Diagonalizzazione - Sommario

Tutto sulla diagonalizzazione di applicazioni lineari.

A. CONSIDERAZIONI PRELIMINARI PER LA DIAGONALIZZAZIONE

Considerazioni Preliminari sulla Diagonalizzazione

Introduzione alla Diagonalizzazione: problema della riflessione all'asse delle ordinate in R2, osservazioni.

---

1. Considerazioni preliminari per la diagonalizzazione

Problema della riflessione rispetto all'asse x

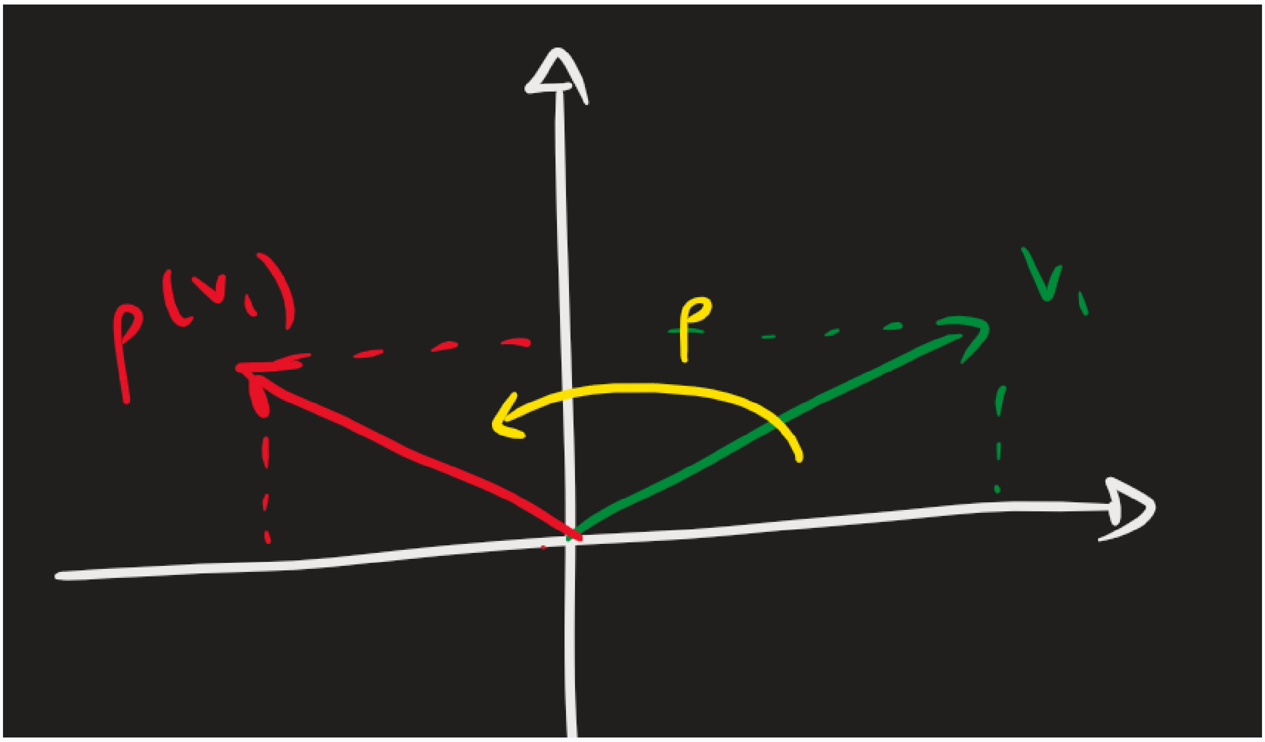
#Esempio

Esempio 1.1. (riflessione rispetto all'asse delle ordinate)

Consideriamo in $\mathbb{R}^2$ la *riflessione* rispetto all'asse delle ordinate, e chiamiamo questa applicazione ρ.
Il *"funzionamento"* dell'applicazione ρ viene illustrata nella *figura 1.1.*.
Considerando $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$ la *base canonica*, allora possiamo con un po' di intuizione geometrica si può calcolare la matrice associata a ρ (Definizione 1 (Definizione 1.1. (matrice associata a f rispetto alle basi B, C))).

