Prova d'Esame Calcolo Delle Probabilità - 02.07.2024

NOTA. Sono riportate *solo* le domande "pratiche", le domande teoriche (del tipo *vero/falso/vero condizionato*) non sono riportate in quanto non le ho segnate sulla brutta copia. Inoltre le domande sono riportate sotto forma di *domanda aperta*, non *quiz a scelta multipla*.

Domande

1. Sia $X \sim \mathcal{E}(3)$, $Y \sim \Gamma(1,1)$. Calcolare $E[XY^2]$ e $\operatorname{var}(3X - Y)$.

2. Si supponga che il peso della popolazione degli orsi polari segua una legge gaussiana avente media $\mu = 500 \text{ kg}$. Conoscendo che il 10% ha un peso sotto 400 kg, calcolare la percentuale degli orsi avente peso $\geq 550 \text{ kg}$.

3. Sia $(X_n)_n$ un campione per un modello statistico $(\Omega, \mathcal{A}, p_{\sigma^2})_{\sigma^2}$, con $n = 60$ e varianza campionaria calcolata come $\bar{\sigma}^2 = 4$. Stabilire un intervallo di confidenza per la varianza calcolata su $\bar{\sigma}^2$ a livello 86%.

4. Sia $F(x)$ una funzione definita a tratti come: 0 se $x < 0$; $\frac{x}{3}$ se $0 < x < 2$; c se $c \geq 2$. Dire se F possa essere una funzione di ripartizione o meno; in tal caso stabilire la costante $c \in \mathbb{R}$.

5. Sia $f(x)$ la legge di una variabile aleatoria X, definita a tratti: $f(x) = 2c$ se $x \in (1,2) \cup (3,4)$ e $f(x) = c$ se $x \in (0,1) \cup (2,3)$ e 0 altrove. Stabilire la costante c per cui X è una variabile aleatoria assolutamente continue e calcolare $p\{X \leq 3\}$.

6. Si ha un'urna di 85 palline, tutte numerate da 1 a 85. Si estraggono 6 palline da quest'urna senza reimmissione: calcolare la probabilità di avere esattamente la tripletta $\{40, 41, 42\}$.

Questions (versione inglese)

1. Let X be an exponential random variable with parameter $\lambda = 3$ $(X \sim \mathcal{E}(3))$ and let Y be a Gamma random variable with parameters $\alpha = 1, \lambda = 1$ $(Y \sim \Gamma(1,1))$. Calculate the mean value $\mathbb{E}[XY^2]$ and the variance $\operatorname{var}(3X - Y)$.

2. Suppose that the distribution for the weight of polar bears follow the Gaussian density with mean $\mu = 500 \text{ kg}$. Knowing that the 10% of bears have a weight under 400 kg, calculate the percentage of the bears with a weight $\geq 550 \text{ kg}$.

3. Let $(X_n)_n$ be a sample of a statistical model $(\Omega, \mathcal{A}, p_{\sigma^2})_{\sigma^2}$ with sample size $n = 60$ and sample variance $\bar{\sigma}^2 = 4$. Establish an interval of confidence for the variance at level 86%, basing on the sample variance $\bar{\sigma}^2$.

4. Let $F(x)$ be a function piecewise function defined as follows: 0 if $x < 0$, $\frac{x}{3}$ if $0 < x < 2$, c if $x \geq 2$. Establish whether F can be a cumulative distribution function or less; if it is the case, determine the constant $c \in \mathbb{R}$.

5. Let $f(x)$ be the density of an absolutely continuous random variable X, defined piecewise as follows: $f(x) = 2c$ if $x \in (1,2) \cup (3,4)$; $f(x) = c$ if $x \in (0,1) \cup (2,3)$; $f(x) = 0$ otherwise. Determine the constant c such that X is a random variable and calculate $p\{X \leq 3\}$.

6. Suppose we have a container with 85 balls, each one numbered from 1 to 85. We extract 6 balls from this container, without reintroducing the extracted balls: calculate the probability of having exactly the triplet $\{40, 41, 42\}$.