Vettori Geometrici - Sommario

Sommario-appunti presi nel 27.06.2023, sui vettori applicati al passaggio di vettori liberi. Operazioni sui vettori e alcune osservazioni

---

Vettori Applicati

Vettori Applicati

Definizione basilare del vettore applicato, operazioni tra essi, vettore nullo, limitazioni dei vettori applicati, alcune proprietà.

Premessa

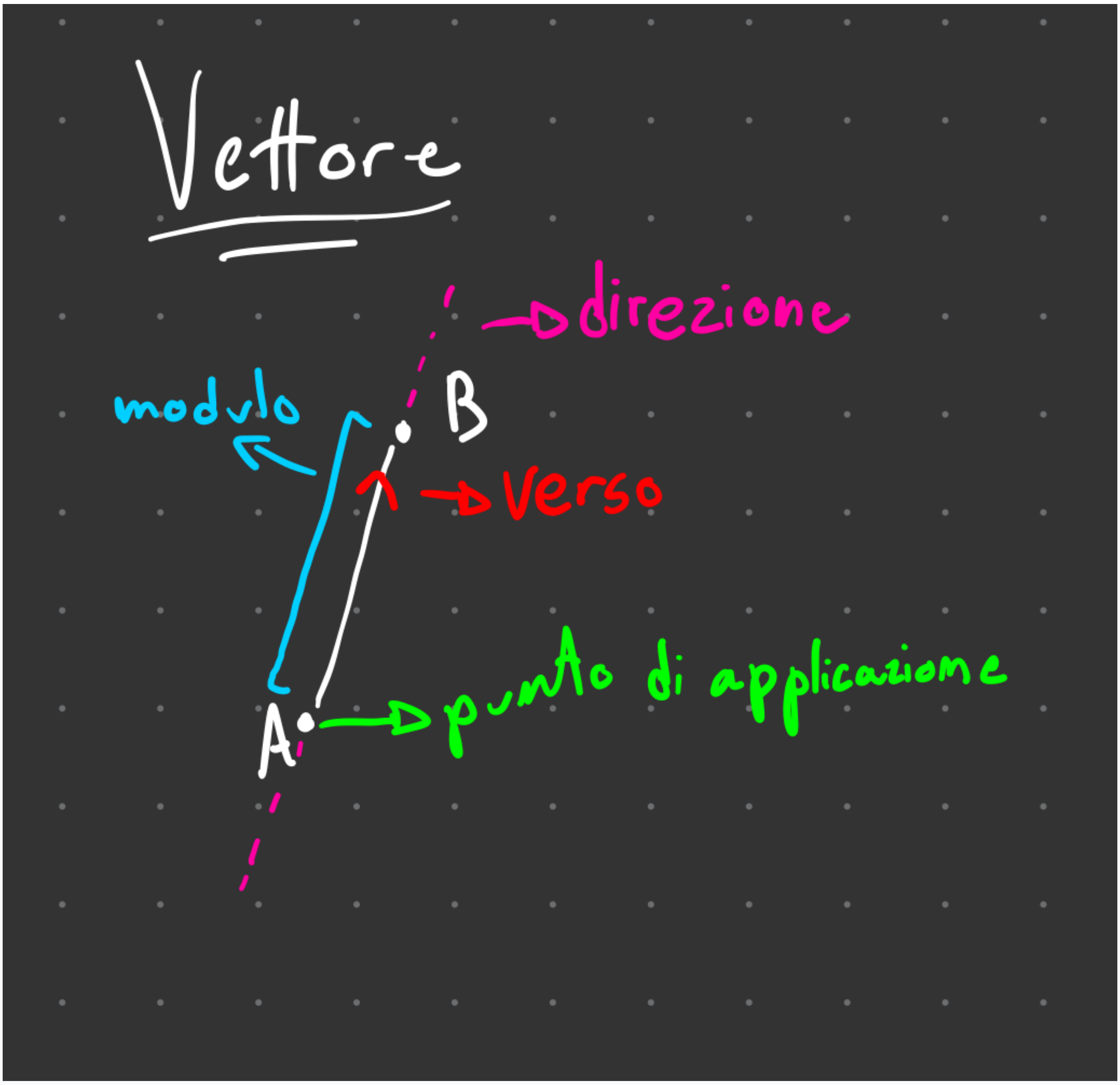
Ci mettiamo nel contesto della *geometria euclidea*, i quali postulati vengono descritti dagli *Elementi* (uno dei testi fondamentali della matematica) di Euclide (uno dei matematici greci più importanti); quindi ricorreremo a dei concetti geometrici che vengono dati come *elementi primitivi*, come il *punto*, il *piano*, la *retta*, $\ldots$

