通信原理（甲）

第2章
2.1 确定性信号

第二章 确定性信号、随机变量与随机过程

§2.1 确知信号的频域描述

一、Fourier级数和Fourier变换

定理2.1.1（Fourier级数）$x(t)$是周期为T_0的函数，如果

① $x(t)$ 绝对可积： $\int_0^{T_0} |x(t)| dt < \infty$

② $x(t)$ 在一个周期中至多有有限次振荡；

③ $x(t)$ 在每周期中间断点个数有限，则$x(t)$可表示为

$$x_{\pm}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{j2\pi \frac{n}{T_0} t} \qquad x_n = \frac{1}{T_0} \int_{\alpha}^{\alpha+T_0} x(t) e^{-j2\pi \frac{n}{T_0} t} dt$$

$$x_{\pm}(t) = \begin{cases} x(t) & x(t) \text{ 在 } t \text{ 连续} \\ \dfrac{x(t^+) + x(t^-)}{2} & x(t) \text{ 在 } t \text{ 间断} \end{cases}$$

定理2.1.2 (Fourier变换) 若函数$x(t)$满足如下条件：

① $x(t)$绝对可积： $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|dt < \infty$

② $x(t)$在任何有限实区间上至多有限次振荡；

③ $x(t)$在任何有限实区间上至多有有限个间断点；则有如下的变换关系：

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

$$x_{\pm}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$$

$$x_{\pm}(t) = \begin{cases} x(t) & x(t) \text{ 在 } t \text{ 连续} \\ \dfrac{x(t^+) + x(t^-)}{2} & x(t) \text{ 在 } t \text{ 间断} \end{cases}$$

$$x(t) \Leftrightarrow X(f)$$

注意1：$\delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{j2\pi ft} df$

注意2：若$x(t)$是实函数，则$X(f)$具有共轭对称Hermitian性质：

$$X(-f) = X^*(f)$$

注意3：泊松公式，若 $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(t) \cdot h(t - nT_0)$

$$X(f) = \frac{1}{T_0} \sum_{l=-\infty}^{\infty} H\left(\frac{l}{T_0}\right) \cdot G\left(f - \frac{l}{T_0}\right)$$

其中 $g(t) \Leftrightarrow G(f)$ $h(t) \Leftrightarrow H(f)$

若 $g(t) = 1$，$h(t) = \delta(t)$，由于

$$g(t) \Leftrightarrow \delta(f) \qquad h(t) \Leftrightarrow 1$$

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_o) \Leftrightarrow X(f) = \frac{1}{T_0} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{l}{T_0}\right)}$$

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(t)\delta(t - nT_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(nT_0)\delta(t - nT_0)$$

$$X_s(f) = \frac{1}{T_0} \sum_{l=-\infty}^{\infty} G(f - lf_0)$$

抽样

二、周期信号的Fourier变换

设$x(t)$是周期为T_0的周期信号，

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_n e^{j2\pi\frac{n}{T_0}t}\Leftrightarrow X(f)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_n\delta\left(f-\frac{n}{T_0}\right)$$

$$x_n=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}x(t)e^{-jn\frac{2\pi t}{T_0}}dt=\frac{1}{T_0}\int_{-\infty}^{\infty}x_{T_0}(t)e^{-jn\frac{2\pi t}{T_0}}dt=\frac{1}{T_0}X_{T_0}\left(\frac{n}{T_0}\right)$$

三、能量型信号的能量谱 --------无限长时间轴的能量有限

能量型信号能量有限，即满足$\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2dt<\infty$。由巴塞瓦尔公式

$$E=\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2dt=\int_{-\infty}^{\infty}|X(f)|^2df$$

能量谱密度：$G(f)=|X(f)|^2$

频率f附近单位频率上的能量

随机过程：

$R_x(t_1,t_2)=E\{x(t_1)x^*(t_2)\}$

信号的相关函数：$R_x(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\cdot x^*(t-\tau)dt=x(\tau)\otimes x^*(-\tau)$

$$R_x(\tau)\Leftrightarrow G(f)$$

四、功率型信号的功率谱密度

功率型信号$x(t)$的功率是有限的： $0\le\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}|x(t)|^2dt<\infty$

