Topologia della retta reale - Sommario

Tutto sulla topologia della retta reale.

Intorni

Definizione di distanza (con le sue proprietà), intorno centrato aperto di centro x_0 e di raggio r, intorno di x_0; la retta estesa, l'intorno di $+\infty$ e di $-\infty$.

---

0. Preambolo

In questo capitolo studieremo e definiremo delle nomenclature necessarie per studiare i *limiti*.

1. Distanza euclidea

DEF 1.1. Siano $x, y \in \mathbb{R}$, allora definisco la **distanza** (oppure **distanza euclidea**) di x, y il valore $d(x,y) = |x-y|$
Graficamente questo corrisponde, infatti, alla distanza tra due punti sulla retta reale.
[GRAFICO DA FARE]

Proprietà della distanza euclidea

PROP 1.1. Possiamo verificare alcune proprietà di questa applicazione (Funzioni); la prima essendo

$$\forall x, y \in \mathbb{R}; d(x,y) \geq 0 \wedge d(x,y) \iff x = y$$

PROP 1.2. Proprietà simmetrica

$$\forall x, y \in \mathbb{R}; d(x,y) = d(y,x)$$

PROP 1.3. *Disuguaglianza triangolare*; analogamente alle disuguaglianze triangolari già viste nei numeri complessi (**PROP. 4.7.**) e col valore assoluto (**OSS 3.1.1.**) si verifica che

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}; d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

DIMOSTRAZIONE DI PROP 1.3. Infatti dall'**OSS 3.1.1.** di Funzioni di potenza, radice e valore assoluto so che se

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

può essere applicato con $a = x - y$ e $b = y - z$, così diventa

$$|x-z| \leq |x-y| + |y-z| \iff d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \blacksquare$$

OSS 1.1. Noto che questa nozione di *distanza euclidea* può essere anche definita sui numeri complessi $\mathbb{C}$; infatti posso porre

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$$

dove $|\cdot|$ rappresenta il *modulo* di un numero complesso (Operazioni sui Numeri Complessi, **DEF 4.** o **DEF 4.1.**).
Graficamente, questo corrisponde a
[GRAFICO DA FARE]
Inoltre scopriamo che questa definizione della distanza euclidea su $\mathbb{C}$ conserva le tre proprietà (**PROP 1.1., 1.2., 1.3.**) appena enunciate. Pertanto è possibile scambiare *modulo* e *distanza euclidea* in quanto vi è un *isomorfismo* tra queste due applicazioni.

2. Intorno centrato aperto di centro x e di raggio r

DEF 2.1. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e sia $r \in \mathbb{R}, r > 0$; allora chiamo **"l'intorno centrato aperto di centro x_0 e di raggio r"** l'*intervallo aperto* (Intervalli, **DEF 1.4.**)

$$]x_0 - r, x_o + r[\; = \{x \in \mathbb{R} : d(x, x_0) < r\}$$

che graficamente corrisponde a
[GRAFICO DA FARE]
ovvero la **palla aperta di centro x_0 e di raggio r**

ovvero l'insieme di *tutti i punti di $\mathbb{R}$ che hanno distanza da x_0 meno di r*.

OSS 2.1. Analogamente a **OSS 1.1.**, questa nozione di *intorno centrato aperto* può essere applicato a $\mathbb{C}$ usando la nozione di *modulo*; infatti graficamente questa corrisponde ad una *palla 2-dimensionale di centro z_0 e di raggio r*.
[GRAFICO DA FARE]

OSS 2.2. Allora si può definire l'*intorno centrato aperto* in $\mathbb{R}^3$ dove definisco

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^3; d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$$

E graficamente questa corrisponde ad una vera *palla*. Letteralmente.
[GRAFICO DA FARE]

