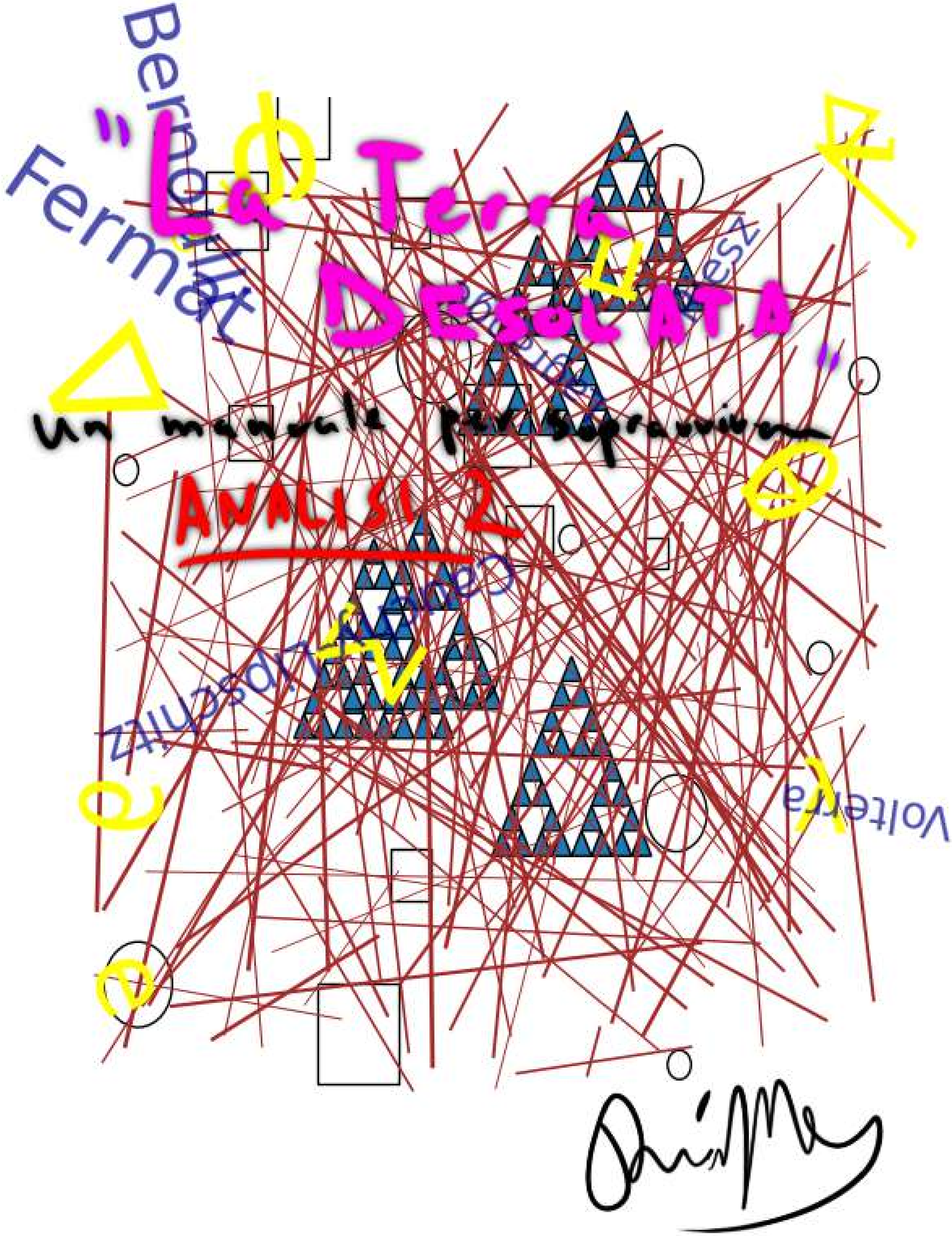
"La Terra Desolata"

Un manuale per sopravvivere

Analisi 2



Indice dei Contenuti

Capitolo 1. Fondamenta degli Integrali Generalizzati

Abstract del Capitolo 1

Si approfondisce il calcolo integrale in una dimensione su intervalli non compatti (ovvero aperti o illiminati).

1.1. Funzioni Localmente Integrabili

Funzioni Localmente Integrabili

Scopo degli integrali generalizzati. Definizione di funzioni localmente integrabili.

---

0. Preambolo

#Osservazione

> Osservazione (lo scopo degli integrali generalizzati (o impropri)).
>
> Sappiamo che gli *integrali di Riemann* (Definizione 1 (integrabilità di una funzione secondo Riemann)) sono solitamente definite su *funzioni limitate* e su *insiemi compatti*. Noi vogliamo quindi estendere questi integrali ad una *classe di funzioni* più ampia: definiamo quindi le *funzioni localmente integrabili* su un intervallo e alla fine studieremo gli *integrali indefiniti*.

1. Definizione di funzione localmente integrabile

#Definizione

> Definizione (funzione localmente integrabile su un intervallo).
>
> Sia $J \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo arbitrario (ovvero può essere *chiuso*, *aperto*, *semichiuso* o *semiaperto*).
> Una funzione $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice *localmente integrabile su* J se f è integrabile su ogni intervallo compatto $\forall K \subseteq J$.

#Esempio

> Esempio (esempio immediato).
>
> Un esempio immediato è quello delle funzioni continue e monotone su J.

#Osservazione

> Osservazione (le funzioni localmente integrabili sono continue).

Osserviamo che ponendo $f: J \longrightarrow \mathbb{R}$ e $c \in J$ e definendo l'*Integralfunktion* (Funzione Integrale > ^4a5cb4) come

$$F(x) = \int_c^x f(t) \, \mathrm{d}t$$

vediamo che $F(x)$ è una funzione *continua* su J. Per una dimostrazione di questa proposizione, basta considerare che una qualsiasi integral-funzione è lipschitziana, dunque continua (Teorema 4 (die Integralfunktion ist lipschitzstetig)). Di conseguenza vale il seguente:

$$\forall d \in J, \lim_{x \to d} \int_c^x f(t) \, \mathrm{d}t = \lim_{x \to d} F(x) = F(d) = \int_c^d f(t) \, \mathrm{d}t$$

Con le *funzioni integrabili in senso generalizzato* vedremo di estendere questa nozione anche ai punti *non* appartenenti all'intervallo J, purché questi punti siano *punti di accumulazione* per J (Funzione Integrabile in Senso Generalizzato)).

1.2. Funzioni Integrabili nel Senso Generalizzato

Funzione Integrabile in Senso Generalizzato

Definizione caso-per-caso di funzione integrabile in senso generalizzato su un intervallo. Esempi notevoli di funzioni integrabili in senso generalizzato. Definizione di integrale generalizzato convergente e divergente.

---

1. Definizione di Integrale Improprio

#Definizione

Definizione (funzione integrabile in senso generalizzato).

Per definire una *funzione integrabile in senso generalizzato* distinguiamo tre casi diversi per tipologie diverse dell'intervallo J.
A. *Intervallo aperto a destra*
Sia $J = [a, b)$ dove $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Sia $f: J \longrightarrow \mathbb{R}$. Si dice che f è *integrabile in senso generalizzato su* J se *esiste* il limite

$$\lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t := \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$$

B. *Intervallo aperto a sinistra*

Sia $J = (a, b]$ dove $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Sia $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$. Si dice che f è *integrabile in senso generalizzato su* J se *esiste* il limite

$$\lim_{x \to a^+} \int_x^b f(t)\ \mathrm{d}t := \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$$

C. *Intervallo aperto*

Sia $J =]a, b[$ dove $a, b \in \tilde{\mathbb{R}}$. Sia $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ *localmente integrabile* su J.
Si dice che f è *integrabile in senso generalizzato* su J se esiste un numero $c \in J$ tale che f sia integrabile in senso generalizzato su $(a, c]$ e su $[c, a)$. Inoltre si pone

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t := \int_a^c f(t)\ \mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\ \mathrm{d}t$$

#Definizione

Definizione (integrale improprio divergente e convergente).

Riprendendo le definizioni *A* e *B* della *funzione integrabile in senso improprio* (Definizione 1 (funzione integrabile in senso generalizzato)), se il *limite* esiste ma *non è finito*, allora l'integrale si dice *"divergente"*. Altrimenti se il limite esiste allora si dice che è *"convergente"*.

#Osservazione

Osservazione (la definizione di integrale improprio su un insieme aperto la stessa).

Riprendendo la definizione *C* della *funzione integrabile in senso improprio* (Definizione 1 (funzione integrabile in senso generalizzato)), la definizione dell'integrale improprio rimane uguale, indipendentemente dal valore c scelto.

2. Esempi di integrali impropri

#Esempio

Esempio (esempio dell'integrale improprio semiaperto).

Vogliamo calcolare l'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\ \mathrm{d}x$$

Prima di tutto prendiamo l'intervallo di definizione come $J=[0,1)$, dal momento che per $x=1$ la funzione integranda non è più definita.
Adesso calcoliamo la primitiva della funzione integranda.

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x}}\ \mathrm{d}x = -2\int \frac{1}{2u}\ \mathrm{d}u \ni -2\sqrt{u} = -2\sqrt{1-x}$$

Infine calcoliamo il limite

$$\lim_{x\to 1^-} (-2\sqrt{1-x})\Big|_0^x = -2(\sqrt{1-x}-1) = 2$$

Allora

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\ \mathrm{d}x = 2$$

#Esempio

Esempio (esempio dell'integrale improprio su una semiretta).

Vogliamo valutare l'integrale

$$\int_{-\infty}^0 e^x\ \mathrm{d}x$$

Prima di tutto poniamo $J=(-\infty,0]$.
Il calcolo della primitiva è banale, dal momento che $(e^x)'=e^x$, andiamo quindi a calcolare il limite

$$\lim_{t\to-\infty}\int_t^0 e^x\ \mathrm{d}t = \lim_{t\to-\infty} e^x\Big|_t^0 = e^0 - e^t = 1-e^t = 1$$

Allora

$$\int_{-\infty}^0 e^x\ \mathrm{d}x = 1$$

#Esempio

Esempio (integrale improprio sulla retta reale).

Vogliamo valutare l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}x$$

Preliminarmente osserviamo che la primitiva della funzione integranda è l'*arcotangente*. Adesso scegliamo $c=0$, dato che disegnando il grafico notiamo una simmetria in $x=0$.
Ora basta valutare i limiti

$$\lim_{t \to +\infty} \int_{-t}^{0} f(x) \, \mathrm{d}x + \int_{0}^{t} f(x) \, \mathrm{d}x = \pi$$

1.3. Integrali Impropri Notevoli

Integrali Impropri Notevoli

Alcuni integrali impropri notevoli, sotto forma di teoremi. Integrali impropri su intervalli illimitati e limitati.

---

1. Integrali Impropri delle Funzioni Campione

#Osservazione

Osservazione (l'idea di studiare il comportamento delle "funzioni campione").

L'idea di questa sezione è quella di trovare alcune *funzioni campione*, che diventeranno dei *strumenti di confronto* per stimare alcuni *integrali* che potrebbero risultare difficili da *calcolare*. Infatti, si vedrà di usare questi integrali impropri notevoli con dei *teoremi di confronto*.

#Teorema

Teorema (integrali impropri su semirette).

A. *Semiretta verso destra*
Sia $J=[a,+\infty)$ con $a>0$.
Si ha l'equivalenza

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, \mathrm{d}x \text{ esiste finito} \iff \alpha > 1$$

B. *Semiretta verso sinistra*
Sia $J = (-\infty, b]$ con $b < 0$.
Si ha l'equivalenza

$$\int_{-\infty}^{b} \frac{1}{|x|^\alpha}\, \mathrm{d}x \text{ esiste finito} \iff \alpha > 1$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 2 (integrali impropri su semirette).
Per la dimostrazione di questo teorema è sufficiente considerare le primitive delle funzioni

$$\frac{1}{x^\alpha}$$

considerando per $\alpha = 1$ e $\alpha \neq 1$. ■

#Teorema

Teorema (integrali impropri su intervalli limitati).

A. *Aperto a destra*
Sia $J = [a, b)$ con $0 \leq a < b < +\infty$.
Si ha l'equivalenza

$$\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha}\, \mathrm{d}x \text{ esiste finito} \iff \alpha < 1$$

B. *Aperto a sinistra*
Sia $J = (a, b]$ con $0 \leq a < b < +\infty$.
Si ha l'equivalenza

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha}\, \mathrm{d}x \text{ esiste finito} \iff \alpha < 1$$

2. Applicazione alla Probabilità

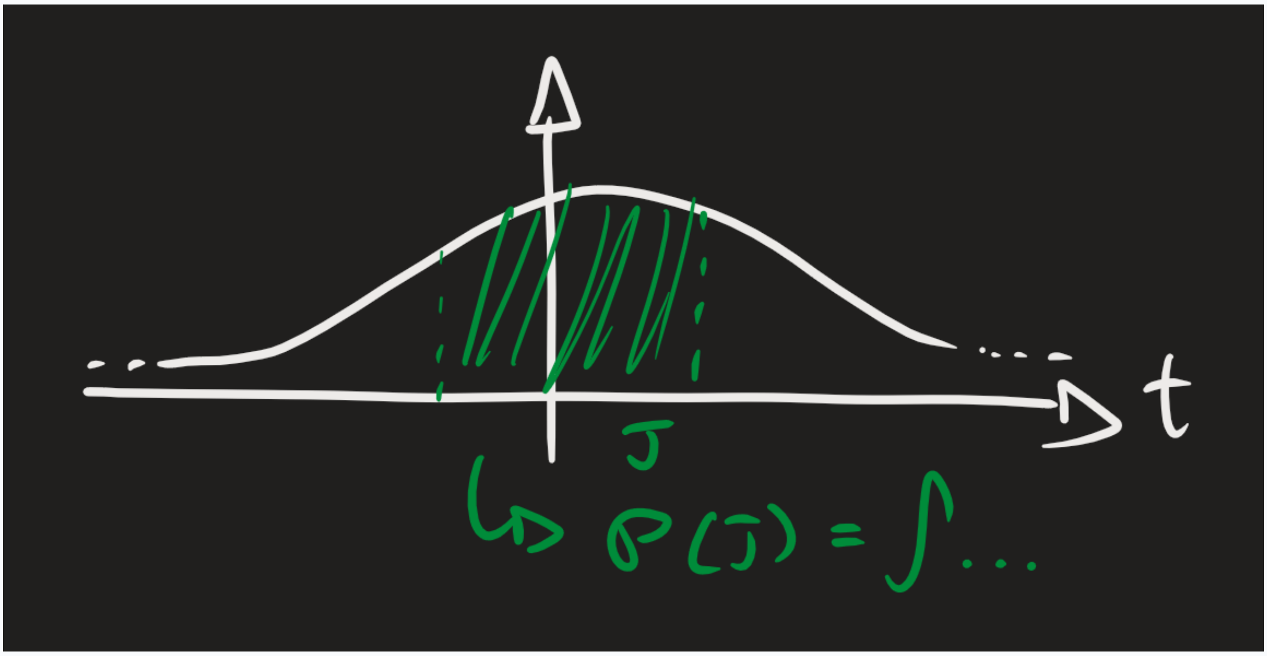
#Osservazione

Osservazione (applicazione degli integrali impropri nella probabilità).

Nella probabilità, si ha che le *funzioni* rappresentano la *densità di probabilità* per un certo evento.

> Ad esempio si ha la *distribuzione normale*
>
> $$\phi = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}t^2} \, \mathrm{d}t \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$
>
> (*figura 2.1.*). Per calcolare la probabilità di uno o più eventi si prende semplicemente l'*integrale di un pezzo sotto la curva*.

FIGURA 2.1. (*la distribuzione normale*)



1.4. Teoremi sugli Integrali Impropri

Teoremi sugli Integrali Impropri

Teoremi sugli integrali impropri: teorema Aut-Aut per gli integrali generalizzati; criterio del confronto; criterio del confronto asintotico. Esempi di applicazioni dei teoremi.

---

1. Teorema Aut-Aut per gli integrali impropri

#Teorema

> Teorema (Aut-Aut per gli integrali generalizzati).
>
> Se $f: J \longrightarrow \mathbb{R}$, dove $J = [a, b)$ (o anche $J = (a, b]$) e f è *localmente integrabile* e *positiva* su J, allora l'integrale improprio

$$\int_{[a,b]} f$$

deve o *esistere finito* o *divergere all'infinito* ($+\infty$ nel primo caso). In particolare nel primo caso il limite (se finito) corrisponde a

$$\lim_{x\to b^-}\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t = \sup_{x\in J}\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 1 (Aut-Aut per gli integrali generalizzati).
Il teorema segue dall'osservazione che *la funzione integrale*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$$

è *crescente*. Utilizzando quindi i *teoremi sulle funzioni monotone* (Teorema 16 (della funzione monotona)) abbiamo la tesi. ■

#Osservazione

Osservazione (la positività della funzione è una condizione necessaria).

Si vede che l'ipotesi $f(x) \geq 0$ è un'*ipotesi chiave*.
Come *controesempio* prendiamo l'integrale improprio

$$\int_0^1 -\cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot x^{-2}\ \mathrm{d}x$$

Prima di tutto si osserva che

$$\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = -\cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot x^{-2}$$

dunque il membro a destra è proprio la *primitiva* della funzione integranda.
Adesso calcoliamo (o tentiamo di farlo) il limite

$$\lim_{x\to 0^+}\int_t^1 f(t)\ \mathrm{d}t = \lim_{x\to 0^+}\sin\left(\frac{1}{t}\right)\Bigg|_t^1 = \lim_{x\to 0^+}\sin(1)-\sin\left(\frac{1}{t}\right) = \nexists$$

Infatti il *problema* consiste nel fatto che la *funzione integranda* non è *positiva* per tutti i valori dell'intervallo $(0,1]$; in particolare il $\cos$ ci fa *"oscillare velocemente"* tra -1 e 1.

2. Criterio del confronto

#Teorema

Teorema (criterio del confronto).

Siano $f, g : J = [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ (o anche $J = (a, b]$) delle funzioni *localmente integrabili* e tali che

$$0 \leq f(x) \leq g(x), \forall x \in J$$

allora segue che se g è *integrabile in senso generale su* J, allora lo è *anche* f e vale che

$$\int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} g$$

Oppure se f *non* è *integrabile in senso generale su* J, allora non lo è neanche g.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 3 (criterio del confronto)

Innanzitutto definiamo le *funzioni integrali*

$$F(x) = \int_a^x f(t) \text{ d}t; G(x) = \int_a^x f(t) \text{ d}t$$

Poiché $f(x) \leq g(x)$, si ha anche $F(x) \leq G(x)$.

Per il *teorema di Aut-Aut per gli integrali impropri* (Teorema 1 (Aut-Aut per gli integrali generalizzati)), si ha

$$\lim_{x \to b^-} F(x) = \sup_{x \in J} F(x) \leq \sup_{x \in J} G(x) = \lim_{x \to b^-} G(x) \underbrace{< +\infty}_{\text{per ipotesi}}$$

Allora segue che anche f è *integrabile nel senso generale* e vale che

$$\lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t) \text{ d}t \leq \lim_{x \to b^-} \int_a^x g(t) \text{ d}t$$

Per la tesi secondaria basta prendere la *contronominale* della tesi. ■

#Corollario

Corollario (teorema del confronto asintotico).

Siano $f, g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ *localmente integrabili sul dominio* e tali che

$$f(x), g(x) > 0, \forall x \in J$$

ed esiste il limite

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L \in (0, +\infty)$$

> Allora $f(x), g(x)$ hanno lo *"stesso carattere"*, nel senso che o sono *entrambe convergenti* o *entrambi divergenti*.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Corollario 4 (teorema del confronto asintotico)
Si tratta di esplicitare la *definizione "alla Cauchy"* del limite dell'ipotesi (Definizione 2 (formulazione generale e rigorosa del limite di una funzione che tende ad un punto di accumulazione)).

$$\begin{aligned}
&\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in J, \\
&x \in (b - \delta, b) \implies \left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| < \varepsilon \\
&\qquad\qquad\qquad \implies -\varepsilon + L < \frac{f(x)}{g(x)} < \varepsilon + L \\
&\qquad f, g > 0 \implies (-\varepsilon + L) g(x) < f(x) < (\varepsilon + L) g(x)
\end{aligned}$$

dall'ultimo passaggio possiamo applicare il *teorema del confronto* (Teorema 3 (criterio del confronto)) per ricavare la tesi. ■

3. Esempi di esercizi

Ora applichiamo i teoremi appena enunciati con i seguenti esercizi.

#Esercizio

> Esercizio.
>
> Dire il carattere dell'integrale improprio
>
> $$\int_0^1 \frac{1 + \sqrt[3]{x}}{x^2 + \sqrt{x}} \, dx$$
>
> *Svolgimento.* Prima di tutto prendiamo $J = (0, 1]$. Adesso osserviamo il *denominatore*; vediamo che x^2 si *"avvicina* a 0 più velocemente di $\sqrt{x}$; quindi cerco una *funzione-campione di confronto* $g(x)$ con cui applicare il *criterio del confronto asintotico*.
> Scegliamo $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$; infatti calcolando il limite
>
> $$\lim_{x \to 0^+} \frac{1 + \sqrt[3]{x}}{x^2 + \sqrt{x}} \cdot \sqrt{x} = 1$$

Abbiamo proprio il risultato voluto, ovvero che la *funzione integranda* si comporta come $\frac{1}{\sqrt{x}}$, che è convergente. Di conseguenza l'integrale iniziale è *integrabile in senso improprio* su J.

1.5. Assoluta e Semplice Integrabilità

Assoluta e Semplice Integrabilità

Definizione di assoluta e semplice integrabilità in senso generalizzato. Teorema dell'assoluta integrabilità in senso improprio.

---

1. Definizione di Assoluta e Semplice Integrabilità

#Definizione

Definizione (assoluta e semplice integrabilità in senso generalizzato).

Sia $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ localmente integrabile sul dominio.
Si dice che f è *"assolutamente integrabile in senso generalizzato"* se $|f|$ è *integrabile in senso generalizzato*.
Altrimenti si dice che f è *"semplicemente integrabile in senso generalizzato"* se f è *integrabile in senso generalizzato* ma $|f|$ *non* lo è.

#Osservazione

Osservazione (il senso delle definizioni).

Vediamo che abbiamo dato due definizioni di *integrabilità in senso generalizzato*: una assoluta e l'altra semplice. Esiste un legame tra le funzioni *assolutamente integrabili* e le funzioni *integrabili* (ovviamente sempre in senso improprio!)? Sono equivalenti? Oppure solo una implica l'altra? Ma allora la nozione di funzione semplicemente integrabile ha senso? Ora vedremo col teorema dell'assoluta integrabilità.

2. Teorema dell'Assoluta Integrabilità

#Teorema

Teorema (dell'assoluta integrabilità).

Sia $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ una *funzione assolutamente integrabile in senso generalizzato sul dominio*.
Allora anche f è *integrabile in senso generalizzato sul dominio* e vale la relazione

$$\left|\int_J f\right| \leq \int_J |f|$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 3 (dell'assoluta integrabilità)
Si considera la relazione

$$0 \leq |f(x)| - f(x) \leq 2|f(x)|$$

Applico il *criterio del confronto per gli integrali generalizzati* (Teorema 3 (criterio del confronto)): se $2|f(x)|$ è *integrabile in senso improprio*, allora lo sarà pure $|f(x)| - f(x)$.
Da ciò discende che lo è pure $f(x)$; infatti, definendo per costruzione
$f(x) := |f(x)| - [|f(x)| - f(x)]$, si ottiene questo risultato.
Inoltre per ottenere la relazione enunciata dalla tesi, si considera la seguente disuguaglianza.

$$\begin{aligned} -|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| &\implies -\int_J |f| \leq \int_J f \leq \int_J f \\ &\implies \left|\int_J f\right| \leq \int_J |f| \end{aligned}$$

che è proprio l'enunciato della tesi. ■

3. Esempi di Assoluta e Semplice Integrabilità

#Esempio

Esempio (funzione assolutamente integrabile).

La funzione

$$f(x) = \frac{\sin x}{x^2}$$

è *assolutamente integrabile* sull'intervallo $J = [1, +\infty)$. Infatti basta usare il teorema del confronto con $g(x) = x^{-2}$. Considerando il suo *valore assoluto* si ha infatti

$$\left|\frac{\sin x}{x^2}\right| \leq \frac{|\sin x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

Dato che il membro destro della disuguaglianza è proprio una *funzione campione* (Teorema 2 (integrali impropri su semirette)), sappiamo che questa è *integrabile in senso generalizzato*, dunque il valore assoluto $|f(x)|$ è *integrabile in senso generalizzato*, ovvero $f(x)$ è *assolutamente integrabile in senso generalizzato*.

#Esempio

Esempio (funzione semplicemente integrabile).

La funzione

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

è invece *semplicemente integrabile* su $[1, +\infty)$.
Per dimostrarlo bene, bisogna dimostrare che il suo valore assoluto non è integrabile, confrontandola con una funzione $g(x)$ per cui $|f(x)| \geq g(x)$. In questo caso basta scegliere

$$g(x) = \frac{\sin^2 x}{x}$$

Ora basta provare che $g(x)$ non è integrabile, da cui *per il teorema del confronto* $|f(x)|$ non è *integrabile*. Per farlo, bisogna usare l'identità trigonometrica

$$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

Invece per motivi analoghi al motivo precedente, la funzione $f(x)$ senza il valore assoluto è integrabile.

1.6. Criteri per l'Assoluta Convergenza

Criteri per l'Assoluta Convergenza in senso Generalizzato

Criteri (teoremi) per determinare l'assoluta convergenza in senso generalizzato per una funzione: criterio dell'ordine di infinitesimo su un dominio illimitato, criterio dell'ordine di infinito su un dominio limitato. Esempi.

---

1. Criterio dell'ordine di infinitesimo e dell'infinito

#Teorema

Teorema (criterio dell'ordine di infinitesimo su un insieme illimitato).

Sia $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ localmente integrabile, dove J è una semiretta.
Si ha:

1. Se esiste $\alpha > 1$ tale che
$$\lim_{x \to +\infty} |f(x)| \cdot x^\alpha = L \in [0, +\infty)$$
Allora f è *assolutamente integrabile* in senso generalizzato su J.
2. Se invece esiste $\alpha \leq 1$ tale che
$$\lim_{x \to +\infty} |f(x)| \cdot x^\alpha = L \in (0, +\infty) \cup \{+\infty\}$$
Allora f *non è assolutamente integrabile* in senso generalizzato su J.

#Osservazione

Osservazione (il senso di questo teorema).

Per leggere bene le ipotesi del teorema, si deve leggere il prodotto
$$|f(x)| \cdot x^\alpha$$
come
$$\frac{|f(x)|}{\frac{1}{x^\alpha}}$$
e utilizzare il *teorema del confronto asintotico* (Corollario 4 (teorema del confronto asintotico)). Infatti, se il limite è 0, allora semplicemente $|f(x)|$ si annulla. Altrimenti, se è un numero positivo $|f(x)|$ si avvicina a 0 *"come o più velocemente"* di $\frac{1}{x^\alpha}$, che è una funzione notevole per l'integrale improprio (Teorema 2 (integrali impropri su semirette)).

#Teorema

Teorema (criterio dell'ordine di infinito su intervalli limitati).

Sia $f : J = [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ con $b \in \mathbb{R}$.
Si hanno le seguenti.
A. Se si verifica che

$$\exists \alpha < 1 : \lim_{x \to b^-} |f(x)| \cdot (b-x)^\alpha = L \in [0, +\infty)$$

Allora f è *assolutamente integrabile in senso generalizzato* su J.
B. Se si verifica invece

$$\exists \alpha \geq 1 : \lim_{x \to b^-} |f(x)| \cdot (b-x)^\alpha = L \in (0, +\infty) \cup \{+\infty\}$$

Allora f *non* è *assolutamente integrabile in senso generalizzato* su J.

2. Esempi di applicazione

#Esempio

Esempio (la distribuzione gaussiana).

Si considera la distribuzione gaussiana

$$f(x) = e^{-x^2}$$

Posso dire se questa è *integrabile in senso generalizzato* su $[0, +\infty)$? Sì, usando i teoremi appena enunciati con $\alpha = 2$, si ha

$$\lim_{x \to +\infty} e^{-x^2} \cdot x^2 \in [0, +\infty)$$

Quindi sicuramente si sa che

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \, \mathrm{d}x$$

esiste ed è finito.

#Esercizio

Esercizio.

Stabilire se la funzione f è *integrabile* su $J = (0, 3]$.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x + x^3}}$$

Prima di tutto si osserva che posso *"scartare"* x^3, dato che x va più velocemente a 0 di x^3. Allora scelgo $\alpha = \frac{1}{2}$ e uso il *criterio dell'ordine dell'infinito*.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{1 + x^2}} = 1 \in (0, +\infty) \cup \{+\infty\}$$

> Allora la funzione è *integrabile in senso generalizzato*, dato che lo è pure $\frac{1}{\sqrt{x}}$.

Capitolo 2. Serie Numeriche

Abstract del Capitolo 2

Nota: Questa parte è stata presa direttamente dalla parte sulle serie numeriche svolte dal prof. D. Del Santo nel corso di "Matematica I con esercitazioni" per il C.d.L. di Chimica, alcuni contenuti aggiuntivi svolti con la prof.ssa E. Sincich verranno eventualmente integrati negli stessi appunti (o verranno aggiunti più appunti).

SEZIONE A. LE BASI SULLE SERIE

A1. Definizione di Serie

Definizione di Serie

Problema preliminare per le serie; definizione di serie; definizione di successione dei termini, di somme parziali, di parziale n-esima per una serie. Esempi notevoli di serie.

---

0. Osservazione preliminare

#Osservazione

> Osservazione (problema preliminare).
>
> Supponiamo di avere una *successione* $(a_n)_n$ in $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) (Definizione 1 (successione)). Voglio trovare un *modo rigoroso* per considerare la *somma* di tutti i termini $(a_n)_n$; si tratta tuttavia di *operazioni infinite*, dunque non posso effettivamente fare la somma.
> Infatti, procedendo in questo modo si avrebbero dei risultati che *sembrano* degli assurdi, tra cui la c.d. *serie di Ramanujan* (ulteriori approfondimenti su Wikipedia).
>
> $$1+2+3+\ldots=-\frac{1}{12} \ (\mathfrak{R})$$
>
> Vogliamo dunque trovare un altro modo per fare le somme dei termini a_n, senza dover ricorrere a teorie più speciali. Useremo dunque la *teoria dei limiti*, creando effettivamente un nesso tra la *teoria dei limiti* (per le successioni) con le *serie*.

1. Definizioni basilari

#Definizione

> Definizione (Serie).
>
> Sia $(a_n)_n$ una *successione a valori reali* (o complessi).
> Per ogni $n \in \mathbb{N}$ definiamo la *"somma parziale"*
>
> $$s_n=\sum_{i=0}^{n} a_i$$

cioè

$$s_0 = a_0; s_1 = a_0 + a_1; \ldots; s_n = a_n + s_{n-1} = a_0 + \ldots + a_n$$

Allora definisco la coppia

$$((a_n)_n, (s_n)_n)$$

come *serie* e la indico come

$$\boxed{((a_n)_n, (s_n)_n) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} a_n}$$

#Definizione

Definizione (Successione dei terimini, somme parziali, parziale n-esima per una serie).

Data una *serie*

$$((a_n)_n, (s_n)_n) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

Definisco le seguenti:

- $(a_n)_n$ si dice la *successione dei termini* o il *termine generale* della serie.
- $(s_n)_n$ si dice la successione *delle somme parziali* o delle *ridotte n-esime* della serie
- s_n si dice successione *parziale* o *ridotta* n-esima della serie.

#Definizione

Definizione (Resto k-esimo della serie).

Data una *serie*

$$((a_n)_n, (s_n)_n) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

posso considerare un qualsiasi numero $k \in \mathbb{N}$ e definire la seguente sotto successione (Successione e Sottosuccessione > ^502a75).

$$(b_k)_k := (a_{n+k})_n$$

ovvero, scegliendo ad esempio $k=3$

$$k=3 \implies (b_k)_k = a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots$$

La serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = \sum_{n=k}^{+\infty} a_n$$

si dice il *resto k-esimo della serie* $((a_n)_n, (s_n)_n)$ (altrimenti detto come la *"coda di una serie"*)

2. Esempi notevoli di Serie

#Esempio

Esempio (Successione costante).

Sia $a_n = 1, \forall n$; allora abbiamo

$$\begin{gathered}a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 1 \\ s_0 = 1; s_1 = 1+1; \ldots; s_n = 1+1+\ldots+1 = n+1\end{gathered}$$

Allora abbiamo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} 1$$

#Esempio

Esempio (Successione identità).

Sia definita la successione $a_n = n, \forall n$; allora abbiamo la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \sim \left((n)_n, (\frac{n(n+1)}{2})_n\right)$$

Per una derivazione della nomenclatura a destra si provi per *induzione* che

$$1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

#Esempio

Esempio (Successione binaria).

Sia definita la successione $a_n = (-1)^n$, ovvero del tipo

$$1, -1, 1, -1, \ldots, 1, -1, \ldots$$

Allora troviamo che

$$s_n = \begin{cases} 1 \text{ se } n \text{ pari} \\ 0 \text{ se } n \text{ dispari} \end{cases} = \frac{(-1)^n + 1}{2}$$

Allora

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \sim ((a_n)_n, (s_n)_n) = \ldots$$

#Esempio

Esempio (Serie geometrica di ragione ρ).

Sia $\rho \in \mathbb{R}$ (denominata come *ragione*) e definiamo la successione $a_n = \rho^n$. Conoscendo la *ridotta della serie geometrica* (Esempi di Induzione > ^98ba76), sappiamo che

$$\rho^0 + \rho^1 + \ldots + \rho^n = \frac{1 - \rho^{n+1}}{1 - \rho} = s_n$$

Allora abbiamo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \rho^n \sim \left((\rho^n)_n, \left(\frac{1 - \rho^{n+1}}{1 - \rho} \right)_n \right)$$

#Osservazione

Osservazione (Casi $n = 0$ e $n = 1$).

Osserviamo che data una qualunque successione $(a_n)_n$, tratteremo in modi simili le situazioni in cui n parte da 0 o da 1.

#Esempio

Esempio (Serie armonica).

Sia $a_n = \frac{1}{n}$.
Allora abbiamo la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sim \left(\left(\frac{1}{n}\right)_n, \left(1 + \ldots + \frac{1}{n}\right)_n\right)$$

Notare che *non è possibile* trovare una formula che calcoli la *successione ridotta* n-*esima* $1 + \ldots + \frac{1}{n}$, dunque è necessario esprimerlo esplicitamente.

#Esempio

Esempio (Serie armonica generalizzata).

Sia $\alpha \in [0, +\infty)$. Prendendo la *serie armonica*, indico la *serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

come la *serie armonica generalizzata*.

A2. Carattere di una Serie

Carattere di una Serie

Carattere di una serie: definizione di serie convergente, divergente, indeterminata; esempi; osservazioni sulle serie convergenti.

---

0. Osservazione preliminare

#Osservazione

Osservazione (Problema preliminare).

Ora vogliamo capire come si *comporta* la ridotta $(s_n)_n$ a partire dal termine generale della serie $(a_n)_n$ (Definizione di Serie).

1. Definizione di serie convergente, divergente e indeterminata

#Definizione

Definizione (Serie convergente, divergente, indeterminata).

Data la serie

$$\sum_{n\in\{0,1\}}^{+\infty} a_n \sim ((a_n)_n, (s_n)_n)$$

questa si dice:

- *convergente* se esiste finito il limite

  $$\lim_n s_n = s \in \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$$

  in tal caso s si dice la *somma della serie*.
- *divergente* se invece esiste ma non è finito il limite

  $$\lim_n s_n = \pm\infty \in \tilde{\mathbb{R}}$$

- *indeterminata* se non esiste il limite

  $$\nexists \lim_n s_n$$

La *"caratteristica"* di essere convergente, divergente o indeterminata si dice il *carattere della serie*.

2. Osservazioni sulle serie convergenti

Notiamo che le *serie convergenti* hanno certe proprietà interessanti.

#Osservazione

Osservazione (Le ridotte di una serie condivide il carattere della serie padre).

Consideriamo una qualsiasi *serie convergente* e un suo qualsiasi *resto k-esimo*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n; \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+k}$$

Ho che entrambe le serie hanno *lo stesso carattere*.

Considerando s_n come la ridotta di $\sum a_n$, σ_n la ridotta di $\sum a_{n+k}$,, troviamo una relazione tra le due ridotte, ovvero

$$\sigma_n = s_{n+k} - s_{k-1}$$

Infatti, guardando il membro destro dell'uguaglianza, il *primo termine* rappresenta la somma di tutti i termini della successione $(a_n)_n$ fino a $n+k$; invece il *secondo termine "toglie"* gli elementi che non appartengono al resto k-esimo, ovvero i termini $(a_0, \dots, a_{k-1})$.
In definitiva possiamo dire che le ridotte differiscono per una *costante*.

#Osservazione

Osservazione (Le serie convergenti formano un spazio vettoriale su $\mathbb{R}$).

Considero una qualsiasi serie e un scalare $\lambda \in \mathbb{R}$;

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n; \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda \cdot a_n$$

Troviamo che entrambe le serie hanno lo *stesso carattere*. In particolare, se la serie è convergente allora *"scalandolo"* per un qualsiasi numero rimane comunque convergente.

Adesso consideriamo due serie convergenti del tipo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n; \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$$

Se sono entrambi *convergenti*, allora sicuramente sarà convergente pure la *somma* tra le due serie definita come

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n := \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n)$$

allora la serie ottenutosi a destra sarà pure *convergente*.

Infatti, da questa breve osservazione si evince che le *serie convergenti* formano un $\mathbb{R}$-*spazio vettoriale* (Definizione 1 (spazio vettoriale sul campo K)).

3. Esempi di studio delle serie

Nota: la maggior parte degli esempi verranno tratti dalla pagina Definizione di Serie

#Esempio

Esempio (Serie costante).

Prendiamo la serie

$$S=\sum_{n=0}^{+\infty}1$$

Sappiamo che la successione delle somme parziali è $s_n=n+1$.
Ma allora da ciò segue che

$$\lim_n s_n=\lim_n(n+1)=+\infty$$

Allora la serie è *divergente*.

#Esempio

Esempio (Serie identità).

Prendiamo adesso la serie

$$S=\sum_{n=0}^{+\infty}n=1+2+\dots$$

Vediamo che

$$\lim_n s_n=\lim_n\frac{(n)(n+1)}{2}=+\infty$$

Allora anche questa serie è divergente.

#Esempio

Esempio (Serie binaria).

Ora prendiamo la serie

$$S=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n$$

Vediamo che

$$s_n=\begin{cases}-1,n\in\mathbb{P}\\1,n\in\mathbb{D}\end{cases}$$

Ma allora in questo caso il limite

$$\lim_n s_n$$

non esiste, dal momento che scegliendo opportune sotto successioni otteniamo valori diversi.

#Esempio

Esempio (Serie geometrica per $\rho = 0.5$).

Prendiamo la serie geometrica per $\rho = \frac{1}{2}$.
Ovvero,

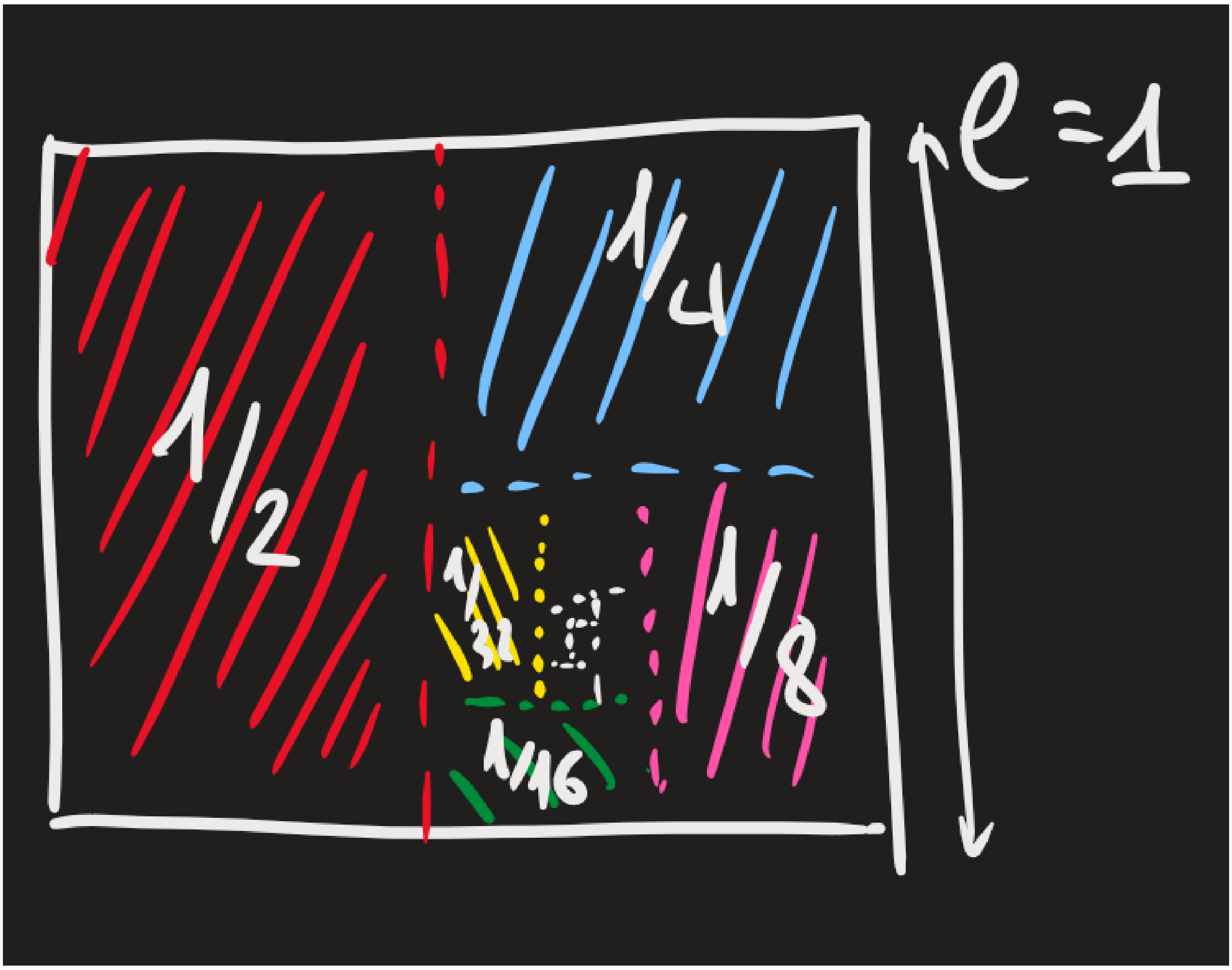
$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$$

Allora abbiamo

$$s_n = 2(1 - \frac{1}{2^n}) \implies \lim_n s_n = 2(1-0) = 2$$

Allora la serie S è "*convergente con somma* 2.

FIGURA 3.1. (*Illustrazione geometrica della convergenza*)



#Esempio

Esempio (Serie geometrica generalizzata).

Ora generalizziamo l'esempio precedente per un $\rho \in \mathbb{R}$.
Ovvero,

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \rho^n$$

Ora distinguiamo casi diversi.
Per $\rho = 1$, osserviamo che la serie si comporterà come la *serie costante* (ovvero $\sum_{0 \leq n < +\infty} 1$), dunque S diventa *divergente*.
Invece per $\rho \neq 1$, abbiamo che la *successione delle ridotte parziali* è

$$s_n = \frac{1-\rho^{n+1}}{1-\rho} \implies \lim_n s_n = \lim_n \frac{1-\rho^{n+1}}{1-\rho}$$

Notiamo che *"l'unica parte che si muove"* è ρ^{n+1}; studiamo dunque solo il limite

$$\lim_n \rho^n = \begin{cases} +\infty, \rho > 1 \\ 0, -1 < \rho < 1 \\ \nexists, \rho \leq -1 \end{cases}$$

Dunque deduciamo che

$$\boxed{\lim_n s_n = \begin{cases} +\infty, \rho \geq 1 \\ \frac{1}{1-\rho}, -1 < \rho < 1 \\ \nexists, \rho \leq -1 \end{cases}}$$

Allora la serie è *divergente* per $\rho \geq 1$, *convergente* per $\rho \in (-1, 1)$, e *indeterminata* per $\rho \leq -1$.

#Esempio

Esempio (Serie armonica).

Ora vogliamo studiare il carattere della serie

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

Consideriamo la successione $(s_n)_n$.

$$\begin{aligned}
&s_1 = 1 \\
&s_2 = 1 + \frac{1}{2} \\
&s_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \\
&s_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \geq 1 + 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \geq 1 + 2\frac{1}{2} \\
&\vdots \\
&s_8 = 1 + \ldots + \frac{1}{8} \geq 1 + \frac{1}{2} + 2\frac{1}{4} + 4\frac{1}{8} = 1 + 3\frac{1}{2} \\
&s_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \underbrace{\frac{1}{2^{n-1}} + \ldots + \frac{1}{2^n}}_{2^{n-1}\text{ termini}}
\end{aligned}$$

Ma allora svolgendo un'operazione simile per s_4, s_8, possiamo minorare s_{2^n} come

$$s_{2^n} \geq 1 + \frac{1}{2} + 2\frac{1}{4} + 4\frac{1}{8} + \ldots + 2^{n-1}\frac{1}{2^n} = 1 + \frac{n}{2}$$

Pertanto, per il teorema del confronto (Osservazione 5 (i teoremi per i limiti di funzioni valgono anche per i limiti di successioni)), il limite è

$$\lim_n s_{2^n} = +\infty$$

Allora dato che stiamo considerando una *sottosuccessione su* s_n, anche il limite s_n è

$$\lim_n s_n = +\infty$$

(*N. B.* dimostreremo questo risultato nelle pagine successive, considerando le *successioni a termini positivi*).
Pertanto la serie armonica è *divergente*.

#Osservazione

Osservazione (dimostrazione alternativa della divergenza della serie armonica).

Si può dimostrare che la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

è *divergente*, utilizzando la nozione di *integrale generalizzato in senso improprio* (Definizione 1 (funzione integrabile in senso generalizzato)).
Infatti se introduciamo la funzione

$$f(x) = \frac{1}{1+x}$$

notiamo subito che vale la relazione

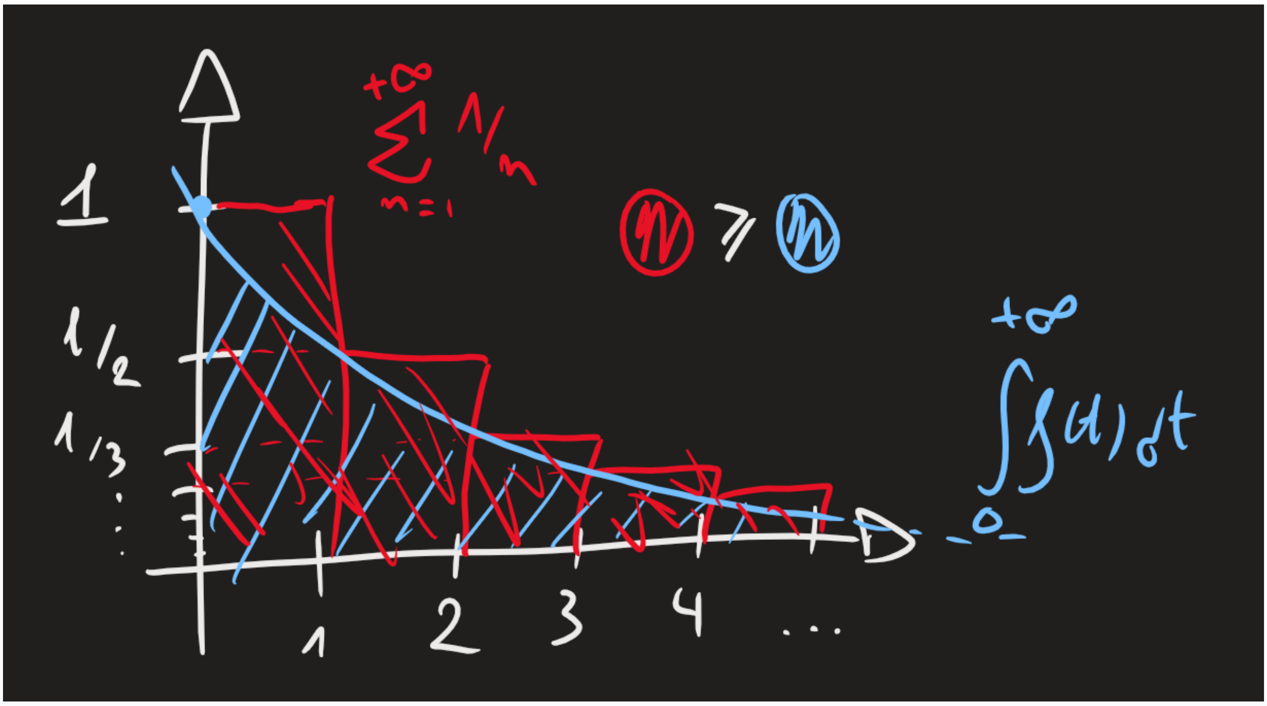
$$s_n \geq \int_0^n f(t) \text{ d}t, \forall n \in \mathbb{N}$$

Di conseguenza vale che

$$\lim_n s_n \geq \lim_n \ln(n+1) \implies \lim_n s_n = +\infty$$

per il *teorema del confronto* (di cui vedremo dopo) (Teorema 1 (del confronto per le serie a termini non negativi)).
Questo esempio ci dà un buon spunto per intravedere una *relazione* tra l'*integrale generalizzato* e le *serie* (Relazione tra Serie Numeriche e Integrali Generalizzati)

FIGURA 3.2. (*Confronto della serie armonica con l'integrale della funzione*)



#Osservazione

Osservazione (la dimostrazione per assurdo della divergenza della serie armonica).

Volendo, si può fornire un'altra dimostrazione per la *divergenza della serie armonica*, utilizzando un procedimento *"per assurdo"*.
Supponiamo per assurdo che $\sum_n \frac{1}{n}$ sia convergente con *somma* s. Vediamo che deve necessariamente discendere che $\lim_n s_n = 0$, ovvero per la definizione $\varepsilon - \bar{n}$ del limite ho

$$\forall n \geq \bar{n}, |s_n - s| < \varepsilon$$

Adesso osserviamo che

$$s_{2n} - s_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \underbrace{\frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ termini}} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

Prendendo il limite, si ha

$$\lim_n s_{2n} - s_n = s - s = 0 \geq \frac{1}{2}$$

che è chiaramente un assurdo. ■

#Esempio

Esempio (Serie di Mengoli).

Consideriamo la serie

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{(1)(2)} + \frac{1}{(2)(3)} + \ldots + \frac{1}{(n)(n+1)} + \ldots$$

Vogliamo determinare il carattere della serie S (di Mengoli).
Innanzitutto osserviamo che

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Allora, considerando la successione delle ridotte di S abbiamo una *serie telescopica*:

$$\begin{aligned} s_n = \frac{1}{1(2)} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Di conseguenza il suo limite è

$$s_n = 1 - \frac{1}{n+1} \implies \lim_n s_n = 1$$

Allora la *serie di Mengoli* è *"convergente con somma* 1*"*.

#Esempio

Esempio (Problema di Basilea).

Consideriamo la serie

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Notiamo che questa è *"approssimabile"* con la *serie di Mengoli*; allora si deduce che S è *convergente*. Ma con quale somma?
Questa domanda venne posta per la prima volta nel *1644* come il *problema di Basilea* ([approfondimenti storici su Wikipedia]) e risolta dal noto matematico *L. Euler*, dimostrando che la somma esatta è

$$\frac{\pi}{6}$$

FIGURA 3.3. (*Foto di Pietro Mengoli e Leonhard Euler*)


SEZIONE B. I TEOREMI GENERALI SULLE SERIE

B1. Primi teoremi sulle Serie

Teoremi Generali sulle Serie

Primi teoremi sulle serie: condizione necessaria per una serie convergente, criterio di Cauchy per le serie.

---

0. Voci correlate

- Definizione di Serie
- Carattere di una Serie

1. Condizione necessaria per serie convergenti

#Teorema

> Teorema (condizione necessaria per la convergenza di una serie).
>
> Sia
>
> $$\sum_{n \in \mathbb{N}}^{+\infty} a_n$$
>
> una serie *convergente*.
> Allora la *successione dei termini generali* $(a_n)_n$ presenta il limite nullo, ovvero
>
> $$\lim_n a_n = 0$$

#Osservazione

> Osservazione (attenzione!).
>
> Osservare attentamente che questo teorema ci fornisce *solamente* una condizione necessaria per una serie convergente, ma *non* una condizione sufficiente; infatti, prendendo la *serie armonica*, abbiamo che il limite della successione $\lim_n a_n$ si annulla; ma la sua serie è *divergente* (Esempio 10 (Serie armonica)).

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 1 (condizione necessaria per la convergenza di una serie).
Supponiamo, per ipotesi che la serie

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}^{+\infty} a_n$$

sia *convergente*.
Allora per ipotesi segue che il *limite della successione delle ridotte* è convergente per tale serie:

$$\lim_n s_n = s \in \mathbb{R}$$

Allora vale anche

$$\lim_n s_{n-1} = \lim_n s_n = s$$

Ma allora possiamo sottrarli e ottenere

$$\lim_n (s_n - s_{n-1}) = s - s = 0$$

Però ci ricordiamo che $s_{n-1} - s_n$ non è altro che un modo per esprimere a_n, dal momento che *sottraiamo* tutti i termini $a_0, \dots, a_{n-1}$ da $a_0, \dots, a_n$.
Di conseguente

$$\lim_n (s_n - s_{n-1}) = \boxed{\lim_n a_n = 0} \blacksquare$$

#Osservazione

> Osservazione (l'utilità di questo teorema).
>
> Come osservato prima, non si può sfruttare questo teorema come una *condizione sufficiente*; tuttavia è possibile comunque sfruttare la *contronominale* di questo teorema, ovvero
>
> $$((a_n)_n, (s_n)_n) \text{ convergente} \implies \lim_n a_n = 0$$
>
> diventa
>
> $$\lim_n a_n \neq 0 \vee \nexists \lim_n a_n \implies ((a_n)_n, (s_n)_n) \text{ divergente o indeterminata}$$
>
> Allora guardando semplicemente il *comportamento* del limite per a_n, possiamo già escludere se la sua serie è *convergente* o meno.

> Ad esempio, voglio studiare la *serie costante* del tipo $1+1+\ldots+1+\ldots$; osservo che il limite della successione dei suoi termini generali è divergente, dunque è impossibile che sia *convergente*. Infatti, la serie costante è *divergente* per $+\infty$.

2. Criterio di Cauchy

#Teorema

> Teorema (Criterio di Cauchy per le serie).
>
> Sia
>
> $$\sum_{n\in\mathbb{N}}^{+\infty} a_n$$
>
> una *serie a valori in* $\mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$.
> Allora sono equivalenti:
>
> $$\sum_{n\in\mathbb{N}}^{+\infty} a_n \text{ convergente} \iff \begin{gathered}\forall\varepsilon>0,\exists\bar{n}:\forall n>\bar{n}\wedge\forall k\in\mathbb{N} \\ |a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+k}|<\varepsilon\end{gathered}$$

#Dimostrazione
DIMOSTRAZIONE del Teorema 4 (Criterio di Cauchy per le serie).
Ricordo il *teorema di completezza di* $\mathbb{R}$ (Teorema 4 (Completezza di R.)) e il *teorema di caratterizzazione delle successioni convergenti* (Teorema 3 (di caratterizzazione delle successioni convergenti)), per i quali una *successione qualsiasi* $(\alpha_n)_n$ è *convergente* se e solo se è di *Cauchy* (in $\mathbb{R}$).
Per definizione, la serie è convergente se la sua successione delle ridotte $(s_n)_n$ è *convergente*. Allora la serie è convergente *se e solo se* $(s_n)_n$ è di *Cauchy*.
Ora richiamo la definizione di successione di Cauchy: una successione si dice di Cauchy quando vale

$$\begin{gathered}\forall\varepsilon>0,\exists\bar{n}: \\ n,k>\bar{n}\implies|s_n-s_k|<\varepsilon\end{gathered}$$

Adesso supponendo che $n>k$ (non è restrittiva dal momento che se è vero il contrario, posso "scambiare i nomi" di n,k), posso ottenere la relazione

$$n>\bar{n};\exists m\in\mathbb{N}:k=n+m$$

Allora riprendendo la definizione di successione di Cauchy ho

$$\begin{gathered}\forall\varepsilon>0,\exists\bar{n}: \\ n,k>\bar{n}\implies|s_n-s_{n+m}|<\varepsilon\end{gathered}$$

Osserviamo che il membro sinistro della disuguaglianza a destra può essere riformulata come

$$|s_n - s_{n+m}| = |s_{n+m} - s_n| = |a_{n+1} + \ldots + a_{n+k}|$$

che è la tesi. ■

B2. Relazione tra Serie e Integrali Generalizzati

Relazione tra Serie Numeriche e Integrali Generalizzati

Nesso tra serie numeriche e integrali generalizzati. Definizione di funzione scalino per una serie. Teorema di equivalenza tra serie e integrali.

---

0. Voci correlate

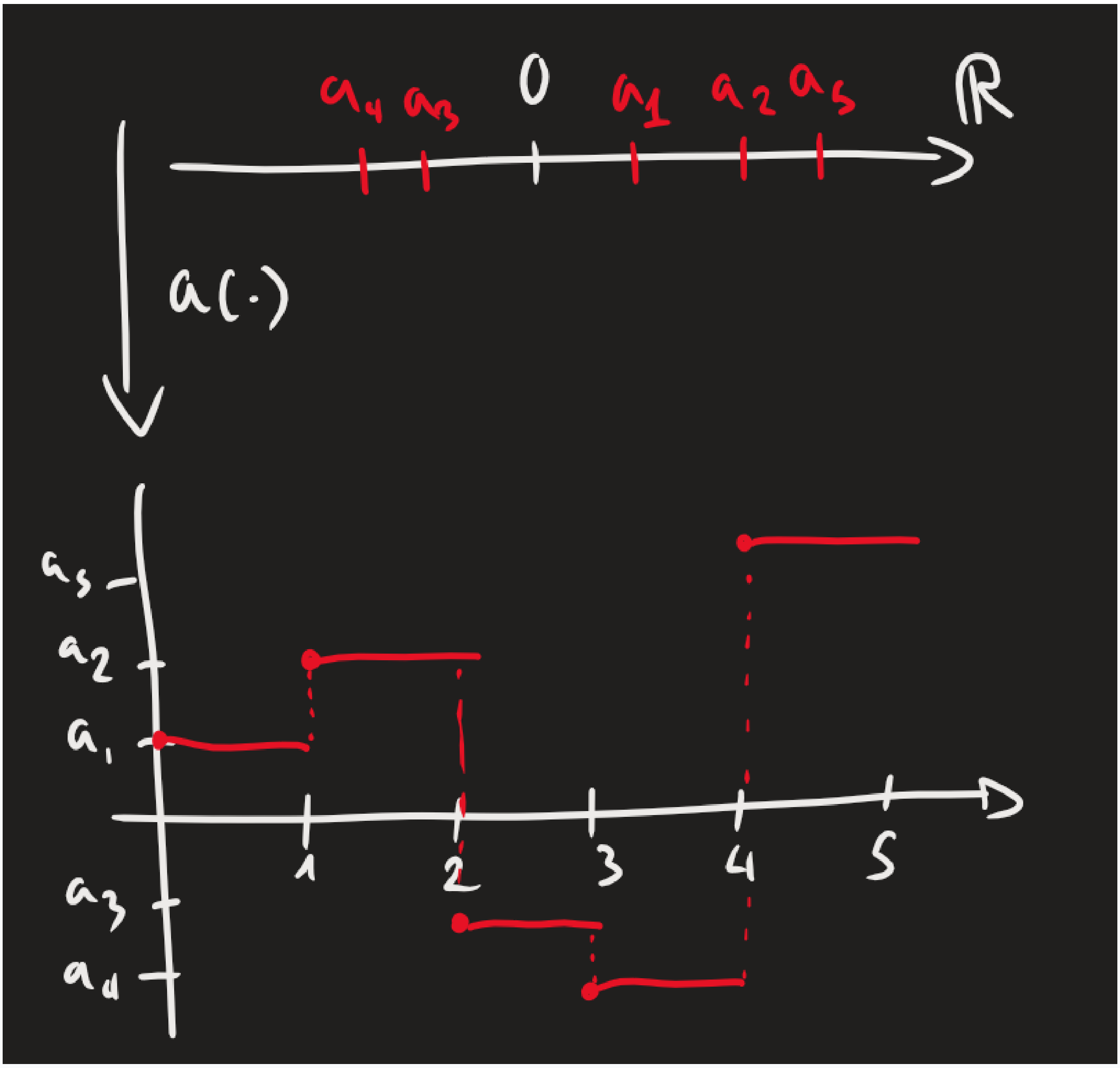
- Definizione di Serie
- Carattere di una Serie
- Funzione Integrabile in Senso Generalizzato

1. Definizione di funzione scalino

#Definizione

> **Definizione (funzione scalino per una serie).**
>
> Data una *serie* $\sum a_n$ si definisce la *funzione scalino* $a : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ come
>
> $$a(x) := a_n, \forall x \in [n-1, n)$$
>
> Graficamente prendiamo il la successione dei termini generali della serie $(a_n)_n$, e ad ogni termine a_k si associa ogni numero reale tra $[k-1, k)$ su a_k (*figura 1.1.*).

FIGURA 1.1. (*L'idea della funzione scalino*)



#Osservazione

Osservazione (l'integrabilità della funzione scalino).

Data una qualsiasi serie $\sum a_n$, la sua funzione scalino $a(\cdot)$ è *localmente integrabile* su $[0, +\infty)$ e l'integrale viene valutata come

$$\int_0^n a(x)\,\mathrm{d}x = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = s_n$$

Questa osservazione ci permetterà di vedere più chiaramente il *nesso* tra questa funzione inventata *"ad-hoc"* e le *serie*.

2. Teorema di relazione tra le serie e gli integrali

#Teorema

Teorema (di relazione tra le serie e gli integrali).

> Sia $\sum a_n$ una *serie* e $a(x)$ la sua *funzione scalino associata*.
> Allora sono equivalenti:
>
> 1. *Convergenza*
>
> $$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = s \in \mathbb{R} \iff \lim_{x \to +\infty} \int_0^x a(t)\ \mathrm{d}t =: \int_0^{+\infty} a(t)\ \mathrm{d}t = s$$
>
> 2. *Divergenza*
>
> $$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \pm\infty \iff \int_0^{+\infty} a(t)\ \mathrm{d}t = \pm\infty$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 3 (di relazione tra le serie e gli integrali)
Dimostriamo il primo punto.
" $\impliedby$ ": Basta osservare che la funzione scalino a è *integrabile localmente* su $[0, +\infty)$ e in particolare *in senso generalizzato* per ipotesi. Allora vale che

$$\int_0^n a(t)\ \mathrm{d}t = s_n \implies \lim_n \int_0^n a(t)\ \mathrm{d}t = \lim_n s_n = s$$

" $\implies$ ": Si suppone che la serie vale

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = s$$

Allora considero che per ogni $x \in [n, n+1)$ vale la relazione

$$\int_0^x a(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^n a(t)\ \mathrm{d}t + \underbrace{\int_n^x a(t)\ \mathrm{d}t}_{\text{rimane costante}}$$

Da cui, per definizione di $a(x)$, discende

$$\int_0^x a(t)\ \mathrm{d}t = s_n + a_{n+1}(x-n) \implies \lim_n s_n + \underbrace{a_{n+1}}_{\to 0}\underbrace{(x-n)}_{\leq 1} = s + 0 = s$$

dato che $\lim_n a_n = 0$ (Teorema 1 (condizione necessaria per la convergenza di una serie)).
Ora dimostriamo il secondo punto.
" $\impliedby$ ": Si fa un conto analogo alla dimostrazione del primo punto, ovvero considerando che

$$\int_0^n a(t)\ \mathrm{d}t = s_n$$

" $\implies$ ": Supponiamo che la serie sia divergente positivamente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$$

Come fatto prima, consideriamo che per un qualsiasi $x \in [n, n+1)$. Supponiamo pure che l'ultimo termine della serie sia non negativa ($a_{n+1} \geq 0$).
Allora vale che

$$\int_0^x a(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^n a(t)\ \mathrm{d}t + \int_n^x a(t)\ \mathrm{d}t$$

Ovvero

$$\int_0^{+\infty} a(t)\ \mathrm{d}t = \lim_n \int_0^n a(t)\ \mathrm{d}t + \int_n^x a_{n+1} = s_n + a_{n+1}(x-n) \leq s_n + a_{n+1} =$$

Da cui, per il teorema del confronto (Teorema 3 (criterio del confronto)) si ha la divergenza dell'integrale.
In maniera analoga, supponendo $s_{n+1} \leq 0$ (ovvero includendo i casi in cui il termine a_{n+1} sia negativa) si ha

$$s_{n+1} \leq \int_0^x a(t)\ \mathrm{d}t \leq s_n$$

Quindi, in una maniera definitiva si ha

$$\min\{s_n, s_{n+1}\} \leq \int_0^x a(t)\ \mathrm{d}t \leq \max\{s_n, s_{n+1}\}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Ovvero, usando il teorema del confronto

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^x a(t)\ \mathrm{d}t = +\infty \blacksquare$$

SEZIONE C. LE SERIE A TERMINI NON NEGATIVI

C1. Serie a termini non-negativi

Serie a Termini non negativi

Definizione di serie a termini non negativi (o positivi); proprietà fondamentale delle serie a termini non negativi (o positivi); teorema dell'aut-aut per le serie a termini non negativi.

---

0. Voci correlate

- Definizione di Serie
- Carattere di una Serie

1. Definizione di serie a termini non negativi

#Definizione

Definizione (Serie a termini non negativi o positivi).

Sia

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}^{+\infty} a_n$$

una serie, tale che $\forall n, a_n \geq 0$ (ovvero tutti i *termini della successione dei termini della serie sono positivi*), allora la serie si dice *a termini non negativi*. Parimenti, se invece si verifica $a_n > 0$, allora la serie si dice *a termini positivi*.

2. Proprietà fondamentale delle serie a termini non negativi

#Osservazione

Osservazione (Proprietà fondamentale delle serie a termini non negativi).

Osserviamo che se una serie è a *termini non negativi*, allora $(s_n)_n$ è sicuramente una successione *monotona crescente*. Questa proprietà sarà importante in quanto

> ci permetterà di enunciare il c.d. teorema dell'*aut-aut* per le serie a termini non negativi.

#Teorema

> Teorema (dell'aut-aut per le serie a termini non negativi).
>
> Sia
>
> $$\sum_{n \in \mathbb{N}}^{+\infty} a_n$$
>
> una *serie* a termini non negativi, allora la serie o *è divergente* o *è convergente*, come suggerirebbe il termine Kierkegaardiano *"Aut-Aut"* (approfondimenti sull'Aut-Aut di S. Kierkegaard].

#Dimostrazione
DIMOSTRAZIONE del Teorema 3 (dell'aut-aut per le serie a termini non negativi).
La dimostrazione è semplice, basta prendere *l'osservazione 2* (vedere sopra) e applicare il *teorema dei limiti per le successioni monotone* (Teorema 7 (esistenza dei limiti delle successioni monotone)), per cui se una successione è *monotona* (in particolare $(s_n)_n$), allora il suo limite deve *esistere*.
Pertanto se esiste il limite

$$\lim_n s_n = s \in \tilde{\mathbb{R}}$$

allora la serie non può essere indeterminata, per definizione. ■

C2. Serie Notevoli

Serie Numeriche Notevoli

Serie numeriche notevoli, campioni per il confronto con altre serie.

---

0. Voci correlate

- Teorema del Confronto per le Serie a Termini non negativi
- Relazione tra Serie Numeriche e Integrali Generalizzati

1. Serie Armonica Generalizzata

#Teorema

Teorema (serie armonica generalizzata).

Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$$

per $p > 0$.
Se $p \in (0, 1]$, allora la serie *diverge*.
Se $p \in (1, +\infty)$ allora la serie *converge* con somma $s \leq \frac{p}{p-1}$.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 1 (serie armonica generalizzata).
N.B. Questa è un'idea della dimostrazione
Sfruttiamo la *relazione tra le serie numeriche e gli integrali generalizzati*, con la *funzione scalino* per $\frac{1}{n^p}$. Abbiamo dunque una situazione del tipo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \longleftrightarrow \int_0^{+\infty} a(t) \ \mathrm{d}t \leq \int_0^{+\infty} f(t) \ \mathrm{d}t$$

Vogliamo trovare un'opportuna funzione $f(t)$ di cui sappiamo essere convergente e dominare $a(t)$.
Definiamo dunque

$$f(x) := \begin{cases} 1, 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{x^p}, x \geq 1 \end{cases}$$

Come visto con gli *integrali impropri notevoli* (Teorema 2 (integrali impropri su semirette)), possiamo studiare l'*integrabilità* di f su $(0, +\infty)$. $\blacksquare$

#Osservazione

Osservazione (l'utilità delle serie armoniche generalizzate).

Questa serie sarà particolarmente utile per studiare il *carattere* delle *altre serie*, dal momento che la *serie armonica generalizzata* funge da *"serie campione"* per i confronti.

C3. Teorema del Confronto per le Serie non negative

Teorema del Confronto per le Serie a Termini non negativi

Teoremi sulle serie a termini non negativi: teorema del confronto (+ due corollari), tecnica di valutazione delle serie con Taylor.

---

0. Voci correlate

- Serie a Termini non negativi
- Definizione di Serie
- Carattere di una Serie
- Formula di Taylor
- Insiemi limitati, maggioranti, massimo e teorema dell'estremo superiore

1. Teorema del confronto per le serie a t. n. n.

#Teorema

> Teorema (del confronto per le serie a termini non negativi).
>
> Siano $\sum_n a_n$, $\sum_n b_n$ due *serie a termini non negativi*.
> Supponiamo che valga $a_n \leq b_n, \forall n$ (ovvero che tutti i termini di $(b_n)_n$ *"stanno sopra"* tutti quelli di $(a_n)_n$)
> Allora:
> i. Se $\sum_n a_n$ è divergente, allora anche $\sum_n b_n$ è divergente.
> ii. Se $\sum_n b_n$ è convergente con somma s_b, allora anche $\sum_n a_n$ è convergente con somma s_a, con $s_a \leq s_b$.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 1 (del confronto per le serie a termini non negativi).
N.B. Dimostrazione omessa con Eva Sincich, dimostrazione fatta con Daniele del Santo
i. Supponiamo che $\sum_n a_n$ sia *divergente*. Ora consideriamo le *ridotte* n-esime per le serie $\sum_n a_n$, $\sum_n b_n$ e le denotiamo rispettivamente con s_n^a, s_n^b.
Per ipotesi so che per una qualsiasi $n \in \mathbb{N}$ ho $a_n \leq b_n$, di conseguenza $a_0 + a_1 \leq b_0 + b_1$; $a_0 + a_1 + a_2 \leq b_0 + b_1 + b_2$; e procedendo per induzione ottengo

$$a_0 + \ldots + a_n \leq b_0 + \ldots + b_n$$

I membri della disuguaglianza sono esattamente s_n^a, s_n^b.
Ma allora

$$s_n^a \leq s_n^b$$

Dato che $\sum_n a_n$ è *divergente*, per definizione deve seguire il limite

$$\lim_n s_n^a = \pm\infty$$

Ma allora per il *teorema del cfr. per i limiti di successione* (Osservazione 5 (i teoremi per i limiti di funzioni valgono anche per i limiti di successioni)) ho il limite

$$\lim_n s_n^a = \pm\infty \wedge s_n^a \leq s_n^b \implies \lim_n s_n^b = \pm\infty$$

Allora per definizione la serie $\sum_n b_n$ è *divergente*.
ii. Ora supponiamo invece che $\sum_n b_n$ sia *convergente* con somma s_b.
Per definizione ho il limite finito

$$\lim_n s_n^b = s_b$$

Però, considerando che trattiamo di *serie a termini non negativi*, abbiamo che la *successione delle ridotte* è monotona crescente; allora vale anche

$$s_b = \sup_{n \in \mathbb{N}} s_n^b$$

Ovvero *"s_b è il maggiorante di tutti i termini di $(s_n^b)_n$"*, dunque $s_n^b \leq s_b$.
Ora possiamo concatenare l'ipotesi iniziale col risultato appena ottenuto:

$$s_n^a \leq s_n^b \leq s_b$$

Ma allora s_n^a è una *successione strettamente crescente e limitata da s_b*; allora per il teorema sulle successioni monotone e limitate (Corollario 8 (convergenza delle successioni monotone e limitate)), s_n^a dev'essere convergente, ovvero

$$\lim_n s_n^a = s_a \leq s_b$$

che è la tesi. ■

2. Conseguenze del teorema del cfr.

#Corollario

> Corollario (caso resto k-esimo).
>
> Siano $\sum_n a_n, \sum_n b_n$ due *serie a termini non negativi*.
> Supponendo che valga
>
> $$\exists k \in \mathbb{N} : \forall n, n > k \implies a_n \leq b_n$$

(ovvero *"da un certo punto a_n sta sotto b_n"*)
allora:
i. Se $\sum_n b_n$ è *convergente*, allora anche $\sum_n a_n$ è *convergente*.
ii. Se $\sum_n a_n$ è *divergente*, allora anche $\sum_n b_n$ è *divergente*.

#Osservazione

Osservazione (pezzo mancante).

Notare attentamente che questo corollario *non coincide completamente* col teorema del confronto, dal momento che nel caso delle serie *convergenti* non vale più la tesi $s_a \leq s_b$, dato che stiamo *solo* considerando il resto k-esimo delle serie.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Corollario 2 (caso resto k-esimo).
Basta applicare il *teorema del confronto* ai *resti* k-esimo delle serie $\sum_n a_n, \sum_n b_n$, ovvero $\sum_{n=k} a_n, \sum_{n=k} b_n$. ■

#Corollario

Corollario (seconda conseguenza).

Siano $\sum_n a_n, \sum_n b_n$ serie a *termini positivi*.
Supponendo che *esista finito e strettamente positivo il limite*

$$\lim_n \frac{a_n}{b_n} = \lambda \in (0, +\infty)$$

Allora le due serie hanno lo *stesso carattere*.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Corollario 4 (seconda conseguenza).
Supponiamo il limite

$$\lim_n \frac{a_n}{b_n} = \lambda \in (0, +\infty)$$

Allora per definizione del limite ho

$$\begin{gathered} \forall \varepsilon > 0, \exists k \in \mathbb{N} : \forall n, \\ n > k \implies \left| \frac{a_n}{b_n} - \lambda \right| < \varepsilon \iff \lambda - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < \lambda + \varepsilon \end{gathered}$$

Scegliamo $\varepsilon = \frac{\lambda}{2}$. Allora ho

$$\frac{1}{2}\lambda < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3}{2}\lambda$$
$$\frac{1}{2}\lambda \cdot b_n < a_n < \frac{3}{2}\lambda \cdot b_n$$

Il secondo passaggio è giustificato dal momento che b_n è sempre *strettamente positivo*.
Allora, supponendo che $\sum_n a_n$ sia *convergente*, allora segue che $\sum_n \frac{\lambda}{2} b_n$ è *convergente*, ovvero $\sum_n b_n$ è anche *convergente*.
Il ragionamento è analogo per il caso in cui $\sum_n a_n$ è *divergente*. ■

3. Tecnica di valutazione delle serie con Taylor

#Osservazione

> Osservazione (L'utilità pratica del corollario del teorema del confronto).
>
> Sarà utile utilizzare il Corollario 4 (seconda conseguenza) per valutare il carattere di certe serie, in specie se lo si usa accompagnandolo ai *sviluppi di Taylor per le funzioni* (Teorema 2.1. (di Taylor col resto di Peano))
>
> Supponiamo di dover studiare il carattere di una serie del tipo
>
> $$\sum_n^{+\infty} f(\frac{1}{n})$$
>
> Prendiamo lo sviluppo di Taylor per $f(x)$ con $x_0 = 0$ e $n = 2$. Ovvero la f diventa una funzione del tipo
>
> $$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + r_2(0, x)$$
>
> con il limite
>
> $$\lim_{x \to 0} \frac{r_2(0,x)}{x^2} = 0$$
>
> Ora supponiamo di avere i seguenti casi:
>
> - Se $f(0) \neq 0$, allora la *funzione vicino a* 0 non si annulla mai; dunque per qualsiasi valori di x, abbiamo la somma di un numero più grande di $f(0)$. Allora la serie è *divergente*.
> - Se $f(0) = 0$ e $f'(0) \neq 0$, allora sarà utile valutare f in $\frac{1}{n}$ e prendere il suo limite.
>   Infatti si avrebbe una situazione del tipo
>
> $$\lim_n \frac{f(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = \lim_n f'(0) + \frac{r_2(0, \frac{1}{n})}{\frac{1}{n^2}} \cdot \frac{1}{n} \neq 0$$

dunque la serie sarà *sicuramente divergente*, dato che si comporta come $\frac{1}{n}$.

- Se $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ e $f''(0) \in \mathbb{R}$, ripetiamo lo stesso procedimento di prima e si avrebbe la situazione del tipo

$$\lim_n \frac{f(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n^2}} = \lim_n \frac{f''(0)}{2} + \frac{r_2(0, \frac{1}{n})}{\frac{1}{n^2}}$$

Infatti, se il limite fosse 0, allora $f(\frac{1}{n})$ sarebbe più piccola di $\frac{1}{n^2}$, dunque convergente in ogni caso.

C4. Criteri per le serie a termini positivi

Teoremi sulle Serie a Termini positivi

Tre criteri di convergenza sulle serie a termini positivi: criterio del rapporto, della radice, della serie condensata.

---

0. Voci correlate

- Definizione di Serie
- Serie a Termini non negativi
- Limite di Successione

1. Criterio dell'ordine di infinitesimo

#Teorema

Teorema (dell'ordine di infinitesimo).

Sia $\sum_n a_n$ una *serie a termini non negativi*. Si ha che:
A. *Convergenza della serie*
Se esiste $p > 1$ tale che esista il limite

$$\lim_n a_n \cdot n^p = L \in [0, +\infty)$$

Allora la serie $\sum_n a_n$ è *convergente*.
B. *Divergenza della serie*
Se esiste $p \leq 1$ tale che esista il limite

$$\lim_n a_n \cdot n^p = L \in (0, +\infty) \cup \{+\infty\}$$

allora la serie $\sum_n a_n$ è *divergente*.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 1 (dell'ordine di infinitesimo)

N.B. Questa è solo un'idea della dimostrazione

Questo criterio sostanzialmente discendo dal confronto delle successioni $(a_n)_n$ e $(\frac{1}{n^p}{}_n)_n$ e si legge dunque le ipotesi come

$$\lim_n \frac{a_n}{\frac{1}{n^p}} \blacksquare$$

2. Criterio del rapporto

#Teorema

Teorema (criterio del rapporto).

Sia $\sum_n a_n$ una serie a termini positivi. Se *esiste* un $0 < k < 1$, tale che $\forall n \in \mathbb{N}$ valga

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq k$$

allora la *serie è convergente*.

