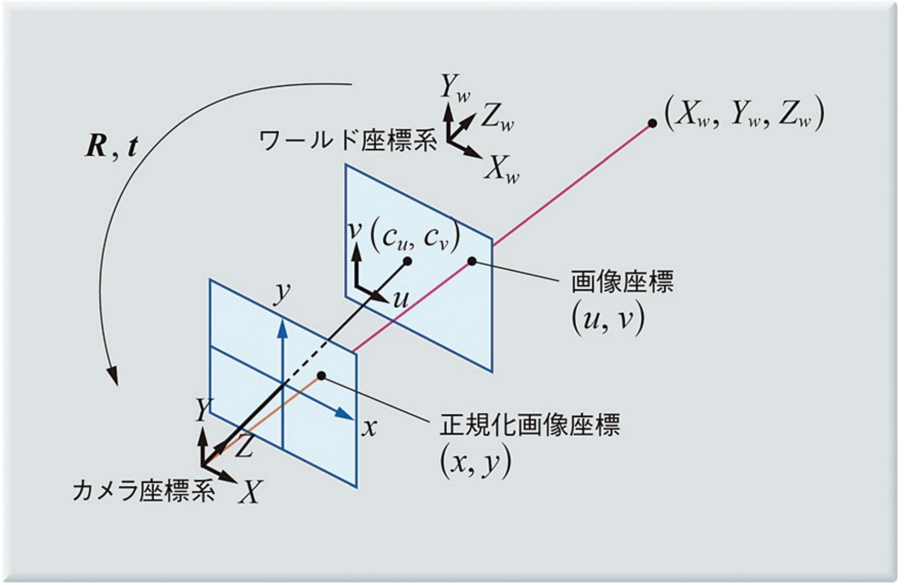
$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \boldsymbol{R} \begin{pmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \end{pmatrix} + \boldsymbol{t}$$

$$x = \frac{r_{11} X_w + r_{12} Y_w + r_{13} Z_w + t_1}{r_{31} X_w + r_{32} Y_w + r_{33} Z_w + t_3}$$

$$y = \frac{r_{21} X_w + r_{22} Y_w + r_{23} Z_w + t_2}{r_{31} X_w + r_{32} Y_w + r_{33} Z_w + t_3}$$

画像座標

- Image coordinates
  - 画像を基準とした座標系
  - 原点：画像中の適当な位置
  - 長さの単位：画素

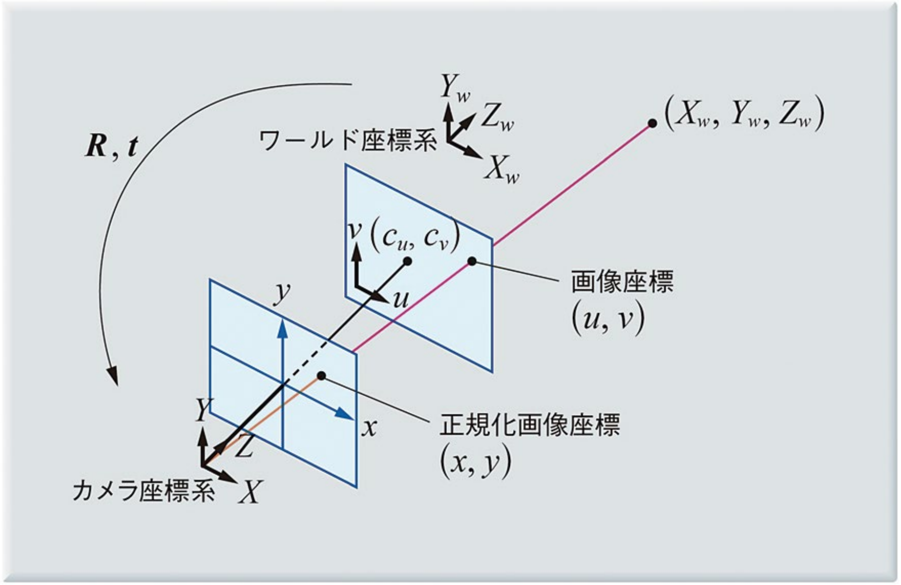


画像座標と正規化画像座標

- 焦点距離・原点・長さの単位の違い
  - 焦点距離：1 vs. f
  - 原点：$(0,0)$ vs. (c_u, c_v)
  - 長さの単位：物理的な長さ vs. 画素サイズ

