§6.3 基带信号通过加性白高斯噪声信道传输

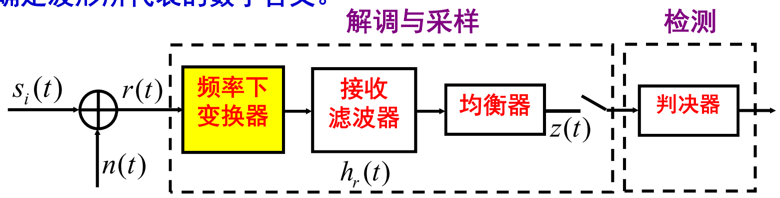
在基带传输情况中，接收到的是基带波形脉冲，要通过解调恢复脉冲波形。由于经过传输的脉冲波形已非原来理想的发送波形，信道滤波和接收机的前端滤波使波形失真，引起了码间干扰（ISI）。另外由于在传输过程中存在各种干扰和加性噪声，使得接收到的脉冲波形迭加上噪声干扰，因而在对信号采样判决时会出现错误。解调的目的在于要免除码间干扰影响，以可能最好的信号噪声比来恢复基带脉冲。

通过对发送、接收滤波器的正确设计，以及利用各种均衡器技术，原则上可以消除码间干扰影响。

本节主要讨论基带信号通过加性白高斯噪声信道（AWGN）传输，不考虑由于频带限制所带来的码间干扰影响；即把信道作为无限带宽系统。

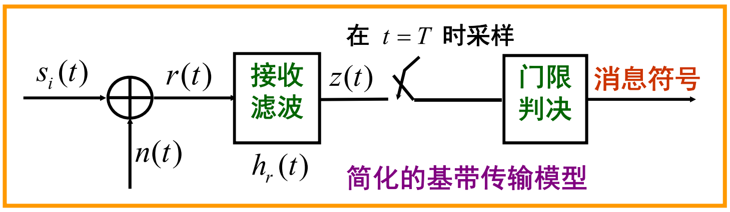
一、解调和检测

解调就是把接收到波形恢复成发送的基带脉冲，而检测是指作出判断，确定波形所代表的数字含义。



频率下变换方框是为带通信号传输所设计，对于基带信号传输来说，它可以完全省去。接收滤波器，执行波形恢复的功能。接收滤波器是以最好的信噪比恢复基带脉冲。这种最佳滤波器也称为匹配滤波器，或者叫相关器。由于发送滤波和信道滤波使得接收到的脉冲序列发生码间干扰，不适于直接采样和判决，均衡器用来消除由带限系统所引起的码间干扰（ISI）。实际系统中接收滤波器和均衡器往往结合在一起。

解调/检测过程包含有二个转换。第一是波形—样本转换，这由采样器完成。在每个符号时间 T 结束，采样器输出样本值 $z(mT)$，也称 $z(mT)$ 为检测统计量。检测统计量是一个随机变量，它与接收到符号的能量及附加噪声有关。由于输入噪声是Gaussian过程，接收滤波器是线性的，所以滤波器输出噪声也是高斯的。第二是样本到消息符号转换。



$$
s_i(t)=\begin{cases} s_1(t) & 0\le t\le T \quad \text{发送“1”} \\ s_0(t) & 0\le t\le T \quad \text{发送“0”} \end{cases}
$$

$$
r(t)=s_i(t)+n(t) \qquad z(t)=r(t)\otimes h_r(t)
$$

$$
z(T)=a_i(T)+n_0(T)
$$

$z(t)$ 在时刻 $t=T$ 的采样输出为，

$$
z(T)=a_i(T)+n_0(T)
$$

其中 $a_i(T)$ 是由信号分量得到的，是所需分量；$n_0(T)$ 是噪声分量。

$$
z=a_i+n_0
$$

$n_0(T)$ 是均值为零，方差为 σ_0^2 的高斯噪声

$$
p(z\,|\,s_0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-a_0}{\sigma_0}\right)^2\right]
$$

$$
p(z\,|\,s_1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-a_1}{\sigma_0}\right)^2\right]
$$

$p(z\,|\,s_0)$ 和 $p(z\,|\,s_1)$ 分别称为是 s_0 和 s_1 的似然概率（概率密度函数）。

判决器作用是把采样值 z 与某门限 γ 相比，根据大于 γ 还是小于 γ 来确定发送的是 s_0，还是 s_1。基带传输系统中的解调和检测主要归结为如何设计一个好的接收滤波器和如何选择比较门限。

二、信号和噪声的矢量空间表示

N维矢量空间

在N维矢量空间S 中每个矢量x用它的N个坐标表示为 $(x_1, x_2, \cdots, x_N)$;

两个矢量 x、y 的和定义为:

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(x_1+y_1, x_2+y_2, \cdots, x_N+y_N)$$

矢量x与标量α之积定义 :

$$\alpha\boldsymbol{x}=(\alpha x_1, \alpha x_2, \cdots, \alpha x_N)$$

两个矢量 x 、y 的内积:

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=\sum_{i=1}^{N}x_i y_i$$

矢量x的长度定义为:

$$\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}}=\sqrt{\sum_{i=1}^{N}x_i^2}$$

矢量x的长度定义为:

$$\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}}=\sqrt{\sum_{i=1}^{N}x_i^2}$$

两个矢量x、y的夹角: $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{x}\|\times\|\boldsymbol{y}\|}$

$$\begin{aligned}v_1&=(1,0,0,\cdots,0)\\v_2&=(0,1,0,\cdots,0)\\&\cdots\\v_N&=(0,0,0,\cdots,1)\end{aligned}$$

是一组相互正交，规一的矢量，称为基矢量。

Gram-Schmidt规范化法则

对于任何 N 个线性无关矢量 $\boldsymbol{x}_i$, $i=1,2,\cdots,N$，可以通过如下方法得到一组 N 个正交、规一矢量$\{\boldsymbol{e}_i\}$；

任取一个矢量，比如 $\boldsymbol{x}_1$， $\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{x}_1/\|\boldsymbol{x}_1\|$；

$\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{x}_2-(\boldsymbol{x}_2\cdot\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1$ ， $\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{b}_2/\|\boldsymbol{b}_2\|$；

$\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{x}_3-(\boldsymbol{x}_3\cdot\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1-(\boldsymbol{x}_3\cdot\boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2$ ， $\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{b}_3/\|\boldsymbol{b}_3\|$；

$\cdots\quad\cdots\qquad\qquad\cdots$

$\boldsymbol{b}_n=\boldsymbol{x}_n-\sum_{i=1}^{n-1}(\boldsymbol{x}_n\cdot\boldsymbol{e}_i)\boldsymbol{e}_i$ ， $\boldsymbol{e}_n=\boldsymbol{b}_n/\|\boldsymbol{b}_n\|$； $n=1,2,\cdots,N$

可以把任何一组N个正交、规一矢量，作为这个N维空间S 的基矢量。

信号和噪声的矢量空间表示

把在$(0,T)$ 上平方可积函数$x(t)$和 $y(t)$ 看成是矢量，

矢量

$x(t)$和$y(t)$的内积定义：$(x(t)\cdot y(t))=\int_0^T x(t)y(t)dt$

$x(t)$函数的长度定义为：$\|x(t)\|=\sqrt{\int_0^T x^2(t)dt}$

$x(t)$和 $y(t)$的夹角定义： $\cos\theta=\dfrac{(x(t)\cdot y(t))}{\|x(t)\|\times\|y(t)\|}$

函数

$\varphi_i(t), i=1,2,\cdots,N$ 是一组在 $(0,T)$ 上定义的正交、规一函数，即

$$\int_0^T \varphi_i(t)\varphi_j(t)dt=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

任何一个由$\{\varphi_i(t)\}$线性组合构成的函数$s(t)$可以表示为：

$$s(t)=s_1\varphi_1(t)+s_2\varphi_2(t)+\cdots+s_N\varphi_N(t)$$

把$\{\varphi_i(t)\}$看成是一组N个正交、规范基函数，相当于N维正交空间的N个正交单位向量。于是$s(t)$就可以看成为是这个N维空间中的一个点，它的座标为（$s_1,s_2,\cdots,s_N$），称这N维空间为信号空间。

由Gram-Schmidt正交化步骤：

可以从任何一组M个波形$\{s_i(t)\}$，$i=1,2,\cdots,M,\ t\in[0,T]$构造出一组$N$个正交规范波形 $\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_N(t),N\le M$；

任取一个函数，比如 $s_1(t)$，　　$\varphi_1(t)=s_1(t)/\|s_1(t)\|$；

$b_2(t)=s_2(t)-<s_2(t)\cdot\varphi_1(t)>\varphi_1(t)$，　　$\varphi_2(t)=b_2(t)/\|b_2(t)\|$；

$b_3(t)=s_3(t)-<s_3(t)\cdot\varphi_1(t)>\varphi_1(t)-<s_3(t)\cdot\varphi_2(t)>\varphi_2(t)$，　　$\varphi_3(t)=b_3(t)/\|b_3(t)\|$；

