# Calcolo Combinatorio - Sommario

*Cenni al Calcolo Combinatorio, definizione del coefficiente binomiale $\binom{n}{k}$, problemi misti del Calcolo Combinatorio, teorema di Newton (o del binomio).*

---

## Problemi del Calcolo Combinatorio

*Significato del calcolo combinatorio; quali problemi esso mira di risolvere. Alcuni problemi: disposizioni con ripetizioni, disposizione di oggetti a m a m, permutazioni di n oggetti e combinazioni. Alcuni problemi misti del calcolo combinatorio*

---

## 1. Cosa vuol dire "calcolo combinatorio"

Se si definisce l'insieme dei numeri naturali come l'insieme dei numeri che servono *per contare*, allora il **calcolo combinatorio** si basa sul problema di *contare* certi insiemi/oggetti/...

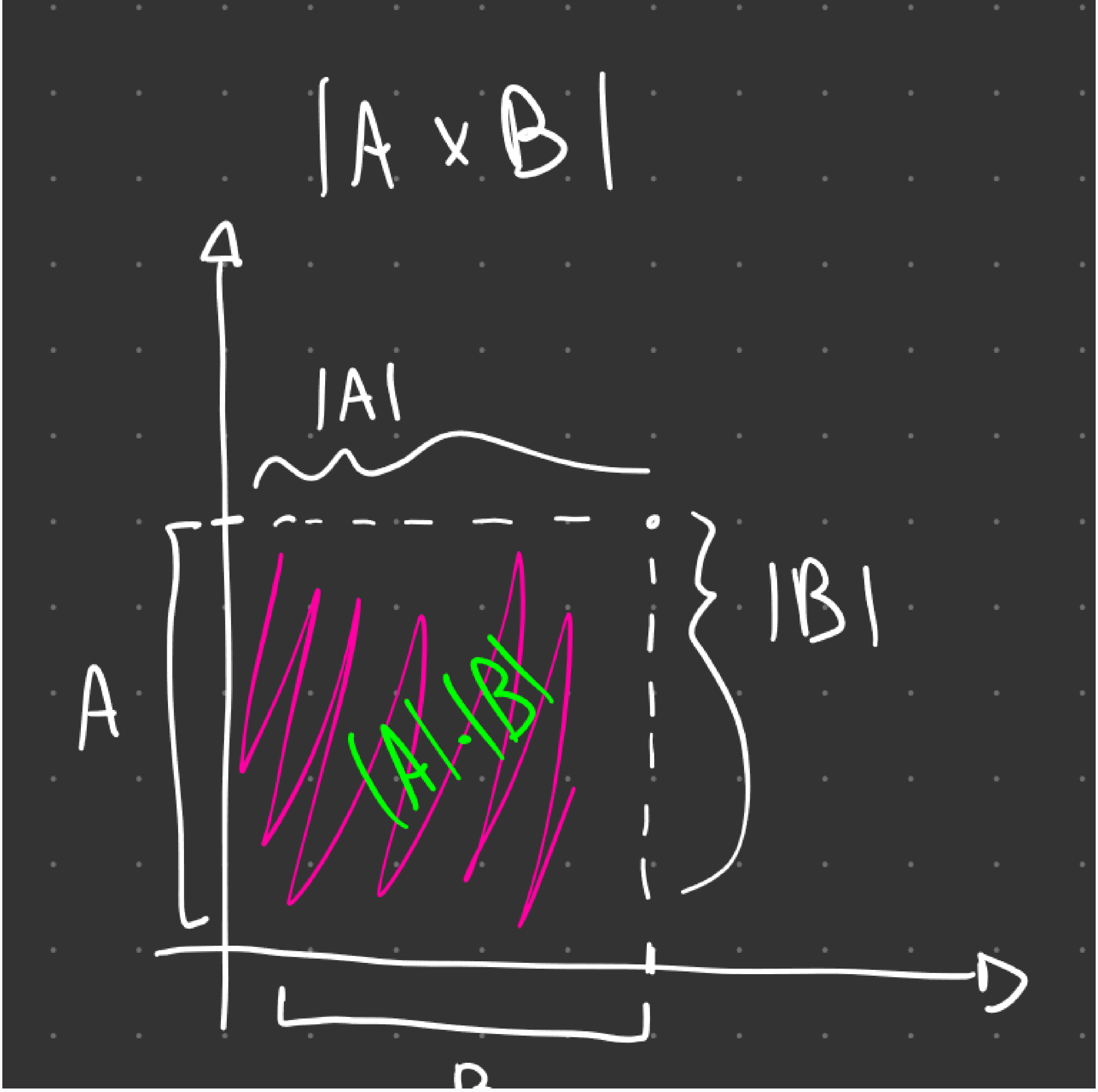
**DEF 1. Cardinalità** Si definisce la **cardinalità** di un *insieme* $A$ come il numero $n$ degli elementi contenuti nell'insieme $A$. Lo si denota come $|A|$.

