

§ 7.2 二进制数字调制信号的相干解调

连续波数字调制信号的相干解调需要在接收端恢复载波的频率与相位信息，把通带信号相干地搬移到基带。这种相干搬移不损失已调信号的任何信息，所以能够达到最佳的性能。非相干解调一般利用已调信号的包络特性，在解调中不需要恢复载波的相位信息，在实现结构上比较简单，但性能明显不如相干解调。

任何二进制数字键控调制信号可以写成，

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} I_k g_I(t-kT) \cos(2\pi f_c t + \theta) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} Q_k g_Q(t-kT) \sin(2\pi f_c t + \theta)$$

其中 I_k 和 Q_k 是同相路和正交路的数据电平， $g_I(t)$ 和 $g_Q(t)$ 是基带脉冲，一般可取为幅度为 A ，持续时间为 T 的方波 $g_T(t)$ 。

1/44

在OOK中， $Q_k = 0$ ， $I_k \in \{0, 1\}$ ；

在BPSK中， $Q_k = 0$ ， $I_k \in \{\pm 1\}$ ；或 $I_k = 0$ ， $Q_k \in \{\pm 1\}$

在2FSK中， $I_k = 1$ ， $Q_k \in \{\pm 1\}$

$$g_I(t) = g_T(t) \cos \pi \Delta f t$$

$$g_Q(t) = g_T(t) \sin \pi \Delta f t$$

在相干系统中我们可以假设 $\theta = 0$ ， $f_c = N_c / T$ ，即载频等于符号率的整数倍。所以

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} I_k g_I(t-kT) \cos[2\pi f_c(t-kT)] - \sum_{k=-\infty}^{\infty} Q_k g_Q(t-kT) \sin[2\pi f_c(t-kT)]$$

于是可以在一个符号时间间隔中考虑解调问题。

2/44

在一个符号时间间隔中信号码元：

$$s(t) = s_m(t - kT), \quad kT \leq t \leq (k+1)T$$

$$s_m(t) = I_k g_I(t - kT) \cos[2\pi f_c(t - kT)]$$

$$-Q_k g_Q(t - kT) \sin[2\pi f_c(t - kT)]$$

在二进制系统中， m 取 “0” 和 “1”， $s_0(t)$ 和 $s_1(t)$ 分别代表数据 “0” 和 “1”。

在 AWGN 中二元信号最佳解调和检测可以采用相关接收器或匹配滤波器形式，在 $s_0(t)$ 和 $s_1(t)$ 等概情况下，最大似然检测的误符号率

$$P(e) = Q\left(\sqrt{\frac{\|s_0 - s_1\|^2}{2N_0}}\right) \quad (6.3.75)$$

其中 $\|s_0 - s_1\|$ 为在信号空间中这两个信号点之间的距离。

3/44

7.2.2 OOK信号的相干解调

OOK信号的一般形式

$$s_{ook}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} I_k g_T(t - kT) \cos[2\pi f_c(t - kT)]$$

$$I_n \in \{0, 1\}$$

$$g_T(t) = \begin{cases} A & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

在一个符号间隔中，二个码元信号为

$$s_0(t) = 0 \quad \text{发“0”}$$

$$s_1(t) = g_T(t) \cos(2\pi f_c t) \quad \text{发“1”}$$

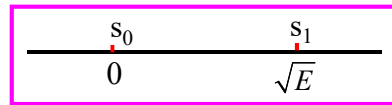
基信号 $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{E}} g_T(t) \cos(2\pi f_c t) \quad 0 \leq t \leq T$

$$E = \frac{A^2 T}{2}$$

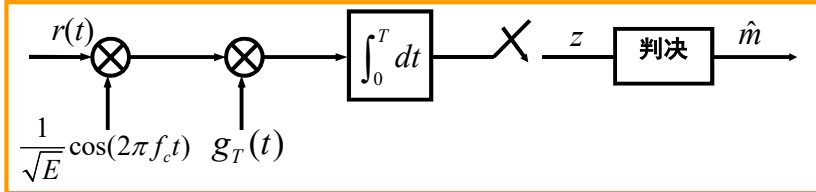
于是 $s_0(t) = 0 \quad s_1(t) = \sqrt{E} \varphi(t)$

4/44

在信号空间中表示：



相干型解调器：



若发送信号为 $s_m(t)$ ，则收到的信号为： $r(t) = s_m(t) + n(t)$

发送“0”条件下： $z = \int_0^T r(t)\varphi(t)dt = n_0$

发送“1”条件下： $z = \int_0^T r(t)\varphi(t)dt = \sqrt{E} + n_1$

其中 n_0 和 n_1 是均值为零，方差为 $\frac{N_0}{2}$ 的独立高斯噪声。

5/44

按照最大似然准则： $\hat{m} = \arg \min_{m \in \{0,1\}} \{ \|z - s_m\|^2 \}$

等价于： $z > \frac{\sqrt{E}}{2}$ 判发送“1”

$z < \frac{\sqrt{E}}{2}$ 判发送“0”

误码率为： $P_{OOK}(e) = \frac{1}{2} \{ P(e|s_0) + P(e|s_1) \}$

$$P(e|s_0) = P(e|s_1) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \int_{\frac{\sqrt{E}}{2}}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{N_0}} dx = Q\left(\sqrt{\frac{E}{2N_0}}\right)$$

所以

$$P_{OOK}(e) = Q\left(\sqrt{\frac{E}{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_{av}}{N_0}}\right)$$