$\cdots\quad\cdots$　　$\cdots$

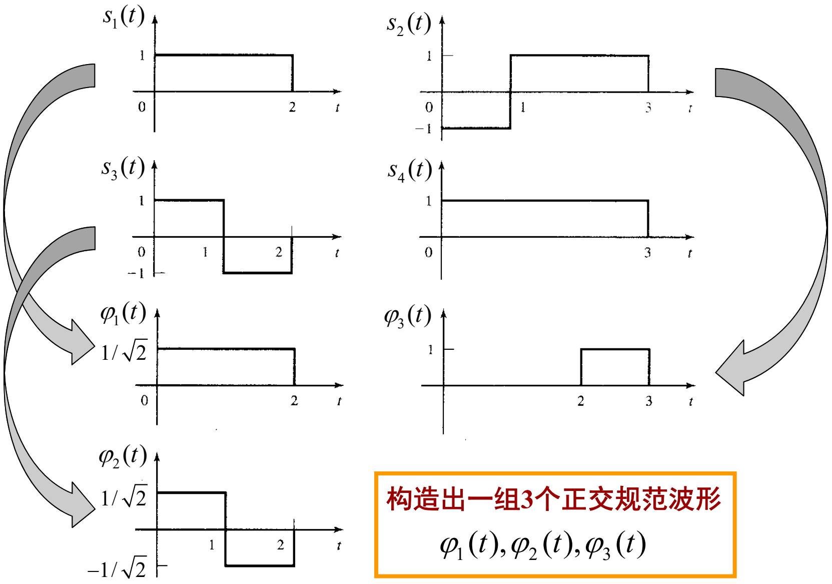
$b_n(t)=s_n(t)-\sum_{i=1}^{n-1}<s_n(t)\cdot\varphi_i(t)>\varphi_i(t)$，　　$\varphi_n(t)=b_n(t)/\|b_n(t)\|$；

$n=1,2,\cdots,N$

使得：

$$s_1(t)=s_{11}\varphi_1(t)+s_{12}\varphi_2(t)+\cdots+s_{1N}\varphi_N(t)$$
$$s_2(t)=s_{21}\varphi_1(t)+s_{22}\varphi_2(t)+\cdots+s_{2N}\varphi_N(t)$$
$$\vdots$$
$$s_M(t)=s_{M1}\varphi_1(t)+s_{M2}\varphi_2(t)+\cdots+s_{MN}\varphi_N(t)$$
$$s_{ij}=\int_0^T s_i(t)\varphi_j(t)dt,\quad i=1,2,\cdots,M;\ j=1,2,\cdots,N$$

[例] 4个基带信号 $s_1(t), s_2(t), s_3(t), s_4(t)$



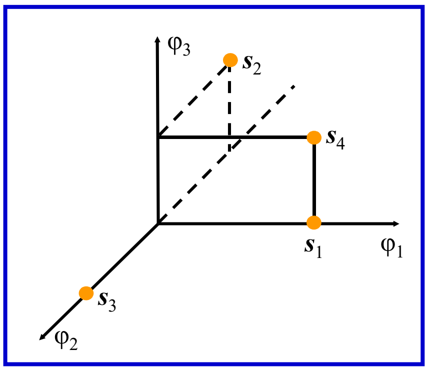
构造出一组3个正交规范波形

$\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)$

$$s_1(t) = \sqrt{2}\varphi_1(t)$$
$$s_2(t) = -\sqrt{2}\varphi_2(t) + \varphi_3(t)$$
$$s_3(t) = \sqrt{2}\varphi_2(t)$$
$$s_4(t) = \sqrt{2}\varphi_1(t) + \varphi_3(t)$$

$$\boldsymbol{s}_1 = (\sqrt{2},0,0), \boldsymbol{s}_2 = (0,-\sqrt{2},1),$$
$$\boldsymbol{s}_3 = (0,\sqrt{2},0), \boldsymbol{s}_4 = (\sqrt{2},0,1)$$

$$\|\boldsymbol{s}_1\|^2 = 2, \|\boldsymbol{s}_2\|^2 = 3,$$
$$\|\boldsymbol{s}_3\|^2 = 2, \|\boldsymbol{s}_4\|^2 = 3$$



每个信号波形$s_i(t)$可以用矢量$(s_{i1}, s_{i2}, \cdots s_{iN})$表示，信号能量

$$E_i = \int_0^T s_i^2(t)dt = \int_0^T \left[\sum_{j=1}^{N} s_{ij}\varphi_j(t)\right]^2 dt = \sum_{j=1}^{N} s_{ij}^2 \triangleq \|\boldsymbol{s}_i\|^2 \qquad i = 1,2,\cdots,M$$

信号的能量相当于矢量 $(s_{i1}, s_{i2}, \cdots, s_{iN})$ 长度的平方。

[例] 在 $(-\pi,\pi)$ 上定义的16个基带信号：

$$s_{i,j}(t)=i\cdot\cos t+j\cdot\sin t\ ,\qquad i,j=\pm1,\pm3$$

可以用二维信号空间中的点表示，该二维信号空间的基矢量函数为：

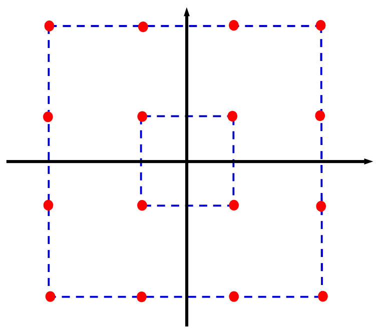
$$\varphi_1(t)=\frac{\cos t}{\sqrt{\pi}}\qquad \varphi_2(t)=\frac{\sin t}{\sqrt{\pi}}$$

所以

$$s_{i,j}(t)=i\sqrt{\pi}\cdot\varphi_1(t)+j\sqrt{\pi}\cdot\varphi_2(t)$$

$$\boldsymbol{s}_{i.j}=(i\sqrt{\pi},j\sqrt{\pi})$$

$$\|\boldsymbol{s}_{i.j}\|^2=(i^2+j^2)\pi$$



双边功率谱密度为$N_0/2$的白高斯噪声也可以表示成二部分组成，

$$\boxed{n(t)=\hat{n}(t)+\tilde{n}(t)}$$

其中 $\hat{n}(t)=\sum_{j=1}^{N}n_j\varphi_j(t)$ ， $n_j=\int_0^T n(t)\varphi_j(t)dt$

是$n(t)$在这N维信号空间中的投影。

另一部分：

$$\tilde{n}(t)=n(t)-\hat{n}(t)$$

是与信号空间正交的分量。因为对任何 $\varphi_j(t),j=1,2,\cdots,M$

$$\int_0^T\tilde{n}(t)\varphi_j(t)dt=0$$

与信号检测无关

$\hat{n}(t)$ 可以用矢量 $(n_1, n_2, \cdots, n_N)$ 表示。

分量 n_i 是高斯随机变量， n_i 的均值和协方差分别为：

$$E[n_i] = E\left[\int_0^T n(t)\varphi_j(t)dt\right] = 0$$

$$\begin{aligned} E[n_i n_j] &= \int_0^T \int_0^T E[n(t)n(\tau)]\varphi_i(t)\varphi_j(\tau)dtd\tau \\ &= \int_0^T \int_0^T \frac{N_0}{2}\delta(t-\tau)\varphi_i(t)\varphi_j(\tau)dtd\tau \\ &= \frac{N_0}{2}\delta_{ij} \\ &= \begin{cases} \frac{N_0}{2} & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \end{aligned}$$

N维噪声矢量 $\hat{n}(t) = (n_1, n_2, \cdots, n_N)$ 的概率分布为：

$$f(n) = \prod_{i=1}^{N} f(n_i) = \frac{1}{(\pi N_0)^{N/2}} \exp\left[-\sum_{i=1}^{N} \frac{n_i^2}{N_0}\right]$$

三、基函数相关解调 --AWGN

当发送是信号 $s_k(t)$ 时，接收到

$$r(t) = s_k(t) + n(t), \qquad k = 1, 2, \cdots, M$$

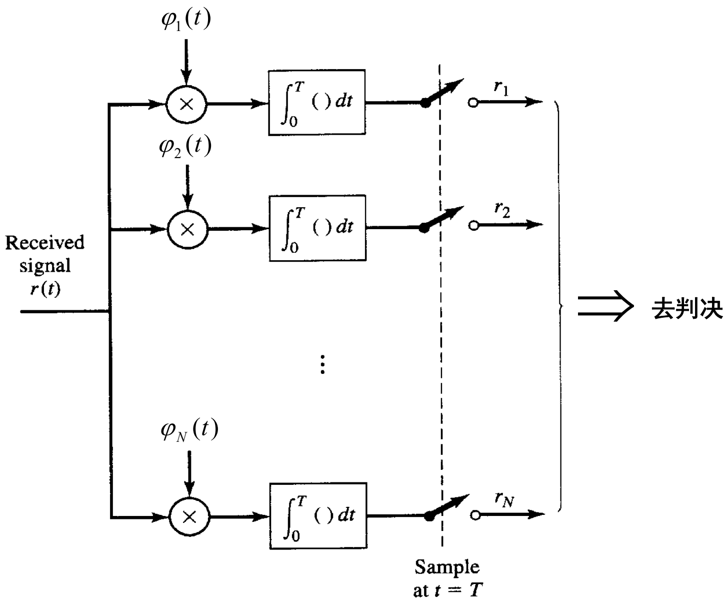
$r(t)$ 投影到N维信号空间，得到的矢量表示为 $\boldsymbol{r} = (r_1, r_2, \cdots, r_N)$

$$r_i = \int_0^T r(t)\varphi_i(t)dt = s_{ki} + n_i \qquad i = 1, 2, \cdots, N$$

r_i是均值为 s_{ki}，方差为$\frac{N_0}{2}$ 的独立高斯随机变量，所以在发送 $s_k(t)$ 条件下，接收到 $\boldsymbol{r} = (r_1, r_2, \cdots, r_N)$ 的条件概率密度为：

$$\begin{aligned} p(\boldsymbol{r} \mid \boldsymbol{s}_i) &= \frac{1}{(\pi N_0)^{N/2}} \exp\left\{-\sum_{i=1}^{N} (r_k - s_{ki})^2 / N_0\right\} \\ &= \frac{1}{(\pi N_0)^{N/2}} \exp\left\{-\|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{s}_i\|^2 / N_0\right\} \end{aligned}$$

