

滞后多因素模型中超前滞后关系的动态时间弯曲

张宜驰^{1、4、*}、米海·库库林^{1、2、4、7}、亚历山大·y·谢斯托帕洛夫^{5、6}、斯特凡·Zohren^{3、4、7}

¹牛津大学统计学系

²牛津大学数学研究所

³牛津大学工程系

⁴牛津大学牛津-曼量化金融研究所

⁵伦敦玛丽女王大学数学科学学院⁶纽芬兰纪念大学数学与统计学系

⁷The Alan Turing Institute, 伦敦

2023年9月19日

摘要

在多元时间序列系统中，超前滞后关系揭示了时间序列之间的依赖性，当它们相对于彼此在时间上移位时。揭示这样的关系在下游任务中是有价值的，如控制、预测和聚类。通过理解不同时间序列之间的时间依赖关系，人们可以更好地理解系统内部复杂的相互作用和模式。我们开发了一种基于动态时间弯曲的聚类驱动方法，用于鲁棒地检测滞后多因素模型中的超前滞后关系。我们为同质和异质设置建立了与多参考校准问题的联系。由于多元时间序列在广泛的领域中普遍存在，我们证明了该算法能够在金融市场中鲁棒地检测领先滞后关系，随后可以在具有显著经济效益的交易策略中利用这些关系。

关键词:动态时间规整;高维时间序列;领先-落后关系;无监督学习;聚类;金融市场

*Corresponding author; Email: yichi.zhang@stats.ox.ac.uk; The remaining authors are listed in alphabetical order.

内容

1 介绍	3
2 动态时间规整	4
3 模型设置	6
3.1 描述	7
4 方法	8
5 合成数据实验	9
5.1 合成数据生成过程	9
5.2 仿真结果	10
6 金融数据实验	12
6.1 数据描述	12
6.2 数据预处理	12
6.3 基准	13
6.4 交易策略	13
6.5 绩效评估	14
6.6 结果	16
7 鲁棒性分析	20
8 结论及未来工作展望	22
一个附录	26
背书的性能指标	26
由合成数据的实验	28
由期货数据集的细节	30

1 介绍

自然物理系统经常产生高维、非线性的时间序列数据，这些数据在各个领域都很普遍。为了从不同的角度分析这样的时间序列，人们做出了许多贡献[Cao, Chen, and Hull (2020);Cartea、Donnelly和jaimune -gal (2018);Cont(2001年);崔、杨、周(2021);德林考尔、佐仁、皮埃尔·亨伯特(2022);Lu、Reinert和Cucuringu (2022);Lu, Reinert 和 Cucuringu (2023);Sokolov 等人 (2022);Vuletić, Prenzel, and Cucuringu (2023);Alvaro' Cartea(2023)]。例如，Cont(2001)探讨了金融时间序列，并强调了各种统计特性，如分布特征、尾部特性和极端波动。

高维时间序列可以通过发现潜在结构(如超前滞后关系)提供有价值的见解。这些关系被普遍观察到，并在金融领域发挥着重要作用[Albers et al. (2021);班尼特、Cucuringu和Reinert(2022);布切里、科西和佩鲁索(2021年);伊藤与坂本(2020);Y.李等(2021);Miori和Cu-curingu (2022);Tolikas (2018);姚和h - y。李(2020);张, Cucuringu, A. Y. Shestopaloff, 等[2023], De Luca and Pizzolante (2021);Wu et al.(2010)，以及biology Runge et al.(2019)]。例如，班尼特、Cucuringu和Reinert(2022)创建了一个定向网络来捕捉美国市场股票价格之间的两两领先-滞后关系。该分析揭示了具有显著定向流不平衡的集群。

动态时间翘曲(DTW)是一种量化两个时间序列之间相似性的算法，即使它们表现出速度变化，也可以计算出它们之间的最佳对齐[Bellman和Kalaba (1959);Berndt和Clifford (1994);基奥和柳田-烟那(2005);Senin(2008)]。DTW的多功能性在其应用于金融市场等不同领域方面是显而易见的[Gupta和Chatterjee (2020);霍华德、普京's和alexe -eev (2022);伊藤与坂本(2020);Stübing and Walter(2022)]，生物信息学[Aach and Church (2001);Gavrila, Davis, et al.(1995)]，以及机器人Schmill, Oates, and Cohen (1999)。例如，伊藤与坂本(2020)引入了多项动态时间翘曲(MDTW)来探索外汇市场价格中的领先滞后关系。Howard, putin 's, and Alexeef(2022)应用DTW发现全球市场价格发现在标准普尔500指数期货和富时100指数期货之间波动。尽管人们广泛认识到这个问题的重要性和潜在的高影响，但在使用DTW来推断滞后多因素模型中的超前-滞后关系方面取得的进展有限。

主要贡献的总结。

1. 我们引入了一种计算可扩展的框架，用于基于DTW的高维时间序列的超前滞后检测，并使用聚类作为去噪步骤。
2. 我们表明，它能够可靠地检测各种基于因子模型的模拟高维时间序列中的超前滞后关系。
3. 在金融市场中，我们利用检测到的领先-滞后关系来构建一个有利可图的交易策略，并证明我们的算法在大多数情况下优于基准。
4. 在计算时间方面，我们的算法也比基准快10倍。

论文大纲。本文组织如下。第2节和第3节分别介绍了DTW的定义和滞后多因素模型。第4节描述了我们提出的DTW算法。在第5节中，我们在来自滞后多因素模型的合成数据集上验证了我们的算法，并在第6节中探索了美国股票、ETF和期货市场的领先滞后关系。然后，我们在第7节中继续进行稳健性分析。最后，我们总结了我们的发现，并在第8节中讨论了可能的未来研究方向。

2 动态时间规整

在本节中，我们将介绍DTW算法。假设我们有两个时间序列，分别记为A和B，长度分别为n和m，如图1步骤1所示。

$$\begin{aligned} A &= a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n \\ B &= b_1, b_2, \dots, b_j, \dots, b_m \end{aligned} \tag{1}$$

为了使两个时间序列利用DTW，这个过程包括构建一个 $n \times m$ 矩阵， $i^{\text{th}}, j^{\text{th}}$ 矩阵的元素包含了欧几里得距离 $d(a_i, b_j)$ 在两个点之间 a_i 和 b_j 。A和B，分别即 $d(a_i, b_j) = (a_i - b_j)^2$ 。每个矩阵元素 (i, j) 对应于点 a_i 和 b_j 之间的对齐。图1步骤2给出了距离矩阵的一个例子。

一条翘曲路径，记为W，表示一组连续的矩阵元素，这些矩阵元素捕获了时间序列A和B之间的映射关系。DTW的索引可以表示为

$$W = \{w_1, w_2, \dots, w_k, \dots, w_K\} \quad \max(m, n) \leq K < m + n - 1 \tag{2}$$

其中，W的 k^{th} 元素记为 $w_k = (i, j)_k$ 。

弯曲路径必须遵守几个约束条件：

- 边界：弯曲路径从 $w_1 = (1, 1)$ 开始，在 $w_K = (m, n)$ 结束。这确保了弯曲路径从左下角单元格开始，并在顶部-结束

矩阵的右角单元格。

· 连续性:对于给定的 $w_k = (x, y)$, 前面的元素 $w_{k-1} = (x', y')$, 其中 $x - x' \leq 1$ 和 $y - y' \leq 1$ 。这个限制只允许弯曲路径内的相邻单元格过渡。

· 单调性:对于给定的 $w_k = (x, y)$, 前面的元素 $w_{k-1} = (x', y')$, 其中 $x - x' \geq 0$ 和 $y - y' \geq 0$ 。这个约束确保了W中的点随时间呈现单调递增的指数。

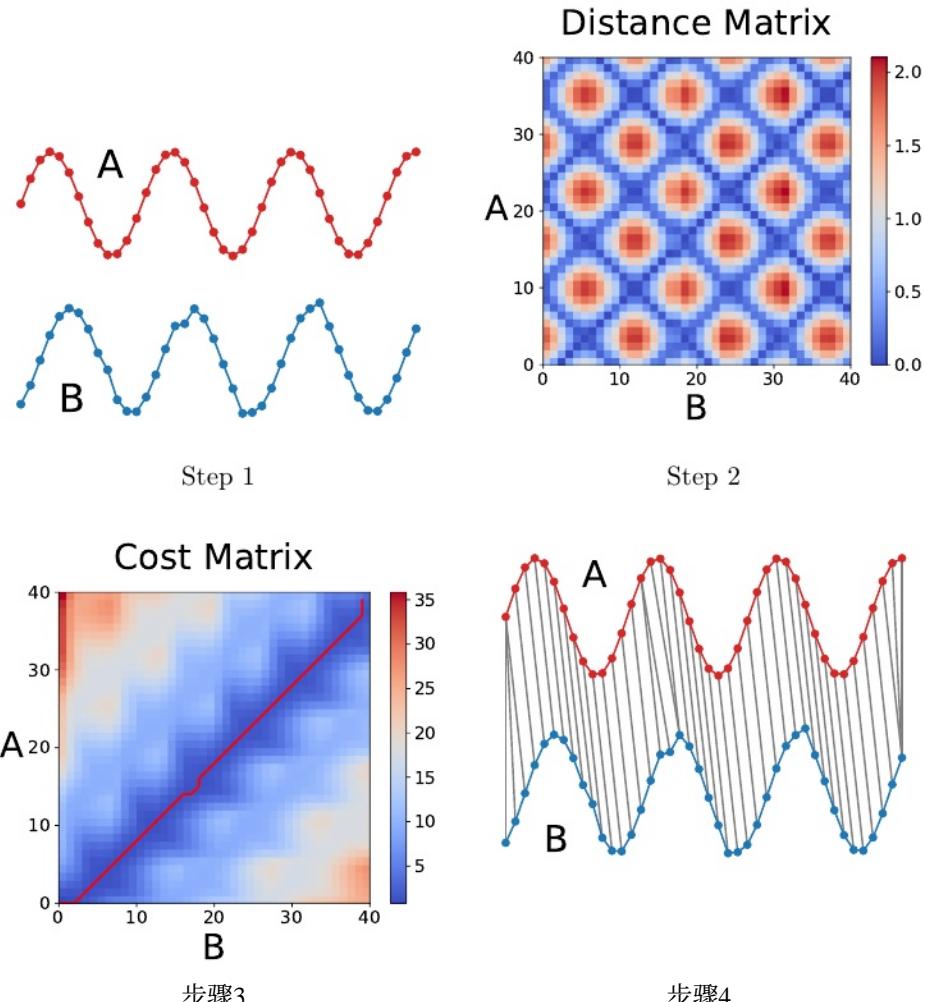


图1:步骤1:两个时间序列A和B相似, 但互为非相。步骤2:距离矩阵, 矩阵的第(i, j)个元素与A和B的欧几里得距离 $d(a_i, b_j)$ 的值。第三步:包含最优弯曲路径的代价矩阵, 用红线直观地表示出来。步骤4:显示两个时间序列A和B之间的结果对齐。

在坚持上述约束条件的各种扭曲路径中, 我们的目标是识别出最小化扭曲成本的路径

$$DTW(A, B) = \min \left\{ \sqrt{\sum_{k=1}^K w_k} . \right\} \quad (3)$$

为了找到这条最优路径, 采用动态规划技术来评估接下来的后续递归关系, 它将累积距离 $c(i, j)$ 定义为位于当前单元格中的距离 $d(i, j)$ 以及相邻累积距离的最小值

elements

$$c(i, j) = d(a_i, b_j) + \min\{c(i - 1, j - 1), c(i - 1, j), c(i, j - 1)\} \quad (4)$$

