

联合省选 2022 模拟赛题解

Sacrilegious

2022 年 3 月 2 日

恰空 (ciaccona)

算法一

我会暴力!

暴力枚举哪些数被擦掉了, 时间复杂度 $O(2^n n)$ 。

期望得分: 40 分。

算法二

只有 0 和 1 的情况。如果初始的异或和为 0, 那么 Alice 获胜, 否则异或和为 1, 因此两人都不能擦 1, 否则就会失败。因此两人的胜负取决于 0 的个数。

期望得分: 40 分。结合算法一期望得分 80 分。

算法三

除了初始异或和为 0 的情况, 一个人会输当且仅当他操作前所有数都等于所有数的异或和。不难发现这样的情况只可能发生在所有剩余的数都相等, 并且剩余的数的数量是奇数的情况下。由于两人轮流操作, 所以面对奇数个数的始终是同一人。操作到仅剩 1 个数时, 所有数相等, 面对奇数的那个人一定会输。因此输赢仅与 n 的奇偶性有关。

可以通过所有测试点。

唐璜 (giovanni)

算法一

当 $n = 1$ 时，显然确定 k 以后划分方案唯一，暴力判断是否合法即可。
可以通过第一个子任务。

算法二

当 $n \leq 3$ 时，若 $k > n$ ，那么划分也是惟一的，如果 $k \leq n$ ，可以从左到右状压 dp。
可以通过第二个子任务。

算法三

大力搜索减枝，应该能通过子任务三。

算法三

首先有经典结论，如果存在构造，那么 k 一定是 n 或 m 的因数。

初步筛选后可能成为答案的 k 不多，因此可以逐个暴力判断合法性。

如果所有字符都相等，那么显然存在构造。有两种及以上字符说明 $1 \times k$ 的矩形框里至少有两种字符。

首先对于左上角的那个格子，它只可能是横着或竖着的，可以枚举是哪一种情况。接下来矩形框中是什么字符串已经确定了。

考虑从上往下，从左往右，逐个确定。考虑某个格子时，它的上方和左方都无法填入，所以它一定是向右或向下。

此时如果它能向右填，那么它只能向右填。否则考虑往右第一个与当前字符不同的字符，如果这个字符当前不被覆盖，那么它就永远不能被覆盖（因为它的上方已经被填了，并且它也不能作为开头）。因此填法是唯一的，直接模拟整个过程即可。

可以通过所有测试点。

塔德伍施 (tadeusz)

算法一

我会暴力！
暴力模拟题目中的操作。
期望得分 14 分。

算法二

我会观察性质！
如果只有 Z 操作，那么这张图是一个二分图。
记录每个点属于哪边即可。
时间复杂度 $O(n)$ ，期望得分 17。

算法三

留给乱搞和正解写挂的选手，我不知道有没有什么巧妙的做法。

算法四

首先要找一个合理的结构来表示这张图。

无论是 Z 还是 W 操作，都把新加入的点的父亲设为 u ，这样会形成一个树型结构。定义一个点的顶是它祖先中最近的由 W 操作加入的点（可以为自身）。

对于新加入的边，如果它是 W 操作加入的，那么称它为本原边，否则新加入的边可是为原有的边克隆出来的（即从有公共端点的那条边克隆出来）。

接下来考虑两个点 u, v 之间存在边的条件是什么。

设 u, v 的顶分别为 tu, tv 。显然 tu, tv 之间必须存在一条本原边。但是这个条件不充分，即存在本原边不一定能传递到 u, v 。

考虑倒过来考虑传递的过程。假设 u, v 中加入时间较大的点是 v ，那么 (u, v) 这条边只可能是 (u, fa_v) 这条边克隆出来的。按这个过程考虑，如果某一时刻到达了本原边，即跳到了 (tu, tv) ，那么 (u, v) 存在，否则最会 v 是一个由 W 操作加入的点，而 (u, v) 还不是本原边，此时无法继续往上跳，那么就说明 (u, v) 这条边不存在。

由于儿子的加入时间一定大于父亲，所以 (u, v) 能跳到 (tu, tv) 当且仅当 tu, tv 是 $u \rightarrow tu, v \rightarrow tv$ 路径上加入时间最小的两个点。假设加入时间 $tu < tv$ ，那么这个条件等价于 tv 的加入时间小于（如果存在的话） tu 在它到 u 的那个儿子。

有了这些观察以后，就不难处理询问。先将所有询问离线，那么每次询问就相当于对于所有加入时间小于询问时间的点 v ，有多少与 u 有连边。

接下来有多种处理方式，比如点分治或树上启发式合并。出题人的写法是按照 (tu, tv) 这条边是儿子到父亲还是父亲到儿子分类讨论，对于第一种情况使用树上启发式合并统计答案，对

于第二种情况，由于每个点仅有一个父亲，所以可以在树上 dfs，将所有可能成为答案的点暴力插入树状数组。

时间复杂度 $O(n \log n)$ 或 $O(n \log^2 n)$ ，空间复杂度 $O(n)$ ，期望得分 100 分。