

I NUMERI COMPLESSI

Notazione: i numeri complessi "nascono", storicamente per poter risolvere l'equazione polinomiale

$$x^2 = -1$$

È ben risaputo che l'equazione di cui sopra non ammette soluzioni appartenenti ai numeri reali.

Definiamo dunque con i , che denoteremo d'ora in avanti come unità immaginaria un elemento tc.

$$i^2 = -1$$

"Problematica" notiamo subito che se $i^2 = -1$ allora si ha che

$$(-i)^2 = (-1)^2 \cdot i^2 = -1$$

→ Moltiplicazione delle radici complesse.

Def Sia i l'unità immaginaria un numero complesso è un'espressione della forma

$$z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

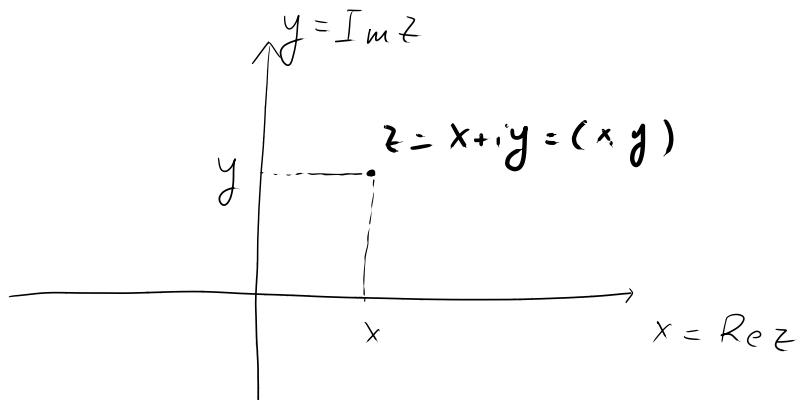
x è detta parte reale di z e può essere denotata con $x = \operatorname{Re} z$

y è detta parte immaginaria di z e può essere denotata con $y = \operatorname{Im} z$

L'insieme di numeri complessi viene denotato con il simbolo \mathbb{C} che è definito come

$$\mathbb{C} = \{ z : z = x + iy, x, y \in \mathbb{R} \}$$

I numeri complessi ammettono un'identificazione bimivoca con il piano reale \mathbb{R}^2



Def dato un numero complesso $z = x + iy \in \mathbb{C}$ definiamo il compleSSo coniugato di z come

$$\bar{z} = z^* = x - iy = \operatorname{Re} z - i \operatorname{Im} z.$$

Def Sia $z \in \mathbb{C}$ definiamo il modulo di z come la quantità

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$$

NB il modulo di z è sempre una quantità reale e non negativa

$$z \cdot \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2 \geq 0$$

NB Notiamo come il modulo di z non sia nulla se e solo se la norma euclidea del vettore $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Numeri complessi in forma trigonometrica

Sia $z = x + iy \in \mathbb{C}$, consideriamo l'identificazione canonica

$$z \simeq (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

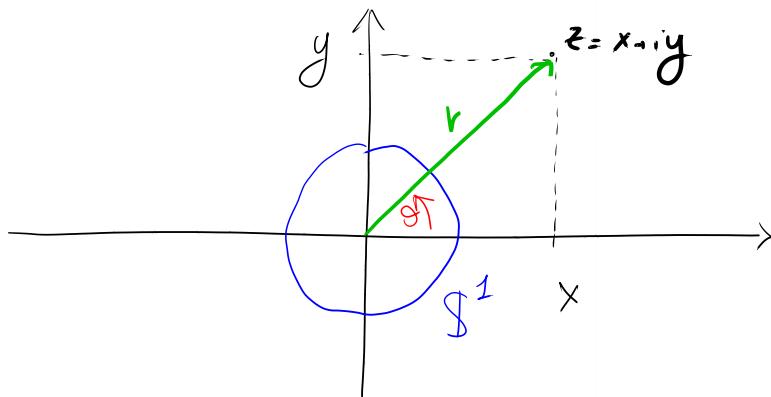
Da ciò che sappiamo del corso di Analisi 2 $\exists! (r, \vartheta) \in \mathbb{R}_+ \times [0, \pi]$

$$\begin{cases} x = r \cos \vartheta \\ y = r \sin \vartheta \end{cases}$$

col particolare possiamo calcolare r e ϑ come funzioni di x ed y

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\vartheta = \begin{cases} \arctg(y/x) & \text{se } x \neq 0 \\ \pi/2 & \text{se } x = 0 \text{ ed } y > 0 \\ -\pi/2 & \text{se } x = 0 \text{ ed } y < 0 \\ \text{indeterminato} & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$



Possiamo dunque scrivere

$$z = x + iy = r(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$$

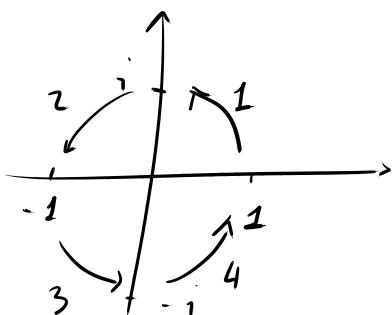
L'espressione di cui sopra è conosciuta come **formulazione trigonometrica** di un numero complesso, r è detto **il modulo** di z , $|z| = r$, mentre ϑ è l'argomento di z e lo si indica con $\vartheta = \arg z$.

NB l'argomento di un numero complesso è univocamente definito se a restrizione a considerare $\theta \in [0, 2\pi)$, altrimenti se ammettiamo che θ sia un valore reale qualsiasi l'argomento è dunque definito modulo rotazione di $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

L'esponentiale complesso

Notiamo dapprima le seguenti identità

$$\underbrace{i^0 = 1, i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1}_{=},$$



Ne deduciamo dunque che $\forall n \in \mathbb{Z}$

$$i^{4n} = 1, i^{4n+1} = i, i^{4n+2} = -1, i^{4n+3} = -i$$

[Calcolo informale]

Sia $\theta \in \mathbb{R}$, consideriamo l'espressione

$$e^{i\theta} = \sum_{m \in \mathbb{N}} \frac{(i\theta)^m}{m!}$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(i\theta)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(i\theta)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$(i)^{2n} = [(i)^2]^n = (-1)^n$$

$$(i)^{2n+1} = (i)^{2n} \cdot i = i(-1)^n$$

$$= \underbrace{\sum_n (-1)^n \frac{\partial^{2n}}{(2n)!}}_{= \cos \theta} + i \underbrace{\sum_n (-1)^n \frac{\partial^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{= \sin \theta}$$

$$= \cos \theta + i \sin \theta$$

\Rightarrow Ogni elemento di $S^1 = \{ z \in \mathbb{C} : |z|=1 \}$ può essere scritto come $z = e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi)$

OSS $\theta \in \mathbb{R}$, $\overline{e^{i\theta}} = \overline{(\cos \theta + i \sin \theta)} = \cos \theta - i \sin \theta$
 $= \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = \bar{e}^{-i\theta}$

ES Dimostrare che $\forall \theta \in \mathbb{R}$

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Potenze e radici di un numero complesso

Sia $r \in \mathbb{C} \setminus \{0\} = \mathbb{C}^*$ supponiamo che $\exists! (r, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi)$ t.c.
 $z = r e^{i\theta}$

dunque $\forall n \in \mathbb{N}$ definiamo

$$z^n = (r e^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$$

Sia ora $n \in \mathbb{N}$, vogliamo calcolare la radice n -esima di z , ossia
vogliamo determinare un $w \in \mathbb{C}$ t.c.

$$w^n = z.$$

Sia dunque $w = s e^{i\varphi}$, allora dunque che

$$w^n = s^n e^{in\varphi} = z = r e^{i\theta}$$

$$\Rightarrow s^n = r$$

$$n\varphi = \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{\theta}{n} + \frac{2k}{n}\pi, \quad \forall k = 0, 1, \dots, n-1$$

Def Sia $z = r e^{i\theta} \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ l'insieme delle radici n -esime di z è dato dall'insieme

$$\{w_1, w_2, \dots, w_n\} \text{ t.c.}$$

$$|w_i| = r^{\frac{1}{n}}, \quad \arg w_i = \frac{\theta}{n} + \frac{2i}{n}\pi, \quad i=1, \dots, n.$$

Def [esponenziale complesso] $\forall z \in \mathbb{C}$, $z = x+iy$ definiamo

$$e^z = e^{x+iy} = \underbrace{e^x}_{\in \mathbb{R}_+} \underbrace{e^{iy}}_{\in \mathbb{S}^1}$$

Def [funzioni trigonometriche complesse] $\forall z \in \mathbb{C}$ definiamo

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

Logaritmo di un numero complesso

Sia $z \in \mathbb{C}$, sappiamo che $\exists \theta \in [0, 2\pi)$ t.c.

$$z = |z| e^{i\theta} = |z| e^{i(\theta + 2k\pi)} \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad \theta = \arg z$$

Calcoliamo ora

$$\begin{aligned} \log z &= \log(|z| e^{i(\theta + 2k\pi)}) \\ &= \log|z| + i\theta + i2k\pi, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

\Rightarrow A) Il logaritmo complesso non è univocamente definito

Funzioni di variabili reali a valori complessi

Def Una funzione $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, con I intervallo è del tipo

$$f(x) = u(x) + i v(x),$$

con $u, v: I \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni reali a valori reali.

Trovante l'identificazione comune $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ f è identificabile con una curva piana

$$f(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix}, \quad x \in I$$

Si ha

- f è continua $\Leftrightarrow u, v$ sono continue
- f è derivabile $\Leftrightarrow u, v$ sono derivabili e

$$f'(x) = u'(x) + i v'(x)$$

- f è integrabile in $[a, b] \subset I \iff u \in \mathcal{V}$ la somma
- $$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b u(x) dx + i \int_a^b v(x) dx.$$

Funzioni Periodiche

- Una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ è T -periodica con periodo $T > 0$ se $f(x+T) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- Si definiscono: $1/T$ frequenza, e $\omega = 2\pi/T$ frequenza angolare
- Una funzione T -periodica è univocamente determinata dalla restrizione

$$f \Big|_{[\alpha, \alpha+T]} \quad \alpha \in \mathbb{R} \text{ fissato}$$

OSS Consideriamo la funzione

$$g(x) = \sin(2x)$$

$$\text{Notiamo che } \sin(2x) = \sin(2x + \pi)$$

$$\text{Tuttavia è pur vero che } \sin(2x) = \sin(2x + k\pi)$$

$$\text{allo stesso modo } \sin(2x) = \sin(2x + k\pi) \quad \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

Sia ora $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione generica T -periodica

$\Rightarrow f$ è kT -periodica $\forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Esempi

$$\bullet f(x) = \sin(\pi x) \quad \text{è periodica di periodo 2}$$

$$\bullet f(x) = \arcsin(\sin x) \quad \text{è periodica di periodo } 2\pi$$

$$\bullet f(x) = e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad \text{--- " ---}$$

- M. C. degore, Metodi matematici per l'ingegneria
- Saff, Snider, Fundamentals of Complex Analysis with applications to Engineering ...

Ieri (5/10):

- Numeri complessi come estensione di \mathbb{R}
- formulazione trigonometrica di un NC
- formulazione \exp di un NC
- Funzioni (radice / f_z trig / \exp) complesse
- f_z periodiche

Es f_z periodiche: $\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, e^{ix}$ etc...

$$1) f(x) = \underbrace{\sin(x/2)}_{=f_1(x)} + \underbrace{\cos(2x)}_{=f_2(x)}$$

Sappiamo che f_1 è 4π -periodica
 f_2 è π -periodica

Tuttavia utilizzando la definizione stessa di periodicità
 otteniamo che f_c è 4π -periodica

$$\boxed{f_2(x+4\pi)} = f_2(x+3\pi+\pi) = \underset{f_2 \text{ è } \pi\text{-periodica}}{\uparrow} f_2(x+3\pi) = \dots = \boxed{f_2(x)}$$

Ottieniamo dunque che f_c soddisfa la condizione di 4π -periodicità

$\Rightarrow f = f_1 + f_2$ è 4π -periodica

2) Siamo $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$, considero

$$f(x) = \underbrace{e^{iq_1 x}}_{=f_1(x)} + \underbrace{e^{iq_2 x}}_{=f_2(x)}, \quad x \in \mathbb{R}$$

f è periodica? se sì, di che periodo?

$$\begin{aligned} f_i(x + 2\pi/q_i) &= \exp\left(i\left(x + \frac{2\pi}{q_i}\right)q_i\right) \\ &= \exp\left(ixq_i + i\frac{2\pi}{q_i}q_i\right) \\ &= e^{ixq_i} \cdot \underbrace{e^{i\frac{2\pi}{q_i}q_i}}_{=1} = e^{ixq_i} \\ &= f_i(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow f_i, i=1,2$ è $2\pi/q_i$ -periodica

Se scelgono dunque

$$T = \text{mcm} \left\{ \frac{2\pi}{q_1}, \frac{2\pi}{q_2} \right\},$$

c'è tale valore esiste e si può calcolare esattamente grazie all'ipotesi $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$, otteniamo che f è T -periodica

3) Supponiamo $f(x) = e^{\lambda\pi i \alpha x} + e^{\lambda\pi i q x}, \alpha \in \mathbb{Q}, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Argomentando come nel punto 2 possiamo definire

$$f_1(x) = e^{\lambda\pi i \alpha x} \text{ è } 1/\alpha\text{-periodica}$$

$$f_2(x) = e^{\lambda\pi i q x} \text{ è } 1/q\text{-periodica}$$

tuttavia siccome $q \in \mathbb{Q}$ e $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ non esiste un multiplo intero comune di α e $q \Rightarrow f$ non è periodica

Energia di una funzione periodica

Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, T -periodica, localmente integrabile su \mathbb{R}
si pone

$$\begin{aligned}\|f\|_2^2 &= \|f\|_{L^2}^2 = \int_0^T |f(x)|^2 dx = \int_0^T u^2(x) + v^2(x) dx \\ &= \int_{\alpha}^{\alpha+T} |f(x)|^2 dx \quad \alpha \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Tale quantità ($\|f\|_2$) è chiamata come energia o norma L^2 della funzione f .

Fissiamo ora un periodo $T > 0$ e poniamo $\omega = 2\pi/T$

Armoniche elementari

Sono funzioni del tipo

1) $A_0, A_n \cos(n\omega x + \phi_n) \circ A_n \sin(n\omega x + \phi_n)$

dove $n \in \mathbb{N}^*, A_0 \in \mathbb{R}, A_n \in \mathbb{R}_+, \phi_n \in (-\pi, \pi)$

2) $a_0/2, a_n \cos(n\omega x), b_n \sin(n\omega x), n \in \mathbb{N}^*, a_0, a_n, b_n \in \mathbb{R}$

per \mathbb{R} di var \mathbb{R}

3) $c_n e^{inx}, n \in \mathbb{Z}, c_n \in \mathbb{C}$ armoniche complesse

Relazioni tra armoniche elementari

Vogliamo dimostrare che le tre formule di armoniche elementari sono equivalenti, ossia una particolare scelta dei coefficienti fa sì che possono esprimere una formule di armoniche come combinazione lineare (finita) di armoniche di un'altra formule.

In particolare proviamo che

$$1) \Leftrightarrow 2) \Leftrightarrow 3)$$

$$\begin{aligned} 1) \Rightarrow 2) \quad A_n \cos(n\omega x + \varphi_n) &= \underbrace{A_n \cos \varphi_n \cos(n\omega x)}_{a_n} - \underbrace{A_n \sin \varphi_n \sin(n\omega x)}_{b_n} \\ &= a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x) \end{aligned}$$

Proviamo ora che $2) \Rightarrow 1)$

Da (*) ne deduciamo che dati a_n e b_n si ha A_n e φ_n t.c.

$$\begin{cases} a_n = A_n \cos \varphi_n \\ b_n = -A_n \sin \varphi_n \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a_n^2 + b_n^2 &= (A_n \cos \varphi_n)^2 + (A_n \sin \varphi_n)^2 \\ &= A_n^2 \quad \Rightarrow \quad A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \end{aligned}$$

$$-\tan \varphi_n = \frac{b_n}{a_n}$$

Proviamo ora l'equivalenza $2) \Leftrightarrow 3)$

Proviamo che $2) \Rightarrow 3)$

$$a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x) = a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$$

$$(\ast\ast) \quad = \underbrace{\frac{1}{2} (a_n - i b_n)}_{= c_n} e^{inx} + \underbrace{\frac{1}{2} (a_n + i b_n)}_{c_{-n}} \bar{e}^{-inx}$$

3) $\Rightarrow 2)$

Data $(\ast\ast)$ ed una sequenza complessa $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ cerco $(a_n, b_n)_n$ che soddisfino il sistema lineare

$$\begin{cases} c_n = \frac{1}{2} (a_n - i b_n) \\ c_{-n} = \frac{1}{2} (a_n + i b_n) \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} a_n = c_n + c_{-n} \\ b_n = -i(c_n - c_{-n}) \end{cases}$$

Energia di un'armonica elementare

$$\|f\|_2^2 = \int_0^T |f(x)|^2 dx$$

Caso reale

$$1) \|A_0\|_2^2 = \int_0^T A_0^2 dx = T A_0^2$$

$$\|A_n \cos(n\omega x + \phi_n)\|_2^2 = A_n^2 \int_0^T \cos^2(n\omega x + \phi_n) dx$$

$$= \frac{A_n^2}{n\omega} \int_{\phi_n}^{\phi_n + 2\pi n} \cos^2(t) dt = A_n^2 \frac{T}{2\pi n} n\pi = A_n^2 \frac{T}{\omega}$$

$$2) \left\| \frac{1}{2} a_0 \right\|_2^2 = \frac{T}{4} a_0^2$$

$$\left\| a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x) \right\|_2^2 = \frac{T}{2} (a_n^2 + b_n^2)$$

$$3) \|c_0\|_2^2 = \int_0^T |c_0|^2 dx = T |c_0|^2$$

$$\|c_n e^{inx}\|_2^2 = \int_0^T |c_n e^{inx}|^2 dx$$

$$= \int_0^T |c_n|^2 dx = T |c_n|^2$$

Polinomi trigonometrici

Def

Chiamiamo polinomio trigonometrico di ordine $N \in \mathbb{N}$ ognuna delle seguenti espressioni:

$$1) P_N(x) = A_0 + \sum_{n=1}^N A_n \cos(n\omega x + \phi_n)$$

$$2) P_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N [a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)]$$

$$3) P_N(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx}$$

Energia di un PT

Caso reale: $\|P_N\|_2^2 = T A_0^2 + \frac{T}{2} \sum_{n=1}^N A_n^2$

$$= \frac{T}{2} \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2) \right)$$

Caso complesso: $\|P_N\|_2^2 = T \sum_{n=-N}^N |c_n|^2$

Serie trigonometriche

Def

Una serie trigonometrica è un'espressione della forma

- 1) $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x))$, $a_0, a_n, b_n \in \mathbb{R}$
- 2) $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$, $c_n \in \mathbb{C}$

Def La ruotella N-esima oh 1) è il PT

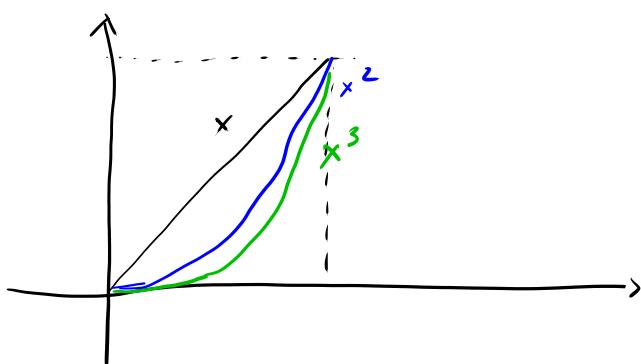
$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)$$

La ruotella N-esima oh 2) è il PT

$$S_N(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx}$$

Es

$$f_n(x) = x^n \quad \text{in } [0, 1]$$



Pertualmente $\forall x \in [0, 1]$ abbiamo che

$$\lim_n x^n = 0$$

tuttavia se $x = 1$ $x^n \rightarrow 1$

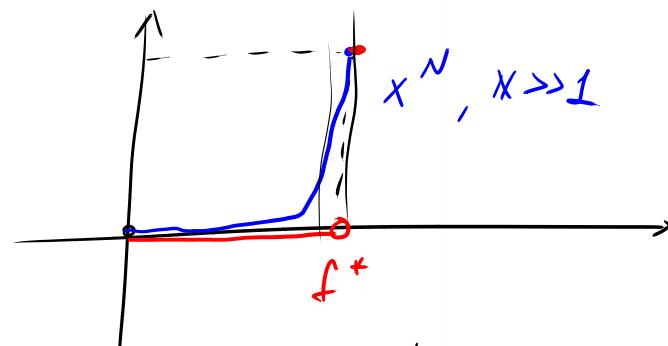
Puntualmente la successione $(f_n)_n$ converge alla funzione $f^*(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, 1) \\ 1 & x = 1 \end{cases}$

Consideriamo la norma $\|\cdot\|_\infty$ in $[0, 1]$

Calcoliamo ovvero

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f^*\|_\infty$$

Ogni funzione f_n è continua in $[0, 1]$, vale 0 in 0 ed 1 in 1 e dunque assume tutti i valori intermedii in $(0, 1)$



$$\Rightarrow \|f_n - f^*\|_\infty = 1$$

Determinate successioni di funzioni possono convergere ad un elemento limite in una topologia, ma non in un'altra.

