Insiemistica - Sommario

Teoria degli insiemi, operazioni con gli insiemi, sottoinsiemi e cardinalità. Integrato con coppie ordinate e relazioni.

Teoria degli Insiemi

Teoria degli Insiemi

Nozione primitiva di insieme, metodi di rappresentazione di un insieme, la questione dell'insieme vuoto $\emptyset$, sottoinsiemi.

Nozione primitiva dell'insieme

Una *nozione primitiva* (ovvero una definizione, un concetto che viene dato per saputo) della matematica è l'*insieme*.
L'insieme equivale a ciò che riferiamo come un'aggregazione, una famiglia, un gruppo, oppure un ente che contiene oggetti (chiamati *elementi*) che condividono qualche caratteristica.
Per dire che un *elemento* appartiene ad un certo *insieme*, si usa la seguente notazione.

$$a \in A \text{ si legge come "a appartiene ad A"}$$

Rappresentazione degli insiemi

OSS. Si può rappresentare un insieme nei seguenti due modi:

1. Mediante la *forma estensiva*, ovvero quella di elencare tutti gli elementi uno per uno.
2. Con la *forma intensiva*, ovvero quella di fissare un insieme *"universo"* (ambiente) e poi di caratterizzare gli elementi con una certa *proprietà*

ESEMPIO DI 1. Un insieme rappresentato mediante la forma estensiva è la seguente:

$$A = 1, 2, 3$$

ESEMPIO DI 2. Un insieme rappresentato tramite la forma intensiva è l'insieme dei numeri pari A,

$$A = \{n \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{Z} : n = 2k\}$$

In questo caso la l'insieme universo è $\mathbb{N}$ (ovvero i numeri naturali) e la proprietà caratterizzante è che deve esiste un numero intero k, tale che se moltiplicato per 2 risulta n.
Per esempio il numero 4 è pari in quanto esiste il numero intero 2 a cui se moltiplicato 2 viene fuori 4. $4 = 2 * 2$
Alternativamente 3 non è pari in quanto non si può trovare nessun numero intero k a cui se si moltiplica 2 viene fuori 3.
$1 * 2 = 2, 2 * 2 = 4, ? * 2 = 3$

Uguaglianza degli insiemi

Secondo questa nozione primitiva due insiemi vengono considerati *uguali* se hanno gli stessi elementi; per esempio scriviamo

$$A = \{a, b, c\} = \{b, a, c\}$$

OSS. Notiamo subito che qui non conta l'ordine, a contrario di altri oggetti matematici, che potrebbero essere come le coppie ordinate.

In una notazione più rigorosa, si dice che due insiemi A e B sono uguali se e solo se valgono entrambe le seguenti condizioni:

$$\begin{aligned} \forall a, a \in A \implies a \in B \\ \forall b, b \in B \implies b \in A \end{aligned}$$

Sottoinsieme

Osservando da Uguaglianza degli insiemi, se vale solo una delle condizioni, che in questo caso prendiamo $\forall a, a \in A \implies a \in B$, allora si può riscriverla come la seguente:

$$A \subseteq B \text{ si legge come "A contenuto in B" o "A è sottoinsieme di B"}$$

Prestando questa notazione, si può riscrivere $A = B$ come $A \subseteq B \land B \subseteq A$;

$$A = B \iff A \subseteq B \land B \subseteq A$$

L'esistenza dell'insieme vuoto

OSS. Nella matematica è conveniente far esistere un insieme speciale **senza** elementi, ovvero l'insieme vuoto; indicato con $\emptyset$.

PROPOSIZIONE 1. Esiste solo un insieme vuoto; non possono esistere due o più insieme vuoti.
DIMOSTRAZIONE. Non possono esistere due o più insieme vuoti in quanto due insiemi A e B si differiscono per degli elementi che hanno; però questo non può essere per due insiemi vuoti. Questo perché, per definizione, questi insiemi vuoti non hanno elementi.

PROPOSIZIONE 2. L'insieme vuoto è contenuto in tutti gli insiemi;

$$\forall A, \emptyset \subseteq A$$

Insieme delle parti di un insieme

DEF. Si definisce *l'insieme delle parti* di un certo insieme A come l'*insieme di tutti i sottoinsiemi di A*. Nella teoria degli insiemi, si dà che questa esiste.
Viene denotata come

$$\mathcal{P}(A) \text{ si legge come "l'insieme delle parti di } A\text{"}$$

ESEMPIO. Sia $A = \{a, b, c\}$, costruire $\mathcal{P}(a)$.
DEF. Si definiscono i *sottoinsiemi propri* le seguenti:
$\emptyset, \{a\}\{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$; ovvero gli insiemi appartenenti a $\mathcal{P}(a)$ e non uguale ad A.
Quindi un *sottoinsieme proprio* si definisce tale quando valgono entrambe le condizioni: $A_i \subset A \wedge A_i \neq A \text{ ove } A_i \text{ rappresenta un sottoinsieme proprio di A}$
L'insieme della parti è formato dall'insieme stesso e dai sottoinsiemi propri di A; pertanto

$$\mathcal{P}(a) = \{\emptyset, \{a\}\{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

ESERCIZIO 1. Se A ha n elementi, quanti elementi ha $\mathcal{P}(a)$?
SOLUZIONE-CONGETTURA. $\mathcal{P}(a)$ ha 2^n elementi
DIMOSTRAZIONE. La seguente dimostrazione è strutturata in 4 passi.

