

# Calcolo Combinatorio - Sommario

*Cenni al Calcolo Combinatorio, definizione del coefficiente binomiale  $\binom{n}{k}$ , problemi misti del Calcolo Combinatorio, teorema di Newton (o del binomio).*

---

## Problemi del Calcolo Combinatorio

*Significato del calcolo combinatorio; quali problemi esso mira di risolvere. Alcuni problemi: disposizioni con ripetizioni, disposizione di oggetti a  $m$  a  $m$ , permutazioni di  $n$  oggetti e combinazioni. Alcuni problemi misti del calcolo combinatorio*

---

## 1. Cosa vuol dire "calcolo combinatorio"

Se si definisce l'insieme dei numeri **naturali** come l'insieme dei numeri che servono *per contare*, allora il **calcolo combinatorio** si basa sul problema di *contare* certi insiemi/oggetti/...

**DEF 1. Cardinalità** Si definisce la **cardinalità** di un *insieme*  $A$  come il numero  $n$  degli elementi contenuti nell'insieme  $A$ . Lo si denota come  $|A|$ .

## 2. I problemi del calcolo combinatorio

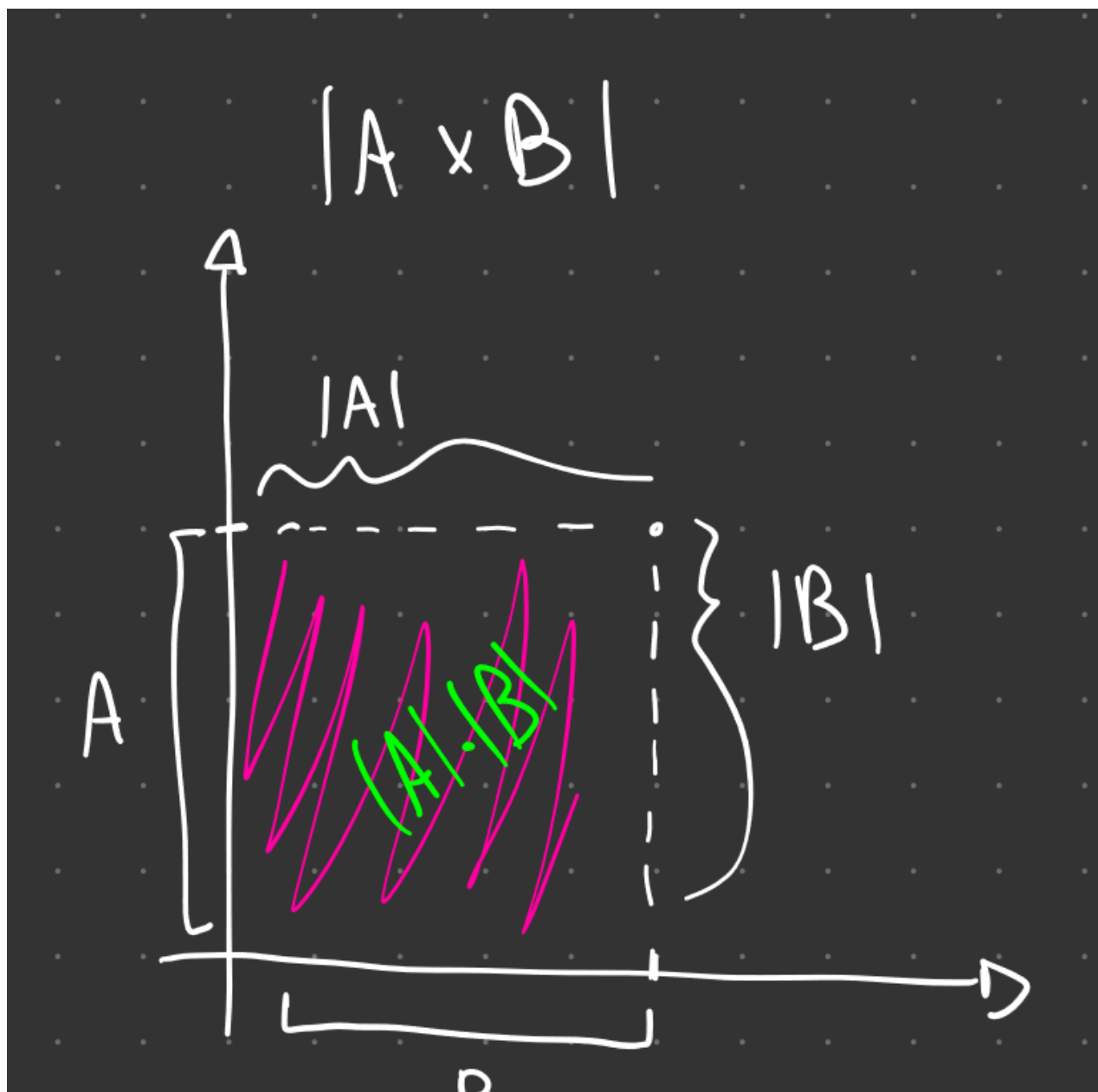
Il *calcolo combinatorio* ci presenta vari problemi che valgono la pena di essere studiati.