在图1第3步中，最优路径由红线描绘。由此产生的对齐可以在图1步骤4中看到。总之，完整的DTW算法如下图所示

Algorithm 1 Dynamic Time Warping (DTW)

Input: Time series A with length n , time series B with length m .

```

1: procedure DTW( $A$  : array [1..n],  $B$  : array [1..m])
2:    $DTW \leftarrow$  array [0..n, 0..m]
3:   for  $i \leftarrow 0$  to  $n$  do
4:     for  $j \leftarrow 0$  to  $m$  do
5:        $DTW[i, j] \leftarrow \infty$ 
6:    $DTW[0, 0] \leftarrow 0$ 
7:   for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do
8:     for  $j \leftarrow 1$  to  $m$  do
9:        $cost \leftarrow d(A[i], B[j])$ 
10:       $DTW[i, j] \leftarrow cost + \min(DTW[i - 1, j],$ 
11:           $DTW[i, j - 1], DTW[i - 1, j - 1])$ 
12:   return  $DTW[n, m]$ 
```

注意，两个时间序列之间的欧几里得距离可以看作是DTW的一个特定情况，其中扭曲路径W被约束为 $w_k = (i, j)_k$, $i = j = k$ ，换句话说，窗口大小S被设置为0。这个约束只适用于两个时间序列具有相同长度的情况。欧几里得距离和DTW的视觉比较如图2所示。

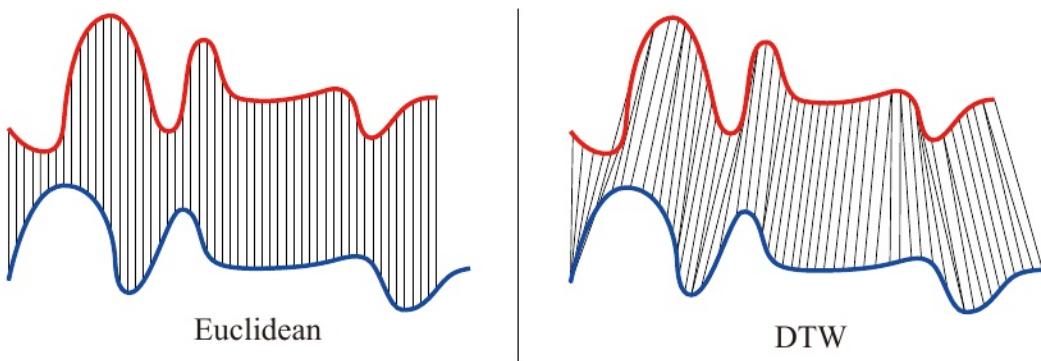


图2:左:欧几里得距离度量指示一个时间序列中的 i^{th} 点与另一个时间序列中的 j^{th} 点对齐，假设长度相同，这将产生悲观的不相似度度量。右图:DTW考虑了速度的变化，并计算了两个时间序列之间的最佳对齐，允许不同的长度，这在计算直观的距离测量时更加灵活。

3 模型设置

在本节中，我们将介绍多因素模型的标准版本和滞后版本，我们将采用它们作为我们的时间序列数据的基础模型。具体来说，我们将使用滞后的多因素模型来使用合成数据验证我们的算法，然后再将其应用到真实世界的场景中。这些模型背后的基本思想是将时间序列表示为a

(嘈杂的)因素组合，每个因素表现出不同的暴露程度。我们提出的用于检测领先滞后关系的模型与多参考比对(MRA)问题表现出显著的相似之处，MRA涉及从一组n个循环和噪声移位的自身副本中估计单个信号，如Bandeira等人(2014)所示。

3.1 描述

让我们首先回顾多元时间序列的标准多因素模型

$$X_i^t = \sum_{j=1}^k B_{ij} f_j^t + \epsilon_i^t \quad i = 1, \dots, n; \quad t = 1, \dots, T, \quad (5)$$

其中 X_i^t 是时间t的时间序列I(例如，金融资产的超额收益)， k 是因子的数量， B_{ij} 是时间序列I对因子j的暴露， f_j^t 是时间t的因子j， ϵ_i^t 是时间t的噪声，方差 σ^2 。更进一步，我们有n作为时间序列的总数，T作为时间步数的总数。

在本文中，我们的重点是多因素模型的滞后版本，可以表示为

$$X_i^t = \sum_{j=1}^k B_{ij} f_j^{t-L_{ij}} + \epsilon_i^t \quad i = 1, \dots, n; \quad t = 1, \dots, T, \quad (6)$$

其中，滞后的多因素模型与标准的多因素模型相比，主要的区别是包含了 L_{ij} ，表示时间序列j暴露于因子j的滞后程度。因此， $f_j^{t-L_{ij}}$ 对应于时间 $t-L_{ij}$ 时因子j的值。

在滞后的多因素模型(6)中，我们考虑两个关键设置，这首先是在Zhang, Cucuringu, a.y. Shestopaloff等人(2023)中引入的。

- 单一成员:每个时间序列都有对单一因素的滞后暴露。我们考虑以下两个主要类别。
 - 同质设定:模型只有一个因子，即 $k = 1$ 。
 - 异质设置:模型有多个因子，即 $k \geq 2$ 。然而，每个时间序列只暴露于一个因素。
- 混合成员:每个时间序列都允许滞后于多个因素，从而形成混合配置。因此，该模型包含至少两个因素，用 $k \geq 2$ 表示。

在本文中，我们的主要目标是对滞后多因素模型中的滞后值 L_{ij} 进行推理，具体关注单一的隶属度设置。我们没有把重点放在未知系数矩阵B和因子f的推理上，如后面所示，单独估计 L_{ij} 在具体应用中具有实际意义，如金融。关于混合隶属度设置的调查留给以后的工作。

4 方法

在本节中，我们提出了一种鲁棒的算法，用于使用DTW和k - medioids (DTW KMed)的组合来检测前滞后关系，并使用Meert等人(2020)的DTW库。

我们考虑一组表示为 $X_{n \times T}$ 的时间序列作为我们的输入。最初，我们使用DTW来计算来自 $X_{n \times T}$ 的每对时间序列之间的成对距离。随后，我们基于DTW距离矩阵，应用k - medioids聚类对相似时间序列进行聚类。时间序列i和j的对记为 $\{X_i, X_j\}$ 。对于每个簇 $\boxtimes_d (d = 1, \dots, K)$ ，我们通过对 $\{X_i, X_j\}$ 执行DTW来记录路径 $W\{X_i, X_j\}$ 。然后，我们计算路径W中每个索引对的差值，记为 $\Delta(W\{X_i, X_j\})$ 。计算可以表示为

$$\Delta(W\{X_i, X_j\}) = \{\Delta(w_1), \Delta(w_2), \dots, \Delta(w_k), \dots, \Delta(w_K)\} \quad (7)$$

马克斯($m, n \leq K < m + n - 1$, $\Delta(w_K) = \Delta((w_j)_k) = -j$)。

那么， $\{X_i, X_j\}$ 在 \boxtimes_d (用众数或中位数估计)中的相对滞后值可以表示为

$$\gamma\{X_i, X_j\} = \begin{cases} \text{Mode}(\Delta(W\{X_i, X_j\})) & \text{Mode estimation} \\ \text{Median}(\Delta(W\{X_i, X_j\})) & \text{Median estimation} \end{cases} \quad (8)$$

例如，一旦我们使用从 $X_{n \times T}$ 计算的DTW距离矩阵应用K-medoids聚类，让我们考虑两个时间序列， X_1 和 X_2 ，包含100个数据点，属于同一个聚类，已知的真实滞后值为3。随后，我们计算 $\Delta(W\{X_1, X_2\})$ 。图3展示了从 $\{X_1, X_2\}$ 得到的相对滞后。

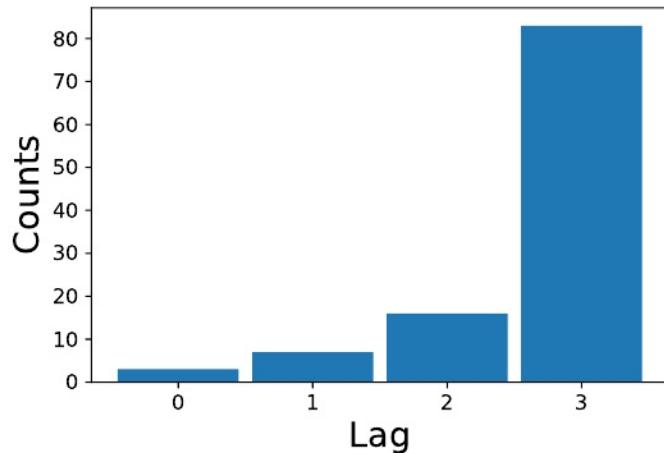


图3:两个时间序列的相对滞后的直方图。

通过采用模式或中值估计 $\Delta(W\{X_1, X_2\})$ ，记为 $\gamma\{X_1, X_2\}$ ，值为3，从图3中可以明显看出，我们可以得出结论，相对于地面真实值，结果保持一致和稳健。尽管在 $\Delta(W\{X_i, X_j\})$ 中存在异常值，如{0,1,2}，但估计的滞后值与基准真值3对齐得很好。

下一步，超前滞后矩阵 $\Gamma_{n \times n}$ 的构建由

$$\Gamma_{ij} = \begin{cases} \gamma\{X_i, X_j\} & \text{if } X_i \text{ and } X_j \text{ are in the same cluster} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (9)$$

我们在算法2中总结了上述过程。

Algorithm 2 DTW_KMed for Lead-lag Relationship Detection

Input: Time series matrix $X_{n \times T}$. **Output:** Lead-lag matrix $\Gamma_{n \times n}$.

