Oscillazioni - Sommario

Moto Armonico

Definizione di moto armonico. Corollari: la cinematica, la dinamica e l'energia del moto armonico.

---

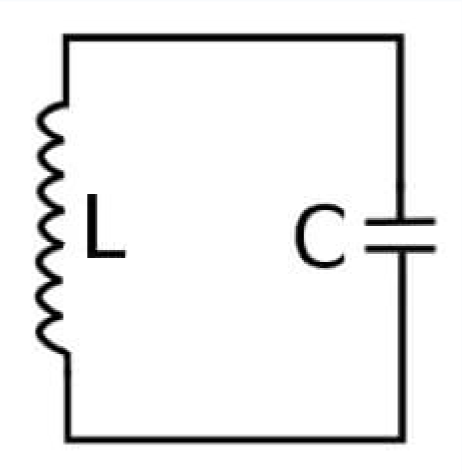
0. Voci correlate

- Velocità e Accelerazione di un Corpo Puntiforme
- Forza Elastica
- Energia Cinetica
- Energia Potenziale
- Conservazione dell'Energia

1. Definizione di Moto Armonico

Preambolo. Nella natura abbiamo molte *"cose che oscillano"*: parliamo di musica (infatti ambiamo le *onde d'aria* che *vibrano*), di casi classici come il *pendolo*, fino persino alla *elettronica*, col c.d. *circuito LC*.
Per studiare la natura di questi moti, partiamo dalla *"soluzione"*: ovvero la *definizione matematica* del moto armonico.

Figura 1.1. (*Circuito LC*)



#Definizione

Definizione (moto armonico).

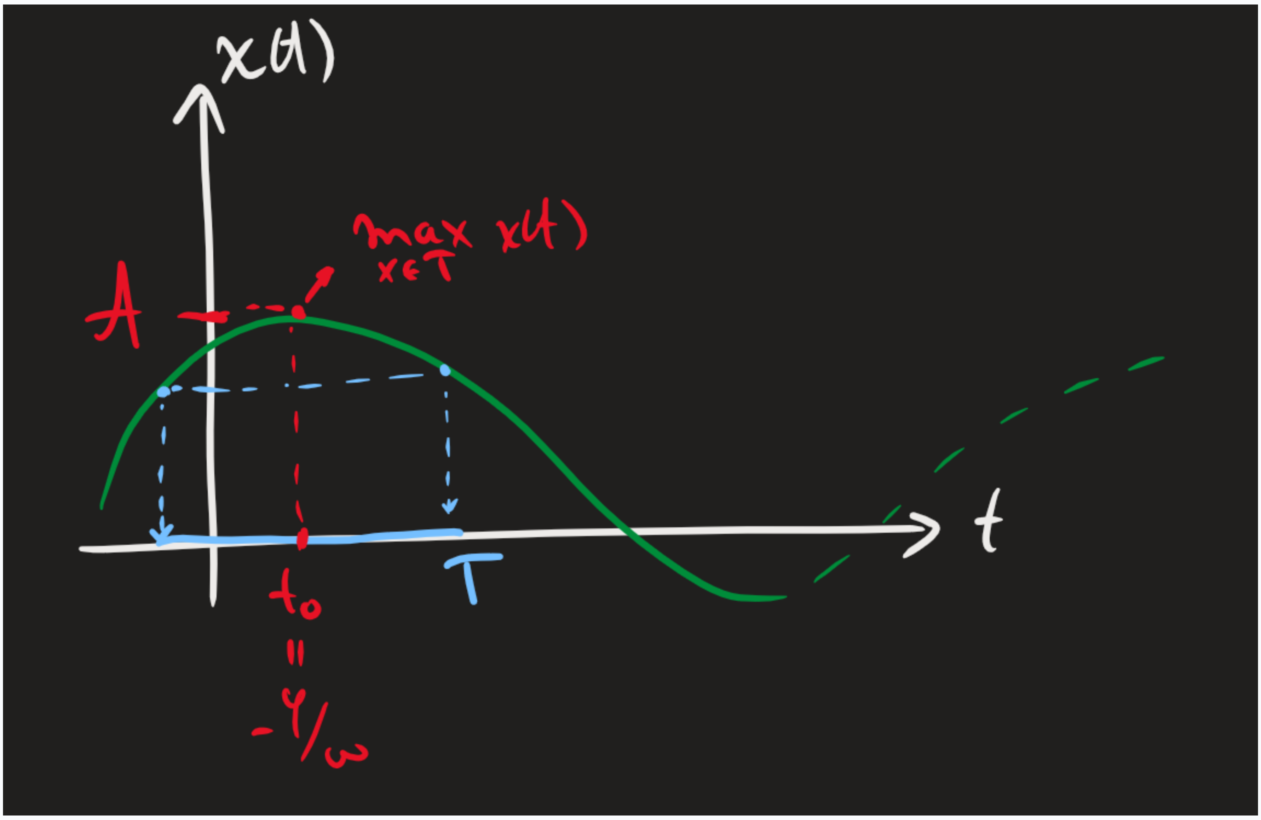
Una *quantità fisica* che presenta un'equazione del tipo

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)}$$

(si può anche sostituire il coseno $\cos$ col seno $\sin$) si dice *"moto armonico"*. Componiamo le componenti di quest'equazione in ogni sua parte:
- A si dice *"ampiezza"*; questo determina la *"estensione massima"* del moto armonico.
- ω si dice *"pulsazione"*; attenzione a non confonderlo con la *frequenza*! Con la pulsazione si considera il *periodo* 2π. Infatti vale che $\omega = 2\pi f$
- φ si dice *"fase"*, che determina la *"posizione iniziale"* e rappresenta lo *spostamento* del moto ondulatorio nel tempo. Infatti vale che $\cos(\omega t + \phi) = \cos(\omega(t - t_0))$.
- La quantità di tempo per cui partiamo da un punto $x(t_0)$ e arriviamo allo stesso punto $x(t_1)$ si dice *"periodo"* T.

Graficamente ho la *figura 1.2.*.

FIGURA 1.2. (*Il moto oscillatorio*)



Adesso iniziamo ad applicare le *nozioni di fisica classica* su questo tipo di moto.

2. La Cinematica del Moto Armonico

Iniziamo dalla *cinematica*, derivando la *velocità* e l'*accelerazione* del moto oscillatorio. Inoltre faremo una nota sulla *"equazione differenziale caratteristica"* del moto oscillatorio.

#Corollario

Corollario (la cinematica del moto armonico).

Se $x(t)$ è un *moto oscillatorio* con i suoi dovuti coefficienti, allora vale che:
i. La velocità del moto armonico è

$$v(t) = -\omega A \sin(\omega t + \varphi)$$

ii. L'accelerazione del moto armonico è

$$a(t) = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x(t)$$

#Osservazione

Osservazione (osservazione sull'accelerazione).

Notiamo che

$$a(t) = -\omega^2 x(t)$$

è un'equazione differenziale.