$$x = \frac{\delta_u (u - c_u)}{f}$$

$$y = \frac{\delta_v (v - c_v)}{f}$$



ワールド座標と画像座標

- 3次元座標と2次元座標の関係
  - ワールド座標とその投影点の画素との関係

$$x = \frac{\delta_u (u - c_u)}{f} \qquad x = \frac{r_{11} X_w + r_{12} Y_w + r_{13} Z_w + t_1}{r_{31} X_w + r_{32} Y_w + r_{33} Z_w + t_3}$$

$$y = \frac{\delta_v (v - c_v)}{f} \qquad y = \frac{r_{21} X_w + r_{22} Y_w + r_{23} Z_w + t_2}{r_{31} X_w + r_{32} Y_w + r_{33} Z_w + t_3}$$

$$u = \frac{f}{\delta_u} \frac{r_{11} X_w + r_{12} Y_w + r_{13} Z_w + t_1}{r_{31} X_w + r_{32} Y_w + r_{33} Z_w + t_3} + c_u$$

$$v = \frac{f}{\delta_v} \frac{r_{21} X_w + r_{22} Y_w + r_{23} Z_w + t_2}{r_{31} X_w + r_{32} Y_w + r_{33} Z_w + t_3} + c_v$$

内部パラメータと外部パラメータ

- 内部パラメータ（intrinsic parameter）
  - カメラによって決まるもの

$$f, \delta_u, \delta_v, c_u, c_v$$

- 外部パラメータ（extrinsic parameter）
  - ワールド座標に対するカメラの位置・姿勢で決まるもの

$$\boldsymbol{R} \text{ と } \boldsymbol{t}$$

同次座標を用いた記述

- 同次座標
  - 要素を1つ増やした座標
  - ～ : 両辺が定数倍の違いを許して等しい

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{m} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{X}_w = \begin{pmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\boldsymbol{x}} \sim \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}, \ \tilde{\boldsymbol{m}} \sim \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix}, \ \tilde{\mathrm{X}} \sim \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}, \ \tilde{\mathrm{X}}_w \sim \begin{pmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

同次座標のおさらい

- 座標 (x, y) の同次座標 (ξ_1, ξ_2, ξ_3)
  - 要素の数を1つ増やす
  - $x = \xi_1/\xi_3$, $y = \xi_2/\xi_3$ の関係を満たす
  - 例 : 座標 (x, y) に対して $(x, y, 1)$ は同次座標
  - 同次座標による表現では定数倍しても同じ（同値）

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda\xi_1 \\ \lambda\xi_2 \\ \lambda\xi_3 \end{pmatrix}$$

※ ξ はクシー or クサイ or グザイと読む

カメラ座標と正規化画像座標

- 通常の表現
  - 割り算

$$x = \frac{X}{Z}$$

$$y = \frac{Y}{Z}$$

- 同次座標を用いた表現
  - 3行4列の行列の積

$$\tilde{\boldsymbol{x}} \sim \left(\boldsymbol{I} \middle| \boldsymbol{0}\right) \tilde{\boldsymbol{X}}$$

ワールド座標とカメラ座標

- 通常の表現
  - 回転＋平行移動

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \boldsymbol{R} \begin{pmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \end{pmatrix} + \boldsymbol{t}$$

- 同次座標を用いた表現
  - 4行4列の行列の積

$$\tilde{X} \sim \boldsymbol{M} \tilde{X}_w \qquad \boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{R} & \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{0}^\top & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_1 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_2 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

画像座標と正規化画像座標

- 通常の表現
  - 割り算

$$x = \frac{\delta_u(u - c_u)}{f}$$

$$y = \frac{\delta_v(v - c_v)}{f}$$

- 同次座標を用いた表現
  - 3行3列の行列の積

$$\tilde{\boldsymbol{m}} \sim \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \frac{f}{\delta_u} & 0 & c_u \\ 0 & \frac{f}{\delta_v} & c_v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ワールド座標と画像座標

