

Appunti di Metodi e Modelli Matematici per l'IA

"Fondamenti sui Numeri Complessi"

Definizione e Rappresentazione dei Numeri Complessi

X

Introduzione ai Numeri Complessi: motivazione storica, definizione di numero complesso, identificazione canonica (rappresentazione algebrica), rappresentazione trigonometrica.

X

1. Motivazione Storica

MOTIVAZIONE. (*Numeri complessi*)

Lo scopo storico dei numeri complessi \mathbb{C} è quello di risolvere le equazioni del tipo

$$\begin{cases} a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = 0 \\ a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

di cui alcune non ne hanno soluzione; ad esempio si prende

$$x^2 = -1$$

che non ha soluzione definita in \mathbb{R} , in quanto tutti i numeri moltiplicati per se stessi *due volte* sono sempre positivi.

Quindi vi è una necessità di "ampliare" i numeri reali in un modo tale da poter ottenere delle *soluzioni* di queste equazioni.

X

2. Definizione di Numero Complesso

Costruiamo (seppur in una maniera veloce, comunque esaustiva) il campo dei *numeri complessi*.

#Definizione

Definizione (unità immaginaria).

Si definisce l'*unità immaginaria* i come quel numero tale che $i^2 = -1$.

#Definizione

Definizione (numero complesso).

Siano $a, b \in \mathbb{R}$ e sia i l'*unità immaginaria*. Allora

$$z := a + ib$$

si dice *numero complesso*.

#Lemma

Lemma (identificazione univoca dei numeri complessi).

Sia $z = a + ib \in \mathbb{C}$ un numero complesso. Allora l'applicazione $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita come

$$\pi(z) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

è *biettiva*. Questo modo di rappresentare i numeri complessi si dice *identificazione canonica*.

In particolare possiamo definire gli operatori $\text{Re}, \text{Im} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ come

$$\pi(z) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \text{Re } z \\ \text{Im } z \end{pmatrix}$$

X

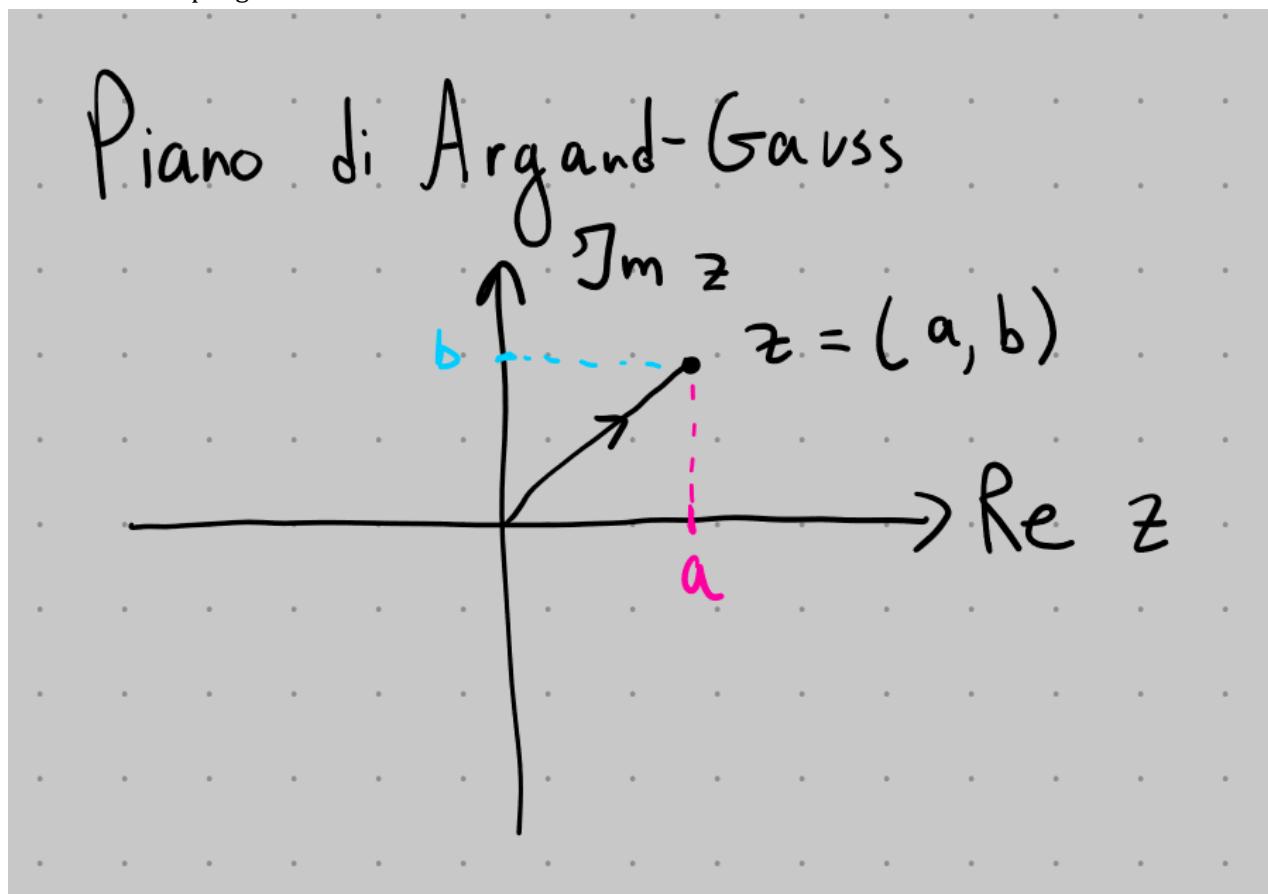
3. Rappresentazione dei Numeri Complessi sul piano di Argand-Gauss

#Osservazione

OSSERVAZIONE. (*Piano di Argand-Gauss*)

Se prendiamo il *piano cartesiano* π applicando le regole definite per \mathbb{C} , allora otterremo il piano di *Gauss* (oppure di *Argand-Gauss*), dove ogni punto del piano è un *numero complesso*.

Eccovi un esempio grafico:



Infatti, geometricamente un punto z può rappresentare un vettore geometrico ([Vettori Liberi](#)) con punto di applicazione $(0, 0)$.

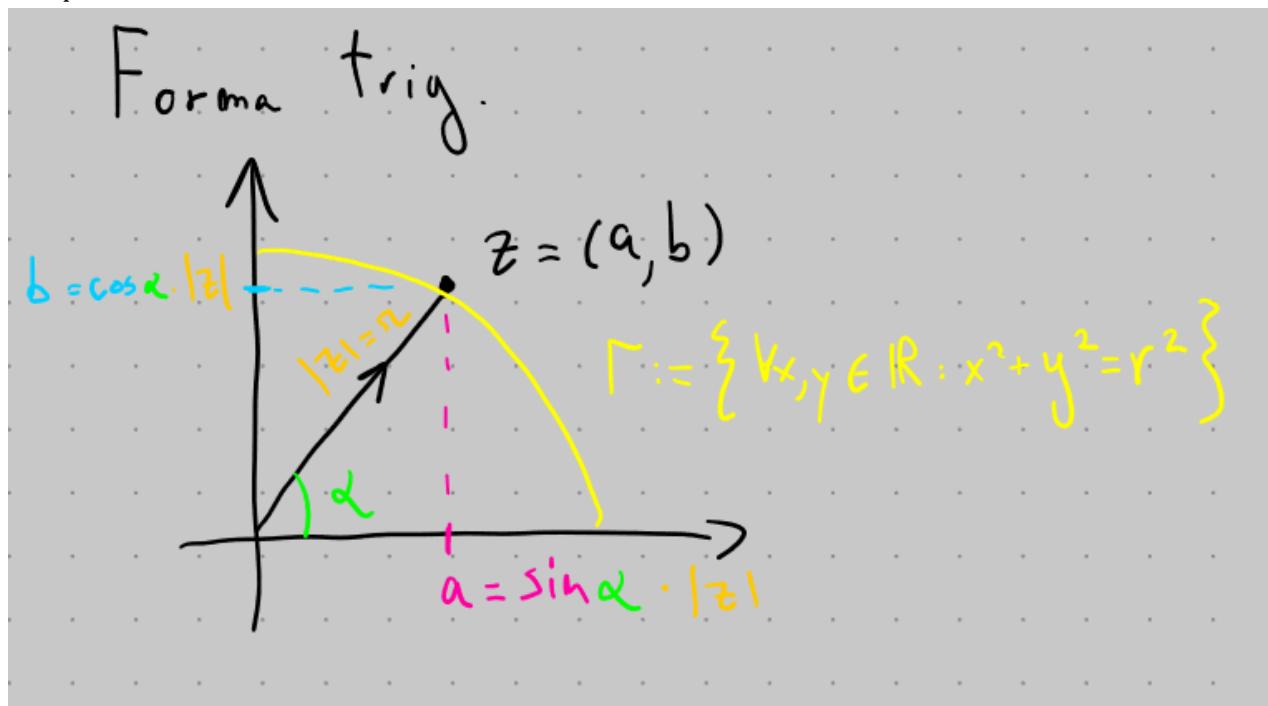
Chiamiamo un punto del piano come z , che può essere scritto come

$$z = \operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z)$$

4. Rappresentazione Trigonometrica

Oltre alla rappresentazione "algebrica" dei numeri complessi \mathbb{C} ([Rappresentazione dei Numeri Complessi](#)), è possibile anche considerare un'altra rappresentazione che fa uso delle [Funzioni trigonometriche](#).

DISCUSSIONE INFORMATICA. Prendiamo un $z \in \mathbb{C}$, che secondo l'*identificazione canonica* $\mathbb{C} \sim \mathbb{R}^2$, vuol dire prendere un vettore:



Allora secondo le definizioni del seno e del coseno ([Funzioni trigonometriche](#), **DEF 1.**) possiamo considerare

$$\begin{aligned} a &= \cos \alpha \cdot |z| \\ b &= \sin \alpha \cdot |z| \end{aligned}$$

dove $|z|$ rappresenta il *modulo* di z . ([Operazioni sui Numeri Complessi](#), **DEF 4.**)

Dunque

$$z = a + ib = |z|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

e lo si può scrivere come

$$z \sim (|z|, [\alpha])$$

che si legge come " z lo rappresento come $(|z|, [\alpha])$ ".

#Lemma

Lemma (numeri complessi in forma trigonometrica).

Sia $z = a + ib \in \mathbb{C}$ e consideriamo l'identificazione canonica $z \sim (a, b) \in \mathbb{R}^2$. Supponiamo inoltre $z \neq 0$.

Allora esiste ed è unica la coppia $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^+, [0, 2\pi)$ tale che z possa essere identificata come

$$\begin{cases} a = \rho \cos \theta \\ b = \rho \sin \theta \end{cases}$$

In particolare possiamo calcolare la funzione coordinante $\tau : \mathbb{C} \setminus (0) \longrightarrow \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi)$ come segue:

$$\tau(z) = \begin{pmatrix} \tau_1(z) \\ \tau_2(z) \end{pmatrix}$$

con

$$|z| := \tau_1(z) = \sqrt{a^2 + b^2}$$

e

$$\arg z := \tau_2(z \sim (a, b)) = \begin{cases} \arctan \frac{b}{a}, & a \neq 0 \\ \frac{\pi}{2}, & a = 0 \wedge y > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & a = 0 \wedge y < 0 \end{cases}$$

In particolar modo si ha che τ è biettiva.

#Definizione

Definizione (modulo e argomento di un numero complesso).

Sia $z = a + ib \in \mathbb{C}$, con la sua rappresentazione trigonometrica $z \sim (\rho, \theta)$. Allora:

- ρ si dice *modulo* di z
- θ si dice *argomento* di z

In particolar modo si scriverà

$$z = a + ib = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$$

N.B. L'argomento di un numero complesso z è *univocamente definita* se e solo se si restringe a considerare $\theta \in [0, 2\pi[$; altrimenti si avrebbe che z può essere rappresentato da più forme trigonometriche, con $\theta = \theta + 2\pi k$, con $k \in \mathbb{Z}$ (questo ultimo numero rappresenta k rotazioni sul piano).

Operazioni Interne nel Campo Complesso

X

Operazioni interne nel campo complesso: complesso coniugato associato e modulo.

X

0. Voci correlate

- [Definizione e Rappresentazione dei Numeri Complessi](#)

1. Coniugo e Modulo

Vediamo un paio di *operazioni interne nel campo complesso*, di cui *complesso coniugato e modulo*.

#Definizione

Definizione (coniugato di un numero complesso).

Sia $z = a + ib \in \mathbb{C}$ un numero complesso. Si definisce il suo *coniugato* come

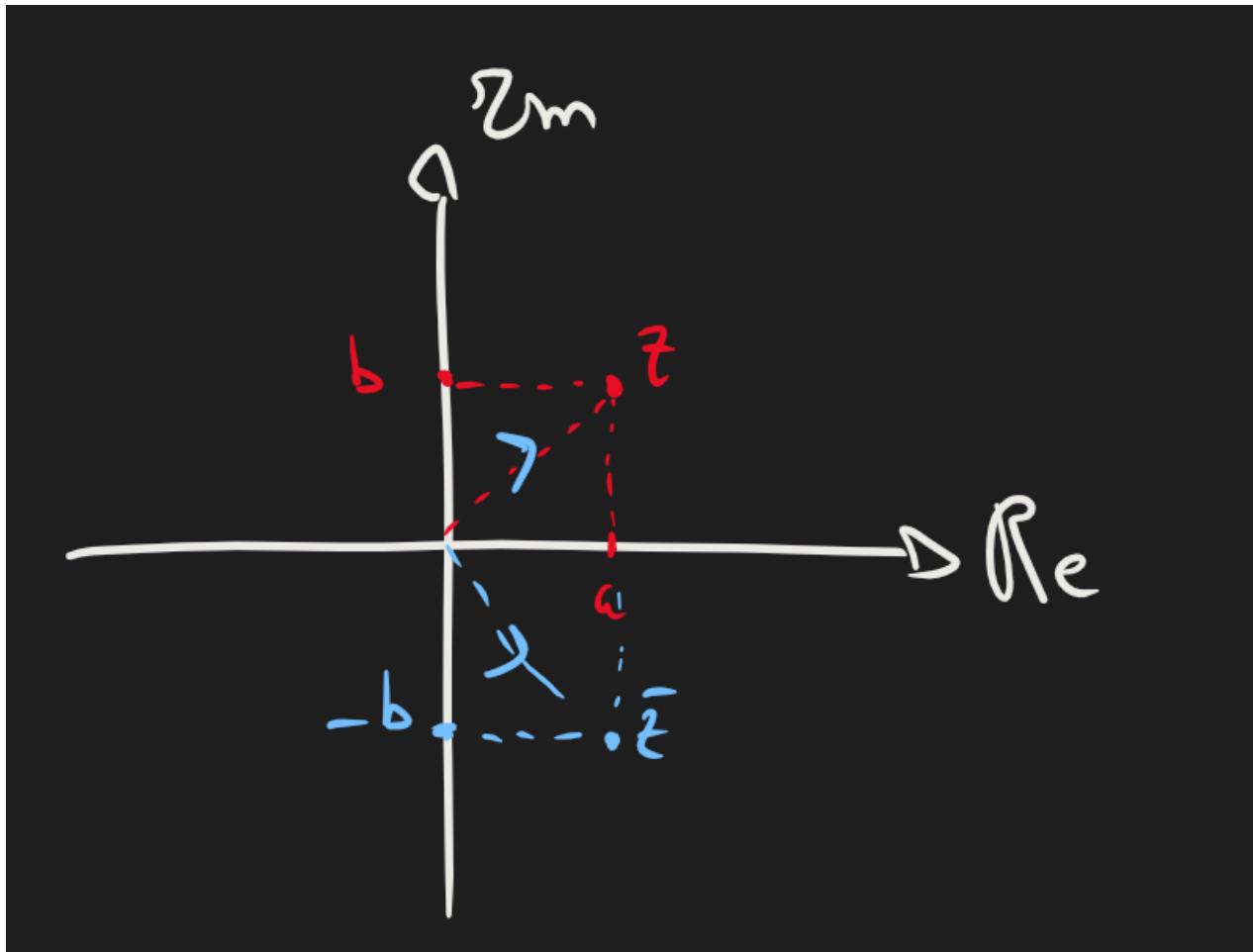
$$\bar{z} := a - ib$$

In particolare si ha una funzione del tipo

$$\bar{\cdot}: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

ove $\bar{z} = \operatorname{Re} z - i \operatorname{Im} z$.

FIGURA 1.1. (Coniugato su Argand-Gauss)



#Definizione

Definizione (modulo di un numero complesso).

Sia $z = a + ib \in \mathbb{C}$ un numero complesso. Si definisce il suo *modulo* come

$$|z| := \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{\operatorname{Im}^2 z + \operatorname{Re}^2 z}$$

Ovvero in questo caso si ha una funzione del tipo

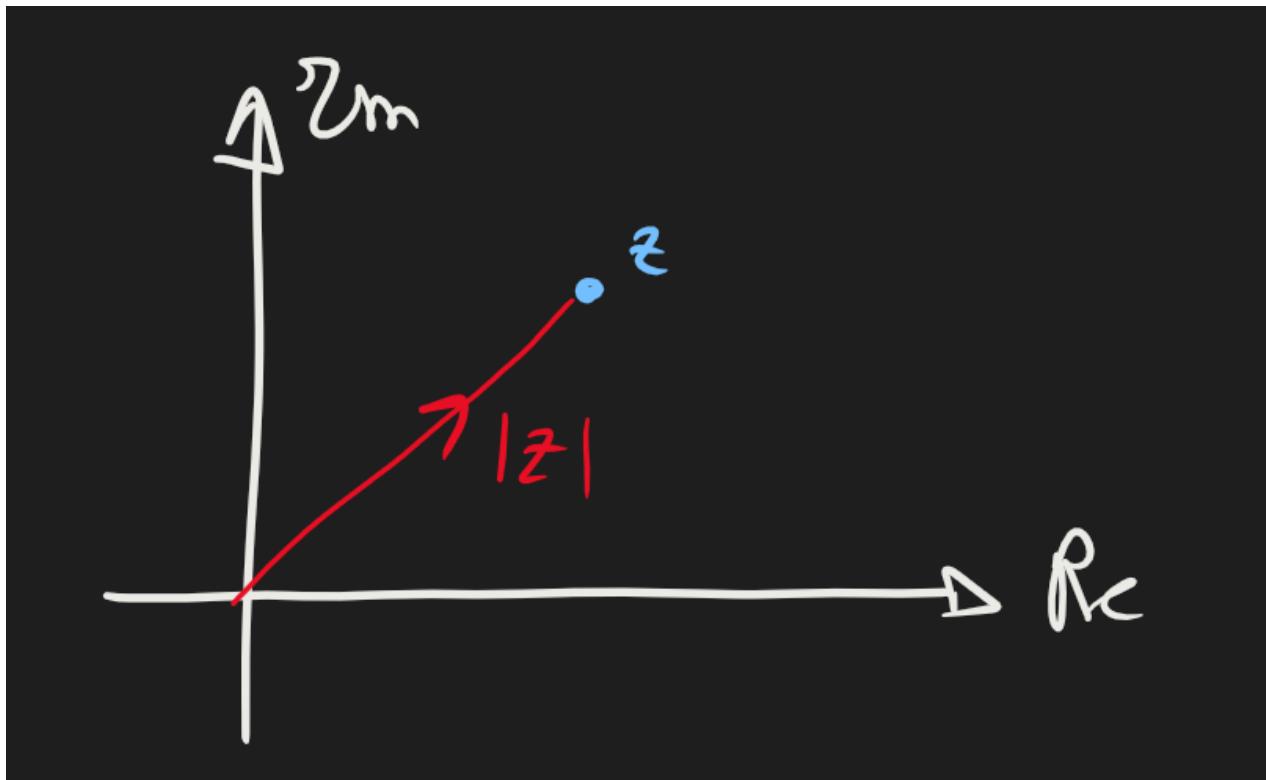
$$|\cdot| : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$$

#Osservazione

Osservazione (interpretazione geometrica).

Molto intuitivamente questa è semplicemente la *distanza* di z dall'origine $0 + 0i$ sul piano di *Argand-Gauss*. In altre parole, è la *norma euclidea* della sua rappresentazione canonica $\pi(z) \in \mathbb{R}^2$

FIGURA 1.2.



2. Proprietà del Coniugo e del Modulo

Vediamo un paio di proprietà veloci di queste operazioni

#Proposizione

Proposizione (prime proprietà del coniugo).

Siano $z, w \in \mathbb{C}$. Allora vale che:

- i. $\bar{\bar{z}} = z$
- ii. $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$
- iii. $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$
- iv. *Le formule di riduzione ad una componente*

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

v. $z = \bar{z} \iff \operatorname{Im} z = 0$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE della [Proposizione 4 \(prime proprietà del coniugo\)](#).

Lasciate per esercizio. ■

#Proposizione

Proposizione (prime proprietà del modulo).

Siano $z, w \in \mathbb{C}$. Allora:

i. $|z| > 0$ e $|z| = 0 \iff z = 0$

ii. $|z| > \operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z$

iii. $|\bar{z}| = |z|$

iv. $|zw| = |z||w|$

v. *Disuguaglianza triangolare*: $|z + w| \leq |z| + |w|$

vi. *Disuguaglianza triangolare generalizzata*: sia $(z_n)_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$, allora

$$\sum_{n=1}^k z_n \leq \sum_{n=1}^k |z_n|, \forall k \in \mathbb{N}$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE della [Proposizione 5 \(prime proprietà del modulo\)](#).

Come prima, anche queste proprietà sono lasciate da dimostrare per esercizio. *Hint per la disuguaglianza triangolare generalizzata: usare l'induzione!*

Intanto si dimostra solo il *punto v.*

Siano $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$; allora

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) \\ &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) \\ &= z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 + z_2\overline{z_2} \\ &= |z_1|^2 + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}\overline{z_2} + |z_2|^2 \\ |z_1 + z_2|^2 &= |z_1|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2 \end{aligned}$$

A questo punto mi ricordo che $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$; allora

$$\begin{aligned} |z_1|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2 &\leq |z_1|^2 + 2|z_1\overline{z_2}| + |z_2|^2 \\ &\leq |z_1|^2 + 2|z_1||\overline{z_2}| + |z_2|^2 \\ &\leq |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 \\ |z_1 + z_2|^2 &\leq (|z_1| + |z_2|)^2 \\ |z_1 + z_2| &\leq |z_1| + |z_2| \blacksquare \end{aligned}$$

#Osservazione

Osservazione (l'inversa di un numero complesso).

Sia $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Supponiamo di voler trovare quel numero complesso, di cui chiameremo z^{-1} tale che

$$z \cdot z^{-1} = 1$$

Per trovare z^{-1} , si sfrutta la *definizione di modulo*: ovvero $z \cdot \bar{z} = |z|$. In tal caso abbiamo

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|}$$

Funzioni Elementari di Variabile Complessa

X

Estensione delle funzioni a variabili reali note sul campo complesso: potenza, radice, esponenziale e logaritmo.

X

0. Voci correlate

- [Definizione e Rappresentazione dei Numeri Complessi](#)

1. Esponenziale Complesso

Prima di estendere la nozione di *esponenziale sui numeri complessi*, effettuiamo la seguente osservazione preliminare

#Osservazione

Osservazione (le potenze i^n è ciclica).

Osserviamo che per $n \in \mathbb{Z}$ si ha che i^n assume valori oscillatori. Infatti facendo due calcoli si ha

$$i^0 = 1, i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, \dots$$

Graficamente siamo prendendo il segmento $(0, 1)$ e lo stiamo ruotando di $\frac{\pi}{2}$ ad ogni potenza.
Allora possiamo scrivere la seguente formula:

$$i^n = \begin{cases} 1, & n = 4k \\ i, & n = 4k + 1 \\ -1, & n = 4k + 2 \\ -i, & n = 4k + 3 \end{cases}, \forall k \in \mathbb{Z}$$

Adesso siamo pronti per calcolare $e^{i\theta}$.

#Osservazione

Osservazione (calcolo informare di $e^{i\theta}$).

Sia $\theta \in \mathbb{R}$ (meglio se $\theta \in [0, 2\pi]$). Allora consideriamo il suo *sviluppo in Taylor-MacLaurin* (1):

$$e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} \stackrel{\text{split}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(i\theta)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(i\theta)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Per l'osservazione appena effettuata, si ha $i^{2n} = (-1)^n$ e $i^{2n+1} = (-1)^n i$. Dunque

$$e^{i\theta} = \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos \theta + i \sin \theta$$

Da questo risultato definiamo il seguente.

X

#Definizione

Definizione (l'esponenziale complesso).

Sia $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Posta $\mathbb{S}_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, si ha che

$$\boxed{e^z} = e^{x+iy} = \underbrace{e^x}_{>0} \cdot \underbrace{e^{iy}}_{\in \mathbb{S}_1} = \boxed{e^x(\cos y + i \sin y)} \in \mathbb{C}^*$$

In particolare possiamo definire la *forma esponenziale di e^z* .

#Osservazione

Osservazione (il coniugato della forma esponenziale).

Sia $z = e^{i\theta}$ e $z = x + iy$. Allora

$$\bar{z} = \overline{e^{i\theta}} = \cos \theta - i \sin \theta = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = e^{-i\theta}$$

Ovvero il *coniugato* della sua forma esponenziale non è altro che il suo reciproco.

#Proposizione

Proposizione (formule di riduzione).

Sia $z = e^{i\theta} \in \mathbb{C}$. Allora

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ \sin \theta &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\end{aligned}$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE della [Proposizione 5 \(formule di riduzione\)](#)

Lasciati da svolgere per esercizio. ■

X

2. Potenze e Radici Complesse

Adesso vediamo come gestire le *potenze* e le *radici* complesse.

#Proposizione

Proposizione (formula di De Moivre).

Sia $z \in \mathbb{C}^*$. Allora abbiamo che $\exists! (\rho, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi)$ tali che $z = \rho e^{i\theta}$.

Allora si ha che

$$z^n = \rho^n (e^{i\theta n}) = \rho^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))$$

X

#Osservazione

Osservazione (il problema delle radici).

Siano $w, z \in \mathbb{C}^*$ e $n \in \mathbb{N}$. Vogliamo risolvere la seguente equazione per w :

$$w^n = z$$

Supponiamo di prendere la loro *rappresentazione esponenziale*, con $w = re^{it}$ e $z = \rho e^{i\theta}$. Dunque

$$w^n = z \iff r^n e^{int} = \rho e^{i\theta}$$

Ovviamente $r^n = \rho \implies r = \sqrt[n]{\rho}$. Adesso cerchiamo la t : abbiamo $nt = \theta + 2\pi k$ (si aggiunge quest'ultimo termine per tener conto dei giri) e abbiamo dunque

$$r = \sqrt[n]{\rho} \wedge t = \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n}, \forall k = 0, 1, \dots, n-1$$

#Definizione

Definizione (radici n -esime di un numero complesso).

Sia $z = \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}$. L'insieme delle *radici n -esime* di z è dato dall'insieme

$$\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$$

dove

$$|w_n| = \sqrt[n]{\rho}, \arg w_n = \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n}, \forall k = 1, \dots, n$$

X

3. Funzioni Trigonometriche Complesse

#Definizione

Definizione (funzione trigonometrica complessa).

Sia $z \in \mathbb{C}$. Allora si definiscono i seguenti:

$$\begin{aligned} \sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \\ \sinh z &= \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \end{aligned}$$

In particolar modo le prime due formule sono dette le *formule di Eulero*.

X

4. Logaritmo Complesso

#Definizione

Definizione (logaritmo complesso).

Sia $z = \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C}$, con $\rho > 0$ e $\theta \in [0, 2\pi)$. In particolar modo si ha

$$z = \rho e^{i\theta} = \rho e^{i(\theta+2\pi k)}, \forall k \in \mathbb{Z}$$

Allora il suo logaritmo è

$$\log z = \log(\rho) \cdot (i)(\theta + 2\pi k), \forall k \in \mathbb{Z}$$

Notiamo che, come per le *radici complesse*, non si ha l'*univocità* in nessun modo.

Funzioni di variabili reali a valor complessi

X

Funzioni di variabili reali a valor complessi: definizioni ed estensione delle definizioni relative alle funzioni di variabili reali (continuità, derivabilità e integrabilità).

X

0. Voci correlate

- [Definizione e Rappresentazione dei Numeri Complessi](#)

1. Definizione di Funzione $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

#Definizione

Definizione (funzione di variabile reale a valor complesso).

Una *funzione* di tipo $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ con I un intervallo si dice *di variabile reale a valor complessi* se esistono $u, v : I \rightarrow \mathbb{R}$ tali che

$$f(x) = u(x) + iv(x)$$

Tramite l'identificazione canonica $\mathbb{C} \sim \mathbb{R}^2$ si ha che f è identificabile come una *curva parametrica* del tipo

$$f(x \in I) = \begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix}$$

2. Estensione delle Proprietà sulle Funzioni Reali

#Proposizione

Proposizione (estensione delle proprietà sulle funzioni reali).

Sia $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ con $f \sim (u, v)$. Allora vale che:

- i. f è continua $\iff u, v$ sono continue
- ii. f è derivabile $\iff u, v$ sono derivabili con $f'(x) = u'(x) + iv'(x)$
- iii. f è integrabile in $[a, b] \subseteq I \iff u, v$ lo sono con l'integrale

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b u(x) dx + i \int_a^b v(x) dx$$

X

"Analisi di Fourier"

SEZIONE A. DEFINIZIONI PRELIMINARI PER L'ANALISI DI FOURIER

Funzioni T-Periodiche

X

Definizione di funzione T-periodica, osservazione, esempi ed energia di una funzione T-periodica. Notazione per le funzioni T-periodiche.

X

0. Voci correlate

- [Funzioni di variabili reali a valori complessi](#)

1. Definizione di Funzione Periodica

#Definizione

Definizione (funzione T-periodica).

Una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ è T-periodica con periodo $T > 0$ se vale che

$$f(x + T) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

Se definiscono: $\frac{1}{T}$ la frequenza e $\omega = \frac{2\pi}{T}$ la frequenza angolare.

#Osservazione

Osservazione (prime osservazioni sulle funzioni periodiche).

Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione *T-periodica*. Allora:

i. f è *individuabile univocamente* dalla restrizione

$$f|_{[\alpha, \alpha+T)}, \forall a \in \mathbb{R} \text{ fissato}$$

ii. $\forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, f è pure *kT-periodica*. Infatti prendiamo il seguente esempio: $g(x) = \sin(2x)$. Si è nota che è π -periodica, infatti $\sin(2x) = \sin(2x + \pi)$. Tuttavia è pur vero che $\sin(2x) = \sin(2x + 2\pi)$ e allo stesso modo per $\sin(2x) = \sin(2x + k\pi)$.

X

2. Esempi di Funzioni Periodiche

Vediamo degli esempi.

#Esempio

Esempio (esempi di funzioni periodiche).

$f(x) = \sin(\pi x)$ è periodica di *periodo 2*;

$f(x) = \arcsin(\sin(x))$ e $f(x) = e^{ix}$ sono *periodiche di periodo 2π* ;

#Esempio

Esempio (somma di funzioni periodiche).

Invece per funzioni che è composta dalla somma di due funzioni periodiche? Sia

$$f(x) = \underbrace{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}_{f_1(x)} + \underbrace{\cos(2x)}_{f_2(x)}$$

Sappiamo che f_1 è 4π -periodica e f_2 è π -periodica: dall'*osservazione ii. (1)* sappiamo che f_2 è pure 4π -periodica. Infatti,

$$f_2(x + 4\pi) = f_2(x + 3\pi + \pi) = f_2(x + 3\pi) = f_2(x + 2\pi + \pi) = \dots = f_2(x)$$

Da questo deduciamo che f è 4π -periodica. Notiamo bene che il minimo comune multiplo tra 4π e π è proprio 4π !

#Esempio

Esempio (somma di esponenziali con argomenti diversi razionali).

Siano $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$. Sia definita la funzione

$$f(x \in \mathbb{R}) = \underbrace{e^{iq_1 x}}_{f_1(x)} + \underbrace{e^{iq_2 x}}_{f_2(x)}$$

f è periodica? Se sì, di che periodo?

Notiamo innanzitutto che per un generico $q \in \mathbb{Q}$ si ha

$$f_i \left(x + \frac{2\pi}{q} \right) = e^{i(x+\frac{2\pi}{q})q} = e^{ixq+i2\pi} = \underbrace{e^{i2\pi}}_{\equiv 1} e^{ixq} = f_i(x)$$

Ovvero per un generico q , f_i è $\frac{2\pi}{q}$ -periodica.

Da questo fatto si deduce che f_1, f_2 sono rispettivamente $\frac{2\pi}{q_1}$ e $\frac{2\pi}{q_2}$ -periodiche.

Scegliendo il *minimo comune multiplo* tra questi due valori, si ha che f è T -periodica con tale valore definita come

$$T = \text{mcm} \left\{ \frac{2\pi}{q_1}, \frac{2\pi}{q_2} \right\}$$

Generalizzando, si ha che data $(q_n)_{n \in N} \rightarrow \mathbb{Q}$ si ha che

$$f(x) := \sum_{n \in N} e^{iq_n x}$$

è T -periodica con T il minimo comune multiplo di $\left(\frac{2\pi}{q_n} \right)_{n \in N}$.

#Esempio

Esempio (somma di esponenziali complessi con argomenti diversi disgiunti).

Sia $f(x) = \exp(2\pi i \alpha x) + \exp(2\pi i qx)$, con $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ e $q \in \mathbb{Q}$. Come visto con l'esempio precedente, si ha che f_1 è $\frac{1}{\alpha}$ -periodica e f_2 è $\frac{1}{q}$ -periodica.

Imperocché q è razionale e α non lo è, non può esistere un *multiplo interno comune* di questi due numeri: deduciamo che f non può essere periodica.

Spazio Lp

X

Spazio L^p delle funzioni: definizione, norma e prodotto scalare. Energia in L^p .

X

0. Voci correlate

- [Funzioni T-Periodiche](#)
- [Funzioni Localmente Integrabili](#)

1. Spazio L^p

Introduciamo uno degli argomenti "nuovi" di questo corso: ovvero l'*energia* di una funzione, oppure la *norma* in L^2 . Vediamo di costruire prima uno *spazio delle funzioni*, detta L^p .

#Definizione

Definizione (spazio L^p).

Fissato $1 \leq p \leq +\infty$, $T > 0$ e $\mathbb{X} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, denotiamo con

$$L^p \left(\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2} \right]; \mathbb{X} \right) := L_{\mathbb{X}}^p(T)$$

come l'*insieme delle funzioni* del tipo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{X}$, T -periodiche e localmente p -integrabili in \mathbb{R} . Dotandolo con la norma definita come

$$\|f\|_{L_{\mathbb{X}}^p(T)} = \left(\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

Si chiama $(L_{\mathbb{X}}^p(T), \|\cdot\|)$ uno *spazio normato*. Per semplicità notazionale usiamo la notazione

$$L^p := L_{\mathbb{X}}^p(T)$$

#Osservazione

Osservazione (la norma di $L_{\mathbb{C}}^2(T)$ è canonicamente autoindotta dal prodotto scalare su $L_{\mathbb{C}}^2(T)$).

Prendiamo $L^2 = L_{\mathbb{C}}^2(T)$. Notiamo che la sua norma $\|\cdot\|_{L^2}$ è canonicamente autoindotta dal prodotto scalare in L^2 , definita come

$$\langle f | g \rangle := \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \overline{g(x)} dx$$

(inoltre si ha che questo prodotto scalare è *hermitiano*, ovvero *simmetrico* solo che scambiando f, g si scambia la funzione coniugata)

2. Energia in L^p

#Definizione

Definizione (energia di una funzione L^p).

Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, T -periodica e *localmente 2-integrabile* in \mathbb{R} (ovvero $f \in L_{\mathbb{C}}^2(T)$) del tipo $f(x) = u(x) + iv(x)$. Allora si definisce l'*energia* di f come la sua norma quadrata:

$$\|f\|_{L^2}^2 = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(x)|^2 dx = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [u^2(x) + v^2(x)] dx$$

#Lemma

Lemma (L^2 è contenuta in L^1).

Dato $T > 0$, si ha che $L_{\mathbb{C}}^2(T) \subset L_{\mathbb{C}}^1(T)$.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del [Lemma 4 \(\$L^2\$ è contenuta in \$L^1\$ \)](#)

Si tratta banalmente di applicare la *diseguaglianza di Cauchy-Schwarz* ([Teorema 3 \(diseguaglianza di Cauchy-Schwarz\)](#)). Infatti, dato un $f \in L^2$ si ha che

$$\|f\|_{L^1} = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(x)| \, dx = \langle |f|, 1 \rangle \leq \|f\|_{L^2} \cdot \|1\|_{L^2} = \sqrt{T} \|f\|_{L^2}$$

che è la tesi. ■

Armoniche Elementari

X

Definizione delle armoniche elementari (3 famiglie di funzioni). Teorema di relazione tra le armoniche elementari; energia di un'armonica elementare.

X

0. Voci correlate

- [Funzioni T-Periodiche](#)
- [Spazio Lp](#)
- [Funzioni Elementari di Variabile Complessa](#)

1. Definizione delle Armoniche Elementari

#Definizione

Definizione (armoniche elementari).

Si dicono *armoniche elementari* funzioni del tipo:

i. Caso reale 1

$$\mathcal{A}_{\mathbb{R}} := \left\{ \frac{a_0}{2}, a_n \cos(n\omega x), b_n \sin(n\omega x) : n \in \mathbb{N}^*, a_0, a_n, b_n \in \mathbb{R} \right\}$$

ii. Caso reale 2

$$\tilde{\mathcal{A}}_{\mathbb{R}} := \left\{ \begin{array}{l} A_0 \\ A_n \cos(n\omega x + \varphi_n) : n \in \mathbb{N}^*, A_n > 0, |\varphi_n| < \pi \\ A_n \sin(n\omega x + \varphi_n) \end{array} \right\}$$

iii. Caso complesso

$$\mathcal{A}_{\mathbb{C}} := \{c_n e^{in\omega x} : n \in \mathbb{Z}, c_n \in \mathbb{C}\}$$

#Lemma

Lemma (spazi vettoriali delle armoniche elementari).

Siano considerati i seguenti spazi vettoriali, con $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ e $\tilde{\mathcal{A}}_{\mathbb{R}}$ le armoniche elementari reali:

$$\mathcal{B}_{\mathbb{C}} := \left\{ c_0 + \sum_{n=1}^N c_n e^{in\omega x} + \bar{c}_n e^{-in\omega x} : c_0 \in \mathbb{R}, c_n \in \mathbb{C}, N \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\langle \mathcal{A}_{\mathbb{R}}, \langle \tilde{\mathcal{A}}_{\mathbb{R}} \rangle \rangle$$

Notiamo che ognuna delle basi che formano i spazi vettoriali appena dati sono esattamente le armoniche elementari.

Ogni elemento appartenente ad uno degli spazi vettoriali è una *funzione di variabile reale*.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del [Lemma 2 \(spazi vettoriali delle armoniche elementari\)](#).

Immediato per il *caso reale*, poiché abbiamo *combinazioni lineari finite di funzioni reali di variabile reale*.

Vediamo bene per il *caso complesso*: notando che

$$c_n e^{inx} + \bar{c}_n e^{-inx} = c_n e^{inx} + \overline{c_n e^{inx}} = 2 \operatorname{Re}(c_n e^{inx})$$

pertanto si ha che un elemento di $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}$ può essere scritto come

$$v \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}} \implies v = c_0 + \sum_{n=1}^N 2 \operatorname{Re}(c_n e^{inx})$$

che è una *funzione di variabile reale*. ■

#Osservazione

Osservazione ($\mathcal{B}_{\mathbb{C}}$ è generato dalle armoniche complesse).

Notiamo che lo spazio vettoriale $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}$ definito sopra è l'insieme di *funzioni di variabile reale* generata dalla famiglia delle armoniche complesse $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$.

X

2. Relazioni tra Armoniche Elementari

Vogliamo dimostrare che tra le famiglie di *armoniche elementari* $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$, $\tilde{\mathcal{A}}_{\mathbb{R}}$ e $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ sono *equivalenti*; ovvero che per una particolare scelta di coefficienti fa sì che possiamo esprimere una *famiglia di armoniche* come una *combinazione lineare (finita)* di armoniche di un'altra famiglia. In particolare proveremo che $\mathcal{A}_{\mathbb{R}} \iff \tilde{\mathcal{A}}_{\mathbb{R}}$ e $\mathcal{A}_{\mathbb{R}} \iff \mathcal{A}_{\mathbb{C}}$, completando il "cerchio".

#Teorema

Teorema (relazioni tra armoniche elementari).

Siano $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$, $\tilde{\mathcal{A}}_{\mathbb{R}}$, $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ delle *armoniche elementari*. Allora si ha che

$$\mathcal{A}_{\mathbb{R}} \iff \tilde{\mathcal{A}}_{\mathbb{R}} \iff \mathcal{A}_{\mathbb{C}}$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del [Teorema 4 \(relazioni tra armoniche elementari\)](#).

Dimostriamo dapprima $\mathcal{A}_{\mathbb{R}} \iff \tilde{\mathcal{A}}_{\mathbb{R}}$.

$\mathcal{A}_{\mathbb{R}} \iff \tilde{\mathcal{A}}_{\mathbb{R}}$: Ho che un'armonica $\tilde{\mathcal{A}}_{\mathbb{R}}$ è del tipo $A_n \cos(n\omega x + \varphi_n)$ (usando il seno viene ugualmente), che può essere riscritta come

$$A_n \cos(n\omega x + \varphi_n) = \underbrace{A_n \cos \varphi_n}_{a_n} \cos(n\omega x) - \underbrace{A_n \sin \varphi_n}_{b_n} \sin(n\omega x)$$

$$(*) = a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)$$

$\mathcal{A}_{\mathbb{R}} \implies \tilde{\mathcal{A}}_{\mathbb{R}}$: Adesso si tratta di "rovesciare" la trasformazione appena data in (*). Ovvero, dati dei a_n, b_n, A_n, φ_n posti come

$$(**) \begin{cases} a_n = A_n \cos \varphi_n \\ b_n = -A_n \sin \varphi_n \end{cases}$$

Da questa vogliamo ricavare A_n, φ_n .

$$\begin{aligned} A_n : (**) &\implies a_n^2 + b_n^2 = A_n^2 \implies A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ \varphi_n : (**) &\implies \frac{\sin \varphi_n}{\cos \varphi_n} = -\frac{b_n}{a_n} \implies \varphi_n = -\arctan \frac{b_n}{a_n} \end{aligned}$$

Da cui ho la prima equivalenza dimostrata. Stiamo attenti che per essere più pignoli, bisognerebbe trattare i casi in cui $a_n = 0$ e del genere (usando la funzione $\arctan_2(x, y)$).

Adesso dimostriamo $\mathcal{A}_{\mathbb{R}} \iff \mathcal{A}_{\mathbb{C}}$.

$\mathcal{A}_{\mathbb{R}} \implies \mathcal{A}_{\mathbb{C}}$: Sia data un'armonica $a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)$. Allora per le *formule di riduzione dell'esponenziale complesso* ([Proposizione 5 \(formule di riduzione\)](#)) (dette meglio, *formule di Eulero*) ho

$$\begin{aligned} a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x) &= a_n \frac{e^{in\omega x} + e^{-in\omega x}}{2} + b_n \frac{e^{in\omega x} - e^{-in\omega x}}{2i} \\ (\dagger) &= \underbrace{\frac{1}{2}(a_n - ib_n)e^{in\omega x}}_{c_n} + \underbrace{\frac{1}{2}(a_n + ib_n)e^{-in\omega x}}_{c_{-n}} \end{aligned}$$

Così abbiamo definita una successione $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, ottenendo così un elemento di $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$. Inoltre si noti che si ha $c_{-n} = \overline{c_n}$.

$\mathcal{A}_{\mathbb{R}} \iff \mathcal{A}_{\mathbb{C}}$: Come fatto prima, si tratta di rovesciare le definizioni di c_n date da (\dagger) . Ovvero, risolviamo il sistema lineare

$$\begin{cases} c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \\ c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} \end{cases}$$

Facendo i conti si ottiene $a_n = c_n + c_{-n}$ e $b_n = i(c_n - c_{-n})$, concludendo la dimostrazione. ■

X

3. Energia di un'armonica elementare

PROBLEMA. (*L'energia di un'armonica elementare*)

Data un'armonica elementare (quindi funzione del tipo in $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}, \tilde{\mathcal{A}}_{\mathbb{R}}$ e $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$), vogliamo calcolare la sua *energia* ([Definizione 3 \(energia di una funzione \$L^p\$ \)](#)).

1. *Caso reale* con $\tilde{\mathcal{A}}_{\mathbb{R}}$

$$\|A_0\|_{L^2}^2 = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A_0^2 dx = TA_0^2$$

e poi

$$\|A_n \cos(n\omega x + \varphi_n)\|_{L^2}^2 = A_n^2 \int_0^T \cos^2(n\omega x + \varphi_n) dx$$

usando la sostituzione $t = n\omega x + \varphi_n$ ho

$$A_n^2 \int_0^T \cos^2(n\omega x + \varphi_n) dx = A_n^2 \int_{\varphi_n}^{\varphi_n + 2\pi n} \cos^2 t dt$$

Integrando per parti ho

$$A_n^2 \int_{\varphi_n}^{\varphi_n + 2\pi n} \cos^2 t dt = A_n^2 \frac{T}{2}$$

in conclusione

$$\|A_n \cos(n\omega x + \varphi_n)\|_{L^2}^2 = T \frac{A_n^2}{2}$$

2. Caso reale con $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$

I conti sono lasciati per esercizio.

$$\frac{1}{2} \|a_0\|_{L^2}^2 = \frac{T}{4} a_0^2$$

e

$$\|a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)\|_{L^2}^2 = \frac{T}{2} (a_n^2 + b_n^2)$$

3. Caso complesso

$$\|c_0\|_{L^2}^2 = T \arg(c_0^2)$$

e

$$\|c_n e^{inx}\|_{L^2}^2 = \int_0^T |c_n \underbrace{e^{inx}}_1|^2 dx = \int_0^T |c_n|^2 dx = T |c_n|^2$$

Polinomi e Serie Trigonometriche

X

Definizione di polinomio trigonometrico, energia di un polinomio trigonometrico. Definizione di serie trigonometrica e la ridotta N-esima.

X

0. Voci correlate

- [Armoniche Elementari](#)

1. Polinomi Trigonometrici

#Definizione

Definizione (polinomio trigonometrico di ordine N).

Si dice *polinomio trigonometrico di ordine* $n \in \mathbb{N}$ ognuna delle seguenti espressioni:

1. *Caso reale 1*

$$P_N(x) = A_0 + \sum_{n=1}^N A_n \cos(n\omega x + \varphi_n)$$

2. *Caso reale 2*

$$P_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N [a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)]$$

3. *Caso complesso*

$$P_N(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{in\omega x}$$

#Osservazione

Osservazione (il polinomio trigonometrico è la combinazione lineare delle armoniche elementari).

Si può dire che *alternativamente* un *polinomio trigonometrico* non è che altro la *combinazione lineare delle armoniche elementari*. Inoltre, come visto per le *armoniche elementari*, le formulazioni appena date sono *equivalenti*.

#Proposizione

Proposizione (energia dei polinomi trigonometrici).

Sia $P_N(x)$ un *polinomio trigonometrico reale*. Allora ha energia

$$\|P_N\|_{L^2}^2 = TA_0^2 + \frac{T}{2} \sum_{n=1}^N A_n^2 = \frac{T}{2} \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2) \right)$$

Oppure nel *caso complesso* ho

$$\|P_N\|_{L^2}^2 = T \sum_{n=-N}^N |c_n|^2$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE della [Proposizione 3 \(energia dei polinomi trigonometrici\)](#)

Partiamo dal caso complesso, assumendo che $P_N(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{in\omega x}$. Per definizione si ha

$$\|P_N\|_{L^2}^2 = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |P_N(x)|^2 dx$$

Poiché $|P_N(x)|^2 = P_N(x) \cdot \overline{P_N(x)}$, ho che la forma esplicita di quest'integrale è

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |P_N(x)|^2 dx = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sum_{n=-N}^N c_n e^{in\omega x} \sum_{m=-N}^N \bar{c}_m e^{-im\omega x} dx$$

Unendo la sommatoria doppia in una unica e facendo commutare l'integrale con la sommatoria, si ha

$$\int'' \sum_{n=-N}^N c_n e^{in\omega x} \sum_{m=-N}^N \bar{c}_m e^{-im\omega x} dx = \sum_{n,m=-N}^N c_n \bar{c}_m \int'' e^{i(n-m)\omega x} dx$$

Assumendo che $n \neq m$, calcolando l'integrale in maniera esplicita e ricordandomi che $e^{\pm i\pi} = -1$, ho

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{i(n-m)\omega x} dx = \frac{e^{i(n-m)\omega x}}{i(n-m)\omega} \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{e^{i(n-m)\pi} - e^{-i(n-m)\pi}}{i(n-m)\omega} = 0$$

Adesso assumendo che $n = m$, ho banalmente

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^0 dx = x \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = T$$

In definitiva si può riassumere l'integrale come

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{i(n-m)\omega x} dx = T\delta_{mn}$$

con δ_{mn} la *delta di Kronecker*, che assume 0 per $n \neq m$ e 1 per $n = m$. Tornando al punto di partenza ho

$$\sum_{n,m=-N}^N c_n \bar{c}_m \int'' e^{i(n-m)\omega x} dx = \sum_{n,m=-N}^N c_n \bar{c}_m T\delta_{nm} = T \sum_{n=-N}^N c_n \bar{c}_n = T|c_n|^2$$

che conclude il calcolo. Per dimostrare il *caso reale* si tratta di usare il fatto che le *armoniche reali* sono caratterizzabili delle *armoniche complesse* ([Teorema 4 \(relazioni tra armoniche elementari\)](#)), con

$$\begin{cases} c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \\ c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} \end{cases}$$

Applicando il punto appena dimostrato si ha la tesi (poi si può passare alla forma $\tilde{\mathcal{A}}_{\mathbb{R}}$ del polinomio trigonometrico usando lo stesso teorema) ■

X

2. Serie Trigonometriche

#Definizione

Definizione (serie trigonometrica).

Una *serie trigonometrica* è un'espressione della forma:

1. *Caso reale*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)), a_0, a_n, b_n \in \mathbb{R}$$

2. *Caso complesso*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega x}, c_n \in \mathbb{C}$$

#Definizione

Definizione (la ridotta N -esima di una serie trigonometrica).

Sia S una serie trigonometrica: abbiamo che la sua ridotta N -esima è il polinomio trigonometrico

1. Caso reale

$$P_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N [a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)]$$

2. Caso complesso

$$P_N(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx}$$

SEZIONE B. ANALISI DI FOURIER

Convergenza delle Serie Trigonometriche

X

Discussione della convergenza delle serie trigonometriche: convergenza puntuale, uniforme ed in energia. Strumenti da Analisi II per determinare la convergenza uniforme. Periodicità della somma di una serie trigonometrica. Condizione sufficiente per la convergenza uniforme di una serie trigonometrica.

X

0. Voci correlate

- [Convergenza Puntuale e Uniforme per Successioni di Funzioni](#)
- [Teoremi di Passaggio del Limite per le Serie di Funzioni](#)
- [Criteri sulle Serie di Funzioni](#)
- [Polinomi e Serie Trigonometriche](#)

1. Definizione di convergenza puntuale, uniforme ed in energia

#Definizione

Definizione (convergenza puntuale, uniforme ed in energia per una serie trigonometrica).

Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione T -periodica e sia S una serie trigonometrica reale o complessa (1) e sia $(S_n)_n$ la sua successione delle ridotte.

Allora:

i. Si dice che S converge puntualmente ad f su \mathbb{R} se vale il limite

$$\lim_n S_n(x) = f(x)$$

ii. Si dice che S converge uniformemente ad f su \mathbb{R} se vale pure

$$\lim_n \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} |S_n(x) - f(x)| \right) = 0$$

iii. Si dice che S converge in energia (o in L^2) ad f se $f \in L^2$ e vale che

$$\lim_n \|S_n - f\|_{L^2}^2 = \lim_n \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |S_n(x) - f(x)|^2 dx = 0$$

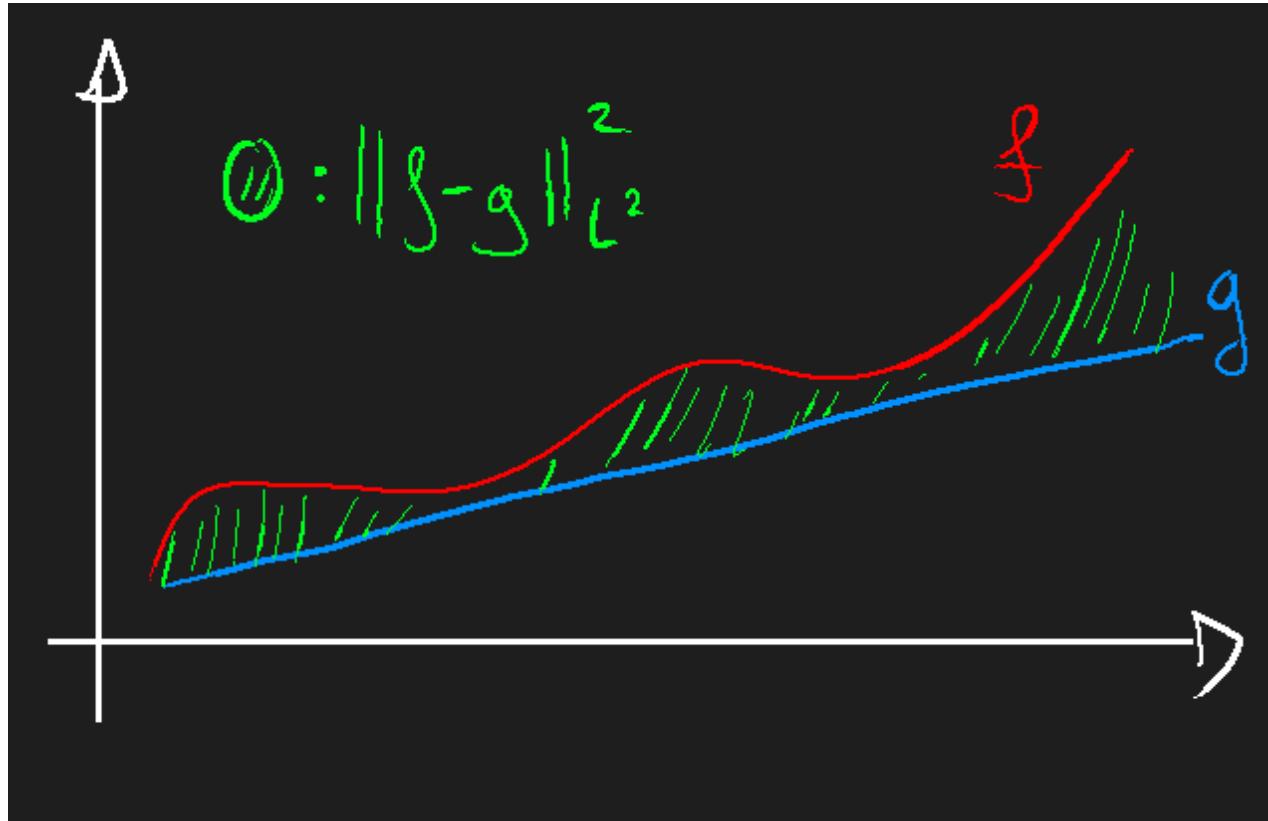
#Osservazione

Osservazione (interpretazione geometrica della convergenza in energia).

La convergenza in energia va a "verificare" l'area che viene delineata dalle due funzioni. In questo senso, se f converge a g in energia allora "sono vicine" nella topologia L^2 .

Tuttavia, f, g rimangono lontane dalla topologia uniforme.

FIGURA 1.1. (Convergenza in energia)



2. Strumenti per determinare la Convergenza Uniforme

Richiamiamo un paio di strumenti per determinare la convergenza uniforme di una certa successione di funzioni $(f_n)_n$ a valori complessi.

#Teorema

Teorema (M&M'S-test di Weierstraß 2.0).

Sia $\sum_n f_n(x)$ una *serie di funzioni*. Se esiste una *successione numerica* $(M_n)_n$, ovvero col termine generale $M_n \in \mathbb{R}$, tale che valga

$$\sup_{x \in \text{dom } f_n} |f_n(x)| \leq M_n, \forall x \in E$$

allora vale l'implicazione

$$\sum_{n \in \mathbb{N}}^{+\infty} M_n < +\infty \implies \sum_{n \in \mathbb{N}}^{+\infty} f_n(x) < +\infty^{\text{unif.}}$$

(ovvero se la serie di $(M_n)_n$ è *convergente* allora la serie di $(f_n)_n$ è *uniformemente convergente*)

#Teorema

Teorema (derivata di una serie).

Sia $(f_n)_n$ una *successione di funzioni* con il termine generale $f_n : (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$ *derivabile sul dominio*. Se valgono che:

- i. La serie delle derivate $\sum_n f'_n(x)$ è *uniformemente convergente nel dominio* con somma $G(t)$
- ii. La serie delle funzioni generali $\sum_n f_n(x)$ è *convergente almeno in un punto* $t_0 \in (a, b)$, allora anche la serie $\sum_n f_n(x)$ è *uniformemente convergente* in (a, b) , detta $F(t)$ la sua somma, risulta che F è *derivabile* e si ha $F'(t) = G(t)$. In altre parole, possiamo effettuare lo "scambio"

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x)$$

#Teorema

Teorema (l'integrale di una serie).

Sia data $(f_n)_n$ una *serie di funzioni* tali che il termine generale f_n sia *limitata e integrabile in $[a, b]$* . Se $\sum_n f_n(t)$ è *convergente uniformemente* in $[a, b]$ con somma $F(t)$, allora vale che F è *integrabile secondo Riemann* in $[a, b]$ e risulta

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b f_n(t) dt$$

#Teorema

Teorema (la continuità di una serie).

Sia $(f_n)_n$ una *serie di funzioni continue* sull'intervallo I . Se vale che:

- i. $\sum_n f_n(t)$ converge uniformemente con somma $f : I \rightarrow \mathbb{C}$

Allora f è *continua su I* .

3. Alcuni risultati relativi alle serie trigonometriche

#Proposizione

Proposizione (condizione necessaria per una serie trigonometrica puntualmente convergente).

Sia S una serie trigonometrica a valori reali o complessi e f la funzione target. Allora se S converge puntualmente in \mathbb{R} ad f , allora f è T -periodica.

Dall'M-test di Weierstraß deduciamo la seguente.

#Teorema

Teorema (condizione sufficiente per la convergenza uniforme).

Siano $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ delle successioni a valori reali. Se sono tali che

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (|a_n| + |b_n|) < +\infty$$

Allora la serie trigonometrica definita come

$$S := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x))$$

converge uniformemente in \mathbb{R} ad una certa funzione f .

Similmente, se nel caso complesso ho che $(c_n)_n$ è tale che

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n| < +\infty$$

allora

$$S := \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$$

converge uniformemente in \mathbb{R} ad una certa funzione f (a valor complessi!)

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del [Teorema 8 \(condizione sufficiente per la convergenza uniforme\)](#).

Basta osservare che

$$|a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)| \leq |a_n| + |b_n|$$

e poi

$$|c_n e^{inx}| \leq |c_n|$$

Allora applicando l'M-test di Weierstraß sull'ipotesi si ha la la tesi. ■

#Osservazione

Osservazione (componenti della serie trigonometrica complessa).

Osserviamo che in

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$$

abbiamo che la *prima parte* c_n determina effettivamente la sua "forma" della funzione target; invece la parte seconda e^{inx} va a semplicemente determinare il *periodo* della funzione target f .

Ci poniamo la seguente domanda: data una f , è possibile determinare una successione $(c_n)_n$ per cui la somma trigonometrica associata converga a f ?

Analisi e Sintesi di Fourier

X

Generalità sull'analisi e sintesi di Fourier. Analisi di Fourier: problema caratteristica e proposizione. Coefficienti, polinomi, serie di Fourier e spettro di una funzione. Il problema inverso: Sintesi di Fourier.

X

0. Voci correlate

- [Convergenza delle Serie Trigonometriche](#)

1. Relazioni tra Coefficienti di una Serie e la sua Somma

Per quanto visto sulle *serie trigonometriche*, abbiamo notato che la "forma" della somma di una serie trigonometrica $\sum c_n e^{inx}$ viene principalmente decisa dalla successione $(c_n)_n$. Vediamo come la funzione f va ad influire su $(c_n)_n$. Vediamo il seguente teorema.

#Teorema

Teorema (relazioni tra coefficienti di una serie trigonometrica e la sua somma.).

Sia S una *serie trigonometrica reale* del tipo

$$S = \frac{a_0}{2} + \sum_n (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x))$$

tale che sia *uniformemente convergente* in \mathbb{R} ad una funzione T -periodica f . Allora vale che

$$\boxed{\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos(n\omega x) dx \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin(n\omega x) dx \end{aligned}}$$

Analogamente nel *caso complesso* con $S = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ si ha

$$\boxed{c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-inx} dx}$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del [Teorema 1 \(relazioni tra coefficienti di una serie trigonometrica e la sua somma.\)](#)

Proviamo il risultato per il *caso complesso*, ovvero per

$$(*) \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx} = f(x)$$

Ricordiamo che

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{i(k-n)\omega x} dx = T\delta_{nk}$$

([Proposizione 3 \(energia dei polinomi trigonometrici\)](#)). Sia dunque $k \in \mathbb{Z}$ fissata e moltiplichiamo (*) per $e^{-ik\omega x} = \overline{e^{ik\omega x}}$ ed integriamo tra $-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}$. Poiché abbiamo che la serie converge uniformemente ad f , possiamo commutare l'integrazione con la somma:

$$\begin{aligned} (S) \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-ik\omega x} dx &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx} e^{-ik\omega x} dx \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{inx} e^{-ik\omega x} dx \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n T \delta_{kn} = c_k T (E) \end{aligned}$$

Dividendo (S) ed (E) per T , ottengo che

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-ik\omega x} dx$$

che è la tesi. Per ricondursi al caso si reale si usa *conversione al caso reale* ([Teorema 4 \(relazioni tra armoniche elementari\)](#)) e le *formule di Eulero* ([Definizione 9 \(funzione trigonometrica complessa\)](#)), per cui $a_n = c_n - c_{-n}$ e $b_n = i(c_n - c_{-n})$. Effettuando i calcoli,

$$\begin{aligned} a_n &= c_n + c_{-n} = \frac{1}{T} \left(\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) (e^{-in\omega x} + e^{in\omega x}) dx \right) \\ &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos(n\omega x) dx \end{aligned}$$

e analogamente si ottiene la tesi per a_0, b_n . ■

X

2. Definizioni relative all'Analisi di Fourier

Grazie al teorema appena enunciato, possiamo definire bene le nozioni di *coefficiente di Fourier*, *polinomio di Fourier*, *serie di Fourier* e *spettro per una funzione*.

#Definizione

Definizione (coeffienti, polinomio e serie di Fourier).

Sia $f \in L^2_{\mathbb{C}}(T)$. Allora:

i. I *coeffienti di Fourier* di f rispetto al sistema $(e^{inx})_{n \in \mathbb{Z}}$ si dicono

$$c_n = c_n(f) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-inx} dx, n \in \mathbb{Z}$$

ii. Le ridotte formate da quest'ultima successione,

$$S_n(x) = \sum_{i=-n}^n c_n e^{inx}$$

si dicono *polinomi di Fourier* di f ad n -esimo grado.

iii. La serie

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$$

si dice *serie di Fourier* di f .

#Osservazione

Osservazione (caso reale).

Analogamente è possibile definire *coefficienti, polinomi e serie di Fourier* nel caso reale con le successioni $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$.

#Definizione

Definizione (spettro di una funzione).

Sia $f \in L^2_{\mathbb{C}}(T)$ e siano $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$ i *coefficienti di Fourier* di f rispetto al sistema $(e^{inx})_{n \in \mathbb{Z}}$. Si definisce lo *spettro di f* come

$$\text{sp}(f) = (c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$$

Siccome ogni $c_n \in \mathbb{C}$ si ha che può essere rappresentata in *modulo e argomento* con

$$c_n = |c_n| e^{i\varphi_n}$$

Allora si definisce $(|c_n(f)|)_{n \in \mathbb{Z}}$ lo *spettro di ampiezza* e invece $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ lo *spettro di fase*.

ANALISI DI FOURIER. Il procedimento che associa ad una funzione f una *serie trigonometrica* è detto *Analisi di Fourier*, ossia una situazione del tipo

$$f(x) \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{-inx}$$

Con la proposizione appena enunciata ([Teorema 1 \(relazioni tra coefficienti di una serie trigonometrica e la sua somma.\)](#)) abbiamo una *maniera naturale* per effettuare tale associazione. In particolare abbiamo il seguente risultato.

#Lemma

Lemma (buona posizione dei coefficienti di Fourier).

Sia $f \in L^1_{X \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}}(T)$. Sia detta c_n la successione dei suoi coefficienti di Fourier (o nel caso reale a_n, b_n): pertanto è possibile associare canonicamente una *serie trigonometrica* ad f .

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del [Lemma 5 \(buona posizione dei coefficienti di Fourier\)](#).

Sia $\mathbb{X} = \mathbb{C}$, f la funzione target e $(c_n)_n$ i coefficienti di Fourier. Allora visto che $f \in L^1$ (ovvero localmente integrabile sulla retta reale), si ha che

$$|c_n| \leq \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(x)| dx < +\infty$$

per cui deduciamo che i coefficienti $(c_n)_n$ sono *ben definiti*. ■

SINTESI DI FOURIER. Invece il *processo inverso* si dice la *Sintesi di Fourier*: ovvero partendo da una successione $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ vogliamo trovare (se possibile!) la funzione f :

$$(c_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mapsto \sum_n c_n e^{inx} \stackrel{?}{\mapsto} f$$

Ovviamente non è detto che sia sempre *possibile* effettuare un'operazione del genere: uno degli obiettivi principali del corso sarà proprio quello di individuare *condizioni necessarie o sufficienti* per dire se è possibile commutare la *sintesi* con l'*analisi*, ovvero se dalla *sintesi* di una *serie di Fourier* otteniamo sempre la *funzione target voluta*. Inoltre vogliamo sapere se convergono o meno, se sì in quale senso (puntuale, uniforme o in energia).

SEZIONE C. CONVERGENZA DELLE SERIE DI FOURIER

Convergenza Puntuale delle Serie di Fourier

X

Il problema della convergenza puntuale delle serie di Fourier: esempio di Du Bois-Reymond, 1813. Teorema di Dirichlet Weierstraß.

X

0. Voci correlate

- [Analisi e Sintesi di Fourier](#)

1. Problema della Convergenza delle Serie di Fourier

PROBLEMA. Sia $f \in L^1_{\mathbb{C}}(T)$. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ fissato e sia $(S_n)_n$ la successione delle ridotte associate alla serie di Fourier di f . Sotto quali condizioni vale la seguente equazione?

$$\lim_{|n|} S_n(x_0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx_0} = f(x_0)$$

Ovvero, quando vale che la *serie di Fourier* è *puntualmente convergente* ad f in x_0 ?

X

2. Du Bois-Reymond, 1813

Non basta la continuità della funzione target f . Infatti, vediamo il seguente teorema.

#Teorema

Teorema (Du Bois-Reymond, 1813).

Esiste una funzione $f \in L^1_{\mathbb{X}}(T)$, $f \in C^0(\mathbb{R})$ tale che la sua serie di Fourier

$$\sup_n S_n = \sup_n \sum_{n=-N}^N c_n = +\infty \neq f(0)$$

Ovvero non c'è la *convergenza uniforme*.

X

3. Teorema di Dirichlet-Weierstraß (D-W)

Adesso vediamo una *condizione sufficiente e necessaria* per la *convergenza puntuale*.

#Teorema

Teorema (Dirichlet-Weierstraß).

Sia $f \in L^1_{\mathbb{C}}(T)$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Supponiamo che esistano finiti i seguenti limiti unilaterali:

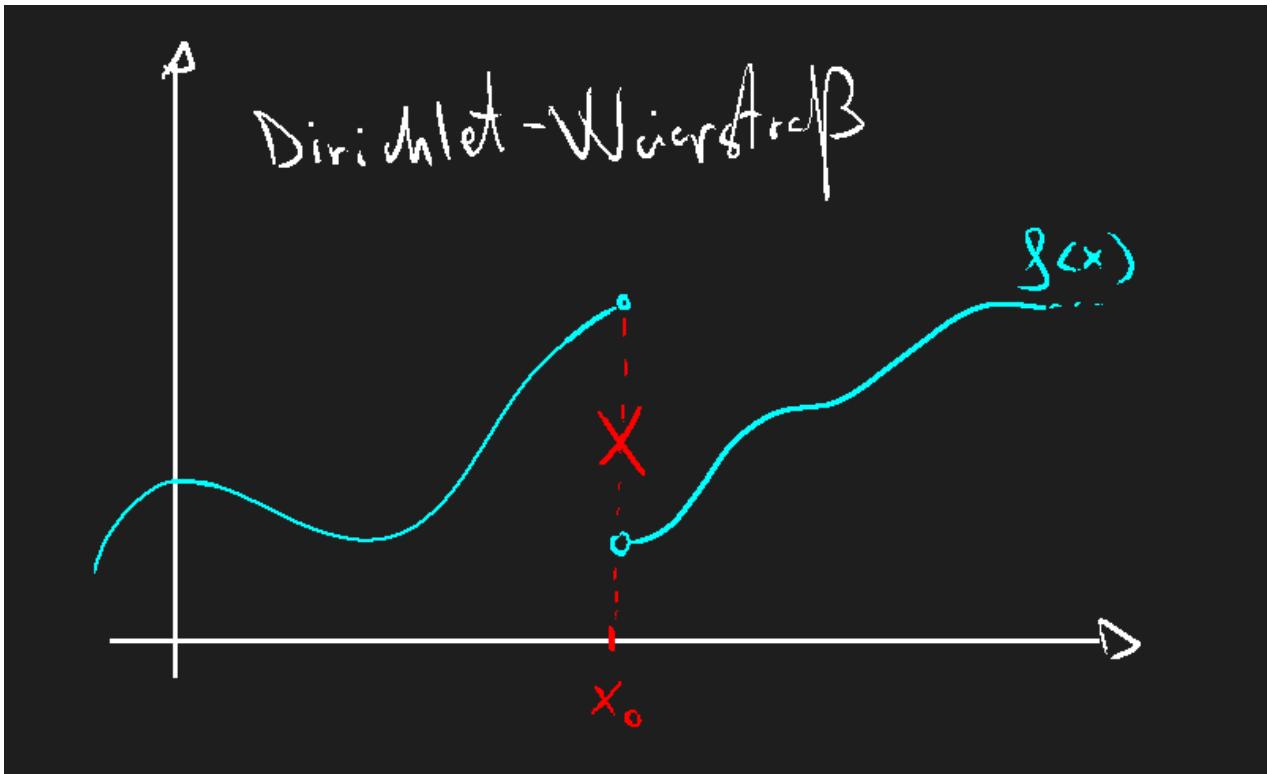
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) &= f(x_0^-) \wedge \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0^+) \\ \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0^-)}{x - x_0} &= f'(x_0^-) \wedge \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0^+)}{x - x_0} = f'(x_0^+) \end{aligned}$$

(notare bene che i limiti destri e sinistri possono essere diversi!; i primi due limiti si dicono *pseudo-continui*, gli ultimi due *pseudo-derivate*)

Si ha dunque che la sua *serie di Fourier* S_n converge puntualmente in x_0 col limite

$$\exists \lim_n S_n(x_0) = \frac{1}{2}(f(x_0^-) + f(x_0^+))$$

FIGURA 3.1. (Idea grafica dell'ipotesi)



Notiamo che questo teorema ci assicura che la *derivabilità continua* è invece sufficiente per garantirci la *convergenza puntuale*.