### PROBLEMA 2.1. Cardinalità del prodotto cartesiano

**PROBLEMA 2.1.** Supponiamo che  $|A| = n$ ,  $|B| = m$ , ove  $A, B$  sono *insiemi* e  $n, m \in \mathbb{N}$ . Allora ci poniamo il problema di trovare  $|A \times B|$ .

Se disegniamo il grafico di un qualsiasi prodotto cartesiano  $A \times B$ , si evince che per ogni riga  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  ci sono  $m$  colonne; quindi

$$|A \times B| = n \times m$$



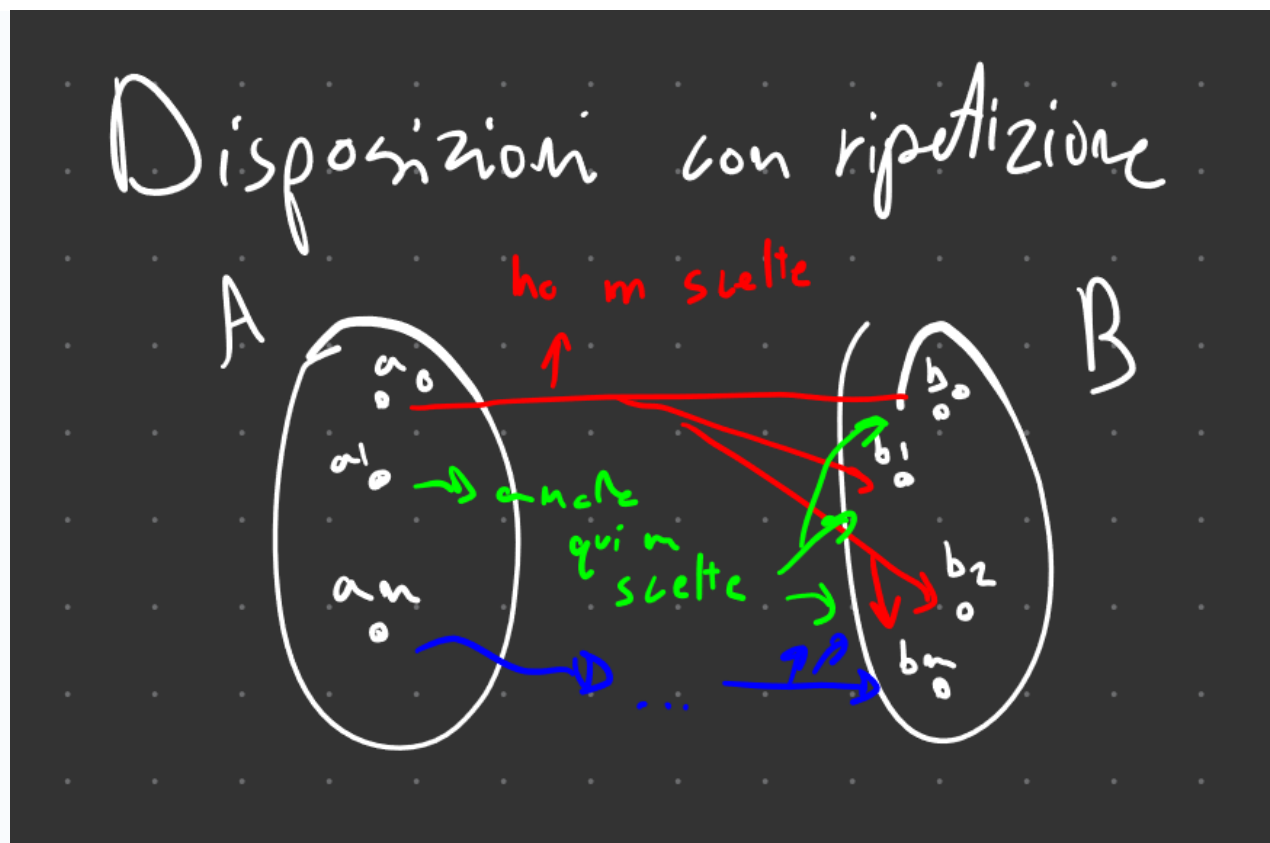
## PROBLEMA 2.2. Disposizioni con ripetizione

