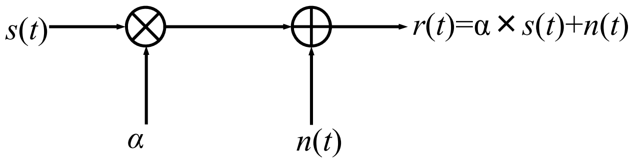
§3.4　通信链路损耗和噪声

一个简单通信信道：



α是信道传输损耗，n(t)是加性噪声。

一、传输链路损耗

P_T为发射功率，P_R为接收机收到功率，则传输损耗：

$$L=\frac{P_T}{P_R}\ ,\qquad L_{\mathrm{dB}}=10\log L=10\log P_T-10\log P_R$$

对于自由空间传输， $L=\left(\frac{4\pi d}{\lambda}\right)^2$

对于一般移动通信， $L\propto\left(\frac{d}{\lambda}\right)^n,2\le n\le 4$

二、加性噪声

加性噪声
- 人为噪声
- 自然噪声
- 内部噪声

加性噪声
- 确知噪声
- 随机噪声
  - 窄带噪声
  - 脉冲噪声
  - 起伏噪声

由量子力学可知，在电阻 R 所产生的随机电压的功率谱为，

$$S_R(f)=\frac{2R\hbar|f|}{(e^{\frac{\hbar f}{kT}}-1)}\ ,\qquad (\mathrm{V^2/Hz})$$

$\hbar=6.6260755\times10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s}$ 为普朗克常数

$k=1.380658\times10^{-23}\,\mathrm{J\cdot K^{-1}}$ 为玻尔兹曼常数

T=273.15+t (° C) 为热力学温度

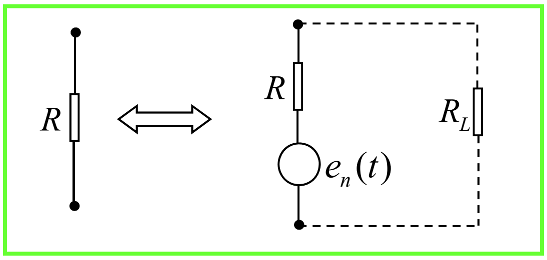
在频率低于 10^{12} Hz范围内，

$$e^{\frac{\hbar f}{kT}}\approx1+\frac{\hbar|f|}{kT}$$

所以这时：

$$\boxed{S_R(f)=2RkT\ ,\qquad (\mathrm{V^2/Hz})}$$

电阻的噪声模型



当匹配时，即 $R_L=R$ 时，负载上获得最大功率等于：

$$\left(\frac{\sqrt{S_R(f)}}{2R}\right)^2\cdot R=\frac{kT}{2}\ ,\qquad (\mathrm{W/Hz})$$

所以负载上的热噪声功率谱为：

$$\boxed{S_n(f)=\frac{N_0}{2}\ ,\qquad (\mathrm{W/Hz})}$$

其中 $N_0=kT$，（在常温下 $T=290\ \mathrm{K}$ ，$N_0=4\times10^{-21}\,\mathrm{W/Hz}$）

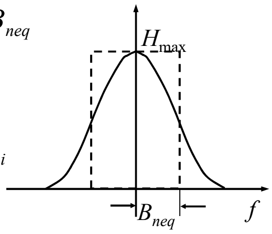
等效噪声带宽 ----from 2.3.5

噪声源 $N_0/2$ → 放大器 $H(f)$ → 负载

放大器输出功率：$P_{no}=\int_{-\infty}^{\infty}S_n(f)|H(f)|^2\,df=\frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty}|H(f)|^2\,df$

等效噪声带宽为：$\boxed{B_{neq}=\frac{1}{2A}\int_{-\infty}^{\infty}|H(f)|^2\,df\text{，}\ A=\max_f\left\{|H(f)|^2\right\}=H_{\max}^2}$