- 通常の表現
  - 割り算

$$u = \frac{f}{\delta_u} \frac{r_{11} X_w + r_{12} Y_w + r_{13} Z_w + t_1}{r_{31} X_w + r_{32} Y_w + r_{33} Z_w + t_3} + c_u$$

$$v = \frac{f}{\delta_v} \frac{r_{21} X_w + r_{22} Y_w + r_{23} Z_w + t_2}{r_{31} X_w + r_{32} Y_w + r_{33} Z_w + t_3} + c_v$$

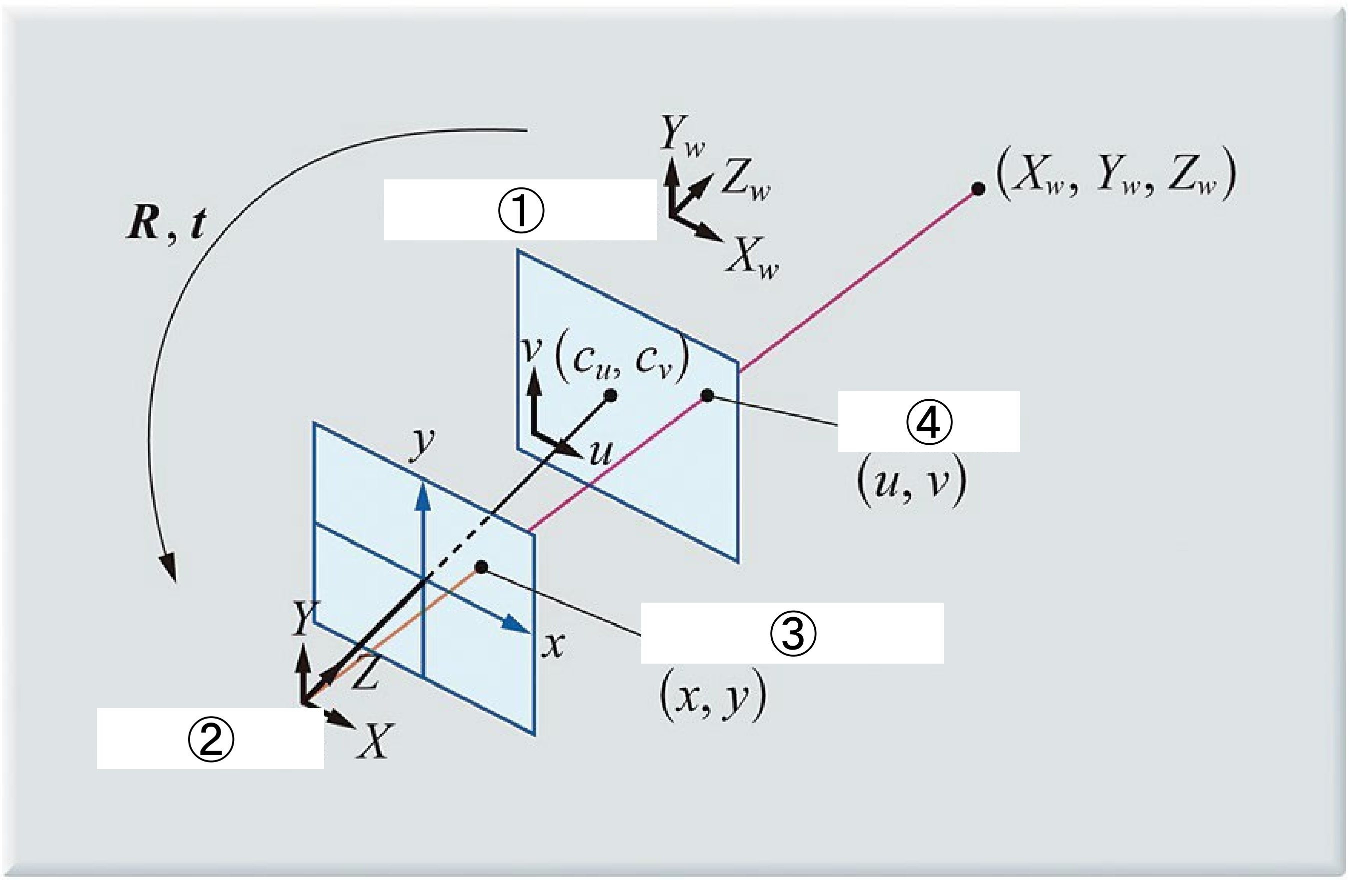
- 同次座標を用いた表現
  - 3行4列の行列（透視投影行列 or カメラ行列）の積