## 2. I problemi del calcolo combinatorio

Il *calcolo combinatorio* ci presenta vari problemi che valgono la pena di essere studiati.

### PROBLEMA 2.1. Cardinalità del prodotto cartesiano

**PROBLEMA 2.1.** Supponiamo che $|A| = n$, $|B| = m$, ove $A, B$ sono *insiemi* e $n, m \in \mathbb{N}$. Allora ci poniamo il problema di trovare $|A \times B|$.
Se disegniamo il grafico di un qualsiasi prodotto cartesiano $A \times B$, si evince che per ogni riga $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ci sono $m$ colonne; quindi $|A \times B| = n \times m$



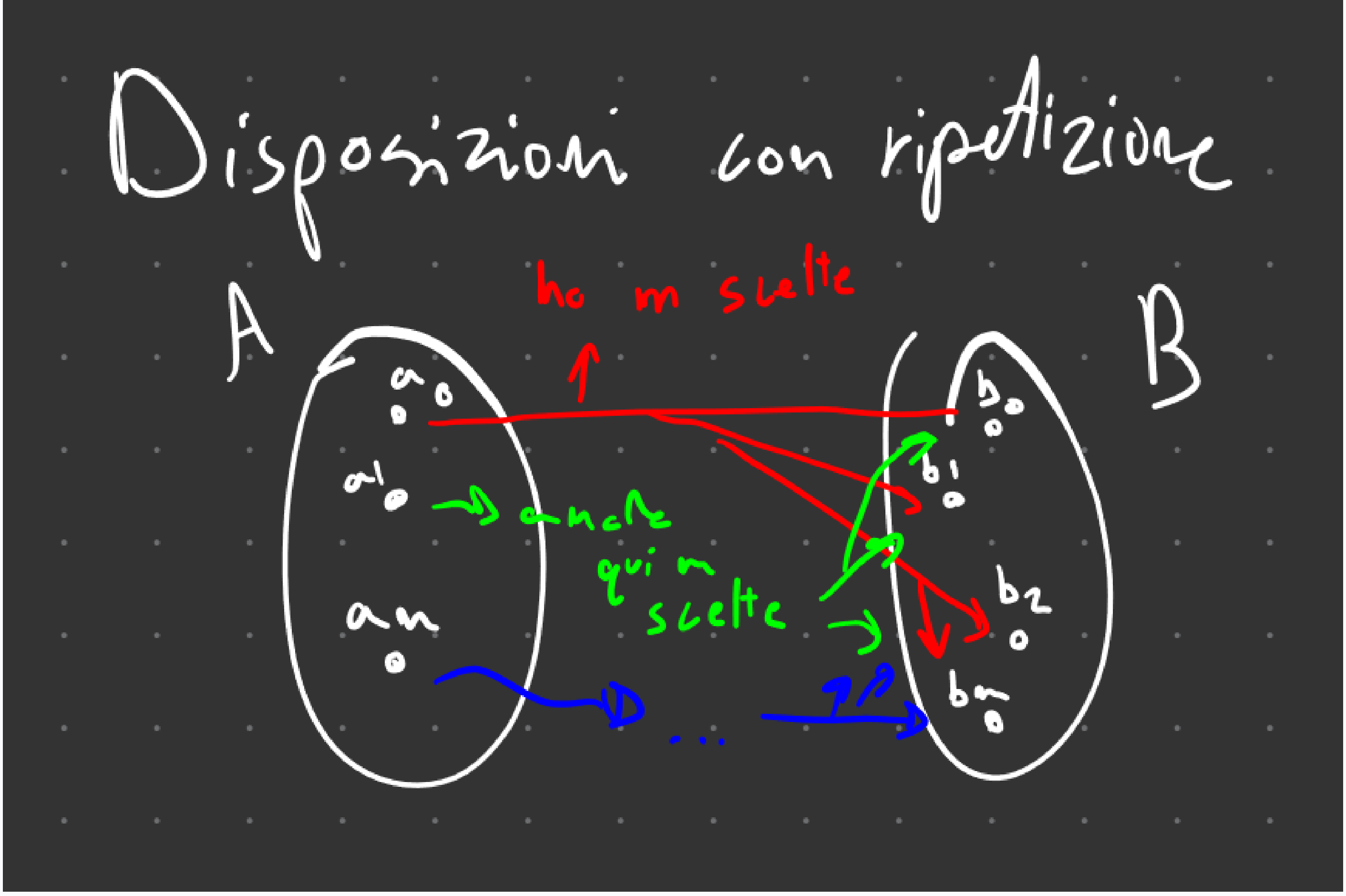

## PROBLEMA 2.2. Disposizioni con ripetizione

**PROBLEMA 2.2.** Siano $A, B$ insiemi con $|A| = n; |B| = m$; voglio contare il numero degli elementi di

$$B^A := \{\text{funzioni da } A \text{ a B}\}$$

Per risolvere questo problema si può avvalere del diagramma in cui rappresentiamo gli due insiemi $A, B$. Ora, prendendo il primo elemento $a_0$, vediamo che possiamo definire $m$ funzioni, collegando l'elemento $a_0$ a $b_m$.
Stesso discorso vale per $a_1, a_2, \ldots, a_n$; quindi generalizzando possiamo vedere che il risultato viene $m^n = |B|^{|A|} = |B^A|$

**DEF 2.2.** Questo problema, nel calcolo combinatorio, si chiama **disposizioni con ripetizioni**, ovvero senza *vincoli* particolari.




## ESEMPIO 2.2.1.

Se voglio costruire tutte le *bandiere tricolori* possibili (ove sono ammessi i anche colori ripetuti) con *4 colori* a disposizione, quante posso costruirne?