无噪声理想放大器输出噪声功率：$P_{no}=A\cdot N_0\cdot B_{neq}$



考虑到放大器自身噪声，输出噪声功率：

$$P_{no}=A\cdot N_0\cdot B_{neq}+P_{ni}\ =A\cdot kT\cdot B_{Beq}+P_{ni}$$

即 $$P_{no}=AkB_{neq}\left(T+\frac{P_{ni}}{AkB_{neq}}\right)$$

$\boxed{\text{有效噪声温度：}T_e=\frac{P_{ni}}{AkB_{neq}}}$， 于是 $P_{no}=AkB_{neq}(T+T_e)$

如果这个放大器输入载波信号功率为 P_{si}，则输出信号功率为

$$P_{so}=A\cdot P_{si}$$

所以输出信噪比（SNR）为：

$$\left(\frac{S}{N}\right)_0=\frac{P_{s0}}{P_{n0}}=\frac{AP_{si}}{AkTB_{neq}\left(1+\frac{T_e}{T}\right)}=\frac{P_{si}}{kTB_{neq}\left(1+\frac{T_e}{T}\right)}$$
$$=\left(\frac{S}{N}\right)_i\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{T_e}{T}\right)}$$

定义放大器的噪声系数为：

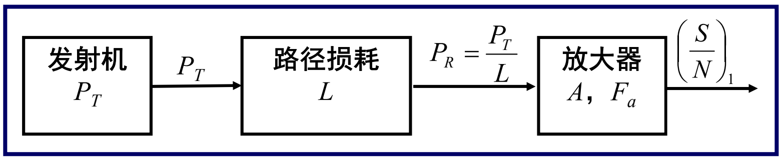
$$\boxed{F=\left(1+\frac{T_e}{T_0}\right),\quad T=T_0=(290\mathrm{K})}$$

所以输出信噪比：$\boxed{\left(\frac{S}{N}\right)_0=\frac{1}{F}\left(\frac{S}{N}\right)_i}$

K 节放大器级联，总的噪声系数为：

$$F=F_1+\frac{F_2-1}{A_1}+\frac{F_3-1}{A_1A_2}+\cdots+\frac{F_{k-1}}{A_1A_2\cdots A_{k-1}}$$

三、信号中继转发链路分析



设路径损耗L，放大器功率增益A，噪声系数F_a，则中继节点输出信噪比：

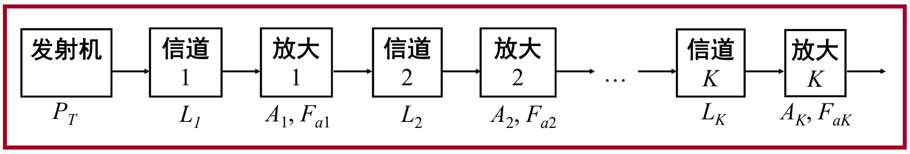
$$\left(\frac{S}{N}\right)_1 = \frac{1}{F_a}\left(\frac{S}{N}\right)_i = \frac{1}{F_a}\left(\frac{P_R}{N_0 B_{neq}}\right) = \frac{1}{F_a}\left(\frac{P_T}{L \cdot N_0 \cdot B_{neq}}\right)$$

$$= \frac{1}{F_a \cdot L}\left(\frac{P_T}{N_0 \cdot B_{neq}}\right) \quad = \frac{1}{F}\left(\frac{P_T}{N_0 \cdot B_{neq}}\right)$$

路径损耗看成噪声系数为L，增益为$1/L$ 的滤波器，放大器的增益为A，噪声系数为F_a，所以级联后的总噪声系数为：

$$\boxed{F = L + \frac{F_a - 1}{1/L} = L \cdot F_a}$$

K个中继放大器级联



K个中继放大链路级联所构成系统的总噪声系数为：

$$\boxed{F = L_1 F_{a1} + \frac{L_2 F_{a2} - 1}{A_1 / L_1} + \frac{L_3 F_{a3} - 1}{(A_1 / L_1) \cdot (A_2 / L_2)} + \cdots + \frac{L_K F_{aK}}{(A_1 / L_1)(A_2 / L_2) \cdots (A_{K-1} / L_{K-1})}}$$

