Cenni alla Geometria Euclidea - Sommario

Cenni alla Geometria Euclidea.

A. CENNI ALLA GEOMETRIA EUCLIDEA

A1. Prodotto scalare

Prodotto Scalare

Definizione di prodotto scalare e le proprietà del prodotto scalare.

---

0. Voci correlate

- Norma, versore e angolo
- Ortogonalità e ortonormalità

1. Definizione di Prodotto Scalare

#Definizione

Definizione (Definizione 1.1. (prodotto scalare di due vettori)).

Sia V un *spazio vettoriale su* $\mathbb{R}$ (Definizione 1 (Definizione 1.1. (spazio vettoriale sul campo K))) di *dimensione finita*.
In particolare si sceglie $V = \mathbb{R}^n$.
Dati due vettori $v, w \in V$, definiamo il *prodotto scalare* tra v, w come la quantità

$$v \cdot w \text{ oppure } < v, w > := v_1 w_1 + v_2 w_2 + \ldots + v_n w_n = \sum_{i=0}^{n} v_i w_i$$

#Definizione

Definizione (Definizione 1.2. (funzione prodotto scalare)).

Definiamo in tal modo la *funzione* prodotto scalare, ovvero una del tipo

$$\cdot : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

dove

$$v \cdot w = \sum_{n \leq i \leq 0} v_i w_i$$

2. Proprietà del prodotto scalare

#Proposizione

Proposizione 2.1. (la bilinearità del prodotto scalare)

Il prodotto scalare è *bilineare*, ovvero che valgono le seguenti proprietà:

- $\forall v_1, v_2 \in V, \forall w \in V$,

$$(v_1 + v_2) \cdot w = v_1 \cdot w + v_2 \cdot w$$

- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall v, w \in V$,

$$(\lambda \cdot v) \cdot w = \lambda \cdot (v \cdot w)$$

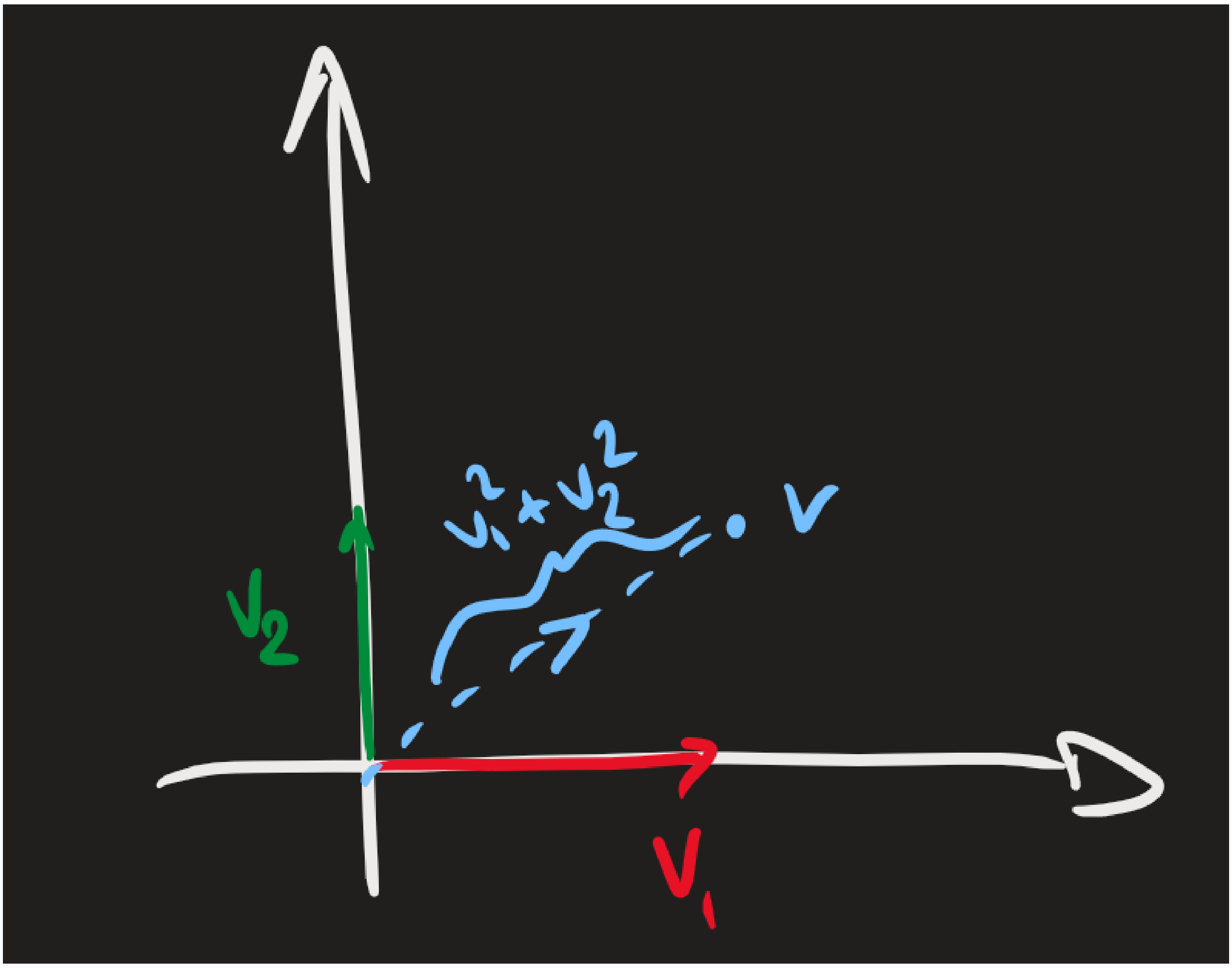
Valgono anche delle analoghe proprietà scambiando v, w.