Infatti *un modelli fisico qualsiasi* che presenta un'equazione differenziale del tipo

$$\boxed{f'' + \omega^2 f = 0}$$

si dice che presenta un *"moto armonico"*.

3. La Dinamica del Moto Armonico

Adesso proseguiamo con le forze. Che la forza sia con te!

#Corollario

Corollario (la dinamica del moto armonico).

Si può rappresentare il *moto oscillatorio* nella dinamica col seguente *"modello tipico"*: la *forza elastica* rappresentata con la *legge di Hooke* (1).

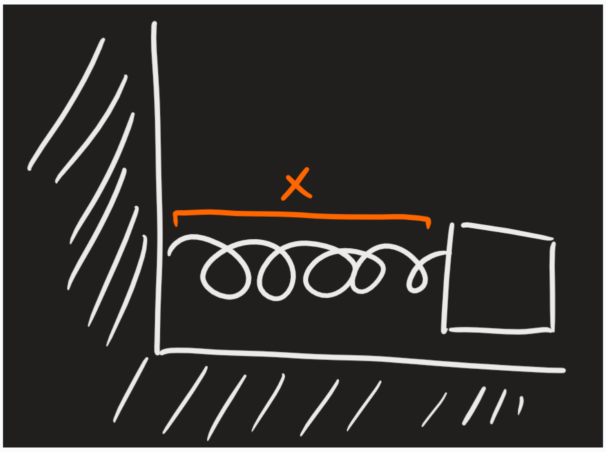
Infatti qui abbiamo l'equazione differenziale

$$\sum F \longrightarrow ma = -kx$$

Da cui abbiamo i seguenti risultati.

$$\boxed{\begin{aligned} a &= -\frac{kx}{m} \\ \omega &= \sqrt{\frac{k}{m}} \end{aligned}}$$

FIGURA 3.1. (*Modello tipico del moto armonico*)



#Osservazione

Osservazione (la pulsazione è indipendente dall'ampiezza).

Notiamo che la formula

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

ci fa capire che la *pulsazione* ω è completamente indipendente dall'*ampiezza*. Questo è dovuto al fatto che abbiamo *modelli idealizzati*.

> Ad esempio, vedremo che per *modellizzare* pendoli prendiamo sempre piccoli angoli $\theta \to 0$.

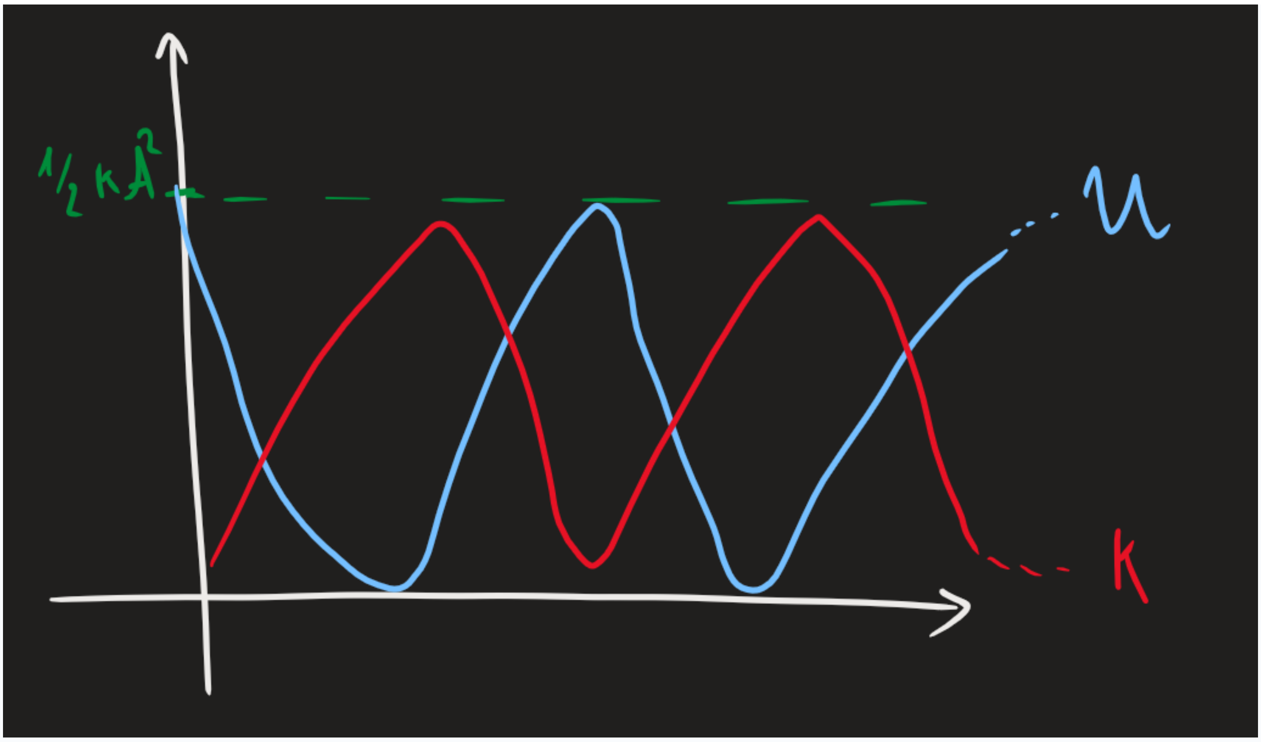
4. L'Energia del Moto Armonico

Per ultimo consideriamo l'*energia* del moto armonico.

#Corollario

> **Corollario (energia cinetica, potenziale e totale del moto armonico).**
>
> Supponiamo di avere un *moto armonico*, in assenza di *forze esterne* o *forze interne dissipative*. Allora vale che:
> i. L'energia potenziale associata U è
>
> $$\boxed{U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \varphi)}$$
>
> ii. L'energia cinetica associata K è
>
> $$\boxed{K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t + \varphi)}$$
>
> Pertanto da questi risultati segue che abbiamo la *conservazione* dell'energia: infatti abbiamo la costante
>
> $$E = U + K \implies \underbrace{\ldots}_{k=m\omega^2} \implies \boxed{E = \frac{1}{2}kA^2}$$

FIGURA 4.1. (*L'andamento dell'energia del moto armonico*)



Moto Armonico Smorzato

Modello tipico del moto armonico smorzato. Definizione di Moto Armonico Smorzato mediante la sua equazione differenziale. Classificazione delle oscillazioni smorzato al variare dei parametri: sottosmorzamento, sovrasmorzamento e smorzamento critico.

