§ 7.5 连续相位调制

在数字角度调制中，*如果相位变化连续，有利于功率谱密度带外衰减加快，而且使已调信号经带限滤波后包络变化减小*。在本节中我们讨论连续相位FSK（CPFSK）调制，最小偏移调制（MSK），高斯最小偏移调制（GMSK）以及一般的多h连续相位调制等。

7.5.1 连续相位FSK调制（CPFSK）

通常用某种数字PAM信号去控制压控振荡器，从而产生相位连续的调频信号。设M进制的PAM基带信号为

$$v(t)=\sum_n a_n g_T(t-nT)$$

$a_n \in \{\pm1,\pm3,\cdots,\pm(M-1)\}$是信息符号，$g_T(t)$ 是幅度为 $1/(2T)$，宽度为T的矩形脉冲，于是连续相位FSK信号可写成：

$$s(t)=A\cos\left[2\pi f_c t+4\pi f_d T\int_{-\infty}^{t} v(\tau)d\tau+\varphi_0\right]$$

f_c 是载波频率，f_d 是峰值频偏，φ_0 是任何初相。

用 $\theta(t;\boldsymbol{a})$ 表示信号 $s(t)$ 的相位中扣除载频相位后的附加相位，

$$\theta(t;\boldsymbol{a})=4\pi T f_d\int_{-\infty}^{t} v(t)dt$$

在时间区间 $[kT,(k+1)T]$ 中，附加相位为，

$$\theta(t;\boldsymbol{a})=2\pi f_d T\sum_{i=-\infty}^{k-1} a_i+2\pi(t-kT)f_d a_k$$

$$=\theta_k+2\pi h a_k q(t-kT)$$

调制指数

其中 $h=2f_dT$

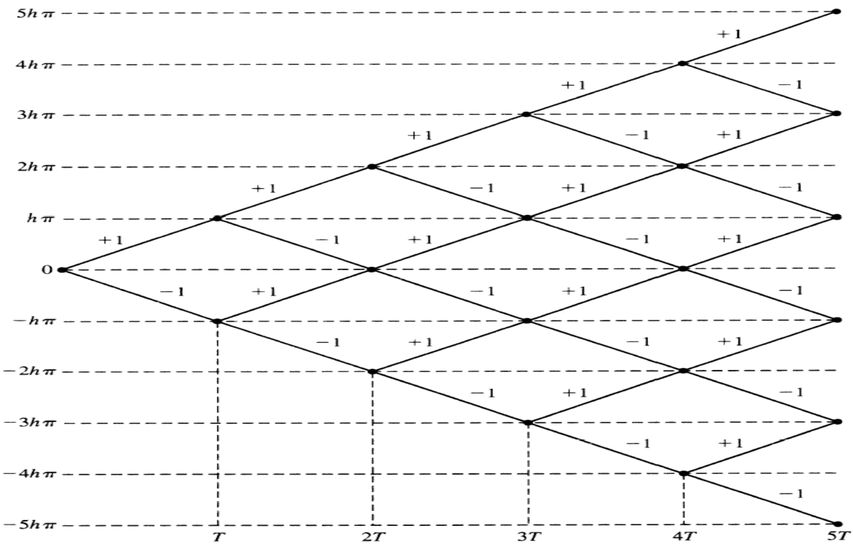
$$\theta_k=\pi h\sum_{i=-\infty}^{k-1} a_i$$

累计相位

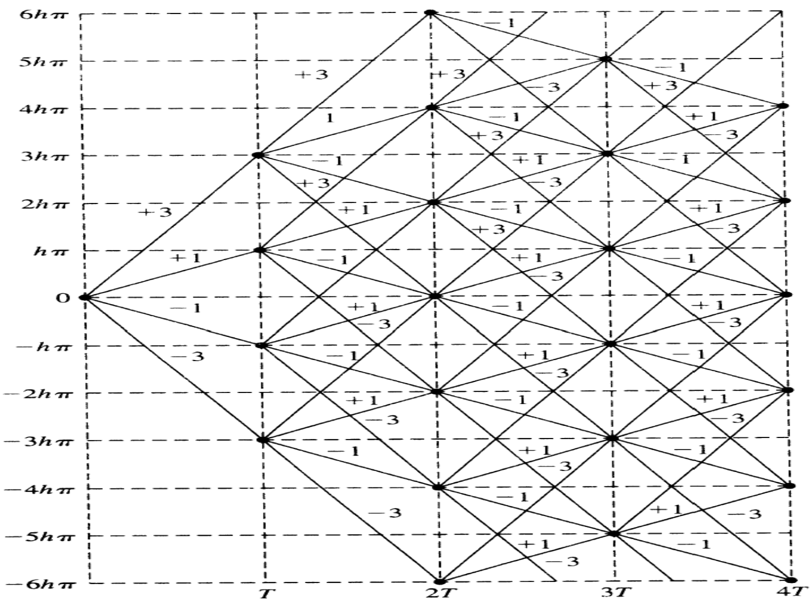
$$q(t)=\int_{-\infty}^{t} g_T(\eta)d\eta=\begin{cases}0 & t\le 0\\ t/(2T) & 0\le t\le T\\ 1/2 & t\ge T\end{cases}$$