其中 $\|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{s}_i\|$ 表示矢量 $(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{s}_i)$ 的长度。



基函数相关解调器

17/65

$\boldsymbol{r}=(r_1,r_2,\cdots,r_N)$是作出判决的充分统计量；也就是说作出正确判决的信息包含在矢量 $\boldsymbol{r}$ 中，与噪声分量 $\tilde{n}(t)$无关。$n(t)=\hat{n}(t)+\tilde{n}(t)$

$$E\left[\tilde{n}(t)\cdot r_i\right]=E\left[\tilde{n}(t)\cdot s_{ki}\right]+E\left[\tilde{n}(t)\cdot n_i\right]\ =E\left[\tilde{n}(t)\cdot n_i\right]$$

$$=E\left\{\left[n(t)-\sum_{j=1}^{N}n_j\varphi_j(t)\right]\cdot n_i\right\}$$

$$n_i=\int_0^T n(t)\varphi_i(t)dt$$

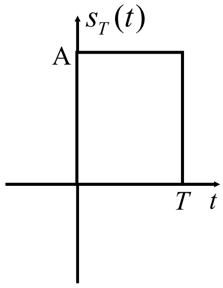
$$=\int_0^T E\left[n(t)\cdot n(\tau)\right]\varphi_i(\tau)d\tau-\sum_{j=1}^{N}E(n_j\cdot n_i)\varphi_j(t)$$

$$=\frac{N_0}{2}\varphi_i(t)-\frac{N_0}{2}\varphi_i(t)\ =0$$

所以$\tilde{n}(t)$和$\{r_i\}$是不相关的。对于高斯变量，不相关就意味着相互独立，所以$\tilde{n}(t)$和$\{r_i\}$独立的。从而$\{r_i\}$是一组充分统计量，给出的充分统计量的解调器是一组基函数相关器。

18/65

[例6.3.3] M电平PAM传输，其中基本脉冲形状 $s_T(t)$ 为矩形，如图所示，加性噪声是零均值，白高斯噪声。求基函数 $\varphi(t)$ 和基函数相关解调器输出。



[解] 矩形脉冲能量为

$$E_s = \int_0^T s_T^2(t)dt = A^2 T$$

因为PAM信号集合具有维数 $N = 1$

只有一个基函数 $\varphi(t)$，

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{A^2 T}} s_T(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T}} & 0 \le t \le T \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

基函数相关型解调器输出为，

$$r = \int_0^T r(t) \cdot \varphi(t)dt = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T r(t)dt$$

相关器变成了简单的积分器。 $\longrightarrow \boxed{\int_0^T r(t)\varphi(t)dt} \longrightarrow$

19/65

发送的第m电平基带脉冲可表示为，

$$s_m(t) = A_m s_T(t) = A_m \sqrt{A^2 T} \varphi(t) \triangleq s_m \varphi(t)$$

则
$$r = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T [s_m(t) + n(t)]dt$$
$$= \frac{1}{\sqrt{T}} \left[\int_0^T s_m \cdot \varphi(t)dt + \int_0^T n(t)dt \right] = s_m + n$$

其中
$$E[n] = 0$$

$$\sigma_n^2 = E\left\{ \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^T n(t)n(\tau)dtd\tau \right\} = \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^T E[n(t)n(\tau)]dtd\tau$$
$$= \frac{N_0}{2T} \int_0^T \int_0^T \delta(t-\tau)dtd\tau = \frac{N_0}{2}$$

所以
$$p(r \mid s_m) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\{-(r - s_m)^2 / N_0\}$$

20/65

四、基函数匹配滤波器解调

基函数相关型解调是利用一组N个相关器构造出充分统计量提供给后面的检测判决装置。也可以用一组滤波器来代替相关器，这组N个滤波器的脉冲响应为：

$$h_k(t)=\begin{cases}\varphi_k(T-t), & 0\le t\le T \\ 0 & \text{其它}\end{cases}, \quad k=1,2,\cdots,N$$

其中 $\varphi_k(t)$是信号空间的N个基函数。滤波器输出为

$$\begin{aligned} y_k(t) &= \int_0^t r(\tau)h_k(t-\tau)d\tau \\ &= \int_0^t r(\tau)\varphi_k(T-t+\tau)d\tau , \quad k=1,2,\cdots,N \end{aligned}$$

当 $t=T$ 时，这些匹配滤波器输出正好是N个基函数相关器的输出。

[定义] 当信号$s(t)$是$0\le t\le T$上定义的函数，则脉冲响应为：

$$h(t)=\begin{cases} s(T-t) & 0\le t\le T \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

的滤波器称为是信号$s(t)$的匹配滤波器。

匹配滤波器性质

[定理] 如果信号 $s(t)$受到AWGN干扰，则信号 $s(t)$ 通过与它相匹配的滤波器，可获得最大信噪比。

[证明] 设持续时间为T的信号 $s(t)$ 在信道上受到功率谱密度为 $\frac{N_0}{2}$ 的AWGN干扰，则接收到信号，

$$r(t)=s(t)+n(t), \quad 0\le t\le T$$

设接收滤波器的脉冲响应为 $h(t)$，传递函数为$H(f)$， $r(t)$通过滤波器后输出为，

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t r(\tau)h(t-\tau)d\tau \\ &= \int_0^t s(\tau)h(t-\tau)d\tau + \int_0^t n(\tau)h(t-\tau)d\tau \end{aligned}$$

当$t=T$， $$\begin{aligned} y(T) &= \int_0^T s(\tau)h(T-\tau)d\tau + \int_0^T n(\tau)h(T-\tau)d\tau \\ &= y_s(T)+y_n(T) \end{aligned}$$

在时刻 $t=T$ 输出信噪比（SNR）为

$$\left(\frac{S}{N}\right)_o = \frac{y_s^2(T)}{E\left[y_n^2(T)\right]}$$

$$E\left[y_n^2(T)\right] = \int_0^T\int_0^T E\left[n(\tau)n(t)\right]h(T-\tau)h(T-t)dtd\tau$$

$$= \frac{N_0}{2}\int_0^T\int_0^T \delta(t-\tau)h(T-\tau)h(T-t)dtd\tau$$

$$= \frac{N_0}{2}\int_0^T h^2(T-t)dt$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_o = \frac{\left|\int_0^T s(\tau)h(T-\tau)d\tau\right|^2}{\frac{N_0}{2}\int_0^T h^2(T-t)dt}$$

由Cauch-Schwartz不等式，如 $g_1(t)$、$g_2(t)$ 是平方可积函数则

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} g_1(t)g_2(t)dt\right|^2 \le \int_{-\infty}^{\infty} g_1^2(t)dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g_2^2(t)dt$$

等号在 $g_1(t)=c\cdot g_2(t)$ 时成立， c 为任意常数。

因此 $$\left(\frac{S}{N}\right)_o \le \frac{\int_0^T s^2(\tau)d\tau}{N_0/2} = \frac{2E_s}{N_0}$$

其中 E_s 为信号 $s(t)$ 的能量。上式的等号仅在

$$s(t)=c\cdot h(T-t), \quad 0\le t\le T$$

或 $$h(t)=c\cdot s(T-t), \quad 0\le t\le T$$

时成立时，也就是说滤波器 $h(t)$ 是信号 $s(t)$ 的匹配滤波器时，输出信噪比在时刻 $t=T$ 最大。 [证毕]

下面计算匹配滤波器的频率传递函数。

$$H(f)=\int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j2\pi ft}dt = \int_0^T c\cdot s(T-t)e^{-j2\pi ft}dt$$

$$= \left[\int_0^T c\cdot s(\tau)e^{j2\pi f\tau}d\tau\right]e^{-j2\pi fT} = c\cdot S^*(f)e^{-j2\pi fT}$$

$$\boxed{H(f)=c\cdot S^*(f)e^{-j2\pi fT}}$$

匹配滤波器的频率传递函数：$H(f)=c\cdot S^*(f)e^{-j2\pi fT}$

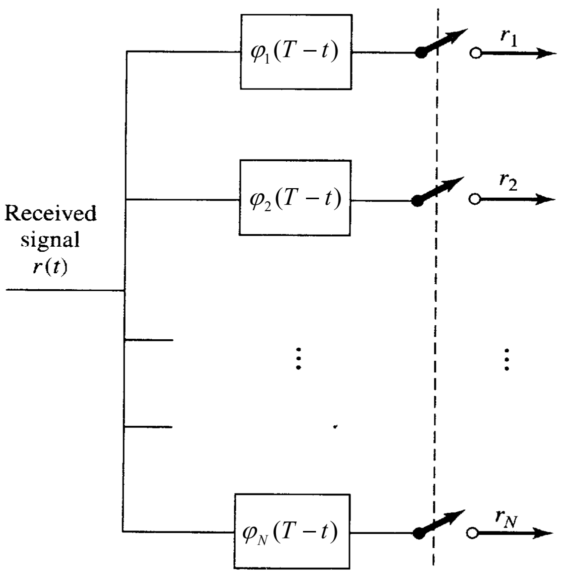
•从幅频特性来看，匹配滤波器和输入信号的幅频特性完全一样：在信号越强的频率点，滤波器的放大倍数也越大；在信号越弱的频率点，滤波器的放大倍数也越小（注意白噪声的功率谱是平坦的，在各个频率点都一样）。

•从相频特性上看，匹配滤波器的相频特性和输入信号正好完全相反。通过匹配滤波器后，信号的相位为0，正好能实现信号时域上的相干叠加。而噪声的相位是随机的，只能实现非相干叠加。这样在时域上保证了输出信噪比的最大。