1. Si definisce come esempio l'insieme $A = \{a, b, c, d\}$, quindi $n = 4$.
2. Ora si rappresenta un sottoinsieme di A mediante la codificazione in *binario*; ovvero quella di porre ogni elemento dell'insieme A in una posizione j e di segnare, se non presente 0; se presente 1

ESEMPIO 1. L'insieme vuoto $\emptyset$ viene rappresentato come 0.
ESEMPIO 2. Il numero 1010 rappresenta $\{a, c\}$

3. Ora se si vuole contare il numero di tutti i sottoinsiemi, si può partire dal numero 0, che sarebbe il primo sottoinsieme fino ad arrivare il sottoinsieme 1111; tuttavia si deve considerare il sottoinsieme vuoto $\emptyset$, pertanto il numero totale di sottoinsiemi diventa $1111 + 1$, che in binario eguaglia a 10000.
4. Traducendo 10000_2 al sistema decimale, esso diventa 2^4, e il numero 4 coincide con n. $\blacksquare$

Operazioni con gli insiemi

Operazioni con gli Insiemi

Elenco di operazioni che possono essere svolte con/tra insiemi.

Operazioni con gli insiemi: breve introduzione ed elenco

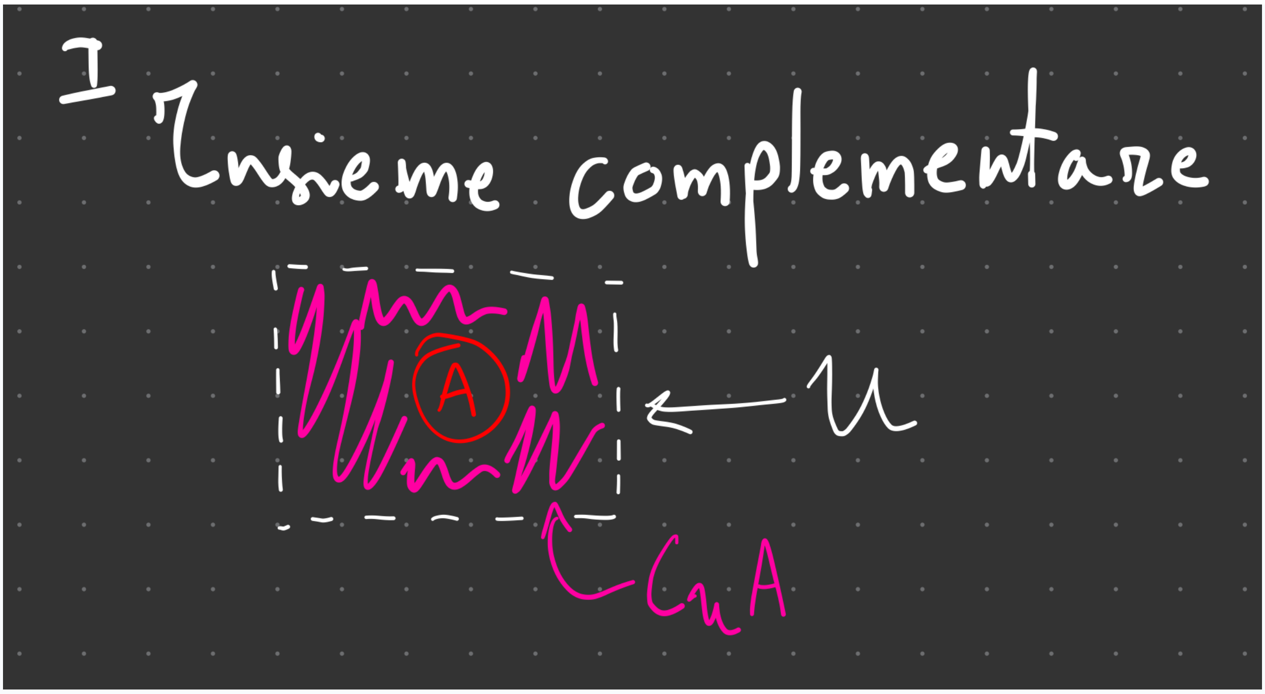
E' possibile formare un nuovo insieme partendo da uno o più insiemi, ed è possibile farlo grazie alle operazioni con gli insiemi.
In particolare ne studieremo tre: l'*insieme complementare*, l'*intersezione* e l'*unione*.

Insieme Complementare

Sia $\mathcal{U}$ l'*insieme universo/ambiente* e A un insieme, allora si definisce

$$\mathcal{C}_{\mathcal{U}}A := \{x \in \mathcal{U} : x \notin A\}$$

Secondo il *diagramma Eulero-Venn*, essa si rappresenta come:



OSS. Si nota che l'*insieme complementare* dipende dall'*insieme universo* scelto; quindi si tratta comunque di un'*operazione binaria* (?, in realtà da chiedere al prof. come specifica), in quanto si deve fare la scelta di due variabili.