X

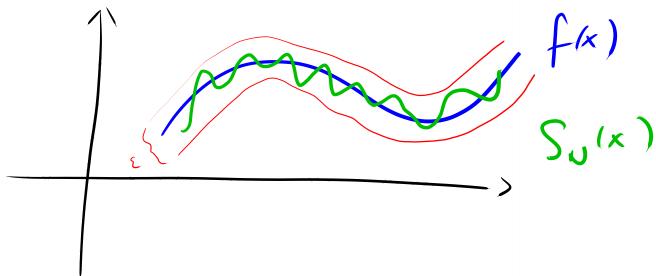
Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione T-periodica, ma serie trigonometrica del tipo 1) o 2)

- Converge puntualmente ad f su \mathbb{R} se

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(x) = f(x)$$

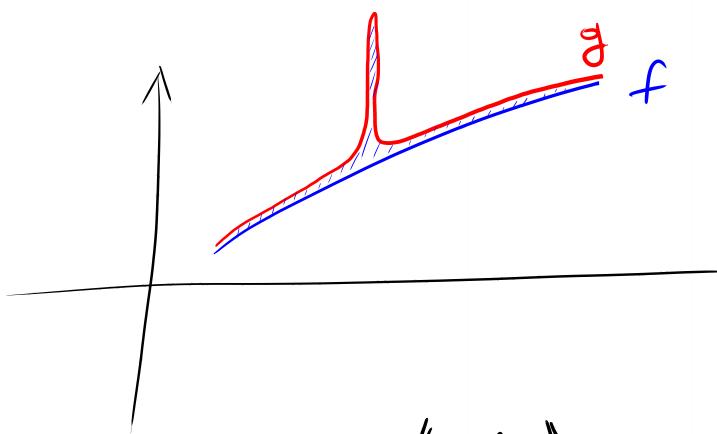
- Converge uniformemente a f su \mathbb{R} se

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} \{S_N(x) - f(x)\} \right) = 0$$



- Converge in energia o in L^2 ad f se è loc integrabile in \mathbb{R}

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|S_N - f\|_2^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^T |S_N(x) - f(x)|^2 dx = 0$$



La convergenza in energia "valuta" la regione omologgiata nell'esempio di cui sopra

$\Rightarrow f, g$ sono funzioni "vicine" nella topologia L^2

Tuttavia f, g sono "lontane" nella topologia uniforme.

Convergenza puntuale, uniforme e in energia (L^2)

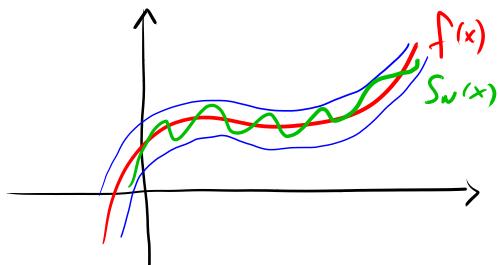
Def Una svolta Ha N-esima S_N converge puntualmente ad f in \mathbb{R} se

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \lim_{N \rightarrow \infty} S_N(x) = f(x)$$

Converge uniformemente se

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |S_N(x) - f(x)| = 0$$

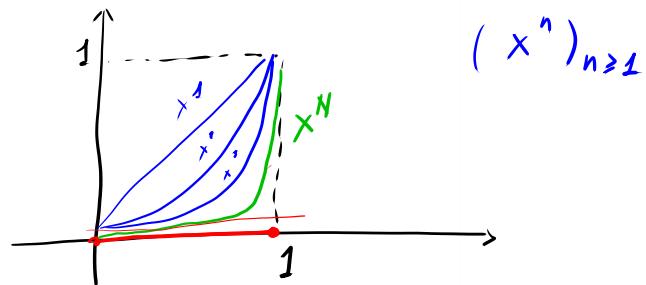
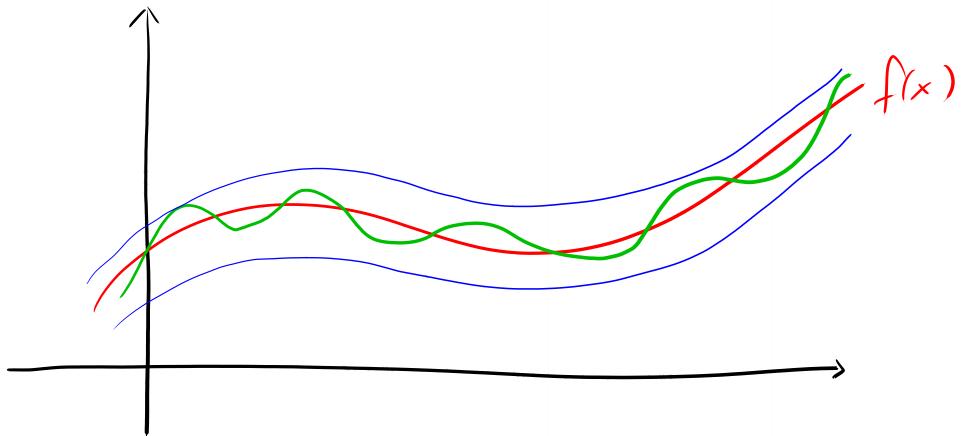
CONVERGENZA UNIFORME > CONVERGENZA PUNTUALE



Mentre S_N converge ad f in energia ($\circ L^2$) se

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^T |S_N(x) - f(x)|^2 dx = 0$$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\|S_N - f\|_2^2}$



Se $x \in [0, 1)$: $x^n \rightarrow 0$

$$x = 1 \quad x^n = 1$$

X

Richiami oli risultati, oli Analisi

M-test di Weierstrass

Sia $(f_n)_n$ una successione di funzioni con $f_n : E(\subseteq \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$
 Vn. Se $\exists (M_n)_n$ in \mathbb{R}^+ t.c.

- o $\sup_{x \in E} |f_n(x)| < M_n \quad \forall n$

- o $\sum_n M_n$ converge

allora $\sum_n f_n(x)$ converge uniformemente in E

OSS Perché non possiamo applicare l'M-test alla successione $(x^n)_n$ in $[0, 1]$?

$$\sup_{x \in [0,1]} x^n = 1 \equiv M_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Proviamo a vedere se il secondo criterio dell'H-test è verificato

$$\sum_n M_n = \infty \quad \underline{\underline{\text{No}}}$$

Continuità Sia $(f_n)_n$ una successione di funzioni con

$$f_n : E (\subseteq \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C} \text{ continua in } E \quad \forall n$$

Se $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ converge uniformemente a f in E allora f è continua in E

Integrazione termine a termine

Sia $(f_n)_n$ successione di funzioni $f_n : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ integrabili in $[a,b]$. Ha

Se $\sum_n f_n$ conv. unif. a f in $[a,b]$ allora f è integrabile in $[a,b]$

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_a^b f_n(x) dx$$

Così

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) dx = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_a^b f_n(x) dx$$

Derivazione termine a termine

Sia $(f_n)_n$ come sopra, se $\sum_n f_n$ converge puntualmente a f in $I = [a,b]$ e $\sum_n f'_n$ converge uniformemente a g in I allora f è derivabile in I e si ha che $f' = g$

ossia

$$\frac{d}{dx} \sum_n f_n = \sum_n \frac{d}{dx} f_n$$

Esempio

Provare che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^4}$ converge uniformemente in \mathbb{R} e stabilire la regolarità della somma.

Si ha che

$$|\frac{\sin(nx)}{n^4}| \leq \frac{1}{n^4} = M_n \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$\sum_n M_n$ è convergente.

→ Possiamo applicare l'H-test di Weierstrass col
stato che la serie

$$\sum_n \frac{\sin(nx)}{n^4} \quad \text{c.v. ad una funzione } f \text{ che è continua in } \mathbb{R}$$

Inoltre sempre utilizzando l'H-test vediamo che
la serie $\sum_n \frac{n \cos(nx)}{n^4}$ e $\sum_n -\frac{n^2 \sin(nx)}{n^4}$
nascono dunque che $f \in C^2(\mathbb{R})$.

Pervolalità della somma di una serie trigonometrica

Se la serie trigonometrica

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nwx) + b_n \sin(nwx)) \quad \text{oppure}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$$

converge puntualmente in \mathbb{R} ad una funzione f allora
 f è T-pervolatice.

Dallo H-test possiamo dedurre la seguente

Condizione Sufficiente per la convergenza

- Se $\left| \frac{a_0}{2} \right| + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$ è convergente allora

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x))$$

converge uniformemente in \mathbb{R} .

- Se $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|$ è convergente allora $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$ c.u. in \mathbb{R} .

Dim Basta osservare che

- $|a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)| \leq |a_n| + |b_n|$
- $|c_n e^{inx}| \leq |c_n|$

ed applicare l'H-test di Weierstrass.

#

$$(*) f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$$

Determiniamo il periodo di f
Inoltre f sarà determinata da $(c_n)_n$

Q Data f possiamo determinare $(c_n)_n$ se $(*)$ sia valida?

X

Riassumere le relazioni tra i coefficienti di una serie trigonometrica e le somme

- Se la serie trigonometrica $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x))$ c.u. in \mathbb{R} con una f (che è T -periodica e continua), allora

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos(n\omega x) dx$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin(n\omega x) dx$$

- Nel caso complesso se $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ c.u. a f allora

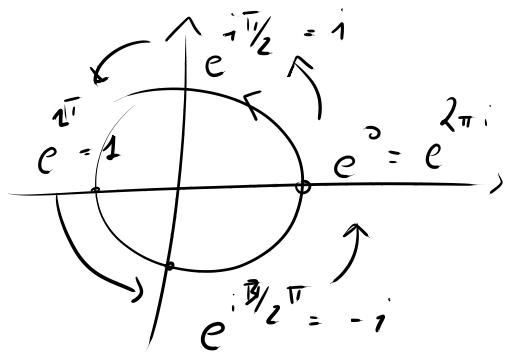
$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-inx} dx \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Dim

- Proviamo prima il risultato per $\sum_n c_n e^{inx}$

Ricordiamo che

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_{-T/2}^{T/2} e^{ik\omega x} e^{-inx} dx \right| = \left| \int_{-T/2}^{T/2} e^{i(k-n)\omega x} dx \right| \\
 & = \left| \int_0^T e^{i(k-n)\omega x} dx \right| = \\
 & \quad \text{se } k=n \quad = \int_0^T 1 dx = T \\
 & \quad \text{se } k \neq n = \frac{1}{i(k-n)\frac{2\pi}{T}} \left[e^{i(k-n)\omega x} \right]_0^T \\
 & = \frac{T}{2\pi i(k-n)} \left[\underbrace{e^{i(k-n)\frac{2\pi}{T}T}}_1 - e^0 \right] = 0
 \end{aligned}$$



Abbriamo dunque ottenuto che

$$\int_{-T/2}^{+T/2} e^{ikwx} e^{-inx} dx = \begin{cases} T & \text{se } k=n \\ 0 & \text{se } k \neq n \end{cases}$$

Fissiamo dunque $k \in \mathbb{Z}$ e moltiplichiamo la relazione

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} = f(x)$$

Per $\bar{c}^{-ikwx} = \overline{e^{ikwx}}$ ed integrando tra $-T/2$ e $T/2$

Poiché la serie converge uniformemente a f in $[-T/2, T/2]$

si può integrare termine a termine

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(x) \bar{e}^{-ikwx} dx = \int_{-T/2}^{T/2} \left(\sum_n c_n e^{inx} \right) \bar{e}^{-ikwx} dx$$

$$= \sum_n c_n \int_{-T/2}^{T/2} e^{i(n-k)wx} dx = c_k T$$

otteniamo dunque che, dato k generico in \mathbb{Z}

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \bar{e}^{-ikwx} dx$$

OSS1 Dalla relazione (*) ne deduciamo che, dato lo spazio
d'energia

$$L^2 = \left\{ f : \int_{-T/2}^{T/2} |f(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

ed il prodotto scalare

$$\langle f, g \rangle_{L^2} = \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \overline{g(x)} dx ,$$

la famiglia $\left(\frac{1}{\sqrt{T}} e^{inx} \right)_{n \in \mathbb{Z}}$ è ortonomale

Continuazione della dimostrazione

- Ricordiamo le formule di Werner

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta))$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$$

S'ottiene che

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(n\omega x) \sin(k\omega x) dx = 0 \quad \text{se } k \neq n$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos^2(n\omega x) dx = \int_{-T/2}^{T/2} \sin^2(n\omega x) dx = \frac{T}{2}$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(n\omega x) \cos(k\omega x) dx = 0 \quad \text{se } k \neq n$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(n\omega x) \sin(k\omega x) dx = 0 \quad ---$$

Possiamo a questo punto considerare la funzione

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_n (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x))$$

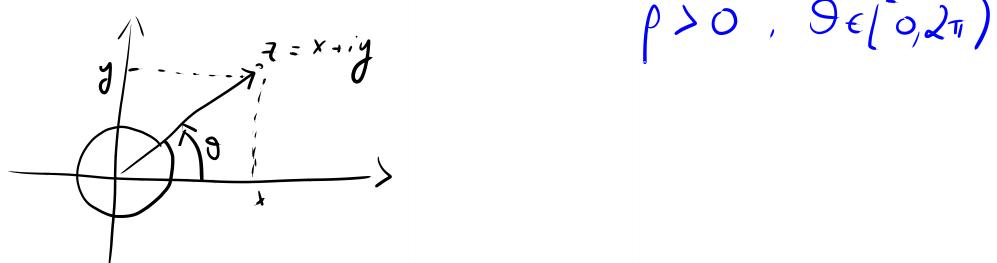
e si ottiene che

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x) \sin(k\omega x) dx = \frac{\pi}{2} a_k$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x) \cos(k\omega x) dx = \frac{\pi}{2} b_k$$
X

Esercizio 1 Scrivere in forma esponenziale (o trigonometrica) il numero complesso $z = -1 + i\sqrt{3}$ e calcolare z^4

Numero complesso in forma esponenziale: $z = \rho e^{i\vartheta}$



In manzitutto vogliamo determinare il modulo del numero complesso z

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z} = (-1 + i\sqrt{3})(-1 - i\sqrt{3}) = 1 + 3 = 4$$

$$\rightarrow |z| = 2$$

Ottieniamo dunque che $|z| = 2$

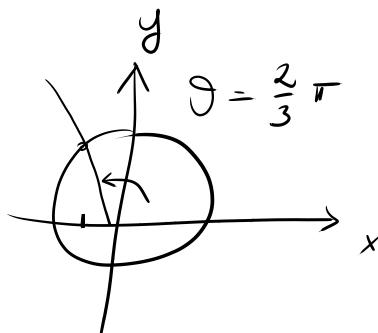
Sappiamo che per esprimere un numero complesso in forma esponenziale dobbiamo calcolare in $\vartheta \in (0, 2\pi) + c.$

$$z = |z| e^{i\vartheta} \rightarrow e^{i\vartheta} = z/|z|$$

Calcoliamo dunque $z/|z| = \underbrace{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}_{=} = e^{i\vartheta} = \underbrace{\cos \vartheta + i \sin \vartheta}_{=}$

Vogliamo dunque risolvere il sistema

$$\begin{cases} \cos \vartheta = -\frac{1}{2} \\ \sin \vartheta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$



Abbiamo ottenuto che

$$\boxed{z = 2 e^{i \frac{2}{3}\pi}}$$

$$\begin{aligned} \text{Calcoliamo } z^4 &= (2 e^{i \frac{2}{3}\pi})^4 = 2^4 (e^{i \frac{2}{3}\pi})^4 = 2^4 e^{i \frac{8}{3}\pi} \\ &= 16 e^{i \frac{8}{3}\pi} \end{aligned}$$

Esempio

Calcoliamo la radice quarta di $z = -2 + i2\sqrt{3}$

Calcoliamo z nella sua forma esponenziale

$$|z|^2 = 4 + 4\sqrt{3} = 16$$

$$\text{Dunque } \frac{z}{|z|} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i \frac{2}{3}\pi}$$

$$\text{Quindi } z = 4 e^{i \frac{2}{3}\pi}$$

Vogliamo dunque trovare un numero complesso

$$w = p e^{is}, \quad p > 0, s \in [0, 2\pi)$$

$$\text{t.c. } w^4 = z = p^4 e^{4is}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} p^4 = 4 \\ 4s = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \end{array} \right. \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$\therefore p = \sqrt[4]{2}$$

$$s = \frac{\pi}{6} + \frac{k}{2}\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Dunque } w_k = \sqrt[4]{2} e^{i\pi \left(\frac{1}{6} + \frac{k}{2} \right)}$$

$$\omega_0 = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{6}}, \quad \omega_1 = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$\omega_2 = \sqrt{2} e^{i\frac{7\pi}{6}}, \quad \omega_3 = \sqrt{2} e^{i\frac{13\pi}{6}}$$

$$\text{Calcoliamo ora } \omega_4 = e^{i\pi(\frac{1}{6}+2)} - e^{i\frac{\pi}{6}} \underbrace{e^{2i\pi}}_{=1} = e^{i\frac{13\pi}{6}}$$

$\rightsquigarrow \omega_4 = \omega_0$ e procedendo come nel calcolo di $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ ottengo che

$$\omega_5 = \omega_1, \omega_6 = \omega_2, \omega_7 = \omega_3 \quad \text{e così via}$$

$\Rightarrow \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ sono le 4 radici di τ .

Esercizio Determinare il modulo e l'argomento del seguente numero complesso

$$z = \frac{1}{1+i\sqrt{3}} e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\frac{1}{1+i\sqrt{3}} \cdot \frac{1-i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} = \frac{1-i\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{4} - i \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\rightsquigarrow z = \frac{1}{4} \left(1 - i\sqrt{3} \right) e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\underbrace{\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}}_{\text{questo è un elemento di } S^1} \right) e^{i\frac{\pi}{2}}$$

questo è un elemento di S^1

$$\frac{1}{2} = \cos \vartheta \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \vartheta \quad \rightsquigarrow \vartheta = -\frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$z = \frac{1}{2} e^{-i\pi/3} e^{i\pi/2} = \frac{1}{2} e^{i\pi/6}$$

$$= \frac{1}{2} e^{i\pi/6}$$

$$\Rightarrow |z|_{\text{modulus}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\text{Argument}_0 = \frac{\pi}{6}$$

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{4} (1 - i\sqrt{3}) e^{i\pi/2} \\ e^{i\pi/2} &= i \\ &= \frac{1}{4} (1 - i\sqrt{3}) i = \frac{1}{4} (\sqrt{3} + i) = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{i}{4} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |z| = \sqrt{\frac{3}{16} + \frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{4}{16}} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \arg z &= \arctg\left(\frac{1/4}{\sqrt{3}/4}\right) = \arctg\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \arctg\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \\ &= \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

Teoria

Provare che dati $z, w \in \mathbb{C}$ si ha che

$$1) \quad \overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$$

$$2) \quad \overline{zw} = \overline{z} \overline{w}$$

Proviamo 1) : $z = a+ib, w = c+id$

$$z + w = a + ib + c + id = (a+c) + i(b+d)$$

$$= \left(\begin{array}{l} \boxed{z+w} = \boxed{(a+c) - i(b+d)} \\ \boxed{\bar{z} + \bar{w}} = a - ib + c - id = \boxed{(a+c) - i(b+d)} \end{array} \right) =$$

Proviamo 2):

$$zw = (a+ib)(c+id) = (ac-bd) + i(ad+bc)$$

$$\begin{aligned} \boxed{\bar{zw}} &= \frac{(ac-bd) - i(ad+bc)}{} = \\ \boxed{\bar{z}\bar{w}} &= (a-ib)(c-id) = \underline{(ac-bd) - i(ad+bc)} \end{aligned}$$

Esercizio

Provare che $(\bar{z})^2 = z^2$ quando z è pura reale o immaginaria

1) Se $z \in \mathbb{R}$ allora $\bar{z} = z$ quindi l'affermazione è immediata

2) Se z è immaginario allora $z = iy$, $y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} z^2 &= (iy)^2 = i^2 y^2 = \cancel{-y^2} \\ \bar{z} &= -iy \Rightarrow (\bar{z})^2 = (-i)^2 y^2 = \cancel{-y^2} \end{aligned}$$

Esercizio

Consideriamo un polinomio a coefficienti reali

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \quad a_i \in \mathbb{R}, i=0, \dots, n$$

Vogliamo provare che se $z \in \mathbb{C}$ è radice ol. P allora pure \bar{z} lo è

$$0 = P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$$

Vogliamo vedere che $P(\bar{z}) = 0$

$$\text{Calcoliamo } P(\bar{z}) = a_0 + a_1 \bar{z} + \dots + a_n (\bar{z})^n$$

Consideriamo il monomio

$$a_j (\bar{z})^j = \overline{a_j z^j}$$

Per ipotesi $a_j \in \mathbb{R} \Rightarrow a_j = \overline{a_j}$

$$\Rightarrow \overline{a_j \bar{z}^j} = \overline{a_j z^j}$$

Questo calcolo è valido $\forall j = 0, 1, \dots, n$

Dunque utilizzando l'identità

$$a_j (\bar{z})^j = \overline{a_j z^j}$$

Ne deduciamo

$$P(\bar{z}) = a_0 + a_1 \bar{z} + \dots + a_n (\bar{z})^n$$

$$= \overline{a_0} + \overline{a_1 z} + \dots + \overline{a_n z^n}$$

$$= \overline{a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n}$$

$$= \overline{P(z)}$$

$$= \overline{0} = 0$$

Esercizio

Siamo $z, w \in \mathbb{C}^*$, dimostriamo che

$$\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w)$$

$$z = r e^{i\theta}, \quad w = a e^{i\beta}$$

$$zw = (ra) e^{i(\theta+\beta)}$$

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow \arg(zw) &= \underline{\theta + \beta} \\ \arg(z) &= \theta, \quad \arg(w) = \beta \quad (\Rightarrow) \\ \Rightarrow \arg z + \arg w &= \underline{\theta + \beta} \end{aligned}$$

Esercizio [Formula di De Moivre]

Dimostrare che $\forall n \in \mathbb{N}$

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

$$\begin{aligned} \cos \theta + i \sin \theta &= e^{i\theta} \quad \Rightarrow \quad (\cos \theta + i \sin \theta)^n = (e^{i\theta})^n = e^{i\theta n} \\ &= \cos(\theta n) + i \sin(\theta n) \end{aligned}$$

Coefficienti, polinomi e serie di Fourier

Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, T -periodica, localmente integrabile in \mathbb{R} o, equivalentemente, integrabile $[-T/2, T/2]$

- I coefficienti

$$c_n = c_n(f) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-inx} dx, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Si dicono coefficienti di Fourier di f rispetto al sistema $(e^{inx})_{n \in \mathbb{Z}}$. Le riadalle

$$S_N(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx}$$

Si dicono polinomi di Fourier di f , e, infine

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$$

Si chiama serie di Fourier di f .