其中平均信号码元能量 $E_{av} = E/2$

6/44

记平均信噪比为 $\rho = E_{av} / N_0$

$$P_{OOK}(e) = Q(\sqrt{\rho}) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{\rho}{2}}\right) \\ \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} e^{-\frac{\rho}{2}}, \quad (\rho \gg 1)$$

实际上从信号空间图可见, $\|s_0 - s_1\|^2 = E$, 代入公式 (6.3.75) 就得差错概率。

7/44

7.2.3 BPSK信号的相干解调

对于A类BPSK调制, 已调信号可写成,

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos(2\pi f_c t + \varphi_k) g_T(t - kT), \quad \varphi_k = \{0, \pi\}$$

$$\text{或 } s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} I_k g_T(t - kT) \cos[2\pi f_c(t - kT)], \quad I_k \in \{\pm 1\}$$

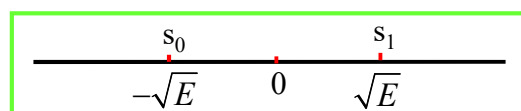
在一个符号间隔 $(0, T)$ 中考虑信号码元,

$$s_0(t) = -g_T(t) \cos 2\pi f_c t \quad \text{发送 “0”}$$

$$s_1(t) = g_T(t) \cos 2\pi f_c t \quad \text{发送 “1”}$$

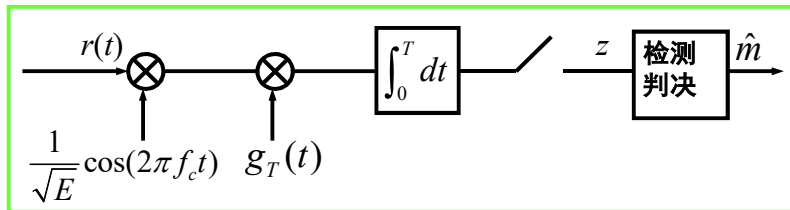
这是一个一维调制, 基函数为 $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{E}} g_T(t) \cos 2\pi f_c t$,

二个信号在信号空间的座标为,



8/44

BPSK系统的相关接收机，



当发送信号 $s_m(t)$ 时，收到信号为， $r(t) = s_m(t) + n(t)$

发送“0”条件下： $z = -\sqrt{E} + n_0$

发送“1”条件下： $z = \sqrt{E} + n_1$

按最大似然概率准则， $\hat{m} = \arg \min_{m \in \{0,1\}} \{ \|z - s_m\|^2 \}$

等价于
$$\begin{cases} z > 0 & \text{发送 “1”} \\ z < 0 & \text{发送 “0”} \end{cases}$$

9/44

误码率为：
$$P_{BPSK}(e) = \frac{1}{2} \{ P(e | s_0) + P(e | s_1) \}$$

$$P_{BPSK}(e) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \int_{\sqrt{E}}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{N_0}} dx = Q\left(\sqrt{\frac{2E}{N_0}}\right)$$

因为对BPSK信号， E 就是平均码元能量（也是平均比特能量），

$$P_{BPSK}(e) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_{av}}{N_0}}\right)$$

记平均符号信噪比（也是平均比特信噪比）为 $\rho = E_{av} / N_0$

$$P_{BPSK}(e) = Q(\sqrt{2\rho}) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{\rho})$$

$$\approx \frac{1}{2\sqrt{\pi\rho}} e^{-\rho}, \quad (\rho \gg 1)$$

其实在信号空间中 $\|s_0 - s_1\|^2 = 4E$ ，代入公式（6.3.75）就得到误符号率。

10/44

[注意]原则上说，对于OOK和BPSK的相干解调也可以用匹配滤波器来代替相关器，但在实现时有困难。设位同步采样误差为， $t_k = T(1 \pm \varepsilon)$ ，由于匹配滤波器仅在 T 时刻输出与相关器输出一样，采样误差使得匹配滤波输出值降低 $\cos \theta_\varepsilon$ 倍，其中 $\theta_\varepsilon = 2\pi \cdot f_c \varepsilon T$ ，于是误码率为

$$P_{BPSK}(e) = Q\left(\sqrt{\frac{2E}{N_0} \cdot \cos^2 \theta_\varepsilon}\right)$$

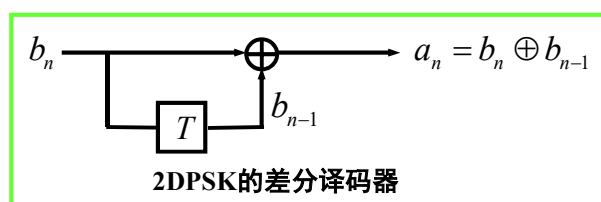
例如当 $\varepsilon = 0.003$ ， $T = 0.5\text{ms}$ ， $f_c = 100\text{kHz}$ ，则 $\theta_\varepsilon = 54^\circ$ ，于是 $\cos^2 \theta_\varepsilon = 0.34$ ，这使性能下降许多。所以用射频匹配滤波器实现是不现实的。

得用基带的

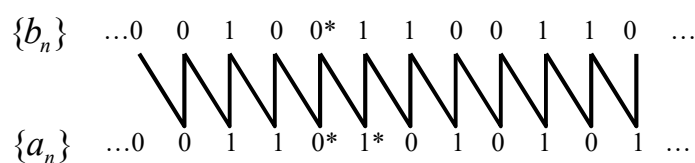
11/44

7.2.4 2DPSK的相干解调

在2DPSK相干解调中，首先采用与BPSK相同的相干方式恢复出相对码 $\{b_n\}$ ，然后采用差分译码恢复绝对码 $\{a_n\}$ ，



差分译码会引起误码扩散，如



12/44

2DPSK的误码率为

$$P_{DPSK}(e) = 2P_{BPSK}(e)[1 - P_{BPSK}(e)] \approx 2P_{BPSK}(e)$$

由于 $P_{BPSK}(e) = Q(\sqrt{2\rho}) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{\rho}) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\rho}} e^{-\rho}$,

$$P_{DBPSK}(e) = \operatorname{erfc}(\sqrt{\rho}) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi\rho}} e^{-\rho}, \quad (\rho \gg 1)$$

$$\rho = E_{av} / N_0$$

13/44

7.2.5 2FSK信号的相干解调

2FSK信号为

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos(2\pi f_c t + 2\pi Q_k \Delta f t) g_T(t - kT)$$