相位成形函数

对于二进数据$a=\pm1$所有可能的附加相位轨线



对于四进数据 $a=\pm1,\pm3$所有可能的附加相位轨线



7.5.2 最小偏移键控（MSK）调制 $h = 2f_d T = 0.5 \longrightarrow f_d = \dfrac{1}{4T}$

MSK是h=0.5的二进制CPFSK，它的附加相位为：

$$\begin{aligned}\theta(t;\boldsymbol{a}) &= \frac{\pi}{2}\sum_{i=-\infty}^{k-1} a_i + \pi a_k q(t-kT) \\ &= \frac{\pi t}{2T} a_k + \varphi_k\end{aligned} \quad , \quad t \in [kT,(k+1)T]$$

$$\varphi_k = \frac{\pi}{2}\sum_{i=-\infty}^{k-1} a_i - \frac{k\pi}{2} a_k$$

φ_k 满足递推关系： $\varphi_k = \varphi_{k-1} + \dfrac{\pi}{2} k(a_{k-1} - a_k)$

在 $t \in [kT,(k+1)T]$，MSK信号可写成

$$s(t) = A\cos(2\pi f_c t + \frac{\pi t}{2T} a_k + \varphi_k)$$

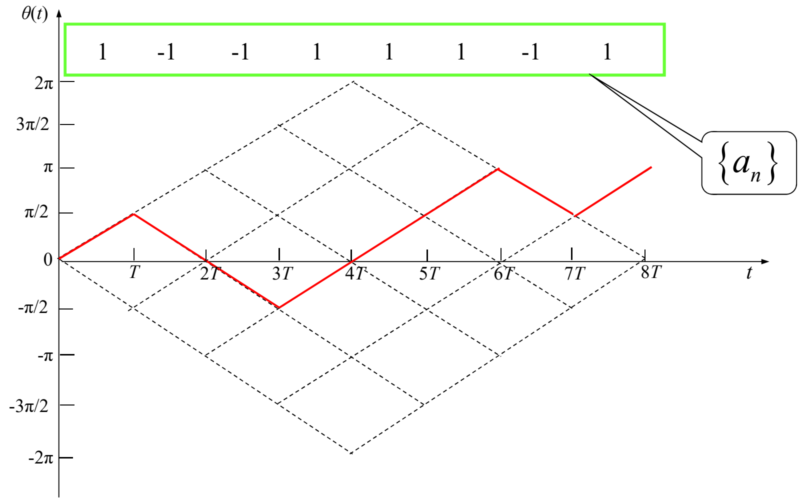
$a_k = 1 \Rightarrow f_1 = f_c + \dfrac{1}{4T}$ ， $a_k = -1 \Rightarrow f_0 = f_c - \dfrac{1}{4T}$

$\Delta f = f_1 - f_0 = \dfrac{1}{2T}$ **二个正弦信号正交的最小频率间隔（MSK）。**

5/28

对于相干解调，可以假设 $\varphi_0 = 0$ ，所以 $\varphi_k = 0, \pi \pmod{2\pi}$ ，

附加相位$\theta(t;\boldsymbol{a})$在区间$[kT,(k+1)T]$上是一条斜率为 $a_k\pi/2T$ 、截距为 φ_k 的直线段。在一个符号时间中 $\theta(t;\boldsymbol{a})$变化 $\pm\pi/2$ 。



6/28

总结以上论述，MSK信号具有如下特点:

1、MSK信号是**恒包络信号**；

2、相对于载波 f_c 的**频偏为** $\pm 1/4T$，**调制指数为** $h=0.5$；

3、在任何符号间隔区间中，二个**码元信号正交**；

4、附加**相位** $\theta(t)$**在一个码元时间中线性变化，变化量为** $\pm\pi/2$；

5、MSK信号的**相位在数据符号转换时刻连续**；

MSK信号实现方法:

MSK信号写成正交调制形式

$$\begin{aligned} s(t) &= A\cos\left[2\pi f_c t+\theta(t;\boldsymbol{a})\right] \\ &= A\cos\theta(t;\boldsymbol{a})\cos 2\pi f_c t - A\sin\theta(t;\boldsymbol{a})\sin 2\pi f_c t \end{aligned}$$

其中 $\cos\theta(t;\boldsymbol{a})=\cos(\frac{\pi a_k}{2T}t+\varphi_k)$

$$=\cos\frac{\pi a_k}{2T}t\cdot\cos\varphi_k-\sin\frac{\pi a_k}{2T}t\cdot\sin\varphi_k$$

$$=\cos\varphi_k\cdot\cos\frac{\pi a_k t}{2T}=\cos\varphi_k\cdot\cos\frac{\pi t}{2T}, \qquad t\in\left[kT,(k+1)T\right]$$

$$-\sin\theta(t,\boldsymbol{a})=-\sin(\frac{\pi a_k}{2T}t+\varphi_k)$$

$$=-\sin\frac{\pi a_k}{2T}t\cdot\cos\varphi_k-\cos\frac{\pi a_k}{2T}t\cdot\sin\varphi_k$$

$$=-a_k\cos\varphi_k\cdot\sin\frac{\pi t}{2T}, \qquad t\in\left[kT,(k+1)T\right]$$

所以在 $t \in [kT, (k+1)T]$

$$s(t) = I_k \cdot A\cos\frac{\pi t}{2T} \cdot \cos 2\pi f_c t - Q_k \cdot A\sin\frac{\pi t}{2T} \cdot \sin 2\pi f_c t$$

$$I_k = \cos\varphi_k, \quad Q_k = a_k \cos\varphi_k$$

目的要证明: $\boxed{I_{2k} = I_{2k-1}, \quad Q_{2k+1} = Q_{2k}}$

表明同相数据 $\{I_k\}$和正交数据 $\{Q_k\}$都是每隔时间 $2T$ 才改变一次，而且二路数据改变的时刻交错相隔 T。

数据序列$\{a_k\}$进行差分编码，转换成$\{c_k\}$

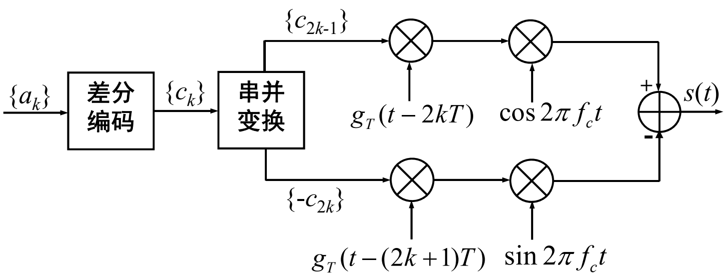
$$c_k = c_{k-1} \cdot a_k \quad \text{or} \quad a_k = c_{k-1} \cdot c_k$$

可以证明 $I_{2l} = I_{2l-1} = c_{2l-1}$， $Q_{2l+1} = Q_{2l} = c_{2l}$

$$s(t) = \sum_l c_{2l-1} g_T[t - 2lT] \cos 2\pi f_c t - c_{2l} g_T[t - (2l+1)T] \sin 2\pi f_c t$$

$$g_T(t) = \begin{cases} A\cos\dfrac{\pi t}{2T} & -T \le t \le T \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