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(\rho) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

FIGURA 1.1. (*Idea grafica*)



Problema della riflessione rispetto alla retta l

#Esempio

Esempio 1.2. (riflessione rispetto alla retta l)

Ora consideriamo una retta l che passa per l'origine $(0,0)$; chiamiamo la *riflessione rispetto alla retta l* ρ_l. In *figura 1.2.* si illustra la *"trasformazione"* di un qualsiasi vettore mediante ρ_l.
Dal disegno non è chiaro *"calcolare"* la matrice

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(\rho_l)$$

Bisognerebbe considerare eventuali angoli, seni, coseni e altre complicazioni.
Questa difficolta proviene dal fatto che abbiamo scelto delle *"basi difficili"* su cui calcolare questa matrice: se scegliessimo una *"base adeguata"* all'applicazione lineare ρ_l, tutto divneterebbe più semplice!
Consideriamo allora una *"base personalizzata"* per ρ_l, ovvero una è un vettore che *"giace sulla retta l"* è l'altra è un vettore ortogonale alla retta l: chiamiamo l'insieme di questi vettori come $\mathcal{B}$. Questa idea viene raffigurata nella *figura 1.3.*.
Allora in questo caso diventa semplicissimo calcolare la *matrice associata* a ρ_l per la base $\mathcal{B}$: infatti il *"calcolo"* diventa analogo a quello presentato nell'*esempio 1.1.* (^e251c3).

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\rho_l) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

FIGURA 1.2. (*Idea grafica parte 1*)