**PROBLEMA 2.2.** Siano  $A, B$  insiemi con  $|A| = n; |B| = m$ ; voglio contare il numero degli elementi di

$$B^A := \{\text{funzioni da } A \text{ a } B\}$$

Per risolvere questo problema si può avvalere del diagramma in cui rappresentiamo gli due insiemi  $A, B$ . Ora, prendendo il primo elemento  $a_0$ , vediamo che possiamo definire  $m$  funzioni, collegando l'elemento  $a_0$  a  $b_m$ . Stesso discorso vale per  $a_1, a_2, \dots, a_n$ ; quindi generalizzando possiamo vedere che il risultato viene  $m^n = |B|^{|A|} = |B^A|$

**DEF 2.2.** Questo problema, nel calcolo combinatorio, si chiama **disposizioni con ripetizioni**, ovvero senza **vincoli** particolari.



### ESEMPIO 2.2.1.

Se voglio costruire tutte le *bandiere tricolori* possibili (ove sono ammessi i anche colori ripetuti) con *4 colori* a disposizione, quante posso costruirne?

**SOLUZIONE.** Questo è un caso applicato di *disposizioni con ripetizione*; infatti se si definisce le caselle delle bandiere come un insieme a tre variabili,  $A = 1, 2, 3$ , allora vogliamo trovare tutte le *funzioni* associate da  $A$  a  $B = \{\text{rosso, verde, giallo, bianco}\}$   
Pertanto la soluzione è  $3^4$ .

### PROBLEMA 2.3. Disposizioni di oggetti da $m$ a $n$

**PROBLEMA 2.3.** Prendiamo lo stesso problema di prima; tuttavia vogliamo ora considerare un vincolo particolare: vogliamo cercare solo le *funzioni iniettive* (**DEF 3.2.**) da  $A$  a  $B$ . Ricapitolando, per *iniettiva* si intende che ad ogni  $a_x, a_y$  vengono associati immagini diversi. Pertanto, è necessario che  $m \geq n$ .

**DEF 2.3.1.** Inoltre indichiamo l'*insieme delle funzioni iniettive* come  $D_n^m$ .

**SOLUZIONE.** Si può avvalere dello stesso grafico di prima; se prendo il primo elemento  $a_0$ , allora ho  $m$  scelte per lo stesso ragionamento di prima; ora, se prendo il secondo elemento  $a_1$ , allora per rispettare il vincolo, ho una scelta in meno (ovvero l'elemento  $b_m$  associato ad  $a_0$ ): quindi ora ho  $m - 1$  scelte. Procedendo avanti così, arrivo fino

all'elemento  $a_n$  per cui ho  $m - n + 1$  scelte.

Pertanto

$$|D_n^m| = m(m-1)(m-2)\dots(m-(n-1))$$

### ESEMPIO 2.3.1.

Prendiamo in esame lo stesso problema di prima, ovvero quella avendo a disposizione una *bandiera tricolore da colorare* e *quattro colori*.

Ora non vogliamo più i stessi colori; infatti, se la funzione dev'essere iniettiva, allora in un senso applicato ciò vuol dire che ad ogni area della bandiera dev'esserci un colore diverso.

