数字信号处理
Digital Signal Processing

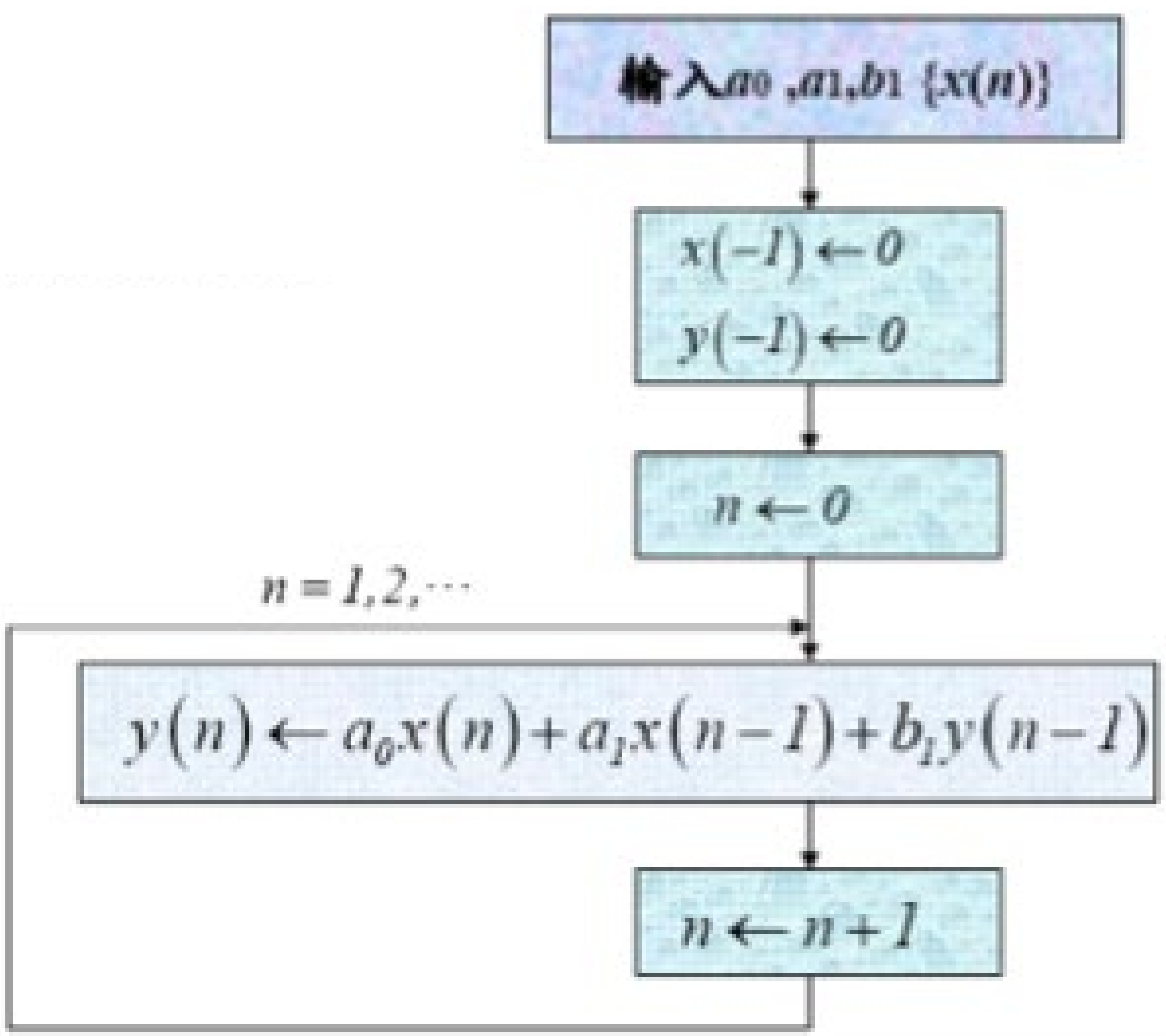
主讲：刘而云
浙江大学 信电学院

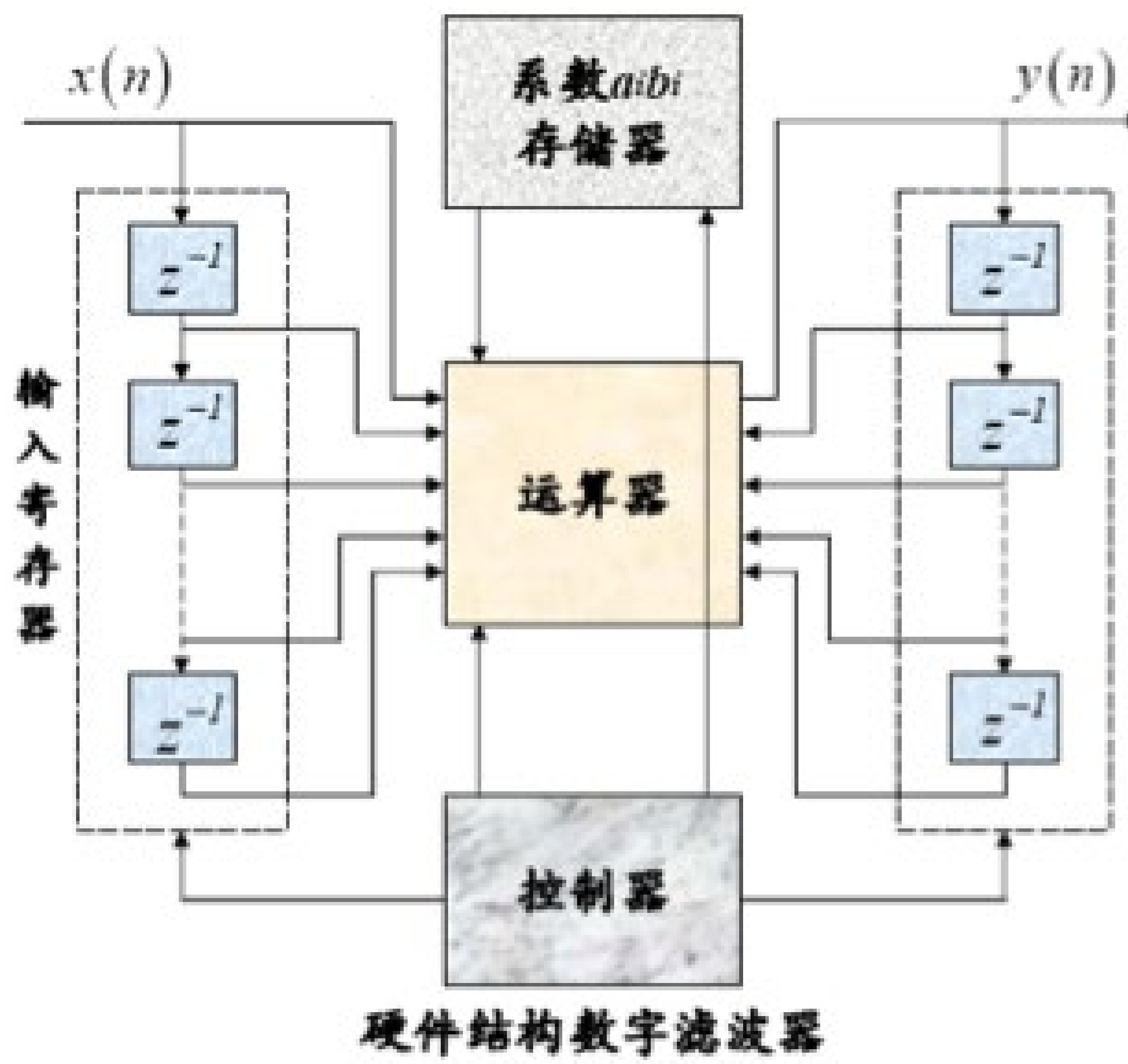
回顾

- 切比雪夫滤波器设计方法
- 冲击响应不变法
- 双线性变换法
- 高通、带通、带阻滤波器设计

4.8 IIR数字滤波器的实现结构

- 滤波器的实现方式
- 软件 - 计算机编程，通用处理器，程序实现(Matlab，C，C＋＋)
- 硬件 - 专用硬件，数字信号处理器（DSP），FPGA，ASIC等

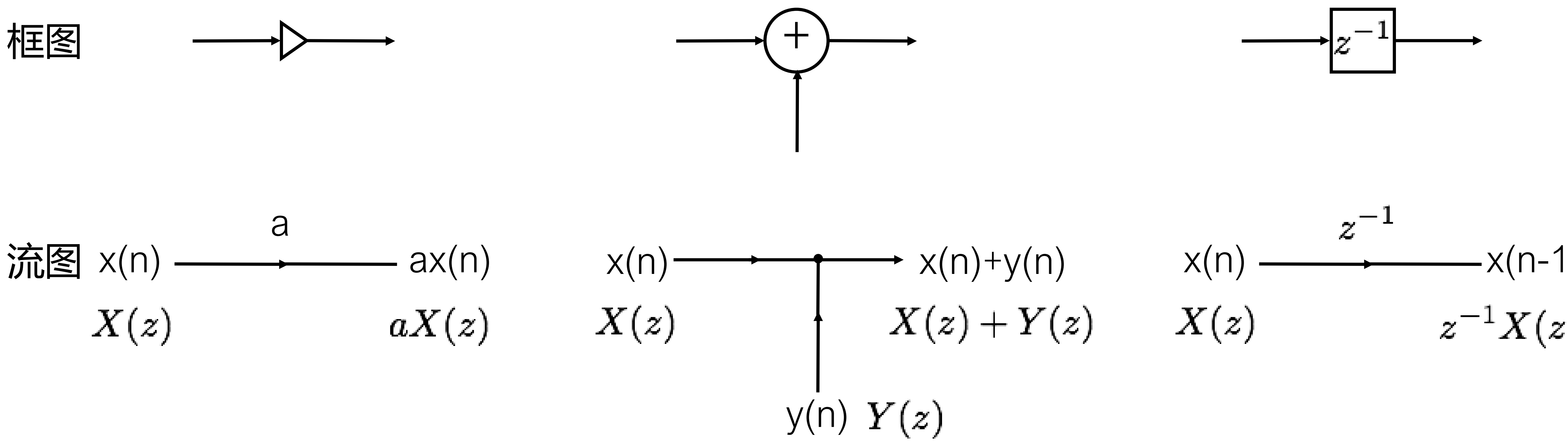




$$y(n) = a_0x(n) + a_1x(n-1) + b_1y(n-1)$$

4.8 IIR数字滤波器的实现结构

- 数字系统的基本单元：乘法器、加法器、延迟器

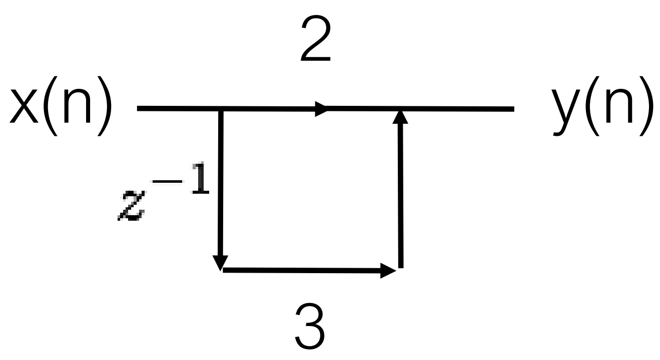


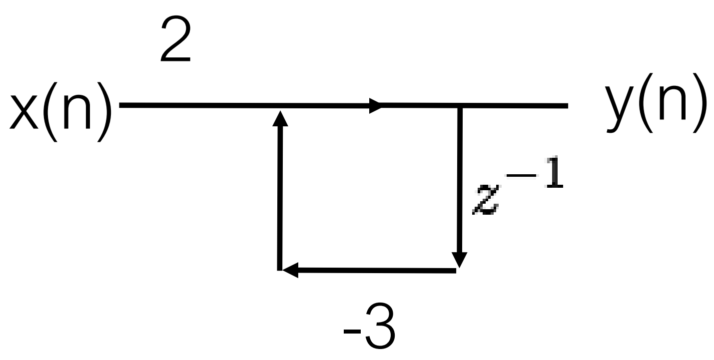
乘法器　　加法器　　延迟器

- 滤波器的实现结构：直接型，级联型，并联型
- 不同的实现结构，所使用的基本单元不同
- 系统实现考虑问题：复杂度，精度，功耗，成本
- 在特定条件下，设计最优的实现结构

