§ 7.4 数字调制信号的非相干解调

在许多实际应用中，*接收到的信噪比可能足够高*，即使采用非最佳的非相干解调也能获得令人满意的误码性能。这时就没有必要采用复杂的相干解调。

在非相干解调中接收机*没有关于接收到信号载波的相位信息*，但我们可以合理地*假定非相干解调系统中所提供的本地振荡信号频率与接收到信号一样，相位差是一个（0, 2π）上均匀分布随机变量θ*，同时可以合理地认为在*一个符号间隔中相位差θ几乎不变*。

[例如]在一个载波频率f_c=100MHz，符号率R_B=100Ksps的数字传输系统中，目前采用晶体稳频的接收机的频率误差可以做到10^{-6}，因此在一个符号间隔中相位误差仅-----

$$100\times10^{6}\times10^{-6}\times360^{\circ}/(100\times10^{3})=0.36^{\circ}$$

即100Hz的频率差在一个符号间隔中仅引起0.36°的相位误差变化。

7.4.1 OOK信号的非相干解调

考虑在一个符号间隔$(0, T)$中接收到的信号，

$$r(t)=A_m g_T(t)\cos(2\pi f_c t+\theta)+n(t)$$

其中 $g_T(t)=\begin{cases}A & 0\le t\le T\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$， $A_m\in\{0,1\}$

θ 为$(0, 2\pi)$上均匀分布随机变量，$n(t)$为零均值，功率谱密度为$N_0/2$的加性白高斯噪声。$r(t)$可写成，

$$r(t)=A_m g_T(t)\cos\theta\cdot\cos2\pi f_c t-A_m g_T(t)\sin\theta\cdot\sin2\pi f_c t+n(t)$$

可以看成是二维调制，二个基函数为： 求基函数

$$\varphi_1(t)=\sqrt{\frac{1}{E}}g_T(t)\cos2\pi f_c t,\quad \varphi_2(t)=\sqrt{\frac{1}{E}}g_T(t)\sin2\pi f_c t$$

其中 $E=A^2T/2$

2/29

当存在不确定的随机相位时，两个可能的接收信号码元为，

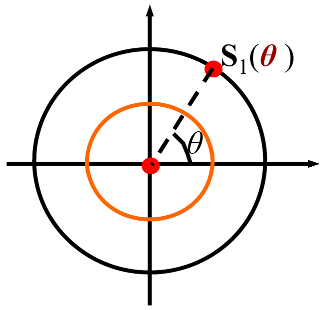
$$s_0(t)=0 \qquad 0<t<T$$

$$s_1(t)=\sqrt{E}\left[\cos\theta\cdot\varphi_1(t)-\sin\theta\cdot\varphi_2(t)\right]$$

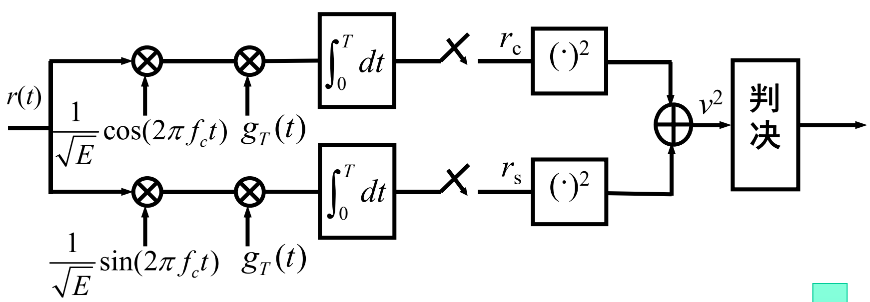
相应的二个信号点是和 θ 有关的随机点：

星座图表达

$$\mathbf{s}_0=(0,0),\qquad \mathbf{s}_1(\theta)=\left(\sqrt{E}\cos\theta,-\sqrt{E}\sin\theta\right)$$



非相干相关接收原理方框图



若s_m发送，则非相干相关接收输出的二个样本为：

分IQ路相关

$$r_c=\sqrt{E}A_m\cos\theta+n_c,\qquad r_s=\sqrt{E}A_m\sin\theta+n_s$$

其中 $n_c=\int_0^T n(t)\cdot\varphi_1(t)\,dt$， $n_s=\int_0^T n(t)\cdot\varphi_2(t)\,dt$

为独立，零均值，方差为 $N_0/2$ 的高斯噪声。

在A_m和θ给定条件下(r_c, r_s) 的联合分布为　相对于标准星座点的噪声分布

$$p_{R_cR_s}(r_c,r_s\mid A_m,\theta)=\frac{1}{\pi N_0}\exp\left\{-\frac{(r_c-\sqrt{E_m}\cos\theta)^2+(r_s-\sqrt{E_m}\sin\theta)^2}{N_0}\right\}$$

