

# Systèmes asservis linéaires continus

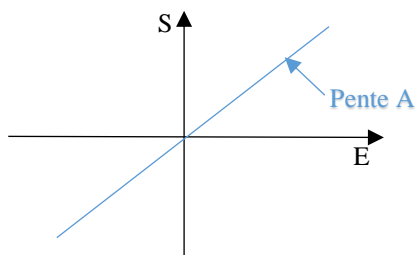
## I. Introduction - Notion de système asservi

### 1.1 Définitions

**Signaux continus** : à prendre au sens mathématique du terme, ce sont des signaux sans discontinuité. (Ce n'est pas le même sens qu'en électronique où un signal continu est un signal constant).

**Système linéaire** : peut être décrit par des équations linéaires (équations linéaires différentielles), ou encore qui obéit au principe de superposition : la réponse du système est la somme des contributions de chacune de ses entrées comme si elle était seule (ou encore la réponse à une combinaison linéaire d'entrée est égale à la combinaison linéaire des réponses : Si  $e_1(t)$  donne une réponse  $s_1(t)$  et si  $e_2(t)$  donne une réponse  $s_2(t)$  alors la réponse à  $\alpha e_1(t) + \beta e_2(t)$  est égale à  $\alpha s_1(t) + \beta s_2(t)$ )

La caractéristique **statique** d'un système linéaire est une droite (on applique une entrée constante  $E$  et on mesure la sortie  $S$  en régime permanent c'est-à-dire lorsqu'elle devient constante).



Caractéristique statique

La pente  $A$  est le taux de variation de la droite qui est **constant** :  $A = \frac{\Delta S}{\Delta E}$ .

Si la caractéristique statique passe par 0, on peut calculer  $A$  avec un seul point  $A = \frac{S}{E}$ .

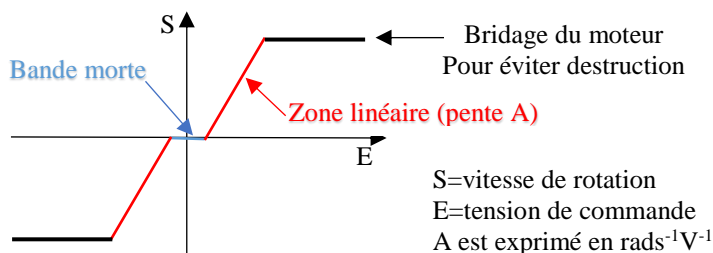
Si elle ne passe par 0, il nous faut 2 points :

$$A = \frac{S_2 - S_1}{E_2 - E_1} = \frac{\Delta S}{\Delta E}$$

$A$  = **amplification statique** appelé (de manière impropre) **Gain statique**

**Unités de  $A$**  =  $\frac{\text{unités de la sortie}}{\text{unités de l'entrée}}$

En pratique, la plage de linéarité est toujours limitée. Par exemple, sur la caractéristique statique d'un moteur à courant continu (figure ci-dessous) on distingue 3 zones : une bande morte (le couple moteur n'est pas suffisant pour vaincre les frottements), une zone linéaire (le comportement du système est linéaire), une zone de saturation où on limite la vitesse de rotation du moteur pour éviter sa destruction.

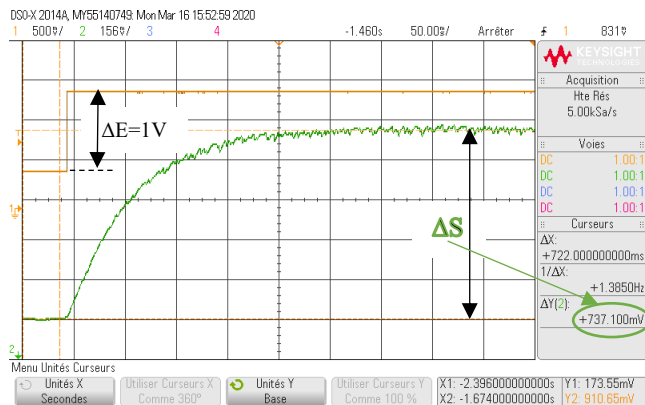


Caractéristique statique d'un moteur à courant continu

Ici pour mesurer l'amplification statique, il faut obligatoirement utiliser deux points dans la zone linéaire :

$$A = \frac{S_2 - S_1}{E_2 - E_1} = \frac{\Delta S}{\Delta E}$$

$S$ =vitesse de rotation  
 $E$ =tension de commande  
 $A$  est exprimé en  $\text{rads}^{-1}\text{V}^{-1}$



Pour mesurer l'amplification statique, on soumet le système à une entrée échelon (en orange) de valeur initiale  $E_1$  et de valeur finale  $E_2$ .  **$E_1$  et  $E_2$  doivent être impérativement dans la zone linéaire.**

En pratique, l'entrée sera un signal carré de fréquence adaptée de manière à ce que le système ait le temps d'arriver en régime permanent sur une demi-période (on doit observer 'le plat' sur la réponse). On mesure la variation de la sortie en régime permanent comme sur la figure ci-contre.

$$A = \frac{\Delta S}{\Delta E}$$

Sur cet exemple,  $A = \frac{0,737}{1} = 0,737$

Sur cet exemple, l'amplification statique est sans unité car la sortie observée est la sortie mesurée en volts (sortie du capteur).

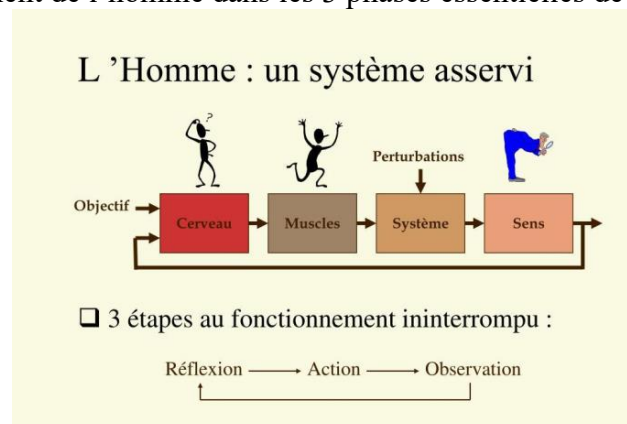
**La théorie développée dans ce cours n'est valable que pour les systèmes linéaires donc uniquement lorsque le système travaille dans la zone linéaire.**

Les systèmes non linéaires sont plus difficiles à étudier que les systèmes linéaires. Néanmoins, en linéarisant (quand c'est possible) un système non linéaire autour d'un point d'équilibre ou d'une trajectoire, on obtient un système linéaire qui représente correctement le système non linéaire au voisinage de ce point d'équilibre ou de cette trajectoire.

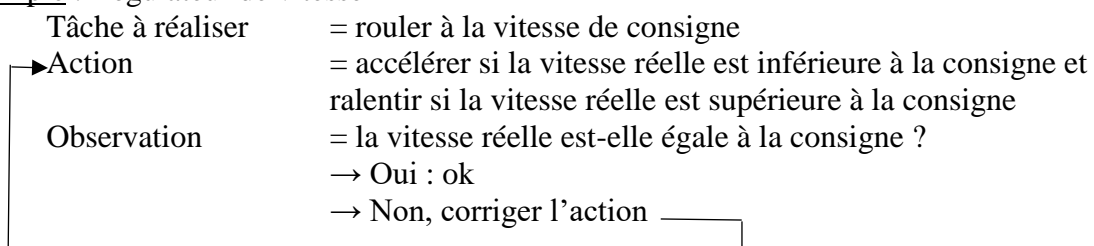
### Système asservi (asservissement) :

Un système asservi est un système bouclé, c'est-à-dire possédant une rétroaction de la sortie sur l'entrée.

Il copie le comportement de l'homme dans les 3 phases essentielles de son travail.



### Exemple : Régulateur de vitesse



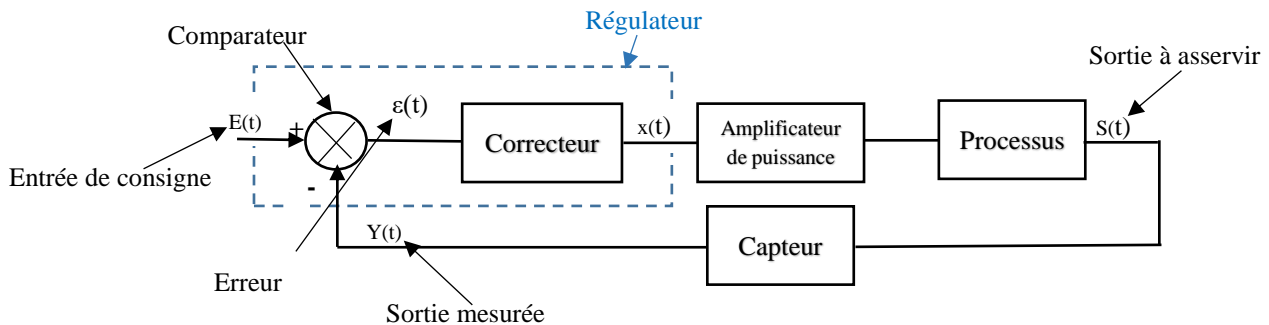
Les conditions de circulation (route qui monte ou qui descend, vent fort...) ont tendance à modifier la vitesse du véhicule. Elles constituent une perturbation. Le rôle de l'asservissement est d'assurer que la vitesse est celle souhaitée malgré les perturbations.

### ***Pourquoi un système asservi ?***

En boucle ouverte, la sortie n'est pas observée, donc on ne sait pas si elle correspond à ce que l'on souhaite.

En boucle fermée, on compare à tout moment la consigne et la sortie. Le signal issu du comparateur, appelé signal d'erreur est donc la différence entre la sortie mesurée et la consigne. Un des buts d'un asservissement est de minimiser, voire d'annuler cet écart.

### **1.2. Organisation fonctionnelle**



- **Régulateur** : élabore un signal de commande  $x(t)$  à partir de l'écart  $\varepsilon$  entre l'entrée de consigne et la mesure. C'est l'organe intelligent.

- **Amplificateur de puissance** : maîtrise la puissance à fournir au processus à partir du signal issu du régulateur. C'est le 'muscle' du système.

- **Capteur** : contrôle la grandeur à asservir et en rend compte au régulateur. C'est lui qui traduit en volts l'information à traiter par le régulateur qui, lui, est fait d'électronique (et donc qui ne sait traiter qu'une information en volts ou éventuellement en ampères).

Le capteur doit donner une image fidèle de l'information. Sa sensibilité impose les limites de la précision de l'asservissement.

### **1.3. Propriétés et performances d'un asservissement**

Le cahier des charges de tout système bouclé s'énonce en trois points : stabilité, précision, dynamique.

#### **Stabilité**

Pour une consigne constante, la sortie doit tendre vers une constante.

#### **Dynamique du système**

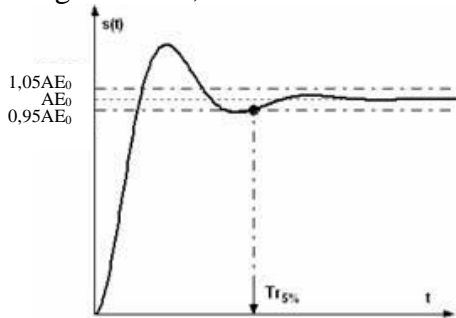
C'est son comportement en régime transitoire (forme de réponse, rapidité, dépassements).

La **rapidité** peut se mesurer par le temps de réponse à 5% ou par le temps de montée.

Temps de réponse à 5% : temps mis par la réponse pour atteindre sa valeur de régime permanent à plus ou moins 5% et à y rester.

Temps de montée : temps mis par la réponse pour passer de 10 à 90% de sa valeur de régime permanent.

En général, la rapidité d'un système se mesure par son temps de réponse à 5%, plus significative, car elle donne une idée précise du temps mis par le processus pour se stabiliser.



Sur cette figure, la réponse est pseudo-périodique amortie. La caractéristique du système est une droite passant par 0 et son gain statique est appelé A. L'entrée est un échelon d'amplitude  $E_0$ .

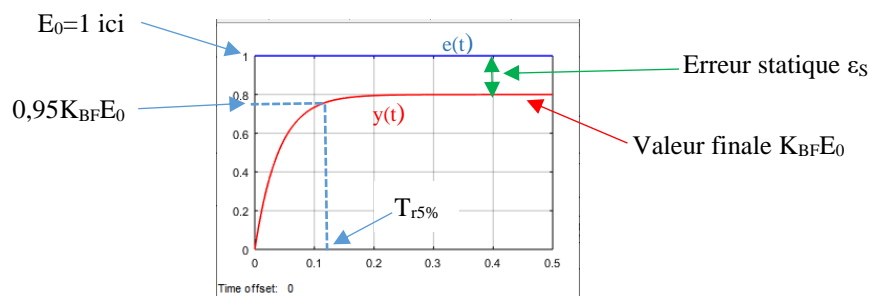
La valeur finale est donc  $AE_0$ . On cherche graphiquement au bout de combien de temps le signal de sortie ne sort plus de l'intervalle de 5% autour de sa valeur finale.

### Précision

Un système est précis si la sortie en régime permanent est proche de la valeur de consigne. La précision se mesure, en général, pour une entrée échelon. On parle alors d'erreur statique, notée  $\varepsilon_s$ .

Erreur statique = écart entre la valeur finale de la sortie mesurée et la consigne. La consigne étant constante (échelon). Cette définition n'est valable que si le système est stable !