4.8 IIR数字滤波器的实现结构

- 请写出以下系统的实现结构：
- $y(n) = 2x(n) + 3x(n-1)$
- $y(n) = 2x(n) - 3y(n-1)$



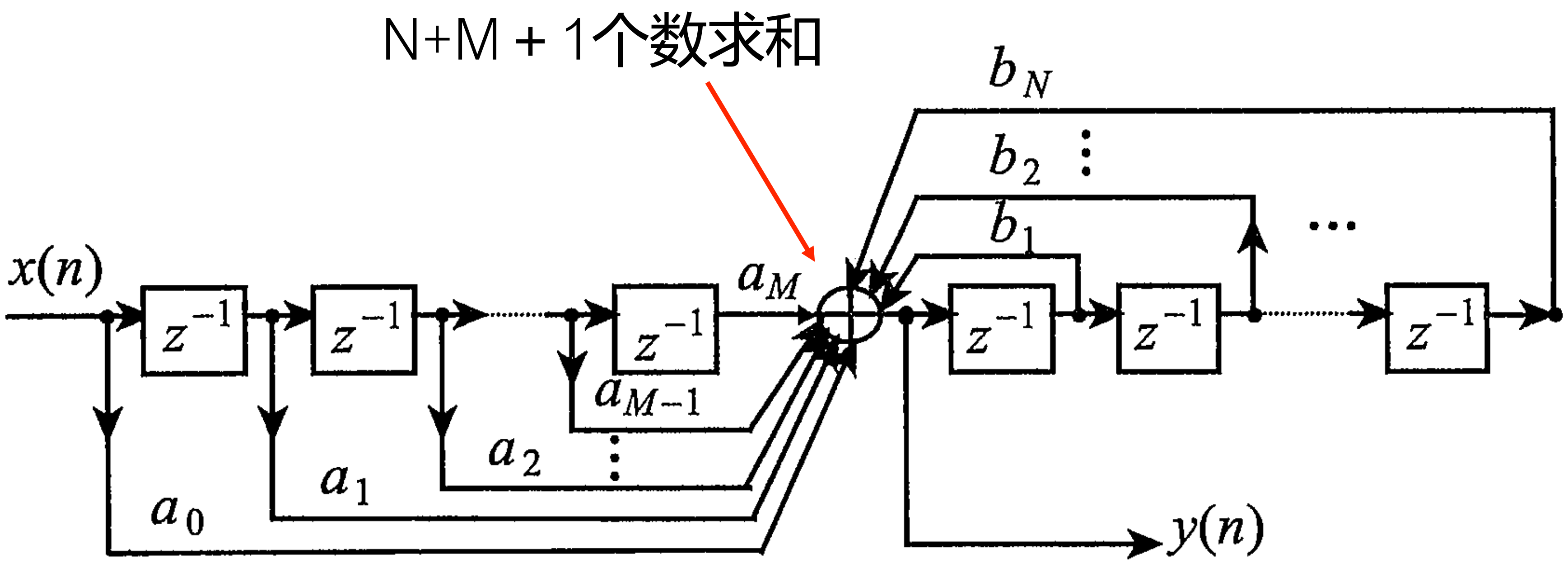


4.8.1 直接型

IIR滤波器差分方程：$y(n)=\sum_{i=0}^{M}a_i x(n-i)+\sum_{i=1}^{N}b_i y(n-i)$

两边Z变换：$Y(z)=\sum_{i=0}^{M}a_i z^{-i}X(z)+\sum_{i=1}^{N}b_i z^{-i}Y(z)$

可直接写出框图：



一次性求和，硬件直接实现困难

4.8.1 直接型

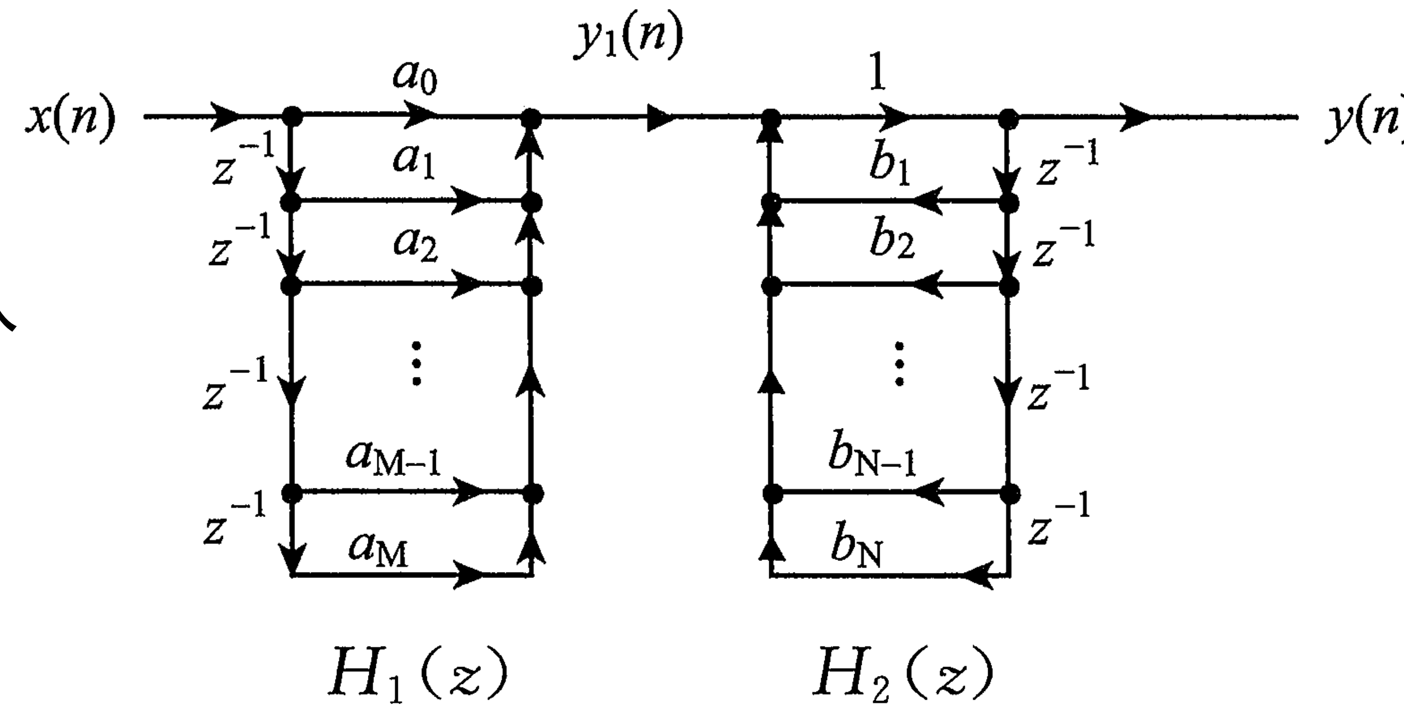
$$Y(z)=\sum_{i=0}^{M}a_i z^{-i}X(z)+\sum_{i=1}^{N}b_i z^{-i}Y(z)$$

分多次累积求和实现，每次求和有两个输入

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\sum_{i=0}^{M}a_i z^{-i}}{\boxed{1}-\sum_{i=1}^{N}b_i z^{-i}}$$

$$=\sum_{i=0}^{M}a_i z^{-i}\ \frac{1}{1-\sum_{i=1}^{N}b_i z^{-i}}$$

零点网络　极点网络



直接I型实现结构

$$y_1(n)=\sum_{i=0}^{M}a_i x(n-i)$$

$$y(n)=y_1(n)+\sum_{i=1}^{N}b_i y(n-i)$$

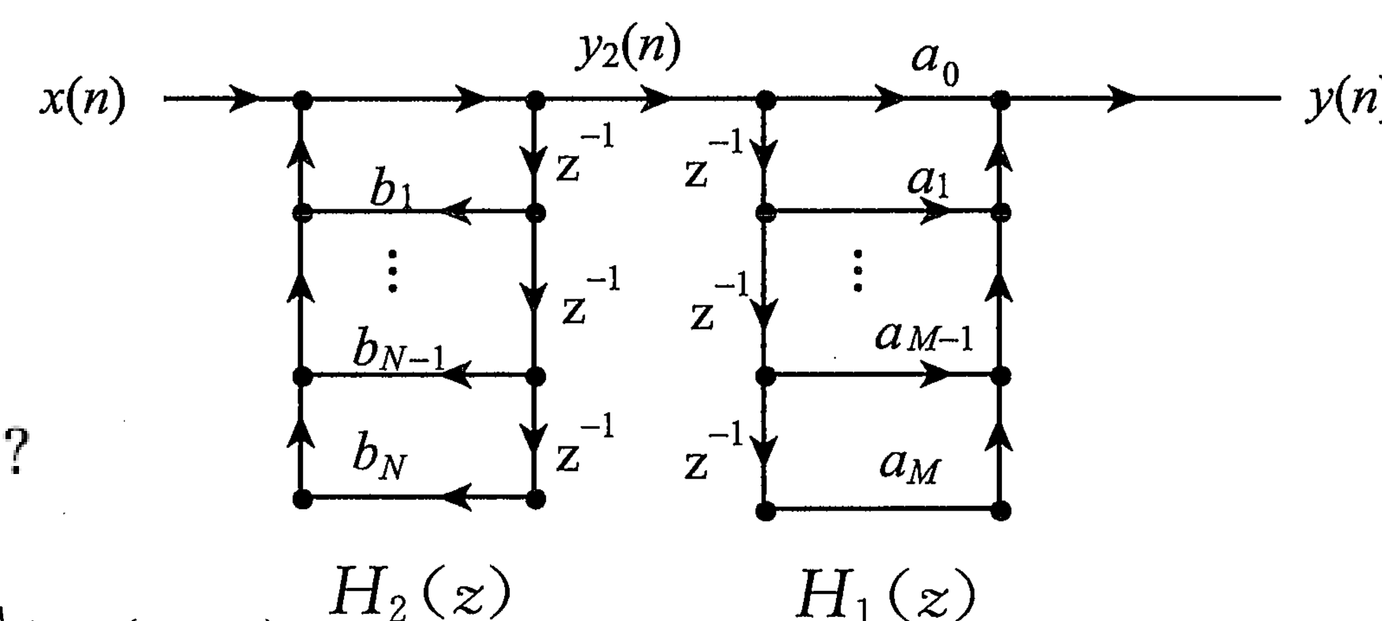
$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{Y_1(z)}{X(z)}\cdot\frac{Y(z)}{Y_1(z)}$$

$$=H_1(z)H_2(z)$$

$$=H_2(z)H_1(z)$$

$$y_2(n)=?$$

$$y_2(n)=x(n)+\sum_{i=1}^{N}b_i y_2(n-i)$$

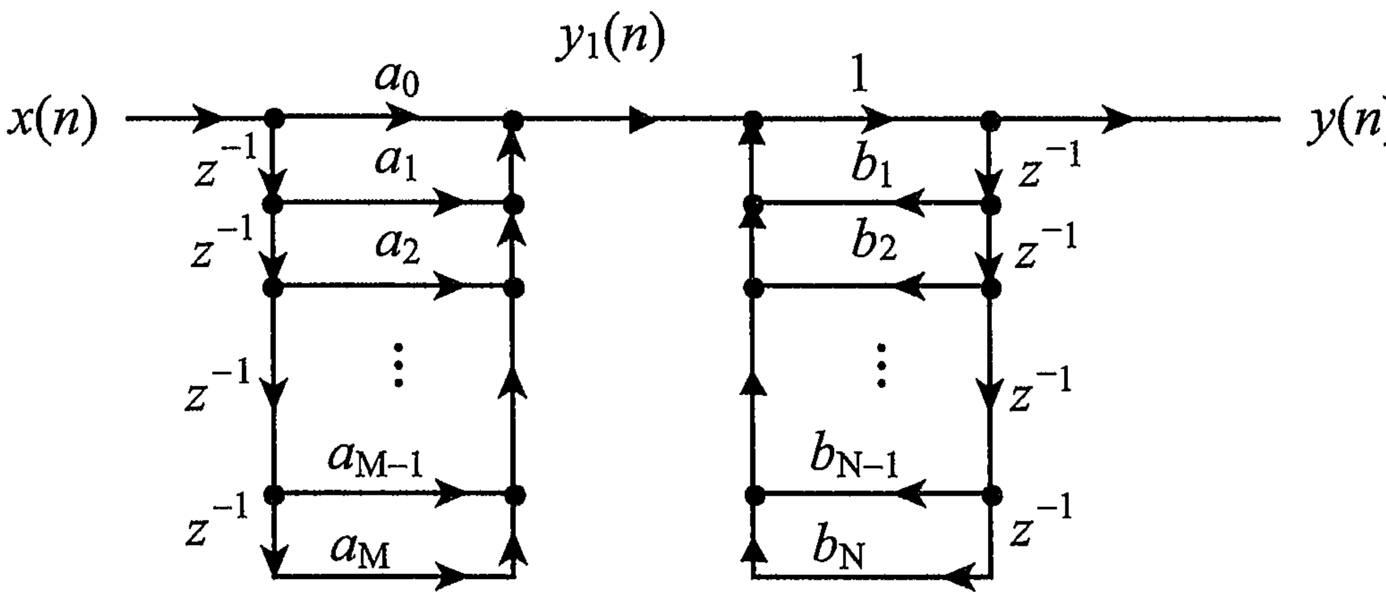


直接II型实现结构

4.8.1 直接型

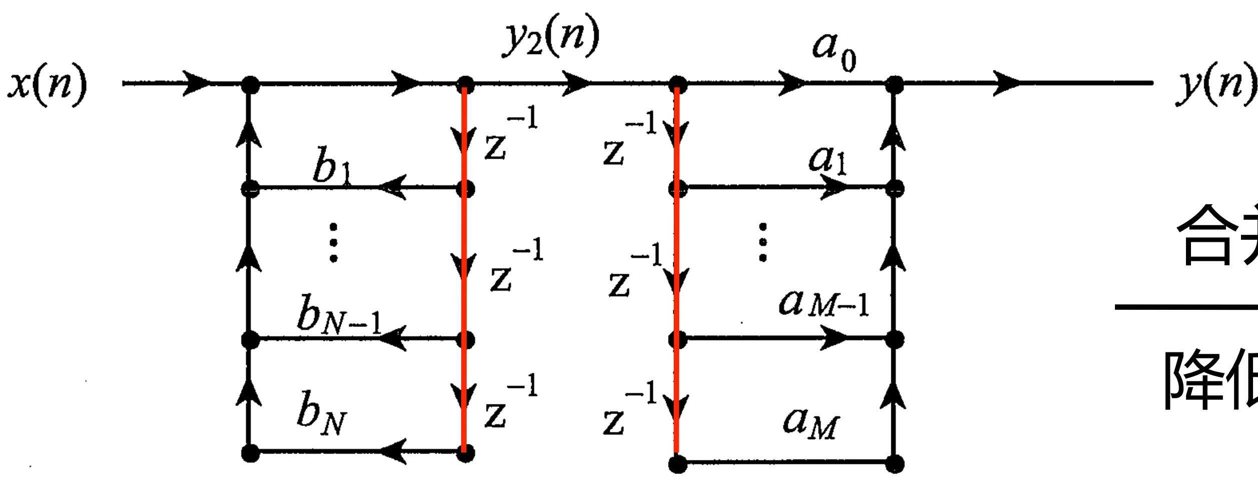
- 请写以下系统传输函数及其直接I型和直接II型实现结构
- y(n) = 2x(n) + 3x(n-1) - x(n-2) - y(n-2)
- 3y(n) = 2x(n) + 3x(n-1) + y(n-1) + 2y(n-2)

$$Y(z) = \sum_{i=0}^{M} a_i z^{-i} X(z) + \sum_{i=1}^{N} b_i z^{-i} Y(z)$$



4.8.1 直接型

直接II型实现结构

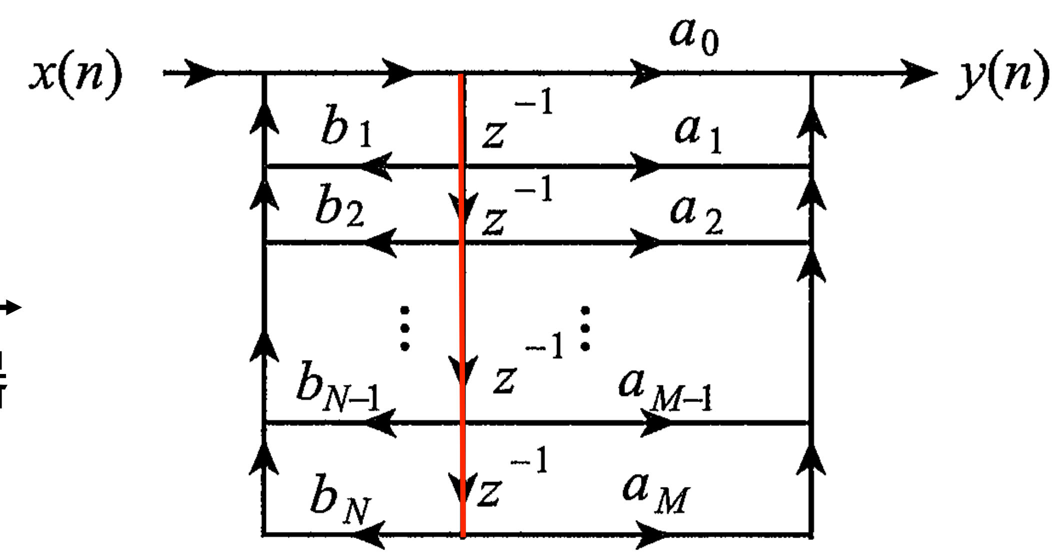


合并延迟单元

降低一半延迟器

延迟单元有重复

正准I型实现结构 (N=M)