DEF 1. Vettore Applicato

Un **vettore applicato** è un segmento orientato, caratterizzato dunque da:

- **Punto di applicazione**; ovvero il *"punto di partenza"* A del vettore $\overrightarrow{AB}$.
- **Direzione**; essa è quella data dalla *retta* su cui giace il vettore
- **Verso**; esso è uno dei due *orientamenti* dalla retta
- **Modulo o lunghezza**; viene indicata con $|\overrightarrow{AB}|$

Graficamente il vettore si rappresenta così:



Dal grafico si evince che un **vettore applicato** è determinato da una coppia ordinata (A, B) di punti; in tal caso il vettore si denota $\overrightarrow{AB}$

DEF 1.2. Vettore applicato nullo

Per ogni *punto di applicazione* A, esiste il **vettore applicato nullo** $\overrightarrow{AA}$, che non ha un verso definito.

DEF 1.3. Somma dei due vettori applicati

I *vettori applicati* si possono **sommare** tra di loro, purché il punto finale del primo vettore coincida con il punto iniziale del secondo, ovvero purché siano della forma

$$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$$

DEF 1.3. Definiamo

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

OSS 1.3.1 Se i due vettori non sono della forma appena descritta sopra, ovvero

$$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD} \text{ ove } B \neq C$$

allora non è possibile sommare questi due vettori; infatti questo rappresenta la *prima limitazione* dei vettori liberi.

OSS 1.3.2. Se prendiamo

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$$

notiamo che $\overrightarrow{BB}$ e $\overrightarrow{AA}$ si comportano come il numero 0 con l'addizione; **però** notiamo che questi due sono dei vettori applicati *distinti* e non uguali, in quanto essi sono definiti dai loro rispettivi *punti di applicazione* (e ovviamente $A \neq B$). Pertanto è come se si avesse un numero 0 per ogni punto nel piano, dandoci così la *seconda limitazione* dei vettori liberi.

PROP 1.3.1: LA PROPRIETA' ASSOCIATIVA. La somma di vettori applicati, quando possibile, soddisfa la *proprietà associativa*;
DETOUR. Nei numeri reali $\mathbb{R}$ la *proprietà associativa* della somma dice il seguente.

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} \text{ vale che } (a+b)+c = a+(b+c)$$

Infatti grazie a questa proprietà è possibile scrivere la somma per un n numero di numeri senza nessuna ambiguità; ad esempio $a+b+c$.

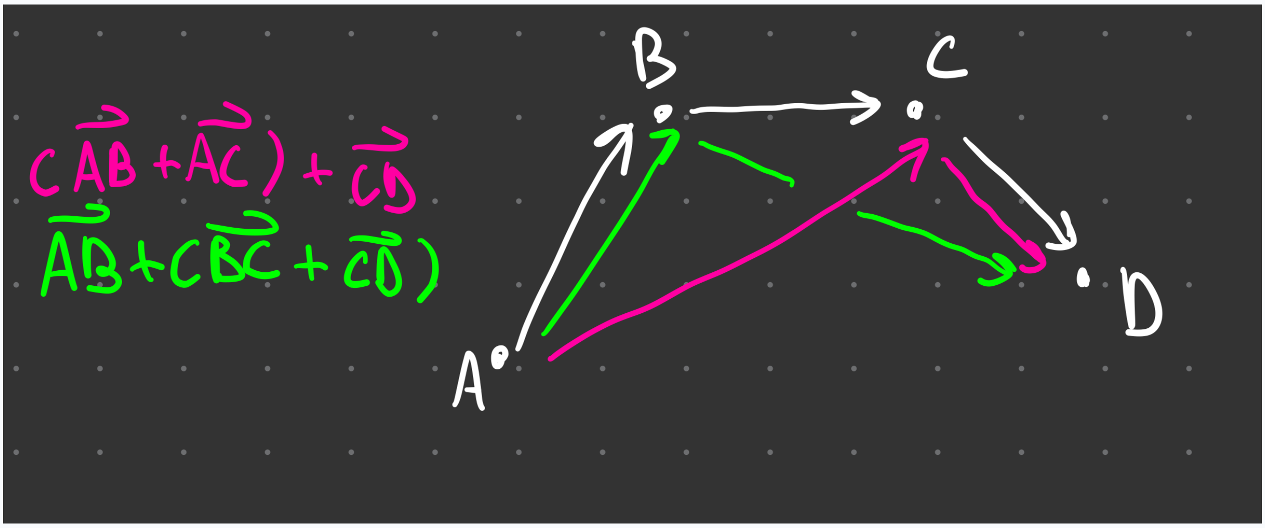
DIM. Dobbiamo dimostrare che per ogni vettore applicato $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}$ vale che