当所有 L_i 都相等，所有 F_{ai} 都相同，放大器增益正好补偿链路损耗时：

$$L_i = L \qquad F_{ai} = F_a \qquad L_i = A_i$$

$$F = K \cdot L \cdot F_a - (K-1) \approx KLF_a$$

输出信噪比：$\left(\frac{S}{N}\right)_o = \frac{1}{F}\left(\frac{S}{N}\right)_i = \frac{1}{F}\left(\frac{P_T}{N_0 \cdot B_{neq}}\right)$

§ 3.5 信道容量与信道编码定理

Shannon理论表明，对于每个信道都存在一个相应的称之为信道容量的传输极限，只要传输码率低于信道容量就可以以任意小的误码率传输信息，如果传输码率超过信道容量则不可能实现任意小误码率。

3.5.1 离散无记忆信道的容量

$$X \longrightarrow \boxed{\text{信道 } \{P(y|x)\}} \longrightarrow Y$$

$$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y)$$

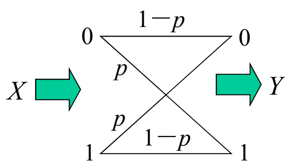
$$= \sum_x \sum_y P_X(x) P_{Y|X}(y|x) \log \frac{P_{Y|X}(y|x)}{P_Y(y)}$$

接收到Y使X不确定性的减少量

$$\boxed{C = \max_{\{P_X(x)\}} I(X;Y)}$$

信道容量定义为当输入分布$P_X(x)$变化时，互信息$I(X;Y)$的极大值

[例]二进对称信道

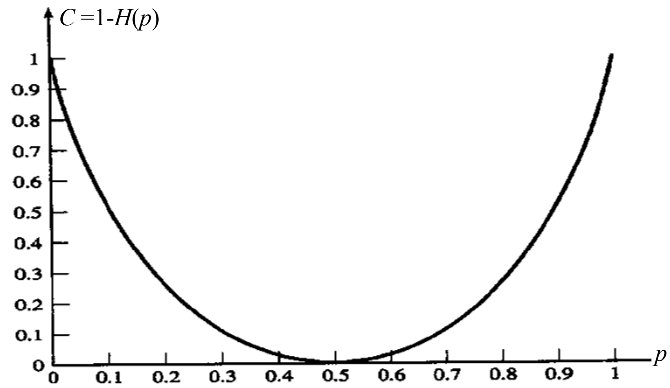


$$C = \max_{\{P_X(x)\}} I(X;Y)$$

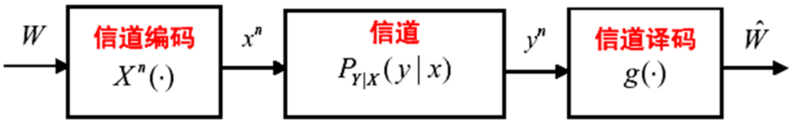
$$= \max_{\{P_X(x)\}} \{H(X) - H(X|Y)\}$$

$$= 1 - \{-p\log p - (1-p)\log(1-p)\}$$

$$= 1 - H(p)$$



信道编码定理



1、M个消息相对应的消息集合 $\mathscr{M}=\{1,2,3,\cdots,M\}$；

2、编码函数 $X^n(\cdot)$；

3、译码函数 $g(\cdot)$；

表示每个消息需要的比特个数

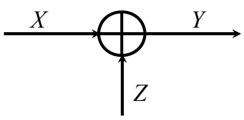
码率：$R=\dfrac{\log_2 M}{n}$　　误码率：$\Pr\{\hat{W}\neq W\}$