**SOLUZIONE.** Questo è un caso applicato di *disposizioni con ripetizione*; infatti se si definisce le caselle delle bandiere come un insieme a tre variabili, $A = 1, 2, 3$, allora vogliamo trovare tutte le *funzioni* associate da $A$ a
$B = \{\text{rosso}, \text{verde}, \text{giallo}, \text{bianco}\}$
Pertanto la soluzione è $3^4$.

## PROBLEMA 2.3. Disposizioni di oggetti da $m$ a $n$

**PROBLEMA 2.3.** Prendiamo lo stesso problema di prima; tuttavia vogliamo ora considerare un vincolo particolare: vogliamo cercare solo le *funzioni iniettive* (**DEF 3.2.**) da $A$ a $B$. Ricapitolando, per *iniettiva* si intende che ad ogni $a_x$, $a_y$ vengono associati immagini diversi. Pertanto, è necessario che $m \geq n$.
**DEF 2.3.1.** Inoltre indichiamo l'*insieme delle funzioni iniettive* come $D_n^m$.
**SOLUZIONE.** Si può avvalere dello stesso grafico di prima; se prendo il primo elemento $a_0$, allora ho $m$ scelte per lo stesso ragionamento di prima; ora, se prendo il secondo elemento $a_1$, allora per rispettare il vincolo, ho una scelta in meno (ovvero l'elemento $b_m$ associato ad $a_0$): quindi ora ho $m-1$ scelte.
Procedendo avanti così, arrivo fino all'elemento $a_n$ per cui ho $m-n+1$ scelte.
Pertanto

$$|D_n^m| = m(m-1)(m-2)\dots(m-(n-1))$$

## ESEMPIO 2.3.1.

Prendiamo in esame lo stesso problema di prima, ovvero quella avendo a disposizione una *bandiera tricolore da colorare* e *quattro colori*.
Ora non vogliamo più i stessi colori; infatti, se la funzione dev'essere iniettiva, allora in un senso applicato ciò vuol dire che ad ogni area della bandiera dev'esserci un colore diverso.
Quindi si tratta di calcolare $|D_3^4| = 4(3)(2)$