MSK的一种实现方式



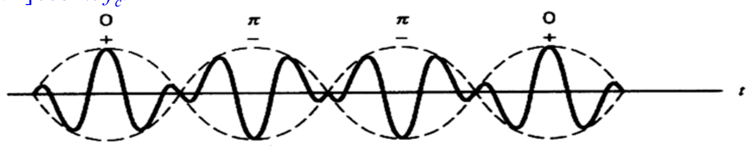
与OQPSK信号几乎相同，只是用余弦脉冲代替矩形脉冲。

nT	-1	0	1	2	3	4	5	6
a_k		1	-1	-1	-1	-1	1	-1
c_k	1	1	-1	1	-1	1	1	-1

输入二进序列

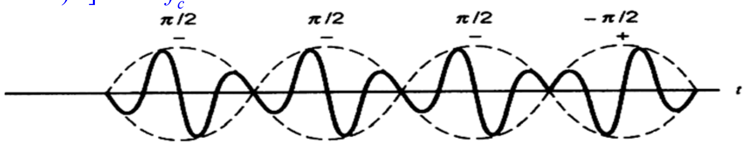
（a）差分编码数据

$c_{2k-1}g_T[t-2kT]\cos 2\pi f_c t$



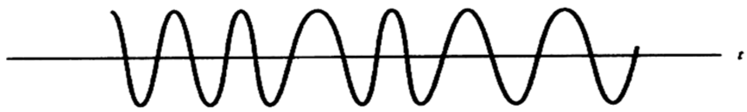
(b) 同相支路波形

$-c_{2k}g_T[t-(2k+1)T]\sin 2\pi f_c t$



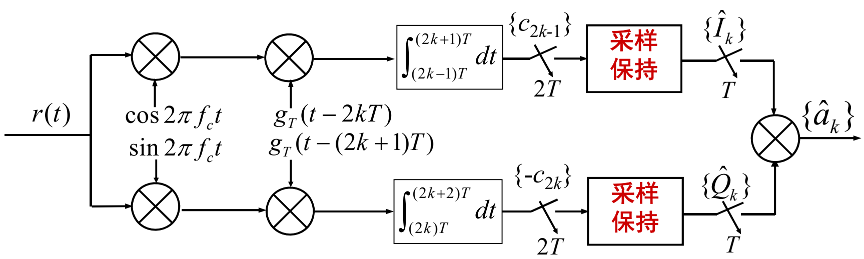
(c) 正交支路波形

$s(t)$



(d) MSK信号波形

MSK解调方式：



由于差分编码：

$$P_{MSK}(c)=[1-P_{BPSK}(e)]^2$$

$$P_{MSK}(e)=1-P_{MSK}(c)$$

$$\approx 2P_{BPSK}(e)$$

$$\approx 2Q\left(\sqrt{\frac{2E}{N_0}}\right)$$

MSK误码率

$\{I_k\}$, $\{Q_k\}$ **直接传输**

$$P_{MSK}(e)=Q\left(\sqrt{\frac{2E}{N_0}}\right)$$

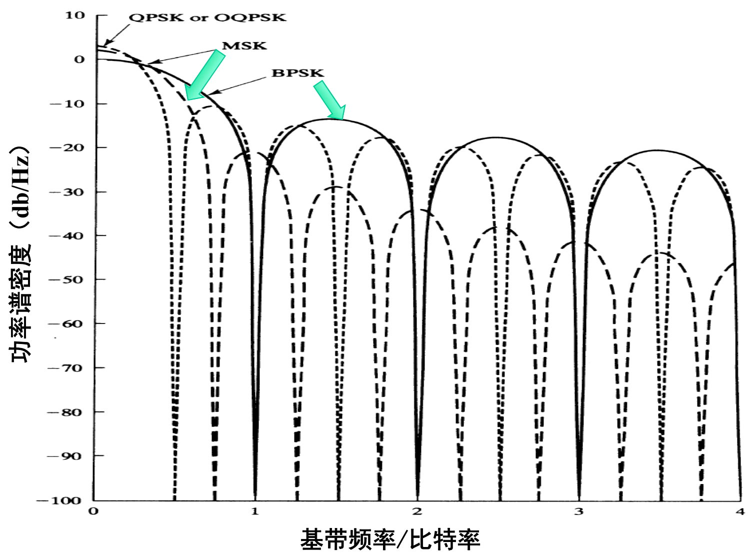
MSK信号的功率谱:

与QPSK一样，只是在MSK信号中基带脉冲是余弦脉冲，不是矩形脉冲。

$$g_T(t) = \begin{cases} A\cos\dfrac{\pi t}{2T} & -T \le t \le T \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \Longleftrightarrow G_T(f) = \frac{4TA}{\pi} \cdot \frac{\cos 2\pi fT}{16T^2 f^2 - 1}$$