- 1: Compute the DTW distance matrix from $X_{n \times T}$.
 - 2: Apply K-medoids clustering using the DTW distance matrix.
 - 3: For each cluster ϕ_d ($d = 1, \dots, K$):
 - Record path W from every pair of time series $\{X_i, X_j\}$.
 - Calculate the difference $\Delta(W\{X_i, X_j\})$ for every index pair in the path W
 - Record lag $\gamma\{X_i, X_j\}$ by taking *mode* or *median* estimation of the difference $\Delta(W\{X_i, X_j\})$.
 - 4: Calculate the lead-lag matrix $\Gamma_{n \times n}$ by setting $\gamma\{X_i, X_j\}$, where $\{X_i, X_j\}$ is in the same cluster. Otherwise, the entry is set to 0.
-

5 合成数据实验

合成数据实验的目的是模拟由已知真实值的超前滞后矩阵I的多因素模型生成的数据，主要目的是评估和验证我们提出的算法在各种场景下的性能。

5.1 合成数据生成过程

如前所述，我们的重点是单一成员设置。我们从 $k = \{1, 2\}$ 因子的滞后多因子模型(6)中生成合成数据。此外，我们指定滞后的最大数量为 $M = 5$ ，时间序列的长度为 $T = 100$ 。因子f和噪声从 $N(0, 1)$ 中绘制。我们定义B和L如下：

表1:最上面一行:加载矩阵b, 最下面一行:滞后矩阵L。

	Homogeneous Setting	Heterogeneous Setting
B	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
L	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 4 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$
	$k = 1$	$k = 2$
		$k = 3$

出于验证的目的，我们将时间序列的数量设置为 $n = 120$ 来演示

我们算法的有效性。在估计领先滞后矩阵时，我们使用长度为 $l = 21$ 的滑动窗口，移位为 $s = 1$ 。在估计领先滞后矩阵之后，我们计算误差矩阵 E 来评估性能，我们表示为

$$E_{n \times n} = \Gamma_{n \times n} - \Psi_{n \times n}, \quad (10)$$

其中 $\Gamma_{n \times n}$ 是估计的领先滞后矩阵， $\Psi_{n \times n}$ 是ground truth领先滞后矩阵，可以从 $L_n \times k$ 得到。

5.2 仿真结果

在同质设置($k = 1$)下，如图4所示，所有五种算法(KM为k - means, Euc KMed为Euclidean + k - medoids, Man KMed为Manhattan + k - medoids, Cos KMed为Cos + k - medoids, DTW KMed为DTW + k - medoids)在调整后的兰德指数(ARI)为1时都表现出最佳性能。这表明，当只有一个潜在因素时，它们成功地以高精度检测了领先滞后关系，并且根据我们的实验设置，这一结果是预期的。然而，在非均匀环境下($k = 2$)，我们观察到随着噪声水平 σ 的增加，ARI普遍下降。尽管存在这种趋势，但我们提出的DTW KMed算法在 σ 从0到1.5的范围内获得了一致的高ARI值。这种性能优于其他算法，这些算法在噪声水平上保持相对较低的ARI值。这一观察结果突出表明，DTW在捕获复杂的超前-滞后模式方面表现出色，具有更高的鲁棒性。

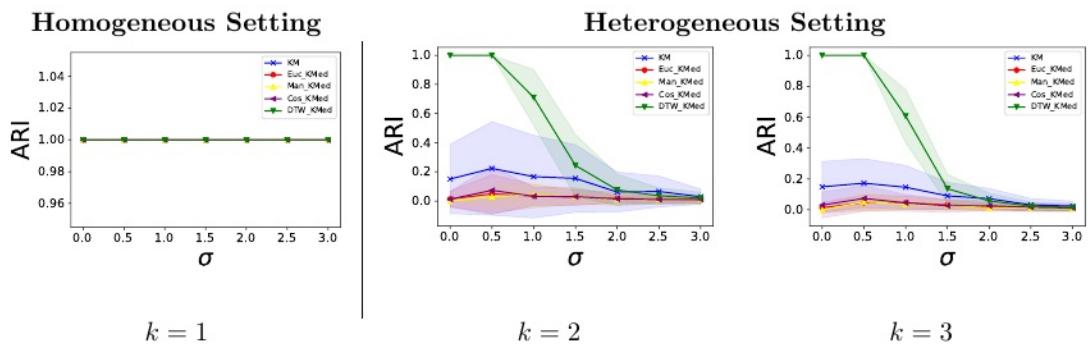


图4:基于每次迭代100次模拟的不同 σ 水平的ARI的平均值和置信区间。

在DTW中，窗口大小 S 定义了小于该数值的两条对角线的最大允许偏移量。因此，选择合适的窗口大小 S 在DTW中至关重要。 S 的选择影响时间序列之间允许多少时间失真，从而影响对齐并有效地捕获潜在的领先滞后关系。适当调优 S 使DTW能够在捕获复杂模式和避免可能导致错误分类的过度扭曲之间取得平衡。

在整个合成实验中，我们将真实滞后设置为5。在图5中，我们观察到与图4中的同质设置类似的结果。然而，在异构环境中，当窗口大小在0到5之间时，ARI往往相对较低。相反，当窗口大小等于或超过5时，ARI显著增加。

这种行为符合DTW要求的窗口大小等于或超过真正的延迟5的基本原理。这使得DTW能够以足够的灵活性计算最佳对准，从而有效地捕获实际的超前-滞后关系。当窗口大小限制太大时，它可能不允许足够的时间畸变，导致在多种因素存在下的次优对齐和较低的ARI值。因此，选择合适的窗口大小对于确保准确地检测DTW的超前-滞后关系至关重要。

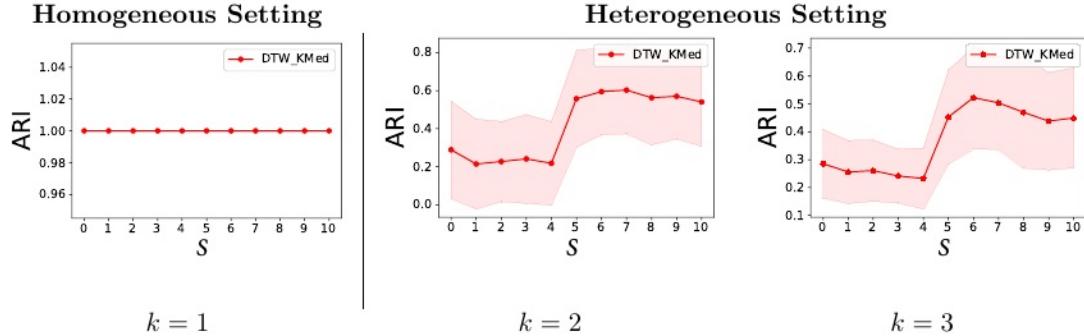


图5:基于每次迭代100次模拟的不同窗口大小S的ARI的平均值和置信区间(真正的滞后是5)。

如图6所示，对于同构和异构设置，当 σ 范围从0.0到0.5时，均方误差(MSE)保持接近于0。然而，当 σ 大于0.5时，两种算法的MSE都显著上升。总体而言，这两种算法在低噪声水平下表现出可接受的性能，但DTW KMed模式估计(DTW KMed Mod)在不同噪声水平下表现出比DTW KMed中位数估计(DTW KMed Med)更好的性能。

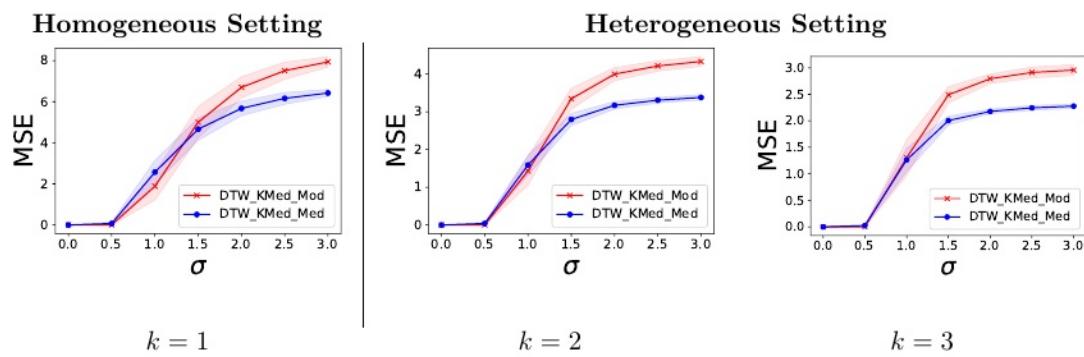


图6:基于每次迭代100次模拟的不同 σ 水平的MSE的平均值和置信区间。

当真滞后集为5， σ 为1时，DTW KMed Mod算法在同质设置($k = 1$)下优于DTW KMed Med算法。在异构设置($k = 2$)下，当窗口大小S在0 ~ 5范围内时，两种算法的MSE都较高。但是，当窗口大小S超过5时，两种算法的MSE都较低。这种行为与我们的理解一致，即DTW需要等于或超过5的真实滞后S才能有效地计算最佳对齐。因此，当S小于5时，校准可能无法完全捕获真正的超前-滞后关系，从而导致更高的MSE值。然而，当S大于或等于5时，两种算法都实现了更好的对齐，导致减少

MSE values.

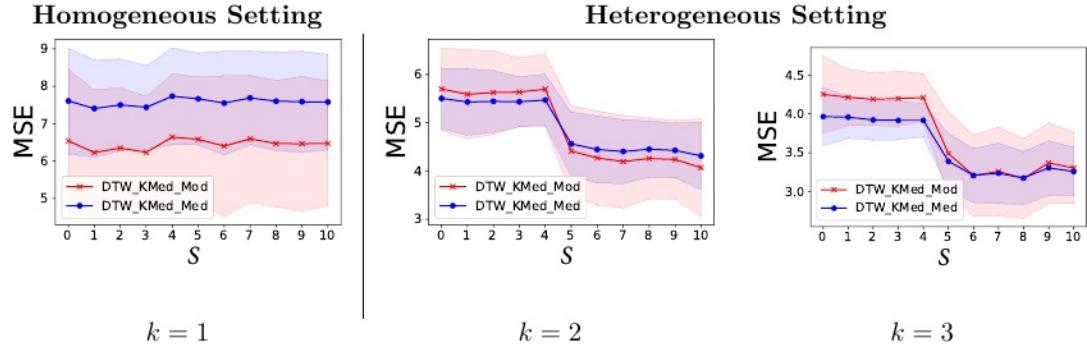


图7:基于每次迭代100次模拟的不同窗口大小S的MSE的平均值和置信区间(真实滞后为5, σ 为1)

6 金融数据实验

6.1 数据描述

在本节中，我们利用金融数据进行了一个大规模的实验，来应用我们的算法。如前所述，这是一个先行滞后关系自然发生的环境。对于我们的金融数据实验，我们考虑了三个不同的数据集，每个数据集的资产数量和类型不同，数据集中包含的天数也不同。所有的数据集都是按日频率来考虑的。数据集的汇总细节见表2，关于Pinnacle data Corp CLC数据集的附加信息见附录A.3表[12,13,14,19,15,16,17,18]。

表2:数值实验中考虑的三种金融数据集的汇总。

Data source	Type	Freq	# of assets	Start date	End date	# of days
Wharton's CRSP	Equity	Daily	679	2000/01/03	2019/12/31	5211
Wharton's CRSP	ETF	Daily	14	2006/04/12	2019/07/01	3324
Pinnacle Data Corp	Futures	Daily	52	2000/01/05	2020/10/16	5166

6.2 数据预处理

关于美国股票和ETF数据集，我们使用来自沃顿商学院CRSP的close-to-close调整后的每日收益。由于股票数据集中的nan数量较多，我们去掉了超过10%的股票为零回报的天数以及超过50%的股票为零回报的天数。我们不考虑原始回报，而是考虑市场超额回报，这是衡量每只股票相对于整体市场表现如何的标准指标。对于这两个数据集，我们选择标准普尔综合指数的回报，通过从每个资产的回报中减去它来计算市场超额回报(即，为了简单起见，我们假设每个资产对市场的敞口都是 $\beta=1$)。此外，我们对任何大于0.15或小于-0.15的值的超额回报的极值进行winsorize。

对于期货数据集，我们使用来自Pinnacle data Corp CLC数据集的收盘价序列，并丢弃在相应日期中超过10%的期货为零价格的日期，并丢弃超过160天的期货为零价格。之后，我们首先使用远期填充，然后反向填充来填充零价格。最后，我们计算收盘价对收盘价的对数回报。其余的数据预处理与上文相同。

6.3 基准

为了评估我们提出的方法，我们还引入了一个基准来检测领先滞后关系，而不使用聚类。在两个时间序列之间计算样本互相关函数(CCF)是非常常见的。时间序列 X_i 和 X_j 在滞后m处的CCF由式给出

$$CCF^{ij}(m) = \text{CORR}(\{X_i^{t-m}\}, \{X_j^t\}), \quad (11)$$

其中CORR()表示CCF的选择。通过计算CCF曲线下的带符号归一化面积来估计相应的超前滞后矩阵 $\Gamma_{n \times n}$ ，由

$$\Gamma_{ij} = \frac{\text{MAX}(I(i,j), I(j,i)) \cdot \text{SIGN}(I(i,j) - I(j,i))}{I(i,j) + I(j,i)}, \quad (12)$$

其中 $I(I, j) = \sum_{m=1}^M CCF^{ij}(m)$ 对于用户指定的最大滞后m， $CCF^{ij}(m)$ 。

我们总结了算法3中的CCF过程。

Algorithm 3 : CCF Algorithm

Input: Time series matrix $X_{n \times T}$.