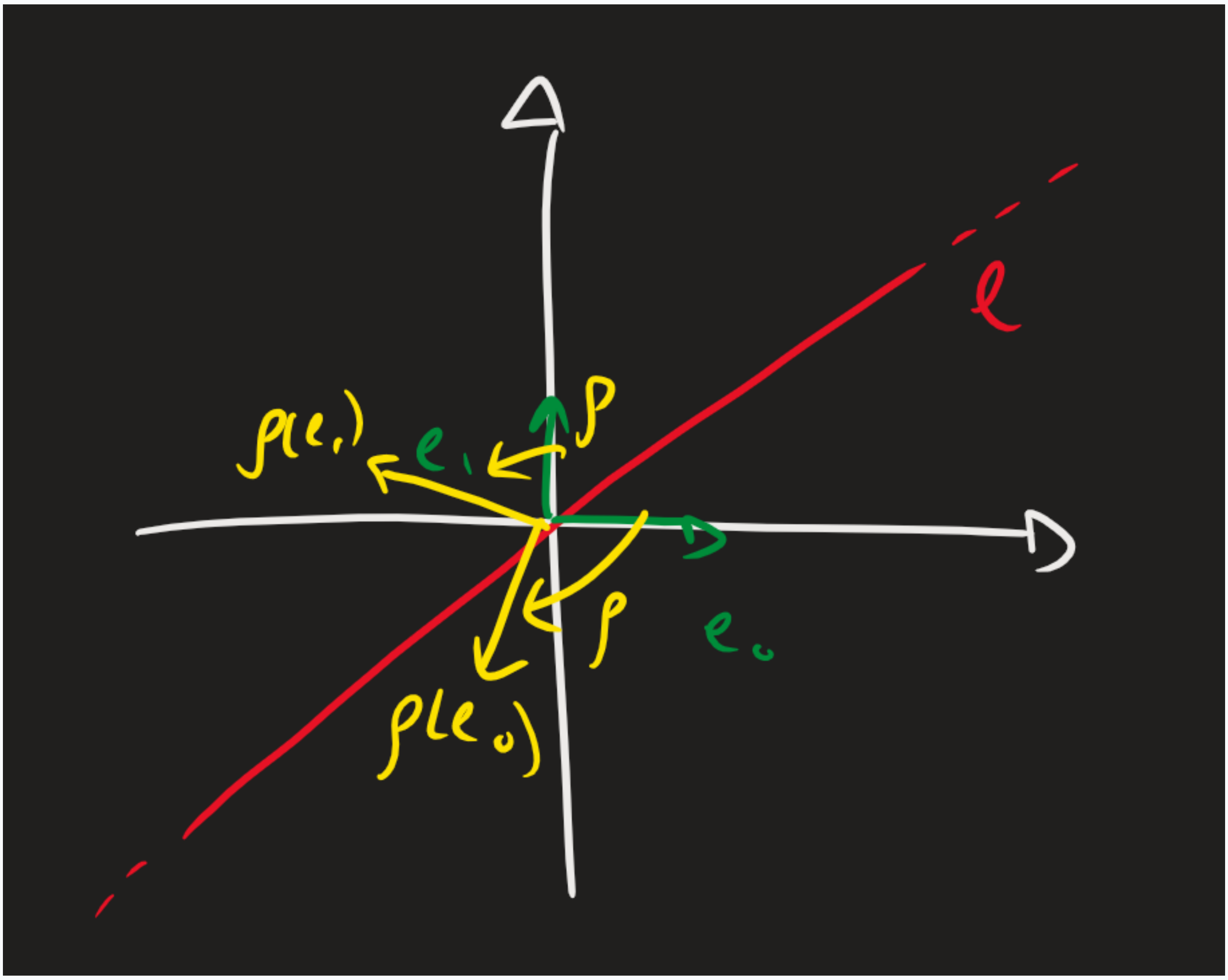
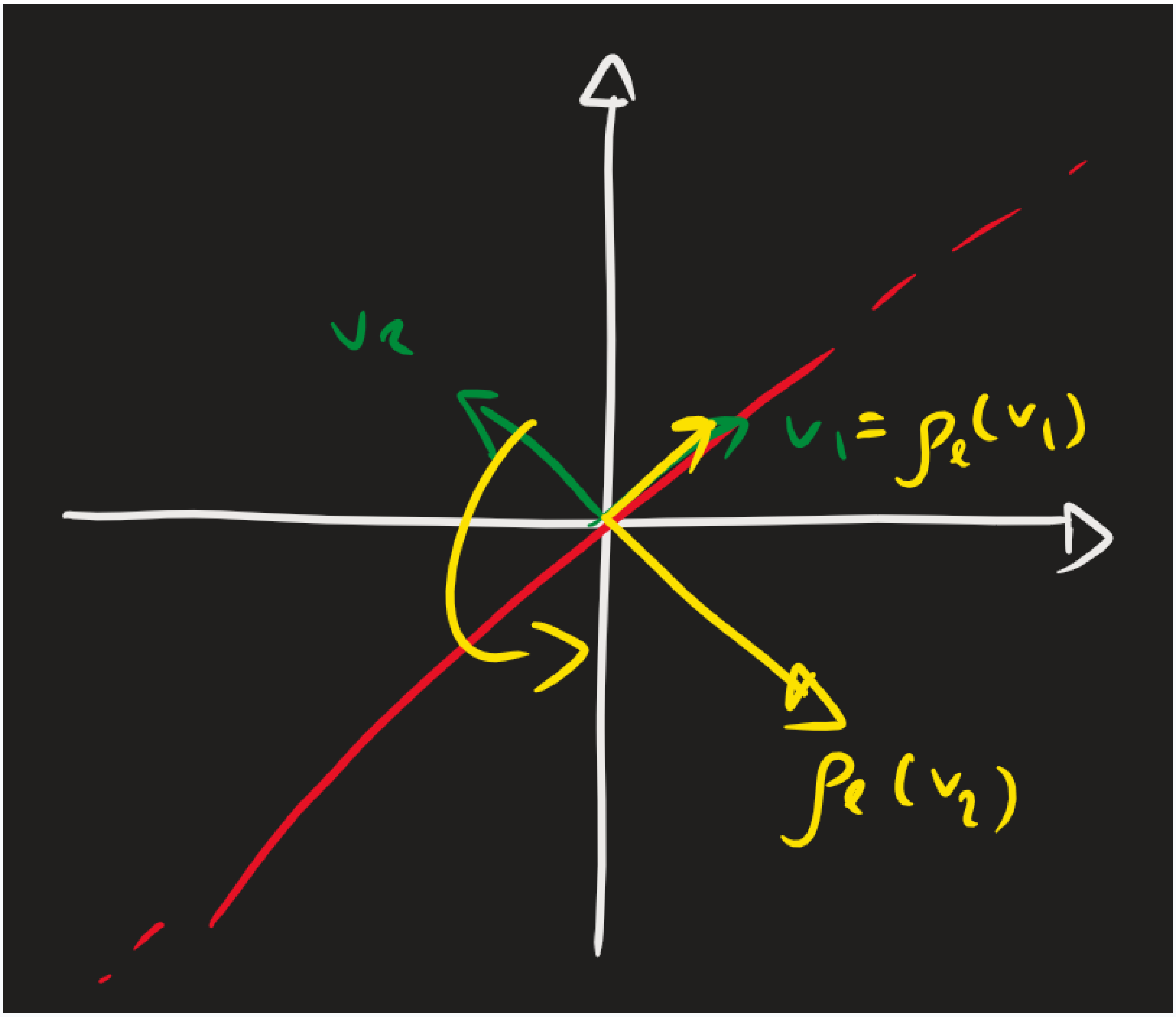