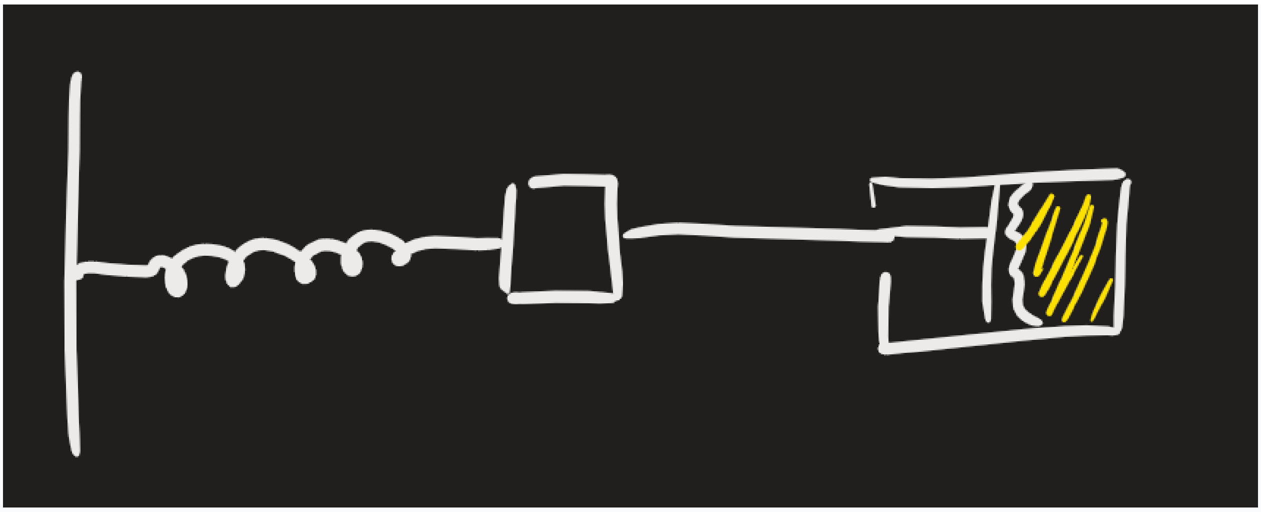
---

0. Voci correlate

- Resistenza dei Fluidi
- Forza Peso e Forza Normale

1. Modello Tipico delle Oscillazioni Smorzate

MODELLO TIPICO. Per parlare del *moto armonico smorzato*, presentiamo il suo *"modello tipico"*: ovvero un modello che presenta un'*equazione differenziale* che *"caratterizzi"* le oscillazioni smorzate.
Come modello prendiamo il seguente. Supponiamo di attaccare un oggetto ad una molla da un lato, poi ad un pistone con olio dall'altro. Inoltre supponiamo di avere una compressione (o estensione) della molla con $\Delta x \neq 0$.



Quindi le *forze in gioco* sono le seguenti: la tensione $\vec{T}$, la forza elastica $\vec{F}_x$ e l'attrito vistoso $\vec{F}_a$.
Quindi prendendo le *sole componenti orizzontali* (o verticali, tanto l'andazzo è lo stesso) abbiamo

$$\left(\sum \vec{F}\right) \cdot \hat{i} \to k\Delta x - \xi v_x = ma_x$$

Notiamo che valgono le seguenti uguaglianze:

$$\omega^2 = \frac{k}{m}; \gamma = -\frac{b}{m^2}$$

(dove ω è la *pulsazione* e γ una *costante definita ad hoc*)
Abbiamo dunque un'equazione differenziale differenziale del tipo

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 2\gamma \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega^2 x = 0$$

che è proprio l'*equazione* del *moto armonico smorzato*. Procediamo dunque con la definizione formale.

#Definizione

Definizione (moto armonico smorzato).

Se un *modello fisico* fornisce una *grandezza fisica* x che presenti la seguente equazione differenziale:

$$\boxed{x'' + 2\gamma x' + \omega^2 x = 0}$$

allora si dice che abbiamo un *"moto armonico smorzato"*.

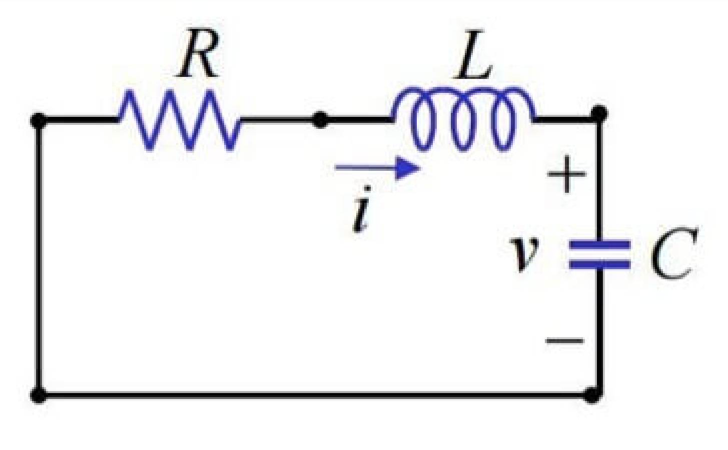
#Esempio

Esempio (esempi di moti armonici smorzati non correlati al modello tipico).

Ci sono altri *modelli fisici* che presentano il *moto armonico smorzato*, che non abbiamo tanto da fare col nostro modello appena presentato.

Si può parlare ad esempio del *circuito RLC*, in cui vi è una *resistenza*, un *induttore* e un *condensatore*. Vedere la figura sottostante.

FIGURA 1.1. (*Circuito RLC*)



2. Classificazione di Moti Armonici Smorzati

Notiamo che le *soluzioni dell'equazione differenziale* date nella *definizione* (1) presentano *soluzioni diverse* a seconda dei *parametri* ω^2 e γ. In particolare prendiamo nota dei parametri ω^2, γ^2. Adesso andiamo a vedere quali sono i casi.

2.1. Sotto Smorzamento

#Definizione

Definizione (sotto smorzamento).

Se lo *"smorzamento"* è piccolo, allora ho *oscillazioni* con *piccole diminuzioni*: ovvero abbiamo che vale