Output: Lead-lag matrix $\Gamma_{n \times n}$.

- 1: Calculate CCF for every pair of time series $\{X_i, X_j\}$.
 - 2: Calculate the lead-lag matrix $\Gamma_{n \times n}$ by computing the signed normalized area under the curve of CCF.
-

此外，我们还使用了四种算法(KM Mod、KM Med、SP Mod和SP Med)作为基准，这些算法来自张、Cucuringu、A. Y. Shestopaloff等人(2023)。

6.4 交易策略

在这一节中，我们介绍了本文采用的交易策略。我们的方法包括应用于由n个时间序列组成的数据集的一系列步骤，每个时间序列的长度为t。首先，我们通过实现固定长度为l = 21的滑动窗口方法来提取数据。随后，我们采用DTW KMed算法来检测超前滞后关系，并通过合成数据实验进一步验证了这一点。一旦获得了领先滞后矩阵，我们接着利用领先滞后矩阵，使用RowSum排序[Gleich and Ih. Lin(2011); Huber(1963)]，以便随后将时间序列分为领导者和落后者，领导者被用来预测落后者的行为。

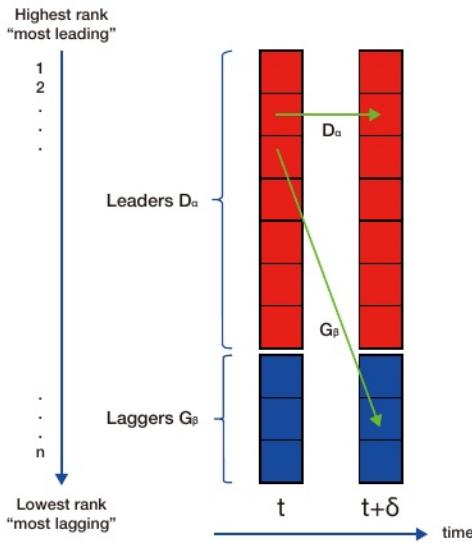


图8:G_β策略:使用D_α预测G_β, D_α策略:使用D_α预测D_α

动量(Momentum), 金融文献中一个被充分研究的现象[Jegadeesh、Luo等(2022);Jegadeesh和Titman (2001);B. Lim, Zohren和罗伯茨(2019);波、罗伯茨和Zohren(2022);Tan, 罗伯茨和Zohren (2023);Wood, Giegerich等(2021);伍德、罗伯茨和Zohren(2021);罗伯茨, Dong, Zohren, 等(2023);Zohren, 罗伯茨, Dong等人(2023)], 指的是最近表现出强劲表现的资产在不久的将来继续表现的趋势, 反之亦然。在我们的交易策略中, 我们将时间序列中顶部的 $\alpha = 0.75$ 的分数确定为领先者D_α, 而剩余的底部分数 $\beta = 1 - \alpha$ 被归类为落后者G_β。为了预测未来的表现, 我们采用指数加权移动平均(EWMA)信号, 考虑过去 $p = \{1, 3, 5, 7\}$ 天的平均winsorized时间序列超额收益D_α。这个预测的目的是估计G_β and D_α in 后续 $\delta = \{1, 3, 5, 7\}$ 天的平均超额收益。我们假设G_β can 赶上D_α, 而D_α提供了在 δ 天内维持趋势的必要动力。图8直观地说明了这一概念。为了确保连续交易, 我们将滑动窗口移动 $h = 1$, 并重复领先滞后矩阵计算和排序步骤, 直到时间序列结束。图9提供了我们在时间t的交易管道的描绘, 我们总结了算法4中的交易策略。

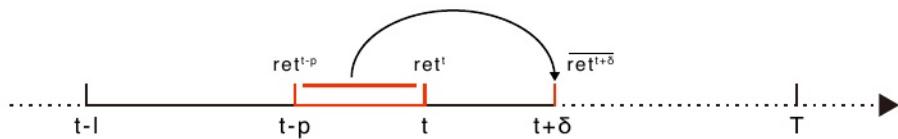


图9:时间t的交易管道示意图, 给定过去p天平均winsorized时间序列超额收益的EWMA, 以预测未来 δ 天平均超额收益。

6.5 绩效评估

在评估各种交易策略的有效性时, 我们依靠以下指标来评估它们的表现。我们计算某天 $t + \delta$ as G_β on 的损益(PnL)

Algorithm 4 : Trading strategy

Input: Time series matrix $X_{n \times T}$.

- 1: Construct the matrix $X_{n \times T}$ by employing a sliding window of length l starting from the beginning of the time series, resulting in $X_{n \times l}$.
 - 2: Apply the **DTW_KMed for Lead-lag Relationship Detection Algorithm** to $X_{n \times l}$, resulting in the computation of the lead-lag matrix $\Gamma_{n \times n}$.
 - 3: Based on $\Gamma_{n \times n}$, rank the time series from the most leading to the most lagging using the *RowSum* ranking methodology.
 - 4: Select the top α fraction of the time series as Leaders D_α , and the bottom $\beta = 1 - \alpha$ as Laggards G_β .
 - 5: Employ the Exponentially Weighted Moving Average (EWMA) on the past p days of the average winsorized time series excess returns of D_α to predict the average future excess returns of G_β and D_α for a duration of δ days.
 - 6: Shift the sliding window by h , and repeat Steps 1-5 until the end of the time series.
-

$$PnL_{G_\beta}^{t+\delta} = \text{sign}(\text{EWMA}(ret_{D_\alpha}^{t-p} : ret_{D_\alpha}^t)) \cdot \overline{ret_{G_\beta}^{t+\delta}}, t = l, \dots, T - \delta, \quad (13)$$

因为只要预测的符号与未来回报的符号一致，该策略就会盈利。相应的， D_α on 某天 $t + \delta$ 的 PnL 为

$$PnL_{D_\alpha}^{t+\delta} = \text{sign}(\text{EWMA}(ret_{D_\alpha}^{t-p} : ret_{D_\alpha}^t)) \cdot \overline{ret_{D_\alpha}^{t+\delta}}, t = l, \dots, T - \delta, \quad (14)$$

式中 $ret_{D_\alpha}^{t-p}$ 和 $ret_{D_\alpha}^t$ 分别为 D_α 在 $t-p$ 和 t 时的超额收益，而 $\text{EWMA}(ret_{D_\alpha}^{t-p} : ret_{D_\alpha}^t)$ 表示从 D_α from $t-p$ 的超额收益到 t 的指数加权移动平均，此外， $ret_{D_\alpha}^{t+\delta}$ 描述了 D_α 在 $t+\delta$ 的超额收益的均值

超额收益率的均值 $D_\alpha \text{att} + \delta$ 。

我们根据波动性将 PnL 重新调整为目标等风险分配，并将年化波动率目标 σ_{tgt} 设置为 0.15。

$$PnL_{\text{rescaled}} = \frac{\sigma_{\text{target}}}{\text{STD}(PnL) \cdot \sqrt{252}} \cdot PnL. \quad (15)$$

基于 PnL_{rescaled} ，我们继续计算以下年化指标，与 [B. Lim, Zohren 和 罗伯茨 (2019); 伍德、罗伯茨和 Zohren (2022); Tan, 罗伯茨和 Zohren (2023); 波、罗伯茨和 Zohren (2022); Wood, Giegerich 等 (2021); 伍德、罗伯茨和 Zohren (2021); 张, Cucuringu, A. Y. Shestopaloff, 等 (2023); 刘、Zohren (2023); Liu, 罗伯茨, and Zohren (2023)]，更详细的信息可以在附录 A.1 中找到。

- 盈利能力: 累积 PnL, 年化预期超额回报 ($E[Returns]$), 命中率。
- 风险: 波动性、下行偏差、最大下降。
- 业绩: Sortino 比率, Calmar 比率, 平均利润/平均亏损, 每笔交易的 PnL, 夏普比率, p 值。

6.6 结果

对于股权数据集，在补充材料[Zhang, Cucuringu, A. Shestopaloff, et al. (2023)] B.1中可以获得各种调优设置的综合结果。我们的发现表明，利用EWMA在过去7天的平均winsorized时间序列的超额回报 D_α ，其中 $\alpha=0.75$ ，用于预测未来7天的平均超额回报 G_β 和 D_α consistently，在所有算法中都产生了良好的表现。图10展示了 G_β strategy(左)和 D_α strategy(右)的累积PnL的比较。在 G_β strategy，2008年之前，DTW KMed Mod和DTW KMed Med的夏普比(SR)优于其他算法。而在2008年之后，除CCF外，其他算法均呈现大幅增长趋势，并最终达到相近的性能水平。另一方面，在 D_α strategy上，2008年之前，所有算法的表现大致相同。然而，2008年之后，DTW KMed Med成为最赚钱的策略，SR为0.93，明显优于其他策略。此外，表[3,4]给出了DTW KMed Mod、DTW KMed Med以及其他基于各种指标(根据目标波动率重新缩放)的 G_β strategy和 D_α strategy的算法的性能。

表[5,6]和图11展示了使用与权益数据相同的设置的ETF数据集的结果。在 G_β strategy中，我们没有发现持续检测领先-滞后关系的证据，这些关系可以导致盈利的结果。但在 D_α strategy中，SP Med和DTW KMed Mod的SR值最高，分别为0.8和0.78。所有调谐设置的完整结果报告在补充材料[Zhang, Cucuringu, A. Shestopaloff, et al. (2023)] B.2。

使用与权益数据相同的设置，期货数据的结果显示在表[7,8]中，以及图12。对于这个数据集，我们没有观察到持续检测任何策略的获利领先-滞后关系的能力。所有调谐设置的完整结果可在补充材料[Zhang, Cucuringu, A. Shestopaloff, et al. (2023)] B.3。

除了真实的数据结果，我们还在附录A.2中包含了合成数据实验的结果。

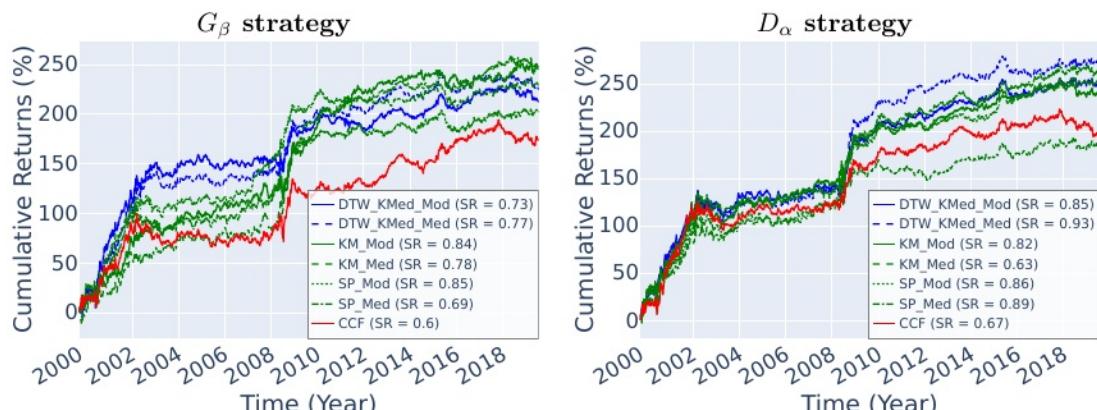


图10:股票数据集: G_β strategy(左)和 D_α strategy(右)的累积PnL -重新调整为目标波动率。实验设置了 $p = 7$, $\delta = 7$, $\alpha = 0.25$, $K = 5$ 的值。

