通信原理（甲）

第2章
2.3 平稳随机过程

§2.3　平稳随机过程

一、随机过程描述

随机函数 ：依赖于参数t的随机变量$X(t)$，$t \in T$

In probability theory, a stochastic process, or sometimes random process (widely used) is a collection of random variables, representing the evolution of some system of random values over time [wikipedia].

1．用分布函数来描述

对任一时刻 $t_1 \in T$，$X(t_1)$是随机变量

$$F_1(x_1;t_1) = P\{X(t_1) \le x_1\} \quad , \quad \frac{\partial F_1(x_1;t_1)}{\partial x_1} = f_1(x_1,t_1)$$

对任意给定个时刻 $t_1, t_2, \ldots, t_n$，n维分布函数：

$$F_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n) = P\{X(t_1) \le x_1, X(t_2) \le x_2, \cdots, X(t_n) \le x_n\}$$

n 维分布密度：

$$f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n) = \frac{\partial^n F_n(x_1,\cdots,x_n;t_1,\cdots,t_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n}$$

☹ $n \to \infty$

2/31

2. 用数字特征描述

均值函数：$E\left[X(t)\right]=\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot f_1(x,t)dx=m_X(t)$

方差函数：$D\left[X(t)\right]=E\left\{\left[X(t)-E(X(t))\right]^2\right\}$

$$=E\left\{X^2(t)\right\}-\left[E(X(t))\right]^2$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}x^2\cdot f_1(x,t)dx-\left[m_X(t)\right]^2$$

任意两个时刻 t_1，t_2值的$X\left(t_1\right)$和$X\left(t_2\right)$的协方差函数：

$$\mathrm{Cov}(t_1,t_2)=E\left\{\left[X(t_1)-m_X(t_1)\right]\left[X(t_2)-m_X(t_2)\right]\right\}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[x_1-m_X(t_1)\right]\left[x_2-m_X(t_2)\right]f_2(x_1,x_2;t_1,t_2)dx_1dx_2$$

自相关函数：

$$R(t_1,t_2)=E\left[X(t_1)\cdot X(t_2)\right]$$

两个随机过程$X(t),Y(t)$的互相关函数为：

$$R_{XY}(t_1,t_2)=E\left[X(t_1)\cdot Y(t_2)\right]$$

二、平稳随机过程

所谓平稳随机过程指它的任何 n 维分布函数与时间起点无关，即对任何 n ：

严平稳

$$F_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)$$

$$=P\left\{X(t_1)\le x_1,X(t_2)\le x_2,\cdots,X(t_n)\le x_n\right\}$$

$$=P\left\{X(t_1+\tau)\le x_1,X(t_2+\tau)\le x_2,\cdots,X(t_n+\tau)\le x_n\right\}$$

$$=F_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1+\tau,t_2+\tau,\cdots,t_n+\tau)$$

从而对任何 τ，

$$F_n(x_1,x_2,\cdots x_n;t_1,t_2,\cdots t_n)=F_n(x_1,\cdots,x_n;t_1-\tau,\cdots,t_n-\tau)$$

对于一维分布，取 $\tau=t_1$ ，于是一维分布和分布密度与时间无关，可记为 $F_1(x_1)$和$f_1(x_1)$。

对于平稳过程

均值： $E\left[X(t)\right]=m_X$

方差： $D\left[X(t)\right]=E\left[X^2(t)\right]-m_X^2$

$=\sigma_X^2$

常数

自相关函数：

$\int_{-\infty}^{\infty}x_1x_2f_2(x_1,x_2;t_1,t_2)dx_1dx_2$

$=\int_{-\infty}^{\infty}x_1x_2f_2(x_1,x_2;0,t_2-t_1)dx_1dx_2$

$R(t_1,t_2)=E[X(t_1)X(t_2)]=E[X(0)X(t_2-t_1)]$

$=R(0,t_2-t_1)\triangleq R(\tau)$

如果一个随机过程的均值、方差为常数，自相关函数只和时间差有关，则称这随机过程为广义平稳的，相应原来定义的平稳过程亦称为严平稳过程。

广义平稳 $\underset{\text{不一定是}}{\overset{\text{一定是}}{\rightleftarrows}}$ 严平稳过程

三、各态历经过程（Ergodic过程）------随机信号

对于平稳过程 $X(t)$，和任何函数 $g(x)$，有二种平均：

1. ***集合平均***： $E\left[g(X)\right]=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)\cdot f(x)dx$