其中 $Q_k \in \{0, 1\}$, $\Delta f = 1/T$ 。当 $f_c = N_c/T$, 2FSK信号也可写成,

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos[2\pi f_c(t - kT) + 2\pi Q_k \Delta f(t - kT)] g_T(t - kT)$$

在一个符号间隔中研究二个码元信号

$$s_0(t) = g_T(t) \cos[2\pi f_c t] \quad \text{表示发“0”}$$

$$s_1(t) = g_T(t) \cos[2\pi(f_c + \Delta f)t] \quad \text{表示发“1”}$$

由于 $\Delta f = 1/T$, 所以两个码元信号正交。

14/44

这是**二维调制**，二个基信号为

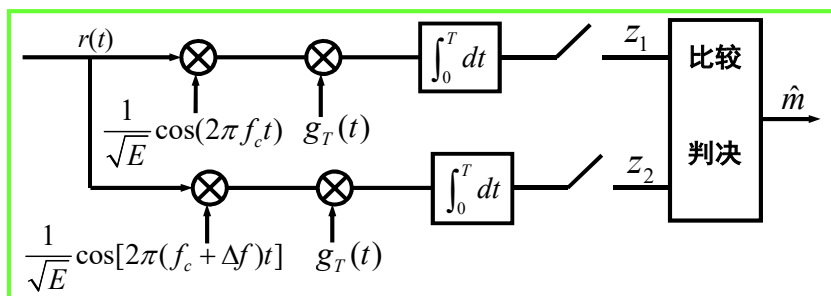
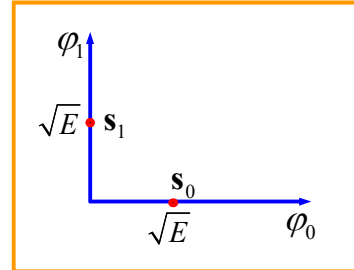
$$\varphi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{E}} g_T(t) \cos(2\pi f_c t),$$

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{E}} g_T(t) \cos[2\pi(f_c + \Delta f)t]$$

两个码元信号在信号空间中的坐标点为：

$$\mathbf{s}_0 = (\sqrt{E}, 0)$$

$$\mathbf{s}_1 = (0, \sqrt{E})$$



15/44

当发送信号为 $s_m(t)$ 时，接收到信号

$$r(t) = s_m(t) + n(t)$$

在两个码元等概，等能量情况下，**最大似然准则为最大相关准则**，即

$$\text{判发送 "0"} \quad \mathbf{Z} \cdot \mathbf{s}_0 > \mathbf{Z} \cdot \mathbf{s}_1 \Leftrightarrow z_1 \cdot \sqrt{E} > z_2 \cdot \sqrt{E} \Leftrightarrow z_1 - z_2 > 0$$

$$\text{判发送 "1"} \quad \mathbf{Z} \cdot \mathbf{s}_0 < \mathbf{Z} \cdot \mathbf{s}_1 \Leftrightarrow z_1 \cdot \sqrt{E} < z_2 \cdot \sqrt{E} \Leftrightarrow z_1 - z_2 < 0$$

在发送 $s_0(t)$ 条件下

$$z_1 = \sqrt{E} + n_1, \quad z_2 = n_2$$

在发送 $s_1(t)$ 条件下

$$z_1 = n_1, \quad z_2 = \sqrt{E} + n_2$$

$$\text{误码率} \quad P_{2FSK}(e) = \frac{1}{2} \{P(e|\mathbf{s}_0) + P(e|\mathbf{s}_1)\}$$

$$\text{由对称性} \quad P(e|\mathbf{s}_0) = P(e|\mathbf{s}_1)$$

16/44

$$P_{2FSK}(e) = P(e | \mathbf{s}_0) = P\{n_1 - n_2 < -\sqrt{E}\}$$

记 $\zeta = n_1 - n_2$ ，是零均值，方差为 N_0 的高斯随机变量，所以

$$P_{2FSK}(e) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N_0}} \int_{-\infty}^{-\sqrt{E}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2N_0}\right\} dx = Q\left(\sqrt{\frac{E}{N_0}}\right)$$

对于2FSK来说，两个码元信号等能量 $E_{av} = E$ ，所以，

$$P_{2FSK}(e) = Q\left(\sqrt{\frac{E_{av}}{N_0}}\right)$$

记 $\rho = E_{av} / N_0$

$$\begin{aligned} P_{2FSK} &= Q(\sqrt{\rho}) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{\rho}{2}}\right) \\ &\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} e^{-\frac{\rho}{2}}, \quad (\rho \gg 1) \end{aligned}$$

