通信原理(甲)

第2章
2.2 随机变量

§2.2 随机变量

一、随机变量

$\{X, \mathrm{X}, p(x)\}$

$\{(X,Y), \mathrm{X} \times \mathrm{Y}, p(x,y)\}$

$p(x,y)=p(x)p(y\,|\,x)$ ，当X, Y独立时 $p(x,y)=p(x)p(y)$

二、分布函数

$F_X(x)=\mathrm{P_r}\{X \le x\}$

三、概率分布密度

$$p_X(x)=\frac{dF_X(x)}{dx}$$

$$P_r\{a \le x \le b\}=\int_a^b p_X(x)dx$$

$$\begin{cases} p_X(x) \ge 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)dx=1 \end{cases}$$

可以用δ函数表示离散随机变量的概率密度函数，

$$f(x)=\sum_{k=1}^{K}p_k\cdot\delta(x-x_k)$$

两个随机变量的联合分布与分布密度

$$F_{XY}(x,y)=\Pr\left(X\le x,Y\le y\right)$$

$$f_{XY}(x,y)=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}F_{XY}(x,y)$$

在$X=x$给定条件下，随机变量Y的条件概率密度定义为：

$$f_{Y|X}(y\,|\,x)=\begin{cases}\dfrac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)}, & f_X(x)\neq 0,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

四、随机变量函数----由一个分布通过函数转移到另一个分布

设X是一个随机变量，$Y=g(X)$ 是新的随机变量

$$F_Y(y)=\mathrm{P_r}\left(g(X)\le y\right)$$

$$f_Y(y)=\frac{dF_Y(y)}{dy}$$

解方程$y=g(x)$

1. 方程无实根，表明$g(x)=y$的概率为0；
2. 方程有n个实根

$$f_Y(y)=\sum_{k=1}^{n}\frac{f_X(x_k)}{|\,g'(x_k)\,|}$$

其中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是$y=g(x)$ 实根

$$y=g(x_1)=g(x_2)=g(x_3)=\cdots=g(x_n)$$

设X和Y 是两个随机变量，具有概率密度 $f_{XY}(x,y)$，定义两个新随机变量：

$$Z = g(X,Y)$$
$$W = h(X,Y)$$

$$F_{ZW}(z,w) = \Pr\left(g(X,Y) \le z, h(X,Y) \le w\right)$$

$$f_{ZW}(z,w) = \frac{\partial^2}{\partial z \partial w} F_{ZW}(z,w)$$

求解方式与一维情况相同

设 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$ 为下面方程组解

$$g(x,y) = z$$
$$h(x,y) = w$$

$$f_{ZW}(z,w) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f_{XY}(x_k,y_k)}{|J(x_k,y_k)|}$$

由x和y的联合概率密度函数
求解z和w的联合概率密度函数
例2.2.3详述

$$J(x_k,y_k) = \left. \begin{vmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} \\ \dfrac{\partial h}{\partial x} & \dfrac{\partial h}{\partial y} \end{vmatrix} \right|_{x=x_k, y=y_k}$$

雅克比矩阵

5/12

五、随机变量的数字特征

1．数学期望（均值）

$$E[X] = \overline{X} = \int_{-\infty}^{\infty} x p_X(x) dx$$

当X、Y独立时，$E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$

2．方差

$$D(X) \triangleq \sigma_X^2 = E\left[(X - E(X))^2\right]$$
$$= E(X^2) - [E(X)]^2$$
$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [X - E(X)]^2 p_X(x) dx$$

3．矩

$$m_X^n = E\left[X^n\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n p_X(x) dx$$

4．特征函数

$$E\left[e^{ju \cdot X}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jux} \cdot p_X(x) dx$$

6/12

六、几个常用的分布

1. $[a, b]$上均匀分布

应用场景：当对某个连续量只知道取值范围

$$p_X(x)=\begin{cases}1/(b-a), & a\le x\le b\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$$E(X)=(b+a)/2\ ,\quad D(X)=(b-a)^2/12$$

