Energia e Quantità di Moto - Sommario

Vis Viva

Notizie storiche sul dibattito di "Vis viva": Leibniz e Cartesio. Introduzione al concetto di energia potenziale e quantità di moto.

---

1. Notizie Storiche

VIS VIVA. Storicamente c'è stato un dibattito *scientifico-filosofico* sul concetto di *"Vis viva"*, ovvero *"forza viva*. I protagonisti di questo dibattito saranno i noti filosofi del *ramo razionalista*, ovvero *Leibniz* e *Cartesio*.
LEIBNIZ. Da un lato abbiamo l'idea di *Leibniz*, che affermò che la grandezza fisica che si conserva è la mv^2; in seguito questa verrà rielaborata in concetto di *"energia cinetica"*, prima da *Thomas Young* con concetto di *"energy"*, poi da *Coriolis* col concetto di *"enérgie cinétique* $(\frac{1}{2}mv^2)$.
CARTESIO. Dall'altro lato abbiamo *Cartesio*, che affermò la quantità che si conserva sarebbe stata in realtà $m|v|$. In realtà non si tratta di *energia* in nessun modo, bensì *quantità di moto*.
CONCLUSIONE. In un modo o l'altro, entrambi i filosofi ebbero ragione.

Sistema e Ambiente

Nozioni preliminari per l'energia: Sistema e Ambiente. Forza interna ed esterna.

---

0. Voci correlate

- Definizione di Massa e di Forza

1. Nozioni Preliminari per l'Energia

In questa pagina andremo a *definire delle nozioni preliminari* per parlare di *energia*: vedremo in particolare l'idea di *sistema e ambiente*, da cui discendono la definizione di *forza esterna ed interna*.

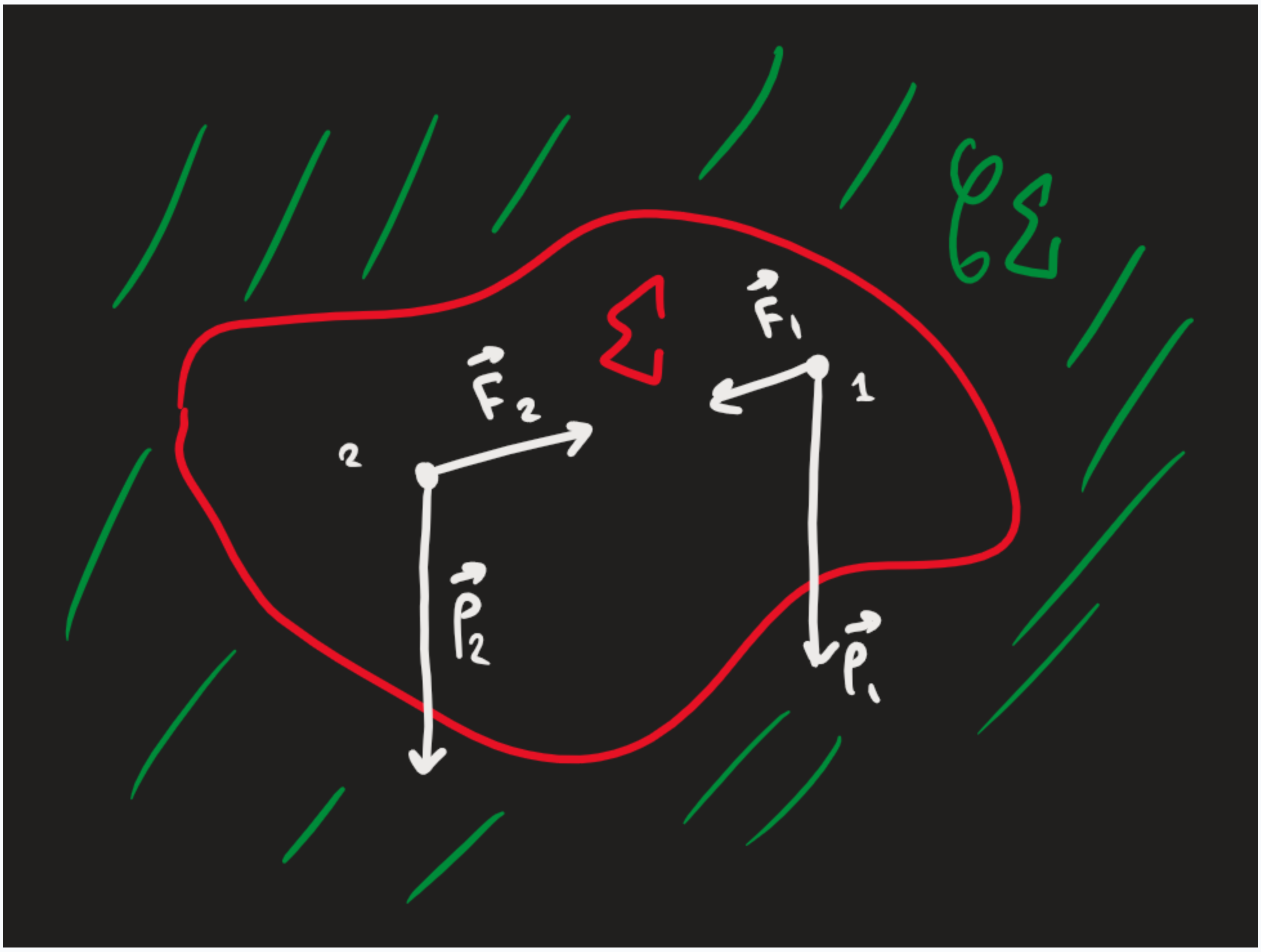
#Definizione

Definizione (Sistema e Ambiente).

Supponiamo di avere *due (o più) materiali* che si interagiscono.
Stabilendo un *"confine"* (ovvero una *curva* oppure una *superficie*) per i *punti materiali*.
Ciò che sta dentro questo confine è *sistema*, il resto è *ambiente* (*figura 1.1.*).

In altre parole, possiamo definire un *sistema* come *l'insieme di corpi delineato da una superficie immaginaria (o anche reale)* Σ, e l'*ambiente* come il *complementare del sistema*, ovvero $\Sigma^{\mathcal{C}}$.

FIGURA 1.1. (*Idea di Sistema e Ambiente*)



Come si vede in *figura 1.1.*, possiamo classificare le *forze* a seconda della *"direzione"* in cui vanno, ovvero se *"attraversano il sistema"* o *"rimangono dentro"*. In ogni caso, le *leggi della fisica* valgono ugualmente.

#Definizione

> Definizione (forza interna ed esterna).
>
> Sia Σ un sistema di uno o più corpi.
>
> Le forze che hanno *direzione interna nel sistema* si dicono *"forze interne"*, le forze che *attraversano il sistema* (quindi o sollecitano i corpi o viene sollecitata dai corpi) si dicono *"forze esterne"*.

Nella *figura 1.1.*, le forze esterne sono le forze *a distanza* $\vec{F}_1, \vec{F}_2$; invece le forze esterne sono la *forza-peso* delle masse.

Energia Cinetica

Definizione di energia cinetica.

---

0. Voci correlate

- Vis Viva

1. Definizione di Energia Cinetica

Andiamo a *definire* una quantità fisica *fondamentale*, ovvero quella dell'*energia cinetica*.

#Definizione

> Definizione (energia icnetica).
>
> Un punto materiale di massa m a velocità v (in modulo) ha l'*energia cinetica*, una *grandezza scalare* (anche se definita da quantità vettoriali),

calcolabile come

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

Oppure, se ho *un insieme di punti materiali* in un sistema Σ, la sua energia cinetica associata è

$$K = \sum_{i \in \Sigma} \frac{1}{2}m_i v_i^2$$

L'energia si misura in *Joule*.

2. Esempi di Energia Cinetica

Vediamo degli *esempi* di *punti materiali* con *energia cinetica*.

#Esempio

Esempio (la macchina).

Una macchina di 1000 kg che si muove alla velocità di 50 km/h ha l'energia cinetica

$$K = \frac{1}{2}1000\left(\frac{50}{3.6}\right)^2 = 97 \text{ kJ}$$

Da nota che con 60 km/h avrei $K' = 140 \text{ kJ}$. Abbiamo un incremento del 50%!

Definizione di Lavoro

Definizione di base di Lavoro compiuto da una Forza. Osservazioni, esempi.

---

0. Voci correlate

- Integrabilità secondo Riemann
- Prodotto Scalare

1. Definizione di Lavoro

Andiamo a definire l'altra *misura essenziale*, ovvero il *lavoro*.

#Definizione

Definizione (lavoro compiuto da una forza rispetto ad uno spostamento).

Ho un oggetto con *punto di applicazione* di *forza* $\vec{F}$ e con uno *spostamento* $\Delta\vec{r}$ (non dev'essere *necessariamente* causata dalla forza!).

Si definisce il *lavoro compiuto dalla forza rispetto al suo spostamento* come il *prodotto scalare*

$$W := \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$$

In generale, conoscendo le *istanze iniziali* i, f abbiamo

$$W := \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

(in questo caso *considero tutti i spostamenti come degli spostamenti infinitesimi*)

Il lavoro viene misurato in *Joule* (da dimostrare per conto proprio).

#Osservazione

Osservazione (il lavoro e l'energia cinetica hanno la stessa misura).

Da osservare che il *lavoro* W e l'*energia cinetica* K hanno la stessa misurazione. Infatti, andremo a vedere che sotto certe condizioni potremmo *"convertire"* il lavoro W in energia cinetica K con un teorema.

#Proposizione

Proposizione (le proprietà del prodotto scalare).

Ricordiamoci le seguenti proprietà del prodotto scalare.
i. Se la *forza applicata* e la *distanza* sono *parallele*, allora si può calcolare il prodotto scalare come un semplice prodotto

$$F \parallel \Delta r \implies W = F\Delta r$$

ii. Se sono invece *ortogonali*, il lavoro è nullo

$$F \perp \Delta r \implies W = 0 \text{ J}$$

iii. Se sono invece *opposti*, il lavoro è di segno negativo

$$F \text{ opposto a } \Delta r \implies W = -F \cdot \Delta \vec{r}$$

2. Esempi

Applichiamo questa definizione con qualche esempio noto della *dinamica*.

#Esempio

Esempio (il piano inclinato con la corda).

Supponiamo di avere un *blocco su un piano inclinato trascinato da un cavo su una distanza* d. Supponiamo inoltre di conoscere l'angolo di inclinazione θ, la tensione T e la costante di gravità g (*figura 2.1.*).

Vogliamo calcolare i *lavori totali* di tutte le forze agenti sul corpo.

Prima di tutto troviamo che le uniche e sole forze agenti sul corpo sono la *forza normale*, *forza tensione* e la *forza peso*. Li chiameremo N, T, P.