功率型信号的相关函数： $R_x(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}x(t)x^*(t-\tau)dt$

定义截断函数： $x_T(t)=\begin{cases}x(t), & t\in[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]\\ 0, & \text{O.W.}\end{cases}$ $\qquad x_T(t)\Leftrightarrow X_T(f)$

功率型信号的功率谱密度： $P(f)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}|X_T(f)|^2$

频率f附近单位频率上的功率

$$R_x(\tau)\Leftrightarrow P(f)$$

注意：功率信号$x(t)$通过脉冲响应为$h(t)$的滤波器的输出为

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$R_y(\tau)=R_x(\tau)\otimes h(\tau)\otimes h^*(-\tau)$$

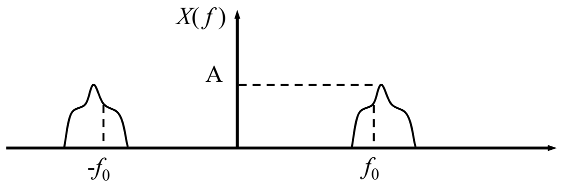
$$P_y(f)=P_x(f)|H(f)|^2$$

卷积+共轭对称性质

五、窄带信号（带通信号）和窄带系统（带通系统）

1．窄带信号

定义：信号$x(t)$称为是带通的，或窄带的，指它的Fourier变换$X(f)$在某个高频f_0附近一个小领域上不为零，在其它地方为零，即 $X(f)=0$，$\forall |f \mp f_0| \geq W$， $W < f_0$

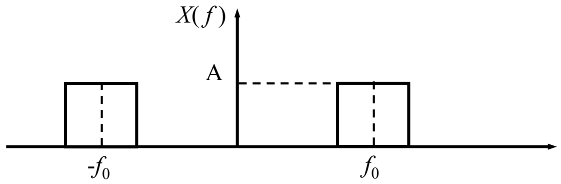


同样带通系统（窄带系统）是指它的传递函数$H(f)$是窄带的，即存在 f_0 使

$$H(f)=0\ ,\ \forall |f \mp f_0| > W\ ,\ \ W < f_0$$

如果带通系统是理想的指

$$H(f)=\begin{cases}1 & |f \mp f_0| < W \\ 0 & |f \mp f_0| > W\end{cases}\ ,\quad W < f_0$$



在通信中常碰到信号

$$x(t) = A(t)\cos(2\pi f_0 t + \Phi(t))$$

可写成 $x(t) = \mathrm{Re}\left\{A(t)\cdot e^{j(2\pi f_0 t + \Phi(t))}\right\}$

转换为：$x(t) = \mathrm{Re}\left\{A(t)e^{j\Phi(t)}\cdot e^{j2\pi f_0 t}\right\} = \mathrm{Re}\left\{x_l(t)\cdot e^{j2\pi f_0 t}\right\}$

定义复包络为：$x_l(t) = A(t)\cdot e^{j\Phi(t)} = x_c(t) + jx_s(t)$

现要证明，对任意窄带信号$x(t)$，它可以写成

$$x(t) = \mathrm{Re}\left\{x_l(t)\cdot e^{j2\pi f_0 t}\right\}$$
$$= \mathrm{Re}\left\{x(t) + j\hat{x}(t)\right\}$$

其中 $\hat{x}(t)$ 是$x(t)$的Hilbert变换。

9/20

（1）单频信号

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \theta) \Leftrightarrow X(f) = A\left(\frac{1}{2}e^{j\theta}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}e^{-j\theta}\delta(f + f_0)\right)$$