#Corollario

Corollario (condizione sufficiente per la convergenza con limite uguale alla funzione).

Sia $f \in L^1_{\mathbb{X}}(T)$ e $f \in \mathcal{C}^1$. Sia S_n la sua *ridotta di Fourier*; allora vale che essa converge con limite f per ogni punto $x \in \mathbb{R}$:

$$\exists \lim_n S_n(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del [Corollario 3 \(condizione sufficiente per la convergenza con limite uguale alla funzione\)](#).

Si basa sul fatto che $\mathcal{C}^0 \supset \mathcal{C}^1$ e dunque $f \in \mathcal{C}^0$, da cui si ha che esiste $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. ■

#Esempio

Esempio (esempio di applicazione).

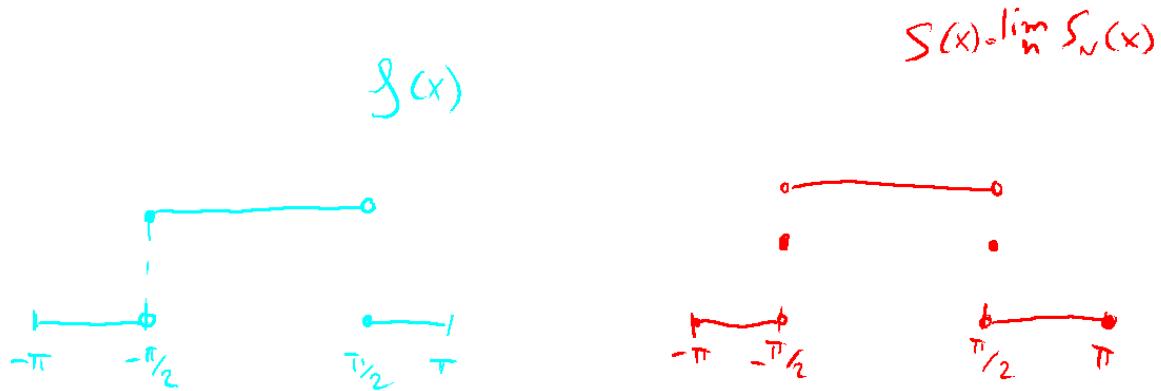
Sia $f(x)$ la funzione definita come

$$f(x \in [-\pi, \pi]) = \chi_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}(x)$$

Allora si ha che nei punti di salto $x_0 = \pm \frac{\pi}{2}$ la sua *serie di Fourier* S_n converge a

$$\lim_n S_n(x_0) = \lim_n \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx_0} = \frac{1}{2} \neq f(x_0)$$

FIGURA 3.2. ([Esempio 4 \(esempio di applicazione\)](#))



La dimostrazione del *teorema di Dirichlet-Weierstraß* è per ora omessa, in quanto sarà necessario vedere prima dei *risultati ausiliari* che hanno delle sue importanze autonome.

Disuguaglianza di Bessel

X

Disuguaglianza di Bessel: enunciato e dimostrazione. Conseguenza: lemma di Riemann-Lebesgue in L2.

X

0. Voci correlate

- [Spazio L_p](#)
- [Analisi e Sintesi di Fourier](#)

1. Disuguaglianza di Bessel

#Teorema

Teorema (disuguaglianza di Bessel).

Sia $f \in L^2_{\mathbb{C}}(T)$. Sia posta $(c_n)_n$ il suo spettro. Allora

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 \leq \frac{1}{T} \|f\|_{L^2}^2 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(x)|^2 dx$$

#Osservazione

Osservazione (decadimento dei coefficienti di Fourier).

Da questa disegualanza deduciamo che se f è localmente 2-integrabile (ovvero $\|f\|_{L^2}^2 < +\infty$), allora si ha che

$$\lim_n |c_n| = 0$$

(condizione necessaria per la convergenza!)

Vedremo che formuleremo il *lemma di Riemann-Lebesgue* in termini di *decadimento dei coefficienti di Fourier*.

#Osservazione

Osservazione (caso reale).

Si potrebbe riformulare l'enunciato nel caso *reale*: infatti dal seguente cambio di coefficienti ([Teorema 4 \(relazioni tra armoniche elementari\)](#))

$$\begin{cases} c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \\ c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) \end{cases}$$

Da cui si ricava che

$$c_n \cdot c_{-n} = c_n \bar{c}_n = |c_n|^2 = \frac{1}{4}(a_n^2 + b_n^2)$$

per cui ho

$$\frac{1}{4} \left(a_0 + \sum_{n \geq 1} (a_n^2 + b_n^2) \right) \leq \frac{1}{T} \|f\|_{L^2}^2$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del [Teorema 1 \(disegualanza di Bessel\)](#).

Sia S_n posta come

$$S_n(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx}$$

Calcoliamo dunque la norma dello scarto tra la funzione target f e la ridotta S_n . Ho

$$\begin{aligned} \|f - S_n\|_{L^2}^2 &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(x) - S_n(x)|^2 dx \\ &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (f(x) - S_n(x)) \overline{(f(x) - S_n(x))} dx (*) \end{aligned}$$

Espandendo (*) ho la seguente somma di integrali:

$$\underbrace{\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f|^2 dx}_{(1)} - \underbrace{\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f \cdot \bar{S}_n dx}_{(2)} - \underbrace{\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \bar{f} \cdot S_n dx}_{(2)} + \underbrace{\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |S_n|^2 dx}_{(3)}$$

La (1) è banalmente la norma $\|f\|_{L^2}^2$, come è pure la (3) (per il suo calcolo ho [Proposizione 3 \(energia dei polinomi trigonometrici\)](#)). Nella (2) invece abbiamo un caso misto: da stiamo valutando in ogni caso la sommatoria $\sum_{n \in \mathbb{Z}}$, da cui commutando l'integrale con la somma ho

$$(2) = \sum_{-N \leq n \leq N} \left(\overline{c_n} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-in\omega x} dx - c_n \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \overline{f(x)} e^{in\omega x} dx \right)$$

Ricordandoci ([Analisi e Sintesi di Fourier > \(1\)](#)) che

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-in\omega x} dx = T c_n$$

e similmente

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \overline{f(x)} e^{in\omega x} dx = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \overline{f(x)} e^{-in\omega x} dx = T \bar{c}_n$$

Tenendo conto che la *norma è sempre non-negativa*, ho

$$\begin{aligned} \|f - S_n\|_{L^2}^2 &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(x) - S_n(x)|^2 dx \\ &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (f(x) - S_n(x)) \overline{(f(x) - S_n(x))} dx \\ &= (1) + (3) + (2) \\ &= \|f\|_{L^2}^2 + T \sum_{-N \leq n \leq N} |c_n|^2 - \sum_{-N \leq n \leq N} (T c_n \bar{c}_n + T c_n \bar{c}_n) \\ &= \|f\|_{L^2}^2 + T \sum_{-N \leq n \leq N} (|c_n|^2 - 2|c_n|^2) \\ &= \|f\|_{L^2}^2 - T \sum_{-N \leq n \leq N} |c_n|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

In definitiva ho

$$\|f\|_{L^2}^2 \geq T \sum_{-N \leq n \leq N} |c_n|^2$$

Dividendo per T e portando al limite \lim_N ho la tesi. ■

#Osservazione

Osservazione (generalizzazione infinito-dimensionale del teorema di Pitagora).

Notiamo che nel corso della dimostrazione, abbiamo dedotto che

$$\|f - S_n\|_{L^2}^2 = \|f\|_{L^2}^2 - \|S_n\|_{L^2}^2$$

Ovvero

$$\|f - S_n\|_{L^2}^2 + \|S_n\|_{L^2}^2 = \|f\|_{L^2}^2$$

Ossia otteniamo che le funzioni $f - S_n$ e S_n sono ortogonali rispetto dal *prodotto scalare* $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}$.

Otteniamo dunque una *generalizzazione infinito-dimensionale del teorema di Pitagora*!

X

2. Lemma di Riemann-Lebesgue in L2

#Lemma

Lemma (Riemann-Lebesgue in L^2).

Sia $f \in L^2_{\mathbb{C}}(T)$ e $(c_n)_n = (c_n(f))_n$ la sua armonica associata. Allora vale che

$$\lim_{|n|} c_n(f) = 0$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Lemma 5 (Riemann-Lebesgue in L^2)

Conseguenza immediata della *disuguaglianza di Bessel*. Infatti

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 \leq \frac{1}{T} \|f\|_{L^2}^2 < +\infty$$

Per la *condizione necessaria* delle serie convergenti ho la tesi. ■

Convoluzione di Funzioni Periodiche

X

Convoluzione di funzioni: definizioni, proprietà e discussione euristica.

X

0. Voci correlate

- [Spazio \$L_p\$](#)

1. Definizione di Convoluzione

#Definizione

Definizione (convoluzione tra due funzioni periodiche).

Sia $T > 0$ e siano $f, g \in L^1_{\mathbb{C}}(T)$. Denotiamo la *convoluzione di f, g* come la *funzione* posta come

$$f \star g := \int_{\mathbb{R}} f(x - y)g(y) \, dy$$

#Proposizione

Proposizione (proprietà della convoluzione).

Sia $T > 0$ fissato. Allora:

i. Chiusura interna di L^1 rispetto alla convoluzione

$$f, g \in L^1_{\mathbb{C}}(T) \implies f \star g \in L^1_{\mathbb{C}}(T)$$

ii. Simmetria

$$f \star g = g \star f$$

iii. Chiusura della regolarità

$$f, g \in L^1_{\mathbb{C}}(T) \wedge g \in \mathcal{C}^k \implies f \star g \in \mathcal{C}^k, (f \star g)^{(n \leq k)} = f \star g^{(n)}$$

2. Discussione Euristica

DISCUSSIONE EURISTICA. (*Significato geometrico della convoluzione*)

Supponiamo che f sia una *funzione arbitraria localmente integrabile* e che g sia di classe \mathcal{C}^∞ . In questo caso si ha

$$f \star g = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y) dy = \int_{\mathbb{R}} g(x-y)f(y) dy = g \star f$$

Allora derivando questa funzione n -volte in x ho

$$\frac{d^n}{dx^n}(f \star g)(x) = \frac{d^n}{dx^n} \int_{\mathbb{R}} g(x-y)f(y) dy$$

Dato che g è l'unica funzione che varia in x , ho

$$\frac{d^n}{dx^n} \int_{\mathbb{R}} g(x-y)f(y) dy = \int_{\mathbb{R}} g^{(n)}(x-y)f(y) dy$$

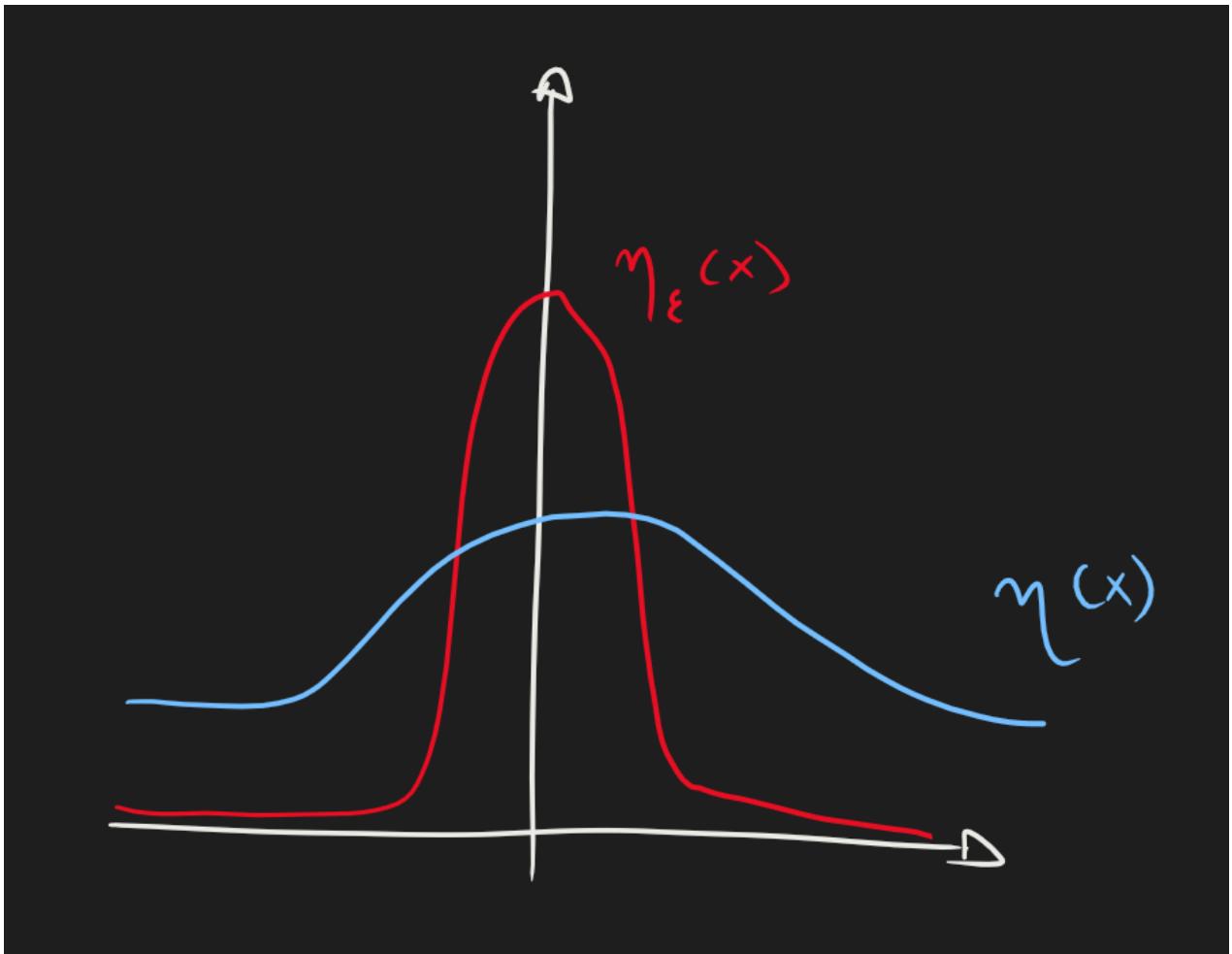
Allora

$$\frac{d^n}{dx^n}(f \star g)(x) = f \star g^{(n)}$$

Adesso sia posta la funzione

$$\eta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

Prendendo $f_\varepsilon := f \star \eta_\varepsilon$, ho che f_ε "approssima" f . In particolare, ho che f_ε è una "versione liscia" di f , che potrebbe essere "non-liscia".



Lemma di Riemann-Lebesgue in L1

X

Lemma di Riemann-Lebesgue in L1: Enunciato, risultati preliminari per la dimostrazione ed osservazioni.

X

0. Voci correlate

- [Disuguaglianza di Bessel](#)
- [Spazio L_p](#)

1. Enunciato di Riemann-Lebesgue in L1

#Lemma

Lemma (Riemann-Lebesgue in L^1).

Sia $f \in L^1_{\mathbb{C}}(T > 0)$ e $(c_n)_n = (c_n(f))_n$ lo spettro di f . Allora vale che

$$\lim_{|n|} c_n(f) = \lim_{|n|} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-inx} dx = 0$$

#Osservazione

Osservazione (differenza dal caso L^2).

Abbiamo visto che il lemma di Riemann-Lebesgue in L^2 è una *conseguenza immediata* della disuguaglianza di Bessel. Tuttavia ciò vale solo se f è *localmente due-integrabile*, che è una *condizione più debole* rispetto all'integrabilità in $p = 1$.

X

2. Risultati Ausiliari per la Dimostrazione

Prima di procedere alla *dimostrazione*, vediamo dei *risultati ausiliari*.

#Definizione

Definizione (funzione semplice (o a scalini)).

Si dice *funzione semplice* (o *a scalini*) una funzione φ del tipo

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^L \alpha_j \chi_{[a_j, b_j)}(x)$$

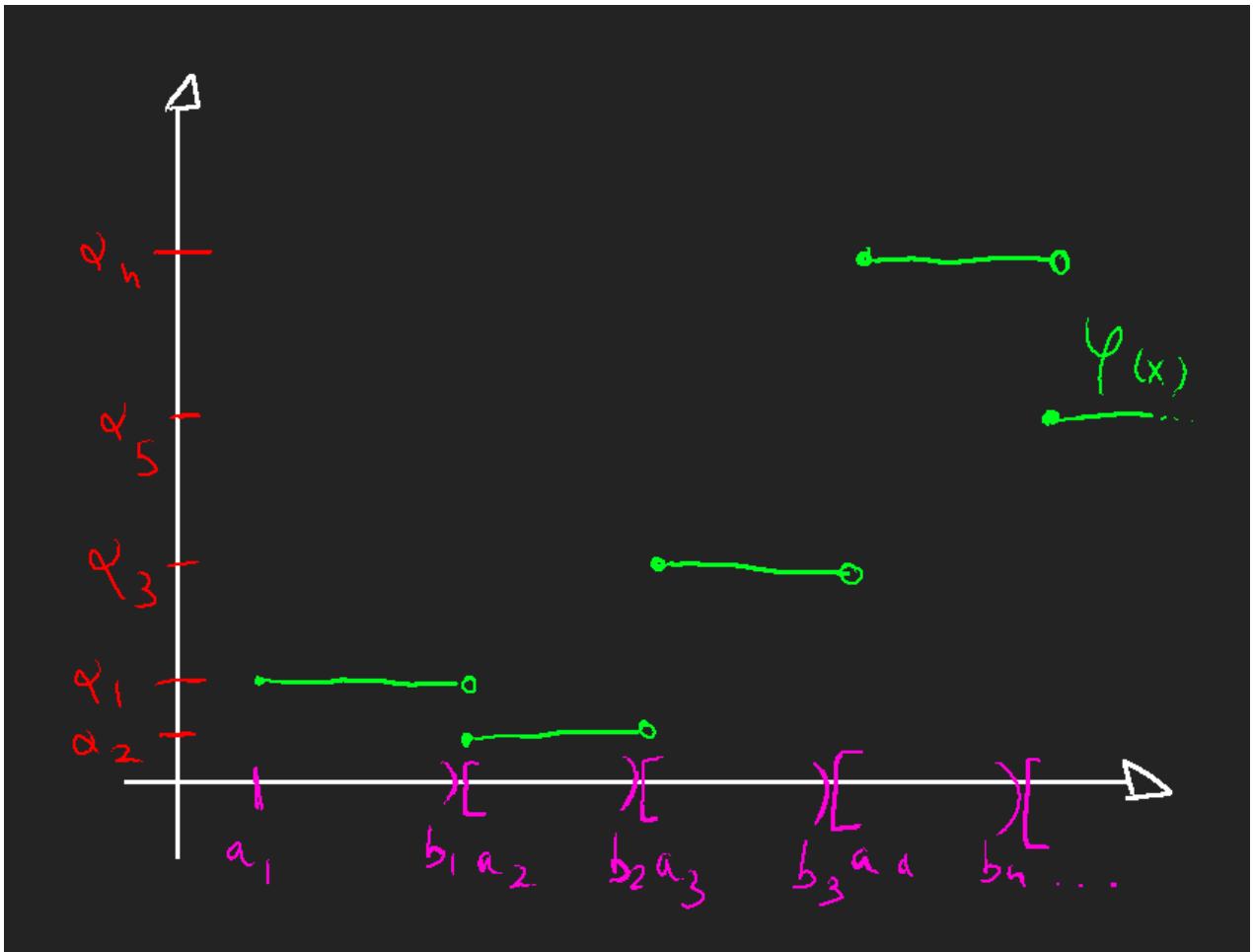
con $L \in \mathbb{N}$, $(\alpha_j)_j \in \mathbb{C}$ e $[a_j, b_j)_j$ degli insiemi disgiunti.

Notiamo che φ è una funzione *costante a tratti*

Inoltre si definisce l'insieme delle *funzioni semplici T-periodiche* con

$$\text{FS}_{\mathbb{X}}(T)$$

FIGURA 2.1. (Esempio di funzione semplice)



#Definizione

Definizione (chiusura topologica rispetto a un insieme).

Sia $Y \subset X$ con (X, d_X) uno spazio metrico. Denotiamo con \overline{Y}^X la chiusura di Y nella topologia di X . Ricordiamo che la chiusura topologica è

$$\overline{Y}^X = \{x \in X \mid \exists (y_n)_n : \lim_n d_X(x, y_n) = 0\}$$

#Proposizione

Proposizione (densità delle funzioni semplici in L^p).

Sia $T > 0$ e $1 \leq p \leq +\infty$, $\mathbb{X} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$. Allora vale che

$$L_{\mathbb{X}}^p(T) = \overline{\text{FS}_{\mathbb{X}}(T)}^{L_{\mathbb{X}}^p(T)}$$

Ovvero lo spazio delle funzioni semplici è denso in L^p .

#Definizione

Definizione (spazio delle successioni discrete a valori complessi).

Si denota lo spazio delle successioni $(z_n)_n$ del tipo

$$n \in \mathbb{Z} \mapsto z_n \in \mathbb{C} : \|z\|_{l^\infty} := \sup_{n \in \mathbb{Z}} |z_n| < +\infty$$

come

$$l^\infty = l^\infty(\mathbb{Z}; \mathbb{C})$$

#Lemma

Lemma (l'operatore spettro è lineare continuo).

Sia definito l'operatore $\mathcal{F} : L^1 \rightarrow l^\infty$ posta come

$$\mathcal{F}(f) = (c_n(f))_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-inx} dx$$

Allora \mathcal{F} è un *operatore lineare continuo* tra L^1 e l^∞ .

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del [Lemma 7 \(l'operatore spettro è lineare continuo\)](#).

Siano $f, g \in L^1$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Allora si ha che

$$\begin{aligned} c_n(f) + \lambda c_n(g) &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-inx} dx + \frac{\lambda}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(x) e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (f(x) + \lambda g(x)) e^{-inx} dx =: c_n(f + \lambda g) \\ &= \mathcal{F}(f + \lambda g) \end{aligned}$$

provando la *linearità*. Adesso passiamo a dimostrare che \mathcal{F} è *continua*: consideriamo lo scarto tra le successioni $c_n(f)$ e $c_n(g)$, cioè

$$\begin{aligned} \|c_n(f) - c_n(g)\|_{l^\infty} &= \sup_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f) - c_n(g)| \\ &= \sup_n \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(x) - g(x)| \underbrace{|e^{-inx}|}_1 dx \\ &= \sup_n \frac{1}{T} \|f - g\|_{L^1} \end{aligned}$$

Supponendo che $f \rightarrow g$ per cui $\|f - g\|_{L^1} \rightarrow 0$, abbiamo che

$$\|c_n(f) - c_n(g)\|_{l^\infty} \rightarrow 0$$

provando la tesi. ■

X

3. Dimostrazione del Lemma di Riemann-Lebesgue

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del [Lemma 1 \(Riemann-Lebesgue in \$L^1\$ \)](#).

Dividiamo questa dimostrazione in 3 sottocasi (*step*):

Step 1. Supponiamo che $f = \chi_{[a,b]}$ con $[a, b] \subseteq [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$. Abbiamo che

$$c_n(f) = \frac{1}{T} \int_a^b e^{-inx} dx = \frac{e^{-inbw} - e^{-inaw}}{T(-in\omega)}$$

Passando al limite ho che questa tende a zero. Infatti $c_n(f) \in O(n^{-1})$ (è un *O-grande* di $1/n$, per cui tende a zero).

Step 2. Supponiamo in questo caso che f è una *funzione semplice* con $L \in \mathbb{N}$, $(\alpha_j)_j \in \mathbb{C}$ e $[a_j, b_j)_j$ disgiunti. In questo caso, per calcolare la $c_n(f)$ possiamo ricondurci allo step 1:

$$c_n(f) = \sum_{j=1}^L \alpha_j c_n(\chi_{[a_j, b_j)}) = \sum_{j=1}^L \alpha_j \underbrace{\frac{e^{-inb_j\omega} - e^{-ina_j\omega}}{T(-in\omega)}}_{(*)}$$

Poiché $(*)$ è un *O-grande* di $1/n$, ho che pure questa tende a zero ($\lim_n c_n = 0$).

Step 3. Supponiamo $f \in L^1$ generica. Poiché è $f \in L^1$, possiamo dire che

$$\forall \delta > 0, \exists \varphi = \varphi_\delta \in \text{FS} : \|f - \varphi\|_{L^1} < \delta$$

(in altre parole possiamo trovare sempre una funzione semplici φ che "approssimi" f ; questo segue dalla densità delle funzioni semplici in L^1). Inoltre l'applicazione \mathcal{F} è *continua* tra L^1 e l^∞ , dunque

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \\ \|f - \varphi\|_{L^1} < \delta \implies \|c_n(f) - c_n(\varphi)\|_{l^\infty} < \varepsilon \end{aligned}$$

Riprendendo $|c_n(f)|$, posso aggiungere e sottrarre per $c_n(\varphi)$ e usare la disegualanza triangolare:

$$|c_n(f) + c_n(\varphi) - c_n(\varphi)| \leq \underbrace{|c_n(f) - c_n(\varphi)|}_{< \varepsilon} + \underbrace{|c_n(\varphi)|}_{\in O(n^{-1})}$$

Dato che entrambe le funzioni del membro destro sono maggiorate da quantità *arbitrariamente piccole* (e in particolare diventano nulle per $n \rightarrow +\infty$), si ha la tesi. ■

Nucleo di Dirichlet

X

Nucleo di Dirichlet: definizione e prime proprietà. Formule di Dirichlet. Lemmi: l'integrale del nucleo di Dirichlet, formula chiusa del nucleo di Dirichlet.

X

0. Voci correlate

- [Funzioni T-Periodiche](#)

1. Definizione e Prime Proprietà

#Definizione

Definizione (nucleo di Dirichlet).

Si dice il *nucleo di Dirichlet* di ordine $n \in \mathbb{N}$ come la *funzione*

$$D_n(x) = \frac{1}{T} \sum_{-n \leq k \leq n} e^{inx}$$

#Proposizione

Proposizione (prime proprietà del nucleo di Dirichlet).

Sia D_n il nucleo di Dirichlet. Allora:

i. D_n è T -periodica:

$$D_n(x) = D_n(x + kT), \forall k \in \mathbb{Z}$$

ii. D_n è pari:

$$D_n(x) = D_n(-x)$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE della [Proposizione 2 \(prime proprietà del nucleo di Dirichlet\)](#).

i. Si tratta di sfruttare della 2π -periodicità di e^{inx} . Infatti, $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$. Allora si ha (proviamo per $k = 1$)

$$D_n(x + T) = \frac{1}{T} \sum_{-n \leq k \leq n} e^{ik\frac{2\pi}{T}(x+T)} = \frac{1}{T} \sum_{|k| \leq n} e^{ik(\omega x + 2\pi)} = \frac{1}{T} \sum_{|k| \leq n} e^{ik\omega x}$$

provando il primo punto.

ii. Si tratta di sfruttare che abbiamo una *sommatoria simmetrica*. Infatti

$$D_n(-x) = \frac{1}{T} \sum_{|k| \leq n} e^{ik\omega(-x)} = \frac{1}{T} \sum_{|-k| \leq n} e^{ik\omega x}$$

provando il secondo punto. ■

X

2. Formule di Dirichlet

#Proposizione

Proposizione (formule di Dirichlet).

Sia $f \in L^1_{\mathbb{C}}(T)$ e $N \in \mathbb{N}$. Allora, data $S_N(x)$ la sua ridotta N -esima della serie di Fourier associata, si ha che

$$S_N(x) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x-t) D_N(t) dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) D_N(x-t) dt$$

Ovvero

$$S_N = f \star D_N = D_N \star f$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE della [Proposizione 3 \(formule di Dirichlet\)](#).

Si tratta di fare due calcoli diretti. Allora:

$$\begin{aligned}
S_N(x) &= \sum_{|n| \leq N} c_n e^{inx} \\
&= \sum_{|n| \leq N} \left(\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-int} dt \right) e^{inx} \\
&= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \left[\frac{1}{T} \sum_{|n| \leq N} e^{in(x-t)} \right] dt \\
&= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) D_N(x-t) dt
\end{aligned}$$

Effettuando uno cambiamento di variabili (in particolare con $x-t = u$ e poi $s = -u$) si ottiene la tesi. ■

X

3. Ulteriori Proprietà

#Lemma

Lemma (l'integrale sul periodo del nucleo di Dirichlet).

Si ha che

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} D_N(x) dx = 1$$

#Osservazione

Osservazione (conseguenze della parità).

Siccome D_N pari, ho

$$\int_0^{\frac{T}{2}} D_N(x) dx = \frac{1}{2}$$

DIMOSTRAZIONE del [Lemma 4 \(l'integrale sul periodo del nucleo di Dirichlet\)](#).

Si tratta anche qui di fare due calcoli.

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} D_N(x) dx := \frac{1}{T} \sum_{|n| \leq N} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{inx} dx$$

Espandendo la sommatoria degli integrali ho

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{T} \sum_{|n| \leq N} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{inx} dx \\
&'' = \frac{1}{T} \left(\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-iN\omega x} dx + \dots + \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1 dx + \dots + \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{iN\omega x} dx \right) \\
&= \frac{1}{T} \left(\frac{e^{-iN\omega x}}{-iN\omega} \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \dots + T + \dots + \frac{e^{iN\omega x}}{iN\omega} \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \right)
\end{aligned}$$

Valutando le primitive nel ho che tutti i termini si cancellano, quella "centrale" T ; infatti, fissando un $-N \leq n_k \leq N$ ho sempre una somma del tipo

$$\frac{e^{-in_k\omega\frac{\pi}{2}}}{-in_k\omega\frac{\pi}{2}} - \frac{e^{in_k\omega\frac{\pi}{2}}}{in_k\omega\frac{\pi}{2}} + \frac{e^{in_k\omega\frac{\pi}{2}}}{in_k\omega\frac{\pi}{2}} - \frac{e^{-in_k\omega\frac{\pi}{2}}}{-in_k\omega\frac{\pi}{2}} = 0$$

Allora ho

$$\frac{1}{T}(0 + \dots + T + \dots + 0) = 1$$

provando la tesi. ■

#Lemma

Lemma (formula chiusa per il nucleo).

Si ha che D_N può essere riscritta come

$$D_N(x) = \begin{cases} \frac{1}{T} \frac{e^{i(N+1)\omega x} - e^{-iN\omega x}}{e^{i\omega x} - 1}, & x \neq kT, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{1}{T}(2N+1), & x = kT, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del [Lemma 6 \(formula chiusa per il nucleo\)](#).

Per $x = kT$ la dimostrazione è immediata: infatti si sfrutta il fatto che $\omega = \frac{2\pi}{T}$ per cui

$$D_N(kT) = \frac{1}{T} \sum_{n \leq |N|} e^{in\omega(kT)} = \frac{1}{T} \sum_{n \leq |N|} \frac{e^{in2\pi k}}{1} = \frac{2N+1}{T}$$

Sia ora $x \neq kT$ e poniamo $z = e^{i\omega x}$. Allora

$$D_N(x) = \frac{1}{T} \sum_{n \leq |N|} e^{in\omega x} = \frac{1}{T} \sum_{n \leq |N|} z^n$$

Espandendo la sommatoria ho

$$D_N(x) = \dots = \frac{1}{T}(z^{-N} + \dots + 1 + \dots + z^N)$$

Raccogliendo per z^{-N} ,

$$\frac{1}{T}(z^{-N} + \dots + 1 + \dots + z^N) = \frac{z^{-N}}{T}(1 + \dots + z^{2N})$$

Dato che ho una *ridotta geometrica* di ragione z fino a $2N$, riscrivo la somma come

$$\frac{z^{-N}}{T}(1 + \dots + z^{2N}) = \frac{z^{-N}}{T} \frac{z^{2N+1} - 1}{z - 1} = \frac{1}{T} \frac{z^{N+1} - z^{-N}}{z - 1}$$

Ri-effettuando la sostituzione $z = e^{i\omega x}$ ho

$$\frac{1}{T} \frac{z^{N+1} - z^{-N}}{z - 1} = \frac{1}{T} \frac{e^{i\omega(N+1)x} - e^{-i\omega Nx}}{e^{i\omega x} - 1}$$

provando la tesi. ■

#Osservazione

Osservazione (esprimere Dirichlet in termini di seno).

Notiamo che nel caso $x \neq kT$ posso moltiplicare e dividere per $e^{i\frac{\pi}{2}x}$ e $\frac{1}{2i}$, dandoci

$$T \cdot D_N(x \neq kT) = \frac{e^{i(N+1/2)\omega x} - e^{-i(N+1/2)\omega x}}{2i} \cdot \frac{2i}{e^{i(1/2)\omega x} - e^{-i(1/2)\omega x}}$$

Usando le *formule di Eulero* ([Definizione 9 \(funzione trigonometrica complessa\)](#)) ho

$$TD_N(x \neq kT) = \frac{\sin((N + \frac{1}{2})\omega x)}{\sin(\frac{1}{2}\omega x)}$$

Ne deduciamo che almeno in $x \neq kT$ la funzione $D_N(x)$ è *continua*.

Teorema di Dirichlet-Weierstraß

X

Teorema di Dirichlet-Weierstraß: (richiamo) all'enunciato e dimostrazione.

X

0. Voci correlate

- [Nucleo di Dirichlet](#)
- [Convergenza Puntuale delle Serie di Fourier](#)
- [Lemma di Riemann-Lebesgue in L1](#)

1. Teorema di Dirichlet-Weierstraß

#Teorema

Teorema (Dirichlet-Weierstraß).