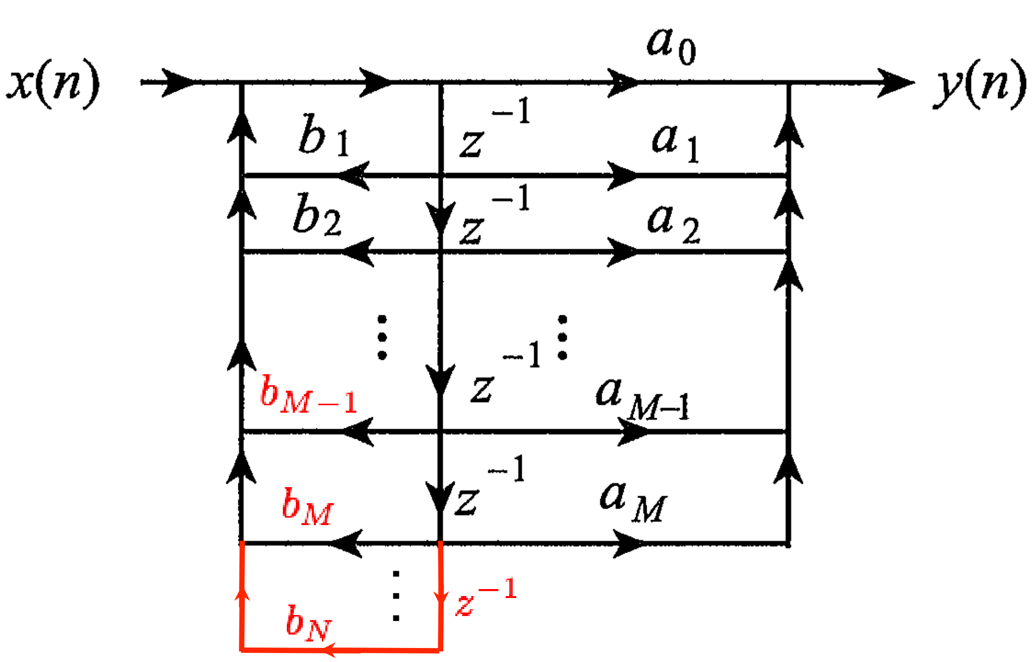


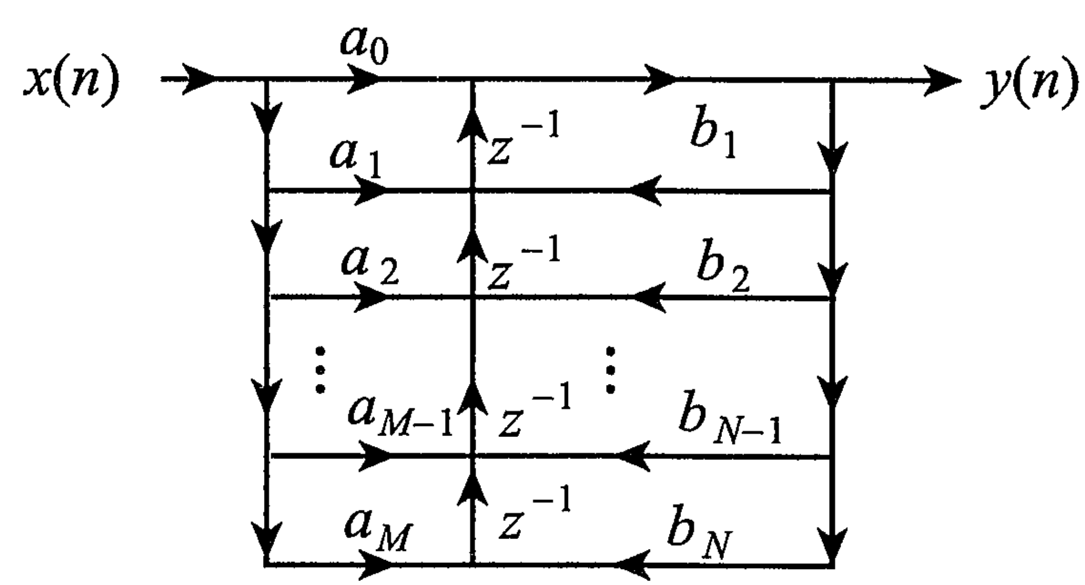
$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\sum_{i=0}^{M}a_i z^{-i}}{1-\sum_{i=1}^{N}b_i z^{-i}}$$

转置

(信号流图转置定理)

当 $N\neq M$时，正准型结构?

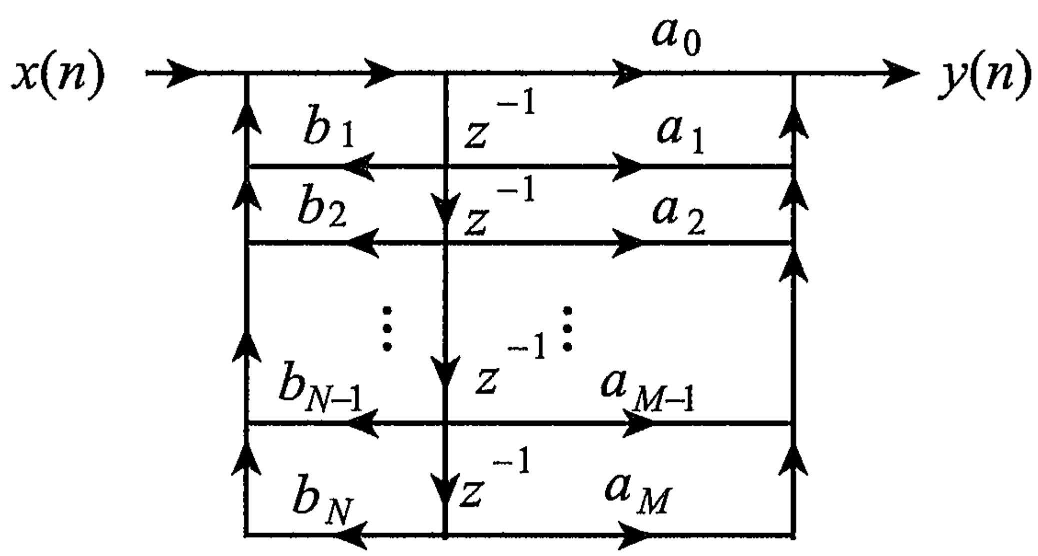


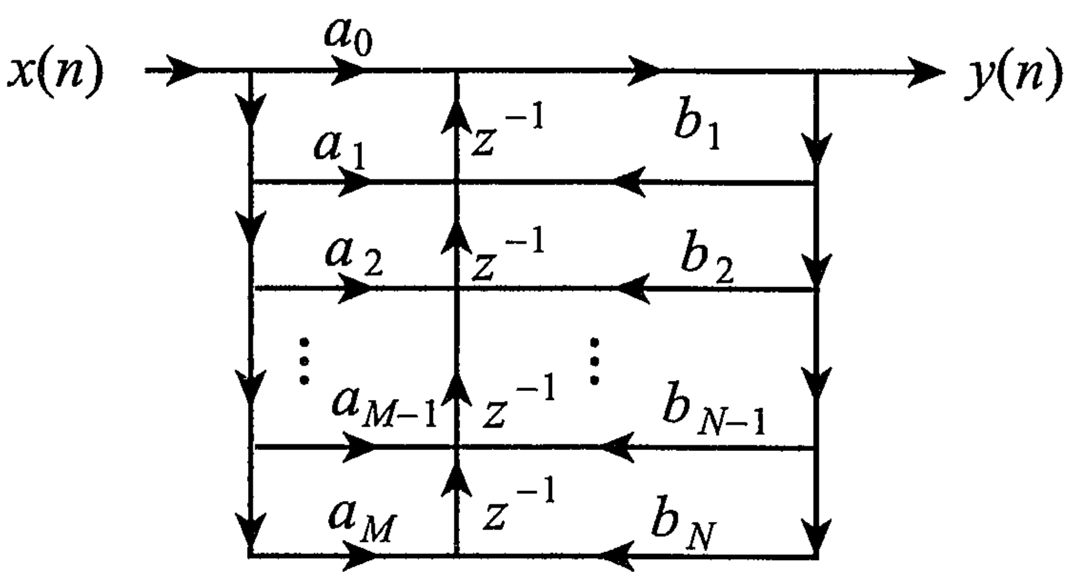


正准II型实现结构(N=M)

4.8.1 直接型

- 请写以下系统的正准I型和正准II型实现结构
- y(n) = 2x(n) + 3x(n-1) - x(n-2) - y(n-2)
- 3y(n) = 2x(n) + 3x(n-1) + y(n-1) + 2y(n-2)





4.8.1 直接型

直接型（直接I、II型，正准I、II型）优点

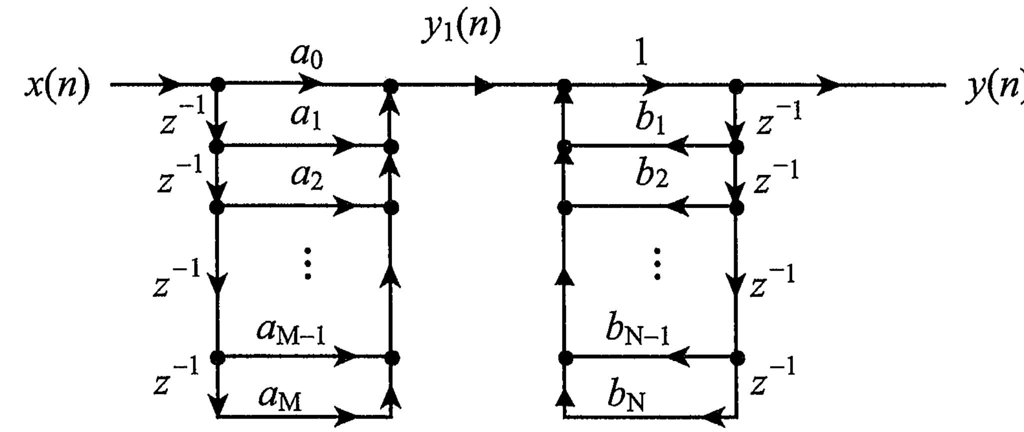
- 直观简单
- 延时器数目少

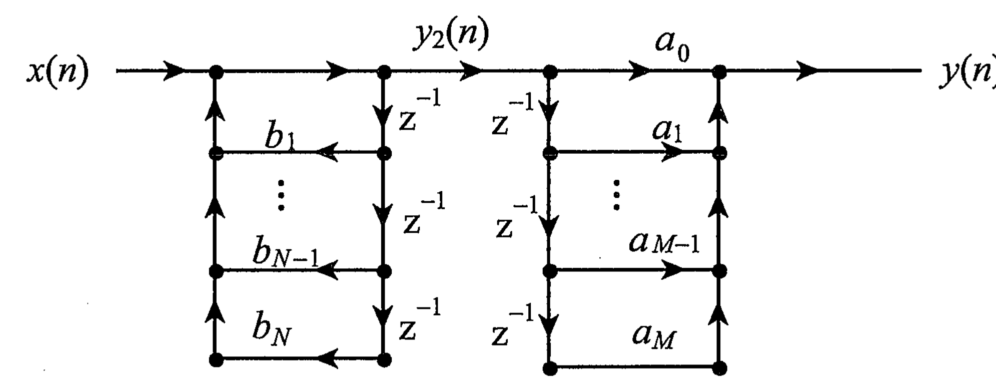
直接型（直接I、II型，正准I、II型）缺点

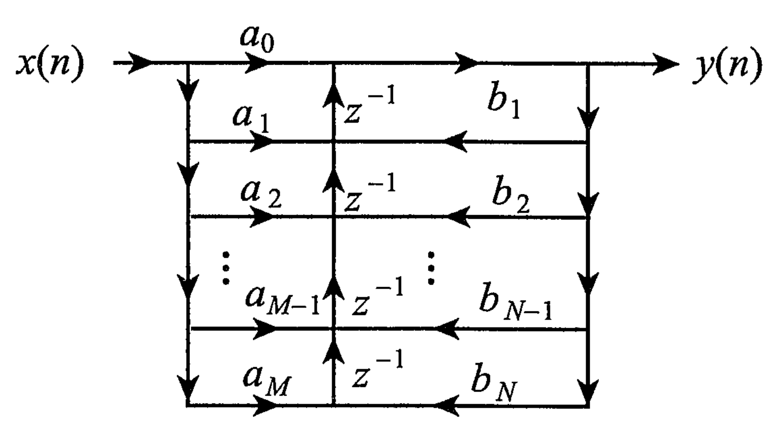
- 每一个系数的变化都会影响所有零点（或极点）位置
- 难以实现对零极点的调整
- 零极点位置受有限字长效应误差大
- 阶次越高，影响越大
- 适合阶次低的网络

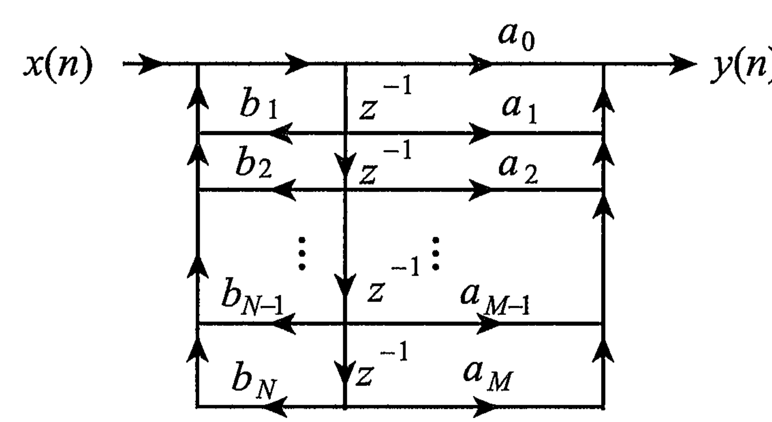
解决办法

- 将大网络分解为独立多小网络，再集成
- 级联网络
- 并联网络









4.8.2 级联型

零极点形式：$H(z)=\dfrac{\sum\limits_{i=0}^{M}a_iz^{-i}}{1-\sum\limits_{i=1}^{N}b_iz^{-i}}=A\dfrac{\prod\limits_{i=1}^{M}(1-c_iz^{-1})}{\prod\limits_{i=1}^{N}(1-d_iz^{-1})}$ 因式分解

$$=A\frac{\prod\limits_{i=1}^{M_1}(1-q_iz^{-1})\prod\limits_{i=1}^{M_2}(1-h_iz^{-1})(1-h_i^*z^{-1})}{\prod\limits_{i=1}^{N_1}(1-p_iz^{-1})\prod\limits_{i=1}^{N_2}(1-g_iz^{-1})(1-g_i^*z^{-1})}$$

实系数多项式分解：
复根必成共轭对出现

$$=A\frac{\prod\limits_{i=1}^{M_1}(1-q_iz^{-1})\prod\limits_{i=1}^{M_2}(1+\alpha_{1i}z^{-1}+\alpha_{2i}z^{-2})}{\prod\limits_{i=1}^{N_1}(1-p_iz^{-1})\prod\limits_{i=1}^{N_2}(1+\beta_{1i}z^{-1}+\beta_{2i}z^{-2})}$$

一阶和二阶因子连乘

$$=A\prod_{i=1}^{L}\frac{1+\alpha_{1i}z^{-1}+\alpha_{2i}z^{-2}}{1+\beta_{1i}z^{-1}+\beta_{2i}z^{-2}}\qquad L=\left\lfloor\frac{N+1}{2}\right\rfloor$$

一般表达式，一阶可
看成特殊的二阶

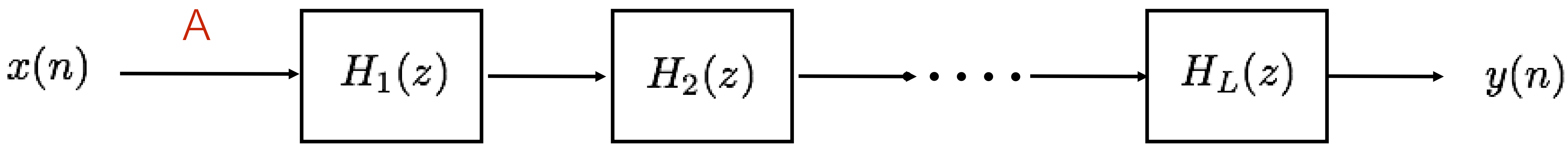
$$=A\prod_{i=1}^{L}\underline{H_i(z)}$$

二阶基本节

4.8.2 级联型

连乘式： $H(z)=\dfrac{\sum\limits_{i=0}^{M}a_i z^{-i}}{1-\sum\limits_{i=1}^{N}b_i z^{-i}} \quad =AH_1(z)\cdot H_2(z)\cdots H_L(z)=A\prod\limits_{i=1}^{L}H_i(z)$