2. ***时间平均***： $x(t)$为$X(t)$的一个样本函数，则$g(x(t))$的时间平均为：

$$<g(x)>=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}g(x(t))dt$$

一个平稳过程 $X(t)$ 具有Ergodic性，指对任何函数 $g(x)$：

$$E\left[g(X)\right]=<g(x)>$$

各态历经平稳过程的均值和方差可用样本函数的时间平均代替，

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}x(t)dt=m_X$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\left[x(t)-m_X\right]^2dt=D\left[X(t)\right]$$

四、相关函数与功率谱

平稳随机过程 $X(t)$的相关函数性质

① $R(0)=E[X^2(t)]\ge\sigma_X^2\ge 0$ 平均功率

② $R(\tau)=E\left[X(t_1)X(t_1+\tau)\right]=E\left[X(t_1-\tau)X(t_1)\right]=R(-\tau)$

有时为了强调是随机过程 $X(t)$ 的相关函数，也记为 $R_X(\tau)$ 。

③ $|R(\tau)|\le R(0)$ 自相关最大值

④ $R(\infty)=\left\{E\left[X(t)\right]\right\}^2$ **称为直流功率**

随机信号的平均值即直流分量

因为 $R(\infty)=\lim\limits_{\tau\to\infty}E\left[X(t)X(t+\tau)\right]$

可以认为当 $\tau\to\infty$ 时，$X(t)$ 和 $X(t+\tau)$ 独立，

所以 $R(\infty)=E\left[X(t)\right]\cdot\lim\limits_{\tau\to\infty}E\left[X(t+\tau)\right]=E^2\left[X(t)\right]$

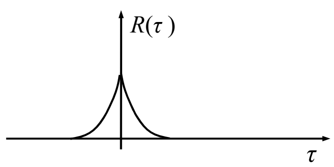
因为 $D\left[X(t)\right]=E\left[X^2(t)\right]-E^2\left[X(t)\right]$

$$=R(0)-R(\infty)$$

平均功率　　　　直流功率

$$\triangleq\sigma_X^2$$

所以 σ_X^2 也称为交流功率，一般平稳过程的相关函数 $R(\tau)$ 有如下图形状：



功率谱

设 $x(t)$ 为平稳随机过程 $X(t)$ 一个样本函数，$x_T(t)$ 为它的截断

$$x_T(t)=\begin{cases} x(t) & |t|\le T/2 \\ 0 & |t|\ge T/2 \end{cases}$$

$$F_T(f)=\int_{-\infty}^{\infty} x_T(t)\cdot e^{-j2\pi ft}dt$$

平稳随机过程$X(t)$的功率谱定义为：

截断过程的功率谱密度

$$P_X(f)=\lim_{T\to\infty}\boxed{\frac{1}{T}E\left\{\left|F_T(f)\right|^2\right\}}$$

可以证明：

$$\boxed{R_X(\tau)\Leftrightarrow P_X(f)}$$

构成傅里叶变换对
—后者计算方法

当功率谱为常数时，即$P_X(f)=A$，则随机过程 $X(t)$ 称为白色的，相应的相关函数 $R_X(\tau)=A\cdot\delta(\tau)$ 。

白噪声

[例] $X(t)=\sin(2\pi f_0 t+\theta)$，其中 θ 为 $(0,2\pi)$ 上均匀分布随机变量，

$$E[X(t)]=E[\sin(2\pi f_0 t+\theta)]=0$$

$$R(t_1,t_2)=E[\sin(2\pi f_0 t_1+\theta)\cdot\sin(2\pi f_0 t_2+\theta)]$$

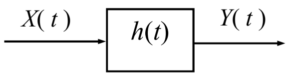
$$=\frac{1}{2}\cos(2\pi f_0\tau)\ ,\qquad \tau=t_2-t_1$$