- Possiamo definire analogamente a sopra i coefficienti

$$a_n = a_n(f) = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos(n \omega x) dx$$

$$b_n = b_n(f) = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin(n \omega x) dx \quad n \in \mathbb{N}$$

che si dicono coefficienti di Fourier di f e la quantità

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos(n \omega x) + b_n \sin(n \omega x))$$

Si calca serie di Fourier di f rispetto al sistema

$$\left(1, \cos(n\omega x), \sin(n\omega x) \right)_{n \geq 1}$$

Analisi di Fourier (o analisi di frequenza) di una funzione periodica

Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ periodica e loc. integrabile e siano $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$ i coefficienti di Fourier di f rispetto al sistema $(e^{inx})_{n \in \mathbb{Z}}$, ossia

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-inx} dx$$

Si definisce

$$\text{spettro di } f = (c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}.$$

Siccome ogni $c_n \in \mathbb{C}$ sappiamo che

$$c_n = |c_n| e^{i\varphi_n},$$

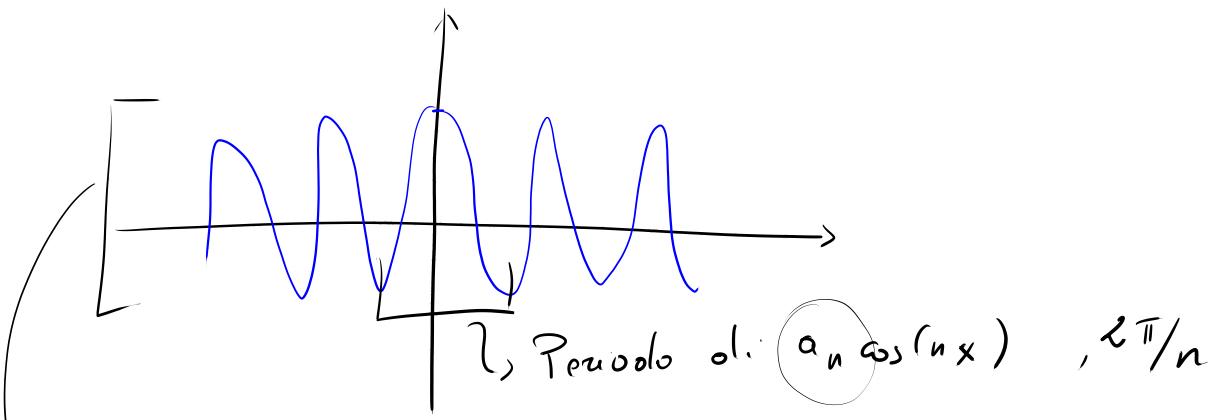
dove $(|c_n|)_n \subseteq \mathbb{R}_+$ e $(\varphi_n)_n \subseteq [0, 2\pi)$, ovviamente
 $\varphi_n = \arg(c_n)$ ed è detto fase di c_n

Si definiscono

- spettro di ampiezza di $f = (|c_n|)_{n \in \mathbb{Z}}$
- spettro di fase di $f = (\varphi_n)_{n \in \mathbb{Z}}$

Discussione euristica:

$(a_n \cos nx)$, basi:
Ampiezza



..., la fase indica la lunghezza del periodo e
dunque ne determina la frequenza dell'onda

L'ampiezza determina, letteralmente, l'ampiezza dell'onda

L'analisi di Fourier di f consiste nel determinare il suo spettro e quindi la corrispondente serie di Fourier.

La sintesi consiste invece nel ricostruire f attraverso la sua serie di Fourier

$$\underline{\text{Analisi}} : f \longmapsto (c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$$

$$\underline{\text{Sintesi}} : (c_n)_{n \in \mathbb{Z}} \longmapsto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} \xrightarrow{?} f$$

Problema Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ T -periodica e loc. int. allora è determinato il suo spettro e quindi la sua serie di Fourier. Viceversa, dato lo spettro di f la serie di F. di f converge in qualche senso? Qualora converga, converge ad f ?

Esempio: Determinare le serie di Fourier seguenti funzioni 2π-pz

a) $f(x) = \chi_{[-\pi/2, \pi/2]}(x)$, $-\pi \leq x \leq \pi$

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \forall x \in A \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

b) $f(x) = x$, $-\pi \leq x \leq \pi$

c) $f(x) = |x|$

d) $f(x) = x^2$

Programma del corso

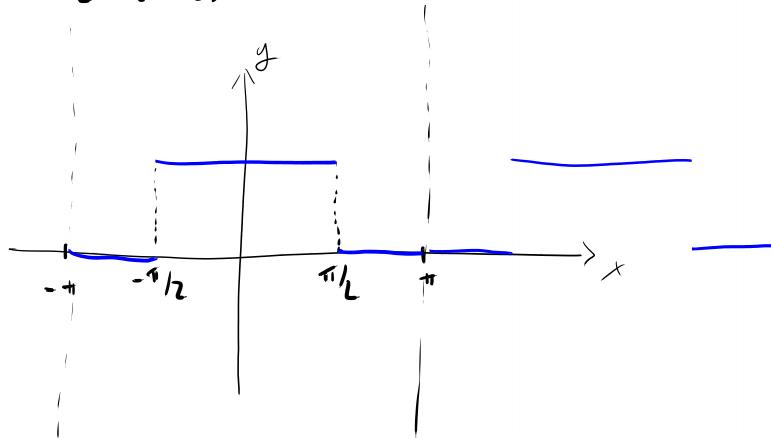
Discutere

- la convergenza puntuale
- la convergenza uniforme
- la convergenza in energia

delle serie di Fourier.

Esempio 2)

$$f(x) = \chi_{[-\pi/2, \pi/2]}(x) \quad -\pi \leq x \leq \pi$$



$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{in } [-\pi, -\pi/2] \\ 1 & \text{in } [-\pi/2, \pi/2] \\ 0 & \text{in } [\pi/2, \pi] \end{cases}$$

ed estesa periodicamente in tutto \mathbb{R}

Abbiamo ottenuto $T=2\pi$, $\omega=1$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dx = 1$$

Per $n \geq 1$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(nx) dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(nx) dx =$$

$$(\sin(nx))' = \cos(nx) \cdot n$$

$$= \frac{2}{\pi} \frac{1}{n} \left. \sin(nx) \right|_0^{\pi/2} = \frac{2}{\pi} \frac{1}{n} \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } n=2k \\ \frac{2(-1)^{k+1}}{(2k-1)\pi} & \text{se } n=2k-1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(nx) dx \\
 &= 0 \quad \forall n \geq 1
 \end{aligned}$$

$-\sin(\alpha) = \sin(-\alpha)$

Abbiamo dunque ottenuto la serie di Fourier in forma reale

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) \cos(nx).$$

OSS Possiamo scrivere la serie in forma complessa utilizzando le relazioni

$$\begin{cases} c_0 = a_0/2 = 1/2 \\ c_n = \frac{1}{2}(a_n - i b_n) = \frac{1}{n\pi} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}(a_n + i b_n) = c_{-n} \quad n \geq 1 \end{cases}$$

Esempio L $f(x) = x$ $-\pi \leq x \leq \pi$ estesa periodicamente

Abbiamo che $T = 2\pi$, $\omega = 1$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0$$

per $n \geq 1$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = 0$$

sia come
 $x \mapsto x \cos(nx)$ è dispari

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx) dx \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(nx) dx
 \end{aligned}$$

Integrando per parti ed otteniamo

$$= \frac{2}{\pi} \frac{1}{n} \left[-x \cos(nx) \right]_0^\pi + \frac{2}{\pi} \frac{1}{n} \int_0^\pi \sin(nx) dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \frac{1}{n} \left(-\pi \cos(n\pi) \right) + \frac{2}{\pi} \frac{1}{n^2} \left[\sin(nx) \right]_0^\pi$$

$$= - \frac{2}{n} (-1)^n = \frac{2}{n} (-1)^{n+1}$$

Otteniamo dunque la serie di F. per f

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n} (-1)^{n+1} \sin(nx) .$$

Convergenza puntuale delle serie di Fourier

Problema Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ T -periodica e localmente integrabile in \mathbb{R} . Fissiamo $x_0 \in \mathbb{R}$, sotto quali condizioni

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx_0} = f(x_0) \quad [\omega = \frac{2\pi}{T}]$$

||

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(x_0)$$

Esempio (Du Bois - Reymond, 1813)

Non basta la continuità, $\exists f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continua e T -periodica

$$S_N(0) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} f(0)$$

Questo vuol dire che non vi è convergenza puntuale in 0.

Teorema (Dirichlet - Weierstrass)

Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ T -periodica e localmente integrabile in \mathbb{R} esista $x_0 \in \mathbb{R}$. Supponiamo che esistano limiti

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0^-) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0^+)$$

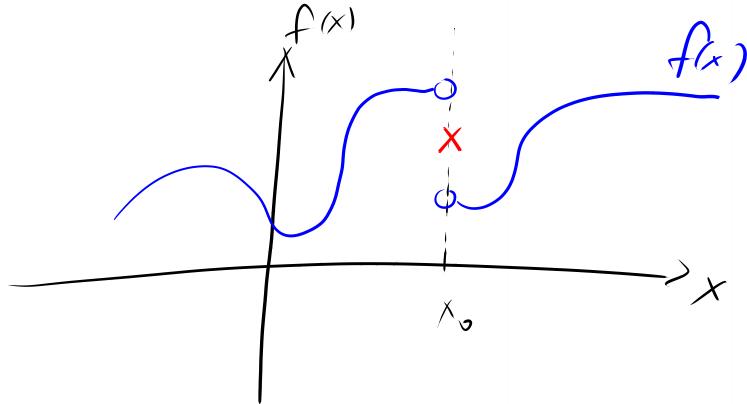
$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0^-)}{x - x_0^-} = f'(x_0^-) \quad ,$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0^+)}{x - x_0^+} = f'(x_0^+)$$

Possono essere f

Sì ha dunque che

$$\exists \lim_{N \rightarrow \infty} S_N(x_0) = \frac{1}{2} (f(x_0^-) + f(x_0^+))$$



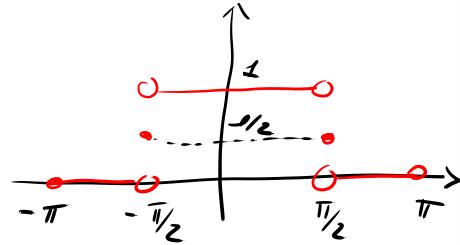
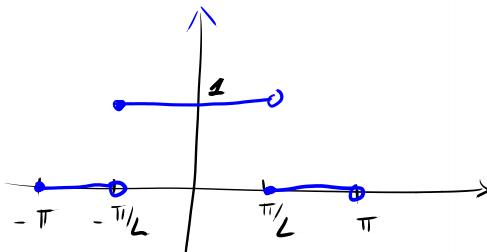
OSS Ovviamente se $f \in C^1$ in $x_0 \implies S_N(x_0) \rightarrow f(x_0)$

Questo semplicemente perché se $f \in C^1$

1) $f \in C^0$

2) $f' \in C^0$ e dunque \exists limite dx esistente delle funzioni rapporto incrementale.

Esempio $f(x) = \chi_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}(x)$, $x \in [-\pi, \pi]$



$$S(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N(x)$$

La dimostrazione del teorema di D.-W. si basa su dei risultati assiomatici che hanno un'importanza fondamentale

Energia di un polinomio trigonometrico

$$S_{\text{tot}} P_N(x) = \sum_{n=-N}^N p_n e^{inx}$$

Vogliamo calcolare l'energia del P_N , ossia

$$\|P_N\|_2^2 = \int_{-T/2}^{T/2} |P_N(x)|^2 dx$$

$$= \int_{-T/2}^{T/2} P_N(x) \cdot \overline{P_N(x)} dx$$

$$= \int_{-T/2}^{T/2} \left(\sum_{n=-N}^N p_n e^{inx} \right) \left(\overline{\sum_{m=-N}^N p_m e^{imx}} \right) dx$$

$$= \int_{-T/2}^{T/2} \left(\sum_{n=-N}^N p_n e^{inx} \right) \left(\sum_{m=-N}^N \bar{p}_m e^{-imx} \right) dx$$

$$= \sum_{n=-N}^N \sum_{m=-N}^N \int_{-T/2}^{T/2} p_n \bar{p}_m e^{i(n-m)\omega x} dx$$

$$= \sum_{n=-N}^N \sum_{m=-N}^N p_n \bar{p}_m \int_{-T/2}^{T/2} e^{i(n-m)\omega x} dx$$

∫

$$= \begin{cases} T & \text{se } n = m \\ 0 & \text{se } n \neq m \end{cases} = T \delta_{n,m}$$

$$= \sum_{n=-N}^N |p_n|^2 T$$

Abbiamo dunque ottenuto che

$$\|P_N\|_2 = T \sum_{n=-N}^N |P_n|^2$$

Diseguaglianza di Bessel

Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, T -periodica e localmente integrabile allora

$$(1) \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \leq \frac{1}{T} \|f\|_{L^2}^2 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(x)|^2 dx$$

OSS La diseguaglianza (1) si esprime quando i coefficienti di \mathcal{F}_f (c_n) sono dati da

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-inx} dx ,$$

Tuttavia potremmo riformulare (1) utilizzando i valori $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ valori per se stessa valori reali. Tale risultato si può ottenere da (1) utilizzando le formule di cambio di coefficienti

$$\begin{cases} c_n = \frac{1}{2} (a_n - i b_n) \\ c_{-n} = \frac{1}{2} (a_n + i b_n) \end{cases}$$

Dim Sia $S_N(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx}$ e calcoliamo

$$\begin{aligned}
0 \leq \|f - S_N\|_{L^2}^2 &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |f(x) - S_N(x)|^2 dx \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (f(x) - S_N(x)) \cdot (\overline{f(x) - S_N(x)}) dx \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |f|^2 dx - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f \overline{S_N} dx - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \overline{f} S_N dx + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |S_N|^2 dx \\
&= \|f\|_{L^2}^2 - \sum_{n=-N}^N \left(\overline{c_n} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x) e^{-inx} dx - c_n \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \overline{f(x)} e^{inx} dx \right) \\
&\quad + T \underbrace{\sum_{n=-N}^N |c_n|^2}_{= \|S_N\|_{L^2}^2} = (*)
\end{aligned}$$

A ricordiamo ora che

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x) e^{-inx} dx &= T c_n \\
\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \overline{f(x)} e^{inx} dx &= \overline{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x) e^{-inx} dx} \\
&= \overline{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x) e^{-inx} dx} = T \overline{c_n}
\end{aligned}$$

con la quale semplifichiamo (*) ottenendo

$$\begin{aligned}
(*) &= \|f\|_{L^2}^2 - \sum_{n=-N}^N \overline{c_n} T c_n - \sum_{n=-N}^N c_n T \overline{c_n} + T \sum_{n=-N}^N |c_n|^2 \\
&= \|f\|_{L^2}^2 - T \sum_{n=-N}^N |c_n|^2
\end{aligned}$$

Pertanto abbiamo ottenuto che

$$0 \leq \|f\|_{L^2}^2 - T \sum_{n=-N}^N |c_n|^2 , \text{ ossia}$$

$$\sum_{n=-N}^N |c_n|^2 \leq \frac{1}{T} \|f\|_{L^2}^2$$

Possiamo dunque far tendere $N \rightarrow \infty$ ed ottenere

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \leq \frac{1}{T} \|f\|_{L^2}^2 . \quad \cancel{\text{X}}$$

OSS 1 Dalla diseguaglianza (1) ne deduciamo che, se f è localmente integrabile, $|c_n| \rightarrow 0$. La formulazione classica del lemma di Riemann-Lebesgue è formulata in termini del decrescimento dei coeff di Fourier.

OSS 2 I calcoli sviluppati per dimostrare le diseguaglianze

(1) hanno un interessante risultato addizionale, ossia

$$\|f - S_N\|_{L^2}^2 + \|S_N\|_{L^2}^2 = \|f\|_{L^2}^2$$

Ossia ottengono che le funzioni $f - S_N$ e S_N sono ortogonali rispetto $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}$. Ottengono dunque una generalizzazione infinito-dimensionale del th di Pitagoro.

Lemme di Riemann - Lebesgue

Se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, T -periodica e loc integrabile in \mathbb{R} , allora

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} c_n = 0.$$

Dim dalla diseguaglianza di Bessel ottengono che $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 < \infty$

$$\Rightarrow |c_n| \xrightarrow{|n| \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \text{Ipotesi} \quad \times$$

Def Sia $T > 0$, $\omega = 2\pi/T$ e definiamo il nucleo di Dirichlet di ordine $N \in \mathbb{N}$ come la funzione

$$D_N(x) = \frac{1}{T} \sum_{n=-N}^N e^{inx}$$

Proprietà

1) D_N è T -periodica

2) La funzione D_N è una funzione pari.

$$\begin{aligned} D_N(x) &\stackrel{?}{=} D_N(-x) \\ &\stackrel{\parallel}{=} \\ \frac{1}{T} \sum_{n=-N}^N e^{inx} &= \frac{1}{T} \sum_{m=-N}^N e^{-im\omega x} \end{aligned}$$

Def Siano $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ localmente integrabili, definiamo con $f * g$ che denotiamo come convoluzione di f e g la funzione

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y) g(y) dy$$

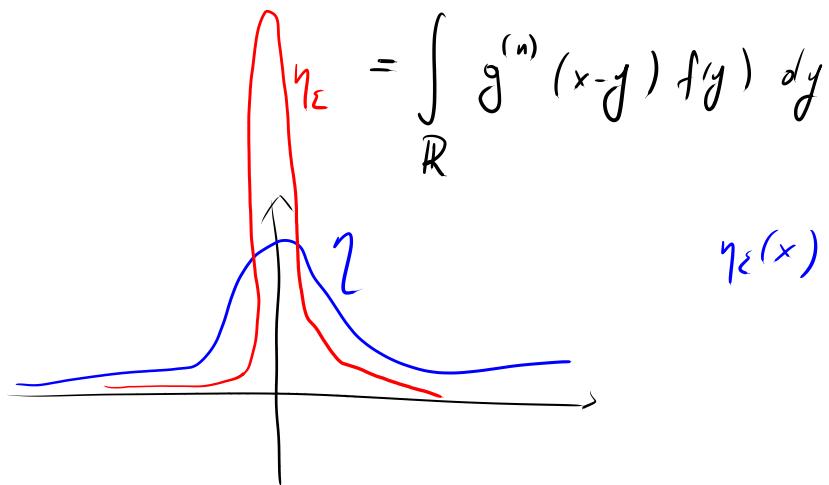
Discussione informale

Supponiamo che f sia arbitraria (ma localmente integrabile) e g sia C^∞

Per cose

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y) g(y) dy \stackrel{!}{=} \int_{\mathbb{R}} g(x-y) f(y) dy$$

$$\frac{d^n}{dx^n} (f * g)(x) = \frac{d^n}{dx^n} \left(\int_{\mathbb{R}} g(x-y) f(y) dy \right)$$



$f_\varepsilon = f * \eta_\varepsilon$ questa è una funzione liscia che "approssima" f .

Recap:

Q: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ localmente integrabile, $x_0 \in \mathbb{R}$ quando

$$\lim_N S_N(x_0) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx_0} = f(x_0)$$

A: Thm D-W Se \exists finit,

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0^+) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0^+)}{x - x_0^+} = f'(x_0^+)$$

allora

$$\exists \lim_{N \rightarrow \infty} S_N(x_0) = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}$$

Risultati introduttivi alla dimostrazione del thm di D-W

1) Diseguaglianza di Bessel : $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 \leq \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(x)|^2 dx$

Lema (o: Riemann - Lebesgue)

Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, T -periodica e localmente int.,

allora

$$c_n(f) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-inx} dx \xrightarrow{|n| \rightarrow \infty} 0$$

Oss La scorsa volta abbiamo visto che il Lemma o: RL è una conseguenza immediata delle diseguaglianze di Bessel se H^2 è loc int. Questo, tuttavia, è più che chiedere che f sia loc int. Per questo la lezione olierà concentrerà una buona parte nello dim o: RL.

Per dimostrare il teorema o: RL avremo bisogno di alcuni risultati ausiliari.

Def Si dice **funzione semplice** o **funzione a scalini** una funzione φ del tipo

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^L \alpha_j \chi_{[a_j, b_j)}(x) \quad , \quad L \in \mathbb{N}, \alpha_j \in \mathbb{C}$$

(a_j, b_j) disgiunti

OSS φ è una funzione costante a tratti.

Def Definiamo con $L^1 = L^1([-T/2, T/2])$ la chiusura topologica dello spazio di funzioni semplici rispetto alla norma

$$\|f\|_{L^1} = \int_{-T/2}^{T/2} |f(x)| dx$$

Def Definiamo con $\ell^\infty = \ell^\infty(\mathbb{Z}; \mathbb{C})$ lo spazio di successioni

$$n \in \mathbb{Z} \mapsto z_n \in \mathbb{C} \quad \text{t.c.}$$

$$\|z\|_{\ell^\infty} = \sup_{n \in \mathbb{Z}} |z_n| < \infty$$

Lemma Considero l'operatore

$$\mathcal{F} : L^1 \longrightarrow \ell^\infty$$

$$f \longmapsto c_n(f) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-inx} dx, \quad n \in \mathbb{Z}$$

è un operatore lineare continuo tra L^1 e ℓ^∞ .