FIGURA 1.3. (*Idea grafica parte 2*)



2. Conclusione

#Osservazione

Osservazione 2.1. (conclusione delle considerazioni)

Alla fine notiamo che in entrambi gli esempi, gli *elementi della base* vengono mandati in *multipli* di sé stessi: infatti, nel primo esempio abbiamo

$$\rho(e_1) = -1 \cdot e_1; \rho(e_2) = e_2$$

Allora si può dire che quando abbiamo un comportamento del genere, la nostra scelta delle basi *"ha funzionato"* in quanto ci semplifica il calcolo delle matrici associate.
Vedremo che questa diventerà l'idea chiave della *diagonalizzazione*: la procedura per determinare *"basi efficienti"* per certe *applicazioni lineari* sarà proprio il problema della *diagonalizzazione*.

B. NOMENCLATURA PRELIMINARE

B1. Autovalore, autovettore, autospazio

Definizione di Autovalore, Autovettore, Autospazio

Definizione di autovalore, spettro di un'applicazione lineare; definizione di autovetture; definizione di autospazio.

---

1. Autovalore di un'applicazione

#Definizione

Definizione (Definizione 1.1. (autovalore di un'applicazione lineare)).

Sia $f: V \longrightarrow V$ un'*applicazione lineare* (Definizione 1 (Definizione 1.1. (applicazione lineare da V a V primo))), con $\dim V = n$.
Uno *scalare* $\lambda \in K$ si dice *autovalore* (in inglese *"Eigenvalue"* o in tedesco *"der Eigenwert"*) per l'applicazione f se si verifica il seguente

$$\boxed{\exists v \in V \diagdown \{0_V\} : f(v) = \lambda \cdot v}$$

A parole, *"un scalare λ è autovalore di f se esiste un vettore di V (escluso il vettore nullo in quanto creerebbe dei problemi) tale che l'immagine di tale vettore è uguale al vettore scalato per il scalare scelto"*.

#Osservazione

Osservazione 1.1. (l'esempio della riflessione rispetto alla retta l)

Riprendiamo l'*esempio 1.2.* relativo alle considerazioni preliminari (Considerazioni Preliminari sulla Diagonalizzazione > ^0ce141): notiamo che $1, -1$ sono *autovalori* di ρ_l.
Infatti,

$$\rho_l(v_1) = 1 \cdot v_1; \rho_l(v_2) = -1 \cdot v_2; v_1, v_2 \neq 0_V$$

Spettro di un'applicazione lineare

#Definizione

Definizione (Definizione 1.2. (spettro di un'applicazione lineare)).

Data $f : V \longrightarrow V$, definiamo l'*insieme dei autovalori di* f come lo *spettro di* f e lo indichiamo con

$$\operatorname{Sp} f$$

2. Autovettore di un'applicazione relativo ad un'autovalore

#Definizione

Definizione (Definizione 2.1. (autovettore di un'applicazione lineare relativo ad un'autovalore)).

Sia $f : V \longrightarrow V$ un'*applicazione lineare*; sia $\lambda \in K$ un *autovalore* di f.
Diciamo che il vettore $v \in V$ è *autovettore* (in inglese *"Eigenvector"* o in tedesco *"der Eigenvektor"*) se vale che

$$f(v) = \lambda \cdot v$$

3. Autospazio di un'autovalore

#Definizione

Definizione (Definizione 3.1. (autospazio di un autovalore)).