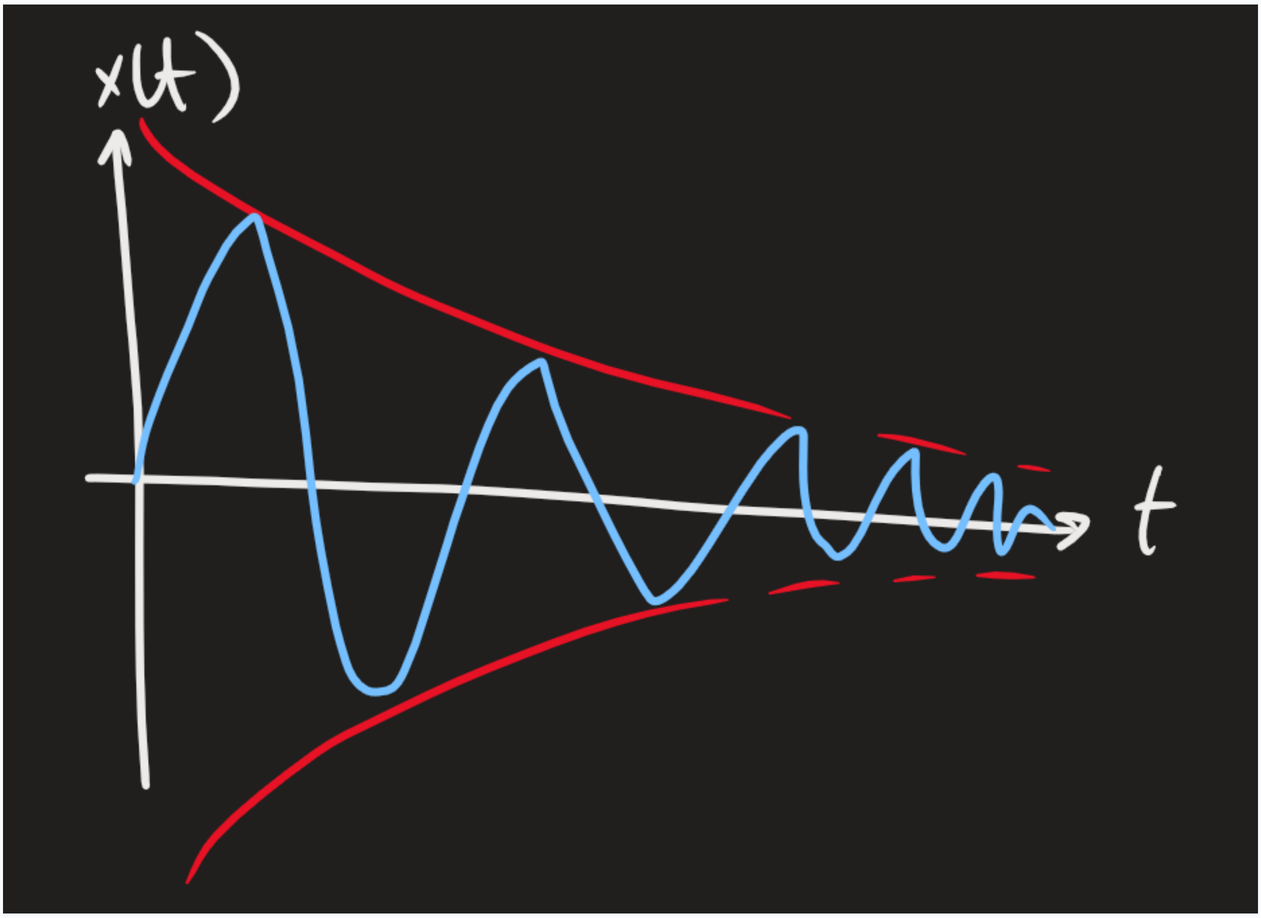
$$\omega^2 > \gamma^2 \implies \omega > \gamma$$

Allora abbiamo la *soluzione dell'equazione differenziale* data da

$$\boxed{x(t) = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega_s t + \varphi)}$$

con $\omega_s := \sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$, che è una costante che *"sparisce col tempo"*. Inoltre le *curve* $\pm Ae^{-\gamma t}$ si dicono *inviluppo*.

FIGURA 2.1. (*Sotto smorzamento*)



2.2. Sovra Smorzamento

#Definizione

Definizione (sovra smorzamento).

Se invece abbiamo che lo *"smorzamento"* è troppo forte, allora non abbiamo più *oscillazioni*, bensì una curva esponenziale negativa. Ovvero, avendo

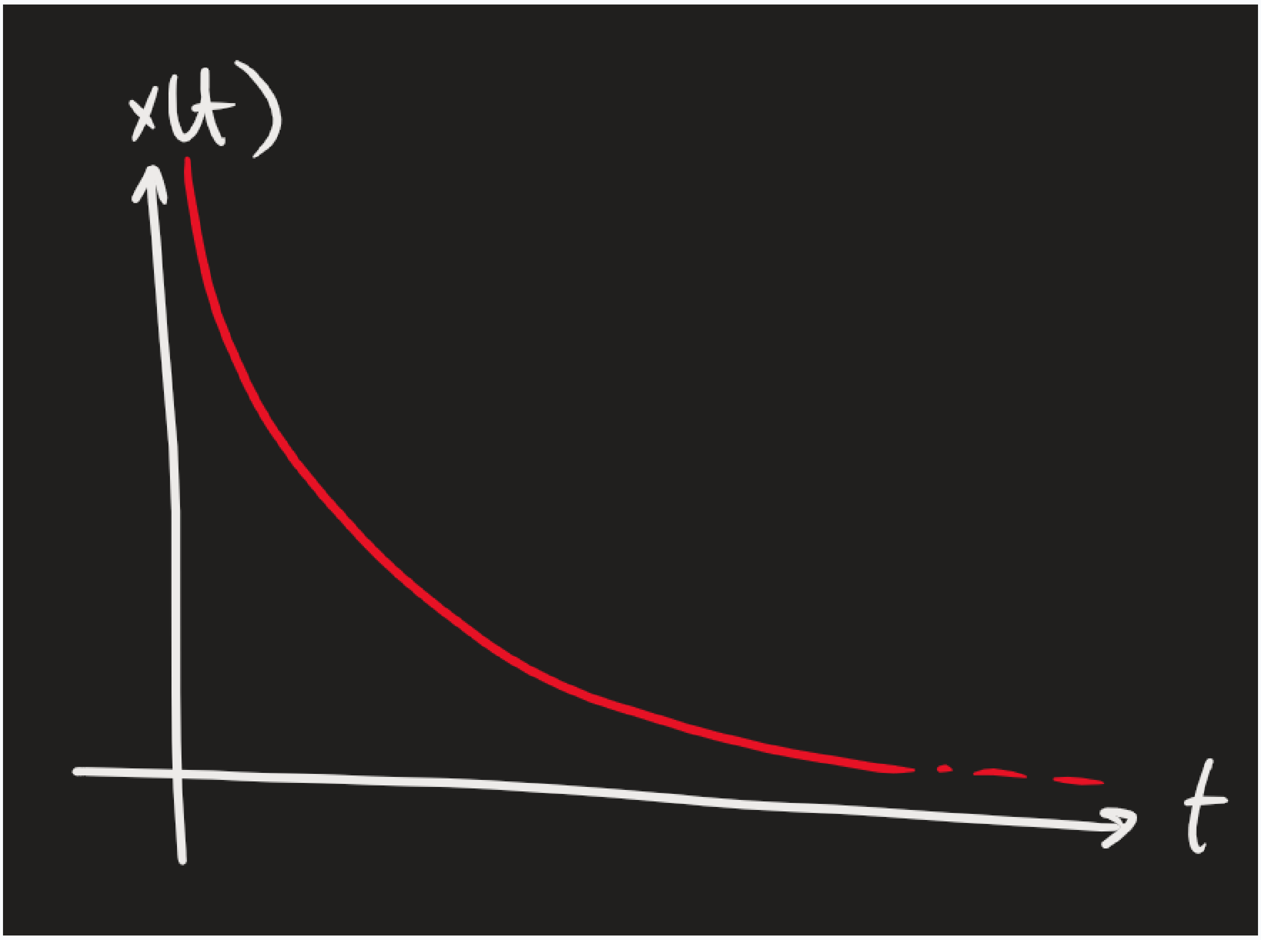
$$\omega < \gamma$$

allora abbiamo la soluzione

$$\boxed{x(t) = e^{-\gamma t}\left(Ae^{-ct} + Be^{ct}\right)}$$

con $c := \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$.