$$\tilde{\boldsymbol{m}} \sim \boldsymbol{P} \tilde{\boldsymbol{X}}_w$$

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{m}} &\sim \boldsymbol{A} \tilde{\boldsymbol{x}} \\ &\sim \boldsymbol{A} \left(\boldsymbol{I} \middle| \boldsymbol{0} \right) \tilde{\boldsymbol{X}} \\ &\sim \boldsymbol{A} \left(\boldsymbol{I} \middle| \boldsymbol{0} \right) \begin{pmatrix} \boldsymbol{R} & \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & 1 \end{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{X}}_w \\ &\sim \boldsymbol{A} \left(\boldsymbol{R} \middle| \boldsymbol{t} \right) \tilde{\boldsymbol{X}}_w \end{aligned}$$

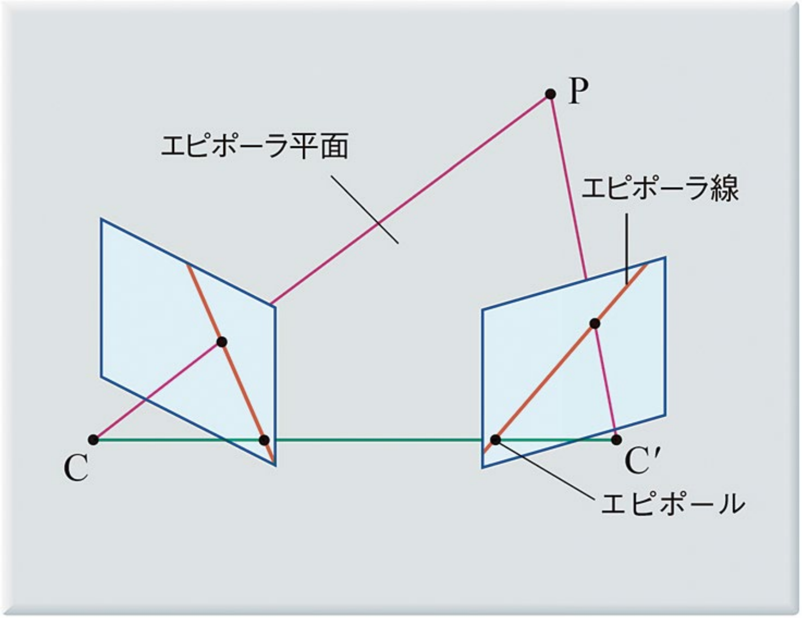
演習1

下図の①から④を埋めて下さい.