Intersezione, Unione

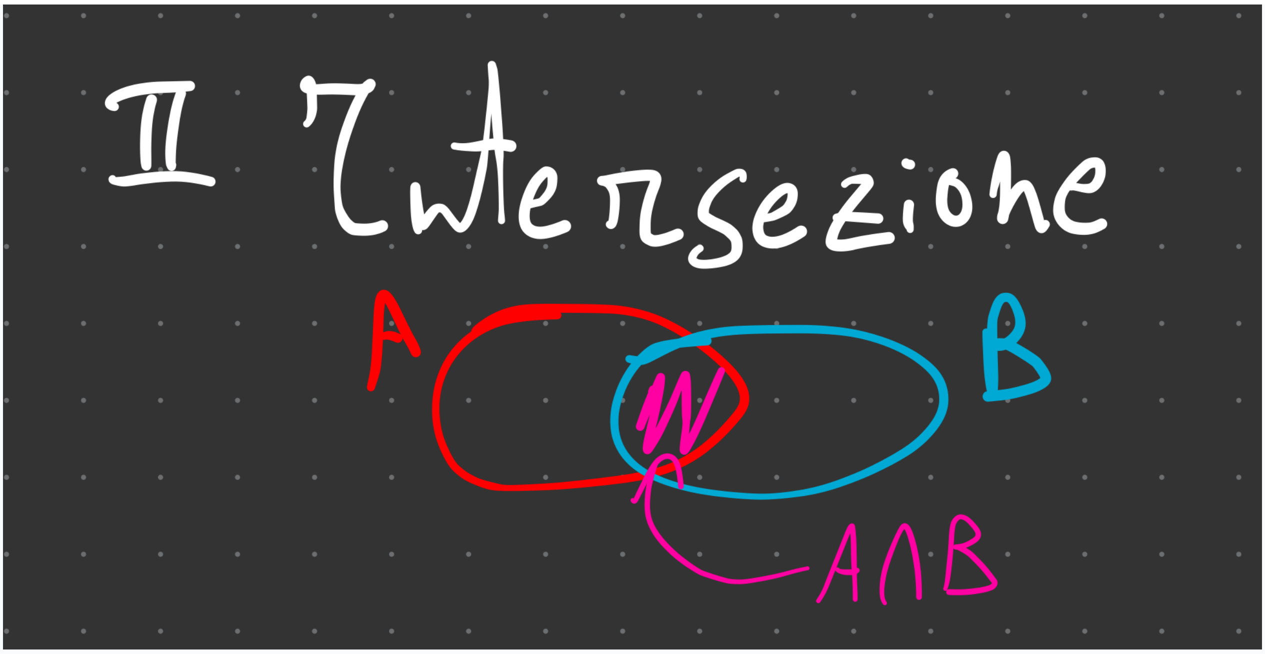
Altre due operazioni importanti sono *l'intersezione* e *l'unione*.