3. Intorno

DEF 3.1. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$, chiamo allora l'**intorno di** x_o un *qualunque insieme* E *di* $\mathbb{R}$ che contiene una *palla aperta di centro* x_0 *e raggio* r (**DEF 2.1.**).
Graficamente,
[GRAFICO DA FARE]

DEF 3.2. Prendo $\tilde{\mathbb{R}}$ l'*insieme dei reali estesi*, ovvero

$$\tilde{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

e definisco **l'intorno di** $+\infty$ un *qualunque sottoinsieme* $E \subseteq \mathbb{R}$ che contiene una *semiretta* $]a, +\infty[$; ovvero un insieme di tutti i numeri sopra un certo valore a.
[GRAFICO DA FARE]

Esempi

ESEMPIO 3.1. L'intervallo $]3, 7[$ è intorno di $3, 5$; infatti è possibile prendere $r = 0, 5$ e ottenere la *palla aperta di centro* $3, 5$ *e di raggio* $0, 5$ che equivale a

$$]3, 4[$$

che infatti è contenuto nell'intervallo $]3, 7[$.
Graficamente,
[Grafico da fare]

ESEMPIO 3.2. Se prendendo l'insieme

$$S = \{0\} \cup \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \diagdown \{0\}\}$$

e il punto $x_0 = \frac{1}{2}$, scopriamo che S *non* è intorno di x_0; infatti prendendo per qualsiasi r non riesco a formare una palla attorno a x_0, in quanto S è definita sui numeri naturali che contiene dei *"buchi"*.

ESEMPIO 3.3. Considerando i *numeri naturali* (Numeri Naturali - Sommario), ci chiediamo se questo insieme è *intorno di* $+\infty$; la risposta è *no*: esistono degli elementi in $\mathbb{R}$ che non sono contenuti in $\mathbb{N}$, come ad esempio i numeri razionali. Tuttavia se consideriamo l'insieme $\mathbb{N} \cup]100, +\infty[$ allora la risposta è *sì* in quanto si considera un *intervallo* su $\mathbb{R}$.
Analogo il discorso per gli intervalli di $-\infty$.

Punti interni, esterni e di frontiera

Definizioni di punti interni, punti interni e punti di frontiera. Esempi.

---

0. Preambolo

Questo argomento presuppone la conoscenza dell'argomento di Intervalli.

1. Punti interni

DEF 1.1. Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$, si definisce x_0 **interno** a E se viene verificato che

$$\exists r > 0 :]x_0 - r, x_o + r[\ \subseteq E$$

ovvero se esiste un *intorno* di x_0 in E (Intorni, **DEF 3.1.**).

DEF 1.2. Chiamo **l'insieme dei punti interni a** E come E°.

Esempio

ESEMPIO 1.1. Sia

$$E = \{1\} \cup [2, 3)$$

e voglio trovare *l'insieme dei punti interni* E°.
Per farlo devo innanzitutto disegnare il grafico di E per poter capire come procedere.
[GRAFICO DI E]
Ora *"provo"* ogni numero fissando x_0 il numero scelto;

- Scegliendo $x_0 = 1$ vedo chiaramente che non è *punto interno*, in quanto è impossibile che esista un intorno centrato a raggio r ad esso.
- Scegliendo $x_0 = 2$ vedo che neanche questo è un *punto interno*; non riesco a definire un intorno centrato tale che a *"sinistra"* di 2 c'è un punto appartenente a E.
- Però scegliendo $x_0 = 2.001$ è possibile; infatti posso definire un intorno di x con $r = 0.001$.
- Analoghi i discorsi per $x_0 = 3$ e $x_0 = 2.999$
- Concludo allora che

$$E^\circ = (2, 3)$$

2. Punti esterni

DEF 2.1. Un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ si dice **esterno** ad un *insieme* $E \subseteq \mathbb{R}$ se è *interno* al complementare di E, ovvero $\mathcal{C}_\mathbb{R} E$ (Teoria degli Insiemi).
Quindi

$$x_0 \text{ è esterno } \iff \exists r > 0 : (x_0 - r, x_0 + r) \subseteq \mathcal{C}_\mathbb{R} E$$