Dimo $f, g \in L^1, \lambda \in \mathbb{C}$

$$c_n(f) + \lambda c_n(g) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-inx} dx + \frac{\lambda}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(x) e^{-inx} dx$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (f(x) + \lambda g(x)) e^{-inx} dx = c_n(f + \lambda g)$$

Questo prova che è lineare.

Proviamo che è continuo

$$\|c_n(f) - c_n(g)\|_{\ell^\infty} = \sup_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f) - c_n(g)|$$

$$\leq \sup_n \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(x) - g(x)| \underbrace{|e^{-inx}|}_{\equiv 1} dx = \frac{1}{T} \|f - g\|_{L^1}$$

Dunque se $\|f - g\|_{L^2} \rightarrow 0$ allora

$$\|c_n(f) - c_n(g)\|_{l^\infty} \rightarrow 0 . \quad \#$$

Dim del Lemma di RL

Dividiamo la dim in Step

Step 1 $f = \chi_{[a,b]}$ $[a,b] \subseteq [-T/2, T/2]$, abbiamo che

$$c_n(f) = \frac{1}{T} \int_a^b e^{inx} dx = \frac{e^{-inbw} - e^{-inaw}}{T(-in\omega)} = O(n^{-1}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Step 2 $f = \varphi$ funzione semplice

$$c_n(f) = \sum_{j=1}^L d_j c_n(\chi_{[a_j, b_j]}) = \sum_{j=1}^L d_j \underbrace{\frac{e^{-inbw_j} - e^{-ina_j w}}{T(-in\omega)}}_{= O(n^{-1})} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Step 3 $f \in L^2$ generica.

Se $f \in L^2$ allora $\forall \delta > 0 \exists \varphi = \varphi_\delta$ t.c. $\|f - \varphi\|_{L^2} < \delta$.

L'applicazione \mathcal{F} è continua tra L^2 e l^∞ , dunque

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ t.c. se $\|f - \varphi\|_{L^2} < \delta$ allora

$$\|c_n(f) - c_n(\varphi)\|_{l^\infty} < \varepsilon .$$

Quindi

$$\begin{aligned} |c_n(f)| &\leq |c_n(f) - c_n(\varphi)| + |c_n(\varphi)| \\ &< \varepsilon + O(n^{-1}) \end{aligned}$$

\mathcal{F} è continua $\xrightarrow{\text{Step 2}}$

Per arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ conclude

Def Il nucleo di Dirichlet odi ordine $N \in \mathbb{N}$ è la funzione

$$D_N(x) = \frac{1}{T} \sum_{n=-N}^N e^{inx},$$

Proprietà

- 1) D_N è T -periodica
- 2) D_N è pari

Formule di Dirichlet

Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ e loc int e T -periodica allora

$$S_N(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} = \int_{-T/2}^{T/2} f(x-t) D_N(t) dt$$

o equivalentemente

$$S_N(x) = \int_{-T/2}^{T/2} f(x+t) D_N(t) dt = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) D_N(x-t) dt$$

Dim

$$S_N(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx}$$

$$= \sum_{n=-N}^N \left(\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-int} dt \right) e^{inx}$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sum_{n=-N}^N e^{inx} dt$$

$$= \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \underbrace{\left[\frac{1}{T} \sum_{n=-N}^N e^{inx} \right]}_{= D_N(x-t)} dt$$

Con il cambio di variabile $s = x-t$ si ottiene che

$$S_N(x) = - \int_{x-T/2}^{x-T/2} f(x-s) D_N(s) ds = \int_{x-T/2}^{x+T/2} f(x-s) D_N(s) ds$$

$$= \int_{-T/2}^{T/2} f(x-s) D_N(s) ds$$

Con l'ulteriore cambio di variabile $u = -s$

$$S_N(x) = - \int_{-T/2}^{T/2} f(x+u) D_N(-u) du = \int_{-T/2}^{T/2} f(x+u) D_N(u) du$$



Lemma 1 si ha che $\int_0^{T/2} D_N(x) dx = 1/2$

OSS Siccome il nucleo di Dirichlet è una funzione pari il lemma 1 implica

$$\int_{-T/2}^{T/2} D_N(x) dx = 1 \quad \text{e} \quad \int_{-T/2}^0 D_N(x) dx = 1/2$$

Dimo

$$\int_{-T/2}^{T/2} D_N(x) dx = \frac{1}{T} \sum_{n=-N}^N \int_{-T/2}^{T/2} e^{inx} dx$$

$$= \frac{1}{T} \left(\int_{-T/2}^{T/2} e^{-inx} dx + \dots + \int_{-T/2}^{T/2} 1 dx + \dots + \int_{-T/2}^{T/2} e^{inx} dx \right)$$

Provare per caso

$$= \frac{1}{T} \left(\left[-\frac{e^{-inx}}{in\omega} \right]_{-T/2}^{T/2} + \dots + T + \dots + \left[\frac{e^{inx}}{in\omega} \right]_{-T/2}^{T/2} \right)$$

$$= \frac{1}{T} (0 + \dots + T + \dots + 0) = 1$$



Lemma 2 Si ha che

$$D_N(x) = \begin{cases} \frac{1}{T} \frac{e^{i(N+1)\omega x} - e^{-iN\omega x}}{e^{iN\omega x} - 1} & \text{se } x \neq kT, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{1}{T} (2N+1) & \text{se } x = kT, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Dim Se $x = kT$ la dimostrazione è immediata.

$$D_N(kT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-N}^N e^{in\omega(kT)} = \frac{1}{T} \sum_{n=-N}^N e^{in\frac{2\pi}{T}kT} = \frac{2N+1}{T}$$

Sia ora $x \neq kT, k \in \mathbb{Z}$, poniamo $z = e^{i\omega x}$

$$\begin{aligned} D_N(x) &= \frac{1}{T} \sum_{n=-N}^N e^{in\omega x} = \frac{1}{T} \sum_{n=-N}^N z^n \\ &= \frac{1}{T} \left(z^{-N} + \dots + 1 + \dots + z^N \right) \\ &= \frac{z^{-N}}{T} (1 + \dots + z^N) = \frac{z^{-N}}{T} \frac{z^{2N+1} - 1}{z - 1} \\ &= \frac{1}{T} \frac{z^{N+1} - z^{-N}}{z - 1} = \frac{1}{T} \frac{e^{i\omega(N+1)x} - e^{-iN\omega x}}{e^{i\omega x} - 1} \end{aligned}$$

OSS $D_N(x) = \frac{1}{T} \frac{e^{i(N+1)\omega x} - e^{-iN\omega x}}{e^{i\omega x} - 1} \cdot \frac{e^{-\frac{1}{2}i\omega x}}{e^{-\frac{1}{2}i\omega x}}$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{T} \frac{e^{i\frac{(N+1)}{2}\omega x} - e^{-i\frac{(N+1)}{2}\omega x}}{e^{\frac{i\omega x}{2}} - e^{-\frac{i\omega x}{2}}} \cdot \frac{1}{2i} \\ &= \frac{1}{T} \frac{e^{i\frac{(N+1)}{2}\omega x} - e^{-i\frac{(N+1)}{2}\omega x}}{2i} \quad \cancel{\frac{e^{i\omega/2x} - e^{-i\omega/2x}}{2i}} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{T} \frac{\sin\left(N + \frac{1}{2}\right) \omega x}{\sin\left(\frac{\omega}{2}x\right)}$$

*

Dimostrazione del thm di DW

Vogliamo provare che $\lim_N S_N(x_0) = \frac{1}{2}(f(x_0^-) + f(x_0^+))$

Utilizziamo la formula di Dirichlet per esprimere S_N come operatore integrale

$$S_N(x_0) = \int_{-T/2}^{T/2} f(x_0+t) D_N(t) dt$$

Calcoliamo ora

$$\begin{aligned} S_N(x_0) &= \frac{1}{2}(f(x_0^-) + f(x_0^+)) \\ &= \int_{-T/2}^{T/2} f(x_0+t) D_N(t) dt - \frac{1}{2}(f(x_0^-) + f(x_0^+)) \\ &= \int_{-T/2}^0 f(x_0+t) D_N(t) dt - \frac{1}{2} f(x_0^-) \\ &\quad + \int_0^{T/2} f(x_0+t) D_N(t) dt - \frac{1}{2} f(x_0^+) \\ &= \int_{-T/2}^0 f(x_0+t) D_N(t) dt - \int_{-T/2}^0 D_N(t) f(x_0^-) dt \\ &\quad + \int_0^{T/2} f(x_0+t) D_N(t) dt - \int_0^{T/2} f(x_0^+) D_N(t) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-T/2}^0 [f(x_0+t) - f(x_0^-)] D_N(t) dt \\
&\quad + \int_0^{T/2} [f(x_0+t) - f(x_0^+)] D_N(t) dt \\
&= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^0 [f(x_0+t) - f(x_0^-)] \frac{e^{i(N+1)\omega t} - e^{-iN\omega t}}{e^{i\omega t} - 1} dt \\
&\quad + \frac{1}{T} \int_0^{T/2} [f(x_0+t) - f(x_0^+)] \frac{e^{i(N+1)\omega t} - e^{-iN\omega t}}{e^{i\omega t} - 1} dt \\
&= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^0 \frac{f(x_0+t) - f(x_0^-)}{t} \frac{t}{e^{i\omega t} - 1} (e^{i(N+1)\omega t} - e^{-iN\omega t}) dt \\
&\quad + \frac{1}{T} \int_0^{T/2} \frac{f(x_0+t) - f(x_0^+)}{t} \frac{t}{e^{i\omega t} - 1} (e^{i(N+1)\omega t} - e^{-iN\omega t}) dt
\end{aligned}$$

Notiamo che $e^{i\omega t} - 1 = (\cos(\omega t) - 1) + i\sin(\omega t)$

e allora definiamo la funzione considerata

$$g(t) = \begin{cases} \frac{f(x_0+t) - f(x_0^-)}{t} \frac{t}{(\cos(\omega t) - 1) + i\sin(\omega t)} & -\pi \leq t < 0 \\ \frac{f(x_0+t) - f(x_0^+)}{t} \frac{t}{(\cos(\omega t) - 1) + i\sin(\omega t)} & 0 \leq t \leq \pi \end{cases}$$

e prolunghiamo g periodicamente in \mathbb{R} .

Calcoliamo ora

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} g(t) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0^-)}{t}$$

\downarrow

$$= f'(x_0^-) \frac{1}{i\omega}$$

$\frac{(\cos(\omega t) - 1) + i \sin(\omega t)}{\sim t^2 \quad \sim i\omega t}$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) = f'(x_0^+) \frac{1}{i\omega}$$

Ottieniamo dunque che g è limitata in $[-T/2, T/2]$.

La funzione integrale

$$G(x) = \int_{-T/2}^x g(t) dt$$

è uniformemente continua in $[-T/2, 0]$ e dunque esiste finito

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} G(x) = \int_{-T/2}^0 g(t) dt$$

$\rightsquigarrow g$ è integrabile in $[-T/2, 0]$

Sì può analogamente vedere che g è int in $[0, T/2]$

$\rightsquigarrow g$ è int in $[-T/2, T/2]$ $\rightsquigarrow g$ è loc int

$$\begin{aligned}
S_N(x_0) &= \frac{1}{2} (f(x_0^-) + f(x_0^+)) \\
&= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^0 g(t) [e^{i(N+1)\omega t} - e^{iN\omega t}] dt \\
&\quad + \frac{1}{T} \int_0^{T/2} g(t) [e^{i(N+1)\omega t} - e^{iN\omega t}] dt \\
&= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) e^{i(N+1)\omega t} dt - \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) e^{iN\omega t} dt \\
&= C_{N+1}(g) - C_N(g)
\end{aligned}$$

Siccome g è localmente integrabile applichiamo il lemma di RL ed ottieniamo che

$$C_{N+1}(g) - C_N(g) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 \quad , \text{ provando ottenere finalmente che}$$

$$S_N(x) = \frac{1}{2} (f(x_0^-) + f(x_0^+)) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$



Problema di Basilea (Proposto da Mengoli nel 1644 e risolto da Euler nel 1735)

Calcolare la somma della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

Consideravamo la funzione

$$f(x) = x^4 \quad , \quad -\pi \leq x \leq \pi \quad , \text{ estesa periodicamente}$$

La serie di Fourier di f è

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} (-1)^n \cos(nx)$$

Così per il teorema della Divergenza la serie converge puntualmente a f $\forall x \in \mathbb{R}$

Se $x = \pi$ allora si ha che

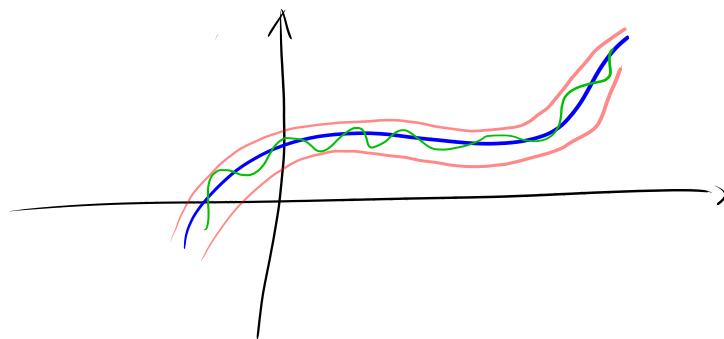
$$\pi^2 = f(\pi) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} (-1)^n (-1)^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4} \left(\pi^2 - \frac{\pi^2}{3} \right) = \frac{\pi^2}{6}$$

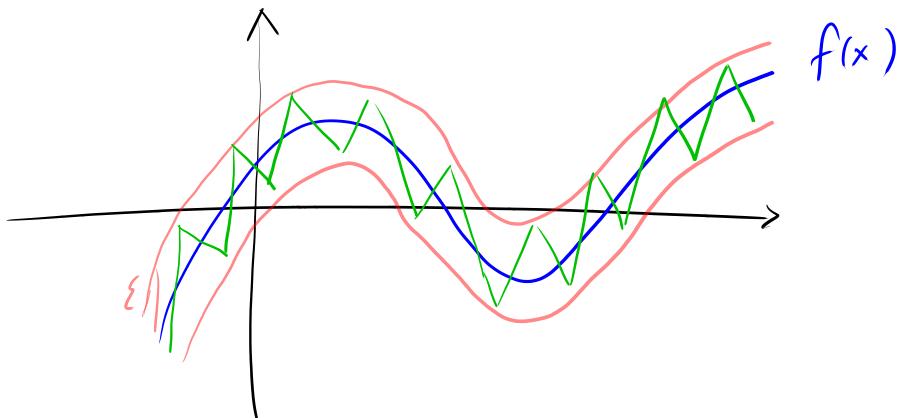
OSS Convergenza uniforme di una funzione e delle sue derivate

Recap una successione $(f_n)_n$ converge uniformemente a f in \mathbb{R} se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = 0$$



Esempio di una successione di funzioni che convergono uniformemente ad una funzione $f \in C^\infty$ ma per le quali non è vero che f'_n converge a f'



In questo esempio grafico otteniamo che f'_n non converge a f'

Recap

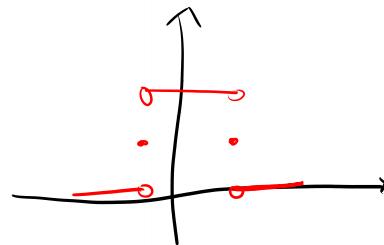
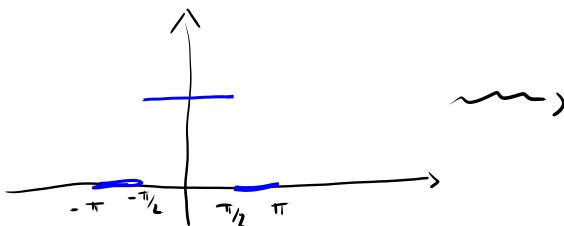
I parte: dimostrazione del thm di DVX

Thm: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, T-pur e loc nt e supponiamo f finiti, limiti

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0^+) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0^-)}{x - x_0} = f'(x_0^-)$$

allora

$$S_N(x_0) = \sum_{n=-N}^N c_n(f) e^{inx_0} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2} (f(x_0^+) + f(x_0^-))$$

EsempioParte II

Problema di Basilea : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Principio ol'identità per le serie ol'Fourier

Siamo f e g: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, T-pur oolche, localmente integrabili. Olate $\forall x \in \mathbb{R}$ ol' derivata finita e supponiamo che

$$c_n(f) = c_n(g) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{allora } f(x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Dim Se f e g sono derivabili $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f, g$ sono continue
 $\forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \exists$ limiti d_x esistono dif. fra f e g in x e del loro rapporto
 incrementale

\Rightarrow Le condizioni del thm di DW sono soddisfatte

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{inx} \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R} .$$

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(g) e^{inx}$$

Per ipotesi tuttavia $c_n(f) = c_n(g) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

$$\boxed{f(x) \stackrel{\text{DW}}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{inx}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(g) e^{inx} \stackrel{\text{DW}}{=} g(x)$$

\Rightarrow la tesi del teorema 

Ricordiamo il Lemma di RL

Lemma $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ T-per, loc. int.

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} c_n(f) = 0$$

Relazioni tra i coefficienti di Fourier di una funzione e quelli delle sue derivate

Teorema Se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, T -per ϵ loc. int., derivabile k volte, con $k \in \mathbb{N}^*$ esista $f^{(k)}$ loc. int. allora $\forall n \in \mathbb{Z}$

$$c_n(f^{(k)}) = (in\omega)^k c_n(f)$$

Dim se $k=0$ il claim è banale

$$\underset{k=1}{c_n(f')} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f'(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \partial_x f(x) e^{-inx} dx$$

$$\begin{aligned} (uv)' &= u'v + uv' \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left[\partial_x(f(x) e^{-inx}) - f(x) \partial_x(e^{-inx}) \right] dx \\ &= \frac{1}{T} \left[f(x) e^{-inx} \right]_{-T/2}^{T/2} - \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-inx} (-in\omega) dx \\ &= \frac{(in\omega)}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-inx} dx = c_n(f) \\ &= in\omega c_n(f) \end{aligned}$$

Per i successivi k si procede moltiplicativamente



Relazione tra regolarità di una funzione e velocità di decadimento dei coefficienti di Fourier

Se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, T -periodica $f \in C^k(\mathbb{R})$ (f è derivabile k volte e $f^{(k)}$ è continua), $f^{(k)}$ è loc int. dal teorema di RL ne segue che

$$c_n(f^{(k)}) \xrightarrow{n \rightarrow \pm\infty} 0$$

Per il teorema precedente ottieniamo la relazione

$$c_n(f^{(k)}) = (\ln \omega)^k c_n(f)$$

$$\Rightarrow |c_n(f)| \leq \frac{1}{|\ln \omega|^k} |c_n(f^{(k)})|$$

tuttavia siccome $c_n(f^{(k)}) \xrightarrow{n \rightarrow \pm\infty} 0$ ne deduciamo che $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $|c_n(f^{(k)})| \leq 1/2$ il quale ovunque implica che

$$|c_n(f)| \leq \frac{1}{2} \frac{1}{|\ln \omega|^k} |\ln \omega|^k = \frac{T^k}{2 \cdot (2\pi)^k} |\ln \omega|^{-k}$$

Questo mi dice che, utilizzando la notazione è

$$|c_n(f)| = o(|\ln \omega|^k)$$

NB $f = o(g)$ quando $t \rightarrow \pm\infty$ sse

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = 0$$



$$f \in C^k(\mathbb{R}) \implies |c_n(f)| = o(|\ln \omega|^k)$$

ANALISI

Q: Possiamo estrarre informazioni riguardanti la regolarità della funzione f analizzando il decadimento dei coefficienti di Fourier ad infinito?

Lemma Consideriamo la serie trigonometrica

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n e^{inx}$$

che converge puntualmente a f in \mathbb{R} e supponiamo esista $p > k+1$

$$|\gamma_n| = \Theta\left(\left(\frac{1}{|n|}\right)^p\right) = \Theta(|n|^{-p}) ,$$

allora $f \in C^k(\mathbb{R})$.

Dim Proviamo il risultato per $k=1$. In questo caso le ipotesi ci dicono che $p > 2$, poiché

$$|\gamma_n| = \Theta(|n|^{-p}) \quad \text{e} \quad |\ln \omega \gamma_n| = \Theta(|n|^{1-p}) ,$$

con $p-1 > 1$, le serie

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\gamma_n| \quad \text{e} \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\ln \omega \gamma_n| \quad \text{convergono}$$

utilizzando l'M-test di Weierstrass deduciamo che



$$\text{Una serie } \sum_{n=-N}^{+N} |c_n| e^{inx} \xrightarrow{\text{--}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n| < \infty \Rightarrow \sum_{n=-N}^{+N} c_n e^{inx}$$

converge uniformemente in \mathbb{R}

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n e^{inx} \quad \text{con uniforme a } f(x)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \ln \omega \gamma_n e^{inx} \quad \text{— " — } g(x)$$

Per il teorema di derivazione termine a termine f è derivabile e $f' = g$ con g continua. Quindi f è di classe C^1

Il risultato però genera si può quindi dedurre per induzione $\#$

Domanda Supponiamo che $p=k+1$, tale ipotesi è sufficiente a verificare il risultato di cui sopra?

Risposta: No

Esempio $f(x) = x^k$, $-\pi \leq x \leq \pi$ estesa poi 2π -periodicamente.