2. Rayleigh分布

应用场景：在衰落信道中，幅度衰减用Rayleigh变量模型

$$p_X(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\sigma^2}\exp\left\{-\dfrac{x^2}{2\sigma^2}\right\}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

$$E(X)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma\ ,\quad D(X)=\frac{4-\pi}{2}\sigma^2$$

3. Guassian分布（正态分布）

$$X\sim N(a,\sigma^2)$$

$$p_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

$$E(X)=a\ ,\quad D(X)=\sigma^2$$

当$a=0$，$\sigma^2=1$ 时，称为标准正态分布

$$p_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

注意：几个重要积分

概率积分：$\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

误差函数：$\mathrm{erf}(x)=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_{0}^{x}e^{-t^2}dt$

余误差函数：$\mathrm{erfc}(x)=1-\mathrm{erf}(x)=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_{x}^{\infty}e^{-t^2}dt$

$$\mathrm{erfc}(x)\approx\frac{1}{\sqrt{\pi}x}\exp\left(-x^2\right)$$

$Q(x)$ 函数

$$Q(x) = 1 - \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

几个关于 $Q(x)$不等式

$$Q(x) \le \frac{1}{2} e^{-x^2/2}, \qquad \forall x \ge 0$$

$$Q(x) < \frac{1}{\sqrt{2\pi} x} e^{-x^2/2}, \qquad \forall x \ge 0$$

$$Q(x) > \frac{1}{\sqrt{2\pi} x}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) e^{-x^2/2}, \qquad \forall x \ge 0$$

圆对称复Gaussian (ZMCSCG)随机变量，记为 $Z \sim \mathrm{CN}(0, \sigma^2)$

$$Z = X + jY$$

$$X \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2/2) \qquad Y \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2/2)$$

4. 中心 χ^2分布随机变量：

若$Y = \sum_{k=1}^{K} X_k^2$，其中$\{X_k\}$是K 个独立同分布Gaussian随机变量$\mathrm{N}(0,\sigma^2)$，

则称Y 为自由度为K 的中心 χ^2分布随机变量。

非中心χ^2分布随机变量：

若 $Y = \sum_{k=1}^{K} X_k^2$，其中$\{X_k\}$是K 个独立Gaussian随机变量 $\mathrm{N}(\mu_k, \sigma^2)$，则称$Y$ 为自由度为K 的非中心χ^2 分布随机变量。

七、切比雪夫(Chebychev)不等式与契尔诺夫(Chernof)界

估计误码率

切比雪夫不等式：

设X是均值为 m_x，方差为 σ_x^2 的任意随机变量。则对任何正数 $\delta>0$，

$$\Pr\left(|X-m_x|\ge\delta\right)\le\frac{\sigma_x^2}{\delta^2}$$

缺点：
尾部概率较为宽松

[证明] 随机变量的方差定义为

$$\sigma_x^2=\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)^2p_X(x)dx\ge\int_{|x-m_x|\ge\delta}(x-m_x)^2p_X(x)dx$$

$$\ge\delta^2\int_{|x-m_x|\ge\delta}p_X(x)dx$$

$$=\delta^2\Pr\left(|X-m_x|\ge\delta\right)$$

契尔诺夫界： 对任意随机变量Y，定义

$$g(Y)=\begin{cases}1 & Y\ge\delta\\ 0 & Y<\delta\end{cases}$$

对任何正数 $\lambda>0$，$g(Y)\le e^{\lambda(Y-\delta)}$ ， 所以$g(Y)$的平均值为

$$E\left[g(Y)\right]=\Pr\left(Y\ge\delta\right)$$

$$\boxed{\Pr\left(Y\ge\delta\right)\le E\left\{e^{\lambda(Y-\delta)}\right\}}$$

通过选正数$\lambda>0$使上式右边最小化，从而得到最紧的上界，

$$\frac{d}{d\lambda}E\left\{e^{\lambda(Y-\delta)}\right\}=0$$

得最佳值 λ^* 满足方程，

$$E\left(Ye^{\lambda^*Y}\right)-\delta E\left(e^{\lambda^*Y}\right)=0$$

$$\boxed{\Pr\left(Y\ge\delta\right)\le e^{-\lambda^*\delta}E\left\{e^{\lambda^*Y}\right\}}$$