匹配滤波器的信号输出：

$$\boxed{y_s(t)=\int_{-\infty}^{\infty}s(t-\tau)h(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}s(t-\tau)\cdot s(T-\tau)d\tau=R_s(t-T)}$$

在$t=T$时，$y_s(T)=R_s(0)$，正是相关器在$t=T$时的输出。

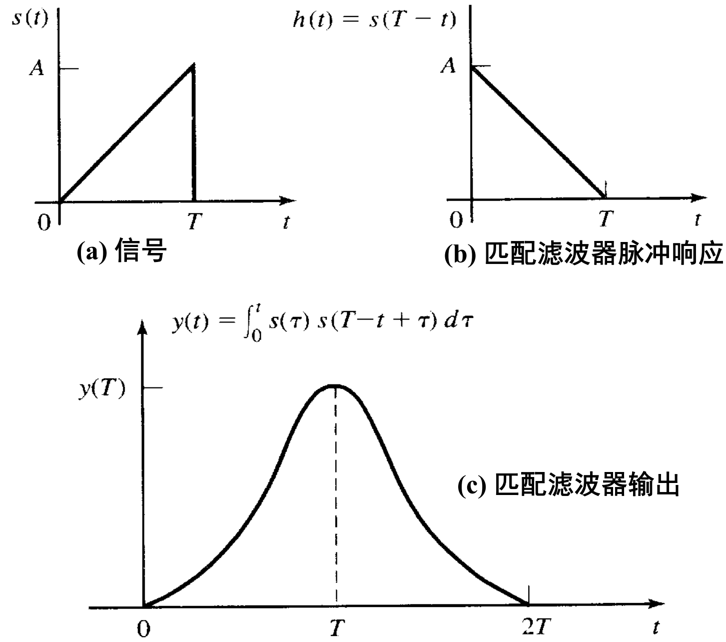


基函数匹配滤波解调器

$\Longrightarrow$ 去检测

我们可以把基函数相关解调器用一组匹配滤波器代替，得到基函数匹配滤波解调器。

[例]



(a) 信号

(b) 匹配滤波器脉冲响应

(c) 匹配滤波器输出

注意：匹配滤波器的输出仅当 $t = T$ 时才和相关器输出相同，在其它时刻二者输出是不一样的。例如对于正弦信号，图中的实线表示相应匹配滤波器输出，而虚线表示对应相关器输出。

[例] $s(t) = \begin{cases} \cos 2\pi f_0 t & t \in [0,T] \\ 0 & t \notin [0,T] \end{cases}$

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j2\pi ft} dt = \frac{1 - e^{-j2\pi(f - f_0)T}}{-j4\pi(f - f_0)} + \frac{1 - e^{-j2\pi(f + f_0)T}}{-j4\pi(f + f_0)}$$

匹配滤波器的频率响应：

$$H(f) = S^*(f) e^{-j2\pi fT}$$

$$= \frac{[e^{j2\pi(f - f_0)T} - 1] e^{-j2\pi fT}}{j4\pi(f - f_0)} + \frac{[e^{j2\pi(f + f_0)T} - 1] e^{-j2\pi fT}}{j4\pi(f + f_0)}$$

匹配滤波器的脉冲响应：

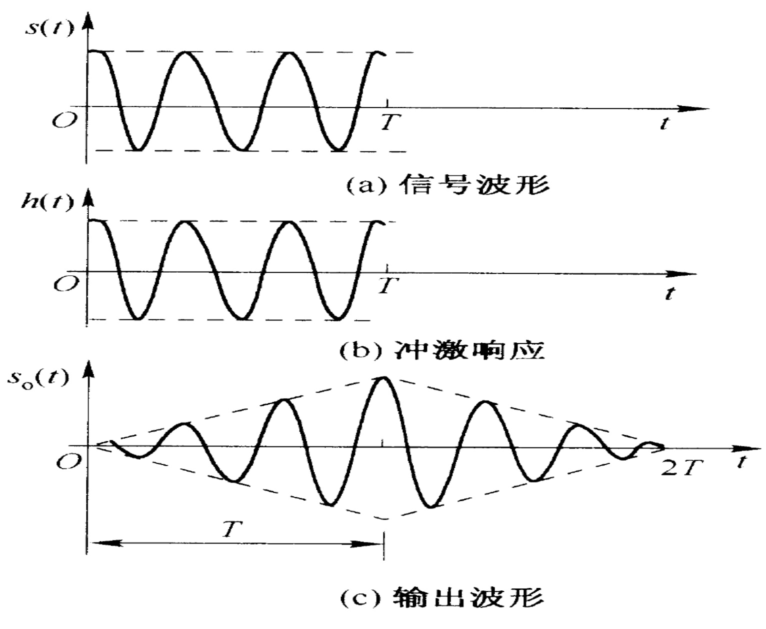
$$h(t)=s(T-t)=\cos 2\pi f_0(T-t) \qquad t\in[0,T]$$

假设 $f_0=N/T$

输出信号：$s_o(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}s(\tau)h(t-\tau)d\tau$

$$=\begin{cases}\frac{t}{2}\cos 2\pi f_0 t & 0\le t<T\\ \frac{2T-t}{2}\cos 2\pi f_0 t & T\le t<2T\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

29/65



30/65

[例6.3.4] 在二进制基带传输系统中，可能发送二种波形

$$s_1(t)=\begin{cases}A & 0\le t\le \frac{T}{2}\\ 0 & \text{其它}\end{cases} \qquad s_2(t)=\begin{cases}A & \frac{T}{2}\le t\le T\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

发送“0”　　　　发送“1”

求其基函数匹配滤波解调器。

[解] 构成二维正交基：

$$\varphi_1(t)=\sqrt{\frac{2}{TA^2}}s_1(t),\quad \varphi_2(t)=\sqrt{\frac{2}{TA^2}}s_2(t)$$

相应的匹配滤波器为，

$$h_1(t)=\varphi_1(T-t)=\begin{cases}\sqrt{\frac{2}{TA^2}}, & \frac{T}{2}\le t\le T\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$h_2(t)=\varphi_2(T-t)=\begin{cases}\sqrt{\frac{2}{TA^2}}, & 0\le t\le \frac{T}{2}\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

当$s_1(t)$发送时，匹配滤波器$h_1(t)$在$t=T$时输出信号值为，

$$y_{1s}(T)=\sqrt{\frac{A^2T}{2}}=\sqrt{E_s}$$

E_s为符号能量。而滤波器$h_2(t)$在$t=T$时输出信号值为，

$$y_{2s}(T)=0$$

匹配型解调器输出采样矢量值为，

$$\boldsymbol{r}=(r_1,r_2)=(\sqrt{E_s}+n_1,n_2)$$

其中n_1和n_2为噪声通过这二只匹配滤波器，在$t=T$时的采样值；

$$n_1=y_{1n}(T)=\int_0^T n(t)\varphi_1(t)dt$$

$$n_2=y_{2n}(T)=\int_0^T n(t)\varphi_2(t)dt$$

$$E[n_1]=E[n_2]=0,\sigma_{n_1}^2=\sigma_{n_2}^2=\frac{N_0}{2}$$

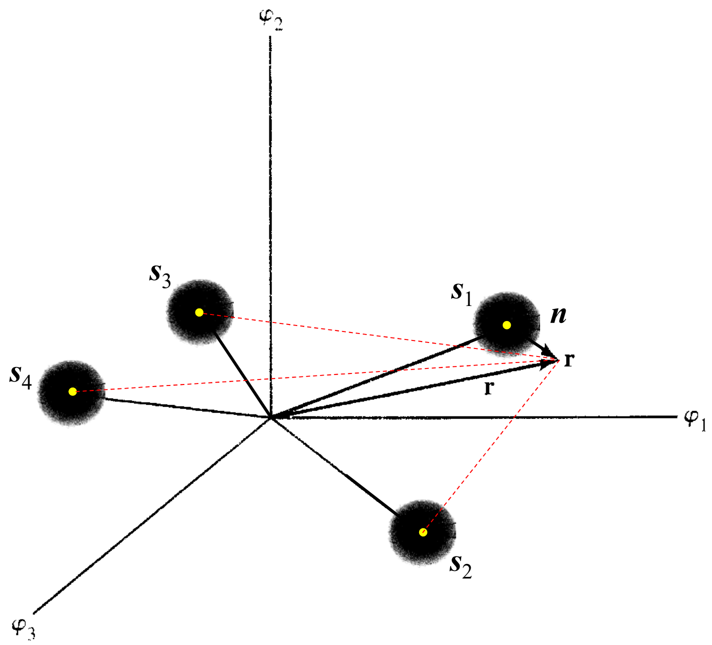
第一只匹配滤波的输出信噪比为，

$$\left(\frac{S}{N}\right)_o=\frac{y_{1s}^2(T)}{\sigma_{n1}^2}=\frac{2E_s}{N_0}$$

五、最佳检测判决器

对于AWGN上基带信号传输来说，无论是基函数相关解调，还是基函数匹配滤波解调，都产生一个判决矢量 $\boldsymbol{r}=(r_1,r_2,\cdots,r_N)$，接收信号中有关发送信号的全部有用信息包含在这个判决矢量中。

接收矢量是二项之和，一项是$\boldsymbol{s}_m$，即与发送信号波形有关的矢量，另一项是噪声矢量 $\boldsymbol{n}$，它是噪声在信号空间的投影。把 $\boldsymbol{s}_m$ 视做信号空间一点，$\boldsymbol{n}$ 是N维信号空间一个随机矢量。它的每个分量是均值为 0，方差为 $\frac{N_0}{2}$ 的独立高斯变量，它可以表示为矢量$\boldsymbol{s}_m$ 上叠加一个球对称分布的噪声，形成了信号空间中以 $\boldsymbol{s}_m$ 为中心的一个球状云团。