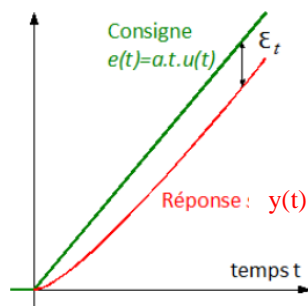
$$\varepsilon_s = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) \text{ pour } e(t) = E_0 \mathcal{U}(t)$$



La précision peut aussi se mesurer pour une entrée rampe (droite). On parle alors d'erreur de trainage, notée  $\varepsilon_t$ .

Erreur de trainage = écart entre la sortie mesurée et la consigne en régime permanent. La consigne étant une rampe (droite). Cette définition n'est valable que si le système est stable !

$$\varepsilon_t = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) \text{ pour } e(t) = at\mathcal{U}(t)$$

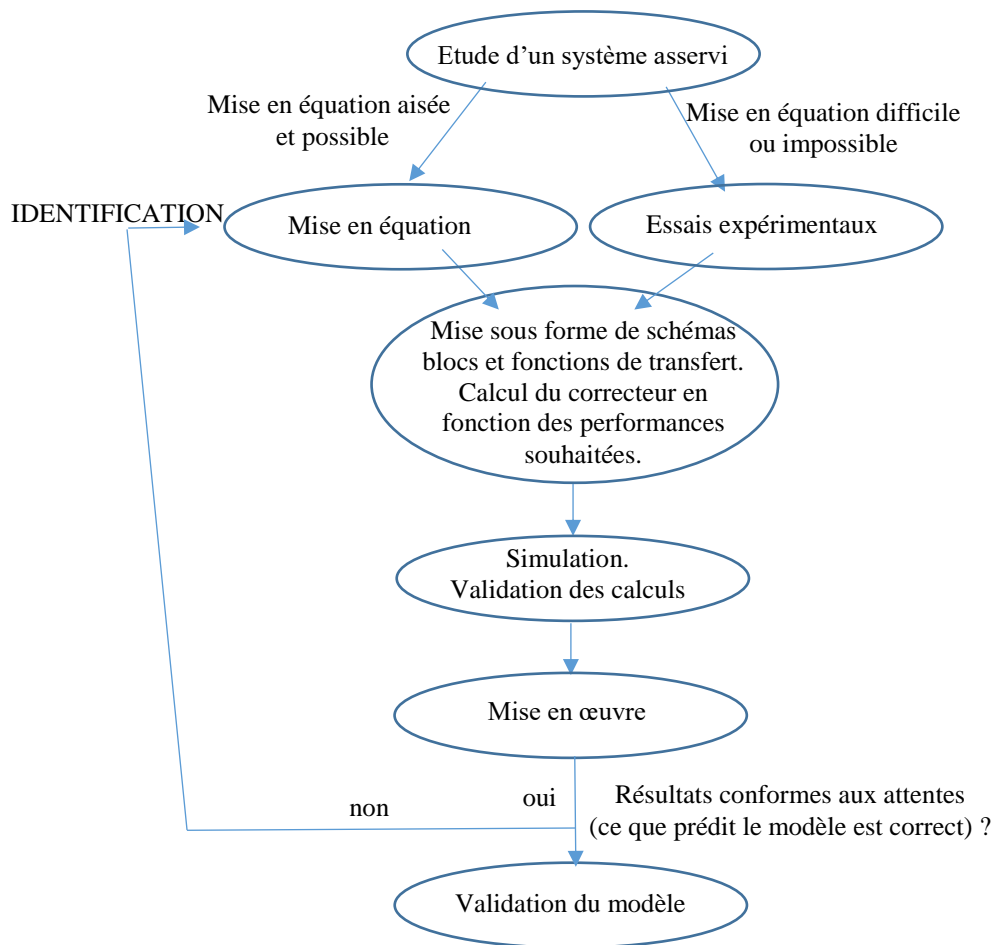


La réponse du système est une rampe en régime permanent (comme l'entrée) si le système est stable.

Ici, cette droite a le même coefficient directeur que l'entrée mais pas la même ordonnée à l'origine. L'erreur de trainage est constante.

Elle peut être nulle si les ordonnées à l'origine sont identiques. Elle est infinie si la pente de  $y(t)$  en régime permanent est différente de celle de  $e(t)$ .

### 1.4. Méthodologie d'étude



## II. Notion de modèle. Fonction de transfert

### 2.1. Modèle d'un processus

La mise en équation, au départ de l'analyse d'un système est une opération délicate qui peut compromettre l'ensemble de l'étude. Cette opération demande beaucoup de connaissances physiques mais aussi d'expérience de terrain.

On appelle modèle d'un processus la loi qui relie l'entrée  $x(t)$  (cause) à la sortie  $y(t)$  (effet).

L'idéal, pour appréhender l'étude du système, est de détailler pas à pas l'ensemble de ses éléments constitutifs. Mais cette méthode, la seule au stade de la conception d'un système automatisé, n'est pas praticable en général sur un système existant de structure complexe ou mal connue.

Nous supposons que l'on peut définir à priori une loi simple qui lie  $y$  à  $x$ . Les paramètres (en général peu nombreux) de la loi sont alors déterminés par des essais effectués sur le système : c'est la phase d'**identification** ou **modélisation**.

Soit un système linéaire. Son comportement est régi par une équation de la forme :

$$b_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + \dots + b_1 \frac{dy(t)}{dt} + b_0 y(t) = a_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + \dots + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t)$$

Dans ce cours, nous considérons des systèmes invariants (leurs propriétés n'évoluent pas au cours du temps). Dans ce cas, les coefficients  $a_i$  et  $b_j$  ne dépendent pas du temps.

## 2.2. Transformée de Laplace

L'étude des systèmes s'accompagne inévitablement de la manipulation d'équations différentielles. Or les opérations liées à cette manipulation sont souvent délicates et la résolution des équations n'est pas toujours simple. Pour faciliter les calculs, on utilise un outil mathématique puissant : la transformée de Laplace

### Transformée de Laplace :

Soit  $f(t)$  une fonction réelle de la variable réelle  $t$ , définie pour toute valeur de  $t$ , sauf éventuellement pour certaines valeurs, en nombre fini dans tout intervalle fini, et nulle pour  $t < 0$ .

La transformée de Laplace de  $f(t)$  est définie par l'égalité :  $F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \cdot f(t) dt$ .

*$p$  (ou  $s$ ) étant une variable complexe appelée variable de Laplace ( $p$  est la notation francophone,  $s$  est la notation anglo-saxonne)*

$F(p)$  est la transformée de Laplace de  $f(t)$  :  $F(p) = \mathcal{L}(f(t))$

$f(t)$  est la transformée de Laplace inverse (ou l'original) de  $F(p)$  :  $f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(p))$

Pour résoudre les équations différentielles à l'aide de la transformée de Laplace, il est nécessaire de savoir effectuer le passage de  $f(t)$  à  $F(p)$  mais aussi de  $F(p)$  à  $f(t)$  (pour cela on utilise le théorème de l'inversion qui n'est pas détaillé dans ce cours).

### Propriétés :

- **Linéarité** :  $f_1(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F_1(p)$  et  $f_2(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F_2(p)$  alors  $\alpha f_1(t) + \beta f_2(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \alpha F_1(p) + \beta F_2(p)$

- **Dérivation** :  $\frac{df(t)}{dt} \xrightarrow{\mathcal{L}} pF(p) - f(0)$

- **Dérivation d'ordre  $n$**  :  $\frac{d^n f(t)}{dt^n} \xrightarrow{\mathcal{L}} p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - \dots - p \frac{d^{n-2} f(t=0)}{dt^{n-2}} - \frac{d^{n-1} f(t=0)}{dt^{n-1}}$

- **Intégration** :  $\int f(t) dt \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{F(p)}{p}$

- **Retard** :  $f(t - t_0) \xrightarrow{\mathcal{L}} e^{-t_0 p} F(p)$

- **Théorème de la valeur finale** :  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pY(p)$

- **Théorème de la valeur initiale** :  $\lim_{t \rightarrow 0} y(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pY(p)$

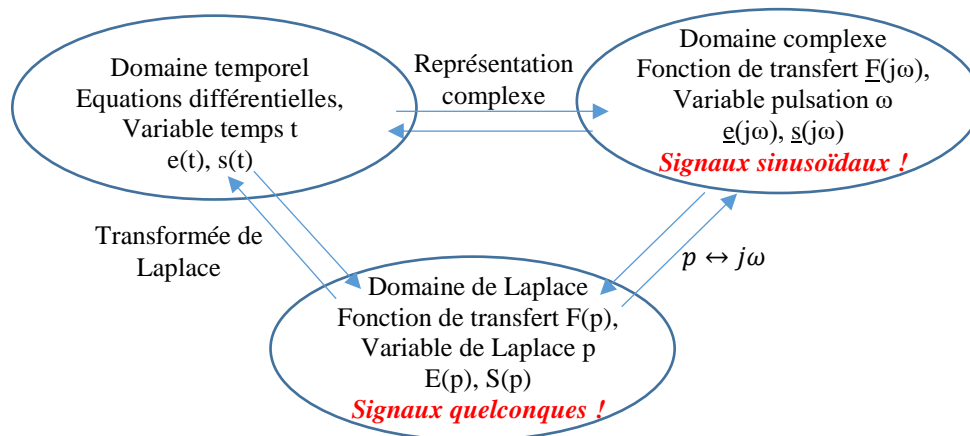
- **Table de transformées** : afin d'éviter leur calcul systématiques, les transformées des fonctions de base sont regroupées dans des tables.

### Transformées à connaître :

Echelon unitaire :	$e(t) = \mathcal{U}(t)$	$\leftrightarrow$	$\frac{1}{p}$	
Echelon d'amplitude $E_0$ :	$e(t) = E_0 \mathcal{U}(t)$	$\leftrightarrow$	$\frac{E_0}{p}$	
Rampe :	$e(t) = E_0 t \mathcal{U}(t)$	$\leftrightarrow$	$\frac{E_0}{p^2}$	
Exponentielle :	$e(t) = e^{at} \mathcal{U}(t)$	$\leftrightarrow$	$\frac{1}{p-a}$	

Intégration (de  $\frac{1}{p}$  à  $\frac{E_0}{p^2}$ ) et Multiplication par  $\frac{1}{p}$  (de  $\frac{1}{p}$  à  $\frac{E_0}{p}$ )

### Liens entre les différents outils mathématiques



### III. Fonctions de transfert.

#### 3.1. Définitions

Le système à asservir est encore appelé processus. La modélisation consiste à établir une loi, qui relie l'entrée  $x$  à la sortie  $y$  du processus à asservir. On peut utiliser pour cela la notion de fonction de transfert  $F(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}$ . La variable de Laplace  $p$  (ou  $s$ ) est définie par  $p = j\omega$ . En complexe, la fonction de transfert est définie pour des signaux sinusoïdaux alors qu'en Laplace, les signaux peuvent être quelconques.

*Le système est linéaire ssi, pour une entrée sinusoïdale de pulsation  $\omega$ , la sortie est également sinusoïdale de même pulsation  $\omega$*

Entrée		Sortie
$x(t) = \sqrt{2}X_{\text{eff}}\sin\omega t$	$\longrightarrow$	$y(t) = \sqrt{2}Y_{\text{eff}}\sin(\omega t + \varphi)$
$\underline{x}(j\omega) = X_{\text{eff}}e^{j\omega t}$	$\longrightarrow$	$\underline{y}(j\omega) = Y_{\text{eff}}e^{j\omega t}e^{j\varphi}$

$$\text{d'où } \underline{F}(j\omega) = \frac{\underline{y}(j\omega)}{\underline{x}(j\omega)} = \frac{Y_{\text{eff}}e^{j\omega t}e^{j\varphi}}{X_{\text{eff}}e^{j\omega t}} = \frac{Y_{\text{eff}}e^{j\varphi}}{X_{\text{eff}}} \longrightarrow |\underline{F}(j\omega)| = \frac{Y_{\text{eff}}}{X_{\text{eff}}} \text{ et } \text{Arg}\underline{F}(j\omega) = \varphi$$

*Le module de la fonction de transfert (appelé **AMPLIFICATION**) représente le rapport des valeurs efficaces (ou des amplitudes) des signaux d'entrée et sortie et son argument le déphasage entre la sortie et l'entrée.*

Dans le domaine temporel, le système est régi par une équation différentielle de la forme :

$$b_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + \dots + b_1 \frac{dy(t)}{dt} + b_0 y(t) = a_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + \dots + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t)$$

Dans le domaine complexe, cette équation s'écrit :

$$b_n(j\omega)^n \underline{y}(j\omega) + \dots + b_1 j\omega \underline{y}(j\omega) + b_0 \underline{y}(j\omega) = a_m(j\omega)^m \underline{x}(j\omega) + \dots + a_1 j\omega \underline{x}(j\omega) + a_0 \underline{x}(j\omega)$$

$$\text{Soit : } \underline{F}(j\omega) = \frac{\underline{y}(j\omega)}{\underline{x}(j\omega)} = \frac{a_m(j\omega)^m + \dots + a_1 j\omega + a_0}{b_n(j\omega)^n + \dots + b_1 j\omega + b_0}$$

Dans le domaine de Laplace l'équation différentielle devient (conditions initiales nulles) :

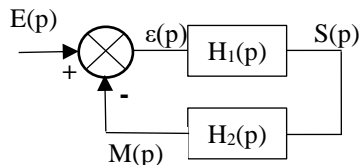
$$b_n p^n Y(p) + \dots + b_1 p Y(p) + b_0 Y(p) = a_m p^m X(p) + \dots + a_1 p X(p) + a_0 X(p)$$

$$\text{Soit : } F(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{a_m p^m + \dots + a_1 p + a_0}{b_n p^n + \dots + b_1 p + b_0}$$

Pour passer de  $\underline{F}(j\omega)$  à  $F(p)$ , il suffit de remplacer  $j\omega$  par  $p$  (et vice versa)

### 3.2 Cas des systèmes bouclés

Soit le système bouclé suivant :



$$S(p) = H_1(p) \cdot \varepsilon(p) = H_1(p)(E(p) - M(p)) = H_1(p)(E(p) - H_2(p)S(p))$$

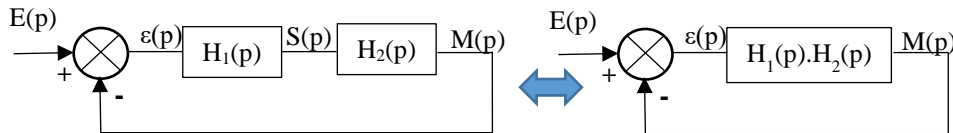
$$\text{Soit : } \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{H_1(p)}{1 + H_1(p)H_2(p)} \quad \text{Formule de Black}$$

En utilisant la formule de Black, nous pouvons écrire :

$$\frac{M(p)}{E(p)} = \frac{H_1(p)H_2(p)}{1 + H_1(p)H_2(p)} \quad \text{et} \quad \frac{\varepsilon(p)}{E(p)} = \frac{1}{1 + H_1(p)H_2(p)}$$

#### Remarque :

Le schéma précédent est équivalent aux schémas ci-dessous :



#### Vocabulaire :

Si le schéma ci-dessus représente un asservissement,  $s(t)$  est alors la sortie à asservir et  $m(t)$  la sortie mesurée par le capteur (en volts). En pratique, c'est  $m(t)$  que l'on observe à l'oscilloscope. C'est une image en volts de la grandeur à asservir.

