Matrici - Sommario

Tutto sul capitolo delle matrici

A. LE PRIME DEFINIZIONI SULLE MATRICI

A1. Matrice

Matrice

Definizione di matrice, matrice quadrata, l'insieme delle matrici, matrice nulla. L'insieme delle matrici come $\mathbb{R}$-spazio vettoriale con le operazioni di somma interna e scalamento; Matrici triangolari superiori (e l'insieme delle matrici triangolari superiori come sottospazio vettoriale); Definizione della diagonale principale di una matrice; Matrici simmetriche ed antisimmetriche; Matrice identità; Matrice inversa e l'invertibilità delle matrici.

---

1. Definizione di Matrice

#Definizione

Definizione (Definizione 1.1. (matrice $m \times n$ a coefficienti in K)).

Siano $m, n \in \mathbb{N} \diagdown \{0\}$; allora si definisce una *matrice $m \times n$* a *coefficienti in K* come una *tabella rettangolare di $m \cdot n$ elementi* del tipo:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Dove ciascun *coefficiente* a_{ij} è un numero in K.

$$\forall i \in \{1, \dots, m\}; \forall j \in \{1, \dots, n\}; a_{ij} \in \mathbb{K}$$

Per convenzione i numeri (*indici*) i, j iniziano con 1.
Diciamo che il coefficiente a_{ij} è di posto i, j.

#Esempio

Esempio 1.1.

La seguente è una matrice 3×4.

$$\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 6 \\ 7 & -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Scegliamo qualche coefficiente:

$$a_{12} = \sqrt{2}; a_{21} = 0$$

Ovviamente si nota che *NON* è *sempre* vero che $a_{ij} = a_{ji}$; infatti qui abbiamo $a_{12} \neq a_{21}$

i-esima riga e colonna della matrice

Sia $A = (a_{ij})_{i=1,\dots,m;j=1,\dots,n}$ una matrice a coefficienti reali. Allora definiamo le seguenti:

#Definizione

Definizione (Definizione 1.2. (riga e colonna i-esima di una matrice)).

Per ogni $i \in \{1, \dots, m\}$ la *i-esima riga* è la *matrice*

$$A_{(i)} := (a_{i1}, \dots, a_{in})$$

Per ogni $j \in \{1, \dots, n\}$ la *i-esima colonna* è la *matrice*

$$A^{(j)} := \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

L'insieme delle matrici

#Definizione

Definizione (Definizione 1.3. (l'insieme delle matrici $M_{m,n}(\mathbb{K})$)).

Dati $m, n \in \mathbb{N}$, ove $m > 0, n > 0$, denotiamo *l'insieme delle matrici* $m \times n$ a coefficienti in K con

$$M_{m,n}(\mathbb{K})$$

#Osservazione

Osservazione 1.1. ($M_{m,n}(K)$ diventa un K-spazio vettoriale)

Notiamo che con le operazioni di *somma interna* e di *prodotto per uno scalare* definite in Operazioni basilari con matrici,

$$(M_{m,n}(\mathbb{R}), +, \cdot)$$

è uno spazio vettoriale.

2. Famiglie di matrici

Matrici quadrate

#Definizione

Definizione (Definizione 2.1. (matrice quadrata di ordine n)).

Una *matrice* si dice *quadrata* se il numero delle *righe* (n) coincide con il suo numero delle *colonne* (m), ovvero $m = n$.

Inoltre per denotare *l'insieme delle matrici quadrate* si scrive

$$M_n(\mathbb{R})$$

ove $n \in \mathbb{N}, n > 0$.

Si osserva che nel caso delle *matrici quadrate* è possibile definire la *diagonale principale* come la *parte di A data dalle entrate di posto* $A_{ii}, i \in \{1, \dots, n\}$.

#Esempio

Esempio 2.1.

La seguente è una *matrice quadrata* 2×2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

La *diagonale principale* di A sarebbe $(1, 5)$.

Matrici nulle

#Definizione

Definizione (Definizione 2.2. (matrice nulla)).

Una *matrice* $m \times n$ *nulla* è è la *matrice* $m \times n$ le cui *entrate* (o *coefficienti*) sono tutte nulle, 0.

$$0 := \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Matrici triangolari superiori

#Definizione

Definizione (Definizione 2.3. (le matrici triangolari superiori)).

Si definisce *l'insieme delle matrici triangolari superiori* 2×2 come

$$T_2(\mathbb{R}) := \{A \in M_2(\mathbb{R}) : a_{21} = 0\}$$

ovvero una matrice quadrata del tipo

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$$

Ovviamente è possibile generalizzare per le matrici quadrate $M_n(\mathbb{R})$.

#Osservazione

Osservazione 2.1.

Notiamo che questo insieme è un sottoinsieme di $M_2(\mathbb{R})$;

$$T_2(\mathbb{R}) \subseteq M_2(\mathbb{R})$$

Infatti se l'insieme delle matrici 2×2 $M_2(\mathbb{R})$ è un $\mathbb{R}$-*spazio vettoriale* (Spazi Vettoriali, **DEF 1.**), allora $T_2(\mathbb{R})$ è un *sottospazio vettoriale* (Sottospazi Vettoriali, **DEF 1.**).
Infatti valgono le seguenti:

1. La matrice nulla $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ appartiene anche a $T_2(\mathbb{R})$.
2. Le operazioni di *somma* e di *scalamento* sono chiuse; ovvero

$$A, B \in T_2(\mathbb{R}) \implies (A+B) \in T_2(\mathbb{R})$$

e

$$\lambda \in \mathbb{R}, A \in T_2(\mathbb{R}) \implies (\lambda \cdot A) \in T_2(\mathbb{R})$$

E' possibile verificare 2. verificando che la combinazione lineare di $A, B \in T_2(\mathbb{R})$ appartiene anch'esso a $T_2(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}\lambda_1 \cdot A + \lambda_2 \cdot B &= \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} & \lambda_1 a_{12} \\ 0 & \lambda_1 a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_2 b_{11} & \lambda_2 b_{12} \\ 0 & \lambda_2 b_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 b_{11} & \lambda_1 a_{12} + \lambda_2 b_{12} \\ 0 & \lambda_1 a_{22} + \lambda_2 b_{22} \end{pmatrix} \in T_2(\mathbb{R}) \blacksquare\end{aligned}$$

Questa osservazione è analoga per $T_n(\mathbb{R})$ e $M_n(\mathbb{R})$.

Matrici simmetriche e antisimmetriche

#Osservazione

Osservazione 2.2. (preambolo)

Considerando da quanto detto in Operazioni particolari con matrici (**OSS 1.1.**), abbiamo notato che *non* ha sempre senso chiedersi se la *trasposta* di una matrice è uguale alla matrice stessa, ovvero

$$¿\ {}^tA = A\ ?$$

tuttavia questo acquisisce significato quando consideriamo le matrici quadrate appartenenti a $M_n(\mathbb{R})$.

#Esempio

Esempio 2.2.

Prendo una matrice 3×3 che chiamo A.
Sapendo che alla prima riga $A_{(1)}$ ho fissato $A_{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, allora in questo modo ho già fissato $A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, in quanto voglio che $A^{(1)} = ({}^tA_{(1)})$. (ovvero che la trasposta della prima riga sia uguale alla prima colonna).
Il procedimento si ripete per $A_{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & ? & ? \end{pmatrix}$, dove i punti segnati con $?$ possono essere sostituiti con qualsiasi valori. Per convenienza inseriremo con dei numeri crescenti, ovvero $4, 5$ (e alla fine 6). Alla fine otteniamo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

che soddisfa ${}^tA = A$. Inoltre osserviamo che questa matrice è *simmetrica* alla diagonale.

#Definizione

Definizione (Definizione 2.4. (matrice simmetrica e antisimmetrica)).

Allora definiamo una matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$:
Simmetrica se vale che

$$A = {}^tA$$

Antisimmetrica se vale che

$$A = -{}^tA$$

#Osservazione

Osservazione 2.3.

Osservo una peculiarità delle matrici *antisimmetriche*; infatti se voglio costruirne una mi accorgo che tutte le entrate della *diagonale principale* devono essere nulle, in quanto l'unico numero che rimane uguale quando moltiplicato per -1 è 0.

#Osservazione

Osservazione 2.4.

Notiamo che le *matrici nulle* e *quadrate* sono le *uniche* matrici che sono sia *antisimmetriche* che *simmetriche*. Infatti, $0 = 0$ e $0 = -0$.

Matrice unità (o identità)

#Osservazione

Osservazione 2.5. (preambolo)

Considerando da quanto detto e notato per quanto riguarda il *prodotto tra matrici* (Operazioni particolari con matrici), possiamo definire una matrice che comporta come il numero 1 dei numeri reali $\mathbb{R}$ per questa suddetta operazione. (Operazioni particolari con matrici, **PROP 2.4.3.**)

#Definizione

Definizione (Definizione 2.5. (matrice identità di ordine n)).

Sia $n \in \mathbb{N}$ e $n > 0$, allora la *matrice unità* (o *identità*) è quella matrice quadrata appartenente a $M_n(\mathbb{R})$ le cui entrate sono tutte nulle, fuorché quelle della *diagonale principale*, che sono tutti uguali a 1. Denotiamo questa matrice con

$$\mathbb{1}_n \text{ o } I_n \text{ o } \text{Id}_n$$

ove

$$(\mathbb{1}_n)_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ se } i \neq j \\ 1 \text{ se } i = j \end{cases}$$

Matrice inversa

#Osservazione

Osservazione 2.6. (osservazione sui numeri reali)

Nei dei numeri reali $\mathbb{R}$, dato un $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ diciamo che un altro numero $b \in \mathbb{R}$ è l'inversa di a se è vera che

$$a \cdot b = b \cdot a = 1$$

e b è unica. Infatti questo è esattamente *l'assioma M3)* dei numeri reali (Assiomi dei Numeri Reali).

#Definizione

Definizione (Definizione 2.6. (matrice inversa)).

Allora, tracciando un parallelismo tra i *numeri reali* e le il *prodotto tra matrici* (Operazioni particolari con matrici), chiamiamo la *matrice quadrata* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *invertibile* se esiste una matrice $B \in M_n(\mathbb{R})$ tale che valga

$$A \cdot B = B \cdot A = \mathbb{1}_n$$

che chiamiamo

$$B = A^{-1}$$

#Proposizione

Proposizione 2.1. (le proprietà della matrice inversa)

Prendendo $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, valgono le seguenti proprietà:

1. Se A è *invertibile*, allora la sua inversa A^{-1} è *unica*.
2. Se A, B sono invertibili allora $A \cdot B$ *invertibile*, la quale inversa sarebbe $B^{-1} \cdot A^{-1}$.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE della *proposizione 2.1.*.

1. Prendiamo per assurdo B, C inverse di A.
   Allora per definizione
   $$\begin{aligned} A \cdot B = B \cdot A = \mathbb{1}_n \\ A \cdot C = C \cdot A = \mathbb{1}_n \end{aligned}$$
   allora
   $$B = B \cdot \mathbb{1}_n = B \cdot (A \cdot C) = (B \cdot A) \cdot C = \mathbb{1}_n \cdot C = C$$
   quindi per proprietà transitiva
   $$B = C$$
   che è assurdo. ■
2. Qui basta fare dei calcoli per verificare che $B^{-1} \cdot A^{-1}$ è $(A \cdot B)^{-1}$. Ovvero basta verificare che $(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = \mathbb{1}_n$ (e viceversa);
   $$\begin{aligned} (A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) &= A \cdot (B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1} \\ &= A \cdot \mathbb{1}_n \cdot A^{-1} \\ &= A \cdot A^{-1} \\ &= \mathbb{1}_n \\ \text{analogamente} \\ (B^{-1} \cdot A^{-1}) \cdot (A \cdot B) &= B^{-1} \cdot (A^{-1} \cdot A) \cdot B \\ &= B^{-1} \cdot \mathbb{1}_n \cdot B \\ &= B^{-1} \cdot B \\ &= \mathbb{1}_n \end{aligned}$$
   ■

   #Osservazione

   > **Osservazione 2.7.**
   >
   > L'analogia tra *l'invertibilità* rispetto al prodotto definito in $\mathbb{R}$ e l'invertibilità rispetto al *prodotto righe per colonne* di matrici *NON* si estende fino al punto di poter dire che *OGNI* matrice non-nulla è invertibile. Infatti si propone il seguente controesempio.

