

# Funzioni - Sommario

Tutto sulle funzioni (in generale, non sullo specifico delle funzioni di variabile reale).

## Funzioni

Funzioni - Definizione base, esempi, definizione di immagine, funzione suriettiva, iniettiva; funzione composta; l'immagine di un pezzo di dominio; funzione inversa, teorema sulle funzioni inverse.

## DEF 1. Funzione

Siano,

- $A, B$  due insiemi
- $f$  una "legge", ovvero una specie di predicato, oppure una relazione speciale che ad ogni valore di  $A$  associa uno e uno solo valore di  $B$ ;  
- Cioè se  $x \in A$ , allora  $\exists! y \in B$  (si legge esiste solo un valore di  $y$  in  $B$ ) è associato a  $x$  ( $f(x) = y$ )

**DEF 1.** La terna  $(A, B, f)$  viene definita come **funzione**.

**SUBDEF 1.1.** L'insieme  $A$  si dice il **dominio** della *funzione*,

**SUBDEF 1.2.** L'insieme  $B$  si dice il **codominio** della *funzione*,

**SUBDEF 1.3.** La "legge"  $f$  è una **regola** che ad ogni elemento  $x$  del *dominio*  $A$  associa uno e uno solo elemento  $y$  del *codominio*  $B$ .

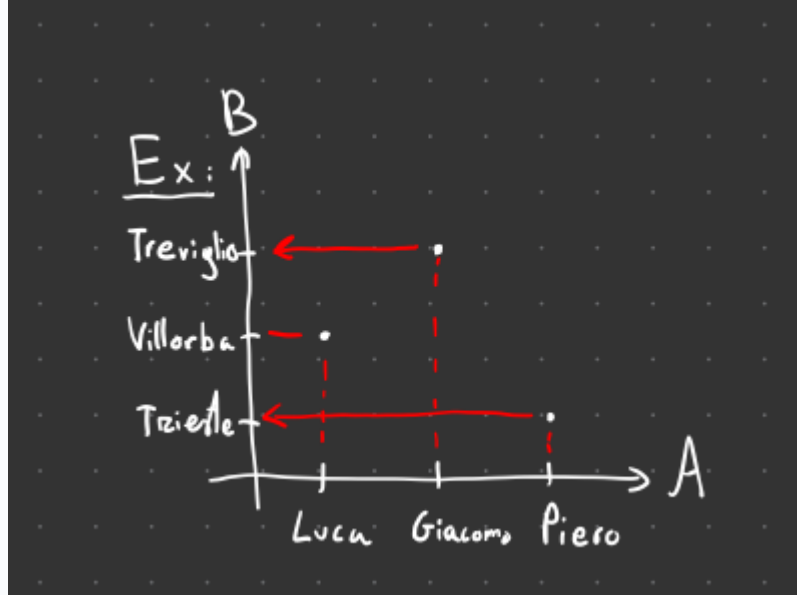
### DEFINIZIONE ESPLICITA.

Con la scrittura compatta la terna può essere definita *esplicitamente* anche mediante la seguente notazione.

$$f : A \mapsto B$$

### ESEMPIO 1.1.

Siano  $A = \{\text{Persone in quest'aula}\}$ ,  $B = \{\text{Comuni italiani}\}$  e  $f : x \mapsto \text{comuni di residenza}$ ; allora si rappresenta il grafico della funzione  $(A, B, f)$  nel seguente modo:

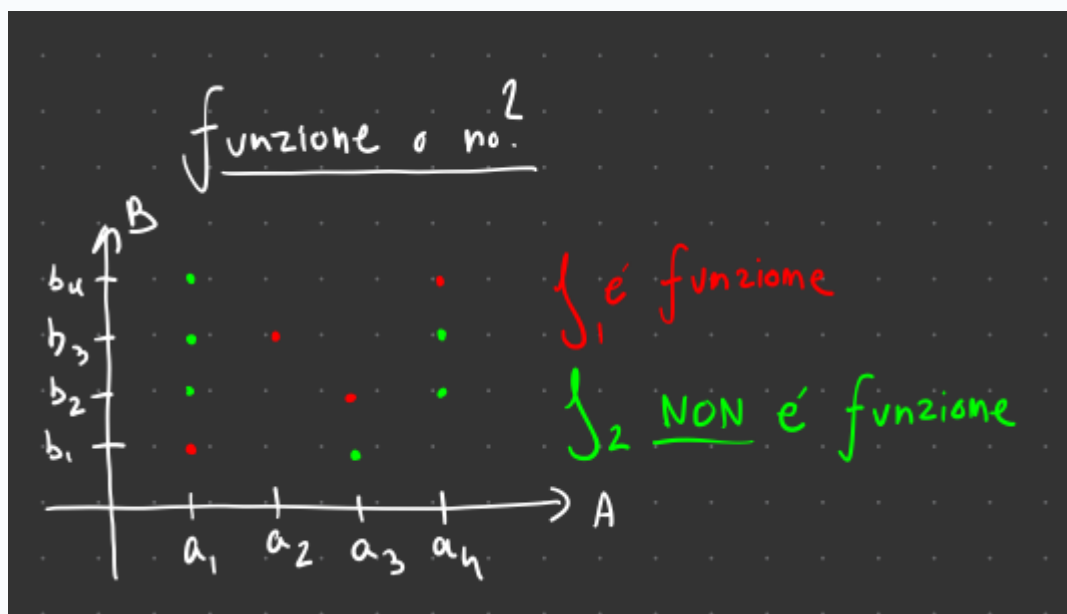


### DEF 1.1.

In questo corso si studieranno le cosiddette *funzioni di reale variabile*, ovvero le funzioni  $f: A \mapsto B$ , con  $A, B \subseteq \mathbb{R}$ .

**OSS 1.1** Secondo questa definizione di *funzione*, le sue proprietà non cambiano solamente per la legge  $f$ , ma anche per gli *insiemi*  $A, B$ .

**OSS 1.2.** Si osserva il seguente grafico:



Si nota che la parte *rossa* è funzione, invece la parte *verde* non lo è, in quanto ci sono più elementi di  $B$  associati ad un elemento di  $A$ ; quindi si parte da un valore  $a_n$  e tutti devono avere un solo corrispondente  $b_n$ .

## DEF 2. Valore immagine

Sia  $f: A \mapsto B$  una funzione.

Se  $x \in A$ , il valore  $f(x) \in B$  viene definita come il **valore immagine di  $x$** , una specie di proiezione.

## DEF 2.1. L'insieme immagine

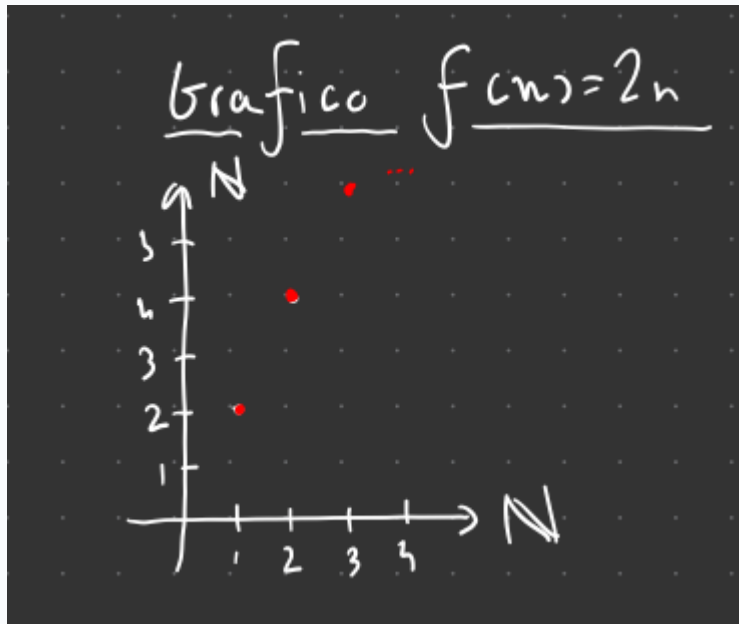
Riprendendo i presupposti di prima, si definisce l'insieme di tutti i *valori immagine* come **l'insieme immagine** e lo si indica con

$$f(A)$$

**ESEMPIO 2.1.1.** Siano  $A = \mathbb{N}, B = \mathbb{N}, f(n) = 2n$ .  $f(\mathbb{N}) = \{0, 2, 4, \dots\} = \mathbb{P}$  (l'insieme dei numeri pari);

**OSS 2.1.1.1.** Si nota che  $f(A) \subseteq B$ .

Ecco il grafico della funzione  $f$ ;



## DEF 3. Funziona suriettiva e iniettiva

### DEF 3.1. Funzione suriettiva (o surgettiva)

Se

$$f(A) = B$$

Allora la funzione  $f$  si dice **suriettiva** (oppure come lo chiamano i pisani, **surgettiva**).