Sia $f \in L^1_{\mathbb{C}}(T)$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Supponiamo che esistano finiti i seguenti limiti unilaterali:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) &= f(x_0^-) \wedge \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0^+) \\ \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0^-)}{x - x_0} &= f'(x_0^-) \wedge \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0^+)}{x - x_0} = f'(x_0^+) \end{aligned}$$

(notare bene che i limiti destri e sinistri possono essere diversi!; i primi due limiti si dicono *pseudo-continui*, gli ultimi due *pseudo-derivate*)

Si ha dunque che la sua *serie di Fourier* S_n converge puntualmente in x_0 col limite

$$\exists \lim_n S_n(x_0) = \frac{1}{2}(f(x_0^-) + f(x_0^+))$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del [Teorema 1 \(Dirichlet-Weierstraß\)](#)

Si tratta di provare il limite

$$\lim_n S_n(x_0) = \frac{1}{2}(f(x_0^-) + f(x_0^+))$$

ovvero

$$\lim_n S_n(x_0) - \frac{1}{2}(f(x_0^-) + f(x_0^+)) = 0$$

Utilizziamo la *forma di Dirichlet* per esprimere S_n come la convoluzione $f \star D_n$:

$$S_n(x_0) = (f \star D_n)(x_0) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x_0 + t) D_n(t) dt$$

Ovvero

$$S_n(x_0) - \frac{1}{2}(f(x_0^-) + f(x_0^+)) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x_0 + t) D_n(t) dt - \frac{1}{2}(f(x_0^-) + f(x_0^+))$$

Spezzando l'integrale in due parti ho

$$\underbrace{\int_{-\frac{T}{2}}^0 f(x_0 + t) D_n(t) dt - \frac{1}{2} f(x_0^-)}_{(A)} + \underbrace{\int_0^{\frac{T}{2}} f(x_0 + t) D_n(t) dt - \frac{1}{2} f(x_0^+)}_{(B)}$$

Ricordiamoci che ([Lemma 4 \(l'integrale sul periodo del nucleo di Dirichlet\)](#))

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 D_n(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} D_n(x) dx = \frac{1}{2}$$

per cui ho

$$\begin{aligned} (A) &= \int_{-\frac{T}{2}}^0 f(x_0 + t) D_n(t) dt - \int_{-\frac{T}{2}}^0 D_n(t) f(x_0^-) dt \\ &= \int_{-\frac{T}{2}}^0 D_n(t) (f(x_0 + t) + f(x_0^-)) dt \quad (A^*) \end{aligned}$$

e analogamente

$$\begin{aligned} (B) &= \int_0^{\frac{T}{2}} f(x_0 + t) D_n(t) dt - \int_0^{\frac{T}{2}} D_n(t) f(x_0^+) dt \\ &= \int_0^{\frac{T}{2}} D_n(t) (f(x_0 + t) + f(x_0^+)) dt \quad (B^*) \end{aligned}$$

Adesso usiamo la *forma chiusa* di D_n ([Lemma 6 \(formula chiusa per il nucleo\)](#)) sia su (A^*) che su (B^*) , dandoci

$$\begin{aligned} (A^*) &= \int_{-\frac{T}{2}}^0 D_n(t) (f(x_0 + t) + f(x_0^-)) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^0 \frac{e^{i(n+1)\omega t} - e^{-in\omega t}}{e^{i\omega t} - 1} (f(x_0 + t) - f(x_0^-)) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^0 (e^{i(n+1)\omega t} - e^{in\omega t}) \frac{f(x_0 + t) - f(x_0^-)}{t} \frac{t}{e^{i\omega t} - 1} dt \end{aligned}$$

Ripetiamo lo stesso calcolo per (B^*) , dandoci

$$(B^*) = \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} (e^{i(n+1)\omega t} - e^{in\omega t}) \frac{f(x_0 + t) - f(x_0^+)}{t} \frac{t}{e^{i\omega t} - 1} dt$$

Notiamo che $e^{i\omega t} - 1 = (\cos(\omega t) - 1) + i \sin(\omega t)$. Dunque definiamo la seguente funzione ausiliaria:

$$g(t) := \begin{cases} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0^-)}{t} \frac{t}{(\cos(\omega t) - 1) + i \sin(\omega t)}, & t \in [-T/2, 0) \\ \frac{f(x_0 + t) - f(x_0^+)}{t} \frac{t}{(\cos(\omega t) - 1) + i \sin(\omega t)}, & t \in [0, T/2) \end{cases}$$

che verrà *prolungata periodicamente in \mathbb{R}* . Calcoliamo il limite $\lim_{t \rightarrow 0^-} g(t)$:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^-} g(t) &= \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0^-)}{t} \frac{t}{(\cos(\omega t) - 1) + i \sin(\omega t)} \\ &= \frac{f'(x_0^-)}{i\omega} \end{aligned}$$

Analogamente

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) = \frac{f'(x_0^+)}{i\omega}$$

Pertanto ho il limite

$$\lim_{t \rightarrow 0} g(t) = \frac{f'(x_0^+)}{i\omega}$$

Assumiamo per ora che $g \in L^1(T)$, lo dimostreremo post-dimostrazione; allora è possibile definire lo spettro di g , $c_n(g)$.

Ricominciando dalla situazione iniziale (ovvero (A^*) e (B^*)), ho

$$\begin{aligned} (A^*) &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^0 (e^{i(n+1)\omega t} - e^{in\omega t}) \frac{f(x_0 + t) - f(x_0^-)}{t} \frac{t}{e^{i\omega t} - 1} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^0 (e^{i(n+1)\omega t} - e^{in\omega t}) g(t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^0 e^{i(n+1)\omega t} g(t) dt - \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^0 e^{in\omega t} g(t) dt \end{aligned}$$

Analogamente dall'altro lato ho

$$(B^*) = \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} e^{i(n+1)\omega t} g(t) dt - \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} e^{in\omega t} g(t) dt$$

Partendo da capo ho

$$\begin{aligned} S_n(x_0) - \dots &= (A^*) + (B^*) \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^0 e^{i(n+1)\omega t} g(t) dt - \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^0 e^{in\omega t} g(t) dt \\ &\quad + \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} e^{i(n+1)\omega t} g(t) dt - \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} e^{in\omega t} g(t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(t) e^{i(n+1)\omega t} dt - \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(t) e^{in\omega t} dt \\ &= c_{n+1}(g) - c_n(g) \end{aligned}$$

Portando tutto al limite ho, per *Riemann-Lebesgue* ([Lemma 1 \(Riemann-Lebesgue in \$L^1\$ \)](#)), il decadimento dei coefficienti di Fourier:

$$\lim_n c_{n+1}(g) - c_n(g) = 0 - 0 = 0$$

Provando formalmente che

$$\lim_n S_n(x_0) = \frac{1}{2}(f(x_0^-) + f(x_0^+)) = 0$$

concludendo finalmente la dimostrazione. ■

#Lemma

Lemma (g è localmente integrabile in T).

Sia $g(t)$ definita come sopra (dimostrazione del [Teorema 1 \(Dirichlet-Weierstraß\)](#)).

Allora $g \in L^1(T)$ e ed $\exists C_0$ tale che

$$\|g\|_{L^1} \leq C_0(\|f\|_{L^1} + |f(x_0^-)| + |f(x_0^+)| + |f'(x_0^-)| + |f'(x_0^+)|)$$

Ossia la sua norma è finita e viene controllata dalla "qualità" della funzione f

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del [Lemma 2 \(\$g\$ è localmente integrabile in \$T\$ \)](#).

L'idea è quello di spezzare l'integrale

$$\|g\|_{L^1} = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |g|$$

in due parti, e di verificare che ognuna viene maggiorata come enunciata nella tesi. Sia dunque $\delta \in (0, \frac{T}{2})$ e definiamo i seguenti integrali:

$$I^\delta := \int_{|y| \geq \delta, |y| \leq \frac{T}{2}} |g(y)| \, dy$$

$$I_\delta := \int_{|y| \leq \delta} |g(y)| \, dy$$

Notiamo che ovviamente $\|g\|_{L^1} = I^\delta + I_\delta$. Ciò che vogliamo dimostrare è che $\exists \delta_0 > 0 : \forall \delta \in (0, \delta_0), \exists C_\delta, C'_\delta$, tali che

$$I^\delta \leq C_\delta(\|f\|_{L^1} + |f(x_0^+)| + |f(x_0^-)|)$$

$$I_\delta \leq C'_\delta(|f'(x_0^+)| + |f'(x_0^-)|)$$

Notiamo che in tal caso avrei che $\|g\|_{L^1} < +\infty \iff g \in L^1(T)$. Andiamo a calcolare le maggiorazioni, per dedurre C_δ, C'_δ .

I_δ : Ricordiamo che g è localmente limitata in $y = 0$, infatti ha il limite

$$\lim_{y \rightarrow 0} g(y) = \frac{f'(x_0^\pm)}{i\omega}$$

Siccome g è anche continua (tranne per $y = 0$ se $f(x_0^+) \neq f(x_0^-)$), ottengo che $\exists \delta'_0 \in (0, 1)$ tale che $\forall \delta \in (0, \delta'_0)$ ho che per ogni $|y| \leq \delta$ (in altre parole, stiamo considerando un intorno di 0 senza 0) la maggiorazione

$$|g(y)| \leq 2 \left(\lim_{y \rightarrow 0^+} g(y) + \lim_{y \rightarrow 0^-} g(y) \right)$$

$$\leq \frac{2}{\omega} (|f'(x_0^+)| + |f'(x_0^-)|)$$

Pertanto associamo a I_δ il coefficiente limitante $C'_\delta := \frac{2}{\omega}$.

I^δ : Calcoliamo ora la maggiorazione per $\frac{T}{2} \geq |y| \geq \delta$. Abbiamo, riprendendo la definizione di g , che

$$\begin{aligned}|g(y)| &\leq \frac{|f(x_0 + y)| + |f(x_0^\pm)|}{|y|} \frac{|y|}{|\cos(\omega y) - 1 + i \sin(\omega y)|} \\&\leq \frac{|f(x_0 + y)| + |f(x_0^+)| + |f(x_0^-)|}{\delta} \frac{\frac{T}{2}}{\inf_y |\cos(\omega y) - 1 + i \sin(\omega y)|}\end{aligned}$$

Notiamo che $|\cos(\omega y) - 1 + i \sin(\omega y)| = |e^{i\omega y} - 1|$ rappresenta una circonferenza di raggio $r = 1$ centrato in $(-1 + 0i)$ sul piano \mathbb{C} . Pertanto essa raggiunge il minimo in $|y| = \delta$ e va a maggiorare

$$|\cos(\omega\delta) - 1 + i \sin(\omega\delta)| \geq |\sin(\omega\delta)| - |\cos(\omega\delta) - 1|$$

Per $\omega\delta$ "sufficientemente piccolo" ho l'approssimazione $\sin(\omega\delta) \approx \omega\delta$ e $\cos(\omega\delta) - 1 \approx -(\omega\delta)^2/2$, in particolare per $\omega\delta < \frac{1}{4}$ ho

$$|\cos(\omega\delta) - 1 + i \sin(\omega\delta)| \geq \frac{1}{2} \left(\omega\delta - \frac{(\omega\delta)^2}{2} \right) \geq \frac{\omega\delta}{4}$$

Riprendendo la nostra maggiorazione ho

$$\begin{aligned}|g(y)| &\leq \frac{T}{2 \frac{1}{4} \omega \delta^2} (|f(x_0 + y)| + |f(x_0^+)| + |f(x_0^-)|) \\&\leq \frac{2T}{\omega \delta^2} (\dots)\end{aligned}$$

Integrando $|g(y)|$ ottengo $\|g\|_{L^1} \leq \frac{2T}{\omega \delta^2} (\dots)$; pertanto definiamo $C_\delta := \frac{2T}{\omega \delta^2}$. Per concludere la dimostrazione, basta scegliere $\delta = \min\{\delta'_0, (4\omega)^{-1}\}$ si ha la tesi. ■

RIASSUNTO della *dimostrazione*. Dato che questa dimostrazione è *particolarmente contosa*, andiamo a ricordarci dei seguenti step:

1. Considero lo *scarto* tra la funzione $S_n(x_0)$ e il suo *limite target*, esprimendo $S_n(x_0)$ come una forma particolare del *nucleo di Dirichlet*
2. Considero che $\frac{1}{2}$ è esprimibile in *termini di Nucleo di Dirichlet*
3. Spezzo l'integrale in due parti, trattando il limite destro e sinistro come casi separati
4. Cerco di isolare l'*esponenziale complesso* (oppure la somma di due di essi) di uno dei due integrali, definendo dall'altro lato una *funzione ausiliaria*
5. Dimostrare che la *funzione ausiliaria* è L^1 , ovvero per cui si può definire i coefficienti di Fourier $c_n(g)$
6. Ricombinare tutto ed esprimere l'integrale come dei *coefficienti di Fourier* e usare il *lemma di Riemann-Lebesgue*.

2. Caso di Applicazione: il problema di Basilea

Vediamo un caso in cui possiamo applicare il *teorema di Dirichlet-Weierstraß*.

PROBLEMA DI BASILEA. (*Proposto da Mengoli nel 1644 e risolto da Eulero nel 1735*) ([Esempio 14](#) ([Problema di Basilea](#)))

Si dimostra facilmente che

$$\sum_n \frac{1}{n^2} = S < +\infty$$

Tuttavia qual è la sua somma S ? Vedremo che un modo per calcolare tale somma è usare l'*analisi di Fourier*. Consideriamo $f(x \in [-\pi, \pi]) = x^2$ estesa periodicamente su tutto \mathbb{R} : con dei calcoli si ottiene che la sua *serie di Fourier* è

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_n \frac{4}{n^2} (-1)^n \cos(nx)$$

Vedremo che per il teorema appena enunciato e dimostrato, si ha che la serie converge puntualmente a x^2 per ogni x . Allora:

$$f(\pi) = \pi^2 \equiv \frac{\pi^2}{3} + \sum_n \frac{4}{n^2} \underbrace{(-1)^n \cos(n\pi)}_{(-1)^n}$$

isolando per $\sum_n \frac{1}{n^2}$ ho

$$\boxed{\sum_n \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

risolvendo il problema. ■

FIGURA 2.1. (*Ritratti di Mengoli e Eulero*)



Convergenza Uniforme delle Serie di Fourier

X

Convergenza uniforme delle Serie di Fourier: condizione sufficiente. Dimostrazione.

X

0. Voci correlate

- [Analisi e Sintesi di Fourier](#)
- [Spazio Lp](#)

1. Condizione Sufficiente

#Teorema

Teorema (condizione sufficiente per la convergenza uniforme delle serie di Fourier).

Sia $f \in L^2_{\mathbb{C}}(T)$ e derivabile (attenzione, non stiamo chiedendo \mathcal{C}^1 ! basta solo che la derivata esista), con $f' \in L^2_{\mathbb{C}}(T)$.

Allora la serie

$$\sum_{|n|} c_n(f) e^{inx}$$

converge uniformemente ad f in \mathbb{R} .

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del [Teorema 1 \(condizione sufficiente per la convergenza uniforme delle serie di Fourier\)](#).

Notiamo subito che possiamo già dire che la serie converge puntualmente, per *Dirichlet-Weierstraß* ([Teorema 1 \(Dirichlet-Weierstraß\)](#)).

Siccome $f' \in L^2_{\mathbb{C}}(T)$, possiamo applicarci la *disuguaglianza di Bessel* ([Teorema 1 \(disuguaglianza di Bessel\)](#)):

$$\sum_{|n|} |c_n(f')|^2 \leq \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f'(x)|^2 dx < +\infty$$

Ricavando che $|c_n(f')|^2$ è convergente. Adesso vogliamo esprimere questa in termini di $|c_n(f)|$. Ovvero

$$\begin{aligned} |c_n(f')|^2 &= |(in\omega)c_n(f)|^2 \\ &= (in\omega)c_n(f) \cdot \overline{(in\omega)c_n(f)} \\ &= (in\omega)(-in\omega)c_n(f)\overline{c_n(f)} \\ &= (n\omega)^2 |c_n(f)|^2 \end{aligned}$$

Ovvero

$$\sum_{|n|} |c_n(f')|^2 = \sum_{|n|} (n\omega)^2 |c_n(f)|^2 < +\infty (*)$$

Ciò che ci resta da dimostrare è il fatto che da questa convergenza quadratica abbiamo la *convergenza uniforme*. Prima di farlo, vogliamo trovare una relazione tra $|c_n(f)|$ e $|c_n(f')|^2$: per farlo useremo la *disuguaglianza di Young*, per cui $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$. In questo caso lo uso per $a = \frac{1}{|n\omega|}$ e $b = |n\omega||c_n(f)|$, dandoci

$$|c_n(f)| = \frac{|c_n(f)||n\omega|}{|n\omega|} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{|n\omega|^2} + |n\omega|^2 |c_n(f)|^2 \right)$$

Ri-assemblando tutto ho

$$\sum_{|n|} |c_n(f)| \leq \frac{1}{2} \left(\underbrace{\sum_{|n|} \frac{1}{(n\omega)^2}}_{<+\infty} + \underbrace{\sum_{|n|} (n\omega)^2 |c_n(f)|^2}_{(*) \Rightarrow "<+\infty"} \right)$$

Ottenendo dunque che la serie $\sum_{|n|} |c_n(f)| < +\infty$.

Così ho il "candidato ideale" $(M_n)_n$ con cui usare l'M-test ([Teorema 3 \(M&M'S-test di Weierstraß 2.0\)](#)).

Definendo $M_n = |c_n(f)|$ ho che la serie

$$\sum_{|n|} c_n(f) e^{inx} \leq M_n$$

converge uniformemente su tutto \mathbb{R} per l'M-test. ■

Convergenza in Energia delle Serie di Fourier

X

Convergenza in energia delle serie di Fourier: condizione necessaria e sufficiente per la convergenza in energia (identità di Parseval).

X

0. Voci correlate

- [Convergenza delle Serie Trigonometriche](#)

1. Identità di Parseval

#Teorema

Teorema (identità di Parseval).

Sia $f \in L^2_{\mathbb{C}}(T)$. Si ha che la sua serie di Fourier

$$S_n(x) = \sum_{k \leq |n|} c_k(f) e^{inx}$$

gode la seguente equivalenza:

$$\lim_n \|S_n(x) - f(x)\|_{L^2}^2 = 0 \iff \sum_{|n|} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{T} \|f\|_{L^2}^2$$

Ovvero si ha la convergenza in energia se e solo se viene soddisfatta l'identità a destra (detta di Parseval)

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del [Teorema 1 \(identità di Parseval\)](#)

Ricordiamo che nel corso della dimostrazione della disegualanza di Bessel ([Teorema 1 \(disegualanza di Bessel\)](#)) abbiamo visto che

$$\|f - S_n\|_{L^2}^2 = \|f\|_{L^2}^2 - T \sum_{-N \leq n \leq N} (|c_n|^2)$$

(ovvero $|f - S_n| = |f| - |S_n|$).

" \implies ": Notiamo se vale il limite

$$\lim_n \|S_n(x) - f(x)\|_{L^2}^2 = 0$$

Allora varrà pure

$$\lim_n \|f(x)\|_{L^2}^2 - \|S_n(x)\|_{L^2}^2 = 0$$

espandendo ho

$$\begin{aligned} \lim_n \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(x)|^2 dx - T \sum_{|n|} (|c_n|^2) &= 0 \\ \implies \lim_n \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(x)|^2 dx &= \lim_n \sum_{|n|} (|c_n|^2) \end{aligned}$$

portando al limite ho l'*identità di Parseval*.

" \Leftarrow ": Se vale l'*identità di Parseval* (che segneremo con (P)), allora se calcolo $\|S_n(x) - f(x)\|_{L^2}^2$ ho

$$\begin{aligned} \|S_n(x) - f(x)\|_{L^2}^2 &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(x)|^2 dx - T \sum_{-N \leq n \leq N} |c_n|^2 \\ \implies \lim_n \|S_n(x) - f(x)\|_{L^2}^2 &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(x)|^2 dx - T \sum_{|n|} |c_n|^2 \\ (P) \implies \lim_n \|S_n(x) - f(x)\|_{L^2}^2 &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(x)|^2 dx - \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(x)|^2 dx \end{aligned}$$

provando che S_n converge in energia a f , concludendo. ■

#Teorema

Teorema (della convergenza in energia).

Sia $f \in L^2_{\mathbb{C}}(T)$ e S_n la sua serie di Fourier.

Allora vale sempre la *convergenza in energia* della serie di Fourier:

$$\lim_n \|f - S_n\|_{L^2} = 0$$

#Osservazione

Osservazione (significato di questo teorema).

Questo teorema ci garantisce che *ogni funzione localmente quadro-integrabile e periodica è sempre approssimabile in L^2* con una *serie di Fourier*.

X

2. La Convergenza in Energia è Debole

Osserviamo che rispetto alla *convergenza uniforme*, la convergenza in *energia* rimane debole. Infatti enunciamo il seguente risultato:

#Lemma

Lemma (convergenza uniforme implica convergenza in energia).

Sia $f \in L^1_{\mathbb{C}}(T)$ (nota che è anche L^2 !). Sia S_n la sua *ridotta n-esima di Fourier*.

Allora vale la seguente implicazione:

$$\limsup_n \int_x |f(x) - S_n(x)| = 0 \implies \lim_n \|f(x) - S_n(x)\|_{L^2}^2 = 0$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del [Lemma 4 \(convergenza uniforme implica convergenza in energia\)](#)

Possiamo maggiorare lo scarto in energia nel seguente modo:

$$\|f(x) - S_n(x)\|_{L^2}^2 \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} \|f(x) - S_n(x)\|_{L^2}^2 = \int_0^T \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - S_n(x)|^2 dx$$

Poiché l'estremo superiore $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - S_n(x)|^2$ è *costante* rispetto al termine di integrazione, posso semplificare l'integrale come una costante:

$$\int_0^T \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - S_n(x)|^2 dx = T \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - S_n(x)|^2 = T \cdot 0 \cdot 0 = 0$$

provando la convergenza in energia. ■

Tuttavia, la convergenza in energia è comunque "*buona*" per darci la *convergenza puntuale quasi ovunque* ([Definizione 3 \(convergenza puntuale quasi ovunque\)](#)).

#Teorema

Teorema (di convergenza in $L^2(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$).

Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione T -periodica e appartenente allo *spazio di Lebesgue* $L^2(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ (ossia convergente in energia, [1](#)).

Allora, detta S_N la sua *serie di Fourier*, vale che

$$\lim_N \|f - S_N\|_2 = 0$$

che le la serie definita come

$$S(x) = \sum_{|n|} c_n(f) e^{inx}$$

converge *quasi ovunque* a f in $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del [Teorema 5 \(di convergenza in \$L^2\(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\)\$ \)](#).

Omessa. ■

SEZIONE D. LEGAMI TRA LA FUNZIONE E I SUOI COEFFICIENTI

Principio d'identità per le Serie di Fourier

0. Voci correlate

- [Analisi e Sintesi di Fourier](#)

1. Principio d'identità

#Teorema

Teorema (principio d'identità per le serie di Fourier).

Siano $f, g \in L^1_{\mathbb{C}}(T)$ e $f, g \in C^1(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$. Siano definiti i spettri $c_n(f)$ e $c_n(g)$. Allora vale la seguente implicazione:

$$\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f) = c_n(g) \implies \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x)$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del [Teorema 1 \(principio d'identità per le serie di Fourier\)](#).

Si tratta di applicare *Dirichlet-Weierstraß* ([Teorema 1 \(Dirichlet-Weierstraß\)](#)) su f, g in quanto siamo in buone ipotesi: infatti $f, g \in C^1 \implies f, g \in C^0$ da cui esistono i limiti $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = f'(x_0)$. Dunque si ha la convergenza puntuale in \mathbb{R} delle serie:

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx}$$
$$g(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(g) e^{inx}$$

Per ipotesi si ha $c_n(f) = c_n(g)$, da cui si ha che le serie sono uguali, dunque per la *proprietà transitiva dell'uguaglianza* si ha $f(x) = g(x)$, ovvero la tesi. ■

#Osservazione

Osservazione (la regolarità C^1 è un'ipotesi cruciale).

Notiamo che la regolarità delle funzioni in classe C^1 è *cruciale*; infatti prendendo le funzioni

$$f(x) = \chi_{(-\pi, 0) \cup (0, \pi)}(x) + \chi_{\{-\pi\} \cup \{0\}}(x)$$
$$g(x) = \chi_{(-\pi, 0) \cup (0, \pi)}(x) - \chi_{\{-\pi\} \cup \{0\}}(x)$$

Effettuando dei calcoli troviamo che $c_n(f) = c_n(g)$. Tuttavia non si ha che $f(x) = g(x)$! Infatti, non vale la continuità in 0 per g :

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1 \neq g(0) = -1$$

Coefficienti di Fourier della Funzione Derivata

0. Voci correlate

- [Analisi e Sintesi di Fourier](#)

1. Coefficienti di Fourier della Funzione Derivata

#Teorema

Teorema (relazioni tra i coefficienti di Fourier di una funzione e quella delle sue derivate).

Sia $f \in L^1_{\mathbb{C}}(T)$ derivabile $k \in \mathbb{N}^*$ volte e sia $f^{(k)}$ localmente integrabile. Allora $\forall n \in \mathbb{Z}$ vale che

$$c_n(f^{(k)}) = (in\omega)^k c_n(f)$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del [Teorema 1 \(relazioni tra i coefficienti di Fourier di una funzione e quella delle sue derivate\)](#).

Per $k = 0$ la tesi è banale. Dimostriamo per $k = 1$:

$$c_n(f') = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f'(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \partial_x(f(x)) e^{-inx} dx$$

Dove ∂_x è l'operatore differenziale. Ricordando la regola di Leibniz, per cui $\partial_x(uv) = \partial_x(u)v + u\partial_x(v)$, si ha

$$\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \partial_x(f(x)) e^{-inx} dx = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \partial_x(f(x)e^{-inx}) - f(x)\partial_x(e^{-inx}) dx$$

(stiamo effettivamente integrando per parti, dandoci)

$$\frac{1}{T} [f(x)e^{-inx}]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} - \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (-in\omega)f(x)e^{-inx} dx$$

Siccome $\omega := \frac{2\pi}{T}$, ho che

$$\frac{1}{T} [f(x)e^{-inx}]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{f(x)}{T} (e^{-in\pi} - e^{in\pi}) = \frac{f(x)}{T} ((-1)^n - (-1)^n) = 0$$

per la periodicità di $e^{in\pi}$. Concentrandoci sul secondo membro, ho

$$-\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (-in\omega)f(x)e^{-inx} dx = (in\omega)^1 \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)e^{-inx} dx$$

provando la tesi per $k = 1$. Per i successivi k , si dimostra per induzione su $k \in \mathbb{N}$. ■

Relazione tra la regolarità di una Funzione e Velocità di Decadimento dei Coefficienti di Fourier. Notazione preliminare: o-piccolo delle funzioni. Osservazione preliminare: combinare la relazione tra i coefficienti di Fourier delle derivate col lemma di Riemann-Lebesgue. Teorema principale con dimostrazione.

X

0. Voci correlate

- [Coefficients of Fourier of the Derivative Function](#)
- [Riemann-Lebesgue Lemma in L1](#)

1. Osservazioni preliminari

#Definizione

Definizione (notazione asintotica).

Siano $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ delle successioni discrete a valori complessi, tali che $\lim_n a_n = \lim_n b_n = 0$. Diciamo che a_n è un *o-piccolo* di b_n ($a_n \in o(b_n)$) se vale il limite

$$\lim_{|n|} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

Invece si dice che a_n è un *O-grande* di b_n ($a_n \in O(b_n)$) se vale invece

$$\lim_{|n|} \frac{a_n}{b_n} = l < +\infty$$

#Osservazione

Osservazione (coefficienti di Fourier delle derivate regolari).

Supponiamo che $f \in L^1_{\mathbb{C}}(T)$ e $f \in C^k$. Supponiamo inoltre $f^{(k)} \in L^1_{\mathbb{C}}(T)$: dal *lemma di Riemann-Lebesgue* segue che

$$\lim_{|n|} c_n(f^{(k)}) = 0$$

(inoltre vale pure per $c_n(f)$, ovviamente)

Per il *teorema sul coefficiente di Fourier della derivata* ([Teorema 1 \(relazioni tra i coefficienti di Fourier di una funzione e quella delle sue derivate\)](#)) ho

$$c_n(f^{(k)}) = (in\omega)^k c_n(f)$$

da cui segue la diseguaglianza

$$|c_n(f)| \leq \frac{|c_n(f^{(k)})|}{|n\omega|^k}$$

Per il decadimento di $c_n(f^{(k)})$ ho che

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \implies |c_n(f^{(k)})| \leq \frac{1}{2}$$

dal quale implica

$$|c_n(f)| \leq \frac{1}{2|\omega|^k} |n|^{-k} = \frac{T^k}{2(2\pi)^k} |n|^{-k} = \xi |n|^{-k}$$

In altre parole ho il limite

$$\lim_n |c_n(f)| \leq \lim_n \xi |n|^{-k} = 0$$

Ovvero

$$|c_n(f)| \in o(|n|^{-k})$$

X

2. Regolarità di una Funzione e Velocità di Decadimento dei Coefficienti di Fourier

Dall'osservazione appena effettuata, che lega la *regolarità di una funzione* al *decadimento dei coefficienti di Fourier*, sorge una domanda spontanea.

Q: Possiamo dedurre informazioni riguardanti la *regolarità della funzione f* analizzando il *decadimento dei coefficienti di Fourier* ad infinito? Una risposta parziale viene fornita dal seguente lemma.

#Lemma

Lemma (Relazione tra la regolarità di una Funzione e Velocità di Decadimento dei Coefficienti di Fourier).

Consideriamo la *serie trigonometrica*

$$S := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \gamma_n e^{in\omega x}$$

ove $(\gamma_n)_n$ è una *successione discreta a valori complessi*. Supponiamo che S converga *puntualmente* ad una funzione target f in \mathbb{R} . Sia $k \in \mathbb{N}^*$ fissato.

Allora vale la seguente implicazione:

$$\exists p > k + 1 : |\gamma_n| \in O(|n|^{-p}) \implies f \in \mathcal{C}^{(k)}(\mathbb{R})$$

In altre parole, se γ_n "si comporta come" $|n|^{-p>k+1}$, allora la funzione è regolare fino al k -esimo grado.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del [Lemma 3 \(Relazione tra la regolarità di una Funzione e Velocità di Decadimento dei Coefficienti di Fourier\)](#).

Proviamo il risultato per $k = 1$. L'idea della dimostrazione è quella di prendere gli spettri $c_n(f)$ e $c_n(f')$ e dimostrare che derivando la serie associata allo spettro $c_n(f)$ si ha proprio $c_n(f')$.

In questo caso le ipotesi ci dicono che $p > 2$, poiché

$$|\gamma_n| \in O(|n|^{-p}); |in\omega||\gamma_n| \in O(|n|^{-p+1})$$

Con $p - 1 > 1$ ho che le seguenti serie convergono:

$$\sum_{|n|} |\gamma_n|, \sum_{|n|} |in\omega\gamma_n| < +\infty$$

Dunque utilizzando l'*M-test di Weierstraß* sulle serie S^f e $S^{f'}$ deduco che le seguenti serie di Fourier convergono uniformemente:

$$\begin{aligned}\sum_{|n|} \gamma_n e^{inx} &\stackrel{\text{unif.}}{=} f(x) \\ \sum_{|n|} in\omega\gamma_n e^{inx} &\stackrel{\text{unif.}}{=} g(x)\end{aligned}$$

Poiché ho la *convergenza uniforme*, posso usare il *teorema di derivazione termine a termine* per derivare f e dunque ottenere

$$\partial_x f(x) = \partial_x \sum_{|n|} \gamma_n e^{inx} = \sum_{|n|} \partial_x (\gamma_n e^{inx}) = \sum_{|n|} in\omega\gamma_n e^{inx} \equiv g(x)$$

Provando dunque che

$$f'(x) = g(x)$$

con g continua. Si deduce dunque che $f \in \mathcal{C}^1$.

Adesso proviamo il risultato per $k - 1 \implies k$ (passo induttivo). Come ipotesi induttiva abbiamo che $f \in C^{k-1}$, ossia $\forall j < k, \exists f^{(j)}$. Adesso consideriamo la seguente serie trigonometrica:

$$\forall j < k + 1, \sum_{|n|} (in\omega)^j \gamma_n e^{inx}$$

Supponendo che $|\gamma_n| = o(|n|^{-p})$ con $p > k + 1$, abbiamo che per ogni j definito la serie trigonometrica converge (basta usare l'[M-test](Convergenza delle Serie Trigonometriche#^6d2539) di nuovo). Per l'ipotesi induttiva, conosciamo già la funzione target per $j < k$, cioè $f^{(j)}$. Resta da analizzare il caso $j = k$. Denominiamo la funzione target per $j = k$ come $g(x)$. Adesso "*tentiamo di capire*" cos'è g . Usando il teorema di [derivazione termine a termine](Teoremi di Passaggio del Limite per le Serie di Funzioni#^22f120) facciamo i seguenti calcoli:

$$\begin{aligned}g(x) &= \sum_{|n|} (in\omega)^k \gamma_n e^{inx} \\ &= \sum_{|n|} (in\omega)^{k-1} \underbrace{(in\omega) \gamma_n e^{inx}}_{=(\gamma_n e^{inx})'} \\ &= \sum_{|n|} (in\omega)^{k-1} \partial_x (\gamma_n e^{inx}) \\ &= \partial_x \left(\underbrace{\sum_{|n|} (in\omega)^{k-1} \gamma_n e^{inx}}_{f^{(k-1)}} \right) \\ &= \partial_x (f^{(k-1)}(x))\end{aligned}$$

Siccome la derivata $f^{(k-1)}$ è proprio $f^{(k)}$, ho che $g = f^{(k)}$, concludendo la dimostrazione. ■

Come visto, il teorema vale *solo se* $p > k + 1$. Effettuiamo la seguente osservazione:

#Osservazione

Osservazione (non vale per $p = k + 1$).

Q. Supponiamo che $p = k + 1$. Tale ipotesi è sufficiente a verificare il risultato di cui sopra (1)?

A. No. Vediamo il seguente controesempio.

Sia $f(x \in [-\pi, \pi]) = x^2$ estesa periodicamente. Si è noto che la sua serie di Fourier è puntualmente convergente in \mathbb{R} (per il teorema di Dirichlet-Weierstraß) con

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_n \frac{4}{n^2} (-1)^n \cos(nx)$$

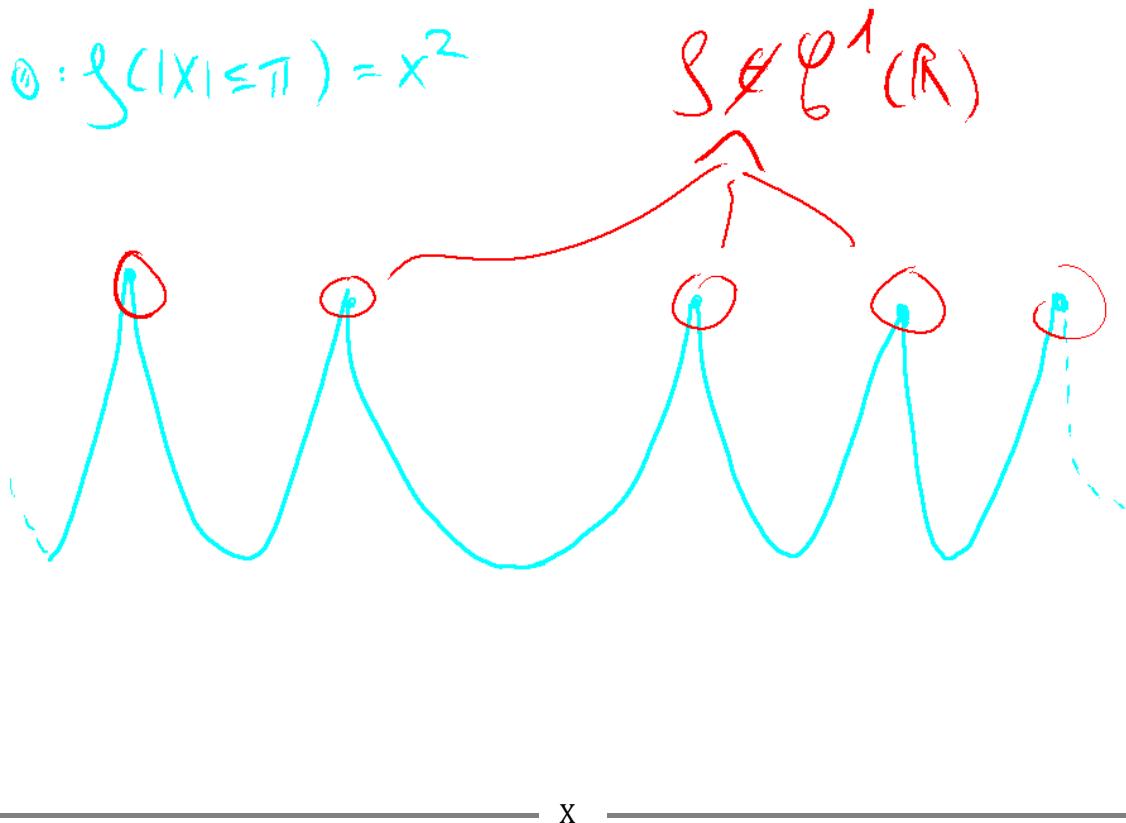
Riscriviamo il suo coefficiente di Fourier come

$$c_n(f) = \frac{2(-1)^n}{n^2}, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

Deduciamo che abbiamo esattamente il caso in cui $c_n(f) \in O(|n|^{-2})$: ovvero scegliendo $k = 1$, abbiamo proprio il caso $p = k + 1$.