Les fonctions  $\frac{S(p)}{E(p)}$  et  $\frac{M(p)}{E(p)}$  sont des **fonctions de transfert en boucle fermée (FTBF)**.  $\frac{M(p)}{E(p)}$  est la **fonction de transfert en boucle fermée à retour unitaire**.

Nous verrons par la suite que la fonction  $\frac{M(p)}{\varepsilon(p)} = H_1(p) \cdot H_2(p)$  joue un rôle important dans l'étude de l'asservissement. On la nomme **fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO)**.

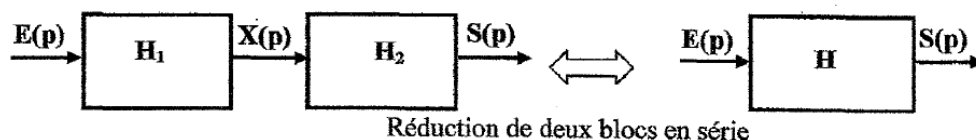
On peut noter la relation suivante lorsque la fonction de transfert en boucle fermée est à retour unitaire :

$$\text{FTBF (à retour unitaire)} = \frac{\text{FTBO}}{1 + \text{FTBO}}$$

On peut noter que la formule ci-dessus est une formule de Black appliquée à un système à retour unitaire.

### 3.3. Propriétés des schémas blocs

#### Règle 1 : Bloc en cascade (en série)

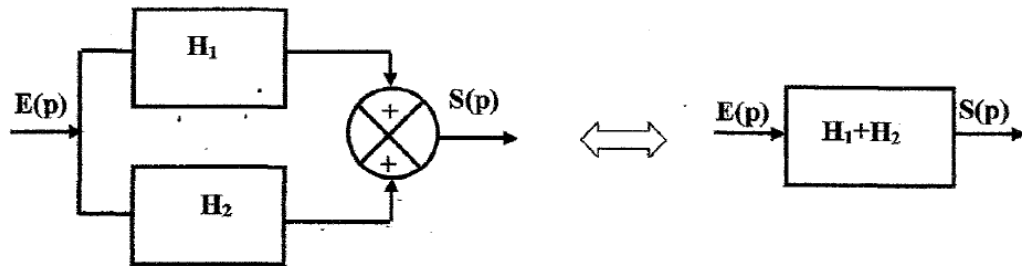


$$\left. \begin{array}{l} S = H_2 \cdot X \\ X = H_1 \cdot E \end{array} \right\} S = H_1 \cdot H_2 \cdot E$$

$$H = H_1 \cdot H_2$$



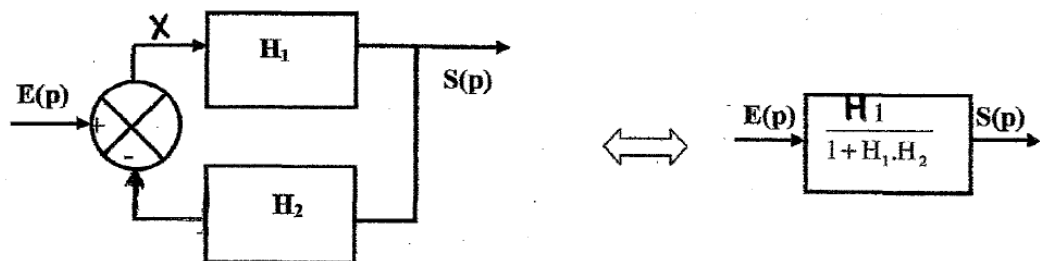
### Règle 2 : Bloc en parallèle



Réduction de deux blocs en parallèle

$$S = H_1 E + H_2 E = (H_1 + H_2) E$$

### Règle 3 : Formule de Black (réduction de boucle)



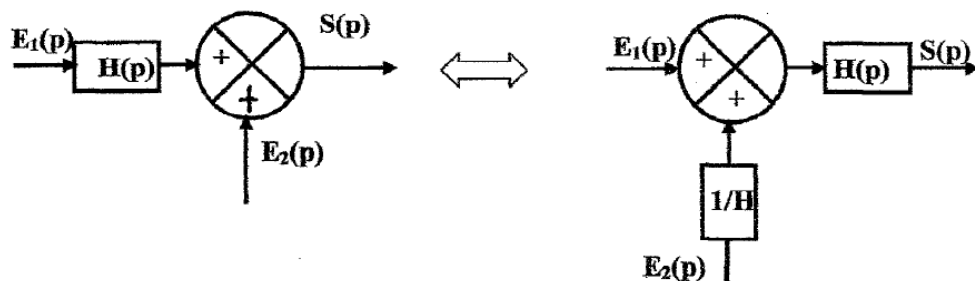
Réduction d'un schéma en boucle

$$\left. \begin{array}{l} X = E - H_2 S \\ S = H_1 X \end{array} \right\} \begin{array}{l} S = H_1 (E - H_2 S) \Rightarrow S(1 + H_1 H_2) = H_1 E, \text{ soit } H = \frac{H_1}{1 + H_1 H_2} \\ H \text{ représente la fonction de transfert de la boucle } H_1 H_2. \end{array}$$

### Règle 5 : Déplacement d'un sommateur

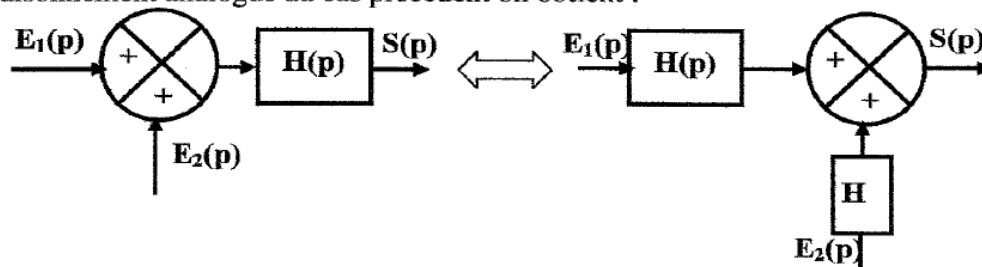
Déplacement d'un bloc d'aval en amont

Ce type de déplacement se traduit par l'ajout d'un bloc fonctionnel de fonction de transfert égale à -1 à l'entrée du sommateur qui prend la place du comparateur comme le montre la figure 6.7.



### Déplacement d'un bloc d'amont en aval

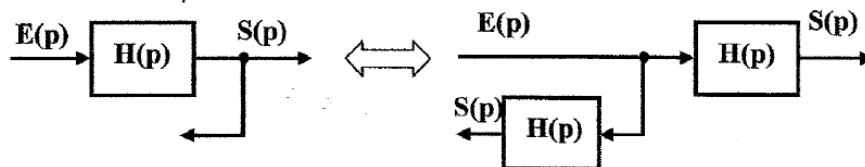
Par un raisonnement analogue au cas précédent on obtient :



Déplacement d'un bloc d'aval en amont du comparateur

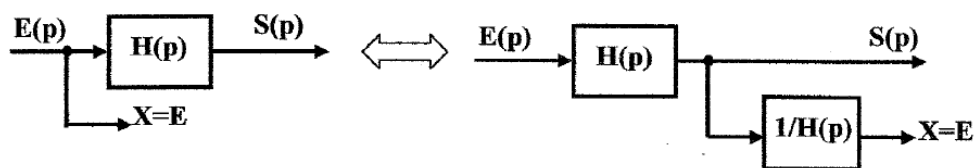
### Règle 6 : Déplacement d'un capteur

Déplacement d'un bloc d'aval en amont



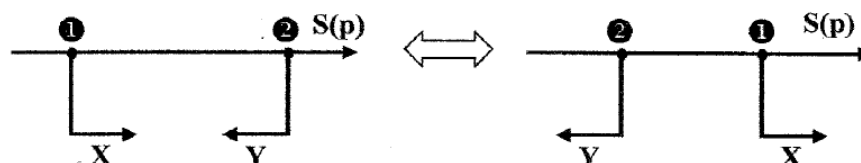
Déplacement d'un bloc d'aval en amont du capteur

Déplacement d'un bloc d'amont en aval



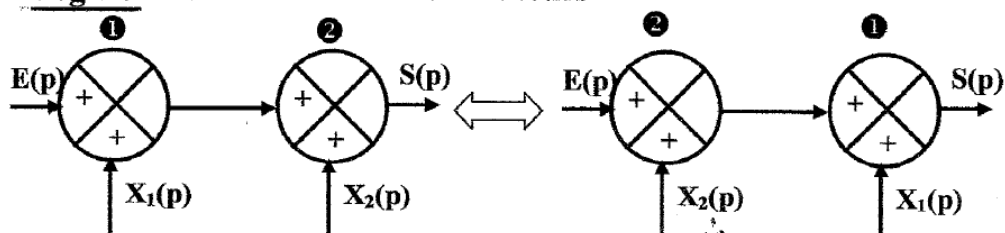
Déplacement d'un bloc d'amont en aval du capteur

### Règle 7 : Permutation des capteurs



Permutation des capteurs

### Règle 8 : Permutation des sommateurs

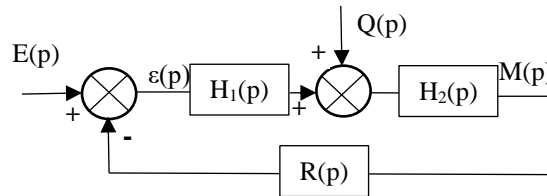


Permutation des sommateurs

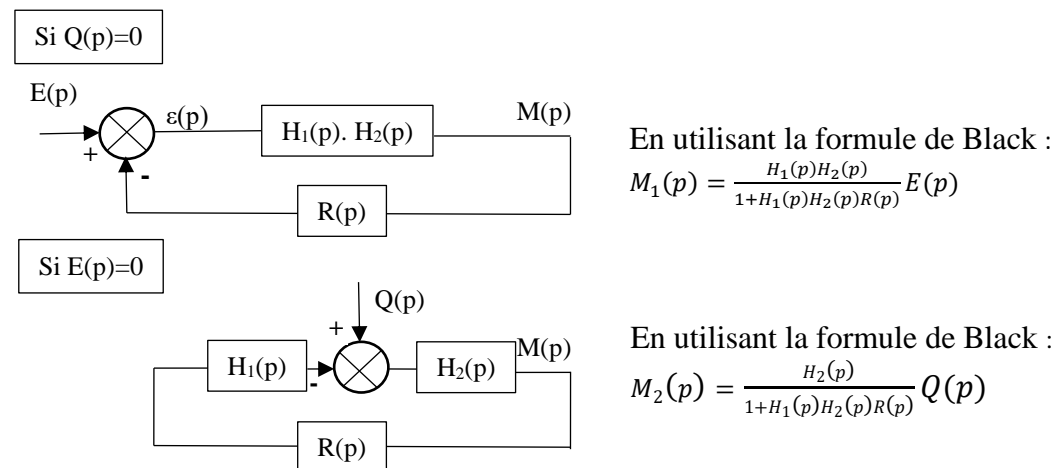
Liste non exhaustive...

### 3.4. Cas des systèmes perturbés

Ces systèmes présentent deux entrées : l'une maîtrisée par l'utilisateur  $E(p)$  (la consigne) et l'autre lui est imposée par le milieu extérieur  $Q(p)$  (perturbation).



Comme le système est linéaire, on peut appliquer le théorème de superposition :



Au final, en vertu du théorème de superposition :  $M(p) = M_1(p) + M_2(p)$   
 $M_1$  est la contribution de l'entrée  $E$  et  $M_2$  celle de la perturbation  $Q$ .