X(t)是广义平稳随机过程

$$P_X(f)=\int_{-\infty}^{\infty}R(\tau)\cdot e^{-j2\pi f\tau}d\tau$$

$$=\frac{1}{4}[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)]$$

五、平稳随机过程通过线性系统 -----被滤波的接收信号



平稳过程 $X(t)$ 的样本函数 $x(t)$，它通过线性系统 $h(t)$ 的输出为：

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

$y(t)$是$Y(t)$的一个样本函数

输出过程为：$Y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)X(t-\tau)d\tau$

当$X(t)$是平稳的，线性滤波器的输出过程也是平稳的

① 输出过程 $Y(t)$ 的均值：

$$E[Y(t)]=E[\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)X(t-\tau)\mathrm{d}\tau]=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)E[X(t-\tau)]\mathrm{d}\tau=\boxed{E[X(t)]\cdot H(0)}$$

常数

② $Y(t)$的自相关函数 $R_Y(t,t+\tau)$

$$R_Y(t,t+\tau)=E[y(t)y(t+\tau)]$$

$$=E\left[\int_{-\infty}^{\infty}h(\alpha)X(t-\alpha)d\alpha\cdot\int_{-\infty}^{\infty}h(\beta)X(t+\tau-\beta)d\beta\right]$$

$$=\boxed{R_x(\tau)\otimes h(\tau)\otimes h(-\tau)}$$

只与时间差有关

11/31

③ $Y(t)$ 的功率谱

$$P_Y(f)=\int_{-\infty}^{\infty}R_Y(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau=P_X(f)\cdot H(f)\cdot H^*(f)$$

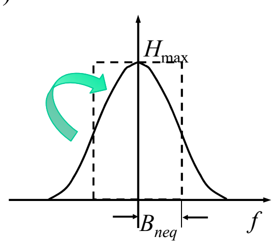
$$=P_X(f)\cdot\boxed{|H(f)|^2}$$

冲激响应的功率谱

④ 线性系统的等效噪声带宽

白噪声 $P_x(f)=N_0/2$，通过滤波器 $H(f)$

输出的噪声功率谱：$P_Y(f)=\dfrac{N_0}{2}|H(f)|^2$



滤波器等效噪声带宽：

$$B_{neq}=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}|H(f)|^2df}{2H_{\max}^2}$$

输出总功率：

$$P_Y=\frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty}|H(f)|^2df$$

$$=N_0\cdot B_{neg}\cdot H_{\max}^2$$

12/31

⑤ 二个随机过程的互相关函数

随机过程$X(t)$和$Y(t)$之间的互相关函数为

$$R_{XY}(t_1,t_2)=E\left[X(t_1)Y(t_2)\right]$$

显然， $R_{XY}(t_1,t_2)=R_{YX}(t_2,t_1) \Leftarrow$ 对称性

如果 $R_{XY}(t_1,t_2)$ 仅和$\tau=t_1-t_2$有关，则称 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 为联合广义平稳的。

考虑线性系统：

$$Y(t)=X(t)\otimes h(t)$$

$$\begin{aligned}R_{XY}(t_1,t_2)&=E\left[X(t_1)Y(t_2)\right]\\&=E\left[x(t_1)\int_{-\infty}^{\infty}x(s)h(t_2-s)ds\right]\\&=\int_{-\infty}^{\infty}R_X(t_1-s)h(t_2-s)ds\\&=R_X(\tau)\otimes h(-\tau)\end{aligned}$$

$\Leftarrow$ 输入和输出之间联合广义平稳

其中$\tau=t_1-t_2$。

六、高斯过程

如果随机过程$X(t)$的任何n维分布均为高斯分布，则该过程称为高斯过程，即对任何 $t_1,t_2,\cdots,t_n\in\Gamma$，分布密度

$$f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\boldsymbol{B}|^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m})\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m})^T\right\}$$

其中，方差矩阵$\boldsymbol{B}=\left(b_{ij}\right)_{n\times n}$ $\quad b_{ij}=E\left[(x(t_i)-m_i)(x(t_j)-m_j)\right]$

$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$\boldsymbol{m}=(m_1,m_2,\cdots,m_n)$，$m_i=E\left[x(t_i)\right]$

