第四章 **IIR**数字滤波器设计和实现

滤波器概述

滤波器的性能指标

IIR滤波器的设计方法

模拟原型法

根据性能指标通过巴特沃斯或切比雪夫逼近得到频率幅度函数$|H(j\Omega)|$，再通过频率响应和传输函数的关系得到模拟低通滤波器传输函数$H_1(s)$，然后通过模拟频率变换法/数字频率变换法得到所要求的数字低通、高通、带通或带阻滤波器的传输函数$H_d(z)$，从而得到IIR滤波器。

模拟滤波器设计

理想滤波器及其频率响应

理想滤波器

理想低通滤波器：可以无失真传播信号，存在时延t_d

$$y(t) = Ax(t - t_d)$$

得到频率响应

$$
\begin{aligned}
&H(\mathrm{j}\Omega)=\frac{Y(\mathrm{j}\Omega)}{X(\mathrm{j}\Omega)}=\frac{A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega t_{\mathrm{d}}}X(\mathrm{j}\Omega)}{X(\mathrm{j}\Omega)}=A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega_{\mathrm{d}}}\\
&|H(\mathrm{j}\Omega)|=\begin{cases}A & \text{通带}\\ 0 & \text{阻带}\end{cases}\\
&\arg[H(\mathrm{j}\Omega)]=-\Omega t_{\mathrm{d}}
\end{aligned}
$$

通过频率响应$H(j\Omega)$求传输函数$H(s)$

重要性质：

$$
|H(j\Omega)|^2=H(j\Omega)H^*(j\Omega)\xlongequal{\text{实函数}}H(j\Omega)H(-j\Omega)=H(s)H(-s)|_{s=j\Omega}
$$

过程：

$$
H(j\Omega)\xrightarrow{\text{重要性质}}H(s)H(-s)\xrightarrow{\text{零极点分配}}H(s)
$$

零极点分配的原则：

左半平面的极点，任意一半（通常为左半平面）的零点（成共轭对）分配给$H(s)$得到

$$
H(s)=K_0\frac{(s-z_0)(s-z_1)\cdots(s-z_m)}{(s-p_0)(s-p_1)\cdots(s-p_n)}
$$

同时根据$H(\mathrm{j}\Omega)|_{\Omega=0}=H(s)|_{s=0}$确定$K_0$

巴特沃斯滤波器

幅度平方函数：

$$
|H(\mathrm{j}\Omega)|^2=\frac{1}{1+(\Omega/\Omega_{\mathrm{c}})^{2N}}
$$

给定指标要求：$(\Omega_p,A_p),(\Omega_s,A_s)$

求**N**：

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\Omega_p}{\Omega_c}\right)^{2N}&=10^{0.1A_p}-1\\
\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c}\right)^{2N}&=10^{0.1A_s}-1
\end{aligned}
$$

$$\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_p}\right)^{2N} = \frac{10^{0.1A_s}-1}{10^{0.1A_p}-1}$$

$$N \geq \frac{\lg \frac{10^{0.1A_s}-1}{10^{0.1A_p}-1}}{2\lg\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_p}\right)}$$

取整数得到N

求Ω_c：

若由$\Omega_c = \frac{\Omega_p}{\sqrt[2N]{10^{0.1A_p-1}}}$确定，则阻带满足，通带可能不满足。
若由$\Omega_c = \frac{\Omega_s}{\sqrt[2N]{10^{0.1A_s-1}}}$确定，则通带满足，阻带可能不满足。

求传输函数$H(s)$：

$$|H(\mathrm{j}\Omega)|^2 = \frac{1}{1+(\Omega/\Omega_\mathrm{c})^{2N}}$$

令$\Omega = \frac{s}{j}(\Omega^2 = -s^2)$，得

$$H(s)H(-s) = \frac{1}{1+\left(\frac{s}{j\Omega_c}\right)^{2N}}$$

零极点分配：

$$s_k = j\Omega_c(-1)^{\frac{1}{2N}} = \Omega_c e^{j\left(\frac{1}{2}+\frac{2k-1}{2N}\right)\pi} \quad k=1,2,\cdots,N$$

归一化，令$p = \frac{s}{\Omega_c}$

$$p_k = \frac{s_k}{\Omega_c} = e^{j\left(\frac{1}{2}+\frac{2k-1}{2N}\right)\pi} \quad k=1,\cdots,N$$

得到$H(s)$

得到，分母多项式也可以通过查表得到

$$H(p) = \frac{1}{\prod_{k=1}^{N}(p-p_k)}$$

从而得到

$$H(s) = H(p)|_{p=\frac{s}{\Omega_c}} = \frac{\Omega_c^N}{\prod_{k=1}^{N}(s-s_k)}$$