#Esempio

Esempio 2.3.

Considero la seguente matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

la matrice A *non* è *invertibile*.

Infatti, per assurdo suppongo che esista $A^{-1} = B$. Allora

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

Allora per definizione deve valere

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Prendiamo le entrate C_{11} e C_{21}. Per definizione del *prodotto righe per colonne* abbiamo:

$$\begin{aligned} C_{11} = 1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} = b_{11} + b_{21} \\ C_{21} = 0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} = b_{11} + b_{21} \end{aligned}$$

Ma questo implicherebbe che

$$b_{11} + b_{21} = 1 = 0$$

che è un *assurdo*, in quanto $1 \neq 0$.

Minore ij-esimo di una matrice

#Definizione

Definizione (Definizione 2.7. (Minore ij-esimo di una matrice)).

Sia $A = M_n(K)$, siano $i, j \in \{1, \dots, n\}$ dei *valori fissati* che rappresentano gli *indici*.
Definiamo dunque il *minore ij-esimo della matrice A* $A_{n-1}(K)$ come la

sottomatrice $A_{ij} \subset A$ ottenuta *eliminando* la riga i-esima e la colonna j-esima.

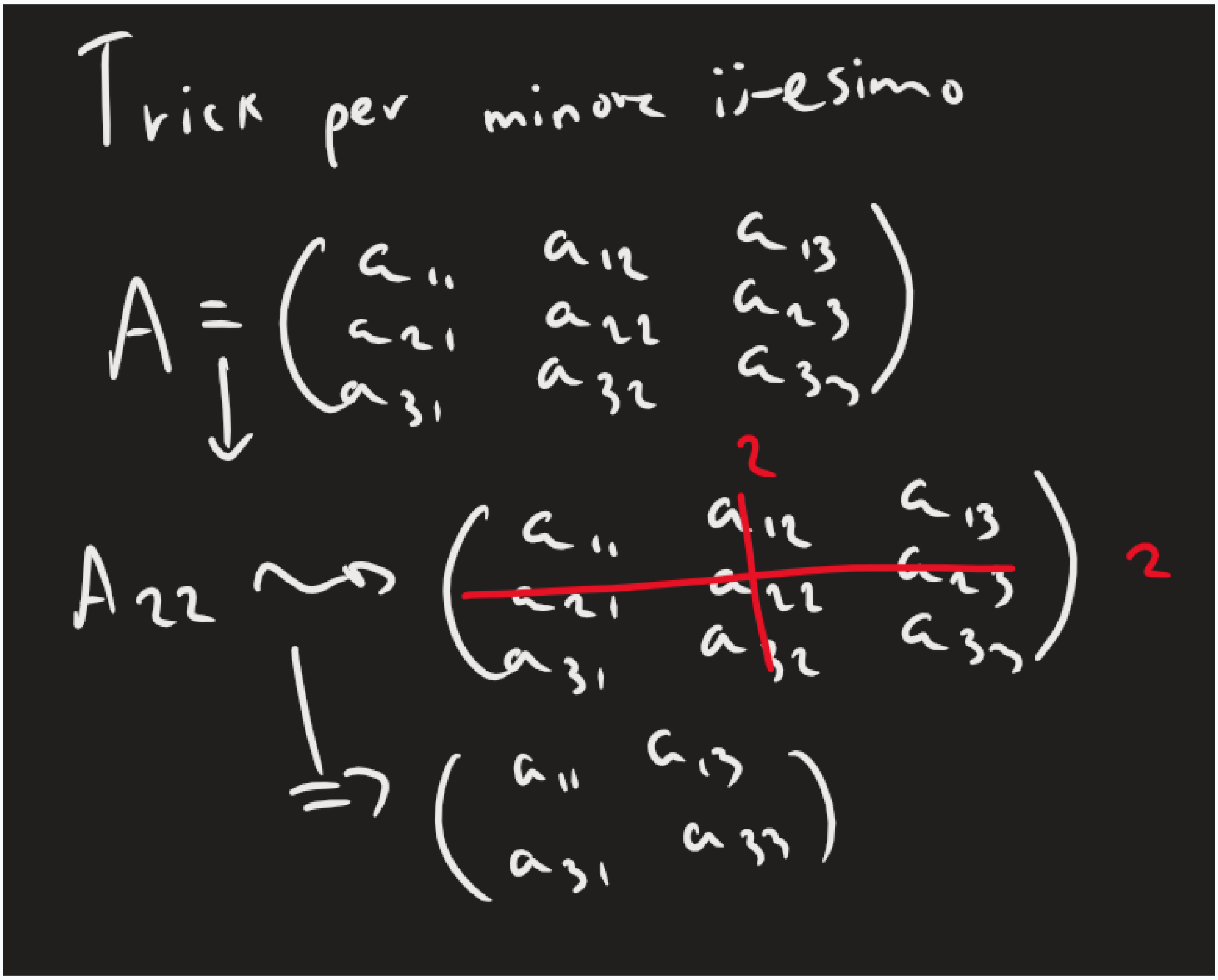
#Esempio

Esempio 2.7.1.

Sia $A \in M_3(K)$; allora il minore di A 13-esimo è

$$A_{13} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

TRUCCO. Un *"trucco"* grafico che può essere utile di determinare il *minore* è quello di prendere la matrice originale, sbarrare la riga i-esima e la colonna j-esima, poi infine di considerare solo ciò che rimane.



A2. Operazioni semplici con matrici

Operazioni basilari con matrici

Definizioni di operazioni con matrici; somma interna $+$, prodotto esterno (scalamento) $\cdot$, l'insieme delle matrici come $\mathbb{R}$-spazio vettoriale con queste operazioni.

---

0. Preambolo

Avendo definito la Matrice, andiamo a introdurre delle *operazioni* con delle *matrici* al fine di rendere *l'insieme delle matrici* $M_{m,n}(\mathbb{R})$ (Matrice, **DEF 1.2.**) un $\mathbb{R}$-*spazio vettoriale*.

1. Somma interna

DEF 1. Siano $m, n \in \mathbb{N} \diagdown \{0\}$, definiamo la **somma** delle *matrici* A e B e lo denotiamo $A + B$; per definire questa nuova matrice data dalla somma, definiamo *ogni sua entrata*. Quindi *l'entrata di posto* i, j di $A + B$ è data da:

$$(A+B)_{ij} := A_{ij} + B_{ij}$$

Qui si utilizza il fatto che per descrivere una *matrice* è sufficiente determinare come ottenere ciascuna delle sue *entrate*.

ESEMPIO 1.1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

OSS 1.1. La *matrice nulla* (Matrice, **DEF 2.2.**) è in effetti l'*elemento neutro* della somma tra matrici. Infatti questo sarà fondamentale per dimostrare che *l'insieme delle matrici* $m \times n$ $M_{m,n}(\mathbb{R})$ è uno $\mathbb{R}$-*spazio vettoriale* (Spazi Vettoriali).

2. Prodotto per scalare (scalamento)

DEF 2. Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$; definiamo allora il *prodotto (o la moltiplicazione) per uno scalare* λ per A, come la matrice $(\lambda \cdot A)$, le cui entrate sono ottenute facendo

$$(\lambda \cdot A)_{ij} := \lambda \cdot A_{ij}$$

ESEMPIO 2.1.

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ -9 & -6 & -3 \end{pmatrix}$$

A3. Cenni a concetti avanzati sui spazi vettoriali

Sistemi di generatori (cenni)

Cenno al concetto dei sistemi di generatori e combinazione lineare; Matrice come combinazione lineare di sistemi di generatori, indipendenza lineare

---

Premessa

Questo capitolo è un semplice cenno ai concetti di *combinazione lineare*, *sistemi di generatori* e *indipendenza lineare* applicato alle matrici; in seguito questi temi verranno approfonditi con Spazi Vettoriali.

0. Combinazione lineare

DEF 0. Per **combinazione lineare** si intende *l'espressione* per cui prendo una serie di *vettori* $\mathbf{v}_i$ dall'$\mathbb{R}$*-spazio vettoriale* V (Spazi Vettoriali, **DEF 1.**, **DEF 1.1.**), scalo ciascuna di essa per uno scalare λ_i e li sommo; quindi stiamo parlando di

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_n \mathbf{v}_n$$

1. Sistemi di generatori

Consideriamo una *matrice* 2×2 (Matrice, **DEF 1.**), A. Consideriamo

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Ora consideriamo 4 matrici 2×2 *"speciali"*, ovvero

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \; F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \; G = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

infatti queste matrici hanno *tutte* le *entrate* nulle (0), fuorché una, la quale uguale ad uno (1).

Consideriamo allora la seguente *combinazione lineare* di queste quattro matrici:

$$3E + F - 2G + 4H$$

che secondo dei calcoli diventa proprio A, ovvero

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Si può ripetere questa costruzione, qualsiasi sia matrice A; infatti se

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

allora

$$A = aE + bF + cG + dH$$

DEF 1. In questo diciamo che E, F, G, H sono un **sistema di generatori** di $M_2(\mathbb{R})$.

OSS 1.1. Notiamo che questo ragionamento può essere formulato allo stesso modo per qualsiasi insieme di *matrici* $M_{m,n}(\mathbb{R})$: abbiamo quindi "dimostrato" il seguente:
PROP 1.1. Se consideriamo l'insieme delle *matrici* $M_{m,n}(\mathbb{R})$ che sono costruite nel seguente modo: *esse hanno tutte le entrate nulle* 0 *fuorché una, la quale uguale ad* 1; allora tale insieme è **un sistema di generatori** per $M_{m,n}(\mathbb{R})$.

2. Indipendenza lineare

Considerando ancora le *matrici quadrate* 2×2, ne consideriamo la *matrice nulla*

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che può essere scritta come la combinazione lineare (considerando E, F, G, H come i *sistemi di generatori di* $M_2(\mathbb{R})$):

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0E + 0F + 0G + 0H$$

Si vede che non c'è nessun altro modo di ottenere la *matrice nulla*, se non di impostare ogni *coefficiente* 0. Infatti

$$eE + fF + gG + hH = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi affinché valga la sovrastante, $(e, f, g, h) = (0, 0, 0, 0)$.

DEF 2. In questo caso diciamo che queste quattro matrici sono **linearmente indipendenti**; ovvero che *l'unico modo di ottenere la matrice nulla mediante la combinazione lineare di queste matrici* è quella di imporre tutti i coefficienti nulli.
Questi ragionamenti possono essere formulati (e generalizzati) anche per *matrici* $m \times n$.

OSS 2.1. Se ho

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \ B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

allora la per ottenere 0 (la matrice nulla) è necessaria fare la seguente combinazione lineare:

$$-1 \cdot A + (-\frac{1}{2})B$$

e i coefficienti non sono nulli; pertanto A, B *non* sono linearmente indipendenti.

A4. Operazioni avanzate con matrici

Operazioni particolari con matrici

Trasposta di una matrice (definizione di matrice simmetrica e antisimmetrica). Definizione di prodotto tra due matrici. Esempi scelti del prodotto righe per colonne. Proprietà del prodotto tra matrici.

---

1. Matrice trasposta

---

traspórre (ant. **transpórre**) v. tr. [dal lat. *transponĕre*, comp. di *trans-* «trans-» e *ponĕre* «porre»] (coniug. come *porre*). – **1.** Porre, collocare una cosa dopo un’altra, invertendo l’ordine in cui tali cose erano inizialmente: *il copista per errore ha trasposto i versi 24-25 dopo i versi 26-30*; col senso più generico di porre in diverso ordine: *il periodo potrebbe migliorarsi notevolmente trasponendo qualche parola*; *se necessario si potrà t. qualche numero del programma*; *t. i fili di una linea telefonica*.