其中 $E_m=A_mE$

消去标准星座点的初相影响

$$p_{R_cR_s}(r_c,r_s\mid A_m)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}p(r_c,r_s\mid A_m,\theta)d\theta$$

$$=\frac{1}{\pi N_0}\exp\left\{-\frac{r_c^2+r_s^2+E_m}{N_0}\right\}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp\left\{\frac{\sqrt{E_m}\left[r_c\cos\theta+r_s\sin\theta\right]}{N_0/2}\right\}d\theta$$

$$=\frac{1}{\pi N_0}\exp\left\{-\frac{r_c^2+r_s^2+E_m}{N_0}\right\}\cdot I_0\left(\frac{\sqrt{E_m(r_c^2+r_s^2)}}{N_0/2}\right)$$

作变量变换　$R_c=V\cos\Theta$，　$R_s=V\sin\Theta$

接收信号的极坐标系变换

得到　$p_{V\Theta}(v,\theta\mid A_m)=\dfrac{v}{\pi N_0}\exp\left\{-\dfrac{v^2+E_m}{N_0}\right\}I_0\left\{\dfrac{\sqrt{E_m}\cdot v}{N_0/2}\right\}$

5/29

$$p_V(v\mid A_m)=\frac{v}{N_0/2}\exp\left\{-\frac{v^2+E_m}{N_0}\right\}I_0\left\{\frac{\sqrt{E_m}v}{N_0/2}\right\}$$

消去接收信号的Θ影响，只剩幅度

对于OOK调制，

概率公式（A）$p_V(v\mid A_m=0)=\dfrac{v}{N_0/2}\exp\left\{-\dfrac{v^2}{N_0}\right\}$，$E_m=0$

概率公式（B）$p_V(v\mid A_m=1)=\dfrac{v}{N_0/2}\exp\left\{-\dfrac{v^2+E}{N_0}\right\}I_0\left\{\dfrac{\sqrt{E}v}{N_0/2}\right\}$，$E_m=E$

当 $P(A_0=0)=P(A_1=1)=1/2$ 时，采用最大似然准则，

$$\left.\begin{array}{ll}\text{判发}s_1 & \dfrac{p_V(v\mid A_1)}{P_V(v\mid A_0)}>1\\ \text{判发}s_0 & \dfrac{p_V(v\mid A_1)}{p_V(v\mid A_0)}<1\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}I_0\left(\dfrac{\sqrt{E}v}{N_0/2}\right)>e^{\frac{E}{N_0}}\\ I_0\left(\dfrac{\sqrt{E}v}{N_0/2}\right)<e^{\frac{E}{N_0}}\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}v>\gamma_T\\ v<\gamma_T\end{array}\right\}$$

其中γ_T满足　$I_0\left(\dfrac{\sqrt{E}\gamma_T}{N_0/2}\right)=e^{\frac{E}{N_0}}$

6/29

当 x 充分大时，$\ln I_0(x) \approx x$，所以当信噪比 $\frac{E}{N_0}$ 充分大时

$$\frac{\sqrt{E}\gamma_T}{N_0/2} = \frac{E}{N_0} \Leftrightarrow \gamma_T = \frac{\sqrt{E}}{2}$$

所以**OOK非相干解调的误码率**

$$P_e = \frac{1}{2}\{P(e|A_1) + P(e|A_0)\}$$

概率公式（B）
发A1概率，判成A0

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\gamma_T} \frac{v}{N_0/2}\exp\left\{-\frac{v^2+E}{N_0}\right\} \cdot I_0\left(\frac{\sqrt{E}v}{N_0/2}\right)dv$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\gamma_T}^{\infty} \frac{v}{N_0/2}\exp\left\{-\frac{v^2}{N_0}\right\}dv$$

概率公式（A）
发A0概率，判成A1

第二项 $\quad \frac{1}{2}\int_{\gamma_T}^{\infty} \frac{v}{N_0/2}\exp\left\{-\frac{v^2}{N_0}\right\}dv = \frac{1}{2}e^{-\frac{E}{4N_0}}$

第一项：当 $\frac{\sqrt{E}}{N_0/2} \gg 1$ 时，$I_0(x) \approx \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}$，$p_V(v|A_m=1)$ 非常近似于均值为 $\sqrt{E}$，方差为 $N_0/2$ 的正态分布：$\frac{1}{\sqrt{\pi N_0}}\exp\left(-\frac{\left(v-\sqrt{E}\right)^2}{N_0}\right)$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\gamma_T} \frac{v}{N_0/2}\exp\left\{-\frac{v^2+E}{N_0}\right\} \cdot I_0\left(\frac{\sqrt{E}v}{N_0/2}\right)dv \approx \frac{1}{2}Q\left(\sqrt{\frac{E}{2N_0}}\right)$$