#Osservazione

Osservazione 2.1. (il prodotto scalare tra due vettori uguali)

Sia un $v \in \mathbb{R}^2, v = (v_1, v_2)$ un vettore.
Allora il prodotto scalare $v \cdot v$ è $v_1^2 + v_2^2$.
Osserviamo che per il *teorema di Pitagora*, questa quantità è proprio la *lunghezza* del vettore v dall'origine $(0, 0)$ (*figura 2.1.*)

FIGURA 2.1. (*Osservazione 2.1.*)



A2. La norma, il versore e l'angolo di due vettori

Norma, versore e angolo

Conseguenze della definizione di prodotto scalare: definizione di norma di un vettore, definizione di versore e definizione di angolo tra due vettori. Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

---

0. Voci correlate

- Prodotto Scalare
- Ortogonalità e ortonormalità
- Teorema spettrale

1. Definizione della norma e del versore

#Definizione

Definizione (Definizione 1.1. (norma di un vettore)).

Sia $v \in \mathbb{R}^n$ un *vettore*.
Definiamo la *norma di* v la quantità

$$||v|| := \sqrt{(v \cdot v)}$$

dove $\cdot$ rappresenta il *prodotto scalare* (Definizione 1 (Definizione 1.1. (prodotto scalare di due vettori))).

#Osservazione

Osservazione 1.1. (la norma è sempre positiva)

Notiamo che per il *dominio della radice quadrata*, la norma di un vettore qualsiasi è *sempre positiva*.

$$||v|| \geq 0, \forall v \in \mathbb{R}^n$$

#Definizione

Definizione (Definizione 1.2. (versore)).

Si definisce un *versore* un vettore $v \in \mathbb{R}^n$ tale che la sua norma sia 1.

$$||v|| = 1$$

2. Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

#Teorema

Teorema (Teorema 2.1. (disuguaglianza di Cauchy-Schwarz)).

Siano v, w dei vettori in $\mathbb{R}^n$. Allora deve necessariamente valere la seguente disuguaglianza:

$$|v \cdot w| \leq ||v|| \cdot ||w||$$

#Corollario

Corollario (Corollario 2.1. (disuguaglianza di Cauchy-Schwarz 2.0)).

