Numeri Reali - Sommario

Tutto sui numeri reali $\mathbb{R}$

Richiami sui Numeri Razionali

Richiami sui Numeri Razionali (propedeutica per studiare i numeri reali): la costruzione dei numeri interi $\mathbb{Z}$*; la costruzione dei numeri razionali* $\mathbb{Q}$*; l'insufficienza di* $\mathbb{Q}$ *per rappresentare tutti i numeri. Dimostrazione dell'incommensurabilità di* $\sqrt{2}$

---

1. La costruzione dei numeri interi

OSS 1.1. Osserviamo che a partire dai numeri naturali $\mathbb{R}$ è possibile costruire un altro insieme numerico più *completo* che ci permette di fare altre operazioni (oltre alla somma e moltiplicazione), ovvero i numeri *interi relativi* $\mathbb{Z}$ (*Zahl*), che viene definita come

$$\mathbb{Z} := \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

in cui ad ogni numero positivo z corrisponde ad un numero *negativo* per cui ci permette di fare una nuova operazione: ovvero la *sottrazione* $-$.
Tuttavia questa non è sufficiente in quanto questa *costruzione* non ci permette di fare un'altra operazione molto importante, ovvero la *divisione* $\div$.

2. La costruzione dei numeri razionali

OSS 2.1. Quindi a partire da $\mathbb{Z}$ è possibile costruire i numeri razionali $\mathbb{Q}$ (*Quoziente*), dove un numero $q \in \mathbb{Q}$ è un quoziente di un numero intero $\mathbb{Z}$ e di un numero razionale $\mathbb{N}$;

$$\mathbb{Z} := \{\frac{p}{q} \text{ con } p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \diagdown \{0\}\}$$

I numeri razionali quindi ci permettono *non solo* di *contare*, ma anche di *misurare*, dato che possiamo precisamente misurare delle grandezze tramite questi numeri.
Tuttavia non posso misurare *tutto*; infatti se voglio descrivere un oggetto geometrico con i numeri, ovvero un quadrato con il lato $l = 1$, non posso misurare la lunghezza della diagonale del quadrato.
Infatti questo segmento si dice una *grandezza incommensurabile*.

TEOREMA 2.1. Non esistono $n, k \in \mathbb{N}$ tali che

$$(\frac{n}{k})^2 = 2$$

DIMOSTRAZIONE. Qui ragioniamo *per assurdo*; ipotizziamo che la tesi sia vera invece che falsa, poi per trovare un assurdo, una contraddizione.

1. Supponiamo che esistano $n, k \in \mathbb{N}$ tali che

$$(\frac{n}{k})^2 = 2$$

   inoltre non è restrittivo supporre che questi n, k non abbiano fattori in comune (quindi che siano ridotti ai minimi termini).
2. Ora,

$$\begin{gathered} \frac{n^2}{k^2} = 2 \\ \text{allora } n^2 = 2k^2 \\ \text{allora } 2 \mid n^2 \text{ è vera;} \end{gathered}$$

3. Considerando la scomposizione di n in numeri primi, ovvero

$$n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_n^{k_n}$$

   allora se n^2 è divisibile per un numero primo p_n, allora per forza anche n è divisibile per lo stesso numero primo, in quanto entrambi vengono moltiplicate per lo stesso p_n.
4. $$\begin{aligned} &\text{allora } 2 \mid n \text{ è vera;} \\ &\text{allora } n = 2m \\ &\text{allora } \frac{4n^2}{k^2} = 2 \\ &\text{allora } 4n^2 = 2k^2 \\ &\text{allora } k^2 = 2n^2 \\ &\text{allora } 2 \mid k \text{ è vera} \\ \text{ma allora anche } &2 \mid n \text{ è vera} \end{aligned}$$
5. Quindi sia n che k che sono pari, ciò vuol dire che hanno un fattore in comune (ovvero 2); ciò contraddice quello che abbiamo detto all'inizio, ovvero che n e k sono ridotti ai minimi termini. Di conseguenza non è possibile che esistano n e k. ■

CONCLUSIONE. Quindi i numeri razionali $\mathbb{Q}$ non sono sufficienti per misurare la diagonale di un quadrato; infatti è impossibile definire un $x \in \mathbb{Q}$ tale che $x^2 = 2$.

Assiomi dei Numeri Reali

Assiomi dei numeri reali $\mathbb{R}$*; Il gruppo abeliano* $(\mathbb{R}, +)$*, il campo* $(\mathbb{R}, +, \cdot)$*; assiomi fondamentali di* $\mathbb{R}$*; l'assioma caratterizzante di* $\mathbb{R}$ *(di Dedekind)*

Intervalli

Definizione di intervalli. Alcuni esempi

Insiemi limitati, maggioranti, massimo e teorema dell'estremo superiore

Definizione di insiemi limitati superiormente e inferiormente. Alcuni esempi; definizione di maggiorante, minorante, massimo e minimo. Teorema di esistenza dell'estremo superiore.

Conseguenze dell'esistenza dell'estremo superiore

Alcuni importanti dei numeri reali $\mathbb{R}$ *come conseguenza del teorema dell'esistenza dell'estremo superiore, numeri naturali* $\mathbb{N}$ *come sottoinsieme di* $\mathbb{R}$*, proprietà di Archimede, "*$\frac{1}{n}$ *diventa piccolo quanto si vuole", densità di* $\mathbb{Q}$ *in* $\mathbb{R}$*. Intervalli chiusi, limitati, inscatolati e dimezzati; teorema di Cantor, forma forte del teorema di Cantor*