引入复数表示：

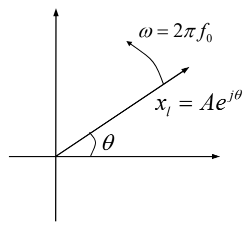
$$z(t) = Ae^{j(2\pi f_0 t + \theta)}$$
$$= A\cos(2\pi f_0 t + \theta) + jA\sin(2\pi f_0 t + \theta)$$
$$= x(t) + jx_q(t)$$

$x(t)$的等效低通表示

$z(t)$**表示** $x_l = Ae^{j\theta}$ **以角频率$2\pi f_0$反时针旋转，即** $z(t) = x_l \cdot e^{j2\pi f_0 t}$ 。

在频率域上相当于把 $Z(f)$ **在频轴上向左移** f_0**，得到复数** x_l**。**

如何得到$Z(f)$**：在频域上删除**$X(f)$**的负频分量，再乘以2，即**



$$Z(f) = 2\cdot u_{-1}(f)X(f)$$

其中 $u_{-1}(f) = \begin{cases} 1 & f > 0 \\ 1/2 & f = 0 \\ 0 & f < 0 \end{cases}$

$$x_l = z(t)e^{-j2\pi f_0 t} \Longleftrightarrow X_l(f) = Z(f + f_0) = 2\cdot u_{-1}(f + f_0)X(f + f_0)$$

10/20

（2）一般窄带信号的复包络（相位子）

设$x(t)$是窄带信号，$x(t) \Leftrightarrow X(f)$，寻找$x(t)$的复包络 $x_l(t)$

首先在频域上删除$X(f)$的负频分量，再乘以2，得到

$$Z(f) = 2 \cdot u_{-1}(f) X(f)$$

再求 $Z(f) \Leftrightarrow z(t)$

由于 $\mathcal{F}\left[u_{-1}(t)\right] = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$

（利用 $\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{t} x(t)dt\right] = \frac{X(f)}{j2\pi f} + \frac{1}{2}X(0)\delta(f)$ 和 $\int_{-\infty}^{t} \delta(t)dt = u_{-1}(t)$ ）

所以 $\mathcal{F}\left[\frac{1}{2}\delta(t) + \frac{j}{2\pi t}\right] = u_{-1}(f)$

（利用对偶性 $x(t) \Leftrightarrow X(f) \Rightarrow X(-t) \Leftrightarrow x(f)$，以及δ(t)是偶函数）

所以 $z(t) = \left(\delta(t) + \frac{j}{\pi t}\right) \otimes x(t) = x(t) + j\frac{1}{\pi t} \otimes x(t) \triangleq x(t) + j\hat{x}(t)$

其中 $\boxed{\hat{x}(t) = \frac{1}{\pi t} \otimes x(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t-\tau} d\tau}$ 称为是$x(t)$的Hilbert变换。

看一下Hilbert变换的意义

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{\pi t}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-j2\pi tf}}{\pi t} dt$$

奇函数　　偶函数

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(2\pi tf)}{\pi t} dt - j\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2\pi tf)}{\pi t} dt$$

$$= -j\int_{0}^{\infty} \frac{2\sin 2\pi ft}{\pi t} dt$$

$$= -j\,\mathrm{sgn}(f)$$

$$= \begin{cases} -j & f > 0 \\ 0 & f = 0 \\ j & f < 0 \end{cases}$$

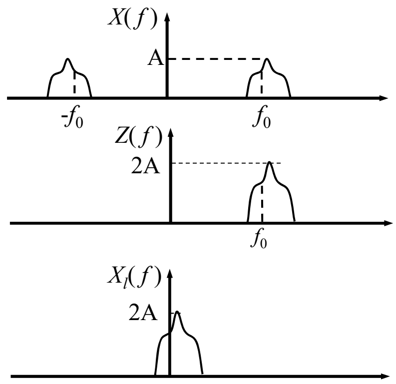
$$= \begin{cases} e^{-j\frac{\pi}{2}} & f > 0 \\ 0 & f = 0 \\ e^{j\frac{\pi}{2}} & f < 0 \end{cases}$$