可见高斯过程的分布密度仅和各随机变量均值、方差和二阶矩有关，所以如果高斯过程是广义平稳的，则它必定是严格平稳的。

对于白高斯噪声，这时各时刻的随机变量不相关，

即 $b_{ij}=0,(i\neq j)$，这时

$$
\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & & & \\ & \sigma_2^2 & 0 & \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \sigma_n^2\end{pmatrix},\qquad
\boldsymbol{B}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sigma_1^2} & & & \\ & \frac{1}{\sigma_2^2} & 0 & \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \frac{1}{\sigma_n^2}\end{pmatrix}
$$

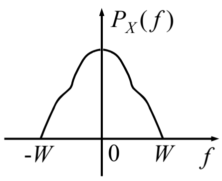
$$
\begin{aligned}
f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)
&=\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_j}\exp\left\{-\frac{(x_j-m_j)^2}{2\sigma_j^2}\right\}\\
&=f(x_1;t_1)f(x_2;t_2)\cdots f(x_n;t_n)
\end{aligned}
$$

由于高斯随机变量相加后仍为高斯变量，所以高斯过程通过线性系统的输出仍然是高斯的。

七、带限过程及其采样----Nyquist采样

定义：平稳随机过程 $X(t)$ 称为是带限的，指它的功率谱

$P_X(f)=0$，$|f|\geq W$。



定理：令$X(t)$是平稳带限过程，即

$P_X(f)=0$，$|f|>W$，

则下面式子成立：

$$
E\left|X(t)-\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(kT_s)\operatorname{sinc}(2W(t-kT_s))\right|^2=0
$$

其中，$T_s=\dfrac{1}{2W}$，$\operatorname{sinc}(x)=\dfrac{\sin\pi x}{\pi x}$

一个带限平稳随机过程可以由它每间隔T_s的样本来表示

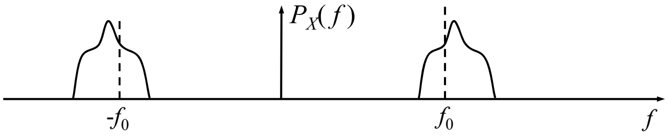
$X(t)$ 可以写成，

$$
X(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(kT_s)\operatorname{sinc}(2W(t-kT_s))
$$
（均方意义下成立）

八、平稳带通过程

定义：随机过程 $X(t)$ 称为是带通的（或窄带的）是指

$$P_X(f)=0,\ \left|f\mp f_0\right|\geq W,\quad W<f_0$$



我们寻找窄带过程的复包络表示，也就是它的等效低通表示。

因为$X(t)$是带通过程，所以它的自相关函数$R_X(\tau)$是一个确定的带通函数。

令 $X(t)$ 通过脉冲响应为 $h(t)=\dfrac{1}{\pi t}$ 的Hilbert滤波器，输出为 $\hat{X}(t)$

则
$$R_{X\hat{X}}(\tau)=R_X(\tau)\otimes h(-\tau)$$
$$=-\hat{R}_X(\tau)$$
$$R_{\hat{X}}(\tau)=R_X(\tau)\otimes h(\tau)\otimes h(-\tau)$$
$$=R_X(\tau)$$

我们可以定义二个新的过程 $X_c(t),X_s(t)$

$$X_c(t)=X(t)\cos(2\pi f_0 t)+\hat{X}(t)\sin(2\pi f_0 t)$$
$$X_s(t)=\hat{X}(t)\cos(2\pi f_0 t)-X(t)\sin(2\pi f_0 t)$$

$X_c(t)$ 和 $X_s(t)$分别称为随机过程 $X(t)$的低通同相分量和低通正交分量，当$X(t)$ 是零均值，平稳随机过程时，则$X_c(t)$和 $X_s(t)$ 也具有同样性质。

定理2.3.3：若$X(t)$是零均值，平稳窄带随机过程，则$X_c(t)$和 $X_s(t)$ 也是零均值、平稳过程。

[证明] 显然 $\hat{X}(t)$ 是零均值，平稳的，于是$X_c(t)$和$X_s(t)$的零均值是显然的。可以证明：

$$\hat{X}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}X(t-\tau)h(\tau)d\tau$$

$$E\left[\hat{X}(t)\right]=\int_{-\infty}^{\infty}E\left[X(t-\tau)\right]h(\tau)d\tau$$

$$R_{X_c}(t+\tau,t)=E\left[X_c(t+\tau)X_c(t)\right]$$
$$=R_X(\tau)\cos(2\pi f_0\tau)+\hat{R}_X(\tau)\sin(2\pi f_0\tau)$$