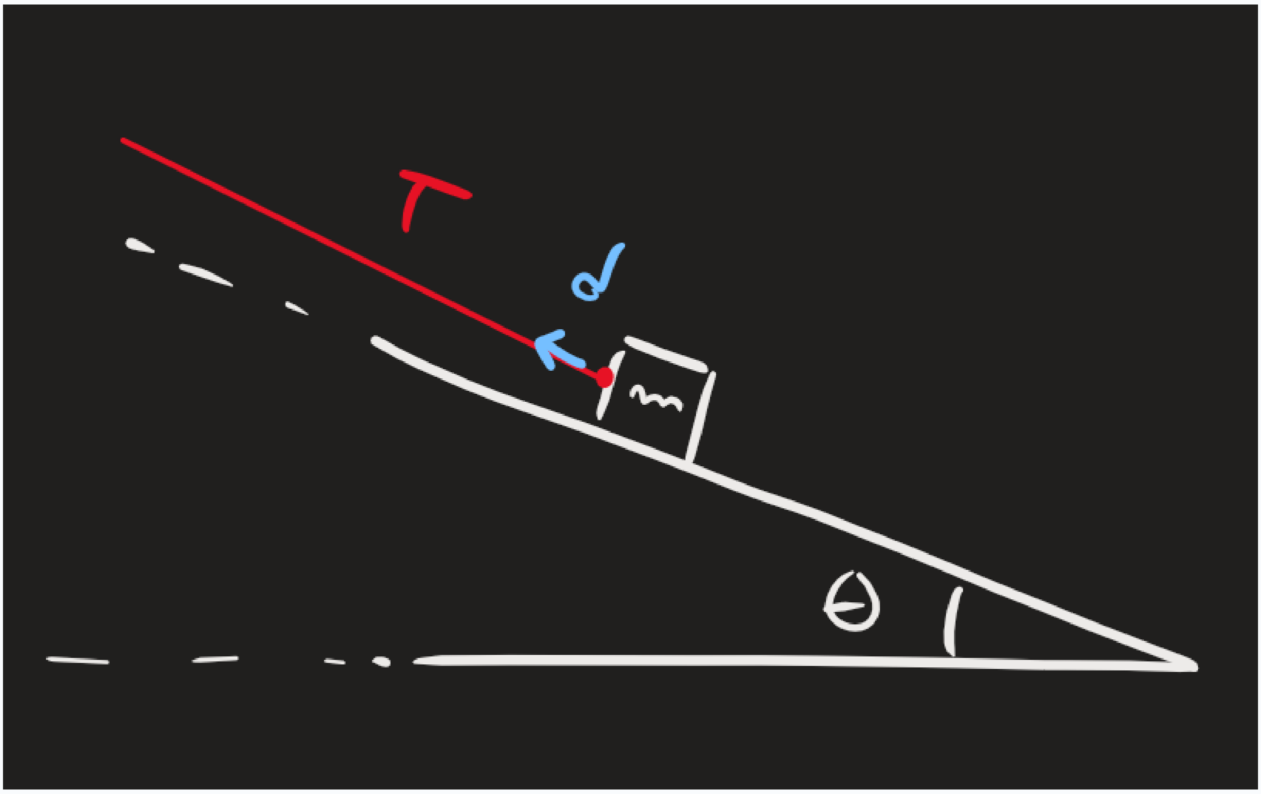
Adesso calcoliamo i lavori compiuti da queste forze

$$\begin{cases} W_T = T \cdot d = Td \\ W_P = \vec{F}_g \cdot \Delta\vec{r} = (F_g) \cdot \hat{i}' \cdot d = -mg\sin(\theta)d \\ W_N = 0 \text{ (vincolo geometrico, dato che } N \parallel d) \end{cases}$$

Allora ho

$$\boxed{\sum W = (T - mg\sin\theta)d}$$

FIGURA 2.1.



Teorema Lavoro-Energia Cinetica

Teorema Lavoro-Energia Cinetica: enunciato, dimostrazione matematica. Osservazioni ed esempi di applicazione.

---

0. Voci correlate

- Principi della Dinamica
- Energia Cinetica
- Definizione di Lavoro

1. Teorema Lavoro-Energia Cinetica

#Teorema

> Teorema (teorema lavoro-energia cinetica (teorema L-K)).
>
> Supponiamo che un corpo si stia muovendo ad istanti i, f con le rispettive velocità v_i, v_f. Allora vale la seguente:

$$\boxed{\sum W = \Delta K}$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 1 (teorema lavoro-energia cinetica (teorema L-K))

N.B. La dimostrazione è importantissima

Consideriamo la *seconda legge di Newton*, che ci dice

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

Allora, considerando uno *spostamento infinitesimale* $d\vec{r}$, posso calcolare dW come segue.

$$\begin{aligned} dW &= \sum \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= m\vec{a} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \\ &= m\vec{a} \cdot \vec{v} \cdot \mathrm{d}t \\ &= m \left(\frac{1}{2} \frac{1}{\mathrm{d}t} v^2 \right) \mathrm{d}t \end{aligned}$$

Poiché $\sum W = \int dW$, ho

$$\sum W = \int_i^f m \left(\frac{1}{2} \frac{1}{\cancel{\mathrm{d}t}} v^2 \right) \cancel{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2} m \underbrace{\int_i^f v^2}_{\Delta(v^2)} = \frac{1}{2} m \Delta(v^2)$$

che ci dà il risultato finale

$$\boxed{\sum W = \Delta K}$$

che è la tesi. ■

OSSERVAZIONI. Adesso poniamo delle *osservazioni* su questo teorema.

#Osservazione

Osservazione (osservazioni sul teorema L-K).

> Osserviamo questo teorema.
> i. Questo teorema è una *conseguenza diretta* della *seconda legge di Newton*: infatti stiamo considerando sempre dei *punti materiali*.
> ii. Questa non è la *conservazione dell'energia*, anche se in casi importanti avremmo comunque dei *risultati uguali*.
> iii. Per il lavoro $\sum W$ non si intende assolutamente il *lavoro* nel *senso termodinamico*!

2. Esempi

Andiamo a vedere degli esempi in cui applichiamo questo teorema.

#Esempio

> Esempio (la distanza di arresto).
>
> Prendiamo un caso noto della cinematica: abbiamo una macchina che sta frenando, con l'*attrito dinamico* e con la velocità iniziale v_i.
>
> Per calcolare la *distanza di arresto*, possiamo sfruttare questo *teorema*: l'idea è quella di *calcolare il lavoro totale*, porlo uguale alla *differenza dell'energia cinetica* e ricavare la distanza d. Possiamo fare questo dato che l'*unica forza agente sul corpo* che sia parallela alla frenata è la forza d'attrito $F_d = \mu_d g$.
>
> Allora ho
>
> $$\sum W = W_D = 0 - \frac{1}{2}mv_i^2$$
>
> Ricordandoci che il lavoro è di *segno negativo*, dal momento che ho *versi opposti*, procedo con i calcoli.
>
> $$W_D = -\mu_d g \cdot d = -\frac{1}{2}mv_i^2$$
>
> che ci dà il risultato finale
>
> $$d = \frac{mv_i^2}{2\mu_d g^2}$$

Lavoro di Forze Notevoli

Lavoro di Forze Notevoli (in particolare variabili). Lavoro della molla. Lavoro della forza peso. Osservazione: il lavoro di queste forze dipendono solo dal punto finale e iniziale.

---

0. Voci correlate

- Lavoro di Forze Notevoli
- Forza Elastica
- Forza Peso e Forza Normale

1. Lavoro della Forza Elastica

Adesso vogliamo calcolare il lavoro di *alcune forze notevoli*, tra cui la *forza elastica* e la *forza peso*.

#Teorema

> Teorema (lavoro della forza elastica).
>
> Dati i punti x_f, x_i lavoro compiuto solamente dalla *forza elastica* è quantificabile come
>
> $$\boxed{W = -\frac{k}{2}(x_f^2 - x_i^2)}$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 1 (lavoro della forza elastica)

Basta usare la *legge di Hooke* e calcolare direttamente l'integrale

$$
\begin{aligned}
W = \int_i^f \underbrace{\vec{F}_x \cdot \mathrm{d}\vec{r}}_{F_x \| \mathrm{d}r} = \int_{x_i}^{x_f} F_x \, \mathrm{d}x = \int_{x_i}^{x_f} &-kx \, \mathrm{d}x \\
&= \left.\frac{kx^2}{2}\right|_{x_i}^{x_f} \\
&= -\frac{k}{2}(x_f^2 - x_i^2)
\end{aligned}
$$

che è il risultato voluto. ■

2. Lavoro della Forza Peso

#Teorema

> Teorema (lavoro della forza peso).
>
> Dato un dislivello $h := y_f - y_i$, il lavoro della forza peso è
>
> $$\boxed{W = mgh}$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 2 (lavoro della forza peso)

Basta calcolare l'integrale

$$
W = \int_i^f \vec{P} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{y_i}^{y_f} mg \, \mathrm{d}y = mg(y_f - y_i) = mgh
$$

che è il risultato voluto. ■

#Osservazione

> Osservazione (le peculiarità del lavoro della forza elastica e della forza peso).
>
> Notiamo che il *lavoro associato* alla *forza elastica* e alla *forza peso* non dipendono in nessun modo dal percorso $\Delta\vec{r}$ effettuato, bensì solo dalle ultime posizioni f, i.
>
> Vedremo che non è sempre il caso, come col *lavoro compiuto dall'attrito*.

> Formalizzeremo questo concetto con la *nozione* di *forza conservativa e dissipativa*.

3. Lavoro dell'Attrito

#Teorema

> **Teorema (il lavoro dell'attrito dinamico).**
>
> Dato uno spostamento s, il lavoro dato dall'attrito è
>
> $$W = \mu N \cdot s$$
>
> dove N è la *forza normale* e μ è il *coefficiente di attrito* (dinamico o statico, stessa robaccia).