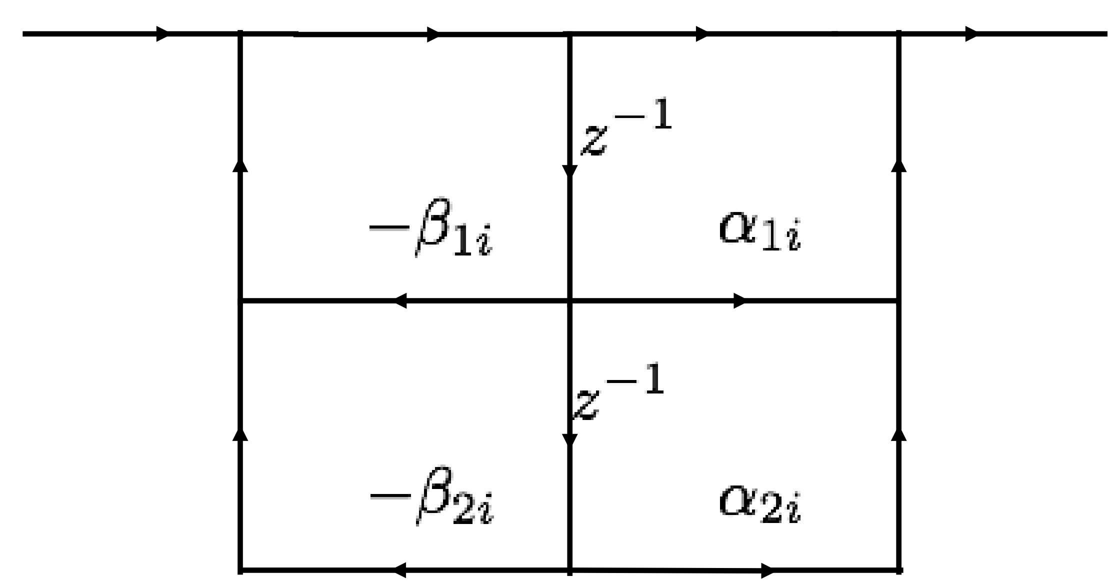
系统级联：



二阶基本节： $H_i(z)=\dfrac{1+\alpha_{1i}z^{-1}+\alpha_{2i}z^{-2}}{1+\beta_{1i}z^{-1}+\beta_{2i}z^{-2}}$

级联节数： $L=\left\lfloor\dfrac{N+1}{2}\right\rfloor$

二阶节:

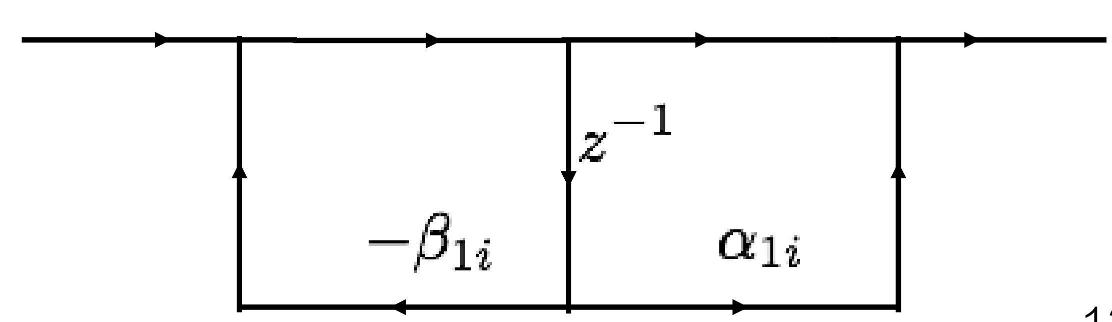


N为奇数时，其中一个基本节 $\beta_{2i}=0$

一阶节: $\alpha_{2i}=0,\beta_{2i}=0$

M<N时，某些 $\alpha_{1i}=0,\alpha_{2i}=0$

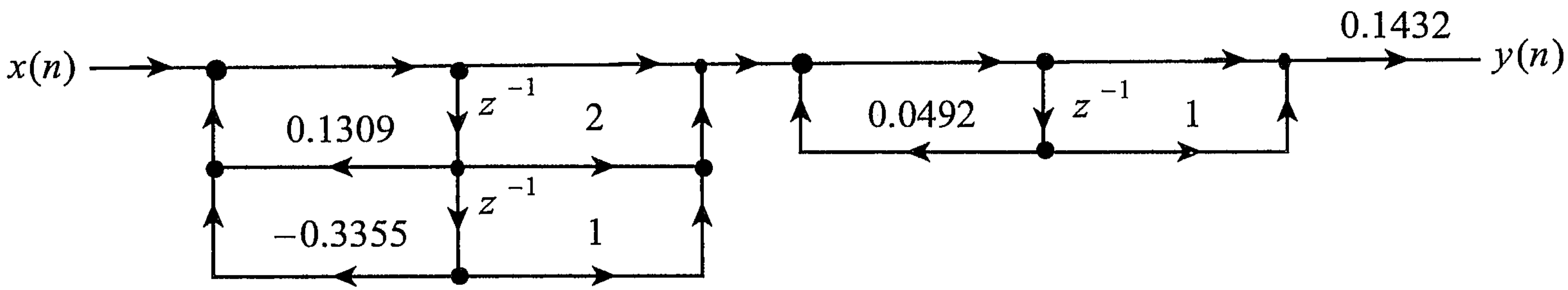
一阶节:



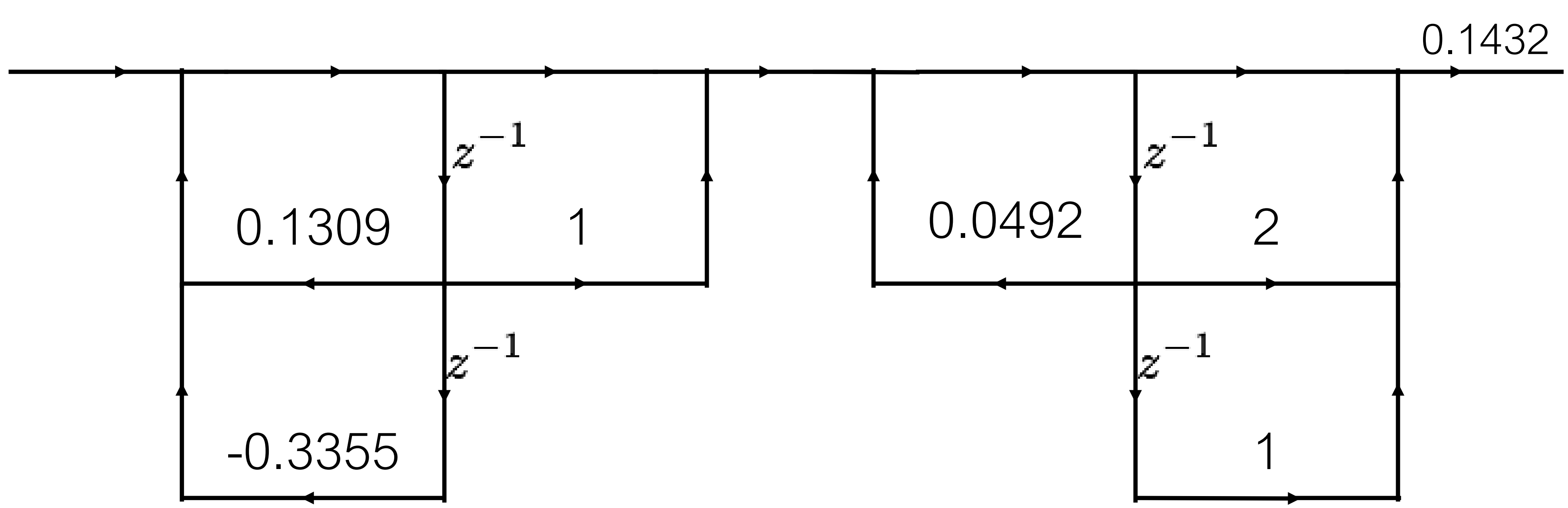
4.8.2 级联型

例： $$H(z)=\frac{0.1432(1+3z^{-1}+3z^{-2}+z^{-3})}{1-0.1801z^{-1}+0.3419z^{-2}-0.0165z^{-3}}$$

解： $$H(z)=0.1432\cdot\frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1-0.1309z^{-1}+0.3355z^{-2}}\cdot\frac{1+z^{-1}}{1-0.0492z^{-1}}$$ 借助Matlab工具



或 $$=0.1432\cdot\frac{1+z^{-1}}{1-0.1309z^{-1}+0.3355z^{-2}}\cdot\frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1-0.0492z^{-1}}$$



4.8.2 级联型

$$H(z)=A\cdot\prod_{i=1}^{L}H_i(z)=A\cdot\frac{N_1(z)}{D_1(z)}\cdot\frac{N_2(z)}{D_2(z)}\cdot\cdots\cdot\frac{N_L(z)}{D_L(z)}$$

级联型优点:

1. 可方便调整零极点位置
2. 对一个基本节的系数调整，不影响其它基本节
3. 零极点配对灵活，有L！种配对方式
4. 基本节实现顺序多，有L！种排列顺序

缺点：误差传递

零极点配对原则：相近的零极点配对

4.8.2 并联型

部分分式分解：$H(z)=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{M} a_i z^{-i}}{1-\sum\limits_{i=1}^{N} b_i z^{-i}}$

$$=\sum_{i=1}^{N_1}\frac{A_i}{1+p_i z^{-1}}+\sum_{i=1}^{N_2}\frac{B_i(1-e_i z^{-1})}{(1-d_i z^{-1})(1-d_i^* z^{-1})}+\sum_{i=0}^{M-N} C_i z^{-i}$$

$N=N_1+2N_2$　　共轭极点合并　　M<N时不存在

$$=\sum_{i=1}^{N_1}\frac{A_i}{1+p_i z^{-1}}+\sum_{i=1}^{N_2}\frac{\alpha_{0i}+\alpha_{1i} z^{-1}}{1+\beta_{1i} z^{-1}+\beta_{2i} z^{-2}}+\sum_{i=0}^{M-N} C_i z^{-i}$$

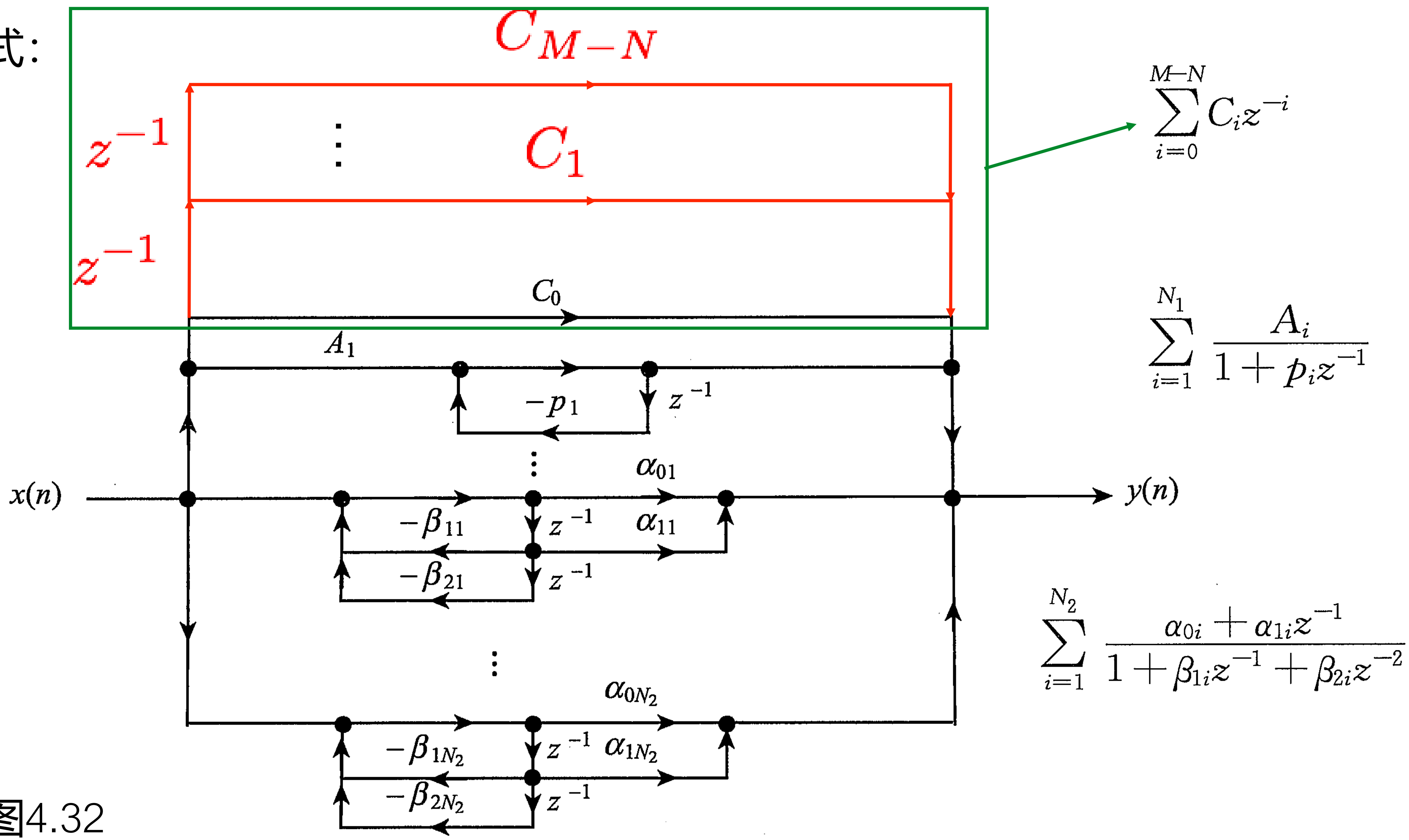
全部实系数组成的部分分式

每一个求和分量可单独实现

4.8.2 并联型

$$H(z)=\sum_{i=1}^{N_1}\frac{A_i}{1+p_i z^{-1}}+\sum_{i=1}^{N_2}\frac{\alpha_{0i}+\alpha_{1i}z^{-1}}{1+\beta_{1i}z^{-1}+\beta_{2i}z^{-2}}+\underline{\sum_{i=0}^{M-N}C_i z^{-i}}$$