切比雪夫滤波器

幅度平方函数：

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2 C_N^2(\Omega/\Omega_p)}$$

$$C_N(x) = \begin{cases} \cos^N \arccos x & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ \cosh^N \operatorname{arcosh} x & x > 1 \end{cases}$$

其中ε 为波动参数，越小，（通带）幅度波动越小。

给定指标要求：$(\Omega_p, A_p), (\Omega_s, A_s)$

求 ε 和 N

$$\varepsilon = \sqrt{10^{0.1A_\mathrm{p}} - 1} \quad N \geq \frac{\mathrm{ch}^{-1}\left(\frac{\sqrt{10^{0.1A_s-1}}}{\sqrt{10^{0.1A_p}-1}}\right)}{\mathrm{ch}^{-1}\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_p}\right)}$$

求幅度平方函数

$$|H(\mathrm{j}\Omega)|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2 C_N^2\left(\frac{\Omega}{\Omega_\mathrm{p}}\right)}$$

求传输函数

$$H(s)H(-s) = |H(\mathrm{j}\Omega)|^2\Big|_{\Omega=\frac{s}{\mathrm{j}}} = \frac{1}{1+\varepsilon^2 C_N^2\left(\frac{s}{\mathrm{j}\Omega_\mathrm{p}}\right)}$$

零极点分配

归一化，令$p = \frac{s}{\Omega_c}$

$$p_k = \frac{s_k}{\Omega_p} \quad k = 1, \cdots, N$$

得到$H(s)$

查表得到$H(p)$

$$H(p) = \frac{1}{\epsilon \cdot 2^{N-1} \prod_{k=1}^{N}(p-p_k)}$$

从而得到$H(s)$

$$H(s)=H(p)|_{p=\frac{s_k}{\Omega_p}}=\frac{1}{\epsilon\cdot 2^{N-1}\prod_{k=1}^{N}\left(\frac{s}{\Omega_p}-p_k\right)}=\frac{\Omega_p^N}{\epsilon\cdot 2^{N-1}\prod_{k=1}^{N}(s-p_k\Omega_p)}$$

模拟滤波器的频率变换

如何求得低通滤波器后得到其他通

冲激响应不变法

已知模拟滤波器传输函数$H(s)$，如何得到数字滤波器传输函数$H(z)$

冲激响应不变法步骤（通过模拟滤波器设计数字滤波器的步骤）

给定的数字滤波指标：ω_p, A_p, ω_s, A_s

1. 确定取样间隔 T ，计算模拟滤波器指标 Ω_p, Ω_s

$$T<\frac{2\pi}{\Omega_m}\quad \Omega_{\mathrm{p}}=\frac{\omega_{\mathrm{p}}}{T}\quad \Omega_{\mathrm{s}}=\frac{\omega_{\mathrm{s}}}{T}$$

2. 根据模拟滤波器指标 Ω_{p}、Ω_{s}、A_{p}、A_{s} 设计模拟低通滤波器 $H_{\mathrm{a}}(s)$（巴特沃斯切比雪夫等）
3. 部分分式展开 $H_{\mathrm{a}}(s)$

$$H_{\mathrm{a}}(s)=\sum_{i=1}^{N}\frac{A_i}{s-s_i}$$

4. 得到数字滤波器传输函数 $H(z)$

$$H(z)=T\sum_{i=1}^{N}\frac{A_i}{1-\mathrm{e}^{s_iT}z^{-1}}$$

冲激响应不变法的缺点

可能会出现混叠失真，适合用来设计低通、带通滤波器，不适合高通、带阻滤波器。

双线性变换法

双线性变换法设计步骤

数字滤波器技术指标 $\omega_p, \omega_s, A_p, A_s$

1. 确定数字滤波器技术指标 $\omega_p, \omega_s, A_p, A_s$ (弧度表示) 或 f_p, f_s, A_p, A_s (Hz 表示) 如果是 Hz 表示的指标，转换为弧度表示的 $\omega_p, \omega_s (\omega = 2\pi f T)$
2. 计算预畸变模拟滤波器指标 Ω_s, Ω_p
   预畸变公式: $\Omega = \frac{2}{T} \tan \frac{\omega}{2}$
3. 根据模拟滤波器指标 $\Omega_s, \Omega_p, A_s, A_p$ ，设计模拟低通原型，得到传输函数 $H_a(s)$
4. 利用双线性变换，得到数字滤波器传输函数
   $H(z) = H_a(s)|_{s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$

冲激响应不变法和双线性变换法的优缺点

见ppt

高通、带通、带阻IIR数字滤波器的设计

IIR数字滤波器的实现结构

数字系统的基本单元

直接型

级联型

并联型