Intersezione

Si definisce l'intersezione

$$A \cap B := \{x \in \mathcal{U} : x \in A \wedge x \in B\}$$

A seguito la rappresentazione in *diagramma di Eulero-Venn*

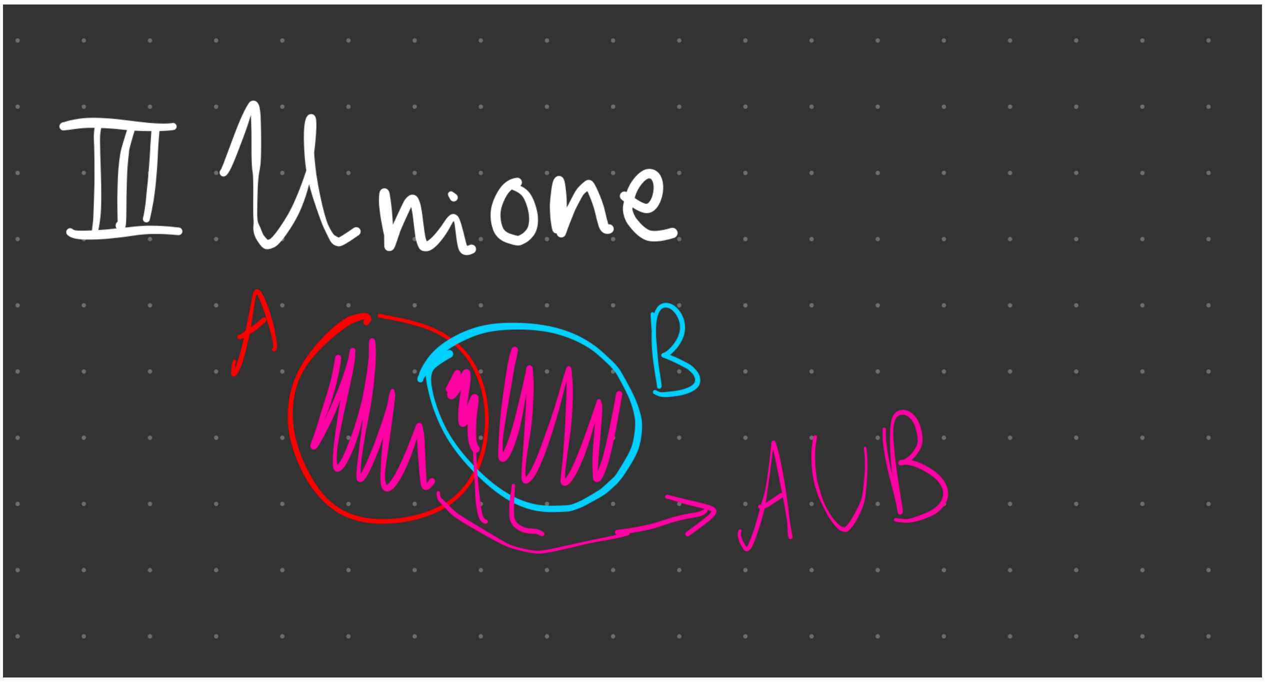


Unione

Si definisce l'unione

$$A \cup B := \{x \in \mathcal{U} : x \in A \vee x \in B\}$$

A seguito la rappresentazione in *diagramma di Eulero-Venn*



OSS 1. Nesso tra matematica logica e teoria degli insiemi

E' interessante notare che le operazioni di intersezione $\cap$ e unione $\cup$ costituisce una specie di ponte, o collegamento tra la Teoria degli Insiemi e la logica formale, particolarmente con i Connettivi.
Si nota che da un lato viene usata la forma intensiva per rappresentare un

insieme, mentre dall'altro vengono usati i connettivi $\wedge$ e $\vee$ per rappresentare le proprietà caratterizzanti.
Inoltre si osserva un parallelismo piuttosto interessante tra $\cup, \vee$ e $\cap, \wedge$.

OSS 2. Proprietà tra intersezione e l'unione

Si osservano delle **proprietà** di queste due operazioni quanti si interagiscono tra di esse.
PROPRIETA' 1. Proprietà associativa

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cap C)$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

PROPRIETA' 2. Proprietà simmetrica

$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$

PROPRIETA' 2. Proprietà distributiva

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (B \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

E' possibile anche illustrarli tramite i diagrammi di Eulero-Venn.

Coppie Ordinate e Prodotto Cartesiano

Coppie Ordinate e Prodotto Cartesiano

Nozione primitiva di coppia ordinata, differenze tra insiemi e coppie ordinate.

DEF 1. Nozione primitiva di coppia ordinata

Una **coppia ordinata** è un **aggregato** con **due** elementi, in cui si distingue il primo e il secondo elemento. Una coppia ordinata con elementi a e b viene indicata come (a, b).
ATTENZIONE. Si deve notare che la *coppia ordinata* è un concetto diverso da quello dell'insieme; infatti $(a, b) \neq \{a, b\}$, in quanto $\{a, b\} = \{b, a\}$

è vera per $\forall a, b$, invece $(a,b) = (a',b') \iff a = a'; b = b'$, di conseguenza $(a,b) \neq (b,a)$ a meno che $a = b$.

DEF 2. Prodotto Cartesiano

Siano A, B insiemi;
Si definisce il **prodotto cartesiano** di A e B come il seguente:

$$A \times B := \{(a,b) : a \in A, b \in B\}$$

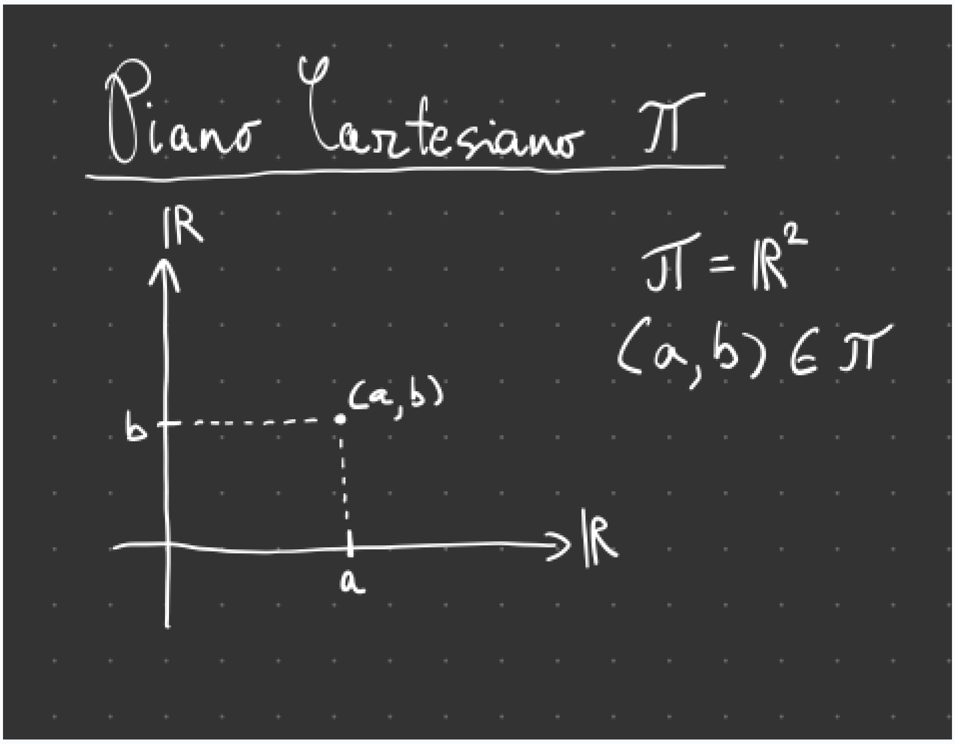
ESEMPIO 2.1. Il *Piano Cartesiano* π studiato alle scuole superiori si costruisce e si definisce nel seguente modo:

$$\pi = \{(a,b) : a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$$

Notiamo che gli insiemi A, B sono uguali; infatti

$$\pi = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$$

OSS 2.1.1. Il *Piano Cartesiano* appena descritto è un concetto molto importante per la matematica, in quanto esso costituisce un nesso tra i numeri e il piano π.
ILLUSTRAZIONE GRAFICA.