DEF 1. Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$; definiamo la **trasposta** di A come quella matrice, che indichiamo con ${}^tA$, che è un elemento di $M_{m,n}(\mathbb{R})$, determinato dalla seguente proprietà: *"l'entrata di posto i, j di ${}^tA$ è uguale all'entrata di posto j, i di A"*. In parole povere, scambiamo le *righe* della matrice con le *colonne* (invertendo così l'ordine).
Quindi

$$({}^tA)_{ij} := A_{ji} \; ; \; \begin{matrix} i \in \{1, \ldots, n\} \\ j \in \{1, \ldots, m\} \end{matrix}$$

ESEMPIO 1.1.
Se prendiamo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

allora si ha

$${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

OSS 1.1. Notiamo che *generalmente* non ha senso chiedersi se

$${}^tA = A$$

in quanto in una buona parte dei casi (ovvero delle *matrici non quadrate* (Matrice, **DEF 2.1.**)) il numero delle colonne m e il numero delle righe n vengono scambiate (per definizione); infatti se A è una matrice $m \times n$, allora ${}^tA$ sarà una matrice di $n \times m$.

1.1. Proprietà della trasposta

PROP 1.1. Prendendo $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ allora si verificano le due proprietà:

$$\begin{aligned}&\text{(i) } {}^t(A+B) = ({}^tA) + ({}^tB) \\ &\text{(ii) } {}^t({}^tA) = A\end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE.
Innanzitutto osserviamo che ha senso chiedersi se queste proprietà sono valide, in quanto per definizione in Operazioni basilari con matrici, sommando due matrici $m \times n$ si ottiene un altra matrice $m \times n$; infatti da un lato si sommano prima due matrici $m \times n$ poi per trasporlo in una matrice $n \times m$, dall'altro si sommano due matrici trasposte $n \times m$ (ottenendo ovviamente un altra matrice $n \times m$).

Per dimostrare la *(i)*, dimostriamo che tutte le entrate della matrice nel *membro sinistro dell'uguaglianza* e nel *membro destro* sono, infatti, effettivamente uguali.
Per farlo fissiamo le i, j e prendiamo le entrate di posto i, j. Allora

$$\begin{aligned}&(*)\ ({}^t(A+B))_{ij} \overset{\text{def.}}{=} (A+B)_{ji} \overset{\text{def.}}{=} A_{ji} + B_{ji} \\ &(\triangle)\ ({}^tA)_{ij} + ({}^tB)_{ij} \overset{\text{def.}}{=} A_{ji} + B_{ji}\end{aligned}$$

E notiamo che (*) e ($\triangle$) sono uguali, completando così la dimostrazione.

Per la dimostrazione di *(ii)* basta fissare i, j e considerare le entrate di posto i, j;

$$({}^t({}^tA))_{ij} = ({}^tA)_{ji} = A_{ij}$$

■

2. Prodotto righe per colonne

Ora andiamo a introdurre una nuova operazione tra matrici e per farlo è opportuno considerare una specie di analogia, una situazione che ci aiuti a comprendere il concetto.

2.1. Definizione analogica

Immaginiamo di trovarci in un negozio A che presenta i seguenti prezzi (tralasciando questioni economico-finanziarie):

- Costo pasta: $C_p = 1$
- Costo latte: $C_l = 2$
- Costo uova: $C_u = 3$
  Ora supponiamo di dover comprare n_p, n_l, n_u quantità di pasta, latte e uova; ora vogliamo calcolare il costo totale, che sarebbe una specie di *"combinazione lineare"* dove i *coefficienti scalari* vengono rappresentati dai quantitativi, i *vettori* invece dai *costi*. Quindi abbiamo

$$n_p C_p + n_l C_l + n_u C_u$$

Ora definiamo il *prodotto righe per colonne* come

$$\begin{pmatrix} C_p & C_l & C_u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_p \\ n_l \\ n_u \end{pmatrix} := n_p C_p + n_l C_l + n_u C_u$$

Adesso supponiamo di aver trovato un altro negozio B che offre altri prezzi ancora più competitivi; ovvero

$$C'_p = -3 \; ; \; C'_l = -2 \; ; C'_u = -1$$

quindi per tenere sotto controllo i due *totali di spesa*, potrei *"impacchettare"* le due righe dei *costi unitari* in una matrice:

$$\begin{pmatrix} C_p & C_l & C_u \\ C'_p & C'_l & C'_u \end{pmatrix}$$

e sarebbe ragionevole definire il prodotto di:

$$\begin{pmatrix} C_p & C_l & C_u \\ C'_p & C'_l & C'_u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_p \\ n_l \\ n_u \end{pmatrix}$$

come la matrice 2×1 dove la prima riga rappresenta il *costo totale del primo negozio* e la seconda riga invece il *costo totale del secondo negozio*:

$$\begin{pmatrix} n_p C_p + n_l C_l + n_u C_u \\ n_p C'_p + n_l C'_l + n_u C'_u \end{pmatrix}$$

Ricapitolando, abbiamo moltiplicato una *matrice 2×3* per una *matrice 3×1* e abbiamo ottenuto una *matrice 2×1*.
In altre parole, la matrice ottenuta dalla moltiplicazione è quella matrice le cui *entrate* sono date dalla *moltiplicazione di ciascuna delle due righe*

della prima matrice con la colonna della seconda matrice.
In questo modo, se volessimo aggiungere la seconda colonna di quantitativi $\begin{pmatrix} n'_p \\ n'_l \\ n'_u \end{pmatrix}$, quello che andremmo a ottenere è una situazione del tipo:

$$\begin{pmatrix} C_p & C_l & C_u \\ C'_p & C'_l & C'_u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_p & n'_p \\ n_l & n'_l \\ n_u & n'_u \end{pmatrix}$$

che diventa

$$\begin{pmatrix} n_pC_p + n_lC_l + n_uC_u & n'_pC_p + n'_lC_l + n'_uC_u \\ n_pC'_p + n_lC'_l + n_uC'_u & n'_pC'_p + n'_lC'_l + n'_uC'_u \end{pmatrix}$$

dove a sinistra abbiamo i *quantitativi della prima colonna*, a destra *i quantitativi della seconda colonna* $'$.

2.2. Definizione generale

DEF 2.2.1. Siano $A \in M_{1,n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{n,1}(\mathbb{R})$; allora definiamo il **prodotto riga per colonna** come *"la combinazione lineare"* data da

$$A_{(1)} \cdot B^{(1)} := a_{11}b_{11} + \ldots + a_{1n}b_{n1} = \sum_{i=1}^{n} a_{1i}b_{i1}$$

DEF 2.2.2. In generale, se $A \in M_{m,p}(\mathbb{R})$ e $B \in M_{p,n}(\mathbb{R})$ allora definiamo il **prodotto** $A \cdot B$ come la *matrice* $m \times n$ la cui *entrata di posto* ij è data dalla seguente:

$$(A \cdot B)_{ij} := A_{(i)} \cdot B^{(j)} = \sum_{k=1}^{p} a_{1k}b_{k1}$$

OSS 2.2.1. Notiamo che il *prodotto tra due matrici* $A \cdot B$ è definita solo se il numero di colonne di A coincide con il numero di righe di B.
Inoltre, la *"matrice risultante"* diventa una matrice $a \times b$ (ove a è il numero delle colonne di A, b il numero di righe di B).

2.3. Esempi

Diamo alcuni esempi-esercizi.
ESEMPIO 2.3.1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

usando le definizioni otteniamo

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

poi calcolando tutti i *prodotti righe per colonne*, infine abbiamo

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

ESEMPIO 2.3.2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+0+0 & 2+0+0 \\ 0+0+0 & 0-1+0 \\ 0+0+1 & 0+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

OSS 2.3.2.a.
Notiamo di aver ottenuto la stessa matrice a destra.

ESEMPIO 2.3.3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0+0 & 0+2+0 & 0+0+3 \\ -3+0+0 & 0-2+0 & 0+0-1 \end{pmatrix}$$

facendo i conti,

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

OSS 2.3.3.a.
Come appena notato prima, la *seconda matrice* sembra di comportarsi come il numero 1.; infatti se lo moltiplichi a destra o a sinistra, ottieni la stessa matrice moltiplicata.
Infatti questa matrice verrà definita come la matrice identità (**DEF 2.5.**) $\mathbb{1}$.

ESEMPIO 2.3.4.
Consideriamo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$
$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Posso fare sia $A \cdot B$ che $B \cdot A$ in quanto abbiamo i tali requisiti. Allora

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 * 1 + 1 * 2 & 0 * 1 + 2 * 1 \\ -1 * 3 + 4 * 1 & 3 * 0 + 1 * 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

e

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -1 * 1 + 0 * 3 & -1 * 2 + 0 * 4 \\ 1 * 1 + 1 * 3 & 1 * 2 + 1 * 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

OSS 2.3.4.a.
Notiamo che il *prodotto delle matrici* non è un'operazione *commutativa*; questo determina delle forti conseguenze, in particolare nella *meccanica quantistica* con il *principio di indeterminazione di Heisenberg*.

2.4. Proprietà

Il *prodotto righe per colonne* soddisfa alcune proprietà:

PROP 2.4.1. Siano $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ e $C, D \in M_{p,n}(\mathbb{R})$. Allora valgono le seguenti uguaglianze:

$$\begin{aligned} &1.\ (A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C \\ &2.\ A \cdot (C + D) = A \cdot C + A \cdot D \end{aligned}$$

la *1.* si chiama "proprietà distributiva a *destra*", la *2.* invece "proprietà distributiva a *sinistra*". Utilizziamo questa nomenclatura in quanto sappiamo che l'operazione di prodotto righe per colonna *NON* è commutativa; quindi non si è sempre certi che questa proprietà valga da entrambi i lati (in questo caso sì).

PROP 2.4.2. Sia $A \in M_{m,p}(\mathbb{R})$ e $B \in M_{p,n}(\mathbb{R})$; allora vale che

$${}^t(A \cdot B) = ({}^tB) \cdot ({}^tA)$$

ATTENZIONE! Invece bisogna stare attenti che

$$^t(A \cdot B) \neq (^tA) \cdot (^tB)$$

in quanto essa non è definita. Infatti a destra si vede che proviamo a moltiplicare una matrice p, m e n, p; a meno che $m = n$, questa moltiplicazione NON è ben posta.

DIMOSTRAZIONE. Per mostrare la forma corretta, ovvero

$$^t(A \cdot B) = (^tB) \cdot (^tA)$$

mostriamo che tutte le entrate del membro destro sono uguali a tutte le entrati del membro sinistro; siano dunque $i \in \{1, \dots, n\}$ e $j \in \{1, \dots, m\}$. Allora:

$$\begin{aligned} &\text{dx. } (^t(A \cdot B))_{ij} = (A \cdot B)_{ji} = A_{(j)} \cdot B^{(i)} \\ &\text{sx. } ((^tB) \cdot (^tA))_{ij} = \ ^tB_{(i)} \cdot \ ^tA^{(j)} = \text{le quantità sono uguali} = A_{(j)} \cdot B^{(i)} \end{aligned}$$

e questo mostra che le due sono uguali.

PROP 2.4.3. Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, allora

$$\mathbb{1}_m \cdot A = A; \ A \cdot \mathbb{1}_n = A$$

Per $\mathbb{1}_m$ si intende la *matrice identità* (Matrice, **DEF 2.5.**).

OSS 2.4.3.a Nel caso delle matrici quadrate $M_n(\mathbb{R})$, la matrice unità $\mathbb{1}_n$ funge dunque da *elemento neutro* per il *prodotto righe per colonne*. Ovvero

$$\mathbb{1}_n \cdot A = A \cdot \mathbb{1}_n = A$$

e possiamo denominarlo come *elemento neutro* in quanto tutti gli elementi in questa uguaglianza sono appartenenti a $M_n(\mathbb{R})$.