# PROBLEMA 2.4. Permutazioni

**PROBLEMA 2.4.** Prendiamo il problema appena preso in esame (ovvero la *disposizione di oggetti da $n$ a $m$*) e ora vogliamo ci aggiungiamo un ulteriore vincolo: cerchiamo le *funzioni biiettive*, ovvero quelle sia *iniettive* che *suriettive*.
Da qui consegue necessariamente che $|A| = |B| = n$.
**DEF 2.4.1.** Definiamo *l'insieme delle permutazioni (ovvero delle funzioni biiettive)* come $P^n$.
**SOLUZIONE.** Questo non è altro che un caso speciale di $|D_n^m|$ ove $m = n$, quindi

$$|P^n| = |D_n^n| = n(n-1)(n-2)\dots(1) = n!$$

## ESEMPIO 2.4.1.

Consideriamo un problema totalmente diverso; se ho la *stringa* "CIAO", quante volte posso cambiarlo in modo tale che le lettere presenti nella stringa ci siano comunque?
Questo si tratta ovviamente di una *permutazione*, quindi calcoliamo $|P^4| = 4!$.

# PROBLEMA 2.5. Combinazioni, coefficienti binomiali

**PROBLEMA 2.5.** Se considero un insieme $A$ con $|A| = n$, e un numero $k \in \mathbb{N}$ tale che $0 \leq k \leq n$, allora voglio calcolare il *numero di sottoinsiemi di $A$ con $k$ elementi*.
**DEF. 2.5.1.** Definiamo *l'insieme dei sottoinsiemi di $A$ con $k$ elementi* come

$$C_k^n \text{ oppure } \binom{n}{k}$$

e si legge come *"$n$ su $k$"*. Inoltre lo si chiama anche come il *coefficiente binomiale* oppure le *combinazioni di $n$ oggetti a $k$ a $k$*.
**SOLUZIONE.** Qui usiamo un esperimento mentale che presenta una situazione analoga a quella presentata.
Suppongo di aver $n$ numero di palline, da cui voglio scegliere $k$; per la prima pallina $0$ posso sceglierne $n$, poi per la pallina $1$ posso sceglierne $n-1$, poi andando così finche si raggiunge l'ultima pallina $k$ da cui posso scegliere $n-k+1$.
Si osserva che questo è esattamente le *disposizioni* da $n$ a $k$, $D_k^n$.
Tuttavia in questo modo tengo conto dell'ordine in cui scelgo le palline; invece le

*combinazioni* non tengo conto dell'ordine. Quindi se vogliamo considerare l'ordine, dobbiamo attribuire ad ogni *combinazione* una *permutazione*; ciò vuol dire che bisogna moltiplicare le *combinazioni di* $n$ *oggetti a* $k$ *a* $k$ per le *permutazioni di* $k$ *oggetti*; pertanto si scrive

$$D_k^n = P^k C_k^n$$

da cui deriva

$$C_k^n = \frac{D_k^n}{P^k} = \frac{(n)(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Nella pagina Coefficiente Binomiale ci soffermeremo particolare (appunto) sul *coefficiente binomiale*, in quanto essa porta con sé delle proprietà particolari che ci permetteranno di costruire certi oggetti matematici, tra cui il *triangolo di Tartaglia*.

### ESEMPIO 2.5.1.

Se ho un sacco con $10$ palline da cui ne estraggo $3$, quante *combinazioni* possibili ho?
Semplicemente, $C^10_3 = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3!(7!)}$.

## 3. Esempi misti del Calcolo Combinatorio

Ora presentiamo alcuni esempi misti del calcolo combinatorio, che può comprendere l'ausilio di alcune delle definizioni date sopra e un buon approccio critico ai problemi.