DIMOSTRAZIONE del Teorema 2 (criterio del rapporto)

Segue dal *teorema del confronto* (Teorema 1 (del confronto per le serie a termini non negativi)]) e dalla *convergenza* di $\frac{1}{n^\alpha}$ per $|\alpha| < 1$.

Infatti,

$$\begin{aligned}
&a_2 \leq k \cdot a_1 \\
&a_3 \leq k \cdot a_2 \leq k^2 \cdot a_1 \\
&\vdots \\
&a_n \leq k^{n+1} a_1
\end{aligned}$$

che è proprio la *serie geometrica* con $0 < k < 1$. $\blacksquare$

#Teorema

Teorema (criterio del rapporto col limite).

Sia $\sum_n a_n$ una *serie a termini positivi*. Supponendo che *esiste* e *valga* l il limite

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$$

Allora:

- Se $l <\ 1$, allora la serie è *convergente*.
- Se $l > 1$, allora la serie è *divergente*.
- Se invece $l = 1$ o il limite non esiste, allora *non si può dire niente*.

#Osservazione

Osservazione (casi inconcludenti).

Vediamo che se il limite vale $l = 1$ allora lo studio è inconcludente, dal momento che sia *serie convergenti* che sia *serie divergenti* possono avere tale limite $l = 1$. Posso infatti prendere $a_n = \frac{1}{n}$ e $b_n = \frac{1}{n^2}$ come esempi.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 3 (criterio del rapporto col limite).
Basta prendere le definizione del limite $\varepsilon - \bar{n}$ e scegliere opportuni valori ε.
Altrimenti si può procedere con la seguente dimostrazione.
N.B. Questa dimostrazione è stata svolta con Daniele del Santo
i. Supponiamo che valga il limite $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = l < 1$.
Allora prendiamo un valore qualsiasi ρ tale che $l < \rho < 1$; ovvero *"ρ sta in mezzo tra $l, 1$"*.
Quindi per definizione del limite vale che *esiste* un $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$n \geq \bar{n} \implies \frac{a_{n+1}}{a_n} < \rho$$

Allora di conseguenza deve seguire

$$\frac{a_{\bar{n}+1}}{a_{\bar{n}}} < \rho \implies a_{\bar{n}+1} < \rho \cdot a_{\bar{n}}$$

Ma allora vale anche per

$$\frac{a_{\bar{n}+2}}{a_{\bar{n}+1}} < \rho \implies a_{\bar{n}+2} < \rho^2 \cdot a_{\bar{n}+1} \leq \rho \cdot a_{\bar{n}+1}$$

Notiamo che questo vale anche prendendo $\bar{n}+3, \bar{n}+4$ e così via...
Dunque *per induzione* vale che

$$\forall k \in \mathbb{N}, a_{\bar{n}+k} < \rho^k \cdot a_{\bar{n}}$$

Allora da $\bar{n}$ in poi, il termine a_n è *maggiorata* dal numero $\rho^{n-\bar{n}} \cdot a_{\bar{n}}$; ovvero

$$a_n \leq \rho^n \cdot \frac{a_{\bar{n}}}{\rho^{\bar{n}}}$$

Ora utilizzo il *teorema del confronto per le serie a termini positivi* (Teorema 1 (del confronto per le serie a termini non negativi)), confrontando $\sum_n a_n$ con $\sum_n \rho^n \cdot \frac{a_{\bar{n}}}{\rho^{\bar{n}}}$.
Sicuramente la serie

$$\frac{a_{\bar{n}}}{\rho^{\bar{n}}} \sum_n \rho^n$$

è *convergente* per $\rho \in (0,1)$. Allora $\sum_n a_n$ è *convergente*.
ii. Supponiamo invece il limite $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = l > 1$.
Allora per definizione del limite

$$\exists \bar{n} : n > \bar{n} \implies \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$$

Ovvero $a_{n+1} > a_n$. Allora da un certo $\bar{n}$ in poi, la successione $(a_n)_n$ sarà sempre *crescente*; dunque il resto $\bar{n}$-esimo della serie è *divergente*, dunque la serie $\sum_n a_n$ è divergente. ■

3. Criterio della radice

#Teorema

> Teorema (criterio della radice).
>
> Sia $\sum_n a_n$ una *serie a termini non negativi* e supponiamo che esista $0 < k < 1$ tale che valga sempre
>
> $$\sqrt[n]{a_n} \leq k, \forall n$$
>
> allora la *serie è convergente*.

DIMOSTRAZIONE del Teorema 5 (criterio della radice)
Si eleva tutto alla n; infatti

$$\sqrt[n]{a_n} \leq k \implies a_n \leq k^n$$

da cui, per il *teorema del confronto* e per la *convergenza* di $\sum_n k^n$ per $0 < k < 1$, abbiamo la tesi. ■

#Teorema

> Teorema (criterio della radice col limite).

Sia $\sum_n a_n$ una *serie a termini positivi*.
Supponendo che esista e sia finita il limite

$$\lim_n \sqrt[n]{a_n} = l$$

Allora:

- Se $l < 1$, allora la serie è *convergente*.
- Se $l > 1$, allora la serie è *divergente*.
- Altrimenti non posso dire nulla

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 6 (criterio della radice col limite).
La dimostrazione è analoga a quella vista per il Teorema 3 (criterio del rapporto col limite), dunque omessa. ■

4. Criterio della serie condensata

N.B. Parte svolta con Daniele del Santo

#Teorema

Teorema (criterio della serie condensata).

Sia $\sum_n a_n$ una *serie a termini positivi*.
Supponendo che $(a_n)_n$ sia *decrescente*, ovvero che $\forall n, a_{n+1} \leq a_n$.
Allora la serie $\sum_n a_n$ ha lo stesso carattere della serie $\sum_n b_n := \sum_n (2^n a_{2^n})$.

#Definizione

Definizione (serie condensata di una serie).

Sia $\sum_n a_n$ una serie. Allora la serie

$$\sum_{n \in \mathbb{N}}^{+\infty} 2^n a_{2^n}$$

si dice la *"serie condensata"* di a_n.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 7 (criterio della serie condensata).
Omessa (anche a lezione). ■

SEZIONE D. LE SERIE A TERMINI DI SEGNO QUALUNQUE

D1. Assoluta e Semplice Convergenza di una Serie

Assoluta e Semplice Convergenza di una Serie

Serie a termini di segno qualunque: serie assolutamente, semplicemente convergente; teorema dell'assoluta convergenza; criterio di Leibniz per le serie di segno alternato.

---

0. Voci correlate

- Definizione di Serie
- Serie a Termini non negativi
- Teoremi Generali sulle Serie
- Conseguenze dell'esistenza dell'estremo superiore

1. Definizione di assoluta e semplice convergenza

#Definizione

Definizione (serie assolutamente convergente).

Sia $\sum_n a_n$ una *serie* con termini in $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.
La serie $\sum_n a_n$ si dice *assolutamente convergente* se è convergente la serie $\sum_n |a_n|$.

#Definizione

Definizione (serie semplicemente convergente).

Sia $\sum_n a_n$ una *serie* con termini in $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.
Se $\sum_n a_n$ è *convergente* ma $\sum_n |a_n|$ è *divergente*, allora $\sum_n a_n$ si dice *semplicemente convergente*.

2. Rapporto tra le serie e le serie assolute

#Osservazione

Osservazione (preambolo).

Ora ci chiediamo se esiste un rapporto che lega $\sum_n a_n$ con $\sum_n |a_n|$; ovvero vogliamo trovare dei teoremi che sono in grado di garantire (o meno) il rapporto dei caratteri delle serie $\sum_n a_n$ e $\sum_n |a_n|$.
Se una serie è assolutamente convergente, allora è convergente? Oppure vale il viceversa? Se è convergente, allora dev'essere assolutamente convergente?
Ora lo vediamo.

#Teorema

Teorema (dell'assoluta convergenza).

Sia $\sum_n a_n$ una serie qualunque.
Se $\sum_n |a_n|$ è *convergente*, allora $\sum_n a_n$ è sicuramente convergente.
Ovvero *"se una serie è assolutamente convergente, allora è convergente"*.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 4 (dell'assoluta convergenza).
Supponiamo che $\sum_n a_n$ sia *assolutamente convergente*, ovvero $\sum_n |a_n|$ è *convergente*.
Allora applico il *criterio di Cauchy* sulla serie $\sum_n |a_n|$ (Teorema 4 (Criterio di Cauchy per le serie)).

$$\begin{gathered}\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} : \forall n, k \\ n > \bar{n} \wedge k \in \mathbb{N} \implies ||a_n| + |a_{n+1}| + \ldots + |a_{n+k}|| < \varepsilon\end{gathered}$$

Applico la *disuguaglianza triangolare* al membro sinistro della disuguaglianza (Teorema 11 (la disuguaglianza triangolare)).
Allora ho una situazione del tipo

$$|a_n + \ldots + a_{n+k}| \leq |a_n| + \ldots + |a_{n+k}| = ||a_n| + \ldots + |a_{n+k}|| < \varepsilon$$

Ma allora ho

$$\begin{gathered}\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} : \forall n, k \\ n > \bar{n} \wedge k \in \mathbb{N} \implies |a_n + a_{n+1} + \ldots + a_{n+k}| < \varepsilon\end{gathered}$$

che è il *criterio di Cauchy* per la serie $\sum_n a_n$. ■

#Osservazione

Osservazione (non vale il viceversa).

Abbiamo solo dimostrare che vale l'implicazione " $\implies$ ", ma non " $\impliedby$ "; ovvero non abbiamo dimostrato che le successioni convergenti sono assolutamente convergenti.

> Non sarebbe infatti possibile *"replicare"* la stessa dimostrazione al contrario, dal momento che in questo caso la disuguaglianza triangolare non vale più.
> Infatti si proporrà il *criterio di Leibniz* come *"controesempio"* per sfatare l'inversa della tesi, ovvero che *esistono* delle serie semplicemente convergenti.

3. Criterio di Leibniz

#Teorema

> Teorema (criterio di Leibniz per le serie a termini di segno alternato).
>
> Sia $(a_n)_n$ una successione in $\mathbb{R}$ tale che:
> i. la successione è decrescente e a termini non negativi, ovvero
>
> $$\forall n, 0 \leq a_{n+1} \leq a_n$$
>
> ii. il suo limite è nullo;
>
> $$\lim_n a_n = 0$$
>
> Allora la serie $\sum_n (-1)^n \cdot a_n$ è *convergente*. Inoltre si può stimare la somma con un errore, dato come
>
> $$|s - s_n| \leq a_{n+1}$$

#Dimostrazione
DIMOSTRAZIONE del Teorema 6 (criterio di Leibniz per le serie a termini di segno alternato).
Si tratta di dimostrare che il limite della *successione delle ridotte della serie* esiste finito, ovvero il limite $\lim_n s_n$.
Osservo preliminarmente che si costruisce $(s_n)_n$, per ipotesi iniziali, nel seguente modo:

$$s_0 = a_0; s_1 = a_0 - a_1; s_2 = a_0 - a_1 + a_2; \dots$$

Inoltre tengo conto del fatto che i termini sono *"più piccoli di quello precedente"*, dal momento che la successione è *decrescente*.
Allora ho una situazione del tipo raffigurato nella *figura 1.*.
In parole costruisco la *successione di intervalli* definita come la seguente:

$$(I_n)_n : [\alpha_n, \beta_n] := \begin{cases} [s_{n-1}, s_n], \exists k \in \mathbb{N} : n = 2k \\ [s_n, s_{n-1}] \text{ alt.} \end{cases}$$

Inoltre noto che la distanza di due *"estremi"* di un qualunque intorno è proprio $|a_n|$.
Vedo che posso usare il teorema di *Cantor*; per dimostrarlo bene devo solo dimostrare bene la seguente catena di disuguaglianze

$$\boxed{s_{2n+1} \leq s_{2n+3} \leq s_{2n+2} \leq s_{2n}}$$

ovvero che *"le ridotte pari sono decrescenti e stanno sopra le ridotte dispari che sono a loro volta crescenti"*.
Per dimostrare un pezzo faccio dei calcoli relativi a s_{2n+1}, s_{2n+2}:

$$\begin{cases} s_{2n+1} = s_{2n} + (-1)^{2n+1}a_{2n+1} = s_{2n} - a_{2n+1} \implies s_{2n} \geq s_{2n+1} \\ s_{2n+2} = s_{2n+1} + (-1)^{2n+2}a_{2n+2} = s_{2n+1} + a_{2n+2} \implies s_{2n+2} \geq s_{2n+1} \\ s_{2n+2} = s_{2n} - \underbrace{(a_{2n+1} - a_{2n+2})}_{\geq 0} \implies s_{2n} \geq s_{2n+2} \end{cases}$$

Ultimamente ho $s_{2n+1} \leq s_{2n+2} \leq s_{2n}$.
Per *"completare la catena di disuguaglianza"* segnata sopra, faccio un calcolo analogo per s_{2n+3};

$$\begin{cases} s_{2n+3} = s_{2n+2} - a_{2n+3} \implies s_{2n+3} \leq s_{2n+2} \\ s_{2n+3} = s_{2n+1} + \underbrace{(a_{2n+2} - a_{2n+3})}_{\geq 0} \implies s_{2n+3} \geq s_{2n+1} \end{cases}$$

Finalmente ho ottenuto ciò che volevo dimostrare all'inizio.
Adesso dimostriamo la stima dello scarto $|s - s_n| \leq a_{n+1}$; osservo che se ho n pari, allora posso maggiorare $|s - s_n|$ ricorsivamente fino a s_2, avendo una situazione del tipo

$$|s - s_{2n+2}| \leq |s - s_{2n}| \leq |s - s_{2n-2}| \leq \ldots \leq |s - s_2| = |a_1| \leq a_{n+1}$$

Invece se ho n dispari, basta maggiorarlo con un s_{2n} pari e da lì segue la stessa catena.
Continuando verso la fine della dimostrazione del teorema, posso essere sicuro di dire che la successione $(s_{2n+1})_n$ è *crescente*, invece la successione $(s_{2n})_n$ è decrescente ma vale che $\forall n, s_{2n+1} \leq s_{2n}$. Ora posso finalmente applicare il *teorema di Cantor* (Teorema 11 (Teorema di Cantor, forma forte.)) in una maniera rigorosa.
Ora definisco il limite di queste due successioni come

$$\lim_n s_{2n+1} = \sigma, \lim_n s_{2n} = \eta$$

ovvero *"σ è l'estremo sinistro, η è l'estremo destro"*.
Per concludere mi basta solo dimostrare che $\sigma = \eta$, ovvero che due *successioni estratte* di $(s_n)_n$ convergono allo stesso valore, di conseguenza il limite della successione $\lim_n s_n$ esiste.
Considero dunque il fatto che *"il limite delle ridotte pari stanno sopra a quelle dispari"*, e che i limiti delle successioni monotone sono gli *estremi* delle successioni.
Ovvero,

$$\forall n, s_{2n+1} \leq \sigma \leq \eta \leq s_{2n}$$

Ora, manipolando l'espressione ottengo

$$\forall n, 0 \leq |\sigma - \eta| \leq s_{2n} - s_{2n+1} = a_{2n+1}$$

Per ipotesi iniziale il limite della *successione dei termini generali* è nulla; ovvero

$$\lim_n a_n = 0 \implies \lim_n a_{2n+1} = 0$$

Allora per il *teorema dei due Carabinieri* (Osservazione 5 (i teoremi per i limiti di funzioni valgono anche per i limiti di successioni)) ho il limite

$$\lim_n |\eta - \sigma| = 0 \implies \eta = \sigma$$

Che dimostra $\sigma = \eta$, come volevasi dimostrare. Per dimostrare la stima

$$|s - s_n| \leq a_{n+1}$$

si usa il fatto che le *successioni convergenti in* $\mathbb{R}$ sono *successioni di Cauchy* (1), ovvero

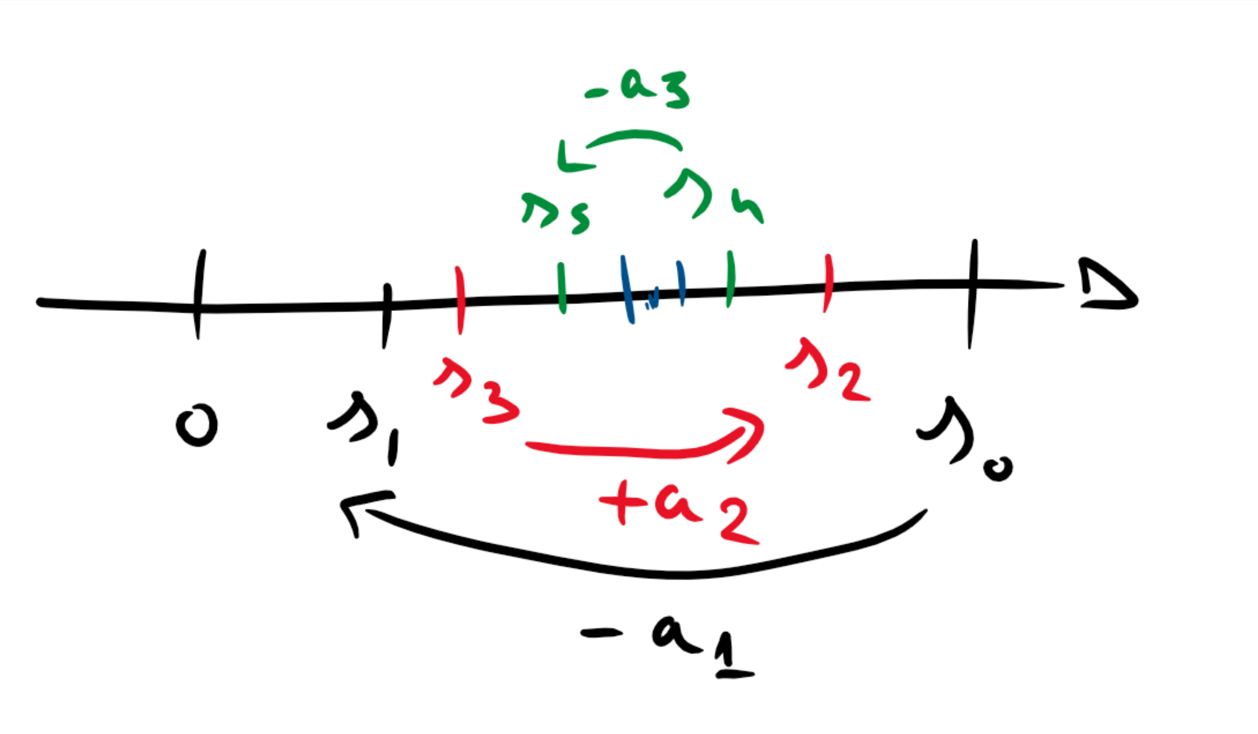
$$\begin{gathered}\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 : \forall n, m > N \\ |s_n - s_m| < \varepsilon\end{gathered}$$

Sia fissato $m \in \mathbb{N}$, da cui si ha un $\bar{n}$ abbastanza grande tale che $\bar{n} > m$. Allora

$$\begin{aligned}\bar{n} > m > N \implies |s_{\bar{n}} - s_m| &= |(a_1 + \ldots \pm a_{\bar{n}}) - (a_1 + \ldots \pm a_m)| \\ &= |a_{m+1} - \underbrace{(a_{m+2} - \ldots \mp a_{\bar{n}})}_{\geq 0}| \leq a_{m+1}\end{aligned}$$

da cui si ricava la tesi, ponendo il limite $\bar{n} \to +\infty$: infatti $\lim_n s_n = s$. ■

FIGURA 1. (*Situazione iniziale*)



4. Teorema di Riemann

#Teorema

Teorema (di Riemann).

Sia $\sum_n a_n$ *assolutamente convergente*.
Allora *tutte le serie* $\sum_n b_n$ del tipo $b_n := a_{\varphi(n)}$, dove φ è una *biiezione* del tipo $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, saranno sicuramente *convergenti* con la stessa somma.
Ovvero *"se una serie è assolutamente convergente, allora una qualsiasi altra serie con i stessi termini ma rimescolati sarà convergente con la stessa somma"*.
Notare che vale anche il *viceversa*.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 7 (di Riemann).
Omessa. ■

Capitolo 3. Successioni e Serie di Funzioni

Abstract del Capitolo 3

Il capitolo *'Successioni e Serie di Funzioni'* mira ad esplorare lo spazio delle funzioni reali; in particolare se consideriamo le successioni e le serie numeriche, e proviamo ad applicarle in questo spazio. In questo capitolo si andrà a definire la nozione di 'successione di funzioni', e i suoi possibili comportamenti; dopodiché si passa dalle successioni di funzioni alle serie di funzioni, studiando i suoi ulteriori comportamenti. Questa parte culmina con le applicazioni pratiche delle conoscenze appena acquisite, in particolare con le serie di potenze e le serie di Taylor-MacLaurin.

SEZIONE A. LE SUCCESSIONI DI FUNZIONI

A1. Definizione di Successione di Funzioni

Definizione di Successione di Funzioni

Definizione di successione di funzioni. Esempi di successioni di funzioni.

---

1. Definizione di successione di funzioni

#Definizione

Definizione (successione di funzioni).

Una *successione di funzioni* è una *successione* che associa un *numero naturale* ad una *funzione*. Quindi è in particolare una *funzione* del tipo

$$f_n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{F}$$

Questa successione viene indicata come $(f_n)_n$.

2. Esempi di successioni di funzioni

#Esempio

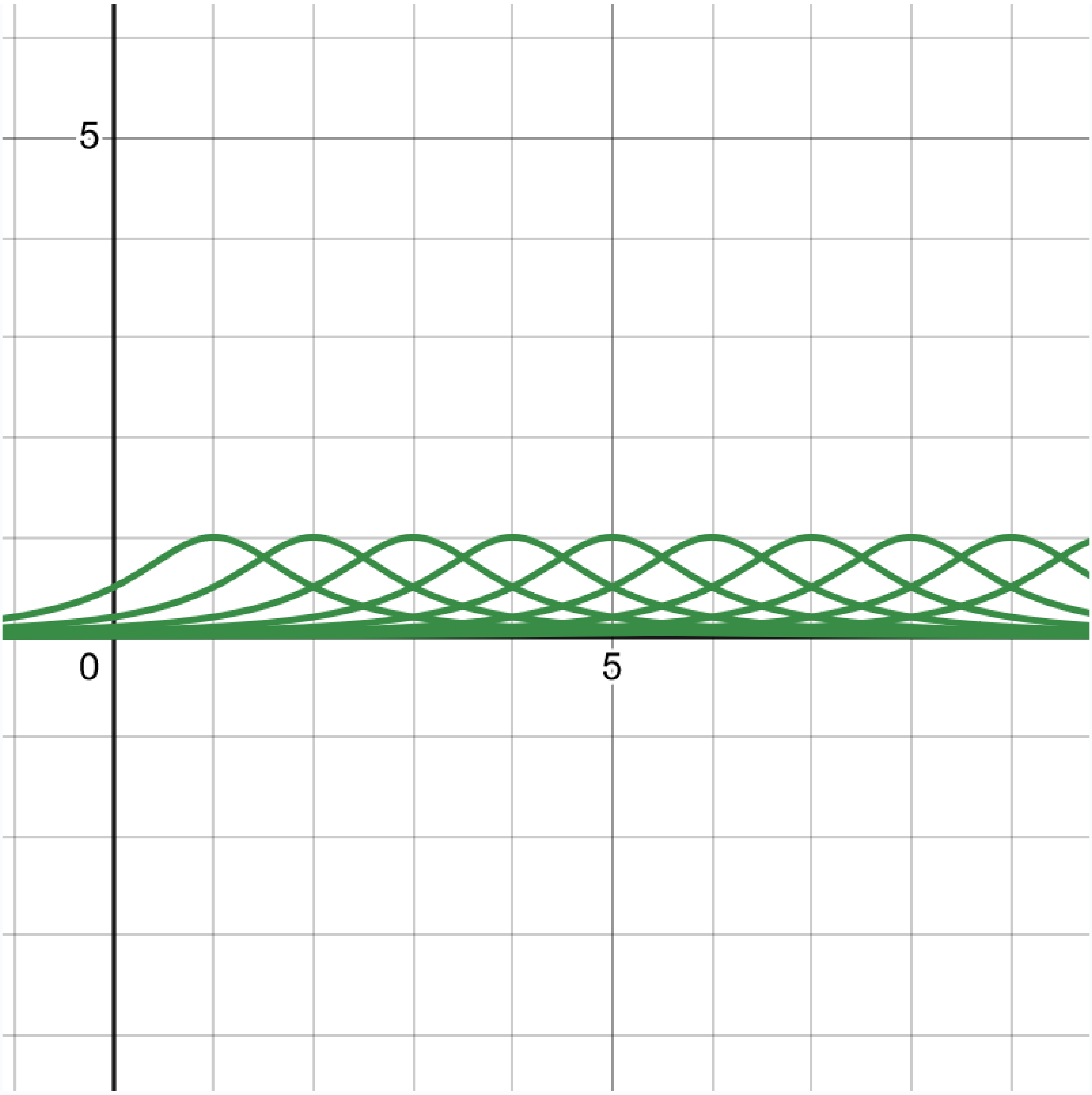
Esempio (esempio primo).

Sia $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (*ovvero che ogni membro della famiglia delle funzioni $(f_n)_n$ è a variabile reale*), definita come

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + (x - n)^2}$$

Il suo *"grafico"* viene rappresentato come nella *figura 2.1.*.

FIGURA 2.1. (*Esempio primo per* $n = 10$)



A2. Definizione di Convergenza Puntuale ed Uniforme

Convergenza Puntuale e Uniforme per Successioni di Funzioni

Definizione di convergenza puntuale e uniforme per successioni di funzioni. Esempi di funzioni puntualmente e uniformemente convergenti. Teorema di caratterizzazione della convergenza uniforme. Interpretazione geometrica della convergenza uniforme.

---

1. Definizioni di Convergenza Puntuale e Uniforme

#Definizione

Definizione (convergenza puntuale di una successione di funzioni).

Sia $(f_n)_n$ una *successione di funzioni*, in particolare del tipo

$$f_n : E \longrightarrow \mathbb{R}$$

(ovvero di *variabile reale*). Si dice che $(f_n)_n$ *converge puntualmente sul dominio* E *ad una funzione* $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, se vale che *per ogni punto del dominio esiste il limite* $\lim_n f_n(x) = f(x)$. Ovvero, alla *"Cauchy"*, se vale la condizione

$$\begin{gathered}\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} = \bar{n}(\varepsilon, x) : \\ n \geq \bar{n} \implies |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon\end{gathered}$$

#Osservazione

Osservazione (la nozione di convergenza puntuale dipende dal punto).

Come potrebbe suggerire il nome della *"convergenza puntuale"*, questo tipo di *convergenza* dipende dal punto $x \in E$ scelto. Infatti, la notazione $\bar{n}(\varepsilon, x)$ vuole *enfatizzare* il fatto che il valore limite $\bar{n}$ dipende dal punto x scelto.

Se vogliamo invece *"liberarci"* da questa scelta, dobbiamo vedere la nozione di *convergenza uniforme*.

#Definizione

Definizione (convergenza uniforme di una successione di funzioni).

Sia $(f_n)_n$ una *successione di funzioni a variabile reale*, ovvero del tipo $f_n : E \longrightarrow \mathbb{R}$. Si dice che $(f_n)_n$ *converge uniformemente alla funzione* $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ se vale che

$$\begin{gathered}\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} = \bar{n}(\varepsilon) : \forall x \in E, \\ n \geq \bar{n} \implies |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon\end{gathered}$$

#Osservazione

Osservazione (il legame tra convergenza puntuale e uniforme).

Si nota che la *convergenza uniforme* impone una *condizione più forte* della *convergenza puntuale*. Infatti, una *successione di funzioni uniformemente convergente* è anche una *successione di funzioni puntualmente convergente*.

2. Teorema di caratterizzazione della convergenza uniforme

#Teorema

> Teorema (di caratterizzazione della convergenza uniforme).
>
> Sia $(f_n)_n$ una *successione di funzioni*. Sono equivalenti:
>
> $$(f_n)_n \text{ converge uniformemente a } f: E \longrightarrow \mathbb{R}$$
> $$\Updownarrow$$
> $$\lim_n \left(\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \right) = 0$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 5 (di caratterizzazione della convergenza uniforme)
Questa dimostrazione sull'equivalenza (dato che ci troviamo in uno *spazio metrico*)

$$\forall x \in E, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \iff \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Ovvero se il limite tende ad annullarsi. ■

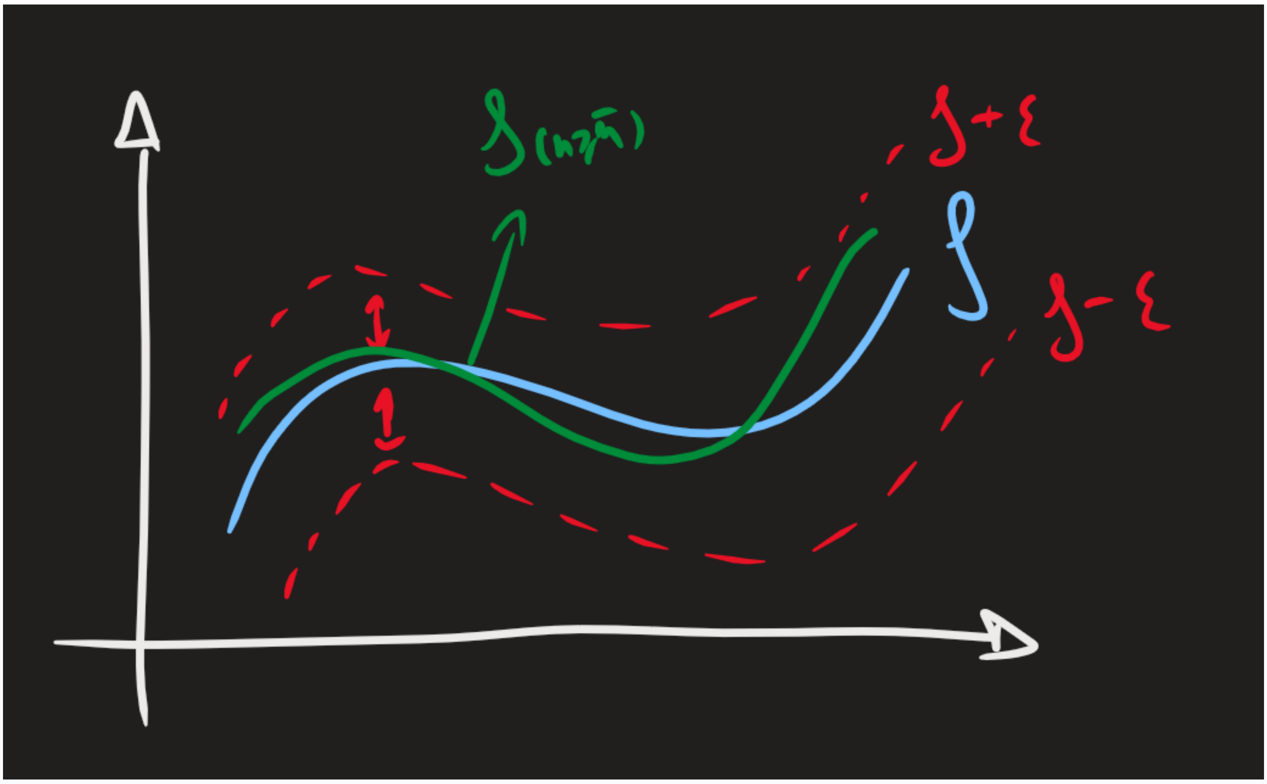
#Osservazione

> Osservazione (il vantaggio del teorema).
>
> Il *vantaggio principale* di questo teoremino è l'*eliminazione* del quantificatore $\forall$; infatti basta controllare l'*estremo superiore* dello *scarto* $|f_n(x) - f(x)|$.

#Osservazione

> Osservazione (l'interpretazione geometrica di convergenza uniforme).
>
> Vogliamo capire cosa *vuol dire* che una *successione di funzioni* è *uniformemente convergente* ad una funzione $f(x)$.
>
> Supponiamo che una *successione di funzioni* $(f_n)_n$ sia *uniformemente convergente* verso f. Possiamo dunque disegnare la funzione $f(x)$. Prendiamo dunque le sue funzioni traslate $(f - \varepsilon)(x)$ e $(f + \varepsilon)(x)$; il significato della *convergenza uniforme* è che ad un certo numero $\bar{n} \in \mathbb{N}$ in poi, le funzioni f_n saranno *sempre* contenute nell'intervallo $f - \varepsilon, f + \varepsilon$ (*figura 2.1.*).

FIGURA 2.1. (*Interpretazione geometrica della convergenza uniforme*)



3. Esempi di Successioni di Funzioni Convergenti

#Esempio

Esempio (successione puntualmente convergente).

Sia $f_n(x)$ definita come

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n|x|} = \begin{cases} \frac{nx}{1+nx}, x > 0 \\ 0, x = 0 \\ \frac{nx}{1-nx}, x < 0 \end{cases}$$

Vogliamo controllare la *convergenza puntuale* di questa successione di funzioni.

Per approcciarci a questo problema, dividiamo le casistiche.
Sia $x > 0$. Allora prendo il limite

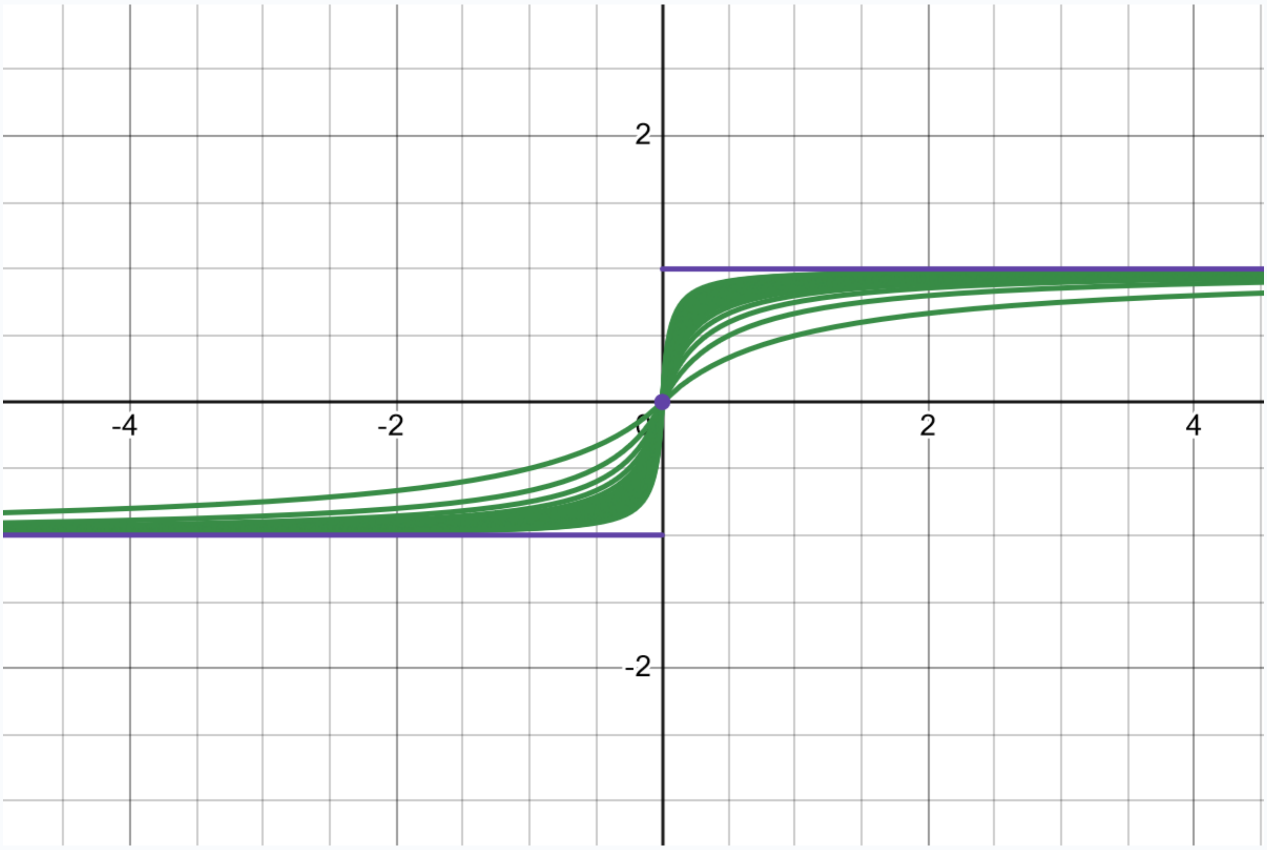
$$\lim_n \frac{nx}{1+nx} = 1$$

Analogamente per $x = 0$, la successione converge a $f(x) = 0$ e per $x < 0$ a $f(x) = -1$. Dunque la successione converge a $f(x)$ definita come

$$f(x) = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x = 0 \\ -1, x < 0 \end{cases}$$

Dunque sicuramente $(f_n)_n(x)$ converge puntualmente verso $f(x)$. Ovvero, abbiamo il grafico in *figura 3.1.*

FIGURA 3.1. (*Grafico delle successioni*)



#Esempio

Esempio (funzione puntualmente convergente all'iperbola).

Sia $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definita come

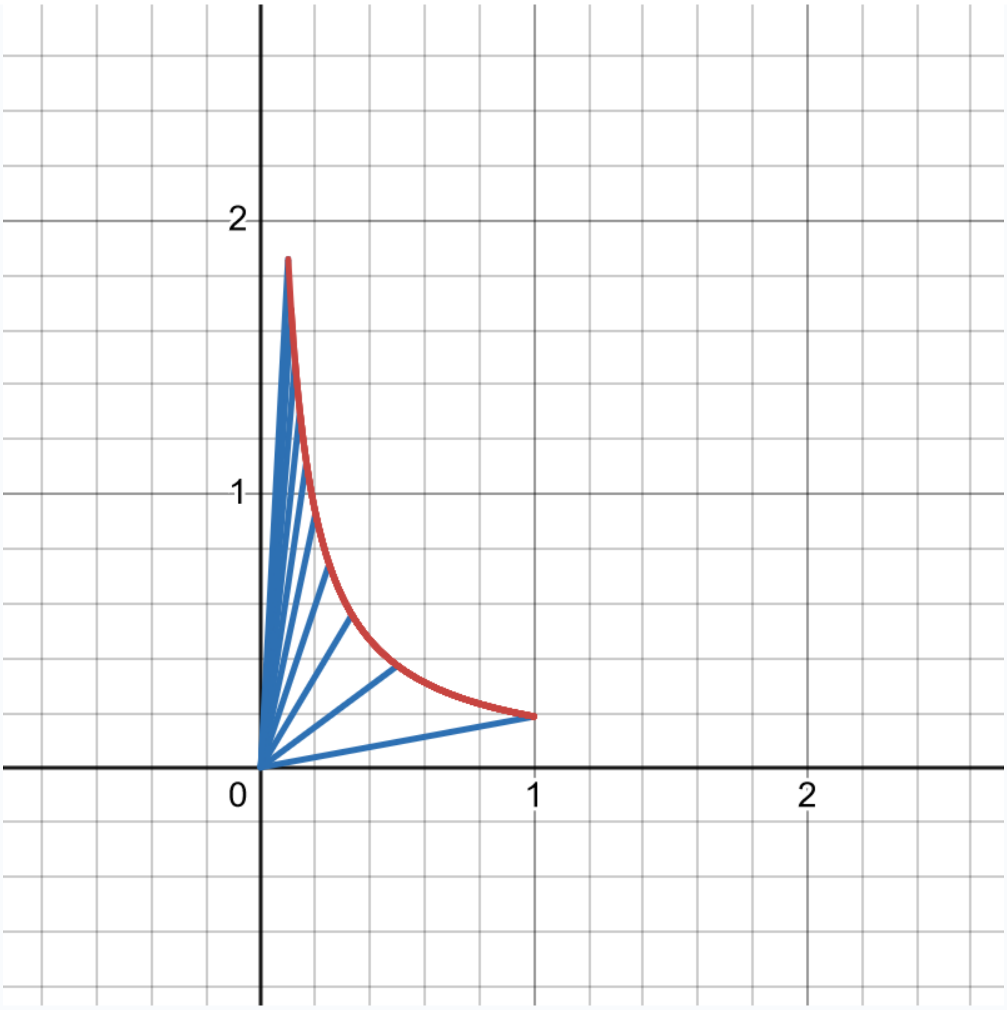
$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ \frac{1}{x}, \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}$$

Questa successione di funzioni converge puntualmente a $f(x) = \frac{1}{x}$. Infatti, supponendo un $x > 0$ *vicino a* 0, ci sarà sempre un numero $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $0 < \frac{1}{\bar{n}} < x$ (Corollario 4 ($\frac{1}{n}$ diventa piccolo.)). Allora esisterà sempre un $\bar{n}$ tale che valga il limite la funzione cade sulla *seconda parte* $\frac{1}{x}$. Dunque ho il limite

$$\lim_n f_n(x) = \frac{1}{x}$$

Questo si visualizza nella. *figura 3.2.*.

FIGURA 3.2. (*Visualizzazione della successione di funzioni per* $n = 10$*, scalata per* $k = 0.186$)



#Esempio

Esempio (funzione non uniformemente convergente).

Vogliamo vedere un caso di una funzione *non uniformemente* convergente, ma solo *puntualmente convergente*.
Prendiamo $f_n(x) = x^n$, con $E = (0, 1)$. Questa è chiaramente *puntualmente convergente*, dal momento che $\lim_n f_n(x) = 0$.
Adesso verifichiamo la *convergenta uniforme* di questa funzione. Prendiamo prima di tutto l'estremo superiore dei scarti $f_n(x) - f(x)$;

$$\sup_{0<x<1} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{0<x<1} |x^n - 0| = \sup_{0<x<1} x^n = 1^n$$

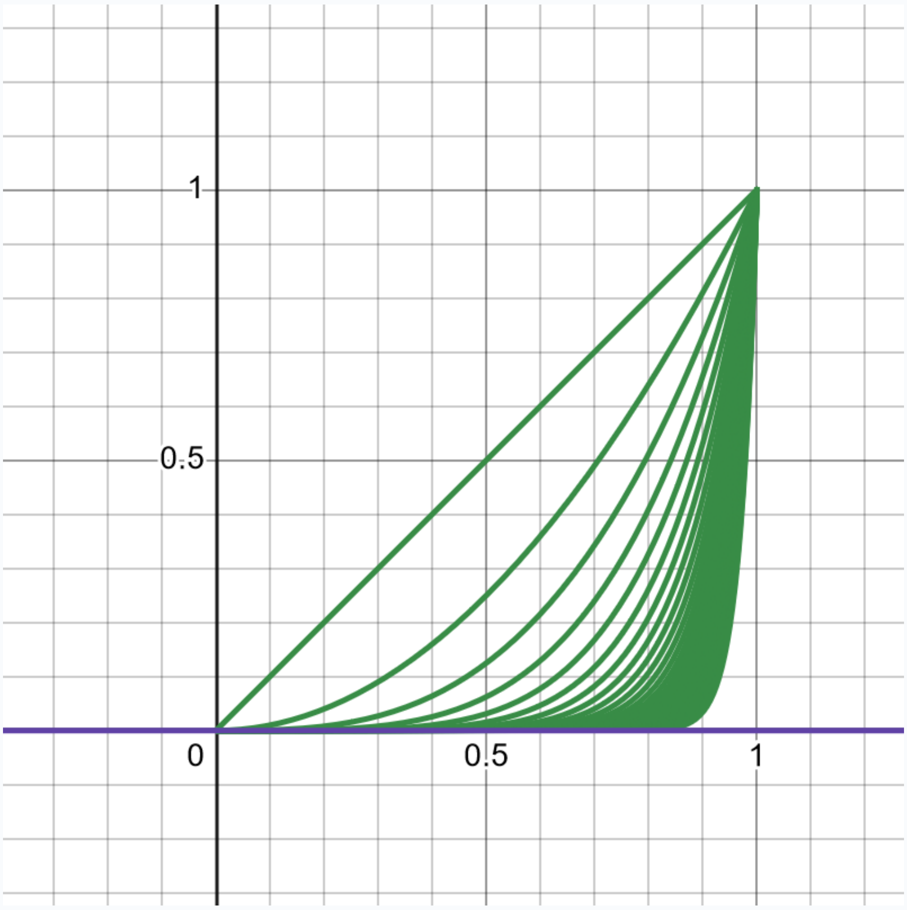
Adesso, prendendo il limite ho

$$\lim_n 1^n = 1$$

che ci dice che questa funzione *non* è *uniformemente convergente*.

Infatti, questa plottando questa successione di funzioni, troviamo che questa è *compatibile* con l'*interpretazione geometrica della convergenza uniforme*; ad un certo punto le funzioni $f_n(x)$ salgono sempre in una maniera *"incontrollabile"* verso 1 (*figura 3.3.*)

FIGURA 3.3. (*Funzione non uniformemente convergente*)



A3. Teoremi di Passaggio del Limite

Teoremi di Passaggio del Limite per le Successioni di Funzioni

---

Teoremi di Passaggio del Limite per le Successioni di Funzioni: Continuità, scambio con la derivata e con l'integrale. Esempi.

---

0. Voci Correlate

- Convergenza Puntuale e Uniforme per Successioni di Funzioni
- Definizione di Continuità
- Funzioni di potenza, radice e valore assoluto
- Derivata e derivabilità
- Integrabilità secondo Riemann

1. Teorema di passaggio al limite per funzioni continue

#Teorema

Teorema (di passaggio al limite per funzioni continue).

Sia $f_n : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una *successione di funzioni continue*. Sia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$.
Se f_n *converge uniformemente a* f, allora f è *continua*.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 1 (di passaggio al limite per funzioni continue)
Riscrivo le ipotesi come il seguente:
"f_n converge uniformemente a f" diventa

$$\begin{gathered}\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n}, \forall x \in [a, b] \\ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon\end{gathered}$$

"f_n sono continue" diventa

$$\begin{gathered}\forall x_0 \in [a, b], \forall m \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \\ x \in (x_0 - \delta_m, x_0 + \delta_m) \implies |f_m(x) - f_m(x_0)| \leq \varepsilon\end{gathered}$$

Adesso riscrivo la tesi, di cui voglio provare, come

$$\begin{gathered}\forall x_0 \in [a, b], \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \\ x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \implies |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon\end{gathered}$$

Per dimostrare questo prendere $|f(x) - f(x_0)|$ e aggiungere

$$f_m(x) - f_m(x) + f_m(x_0) - f_m(x_0) = 0$$

e si ha che

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_m(x) + f_m(x) - f_m(x_0) + f_m(x_0) - f(x_0)|$$

e per la disuguaglianza triangolare si ha

$$\begin{aligned}|f(x) - f(x_0)| &\leq \underbrace{|f(x) - f_m(x)|}_{\leq \varepsilon} + \underbrace{|f_m(x) - f_m(x_0)|}_{\leq \varepsilon} + \underbrace{|f_m(x_0) - f(x_0)|}_{\leq \varepsilon} \\ &\leq 3\varepsilon = \varepsilon'\end{aligned}$$

che è la tesi, dato che ε è un valore arbitrario. ■

2. Teorema del scambio del limite con la derivata

#Teorema

Teorema (del scambio del limite con la derivata).

Sia $f_n : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una *successione di funzioni derivabili*.
Se valgono che:
i. La successione delle derivate $(f_n')_n$ *converge uniformemente* in (a,b) verso g;
ii. La successione delle funzioni $(f_n)_n$ *converge uniformemente* in almeno in un punto $t_0 \in (a,b)$.
Allora la successione delle funzioni $(f_n)_n$ *converge uniformemente* in (a,b). Sia f il suo *limite*, risulta f *derivabile* e si ha $f' = g$. In altre parole, si può scambiare la derivata col limite;

$$\lim_n \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f_n(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\lim_n f_n(t)\right)$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE DEL Teorema 2 (del scambio del limite con la derivata)
Omessa. La dimostrazione è disponibile sulla p. 114 del Pagani-Salsa. ■

#Osservazione

Osservazione (la convergenza uniforme di una successione non garantisce la convergenza delle derivate).

Si osserva che la *convergenza uniforme* di una successione $(f_n)_n$ non garantisce la *derivabilità* della *convergenza delle derivate* $(f_n')_n$.

Infatti, prendiamo il seguente controesempio. Posto $f_n(x)$ come

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$$

sappiamo che chiaramente $\lim_n f_n(x) = 0$, in una maniera uniforme.
Adesso consideriamo le $(f_n')_n$; queste sono uguali a

$$f_n'(x) = \cos(nx)$$

tuttavia, queste *non hanno limite*, dunque *non convergenti in alcun modo*.

3. Teorema del scambio del limite con l'integrale

#Teorema

Teorema (del scambio del limite con l'integrale).

Se $f_n : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ è una *successione di funzioni limitate* ed *integrabili secondo Riemann* su $[a, b]$ e *converge uniformemente* a f, allora f è *integrabile secondo Riemann* su $[a, b]$ e vale che

$$\lim_n \int_a^b f_n(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 4 (del scambio del limite con l'integrale)
Omessa, dimostrazione disponibile sulla p. 115 del Pagani-Salsa. ■

#Osservazione

Osservazione (la convergenza uniforme è una condizione necessaria).

Si osserva che la *successione di funzioni* dev'essere *uniformemente* convergente a f. Dimostriamo questa necessità con un controesempio.

Sia $f_n : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$. Di questa funzione sappiamo, per l'archimedeità dei reali, che tende a $f_n(x) \to 0$. Per lo stesso motivo, *non* è *uniformemente* convergente, dato che l'*estremo superiore* della funzione è raggiunta in $x \to 0 \implies f_n(x) \to n$.

Adesso, se considero l'integrale della successione ho

$$\int_0^1 f_n(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{n}} (n - n^2 x)\ \mathrm{d}x = 0.5$$

però allo stesso tempo ho

$$\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x = 0$$

Quindi non è valido *"scambiare l'integrale col limite"*.

A4. Lemma del Dini (opzionale)

Lemma di Dini

Lemma di Dini: enunciato, esempi. (approfondimento personale perché ha il mio nome)

---

0. Voci correlate

- Definizione di Successione di Funzioni
- Convergenza Puntuale e Uniforme per Successioni di Funzioni
  Nota: informazione presa da Wikipedia e da un paper di un professore canadese su quest'ultimo argomento (prof. Joel Feldman 2016): approfondimento personale per il meme.

1. Lemma di Dini

#Lemma

Lemma (di Dini o di Dino).

Sia $(f_n)_n$ una *successione di funzioni continue* su X in $\mathbb{R}$. Sia X un *insieme compatto* (1) (più precisamente dovrebbe essere *uno spazio metrico compatto* ma sono dettagli).
Se valgono le seguenti:
i. La *successione* $(f_n)_n$ è *monotona*, ovvero vale una delle due:

$$f_{n+1}(x) \geq f_n(x) \vee f_n(x) \geq f_{n+1}(x), \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$$

ii. La successione converge *puntualmente* verso una funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.
iii. La funzione-limite f è *continua*.

Allora la successione $(f_n)_n$ *converge uniformemente* verso f (2).

DIMOSTRAZIONE del Lemma 1 (di Dini o di Dino)
Omessa, dato che: o sarebbe troppo lunga, o richiederebbe argomenti più avanzati sulla topologia (tipo "ricoprimenti" e roba strana del genere). In ogni caso, è possibile visionare una dimostrazione per assurdo in formato online (link). ■

FIGURA 1.1. (*Ulisse Dini*)

2. Controesempi

Mostriamo degli esempi (o meglio controesempi) per cui *tutte e tre* le condizioni elencate sono *essenziali* per il teorema.

#Esempio

Esempio (compattezza dell'insieme).

Si mostra che la successione di funzioni definita come

$$f_n : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = x^n$$

possiede le seguenti proprietà:
i. $(f_n)_n$ converge puntualmente su $f(x) = 0$
ii. $(f_n)_n$ sono continue, lo è pure 0.
iii. $(f_n)_n$ è decrescente

Tuttavia, non c'è la *convergenza uniforme*. Infatti

$$\sup_{x \in (0,1)} \lim_n |f_n(x) - f(x)| = 1$$

#Esempio

Esempio (la continuità della funzione-limite).

Sia $(f_n)_n$ una successione definita a tratti sul compatto $[0,1]$:

$$f_n(x) = \begin{cases} -nx+1, 0 \leq x \leq \dfrac{1}{n} \\ 0, \dfrac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}$$

Si dimostra che:
i. La successione tende puntualmente alla funzione a tratti

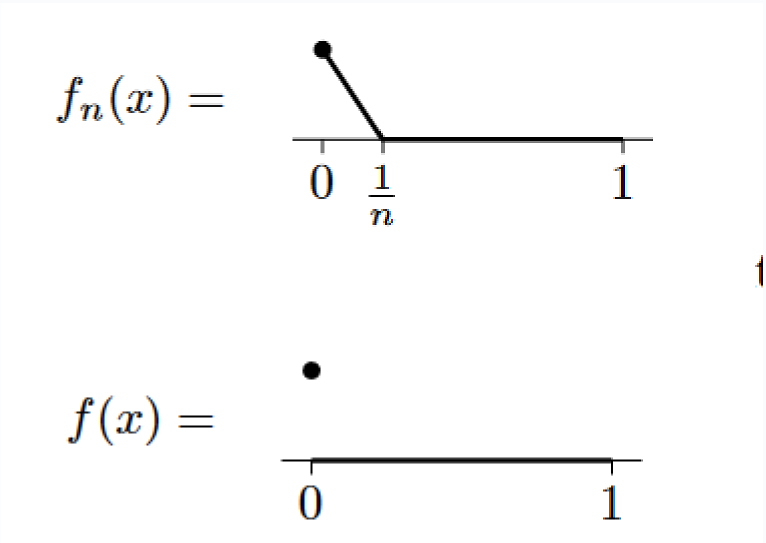
$$f_n(x) = \begin{cases} 1, x = 0 \\ 0, 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

ii. La successione è monotona (decrescente), lo si dimostra per induzione

Tuttavia, non c'è convergenza *uniforme*. Infatti

$$\sup_{x \in [0,1]} \lim_n |f_n(x) - f(x)| = 1$$

FIGURA 2.1. (*Esempio sulla continuità della funzione-limite*)



#Esempio

Esempio (la monotonia della funzione).

Sia $(f_n)_n$ una *successione di funzioni* definita a pezzi sul compatto $[0,1]$ come

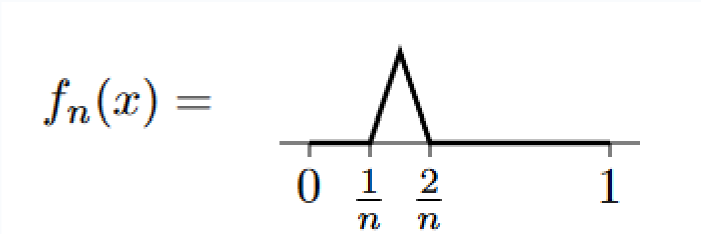
$$f_n(x) = \begin{cases} 0, 0 \leq x < \dfrac{1}{n} \\ nx - 1, \dfrac{1}{n} \leq x \leq \dfrac{2}{n} \\ -nx + 3, \dfrac{2}{n} < x \leq \dfrac{3}{n} \\ 0, \dfrac{3}{n} < x \leq 1 \end{cases}$$

Ovvero la funzione con un *"triangolo di altezza* 1 *che si sposta verso a sinistra"* (per una visione più chiara consultare la figura).
Si vede che:
i. La successione *converge puntualmente* verso alla funzione nulla 0 (per convincerci di questo basta pensare che il *"gap"* (o la base se volete) del triangolo si riduce)
ii. Sia la *successione delle funzioni* che la *funzione limite* sono *continue* sul dominio (per convincerci di questo verificare i limiti)

Tuttavia non c'è *convergenza uniforme*. Infatti il *massimo* della funzione $f_n(x)$ è sempre 1, disprovando il limite

$$\sup_{x\in[0,1]} \lim_n f_n(x) = 1 \neq 0$$

FIGURA 2.2. (*Esempio sulla monotonia della funzione*)



SEZIONE B. LE SERIE DI FUNZIONI

B1. Definizioni relative alle Serie di Funzioni

Definizioni Relative alle Serie di Funzioni

Trasposizione teorica della parte relativa alle serie numeriche sulle serie di funzioni. Definizione di serie di funzioni; definizione di convergenza di una serie.

---

0. Voci Correlate

- Definizione di Serie
- Carattere di una Serie
- Convergenza Puntuale e Uniforme per Successioni di Funzioni

1. Trasposizione teorica

#Osservazione

> Osservazione (possiamo trasporre tutto ciò che sappiamo sulle serie numeriche alle serie di funzioni).
>
> Avendo studiato bene le *successioni di funzioni*, possiamo *"esportare"* ciò che sappiamo sulle *serie numeriche* alle *serie di funzioni*, con definizioni opportune.

2. Definizioni Miste

#Definizione

> Definizione (ridotta di una serie di funzioni).
>
> Sia $(f_n)_n$ una *successioni di funzioni* del tipo $f_n : E \longrightarrow \mathbb{R}$ Per ogni punto nel dominio $x \in E$ definisco la *ridotta* n*-esima* della serie di funzioni come
>
> $$s_n(x) := f_1(x) + \ldots + f_n(x)$$

#Definizione

> Definizione (serie di funzioni).

La somma formale

$$\sum_{n \in \mathbb{N}}^{+\infty} f_n(x)$$

si dice *serie di funzioni*.

#Definizione

Definizione (convergenza di una serie).

Sia $\sum_n f_n(x)$ una serie di funzioni. Se la successione delle ridotte $(s_n)_n$ (*ricordiamoci che è una funzione!*) converge *uniformemente* (o *puntualmente*) ad una funzione $s(x)$ definita sul medesimo dominio E, allora si dice che la *serie* $\sum_n f_n(x)$ *converge uniformemente* (o *puntualmente*) su E con *somma* $s(x)$.

B2. Criteri sulle Serie di Funzioni

Criteri sulle Serie di Funzioni

Ulteriore trasposizione teorica dalle serie numeriche alle serie di funzioni. Novità: l'M-test di Weierstraß.

---

0. Voci Correlate

- Definizioni Relative alle Serie di Funzioni
- Teoremi Generali sulle Serie

1. Condizione Necessaria per la Convergenza di una Serie

#Teorema

Teorema (condizione necessaria per la convergenza di una serie di funzioni).

Sia $\sum_n f_n(x)$ una *serie di funzioni*. Sia questa *serie convergente uniformemente con somma* $s(x)$, allora il limite della successione delle *funzioni generali* $(f_n)_n$ è *convergente uniformemente* verso $O(x) = 0$.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 1 (condizione necessaria per la convergenza di una serie di funzioni)

Dimostrazione completamente analoga alla dimostrazione della *condizione necessaria per la convergenza di una serie numerica* (Teorema 1 (condizione necessaria per la convergenza di una serie)). Infatti, basta considerare

$$f_n(x) = s_n(x) - s_{n-1}(x) \implies \lim_n f_n(x) = 0$$

che è la tesi. ■

2. Criterio di Cauchy per la convergenza uniforme

#Teorema

Teorema (criterio di Cauchy per la convergenza uniforme di una serie di funzioni).

Sia $\sum_n f_n(x)$ una *serie di funzioni*.
Sono equivalenti:
$*)$ $\sum_n f_n(x)$ converge uniformemente su E con somma $s(x)$
se e solo se
$**)$

$$\begin{gathered}\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} : \forall n \in \mathbb{N}, \forall p > 0, \forall x \in E, \\ n \geq \bar{n} \implies |f_n(x) + f_{n+1}(x) + \ldots + f_{n+p}(x)| \leq \varepsilon\end{gathered}$$

#Dimostrazione

Omessa, dato che è completamente analoga alla sua controparte numerica (Teorema 4 (Criterio di Cauchy per le serie)). ■

#Osservazione

Osservazione (l'utilità di questo teorema).

Questo teorema ci è utile in quanto se siamo in *grado* di maggiorare ogni *termine generale* con un *termine numerico* di cui ha una serie che *converge*, allora possiamo utilizzare il *teorema del confronto* per dire che la serie è *convergente*.
Infatti, vedremo un teorema che sfrutta questa osservazione.

3. M-Test di Weierstraß

#Teorema

Teorema (M&M'S-test di Weierstraß).

Sia $\sum_n f_n(x)$ una *serie di funzioni*. Se esiste una *successione numerica* $(M_n)_n$, ovvero col termine generale $M_n \in \mathbb{R}$, tale che valga

$$|f_n(x)| \leq M_n, \forall x \in E$$

allora vale l'implicazione

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}^{+\infty} M_n < +\infty \implies \sum_{n\in\mathbb{N}}^{+\infty} f_n(x) \overset{\text{unif.}}{<} +\infty$$

(ovvero se la serie di $(M_n)_n$ è *convergente* allora la serie di $(f_n)_n$ è *uniformemente convergente*)

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 4 (M&M'S-test di Weierstraß)
Supponiamo un punto fissato $x \in E$. Allora si ha per la disuguaglianza triangolare

$$|f_n(x) + f_{n+1}(x) + \ldots + f_{n+p}(x)| \leq ||f_n(x)| + |f_{n+1}(x)| + \ldots + |f_{n+p}(x)||$$

per le ipotesi iniziali sappiamo che i termini generali $f_n(x)$ sono maggiorate dai termini generali M_n, dunque

$$|f_n(x) + f_{n+1}(x) + \ldots + f_{n+p}(x)| \leq |M_n + M_{n+1} + \ldots + M_{n+p}|$$

allora per il *criterio di Cauchy* (Teorema 2 (criterio di Cauchy per la convergenza uniforme di una serie di funzioni)) se $\sum_n f_n(x)$ è *uniformemente convergente* se e solo se $\sum_n M_n$ è *convergente*. ■

#Osservazione

Osservazione (questo teorema ci dice qualcosa di più).

Inoltre si nota che questo teorema ci dice che anche la *serie dei valori assoluti delle funzioni* $\sum_n |f_n(x)|$ è *uniformemente convergente*.

4. Criterio di Leibniz per le Serie di Funzioni

#Teorema

Teorema (criterio di Leibniz per la convergenza uniforme).

Sia $(f_n)_n$ una *serie di funzioni*, tali che $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in E$ valgano le seguenti:

- $f_n(x) > 0$ (*la positività della funzione*)
- $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ (*la monotonia della funzione*)
- $f_n(x)$ converge uniformemente verso 0
  Allora la serie

$$\sum_{n \in \mathbb{N}}^{+\infty} (-1)^n f_n(x)$$

converge uniformemente con una stima dell'errore data da

$$|s(x) - s_n(x)| \leq f_{n+1}(x)$$

#Dimostrazione
DIMOSTRAZIONE del Teorema 6 (criterio di Leibniz per la convergenza uniforme)
Questo teorema è la controparte numerica del *criterio di Leibniz per le serie numeriche a segno alternato* (Teorema 6 (criterio di Leibniz per le serie a termini di segno alternato)).
■

B3. Teoremi di Passaggio del Limite per le Serie

Teoremi di Passaggio del Limite per le Serie di Funzioni

Teoremi di passaggio al limite per le serie di funzioni: derivata di una serie, integrale di una serie e una serie di funzioni continue.

---

0. Voci correlate

- Teoremi di Passaggio del Limite per le Successioni di Funzioni
- Definizioni Relative alle Serie di Funzioni

1. Teoremi di Passaggio del Limite per le Serie Funzionali

#Osservazione

> Osservazione (possiamo trasporre altre conoscenze).
>
> Conoscendo i *teoremi di passaggio del limite per le successioni di funzioni* (Teoremi di Passaggio del Limite per le Successioni di Funzioni), possiamo

applicare queste conoscenze sulle *serie di funzioni*.

#Teorema

Teorema (derivata di una serie).

Sia $(f_n)_n$ una *successione di funzioni* con il termine generale $f_n : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *derivabile sul dominio*. Se valgono che:
i. La serie delle derivate $\sum_n f'_n(x)$ è *uniformemente convergente nel dominio* con *somma* $G(t)$
ii. La serie delle funzioni generali $\sum_n f_n(x)$ è *convergente almeno in un punto* $t_0 \in (a, b)$,
allora anche la serie $\sum_n f_n(x)$ è *uniformemente convergente* in (a, b), detta $F(t)$ la sua somma, risulta che F è *derivabile* e si ha $F'(t) = G(t)$. In altre parole, possiamo effettuare lo *"scambio"*

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x)$$

#Teorema

Teorema (l'integrale di una serie).

Sia data $(f_n)_n$ una *serie di funzioni* tali che il termine generale f_n sia *limitata* e *integrabile in* $[a, b]$.
Se $\sum_n f_n(t)$ è *convergente uniformemente* in $[a, b]$ con somma $F(t)$, allora vale che F è *integrabile secondo Riemann* in $[a, b]$ e risulta

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)\ \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\ \mathrm{d}t$$

#Teorema

Teorema (la continuità di una serie).

Sia $(f_n)_n$ una *serie di funzioni continue* sull'intervallo I. Se vale che:
i. $\sum_n f_n(t)$ converge uniformemente con somma $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$
Allora f è *continua su* I.

SEZIONE C. LE SERIE DI POTENZE

C1. Definizione di Serie di Potenze

Definizione di Serie di Potenze

Osservazione preliminare. Definizione di serie di potenze a coefficienti reali con punto iniziale x_0 (o concentrata in x_0). Esempi di serie di potenze e la loro convergenza al variare di $x \in E$.

---

0. Voci correlate

- Definizioni Relative alle Serie di Funzioni
- Criteri sulle Serie di Funzioni

1. Definizione di Serie di Potenze

#Osservazione

> Osservazione (osservazione preliminare).
>
> Poniamoci il seguente problema: dato che le *funzioni* possono rappresentare delle *somme per le serie di funzioni*, possiamo approssimare le *funzioni* con delle *funzioni più gestibili*? Come ad esempio con potenze? In questa parte sulle *serie di potenze* si parlerà di questo argomento.

#Definizione

> Definizione (serie di potenze a coefficienti reali con punto iniziale in x_0).
>
> Sia $(a_n)_n$ una *successione reale*. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$.
> Posto per ogni $n \in \mathbb{N}$ come $f_n := a_n(x-x_0)^n$, si definisce la *serie di funzioni*
>
> $$\sum_{n\in\mathbb{N}}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$$
>
> e questa si dice *"serie di potenze a coefficienti reali con punto iniziale x_0"*.

#Osservazione

Osservazione (sulla convergenza della serie).

Si osserva che per $x = x_0$, la serie è *sempre* convergente, dato che $x - x_0$ si anulla. Inoltre, di solito si pone $x_0 = 0$.

2. Esempi di Serie di Potenze

#Esempio

Esempio (serie di potenze globalmente convergente).

Sia $x_0 = 0$ e $a_n = \frac{1}{n!}$. Allora si ha la *serie di potenze*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Questa serie di potenze converge per $x = 0$ e anche per $x \in \mathbb{R}$ per il *criterio del rapporto*.

#Esempio

Esempio (serie di potenze convergente su un intervallo non degenere).

Prendiamo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

Questa è esattamente una *serie geometrica* (Esempio 9 (Serie geometrica generalizzata)), pertanto è convergente per $|x| < 1$ e divergente per $|x| \geq 1$. Quindi la serie è convergente per l'intorno di 0 posto come $(-1, 1)$.

#Esempio

Esempio (serie di potenze convergente solo sul centro).

Prendiamo adesso

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n! x^n$$

Questa serie è convergente *se e solo se* $x = x_0 = 0$, per il criterio del rapporto.

#Osservazione

> Osservazione (gli intervalli di convergenza sono degli intorni del centro).
>
> Notiamo che l'*insieme di convergenza* sono sempre un *intorno* di x_0. In seguito parleremo di *raggio di convergenza* (Insieme e Raggio di Convergenza per una Serie di Potenze).

C2. Insieme e Raggio di Convergenza

Insieme e Raggio di Convergenza per una Serie di Potenze

Lemma preliminare (di Abel). Definizione di insieme e raggio di convergenza per una serie di potenze. Proprietà del raggio di convergenza, teorema di struttura dell'insieme di convergenza.

---

0. Voci Correlate

- Definizioni Relative alle Serie di Funzioni
- Definizione di Serie di Potenze
- Criteri sulle Serie di Funzioni

1. Lemma di Abel

#Lemma

> Lemma (di Abel).
>
> Sia $S(x, x_0) = \sum_n a_n(x-x_0)^n$ una *serie di potenze*. Se questa serie converge in $\bar{x}$, con $\bar{x} \neq x_0$, allora esso converge assolutamente per ogni $x \in \mathbb{R}$ tale che
> $|x-x_0| < |\bar{x}-x_0|$.
> Ovvero,
>
> $$S(\bar{x} \neq x_0, x_0) < +\infty \implies \forall x \in (x_0-\bar{x}, x_0+\bar{x}), S(x, x_0) < +\infty$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Lemma 1 (di Abel)

Consideriamo fissato un qualsiasi $x \in \mathbb{R} \cap (x_0-\bar{x}, x_0+\bar{x})$. Allora vale che

$$|a_n(x-x_0)^n| = |a_n(\bar{x}-x_0)^n| \cdot \underbrace{\left(\frac{|x-x_0|}{|\bar{x}-x_0|}\right)^n}_{<1}$$

Poiché la serie $\sum_n a_n(\bar{x}-x_0)$ converge, è *necessario* che il limite dei termini generali sia convergente a 0 (Teorema 1 (condizione necessaria per la convergenza di una serie)); ovvero

$$\lim_n |a_n(\bar{x}-x_0)|^n = 0$$

Allora per la *definizione* $\varepsilon - \bar{n}$ del limite (Definizione 3 (limite di successione)), esiste un $M > 0$ tale che

$$|a_n(\bar{x}-x_0)| \leq M$$

(ovvero ogni termine generale della *serie numerica* è limitata in $\bar{x}$).
Inoltre, definendo

$$q = \frac{|x-x_0|}{|\bar{x}-x_0|} < 1, \forall x$$

Allora posso metterli assieme, ottenendo la disuguaglianza

$$|a_n(x-x_0)^n| \leq M \cdot q^n \implies \sum_{n\in\mathbb{N}}^{+\infty} |a_n(x-x_0)^n| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}}^{+\infty} M \cdot q^n$$

Allora, sapendo che la serie

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}^{+\infty} M \cdot q^n$$

converge (si può usare il *criterio del rapporto* (Teorema 3 (criterio del rapporto col limite))) a $q \in (0,1)$. Allora, per il *teorema del confronto*, la serie di funzioni è *convergente* (senza dover essere necessariamente *uniforme*). ■

#Corollario

> Corollario (ulteriori condizioni per la convergenza uniforme).
>
> Sia una *serie di potenze* $\sum_n a_n(x-x_0)^n$ convergente per $\bar{x} \neq x_0$. Per ogni $0 < r < |\bar{x}-x_0|$ la *serie di potenze* è *uniformemente convergente* su *ogni compatto* $[x_0 - r, x_0 + r]$.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Corollario 2 (ulteriori condizioni per la convergenza uniforme)

Si può dimostrare con l'*M-test di Weierstraß* (Teorema 4 (M&M'S-test di Weierstraß)).
Per una dimostrazione completa vedere p. 142 (proposizione 2.11) del Pagani-Salsa. ■

2. Raggio e Insieme di Convergenza

#Definizione

> Definizione (insieme di convergenza per una serie di potenze).
>
> Sia $\sum_n a_n(x-x_0)^n$ una *serie di potenze*.
> Poniamo l'insieme
>
> $$I := \left\{x \in \mathbb{R} \middle| \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n < +\infty\right\}$$
>
> come il suo *insieme di convergenza*. Notiamo che $I \neq \emptyset$, qualunque *serie di potenze* abbiamo.

#Definizione

> Definizione (raggio di convergenza per una serie di potenze).
>
> Sia $\sum_n a_n(x-x_0)^n$ una *serie di potenze* col suo raggio di convergenza I.
> Allora poniamo il numero della *retta reale estesa* (ovvero $\mathcal{R} \in \tilde{\mathbb{R}}$) come
>
> $$\mathcal{R} := \sup\{|x-x_0|, x \in I\}$$
>
> il suo *raggio di convergenza*.
> Si nota che si ha *sempre* $0 \leq \mathcal{R} \leq +\infty$.

3. Struttura del Raggio e dell'Insieme di Convergenza

#Teorema

> Teorema (proprietà del raggio di convergenza).
>
> Il raggio di convergenza $\mathcal{R}$ per una serie di potenze $\sum_n a_n(x-x_0)^n$ con intervallo di convergenza I soddisfa le seguenti:
> i. Se un $x \in \mathbb{R}$ è tale che $|x-x_0| < \mathcal{R}$, allora $\sum_n a_n(x-x_0)^n$ è *assolutamente convergente*.
> ii. Se un $x \in \mathbb{R}$ tale che $|x-x_0| > \mathcal{R}$, allora $\sum_n a_n(x-x_0)^n$ non è *convergente*.

> Viceversa se esiste un $\mathcal{R}' \in [0, +\infty]$ che verifica le *i.*, *ii.*, allora $\mathcal{R}' = \mathcal{R}$ (ovvero è il raggio di convergenza).

DIMOSTRAZIONE (parziale) del Teorema 5 (proprietà del raggio di convergenza).
Dimostriamo solo il punto i. del teorema.
Sapendo che per definizione $\mathcal{R}$ è un *estremo superiore* di un insieme, possiamo usare le *proprietà caratterizzanti* di un $\sup$ (Teorema 16 (le proprietà dell'estremo superiore)). In particolare, usiamo il seguente punto:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{x} \in I : |\bar{x} - x_0| + \varepsilon > \mathcal{R}$$

Adesso scelgo $\varepsilon = \mathcal{R} - |x - x_0| > 0$; ho quindi

$$\begin{aligned} &\mathcal{R} < |\bar{x} - x_0| + \mathcal{R} - |x - x_0| \\ \implies &|x - x_0| < |\bar{x} - x_0| \end{aligned}$$

e per il *lemma di Abel* ho l'assoluta convergenza in x.
Per dimostrare il punto ii. si procede invece *per assurdo*. ■

#Teorema

> Teorema (struttura dell'insieme di convergenza).
>
> Sia $\sum_n a_n (x - x_0)^n$ una serie di potenze con insieme di convergenza I. Questo insieme di convergenza è un *insieme connesso in* $\mathbb{R}$ ed è:
>
> - o il singoletto x_0 (in caso si ha un insieme degenere)
> - o un intervallo centrato in x_0 qualsiasi

DIMOSTRAZIONE del Teorema 6 (struttura dell'insieme di convergenza)
Sia $\mathcal{R} = +\infty$; allora $I = \mathbb{R}$.
Se invece $\mathcal{R} > 0$, allora ho l'intervallo

$$(x_0 - \mathcal{R}, x_0 + \mathcal{R}) \subseteq I \subseteq [x_0 - \mathcal{R}, x_0 + \mathcal{R}]$$

Se invece $\mathcal{R} = 0$, allora ho $I = \{x_0\}$. ■

C3. Funzione Somma

Funzione Somma di una Serie di Potenze

Definizione di funzione somma di una serie di potenze, proprietà della funzione somma.

0. Voci correlate

- Insieme e Raggio di Convergenza per una Serie di Potenze
- Definizione di Serie di Potenze
- Teoremi di Passaggio del Limite per le Serie di Funzioni

1. Definizione di Funzione Somma

#Definizione

Definizione (funzione somma di una serie di potenze).

Sia $\sum_n a_n(x-x_0)^n$ una serie di potenze con insieme di convergenza $I_\mathcal{R}$.
Per ogni $x \in I_\mathcal{R}$ definiamo la *funzione somma* come

$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$$

ovvero una funzione del tipo $f: I_\mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

2. Proprietà della Funzione Somma

#Teorema

Teorema (proprietà della funzione somma).

Sia $f(x)$ la *funzione somma* per la *serie di potenze* $\sum_n a_n(x-x_0)^n$. Allora valgono le seguenti.
i. (*teorema di integrazione termine a termine*) f è *continua* in $I_\mathcal{R}$ e vale che

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t &= \int_{x_0}^{x} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(t-x_0)^n\ \mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{x_0}^{x} a_n(t-x_0)^n\ \mathrm{d}t = \boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}}\end{aligned}$$

ii. (*teorema di derivazione termine a termine*) f è *derivabile* in $I_\mathcal{R}$ e vale che

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x)] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n\right] \\
= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[a_n(x-x_0)^n] = \boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}}
\end{aligned}
$$

#Corollario

Corollario (la funzione somma è infinitamente derivabile).

La funzione somma f è *derivabile infinitamente volte* in $I_{\mathcal{R}}$ e $\forall k \in \mathbb{Z}$ vale che

$$
\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} f(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} (n)(n-1)\ldots(n-k+1)(x-x_0)^{n-k} \cdot a_n
$$

e la serie-derivata ha *raggio di convergenza* $\mathcal{R}$.

SEZIONE D. LE SERIE DI TAYLOR

D1. Definizione di Serie di Taylor

Definizione di Serie di Taylor

Osservazione preliminare per le serie di Taylor: le serie di potenze possono diventare i coefficienti di Taylor. Definizione di serie di Taylor

---

0. Voci correlate

- Formula di Taylor
- Definizione di Serie di Potenze
- Funzione Somma di una Serie di Potenze

1. Osservazione preliminare

#Osservazione

Osservazione (le serie di potenze sono riconducibili alla formula di Taylor).

Consideriamo una *serie di potenze* (1) $\sum_n a_n(x-x_0)^n$, col *raggio di convergenza* $\mathcal{R} \in (0, +\infty]$ (2) e sia f la *funzione somma* (3).
Per i *teoremi enunciati su* f (4), sappiamo che $f \in \mathcal{C}^\infty$ (5) e si ha

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} f(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} (n)(n-1)\dots(n-k+1)(x-x_0)^{n-k} \cdot a_n$$

Adesso applichiamo questa formula per $x = x_0$; si ha

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} f(x_0) = k! a_k$$

(si nota che stiamo usando la convenzione $0^0 = 1$)
Si ricava il *termine generale* k-esimo della successione $(a_n)_n$ come

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

che è proprio il *termine* k-esimo del *polinomio di Taylor* (6).
Dunque, possiamo scrivere per $x \in I_\mathcal{R}$,

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(x-x_0)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

2. Definizione di Serie di Taylor

#Definizione

Definizione (serie di Taylor di una funzione avente un punto iniziale).

Sia $f \in \mathcal{C}^\infty$ su $I=(x_0-k, x_0+k)$ con $k>0$.
La *serie di funzioni* (in particolare la *serie di potenze*)

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

si dice *"serie di Taylor di f avente punto iniziale x_0"*.

#Osservazione

Osservazione (relazione tra funzione e la sua serie di Taylor).

Per una funzione di classe infinito abbiamo definito una sua *"serie di Taylor"*.
Possiamo trovare un legame tra gli due oggetti matematici? Vedremo questo con la nozione di *sviluppabilità in serie di Taylor* (Sviluppabilità di una Funzione in Serie di Taylor).

D2. Sviluppabilità in Taylor

Sviluppabilità di una Funzione in Serie di Taylor

Definizione di serie sviluppabile in serie di Taylor centrata in x_0. Teorema di convergenza della serie di Taylor. Definizione di funzione analitica su un intervallo.