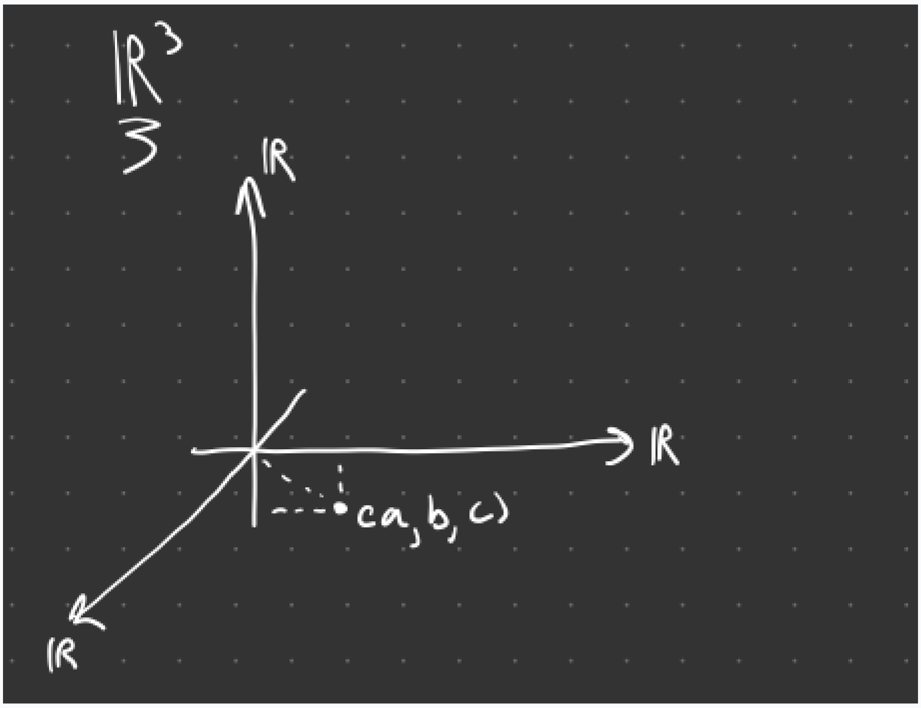


ESEMPIO 2.2. Similmente

$$A \times B \times C := \{(a,b,c) : a \in A, b \in B, c \in C\}$$

$$\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$$

ILLUSTRAZIONE GRAFICA



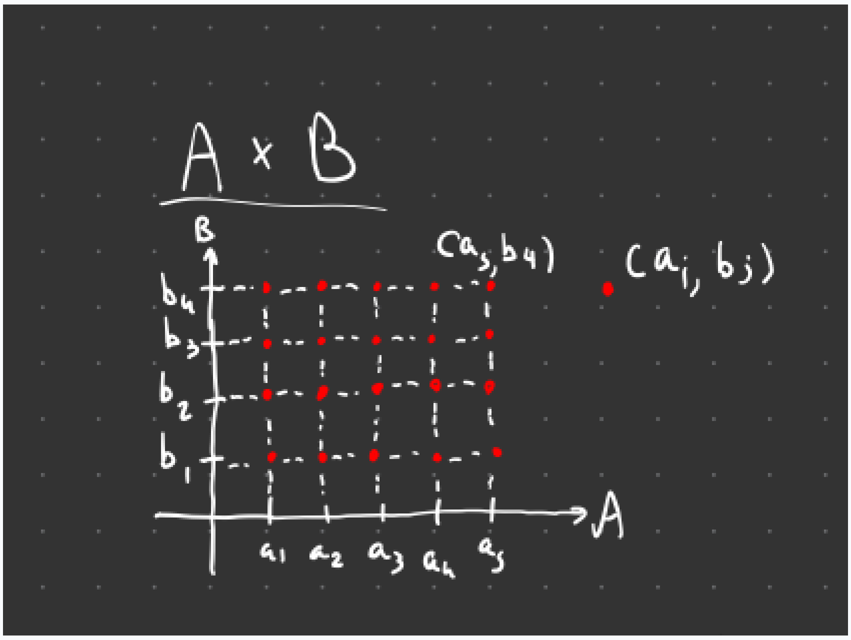
SUBDEF 2.1. Generalizzando, si definisce $\mathbb{R}^n$ come:

$$\mathbb{R}^n := \{(x_1, \ldots, x_n : x_1) \in \mathbb{R}, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

SUBDEF 2.1.1 Si definisce la componente $(x_1, \ldots, x_n : x_1)$ come una **n-upla** (vettore)

ESEMPIO 2.3. Si hanno $A = \{a_1, \ldots, a_5\}$ e $B = \{b_1, \ldots, b_4\}$; scrivi e rappresenta graficamente $A \times B$.

$$A \times B = \{(a_i, b_j) : i = 1, 2, 3, 4, 5; j = 1, 2, 3, 4\}$$



Relazioni

Relazioni

Definizione di relazioni con esempi; alcuni attributi che possono essere dati, relazioni di equivalenza e classi di equivalenza.