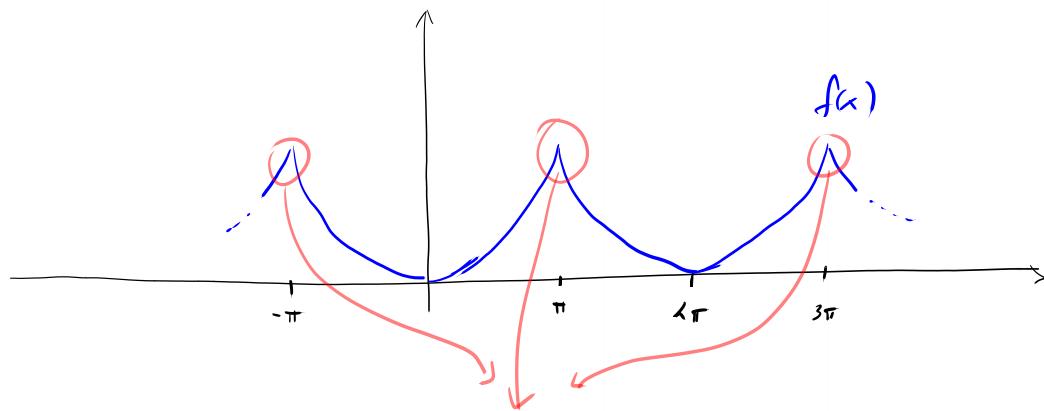
Fogl. 1 es 9.2 sappiamo che

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \underbrace{\cos(nx)}_{\text{in } \mathbb{R}} \rightarrow \cos(nx) = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}$$

$$C_{\pm n}(f) = \frac{2}{n^2}, n \in \mathbb{N}^*$$

\hookrightarrow è esattamente il caso limite $p=k+1$ dove $k=1$

tuttavia la funzione $f(x) = x^k$ estesa 2π -periodicamente non è



In questi punti la funzione è si continua, ma non è derivabile (punti di cuscole)

Esempio 2 Consideriamo la serie

$$(A) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sin(nx)$$

è differenziabile? Che regolarità ha? Sappiamo calcolare $f(x)$?

Domanda 1 La serie trigonometrica (A) converge in qualche punto? Se sì, anche topologia?

Risposta 1 Si la serie è convergente.

$$\frac{1}{n!} = o(2^n)$$

e la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n$ è una serie geometrica, che converge e delle quali sappiamo calcolare la somma.

Siccome la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n!$ ha termini positivi possiamo confrontare i termini generali e dedurre che anch'essa è convergente

→ Utilizzo l'M-test di Weierstrass per dedurre che la serie

$$\sum_n \frac{\sin(nx)}{n!}$$
 converge in \mathbb{R} .

Derviamo la serie ed ottieno la serie

$$\sum_n \frac{n \cos(nx)}{n!}, \quad \text{un coefficiente generale } \frac{n}{n!}$$

Q $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!}$ converge?

$$\frac{n}{n!} \leq \frac{n}{2^n} \rightarrow \text{converge}$$

→ la serie è C^1 .

Per cosa provare che la serie è $C^k \forall k \in \mathbb{N}$.

Recap

1) Princípio di identità delle serie di Fourier

$$f, g \in C^1 \text{ t.c. } c_n(f) = c_n(g) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow f(x) = g(x) \text{ puntualmente.}$$

2) Relazioni tra coefficienti di Fourier e regolarità di una funzione f

a) $c_n(f^{(k)}) = (in\omega)^k c_n(f)$

$$\begin{aligned} c_n(f') &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f'(x) e^{-inx} dx \\ &\stackrel{\text{IPP}}{=} \frac{1}{T} \left[f(x) e^{-inx} \right]_{-T/2}^{T/2} - \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) (-in\omega) e^{-inx} dx \\ &= in\omega \underbrace{\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-inx} dx}_{c_n(f)} \end{aligned}$$

b) Supponiamo d'aver una serie di Fourier

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} r_n e^{inx}$$

dove $|r_n| = O(n^{-p})$, $p > k+l$, $k \in \mathbb{N}$

$$\leadsto f \in C^k$$

Convergenza uniforme delle serie sul Fourier

$$\int_{-T/2}^{T/2} |f(x)|^2 dx < \infty$$

Teorema $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, T -periodica e localmente integrabile e derivabile (attenzione, non stiamo chiedendo $f \in C^1$) con f' localmente integrabile in \mathbb{R} , allora

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{inx}$$

converge uniformemente a f in \mathbb{R} .

Dim Notiamo che le ipotesi che abbiamo assunto soddisfano le ipotesi del teorema di Duhamel per ogni $x \in \mathbb{R}$.

→ Possiamo applicare DW $\forall x \in \mathbb{R}$ ottenendo che la serie $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ converge puntualmente a $f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Siccome f' è T -periodica e localmente integrabile, applicando la diseguaglianza di Besselet ottieniamo che

$$(*) \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f')|^2 \leq \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f'(x)|^2 dx < \infty$$

Deriva dal
che deve che f'
sia loc.int.

Combiniamo la diseguaglianza qui sopra con

Qua vogliamo
esprimere

$$c_n(f') \text{ in termini di } |c_n(f')|^2 = |(in\omega) c_n(f)|^2$$

$$= (in\omega) c_n(f) \cdot \overline{(in\omega) c_n(f)}$$

$$= (in\omega) c_n(f) \cdot (-in\omega) \overline{c_n(f)}$$

$$= n^2 \omega^2 |c_n(f)|^2$$

dalla quale ottieniamo che

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f')|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} n^2 \omega^2 |c_n(f)|^2$$

Applichiamo tale risultato a (*) ottenendo che



$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} n^2 \omega^2 |c_n(\pm)|^2 < \infty$$



Utilizziamo adesso la diseguaglianza di Young (o diseguagliante di convessità)

$$ab \leq \frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{2} b^2 \quad / \cdot 2$$

$$\begin{aligned} \text{I} \quad & 2ab \leq a^2 + b^2 \\ & a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Per dedurre la seguente relazione

$$|c_n(\pm)| = \frac{1}{|\omega|} |\omega| |c_n(\pm)|$$

$$\leq \frac{1}{2} \frac{1}{n^2 \omega^2} + \frac{n^2 \omega^2}{2} |c_n(\pm)|^2 ,$$

e calcolo

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(\pm)| & \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2} \frac{1}{n^2 \omega^2} + \frac{n^2 \omega^2}{2} |c_n(\pm)|^2 \\ & = \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{n^2 \omega^2}}_{< \infty} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} n^2 \omega^2 |c_n(\pm)|^2}_{< \infty \text{ per } \textcircled{1}} \end{aligned}$$

$$< \infty$$

Applichiamo ora l'H-test di Weierstrass ottenendo che

$$S_N(x) = \sum_{n=-N}^N c_n(\pm) e^{inx} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} f(x)$$

uniformemente in \mathbb{R} .

Convergenza in energia o media quadratica

Una serie trigonometrica $\sum_{n \in \mathbb{Z}} Y_n e^{inx}$ converge in energia ($\in L^2$) a una media quadratica di f se posto $S_N(x) = \sum_{n=-N}^N Y_n e^{inx}$ si ha che

$$\|f - S_N\|_{L^2}^2 = \int_{-T/2}^{T/2} |f(x) - S_N(x)|^2 dx \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

Teorema identità di Parseval

Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, T -periodica e loc int si ha che

$$S_N(x) = \sum_{n=-N}^N c_n(t) e^{inx}$$

converge a $f(x)$ in L^2 (o in energia) per $N \rightarrow \infty$ se e solo se

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(t)|^2 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(x)|^2 dx$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} |f(x)|^2 dx < \infty$$

Dim Nella dimostrazione dello disegualanza di Bessel abbiamo

visto che per ogni $N \in \mathbb{N}^*$

$$\int_{-T/2}^{T/2} |f(x) - S_N(x)|^2 dx = \int_{-T/2}^{T/2} |f(x)|^2 dx - T \sum_{n=-N}^N |c_n(t)|^2 \quad (\dagger)$$

$$\|f - S_N\|_{L^2}^2$$

" \Rightarrow " Notiamo che se $S_N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} f$ in L^2 allora facendo tendere

Se abbiamo convergenza in L^2 per $N \rightarrow \infty$ allora l'identità di Parseval è vera

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(x)|^2 dx &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N |c_n(t)|^2 + \underbrace{\int_{-T/2}^{T/2} |f(x) - S_N(x)|^2 dx}_{\rightarrow 0} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(t)|^2 \end{aligned}$$

" \Leftarrow "
 Se l'identità di
 Parseval è vera
 allora
 $S_N \rightarrow f$ in L^2

$$\int_{-T/2}^{T/2} |S_N(x) - f(x)|^2 dx = \int_{-T/2}^{T/2} |f(x)|^2 dx - T \sum_{n=-N}^N |c_n|^2 \quad (*)$$

Noi sappiamo che vale l'identità di Parseval, ossia

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(x)|^2 dx$$

Facciamo tendere $N \rightarrow \infty$ in $(*)$ ottenendo che

$$\int_{-T/2}^{T/2} |f(x)|^2 dx - T \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} |S_N(x) - f(x)|^2 dx$$

// Per Parseval

O

Ottengono dunque che

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} |S_N(x) - f(x)|^2 dx = 0 ,$$

ossia si verifica la definizione di convergenza in L^2 $\#$

Teorema (di convergenza in energia)

$$\int_{-T/2}^{T/2} |f(x)|^2 dx < \infty$$

Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, T -periodica e localmente integrabile allora vale l'identità

di Parseval e quindi $S_N(x)$ converge in energia (o in L^2) a f .

$$\text{mo} \quad \underline{\text{cor}} \quad \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(x)|^2 dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$$

Domanda Quali sono le relazioni tra convergenza in misura, la convergenza puntuale e la convergenza uniforme di una serie di f ?

• $CU \Rightarrow CP$: ovvio

• $CU \Rightarrow CE$

$$\int_{-T/L}^{T/L} |f(x) - S_N(x)|^L dx \leq \int_{-T/L}^{T/L} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - S_N(x)|^L dx = T \underbrace{\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - S_N(x)|}_{} \rightarrow 0$$

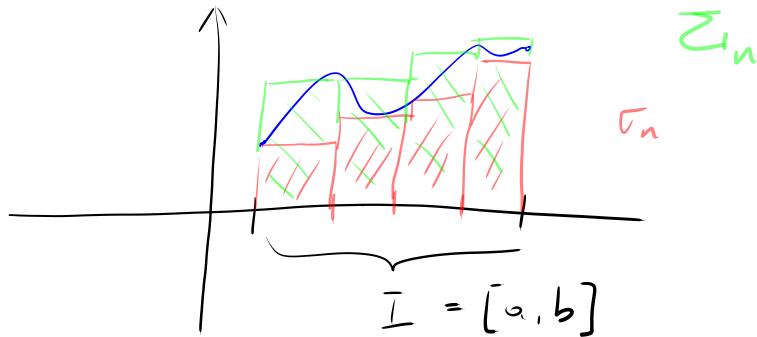
• $CE \Rightarrow CP$?

Teatra dell'integrazione secondo Lebesgue

Motivazione: colmare alcune debolezze della teoria di integrazione secondo Riemann.

Recap (brivissimo) della teoria di Riemann

Sia $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$



Consideriamo una partizione di I

$$I = \bigcup_{n=1}^N I_n \quad I_n = \left[a + \frac{b-a}{N}(n-1), a + \frac{b-a}{N}n \right]$$

$\overbrace{\qquad\qquad\qquad}^I$

I_n

E consideriamo ora le somme parziali inferiori e superiori definite come

$$\Sigma_n = \sum_{n=1}^N |I_n| \sup_{x \in I_n} f(x)$$

$$\sigma_n = \sum_{n=1}^N |I_n| \inf_{x \in I_n} f(x)$$

Se f fornisce il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \Sigma_n = \mathcal{I}$$

allora f è \mathbb{R} -integrabile su $I = [a, b]$ e $\int_a^b f(x) dx = \mathcal{I}$

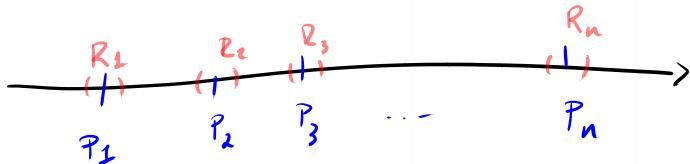
Insieme di misura nulla secondo Peano - Jordan

Si dice che un insieme $T \subseteq \mathbb{R}^N$ ha P^J -misura nulla se $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n \in \mathbb{N}$ rettangoli R_1, \dots, R_n tali che

$$T \subseteq R_1 \cup \dots \cup R_n \quad \text{e} \quad m(R_1) + \dots + m(R_n) < \varepsilon$$

Oss n può dipendere da ε ma è sempre una quantità finita

Esempio



$$R_k = \left[P_k - \frac{\varepsilon}{2n}, P_k + \frac{\varepsilon}{2n} \right]$$

$$m(R_1) + \dots + m(R_n) = \underbrace{\varepsilon_n + \dots + \varepsilon_n}_{\times n} = \varepsilon$$

Insieme di misura nulla secondo Lebesgue

Si dice che $T \subseteq \mathbb{R}^N$ ha L -misura nulla se $\forall \varepsilon > 0$ \exists una successione di rettangoli $(R_i)_{i \in \mathbb{N}}$ t.c.

$$T \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} R_i \quad \text{e} \quad \sum_{i \in \mathbb{N}} m(R_i) < \varepsilon$$

$$\text{e si avremo } m(T) = m^L(T) = 0$$

Esempio Consideriamo l'insieme $\mathbb{Q} \cap [\underline{0}, 1] = Q$

Considerazioni:

- L'insieme Q è numerabile

$\diagdown \mathbb{N}$	1	2	3	4	...
\mathbb{N}	$1/1$	$2/1$	$3/1$	$4/1$	
1					
2	$1/2$	$2/2$	$3/2$	$4/2$	
3	$1/3$	$2/3$	$3/3$	$3/4$	
4					

Diagonalizzazione
di Cantor

• L'insieme \mathbb{R} non è numerabile

Dm Supponiamo che $[0,1]$ sia numerabile
allora posso scrivere $[0,1]$ come biiezione con \mathbb{N}

$$0, \underset{\textcircled{1}}{a_{11}} a_{12} a_{13} a_{14} \dots$$

$$0, a_{11} \underset{\textcircled{2}}{a_{22}} a_{23} a_{24} \dots$$

↓

$$0, a_{n1} a_{n2} \dots, \underset{\textcircled{n}}{a_{nn}} \dots$$

$$0, b_1 b_2 b_3, \dots \quad b_n \neq a_{nn}$$

In questo modo identifichiamo un numero che appartiene all'insieme $[0,1]$ ma è diverso da ogni elemento delle successioni numerate



Ripetiamo l'esempio $Q = \mathbb{Q} \cap [0,1]$

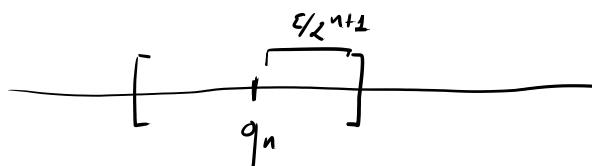
CLAIM: Q ha misura di Lebesgue nulla

Q è un sottinsieme dei numeri razionali

$$\Rightarrow Q = (q_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

Potrei dunque definire il rettangolo (chiuso) R_n attorno a q_n

$$R_n = \left[q_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, q_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \right]$$



Affermo dunque che

$$m^L(R_n) = \varepsilon/2^n$$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} m^L(R_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \varepsilon/2^n = 2\varepsilon$$



Proprietà verificata quasi ovunque (q.o.)

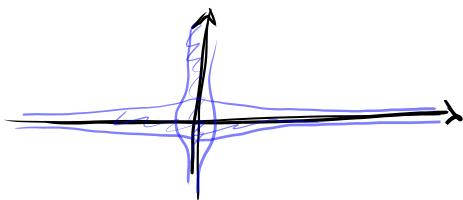
Si dice che una proprietà (o predicato) $p(x)$ definito $\forall x \in E \subseteq \mathbb{R}^N$ è verificata q.o. in E se $p(x)$ è verificata $\forall x \in T \subseteq E$ e t.c.

$$m(E \setminus T) = 0$$

Esempio • Proprietà: x è irrazionale in $[0, 1]$.

• $p(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{e}^{-nx^2} = 0 \quad x \in E = \mathbb{R}$. p è vera q.o.

• $p(x, y) = "xy = 0" \quad (x, y) \in E = \mathbb{R}^2 \quad p$ è falsa q.o. in \mathbb{R}^2



Convergenza punto a punto q.o.

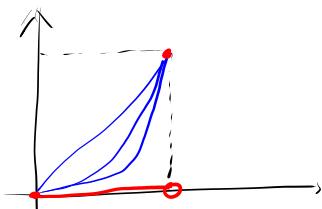
Sia $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni con $f_n : E \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$ e sia $f : F \rightarrow \mathbb{C}$ si dice che $(f_n)_n$ converge q.o. a f in E se

$$\lim_n f_n(x) = f(x) \quad \text{q.o. in } E$$

Esempio • $f_n(x) = \bar{e}^{-nx^2}, \quad f(x) = 0 \quad E = \mathbb{R}$

• $f_n(x) = x^n, \quad f(x) = 0 \quad E = [0, 1]$

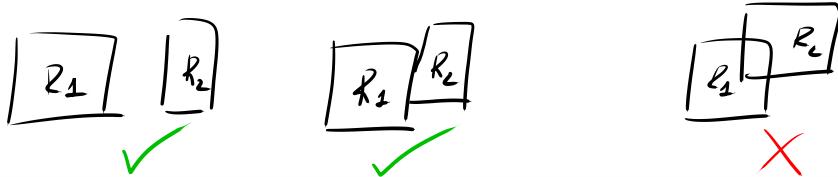
$f_n(1) \equiv 1 \quad \forall n$ dunque $f_n(1) \not\rightarrow f(1)$ tuttavia
 $f_n(x) \rightarrow f(x) \quad \forall x \in [0, 1]$



Funzioni a scale

Una funzione $s : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$ si dice funzione a scale se esistono k rettangoli R_1, \dots, R_k con $\text{int}(R_i) \cap \text{int}(R_j) = \emptyset$ se $i \neq j$ e k numeri complessi c_1, \dots, c_k t.c.

$$s(x) = c_1 \chi_{R_1}(x) + c_2 \chi_{R_2}(x) + \dots + c_k \chi_{R_k}(x).$$



Oss Una funzione a scale è integrabile secondo Riemann e si ha

$$\int_{\mathbb{R}^N} s = \sum_{j=1}^k c_j m(R_j)$$

Funzione integrabile secondo Lebesgue in \mathbb{R}^N

Sia $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$, si dice che f è integrabile secondo Lebesgue in \mathbb{R}^N se \exists una successione di funzioni a scale $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ t.c.

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = f(x) \quad L\text{-q.o. in } \mathbb{R}^N$$

$$2) \lim_{n,m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |s_n - s_m| = 0$$

(Condizione di Cauchy integrale)

In tal caso si pone

$$\int_{\mathbb{R}^N} f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} s_n \quad (L)$$

Oss Una prima obiezione che può essere fatta è la seguente: come possiamo essere sicuri che $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} s_n$?

Consideriamo la serie di valori complessi

$$J_n = \int_{\mathbb{R}^N} s_n \in \mathbb{C}$$

Calo l'iamo ora $\forall n, m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} |J_n - J_m| &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} s_n - \int_{\mathbb{R}^N} s_m \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^N} (s_n - s_m) \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |s_n - s_m| \xrightarrow[n, m \rightarrow \infty]{\text{per la condizione 2)} 0} \end{aligned}$$

\rightsquigarrow Allora abbiamo provato che la successione $(J_n)_n$ è una successione di Cauchy in \mathbb{C} .

Sappiamo tuttavia che \mathbb{C} è completo, quindi

$$\exists \lim_n J_n = \lim_n \int_{\mathbb{R}^N} s_n$$

Funzioni misurabili secondo Lebesgue in \mathbb{R}^N

Una funzione $f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$ si dice misurabile in \mathbb{R}^N se \exists una successione di funzioni a scale $(s_n)_n \in \mathbb{C}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = f(x) \quad L\text{-q.o. in } \mathbb{R}^N$$

Insiemi misurabili secondo Lebesgue in \mathbb{R}^N

Un insieme $E \subset \mathbb{R}^N$ è misurabile secondo Lebesgue se la funzione χ_E è L -integrale. In tal caso definiamo

$$m^L(E) = \int_{\mathbb{R}^N} \chi_E$$

Funzioni integrabili in sottinsiemi di \mathbb{R}^N

Sia $f: E \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$ con E misurabile. Si dice che f è integrabile in E se, data la funzione

$$f_0(x) = \begin{cases} f(x) & x \in E \\ 0 & x \in \mathbb{R}^N \setminus E \end{cases}$$

allora f_0 è L -integrabile in \mathbb{R}^N .

Funzioni misurabili secondo Lebesgue su insieme misurabile

Sia $f: E \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$ con E L -misurabile si dice che f è misurabile secondo Lebesgue in E se la funzione f_0 definita sopra è L -misurabile in \mathbb{R}^N .

Tutti i concetti introdotti nelle pagine precedenti sono propedeutici al seguente teorema, che è il teorema fondamentale della teoria dell'integrazione secondo Lebesgue.

Teorema [di convergenza dominata secondo Lebesgue]

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$ un insieme L -misurabile in \mathbb{R}^N e sia $(f_n)_n$ una successione di funzioni, con $f_n: E \rightarrow \mathbb{C}$ misurabile $\forall n$, convergente q.o. in E a una funzione $f: E \rightarrow \mathbb{C}$.

Se \exists una funzione $g: E \rightarrow \mathbb{R}_+$ integrabile e tale che $\forall n$

$$|f_n(x)| \leq g(x) \quad \text{q.o. in } E$$

allora f_n è integrabile $\forall n$, e pure il limite puntuale q.o. f è integrabile e si ha che

$$\lim_n \int_E f_n = \int_E f$$

RecapTerema (convergenza dominata di Lebesgue)

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$ un insieme misurabile e sia $(f_n)_n$ di funzioni $f_n : E \rightarrow \mathbb{C}$ misurabili $\forall n$, convergenti q.o. a una funzione $f : E \rightarrow \mathbb{C}$

Supponiamo che esista $g : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ integrabile et.c.

$$|f_n(x)| \leq g(x) \quad \text{q.o. in } E \quad \forall n$$

allora f_n è integrabile $\forall n$ e pure il limite puntuale q.o. f è integrabile e si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n = \int_E f$$

Esempio

Calcolare, se esiste il $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} e^{-nx^2}$.