17/44

7.2.6 二进制数字调制信号相干解调的性能比较

调制方式	
OOK	$P_{OOK}(e) = Q(\sqrt{\rho}) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{\rho}{2}}\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} e^{-\frac{\rho}{2}}$
BPSK	$P_{BPSK}(e) = Q(\sqrt{2\rho}) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{\rho}) \approx \frac{1}{2\sqrt{\pi\rho}} e^{-\rho}$
2DPSK	$P_{DPSK}(e) \approx 2P_{BPSK}(e) = \frac{1}{\sqrt{\pi\rho}} e^{-\rho}$
2FSK	$P_{2FSK} = Q(\sqrt{\rho}) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{\rho}{2}}\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} e^{-\frac{\rho}{2}}$

18/44

§ 7.3 M进制数字调制信号的相干解调

在M进制数字调制系统中，M进制数据用M个不同的码元信号表示。如果每隔T时间发送一个码元信号，即波特率 $R_B = 1/T$ ，但是比特率为 $R_b = \log_2 M \cdot R_B$ (比特/秒)。在M进制调幅(包括正交调幅)和调相系统中，信号宽带是由符号率决定的，所以M进制调制信号所需要的带宽与二进制调制信号相同，于是M进制调制的频带利用率远高于二进制数字调制。M进制数字调制一般称为频谱高效调制。

19/44

7.3.1 MASK相干解调

M进制ASK信号的一般形式为

$$s_{MASK}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} I_k g_T(t - kT) \cos[2\pi f_c(t - kT)]$$

其中 $I_k \in \{A_m = A_0 + m, \quad m = 0, 1, \dots, M-1\}$

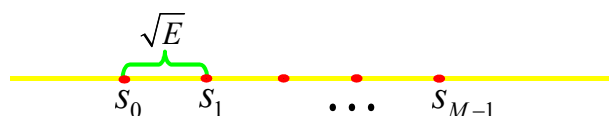
$$g_T(t) = \begin{cases} A & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

在一个符号间隔(0, T)中，这M个码元信号写为，

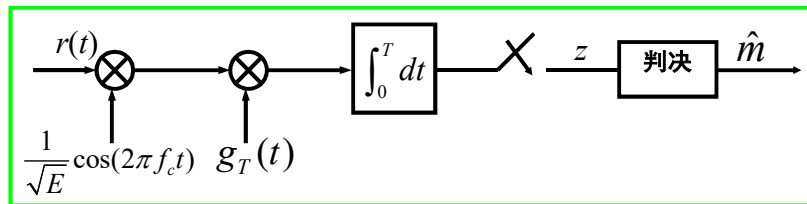
$$s_m(t) = A_m g_T(t) \cos 2\pi f_c t, \quad m = 0, 1, \dots, M-1$$

一维调制，基信号 $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{E}} g_T(t) \cos 2\pi f_c t, \quad E = A^2 T / 2$

码元信号点的坐标， $s_m = A_m \sqrt{E}, \quad m = 0, 1, \dots, M-1$



20/44



设发送信号为 $s_m(t)$ ，则收到信号为，

$$r(t) = s_m(t) + n(t)$$

相关器输出采样值为，

$$z = A_m \sqrt{E} + n$$

其中 n 是零均值，方差为 $N_0/2$ 的高斯变量。当信号码元是等概率

发送时，最大似然准则等价于最小距离准则。平均错误概率

$$P_{MASK}(e) = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\frac{2E}{N_0}}\right) \quad (\text{推导见[例6.3.9]})$$

21/44

由于MASK码元信号的平均能量为，

$$\begin{aligned} E_{av} &= \frac{1}{M} \left\{ \sum_{m=0}^{M-1} A_m^2 E \right\} = \frac{E}{M} \sum_{m=0}^{M-1} (A_0 + m)^2 \\ &= E \left[A_0^2 + A_0(M-1) + \frac{1}{6}(M-1)(2M-1) \right] \end{aligned}$$

当 $A_0 = 0$ 时，即 M 进制OOK调制，则

$$E_{av} = \frac{E}{6} (M-1)(2M-1)$$

$$E = \frac{6E_{av}}{(M-1)(2M-1)}$$

所以
$$P_{MASK}(e) = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\frac{3E_{av}}{(M-1)(2M-1)N_0}}\right)$$

当 $M=2$ 时，上式正是OOK调制信号相干解调的误码公式。

22/44

当 $A_0 = -(M-1)/2$ ，这时信号码元对称于零点排列，

$$E_{av} = \frac{(M^2 - 1)E}{12}$$

$$E = \frac{12E_{av}}{M^2 - 1}$$

所以
$$P_{MASK}(e) = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\frac{6E_{av}}{(M^2 - 1)N_0}}\right)$$

记平均符号信噪比为 $\rho = E_{av} / N_0$ ，则

$$P_{MASK}(e) = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\frac{6\rho}{(M^2 - 1)}}\right)$$

当 $M = 2$ 时，正好是BPSK信号相干解调的误码率 (7.2.29)

23/44

7.3.2 MPSK的相干解调

对于 $M=4$ ， $N=1$ 的QPSK信号可以写成：

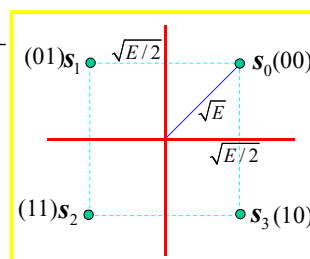
$$\begin{aligned} s(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos(2\pi f_c t + \varphi_k) g_T(t - kT) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \cos \varphi_k \cdot g_T(t - kT) \cdot \cos[2\pi f_c(t - kT)] - \right. \\ &\quad \left. \sin \varphi_k \cdot g_T(t - kT) \cdot \sin[2\pi f_c(t - kT)] \right\} \end{aligned}$$