Quindi si tratta di calcolare  $|D_3^4| = 4(3)(2)$

## PROBLEMA 2.4. Permutazioni

**PROBLEMA 2.4.** Prendiamo il problema appena preso in esame (ovvero la *disposizione di oggetti da  $n$  a  $m$* ) e ora vogliamo ci aggiungiamo un ulteriore vincolo: cerchiamo le *funzioni biiettive*, ovvero quelle sia *iniettive* che *suriettive*. Da qui consegue necessariamente che

$$|A| = |B| = n.$$

**DEF 2.4.1.** Definiamo *l'insieme delle permutazioni (ovvero delle funzioni biiettive)* come  $P^n$ .

**SOLUZIONE.** Questo non è altro che un caso speciale di  $|D_n^m|$  ove  $m = n$ , quindi

$$|P^n| = |D_n^n| = n(n-1)(n-2)\dots(1) = n!$$

### ESEMPIO 2.4.1.

Consideriamo un problema totalmente diverso; se ho la *stringa* "CIAO", quante volte posso cambiarlo in modo tale che le lettere presenti nella stringa ci siano comunque?

Questo si tratta ovviamente di una *permutazione*, quindi calcoliamo

$$|P^4| = 4!.$$

## PROBLEMA 2.5. Combinazioni, coefficienti binomiali

**PROBLEMA 2.5.** Se considero un insieme  $A$  con  $|A| = n$ , e un numero  $k \in \mathbb{N}$  tale che  $0 \leq k \leq n$ , allora voglio calcolare il *numero di sottoinsiemi di  $A$  con  $k$  elementi*.

**DEF. 2.5.1.** Definiamo *l'insieme dei sottoinsiemi di A con k elementi* come

$$C_k^n \text{ oppure } \binom{n}{k}$$

e si legge come "*n su k*". Inoltre lo si chiama anche come il *coefficiente binomiale* oppure le *combinazioni di n oggetti a k a k*.

**SOLUZIONE.** Qui usiamo un esperimento mentale che presenta una situazione analoga a quella presentata.

Suppongo di aver  $n$  numero di palline, da cui voglio scegliere  $k$ ; per la prima pallina 0 posso sceglierne  $n$ , poi per la pallina 1 posso sceglierne  $n - 1$ , poi andando così finché si raggiunge l'ultima pallina  $k$  da cui posso scegliere  $n - k + 1$ . Si osserva che questo è esattamente le *disposizioni* da  $n$  a  $k$ ,  $D_k^n$ .

Tuttavia in questo modo tengo conto dell'ordine in cui scelgo le palline; invece le *combinazioni* non tengo conto dell'ordine. Quindi se vogliamo considerare l'ordine, dobbiamo attribuire ad ogni *combinazione* una *permutazione*; ciò vuol dire che bisogna moltiplicare le *combinazioni di n oggetti a k a k* per le *permutazioni di k oggetti*; pertanto si scrive

$$D_k^n = P^k C_k^n$$

da cui deriva

$$C_k^n = \frac{D_k^n}{P^k} = \frac{(n)(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Nella pagina [Coefficiente Binomiale](#) ci soffermeremo particolare (appunto) sul *coefficiente binomiale*, in quanto essa porta con sé delle proprietà particolari che ci permetteranno di costruire certi oggetti matematici, tra cui il *triangolo di Tartaglia*.

### ESEMPIO 2.5.1.

Se ho un sacco con 10 palline da cui ne estraggo 3, quante *combinazioni* possibili ho?

Semplicemente,  $C^1_0_3 = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3!(7!)}$ .

## 3. Esempi misti del Calcolo Combinatorio

Ora presentiamo alcuni esempi misti del calcolo combinatorio, che può comprendere l'ausilio di alcune delle definizioni date sopra e un buon

approccio critico ai problemi.

**PROBLEMA 3.1.** Ho un mazzo da 40 carte e ne pesco 3; quanti sono i possibili risultati  $t$ ?

Questo è un caso quasi-banale di *combinazioni*, quindi

$$t = C_3^{40} = \frac{40!}{3!(37!)} = \frac{40 \cdot 39 \cdot 38}{3 \cdot 2} = 9880$$

**PROBLEMA 3.1.A** Ora considerando che ci sono 4 semi (quindi 10 carte per seme), quanti sono i risultati  $r$  che NON contengono le carte di *denari*?

Anche qui si tratta di un problema di *combinazioni*, che però va affrontato più criticamente: infatti vogliamo estrarre le 40 carte escludendone 10, in quanto essi rappresentano dei semi; quindi sostanzialmente il "corpo" delle carte sono solo 30.

$$r = \binom{40 - 10}{3} = \binom{30}{3} = 4060$$

**PROBLEMA 3.1.B** Considerando lo stesso mazzo di carte, ora voglio invece calcolare i risultati  $\tilde{r}$  che contengono invece i *denari*.