G_β strategy	Benchmark					Proposed	
	CCF	KM_Mod	KM_Med	SP_Mod	SP_Med	DTW_KMod_Mod	DTW_KMod_Med
E[Returns]	0.089	0.126	0.118	0.127*	0.104	0.109	0.115
Volatility	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15
Downside deviation	0.105	0.103	0.101*	0.103	0.105	0.106	0.107
Maximum drawdown	-0.313	-0.26	-0.215	-0.214	-0.287	-0.205	-0.188*
Sortino ratio	0.85	1.222	1.166	1.237*	0.988	1.026	1.084
Calmar ratio	0.285	0.484	0.548	0.594	0.362	0.531	0.614*
Hit rate	0.499	0.521*	0.51	0.516	0.519	0.514	0.512
Avg. profit / avg. loss	1.117*	1.068	1.107	1.091	1.051	1.08	1.1
PnL per trade	3.542	4.996	4.672	5.041*	4.119	4.317	4.581
Sharpe ratio	0.595	0.839	0.785	0.847*	0.692	0.725	0.77
P-value	0.009	0*	0*	0*	0.002	0.001	0.001

表3:股票数据集: G_β strategy的性能指标-重新缩放到目标波动率。实验设置了 $p = 7$, $\delta = 7$, $\alpha = 0.25$, $K = 5$ 的值。

G_β strategy	Benchmark					Proposed	
	CCF	KM_Mod	KM_Med	SP_Mod	SP_Med	DTW_KMod_Mod	DTW_KMod_Med
E[Returns]	0.101	0.122	0.095	0.129	0.134	0.128	0.14*
Volatility	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15
Downside deviation	0.105	0.107	0.108	0.106	0.105	0.103	0.102*
Maximum drawdown	-0.288	-0.251	-0.21*	-0.283	-0.227	-0.276	-0.297
Sortino ratio	0.964	1.148	0.876	1.222	1.269	1.238	1.376*
Calmar ratio	0.352	0.488	0.452	0.456	0.59*	0.463	0.472
Hit rate	0.518	0.521	0.513	0.522	0.525*	0.52	0.523
Avg. profit / avg. loss	1.05	1.069	1.066	1.072	1.065	1.078*	1.078*
PnL per trade	4.018	4.856	3.765	5.121	5.312	5.073	5.557*
Sharpe ratio	0.675	0.816	0.632	0.86	0.892	0.852	0.934*
P-value	0.003	0*	0.005	0*	0*	0*	0*

表4:股票数据集: D_α strategy-重新缩放到目标波动率的性能指标。实验设置了 $p = 7$, $\delta = 7$, $\alpha = 0.25$, $K = 5$ 的值。

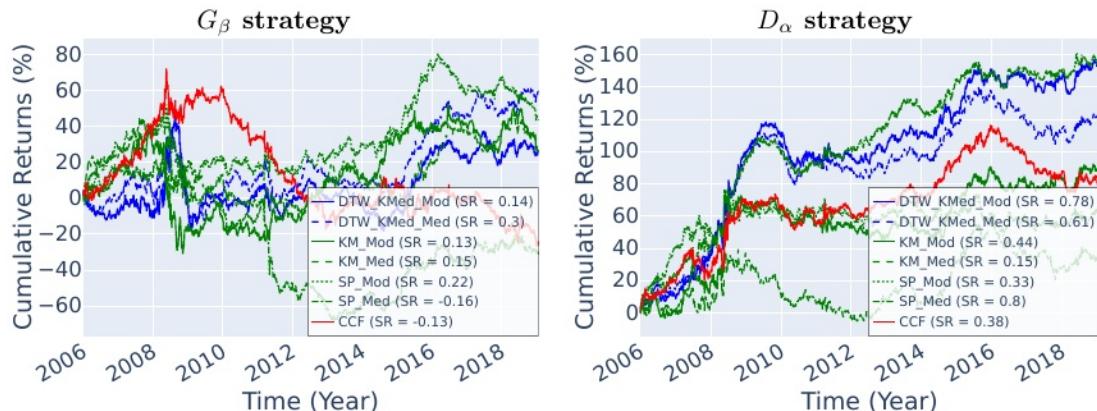


图11:ETF数据集: G_β strategy(左)和 D_α strategy(右)的累积PnL -重新调整为目标波动率。实验设置了 $p = 7$, $\delta = 7$, $\alpha = 0.25$, $K = 5$ 的值。

G_β strategy	Benchmark					Proposed	
	CCF	KM_Mod	KM_Med	SP_Mod	SP_Med	DTW_KMod_Mod	DTW_KMod_Med
E[Returns]	-0.019	0.02	0.022	0.033	-0.024	0.021	0.045
Volatility	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15
Downside deviation	0.116	0.115	0.116	0.113	0.123	0.111	0.115
Maximum drawdown	-0.668	-0.525	-0.465	-0.38	-0.653	-0.507	-0.428
Sortino ratio	-0.165	0.176	0.188	0.294	-0.192	0.186	0.394
Calmar ratio	-0.029	0.038	0.047	0.088	-0.036	0.041	0.106
Hit rate	0.492	0.512	0.499	0.509	0.509	0.512	0.513
Avg. profit / avg. loss	1.006	0.978	1.034	1.009	0.935	0.98	1.005
PnL per trade	-0.76	0.8	0.87	1.325	-0.939	0.818	1.799
Sharpe ratio	-0.128	0.134	0.146	0.223	-0.158	0.137	0.302
P-value	0.644	0.628	0.598	0.421	0.568	0.619	0.275

表5:ETF数据集: G_β strategy的绩效指标-重新调整为目标波动率。实验设置了 $p = 7$, $\delta = 7$, $\alpha = 0.25$, $K = 5$ 的值。

G_β strategy	Benchmark					Proposed	
	CCF	KM_Mod	KM_Med	SP_Mod	SP_Med	DTW_KMod_Mod	DTW_KMod_Med
E[Returns]	0.056	0.065	0.022	0.05	0.121	0.117	0.091
Volatility	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15
Downside deviation	0.097	0.097	0.105	0.104	0.098	0.093	0.095
Maximum drawdown	-0.362	-0.267	-0.385	-0.298	-0.22	-0.256	-0.31
Sortino ratio	0.581	0.676	0.213	0.474	1.236	1.257	0.955
Calmar ratio	0.156	0.245	0.058	0.166	0.548	0.456	0.293
Hit rate	0.504	0.502	0.5	0.508	0.513	0.521	0.517
Avg. profit / avg. loss	1.056	1.077	1.027	1.03	1.097	1.056	1.039
PnL per trade	2.234	2.591	0.889	1.965	4.784	4.635	3.608
Sharpe ratio	0.375	0.435	0.149	0.33	0.804	0.779	0.606
P-value	0.169	0.105	0.588	0.229	0.003	0.004	0.026

表6:ETF数据集: D_α strategy的绩效指标-重新调整为目标波动率。实验设置了 $p = 7$, $\delta = 7$, $\alpha = 0.25$, $K = 5$ 的值。

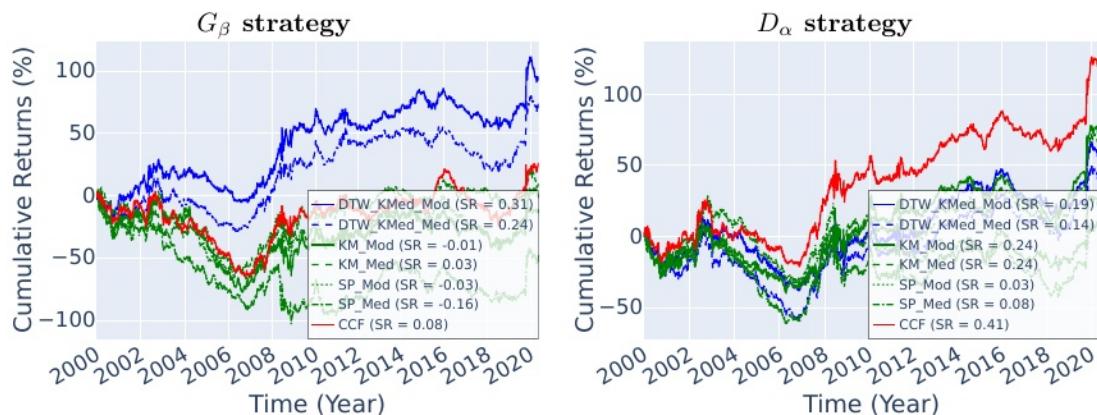


图12:期货数据集: G_β strategy(左)和 D_α strategy(右)的累积PnL -重新调整为目标波动率。实验设置了 $p = 7$, $\delta = 7$, $\alpha = 0.25$, $K = 5$ 的值。

G_β strategy	Benchmark					Proposed	
	CCF	KM_Mod	KM_Med	SP_Mod	SP_Med	DTW_KMod_Mod	DTW_KMod_Med
E[Returns]	0.013	-0.001	0.004	-0.005	-0.024	0.047	0.036
Volatility	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15
Downside deviation	0.104	0.102	0.103	0.107	0.109	0.103	0.104
Maximum drawdown	-0.535	-0.587	-0.538	-0.544	-0.698	-0.316	-0.376
Sortino ratio	0.121	-0.01	0.042	-0.049	-0.217	0.453	0.347
Calmar ratio	0.024	-0.002	0.008	-0.01	-0.034	0.147	0.096
Hit rate	0.502	0.498	0.494	0.497	0.497	0.506	0.505
Avg. profit / avg. loss	1.007	1.008	1.028	1.006	0.984	1.033	1.023
PnL per trade	0.499	-0.039	0.173	-0.206	-0.94	1.848	1.427
Sharpe ratio	0.084	-0.007	0.029	-0.035	-0.158	0.31	0.24
P-value	0.705	0.976	0.896	0.876	0.476	0.159	0.278

表7:期货数据集: G_β strategy的绩效指标-重新调整目标波动率。实验设置了 $p = 7$, $\delta = 7$, $\alpha = 0.25$, $K = 5$ 的值。

G_β strategy	Benchmark					Proposed	
	CCF	KM_Mod	KM_Med	SP_Mod	SP_Med	DTW_KMod_Mod	DTW_KMod_Med
E[Returns]	0.061	0.036	0.036	0.005	0.012	0.029	0.021
Volatility	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15
Downside deviation	0.107	0.108	0.108	0.11	0.105	0.107	0.107
Maximum drawdown	-0.393	-0.412	-0.404	-0.581	-0.524	-0.424	-0.502
Sortino ratio	0.574	0.337	0.331	0.042	0.112	0.269	0.193
Calmar ratio	0.156	0.088	0.089	0.008	0.022	0.068	0.041
Hit rate	0.511	0.502	0.499	0.491	0.496	0.498	0.501
Avg. profit / avg. loss	1.032	1.038	1.05	1.042	1.032	1.042	1.022
PnL per trade	2.439	1.445	1.424	0.183	0.468	1.139	0.822
Sharpe ratio	0.41	0.243	0.239	0.031	0.079	0.191	0.138
P-value	0.064	0.272	0.28	0.889	0.723	0.387	0.533