Siano $v, w \in \mathbb{R}^n$ diversi dal *vettore nullo* (pertanto la loro norma sarà strettamente positiva).
Allora vale che il *prodotto scalare dei vettori diviso per il prodotto scalare delle norme* è limitato tra $-1, 1$.

$$-1 \leq \frac{v \cdot w}{||v|| \cdot ||w||} \leq 1$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *corollario 2.1.* (Corollario 4 (Corollario 2.1. (disuguaglianza di Cauchy-Schwarz 2.0)))
La dimostrazione del corollario è immediato. Basta considerare la *disuguaglianza triangolare* (Teorema 6 (Teorema 3.3. (la disuguaglianza triangolare))), applicarla sulla *disuguaglianza di Cauchy-Schwarz* (Teorema 3 (Teorema 2.1. (disuguaglianza di Cauchy-Schwarz))) e infine dividere da ambo i lati per $||v|| \cdot ||w||$.

$$\begin{aligned} & |v \cdot w| \leq ||v|| \cdot ||w|| \\ \implies & -(||v|| \cdot ||w||) \leq |v \cdot w| \leq ||v|| \cdot ||w|| \\ \implies & \boxed{-1 \leq \frac{|v \cdot w|}{||v|| \cdot ||w||} \leq 1} \end{aligned}$$

3. Definizione di angolo

#Osservazione

Osservazione 3.1. (la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz e la trigonometria)

Possiamo, in una maniera interessante, collegare la *disuguaglianza di Cauchy Schwarz* (Corollario 4 (Corollario 2.1. (disuguaglianza di Cauchy-Schwarz 2.0))) alle *funzioni trigonometriche* (Definizione 1 (Definizione 1.1. (seno e coseno))), in particolare il *coseno*; infatti sono entrambe *limitate* in $[-1, 1]$.

#Definizione

Definizione (Definizione 3.1. (angolo tra due vettori)).

Siano v, w due vettori *non nulli* in $\mathbb{R}^n$.
Si definisce l'*angolo* di v, w come la quantità $\alpha \in [0, \pi]$

$$\cos \alpha = \frac{v \cdot w}{||v|| \cdot ||w||}$$

#Osservazione

Osservazione 3.2. (condizione necessaria e sufficiente per la perpendicolarità di due vettori)

Si osserva che l'angolo tra due vettori non nulli v, w è $\frac{\pi}{2}$ se e solo se vale il seguente:

$$\frac{v \cdot w}{||v|| \cdot ||w||} = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0 \implies v \cdot w = 0$$

Questa osservazione diventa importante per la definizione di *ortogonalità* (Ortogonalità e ortonormalità).

A3. Ortogonalità di vettori e basi

Ortogonalità e ortonormalità

Definizione di ortogonalità tra due vettori e di una base, ortonormalità di una base di un R-spazio vettoriale. Esempi di basi ortonormali.

---

0. Voci correlate

- Norma, versore e angolo
- Teorema spettrale

1. Condizioni di ortogonalità e di ortonormalità

#Definizione

Definizione (Definizione 1.1. (vettori ortogonali)).

Due vettori $v, w \in \mathbb{R}^n$ si dicono *ortogonali* se si verifica che il loro *prodotto scalare è nullo*.

$$v \cdot w = 0$$

#Osservazione

Osservazione 1.1. (conseguenza geometrica)

Come osservato nell'*osservazione 3.2* sugli angoli (Norma, versore e angolo > ^013add), l'ortogonalità di due vettori è sostanzialmente la codificazione *"algebrica"* della perpendicolarità di due rette.
Infatti due vettori sono ortogonali se e solo se perpendicolari.

#Definizione

Definizione (Definizione 1.2. (base ortogonale)).

Sia $\mathcal{B}$ una *base* di $\mathbb{R}^n$ (Definizione 1.1. (Base)).
Allora $\mathcal{B}$ si dice *ortogonale* se tutti gli *elementi* di tale insieme sono *a due a due* ortogonali tra di loro.

#Definizione

Definizione (Definizione 1.3. (base ortonormale)).