（证明中利用了 $\hat{R}_X(\tau)$ 是奇函数），所以

$$R_{X_c}(\tau)=R_X(\tau)\cos(2\pi f_0\tau)+\hat{R}_X(\tau)\sin(2\pi f_0\tau)$$

$$R_{X_s}(\tau)=R_X(\tau)\cos(2\pi f_0\tau)+\hat{R}_X(\tau)\sin(2\pi f_0\tau)$$

$$R_{X_cX_s}(\tau)=R_X(\tau)\sin(2\pi f_0\tau)-\hat{R}_X(\tau)\cos(2\pi f_0\tau)$$

下面证明$X_c(t)$和$X_s(t)$是低通过程：

定理2.3.4：$X_c(t)$和 $X_s(t)$ 是低通过程，即 $X_c(t)$ 和 $X_s(t)$ 的功率谱在$|f|>W$为零。

$$x_c(t)=x(t)\cos(2\pi f_0 t)+\hat{x}(t)\sin(2\pi f_0 t)$$

[证明] 因为 $R_{X_c}(t)$、$R_{X_s}(t)$是确定信号，把

移频解释

$$R_{X_c}(\tau)=R_{X_s}(\tau)=R_X(\tau)\cos(2\pi f_0\tau)+\hat{R}_X(\tau)\sin(2\pi f_0\tau)$$

与确定信号相比，$R_{X_c}(t)$和 $R_{X_s}(t)$正好对应了带通信号$R_X(t)$的相应低频同相分量，所以$R_{X_c}(t)$ 和$R_{X_s}(t)$是低通的，即 $P_{X_c}(f)$ 和 $P_{X_s}(f)$ 仅在$|f|<W$ 时，不为零。 #

考虑 $X_c(t)$ 和 $X_s(t)$ 的功率谱

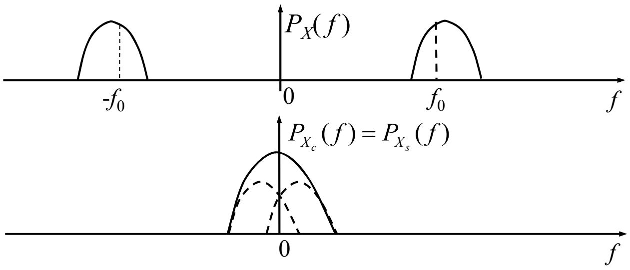
$$P_{X_c}(f)=P_{X_s}(f)=\mathrm{F}\,[R_X(\tau)\cos(2\pi f_0\tau)+\hat{R}_X(\tau)\sin(2\pi f_0\tau)]$$

$$=\frac{P_X(f-f_0)+P_X(f+f_0)}{2}+[-j\,\mathrm{sgn}(f)P_X(f)]\otimes\left[\frac{\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)}{2j}\right]$$

$$=\frac{P_X(f-f_0)}{2}[1-\mathrm{sgn}(f-f_0)]+\frac{P_X(f+f_0)}{2}[1+\mathrm{sgn}(f+f_0)]$$

由于 $P_X(f)$ 的窄带性，所以

$$P_{X_c}(f)=P_{X_s}(f)=\begin{cases}P_X(f-f_0)+P_X(f+f_0) & |f|<f_0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$



$X_c(t)$ 和 $X_s(t)$ 的功率

$$D[X(t)]=E\left[X^2(t)\right]-E^2[X(t)]$$
$$=R(0)-R(\infty)$$
$$=\sigma_X^2$$

因为 $\quad R_{X_c}(0)=R_{X_s}(0)=R_X(0)$

所以 $\quad \sigma_{X_c}^2=\sigma_{X_s}^2=\sigma_X^2$

另一方面由于

$$R_{X_cX_s}(\tau)=R_X(\tau)\sin(2\pi f_0\tau)-\hat{R}_X(\tau)\cos(2\pi f_0\tau)$$