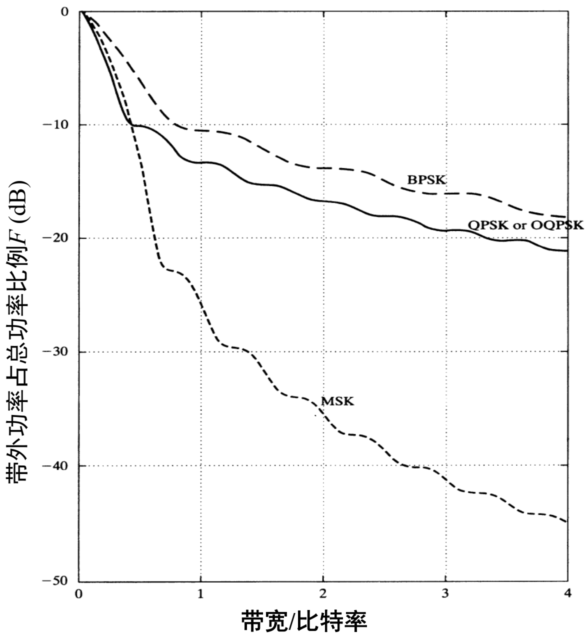
$$P_{MSK}(f) = \frac{2}{T}\left\{ \left|G_T(f+f_c)\right|^2 + \left|G_T(f-f_c)\right|^2 \right\}$$

$$= \frac{32TA^2}{\pi^2}\left\{ \left|\frac{\cos 2\pi(f-f_c)t}{16T^2(f-f_c)^2 - 1}\right|^2 + \left|\frac{\cos 2\pi(f+f_c)t}{16T^2(f+f_c)^2 - 1}\right|^2 \right\}$$



MSK信号的主瓣宽度是QPSK的1.5倍，是BPSK的3/4，

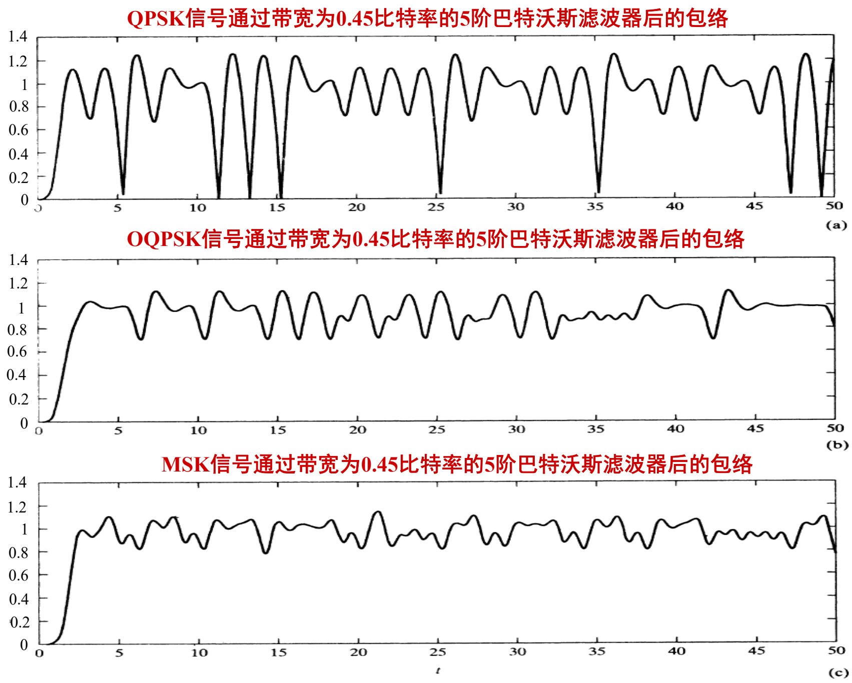
它的旁瓣衰减远快于QPSK和BPSK。



带外功率占总功率的比例

$$F = \frac{\int_W^{\infty} P(f)df}{\int_0^{\infty} P(f)df}$$

$$B_{99} = \begin{cases} 1.2/T_b, & \text{MSK} \\ 7/T_b, & \text{QPSK} \end{cases}$$



