第三章 离散傅立叶变换及其快速计算方法

问题的提出

DFTT与DFT的区别

DTFT： 时域离散的$x(n)$转化为频域连续的$X\left(e^{j\omega}\right)$

DFT： 时域离散的$x(n)$转化为频域离散的$X(k)$

DFS及其性质

变换对

$$\begin{aligned}\tilde{x}(n) &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)W_{\vec{N}}^{-nk} \\ \tilde{X}(k) &= \sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_N^{nk}\end{aligned} \qquad W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

$\tilde{x}(n)$是时域上的周期序列，$\tilde{X}(k)$是频域上的周期序列。

性质

线性

周期移位

$$
\begin{aligned}
&\tilde{x}\left(n+n_0\right) \longleftrightarrow W_N^{-n_0 k} \tilde{X}(k) \\
&W_N^{nl} \tilde{x}(n) \longleftrightarrow \tilde{X}(k+l)
\end{aligned}
$$

对称性

类比DTFT的对称性

周期卷积

时域卷积 $=$ 频域相乘

时域相乘 $= \frac{1}{N}$频域卷机

$$
\begin{aligned}
\widetilde{x}_3(n) &= \sum_{m=0}^{N-1} \widetilde{x}_1(m) \widetilde{x}_2(n-m) \quad \text{则} \quad \widetilde{X}_3(k)=\widetilde{X}_1(k) \widetilde{X}_2(k) \\
&= \sum_{m=0}^{N-1} \widetilde{x}_2(m) \widetilde{x}_1(n-m)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{gathered}
\widetilde{x}_4(n)=\widetilde{x}_1(n) \widetilde{x}_2(n) \text{ 则} \quad \widetilde{X}_4(k)=\frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \widetilde{X}_1(l) \widetilde{X}_2(k-l) \\
\widetilde{X}_4(k)=\frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \widetilde{X}_2(l) \widetilde{X}_1(k-l)
\end{gathered}
$$

对偶性

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{x}(n) \xrightarrow{DFS} \widetilde{X}(k) \\
&\widetilde{X}(n) \xrightarrow{DFS} N \widetilde{x}(-k)
\end{aligned}
$$

DFT

变换对

$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_{\vec{N}}^{-nk}$$
$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}\qquad W_N=e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

矩阵描述：

若令

$$\boldsymbol{x}=(x(0),x(1),\cdots,x(N-1))^{\mathrm{T}}$$
$$\boldsymbol{X}=(X(0),X(1),\cdots,X(N-1))^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{W}=\begin{bmatrix} W_N^{0\times 0} & W_N^{1\times 0} & \cdots & W_N^{(N-1)\times 0} \\ W_N^{0\times 1}, & W_N^{1\times 1} & \cdots & W_N^{(N-1)\times 1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ W_N^{0\times(N-1)} & W_N^{1\times(N-1)} & \cdots & W_N^{(N-1)\times(N-1)} \end{bmatrix}$$，易知$\boldsymbol{W}$是一个对称矩阵

则

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{W}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$
$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{X}$$

DFT和DTFT、DFS关系

$$\begin{array}{ccc} x(n) & \xrightarrow{DTFT} & X\left(e^{j\omega}\right) \\ \text{有限长离散} & & \text{周期连续} \\ \tilde{x}(n) & \xrightarrow{DFS} & \widetilde{X}(k) \\ \text{周期离散} & & \text{周期离散} \\ x(n) & \xrightarrow{DFT} & X(k) \\ \text{有限长离散} & & \text{有限长离散} \end{array}$$

时域上：

$x(n)$是$\tilde{x}(n)$的主值序列，$\tilde{x}(n)$是$x(n)$的周期延拓

频域上：

$\widetilde{X}(k)$是对$X\left(e^{j\omega}\right)$的$\frac{2\pi}{N}$取样

$X(k)$是$\widetilde{X}(k)$的主值序列，$\widetilde{X}(k)$是$x(n)$的周期延拓

DFT同Z变换的关系

性质

线性

若两个序列长度不同，以最大长度，不够的补零

反转定理

若$x(n)$是长度为N的序列，称$x((-n))_N$是$x(n)$的循环反转运算

$$x((-n))_N = \begin{cases} x(0) & n = 0 \\ x(N-n) & n = 1, \cdots, N-1 \end{cases}$$

有

$$\begin{aligned} x(n) &\quad \xrightarrow{N点DFT} \quad X(k) \\ x((-n))_N &\quad \xrightarrow{\text{N点DFT}} \quad X((-k))_N \end{aligned}$$

循环移位

若$x(n)$是长度为N的序列，称$x((n+m))_N$是$x(n)$的循环移位运算（其中，m为整数常数，取值任意）

移出去的空位又会由另一端移入补位

有

$$\begin{aligned} x((n+m))_N &\xrightarrow{\text{N点DFT}} W_{-m^{mk}}X(k) \\ W_N^{nk}x(n) &\xrightarrow{\text{N点DFT}} X((k+k_0))_N \end{aligned}$$

对称性

$$\begin{aligned} x_{\mathrm{e}}(n) &= \tfrac{1}{2}[x((n))_N + x^*((-n))_N] \quad n \in \{0, 1, \cdots, N-1\} \\ x_{\mathrm{o}}(n) &= \tfrac{1}{2}[x((n))_N - x^*((-n))_N] \quad n \in \{0, 1, \cdots, N-1\} \end{aligned}$$

$$x_{\mathrm{e}}((-n))_N = x_{\mathrm{e}}^*(n)_N$$
$$x_{\mathrm{o}}((-n))_N = -x_{\mathrm{o}}^*(n)_N$$
$$x(n) = x_{\mathrm{e}}(n) + x_{\mathrm{o}}(n)$$

具体性质看书

循环卷积

帕斯瓦尔定理

DFT变换的应用

快速傅立叶变换

W_N的特性

$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$

特殊值	$W_N^0 = 1, \quad W_N^{\frac{N}{4}} = e^{-j\frac{2\pi}{N}\times\frac{N}{4}} = e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j, \quad W_N^{\frac{N}{2}} = -1, \quad W_N^{\frac{3N}{4}} = j$
对称性	$\left(W_N^{nk}\right)^* = W_N^{-nk}$
周期性	$W_N^{nk} = W_N^{(n+N)k} = W_N^{n(k+N)}$
可约性	$W_N^2 = e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot 2} = e^{-j\frac{2\pi}{N/2}} = W_{N/2} \quad W_{2N}^k = W_N^{k/2}$

基2时域抽选算法

$$X(k) = X^{(\mathrm{e})}(k) + W_N^k X^{(\mathrm{o})}(k)$$
$$X(k+M) = X^{(\mathrm{e})}(k) + W_N^{k+M} X^{(\mathrm{o})}(k) = X^{(\mathrm{e})}(k) - W_N^k X^{(\mathrm{o})}(k)$$
$$\text{其中} N = 2M,\ W_N^{k+M} = -W_N^k$$

具体插图回去插

基2频域抽选算法