Demonstriamo $\forall n \geq 1$ la funzione $f_n(x) = e^{-nx^2}$. $\forall n$ la funzione f_n è continua (infatti è C^∞) e quindi è una funzione misurabile.

- Notiamo che

$$\lim_n e^{-nx^2} = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Questo limite (puntuale) identifica anche la funzione target, detta come f nell'enunciato del \lim di convergenza dominata di L.

Ossia $f(x) = 0$.

- $|f_n(x)| = |e^{-nx^2}| \leq |e^{-x^2}|$

Abbiamo solennificato un candidato per essere definito come funzione g nell'enunciato del \lim di L, ossia

$$g(x) = e^{-x^2}$$

Sappiamo che la funzione g è integrabile in \mathbb{R} .

→ Applichiamo il teorema di convergenza dominante di L.

$$\rightarrow \int \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n = \int f = \int g = 0$$

Oss. Non è così banale il fatto che \int un limite degli integrali dell'esempio sopra. Infatti stiamo integrando una funzione che si converge a zero (puntualmente), ma che viene integrata in un dominio illimitato (\mathbb{R}).

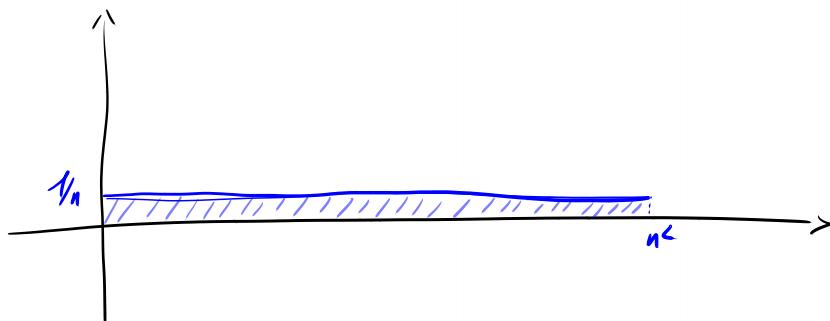
¶
o

Necessità
della
funzione
dominante

g.

Esempio

$$\phi_n(x) = \begin{cases} 1/n & x \in [0, n^2] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



$$\int_R \phi_n = n^2 \cdot \frac{1}{n} = n$$

Conseguenze del teorema di convergenza dominante

- 1) Supponiamo $f: E \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$ misurabile con E misurabile se $\int g: E \rightarrow \mathbb{R}_+$ integrabile e.t.c.

$$|f(x)| \leq g(x)$$

Allora f è integrabile

- 2) $f: E \rightarrow \mathbb{C}$, con E misurabile, si ha che f è integrabile sse $|f|$ è integrabile

3) Siano $f, g : E \rightarrow \mathbb{C}$ misurabili e t.c $f(x) = g(x)$ q.o.

si ha che f è integrabile in E sse g lo è, in tal caso si ha che

$$\int_E f = \int_E g.$$

Dim $g \in \mathcal{M} \Rightarrow f \in \mathcal{M}$

se g è \mathcal{M} allora per il punto 2) $|g|$ è integrabile

Siccome $f = g$ q.o. la funzione $|g|$ è la funzione dominante, a questo punto possiamo applicare il thm d.c.s. L

Oss Visto il punto 3) possiamo dire che ai fini dell'estesa dell'integrazione su L possiamo identificare tutte le funzioni che differiscono in un insieme di misura nulla.

Un primo in analisi funzionale

D'ora in avanti denotiamo con la lettera \mathbb{K} il campo \mathbb{R} o \mathbb{C} .

[Per cosa riguarda la definizione di campo]

Spazi normati

Sia E uno spazio vettoriale sul campo \mathbb{K} . Un'applicazione

$\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$ si dice norma se le seguenti condizioni sono verificate $\forall x, y \in E$ e $\lambda \in \mathbb{K}$:

1) $\|x\| = 0 \iff x = 0$ (non-degenerata)

2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ (omogeneità)

3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (subadditività)

In tal caso la coppia $(E, \|\cdot\|)$ si dice **spazio normato**

NB Se definiamo la funzione $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}_+$ come

$d(x, y) = \|x - y\|$ la funzione d soddisfa gli assiomi della funzione distanza.
otteniamo che (E, d) è uno spazio metrico

→ La condizione di essere spazio normato è una condizione più forte di quelle di spazio metrico.

Esempi

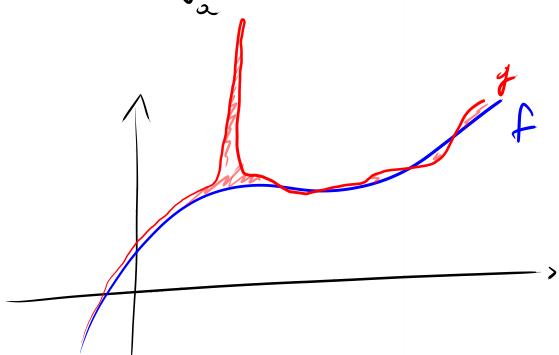
- $(\mathbb{R}, |\cdot|)$
- $(\mathbb{C}, |\cdot|)$
- $(\mathbb{R}^N, |\cdot|_2)$, dove $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^N x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$
- $(C^0([a, b]; \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$

dove $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$

- $(C^0([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx$$

NB



f e g sono "vicine" secondo la norma $\|\cdot\|_1$ mentre sono "lontane" per $\|\cdot\|_\infty$

Successione di Cauchy

Sia $(x_n)_n$ una successione in $(E, \|\cdot\|)$. Diciamo che $(x_n)_n$ è una **successione di Cauchy** se

$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n, m > n_0$ si ha che

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

Alternativamente

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|x_n - x_m\| = 0.$$

OSS Ogni successione convergente è una successione di Cauchy, ma non è detto che una successione di Cauchy sia convergente.

Esempio canonico di spazio metrico non completo
 $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$

Sappiamo che esistono molti numeri irrazionali $\sqrt{2}, \pi, \dots$

Consideriamo $\sqrt{2}$ e consideriamo l'intorno

$$U_n = (\sqrt{2} - \frac{1}{n}, \sqrt{2} + \frac{1}{n}) \quad \forall n \geq 1$$

Sappiamo che \mathbb{Q} è denso in \mathbb{R} . Dunque so che $\exists q_n \in \mathbb{Q}$ t.c. $q_n \in U_n$

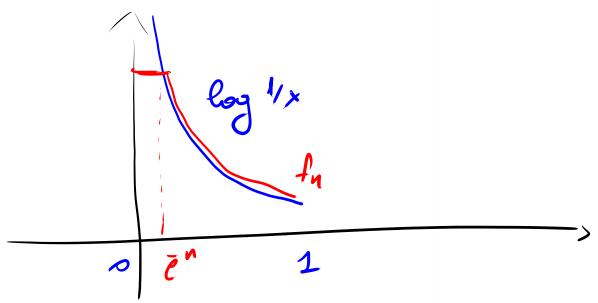
È possibile provare che la successione $(q_n)_n$ è di Cauchy (\times casa)
 Tuttavia per costruzione si ha che $q_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Esercizio Costruire una successione di Cauchy nello spazio normato

$$(C^0([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$$

che non converge in $C^0([0,1], \|\cdot\|_1)$

Suggerimento Considerare la successione $f_n(x) = \begin{cases} \log \frac{1}{x} & \text{se } x \in [e^{-n}, 1] \\ n & \text{se } x \in [0, e^{-n}] \end{cases}$



Spazio di Banach

Uno spazio normato $(\mathbb{E}, \|\cdot\|)$ nel quale ogni successione di Cauchy è convergente si dice spazio di Banach

Recap

Spazio di Banach: $(E, \|\cdot\|)$ viene detto spazio normato se ogni successione di Cauchy è convergente in $(E, \|\cdot\|)$.

Sappiamo da Analisi 1 che una successione convergente è una successione di Cauchy, tuttavia l'implicazione opposta non è sempre vera.



Spazi obiettivi di un prodotto scalare

Esempio finito-dimensionale \mathbb{R}^2



$$v_1 \cdot v_2 = |v_1| |v_2| \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{v_1 \cdot v_2}{|v_1| |v_2|}$$

Conseguenze: se $v_1 \perp v_2 \Rightarrow v_1 \cdot v_2 = 0$

Definizione: Sia E uno spazio vettoriale su \mathbb{K} ($= \mathbb{R} \cup \mathbb{C}$)
un'applicazione binaria $(\cdot, \cdot) : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$ si dice **prodotto scalare**
se $\forall x, y \in E \subset \mathbb{K}, \mu \in \mathbb{K}$

- | | |
|---|---------------------------------------|
| s1) $(x+y, z) = (x, z) + (y, z)$
s2) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$
s3) $(x, y) = \overline{(y, x)}$
s4) $(x, x) \geq 0 \text{ e } (x, x) = 0 \text{ sse } x = 0.$ | $\left. \right\}$ forma sesquilineare |
|---|---------------------------------------|

Oss Se solo firmiamo $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ è una funzione norma ($x \in E$)

Questo significa che dato un prodotto scalare su uno spazio normato $(E, \|\cdot\|)$ è possibile canonicamente identificare una norma $\|\cdot\|$ sullo stesso spazio.

Prodotto Scalare \rightarrow Norma \rightarrow funzione distanza

Diseguaglianza di Cauchy - Schwarz

$$\forall x, y \in E \quad |(x, y)| \leq \|x\| \|y\|.$$

Esempi

- $(\mathbb{R}^N, (\cdot, \cdot))$, $(x, y) = \sum_{n=1}^N x_n y_n$

- $(\mathbb{C}^n, (\cdot, \cdot))$, $(x, y) = \sum_{n=1}^N x_n \bar{y}_n$

- $(C^0([a, b], \mathbb{C}), (\cdot, \cdot)_{L^2})$

$$(f, g)_{L^2} = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$$

Def Sia $(E, (\cdot, \cdot))$ uno spazio t.c. $(E, \|\cdot\|)$, $\|\cdot\| = \sqrt{(\cdot, \cdot)}$

è uno spazio di Banach si dice **spazio di Hilbert**

Ossia uno spazio vettoriale con prodotto scalare che risulti completo rispetto alla norma canonica indotta dal p.s. si dico sp. di Hilbert.

Famiglie ortogonali e ortomodali

Sia $(E, (\cdot, \cdot))$ uno spazio vettoriale dotato di p.s.

Una famiglia $(e_\alpha)_{\alpha \in J}$ con $J \subseteq \mathbb{R}$ (tipicamente $J = \mathbb{N} \cup \mathbb{Z}$)

si dice **ortogonale** se

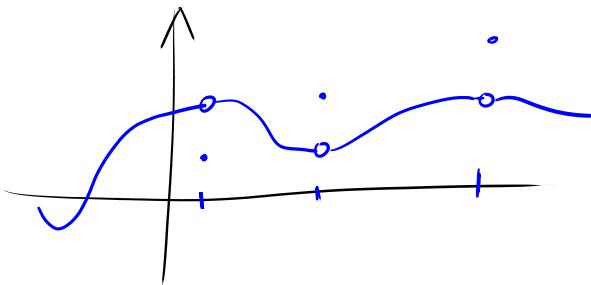
$$(e_\alpha, e_\beta) = 0 \quad \forall \alpha \neq \beta \text{ in } J$$

Inoltre se $\|e_\alpha\| \equiv 1$ la famiglia si dice **ormodale**

Esempio Le armoniche elementari sono famiglie ortogonali rispetto $(\cdot, \cdot)_{L^2}$

Gli spazi di Lebesgue L^1, L^2 e L^∞

Dato un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^N$ è da considerarsi un insieme misurabile e identificare $f \in g$ e $f(x) = g(x)$ q.o. in E



Lo spazio $L^1(E)$

Poniamo

$$L^1(E) = L^1(E; \mathbb{C})$$

$$= \{f: E \rightarrow \mathbb{C}, \text{misurabili e t.c. } \int_E |f| < \infty\}$$

definiamo altresì

$$\|f\|_1 = \int_E |f|$$

$\|\cdot\|_1$ è una norma su $L^1(E)$ e la coppia $(L^1(E), \|\cdot\|_1)$ è uno spazio Banach

Supponiamo che $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converga a $g^* \in L^2$ se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n - g^*\|_2 = 0$$

Proprietà C₁ Sia $(f_n)_n$ una successione in L^2 che converge a f in L^2 . Esiste una sottosequenza $(f_{n_k})_k$ di $(f_n)_n$ t.c.
 $f_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f$ q.o. in E.

Lo spazio $L^2(E)$

Poniamo $L^2(\mathbb{E}) = L^2(E; \mathbb{C})$
= $\{f : E \rightarrow \mathbb{C}, \text{misurabili e t.c. } \int_E |f|^2 < \infty\}$

e definiamo

$$(f, g)_2 = \int_E f(x) \overline{g(x)} \quad \text{e} \quad \|f\|_2 = \left(\int_E |f|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$(\cdot, \cdot)_2$ è un prodotto scalare e $(L^2(\mathbb{E}), (\cdot, \cdot))$ è uno spazio di Hilbert.

Oss Perché la norma è elevata alla potenza $\frac{1}{2}$?

Ricordiamoci il secondo axioma definito la ft norma

$$\|2x\| = 2\|x\|$$

$$\|2f\|_2 = \left(\int_E |2f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_E |2|^2 |f|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(|2|^2 \int_E |f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = |2| \left(\int_E |f|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= |2| \|f\|_2$$

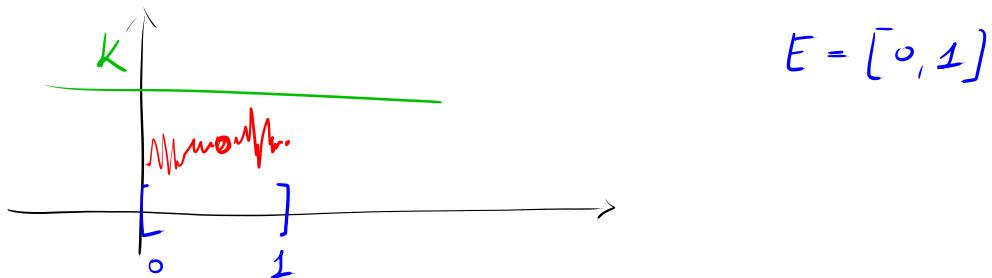
Proprietà C_k

Se $(f_n)_n \subseteq L^2$ t.c. $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ in L^2 allora $\exists (f_{n_k})_k$ t.c.
 $f_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f$ q.o. in E .

Lo spazio $L^\infty(E)$

$$L^\infty(E) = L^\infty(E; \mathbb{C})$$

$= \{f: E \rightarrow \mathbb{C} \text{ misurabile per le quali } \exists k > 0 \text{ t.c.}$
 $|f(x)| \leq k \text{ q.o. in } E\}$



Possiamo definire una norma in $L^\infty(E)$

$$\|f\|_\infty = \inf \{k > 0 \text{ t.c. } |f(x)| \leq k \text{ q.o. in } E\}$$

Lo spazio $(L^\infty(E), \|\cdot\|_\infty)$ è uno spazio di Banach.

Osservazioni

$E \subseteq \mathbb{R}^N$ misurabile

- Se E è limitato allora

$$L^\infty(E) \subsetneq L^2(E) \subsetneq L^1(E)$$

e valgono le seguenti diseguaglianze

$$\|f\|_1 \leq \sqrt{\mu(E)} \|f\|_2 \quad (1)$$

$$\|f\|_2 \leq \sqrt{\mu(E)} \|f\|_\infty \quad (2)$$

- Se E non è limitato allora non si hanno inclusioni

Din

Vogliamo dimostrare (1) ossia dato una funzione $f \in L^2(\bar{E})$ vogliamo dimostrare che $f \in L^1(E)$ e la diseguaglianza (1) è vera

$$\int_E |f| = \int_{\bar{E}} 1 \cdot |f| = (1, |f|)$$

Per CS si ha che

$$\leq \left(\int_{\bar{E}} 1 \right)^{1/2} \left(\int_E |f|^2 \right)^{1/2}$$

$\underbrace{}$

$$= \|f\|_2$$

Mentre siccome E è limitato $\int_E 1 = m(E)$

Inserendo tale risultato otengo che

$$\|f\|_2 \leq m(E)^{1/2} \|f\|_2.$$

- Dimostriamo ora (2). Sia $f \in L^\infty(E)$ e calcoliamo

$$\|f\|_2 = \left(\int_E |f|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sup_{x \in E} |f(x)|^2 \int_E 1 \right)^{1/2}$$

$$\leq \sqrt{m(E)} \|f\|_\infty$$

Daf Definiamo con

$$\begin{aligned} L^2(E) &= L^2(E, \mathbb{C}) \\ &= \left\{ f: E \rightarrow \mathbb{C} : \int_E |f|^2 < \infty \right\} \end{aligned}$$

Serie di Fourier in $L^2(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$

1) Teorema di convergenza in $L^2(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$

Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, T -periodica e $f \in L^2(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$

(ossia $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(x)|^2 dx < \infty$)

allora

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - S'_N\|_2 = 0 ,$$

c. la serie di Fourier

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(t) e^{inx}$$

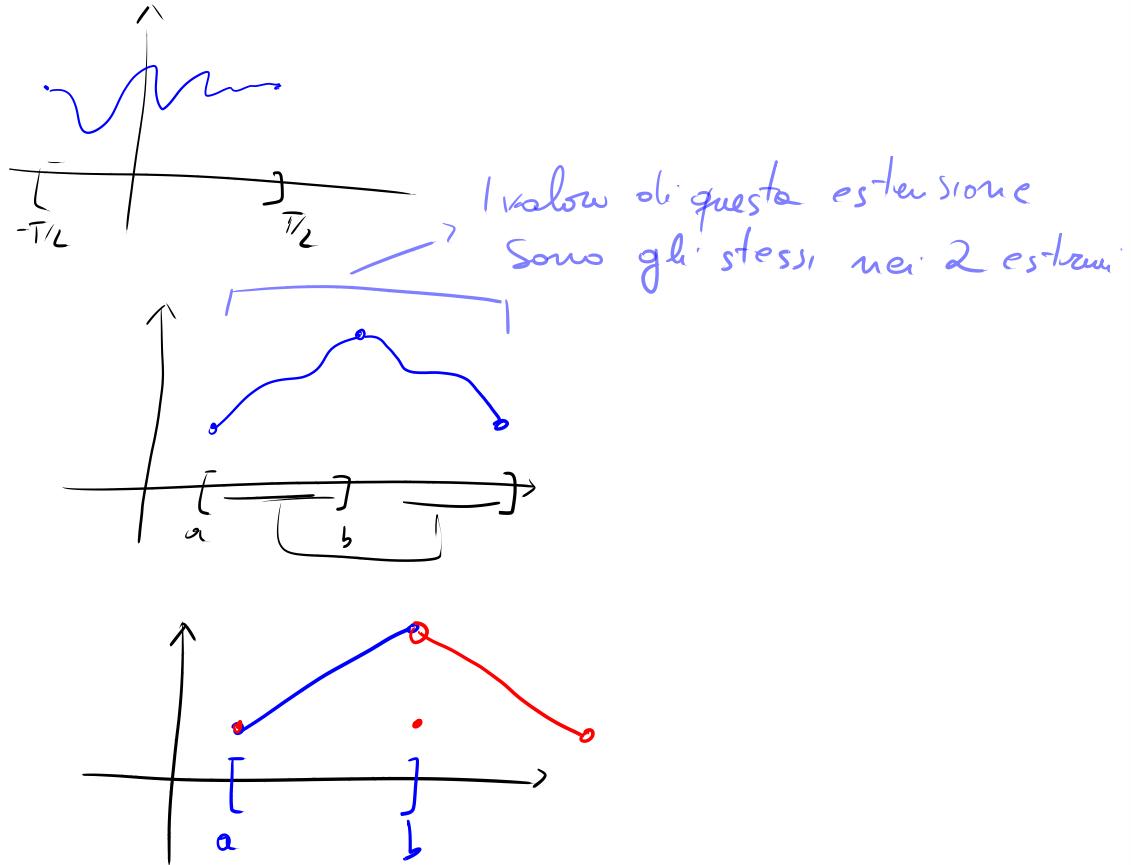
converge q.o. a f in $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$.

Introduzione alla trasformata di Fourier

Problema: come generalizzare il concetto di serie di Fourier a funzioni che non sono periodiche?

Caso 1: funzioni che sono definite su un intervallo compatto $[a, b]$

Sol 1: estendere periodicamente la funzione al di fuori di $[a, b]$ e procedere come nel caso periodico



Caso 2: funzioni definite su tutta la retta reale

Questa parte del corso si propone come obiettivo di rispondere a tale domanda.

Discussione euistica

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Procediamo "formalmente" cioè senza specificare precise ipotesi necessarie e giustificare i passaggi.