因为 $R_X(\tau)$ 为偶函数，$\hat{R}_X(\tau)$ 是奇函数，所以是 $R_{X_cX_s}(\tau)$ 奇函数，

从而：$\quad R_{X_cX_s}(0)=E[X_c(t)X_s(t)]=0 \Longrightarrow$ 在同一时刻，窄带过程的同相分量与正交分量相互正交

因为在任何时刻 t，二个相正交分量 $X_c(t)$ 和 $X_s(t)$ 不相关，但这不能保证在任何二个不同时刻 t_1，t_2，这二个分量都不相关。

由 $X_c(t)=X(t)\cos(2\pi f_0 t)+\hat{X}(t)\sin(2\pi f_0 t)$

$X_s(t)=\hat{X}(t)\cos(2\pi f_0 t)-X(t)\sin(2\pi f_0 t)$

所以 $X(t)=X_c(t)\cos(2\pi f_0 t)-X_s(t)\sin(2\pi f_0 t)$

$\hat{X}(t)=X_c(t)\sin(2\pi f_0 t)+X_s(t)\cos(2\pi f_0 t)$

$X(t)$可写成 $X(t)=V(t)\cos(2\pi f_0 t+\Theta(t))$

其中 $V(t)=\sqrt{X_c^2(t)+X_s^2(t)}$， $\Theta(t)=\arctan\dfrac{X_s(t)}{X_c(t)}$

$A(t)=V(t)e^{j\angle\Theta(t)}$ 称为窄带过程 $X(t)$的复包络。

$X(t)=\mathrm{Re}[A(t)\cdot e^{j2\pi f_0 t}]$

现求幅度 $V(t)$ 和相位 $\Theta(t)$ 的分布：

当 $X(t)$ 是平稳窄带高斯过程时，则 $X_c(t)$和 $X_s(t)$ 是二个独立、平稳的高斯过程。

所以 $f_{X_c,X_s}(x_c,x_s)=\dfrac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left\{-\dfrac{x_c^2+x_s^2}{2\sigma^2}\right\}$

由于 $X_c(t)=V(t)\cos\Theta(t)$， $X_s(t)=V(t)\sin\Theta(t)$

作变量置换 $X_c=V\cos\Theta$， $X_s=V\sin\Theta$

得到幅度 $V(t)$和相位 $\Theta(t)$的联合分布为：

$$f_{V\Theta}(v,\theta)=\frac{v}{2\pi\sigma^2}\exp\left[-\frac{v^2}{2\sigma^2}\right],\qquad v\geq 0,\quad -\pi\leq\theta\leq\pi$$

幅度分布： $f_V(v)=\int_{-\pi}^{\pi}f_{V\Theta}(v,\theta)d\theta=\dfrac{v}{\sigma^2}\cdot\exp\left[-\dfrac{v^2}{2\sigma^2}\right]$， $v\geq 0$

相位分布： $f_\Theta(\theta)=\int_0^{\infty}f_{V\Theta}(v,\theta)dv=1/2\pi$ ， $-\pi\leq\theta\leq\pi$