FIGURA 2.2. (*Sovra smorzamento*)



2.3. Smorzamento Critico

#Definizione

Definizione (smorzamento critico).

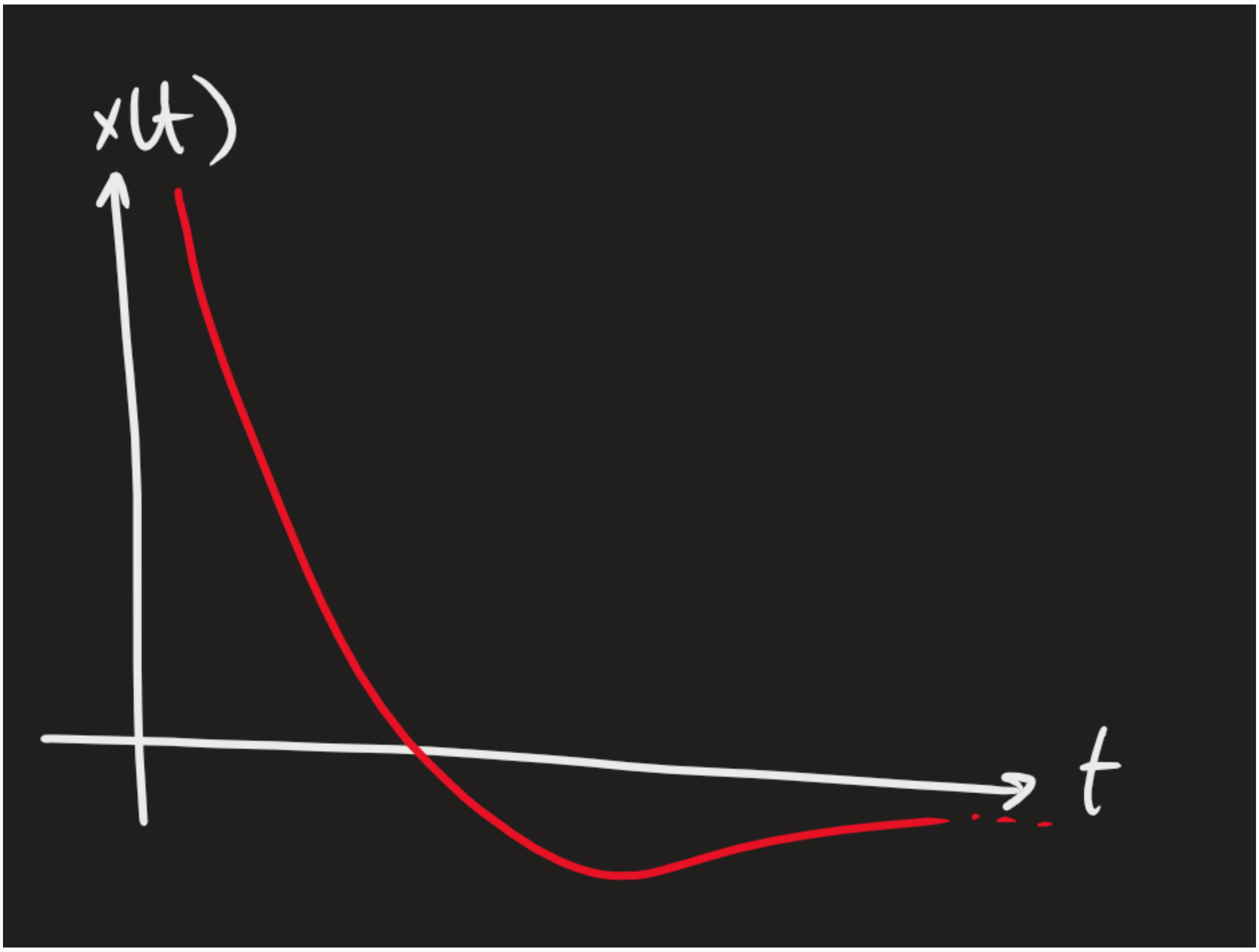
Se invece si ha

$$\omega = \gamma$$

ovvero abbiamo uno *"smorzamento equilibrato"*, allora si ha la soluzione

$$\boxed{x(t) = e^{-\gamma t}\left(A + Bt\right)}$$

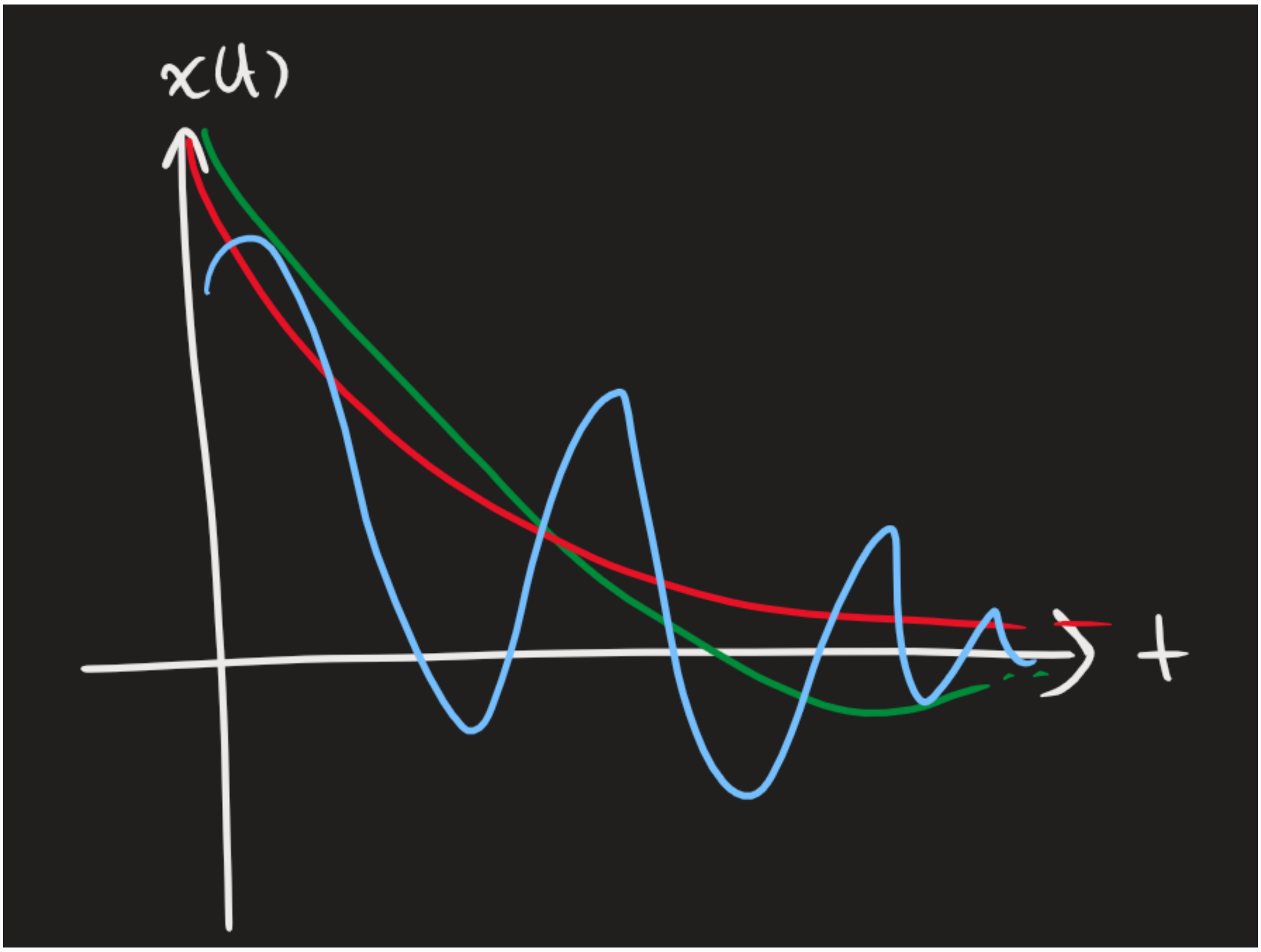
FIGURA 2.3. (*Smorzamento critico*)