7.5.3 高斯最小偏移键控（GMSK）

修正MSK调制方式，使得附加相位不仅连续，而且光滑（即高次可微），这样可以使已调信号的功率谱更为紧凑。可以证明如果附加相位 $\theta(t;\boldsymbol{a})$ 是t的m次可微函数，则它的功率谱密度随频率按 2(m+1) 次幂反比下降。

二进制矩形脉冲幅度调制信号去调制正弦波的频率，当调制指数等于 $h=0.5$ 时，就得到**MSK信号**。

$$s(t)=A\cos(2\pi f_c t+\pi\int_{-\infty}^{t}v(\tau)d\tau)$$

$$v(t)=\sum_n a_n g_T(t-nT)$$

$$g_T(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2T} & 0\le t\le T\\ 0 & \text{其它}\end{cases}\quad, \qquad a_n=\pm 1$$

先把矩形脉冲序列 $v(t)$ 通过一个低通滤波器进行预滤波，用预滤波输出去控制压控振荡器进行调频，得到**GMSK信号**。

一般要求预滤波器满足如下条件：

1、预滤波器应有窄的通带和陡峭的过滤带；

2、预滤波器的脉冲响应有相对较低的过冲；

3、要求预滤波器输出的频率成型函数的积分为1/2，这将使得每个数据码元对于相位的总影响为 $\pi/2$；

合适的低通滤波器是高斯脉冲响应滤波器，简称高斯滤波器：

$$h_G(t)=\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}e^{-\pi^2 t^2/\alpha^2} \Longleftrightarrow H_G(f)=e^{-\alpha^2 f^2}$$

参数 α 与 $H_G(f)$ 的3dB带宽B的关系为：$\alpha=\dfrac{\sqrt{\ln 2}}{\sqrt{2}B}\approx\dfrac{0.5887}{B}$

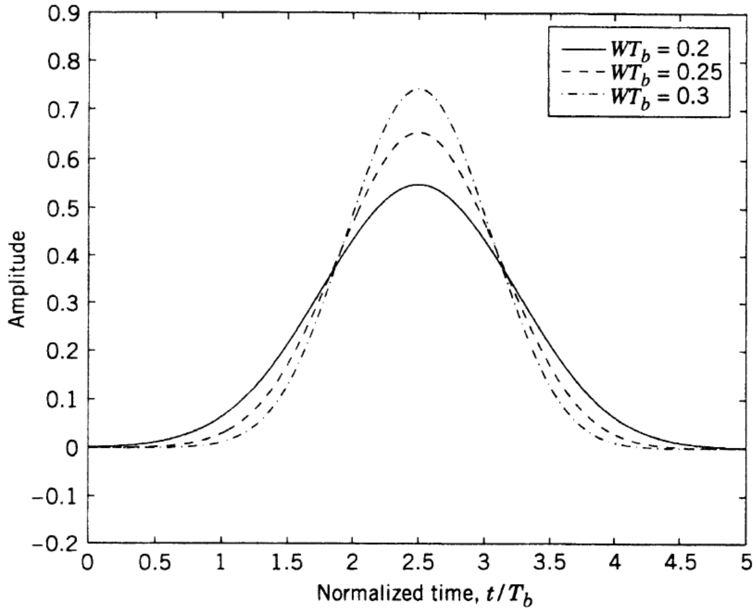
通过高斯滤波器后输出为，

$$w(t)=\sum_k a_k\cdot g(t-kT)$$

$$g(t)=g_T(t)\otimes h_G(t)=\frac{1}{2T}\left\{Q\left(\frac{2\pi B(t-T)}{\sqrt{\ln 2}}\right)-Q\left(\frac{2\pi Bt}{\sqrt{\ln 2}}\right)\right\}$$