---

0. Voci Correlate

- Definizione di Serie di Taylor
- Definizione di Serie di Potenze
- Formula di Taylor

1. Definizione di Sviluppabilità in Taylor

#Definizione

Definizione (funzione sviluppabile in serie di Taylor centrata in un punto).

Una funzione $f \in \mathcal{C}^\infty$ si dice *"sviluppabile in serie di Taylor centrata in x_0"* se esiste un'*ampiezza* (numero) $h > 0$ tale che $\forall x \in (x_0 - h, x_0 + h)$, valga

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

2. Definizione di Funzione Analitica

#Osservazione

Osservazione (ci sono funzioni non sviluppabili in Taylor).

Si chiede se *vale sempre* la seguente implicazione:

$$f \in \mathcal{C}^\infty \implies f \text{ sviluppabile in Taylor}$$

la risposta è *no*. Infatti, vediamo il seguente controesempio.

Definiamo la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$$

Notiamo che f è *sempre continua e derivabile*. Infatti,

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} R_n(x)e^{-\frac{1}{x^2}}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$$

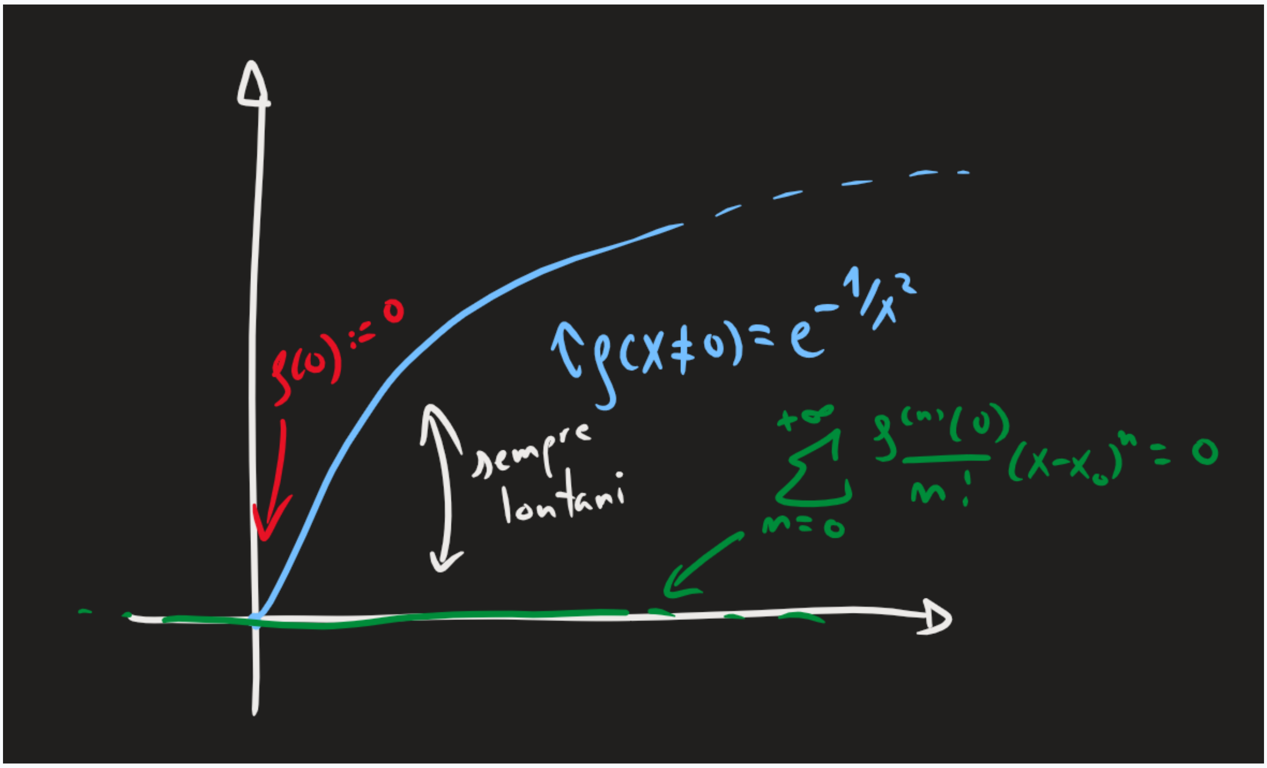
dove R_n è una qualsiasi *funzione razionale*, ottenuta applicando la *regola della catena per le derivate*.
Adesso prendiamo la sua *serie di Taylor* centrata in $x_0 = 0$. (in particolare si ha una serie di *Taylor-MacLaurin*); si ha dunque

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}x^n = 0 + \ldots + 0 = 0$$

Ma allora per un qualsiasi $h > 0$, si avrà sempre che la serie di Taylor è la funzione nulla $f(x) = 0$, che *non* è la funzione originaria (graficamente si ha la *figura 2.1.*).

> Conclusione: solo una parte ristretta di funzioni $\mathcal{C}^\infty$ sono sviluppabili in Taylor; chiameremo queste funzioni *"analitiche"*.

FIGURA 2.1. (*Funzione non sviluppabile in Taylor*)



#Definizione

Definizione (funzione analitica su un intervallo).

Si dice che $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ è *analitica* se vale che per $\forall x_0\in(a,b)$, f è *sviluppabile in serie di Taylor centrato in* x_0.
Vengono indicate come

$$\mathcal{H}(]a,b[)$$

#Osservazione

Osservazione (conclusione dell'osservazione precedente).

Concludiamo l'osservazione precedente col seguente formalismo.

$$\boxed{\mathcal{H}(]a,b[)\subset\mathcal{C}^\infty(]a,b[)}$$

3. Teorema di Convergenza della Serie di Taylor

#Osservazione

Osservazione (preambolo).

Adesso vediamo una *condizione sufficiente* per la *sviluppabilità in Serie di Taylor* di una funzione.

#Teorema

Teorema (di convergenza della serie di Taylor).

Sia $f : (x_0 - h, x_0 + h) \longrightarrow \mathbb{R}$, con $f \in \mathcal{C}^\infty$, e supponiamo che esista un $M > 0$ tale che $\forall n$ valga

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \leq M \cdot \frac{n!}{h^n}$$

allora si ha la *sviluppabilità in serie di Taylor* di f in x_0. Ovvero,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

#Corollario

Corollario (ulteriori condizioni per la convergenza uniforme).

Per avere anche la *convergenza uniforme*, bisogna prendere un $0 < r < h$ e un compatto $[x_0 - r, x_0 + r]$.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 6 (di convergenza della serie di Taylor)
Innanzitutto osserviamo che per l'ipotesi iniziale abbiamo, per un qualsiasi x nel dominio

$$\left|f^{(n+1)}(x)\right| \leq M \cdot \frac{(n+1)!}{h^{n+1}}$$

Ora scriviamo lo scarto tra la somma e il resto $n+1$-esimo della serie; si ha che $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$|f(x) - s_{n+1}(x)| = |f(x) - p_{n,x_0}(x)|$$

dove $p_{n,x_0}(x)$ è il *polinomio di Taylor* di ordine n-esimo centrato in x_0 (Definizione 2.1. (polinomio di Taylor)). Per la *formula di Taylor col resto di Lagrange* (Teorema 2.2. (di Taylor col resto di Lagrange)), esiste un $\xi \in (x_0, x)$ (oppure (x, x_0)) tale che

$$
\begin{aligned}
|f(x) - p_{n,x_0}(x)| &= \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \right| \\
&\leq M \frac{(n+1)!}{h^{n+1}} \cdot \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} = M \left(\frac{|x-x_0|}{h} \right)^{n+1}
\end{aligned}
$$

Adesso osserviamo che il termine

$$
q(x) = \frac{|x-x_0|}{h} \in (0,1)
$$

(ovvero è limitata in $(0;1)$); di conseguenza si ha il limite

$$
\lim_n |f(x) - p_{n,x_0}(x)| \leq \lim_n M \cdot q(x)^n = 0
$$

di conseguenza, vale che anche il limite dell'errore è nullo. Ovvero,

$$
\lim_n |f(x) - s_{n+1}(x)| = 0
$$

il ché dimostra che la serie è sviluppabile su Taylor, dal momento che l'errore diventa arbitrariamente piccolo. ■

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Corollario 7 (ulteriori condizioni per la convergenza uniforme)
In questo caso basta osservare che

$$
x \in [x_0 - r, x_0 + r] \supset (x_0 - h, x_0 + h)
$$

quindi qualsiasi punto x prendo, la sua distanza da r sarà sempre più piccola della sua distanza da h. Ovvero, $|x-x_0| < h < r$
Ma allora se prendo l'estremo superiore dello scarto ho

$$
\sup_x |f(x) - s_{n+1}(x)| \leq M \left(\frac{r}{h} \right)^{n+1}
$$

ricordandoci che l'ultimo termine è limitato da

$$
0 < \frac{r}{h} < 1
$$

ho il limite dell'estremo superiore

$$
\lim_n \left(\sup_{0<|x-x_0|<r} |f(x) - s_{n+1}(x)| \right) = 0
$$

il ché prova la convergenza uniforme (Teorema 5 (di caratterizzazione della convergenza uniforme)). ■

#Osservazione

Osservazione (condizione più generale ma restrittiva).

Osservare che, sebbene ho una condizione *molto "particolare"*, abbiamo comunque una condizione poco restrittiva. Infatti, ho il limite

$$\lim_n \frac{n!}{h^n} = +\infty$$

Quindi per controllare la *sviluppabilità di una serie in Taylor*, bisogna che una funzione non *"esploda in una maniera più incontrollata del limite limitante"*.

Infatti, spesso si verifica che esiste un $K > 0$ tale che

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in (x_0 - h, x_0 + h), \left| f^{(n)}(x) \right| \leq K$$

che è *sufficiente* per la *sviluppabilità di una serie in Taylor*; se il limite è finito, allora a maggior ragione è meno di infinito.

D3. Esempi di Sviluppi in Taylor-MacLaurin

Esempi di Serie di Taylor-MacLaurin

Esempi di sviluppi di funzioni in Serie di Taylor. Funzione esponenziale $\exp$, *trigonometriche* $\sin$, $\cos$, $\sinh$, $\cosh$.

---

0. Voci correlate

- Definizione di Serie di Taylor
- Sviluppabilità di una Funzione in Serie di Taylor

1. Funzione esponenziale

#Teorema

Teorema (sviluppo di Taylor-MacLaurin per la funzione esponenziale).

Sia $f : (-h, h) \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = e^x$. Risulta che f è *sviluppabile in serie di Taylor-MacLaurin* con $h > 0$ qualsiasi e si ha

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

DIMOSTRAZIONE del Teorema 1 (sviluppo di Taylor-MacLaurin per la funzione esponenziale)
Verifichiamo che e^x è *sviluppabile in serie di Taylor*; basta prendere $K = e^h$ ed effettuare la seguente maggiorazione

$$\left|f^{(n)}(x)\right| = |e^x| \leq K$$

quindi per il *teorema di convergenza* (Teorema 6 (di convergenza della serie di Taylor)) e^x è *sviluppabile in serie di Taylor* per un h qualsiasi.
Poiché $f^{(n)}(0)$ rimane uguale a $e^0 = 1$, ho

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

che è la tesi. ■

2. Funzioni Trigonometriche

#Teorema

Teorema (sviluppo di Taylor-MacLaurin per le funzioni trigonometriche).

Siano $f(x) = \sin x$ e $g(x) = \cos x$. Allora risulta che entrambi sono *sviluppabili in serie di Taylor* con $x_0 = 0$ e con $h > 0$ qualsiasi. Risulta che

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

e

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 2 (sviluppo di Taylor-MacLaurin per le funzioni trigonometriche)
Si dimostra solo per $\sin x$. Si nota preliminarmente che le derivate oscillano per un numero finito per valore, in particolare

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} f^{(4n+1)}(x) = \cos x \to \cos 0 = 1 \\ f^{(4n+2)}(x) = -\sin x \to -\sin 0 = 0 \\ f^{(4n+3)}(x) = -\cos x \to -\cos 0 = -1 \\ f^{(4n+0)}(x) = \sin x \to \sin 0 = 0 \end{cases}$$

Allora notiamo che sono sempre limitate per $K = 1$ (provando la sviluppabilità in serie di Taylor) e in particolare si ha che i termini della serie si annullano per numeri dispari. Quindi si ha

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

il ragionamento è analogo per $\cos x$. ■

#Teorema

> Teorema (sviluppo di Taylor-MacLaurin per le funzioni trigonometriche iperboliche).
>
> Siano $\sinh x$ e $\cosh x$ le *funzioni trigonometriche iperboliche*. Si ha che sono *sviluppabili in serie di Taylor* in x_0 con $h > 0$ qualsiasi e risultano le somme
>
> $$\sinh x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$
>
> e
>
> $$\cosh x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 3 (sviluppo di Taylor-MacLaurin per le funzioni trigonometriche iperboliche)

Basta tenere conto che le funzioni trigonometriche iperboliche $\sinh$ e $\cosh$ vengono definite come

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

e

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

e usando lo *sviluppo di serie in Taylor* per la funzione $\exp$ otteniamo la tesi. ■

Capitolo 4. Struttura di $\mathbb{R}^N$

Abstract del Capitolo 4

Il capitolo *"Struttura di $\mathbb{R}^N$"* mira a fornire le basi sufficienti per studiare il calcolo in più variabili; si comincia dalla metrica e dalla topologia, dopodiché si passa alle funzioni in più variabili con le sue proprietà, e infine andiamo a vedere la struttura lineare di quest'insieme.

SEZIONE A. METRICA DI $\mathbb{R}^N$

A1. Definizione di $\mathbb{R}^N$

Definizione di RN

Definizione di insieme $\mathbb{R}^N$.

---

1. Definizione di $\mathbb{R}^N$

#Definizione

Definizione (Insieme R^N).

Sia $N \in \mathbb{N}$, definisco $\mathbb{R}^N$ come l'insieme delle N-uple di coefficienti reali. Ovvero,

$$\mathbb{R}^N := \underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{N \text{ volte}}$$

Inoltre denoto un elemento di $\mathbb{R}^N$ come un vettore $\underline{x} \in \mathbb{R}^N$.

A2. Definizione di Spazio Metrico

Definizione di Spazio Metrico

Definizione di distanza su R^N, proprietà di distanza. Definizione di spazio metrico euclideo. Definizione generalizzata di spazio metrico.

---

0. Voci correlate

- Definizione di RN
- Intorni

1. Distanza euclidea su R^N

#Definizione

Definizione (Distanza Euclidea su più variabili).

Siano $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^N$, con $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_N)$ e $\underline{y} = (y_1, \ldots, y_N)$. Allora definisco la *distanza euclidea* tra questi due punti come la funzione

$$d(\underline{x}, \underline{y}) := \sqrt{\sum_{n=0}^{N} (x_n - y_n)^2}$$

#Proposizione

Proposizione (le proprietà della distanza euclidea).

La distanza euclidea gode delle medesime proprietà soddisfatte con la distanza euclidea su $\mathbb{R}$ (1, 2, 3), ovvero le seguenti.

i. *(riflessività)*

$$d(\underline{x}, \underline{y}) = 0 \iff \underline{x} = \underline{y}$$

ii. *(simmetria)*

$$d(\underline{x}, \underline{y}) = d(\underline{y}, \underline{x})$$

iii. *(disuguaglianza triangolare)*

$$d(\underline{x}, \underline{y}) \leq d(\underline{x}, \underline{z}) + d(\underline{z}, \underline{y})$$

2. Spazio Metrico

#Definizione

Definizione (spazio metrico euclideo).

La coppia $(\mathbb{R}^N, d)$ si dice *"spazio metrico euclideo"*.

#Definizione

Definizione (distanza/metrica, spazio metrico).

Sia S un insieme. Un'applicazione $d : S \times S \longrightarrow \mathbb{R}$ che verifica le tre proprietà della distanza euclidea (1) si dice *distanza* (o *metrica*) in S.

In particolare la coppia (S, d) si dice *spazio metrico*.

3. Esempi di spazi metrici

#Esempio

Esempio (spazio metrico con $+\infty > p \geq 1$).

Sia $p \geq 1$ un numero finito. Sia $\mathbb{R}^N$ l'insieme degli elementi.
Allora la funzione

$$d_p(\underline{x}, \underline{y}) = \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

è una *distanza*.

#Esempio

Esempio (spazio metrico con $p = +\infty$).

Sia $p = +\infty$. Allora la funzione

$$d_\infty(\underline{x}, \underline{y}) = \max_{i \in \{1, \ldots, n\}} |x_i - y_i|$$

è una *distanza*.

A3. Topologia di $\mathbb{R}^N$

Topologia in RN

Trasposizione teorica delle definizioni della topologia della retta reale su R^N.

---

0. Voci correlate

- Definizione di RN
- Definizione di Spazio Metrico
- Intorni
- Punti interni, esterni e di frontiera
- Insiemi aperti e chiusi
- Punti di aderenza e di accumulazione

1. Preambolo

#Osservazione

Osservazione (preambolo).

Conoscendo le *definizioni della topologia della retta reale*, possiamo espandere queste definizioni in $\mathbb{R}^N$. Parleremo quindi di *sfere aperte e chiuse*, *intorni*, *insiemi chiusi e chiusure di insiemi*, *punti interni*, *interni degli insiemi e insiemi aperti*, *punti di frontiera*, *frontiera di insiemi*, *insiemi limitati*.

2. Sfere aperte e chiuse di punti, intorni di punti

#Definizione

Definizione (sfera aperta e chiusa).

Sia $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^N$, sia $r > 0$ un numero qualunque.
Si dice *"sfera aperta centrata* in $\underline{x}_0$ *con raggio* r*"* l'insieme

$$B(\underline{x}_0, r) = \left\{\underline{x} \in \mathbb{R}^N : d(\underline{x}, \underline{x}_0) < r\right\}$$

oppure *"sfera chiusa centrata in* $\underline{x}_0$ *con raggio* r*"* l'insieme

$$B[\underline{x}_0, r] = \left\{\underline{x} \in \mathbb{R}^N : d(\underline{x}, \underline{x}_0) \leq r\right\}$$

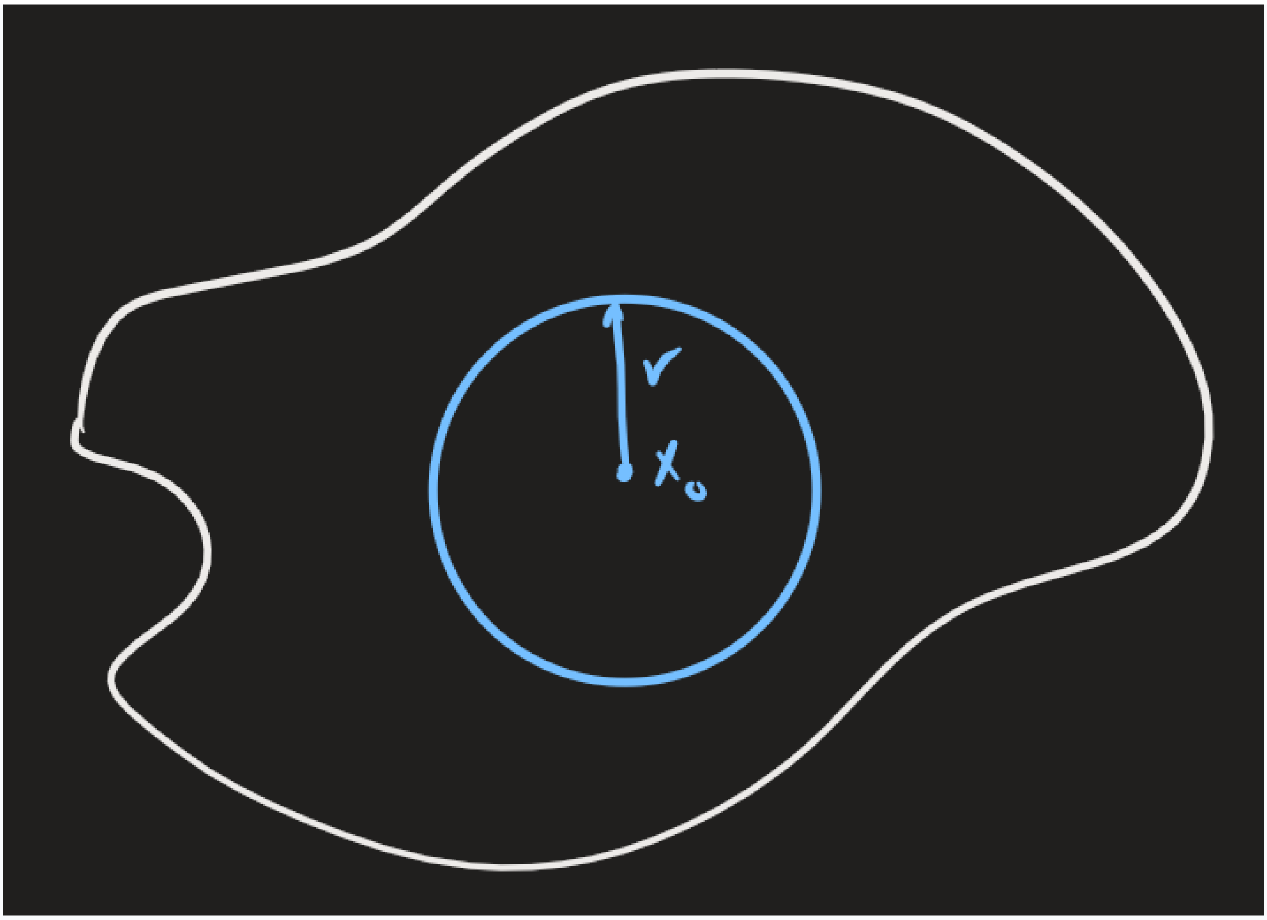
#Definizione

Definizione (intorno di un punto-vettore).

Si dice *"intorno di* $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^N$*"* un insieme $\mathcal{U}(\underline{x}_0) \subseteq \mathbb{R}^N$ tale che contenga una *sfera qualunque* di $\underline{x}_0$. Ovvero,

$$\mathcal{U}(\underline{x}_0) \supseteq B(\underline{x}_0, r)$$

FIGURA 2.1. (*Illustrazione grafica di un intorno*)



3. Punti di accumulazione e chiusura di un insieme

#Definizione

Definizione (punto di accumulazione e derivato di un insieme).

Sia $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^N$ e sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$.
Il punto-vettore $\underline{x}_0$ si dice *"punto di accumulazione per E"* se vale che in *ogni intorno di $\underline{x}_0$ esiste un punto di E che non sia x_0*. Ovvero,

$$\forall \mathcal{U}(\underline{x}_0), \exists \underline{\tilde{x}} \in \Big(\mathcal{U}(\underline{x}_0) \cap E\Big) : \underline{\tilde{x}} \neq \underline{x}_0$$

Altrimenti, se vale la negazione allora si dice che è un *punto isolato*.

L'insieme degli punti di accumulazione per E si dice *"derivato di E"* e la si denota con $\mathcal{D}E$

#Definizione

Definizione (chiusura di un insieme e insieme chiuso).

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$. Si dice *la chiusura di E* l'insieme definita come

$$\overline{E} := E \cap \mathcal{D}E$$

L'insieme E si dice *chiuso* se vale che $E = \overline{E}$.

5. Punto interno, interno e insieme aperto

#Definizione

Definizione (punto interno per un insieme).

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$. Un punto $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^N$ si dice *"interno a E"* se vale che E è *intorno* di $\underline{x}_0$.
Ovvero, prendendo un intorno qualsiasi $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\underline{x}_0)$ si ha che $\mathcal{U} \cap E \neq \emptyset$.

#Definizione

Definizione (interno di un insieme e insieme aperto).

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$. Si dice *"interno di E"* come l'insieme dei *punti interni* ad E. Ovvero,

$$\overset{\circ}{E} := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^N : \underline{x} \text{ interno a } E\}$$

In particolare un insieme si dice aperto se vale che $E = \overset{\circ}{E}$.

6. Punti di frontiera e frontiera

#Definizione

Definizione (punti di frontiera).

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$.
Un punto $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^N$ si dice *"punto di frontiera per E"* se vale che $\underline{x}_0$ non è *né interno né esterno ad* E. Ovvero,

$$\forall \mathcal{U} = \mathcal{U}(\underline{x}_0), \begin{cases} \exists \underline{x} \in (\mathcal{U} \cap E) \\ \exists \underline{x}' \in (\mathcal{U} \cap \mathcal{C}_{\mathbb{R}^N} E) \end{cases}$$

#Definizione

Definizione (frontiera di un insieme).

Si dice *"frontiera di un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^N$"* come l'insieme dei punti di frontiera per E.
Viene denotata con ∂E.

#Esempio

Esempio (esempio di frontiera di un insieme).

Sia l'insieme E definita come segue:

$$E = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 : 4 \leq x_1^2 + x_2^2 < 9\}$$

La frontiera di E sono le *"circonferenze che delimitano l'insieme E"*.

$$\partial E = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 4 \vee x_1^2 + x_2^2 = 9\}$$

7. Insiemi limitati

#Definizione

Definizione (insieme limitato).

Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}$ si dice *limitato* se esistono:

- Un punto $\underline{x_0} \in \mathbb{R}^N$
- Un raggio $R > 0$
  Tali che esista una *sfera* $B(\underline{x_0}, R)$ che contenga E. Ovvero,

$$\exists \underline{x_0} \in \mathbb{R}^N, R > 0 : B(\underline{x_0}, R) \supseteq E$$

8. Insiemi Connessi

#Definizione

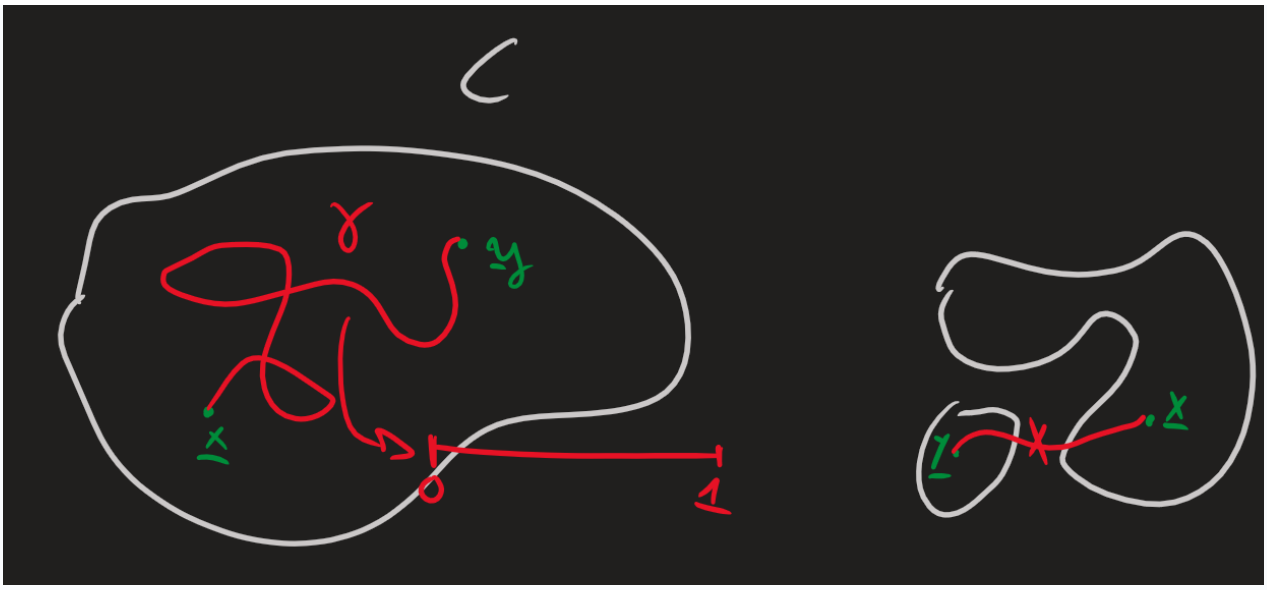
Definizione (insieme connesso per archi in $\mathbb{R}^N$).

Si dice che un insieme $C \subseteq \mathbb{R}^N$ è *"connesso per archi"* se vale la condizione

$$\begin{gathered}\forall \underline{x}, \underline{y} \in C, \exists \gamma : [0, 1] \longrightarrow C \in \mathcal{C}^0 : \\ \gamma(0) = \underline{x}, \gamma(1) = \underline{y}\end{gathered}$$

In parole, questa condizione vuol dire che *"se prendo due punti distinti dell'insieme connesso, allora deve esistere almeno un cammino (o una curva parametrica continua) che inizia col primo punto e finisce col secondo punto"*.

FIGURA 8.1. (*Insieme connesso e non connesso*)



#Osservazione

Osservazione (gli intervalli sono insiemi connessi).

Osservare che gli *intervalli* su $\mathbb{R}$ sono insiemi connessi.

9. Insiemi Compatti

#Definizione

Definizione (insieme compatto in $\mathbb{R}^N$).

Un insieme $K \subseteq \mathbb{R}^N$ si dice *compatto* se vale che *ogni successione* $(x_n)_n$ a valori in K ha una sua *sotto successione* $(x_{n_k})_k$ convergente ad un punto $\underline{x} \in K$.

#Teorema

Teorema (di Heine-Borel).

Un insieme $K \subseteq \mathbb{R}^N$ gode della seguente equivalenza.

$$K \text{ compatto} \iff K \text{ chiuso e limitato}$$

SEZIONE B. FUNZIONI DA $\mathbb{R}^M$ IN $\mathbb{R}^N$

B1. Funzione in più variabili

Definizione di Funzione in più variabili

Definizione di funzione in più variabili; componente i-esima della funzione, rappresentazione di grafici di funzione in più variabili

---

0. Voci correlate

- Definizione di RN

1. Definizione di funzione in più variabili

#Definizione

Definizione (funzione in più variabili).

Sia $f: E \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M$, ovvero che crea un'associazione del tipo

$$f((x_1, x_2, \ldots, x_N)) = (f_1(x_1), f_2(x_2), \ldots, f_M(x_N))$$

dove le f_i sono funzioni del tipo $f_i : E \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$.

Allora f si dice *funzione in più variabili*, da $\mathbb{R}^N$ a $\mathbb{R}^M$.

#Osservazione

Osservazione (rappresentazione grafica).

Per rappresentare un *grafico* di $f: \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M$, è necessario un ente geometrico $\pi \subseteq \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$ (ovvero in $N \times M$ dimensioni). Ovviamente, sempre nei limiti della possibilità.

B2. Campo Scalare e Insieme di Livello

Campo Scalare e Insieme di Livello

Definizione di campo scalare, esempio grafico di campo scalare. Esempio fisico di campo scalare: potenziale elettrico nel vuoto generato da una carica puntiforme nell'origine. Definizione di insieme di livello per un campo scalare. Esempio geometrico.

---

0. Voci correlate

- Definizione di RN
- Definizione di Funzione in più variabili

1. Campo Scalare

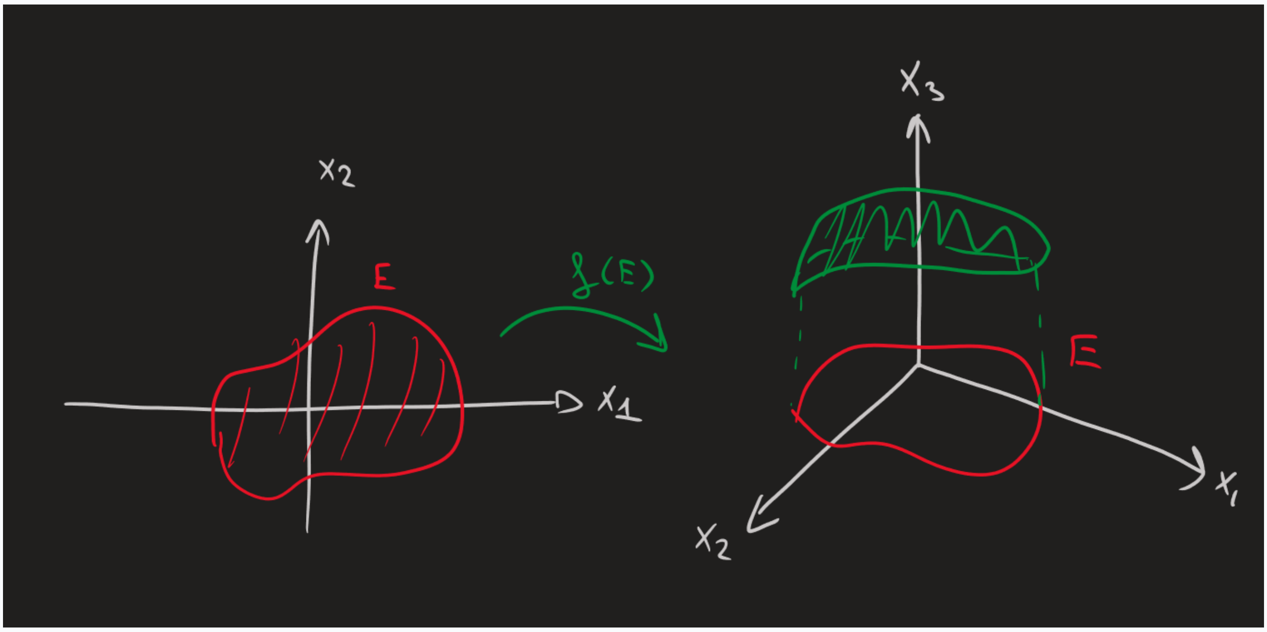
#Definizione

Definizione (campo scalare).

Si definisce *campo scalare* come una *funzione in più variabili* particolare, con $N \geq 2$ e $M = 1$ (1). Ovvero, una funzione del tipo

$$f : \mathbb{R}^{N \geq 2} \longrightarrow \mathbb{R}$$

FIGURA 1.1. (*Esempio qualitativo di un campo scalare*)



#Esempio

Esempio (esempio fisico).

Consideriamo il *potenziale elettrico nel vuoto generato da una carica puntiforme nell'origine*: questo è un *campo scalare* in *tre dimensioni*, descritto come

$$V(x,y,z) = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

2. Insiemi di livello per campo scalare

#Definizione

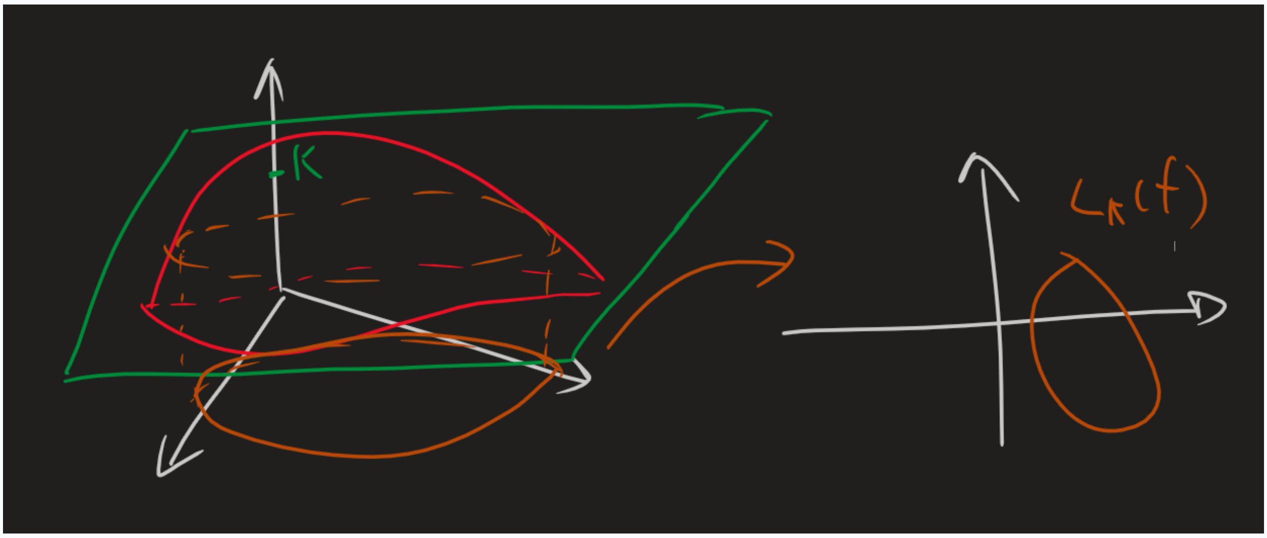
Definizione (insieme di livello per un campo scalare).

Sia f un *campo scalare* in N dimensioni, con dominio $E \subseteq \mathbb{R}^N$. Sia $K \in \mathbb{R}$. Definiamo un *"insieme di livello K di f"* come l'insieme

$$L_K(f) := \{\underline{x} \in E : f(\underline{x}) = K\}$$

Graficamente, si tratta di prendere il grafico del campo scalare e prendere la proiezione dell'*intersezione* col piano $z = K$ (*figura 2.1.*)

FIGURA 2.1. (*Grafico qualitativo di un insieme di livello*)



B3. Curve e Superfici Parametriche

Curve e Superfici Parametriche

Definizione di curva parametrica, esempio del spirale. Superfici parametriche: definizione. Esempi: parametrizzazione di un cilindro e di una sfera.

---

0. Voci correlate

- Definizione di RN
- Definizione di Funzione in più variabili

1. Curve Parametriche

#Definizione

Definizione (curva parametrica).

Si definisce *curva parametrica* come una *funzione in più variabili* f con $N = 1$ e $M = 2$ (1); ovvero una funzione del tipo

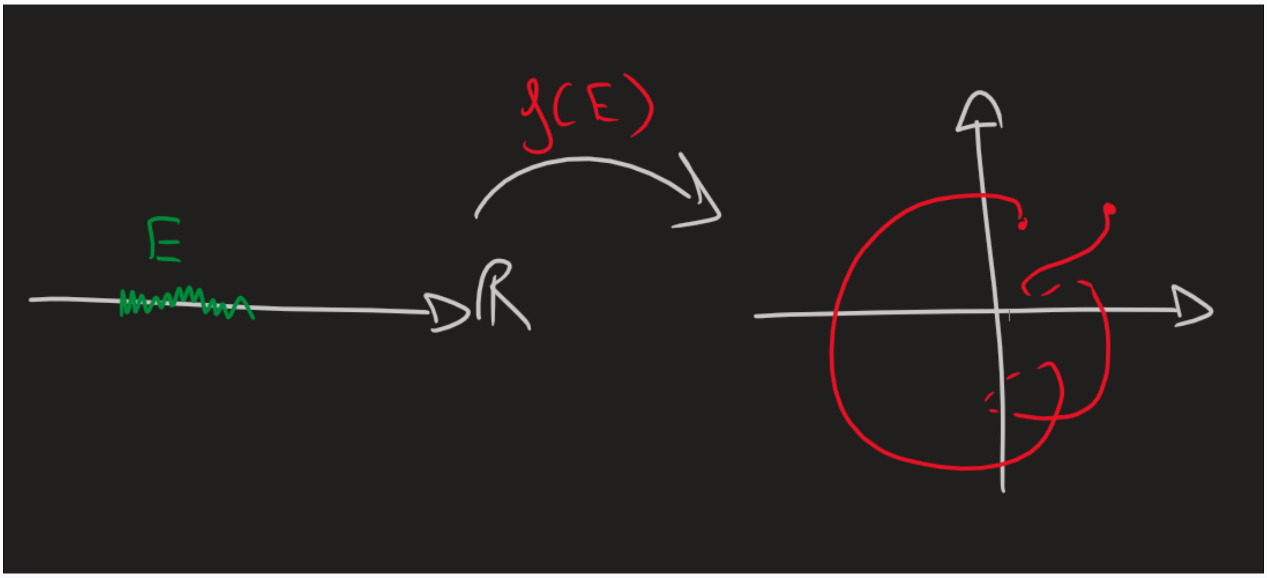
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

#Osservazione

Osservazione (convenzione di rappresentazione delle curve parametriche).

Per rappresentare una *curva parametrica*, si potrebbe usare lo *spazio in tre dimensioni*. Tuttavia, per convenzione usiamo un *piano in due dimensioni*, dove le coordinate x_1, x_2 rappresentano le *"posizioni"* della funzione $f(x)$.

FIGURA 1.1. (*Esempio qualitativo di una curva parametrica*)



#Esempio

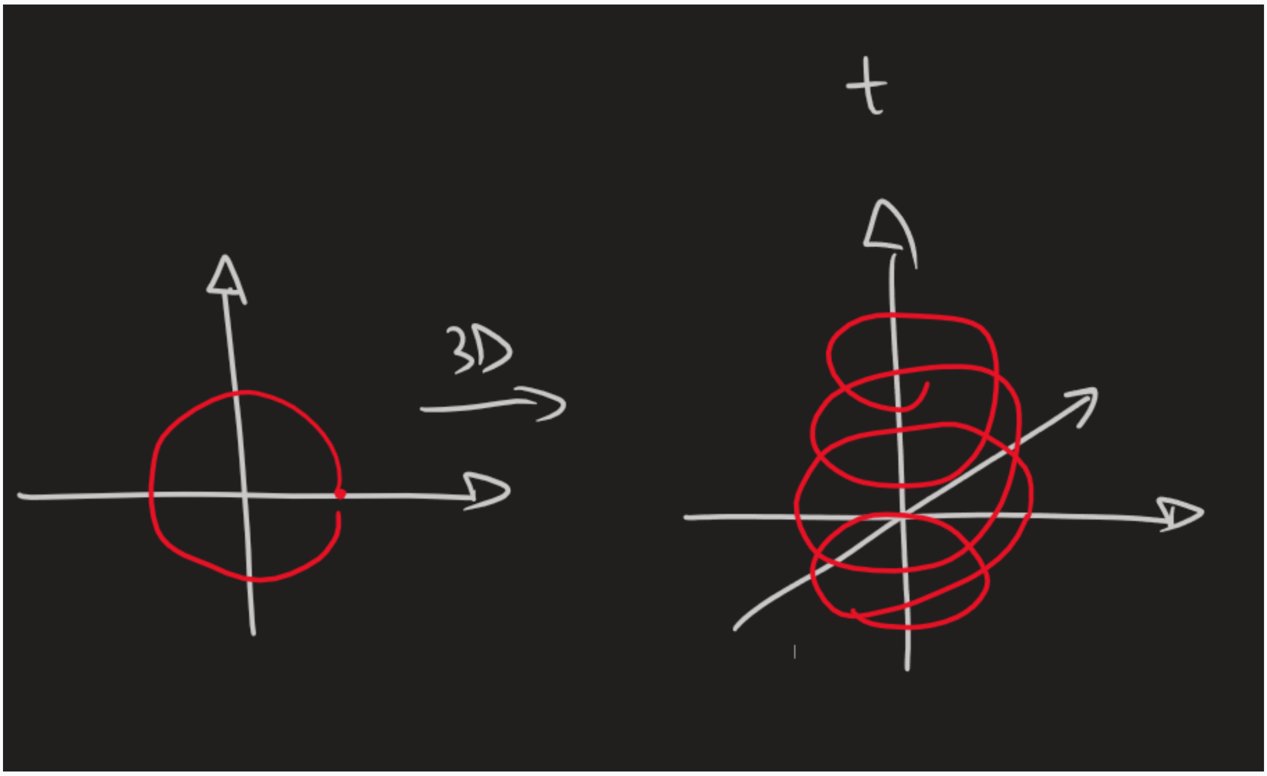
Esempio (la circonferenza-spirale).

Sia $f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una *curva* definita come

$$f(t) = (\cos t, \sin t), 0 \leq t \leq 2\pi$$

allora $f(E)$ è una *circonferenza* con la convenzione di rappresentazione appena enunciata (1); tuttavia, estendendolo con una dimensione aggiuntiva t e il dominio alla retta reale $E = \mathbb{R}$ si vede che è una spirale (*figura 1.2.*).

FIGURA 1.2.



2. Superfici parametriche

#Definizione

Definizione (superficie parametrica).

Si dice *superficie parametrica* una funzione f in più variabili da $N = 2$ a $M = 3$, ovvero del tipo

$$f : E \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

#Esempio

Esempio (il cilindro).

Prendiamo

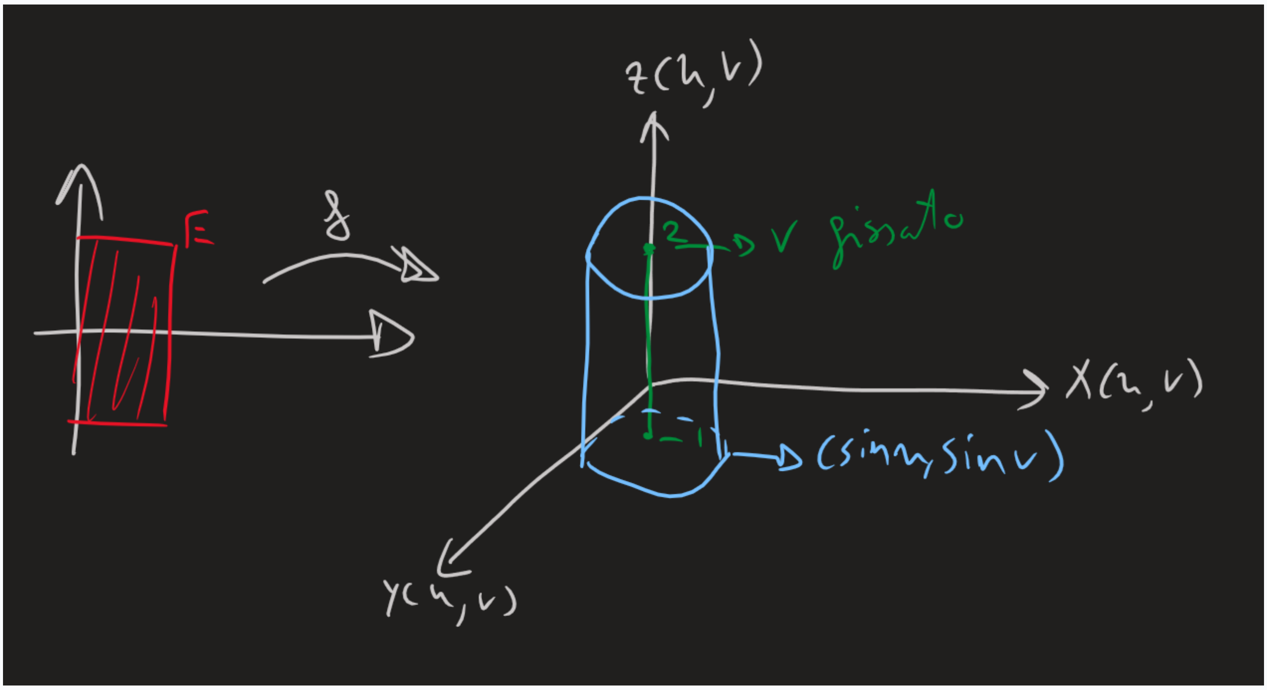
$$f : [0, 2\pi] \times [-1, 2] \longrightarrow (\cos u, \sin u, v)$$

ovvero

$$f(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$$

Per rappresentare questa funzione è utile prendere un valore v *fissato*. e vedere come si comporta f. Vediamo, come nell'esempio della circonferenza (1), che la funzione si comporta come una *circonferenza* estesa per il valore v. Di conseguenza, ho un *cilindro* (*figura 2.1.*).

FIGURA 2.1. (*Il cilindro*)



#Esempio

Esempio (la parametrizzazione di una sfera).

Nell'esempio precedente abbiamo dedotto la superficie da una funzione. Adesso facciamo il contrario; da una superficie deduciamo la funzione.

Prendiamo una sfera centrata nell'origine $O = (0, 0, 0)$ e con raggio R.
Sia fissato un punto $P(x, y, z)$ sulla sfera; si vede immediatamente nel il segmento OP (con lunghezza R) c'è un angolo φ. Di conseguenza, possiamo parametrizzare la coordinata z del punto con $z = R \cos \varphi$.

Adesso prendiamo la *proiezione* di questo punto sul piano (x, y), che chiameremo $Q(x, y, z)$. Allora abbiamo che il segmento $OQ = R \sin \varphi$, dato che abbiamo un *triangolo rettangolo*.

Dopodiché osserviamo che tra il segmento OQ e l'asse x c'è un angolo θ.

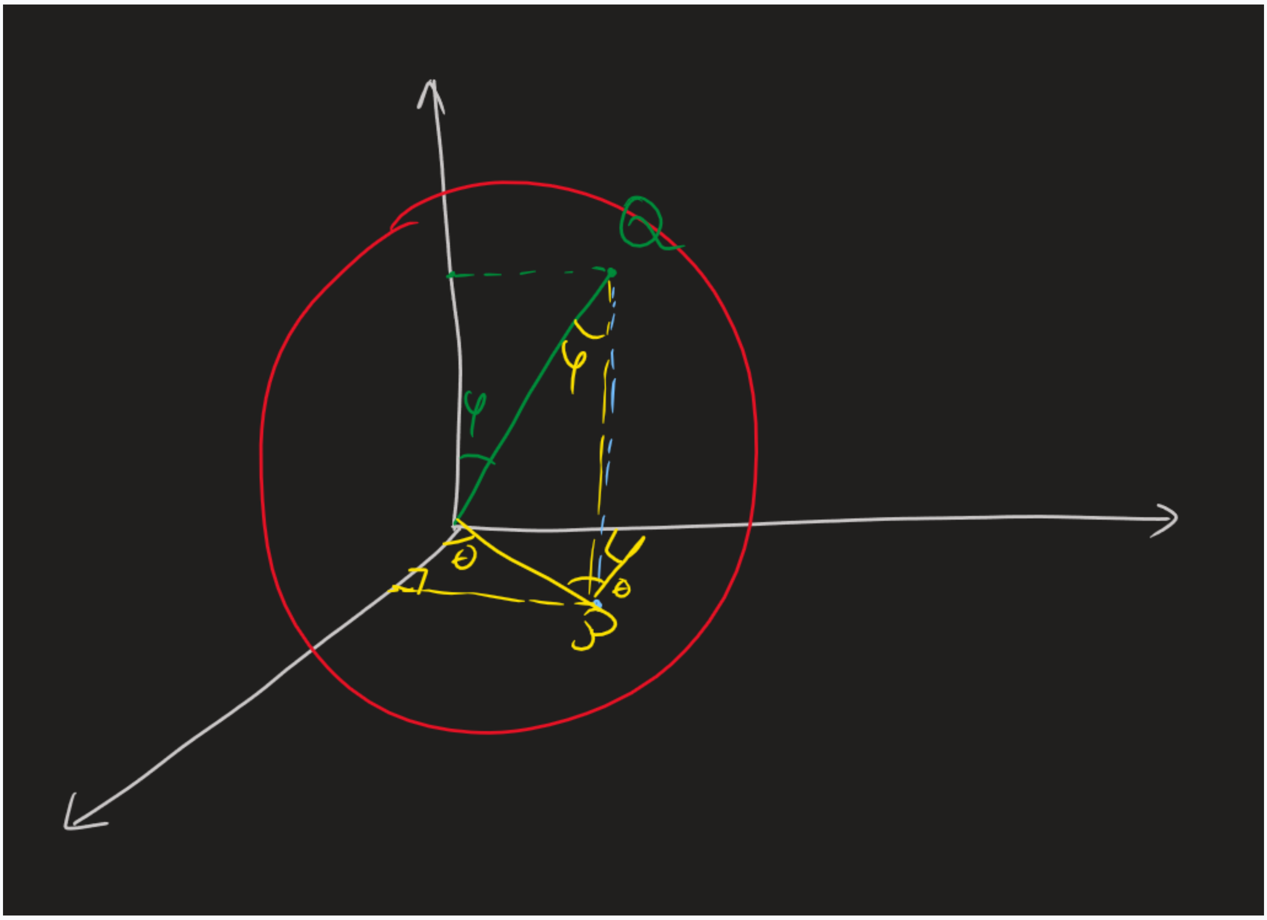
Infine, effettuando ulteriori proiezioni, basta prendere le coordinate x, y in funzione del punto Q; per le regole della trigonometria abbiamo semplicemente

$$x = R \sin \varphi \cos \theta, y = R \sin \varphi \sin \theta$$

Infine otteniamo la funzione definita su $[0, \pi] \times [0, 2\pi[$

$$f(\varphi, \theta) = (R\sin\varphi\cos\theta, R\sin\varphi\sin\theta, R\cos\varphi)$$

FIGURA 2.2. (*La sfera*)



B4. Campo Vettoriale

Campo Vettoriale

Definizione di campo vettoriale. Convenzione di rappresentazioni dei campi vettoriali (caso bidimensionale). Esempio di campo vettoriale.

---

0. Voci correlate

- Definizione di RN
- Definizione di Funzione in più variabili

1. Definizione generalizzata di campo vettoriale

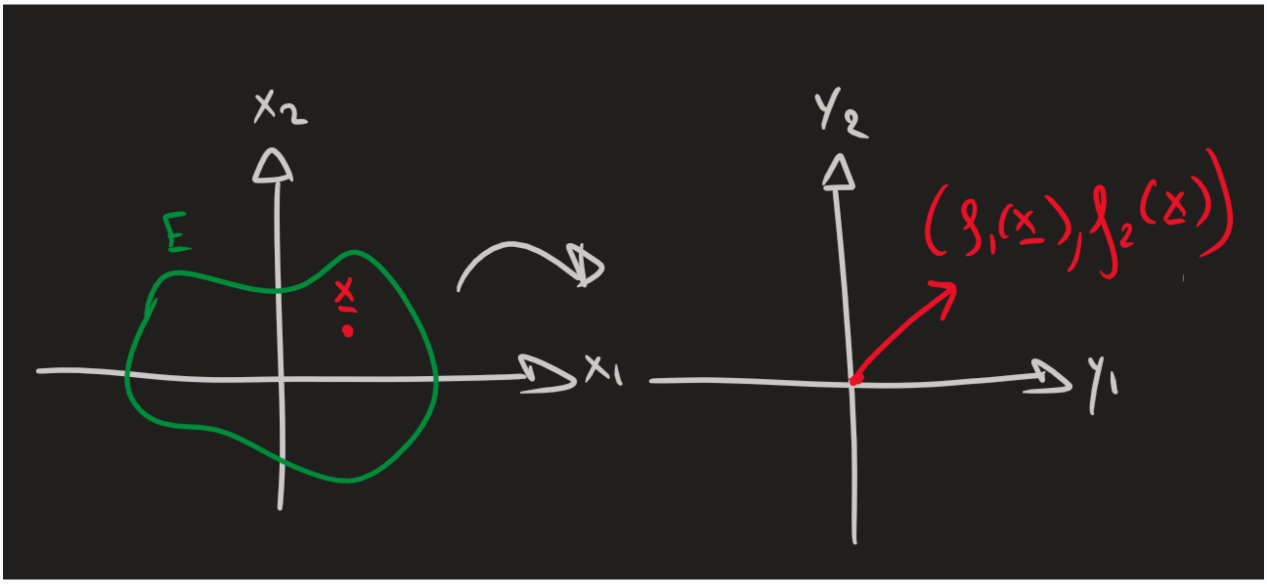
#Definizione

Definizione (campo vettoriale).

Si dice *"campo vettoriale"* una *funzione in più variabili* con $M = N \geq 2$, ovvero una funzione del tipo

$$f : E \subseteq \mathbb{R}^{N \geq 2} \longrightarrow \mathbb{R}^{N \geq 2}$$

FIGURA 1.1. (*Rappresentazione qualitativa di un campo vettoriale in 2D*)



2. Rappresentazione dei campi vettoriali bidimensionali

#Osservazione

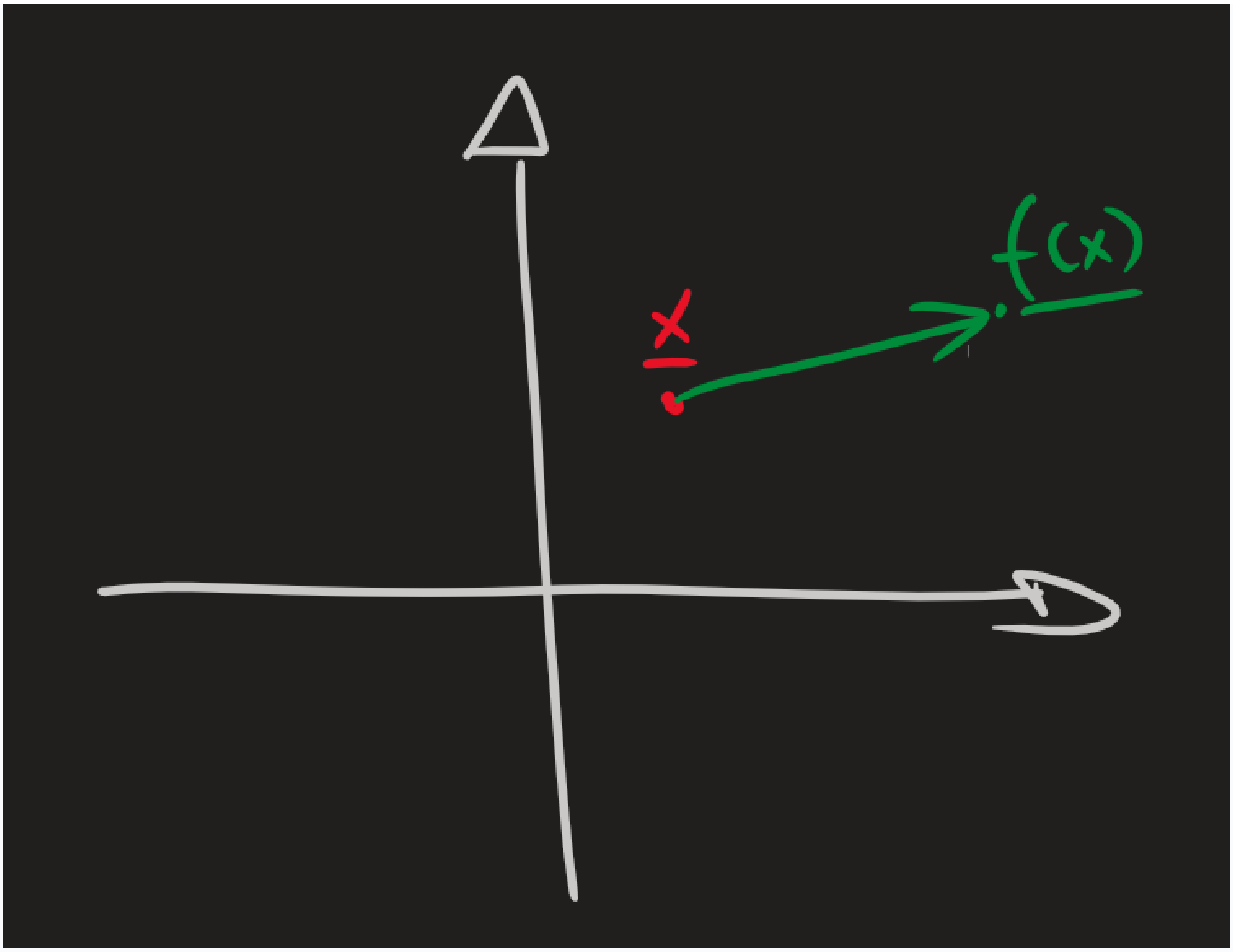
Osservazione (convenzione di rappresentazione dei campi vettoriali in $N = 2$).

Per rappresentare un *campo vettoriale* in *due dimensioni* su un *unico piano*, è possibile seguire la seguente convenzione.

Prendiamo un punto del dominio $\underline{x}$ e consideriamo il suo vettore-funzione $\underline{f(x)}$. In questa convenzione consideriamo il vettore $\underline{f(x)}$ come un vettore del piano del dominio e colloco il suo *punto di applicazione* in $\underline{x}$.
Graficamente, si tratta di *"spostare"* l'origine del vettore $\underline{f(x)}$ in $\underline{x}$.

Ovviamente, il *limite* di questa convenzione è che è possibile solo per *alcuni punti*; quindi di solito bisogna *"individuare"* dei *"punti critici"* dove si ha un comportamento notevole del punto.

FIGURA 2.1. (*Convenzione*)



3. Esempio

#Esempio

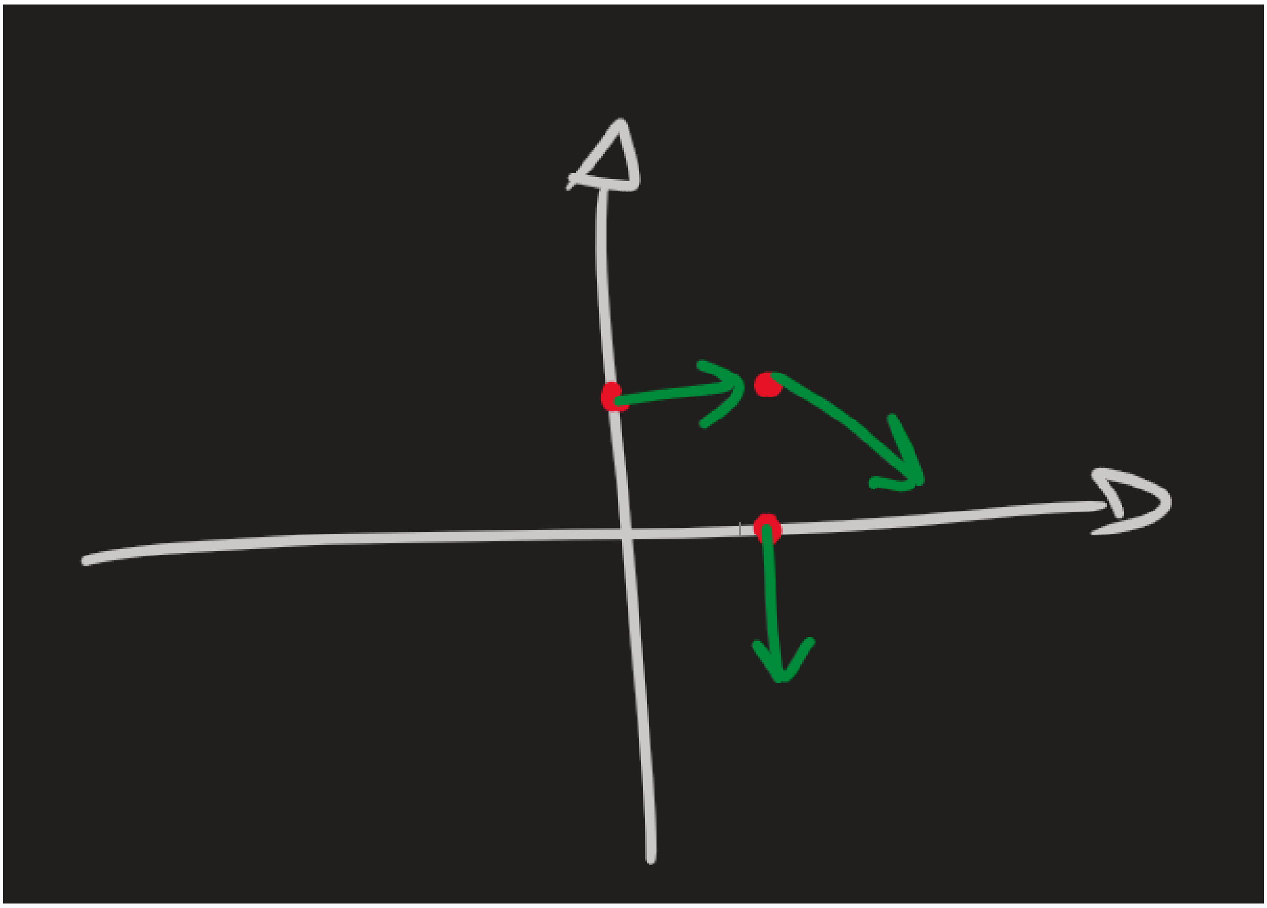
Esempio (esempio di un campo vettoriale).

Prendiamo $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definita come

$$f(x, y) = (y, -x)$$

Prendendo i punti $(1, 0), (0, 1), (1, 1)$ abbiamo il grafico in *figura 3.1.*.

FIGURA 3.1.



SEZIONE C. LIMITI IN $\mathbb{R}^N$

C1. Limite in più variabili

Limite di Funzione in più variabili

Definizione di limite finito per funzioni in più variabile. Definizione di limite infinito per campi scalari. Condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di un limite in più variabili.

---

0. Voci correlate

- Definizione di RN
- Topologia in RN
- Definizione di Spazio Metrico
- Definizione di Funzione in più variabili
- Definizione di Limite di funzione

1. Definizione di limite finito per funzioni in più variabili

#Definizione

Definizione (limite finito per funzioni in più variabili).

Sia $f: E \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M$, sia $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^N$ e $\underline{x}_0 \in \mathcal{D}E$.
Si dice che *esiste finito il limite*

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f(\underline{x}) = \underline{l} \in \mathbb{R}^M$$

se vale la condizione

$$\begin{gathered}\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall \underline{x} \in E, \\ 0 < d(\underline{x}, \underline{x}_0) < \delta \implies d(f(\underline{x}), \underline{l}) < \varepsilon\end{gathered}$$

dove d è la *distanza euclidea* su $\mathbb{R}^N$ e $\mathbb{R}^M$ (1).

2. Definizione di limite infinito per campi scalari

#Definizione

Definizione (limite infinito per campi scalari).

Sia f un campo scalare, ovvero del tipo $f : E \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$. Sia $\underline{x_0} \in \mathcal{D}E$.
Si dice che *il limite esiste infinito*

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{x_0}} f(\underline{x}) = +\infty \text{ o } -\infty$$

se vale la condizione

$$\begin{gathered}\forall k > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in E, \\ 0 < d(\underline{x}, \underline{x_0}) < \delta \implies f(x) > k \text{ o } f(x) < -k\end{gathered}$$

3. Condizione necessaria e sufficiente

#Osservazione

Osservazione (preambolo).

Possiamo legare questo concetto di limite in ciascuna delle sue componenti f_i.

#Teorema

Teorema (condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di un limite in più variabili).

Si ha che

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{x_0}} f(\underline{x}) = \underline{l}$$

esiste finito se e solo se *esiste finito ciascuno dei limiti*

$$\forall i \in \{1, \ldots, M\}, \lim_{\underline{x} \to \underline{x_0}} f_i(\underline{x}) = l_i$$

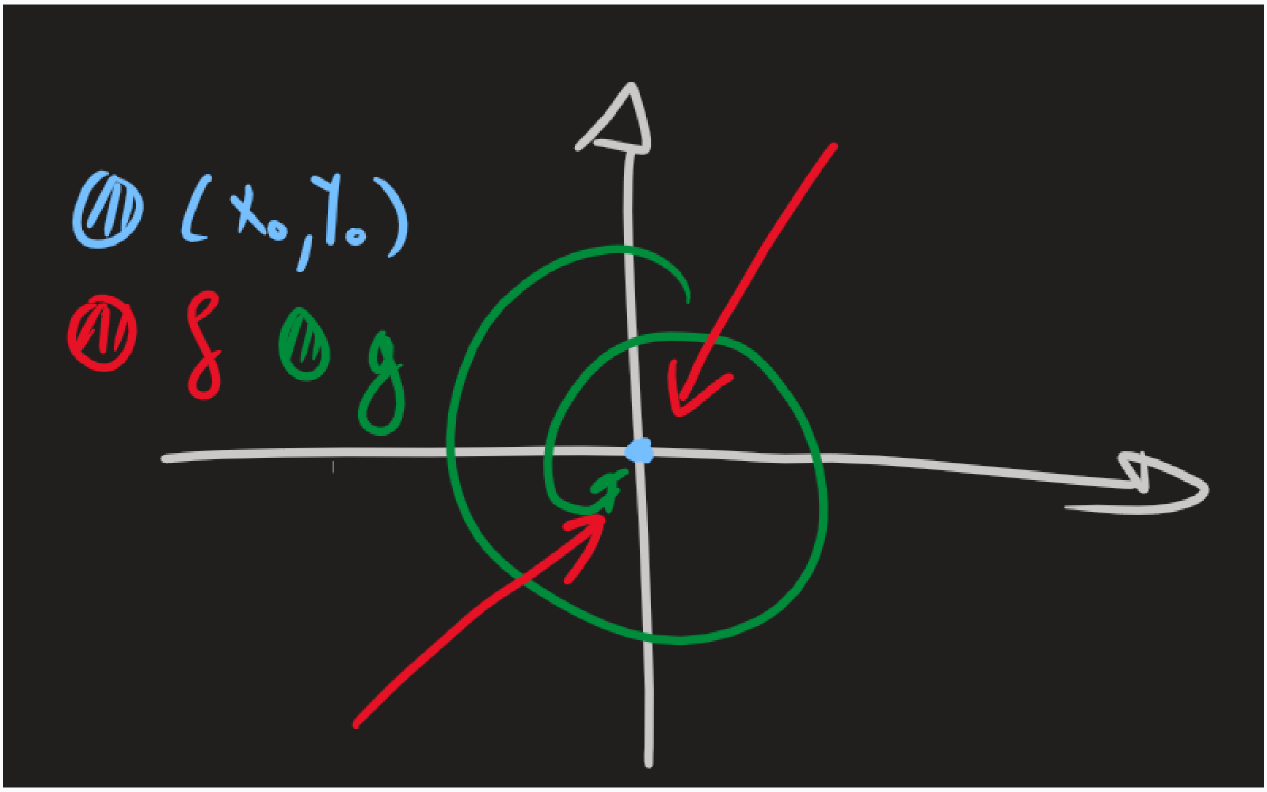
4. Condizione sufficiente per la non-esistenza di un limite

#Osservazione

Osservazione (una condizione per la non esistenza dei limiti).

> Possiamo vedere la *condizione per la definizione di limite* in un altro modo; prendiamo una condizione che conferma la *non-esistenza* di un limite in più variabili.
>
> Il fatto che esiste il limite
>
> $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$$
>
> vuol dire che, a prescindere dal tipo di *"avvicinamento"* al punto (x_0, y_0), risulta nella convergenza di $f(x,y)$ allo stesso valore L.
>
> Allora, se fossimo in grado di prendere *"due avvicinamenti diversi"* (ovvero delle funzioni che legano x, y tali che entrambi vadano al punto di limite) con corrispondenti *valori limite diversi*, si potrebbe provare la non-esistenza di un limite. Infatti si violerebbe l'*unicità del limite*.
>
> Di solito, una prima scelta di *"traiettorie"* è il fascio delle rette $y = mx$.

FIGURA 4.1. (*Le traiettorie di avvicinamento*)



#Teorema

> Teorema (condizione sufficiente per la non-esistenza di un limite, caso bidimensionale).
>
> Sia $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^M$.
> Se esistono *almeno due funzioni* $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ tali che

$$\lim_{x \to x_0} f(x, \varphi(x)) \neq \lim_{x \to x_0} f(x, \psi(x))$$

allora il *limite*

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{x_0}} f(\underline{x})$$

non esiste.

C2. Continuità in più variabili

Definizione di Continuità di Funzione in più variabili

Definizione di continuità per funzioni in più variabili.

---

0. Voci correlate

- Definizione di Continuità
- Limite di Funzione in più variabili

1. Definizione di continuità

#Definizione

Definizione (continuità in più variabili).

Sia $f : E \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M$ con $\underline{x_0} \in E$.
Si dice che *"f è continua in $\underline{x_0}$"* se *esiste il limite*

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{x_0}} f(\underline{x}) = f(\underline{x_0})$$

ovvero se vale

$$\begin{gathered}\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in E, \\ 0 \leq d(\underline{x}, \underline{x_0}) < \delta \implies d(f(\underline{x}), f(\underline{x_0})) < \varepsilon\end{gathered}$$

2. Condizione equivalente

#Teorema

Teorema (condizione equivalente per la continuità di funzioni).

Sia $f : E \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M$ con $\underline{x_0} \in E$. Sono equivalenti:

$$f \text{ continua in } \underline{x_0} \iff \forall i \in \{1, \ldots, M\} \lim_{\underline{x} \to \underline{x_0}} f_i(\underline{x}) = f_i(\underline{x_0})$$

3. Osservazione

#Osservazione

Osservazione (la definizione di continuità per una funzione multivariabile varia a seconda del dominio).

Osserviamo che la *definizione di continuità* per un punto $\underline{x_0}$ per una funzione $f : E \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M$ varia a seconda del dominio E scelto.

Usiamo il seguente esempio.
Sia

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$$

Vogliamo stabilire la continuità di f in $(0, 0)$ su $E = \mathbb{R}^2$. Chiaramente, questa *non* è continua, dato che

$$x = y^2 \implies \lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y) = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x} = 1 \neq 0$$

Adesso prendiamo il dominio E come

$$E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq x < 1\right\}$$

Il ragionamento fatto per $E = \mathbb{R}^2$ non vale più, dato che la *"traiettoria esce dal dominio"*. Infatti, qui la funzione è continua dato che

$$\left|\frac{y^2}{x}\right| \leq \frac{\left|y^2\right|}{x} \leq \frac{x^2}{x}$$

e quindi ho

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x} = 0$$

C3. Proprietà delle funzioni continue

Proprietà delle Funzioni Continue

Proprietà delle funzioni continue in più variabili: funzioni continue mandano insiemi connessi in insiemi connessi; teorema dei zeri per i campi scalari; permanenza del segno per i campi scalari; teorema della compattezza; teorema di Weierstraß su più variabili.

---

0. Voci correlate

- Teoremi sulle funzioni continue
- Insiemi compatti in R
- Topologia in RN

1. Funzioni mandano insiemi connessi in insiemi connessi

#Teorema

> Teorema (funzioni continue mandano connessi in connessi).
>
> Se $f : C \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ è *continua*, allora vale l'implicazione
>
> $$C \text{ connesso} \implies f(C) \text{ connesso}$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 1 (funzioni continue mandano connessi in connessi)
Siano $y_1, y_2 \in f(C)$. Per ipotesi devono esistere $\underline{x}_1, \underline{x}_2$ tali che $f(\underline{x}_1) = y_1$ e $f(\underline{x}_2) = y_2$. Ma allora, dato che C è connesso, dev'esistere un percorso γ tale che $\gamma(0) = \underline{x}_0$ e $\gamma(1) = \underline{x}_1$. Adesso basta considerare la funzione composta

$$\boxed{\tilde{\gamma} = f \circ \gamma}$$

e si ha infatti

$$\tilde{\gamma}(0) = f(\gamma(0)) = f(\underline{x}_0) = y_1$$

e analogamente

$$\tilde{\gamma}(1) = y_1$$

che prova $f(C)$ connesso. ■

2. Teorema dei zeri per campi scalari

#Teorema

> Teorema (dei zeri, per campi scalari).
>
> Sia $f : E \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ *continua* con E *connessa*.
> Allora, se esistono due punti $\underline{x}, \underline{y} \in E$ tali che $f(\underline{x})f(\underline{y}) < 0$ (ovvero sono di *segni discordi*), allora esiste un punto $\underline{\xi} \in E$ tale che $f(\underline{\xi}) = 0$.
>
> $$\exists \underline{x}, \underline{y} \in E : f(\underline{x})f(\underline{y}) < 0 \implies \exists \underline{\xi} \in E : f(\underline{\xi}) = 0$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 2 (dei zeri, per campi scalari)
Idea: basta prendere il percorso $\gamma_{\underline{y}}^{\underline{x}}$ e applicare il *teorema dei zeri* per le funzioni di variabile reale (Teorema 6 (degli zeri)).
La dimostrazione completa è stata omessa. ■

3. Permanenza del segno per campi scalari

#Corollario

> Corollario (permanenza del segno, per campi scalari continui).
>
> Sia $f : E \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ *continua* con E *connessa*.
> Se f *non si annulla mai*, allora f dev'essere a segno permanente.
> Ovvero,
>
> $$\forall \underline{x} \in E, f(\underline{x}) \neq 0 \implies \forall \underline{x_1}, \underline{x_2} \in E, f(\underline{x_1})f(\underline{x_2}) > 0$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Corollario 3 (permanenza del segno, per campi scalari continui)
La tesi di questo corollario è semplicemente la contronominale del *teorema dei zeri per i campi scalari* (Teorema 2 (dei zeri, per campi scalari)). ■

4. Teorema della compattezza

#Teorema

> Teorema (della compattezza).

Sia $f : K \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M$ *continua*.
Vale che se K è *compatto*, allora $f(K)$ è *compatto*.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 4 (della compattezza)

Omessa. Per vedere la dimostrazione del caso $N = M = 1$, leggere la pagina Teorema 13 (di compattezza). ■

5. Teorema di Weierstraß

#Teorema

Teorema (di Weierstraß).

Se $f : K \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M$ è *continua* e K è *compatto*, allora vale che f ammette un *minimo* e un *massimo*;

$$\exists \min_{\underline{x} \in K} f(\underline{x}) \wedge \exists \max_{\underline{x} \in K} f(\underline{x})$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 5 (di Weierstraß)

Omessa. Per la dimostrazione del caso $N = M = 1$, vedere la pagina Teorema 15 (di Weierstraß). ■

SEZIONE D. STRUTTURA LINEARE DI $\mathbb{R}^N$

D1. Prodotto Scalare

Prodotto Scalare (generalizzazione)

Concetto generalizzato di prodotto scalare. Nota: informazioni prese da "Algebra Lineare" di S. Lang

---

1. Prodotto scalare

#Definizione

Definizione (prodotto scalare).

Sia V un $\mathbb{K}$-*spazio vettoriale*. Un'operazione $< \cdot, \cdot >$ (o denotata anche come $\cdot$) si dice *prodotto scalare* se una funzione del tipo

$$< \cdot, \cdot >: V \times V \longrightarrow K$$

e se soddisfa la seguenti tre proprietà:
SP1. (*commutatività*)

$$\forall v, w \in V, v \cdot w = w \cdot v$$

SP2. (*bilinearità*)

$$\forall u, v, w \in V, u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$$

SP3. (*bilinearità*)

$$\forall \lambda \in K, \forall u, v \in V, (\lambda u) \cdot v = \lambda \cdot (u \cdot v) \wedge u \cdot (\lambda \cdot v) = \lambda \cdot (u \cdot v)$$

Inoltre, se l'operazione soddisfa anche la seguente proprietà:

$$\forall w \in W, v \cdot w = 0 \implies v = 0$$

allora il prodotto scalare si dice *non degenere*.

#Esempio

Esempio (Esempio 1.1.).

Il prodotto vettoriale su $\mathbb{R}^2$ soddisfa le condizioni del prodotto scalare.

$$\forall u, v \in \mathbb{R}^2; u = (x, y) \wedge v = (x', y'); u \cdot v = x'x + y'y$$

(Definizione 2 (funzione prodotto scalare))

#Esempio

Esempio (Esempio 1.2.).

Il prodotto scalare sulle funzioni continue (dunque integrabili, (Teorema 2 (di integrabilità delle funzioni continue))) sull'intervallo $[0, 1]$, ovvero appartenenti all'$\mathbb{R}$-spazio vettoriale $\mathcal{F}$, è definito come il seguente:

$$\cdot : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}$$

del tipo

$$f \cdot g = \int_0^1 f(t)g(t) \ \mathrm{d}t$$

Prodotto Scalare in RN

Osservazione: $\mathbb{R}^N$ è un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale. Definizione di prodotto scalare in $\mathbb{R}^N$, proprietà del prodotto scalare. Definizione di spazio dotato di prodotto scalare.

---

0. Voci correlate

- Spazi Vettoriali
- Prodotto Scalare
- Definizione di RN

1. Il Prodotto Scalare su $\mathbb{R}^N$

#Osservazione

Osservazione ($\mathbb{R}^N$ è un spazio vettoriale).

Osserviamo che $\mathbb{R}^N$ è un *spazio vettoriale* su $\mathbb{R}$ con le operazioni di *somma* $+$ e *scalamento* $\cdot$.