**ESEMPIO 3.1.** La funzione  $f(n) = 2n$  (tratto dall'**ESEMPIO 2.1.1.**) *non* è *surgettiva* se si definisce  $A = \mathbb{N}$ ; invece lo è se si definisce  $A = \mathbb{P}$ .

### DEF 3.2. Funzione iniettiva (o ingettiva)

Siano

$$f : A \mapsto B; x_1, x_2 \in A$$

Supponendo che

$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq x_2$$

Allora si dice che la funzione  $f$  è **iniettiva** (oppure in pisano **ingettiva**).

**ESEMPIO 4.1.** Siano

$$A = [0, \infty)$$

$$B = [0, \infty)$$

$$f : x \mapsto x^2$$

(dove la notazione  $[0, \infty)$  indica tutti i numeri  $\forall x \in \mathbb{R} : x \geq 0$ ). La funzione  $f(x)$  è **suriettiva**, in quanto  $\forall y \geq 0, \exists x \geq 0 : x^2 = y$ . Inoltre è anche **iniettiva**.

**DIM.** Si dimostra che  $f$  è iniettiva; se  $0 \leq x_1 < x_2$ , (quindi  $x_1 \neq x_2$ ) allora moltiplicando da ambo le parti per  $x_1$  e per  $x_2$ , si ottengono:

$$\text{I. } 0 \leq x_1 < x_2$$

$$x_1^2 < x_1 x_2$$

$$\text{II. } 0 \leq x_1 < x_2$$

$$x_1 x_2 < x_2^2$$

Pertanto

$$x_1^2 < x_2^2 \iff f(x_1) < f(x_2) \implies f(x_1) \neq f(x_2) \blacksquare$$

**ESEMPIO 4.2.** Riprendendo la medesima funzione  $f : x \mapsto x^2$  dall'**ESEMPIO 4.1.**, però cambiando gli insiemi  $A, B = \mathbb{R}$ , la funzione  $f$  non è più **né suriettiva né iniettiva**;

**DIM.** Si dimostra che non è suriettiva prendendo un valore  $y = f(x) = -1$ ; si dimostra che  $\nexists x : x^2 = -1$  (guardando il grafico), pertanto  $-1 \notin f(\mathbb{R})$ .

Dopodiché si dimostra che non è neanche iniettiva tramite un **controesempio**; prendiamo  $x_1 = -1, x_2 = 1$  (quindi  $x_1 \neq x_2$ ) e i **valori immagini** di  $x_1, x_2$  sono  $f(-1) = -1^2 = 1, f(1) = 1^2 = 1$ , pertanto  $f(-1) = f(1)$ . ■

### DEF 3.3. Funzione biiettiva

Se una funzione  $f : A \mapsto B$  è sia **iniettiva** e sia **suriettiva**, allora si dice che  $f$  è **biiettiva**