所以$x(t)$的Hilbert变换相当于把信号的正频分量移相$-\pi/2$，负频分量移相$\pi/2$ 。Hilbert滤波器也称为正交滤波器。

为了获得带通/窄带信号$x(t)$的复包络 $x_l(t)$ 表示（即等效低通表示），把 $Z(f)$ 向左移 f_0，得到$x(t)$的等效低通的时域表示

$$x_l(t) = z(t)\cdot e^{-j2\pi f_0 t} \Leftrightarrow X_l(f) = Z(f+f_0) = 2u_{-1}(f+f_0)X(f+f_0)$$

显然 $|X_l(f)| = 0$ ， $|f| > W$ ， $W < f_0$



一般复包络/等效低通表示 $x_l(t)$是复信号，所以

$$x_l(t) = x_c(t) + jx_s(t)$$

同向低通成分　正交低通成分

由于 $z(t) = x(t) + j\hat{x}(t)$

$$= x_l(t)e^{j2\pi f_0 t}$$

$$= [x_c(t)\cos(2\pi f_0 t) - x_s(t)\sin(2\pi f_0 t)]$$

$$+ j[x_c(t)\cdot\sin(2\pi f_0 t) + x_s(t)\cos(2\pi f_0 t)]$$

所以 $x(t) = x_c(t)\cos(2\pi f_0 t) - x_s(t)\sin(2\pi f_0 t)$

$$\hat{x}(t) = x_c(t)\sin(2\pi f_0 t) + x_s(t)\cos(2\pi f_0 t)$$

记 $V(t) = \sqrt{x_c^2(t) + x_s^2(t)}$ ， $\Theta(t) = \arctan\dfrac{x_s(t)}{x_c(t)}$

$x(t)$的复包络可写为：

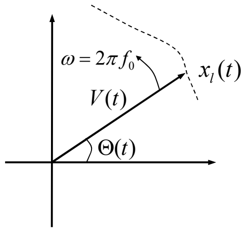
$$x_l(t) = V(t)e^{j\Theta(t)}$$

$$z(t) = \underline{x(t)} + j\underline{\underline{\hat{x}(t)}}$$
$$= x_l(t) e^{j2\pi f_0 t}$$
$$= V(t) \cdot e^{j\Theta(t)} \cdot e^{j2\pi f_0 t}$$
$$= \underline{V(t)\cos(2\pi f_0 t + \Theta(t))} + j\underline{\underline{V(t)\sin(2\pi f_0 t + \Theta(t))}}$$

$$x(t) = V(t)\cos(2\pi f_0 t + \Theta(t))$$

$$\hat{x}(t) = V(t)\sin(2\pi f_0 t + \Theta(t))$$

$V(t)$和$\Theta(t)$是慢变化时间函数



（3）Hilbert变换的性质

$$\boxed{\hat{x}(t) = \frac{1}{\pi t} \otimes x(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t-\tau} d\tau}$$

(1) $x(t) = x(-t) \Rightarrow \hat{x}(t) = -\hat{x}(-t)$ ，即偶函数的Hilbert变换为奇函数；

$x(t) = -x(-t) \Rightarrow \hat{x}(t) = \hat{x}(-t)$ ，即奇函数的Hilbert变换为偶函数；

(2) $\hat{\hat{x}}(t) = -x(t)$，函数关于Hilbert 的Hilbert 是原函数的负数；

(3) $\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{x}(t)|^2 dt$ ，能量守恒；

(4) $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\hat{x}(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{X}(f) X^*(f) df = 0$ ，正交性；