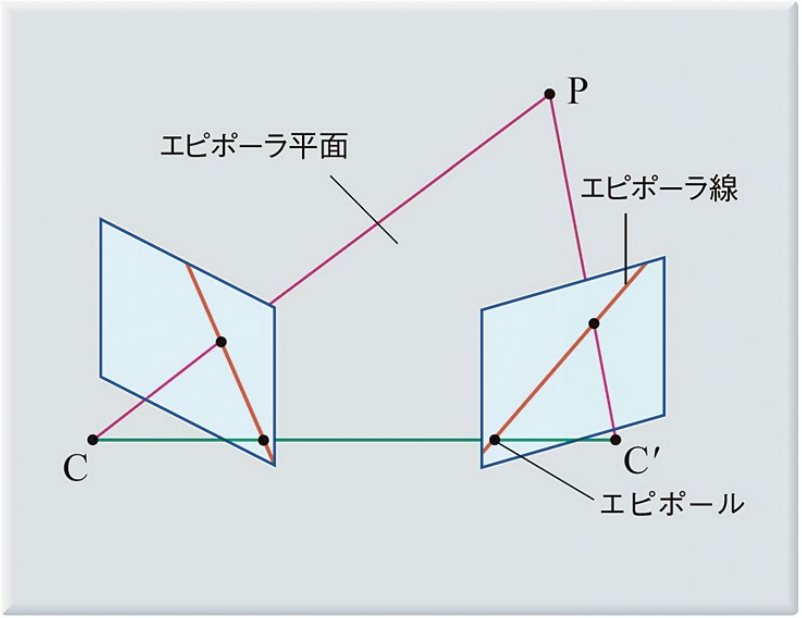
エピポーラ幾何

- 2台のカメラで撮影した画像間の幾何学的関係
  - エピポーラ平面
  - エピポーラ線
  - エピポール



エピポーラ拘束

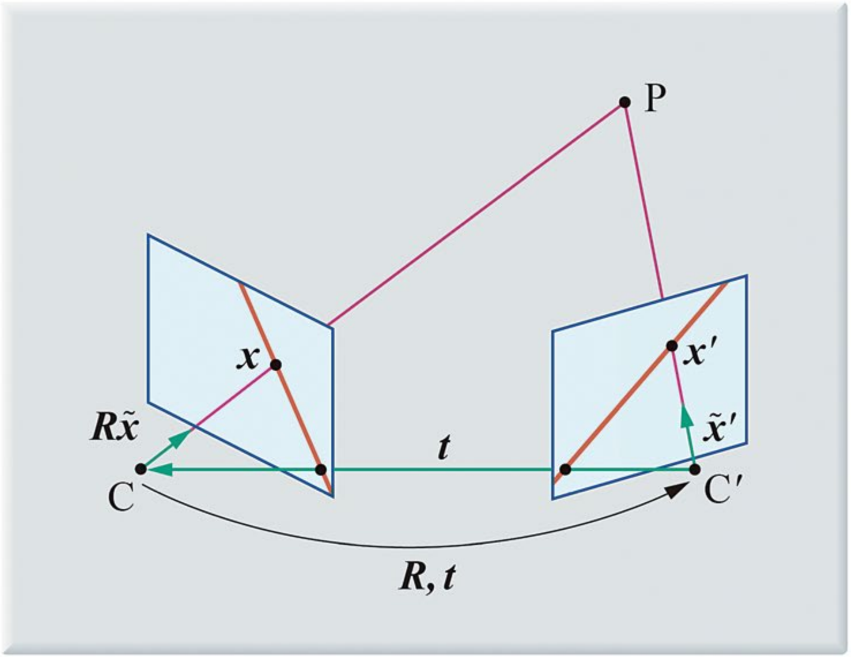
- 対応点はエピポーラ線上に存在
  - 左の画像のある点（奥行き未知）
  - 右の画像ではエピポーラ線上に存在
  - ステレオマッチング（次回）において探索範囲が限定



正規化画像座標の間の関係

- エピポーラ平面上の3つのベクトル
  - スカラー3重積はゼロ

$$\tilde{\boldsymbol{x}}'^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{R}\tilde{\boldsymbol{x}}\right)=0$$



基本行列

- 正規化画像座標の間の関係
  - 3行3列の基本行列 E を用いて記述

$$\tilde{\boldsymbol{x}}'^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{R}\tilde{\boldsymbol{x}})=0$$

$$\tilde{\boldsymbol{x}}'^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{t}]_{\times}\boldsymbol{R}\tilde{\boldsymbol{x}}=0$$

$$\tilde{\boldsymbol{x}}'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}\tilde{\boldsymbol{x}}=0$$

$$[\boldsymbol{t}]_{\times}=\begin{pmatrix}0 & -t_3 & t_2\\ t_3 & 0 & -t_1\\ -t_2 & t_1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{E}=[\boldsymbol{t}]_{\times}\boldsymbol{R}$$