PROP 2.4.4. Sia $\lambda \in K$, $A, B \in M_{m,n}(K)$ allora vale che

$$A \cdot (\lambda \cdot B) = \lambda(A \cdot B)$$

DIMOSTRAZIONE della *proposizione 2.4.4.*
La dimostrazione è lasciata da svolgere al lettore.

A5. Matrice simile

Definizione di Matrice Simile

Definizione di due matrici simili.

---

1. Definizione di Matrici Simili

#Definizione

Definizione (Definizione 1.1. (matrici simili)).

Siano $A, B \in M_n(K)$ due *matrici quadrate* (Definizione 4 (Definizione 2.1. (matrice quadrata di ordine n))).
A, B si dicono *simili* se *esiste* una matrice *invertibile* $P \in M_n(K)$ tale che valga

$$B = P^{-1} \cdot A \cdot P$$

A6. Matrice Diagonale

Definizione di Matrice Diagonale e Applicazione Diagonalizzabile

Definizione di una matrice quadrata diagonale e di un'applicazione lineare diagonalizzabile.

---

1. Matrice quadrata diagonale

#Definizione

Definizione (Definizione 1.1. (matrice quadrata diagonale)).

Sia $A \in M_n(K)$ una *matrice quadrata* (Definizione 4 (Definizione 2.1. (matrice quadrata di ordine n))).
A si dice anche *diagonale* se tutti gli elementi non-nulli appartengono solo alla *diagonale principale* della matrice (Matrice).

2. Applicazione Lineare Diagonalizzabile

#Definizione

Definizione (Definizione 2.1. (applicazione lineare diagonalizzabile)).

Sia $f : V \longrightarrow V$ un'*applicazione lineare* (Definizione 1 (Definizione 1.1. (applicazione lineare da V a V primo))) con $\dim V = n$.
f si dice *diagonalizzabile* se esiste una base $\mathcal{B}$ di V tale che la *matrice associata* $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ (Definizione 1 (Definizione 1.1. (matrice associata a f rispetto alle basi B, C))) è *diagonale*.

#Osservazione

Osservazione 2.1. (significato della diagonalizzabilità)

Dire che la *matrice associata* $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ è *diagonale* è equivalente a dire che *ogni immagine dell'elemento della base* $\mathcal{B}$ è *autovettore* per un certo autovalore λ_i.
Infatti se $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ è diagonale, allora è una matrice del tipo

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Allora, *per definizione*, ogni immagine del vettore di $\mathcal{B}$ è del tipo

$$f(v_i) = 0 \cdot \lambda_1 + \ldots + \lambda_i v_i + \ldots + 0 \cdot \lambda_n$$

Ovvero v_i è elemento dello spettro di λ_i.

B. OPERAZIONI CON LE MATRICI

B1. L'algoritmo di Gauß

Algoritmo di Gauß

Definizioni preliminari per la descrizione dell'algoritmo di Gauß (Matrice completa e le operazioni elementari OE). Descrizione dell'algoritmo di Gauß *per rendere un sistema lineare in un sistema lineare equivalente a scala come un programma.*

---

1. Matrice completa di un sistema lineare

#Definizione

Definizione (Definizione 1.1. (matrice completa di un sistema lineare)).

Consideriamo un sistema lineare di forma

$$A \cdot x = b$$

allora definiamo la *matrice* ottenuta aggiungendo alla matrice A la colonna data dai *termini noti* b come la *matrice completa* di questo sistema lineare. La denotiamo con

$$(A|b) := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & | & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & | & b_2 \\ \vdots & & & \vdots & | & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & | & b_m \end{pmatrix}$$

N. B. Il segno sbarra | per *"differenziare"* i termini noti dai coefficienti ha uno scopo puramente grafico.

2. Operazioni elementari OE

Ora definiamo una serie di *operazioni elementari* (OE) che sono in grado di trasformare un *sistema lineare* di forma $(A|B)$ in un altro *equivalente* (Definizione 8 (Definizione 1.7. (sistemi lineari equivalenti))).

#Definizione

Definizione (Definizione 2.1. (le operazioni elementari)).

OE1. *L'operazione scambia equazioni*
Dati due indici $i, j \in \{1, \dots, m\}$ scambiamo di posto l'equazione i-esima e j-esima.
Questo corrisponde a *scambiare* la riga i-esima con la riga j-esima della matrice $(A|B)$.

OE2. *L'operazione scala equazioni*
Dato l'indice $i \in \{1, \ldots, m\}$ e uno *scalare* $\lambda \in K$, moltiplichiamo l'i-esima equazione per λ. Precisamente questo corrisponde a *moltiplicare* per λ l'i-esima riga della matrice completa $(A|B)$.

OE3. *L'operazione somma equazioni*
Dati due indici $i, j \in \{1, \ldots, m\}$ e uno scalare non nullo $\lambda \in K, \lambda \neq 0$, sommiamo alla i-esima equazione alla i-esima equazione la j-esima equazione dopo averla moltiplicata per λ.
Ovvero questo corrisponde a sommare alla riga i-esima della matrice completa $(A|B)$ λ volte la j-esima riga.

#Osservazione

Osservazione 2.1.

Osserviamo che queste operazioni determinano dei sistemi lineari *equivalenti* in quanto queste operazioni sono *completamente invertibili*; infatti partendo da un sistema lineare *"trasformato"* mediante le **OE.**, possiamo tornare al sistema originario.

#Proposizione

Proposizione 2.1. (le OE trasformano sistemi in sistemi equivalenti)

Se applico ad un sistema lineare qualsiasi una di queste operazione elementari, allora ottengo un sistema equivalente.

#Proposizione

Proposizione 2.2. (con le OE posso portare un sistema a scala)

Dato un *qualsiasi sistema lineare arbitrario*, posso portarlo ad un *sistema a scala* con queste operazioni elementari **OE**. Infatti mostreremo un *algoritmo* (Nozioni Fondamentali di Programmazione) che è in grado di *"gradinizzare"* (ovvero portare a scala) una matrice completa $(A|B)$ qualsiasi.

3. L'algoritmo di Gauß

Premesse storiche

Riprendendo la *proposizione 2.2.* della sezione precedente, abbiamo appena enunciato che siamo in grado di portare un sistema lineare non a scala in un sistema lineare *a scala*; dimostreremo questa proposizione descrivendo uno degli algoritmi più noti dell'*Algebra Lineare*, ovvero *l'algoritmo di Gauß*.

NOTIZIE STORICHE. (*Trascrizione appunti + approfondimenti personali*)
Questo algoritmo è stato attribuito al noto matematico C. F. Gauß *(1777-1855)* in quanto fu proprio lui a formalizzare questo procedimento in latino; tuttavia ciò non significa che il matematico Gauß inventò questo algoritmo, in quanto ci sono evidenze storiche che prima esistevano già descrizioni su questo procedimento. Infatti, esiste un antico manoscritto cinese (*I Capitoli nove arte matematica*/*九章算術*, circa 179) che descrive un principio simile a quello che andremo a descrivere.
Per ulteriori approfondimenti consultare le seguenti pagine:
https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Matrices_and_determinants/
https://it.frwiki.wiki/wiki/Les_Neuf_Chapitres_sur_l%27art_math%C3%A9matique

---

Descrizione dell'algoritmo come programma

OBIETTIVO.
Come detto prima, il nostro *obiettivo* è quello di *"gradinizzare"* un sistema lineare qualsiasi che non sia a scala.

INPUT.
Quindi il nostro input è un sistema lineare qualsiasi del tipo

$$Ax = b$$

che lo *"condenseremo"* nella *matrice completa* $(A|B)$.

OUTPUT.
Vogliamo ottenere la matrice completa $(\tilde{A}\,|\tilde{B}\,)$ tale che

$$\tilde{A} \text{ è a scala e } \tilde{A}x = \tilde{B} \overset{\text{equiv.}}{\cong} Ax = b$$

ALGORITMO.
Il nostro procedimento si articola in una serie di *"istruzioni"* da eseguire per un certo numero di volte.

---

1. Determino il valore $\bar{j}$ come *l'indice di colonna minimo* per cui abbiamo una colonna *non nulla* di A. Ovvero

$$\bar{j} := \min\{j : A^j \neq 0\}$$

2. Determino l'indice $\bar{i}$ tale per cui abbiamo l'elemento $a_{\bar{i},\bar{j}} \neq 0$ (*l'esistenza di un tale $\bar{i}$ deriva dalla scelta di $\bar{j}$*)
3. Scambio le righe 1 con la $\bar{i}$-esima; in questo modo sarà possibile supporre che $a_{1\bar{j}} \neq 0$ (*OE1*)
4. Voglio assicurarmi che *non* ho altre colonne *nulle* in $A^{(\bar{j})}$ (eccetto ovviamente $A_{(1)}$).
    1. Moltiplico la riga $A_{(1)}$ per $\frac{1}{a_{1\bar{j}}}$ (*OE2*)
    2. Sommo alle altre righe $A_i, \forall i \in \{2, \dots, m\}$ un *multiplo opportuno* di $A_{(1)}$. Ovvero $\lambda = -a_{ij}$. (*OE3*)

    $$A_{(i)} = A_{(i)} - a_{ij}A_{(1)}$$

5. Se la matrice ottenuta non è a scala, ripeto lo stesso procedimento a partire da *1.* sulla *sottomatrice* (ovvero una *"parte selezionata"* della matrice) con righe $\{2, \dots, m\}$ e colonne $\{\bar{j}+1, \dots, n\}$, del tipo

$$A' \in M_{m-1,n-\bar{j}-1}(K)$$

Queste operazioni corrispondono a:

$$0. \begin{pmatrix} 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \end{pmatrix}$$

$$1. \begin{pmatrix} 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \end{pmatrix}; \bar{j} = 3$$

$$2. \begin{pmatrix} 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \end{pmatrix}; \bar{i} = 1, 2, 3 \text{ (una di queste)}$$

$$3. \begin{pmatrix} 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \end{pmatrix} A_{(1)} \leftrightarrows A_{(1),(2),(3)} \text{ (una di queste)}$$

$$4.1. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \end{pmatrix}$$

$$4.2. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \end{pmatrix} A_{(i)} = A_{(i)} - a_{ij}A_{(1)} \text{ per } i = 2, 3$$

$$5. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & + & + \\ 0 & 0 & 0 & + & + \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} + & + \\ + & + \end{pmatrix} \text{ ripeto}$$

#Osservazione

Osservazione 3.1. (l'algoritmo è valido e ben posto?)

Affinché questo algoritmo sia *valido* e *ben posto*, devo assicurarmi che:

1. Questo deve *eventualmente* terminare in un certo tempo *finito*; questo accade in quanto *prima o poi* le colonne e le righe delle *sottomatrici* della *5.* eventualmente si *"esauriranno"* e avremmo una matrice a scala.
2. Questo restituisce l'*output* corretto, come prescritto dalle specificazione. Anche questo si verifica in quanto ogni volta che raggiungo e svolgo il step *4.*, ho *"gradinizzato"* una scala.

Esempio di applicazione.

Come un *programmatore* fa dei *"unit tests"* su un programma o algoritmo, tentiamo di applicare questo principio appena descritto ad un sistema lineare.

#Esempio

Esempio 3.1.

Consideriamo il sistema lineare dato da

$$(A|B) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 8 & 6 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Ora ci applichiamo *l'algoritmo di Gauß*.

$$\begin{aligned}
&0. \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 8 & 6 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}; j = 0, i = 2 \\
&1. \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}; A_{(1)} \leftrightarrows A_{(2)} \\
&2. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}; A_{(1)} = 0.5A_{(1)} \\
&3. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & -7 & -6 & -2 \end{pmatrix}; A_{(2)} = A_{(2)} + 0A_{(1)}; A_{(3)} = A_{(3)} - 3A_{(1)} \\
&4. \text{ ripeto con } \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ -5 & -7 & -6 & -2 \end{pmatrix} \\
&5. \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -3 \\ -5 & -7 & -6 & -2 \end{pmatrix}; A_{(1)} = -A_{(1)} \\
&6. \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & -17 & -11 & -17 \end{pmatrix}; A_{(2)} = A_{(2)} - 5A_{(1)} \\
&7. \text{ la matrice in 6. è a scala; FINE}
\end{aligned}$$

Dunque otteniamo la seguente matrice:

$$(\overline{A}\,|\overline{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -17 & -11 & -17 \end{pmatrix}$$

che è *a scala*.