Possiamo quindi *applicare le definizioni relative ai spazi vettoriali*, partendo dalla nozione di *prodotto scalare euclideo* (Definizione 1 (prodotto scalare di due vettori)).

#Definizione

Definizione (prodotto scalare euclideo).

Siano $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^N$ dei vettori, con $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_N)$ e $\underline{y} = (y_1, \ldots, y_N)$.
Si definisce il *prodotto scalare euclideo* come l'operazione

$$\langle x, y \rangle := x_1 y_1 + \ldots + x_N y_N = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i$$

#Proposizione

Proposizione (le proprietà del prodotto scalare).

Come visto (1), il prodotto scalare soddisfa le seguenti proprietà. Come ipotesi iniziali prendiamo

$$\forall \underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in \mathbb{R}^N, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

i. *bilinearità*

$$\langle \lambda \underline{x} + \mu \underline{y}, \underline{z} \rangle = \lambda \langle \underline{x}, \underline{z} \rangle + \mu \langle \underline{y}, \underline{z} \rangle$$

ii. *simmetria*

$$\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \langle \underline{y}, \underline{x} \rangle$$

iii. *forma positiva*

$$\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle \geq 0 \wedge \langle \underline{x}, \underline{x} \rangle = 0 \iff \underline{x} = \underline{0} = (0, \ldots, 0)$$

2. Definizione Generalizzata di Prodotto Scalare

#Definizione

Definizione (prodotto scalare e spazio dotato di prodotto scalare).

Sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale.
Un'applicazione del tipo

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

che verifica le proprietà *i.*, *ii.*, *iii.* della *proposizione 3* (1) si dice *"prodotto scalare"*.

La coppia $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ si dice *"spazio dotato di prodotto scalare"*.

D2. Norma Euclidea

Norma Euclidea in RN

Definizione di norma euclidea in $\mathbb{R}^N$. Legame tra norma e distanza. Proprietà della norma. Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.

---

0. Voci correlate

- Norma, versore e angolo
- Prodotto Scalare in RN
- Definizione di RN
- Topologia in RN

1. Definizione di Norma Euclidea in $\mathbb{R}^N$

#Definizione

Definizione (norma euclidea in $\mathbb{R}^N$).

Definiamo per un qualsiasi vettore $\underline{x} \in \mathbb{R}^N$ la sua *norma* come

$$\|\underline{x}\| := \sqrt{\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}$$

#Osservazione

Osservazione (legame tra norma e distanza).

Osserviamo che vale la seguente *relazione* tra *norma* $\|\cdot\|$ e la distanza $d(\cdot, \cdot)$.

$$\|\underline{x}\| = d(\underline{x}, 0) \wedge d(\underline{x}, \underline{y}) = \|\underline{x} - \underline{y}\|$$

2. Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

#Teorema

> Teorema (disuguaglianza di Cauchy-Schwarz).
>
> Osserviamo che vale la seguente disuguaglianza per $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^N$.
>
> $$|\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle| \leq \|\underline{x}\| \cdot \|\underline{y}\|$$
>
> Inoltre vale l'*uguaglianza* se e solo se $\underline{x}, \underline{y}$ sono *linearmente indipendenti*.

3. Proprietà della norma

#Proposizione

> Proposizione (proprietà della norma).
>
> Sia $\|\cdot\|$ la *norma* su $\mathbb{R}^N$. Allora valgono le seguenti.
> i.
>
> $$\|\underline{x}\| = 0 \iff \underline{x} = \underline{0}$$
>
> ii.
>
> $$\|\lambda \underline{x}\| = |\lambda| \|\underline{x}\|$$
>
> iii.
>
> $$\|\underline{x} + \underline{y}\| \leq \|\underline{x}\| + \|\underline{y}\|$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE della Proposizione 4 (proprietà della norma)
Omessa. Il punto iii. può essere dimostrato con la *disuguaglianza di Cauchy-Schwarz* (Teorema 3 (disuguaglianza di Cauchy-Schwarz)). ■

#Osservazione

> Osservazione (possiamo dimostrare la disuguaglianza triangolare).
>
> Con gli strumenti appena appresi, possiamo *dimostrare formalmente* la *disuguaglianza triangolare* (Proposizione 2 (le proprietà della distanza euclidea)).
> Infatti, ho che
>
> $$\|\underline{x} + \underline{y}\| = \|\underline{x} - (-\underline{y})\| = d(\underline{x}, \underline{y}) \leq \|\underline{x}\| + \|\underline{y}\| = d(\underline{x}, \underline{0}) + d(\underline{y}, \underline{0})$$

> che è la tesi per $\underline{z} = \underline{0}$.

D3. Teorema di Riesz

Teorema di Riesz

Applicazioni lineari $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$: teorema di rappresentazioni delle applicazioni lineari, teorema di Riesz finito dimensionale.

---

0. Voci correlate

- Definizione di Applicazione Lineare
- Matrice
- L'insieme delle Applicazioni Lineari
- Limite di Funzione in più variabili
- Campo Scalare e Insieme di Livello

1. Teorema di Rappresentazioni delle Applicazioni Lineari

#Osservazione

> Osservazione (le funzioni in più variabili possono essere delle applicazioni lineari).
>
> Notiamo che una certa classe di *funzioni in più variabili* del tipo $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M$ possono essere delle *applicazioni lineari*. Quindi possiamo applicare delle regole particolari per queste funzioni.

#Teorema

> Teorema (di rappresentazione delle applicazioni lineari).
>
> Sia $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$ lo *spazio delle applicazioni lineari* $L : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M$. Sia $M_{m,n}(\mathbb{R})$ lo *spazio delle matrici* $m \times n$ a coefficienti in $\mathbb{R}$.
>
> Fissata una base $\mathcal{B}$ per il dominio $\mathbb{R}^N$ e un'altra base $\mathcal{C}$ per il codominio $\mathbb{R}^M$, deve *esistere una biiezione* tra $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$ e $M_{m,n}(\mathbb{R})$.

2. Teorema di Riesz, finito dimensionale

#Teorema

> Teorema (di Riesz finito dimensionale).
>
> Sia L un *campo scalare*. Ovvero del tipo $L : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$.
>
> Allora *esiste uno ed uno solo* $\underline{a} \in \mathbb{R}^N$ tale che
>
> $$L(\underline{x}) = \langle \underline{a}, \underline{x} \rangle, \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^N$$
>
> Ovvero c'è una biiezione tra lo spazio dei campi scalari $\mathcal{F}(\mathbb{R}^N)$ e lo spazio dei vettori $\mathbb{R}^N$, per $N < +\infty$.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 3 (di Riesz finito dimensionale)
La dimostrazione si articola in *due parti*; una dimostra l'esistenza del vettore $\underline{a}$ e l'altra ne dimostra l'unicità
"$\exists$": Sia $\mathcal{B}$ una base per il dominio, con $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_N\}$. Ho inoltre le coordinate del vettore $\underline{x}$ rispetto alla base, scritto come $\pi = (x_1, \ldots, x_N)$. Allora basta calcolare $L(\underline{x})$;

$$\begin{aligned} L(\underline{x}) &= L(x_1 \underline{e_1} + \ldots + x_N \underline{e_N}) \\ &= x_1 L(\underline{e_1}) + \ldots + x_N L(\underline{e_N}) \\ a_i := L(\underline{e_i}) \implies '' &= x_1 \underline{a_1} + \ldots + x_N \underline{a_N} = \langle \underline{x}, \underline{a} \rangle \end{aligned}$$

che è la prima parte.
"!": Supponiamo che esista un vettore $\underline{b} \neq \underline{a} \in \mathbb{R}^N$ tale che

$$L(\underline{x}) = \langle \underline{x}, \underline{b} \rangle$$

Poiché, come precedentemente dimostrato, abbiamo

$$L(\underline{x}) = \langle \underline{x}, \underline{a} \rangle$$

ho

$$\begin{aligned} \langle \underline{x}, \underline{a} \rangle = \langle \underline{x}, \underline{b} \rangle \implies & \langle \underline{x}, \underline{a} - \underline{b} \rangle = 0 \\ \underline{x} = \underline{a} - \underline{b} \implies & '' = \langle \underline{a} - \underline{b}, \underline{a} - \underline{b} \rangle = 0 \iff \underline{a} = \underline{b} \end{aligned}$$

che contraddice la supposizione iniziale, dandoci un *assurdo*. ■

Capitolo 5. Calcolo Differenziale in $\mathbb{R}^N$

Abstract del Capitolo 5

Dopo aver introdotto la struttura dei vettori reali, nonché la nozione delle funzioni in più variabili, si inizia a studiare il *calcolo differenziale* in tale struttura. In questo capitolo si andrà a generalizzare i concetti del calcolo differenziale nel caso unidimensionale: si parte parlando di campi scalari, poi estendendo il discorso su funzioni in più variabili.
L'obbiettivo finale di questo capitolo è quello di definire la formula di Taylor del secondo ordine in più variabili.

Osservazione Preliminare

Introduzione al Calcolo Differenziale in più variabili

Osservazione preliminare per il calcolo differenziale in più variabili: approssimazione delle funzioni con sviluppo di Taylor col resto di Peano, definizione o-piccolo e obbiettivi per il calcolo differenziale multivariata.

---

0. Voci correlate

- Formula di Taylor
- Derivata e derivabilità
- Definizione di Funzione in più variabili

1. Osservazione preliminare

#Osservazione

> Osservazione (caso $N = 1$).
>
> Prendiamo il caso $\mathbb{R}^1$. Dai risultati del *calcolo differenziale*, possiamo approssimare una funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ come
>
> $$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R(x)$$
>
> dove vale il limite
>
> $$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{|x - x_0|^n} = 0$$
>
> ovvero R_n è un *"o-piccolo"* di $|x - x_0|^n$ (per una definizione ben costruita vedere sotto).

#Definizione

> Definizione (o-piccolo delle funzioni).
>
> Siano f, g funzioni tali che
>
> $$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0 \wedge \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

> Allora si dice che f è un *"o-piccolo"* della funzione g, e la si scrive come
>
> $$f = o(g)$$

#Osservazione

> Osservazione (gli obbiettivi del calcolo differenziale multivariata).
>
> Come osservato prima, vogliamo tenere conto di questa *rappresentazione locale*, estendendolo per *funzioni in più variabili* del tipo $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M$.
> In particolare, voglio costruire l'approssimante
>
> $$f(\underline{x}) = f(\underline{x_0}) + \mathbb{A}(\underline{x} - \underline{x_0}) + E(\underline{x})$$
>
> dove vale il limite
>
> $$\lim_{\underline{x} \to \underline{x_0}} \frac{E(\underline{x})}{\|\underline{x} - \underline{x_0}\|}$$
>
> (ovvero $E = o(\| \cdot \|)$)

SEZIONE A. CALCOLO DIFFERENZIALE SU CAMPI SCALARI

A1. Derivata Direzionale

Derivata Direzionale

Definizione di derivata direzionale per campi scalari. Interpretazione geometrica. Esempi di derivate direzionali.

---

0. Voci correlate

- Campo Scalare e Insieme di Livello
- Norma Euclidea in RN
- Derivata e derivabilità

1. Definizione di Derivata Direzionale

#Definizione

Definizione (derivata direzionale di una funzione in un punto lungo un versore).

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ con A aperto. Sia $\underline{x_0} \in A$, sia $\underline{v} \in \mathbb{R}^N$ un versore (ovvero un vettore tale che la sua norma sia 1).

Allora si dice che la funzione f è *"derivabile in $\underline{x_0}$ lungo la direzione orientata $\underline{v}$"* se esiste finito il limite

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\underline{x_0} + t\underline{v}) - f(\underline{x_0})}{t}$$

Se esiste finito tale limite, il *valore limite* si dice la *"derivata direzionale di f in $\underline{x_0}$ lungo $\underline{v}$"* e la si denota come

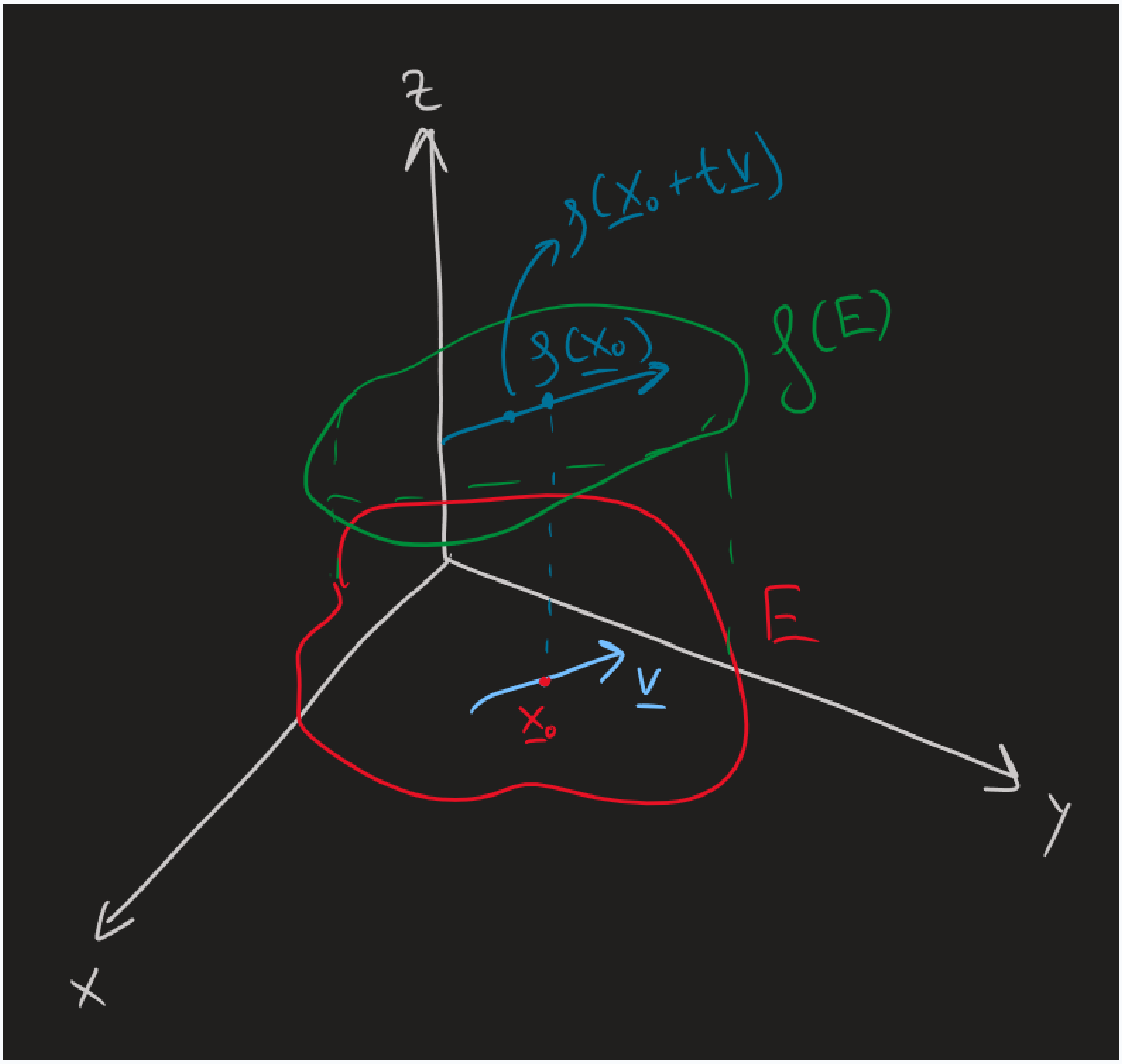
$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x_0})$$

#Osservazione

Osservazione (interpretazione geometrica).

> Similmente alle *derivate per le funzioni per una variabile reale*, stiamo prendendo il *"rapporto incrementale"* di f e la stiamo dividendo per l'intervallo t che diventa piccolo a piacere, ottenendo così la *pendenza* della retta (1); in questo caso stiamo *"bloccando"* la direzione per il rapporto incrementale tende al valore $f(\underline{x_0}+t\underline{v}) \to f(\underline{x_0})$, prendendo la direzione del versore $\underline{v}$ (*figura 1.1.*).

FIGURA 2.1. (*Interpretazione geometrica della derivata direzionale*)



2. Esempi della Derivata Direzionale

#Esempio

> Esempio.
>
> Sia $f(x,y)=x+y^2$, sia $\underline{x_0}=(1,2)$ e sia

$$\underline{v} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Vogliamo calcolare la derivata direzionale

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x_0})$$

i. Per calcolare questa derivata, bisogna valutare il valore $\underline{x_0} + t\underline{v}$, al variare di $t \in \mathbb{R}$.

$$\underline{x_0} + t\underline{v} = \left(1 + t\frac{\sqrt{2}}{2}, 2 + t\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

ii. Adesso valutiamo il rapporto incrementale

$$\begin{aligned}
&\lim_{t \to 0} \frac{f(\underline{x_0} + t\underline{v}) - f(\underline{x_0})}{t} \\
=&\lim_{t \to 0} \frac{1 + t\frac{\sqrt{2}}{2} + 4 + 2(2)t\frac{\sqrt{2}}{2} + t^2\frac{2}{4} - 1 - 4}{t} \\
=&\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{4}{t} + 2\sqrt{2} + \frac{1}{2}t - \frac{1}{t} - \frac{4}{t} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\sqrt{2}
\end{aligned}$$

allora ho la risposta

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x_0}) = \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\sqrt{2}$$

A2. Derivata Parziale

Derivata Parziale

Definizione di derivata parziale per un campo scalare.

---

0. Voci correlate

- Derivata Direzionale

- Campo Scalare e Insieme di Livello

1. Definizione di Derivata Parziale

#Definizione

Definizione (derivata parziale per un campo scalare).

Sia $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ un *campo scalare*. Sia $\mathcal{E}$ *base canonica* per il dominio $\mathbb{R}^N$.
Denominiamo ogni elemento della base canonica come

$$\mathcal{E} = \{\underline{e}_1 \ldots, \underline{e}_N\} = \{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_N\}$$

Allora, prendendo un qualsiasi $\underline{v}_i$, si pone la *derivata parziale* come la *derivata direzionale* (qualora esista)

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}_i}(\underline{x}_0) := \lim_{t \to 0} \frac{f(x_{0;1}, \ldots, x_{0;i-1}, x_{0;i} + t, x_{0;i+1}, \ldots, x_{0;N}) - f(\underline{x}_0)}{t}$$
$$\iff \lim_{x_i \to x_{0;i}} \frac{f(x_{0;1}, \ldots, x_{0;i-1}, x_i, x_{0;i+1}, \ldots, x_{0;N}) - f(\underline{x}_0)}{x_i - x_{0;i}}$$

La denotiamo come

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}_0) = f_{x_i}(\underline{x}_0)$$

#Osservazione

Osservazione (interpretazione pratica).

Per una *comodità pratica*, possiamo vedere la *derivata parziale* come una *derivata in una variabile reale*, trattando x_i come la *sola variabile* e il resto come delle *costanti*. Applichiamo quest'osservazione con i seguenti esempi.

2. Esempi

#Esempio

Esempio (derivata parziale di campo scalare bidimensionale).

Sia $f(x, y)$ definita come $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 3x_1x_2 + 4x_2^5$.
Vogliamo calcolare la *derivata parziale* di f rispetto a x_1; scriviamo quindi

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = 2x_1 + 3x_2$$

#Esempio

Esempio (derivata parziale di un campo scalare tridimensionale).

Sia $f(x, y, z)$ definita come $f(x, y, z) = x^2 + xz + zy + z^5$. Allora abbiamo

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + z$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = y$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = x + y + 5z^4$$

Notare che

$$\frac{\partial f}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0 \neq 1 = \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

A3. Differenziale di Campi Scalari

Differenziale di Campi Scalari

Definizione di differenziabilità per funzioni in più variabili. Definizione di differenziale. Caso $N = 1$. Proprietà del differenziale di una funzione.

---

0. Voci correlate

- Formula di Taylor
- Definizione di Continuità di Funzione in più variabili
- Derivata Direzionale
- Topologia in RN

1. Definizione di Differenziabilità di una Funzione

#Definizione

Definizione (funzione differenziabile in un punto).

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$, con A aperto (1) e $\underline{x}_0 \in A$.
Si dice che f è *"differenziabile in $\underline{x}_0 \in A$"* se esiste un'*operatore lineare* $L_{\underline{x}_0}$ del tipo

$$L_{\underline{x}_0}; \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$$

tale che valga

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} \frac{f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0) - L_{\underline{x}_0}(\underline{x} - \underline{x}_0)}{\|\underline{x} - \underline{x}_0\|} = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0) + L_{\underline{x}_0}(\underline{x} - \underline{x}_0) + o(\|\underline{x} - \underline{x}_0\|)$$

(*ovvero se il resto è un o-piccolo della norma* $\|\underline{x} - \underline{x}_0\|$)

Se la funzione f è *differenziabile*, l'operatore $L_{\underline{x}_0}$ si dice *"differenziale di f in $\underline{x}_0$"* e la si indica come

$$L_{\underline{x}_0} = \mathrm{d}f_{\underline{x}_0}$$

2. Esempi di differenziali

#Osservazione

Osservazione (caso $N = 1$).

In $\mathbb{R}$ ho il *differenziale* $\mathrm{d}f_{x_0} = f'(x_0)$. Infatti, prendendo la *formula di Taylor* per f col resto in forma di *Peano*, ho

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R(x)$$

dove $R = o(x - x_0)$ (quindi il resto è un *o-piccolo*, come voluto dalla definizione).

Allora ho $\mathrm{d}f_{x_0}$ come una funzione definita come

$$\mathrm{d}f_{x_0}(x) = f'(x_0)(x)$$

(*sempre ammessa se esista* $f'(x_0)$*!*)

3. Proprietà del differenziale

#Teorema

Teorema (proprietà del differenziale).

> Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$, con A aperto e $\underline{x}_0 \in A$. Allora valgono le seguenti.
>
> i. Se f è *differenziabile* in $\underline{x}_0$, allora f è *continua* in $\underline{x}_0$; ovvero vale il limite
>
> $$\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0)$$
>
> ii. Se f è *differenziabile* in $\underline{x}_0$, allora vale la seguente relazione tra il suo *differenziale* e la sua *derivata direzionale*;
>
> $$\forall \underline{v} \in \mathbb{R}^N, \boxed{\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x}_0) = \mathrm{d}f_{\underline{x}_0}(\underline{v})}$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 3 (proprietà del differenziale)

i. Osserviamo preliminarmente che il differenziale ha il seguente limite:

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} \mathrm{d}f_{\underline{x}_0}(\underline{x} - \underline{x}_0) = 0$$

Infatti, per il *teorema di Riesz* (Teorema 3 (di Riesz finito dimensionale)), e per la *disuguaglianza di Cauchy-Schwarz* (Teorema 3 (disuguaglianza di Cauchy-Schwarz)) ho

$$\mathrm{d}f_{\underline{x}_0}(\underline{x} - \underline{x}_0) = \langle \underline{a}, \underline{x} - \underline{x}_0 \rangle \leq \|\underline{a}\| \cdot \|\underline{x} - \underline{x}_0\|$$

dove $\underline{a}$ è un *vettore fisso* (di conseguenza la sua *norma* è un *valore fisso*) e la norma di $\underline{x} - \underline{x}_0$ tende a 0, per $\underline{x} \to \underline{x}_0$.

Adesso basta prendere l'ipotesi iniziale, per cui f si può esprimere come

$$f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0) + \mathrm{d}f_{\underline{x}_0}(\underline{x} - \underline{x}_0) + o(\|\underline{x} - \underline{x}_0\|)$$

da cui consegue il limite

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f(\underline{x}) = \lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f(\underline{x}_0) + \underbrace{\mathrm{d}f_{\underline{x}_0}(\underline{x} - \underline{x}_0)}_{\to 0} + \underbrace{o(\|\underline{x} - \underline{x}_0\|)}_{\to 0} = f(\underline{x}_0)$$

che è la tesi.

ii. Sia $t \geq 0$. Notiamo che per la differenziabilità di f abbiamo

$$f(\underline{x}_0 + t\underline{v}) = f(\underline{x}_0) + \mathrm{d}f_{\underline{x}_0}(t\underline{v}) + o(\|t\underline{v}\|) = \ldots + o(|t|)$$

Allora, prendendo il suo rapporto incrementale ho

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}\frac{f(\underline{x}_0+t\underline{v})-f(\underline{x}_0)}{t} &= \lim_{t\to 0}\frac{\mathrm{d}f_{x_0}(t\underline{v})+o(|t|)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{t\cdot \mathrm{d}f_{x_0}(\underline{v})+o(|t|)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0}\mathrm{d}f_{x_0}(\underline{v})+\frac{o(|t|)}{t} \\
&= \mathrm{d}f_{x_0}(\underline{v})
\end{aligned}
$$

che è la tesi. ■

#Osservazione

> Osservazione (possiamo usare il teorema di Riesz).
>
> Notiamo che se chiamo il differenziale $L = df_{\underline{x}_0}$ allora posso usare il *teorema di rappresentazione di Riesz* (1). Infatti se definisco un vettore $\mathbb{A} = (a_1, \ldots, a_N) \in \mathbb{R}^N$, allora posso dire che questa *rappresenta* il differenziale L. Allora, scegliendo un qualsiasi vettore v ho
>
> $$\langle \mathbb{A}, v\rangle = a_1 v_1 + \ldots + a_N v_N = L(\underline{v})$$
>
> Adesso, usando la proprietà *ii.* (2) del differenziale ho l'uguaglianza importante
>
> $$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}} = L(\underline{v})$$
>
> ovvero il *"differenziale di f applicato su $\underline{v}$ è la derivata direzionale lungo $\underline{v}$"*.

A4. Gradiente

Gradiente di Campi Scalari

Gradiente per campi scalari: corollario preliminare, definizione di gradiente. Osservazioni sul gradiente: formula del gradiente, formula di Taylor al primo ordine, l'equazione del piano tangente. Proprietà del gradiente.

---

0. Voci correlate

- Differenziale di Campi Scalari
- Formula di Taylor

- Norma Euclidea in RN

1. Corollario Preliminare

Giustificazione. Prima di definire il *gradiente per una funzione*, enunciamo il seguente teorema per assicurarci che la definizione a venire sarà *ben posta*.

#Corollario

Corollario (l'esistenza delle derivate parziali per funzioni differenziabili).

Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ un *campo scalare*.
Se f è *differenziabile* in un vettore $\underline{x_0}$ allora esistono le tutte le *derivate parziali*, che godono della seguente uguaglianza.

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{e_i}} = \frac{\partial f}{\partial x_i} = L(\underline{e_i}) = e_i$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Corollario 1 (l'esistenza delle derivate parziali per funzioni differenziabili)
Basta vedere l'osservazione sulle proprietà del differenziale dei campi scalari, usando il teorema di Riesz finito-dimensionale (Osservazione 4 (possiamo usare il teorema di Riesz)). In questo caso abbiamo

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = L(\underline{e_i}) = \langle \underline{e_i}, \mathbb{A} \rangle = 0 + \ldots + \underline{e_i}_i a_i + 0 + \ldots + 0 = e_i$$

Che è la tesi. ■

2. Definizione di Gradiente

Adesso siamo pronti per *definire* il *gradiente* per una funzione *differenziabile*.

#Definizione

Definizione (gradiente di una funzione differenziabile).

Sia f un *campo scalare* in $\mathbb{R}^N$ differenziabile nel punto $\underline{x_0}$. Si dice il *"gradiente"* di f nel punto $\underline{x_0}$ come il vettore definito come

$$\nabla f(\underline{x_0}) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x_0}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_N}(\underline{x_0}) \right)$$

ovvero formato dalle *derivate parziali* di f nel punto $\underline{x_0}$.

> Si può dare una definizione globale della funzione estendendo a più punti del dominio.

3. Formule sul Gradiente

Osservazioni. Con tale *definizione* del gradiente, siamo in grado di dare molte osservazioni su quest'ultimo oggetto, dato che presenta delle peculiarità.

#Osservazione

> Osservazione (il gradiente rappresenta il differenziale).
>
> Come prima osservazione si vede che il *gradiente* ∇f rappresenta il *differenziale* di questa funzione, che in particolare è *uguale* alla derivata direzionale su $\underline{v}$ (1). Ovvero, abbiamo l'uguaglianza
>
> $$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x_0}) = \langle \nabla f(\underline{x_0}), \underline{v} \rangle}$$
>
> Questa formula si dice come *"la formula del gradiente"*.
>
> Inoltre, notiamo che se la funzione è *non-differenziabile*, allora *di solito* non vale la formula del gradiente. Per convincerci di questo vedere la seguente funzione:
>
> $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

#Osservazione

> Osservazione (formule relative al gradiente).
>
> Per l'osservazione posta sopra abbiamo che il differenziale $L = df_{\underline{x_0}}$ gode della seguente uguaglianza:
>
> $$L(\underline{h}) = \langle \nabla f(\underline{x_0}), \underline{h} \rangle$$
>
> Da queste nascono le seguente formule:
> i. *formula di Taylor al primo ordine*
>
> $$\boxed{f(\underline{x}) = f(\underline{x_0}) + \langle \nabla f(\underline{x_0}), \underline{x} - \underline{x_0} \rangle + o(\|\underline{x} - \underline{x_0}\|)}$$
>
> (ricordiamoci che la notazione *o-piccolo* vuol dire che al tendere di $\underline{x} \to \underline{x_0}$ abbiamo la norma della differenza si annulla, 1).

ii. *l'equazione del piano tangente*: Per $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, abbiamo

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

iii. *l'equazione del piano tangente*: Sia $g(x) = f(x, y_0)$ con y_0 fissato, allora

$$g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y} \ldots}_{=0}$$

4. Proprietà del Gradiente

Adesso vediamo alcune *proprietà* del gradiente, utili per la *massimizzazione* e *minimizzazione* in più variabili.

#Teorema

Teorema (proprietà del gradiente).

Sia f differenziabile in $\underline{x}_0$, col suo gradiente non-nullo; ovvero $\nabla f(\underline{x}_0) \neq \underline{x}_0$. Sia $\underline{v}$ un versore.
Allora valgono le seguenti:
i. *massima del gradiente*

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x}_0) \text{ è massima se } \underline{v} = \frac{\nabla f(\underline{x}_0)}{\|\nabla f(\underline{x}_0)\|}$$

ii. *minima del gradiente*

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x}_0) \text{ è minima se } \underline{v} = -\frac{\nabla f(\underline{x}_0)}{\|\nabla f(\underline{x}_0)\|}$$

#Dimostrazione
DIMOSTRAZIONE del Teorema 5 (proprietà del gradiente)
Si tratta di usare la *disuguaglianza di Cauchy-Schwarz* (Teorema 3 (disuguaglianza di Cauchy-Schwarz)), per minorare la derivata parziale e prendere gli estremi. Abbiamo dunque

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x}_0) = \langle \nabla f(\underline{x}_0), v \rangle$$
$$-\|\nabla f(\underline{x}_0)\| \leq -\|\nabla f(\underline{x}_0)\| \cdot \|\underline{v}\| \leq \langle \nabla f(\underline{x}_0), v \rangle \leq \|\nabla f(\underline{x}_0)\| \cdot \|\underline{v}\| \leq \|\nabla f(\underline{x}_0)\|$$

Prendendo $\underline{v} = \frac{\nabla f(\underline{x}_0)}{\|\nabla f(\underline{x}_0)\|}$ ottengo l'uguaglianza

$$\nabla f(\underline{x_0})\|\cdot\|\underline{v}\| = \|\nabla f(\underline{x_0})\|$$

che prova la tesi. ■

A5. Teorema del Differenziale Totale

Teorema del Differenziale Totale

Teorema del differenziale totale: enunciato e idea della dimostrazione. Osservazione: abbiamo solo condizioni sufficienti (osservazione preliminare per definire le funzioni di classi C).

---

0. Voci correlate

- Definizione di Continuità di Funzione in più variabili
- Differenziale di Campi Scalari

1. Teorema del Differenziale Totale

Scopo. Col seguente teorema vogliamo dare delle *condizioni sufficienti* per la *differenziabilità* di una funzione in più variabili (in particolare *campi scalari*).

#Teorema

> Teorema (del differenziale totale).
>
> Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$, con A aperto.
> Se f ha le *derivate parziali* in A *continue* in un punto $\underline{x_0} \in A$, allora f è *differenziabile* in $\underline{x_0}$.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 1 (del differenziale totale)
Nota: questa è solo un'idea della dimostrazione
Dimostriamo il teorema per $N = 2$. Ho quindi una funzione del tipo $f(x, y)$.
Allora considero lo scarto $f(x, y) - f(x_0, y_0)$ che diventa $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$ considerando delle ampiezze h, k opportune. Adesso aggiungo e sottraggo per $f(x_0, y_0 + k)$ facendo diventare l'espressione in

$$\underbrace{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k)}_{A} + \underbrace{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}_{B}$$

Nel blocchi A, B ho *l'incremento in una singola variabile*. Allora posso usare il *teorema di Lagrange* (Teorema 1 (di Lagrange)) per dire che esistono $\pi, \tau \in (0,1)$ tali che otteniamo l'espressione

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \pi h, y_0 + k)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0 + \tau k)k$$

che prova la tesi, dato che abbiamo fatto comparire delle derivate parziali e abbiamo il limite del differenziale che tende al zero. ■

2. Osservazione

#Osservazione

> Osservazione (il teorema del differenziale totale ci dà solo una condizione sufficiente).
>
> Notiamo che questo teorema ci fornisce *solamente* una condizione sufficiente.
> Infatti esistono delle *funzioni* che sono *differenziabili* in un certo punto, ma le sue *derivate parziali* non sono continue.
>
> Per convincerci di questo prendiamo la seguente funzione in una variabile:
>
> $$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$$
>
> Trovo che esiste $f'(0)$ ma non è continua.

A6. Regole di Differenziazione

Regole di Differenziazione per Campi Scalari

Regole di differenziazione (relative al gradiente) per campi scalari. Teorema di Schwarz.

---

0. Voci correlate

- Gradiente di Campi Scalari
- Proprietà delle derivate

1. Regole di Differenziazione

Motivazione. Vogliamo rendere il gradiente ∇f (1) una specie di *"sostituto"* della *derivata* per funzione di una variabile reale: infatti, entrambe rappresentano delle *differenziali* per funzioni, per la formula del gradiente (2). Introduciamo dunque delle *regole* per calcolare i *gradienti* in una maniera più sistematica e meccanica, che sono simili alle *regole per derivazione in una variabile* (3).

#Teorema

Teorema (regole di differenziazione per campi scalari).

Siano $f, g : A \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ differenziabili su A. Allora valgono le seguenti regole.
i. La somma puntuale $f + g$ è differenziabile in A con

$$\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$$

ii. Il prodotto puntuale $f \cdot g$ è differenziabile in A con

$$\nabla(f \cdot g) = f \cdot \nabla g + g \cdot \nabla f$$

iii. Se g non si annulla in nessun punto del dominio, allora la divisione puntuale f/g è differenziabile con

$$\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$$

DIMOSTRAZIONE del Teorema 1 (regole di differenziazione per campi scalari)
Omessa: sono conti noiosi e non ci interessano. ■

A7. Teorema del Valor Medio

Teorema del Valor Medio Generalizzato

Teorema del valor medio (o di Lagrange) generalizzato su campi scalari in $\mathbb{R}^N$: enunciato, dimostrazione (idea). Corollario: le funzioni differenziabili sono lipschitziane.

---

0. Voci correlate

- Teorema di Lagrange
- Gradiente di Campi Scalari

1. Teorema di Lagrange Generalizzato

Generalizzazione. Adesso, vogliamo generalizzare alcuni risultati del *calcolo differenziale su una variabile*. In questo caso vogliamo estendere il *teorema di Lagrange* (1) su campi scalari $f: \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$.

#Teorema

Teorema (di Lagrange o del valor medio, generalizzato).

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ con A aperto e f differenziabile su A.
Allora possiamo definire g come la curva definita su A

$$g(t) = \underline{x} + t(\underline{y} - \underline{x}) \in A, \forall t \in [0, 1]$$

(in parole vogliamo che questo segmento rettilineo che parte da $\underline{x}$ e finisce in $\underline{y}$ faccia *sempre* parte dell'aperto A)

Inoltre esiste un numero $\sigma \in (0, 1)$ tale che

$$f(\underline{y}) - f(\underline{x}) = \langle \nabla f(\underline{x} + \sigma(\underline{y} - \underline{x})), \underline{y} - \underline{x} \rangle$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 1 (di Lagrange o del valor medio, generalizzato)
Nota: questa è un'idea della dimostrazione.
L'idea è quella di prendere il percorso g e applicarci il teorema del Lagrange su una dimensione (1). Per fare ciò dobbiamo *"preparare"* questa funzione per soddisfare i criteri del teorema e rendere comodo i calcoli.
Definiamo innanzitutto $h(t) = f(g(t))$, ovvero $h: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^N$. Abbiamo una situazione del tipo $h: [0, 1] \subset \mathbb{R} \to A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$.
Chiaramente si vede che h è una funzione *derivabile*, essendo f, g derivabili (2). Inoltre, sappiamo che vale

$$h'(t) = \langle \nabla f(g(t)), g'(t) \rangle$$

Infatti abbiamo $\nabla f(g(t)) = df(\underline{x_0})$ e $dg_t = g'(t)$.
Poi, trattando i vettori come delle costanti calcoliamo la derivata di g in t come

$$g'(t) = (y_1 - x_1, \dots, y_N - x_N) = \underline{y} - \underline{x}$$

Adesso possiamo finalmente applicare il teorema di Lagrange su h e abbiamo

$$\exists \xi \in (0, 1) : \frac{h(1) - h(0)}{1 - 0} = h'(\xi)$$

Che diventa

$$h(1) = f(g(1)) = f(\underline{y}); h(0) = f(\underline{x})$$

e anche

$$h'(\xi) = \underbrace{h(1) - h(0)}_{\underline{x}-\underline{y}} = \langle \nabla f(g(\xi)), \underline{y} - \underline{x} \rangle = \langle \nabla f(\underline{x} + \xi(\underline{y} - \underline{x})), \underline{y} - \underline{x} \rangle$$

che è la tesi. ■

2. Conseguenza del Teorema di Lagrange

#Osservazione

> Osservazione (le funzioni differenziabili sono localmente lipschitziane).
>
> Notiamo che con questo teorema possiamo provare che le funzioni differenziabili sono *localmente lipschitziane*, ovvero prendendo due punti $\underline{x}, \underline{y}$ abbiamo che il loro scarto è limitato per un valore limite L moltiplicato per la differenza della loro norma.
>
> Abbiamo infatti, per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz (1),
>
> $$\begin{gathered} \left| f(\underline{x}) - f(\underline{y}) \right| = \left| \langle \nabla f(\underline{x} + \xi(\underline{y} - \underline{x})), \underline{y} - \underline{x} \rangle \right| \\ \text{C.S.} \implies '' \leq \| \nabla f(\underline{x} + \xi(\underline{y} - \underline{x})) \| - \| \underline{x} - \underline{y} \| \end{gathered}$$
>
> allora possiamo prendere
>
> $$L = \sup_{\xi \in [0,1]} \nabla f(\underline{x} + \xi(\underline{y} - \underline{x}))$$
>
> come il valore-limite.

#Corollario

> Corollario (formalizzazione dell'osservazione precedente).
>
> Sia f una funzione differenziabile su A aperto. Allora è localmente lipschitizana sul dominio.

#Corollario

> Corollario (condizioni necessarie per funzioni costanti).
>
> Se $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ con A aperto e connesso, f differenziabile su A e tale che valga
>
> $$\nabla f(\underline{x}) = \underline{0}, \forall \underline{x} \in A$$

allora la funzione f è *costante in* A.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Corollario 4 (condizioni necessarie per funzioni costanti)

Si tratta di usare il *teorema del valor medio* (1), per cui si ha $f(\underline{x}) = f(\underline{y})$. Infatti, il prodotto scalare di un vettore nullo per un qualsiasi altro vettore è sempre nullo. Allora

$$f(\underline{x}) - f(\underline{y}) = 0 \implies f(\underline{x}) = f(\underline{y})$$

che è la tesi. ■

SEZIONE B. CALCOLO DIFFERENZIALE IN PIU' DIMENSIONI

B1. Differenziale di Funzione in più variabili

Differenziale di Funzioni in più Variabili

Generalizzazione delle nozioni di differenziabilità e differenziale di campi scalari a funzioni in più variabili. Definizione di derivata di Frèchet. Osservazione: non abbiamo singole equazioni, ma sistemi. Teorema: equazione equivalente per la differenziabilità di funzioni in più variabili.

---

0. Voci correlate

- Differenziale di Campi Scalari
- Sistemi Lineari
- Teorema di Riesz

1. Generalizzazione di Differenziabilità

Generalizzazione. Fino ad ora abbiamo definito le nozioni di *differenziabilità* e *differenziali* per *campi scalari* (1), ovvero funzioni del tipo $f: \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$. Adesso vogliamo generalizzare queste stesse nozioni a *funzioni in più variabili* (2), ovvero funzioni del tipo $f: \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M$. Per fare ciò useremo in particolare le nostre conoscenze sui *sistemi lineari* (3).

#Definizione

Definizione (differenziabilità di funzioni in più variabili e derivata di Frèchet).

Si dice che una funzione $f: A \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M$ è *differenziabile nel punto* $\underline{x_0} \in A$, con A *aperto*, se esiste un'operatore lineare $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$ tale che vale

$$f(\underline{x}) = f(\underline{x_0}) + L(\underline{x} - \underline{x_0}) + o(\|\underline{x} - \underline{x_0}\|)$$

L'operatore L si dice *"differenziale"*, oppure *"derivata di Frèchet"* di f in $\underline{x_0}$.

2. Osservazione con i sistemi lineari

#Osservazione

Osservazione (ho sistemi lineari).

Osserviamo che con l'equazione

$$f(\underline{x}) = f(\underline{x_0}) + L(\underline{x} - \underline{x_0}) + o(\|\underline{x} - \underline{x_0}\|)$$

Ho precisamente dei *sistemi lineari*, dal momento la funzione f si divide nelle sue singole componenti $f_1, \ldots, f_M$. Di conseguenza, per usare il *teorema di Riesz* (1) per trovare un rappresentante di L, devo usare una matrice.

Infatti, fissata una base $\mathcal{B}$ su $\mathbb{R}^N$ e un'altra base $\mathcal{C}$ su $\mathbb{R}^M$, ho il seguente:

$$\forall L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M), \exists! A \in M_{m,n}(\mathbb{R}) : L(\underline{h}) = A \cdot \underline{h}$$

Ovvero l'operatore è rappresentato dalla moltiplicazione riga per colonna di $A \cdot \underline{h}$.

3. Condizione Equivalente

Giustificazione. Vogliamo trovare delle *condizioni equivalenti* per la differenziabilità di funzioni in più variabili; in particolare delle condizioni che *leghino* le nozioni appena apprese sulla *differenziabilità di funzioni in più variabili* con le sue *singole componenti*, che sono dei *campi scalari*. Enunciamo il seguente teorema.

#Teorema

Teorema (condizione equivalente per la differenziabilità di funzioni in più variabili).

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M$. Sono equivalenti:
i. f è *differenziabile* in $\underline{x_0}$
se e solo se
ii. Ogni componente $f_i : A' \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ è *differenziabile* in $\underline{x_0}$, per $\forall i \in \{1, \ldots, M\}$.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 3 (condizione equivalente per la differenziabilità di funzioni in più variabili).
Questo teorema si basa sul fatto che la funzione f stessa è *definibile* mediante le sue singole componenti $f_1, \ldots, f_M$, quindi omessa. ■

B2. La Jacobiana

Matrice Jacobiana di Funzioni in più Variabili

La matrice Jacobiana: generalizzazione del gradiente dei campi scalari su funzioni in più variabili. Corollario preliminare: rappresentazione delle differenziali con matrice Jacobiana con basi standard.

---

0. Voci correlate

- Gradiente di Campi Scalari
- Matrice
- Differenziale di Funzioni in più Variabili

1. Corollario Preliminare

#Corollario

Corollario (corollario preliminare per la matrice Jacobiana).

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M$. Se f è *differenziale* in $\underline{x_0}$, allora esistono le derivate parziali

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\underline{x_0}), \forall i, j \in \{\{1, \ldots, M\} \times \{1, \ldots, N\}\}$$

2. Definizione di Matrice Jacobiana

Generalizzazione. Come fatto prima, vogliamo generalizzare la nozione di *gradiente* (1) su *funzioni in più variabili*, usando in particolare le *matrici* (2).

#Definizione

Definizione (matrice Jacobiana di una funzione).

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M$ differenziabile su $\underline{x_0} \in A$. Allora si definisce la sua *matrice Jacobiana* come la matrice formata dalle *derivate parziali* del campo scalare f_i sul versore x_j. In particolare, definiamo le entrate individuali come

$$(Jf(\underline{x_0}))_{ij} := \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\underline{x_0})$$

In forma estesa, la matrice Jacobiana è definita come

$$
Jf(\underline{x_0}) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\underline{x_0}) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N}(\underline{x_0}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_M}{\partial x_1}(\underline{x_0}) & \ldots & \frac{\partial f_M}{\partial x_N}(\underline{x_0}) \end{pmatrix} \in M_{M,N}(\mathbb{R})
$$

#Proposizione

Proposizione (formula della matrice jacobiana).

Vale che $df = Jf$.

B3. Differenziale delle Composte

Differenziale di Funzioni Composte in più Variabili

Generalizzazione della derivazione di funzioni composte $P \to N \to M$: differenziale di funzioni composte in più variabili. Esempi: caso $M = 1$, $M = P = 1$.

---

0. Voci correlate

- Proprietà delle derivate
- Matrice Jacobiana di Funzioni in più Variabili

1. Il Differenziale della Funzione Composta

Motivazione. Dato *due funzioni* che collegano *dimensioni diverse*, dandoci una situazione del tipo $P \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} M$, vogliamo trovare un modo per *collegare* il *differenziale della composta* di questa funzione con le *differenziali* delle *funzioni individuali*.

#Proposizione

Proposizione (differenziale della funzione composta di funzioni in più variabili).

Siano $g : B \subseteq \mathbb{R}^P \longrightarrow \mathbb{R}^N$ con B aperto e differenziabile in $\underline{u_0}$ e $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M$ con A aperto e differenziabile in $\underline{x_0}$ (per capire con cosa stiamo avendo a che fare vedere la *figura 1.1.*), allora definendo $h = f \circ g$ vale che h è *differenziabile* in $\underline{u_0}$ e vale l'uguaglianza

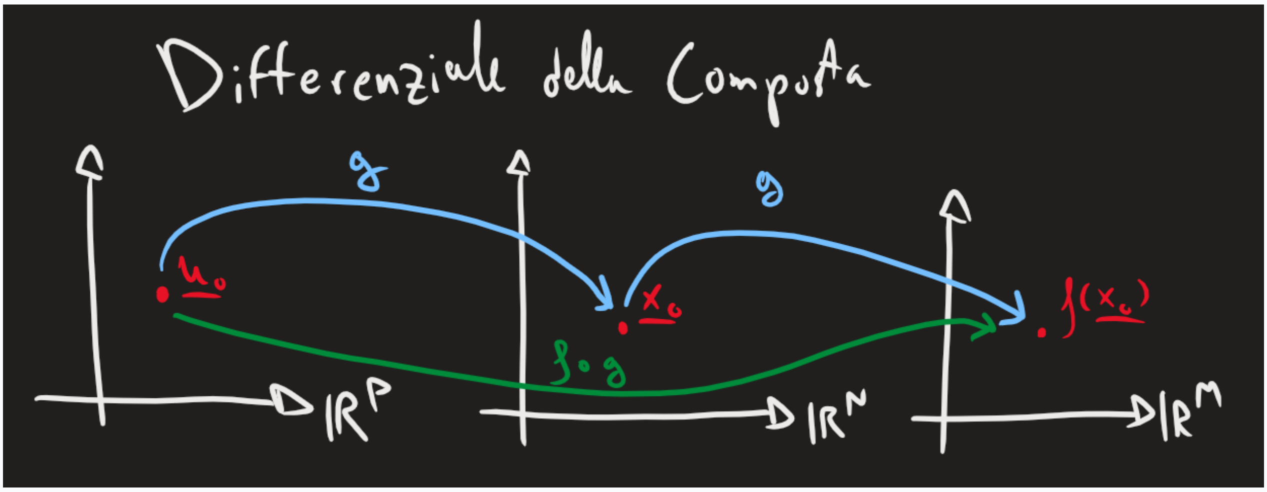
$$
dh_{\underline{u_0}} = df_{\underline{x_0}} \circ dg_{\underline{u_0}}
$$

ovvero

$$\underbrace{Jh_{u_0}}_{m\times p} = \underbrace{Jf_{x_0}}_{m\times n} \cdot \underbrace{Jg_{u_0}}_{n\times p}$$

Per esercizio scrivere la forma estesa (non ho voglia di farlo).

FIGURA 1.1. (*La situazione iniziale*)



2. Esempi del Differenziale della Composta

#Esempio

Esempio (caso $M = 1$).

Siano $g : \mathbb{R}^P \longrightarrow \mathbb{R}^N$ e $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$, entrambi differenziabili. Allora abbiamo $h := f \circ g : \mathbb{R}^P \longrightarrow \mathbb{R}$. Allora la Jacobiana Jh è una matrice del tipo $M_{1,P}(\mathbb{R})$, ovvero un *vettore* di dimensione P. Abbiamo infatti

$$Jh = \left(\frac{\partial h}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial h}{\partial u_P}\right) = \nabla f \cdot Jg$$

#Esempio

Esempio (caso scalare).

Sia $M = P = 1$, ovvero abbiamo una situazione del tipo $1 \to N \to 1$. Allora qui semplicemente abbiamo

$$Jh = \frac{d}{dt} h$$

che è uno *scalare*.

CALCOLO C. CALCOLO DIFFERENZIALE IN PIU' ORDINI

C1. Derivate di Ordine Superiore

Differenziabilità di Ordine Superiore su Campi Scalari

Estensione di concetto di derivata su campi scalari di ordine superiore: definizione di derivata seconda di una funzione in un punto nelle direzioni orientate. Definizione di derivata parziale secondo (o n-esimo) di una funzione rispetto a x_i, x_j. Modello di derivata parziale di secondo ordine.

---

0. Voci correlate

- Derivata Direzionale
- Derivata Parziale

1. Derivata Direzionale e Derivata Parziale Seconda

Preambolo. Vogliamo espandere le nozioni di *derivata direzionale* e *derivata parziale* di campi scalari f su più ordini; a parole, vogliamo essere in grado di definire la *"derivata seconda, terza, quarta, eccetera..."*.

#Definizione

Definizione (derivata seconda di una funzione in un punto lungo le due direzioni).

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$, con A aperto.
Sia $\underline{u} \in \mathbb{R}^N$ un versore (ovvero che abbia modulo 1) tale che esista la derivata direzionale $\frac{\partial f}{\partial \underline{u}}(\underline{x})$, per ogni punto di A: resta quindi definita la funzione $g = \frac{\partial f}{\partial \underline{u}}$ in A.
Sia $\underline{x_0} \in A$, sia $\underline{v} \in \mathbb{R}^N$ un altro versore.

Se esiste la derivata direzionale

$$\frac{\partial g}{\partial \underline{v}} = \frac{\partial}{\partial \underline{v}} \left(\frac{\partial f}{\partial \underline{u}} \right) (\underline{x_0})$$

allora quest'ultima si dice *"derivata seconda di f in $\underline{x_0}$ nelle direzioni orientate $\underline{v}, \underline{u}$"* e lo si indica con

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial \underline{v} \partial \underline{u}}(\underline{x_0})}$$

#Definizione

Definizione (derivata parziale seconda di una funzione in un punto rispetto a due variabili).

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ con A aperto e tale che esista la derivata parziale $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ per un qualsiasi punto in A. Sia $\underline{x_0} \in A$ fissato.

Se esiste la derivata parziale

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(\underline{x_0})$$

allora quest'ultima si dice *"derivata parziale seconda di f in $\underline{x_0}$ rispetto a x_i, x_j"* e lo si indica con

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\underline{x_0}) \iff f_{x_i x_j}(\underline{x_0})}$$

2. Estensione generalizzata

#Osservazione

Osservazione (estensione generalizzata dei concetti).

Analogamente (per induzione se vogliamo essere eleganti) possiamo estendere queste definizioni su $n \in \mathbb{N}$ per definire

$$\frac{\partial^n f}{\partial \underline{v_n} \partial \underline{v_{n-1}} \ldots \partial \underline{v_1}}, \frac{\partial^n f}{\partial x_n \ldots \partial x_1} \iff f_{x_1 \ldots x_n}$$

3. Esempio di Modello con Derivate Parziali

Esempio pratico. Adesso presentiamo un *esempio pratico* che presentano delle *derivate parziali di secondo ordine*.

#Esempio

Esempio (l'equazione della corda elastica oscillante).

Prendiamo una corda elastica, che oscilla. Prima di tutto notiamo che all'istante $t=0$ ho la configurazione $y=f(x)$. Dopodiché, ho che negli successivi istanti la configurazione è descritta dal sistema $\mathcal{E}_0$, che è la seguente:

$$(\mathcal{E}_0):\begin{cases}u(x,0)=f(x)\\ u_t(x,0)=0\\ u_{tt}(x,t)-c^2u_{xx}(x,t)=0\end{cases}$$

Dove $y=u(x,t)$ è lo *spostamento del punto di ascissa x al tempo* t. Se $f\in\mathcal{C}^2$ allora una soluzione per $(\mathcal{E}_0)$ può essere

$$u(x,t)=\frac{1}{2}(f(x+ct)+f(x-ct))$$

C2. Campi Scalare di Classe C

Campi Scalari di Classe C

Definizione di funzioni classi C in più variabili (campi scalari). Corollario: i campi scalari sono differenziabili.

---

0. Voci correlate

- Teorema del Differenziale Totale
- Derivata Successiva e Classe C

1. Definizione di Classe C1 per Campi Scalari

Motivazione. Vogliamo introdurre una *classe di funzioni* che sia un'estensione delle *funzioni classi C in una variabile* (1). Dato che conosciamo il *teorema del differenziale totale* (2), possiamo dare una *definizione ben posta* di classe C di campi scalari.

#Definizione

Definizione (campi scalari classe $\mathcal{C}^1$).

Si dice che una funzione $f:A\subseteq\mathbb{R}^N\longrightarrow\mathbb{R}$ è *"di classe $\mathcal{C}^1$ in A"* se f ammette le *derivate parziali continue* in A. In tal caso si scrive

$$f \in \mathcal{C}^1(A)$$

2. Proprietà Fondamentale di Classe C1

#Corollario

Corollario (proprietà delle funzioni di classe C).

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$. Allora vale la seguente implicazione

$$f \in \mathcal{C}^1(A) \implies f \text{ differenziabile su } A$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE. (Corollario 2 (proprietà delle funzioni di classe C))
Diretta conseguenza del teorema del differenziale totale (Teorema 1 (del differenziale totale)). ■

3. Definizione Generalizzata di Classe Ck

Motivazione. Adesso vogliamo generalizzare tale nozione di *"classe C1"* su *"classi CK"* con $\mathbb{N} \ni K > 1$.

#Definizione

Definizione (campi scalari di classe $\mathcal{C}^{K \in \mathbb{N} \geq 1}$).

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$, con A aperto. Sia $K \in \mathbb{N}, K \geq 1$.
Si dice che *"f è di classe $\mathcal{C}^K$"* se f è *dotata di tutte le derivate parziali* fino all'*ordine* K e sono *continue in* A.

In tal caso si scrive

$$f \in \mathcal{C}^K(A)$$

#Esempio

Esempio (classe C2 di una funzione in tre variabili).

Scrivere $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^2$ vuol dire

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \ldots, \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \text{ continue su } A$$

C3. Teorema di Schwarz

Teorema di Schwarz

Teorema di Schwarz: osservazione preliminare, enunciato e controesempio per i casi in cui non vale il teorema di Schwarz.

---

0. Voci correlate

- Campi Scalari di Classe C
- Differenziabilità di Ordine Superiore su Campi Scalari

1. Osservazione preliminare

#Osservazione

Osservazione.

Se avete svolto *l'esercizio sulla derivazione di funzioni di ordine* 2 (rif.), avrete notato che $f_{xy} = f_{yx}$. Questo non è un caso, infatti vedremo che è una condizione necessaria.

2. Teorema di Schwarz

#Teorema

Teorema (di Schwarz).

Se $f \in \mathcal{C}^2(A)$ (1), allora le derivata h-esime con $2 \leq h \leq k$ non dipendono dall'ordine seguito nell'eseguire la derivazione.

#Esempio

Esempio (caso $K = N = 2$).

Sia $K = N = 2$. Allora in questo caso ho

$$f \in \mathcal{C}^2(A) \implies \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\underline{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\underline{x}), \forall \underline{x} \in A$$

3. Controesempio

#Osservazione

> Osservazione (ci sono dei casi in cui non vale Schwarz).
>
> Esistono delle funzioni che non soddisfano le *ipotesi* del teorema di Schwarz. Infatti prendiamo la funzione di Peano definita come
>
> $$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, (x,y)\neq(0,0) \\ 0, (x,y)=(0,0)\end{cases}$$
>
> Si dimostra che questa funzione *non* appartiene a classe $\mathcal{C}^2$; infatti ho
>
> $$f_{xy}(0,0)=-1\neq f_{yx}(0,0)=1$$
>
> Lo svolgimento dei calcoli è stato lasciato per esercizio.

C4. Forme Lineari e Quadratiche

Forme Lineari e Quadratiche

Nomenclatura necessaria per la formula di Taylor del secondo ordine: forme lineari e forme quadratiche. Esempi, proprietà e lemma.

---

0. Voci correlate

- Definizione di Applicazione Lineare
- Prodotto Scalare in RN

1. Definizione di Forma Quadratica e Lineare

#Definizione

> Definizione (forma lineare).
>
> Sia $\underline{h}$ un vettore fissato. Un'applicazione lineare $L\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$ con

$$L(\underline{h})=\sum_{i=1}^{N}a_ih_i=\langle\underline{a},\underline{h}\rangle$$

è detta *"forma lineare"*.

#Definizione

Definizione (forma quadratica).

Un'applicazione $Q:\mathbb{R}^N\longrightarrow\mathbb{R}$ con

$$Q(\underline{h})=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}a_{ij}h_jh_i=\langle A\cdot\underline{h},\underline{h}\rangle$$

dove $A\in M_{N,N}(\mathbb{R})$ è una matrice con $(A)_{ij}=a_ij$ fissata, è detta *"forma quadratica"*.

#Esempio

Esempio (esempi di forme lineari e quadratiche).

Una forma lineare può essere $\underline{h}=(h_1,h_2)$ e quindi

$$L(\underline{h})=L(h_1,h_2)=\langle(a_1,a_2),(h_1,h_2)\rangle=a_1h_1+a_2h_2$$

Invece una forma quadratica è ad esempio

$$Q(h_1,h_2)=a_{11}h_1^2+(a_{12}+a_{21})h_2h_1+a_{22}h_2^2=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix}$$

2. Proprietà delle Forme Quadratiche

#Proposizione

Proposizione (proprietà delle forme quadratiche).

Sia $A\in M_{N,N}(\mathbb{R})$. Si ha che, scegliendo vettori arbitrari $\underline{h},\underline{k}\in\mathbb{R}^N$ ho le seguenti proprietà.
i. *"antisimmetria"*

$$\langle A\underline{h},\underline{k}\rangle=\langle{}^tA\underline{k},\underline{h}\rangle$$

ii. *"le forme quadratiche hanno sempre matrici simmetriche"*

$$Q(\underline{h}) = \left\langle \frac{1}{2}(A +^t A)\underline{k}, \underline{h} \right\rangle = \langle A_s \underline{k}, \underline{h} \rangle$$

Il secondo punto è dimostrabile con le proprietà del prodotto scalare (1).

#Lemma

Lemma (il differenziale delle forme lineari e quadratiche).

Si ha che:
i. Se ho $\underline{a} \in \mathbb{R}^N$ fissato, allora vale che

$$\forall \underline{h} \in \mathbb{R}^N, \nabla(\langle \underline{a}, \underline{h} \rangle) = \underline{a}$$

ii. Sia un $A \in M_{N,N}(\mathbb{R})$ fissato. Allora ho

$$\nabla(\langle A\underline{h}, \underline{h} \rangle) = 2A_s\underline{h},\ A_s = \frac{1}{2}(A +^t A)$$

C5. Funzioni due-volte Differenziabili

Funzione due-volte Differenziabile e Differenziale Secondo

Definizione di funzione due-volte differenziabile in un punto, definizione di matrice Hessiana di una funzione in un punto. Definizione di differenziale secondo.

---

0. Voci correlate

- Forme Lineari e Quadratiche
- Differenziale di Funzioni in più Variabili
- Differenziabilità di Ordine Superiore su Campi Scalari

1. Definizioni

#Definizione

Definizione (funzione due-volte differenziale, matrice Hessiana).

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ con A aperto e con f differenziabile su A. Sia $\underline{x_0} \in A$ un punto fissato. Pongo $g(\underline{x}) := \nabla f(\underline{x})$, ovvero $g : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$.

Se g è *differenziabile* in $\underline{x_0} \in A$, si dice che f è *"due volte differenziabile in $\underline{x_0}$"* e la matrice Jacobiana di $g = \nabla f$ si dice la *"matrice Hessiana di f in $\underline{x_0}$"* e la indichiamo con

$$Hf(\underline{x_0}) := Jg(\underline{x_0}) = J\nabla f(\underline{x_0})$$

che in forma estesa si scrive come

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(\underline{x_0}) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_N \partial x_1}(\underline{x_0}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_N}(\underline{x_0}) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_N \partial x_N}(\underline{x_0}) \end{pmatrix}$$

#Definizione

Definizione (differenziale secondo di una funzione in un punto).

Sia f una funzione *due-volte differenziabile* con $Hf(\underline{x_0})$ la sua matrice Hessiana. La *forma quadratica* (1) della matrice $Hf(\underline{x_0})$ definita come

$$Q(\underline{h}) = \langle Hf(\underline{x_0})\underline{h}, \underline{h} \rangle$$

si dice il *"differenziale secondo di f in $\underline{x_0}$"* e lo si denota come

$$(\mathrm{d}^2 f)(\underline{x_0})$$

2. Proprietà delle funzioni 2-volte differenziabili

#Teorema

Teorema (di Young).

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ con A aperto e con f 2-volte differenziabile in $\underline{x_0}$.

Allora la *matrice Hessiana* $Hf(\underline{x_0})$ è *simmetrica*, ovvero le *derivate miste* non *dipendono dall'ordine di derivazione*. Ovvero, vale che

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\underline{x_0}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\underline{x_0}), \forall i, j \in \{1, \dots, N\}^2$$

#Teorema

Teorema (condizione sufficiente per 2-volte differenziabilità).

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ con A aperto. Vale la seguente implicazione:

$$f \in \mathcal{C}^2(A) \implies f \text{ due volte differenziabile in } A$$

DIMOSTRAZIONE del Teorema 4 (condizione sufficiente per 2-volte differenziabilità)
Questa non è altro che la versione $N = 2$ del *teorema del differenziale totale* (1) sulla funzione g definita come $g := \nabla f$. ■

C6. Formula di Taylor del Secondo Ordine

Formula di Taylor del Secondo Ordine

Formula di Taylor del secondo ordine.

---

0. Voci correlate

- Formula di Taylor

1. Formula di Taylor del Secondo Ordine

#Teorema

Teorema (formula di Taylor del secondo ordine).

Se f è *due-volte differenziabile* in $\underline{x}_0$ allora vale che

$$\boxed{f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0) + \langle \nabla f(\underline{x}_0), (\underline{x} - \underline{x}_0)\rangle + \frac{1}{2}\langle Hf_{\underline{x}_0}(\underline{x} - \underline{x}_0), \underline{x} - \underline{x}_0\rangle + o}$$

con $o = o(\|\underline{x} - \underline{x}_0\|^2)$.

Capitolo 6. Curve e Superfici

Abstract del Capitolo 6

In questo capitolo si approfondisce il discorso sulle curve e superfici, che non sono altro che delle funzioni in più variabili particolari.

SEZIONE A. CURVE

A1. Curva in forma parametrica

Curva in Forma Parametrica

Richiamo alla definizione di curva in forma parametrica. Interpretazione cinematica delle curve parametriche. Esempi di curve in forma parametrica.

---

0. Voci correlate

- Curve e Superfici Parametriche

1. Definizione di Curva in Forma Parametrica

#Definizione

Definizione (curva in forma parametrica).

Sia $\gamma : I \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^N$ (dove $\mathcal{B}(E)$ è il boreliano di E, ovvero gli l'insieme degli intervalli nel caso dei numeri reali).

La coppia $(\gamma, \gamma(I))$ si dice *curva parametrica* in $\mathbb{R}$, di cui:

- γ si dice *rappresentazione parametrica*
- $\Gamma := \gamma(I)$ si dice *sostegno della curva*

Si può vedere la curva parametrica con l'*interpretazione cinematica* (1): la γ rappresenta l'informazione sul corpo puntiforme, $\gamma(I)$ la traiettoria del corpo.

#Definizione

Definizione (notazione).

Indicheremo le curve in $2D$ e $3D$ con le seguenti parametrizzazioni. Siano $x, y, t : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definiamo

$$N = 2 \implies \gamma(t) = (x(t), y(t))$$
$$N = 3 \implies \gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

2. Esempi di Curva in forma parametrica bidimensionale

#Esempio

Esempio (retta).

Ho

$$\gamma(t) := (2t+1, t-1)$$

ovvero $2y - x + 3 = 0$ in forma implicita. Ovvero, abbiamo una retta.

#Esempio

Esempio (circonferenza).

Consideriamo

$$\gamma(t) := (\cos t, \sin t)$$

Per $I = [0, 2\pi)$ e $I' = [0, 3\pi]$ ho sempre lo *stesso sostegno* γ, ma vedremo che hanno *proprietà diverse*.

Questa rappresenta una circonferenza. Infatti $x^2 + y^2 = 1$ rappresenta questa curva in forma implicita.

#Esempio

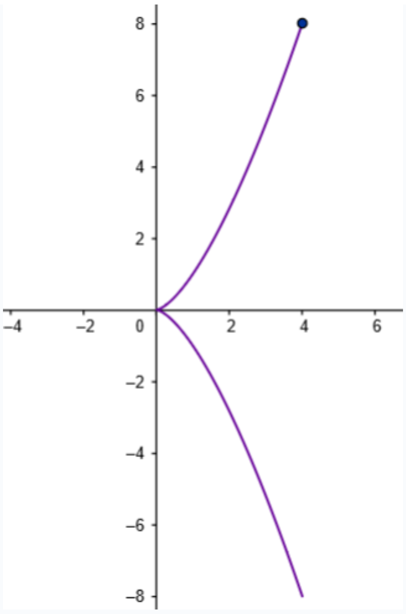
Esempio (curva).

Con

$$\gamma(t) := (t^2, t^3)$$

abbiamo per $I = [-1, 1]$ un sostegno del tipo nella *figura 2.1.*.

FIGURA 2.1.



3. Esempi di Curva in forma parametrica, tridimensionale

#Esempio

Esempio (spirali).

Consideriamo le curve nello spazio

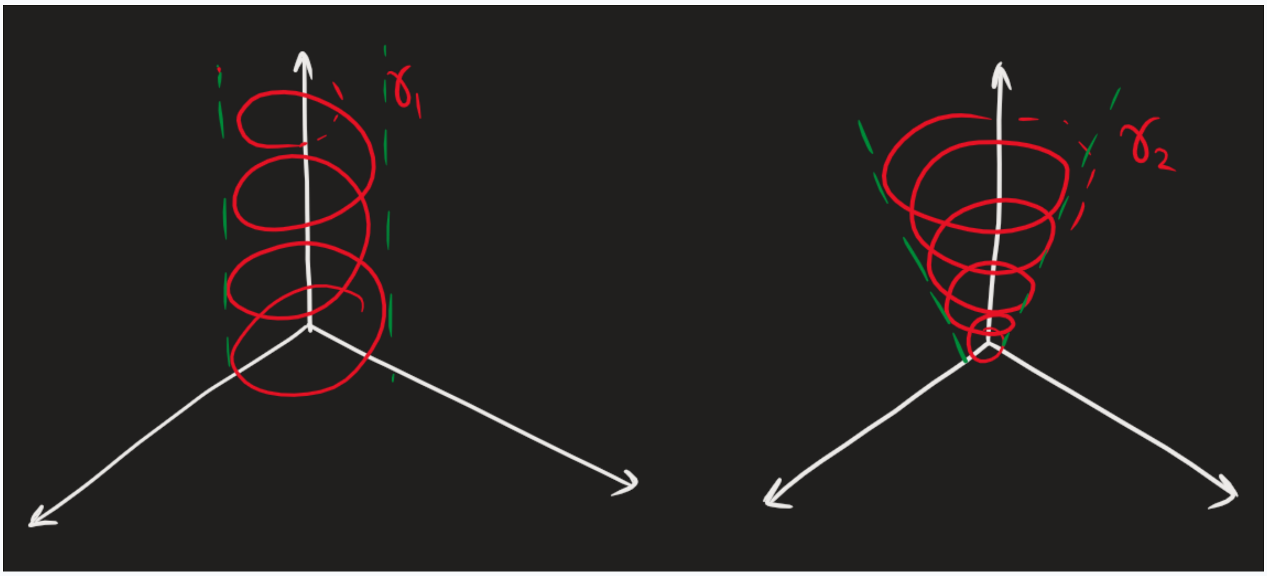
$$\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t, t)$$

e

$$\gamma_2(t) = (t \cos t, t \sin t, t)$$

abbiamo *due spirali*, una che *"cresce in maniera costante"*, l'altra che *"diventa sempre più grande"* (vedere *figura 3.1.*)

FIGURA 3.1.



Teniamo fissati questi esempi per la *classificazione delle curve*.

A2. Classificazione delle Curve Parametriche

Classificazione delle Curve in Forma Parametrica

Prima classificazione delle curve in f.p.. Curva chiusa e semplice.

---

0. Voci correlate

- Curva in Forma Parametrica

1. Curve chiuse e semplici

Diamo una prima classificazione di curve in f.p..

#Definizione

Definizione (curva chiusa e semplice).

Sia $\gamma : I \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^N$ una curva. Sia $a = \min I, b = \max I$ (a è il *"punto di partenza"*, b il *"punto finale"*)

Si dice che γ è *chiusa* se vale che

$$\gamma(a) = \gamma(b)$$

Si dice che è *semplice* se vale che

$$t_1 \neq t_2 \land t_1, t_2 \in I^\circ \implies \forall (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2, \gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$$

ovvero abbiamo una specie di *"iniettività"* per i punti interni.

2. Esempi di Classificazione

#Esempio

Esempio (la circonferenza non è regolare su certi intervalli).

Riprendiamo la circonferenza definita come

$$\gamma = (\cos t, \sin t)$$

> Se si ha $I = [0, 2\pi)$ allora la curva è *chiusa* e *semplice*. Infatti
>
> $$\gamma(0) = 0, \gamma(2\pi) = 0$$
>
> Tuttavia se si sceglie $I' = [0, 3\pi]$ allora la curva non è ne *chiusa* ne *semplice*. Infatti
>
> $$\gamma(0) \neq \gamma(3\pi), \gamma(0.1) = \gamma(2\pi + 0.1)$$

Questo discorso ci interessa relativamente, la classificazione più interessante è quella delle *curve regolari* (1).

A3. Curve Regolari

Curve Regolari

Definizione di curva regolare. Rappresentazione delle curve regolari: forma parametrica, forma cartesiana e forma polare. Definizioni relative alle curve in forma parametrica: vettore tangente e versore tangente.

---

0. Voci correlate

- Curve e Superfici Parametriche
- Campi Scalari di Classe C
- Definizione di Continuità di Funzione in più variabili

1. Curva Regolare, Vettore e Versore Tangente

Vediamo le *curve "meno schifose"*, che ammettono elementi come *versori-tangenti*.

#Definizione

> Definizione (curva regolare).
>
> Una curva in *forma parametrica* $\gamma : I \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^N$ si dice *regolare* se soddisfa i seguenti criteri.
>
> - *Differenziabilità e continuità della curva*
>
> $$\gamma \in \mathcal{C}^1(I) \iff \exists \gamma'(t) \wedge \gamma'(t) \in \mathcal{C}^0$$
>
> - *Il vettore tangente non si annulla mai*

$$\gamma'(t) \neq (0,0), \forall t \in I^\circ$$

In tal caso, $\gamma'(t)$ si dice *vettore tangente* e normalizzandolo otteniamo il *versore tangente* $\tau(t)$, ovvero

$$\tau_\gamma(t) := \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$$

2. Curva Regolare in Forma Cartesiana

Avendo una *curva regolare*, è possibile avere che questa curva sia ancora *"più bella"*. Chiameremo queste curve come *"curve regolari in forma cartesiana"*. La definiamo *per costruzione*, partendo da una banale e semplice funzione su un intervallo.

#Definizione

Definizione (curva regolare in forma cartesiana, 2D).

Sia $f : I \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^1(I)$.

La *curva in forma parametrica* definita come

$$\gamma(t) := (t, f(t))$$

si dice *"curva regolare in forma cartesiana"*.

#Osservazione

Osservazione (proprietà della curva regolare).

Si deduce immediatamente che le *curve regolari in forma cartesiana* sono sia *semplici* che *regolari*.

Il fatto che la componente x sia formata da t garantisce la sia la *semplicità* che *regolarità*. Infatti

$$t_1 \neq t_2 \implies \gamma(t_1) = (t_1, f(t_1)) \neq (t_2, f(t_2)) = \gamma(t_2)$$

e

$$\gamma'(t) = (1, f'(t)) \neq (0,0)$$

3. Curva Regolare in Forma Polare

Adesso vediamo un altro caso particolare di *curva regolare*, che può diventare interessante a seconda del caso.

#Definizione

Definizione (curva regolare in forma polare).

Sia $\rho : I \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^1(I)$ tale che $\rho(\theta) \geq 0$ e vale che

$$\forall \theta \in I^\circ, (\rho(\theta))^2 + (\rho'(\theta))^2 > 0$$

Si dice *"curva regolare in forma polare"* la curva su I in forma parametrica definita come

$$\gamma(\theta) := (\rho(\theta)\cos\theta, \rho(\theta)\sin(\theta))$$

#Osservazione

Osservazione (la regolarità della curva).

La regolarità della curva deriva dal fatto che il *modulo della sua derivata sia positiva*. Infatti

$$\|\gamma'(\theta)\| = \sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2}$$

Imponendo la condizione iniziale, abbiamo

$$\|\gamma'(\theta)\| > 0 \implies \gamma'(\theta) \neq (0,0)$$

#Esempio

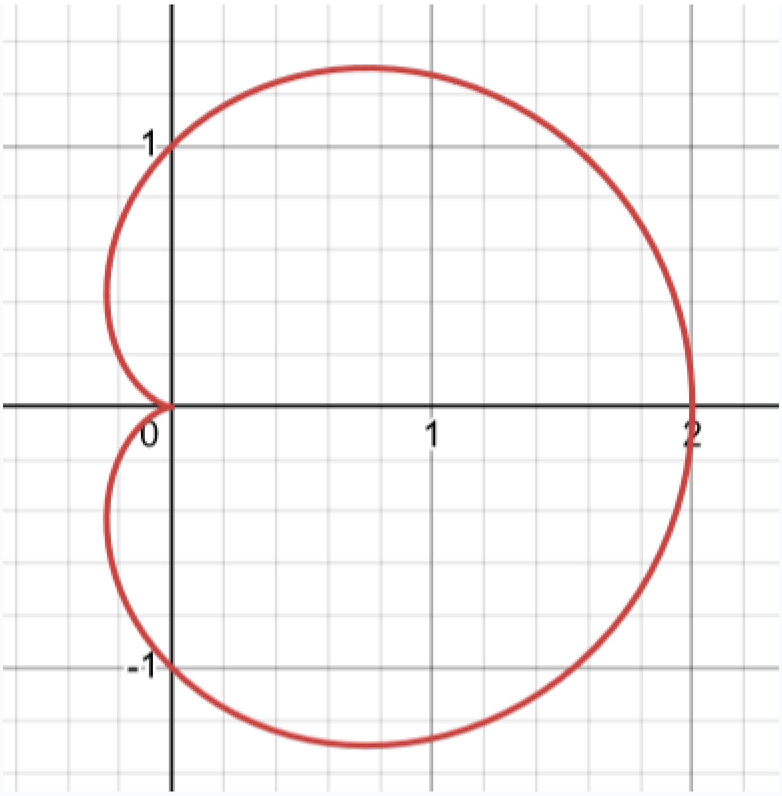
Esempio (cardiodide).

La curva

$$\gamma'(\theta) := ((1+\cos\theta)\cos\theta, (1+\cos\theta)\sin\theta)$$

con $I = [-\pi, \pi]$ forma un *cardioide*.

FIGURA 3.1. (*Il cardioide*)



A4. Curva Implicita

Curva in Forma Implicita

Definizione di curva in forma implicita. Punti singolari e regolari per curve implicite. Esempi.

---

0. Voci correlate

- Campo Scalare e Insieme di Livello
- Curve e Superfici Parametriche

1. Curva in Forma Implicita

Abbiamo appena visto le *curve in forma parametrica*, che spesso ci danno *molte informazioni*. Tuttavia, questo è solo uno dei *casi fortunati*; molto spesso ci capita di avere *curve* definite mediante equazioni, che sono *difficili* da trattare.

#Definizione

> Definizione (curva in forma implicita).
>
> Sia $\varphi : A \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ una *funzione in più variabili* (campo scalare), con A aperto.

Si definisce una *curva in forma implicita* come il *l'insieme di livello* (1) $L_0(\varphi)$.
Si definisce $\varphi(x_1, \ldots, x_N) = 0$ come la sua *"equazione di rappresentazione"*.

Ci interessa trovare un *legame* tra le *curve in forma implicita* e le *curve cartesiane* (ovvero in *forma parametrica*): il teorema del Dini ci darà una risposta a questo legame.

2. Punti regolari e singolari per Curve Implicite

Prima di enunciare il teorema del Dini, diamo un po' di nomenclatura per enunciare tale teorema.

#Definizione

Definizione (punto regolare e singolare per curva implicita).

Sia $L_0(\varphi)$ una *curva implicita* con $\varphi : A \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^1(A)$ e $\underline{x_0} \in L_0(\varphi)$ punto della *curva implicita*.

Si dice che:

- $\underline{x_0}$ è un *punto regolare* di $L_0(\varphi)$ se vale che $\nabla f(\underline{x_0}) \neq \underline{0}$
- $\underline{x_0}$ è un *punto singolare* di $L_0(\varphi)$ se vale che $\nabla f(\underline{x_0}) = \underline{0}$

3. Esempi di Curve Implicite

#Esempio

Esempio (curva).

Si ha che

$$\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

rappresenta la *curva implicita* definita come

$$L_0(\varphi) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

Intuitivamente ho la curva

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$$

Notiamo che $L_0(\varphi)$ non presenta *punti singolari*. Infatti ∇f si annulla solamente per $(x, y) = (0, 0)$ che non fa parte di $L_0(\varphi)$.

#Esempio

Esempio (due rette).

Si ha che

$$\varphi(x,y) = x^2 - y^2$$

Rappresenta *due rette* passante per l'origine, in verso opposto. Infatti abbiamo che $l_1 : y = x$ e $l_2 : y = -x$ risolvono $L_0(\varphi)$.

