Calcolo Combinatorio - Sommario

Cenni al calcolo combinatorio: cos'è, presentazione di alcuni problemi inerenti al calcolo combinatorio; disposizioni con ripetizioni; disposizioni di oggetti a m *a m*; *permutazioni di* n *oggetti; combinazioni. Focus sul coefficiente binomiale* $\binom{n}{k}$, *costruzione del triangolo di Tartaglia.*

Problemi del Calcolo Combinatorio

Significato del calcolo combinatorio; quali problemi esso mira di risolvere. Alcuni problemi: disposizioni con ripetizioni, disposizione di oggetti a m a m, permutazioni di n oggetti e combinazioni.

---

1. Cosa vuol dire "calcolo combinatorio"

Se si definisce l'insieme dei numeri naturali come l'insieme dei numeri che servono *per contare*, allora il **calcolo combinatorio** si basa sul problema di *contare* certi insiemi/oggetti/...

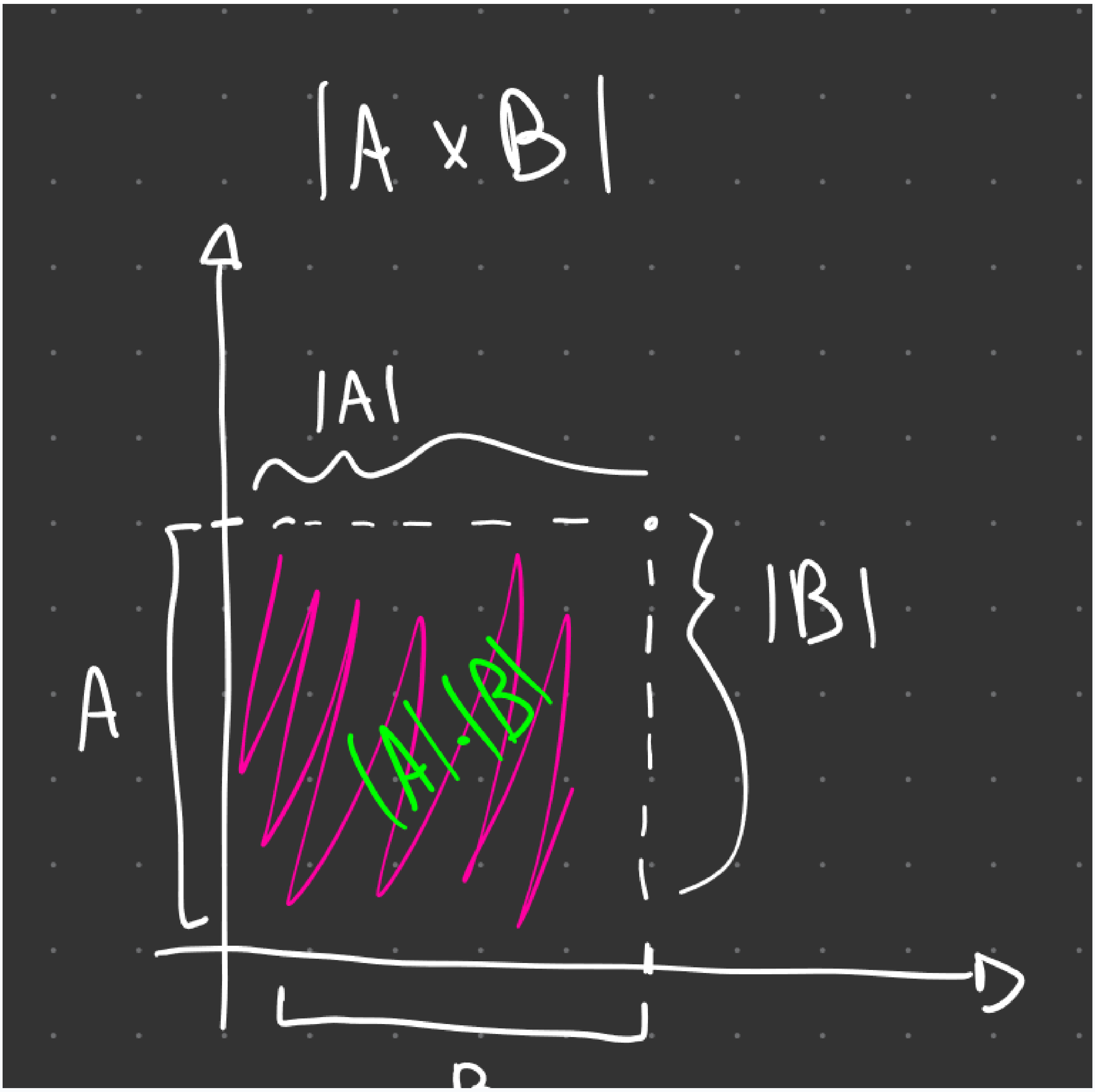
DEF 1. Cardinalità Si definisce la **cardinalità** di un *insieme* A come il numero n degli elementi contenuti nell'insieme A. Lo si denota come $|A|$.

