# Prova d'esame Algebra Lineare ed Elementi di Geometria - 16.01.2024

---

## Esercizio 1 (Teoria)

- Dare la definizione di una base per un spazio vettoriale e di indipendenza lineare per dei vettori di un spazio vettoriale.
- Enunciare e dimostrare il teorema di dimensione per le applicazioni lineare.

---

## Esercizio 2 (Applicazioni lineari e sistemi lineari)

A) Considerare l'applicazione lineare

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

dove

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 + 3x_3 \\ x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 - x_2 - x_1 \end{pmatrix}$$

- Calcolare la matrice associata all'applicazione lineare $A = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$, dove $\mathcal{E}$ è la base canonica per $\mathbb{R}^3$.
- Calcolare le dimensioni di $\operatorname{im} f, \ker f$ ed esibire una base per ciascuna di queste.
- Esibire un vettore $v \in \mathbb{R}^3$ tale che $v \in \operatorname{im} f \cap \ker f$.

B) Considera il seguente sistema lineare

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \alpha \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

- Dire per quale parametro $\alpha$ al variare in $\mathbb{R}$ il sistema lineare diventa compatibile.
- Trovare una generica soluzione per il sistema lineare per il valore in cui il sistema lineare è compatibile.

---

## Esercizio 3 (Diagonalizzazione)

Considerare la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 9 & -12 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

e l'applicazione lineare associata a questa matrice $L_A$.
A) Determinare il polinomio caratteristico di $L_A$ e il spettro di $L_A$.
B) Determinare una base $\mathcal{B}$ composta da auto vettori per gli autovalori di $L_A$.
C) Calcolare le matrici del cambiamento di base $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(L_A)$, $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(L_A)$.

---

# Esercizio 4 (Geometria affine)

A) Considerare la retta $s : x + 2y = 1$ e il punto $Q = (1, -2)$. Determinare la retta $r \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ parallela a $s$ e passante per $Q$.

B) Considerare le seguenti rette nello spazio:

$$r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = -t \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x + z = 2 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

- Determinare la posizione reciproca tra $r, s$ (ovvero se sono paralleli, incidenti, sghembi, ...)
- Se paralleli o incidenti, determinare un piano $\pi$ tale che $r, s \subseteq \pi$
- Altrimenti determinare due piani paralleli $\pi, \tau$ tali che $r \subseteq \pi, s \subseteq \tau$.

---

*N. B. Non mi ricordo il conteggio dei punti, dunque non sono stati segnati. Sono più o meno uguali a quelli delle simulazioni.*

---