ESERCIZIO PERSONALE. Questo esercizio prevede un collegamento con *l'informatica*, in particolare con la *programmazione*.
A) Scrivere uno *pseudocodice* che *"emula"* questo principio
B) Implementare tale *pseudocodice* in *C/Python*
C) Calcolare la *"complessità"* di questo codice

B2. Rango di una matrice

Rango

Definizione di rango, osservazioni, esempi.

---

1. Definizione di rango

#Osservazione

Osservazione 1.1. (le colonne di una matrice vivono in K^m)

Sia $A \in M_{m,n}(K)$, allora le *colonne* di A sono *tutti* elementi di K^m. Dunque

$$A^{(1)}, \dots, A^{(n)} \in K^n$$

#Definizione

Definizione (Definizione 1.1. (rango)).

Sia $A \in M_{m,n}(K)$; definiamo il *rango* della *matrice* (Definizione 1 (Definizione 1.1. (matrice $m \times n$ a coefficienti in K))) A e lo denotiamo con $\mathrm{rg}(A)$ oppure $\mathrm{rk}(A)$ (*la seconda è la dicitura internazionale*) come la *dimensione* (Definizione 1 (Definizione 1.1. (dimensione di un spazio vettoriale))) dello *span* (Lemma 3 (Lemma 2.1. (lo span è sempre un sottospazio vettoriale))) dello *sottospazio* generato dalle *colonne* di A:

$$\text{rg}(A) := \dim(\text{span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}))$$

2. Osservazioni sul rango

#Osservazione

Osservazione 2.1. (il rango è limitato da due numeri)

Se $A \in M_{m,n}(K)$ allora

- $\text{rg}(A) \leq m$; infatti

$$A^{(1)}, \dots, A^{(n)} \in K^m \implies \text{span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}) \subseteq K^m$$

  dunque per la *proposizione 3.1.* sulla dimensione (Dimensione > ^265196)

$$\dim(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}) \leq \dim(K^m) = m$$

- $\text{rg}(A) \leq n$; infatti abbiamo n colonne, dunque $\text{span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)})$ ha n generatori; pertanto una *base* di $\text{span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)})$ ha al più n generatori (che viene verificato quando *tutti* i vettori colonna solo linearmente indipendenti); pertanto

$$\text{span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}) \leq K^n = n$$

  Per concludere, traiamo che

$$A \in M_{m,n}(K) \implies \text{rg}\, A \leq \min\{m, n\}$$

#Osservazione

Osservazione 2.2.

Noteremo che questa definizione *non* cambierebbe, se invece di considerare le *colonne* considerassimo le *righe*.

3. Esempio

#Esempio

Esempio 3.1. (matrice 2×3)

Consideriamo la matrice

$$A \in M_{2,3}(K) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Dalla definizione di *rango* e dall'*osservazione 1.2.* sappiamo che

$$\operatorname{rg}(A) = \dim(\operatorname{span}((2,1),(1,0),(3,-1))) \leq \min\{2,3\} = 2$$

Dato che tutte le *colonne* sono linearmente indipendenti.
Invece se due colonne fossero invece *linearmente dipendenti*, quindi *proporzionali* tra di loro (in quanto una di queste sono ottenibili mediante lo scalamento dell'altro), allora avremmo

$$\operatorname{rg}(A) = 1$$

#Esempio

Esempio 3.2. (matrice identità $\mathbb{1}_n$)

Sia $\mathbb{1}_n$ la *matrice identità* n x n (Definizione 8 (Definizione 2.5. (matrice identità di ordine n))), abbiamo

$$\operatorname{rg}(\mathbb{1}_n) = \dim(\operatorname{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}), \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}) = \dim(K^n) = n$$

4. Teoremi

Per dei teoremi vedere questa pagina: Teoremi su Rango

B3. Teoremi sul rango

Teoremi sulle Basi

Tutti i teoremi sulle basi: teorema di estrazione di una base, teorema del completamento/estensione, lemma di Steinitz, teorema sul numero di elementi delle basi. Cenni/idee alle dimostrazioni di questi teoremi

1. Teorema di estrazione di una base

Questo primo teorema, come ci suggerisce il titolo, serve per *"estrarre"* una base da uno *spazio vettoriale* (Spazi Vettoriali), ovvero di determinarla.

#Teorema

Teorema 1.1. (Teorema 1.1. (Teorema di estrazione di una base).).

Sia V un *K-spazio vettoriale*, *finitamente generato*, sia $\{v_1, \dots, v_k\}$ un *sistemi di generatori* di V.
Allora esiste $\mathcal{B} \subseteq \{v_1, \dots, v_k\}$ tale che $\mathcal{B}$ è *base* di V.

#Dimostrazione
DIMOSTRAZIONE del *teorema di estrazione* (Teorema 1.1. (Teorema di estrazione di una base))
Nota: questa non è una vera e propria dimostrazione, bensì un semplice cenno. Ci si focalizza in particolare su un algoritmo per scopi informatici.
In questa dimostrazione procediamo per *costruzione*, ovvero troviamo la *base* $\mathcal{B}$ mediante il cosiddetto *algoritmo* dello scarto.
Inoltre supponiamo $V \neq \{0\}$.

ALGORITMO (*dello scarto*)

1. Inizializziamo la *"lista vuota"* $\mathcal{B} = \{\}$ (nel linguaggio C sarebbe un vettore/array, in Python una lista)
2. Iterare tutti gli elementi di $(v_1, \dots, v_k)$ (equiv. `for v in V`)
    1. Consideriamo v_1 di: se $v_1 = 0$, allora passiamo al prossimo; altrimenti aggiungo v_1 a $\mathcal{B}$.
       ATTENZIONE! Per 0 ovviamente si intende il *vettore nullo* di V.
    2. Consideriamo v_2: se $v_2 = 0$ oppure $v_2 \in \operatorname{span}(\mathcal{B})$, allora procedere al prossimo; altrimenti aggiungo questo a $\mathcal{B}$.
    3. Ripetere fino a v_k.
3. Alla fine otteniamo una lista che è sicuramente contenuto in $(v_1, \dots, v_k)$ che si può dimostrare essere base di V (*omessa, anche se semplice da dimostrare*).

PSEUDOCODICE (*quasi-Python*)

PYTHON

```python
def TrovaBase(vettore_nullo, sistema_di_generatori):
        B = []
        for v in sistema_di_generatori:
                if v == vettore_nullo or v in span(B):
                        continue
                else:
                        B.append(v)
                # Alternativamente si può solo negare la
condizione e scrivere
                if v != vettore_nullo and v not in span(B):
                        B.append(v)
        return B
```

2. Teorema del completamento

Ora consideriamo un teorema *"speculare"* a parte, ovvero a partire da un insieme di *vettori linearmente indipendenti* possiamo avere una *base* aggiungendo degli elementi (o anche nessuno).

#Teorema

Teorema 2.1. (Teorema 2.1. (Teorema del completamento/estensione).).

Sia V un *K-spazio vettoriale*, *finitamente generato*, siano $\{v_1, \ldots, v_p\}$ elementi di V *linearmente indipendenti*.
Allora esiste una base $\mathcal{B}$ di V tale che

$$\{v_1, \ldots, v_p\} \subseteq \mathcal{B}$$

in parole gli elementi $\{v_1, \ldots, v_p\}$ possono essere *"completati"* per formare una base.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *teorema di estensione/completamento* (Teorema 2.1. (Teorema del completamento/estensione))
Nota: anche qui diamo semplicemente un'idea della dimostrazione.
Dato che V è *finitamente generato*, esiste un insieme di vettori di V $\{w_1, \ldots, w_r\}$ che è *sistema di generatori* per V.
Allora se considero $\{v_1, \ldots, v_p, w_1, \ldots, w_r\}$, vedo che anche questo è un

sistema di generatori per V. Infatti aggiungendo qualsiasi vettore $v \in V$ ad un sistema di generatori, questo rimane comunque un sistema di generatori.
A quest'ultimo applico *l'algoritmo dello scarto*, ottenendo una base $\mathcal{B}$ di V, in quanto per come è fatto l'algoritmo *"scarto"* i vettori *linearmente dipendenti*.

Connessione tra base e indipendenza lineare

#Osservazione

Osservazione 2.1. (enti minimali e massimali)

Da questi due teoremi osserviamo una relazione tra il concetto di *base* (Definizione di Base), *indipendenza lineare* (Dipendenza e Indipendenza Lineare) e *sistema di generatori* (Combinazione Lineare).
Da un lato abbiamo una *base* come un *sistema di generatori "minimale"*, ovvero che contiene un numero *minimo* di vettori; oppure possiamo equivalentemente caratterizzare una *base* come un *insieme di vettori linearmente dipendenti "massimale"*, ovvero che può essere *estesa*.

3. Teorema sulla cardinalità delle basi

Ora enunciamo un teorema importante che ci permetterà di definire la *dimensione* (Definizione 1 (Definizione 1.1. (dimensione di un spazio vettoriale))) di un spazio vettoriale.

Lemma di Steinitz

#Lemma

Lemma (Lemma 3.1. (di Steinitz).).

Sia V un *K-spazio vettoriale*, *finitamente generato*, sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una *base* di V.
Allora $\forall k > n$ e per ogni scelta di vettori $\{w_1, \dots, w_k\} \subseteq V$ vale che $\{w_1, \dots, w_k\}$ sono *linearmente dipendenti*.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *lemma di Steinitz* (Lemma 1 (Lemma 3.1. (di Steinitz).))
Per ipotesi vale che gli elementi $w_1, \dots, w_k$ sono elementi di V (dunque esprimibili come combinazione lineari della base), ovvero:

$$\begin{cases} w_1 = c_{11}v_1 + \ldots + c_{n1}v_n \\ \vdots \\ w_k = c_{1k}v_1 + \ldots + c_{nk}v_n \end{cases}$$

Ora consideriamo le *coordinate* di ogni vettore w_i esprimibile come

$$\begin{pmatrix} c_{1i} \\ \vdots \\ c_{ni} \end{pmatrix}$$

Adesso consideriamo la *combinazione lineare* delle coordinate di w_i, ovvero

$$a_1 \begin{pmatrix} c_{11} \\ \vdots \\ c_{n1} \end{pmatrix} + \ldots + a_k \begin{pmatrix} c_{1k} \\ \vdots \\ c_{nk} \end{pmatrix}$$

Ora consideriamo il *sistema lineare omogeneo* del tipo

$$\begin{pmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \ldots & c_{nk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

di cui possiamo dimostrare che è *compatibile* con una *una soluzione* non (tutta) nulla. ■

#Osservazione

Osservazione 3.1. (giustificazione dell'ultimo passaggio)

Osserviamo che la matrice dei *coefficienti*

$$\begin{pmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \ldots & c_{nk} \end{pmatrix}$$

per ipotesi ha $k > n$, ovvero è più *"lunga"* orizzontalmente. Quindi per *"accuratezza"* la scriviamo come

$$\begin{pmatrix} c_{11} & \ldots & \ldots & c_{1k} \\ \vdots & & & \vdots \\ c_{n1} & \ldots & \ldots & c_{nk} \end{pmatrix}$$

quindi gradinizzandola con Gauß (Algoritmo di Gauß) abbiamo dei *"gradini"* più lunghi di un elemento. Allora ho più *"parametri liberi"* non-nulli, determinando così *soluzioni non nulle*.

Teorema principale

#Teorema

Teorema (Teorema 3.1. (sulla cardinalità delle basi)).

Sia V un *K-spazio vettoriale*, *finitamente generato*, siano $\{v_1, \dots, v_n\}$ e $\{w_1, \dots, w_m\}$ due *basi* di V.
Allora $n = m$; ovvero le due basi hanno lo stesso *numero di elementi* (alt. *"cardinalità"*).