一般形式：

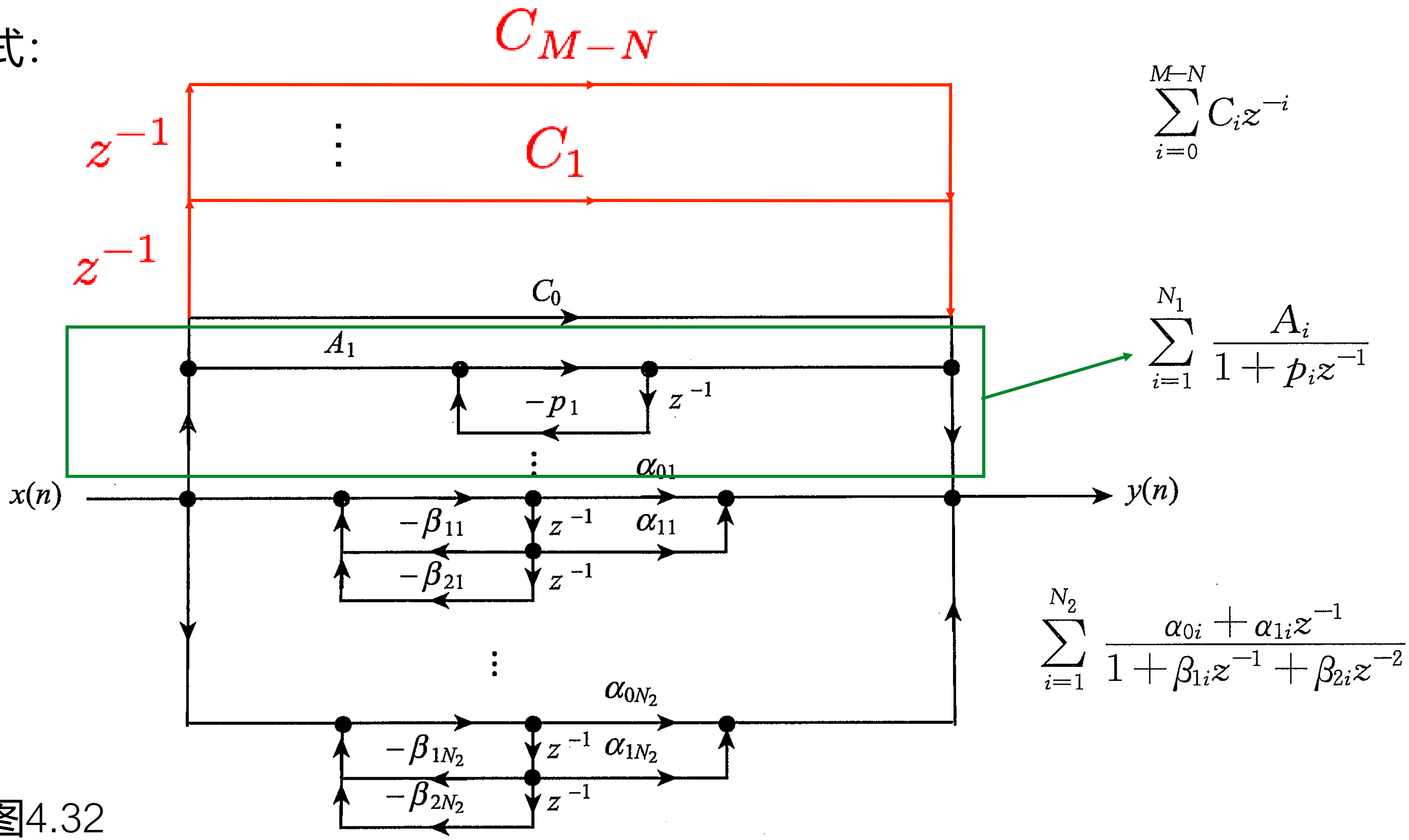


修正课本图4.32

4.8.2 并联型

$$H(z)=\sum_{i=1}^{N_1}\frac{A_i}{1+p_i z^{-1}}+\sum_{i=1}^{N_2}\frac{\alpha_{0i}+\alpha_{1i}z^{-1}}{1+\beta_{1i}z^{-1}+\beta_{2i}z^{-2}}+\underline{\sum_{i=0}^{M-N}C_i z^{-i}}$$

一般形式：

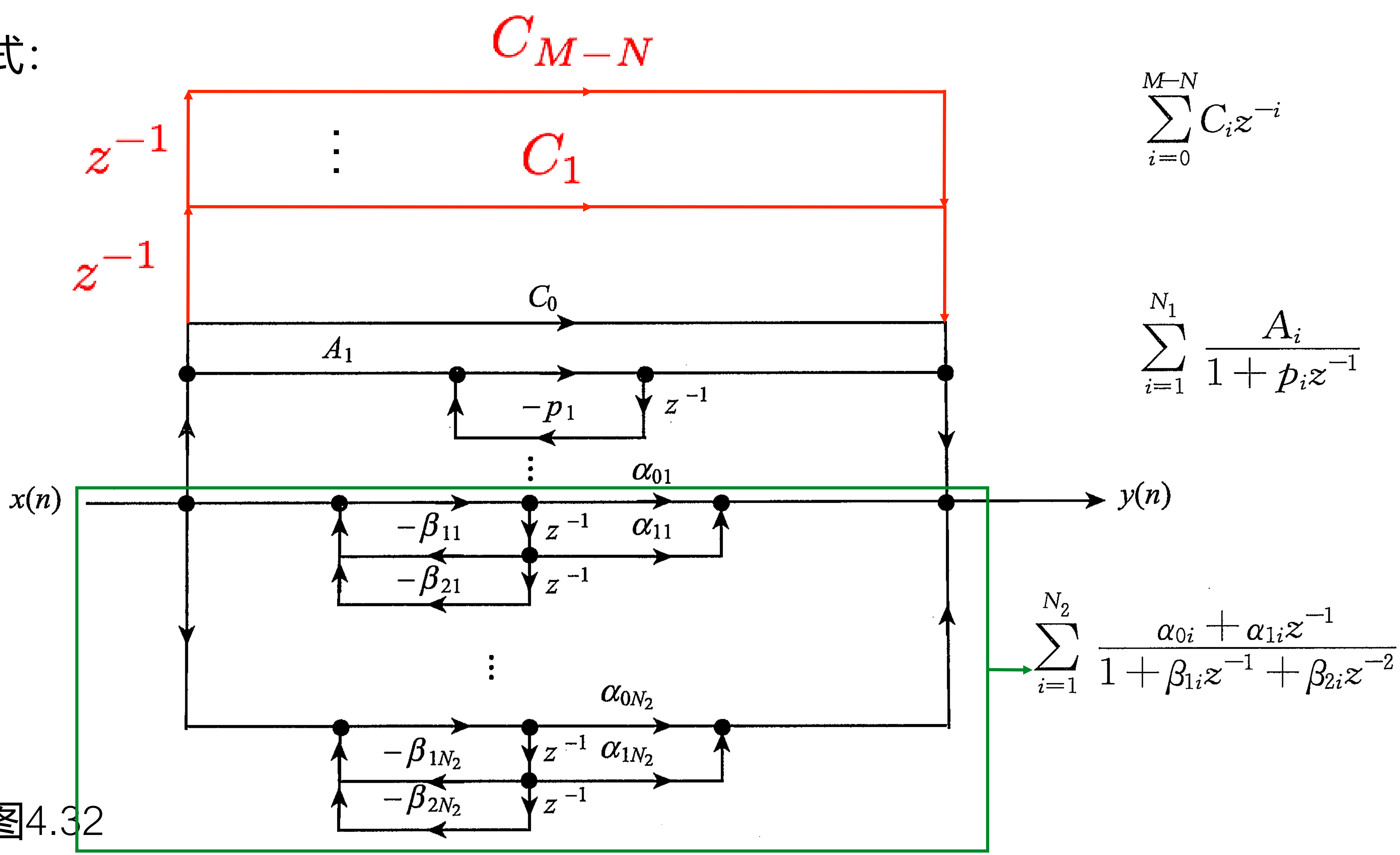


修正课本图4.32

4.8.2 并联型

$$H(z)=\sum_{i=1}^{N_1}\frac{A_i}{1+p_iz^{-1}}+\sum_{i=1}^{N_2}\frac{\alpha_{0i}+\alpha_{1i}z^{-1}}{1+\beta_{1i}z^{-1}+\beta_{2i}z^{-2}}+\sum_{i=0}^{M-N}C_iz^{-i}$$

一般形式：



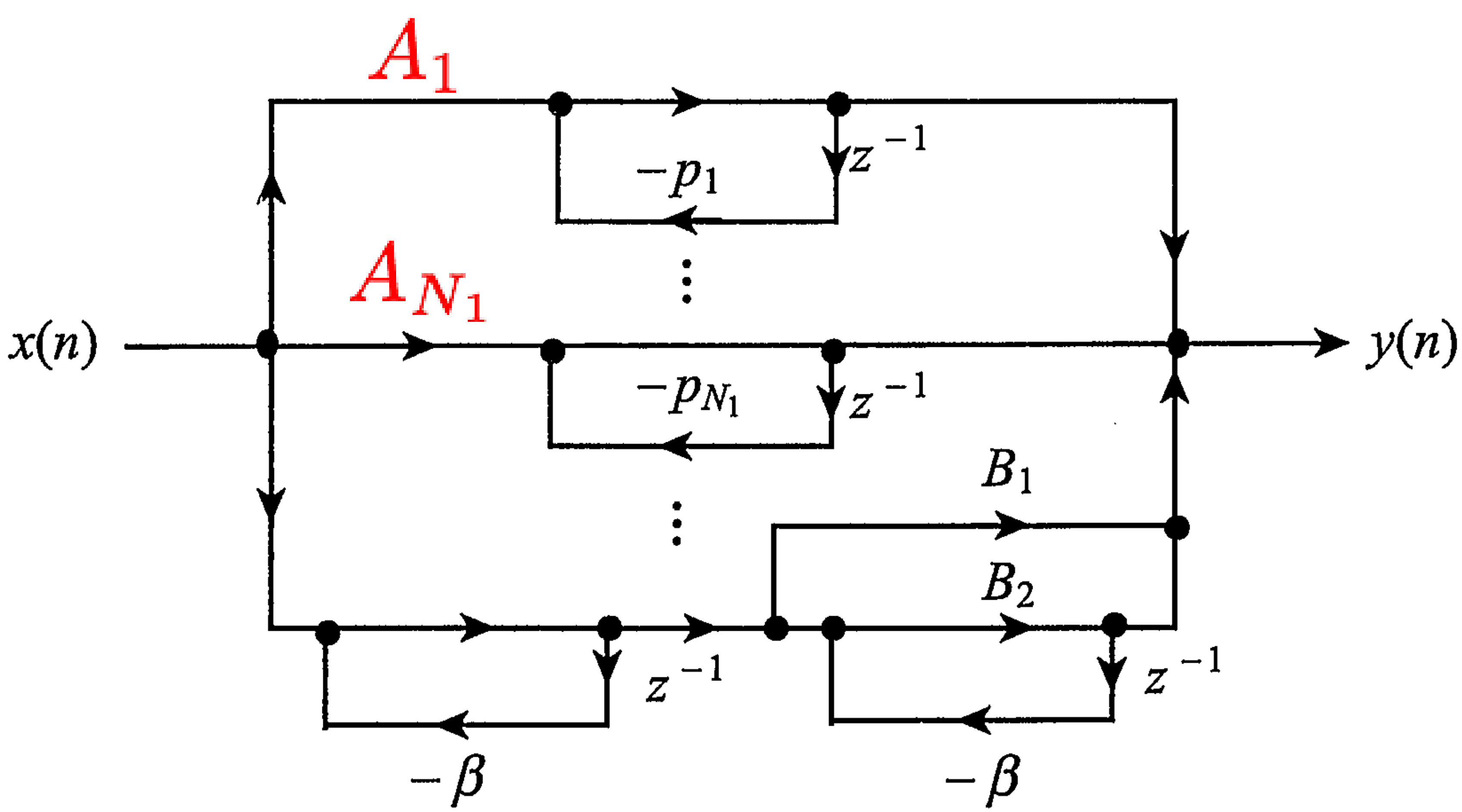
修正课本图4.32

4.8.2 并联型

$$H(z)=\sum_{i=1}^{N_1}\frac{A_i}{1+p_iz^{-1}}+\frac{B_1}{1+\beta z^{-1}}+\frac{B_2}{(1+\beta z^{-1})^2}$$

存在多重极点情况

$$=\sum_{i=1}^{N_1}\frac{A_i}{1+p_iz^{-1}}+\frac{1}{1+\beta z^{-1}}\left(B_1+\frac{B_2}{1+\beta z^{-1}}\right)$$



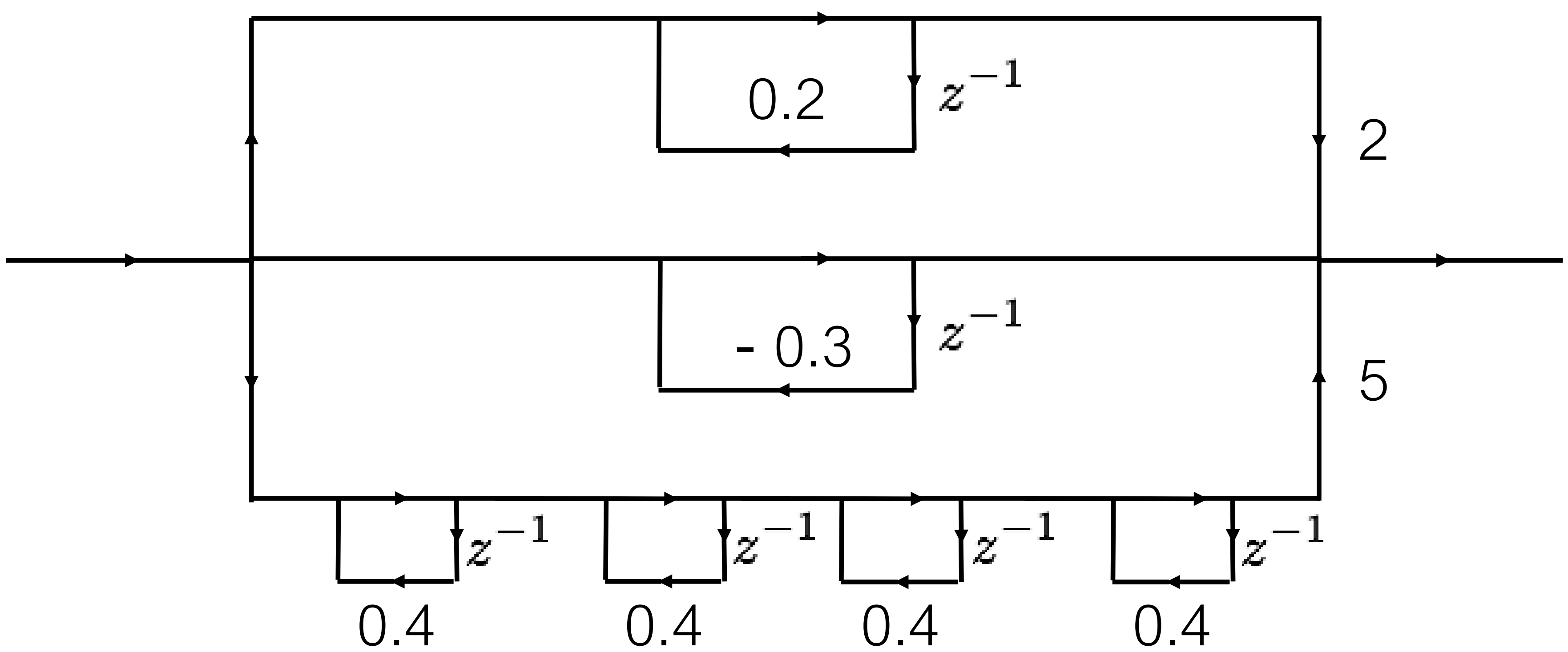
修正图4.33

4.8.2 并联型

写出并联型实现结构：

$$H(z)=\frac{2}{1-0.2z^{-1}}+\frac{1}{1+0.3z^{-1}}+\frac{5}{(1-0.4z^{-1})^4}$$

多重极点

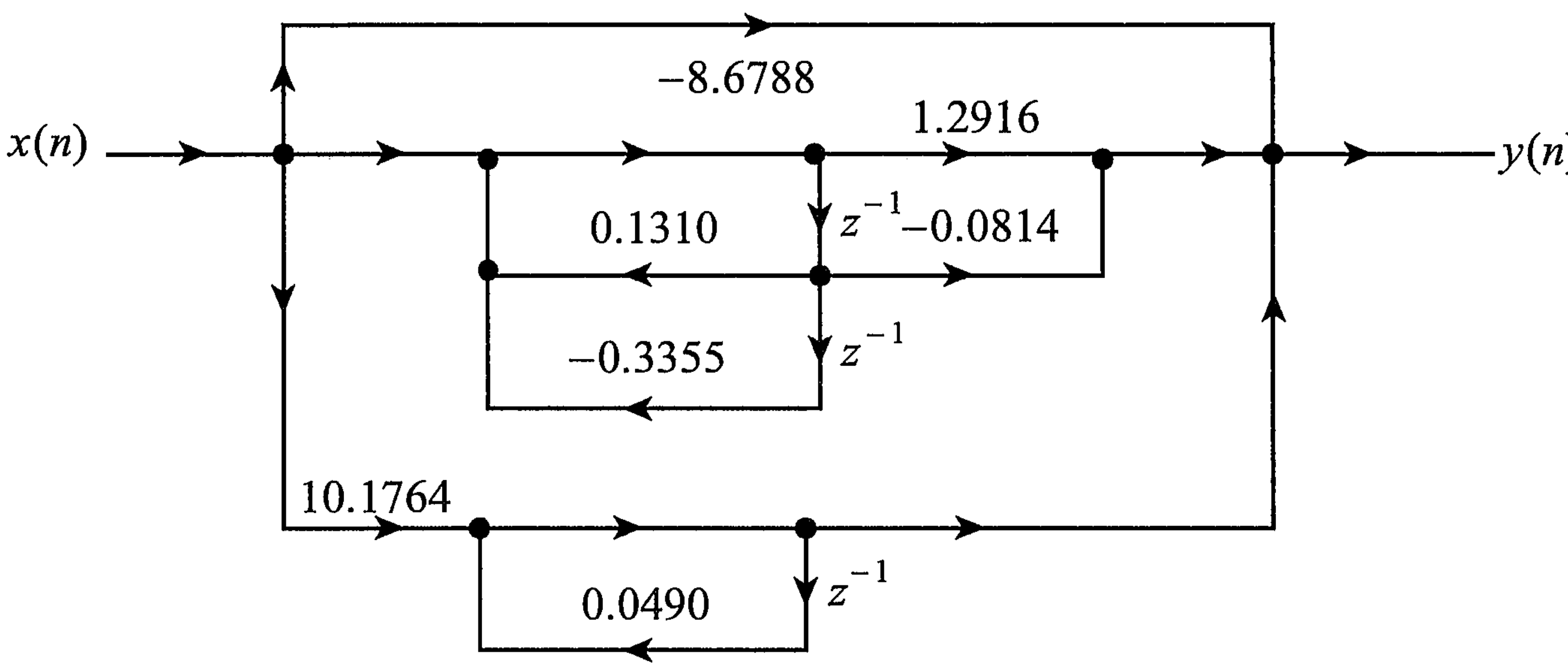


4.8.2 并联型

例：写出并联实现结构 $H(z)=\dfrac{0.1432(1+3z^{-1}+3z^{-2}+z^{-3})}{1-0.1801z^{-1}+0.3419z^{-2}-0.0165z^{-3}}$