信号检测准则：

设 M 个信号为 $s_m(t),\ m=1,2,\cdots,M$，相应的先验概率为 $p(s_m)$。

如果我们没有收到 $r(t)$，则我们总是估计 $p(s_m)$ 最大的那个信号为最可能被发送。

如果我们收到 $r(t)$，应该选使后验概率 $p(\mathbf{s}_m\,|\,\boldsymbol{r})$ 最大的那个 $\mathbf{s}_m$ 为发送信号。这称为最大后验概率准则（MAP）。

$$p(\boldsymbol{s}_m\,|\,\boldsymbol{r})=\frac{p(\boldsymbol{r}\,|\,\mathbf{s}_m)\cdot p(\mathbf{s}_m)}{p(\boldsymbol{r})}\ ,\qquad p(\boldsymbol{r})=\sum_{m=1}^{M}p(\boldsymbol{r}\,|\,\mathbf{s}_m)\cdot p(\mathbf{s}_m)$$

最大后验概率准则（MAP）：

$$m_{MAP}=\arg\max_m\left\{p(\boldsymbol{s}_m\,|\,\boldsymbol{r})\right\}\Leftrightarrow\arg\max_m\left\{p(\boldsymbol{r}\,|\,\mathbf{s}_m)\cdot p(\mathbf{s}_m)\right\}$$

最大似然概率准则（ML）：

$$m_{ML}=\arg\max_m\left\{p(\boldsymbol{r}\,|\,\boldsymbol{s}_m)\right\}$$

当 M 个信号是先验等可能传送时，$p(\mathbf{s}_m)=1/M$，$m_{MAP}=m_{ML}$

由于对数函数的单调性，所以最大后验概率准则（MAP）也等价于：

$$\arg\max_m\left\{p(\boldsymbol{s}_m\,|\,\boldsymbol{r})\right\}\Leftrightarrow\arg\max_m\left\{\ln\left[p(\boldsymbol{s}_m\,|\,\boldsymbol{r})\right]\right\}$$

$$\Leftrightarrow\arg\max_m\left\{\ln p(\boldsymbol{s}_m)+\ln p(\boldsymbol{r}\,|\,\boldsymbol{s}_m)\right\}$$

由

$$p(\boldsymbol{r}\,|\,\boldsymbol{s}_m)=\frac{1}{(\pi N_0)^{N/2}}\exp\left\{-\sum_{i=1}^{N}(r_i-s_{mi})^2/N_0\right\}\qquad(6.3.21)$$

$$=\frac{1}{(\pi N_0)^{N/2}}\exp\left\{-\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s}_m\|^2/N_0\right\}$$

$$\ln p(\boldsymbol{r}\,|\,\mathbf{s}_m)=\frac{-N}{2}\ln(\pi N_0)-\frac{1}{N_0}\sum_{i=1}^{N}(r_i-s_{mi})^2$$

最大后验概率准则为：

$$\arg\max_m\left\{\ln p(\mathbf{s}_m)-\frac{N}{2}\ln(\pi N_0)-\frac{1}{N_0}\sum_{i=1}^{N}(r_i-s_{mi})^2\right\}$$

$$\Leftrightarrow \arg\max_m \left\{ \ln p(\mathbf{s}_m) - \frac{1}{N_0} \| \boldsymbol{r} - \mathbf{s}_m \|^2 \right\}$$

当M个信号是先验等可能传送时，$p(\mathbf{s}_m) = 1/M$，$m_{MAP} = m_{ML}$

最大似然概率准则（ML）：

$$m_{ML} = \arg\max_m \{ p(\boldsymbol{r} \mid \mathbf{s}_m) \}$$

$$\Leftrightarrow \arg\max_m \left\{ -\frac{1}{N_0} \| \boldsymbol{r} - \mathbf{s}_m \|^2 \right\}$$

若记 $D_m \triangleq \| \boldsymbol{r} - \mathbf{s}_m \|^2$

$$m_{ML} = \arg\min_m \{ D_m \}$$

最大似然概率准则（ML）等价于最小距离准则；

由于 $\frac{1}{N_0}\sum_{i=1}^{N}(r_i - s_{mi})^2 = \frac{1}{N_0}\sum_{i=1}^{N} r_i^2 + \frac{1}{N_0}\sum_{i=1}^{N} s_{mi}^2 - \frac{2}{N_0}\sum_{i=1}^{N} r_i s_{mi}$

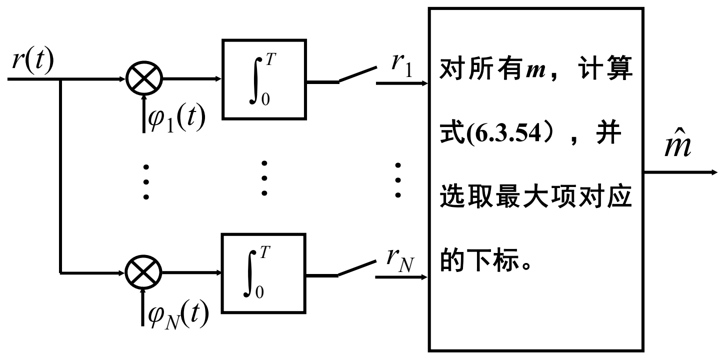
忽略与m无关项，得到最大后验概率准则等价于：

$$\arg\max_m \left\{ \ln p(\mathbf{s}_m) - \frac{1}{N_0}\sum_{i=1}^{N} s_{mi}^2 + \frac{2}{N_0}\sum_{i=1}^{N} r_i s_{mi} \right\}$$

$$= \arg\max_m \left\{ \ln p(\mathbf{s}_m) - \frac{E_m}{N_0} + \frac{2}{N_0}(\boldsymbol{r}, \mathbf{s}_m) \right\} \qquad \textbf{(6.3.54)}$$

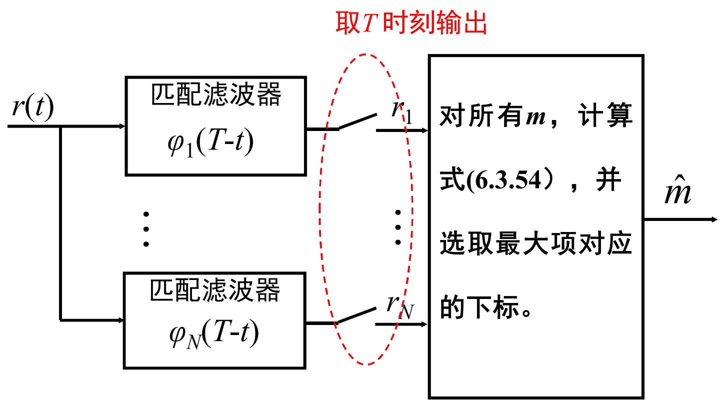
其中E_m**为信号**$\mathbf{s}_m$**的能量，**$(\boldsymbol{r}, \mathbf{s}_m)$**为**$\boldsymbol{r}$ **和** $\mathbf{s}_m$ **的内积。**

最大后验概率接收机是基函数相关器



39/65

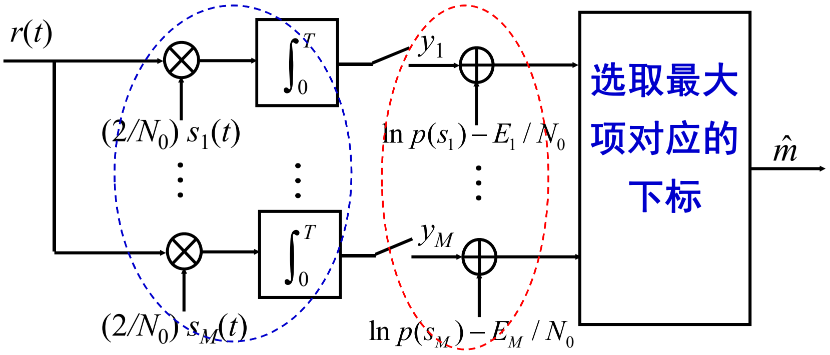
最大后验概率接收机是基函数匹配滤波器



40/65

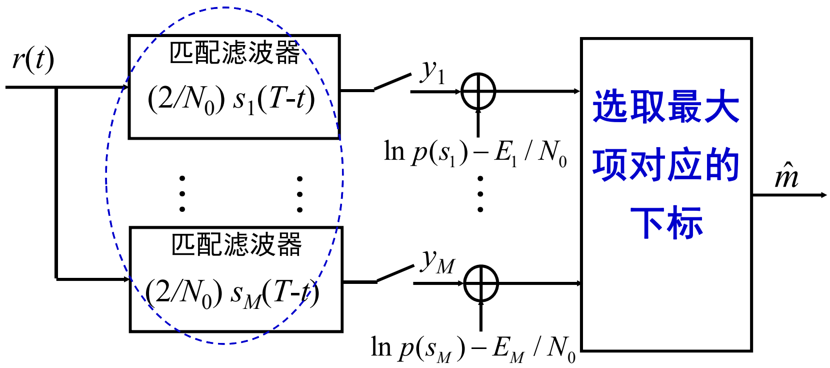
由于 $E_m = \int_0^T s_m^2(t)dt$ ，$(\mathbf{r}, \mathbf{s}_m) = \int_0^T r(t)s_m(t)dt$

MAP准则： $\arg\max\limits_m \left\{ \ln p(\mathbf{s}_m) - \frac{E_m}{N_0} + \frac{2}{N_0}\int_0^T r(t)s_m(t)dt \right\}$