平稳窄带高斯过程的幅度满足Rayleigh分布，相位满足均匀分布。

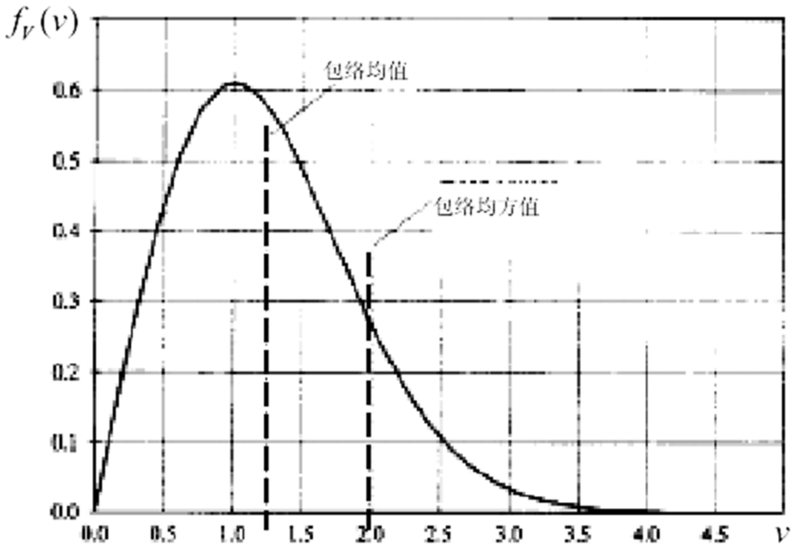


图 2.3.10 Rayleigh 概率分布密度函数（$\sigma^2=1$）

九、正弦波加窄带高斯噪声信号

设信号为 $s(t)=A\cos(2\pi f_0 t+\Theta)$

其中 A 和 f_0 为确知常数，Θ为$(-\pi,\pi)$上均匀分布随机变量。

$N(t)$为频谱在 f_0 附近的窄带高斯噪声过程：

$$N(t)=N_c(t)\cos(2\pi f_0 t)-N_s(t)\sin(2\pi f_0 t)$$

设 $r(t)$ 为正弦波 $s(t)$ 迭加上窄带高斯噪声$N(t)$

$$\begin{aligned} r(t)&=s(t)+N(t)\\ &=\left[A\cos\Theta+N_c(t)\right]\cos(2\pi f_0 t)-\left[A\sin\Theta+N_s(t)\right]\sin(2\pi f_0 t)\end{aligned}$$

记 $Z_c(t)\triangleq A\cos\Theta+N_c(t)$， $Z_s(t)\triangleq A\sin\Theta+N_s(t)$

$r(t)$ 的包络为：

$$V(t)=\sqrt{\left[A\cos\Theta+N_c(t)\right]^2+\left[A\sin\Theta+N_s(t)\right]^2}$$

$r(t)$ 的相位为：

$$\Phi(t)=\arctan\frac{Z_s(t)}{Z_c(t)}$$

经计算 $V(t)$ 的概率分布为

$$f_V(v)=\int_{-\pi}^{\pi} f_v(v\,|\,\Theta=\theta)\cdot f_\Theta(\theta)d\theta$$

$$=\frac{v}{\sigma^2}\exp\left[-\frac{v^2+A^2}{2\sigma^2}\right]\cdot I_0\left(\frac{Av}{\sigma^2}\right)\quad ,v\ge 0$$

$$f_{Z_cZ_s}(z_c,z_s\,|\,\Theta=\theta)\Rightarrow f_{V\Phi}(v,\varphi\,|\,\Theta=\theta)$$

$$f_V(v\,|\,\Theta=\theta)=\int_{-\pi}^{\pi} f_{V\Phi}(v,\varphi\,|\,\Theta=\theta)d\varphi$$

$$f_V(v)=\int_{-\pi}^{\pi} f_V(v\,|\,\Theta=\theta)f_\Theta(\theta)d\theta$$

上述分布称为**Rice分布**。

$r(t)$ 相位 $\Phi(t)$ 的概率分布，可以证明为

$$f_\Phi(\varphi\,|\,\Theta=\theta)=\int_0^{\infty} f_{V\Phi}(v,\varphi\,|\,\Theta=\theta)dv$$

$$=\frac{\exp(-A^2/2\sigma^2)}{2\pi}+\frac{A\cos(\theta-\varphi)}{2(2\pi)^{\frac{1}{2}}\sigma}\exp\left[-\frac{A^2}{2\sigma^2}\sin^2(\theta-\varphi)\right]\left\{1+erf\left[\frac{A\cos(\theta-\varphi)}{\sqrt{2}\sigma}\right]\right\}$$

$$f_\Phi(\varphi\,|\,\Theta=\theta)=\int_0^{\infty} f_{V\Phi}(v,\varphi\,|\,\Theta=\theta)dv$$

$$f_\Phi(\varphi)=\int_{-\pi}^{\pi} f_\Phi(\varphi\,|\,\Theta=\theta)f_\Theta(\theta)d\theta$$

所以 $$f_\Phi(\varphi)=\int_{-\pi}^{\pi} f_\Phi(\varphi\,|\,\Theta=\theta)\cdot f_\Theta(\theta)d\theta$$