Qui abbiamo un punto singolare in $(0,0)$. Infatti $(0,0) \in L_0(\varphi)$ e $\nabla\varphi(0,0) = (0,0)$.

A5. Teorema del Dini

Teorema del Dini

Teorema del Dini (o delle funzioni implicite): enunciato, idea grafica.

---

0. Voci correlate

- Curva in Forma Implicita
- Curve Regolari
- Gradiente di Campi Scalari

1. Enunciato del teorema del Dini

Adesso vediamo un risultato importante per la parte sulle *curve e superfici*.

#Teorema

Teorema (della funzione implicita, o del Dini).

Sia $\varphi : A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^1(A)$ con A aperto. Sia $(x_0, y_0) = \underline{x_0} \in A$ un punto tale che

$$\varphi(\underline{x_0}) = 0, \nabla\varphi(\underline{x_0}) \neq 0$$

Allora esistono gli intorni $U(x_0)$ e $V(y_0)$ su cui sono definite le le funzioni $g : U \longrightarrow V$ o (vel) $h : V \longrightarrow U$ tali che

$$L_0(\varphi) \cap (U \times V) = \begin{cases} G(g) & \impliedby \varphi_y(\underline{x_0}) \neq 0 \\ G(h) & \impliedby \varphi_x(\underline{x_0}) \neq 0 \end{cases}$$

(Nota: $G(f(\cdot))$ indica *"grafico della funzione* f). In un senso geometrico, abbiamo che g, h sono delle *curve cartesiane*.

Inoltre si ha che possiamo calcolare le derivate di g, h come

$$g'(x) = -\frac{\varphi_x(x, g(x))}{\varphi_y(x, g(x))} \impliedby \varphi_y(\underline{x_0}) \neq 0$$
$$h'(x) = -\frac{\varphi_y(h(y), y)}{\varphi_x(h(y), y)} \impliedby \varphi_x(\underline{x_0}) \neq 0$$

In particolare la *retta tangente* a $L_0(\varphi)$ in $\underline{x_0}$ ha l'equazione

$$\varphi_x(\underline{x_0})(x - x_0) + \varphi_y(y - y_0) = 0$$

Ovvero il prodotto scalare

$$r_t : \langle \nabla \varphi(\underline{x_0}), \underline{x} - \underline{x_0} \rangle = 0$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 1 (della funzione implicita, o del Dini)

La prima parte è omessa. Si dimostra solo la formula per la *retta tangente*. Per dimostrarla si suppone che esista g, ovvero che $\varphi_y(\underline{x_0}) \neq 0$ (la dimostrazione è analoga nel caso dell'esistenza di h o entrambi); di conseguenza, abbiamo che la sua retta tangente è

$$y = \underbrace{g(x_0)}_{y_0} + g'(x_0)(x - x_0)$$

Allora, usando la formula per la derivata di g, abbiamo

$$y - y_0 = g'(x_0)(x - x_0) \iff (y - y_0) = -\frac{\varphi_x(\underline{x_0})}{\varphi_y(\underline{x_0})}(x - x_0)$$

che ci porta al risultato finale

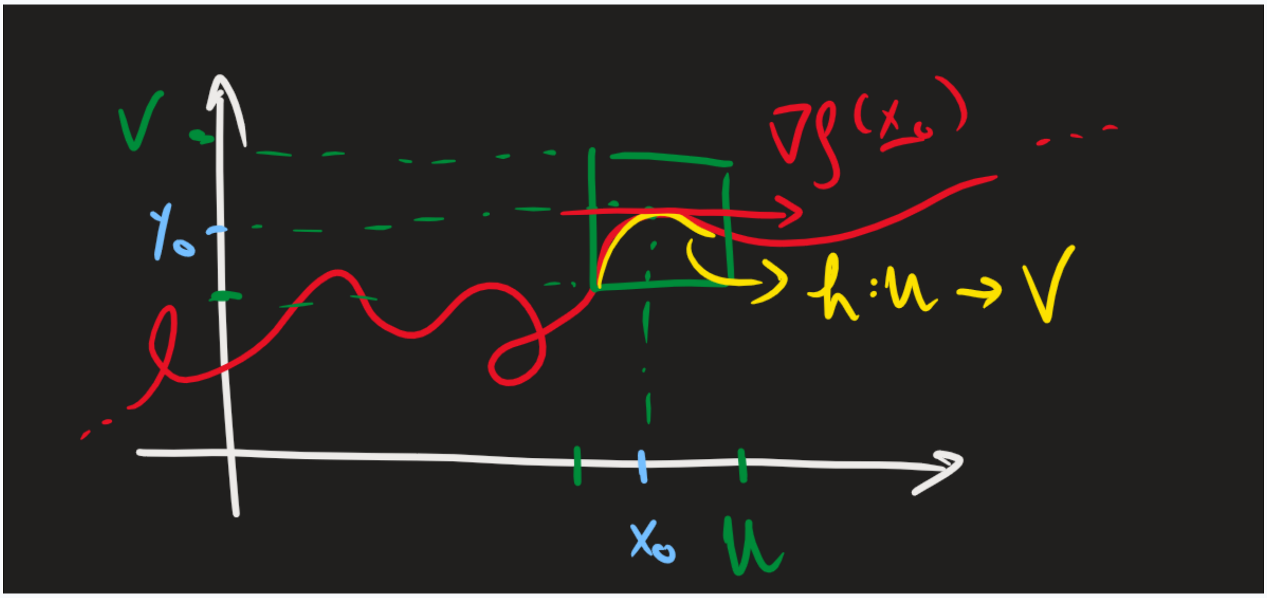
$$\boxed{\varphi_x(\underline{x_0})(x - x_0) + \varphi_y(\underline{x_0})(y - y_0) = 0}$$

che è la tesi. ■

2. Idea grafica del teorema del Dini

Adesso diamo un'idea grafica del *teorema del Dini*, in particolare la prima tesi (ovvero l'esistenza di g, h).

Caso g. Nel caso in cui esiste $g: U \longrightarrow V$ (in particolare senza h), abbiamo che la *derivata-vettore* $\nabla \varphi$ è *nulla* verticalmente, ma non orizzontalmente. In questo caso, possiamo tracciare il *"quadrato"* $U \times V$ in cui abbiamo una *funzione* (che deve mandare elementi di U ad uno e solo elemento di V).



#Osservazione

Osservazione (l'ipotesi cruciale).

Notiamo che l'*ipotesi essenziale* per la validità del *teorema del Dini* è quella della non-nullità del gradiente, $\nabla f \neq \underline{0}$.

In un certo senso, possiamo applicare il *teorema del Dini* anche in assenza del primo criterio (ovvero la funzione deve annullarsi in $\underline{x_0}$); infatti se avessimo $\varphi(\underline{x_0}) = c \in \mathbb{R} \diagdown \{0\}$, basta ridefinire la funzione come $\tilde{\varphi}(\underline{x}) := \varphi(\underline{x}) - c$.

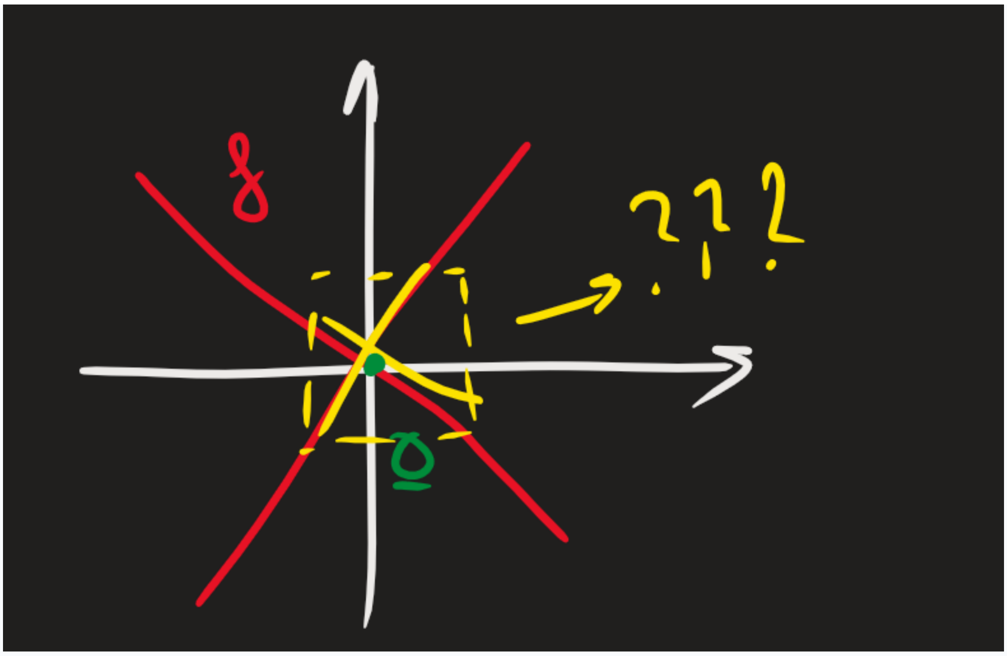
Invece, se avessi $\nabla f = \underline{0}$, non c'è nessun modo per salvarsi.

#Esempio

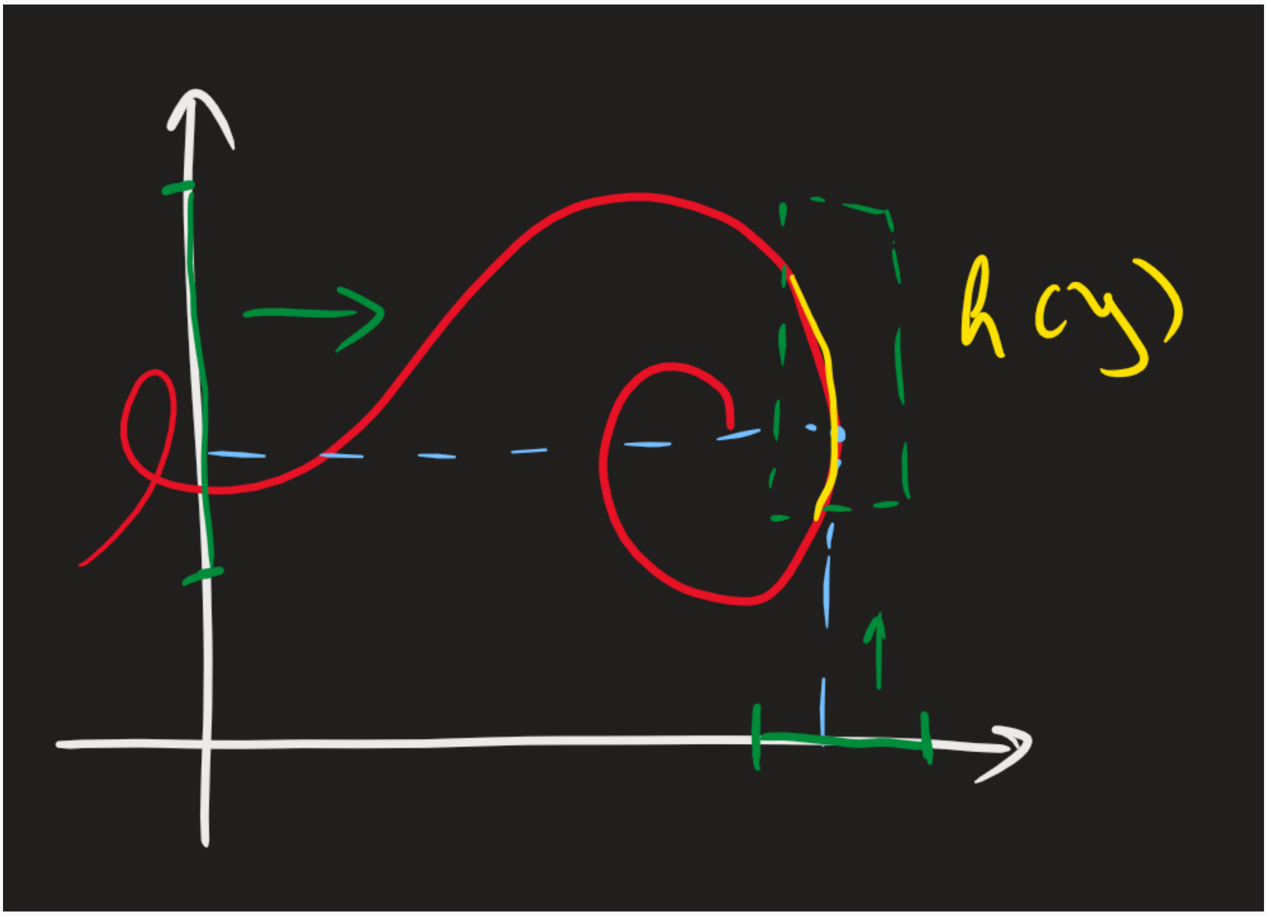
Esempio (esempio di funzione non-dinibile).

Abbiamo $f(x, y) = x^2 - y^2$. Per il *teorema del Dini* non si può essere sicuri di prendere un intorno di $(0, 0)$ tale da avere una *curva regolare*: infatti, è così. Se prendiamo il punto $\underline{0}$ e provassimo a considerare un suo qualsiasi quadrato, avrò sempre una *non-funzione* (che manda un elemento in più elementi: quindi una multifunzione).

FIGURA 3.1.



Caso h**.** Completamente analoga al caso g, solo che operiamo su una curva del tipo $f(y) = x$ (ovvero con assi invertiti).



Caso g, h**.** Se abbiamo l'esistenza sia di g che di h, allora abbiamo una *funzione invertibile* (biiettiva). Infatti, considerando la retta $f(x, y) = x - 2y$ abbiamo che possiamo *esplicitarla* come due curve:

$$L_0(f) \to \begin{cases} g(x) = \dfrac{x}{2} \\ h(y) = 2y \end{cases}$$

Infatti, troviamo che $(g \circ h)(\lambda) = (h \circ g)(\lambda) = \lambda$.

A6. Curve Regolari Implicite

Curve Regolari in Forma Implicita

Conseguenze del teorema del Dini: definizione di curva regolare in forma implicita a due dimensioni, osservazioni miste.

---

0. Voci correlate

- Curva in Forma Implicita
- Teorema del Dini
- Curve Regolari

1. Curve Regolari in Forma Implicita

Grazie al *teorema del Dini*, possiamo dare una definizione ben posta di *curva regolare in forma implicita*.

#Definizione

Definizione (curva regolare in forma implicita).

Sia $\varphi : A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^1(A)$ con A aperto, tale che soddisfi i seguenti criteri.

$$\begin{gathered}\Gamma := L_0(\varphi) \neq \emptyset \\ \nabla f(x_0, y_0) \neq 0, \forall (x_0, y_0) \in \Gamma\end{gathered}$$

La coppia $(\varphi, L_0(\varphi))$ si dice *curva regolare in forma implicita*, di cui $\varphi(x, y) = 0$ si dice *l'equazione* e Γ il *sostegno*.

2. Proprietà delle Curve Regolari in Forma Implicita

Dal *teorema del Dini* abbiamo che queste curve possiedono delle proprietà particolari.

#Osservazione

Osservazione (conseguenze del teorema del Dini).

Sia $(\varphi, L_0(\varphi))$ una *curva regolare in f.i.*. Allora abbiamo che:

1. La retta tangente su un punto $\underline{x_0} \in \Gamma$ esiste e lo si calcola con

$$\langle \nabla \varphi(\underline{x_0}), \underline{x} - \underline{x_0} \rangle = 0$$

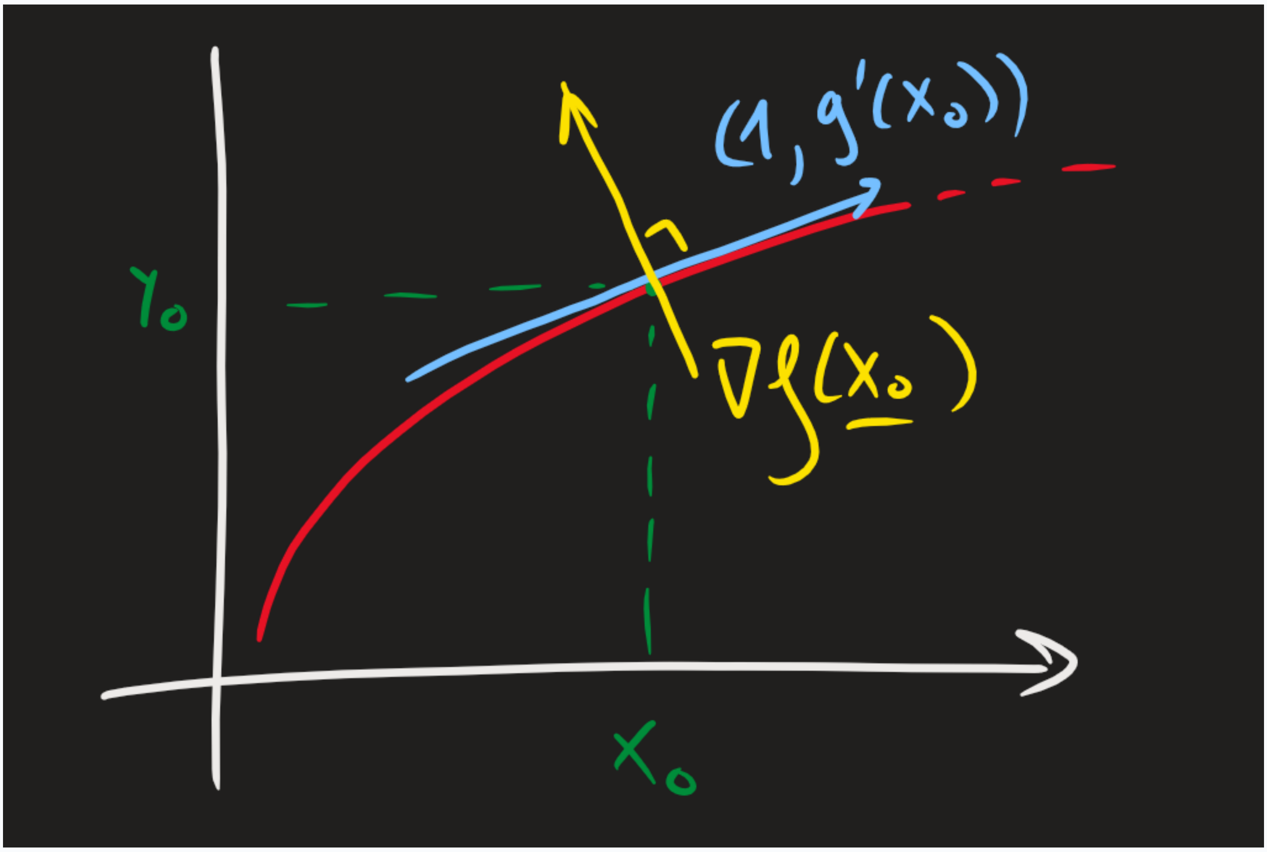
2. Supponendo g la sua *curva* in funzione delle asse x (ovvero ho una funzione del tipo $y = g(x)$, allora ho che

$$g'(x_0) = -\frac{\varphi_x(\underline{x_0})}{\varphi_y(\underline{x_0})} \implies \varphi_y(\underline{x_0})g'(x_0) + \varphi_x(\underline{x_0}) \cdot 1 = 0$$
$$\implies \langle \nabla \varphi(\underline{x_0}), (1, g'(x_0)) \rangle = 0$$

Geometricamente, con la *2* abbiamo che il *vettore* $\nabla \varphi$ è *sempre* ortogonale al vettore $(1, g'(x_0))$, che rappresenta il *vettore tangente* a $\underline{x_0}$.

Infatti, abbiamo che $\nabla \varphi(\underline{x})$ è *ortogonale* alle *linee di livello* φ in $\underline{x_0}$. Il ragionamento vale in una maniera analoga per l'esistenza di $x = h(y)$.

FIGURA 2.1.



SEZIONE B. SUPERFICI

B1. Superficie Regolare Parametrica

Superficie Regolare in Forma Parametrica

Approfondimenti sulle superfici. Definizione di superficie regolare semplice in forma parametrica.

---

0. Voci correlate

- Curve e Superfici Parametriche

1. Definizione di Superficie Regolare e Semplice in f.p.

#Definizione

> **Definizione (superficie regolare e semplice in forma parametrica).**
>
> Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto e connesso. Sia σ la parametrizzazione su A, definita come tale
>
> $$\sigma : K = \overline{A} \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
>
> ovvero $\sigma(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ con $x, y, z : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.
>
> Si dice che:
> i. σ è *semplice* se è *continua* nell'interno di K $(\sigma \in \mathcal{C}^1(K^\circ))$, e le sue derivate parziali σ_u, σ_v sono estendibili con continuità fino al bordo (la frontiera) di K.
> ii. σ è *regolare* se vale che σ_u e σ_v sono *sempre linearmente indipendenti* in K°, ovvero che vale
>
> $$\forall (u, v) \in K^\circ, \sigma_u(u, v) \times \sigma_v(u, v) \neq \underline{0}$$
>
> iii. terza condizione
>
> $$\underline{u_1}, \underline{u_2} \in K^\circ \wedge \underline{u_1} \neq \underline{u_2} \implies \sigma(\underline{u_1}) \neq \sigma(\underline{u_2})$$
>
> Se valgono tutte e tre le condizioni, allora la coppia $(\sigma, \sigma(K))$ si dice *"superficie regolare semplice in forma parametrica"* di cui σ è la *rappresentazione parametrica* e $\Sigma := \sigma(K)$ il *sostegno*.

#Esempio

Esempio (la sfera).

La funzione

$$\sigma(\theta, \varphi) = (R \sin \theta \cos \varphi, R \sin \theta \sin \varphi, R \cos \theta)$$

con $K = [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ si ha una *sfera*. Si verifica che è *regolare* e *semplice*.

2. Definizioni relative alle Superfici Regolari

Introduciamo un paio di nozioni *relative* alle superfici regolari, utili per l'ottimizzazione vincolata.

#Definizione

Definizione (linee coordinate).

Sia $\Sigma = (\sigma, \sigma(K))$ una *superficie regolare semplice in forma parametrica* e $(u_0, v_0) = \underline{u_0} \in K$ fissato.

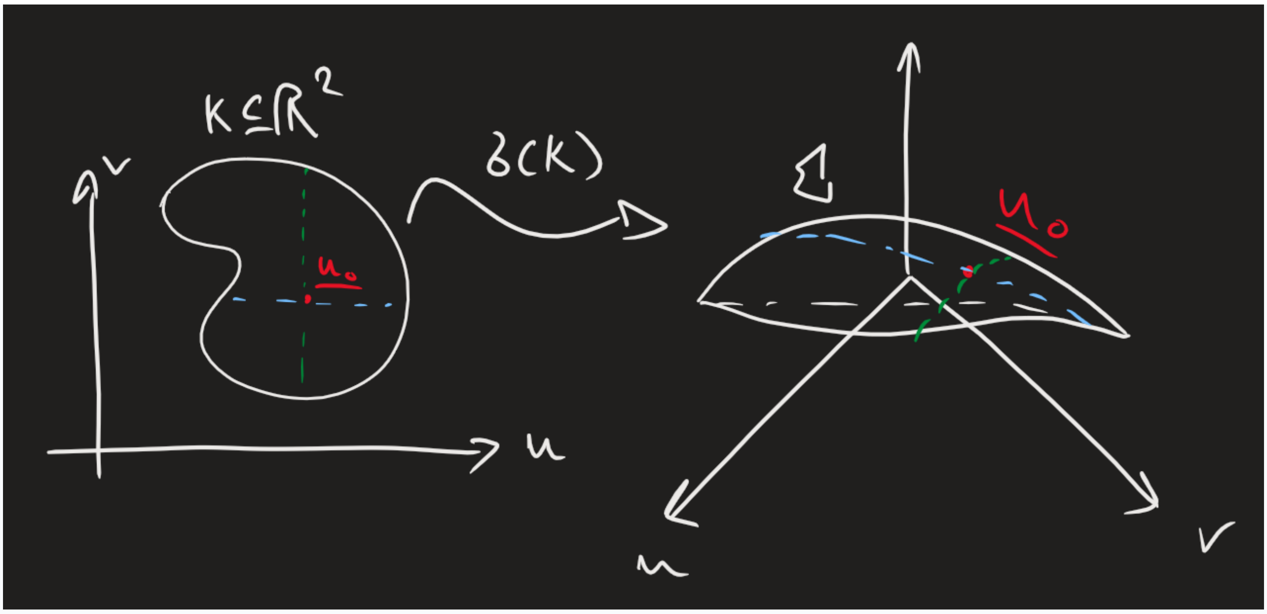
Abbiamo che possiamo definire le *curve regolari in forma semplice* come

$$\begin{aligned} \sigma(\cdot, v_0) &: (u_0 - \delta, u_0 + \delta) \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \sigma(u_0, \cdot) &: (v_0 - \delta, v_0 + \delta) \longrightarrow \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

si dicono le *linee coordinate* su Σ.

Graficamente prendiamo K piatto su $\mathbb{R}^2$, e tracciamo le assi u, v aventi origine in $\underline{u_0}$. Dopodiché, portandoli sulla curva Σ abbiamo che queste linee sono un po' *"deformate"*.

FIGURA 2.1. (*Linee coordinate*)



Adesso introduciamo le *ultime nozioni* sulle *superfici regolari*.

#Definizione

Definizione (vettori tangenti, piano tangente e normale al piano).

Sia $\Sigma = (\sigma, \sigma(K))$ una *curva regolare semplice in f.p.*.

I *vettori tangenti alle linee coordinate* in $\underline{x}_0$ sono le derivate parziali $\sigma_u(\underline{x}_0)$ e $\sigma_v(\underline{x}_0)$.

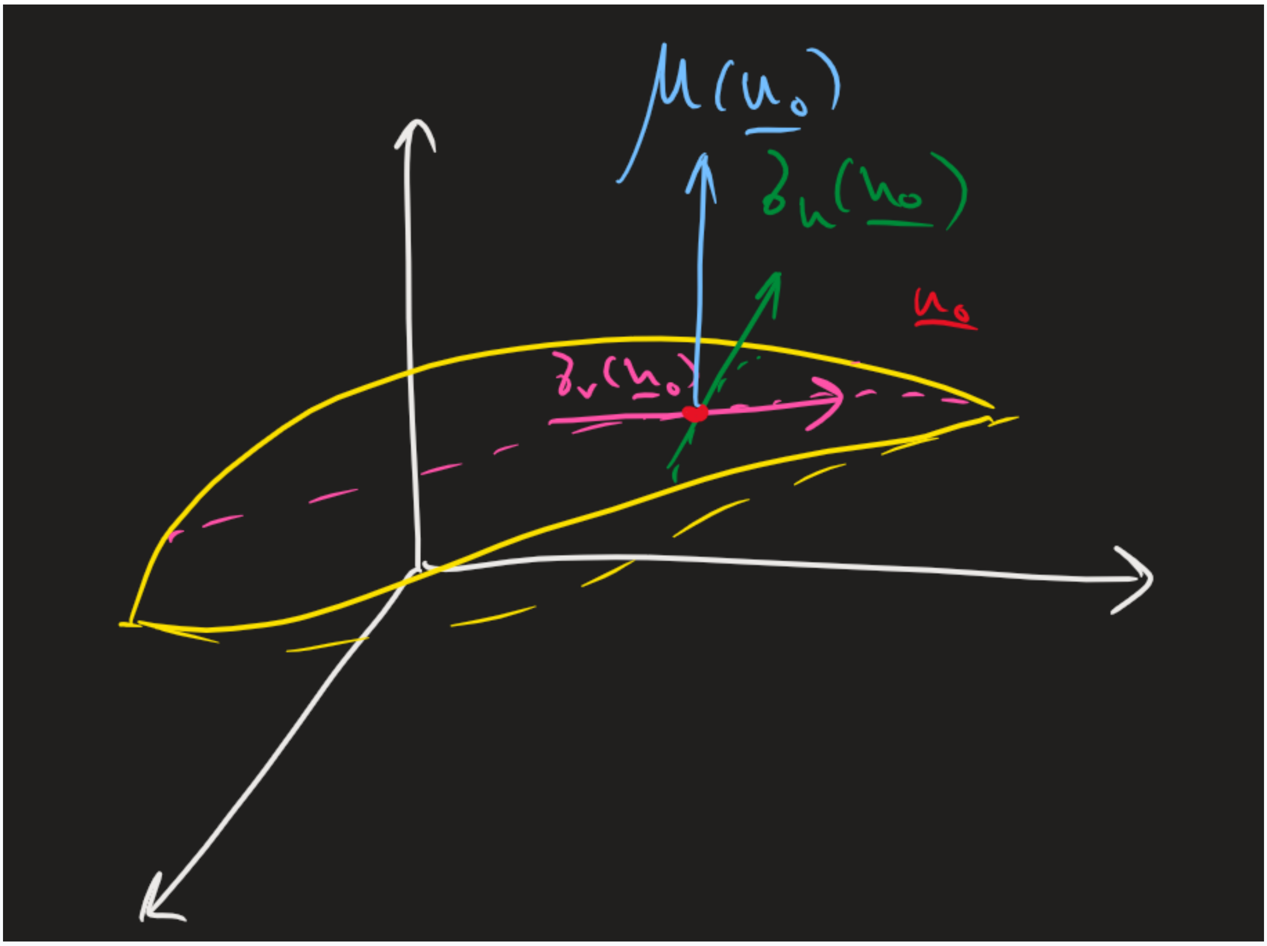
Per definizione questi sono *linearmente indipendenti*, dunque individuano il *piano tangente* a Σ e lo si rappresenta in forma parametrica come lo *span* dei due vettori (1):

$$\begin{aligned}
&\underline{x} \in \operatorname{span}(\sigma_u(\underline{u}_0), \sigma_v(\underline{u}_0)) \\
\implies &\underline{x} = \underline{x}_0 + s\sigma_u(\underline{u}_0) + t\sigma_v(\underline{u}_0) \text{ (forma parametrica)} \\
\implies &\langle \sigma_u(\underline{u}_0) \times \sigma_v(\underline{u}_0), \underline{x} - \underline{x}_0 \rangle = 0 \ \text{ (forma implicita)}
\end{aligned}$$

Infine si definisce il *versore normale a Σ in $\underline{x}_0$* come il vettore normalizzato

$$\mu(\underline{u}_0) := \frac{\sigma_u(\underline{u}_0) \times \sigma_v(\underline{u}_0)}{\|\sigma_u(\underline{u}_0) \times \sigma_v(\underline{u}_0)\|}$$

FIGURA 2.2. (*Linee coordinate e la normale alla superficie*)



B2. Cenni sul Prodotto Vettoriale

Cenni sul Prodotto Vettoriale

Brevi cenni sul prodotto vettoriale.

---

1. Definizione di Prodotto Vettoriale in 3D

#Definizione

Definizione (prodotto vettoriale).

Sia $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ e $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Si definisce il prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$ come l'operatore

$$\underline{a} \times \underline{b} := \det \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2)\xi_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\xi_2 + (a_1b_2 -$$

dove ξ_1, ξ_2, ξ_3 sono elementi della base canonica $\mathcal{E}(\mathbb{R}^3)$.

#Osservazione

Osservazione (condizioni di indipendenza lineare).

Notiamo che $\underline{a}, \underline{b}$ sono *linearmente indipendenti* per $\underline{a} \times \underline{b} \neq \underline{0}$.

B3. Superficie Regolare in Forma Cartesiana e Implicita

Superficie Regolare in Forma Cartesiana e Implicita

Breve descrizione qui

---

0. Voci correlate

- Superficie Regolare in Forma Parametrica
- Curve Regolari
- Curva in Forma Implicita
- Campo Scalare e Insieme di Livello

1. Superficie Regolare in Forma Cartesiana

#Definizione

Definizione (superficie regolare in forma cartesiana).

Sia $f : K \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ con $K = \overline{\mathring{A}}$ (lo si pone per evitare di creare insiemi connessi e chiusi *"male"*).
Supponiamo ∇f estendibile su *tutto* K, con continuità. Allora la funzione

$$\sigma : K \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

definita come $\sigma(u, v) := (u, v, f(u, v))$, va a definire una *superficie regolare semplice* che si dice *"in forma cartesiana"*.

#Osservazione

Osservazione (la regolarità delle superfici cartesiane).

Si dimostra, con calcoli a mano, che la *superficie in forma cartesiana* è sempre *regolare*. Infatti si ha

$$\sigma_u \times \sigma_v = \det \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ 1 & 0 & f_u(u,v) \\ 0 & 1 & f_v(u,v) \end{pmatrix} = (-f_u, -f_v, 1)$$

quindi non *si annulla mai*.

2. Superficie Regolare in Forma Implicita

#Definizione

Definizione (superficie regolare in forma implicita).

Sia $\varphi : A \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^1(A)$, con A aperto, tale che:
i. La curva di livello non è vuota

$$\Sigma := L_0(\varphi) \neq \emptyset$$

ii. Il gradiente non è nullo per il sostegno

$$\forall \underline{x} \in \Sigma, \nabla\varphi(\underline{x}) \neq 0$$

Allora la coppia (φ, Σ) si dice *superficie regolare in forma implicita* di cui $\varphi(x,y,z)$ è l'*equazione* e Σ il *sostegno*.

#Definizione

Definizione (piano tangente).

Sia (φ, Σ) una *superficie regolare in forma implicita*, con $\underline{x_0} \in \Sigma$ fissato.

Si definisce il *piano tangente a* Σ *in* $\underline{x_0}$ dall'equazione

$$\langle \nabla\varphi(\underline{x_0}), \underline{x} - \underline{x_0} \rangle = 0$$

e si ha che il vettore $\nabla\varphi(\underline{x_0})$ è *ortogonale* a Σ in $\underline{x_0}$.

Capitolo 7. Ottimizzazione in $\mathbb{R}^N$

Abstract del Capitolo 7

Dopo aver studiato le curve e le superfici, si va ad approfondire il discorso sul calcolo differenziale studiando l'ottimizzazione in più variabili: in particolare estendiamo il discorso unidimensionale.

SEZIONE A. NOZIONI PRELIMINARI PER L'OTTIMIZZAZIONE

A1. Teorema di Weierstraß generalizzato

Teorema di Weierstraß Generalizzato

Condizione sufficiente per l'esistenza di un minimo e massimo di una funzione in più variabili: il teorema generalizzato di Weierstraß.

---

0. Voci correlate

- Teoremi sulle funzioni continue

1. Teorema di Weierstraß Generalizzato

Generalizziamo il *teorema di Weierstraß* (1) su più variabili.

#Teorema

> Teorema (di Weierstraß, generalizzato).
>
> Se $f : K \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ è *continua* su K con K *compatto* (ovvero chiuso e limitato) per $\mathbb{R}^N$, allora
>
> $$\exists x_*, x_\bullet \in K : x_* = \min_E f, x_\bullet = \max_E f$$
>
> ovvero esistono sia *il minimo* che il *massimo* della funzione.

Tuttavia, la compattezza del dominio potrebbe sembrare troppo *restrittiva* (ed effettivamente potrebbe esserlo: potrei avere insiemi illimitati). Quindi troviamo una *"versione più debole"* che ci garantisca comunque l'esistenza di uno dei due punti $x_*, x_\bullet$. Parleremo in particolare di *coercitività* (o *anticoercitività*) (1) e la sua proprietà fondamentale (2).

A2. Funzione Coerciva

Funzione Coerciva

Definizione di funzione coerciva, proprietà fondamentale delle funzioni coerciva (forma debole del teorema di Weierstraß)

---

0. Voci correlate

- Definizione di Spazio Metrico

1. Definizione di Funzione Coerciva

#Definizione

Definizione (funzione coerciva).

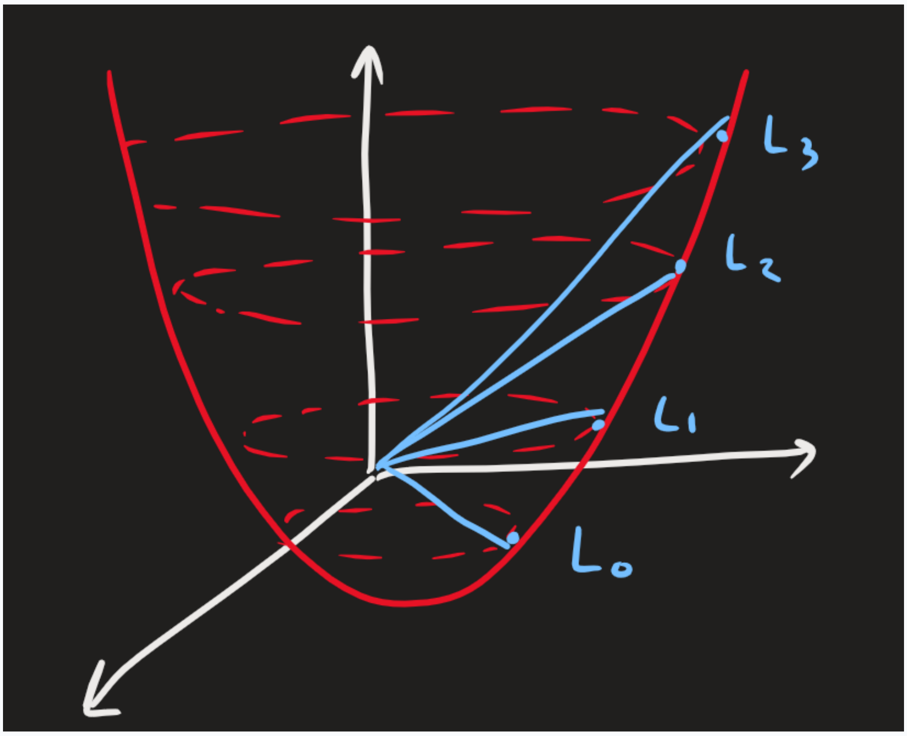
Si dice che una funzione in più variabili definita come

$$f : E = \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$$

è *coerciva* (o *anticoerciva, in rosso*) se vale il limite

$$\lim_{\|\underline{x}\| \to +\infty} f(\underline{x}) = +\infty \ ({\color{red}-\infty})$$

L'idea della *coercitività* è di avere un *campo scalare* che si *"distanzia dall'origine all'infinito"* al salire di livello.



2. Proprietà delle Funzioni Coercive

#Teorema

Teorema (proprietà delle funzioni coercive, forma debole di Weierstraß).

Se $f : E = \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ è *continua* e *coerciva* (*anticoerciva, in rosso*) allora vale che

$$\exists \min_{E=\mathbb{R}^2} f \left(\exists \min_{E=\mathbb{R}^2} f \right)$$

CASO D'USO (Idea). Questa proprietà è utile nella *prassi*, in particolare per la *minimizzazione di funzioni*.
Supponiamo di avere una funzione costo f a variare su N parametri. In particolare, questo *fitta dei dati*. Per minimizzare questa funzione in riferimento di un valore y_{data}, posso impostare la funzione ϕ definita come

$$\phi(\underline{x}) = \|f(\underline{x}) - y_{data}\|$$

e ricavarne dunque il *minimo* mediante operazione di ottimizzazioni. Tuttavia, il dato y_{data} potrebbe essere *"sporco"* dato che è *prono ad errori*. Quindi il minimo trovato in ϕ non potrebbe coincidere col minimo effettivo.
Per risolvere questo problema, impostiamo un'altra funzione ϕ_α definita come

$$\phi_\alpha(\underline{x}) = \|f(\underline{x}) - y_{data}\| + \alpha \|\underline{x}\|^2$$

dove α è il *"termine di correzione"*. Notiamo in particolare che il termine $\|\underline{x}\|^2$ tende a infinito, rendendo coercitiva la funzione: possiamo dunque applicare il macchinario appena visto per trovare il *minimo effettivo* della funzione, avendo

$$\min \phi \sim \min \phi_\alpha$$

A3. Definizione di Estremo

Definizione di Estremo per una Funzione in più variabili

Definizione di estremo relativo e assoluto per una funzione. Osservazione: la ricerca degli estremi in una sfera.

---

0. Voci correlate

- Funzioni
- Topologia in RN

1. Definizione di Estremo Relativo e Assoluto

#Definizione

> Definizione (estremo relativo e assoluto).
>
> Sia $f : E \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ e $\underline{x_0} \in E$.
> Si dice che $\underline{x_0}$ è di *massimo* (o *minimo, in rosso*) *relativo* per f se vale che
>
> $$\exists U(\underline{x_0}) : \forall \underline{x} \in U(\underline{x_0}) \cap \mathcal{C}_E(\underline{x_0}), \begin{matrix} f(\underline{x}) < f(\underline{x_0}) \\ f(\underline{x}) > f(\underline{x_0}) \end{matrix}$$
>
> (come si definisce nel caso unidimensionale). Si nota che U è l'intorno di un punto (1).
>
> Si dice invece che è di *massimo* (o *minimo, in rosso*) *assoluto* per f se vale che
>
> $$M = f(\underline{x_0}) = \max_E f \ \left(m = f(\underline{x_0}) = \min_E f\right)$$

A4. Problemi di Ottimizzazione

Problemi di Ottimizzazione

Generalità sui problemi di ottimizzazione: schema generale in ambito interdisciplinare, schema specifico per il nostro corso (integrazione tra appunti e libro di Pagani-Salsa)

---

0. Voci correlate

- Definizione di Estremo per una Funzione in più variabili

1. Problemi di Ottimizzazione

Significato. Per *"ottimizzazione"* si intende un'ampia categoria di problemi; di solito si tratta di *massimizzare* o *minimizzare* un obbiettivo, una funzione (1). Per affrontare un problema del genere, bisogna porsi *una serie di domande* (e questo fungerà da schema generale per la risoluzione di un problema di ottimizzazione).

Schema. Poniamo la seguente serie di domande.

1. *Esiste* il punto di minimo o massimo?

- Per garantirci di questo, dovremmo applicare il macchinario appena sviluppato su *Weierstraß* (1) o sulle *funzioni coercive* (2).

2. Il punto estremo è *unico*?
   - Ovviamo l'*estremo* in sé (ovvero il $\max$ o $\min$) è unico, ma non è detto che il *punto di estremo* sia unico.
   - Questo è importante per le eventuali proprietà di *convessità* del dominio di una funzione (di cui non occuperemo).
3. *Come si comportano questi punti?*
   - Sapendo che *esiste* l'*estremo* della funzione, dobbiamo sapere *come si comporta* questo punto; ovvero vogliamo sviluppare delle *condizioni necessarie* per questi punti di estremo, così per sapere come trovarli. Ci occuperemo di questa parte.
4. *Come si calcolano questi punti?*
   - Questo rientra nell'ambito dell'*analisi numerica* (non parte del nostro programma).

2. La Ricerca degli Estremi

Adesso svisceriamo lo schema appena sviluppato, soffermandoci sulla domanda *"Come si comportano questi punti?"*; ovvero vogliamo trovare *dove* si trovano questi punti (una domanda quasi analoga).

Problema. Supponiamo di avere una funzione del tipo

$$f:\underbrace{B(0;1)(\mathbb{R}^N)}_{\{x\in\mathbb{R}^N:\|x\|\leq 1\}}\longrightarrow\mathbb{R}$$

Per Weierstraß so che la funzione ammette *almeno* un minimo e un massimo (1). Ma dove stanno? Possiamo cercali in *"due luoghi"*

- Li cerchiamo nei punti $\|x\|<1$; qui parliamo di *minimi e massimi liberi* e potrebbe essere che il gradiente di questi punti sono nulli; nei prossimi capitoli definiremo degli strumenti per capire la loro natura
- Li cerchiamo nei punto $\|x\|=1$; qui parliamo di *minimi e massimi vincolati*: non possiamo più utilizzare il gradiente della funzione, in quanto non vi è più un legame (per convincerci di questo pensiamo al caso unidimensionale: il teorema di Fermat vale solo su punti interni del dominio). Dobbiamo dunque sviluppare degli strumenti sulle *curve e superfici*, che rappresentano un *vincolo* per la nostra funzione (nel caso unidimensionale sarebbero le frontiere del dominio).
  Vedremo di risolvere questi problemi in questo capitolo.

SEZIONE B. OTTIMIZZAZIONE LIBERA

B1. Test del Gradiente (o teorema di Fermat)

Test del Gradiente

Condizione necessaria per punti di estremo relativo (o noto come test del gradiente, oppure teorema di Fermat generalizzato). Dimostrazione.

---

0. Voci correlate

- Definizione di Estremo per una Funzione in più variabili
- Teorema di Fermat

1. Test del Gradiente

Come *primo approccio* ai problemi di *ottimizzazione*, consideriamo una *condizione necessaria* per i punti di *estremo relativo*. Questo teorema sarà noto come il *test del gradiente*, oppure il *teorema di Fermat generalizzato* (infatti questo teorema sarà analoga alla sua controparte unidimensionale, 1).

#Teorema

> Teorema (test del gradiente o teorema di Fermat).
>
> Sia $f: E \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione *differenziabile* (1).
> Sia $\underline{x_0}$ un punto *interno* del dominio E (ovvero in matematichese si dice $\underline{x_0} \in E^\circ$) (2).
>
> Vale che *se* il punto $\underline{x_0}$ è un *estremo relativo*, allora il suo *gradiente* è nullo.
>
> $$\nabla f(\underline{x_0}) = \underline{0}$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 1 (test del gradiente o teorema di Fermat)
Introduco la funzione

$$g(t) = f(\underline{x_0} + t\underline{e_1})$$

con $\underline{e_1}$ il membro della base canonica $\mathcal{E}$.
Notiamo subito che $g(t=0)$ è un *estremo relativo*. Infatti, per $t>0$ ho che la funzione deve *"distanziarsi"* dall'estremo, in un modo o l'altro. Quindi per il teorema di Fermat ho

$$g'(0)=0$$

Per la *differenziazione della composta* (1) possiamo scrivere

$$g'(\underline{x_0})=\langle\nabla f(\underline{x_0}+t\underline{e_1}),\underline{e_1}\rangle=\frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x_0}+t\underline{e_1})$$

possiamo scrivere pure

$$g'(0)=\langle\nabla f(\underline{x_0}),\underline{e_1}\rangle=\frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x_0})=0$$

Ripetendo il ragionamento per tutti i vettori $\underline{e_i}\in\mathcal{E}$ segue la tesi. ■

I punti critici. Questo teorema ci prepara per dare una definizione *ben posta* dei *punti critici*, come nel caso unidimensionale: il teorema di Fermat ci dà tutti i poteri effettivi per definire i punti stazionari.

B2. Punto Critico

Punto Critico per una Funzione in più variabili

Definizione di punto critico per una funzione in più variabili. Classificazione dei punti critici: punti estremi e punti di sella.

---

0. Voci correlate

- Test del Gradiente
- Definizione di Estremo per una Funzione in più variabili

1. Definizione di Punto Critico

Dal *test del gradiente* possiamo dare una definizione *ben posta* di un *punto critico*.

#Definizione

> Definizione (punto critico per una funzione in più variabili).

Sia $f : E \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione *differenziabile*. Si sceglie un punto interno $\underline{x}_0 \in E^\circ$.

Si dice che *"$\underline{x}_0$ è un punto critico per f"* se vale che

$$\nabla f(\underline{x}_0) = \underline{0}$$

Dal *test del gradiente* sappiamo che tutti i punti estremi sono *punti critici*. Ma vale il contrario? Prendiamo il seguente esempio dal *Pagani-Salsa* (esempio 1.5., p. 61)

#Esempio

Esempio (esempio 1.5. del pagani salsa, pagina 61).

Sia $f(x, y) = y^2 - 3x^2y + 2x^4$. Si ha che $(0, 0)$ è un *punto critico*.

Tuttavia, è un punto estremo?

Se prendo le *"direzioni uscenti dall'origine"* ovvero del tipo $f(x, mx), m \in \mathbb{R}$ allora trovo che $(0, 0)$ è un *punto di minimo locale*. Infatti ho

$$f''(x) = 2m^2 - 18mx + 24x \implies f''(0) = 2m^2 > 0$$

Però il discorso cambia se prendiamo le *"direzioni uscenti dalle parabole"* (ovvero del tipo $f(x, mx^2)$). Infatti ho

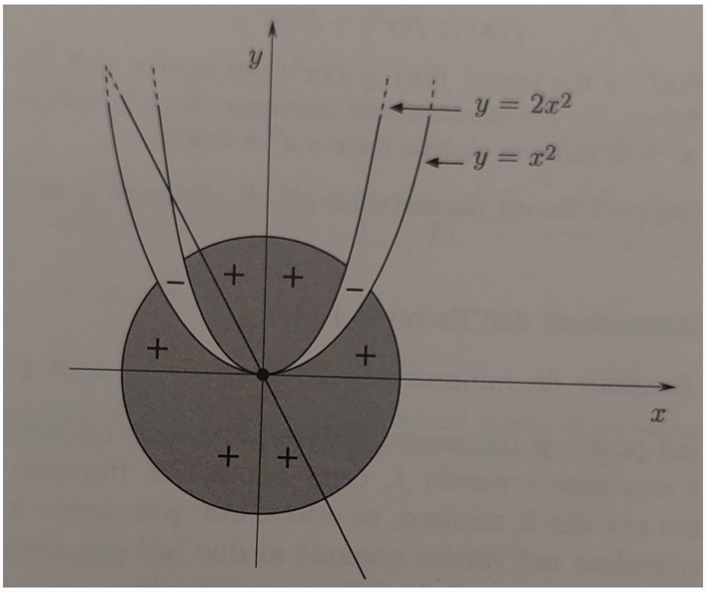
$$f''(x) = 2m^2x - 9mx^2 + 2x^4$$

troviamo che considerando un qualsiasi punto dell'intorno $B(0)$, abbiamo che

$$f''(x \in B(0)) < 0$$

che dimostra $(0, 0)$ *non essere* un punto critico.

FIGURA 2.1. (*Esempio 1.5. del Pagani-Salsa, p. 61*)



Conclusione. Da qui c'è la necessità di classificare i *punti critici* in un altro modo, ovvero i *punti di sella*.

2. Definizione di Punto di Sella

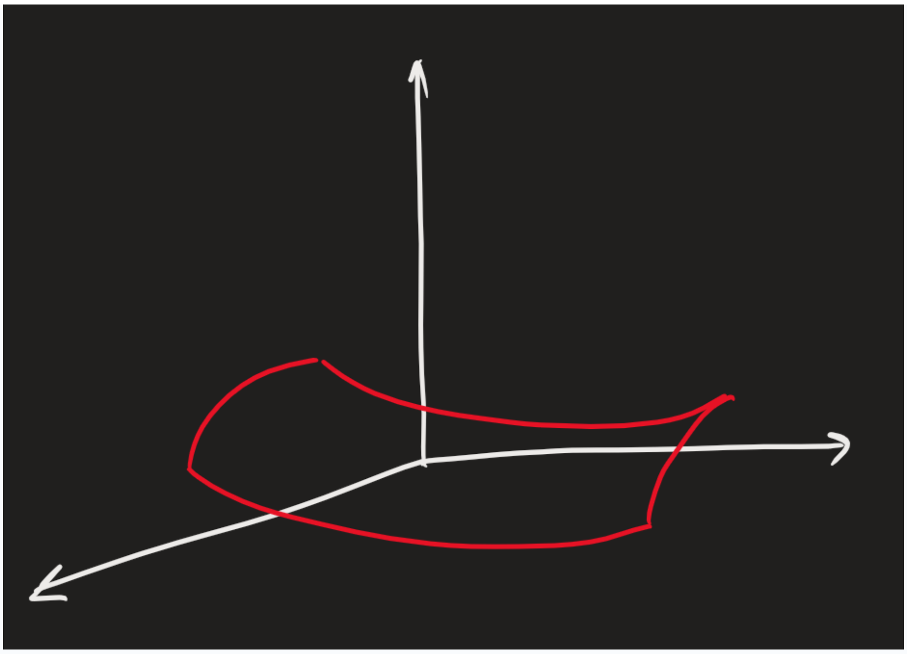
#Definizione

> Definizione (punto di sella).
>
> Sia $f : E \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione *differenziabile*. Sia $\underline{x_0} \in E^\circ$ un *punto critico*.
>
> Si dice che $\underline{x_0}$ *è di sella* se prendendo un qualsiasi intorno $B(\underline{x_0})$ *esistono sia punti* maggiore di $f(\underline{x_0})$ che minore di $f(\underline{x_0})$.
>
> $$\forall B(\underline{x_0}), \exists \underline{x^+}, \underline{x^-} : f(\underline{x^+}) > f(\underline{x}) \wedge f(\underline{x^-}) < f(\underline{x})$$

#Esempio

> Esempio (le patatine delle Pringles).
>
> Un esempio è $f(x, y) = x^2 - y^2$ con $(0, 0)$ un *punto di sella*. Infatti da un lato ho una *"curvatura positiva"* e dall'altro una *"curvatura negativa"*.
>
> Se la figura della superficie dovesse sembrarvi familiare, molto probabilmente è dovuto al fatto che la funzione *assomiglia* alla forma delle patatine della Pringles. Infatti, la forma di questo cibo non è stato scelto a caso: questa forma conferisce una *robustezza maggiore*.

FIGURA 2.1. (*Pringles*)



3. Classificazione dei Punti Critici

Riassumiamo ciò che abbiamo visto col seguente teorema (nota questo teorema è stato scritto da me solamente per riassumere tutto).

#Teorema

> Teorema (della classificazione dei punti critici).
>
> Sia $f:E \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione *differenziabile*. Si sceglie un punto interno $\underline{x_0} \in E^\circ$. Sia definito il valore del punto scelto come $\xi := f(\underline{x_0})$
>
> Allora vale che:
>
> $$\nabla f(\underline{x_0}) = 0 \implies (\underbrace{\xi \in \{\max f, \min f\}}_{i.} \vee \underbrace{\underline{x_0} \text{ è un punto di sella}}_{ii.})$$
>
> Ovvero o ξ è l'*estremo* della funzione ($i.$) o $\underline{x_0}$ è il *punto di sella* ($ii.$) (ovviamente abbiamo un disgiuntivo *aut-aut*).

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 5 (della classificazione dei punti critici)
Omessa, basta riferirsi alle definizioni. ■

B3. Segno di una Matrice

Segno di una Matrice

Nozione preliminare per l'ottimizzazione dei liberi: segno delle matrici.

---

0. Voci correlate

- Forme Lineari e Quadratiche
- Matrice
- Determinante

1. Definizione del Segno di una Matrice

Prima di enunciare un *criterio* per *distinguere i punti critici*, definiamo il segno di una matrice (nozioni che useremo poi sulla matrice hessiana).

#Definizione

Definizione (segno di una matrice).

Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ una matrice. Sia $Q : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ la sua *forma quadratica* associata (1).

Dato un qualsiasi $\underline{h} \neq \underline{0}$, si dice che Q è:

- *Positiva* se $Q(\underline{h}) > 0$
  - *Semipositiva* se $Q(\underline{h}) \geq 0$
- *Negativa* se $Q(\underline{h}) < 0$
  - *Seminegativa* se $Q(\underline{h}) \leq 0$
- *Indefinita* se $\exists \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^N$ tali che

$$Q(\underline{v}) < 0 < Q(\underline{u})$$

Si definisce il *segno della sua matrice* come il *segno della sua forma quadratica* Q.

Vediamo delle *condizioni equivalenti* per classificare la *positività* e la *negatività* della matrice.

#Proposizione

Proposizione (condizioni equivalenti per la positività e la negatività del segno).

Sia Q una *forma quadratica*. Si ha che

$$Q \text{ positiva} \iff Q(\underline{h}) \geq m||\underline{h}||^2, \forall \underline{h} \in \mathbb{R}^N$$

e

$$Q \text{ negativa} \iff Q(\underline{h}) \leq m||\underline{h}||^2, \forall \underline{h} \in \mathbb{R}^N$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE della Proposizione 2 (condizioni equivalenti per la positività e la negatività del segno).

Omessa. ■

2. Criterio di Sylvester

Vediamo il teorema più utile per poter classificare il segno della matrice.

#Teorema

Teorema (criterio di Sylvester).

Sia $Q : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ una *forma quadratica* con $Q(\underline{h}) = \langle A \cdot \underline{h}, \underline{h} \rangle$. Sia A una matrice simmetrica ($A = {}^t A$).

Allora si ha che:

$$Q > 0 \iff \begin{cases} \det A_1 = a_{11} > 0 \\ \det A_2 = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} > 0 \\ \vdots \\ \det A_N = \det A > 0 \end{cases}$$

Ovvero prendendo *tutte le determinanti di ogni sottomatrice di* A ho solo numeri positivi

Inoltre ho che

$$Q < 0 \iff \begin{cases} \det A_1 = a_{11} > 0 \\ \det A_2 = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} < 0 \\ \vdots \\ (-1)^N \det A_N = (-1)^N \det A > 0 \end{cases}$$

Ovvero prendendo *tutte le determinante di ogni sottomatrice di* A ho un'oscillazione tra il negativo-positivo.

Se non vale nessuna delle condizioni equivalenti, si dice che il segno della Q è *indefinita*.

#Esempio

Esempio (caso $N = 2$).

Abbiamo che

$$
\begin{aligned}
&Q > 0 \iff a_{11} > 0 \land \det A > 0 \\
&Q < 0 \iff a_{11} < 0 \land \det A > 0 \\
&Q \not\gtrless 0 \text{ (indeterminata) } \iff a_{11} \in \mathbb{R} \land \det A < 0
\end{aligned}
$$

Adesso siamo pronti per enunciare il *test della Hessiana*.

B4. Test della Hessiana

Test della Hessiana

Breve descrizione qui

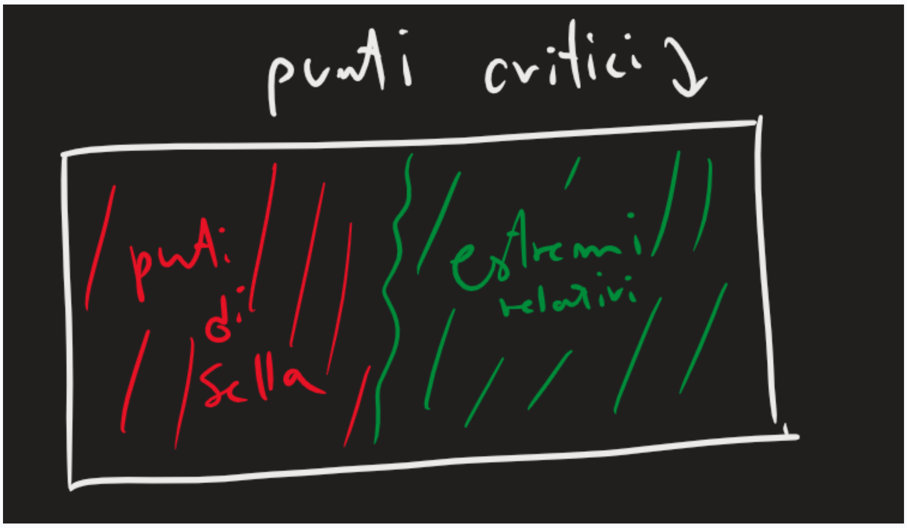
---

0. Voci correlate

- Segno di una Matrice
- Punto Critico per una Funzione in più variabili

1. Preambolo

Recap. Dal *teorema della classificazione dei punti critici* (1) abbiamo che nei *punti critici* abbiamo due *"sottoinsiemi"* di punti: gli *estremi relativi* e i *punti di sella*. Ovvero abbiamo la situazione del tipo



Tuttavia questo non ci basta. Vogliamo sviluppare degli strumenti per *distinguere* i *punti* *critici* a seconda della sua natura: dato un punto critico, voglio sapere se è un *estremo relativo* (in particolare di minimo o di massimo) o se è un *punto di sella*.

L'idea. L'idea è questa: prendiamo lo *sviluppo in serie di Taylor al secondo ordine* di una funzione (1). Sia $\underline{h} := \underline{x} - \underline{x}_0$.

$$f(\underline{x}_0 + \underline{h}) - f(\underline{x}_0) = \langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{h} \rangle + \frac{1}{2} \langle Hf(\underline{x}_0)(\underline{h}), \underline{h} \rangle + o\left(\|\underline{h}\|^2\right)$$

Possiamo cancellare alcune parti di questa equazione (quelle sottolineate in rosso). Prima di tutto sappiamo che $\underline{x}_0$ è un punto critico, quindi possiamo già cancellare il prodotto scalare $\langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{h} \rangle = 0$. Inoltre, il termine $o\left(\|\underline{h}\|^2\right)$ va a zero, quindi possiamo renderlo *"trascurabile"* nel senso di $o\left(\|\underline{h}\|^2\right) \to 0$. Infine abbiamo che rimane solo la parte

$$f(\underline{x}_0 + \underline{h}) - f(\underline{x}_0) \simeq \frac{1}{2} \langle Hf(\underline{x}_0)(\underline{h}), \underline{h} \rangle$$

Adesso, nel caso negativo della hessiana, supponiamo

$$\langle Hf_{\underline{x}_0}(\underline{h}), \underline{h} \rangle \leq m \|\underline{h}\|^2, m > 0$$

così possiamo studiare bene la matrice hessiana H. Nel caso unidimensionale avrei

$$f''(x_0)(x - x_0)(x - x_0) = f''(x_0)h^2 \leq mh^2 \implies f''(x_0) \leq m$$

Come studiamo la matrice H? Pensando all'equivalente unidimensionale, ho che se $f''(x)$ è *positivo* allora ho un *minimo locale*; se ho invece $f''(x)$ *negativo* allora ho un *massimo locale*. Vedremo che in caso generalizzato avremo una situazione simile.

2. Test della Hessiana

#Teorema

Teorema (test della Hessiana).

Sia $f : E \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ *due-volte differenziabile* su $\underline{x}_0 \in E^\circ$ e $\nabla f(\underline{x}_0) = \underline{0}$.

Si ha che:

$$\begin{gathered}
Hf_{\underline{x}_0} > 0 \implies f(\underline{x}_0) \text{ minimo relativo} \\
Hf_{\underline{x}_0} < 0 \implies f(\underline{x}_0) \text{ massimo relativo} \\
Hf_{\underline{x}_0} \text{ indefinita} \implies \underline{x}_0 \text{ di sella} \\
Hf_{\underline{x}_0} \underbrace{\leq}_{\text{o } \geq} x_0 \implies \text{non posso dire nulla}
\end{gathered}$$

SEZIONE C. OTTIMIZZAZIONE VINCOLATA

C1. Vincolo per una Funzione

Vincolo per una Funzione

Definizione di vincolo per una funzione (campo scalare). Definizione di estremo vincolato di una funzione in un vincolo.

---

0. Voci correlate

- Definizione di Estremo per una Funzione in più variabili

1. Definizione di Vincolo

Prima di poter parlare di *ottimizzazione vincolata*, parliamo (giustamente) di cosa intendiamo per un *"vincolo"*

#Definizione

Definizione (vincolo per una funzione).

Sia $f : E \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ un *campo scalare*. Un insieme $V \subset E$ si dice *"vincolo di E per f* se soddisfa

$$V \neq \emptyset, V \neq E$$

Ovvero il *vincolo* dev'essere una *"parte selezionata"* di E.

#Osservazione

Osservazione (caso comune).

Di solito come *vincolo* poniamo delle *curve* o *superfici*, che vengono espresse come funzioni γ o superfici σ, poi per considerare i loro sostegni Γ, Σ.

2. Definizione di Estremo Vincolato

#Definizione

Definizione (estremo vincolato per una funzione).

Sia $f : E \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ un *campo scalare* e V un suo *vincolo*.

Un punto $\underline{x_0} \in V$ si dice *"estremo vincolato per f in V"* se vale che $\underline{x_0}$ è un *punto estremo* (1) di $f_{|V}$ (ovvero *"f ristretta in V"*).

Notiamo che non c'è nessuna relazione tra *estremi vincolati* e *punti estremi* (ovvero di $\max, \min$) per f vista *"globalmente"*. Come obbiettivo di questa sezione ci poniamo quello di *sviluppare* teoremi che ci diano delle *condizioni necessarie* per l'esistenza di punti vincolati, in tal modo da poter capirne la loro natura.

C2. Ottimizzazione su Curve e Superfici Parametriche

Ottimizzazione in Curve e Superfici Parametriche

Ottimizzazione in curve parametriche.

---

0. Voci correlate

- Curve e Superfici Parametriche
- Problemi di Ottimizzazione
- Vincolo per una Funzione

1. Teorema per l'Ottimizzazione in Curve Parametriche

Vediamo una prima *condizione necessaria* per *estremi vincolati* su curve γ.

#Teorema

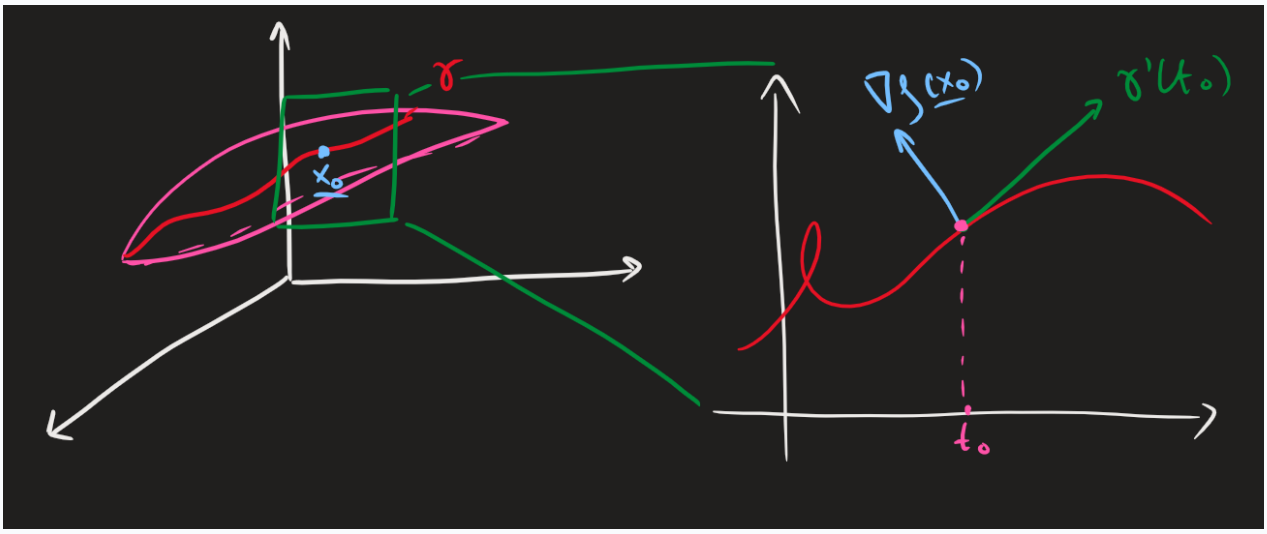
Teorema (condizione necessaria per estremi vincolati, caso curvilineo in forma parametrica).

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^1(A)$. Sia $\gamma : I \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow A$ una *curva regolare semplice* (1) e sia $\underline{x_0} = \gamma(t_0) \in \Gamma$ un *punto regolare*, con $t_0 \in I^\circ$ e sia posto $\Gamma = V$ come vincolo.

Allora vale che se $\underline{x_0}$ è un *estremo vincolato* per $f_{|\Gamma}$ allora vale che $\gamma'(t_0)$ e $\nabla f(\underline{x_0})$ sono *ortogonali*, ovvero

$$\boxed{\langle \nabla f(\underline{x_0}), \gamma'(t_0)\rangle = 0}$$

FIGURA 1.1. (*L'idea è questa*)



#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 1 (condizione necessaria per estremi vincolati, caso curvilineo in forma parametrica)
Consideriamo la composta $f(\gamma(t)) : I \subseteq \mathbb{R} \to A \to \mathbb{R}$, e la definiamo come $\psi(t)$. Poiché $\underline{x_0} = \gamma(t_0)$ è un *estremo vincolato*, abbiamo che t_0 è un *estremo libero* per ψ (1). Dunque per il *teorema di Fermat* (1), abbiamo che $\psi'(t_0) = 0$, da cui considerando la composizione di funzioni si ricava la tesi

$$\psi'(t_0) = \langle \nabla f(\underline{x_0}), \gamma'(t_0)\rangle = 0$$

che prova il teorema. ■

Notiamo che in questo caso abbiamo usato *curve già note* a priori. Nel caso in cui avessimo *curve implicite*, bisognerà passare al *teorema del Dini* per trovare la curva. Intanto generalizziamo questo teorema sulle *superfici*.

2. Ottimizzazione sulle Curve Parametriche

#Teorema

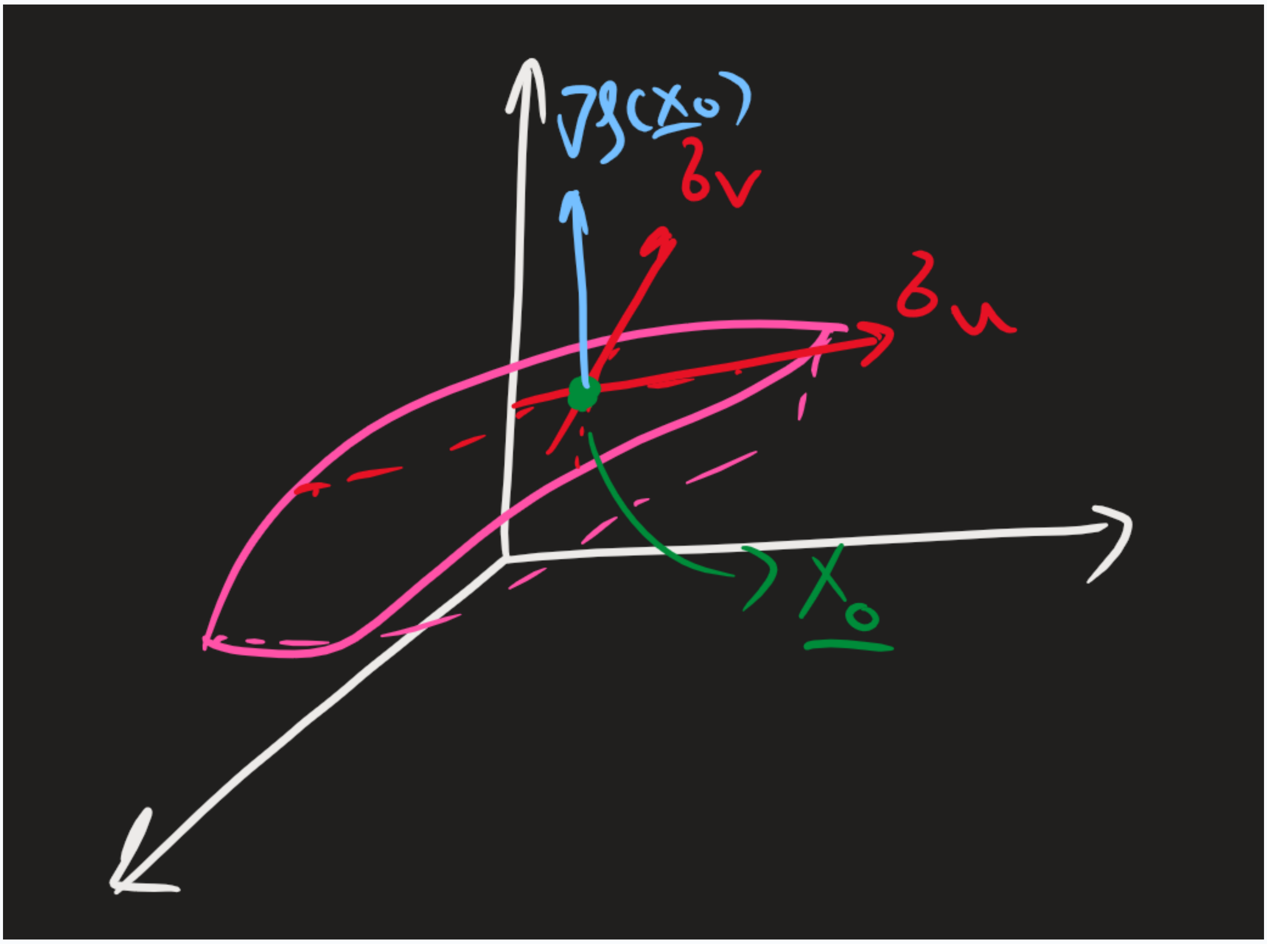
Teorema (condizione necessaria per estremi vincolata, caso superficie).

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^1(A)$. Sia $\sigma : K \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con K la *chiusura di un insieme aperto* (ovvero prendiamo $K = \overline{B^\circ}$) e σ una *superficie regolare semplice*.

Allora se $\underline{x_0} = \sigma(u_0, v_0) = (x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0)) \in \Sigma := \sigma(K)$ è un *punto di estremo vincolato* per $f_{|\Sigma}$ e se $\underline{u_0} = (u_0, v_0) \in B$, allora vale che le derivate σ_u, σ_v valutate in $\underline{u_0}$ sono ortogonali al gradiente $\nabla f(\underline{x_0})$. Ovvero

$$\boxed{\langle \nabla f(\underline{x_0}), \sigma_u(\underline{u_0})\rangle = 0 = \langle \nabla f(\underline{x_0}), \sigma_v(\underline{u_0})\rangle}$$

FIGURA 1.1. (*L'idea è questa*)



#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 2 (condizione necessaria per estremi vincolata, caso superficie)

La dimostrazione è completamente analoga a quella precedente (^71d25d). Ovvero, considerando la composizione $\psi = f \circ \sigma : K \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ abbiamo che ψ ha un *estremo* in $\underline{u_0} = (u_0, v_0)$ che implica, per il test del gradiente (1), $\nabla \psi(\underline{u_0}) = \underline{0}$. Da qui segue l'equazione (1)

$$\nabla \psi(\underline{u_0}) = \underline{0} \implies \psi_u(\underline{u_0}) = \psi_v(\underline{u_0}) = \underline{0} \implies \begin{cases} \langle \nabla f(\psi(\underline{u_0})), \sigma_u(\underline{u_0})\rangle = 0 \\ \langle \nabla f(\psi(\underline{u_0})), \sigma_v(\underline{u_0})\rangle = 0 \end{cases}$$

Considerando che $\psi(\underline{u_0})$ non è altro che $\underline{x_0}$ stessa, abbiamo la tesi. ■

C3. Metodo dei Moltiplicatori di Lagrange

Metodo dei Moltiplicatori di Lagrange

Metodo dei moltiplicatori del Lagrange. Teorema: enunciato e dimostrazione. Applicazione pratica del teorema.

---

0. Voci correlate

- Ottimizzazione in Curve e Superfici Parametriche
- Teorema del Dini
- Curva in Forma Implicita

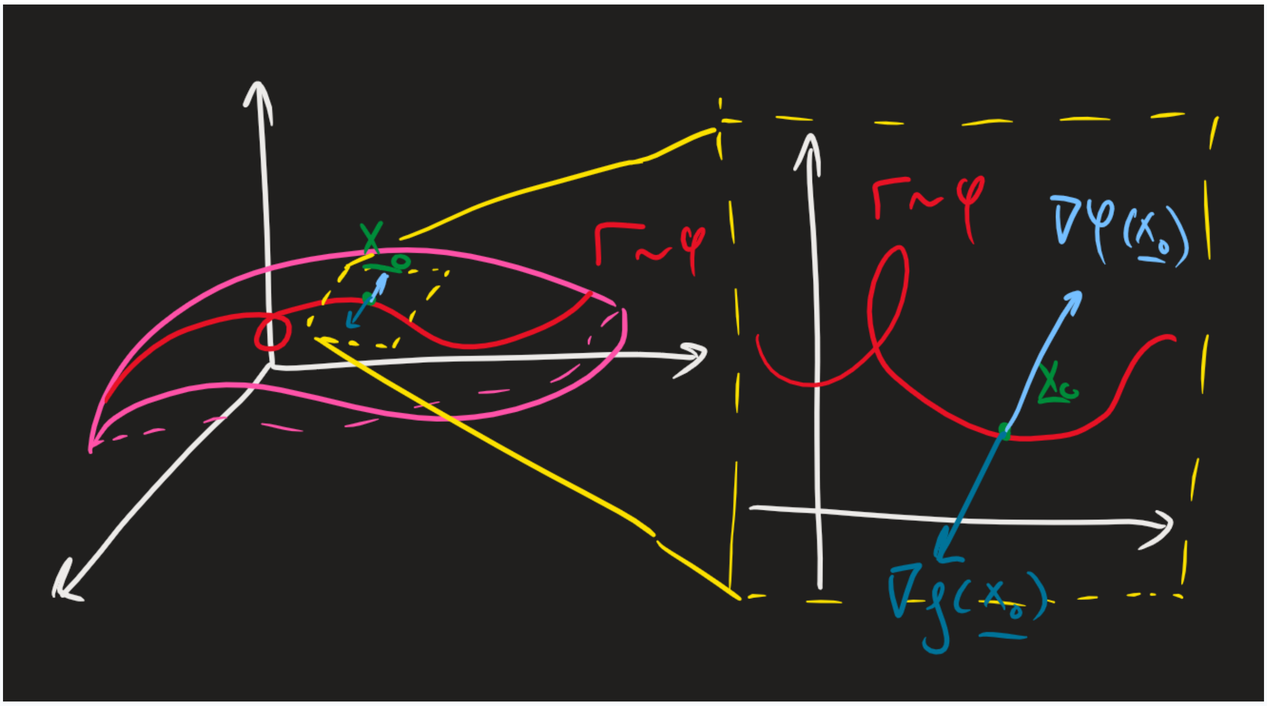
1. Risultato Teorico

Prima di parlare del *metodo dei moltiplicatori di Lagrange*, utilizzato per *ottimizzare* funzioni vincolate su *curve implicite*, enunciamo il risultato teorico.

#Teorema

> Teorema (dei moltiplicatori di Lagrange).
>
> Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^1(A)$ con A un aperto. Sia φ una funzione definita similmente, che rappresenta un suo *vincolo curvilineo*; infatti sia definita la curva Γ come la sua curva di livello $L_0(\gamma)$ (ovvero $\Gamma := L_0(\gamma)$).
>
> Se vale che $\underline{x_0} = (x_0, y_0) \in \Gamma$ è un *punto regolare* per Γ (ovvero $\nabla\varphi(\underline{x_0}) \neq 0$) e $\underline{x_0}$ è un *punto di estremo vincolato* per $f_{|\Gamma}$, allora
>
> $$\boxed{\exists \lambda \in \mathbb{R} : \nabla f(\underline{x_0}) = \lambda \nabla \varphi(\underline{x_0})}$$
>
> Ovvero il "*gradiente* $\nabla f(\underline{x_0})$ *è parallelo al gradiente della restrizione* $\nabla\varphi(\underline{x_0})$".