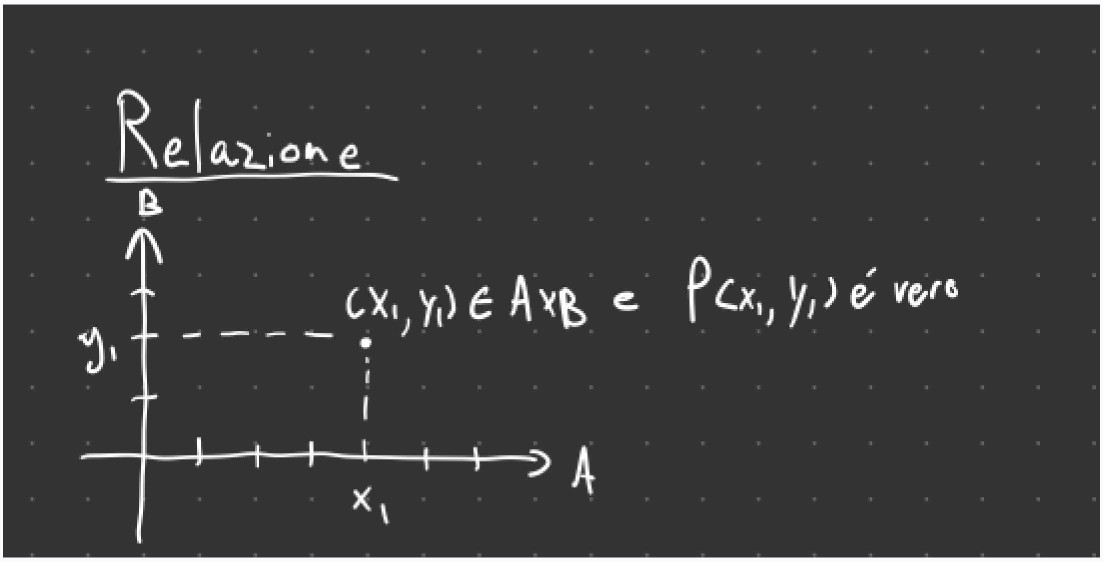
DEF 1. Relazioni

OSS 3.1. Si vuole rappresentare A come l'insieme dei numeri divisibili per tre:

$$\begin{aligned} A &= \{n \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N} : n = 3k\} \\ &= \{n \in \mathbb{N} : \mathcal{P}(n)\} \end{aligned}$$

Notiamo che per definire A viene usato un predicato unario; si individuano *singoli elementi n* che soddisfano $\mathcal{P}(n)$.
Invece per definire *prodotti cartesiani* si può usare i *predicati binari*; qui individuo in $A \times B$ le coppie (a, b) che soddisfano un certo predicato $\mathcal{Q}(a, b)$.

ESEMPIO 3.1.1.
Siano gli insiemi A l'insieme dei *ragazzi in questa aula*, B l'insieme delle *ragazze in questa aula*; il predicato $\mathcal{P}(x, y) : \text{x è amico di y}$. Ora si vuole rappresentare graficamente il prodotto cartesiano $A \times B$.

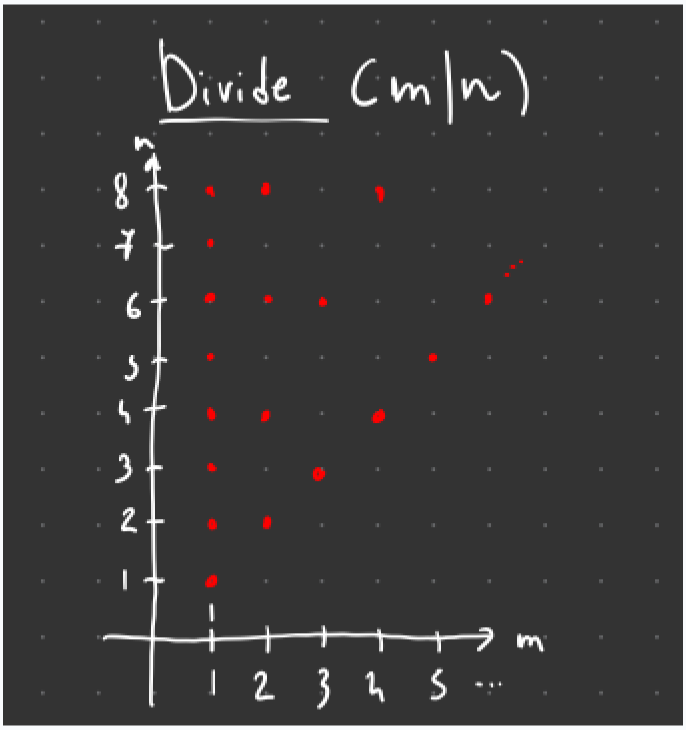


Se si individua che x è amico di y, allora si segna il punto (x, y) dove si verifica il predicato $\mathcal{P}(x, y)$.

Il predicato si definisce come una **relazione tra due insiemi**; in questo caso possiamo chiamarlo come una relazione *"d'amicizia"*.