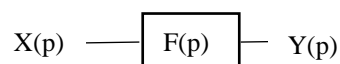
## IV. Analyse temporelle des systèmes du 1<sup>er</sup> ordre

### 4.1. Système en boucle ouverte

Un système du 1<sup>er</sup> ordre est un système régi par une équation différentielle du 1<sup>er</sup> ordre :  
 $y(t) + \tau \frac{dy(t)}{dt} = Ax(t)$ .  $x(t)$  est l'entrée du système et  $y(t)$  la sortie.

La transformée de Laplace de cette équation donne (en considérant les conditions initiales nulles)  $Y(p) + \tau pY(p) = AX(p)$  d'où la fonction de transfert :  $F(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{A}{1+\tau p}$ .

- $F(p)$  est une fonction du 1<sup>er</sup> ordre caractérisée par son gain statique  $A$  et sa constante de temps  $\tau$  (en secondes)
- Unités de  $A$  = unités de  $y(t)$  divisées par les unités de  $x(t)$  et  $A = F(p=0)$  (grandeurs statiques = grandeurs continues de pulsation nulle donc  $p=0$ )
- Le pôle de  $F(p)$  est égal à  $-1/\tau$  (pôles = valeurs de  $p$  qui annulent le dénominateur de la fonction de transfert)



**Réponse indicielle**

L'entrée est un échelon d'amplitude  $X_0$  :  $x(t)=X_0U(t)$  avec  $X(p) = \frac{X_0}{p}$

On calcule  $Y(p)$  puis on en déduit  $y(t)$  :  $Y(p) = X(p)F(p) = \frac{X_0}{p} \frac{A}{1+\tau p}$

On décompose  $Y(p)$  en éléments simples pour pouvoir appliquer la propriété de linéarité de la transformée de Laplace :

$$Y(p) = AX_0 \left( \frac{1}{p} + \frac{-\tau}{1+\tau p} \right) = AX_0 \left( \frac{1}{p} + \frac{-1}{\frac{1}{\tau}+p} \right)$$

La réponse à un échelon s'écrit donc :  $y(t) = AX_0 \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) U(t)$

La valeur finale s'écrit :  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} AX_0 \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) U(t) = AX_0$ .

**On en conclue que le régime permanent ne dépend que du gain statique A**

Pour trouver le temps de réponse à 5%, on résout :  $y(t) = 0,95AX_0 = AX_0 \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) U(t)$

$$\text{Soit } \left( e^{-\frac{t}{\tau}} \right) = 0.05 \text{ d'où } t = -\tau \ln 0.05 \cong 3\tau$$

Le temps de réponse à 5% est égal à  $3\tau$ . **Pour un système du 1<sup>er</sup> ordre :  $t_{r5\%} = 3\tau$**

$\tau$  est appelé constante de temps du système, car elle donne une image de la rapidité du système.

Le régime transitoire est égal à  $e^{-\frac{t}{\tau}}$ . On en conclue que **le régime transitoire ne dépend que du pôle  $-1/\tau$** .

La forme de la réponse est la suivante :

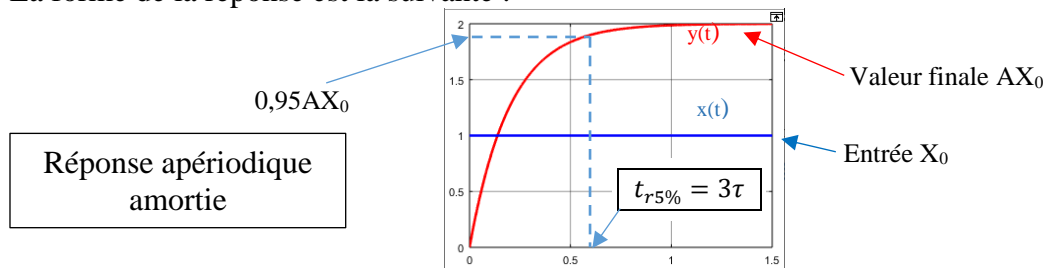


Figure 1

N.B : essai figure 1 :  $X_0=1$ ,  $A=2$  et  $\tau=0,2s$ .

**4.2. Système en boucle fermée**

Soit l'asservissement représenté ci-dessous :

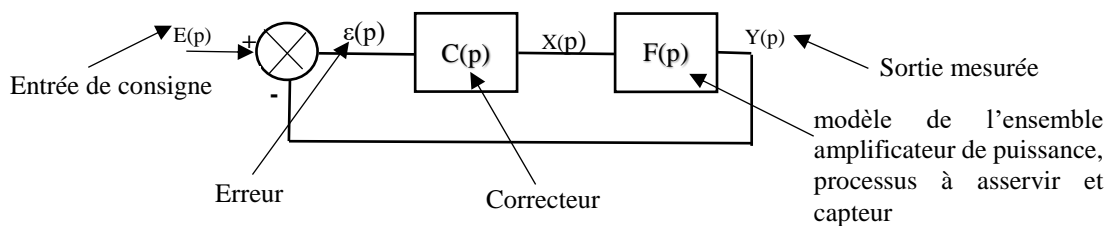


Figure 2

On va ici étudier le correcteur proportionnel  $C(p)=K>0$  et le cas où le modèle est une fonction du 1<sup>er</sup> ordre  $F(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{A}{1+\tau p}$ .

Pour étudier le système, on va calculer sa fonction de transfert  $H(p) = \frac{Y(p)}{E(p)}$ . Il s'agit de la fonction de transfert en boucle fermée (FTBF) à retour unitaire.

Pour la calculer, on va utiliser la formule de Black :

$$H(p) = \frac{Y(p)}{E(p)} = \frac{C(p)F(p)}{1+C(p)F(p)} \text{ où } C(p)F(p) \text{ est la FTBO (fonction de transfert en boucle ouverte)}$$

On retrouve donc la relation pour la **FTBF à retour unitaire**  $H(p) = \frac{FTBO}{1+FTBO}$ . La FTBF est du même ordre que la FTBO. On la met sous forme standard :

$$H(p) = \frac{C(p)F(p)}{1+C(p)F(p)} = \frac{K \frac{A}{1+\tau p}}{1 + \frac{KA}{1+\tau p}} = \frac{KA}{1+\tau p + KA} = \frac{\frac{KA}{1+KA}}{1 + \frac{\tau}{1+KA}p} = \frac{K_{BF}}{1+\tau_{BF}p}$$

Les éléments caractéristique de  $H(p)$  sont  $K_{BF} = \frac{KA}{1+KA} = \frac{K_{BO}}{1+K_{BO}}$  et  $\tau_{BF} = \frac{\tau}{1+KA} = \frac{\tau}{1+K_{BO}}$

$K_{BO} = \lim_{p \rightarrow 0} C(p)F(p) = \lim_{p \rightarrow 0} FTBO = KA$ .  $K_{BO}$  est donc le gain statique de la FTBO.

### Réponse indicielle

L'entrée est un échelon d'amplitude  $E_0$  :  $e(t)=E_0U(t)$

On utilise les résultats du paragraphe 4.1. pour écrire la réponse indicielle en boucle fermée connaissant les éléments caractéristique de la FTBF  $H(p)$

On peut écrire la réponse :  $y(t) = K_{BF}E_0 \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_{BF}}} \right) U(t)$

La FTBF est d'ordre 1 comme la FTBO, l'allure de la réponse indicielle est donc la même qu'en boucle ouverte (réponse apériodique amortie)

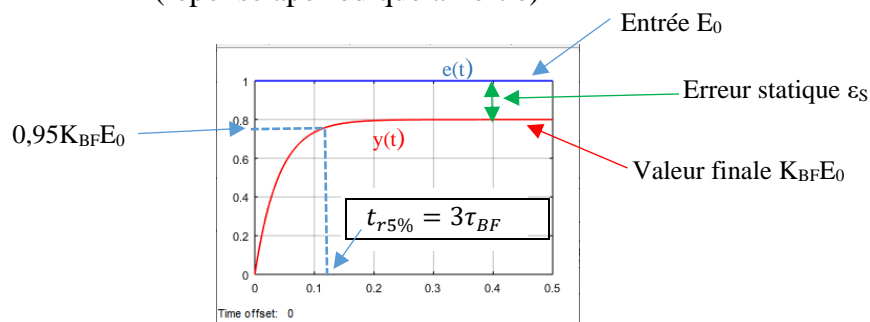


Figure 3

N.B : essai figure 3 :  $E_0=1$ ,  $K=2$ ,  $A=2$  et  $\tau=0,2s$ .

### Exploitation des résultats / Effets du correcteur P (proportionnel)

- Dynamique : La réponse est toujours apériodique quel que soit  $K$ . Le temps de réponse à 5% est  $t_{r5\%} = 3\tau_{BF} = 3 \frac{\tau}{1+K_{BO}}$  avec  $K_{BO}=AK$ .

Plus  $K$  augmente, plus  $K_{BO}$  augmente, plus  $\tau_{BF}$  diminue donc plus le système est rapide

- Précision :

→ Calcul de l'erreur statique : pour calculer  $\varepsilon(p)$ , on utilise la formule de Black :  $\frac{\varepsilon(p)}{E(p)} = \frac{1}{1+KF(p)}$ .  $e(t)$  est un échelon (on calcule l'erreur statique) donc  $E(p) = \frac{E_0}{p}$ . On utilise le théorème de la valeur finale pour calculer  $\varepsilon_s$ .

$$\varepsilon_s = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{E(p)}{1+KF(p)} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{\frac{E_0}{p}}{1+KF(p)} = \frac{E_0}{1+KA} = \frac{E_0}{1+K_{BO}}$$

Plus K augmente, plus  $K_{BO}$  augmente, plus  $\varepsilon_s$  diminue donc plus le système est précis mais le correcteur proportionnel ne permet pas d'annuler l'erreur statique.

→ Calcul de l'erreur de trainage : on reprend le même calcul mais l'entrée est une rampe  $e(t) = E_0 t U(t)$  et  $E(p) = \frac{E_0}{p^2}$ .

$$\varepsilon_T = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{E(p)}{1+KF(p)} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{\frac{E_0}{p^2}}{1+KF(p)} = \infty$$

L'erreur de trainage est infinie mais on montre que lorsque K augmente l'écart entre l'entrée et la sortie tend moins vite vers l'infini

**On en conclue donc que plus K augmente, plus le système est précis.**

D'une manière générale, **le correcteur proportionnel améliore la précision et rend le système plus nerveux** (ici comme la réponse est apériodique, il n'y a pas de dépassement, donc si le système est plus nerveux, il est plus rapide).

## **V. Analyse temporelle des systèmes du 2<sup>nd</sup> ordre**

### **5.1. Système en boucle ouverte**

Un système du 2<sup>nd</sup> ordre est un système régi par une équation différentielle du 2<sup>nd</sup> ordre :  $y(t) + \frac{2z}{\omega_0} \frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2y(t)}{dt^2} = Ax(t)$ .  $x(t)$  est l'entrée du système et  $y(t)$  la sortie.

La transformée de Laplace de cette équation donne (en considérant les conditions initiales nulles)  $Y(p) + \frac{2z}{\omega_0} pY(p) + \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2 Y(p) = AX(p)$  d'où la fonction de transfert :  $F(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{A}{1 + \frac{2z}{\omega_0} p + \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2}$ .

$F(p)$  est une fonction du 2<sup>nd</sup> ordre caractérisée par son gain statique A, son coefficient d'amortissement z et sa pulsation propre  $\omega_0$ .

### **Réponse indicielle**

$$F(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{A}{1 + 2z \frac{p}{\omega_0} + \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2} = \frac{A\omega_0^2}{(p-p_1)(p-p_2)}$$

$p_1$  et  $p_2$  = pôles de  $F(p)$  = solutions de l'équation  $1 + 2z \frac{p}{\omega_0} + \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2 = 0$ .

Discriminant :  $\Delta = \left(\frac{2}{\omega_0}\right)^2 (z^2 - 1)$

**Cas où  $z \geq 1$  :**  $\Delta \geq 0$  : 2 pôles réels  $< 0$ ,  $p_1 = \frac{-2\frac{z}{\omega_0} + \sqrt{\Delta}}{\frac{\omega_0^2}{2}} = \omega_0(-z + \sqrt{z^2 - 1})$   
 $p_2 = \omega_0(-z - \sqrt{z^2 - 1})$

**Cas où  $0 < z < 1$  :**  $\Delta < 0$  : 2 pôles complexes conjugués,

$$p_1 = \frac{-2\frac{z}{\omega_0} + j\sqrt{\Delta}}{\frac{\omega_0^2}{2}} = \omega_0(-z + j\sqrt{1 - z^2}) \text{ et } p_2 = \omega_0(-z - j\sqrt{1 - z^2})$$

**NB :** On remarque que  $p_1 p_2 = (\omega_0)^2$  et que  $F(p=0) = A = \text{amplification statique de } F(p)$

L'entrée est un échelon d'amplitude  $X_0$  :  $x(t) = X_0 U(t)$  avec  $X(p) = \frac{X_0}{p}$ . On cherche  $y(t)$ .  
 Pour cela on va calculer  $Y(p)$  puis chercher sa transformée de Laplace inverse ( $y(t)$  est l'original de  $Y(p)$ ).

$$Y(p) = F(p)X(p) = \frac{X_0 A \omega_0^2}{p(p-p_1)(p-p_2)} = X_0 A \left( \frac{1}{p} + \frac{A_1}{p-p_1} + \frac{A_2}{p-p_2} \right) \text{ par décomposition en}$$

éléments simples avec  $A_1 = \frac{\omega_0^2}{p_1(p_1-p_2)}$  et  $A_2 = \frac{\omega_0^2}{p_2(p_2-p_1)}$

$L^{-1}$

L'original d'une somme est la somme des originaux (la transformée de Laplace est linéaire). On en déduit :

$$y(t) = X_0 A (1 + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}) U(t)$$

Dans cette expression,  $A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$  représente le régime transitoire. Si le système est stable, il doit tendre vers zéro quand  $t$  tend vers l'infini.