OOK误码率 $\quad P_e = \frac{1}{2}Q\left(\sqrt{\frac{E}{2N_0}}\right) + \frac{1}{2}e^{-\frac{E_{av}}{2N_0}}$

由于**平均符号能量** $E_{av} = E/2$，**记** $\rho = E_{av}/N_0$

$$P_e = \frac{1}{2}Q\left(\sqrt{\rho}\right) + \frac{1}{2}e^{-\frac{\rho}{2}}$$

当 ρ 足够大时，第二项占主导地位

$$P_e \approx \frac{1}{2}e^{-\frac{\rho}{2}}, \qquad \rho \gg 1$$

7.4.2 2FSK信号非相干解调

在2FSK信号的非相干解调系统中，接收到信号可以写成:

$$r(t)=g_T(t)\cos(2\pi f_i t+\theta_i)+n(t)\text{，}\quad i=0,1$$

其中 $g_T(t)=\begin{cases}A & 0\le t\le T\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$，$|f_0-f_1|=\dfrac{k}{2T}$

θ_0,θ_1是二个在$(0,2\pi)$均匀分布的独立随机变量。$n(t)$是零均值，功率谱密度为$N_0/2$的加性白高斯噪声。 $r(t)$可写成：

$$r(t)=g_T(t)\cos\theta_i\cos 2\pi f_i t-g_T(t)\sin\theta_i\sin 2\pi f_i t+n(t)$$

可以看成是4维调制，四个基函数为

$$\varphi_{0c}(t)=\sqrt{\frac{1}{E}}g_T(t)\cos 2\pi f_0 t\text{，}\quad \varphi_{0s}(t)=\sqrt{\frac{1}{E}}g_T(t)\sin 2\pi f_0 t$$

$$\varphi_{1c}(t)=\sqrt{\frac{1}{E}}g_T(t)\cos 2\pi f_1 t\text{，}\quad \varphi_{1s}(t)=\sqrt{\frac{1}{E}}g_T(t)\sin 2\pi f_1 t$$

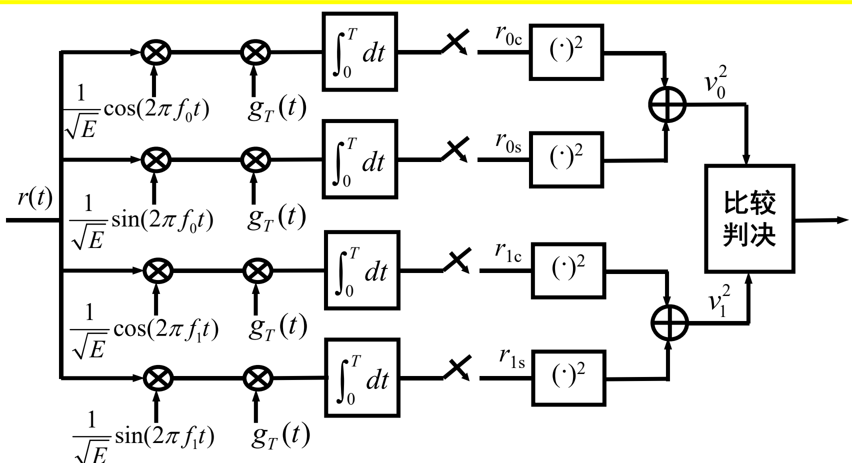
$$E=A^2T/2$$

相应的两个信号码元，

$$s_i(t)=\sqrt{E}\left[\cos\theta_i\cdot\varphi_{ic}(t)-\sin\theta_i\cdot\varphi_{is}(t)\right]\text{，}\quad i=0,1$$

在信号空间中对应的是与θ_0,θ_1有关的两个随机点：

$$\mathbf{s}_0=(\sqrt{E}\cos\theta_0,\sqrt{E}\sin\theta_0,0,0)\text{，}\quad \mathbf{s}_1=(0,0,\sqrt{E}\cos\theta_1,\sqrt{E}\sin\theta_1)$$