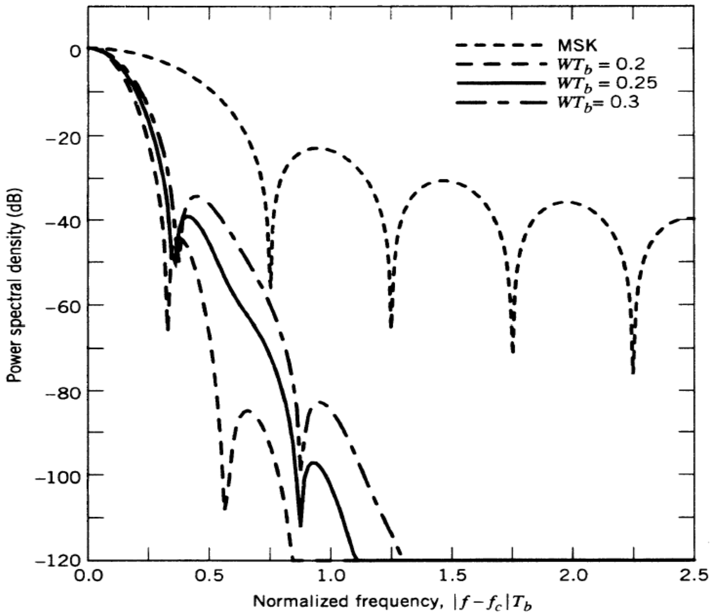
用高斯滤波后的基带信号 $w(t)$ 去进行 $h=0.5$ 调频，称为**GMSK**。

不同BT值时GMSK的频率成型脉冲



19/28

几种不同BT值的GMSK信号和MSK信号的功率谱密度



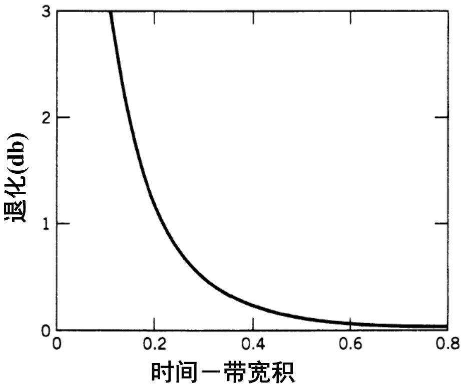
20/28

GMSK解调的误码率：

截断后的频率成型脉冲的宽度为5T，所以GMSK信号中存在码间干扰，而且当BT乘积减小时引入的码间干扰增大。

$$P_{GMSK}(e) = Q\left(\sqrt{\frac{\gamma E_b}{N_0}}\right)$$

其中γ与BT乘积有关，它表示相对于MSK的性能退化。



退化$10\log_{10}(\gamma/2)$与BT的关系

BT=∞ (MSK)，性能退化为0dB

BT=0.3，性能退化为0.46dB

7.5.4 多-h连续相位调制

多-h连续相位调制信号的一般形式为

$$s(t;\boldsymbol{\alpha}) = A\cos(2\pi f_c t + \theta(t;\boldsymbol{\alpha}) + \varphi_0)$$

在相干解调中，不失一般性可认为 $\varphi_0 = 0$。附加相位为

$$\theta(t;\boldsymbol{\alpha}) = 2\pi\int_{-\infty}^{t}\sum_{i=-\infty}^{\infty} h_i a_i g(\tau - iT)d\tau, \quad -\infty < t < \infty$$

其中 $a_i \in \{\pm1, \pm3, \cdots, \pm(M-1)\}$，$\{h_i\}$是一组周期调制指数，即$h_{i+k} = h_i$，$g(t)$是频率脉冲成型函数，一般它在$[0, LT]$外为零，在$[0, LT]$内不为零，其中$L$为正整数。当$L$=1时称为全响应，$L$>1时称为部分响应。

相位脉冲成型函数：

$$q(t) = \int_{-\infty}^{t} g(\tau)d\tau, \quad -\infty < t < \infty$$

要求 $\quad q(LT) = 1/2$

几种常用的连续相位调制信号的频率成型函数

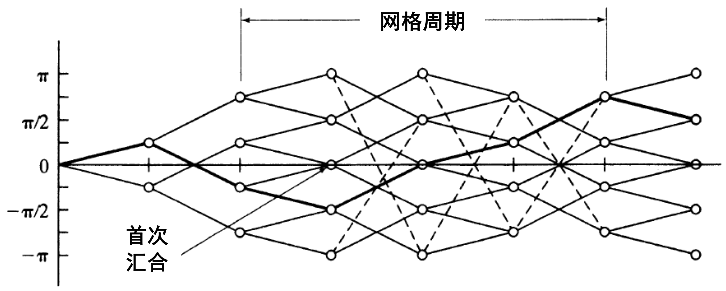
LREC（矩形）	$g(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2LT} & 0\le t\le LT\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$
LRC（升余弦）	$g(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2LT}(1-\cos\dfrac{2\pi t}{LT}) & 0\le t\le LT\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$
GMSK	$g(t)=\left\{Q\left[\dfrac{2\pi B(t-\frac{T}{2})}{\sqrt{\ln 2}}\right]-Q\left[\dfrac{2\pi B(t+\frac{T}{2})}{\sqrt{\ln 2}}\right]\right\}$