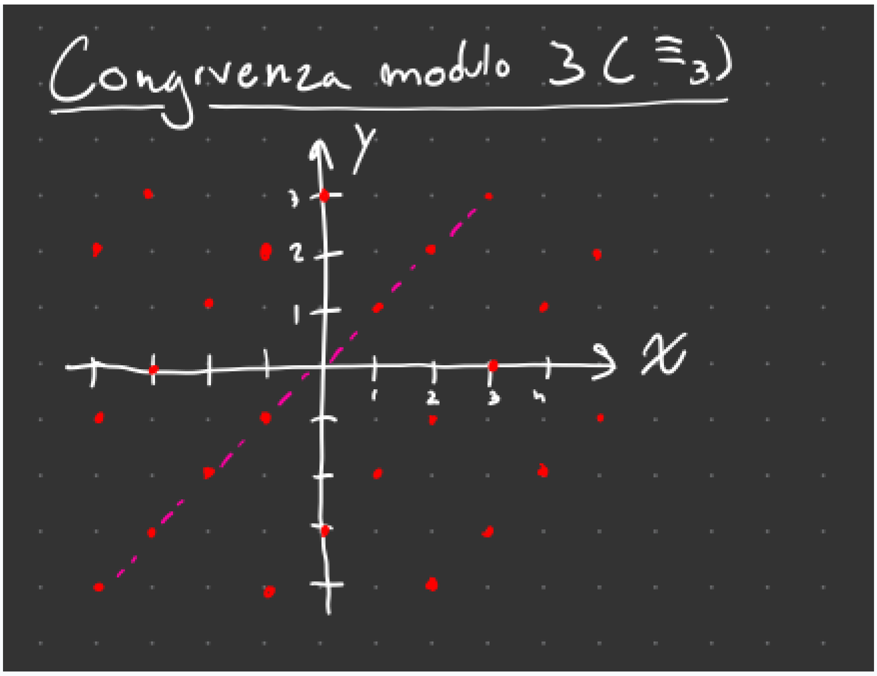
DEF 3. Una **relazione** tra A e B si definisce come il *predicato $\mathcal{P}(x, y)$ a valori in $A \times B$.*
SUBDEF 3.1. Se $A = B$, allora si dice che la **relazione** è una **relazione su A.

ESEMPIO 3.1.
Sia $A = \mathbb{N} \setminus \{0\}$; "|" la relazione *"divide"*; diciamo che $n|m$ se $\exists k \in \mathbb{N} : m = nk$
SUBESEMPIO 3.1.1. $3|12$ è vero in quanto $k = 4$, $3|5$ invece è falso in quanto $\nexists k$.
GRAFICO DELLA RELAZIONE DIVIDE.



ESEMPIO 3.2. Consideriamo:

- $A = \mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$
  - Breve nota storica: I numeri interi si denotano con $\mathbb{Z}$ dal tedesco *"(der) Zahl"*, ovvero *"Numero"*
- Sia $m = 3$
- x è in relazione con y se $\exists k \in \mathbb{Z} : x - y = 3k$
  - Questa relazione si definisce come **congruenza modulo n** e viene denotata come $x \equiv_n y$ o $x \equiv y \bmod n$
  GRAFICO DELLA RELAZIONE CONGRUENZA MODULO N(3).



DEF 2. Relazioni riflessive, simmetriche e transitive

Sia A un insieme; sia ρ una relazione in A; per dire che un elemento $a \in A$ è in relazione con $b \in A$ si scrive $a\rho b$.

DEF 4.1. Si dice che la relazione ρ è **riflessiva** se

$$\forall x \in A, x\rho x$$

DEF 4.2. Si dice che relazione ρ è **simmetrica** se

$$\forall x, y \in A, x\rho y \implies y\rho x$$

DEF 4.3. Si dice che la relazione ρ è **transitiva** se

$$\forall x, y, z \in A, x\rho y \wedge y\rho z \implies x\rho z$$

ESEMPIO 4.3.1. La relazione | (divide) è transitiva.
DIM.

$$x|y \wedge y|z \overset{?}{\implies} x|z$$
$$1.\ x|y \iff \exists k_1 : y = k_1 x$$
$$2.\ y|z \iff \exists k_2 : z = k_2 y = (k_1 k_2)x = k_3 x \implies x|z \blacksquare$$

ESERCIZIO. Verificare se $\equiv_n$ è transitiva.

1. Si prendono tre valori $x, y, z \in \mathbb{Z}$ e la relazione $\equiv_n$ su $\mathbb{Z}$

2. Dire che $\equiv_n$ è transitiva equivale a dire la seguente:
   1. $$x \equiv_n y \wedge y \equiv_n z \overset{?}{\implies} x \equiv_n z$$
   2. Per definizione,
   $$\begin{aligned} x \equiv_n y &\iff \exists k_1 \in \mathbb{Z} : x - y = nk_1 \\ y \equiv_n z &\iff \exists k_2 \in \mathbb{Z} : y - z = nk_2 \\ x \equiv_n z &\iff \exists k_3 \in \mathbb{Z} : x - z = nk_3 \end{aligned}$$
   3. Si osserva che $(x-y)+(y-z)=x-z$; pertanto $x - z = nk_1 + nk_2 = n(k_1+k_2)$ e si pone $k_3 = k_1 + k_2$, completando così la dimostrazione. ■