FIGURA 1.1. (*L'idea è questa*)



#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 1 (dei moltiplicatori di Lagrange)

Partiamo subito dal *teorema del Dini* (1), che ci dà una curva γ tale che il suo sostegno $\gamma(I)$ sia espressione di Γ per un certo intorno W di $\underline{x_0}$. Ovvero,

$$\nabla\varphi(\underline{x_0}) \neq \underline{0} \implies \exists W(\underline{x_0}) : \Gamma \cap W = \gamma(I)$$

In particolare sappiamo che questa è una *curva cartesiana*, ovvero una curva del tipo $\gamma(t_0) = \underline{x_0}$ e $\gamma(t) = (t, g(t))$ (scegliamo il caso in cui esista la g, l'altro caso si dimostra identicamente). Dato che ho una *curva parametrica*, ho che $\underline{x_0} = \gamma(t_0)$ è un *estremo* per $f_{|\Gamma}$, il che ci dà (2)

$$(*)\ \langle \nabla f(\underline{x_0}), \gamma'(t_0) \rangle = 0$$

Mi ricordo delle *ipotesi necessarie* per il *teorema del Dini*, ovvero che $\nabla\varphi(\underline{x_0}) \neq \underline{0}$ e $\gamma'(t_0) \neq \underline{0}$. Dopodiché considero un altro risultato dello stesso teorema, che ci dà il risultato (3)

$$(**)\ \nabla\varphi(\underline{x_0}) \neq \underline{0}, \gamma'(t_0) \neq \underline{0}, \langle \nabla\varphi(\underline{x_0}), \gamma'(t_0) \rangle = 0$$

Combinando le $(*)$ e $(**)$, scopro che $\nabla\varphi(\underline{x_0})$ è ortogonale a $\gamma'(t_0)$ come lo è pure $\nabla f(\underline{x_0})$. In definita abbiamo il risultato finale

$$\nabla f(\underline{x_0}) = \lambda \nabla\varphi(\underline{x_0})$$

che prova la tesi. ■

2. Punto di vista pratico

#Osservazione

Osservazione (punto di vista pratico).

Da un punto di vista pratico, possiamo applicare questo teorema per risolvere problemi di *minimizzazione vincolata* su *curve regolari in forma implicita* φ (ovvero che soddisfano sempre il *teorema del Dini*).

Nel caso sfortunato in cui avessimo *curve non regolari*, basta separarli in *due casi*: una in cui possiamo usare ancora i *moltiplicatori di Lagrange* (ovvero il gradiente non è nullo) e l'altra in cui i punti vengono studiati separatamente (dove il gradiente è nullo).

In definita, qualora fossimo nel primo caso, possiamo introdurre la funzione $\mathcal{L}(x, y, \lambda)$ (detta *"lagrangiana"*) definita come

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) := f(x, y) - \lambda\varphi(x, y)$$

dopodiché per risolvere il problema di minimizzazione basta risolvere il sistema

$$\nabla\mathcal{L} = \underline{0} : \begin{cases} \mathcal{L}_x = f_x - \lambda\varphi_x = 0 \\ \mathcal{L}_y = f_y - \lambda\varphi_y = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda = \varphi = 0 \end{cases}$$

Le prime due equazioni coincidono col *teorema dei moltiplicatori di Lagrange*, l'ultima è invece la *condizione di vincolo*.

Questo è equivalente alla scrittura

$$\nabla f(x, y) = \lambda\nabla\varphi(x, y) \wedge \varphi(x, y) = 0$$

3. Generalizzazione

Si può generalizzare il risultato appena visto. Lo facciamo in particolare per $N = 3$ e caso superficiale (con superfici).

#Teorema

Teorema (dei moltiplicatori di Lagrange).

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^1(A)$ con A un aperto. Sia φ una funzione definita similmente, che rappresenta un suo *vincolo curvilineo*; infatti sia definita la curva Σ come la sua curva di livello $L_0(\gamma)$ (ovvero $\Sigma := L_0(\gamma)$).

Se vale che $\underline{x_0} = (x_0, y_0, z_0) \in \Sigma$ è un *punto regolare* per Σ (ovvero $\nabla\varphi(\underline{x_0}) \neq 0$) e $\underline{x_0}$ è un *punto di estremo vincolato* per $f_{|\Sigma}$, allora

$$\boxed{\exists\lambda \in \mathbb{R} : \nabla f(\underline{x_0}) = \lambda\nabla\varphi(\underline{x_0})}$$

> Ovvero il *"gradiente $\nabla f(\underline{x_0})$ è parallelo al gradiente della restrizione* $\nabla\varphi(\underline{x_0})$*"*.

Le applicazioni pratiche sono identiche, con la lagrangiana definita come

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda) := f(x, y, z) - \lambda(\varphi(x, y, z))$$

e la risoluzione si applica analogamente, ponendo $\nabla\mathcal{L} = \underline{0}$.

Capitolo 8. Equazioni Differenziali

Abstract del Capitolo 8

In questo capitolo andremo a studiare le *equazioni differenziali*, partendo dalle equazioni differenziali del primo ordine e distinguendoli in particolari sottocategorie (ben poste, a variabili separabili, lineari, di Bernoulli e sistemi); dopodiché si andrà a vedere le equazioni differenziali del secondo ordine, concentrandoci sulle equazioni di Newton e lineari. Infine si andrà a usare queste conoscenze per modellizzare fenomeni scientifici.

Introduzione alle Equazioni Differenziali

Introduzione alle Equazioni Differenziali

Introduzione alle equazioni differenziali: discorso introduttivo (applicazioni pratiche). Esempio della dinamica delle popolazioni: modello di Malthus, modello di Vermulst (o logistico).

---

1. Discorso Introduttivo

LA MODELLISTICA CON LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI. Molti fenomeni sono *modellizzati* secondo le regole della *matematica*. In particolare le *equazioni differenziali*, che sono delle *equazioni funzionali che presentano delle relazioni tra la funzione e le sue derivate*.
Infatti, alla soluzione di tali equazioni si può ricondurre lo *studio* di molti problemi *fisici e meccanici*: tutto riduce a risolvere *certe equazioni differenziali*.
Ad esempio, con la *meccanica newtoniana* possiamo studiare il *moto di un qualsiasi sistema meccanico*, usando le leggi di Newton (per ulteriori approfondimenti vedere la pagina Kolmogorov Equazioni Differenziali)
Adesso vediamo un *esempio biologico* (per altri esempi vedere la pagina Esempi di Equazioni Differenziali).

2. La Dinamica delle Popolazioni

Abbiamo una popolazione in un *ambiente isolato* e vogliamo capire la sua *dinamica* della *crescita*. I seguenti modelli descriveranno tale dinamica

#Esempio
MODELLO. (*Di Malthus o modello geometrico*)
Supponiamo inoltre di avere *infinite risorse* e di chiamare $p(t)$ il numeri di *individui* per un istante tempo t.
Allora abbiamo che $p(t)$ dipende *solamente* dal tasso di crescita: chiamiamo μ, ν i tassi di *crescita* e di *mortalità*. Da ciò ricaviamo l'equazione per l'incremento

$$p(t+\mathrm{d}t)-p(t)=\mu p(t)\mathrm{d}t-\nu p(t)\mathrm{d}t$$

Effettuando delle semplificazioni otteniamo l'equazione

$$\frac{p(t+\mathrm{d}t)-p(t)}{\mathrm{d}t}=(\mu-\nu)p(t)$$

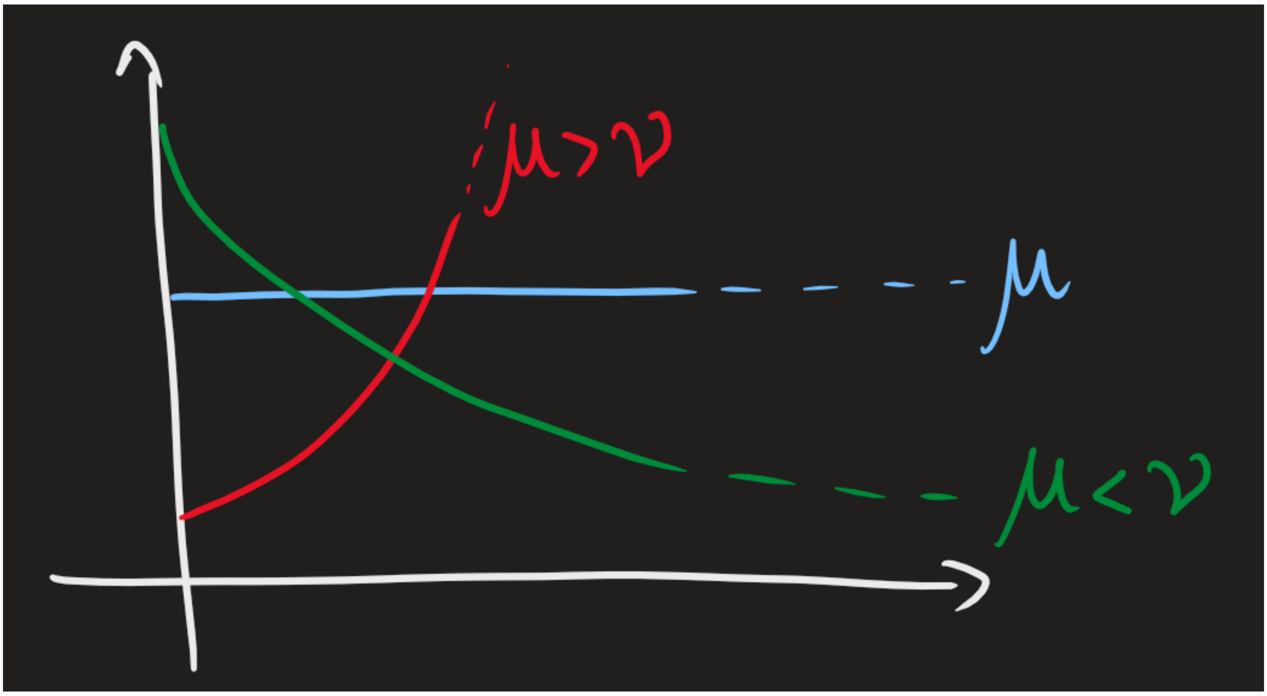
passando per il limite $\mathrm{d}t \to 0$, otteniamo l'equazione differenziale

$$\boxed{p'(t) - (\mu - \nu)p(t) = 0}$$

da cui ricaviamo la soluzione

$$\boxed{p(t) = e^{(\mu-\nu)t}}$$

Ovvero ho il grafico



#Esempio

MODELLO. (*Di Vermulst, o logistico*)

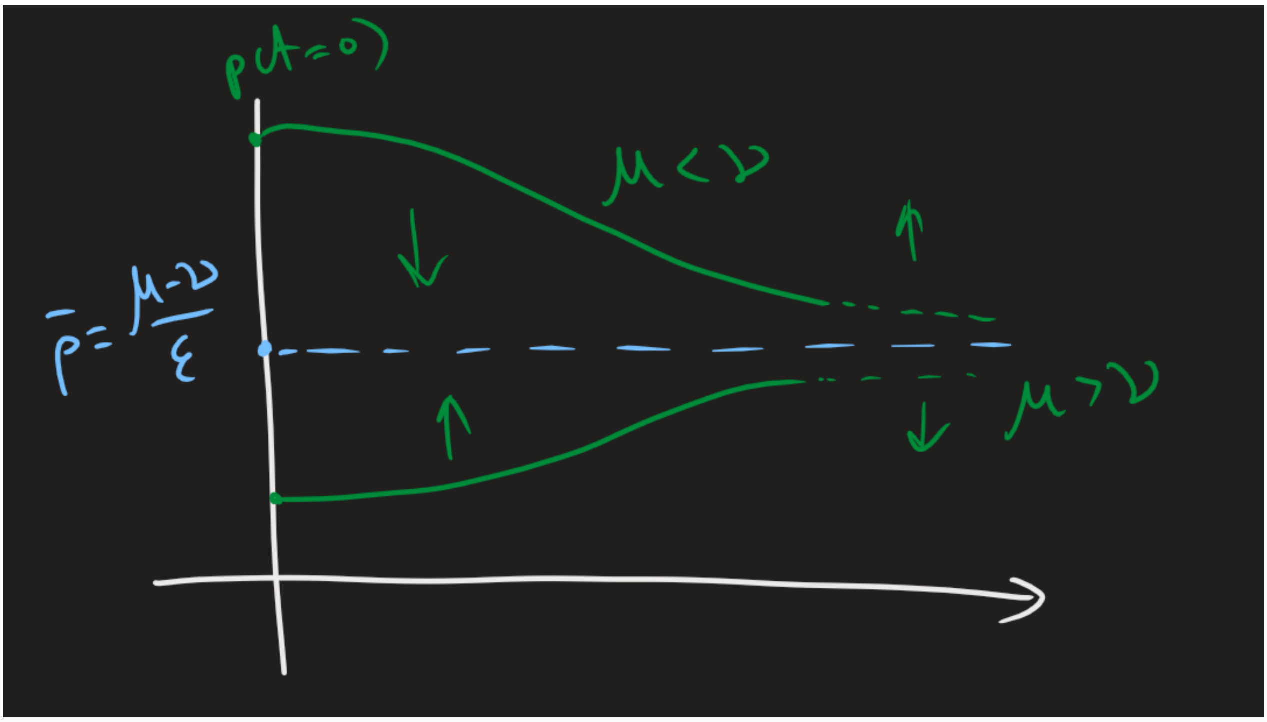
Supponiamo di avere invece delle *risorse limitate* (condizione più realistica, ma vedremo che complica di più le cose). Allora in questo caso ricaviamo l'equazione per l'incremento, tenendo conto degli individui precedenti ε.

$$p(t + \mathrm{d}t) + p(t) = (\mu + \nu)p(t)\mathrm{d}t - \varepsilon p(t)p(t)\mathrm{d}t$$

Da cui ricaviamo, passando il limite per $\mathrm{d}t \to 0$,

$$\boxed{p'(t) - (\mu - \nu)p(t) - \varepsilon p^2(t) = 0}$$

In questo caso diventa più difficile dare una soluzione esplicita (che comunque esiste!), che ha il grafico di una *sigmoide*.



Nota. (*Approccio pratico*)
Da un lato possiamo *modellizzare* fenomeni mediante delle equazioni differenziali, *conoscendo* certi parametri.
Tuttavia rendiamo ben nota che esiste anche *un altro approccio*, quello contrario: assumo *vero* il modello e provo a stimare i *parametri* di $p(t)$ attuale per poi confrontarlo col modello (così da confermare che il modello sia effettivamente vero). Questo è stato fatto per l'*epidemia* del *COVID-19*.

Esempi di Equazioni Differenziali

Esempi di Modelli descritti da Equazioni Differenziali: legge di decadimento del radio, moto di un oggetto con forza elastica e resistenza laminare, il pendolo, circuito RC, e il moto di pianeti.

---

0. Voci correlate

- Forza Elastica
- Resistenza dei Fluidi
- Esempi di Oscillazioni
- Forza Gravitazionale

1. Legge di Decadimento del Radio

Nota: ricavato dal testo "Le Matematiche" di "A.D. Aleksandrov, A.N. Kolmogorov, M.A. Lavrent'ev", p.394, esempio 1

#Esempio

ESEMPIO. (*La legge di decadimento del radio*)
La legge di decadimento del radio consiste nel fatto che la velocità del decadimento è proporzionale alla quantità di radio presente. Sia $R(t)$ la quantità di radio (in grammi) nell'istante t. Ponendo $R(t=0)=R_0$, abbiamo l'equazione

$$-\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}=kR$$

dove k è una *costante di proporzionalità*. Risolvendolo con un metodo che vedremo (per integrazione, Ansatz, quello che volete...) abbiamo la soluzione generale

$$R(t)=e^{-kt+kC}=C_1e^{-kt}$$

Considerando R_0, abbiamo la soluzione particolare

$$R(t)=R_0e^{-k(t-t_0)}$$

Notiamo che la soluzione appena ottenuta si trova in molti *campi di applicazione*, come ad esempio lo studio del raffreddamento di un corpo, con la quantità di calore perduta proporzionale alla differenza tra la temperatura del corpo e quelle dei mezzi circostanti.

2. Il Moto Armonico Smorzato

#Esempio

ESEMPIO. (*Moto armonico smorzato*)
Vedere pagina Moto Armonico Smorzato. In sintesi abbiamo l'equazione differenziale

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\omega^2x=0$$

che viene risolta da una delle equazioni

$$\begin{gathered}x(t)=Ae^{-\gamma t}\cos(\omega_st+\varphi)\\ x(t)=e^{-\gamma t}\left(Ae^{-ct}+Be^{ct}\right)\\ x(t)=e^{-\gamma t}\left(A+Bt\right)\end{gathered}$$

3. Il Pendolo

#Esempio

ESEMPIO. (*Il pendolo*)
Vedere pagina Esempio 1 (il pendolo). In sintesi abbiamo l'equazione differenziale

$$L\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} - g\sin x = 0$$

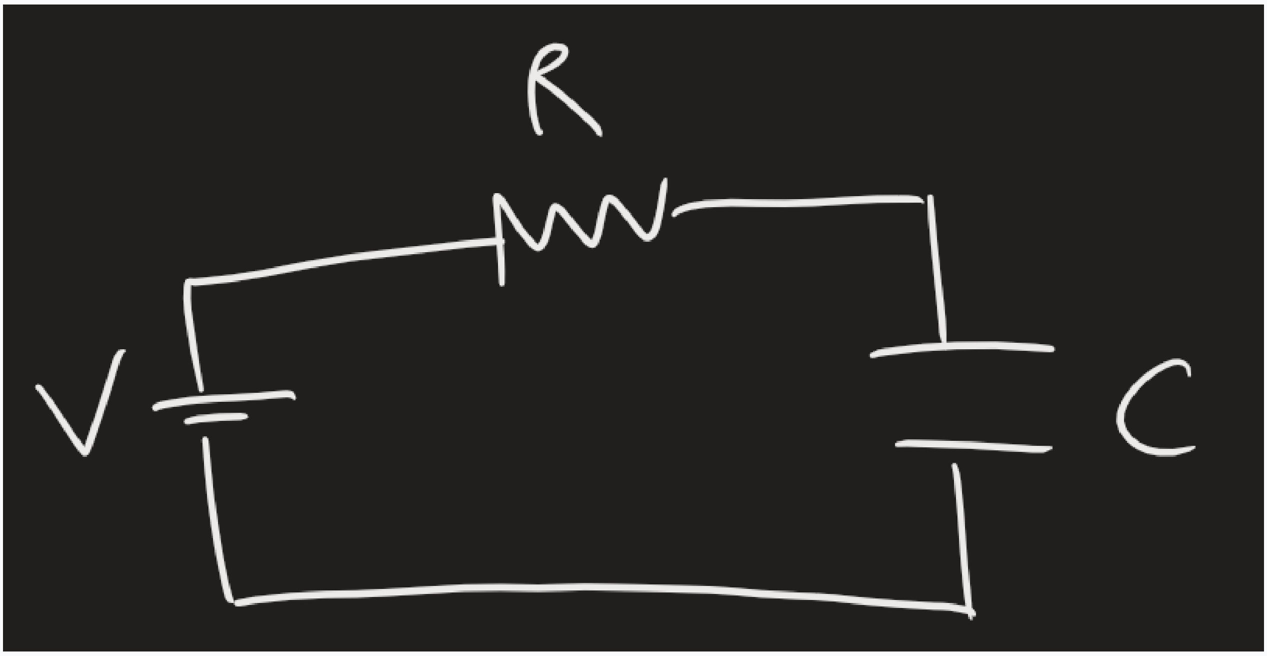
che non può presentare delle *equazioni esprimibile come una combinazione di funzioni elementari*, a meno che accettiamo l'approssimazione dei piccoli angoli $\sin x = x, x \to 0$.

4. Circuito RC

#Esempio

ESEMPIO. (*Circuito RC*)

Presentiamo un *circuito elettrico* caricato da una batteria ε di V_0 volt, collegandolo ad una *resistenza* di R ohm ed un *condensatore* C fahrad.



Vogliamo trovare la *carica del condensatore* $V_c(t)$. Per le *leggi di Ohm* e la definizione di *resistenza* sappiamo che

$$V_R(t) = Ri, V_C = \frac{q}{C}$$

Per le *leggi di Kirchoff* che la somma delle tensioni si annullano sempre: abbiamo dunque

$$V_0 + V_R + V_C \equiv 0$$

che implica

$$-V_0 + Ri + \frac{q}{C} = 0$$

Sappiamo che i non è altro che la derivata $q'(t)$. Allora lo presentiamo in forma

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}R + q\frac{1}{C} - V_0 = 0$$

risolvendo per $q(t)$ abbiamo

$$q(t) = Ae^{-\frac{t}{RC}} - V_0 t$$

e derivandolo otteniamo

$$\boxed{i(t) = Ae^{-\frac{t}{RC}}}$$

Poniamo $\tau = RC$ come la *costante del tempo* (si può dimostrare che è misurabile in secondi). Adesso troviamo $V_R(t)$ esplicitamente, sfruttando il fatto che $V_R(t=0) = V_0$ (infatti tutte le cariche vanno subito sulla resistenza), che ci dà la costante A

$$V_R = RAe^{-\frac{t}{\tau}} \implies V_R(t=0) = V_0 = RAe^{-\frac{t}{\tau}} \implies A = \frac{V_0}{R}$$

Ovvero abbiamo

$$\boxed{V_R(t) = V_0 e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

Adesso per trovare $V_C(t)$ basta sfruttare l'uguaglianza $V_C = V_0 - V_R$ da cui si ricava

$$V_C(t) = V_0 - V_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \implies \boxed{V_C(t) = V_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$$

che finisce l'esempio. ■

5. Il moto dei pianeti

#Esempio

ESEMPIO. (*Il moto dei pianeti*)

Nota: Tratto dal Pagani-Salta, p. 179 esempio 1.8.

Supponiamo che nell'origine del sistema in riferimento tridimensionale $\mathbb{R}^3$ sia posto un corpo di massa M (sole) il cui campo gravitazionale di forza per unità di massa è dato dal vettore $MG \cdot \nabla\left(\frac{1}{r}\right)$, con r definita come $r := \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, e G una costante.
Supponiamo inoltre che la massa del corpo m sia significativamente più piccolo di M, ovvero $m \ll M$. In altre parole, consideriamo solo *il campo di forza generato dal sole* data da $\mathcal{G}(r) = MG\frac{1}{r^2}$.
Allora l'equazione differenziale che ci dà il moto del pianeta m è dato dalle soluzioni per le posizioni x, y, z

$$\begin{cases} \ddot{x} = -MG\dfrac{x}{r^3} \\ \ddot{y} = -MG\dfrac{y}{r^3} \\ \ddot{z} = -MG\dfrac{z}{r^3} \end{cases}$$

Notiamo che dalle soluzioni possiamo ricavare le *leggi di Keplero*.

Definizioni Relative alle Equazioni Differenziali

Terminologia e definizioni relative alle equazioni differenziali. Equazione differenziale generale, equazione differenziale ordinaria (ODE/EDO), equazione differenziale alle derivate parziale (PDE), l'ordine di un'equazione differenziale, forma normale di un'ODE, funzione incognita, funzione soluzione e problema di Cauchy.

---

0. Voci correlate

- Introduzione alle Equazioni Differenziali

1. Classificazioni di Equazioni Differenziali

Idea. Per definire *"equazione differenziale"* lo pensiamo come un *legame funzionale* tra una funzione e le sue derivate: qualche (o tutte) le derivate compaiono in una qualche combinazione. Per fare ciò usiamo la nozione di *funzione in più variabili*.

#Definizione

> Definizione (equazione differenziale ordinaria, incognita, ordine e soluzione).
>
> Siano $F : A \subseteq X^{N+2} \longrightarrow X$ e $f : A \subseteq X \longrightarrow X$ delle funzioni. F, f formano un'*equazione differenziale ordinaria* se tra di queste vi è un legame del tipo
>
> $$F(t, f(t), f'(t), \ldots, f^{(N)}(t)) = 0$$
>
> In tal caso f si dice *incognita*, N l'*ordine* (affinché sia $f^{(N)}(t) \neq 0$). Inoltre si dice *soluzione* una funzione $g : X \longrightarrow X$ che soddisfi l'uguaglianza sopra.
>
> Nota: di solito (e quasi sempre) si prende $X = \mathbb{R}$.

#Definizione

> Definizione (equazione differenziale alle parziale derivate).
>
> Se invece abbiamo che la funzione incognita ha *più variabili*, allora abbiamo un'equazione differenziale alle derivate parziali. Non ne parleremo.

#Definizione

> Definizione (equazione differenziale autonoma).

Se l'equazione dell'equazione differenziale *non* dipende dal parametro t in alcun modo, allora si dice che è *autonoma*.

#Esempio

Esempio (esempi di equazioni differenziali).

Le equazioni

$$\begin{gathered}(a)\;\; y'(x) = 3y(x) \\ (b)\;\; y(x) - 3y^2(x) = 0\end{gathered}$$

sono entrambe *equazioni differenziali*. Notiamo che sono espresse in *forme diverse* e sono entrambe *autonome*.

2. ODE in forma normale

#Definizione

Definizione (forma normale di un'ODE).

Siano F, f delle funzioni che esprimono l'equazione differenziale

$$F(t, f(t), f'(t), \ldots, f^{(N)}(t)) = 0$$

Se è *possibile esplicitare* l'equazione in $f^{(N)}(t)$, allora si può scrivere

$$f^{(N)}(t) = F(t, f'(t), \ldots, f^{(N-1)}(t), 0)$$

e tale forma si dice *normale*. Se non è possibile esplicitare l'equazione differenziale in tale modo, l'ODE si dice *"non-normale"*.

3. ODE scalare del primo ordine in forma normale

Ci soffermiamo su *una categoria* delle *ODE*, ovvero *scalare e del primo ordine in forma normale*.

#Definizione

Definizione (ODE scalare del primo ordine in forma normale, soluzione).

Sia $F : E \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.
Un'*equazione differenziale scalare del primo ordine in forma normale* è del tipo

$$f'(x) = F(x, f(x))$$

> Una soluzione $y : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ di questo tipo di equazione differenziale è quando soddisfa le seguenti condizioni
> i. y è derivabile in I (nel suo dominio)
> ii. $(x, y(x)) \in E, \forall x \in I$ (ovvero otteniamo ancora un'equazione differenziale definibile)
> iii. $y'(x) = f(x, y(x)), \forall x \in I$ (la soluzione soddisfa l'uguaglianza nel dominio)

Notiamo che data un'equazione differenziale, possiamo avere una *classe infinita* di equazioni che risolvono tale equazione differenziale. Per avere un'*unica soluzione* poniamo condizioni più forti: ovvero la *condizione iniziale*.

4. Problema di Cauchy

Adesso definiamo una delle *categorie di equazioni differenziali* più importanti.

#Definizione

> Definizione (problema di Cauchy e una sua soluzione).
>
> Siano $f : E \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in E$ e $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. L'espressione PC definita come
>
> $$(PC) : \begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) & \text{(ODE)} \\ y(x_0) = y_0 & \text{(condizione iniziale)} \end{cases}$$
>
> si dice *"problema di Cauchy"*.
>
> Si dice che $y : I \subseteq \mathbb{R}$ è una *soluzione del problema di Cauchy* se vale che
> i. y risolve $y' = f(x, y)$
> ii. $x_0 \in I$ e soddisfa $y(x_0) = y_0$

OBBIETTIVI.
Con i problemi di Cauchy vorremmo risolvere i seguenti problemi:

1. ($\exists$) Voglio determinare condizioni necessarie per capire l'*esistenza* della/e soluzione/i
2. (!) Voglio determinare, se esiste, l'*unicità* della soluzione
3. La *stabilità* (dipendenza continua sui dati): se approssimo un problema di Cauchy con $z \to y$, come si propaga l'*errore* su y_0?
4. Lo studio *qualitativo* delle soluzioni
   > - Infatti di solito *non* ho soluzioni esplicite. Consideriamo ad esempio l'*equazione di Riccati*, che per certi parametri $a > 0$ l'equazione differenziale $y' + ay^2 = x^2$ non ha soluzione che può essere espressa in *funzioni elementari*.
   > - Potrei comunque ottenere delle *inforzioni qualitative* sulla soluzione; parliamo di *asintoti*, *limiti*, *dominio*, eccetera...

5. Il *metodo delle* risoluzioni delle *equazioni differenziali*; ce ne sono un sacco, che variano a seconda della *tipologia* dell'*ODE*.

SEZIONE A. PROBLEMI DI CAUCHY

A1. Teorema di Peano

Teorema di esistenza di Peano

Teorema di esistenza di Peano: enunciato e osservazioni.

---

0. Voci correlate

- Definizioni Relative alle Equazioni Differenziali

1. Teorema di esistenza di Peano

Come prima cosa studiamo le *condizioni sufficienti* per l'*esistenza* di soluzioni per *problemi di Cauchy*.

#Teorema

> Teorema (di esistenza locale, o di Peano).
>
> Siano $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \in \mathcal{C}^0(A)$ (*continua!*) con A aperto e $(x_0, y_0) \in A$. Sia posto il problema di Cauchy (PC) (1) con $f, (x_0, y_0)$.
>
> $$(PC) : \begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$
>
> Allora esiste un raggio $h > 0$ sui cui posso definire una funzione y del tipo $y \in \mathcal{C}^1(A), y = (x_0 - h, x_0 + h) \longrightarrow \mathbb{R}$ che sia *soluzione* del problema di Cauchy (PC).

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 1 (di esistenza locale, o di Peano)

Omessa. ■

2. Questione dell'Unicità

Abbiamo dato una *condizione sufficiente* per l'*esistenza* di y, ovvero la *continuità* della funzione f. Tuttavia è abbastanza per garantirci anche l'*unicità*? Vediamo col seguente esempio.

#Esempio

Esempio (l'esistenza non implica unicità).

Prendiamo il problema di Cauchy (PC) definito come

$$(PC):\begin{cases}y'(x)=2\sqrt{|y|}\\ y(0)=0\end{cases}$$

Abbiamo una soluzione? Dato che $f(y)=2\sqrt{|y|}$ è *continua* su $\mathbb{R}$, deve esistere.

Infatti troviamo subito una soluzione $y\equiv 0$.

E' unica? No, infatti ponendo y come

$$y(x)=\begin{cases}x^2, x>0\\ -x^2, x\leq 0\end{cases}$$

trovo che anche questa risolve (PC).

Anzi, peggio! Posso trovare una famiglia di funzioni $y_{\alpha,\beta}$ che risolvono il (PC).

$$y_{\alpha,\beta}(x)=\begin{cases}-(x-\alpha)^2, x\leq\alpha<0\\ 0, \alpha<x<\beta\\ (x-\beta)^2, x\geq\beta\end{cases}$$

Inoltre, osservo che la derivata parziale f_y non è definita (quindi non derivabile) in 0.

Conclusione. La continuità della funzione non basta; dall'esempio appena menzionato notiamo che la chiave potrebbe stare nella *derivabilità* di f su y (ovvero l'esistenza di f_y). Infatti, vedremo col teorema di *Cauchy-Lipschitz* una condizione sufficiente che ci assicuri l'esistenza e l'unicità della soluzione.

A2. Teorema di Cauchy-Lipschitz

Teorema di Cauchy-Lipschitz

Teorema di Cauchy-Lipschitz per l'esistenza e l'unicità della soluzione per un problema di Cauchy ben-posto.

---

0. Voci correlate

- Definizioni Relative alle Equazioni Differenziali
- Teorema di esistenza di Peano

1. Teorema di Cauchy-Lipschitz

#Teorema

> Teorema (teorema di Cauchy-Lipschitz, dell'esistenza e dell'unicità locale delle soluzioni).
>
> Sia $f(x,y) : A \subseteq \mathbb{R}^2 \in \mathcal{C}^0(A)$ e tale che la sua derivata parziale f_y sia continua ($\frac{\partial f}{\partial y} \in \mathcal{C}^0(A)$), poi sia $(x_0, y_0) \in A$ un punto.
>
> Allora vale che
>
> $$\exists h > 0, \exists! y : I = (x_0 - h, x_0 + h) \longrightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^1(I)$$
>
> tale che questa $y(\cdot)$ risolva il *problema di Cauchy*
>
> $$(PC) : \begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Per dare una dimostrazione, si enuncia prima il *lemma di Volterra*.

#Lemma

> Lemma (di Volterra).
>
> Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \in \mathcal{C}^0(A)$ e il *problema di Cauchy* (PC) definita come
>
> $$(PC) : \begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$
>
> Allora si ha che sono equivalenti:
> i. Una funzione $y : [x_0 - h, x_0 + h] \longrightarrow \mathcal{C}^1$ risolve (PC)
> *se e solo se*
> ii. La funzione $y : [x_0 - h, x_0 + h] \longrightarrow \mathcal{C}^1$ risolve l'*equazione integrale di Volterra*, definita come
>
> $$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t)) \, \mathrm{d}t$$

Adesso siamo pronti per dimostrare Cauchy-Lipschitz.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 1 (teorema di Cauchy-Lipschitz, dell'esistenza e dell'unicità locale delle soluzioni)

Nota: si dà solo l'idea costruttiva della dimostrazione, senza scendere troppo nei dettagli

Ci sono tanti modi per dimostrare questo teorema: qui useremo la nozione di *successione di funzioni* (1), cercando una famiglia $(y_n)_n$ che converga uniformemente alla soluzione. Procediamo dunque per costruzione: sia $y_0(x) \equiv y_0$ il *primo approssimante* per la soluzione. Adesso definiamo $y_1(x)$ come

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0(t))\ \mathrm{d}t$$

Dopodiché si definisce il prossimo approssimante come

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))\ \mathrm{d}t$$

Per induzione estendiamo questa famiglia di funzioni $(y_n)_n$ su $\mathbb{N}$, definendo il termine generale come

$$(y_n)_n : \begin{cases} y_0(x) = y_0 \\ y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))\ \mathrm{d}t \end{cases}$$

Dopodiché si dimostra che la successione $(y_n)_n$ *converge uniformemente* su y, che è soluzione di *Cauchy* poiché soddisfa il *lemma di Volterra* (ovvero risolve *l'equazione integrale di Volterra*). In matematichese, si ha

$$\lim_n y_n(x) \overset{\text{unif}}{=} y(x) \iff y(x) = \lim_n y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))\ \mathrm{d}t$$

che garantisce sia *l'unicità* che *l'esistenza*, provando la tesi. ■

2. Problema di Cauchy ben-posto

Diamo una classificazione per *problemi di Cauchy* che rispettano i criteri del *teorema di Cauchy-Lipschitz*.

#Definizione

> Definizione (problema di Cauchy ben posto).
>
> Un *problema di Cauchy* (PC) del tipo
>
> $$(PC) : \begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

> Si dice *"ben posto"* se f rispetta i *criteri del teorema di Cauchy-Lipschitz*, ovvero se f è *continua* e la sua derivata f_y è *continua*.

A3. Dipendenza Continua dai Dati Iniziali

Dipendenza continua dai dati iniziali dei P.C. ben posti

Dipendenza continua dai dati iniziale dei problemi ben posti di Cauchy.

---

0. Voci correlate

- Teorema di Cauchy-Lipschitz
- Definizioni Relative alle Equazioni Differenziali

1. Dipendenza continua dai dati iniziali

Enunciamo una proprietà dei *problemi di Cauchy ben posti*, ovvero la *dipendenza continua* dai *dati iniziali*, che ci permette di *approssimare* le *soluzioni di Cauchy* su intorni dei dati iniziali.

#Teorema

> Teorema (dipendenza continua dai dati iniziali di problemi di Cauchy posti bene).
>
> Sia (PC) un *problema di Cauchy* ben posto, definito come
>
> $$(PC) : \begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$
>
> Allora dato il problema di *Cauchy traslato* $(\overline{PC})$ definita come
>
> $$(\overline{PC}) : \begin{cases} z'(x) = f(x, z(x)) \\ z(x_0) = z_0 \end{cases}$$
>
> Vale la seguente:
>
> $$\begin{gathered} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall z_0 \in \mathbb{R}, \forall z(x) \text{ soluzione di } (\overline{PC}), \\ |y_0 - z_0| < \delta \implies |y(x) - z(x)| < \varepsilon, \forall x \in B(x_0, h) \end{gathered}$$

IDEA. L'idea di questo teorema è di dire che su intorni di x_0 con ampiezza h (ovvero il raggio di definizione di y, z) abbiamo che le soluzioni y, z non si discostano *troppo*; ovvero ho una specie di *"stabilità"*, se interpreto le soluzioni come *traiettorie* al variare in tempo (ovvero $\gamma_1(t) := (t, y(t))$ e $\gamma_2(t) := (t, z(t))$) (*figura 1.1.*)

FIGURA 1.1.

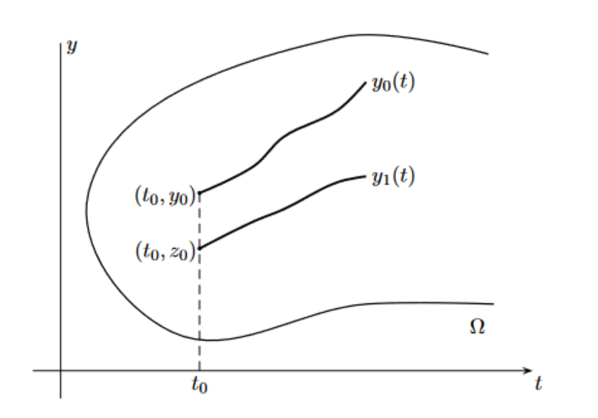


Figura 1: Confronto tra soluzioni

A4. Esistenza Locale e Globale

Esistenza locale e globale delle soluzioni ai Problemi di Cauchy

---

Esistenza locale e globale delle soluzioni ai Problemi di Cauchy. Esempio preliminare. Teorema: condizione sufficiente per l'esistenza globale (la sublinearità). Esempio.

---

0. Voci correlate

- Teorema di Cauchy-Lipschitz
- Definizioni Relative alle Equazioni Differenziali

1. Esempio preliminare

#Esempio

Esempio (esempio preliminare per la questione dell'esistenza locale e globale).

Definiamo i seguenti problemi di Cauchy.

$$(PC_1) : \begin{cases} y'(x) = y(x) \\ y(x_0) = 1 \end{cases}$$

e

$$(PC_2) : \begin{cases} y'(x) = y^2(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Banalmente si trova la soluzione al (PC_1) ponendo $y_1(x) = e^x$ (ovvero col metodo *Ansatz*), e con ulteriori calcoli si trova la soluzione al (PC_2), con $y_2(x) = (1-x)^{-1}$.

Inoltre notiamo che queste soluzioni *devono essere uniche*, dal momento che entrambi i problemi di Cauchy soddisfano le condizioni del teorema di Cauchy-Lipschitz.

Studiando i domini, troviamo che y_1 è definita sulla retta reale $I = \mathbb{R}$, invece y_2 è definita su un pezzo della retta $I = (-\infty, 1)$. Cosa succede? Perché ho situazioni diverse?

Vedremo che le equazioni $f_1(x,y) = y$ e $f_2(x,y) = y^2$ hanno *andamenti asintotici* diversi: ovvero in f_2 ho un *"esplosione incontrollabile"* della funzione, invece in f_1 ho una *"crescita sublineare"*.

2. Teorema dell'esistenza globale

#Teorema

Teorema (condizione sufficiente per l'esistenza globale).

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^0$, con $A = (a,b) \times \mathbb{R}$ (notiamo che $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ e $b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$), e $(x_0, y_0) \in A$ un punto scelto. Sia (PC) il problema di Cauchy definito da f.

Allora si ha che se per ogni compatto $H \Subset (a,b)$ esistono dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ tali che

$$|f(x,y)| \leq \alpha|y| + \beta, \forall (x,y) \in H \times \mathbb{R}$$

Questa proprietà si dice *sublinearità* di f su y.

Allora il *problema di Cauchy* (PC) ha una *soluzione definita globalmente*, su (a,b).

3. Esempio

#Esempio

Esempio (esempio).

Vediamo un esempio.

Sia $f(x,y) = x^2(1+y\sin y)$. La nostra intuizione ci dice che f è *sublineare* su y, dato che ho un seno che *"non fa nulla"*. Infatti ho:

$$\forall H \Subset \mathbb{R}, |f(x,y)| \leq |x^2||1+y\underbrace{|\sin y|}_{\leq 1} \leq \max_{x \in H} x^2 + x^2 y$$

Allora abbiamo che f è *sublineare*, con parametri $\alpha, \beta = \max H$ (il massimo *deve* esistere per Weierstraß).

Pertanto, per il *teorema dell'esistenza globale* ho che un qualsiasi problema di Cauchy definito con f ha *soluzioni globali*.

4. Lemma di Prolungabilità

Se si fosse nel caso in cui *non* abbiamo sublinearità, si avrebbe comunque un modo per salvarsi.

#Lemma

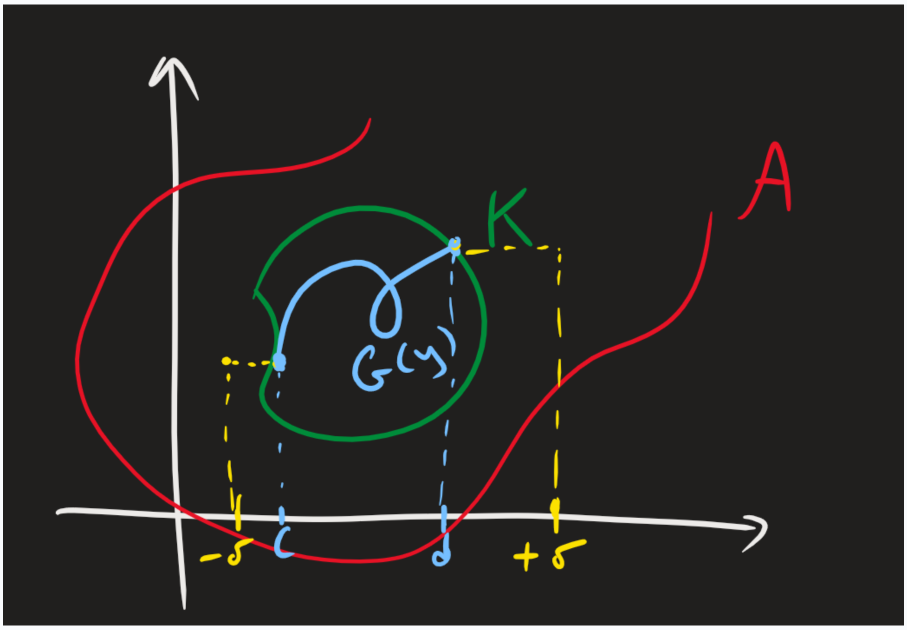
Lemma (di prolungabilita, o di fuga da un compatto).

Sia $f: A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^0$ con A aperto. Sia $y:(c,d) \longrightarrow \mathbb{R}$ una *soluzione* dell'equazione differenziale

$$y'(x) = f(x,y)$$

Se *esiste un compatto* $K \Subset A$ tale che $G(y) \subseteq K$ (ovvero il *grafico* di Y sta dentro K), allora esiste un raggio $\delta > 0$ tale che y è definibile su $(c-\delta, d+\delta)$. Ovvero posso ridefinire y come $y:(c-\delta, d+\delta) \longrightarrow \mathbb{R}$ (cioè prolungabile).

FIGURA 1.1. (*Idea del lemma*)



Questo teorema si rivela *particolarmente utile* per dimostrare l'esistenza delle soluzioni su tutto $\mathbb{R}$, procedendo per assurdo, dove non abbiamo funzioni sublineari.

DIMOSTRAZIONE del Lemma 4 (di prolungabilita, o di fuga da un compatto)
Nota: opzionale, si da solo l'idea
Si considera che se ho $f(x, y)$ continua racchiuso in un compatto $K \Subset A \subseteq \mathbb{R}^2$, per Weierstraß (Teorema di Weierstraß Generalizzato) ho l'esistenza di massimi e minimi;

$$\exists M = \max_K |f|, \exists m = \min_K |f|$$

Inoltre possiamo dire che y' è *lipschitziana* (Definizione 2 (funzione lipschitziana)), dato che è *limitato* in M: infatti ho

$$|y'| \leq M \implies |y(b) - y(a)| \leq M|b - a|$$

(questa è una conseguenza diretta del *teorema di Lagrange*, Teorema di Lagrange)
Dato che è lipschitziana, essa è estendibile: infatti esiste il limite

$$\bar{y} := \lim_{x \to d^-} y(x)$$

con $(d, \bar{y}) \in K$. In definita posso considerare il problema di Cauchy

$$(PC): \begin{cases} z = f(x, z) \\ z(d) = \bar{y} \end{cases}$$

di cui soluzione è proprio y ridefinita nel suo nuovo intervallo.

A5. Studio Qualitativo

Studio Qualitativo di Equazioni Differenziali

Strumenti vari per lo studio qualitativo dei problemi di Cauchy: lemma di prolungabilità (o fuga da un compatto), corollario del teorema di Cauchy-Lipschitz (soluzioni uniche non si intersecano): definizione di equilibri, teorema dell'asintoto.

---

0. Voci correlate

- Teorema di Cauchy-Lipschitz
- Esistenza locale e globale delle soluzioni ai Problemi di Cauchy

1. Equilibri dei Problemi di Cauchy

#Corollario

Corollario (relazione tra problemi di Cauchy aventi condizione iniziale diversi).

Siano (PC_1) e (PC_2) due *problemi di Cauchy ben posti*

$$(PC_1): \begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

e

$$(PC_2): \begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = \tilde{y_0} \neq y_0 \end{cases}$$

Se $y_1(t)$ e $y_2(t)$ sono *soluzioni distinte* dei *problemi di Cauchy* (rispettivamente per (PC_1), (PC_2)), allora l'intersezione dei loro grafici è nulla

$$G(y_1) \cap G(y_2) = \emptyset$$

Ovvero y_1, y_2 *non si incontrano mai*.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Corollario 1 (relazione tra problemi di Cauchy aventi condizione iniziale diversi)

Si dimostra per assurdo. Supponendo che esista un punto $(t_0, y_0) \in G(y_1) \cap G(y_2)$, posso considerare il *problema di Cauchy* definito sul dato iniziale (t_0, y_0) che dà due soluzioni y_1, y_2 e ciò contraddice *Cauchy-Lipschitz* (Teorema di Cauchy-Lipschitz). ■

#Definizione

Definizione (equilibrio di un Problema di Cauchy).

Sia (PC) un *problema di Cauchy* ben posto, con *dati iniziali al variare* $(x_0, y_0) \in A$. Si dice *"equilibrio"* una funzione una retta del tipo $y = c \in \mathbb{R}$ che risolve il problema di *Cauchy* in (x_0, y_0).

In altre parole, le soluzioni aventi *dati iniziali diversi* non possono mai *"attraversare"* l'equilibrio.

2. Teorema dell'Asintoto

Enunciamo un teorema utile per *valutare* il comportamento asintotico delle soluzioni.

#Teorema

Teorema (teorema dell'asintoto).

Sia $u : I = [a, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^1(I)$, con $a \in \tilde{\mathbb{R}}$.

Supponendo *che esistano i limiti*

$$\lim_{t \to +\infty} u(t) = l, \lim_{t \to +\infty} u'(t) = m$$

con $l, m \in \tilde{\mathbb{R}}$, abbiamo l'implicazione

$$l < +\infty \implies m = 0$$

o prendendo la sua contronomiale abbiamo

$$m \neq 0 \implies l = +\infty$$

3. Studio Qualitativo di Equazioni Differenziali

Diamo un *modello* per lo *studio qualitativo* di equazioni differenziali ordinarie, in particolare quelle *ben poste*.

#Esempio

ESEMPIO 3.1. (*Studio qualitativo di un problema di Cauchy*)
Come esempio prendiamo l'equazione differenziale

$$y'(x) = xy(x)$$

1. **Dominio**
Prima di tutto studiamo il *dominio* della funzione f, in particolare definita su $I \times \mathbb{R}$, dove I è il dominio della soluzione $y(x)$. In questo caso si vede banalmente che I è la retta reale $\mathbb{R}$ ($I = \mathbb{R}$).
2. **Buona Posizione**
Dopodiché vediamo *com'è fatta* questa funzione f. In questo caso, f soddisfa le *condizioni del teorema di Cauchy Lipschitz*, dal momento che f è continua e la derivata $f_y = x$ lo è pure.
3. **Dominio della soluzione**
Adesso vediamo il *dominio* della soluzione al problema di Cauchy. Abbiamo variati strumenti, tra cui il *teorema dell'esistenza globale* (Teorema 2 (condizione sufficiente per l'esistenza globale)) o la *fuga dal compatto* (Lemma 4 (di prolungabilita, o di fuga da un compatto)).
In questo caso vediamo che f è *sublineare*, infatti

$$\forall K \Subset \mathbb{R}^2, |f| \leq \left|\max_K xy(x)\right| = \underbrace{\alpha}_{\max_K} |y(x)| + \underbrace{\beta}_{0}$$

Dato che f è definita su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, la soluzione è definita su tutta $\mathbb{R}$.

4. **Equilibri del problema di Cauchy**
Dimenticandoci di eventuali condizioni iniziali, cerchiamo di trovare soluzioni a

$$y' = xy$$

ponendo $y = c \in \mathbb{R}$ una *costante*, che implica

$$0 = x \cdot c \implies c = 0$$

Abbiamo dunque $y = 0$ un *equilibrio* della soluzione. Ovvero se una *soluzione* parte da 0, rimane costante; se parte *sopra* rimane sopra, se sotto rimane sotto.
Questo diventa più utile se conosciamo *più punti di equilibrio*, in tal modo di poter *"incastrare"* la funzione y in un *"rango"* di valori.
5. *Segno e flessione della funzione*
Qui abbiamo che il segno di f' è *positiva* nel *primo* e nel *terzo quadrante* (ovvero $(+,+)$ e $(-,-)$).
Inoltre siamo in grado di prendere la seconda derivata y'', dal momento che abbiamo $y \in \mathcal{C}^1 \implies y' \in \mathcal{C}^1$ (se è derivabile il termine generale y, allora lo è pure y').
Possiamo dunque prendere

$$y'' = (x \cdot y(x))' = y(x) + xy(x) = y(x)(1 + x^2)$$

Come prima, abbiamo lo stesso segno di $y(x)$ (ovvero è positiva nei positivi, negativa nei negativi).
6. **Simmetria della funzione**
Vogliamo verificare se la *soluzione* y sia simmetrica o meno (in particolare pari o dispari). Per far questo, consideriamo il *problema di Cauchy* posto come

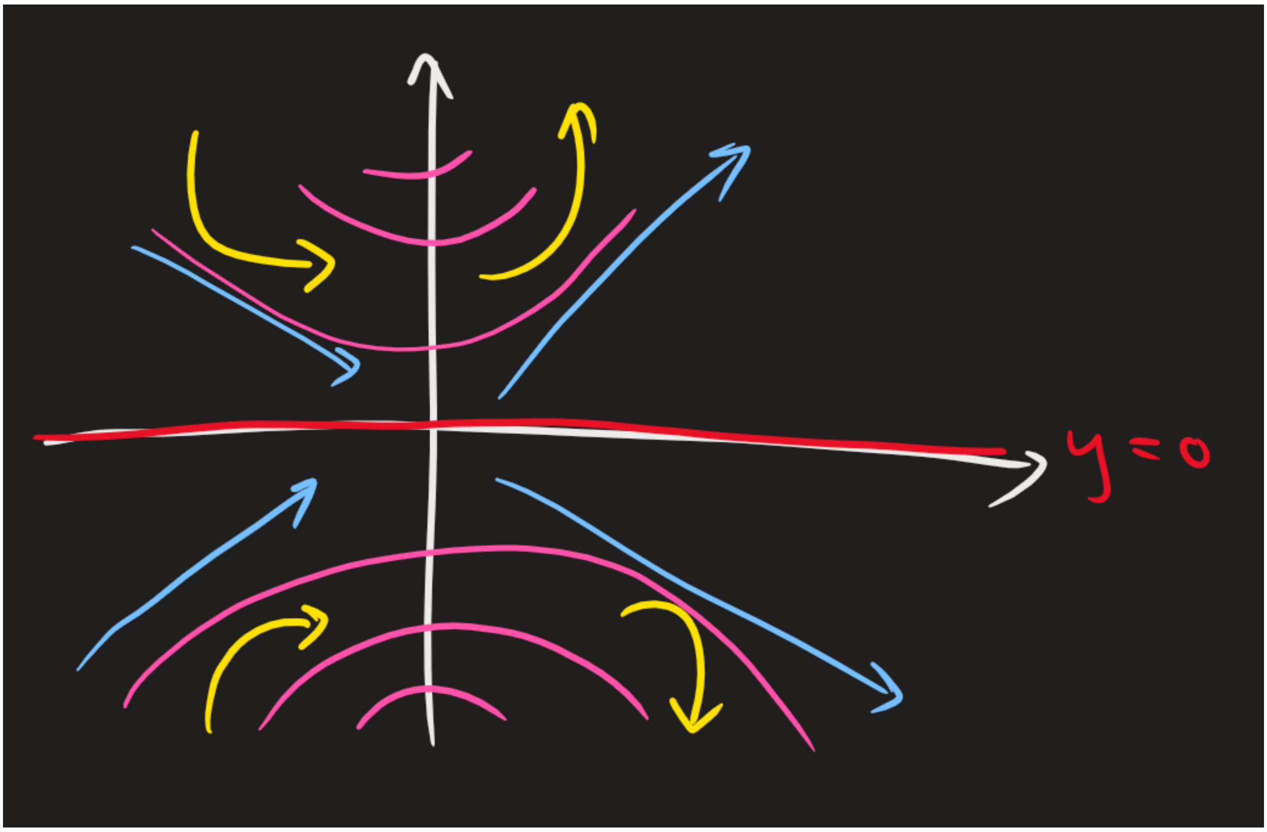
$$(PC) : \begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

e poniamo $z(x) = y(-x)$ (o $-y(-x)$ se dobbiamo dimostrare che è *dispari*). L'idea è quella di verificare che *sia* $z(x)$ che $y(x)$ risolvono (PC), dunque per *Cauchy-Lipschitz* sono uguali ($y = z$). Questo è il caso: infatti abbiamo

$$(PC) : \begin{cases} z'(x) = -y'(-x) = -(-x)y(-x) = xz(x) \\ z(0) = y(-0) = y_0 \end{cases}$$

come volevasi dimostrare.
7. **Limiti della soluzione**
In alcuni casi è utile determinare il *comportamento asintotico* dei limiti della soluzione. In questo caso ci avvaliamo dell'*teorema dell'asintoto* (Teorema 3 (teorema dell'asintoto)), per dire se la funzione tende a un valore finito o infinito. In questo caso abbiamo che il limite della sua derivata $\lim_\infty y' = +\infty \neq 0$, da cui si ha $\lim_\infty y = +\infty$. Utile per controllare se tutto ciò appena ottenuto è *consistente* con gli *equilibri determinati*, che *limitano* la soluzione y. ■

FIGURA 3.1. (*Risultati del primo studio qualitativo*)


y=0

SEZIONE B. ODE DEL PRIMO ORDINE

B1. Variabili Separabili

Equazioni Differenziali a Variabili Separabili

Definizione di ODE a variabile separate (separabili). Metodo di risoluzione per le ODE a variabili separabili.

---

0. Voci correlate

- Definizioni Relative alle Equazioni Differenziali

1. Definizione di ODE a variabili separabili

Vediamo una *classe di equazioni differenziali* che possono avere una sua *soluzione esplicita* mediante l'*integrazione*.

#Definizione

> Definizione (equazione differenziale a variabili separabili).
>
> Siano $g, h : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^1$ con I un intervallo. Allora l'equazione differenziale
>
> $$y'(x) = g(x)h(y)$$
>
> si dice *"equazione differenziale ordinaria a variabili separate"*.

#Osservazione

> Osservazione (le equazioni differenziali a variabili separabili formano problemi di Cauchy ben definiti).
>
> Notiamo che con $f(x, y) := g(x)h(y)$ *verificano* le ipotesi del *teorema di Cauchy-Lipschitz*, dunque sappiamo che i *problemi di Cauchy* formati da f sono *ben definiti*.

2. Metodo di Risoluzione delle ODE a variabili separabili

Vediamo un suo metodo di risoluzione.

#Teorema

> Teorema (metodo di risoluzione per i problemi di Cauchy con ODE a variabili separabili).
>
> Sia (PC) il *problema di Cauchy* definito da
>
> $$(PC):\begin{cases} y'(x)=g(x)h(y(x)) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$$
>
> Se vale che $h(y_0)=0$, allora la soluzione è immediata, con
>
> $$\boxed{h(y_0)=0 \implies y(x)=y_0}$$
>
> Se invece non vale tale condizione, allora vale che la soluzione è
>
> $$h(y_0)\neq 0 \implies \boxed{y(x)=K^{-1}(G(x)-G(x_0)+K(y_0))}$$
>
> con G una primitiva di g su $[a,b]$ e K una primitiva di h su $y(I)$.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 3 (metodo di risoluzione per i problemi di Cauchy con ODE a variabili separabili)

Per caso $h(y_0)=0$ si considera che si avrebbe

$$y'(x_0)=g(x_0)h(y_0)=0$$

da cui per *Lagrange* si ha che y è una *costante*, da cui si ha

$$y(x_0)=x_0$$

per soddisfare la condizione iniziale.

Invece nel caso $h(y_0)\neq 0$ bisogna usare ragionamenti più fini: posso affermare che con $y:I\longrightarrow\mathbb{R}$ la soluzione, si ha che $h(y(x))\neq 0, \forall x\in I$ (sennò sarebbe *assurdo*, dal momento che esisterebbe un *"problema di Cauchy traslato con $z(x_1)=y_1=0$"* che ha due soluzioni distinte uguali). Dopodiché posso *dividere* per h (operazione consentita per la supposizione appena fatta), che ci dà

$$y'(x)=g(x)h(y(x)) \iff \frac{y'(x)}{h(y(x))}=g(x)$$

Adesso possiamo *integrare* ambo i lati su $[x_0,x]$ che ci dà

$$\int_{x_0}^{x} \frac{y'(t)}{h(y(t))}\,\mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t$$

Adesso effettuando la sostituzione di variabili $\boxed{y(t) = s}$ si ha

$$\int_{x_0}^{x} \frac{y'(t)}{h(y(t))}\,\mathrm{d}t \to \int_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{1}{h(s)}\,\mathrm{d}s = \int_{x_0}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t$$

Adesso sia $G \in \int g$ e $K = \int \frac{1}{h}$ (ovvero abbiamo le loro primitive: esistono dal momento in cui stiamo integrando funzioni continue su compatti), da cui per il *teorema di Torricelli-Barrow* (1) si ha

$$K(y(x)) - K(y(x_0)) = G(x) - G(x_0)$$

Poiché $K'(s) = \frac{1}{h(s)} \neq 0$ si ha che K è *iniettiva* (e ovviamente *suriettiva*), dunque invertibile. Allora esplicitiamo y con

$$y(x) = K^{-1}(G(x) - G(x_0) + K(y_0))$$

oppure possiamo pensare questa espressione come

$$y(x) = K^{-1}\left(G(x)|_{x_0}^{x} + K(y_0)\right)$$

che è un numero. ■

3. Esempio pratico

Per farci capire bene, usiamo un esempio pratico.

#Esempio

> Esempio (esempio pratico).
>
> Prendiamo il problema di Cauchy
>
> $$(PC) : \begin{cases} y'(x) = xy(x) \\ y(0) = y_0 > 0 \end{cases}$$
>
> Abbiamo una *ODE a variabili separate*, con $g(x) = x$ e $h(y(x)) = y(x)$. Se abbiamo $h(0) = 0$. allora semplicemente $y(x) = 0$ è la *soluzione*.
>
> Invece per caso contrario dobbiamo procedere per la procedura appena descritta. Ovvero prendiamo
>
> $$\int_{x_0}^{x} \frac{y'(t)}{y(t)}\,\mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x} t\,\mathrm{d}t$$

procedendo per sostituzione si ha

$$\int_{y_0}^{y} \frac{1}{s}\,\mathrm{d}s = \int_{x_0}^{x} t\,\mathrm{d}t$$

Calcolandolo abbiamo

$$\ln|s|\Big|_{y_0}^{y} = \frac{t^2}{2}\Big|_{0}^{x} \iff \ln|y| = \frac{x^2}{2} + \ln|y_0|$$

Applicando $\exp(\cdot)$ da ambo i lati si ha

$$y = y_0 e^{\frac{x^2}{2}}$$

che è la soluzione per il *problema di Cauchy*.

B2. Principio di Linearizzazione

Principio di Linearizzazione dei Problemi di Cauchy

Motivazione per le equazioni differenziali lineari: principio di linearizzazione dei problemi di Cauchy. Espansione della soluzione con Taylor al secondo grado.

---

0. Voci correlate

- Formula di Taylor
- Formula di Taylor del Secondo Ordine

1. Principio di Linearizzazione

IDEA. Supponiamo di avere $y' = f(x,y)$ equazione differenziale. Possiamo considerare il suo *approssimante lineare* $\bar{f} \in \mathcal{L}$ (ovvero è una funzione *lineare*, Definizione 1 (applicazione lineare da V a V primo)). In particolare voglio che questa si approssimi verso f, con un comportamento del tipo

$$\bar{f} \to f$$

In particolare faremo questa *linearizzazione* con l'*espansione di Taylor* (Formula di Taylor)

#Osservazione

Osservazione (principio di linearizzazione).

Sia (PC) il *principio di Cauchy* definito come

$$(PC) : \begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

con $f \in \mathcal{C}^1(A)$, con A aperto. Adesso prendiamo il *problema di Cauchy linearizzato* definito come

$$(\overline{PC}) : \begin{cases} z'(x) = \bar{f}(x, y(x)) \\ z(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Allora abbiamo $\bar{f}(x, y)$ definito mediante l'*espansione di Taylor* al *primo ordine* (1), con

$$\bar{f}(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Lo riscriviamo in termini di $\alpha y, \beta x, \gamma$:

$$\bar{f}(x, y) = \alpha y + \beta x + \gamma$$

Dunque abbiamo

$$(\overline{PC}) : \begin{cases} z'(x) = \bar{f}(x, y(x)) = \alpha y + \beta x + \gamma \\ z(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Questa approssimazione funzione per valori vicini, $(x, y) \to (x_0, y_0)$.

#Osservazione

Osservazione (stima dell'errore).

Possiamo dare pure una *stima dell'errore* di quest'approssimazione. Infatti possiamo considerare le *espansioni di Taylor* di y, z al *secondo ordine* (1).

$$\begin{cases} y(x) = p_{2,x_0}(x) + \varepsilon(x)|x - x_0|^2 \\ z(x) = p_{2,x_0}(x) + \eta(x)|x - x_0|^2 \end{cases}$$

Abbiamo la stima

$$|y(x) - z(x)| = |\varepsilon(x) - \eta(x)||x - x_0|^2$$

Notiamo che questa stima è un *o-piccolo* di $|x - x_0|^2$ (2), ovvero questa decresce infinitamente con $x \to x_0$

2. Esempio di Linearizzazione

#Esempio

Esempio (esempio di linearizzazione).

Supponiamo di avere il problema di Cauchy definito come

$$(PC) : \begin{cases} y'(x) = e^{y(x)} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Possiamo linearizzare col principio di linearizzazione appena osservato, abbiamo dunque

$$e^{y(x)} \rightsquigarrow e^{y_0} + y = 1 + y$$

Dunque abbiamo il problema linearizzato come segue

$$(\overline{PC}) : \begin{cases} z'(x) = 1 + z \\ z(0) = 0 \end{cases}$$

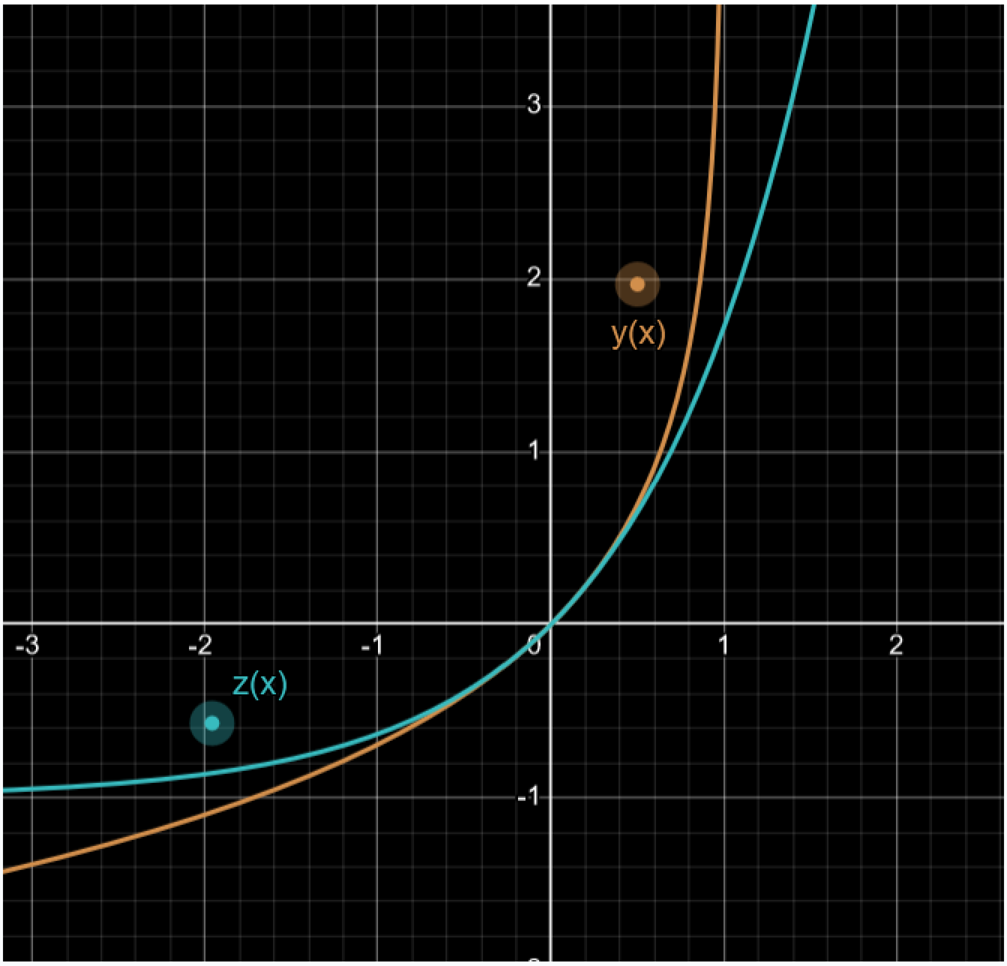
Vedremo che un problema del genere sarà *banalissimo da risolvere*, dandoci la soluzione esplicita

$$z(x) = e^x - 1$$

Notiamo che (PC) rimarrebbe comunque *risolvibile* col metodo delle *variabili separate*, dandoci la soluzione

$$y(x) = -\ln(1 - x)$$

FIGURA 2.1. (*Stima tra le funzioni*)



B3. Lineari

Equazioni Differenziali Lineari del primo ordine

Equazioni differenziali lineari: definizione di ODE lineare del primo ordine completa e omogenea. Struttura delle ODE lineari del primo ordine, metodo di risoluzione per le soluzioni particolari.

---

0. Voci correlate

- Definizioni Relative alle Equazioni Differenziali
- Definizione di Applicazione Lineare
- Teoremi sui Sistemi Lineari

1. Definizione di ODE lineare del primo ordine

Diamo un po' di nomenclature.

#Definizione

Definizione (Equazione differenziale ordinaria lineare del primo ordine).

Siano $a, b : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^0$ con I, aperto. Allora le equazioni di forma

$$(*)\ y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$$
$$(**)\ y'(x) = a(x)y(x)$$

L'equazione $(*)$ si definisce *ODE lineare del primo ordine completa*, invece $(**)$ è un'*ODE lineare del primo ordine omogenea*.

#Esempio

Esempio (esempi).

L'equazione differenziale ordinaria lineare del primo ordine

$$y'(x) = \cos(x)y(x) + x^3$$

è *completa*.

Invece l'equazione differenziale

$$y'(x) = \cos(x)y(x)$$

è *omogenea*.

#Teorema

Teorema (le ODE lineari qualsiasi ammettono soluzioni uniche).

I *problemi di Cauchy* definiti mediante *equazioni differenziali ordinarie lineari del primo ordine* ammettono sempre *soluzioni uniche* definite *globalmente* su I.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 3 (le ODE lineari qualsiasi ammettono soluzioni uniche)
Si tratta di usare i teoremi a disposizione per dimostrare l'*esistenza unica* e la *definizione globale*.
$\exists!$: Si applica banalmente il *teorema di Cauchy-Lipschitz* (Teorema 1 (teorema di Cauchy-Lipschitz, dell'esistenza e dell'unicità locale delle soluzioni)), dal momento che abbiamo a, b, y continue da cui discende che f è continua. Inoltre la derivata parziale f_y è a stessa, che è continua.
I: Banalmente si usa il fatto che f è *lineare*, dunque definita *globalmente* (Teorema 2 (condizione sufficiente per l'esistenza globale)). Infatti, si ha $\alpha = \max_{K \in I} a(x)$ e $\beta = \max_{K \in I} b(x)$. ■

2. Struttura delle ODE lineari del primo ordine

#Definizione

Definizione (operatore lineare di un'ODE lineare).

Si definisce l'*operatore lineare* di un'*equazione differenziale ordinaria lineare* del tipo

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$$

come l'*applicazione lineare* $L \in \mathcal{L}[\mathcal{C}^1(I); \mathcal{C}^0(I)]$ (ovvero manda *funzioni derivabili con derivate continue* in *funzioni continue*) definita mediante l'operazione

$$L(y(x)) := y'(x) - a(x)y(x)$$

In altre parole *valuta* lo scarto tra $y'(x)$ e la parte lineare $a(x)y(x)$ di una soluzione.

#Osservazione

Osservazione (L è lineare).

Si ha che L è lineare, dunque

$$L(\alpha y_1(x) + \beta y_2(x)) = \alpha L(y_1(x)) + \beta L(y_2(x))$$

#Definizione

Definizione (l'insieme delle soluzioni generale e omogenea).

Possiamo definire i seguenti spazi.
i. le soluzioni appartengono a $L^{-1}(\{b\})$.

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x) \iff L(y) = b \iff \boxed{y \in L^{-1}(\{b\}) := S_b}$$

ii. caso $b = 0$, $\ker L$: definiamo l'insieme delle *soluzioni all'omogenea* come

$$y \in S_0 \iff L^{-1}(\{0\}) = \ker L$$

#Teorema

Teorema (di struttura delle soluzioni per le equazioni differenziali lineari).

L'insieme $S_b \equiv L^{-1}(\{b\})$ è costituito da *tutte e sole* le funzioni y del tipo

$$y(x)=\bar{y}(x)+z(x)$$

> Dove $\bar{y}$ è una *soluzione particolare della completa* e z è una *generica soluzione* dell'omogenea $\ker L$. In altre parole si ha
>
> $$\boxed{S_b=\bar{y}+\ker L}$$

Si nota che questo teorema è estremamente simile al *teorema di struttura per le soluzioni ai sistemi lineari* (Teorema 8 (di struttura per i sistemi lineari arbitrari)). Adesso vogliamo trovare *come sono fatte* le soluzioni $\bar{y}$ e z.

#Teorema

> Teorema (di struttura delle soluzioni per le equazioni differenziali lineari omogenee).
>
> L'insieme $S_0=\ker L$ forma uno *spazio vettoriale* con $\dim S_0=1$ (ovvero abbiamo che è costituita da *una* funzione).
> Risulta che la sua generica soluzione è
>
> $$z(x)\in\ker L=\left\{c\in\mathbb{R}:ce^{A(\cdot)}\right\}$$
>
> dove $A(\cdot)$ è la *primitiva di* $a(\cdot)$, ovvero $A\in\int a$.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 8 (di struttura delle soluzioni per le equazioni differenziali lineari omogenee)
" $\Longleftarrow$ ": Proviamo che se definiamo $z(x):=ce^{A(x)}$ allora questa risolve l'ODE omogenea. Derivandolo abbiamo

$$z'(x)=cA'(x)e^{A(x)}=a(x)\cdot ce^{A(x)}=a(x)z(x)$$

come volevasi dimostrare.
" $\implies$ ": Proviamo che se $z(x)$ risolve S_0, allora verifica l'equazione. Procediamo dunque *per costruzione*:

$$z'(x)-a(x)z(x)=0\implies e^{-A(x)}z'(x)-e^{-A(x)}a(x)z(x)=0$$

Abbiamo che quest'ultima equazione rappresenta una derivata di $z(x)e^{-A(x)}$. Allora

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(z(x)e^{-A(x)}\right)=0$$

Dunque per *Lagrange* abbiamo che questa è costante, ovvero abbiamo

$$z(x)e^{-A(x)}=c\implies z(x)=ce^{A(x)}$$

che prova la tesi. ■

Adesso completiamo il quadro trovando una *soluzione particolare* per la completa.

#Teorema

> Teorema (di struttura delle soluzioni particolari di un'ODE completa).
>
> Una *soluzione particolare* della completa è data da
>
> $$\bar{y}(x) = \int_{x_0}^{x} e^{A(x)-A(t)} b(t) \, \mathrm{d}t$$
>
> con $x_0 \in I$ fissato.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 9 (di struttura delle soluzioni particolari di un'ODE completa)
Si tratta di usare un trucco, per cui pensiamo c come una *variabile* $c(x)$ (anche se in realtà sarebbe una costante). Adesso una soluzione che abbia una struttura del tipo

$$\bar{y}(x) = c(x)e^{A(x)}$$

Suppongo $c \in \mathcal{C}^1$ e impongo che sia la soluzione all'ODE completa

$$\bar{y}(x) = c'(x)e^{A(x)} + c(x)a(x)e^{A(x)} \equiv a(x)\bar{y}(x) + b(x) = a(x)c(x)e^{A(x)} + b(x)$$

Quindi abbiamo

$$c'(x)e^{A(x)} + c(x)a(x)e^{A(x)} = a(x)c(x)e^{A(x)} + b(x)$$

da cui possiamo cancellare $c(x)a(x)e^{A(x)}$. Abbiamo dunque

$$c'(x)e^{A(x)} = b(x)$$

Adesso si tratta semplicemente trovare questa $c(x)$ calcolando l'integrale

$$c(x) = \int_{x_0}^{x} b(t)e^{-A(t)} \, \mathrm{d}t$$

Ovvero abbiamo

$$\bar{y}(x) = c(x)e^{A(x)} \implies \bar{y}(x) = \int_{x_0}^{x} b(t)e^{A(x)-A(t)} \, \mathrm{d}t$$

che prova la tesi. ■

3. Soluzione di un'ODE lineare

#Corollario

Corollario (la soluzione generica di un'ODE lineare).

La generica soluzione di un'equazione differenziale ordinaria lineare completa è data da

$$\boxed{y(x) = Ce^{A(x)} + \int_{x_0}^{x} e^{A(x)-A(t)} b(t) \text{ d}t}$$

con $x_0 \in I$ fissato, $C \in \mathbb{R}$ qualsiasi e $A \in \int a$.

#Esempio

Esempio (problema di Cauchy lineare).

Col problema di Cauchy associata ad un'ODE lineare completa

$$(PC) : \begin{cases} y'(x) = a(x)y(x) + b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Abbiamo che l'*unica* soluzione al (PC) è rappresentata da

$$\boxed{y(x) = y_0 e^{A(x)-A(x_0)} + \int_{x_0}^{x} e^{A(x)-A(t)} b(t) \text{ d}t}$$

(per trovare questa equazione abbiamo trovato la costante C come $C = y_0 e^{-A(x_0)}$, ponendo $y_0 = Ce^{A(x)}$)

B4. Di Bernoulli

Equazioni Differenziali di Bernoulli

Equazioni differenziali non-lineari di Bernoulli: definizione, metodo di risoluzione.

---

0. Voci correlate

- Equazioni Differenziali Lineari del primo ordine
- Definizioni Relative alle Equazioni Differenziali

1. Definizione di Equazione Differenziale di Bernoulli

Se *non* abbiamo *equazioni differenziali lineari*, possiamo comunque tentare di *"salvarci"* facendoli ricondurre al caso *lineare*.

#Definizione

Definizione (equazione differenziale di Bernoulli).

Un'*equazione differenziale ordinaria del primo ordine* si dice *di Bernoulli* se abbiamo un'equazione del tipo

$$\text{(B)}\;\; y'(x) = a(x)y(x) + b(x)y(x)^{\gamma}$$

dove $\gamma \in \mathbb{R} \diagdown \{0, 1\}$ (se lo fossero, non avrebbe considerare tale *ODE*; sarebbe lineare), e $a, b : I \longrightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^0(I)$ (ovvero delle funzioni continue su I).

#Teorema

Teorema (riduzione delle Bernoulli alle lineari).

L'equazione differenziale *di Bernoulli* (B) è riconducibile al caso lineare, ponendo $z(x) = y(x)^{1-\gamma}$:

$$z'(x) = (1-\gamma)(a(x)z(x) + b(x))$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 2 (riduzione delle Bernoulli alle lineari)

Importante ricordarsi il passaggio fondamentale!

Si prende la (B) e lo si moltiplica per $y(x)^{-\gamma}$, dandoci

$$\begin{gathered}
y'(x)y(x)^{-\gamma} = a(x)y(x)y(x)^{-\gamma} + b(x)y(x)^0 \\
y'(x)y(x)^{-\gamma} = a(x)y(x)^{1-\gamma} + b(x)
\end{gathered}$$

Noto che a sinistra ho una derivata del tipo $(y(x))^{\lambda} \overset{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}}{\to} \lambda y'(x)y^{\lambda-1}$, ottenendo $(1-\gamma)y'(x)y(x)^{-\gamma} = [(y(x))^{1-\gamma}]'$.

$$\frac{[(y(x)^{1-\gamma})]'}{1-\gamma} = a(x)y(x)^{1-\gamma} + b(x)$$

Adesso sostituisco la parte in rosso $y(x)^{1-\gamma}$ definendo ad-hoc la funzione $z(x) := y(x)^{1-\gamma}$, ottenendo la lineare

$$\frac{z'(x)}{1-\gamma} = a(x)z(x) + b(x)$$

Rinormalizzando segue la tesi. ■

NOTA! Qualora dovessimo risolvere una *Bernoulli*, ricordiamoci che una volta ottenuta la soluzione su z devo comunque *riportare* questa soluzione alla forma originale y!

B5. Sistemi di Equazioni Differenziali

Sistema di Equazioni Differenziali del Primo Ordine

Generalizzazione delle equazioni differenziali su vettori di soluzioni. Definizione di sistema di equazione differenziale di dimensione N del primo ordine. Adattazioni del teorema di Peano-Cauchy-Lipschitz.

---

0. Voci correlate

- Definizioni Relative alle Equazioni Differenziali

1. Definizione di Sistema di EDO del Primo Ordine

Generalizziamo quanto detto sulle *ODE*, passando da *soluzioni scalari* (ovvero funzioni $R \to R$) a *funzioni vettoriali* (in un certo senso curve).

#Definizione

Definizione (sistema di equazioni differenziali del primo ordine).

Sia $N \in \mathbb{N}$ fissato, poi $F: E \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$, $(x_0, Y^0) \in E$ con $Y^0 := (y_1^0, \dots, y_N^0)$. Considero F come un campo del tipo $F(x, Y)$ dove $Y(x) = (y_1(x), \dots, y_N(x))$.

Allora definisco

$$(PC_\Sigma): \begin{cases} Y'(x) = F(x, Y) \\ Y(x_0) = Y^0 \end{cases}$$

come un *problema di Cauchy*, avente *equazione sistema di equazioni differenziali del primo ordine di grado* N. Leggo (PC_Σ) come

$$(PC_\Sigma): \begin{cases} y_1'(x) = f_1(x, y_1, \ldots, y_N) \\ \vdots \\ y_N'(x) = f_N(x, y_1, \ldots, y_N) \\ y_1(x_0) = y_1^0 \wedge \ldots \wedge y_N(x_0) = y_N^0 \end{cases}$$

Come per il *caso scalare*, definisco Y la soluzione del (PC_Σ) come una funzione $Y : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ (ovvero una specie di curva), tale che:
i. Y sia derivabile in I
ii. Per ogni $x \in I$, si ha $(x, Y(x)) \in E$ (ovvero ha senso)
iii. $Y'(x) = F(x, Y(x))$ (soddisfa l'ODE)
iv. $Y(x_0) = Y^0$ (soddisfa la condizione iniziale)

2. Adattazione dei teoremi

I teoremi sul *caso scalare* valgono ugualmente. Come il *teorema di Cauchy-Lipschitz* (Teorema 1 (teorema di Cauchy-Lipschitz, dell'esistenza e dell'unicità locale delle soluzioni)).