4. Esempi di Applicazione

#Esempio

> **Esempio (la rigidità al variare dell'accelerazione massima).**
>
> Supponiamo di avere un carrello di massa m che si *sposta verso* una *molla a riposo* con una velocità v. Determinare il *coefficiente* k della molla tale che il moto del carrello non sia troppo brusco, con un'accelerazione limite a_* (*figura 4.1.*).
>
> i. L'idea è quella di considerare il *momento* in cui il carrello causa uno spostamento x alla *molla*, avendo quindi una forza elastica
>
> $$F = -kx$$
>
> da cui, per la *seconda legge di Newton* implica
>
> $$a = -\frac{kx}{m}$$
>
> Dato che voglio avere $|a| \leq a_*$, mi basta imporre
>
> $$x_* = \frac{m}{k} a_*$$

ii. Adesso mi basta usare il *teorema del lavoro-energia cinetica*, da cui ricavo

$$W = \Delta K \implies -\frac{k}{2}(x_f^2 - x_i^2) = -\frac{1}{2}mv^2$$

Tratto la x_f come un incognita e con svariati calcoli ottengo

$$x_f = \sqrt{\frac{m}{k}}v$$

iii. Infine impongo

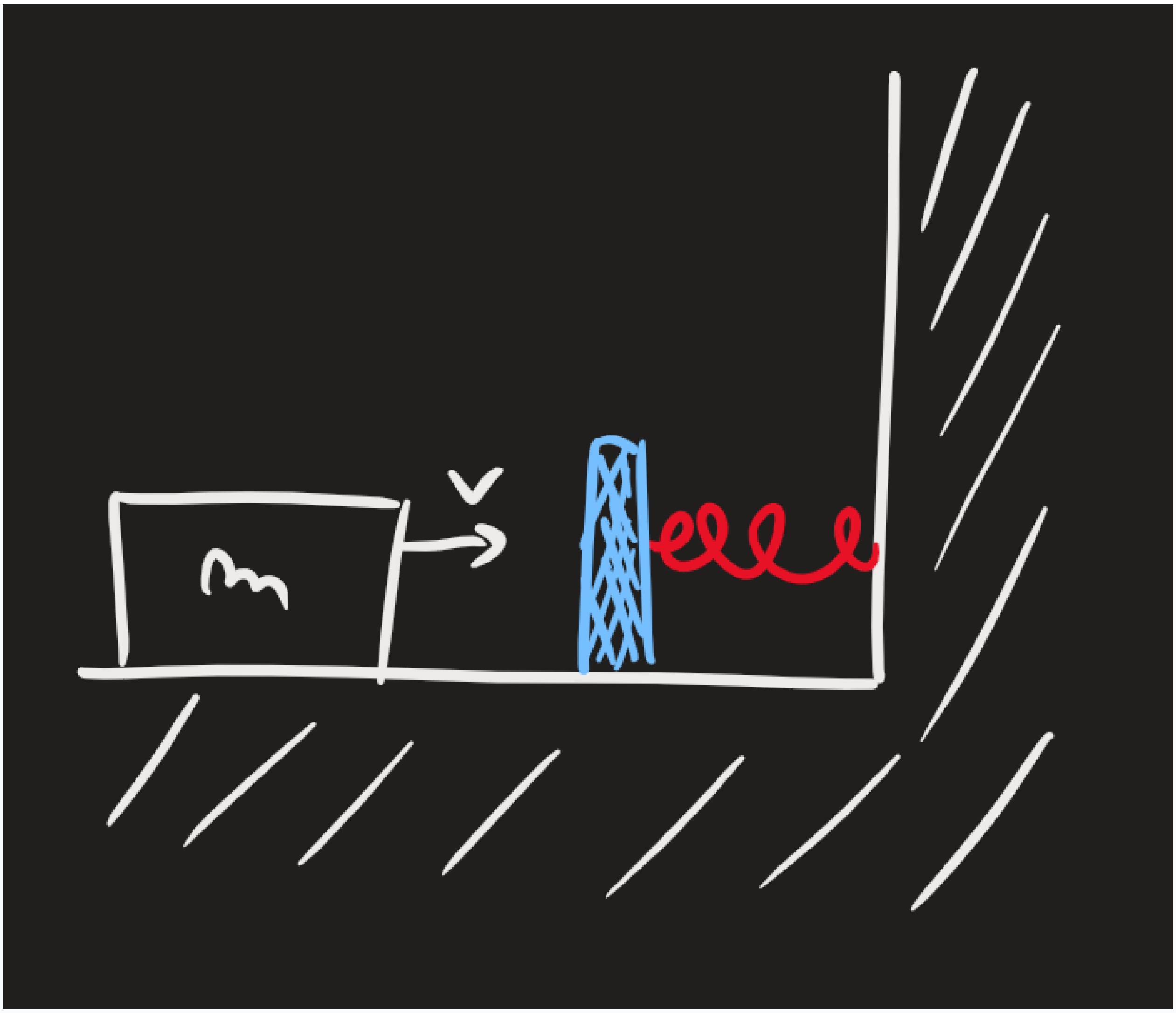
$$x_f \leq x_* \implies \sqrt{\frac{m}{k}}v \leq \frac{m}{k}a_*$$

poi con svariati calcoli ottengo il coefficiente k

$$\boxed{k \leq \frac{m}{v^2}a_*^2 = m\left(\frac{a_*}{v}\right)^2}$$

che è il *risultato desiderato*.

FIGURA 4.1.



#Esempio

Esempio (la montagna russa).

Un carrello, su una *montagna russa* (o americana) percorre un percorso tale da avere un dislivello h dall'altezza iniziale. Determinare la velocità finale.

i. Bisogna banalmente usare il *teorema L-K* (1). Infatti,

$$
\begin{aligned}
&\bullet W = \Delta K \\
\implies & mgh = \frac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2) \\
\implies & \dots \\
\implies & \boxed{v_f = \sqrt{2g(y_f - y_i)} = \sqrt{2gh}}
\end{aligned}
$$

che è il risultato voluto.

Forza Conservative e Dissipative

Definizione di forza conversativa. Esempi di forze non-conservative (dissipative), esempi di forze conservative. Osservazione: in realtà tutte le forze sono conservative, da un punto di vista microscopico.

---

0. Voci correlate

- Lavoro di Forze Notevoli

1. Definizione di Forza Conservativa

Consolidiamo l'osservazione posta quando abbiamo calcolato le *il lavoro* delle *forze* (1).

#Definizione

Definizione (forza conservativa).

Una forza si dice *conservativa* se valgono una delle condizioni equivalenti:

$$
\boxed{
\begin{gathered}
\int_i^f \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \text{ indipendente dal percorso } \mathrm{d}\vec{r} \\
\Updownarrow \\
\int_i^f \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} + \int_f^i \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0 \\
\Updownarrow \\
\oint \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0 \\
\Updownarrow \\
\exists U : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \mid \vec{F} = \nabla U(x, y, z)
\end{gathered}
}
$$

Note sulle ultime due condizioni:

- Il simbolo $\oint$ è l'*integrale del percorso chiuso*

- Il simbolo ∇ è il *gradiente* (1), ovvero il vettore che punta ad un *punto critico* della funzione U. Inoltre, la funzione U sarà nota come l'*energia potenziale*.

In caso contrario, la forza si dice *"forza dissipativa"*. Ne faremo un commento in seguito

2. Esempi di Forze Conservative

#Esempio

Esempio (forze dissipative).

Le forze dissipative sono le seguenti:

- Attrito (infatti $W = \mu N s$)
- Resistenza dei fluidi
- Forza compiuta da una persona (infatti siamo tecnicamente delle *"macchine termiche"*)

Poi ci sono altre forze dissipative...

#Esempio

Esempio (forza conservative).

Le forze conservative possono essere le seguenti.

- Elastica
- Peso
- Le forze fondamentali (elettrica, gravitazionale e magnetica)

Eccetera...

3. Le forze dissipative esistono?

#Osservazione

Osservazione (le forze dissipative sono una mera illusione).

Osserviamo che una *condizione necessaria* per l'esistenza di *forze non conservative* è quella di essere in un *punto di vista macroscopico*: questo perché in realtà, dal punto di vista microscopiche, le forze dissipative non esistono. Le energie sono *sempre* conservate, solo in una maniera più disordinata.

Citiamo il fisico R. Feynman, che ci dice le seguenti parole (brano integrale)

"We have spent a considerable time discussing conservative forces; what about nonconservative forces? We shall take a deeper view of this than is usual, and state that there are no nonconservative forces! As a matter of fact, all the fundamental forces in nature appear to be conservative. This is not a consequence of Newton's laws. In fact, so far as Newton himself knew, the forces could be nonconservative, as friction apparently is. When we say friction apparently is, we are taking a modern view, in which it has been discovered that all the deep forces, the forces between the particles at the most fundamental level, are conservative."

Come esempio a sostegno di questa argomentazione possiamo citare un'esempio dello stesso autore.

"As another example, when friction is present it is not true that kinetic energy is lost, even though a sliding object stops and the kinetic energy seems to be lost. The kinetic energy is not lost because, of course, the atoms inside are jiggling with a greater amount of kinetic energy than before, and although we cannot see that, we can measure it by determining the temperature. Of course if we disregard the heat energy, then the conservation of energy theorem will appear to be false."

!

Energia Potenziale

Definizione di energia potenziale. Osservazione: l'utilità della definizione di energia potenziale per valutare sistemi. Relazione tra energia potenziale e *lavoro, energia potenziale e forza. Esempi di energia potenziale.*

---

0. Voci correlate

- Definizione di Massa e di Forza
- Definizione di Lavoro
- Forza Conservative e Dissipative
- Forza Peso e Forza Normale
- Forza Elastica
- Forza Gravitazionale

1. Definizione di Energia Potenziale

#Definizione

Definizione (energia potenziale di una forza conservativa).

Per una *forza conservativa* $\vec{F}$ possiamo definire la sua *energia potenziale* il suo integrale indefinito, invertito di segno.

$$\boxed{U(\vec{r}) := -\int \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} + C}$$

dove C è una costante arbitraria.

Da questo discende che

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}(\vec{r}) = -\vec{F}}$$

ovvero *"la forza è la derivata dell'energia potenziale"* (in realtà questa vale per il caso unidimensionale, per il caso 3D bisognerebbe considerare il *gradiente* ∇U).

#Osservazione

Osservazione (la definizione è ben posta).

Verifichiamo che questa definizione sia *matematicamente ben posta*. Dato che la forza è conservativa, possiamo scrivere il suo lavoro come

$$W = \int_i^f \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = -[U(\vec{r}_f)] - [-U(\vec{r}_i)] = 0$$

(1) dove la funzione $U : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ è *"qualcosa finale"* o *"qualcosa iniziale"*.

Quindi possiamo scrivere

$$W = \int_i^f \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = -\Delta U(\vec{r})$$

Che è una riformulazione della definizione dell'energia potenziale. Possiamo aggiungere anche il valore C, dal momento che stiamo considerando gli *integrali indefiniti*.

2. Osservazioni sull'Energia Potenziale

Adesso poniamo una *serie di osservazioni* utili per l'*energia potenziale*.

#Osservazione

Osservazione (il segno negativo).

Come mai poniamo il *segno negativo* per considerare l'energia potenziale? Questo perché vogliamo dare il senso di avere un *"potenziale di compiere lavoro"*, ovvero un *accumulo di energia*.

Infatti, se *non ci fosse* quel segno negativo, l'*energia potenziale* sarebbe completamente *proporzionale* al lavoro.