2. I problemi del calcolo combinatorio

Il *calcolo combinatorio* ci presenta vari problemi che valgono la pena di essere studiati.

PROBLEMA 2.1. Cardinalità del prodotto cartesiano

PROBLEMA 2.1. Supponiamo che $|A| = n$, $|B| = m$, ove A, B sono *insiemi* e $n, m \in \mathbb{N}$. Allora ci poniamo il problema di trovare $|A \times B|$.
Se disegniamo il grafico di un qualsiasi prodotto cartesiano $A \times B$, si evince che per ogni riga $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ci sono m colonne; quindi
$|A \times B| = n \times m$



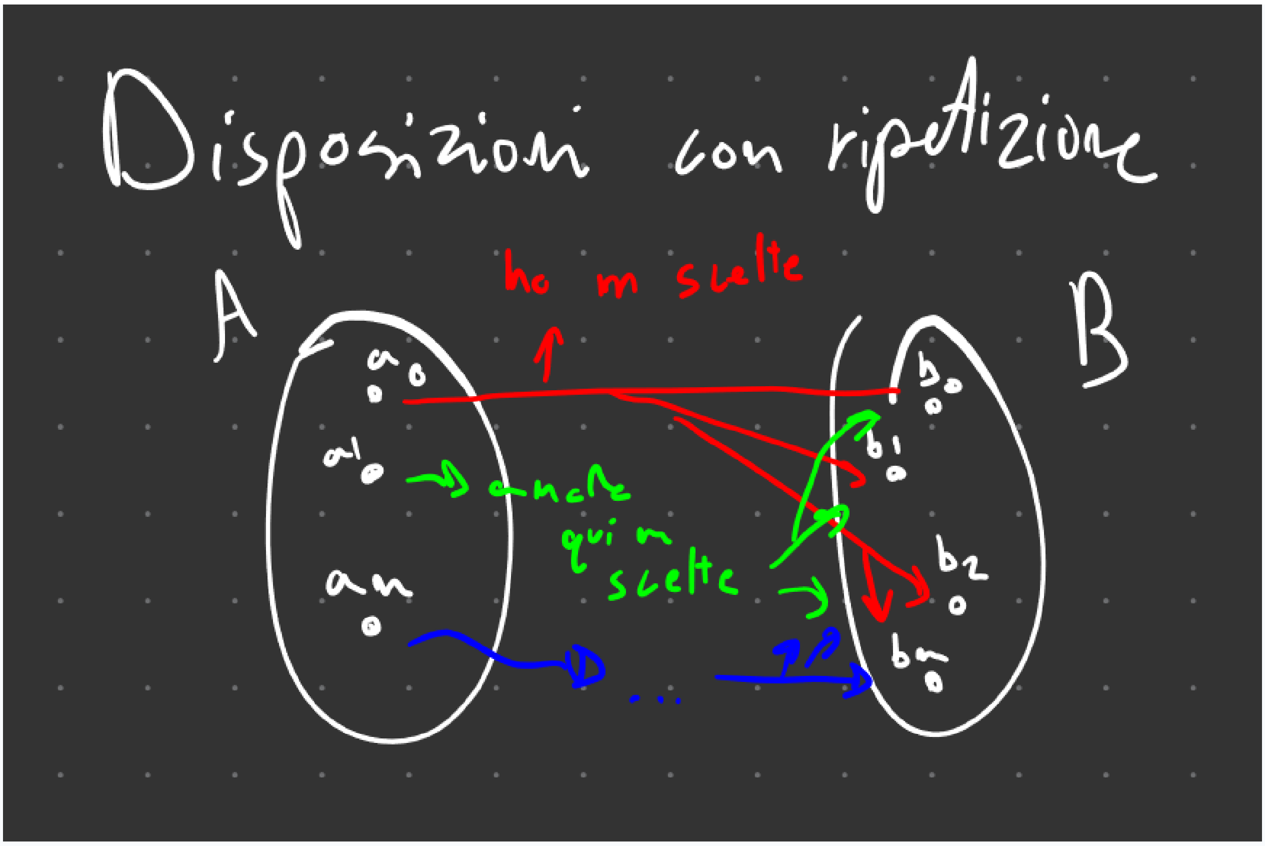
PROBLEMA 2.2. Disposizioni con ripetizione