#Teorema

Teorema (di esistenza unica locale, o di Peano-Cauchy-Lipschitz generalizzato).

Sia (PC_Σ) il *sistema di equazioni differenziali* definito come

$$(PC_\Sigma): \begin{cases} Y'(x) = F(x, Y) \\ Y(x_0) = Y^0 \end{cases}$$

Se F è *continua* sull'aperto $A \subseteq \mathbb{R}^{1+N}$, allora esiste un'ampiezza $h > 0$ tale che sia definita $Y : (x_0 - h, x_0 + h) \longrightarrow \mathbb{R}^N \in \mathcal{C}^1$ che risolva (PC_Σ).

Se inoltre vale che *tutti gli elementi* della Jacobiana $J(F)$ (1) sono *continue* (ovvero tutte le derivate di ogni funzione marginale).

$$\forall i, j \in \{1, \ldots, N\}^2, \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \in \mathcal{C}^0$$

allora tale soluzione Y è *unica*.

#Teorema

Teorema (dell'esistenza globale).

Sia (PC_Σ) il *sistema di equazioni differenziali* definito come

$$(PC_\Sigma) : \begin{cases} Y'(x) = F(x,Y) \\ Y(x_0) = Y^0 \end{cases}$$

Se F è continua e definita su un intervallo $I \times \mathbb{R}^N$ è *sublineare*, ovvero

$$\forall H \Subset I, \exists \alpha(H), \beta(H) \in \mathbb{R} : \forall x \in H, \\ \|F(x,Y)\| \leq \alpha \|y\| + \beta$$

Allora la soluzione Y (che esiste per Peano) è definita su tutto I.

B6. Sistemi di ODE Lineari

Sistemi di Equazioni Differenziali Lineari del Primo Ordine

Sistemi di equazioni differenziali lineari. Caso $N = 1$ (scalare); necessità di definire l'esponenziazione di matrici. Definizione di spazio delle matrici euclideo normato. Lemma: convergenza della matrice esponenziale. Teorema: soluzioni a sistemi di equazioni differenziali lineari.

---

0. Voci correlate

- Sistema di Equazioni Differenziali del Primo Ordine
- Equazioni Differenziali Lineari del primo ordine

1. Definizione di Sistema di Equazioni Differenziali Lineari

Vediamo un *caso particolare* di sistemi di equazioni differenziali.

#Definizione

Definizione (sistema di equazioni differenziali lineari).

Sia dato Σ un *sistema lineare* (1) di dimensione N a *coefficienti costanti*, definita come

$$\boxed{\Sigma : X' = AX}$$

con $A \in M_N(\mathbb{R})$ e X un *vettore-colonna* che contiene le *derivate* $(x_1'(t), \ldots, x_N'(t))$ e X le funzioni $(x_1(t), \ldots, x_N(t))$. Equivalentemente posso leggere Σ come

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_N'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & \dots & a_{2N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & \dots & a_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_N(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\prod_{1 \leq i \leq N} a_{1i}) x_1(t) \\ \vdots \\ (\prod_{1 \leq i \leq N} a_{Ni}) x_N(t) \end{pmatrix}$$

2. Detour sull'esponenziazione delle matirici

#Osservazione

Osservazione (caso scalare).

Per $N = 1$ ho il caso scalare $x'(t) = ax(t)$, con la soluzione $x(t) = Ae^{at}$ (1). Come posso generalizzare tale soluzione? Voglio trovare un modo per *definire* l'esponenziazione delle metrici e^A.

L'idea per *esponenziare* le matrici è quella di usare la *serie di Taylor* per $\exp$ (Teorema 1 (sviluppo di Taylor-MacLaurin per la funzione esponenziale)), ovvero

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Per usare $x \in M_N(\mathbb{R})$, definendo così l'*esponenziazione di una matrice* come una *serie di matrici*, devo prima introdurre la nozione di norma per lo spazio $M_N(\mathbb{R})$ per poter valutare la *convergenza* di tale serie.

#Definizione

Definizione (norma di una matrice).

Si definisce la norma di una matrice $A \in M_N(\mathbb{R})$ come

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2}$$

Ovvero questa è la *norma euclidea* su $M_N(\mathbb{R}) \sim \mathbb{R}^{N \times N}$.

Allora definisco $(M_N(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$ come uno *spazio euclideo normato*.

#Lemma

Lemma (convergenza della matrice esponenziale).

Si dimostra che data una matrice $A \in M_N(\mathbb{R})$, si ha che la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} = I + A + \ldots + \frac{A^N}{N!} + \ldots = S_k + \ldots + = \overline{S} < +\infty$$

è *convergente*. Ovvero

$$\exists \overline{S} \in M_N(\mathbb{R}) : \lim_N \| S_N - \overline{S} \| = 0$$

#Definizione

Definizione (matrice esponenziale).

Si definisce la *matrice esponenziale*, data una matrice $A \in M_N(\mathbb{R})$ come la serie di potenze

$$e^A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$$

3. Soluzioni a Sistemi di ODE lineari

#Teorema

Teorema (sistemi a soluzioni di equazioni differenziali del primo ordine lineari).

Sia Σ un *sistema di equazioni differenziali lineari del primo ordine*. Allora una sua soluzione è data da

$$\boxed{X(t) = e^{t \cdot A} \cdot c}$$

Con X un vettore $n \times 1$, e^{tA} un vettore $n \times n$, e c un vettore arbitrario $n \times 1$.

SEZIONE C. MODELLI DI ODE DEL PRIMO ORDINE

C1. Decadimento del Carbonio

Modello di Applicazione delle ODE lineari

Modello biologico di applicazione delle ODE lineari: il decadimento del carbonio. Ipotesi, modellizzazione e risultato finale.

---

0. Voci correlate

- Equazioni Differenziali Lineari del primo ordine

1. Ipotesi del Modello

Vediamo un *esempio biologico* per le *equazioni differenziali lineari*.

IPOTESI. (*Decadimento del carbonio degli organismi*)

- Gli organismi scambiano carbonio
  - Alla morte questo scambio *cessa*, dunque perdono *concentrazione di carbonio*
- Supponiamo di avere in t_0 una quantità X di carbonio
- Poi in $t_0 + 5730$ (incremento di un periodo di tempo) una quantità $0.5X$ di carbonio.

MODELLO. (*Decadimento del carbonio*)

- Dalle ipotesi possiamo ipotizzare il seguente modello matematico. Sia definita ricorsivamente $(C_n)_n$ la *successione* che indica la concentrazione del carbonio nei vari scarti temporali.
  - In particolare si definisce C_N come la *"concentrazione del carbonio dopo $t_0 + N(5730)$ anni*.
  - Come caso base poniamo C_0 la concentrazione del carbonio al tempo t_0. Ovvero $C_0 = X$.
- In base a questa legge ho che la *concentrazione* ha un andamento *"esponenziale"*, con base minore di uno. In particolare

$$C_N = \frac{C_0}{2^N}$$

- Per *trovare le variazioni istantanee*, passo dal *continuo al discreto*.
  - Prima di tutto calcolo lo scarto discreto, che è calcolata come

$$C_{K+1}-C_K=\frac{1}{2}C_K-C_K=-\frac{1}{2}C_K$$
$$\frac{C_{K+1}-C_K}{\Delta t}=-\frac{1}{2\Delta t}C_K$$

> - Adesso passo al discreto, ponendo il parametro $\frac{1}{2\Delta t}$ come un parametro sconosciuto τ e interpretando il membro sinistro come una derivata.

$$C'(t)=-\frac{1}{\tau}C(t)$$

> - Questa è un'*equazione differenziale ordinaria del primo ordine lineare omogenea* facilmente risolvibile, dandoci

$$C(t)=C_0e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}$$

> - Per trovare τ uso le condizioni iniziali e il fatto che $\Delta t=5730$.

$$\frac{C_0}{2}=\frac{C(t_0)}{2}=C(t_0+\Delta t)=C_0\exp\left(\frac{\Delta t}{\tau}\right)=C_0\exp\left(-\frac{5730}{\tau}\right)$$

> - Isolando la τ si ottiene

$$\tau=\frac{5730}{\ln 2}\approx 8266.64$$

- Abbiamo finito con la costruzione del modello, con l'*equazione della concentrazione del carbonio* data da

$$C(t)=C_0\exp\left(-\frac{t-t_0}{8266.64}\right)$$

- Siamo pronti per rispondere ad eventuale domande.

ESEMPIO. (*Domanda*)
Supponiamo di aver scoperto un fossile vegetale, con 0.75 concentrazione di carbonio rispetto ad altri organismi attualmente viventi. Vogliamo stimare l'età di questo fossile. Applico il modello $C(t)$, ponendo $t=2024$. Così abbiamo

$$C(2024)=(0.75)C_0$$

Per trovare il suo tempo iniziale t_0 (ovvero la data in cui ha iniziato a cessare di vivere), usiamo il modello. In particolare

$$\begin{aligned} C(2024) &= C(t_0)\exp\left(-\frac{2024-t_0}{\tau}\right) \\ &= C_0\exp\left(-\frac{2024-t_0}{\tau}\right) \end{aligned}$$

Adesso pongo l'uguaglianza

$$C_0(0.75) = C_0\exp\left(-\frac{2024-t_0}{\tau}\right)$$

Facendo i calcoli, ottengo

$$t_0 = 2024 + \tau\ln(0.75) \approx -353$$

Ovvero siamo circa nel 431 avanti cristo. ■

C2. Modello Epidemiologico SIR

Modelli di Applicazione dei Sistemi di ODE

Esempio di modello che applica un sistema di ODE: il modello SIR per le epidemie.

---

0. Voci correlate

- Sistema di Equazioni Differenziali del Primo Ordine

1. Ipotesi del Modello SIR

Prendiamo un *modello biologico noto*, che è in grado di descrivere la *propagazione di una malattia infettiva*. Poniamo le seguenti ipotesi:
IPOTESI. (*Modello SIR*)

- Si distingue la *popolazione* in *tre classi disgiunte*: *infetti*, *suscettibili* e *rimossi*,
  - *Infetti (Infected)*: sono infetti (I)
  - *Suscettibili (Susceptible)*: sono sani ma contagiabili S
  - *Rimossi (Removed)*: non è infetto e non può più ne ammalarsi ne trasmettere la malattia. O sono immunizzati alla malattia, o sono morti. R
- La *dinamica* della popolazione è unidirezionale, del tipo *S→I→R*

- Posso *solo* infettare gli suscettibili

- Ho un *numero di individui* N costante. Quindi si ha $I+S+R=N$, per una qualsiasi istanza del tempo.
- Ho c un numero di *contatti* di ciascun individuo per l'unità di tempo h.
  - Ho $\xi = \frac{I}{N}$ la frazione degli infetti che un sano può incontrare
    - $\rho \in [0,1]$ è la probabilità che da tale contatto nasca un infezione
- Per ogni unità di tempo h la probabilità γ che un infetto diventi rimosso

2. Modello SIR

Adesso per modellizzare tutto, traduciamo le *ipotesi* in formule.

1. Notiamo che $S(t)$ dev'essere decrescente. Infatti valutando la sua variazione ho

$$
-\Delta S = S(t) - S(t+h) = \left(I(t)h\underbrace{\frac{c\rho}{N}}_{\beta}\right)S(t)
$$

   Passando all'incremento infinitesimale, ottengo

$$
\frac{S(t)-S(t+h)}{h} = (\beta I(t))S(t)
$$

   Dunque ho l'equazione differenziale

$$
-S'(t) = \beta I(t)S(t) \implies \boxed{S'(t) = -\beta I(t)S(t) < 0 \ (*)}
$$

2. Adesso studio la dinamica *I→R* (come gli infetti diventano rimossi). In questo caso è *crescente*. Valutando la sua variazione ottengo

$$
R(t+h) - R(t) = \gamma h I(t) > 0 \implies \frac{R(t+h)-R(t)}{h} = \boxed{R'(t) = \gamma I(t) \ (*}
$$

3. Dato che $I = N - R - S$, ottengo direttamente $I'(t) = \beta I(t)S(t) - \gamma I(t)$, permettendoci di passare direttamente al sistema, ponendo le condizioni iniziali $I(0) = I_0$ e $S(0) = S_0 = N - I(0) - R(0)$. Nota che $R(0)$ non deve essere necessariamente 0! Possiamo avere casi in cui ci sono già delle immunizzazioni.

$$
(PC_\Sigma): \begin{cases} S'(t) = -\beta I(t)S(t) \ \ (1) \\ I'(t) = \beta I(t)S(t) - \gamma I(t) \ \ (2) \\ I(0) = I_0 > 0, S(0) = S_0 > 0 \end{cases}
$$

   Qui PC_Σ è un *sistema di equazioni differenziali del secondo grado e del primo ordine* (Definizione 1 (sistema di equazioni differenziali del primo ordine)). Volendo possiamo porre $Y' = F(t,Y)$ con $Y(t) = (S(t), Y(t))$ e $Y^0 = (S_0, Y_0)$ ed eccetera.

3. Studio Qualitativo delle Soluzioni

Ho ottenuto il sistema. Adesso? Vogliamo capire *come* è fatto questo modello.

1. Per ora facciamo una serie di manipolazioni, per poter studiare qualitativamente le soluzioni. Manipolo la (1) per ottenere

$$S'(t) = -\beta I(t) S(t) \iff I(t) = -\frac{1}{\beta}\frac{S'(t)}{S(t)} \quad (1.1)$$

2. Sommo (1), (2) per ottenere

$$S'(t) + I(t) = -\beta I(t) S(t) + \beta I(t) S(t) - \gamma I(t) = -\gamma I(t)$$

   da cui ho

$$S'(t) + I'(t) - \gamma I(t) = 0$$

3. Uso la (1.1) per ottenere

$$S'(t) + I'(t) - \frac{\gamma}{\beta}\frac{S'(t)}{S(t)} = 0$$

   Noto che tutte queste sono *derivate* di qualcosa. In particolare il terzo membro è una derivata del tipo $k \ln(S(t))$ (derivare per crederci!).

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(S(t) + I(t) - \frac{\gamma}{\beta}\ln(S(t))\right) = 0$$

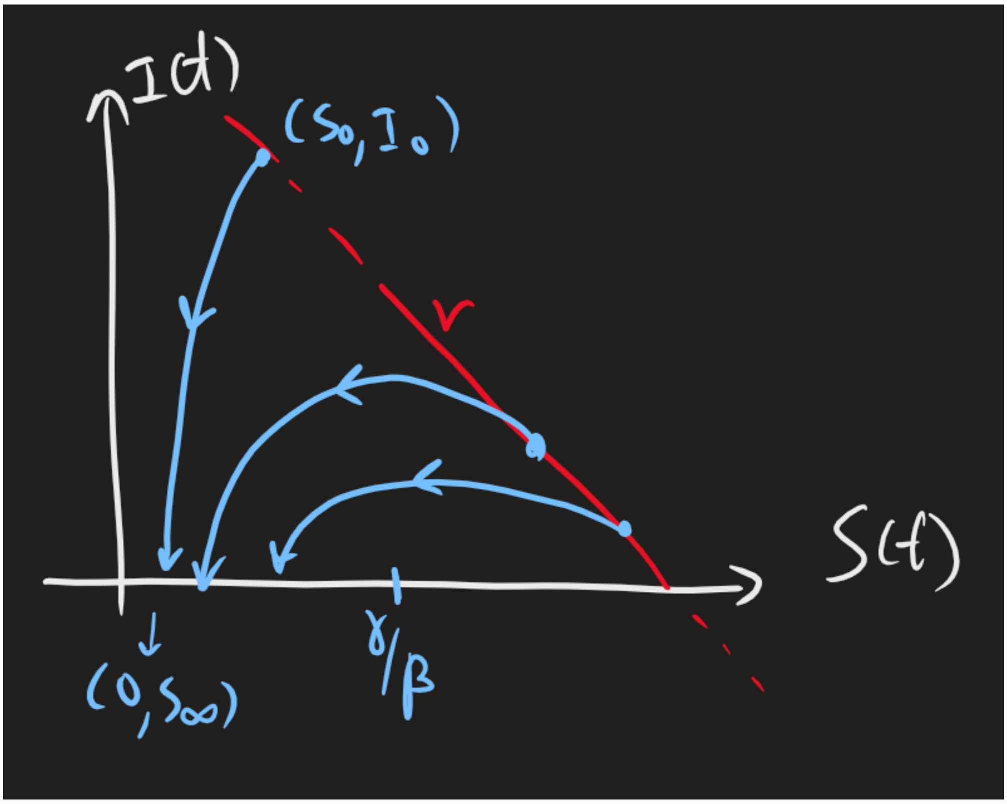
   Ovvero la *derivanda* è costante:

$$S(t) + I(t) - \frac{\gamma}{\beta}\ln S(t) = \mu \in \mathbb{R}$$

   Esplicitando per I ottengo la soluzione

$$I(t) = -S(t) - \frac{\gamma}{\beta}\ln(S(t)) + \mu$$

4. Adesso vedo la soluzione-vettore $(S(t), I(t))$ come una *curva*. Ovvero stiamo considerando il *piano delle fasi*. Supponendo $R(0) = 0$ si ha la retta $r : S(t) = N - I(t)$. Supponendo che la condizione iniziale (S_0, I_0) sia *dentro* la retta, si ha una curva del tipo



5. Inoltre si dimostra che abbiamo i seguenti comportamenti asintotici: $I(t \to +\infty) = 0$ e $S(t \to +\infty) = S_\infty > 0$.
6. Per capire meglio l'andamento di $I(t)$, vedo il suo segno. Dalla (2) ho

$$I'(t) = \underbrace{\beta I(t)}_{>0} \left(S(t) - \frac{\gamma}{\beta} \right)$$

   Allora mi studio *solo* il segno di $S(t) - \frac{\gamma}{\beta}$. Se $S(t)$ supera tale parametro, è crescente; se no inizia a decresce, altrimenti se è uguale ho un *punto stazionario*. Concludo che se $S_0 \leq \frac{\gamma}{\beta}$, allora ho che l'infezione *non si propaga*, inizia subito a morire.

SEZIONE D. ODE DEL SECONDO ORDINE

D1. Definizione di ODE del secondo ordine

Definizione di Equazione Differenziale Secondo Ordine

Definizione di ODE scalare del secondo ordine. Teoremi: Peano-Cauchy-Lipschitz, dell'esistenza globale.

---

0. Voci correlate

- Definizioni Relative alle Equazioni Differenziali
- Teorema di esistenza di Peano
- Teorema di Cauchy-Lipschitz
- Esistenza locale e globale delle soluzioni ai Problemi di Cauchy

1. Definizione di ODE del Secondo ordine, scalare

#Definizione

Definizione (ODE scalare del secondo ordine).

Sia $f : E \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. Allora l'equazione

$$y''(x) = f(x, y(x), y'(x))$$

si dice *ODE del secondo ordine scalare*. Una funzione $y : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice *soluzione* dell'*ODE* se è di classe $\mathcal{C}^2$, se è soddisfatta l'equazione e poi vale che $(x, y(x), y'(x)) \in E, \forall x \in I$.

Fissata una *condizione iniziale* $(x_0, y_0, y_0' := v_0) \in E$, mettendolo in *sistema* con l'*ODE* si ha il *problema di Cauchy*

$$(PC) : \begin{cases} y''(x) = f(x, y(x), y'(x)) \\ y(x_0) = y_0 \land y'(x_0) = y_0' := v_0 \end{cases}$$

Motivazione: Studiare la *dinamica dei punti materiali*.

#Esempio

Esempio (oscillatore armonico).

Un punto che risente la *forza elastica* $F = ma = m\ddot{x} = -kx$ a posizione iniziale $x(t=0) = x_0$ e a velocità iniziale $x'(0) = v(0) = v_0$ ha il moto descritto dal seguente problema di Cauchy

$$(PC) : \begin{cases} x''(t) = -\dfrac{k}{m}x(t) \\ x(0) = x_0 \wedge x'(0) = v_0 \end{cases}$$

2. Teoremi Misti

Posso usare dei *teoremi già noti* nel caso dell'ordine $N = 1$ (1, 2, 3).

#Teorema

Teorema (Peano-Cauchy-Lipschitz e dell'esistenza globale).

Si definisca il *problema di Cauchy* associato all'ODE del secondo ordine come

$$(PC) : \begin{cases} y''(x) = f(x, y(x), y'(x)) \\ y(x_0) = y_0 \wedge y'(x_0) = v_0 \end{cases}$$

Allora valgono le seguenti:

i. *Esistenza*

$$f \in \mathcal{C}^2 \implies \exists h > 0, y : (x_0 - h, x_0 + h) \longrightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^2 \text{ risolve } (PC)$$

ii. *Unicità*

$$f_y, f_{y'} \in \mathcal{C}^0 \implies \exists! y$$

iii. *Esistenza globale*

$$\begin{gathered} \forall H \Subset I, \exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} : |f(x, y, y')| \leq \alpha|y| + \beta|y'| + \gamma \\ \Downarrow \\ \exists y : I \longrightarrow \mathbb{R} \text{ risolve } (PC) \end{gathered}$$

D2. Equazione di Newton

Equazione di Newton

Equazione di Newton: definizione e metodo risolutivo.

0. Voci correlate

- Definizione di Equazione Differenziale Secondo Ordine

1. Definizione di Equazione di Newton

#Definizione

Definizione (equazione di Newton, equazione differenziale autonoma e conservativa).

Sia $f : J \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^1$ con J aperto. Allora *l'equazione differenziale*

$$y'' = f(y)$$

si dice *equazione di Newton*. In particolare si dice che è *autonoma* e *conservativa*, dato che non dipendono dai parametri x, y'.

#Osservazione

Osservazione (proprietà dell'equazione di Newton).

Per i *teoremi* sulle *equazioni differenziali* abbiamo sicuramente l'*esistenza unica* della soluzione y. Infatti, $f_y = f_{y'} = 0$, che sono continue.

Tuttavia per quanto riguarda la *globalità* non si sa nulla.

2. Metodo Risolutivo

Per risolvere quest'*ODE* vogliamo trovare un modo per *ridurlo* dal secondo ordine al primo.

#Teorema

Teorema (riduzione dell'equazione di Newton).

Sia definita l'*equazione di Newton* con le *condizioni iniziali* (x_0, y_0, v_0).

$$y'' = f(y)$$

Sia detta F una primitiva di f; allora l'equazione differenziale può essere *ridotta* in un'*equazione differenziale del primo ordine*, con:
i. *Caso* $y'(x_0) = v_0 \neq 0$:

$$y''(x)=f(y(x))\to\begin{cases}v_0>0\implies y'(x)=+\sqrt{2F(y(x))+v_0^2-2F(y_0)}\\ v_0<0\implies y'(x)=-\sqrt{2F(y(x))+v_0^2-2F(y_0)}\end{cases}$$

ii. Caso $y'(x_0)=v_0=0, f(y_0)\neq 0$:

$$\begin{cases}f(y_0)>0\implies y'(x)=\operatorname{sgn}(x-x_0)\sqrt{2F(y(x))+v_0^2-2F(y_0)}\\ f(y_0)<0\implies y'(x)=\underbrace{-\operatorname{sgn}(x-x_0)}_{\operatorname{sgn}(x_0-x)}\sqrt{2F(y(x))+v_0^2-2F(y_0)}\end{cases}$$

iii. Caso $y'(x_0)=v_0=f(y_0)=0$:

$$y'(x)=0, y(x)\equiv y_0$$

Nota: i casi *i, ii* valgono meglio per intorni di x_0.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 3 (riduzione dell'equazione di Newton)
Nota: qui è più importante impararsi la dimostrazione che le formule! Anzi, si invita SOLAMENTE di impararsi la procedura risolutiva.
Partiamo dal caso *iii.*. Banalmente in questo caso $y(x):=y_0$ soddisfa tutte le condizioni per la definizione di soluzione, dato che

$$y'(x)=0\wedge y''(x)=0=f(y(x)=y_0)=0\wedge f(y(x_0)=y_0)=0\mid \text{OK!}$$

i. Adesso torniamo ai casi precedenti. La prima idea è quella di *moltiplicare* l'equazione differenziale per $y'(t)$, ottenendo

$$y''(t)y'(t)=f(y)y'(t)$$

Cos'è la prima? Esatto, proprio la derivata $\frac{1}{2}y'(t)^2$! (per crederci, derivare); allora l'ODE diventa

$$\frac{1}{2}\left(y'(t)^2\right)'=f(y(t))y'(t)$$

Siano definite G,F le primitive di $(y'(t))^2$ e di $f(y)$. Notiamo che in questo caso avrei $(F(y(t)))'=f(y)y'(t)$. Allora l'equazione differenziale diventa

$$\frac{1}{2}(G(t))'=(F(y(t)))'$$

Integrando da ambo i lati nell'intervallo t_0, t otteniamo

$$\int_{t_0}^t\frac{1}{2}(y(s)^2)'\,\mathrm{d}s=\int_{t_0}^t(F(y(s)))'\,\mathrm{d}s$$

Per il *teorema fondamentale del calcolo integrale* (Teorema 1 (fondamentale del calcolo integrale)) ho banalmente

$$\frac{1}{2}(y'(t))^2\bigg|_{t_0}^{t} = F(y(t))\bigg|_{t_0}^{t} \implies \frac{1}{2}(y'(t))^2 + F(y(t)) = \frac{1}{2}v_0^2 - F(y_0)$$

Isolando termini opportuni ottengo l'*equazione differenziale* del primo ordine

$$[y'(t)]^2 = 2F(y(t)) - 2F(y_0) + v_0^2$$

Adesso per esplicitare il termine $y'(t)$ devo iniziare a ragionare in termini di segni di v_0 e $f(y_0)$. Partiamo dal *caso i.*: ovvero v_0 non è nulla.
ii. Assumendo $v_0 > 0$, possiamo sicuramente dire che per la *continuità* di y' la soluzione sicuramente esiste, e tale soluzione dev'essere pure continua. Allora si ha che per *un intorno di* x_0 la derivata y' rimane positiva, dato che $y'(x_0) > 0$. Dunque posso tranquillamente prendere la *soluzione positiva*

$$y'(x) = \sqrt{2F(y(t)) - 2F(y_0) + v_0^2}, x \in \forall U(x_0)$$

Il ragionamento vale *analogamente* per $v_0 < 0$, solo che prendiamo la *soluzione negativa*.
iii. Adesso sia $v_0 = 0$: devo creare altri *sottocasi*, separandoli per il *segno di* $f(y_0)$.
Assumendo $f(y_0) > 0$, abbiamo il segno di $y''(x_0)$ positivo

$$y''(x_0) = f(y(x_0)) = f(y_0) > 0$$

Dato che $y'(x) = v_0 = 0$ e $y''(x_0)$ positiva (ovvero abbiamo una specie di *punto di minimo*), abbiamo che vale

$$\begin{cases} y'(x) < 0, \forall x < x_0 \\ y'(x) > 0, \forall x > x_0 \end{cases}$$

Quindi a *"seconda di dove sta x rispetto a x_0"*, dobbiamo scegliere il segno della soluzione. In conclusione abbiamo

$$y'(x) = \operatorname{sgn}(x - x_0)\sqrt{2F(y(t)) - 2F(y_0) + v_0^2}$$

Lo stesso ragionamento vale per $f(y_0) < 0$, solo che invertiamo i segni. ■

D3. ODE lineari del secondo ordine

Equazioni Differenziali Lineari del Secondo Ordine

Equazioni differenziali lineari del secondo ordine: definizione, l'esistenza unica della soluzione. Struttura: teorema di struttura delle equazioni differenziali lineari del secondo ordine. Descrizione del kernel. Teorema: costruzione di base per il kernel, di una soluzione particolare della completa (metodo della somiglianza o il metodo del nucleo risolvente).

---

0. Voci correlate

- Definizione di Equazione Differenziale Secondo Ordine
- Equazioni Differenziali Lineari del primo ordine

1. Definizione di ODE lineare del secondo ordine

#Definizione

Definizione (ODE lineare del secondo ordine a coefficienti costanti).

Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $c : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^0(I)$, con I aperta. L'equazione differenziale della forma

$$f(x, y, y') : y''(x) + ay'(x) + by(x) = c(x)$$

si dice *"equazione differenziale ordinaria lineare del secondo ordine scalare con coefficienti costanti completa"*.

Se si ha $c(x) \equiv 0$, allora in tal caso si dice che è *"omogenea"*

#Esempio

Esempio (le vibrazioni meccaniche).

Un esempio fisico è un *oggetto* sottoposto ad una forza variabile $F(t)$, forza di attrito viscoso $F_a = -\xi v$. Allora si ha l'equazione differenziale

$$mx''(t) = -\xi x'(t) - kx(t) + F(t)$$

Vediamo una proprietà immediata delle *ODE lineari del secondo ordine complete, a coefficienti costanti*.

#Teorema

Teorema (proprietà delle ODE lineari del secondo ordine a coefficienti costanti).

> Si ha che il *problema di Cauchy* (PC), composto da un'*ODE lineare del secondo ordine* e dalla condizione iniziale $(x_0 \in I, y_0 \in \mathbb{R}, v_0 \in \mathbb{R})$
>
> $$(PC) : \begin{cases} y''(x) + ay'(x) + by(x) = c(x) \\ y(x_0) = y_0 \wedge y'(x_0) = v_0 \end{cases}$$
>
> Allora $\exists ! y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ che risolve (PC).

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 3 (proprietà delle ODE lineari del secondo ordine a coefficienti costanti)
Si tratta di usare i teoremi già noti (Teorema 1 (teorema di Cauchy-Lipschitz, dell'esistenza e dell'unicità locale delle soluzioni), Teorema 2 (condizione sufficiente per l'esistenza globale)).
i. ∃!: Si ha il campo

$$f(x, y, v) = -av + by + c(x)$$

Questa dev'essere continua (dato che lo è c). Inoltre si ha le derivate $f_y = -b$ e $f_v = -a$, che per forza sono continue. Dunque si ha l'*esistenza unica* della soluzione
ii. $y(I)$: f è chiaramente sublineare (poiché c'è un motivo che si chiamano *equazioni differenziali lineari*....), dato che

$$\forall K \Subset I, |f(x, y, v)| \leq \alpha|x| + \beta|y| + \gamma \impliedby \begin{cases} \alpha = |a| \\ \beta = |b| \\ \gamma = \max\limits_{x \in K} |c(x)| \end{cases}$$

■

2. Struttura delle ODE lineari del secondo ordine

Vediamo la struttura di queste equazioni differenziali, poi per determinare tali *soluzioni*.
Simile come fatto col caso *ordine* $N = 1$ (Equazioni Differenziali Lineari del primo ordine)

#Definizione

> Definizione (applicazione lineare).
>
> D'ora in poi chiamiamo $L : \mathcal{C}^2 \longrightarrow \mathcal{C}^0$ come la funzione funzionale $L(y) := y'' + ay' + by$.

#Definizione

> Definizione (spazio di soluzioni).

> Siano definite gli *spazi di soluzioni* come
>
> $$S_{c(\cdot)} := L^{-1}(\{c(\cdot)\}) = \{y \in \mathcal{C}^2 : y'' + ay' + by = c\}$$
>
> e
>
> $$S_0 := \ker L = L^{-1}(\{0\})$$

#Teorema

> **Teorema (di struttura).**
>
> Si ha che lo spazio S_c rispetta la struttura
>
> $$S_c = \tilde{s} + \ker L$$
>
> dove $\tilde{s} \in S$ è un *elemento particolare*, $\ker L$ la struttura generale del nucleo.
>
> Ovvero questo teorema si traduce come
>
> $$s \in S_c \iff s(t) = \tilde{y}(t) + z(t)$$
>
> con $\tilde{y}$ una soluzione particolare della completa, e z una soluzione generale per il nucleo.

#Teorema

> **Teorema (descrizione del nucleo).**
>
> Si ha che $\ker L$ è uno *spazio vettoriale* e che la sua dimensione è 2
>
> $$\dim \ker L = 2$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 7 (descrizione del nucleo)

Prima del tutto prendiamo la base canonica per $\mathbb{R}^2$, che è

$$\mathcal{E} = \{(1,0),(0,1)\}$$

Siano adesso y_1, y_2 delle *soluzioni* al nucleo (ovvero $y_1, y_2 \in \ker L$). Adesso siano definiti dei *problemi di Cauchy* con le *condizioni iniziali* degli *elementi* di $\mathcal{E}$. Ovvero $(y_1(t_0). y_1'(t_0)) = (1,0)$ e $(y_2(t_0), y_2'(t_0)) = (0,1)$. Ovvero

$$(PC_1) : \begin{cases} ay''(x) + by'(x) + c(x) = 0 \\ y(x_0) = 1 \land y'(x_0) = 0 \end{cases}$$

e (PC_2) si definisce nella maniera identica, solo che abbiamo $y(x_0) = 0 \wedge y'(x_0) = 1$.
Supponiamo che y_1, y_2 creino una *base* per $\ker L$. Per dimostrarlo, dobbiamo dimostrare che essi sono *linearmente indipendenti* e siano un *sistema di generatori* per $\ker L$.
i. *Indipendenza lineare*
Considero un'elemento della combinazione lineare $\operatorname{span}(y_1, y_2)$, ovvero

$$C(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

Si tratta di dimostrare che $C(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \iff c_1 = c_2 = 0$. Per farlo, pongo $C(0) = 0$ ottenendo

$$c_1 \underbrace{y_1(x_0)}_{1} + \underbrace{c_2 y_2(x_0)}_{0} = 0 \implies c_1 \cdot 1 + 0 = 0 \implies c_1 = 0$$

Adesso per trovare c_2 derivo C e lo pongo a 0:

$$C'(x_0) = c_1 \underbrace{y_1'(x_0)}_{0} + c_2 \underbrace{y_2'(x_0)}_{1} = 0 \implies c_2 = 0$$

Dimostrando così $c_1 = c_2 = 0 \impliedby C(x) = 0$. L'altro verso dell'implicazione viene banalmente verificata mediante calcoli.
ii. *Sistema di generatori*
Si tratta di dimostrare che ogni *elemento del nucleo* fa parte dello span $\operatorname{span}(y_1, y_2)$ Sia fissata $s(x) \in \ker L$, devo dimostrare che $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : s(x) = \alpha y_1(x) + \beta y_2(x)$. Partiamo da ciò che conosciamo: ovvero s risolve il problema

$$(PC) : \begin{cases} s''(x) + as'(x) + bs(x) = 0 \\ s(x_0) = s_0, s'(x_0) = v_0 \end{cases}$$

Scegliendo $\alpha = s_0$ e $\beta = v_0$ si ha banalmente la tesi. ■

3. Costruzione delle Soluzioni

Ora iniziamo a trovare delle *soluzioni* per un'equazione differenziale lineare del secondo ordine, sfruttando la *struttura* di S_c. Partiamo dall'*omogenea*.

3.1. Soluzioni dell'Omogenea

#Teorema

> Teorema (costruzione della base delle omogenee).
>
> Sia definita l'equazione differenziale omogenea
>
> $$\boxed{y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0}$$
>
> Sia definita l'equazione caratteristica associata

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

Allora abbiamo che le soluzioni per l'equazione differenziale sono definite mediante le seguente casistiche.
i. $a^2 > 4b$ (*il discriminante è positivo*)
Si ha che esistono delle *soluzioni reali* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ con $\lambda_1 \neq \lambda_2$, e la base alla soluzione dell'omogenea è formata da

$$y(x) \in S_0 = \text{span}\left(e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}\right)$$

ii. $a^2 < 4b$ (*il discriminante è negativo*)
Si ha che esistono delle *soluzioni complesse* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ con $\lambda_1 \sim a_1 + ib_1$ e $\lambda_2 \sim a_2 + ib_2$ con $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ e $b_1, b_2 \in \mathbb{R} \diagdown \{0\}$. Allora la base dell'omogenea è formata da

$$y(x) \in S_0 = \text{span}\left(e^{a_1 x}\cos(b_1 x), e^{a_2 x}\cos(b_2 x)\right)$$

iii. $a^2 = 4b$ (*il discriminante è nullo*)
Si ha che ho l'unica soluzione all'associata $\lambda_0 = \frac{a}{2} \in \mathbb{R}$ e che la base di S_0 è formata da

$$y(x) \in S_0 = \text{span}\left(e^{\lambda_0 x}, xe^{\lambda_0 x}\right)$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 8 (costruzione della base delle omogenee)
Partiamo considerando delle funzioni del tipo $z(x) = e^{\lambda x}$, con $\lambda \in \mathbb{C}$. Sostituendolo nell'*equazione differenziale* otteniamo l'equazione

$$e^{\lambda x}(\lambda^2 + a\lambda + b) = 0$$

Dato che $\exp$ è una funzione *sempre positiva*, l'unica che può risolvere l'equazione è quella algebrica.

$$\lambda^2 + a\lambda + b$$

Poi si dimostra che in *ciascuno dei casi* le funzioni generati risolvono l'*equazione differenziale*; quindi si tratta di dimostrare che sono *linearmente indipendenti* (non serve verificare che sono un *sistema di generatori*, dal momento che abbiamo $\dim \ker L = 2$).
Per esempio dimostriamo il caso i.: sia definita $y(x) = \alpha e^{\lambda_1 x} + \beta e^{\lambda_2 x}$. Adesso vogliamo dimostrare che questa si annulla se e solo se $\alpha = \beta = 0$ (definizione di indipendenza lineare). Vogliamo sfruttare il fatto che $\lambda_1 \neq \lambda_2$, da cui si ha $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$. Per farlo, raccogliamo i termini ottenendo

$$\alpha e^{\lambda_1 x} + \beta e^{\lambda_2 x} = \underbrace{e^{\lambda_1 x}}_{\neq 0}\left(\alpha + \beta e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x}\right) = 0$$

da cui si ha

$$\alpha + \beta e^{(\lambda_2-\lambda_1)x} = 0$$

Adesso deriviamo quest'espressione, ottenendo

$$\underbrace{(\lambda_2-\lambda_1)}_{\neq 0}\beta\underbrace{e^{(\lambda_2-\lambda_1)x}}_{\neq 0} = 0$$

L'unico termine che può cancellare è β, ottenendo $\beta = 0$.
In una maniera analoga si dimostra che $\alpha = 0$; infatti sostituendo $\beta = 0$ si ottiene

$$\alpha\underbrace{e^{\lambda_1 x}}_{\neq 0} = 0$$

da cui ho la tesi. Poi banalmente si dimostra che risolve l'ode calcolando $L(y(x))$. ■

3.2. Soluzione della Completa

Adesso vediamo dei *metodi* per determinare *una* soluzione della completa, potendo dare così una soluzione ad un'*equazione differenziale lineare del secondo ordine*.

#Teorema

Teorema (metodo di somiglianza).

Se l'*equazione differenziale*

$$y'' + ay' + b = c(x) \ \ (*)$$

presenta $c(x)$ con una forma del tipo

$$c(x) \sim P_n(x)e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

oppure

$$c(x) \sim P_n(x)e^{\alpha x}\cos(\beta x)$$

(dove P_n è un polinomio del grado n-esimo) allora, definendo $\xi = \alpha + i\beta$, si ha che una *soluzione della completa* è determinata dalle seguenti casistiche:
i. ξ non l'equazione associata: allora si cercano soluzioni del tipo

$$\xi^2 + a\xi + b \neq 0 \implies y(x) = e^{\alpha x}(Q_1(x)\cos(\beta x) + Q_2(x)\sin(\beta x))$$

con Q_1, Q_2 dei polinomi da determinarsi sostituendo y nella $(*)$.
ii. ξ risolve l'equazione associata ed è di molteplicità 1 (ovvero è una delle due soluzioni)

$$\xi^2 + a\xi + b = 0 \implies y(x) = xe^{\alpha x}(Q_1(x)\cos(\beta x) + Q_2(x)\sin(\beta x))$$

iii. ξ è risolve l'equazione associata ed è di molteplicità 2 (ovvero è l'unica soluzione)

$$\xi^2 + a\xi + b = 0 \implies y(x) = x^2 Q(x) e^{\alpha x}$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 9 (metodo di somiglianza)
Soluzione algoritmica, si tratta di sostituire y nella $(*)$ per determinare la soluzione completa. ■

#Teorema

Teorema (metodo del nucleo risolvente).

Siano $\{z_1, z_2\}$ elementi che costituiscono una base per $\ker L = S_0$. Allora una *soluzione particolare della completa* è data da

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} K(x,t)c(t)\ \mathrm{d}t$$

con $x \in I, x_0 \in I, x, t \in \mathbb{R}$ dei valori. In particolare o $K(x,t)$ la *"funzione di Green"*, definita come

$$K(x,t) = \frac{\det\begin{pmatrix} z_1(0) & z_2(0) \\ z_1(x-t) & z_2(x-t)\end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} z_1(0) & z_2(0) \\ z_1'(0) & z_2'(0)\end{pmatrix}}$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 10 (metodo del nucleo risolvente)
Partiamo da una considerazione preliminare: supponiamo di avere un integral-funzione del tipo

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} G(x,t)\ \mathrm{d}t$$

Come faccio a derivarlo rispetto a x? Per rendere il calcolo semplice e fattibile, introduco la funzione ausiliaria $\varphi(y,z) = \int_{x_0}^{y} G(z,t)\ \mathrm{d}t$. A questo punto introduco la funzione ausiliaria *"identità"* definita come $\psi(x) = (x,x)$. A questo punto prendo la composizione $F = \phi \circ \psi$. Infatti ho una situazione del tipo

$$x \xrightarrow{\psi} (x,x) \xrightarrow{\phi} \int_{x_0}^{x} G(x,t)\ \mathrm{d}t$$

Adesso per derivarlo *basta usare le regole già note* per la composizione di funzioni (Proposizione 1 (differenziale della funzione composta di funzioni in più variabili)); ovvero faccio il prodotto tra $\nabla\phi$ e la jacobiana $J\psi$, dandoci

$$F'(x) = \nabla\varphi \cdot J\psi = \begin{pmatrix} G(x,x) \\ \int_{x_0}^{x} \frac{\partial G}{\partial x}(x,t)\ \mathrm{d}t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} = G(x,x) + \int_{x_0}^{x} \frac{\partial G}{\partial x}(x,t)\ \mathrm{d}t$$

Adesso si tratta di fare solo dei conti. Siano z_1, z_2 gli elementi della base per S_0 tali che

$$\begin{pmatrix} z_1(0) & z_1'(0) \\ z_2(0) & z_2'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}_2$$

(in realtà non sarebbe proprio necessaria, ma facciamo così per semplificarci la vita): così ho

$$K(x,t) = \frac{z_1(0)z_2(x-t) - z_2(0)z_1(x-t)}{z_1(0)z_2'(0) - z_2(0)z_1'(0)} = z_2(x-t)$$

Adesso prendo $y(x)$ definita come nella tesi, ovvero

$$\boxed{y(x) = \int_{x_0}^{x} z_2(x-t)c(t)\ \mathrm{d}t}$$

Adesso ci applico la *regola di derivazione appena enunciata*, dandoci

$$y'(x) = \underbrace{z_2(\underbrace{x-x}_{0})}_{0}c(x) + \int_{x_0}^{x} z_2'(x-t)c(t)\ \mathrm{d}t$$

Derivandolo di nuovo, ottengo

$$y''(x) = \underbrace{z_2'(x-x)}_{1}c(x) + \int_{x_0}^{x} z_2''(x-t)c(t)\ \mathrm{d}t$$

Adesso si tratta di sostituire tutto nell'*equazione differenziale* da risolvere, dandoci

$$\begin{aligned}
&y''(x) + ay'(x) + by(x) = \\
&= c(x) + \int_{x_0}^{x} z_2''(x-t)c(t)\ \mathrm{d}t + a\int_{x_0}^{x} z_2'(x-t)c(t)\ \mathrm{d}t + b\int_{x_0}^{x} z_2(x-t)c(t)\mathrm{d}t \\
&= c(x) + \int_{x_0}^{x} \underbrace{\left[z''(x-t) + az_2'(x-t) + bz_2(x-t)\right]}_{\in S_0}c(t)\ \mathrm{c}t \\
&= c(x) + 0 = c(x)
\end{aligned}$$

che soddisfa l'identità $y''(x) + ay'(x) + by(x) = c(x)$, provando il teorema. ■

Capitolo 9. Calcolo Integrale in $\mathbb{R}^N$

Abstract del Capitolo 9

In questo capitolo si generalizza il discorso sul *calcolo integrale*. Si parte generalizzando la nozione di intervallo parlando di n-rettangoli. Dopodiché si procede a definire l'integrazione su n-rettangoli e poi si generalizza il discorso su domini arbitrari. Inoltre si usa le nozioni apprese sulle curve e superfici per poter integrare funzioni vincolate. Infine il capitolo si conclude con le ultime tecniche di integrazione: il cambiamento delle variabili e l'integrazione generalizzata.

Definizioni Preliminari

Definizione di n-rettangolo

Generalizzazione di intervalli unidimensionali: definizione di n-rettangolo su $\mathbb{R}^N$. Definizione di misura M_n su un n-rettangolo.

---

0. Voci correlate

- Intervalli

1. Definizione di n-rettangolo

Motivazione. Vogliamo parlare di *integrazione in* $\mathbb{R}^N$, un ambito dell'*analisi matematica* estremamente utile, in particolare per:

- calcolare *aree, superfici, curve* su domini complessi (*misura, geometria*)
- calcolare *quantità fisiche* che richiedono più variabili (*scienza*)
- risolvere alcune *equazioni differenziali a derivate parziali* (Definizione 2 (equazione differenziale alle parziale derivate)), note come *P.D.E.* (*matematica*)
  Allora, come fatto nel *caso unidimensionale*, bisogna fare delle *considerazioni preliminari* sulle *suddivisioni di intervalli*. Partiamo dalla *generalizzazione del concetto di intervallo* (Definizione 1 (intervalli limitati)) in *più variabili*.

#Definizione

> **Definizione (N-rettangolo).**
>
> Si dice N*-rettangolo* l'insieme dei *punti* in $\mathbb{R}^N$ formato dal *prodotto cartesiano* degli *intervalli unidimensionali*. Ovvero, dati $(a_1, b_1), \dots, (a_N, b_N) \in \mathbb{R}^N$ possiamo definire l'N-rettangolo R come
>
> $$R = \bigtimes_{i=1}^{N} [a_i, b_i]$$

2. Misura di n-rettangoli

Come per *intervalli unidimensionali* possiamo *misurare* la loro lunghezza effettuando la semplice sottrazione $(b-a)$, o per *quadrati* possiamo *moltiplicare base per altezza* $(b_2 - a_2)(b_1 - a_1)$, possiamo definire la *nozione di misura* su n-rettangoli.

#Definizione

Definizione (misura di N-rettangolo).

Si dice la *misura di un N-rettangolo* $R := \bigtimes_{i \leq N}[a_i, b_i]$ come la funzione $M_N : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$M_N(R) := \prod_{i=1}^{N}(b_i - a_i)$$

Adesso siamo pronti per *definire* la suddivisione di un n-rettangolo R.

Suddivisione di un n-rettangolo

Suddivisione di n-rettangoli: definizione di scomposizione di un n-rettangolo, somma inferiore e superiore di un campo scalare dato un n-rettangolo, proprietà della somma superiore e somma inferiore.

---

0. Voci correlate

- Suddivisione di un Intervallo
- Somma inferiore e superiore per una Funzione

1. Scomposizione di n-rettangoli

Introduciamo il *concetto di scomposizione* su n-rettangoli, come fatto per il caso unidimensionale (Definizione 1 (suddivisione di un'intervallo chiuso e limitato)).

#Definizione

Definizione (suddivisione di un n-rettangolo).

Sia R un n-rettangolo del tipo $R = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$. Fissati $n(k+1)$ punti tali che

$$\begin{cases} a_1 = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = b_1 \\ a_2 = y_0 < y_1 < \ldots < y_k = b_2 \\ \vdots \\ a_n = z_0 < z_1 < \ldots < z_k = b_n \end{cases}$$

Definiamo l'n-rettangolo $R_{ij\dots k}$ come

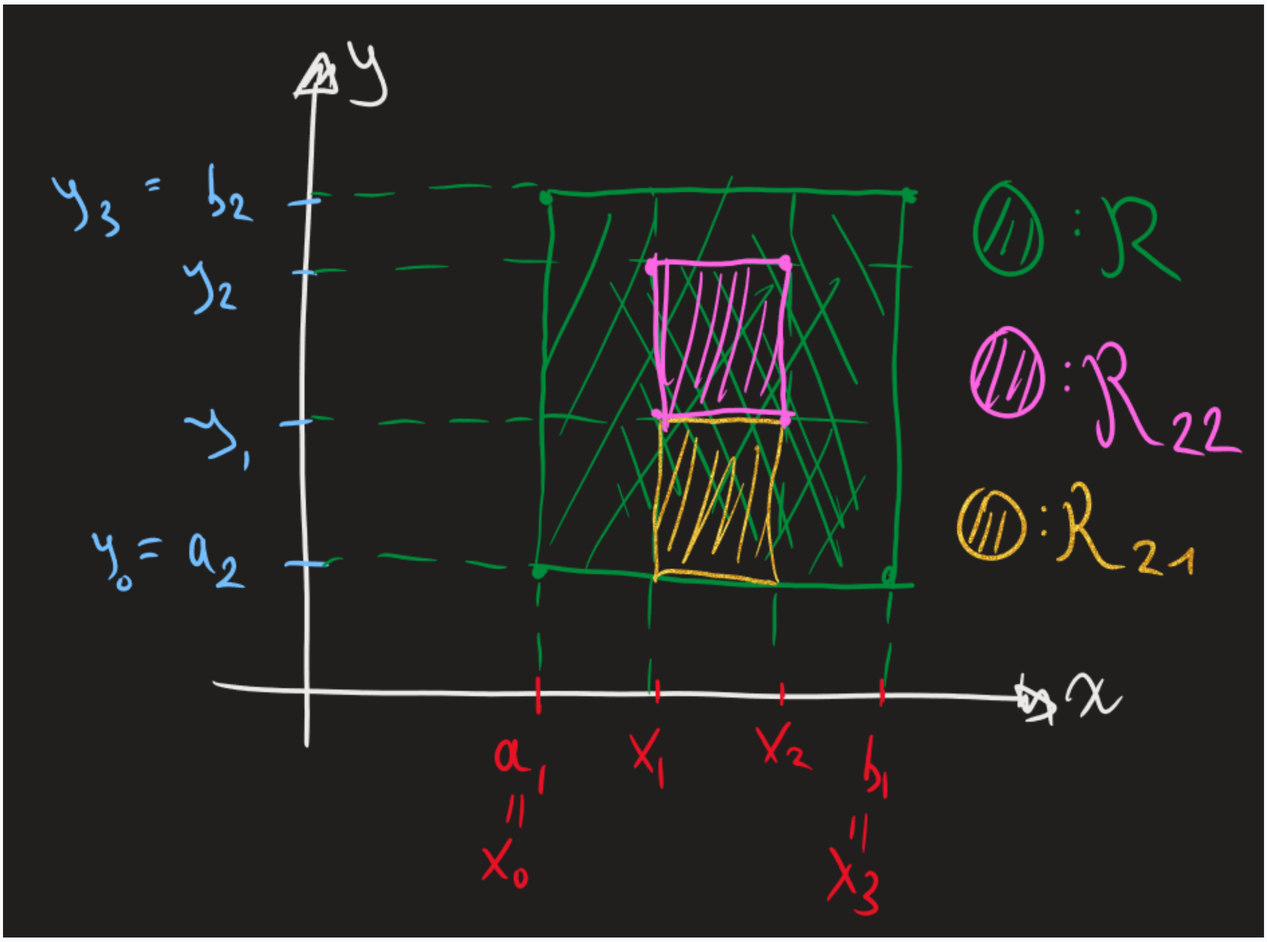
$$R_{ij\dots k} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times \dots \times [z_{k-1}, z_k]$$

una *suddivisione* dell'n-rettangolo R. Naturalmente si ha $R_{ij\dots k} \supseteq R$. Indichiamo la *collezione* di questi n-rettangoli formati come δ: rigorosamente è

$$\delta = \{(i, j, \dots, k) \in \{1, \dots, k\}^n : R_{ij\dots k}\}$$

Nota: non è necessario che i valori k che suddividono le singole componenti siano uguali, ma lo facciamo per semplicità

FIGURA 1.1. (*Esempio: caso bidimensionale*)



#Definizione

Definizione (l'insieme delle suddivisioni).

Dato un N-rettangolo R, l'insieme di *tutte le sue decomposizioni* possibili si indica con

$$\Delta(R) = \{\delta : \delta \text{ scompone } R\}$$

2. Somma Inferiore e Superiore relativa ad una Scomposizione

Adesso iniziamo a giostrare con queste scomposizioni $\Delta(R)$, come fatto nel caso unidimensionale (Definizione 1 (somma inferiore per una funzione relativa ad una suddivisione)).

#Definizione

Definizione (somma inferiore o superiore per una funzione relativa ad una sua scomposizione).

Sia $f: R \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ una *funzione limitata* con R un N-rettangolo. Ovvero abbiamo

$$-\infty < \inf_R f \leq \sup_R f < +\infty$$

Data $\delta \in \Delta(R)$ (ovvero una scomposizione di R), si definisce la *somma inferiore (e superiore) di f relativa a δ* con parametri $n_1, \ldots, n_N$ (ovvero il numero di rettangolini con cui lo stiamo suddividendo) come

$$s(\delta, f) := \sum_{i_1=1}^{n_1} \ldots \sum_{i_N=1}^{n_N} \inf_{R_{i_1 \ldots i_N}} f \cdot m_N(R_{i_1, \ldots, i_N})$$
$$S(\delta, f) := \sum_{i_1=1}^{n_1} \ldots \sum_{i_N=1}^{n_N} \sup_{R_{i_1 \ldots i_N}} f \cdot m_N(R_{i_1, \ldots, i_N})$$

Adesso vediamo le sue proprietà.

#Proposizione

Proposizione (proprietà delle somme inferiori e superiori).

Si ha che per una $f: R \to \mathbb{R}^N$ su cui si può definire una suddivisione $s(\cdot, f)$ e $S(\cdot, f)$ vale la seguente disuguaglianza:

$$\forall \delta, \delta' \in \Delta(R)$$

Inoltre ponendo σ come l'insieme delle *somme inferiori* e Σ delle *somme superiori*

$$\sigma = \{s(\delta, f)\}_\delta, \Sigma = \{S(\delta, f)\}_\delta$$

si ha la che σ, Σ sono separate in $\mathbb{R}$, ovvero

$$\sup \sigma \leq \inf \Sigma$$

Osservando l'ultima proprietà, siamo pronti per definire l'*integrale di Riemann* per $\mathbb{R}^N$.

Integrazione di Riemann su n-rettangoli

Integrazione di Riemann su n-rettangoli: definizione di Riemann-integrabilità su $\mathbb{R}^N$, l'integrale. Osservazione: funzione limitata non implica Riemann-integrabile (Dirichlèt generalizzato). Teorema: condizione sufficiente per Riemann-integrabilità. Proprietà delle funzioni Riemann-integrabili.

---

0. Voci correlate

- Integrabilità secondo Riemann
- Proprietà delle Funzioni Integrabili Secondo Riemann

1. Definizione di Riemann-Integrabilità su $\mathbb{R}^N$

#Definizione

Definizione (Riemann-integrabilità su $\mathbb{R}^N$).

Sia $f: R \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ limitata con R un N-rettangolo. Sia σ la classe delle sue suddivisioni inferiori e Σ quelle superiori.

Allora se vale l'uguaglianza

$$\sup \sigma = \inf \Sigma$$

si dice che f è *Riemann-integrabile* su R e la quantità dell'uguaglianza si dice l'*integrale* e lo si denota con

$$\sup \sigma = \inf \Sigma = \boxed{\int_R f \iff \int \ldots \int_R f(x_1, \ldots, x_N) \, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_N}$$

Inoltre si denota la *classe delle funzioni Riemann-integrabili su R* come

$$f \in \mathcal{R}(R)$$

#Esempio

Esempio (caso bidimensionale e tridimensionale).

Nella maggior parte dei casi faremo calcoli per $N \in \{2, 3\}$. Quindi definiremo gli integrali secondo la *base canonica*, ovvero come

$$\int_R f \to \iint_R f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \vee \iiint_R f(x, y, z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$$

#Osservazione

Osservazione (la funzione di Dirichlet generalizzata).

Notiamo che *non tutte le funzioni limitate su N-rettangoli* debbono essere *Riemann-integrabili*. Infatti definiamo la *funzione di Dirichlet* (Osservazione 6 (esempio di funzione non integrabile)) sull'N-rettangolo R.

$$D(\underline{x}) := \begin{cases} 1, \underline{x} \in R \cap \mathbb{Q}^N \\ 0, \underline{x} \notin R \cap \mathbb{Q}^N \end{cases}$$

Ho che

$$\forall \delta \in \Delta(R), S(\delta, D) = m_N(R); s(\delta, D) = 0$$

Ovvero l'*estremo inferiore* è sempre raggiunto in 0, per qualsiasi suddivisione scelgo; invece l'*estremo superiore* raggiunge sempre 1. Allora $D \notin \mathcal{R}(R)$. ■

2. Condizioni sufficienti per Riemann-integrabilità

Dall'osservazione precedente, abbiamo la necessità di trovare delle *condizioni sufficienti* per la *Riemann-integrabilità* delle funzioni.

#Teorema

Teorema (le funzioni continue sono Riemann-integrabili).

Data un campo scalare $f : R \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ limitata con R rettangolo, abbiamo l'implicazione

$$f \in \mathcal{C}^0(R) \implies f \in \mathcal{R}(R)$$

Ovvero le continue sono Riemann-integrabili.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 4 (le funzioni continue sono Riemann-integrabili)
Omessa. La dimostrazione si basa sul caso unidimensionale (Teorema 2 (di integrabilità delle funzioni continue)), per passare a $N \in \mathbb{N}$ bisogna procedere su induzione. ■

3. Proprietà delle funzioni Riemann-integrabili

Troviamo delle proprietà delle funzioni *Riemann-integrabili*.

#Proposizione

Proposizione (proprietà delle funzioni Riemann-integrabili).

Sia $f, g : R \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{R}(R)$. Allora valgono le seguenti proprietà.

i. *linearità*: per parametri reali $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vale che

$$\int_R (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_R f + \beta \int_R g$$

ii. *monotonia*

$$f > g \iff \int_R f > \int_R g$$

iii. *valore assoluto*

$$|f| \in \mathcal{R}(R), \left| \int_R f \right| \leq \int_R |f|$$

iv. *prodotto*

$$f \cdot g \in \mathcal{R}(R)$$

SEZIONE A. INTEGRAZIONE SU RETTANGOLI

A1. Teorema di Fubini

Teorema di Fubini

Teorema di Fubini (caso bidimensionale). Enunciato.

---

0. Voci correlate

- Integrazione di Riemann su n-rettangoli

1. Teorema di Fubini

IDEA. Voglio ricondurre gli integrali *multipli* al *caso unidimensionale*; in particolare voglio *"iterare"* gli iterali singoli.

#Teorema

Teorema (di Fubini).

Sia $f : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] = R \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{R}(R)$. Posta la restrizione $f_{|\bar{x}} : [a_2, b_2] \longrightarrow \mathbb{R}$ come

$$\forall \bar{x} \in [a_1, b_1] \to f_{|\bar{x}} := f(\overline{x}, y) = f(y)$$

Allora vale che integrando, l'integrale di $f_{|\bar{x}}$ al variare di y, al variare di x otteniamo lo stesso valore del doppio integrale $\iint_R f$. Ovvero

$$\boxed{\iint_R f(x,y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} f(x,y)\ \mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x}$$

#Osservazione

Osservazione (scambiando le variabili di integrazione il teorema vale ugualmente).

Notiamo che scambiando gli estremi di integrazione $[a_1, b_1] \to [a_2, b_2]$ e la variabile d'integrazione $\mathrm{d}x \to \mathrm{d}y$ il teorema vale ugualmente. Ovvero non vale l'ordine con cui facciamo gli *integrali iterati*.

> Quindi scegliere bene l'ordine con cui facciamo gli integrali iterati! In certi casi abbiamo degli integrali *difficili*, negli altri ci semplifichiamo le vite.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 1 (di Fubini)
Omessa, poiché geometricamente intuitiva.■

A2. Formule di Riduzione in 3D

Formule di Riduzione in 3D

Tecniche integrazione in tre variabili: formule di riduzione per corde e per sezioni.

---

0. Voci correlate

- Teorema di Fubini
- Integrazione di Riemann su n-rettangoli

1. Riduzione per Corde

IDEA. Vogliamo avere un'equivalente del *teorema di Fubini* nel caso $\mathbb{R}^{N=3}$. Dato che ho più *"gradi di liberta"* nel fissare i punti o corde, ho più metodi. Partiamo dal caso in cui iniziamo con la *corda*.

#Teorema

> **Teorema (formula di riduzione per corde).**
>
> Sia $R = \bigtimes_{i=1,2,3}[a_i, b_i]$ un *3-rettangolo*. Sia $f : R \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{R}(E)$.
>
> Prendendo il *"complementare della corda"*, ovvero l'insieme $(\overline{x}, \overline{y}) \in S = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, ho che la *restrizione* di f su questa corda $f_{|(\overline{x},\overline{y})}$ è *integrabile secondo Riemann* su $[a_3, b_3]$ e vale la formula
>
> $$\boxed{\iint_S \left(\int_{a_3}^{b_3} f(z)\ \mathrm{d}z\right) \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \iiint_R f(x,y,z)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z}$$
>
> Ovvero l'*integrale iterato* ha lo stesso valore dell'*integrale triplo*.

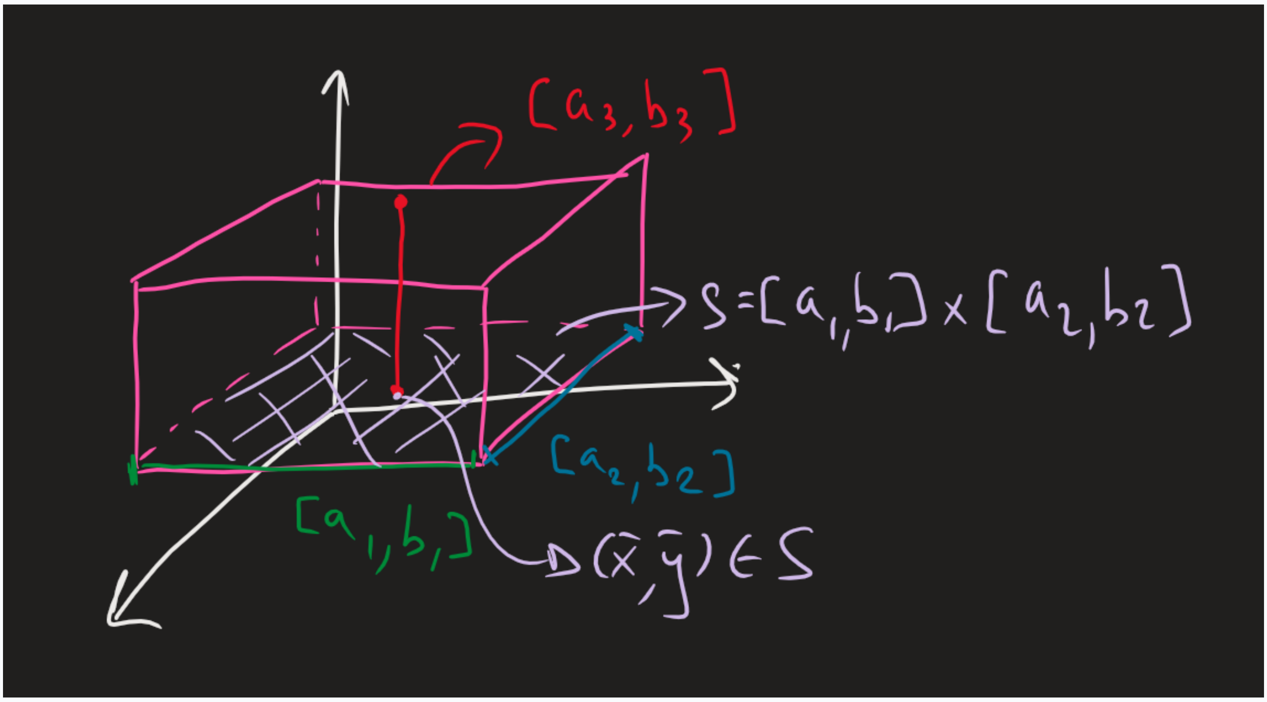
#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 1 (formula di riduzione per corde)
Omessa. Si può facilmente convincere di questo teorema con un'approccio geometrico-visivo (vedere l'osservazione sottostante). ■

#Osservazione

> Osservazione (osservazioni geometriche).
>
> L'idea di questo teorema è quello di *prendere* la *corda* $[a_3, b_3]$ e di calcolare la sua misura integrandolo, poi per far variare sul resto del dominio S. Quindi stiamo facendo ricondurre l'integrale triplo in un *integrale singolo* poi in un *integrale doppio*; $\iiint \to \iint \circ \int$.
>
> Da queste considerazioni abbiamo che:
>
> - Questo teorema è facilmente generalizzabile *per induzione* su $\mathbb{R}^N$
> - Questo teorema vale ugualmente scambiando le assi (o le basi canoniche) x, y, z.

FIGURA 1.1. (*Riduzione per corde*)



2. Riduzione per Sezioni

Adesso, al posto di prendere *"corde unidimensionali"* prendiamo *"sezioni bidimensionali"*.

#Teorema

> Teorema (riduzione per sezioni).

Sia $f : R = \times_{i=1,2,3}[a_i, b_i] \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{R}(R)$, con $\bar{z} \in [a_3, b_3]$ fissato.

Allora considerando la restrizione $f_{|\{\bar{z}\}}$ ho che essa è *integrabile secondo Riemann* sulla *sezione* $S = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ vale la formula

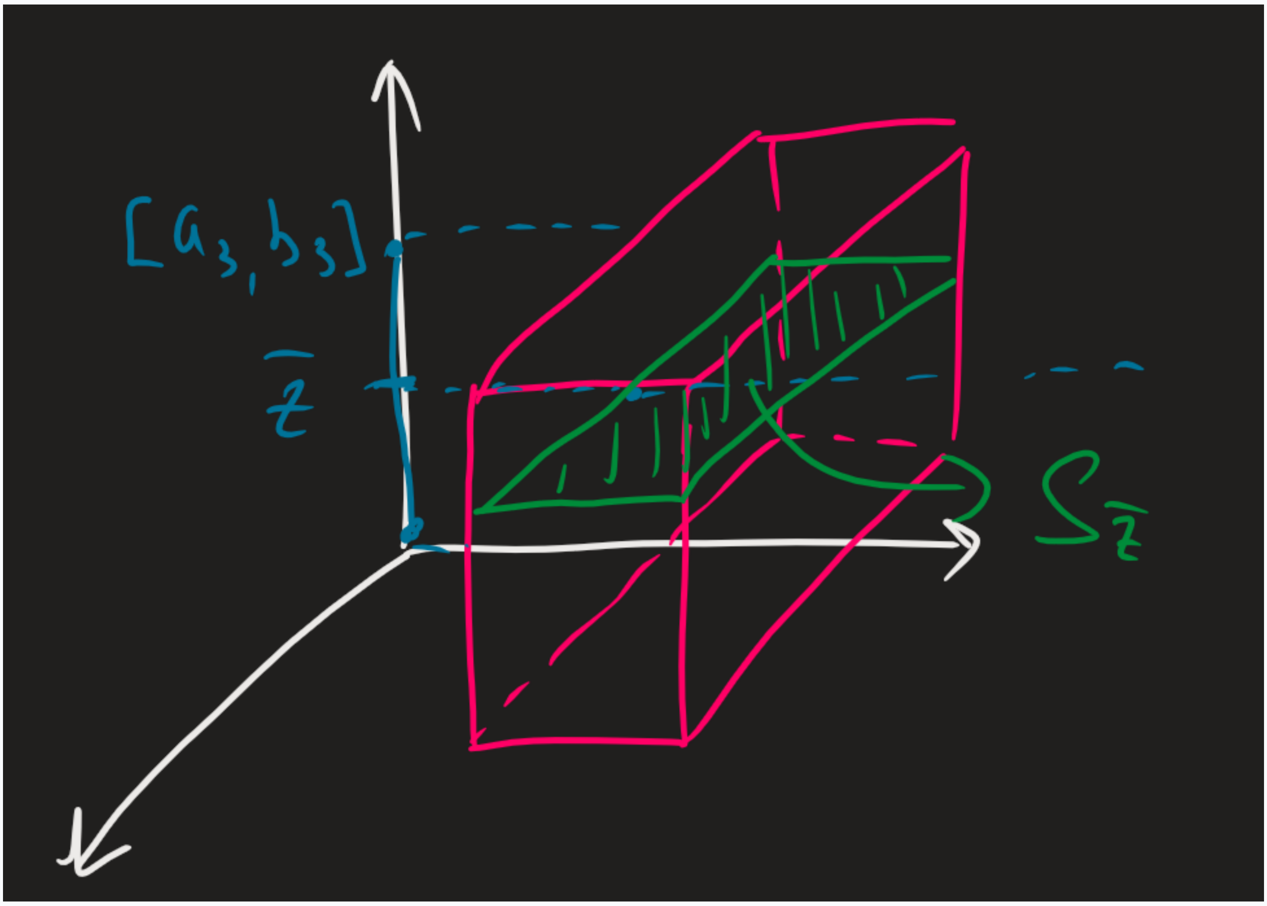
$$\boxed{\int_{a_3}^{b_3} \left(\iint_S f(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}z = \iiint_R f(x, y, z) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z}$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 3 (riduzione per sezioni)

Analogo al teorema precedente. Le osservazioni si applicano ugualmente. ■

FIGURA 1.1. (*Riduzione per sezioni*)



SEZIONE B. INTEGRAZIONE SU FORME ARBITRARIE

B1. Estensione delle Funzioni su Rettangoli

Estensione dei Domini Arbitrari in n-Rettangoli

Considerazione preliminare per integrazione in più variabile su domini arbitrari: prolungamento delle funzioni con domini arbitrari.

---

0. Voci correlate

- Integrazione di Riemann su n-rettangoli

1. Integrazione su Domini Arbitrari

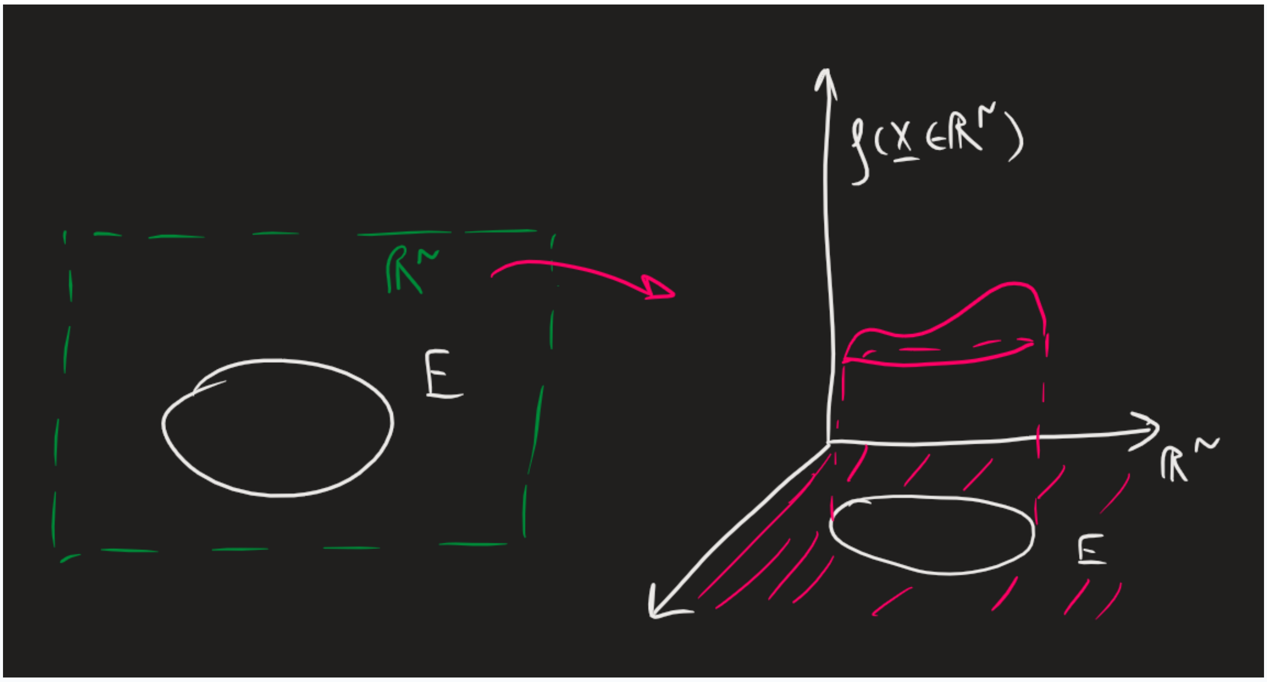
#Definizione

Definizione (prolungamento della funzione).

Sia $f: E \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ una *funzione limitata*. Definiamo $f_\circ: \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ come il suo *prolungamento del suo dominio* come

$$f_\circ(\underline{x}) = \begin{cases} f(\underline{x}), \underline{x} \in E \\ 0, \underline{x} \notin E \iff \underline{x} \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}^N}(E) \end{cases}$$

FIGURA 1.1. (*L'idea del prolungamento della funzione*)



#Definizione

Definizione (integrabilità su domini arbitrari).

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$ tale che esista un *n-rettangolo* R che contenga E. Ovvero, $\exists R \sim \times_{i=1}^N [a_i, b_i] : E \subseteq R$.

Se vale che $f_\circ \in \mathcal{R}(R)$ (ovvero la funzione prolungata $f_\circ$ è *integrabile* sul rettangolo R), allora si dice che f è *integrabile su* E e si pone

$$\int_E f := \int_R f_\circ$$

Per poter parlare bene dell'integrale $\int_R f_\circ$, ci servirà prima parlare un po' di *misura* (Cenni alla Misura di Peano-Jordan).

B2. Cenni alla Teoria della Misura di Peano-Jordan

Cenni alla Misura di Peano-Jordan

Cenni alla teoria della misura di Peano-Jordan: definizione di misurabilità, proprietà della misura, caratterizzazione degli misurabili. Insiemi misurabili compatti e insiemi compatti misurabili trascurabili. Applicazioni alla teoria di integrazione in più variabili.

---

1. Misurabilità di Peano-Jordan

#Definizione

Definizione (misurabilità secondo Peano-Jordan e misura).

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$ *limitata*. Si dice che E è *misurabile secondo Peano-Jordan* se la *funzione caratteristica* χ_E è integrabile su E, ovvero $\chi_E \in \mathcal{R}(E)$.

In tal caso si dice $m_N(E)$ la *misura* di E e la si pone come

$$m_N(E) := \int_E \chi_E = \int_E 1$$

Inoltre la *classe delle funzioni misurabili secondo Peano-Jordan* in un sottoinsieme di X si denota con $\mathcal{M}(X)$

#Osservazione

Osservazione (casi di insiemi non misurabili).

Abbiamo casi di *insiemi non misurabili*. Come esempio si può prendere

$$E := \left(\mathbb{Q}^N \cap \bigtimes_{i=1}^{N} [0,1]\right)$$

Ovvero l'insieme dei razionali in un n-rettangolo del tipo $[0,1] \times \ldots \times [0,1]$: questa è una specie di *"insieme di Dirichlet"* generalizzata su $\mathbb{R}^N$.

#Teorema

Teorema (di caratterizzazione degli misurabili).

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$ un insieme limitato. Allora vale l'equivalenza

$$E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N) \iff m_N(\partial E) = 0$$

2. Proprietà della Misura di Peano-Jordan

#Proposizione

Proposizione (proprietà della misura di Peano-Jordan).

Sia m_N la *misura di Peano-Jordan* su sottoinsiemi di $\mathbb{R}^N$. Allora vale che:

i. Se R è un *n-rettangolo* (Definizione 1 (N-rettangolo)), allora vale che essa è misurabile secondo Peano-Jordan e che

$$m_N(R) = \prod_{i=1}^{N}(b_i - a_i)$$

(stiamo facendo *"base per altezza"*, in sostanza).
ii. $\emptyset$ è *misurabile secondo Peano-Jordan* e vale che la sua misura è nulla: $m_N(\emptyset) = 0$
.
iii. *Chiusura della misurabilità rispetto all'unione, intersezione e sottrazione*

$$A, B \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N) \implies \begin{cases} A \cap B, A \cup B, A \setminus B \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N) \\ m_N(A \cup B) = m_N(A) + m_N(B) - m_N(A \cap B) \\ m_N(A \setminus B) = m_N(A) - m_N(A \cap B) \end{cases}$$

iv. *Chiusura della misurabilità rispetto all'ordinamento*

$$A, B \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N), A \subseteq B \implies m_N(A) \leq m_N(B)$$

3. Insiemi Compatti Misurabili

#Definizione

Definizione (insieme compatto misurabile).

Un insieme E *compatto* in X e *misurabile in* X si dice *compatto-misurabile* in X. Ovvero se

$$\mathcal{M}(X) \ni E \Subset X$$

#Teorema

Teorema (condizione sufficiente per l'integrabilità di un insieme).

Si ha che per un $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N) \ni E \Subset \mathbb{R}^N$ *compatto misurabile* e per una *funzione continua* $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, questa è *integrabile* su R. Ovvero

$$f : \mathcal{M}(\mathbb{R}^N) \ni E \Subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^0(E) \implies f \in \mathcal{R}(E)$$

#Osservazione

Osservazione (gli insiemi compatti non sono sempre misurabili).

Non è garantita l'implicazione $K \Subset X \implies K \in \mathcal{M}(X)$. Infatti, proponiamo il seguente caso *unidimensionale* su $X = \mathbb{R}$.

Sia $\mathbb{Q} := \{q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots\}$. Definendo l'aperto

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} B\left(q_i, \frac{1}{2^{i+2}}\right)$$

ho il suo *complementare* $C = \mathbb{R} \diagdown A$ chiuso. Adesso, prendendo il compatto $K = C \cap [0,1] \Subset \mathbb{R}$, si può dimostrare che K è *compatto* ma *non* misurabile secondo *Peano-Jordan*. Infatti abbiamo che la misura della sua frontiera è non-nulla:

$$m_1(\partial K) \neq 0 \implies K \notin \mathcal{M}(\mathbb{R})$$

4. Insiemi Compatti Trascurabili

#Definizione

Definizione (insieme trascurabile secondo Peano-Jordan).

Un insieme si dice *trascurabile secondo Peano-Jordan* (o semplicemente *trascurabile*) se ha misura nulla, ovvero $m_N(T) = 0$.

#Teorema

Teorema (integrabilità degli insiemi con parti trascurabili).