MAP解释1： 最大后验概率接收机是（信号）相关器

MAP解释2： 最大后验概率接收机是（信号）匹配滤波器



注意：基函数相关接收机的支路数 N 不大于信号相关接收机的支路数 M。

[例6.3.5] 二进制基带信号的最佳接收

二个可能的信号为 $s_1(t),s_2(t),t\in[0,T]$；对应信号点为 $\mathbf{s}_1,\mathbf{s}_2$；它们能量分别为 E_1,E_2，先验概率为 $p,1-p$；加性白高斯噪声的双边功率谱密度为 $\dfrac{N_0}{2}$，求最佳的MAP检测器。

[解] 接收到信号为： $r(t)=\{s_1(t)或s_2(t)\}+n(t)$

信号空间表示为： $\boldsymbol{r}=\{\mathbf{s}_1或\mathbf{s}_2\}+\mathbf{n}$

最佳MAP接收机是
$$\begin{cases}p(\boldsymbol{r}\,|\,\mathbf{s}_1)\cdot p(\mathbf{s}_1)>p(\boldsymbol{r}\,|\,\mathbf{s}_2)\cdot p(\mathbf{s}_2) & s_1发送\\ p(\boldsymbol{r}\,|\,\mathbf{s}_1)\cdot p(\mathbf{s}_1)<p(\boldsymbol{r}\,|\,\mathbf{s}_2)\cdot p(\mathbf{s}_2), & s_2发送\end{cases}\quad (6.3.50)$$

$$\begin{cases}\dfrac{p(\boldsymbol{r}\,|\,\mathbf{s}_1)}{p(\boldsymbol{r}\,|\,\mathbf{s}_2)}>\beta & s_1发送\\ \dfrac{p(\boldsymbol{r}\,|\,\mathbf{s}_1)}{p(\boldsymbol{r}\,|\,\mathbf{s}_2)}<\beta, & s_2发送\end{cases}\quad 其中\ \beta=\frac{1-p}{p}$$

或者
$$\begin{cases}\ln p(\boldsymbol{r}\,|\,\mathbf{s}_1)-\ln p(\boldsymbol{r}\,|\,\mathbf{s}_2)>\ln\beta & s_1发送\\ \ln p(\boldsymbol{r}\,|\,\mathbf{s}_1)-\ln p(\boldsymbol{r}\,|\,\mathbf{s}_2)<\ln\beta, & s_2发送\end{cases}$$

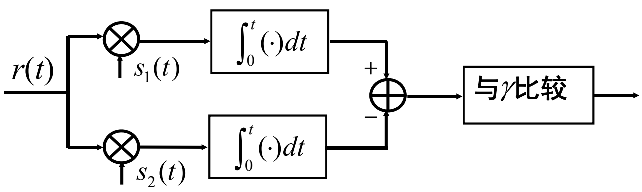
因为
$$p(\boldsymbol{r}\,|\,\boldsymbol{s}_i)=\frac{1}{(\pi N_0)^{N/2}}\exp\left\{-\sum_{i=1}^{N}(r_k-s_{ik})^2/N_0\right\}\quad (6.3.21)$$
$$=\frac{1}{(\pi N_0)^{N/2}}\exp\left\{-\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s}_i\|^2/N_0\right\}$$

所以
$$\ln p(\boldsymbol{r}\,|\,\mathbf{s}_1)-\ln p(\boldsymbol{r}\,|\,\mathbf{s}_2)=-\frac{1}{N_0}\|\boldsymbol{r}-\mathbf{s}_1\|^2+\frac{1}{N_0}\|\boldsymbol{r}-\mathbf{s}_2\|^2$$

由于
$$\|\boldsymbol{r}-\mathbf{s}_i\|^2=\|\boldsymbol{r}\|^2-2\boldsymbol{r}\cdot\mathbf{s}_i+\|\mathbf{s}_i\|^2=\|\boldsymbol{r}\|^2-2\boldsymbol{r}\cdot\mathbf{s}_i+E_i$$

MAP检测：
$$\begin{cases}\boldsymbol{r}\cdot\mathbf{s}_1-\boldsymbol{r}\cdot\mathbf{s}_2>(N_0\ln\beta+E_1-E_2)/2 & s_1发送\\ \boldsymbol{r}\cdot\mathbf{s}_1-\boldsymbol{r}\cdot\mathbf{s}_2<(N_0\ln\beta+E_1-E_2)/2 & s_2发送\end{cases}$$

$$\begin{cases}\int_0^T r(t)\cdot s_1(t)dt-\int_0^T r(t)\cdot s_2(t)dt>\gamma\\ \int_0^T r(t)\cdot s_1(t)dt-\int_0^T r(t)\cdot s_2(t)dt<\gamma\end{cases},\quad 其中\ \gamma\triangleq(N_0\ln\beta+E_1-E_2)/2$$



最大后验（MAP）检测：选 $\mathbf{s}_m$ 使 $p(\mathbf{s}_m)\cdot p(\mathbf{r}|\mathbf{s}_m)$最大；

最大似然（ML）检测：选 $\mathbf{s}_m$ 使 $p(\mathbf{r}|\mathbf{s}_m)$ 最大；

最佳性证明

当信号先验概率分布已知时，采用MAP准则可以使平均错误概率最小。

接收到矢量 $\boldsymbol{r}=(r_1,r_2,\cdots,r_N)$ 是N维信号空间中一个点，根据 $\boldsymbol{r}$做出发送信号是哪一个的判决，相当于把信号空间划分成M个区域 R_m，$m=1,2,\cdots,M$。若 $\boldsymbol{r}$ 落入 R_i，就判定发送的是信号 $s_i(t)$。如何划分使错误概率最小？设发送的是 $s_m(t)$，但接收到的矢量 $\boldsymbol{r}$ 落到 R_m 以外，判决就出错误。所以在发送 $s_m(t)$ 条件下的错误概率为：

$$P(e|s_m)=\int_{R_m^c} p(\boldsymbol{r}|\mathbf{s}_m)d\boldsymbol{r}$$

其中 R_m^c 为 R_m 的补空间。

平均错误概率为：
$$\begin{aligned}P(e)&=\sum_{m=1}^{M}p(\mathbf{s}_m)P(e|\mathbf{s}_m)\\&=\sum_{m=1}^{M}p(\mathbf{s}_m)\int_{R_m^c}p(\boldsymbol{r}|\mathbf{s}_m)d\boldsymbol{r}\\&=\sum_{m=1}^{M}p(\mathbf{s}_m)\left[1-\int_{R_m}p(\boldsymbol{r}|\mathbf{s}_m)d\boldsymbol{r}\right]\\&=1-\sum_{m=1}^{M}\int_{R_m}p(\mathbf{s}_m|\boldsymbol{r})\cdot p(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r}\end{aligned}$$

为了平均错误概率最小，划分应该使在 R_m 中的点 $\boldsymbol{r}$ 满足

$$p(\mathbf{s}_m|\boldsymbol{r})\cdot p(\boldsymbol{r})\geq p(\mathbf{s}_i|\boldsymbol{r})\cdot p(\boldsymbol{r})\,,\quad i\neq m$$

即
$$p(\mathbf{s}_m|\boldsymbol{r})\geq p(\mathbf{s}_i|\boldsymbol{r})\,,\quad i\neq m$$

这就是最大后验概率准则（MAP）。

同样当M个信号先验等概分布时，采用ML准则可以使平均错误概率最小。

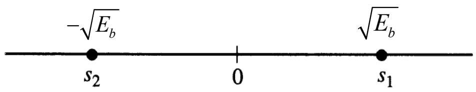
遵循 （6.3.50）

六、AWGN上信号检测的错误（误符号）概率计算

[例6.3.6] 二进制基带传输。二个等概、等能（E_b）的波形是

$s_1(t)=g_T(t)$ ， $s_2(t)=-g_T(t)$ ，

$g_T(t)$ 是 $[0,T_b]$ 上任意脉冲，在其外为零。加性噪声 $n(t)$ 是零均值，方差为 $\frac{N_0}{2}$ 的高斯随机变量。



$$\varphi(t)=g_T(t)/\sqrt{E_b}$$

$$r=\int_0^{T_b} r(t)\varphi(t)dt$$

如果信号 $s_m(t)$ 被传输，则从相关解调器（或匹配滤波解调器）获得的一维接收矢量为： $r=s_m+n=\pm\sqrt{E_b}+n$

其中 n 是零均值，方差为 $\frac{N_0}{2}$ 的高斯随机变量。由于发送信号是等概、等能量的，所以MAP准测和ML准则等价，所确定的门限是 $\gamma=0$。

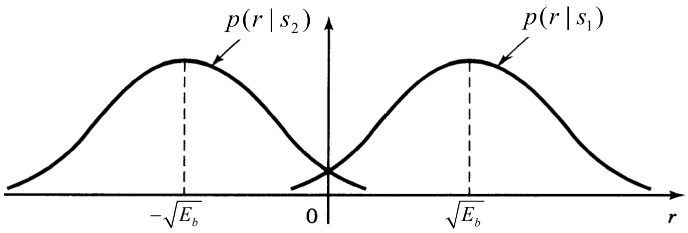
内积

当 $r(s_1-s_2)>0$, 则选 s_1 $\Leftrightarrow$ 当 $r>0$, 则选 s_1

当 $r(s_1-s_2)<0$, 则选 s_2 当 $r<0$, 则选 s_2

$$p(r\,|\,s_1)=\frac{1}{\sqrt{\pi N_0}}\exp\left\{-\frac{(r-\sqrt{E_b})^2}{N_0}\right\}$$

$$p(r\,|\,s_2)=\frac{1}{\sqrt{\pi N_0}}\exp\left\{-\frac{(r+\sqrt{E_b})^2}{N_0}\right\}$$



$$P(e\,|\,s_1)=\int_{-\infty}^{0}p(r\,|\,s_1)dr=\frac{1}{\sqrt{\pi N_0}}\int_{-\infty}^{0}\exp\left\{-\frac{(r-\sqrt{E_b})^2}{N_0}\right\}dr$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\sqrt{2E_b/N_0}}^{\infty}e^{-x^2/2}dx=Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