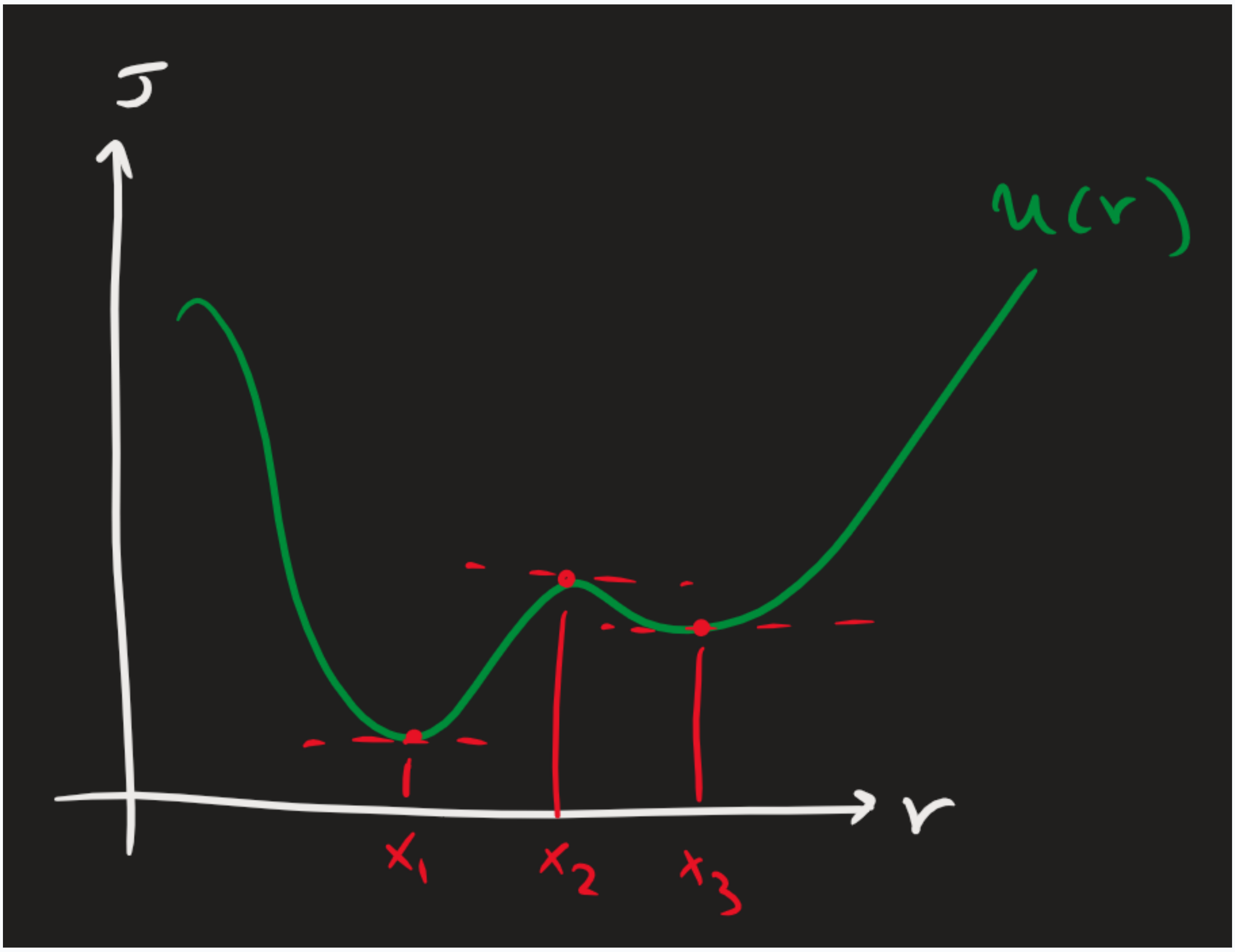
Quindi, per invertire la *monotonia dell'energia potenziale*, ci metto il segno negativo.

#Osservazione

Osservazione (l'utilità dell'energia potenziale).

> L'energia potenziale è *uno dei concetti più importanti della fisica*. Infatti, così diventa più facile *descrivere sistemi con energia*: basta prendere *derivate* e *integrali*!
>
> Per studiare *forze in equilibrio* e *non*, basta prendere la derivata dell'energia potenziale e studiarne i punti stazionali. Per vedere invece il *tipo d'equilibrio*, si passa alla *derivata seconda* e si ha:
>
> - equilibrio stabile solo se $\ddot{U} > 0$.
> - equilibrio instabile solo se $\ddot{U} < 0$
> - altrimenti non si dice niente
>
> Per avere l'idea, vedere la *figura 2.1.*.

FIGURA 2.1. (*Grafico di energia potenziale*)



3. Esempi di Energia Potenziale

Facciamo qualche calcolo di *energia potenziale*, di cui d'ora in poi saranno *note*.

#Proposizione

Proposizione (energia potenziale di alcune forze conservative).

Sia P la *forza peso*, F_x la *forza elastica*, F_g la *forza gravitazionale*. Allora segue che:
i. L'energia potenziale della forza peso è

$$U_P(y) = mgy + C$$

ii. L'energia potenziale della forza elastica è

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 + C$$

iii. L'energia potenziale della forza gravitazionale è

$$U_G(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r} + C$$

Notare che quando *calcoliamo* ΔU (che è la parte importante!), la costante C si annulla.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE della Proposizione 5 (energia potenziale di alcune forze conservative)
Basta farsi due calcoli. Infatti

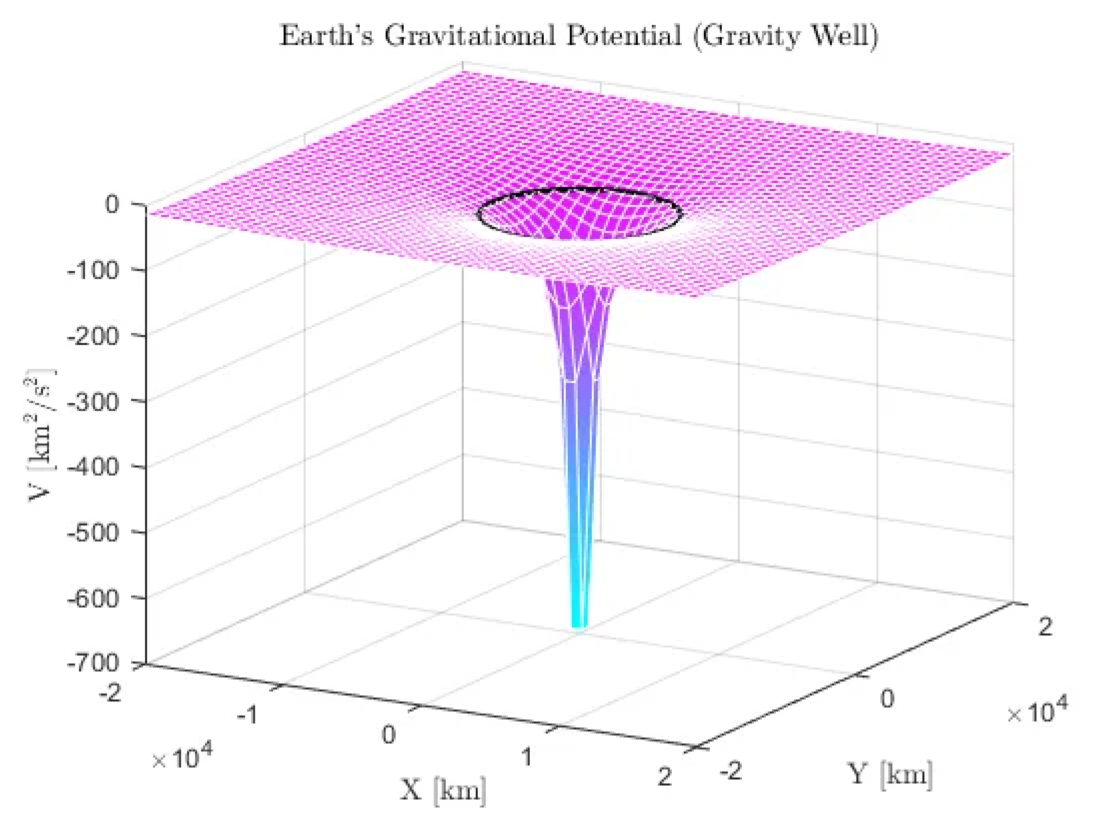
$$\begin{gathered}
P = mg \implies -\int P \cdot \mathrm{d}y = mgy + C \\
F_x = -kx \implies -\int F_x \cdot \mathrm{d}x = \frac{1}{2}kx^2 + C
\end{gathered}$$

Per l'ultima i calcoli sarebbero leggermente ostici, ma possiamo considerare la *componente parallela dello spostamento infinitesimale, rispetto allo spostamento totale* $r_f - r_i$. Ho quindi

$$-\int \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = -\int F \cdot \mathrm{d}r_{\parallel} = \ldots = -Gm_1m_2\left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i}\right)$$

che è la tesi. ■

FIGURA 3.1. (*Il cono gravitazionale*)
Notiamo che la funzione $U_G(\vec{r})$ con $\vec{r} \in \mathbb{R}^2$ presenta un grafico del tipo nella figura; inoltre si dimostra che le curve di livello sono ellissi.



Definizione di Potenza

Definizione di potenza. Esempio del pompaggio idroelettrico.

---

0. Voci correlate

- Definizione di Lavoro

1. Definizione di Potenza

Andiamo a definire un'altra grandezza importante per la fisica classica.

#Definizione

> Definizione (potenza).