Si le système est stable  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = X_0 A$ . C'est le régime permanent s'il existe (c-à-d ssi le système est stable)

On en conclue que :

***Le régime transitoire (et donc la stabilité) est imposé par les pôles alors que le régime permanent, s'il existe, est imposé par l'amplification statique (pour une entrée échelon).***

La forme du régime transitoire dépend donc des pôles et plus précisément de leur nature. On aura donc deux formes de réponse suivant que les pôles sont réels ou complexes conjugués.

On rappelle que  $y(t) = X_0 A (1 + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}) U(t)$ . On remarque que **si tous les pôles sont réels, le système est stable ssi tous les pôles sont strictement négatifs.**

**Cas où  $z \geq 1$  :**  $\Delta \geq 0$  : 2 pôles réels négatifs. Le système est donc stable.

On peut poser  $p_1 = -\frac{1}{\tau_1}$  et  $p_2 = -\frac{1}{\tau_2}$ .  $\tau_1$  et  $\tau_2$  sont les constantes de temps exprimées en secondes (elles sont positives).

On a donc  $y(t) = X_0 A \left( 1 + A_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} + A_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right) U(t)$  et  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = X_0 A$ . On montre que la pente à l'origine est nulle  $\left( \frac{dy(t)}{dt} \right)_{t=0} = 0$  (ce n'est pas le cas pour un système du 1<sup>er</sup> ordre).

L'allure de la réponse indicielle est la suivante :

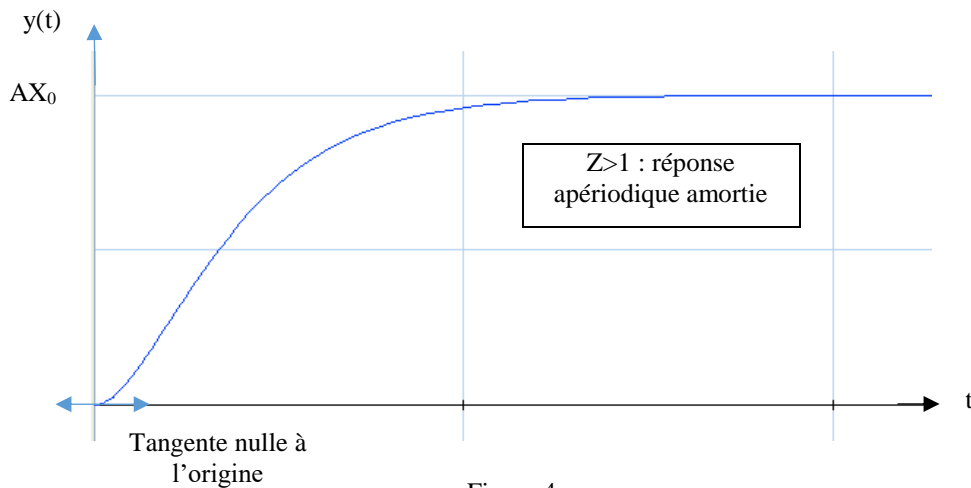


Figure 4

Cas où  $0 < z < 1$  :  $\Delta < 0$  : 2 pôles complexes conjugués,

$$p_1 = \frac{-2\frac{z}{\omega_0} + j\sqrt{\Delta}}{\frac{2}{\omega_0^2}} = \omega_0(-z + j\sqrt{1-z^2}) \text{ et } p_2 = \omega_0(-z - j\sqrt{1-z^2}).$$

On pose :  $p_1 = \alpha + j\beta$  et  $p_2 = \alpha - j\beta$  avec  $\alpha = -\omega_0 z$  et  $\beta = \omega_0 \sqrt{1-z^2}$ .

On rappelle que  $y(t) = X_0 A (1 + \underline{A}_1 e^{p_1 t} + \underline{A}_2 e^{p_2 t}) U(t)$  où  $\underline{A}_1 = \frac{\omega_0^2}{p_1(p_1 - p_2)}$  et  $\underline{A}_2 = \frac{\omega_0^2}{p_2(p_2 - p_1)}$ . Ici,  $\underline{A}_1$  et  $\underline{A}_2$  sont complexes (car  $p_1$  et  $p_2$  sont complexes). Comme  $p_1$  et  $p_2$  sont conjugués,  $\underline{A}_1$  et  $\underline{A}_2$  le sont aussi. On pose alors  $\underline{A}_1 = A_1 e^{j\theta}$  et  $\underline{A}_2 = \overline{\underline{A}_1} = A_1 e^{-j\theta}$ .

Il vient alors :

$$y(t) = X_0 A (1 + A_1 e^{j\theta} e^{(\alpha + j\beta)t} + A_1 e^{-j\theta} e^{(\alpha - j\beta)t}) U(t)$$

$$y(t) = X_0 A [1 + A_1 e^{\alpha t} (e^{j(\beta t + \theta)} + e^{-j(\beta t + \theta)})] U(t)$$

$$y(t) = X_0 A [1 + 2A_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t + \theta)] U(t)$$

On remarque que le système sera stable ssi  $\alpha < 0$  (ce qui est le cas pour  $0 < z < 1$ ).  $\alpha$  est la partie réelle des pôles. Dans ce cas,  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = X_0 A$ .

On montre que la pente à l'origine est nulle  $\left(\frac{dy(t)}{dt}\right)_{t=0} = 0$  (ce n'est pas le cas pour un système du 1<sup>er</sup> ordre). Le régime transitoire est un cosinus multiplié par une exponentielle décroissante.

L'allure de la réponse indicielle est la suivante :

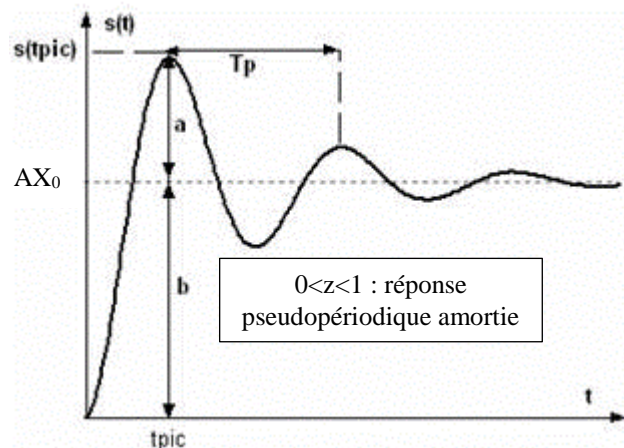


Figure 5

$\beta$  est la pseudo-pulsation et  $T_p$  la pseudo-période

$$\beta = \omega_0 \sqrt{1-z^2} = \frac{2\pi}{T_p}$$

$a$  est l'amplitude du 1<sup>er</sup> dépassement. On l'exprime en % :  $D_{1\%} = \frac{a}{X_0 A} \times 100$



**Ce qu'il faut retenir :**

- La forme de la réponse indicielle d'un système du second ordre dépend du coefficient d'amortissement :
- Si  $0 < z < 1$ , les pôles sont complexes conjugués à partie réelle strictement négative et la réponse est pseudopériodique amortie.
- Si  $z \geq 1$ , les pôles sont réels strictement négatifs et la réponse est apériodique amortie.
- Plus le coefficient d'amortissement  $z$  est petit, moins le système est amorti d'où son nom. Quand  $0 < z < 1$ , plus  $z$  est petit, plus les dépassements sont nombreux et plus leur amplitude est grande.
- Concernant la stabilité, on a vu que si les pôles sont réels, le système est stable ssi ils sont tous strictement négatifs et s'ils sont complexes conjugués, le système est stable ssi leur partie réelle est strictement négative. On peut alors énoncer le critère suivant :

**Critère fondamental de stabilité :**

**Un système est stable ssi tous les pôles de sa fonction de transfert sont à partie réelle strictement négative**

**N.B. :** Le cas où  $z < 0$  correspond à un amortissement négatif, donc une amplification. Le système est alors instable.

Le cas  $z = 0$ , correspond à une réponse sinusoïdale en régime permanent (système ni amorti, ni amplifié)

**Détermination du temps de réponse à 5% et de l'amplitude des éventuels dépassements**

- Abaque permettant de déterminer l'amplitude des dépassements (si  $0 < z < 1$  car pour  $z \geq 1$  il n'y a pas de dépassements).

Formule de calcul du  
1<sup>er</sup> dépassement

$$D_1 = e^{\frac{-z\pi}{\sqrt{1-z^2}}}$$

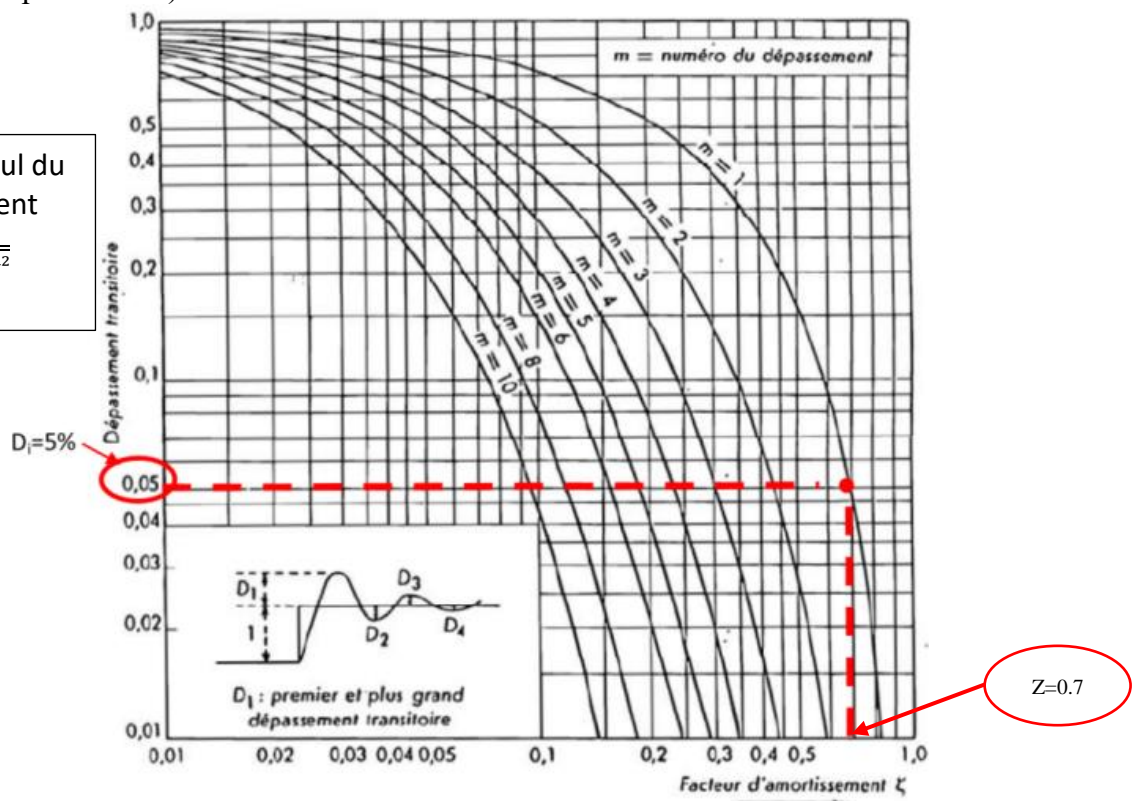


Figure 6

En abscisse, le coefficient d'amortissement et en ordonnée, les dépassements relatifs ( $m$ =numéro du dépassement).

Sur l'exemple figure 6, pour un coefficient d'amortissement  $z=0,7$ , on lit un premier dépassement de 0,05 soit 5% (courbe  $m=1$  pour le 1<sup>er</sup> dépassement).  
Autre exemple, pour  $z=0,5$ , le 1<sup>er</sup> dépassement est de 15% et le 2<sup>ème</sup> de 2,5%.

*Le nombre de dépassements ainsi que leurs amplitudes ne dépendent que du coefficient d'amortissement  $z$ . Plus  $z$  est petit, plus les dépassements sont nombreux et forts en amplitude.*

- Abaque permettant de déterminer le temps de réponse réduit  $t_{r5\%}\omega_0$ .

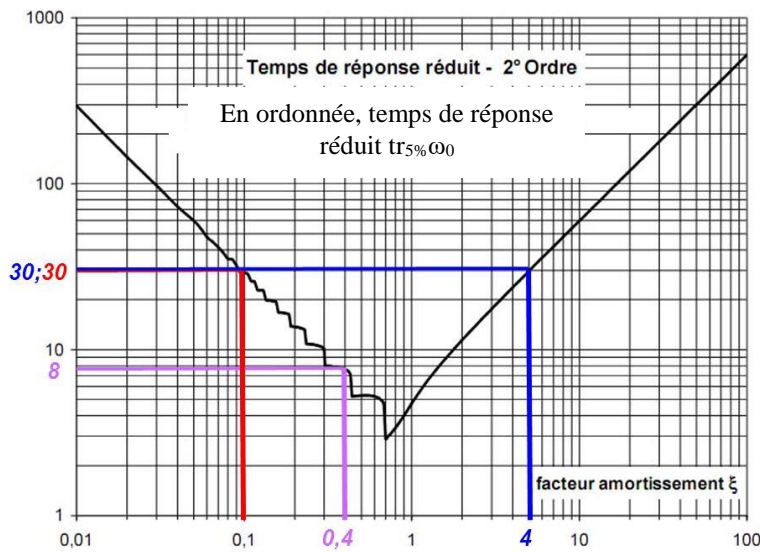


Figure 7

Sur l'exemple figure 7, pour un coefficient d'amortissement  $z=0,4$ , on lit un temps de réponse réduit de 8. Le temps de réponse à 5% vaut donc  $8/\omega_0$ . Pour le même coefficient d'amortissement, plus  $\omega_0$  est grand, plus le système est rapide.