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *teorema 3.1.* (Teorema 2 (Teorema 3.1. (sulla cardinalità delle basi)))
Per il *lemma di Steinitz* (Lemma 1 (Lemma 3.1. (di Steinitz).)), abbiamo che questi due insiemi di vettori per essere *basi* (ovvero *linearmente indipendenti* e *sistemi di generatori*), deve valere

$$m \leq n \wedge n \leq m \implies m = n$$

C. LA TEORIA DEL DETERMINANTE

C1. Invertire matrici

Invertire Matrici

Metodi per invertire matrici.

---

0. Preambolo

Nella *proposizione 3.1.* sul rango (Teoremi su Rango > ^4dbbdd) abbiamo semplicemente dimostrato *l'esistenza* di B (A^{-1}): ma siamo avari di conoscenza e vogliamo sapere tutto, otteniamo dunque un *algoritmo* per determinare B.

1. Manipolazione della matrice con le O.E.

Quindi *"procediamo"* con la dimostrazione *costruttiva* di *proposizione 3.1.* (Teoremi su Rango > ^4dbbdd).
Abbiamo appena visto che per calcolare A^{-1} dobbiamo risolvere *tutti* i sistemi lineari

$$A \cdot B^{(i)} = e_i$$

Quindi cerchiamo di risolverli *tutti* in un singolo colpo considerando la matrice $(A|\mathbb{1}_n)$.
Notiamo che

$$A \text{ invertibile} \implies \text{rg}(A) = n \implies \text{rg}(\tilde{A}) = n$$

dove $\tilde{A}$ rappresenta la matrice A gradinizzata mediante l'algoritmo di Gauß.
Quindi abbiamo una matrice del tipo

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & * & * & \dots & * \\ 0 & 1 & * & \dots & * \\ \vdots & & \ddots & \dots & * \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Notiamo che mediante le operazioni elementari *O.E.* possiamo *"annullare"* la colonna n-esima facendo rimanere solo l'elemento $\tilde{A}_{nn} = 1$.
Ovvero

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & * & * & \dots & * \\ 0 & 1 & * & \dots & * \\ \vdots & & \ddots & \dots & * \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * & \dots & 0 \\ 0 & 1 & * & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Ripetendo *a ritroso* da n fino al primo elemento, portiamo $\tilde{A}$ nella forma della matrice identità $\mathbb{1}_n$.
Quindi applicando queste operazioni a $(A|\mathbb{1}_n)$ otteniamo una matrice del tipo $(\mathbb{1}_n|B)$ con B una certa matrice $M_n(K)$.
Ora, la matrice di *partenza* codificava i sistemi $Ax = e_i$, le cui soluzioni sono le colonne dell'inversa A^{-1}, ricordando che le *O.E.* non cambiano le soluzioni in

quanto queste portano a sistemi lineari equivalenti.
L'ultima matrice codifica i *sistemi lineari* del tipo $\mathbb{1}_n x = B^{(i)}$, le *soluzioni* di questo ultimo sistema sono le *colonne* della matrice inversa A^{-1}, ovvero di B, il che ci mostra

$$B = A^{-1}$$

Esempio

#Esempio

Esempio 1.1. Calcolo dell'inversa di una matrice

Allora vediamo di calcolare l'inversa di una matrice; sia dunque

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

e vogliamo calcolare l'inversa A^{-1}.
Allora con l'algoritmo appena descritto consideriamo la matrice completa

$$(A|\mathbb{1}_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & | & 1 & 0 \\ 5 & 3 & | & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Effettuando delle operazioni su questa matrice, in particolare la *gradinizzazione* mediante l'Algoritmo di Gauß e dopodiché delle operazioni elementari, abbiamo la matrice

$$(\mathbb{1}_2|A^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 3 & 1 \\ 0 & 1 & | & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Allora la matrice inversa è

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Metodo dei cofattori (cenno)

OSS 2.1. Dall'*esempio 1.1.* (^a51ef6) noto che la matrice inversa di A è esattamente lo stesso con dei numeri e segni scambiati.
Quindi voglio codificare con un *singolo numero* l'invertibilità di una matrice quadrata, che definiremo come il *determinante* (Determinante).
Consideriamo ad esempio il caso per le matrici quadrate $M_2(K)$.

Siano quindi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

e

$$B = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Svolgendo la moltiplicazione righe per colonne (Operazioni particolari con matrici > ^eecbc9), otteniamo

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & -a_{11}a_{12} + a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} - a_{21}a_{22} & -a_{21}a_{12} + a_{11}a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & \\ 0 & a_{11}a_2 \end{pmatrix}$$

Notiamo che gli elementi $(AB)_{11}$ e $(AB)_{22}$ hanno lo stesso numero $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$: dunque da qui abbiamo due risultati:

1. A invertibile se e solo se $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$
2. se A invertibile, allora

$$A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

3. Metodo dei cofattori (definizione rigorosa)

Per vedere il *metodo dei cofattori*, andare alla pagina Cofattore di una matrice.

Proposizione 3.1.

Sia $A \in M_n(K)$, allora

$$A \cdot {}^t(\operatorname{cof} A) = \det A \cdot \mathbb{1}_n$$

(questa vale *sempre*!)
In particolare set $\det A = 0$ vale che

$$A^{-1} = \frac{{}^t\operatorname{cof}(A)}{\det A}$$

C2. Determinanti

Determinante

Definizione di determinante per matrici quadre 2×2 (cenno); cenno al metodo dei cofattori; definizione per ricorrenza del determinante di una matrice quadra di qualsiasi dimensione; calcolo del determinante di matrici triangolari superiori; regola di Sarrus (definizione di matrici quadre 3×3)

---

1. Prima definizione (per matrici 2x2)

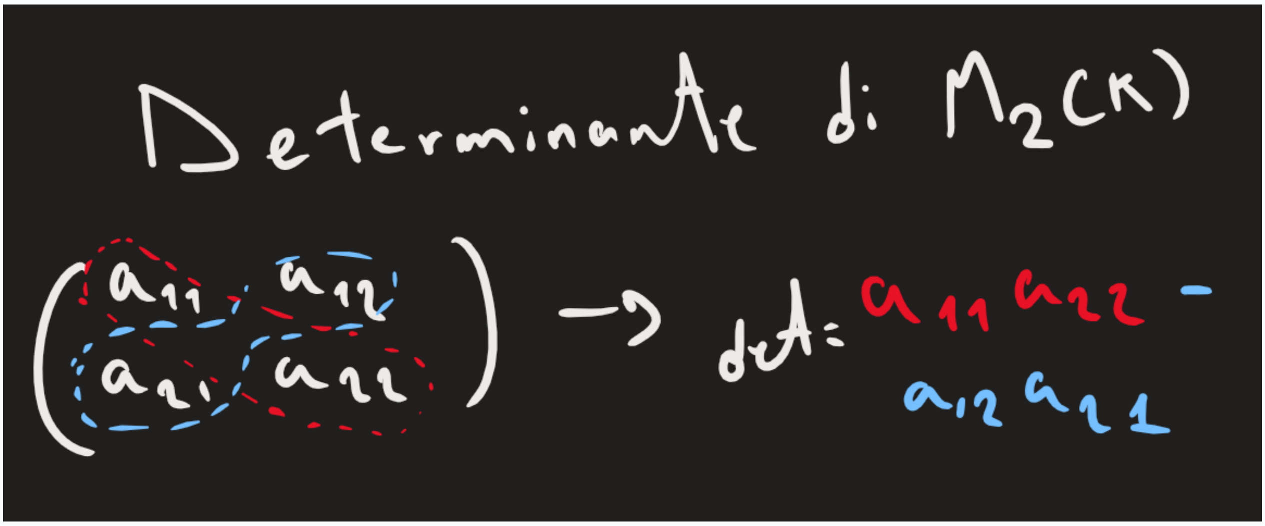
#Definizione

Definizione (Definizione 1.1. (determinante della matrice 2×2)).

Sia $A \in M_2(K)$.
Definisco il *determinante* di A come lo scalare in K determinato dalla formula

$$\det A = a_{11}a22 - a_{12}a_{21} \in K$$

TRUCCO. Per ricordare questa definizione possiamo fare una sorta di *"grafico"* per aiutarci, in cui disegniamo la matrice e segniamo la *diagonale principale* in rosso e l'*"anti diagonale"* in blu: poi sottraiamo la parte rossa con quella blu.



Primi enunciati sul determinante

Quanto abbiamo visto in Invertire Matrici > ^b56a11, questo ci permette di esporre il seguente enunciato:

#Proposizione

Proposizione 1.1.1. (invertibilità di una matrice)

Sia $M_2(K)$, allora

$$A \text{ invertibile} \iff \text{rg}(A) = 2 \iff \det(A) = 2$$

In tal caso

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

#Esempio

Riprendiamo l'*esempio 1.1.* da Invertire Matrici > ^a51ef6:

Esempio 1.1.1. (esempio 1.1. da "Invertire Matrici")

Sia

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

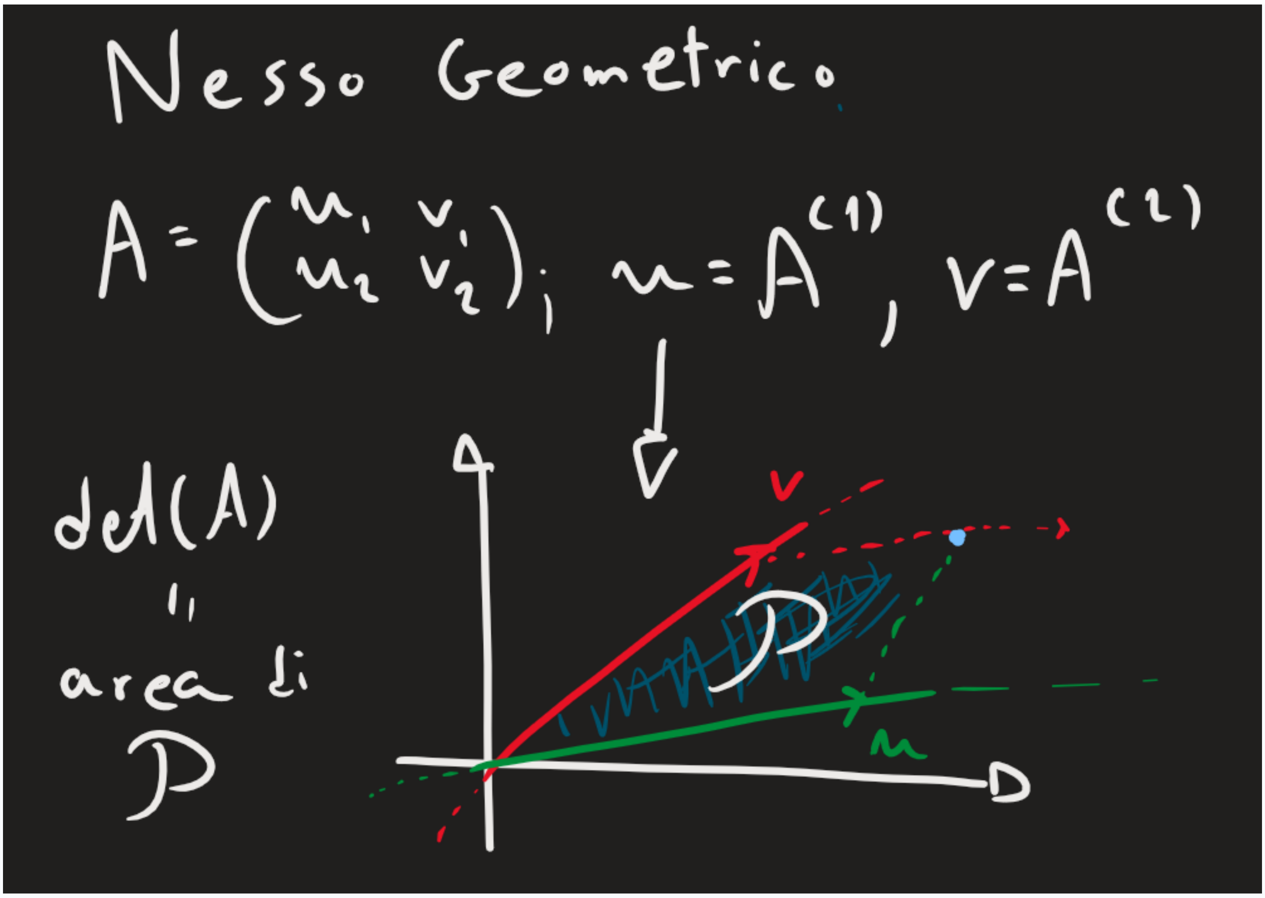
Allora

$$\det A = 6 - 5 = 1 \neq 0 \implies A^{-1} \text{ invertibile}$$

Pertanto

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

OSS 1.1.1. (*Collegamento geometrico*) Se consideriamo le colonne di $A \in M_2(K)$ come *due vettori colonna* che vivono in K^2, poi se supponiamo $a_{ij} > 0$, allora possiamo rappresentare i vettori sul piano cartesiano π. Si può verificare che se $\mathcal{P}$ è il parallelogrammo determinato da questi due vettori colonna, allora il *determinante* della matrice A è proprio l'*area* di questo parallelogrammo.