基礎行列

- 画像座標の間の関係
  - 3行3列の基礎行列 F を用いて記述

$$\tilde{\boldsymbol{x}}'^{\mathrm{T}} \boldsymbol{E} \tilde{\boldsymbol{x}} = 0$$

$$\tilde{\boldsymbol{m}} \sim \boldsymbol{A} \tilde{\boldsymbol{x}}$$

$$\tilde{\boldsymbol{m}}' \sim \boldsymbol{A}' \tilde{\boldsymbol{x}}'$$

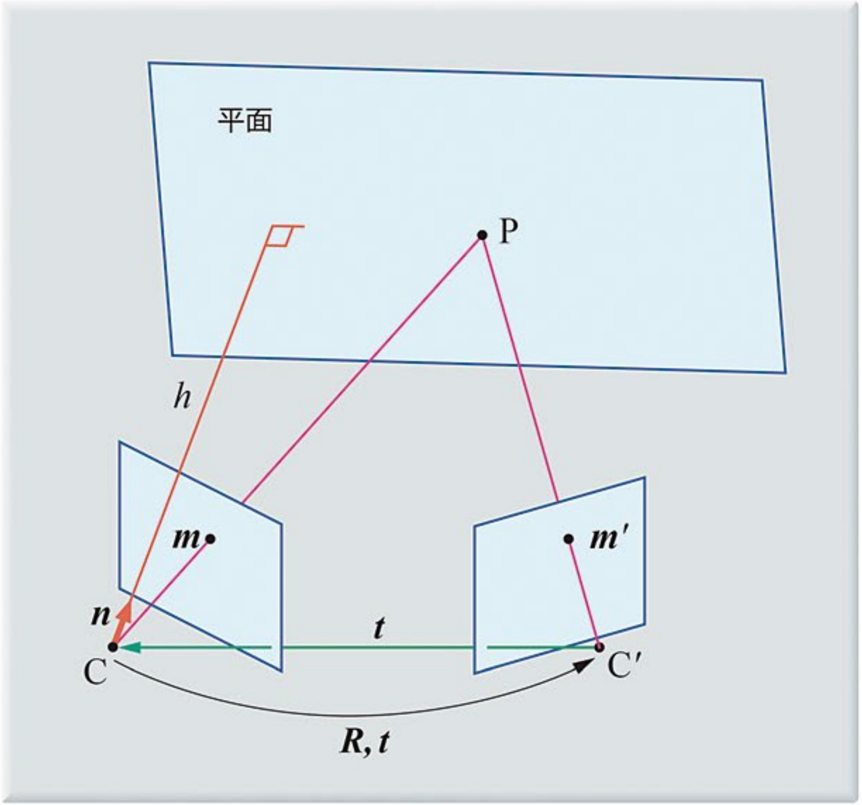
$$\tilde{\boldsymbol{m}}'^{\mathrm{T}} \left(\boldsymbol{A}'^{-1} \right)^{\mathrm{T}} [\boldsymbol{t}]_{\times} \boldsymbol{R} \boldsymbol{A}^{-1} \tilde{\boldsymbol{m}} = 0$$

$$\boldsymbol{F} = \left(\boldsymbol{A}'^{-1} \right)^{\mathrm{T}} [\boldsymbol{t}]_{\times} \boldsymbol{R} \boldsymbol{A}^{-1}$$

$$\tilde{\boldsymbol{m}}'^{\mathrm{T}} \boldsymbol{F} \tilde{\boldsymbol{m}} = 0$$

平面上の点の投影①

- 点Pが平面上にあるとき
  - カメラ座標の関係:



平面上の点の投影②

- 画像座標の間の関係

$$\tilde{\boldsymbol{m}}' \sim \boldsymbol{A}'\left(\boldsymbol{R} + \frac{\boldsymbol{t}\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}}{h}\right)\boldsymbol{A}^{-1}\tilde{\boldsymbol{m}}$$

$$\tilde{\boldsymbol{m}}' \sim \boldsymbol{H}\tilde{\boldsymbol{m}}$$

ヒント: $\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{R}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{t}$

$\boldsymbol{n}^T\boldsymbol{X} = h$

  - 3行3列の行列の積で記述

⇒ 投影点の画像座標は射影変換で結ばれる

演習2

下図の①から③を埋めて下さい.