Un approccio particolarmente furbo è quello semplicemente di prendere  $t$  (ovvero tutte le combinazioni possibili) e sottrarli per il numero dei risultati senza i denari; infatti l'insieme dei risultati *con* i denari è complemento dell'insieme dei risultati *senza* i denari.

Quindi,

$$\tilde{r} = 9880 - 4060 = 5820$$

Oppure un altro approccio comunque accettabile è di considerare tutte le combinazioni dei risultati con esattamente *un* seme, poi *due* semi e infine *tre* semi e infine sommarli.

Infatti,

$$\tilde{r} = \binom{10}{1} \binom{30}{2} + \binom{10}{2} \binom{30}{1} + \binom{10}{3} \binom{30}{0} = 5820$$

**PROBLEMA 3.2. Il Lotto.** Ho 90 bussolotti, ovvero dei numeri; ne estraggo 5. Quali sono le possibili estrazioni?

Anche qui si tratta di un caso di *combinazioni* in quanto non tiene conto dell'ordine dei numeri estratti (in quanto essi vengono già ordinati in

un'ordine crescente).

$$n_{\text{estrazioni}} = \binom{90}{5} \approx 44 \cdot 10^6$$

**PROBLEMA 3.3.** Ho una scacchiera  $5 \times 5$  e 6 pedine uguali.

*In quanti modi posso mettere le pedine sulla scacchiera, se voglio che tutte le righe e tutte le colonne abbiano almeno una pedina?*

⚠ Questa è semplicemente la MIA soluzione proposta, quindi può essere che risulti sbagliata.

**PROPOSTA DELLA SOLUZIONE.** Ragioniamo nel seguente modo:

1. Voglio porre le prime 5 pedine in modo tale che il vincolo venga rispettato (quindi tutte le righe e le colonne hanno almeno una pedina piazzata), poi per porre la 6-esima pedina liberamente.
2. Per le 5 pedine ragiono così:
  1. Voglio porre la prima pedina sulla prima riga e su qualsiasi colonna. Ho quindi 5 possibilità.
  2. Ora voglio porre la seconda pedina sulla seconda riga; però non posso porlo sulla stessa colonna scelta dalla prima pedina, dandomi una scelta in meno. Ho quindi 4 possibilità.
  3. Mi accorgo che qui si tratta di un semplice problema di *permutazioni (o disposizioni di oggetti a 5 a 5)*, ovvero che per calcolare tutte le possibilità devo fare  $5! = 5 * 4 * 3 * 2 * 1$ .
3. Ora considero la 6-esima pedina: se le altre 5 pedine hanno già occupato le loro caselle, allora mi rimangono solo 20 caselle ( $25 - 5 = 20$ ).
4. Quindi ottengo il risultato

$$x = 20(5!) = 2400$$

## Coefficiente Binomiale

*Coefficiente binomiale come strumento per risolvere un problema del calcolo combinatorio; regole e teoremi sul coefficiente binomiale; costruzione del triangolo di Tartaglia; teorema di Newton (o del binomio) con dimostrazione. Applicazioni del teorema.*

---

# 1. Coefficiente Binomiale

**DEF 1.** Dai risultati del [Problemi del Calcolo Combinatorio](#), sappiamo che

$$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

## 2. Proprietà del coefficiente binomiale

Enunciamo le seguenti proprietà del *coefficiente binomiale*  $C_k^n$ :

1. 
$$\binom{0}{0} = 1$$

2. 
$$\forall n, \binom{n}{0} = 1$$
$$\binom{n}{n} = 1$$

3. **REGOLA DI STIFEL.** Sia  $1 \leq k \leq (n-1)$ ,

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

### DIMOSTRAZIONE FORMALE.

Per definizione,

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \binom{n}{m} \\ \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k)!(n-k-1)!} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ (n-1)! \left( \frac{1}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{1}{k!(n-k-1)!} \right) &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \end{aligned}$$