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$ un insieme limitato con $T \subset E : m_N(T) = 0$ (ovvero T trascurabile), poi siano definite le funzioni $f : E \longrightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{R}(E)$, $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ con f, g limitate tali che

$$\forall x \in E \diagdown T, f(x) = g(x)$$

(ovvero le funzioni sono *uguali* sulle parti non trascurabili).

Allora $g \in \mathcal{R}(E)$ e vale che gli integrali sono gli stessi:

$$\int_E f = \int_E g$$

L'idea del teorema appena osservato è di poter *estendere* l'integrazione su più insiemi (tra cui, ad esempio $f_\circ$). Ad esempio voglio integrare f sul disco D; se ho g definita sull'aperto D° tale che $g = f$ e $m_2(\partial D) = 0$, allora posso trattare gli integrali ugualmente $\int_D f = \int_{D^\circ} g$.

B3. Formula di Riduzione Normata in 2D

Formula di Riduzione su Insiemi Normali in 2D

Definizione di insieme normale rispetto all'asse x (o y). Proposizione fondamentale: gli insiemi normali sono misurabili. Teorema: formula di riduzione su insiemi normali.

---

0. Voci correlate

- Integrazione di Riemann su n-rettangoli
- Cenni alla Misura di Peano-Jordan

1. Insiemi Normali Rispetto alle Assi

IDEA. Come *"primo passo"* verso l'integrazione su insiemi arbitrari, possiamo generalizzare la nozione del *rettangolo* e passare al *"rettangolo distorto"* in una maniera arbitraria: così posso usarci il *teorema di Fubini* (Teorema di Fubini).

#Definizione

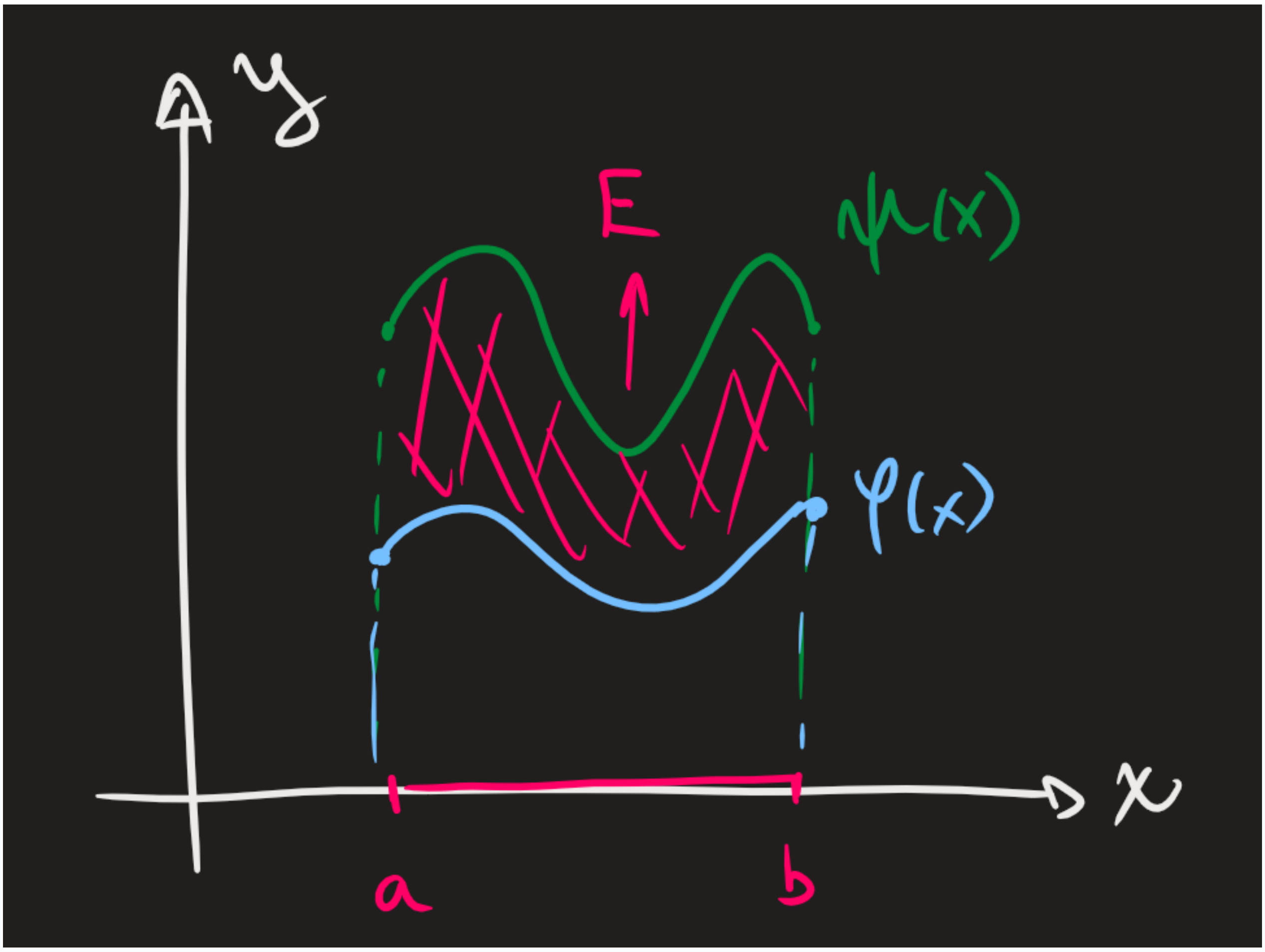
Definizione (insieme normale rispetto all'asse x).

Siano $\varphi, \psi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^0$ tale che $\phi \leq \psi$ in $[a, b]$. L'insieme $E \subseteq \mathbb{R}^2$ definito come

$$E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$$

si dice *"normale rispetto all'asse x"* (la definizione vale analogamente scambiando x con y, in questo caso è normale rispetto all'asse y).

FIGURA 1.1. (*Insiemi Normali*)



#Proposizione

Proposizione (proprietà fondamentale dei normali).

Si ha che se E è *un insieme normale rispetto all'asse x o y*, allora essa è *misurabile secondo Peano-Jordan*.

2. Integrazione su Insiemi Normali

Adesso si tratta di *"applicare Fubini"* su E, dato che possiamo *"estenderlo"* ad un rettangolo con alcuni punti di trascurabilità.

#Teorema

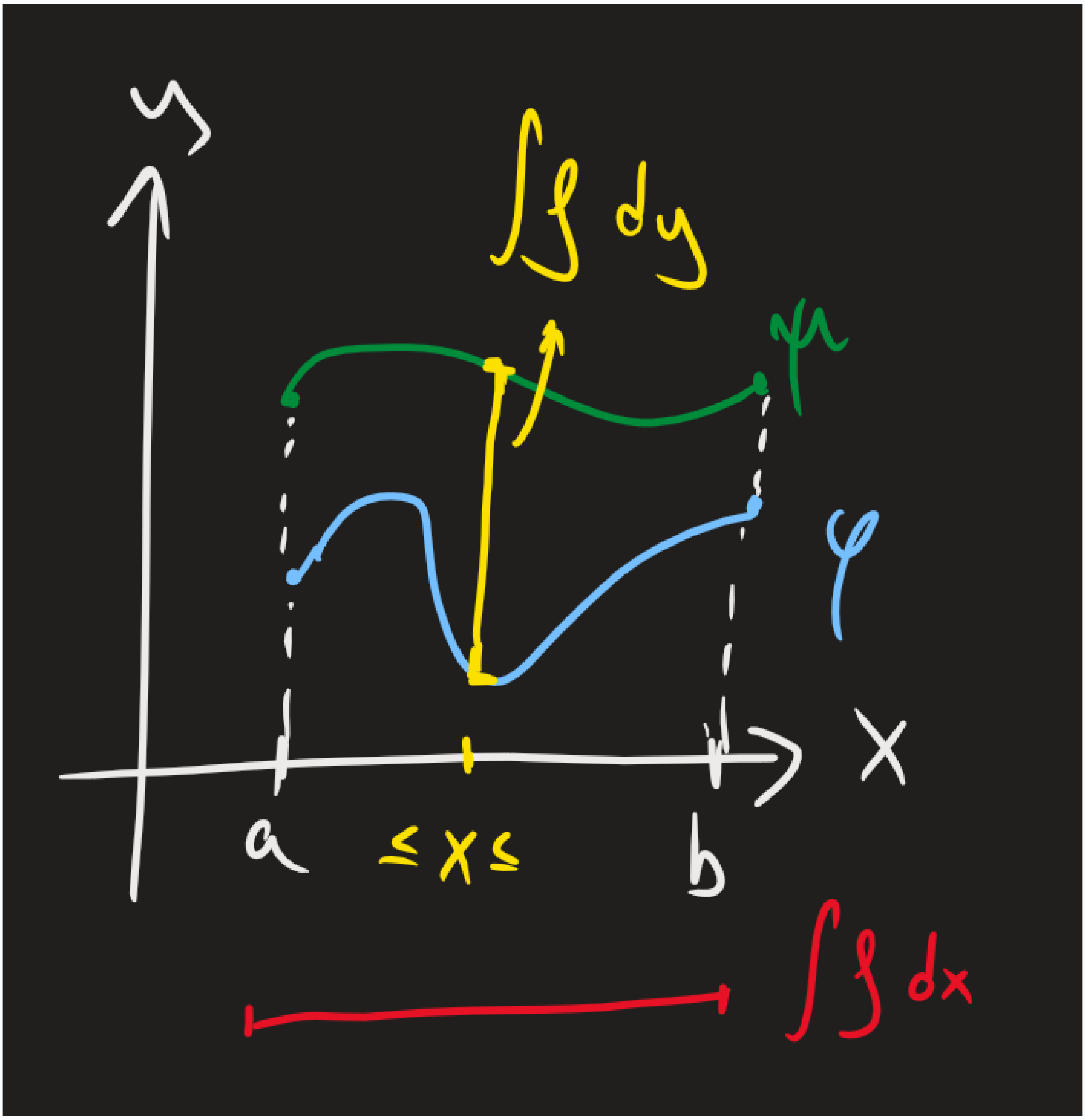
Teorema (formula di riduzione su insiemi normali).

Sia $f: E \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ con E un *insieme normale* rispetto all'asse x (o y), definita dalle funzioni $\varphi, \psi: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$.

Allora $f \in \mathcal{R}(E)$ e vale la formula

$$\boxed{\begin{aligned}\iint_E f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\ {\color{red}{''}} &{\color{red}= \int_a^b \left(\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x}\end{aligned}}$$

FIGURA 2.1. (*Fubini su normali*)



B4. Formula di Riduzione Normata in 3D

Formula di Riduzione su Insiemi Normali in 3D

Formule di riduzione su insiemi normali in $\mathbb{R}^3$: definizione di insieme normale rispetto ad un piano, formule di riduzione per corde e per sezioni.

---

0. Voci correlate

- Formule di Riduzione in 3D

1. Riduzione per Corde

Adesso vediamo una serie di formule per il *caso* $\mathbb{R}^{N=3}$: al posto di curve che definiscono *insiemi normali* abbiamo *superfici*. Vediamo il caso *analogo* alla *riduzione per corde* (Teorema 1 (formula di riduzione per corde)).

#Definizione

Definizione (insieme normale rispetto ad un piano).

Sia K un *insieme compatto-misurabile secondo Peano-Jordan* in $\mathbb{R}^2$ (1), su cui definiamo le funzioni $\varphi, \psi : K \longrightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^0(K)$, tali che $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \varphi(x,y) \leq \psi(x,y)$.

Allora l'insieme

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in K, \varphi(x,y) \leq z \leq \psi(x,y)\right\}$$

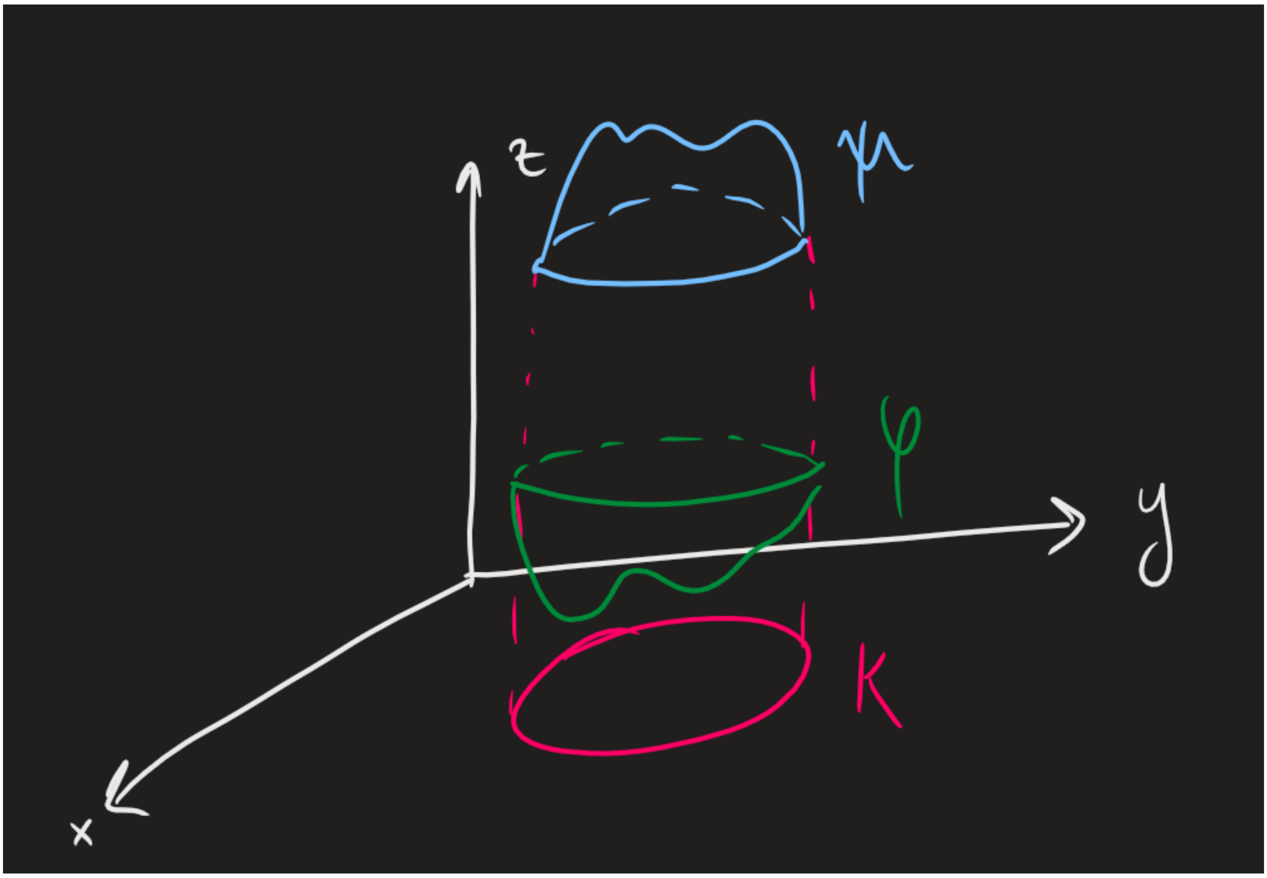
Si dice *normale rispetto al piano* xy. Scambiando eventuali variabili, possiamo definire insiemi normali rispetto al piano xz, yz.

#Proposizione

Proposizione.

Gli insiemi normali in $\mathbb{R}^3$ sono *compatti-misurabili in* $\mathbb{R}^3$.

FIGURA 1.1. (*Insiemi normali rispetto al piano* xy)



#Teorema

Teorema (formula di riduzione per corde).

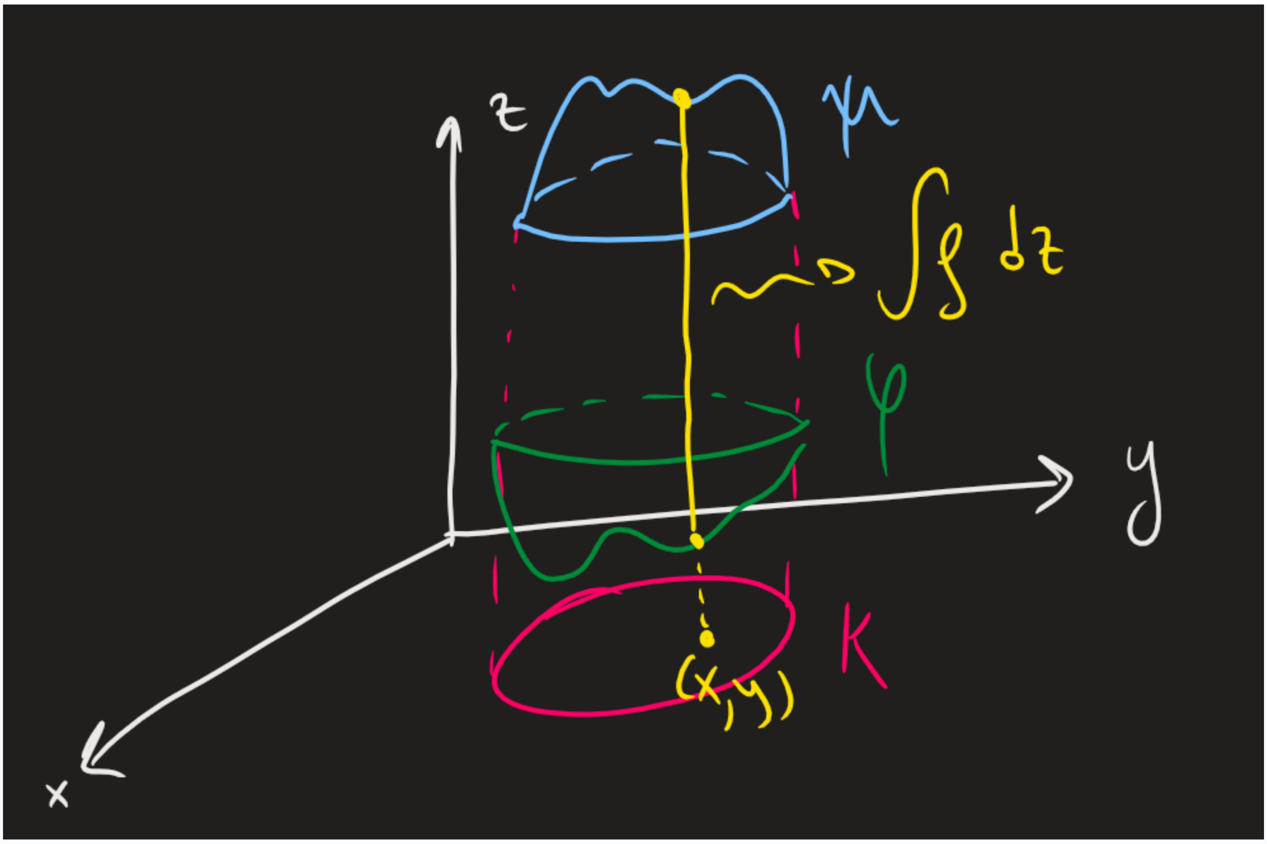
Sia $f : E \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^0$ con E un *insieme normale* rispetto al piano xy, definito da ψ, φ su K.

Allora $f \in \mathcal{R}(E)$ e vale la formula

$$\boxed{\iiint_E f(x,y,z)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z = \iint_K \left(\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(z)\ \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y}$$

L'idea del teorema è quello di *fissare un punto* (x, y) in K e integrare la restrizione $f_{|(x,y)}$ sulla retta z.

FIGURA 1.2. (*Integrazione per corde*)



2. Riduzione per Sezioni

#Definizione

Definizione (insieme sezionabile in 3D).

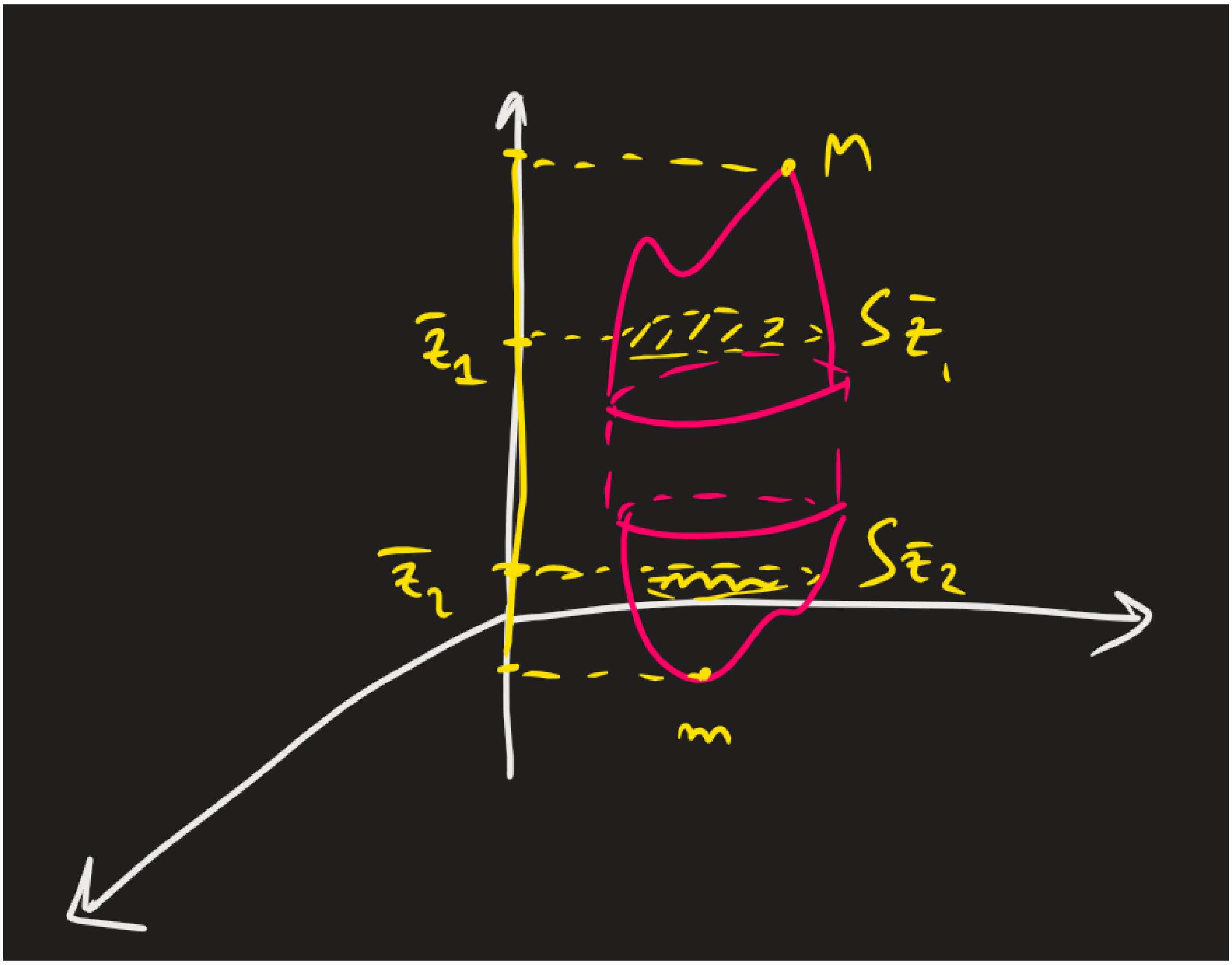
Sia E un *insieme compatto-misurabile* in $\mathbb{R}^3$. Si dice che E è *sezionabile rispetto all'asse* z se ponendo

$$\begin{cases} m_z := \min\{z \in \mathbb{R} : (x,y,z) \in E\} \\ M_z := \max\{z \in \mathbb{R} : (x,y,z) \in E\} \end{cases}$$

si ha che $m_z < M_z$ e vale che prendendo un valore arbitrario $\bar{z} \in [m_z, M_z]$ da cui si la sua sezione associata $S_{\bar{z}} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y,\bar{z}) \in E\}$ essa è misurabile (ovvero $S_{\bar{z}} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$).

$$\forall \bar{z}, S_{\bar{z}} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$$

FIGURA 2.1. (*Insieme sezionabile*)



#Teorema

Teorema (formula di riduzione per sezioni).

Sia $f : E \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^0(E)$ con E *sezionabile rispetto all'asse* z, sia posta $S_{\bar{z}}(E)$ una sezione arbitraria del dominio, con $m_z \leq \bar{z} \leq M_z$.

Allora vale che $f \in \mathcal{R}(E)$ (ovvero *Riemann-integrabile* su E) e vale la formula

$$\boxed{\iiint_E f(x, y, z)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z = \int_{m_z}^{M_z} \left(\iint_{S_{\bar{z}}(E)} f(x, y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}z}$$

L'idea è quella di prendere una *sezione*, integrarla poi per farla variare in z.

SEZIONE C. INTEGRAZIONE SU CURVE E SUPERFICI

C1. Curve

Misura e Integrazione su Curve

Misura e integrazione su curve regolari: definizione della lunghezza per una poligonale, definizione di lunghezza. Teorema di caratterizzazione per la lunghezza delle curve. Integrale di linea su campi scalari.

---

0. Voci correlate

- Curve Regolari

1. La Poligonale di una Curva

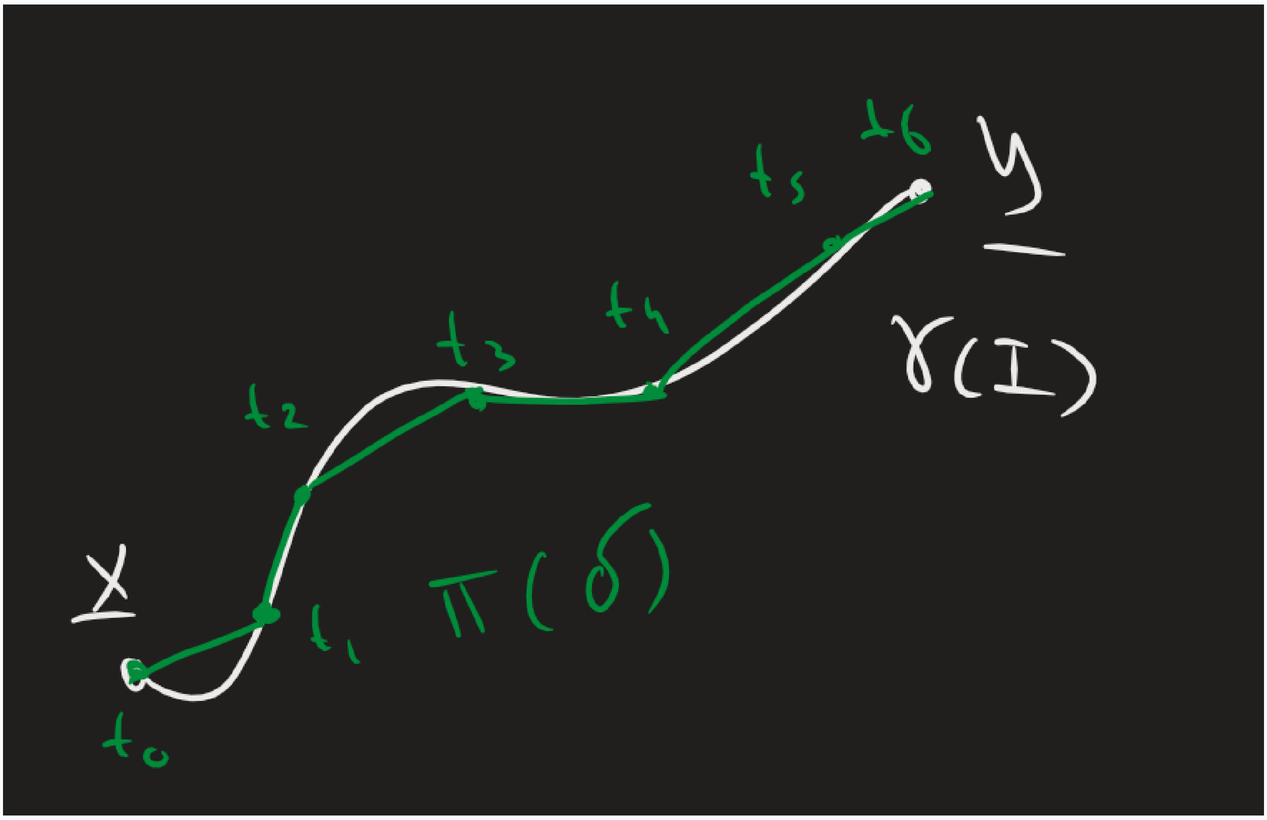
MOTIVAZIONE. Voglio esprimere la *lunghezza* di *segmenti parametrizzati* (ovvero curve). Siano $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^2$ dei vettori distinti: consideriamo la secante dei due punti (ovvero il segmento con estremi $\underline{x}, \underline{y}$). Una sua possibile rappresentazione parametrica è $\gamma(t) = (\underline{x} + t(\underline{y} - \underline{x}))$, con $t \in [0,1]$: naturalmente ho che la sua lunghezza è la misura $\|\underline{x} - \underline{y}\|$. Posso *"formalizzare"* questo scrivendo $l(\gamma) = \int_{[0,1]} \|\underline{x} - \underline{y}\| \, \mathrm{d}t$: vediamo un modo per generalizzare questo concetto. Partiamo considerando delle *"approssimazioni segmentate"* di una curva.

#Definizione

> **Definizione (la poligonale di una curva).**
>
> Sia $\gamma : I = [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^N$ una *curva regolare in forma parametrica*. Consideriamo una *partizione* δ di I data dai punti $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$.
>
> Definisco la *poligonale* $\pi(\delta_I)$ come la *curva* individuata dai punti della *composizione*
>
> $$\pi(\delta_I) := (\gamma(t_0), \ldots, \gamma(t_n))$$
>
> Abbiamo banalmente che la sua *lunghezza* è la sommatoria
>
> $$l(\pi(\delta_I)) = \sum_{i=1}^{n} \|\gamma(t_i - 1) - \gamma(t_i)\|$$

> Inoltre denotiamo l'insieme delle composizioni δ_I con $\delta_I \in \Delta$.

FIGURA 1.1. (*L'idea della poligonale*)



2. Misura di una Curva

Come fatto con gli *integrali unidimensionali*, possiamo passare all'*estremo superiore* per ottenere la lunghezza (ovvero la *"miglior approssimazione"* per una curva rappresenta la lunghezza della curva stessa).

#Definizione

> **Definizione (lunghezza di una curva).**
>
> Sia $\gamma : I = [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^N$ una *curva regolare in forma parametrica*. Si definisce la sua *lunghezza* come
>
> $$l(\gamma) := \sup_{\delta \in \Delta} l(\pi(\delta))$$

Ciò serve così possiamo enunciare un *teorema di caratterizzazione*, per misurare la lunghezza delle curve. La dimostrazione sarà omessa.

#Teorema

> **Teorema (di caratterizzazione delle curve).**

Sia $\gamma : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^N$ una *curva regolare in forma parametrica*. Si ha che la sua lunghezza $l(\gamma)$ è calcolabile con l'integrale

$$\boxed{l(\gamma) = \int_I \|\gamma'\| = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \,\mathrm{d}t}$$

3. Integrale di Linea

Generalizziamo quanto detto sulla *lunghezza delle curve*: immaginiamo che vengano pure *"distorte"* da un campo scalare in più variabili.

#Definizione

Definizione (integrale di linea di una funzione su una curva).

Sia $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^N$ una *curva regolare in forma parametrica* e $f : E \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^0(E)$ un *campo scalare*, tali che $\gamma([a, b]) \subseteq E$ (naturalmente il sostegno della curva deve stare nel dominio, altrimenti è tutta fuffa).

Allora si definisce l'*integrale di linea di f su γ* come l'integrale

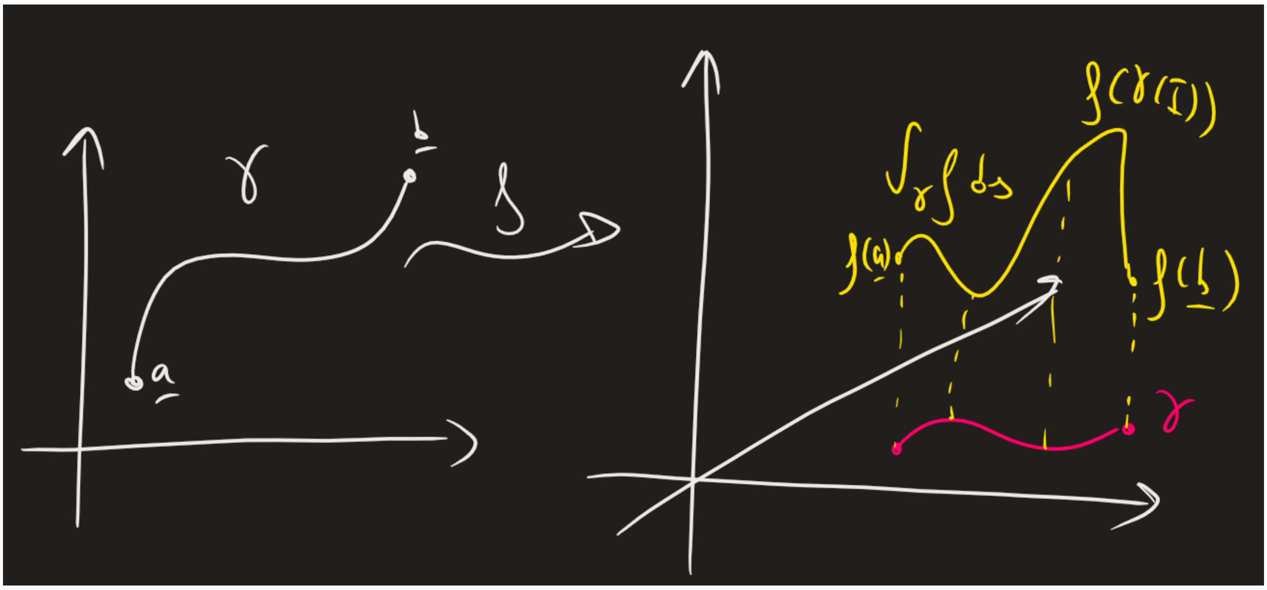
$$\int_\gamma f \,\mathrm{d}s$$

che è equivalente a

$$\boxed{\int_\gamma f \,\mathrm{d}s = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| \,\mathrm{d}t}$$

Ovvero prendiamo la misura della *curva* e la moltiplichiamo per la sua *"distorsione"*.

FIGURA 3.1. (*Integrale curvilineo*)



#Osservazione

> Osservazione (casi particolari).
>
> Per $f(\cdot) \equiv 1$ ho semplicemente la *lunghezza di una curva*; invece per $\gamma(t) \equiv 1$ ho l'*integrale di un solido*.

C2. Superfici

Misura e Integrazione su Superfici

Misura e integrazione su superfici: aree di superfici regolari, integrali di superfici su campi scalari.

---

0. Voci correlate

- Superficie Regolare in Forma Parametrica
- Cenni sul Prodotto Vettoriale

1. Area di Superficie

MOTIVAZIONE. Vogliamo misurare le *superfici*, come fatto con la *lunghezza delle curve*. Partiamo dal seguente esempio: siano $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^2$ che formino una *base* per $\mathbb{R}^2$ (ovvero sia linearmente indipendenti che un sistema di generatori). Da qui si ha un *parallelogramma* generato da questi due vettori avente parametrizzazione $\sigma : K = [0,1]^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definito come $\sigma(u,v) := u\underline{a} + u\underline{b}$ (1), da cui si ha il sostegno $\Sigma := \sigma([0,1]^2)$ Per calcolare l'area

$A(\Sigma)$ si calcola banalmente il valore assoluto del determinante della *matrice dei vettori* (2) definita come

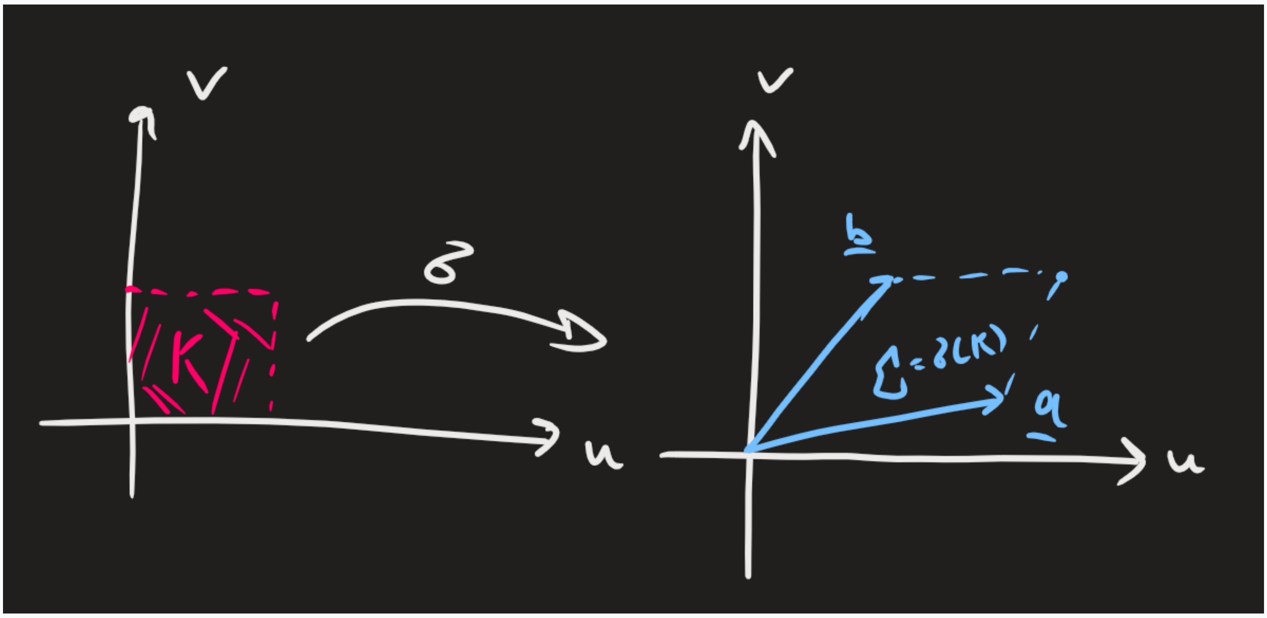
$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

Dopodiché possiamo *"generalizzare"* la seguente notazione come

$$A(\Sigma) = \left| \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \right| = \|\underline{a} \times \underline{b}\| = \iint_K \|\sigma_u \times \sigma_v\| \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v$$

Adesso vediamo di generalizzare il discorso sulle *superfici regolari*.

FIGURA 1.1. (*Discorso preliminare*)



#Definizione

Definizione (area di superficie).

Sia $\sigma : K \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una *superficie regolare in forma parametrizzata* (1) (dunque ammettono un *piano tangente*, 2) con K un *insieme compatto-misurabile secondo Peano-Jordan* (3).

Allora si definisce l'area del *sostegno* $A(\Sigma = \sigma(K))$ come l'integrale

$$\boxed{A(\Sigma) = \iint_K \|\sigma_u(u, v) \times \sigma_v(u, v)\| \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v}$$

#Osservazione

Osservazione (differenza dal parallelogrammo).

> Notiamo che il *parallelogrammo* $\sigma : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ presentato all'inizio in realtà sarebbe una funzione del tipo $\sigma : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, solo che la *terza variabile* è bloccata, in quanto *costante* (quindi stavamo guardando la restrizione del codominio).

2. Integrale di Superficie

Generalizziamo quanto detto sulle *aree di superficie*, "mettendo in mezzo" i campi scalari.

#Definizione

> **Definizione (integrale di superficie su campo scalare).**
>
> Sia $\sigma : K \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una *superficie regolare* con K *compatto-misurabile* e sia $f : E \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^0(E)$ tali che $\Sigma = \sigma(K) \subseteq E$ (ovvero i domini devono essere *"compatibili"* tra di loro).
>
> Allora si definisce l'*integrale di superficie* di f in σ come
>
> $$\boxed{\iint_\Sigma f \, \mathrm{d}\sigma = \iint_K f(\sigma(u,v)) \cdot \|\sigma_u \times \sigma_v\| \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v}$$

SEZIONE D. INTEGRAZIONE NEL SENSO GENERALIZZATO

D1. Cambiamento delle Variabili

Formula di Cambiamento delle Variabili per gli Integrali

Formula di cambiamento delle variabili: caso unidimensionale (motivazione). Casi particolari: trasformazioni lineari, trasformazione in coordinare polari e formula generale per trasformazioni regolari.

---

0. Voci correlate

- Integrazione per Sostituzione
- Definizione di Applicazione Lineare

1. Caso Unidimensionale

MOTIVAZIONE. Dal *caso unidimensionale* è nota la tecnica di integrazione *per sostituzione* (1): ovvero prendendo una funzione $f: I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^0(I)$ e una *trasformazione* $\varphi: K = [\alpha, \beta] \longrightarrow I \in \mathcal{C}^1$, tale che sia *sia biiettiva* (dunque se e solo se invertibile) e che la sua derivata $\varphi' \neq 0$ sia *a segno costante* su K (ovvero a *monotonia costante*), allora possiamo riscrivere l'integrale $\int_I f$ come

$$\int_I f = \int_K f \circ \varphi \cdot |\varphi'|$$

(la derivata $|\varphi'|$ è per tenere conto della monotonia; se è positiva o negativa...)
L'idea è quella di estendere la formula (1) su $\mathbb{R}^{N>1}$. Notare che in più dimensioni non avrò più semplici derivate: passerò a matrici (in particolare le jacobiane $J\cdot$) e determinanti.

2. Formula di Cambiamento delle Variabili

Prima di enunciare la *formula di cambiamento delle variabili*, facciamo un po' di nomenclatura.

#Definizione

> Definizione (insieme localmente misurabile).
>
> Si dice che un insieme $J \subset X$ è *localmente misurabile in* X se vale che

$$\forall E \in \mathcal{M}(X), J \cap E \in \mathcal{M}(X)$$

#Definizione

Definizione (trasformazione regolare di coordinate).

Siano $A, B \in \mathbb{R}^N$ degli *aperti*. Si dice che la funzione $\varphi : A \longrightarrow B \in \mathcal{C}^1$ è *una trasformazione regolare di coordinate* se vale che:
i. *Esiste l'inversa, ovvero è biiettiva*: $\exists \varphi^{-1}$
ii. *Il determinante della sua Jacobiana dato un punto del dominio non è nulla*:

$$\forall \underline{u} \in A, \det J\varphi(\underline{u}) \neq 0$$

Adesso enunciamo tutto.

#Teorema

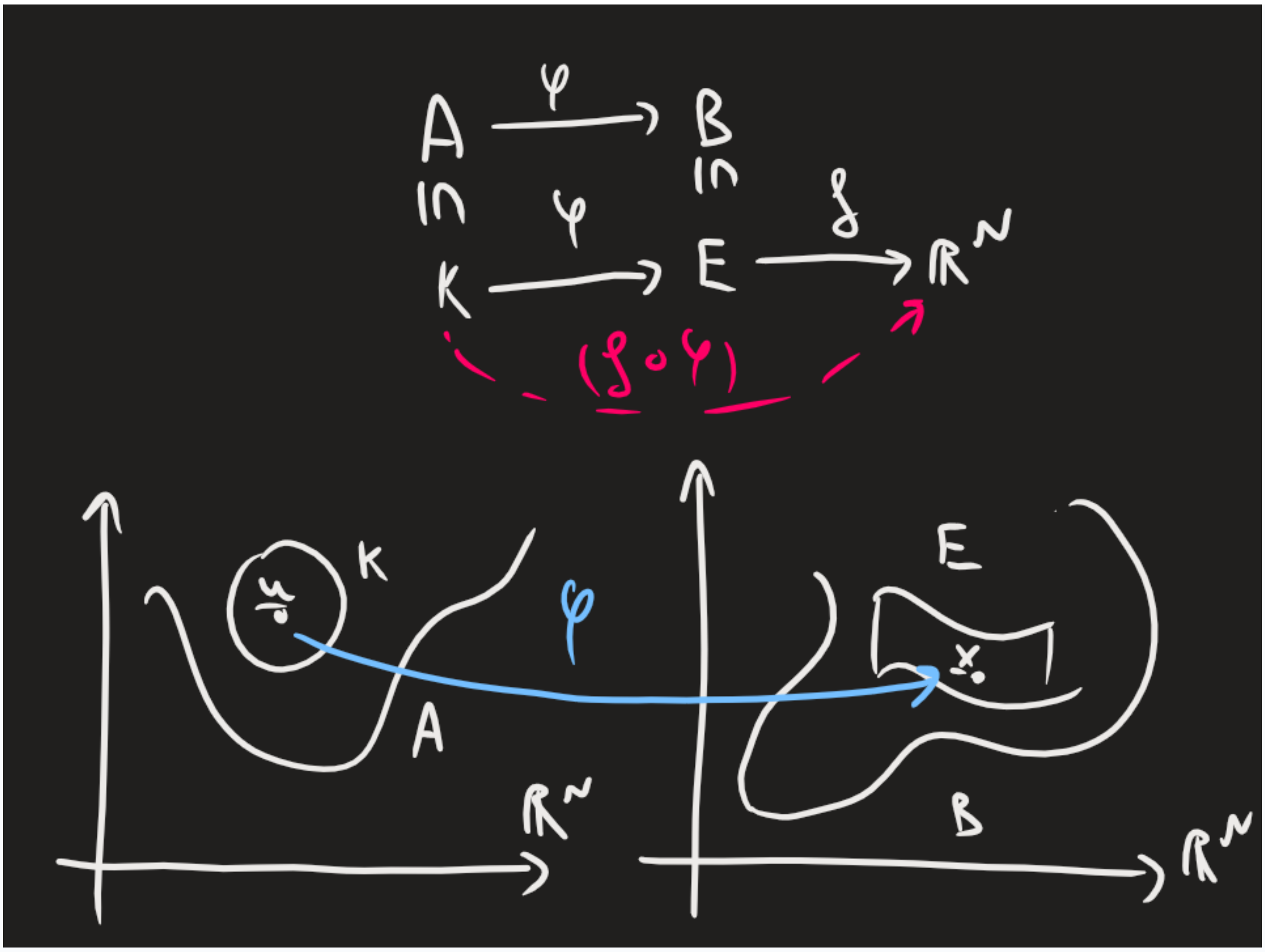
Teorema (cambio di variabile in $\mathbb{R}^N$).

Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}^N$ degli *insiemi aperti e localmente misurabili*. Sia $\varphi : A \longrightarrow B$ una *trasformazione regolare di coordinate*.

Se una funzione $f : B \supseteq E \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{R}(E)$ tale che esista un $K \subseteq A$ *compatto-misurabile* di $\mathbb{R}^3$ per cui si ha $\varphi(K) = E$, e se si ha il *determinante* $\det J\varphi$ limitato su K, allora E è *misurabile*, la composizione $(f \circ \varphi) \cdot |\det J\varphi|$ è *Riemann-Integrabile* su K e vale la formula

$$\boxed{\int_E f = \int_K (f \circ \varphi) \cdot |\det J\varphi|}$$

FIGURA 2.1. (*Diagrammi*)



3. Trasformazioni Affini

IDEA. Facciamo un passo indietro, passando al *caso più semplice*. Vogliamo considerare il caso in cui abbiamo una *trasformazione affine* $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$, che può essere rappresentata con una *matrice* (1), di cui chiameremo M, composta dai vettori $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in \mathbb{R}^3$ che formano una base. In tal caso abbiamo

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}, \det M \neq 0$$

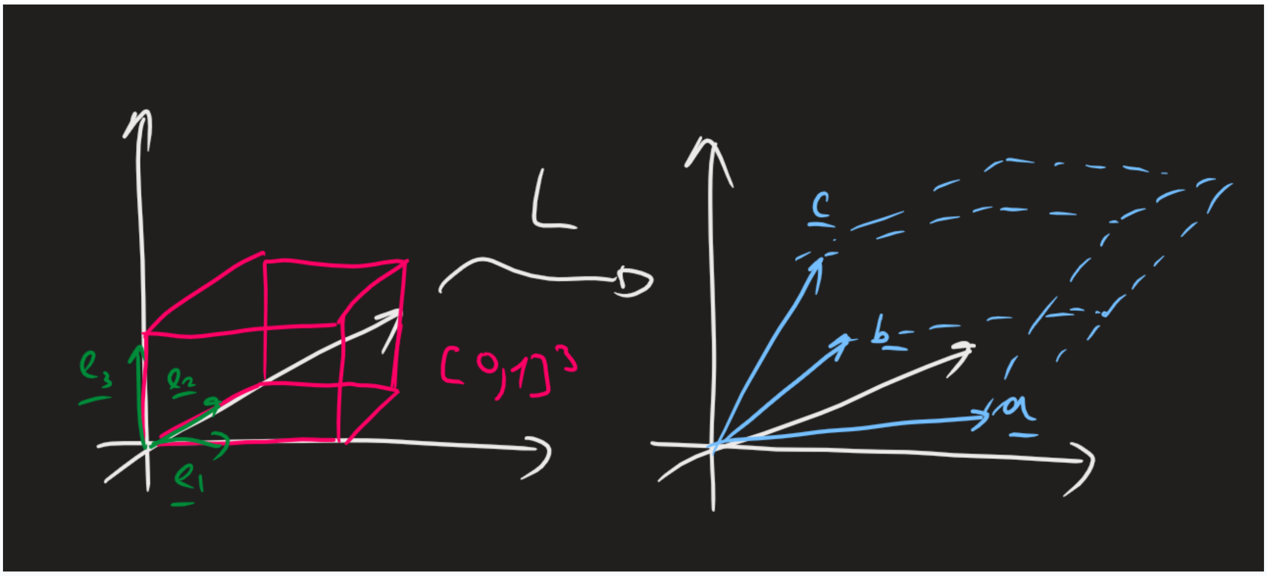
Adesso consideriamo il *parallelepipedo* formato come

$$E = \left\{(u, v, w) \in [0, 1]^3 : u\underline{a} + v\underline{b} + w\underline{c}\right\}$$

Si ha che la sua misura è proprio il *determinante* di M:

$$m_3(E) = |\det M|$$

Quindi l'idea geometrica è questa: partiamo un parallelepipedo regolare formato dalla base canonica $\mathcal{E}^3$, poi per *distorcerla* con la trasformazione L nel parallelepipedo E.



L'idea pratica è quella di partire da K, poi trasformarla in E che è un n-rettangolo, poi per usare il *teorema di Fubini*.
In tal caso ho l'integrale

$$\iiint_E 1 = m_3(E) = \det M = \iiint_K \det |J\varphi| = \det M \iiint_K 1$$

Ovvero ho che i *volumi sono equivalenti*, con un fattore $\det M$ che tiene conto della *"distorsione del dominio"*. Si può generalizzare quanto detto su *campi scalari*.

4. Trasformazioni in Coordinate Polari

Vediamo un caso particolare, dove trasformiamo *rettangoli* in *sezioni di corone circolari* (per praticità
consideriamo il viceversa).

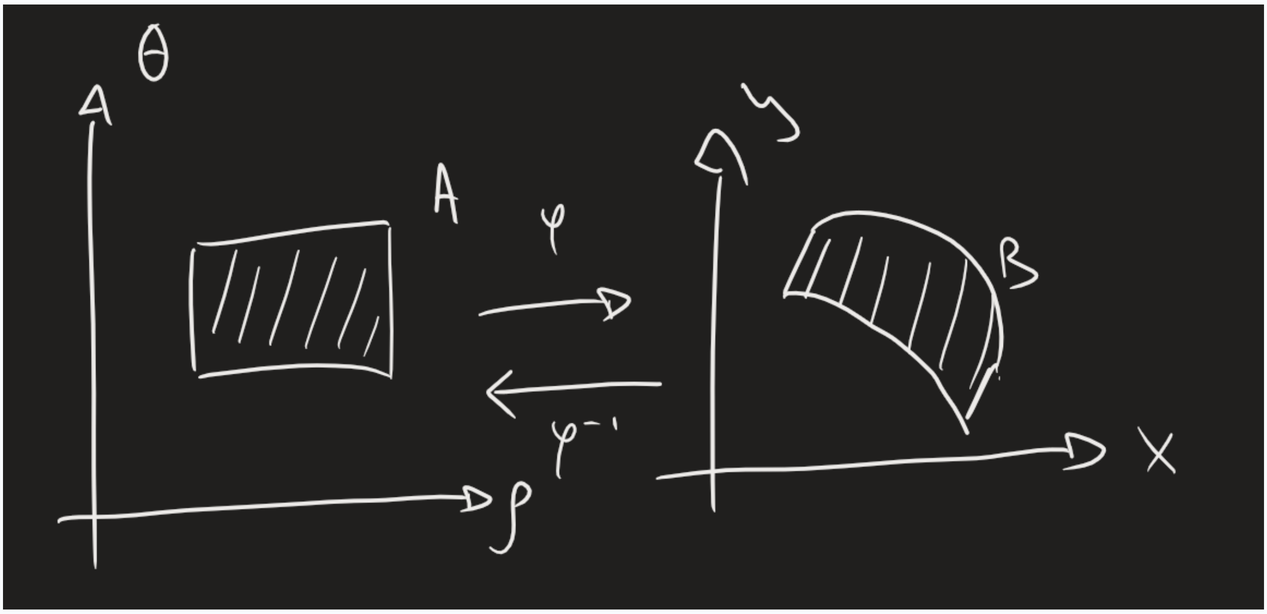
#Teorema

> Teorema (trasformazioni in coordinate polari).
>
> Sia $f(x, y)$ una funzione in due variabili, integrabili. Introducendo le variabili
>
> $$\theta \in [-\pi, \pi]; x = \rho \cos \theta \wedge y = \rho \sin \theta$$
> $$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}^+$$
>
> con gli insiemi di definizione
>
> $$A = \{(\rho, \theta) : \rho > 0, \theta \in [-\pi, \pi]\}$$
> $$B = \mathbb{R}^2 \diagdown \underbrace{\{(x, 0) | x < 0\}}_{|\theta| \leq \pi}$$
>
> Allora introduco la *trasformazione regolare di coordinate* $\varphi : A \longrightarrow B$ definita come $\varphi(\rho, \theta) := (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$

da cui ho

$$\int_B f = \int_A (f \circ \varphi) \cdot \underbrace{\det J\varphi}_{\rho}$$

FIGURA 4.1. (*L'idea*)



D2. Integrazione Generalizzata

Integrali Multipli Generalizzati

Integrali multipli nel senso generalizzato: definizione di una funzione localmente integrabile su un insieme localmente misurabile. Definizione di successione di insiemi invadente un insieme e adatta ad una funzione. Definizione di funzione integrabile nel senso generalizzato.

---

0. Voci correlate

- Funzione Integrabile in Senso Generalizzato
- Funzioni Localmente Integrabili

1. Nomenclatura preliminare

#Definizione

> Definizione (funzione localmente integrabile, successione di insiemi invadente e adatta).

Una funzione f si dice *localmente integrabile* su J, che a sua volta è *localmente misurabile* in $\mathbb{R}^N$ se *esiste* una *successione di insiemi* $(A_n)_n$ tale che:
i. *Misurabilità:* $A_n \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$
ii. *Crescenza limitata:* $A_n \subseteq A_{n+1} \subseteq J$
iii. *Il limite della misura dello scarto è nullo:*

$$\forall \mathcal{M}(\mathbb{R}^2) \ni E \subseteq J, \lim_n m_N(E \diagdown A_n) = 0$$

iv. *La funzione è Riemann-integrabile su un termine della successione:*

$$f_{|A_n} \in \mathcal{R}(A_n)$$

Inoltre una *successione di insiemi* $(A_n)_n$ che rispetta le condizioni sopra, si dice *"invadente J"* e *"adatta a f"*.

2. Integrale generalizzato

#Definizione

Definizione (funzione integrabile nel senso generalizzato).

Sia $f : J \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ *localmente integrabile* su J *localmente misurabile*. Sia inoltre $f(x \in J) \geq 0$. Sia $(A_n)_n$ una *successione di insiemi* invadente J e adatta ad f.

Allora si dice che f è *integrabile nel senso generalizzato su* J se esiste ed è *finito* il limite

$$\lim_n \int_{A_n} f$$

In tal caso, si pone

$$\int_J f := \lim_n \int_{A_n} f$$

Esercizi

Capitolo 2

Esercizi sulle Serie (D. D. S.)

Esercizi sulle serie, proposti dal prof. Daniele del Santo durante il corso "Matematica I con esercitazioni" (parte del programma riservata al CdL di Chimifca).

---

1. Serie a termini non negativi

#Esercizio

Esercizio.

Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

#Esercizio

Esercizio.

Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

usando il *teorema del confronto* e poi studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$$

utilizzando ciò che avete visto prima.

#Esercizio

Esercizio.

Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\ln(1+\frac{1}{n})-\frac{1}{n}\right)$$

Consiglio: *vedere lo sviluppo di Taylor* per $\ln(1+\frac{1}{n})$ e utilizzare il *teorema del confronto*.

#Osservazione

Osservazione (La costante di Eulero-Mascheroni).

Risolvendo l'esercizio precedente si vede che

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}-\ln(1+\frac{1}{n})=\gamma$$

è convergente, con γ un *numero*. Questa costante si chiama la costante di *Eulero-Mascheroni*, ed è noto dal momento che non è ancora chiaro se questo numero è *irrazionale* o meno (approfondimenti su Wikipedia).

#Esercizio

Esercizio.

Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

#Esercizio

Esercizio.

Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

#Esercizio

Esercizio.

Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

per al variare di α.

Consiglio: *separare α per $\alpha \leq 1$, $\alpha \geq 2$ e altri casi*.

#Esercizio

Esercizio.

Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$$

#Esercizio

Esercizio.

Dire per quali valori $x \in \mathbb{R}$ la seguente serie è convergente.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$$

#Esercizio

Esercizio.

Studiare la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \log n}$$

e la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(\log n)^2}$$

Infine dire il carattere della serie al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(\log n)^\alpha}$$

#Esercizio

Esercizio.

Studiare il carattere della serie, al variare di $\beta \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(\log n)(\log(\log n)^\beta)}$$

#Esercizio

Esercizio.

Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

se convergente, dire la somma della serie.

Consiglio: *se si vuole trovare la somma della serie, considerare lo sviluppo di Taylor per una certa funzione*.

#Esercizio

Esercizio.

Dimostrare che le serie semplicemente convergenti *non* soddisfano il *teorema di Riemann*.

Consiglio: *In particolare considerare* $\ln 2$ *e* $\frac{3}{2}\ln 2$.

#Esercizio

Esercizio.

Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(\pi n)}{n+2}$$

#Esercizio

Esercizio.

Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1+\frac{1}{n^3})$$

#Esercizio

Esercizio.

Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\sin(\frac{1}{n+1})$$

#Esercizio

Esercizio.

Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{\binom{2n}{n}}$$

Esercizi Sulle Serie (E. S.)

Esercizi sulle serie numeriche durante dalla prof. Eva Sincich durante il corso di "Analisi Matematica II"

---

1. Serie a termini positivi

#Esercizio

Esercizio.

Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n + 3^n}{3^n + 4^n}$$

#Esercizio

Esercizio.

Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

#Esercizio

Esercizio.

Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 - \sin n}{n^6 - 2n \cdot \sin n}$$

#Esercizio

Esercizio.

Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{n+1}{n^2+1}\right)$$

#Esercizio

Esercizio.

Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$$

#Esercizio

Esercizio.

Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}^{+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$$

#Esercizio

Esercizio.

Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$$

#Esercizio

Esercizio.

Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{n^2}$$

#Esercizio

Esercizio.

Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(n^{\frac{1}{n}}-1\right)^{n}$$

#Esercizio

Esercizio.

Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(e^{\frac{1}{n^3}}-1\right)$$

#Esercizio

Esercizio.

Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

2. Serie a termini di segno qualunque

#Esercizio

Esercizio.

Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n}\left(\frac{n+1}{n^2+2}\right)$$

#Esercizio

Esercizio.

Studiare la convergenza (dire se è assoluta o semplice o divergente o sregolare) della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{\ln(n)}{e^n}$$

#Esercizio

Esercizio.

Studiare il carattere della serie al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n+1} \cdot \alpha^n$$

Capitolo 3

Esercizi sulle Successioni di Funzioni

Esercizi sulle successioni di funzioni.

---

1. Convergenza puntuale e uniforme

#Esercizio

Esercizio.

Studiare la convergenza puntuale e uniforme di

$$f_n(x) = \frac{nx^3}{1+nx^2}$$

#Esercizio

Esercizio.

Sia $(a_n)_n$ una successione reale e si consideri la successione di funzioni definita come

$$f_n(x) = a_n \cdot \mathcal{X}_{[n,n+1)}(x)$$

dove $\mathcal{X}_E(x)$ è la funzione caratteristica definita sull'intervallo E definita come

$$\mathcal{X}_E(x) = \begin{cases} 0, x \notin E \\ 1, x \in E \end{cases}$$

studiare la convergenza puntiforme e uniforme in $\mathbb{R}^+$.

#Esercizio

Esercizio.

Studiare la successione di funzioni in $\mathbb{R}$ della successione di funzioni

$$f_n(x) = \arctan(nx)$$

#Esercizio

Esercizio.

Discutere la convergenza delle successioni di funzioni

$$f_n(x) = x + \frac{x}{n}\sin(nx)$$

su $[-2, 2]$ e su $\mathbb{R}$.

Esercizi sulle Serie di Funzioni

Esercizi sulle Serie di Funzioni.

---

1. Convergenza delle Serie di Funzioni

#Esercizio

Esercizio.

Studiare la convergenza uniforme di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{1+n^3}$$

su $E = \mathbb{R}$.

#Esercizio

Esercizio.

Studiare la convergenza uniforme di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sqrt{\frac{n+x}{n^2 x}}$$

su $E = [1, 2]$.

2. Serie di Potenze

#Esercizio

Esercizio.

Studiare il raggio di convergenza di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^n$$

#Esercizio

Esercizio.

Studiare il raggio di convergenza di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1}$$

#Esercizio

Esercizio.

Studiare il raggio di convergenza di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)^2}$$

#Esercizio

Esercizio.

Determinare il raggio di convergenza e la somma della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{2^n} x^n$$

(*consiglio: usare il teorema del passaggio al limite per le derivate*)

#Esercizio

Esercizio.

Studiare la serie, determinando il raggio di convergenza e la somma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

(*consiglio: vedere l'argomento della sommatoria come l'integrale di una funzione*)

3. Serie di Taylor-MacLaurin

#Esercizio

Esercizio.

Sia f la funzione definita su $\mathbb{R}$ come

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, x \neq 0 \\ 1, x = 0 \end{cases}$$

Dire se è sviluppabile in Taylor-MacLaurin, se sì dire la serie di Taylor-MacLaurin.

#Esercizio

Esercizio.

Sia $f(x) = \arctan x$ definita per $|x| < 1$. Dire se è sviluppabile in serie di Taylor-MacLaurin, se sì dire la serie.

Capitolo 4

Esercizi sulle Funzioni in più variabili

Breve descrizione qui

1. Esercizi base

#Esercizio

Esercizio (determinare il dominio).

Sia $f : E \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.
Determinare l'insieme di dominio E affinché la funzione f definita come

$$f(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y} - \ln(4x - x^2 - y)$$

abbia senso.

2. Campi scalari

#Esercizio

Esercizio (determinare le curve di livello).

Determinare le curve di livello della funzione $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$f(x, y) = x^2y^2 - 4xy$$

3. Superfici parametriche

#Esercizio

Esercizio (parametrizzare).

Parametrizzare la superficie di una curva in due variabili.

4. Studio di funzione

#Esercizio

Esercizio (studio del segno).

Studiare il segno della funzione

$$f(x, y) = x^3 + xy^2 - x$$

al variare di $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Esercizi sui Limiti in più variabili

Esercizi sui limiti in più variabili.

---

1. Limiti

#Esercizio

Esercizio.

Provare che vale il limite, per $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x + y + 2}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}} = 2$$

#Esercizio

Esercizio.

Studiare i limiti

$$i. \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^4 + y^4}$$

$$ii. \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4 + y^2}$$

#Esercizio

Esercizio.

Dire se esiste il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{4x^2+y^4}$$

2. Continuità

#Esercizio

Esercizio.

Valutare la continuità della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4-y^4}{x^2+y^2}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

#Esercizio

Esercizio.

Valutare la continuità della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4}{x^2+y^2}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Esercizio.

Valutare la continuità della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Capitolo 5

Esercizi sul Calcolo Differenziale Multivariata

Esercizi sul calcolo differenziale in $\mathbb{R}^N$.

---

1. Differenziabilità e Derivate

#Esercizio

Esercizio.

Sia f un campo scalare definita come

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, (x,y)\neq(0,0)\\ 0, (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Dimostrare che f ammette tutte le derivate parziali nell'origine, ma non è differenziabile nell'origine.

#Esercizio

Esercizio.

Sia f un campo scalare definito come

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, (x,y)\neq(0,0)\\ 0, (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Dire se è differenziabile in $(0,0)$. Dire se vale la formula del gradiente, con $\underline{v}=\left(\sqrt{2}^{-1},\sqrt{2}^{-1}\right)$.

#Esercizio

Esercizio.

Sia f un campo scalare definito come

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Provare che la funzione è differenziabile in $(0,0)$.

2. Differenziazione

#Esercizio

Esercizio.

Scrivere l'equazione del piano tangente nel punto $(1,1)$ della funzione

$$f(x,y) = 2x^3y - y^2 + 3xy$$

#Esercizio

Esercizio (l'equazione del trasporto).

Verificare che la funzione

$$u(x,t) = f(x-ct)$$

dove f è una *funzione in una variabile*, soddisfa il sistema (detta come *"l'equazione del trasporto"*)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) + c\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

dove la prima è la *"concentrazione di fluido"* e la seconda è la *"condizione inerziale"*.

#Esercizio

Esercizio.

Sia $f(x,y) = x^3y + \sin(3x^2y^4)$. Calcolare le tutte le derivate al secondo ordine (ovvero $f_{xx}, f_{yy}, f_{xy}, f_{yx}$). Cosa noti?

#Esercizio

Esercizio.

Sia f il campo scalare definito come

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Dimostrare che $f_{xy} = -1$ e $f_{yx} = 1$.

#Esercizio

Esercizio.

Scrivere la formula di Taylor del secondo ordine per $f(x,y) = xe^y$ centrato in $\underline{x_0} = (1,1)$.

Capitolo 6

Esercizi sulle Curve e Superfici

Esercizi sulle curve e superfici

---

1. Classificazione delle Curve

#Esercizio

Esercizio.

Stabilire se la curva

$$\gamma(t) := (t^2, t^3)$$

è regolare o meno. Giustificare la risposta.

#Esercizio

Esercizio.

Considerare l'equazione $\varphi(x, y) = x^3 + y^3 - xy$. Sia L_k la linea di livello su k. Dire per quali valori k al variare in $\mathbb{R}$ si ha curve regolari $(\varphi, L_0(\varphi))$. Trovare la retta tangente a $L_1(\varphi)$ in $(1, 1)$.

#Esercizio

Esercizio.

Sia $f(x, y) = x^4 + y^2 + 2x^2y + 1$. Determinare gli insiemi di livello $L_k(f)$ regolari in forma implicita.

2. Superfici

#Esercizio

Esercizio.

Sia $\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$. Determinare i valori $k \in \mathbb{R}$ per cui si ha $L_k(\varphi)$ una superficie regolare in forma implicita. Determinare il piano tangente a $L_0(\varphi)$ in $(1, 0, 1)$.

Capitolo 7

Esercizi sulla Ottimizzazione in più variabili

Esercizi sull'ottimizzazione in più variabili.

Sezione A.

Keywords: funzione coerciva, proprietà della funzione coerciva.

#Esercizio

Esercizio.

Stabilire se $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$f(x, y) = x^4 + y^4 + 3xy$$

ammette minimo o massimo.

Consiglio: usare la trasformazione in coordinate polari, mediante $x = \rho \cos\theta; y = \rho \sin\theta$.

#Esercizio

Esercizio.

Sia $f(x) = 3x$ e $g(x, y) = x - 12xy + 8y^3$.
Stabilire se le funzioni f, g siano coercive o meno.

Sezione B.

Keywords: segno della matrice, ricerca dei minimi e massimi locali liberi, test della Hessiana, test del gradiente.

#Esercizio

Esercizio.

Si cerchino i punti di massimo e minimo locali per la funzione

$$f(x, y) = x^2 - 2x + y^4 + y^2$$

#Esercizio

Esercizio.

Sia la funzione definita come

$$f(x, y) = e^{2x^2+y^2+xy}$$

Cercare i punti critici per f. Dire eventualmente di che tipologia sono.

Sezione C.

#Esercizio

Esercizio.

Sia $f(x, y) = x + y$ ristretta sulla curva $\Gamma : x^4 + y^4 - 4xy = 1$. Dire se esistono gli estremi, se sì determinarli.

#Esercizio

Esercizio.

Determinare gli estremi della funzione $f(x, y) = x$ in $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 = y^2\}$. Notare che E non è regolare!

#Esercizio

Esercizio.

Data $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ come

$$f(x, y, z) = x + y + z$$

e la superficie Σ come

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - xy + y^2 + z^2 = 1\}$$

Trovare estremi su $f_{|\Sigma}$.

#Esercizio

Esercizio.

Trovare i massimi e minimi assoluti di

$$f(x,y) = y^3 + 4x^2y - 4y$$

sulla restrizione $E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} \leq x^2 + y^2 \leq 1\right\}$.

Capitolo 8

Esercizi sulle Equazioni Differenziali

Breve descrizione qui

---

1. Esercizi sulle Equazioni Differenziali del Primo Ordine

#Esercizio

Esercizio.

Trovare le soluzioni al problema di Cauchy

$$(PC): \begin{cases} y'(x) = y^2(x) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

#Esercizio

Esercizio.

Trovare le soluzioni all'ODE

$$y'(x) = \sqrt{1 - y^2(x)}$$

#Esercizio

Esercizio.

Trovare la soluzioni del problema di Cauchy

$$(PC): \begin{cases} y'(x) = -2xy(x) + x^3 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

#Esercizio

Esercizio.

Trovare le soluzioni all'ODE

$$y'(x) = -\frac{y(x)}{x} + 4x$$

#Esercizio

Esercizio.

Provare la soluzione al problema di Cauchy

$$(PC): \begin{cases} y'(x) = y(x) - xy^4(x) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

2. Studio Qualitativo di Problemi di Cauchy

#Esercizio

Esercizio.

Sia (PC) il problema di Cauchy definita come

$$(PC): \begin{cases} y'(x) = x^2 \cos y(x) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Effettuare uno studio qualitativo su questa, provando che:
i. Esiste una ed unica soluzione $y(x)$
ii. Calcolare il limite $\lim_{x \to +\infty} y(x)$
iii. La soluzione $y(x)$ è dispari

#Esercizio

Esercizio.

Sia (PC) l'equazione logistica definito come

$$(PC): \begin{cases} y'(x) = ay(x)(1 - y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \in (0, 1) \end{cases}$$

Effettuare uno studio qualitativo sul (PC), determinando:
i. Equilibri della soluzione
ii. Intervallo di definizione della soluzione
iii. Il comportamento asintotico della soluzione verso $-\infty$ e $+\infty$ della soluzione e

della sua derivata

iv. Concludere con un disegno qualitativo della funzione

3. Equazioni Differenziali del Secondo Ordine

#Esercizio

Esercizio.

Risolvere il PC

$$(PC):\begin{cases} y''(x) = 3y^2(x) \\ y(0) = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \wedge y'(0) = 1 \end{cases}$$

#Esercizio

Esercizio.

Risolvere il PC

$$(PC):\begin{cases} y''(x) - 10y(x) = 0 \\ y(0) = 0 \wedge y'(0) = 1 \end{cases}$$

#Esercizio

Esercizio.

Risolvere il PC

$$(PC):\begin{cases} y''(x) + \frac{2}{3}y'(x) + \frac{1}{9}y(x) = 0 \\ y(0) = 0 \wedge y'(0) = 1 \end{cases}$$

#Esercizio

Esercizio.

Risolvere il PC

$$(PC):\begin{cases} y'' + 4y = 4\cos(2x) \\ y(0) = 0 \wedge y'(0) = 0 \end{cases}$$

#Esercizio

Esercizio.

Risolvere il PC

$$(PC) : \begin{cases} y'' - 10y = -10x^2 \\ y(0) = \dfrac{1}{5} \wedge y'(0) = 0 \end{cases}$$

#Esercizio

Esercizio.

Risolvere il PC

$$(PC) : \begin{cases} y'' - 10y = -10x^2 \\ y(0) = 1 \wedge y'(0) = 3 \end{cases}$$

#Esercizio

Esercizio.

Risolvere il PC

$$(PC) : \begin{cases} y'' + y = \dfrac{1}{\sin x} \\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0 \wedge y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

Capitolo 9

Esercizi sugli Integrali Multipli

Esercizi su $\iint\iint$, fino a quando si vuole.

Sezione A. Prime tecniche di integrazione

#Esercizio

Esercizio.

Calcolare l'integrale

$$\iint_R ye^{xy} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

su $R = [1,2]^2 := [1,2] \times [1,2]$.

Sezione B. Integrazione su insiemi arbitrari

#Esercizio

Esercizio.

Calcolare l'integrale

$$\iint_E \frac{x}{x^2+y^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

con

$$E = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2 \land \frac{x^2}{2} \leq y \leq x^2 \right\}$$

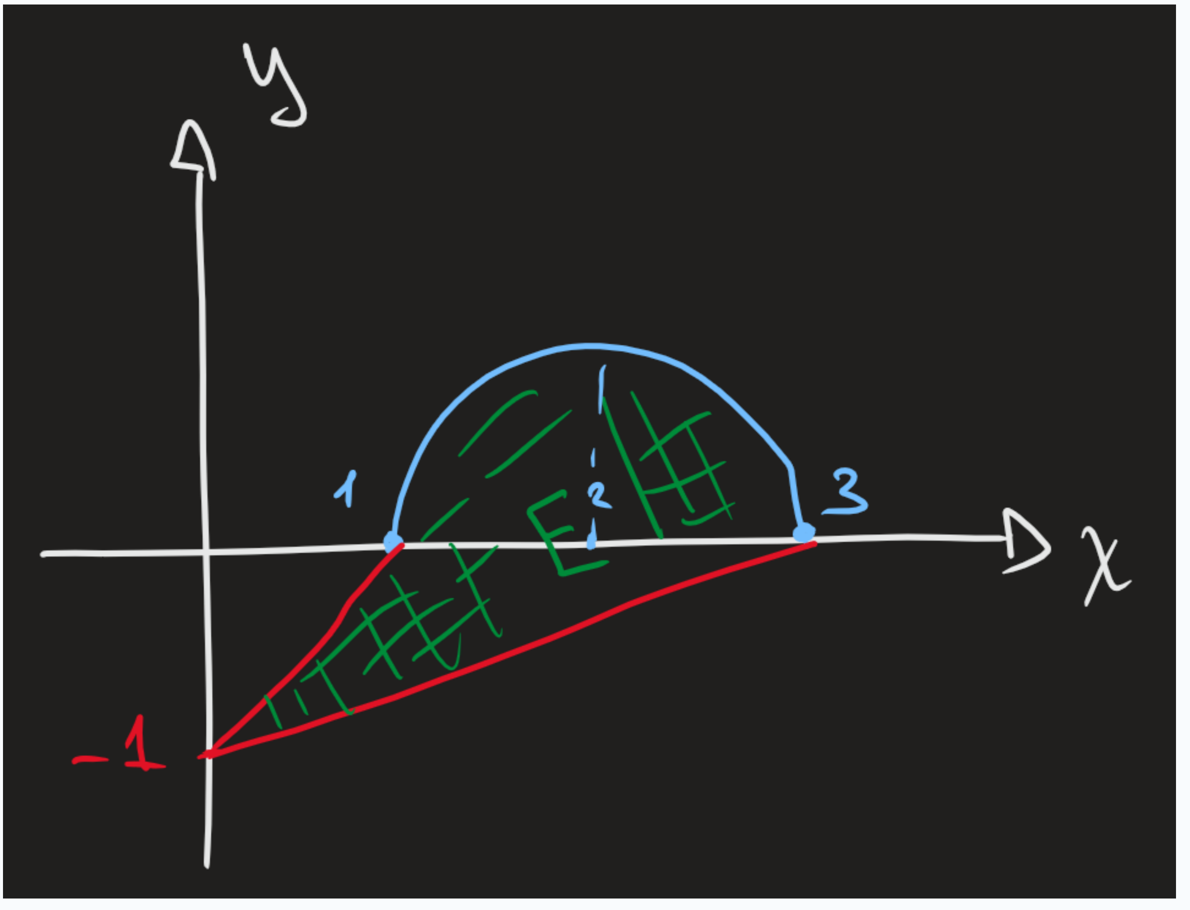
#Esercizio

Esercizio.

Calcolare l'integrale

$$\iint_E |xy| \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

con E come riportata nella figura sottostante:



#Esercizio

Esercizio.

Calcolare l'integrale

$$\iiint_E 1 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$$

con E definita come

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1 \wedge 0 \leq z \leq 1 - x \right\}$$

#Esercizio

Esercizio.

Calcolare l'integrale

$$\iiint_E 1 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$$

con E posta come

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1 - z^2\right\}$$

#Esercizio

Esercizio.

Calcolare il volume del solido di rotazione definito come

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq z \leq 2 \wedge 0 \leq x^2 + y^2 \leq z^2\right\}$$

Sezione C. Misura e integrazione su curve e superfici

#Esercizio

Esercizio.

Calcolare la lunghezza della curva

$$\gamma\left(t \in [0, 2\pi[\right) = \begin{pmatrix} R \sin t \\ R \cos t \end{pmatrix}$$

con $R \in \mathbb{R}$ un parametro reale.

#Esercizio

Esercizio.

Calcolare la massa di un filo appoggiamo sul sostegno della curva

$$\gamma(t \in [0, 2\pi]) = \begin{pmatrix} 2t \cos t \\ 2t \sin t \\ 3t \end{pmatrix}$$

avente densità $\rho(x, y, z) = z$.

#Esercizio

Esercizio.

Calcolare la superficie della sfera, data dalla parametrizzazione definita come

$$\sigma((u,v) \in ([0,\pi] \times [-\pi,\pi])) = \begin{pmatrix} R\sin u \cos v \\ R \sin u \sin v \\ R\cos u \end{pmatrix}$$

con R un parametro reale fissato.

#Esercizio

Esercizio.

Calcolare la massa di una lamina, appoggiata sul sostegno della curva

$$\sigma(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2 + v^2 \end{pmatrix}$$

sul dominio $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ e supponendo la densità $\mu(x,y,z) = z$.

Sezione D. Tecniche di Integrazione in Più Variabili

#Esercizio

Esercizio.

Calcolare l'integrale

$$\iint_E (x-y)\ln(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

con E definito come il parallelepipedo racchiuso nelle rette di equazione

$$E: \begin{cases} r_1 : y = x - 1 \\ r_2 : y = x \\ r_3 : y = 1 - x \\ r_4 : y = 3 - x \end{cases}$$

#Esercizio

Esercizio.

Calcolare l'integrale

$$\iint_E x^2 + y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

su E definita come la porzione della corona circolare nel semispazio $x \geq 0$ delimitata dalle circonferenze Γ_1, Γ_2 e delimitate dalle bisettrici r_1, r_2:

$$E \sim \begin{cases} \Gamma_1 : x^2 + y^2 = 1 \\ \Gamma_2 : x^2 + y^2 = 4 \\ r_1 : y = x \\ r_2 : y = -x \end{cases}$$

#Esercizio

Esercizio.

Calcolare l'integrale gaussiana

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \, \mathrm{d}x$$