**PROBLEMA 3.1.** Ho un mazzo da $40$ carte e ne pesco $3$; quanti sono i possibili risultati $t$?
Questo è un caso quasi-banale di *combinazioni*, quindi

$$t = C_3^{40} = \frac{40!}{3!(37!)} = \frac{40 \cdot 39 \cdot 38}{3 \cdot 2} = 9880$$

**PROBLEMA 3.1.A** Ora considerando che ci sono $4$ semi (quindi $10$ carte per seme), quanti sono i risultati $r$ che NON contengono le carte di *denari*?
Anche qui si tratta di un problema di *combinazioni*, che però va affrontato più criticamente: infatti vogliamo estrarre le $40$ carte escludendone $10$, in quanto essi rappresentano dei semi; quindi sostanzialmente il "corpo" delle carte sono solo $30$.

$$r = \binom{40-10}{3} = \binom{30}{3} = 4060$$

**PROBLEMA 3.1.B** Considerando lo stesso mazzo di carte, ora voglio invece calcolare i risultati $\tilde{r}$ che contengono invece i *denari*.
Un approccio particolarmente furbo è quello semplicemente di prendere $t$ (ovvero tutte le combinazioni possibili) e sottrarli per il numero dei risultati senza i denari; infatti l'insieme dei risultati *con* i denari è complemento dell'insieme dei risultati *senza* i denari.
Quindi,

$$\tilde{r} = 9880 - 4060 = 5820$$

Oppure un altro approccio comunque accettabile è di considerare tutte le combinazioni dei risultati con esattamente *un* seme, poi *due* semi e infine *tre* semi e infine sommarli.
Infatti,

$$\tilde{r} = \binom{10}{1}\binom{30}{2} + \binom{10}{2}\binom{30}{1} + \binom{10}{3}\binom{30}{0} = 5820$$

**PROBLEMA 3.2. Il Lotto.** Ho $90$ bussolotti, ovvero dei numeri; ne estraggo $5$. Quali sono le possibili estrazioni?
Anche qui si tratta di un caso di *combinazioni* in quanto non tiene conto dell'ordine dei numeri estratti (in quanto essi vengono già ordinati in un'ordine crescente).

$$n_{\text{estrazioni}} = \binom{90}{5} \approx 44 \cdot 10^6$$

**PROBLEMA 3.3.** Ho una scacchiera $5 \times 5$ e $6$ pedine uguali.
*In quanti modi posso mettere le pedine sulla scacchiera, se voglio che tutte le righe e tutte le colonne abbiano almeno una pedina?*

> ⚠ **Questa è semplicemente la MIA soluzione proposta, quindi può essere che risulti sbagliata.**

**PROPOSTA DELLA SOLUZIONE.** Ragioniamo nel seguente modo:

1. Voglio porre le prime $5$ pedine in modo tale che il vincolo venga rispettato (quindi tutte le righe e le colonne hanno almeno una pedina piazzata), poi per porre la $6$-esima pedina liberamente.
2. Per le $5$ pedine ragiono così:
    1. Voglio porre la prima pedina sulla prima riga e su qualsiasi colonna. Ho quindi $5$ possibilità.
    2. Ora voglio porre la seconda pedina sulla seconda riga; però non posso porlo sulla stessa colonna scelta dalla prima pedina, dandomi una scelta in meno. Ho quindi $4$ possibilità.

3. Mi accorgo che qui si tratta di un semplice problema di *permutazioni (o disposizioni di oggetti a 5 a 5)*, ovvero che per calcolare tutte le possibilità devo fare $5! = 5 * 4 * 3 * 2 * 1$.
3. Ora considero la $6$-esima pedina: se le altre $5$ pedine hanno già occupato le loro caselle, allora mi rimangono solo $20$ caselle $(25 - 5 = 20)$.
4. Quindi ottengo il risultato

$$x = 20(5!) = 2400$$

### Coefficiente Binomiale

*Coefficiente binomiale come strumento per risolvere un problema del calcolo combinatorio; regole e teoremi sul coefficiente binomiale; costruzione del triangolo di Tartaglia; teorema di Newton (o del binomio) con dimostrazione. Applicazioni del teorema.*

---

## 1. Coefficiente Binomiale

**DEF 1.** Dai risultati del Problemi del Calcolo Combinatorio, sappiamo che

$$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

## 2. Proprietà del coefficiente binomiale

Enunciamo le seguenti proprietà del *coefficiente binomiale* $C_k^n$:

1. $$\binom{0}{0} = 1$$

2. $$\forall n, \binom{n}{0} = 1$$ $$\binom{n}{n} = 1$$

3. **REGOLA DI STIFEL.** Sia $1 \leq k \leq (n-1)$,

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

**DIMOSTRAZIONE FORMALE.**

Per definizione,

$$\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\binom{n}{m}$$
$$\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}+\frac{(n-1)!}{(k)!(n-k-1)!}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$
$$(n-1)!(\frac{1}{(k-1)!(n-k)!}+\frac{1}{k!(n-k-1)!})=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Osservare la proprietà che consegue dalla *definizione ricorrente del fattoriale* (Assiomi di Peano, il principio di induzione):

$$\forall n,(n+1)!=n!(n+1)$$

da ciò implica che

$$n!=\frac{(n+1)!}{(n+1)}$$

Quindi secondo questa logica, si può dire le seguenti:

$$(k-1)!=\frac{k!}{k};\ (n-k-1)!=\frac{(n-k)!}{(n-k)};\ n!=(n-1)!n$$

Allora

$$(n-1)!(\frac{1}{(k-1)!(n-k)!}+\frac{1}{k!(n-k-1)!})=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$
$$(n-1)!(\frac{k}{k!(n-k)!}+\frac{n-k}{k!(n-k)!})=(n-1)\frac{n}{k!(n-k)!}$$
$$\frac{k+n-k}{k!(n-k)!}=\frac{n}{k!(n-k)!}$$
$$\frac{n}{k!(n-k)!}=\frac{n}{k!(n-k)!}\ \text{OK}\ \blacksquare$$

**DIMOSTRAZIONE SENZA CALCOLI/TEORICA.**
Alternativamente, si potrebbe pensare la *regola di Stifel* nel seguente modo: "Voglio contare le contare i sottoinsiemi con $k$ elementi dell'insieme $A$ (ove $|A|=n$); quindi voglio $C^n_k$.
Ora distinguiamo uno degli elementi di $A$ con un *contrassegno particolare*, come il colore *rosso*; adesso gli insiemi di $k$ elementi si dividono in due. Ovvero, l'insieme dei sottoinsiemi che *contengono l'elemento rosso* e l'insieme dei sottoinsiemi che *non contengono l'elemento rosso*.
Consideriamo l'insieme di *tutti i sottoinsiemi che contengono l'elemento speciale*: devo quindi obbligatoriamente considerare *l'elemento* rosso, tirandolo fuori. Ho quindi da $n$ elementi ne posso scegliere solo $n-1$, in

quanto una è stata già scelta, e posso scegliere solo $k-1$ elementi visto che il primo elemento (ovvero il *rosso*) è stato già obbligatoriamente scelto.
Consideriamo invece l'altro insieme di *tutti i sottoinsiemi che NON contengono l'elemento contrassegnato*: in questo caso si tratta semplicemente di *escludere* l'elemento rosso dalle scelte possibili, dandoci solo $n-1$ scelte su $k$.
Pertanto

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

## 3. Costruzione del triangolo di Tartaglia

Enunciamo di nuovo le 3 regole sopra:

$$\begin{aligned}
&1.\ \binom{0}{0} \\
&2.\ \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \\
&3.\ \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}
\end{aligned}$$

Da queste tre proprietà possiamo rappresentare i *coefficienti binomiali* tramite il c.d. *triangolo di Tartaglia*

### 3.1. Triangolo di Tartaglia

Disponiamo tutti i *coefficienti binomiali* $\binom{x}{y}$, dove la *"colonna"* (a partire dall'alto) rappresenta il numero $x$ e dove la *"riga"* (a partire da sx.) rappresenta il numero $y$. Ad ogni riga rappresentiamo tutti i *coefficienti binomiali* $\binom{x}{y}$ finché $x$ raggiunge $y$ (ovvero $x=y$)

$$\begin{aligned}
&\binom{0}{0} \\
&\binom{1}{0}\binom{1}{1} \\
&\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{2} \\
&\binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3} \\
&\dots \\
&\binom{x}{0}\binom{x}{1}\dots\binom{x}{x-1}\binom{x}{x}
\end{aligned}$$