表8:期货数据集: D_α strategy的绩效指标-重新调整目标波动率。实验设置了 $p = 7$, $\delta = 7$, $\alpha = 0.25$, $K = 5$ 的值。

7 鲁棒性分析

我们通过不同簇K个数的实验来检验DTW KMod Mod和DTW KMod Med的稳健性。具体来说，对于股权数据集，我们认为K = {5,10,15,20}。在表9中，我们观察到两种算法的性能在保持较高sr的同时并没有明显的变化，值得注意的是p值几乎都低于0.05，这说明在我们的实验中，所有的结果都具有统计学意义。

表10给出了在ETF数据集上测试的DTW KMod Mod和DTW KMod Med的性能。由于本数据集的横截面较小，我们只考虑5和10的K值。这两种算法在D_a strategy中的高alpha表现出相当好的性能。

表11给出了DTW KMod Mod和DTW KMod Med在期货数据集上的表现，K取值范围为5 ~ 20，增量为5。可以观察到，对于这个数据集，D_a strategy的SR往往对K的变化更加敏感，实现盈利变得具有挑战性。

DTW_KMod_Mod		G_β strategy				D_α strategy				
K		5	10	15	20		5	10	15	20
E[Returns]		0.109	0.098	0.098	0.096	0.128	0.106	0.114	0.101	
Volatility		0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	
Downside deviation		0.106	0.107	0.108	0.108	0.103	0.105	0.105	0.105	
Maximum drawdown		-0.205	-0.192	-0.198	-0.235	-0.276	-0.27	-0.221	-0.272	
Sortino ratio		1.026	0.92	0.908	0.891	1.238	1.007	1.084	0.961	
Calmar ratio		0.531	0.512	0.497	0.408	0.463	0.392	0.514	0.372	
Hit rate		0.514	0.512	0.516	0.514	0.52	0.519	0.522	0.519	
Avg. profit / avg. loss		1.08	1.075	1.058	1.066	1.078	1.051	1.05	1.044	
PnL per trade		4.317	3.9	3.906	3.805	5.073	4.201	4.511	4.012	
Sharpe ratio		0.725	0.655	0.656	0.639	0.852	0.706	0.758	0.674	
P-value		0.001	0.004	0.004	0.005	0	0.002	0.001	0.003	
DTW_KMod_Med		G_β strategy				D_α strategy				
K		5	10	15	20		5	10	15	20
E[Returns]		0.115	0.097	0.083	0.092	0.14	0.116	0.099	0.112	
Volatility		0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	
Downside deviation		0.107	0.107	0.109	0.109	0.102	0.104	0.105	0.104	
Maximum drawdown		-0.188	-0.197	-0.226	-0.21	-0.297	-0.226	-0.241	-0.274	
Sortino ratio		1.084	0.907	0.76	0.844	1.376	1.112	0.946	1.083	
Calmar ratio		0.614	0.493	0.367	0.437	0.472	0.513	0.413	0.41	
Hit rate		0.512	0.513	0.509	0.513	0.523	0.519	0.514	0.517	
Avg. profit / avg. loss		1.1	1.069	1.07	1.065	1.078	1.067	1.067	1.068	
PnL per trade		4.581	3.851	3.293	3.646	5.557	4.596	3.948	4.459	
Sharpe ratio		0.77	0.647	0.553	0.612	0.934	0.772	0.663	0.749	
P-value		0.001	0.004	0.015	0.007	0	0.001	0.003	0.001	

表9:股权数据集:对K的稳健性分析- rescaled到目标波动率。实验设置了p = 7, $\delta = 7$ 的值。

DTW_KMod_Mod		G_β strategy		D_α strategy	
K		5	10	5	10
E[Returns]		0.021	0.058	0.117	0.07
Volatility		0.15	0.15	0.15	0.15
Downside deviation		0.111	0.116	0.093	0.098
Maximum drawdown		-0.507	-0.353	-0.256	-0.321
Sortino ratio		0.186	0.505	1.257	0.715
Calmar ratio		0.041	0.166	0.456	0.219
Hit rate		0.512	0.506	0.521	0.505
Avg. profit / avg. loss		0.98	1.059	1.056	1.067
PnL per trade		0.818	2.321	4.635	2.783
Sharpe ratio		0.137	0.39	0.779	0.468
P-value		0.619	0.161	0.004	0.088

DTW_KMod_Med		G_β strategy		D_α strategy	
K		5	10	5	10
E[Returns]		0.045	0.063	0.091	0.061
Volatility		0.15	0.15	0.15	0.15
Downside deviation		0.115	0.113	0.095	0.098
Maximum drawdown		-0.428	-0.415	-0.31	-0.388
Sortino ratio		0.394	0.561	0.955	0.621
Calmar ratio		0.106	0.153	0.293	0.157
Hit rate		0.513	0.508	0.517	0.507
Avg. profit / avg. loss		1.005	1.054	1.039	1.045
PnL per trade		1.799	2.514	3.608	2.413
Sharpe ratio		0.302	0.422	0.606	0.405
P-value		0.275	0.128	0.026	0.14

表10:ETF数据集:K -调整为目标波动率的稳健性分析。实验设置了 $p = 7$, $\delta = 7$ 的值。

DTW_KMod_Mod		G_β strategy				D_α strategy			
K		5	10	15	20	5	10	15	20
E[Returns]		0.047	0.051	0.064	0.055	0.029	0.042	0.048	0.04
Volatility		0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15
Downside deviation		0.103	0.102	0.103	0.104	0.107	0.105	0.105	0.105
Maximum drawdown		-0.316	-0.412	-0.421	-0.338	-0.424	-0.468	-0.459	-0.455
Sortino ratio		0.453	0.496	0.618	0.528	0.269	0.395	0.457	0.378
Calmar ratio		0.147	0.123	0.152	0.163	0.068	0.089	0.105	0.087
Hit rate		0.506	0.5	0.501	0.508	0.498	0.5	0.5	0.499
Avg. profit / avg. loss		1.033	1.065	1.08	1.04	1.042	1.05	1.058	1.055
PnL per trade		1.848	2.015	2.534	2.19	1.139	1.649	1.908	1.577
Sharpe ratio		0.31	0.338	0.426	0.368	0.191	0.277	0.321	0.265
P-value		0.159	0.124	0.053	0.095	0.387	0.21	0.147	0.231

DTW_KMod_Med		G_β strategy				D_α strategy			
K		5	10	15	20	5	10	15	20
E[Returns]		0.036	0.05	0.061	0.055	0.021	0.033	0.053	0.039
Volatility		0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15
Downside deviation		0.104	0.104	0.105	0.106	0.107	0.105	0.106	0.105
Maximum drawdown		-0.376	-0.376	-0.428	-0.365	-0.502	-0.465	-0.475	-0.479
Sortino ratio		0.347	0.48	0.583	0.521	0.193	0.313	0.505	0.374
Calmar ratio		0.096	0.133	0.143	0.151	0.041	0.071	0.112	0.082
Hit rate		0.505	0.502	0.505	0.506	0.501	0.499	0.504	0.499
Avg. profit / avg. loss		1.023	1.055	1.057	1.048	1.022	1.045	1.052	1.054
PnL per trade		1.427	1.978	2.436	2.184	0.822	1.305	2.115	1.556
Sharpe ratio		0.24	0.332	0.409	0.367	0.138	0.219	0.355	0.261
P-value		0.278	0.132	0.063	0.096	0.533	0.321	0.108	0.237

表11:期货数据集:K -重标为目标波动率的稳健性分析。实验设置了 $p = 7$, $\delta = 7$ 的值。

8 结论和未来工作

提出一种基于动态时间弯曲(Dynamic Time Warping, DTW)的方法，用于鲁棒地检测高维多元时间序列中的超前-滞后关系，特别关注滞后的多因素模型。当应用于金融数据集时，我们提出的算法显示出了有希望的夏普比率，表明与基准相比，它们具有潜在的经济效益。

为了进一步增强该方法，一个可能的未来方向可能涉及探索集群k数量的动态选择。此外，另一个有趣的方向将是深入研究第3节中描述的更复杂的混合成员模型，这提出了更具有挑战性的任务。例如，使用分钟数据调查日内领先滞后关系，可能是另一个富有成果的研究领域。

参考文献

- [1] John Aach and George M Church. “Aligning gene expression time series with time warping algorithms” . In: Bioinformatics 17.6 (2001), pp. 495–508.
- [2] Jakob Albers et al. “Fragmentation, price formation and cross-impact in bitcoin markets” . In: Applied Mathematical Finance 28.5 (2021), pp. 395–448.
- [3] Qi Jin Alvaro’ Cartea Mihai Cucuringu. “Correlation matrix clustering for statistical arbitrage portfolios” . 2023.
- [4] David H Bailey and Marcos Lopez De Prado. “The deflated Sharpe ratio: correcting for selection bias, backtest overfitting, and non-normality” . In: The Journal of Portfolio Management 40.5 (2014), pp. 94–107.
- [5] Afonso S Bandeira et al. “Multireference alignment using semidefinite programming” . In: Proceedings of the 5th conference on Innovations in theoretical computer science. 2014, pp. 459– 470.
- [6] Richard Bellman and Robert Kalaba. “On adaptive control processes” . In: IRE Transactions on Automatic Control 4.2 (1959), pp. 1–9.
- [7] Stefanos Bennett, Mihai Cucuringu, and Gesine Reinert. “Lead-lag detection and network clustering for multivariate time series with an application to the US equity market” . In: Machine Learning 111.12 (2022), pp. 4497–4538.
- [8] Donald J Berndt and James Clifford. “Using dynamic time warping to find patterns in time series” . In: Proceedings of the 3rd international conference on knowledge discovery and data mining. 1994, pp. 359–370.
- [9] Giuseppe Buccheri, Fulvio Corsi, and Stefano Peluso. “High-frequency lead-lag effects and cross-asset linkages: a multi-asset lagged adjustment model” . In: Journal of Business & Economic Statistics 39.3 (2021), pp. 605–621.
- [10] Jay Cao, Jacky Chen, and John Hull. “A neural network approach to understanding implied volatility movements” . In: Quantitative Finance 20.9 (2020), pp. 1405–1413.

