第二章 离散时间信号与离散时间系统

取样和内插

取样

离散时间信号

时域离散系统的基本概念

因果系统：

与未来的输入无关

如y(n)与x(n+1)无关

对于LTI系统：充要条件是$h(n)=0 \quad n<0$

离散系统的差分方程描述及信号流图

FIR（非递归型）：输出只与当前和过去的输入有关，与输出无关

$y(n)=\sum_{i=0}^{N} a_i x(n-i)$

IIR（递归型）：输出还与过去的输出有关（过去输出存在反馈）

$y(n)=\sum_{i=0}^{N} a_i x(n-i)+\sum_{k=1}^{N} b_k y(n-k)$

> PS：注意与当前的输出无关，所以k从1开始到N

离散时间信号的傅立叶变换DTFT

变换对

$$
\begin{gathered}
X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega} \\
x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega}\mathrm{d}\omega
\end{gathered}
$$

性质

线性

时延特性

$$
\begin{gathered}
x(n-m)\longleftrightarrow e^{-j\omega m}X\left(e^{j\omega}\right)e^{jn\omega_0} \\
x(n)\longleftrightarrow X\left(e^{j(\omega-\omega_0)}\right)
\end{gathered}
$$

周期性

$$
x(n)=e^{-jn2\pi}x(n)\longleftrightarrow X\left(e^{j(\omega+2\pi)}\right)=X\left(e^{j\omega}\right)
$$

卷及特性

$$x(n) * h(n) \longleftrightarrow X\left(e^{j\omega}\right)H\left(e^{j\omega}\right)$$

$$x(n) \cdot h(n) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi} X\left(e^{j\omega}\right) * H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X\left(e^{j\theta}\right)H\left(e^{j(\omega-\theta)}\right)d\theta$$

对称性

共轭对称序列（对应实数偶序列）： $x_{\mathrm{e}}(n)=x_{\mathrm{e}}^{*}(-n)$

共轭反对称（对应实数奇序列）： $x_{\mathrm{o}}(n)=-x_{\mathrm{o}}^{*}(-n)$

性质：任何序列可以拆解为$x(n)=x_{\mathrm{e}}(n)+x_{\mathrm{o}}(n)$

共轭性质：

$x^{*}(n) \stackrel{\mathrm{F}}{\leftrightarrow} X^{*}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}\right)$

$x^{*}(-n) \stackrel{\mathrm{F}}{\leftrightarrow} X^{*}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right)$

虚实与奇偶对应性质： 虚对奇，实对偶，虚前有j

$\operatorname{Re}[x(n)] \stackrel{\mathrm{F}}{\leftrightarrow} X_{\mathrm{e}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right)$

$\mathrm{j}\operatorname{Im}[x(n)] \stackrel{\mathrm{F}}{\leftrightarrow} X_{\mathrm{o}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right)$

$x_{\mathrm{e}}(n) \stackrel{\mathrm{F}}{\leftrightarrow} \operatorname{Re}\left[X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right)\right]$

$x_{\mathrm{o}}(n) \stackrel{\mathrm{F}}{\leftrightarrow} \mathrm{j}\operatorname{Im}\left[X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right)\right]$

对称相等性：

$X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right)=X^{*}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}\right)$

$\operatorname{Re}\left[X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right)\right]=\operatorname{Re}\left[X\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}\right)\right]$

$\operatorname{Im}\left[X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right)\right]=-\operatorname{Im}\left[X\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}\right)\right]$

$\left|X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right)\right|=\left|X\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}\right)\right|$

$\arg\left[X\left(e^{\mathrm{j}\omega}\right)\right]=-\arg\left[X\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}\right)\right]$

$x_{\mathrm{e}}(n) \leftrightarrow \operatorname{Re}\left[X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right)\right]$

$x_{0}(n) \leftrightarrow \mathrm{j}\operatorname{Im}\left[X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right)\right]$

Z变换的定义及收敛域

Z变换

变换对

$$
\begin{aligned}
X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \\
x(n) &= \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \oint_c X(z) z^{n-1} \,\mathrm{d}z
\end{aligned}
$$

收敛域

为满足Z变换存在的条件$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)z^{-n}| < \infty$，z需要满足的集合称为收敛域

收敛域性质：

1. 有限长序列：收敛域为整个平面
2. 右边序列：收敛域为某个圆外面
3. 左边序列：收敛域为某个圆里面
4. 双边序列：收敛域为环状
5. 稳定序列：收敛域包含单位圆

典型信号的Z变换：

$x(n) = a^n u(n) \to \frac{1}{1-az^{-1}}, |Z| > |a|$

Z反变换

求Z反变换的方法

部分分式法（因式分解）

去看hhj课件

留数法

留数定理：$\int_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res} f\left(a_k\right)$

留数法：z_k为内极点，z_m为外极点。当围线内存在多重极点，可求围线外留数。

$$
\begin{aligned}
x(n) &= \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \oint_c X(z) z^{n-1} \, \mathrm{d}z \\
&= \sum_k \operatorname{Res}\left[X(z) z^{n-1}, z_k\right] \\
&= -\sum_m \operatorname{Res}\left[X(z) z^{n-1}, z_m\right]
\end{aligned}
$$

Z变换的性质

见hhj课件

Z变换与拉普拉斯变换、傅立叶变换的关系

离散系统的频域分析