其中 $Q(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^{\infty}e^{-x^2/2}dx$

由于对称性，显然 $P(e|s_2)=\int_0^{\infty} p(r|s_2)dr = P(e|s_1)$

所以平均错误概率 $P_b = p(s_1)P(e|s_1)+p(s_2)P(e|s_2)$

$$=Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

在信号空间中，s_1和s_2的距离 $d_{12}=2\sqrt{E_b}$，所以

$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{d_{12}^2}{2N_0}}\right)$$

说明差错概率与信号点之间的距离有关。在噪声功率一定的情况下，距离越大则错误概率越小，但要求信号能量也越大。

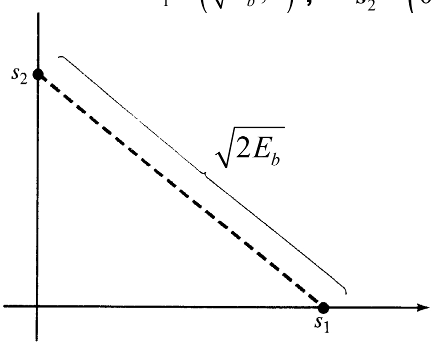
[例6.3.7] 考虑例6.3.4中的二元等概、等能量正交信号：

$$s_1(t)=\begin{cases} A, & 0\le t\le \frac{T}{2} \\ 0 & 其它 \end{cases} \qquad s_2(t)=\begin{cases} A, & \frac{T}{2}\le t\le T \\ 0 & 其它 \end{cases}$$

发送“0”　　　　发送“1”

信号空间中对应的信号点为：

$$\mathbf{s}_1=\left(\sqrt{E_b},0\right),\quad \mathbf{s}_2=\left(0,\sqrt{E_b}\right) \qquad 其中\ E_b=\frac{A^2T}{2}$$



假定发送信号$s_1(t)$，则在解调器输出的接收矢量为：

$$\mathbf{r}=\left[\sqrt{E_b}+n_1, n_2\right]$$

$$E[n_1]=E[n_2]=0, \sigma_{n_1}^2=\sigma_{n_2}^2=\frac{N_0}{2}$$

在先验等概情况下，错误概率就是发生$D(\mathbf{r},\mathbf{s}_1)>D(\mathbf{r},\mathbf{s}_2)$的概率，即：

$$P(e\,|\,\mathbf{s}_1)=P\{D(\mathbf{r},\mathbf{s}_1)>D(\mathbf{r},\mathbf{s}_2)\,|\,\mathbf{s}_1\}$$

$$D(\mathbf{r},\mathbf{s}_1)>D(\mathbf{r},\mathbf{s}_2) \Leftrightarrow \|\mathbf{r}\|^2-2\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}_1+\|\mathbf{s}_1\|^2>\|\mathbf{r}\|^2-2\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}_2+\|\mathbf{s}_2\|^2$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{r}\cdot\mathbf{s}_1<\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}_2 \Leftrightarrow E_b+n_1\sqrt{E_b}<n_2\sqrt{E_b}$$

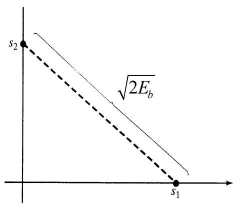
所以 $$P(e\,|\,\mathbf{s}_1)=P\{n_2-n_1>\sqrt{E_b}\}$$

因为(n_2-n_1)是均值为0，方差为 N_0的高斯变量，所以

$$P\{n_2-n_1>\sqrt{E_b}\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi N_0}}\int_{\sqrt{E_b}}^{\infty}e^{-x^2/2N_0}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\sqrt{E_b/N_0}}^{\infty}e^{-x^2/2}dx$$

$$=Q\left[\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right]=Q\left[\sqrt{\frac{d_{12}^2}{2N_0}}\right]$$



对二进制正交信号来说，误码率与对映信号[例6.3.4]一样, 但现在二个信号点之间距离是对映信号的$\frac{1}{\sqrt{2}}$，所以如果要达到与对映信号相同误码率，则信号能量要增加一倍。

[例6.3.8] 一般等能量、二进制基带信号在AWGN信道上传输

二个等能量信号$s_1(t)$和 $s_2(t)$，先验概率为 p_1, p_2，$p_1+p_2=1$ 。

在二维信号空间中对应的信号点为：

$$\mathbf{s}_1=(s_{11},s_{12})\ ,\quad \mathbf{s}_2=(s_{21},s_{22})\qquad \|\mathbf{s}_1\|^2=\|\mathbf{s}_2\|^2=E_b$$

设发送信号 $s_1(t)$，则解调器输出接收矢量为：

$$\mathbf{r}=[s_{11}+n_1, s_{12}+n_2]$$

由MAP准则，差错概率是事件 由例6.3.5中式（6.3.62）

$$P(e\,|\,s_1)=P\left\{\|\mathbf{r}-\mathbf{s}_2\|^2-\|\mathbf{r}-\mathbf{s}_1\|^2<N_0\ln\frac{p_2}{p_1}\right\}$$

6.3.7
&
6.3.6
一般情况

$$\|\mathbf{r}-\mathbf{s}_2\|^2-\|\mathbf{r}-\mathbf{s}_1\|^2=2[\mathbf{r}\cdot(\mathbf{s}_1-\mathbf{s}_2)]=2\left\{\mathbf{n}\cdot(\mathbf{s}_1-\mathbf{s}_2)+\frac{1}{2}\|\mathbf{s}_1-\mathbf{s}_2\|^2\right\}$$

条件差错概率 $P(e|\mathbf{s}_1)=P\left\{\mathbf{n}\cdot(\mathbf{s}_1-\mathbf{s}_2)<\frac{N_0}{2}\ln\frac{p_2}{p_1}-\frac{1}{2}\|\mathbf{s}_1-\mathbf{s}_2\|^2\right\}$

记 $\xi\triangleq\mathbf{n}\cdot(\mathbf{s}_1-\mathbf{s}_2)=n_1(s_{11}-s_{21})+n_2(s_{12}-s_{22})$

ξ 是高斯变量， $E(\xi)=0$

$$D(\xi)=\frac{N_0}{2}\left[(s_{11}-s_{21})^2+(s_{12}-s_{22})^2\right]=\frac{N_0}{2}\|\mathbf{s}_1-\mathbf{s}_2\|^2\triangleq\sigma_\xi^2$$

所以 $P(e|\mathbf{s}_1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi}\int_{-\infty}^{a}\exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma_\xi^2}\right\}dx$

$$a=\frac{N_0}{2}\ln\frac{p_2}{p_1}-\frac{1}{2}\|\mathbf{s}_1-\mathbf{s}_2\|^2$$

同样 $P(e|\mathbf{s}_2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi}\int_{a'}^{\infty}\exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma_\xi^2}\right\}dx$

$$a'=\frac{N_0}{2}\ln\frac{p_2}{p_1}+\frac{1}{2}\|\mathbf{s}_1-\mathbf{s}_2\|^2$$

最后经整理，平均错误概率为：

$$P(e)=p_1P(e|\mathbf{s}_1)+p_2P(e|\mathbf{s}_2)$$

$$=p_1\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_b^{\infty}\exp\left[-\frac{z^2}{2}\right]dz\right\}+p_2\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{b'}^{\infty}\exp\left[-\frac{z^2}{2}\right]dz\right\}$$

$$b=-\frac{a}{\sigma_\xi}=\sqrt{\frac{1}{2N_0}\|\mathbf{s}_1-\mathbf{s}_2\|^2}-\frac{\ln\frac{p_1}{p_2}}{\sqrt{\frac{2}{N_0}\|\mathbf{s}_1-\mathbf{s}_2\|^2}}$$

$$b'=\sqrt{\frac{1}{2N_0}\|\mathbf{s}_1-\mathbf{s}_2\|^2}+\frac{\ln\frac{p_1}{p_2}}{\sqrt{\frac{2}{N_0}\|\mathbf{s}_1-\mathbf{s}_2\|^2}}$$

当 $p_1=p_2$ 时，差错概率仅和 $\sqrt{\frac{1}{2N_0}\|\mathbf{s}_1-\mathbf{s}_2\|^2}$ 有关，这时

$$P(e)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_A^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = Q(A)$$

$$A=\sqrt{\frac{1}{2N_0}\|\mathbf{s}_1-\mathbf{s}_2\|^2}$$

因为 $\|\mathbf{s}_1-\mathbf{s}_2\|^2=\int_0^T[s_1(t)-s_2(t)]^2dt=2E_b-2\int_0^T s_1(t)s_2(t)dt$

定义 $\rho=\frac{\int_0^T s_1(t)s_2(t)dt}{E_b}$， $|\rho|\le 1$

则 $A=\sqrt{\frac{E_b(1-\rho)}{N_0}}$

当 $\rho=-1$（即对映信号）， $A=\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}$ 为最大；---例6.3.6

当 $\rho=0$ 时，二个信号正交，这时 $A=\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}$。----例6.3.7

55/65

[例6.3.9] M进制PAM的误符号概率计算

$$\boxed{\begin{aligned}\varphi(t)&=g_T(t)/\sqrt{E_g}\\ r&=\int_0^{T_b}r(t)\varphi(t)dt\end{aligned}}$$

