

Travaux Pratiques d'Automatique

Synthèse Générale

Basile Masson et Alexis Kittler, GE2

Année 2022-2023

1. Question de cours

- (a) Montrer que toutes les bases ont même cardinal.
- (b) Montrer le théorème de la base incomplète : à partir de G génératrice et de L libre on peut former B base.
- (c) Montrer l'existence d'un supplémentaire en dimension finie.

2. Réponse harmonique

- (a) Montrer que tout endomorphisme de rang $r \geq 1$ est somme de r endomorphismes de rang 1.
- (b) Soit $f : \mathbb{C}[\mathbb{X}] \rightarrow \mathbb{C}[\mathbb{X}]$ telle que $f(P) = P(X+1) - P(X)$.
 - 1) Montrer que f est linéaire
 - 2) Trouver le noyau de f
 - 3) Injectivité et surjectivité de f ?
 - 4) Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{C}[\mathbb{X}]$ notée $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$, telle que : $\forall i \in \mathbb{N}^*, f(e_i) = e_{i-1}$
 - 5) Exprimer la matrice de la restriction de f à $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ dans la base restreinte (e_0, \dots, e_{n-1}) et en déduire que cette restriction est nilpotente
- (c) Sur les matrices de trace nulle :

Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension finie $n \geq 2$ et u un endomorphisme de E .

 - 1) On suppose que : $\forall x \in E, (x, u(x))$ est liée. Montrer que u est une homothétie
 - 2) En déduire que toute matrice de trace nulle est semblable à une matrice de coefficients diagonaux nuls
 - 3) Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Montrer l'équivalence entre :
 - (i) $tr(A) = 0$
 - (ii) $\exists U, V \in M_n(\mathbb{K}), A = UV - VU$

Indication : On pourra considérer l'image de $\phi : M \rightarrow MD - DM$ où $D = \text{diag}(i), i \in \llbracket 1, n \rrbracket$
- (d) Soit une forme linéaire f vérifiant : $\forall X, Y \in M_n(\mathbb{K}), f(XY) = f(YX)$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que : $f = \lambda \cdot tr$
- (e) Sur les hyperplans de $M_n(\mathbb{K})$:
 - 1) Montrer que $\Phi : A \rightarrow (M \rightarrow tr(AM))$ est un isomorphisme entre $M_n(\mathbb{K})$ et son dual.
 - 2) En déduire que tout hyperplan de $M_n(\mathbb{K})$ rencontre $GL_n(\mathbb{K})$
- (f) Montrer que la famille $(x \rightarrow |x - a|)_{a \in \mathbb{R}}$ est libre (à définir pour un ensemble non discret)

- (g) 1) Soit $f \in L(\mathbb{R}^3)$ telle que : $f^3 = 0$ et $f^2 \neq 0$. Montrer qu'il existe une base de \mathbb{R}^3 telle que la matrice de f dans cette base s'écrive :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 2) Soit $f \in L(\mathbb{R}^3)$ telle que : $f^2 = 0$ et $f \neq 0$. Montrer que f est de rang 1

- (h) Sur l'indice de nilpotence :

Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}$ et u un endomorphisme nilpotent de E , d'indice de nilpotence $k \in \mathbb{N}$.

- 1) Montrer que $k \leq n$

- 2) Montrer que u ne peut être inversible

- 3) Soient u_1, \dots, u_n n endomorphismes nilpotents commutant 2 à 2. Montrer que $u_1 \circ \dots \circ u_n = 0$

- (i) Sur la formule de Grassman :

Soit E un \mathbb{K} -ev et soient $S = (u_1, \dots, u_n)$ un système de vecteurs de E et $S' = (u_1, \dots, u_p)$ extrait de S (i.e : $p \leq n$). Si l'on note $r = \dim(S)$, montrer alors que : $\dim(S') \geq r + p - n$

- (j) Sur la supplémentarité :

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ et F et G deux sous-espaces vectoriels de E de dimension $p \leq n$. Montrer que F et G admettent un supplémentaire commun.

- (k) Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}$ et u et v 2 endomorphismes de E .

- 1) Montrer que : $rg(u \circ v) = rg(v) - \dim(\text{Im}(v) \cap \text{Ker}(u)) = rg(u) - n + \dim(\text{Im}(v) + \text{Ker}(u))$

- 2) En déduire : $rg(u) + rg(v) - n \leq rg(u \circ v) \leq \min(rg(u), rg(v))$

- (l) Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}$ et u un endomorphisme de E . Montrer qu'on peut écrire : $u = g \circ p$ avec g inversible et p projecteur