PROBLEMA 2.2. Siano A, B insiemi con $|A| = n; |B| = m$; voglio contare il numero degli elementi di

$$B^A := \{\text{funzioni da } A \text{ a B}\}$$

Per risolvere questo problema si può avvalere del diagramma in cui rappresentiamo gli due insiemi A, B. Ora, prendendo il primo elemento a_0, vediamo che possiamo definire m funzioni, collegando l'elemento a_0 a b_m. Stesso discorso vale per $a_1, a_2, \dots, a_n$; quindi generalizzando possiamo vedere che il risultato viene $m^n = |B|^{|A|} = |B^A|$

DEF 2.2. Questo problema, nel calcolo combinatorio, si chiama **disposizioni con ripetizioni**, ovvero senza *vincoli* particolari.



ESEMPIO 2.2.1.

Se voglio costruire tutte le *bandiere tricolori* possibili (ove sono ammessi i anche colori ripetuti) con *4 colori* a disposizione, quante posso costruirne?
SOLUZIONE. Questo è un caso applicato di *disposizioni con ripetizione*; infatti se si definisce le caselle delle bandiere come un insieme a tre variabili, $A = 1, 2, 3$, allora vogliamo trovare tutte le *funzioni* associate da A a $B = \{\text{rosso}, \text{verde}, \text{giallo}, \text{bianco}\}$
Pertanto la soluzione è 3^4.

PROBLEMA 2.3. Disposizioni di oggetti da m a n

PROBLEMA 2.3. Prendiamo lo stesso problema di prima; tuttavia vogliamo ora considerare un vincolo particolare: vogliamo cercare solo le *funzioni iniettive* (**DEF 3.2.**) da A a B. Ricapitolando, per *iniettiva* si intende che ad ogni a_x, a_y vengono associati immagini diversi. Pertanto, è necessario che $m \geq n$.
DEF 2.3.1. Inoltre indichiamo l'*insieme delle funzioni iniettive* come D_n^m.
SOLUZIONE. Si può avvalere dello stesso grafico di prima; se prendo il primo elemento a_0, allora ho m scelte per lo stesso ragionamento di prima; ora, se prendo il secondo elemento a_1, allora per rispettare il vincolo, ho una scelta in meno (ovvero l'elemento b_m associato ad a_0): quindi ora ho $m - 1$ scelte. Procedendo avanti così, arrivo fino

all'elemento a_n per cui ho $m-n+1$ scelte.
Pertanto

$$|D_n^m| = m(m-1)(m-2)\dots(m-(n-1))$$

ESEMPIO 2.3.1.

Prendiamo in esame lo stesso problema di prima, ovvero quella avendo a disposizione una *bandiera tricolore da colorare* e *quattro colori*.
Ora non vogliamo più i stessi colori; infatti, se la funzione dev'essere iniettiva, allora in un senso applicato ciò vuol dire che ad ogni area della bandiera dev'esserci un colore diverso.
Quindi si tratta di calcolare $|D_3^4| = 4(3)(2)$

PROBLEMA 2.4. Permutazioni

PROBLEMA 2.4. Prendiamo il problema appena preso in esame (ovvero la *disposizione di oggetti da* n *a* m) e ora vogliamo ci aggiungiamo un ulteriore vincolo: cerchiamo le *funzioni biiettive*, ovvero quelle sia *iniettive* che *suriettive*. Da qui consegue necessariamente che $|A| = |B| = n$.
DEF 2.4.1. Definiamo *l'insieme delle permutazioni (ovvero delle funzioni biiettive)* come P^n.
SOLUZIONE. Questo non è altro che un caso speciale di $|D_n^m|$ ove $m=n$, quindi

$$|P^n| = |D_n^n| = n(n-1)(n-2)\dots(1) = n!$$

ESEMPIO 2.4.1.

Consideriamo un problema totalmente diverso; se ho la *stringa* "CIAO", quante volte posso cambiarlo in modo tale che le lettere presenti nella stringa ci siano comunque?
Questo si tratta ovviamente di una *permutazione*, quindi calcoliamo $|P^4| = 4!$.

PROBLEMA 2.5. Combinazioni, coefficienti binomiali

PROBLEMA 2.5. Se considero un insieme A con $|A| = n$, e un numero $k \in \mathbb{N}$ tale che $0 \leq k \leq n$, allora voglio calcolare il *numero di sottoinsiemi di* A *con* k *elementi*.