## 5.2. Système en boucle fermée

On fait la même étude que dans le paragraphe 4.2 mais cette fois  $F(p)$  est du second ordre

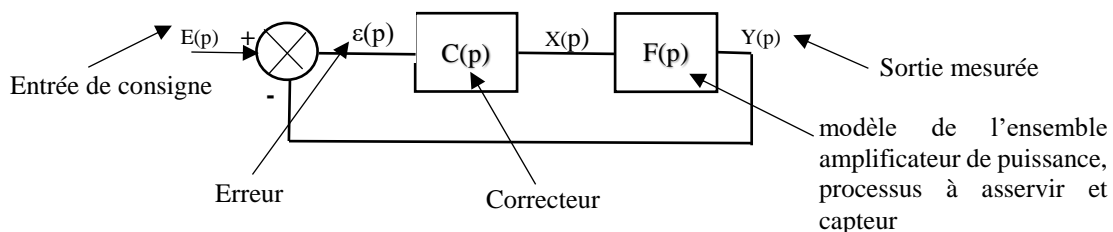


Figure 8

$$C(p)=K>0 \text{ et } F(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{A}{1+2z\frac{p}{\omega_0} + \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2}$$

Pour étudier le système, on va calculer sa fonction de transfert  $H(p) = \frac{Y(p)}{E(p)}$ . Il s'agit de la fonction de transfert en boucle fermée (FTBF) à retour unitaire.

Pour la calculer, on va utiliser la formule de Black :

$$H(p) = \frac{Y(p)}{E(p)} = \frac{C(p)F(p)}{1+C(p)F(p)} \text{ où } C(p)F(p) \text{ est la FTBO (fonction de transfert en boucle ouverte)}$$

On retrouve donc la relation pour la **FTBF à retour unitaire**  $H(p) = \frac{FTBO}{1+FTBO}$ . La FTBF est du même ordre que la FTBO. On la met sous forme standard :

$$H(p) = \frac{C(p)F(p)}{1+C(p)F(p)} = \frac{K \frac{A}{1+2z \frac{p}{\omega_0} + \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2}}{1 + \frac{AK}{1+2z \frac{p}{\omega_0} + \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2}} = \frac{KA}{1+2z \frac{p}{\omega_0} + \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2 + KA}$$

$$H(p) = \frac{\frac{KA}{1+KA}}{1 + \frac{2z}{1+KA} \frac{p}{\omega_0} + \frac{1}{1+KA} \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2} = \frac{K_{BF}}{1+2z_{BF} \frac{p}{\omega_{0BF}} + \left(\frac{p}{\omega_{0BF}}\right)^2}$$

Les éléments caractéristique de H(p) sont  $K_{BF} = \frac{KA}{1+KA} = \frac{K_{BO}}{1+K_{BO}}$ ,  $z_{BF} = \frac{z}{\sqrt{1+KA}} = \frac{z}{\sqrt{1+K_{BO}}}$

Et  $\omega_{0BF} = \omega_0 \sqrt{1+KA} = \omega_0 \sqrt{1+K_{BO}}$

### Réponse indicielle

L'entrée est un échelon d'amplitude  $E_0$  :  $e(t)=E_0U(t)$

On utilise les résultats du paragraphe 5.1. Pour déterminer la réponse en boucle fermée, il faut calculer  $K_{BF}$ ,  $z_{BF}$  et  $\omega_{0BF}$  connaissant  $A$ ,  $K$ ,  $z$  et  $\omega_0$ .

Exemple :

En BO :		En BF :
$A=2$		$K_{BF}=0,8$
$\omega_0=2 \text{ rad/s}$		$\omega_{0BF}=4,5 \text{ rad/s}$
$z=0,7$	$\longrightarrow$	$z_{BF}=0,3$
$K=2$		

On utilise les abaques figure 6 et 7 :

En boucle ouverte ( $z=0,7$ ), la réponse indicielle présentera un dépassement de 5% et le temps de réponse à 5% sera égal à 1,5s (temps de réponse réduit de 3, on divise par  $\omega_0$  pour trouver  $t_{r5\%}$ ).

En boucle fermée ( $z_{BF}=0,3$ ), la réponse indicielle présentera un dépassement de 37% (on peut aussi utiliser la formule donnée à côté de l'abaque) et le temps de réponse à 5% sera égal à 2,2s (temps de réponse réduit de 10, on divise par  $\omega_{0BF}$  pour trouver  $t_{r5\%}$ ).

### Exploitation des résultats / Effets du correcteur P (proportionnel)

- Dynamique : le coefficient d'amortissement est égal à  $z_{BF} = \frac{z}{\sqrt{1+KA}} = \frac{z}{\sqrt{1+K_{BO}}}$

Plus  $K$  augmente, plus  $K_{BO}$  augmente, plus  $z_{BF}$  diminue donc plus le système est nerveux. On ne peut pas conclure quant à la rapidité. La rapidité peut être augmentée si le système n'est pas trop nerveux (pas trop de dépassements).

- Précision :

→ Calcul de l'erreur statique : on utilise le théorème de la valeur finale et pour calculer  $\varepsilon(p)$ , on utilise la formule de Black :  $\frac{\varepsilon(p)}{E(p)} = \frac{1}{1+KF(p)}$ .  $e(t)$  est un échelon (on calcule l'erreur statique) donc  $E(p) = \frac{E_0}{p}$ .

$$\varepsilon_s = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{E(p)}{1+KF(p)} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{\frac{E_0}{p}}{1+KF(p)} = \frac{E_0}{1+KA} = \frac{E_0}{1+K_{BO}}$$

Plus K augmente, plus  $K_{BO}$  augmente, plus  $\varepsilon_s$  diminue donc plus le système est précis mais l'erreur statique ne peut pas être annulée par le correcteur proportionnel.

→ Calcul de l'erreur de trainage : on reprend le même calcul mais l'entrée est une rampe  $e(t) = E_0 t U(t)$  et  $E(p) = \frac{E_0}{p^2}$ .

$$\varepsilon_T = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{E(p)}{1+KF(p)} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{\frac{E_0}{p^2}}{1+KF(p)} = \infty$$

L'erreur de trainage est infinie mais on montre que lorsque K augmente l'écart entre l'entrée et la sortie tend moins vite vers l'infini

**On en conclue donc que plus K augmente donc plus le système est précis.**

Remarque :

*En ce qui concerne la précision, on trouve exactement les mêmes résultats que dans le paragraphe 4.2. (pour une fonction du 1<sup>er</sup> ordre). Ceci s'explique par le fait que le régime permanent (et donc la précision) ne dépend que du gain statique et les fonctions considérées dans les paragraphes 4.2 et 5.2 ont le même gain statique.*

D'une manière générale, **le correcteur proportionnel améliore la précision et rend le système plus nerveux.**

## **VI. Notion de pôle dominant**

Reprenons le cas d'un système du second ordre avec un coefficient d'amortissement  $\zeta > 1$ . On a

$$\text{alors } y(t) = X_0 A \left( 1 + A_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} + A_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right) U(t).$$

Les deux pôles sont  $p_1 = -\frac{1}{\tau_1}$  et  $p_2 = -\frac{1}{\tau_2}$  ;  $\tau_1$  et  $\tau_2$  sont les constantes de temps.

**Cas où  $\tau_1 \gg \tau_2$**  : dans ce cas, le terme  $A_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}}$  va tendre vers zéro beaucoup plus vite que le terme  $A_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}}$ . Lorsque le terme  $A_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}} \cong 0$ , la réponse va se confondre avec celle d'un système du 1<sup>er</sup> ordre  $y(t) = X_0 A \left( 1 + A_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right) U(t)$ .

C'est la constante de temps la plus grande (donc la plus lente) qui va imposer le régime transitoire. Si  $\tau_1$  est suffisamment grande devant  $\tau_2$ , la réponse va être quasiment confondue avec celle d'un système du 1<sup>er</sup> ordre (figure 9). La constante de temps  $\tau_2$  n'aura d'influence qu'au début du régime transitoire avant que le terme  $A_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}}$  devienne négligeable (figure 10).

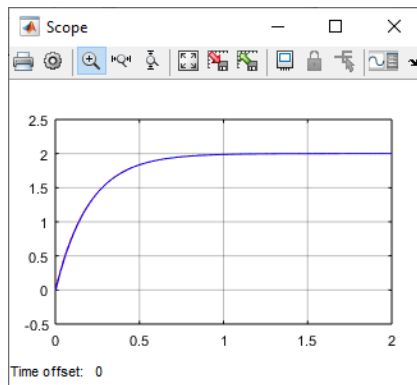


Figure 9

En bleu la réponse du système d'un second ordre avec  $\tau_1 \gg \tau_2$  et en rouge la réponse d'un système du 1<sup>er</sup> ordre de constante de temps  $\tau_1$ .

Zoom autour de  $t=0$

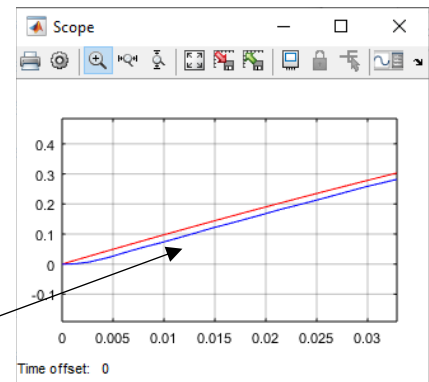


Figure 10

### Conclusion :

Lorsque  $\tau_1 \gg \tau_2$  (donc  $[p_1] \ll [p_2]$ ), la fonction de transfert du 2<sup>nd</sup> ordre peut être approximée par une fonction de transfert du 1<sup>er</sup> ordre de même gain statique et de constante de temps  $\tau_1$

$\tau_1$  est appelé **constante de temps dominante** et  $p_1 = -\frac{1}{\tau_1}$  est le **pôle dominant**.

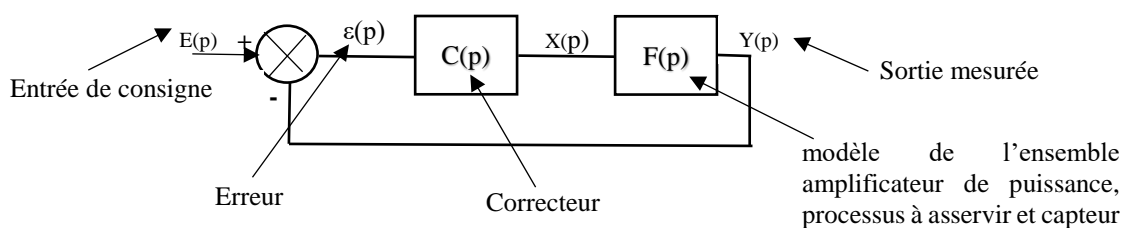
### Généralisation

**Règle de reconnaissance des pôles dominants** : le ou les pôles dominants sont les pôles les plus petits en module.

**Intérêt** : modéliser un système d'ordre  $m$  par un système d'ordre  $n$  avec  $n < m$ . Simplifier la modélisation et l'étude.

## VII. Précision des systèmes asservis

On veut étudier l'erreur  $\varepsilon$ =(entrée-sortie mesurée) en régime **permanent**. On se place dans le cas d'un retour unitaire :



On utilise le **théorème de la valeur finale** :  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p)$ , formule **valable si et seulement si le système est stable !**

Pour calculer  $\varepsilon(p)$ , on utilise la formule de Black :  $\frac{\varepsilon(p)}{E(p)} = \frac{1}{1+C(p)F(p)}$  : l'erreur s'exprime donc en fonction de l'entrée et de la fonction de **transfert en boucle ouverte** (FTBO)  $C(p)F(p)$ .

On met la FTBO  $C(p)F(p)$  sous la forme suivante :  $C(p)F(p) = \frac{\beta}{p^\alpha} G(p)$  avec  $G(0)=1$ ,  $\beta$  un réel et  $\alpha$  est un entier positif qui représente le nombre d'intégrations à l'origine ( $\alpha$ =nombre d'intégrateurs dans la FTBO).

On a alors  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{E(p)}{1+C(p)F(p)} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{E(p)}{1+\frac{\beta}{p^\alpha} G(p)} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{E(p)}{1+\frac{\beta}{p^\alpha}}$  (car  $G(0)=1$ ).