2FSK信号的非相干相关解调器方框图

假设 $\mathbf{s}_0$ 发送，则非相干相关接收机输出四个采样值为

$$r_{0c}=\sqrt{E}\cos\theta_0+n_{0c}\ ,\quad r_{0s}=\sqrt{E}\sin\theta_0+n_{0s}$$

$$r_{1c}=n_{1c}\ ,\quad r_{1s}=n_{1s}$$

其中

$$n_{0c}=\int_0^T n(t)\cdot\varphi_{0c}(t)dt\ ,\quad n_{0s}=\int_0^T n(t)\cdot\varphi_{0s}(t)dt$$

$$n_{1c}=\int_0^T n(t)\cdot\varphi_{1c}(t)dt\ ,\quad n_{1s}=\int_0^T n(t)\varphi_{1s}(t)dt$$

$n_{0c},n_{0s},n_{1c},n_{1s}$ 是彼此独立，零均值，方差为 $N_0/2$ 的高斯变量。

$$p(r_{0c},r_{0s},r_{1c},r_{1s}\,|\,\mathbf{s}_0,\theta_0)=\left(\frac{1}{N_0\pi}\right)^2\exp\left\{-\frac{r_{1c}^2+r_{1s}^2}{N_0}\right\}$$

$$\cdot\exp\left\{-\frac{(r_{0c}-\sqrt{E}\cos\theta_0)^2+(r_{0s}-\sqrt{E}\sin\theta_0)^2}{N_0}\right\}$$

$$=\left(\frac{1}{N_0\pi}\right)^2\exp\left\{-\frac{r_{0c}^2+r_{0s}^2+r_{1c}^2+r_{1s}^2+E}{N_0}\right\}$$

$$\cdot\exp\left\{\frac{\sqrt{E}(r_{0c}\cos\theta_0+r_{0s}\sin\theta_0)}{N_0/2}\right\}$$

$$p(r_{0c},r_{0s},r_{1c},r_{1s}\,|\,\mathbf{s}_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}p(r_{0c},r_{0s},r_{1c},r_{1s}\,|\,\mathbf{s}_0,\theta_0)d\theta$$

$$=\left(\frac{1}{\pi N_0}\right)^2 exp\left\{-\frac{r_{0c}^2+r_{0s}^2+r_{1c}^2+r_{1s}^2+E}{N_0}\right\}\cdot I_0\left(\frac{\sqrt{E(r_{0c}^2+r_{0s}^2)}}{N_0/2}\right)$$

消去标准星座点的初相影响

令

$$r_{0c}=v_0\cos\varphi_0\ ,\qquad r_{1c}=v_1\cos\varphi_1$$

$$r_{0s}=v_0\sin\varphi_0\ ,\qquad r_{1s}=v_1\sin\varphi_1$$

接收信号的极坐标系变换

得到

$$p(v_0,v_1,\varphi_0,\varphi_1\,|\,\mathbf{s}_0)=\frac{v_1v_2}{(\pi N_0)}\exp\left\{-\frac{{v_0}^2+v_1^2+E}{N_0}\right\}I_0\left(\frac{\sqrt{E}v_0}{N_0/2}\right)$$

消去极坐标系中角度的影响，只剩幅度

所以

$$p(v_0,v_1\,|\,\mathbf{s}_0)=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}p(v_0,v_1,\varphi_0,\varphi_1\,|\,\mathbf{s}_0)d\varphi_0 d\varphi_1$$

$$=\frac{v_0v_1}{(N_0/2)}\exp\left\{-\frac{{v_0}^2+{v_1}^2+E}{N_0}\right\}I_0\left(\frac{\sqrt{E}v_0}{N_0/2}\right)$$

同样

$$p(v_0,v_1\,|\,\mathbf{s}_1)=\frac{v_0v_1}{(N_0/2)^2}\exp\left\{-\frac{{v_0}^2+{v_1}^2+E}{N_0}\right\}I_0\left(\frac{\sqrt{E}v_1}{N_0/2}\right)$$

采用最大似然准则，

$$\text{判发}\mathbf{s}_0 \quad \frac{p(v_0,v_1|\mathbf{s}_0)}{p(v_0,v_1|\mathbf{s}_1)}>1 \qquad\qquad\qquad \text{判发}\mathbf{s}_1 \quad \frac{p(v_0,v_1|\mathbf{s}_0)}{p(v_0,v_1|\mathbf{s}_1)}<1$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} I_0\left(\dfrac{\sqrt{E}v_0}{N_0/2}\right)>I_0\left(\dfrac{\sqrt{E}v_1}{N_0/2}\right) \\ I_0\left(\dfrac{\sqrt{E}v_0}{N_0/2}\right)>I_0\left(\dfrac{\sqrt{E}v_1}{N_0/2}\right) \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} v_0>v_1 \\ v_0<v_1 \end{matrix}$$

计算误码率， $P_e=\frac{1}{2}P\{V_0>V_1|\mathbf{s}_1\}+\frac{1}{2}P\{V_1>V_0|\mathbf{s}_0\}$