### DEF 4. Funzione composta

Siano

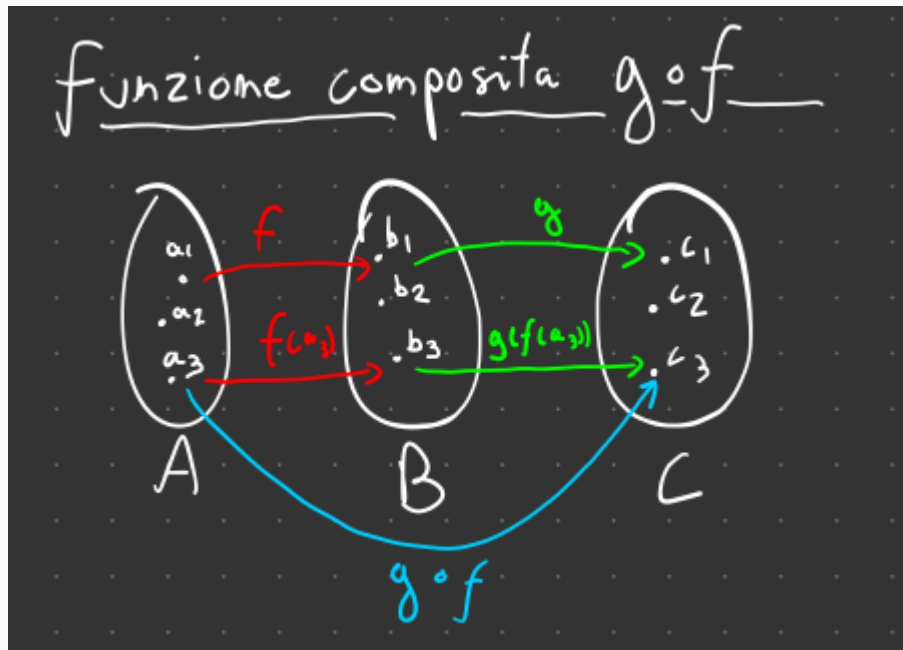
$$f : A \mapsto B$$

$$g : B \mapsto C$$

Si definisce  $g \circ f$  la **funzione composta** "*g dopo f*".

$$g \circ f : A \mapsto C$$
$$x \mapsto g(f(x))$$

Si illustra la **funzione composta** tramite il seguente diagramma:



**ESEMPIO 5.1.** Siano

$$f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$$
$$f : x \mapsto x^2, g : y \mapsto y + 2$$

Allora

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 2$$
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 2) = (x + 2)^2$$

**OSS 5.1.1.** Ovviamente da questo esempio si nota che *non è sempre vero* che  $f \circ g = g \circ f$ .

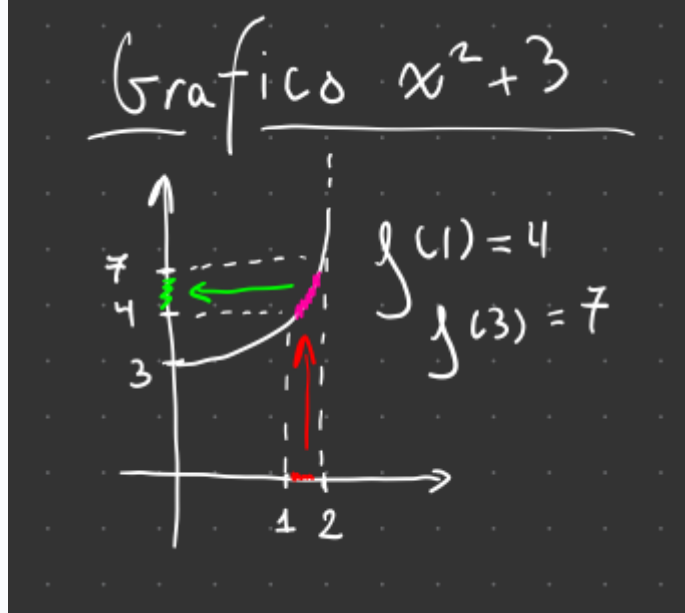
## DEF 5. L'immagine di un pezzo del dominio

Sia  $f : A \mapsto B$ ,  $A' \subseteq A$ ; allora si definisce

$$f(A') = \{f(x) : x \in A'\}$$

come **l'immagine di un pezzo del dominio**  $A$ .

**ESEMPIO 6.1.** Si rappresenta il grafico della funzione  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ ,  $f : x \mapsto x^2 + 3$ . Si vuole trovare (e rappresentare)  $f([1, 2])$ .



Dal grafico si evince chiaramente che  $f([1, 2]) = [4, 7]$ .