当码率 $R<C$ 时存在编码方式，使误码率 $\Pr\{\hat{W}\neq W\}\longrightarrow 0$；

当码率 $R>C$ 时不可能存在编码方式，使误码率 $\Pr\{\hat{W}\neq W\}\not\longrightarrow 0$；

11/15

3.5.2 高斯信道的容量

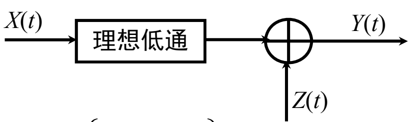


$$Y=X+Z$$
$$Z\sim \mathrm{N}(0,N)$$
$$E\left[X^2\right]\le P$$

$$C=\max_{p(x):E[X^2]\le P} I(X;Y)$$
$$=\frac{1}{2}\log_2\left(1+\frac{P}{N}\right)$$

当输入X的分布也是高斯分布时可以达到最大容量

3.5.3 带限信道的容量与通信的界限



$$C=W\log_2\left\{1+\frac{P}{N_0W}\right\}\text{比特/秒},\quad \lim_{W\to\infty}C=\frac{P}{N_0}\log_2 e=1.44\frac{P}{N_0}\text{比特/秒}$$

[例3.5.2] 电话线信道被认为是频限带于（0~3300Hz）。当输入信噪比 $\mathrm{SNR}=20\mathrm{dB}$（即 $P/N_0W=100$）时，信道容量为 22,000比特/秒。

12/15

Shannon信道编码定理： $R < C = W\log\left\{1+\frac{P}{N_0 W}\right\}$

频带效率：$\eta = \dfrac{\text{每秒传输速率}(R)}{\text{传输带宽}(W)}$ （bits/s/Hz）

$\eta < \eta_{\max} = \log_2\left(1+\frac{P}{N_0 W}\right)$，由 $P = E_b R = E_b \eta W$ $\Rightarrow$ $\eta \le \log_2\left(1+\eta\cdot\frac{E_b}{N_0}\right)$

在频带效率为 η 时每传1比特信息所需能量 $E_b(\eta)$必须满足

$$\frac{E_b(\eta)}{N_0} \ge \frac{2^\eta - 1}{\eta}$$

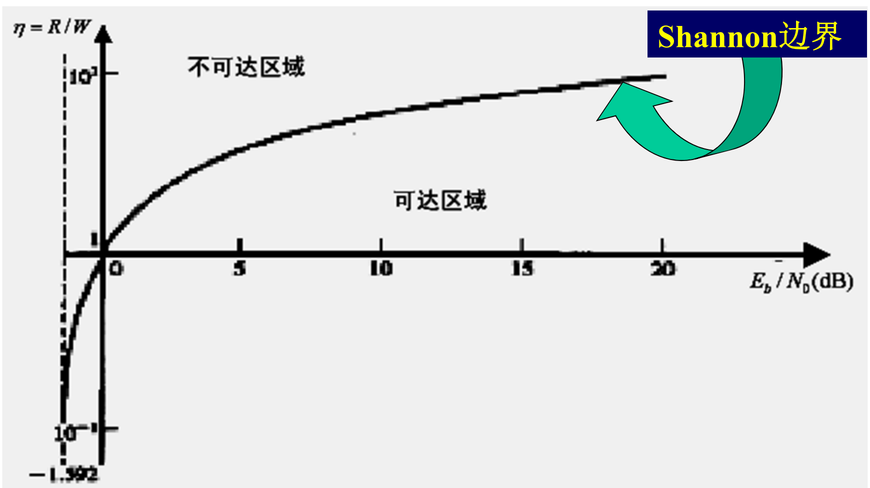
当 $\eta \to 0$ 时，达到最小值，

$$\frac{E_b(\eta)}{N_0} \to \ln 2 = 0.693147 = -1.592\ \text{dB}$$

为了可靠传输1比特信息所需要的能量至少为 $0.693N_0$。

13/15

$$\boxed{\frac{E_b(\eta)}{N_0} \ge \frac{2^\eta - 1}{\eta}}$$



最佳通信系统的频带效率 η 与信噪比 E_b/N_0 的关系曲线

14/15

习 题

- 3.13
- 3.15