由于对称性， $P\{V_0>V_1|\mathbf{s}_1\}=P\{V_1>V_0|\mathbf{s}_0\}$

所以 $P_e=P\{V_1>V_0|\mathbf{s}_0\}=\iint_{v_1>v_0} p(v_0,v_1|\mathbf{s}_0)dv_0dv_1$

$$=\int_0^\infty \frac{v_0}{N_0/2}\exp\left[-\frac{v_0^2+E}{N_0}\right]I_0\left(\frac{\sqrt{E}v_0}{N_0/2}\right)\left\{\int_{v_0}^\infty \frac{v_1}{N_0/2}\exp\left[-\frac{v_1^2}{N_0}\right]dv_1\right\}dv_0$$

$$=\int_0^\infty \frac{v_0}{N_0/2}\exp[-\frac{v_0^2+E}{N_0}]\cdot I_0\left(\frac{\sqrt{E}v_0}{N_0/2}\right)\cdot\exp\left[-\frac{v_0^2}{N_0}\right]dv_0$$

令 $t=\frac{2v_0}{\sqrt{N_0}}$， $\eta=\sqrt{\frac{E}{N_0}}$， 则

$$P_e=\frac{1}{2}e^{-\eta^2/2}\int_0^\infty t\exp\left\{-\frac{t^2+\eta^2}{2}\right\}\cdot I_0(\eta t)dt$$

由于 $\int_0^\infty t\exp[-\frac{t^2+\eta^2}{2}]\cdot I_0(\eta t)dt=1$

所以 $P_e=\frac{1}{2}e^{-\frac{\eta 2}{2}}=\frac{1}{2}e^{-\frac{E}{2N_0}}$

发送信号码元的平均能量为 $E_{av}=E$

$$P_e=\frac{1}{2}e^{-\frac{E_{av}}{2N_0}}$$

记平均信噪比 $\rho=E_{av}/N_0$

$$P_e=\frac{1}{2}e^{-\frac{\rho}{2}}$$

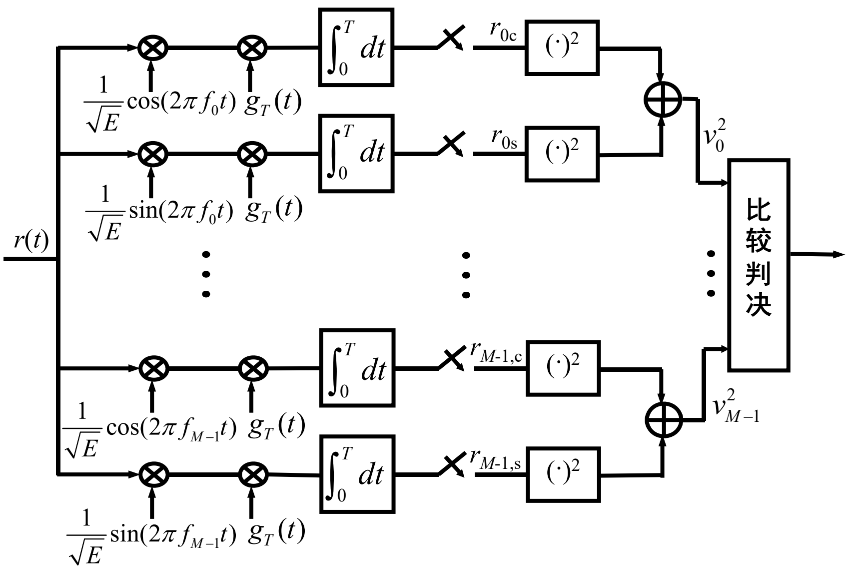
计算非相干MFSK的误码率

在MFSK信号的非相干解调系统中，接收到信号可以写成:

$$r(t)=g_T(t)\cos(2\pi f_i t+\theta_i)+n(t)，\quad i=0,1,\cdots,M-1$$

其中 $g_T(t)=\begin{cases}A & 0\le t\le T\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$，$\quad |f_i-f_{i-1}|=\dfrac{k}{2T},i=1,2,\cdots,M-1$

$\{\theta_i\}$ 是在 $(0,2\pi)$ 均匀分布的**独立随机变量**。$n(t)$ 是零均值，功率谱密度为 $N_0/2$ 的加性白高斯噪声。