解：部分分式分解

$$H(z)=\frac{1.2916-0.0814z^{-1}}{1-0.1310z^{-1}+0.3355z^{-2}}+\frac{10.1764}{1-0.049z^{-1}}-8.6788$$



例题

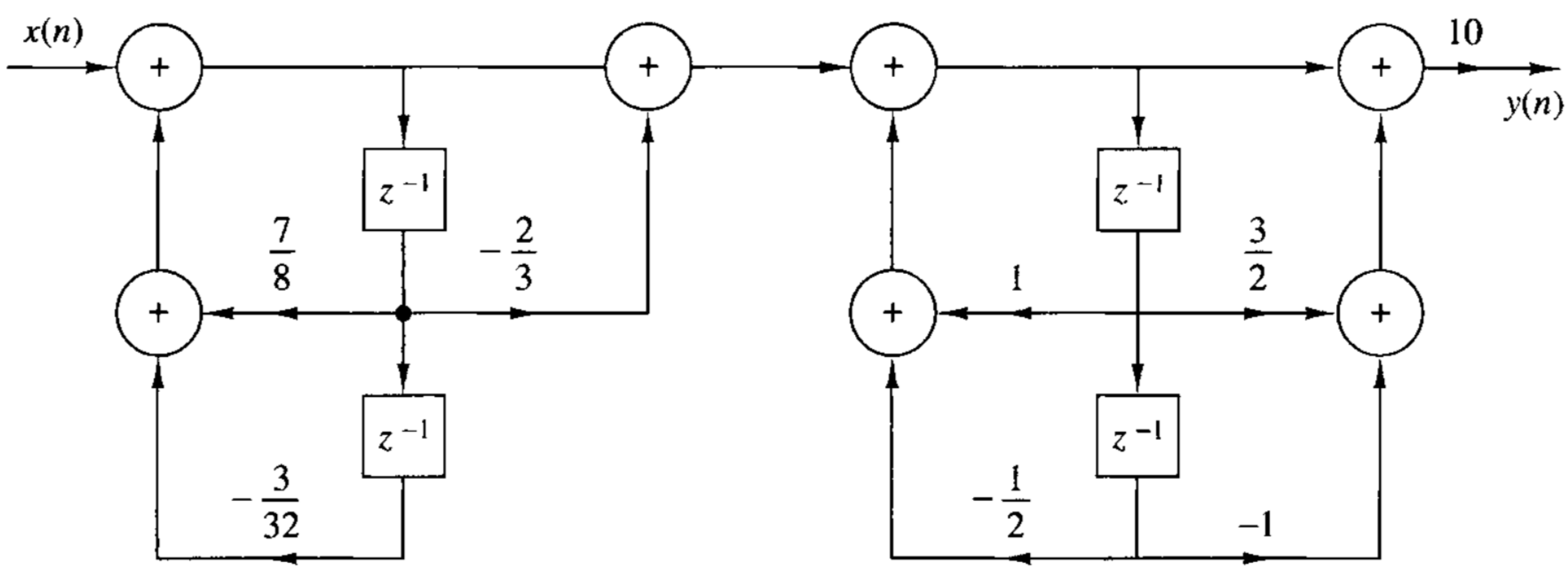
画出如下系统的并联型和级联型实现结构：

$$H(z)=\frac{10(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{2}{3}z^{-1})(1+2z^{-1})}{(1-\frac{3}{4}z^{-1})(1-\frac{1}{8}z^{-1})[1-(\frac{1}{2}+j\frac{1}{2})z^{-1}][1-(\frac{1}{2}-j\frac{1}{2})z^{-1}]}$$

解：1、并联型

$$H_1(z)=\frac{1-\frac{2}{3}z^{-1}}{1-\frac{7}{8}z^{-1}+\frac{3}{32}z^{-2}} \qquad H_2(z)=\frac{1+\frac{3}{2}z^{-1}-z^{-2}}{1-z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}$$

$$H(z)=10H_1(z)H_2(z)$$



例题

2、级联型

部分分式分解：

$$H(z)=\frac{A_1}{1-\frac{3}{4}z^{-1}}+\frac{A_2}{1-\frac{1}{8}z^{-1}}+\frac{A_3}{1-(\frac{1}{2}+j\frac{1}{2})z^{-1}}+\frac{A_3^*}{1-(\frac{1}{2}-j\frac{1}{2})z^{-1}}$$

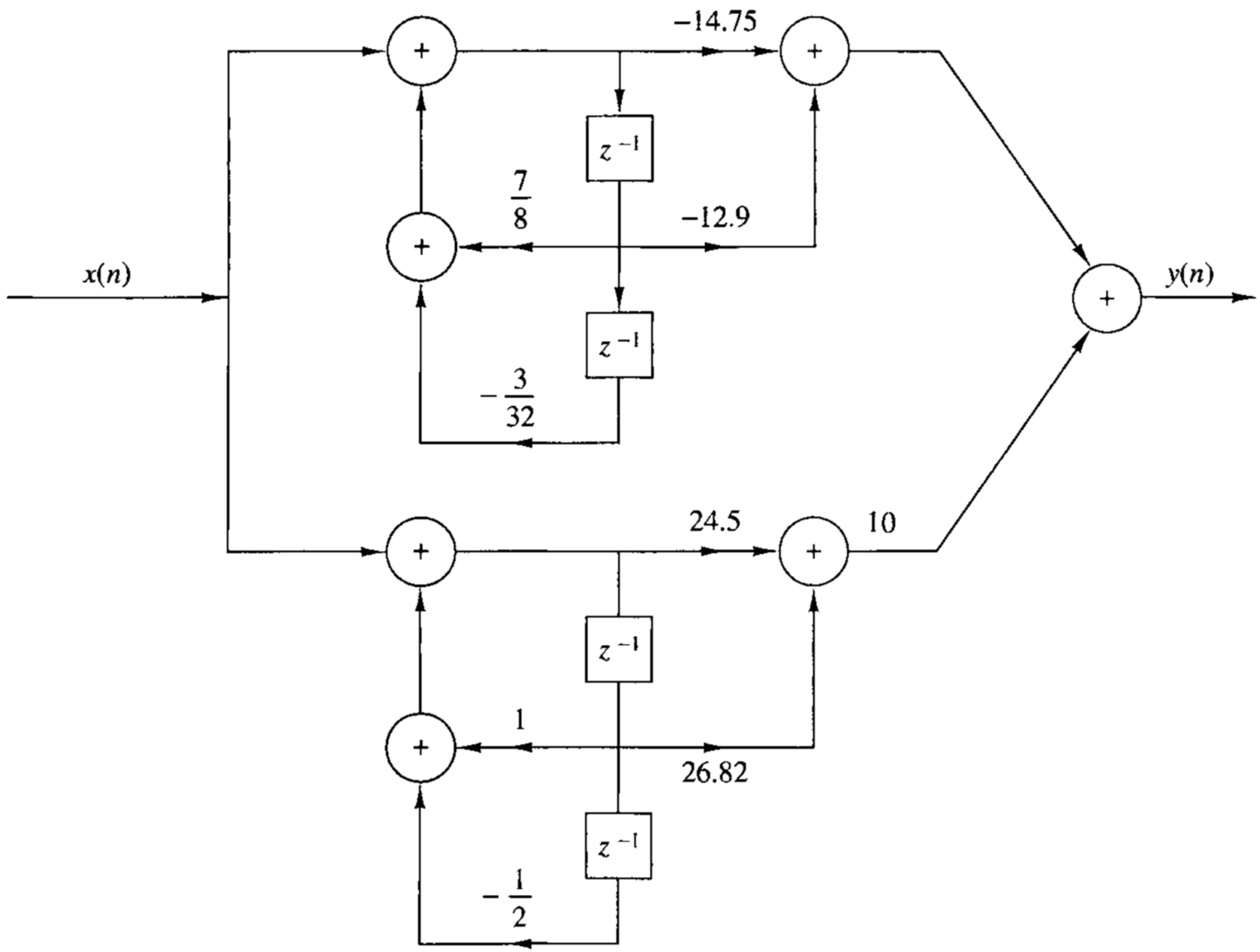
$$A_1=2.93,\quad A_2=-17.68,\quad A_3=12.25-j14.57,\quad A_3^*=12.25+j14.57$$

合并：

$$H(z)=\frac{-14.75-12.90z^{-1}}{1-\frac{7}{8}z^{-1}+\frac{3}{32}z^{-2}}+\frac{24.50+26.82z^{-1}}{1-z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}$$

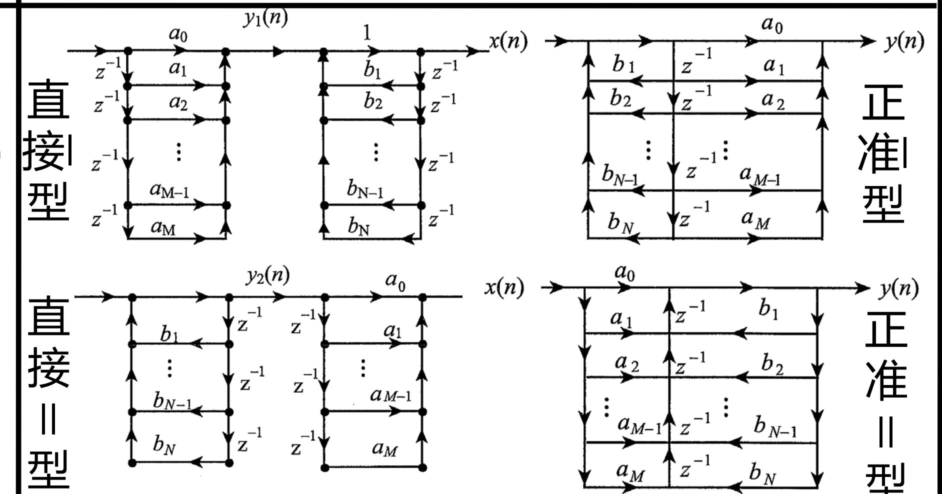
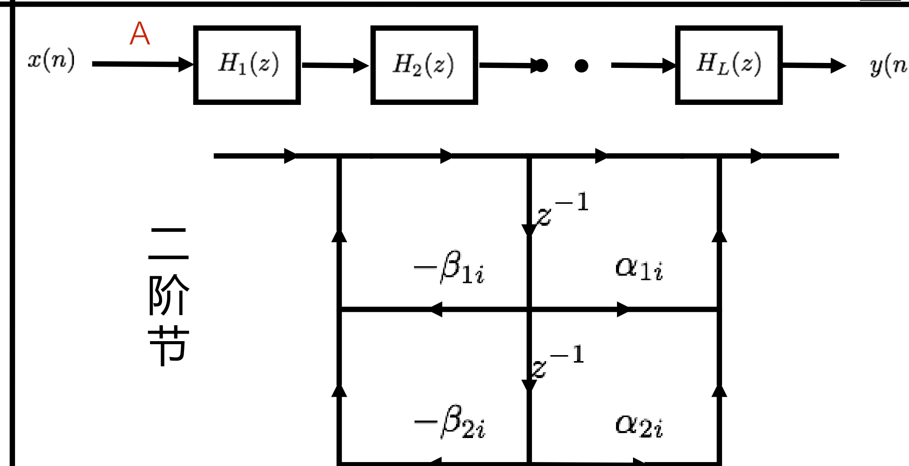
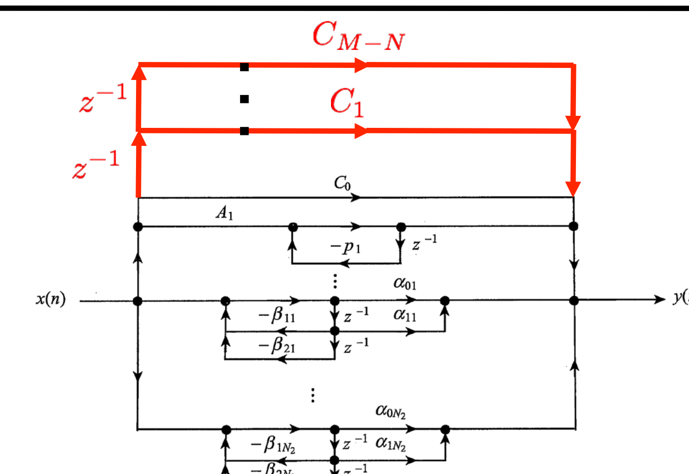
例题

$$H(z)=\frac{-14.75-12.90z^{-1}}{1-\frac{7}{8}z^{-1}+\frac{3}{32}z^{-2}}+\frac{24.50+26.82z^{-1}}{1-z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}$$