$$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD})$$

Ora, usando la definizione di *somme dei vettori* (**DEF 1.3.**), possiamo scrivere:

$$\text{membro sx. } (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$$
$$\text{membro dx. } \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} \ \blacksquare$$

Oppure si può anche avvalere dell'interpretazione grafica:



DEF 1.4. Moltiplicazione di un vettore per uno scalare

DEF 1.4. Dato un vettore applicato $\overrightarrow{AB}$ e un numero reale $a \in \mathbb{R}$, definiamo $a \cdot \overrightarrow{AB}$ in questo modo:

$$\text{- Se } a = 0,\ a \cdot \overrightarrow{AB} := \overrightarrow{AA}$$
$$\text{- Se } a > 0,\ a \cdot \overrightarrow{AB} := \text{Un vettore applicato in } A \text{ con le proprietà A)}$$
$$\text{- Se } a < 0,\ a \cdot \overrightarrow{AB} := \text{Un vettore applicato in A con le proprietà B)}$$

- **A)** Con la *stessa* **direzione** e lo *stesso* **verso**, **ma** con **modulo** uguale a $a \cdot |\overrightarrow{AB}|$;
- **B**) Con la *stessa* **direzione**, il **verso** *opposto* dal vettore originario $\overrightarrow{AB}$ e con **modulo** uguale a $|(a)| \cdot |\overrightarrow{AB}|$, ovvero $-(a) \cdot |\overrightarrow{AB}|$ ($|a|$ rappresenta il valore assoluto)

OSS 1.1. Parallelismo tra equazioni lineari e vettori applicati

Si nota un parallelismo tra due argomenti appena affrontati, ovvero le soluzioni di un'equazione e i Vettori Applicati. Infatti, da una certa *somma* *di vettori* si ottiene un altro vettore; da una *moltiplicazione di un vettore con uno scalare* si ottiene un altro vettore, come proprio accade con le *soluzioni di un'equazione* (osservatosi in Equazioni e Proprietà Lineari). Infatti entrambi i *vettori applicati* e le *soluzioni lineari* compongono dei **spazi vettoriali**; come lo stesso accade con le *soluzioni alle equazioni differenziali lineari*.

Vettori Liberi

Vettori Liberi

Costruzione dei vettori liberi, brevi richiami a relazioni e classi di equivalenza (in Analisi 1), significato di equipollenza, classe di equipollenza e definizione di somma tra vettori liberi.

Premessa

Come abbiamo osservato nei Vettori Applicati, la costruzione di esse comportano delle *limitazioni* (**OSS 1.3.1** e **OSS 1.3.2**); quindi per ottenere una teoria più *"comprensiva"*, introduciamo un nuovo oggetto: i **vettori liberi**.
Tuttavia è necessario prima introdurre dei nuovi concetti, tra cui il concetto dell'*equipollenza*, della *classe di equipollenza* e i *rappresentanti di una classe di equipollenza*.

DEF 1. Equipollenza

Due vettori applicati $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ si dicono **equipollenti** ($\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD}$) *se e solo se* i due vettori hanno:

- La medesima direzione
- Il medesimo verso
- Il medesimo modulo

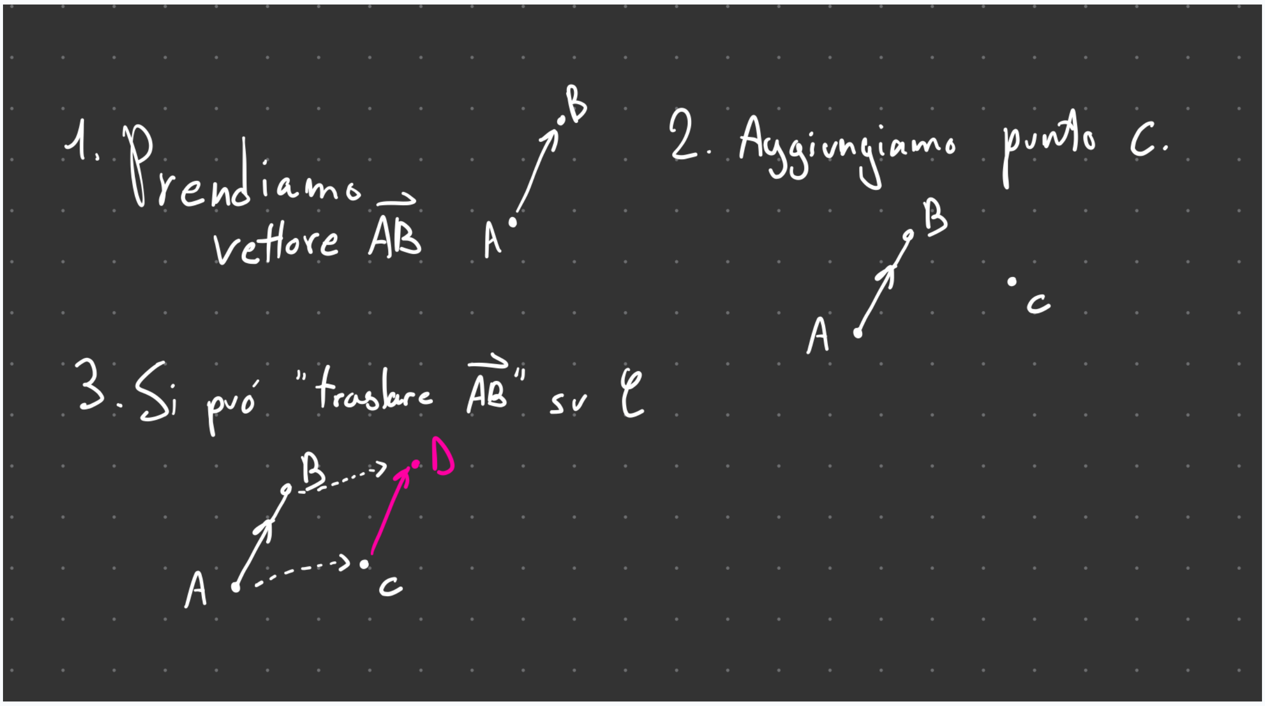
OSS 1.1. Si verifica che l'*equipollenza* è una relazione di equivalenza (**DEF 5.**); ovvero essa è riflessiva, simmetrica e transitiva. Questo in quanto l'equipollenza è descritta dall'essere uguali $=$.

DEF 2. Classe di equipollenza

Dato un vettore applicato $\overrightarrow{AB}$, si definisce la sua **classe di equipollenza**

$$[\overrightarrow{AB}] := \{\text{tutti i vettori applicati } \overrightarrow{CD} : \overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD}\}$$

PROP 2.1. Dai risultati della *geometria euclidea* segue che dati un vettore applicato $\overrightarrow{AB}$ e un punto C, allora esiste *sempre* un **vettore applicato** $\overrightarrow{CD} \equiv \overrightarrow{AB}$; da questo segue che una classe di equipollenza denotata $\vec{v}$ e dato un punto C nel piano, esiste *sempre* un vettore applicato che appartiene a $\vec{v}$ e che ha come punto iniziale C.
INTERPRETAZIONE GRAFICA.



OSS 2.1. Si nota che

$$\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD} \iff [\overrightarrow{AB}] = [\overrightarrow{CD}]$$

Quindi si dice che i vettori $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ sono dei *rappresentanti* della medesima classe di equipollenza.

DEF 3. Vettore libero

Ora finalmente si definisce il **vettore libero**, che si dice come una classe di **equipollenza** $\vec{v}$.
Infatti è una **quantità infinita** di vettori applicati, che condividono una medesima direzione, un medesimo verso e una medesima lunghezza; sostanzialmente si *"estrania"* dal vettore applicato il *punto di*

applicazione e si considerano solo le tre proprietà appena elencate sopra.