Sia $\mathcal{B}$ una *base* di $\mathbb{R}^n$.
Allora $\mathcal{B}$ si dice *ortonormale* se questa base è *ortogonale* e tutti gli elementi della base $b \in \mathcal{B}$ sono dei *versori* (Definizione 2 (Definizione 1.2. (versore))).

2. Ortogonale di un sottospazio vettoriale

#Definizione

Definizione (Definizione 2.1. (ortogonale di un sottospazio)).

Sia $W \subseteq \mathbb{R}^n$ un *sottospazio vettoriale*.
Si definisce *l'ortogonale di* W come l'insieme formato dai vettori in $\mathbb{R}^n$ tali che questi vettori e ogni vettore di W sia *ortogonale*.

$$W^{\perp} = \{v \in \mathbb{R}^n : \forall w \in W, v \cdot w = 0\}$$

3. Esempi/esercizi misti

#Esempio

Esempio 3.1.

Sia $\mathcal{B}$ il seguente insieme di vettori in $\mathbb{R}^3$.

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\mathcal{B}$ è una base *ortogonale* per $\mathbb{R}^3$.
Infatti i *prodotti scalari* tra il terzo e primo, terzo e secondo elemento sono ovviamente nulli; facendo dei calcoli, lasciati da svolgere al lettore, si verifica che i primi due vettori sono ortogonali.

#Esercizio

Esercizio 3.1.

Dimostrare che la *base canonica* per $\mathbb{R}^n$ per un qualsiasi $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{E}_n = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

è *ortonormale*.

#Esercizio

Esercizio 3.2.

Sia $\mathcal{B}$ una *base ortonormale* per $\mathbb{R}^n$.
Sia definito la *matrice di cambiamento*

$$B = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})$$

Calcolare ${}^tB \cdot B$.

#Esercizio

Esercizio 3.3.

Mostrare che $W^\perp$ è un *sottospazio vettoriale* per $\mathbb{R}^n$.

A4. Il teorema spettrale per le matrici simmetriche

Teorema spettrale

Il teorema spettrale per le matrici simmetriche: enunciato, conseguenze immediate ed esempi.

---

0. Voci correlate

- Definizione di Matrice Diagonale e Applicazione Diagonalizzabile
- Definizione di Autovalore, Autovettore, Autospazio
- Matrice
- Definizione della Matrice associata a un'Applicazione Lineare

1. Enunciato del teorema

#Teorema

Teorema (Teorema 1.1. (spettrale per le matrici simmetriche)).

Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matrice *quadrata simmetrica* (Definizione 7 (Definizione 2.4. (matrice simmetrica e antisimmetrica))).
Allora *esiste sempre* una *base ortonormale di autovettori* per l'applicazione lineare associata alla matrice (Definizione 1 (Definizione 1.1. (trasformazione lineare associata alla matrice))), $L_A(v) = A \cdot v$.

#Corollario

Corollario (Corollario 1.1. (ulteriore criterio di diagonalizzabilità)).

Sia $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ una *matrice associata alla trasformazione lineare* f per il *dominio*.
Se questa matrice è *simmetrica*, allora f è *diagonalizzabile* con una base *ortonormale* $\mathcal{B}$; dunque

$$P = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^3) \implies P^{-1} \cdot A \cdot P \text{ diagonale}$$

2. Esempio

#Esempio

Esempio 2.1.

Consideriamo la *matrice simmetrica*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

di cui sappiamo che la sua trasformazione lineare associata L_A è *diagonalizzabile*.

Calcoliamo lo *spettro* di f considerando le *radici del polinomio caratteristico* $p_f(\lambda)$.
... *parte lasciata da svolgere al lettore per esercizio* ...
Dunque abbiamo $\operatorname{sp} f = \{-1, 5\}$

Verifichiamo che $m_g(-1) = m_a(-1)$, calcolandone l'autospazio
... *parte lasciata da svolgere al lettore per esercizio* ...
Ora calcoliamo l'autospazio per $\lambda = 5$.
... *parte lasciata da svolgere al lettore per esercizio* ...
Infine abbiamo ottenuto i tre vettori

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

che forma una *base ortonormale* per $\mathbb{R}^3$.