MFSK信号的非相干相关解调器方框图

在等先验概率条件下，最大似然概率准则是：

$$\hat{m} = \arg\max_m \{v_m\}$$

问题的对称性，正确接收概率等于在发送$\mathbf{s}_0$条件下正确接收概率，即

$$P_M(c) = P\{V_0 > \max(V_1, V_2, ..., V_{M-1}) \mid \mathbf{s}_0\}$$

$$= P\{V_0 > V_1, V_0 > V_2, ..., V_0 > V_{M-1} \mid \mathbf{s}_0\}$$

$$= \int_0^\infty p(v_0 \mid \mathbf{s}_0) \cdot P\{V_1 < v_0, V_2 < v_0, ..., V_{M-1} < v_0 \mid \mathbf{s}_0\} dv_0$$

在发送$\mathbf{s}_0$条件下， $V_1, V_2, ..., V_{M-1}$ 是独立、同分布瑞利变量，所以

$$P\{V_1 < v_0, V_2 < v_0, ..., V_{M-1} < v_0 \mid \mathbf{s}_0\} = \prod_{i=1}^{M-1} P\{V_i < v_0 \mid \mathbf{s}_0\}$$

因为 $$P\{V_i < v_0 \mid \mathbf{s}_0\} = \int_0^{v_0} \frac{v_i}{N_0/2} \exp\left(-\frac{v_i^2}{N_0}\right) dv_i$$

$$= \left(1 - e^{-\frac{v_0^2}{N_0}}\right), \quad i = 1, 2, ..., M-1$$

$$p\{v_0 \mid \mathbf{s}_0\} = \int_0^\infty \int_0^\infty ... \int_0^\infty p(v_0, v_1, ..., v_{M-1} \mid \mathbf{s}_0) dv_1 dv_2 ... dv_{M-1}$$

$$= \frac{v_0^2}{N_0/2} \exp\left\{-\frac{v_0^2 + E}{N_0}\right\} I_0\left(\frac{\sqrt{E} v_0}{N_0/2}\right)$$

所以 $$P_M(c) = \int_0^\infty p(v_0 \mid \mathbf{s}_0) \cdot \left(1 - e^{-\frac{v_0^2}{N_0}}\right)^{M-1} dv_0$$

$$= \sum_{n=0}^{M-1} (-1)^n \int_0^\infty p(v_0 \mid \mathbf{s}_0) \cdot C_{M-1}^n e^{-\frac{n v_0^2}{N_0}} dv_0$$

$$P_M(e) = 1 - P_M(c)$$

$$= \sum_{n=1}^{M-1} (-1)^{n+1} C_{M-1}^n \int_0^\infty p(v_0 \mid \mathbf{s}_0) e^{-\frac{n v_0^2}{N_0}} dv_0$$

$$= \sum_{n=1}^{M-1} \frac{(-1)^{n+1} \cdot C_{M-1}^n}{n+1} \cdot e^{-\frac{nE}{(n+1)N_0}}$$

因为 $E_{av}=E$，所以

$$P_M(e)=\sum_{n=1}^{M-1}\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\cdot C_{M-1}^{n}\cdot e^{-\frac{n}{n+1}\cdot\frac{E_{av}}{N_0}}$$

$$=\sum_{n=1}^{M-1}\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\cdot C_{M-1}^{n}\cdot e^{-\frac{n}{n+1}\cdot\rho}$$

其中平均符号信噪比为 $\rho=\dfrac{E_{av}}{N_0}$

19/29

7.4.3 DPSK信号的差分相干解调（相位比较解调）

在DPSK调制系统中，是利用前后码元信号的相位差来传输数据信息，它的相位基准是前一时刻的相位，所以可以采用差分相干解调。

这也是一种非相干解调。在M进制DPSK中，在第k个符号间隔

$[kT, (k+1)T]$中载波相位角为

$$\theta_k=\left(\theta_{k-1}+a_k\cdot\frac{2\pi}{M}\right)\quad \bmod 2\pi$$

其中 $a_k\in\{0,1,\ldots,M-1\}$

在时间间隔 $[kT, (k+1)T]$ 中发送信号为

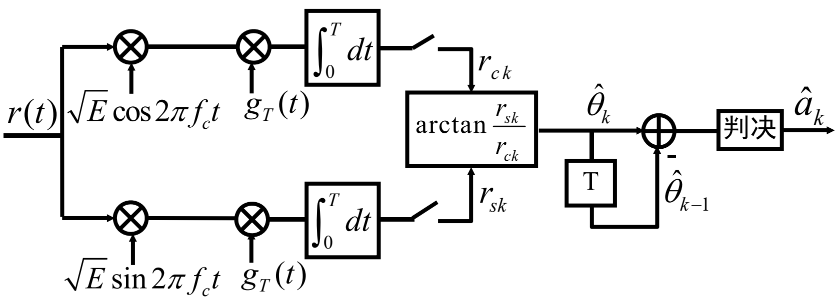
$$s(t)=g_T(t-kT)\cos(2\pi f_c t+\theta_k)$$