3. Conclusione

Per dare un'idea qualitativa di questi *smorzamenti*, diamo il grafico di tutte e tre le funzioni.

FIGURA 2.4. (*Riassunto dei smorzamenti*)



Moto Armonico Forzato

Moto armonico forzato: modello tipico, definizione e soluzione all'equazione differenziale. Definizione di risonanza.

---

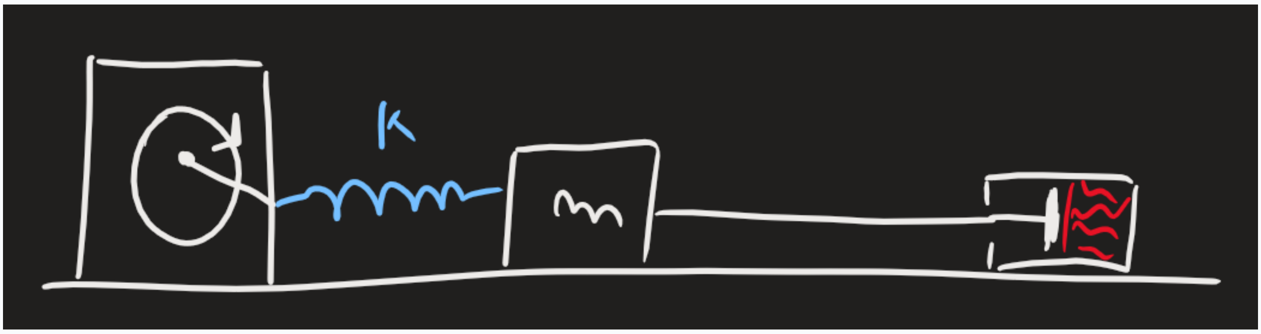
0. Voci correlate

- Forza Elastica
- Resistenza dei Fluidi

1. Modello Tipico del Moto Armonico Forzato

Modello Tipico. Come *modello tipico* del moto armonico forzato presentiamo il seguente.
Un blocco avente massa m è attaccato ad una *molla* con costante elastica k, che a sua volta è attaccato ad un *motore* che genere una forza: per farci capire, questo motore genera un'*oscillazione forzata*.

Dopodiché dall'altro lato lo stesso blocco m è attaccato ad un *pistone* in un cilindro d'olio (o qualsiasi sostanza viscosa).



Quindi le forze in gioco sono tre: la forza elastica, l'attrito viscoso e la forza periodica causata dal motore. Quindi prendendo la sommatoria delle forze, abbiamo

$$\left(\sum \vec{F}\right)\hat{i} \to ma = -kx - bv + F_0 \cos(\omega_E t)$$

quindi abbiamo l'equazione differenziale

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{k}{m}x - b\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + F_0 \cos(\omega_E t)$$

Ovvero abbiamo l'equazione del *moto armonico smorzato* con un *termine noto non-lineare*.

2. Definizione di Moto Armonico Forzato e Risonanza

#Definizione

Definizione (moto armonico forzato).

Un modello fisico che presenta *una grandezza* $x(t)$ con l'equazione differenziale

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 2\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega^2 x = F_0 \cos(\omega_E t)}$$

si dice *"moto armonico forzato"*.

#Teorema

Teorema (soluzione al moto armonico forzato).

Una quantità $x(t)$ che determina un *moto armonico forzato* presenta la soluzione

$$\boxed{x(t) = A_0 \cos(\omega_E t + \varphi_E)}$$

dove le seguenti costanti sono definite come:

$$A_0 = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_E^2 - \omega^2) + 4\gamma^2\omega_E^2}}$$