Si definisce operativamente la *potenza* come la *quantità di energia (o lavoro) trasferita nel tempo*. In matematichese, ho la *derivata del lavoro* rispetto al *tempo*.

$$\boxed{P := \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}}$$

La potenza si misura in *Watt* ($[\mathrm{W}]$) dove

$$[\mathrm{W}] = [\mathrm{J}/\mathrm{S}]$$

Inoltre si nota che da questa definizione possiamo definire un'altra *unità* per l'*energia*, comunemente usata per l'*energia elettrica*: il *kilowattora* $[\mathrm{kWh}]$, dove

$$[\mathrm{kWh}] = 1000[\mathrm{W}] \cdot 3600[\mathrm{s}] = 3.6M[\mathrm{J}]$$

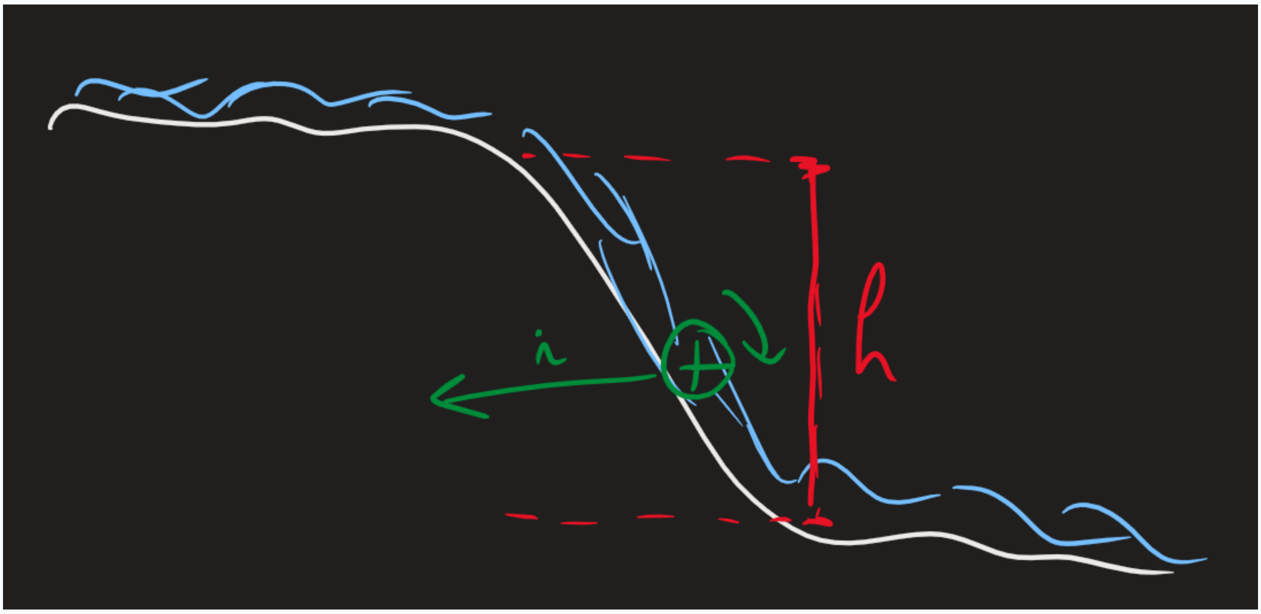
Ovvero un *kilowattora* sono *3.6 millioni di Joule*.

2. Esempi

#Esempio

Il pompaggio idroelettrico.

Illustriamo questo concetto mediante un *esempio concreto*. Supponiamo di avere un fiume, dove ad un certo punto si casca di un'altezza h. Ovvero abbiamo una situazione del tipo



Nella fontana abbiamo messo *un alternatore*, che converte il *lavoro dell'acqua in caduta* in *energia elettrica*.
Supponiamo i seguenti dati: la densità dell'acqua è di $\rho = 1000 \text{ kg}/\text{m}^3$, il volume della bacinella è $V = 9\,000\,000 \text{ m}^3$, l'altezza è $h = 100 \text{ m}$. Allora abbiamo che l'*energia potenziale* dell'acqua è

$$U = \rho V g h = 90T \text{ J} = 90 \cdot 10^{12} \text{ J}$$

ovvero *novanta tera-joule*! Wow, questo è proprio un sacco di energia convertibile! Ma possiamo convertire tutta questa energia subito? No, sennò saremmo già in grado di illuminare tutte le città possibili.
Infatti, supponendo il *flusso del fiume massimo* del

$$\Phi_* = 130 \text{ m}^3/\text{s}$$

Allora abbiamo

$$P_* = \left|\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}\right| = \left|\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}\right| = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mgh)$$

Dal momento che l'unica *variabile in tempo* è la *massa* (infatti abbiamo un flusso massimo), poniamo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mgh) = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}(gh) = \rho\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}gh = \rho \cdot \Phi_* \cdot h \approx 1.4M\text{W}$$

ovvero possiamo convertire *al più* 1.4 *megawatt*, ovvero 1.4 *mega joule* al secondo.

#Esempio

Esempio (il motorino elettrico).

Supponiamo che la *potenza massima di un motorino in salita del 30%* sia

$$P_{\nearrow} = 3 \text{ KW}$$

Determinare la *velocità massima* v_* del motorino elettrico .

Possiamo considerare la *potenza* come il *cambiamento del potenziale del peso sul tempo*, che a sua volta è il *cambiamento dell'altezza sul tempo*. Ovvero

$$P = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} mg = v_y mg$$

Allora abbiamo

$$v_y = \frac{P}{mg} \implies \boxed{v_* = \frac{P}{mg\sin\theta}} \approx 5.32 \text{ m/s} \to 19 \text{ km/h}$$

Conservazione dell'Energia

Conservazione dell'energia: legge. Osservazione: caso meccanica. Esempi: la palla che cade sulla molla e la velocità di fuga.

---

0. Voci correlate

- Energia Cinetica
- Energia Potenziale
- Sistema e Ambiente

1. Legge di Conservazione dell'Energia

Enunciamo una *legge (quasi) fondamentale* della fisica.

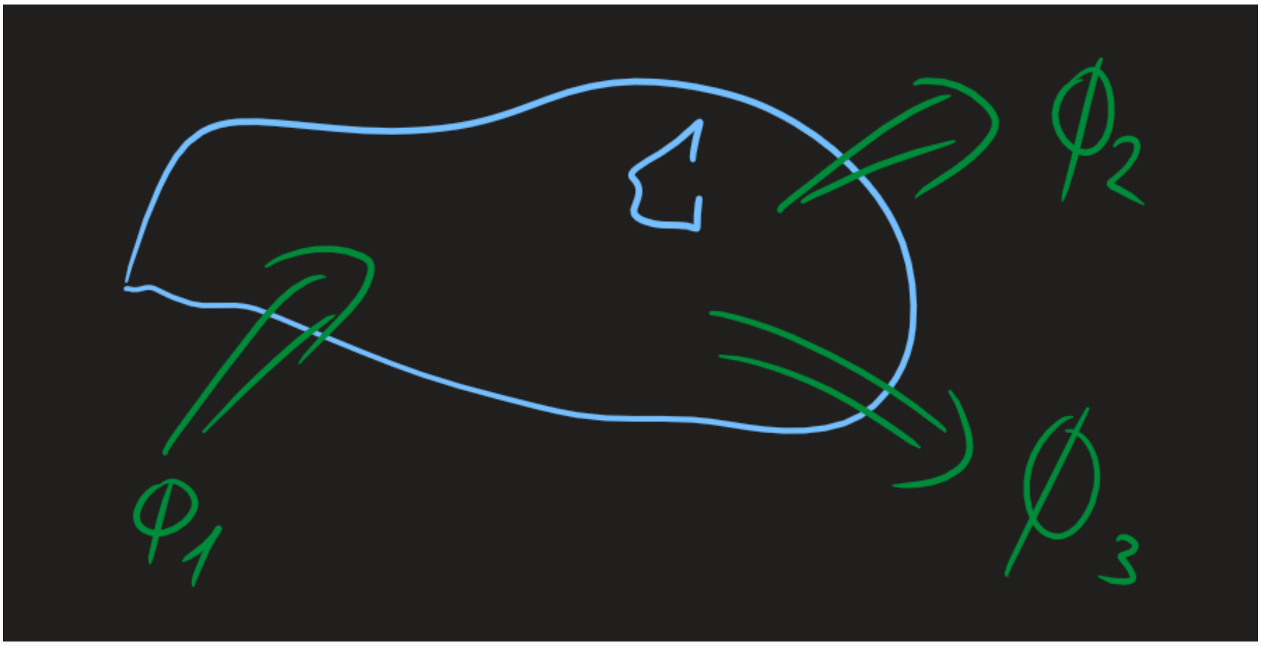
#Teorema

Teorema (la conservazione dell'energia).

Supponiamo di avere il sistema Σ e ambiente Σ^C. Immaginando dei *flussi (ovvero trasferimenti) di energia* esterni ed interni Φ (*figura 1.1.*), posso scrivere la *variazione dell'energia del sistema* come la somma dei flussi:

$$\boxed{\Delta E_\Sigma = \sum_{i \in \Sigma} \Phi_i}$$

FIGURA 1.1.



#Corollario

Corollario (casi particolare della conservazione dell'energia).

i. Si ha che *di solito* si pone la *conservazione dell'energia* nel seguente modo:

$$\boxed{\Delta E_\Sigma = \underbrace{K+U}_{\text{energia meccanica}} + \underbrace{\mathcal{U}}_{\text{energia interna}}}$$

L'*energia interna* U ci interesserà per la *termodinamica*, in particolare quando inizieremo a considerare le *forze dissipative*, col *calore*.

ii. Altrimenti si considera la *conservazione della sola energia meccanica*, ignorando l'energia interna $\mathcal{U}$.

$$\boxed{\Delta E_\Sigma = \Delta K + \Delta U = W}$$

2. Esempi di Conservazione dell'Energia

Data l'*importanza di questa legge*, vediamo dei casi particolari in cui si applica questa legge.

#Esempio

Esempio (la pallina che cade sulla molla).

Immaginiamo di avere una *pallina* che cade su una molla.
Possiamo immaginare le *quattro fasi* di questo moto:

1. La pallina ha *solo* energia potenziale
2. La pallina acquisisce *energia cinetica* e manca solo *poca energia potenziale*, per poter *"sprofondarsi sulla molla"*.
3. Stessa cosa di prima, ma c'è anche il *potenziale elastico*
4. Abbiamo raggiunto il *punto di compressione massimo*, quindi abbiamo *massimo potenziale elastico*