接收到的信号为

$$r(t)=g_T(t-kT)\cos(2\pi f_c t+\theta_k+\varphi)+n(t)$$

其中，φ 是(0，2π)上均匀分布的随机变量，$n(t)$ 是零均值，功率谱密度为 $N_0/2$ 的加性白高斯噪声。

20/29



DMPSK信号的差分相干解调方框图

两个支路上的采样输出为，

$$r_{ck}=\sqrt{E}\cos(\theta_k+\varphi)+n_{ck},\quad r_{sk}=\sqrt{E}\sin(\theta_k+\varphi)+n_{sk}$$

复数形式为， $r_k=\sqrt{E}e^{i(\theta_k+\varphi)}+n_k$

其中复数高斯噪声为 $n_k=n_{ck}+jn_{sk}$ ，n_{ck} 和 n_{sk} 为零均值，方差为 $\frac{N_0}{2}$ 的独立高斯噪声。

21/29

假定随机相位 φ 在二个相邻符号间隔中不变，则(k-1)时刻采样输出为

$$r_{k-1}=\sqrt{E}e^{i(\theta_{k-1}+\varphi)}+n_{k-1}$$

对于 r_k 和 r_{k-1} 的相位差进行判决，也就是对 $r_k r_{k-1}^*$ 的相位进行判决，

$$r_k r_{k-1}^*=Ee^{j(\theta_k-\theta_{k-1})}+\sqrt{E}e^{j(\theta_k+\varphi)}n_{k-1}^*+\sqrt{E}e^{-j(\theta_{k-1}+\varphi)}n_k+n_k n_{k-1}^*$$

相位差$\theta_k-\theta_{k-1}$包含在 $r_k r_{k-1}^*$的平均值 $Ee^{j(\theta_k-\theta_{k-1})}$ 中，其余项都是噪声。为了分析误码率，不仿假定在某符号间隔发送 $a_k=0$ ，则 $\theta_k-\theta_{k-1}=0$ ，所以

$$r_k r_{k-1}^*=E+\sqrt{E}(n_k'+n_{k-1}')+n_k n_{k-1}^*$$

其中 $\qquad n_k'\triangleq e^{-j(\theta_{k-1}+\varphi)}n_k \quad , \quad n_{k-1}'\triangleq e^{j(\theta_k+\varphi)}n_{k-1}^*$

由于 φ 是 $(0,2\pi)$ 上均匀分布的随机相位，所以 n_k',n_{k-1}' 和 n_k,n_{k-1}^* 的统计特性一样。

22/29

计算 $r_k r_{k-1}^*$ 的相位的概率分布十分复杂，主要困难在于项 $n_k n_{k-1}^*$，但当信噪比 E/N_0 充分大时，可以忽略 $n_k n_{k-1}^*$，使得分析大为简化。

扇区0

记 $\quad r_k r_{k-1}^* = z_1 + jz_2$

$$z_1 = E + \sqrt{E}(n'_{ck} + n'_{ck-1}), \quad z_2 = \sqrt{E}(n'_{sk} + n'_{sk-1})$$

判决装置是把 $\arctan(z_2/z_1)$ 与第0个扇区的边界相比较。若它不落在第0个扇区，则表示出现了符号差错。这时的差错情况与MPSK相干解调情况一样，只是现在噪声为 $(n'_{ck} + n'_{ck-1})$ 和 $(n'_{sk} + n'_{sk-1})$，代替MPSK相干解调时的 n_1 和 n_2。由于 $(n'_{ck} + n'_{ck-1})$ 和 $(n'_{sk} + n'_{sk-1})$ 的方差为 N_0，比MPSK (7.3.26) 时的噪声功率大一倍，所以相应误码率为

$$P(e) \approx 2Q\left(\sqrt{\rho} \cdot \sin\frac{\pi}{M}\right)$$

其中符号信噪比为 $\rho = E/N_0$，与相干解调相比性能差了 3dB。

对于DBPSK的差分相干解调，其误码率可以精确算出。在DBPSK中，$(\theta_k - \theta_{k-1}) \in \{0, \pi\}$，只要判别 $\mathrm{Re}\{r_k r_{k-1}^*\}$ 是大于零，还是小于零。

$$r_k r_{k-1}^* + r_k^* r_{k-1} > 0 \qquad \text{则判 } a_k = 0$$

$$r_k r_{k-1}^* + r_k^* r_{k-1} < 0 \qquad \text{则判 } a_k = 1$$

假定发送 $a_k = 0$，即 $\theta_k = \theta_{k-1}$，则误码率

$$P(e) = P\{r_k r_{k-1}^* + r_k^* r_{k-1} < 0 \mid a_k = 0\}$$

(7.4.67) =>

$$r_k r_{k-1}^* = \left\{\left[\sqrt{E}\cos(\theta_k + \varphi) + n_{ck}\right] + j\left[\sqrt{E}\sin(\theta_k + \varphi) + n_{sk}\right]\right\} \cdot \left\{\left[\sqrt{E}\cos(\theta_k + \varphi) + n_{ck-1}\right] - j\left[\sqrt{E}\sin(\theta_k + \varphi) + n_{sk-1}\right]\right\}$$