Tuttavia la funzione $f(x) = x^2$ estesa 2π -periodicamente non è C^1 . Infatti nei punti $\{n \in \mathbb{N} : n\pi\}$ ho dei punti di cuspidi, che sono dei punti non-derivabili. ■

FIGURA 2.1. (*Cuspidi...*)



"Integrazione secondo Lebesgue e Analisi Funzionale"

SEZIONE A. INTEGRAZIONE SECONDO LEBESGUE

Insieme di Misura Nulla

X

Definizione di insieme di misura nulla secondo Peano-Jordan e secondo Lebesgue. Addendum sulla numerabilità di insiemi.

X

0. Voci correlate

- [Cenni alla Misura di Peano-Jordan](#)

1. Insiemi di Misura nulla secondo Peano-Jordan

#Definizione

Definizione (insieme di misura nulla secondo Peano-Jordan).

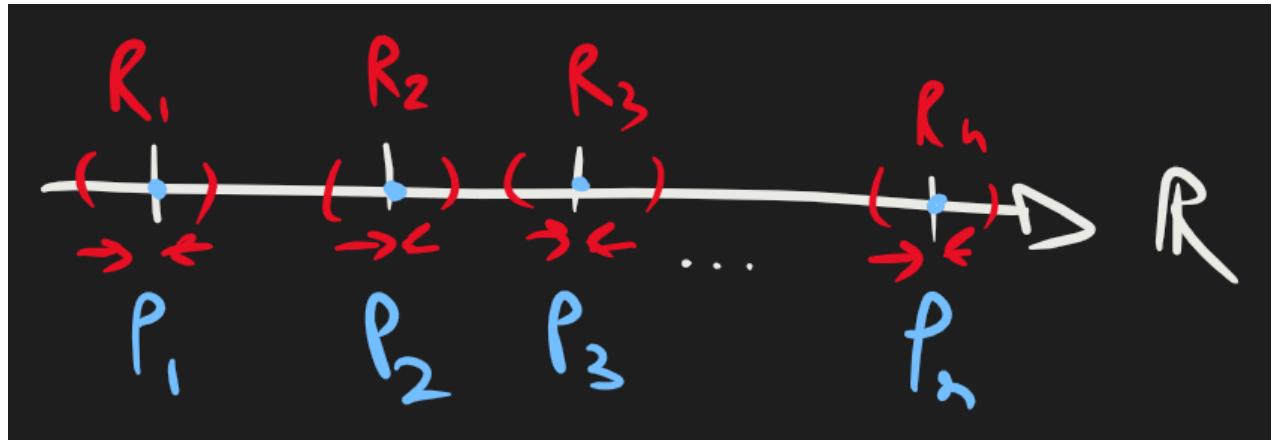
Si dice che un insieme $T \subseteq \mathbb{R}^N$ ha *PJ-misura nulla* se vale che per $\forall \varepsilon > 0$ esistono $n \in \mathbb{N}$ rettangoli (1) tali che

$$T \subseteq \bigcup_{0 \leq i \leq n} R_i \wedge \sum_{0 \leq i \leq n} m(R_i) < \varepsilon$$

Geometricamente, se dato un insieme T abbiamo che possiamo "racchiudere" ogni suo elemento con $(R_i)_{i \leq n}$ rettangoli che hanno misura arbitrariamente piccola.

In tal caso l'insieme $\{R_0, \dots, R_n\}$ si dice *ricoprimento* di T .

FIGURA 1.1. (Esempio in \mathbb{R} con un insieme al più numerabile)



#Osservazione

Osservazione (la dimensione del ricoprimento può dipendere da ε ma dev'essere finito).

Notiamo che il numero n può essere in funzione di ε , dandoci una situazione del tipo $n = n(\varepsilon)$. Tuttavia ricordiamoci che questa dev'essere comunque una quantità *finita* in quanto $\in \mathbb{N}$.

#Esempio

Esempio (insiemi finiti hanno misura nulla secondo Peano-Jordan).

Insiemi finiti hanno *misura nulla secondo Peano-Jordan*.

Posto $P = \{P_1, \dots, P_n\}$, posso definire

$$R_k := \left[P_k - \frac{\varepsilon}{2n}, P_k + \frac{\varepsilon}{2n} \right]$$

In questo modo abbiamo che entrambe le condizioni sono soddisfatte: la misura di un R_k individuale è

$$m(R_k) = P_k + \frac{\varepsilon}{2n} - P_k + \frac{\varepsilon}{2n} = \frac{\varepsilon}{n}$$

In questo modo sommandoli ho

$$\sum_n m(R_k) = n \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon$$

Provando P avente misura nulla secondo Peano-Jordan. ■

#Esercizio

Esercizio (esercizio).

Provare che $(\frac{1}{n})_{n>0}$ ha *PJ-misura nulla*.

Protip: gestire il caso in cui $(\frac{1}{n})$ vada ad "approcciare" il 0 definendo un rettangolo ausiliare R_0 .

X

2. Insieme di misura nulla secondo Lebesgue

#Definizione

Definizione (insieme di misura nulla secondo Lebesgue).

Si dice che un *insieme* $T \subseteq \mathbb{R}^N$ ha *L-misura nulla* se $\forall \varepsilon > 0$ esiste una *successione di N-rettangoli* $(R_j)_{j \in \mathbb{N}}$ tali che

$$T \subseteq \bigcup_n R_n \wedge \sum_n m(R_j) < \varepsilon$$

In tal caso, per ora poniamo

$$m(T) =: m^L(T) = 0$$

#Esempio

Esempio (insiemi numerabili hanno misura nulla secondo Lebesgue).

Analogamente al *caso finito*, si ha che un insieme *numerabile* (ovvero con cui si ha una biiezione con \mathbb{N}) ha *misura nulla secondo Lebesgue*.

Infatti, posta $(x_n)_n$ la successione dei punti dell'*insieme target*, posso definire la seguente successione dei rettangoli:

$$R_n = \left[x_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, x_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \right]$$

Così si ha $X \subseteq \bigcup_n R_n$ e

$$\sum_n R_n = \sum_n \frac{\varepsilon}{2^n} = 2\varepsilon$$

Per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ ho la tesi. ■

X

3. Addendum sulla Numerabilità

Facciamo un paio di considerazioni sulla *numerabilità*.

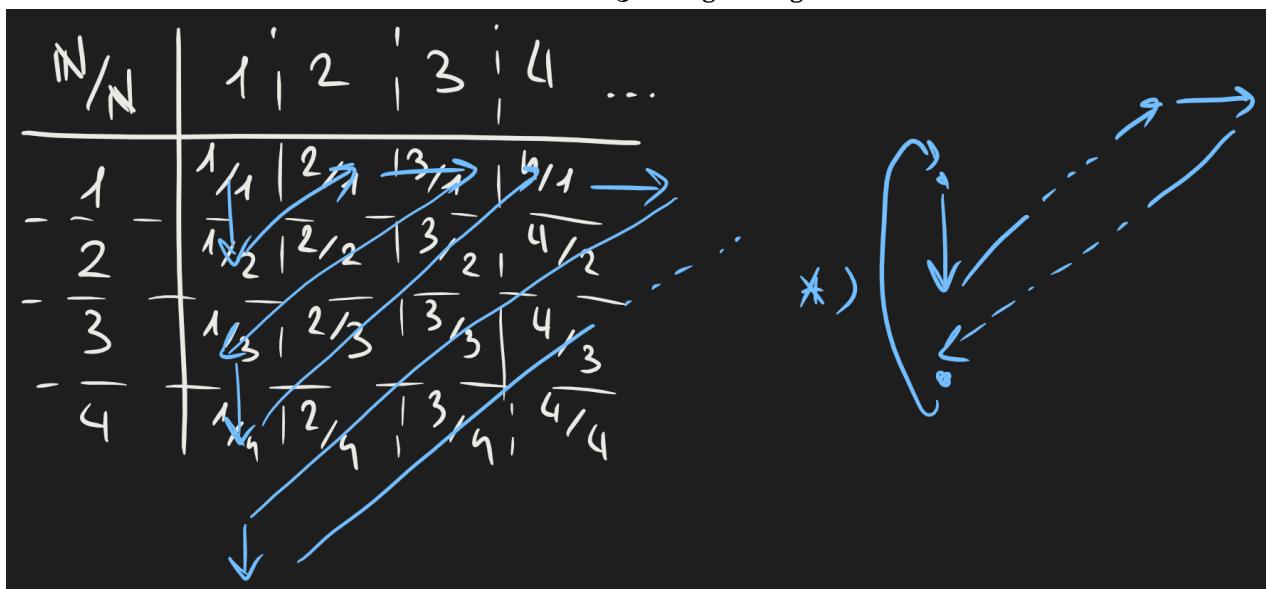
#Teorema

Teorema (la numerabilità dei razionali).

L'insieme dei numeri razionali \mathbb{Q} è *numerabile*.

DIMOSTRAZIONE del [Teorema 7 \(la numerabilità dei razionali\)](#).

Per costruzione. Si va a costruire la biiezione $\mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{Q}$ col seguente grafico:



Questa procedura si dice *diagonalizzazione di Cantor*.

#Teorema

Teorema (la non-numerabilità dei reali).

L'insieme dei numeri reali \mathbb{R} *non* è *numerabile*.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del [Teorema 8 \(la non-numerabilità dei reali\)](#).

Per assurdo. Supponiamo che $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ è *numerabile*. Da questo segue che posso scrivere tutti gli elementi di $[0, 1]$ come la seguente biiezione $\pi : \mathbb{N} \longrightarrow [0, 1]$:

$$\pi_1 = 0, \textcolor{red}{a_{11}} a_{12} a_{13} a_{14} \dots$$

$$\pi_2 = 0, a_{21} \textcolor{red}{a_{22}} a_{23} a_{24} \dots$$

$$\pi_3 = 0, a_{31} a_{32} \textcolor{red}{a_{33}} a_{34} \dots$$

⋮

$$\pi_n = 0, a_{n1} a_{n2} \dots \textcolor{red}{a_{nn}} \dots$$

⋮

Poiché ho una biiezione, devo avere che *non ci sia nessun elemento diverso* da quelli di tipo riportati sopra. Tuttavia, costruendo un numero del tipo

$$0, b_1 b_2 b_3 \dots b_n$$

con $b_n \neq a_{nn}$. Un modo per definire tale numero è

$$a_{nn} = 0 \implies b_n = 1; a_{nn} \neq 0 \implies b_n = 0$$

(ovvero abbiamo una sequenza di uno e zeri)

In questo modo ho un *elemento* di $[0, 1]$ diverso da quelli del tipo $0, a_{k1} a_{k2} \dots$, che è l'assurdo, provando così la tesi. ■

Proprietà Verificate Quasi Ovunque

X

Definizione di proprietà quasi verificata. Esempi. Caso particolare: convergenza puntuale quasi ovunque.

X

0. Voci correlate

- [Insieme di Misura Nulla](#)
- [Predicati e Quantificatori](#)
- [Convergenza Puntuale e Uniforme per Successioni di Funzioni](#)

1. Definizione di Proprietà Verificata Quasi Ovunque

#Definizione

Definizione (proprietà verificata quasi ovunque).

Si dice che una *proprietà* (o predicato, [1](#)) $p(x \in E \subseteq \mathbb{R}^n)$ è *verificata quasi ovunque* (q.o.) in E se $p(x)$ è *verificata* $\forall x \in T \subseteq E$ tale che

$$m(E \setminus T) = 0$$

ovvero è verificata in E a meno di un insieme di misura nulla ([1](#)).

#Esempio

Esempio (esempi vari).

Sia $p(x \in [0, 1]) : x$ è irrazionale è una proprietà *vera q.o.*. Infatti \mathbb{Q} ha misura nulla.

Sia $q(x)$ definita su \mathbb{R} posta come

$$p(x) : \lim_n e^{-nx^2} = 0$$

In tal caso $q(x)$ è una *proprietà vera quasi ovunque*, dal momento che è falsa solo per $x = 0$.

Sia $r(x)$ definita su \mathbb{R}^2 definita come

$$r(x) : xy = 0$$

Allora è una proprietà *falsa quasi ovunque*, dato che è vera se e solamente se $x = y = 0$.

X

2. Convergenza Puntuale Quasi Ovunque

#Definizione

Definizione (convergenza puntuale quasi ovunque).

Sia $(f_n)_n$ una successione di funzioni con $f_n : E \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$ e sia $f : E \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$.

Allora si dice che $(f_n)_n$ converge quasi ovunque a f in E se vale che

$$\lim_n f_n(x) = f(x) \text{ q.o. in } E$$

#Esempio

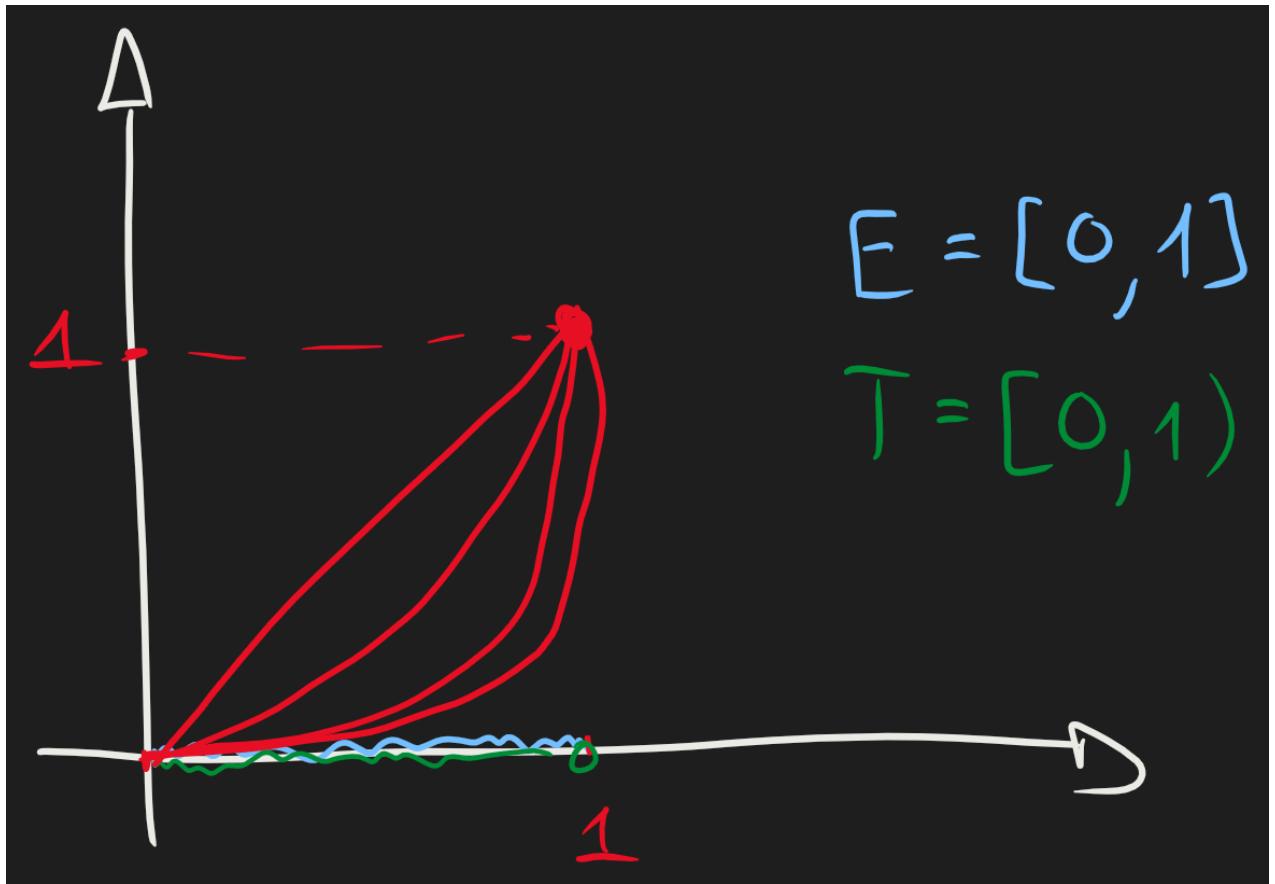
Esempio (esempi di convergenza puntuale q.o.).

Si ha che:

A. $f_n(x) := e^{-nx^2}$ converge puntualmente quasi ovunque a $f(x) \equiv 0$ in $x \in E = \mathbb{R}$.

B. $f_n(x) = x^n$ definita in $E = [0, 1]$ converge puntualmente quasi ovunque a $f(x) \equiv 0$. Infatti $f_n(1) = 1 \implies \lim_n f_n(1) \neq 0$, tuttavia $\lim_n f_n(x) = f(x)$ in $[0, 1]$ (ovvero a meno di $\{1\}$, che è un insieme di misura nulla).

FIGURA 2.1. (Successione di potenze)



Integrazione e Misura secondo Lebesgue

X

Integrazione e misura secondo Lebesgue: definizione di funzione integrabile secondo Lebesgue in \mathbb{R}^N , funzione e insieme misurabile secondo Lebesgue, funzione integrabile in domini arbitrari, funzione Lebesgue-misurabile su spazi misurabili.

X

0. Voci correlate

- [Proprietà Verificate Quasi Ovunque](#)
- [Lemma di Riemann-Lebesgue in L1](#)

1. Funzioni a Scala in più Variabili

#Definizione

Definizione (funzione a scala in più variabili).

Si dice che una funzione $s : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$ è a *scala* se esistono R_1, \dots, R_n rettangoli con $\forall i \neq j, R_i^\circ \cap R_j^\circ = \emptyset$ (E° è l'interno di un insieme) ed esistono $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$, tali che

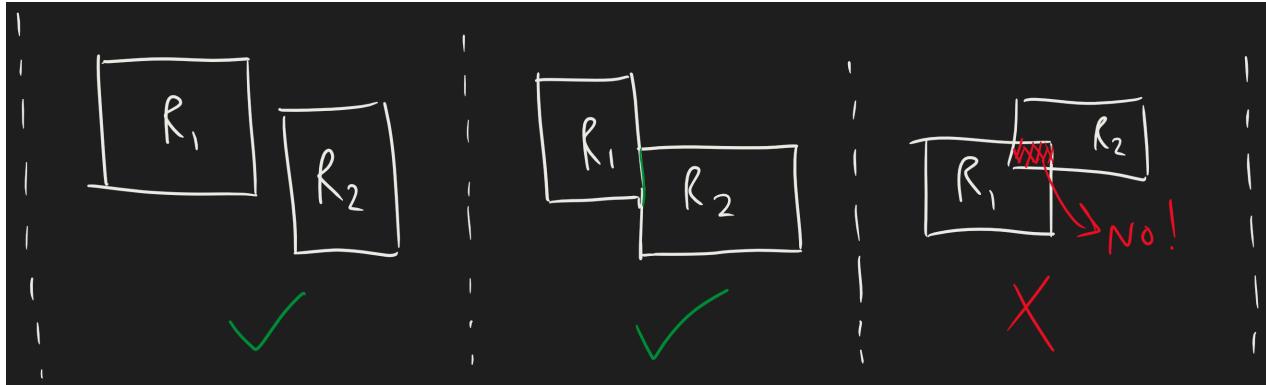
$$s(x) = \sum_{1 \leq i \leq n} c_i \chi_{R_i}(x)$$

Notiamo che questa è l'estensione vettoriale delle *funzioni semplici* (1). Allora chiameremo l'insieme delle funzioni *a scala* in \mathbb{R}^N come

$$\text{FS}(\mathbb{R}^N; \mathbb{C})$$

Inoltre una funzione a scala $s(x)$ viene denotata come $s \sim (N, R_n, c_n)$.

FIGURA 1.1. (*Idea grafica dell'ipotesi sui rettangoli*)



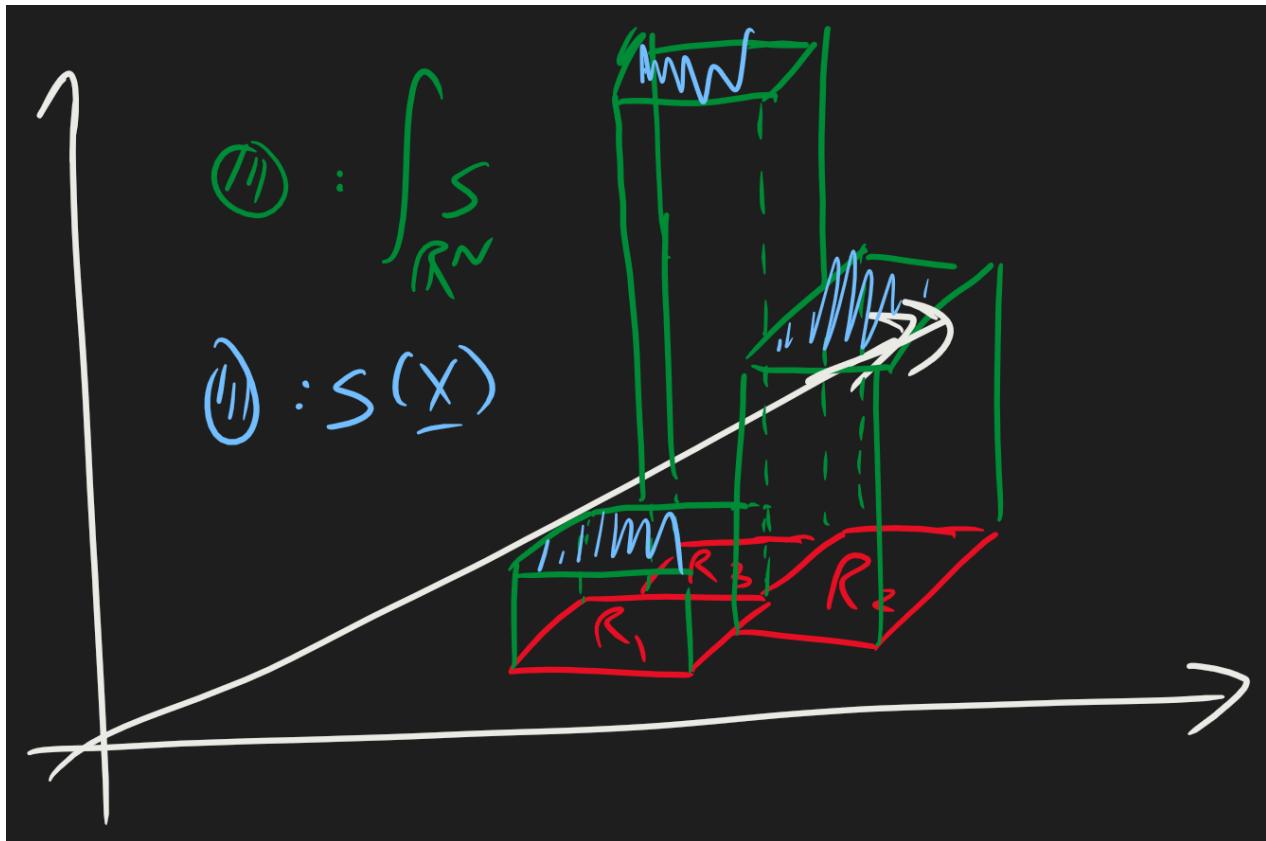
#Osservazione

Osservazione (le funzioni a scalini sono Riemann-integrabili).

Una funzione a scala $s(x) \sim (k, R_n, c_n)$ è *integrabile secondo Riemann*. Infatti si tratta banalmente di prendere la misura del rettangolo (dandoci così la "base"), moltiplicarlo per la "altezza" c_n e di sommarli tutti.

$$\int_{\mathbb{R}^N} s = \sum_{i=1}^k c_i m(R_i)$$

FIGURA 1.2. (*Osservazione 2 (le funzioni a scalini sono Riemann-integrabili), caso \mathbb{R}^2*)



2. Funzione Integrabile Secondo Lebesgue in \mathbb{R}^N

#Definizione

Definizione (funzione Lebesgue-integrabile in \mathbb{R}^N).

Sia $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$. Si dice che f è *integrabile secondo Lebesgue in \mathbb{R}^N* se esiste una *successione di funzioni a scala* $(s_n)_n$ tali che:

i. *convergenza quasi ovunque*

$$\lim_n s_n(\underline{x}) = f(\underline{x}), \text{ q.o.}$$

ii. *condizione di Cauchy integrale*

$$\lim_{n,m} \int_{\mathbb{R}^N} |s_n - s_m| = 0$$

Se tutte le condizioni vengono soddisfatte, si pone

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}^N} f = \lim_n \int_{\mathbb{R}^N} s_n}$$

#Osservazione

Osservazione (la definizione è ben posta).

Una prima obiezione che può essere fatta è la seguente: siamo veramente sicuri che esista il seguente limite?

$$\lim_n \int_{\mathbb{R}^N} s_n$$

Vediamo.

Consideriamo la *serie di valori complessi* posta come

$$I_n := \int_{\mathbb{R}^N} s_n \in \mathbb{C}$$

Calcoliamo adesso lo scarto tra I_n, I_m :

$$|I_n - I_m| = \left| \int_{\mathbb{R}^N} s_n - \int_{\mathbb{R}^N} s_m \right| = \int_{\mathbb{R}^N} |s_n - s_m|$$

Per le proprietà dell'integrale possiamo maggiorarlo come

$$\int_{\mathbb{R}^N} |s_n - s_m| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |s_n - s_m|$$

Tuttavia per la *condizione di Cauchy Integrale* si ha che quest'ultima vada a 0, confermandoci il fatto che $(I_n)_n$ è una *successione di Cauchy*.

Poiché \mathbb{C} è *completa*, si ha che I_n è *convergente*, per cui

$$\exists \lim_n I_n = \lim_n \int_{\mathbb{R}^N} s_n$$

confermandoci la buona posizione della definizione. ■

X

3. Misura secondo Lebesgue

#Definizione

Definizione (funzione misurabile in Lebesgue).

Una funzione $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$ si dice *misurabile in \mathbb{R}^N* se esiste una successione di funzioni a scala $(s_n)_n : \mathbb{N} \rightarrow \text{FS}$ tale che

$$\lim_n s_n(x) = f(x) \text{ q.o. in } \mathbb{R}^N$$

#Definizione

Definizione (insieme misurabile secondo Lebesgue).

Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^N$ si dice *misurabile secondo Lebesgue* se la funzione χ_E è Lebesgue-integrabile. In tal caso si pone la misura di Lebesgue m^L come

$$m^L(E) = \int_{\mathbb{R}^N} \chi_E$$

X

4. Integrazione Arbitraria in Lebesgue

Le due nozioni appena definite servono per definire l'integrazione su *domini arbitrari* secondo Lebesgue.

#Definizione

Definizione (funzione Lebesgue-integrabile in sottoinsiemi arbitrari di \mathbb{R}^N).

Sia $f : E \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$ con E Lebesgue-misurabile. Sia la funzione "prolungamento" f_\circ posta come

$$f_\circ(\underline{x}) = \begin{cases} f(\underline{x}), & x \in E \\ 0, & x \notin E \end{cases}$$

Se f_\circ è Lebesgue-integrabile, allora si dice che f è *Lebesgue-integrabile in E* .

Teorema di Convergenza Dominata secondo Lebesgue

X

Teorema di Convergenza Dominata secondo Lebesgue: enunciato, conseguenze ed esempi.

X

0. Voci correlate

- [Integrazione e Misura secondo Lebesgue](#)

1. Enunciato del teorema

Tutto quello che abbiamo detto sull'*integrazione secondo Lebesgue* è molto bello, ma da un punto di vista pratico è inutile; questo perché ogni volta bisognerebbe andare a costruirsi una successione di funzioni a scala che va ad approssimare il target. Invece la "*parte utile*" sarà questa, ovvero quello di poter *valutare* l'integrale dei limiti delle successioni di funzioni.

#Teorema

Teorema (di convergenza dominata secondo Lebesgue).

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$ un insieme L-misurabile in \mathbb{R}^N , sia $(f_n)_n$ una successione di funzioni Lebesgue-misurabili del tipo $f_n : E \rightarrow \mathbb{C}$. Sia f_n q.o. convergente in E ad una funzione target $f : E \rightarrow \mathbb{C}$.

Supponendo che esiste una funzione "misuratrice dominante quasi ovunque" $g : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ 1-integrabile e tale che

$$|f_n(x)| \leq g(x) \text{ q.o. in } E$$

Allora f_n è *Lebesgue-integrabile* per ogni n , e pure il suo limite puntuale quasi-ovunque f è *Lebesgue-misurabile*, in particolare si ha

$$\lim_n \int_E f_n = \int_E f$$

In altre parole: sotto l'ipotesi per cui si ha una *funzione dominante*, si può scambiare il *limite* con la *derivata*.

#Osservazione

Osservazione (non sempre esiste finito il limite dell'integrale).

Notiamo che non è garantito che esista finito il *limite* dell'integrale $f_n(x)$: l'ipotesi cruciale è che esista una funzione maggiorante, dato che stiamo integrando su *domini illimitati*. Prendiamo il seguente esempio.

Sia $(\phi_n)_n$ definita come

$$\phi_n(x) := \frac{1}{n} \cdot \chi_{[0, n^2]}(x)$$

Notiamo che questo converge *puntualmente* a 0, ma questa funzione non può essere maggiorata con una funzione integrabile in \mathbb{R} .

In tal caso, con un calcolo banale, si ha

$$\int_{\mathbb{R}} \phi_n = \frac{n^2}{n} = n$$

Da cui deduco

$$\lim_n \int_{\mathbb{R}} \phi_n = \lim_n n = +\infty \neq \int_{\mathbb{R}} 0$$

X

2. Conseguenze del Teorema della Convergenza Dominata

#Corollario

Corollario (conseguenze del teorema della convergenza dominata).

A) Supponiamo $f : E \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$ Lebesgue-misurabile con E misurabile. Se $\exists g : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ integrabile tale che $|f(x)| \leq g(x)$, allora f è *integrabile*.

B) Sia $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ con E misurabile. Allora f è *integrabile* se e solo se lo è $|f|$.

C) Siano $f, g : E \rightarrow \mathbb{C}$ misurabili e tali che $f(x) = g(x)$ quasi ovunque. Si ha che f è *integrabile* in E se e solo se lo è g . In tal caso si ha

$$\int_E f = \int_E g$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del [Corollario 3 \(conseguenze del teorema della convergenza dominata\)](#).

Si dimostra solo il punto C), di cui dimostreremo solo il verso $g \implies f$.

Se g è *integrabile* allora lo è pure $|g|$ per il punto B). Siccome $f = g$ quasi ovunque, si ha che la funzione $|g|$ è *dominante quasi ovunque*, con cui possiamo applicare il teorema della convergenza dominata. ■

#Osservazione

Osservazione (le funzioni che differiscono in un insieme di misura nulla sono uguali).

Visto il punto C) possiamo dire che ai fini di delicatezza dell'integrazione di Lebesgue, possiamo identificare tutte le funzioni che differiscono in un insieme di misura nulla.

SEZIONE B. UN PRIMER IN ANALISI FUNZIONALE

Spazi Vettoriali Normati

X

Definizione di spazio vettoriale normato e norma. Definizione di funzione distanza indotta dalla norma (e definizione di spazio metrico). Esempi di spazi normati.

X

0. Voci correlate

- [Campi](#)

- [Spazi Vettoriali](#)
- [Definizione di Spazio Metrico](#)

1. Definizione di Spazio Normato

NOTAZIONE. Da ora in poi si indica con \mathbb{K} il campo \mathbb{R} o \mathbb{C} ([Definizione 2 \(campo\)](#)).

#Definizione

Definizione (spazi normati).

Sia E un \mathbb{K} -spazio vettoriale ([1](#)). Un'applicazione $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$ si dice *norma* se le seguenti condizioni sono soddisfatte, date $x, y \in E; \lambda \in \mathbb{K}$:

i. *Non-degeneranza*

$$\|x\| = 0 \iff x = 0$$

ii. *Omogeneità*

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$$

iii. *Subadditività*

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

In tal caso, la coppia $(E, \|\cdot\|)$ si dice *spazio normato*.

#Osservazione

Osservazione (la definizione di spazio metrico è indotta dai spazi normati).

Se definiamo $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}^+$ come

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

allora abbiamo che (E, d) è uno *spazio metrico*, poiché questa funzione soddisfa gli assiomi della funzione distanza ([Proposizione 2 \(le proprietà della distanza euclidea\)](#)).

La condizione di essere *spazio normato* è più forte di quella di *spazio metrico*;

$$(E, \|\cdot\|) \implies (E, d)$$

#Definizione

Definizione (norme equivalenti).

Siano $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ delle norme sullo stesso spazio vettoriale E .

Esse si dicono *equivalenti* se esistono $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ tali che per ogni elemento $e \in E$,

$$|\lambda| \cdot \|e\|_1 \leq \|e\|_2 \leq |\mu| \cdot \|e\|_1$$

(scambiando $\|e\|_1$ con $\|e\|_2$ si ha la definizione ugualmente)

2. Esempi di Spazi Normati

#Esempio

Esempio (spazi normati numerici).

Diamo un paio di spazi normati "*numerici*", ovvero su spazi vettoriali finito-dimensionali in \mathbb{K} .

- A. Numeri reali: $(\mathbb{R}, |\cdot|)$
- B. Numeri complessi: $(\mathbb{C}, |\cdot|)$.
- C. Numeri reali in più dimensioni con norma 2: $(\mathbb{R}^N, |\cdot|_2)$, con

$$\|\underline{x}\|_2 := \left(\sum_n x_n^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

#Esempio

Esempio (spazi normati funzionali).

Adesso vediamo un po' di *spazi normati funzionali* (ricordiamo che questi sono comunque spazi vettoriali!), che sono invece *infinitamente-generati*.

- A) Funzioni continue reali: $(C^0([a, b]; \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ con

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

- B) Funzioni continue reali: $(C^0([a, b]; \mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ con

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| \, dx$$

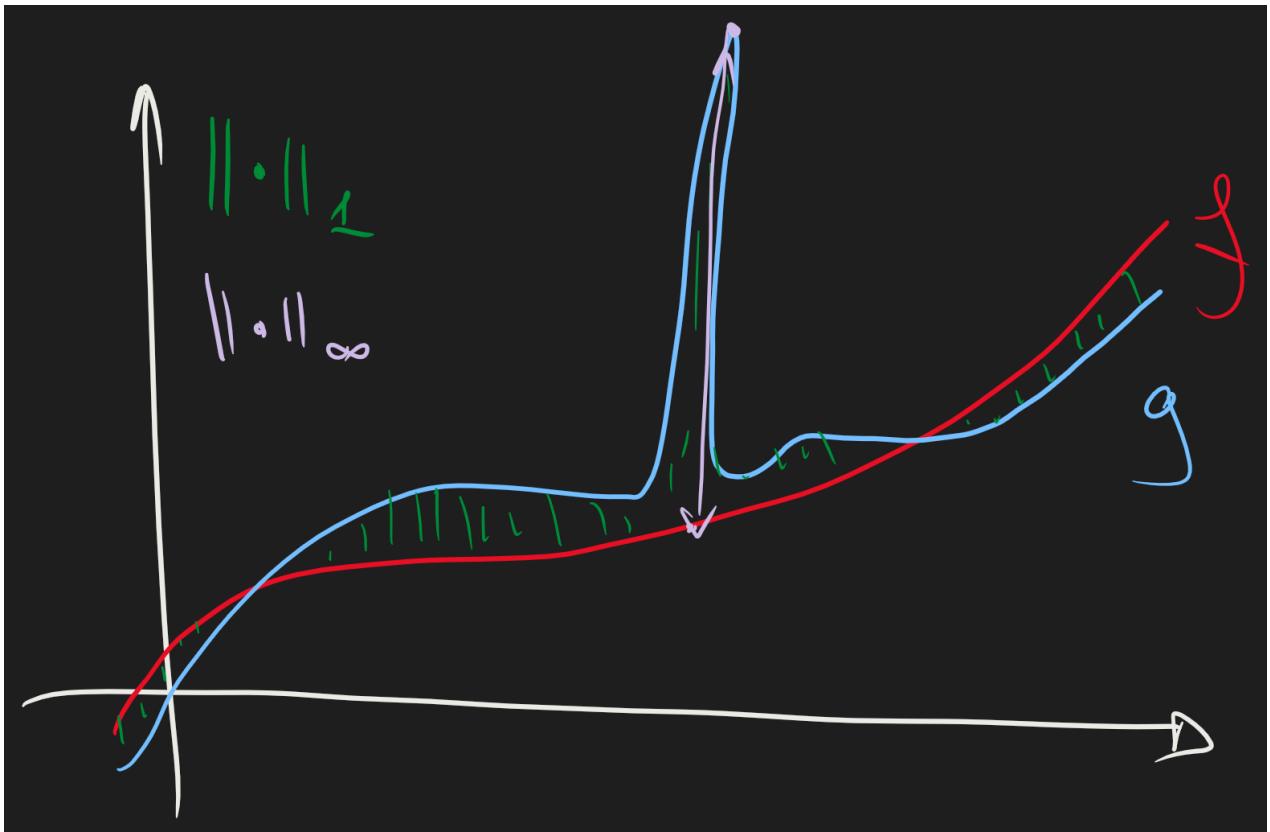
#Osservazione

Osservazione (le funzioni possono essere vicine secondo una norma ma lontane da un'altra).