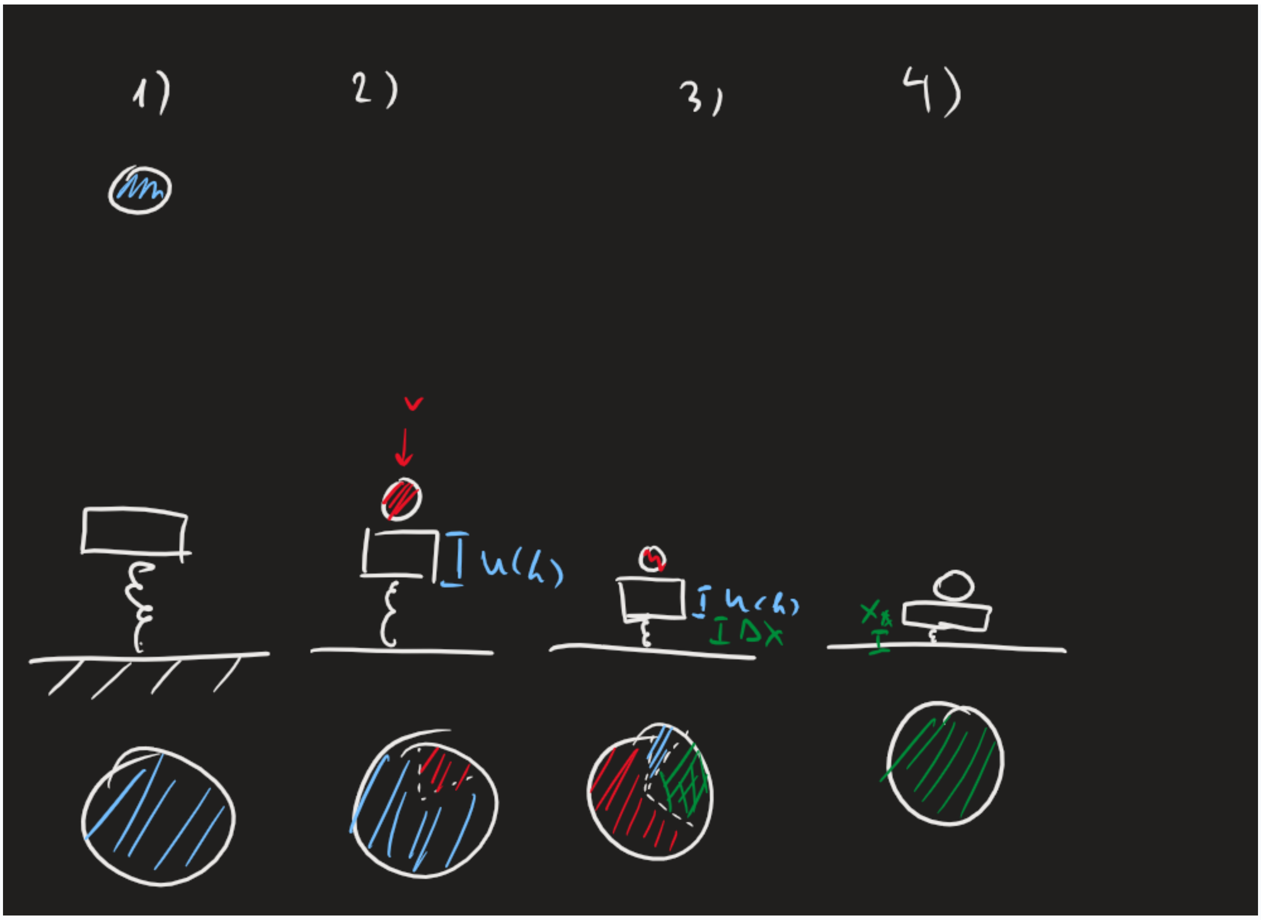
Adesso per scoprire il *punto massimo di compressione*, basta usare la *conservazione di energia meccanica* (dato che non abbiamo attriti) per imporre

$$\Delta E = 0 \implies mgh = \frac{1}{2}kx_*^2$$

Da cui discende il risultato

$$\boxed{x_* = \sqrt{2\frac{mgh}{k}}}$$

FIGURA 2.1. (*La pallina*)



#Esempio

Esempio (la velocità di fuga).

Supponiamo di lanciare un'oggetto alla velocità iniziale di v. Determinare questa velocità affinché l'oggetto non venga più attratto dalla forza della terra: ovvero l'altezza finale tende a $+\infty$.

Per poter usare la *conservazione dell'energia* supponiamo di trascurare *forze esterne* ed eventuali *dissipazioni*. Abbiamo dunque

$$\Delta E \implies E = K + U \in \mathbb{R}$$

questa vale in tutti gli istanti. Abbiamo dunque

$$\begin{cases} E_i = K_i + U_i = \dfrac{1}{2}mv^2 - \dfrac{Gm_T m}{r_T} \\ E_f = K_f + U_f = -\dfrac{Gm_T m}{r_T + h} \end{cases}$$

adesso pongo $E_i = E_f$, da cui risulta

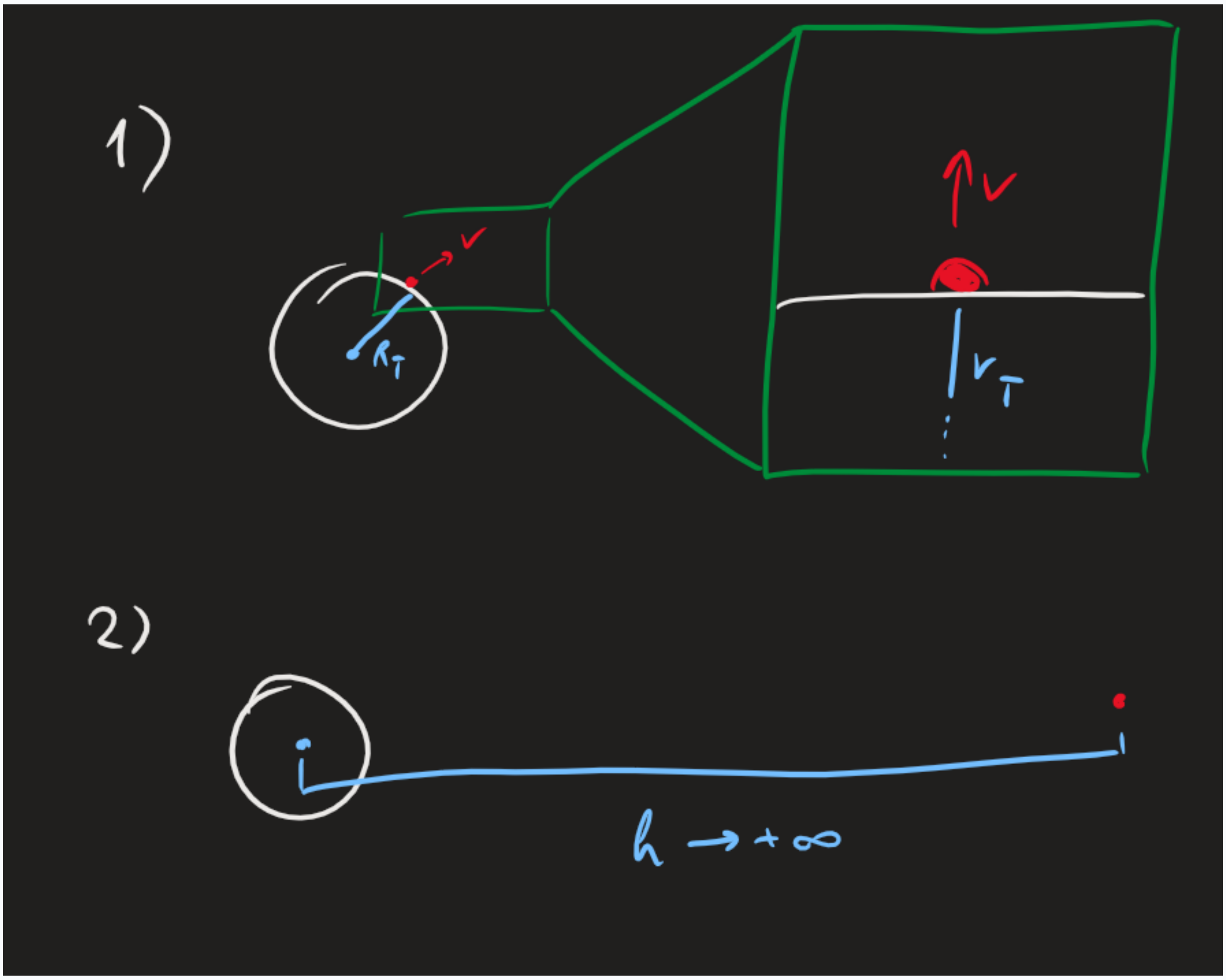
$$v = \sqrt{\frac{2Gm_T}{r_T + \frac{r_T^2}{h}}}$$

Studiando il limite asintotico di v in funzione di $h \to +\infty$ abbiamo

$$\lim_{h \to +\infty} v = \sqrt{\frac{2Gm_T}{r_T}} = \sqrt{2gr_T} \approx 40 \cdot 10^3 \text{ km/h}$$

che è il risultato voluto.

FIGURA 2.2. (*La velocità di fuga*)



Quantità di Moto

Richiamo alla seconda legge di Newton, preliminare. Definizione di quantità di moto per un punto materiale, per 2 punti materiali e per un sistema di punti *materiali. Proprietà fondamentale: la conservazione della quantità di moto.*

---

0. Voci correlate

- Principi della Dinamica
- Sistema e Ambiente

1. Richiamo Preliminare alla Dinamica

RICHIAMO A NEWTON. Richiamiamo la *seconda legge di Newton* (1), che ci dice il seguente:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

Trattando la *massa* come un *quantità costante*, possiamo scrivere che la forza non è altro che la derivata

$$\sum \vec{F} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{v})$$

Quindi possiamo definire la quantità a destra in una *maniera ben posta*.

2. Definizioni di Quantità di Moto

#Definizione

Definizione (quantità di moto per un punto puntiforme).

Si definisce la *quantità di moto* (o in inglese *"momentum"*) per un *punto materiale* avente massa m con velocità $\vec{v}$ come la grandezza vettoriale

$$\boxed{\vec{p} := m\vec{v}}$$

quindi abbiamo che

$$\sum \vec{F} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{p}$$

e in particolare

$$K = \frac{1}{2} \frac{p^2}{m}$$

#Teorema

Teorema (quantità di moto per due o più punti).

Supponiamo di *avere due punti* o *al più numerabile punti*, $m_1, m_2, \ldots$ all'interno del *sistema* Σ.