记 $D \triangleq (r_k r_{k-1}^* + r_k^* r_{k-1}) = 2\,\mathrm{Re}\left[r_k r_{k-1}^*\right]$

$$= 2\left\{\left[\sqrt{E}\cos(\theta_k+\varphi)+n_{ck}\right]\left[\sqrt{E}\cos(\theta_k+\varphi)+n_{ck-1}\right]\right.$$
$$\left.+\left[\sqrt{E}\sin(\theta_k+\varphi)+n_{sk}\right]\left[\sqrt{E}\sin(\theta_k+\varphi)+n_{sk-1}\right]\right\}$$

由于$(\theta_k+\varphi)$仍然是$(0,2\pi)$上均匀分布随机相位，所以把 $(\theta_k+\varphi)$ 仍记为 φ，通过配平方运算可以化简为

$$D = 2\left(\alpha^2-\beta^2\right)$$

$$\alpha^2 = \left[\sqrt{E}\cos\varphi + \frac{1}{2}(n_{ck}+n_{ck-1})\right]^2 + \left[\sqrt{E}\sin\varphi + \frac{1}{2}(n_{sk}+n_{sk-1})\right]^2$$

$$\beta^2 = \left[\frac{1}{2}(n_{ck}-n_{ck-1})\right]^2 + \left[\frac{1}{2}(n_{sk}-n_{sk-1})\right]^2$$

由于 $n_{ck}, n_{ck-1}, n_{sk}, n_{sk-1}$是零均值，方差为 $\frac{N_0}{2}$ 的独立高斯随机变量，所以

$$\eta_{c1} \triangleq \frac{1}{2}(n_{ck}+n_{ck-1}),\quad \eta_{c2} \triangleq \frac{1}{2}(n_{ck}-n_{ck-1})$$
$$\eta_{s1} \triangleq \frac{1}{2}(n_{sk}+n_{sk-1}),\quad \eta_{s2} \triangleq \frac{1}{2}(n_{sk}-n_{sk-1})$$

是4个零均值，方差为 $\frac{N_0}{4}$ 的独立高斯变量，于是

$$\alpha^2 = (\sqrt{E}\cos\varphi+\eta_{c1})^2 + (\sqrt{E}\sin\varphi+\eta_{s1})^2$$

$$\beta^2 = \eta_{c2}^2 + \eta_{s2}^2$$

$$P(e) = P\{D<0 \mid a_k = 0\}$$
$$= P\{\alpha^2 < \beta^2\}$$

上面误码率与2FSK非相干解调情况一样，但现在噪声功率为 $N_0/4$，是2FSK情况一半。

DBPSK信号的差分相干解调误码率

$$P(e)=\frac{1}{2}e^{-\rho}$$

其中平均符号信噪比为 $\rho=\frac{E}{N_0}$

BPSK相干解调的误码率

$$P(e)=Q(\sqrt{2\rho})=\frac{1}{2\sqrt{\pi\rho}}\cdot e^{-\rho}$$

所以2DPSK信号的差分相干解调的误码率与相干BPSK解调误码率非常相近。例如对于 $P(e)=10^{-5}$，差分相干解调要求 $\rho=10.4\text{dB}$，而BPSK相干解调要求 $\rho=9.9\text{dB}$，仅相差0.5dB。

7.4.4 二进制数字调制信号的非相干解调性能比较

调制方式	误符号率
OOK	$P_e=\frac{1}{2}Q\left(\sqrt{\rho}\right)+\frac{1}{2}e^{-\frac{\rho}{2}}\approx\frac{1}{2}e^{-\frac{\rho}{2}}$
2FSK	$P_e=\frac{1}{2}e^{-\frac{\rho}{2}}$
MFSK	$P_e=\sum_{n=1}^{M-1}\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\cdot C_{M-1}^{n}\cdot e^{-\frac{n}{n+1}\cdot\rho}$
2DPSK (差分相干解调)	$P(e)=\frac{1}{2}e^{-\rho}$

习 题

- 7-17
- 7-19
- 7-21
- 7-23
- 7-25

29/29