Osservare la proprietà che consegue dalla *definizione ricorrente del fattoriale* ([Assiomi di Peano](#), [il principio di induzione](#)):

$$\forall n, (n+1)! = n!(n+1)$$



da ciò implica che

$$n! = \frac{(n+1)!}{(n+1)}$$

Quindi secondo questa logica, si può dire le seguenti:

$$(k-1)! = \frac{k!}{k}; (n-k-1)! = \frac{(n-k)!}{(n-k)}; n! = (n-1)!n$$

Allora

$$\begin{aligned}(n-1)! \left( \frac{1}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{1}{k!(n-k-1)!} \right) &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \\(n-1)! \left( \frac{k}{k!(n-k)!} + \frac{n-k}{k!(n-k)!} \right) &= (n-1) \frac{n}{k!(n-k)!} \\ \frac{k+n-k}{k!(n-k)!} &= \frac{n}{k!(n-k)!} \\ \frac{n}{k!(n-k)!} &= \frac{n}{k!(n-k)!} \quad \text{OK} \blacksquare\end{aligned}$$

### **DIMOSTRAZIONE SENZA CALCOLI/TEORICA.**

Alternativamente, si potrebbe pensare la *regola di Stifel* nel seguente modo:

"Voglio contare le sottoinsiemi con  $k$  elementi dell'insieme  $A$  (ove  $|A| = n$ ); quindi voglio  $C_k^n$ .

Ora distinguiamo uno degli elementi di  $A$  con un *contrassegno particolare*, come il colore *rosso*; adesso gli insiemi di  $k$  elementi si dividono in due.

Ovvero, l'insieme dei sottoinsiemi che *contengono l'elemento rosso* e l'insieme dei sottoinsiemi che *non contengono l'elemento rosso*.

Consideriamo l'insieme di *tutti i sottoinsiemi che contengono l'elemento speciale*: devo quindi obbligatoriamente considerare *l'elemento rosso*, tirandolo fuori. Ho quindi da  $n$  elementi ne posso scegliere solo  $n-1$ , in quanto una è stata già scelta, e posso scegliere solo  $k-1$  elementi visto che il primo elemento (ovvero il *rosso*) è stato già obbligatoriamente scelto.

Consideriamo invece l'altro insieme di *tutti i sottoinsiemi che NON contengono l'elemento contrassegnato*: in questo caso si tratta semplicemente di *escludere* l'elemento rosso dalle scelte possibili, dandoci solo  $n-1$  scelte su  $k$ .

Pertanto

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

### 3. Costruzione del triangolo di Tartaglia

Enunciamo di nuovo le 3 regole sopra:

1.  $\binom{0}{0}$
2.  $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
3.  $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$

Da queste tre proprietà possiamo rappresentare i *coefficienti binomiali* tramite il c.d. *triangolo di Tartaglia*

#### 3.1. Triangolo di Tartaglia

Disponiamo tutti i *coefficienti binomiali*  $\binom{x}{y}$ , dove la "*riga*" (a partire dall'alto) rappresenta il numero  $x$  e dove la "*colonna*" (a partire da sx.) rappresenta il numero  $y$ . Ad ogni riga rappresentiamo tutti i *coefficienti binomiali*  $\binom{x}{y}$  finché  $x$  raggiunge  $y$  (ovvero  $x = y$ )

$$\begin{array}{c} \binom{0}{0} \\ \binom{1}{0} \binom{1}{1} \\ \binom{2}{0} \binom{2}{1} \binom{2}{2} \\ \binom{3}{0} \binom{3}{1} \binom{3}{2} \binom{3}{3} \\ \dots \\ \binom{x}{0} \binom{x}{1} \dots \binom{x}{x-1} \binom{x}{x} \end{array}$$

Ora, calcolando tutti i binomi (ricorrendo all'ausilio delle **proprietà del**

**coefficiente binomiale**), otteniamo il seguente triangolo:

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \ 1 \\ 1 \ 2 \ 1 \\ 1 \ 3 \ 3 \ 1 \end{array}$$

Facciamo le seguenti osservazioni:

**OSS 3.1.1.** Alle "**estremità**" del triangolo risulta sempre il numero 1, in quanto seconda la **proprietà 2.**,  $\forall x, \binom{x}{x} = \binom{x}{0} = 1$

**OSS 3.1.2.** Se sono arrivato alla riga  $x$ , posso ottenere facilmente tutti gli elementi della prossima riga  $x + 1$ ; infatti  $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$ . Facendo un'interpretazione "geometrica" si può dire che se sono alla riga  $x + 1$ , allora ottengo l'elemento di questa riga sulla colonna  $k$  sommando degli elementi che già conosciamo prima; ovvero  $\binom{n-1}{k-1}, \binom{n-1}{k}$ .