DEF. 2.5.1. Definiamo *l'insieme dei sottoinsiemi di A con k elementi* come

$$C_k^n \text{ oppure } \binom{n}{k}$$

e si legge come *"n su k"*. Inoltre lo si chiama anche come il *coefficiente binomiale* oppure le *combinazioni di n oggetti a k a k*.
SOLUZIONE. Qui usiamo un esperimento mentale che presenta una situazione analoga a quella presentata.
Suppongo di aver n numero di palline, da cui voglio scegliere k; per la prima pallina 0 posso sceglierne n, poi per la pallina 1 posso sceglierne $n-1$, poi andando così finche si raggiunge l'ultima pallina k da cui posso scegliere $n-k+1$. Si osserva che questo è esattamente le *disposizioni* da n a k, D_k^n.
Tuttavia in questo modo tengo conto dell'ordine in cui scelgo le palline; invece le *combinazioni* non tengo conto dell'ordine. Quindi se vogliamo considerare l'ordine, dobbiamo attribuire ad ogni *combinazione* una *permutazione*; ciò vuol dire che bisogna moltiplicare le *combinazioni di n oggetti a k a k* per le *permutazioni di k oggetti*; pertanto si scrive

$$D_k^n = P^k C_k^n$$

da cui deriva

$$C_k^n = \frac{D_k^n}{P^k} = \frac{(n)(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Nella pagina Coefficiente Binomiale ci soffermeremo particolare (appunto) sul *coefficiente binomiale*, in quanto essa porta con sé delle proprietà particolari che ci permetteranno di costruire certi oggetti matematici, tra cui il *triangolo di Tartaglia*.

ESEMPIO 2.5.1.

Se ho un sacco con 10 palline da cui ne estraggo 3, quante *combinazioni* possibili ho?
Semplicemente, $C^10_3 = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3!(7!)}$.

Coefficiente Binomiale

Coefficiente binomiale come strumento per risolvere un problema del calcolo combinatorio; regole e teoremi sul coefficiente binomiale; costruzione del triangolo di Tartaglia; teoremi sul coefficiente binomiale.

DEF 1. Coefficiente Binomiale

Dai risultati del Problemi del Calcolo Combinatorio, sappiamo che

$$C^n_k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

2. Proprietà del coefficiente binomiale

Enunciamo le seguenti proprietà del *coefficiente binomiale* C^n_k:

1. $$\binom{0}{0} = 1$$

2. $$\forall n, \binom{n}{0} = 1$$
$$\binom{n}{n} = 1$$

3. **REGOLA DI STIFEL.** Sia $1 \leq k \leq (n-1)$,
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

   DIMOSTRAZIONE FORMALE.
   Per definizione,
$$\begin{gathered}\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{m} \\ \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k)!(n-k-1)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ (n-1)!(\frac{1}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{1}{k!(n-k-1)!}) = \frac{n!}{k!(n-k)!}\end{gathered}$$

Osservare la proprietà che consegue dalla *definizione ricorrente del fattoriale* (Assiomi di Peano, il principio di induzione):

$$\forall n, (n+1)! = n!(n+1)$$

da ciò implica che

$$n! = \frac{(n+1)!}{(n+1)}$$

Quindi secondo questa logica, si può dire le seguenti:

$$(k-1)! = \frac{k!}{k};\ (n-k-1)! = \frac{(n-k)!}{(n-k)};\ n! = (n-1)!n$$

Allora

$$\begin{aligned}(n-1)!(\frac{1}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{1}{k!(n-k-1)!}) &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ (n-1)!(\frac{k}{k!(n-k)!} + \frac{n-k}{k!(n-k)!}) &= (n-1)\frac{n}{k!(n-k)!} \\ \frac{k+n-k}{k!(n-k)!} &= \frac{n}{k!(n-k)!} \\ \frac{n}{k!(n-k)!} &= \frac{n}{k!(n-k)!} \text{ OK } \blacksquare\end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE SENZA CALCOLI/TEORICA.
Alternativamente, si potrebbe pensare la *regola di Stifel* nel seguente modo:
"Voglio contare le contare i sottoinsiemi con k elementi dell'insieme A (ove $|A| = n$); quindi voglio C_k^n.
Ora distinguiamo uno degli elementi di A con un *contrassegno particolare*, come il colore *rosso*; adesso gli insiemi di k elementi si dividono in due.
Ovvero, l'insieme dei sottoinsiemi che *contengono l'elemento rosso* e l'insieme dei sottoinsiemi che *non contengono l'elemento rosso*.
Consideriamo l'insieme di *tutti i sottoinsiemi che contengono l'elemento speciale*: devo quindi obbligatoriamente considerare *l'elemento* rosso, tirandolo fuori. Ho quindi da n elementi ne posso scegliere solo $n-1$, in quanto una è stata già scelta, e posso scegliere solo $k-1$ elementi visto che il primo elemento (ovvero il *rosso*) è stato già obbligatoriamente scelto.
Consideriamo invece l'altro insieme di *tutti i sottoinsiemi che NON*

contengono l'elemento contrassegnato: in questo caso si tratta semplicemente di *escludere* l'elemento rosso dalle scelte possibili, dandoci solo $n-1$ scelte su k.
Pertanto