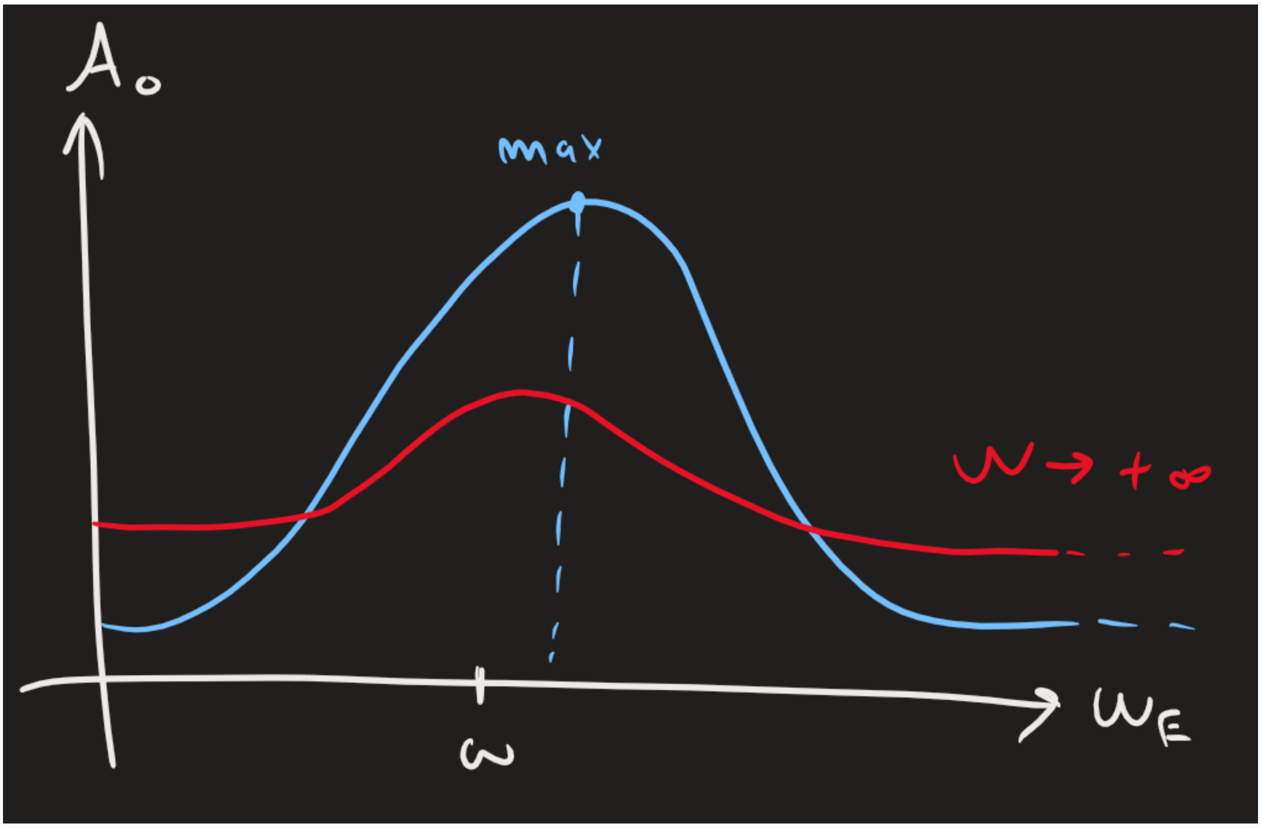
e

$$\tan(\varphi_E) = \frac{2\gamma\omega_E}{\omega^2 - \omega_E^2}$$

Osserviamo che per $\omega \to \omega_E$ (in realtà ci sarebbero altri costanti d'intralcio, quindi non è una perfetta corrispondenza uno ad uno, quindi indicherò questo comportamento con $' \rightsquigarrow '$), raggiungo $\max A_0(\omega_E)$

Inoltre, notiamo che per $\omega \to +\infty$ (a parole, la pulsazione naturale diventa più grande) ho che gli effetti di $\omega \rightsquigarrow \omega_E$ diventano sempre più piccoli.

FIGURA 2.1. (*Moto armonico forzato*)



#Definizione

Definizione (risonanza di un moto armonico forzato).

Supponiamo che una quantità $x(t)$ sia un *moto armonico forzato*.
Se vale che

$$\boxed{\omega_E = \omega}$$

allora ho la *"risonanza"*, da cui ho l'ampiezza del moto A_0 massimale.

Esempi di Oscillazioni

Esempi di oscillazioni: il pendolo, ...

---

0. Voci correlate

- Moto Armonico
- Moto Armonico Forzato

- Moto Armonico Smorzato

1. Il Pendolo di Galileo

Il pendolo (notizie storiche). Un giorno nella chiesa di Pisa, il scienziato Galileo Galilei si interrogo sulla natura del pendolo: supponendo che la corda che lega il pendolo sia lunga di un metro, qual è il suo periodo? Dipende in alcun modo dalla lunghezza? Adesso vediamo con le nozioni apprese.

#Esempio

Esempio (il pendolo).

Supponiamo di avere un *corpo* legato ad un *filo* avente lunghezza L, con un angolo θ rispetto al verticale: ovvero abbiamo la *figura 2.1.*.

Disegnando il *diagramma del corpo libero* (1), abbiamo

$$\left(\sum \vec{F}\right) \cdot \hat{i}' \to \vec{P}_{\parallel} = ma_y = mg\sin\theta$$

da cui discende l'*accelerazione parallela al suo moto* (ovvero *lungo l'arco*) è

$$a_y = g\sin\theta$$

Consideriamo *l'accelerazione parallela* come un *caso particolare del cambiamento di angolazione rispetto al tempo*. Infatti per uno spostamento $\mathrm{d}s$ abbiamo uno spostamento di $L\mathrm{d}\theta$.

$$\ddot{s} = L\ddot{\theta} \implies \boxed{L\ddot{\theta} = -g\sin\theta}$$

ovvero l'*equazione differenziale* associato a questo modello.

Adesso, per semplificare i conti usiamo *l'approssimazione degli angoli piccoli*, per cui abbiamo

$$\sin\theta = \theta$$

che diventa più *"accurata"* per $\theta \to 0$ (ovvero angoli piccoli).

Quindi si approssima l'equazione differenziale come

$$L\ddot{\theta} = -g\sin\theta \sim L\ddot{\theta} = -g\theta$$

Adesso prendendo $L = 1\ \mathrm{m}$, abbiamo

$$\boxed{\omega = \sqrt{g}}$$

o generalmente

$$\omega = \frac{\sqrt{g}}{L}$$

con

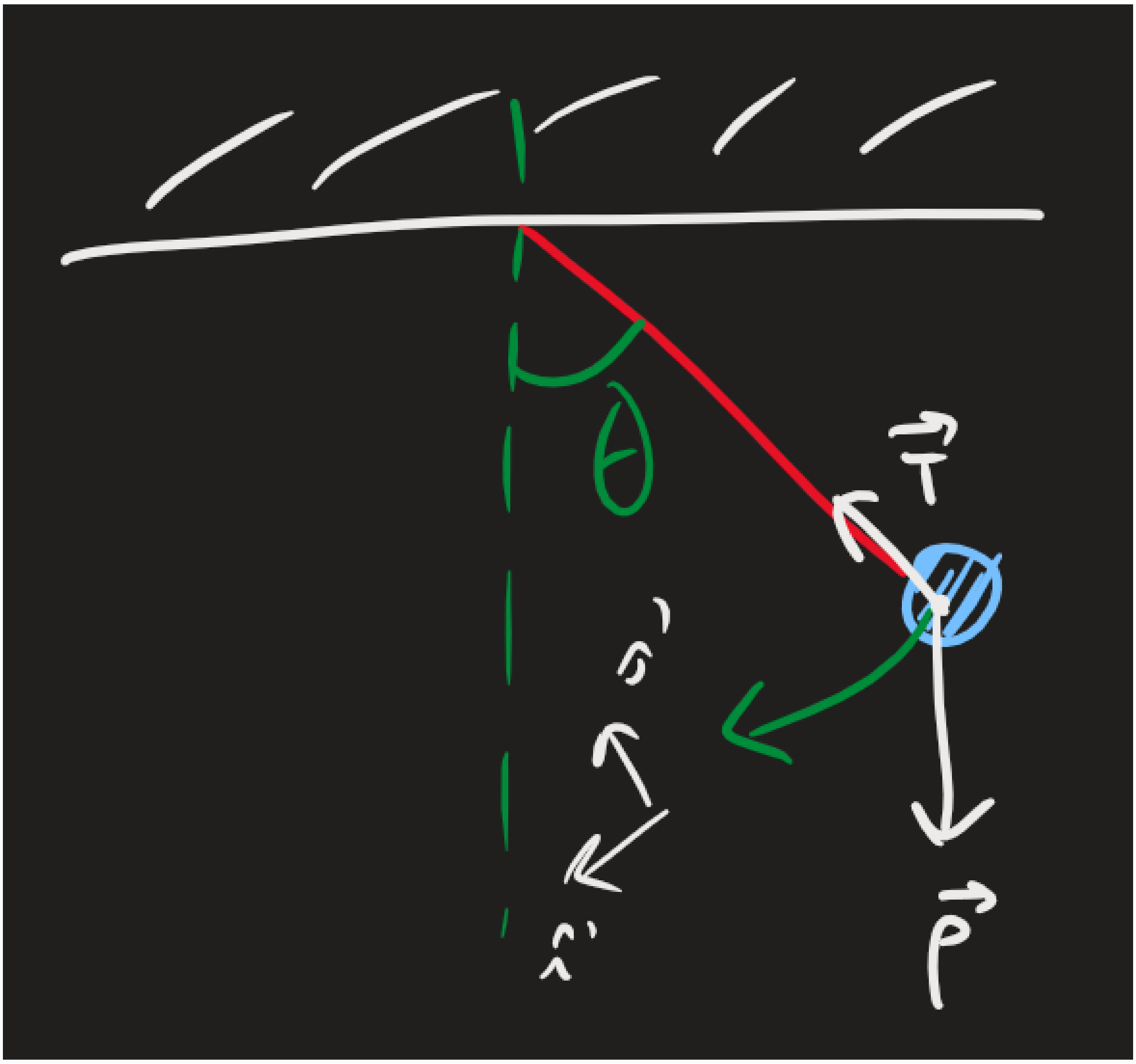
$$T = \frac{2\pi}{\omega} \approx 2\ \mathrm{s}$$