Chiamando $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots$ le *forze esterne agenti sui corpi* e $\vec{F}_{12}, \vec{F}_{21}, \ldots$ le *forze interne*, abbiamo che vale

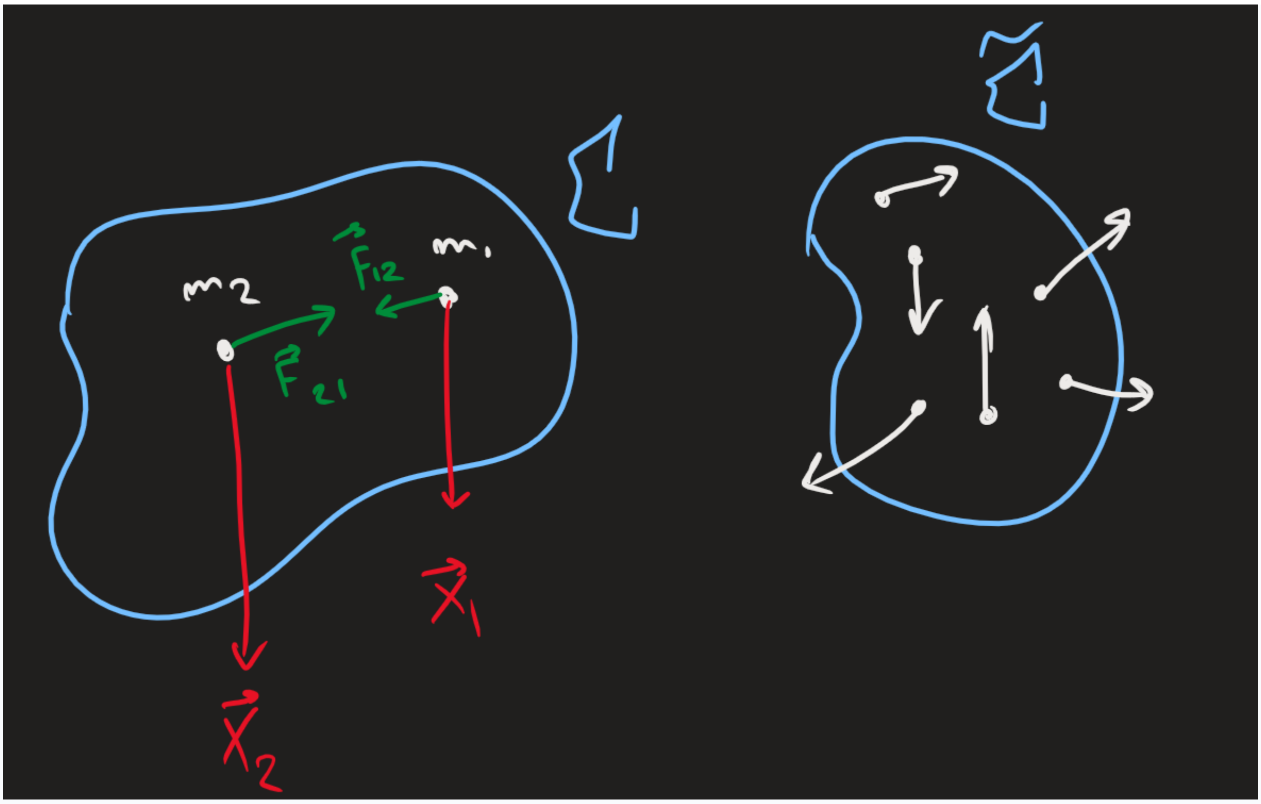
$$\begin{cases} \vec{X}_1 + \vec{F}_{12} + \ldots + \vec{F}_{1n} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \vec{p}_1 \\ \vec{X}_2 + \vec{F}_{21} + \ldots + \vec{F}_{2n} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \vec{p}_2 \\ \vdots \end{cases}$$

Prendo la *forza del sistema*, abbiamo che le *forze interne si cancellano* e quindi abbiamo

$$\boxed{\sum_{i \in \Sigma} \vec{X}_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \vec{p}_\Sigma}$$

ovvero *"la derivata della quantità di moto è determinata dalle forze esterne sul sistema"*.

FIGURA 2.1. (*L'idea per caso di due o più punti*)



#Corollario

> Corollario (conservazione di quantità del moto).
>
> Sia Σ un sistema di punti puntiformi. Se la risultante delle *forze esterne* è nulla, ovvero
>
> $$\sum_{i \in \Sigma} \vec{F}_{\text{ext},i} = 0$$
>
> Allora *non ho nessun cambiamento nel moto*. Ovvero, la quantità del moto p è *costante*.

Urti

Gli urti: introduzione, proprietà fondamentale degli urti. Le categorie degli urti: elastico, anelastico e parzialmente elastico. Esempio di urto: il pendolo ballistico

---

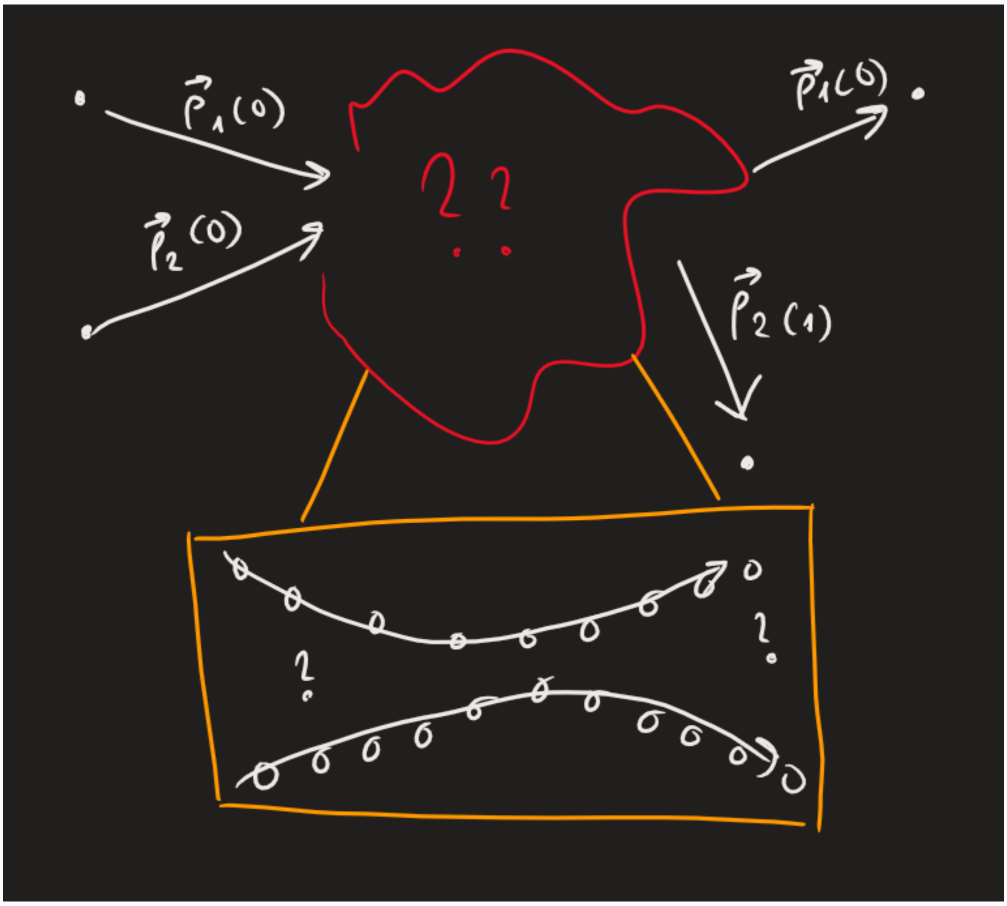
0. Voci correlate

- Quantità di Moto
- Energia Cinetica

1. Introduzione agli Urti

GLI URTI. Gli urti sono dei *fenomeni* fondamentali per la *fisica moderna*: spaziamo da *oggetti a particelle*. Ad esempio, abbiamo degli *interi laboratori di fisica* che sono fatti per *studiare gli scontri tra particelle*! (Per chi non ne fosse a corrente, so parlando della *CERN*).

Adesso che abbiamo *definito* la *quantità di moto*, abbiamo un modo per studiarle. Infatti, dato che *non ci interessa* cosa succede durante l'urto, bensì solo l'*input* (la situazione iniziale) e l'*output* (il risultato), possiamo usare perfettamente queste nozioni.



2. Proprietà fondamentale degli Urti

Per studiare gli *urti*, enunciamo la seguente proprietà.

#Proposizione

Proposizione (la proprietà fondamentale degli urti).

Prima e *dopo* un *urto*, la *quantità di moto* dei corpi coinvolti viene *sempre conservata*.

Infatti, (quasi) *mai* ho delle *forze esterne* durante gli urti; questo perché i *tempi di interazione* sono molto brevi rispetto all'effetto delle forze esterne. Quindi, se esistono, sono *al più* trascurabili.

3. Classificazione degli Urti

Adesso *classifichiamo* alcune tipologie di urti.

#Definizione

Definizione (urto elastico).

Supponiamo di avere un urto tra j oggetti puntiformi in un sistema Σ. Allora definiamo le seguenti.

i. L'urto si dice *elastico* se vengono conservate *entrambe* la *quantità di moto* e l'*energia cinetica*. Ovvero, se vale

$$\sum_{j \in \Sigma} K_{j,i} = \sum_{j \in \Sigma} K_{j,f} \wedge \sum_{j \in \Sigma} \vec{p}_{j,i} = \sum_{j \in \Sigma} \vec{p}_{j,f}$$

- Come esempi di *urti elastici* possiamo parlare delle *palle da biliardo*, oppure il *pendolo di Newton*.

#Definizione

Definizione (urto anelastico).

i. L'urto si dice *anelastico* se i *corpi "si incollano"*, ovvero se *viene conservata la quantità del moto* ma non *l'energia cinetica*, con la condizione che la *velocità finale* di ambi i corpi siano lo stesso.

$$\sum_{j\in\Sigma}\vec{p}_{j,i}=\sum_{j\in\Sigma}\vec{p}_{j,f}\wedge\begin{cases}\vec{p}_{1,f}=m_1\vec{v}_f\\ \vec{p}_{2,f}=m_2\vec{v}_f\text{ con }\vec{v}_f\in\mathbb{R}^2\\ \vdots\end{cases}$$

- Esempi: *scontro tra automobili, come tamponamento*
- L'energia è dissipata nel *"fondere il nuovo corpo"*

ii. L'urto si dice *parzialmente elastico* se una parte dell'energia viene dispersa, la velocità finale non è la stessa.

4. Il pendolo ballistico

Adesso forniamo un *esempio pratico* di urto (in particolare *anelastico*).

#Esempio

Esempio (il pendolo balistico).

Un *proiettile* di massa m a velocità v si sta dirigendo verso un *corpo* M appeso al soffitto con due fili ideali. Con l'urto il corpo si sposta in altezza di misura h (*figura 4.1.*). Determinare la velocità del proiettile.