Notiamo che due funzioni possono essere "*vicine*" secondo una norma, mentre "*lontane*" per un'altra norma.

Un esempio geometrico può essere dato come il seguente: la distanza $\|f - g\|_\infty$ è la "*distanza uniforme*", mentre la distanza $\|f - g\|_1$ è la "*distanza puntuale*" (ovvero la distanza tra le sue aree). Consultare la figura sottostante per un esempio visuale.

FIGURA 2.1. ([Osservazione 6 \(le funzioni possono essere vicine secondo una norma ma lontane da un'altra\)](#))



Succesioni di Cauchy su Spazi Normati

Generalizzazione delle successioni di Cauchy in \mathbb{R} : definizione di successione di Cauchy su uno spazio normato. Definizione di spazio normato completo (di Banach).

0. Voci correlate

- [Successioni di Cauchy](#)
- [Spazi Vettoriali Normati](#)

1. Definizione di Successione di Cauchy

#Definizione

Definizione (successione di Cauchy in uno spazio normato).

Sia $(E, \|\cdot\|)$ uno spazio normato. Allora una successione $(x_n)_n : \mathbb{N} \rightarrow E$ si dice *successione di Cauchy* se vale che

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 : \\ n, m > n_0 \implies \|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

o alternativamente si può riformulare come

$$\lim_{n,m} \|x_n - x_m\| = 0$$

X

2. Completezza dei Spazi Normati

#Lemma

Lemma (successioni convergenti sono di Cauchy).

Se una successione $(x_n)_n$ in E è *convergente*, allora è *di Cauchy*.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del [Lemma 2 \(successioni convergenti sono di Cauchy\)](#).

Omessa. Per vedere il caso $(E, \|\cdot\|) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$ vedere la dimostrazione nel corso di *Analisi Matematica I* (1). ■

#Osservazione

Osservazione (non vale sempre il contrario).

Notiamo che *non vale sempre* che le successioni di Cauchy sono *convergenti*. Vediamo il seguente contropunto:

Sia $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ uno spazio normato. Sappiamo che esistono tanti numeri irrazionali, tipo $\sqrt{2}, \pi, e, \dots$. Consideriamo $\sqrt{2}$ e costruiamo la successione di intervalli

$$(U_n)_n : U_n = \left(\sqrt{2} - \frac{1}{n}, \sqrt{2} + \frac{1}{n} \right)$$

Per la *densità dei razionali nei reali* sappiamo che in ogni U_n dev'esserci almeno un $q \in U_n$. Costruiamo dunque $(q_n)_n$ come la successione degli elementi $q_n \in \mathbb{Q} \cap U_n$.

Per costruzione abbiamo

$$|q_n - q_m| \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right) \rightarrow 0$$

ovvero è di *Cauchy*. Tuttavia

$$\lim_n q_n = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

#Definizione

Definizione (spazio normato completo o spazio di Banach).

Uno spazio normato si dice *completo* (o di Banach) se vale che le sue successioni sono *di Cauchy* se e solo se sono *convergenti*.

Definizione di spazio dotato di prodotto scalare. Diseguaglianza di Cauchy-Schwarz. Esempi. Definizione di Spazio di Hilbert. Definizione di famiglie ortogonali e ortonormali al prodotti scalari.

0. Voci correlate

- [Prodotto Scalare](#)
- [Prodotto Scalare \(generalizzazione\)](#)

1. Definizione di Prodotto Scalare

#Definizione

Definizione (prodotto scalare su spazio vettoriale).

Sia E un \mathbb{K} -spazio vettoriale. Allora un'applicazione binaria (\cdot, \cdot) del tipo

$$(\cdot, \cdot) : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$$

si dice *prodotto scalare* se $\forall x, y, z \in E$ e $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ valgono le seguenti:

- S1) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$
 - S2) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$
 - S3) $(x, y) = \overline{(y, x)}$
 - S4) $(x, x) \geq 0 \wedge (x, x) = 0 \iff x = 0$
- (S1, S2, S3 costituiscono la *forma sesquilineare* del prodotto scalare)

In tal caso si ha che $(E, (\cdot, \cdot))$ è uno spazio munito di *prodotto scalare*.

#Osservazione

Osservazione (la funzione norma può essere autoindotta dal prodotto scalare).

Si ha che se definiamo

$$\|x\| := \sqrt{(x, x)}$$

allora si ha che questa è una *funzione norma* ([Definizione 1 \(spazi normati\)](#)).

Questo implica che dato un prodotto scalare su E , posso canonicamente identificarmi uno spazio normato.

$$(E, (\cdot, \cdot)) \implies (E, \|\cdot\|) \implies (E, d)$$

#Definizione

Definizione (spazio di Hilbert).

Sia $(E, (\cdot, \cdot))$ uno spazio tale che $(E, \|\cdot\|)$, con $\|\cdot\| = \sqrt{(\cdot, \cdot)}$.

Allora tale spazio si dice *spazio di Hilbert*, ovvero uno *spazio vettoriale con prodotto scalare* che risulti *completo rispetto alla norma canonica indotta dal prodotto scalare*.

#Osservazione

Osservazione (gerarchia degli spazi).

Abbiamo la seguente "gerarchia degli spazi vettoriali":

$$\text{Hilbert} \implies \text{Banach} \implies \text{spazio metrico completo}$$

X

2. Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz ed esempi

#Teorema

Teorema (disuguaglianza di Cauchy-Schwarz).

Sia $(E, (\cdot, \cdot))$ uno spazio di Hilbert con $\|\cdot\|$ la norma canonicamente indotta. Allora

$$\forall x, y \in E, |(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

#Esempio

Esempio (esempi di prodotti scalari).

A) Spazio \mathbb{R}^N

$$(\mathbb{R}^N, (\cdot, \cdot)); (x, y) := \sum_N x_N y_N$$

B) Spazio \mathbb{C}^N

$$(\mathbb{C}^N, (\cdot, \cdot)); (x, y) = \sum_N x_N \bar{y}_N$$

C) Funzioni continue a valor complessi

$$(\mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{C}), (\cdot, \cdot)_{L^2}); (f, g)_{L^2} := \int_a^b f(x) \overline{g(x)} \, dx$$

X

3. Famiglie Ortogonali e Ortonormali

#Definizione

Definizione (famiglie ortogonali (o ortonormali)).

Sia $(E, (\cdot, \cdot))$ uno spazio vettoriale dotato di prodotto scalare.

Una famiglia $(e_\alpha)_{\alpha \in J}$ con $J \subseteq \mathbb{R}$ (tipicamente $J = \mathbb{N}$ o $J = \mathbb{Z}$) si dice *ortogonale* se

$$\forall \alpha, \beta \in J, \alpha \neq \beta \implies (e_\alpha, e_\beta) = 0$$

Inoltre si dice anche *ortonormale* se vale che

$$\|e_\alpha\| = (e_\alpha, e_\alpha) = 1$$

#Esempio

Esempio (esempio di famiglie funzionali ortogonali).

Le *armoniche elementari* sono *famiglie ortogonali* rispetto al prodotto scalare $(\cdot, \cdot)_{L^2}$.

Spazi di Lebesgue

X

Spazi di Lebesgue: definizione di spazio di lebesgue L^1, L^2, L^∞ . Osservazioni: condizione necessaria per insiemi limitate misurabili e per insiemi illimitate misurabili. Disuguaglianza di Hölder e conseguenze (generalizzazione della condizione necessaria). Serie di Fourier nello spazio di Lebesgue.

X

0. Voci correlate

- [Integrazione e Misura secondo Lebesgue](#)
- [Proprietà Verificate Quasi Ovunque](#)

1. Spazi di Lebesgue finito-dimensionali

#Definizione

Definizione (spazio di Lebesgue uno).

Sia $E \subset \mathbb{R}^N$ un *insieme misurabile*. Allora si pone

$$\begin{aligned} L^1(E) &= L^1(E; \mathbb{C}) \\ &= \left\{ f : E \longrightarrow \mathbb{C} \mid \text{L-misurabile, } \int_E |f| < +\infty \right\} \end{aligned}$$

Definiamo altresì la *norma* in L^1 come

$$\|f\|_{L^1} := \int_E |f|$$

#Osservazione

Osservazione (lo spazio di Lebesgue uno è di Banach).

Abbiamo che la coppia $(L^1(E), \|\cdot\|_1)$ è uno *spazio di Banach* (1).

Inoltre sappiamo che $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $g^* \in L^1$ se vale che

$$\lim_n \|g_n - g^*\|_{L^1} = 0$$

#Definizione

Definizione (spazio di Lebesgue due).

Sia $E \subset \mathbb{R}^N$ un *insieme misurabile*. Allora si pone

$$\begin{aligned} L^2(E) &= L^2(E; \mathbb{C}) \\ &= \left\{ f : E \rightarrow \mathbb{C} \mid \text{L-misurabile, } \int_E |f|^2 < +\infty \right\} \end{aligned}$$

Definiamo altresì il *prodotto scalare*

$$(f, g)_{L^2} = \int_E f(x) \overline{g(x)}$$

e la *norma*

$$\|f\|_{L^2} = \left(\int_E |f|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

#Osservazione

Osservazione (lo spazio di Lebesgue-due è uno spazio di Hilbert).

Abbiamo che $(L^2(E), (\cdot, \cdot))$ è uno *spazio di Hilbert* (1).

Inoltre eleviamo la sua norma alla potenza $\frac{1}{2}$ per rispettare gli *assiomi che definiscono la funzione norma* (1); in particolare l'*omogenetà*: $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$

Infatti,

$$\begin{aligned} \|\lambda f\|_2 &= \left(\int_E |\lambda f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\int_E |\lambda|^2 |f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \\ &= |\lambda| \left(\int_E |f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= |\lambda| \cdot \|f\|_2 \end{aligned}$$

#Proposizione

Proposizione (proprietà dei spazi di Lebesgue finiti).

Se $(f_n)_n \subseteq L^p$ tali che $\lim_n f_n = f$ in L^p , allora esiste una *sottosuccessione* $(f_{n_k})_k$ che converga *quasi ovunque* in E .

$$\lim_n \|f_n - f\|_p = 0 \implies \lim_k \|f_{n_k} - f\|_p = 0 \text{ q.o. in } E$$

X

2. Generalizzazione degli Spazi di Lebesgue

Adesso andiamo a generalizzare la nozione sullo *spazio di Lebesgue* in $1 \leq p \leq +\infty$.

#Definizione

Definizione (spazio di Lebesgue p -finito).

Sia $p \in \mathbb{N}^*$ e sia $E \subset \mathbb{R}^N$ un insieme misurabile. Si generalizza la definizione di *spazio Lebesgue p* come

$$\begin{aligned} L^p(E) &= L^p(E; \mathbb{C}) \\ &= \left\{ f : E \rightarrow \mathbb{C} \mid \text{L-misurabile, } \int_E |f|^p < +\infty \right\} \end{aligned}$$

Definiamo la sua norma come

$$\|f\|_p := \left(\int_E |f|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Notiamo che solo per $p = 2$ si può definire un prodotto scalare.

#Definizione

Definizione (spazio di Lebesgue $p = +\infty$).

Sia $E \subset \mathbb{R}^N$ un insieme misurabile. Si definisce *lo spazio di Lebesgue L^∞* come

$$\begin{aligned} L^\infty &= L^\infty(E) \\ &= \{ f : E \rightarrow \mathbb{C} \mid \text{L-misurabile, } \exists k > 0 : |f(x)| \leq k \text{ q.o. in } E \} \end{aligned}$$

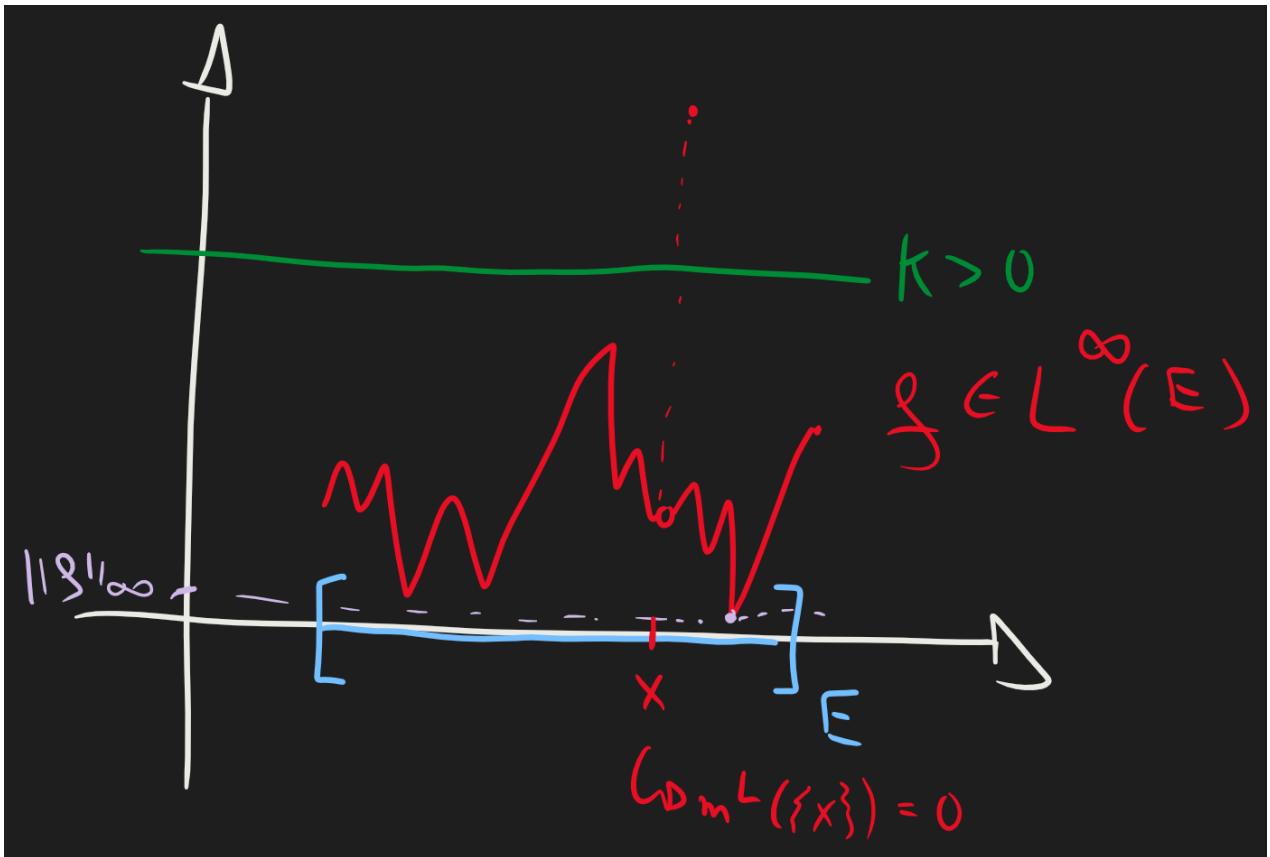
Ovvero le funzioni *Lebesgue-misurabili* e *limitate quasi ovunque*.

Si definisce la *norma* in L^∞ come

$$\|f\|_\infty = \inf\{k > 0 : |f(x)| \leq k \text{ q.o. in } E\}$$

Abbiamo che $(L^\infty(E), \|\cdot\|_\infty)$ è uno *spazio di Banach*.

FIGURA 2.1. (L'idea dello spazio di Lebesgue infinito)



#Proposizione

Proposizione (condizione necessaria per le inclusioni).

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$ Lebesgue-misurabile.

Allora:

A) Se E è *limitato*, allora vale l'inclusione

$$L^\infty(E) \subset L^2(E) \subset L^1(E)$$

e valgono le seguenti disegaglianze

$$\|f\|_1 \leq \sqrt{m^L(E)} \cdot \|f\|_2 \quad (1)$$

$$\|f\|_2 \leq \sqrt{m^L(E)} \cdot \|f\|_\infty \quad (2)$$

B) Se E non è *limitato*, allora non si hanno le inclusioni.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE della [Proposizione 8 \(condizione necessaria per le inclusioni\)](#)

Si dimostra solo il punto A).

Adesso dimostriamo la (1): ossia data una funzione $f \in L^2(E)$ vogliamo dimostrare che $f \in L^1(E)$ (dimostrando così che $L^2(E) \subset L^1(E)$) e che la disegualanza data è vera.

Il "trucco principale" è quello di esprimere la norma in L^1 come un prodotto scalare in L^2 :

$$\begin{aligned} \|f\|_1 &:= \int_E |f| = \int_E 1 \cdot |f| = (1, |f|)_2 \stackrel{\text{C.S.}}{\leq} \|1\|_2 \cdot \||f|\|_2 \\ &\leq \sqrt{\int_E 1} \cdot \sqrt{\int_E |f|^2} \end{aligned}$$

Siccome E è limitato, ho $\int_E 1 = m^L(E)$, dandoci effettivamente la disegualanza

$$\|f\|_1 \leq \sqrt{m^L(E)} \cdot \|f\|_2$$

dimostrando così (1).

Adesso dimostriamo la (2). Similmente facciamo i stessi conti.

$$\|f_2\| = \sqrt{\int_E |f|^2} \leq \sqrt{\sup_{x \in E} |f(x)|^2 \cdot \int_E 1} = \sqrt{m^L(E)} \cdot \|f\|_\infty$$

provando la tesi. ■

X

3. Disegualanza di Hölder

#Proposizione

Proposizione (disegualanza di Hölder).

Siano $p, q \in [1, +\infty]$ tali che $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Allora si ha che

$$(f, g)_{L^2} \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

#Proposizione

Proposizione (inclusione tra spazi di Lebesgue finiti).

Sia $1 \leq p \leq q \leq +\infty$, sia $E \subset \mathbb{R}^N$ misurabile limitata. Allora si ha che $L^q(E) \subset L^p(E)$ e in particolare vale la disegualanza

$$\|f\|_p \leq |E|^{\frac{q-p}{pq}} \cdot \|f\|_q$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE della [Proposizione 10 \(inclusione tra spazi di Lebesgue finiti\)](#).

Questa non è altro che la generalizzazione della [Proposizione 8 \(condizione necessaria per le inclusioni\)](#).

Per dimostrare questa proposizione notiamo innanzitutto che si ha la seguente identità:

$$\langle |f|^p, 1 \rangle_{L^2(E)} = \|f\|_{L^p}$$

Tuttavia per Hölder abbiamo che

$$\langle |f|^p, 1 \rangle_{L^2} \leq \|1\|_{L^r} \cdot \|f^p\|_{L^{r'}}$$

A questo punto si tratta semplicemente di trovare i coefficienti r, r' opportuni tali che $r^{-1} + r'^{-1} = 1$ (*).

Prima determiniamo r' ; l'idea è quella di "trasformare" $f^p \rightsquigarrow f$. Pertanto una buona scelta sarebbe $r' = \frac{q}{p}$, in quanto essa "annullerebbe" la potenza p su $|f|$. Infatti, abbiamo che

$$\|f^p\|_{L^{q/p}} = \left(\int_E |f|^{p \cdot \frac{q}{p}} \right)^{\frac{p}{q}} = \left(\left(\int_E |f|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right)^p =: \|f\|_{L^q}^p$$

In un certo senso, abbiamo "trasferito" la p dal valore assoluto.

Adesso resta solamente da determinare r ; lo facciamo dalla relazione (*), da cui deduciamo

$$\frac{1}{r} = 1 - \frac{1}{r'} \implies r = \frac{r'}{1 - r'}$$

Siccome $r' = q/p$ abbiamo

$$r = \frac{\frac{q}{p}}{1 - \frac{q}{p}} = \frac{q}{p \left(\frac{q-p}{p} \right)} = \frac{q}{q-p}$$

(Notiamo che $q \geq p$ è necessario affinché $r < 0$!)

Per ultimo osserviamo che $\forall p \geq 1$,

$$\|1\|_{L^p} = \left(\int_E |1|^p \right)^{1/p} = \mu_L(E)^{\frac{1}{p}}$$

ove μ_L denota la misura di Lebesgue. Concludiamo ricomponendo la nostra diseguaglianza:

$$\|f\|_{L^p}^p \leq \mu_L(E)^{\frac{q-p}{q}} \cdot \|f\|_{L^q}^p$$

Per ottenere la tesi eleviamo la potenza alla $(\bullet)^{\frac{1}{p}}$, dato che da questa diseguaglianza ricaviamo immediatamente che $L^q(E) \subset L^p(E)$ (ricordiamoci che E è L-misurabile!). ■

X

"Trasformata di Fourier"

SEZIONE A. LA TRASFORMATA FOURIER

Introduzione alla Trasformata di Fourier

X

Introduzione alla trasformata di Fourier. Problema: estendere il concetto di serie di Fourier a funzioni non-periodiche. Caso 1: funzioni definite su compatti. Caso 2: funzioni definite su intervalli illimitati.

X

0. Voci correlate

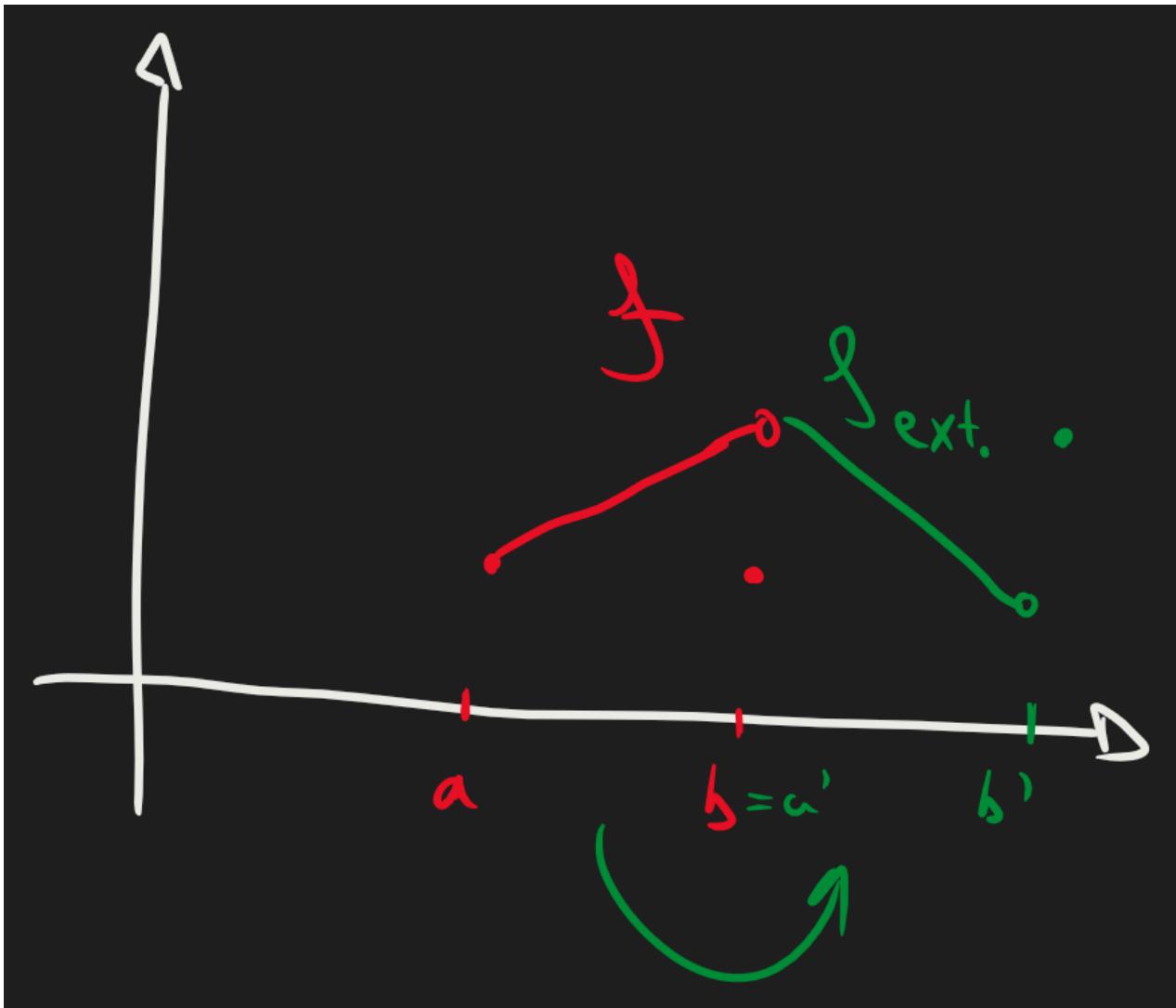
- [Analisi e Sintesi di Fourier](#)

1. Introduzione alla trasformata di Fourier

PREAMBOLO. La trasformata di Fourier ha origine dai lavori del 1822 sulla teoria analitica del calore del matematico francese Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830). In questa teoria Fourier introdusse, allo scopo di trattare fenomeni periodici, gli sviluppi in serie che ancora oggi portano il suo nome e che abbiamo già analizzato. La trasformata di Fourier appare in modo naturale quando si cerca di adattare la teoria delle serie di Fourier al caso non-periodico. (tratto da *Metodi matematici per l'ingegneria, M. Codegnone e L. Lussardi*)

PROBLEMA. Come già accennato col preambolo di cui sopra, vogliamo *generalizzare in concetto* di serie di Fourier (1) a funzioni che *non sono periodiche*. Suddividiamo questo problema in *due casi*.

CASO 1. Funzioni che sono definite su un intervallo compatto del tipo $[a, b]$. Una soluzione banale è quella di estendere periodicamente questa funzione al di fuori di $[a, b]$ e procedere come nel caso periodico. Graficamente,



CASO 2. Funzioni che sono definite su tutta la retta reale: questo sarà l'obiettivo della *trasformata di Fourier*. Vediamo con la seguente discussione euristica.

2. Discussione Euristica per la Trasformata di Fourier

DISCUSSIONE EURISTICA. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Procediamo "informalmente", cioè senza specificare precise ipotesi necessarie e giustificare i passaggi.

Sappiamo che $\forall T > 0$, f è definita nell'intervallo $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$. Allora si ha che la sua *serie di Fourier* è

$$f(x) = \sum_{|n|} c_n(f) e^{in\omega x}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Come visto con l'*analisi di Fourier* ho che il suo spettro è definito come

$$c_n(f) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-inx} dx$$

Supponendo che " T sia grande", ossia $T \gg 1$, abbiamo

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-inx} dx \approx \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-inx} dx$$

A questo punto definiamo

$$\hat{f}(\alpha) := \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\alpha t} dt (*)$$

Con tale notazione otteniamo che $c_n(f)$ può essere scritta come

$$c_n(f) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-inx} dx \approx \frac{1}{T} \hat{f}(n\omega)$$

Ovvero

$$f(x) \approx \sum_{|n|} \frac{1}{T} \hat{f}(n\omega) e^{inx} = \frac{1}{2\pi} \sum_{|n|} \omega \hat{f}(n\omega) e^{inx}$$

Tuttavia dal fatto che $T \gg 1$ abbiamo che $\omega \ll 1$, da cui possiamo approssimare la *sommatoria discreta* con un *integrale*:

$$f(x) \approx \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \omega \hat{f}(n\omega) e^{inx} \approx \boxed{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\alpha) e^{ix\alpha} d\alpha}$$

In termini di "analisi e sintesi" delle funzioni abbiamo il seguente risultato:

$$\boxed{\begin{aligned} \text{Analisi: } \hat{f}(\alpha) &= \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\alpha x} dx \\ \text{Sintesi: } f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha \end{aligned}}$$

Ovvero ho una situazione del tipo

$$f \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f} \xrightarrow[?]{} f$$

Una domanda sorge spontanea: sotto quali ipotesi la sintesi può riprodurre la funzione di partenza? Vedremo bene.

Definizione di Trasformata di Fourier

X

Definizione di trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R})$. Osservazione: la definizione è ben posta. Lemma: l'operatore trasformata di Fourier è lineare.

X

0. Voci correlate

- [Introduzione alla Trasformata di Fourier](#)

1. Definizione della Trasformata di Fourier

#Definizione

Definizione (trasformata di Fourier).

Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ e $f \in L^1(\mathbb{R})$ (ossia $\int_{\mathbb{R}} |f| < +\infty$). La *trasformata di Fourier* (FT) è la funzione

$$\mathcal{F}(f) = \hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

definita come

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\omega x} dx$$

NOTA. Una formulazione alternativa della trasformata di Fourier è

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\omega x} dx$$

questa è dovuta ad una discussione euristica eseguita similmente.

#Osservazione

Osservazione (collegamento probabilistico).

Notiamo che la definizione della *trasformata di Fourier* coincide perfettamente, dal punto di vista funzionale, con la definizione della funzione caratteristica di una variabile aleatoria ([Definizione 2 \(funzione caratteristica\)](#)).

Infatti, abbiamo che, data una v.a. assolutamente continua X avente valor medio finito e con legge $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, vale la seguente:

$$\phi(\xi) := \mathbb{E}[e^{i\xi X}] = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{i\xi x} dx =: \hat{f}(\xi)$$

■

#Lemma

Lemma (la trasformata di Fourier è lineare).

La trasformata di Fourier $\mathcal{F}(\cdot)$ è *lineare*.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del [Lemma 3 \(la trasformata di Fourier è lineare\)](#).

Omessa, poiché simile al caso della trasformata in funzioni semplici ([Lemma 7 \(l'operatore spettro è lineare continuo\)](#)). ■

2. Osservazioni sulla Trasformata di Fourier

#Osservazione

Osservazione (la buona posizione della definizione).

Una prima "obiezione" a questa definizione è il fatto che $\hat{f}(\omega)$ potrebbe *non esistere*, ovvero non si ha l'integrale generalizzato finito:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\omega x} dx \stackrel{?}{<} +\infty$$

Tuttavia stiamo assumendo per ipotesi che $f \in L^1$, abbiamo dunque che

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\omega x} dx \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x) e^{-i\omega x}| dx \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \underbrace{|e^{-i\omega x}|}_{\equiv 1} dx$$

Dunque si ha che la FT \hat{f} è *assolutamente integrabile*, da cui si ha l'integrabilità. ■

#Osservazione

Osservazione (identificazione canonica $\mathbb{C} \sim \mathbb{R}^2$).

Si può usare il fatto per una *funzione a valor complessi* si ha che essa può essere identificata con *due funzioni a valor reali* (1). Con questa si combina la *formula di Eulero* $e^{it} = \cos t + i \sin t$, da cui si ha una formulazione alternativa della *trasformata di Fourier*: assumendo che $f \sim (u, v)$, abbiamo

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} (u(x) \cos(\omega x) + v(x) \sin(\omega x)) dx \\ &\quad + i \int_{\mathbb{R}} (v(x) \cos(\omega x) - u(x) \sin(\omega x)) dx\end{aligned}$$

Integrali Dipendenti da Parametri

X

Integrali dipendenti da parametri. Teorema di continuità, teorema di derivazione sotto il segno di integrale.

X

0. Voci correlate

- [Teorema di Convergenza Dominata secondo Lebesgue](#)

1. Teorema di Continuità

Vediamo un po' di strumenti preliminari per le trasformate di Fourier.

#Teorema

Teorema (di continuità).

Sia $h : \mathbb{R} \times I \rightarrow \mathbb{C}$ con $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo. Supponendo che:

- $h(\cdot, t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ è *integrabile* $\forall t \in I$
- $h(x, \cdot) : I \rightarrow \mathbb{C}$ è *continua quasi ovunque* in $x \in \mathbb{R}$

Se esiste $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ *1-integrabile* tale che

$$|h(x, t)| \leq g(x), \forall t \in I \wedge \text{q.o. in } x \in \mathbb{R}$$

Allora la funzione $H : I \rightarrow \mathbb{C}$ posta come

$$H(t) := \int_{\mathbb{R}} h(x, t) dx$$

è continua in I .

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del [Teorema 1 \(di continuità\)](#)

Notiamo preliminarmente H ha norma finita, in quanto l'integranda è limitata

$$|H(t)| = \int_{\mathbb{R}} |h(x, t)| dx \leq \int_{\mathbb{R}} g(x) dx < +\infty$$

Da cui $|H| < +\infty$. Sia adesso $\varepsilon_0 > 0$ e $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Definiamo $K_\varepsilon(t)$ come la variazione infinitesimale in t :

$$K_\varepsilon(t) := H(t + \varepsilon) - H(t)$$

Analogamente si definisce $k_\varepsilon(x, t)$ come

$$k_\varepsilon(x, t) = h(x, t + \varepsilon) - h(x, t)$$

Notiamo che la sua norma è dominata da g :

$$|k_\varepsilon(x, t)| = |h(x, t + \varepsilon) - h(x, t)| \leq 2g(x)$$

Per provare la continuità di H vogliamo provare che il limite di K_ε va a 0:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} K_\varepsilon(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H(t + \varepsilon) - H(t) \stackrel{?}{=} 0$$

Notiamo preliminarmente che $K_\varepsilon(t) := \int_{\mathbb{R}} k_\varepsilon(x, t) dx$. Prendendo il limite per k_ε ho

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} k_\varepsilon(x, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \underbrace{h(x, t + \varepsilon)}_{\in C^0 \text{ q.o.}} - h(x, t) = 0$$

Allora usando la [il teorema di convergenza dominata \(1\)](#) (in realtà si dovrebbero usare le successioni, ma l'idea vale ugualmente) ho

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} K_\varepsilon(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} k_\varepsilon(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} k_\varepsilon(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}} 0 = 0$$

provando la tesi. ■

#Esempio

Esempio (applicazione tipica).

Un esempio tipico per cui applicheremo questo teorema è quando $h(x, \omega)$ è definita come

$$h(x, \omega) := f(x)e^{-i\omega x}$$

Ovvero la *trasformata di Fourier* ([Introduzione alla Trasformata di Fourier >\(1\)](#)), con $H(\omega) = \hat{f}(\omega)$

2. Derivazione sotto il segno di integrale

Teorema (di derivazione sotto il segno di integrale).