其中 $\varphi_k \in \left\{ \frac{2m+1}{4}\pi, \quad m=0,1,2,3 \right\}$

在一个符号间隔 $(0, T)$ 中，码元信号为，

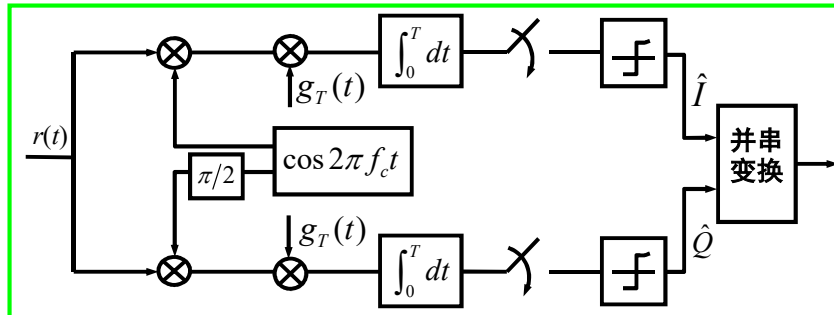
$$\begin{aligned} s_m(t) &= \cos \varphi_m g_T(t) \cos(2\pi f_c t) - \sin \varphi_m g_T(t) \sin(2\pi f_c t) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} [I \cos(2\pi f_c t) - Q \sin(2\pi f_c t)] g_T(t), \quad m=0, 1, 2, 3 \end{aligned}$$

其中 $I = \pm 1, Q = \pm 1$



24/44

因此QPSK信号相当于二路正交载波的BPSK，它的相干解调原理图：



设BPSK的差错概率为 $P(e)$ ，则QPSK相干解调的符号正确解调概率为，

$$P_{QPSK}(c) = [1 - P(e)]^2$$

所以QPSK相干解调的误符号率为

$$P_{QPSK}(e) = 1 - P_{QPSK}(c) = 2P(e) \left(1 - \frac{1}{2}P(e)\right)$$

25/44

现在BPSK信号点之间距离是 $\sqrt{2E}$ ，所以 $P(e) = Q\left(\sqrt{\frac{E}{N_0}}\right)$

于是误符号率： $P_{QPSK}(e) \approx 2Q\left(\sqrt{\frac{E}{N_0}}\right)$

平均信号码元能量 $E_{av} = E$ ，所以

$$P_{QPSK}(e) \approx 2Q\left(\sqrt{\frac{E_{av}}{N_0}}\right)$$

采用Gray码映射，即相位相邻信号点仅相差一个比特，则误比特率为：

$$P_{QPSK}(be) \approx Q\left(\sqrt{\frac{E_{av}}{N_0}}\right)$$

QPSK符号代表两个比特，平均比特能量为平均符号能量一半，即

$E_{bav} = E_{av} / 2$ ，所以

$$P_{QPSK}(be) \approx Q\left(\sqrt{\frac{2E_{bav}}{N_0}}\right) \quad (\text{误比特率与BPSK一样})$$

26/44

对于的MPSK, M 个码元信号为

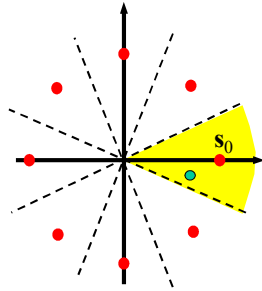
$$s_m(t) = [\cos \varphi_m \cos(2\pi f_c t) - \sin \varphi_m \sin(2\pi f_c t)] g_T(t), \quad t \in [0, T]$$

其中 $\varphi_m = 2\pi \cdot m / M, m = 0, 1, 2, \dots, M-1$

相应二维信号空间的基矢量为

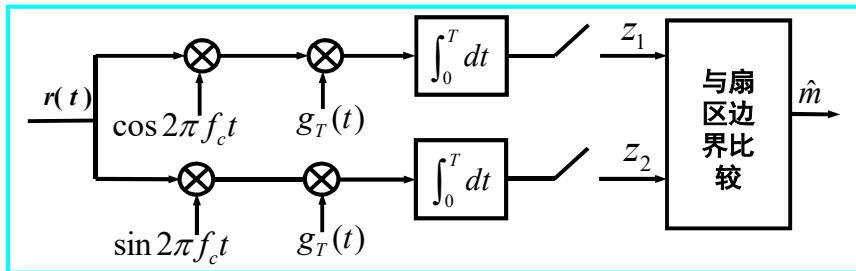
$$\varphi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{E}} g_T(t) \cos 2\pi f_c t, \quad \varphi_2(t) = \frac{1}{\sqrt{E}} g_T(t) \sin 2\pi f_c t$$

M 个信号矢量点均匀分布在半径为 \sqrt{E} 的圆周上,



在等概发送信号码元情况下, 最大似然接收相当于按最近距离作判决。在信号空间中作 M 个对称扇区, 每个扇区中包含一个信号点。如接收矢量点落在某扇区内, 则判定发送信号是扇区所含的那个信号点。

27/44



由于对称性, 平均符号错误概率等于发送 $s_0(t)$, 但接收到矢量 (z_1, z_2) 不在第0号扇区的概率, 即

$$P_{MPSK}(e) = P \left\{ \left| \arctan \frac{z_2}{z_1} \right| > \frac{\pi}{M} \mid s_0 \right\}$$

当发送 $s_0(t)$ 条件下, 接收到信号

$$r(t) = s_0(t) + n(t)$$

其中 $n(t)$ 是零均值, 功率谱密度为 $N_0/2$ 的白高斯噪声。

28/44

所以 $z_1 = \sqrt{E} \cos \varphi_0 + n_1 = \sqrt{E} + n_1$, $z_2 = \sqrt{E} \sin \varphi_0 + n_2 = n_2$

n_1 和 n_2 是独立, 同分布高斯变量, 它的均值为零, 方差 $\sigma^2 = N_0/2$,

因此
$$p_{z_1 z_2}(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp \left\{ -\frac{(z_1 - \sqrt{E})^2 + z_2^2}{2\sigma^2} \right\}$$