On peut calculer l'erreur pour différents types d'entrée :

- **Entrée échelon** :  $e(t)=E_0U(t)$ ,  $E(p) = \frac{E_0}{p}$ . L'erreur est alors appelée **erreur statique**. On reprend le calcul précédent et on remplace  $E(p)$  par son expression :

$$\varepsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{\frac{E_0}{p}}{1 + \frac{\beta}{p^\alpha}} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{E_0}{1 + \frac{\beta}{p^\alpha}}$$

\* Si  $\alpha=0$ , alors  $\varepsilon_s = \frac{E_0}{1+\beta} = \frac{E_0}{1+K_{BO}}$ . Dans ce cas ( $\alpha=0$ ),  $\beta$  est le gain statique en boucle ouverte ( $\beta = \lim_{p \rightarrow 0} C(p)F(p) = \text{gain statique de la FTBO} = K_{BO}$ ) et l'erreur statique est d'autant plus faible que  $K_{BO}$  est grand. On retrouve le résultat vu aux paragraphes 4.2. et 5.2)

\* Si  $\alpha \geq 1$ , alors  $\varepsilon_s = 0$ . Si la fonction de transfert possède au moins une intégration à l'origine, alors l'erreur statique est nulle. On peut d'ailleurs remarquer que le gain statique en boucle ouverte est cette fois « infini » (vrai pour  $\alpha \geq 1$ ) et comme l'erreur statique est inversement proportionnelle au gain statique en boucle ouverte, elle est nulle.

- **Entrée rampe** :  $e(t)=E_0tU(t)$ ,  $E(p) = \frac{E_0}{p^2}$ . L'erreur est alors appelée **erreur de traînage**.

On reprend le même calcul que précédemment, mais on remplace  $E(p)$  par  $\frac{E_0}{p^2}$  :

$$\varepsilon_T = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{\frac{E_0}{p^2}}{1 + \frac{\beta}{p^\alpha}} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{E_0}{p + \frac{\beta}{p^{\alpha-1}}} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{E_0}{\frac{\beta}{p^{\alpha-1}}}$$

\* Si  $\alpha=0$ , alors  $\varepsilon_T = \infty$

\* Si  $\alpha=1$ ,  $\varepsilon_T = \frac{E_0}{\beta}$ , l'erreur de traînage est d'autant plus faible que  $\beta$  est grand.

\* Si  $\alpha \geq 2$ , alors  $\varepsilon_T = 0$ . Si la fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO) possède au moins deux intégrations à l'origine, alors l'erreur de traînage est nulle.

### **Tableau récapitulatif :**

***Ces résultats sont valables si et seulement si le système est stable.***

***$\alpha$  est appelé classe du système et est égal au nombre d'intégrateurs dans la FTBO.***

**Résultats en rouge à savoir**

Résultats à savoir retrouver

	$\alpha=0$	$\alpha=1$	$\alpha \geq 2$
<b><i>Entrée échelon</i></b>	$\varepsilon_s = \frac{E_0}{1+\beta} = \frac{E_0}{1+K_{BO}} = \text{cste} \neq 0$	$\varepsilon_s = 0$	$\varepsilon_s = 0$
<b><i>Entrée rampe</i></b>	$\varepsilon_T = \infty$	$\varepsilon_T = \frac{E_0}{\beta} = \text{cste}$	$\varepsilon_T = 0$

**Conclusion**

- Pour un système donné, plus le  $\beta$  est élevé, plus le système est précis.
- Plus un système a un nombre important d'intégrations à l'origine, plus il est précis, mais plus il aura tendance à être instable (dilemme précision stabilité).

**VIII. Lieux de transfert des systèmes asservis**

Comme il a été dit dans le paragraphe II, le système à asservir est modélisé par sa fonction de transfert  $\underline{F}(j\omega)$ .

**8.1. Lieux de Nyquist**

Quand la pulsation  $\omega$  varie de zéro à l'infini, l'extrémité M du vecteur image de la fonction de transfert  $\underline{F}(j\omega)$ , dans le plan complexe, parcourt un lieu appelé « lieu de Nyquist », qu'il faut graduer en  $\omega$ .

Le point M est repéré par :

- son module  $OM$  et son argument  $\varphi$  tels que  $\varphi = \arg(\underline{F}(j\omega))$  et le module  $OM = |\underline{F}(j\omega)|$
- ou alors par sa partie réelle  $\text{Re}(\underline{F}(j\omega))$  et imaginaire  $\text{Im}(\underline{F}(j\omega))$  (voir représentation figure 11)

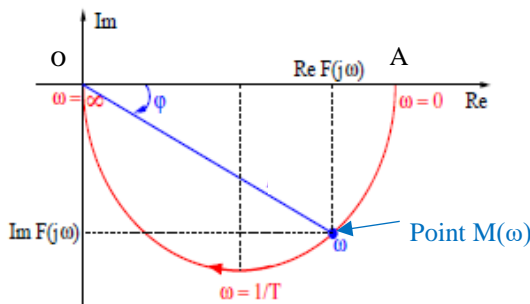


Figure 11 : lieu de Nyquist de  $\underline{F}(j\omega) = \frac{A}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$

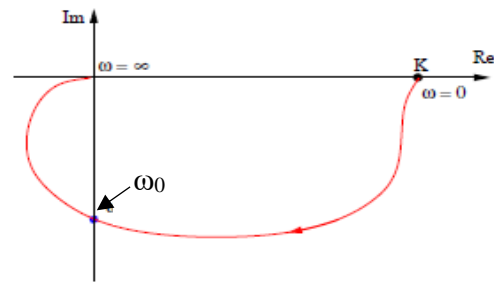


Figure 12 : de  $\underline{F}(j\omega) = \frac{A}{1+2zj\frac{\omega}{\omega_0}+(j\frac{\omega}{\omega_0})^2}$

NB : Sur les figures 11 et 12,  $A > 0$ .

**Analyse courbe figure 11**

Elle représente le diagramme de Nyquist d'une fonction passe-bas du 1<sup>er</sup> ordre.

- Point de départ de la courbe : ( $\omega=0$ ) sur l'axe de abscisses car  $\underline{F}(0)=A$  réel positif.
- Point d'arrivée ( $\omega$  infini) : l'origine car  $\underline{F}(j\omega)$  tend vers 0 quand  $\omega$  tend vers l'infini.
- Le module  $OM = \frac{A}{\sqrt{1+(\frac{\omega}{\omega_0})^2}}$  est strictement décroissant et varie de  $A$  pour  $\omega=0$  à 0 pour  $\omega$

infini → la courbe va du point A vers O en 's'enroulant' car la distance  $OM$  décroît au fur à mesure que  $\omega$  augmente.

- L'argument  $\varphi = -\arctan \frac{\omega}{\omega_0}$  est strictement décroissant et varie de 0 pour  $\omega=0$  (car  $A$  est positif) à  $-90^\circ$  pour  $\omega$  infini. La courbe 's'enroule' mais reste dans le quadrant inférieur droit et arrive au point O en tangentant l'axe imaginaire (car  $\varphi$  tend vers  $-90^\circ$  quand  $\omega$  tend vers l'infini).



**Analyse courbe figure 12**

Elle représente le diagramme de Nyquist d'une fonction passe-bas du 2<sup>nd</sup> ordre.

- Point de départ de la courbe : ( $\omega=0$ ) sur l'axe de abscisses car  $\underline{F}(0)=A$  réel positif.
- Point d'arrivée ( $\omega$  infini) : l'origine car  $\underline{F}(j\omega)$  tend vers 0 quand  $\omega$  tend vers l'infini.

On voit sur la courbe que lorsque le point M décrit la courbe, la distance OM n'est pas strictement décroissante. La fonction présente une résonance. On en déduit que la figure 12 représente une fonction dont le coefficient d'amortissement  $z$  est inférieur à  $1/\sqrt{2}$ .

- L'argument  $\varphi$  est strictement décroissant et varie de 0 pour  $\omega=0$  (car  $A$  est positif) à  $-180^\circ$  pour  $\omega$  infini. La courbe reste dans les 2 quadrants inférieurs et arrive au point O en tangentant l'axe réel négatif (car  $\varphi$  tend vers  $-180^\circ$  quand  $\omega$  tend vers l'infini).

N.B. : le point d'intersection de la courbe avec l'axe imaginaire correspond à la pulsation  $\omega_0$  car  $\text{Arg}\underline{F}(j\omega_0)=-90^\circ$ .

**8.2. Lieux de Bode**

On étudie séparément l'évolution du gain de la fonction de transfert  $20\log|\underline{F}(j\omega)|$  (exprimé en décibels) et de son argument en fonction de la pulsation. On utilise une échelle semi-log : les abscisses en échelle log et les ordonnées en échelle linéaire.

*Cf : cours d'électricité générale*

**8.3. Lieu de Black**

On représente le gain de la fonction de transfert  $20\log|\underline{F}(j\omega)|$  (exprimé en dB) en fonction de son argument. La courbe est graduée en pulsation  $\omega$ . Cela revient à rassembler les deux courbes de Bode en une seule. On utilise une échelle linéaire en abscisses et en ordonnées.

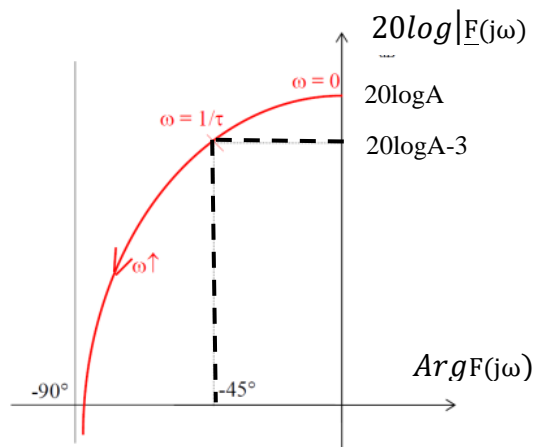


Figure 13 : lieu de Black de  $\underline{F}(j\omega) = \frac{A}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$

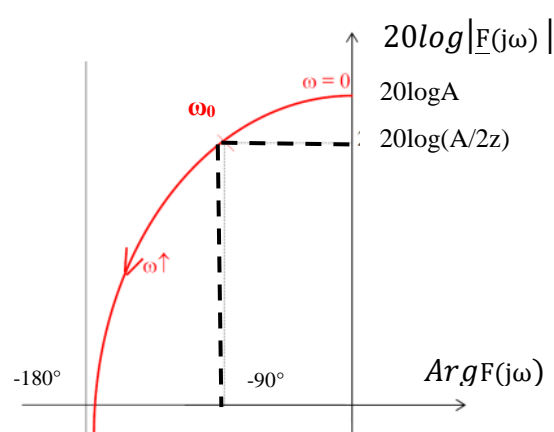


Figure 14 : et de  $\underline{F}(j\omega) = \frac{A}{1+2zj\frac{\omega}{\omega_0}+(j\frac{\omega}{\omega_0})^2}$

**Analyse courbe figure 13**

Elle représente le diagramme de Black d'une fonction passe-bas du 1<sup>er</sup> ordre.

- Point de départ de la courbe : ( $\omega=0$ ) sur l'axe de ordonnées car  $20\log|\underline{F}(0)| = A$  ( $A>0$ ) et  $\varphi = -\text{artan}0 = 0$ .
- Asymptote verticale en  $-90^\circ$  : car l'argument tend vers  $-90^\circ$  quand  $\omega$  tend vers l'infini et le gain lui tend vers moins l'infini ( $\lim_{\omega \rightarrow \infty} |\underline{F}(j\omega)| = 0$ , donc  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} 20\log|\underline{F}(j\omega)| = -\infty$ ).



- Le module  $OM = \frac{A}{\sqrt{1+(\frac{\omega}{\omega_0})^2}}$  est strictement décroissant et varie de A pour  $\omega=0$  à 0 pour  $\omega$  infini

donc le gain est lui aussi strictement décroissant de  $20\log A$  à  $-\infty$ .

- L'argument  $\varphi = -\arctan \frac{\omega}{\omega_0}$  est strictement décroissant et varie de 0 pour  $\omega=0$  (car A est positif) à  $-90^\circ$  pour  $\omega$  infini.

→ Quand  $\omega$  augmente, le point sur la courbe descend et va vers la gauche avec une tangente à  $-90^\circ$  (gain et argument strictement décroissants).

**Point particulier à  $\omega_0 = 1/\tau$  :**

$\underline{F}(j\omega_0) = \frac{A}{1+j}$  donc le gain  $20\log |\underline{F}(j\omega_0)| = 20\log \frac{A}{\sqrt{2}} = 20\log A - 3\text{dB}$  ( $\omega_0$  est la pulsation de coupure à -3dB) et  $\text{Arg} \underline{F}(j\omega_0) = -45^\circ$  ( $A>0$  donc  $\arg A=0$ )

### Analyse courbe figure 14

Elle représente le diagramme de Black d'une fonction passe-bas du 2<sup>nd</sup> ordre.

On a exactement le même raisonnement que précédemment mais l'asymptote verticale est à  $-180^\circ$  car l'argument est strictement décroissant et varie de 0 pour  $\omega=0$  (car A est positif) à  $-180^\circ$  pour  $\omega$  infini (passe bas du second ordre).

Le gain est strictement décroissant. Il n'y a donc pas de résonance. On en déduit que la figure 14 représente une fonction dont le coefficient d'amortissement z est supérieur à  $1/\sqrt{2}$ .

**Point particulier à  $\omega_0$  :**

$\underline{F}(j\omega_0) = \frac{A}{2zj}$  donc  $20\log |\underline{F}(j\omega_0)| = 20\log \frac{A}{2z}$  et  $\text{Arg} \underline{F}(j\omega_0) = -90^\circ$  ( $A>0$  donc  $\arg A=0$ ).

## IX. Stabilité des systèmes asservis

### 9.1. Critère fondamental de stabilité

Un système au repos est excité par une impulsion de Dirac. Cette brève impulsion va déranger le système. S'il revient à sa position de repos, on le dit stable.