Questi sono gli elementi che stanno al di "sopra" e "sopra e sinistra" dell'elemento che vogliamo conoscere.

**ESEMPIO 3.1.2.1.** Per esempio ho

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \ 1 \\ 1 \ 2 \ 1 \\ 1 \ 3 \ 3 \ 1 \end{array}$$

e voglio ottenere gli elementi della riga 4; in questo caso metto alle "estremità" i numeri 1 (**OSS 3.1.1.**), poi per calcolare  $\binom{4}{x}$  (ovviamente  $x \leq 4$ ) sommo l'elemento che sta sopra con quello che sta sopra e a sinistra. Quindi otteniamo

$$1 \ 4 \ 6 \ 4 \ 1$$

**OSS. 3.1.3.** Il matematico **B. Pascal** nota il seguente nel suo trattato "Traité du triangle arithmétique": che se prendiamo una riga pari  $2n$ , allora il numero "**centrale**" della riga è uguale alla sommatoria di tutti i quadrati degli elementi della riga  $n$ .

Ovvero

$$\forall n \in \mathbb{N}, \binom{2n}{n} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j}^2$$

**ESEMPIO 3.1.3.1.** Prendiamo la riga 8,

$$1 \ 8 \ 28 \ 56 \ 70 \ 56 \ 28 \ 8 \ 1$$

ove l'elemento "centrale" è individuato con  $70 = \binom{8}{4}$  e la riga 4,

$$1 \ 4 \ 6 \ 4 \ 1$$

Ora vediamo di sommare tutti gli elementi al quadrato:

$$1^2 + 4^2 + 6^2 + 4^2 + 1^2 = 1 + 16 + 36 + 16 + 1 = 70$$

## 4. TEOREMA DEL BINOMIO (o di Newton)

Il *triangolo di Tartaglia* è una costruzione matematica molto importante, in quanto essa può essere sfruttata per sviluppare la potenza di un binomio in  $n$  grazie al *teorema del Binomio (o di Newton)*

**TEOREMA 1.** Siano  $a, b \in \mathbb{R}$  (volendo anche in  $\mathbb{C}$ ), sia  $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ , allora

$$(a + b)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^{n-j} b^j$$

**DIM.** Si dimostra questo teorema per *induzione*.

1. Verificare che è vera per  $P(1)$ :

$$(a + b)^1 = \sum_{j=0}^1 \binom{1}{j} a^{1-j} b^j \iff a + b = \binom{1}{0} a^1 b^0 + \binom{1}{1} a^0 b^1 \text{ OK}$$

2. Verificare che, supponendo  $P(n)$  allora  $P(n) \implies P(n+1)$  è vera.

$$\begin{aligned} (a + b)^n &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^{n-j} b^j \\ (a + b)^n (a + b) &= (a + b) \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^{n-j} b^j \\ (a + b)^{n+1} &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^{n+1-j} b^j + \sum_{j=0}^n a^{n-j} b^{j+1} \end{aligned}$$

3. Adesso "estraiamo" il primo elemento dalla prima sommatoria e l'ultimo

elemento dall'altra sommatoria.

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^{n+1-j} b^j + \sum_{j=0}^n a^{n-j} b^{j+1} \\ &= (a^{n+1}) + (b^{n+1}) + \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} a^{n+1-j} b^j + \sum_{j=0}^{n-1} a^{n-j} b^{j+1}\end{aligned}$$

4. Effettuiamo un "trucco" alla seconda sommatoria, ovvero quella di porre  $k = j + 1$  (e pertanto  $j = 0 \implies k = 1$ ) e poi di porre  $k = j$ , che è possibile in quanto  $k$  è una *variabile muta*.

$$\begin{aligned}&(a^{n+1}) + (b^{n+1}) + \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} a^{n+1-j} b^j + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} a^{(n+1)-(j+1)} b^{j+1} \\ &= \dots + \sum_{j=1}^n \dots + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k \\ &= \dots + \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} a^{n+1-j} + b^j + \sum_{j=1}^n \binom{n}{j-1} a^{n+1-j} + b^j \\ &= \dots + \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} \binom{n}{j-1} a^{n+1-j} + b^j\end{aligned}$$