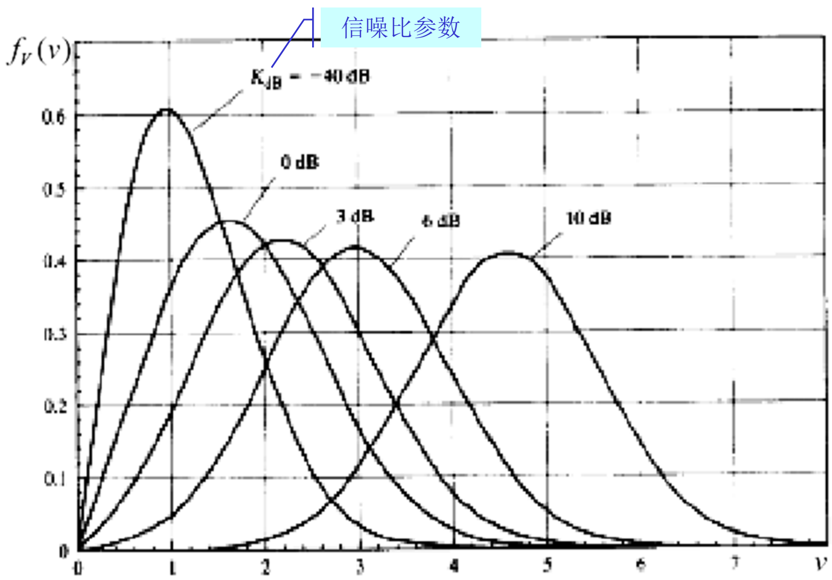


图 2.3.11　Rice 分布密度函数，$K_{db}=10\log_{10}A^2/2\sigma^2$ 为信噪比参数

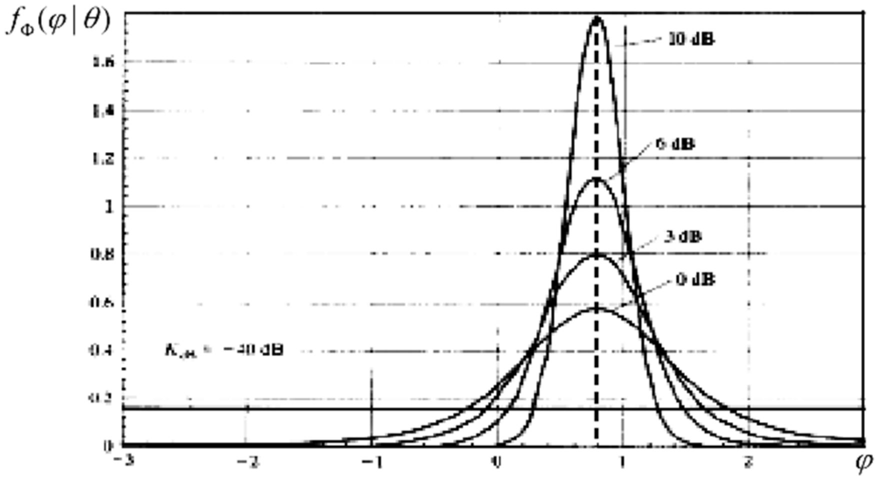


图 2.3.12 在条件$\theta=\pi/4$下相位Φ的条件分布密度

29/31

十、 循环平稳过程

一个时间连续的二阶矩随机过程$\{X(t), t\in(-\infty,\infty)\}$被称为是周期为$T$的**广义循环平稳过程**是指它的**均值过程**和**自相关函数**均是t的周期为T的周期函数，即

$$m_X(t) \triangleq E\left\{X(t)\right\} = m_X(t+T)$$

$$\begin{aligned} R_X(t+\tau,t) &\triangleq E\left\{X(t+\tau)X^*(t)\right\} = E\left\{X(t+T+\tau)X^*(t+T)\right\} \\ &= R_X(t+T+\tau, t+T) \end{aligned}$$

由于平稳随机过程具有处理上的优越性，因此希望把循环平稳随机过程转化成平稳过程，使得可以利用诸如功率谱这样的概念。

$$\overline{R}_X(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T R_X(t+\tau,t)dt \Longleftarrow$$

在一个周期内取平均消除对t的依赖

$$P_X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{R}_X(\tau)\cdot e^{-j2\pi f\tau}d\tau$$

30/31

习 题

- 2.3
- 2.7
- 2.10(4)
- 2.11
- 2.19
- 2.22
- 2.25
- 2.30
- 2.35
- 2.37
- 2.44