令
$$V = \sqrt{z_1^2 + z_2^2} \quad \Theta = \arctan \frac{z_2}{z_1}$$

$$p_{V\Theta}(v, \theta) = \frac{v}{2\pi\sigma^2} \exp \left\{ -\frac{(v - \sqrt{E} \cos \theta)^2 + E \sin^2 \theta}{2\sigma^2} \right\}$$

$$\begin{aligned} p_{\Theta}(\theta) &= \int_0^{\infty} p_{V\Theta}(v, \theta) dv \\ &= \frac{1}{2\pi} \exp \left\{ \frac{-E \sin^2 \theta}{2\sigma^2} \right\} \int_0^{\infty} v \exp \left\{ -\frac{\left(v - \frac{\sqrt{E}}{\sigma} \cos \theta \right)^2}{2} \right\} dv \end{aligned}$$

29/44

记符号信噪比为 $\rho = \frac{E}{2\sigma^2} = \frac{E}{N_0}$

$$p_{\Theta}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \exp \left\{ -2\rho \sin^2 \theta \right\} \int_0^{\infty} v \exp \left\{ -\frac{(v - \sqrt{2\rho} \cos \theta)^2}{2} \right\} dv$$

于是MPSK符号差错概率为

$$P_{MPSK}(e) = 1 - \int_{-\frac{\pi}{M}}^{\frac{\pi}{M}} p_{\Theta}(\theta) d\theta$$

当 $\rho = E/N_0 \gg 1$ 以及 $|\theta| \leq \pi/2$ 时,

$$p_{\Theta}(\theta) \approx \sqrt{\frac{2\rho}{\pi}} \cos \theta \cdot e^{-2\rho \sin^2 \theta}$$

$$\begin{aligned} P_{MPSK}(e) &= 1 - \int_{-\frac{\pi}{M}}^{\frac{\pi}{M}} \sqrt{\frac{2\rho}{\pi}} \cos \theta \cdot e^{-2\rho \sin^2 \theta} d\theta \\ &\approx 2Q \left(\sqrt{2\rho} \cdot \sin \frac{\pi}{M} \right) \end{aligned}$$

30/44

由于相位错误最可能是错成相邻的两个信号矢量，所以当采用Gray码对信号矢量进行编码时，一个符号错误只引起一个比特错误，于是误比特率为：

$$P_{MPSK}(be) = \frac{1}{k} P_{MPSK}(e)$$

其中 $k = \log_2 M$

由于比特信噪比 ρ_b 和符号信噪比 ρ 关系为，

$$\rho_b = \frac{\rho}{\log_2 M}$$

所以 $P_{MPSK}(be) = \frac{2}{k} Q\left(\sqrt{2k\rho_b} \cdot \sin \frac{\pi}{M}\right)$

当 $M=4$ 时，与前面推导的QPSK结果一致。

31/44

7.3.4 MQAM的相干解调

MQAM调制可以看成二路ASK通过正交载波复用，在同一个频道上传输，所以MQAM的带宽与ASK调制一样。MQAM信号形式为

$$s_{MQAM}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} I_k g_T(t-kT) \cos 2\pi f_c(t-kT) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} Q_k g_T(t-kT) \sin 2\pi f_c(t-kT)$$

在一个符号间隔 $(0, T)$ 中，MQAM的信号码元为，

$$s_m(t) = I_m g_T(t) \cos 2\pi f_c t + Q_m g_T(t) \sin 2\pi f_c t$$

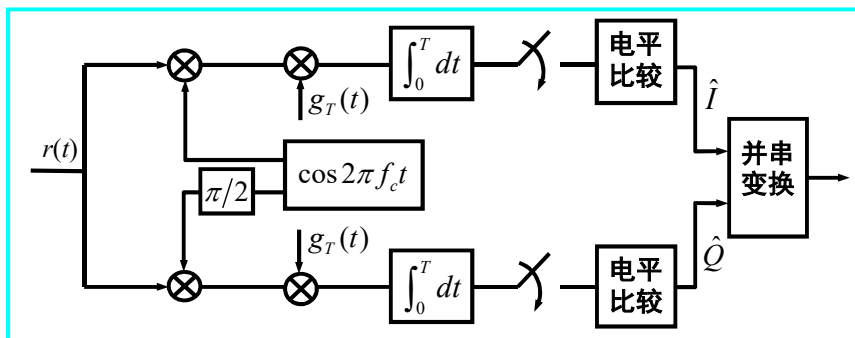
$$I_m, Q_m \in \left\{ -\frac{K-1}{2} + i, i = 0, 1, \dots, K-1 \right\}$$

在二维信号空间中两个基函数为，

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{E}} \cos 2\pi f_c t, \quad \varphi_2(t) = \frac{1}{\sqrt{E}} \sin 2\pi f_c t$$

信号点座标为： $s_m = (I_m \sqrt{E}, Q_m \sqrt{E})$, $m = 0, 1, \dots, M$, $M = K^2$

32/44



由于MQAM是二路正交，对称ASK组成，所以一般**只能用相干方式解调**。由于对称性， I 路和 Q 路差错概率相同，记为 P ，于是MQAM符号差错概率为： $P_{MQAM}(e) = 1 - (1 - P)^2 \approx 2P$, $P \ll 1$