DEF 3.1. Vettore libero nullo

OSS 3.1.1. Tutti i *vettori applicati nulli* sono equipollenti e dunque formano una **sola classe di equipollenza** che si denota $\vec{0}$. Qui si vede superato la *prima limitazione* osservata nei Vettori Applicati (**OSS. 1.3.1**); quindi definiamo il *vettore libero nullo* come

$$\vec{0} := [\overrightarrow{AA}]$$

ovvero *tutti* i vettori per cui il punto di applicazione coincide con il punto di arrivo.

OSS 3.1.2. Tenendo in considerazione la definizione della somma tra due vettori liberi, si ha

$$\begin{aligned}\vec{0}+\vec{v} &= [\overrightarrow{AA}]+[\overrightarrow{AB}] = [\overrightarrow{AB}] \\ \vec{v}+\vec{0} &= [\overrightarrow{AB}]+[\overrightarrow{BB}] = [\overrightarrow{AB}]\end{aligned}$$

Quindi il *vettore libero nullo* $\vec{0}$ si comporta come il numero 0 rispetto all'operazione di *somma*.

Operazioni sui vettori liberi

Operazioni sui vettori liberi: somma, scalamento; proprietà di queste operazioni, proprietà asssociativa.

DEF 1. Somma di due vettori liberi

Dati due Vettori Liberi $\vec{u}, \vec{v}$, definiamo la loro **somma** $\vec{u}+\vec{v}$ nella maniera seguente:

1. Si sceglie un rappresentante $\overrightarrow{AB}$ per $\vec{u}$
2. Per la **PROP. 2.1.** (Vettori Liberi), si può sempre scegliere un vettore applicato in $\vec{v}$ tale che il suo punto iniziale sia B, ovvero un vettore applicato $\overrightarrow{BC} \in \vec{v}$, ovvero $\vec{v} = [\overrightarrow{BC}]$.

3. Definiamo infine

$$\vec{u}+\vec{v}:=[\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}]=[\overrightarrow{AC}]$$

PROP. 1.1. Si sceglie arbitrariamente un rappresentante per $\vec{u}$; tuttavia secondo il passaggio 3. si nota che *indipendentemente* dal vettore scelto iniziale, si raggiunge sempre allo stesso risultato finale; ovvero la classe di equipollenza $[\overrightarrow{AC}]$
DIM. Si vuole dimostrare che si raggiunge sempre allo stesso risultato finale, indipendentemente dal vettore iniziale scelto. Ripercorriamo i passaggi definiti in **DEF 3.1.** con delle leggere variazioni;
1. Si scelgono due distinti rappresentanti per $\vec{u}$, ovvero

$$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'} \in \vec{u}; \overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{A'B'}$$

2. Si scelgono i corrispettivi rappresentanti di $\vec{v}$, tali che i loro punti iniziali coincidano con i punti finali dei vettori-rappresentanti di $\vec{u}$;

$$\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{B'C'} \in \vec{v}; \overrightarrow{BC} \neq \overrightarrow{B'C'}$$

3. Ora, per definizione in **DEF 3.1.**, la somma di $\vec{u}+\vec{v}$ viene

$$\vec{u}+\vec{v}=[\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}]=[\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{B'C'}] \iff [\overrightarrow{AC}]=[\overrightarrow{A'C'}]=\vec{w}$$

Da qui si evince che *indipendentemente* dai punti di applicazione A e A' scelti, si arriva **sempre** allo stesso risultato; ovvero il *vettore-risultante* $\vec{w}$.
La definizione quindi è *ben posta*, ovvero *non* dipende dal rappresentante scelto.

OSS 1.1. Rigorosamente parlando, la *somma* è una funzione, ovvero la si scrive come

$$\begin{aligned} + : V_2 \times V_2 &\longrightarrow V_2 \\ (\vec{u},\vec{v}) &\mapsto \vec{u}+\vec{v} \end{aligned}$$

ove V_2 rappresenta l'insieme dei vettori liberi.