La sortie  $Y(p)$  est liée à l'entrée par la relation :  $Y(p) = H(p)E(p)$ , où  $H(p)$  est la fonction de transfert du système. Or  $E(p)=1$  pour une impulsion de Dirac, donc  $Y(p)=H(p)$ . Soient  $p_i$  les pôles de  $H(p)$ . On peut décomposer  $H(p)$  en éléments simples : (démonstration valable ssi tous les pôles sont distincts)

$$Y(p) = H(p) = \sum \frac{A_i}{p-p_i} \text{ d'où } y(t) = \sum A_i e^{p_i t}$$

Si le système est stable,  $y(t)$  doit tendre vers 0 quand  $t$  tend vers l'infini.

\* Si  $p_i$  est réel :  
 - si  $p_i < 0$ ,  $e^{p_i t}$  tend vers 0 quand  $t$  vers l'infini, le système est stable.  
 - si  $p_i = 0$ , alors  $e^{p_i t} = 1$ , le système est en limite de stabilité.

\* Deux pôles complexes conjugués conduisent à une réponse sinusoïdale, car :

$$e^{p_i t} + e^{\overline{p_i} t} = e^{at} (e^{jbt} + e^{-jbt}) = 2e^{at} \cos bt \text{ avec } \underline{p_i} = a + jb \text{ (} \overline{\underline{p_i}} = a - jb \text{)}$$

- Si  $a < 0$ , alors  $e^{at}$  tend vers 0 quand  $t$  tend vers l'infini : le système est stable.
- Si  $a > 0$ , alors les oscillations sont amplifiées, car  $e^{at}$  tend vers l'infini quand  $t$  tend vers l'infini : le système est instable
- Si  $a = 0$ , alors  $e^{at} = 1$ , on observe des oscillations entretenues. Le système est en limite de stabilité

**Conclusion :**

**Critère fondamental de stabilité : un système est stable si et seulement si tous les pôles de sa fonction de transfert ont leurs parties réelles strictement négatives.**

**N.B.** : Si le système est en boucle fermée le critère s'applique sur la fonction de transfert en boucle fermée.

**9.2. Critère algébrique de Routh-Hurwitz**

Soit le polynôme  $P_n(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$  correspondant au dénominateur de la fonction de transfert du système étudié. ***P<sub>n</sub> est appelé polynôme caractéristique.***

***On s'arrange pour que a<sub>n</sub> soit positif a<sub>n</sub>>0.***

Le système est stable si et seulement si les 2 conditions suivantes sont remplies :

1°) Tous les coefficients a<sub>i</sub> du polynôme caractéristique sont positifs (on rappelle que a<sub>n</sub>>0)

2°) On dresse le tableau de Routh comme suit:

*n° de ligne*

n	a <sub>n</sub>	a <sub>n-2</sub>	a <sub>n-4</sub>	...
n-1	a <sub>n-1</sub>	a <sub>n-3</sub>	a <sub>n-5</sub>	...
n-2	b <sub>1</sub>	b <sub>2</sub>	b <sub>3</sub>	...
n-3	c <sub>1</sub>	c <sub>2</sub>	c <sub>3</sub>	...
.				
.				
.				
1	j <sub>1</sub>			
0	k <sub>1</sub>			

où les coefficients b<sub>1</sub>, b<sub>2</sub>, b<sub>3</sub>, ... de la troisième ligne sont calculés comme suit:

$$b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}} ; \quad b_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}} ; \quad \dots, \text{ jusqu'à l'obtention d'un coefficient nul.}$$

Les coefficients c<sub>1</sub>, c<sub>2</sub>, c<sub>3</sub>, ... de la quatrième ligne sont calculés de façon analogue:

$$c_1 = \frac{b_1 a_{n-3} - a_{n-1} b_2}{b_1} ; \quad c_2 = \frac{b_1 a_{n-5} - a_{n-1} b_3}{b_1} ; \quad \dots,$$

et ainsi de suite.

Les coefficients de la première colonne doivent être tous positifs.

***Critère de Routh : Le système est stable si et seulement si tous les coefficients a<sub>i</sub> du polynôme caractéristique sont positifs et qu'il n'y ait pas de changements de signe dans la suite formée par les coefficients de la première colonne (on rappelle que a<sub>n</sub>>0).***

### 9.3. Critère géométrique du revers

Ce critère s'applique, pour les systèmes en boucle fermée, si la fonction de transfert en boucle ouverte est à **déphasage minimale**, c'est-à-dire, qu'elle ne possède ni de pôle, ni de zéro à partie réelle positive, ni de terme en exponentiel (pas de retard pur).

#### Dans le plan de Nyquist :

Le système est stable en boucle **fermée** si et seulement si le lieu de Nyquist de la **fonction de transfert en boucle ouverte**, parcouru dans le sens des pulsations croissantes, laisse le point  $-1$  à sa **gauche**.

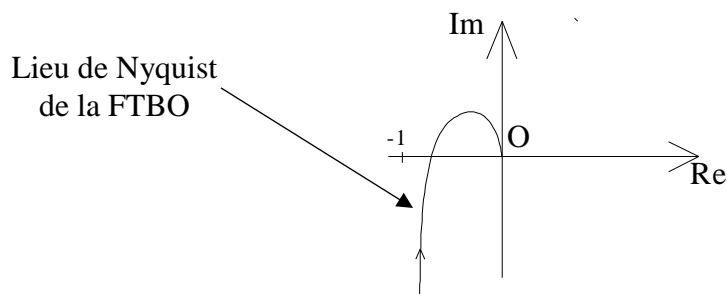


Figure 15

Sur l'exemple de la figure 15, le système est stable.

**N.B.** : Si la courbe passe par le point critique  $-1$ , le système est « juste instable ».

#### Dans le plan de Black :

Le point critique  $-1$  a pour module 1 donc comme gain  $20\log 1 = 0\text{dB}$  et pour argument  $-180^\circ$ . Dans le plan de Black, le point critique se représente par le point  $(-180^\circ, 0\text{dB})$ .

**Le système est stable en boucle fermée si et seulement si le lieu de Black de la fonction de transfert en boucle ouverte  $T(j\omega)$ , parcouru dans le sens des pulsations croissantes, laisse le point  $(-180^\circ, 0\text{dB})$  à sa droite.**

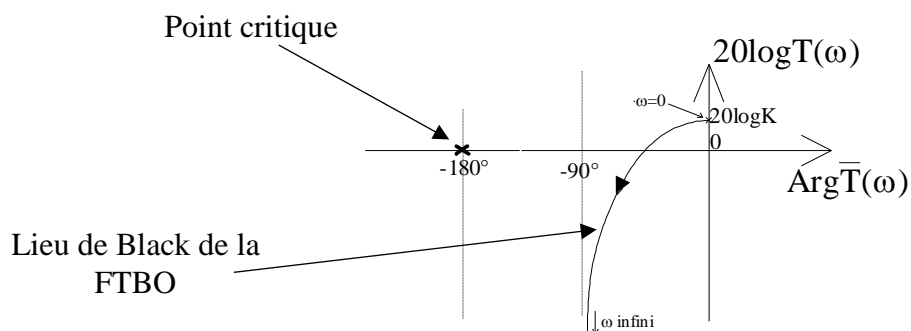


Figure 16

Dans l'exemple de la figure 16, le système est stable.

**Attention !** Le critère du revers ne s'énonce pas de la même façon dans les plans de Black et de Nyquist ! De plus, le critère du revers s'applique sur la courbe de la fonction de transfert en boucle ouverte, mais concerne la stabilité en boucle fermée !

### Dans le plan de Bode

Le point critique est toujours  $(-180^\circ, 0\text{dB})$ . Si on traduit le critère du revers de façon analytique, il vient que le système est stable si :

- Au point où  $\text{Arg}(\bar{T}(\omega_0)) = -180^\circ$ , le module est inférieur à 1 :  $T(\omega_0) < 1$ , soit  $20\log T(\omega_0) < 0\text{dB}$ .
- Au point où le module est égal à 1 soit  $20\log T(\omega_1) = 0\text{dB}$ , la phase est supérieure à  $-180^\circ$  :  $\text{Arg}(\bar{T}(\omega_1)) > -180^\circ$ .

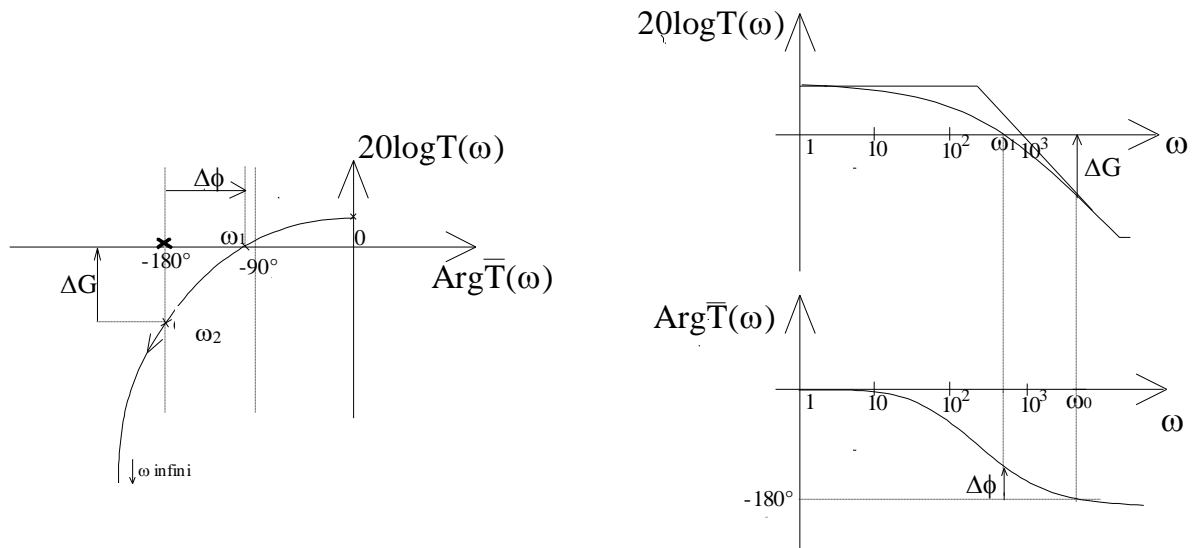


Figure 17

Dans le plan de Bode, le système est stable en boucle fermée, si et seulement si la courbe de sa fonction de transfert en boucle ouverte passe en dessous du niveau 0dB quand la phase vaut  $-180^\circ$ . (Voir figure 17).

Dans les deux cas de la figure 17, le système est stable en boucle fermée.

A partir du critère du revers, on définit **la marge de gain et de phase, qui permettent de quantifier l'éloignement du système de l'instabilité (quantifier le degré de stabilité)**.

- **Marge de phase** :  $\Delta\phi = 180 + \arg \underline{T}(j\omega_1)$ , avec  $\omega_1$  tel que  $20\log |\underline{T}(j\omega_1)| = 0\text{dB}$ .
- **Marge de gain** :  $\Delta G = -20\log |\underline{T}(j\omega_2)|$ , avec  $\omega_2$  tel que  $\arg \underline{T}(j\omega_2) = -180^\circ$ .

**Le système est stable si et seulement si les marges de gain et de phase sont strictement positives.** On a représenté, figure 17, ces marges dans le plan de Black et Bode.

Plus les marges de phase et de gain sont petites (mais positives), plus le système est nerveux.

**Repère :** *une marge de phase de  $45^\circ$  correspond à une réponse indicelle avec un premier dépassement de l'ordre de 25%.*

## **X. Correction des systèmes asservis**

Un correcteur sert à régler les performances du système asservi.

### **10.1. Correcteur proportionnel**

Le correcteur est de la forme  $C(s)=K$ , où  $K$  est positif.

**En statique** : l'erreur statique diminue si  $K$  augmente (voir paragraphes précédents) 4.2., 5.2 et VII)

**En dynamique** : Le correcteur proportionnel ne rajoute que du gain à la fonction de transfert en boucle ouverte. En effet, la fonction de transfert en boucle ouverte du système corrigé s'écrit  $T(p)=KF(p)$ .

On a -  $20\log|T(j\omega)| = 20\log|KF(j\omega)| = 20\log(K|F(j\omega)|) = 20\log K + 20\log|F(j\omega)|$   
 et -  $\text{Arg}T(j\omega) = \text{Arg}KF(j\omega) = \text{Arg}K + \text{Arg}F(j\omega) = \text{Arg}F(j\omega)$  car  $\text{Arg}K=0$  ( $K$  est un réel positif).

Dans le plan de Bode ou de Black, la courbe de  $KF(j\omega)$  se déduit de celle de  $F(j\omega)$  par translation verticale de  $20\log K$ . On se rapproche donc du point critique et si  $20\log K$  est supérieur à la marge de gain, le système devient instable.

Pour un système du premier ordre, la phase ne dépasse pas  $-90^\circ$ , donc le système ne peut pas devenir instable. Plus  $K$  augmente, plus le système est rapide. On se rapproche de l'instabilité, car on diminue la marge de phase. Le système devient de plus en plus nerveux sans jamais être instable. (Attention à la validité du modèle !)

Pour un système du 2<sup>nd</sup> ordre (avec coefficient d'amortissement  $\zeta > 0$ ), la phase ne dépasse pas  $-180^\circ$ , donc le système ne peut pas devenir instable. Plus  $K$  augmente, plus le système est oscillatoire, car on se rapproche de l'instabilité, mais sans jamais l'atteindre. (Attention à la validité du modèle !).

En conclusion, un correcteur proportionnel augmente la rapidité du système tant qu'il n'est pas trop oscillatoire

Si  $K$  est trop grand ( $20\log K > \Delta G$ ), alors le système devient instable : dilemme rapidité-stabilité.