## DEF 6. La funzione inversa

Sia

$$f : A \mapsto B$$

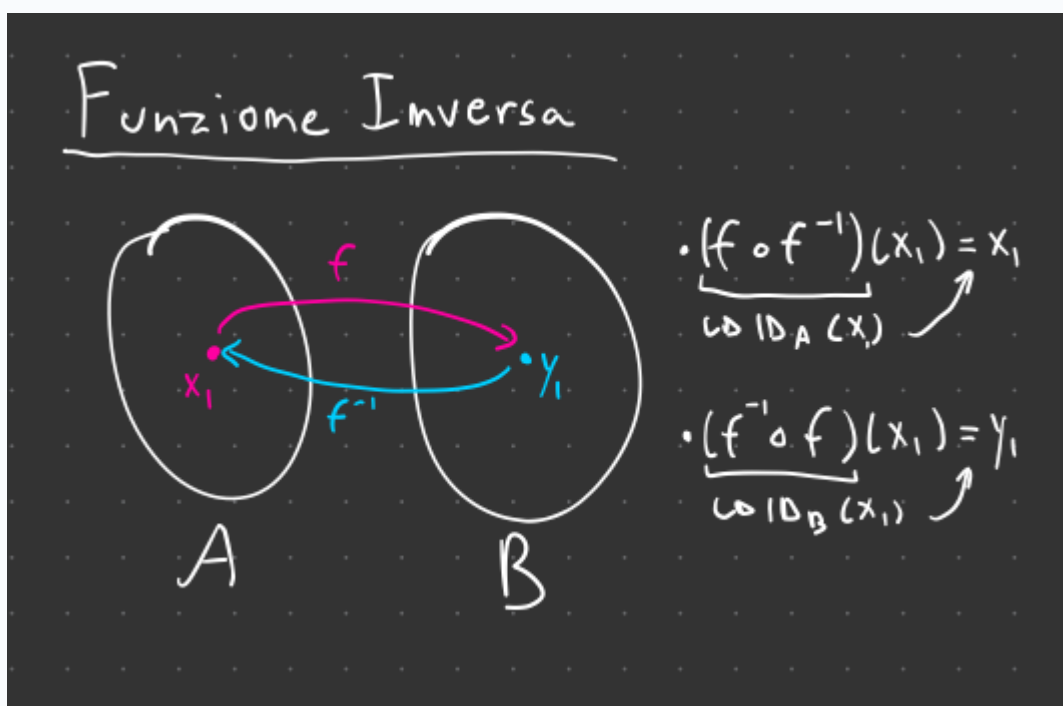
Supponiamo che esista una funzione  $g : B \mapsto A$ , tale che

$$g \circ f = \text{id}_A : A \mapsto A$$

$$f \circ g = \text{id}_B : B \mapsto B$$

, ove la funzione d'identità su un insieme  $A$  viene rappresentata da  $\text{id}_A : x \mapsto x$ , si dice che la funzione  $g$  è la **funzione inversa di  $f$** .

Si illustra la funzione inversa di  $f$  con un diagramma.



## TEOREMA 1. L'esistenza della funzione inversa $f^{-1}$

Una funzione  $f : A \mapsto B$  ha la sua inversa

$$f^{-1} : B \mapsto A$$

**se e solo se** è *biettiva*, ovvero se è entrambi *iniettiva* e *suriettiva*.

## DEF 7. Insieme contro immagine

Sia

$$f : A \longrightarrow B$$

ove  $\tilde{A} \subseteq A, \tilde{B} \subseteq B$ .

Allora definisco **l'insieme contro immagine**

$$f^{\leftarrow}(\tilde{B}) = \{x \in A : f(x) \in \tilde{B}\}$$

ovvero gli elementi di  $A$  tali per cui le loro immagini  $f(x)$  appartengono all'insieme  $\tilde{B}$ .

## DEF 8. Insieme monotona, crescente o decrescente.

**DEF 8.** Sia

$$f : A \longrightarrow B$$

e diciamo che questa sia **monotona** se sussistono una delle seguenti condizioni:

- i.  $\forall x, y \in A; x \leq y \implies f(x) \leq y$
- ii.  $\forall x, y \in A; x < y \implies f(x) < y$
- iii.  $\forall x, y \in A; x \leq y \implies f(x) \geq y$
- iv.  $\forall x, y \in A; x < y \implies f(x) > y$

in particolare,

- se sussiste la *i.*, allora la funzione è **crescente**;
- invece per la *ii.*, la funzione si dice **strettamente crescente**.
- Analoghi i discorsi per *iii*, *iv*. in cui diciamo che la funzione è **\*\*decrescente** o **strettamente decrescente**.

## Esercizi sulle funzioni

*Alcuni esercizi misti sulle funzioni*

---

## 0. Info

Questo appunto contiene degli esercizi misti sull'argomento delle [Funzioni](#). Notare che alcuni esercizi potrebbe richiedere già di essere preparati nell'argomento delle *funzioni di variabile reale*, ovvero [Funzioni di potenza, radice e valore assoluto](#) e/o [Funzioni trigonometriche](#).

## 1. Esercizi misti proposti da D.D.S.