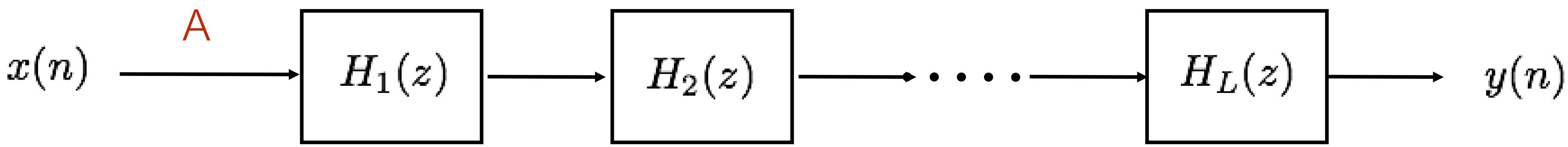


4.8.2 并联型

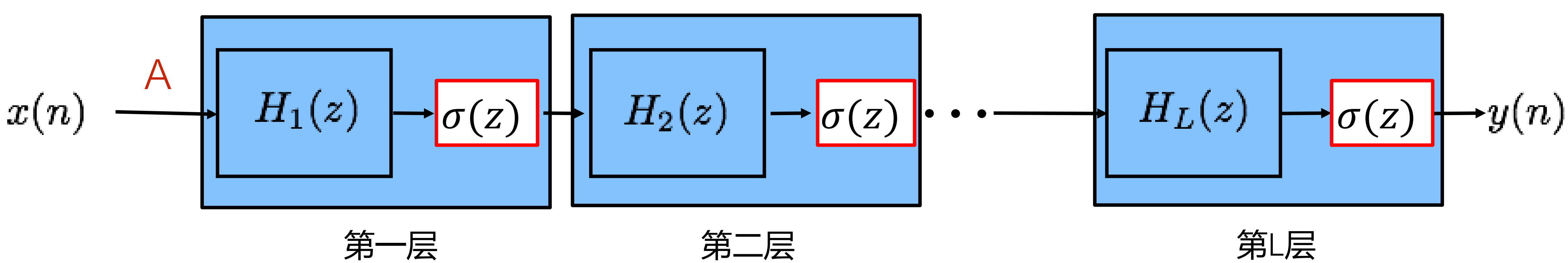
各种实现结构比较

	优缺点	公式	结构
直接型(正准型)	简单，直接根据差分方程或传输函数写出，适合低阶，延迟器少。零极点位置对有限字长效应敏感。	$y(n)=\sum_{i=0}^{M}a_i x(n-i)+\sum_{i=1}^{N}b_i y(n-i)$ $Y(z)=\sum_{i=0}^{M}a_i z^{-i}X(z)+\sum_{i=1}^{N}b_i z^{-i}Y(z)$	
级联型	可同时调节零、极点位置。误差传递，前一子系统误差是下一子系统输入。	$H(z)=\frac{\sum_{i=0}^{M}a_i z^{-i}}{1-\sum_{i=1}^{N}b_i z^{-i}}$ $=AH_1(z)\cdot H_2(z)\cdots H_L(z)=A\prod_{i=1}^{L}H_i(z)$	
并联型	各子系统独立并行，互不影响，可方便调整极点位置。不能直接调整零点位置。	$H(z)=\frac{\sum_{i=0}^{M}a_i z^{-i}}{1-\sum_{i=1}^{N}b_i z^{-i}}$ $=\sum_{i=1}^{N_1}\frac{A_i}{1+p_i z^{-1}}+\sum_{i=1}^{N_2}\frac{\alpha_{0i}+\alpha_{1i}z^{-1}}{1+\beta_{1i}z^{-1}+\beta_{2i}z^{-2}}+\sum_{i=0}^{M-N}C_i z^{-i}$	

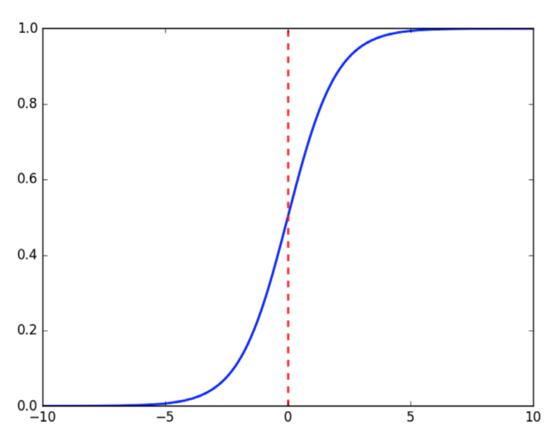
级联实现结构与深度学习*



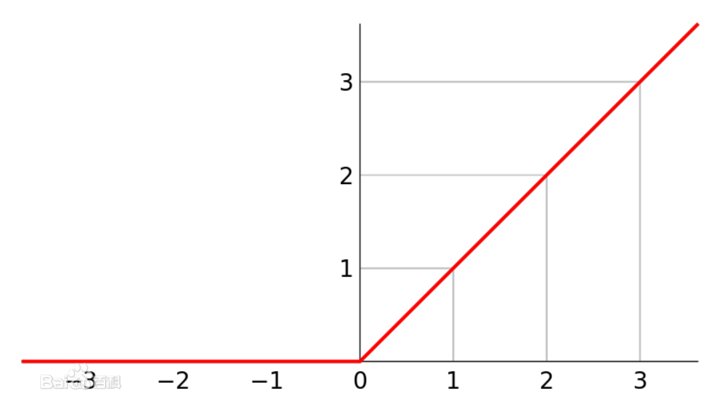
- 线性系统的级联仅仅改变系统的实现结构
- 不改变系统的信息处理能力
- 如何提升系统信息处理能力？　　增加非线性处理单元



激活函数
(非线性)

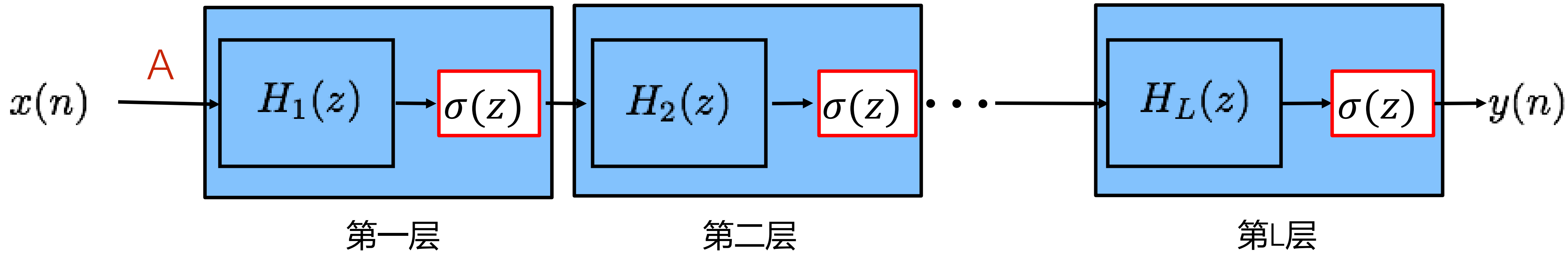


sigmoid



relu

如何确定滤波器系数?



$$y(n) = \boxed{f_\theta}(x(n))$$

θ是滤波器参数集合

样本数量

$$L(\theta) = \sum_{i=1}^{N} \left| \underline{y_i(n)} - \underline{y_i'(n)} \right|^2$$

使得损失最小的滤波器参数θ即最优

系统输出 $f_\theta(x_i(n))$

期望的系统输出

如何最优化损失?

$$L(\theta) = \sum_{i=1}^{N} \left| y_i(n) - y_i'(n) \right|^2$$

梯度向量 $\nabla g = \begin{bmatrix} \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_n} \end{bmatrix}$ 代表了损失函数增大的方向，因此沿着梯度向量反方向，迭代即可实现目标函数优化。

$$\boxed{\theta^t = \theta^{t-1} - \eta \nabla g}$$

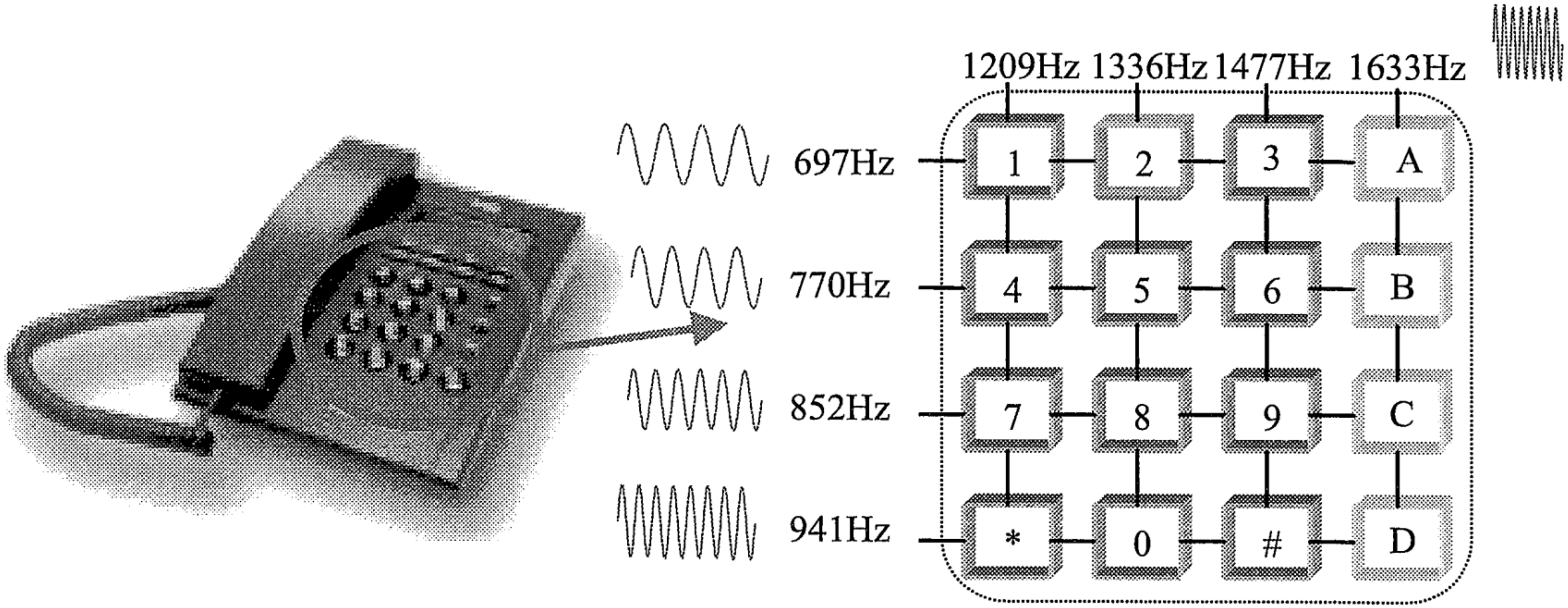
梯度下降法

如何计算梯度向量?

反向传播算法!

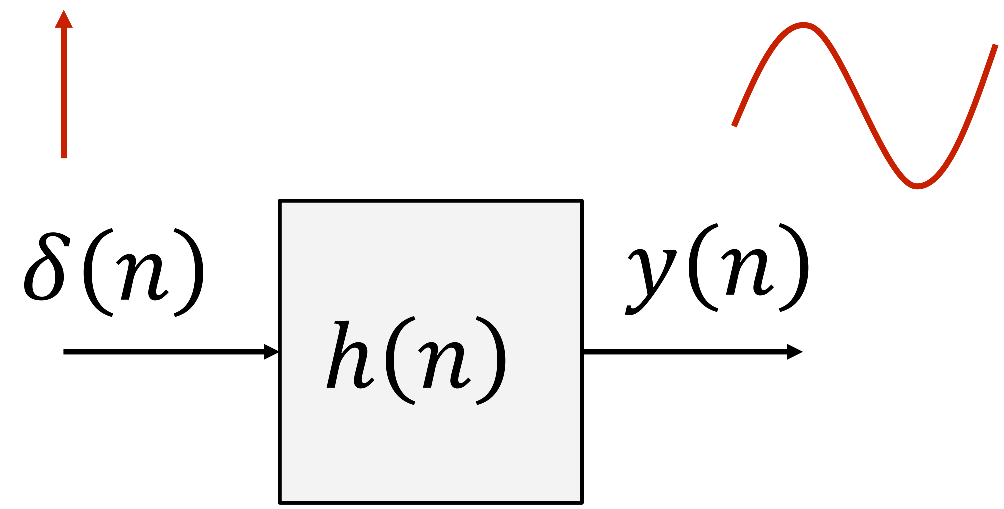
Another story!

IIR滤波器应用：双音多频拨号系统



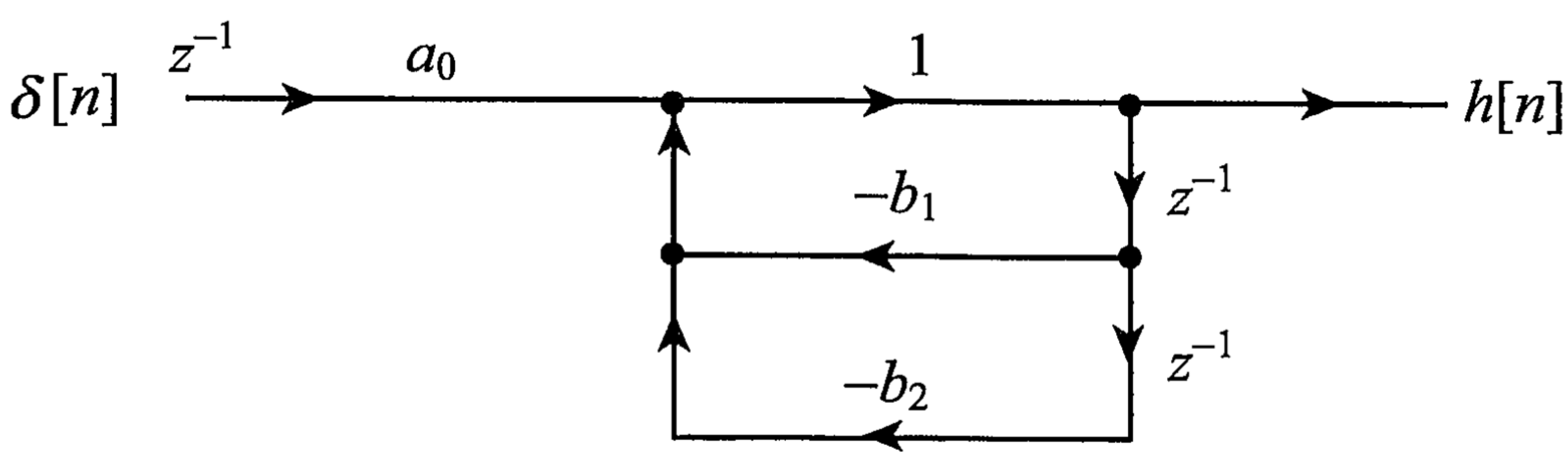
1. 按键信号生产

$$h(n) = y(n) = \sin(n\omega_0)u(n)$$



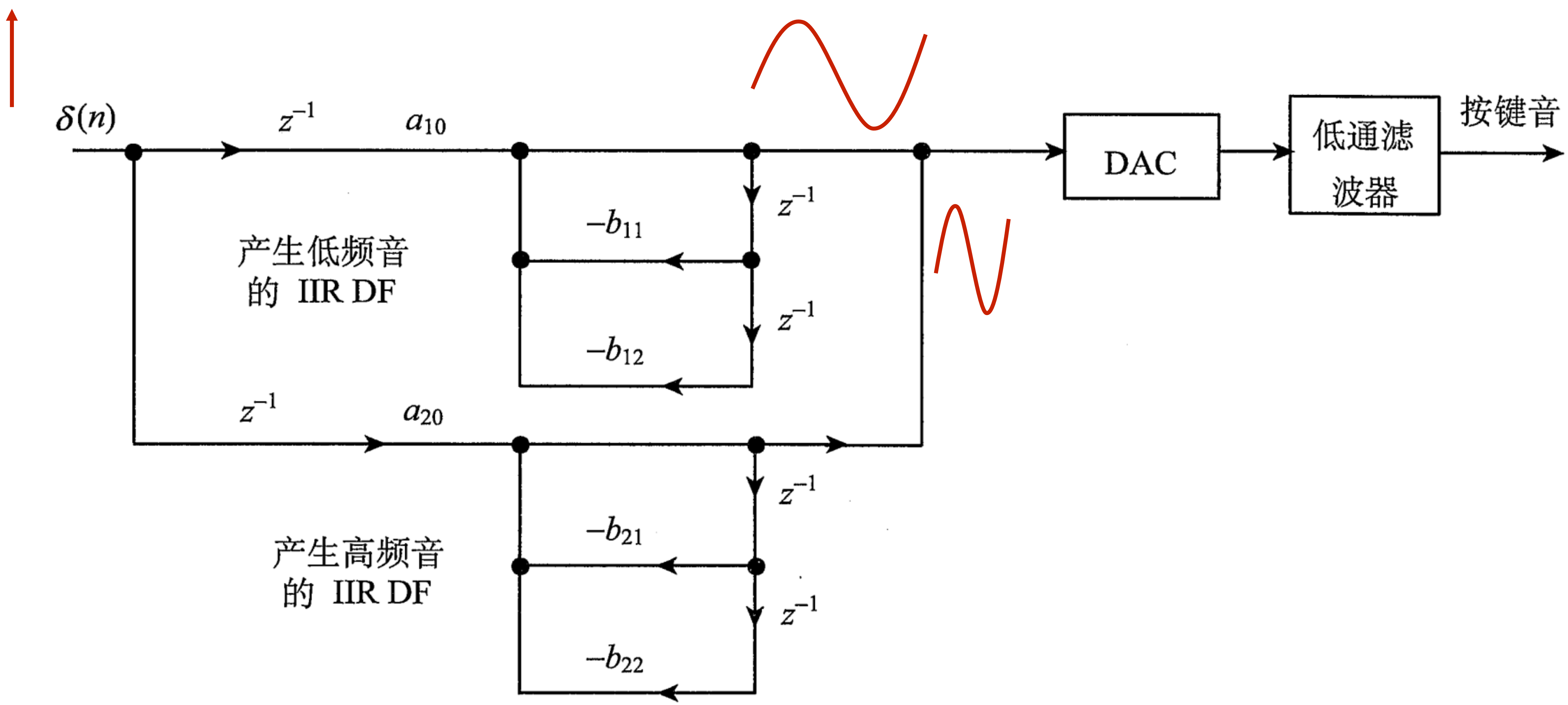
$$H(z) = \frac{\sin\omega_0 z^{-1}}{1 - 2\cos\omega_0 \quad z^{-1} + z^{-2}}$$

$$y[n] - 2\cos\omega_0 y[n-1] + y[n-2] = \sin\omega_0 x[n-1]$$



单个频率信号实现结构

两个频率信号实现结构：



δ(n)
z⁻¹
a10
z⁻¹
−b11
产生低频音
的 IIR DF
z⁻¹
−b12
z⁻¹
a20
z⁻¹
−b21
产生高频音
的 IIR DF
z⁻¹
−b22
DAC
低通滤
波器
按键音