Notiamo che:

1. L'urto è *anelastico*, dato che il proiettile entra nel corpo e si *"fondano"*
2. Ci sono due passi: una in cui il *proiettile entra nel corpo grande* e l'altra in cui la massa si sposta come un tutt'uno

Sul primo momento posso *usare la conservazione della quantità del moto*, dato che non ho ancora forze esterne in azione (come la *tensione*).

$$\vec{p}_{m,i}+\underbrace{\vec{p}_{M,i}}_{0}=\vec{p}_{m,f}+\vec{p}_{M,f}$$

Troviamo che

$$\vec{p}_{m,i}=\vec{p}_\Sigma=m\vec{v}$$

Possiamo far corrispondere questa quantità di moto all'*energia cinetica* in qualsiasi momento, visto che la quantità di moto si conserva sempre.

$$K_\Sigma = \frac{p_\Sigma^2}{2(m+M)}$$

Sul secondo momento posso ancora usare la *conservazione dell'energia*, dato che sono appena *uscito* dall'urto (quindi tutte le dissipazioni dovute sono finite). Quindi ho

$$K_i = \frac{p_\Sigma^2}{2(m+M)} = U_{P,f} = (M+m)gh$$

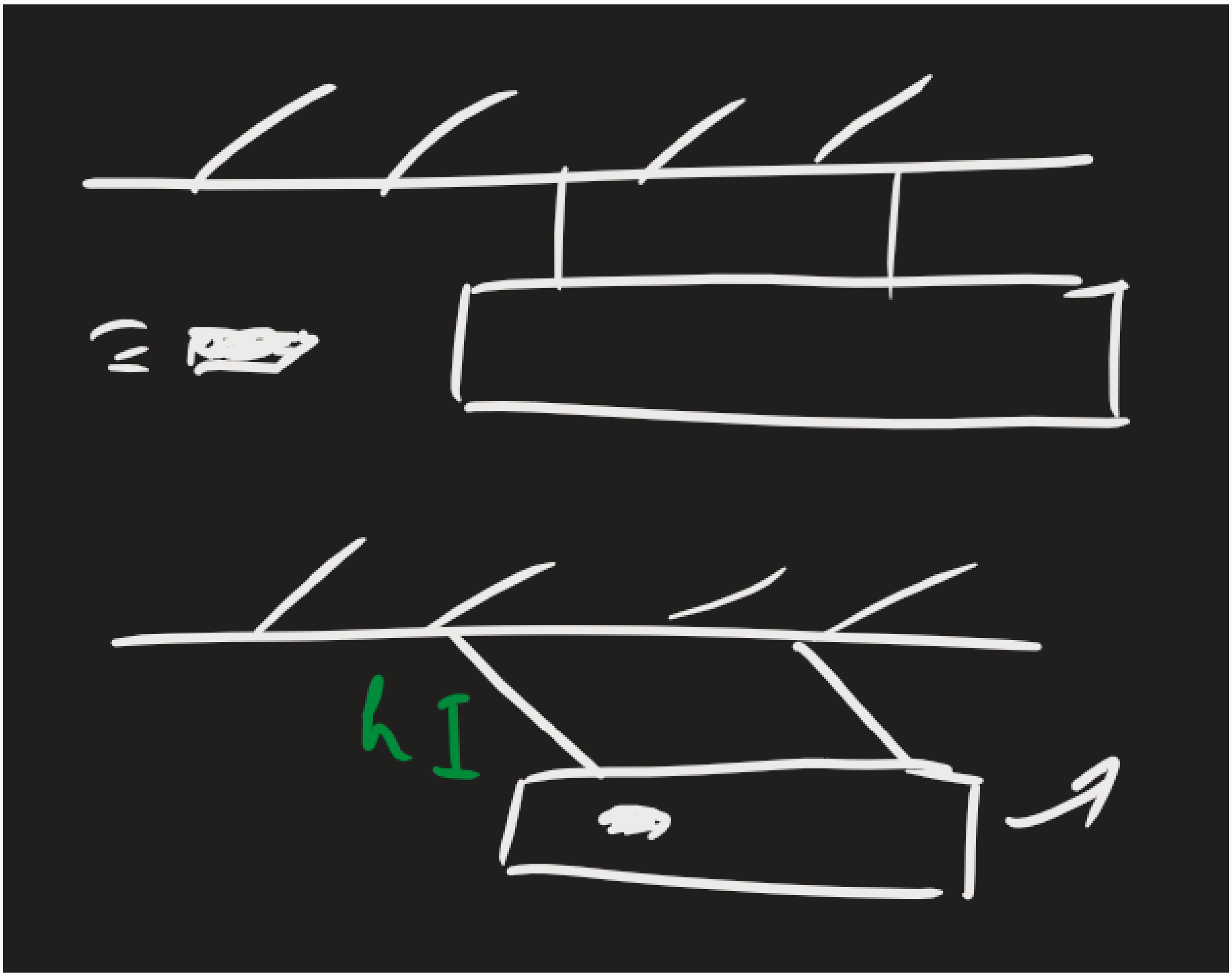
Allora abbiamo

$$m^2v^2 = 2(m+M)^2gh$$

che ci dà il risultato

$$\boxed{v = \frac{M+m}{m}\sqrt{2gh}}$$

FIGURA 4.1. (*Il pendolo ballistico*)



Centro di Massa

Definizione matematica di centro di massa di un sistema di punti. Cinematica e dinamica del centro di massa.

---

0. Voci correlate

- Sistema e Ambiente
- ... (media ponderata DA INSERIRE; collegamento con probabilità) #TODO
- Velocità e Accelerazione di un Corpo Puntiforme
- Principi della Dinamica

1. Definizione di Centro di Massa

Tappiamo uno dei buchi lasciati da noi sulla fisica.

#Definizione

Definizione (centro di massa di un sistema di punti).

Sia Σ un sistema di punti con le distanze dall'origine $\vec{r}_i$ associate ad ogni punto. Sia M la *massa totale del sistema* (ovvero la sommatoria delle masse).

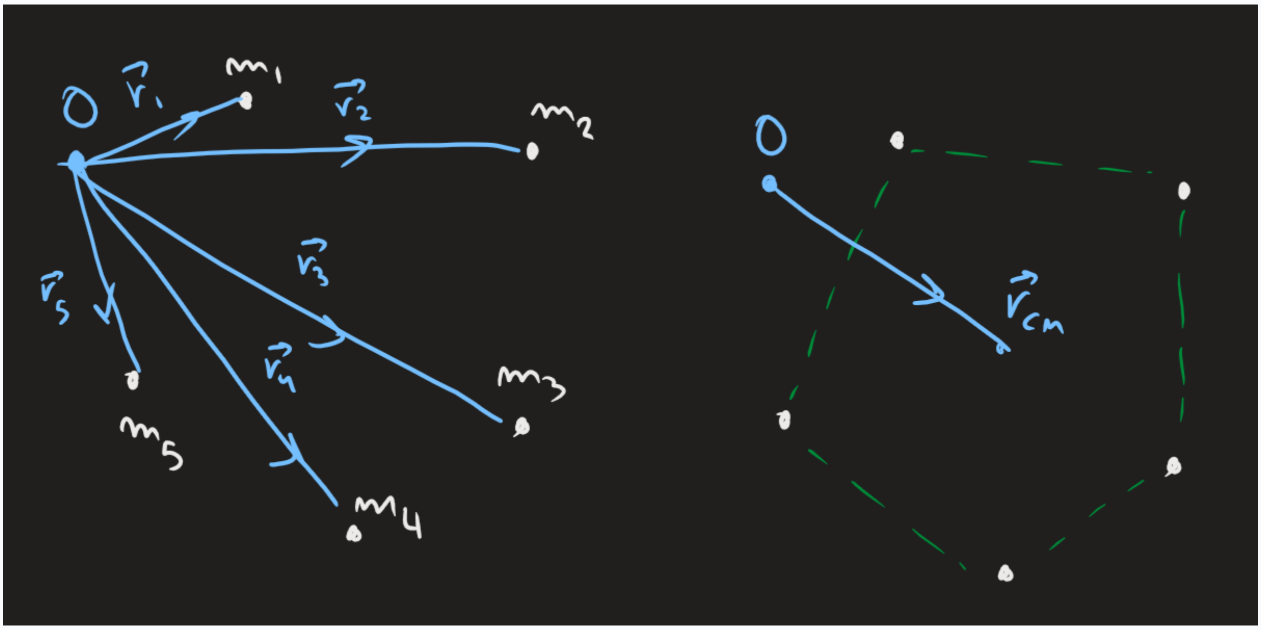
Si definisce il *centro di massa* come quel *punto dall'origine* definito come

$$\boxed{\vec{r}_{CM} := \sum_{i \in \Sigma} \frac{m_i}{M} \vec{r}_i}$$

Statisticamente questo coincide col concetto della *"media ponderata delle masse"*.

Geometricamente si ha che il *centro di massa* $\vec{r}_{CM}$ si trova *sempre* nel *poligono* delineato dai punti del sistema.

FIGURA 1.1. (*Intuizione geometrica*)



2. Cinematica e Dinamica del Centro di Massa

Avendo definito il *centro di massa* come una distanza $\vec{r}$, possiamo giostrarlo a piacimento prendendone le derivate e simile.

#Teorema

> **Teorema** (la cinematica e la quantità di moto del centro di massa).
>
> Segue che la *velocità del centro di massa* coincide con
>
> $$\boxed{\vec{v}_{CM} = \sum_{i \in \Sigma} \frac{\vec{p}_i}{M}}$$
>
> ovvero abbiamo
>
> $$\boxed{\vec{p}_\Sigma = M \vec{v}_{CM}}$$

#Teorema

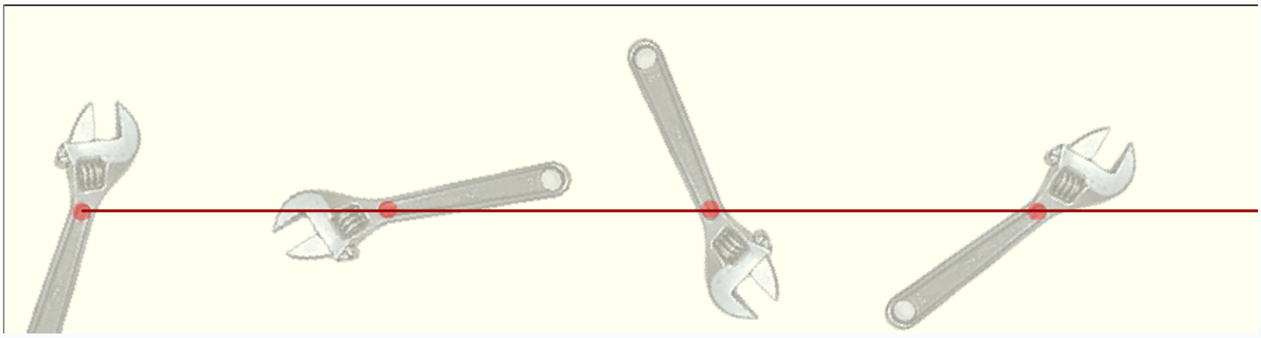
> **Teorema** (la dinamica del centro di massa).
>
> Considerando invece la sua *accelerazione* abbiamo la forza

$$\vec{a}_{CM} = \sum_{i \in \Sigma} \frac{m_i \vec{a}_i}{M} = \frac{1}{M} \sum_{i \in \Sigma} \vec{F}_i$$

ovvero ho che la *sommatoria delle forze esterne* coincide con

$$\boxed{M\vec{a}_{CM} = \sum_{i \in \Sigma} \vec{F}_{\text{ext.},i} = \sum_{i \in \Sigma} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} m\vec{v}_i}$$

CONSEGUENZE. Come conseguenza della *dinamica e cinematica del centro di massa* (1, 2) noto che prendendo un *oggetto complesso* (come ad esempio una chiave inglese) e considerandolo come un *sistema di punti*, ho che il suo *centro di massa* segue perfettamente la *traiettoria* di un punto.



Questo ci è utile per *trattare* oggetti come dei *materiali puntiformi*!