Ora, calcolando tutti i binomi (ricorrendo all'ausilio delle **proprietà del coefficiente binomiale**), otteniamo il seguente triangolo:

$$\begin{array}{l} 1 \\ 1\ 1 \\ 1\ 2\ 1 \\ 1\ 3\ 3\ 1 \end{array}$$

Facciamo le seguenti osservazioni:
**OSS 3.1.1.** Alle *"estremità"* del triangolo risulta sempre il numero $1$, in quanto seconda la **proprietà 2.**, $\forall x, \binom{x}{x} = \binom{x}{0} = 1$
**OSS 3.1.2.** Se sono arrivato alla riga $x$, posso ottenere facilmente tutti gli elementi della prossima riga $x+1$; infatti $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$. Facendo un'interpretazione "geometrica" si può dire che se sono alla riga $x+1$, allora ottengo l'elemento di questa riga sulla colonna $k$ sommando degli elementi che già conosciamo prima; ovvero $\binom{n-1}{k-1}, \binom{n-1}{k}$.
Questi sono gli elementi che stanno al di "sopra" e "sopra e sinistra" dell'elemento che vogliamo conoscere.
**ESEMPIO 3.1.2.1.** Per esempio ho

$$\begin{array}{l} 1 \\ 1\ 1 \\ 1\ 2\ 1 \\ 1\ 3\ 3\ 1 \end{array}$$

e voglio ottenere gli elementi della riga $4$; in questo caso metto alle "estremità" i numeri $1$ (**OSS 3.1.1.**), poi per calcolare $\binom{4}{x}$ (ovviamente $x \leq 4$) sommo l'elemento che sta sopra con quello che sta sopra e a sinistra. Quindi otteniamo

$$1\ 4\ 6\ 4\ 1$$

**OSS. 3.1.3.** Il matematico *B. Pascal* nota il seguente nel suo trattato "Traité du triangle arithmétique": che se prendiamo una riga pari $2n$, allora il numero *"centrale"* della riga è uguale alla sommatoria di tutti i quadrati degli elementi della riga $n$.
Ovvero

$$\forall n \in \mathbb{N}, \binom{2n}{n} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^2$$

**ESEMPIO 3.1.3.1.** Prendiamo la riga $8$,

$$1\ 8\ 28\ 56\ 70\ 56\ 28\ 8\ 1$$

ove l'elemento "centrale" è individuato con $70 = \binom{8}{4}$ e la riga $4$,

$$1\ 4\ 6\ 4\ 1$$

Ora vediamo di sommare tutti gli elementi al quadrato:

$$1^2 + 4^2 + 6^2 + 4^2 + 1^2 = 1 + 16 + 36 + 16 + 1 = 70$$

## 4. TEOREMA DEL BINOMIO (o di Newton)

Il *triangolo di Tartaglia* è una costruzione matematica molto importante, in quanto essa può essere sfruttata per sviluppare la potenza di un binomio in $n$ grazie al *teorema del Binomio (o di Newton)*

**TEOREMA 1.** Siano $a, b \in \mathbb{R}$ (volendo anche in $\mathbb{C}$), sia $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, allora

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} b^n$$

**DIM.** Si dimostra questo teorema per induzione.

1. Verificare che è vera per $P(1)$:

$$(a+b)^1 = \sum_{j=0}^{1} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j \iff a + b = \binom{1}{0} a^1 b^0 + \binom{1}{1} a^0 b^1 \text{ OK}$$

2. Verificare che, supponendo $P(n)$ allora $P(n) \implies P(n+1)$ è vera.

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j$$

$$(a+b)^n (a+b) = (a+b) \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j$$

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n+1-j} b^j + \sum_{j=0}^{n} a^{n-j} b^{j+1}$$

3. Adesso "estraiamo" il primo elemento dalla prima sommatoria e l'ultimo elemento dall'altra sommatoria.

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n+1-j} b^j + \sum_{j=0}^{n} a^{n-j} b^{j+1} \\ &= (a^{n+1}) + (b^{n+1}) + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} a^{n+1-j} b^j + \sum_{j=0}^{n-1} a^{n-j} b^{j+1}\end{aligned}$$

4. Effettuiamo un "trucco" alla seconda sommatoria, ovvero quella di porre

$k = j+1$ (e pertanto $j = 0 \implies k = 1$) e poi di porre $k = j$, che è possibile in quanto $k$ è una *variabile muta*.