Infatti, notiamo di avere l'approssimazione

$$\pi^2 = g$$

Storicamente, questo è stato una delle *proposte* della *misurazione del metro*: ciò è avvenuto con la *rivoluzione francese*.

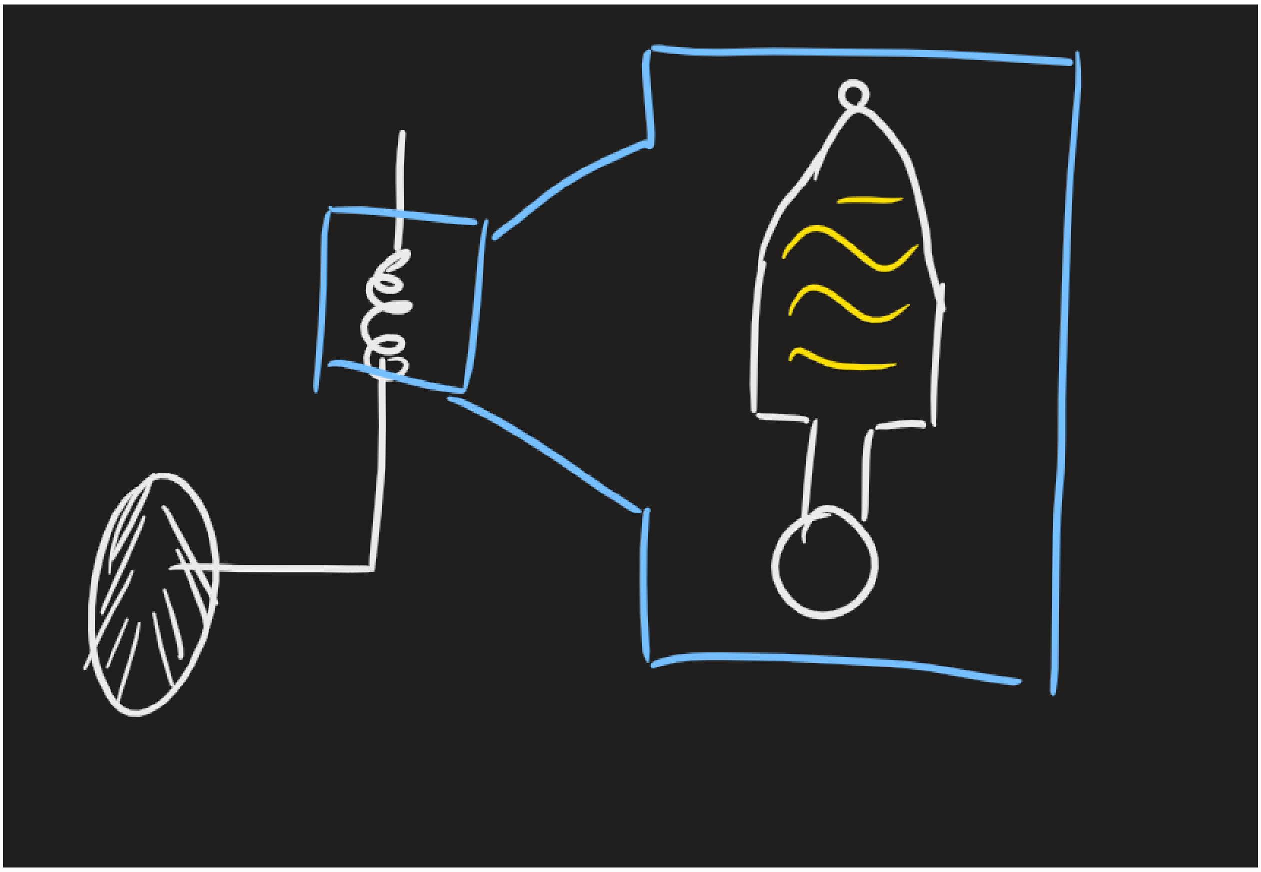
FIGURA 1.1. (*Il pendolo*)



2. Gli ammortizzatori di un'automobile

#Esempio

L'Automobile. Come si sa, gli *automobili* sono dotati di componenti per *assorbire* eventuali dislivelli in altezza (come *dossi*). Per gestirli, abbiamo l'*ammortizzatore* e le *sospensioni*: per spiegarli senza dover scendere in dettaglio, essi sono delle *molle* con dei contenitori di *liquidi viscosi* collegati alla ruota.
L'obiettivo delle sospensioni è quello di *raggiungere il smorzamento critico*, per assorbire eventuali salti al meglio.



3. I ponti

#Esempio

I ponti. Un esempio del *moto armonico forzato* sono *i ponti*. Ci sono certe situazioni in cui ci sono delle *forze esterne* che causano al ponte di *oscillare*. Di solito va tutto bene e non c'è nessuna *risonanza*; tuttavia, ci sono stati dei storici in cui ci sono state delle *risonanze*, con delle conseguenze disastrose. Si pensa ad esempio al ponte di *Tacoma Narrows*: il vento è stato abbastanza forte da poter causare un'aumento alla loro *ampiezza*, determinando la sua distruzione.

Oppure come una conseguenza, si pensa al fatto che i soldati devono *spezzare il passo* sui ponti, per evitare di creare risonanze.