2. Definizione di determinante per ricorsione

#Definizione

Definizione (Definizione 2.1. (determinante per lo sviluppo lungo la prima colonna)).

Sia $A \in M_n(K)$.
Definisco il *determinante di* A per *ricorsione* come il seguente:

- Se $n = 1$: allora $A = a_{11} \implies \det(A) = A_{11}$
- Se $n > 1$: allora

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \cdot a_{i1} \cdot \det(A_{i1})$$

dove ci ricordiamo che A_{i1} rappresenta il *minore* della matrice A (Matrice)

OSS 2.1. Benché questa definizione di *determinante* sia completamente accettabile, percepiamo che rimane comunque *"artificiale"*: scegliamo proprio di svilupparla lungo la *prima* colonna.
Infatti con lo *sviluppo di Laplace del determinante* (Teoremi sul determinante) vedremo che è possibile definire il *determinante* con lo stesso algoritmo,

scegliendo tuttavia di svilupparla lungo un'altra colonna o anche secondo una riga.
Tuttavia dobbiamo aspettare prima di sviluppare dei teoremi sui determinanti per poter definire bene lo *sviluppo di Laplace*.

#Esempio

Esempio 2.1. (determinante di matrice 2×2)

Con questa definizione si può *"ricavare"* la definizione del determinante per una matrice che vive in $M_2(K)$; infatti

$$\begin{aligned}\det(A \in M_2(K)) = \det(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}) &= (-1)^{1+1} a_{11} \det(A_{11}) + (-1)^{2+1} \\ &= a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}\end{aligned}$$

#Esempio

Esempio 2.2. (esempio numerico del determinante)

Sia $A \in M_3(K)$, in particolare

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Svolgendo i calcoli necessari viene fuori

$$\det A = -6$$

La *"dimostrazione"* (che in realtà è solo un calcolo) di questo è lasciato da svolgere al lettore.

Calcolo del determinante di una matrice triangolare superiore

#Proposizione

Proposizione 2.1.1. (Determinante di una matrice triangolare superiore)

Se $A \in M_n(K)$ è una *matrice triangolare superiore* (Definizione 6 (Definizione 2.3. (le matrici triangolari superiori))) (quindi

> $A \in T_n(K) \subseteq M_n(K)$), ovvero del tipo
>
> $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & * & * & \dots & * \\ 0 & a_{22} & * & \dots & * \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$
>
> Allora si ha
>
> $$\det(A) = \prod_{1 \leq i \leq n} a_{ii} = a_{11} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$
>
> in parole *"il determinante di una matrice triangolare superiore è la produttoria degli elementi della diagonale principale".*

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE di *Proposizione 2.1.1.* (^0628b1)
Per induzione su $\mathbb{N}$ (Assiomi di Peano, il principio di induzione > ^76b850) dimostriamo che vale la proposizione per ogni $M_n(K)$.

- Caso $n = 1$:

$$A \in T_1(K) \implies A = (a_{11}) \implies \det A = a_{11} \text{ OK}$$

- Passo induttivo $P(n-1) \implies P(n)$:
  Supponendo che valga la proposizione per le matrici M_{n-1}, allora dimostriamo che valga anche per M_n.
  Allora per lo *sviluppo di determinante lungo la prima colonna* (Definizione 2 (Definizione 2.1. (determinante per lo sviluppo lungo la prima colonna))), abbiamo

$$\det A = a_{11} \det A_{11} + 0 \cdot \ldots + 0 \cdot \ldots + \ldots + 0$$

  Allora il gioco è fatto perché l'unico termine da *"risolvere"* è A_{11}, che è anch'essa una matrice superiore triangolare e vive in $M_{n-1}(K)$ (in quanto *"togliamo"* una riga e una colonna dalla matrice originaria). Pertanto per ipotesi induttiva $\det A_{11} = a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$.
  Allora

$$\det A = a_{11} \cdot (a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}) = \prod_{1 \leq i \leq n} a_{nn} \text{ OK.} \blacksquare$$

3. Regola di Sarrus (per matrici 3x3)

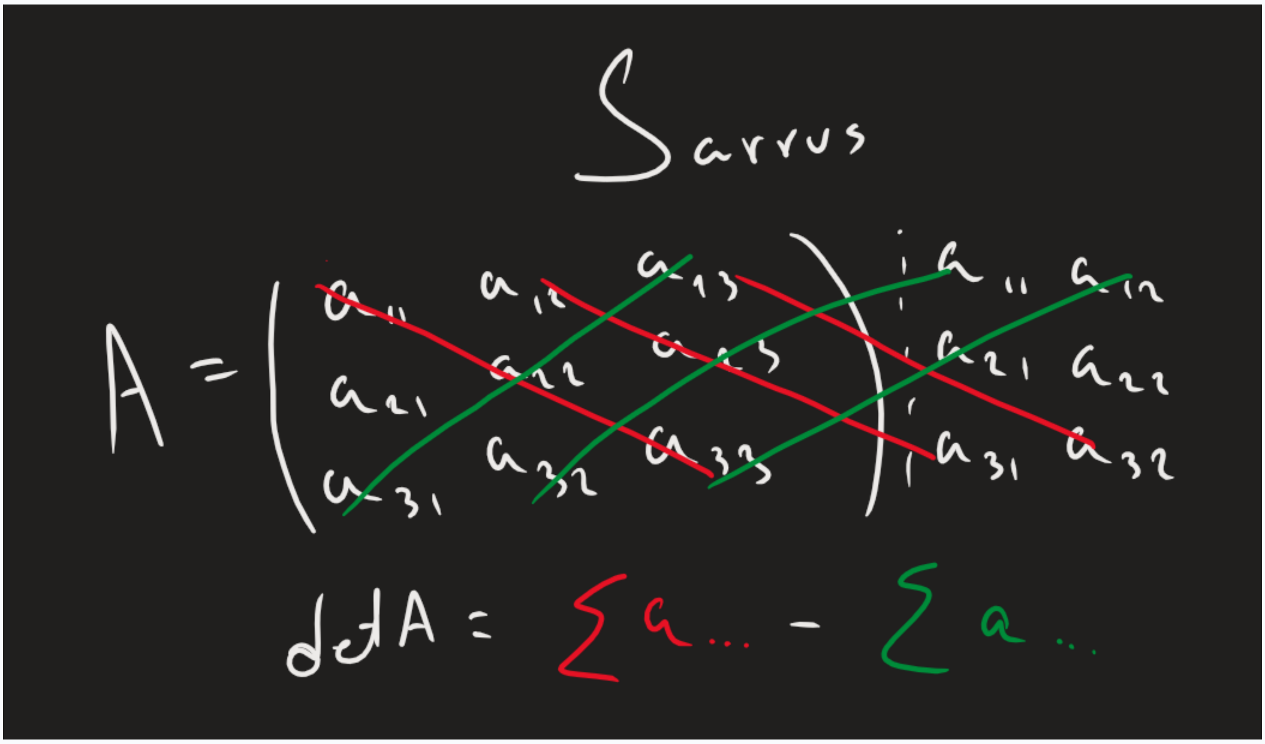
#Definizione

Teorema (Definizione 3.1. (determinante di una matrice 3×3 secondo la regola di Sarrus)).

Sia $A \in M_3(K)$,
allora vale che

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{32}a_{23}a_{11} + a$$

TRUCCO. Ovviamente questa regola è utile solo se la visualizziamo *graficamente*; ciò consiste in prendere la matrice A, poi piazzare le prime due colonne $A^{(1)}$ e $A^{(2)}$ a destra della matrice, poi di segnare le tre diagonali principali a partire da quella principali, le *anti diagonali* e infine di sommare le diagonali principali poi di sottrarre il risultato con le anti diagonali.



Esercizio 3.1.

Si lascia al lettore di determinare il $\det(A)$ per

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

mediante la *regola di Sarrus* per esercizio.

C3. Teoremi sui determinanti

Teoremi sul determinante

Teoremi sul determinante: prime proprietà (multilinearità, alternanza/antisimmetria, normalizzazione); teorema di caratterizzazione del determinante; corollari vari; teorema di caratterizzazione delle matrici quadrate di rango massimo; sviluppo di Laplace del determinante; teorema di Binet.

---

1. Le tre proprietà D1, D2, D3

#Proposizione

💬 Proposizione (Proposizione 1.1. (Le proprietà del determinante D)).

Il *determinante* (Definizione 2 (Definizione 2.1. (determinante per lo sviluppo lungo la prima colonna))) gode delle seguenti proprietà:

- D1. (*multilinearità*)
  Sia $A \in M_n(K)$, supponendo che $A_{(i)} = R_1 + R_2$ (ove $R_1, R_2 \in K^n$) allora

$$\det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ R_1 + R_2 \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ R_1 \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ R_2 \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}$$

  Inoltre supponendo invece $A_{(i)} = cR$ per un $c \in K$, $R \in K^n$ allora

$$\det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ cR \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} = c \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ R \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}$$

Analogamente la proprietà della *multilinearità* vale anche quando consideriamo le *colonne* $A^{(i)}$.

- D2. (*alternanza / antisimmetria*)
Nota: per quanto riguarda questa proprietà bisogna distinguere certi casi per certi campi, ma è irrilevante ai fini nostri.
Scambiando due righe o colonne di una matrice di posto il determinante cambia di segno, ovvero: siano $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, allora

$$\det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(j)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(j)} \\ \vdots \\ A_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}$$

Da questo discende che svolgendo k scambi di righe/colonne dobbiamo moltiplicare il determinante per $(-1)^k$.
- D3. (*normalizzazione*)
Vale che

$$\det \mathbb{1}_n = 1$$

Possiamo usare queste proprietà come dei *"trucchetti"* per calcolare certi determinanti.
#Esempio

Esempio 1.1. (esempio di applicazione "concreta")

Sia $A \in M_n(K)$, ove in particolare

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

allora

$$
\begin{aligned}
\det A &= 2 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\
&= 4 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\
&= 4(\dots) \\
&= -8
\end{aligned}
$$

2. Teorema di caratterizzazione del determinante

#Teorema

Teorema (Teorema 2.1. (di caratterizzazione del determinante)).

Considerando il *determinante* come funzione, $\det$ è l'unica funzione (*applicazione lineare*)

$$\det : M_n(K) \longrightarrow K$$

che soddisfa le proprietà *D1, D2, D3* appena elencate. (Proposizione 1 (Proposizione 1.1. (Le proprietà del determinante D)))

La dimostrazione è stata omessa.

3. Corollari dei paragrafi 1,2

#Corollario

Corollario (Corollario 3.1. (condizioni di determinante nullo)).