全响应（L=1），频率成型函数 $g(t)$为矩形脉冲。这时多-h连续相位调制信号在区间 $[kT,(k+1)T]$中表示为

$$s(t:\boldsymbol{\alpha})=A\cos\left[2\pi(f_c t+\frac{1}{2}a_k h_k(t/T-k))+\varphi_k\right]$$

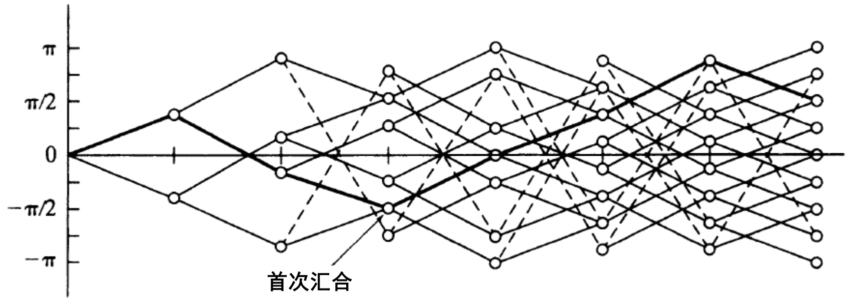
$$\varphi_k=\pi\sum_{i=-\infty}^{k-1}a_i h_i$$

[例7.5.1] a. 考虑h序列 $\{h_1,h_2\}=\{1/4,2/4\}$情况。与数据1,-1,-1,1,1,-1对应的相位轨线：



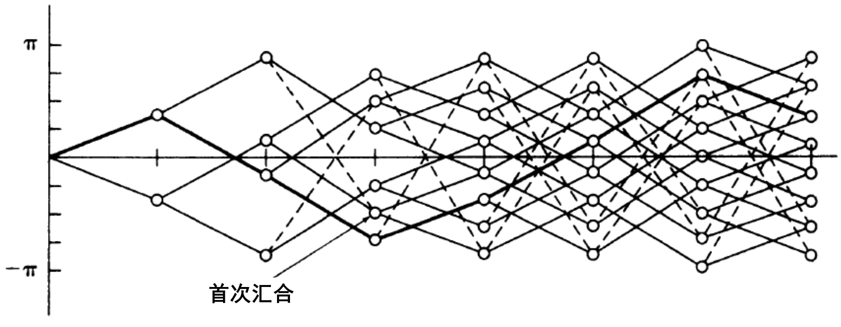
(a) $\{h_i\}=\{1/4, 2/4\}$

b. 考虑h序列$\{h_1, h_2\} = \{3/8, 4/8\}$



(b) $\{h_i\} = \{3/8, 4/8\}$

c. 考虑h序列$\{h_1, h_2, h_3\} = \{3/8, 4/8, 5/8\}$



(c) $\{h_i\} = \{3/8, 4/8, 5/8\}$

多-h连续相位调制信号的最佳解调要利用Viterbi译码算法：

设发送信号：$s(t;\boldsymbol{\alpha}) = A\cos(2\pi f_c t + \theta(t;\boldsymbol{\alpha}))$

接收到信号：$r(t) = s(t;\boldsymbol{\alpha}) + n(t)$

最大似然接收机（Viterbi算法）：

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \arg\min_{\boldsymbol{\alpha}'} \lim_{n\to\infty} \int_0^{nT} \left[r(t) - s(t;\theta(t;\boldsymbol{\alpha}')) \right]^2 dt$$

这等价于在相位网格上寻找一条与接收信号距离最短的轨线，是一个最短路径问题。 Viterbi算法的性能决定于自由距离

$$D_{\min}^2 = \lim_{n\to\infty} \min_{i\neq j} \int_0^{nT} \left[s(t;\boldsymbol{\alpha}^{(i)}) - s(t;\boldsymbol{\alpha}^{(j)}) \right]^2 dt$$

采用$L>1$的部分响应方式，以及采用多-h方式，都是由于部分响应方式和多-h方式能够增大相位状态数，使相位轨线变化更为复杂，有利于自由距离的增加，也有利于相位轨线更为平滑。

习 题

7-26