其中 P 是 K 进制ASK符号的差错概率。由公式(7.3.6)

$$P = \frac{2(K-1)}{K} Q\left(\sqrt{\frac{2E}{N_0}}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q\left(\sqrt{\frac{2E}{N_0}}\right)$$

33/44

所以 $P_{MQAM}(e) \approx 4\left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q\left(\sqrt{\frac{2E}{N_0}}\right)$

由于MQAM信号码元的**平均能量**为

$$\begin{aligned} E_{av} &= \frac{E}{K^2} \sum_{i=0}^{K-1} \sum_{j=0}^{K-1} \{(2i+1-K)^2 + (2j+1-K)^2\} \\ &= \frac{2E}{3} (K^2 - 1) = \frac{2E}{3} (M - 1) \end{aligned}$$

所以 $E = \frac{3E_{av}}{2(M-1)}$

$$P_{MQAM}(e) = 4\left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q\left(\sqrt{\frac{3E_{av}}{(M-1)N_0}}\right)$$

34/44

MQAM和MPSK比较

对于**16QAM**，当 $\frac{E_{av}}{N_0} = 100$ 时， $P_{16QAM}(e) = 1.2 \times 10^{-5}$

在同样信噪比下，**16PSK**误码率为 $P_{16PSK}(e) = 6 \times 10^{-3}$

在大信噪比情况下比较 $P_{MQAM}(e)$ 和 $P_{MPSK}(e)$

$$P_{MPSK}(e) \approx 2Q\left(\sqrt{\frac{2E}{N_0}} \cdot \sin \frac{\pi}{M}\right) \quad P_{MQAM}(e) = 4\left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right)Q\left(\sqrt{\frac{3E_{av}}{(M-1)N_0}}\right)$$

信噪比增益为

$$\gamma_M \triangleq \left(\frac{SNR_{MQAM}}{SNR_{MPSK}}\right) = \frac{3}{2(M-1)\sin^2 \frac{\pi}{M}}$$

当 $M = 4$ ， $\gamma_M = 1$ ，所以**4PSK**和**4QAM**性能相当；当 M 充分大时，

$\sin \frac{\pi}{M} \approx \frac{\pi}{M}$ ，于是

$$\gamma_M = \frac{3M^2}{2(M-1)\pi^2} \approx \frac{3M}{2\pi^2}$$

35/44

表 7.4.1 MQAM 相对于 MPSK 的信噪比增益

M	$10\log_{10} \gamma_M (db)$
8	1.65
16	4.20
32	7.02
64	9.95

36/44

7.3.5 MFSK相干解调

在MFSK系统中，已调信号可写成

$$s_{MFSK}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos[2\pi f_c t + 2\pi Q_k \Delta f t] g_T(t - kt)$$

其中 $Q_k \in \{0, 1, \dots, M-1\}$

对于 $f_c = N_c / T$, $\Delta f = 1/T$ 的正交FSK信号来说，它可写成

$$s_{MFSK}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos[2\pi(f_c + Q_k \Delta f)(t - kT)] g_T(t - kT)$$

在一个符号间隔(0,T)中，MFSK信号码元为

$$s_m(t) = g_T(t) \cos[2\pi(f_c + m\Delta f)t], \quad m = 0, 1, \dots, M-1$$

MFSK是M维正交调制，在M维信号空间中，基矢量为

$$\varphi_m(t) = \frac{1}{\sqrt{E}} g_T(t) \cos[2\pi(f_c + m\Delta f)t], \quad m = 0, 1, \dots, M-1$$

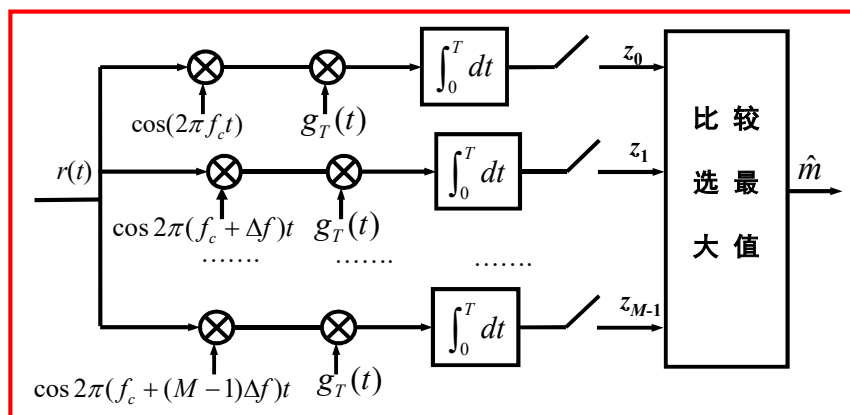
37/44

M个信号码元矢量的座标为：

$$s_m = (0, 0, \dots, \sqrt{E}, 0, \dots, 0)$$

↑
第m位

相干相关解调器



38/44

当发送信号码元为 $s_m(t)$ 时，接收到信号为

$$r(t) = s_m(t) + n(t)$$

经相关、采样后，

$$z_i = n_i, \quad i \neq m$$

$$z_m = \sqrt{E} + n_m$$

其中 $n_i, i = 0, 1, \dots, M-1$ 为相互独立，零均值，方差为 $N_0/2$ 的高斯随机变量。在码元等概率发送条件下，由于码元是等能量的，所以最大似然判决是选最大相关支路，即

$$\hat{m} = \arg \max_m \{z_m\}$$

误码概率由式M元正交信号的错误公式(6.3.103)给出

$$P_{MFSK}(e) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ 1 - [1 - Q(x)]^{M-1} \right\} \exp \left[-\frac{(x - \sqrt{2E/N_0})^2}{2} \right] dx$$