Sia $A \in M_n(K)$.
Per avere il determinante $\det A$ *nullo* (uguale a 0) si deve verificare una delle due proprietà (o entrambe):
i. *Se la matrice ha due righe uguali*

$$\det A \overset{\text{D2}}{=} -\det A \iff \det A = 0$$

ii. *Se la matrice ha almeno una riga/colonna nulla*
Infatti

$$\det A = k \det A, k \in K \iff \det A = 0$$

#Corollario

Corollario (Corollario 3.2. (effetti sul determinante degli OE)).

Sia $A \in M_n(K)$, siano *O.E.* le cosiddette *operazioni elementari* (Algoritmo di Gauß > ^8a7c5e, Algoritmo di Gauß > ^1f10d6, Definizione 2 (Definizione 2.1. (le operazioni elementari))), allora se $\tilde{A}$ è una matrice ottenuta mediante le *O.E.*, allora valgono le seguenti:
i. Se $\tilde{A}$ è ottenuta mediante una *OE1*, allora

$$\det \tilde{A} = \det A$$

ii. Se $\tilde{A}$ è ottenuta mediante una *OE2* e se $k \in K$ è lo scalare per cui si moltiplica la riga/colonna, allora

$$\det \tilde{A} = k \det A$$

iii. Se $\tilde{A}$ è ottenuta con una *OE3* allora

$$\det \tilde{A} = \det A$$

DIMOSTRAZIONE del punto iii. del *corollario 3.2.* (Corollario 4 (Corollario 3.2. (effetti sul determinante degli OE)))
Se consideriamo

$$A = \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}$$

e

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ A_{(i)} + cA_{(j)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}$$

Allora

$$\begin{aligned}\det \tilde{A} = \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i)} + cA_{(j)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ cA_{(j)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} \\ &= \det A + c \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(j)} \\ \vdots \\ A_{(j)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} \\ &= \det A + 0 = \det A\end{aligned}$$

#Corollario

Corollario (Corollario 3.3. (effetti dell'algoritmo di Gauß sul determinante)).

Sia $A \in M_n(K)$, sia $\tilde{A}$ la matrice *gradinizzata* a scala mediante Gauß (Algoritmo di Gauß), allora

$$\det \tilde{A} = \lambda \det A$$

per un certo $\lambda \in K \diagdown \{0\}$.
In particolare

$$\det A = 0 \iff \det \tilde{A} = 0$$

Inoltre se gradinizzandola *non* effettuiamo la *normalizzazione* degli elementi pivot, allora

$$\det \tilde{A} = (-1)^k \det A$$

dove $k \in \mathbb{N}$ rappresenta il numero di scambi di righe effettuate.

4. Teorema di caratterizzazione di matrici invertibili

Con questi strumenti appena sviluppati siamo pronti per dimostrare il risultato, secondo il quale il determinante di una matrice è in grado di caratterizzarne l'invertibilità: ovvero il *teorema di caratterizzazione delle matrici quadrate di rango massimo*.

#Teorema

Teorema (Teorema 4.1. (di caratterizzazione delle matrici quadrate di rango massimo)).

Sia $A \in M_n(K)$; allora vale che

$$\boxed{\operatorname{rg}(A) < n \iff \det(A) = 0}$$

equivalentemente

$$\operatorname{rg}(A) = n \iff \det(A) \neq 0$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *teorema 4.1.* (Teorema 6 (Teorema 4.1. (di caratterizzazione delle matrici quadrate di rango massimo)))
Questo è un teorema del tipo *se e solo se*, quindi dimostriamo prima la prima implicazione:
"$\implies$": Sia $\operatorname{rg}(A) < n$, sia $\tilde{A}$ la matrice *gradinizzata* mediante Gauß; allora $\tilde{A}$ ha almeno una *riga nulla*, pertanto $\det \tilde{A} = 0 \implies \det A = 0$
"$\impliedby$": Sia $\det A = 0$, sia $\tilde{A}$ la matrice *gradinizzata* mediante Gauß , allora $\det \tilde{A} = 0$.
Però $\tilde{A}$ è *gradinizzata (a scala)*, dunque *triangolare superiore*: pertanto $\det \tilde{A}$ è determinata dalla produttoria degli elementi della sua diagonale principale composta da $a_{11}, \ldots, a_{nn}$; se questa produttoria è 0, allora almeno un $a_{ii} \in \tilde{A}$ per $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ è *nullo*.
Quindi dev'esserci *almeno* un gradino più *"lungo"* di 1, il che implica per la *proposizione 1.1.* (Teoremi su Rango > ^9290df)

$$\operatorname{rg}(\tilde{A}) = \boxed{\operatorname{rg}(A) < n}$$

#Corollario

Ora arriviamo al punto cruciale in cui colleghiamo *l'invertibilità di una matrice* con la sua *determinante*:

Corollario (Corollario 4.1. (di caratterizzazione delle matrici invertibili)).

Sia $A \in M_n(K)$, allora

$$\boxed{A \text{ invertibile} \iff \det A \neq 0}$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *corollario 4.1.* (Corollario 7 (Corollario 4.1. (di caratterizzazione delle matrici invertibili)))
La dimostrazione è banalissima, basta tener conto della *proposizione 3.1.* sul rango (Teoremi su Rango > ^4dbbdd). Infatti

$$A \text{ invertibile} \iff \text{rg}(A) = n \iff \det A \neq 0 \blacksquare$$

5. Sviluppo di Laplace del determinante

#Teorema

Teorema (Teorema 5.1. (sviluppo di Laplace del determinante)).

Sia $A \in M_n(K)$, e vogliamo calcolare $\det A$: possiamo farlo in due modi

- Sviluppo lungo la colonna k-esima
  Sia $1 \leq k \leq n$ l'indice di colonna, allora

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} \cdot a_{ik} \cdot \det(A_{ik})$$

- Sviluppo lungo la riga l-esima
  Sia $1 \leq l \leq n$ l'indice di riga, allora

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{l+j} \cdot a_{lj} \cdot \det(A_{lj})$$

OSS 5.1. Per capire quali *"segni"* prendere con lo *sviluppo di Laplace* è possibile disegnare una matrice dove i segni si alternano (e partendo con l'elemento $1,1$-esimo positivo): ovvero

$$\pm_n = \begin{pmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

Infatti è possibile pensare questa matrice in $K = \{0,1\} = \{-,+\}$, dove i caselli neri (bianchi) rappresentano il segno positivo e i caselli bianchi (neri) rappresentano il segno negativo.

#Esempio

Esempio-esercizio 5.1.

Per esercizio si chiede di calcolare $\det A$ usando lo *sviluppo di Laplace* lungo la *seconda colonna* e lungo la *terza riga*, ove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinante delle matrici trasposte

#Corollario

Corollario (Corollario 5.1. (determinante della trasposta)).

Sia $A \in M_n(K)$ allora

$$\det A = \det {}^t A$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *corollario 5.1.* (Corollario 9 (Corollario 5.1. (determinante della trasposta)))

Per definizione $\det {}^t A$ è lo *sviluppo di Laplace* lungo la *prima colonna di* ${}^t A$, che è equivalente a dire "lo *sviluppo di Laplace* lungo la *prima riga* di A", che è uguale a $\det A$.

6. Teorema di Binet

#Teorema

Teorema (Teorema 6.1. (di Binet)).

Sia $A, B \in M_n(K)$, allora

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

La dimostrazione è stata omessa.

Determinante della matrice inversa

#Corollario

Corollario (Corollario 6.1. (determinante dell'inversa)).

Sia $A \in M_n(K)$, invertibile.
Allora

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A} = (\det A)^{-1}$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *corollario 6.1.* (Corollario 11 (Corollario 6.1. (determinante dell'inversa)))
Osserviamo che per definizione vale che

$$A \cdot A^{-1} = \mathbb{1}_n$$

Per il *teorema di Binet* (Teorema 10 (Teorema 6.1. (di Binet))) e per la proprietà *D3* (Proposizione 1 (Proposizione 1.1. (Le proprietà del determinante D))) vale che

$$\begin{aligned} \det(A \cdot A^{-1}) &= \det(\mathbb{1}_n) \\ \det A \cdot \det A^{-1} &= 1 \\ \det A^{-1} &= \frac{1}{\det A} \end{aligned}$$

C4. Cofattore di una matrice

Cofattore di una matrice

Definizione di cofattore ij-esimo di una matrice; definizione della matrice dei cofattori di A; calcolo dell'inversa mediante il cofattore

---

1. Definizione di cofattore ij-esimo

#Definizione

Definizione (Definizione 1.1. (cofattore ij-esimo di una matrice)).

Sia $A \in M_n(K)$, siano $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$.
Definisco il *cofattore ij-esimo* di A come lo scalare in K

$$(-1)^{i+j} \det(A_{ij})$$

2. Definizione della matrice dei cofattori

#Definizione

Definizione (Definizione 2.1. (matrice dei cofattori di una matrice)).

Sia $A \in M_n(K)$, allora la *matrice dei cofattori di A* è la matrice che indichiamo come

$$\operatorname{cof}(A) \in M_n(K); (\operatorname{cof}(A))_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det A_{ij}$$

#Esempio

Esercizio-esempio 2.1.

Per esercizio si calcoli i cofattori della matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Calcolo dell'inversa con il cofattore

#Proposizione

Proposizione 3.1.

Sia $A \in M_n(K)$, allora

$$A \cdot {}^t(\text{cof } A) = \det A \cdot \mathbb{1}_n$$

(questa vale *sempre*!)
In particolare set $\det A = 0$ vale che

$$A^{-1} = \frac{{}^t\operatorname{cof}(A)}{\det A}$$

#Dimostrazione
DIMOSTRAZIONE della *proposizione 3.1.* (^70361d)
Calcola l'entrata di posto i, j della matrice data dal *prodotto riga per colonna* (Operazioni particolari con matrici > ^eecbc9) di $A \cdot {}^t\operatorname{cof}(A)$.

$$\begin{aligned}(A \cdot {}^t\operatorname{cof}(A))_{ij} = A_{(i)} \cdot ({}^t\operatorname{cof} A)^j &= \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot ({}^t\operatorname{cof}(A))_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{j+k} \cdot a_{ik} \cdot \det A_{jk}\end{aligned}$$

Ora succede il seguente:

- Se $i = j$, allora ho esattamente la definizione del *determinante* $\det A$ (Teorema 8 (Teorema 5.1. (sviluppo di Laplace del determinante))): quindi $(A \cdot {}^t\operatorname{cof}(A))_{ij} = \det A \iff i = j$
- Se $i \neq j$, allora avrei il determinante di una matrice con *due righe uguali*, dunque $(A \cdot {}^t\operatorname{cof}(A))_{ij} = \det A = 0 \iff i \neq j$
  Allora ho una *matrice* dove le entrare ij-esime sono composte da $\det A$, e da 0 in tutti gli altri casi: allora praticamente ho la matrice identità scalata per $\det A$. Dunque alla fine ho

$$A \cdot {}^t\operatorname{cof}(A)_{ij} = \det A \cdot \mathbb{1}_n$$

Determinare la soluzione di un sistema lineare con Cramer e cofattori

RICHIAMO (*al teorema di Cramer*)

Teorema 1 (Teorema 1.1. (di Cramer)).

Considero un sistema lineare con n equazioni ed n incognite, di forma

$$A \cdot X = b$$

Ovvero $A \in M_n(K)$.
Ora supponiamo che A sia anche *invertibile* (Matrice, **DEF 2.6.**); allora da qui discende che esiste un'*unica soluzione* S del sistema lineare ed essa è data da

$$S = A^{-1} \cdot b$$

Corollario (Corollario 3.1. (determinare soluzioni di sistemi lineari con Cramer)).

Osservando il *teorema di Cramer*, notiamo che se prima non avevamo gli strumenti per calcolare l'inversa A^{-1}, ora li abbiamo.
Quindi dalla formula determinata nella *proposizione 3.1.* (^70361d), segue che che l'i-esima entrata della soluzione S, che chiameremo s_i sarà determinata da

$$i \in \{1, \dots, n\}, s_i = \frac{\det(A^{(1)}, \dots, b, A^{(i+1)}, \dots, A^{(n)})}{\det A}$$