Sappiamo che $\forall T > 0$ se f è definita in $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-inx} dx \right) e^{inx} \quad (1)
 \end{aligned}$$

Supponiamo che T sia "grande" ossia $T \gg 1$

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-inx} dx \approx \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-inx} dx$$

Possiamo dunque porre a questo punto

$$\hat{f}(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\alpha t} dt$$

Con tale notazione otteniamo (all'equazione (1)) che

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-int} dt \right) e^{inx} \\ &\approx \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-int} dt \right) e^{inx} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \omega \hat{f}(nw) e^{inx} \end{aligned}$$

Sappiamo tuttavia che siccome $T \gg 1$, $\omega = \frac{2\pi}{T} \ll 1$
e dunque approssimiamo la somma discreta

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \omega \hat{f}(nw) e^{inx}$$

con l'integrale

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha$$

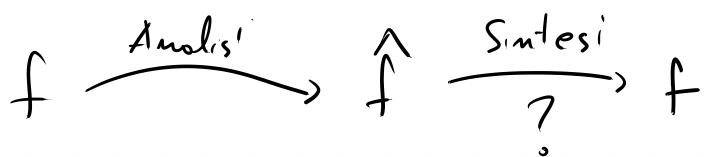
e quindi otteniamo che

$$f(x) \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha$$

Nel gergo di analisi e sintesi otteniamo il seguente per una funzione definita in \mathbb{R}

$$\hat{f}(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\alpha x} dx \quad \text{"Analisi"}$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha \quad \text{"Sintesi"}$$



Sotto quali ipotesi la sintesi riporta la funzione di partenza?

Trasformata di Fourier in $L^2(\mathbb{R})$

Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $f \in L^2(\mathbb{R})$ (ossia $\int_{\mathbb{R}} |f|^2 < \infty$) la trasformata di Fourier (FT) è la funzione

$$\mathcal{F}(f) = \hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

definita come

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$$

Osservazione Vista la definizione di \hat{f} potrebbe essere che tale oggetto non sia ben definito nel caso, per esempio che la funzione $x \mapsto f(x) e^{-i\omega x}$ non sia integrabile.

Tuttavia noi assumiamo, per ipotesi, che $f \in L^2$, ovunque

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \right| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| |e^{-i\omega x}| dx \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| \underbrace{|e^{-i\omega x}|}_{\equiv 1} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < \infty \text{ siccome } f \in L^2(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

Dunque se $f \in L^1(\mathbb{R})$ la trasformata di Fourier \hat{f} è ben definita.

Osservazioni

Dalla formula di Eulero $e^{it} = \cos t + i \sin t$, si ottiene

$$\begin{aligned}\hat{f}(w) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixw} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) (\cos(-wx) + i \sin(-wx)) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) [\cos(wx) - i \sin(wx)] dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(wx) dx - i \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(wx) dx.\end{aligned}$$

Sezione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ esistono 2 funzioni $u, v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ t.c.

$$f(x) = u(x) + i v(x)$$

$$\begin{aligned}\hat{f}(w) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (u(x) \cos(wx) + v(x) \sin(wx)) dx \\ &\quad + i \int_{-\infty}^{+\infty} (v(x) \cos(wx) - u(x) \sin(wx)) dx\end{aligned}$$

Simmetrie

1) f pari $\rightsquigarrow u, v$ pari, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Esempio

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{v(x)}_0 \sin(wx) dx = \int_{-\infty}^0 v(x) \sin(wx) dx + \int_0^{+\infty} v(x) \sin(wx) dx$$

Con il cambio di variabile $y = -x$

$$\int_{-\infty}^0 v(x) \sin(wx) dx = - \int_0^{+\infty} v(y) \sin(wy) dy$$



$$\text{e dunque } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin(wx) dx = 0$$

Utilizzando tali conclusioni otteniamo la formula semplificata

$$\hat{f}(w) = 2 \int_0^{\infty} f(x) \cos(wx) dx \quad \text{e } \hat{f} \text{ è una funzione pari}$$

- Se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olispari, risulta che

$$\hat{f}(w) = -2 \int_0^{\infty} f(x) \sin(wx) dx, \quad \hat{f} \text{ è olispari.}$$

Esempi di FT di funzioni in $L^2(\mathbb{R})$

- Trasformate di FT di una f caratteristica di un intervallo compatto

$$f(x) = \chi_{[a,b]}(x)$$

$$\begin{aligned} \hat{f}(w) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixw} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{[a,b]}(x) e^{-ixw} dx \\ &= \int_a^b e^{-ixw} dx = \left[-\frac{e^{-ixw}}{iw} \right]_a^b = \frac{1}{iw} \left[e^{-ixa} - e^{-ixb} \right] \end{aligned}$$

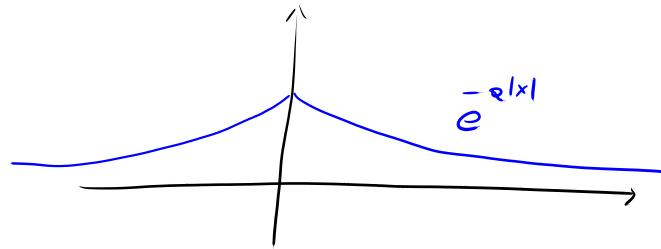
se $w \neq 0$

$$\text{se } w = 0 \quad \hat{f}(0) = \int_a^b 1 dx = b - a$$

Possiamo dunque concludere che

$$\hat{\chi}_{[a,b]}(w) = \begin{cases} b - a & \text{se } w = 0 \\ \frac{1}{iw} (e^{-ixa} - e^{-ixb}) & \text{se } w \neq 0. \end{cases}$$

- FT delle funzioni $e^{-\alpha|x|}$ con $\alpha > 0$



Consideriamo $f(x) = e^{-\alpha|x|}$ $\leadsto f \in L^2(\mathbb{R})$ siccome l'esponenziale è integrabile.

Si ha che

$$\begin{aligned}
 \hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|x|} e^{-i\omega x} dx \quad |x| = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases} \\
 &= \int_{-\infty}^0 e^{(\alpha-i\omega)x} dx + \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+i\omega)x} dx \\
 &= \frac{1}{\alpha-i\omega} e^{(\alpha-i\omega)x} \Big|_{-\infty}^0 + \frac{1}{-(\alpha+i\omega)} e^{-(\alpha+i\omega)x} \Big|_0^{\infty} \\
 &= \frac{1}{\alpha-i\omega} + \frac{1}{\alpha+i\omega} = \frac{\cancel{\alpha+i\omega} + \cancel{\alpha-i\omega}}{(\alpha-i\omega)(\alpha+i\omega)} \\
 &= \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}
 \end{aligned}$$

Allora otteniamo che

$$\hat{f}(\omega) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$$

Osservazione

$$f(x) = e^{-\alpha|x|} \xrightarrow{\text{analisi}} \hat{f}(\omega) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$$

$$\xrightarrow{\text{sintesi}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega \quad \text{e vedere se ritrovo la funzione } f(x)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\alpha \frac{e^{i\omega x}}{\alpha^2 + \omega^2} d\omega$$

Recap

La trasformata di Fourier di una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ è definita come

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$$

Esempio $X_{[a,b]} = f$

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} X_{[a,b]}(x) e^{-i\omega x} dx \\ &= \int_a^b e^{-ix\omega} dx = \frac{e^{-ix\omega}}{-i\omega} \Big|_a^b\end{aligned}$$

Integrali dipendenti da parametriTeorema di continuità

Sia $h: \mathbb{R} \times I \rightarrow \mathbb{C}$ con $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo tc.

- $h(\cdot, t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ è integrabile $\forall t \in I$
- $h(x, \cdot): I \rightarrow \mathbb{C}$ è continua q.o. in $x \in \mathbb{R}$

Se $\exists g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile e tc

$$|h(x, t)| \leq g(x) \quad \forall t \in I, \text{ e q.o. } x \in \mathbb{R}$$

allora la funzione $H: I \rightarrow \mathbb{C}$ definita come

$$H(t) = \int_{\mathbb{R}} h(x, t) dx$$

è continua in I .

Teorema di derivazione sotto il segno di integrale.

Se $h : \mathbb{R} \times I \rightarrow \mathbb{C}$ con $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo tc

- $h(\cdot, t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ è integrabile $\forall t \in I$
- $h(x, \cdot) : I \rightarrow \mathbb{C}$ è di classe C^1 q.o. $x \in \mathbb{R}$

Se $\exists g_1, g_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ integrabili etc

$$|h(x, t)| \leq g_1(x) \quad \text{e} \quad \left| \frac{\partial h}{\partial t}(x, t) \right| \leq g_2(x)$$

$\forall t \in I$ o q.o. $x \in \mathbb{R}$. Allora la funzione

$$H(t) = \int_{\mathbb{R}} h(x, t) dx$$

è di classe C^1 e si ha

$$\frac{d}{dt} H(t) = \int_{\mathbb{R}} \partial_t h(x, t) dx$$

Proprietà della FT

1) Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ allora $\hat{f} \in C^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ ed inoltre

$$\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$$

Dim

i) Proviamo che $f \in C^0(\mathbb{R})$, applichiamo il thm di continuità (visti sopra). Definiamo la funzione considerare

$$h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad h(x, \omega) = f(x) e^{-i\omega x} \quad \text{si ha che}$$

- $h(\cdot, \omega) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ è integrabile
- $h(x, \cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ è continua

es) mostrare

$$|h(x, \omega)| = |f(x) e^{ix\omega}| \leq |f(x)| \quad \text{che per ipotesi}$$

Il teorema di continuità implica che

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x, \omega) dx$$

è continua rispetto a ω . \star

ii) Proviamo che $\hat{f} \in L^\infty(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} |\hat{f}(\omega)| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ix\omega} dx \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) e^{-ix\omega}| dx \\ (\star) &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx = \|f\|_1 \end{aligned}$$

Notiamo che la quantità alle dx nella diseguaglianza (*) è indipendente da ω

$$\sup_{\omega} |\hat{f}(\omega)| \leq \sup_{\omega} \|f\|_1 = \|f\|_\infty$$

\star

Foglio 3 es 3

Dimostrare che le seguenti successioni di funzioni sono successioni di Cauchy nello spazio

$$(C^1([-1,1]), \|\cdot\|_1)$$

che però non convergono ad alcun elemento di $C([-1,1])$

Def Sia $(E, \|\cdot\|)$ uno spazio normato. Una successione $(x_n)_n$ è di Cauchy se:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tc } \forall n, m > n_0$$

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

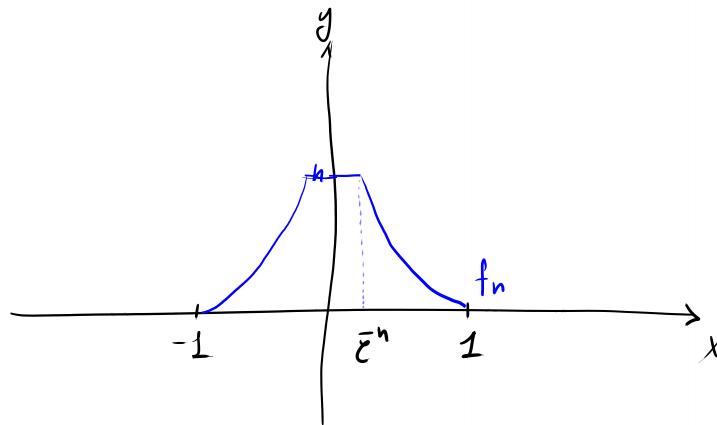
Alternativamente $\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|x_n - x_m\| = 0$

Def Sia (X, d) uno spazio metrico, si dice completo quando ogni successione di Cauchy è convergente.

Esempio $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ è uno spazio metrico completo

OSS Ogni successione convergente è di Cauchy, ma non è vero che ogni successione di Cauchy sia convergente.

$$1) \quad f_n(x) = \begin{cases} n & \text{se } |x| \leq e^{-n} \\ -\log|x| & \text{se } e^{-n} \leq |x| \leq 1 \end{cases}$$



$\forall n$ la funzione $x \mapsto f_n(x)$ è una funzione pari.

Calcoliamo f_n in e^{-n}

$$\begin{aligned} f_n(e^{-n}) &= -\log|e^{-n}| = -\log e^{-n} = \log(e^{-n})^{-1} \\ &= \log e^n = n \end{aligned}$$

\rightsquigarrow Abbiamo dunque provato che la funzione $f_n(x)$ è continua nei punti $x = \pm e^{-n}$

Cerchiamo di identificare un possibile limite per la successione $(f_n)_n$

Se $n \rightarrow \infty$ $e^{-n} \rightarrow 0$ per cui il nostro limite target sarà la funzione

$$f(x) = -\log|x| \quad \forall x \in [-1, 0) \cup (0, 1]$$

OSS la funzione f così identificata non è continua in 0, dunque

$$f \notin C^0([-1, 1])$$

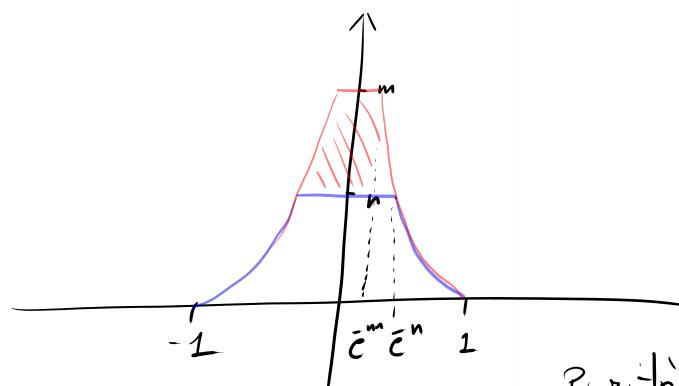
Resta dunque da provare solamente che la successione $(f_n)_n$ è di Cauchy rispetto $\|\cdot\|_1$

Secondo la definizione di successione di Cauchy applicata allo spazio normato specifico $(C([-1,1]), \|\cdot\|_1)$ vogliamo vedere che

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|f_n - f_m\|_1 = 0$$

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 |f_n(x) - f_m(x)| dx$$

Ipotesi operativa $m \geq n$



$$m \geq n \quad f_k(x) = \begin{cases} k & \text{se } |x| \leq e^{-k} \\ -\log|x| & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Parità delle funzioni

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 |f_m(x) - f_n(x)| dx &= 2 \int_0^1 |f_m(x) - f_n(x)| dx \\ &= 2 \int_0^{e^{-m}} (m-n) dx + 2 \int_{e^{-m}}^{e^{-n}} (-\log x - n) dx + 2 \int_{e^{-n}}^1 (-\log x - (-\log x)) dx \\ &= 2(m-n)e^{-m} - 2n(e^{-n}-e^{-m}) - 2 \int_{e^{-m}}^1 \log x dx = (1) \end{aligned}$$

$$\int \log x dx = \int \mathcal{I}_x(x) \log x dx$$

$$= x \log x - \int dx = x(\log x - 1) + C'$$

Il che ci permette di calcolare

$$\int_{e^{-m}}^{e^{-n}} \log x dx = x(\log x - 1) \Big|_{e^{-m}}^{e^{-n}} = e^{-n}(-n-1) - e^{-m}(-m-1) = (m+1)e^{-m} - (n+1)e^{-n}$$

$$(1) = \underbrace{2(m-n)e^{-m}}_{\substack{n,m \rightarrow \infty \\ 0}} - \underbrace{2n(e^{-n} - e^{-m})}_{\substack{n,m \rightarrow \infty \\ 0}} - 2 \left[\underbrace{(n+1)e^{-n}}_{\substack{n,m \rightarrow \infty \\ 0}} - \underbrace{(n+1)e^{-n}}_{\substack{n,m \rightarrow \infty \\ 0}} \right]$$

Affiamo che
 Alcuno di quegli elementi della successione $(f_n)_n$ è ol.
 Cauchy rispetto a $\|\cdot\|_L$, tuttavia non converge ad un elemento
 di $C([-1, 1])$. ~~X~~

Recap

Abbiamo definito l'operatore convoluzione

Se f e g sono funzioni C^∞ a supporto compatto allora

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y) g(y) dy$$

E abbiamo visto che non serve supporre tanta regolarità in f e g ma se abbiamo

$f, g \in L^1(\mathbb{R}) \implies f * g \in L^1(\mathbb{R})$ e si ha che

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$$

Convoluzioni: esempi, applicazioni e proprietà

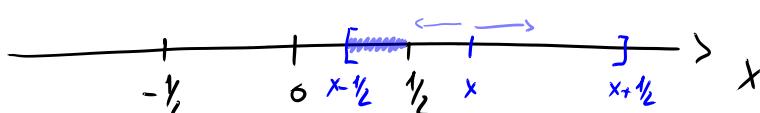
Esempio Sia $P_\pm(x) = \chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$$\text{Essendo } P_\pm(x-y) = 1 \iff -\frac{1}{2} \leq x-y \leq \frac{1}{2}$$

$$\iff x - \frac{1}{2} \leq y \leq x + \frac{1}{2}$$

Si ottiene che

$$\begin{aligned} (P_\pm * P_\pm)(x) &= \int_{\mathbb{R}} P_\pm(x-y) P_\pm(y) dy = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} P_\pm(x-y) dy \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1 dy = m\left([- \frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \cap [x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}]\right) \end{aligned}$$



Oss La funzione P_\pm non è continua, ma la funzione $P_\pm * P_\pm$ lo è,

al di là dell'esempio specifico riportato sopra, l'operatore di convoluzione ha degli effetti "regolarizzanti".

Proprietà delle convolutioni

Siamo $f, g, h \in L^1(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{C}$ si ha che

- i) $f * g = g * f$
- ii) $(f+g) * h = f * h + g * h$
- iii) $(f * g) * h = f * (g * h)$
- iv) $(\lambda f) * g = \lambda (f * g)$

Provare per cosa le proprietà i) — iv)

- v) Se f ha supporto compatto, ossia $f(x) = 0 \quad \forall x \in B^c(0, R)$, e almeno una tra f e g è una funzione di classe C^k allora $f * g \in C^k$.

Idea della dimostrazione

Supponiamo che $f \in C^k$

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y) g(y) dy \quad \text{e dunque}$$

$$\partial_x^k (f * g)(x) = \partial_x^k \left[\int_{\mathbb{R}} f(x-y) g(y) dy \right]$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f^{(k)}(x-y) g(y) dy$$

Se g è C^k allora utilizzo la proprietà i) (commutatività della convoluzione) e ottengo il claim.

Un accenno al caso multi-dimensionale

Se $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ allora

$$(f * g)(x_1, \dots, x_n) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1 - y_1, \dots, x_n - y_n) g(y_1, \dots, y_n) dy_1 \dots dy_n$$

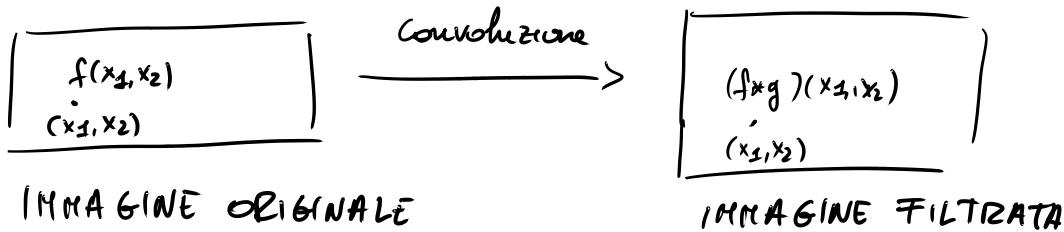
Esempio

Sia f una funzione che associa a ogni elemento $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ un tono di grigio

→ g è un fattore di convoluzione o nucleo convolutivo, ossia una funzione positiva con $\|g\|_1 = 0$ e $g \in C^\infty$.

f descrive l'immagine B/N originale

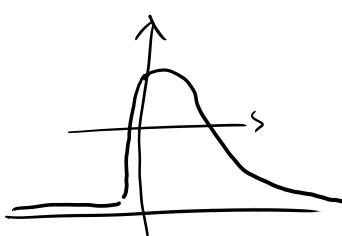
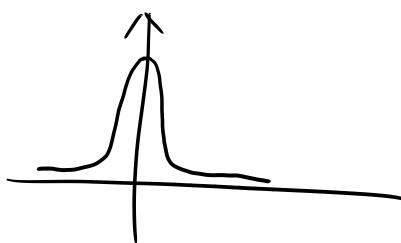
$f * g$ descrive un'immagine filtrata



L'applicazione dell'operatore convoluzione regolarizza e "sfoca" le tonalità di grigio



L'effetto "sfou".



Dall'analisi di Fourier alla sintesi

Caso periodico:

f periodica di periodo T

Analisi

$$\longrightarrow \text{Associamo } c_n(T) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(x) e^{-inx} dx$$

$\omega = \frac{2\pi}{T}$

Ci dà una serie di Fourier $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n f) e^{inx}$

Affibiamo visto che dato una serie di Fourier non è sempre facile ritornare alla funzione di partenza (fase di sintesi).

Q Possiamo sviluppare un processo analogo per funzioni che non sono periodiche ma sono definite su \mathbb{R} ?

Premessa

Dato la FT $F(f)$ di f è possibile restituire alla funzione f ?

In altre parole, è possibile invertire la trasformata di Fourier come operatore tra spazi funzionali?

Schemi:
 funzione $\xrightarrow[\text{analisi}]{FT}$ spettro $\xrightarrow[\text{sintesi}]{AFT?}$ funzione

Antitrasformate di Fourier

Sia $g \in L^2(\mathbb{R})$, si definisce come antitrasformata di Fourier (AFT) di g la funzione

$$g(g)(x) = \hat{g}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} g(w) e^{iwx} dw$$



Osservazione importante

Si ha che

$$(g(g)(x)) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} g(\omega) e^{-i(-x)\omega} d\omega = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(g)(-x)$$

Esercizio x cosa Provare le proprietà 1-11 date per la FT per la AFT.