DEF 3. Relazione antisimmetrica

DEF 3. Siano: A un insieme, ρ una relazione; ρ si dice **antisimmetrica** se

$$\forall x, y \in A, x\rho y \wedge y\rho x \implies x = y$$

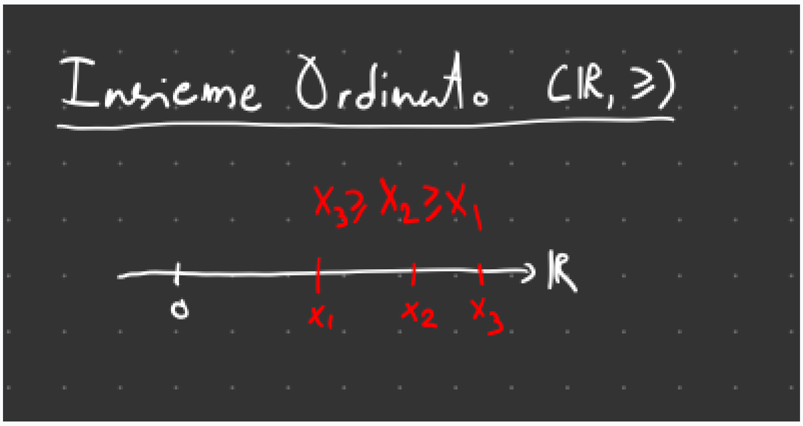
ESERCIZIO. Mostrare che $|$ è antisimmetrica.

1. Si considerano i due valori $x, y \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e la relazione $|$ su $\mathbb{N} \setminus \{0\}$
2. Per definizione,
$$\begin{aligned} x|y &\iff \exists k_1 \in \mathbb{N} : y = k_1 x \\ y|x &\iff \exists k_2 \in \mathbb{N} : x = k_2 y \end{aligned}$$
3. Osservare che:
$$x = y \iff k_1 x = k_2 y$$
è vera se e solo se $k_1 = k_2$
4. Riprendendo il passaggio **2.**,
$$\begin{aligned} x|y &\iff \exists k_1 \in \mathbb{N} : y = k_1 x \\ y|x &\iff \exists k_2 \in \mathbb{N} : x = k_2 y \\ & x = k_1 k_2 x \\ & k_1 k_2 = 1 \end{aligned}$$
5. Osservare che $k_1 k_2 = 1$ è vera in $\mathbb{N}$ solo per l'unico valore $k_1 = k_2 = 1$. Riosservando il passaggio tre, notiamo che si è verificato che $k_1 = k_2$, dimostrando così che $|$ è antisimmetrica. ■

DEF 4. Relazione d'ordine

DEF 4. Se ρ è:

- Riflessiva
- Antisimmetrica
- Transitiva
  Allora si dice che ρ è una **relazione d'ordine** (ordinamento)
  SUBDEF 4.1. Se A è l'insieme, ρ una relazione d'ordine, allora si definisce (A, ρ) come un **insieme ordinato**
  ESEMPIO 4.1.1. $(\mathbb{R}, \geq)$ è un *insieme ordinato*; infatti se disponiamo su una riga tutti i numeri $\mathbb{R}$, si vede immediatamente che tutte e tre le condizioni si verificano. Ad esempio $x \geq x$ è vero in quanto $x = x$; oppure se $x \geq y \wedge y \geq x$, allora $x = y$.



DEF 4.1. Relazione d'ordine totale

DEF 4.1. Inoltre una *relazione d'ordine* ρ si definisce anche come una *relazione d'ordine* **totale** se $\forall x, y \in A, x\rho y \vee y\rho x$.

DEF 5. Relazione di equivalenza

DEF 5. Se ρ è:

- Riflessiva
- Simmetrica
- Transitiva
  Allora ρ viene definita come una **relazione d'equivalenza**.

DEF 5.1. Classe di equivalenza

DEF 5.1. Siano A un insieme (e $a \in A$) e ρ una relazione d'equivalenza, definisco la classe di equivalenza

$$[a]_\rho := \{b \in A : a\rho b\}$$

Quindi è un insieme che contiene *tutti* gli elementi in reazione di A.

ESEMPIO 5.1.

$$\begin{aligned}
[0]_{\equiv_3} &= \{\dots, -3, 0, 3, \dots\} \\
[1]_{\equiv_3} &= \{\dots, -2, 1, 4, \dots\} \\
[2]_{\equiv_3} &= \{\dots, -1, 2, 5, \dots\}
\end{aligned}$$

Si nota che $\forall k \in \mathbb{Z}, [0k]_{\equiv_3}$ sono le medesime; stesso discorso per $[1]_{\equiv_3}$ e per $[2]_{\equiv_3}$

DEF 5.1.1. Insieme Quoziente

L'insieme delle classi di equivalenza su un insieme A si chiama **insieme quoziente rispetto all'equivalenza**;

$$A \diagup \rho$$

ESEMPIO 5.1.1.1.

$$\mathbb{Z} \diagup \equiv_3 \quad = \{[0]_{\equiv_3}, [1]_{\equiv_3}, [2]_{\equiv_3}\}$$

Il concetto dell'**insieme quoziente** è utile in quanto essa può essere usata per certe situazioni nella vita reale.
ESEMPIO 5.1.1.2. Si vuole studiare $\equiv_{12}$, 12 essendo il numero delle lancette dell'orologio. Questo è utile in quanto, se iniziassimo a contare le ore dall'ora 0 denotandolo come h, allora possiamo automaticamente trovare la posizione della lancetta ad una certa ora h, facendo semplicemente $[h]_{\equiv_{12}}$.

⚠ **Poi sono state spiegate altre robe su questo che non ho capito, boh**