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

3. Costruzione del triangolo di Tartaglia

Enunciamo di nuovo le 3 regole sopra:

$$\begin{aligned}
&1. \binom{0}{0} \\
&2. \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \\
&3. \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}
\end{aligned}$$

Da queste tre proprietà possiamo rappresentare i *coefficienti binomiali* tramite il c.d. *triangolo di Tartaglia*

Triangolo di Tartaglia

Disponiamo tutti i *coefficienti binomiali* $\binom{x}{y}$, dove la *"riga"* (a partire dall'alto) rappresenta il numero x e dove la *"colonna"* (a partire da sx.) rappresenta il numero y. Ad ogni riga rappresentiamo tutti i *coefficienti binomiali* $\binom{x}{y}$ finché x raggiunge y (ovvero $x=y$)

$$\begin{aligned}
&\binom{0}{0} \\
&\binom{1}{0}\binom{1}{1} \\
&\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{2} \\
&\binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3} \\
&\dots \\
&\binom{x}{0}\binom{x}{1}\dots\binom{x}{x-1}\binom{x}{x}
\end{aligned}$$

Ora, calcolando tutti i binomi (ricorrendo all'ausilio delle **proprietà del coefficiente binomiale**), otteniamo il seguente triangolo:

$$\begin{aligned}&1\\&1\ 1\\&1\ 2\ 1\\&1\ 3\ 3\ 1\end{aligned}$$

Facciamo le seguenti osservazioni:
OSS 3.1.1. Alle *"estremità"* del triangolo risulta sempre il numero 1, in quanto seconda la **proprietà 2.**, $\forall x, \binom{x}{x} = \binom{x}{0} = 1$
OSS 3.1.2. Se sono arrivato alla riga x, posso ottenere facilmente tutti gli elementi della prossima riga $x+1$; infatti $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$. Facendo un'interpretazione "geometrica" si può dire che se sono alla riga $x+1$, allora ottengo l'elemento di questa riga sulla colonna k sommando degli elementi che già conosciamo prima; ovvero $\binom{n-1}{k-1}, \binom{n-1}{k}$.
Questi sono gli elementi che stanno al di "sopra" e "sopra e sinistra" dell'elemento che vogliamo conoscere.
ESEMPIO 3.1.2.1. Per esempio ho

$$\begin{aligned}&1\\&1\ 1\\&1\ 2\ 1\\&1\ 3\ 3\ 1\end{aligned}$$

e voglio ottenere gli elementi della riga 4; in questo caso metto alle "estremità" i numeri 1 (**OSS 3.1.1.**), poi per calcolare $\binom{4}{x}$ (ovviamente $x \leq 4$) sommo l'elemento che sta sopra con quello che sta sopra e a sinistra.
Quindi otteniamo

$$1\ 4\ 6\ 4\ 1$$

OSS. 3.1.3. Il matematico *B. Pascal* nota il seguente nel suo trattato "Traité du triangle arithmétique": che se prendiamo una riga pari $2n$, allora il numero *"centrale"* della riga è uguale alla sommatoria di tutti i quadrati degli elementi della riga n.
Ovvero

$$\forall n \in \mathbb{N}, \binom{2n}{n} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^2$$

ESEMPIO 3.1.3.1. Prendiamo la riga 8,

$$1\ 8\ 28\ 56\ 70\ 56\ 28\ 8\ 1$$

ove l'elemento "centrale" è individuato con $70 = \binom{8}{4}$ e la riga 4,

$$1\ 4\ 6\ 4\ 1$$

Ora vediamo di sommare tutti gli elementi, poi per porlo al quadrato:

$$1^2 + 4^2 + 6^2 + 4^2 + 1^2 = 1 + 16 + 36 + 16 + 1 = 70$$

TEOREMA 1. Teorema del binomio (o di Newton)

Il *triangolo di Tartaglia* è una costruzione matematica molto importante, in quanto essa può essere sfruttata per sviluppare la potenza di un binomio in n grazie al *teorema del Binomio (o di Newton)*
TEOREMA 1. Siano $a, b \in \mathbb{R}$ (volendo anche in $\mathbb{C}$), sia $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, allora

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j}$$

DIM.