M进制PAM的信号形式为，

$s_m(t)=A_m\cdot g_T(t)$， $m=1,2,\cdots,M$

一维信号空间中M个信号点为，

$s_m=A_m\cdot\sqrt{E_g}$， $A_m=(2m-1-M)$， $m=1,2,\cdots,M$

其中 E_g 为 $g_T(t)$ 的能量。二个相邻信号点之间的距离为 $2\sqrt{E_g}$ 。

设信号的先验概率是相等的，则平均信号能量为，

$$E_{av}=\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}E_m=\frac{E_g}{M}\sum_{m=1}^{M}(2m-1-M)^2$$

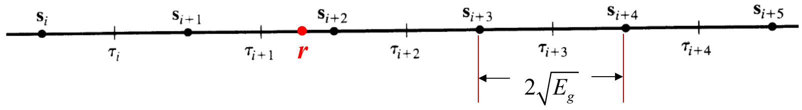
$$=\frac{E_g}{M}\cdot\frac{M(M^2-1)}{3}=\left(\frac{M^2-1}{3}\right)E_g$$

平均比特能量： $E_{bav}=E_{av}/\log_2 M$

平均功率为： $P_{av}=\frac{E_{av}}{T}=\frac{M^2-1}{3}\cdot\frac{E_g}{T}$

56/65

对于等概先验分布来说MAP和ML相同，这时最佳判决准则是按最小距离原则，即接收信号离哪个信号点最近就判定为发送信号，所以门限点的设置如图；



设发送的是第 m 电平信号，于是解调器输出是：

$$r = s_m + n = \sqrt{E_g} \cdot A_m + n$$

其中 n 是零均值，方差为 $\sigma_n^2 = \dfrac{N_0}{2}$ 的高斯噪声。

当 $m \neq 1$ 和 M 时，判决错误概率等于 $|r - s_m| > \sqrt{E_g}$ 的概率。所以

$$P(e|s_m) = P\left\{|r - s_m| > \sqrt{E_g}\right\}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi N_0}} \int_{\sqrt{E_g}}^{\infty} \exp\left\{-\frac{x^2}{N_0}\right\} dx \quad = 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_g}{N_0}}\right)$$

57/65

当 $m = 1$ 和 M 时，判决错误概率为，

$$P(e|s_1) = P\left\{r - s_1 > \sqrt{E_g}\right\}$$

$$P(e|s_M) = P\left\{r - s_M < -\sqrt{E_g}\right\}$$

由于 $\quad P(e|s_1) + P(e|s_M) = 2Q\left(\sqrt{\dfrac{2E_g}{N_0}}\right)$

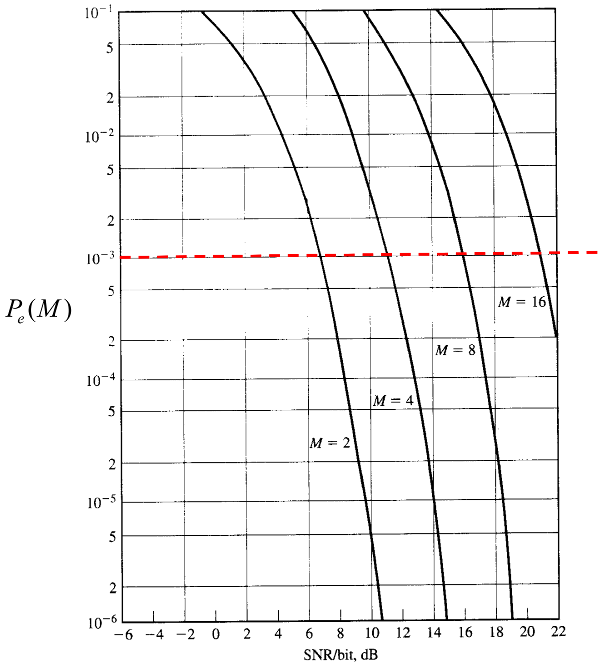
所以平均错误概率为

$$P_M(e) = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\frac{2E_g}{N_0}}\right)$$

由于 $\quad E_g = \dfrac{3}{M^2 - 1} E_{av}$

所以 $\quad P_M(e) = \dfrac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\dfrac{6E_{av}}{(M^2-1)N_0}}\right)$

58/65



[例6.3.10] M进制正交信号的错误概率

对于M个等概、等能量（E_s）的正交信号 $s_m(t), m=1,2,\cdots M$，它们在信号空间中表示为：

第m位

$$\mathbf{s}_m=(0,0,\cdots,\sqrt{E_s},0,\cdots,0)$$

最佳检测器是选择与接收到矢量 $\mathbf{r}$内积最大的信号矢量 $\mathbf{s}_m$为发送信号矢量；设$\mathbf{s}_1$为发送信号则解调器输出矢量为：

$$\mathbf{r}=(\sqrt{E_s}+n_1,n_2,\cdots,n_M)$$

$n_1,n_2,\cdots,n_M$为零均值，方差为$\dfrac{N_0}{2}$的独立高斯变量，

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}_1=\sqrt{E_s}(\sqrt{E_s}+n_1)$$

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}_m=n_m\sqrt{E_s} \qquad m\neq 1$$

所有相关器输出上除以$\sqrt{E_s}$，不会影响错误概率，

于是第一只相关器输出的概率密度为：

$$p_1(r_1)=\frac{1}{\sqrt{\pi N_0}}\exp\left\{-\frac{(r_1-\sqrt{E_s})^2}{N_0}\right\}$$

其它 $(M-1)$ 只相关器输出的概率密度为：

$$p_m(n_m)=\frac{1}{\sqrt{\pi N_0}}\exp\left\{-\frac{n_m^2}{N_0}\right\},\quad m=2,3,\cdots,M$$

所以正确接收概率为 —其他接收机噪声小于 r_1

$$P_c(M)=\int_{-\infty}^{\infty}p\left\{n_2<r_1,n_3<r_1,\cdots,n_M<r_1\mid r_1)\right\}p_1(r_1)dr_1$$

因为 $\{n_k\}$ 是独立的

$$p\left\{n_2<r_1,n_3<r_1,\cdots,n_M<r_1\mid r_1\right\}=\prod_{m=2}^{M}p\left\{n_m<r_1\mid r_1\right\}$$

由于 $$p\left\{n_m<r_1\mid r_1\right\}=\int_{-\infty}^{r_1}p_m(x_m)dx_m$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\sqrt{2r_1^2/N_0}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}dx=1-Q\left(\sqrt{\frac{2r_1^2}{N_0}}\right)$$

所以 $$P_c(M)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[1-Q\left(\sqrt{\frac{2r_1^2}{N_0}}\right)\right]^{M-1}p_1(r_1)dr_1$$

$$P_e(M)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{1-[1-Q(x)]^{M-1}\right\}\exp\left[-\frac{(x-\sqrt{2E_s/N_0})^2}{2}\right]dx$$

比较不同数字调制方式的性能，采用误比特率与比特信噪比。

对于 $M=2^k$ 个等可能的正交信号，比特能量与符号能量关系为，$E_s=kE_b$。下面推导误比特率与误符号率的关系：

对正交信号来说，任何一个信号，比如 $\mathbf{s}_1$，它错成其它 $(M\text{-}1)$ 个信号是等可能的，所以每种错误形式的概率为，

$$\frac{P_M}{M-1}=\frac{P_M}{2^k-1}$$

在 k 个比特中有 n 个比特错误的错误形式总共有 C_k^n 种，所以出现 n 个比特错误的概率为 $C_k^n\cdot P_M/(2^k-1)$，符号错误引起的平均错误比特数为：

$$\overline{n}=\sum_{n=1}^{k}nC_k^n\frac{P_M}{2^k-1}=k\frac{2^{k-1}}{2^k-1}P_M$$

误比特率为： $P_b=\dfrac{\overline{n}}{k}\approx\dfrac{2^{k-1}}{2^k}P_M=\dfrac{1}{2}P_M$， $k\gg1$

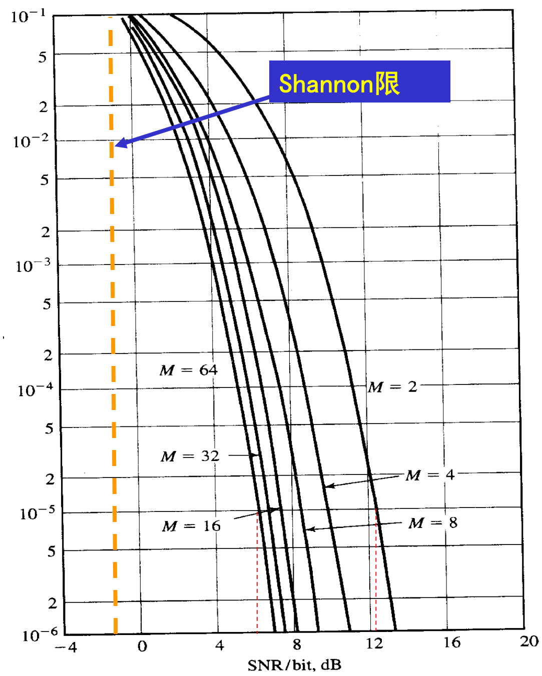


图6.3.20给出了M进制正交调制的比特错误概率与比特信噪比的关系。

当 $M=2$ 时， $P_b=10^{-5}$ 要求比特信噪比略大于12dB，而对于$M=64$，在同样误比特率下仅要求比特信噪比等于6dB左右。

可以证明，当 $M = 2^k \to \infty$ 时，误比特率

$$P_b < 2e^{-k(\sqrt{E_b/N_0} - \sqrt{\ln 2})^2}$$

所以当 $k \to \infty$ 时，只要 $E_b / N_0 > \ln 2 = 0.693$ **(-1.6dB)**，

则 $P_b \to 0$。

无限带宽条件下传输一个比特所要求的最小信噪比

习 题

- 6-10
- 6-13
- 6-14
- 6-15
- 6-18
- 6-20
- 6-22