Per la regola di Stiefe,  $\binom{n}{j} \binom{n}{j-1} = \binom{n+1}{j}$

$$= (a^{n+1}) + (b^{n+1}) + \sum_{j=1}^n \binom{n+1}{j} a^{n+1-j} + b^j$$

5. E considerando che se  $j = 0$  e  $j = n + 1$ , allora

$$\begin{aligned}1. & \binom{n+1}{0} a^{n+1} + b^0 = 1 \cdot a^{n+1} = a^{n+1} \\ 2. & \binom{n+1}{n+1} a^{n+1-n-1} b^{n+1} = b^{n+1}\end{aligned}$$

e quindi possiamo "rintegrarli" nella sommatoria come l'elemento 0-esimo

e  $n + 1$ -esimo, ottenendo

$$\sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} a^{n+1-j} + b^j$$
$$P(n+1) : (a+b)^n = \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} a^{(n+1)-j} + b^j$$

che è ciò che volevamo ottenere. Quindi il teorema è stato così dimostrato. ■

## 4.1. ESEMPI SUL TEOREMA DEL BINOMIO

**ESEMPIO 4.1.1.** Vogliamo calcolare  $(a+b)^6$ .

Otteniamo innanzitutto lo sviluppo di  $(a+b)^6$  secondo il teorema binomiale:

$$(a+b)^6 = \binom{6}{0} a^6 + \binom{6}{1} a^5 b^1 + \binom{6}{2} a^4 b^2 + \binom{6}{3} a^3 b^3 + \binom{6}{4} a^2 b^4 + \binom{6}{5} a^1 b^5 + \binom{6}{6} b^6$$

Ora costruiamo il *triangolo di Tartaglia* fino alla 6-esima riga, secondo le regole notate in [3. Costruzione del triangolo di Tartaglia](#):

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & 1 \\ & & & & & 1 & 1 \\ & & & & 1 & 2 & 1 \\ & & & 1 & 3 & 3 & 1 \\ & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \end{array}$$

Ora sfruttiamo questo triangolo per poter sostituire tutti i coefficienti binomiali nella forma sviluppata appena scritta.

$$\binom{6}{0} a^6 + \binom{6}{1} a^5 b^1 + \binom{6}{2} a^4 b^2 + \binom{6}{3} a^3 b^3 + \binom{6}{4} a^2 b^4 + \binom{6}{5} a^1 b^5 + \binom{6}{6} b^6$$

diventa

$$a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

**ESEMPIO 4.1.2.** Calcolare  $\sum_{j=0}^n \binom{n}{j}$ .

Si può risolvere questo problema in due modi:

1. Se (per definizione) consideriamo il coefficiente binomiale  $\binom{n}{j}$  come la cardinalità delle **combinazioni** di un insieme  $A$  (ove  $|A| = n$ )  $C_j^n$ , ovvero il numero degli sottoinsiemi di  $A$  con  $j$  elementi, allora possiamo considerare questo problema come il seguente: "**qual è la cardinalità di tutti gli sottoinsiemi di  $A$  (quindi da 0 a  $n$  elementi)?**"; dai risultati della **Teoria degli Insiemi**, sappiamo immediatamente che la risposta è  $2^n$ .
2. Oppure possiamo semplicemente usare il **teorema del binomio**; ovvero ponendo  $a = b = 1$ , abbiamo

$$(1 + 1)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^{n-j} b^j \iff 2^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j}$$

dandoci così immediatamente la risposta.

**ESEMPIO 4.1.3.** Calcolare

$$\sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j}$$

Se consideriamo il **3.1. Triangolo di Tartaglia**, viene che la risposta intuitiva è 0, in quanto le righe dispari sono simmetriche; quindi "dividendo" quella riga, abbiamo un "lato" positivo e negativo, che sommandoli otteniamo 0.

Tuttavia questa risposta non è abbastanza rigorosa per essere considerata; infatti per avere una giustificazione più sicura, si deve usare il **teorema del binomio** nel seguente modo.

Siano  $a = -b = 1$ , ovvero

$$\begin{aligned} (1 - 1)^n &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} 1^{n-j} (-1)^j \\ 0^n &= \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \\ 0 &= \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \blacksquare \end{aligned}$$