39/44

记码元信噪比为 $\rho = \frac{E}{N_0}$

$$P_{MFSK}(e) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ 1 - [1 - Q(x)]^{M-1} \right\} \exp \left[-\frac{(x - \sqrt{2\rho})^2}{2} \right] dx$$

MFSK是M进制正交信号，误比特率约为误符号率的一半（例6.3.10），

$$P_{MFSK}(be) = \frac{M}{2(M-1)} P_{MFSK}(e)$$

同时比特信噪比和符号信噪比关系是

$$\rho_b = \frac{\rho}{\log_2 M}$$

所以误比特率与比特信噪比关系：

$$P_{MFSK}(be) = \frac{M}{2(M-1)\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ 1 - [1 - Q(x)]^{M-1} \right\} \exp \left[-\frac{(x - \sqrt{2\rho_b \log_2 M})^2}{2} \right] dx$$

40/44

7.3.6 M进制数字调制信号相干解调性能比较

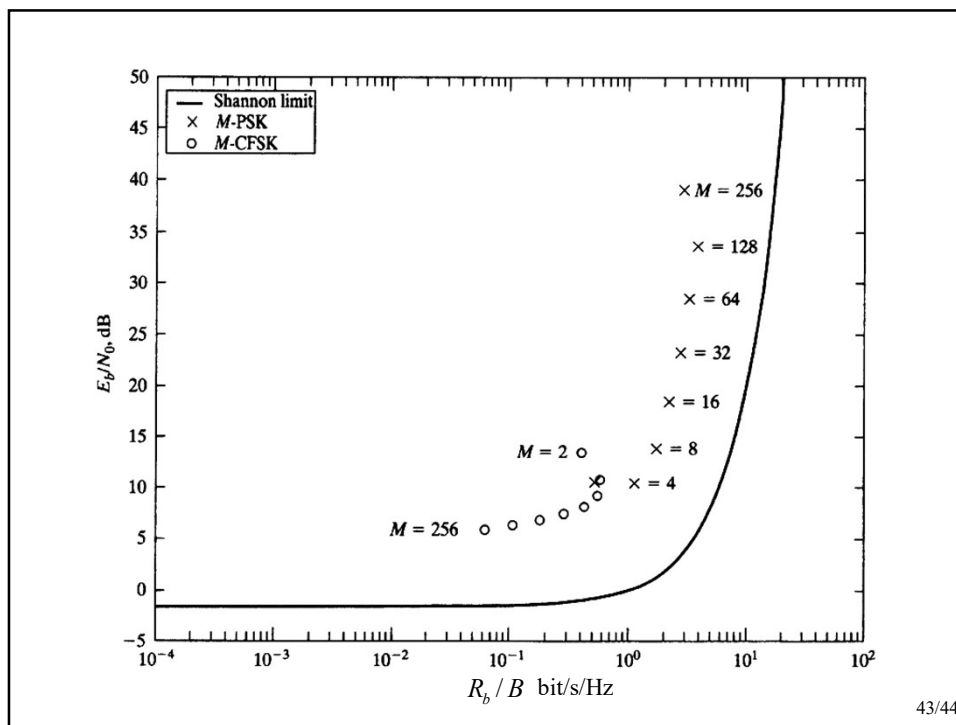
调制方式	误符号率	误比特率
MASK	$P_{MASK}(e) = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\frac{6\rho}{(M^2-1)}}\right)$	$P_{MASK}(be) \approx P_{MASK}(e)/\log_2 M$
QPSK	$P_{QPSK}(e) \approx 2Q(\sqrt{\rho})$	$P_{QPSK}(be) \approx 0.5P_{QPSK}(e)$
MPSK	$P_{MPSK}(e) \approx 2Q\left(\sqrt{2\rho} \cdot \sin\frac{\pi}{M}\right)$	$P_{MPSK}(be) \approx P_{MPSK}(e)/\log_2 M$
MQAM	$P_{MQAM}(e) = 4\left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q\left(\sqrt{\frac{3\rho}{(M-1)}}\right)$	$P_{MQAM}(be) \approx P_{MQAM}(e)/\log_2 M$
MFSK	$P_{MFSK}(e) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{1 - [1 - Q(x)]^{M-1}\right\} \cdot \exp\left[-\frac{(x - \sqrt{2\rho})^2}{2}\right] dx$	$P_{MFSK}(be) = \frac{M}{2(M-1)} P_{MFSK}(e)$

41/44

下表给出了M进制PSK, QAM, FSK的功率有效性和频率有效性:

Modulation Scheme	E_b/N_0 for BER = 10^{-6}	Bandwidth Efficiency
PSK:		
$M = 2$	10.5	0.5
$M = 4$	10.5	1.0
$M = 8$	14.0	1.5
$M = 16$	18.5	2.0
$M = 32$	23.4	2.5
$M = 64$	28.5	3.0
$M = 128$	33.8	3.5
$M = 256$	39.2	4.0
QAM:		
$M = 4$	10.5	1.0
$M = 16$	15.0	2.0
$M = 64$	18.5	3.0
$M = 256$	24.0	4.0
$M = 1024$	28.0	5.0
$M = 4096$	33.5	6.0
FSK:		
$M = 2$	13.5	0.40
$M = 4$	10.8	0.57
$M = 8$	9.3	0.55
$M = 16$	8.2	0.42
$M = 32$	7.5	0.29
$M = 64$	6.9	0.18
$M = 128$	6.4	0.11
$M = 256$	6.0	0.06

42/44



习 题

- 7-6
- 7-10
- 7-12
- 7-14