- [11] Alvaro Cartea, Ryan Donnelly, and Sebastian Jaimungal. “Enhancing trading strategies with order book signals” . In: Applied Mathematical Finance 25.1 (2018), pp. 1–35.
- [12] Rama Cont. “Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues” . In: Quantitative finance 1.2 (2001), p. 223.
- [13] Yan Cui, Jun Yang, and Zhou Zhou. “State-domain change point detection for nonlinear time series regression” . In: Journal of Econometrics (2021).
- [14] Giovanni De Luca and Federica Pizzolante. “Detecting Leaders Country from Road Transport Emission Time-Series” . In: Environments 8.3 (2021), p. 18.
- [15] Felix Drinkall, Stefan Zohren, and Janet B Pierrehumbert. “Forecasting COVID-19 Caseloads Using Unsupervised Embedding Clusters of Social Media Posts” . In: arXiv:2205.10408 (2022).
- [16] Dariu M Gavrila, Larry S Davis, et al. “Towards 3-d model-based tracking and recognition of human movement: a multi-view approach” . In: International workshop on automatic face-and gesture-recognition. Vol. 3. Citeseer. 1995, pp. 272–277.
- [17] David F Gleich and Lek-heng Lim. “Rank aggregation via nuclear norm minimization” . In: Proceedings of the 17th ACM SIGKDD international conference on Knowledge discovery and data mining. 2011, pp. 60–68.
- [18] Kartikay Gupta and Niladri Chatterjee. “Examining lead-lag relationships in-depth, with focus on FX market as Covid-19 crises unfolds” . In: arXiv:2004.10560 (2020).
- [19] Clint Howard, Talis J Putnin’s, and Vitali Alexeev. “To lead or to lag? Measuring asyn-chronicity in financial time-series using dynamic time warping” . In: (2022).
- [20] Peter J Huber. “Pairwise comparison and ranking: optimum properties of the row sum procedure” . In: The annals of mathematical statistics (1963), pp. 511–520.
- [21] Katsuya Ito and Ryuta Sakemoto. “Direct estimation of lead-lag relationships using multi-nomial dynamic time warping” . In: Asia-Pacific Financial Markets 27.3 (2020), pp. 325– 342.
- [22] Narasimhan Jegadeesh, Jiang Luo, et al. “Momentum and short-term reversals: theory and evidence” . In: Nanyang Business School Research Paper 22-13 (2022).
- [23] Narasimhan Jegadeesh and Sheridan Titman. “Profitability of momentum strategies: An evaluation of alternative explanations” . In: The Journal of finance 56.2 (2001), pp. 699–720.
- [24] Eamonn Keogh and Chotirat Ann Ratanamahatana. “Exact indexing of dynamic time warp-ing” . In: Knowledge and information systems 7 (2005), pp. 358–386.
- [25] Oliver Ledoit and Michael Wolf. “Robust performance hypothesis testing with the Sharpe ratio” . In: Journal of Empirical Finance 15.5 (2008), pp. 850–859.
- [26] Yongli Li et al. “Dynamic patterns of daily lead-lag networks in stock markets” . In: Quantitative Finance 21.12 (2021), pp. 2055–2068.
- [27] Bryan Lim, Stefan Zohren, and Stephen Roberts. “Enhancing time-series momentum strate-gies using deep neural networks” . In: The Journal of Financial Data Science 1.4 (2019),

pp. 19–38.

- [28] Tom Liu, Stephen Roberts, and Stefan Zohren. “Deep Inception Networks: A General End-to-End Framework for Multi-asset Quantitative Strategies” . In: arXiv preprint arXiv:2307.05522 (2023).
- [29] Tom Liu and Stefan Zohren. “Multi-Factor Inception: What to Do with All of These Features?” In: arXiv preprint arXiv:2307.13832 (2023).
- [30] Yutong Lu, Gesine Reinert, and Mihai Cucuringu. “Co-trading networks for modeling dynamic interdependency structures and estimating high-dimensional covariances in US equity markets” . In: arXiv:2302.09382 (2023).
- [31] Yutong Lu, Gesine Reinert, and Mihai Cucuringu. “Trade co-occurrence, trade flow decomposition, and conditional order imbalance in equity markets” . In: arXiv:2209.10334 (2022).
- [32] Wannes Meert et al. DTAIDistance. Version v2.3.10. If you use this software, please cite it as below. Aug. 2020. doi: [10.5281/zenodo.7158824](https://doi.org/10.5281/zenodo.7158824). url: <https://doi.org/10.5281/zenodo.7158824>.
- [33] Nikolas Michael, Mihai Cucuringu, and Sam Howison. “Option Volume Imbalance as a predictor for equity market returns” . In: arXiv:2201.09319 (2022).
- [34] Deborah Miori and Mihai Cucuringu. “Returns-Driven Macro Regimes and Characteristic Lead-Lag Behaviour between Asset Classes” . In: arXiv:2209.00268 (2022).
- [35] Daniel Poh, Stephen Roberts, and Stefan Zohren. “Transfer ranking in finance: applications to cross-sectional momentum with data scarcity” . In: arXiv:2208.09968 (2022).
- [36] Stephen Roberts, Xiaowen Dong, Stefan Zohren, et al. “Network Momentum across Asset Classes” . In: arXiv preprint arXiv:2308.11294 (2023).
- [37] Jakob Runge et al. “Detecting and quantifying causal associations in large nonlinear time series datasets” . In: Science advances 5.11 (2019), eaau4996.
- [38] Matthew D Schmill, Tim Oates, and Paul R Cohen. “Learned models for continuous planning.” In: AISTATS. Citeseer. 1999.
- [39] Pavel Senin. “Dynamic time warping algorithm review” . In: Information and Computer Science Department University of Hawaii at Manoa Honolulu, USA 855.1-23 (2008), p. 40.
- [40] Alik Sokolov et al. “Assessing the Impact of Sustainability on Fund Flows: An Excess Information Approach and US-Based Case Study” . In: The Journal of Impact and ESG Investing (2022).
- [41] Johannes Stüberinger and Dominik Walter. “Using multi-dimensional dynamic time warping to identify time-varying lead-lag relationships” . In: Sensors 22.18 (2022), p. 6884.
- [42] Wee Ling Tan, Stephen Roberts, and Stefan Zohren. “Spatio-Temporal Momentum: Jointly Learning Time-Series and Cross-Sectional Strategies” . In: arXiv:2302.10175 (2023).
- [43] Konstantinos Tolikas. “The lead-lag relation between the stock and the bond markets” . In: The European Journal of Finance 24.10 (2018), pp. 849–866.

- [44] Milena Vuletić, Felix Prenzel, and Mihai Cucuringu. “Fin-GAN: Forecasting and Classifying Financial Time Series via Generative Adversarial Networks” . In: Available at SSRN 4328302 (2023).
- [45] Kieran Wood, Sven Giegerich, et al. “Trading with the Momentum Transformer: An Intelligent and Interpretable Architecture” . In: arXiv:2112.08534 (2021).
- [46] Kieran Wood, Stephen Roberts, and Stefan Zohren. “Slow momentum with fast reversion: A trading strategy using deep learning and changepoint detection” . In: arXiv:2105.13727 (2021).
- [47] Kieran Wood, Stephen Roberts, and Stefan Zohren. “Slow momentum with fast reversion: A trading strategy using deep learning and changepoint detection” . In: The Journal of Financial Data Science 4.1 (2022), pp. 111–129.
- [48] Di Wu et al. “Detecting leaders from correlated time series” . In: International Conference on Database Systems for Advanced Applications. Springer. 2010, pp. 352–367.
- [49] Can-Zhong Yao and Hong-Yu Li. “Time-varying lead-lag structure between investor sentiment and stock market” . In: The North American Journal of Economics and Finance 52 (2020), p. 101148.
- [50] Yichi Zhang, Mihai Cucuringu, Alexander Shestopaloff, et al. Supplemental Material: Dynamic Time Warping for Lead-Lag Relationships in Lagged Multi-Factor Models. Mendeley Data. Version V1. 2023. doi: [10.17632/wpszpcftg2.1](https://doi.org/10.17632/wpszpcftg2.1).
- [51] Yichi Zhang, Mihai Cucuringu, Alexander Y Shestopaloff, et al. “Robust Detection of Lead-Lag Relationships in Lagged Multi-Factor Models” . In: arXiv:2305.06704 (2023).
- [52] Stefan Zohren, Stephen Roberts, Xiaowen Dong, et al. “Learning to Learn Financial Networks for Optimising Momentum Strategies” . In: arXiv preprint arXiv:2308.12212 (2023).

一个附录

A.1 性能指标

累积PnL是所有交易日每日PnL的总和

$$\text{Cumulative PnL} = \sum \text{PnL}_{\text{rescaled}}. \quad (16)$$

年化预期超额收益(E[Returns])是衡量一项投资在一年内相对于基准指数所获得的超额收益。这个值可以通过

$$E[\text{Returns}] = \text{AVG}(\text{PnL}_{\text{rescaled}}) \cdot 252. \quad (17)$$

年化波动率衡量的是与一项投资相关的一年风险

$$\text{Volatility} = \text{STD}(\text{PnL}_{\text{rescaled}}) \cdot \sqrt{252}. \quad (18)$$

此外，我们计算下行偏差和最大回撤量来衡量下行风险。比起整体风险或波动率，更关心下行风险的投资者往往更喜欢Sortino比率。它由

$$\text{Sortino ratio} = \frac{E[\text{Returns}]}{\text{downside deviation}}. \quad (19)$$

关注长期风险和下行保护的投资者经常使用卡尔玛比率。较高的卡尔玛比率表明该策略相对于其最大跌幅产生了更高的回报，而较低的卡尔玛比率表明考虑到所承担的风险水平，表现不佳。该比率由

$$\text{Calmar ratio} = \frac{E[\text{Returns}]}{\text{maximum drawdown}}. \quad (20)$$

命中率，又称胜率或成功率，衡量的是该策略成功交易的百分比。它被定义为

$$\text{Hit rate} = \frac{|\text{PnL}_{\text{rescaled}}^+|}{|\text{PnL}_{\text{rescaled}}|}, \quad (21)$$

式中 $|\text{PnL}_{\text{rescaled}}^+|$ 为盈利交易数， $|\text{PnL}_{\text{rescaled}}|$ 为总交易数。

平均利润/平均损失(avg. profit / avg. loss)比率衡量的是该策略相对于其平均损失规模的平均利润规模

$$\text{Avg. profit / avg. loss} = \frac{\text{AVG}(\text{PnL}_{\text{rescaled}}^+)}{\text{AVG}(\text{PnL}_{\text{rescaled}}^-)}, \quad (22)$$

其中 $\text{AVG}(\text{PnL}^+)$ 是每笔交易的平均利润， $\text{AVG}(\text{PnL}_{\text{rescaled}}^-)$ 是平均损失

每个贸易。

每笔交易的PnL(不包括交易成本)以基点为单位说明了该策略在市场上为每一篮子G_βorD_α traded所赚取的金额。它由:

$$\text{PnL per trade} = \text{AVG}(\text{PnL}_{\text{rescaled}}) \cdot 10^4, \quad (23)$$

其中我们假设该策略每天交易的名义金额相同(即每个交易日使用恒定的单位赌注大小)。

我们还计算了年化夏普比率，以量化每单位风险所获得的利润

$$\text{Sharpe ratio} = \frac{\text{AVG}(\text{PnL}_{\text{rescaled}})}{\text{STD}(\text{PnL}_{\text{rescaled}})} \cdot \sqrt{252}. \quad (24)$$

在对假设策略样本进行回测时，评估夏普比率的统计显著性非常重要[Bailey and De Prado (2014), Ledoit and Wolf (2008), Michael, Cucuringu, and Howison(2022)]。我们使用零假设H₀:夏普比率= 0的检验，并采用[Bailey and De Prado(2014)]提出的方法计算检验统计量

$$\frac{(\text{Sharpe ratio}) \cdot \sqrt{T - 1}}{\sqrt{1 - \gamma_1 \cdot (\text{Sharpe ratio}) + (\gamma_2 - 1) \cdot (\text{Sharpe ratio})^2 / 4}}, \quad (25)$$