复包络是复信号 $x_l(t) = x_c(t) + jx_s(t)$

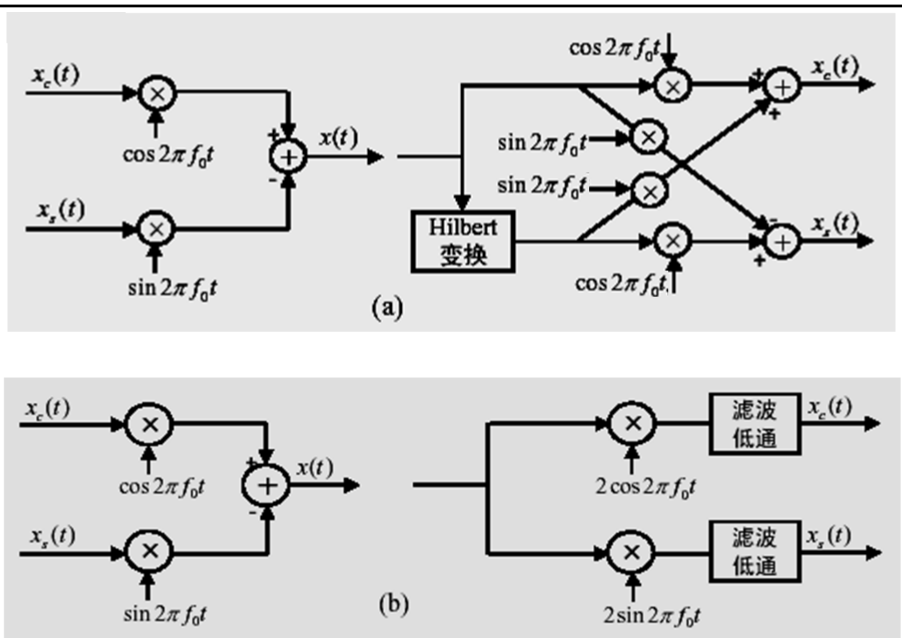
$$z(t) = x_l(t)e^{j2\pi f_0} = x(t) + j\hat{x}(t)$$

得到 $$x(t) = x_c(t)\cos(2\pi f_0 t) - x_s(t)\sin(2\pi f_0 t)$$

$$\hat{x}(x) = x_c(t)\sin(2\pi f_0 t) + x_s(t)\cos(2\pi f_0 t)$$

导出 $$x_c(t) = x(t)\cos(2\pi f_0 t) + \hat{x}(t)\sin(2\pi f_0 t)$$

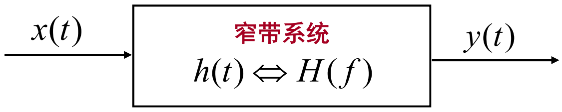
$$x_s(x) = -x(t)\sin(2\pi f_0 t) + \hat{x}(t)\cos(2\pi f_0 t)$$



2．窄带信号通过窄带系统

$x(t)$为窄带信号，$h(t)$是窄带系统的脉冲响应，输出$y(t)$的频域表示：

$$Y(f)=X(f)\cdot H(f)\ ,\qquad h(t)\Leftrightarrow H(f)$$



显然$y(t)$是窄带的，所以它的低通等效复包络 $y_l(t)\Leftrightarrow Y_l(f)$

$$Y_l(f)=2\cdot u_{-1}(f+f_0)\cdot Y(f+f_0)$$
$$=2\cdot u_{-1}(f+f_0)\cdot X(f+f_0)\cdot H(f+f_0)$$
$$X_l(f)=2\cdot u_{-1}(f+f_0)\cdot X(f+f_0)$$
$$H_l(f)=2\cdot u_{-1}(f+f_0)\cdot H(f+f_0)$$

因为 $\left[u_{-1}(f)\right]^2=u_{-1}(f)$

所以 $X_l(f)\cdot H_l(f)=4u_{-1}(f+f_0)\cdot X(f+f_0)\cdot H(f+f_0)$

$$Y_l(f)=X_l(f)\cdot H_l(f)/2$$
$$y_l(t)=x_l(t)\otimes h_l(t)/2$$
$$y(t)=\mathrm{Re}\left[y_l(t)\cdot e^{j2\pi f_0 t}\right]$$