2. 按键信号检测（解码）

如何检测信号中的频率?

1. DFT变换，检查幅值较大的频率成分（需计算所有DFT值）
2. 滤波器组，通过一组带通滤波器，检查响应较大的（计算量较大）
3. Goertzel算法（针对频率成分较少情况，效率最优）

Goertzel算法

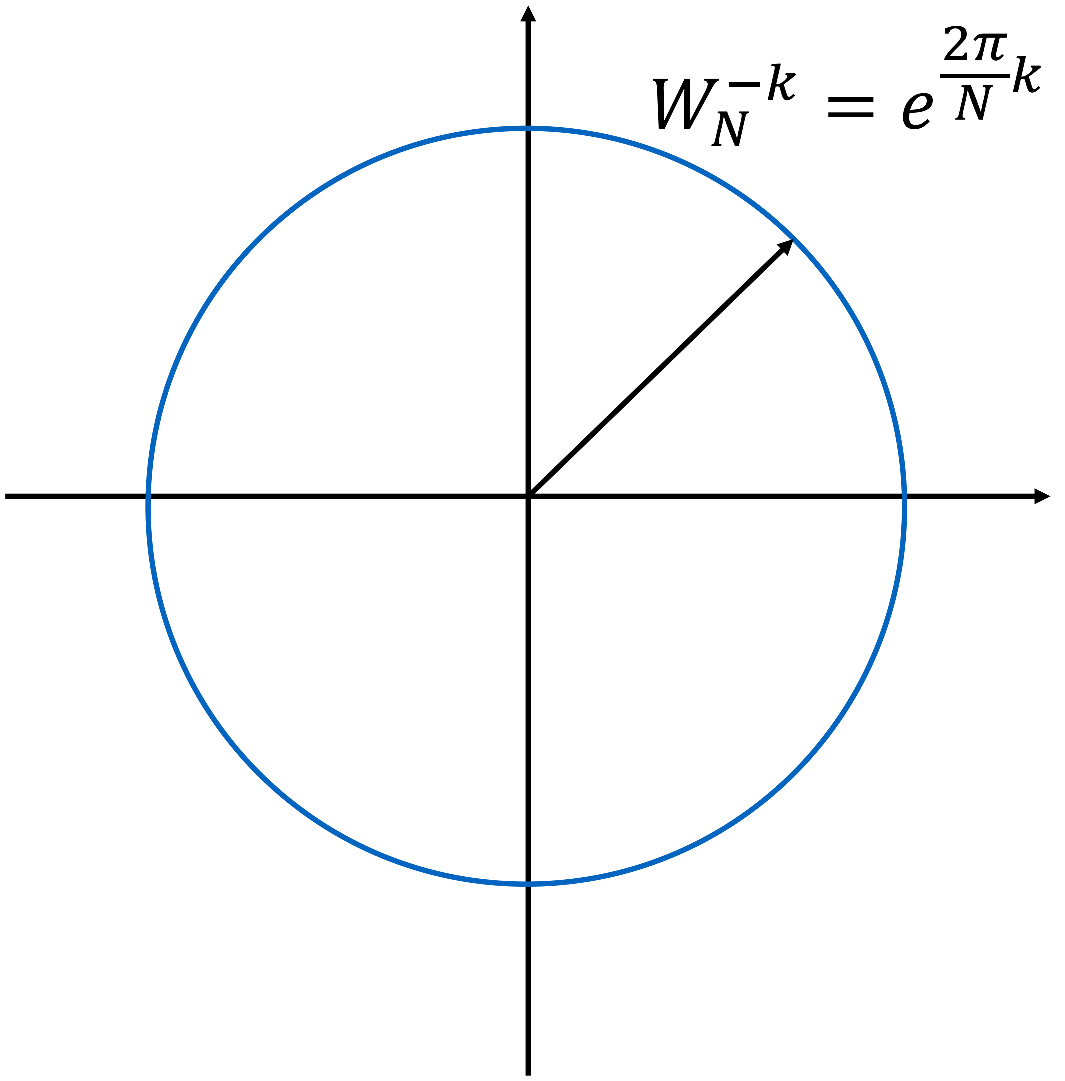
既然我们已经知道信号的组成频率，只需要检验相应频率是否存在，如何设计一个滤波器?

$$H_k(z) = \frac{1}{1 - W_N^{-k} z^{-1}}$$

在相应检测频率点有极点

$$h_k(n) = W_N^{-kn} u(n)$$

对应的单位脉冲响应



该滤波器输出与输入信号什么关系?

Goertzel算法

该滤波器输出与输入信号什么关系?

$$y_k(n) = x(n) * h_k(n)$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} x(m) h_k(n-m)$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} x(m) W_N^{-k(n-m)}$$

令n = N

$$y_k(n)\big|_{n=N} = W_N^{-kN} \sum_{m=0}^{N-1} x(m) W_N^{km}$$

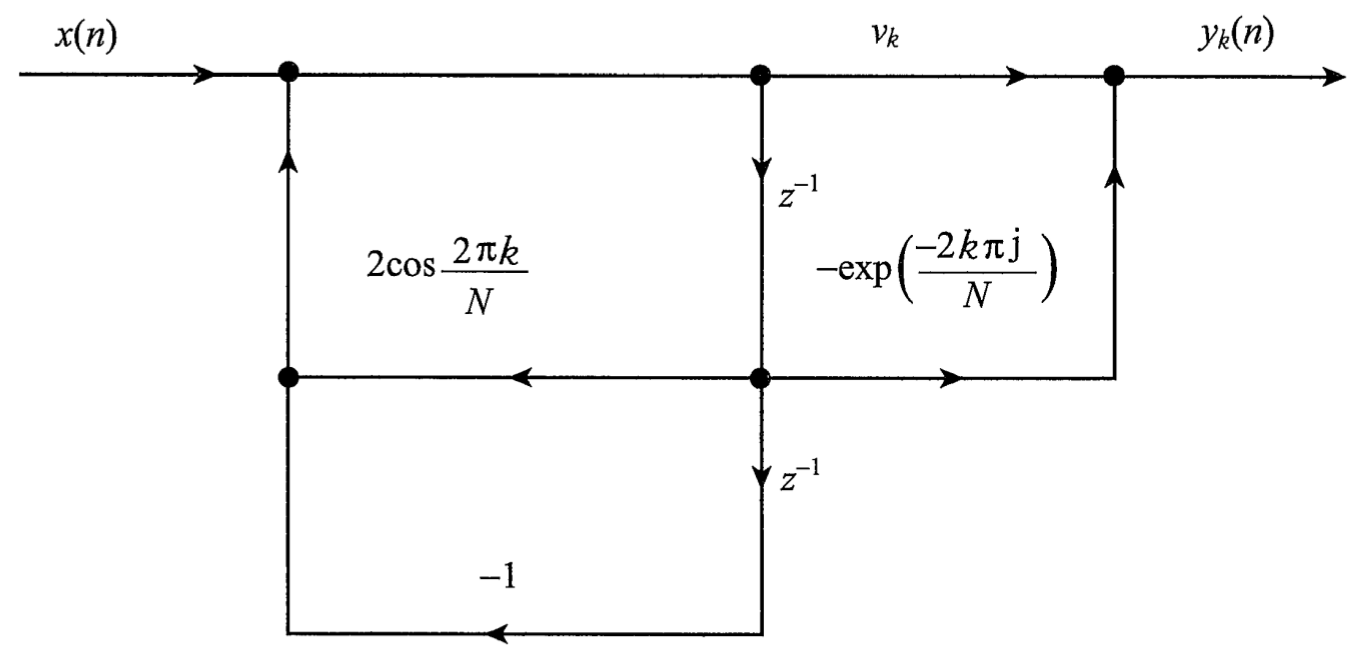
$$= \sum_{m=0}^{N-1} x(m) W_N^{km}$$

$$\boxed{X(k) = y_k(n)\big|_{n=N}}$$

$y_k(N)$就是频点$\omega_k = e^{\frac{2\pi}{N}k}$的DFT $x(k)$

Goertzel算法

$$H_k(z) = \frac{1}{1 - W_N^{-k} z^{-1}}$$



转实系数实现

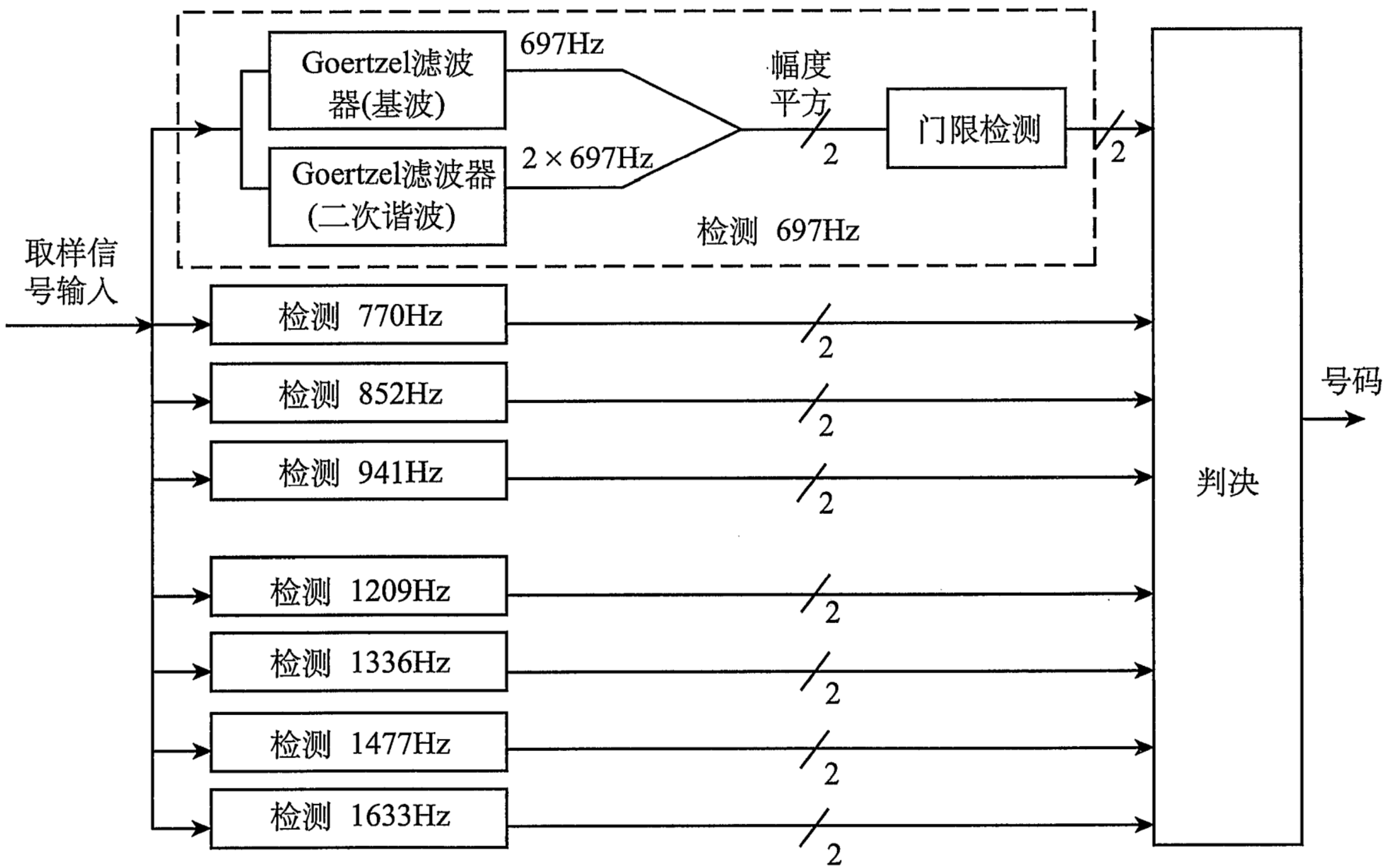
$$H_k(z) = \frac{1}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} \times \frac{1 - W_N^{-k} z^{-1}}{1 - W_N^{-k} z^{-1}}$$

$$= \frac{1 - W_N^{-k} z^{-1}}{1 - 2\cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right) z^{-1} + z^{-2}}$$

检测幅度平方：

$$
\begin{aligned}
|X(k)|^2 = |y_k(N)|^2 &= \left[v_k(N) - v_k(N-1)\cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right)\right]^2 + \left[v_k(N-1)\sin\left(\frac{2\pi k}{N}\right)\right]^2 \\
&= v_k^2(N) - 2v_k(N)v_k(N-1)\cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right) \\
&\quad + v_k^2(N-1)\cos^2\left(\frac{2\pi k}{N}\right) + v_k^2(N-1)\sin^2\left(\frac{2\pi k}{N}\right) \\
&= v_k^2(N) + v_k^2(N-1) - 2\cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right)v_k(N)v_k(N-1) \qquad (4.88)
\end{aligned}
$$

全实数乘法实现！



Goertzel滤波器(基波)
697Hz
Goertzel滤波器(二次谐波)
2 × 697Hz
幅度平方
2
门限检测
2
检测 697Hz
取样信号输入
检测 770Hz
检测 852Hz
检测 941Hz
检测 1209Hz
检测 1336Hz
检测 1477Hz
检测 1633Hz
判决
号码

课后实验（实验三）

利用Matlab，实现：

1. 给一串数字，能够合成对应的语音信号，并用电脑播放
2. 播放一段按键声音，解码对应的按键序列（滤波器实现）

作业

4.19
4.20
4.21
4.22