$$(a^{n+1}) + (b^{n+1}) + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} a^{n+1-j} b^j + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} a^{(n+1)-(j+1)} b^{j+1}$$

$$= \dots + \sum_{j=1}^{n} \dots + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k$$

$$= \dots + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} a^{n+1-j} + b^j + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j-1} a^{n+1-j} + b^j$$

$$= \dots + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} \binom{n}{j-1} a^{n+1-j} + b^j$$

$$\text{Per la regola di Stiefe,} \binom{n}{j} \binom{n}{j-1} = \binom{n+1}{j}$$

$$= (a^{n+1}) + (b^{n+1}) + \sum_{j=1}^{n} \binom{n+1}{j} a^{n+1-j} + b^j$$

5. E riferendosi alla sommatoria presente nell'uguaglianza, se prendiamo $j = 0$ e $j = n+1$, allora

$$1.\ \binom{n+1}{0} a^{n+1} + b^0 = 1 \cdot a^{n+1} = a^{n+1}$$

$$2.\ \binom{n+1}{n+1} a^{n+1-n-1} b^{n+1} = b^{n+1}$$

e quindi possiamo "rintegrarli" nella sommatoria come l'elemento $0$-esimo e $n+1$-esimo, ottenendo

$$\sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} a^{n+1-j} + b^j$$

$$P(n+1) : (a+b)^n = \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} a^{(n+1)-j} + b^j$$

che è ciò che volevamo ottenere. Quindi il teorema è stato così dimostrato. ■

## 4.1. ESEMPI SUL TEOREMA DEL BINOMIO

**ESEMPIO 4.1.1.** Vogliamo calcolare $(a+b)^6$.
Otteniamo innanzitutto lo sviluppo di $(a+b)^6$ secondo il teorema binomiale:

$$(a+b)^6 =$$
$$\binom{6}{0}a^6 + \binom{6}{1}a^5b^1 + \binom{6}{2}a^4b^2 + \binom{6}{3}a^3b^3 + \binom{6}{4}a^2b^4 + \binom{6}{5}a^1b^5 + \binom{6}{6}b^6$$

Ora costruiamo il *triangolo di Tartaglia* fino alla *6*-esima riga, secondo le regole notate in 3. Costruzione del triangolo di Tartaglia:

$$\begin{array}{l} 1 \\ 1\ 1 \\ 1\ 2\ 1 \\ 1\ 3\ 3\ 1 \\ 1\ 4\ 6\ 4\ 1 \\ 1\ 5\ 10\ 10\ 5\ 1 \\ 1\ 6\ 15\ 20\ 15\ 6 \end{array}$$

Ora sfruttiamo questo triangolo per poter sostituire tutti i coefficienti binomiali nella forma sviluppata appena scritta.

$$\binom{6}{0}a^6 + \binom{6}{1}a^5b^1 + \binom{6}{2}a^4b^2 + \binom{6}{3}a^3b^3 + \binom{6}{4}a^2b^4 + \binom{6}{5}a^1b^5 + \binom{6}{6}b^6$$
$$\text{diventa}$$
$$a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

**ESEMPIO 4.1.2.** Calcolare $\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}$.
Si può risolvere questo problema in due modi:

1. Se (per definizione) consideriamo il coefficiente binomiale $\binom{n}{j}$ come la cardinalità delle *combinazioni* di un insieme $A$ (ove $|A| = n$) $C_j^n$, ovvero il numero degli sottoinsiemi di $A$ con $j$ elementi, allora possiamo considerare questo problema come il seguente: *"qual è la cardinalità di tutti gli sottoinsiemi di $A$ (quindi da $0$ a $n$ elementi)?"*; dai risultati della Teoria degli Insiemi, sappiamo immediatamente che la risposta è $2^n$.
2. Oppure possiamo semplicemente usare il *teorema del binomio*; ovvero ponendo $a = b = 1$, abbiamo

$$(1+1)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j \iff 2^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}$$

   dandoci così immediatamente la risposta.

**ESEMPIO 4.1.3.** Calcolare

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j}$$

Se consideriamo il 3.1. Triangolo di Tartaglia, viene che la risposta intuitiva è $0$, in quanto le righe dispari sono simmetriche; quindi "dividendo" quella riga, abbiamo un "lato" positivo e negativo, che sommandoli otteniamo $0$.
Tuttavia questa risposta non è abbastanza rigorosa per essere considerata; infatti per avere una giustificazione più sicura, si deve usare il *teorema del binomio* nel seguente modo.
Siano $a = -b = 1$, ovvero

$$\begin{aligned}(1-1)^n &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} 1^{n-j}(-1)^j \\ 0^n &= \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \\ 0 &= \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \blacksquare\end{aligned}$$