Problema Date $f \in L^2(\mathbb{R})$, vale la formula

$$g(\mathcal{F}(f)) = f ?$$

Ossia

$$g(\mathcal{F}(f))(x) = f(x) \quad \text{per q.o. } x \in \mathbb{R} ?$$

Condizione necessaria

Sia $f \in L^2$ e sia $\hat{f} = \mathcal{F}(f)$ la FT di f . Se vale la relazione

$$g(\hat{f})(x) = f(x) \quad \text{per q.o. } x \in \mathbb{R}$$

allora, per le proprietà della FT e della AFT deve esistere

$$h \in C^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$$

e tale che

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} h(x) = 0$$

tale che

$$f(x) = h(x) \quad \text{per q.o. } x \in \mathbb{R}$$

Teorema di inversione di Fourier

Se $f \in L^2(\mathbb{R})$ e $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ allora per q.o. $x \in \mathbb{R}$

$$g(\hat{f})(x) = f(x)$$

cioè

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-iyw} dy \right) e^{iwx} dw = f(x)$$

$\underbrace{\quad}_{f(w)}$

Conseguenze del teorema di inversione di Fourier

Forma di dualità Sia $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ allora per q.o. $x \in \mathbb{R}$

$$(\mathcal{F} \circ \mathcal{F})(f)(x) = 2\pi f(-x)$$

||

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}(f))$$

Dim Segue dal teorema di inversione di Fourier osservando che

$$g(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(f)(-x).$$

||

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(w) e^{iwx} dw &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(w) e^{-i\omega(-x)} dw \\ &= \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(f)(-x) \end{aligned}$$

Teorema di unicità

Siamo $f, g \in L^1$ e t.c. $\hat{f}, \hat{g} \in L^1$, si ha

$$\hat{f} = \hat{g} \text{ in } \mathbb{R} \iff f = g \text{ q.o. in } \mathbb{R}$$

ossia ogni funzione integrabile non viola il suo spettro in maniera univoca e viceversa.

FT di un prodotto di funzioni

$f, g, fg \in L^1$ e $\hat{f}, \hat{g}, \hat{fg} \in L^1$ allora

$$\hat{fg}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \hat{f} * \hat{g}(\omega)$$

Dimo Siccome per ipotesi $\hat{f}, \hat{g} \in L^2 \Rightarrow \hat{f} * \hat{g} \in L^2$, essendo
qualsiasi $\hat{f} * \hat{g} \in L^2$, sappiamo che $\hat{f} * \hat{h} \in L^2$

$$|\mathcal{G}(\hat{h})(x)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{h}(w) e^{iwx} dw \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{h}(w)| dw < \infty$$

Possiamo dunque calcolare

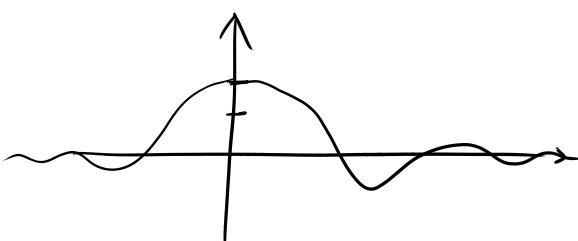
$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\hat{f} * \hat{g})(x) &= \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(\hat{f} * \hat{g})(-x) \\ &= 2\pi \cdot \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(\hat{f})(-x) \cdot \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(\hat{g})(-x) \\ &= 2\pi \mathcal{G}(\hat{f})(x) \cdot \mathcal{G}(\hat{g})(x) \\ &= 2\pi f(x) g(x) \end{aligned}$$

e quindi applicando \mathcal{F} si conclude che

$$\frac{1}{2\pi} (\hat{f} * \hat{g})(w) = \mathcal{F}(f \cdot g)(w) = \hat{f} \hat{g}(w)$$

Problema Come definire la FT per $f \notin L^2(\mathbb{R})$?

Un esempio potrebbe essere la funzione $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$



$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x} dx < \infty$$

tuttavia

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = \infty$$

e infatti si ha che $x \mapsto \frac{\sin x}{x} \in L^2(\mathbb{R})$ ma non è L^1

$$\int \left| \frac{\sin x}{x} \right|^2 dx < \infty$$

Trasformata di Fourier in $L^2(\mathbb{R})$

Nelle applicazioni risulta utile (e fisicamente rilevante) applicare la FT a funzioni che hanno energia finita.

Tuttavia se $f \in L^2(\mathbb{R})$ non è garantito che $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ e quindi, a priori, non possiamo garantire che

$$|\hat{f}(\omega)| = \left| \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\omega x} dx \right| < \infty$$

Teorema di Plancherel

FT in $L^2(\mathbb{R})$ L'operatore FT $\mathcal{F}: L^2 \cap L^1 \rightarrow L^\infty$ si estende in modo univoco a un operatore $\overline{\mathcal{F}}: L^2 \rightarrow L^2$ lineare, continuo, biiettivo e che verifica $\forall f, g \in L^2$

$$(\overline{\mathcal{F}}(f), \overline{\mathcal{F}}(g))_2 = 2\pi (f, g)_2$$

In particolare ciò implica che

$$\|\overline{\mathcal{F}}(f)\|_2^2 = d\pi \|f\|_2^2$$

La trasformata di Hilbert

Def Sia $f \in C^1([-\pi, \pi])$ definiamo la trasformata di Hilbert come

$$\mathcal{H}f(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{[-\pi, \pi] \setminus (-\varepsilon, \varepsilon)} \cot(\frac{x-z}{\varepsilon}) f(x-z) dz$$

Nota $\cot(y) = \frac{\cos(y)}{\sin(y)} = (\tan(y))^{-1}$

Notazione Scriviamo

$$\text{p.v. } \int \bullet dz = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{[-\pi, \pi] \setminus (-\varepsilon, \varepsilon)} \bullet dz$$

e

$$\text{p.v. } f \circ dz = \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{[-\pi, \pi] \setminus (-\varepsilon, \varepsilon)} \bullet dz$$

Tale operatore integrale viene detto valore principale

Ese Dimostrare che se $f \in C^1$ allora $\mathcal{H}f$ è ben definita

$$\forall x \in [-\pi, \pi], \text{ ossia } \|\mathcal{H}f\|_{L^\infty} \leq C \|f'\|_{L^\infty}$$

Dim $\text{p.v. } \int \cot(\frac{x-z}{\varepsilon}) f(x-z) dz = \mathcal{H}f(x)$ vogliamo dimostrare che questa quantità è limitata.

Notiamo la seguente osservazione

$$\text{p.v. } \int \cot(z/\varepsilon) f(x) dz = 0$$

$$\frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{[-\pi, \pi] \setminus (-\varepsilon, \varepsilon)} \cot(z/\varepsilon) olz f(x) dz = \frac{1}{2\pi} \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{[-\pi, \pi] \setminus (-\varepsilon, \varepsilon)} \frac{\cos(z/\varepsilon)}{\sin(z/\varepsilon)} olz f(x) dz$$

è una funzione dispari
l'insieme di integrazione è simmetrico rispetto all'origine

OSS

Notiamo come la definizione di valore principale sia fondamentale in questo caso, infatti il limite per $\varepsilon \rightarrow 0$ preserva la simmetria dell'insieme di integrazione rispetto all'origine, per il quale possiamo dunque concludere che l'int della cot è nullo

In soluzioni:

$$\lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \int_{-\pi}^{\varepsilon_1} + \int_{\varepsilon_2}^{\pi} \cot(z/\varepsilon) dz$$

Non sarebbe definito

$$Hf(x) = Hf(x) - 0$$

$$= \text{p.v. } \int \cot(z/\varepsilon) f(x-\varepsilon) dz - \text{p.v. } \int \cot(z/\varepsilon) f(x) dz$$

$$= \text{p.v. } \int \cot(z/\varepsilon) [f(x-\varepsilon) - f(x)] dz$$

$$|Hf(x)| = \left| \text{p.v. } \int \cot(z/\varepsilon) [f(x-\varepsilon) - f(x)] dz \right|$$

$$\leq \text{p.v. } \int |\cot(z/\varepsilon)| |f(x-\varepsilon) - f(x)| dz$$

$$\leq \text{p.v. } \int \frac{|\cos(z/\varepsilon)|}{|\sin(z/\varepsilon)|} |f(x-z) - f(x)| olz$$

$$|f'(z)| |z|$$

$$\leq \text{p.v. } \int \underbrace{\frac{|z/\varepsilon|}{|\sin(z/\varepsilon)|}}_{\leq C} \left| \frac{f(x-z) - f(x)}{|z/\varepsilon|} \right| dt$$

$$\leq C \text{ p.v. } f \|f'\|_{L^\infty} \frac{|z|}{|z/2|} dt \leq 4\pi C \|f'\|_{L^\infty} \quad \times$$

Abbiamo dunque provato che $\forall f \in C^1 \exists K > 0$
 t.c. $\|\mathcal{H}f\|_{L^\infty} \leq K \|f'\|_{L^\infty}$

Notazione $\forall f \in L^2$ indichiamo con $\hat{f}(n) = c_n(f)$.

Esempio Dimostrare che $\forall f \in L^2$ si ha che
 $\hat{\mathcal{H}f}(n) = -i \operatorname{sgn}(n) \hat{f}(n)$,

OSSRA

$$c_n(\mathcal{H}f) = -i \operatorname{sgn}(n) c_n(f)$$

Dimostrazione Se $f \in L^2$ sappiamo che essa può venire espressa come serie di Fourier. Dunque $\forall x \in [-\pi, \pi]$ abbiamo che

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{inx}$$

Calcoliamo adesso

$$\begin{aligned} \mathcal{H}f(x) &= \text{p.v. } f \cot(z/2) f(x-t) dt \\ &= \text{p.v. } f \cot(z/2) \left[\sum_n \hat{f}(n) e^{in(x-t)} \right] dt \\ (*) &= \sum_n \hat{f}(n) e^{inx} \underbrace{\left(\text{p.v. } f \cot(z/2) e^{-int} dt \right)}_{I_n} \end{aligned}$$

Se calcoliamo il valore esplicito di questo integrale concludeviamo

I_n

$$\begin{aligned}
 I_n &= \text{p.v.} \int \frac{\cos(z/k)}{\sin(z/k)} (\cos(nz) - i \sin(nz)) dz \\
 &= \text{p.v.} \int \frac{\cos(z/k)}{\sin(z/k)} \cos(nz) dz - i \text{p.v.} \int \frac{\cos(z/k)}{\sin(z/k)} \sin(nz) dz \\
 &= -i \text{p.v.} \int \frac{\cos(z/k)}{\sin(z/k)} \sin(nz) dz
 \end{aligned}$$

Siccome inoltre $\left| \frac{\sin(iz^2)}{\sin(z/k)} \right| \leq C$ quindi non ho più bisogno del valore principale, ossia

$$I_n = -i \int \frac{\cos(z/k)}{\sin(z/k)} \sin(nz) dz$$

Gli ricordiamo che $n \in \mathbb{Z}$, utilizziamo dunque la relazione

$$\sin(nz) = \operatorname{sgn}(n) \sin(|n|z)$$

$$I_n = -i \operatorname{sgn}(n) \int \frac{\cos(z/k)}{\sin(z/k)} \sin(|n|z) dz$$

Utilizziamo le formule di Eulero

$$I_n = -i \operatorname{sgn}(n) \int \frac{e^{iz/k} + e^{-iz/k}}{2} \frac{e^{i|n|z} - e^{-i|n|z}}{2i} dz$$

$$= -i \operatorname{sgn}(n) \int \frac{e^{iz/k} + e^{-iz/k}}{2} \frac{e^{i|n|z}}{e^{iz/k}} \frac{1 - e^{-i2|n|z}}{1 - e^{-iz}} dz$$

$$= -\frac{i}{2} \operatorname{sgn}(n) \int (1 + e^{-iz}) e^{i|n|z} \sum_{k=0}^{2|n|+1} e^{-ikz} dz$$

$$= -\frac{i}{2} \operatorname{sgn}(n) \sum_{k=0}^{2|n|+1} \int [e^{iz(|n|-k)} + e^{iz(|n|-k-1)}] dz$$

Notiamo che stiamo integrando esponenziali con arg
un numero puramente immaginario, dunque

$$\sum_{k=0}^{2|n|+1} f e^{iz(|n|-k)} + e^{iz(|n|-k-1)} dz = 2,$$

sostituisco tale risultato ed ottengo che

$$I_n = -\frac{i}{2} \operatorname{sgn}(n) \cdot 2 = -i \operatorname{sgn}(n).$$

Sostituisco il valore espresso così incontrato per I_n nell'eq (*)
ottenendo che

$$\begin{aligned} \mathcal{H}f(x) &= \sum_n \hat{f}(n) e^{inx} I_n \\ &= -i \sum_n \operatorname{sgn}(n) \hat{f}(n) e^{inx}, \end{aligned}$$

e quindi conclusiono che

$$\hat{\mathcal{H}f}(n) = -i \operatorname{sgn}(n) \hat{f}(n) \quad \text{c.v.o.} \quad \cancel{\#}$$

Es Dimostrare che $\|\mathcal{H}f\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$.

Dm Ci ricordiamo che $\forall \phi \in L^2$ vale la relazione

$$(*) \quad \frac{1}{2\pi} \|\phi\|_{L^2}^2 = \sum_n |\hat{\phi}(n)|^2$$

$$c_n(\mathcal{H}f) = -i \operatorname{sgn}(n) c_n(f)$$

Per quanto visto prima sappiamo che

$$\mathcal{H}f(x) = \sum_n c_n(\mathcal{H}f) e^{inx} = -i \sum_n \operatorname{sgn}(n) c_n(f) e^{inx},$$

utilizziamo dunque la relazione (*) per calcolare la norma L^2
di $\mathcal{H}f$, questo ci dà che

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\pi} \|\mathcal{H}f\|_{L^2}^2 &\stackrel{(*)}{=} \sum_n |\hat{c}_n(\mathcal{H}f)|^2 \\
 &= \sum_n | -i \operatorname{sgn}(n) c_n(f) |^2 \\
 &\stackrel{(*)}{=} \sum_n | c_n(f) |^2 \\
 &= \frac{1}{2\pi} \|f\|_{L^2}^2
 \end{aligned}$$

Confrontando i 2 lati dell' uguaglianza si vede sopra otteniamo quindi che

$$\|f\|_{L^2} = \|\mathcal{H}f\|_{L^2}$$

Esempio Dimostrare che $\mathcal{H}f \in L^2$ vale la relazione

$$\mathcal{H}^2 f = -f$$

$$[\mathcal{H}^2 f = \mathcal{H}(\mathcal{H}f)]$$

Dimostrazione So che $\mathcal{H}g(x) = \sum_n (-i) \operatorname{sgn}(n) \hat{g}(n) e^{inx}$,

quindi

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}^2 f(x) &= \mathcal{H}(\mathcal{H}f)(x) = \sum_n (-i) \operatorname{sgn}(n) \hat{\mathcal{H}f}(n) e^{inx} \\
 &= \sum_n \underbrace{(-i \operatorname{sgn}(n))^2}_{\text{circled}} \hat{f}(n) e^{inx} \\
 &= \underbrace{-} \sum_n \hat{f}(n) e^{inx} = -f(x)
 \end{aligned}$$

Recap

La trasformata di Hilbert è data dalla seguente espressione

$$\mathcal{H}f(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{[-\pi, \pi] \setminus (-\varepsilon, \varepsilon)} \cot(\frac{x-z}{\varepsilon}) f(z) dz$$

ed è ben definita $\forall f \in L^2(-\pi, \pi)$

Abbiamo visto inoltre la seguente relazione fra i coefficienti di Fourier di f e quelli di $\mathcal{H}f$.

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{H}f}(n) &= -i \operatorname{sgn}(n) \widehat{f}(n) \\ c_n(\mathcal{H}f) &= -i \operatorname{sgn}(n) c_n(f) \end{aligned}$$

Proprietà

- 1) $\|\mathcal{H}f\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$
- 2) $\mathcal{H}^2 f = \mathcal{H}(\mathcal{H}f) = -f$



Es Dare un contro esempio di una funzione $f \in L^\infty(-\pi, \pi)$ t.c. $Hf \notin L^\infty(-\pi, \pi)$

Oss Come interpretare il risultato di cui sopra.
Lei abbiano visto che

$$\begin{aligned} H : f \in C^1 &\longmapsto Hf \in L^\infty \\ : f \in L^2 &\longmapsto Hf \in L^2 \end{aligned}$$

La trasformata di Hilbert è un operatore continuo tra C^1 e L^∞ e tra L^2 e se stesso.

Q : Esiste un caso in cui la trasformata di H non è un op continuo? La risposta a tale domanda è affermativa e proponiamo il contro esempio nell'esercizio.

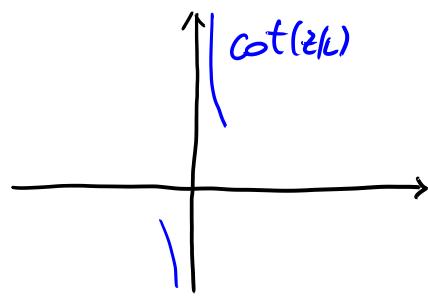
Dim Cerchiamo una funzione $f \in L^\infty$ t.c. $Hf \notin L^\infty$

Ricordiamo che $Hf = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H_\varepsilon f$ dove

$$H_\varepsilon f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi, \pi] \setminus (-\varepsilon, \varepsilon)} \cot(\frac{x-z}{\varepsilon}) f(x-z) dz$$

$$\cot(\frac{z}{\varepsilon}) = \frac{\cos(z/\varepsilon)}{\sin(z/\varepsilon)}$$

Guardiamo più da vicino la funzione che funge da nucleo integrale ossia $z \mapsto \cot(z/\varepsilon)$



$$\begin{aligned} \cot(z/\varepsilon) &= \frac{\cos(z/\varepsilon)}{\sin(z/\varepsilon)} = \frac{1 + O(z^2)}{\frac{z}{\varepsilon} + O(z^3)} \\ &= \frac{2}{z} + O(z^2) \end{aligned}$$

\rightsquigarrow Quando $z \approx 0$ $\cot(z/\varepsilon) \sim \frac{2}{z}$

In particolare questo calcolo approssimativo deduciamo che $z \mapsto \cot(z/\varepsilon)$ non è assolutamente integrabile in un intorno di zero

Consideriamo dunque la funzione

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

quindi

$$f(x-z) = \operatorname{sgn}(x-z) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > z \\ 0 & \text{se } x = z \\ -1 & \text{se } x < z \end{cases}$$

Calcoliamo

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\varepsilon f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{(-\pi, \pi) \setminus (-\varepsilon, \varepsilon)} \cot(z/\varepsilon) \operatorname{sgn}(x-z) dz \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{(-\pi, x) \setminus (-\varepsilon, \varepsilon)} \cot(z/\varepsilon) dz \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_{(x, \pi] \setminus (-\varepsilon, \varepsilon)} \cot(z/\varepsilon) dz \end{aligned}$$

Passo al limite per $\varepsilon \rightarrow 0$ e mi vediamo che, se $x \neq 0$

$$\mathcal{H}f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^x \cot(z/\varepsilon) dz - \frac{1}{2\pi} \int_x^\pi \cot(z/\varepsilon) dz$$

$$\cot(z/\varepsilon) = \frac{\cos(z/\varepsilon)}{\sin(z/\varepsilon)} = 2 \operatorname{Re}(\log|\sin(z/\varepsilon)|)$$

Quindi

$$\begin{aligned} \mathcal{H}f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^x \operatorname{Re}(\log|\sin(z/\varepsilon)|) dz - \frac{1}{\pi} \int_x^\pi \operatorname{Re}(\log|\sin(z/\varepsilon)|) dz \\ &= \frac{1}{\pi} \log|\sin(x/\varepsilon)| - \frac{1}{\pi} \log|\sin(\pi/\varepsilon)| \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \log|\sin(\pi/\varepsilon)| + \frac{1}{\pi} \log|\sin(x/\varepsilon)| \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{\pi} \log |\sin(x_k)|$$

Notiamo che la funzione $x \mapsto \frac{2}{\pi} \log |\sin(x_k)|$ non è limitata in $x=0$, infatti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\pi} \log |\sin(x_k)| = -\infty,$$

quindi $Hf = H(\operatorname{sgn})$ non è una funzione L^∞ .

"Wavelets" e sistemi ortonormali completi in $L^2(0,1)$

Def sia $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq L^2(0,1)$, la famiglia $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si dice completa in L^2 se $\forall g \in L^2, \forall \varepsilon > 0 \exists N > 0$ e una famiglia $\gamma_j, j=0, \dots, N$ t.c.

$$\|g - \sum_{j=0}^N \gamma_j f_j\|_{L^2} < \varepsilon$$

Es le armoniche elementari

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}, \sin(2\pi n x), \cos(2\pi n x) \right)_{n \geq 1}$$

$$\text{e } (e^{i 2\pi n x})_{n \in \mathbb{Z}}$$

Sono sistemi ortonormali e completi di $L^2(0,1)$ come visto nella teoria sviluppata nei mesi scorsi

Tali famiglie (ortogonali e complete) sono importanti in quanto ci permettono di "approssimare" una funzione L^2 in maniera arbitraria attraverso una somma finita di funzioni elementari.

Ci sono tuttavia delle limitazioni, essendo le armoniche elementari funzioni continue non approssimano bene funzioni discrete.

Def Sia $\varphi(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \in [0, 1/2) \\ 0 & \text{se } x = 1/2 \\ 1 & \text{se } x \in (1/2, 1] \end{cases}$

e φ funzione madre

$\forall n \in \mathbb{N}$ e $\forall k \in \{0, -1, 2^n - 1\}$ definiamo la funzione

$$\varphi_{n,k}(x) = 2^{n/2} \varphi(2^n x - k)$$

L'insieme $(1, \varphi_{n,k})_{n \in \mathbb{N}, k \in \{0, -1, 2^n - 1\}}$ è detto

Basisse di Haar

Es Provare che gli elementi della base di Haar sono ortogonali rispetto al prodotto scalare in L^2

Teorema La base di Haar è un sistema ortonomale e completo in $L^2(0,1)$ ossia $\forall f \in L^2$ se definiamo

$$f_0^H = \int_0^1 f(x) dx \quad , \quad f_{n,k}^H = \int_0^1 f(x) \varphi_{n,k}(x) dx$$

allora

$$f_0^H + \sum_{n=1}^N \sum_{k=0}^{2^n - 1} f_{n,k}^H \varphi_{n,k} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} f$$

in $L^2(0,1)$.