其中夏普比率是我们正在测试的，T表示样本的长度，γ₁和γ₂分别是所选策略的收益分布的偏度和峰度。在零假设下，假定该检验统计量遵循标准常态分配。

为了评估我们算法的预测性能，我们创建了一个直接的交易策略。如果这个策略被证明是有利可图的，并且具有统计上显著的夏普比率，则表明我们有能力利用发现的超前-滞后关系进行预测任务。

A.2 合成数据实验

图13展示了 G_β strategy(左)和 D_α 策略(右)的合成数据实验结果。在同质设置和异质设置下，所有算法的SR都随着天数的增加而增加。此外，当噪声级从1增加到2时，算法的SR没有明显影响。特别是，DTW KMed Mod和DTW KMed Med在 G_β strategy中优于其他算法。

在图14和图15中，随着天数的增加，我们观察到 G_β 和 D_α in无论是 G_β strategy(左)还是 D_α strategy(右)都有一致的模式，无论它是在同质设置还是异质设置中。虽然随着噪声水平从1增加到2，会有轻微的偏差，但总体而言，两种策略的结果都与实验预期一致，这主要是由于滞后矩阵L的结构。

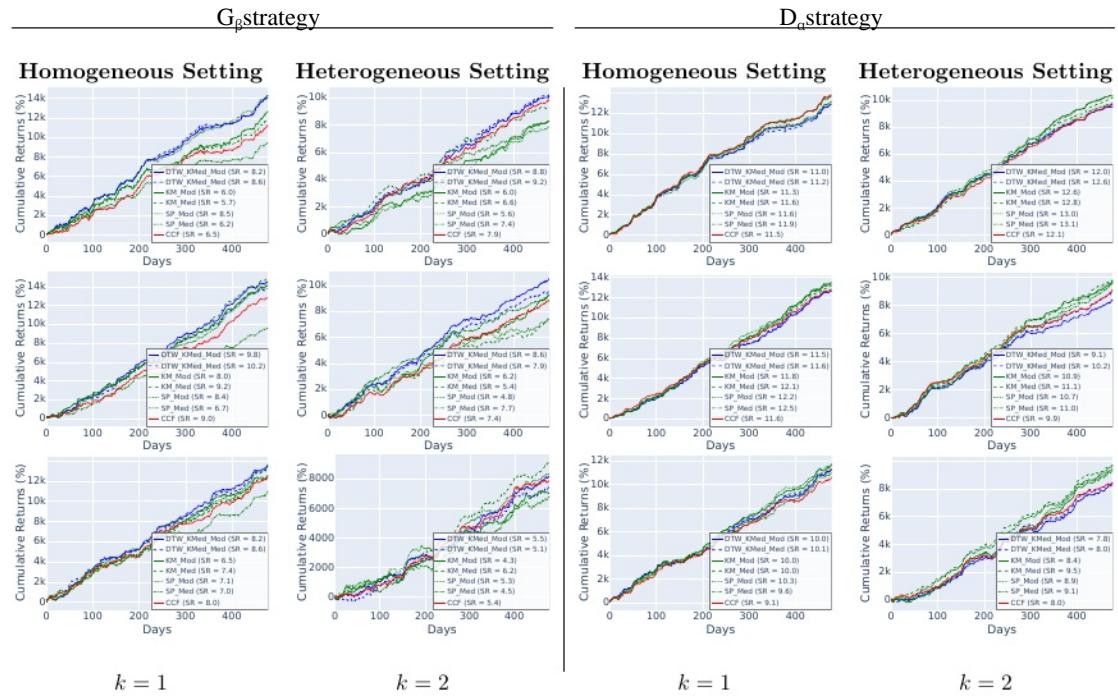


图13:左: G_β strategy。右: D_α strategy。合成数据集累积PnL实验设置了值 $n = 120$, $p = 1$, $\delta = 1$, $\alpha = 0.25$ 。从上面板到下面板，低噪声 $\sigma = 1$ ，中噪声 $\sigma = 1.5$ ，高噪声 $\sigma = 2$ 。

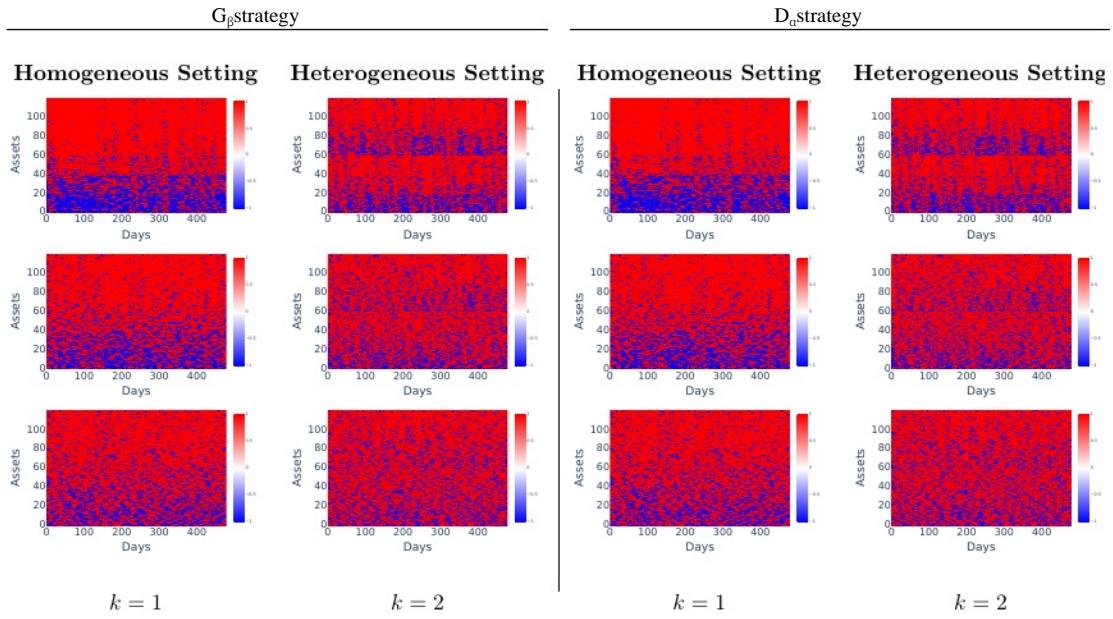


图14:DTW KMod Med:左:G_βstrategy。右:D_αstrategy。蓝色为G_βare, 红色为D_αare。合成数据集设置了n = 120, p = 1, δ = 1, α = 0.25。从上面板到下面板, 低噪声σ = 1, 中噪声σ = 1.5, 高噪声σ = 2。

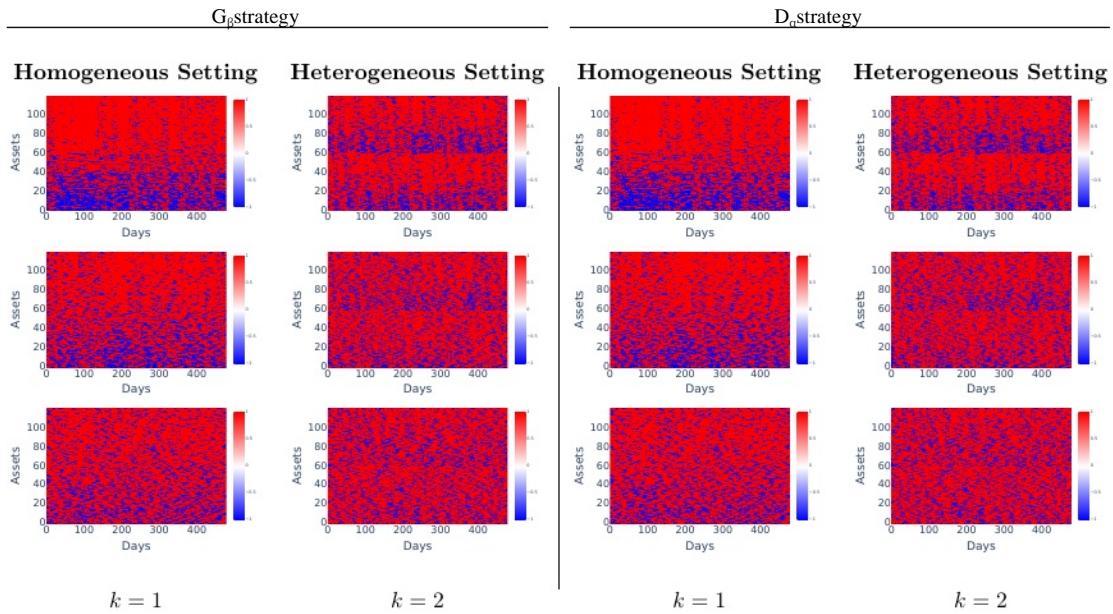


图15:DTW KMod Med:左:G_βstrategy。右:D_αstrategy。蓝色为G_βare, 红色为D_αare。合成数据集设置了n = 120, p = 1, δ = 1, α = 0.25。从上面板到下面板, 低噪声σ = 1, 中噪声σ = 1.5, 高噪声σ = 2。

A.3 期货数据集详情

表[12、13、14、15、16、17、18、19]显示了我们使用的期货合约及其描述，来自Pinnacle Data Corp CLC数据库。该数据基于比率调整方法，它消除了合约与合约之间的差距，但它不会变为负值，因为如果价格条走低，它会减少价格条的大小，如果价格条上升，它会增加价格条的大小。

表12:谷物

Identifier	Description
KW	WHEAT, KC
MW	WHEAT, MINN
NR	ROUGH RICE
W_	WHEAT, CBOT
ZC	CORN, Electronic
ZL	SOYBEAN OIL, Electronic
ZM	SOYBEAN MEAL, Electronic
ZO	OATS, Electronic
ZR	ROUGH RICE, Electronic
ZS	SOYBEANS, Electronic
ZW	WHEAT, Electronic

表13:肉类

Identifier	Description
DA	MILK III, Comp.
ZF	FEEDER CATTLE, Electronic
ZT	LIVE CATTLE, Electronic
ZZ	LEAN HOGS, Electronic

表14:木纤维

Identifier	Description
LB	LUMBER

表15:金属

Identifier	Description
ZG	GOLD, Electronic
ZI	SILVER, Electronic
ZP	PLATINUM, electronic
ZA	PALLADIUM, electronic
ZK	COPPER, electronic

表16:指数

Identifier	Description
AX	GERMAN DAX INDEX
CA	CAC40 INDEX
DX	US DOLLAR INDEX
EN	NASDAQ, MINI
ES	S & P 500, MINI
GI	GOLDMAN SAKS C. I.
LX	FTSE 100 INDEX
MD	S & P 400 (Mini electronic)
NK	NIKKEI INDEX
SC	S & P 500, composite

表17:债券

Identifier	Description
DT	EURO BOND (BUND)
FB	T-NOTE, 5yr composite
GS	GILT, LONG BOND
SS	STERLING, SHORT
TY	T-NOTE, 10yr composite
TU	T-NOTES, 2yr composite
US	T-BONDS, composite
UB	EURO BOBL
UZ	EURO SCHATZ

表18:货币

Identifier	Description
AN	AUSTRALIAN \$\$ composite
BN	BRITISH POUND, composite
CN	CANADIAN \$\$ composite
EC	EURODOLLAR, composite
FN	EURO, composite
JN	JAPANESE YEN, composite
MP	MEXICAN PESO
SN	SWISS FRANC, composite

表19:油类

Identifier	Description
ZB	RBOB, Electronic
ZH	HEATING OIL, electronic
ZN	NATURAL GAS, electronic
ZU	CRUDE OIL, Electronic