Sia $h : \mathbb{R} \times I \rightarrow \mathbb{C}$ con $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo. Supponendo che:

- $h(\cdot, t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ è integrabile $\forall t \in I$
- $h(x, \cdot) : I \rightarrow \mathbb{C}$ è di classe C^1 quasi ovunque in $x \in \mathbb{R}$

Se esistono $g_1, g_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ 1-integrabili e tali che

$$|h(x, t)| \leq g_1(x) \wedge \frac{\partial h}{\partial t}(x, t) \leq g_2(x), \text{ q.o. in } t \in I$$

Allora la funzione

$$H(x) = \int_{\mathbb{R}} h(x, t) \, dx$$

è di classe C^1 e si ha

$$\boxed{\frac{d}{dt} H(t) = \int_{\mathbb{R}} \partial_t(h(x, t)) \, dx}$$

DIMOSTRAZIONE del [Teorema 3 \(di derivazione sotto il segno di integrale\)](#)

Si tratta di una diretta applicazione del *teorema di continuità* e del *teorema di convergenza dominata secondo Lebesgue*. ■

Proprietà della Trasformata di Fourier

X

Proprietà della trasformata di Fourier: chiusura della simmetria, ...

X

0. Voci correlate

- [Definizione di Trasformata di Fourier](#)
- [Integrali Dipendenti da Parametri](#)

1. Chiusura della simmetria

Proposizione (chiusura della simmetria delle serie di Fourier).

Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione *simmetrica* (pari o dispari). Allora la sua trasformata di Fourier $\mathcal{F}(f)(\omega) = \hat{f}(\omega)$ mantiene la stessa *simmetria* (pari o dispari).

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE della [Proposizione 1 \(chiusura della simmetria delle serie di Fourier\)](#).

Ricordiamoci l'osservazione data sulla trasformata di Fourier ([Osservazione 5 \(identificazione canonica \$\mathbb{C} \sim \mathbb{R}^2\$ \)](#)): ovvero date $u, v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tali che $f(x) = u(x) + iv(x)$ abbiamo

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} (u(x) \cos(\omega x) + v(x) \sin(\omega x)) dx \\ &\quad + i \int_{\mathbb{R}} (v(x) \cos(\omega x) - u(x) \sin(\omega x)) dx\end{aligned}$$

Dimostriamo il caso in cui f è pari. Se f è pari, lo saranno pure u, v . Ad esempio ho

$$\int_{\mathbb{R}} v(x) \sin(\omega x) dx = \underbrace{\int_{-\infty}^0 v(x) \sin(\omega x) dx}_{(*)} + \int_0^{+\infty} v(x) \sin(\omega x) dx$$

Considerando uno scambio di variabile $y = -x$ su $(*)$, ho

$$\int_{-\infty}^0 v(x) \sin(\omega x) dx = - \int_0^{+\infty} v(y) \sin(\omega y) dy$$

Da cui

$$\int_{\mathbb{R}} v(x) \sin(\omega x) dx = 0$$

Il ragionamento è analogo per la componente complessa, dandoci in definitiva

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} u(x) \cos(\omega x) dx + i \int_{\mathbb{R}} v(x) \cos(\omega x) dx$$

Ovvero

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \cos(\omega x) dx$$

Dato che f e \cos sono pari, ho che \hat{f} è pari. Il caso dispari si dimostra analogamente. ■

X

2. Prime Proprietà della Trasformata di Fourier

Iniziamo a stilare un elenco delle *proprietà delle trasformate di Fourier*.

2.1. Norma e Continuità della Fourier

#Proposizione

Proposizione (la norma di una trasformata di Fourier è dominata dalla trasformanda).

Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ e sia $\mathcal{L}(f) = \hat{f}$ la sua trasformata di Fourier, allora vale che $\hat{f} \in \mathcal{C}^0 \cap L^\infty$ e la relazione

$$\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE della [Proposizione 2 \(la norma di una trasformata di Fourier è dominata dalla trasformanda\)](#)

Proviamo che $\hat{f} \in C^0$ applicando il *teorema di continuità* sugli integrali dipendenti da parametri (1).

Definiamo la funzione ausiliare $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ come

$$h(x, \omega) := f(x)e^{-i\omega x}$$

Si ha che $h(\cdot, \omega)$ è *integrabile* (in quanto $f \in L^1$) e che $h(x, \cdot)$ è *continua* in quanto si fa variare solo ω (ovvero $e^{-i\omega x}$). Inoltre vale che

$$|h(x, \omega)| = |f(x)e^{-i\omega x}| \leq |f(x)| < +\infty$$

Così si può usare il teorema di continuità che implica

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} h(x, \omega) dx$$

è *continua rispetto a ω* . Per dimostrare che $\hat{f} \in L^\infty$ si usa il fatto che \mathcal{L} è *lineare* del tipo $\mathcal{L}(L^1, L^\infty)$. Per dimostrare la disegualanza si tratta di fare un calcolo diretto:

$$\begin{aligned} \|\hat{f}\|_\infty &= \sup_{\omega} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{i\omega x} dx \\ &\leq \sup_{\omega} \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \underbrace{|e^{i\omega x}|}_{\in S_1} dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx \stackrel{f \in L^1}{<} +\infty \end{aligned}$$

concludendo la dimostrazione. ■

#Proposizione

Proposizione (lemma di Riemann-Lebesgue).

Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$. Allora data $\hat{f} = \mathcal{L}(f)$, si ha che

$$\lim_{|\omega| \rightarrow +\infty} \hat{f}(\omega) = 0$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del [Proposizione 3 \(lemma di Riemann-Lebesgue\)](#).

Analogo al caso periodico (1), solo che ci sono delle opportune modifiche da fare. ■

X

2.2. Traslazione della Fourier

Come si comporta Fourier rispetto alla traslazione e allo scalamento? Vediamo.

#Proposizione

Proposizione (traslazione della trasformata di Fourier).

Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$, sia data $\hat{f} = \mathcal{L}(f)$.

Siano $x_0, \omega_0 \in \mathbb{R}$ e $g_1(x) = f(x - x_0)$, $g_2(x) = e^{i\omega_0 x} f(x)$. Allora vale che

$$\begin{aligned}\hat{g}_1(\omega) &= e^{-ix_0\omega} \hat{f}(\omega) \\ \hat{g}_2(\omega) &= \hat{f}(\omega - \omega_0)\end{aligned}$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE della [Proposizione 4 \(traslazione della trasformata di Fourier\)](#)

Si tratta di fare due calcoli semplici. Nel primo caso si tratta di fare una sostituzione banale $t = x - x_0$ e nel secondo caso si tratta di usare le regole dell'esponenziazione. I conti sono lasciati da svolgere al lettore. ■

#Proposizione

Proposizione (cambio in scala).

Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$, sia data $\hat{f} = \mathcal{L}(f)$.

Dato un $\lambda > 0$ e $g(x) := f(\frac{x}{\lambda})$, si ha che

$$\hat{g}(\omega) = |\lambda| \hat{f}(\lambda\omega)$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE della [Proposizione 5 \(cambio in scala\)](#)

Come prima, si tratta di fare due conti usando la sostituzione $t = \frac{x}{\lambda}$. Analogamente, i conti sono lasciati da svolgere al lettore. ■

X

2.3. Coniugo della Fourier

Dato che stiamo trattando i *numeri complessi*, sarebbe interessante vedere come si comporta \hat{f} rispetto all'operazione *coniugo* $\bar{\cdot}$.

#Proposizione

Proposizione (coniugo di Fourier).

Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$, sia data $\hat{f} = \mathcal{L}(f)$.

Definendo $g(x) := \overline{f(x)}$, si ha che

$$\hat{g}(\omega) = \overline{\hat{f}(-\omega)}$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE della [Proposizione 6 \(coniugo di Fourier\)](#)

Come prima, si tratta di fare due conti tenendo conto che $\overline{e^{i\omega x}} = e^{-i\omega x}$. Di conseguenza i conti sono lasciati da svolgere al lettore. ■

X

2.4. Derivata della Fourier

Adesso vediamo come si comporta la trasformata di Fourier rispetto alla *derivazione*.

#Proposizione

Proposizione (derivata della trasformata in x).

i. Sia $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ e sia $f' \in L^1(\mathbb{R})$. Allora si ha che

$$\frac{d\hat{f}}{dx}(\omega) = i\omega\hat{f}(\omega)$$

ii. Sia $k \in \mathbb{N}$. Se $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ e $\forall i \leq k, f^{(i)} \in L^1(\mathbb{R})$, si ha che

$$\frac{d^k\hat{f}}{dx^k}(\omega) = (i\omega)^k\hat{f}(\omega)$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE della Proposizione 7 (derivata della trasformata in x)

i. Siccome $f \in \mathcal{C}^1$, si ha che

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt$$

(questo non è altro che il *teorema fondamentale del calcolo integrale* in $[0, x]$; 1)

Siccome $f' \in L^1$, esistono finiti i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = f(0) + \int_0^{\pm\infty} f'(t) dt < +\infty$$

Siccome $f \in L^1$, tali limiti sono nulli. Vediamo perché ciò è vero; supponendo *per assurdo* per esempio che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \neq 0$$

si avrebbe che $\exists M > 0$ tale che

$$x > M \implies \frac{l}{2} < |f(x)| < \frac{3}{2}l$$

(questa non è altro che la definizione del limite, con $\varepsilon = \frac{1}{2}l$). Se ciò è vero si avrebbe

$$\int_{\mathbb{R}} |f| \geq \int_{x>M} |f| > \int_{x>M} \frac{l}{2} = +\infty$$

dandoci un assurdo.

Avendo stabilito che

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$$

possiamo procedere a calcolare \hat{f}' . Ovvvero, integrando *per parti* ho

$$\begin{aligned}\hat{f}'(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{f'(x)}{I} \frac{e^{-i\omega x}}{D} dx \\ &= f(x)e^{-i\omega x} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + i\omega \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\omega x} dx \\ &= i\omega\hat{f}(\omega)\end{aligned}$$

dimostrando la tesi.

ii. Il caso $k \in \mathbb{N}$ si dimostra per induzione, con passaggi analoghi. ■

#Osservazione

Osservazione (la condizione può essere indebolita).

Notiamo che non è strettamente necessario che $f \in \mathcal{C}^1$, ma è sufficiente che sia in L^1 e che valga il teorema fondamentale del calcolo integrale in $[0, x]$.

#Proposizione

Proposizione (derivata in ω).

Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ e posto $g(x) := xf(x)$ (detto *primo momento* o *momento lineare*), si ha che

$$\frac{d\hat{f}}{d\omega}(\omega) = -i\hat{g}(\omega) = \frac{1}{i}\hat{g}(\omega)$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE della [Proposizione 9 \(derivata in \$\omega\$ \)](#)

Si tratta di usare il *teorema di derivazione sotto il segno di integrale* ([Teorema 3 \(di derivazione sotto il segno di integrale\)](#)). Definendo $h(x, \omega) := f(x)e^{-i\omega x}$ si ha che: $h(\cdot, \omega)$ è *integrabile* per $\forall \omega \in \mathbb{R}$; $h(x, \cdot)$ è di classe \mathcal{C}^1 quasi ovunque in $x \in \mathbb{R}$; $|h(x, \omega)| = |f(x)|$ (ovvero f domina h) e poi

$$\frac{\partial}{\partial \omega} h(x, \omega) = |ixf(x)e^{-i\omega x}| = |g(x)|$$

(ovvero g domina la derivata di h , quasi ovunque per $x \in \mathbb{R}$ e per ogni $\omega \in \mathbb{R}$, con $|f|, |g| \in L^1$)

Dunque il *teorema di derivazione sotto il segno di integrale* ci assicura che $\hat{f}' \in \mathcal{C}^1$ (dato che $\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} h(x, \omega) dx$) e che possiamo effettuare lo scambio della derivata con l'integrale:

$$\frac{d\hat{f}}{d\omega}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} \partial_{\omega}(h(x, \omega)) dx = \int_{\mathbb{R}} -ixf(x)e^{-i\omega x} dx = -i\hat{g}(\omega)$$

dimostrando la tesi. ■

Esempi Notevoli della Trasformata di Fourier

X

Esempi di calcolo esplicito delle trasformate di Fourier. Funzione caratteristica, esponenziale pari e gaussiana.

X

0. Voci correlate

- [Definizione di Trasformata di Fourier](#)
- [Proprietà della Trasformata di Fourier](#)
- [Densità Gaussiana](#)

1. Funzione Caratteristica

#Teorema

Teorema (trasformata di Fourier della caratteristica su un compatto).

Sia $\chi_E(x)$ la *funzione caratteristica*, con E un compatto del tipo $E = [a, b]$. Allora la sua trasformata di Fourier è

$$\hat{\chi}_{[a,b]}(\omega) = \begin{cases} b - a, & \omega = 0 \\ \frac{1}{i\omega}(e^{-i\omega a} - e^{-i\omega b}), & \omega \neq 0 \end{cases}$$

I conti sono lasciati da svolgere al lettore per esercizio.

X

2. Esponenziale pari

#Teorema

Teorema (trasformata di Fourier della caratteristica su un compatto).

Sia $a > 0$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$f(x) = e^{-a|x|}$$

Allora la sua trasformata di Fourier è

$$\hat{f}(\omega) = 2 \frac{a}{a^2 + \omega^2}$$

Come prima, i conti sono lasciati da svolgere al lettore per esercizio.

FIGURA 2.1. (*Idea geometrica*)



Notare bene come la simmetria viene mantenuta.

X

3. La trasformata della Gaussiana

Richiamiamo ad una delle densità principali del *calcolo delle probabilità*, ovvero la *densità gaussiana* definita come segue:

#Definizione

Definizione (densità gaussiana).

La funzione

$$\mathcal{N}_{\mu, \sigma^2}(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$$

si dice la *densità gaussiana* aventi parametri μ, σ^2 . In particolare $\mathcal{N}_{0,1}$ si dice *gaussiana standard*.

#Teorema

Teorema (trasformata esplicita della gaussiana standard).

Sia $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{0,1}$. Allora si ha che $\mathcal{N} \in L^1$ e dunque si ha che la sua trasformata di Fourier è

$$\hat{\mathcal{N}}(\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{2}}$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del [Teorema 4 \(trasformata esplicita della gaussiana standard\)](#).

Notiamo innanzitutto che $\mathcal{N}(x) \in L^1$, con

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{N} = 1$$

ed inoltre è *derivabile con derivata continua* e in L^1 , con

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{N}' = 0$$

Prima di procedere alla risoluzione esplicita per $\omega \in \mathbb{R}$, calcoliamo $\hat{\mathcal{N}}(0)$.

$$\hat{\mathcal{N}}(0) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{N}(x) \cancel{e^{-i\omega x}} \, dx = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{N} = 1$$

Adesso procediamo ad usare il *teorema di derivazione rispetto a x e ω* ([Proposizione 7 \(derivata della trasformata in \$x\$ \)](#), [Proposizione 9 \(derivata in \$\omega\$ \)](#)), per calcolare la sua derivata rispetto a ω :

$$\partial_{\omega}(\hat{f}(\omega)) = \frac{1}{i} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x e^{-x^2} e^{-i\omega x} \, dx}_{:=A}$$

Adesso derivo rispetto a x :

$$\begin{aligned} \partial_x(\hat{f}(\omega)) &= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{N}'(x) e^{-i\omega x} \, dx = - \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cancel{x e^{-\frac{1}{2}x^2}} e^{-i\omega x} \, dx}_{=:A} \\ &= i\omega \hat{f}(\omega) \end{aligned}$$

(Notare che $\partial_x(e^{-x^2/2}) = -xe^{-x^2/2}$)

Notiamo che abbiamo la relazione (per semplicità notazionale poniamo $\hat{f} = \hat{\mathcal{N}}$)

$$i\partial_{\omega}(\hat{f}(\omega)) = -i\omega \hat{f}(\omega)$$

Ovvero abbiamo un'*equazione differenziale a variabili separabili* ([Teorema 3 \(metodo di risoluzione per i problemi di Cauchy con ODE a variabili separabili\)](#)). Scegliendo un metodo di risoluzione a piacere e scegliendo $\omega_0 = 0$ la condizione iniziale, ottengo la soluzione

$$\hat{f}(\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{2}}$$

concludendo i calcoli. ■

#Teorema

Teorema (trasformazione esplicita della gaussiana).

Sia $\mathcal{N}_{\mu,\sigma^2}(x)$ con $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma^2 > 0$ la *legge gaussiana*. Allora la sua trasformazione di Fourier è

$$\hat{\mathcal{N}}_{\mu,\sigma^2}(\omega) = e^{-(\frac{1}{2}(\sigma\omega)^2 + i\mu\omega)}$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del [Teorema 5 \(trasformazione esplicita della gaussiana\)](#)

Si nota innanzitutto che

$$\mathcal{N}_{\mu,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sigma} \mathcal{N}_{\mu,1}(\sigma^{-1}x) = \frac{1}{\sigma} \mathcal{N}_{0,1}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

Allora applicando le proprietà relative alla traslazione delle trasformazioni di Fourier ([Proposizione 4 \(traslazione della trasformata di Fourier\)](#)), si ha la tesi. ■

Relazione tra Integrali Doppi e Iterati

X

Relazione tra integrali doppi e iterati: teorema di Fubini e teorema di Tonelli.

X

0. Voci correlate

- [Integrali Dipendenti da Parametri](#)

1. Domanda Preliminare

Q. Data una funzione $f(x, y)$ su $(x, y) \in X \times Y$, quando si ha che

$$\int_{X \times Y} f(x, y) d(x, y) = \int_Y \left(\int_X f(x, y) dx \right) dy = \int_X \left(\int_Y f(x, y) dy \right) dx$$

Ossia quando possiamo scambiare l'ordine di integrazione senza *modificare l'integrale?* Vediamo.

X

2. Teorema di Fubini

#Teorema

Teorema (di Fubini).

Sia $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ e *integrabile*. Allora:

- Per quasi ovunque $x \in \mathbb{R}$, $h(x, \cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ è *integrabile*
- Per quasi ovunque $y \in \mathbb{R}$, $h(\cdot, y) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ è *integrabile*
- La funzione $\int_{\mathbb{R}} h(\cdot, y) dy : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ è *integrabile*
- Si ha la seguente uguaglianza:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} h(x, y) dx dy &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} h(x, y) dy \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} h(x, y) dx \right) dy \end{aligned}$$

▼

3. Teorema di Tonelli

Indebolendo alcune delle condizioni, abbiamo comunque delle buone ipotesi per "separare" gli integrali, senza poter commutarli.

#Teorema

Teorema (di Tonelli).

Sia $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione *misurabile* (1) e tale che

- *quasi ovunque* in \mathbb{R}^2 si ha $h(x, y) \geq 0$
- Per *quasi ovunque* $x \in \mathbb{R}$, si ha $h(x, \cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è *integrabile*
- La funzione $\int_{\mathbb{R}} h(\cdot, y) dy : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è *integrabile*

Allora si ha che h è *integrabile in* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e si ricava la seguente relazione:

$$\iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} h(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} h(x, y) dy \right) dx$$

#Osservazione

Osservazione (scambiando le coordinate x, y il teorema vale ugualmente).

Notiamo che esiste una versione del *teorema di Tonelli* nel quale x, y si scambiano i ruoli.

Convoluzione di Funzioni

Convoluzione di funzioni non-periodiche. Proprietà: norma della convoluzione, trasformata di Fourier della convoluzione e altre proprietà. Esempi di convoluzione. Nucleo di convoluzione: definizione e proprietà. Accenno al caso multidimensionale (con applicazione al trattamento delle immagini digitali).

0. Voci correlate

- [Convoluzione di Funzioni Periodiche](#)
- [Relazione tra Integrali Doppi e Iterati](#)
- [Teorema di Convergenza Dominata secondo Lebesgue](#)

1. Definizione di Convoluzione di due funzioni

#Definizione

Definizione (convoluzione di due funzioni).

Siano $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, tali che ponendo $h(x, y) := f(x - y)g(y)$ si ha $h(x, \cdot) \in L^1(\mathbb{R})$ per quasi ovunque $x \in \mathbb{R}$.

Definiamo in tal caso la *convoluzione* di f, g la funzione $f * g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definita come

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}} h(x, y) dy = \int_{\mathbb{R}} f(x - y)g(y) dy$$

2. Proprietà della Convoluzione

2.1. Norma della Convoluzione

#Teorema

Teorema (norma della convoluzione).

Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Sia posta $h(x, y) := f(x - y)g(y)$. Allora $h(x, \cdot) \in L^1(\mathbb{R})$ per q.o. in $x \in \mathbb{R}$ e si ha che $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ con

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del [Teorema 2 \(norma della convoluzione\)](#).

Siamo in buone ipotesi per applicare il *teorema di Tonelli* ([Teorema 2 \(di Tonelli\)](#)) sulla funzione $|h(\cdot, \cdot)|$: da qui si vuole mostrare che $h \in L^1(\mathbb{R}^2)$. Partiamo mostrando che $|h(\cdot, y)|$ è *integrabile*.

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |h(x, y)| dx &= \int_{\mathbb{R}} |f(x - y)||g(y)| dx \\ &= |g(y)| \int_{\mathbb{R}} |f(x - y)| dx \\ &= |g(y)| \int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt \stackrel{f \in L^1}{<} +\infty \end{aligned}$$

questo vale quasi ovunque per $y \in \mathbb{R}$. Adesso, ponendo $H(y) = \int_{\mathbb{R}} |h(x, y)| dx$ voglio mostrare che H è *integrabile*.

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} H(y) dy &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |g(y)||f(x - y)| dx \right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} |g(y)| \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x - y)| dx \right) dy \\ &= \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} |g(y)| dy \right)}_{g \in L^1} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt \right)}_{f \in L^1} < +\infty \end{aligned}$$

Dunque il *teorema di Tonelli* ci assicura che $|h| \in L^1(\mathbb{R}^2)$, da cui $h \in L^1(\mathbb{R}^2)$ per l'assoluta integrabilità. Il *teorema di Fubini* ([Teorema 1 \(di Fubini\)](#)) implica allora che per quasi ovunque $x \in \mathbb{R}$ ho

$$\begin{aligned} h(x, \cdot) &= f(x - \cdot)g(\cdot) \in L^1 \\ (f * g)(x) &= \int_{\mathbb{R}} h(x, y) dy \in L^1 \end{aligned}$$

Inoltre calcolando la sua norma risulta che

$$\begin{aligned}
\|f * g\|_1 &:= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} h(x, y) dy = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y) dy \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)| |g(y)| dy \right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)| |g(y)| dx \right) dy \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}} |g(y)| dy \right) \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt \right) =: \|g\|_1 \cdot \|f\|_1
\end{aligned}$$

provando la tesi. ■

2.2. Trasformata di Fourier della Convoluzione

#Proposizione

Proposizione (trasformata di Fourier della convoluzione).

Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Allora vale che

$$\widehat{f * g}(\omega) = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE della [Proposizione 3 \(trasformata di Fourier della convoluzione\)](#)

Si tratta di usare il *teorema di Fubini*, poiché siamo in buone ipotesi (dalla precedente proprietà ci ricordiamo che $f * g \in L^1$!). Allora

$$\begin{aligned}
\widehat{f * g}(\omega) &:= \int_{\mathbb{R}} (f * g)(x) e^{-i\omega x} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega x} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y) dy \right) dx \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}} g(y) dy \right) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega x} f(x-y) dx \right) \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}} g(y) dy \right) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega(t+y)} f(t) dt \right) \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega y} g(y) dy \right) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega t} f(t) dt \right) \\
&=: \hat{g}(\omega)\hat{f}(\omega)
\end{aligned}$$

provando dunque la tesi. ■

2.3. Proprietà miste della Convoluzione

Facciamo una carrellata di proprietà che "caratterizzano la struttura" della convoluzione.

#Proposizione

Proposizione (proprietà della convoluzione).

Siano $f, g, h \in L^1(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Allora si ha che:

- i. La convoluzione è simmetrica: $f * g = g * f$
- ii. La convoluzione è bilineare rispetto alla somma: $(f + g) * h = f * h + g * h$
- iii. La convoluzione è commutativa: $(f * g) * h = f * (g * h)$

- iv. La convoluzione è bilineare rispetto allo scalamento: $(\lambda f) * g = \lambda(f * g)$
- v. Se f ha supporto compatto, ossia $f(x) \equiv 0, \forall x \in (\mathbb{R} \setminus B(0, R))$ e almeno una tra f, g è di classe \mathcal{C}^k , allora $f * g \in \mathcal{C}^k$.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE della [Proposizione 4 \(proprietà della convoluzione\)](#)

Per le proprietà da i. dalla iv. sono solamente conti, quindi lasciato per esercizio al lettore. Proviamo la proprietà v.

Supponiamo che $f \in \mathcal{C}^k$. Dunque si ha che $\partial_x^k(f * g)(x)$ (ovvero la derivata k -esima della convoluzione) è, usando il teorema di derivazione sotto il segno di integrale,

$$\begin{aligned}\partial_x^k[(f * g)(x)] &= \partial_x^k \left[\int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y) dy \right] \\ &= \int_{\mathbb{R}} f^{(k)}(x-y)g(y) dy\end{aligned}$$

che è ben definita dato che $f \in \mathcal{C}^k$. Il teorema vale analogamente per $g \in \mathcal{C}^k$, solo che bisogna scambiare f, g usando la proprietà i. ■

X

3. Esempio di una Convoluzione

#Esempio

ESEMPIO. (*Autoconvoluzione di un segnale quadro*)

Sia definito $p(x) := \chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(x)$ il "segnale quadro". Notiamo subito che

$$p(x-y) = \chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(x-y) = \chi_{[x-\frac{1}{2}, x+\frac{1}{2}]}(y)$$

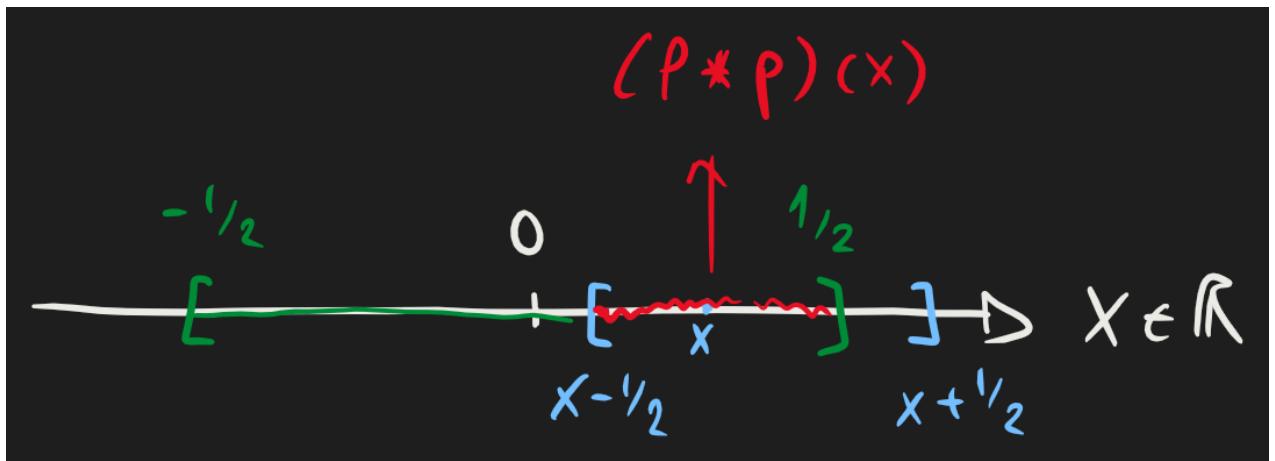
Allora in tal caso la sua convoluzione è

$$\begin{aligned}(p * p)(x) &= \int_{\mathbb{R}} p(x-y)p(y) dy \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} p(x-y) dy \\ &= \int_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \cap [x-\frac{1}{2}, x+\frac{1}{2}]} 1 dy\end{aligned}$$

Definendo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \cap [x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}] := E$ ho che la sua convoluzione è proprio la misura

$$(p * p)(x) = m(E)$$

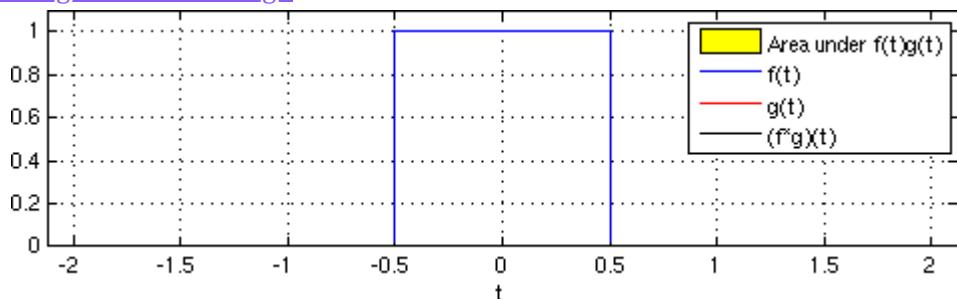
Ovvero, se prendo un punto x sulla retta reale e traccio un suo intorno di ampiezza $\frac{1}{2}$, e poi l'intervallo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, ho che la *lunghezza della loro intersezione* è il risultato della convoluzione.



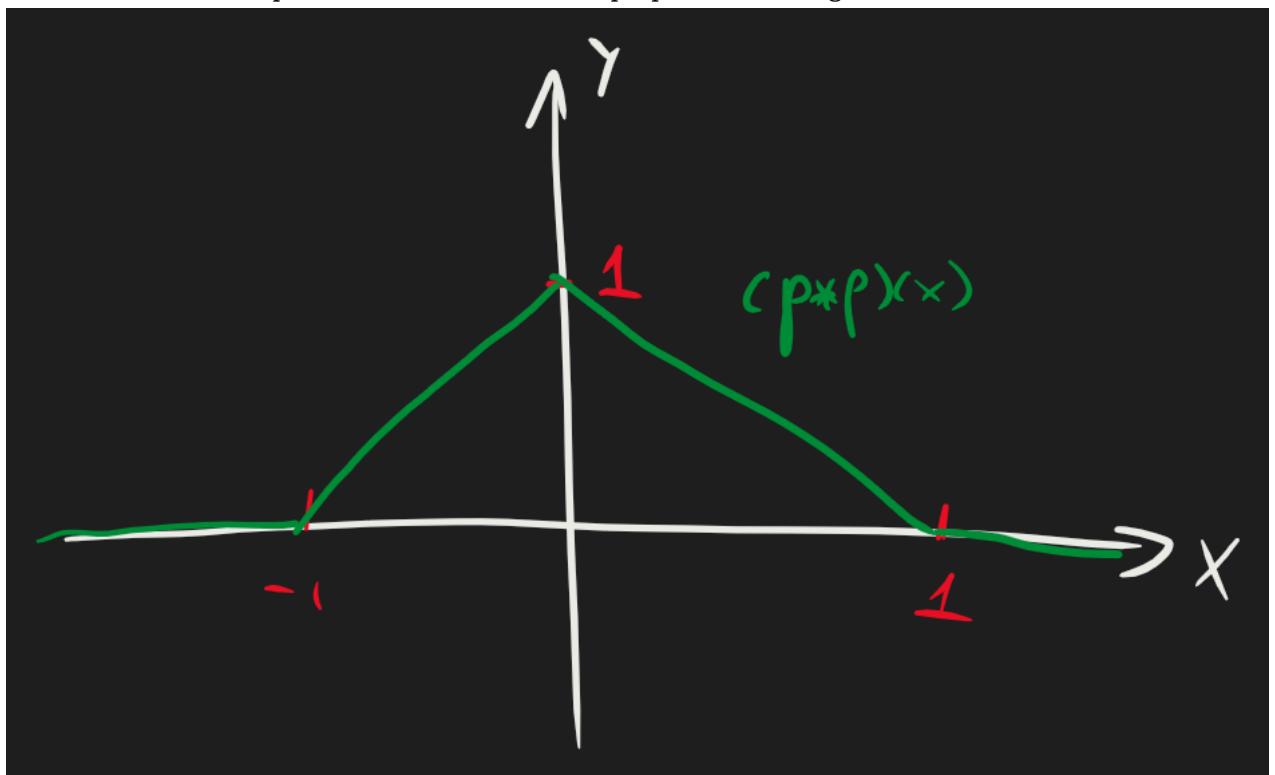
Euristicamente, possiamo pensare la convoluzione come la *misura* dell'area formata dall'incrociamento di due segnali, una fissa e l'altra che si sposta da sinistra a destra (per un'idea più chiara vedere l'animazione sotto).

LINK (Per file in PDF):

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Convolution_of_box_signal_with_itself2.gif#/media/File:Convolution_of_box_signal_with_itself2.gif



Infine osserviamo che p non è *continua*, invece lo è $p * p$. Infatti il suo grafico è



#Osservazione

Osservazione (convoluzione e probabilità).

Notiamo che c'è un legame apparente tra la *convoluzione* e la *teoria della probabilità*: infatti supponendo due *variabili aleatorie indipendenti e assolutamente continue* dette X, Y e aventi leggi f, g , si ha che la somma $S = X + Y$ ha legge

$$\sigma(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y) dy = (f * g)(x)$$

([Corollario 6 \(caso indipendente\)](#))

che è proprio la *convoluzione* $f * g$.

Infatti la *discussione euristica* appena presentata vale analogamente: possiamo pensare la somma di due leggi come la sovrapposizione delle loro aree, dato che è ciò che vogliamo misurare.

X

4. Nucleo di Convoluzione

#Definizione

Definizione (nucleo di convoluzione).

Una funzione $\eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \in L^1$ si dice *nucleo di convoluzione* se vale che

$$\|\eta\|_1 = 1$$

#Esempio

Esempio (esempi di nuclei di convoluzione).

Siano G, P, M definite come

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$P(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$$

per M poniamo $c_0 := \int_{[-1,1]} e^{-\frac{1}{1-x^2}} dx$ e definiamo

$$M(x) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{1}{1-x^2}}}{c_0}, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}$$

#Osservazione

Osservazione (osservazione sull'esempio precedente).

Notiamo che M è continua in ± 1 , dato che $\lim_{x \rightarrow \pm 1} M(x) = 0$. Inoltre risulta che $M \in C^\infty$, e che ha un *supporto compatto*.

#Osservazione

Osservazione (nucleo di convoluzione parametrizzato).

Notiamo che definendo $\eta_k(x) := k\eta(kx)$, per $k \in \mathbb{N}^*$, otteniamo che η_k è un *nucleo di convoluzione*. Infatti

$$\int_{\mathbb{R}} \eta_k(x) dx = \int_{\mathbb{R}} k\eta(kx) dx = \int_{\mathbb{R}} \eta(t) dt = 1$$

#Lemma

Lemma (il limite della la convoluzione con un nucleo di convoluzione tende ad annullarsi).

Sia $\eta_k(x) := k\eta(kx)$ con η un nucleo di convoluzione. Sia $f \in C^0 \cap L^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{C})$. Allora si ha il limite

$$\lim_k (f * \eta_k)(x) = f(x), \text{ q.o. in } x \in \mathbb{R}$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del [Lemma 10 \(il limite della la convoluzione con un nucleo di convoluzione tende ad annullarsi\)](#).

Si tratta di calcolare il limite della convoluzione e verificare che effettivamente converga a f quasi ovunque. Ai fini della dimostrazione, calcoliamo $\eta_k * f$ (che, secondo la proprietà della convoluzione, è totalmente equivalente a ciò che vogliamo dimostrare). Dunque,

$$(\eta_k * f)(x) = \int_{\mathbb{R}} \eta_k(x-y) f(y) dy = \int_{\mathbb{R}} k\eta(k(x-y)) f(y) dy$$

con la sostituzione $(k(x-y)) = z$ abbiamo

$$\int_{\mathbb{R}} k\eta(k(x-y)) f(y) dy = \int_{\mathbb{R}} \eta(z) f\left(x - \frac{z}{k}\right) dz$$

Consideriamo la seguente successione:

$$a_k(x, z) := \eta(z) f\left(x - \frac{z}{k}\right)$$

con $k \in \mathbb{N}^*$. Si ha:

$$\lim_k a_k(x, z) = \eta(z) f(x)$$

in quanto f è *continua*. Inoltre possiamo dominare la successione con

$$\eta(z) f\left(x - \frac{z}{k}\right) \leq |\eta(z)| \sup_{\zeta \in \mathbb{R}} |f(\zeta)| =: |\eta(z)| \|f\|_\infty$$

Poiché $f \in L^\infty$, si ha che

$$\int_{\mathbb{R}} |\eta(z)| dz \cdot \|f\|_\infty < +\infty$$

Quindi posso applicare il *teorema della convergenza dominata secondo Lebesgue* ([Teorema 1 \(di convergenza dominata secondo Lebesgue\)](#)) per effettuare il seguente scambio dell'integrazione quasi ovunque:

$$\lim_k \int_{\mathbb{R}} a_k(x, z) dz = \int_{\mathbb{R}} \eta(z) f(x) dz = f(x)$$

Ricordandomi che il limite sopra ottenuto è derivato calcolando $\eta_k * f$, ho la tesi. ■

5. Accenno al caso multidimensionale

N.B. Opzionale

#Definizione

Definizione (convoluzione di funzioni in più variabili).

Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Allora si definisce la loro convoluzione come

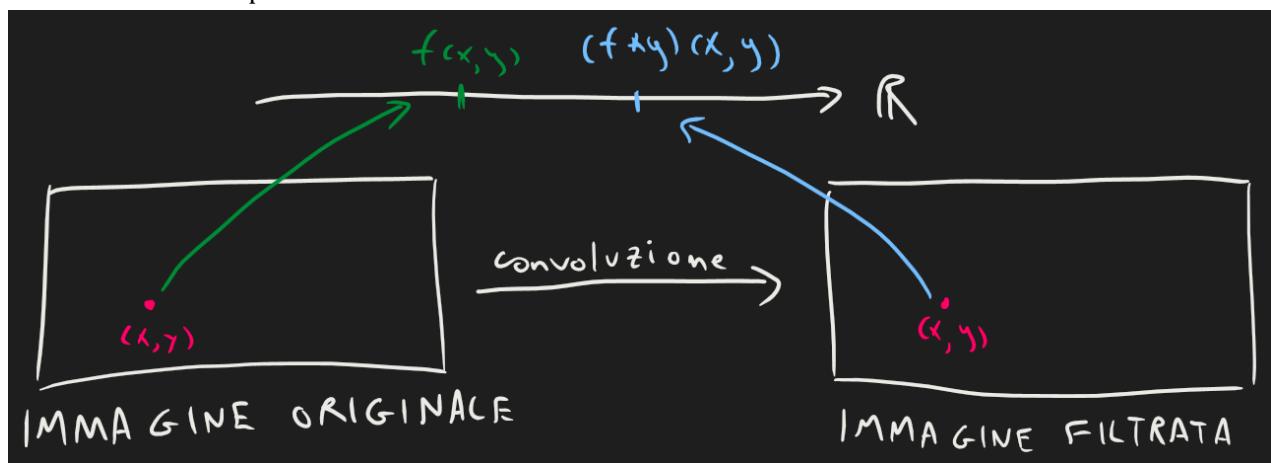
$$(f * g)(\underline{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\underline{x} - \underline{y})g(\underline{y}) d\underline{y}$$

#Esempio

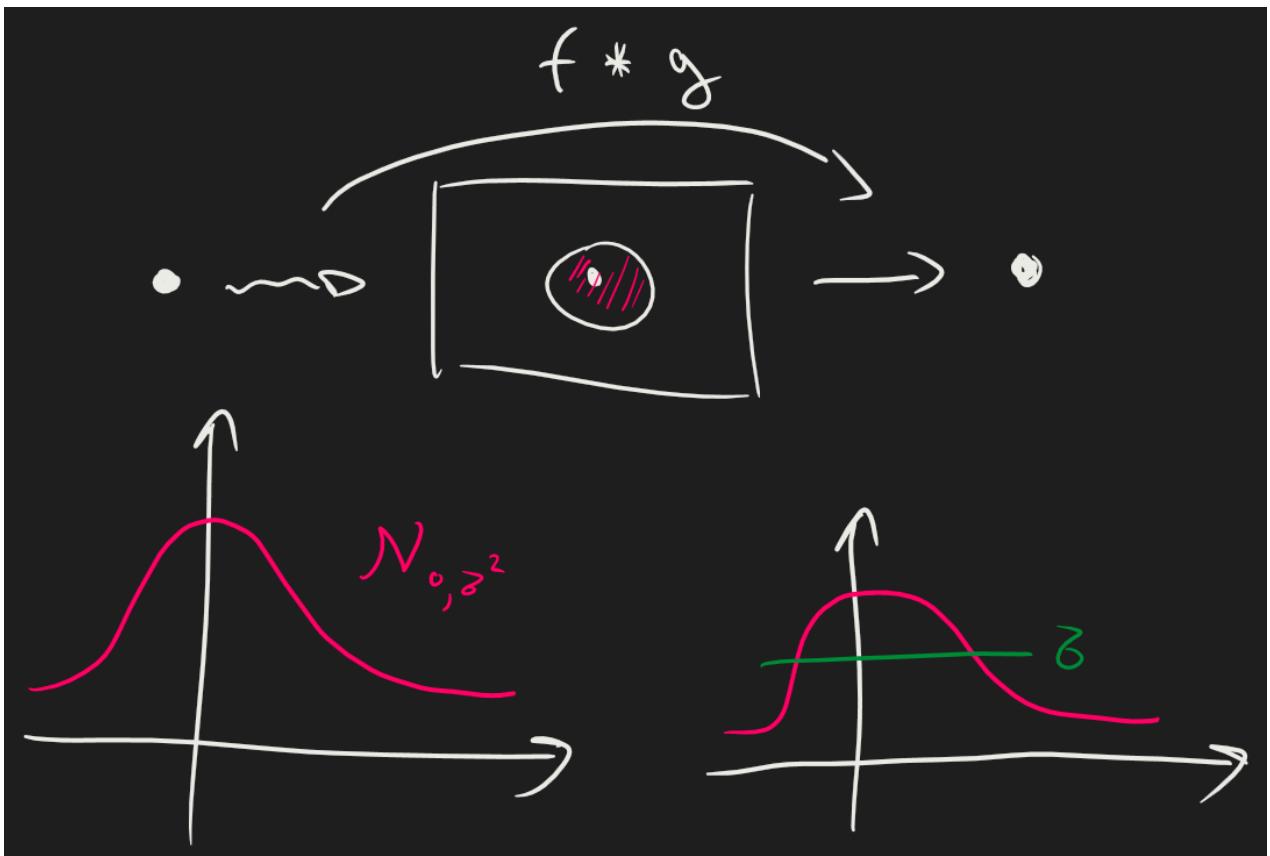
ESEMPIO. (*Filtramento delle immagini*)

Sia f una funzione che associa ad ogni elemento $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ un *tono di grigio*. Ovvero, dato un "pixel" abbiamo un valore numerico che rappresenta il "colore".

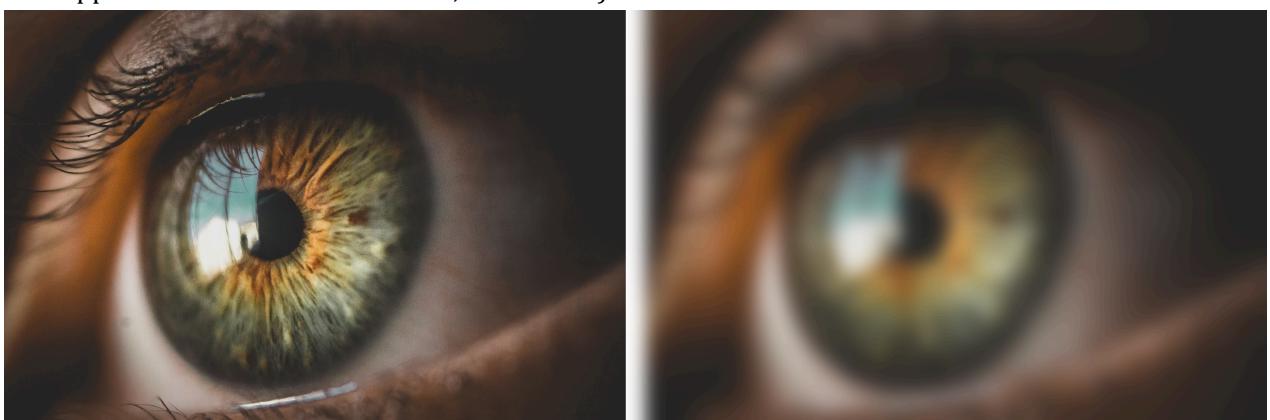
Sia g un *fattore di convoluzione* (o *nucleo convolutivo*), ossia una funzione positiva con $\|g\|_1 = 0$ e $g \in \mathcal{C}^\infty$. Abbiamo che: f descrive l'*immagine* in bianco e nero originale; $f * g$ descrive un'*immagine filtrata*. Ovvero una situazione del tipo



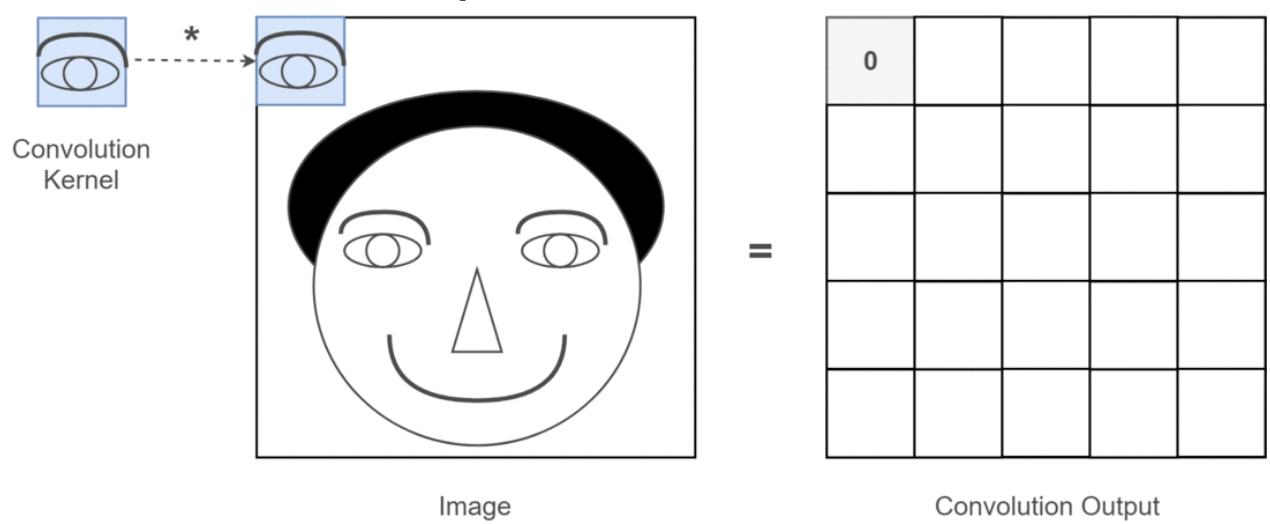
L'applicazione dell'operatore *convoluzione* potrebbe *regolarizzare* e "sfuocare" le tonalità di grigio. Un modo per fare questo è quello di prendere il *pixel* e dei suoi "vicini", di prendere il loro valor medio (*che potrebbe essere ponderato secondo una distribuzione gaussiana*) e come output avere questo valore.



Così abbiamo un effetto "blur", dandoci una versione più liscia del grafico sopra. Un'esempio pratico è il seguente (solo che al posto di valori in \mathbb{R} che rappresentano la tonalità del grigio, abbiamo valori in \mathbb{R}^3 che rappresentano le tonalità di rosso, verde e blu).



Inoltre, una tecnica simile viene usata per le *reti neurali*.



Definizione e premesse euristiche per l'antitrasformata di Fourier. Proprietà immediate per l'AFT.

0. Voci correlate

- [Analisi e Sintesi di Fourier](#)
- [Definizione di Trasformata di Fourier](#)

1. Premesse

CASO PERIODICO. Supponiamo f T -periodica: allora come fatto con le serie di Fourier, la associamo alla serie di Fourier

$$\sum_{|n|} c_n(f) e^{inx}$$

Con $c_n(f)$ posta come

$$c_n(f) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-inx} dx$$

Abbiamo visto che data una *serie di Fourier* non è sempre facile ritornare alla funzione di partenza. La domanda spontanea è la seguente: possiamo sviluppare un discorso analogo per le funzioni che non sono periodiche ma definite in \mathbb{R} ?

PREMessa. Data la *trasformata di Fourier* $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$, è possibile risalire alla funzione f ? In altre parole, è possibile invertire la trasformata di Fourier come operatore tra spazi funzionali? Lo schema è questo

$$f \xrightarrow{\text{FT}} \hat{f} \xrightarrow{\text{?}} f$$

2. Definizione di Anti-Trasformata di Fourier

#Definizione

Definizione (antitrasformata di Fourier).

Sia $g \in L^1(\mathbb{R})$. Si dice l'*antitrasformata di Fourier* (AFT) di g la funzione

$$\mathcal{G}(g)(x) = \check{g}(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} g(\omega) e^{ix\omega} d\omega$$

#Osservazione

Osservazione (identificazione dell'antitrasformata di Fourier con la trasformata).

Notiamo subito che

$$\mathcal{G}(g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} g(\omega) e^{-i\omega(-x)} d\omega = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(g)(-x)$$

Ovvero

$$\check{g}(x) = \frac{1}{2\pi} \hat{g}(-x)$$

Da questa osservazione si evince il seguente.

#Proposizione

Proposizione (le proprietà della FT si traspongono alla AFT).

Tutte le proprietà della *trasformata di Fourier* valgono analogamente per le *antitrasformate di Fourier* ([Proprietà della Trasformata di Fourier](#)).

Teorema di Inversione di Fourier

X

Teorema di inversione di Fourier. Problema. Condizione necessaria: lemma di Riemann-Lebesgue per l'AFT.

Teorema di inversione di Fourier (enunciato), conseguenze. Dimostrazione del teorema di inversione di Fourier.

X

0. Voci Correlate

- [Definizione di Antitrasformata di Fourier](#)
- [Analisi e Sintesi di Fourier](#)

1. Problema

Q. Data $f \in L^1(\mathbb{R})$, vale la formula

$$\mathcal{G}(\mathcal{F}(f)) = f$$

Ossia $\mathcal{G}(\mathcal{F}(f))(x) = f(x)$ quasi ovunque in $x \in \mathbb{R}$?

X

2. Condizione Necessaria

Vediamo cosa succede se *supponiamo* che valga tale relazione.

#Teorema

Teorema (condizione necessaria).

Sia $f \in L^1$ e sia $\hat{f} = \mathcal{F}(f)$ la sua trasformata di Fourier. Se vale la relazione

$$\mathcal{G}(\mathcal{F}(f))(x) = f(x) \text{ per q.o. } x \in \mathbb{R}$$

Allora, deve esistere una funzione $h \in \mathcal{C}^0 \cap L^\infty$ tale che

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} h(x) = 0$$

e tale che

$$f(x) = h(x) \text{ per q.o. } x \in \mathbb{R}$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del [Teorema 1 \(condizione necessaria\)](#).

Si tratta di usare le *proprietà delle trasformate (e antitrasformate) di Fourier* (in particolare le prime proprietà, di cui la maggiorazione della sua norma in L^∞ e il lemma di Riemann-Lebesgue adattato). Infatti definendo $g = \mathcal{F}(f)$ ho che $\mathcal{G}(g) = h$, da cui la tesi. ■

X

3. Teorema di Inversione di Fourier

#Teorema

Teorema (di inversione di Fourier).

Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, allora per quasi ovunque $x \in \mathbb{R}$ ho la relazione

$$\mathcal{G}(\hat{f})(x) = f(x)$$

cioè

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-i\omega y} dy \right)}_{\hat{f}(\omega)} e^{i\omega x} d\omega = f(x)$$

X

4. Conseguenze del teorema di inversione

Prima di vedere la dimostrazione, vediamo un paio di conseguenze di questo teorema.

#Teorema

Teorema (formula di dualità).

Sia $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, allora per quasi ovunque $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$(\mathcal{F} \circ \mathcal{F})(f)(x) = 2\pi f(-x)$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del [Teorema 3 \(formula di dualità\)](#).

Si tratta di usare il fatto che

$$(\mathcal{G} \circ \mathcal{F})(f)(x) = f(x) \text{ q.o.}$$

Poiché abbiamo che $\mathcal{G}(x) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(f)(-x)$, si ha che

$$(\mathcal{G} \circ \mathcal{F})(x) = \frac{1}{2\pi} (\mathcal{F} \circ \mathcal{F})(f)(-x) = f(x) \text{ q.o.}$$

Sostituendo $t = -x$ e moltiplicando per 2π si ha la tesi. ■

#Teorema

Teorema (teorema di unicità).

Siano $f, g \in L^1$ e tali che $\hat{f}, \hat{g} \in L^1$. Si ha che

$$\hat{f} = \hat{g} \text{ in } \mathbb{R} \iff f = g \text{ q.o. in } \mathbb{R}$$

Ossia ogni funzione integrabile individua il suo spettro in maniera univoca, e viceversa.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del [Teorema 4 \(teorema di unicità\)](#)

Come prima, la dimostrazione è immediata usando il fatto che vale il *teorema dell'inversione*. ■

#Teorema

Teorema (trasformata di Fourier del prodotto di due funzioni).

Siano $f, g, fg \in L^1$ tali che $\hat{f}, \hat{g}, \widehat{fg} \in L^1$. Allora vale che

$$\widehat{fg}(\omega) = \frac{1}{2\pi} (\hat{f} * \hat{g})(\omega)$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del [Teorema 5 \(trasformata di Fourier del prodotto di due funzioni\)](#)

Siccome per ipotesi $\hat{f}, \hat{g} \in L^1 \implies \hat{f} * \hat{g} \in L^1$, essendo dunque $\hat{f} * \hat{g} \in L^1$ sappiamo che $\forall \hat{h} \in L^1$,

$$|\mathcal{G}(\hat{h})(x)| = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{h}(\omega) e^{i\omega x} d\omega \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{h}(\omega)| d\omega < +\infty$$

Possiamo dunque usare questo fatto su $\hat{f} * \hat{g}$ per calcolare la sua antitrasformata.

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\hat{f} * \hat{g})(x) &= \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(\hat{f} * \hat{g})(-x) \\ &= 2\pi \cdot \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(\hat{f})(-x) \cdot \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(\hat{g})(-x) \\ &= 2\pi \cdot \mathcal{G}(\hat{f})(x) \cdot \mathcal{G}(\hat{g})(x) \\ &= 2\pi \cdot f(x)g(x) \\ &= 2\pi \cdot fg(x) \end{aligned}$$

E quindi applicando \mathcal{F} da ambo i lati ho la tesi. ■

X

5. Dimostrazione del Teorema di Inversione di Fourier

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del [Teorema 2 \(di inversione di Fourier\)](#)

Ricordiamo che richiediamo $\hat{f} \in L^1$. Supponiamo, per semplicità che $[f \in \mathcal{C}^0 \cap L^\infty \cap L^1]$. Tale scelta non è

un'ostruzione fondamentale nella dimostrazione del teorema, ma solo una scelta attuata per semplificare la dimostrazione.

Si tratta di dimostrare che vale l'uguaglianza "target"

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) e^{ix\omega} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-iy\omega} dy \right) e^{ix\omega} d\omega$$

Per ogni $k \in \mathbb{N}^*$ si definisce la successione di funzioni

$$\nu_k(\omega) := e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{k} \right)^2} = k\sqrt{2\pi} \cdot \mathcal{N}_{0,k}(\omega)$$

consideriamo poi la *successione delle approssimazioni delle antitrasformate*, posta come

$$\mathcal{G}_k(\hat{f})(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) \nu_k(\omega) e^{ix\omega} d\omega = \mathcal{G}(\hat{f} \cdot \nu_k)(x)$$

Vogliamo dimostrare le seguenti identità quasi ovunque:

$$(A) \lim_k \mathcal{G}_k(\hat{f})(x) = f(x)$$

$$(B) \lim_k \mathcal{G}_k(\hat{f})(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) e^{ix\omega} d\omega$$

Provando (A) e (B) si avrebbe la tesi, in quanto combinandoli otterremmo la "uguaglianza target"

Dimostrazione della (A). Notiamo che $\mathcal{G}_k(\hat{f})(x)$ si può scrivere come

$$\mathcal{G}_k(\hat{f})(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-iy\omega} dy \right) \nu_k(\omega) e^{ix\omega} d\omega$$

Definiamo per ogni $x \in \mathbb{R}$ la funzione

$$\phi_x(y, \omega) := f(y) \nu_k(\omega) e^{i(x-y)\omega}$$

Ovvero l'integrandi. Ovviamente si ha che $|\phi_x(y, \omega)| \leq |f(y)| |\nu_k(\omega)|$ (infatti $e^{i\cdot} \in \mathbb{S}_1$); pertanto, visto che $f \in L^1$ e $\nu_k \in L^1$ si ha che $\phi_x \in L^1$. Possiamo dunque applicare il *teorema di Fubini* ([Teorema 1 \(di Fubini\)](#)) alla funzione ϕ_x , ottenendo dunque:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_k(\hat{f})(x) &= \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} \phi_x(y, \omega) dy d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(y) \left(\int_{\mathbb{R}} \nu_k(\omega) e^{i(x-y)\omega} d\omega \right) dy \end{aligned}$$

Notiamo che

$$\int_{\mathbb{R}} \nu_k(\omega) e^{i(x-y)\omega} d\omega =: \mathcal{F}(\nu_k)(y-x) = \hat{\nu}_k(y-x)$$

Inoltre conoscendo la *trasformata di Fourier* di una gaussiana generica ([Teorema 5 \(trasformazione esplicita della gaussiana\)](#)) si ha

$$\hat{\nu}_k(y-x) = k\sqrt{2\pi} \cdot e^{-\left(\frac{k(y-x)}{2}\right)^2}$$

Inoltre, considerando che la gaussiana è un *nucleo di convoluzione* e usando la notazione ${}^k\eta(X) = k\eta(kX)$, ho

$$\hat{\nu}_k(y-x) = 2\pi \cdot {}^k\mathcal{N}_{0,1}(x-y)$$

Quindi rimettendo tutto ho

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_k(\hat{f})(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} 2\pi \cdot {}^k \mathcal{N}_{0,1}(x-y) f(y) dy \\ &= (f * {}^k \mathcal{N}_{0,1})(x)\end{aligned}$$

Considerando il *limite della convoluzione col nucleo convolutivo* ([Lemma 10 \(il limite della la convoluzione con un nucleo di convoluzione tende ad annullarsi\)](#)), ho

$$\lim_k \mathcal{G}_k(\hat{f})(x) = f(x) \text{ per q.o. } x \in \mathbb{R}$$

provando dunque la prima parte della dimostrazione.

Dimostrazione della (B). Osserviamo che

$$\lim_k \hat{f}(\omega) \nu_k(\omega) e^{i\omega x} = \hat{f}(\omega) e^{i\omega x}$$

(questa segue direttamente dalla definizione di ν_k); inoltre abbiamo pure la maggiorazione

$$|\hat{f}(\omega) \nu_k(\omega) e^{i\omega x}| \leq |\hat{f}(\omega)|$$

Quindi possiamo usare la *il teorema della convergenza dominata secondo Lebesgue* ([Teorema 1 \(di convergenza dominata secondo Lebesgue\)](#)) per affermare che vale il limite

$$\lim_k \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) \nu_k(\omega) e^{i\omega x} d\omega = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) e^{ix\omega} d\omega$$

provando dunque la (B) e concludendo la dimostrazione. ■

X

6. Esempio di Applicazione

#Esempio

Esempio (calcolo dell'integrale di Dirichlet).

Sia l'integrale di Dirichlet posto come

$$I_D = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x} dx = ?$$

Sappiamo che questa ammette un valore finito, ma la funzione $\frac{\sin x}{x}$ non ha una primitiva esprimibile in termini di funzioni elementari. Dunque, come si può calcolare il valore I_D ?

Innanzitutto consideriamo la funzione segnale quadro in $[-1, 1]$, ovvero $\chi_{[-1,1]}(x)$. Ne calcoliamo la sua trasformata di Fourier, da cui ho

$$\begin{aligned}\hat{\chi}_{[-1,1]}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \chi_{[-1,1]}(x) e^{-i\xi x} dx \\ &= \int_{-1}^1 e^{-i\xi x} dx \\ &= \frac{e^{-i\xi x} - 1}{-i\xi} \Big|_{-1}^1 = \frac{e^{i\xi} - e^{-i\xi}}{i\xi}\end{aligned}$$

Osservando le formule di Eulero (1), ottengo

$$\hat{\chi}_{[-1,1]}(\xi) = 2 \frac{\sin \xi}{\xi}$$

Sebbene la trasformata $\hat{\chi}_{[-1,1]}$ non sia L^1 , siamo comunque nelle buone ipotesi per applicare il *teorema di inversione di Fourier* ([Teorema 2 \(di inversione di Fourier\)](#)); questo è dovuto al fatto che χ è una funzione liscia e definita a tratti.

Allora l'antitrasformata di $\hat{\chi}_{[-1,1]}$ diverrebbe

$$\mathcal{G}(\hat{\chi}_{[-1,1]}(\xi))(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} 2 \frac{\sin \xi}{\xi} e^{i\xi x} d\xi \equiv \chi_{[-1,1]}(x)$$

Valutando la funzione in $x = 0$ otteremmo

$$\chi_{[-1,1]}(0) = 1, \mathcal{G}(\hat{\chi}_{[-1,1]}(\xi))(0) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin \xi}{\xi} d\xi$$

Per l'identità $\mathcal{G}(\hat{f}(\xi))(x) \equiv f(x)$ di cui sopra abbiamo che

$$\frac{1}{\pi} I_{\mathcal{D}} = 1 \implies [I_{\mathcal{D}} = \pi]$$

da cui abbiamo il risultato finale

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x} dx = \pi}$$

■

Trasformata di Fourier in L2

X

Trasformata di Fourier in L2: problema. Teorema di Plancherel. Formule di approssimazione di Plancherel-Carleson.

X

0. Voci correlate

- [Definizione di Trasformata di Fourier](#)
- [Spazi di Lebesgue](#)

1. Problema

Q. Come possiamo definire la *trasformata di Fourier* per $f \notin L^1(\mathbb{R})$? Un esempio potrebbe essere la funzione

$$f : x \mapsto \frac{\sin x}{x}$$

per cui

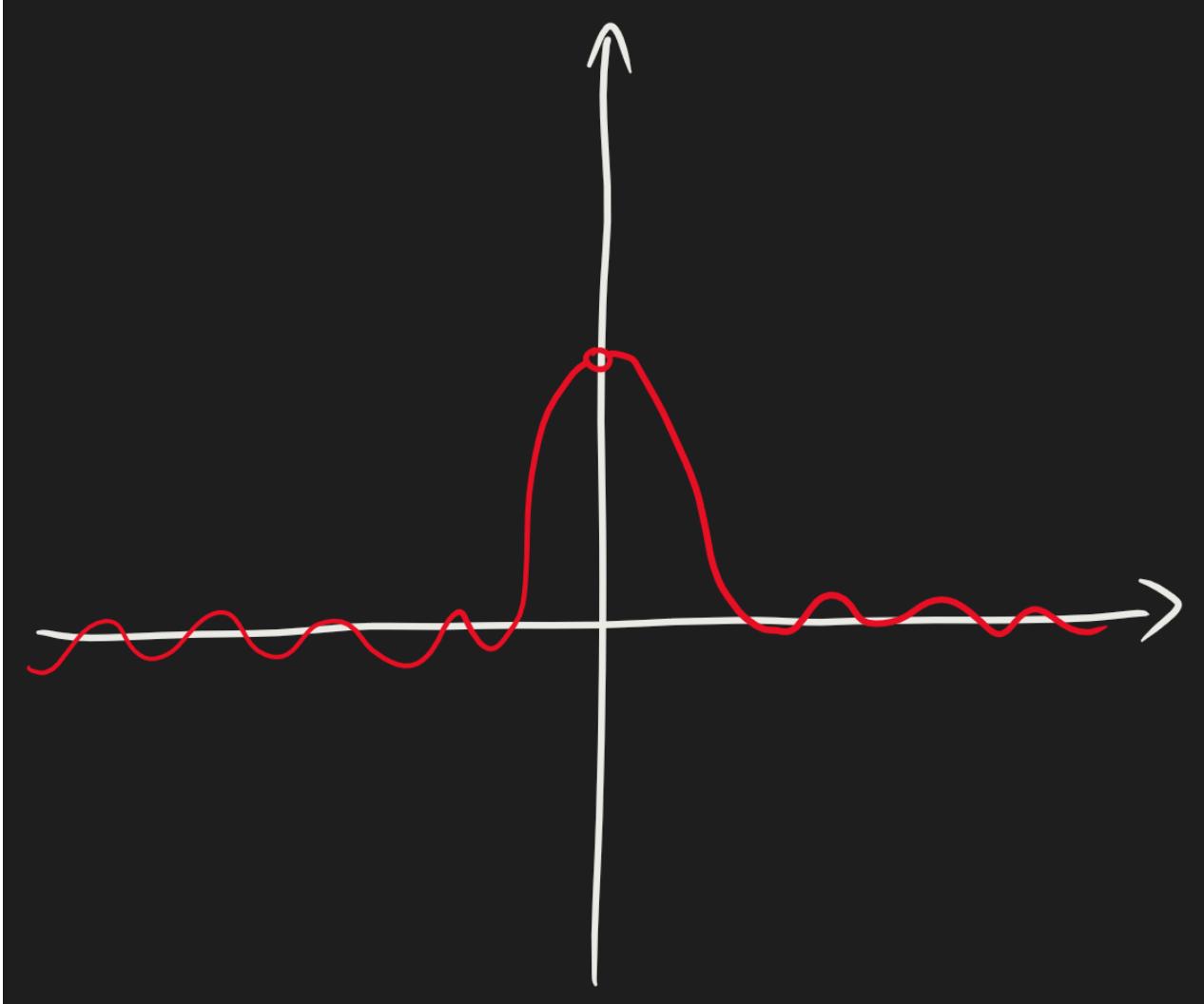
$$\int_{\mathbb{R}} f < +\infty$$

però

$$\int_{\mathbb{R}} |f| = +\infty$$

(ovvero è una funzione *semplicemente convergente*)

Infatti, usando i criteri sugli integrali generalizzati si ha che $f \in L^2(\mathbb{R})$. Possiamo "sperare" di poter definire la trasformata di Fourier per funzioni di questo tipo? Vedremo...



MOTIVAZIONE. Nella applicazioni risulta utile (e fisicamente rilevante) applicare la trasformata di Fourier a funzioni che hanno *energia finita*. Tuttavia se $f \in L^2$ non è garantito che $f \in L^1$ e quindi, a priori, non possiamo garantire che

$$|\hat{f}(\omega)| = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\omega x} dx \stackrel{?}{<} +\infty$$

X

2. Teorema di Plancherel

#Teorema

Teorema (di Plancherel).

L'operatore *trasformata di Fourier* $\mathcal{F} : L^1 \cap L^2 \rightarrow L^\infty$ si estende in modo *univoco* a un'operatore $\bar{\mathcal{F}} : L^2 \rightarrow L^2$ che sia *lineare, continuo, biettivo* e che verifichi $\forall f, g \in L^2$ la seguente identità:

$$(\bar{\mathcal{F}}(f), \bar{\mathcal{F}}(g))_{L^2} = 2\pi(f, g)_{L^2}$$

In particolare ciò implica

$$\|\mathcal{F}(f)\|_{L^2}^2 = 2\pi \|f\|_{L^2}^2$$

oppure

$$\|\hat{f}\|_{L_x^2}^2 = 2\pi \|f\|_{L_x^2}^2$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del [Teorema 1 \(di Plancherel\)](#).

Omessa. ■

#Osservazione

Osservazione (osservazioni sul teorema).

Effettuiamo le seguenti osservazioni.

- i. Notiamo che estendendo il dominio a L^2 , abbiamo anche ristretto il codominio in L^2 ; questo è stato il "prezzo" da pagare per estendere la trasformata.
- ii. L'operatore $\bar{\mathcal{F}}$ è *definito in modo implicito*, ossia non possiamo esprimerlo come la formula per \mathcal{F} , in quanto non si ha la sicurezza che sia *ben definita*.

3. Formule di Approssimazione di Plancherel-Carleson

#Proposizione

Proposizione (di approssimazione di Plancherel-Carleson).

Siano $f, g \in L^2$ con $g = \bar{\mathcal{F}}(f)$. Sia inoltre $\bar{\mathcal{G}} : L^2 \rightarrow L^2$ definito come $\bar{\mathcal{G}}(h)(x) = \frac{1}{2\pi} \bar{\mathcal{F}}(h)(-x)$. Si ha che

1. $\bar{\mathcal{F}}(f)(\omega) = \lim_{K \rightarrow +\infty} \int_{-K}^K f(x) e^{-ix\omega} dx \in L^2$ q.o. in \mathbb{R}
2. $f(x) = \bar{\mathcal{G}}(g)(x) = \lim_{K \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-K}^K g(\omega) e^{ix\omega} d\omega \in L^2$ q.o. in \mathbb{R}

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del [Proposizione 3 \(di approssimazione di Plancherel-Carleson\)](#).

Si tratta di dimostrare che ho la convergenza in L^2 per $\bar{\mathcal{F}}(f|_{[-K,K]}) \rightarrow \bar{\mathcal{F}}(f)$, con $K \rightarrow +\infty$.

Ricordiamo che per $K > 0$ abbiamo $p_{2K} := \chi_{[-K,K]}$. Sia $f_K := p \cdot p_{2K}$ (in altre parole consideriamo la "restrizione" $f|_{[-K,K]}$). Notiamo che se $f \in L^2$ allora ho $f_K \in L^1$ ([Proposizione 8 \(condizione necessaria per le inclusioni\)](#)) in quanto ho degli *intervalli limitati*. In tal caso possiamo calcolare la trasformata di Fourier $\mathcal{F}(f_K)$.

$$\widehat{f}_K(\omega) = \int_{-K}^K f(x) e^{-ix\omega} dx$$

Definiamo ora la famiglia di scarti quadratici tra la nostra funzione target f e il troncamento f_K in $K > 0$ come

$$\phi_K(x) := |f(x) - f_K(x)|^2 = |f(x)|^2 |p_{2K}(x) - 1|^2$$

L'idea principale è quello di calcolare la sua funzione limite ed applicare il teorema della convergenza di Lebesgue per provare che $\|f - f_K\| \xrightarrow{L^2} 0$.

i. ϕ_K ha limite nullo

$$\lim_{K \rightarrow +\infty} \phi_K(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

ii. ϕ_K è maggiorata da f

$$|\phi_K(x)| \leq |f(x)|, \forall K > 0, x \in \mathbb{R}$$

Pertanto applicando il *teorema della convergenza dominata secondo Lebesgue* ([1](#)) ho che

$$\lim_{K \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_K(x) - f(x)|^2 dx = 0 \stackrel{(\leftrightarrow)}{\implies} \lim_{K \rightarrow +\infty} \|f_K - f\|_{L^2} = 0$$

Da ciò deduciamo che ho la convergenza $f_K \rightarrow f$ in energia. Notiamo ora che l'operatore $\bar{\mathcal{F}}$ è *continuo*, ovvero possiamo applicare l'operatore e avere comunque la convergenza:

$$\lim_{K \rightarrow +\infty} \|\bar{\mathcal{F}}(f_K) - \bar{\mathcal{F}}(f)\|_{L^2} = 0$$

Siccome $\bar{\mathcal{F}}$ è un'estensione di \mathcal{F} , pertanto $\bar{\mathcal{F}}(f_K) \leftarrow \hat{f}_K = \mathcal{F}(f_K)$ e quindi ottengo che

$$\lim_{K \rightarrow +\infty} \|\mathcal{F}(f_K) - \bar{\mathcal{F}}(f)\|_{L^2} = 0$$

dimostrando il primo punto. Il punto 2 si dimostra in maniera analoga, applicando il teorema di inversione oppure il principio della dualità. ■