Esempio

ESEMPIO 2.1. Considerando l'esempio di prima con

$$E = \{1\} \cup [2, 3)$$

ora vogliamo trovare *l'insieme di tutti i punti esterni*. Allora usando lo stesso grafico di prima, faccio esattamente i stessi procedimenti di prima considerando però il *complemento di* E, ovvero tutti i punti che non appartengono ad E.
[GRAFICO DA FARE]
Usando la stessa procedura in **ESEMPIO 1.1.**, troviamo che

$$\{\text{punti esterni di } E\} = (-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (3, +\infty)$$

3. Punti di frontiera

DEF 3.1. Un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ si dice **frontiera per** E se questo punto *non è ne interno ne esterno ad* E.
OSS 3.1. Questo equivale a negare la proposizione

$$[\exists r > 0 : (x_0 - r, x_0 + r) \subseteq E] \vee [\exists r' > 0 : (x_0 - r', x_0 + r') \subseteq \mathcal{C}E]$$

che secondo le *leggi di De Morgan* e delle regole osservate (Logica formale - Sommario) diventa

$$[\forall r > 0, (x_0 - r, x_0 + r) \not\subseteq E] \wedge [\forall r' > 0, (x_0 - r', x_0 + r') \not\subseteq \mathcal{C}E]$$

e dato che

$$A \not\subseteq B \iff A \cap \mathcal{C}_U B \neq \emptyset$$

ovvero che un insieme A non è sottoinsieme di B se e solo se l'intersezione tra A e il complemento di B non è vuota (ovvero ha almeno *un elemento*), questo diventa

$$[\forall r > 0, (x_0 - r, x_0 + r) \cap \mathcal{C}E \neq \emptyset] \wedge [\forall r' > 0, (x_0 - r', x_0 + r') \cap E \neq \emptyset]$$

ovvero che deve valere due condizioni:

- *Ogni* intorno di x_0 deve contenere *sia* punti di E e il suo complemento $\mathcal{C}_\mathbb{R} E$.

DEF 3.2. Definiamo **l'insieme dei punti di frontiera di** E come

$$\partial E$$

e si legge come *"delta storto E"*

Esempi

ESEMPIO 3.1. Considerando lo stesso esempio di prima, ovvero

$$E = \{1\} \cup [2, 3)$$

vogliamo trovare ∂E.
Procedendo con lo stesso disegno, cerchiamo di *"provare"* ogni punto per trovare elementi di ∂E.
[GRAFICO DA INSERIRE]

- $x_0 = 0$; Questo non è elemento di ∂E, in quanto posso facilmente trovare un intorno che contenga *solo* elementi del complemento di E.
- $x_0 = 1$; Provando a considerare ogni intorno di x_0 trovo che deve per forza dev'esserci un punto sia in E che nel suo complemento.
- $x_0 = 2$; Stesso discorso analogo di prima.
- $x_0 = 3$; Di nuovo lo stesso discorso.
- $x_0 = 2,5$; Qui invece è possibile trovare un intorno che contenga *solo* punti di E . Ad esempio un intorno centrato in $2,5$ con raggio $r = 0,1$.

ESEMPIO 3.2. Consideriamo finalmente dei casi diversi da quelli esaminati prima. Sia

$$E = \mathbb{Q} \cap (1, 2)$$

ovvero tutti i numeri *razionali* compresi tra *1, 2* esclusi.
Disegnando di nuovo un disegno,
[GRAFICO DA FARE]
Scopro le seguenti:

- $E^\circ = \emptyset$; infatti in questo insieme *non* vi ci sono punti interni, in quanto l'*assioma di separazione* non vale in $\mathbb{Q}$ (Assiomi dei Numeri Reali, **S)**, **OSS 6.2.**); quindi ci sono sempre dei *"buchi"* tra due numeri razionali, ovvero dei numeri irrazionali. Infatti è possibile dimostrare che i numeri irrazionali sono *densi* in $\mathbb{R}$.
- $\partial E = [1, 2]$; qui si verifica un fenomeno strano, ovvero che si verifica che ∂E è più *"grande"* di E stessa.
  Questo si verifica perché, da un lato abbiamo la *densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$* (Conseguenze dell'esistenza dell'estremo superiore, **TEOREMA 4.1.**); infatti se considero un punto q_0 in $\mathbb{Q}$ e considero gli *"estremi"* del suo intorno $(q_0 - r, q_0 + r)$ allora tra $q_0 - r$ e $q_0 + r$ dev'esserci almeno un numero razionale. Però allo stesso tempo, come visto prima, i numeri irrazionali sono *densi* in $\mathbb{R}$; di conseguenza se ci sono sia dei numeri razionali (appartenenti a E) che dei irrazionali (appartenenti al complemento di E) allora vediamo che tutti i punti di E (gli estremi inclusi) sono *punti di frontiera*.

Insiemi aperti e chiusi

Definizione di insieme aperto e chiuso.

---

1. Insieme aperto

DEF 1.1. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$; l'insieme A si dice **aperto** se e e solo se *tutti i suoi punti sono punti interni all'insieme stesso* (Punti interni, esterni e di frontiera, **DEF 1.1.**); ovvero se

$$\forall x_0 \in A, \exists r > 0 : (x_0 - r, x_0 + r) \subseteq A$$

OSS 1.1. Osservo che l'insieme A è aperto *se e solo se* $A = A^\circ$.

Esempi

ESEMPIO 1.1. Considero *l'intervallo aperto* (Intervalli, **DEF 1.4.**)

$$(2, 3)$$

voglio sapere se questo è *insieme aperto*; scegliendo un qualunque punto x all'interno di questo intervallo, allora posso sicuramente trovare un intorno in x tale per cui contiene *solo* elementi di $(2, 3)$. Infatti se scelgo r come la *distanza minima* tra x e ciascun estremo, scopro che l'*intorno centrato aperto* di questo raggio (Intorni) contiene *solo* punti di E (dunque esso è *sottoinsieme* di E). Formalizzando questo ragionamento, ho

$$\forall x, 2 < x < 3; r = \min(d(x, 2), d(x, 3))$$

ESEMPIO 1.2. Ora considero l'insieme

$$E = \{1\} \cup [2, 3)$$

che *non è aperto*, in quanto considerando $x_0 = 1$ trovo che questo elemento (o punto) non è *interno* a E. Analogo il discorso per $x_0 = 2$.

2. Intervallo chiuso

DEF 2.1. Considerando un insieme $C \subseteq \mathbb{R}$, si dice che esso è **chiuso** se il suo *complemento* è *aperto*. Ovvero se $\mathcal{C}_\mathbb{R} C$ è aperto.

Esempi

ESEMPIO 2.1. Consideriamo *l'intervallo chiuso* (Intervalli, **DEF 1.1.**)

$$C = [2, 5]$$

Considerando il suo complemento

$$\mathcal{C}_{\mathbb{R}}C = (-\infty, 2) \cup (5, +\infty)$$

vediamo che questo insieme (il complemento) è *aperto*; infatti ad ogni punto x_0 del complemento vediamo che è possibile definire un r tale che l'*intorno centrato aperto* di questo raggio sia sottoinsieme di $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}C$.
Infatti definendo r come

$$r = \begin{cases} d(2, x_0) \text{ per } x_0 < 2 \\ d(5, x_0) \text{ per } x_0 > 5 \end{cases}$$

sicuramente troviamo che tutti i punti x_0 sono interni al complemento di C.
Graficamente questo ragionamento corrisponde a
[GRAFICO DA FARE]