OSS 1.2. Se definiamo il *vettore libero nullo* come $\vec{0}:=[\overrightarrow{AA}]$, allora notiamo che questo comporta come il numero 0 rispetto alla *somma in* $\mathbb{R}$. Infatti,

$$\vec{0}+\vec{v}=[\overrightarrow{AA}]+[\overrightarrow{AB}]=[\overrightarrow{AB}]=\vec{v}$$
$$\vec{v}+\vec{0}=[\overrightarrow{AB}]+[\overrightarrow{BB}]=[\overrightarrow{AB}]=\vec{v}$$

DEF 2. Moltiplicazione di un vettore per uno scalare

Analogamente si definisce lo *scalamento* come l'operazione della moltiplicazione di un vettore per uno *scalare* (ovvero numero reale $\mathbb{R}$);
Se $\lambda \in \mathbb{R}$, $\vec{v} \in V_2$, allora possiamo definire $\lambda \cdot \vec{v}$;

$$\vec{v}=[\overrightarrow{AB}] \implies \lambda \cdot \vec{v} := [\lambda \cdot \overrightarrow{AB}]$$

Di cui $\lambda \cdot \overrightarrow{AB}$ è stata già definita in Vettori Liberi (**DEF 3.2.**).
OSS 2.1. Anche in questo caso la *moltiplicazione di un vettore per uno scalare* è una definizione *ben posta*.

OSS 2.2. Anche in questo caso la moltiplicazione di un vettore per uno scalare è una *funzione*, allora

$$\begin{gathered}\cdot : \mathbb{R} \times V_2 \longrightarrow V_2 \\ (\lambda, \vec{v}) \mapsto \lambda \cdot \vec{v}\end{gathered}$$

OSS 2.3. Si nota che

$$1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$$

ATTENZIONE! La **moltiplicazione di un vettore per uno scalare** NON va confusa con il *prodotto scalare*; si trattano di due operazioni completamente diverse, in quanto con la moltiplicazione di un vettore per uno scalare si ottiene un altro vettore; invece per il *prodotto scalare* si ottiene un altro vettore.

DEF 3. Proprietà delle operazioni sui vettori liberi

OSS 3.1. Si nota entrambe le operazioni $+$, $\cdot$ sono suriettive (**DEF 3.1.**), ovvero che a partire da due vettori è possibile raggiungere qualsiasi vettore; infatti se si considerano gli *elementi neutri* di queste operazioni (ovvero 0 per $+$; 1 per $\cdot$), possiamo prendere un qualsiasi rappresentante $\overrightarrow{AB}$ di $\vec{v}$ e metterli in funzione con questi elementi neutri, riotteniamo il medesimo vettore.

3.1. Proprietà della somma $+$

1. **PROPRIETA' ASSOCIATIVA.** $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$,

$$(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$$

2. **PROPRIETA' COMMUTATIVA.** $\forall \vec{u}, \vec{v}$,

$$\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$$

3. **L'ESISTENZA DELL'ELEMENTO NEUTRO.** $\forall \vec{v}$,

$$\vec{0}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{0}=\vec{v}$$

4. **L'ESISTENZA DELL'ELEMENTO OPPOSTO** $\forall \vec{v}, \exists \vec{w}:$

$$\vec{v}+\vec{w}=\vec{w}+\vec{v}=\vec{0}$$

OSS. 3.1.1. Tale elemento $\vec{w}$ si denota con $-\vec{v}$ e definiamo la *sottrazione*

$$\vec{v}+(-\vec{v}):=\vec{v}-\vec{v}=0$$

Se $\vec{v}=[\overrightarrow{AB}]$, allora $-\vec{v}=[\overrightarrow{BA}]$.

3.2. Proprietà dello scalamento

1. $\forall \vec{v}$,

$$1 \cdot \vec{v}=\vec{v}$$

2. $\forall \vec{v}$,

$$(-1) \cdot \vec{v}=-\vec{v}$$

3. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e $\forall \vec{v}$,

$$(\lambda \mu) \cdot \vec{v}=\lambda \cdot(\mu \cdot \vec{v})$$

OSS 3.2.1. Notare che questa proprietà non è banale, al contrario di quello che si può pensare; infatti nella prima si definisce una singola operazione tra un reale $\gamma=\lambda \mu$ e un vettore $\vec{v}$, invece nella seconda si definiscono due moltiplicazioni tra uno reale e un vettore.

4. $\forall \lambda \mu \in \mathbb{R}$ e $\forall \vec{u}, \vec{v}$,

$$
\begin{aligned}
&1.\ (\lambda + \mu) \cdot \vec{v} = \lambda \vec{v} + \mu \vec{v} \\
&2.\ \lambda \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \vec{v}
\end{aligned}
$$