Sia $\lambda \in K$ un *autovalore* per f.
Definiamo *l'autospazio* (in inglese *"Eigenspace"* o in tedesco *"der Eigenraum"*) di λ come *l'insieme di autovettori* di λ e lo denotiamo con

$$\operatorname{Aut} \lambda$$

#Osservazione

Osservazione 3.1. (l'elemento nullo è elemento di qualsiasi autospazio)

Affinché lo scalare λ sia *autovalore*, per definizione, deve valore che

$$v \in V \diagdown \{0_V\} : f(v) = \lambda \cdot v$$

Allora se λ è *autovalore*, consideriamo l'autovettore $w \in V$ relativa a λ:

$$f(w) = \lambda \cdot w$$

In particolare se $w = 0_V$, varrebbe che

$$f(0_V) = \lambda \cdot 0_V = 0_V$$

Dunque vale che il *vettore nullo* 0_V appartiene *sempre* all'autospazio di un qualunque autovalore.

$$\forall \lambda \text{ autovalore di } f, 0_V \in \operatorname{Aut} \lambda$$

B2. Proposizioni su autospazi

Proposizioni su Autospazi

Proposizioni (teoremini) autospazi. L'autospazio di un autovalore è spazio vettoriale; vettori appartenenti ad autospazi diversi sono linearmente indipendenti.

---

1. Autospazio di un qualsiasi autovalore è sottospazio vettoriale

#Proposizione

Proposizione 1.1. (l'autospazio di un qualsiasi autovalore è sottospazio vettoriale del dominio/codominio)

Sia $f : V \longrightarrow V$ un'*applicazione lineare* (Definizione 1 (Definizione 1.1. (applicazione lineare da V a V primo))) con $\dim V = n$.
Sia $\lambda \in K$ un *autovalore* di f (Definizione 1 (Definizione 1.1. (autovalore di un'applicazione lineare))).
Allora $\operatorname{Aut} \lambda$ è *sottospazio vettoriale di V* (Definizione 1 (Definizione 1.1. (sottospazio vettoriale)).

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE della *proposizione 1.1.*
Verifichiamo le *tre proprietà caratterizzanti* di sottospazi vettoriali.

1. $0 \in \operatorname{Aut} \lambda$: per *l'osservazione 3.1. relativa agli autospazi* (Definizione di Autovalore, Autovettore, Autospazio > ^4d3c9b), il vettore nullo 0 è elemento di qualsiasi autospazio.
2. Sia $v \in V$, $\mu \in K$; $v \in \operatorname{Aut} \lambda$. Allora per ipotesi $f(v) = \lambda \cdot v$. Considero $\mu \cdot v$;
$$f(\mu \cdot v) = \mu \cdot f(v) = \mu \cdot \lambda \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v) \implies \mu \cdot v \in \operatorname{Aut} \lambda$$
3. Siano $v_1, v_2 \in V$. Siano $v_1, v_2 \in \operatorname{Aut} \lambda$. Allora, per ipotesi sono vere che
$$f(v_1) = \lambda v_1; f(v_2) = \lambda v_2$$
Ma allora
$$f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2 = \lambda(v_1 + v_2)$$
Il che implica
$$v_1 + v_2 \in \operatorname{Aut} \lambda$$

2. Due vettori appartenenti a due autospazi distinti sono linearmente indipendenti

#Proposizione

> **Proposizione 2.1. (due elementi di autospazi distinti sono linearmente indipendenti)**
>
> Sia $f : V \longrightarrow V$ un'*applicazione lineare* con $\dim V = n$.
> Siano λ, μ *autovalori distinti* di f.
> Siano $v_1 \in \operatorname{Aut} \lambda$ e $v_2 \in \operatorname{Aut} \mu$.
> Supponendo che $v_1 \neq v_2 \neq 0_V$, allora v_1 e v_2 sono vettori *linearmente indipendenti* (Definizione 3 (Definizione 2.1. (vettori linearmente indipendenti))).

C. DIAGONALIZZABILITA' DI UN'APPLICAZIONE LINEARE

C1. Definizione di applicazione lineare diagonalizzabile

Definizione di Matrice Diagonale e Applicazione Diagonalizzabile

Definizione di una matrice quadrata diagonale e di un'applicazione lineare diagonalizzabile.

---

1. Matrice quadrata diagonale

#Definizione

Definizione (Definizione 1.1. (matrice quadrata diagonale)).

Sia $A \in M_n(K)$ una *matrice quadrata* (Definizione 4 (Definizione 2.1. (matrice quadrata di ordine n))).
A si dice anche *diagonale* se tutti gli elementi non-nulli appartengono solo alla *diagonale principale* della matrice (Matrice).

2. Applicazione Lineare Diagonalizzabile

#Definizione

Definizione (Definizione 2.1. (applicazione lineare diagonalizzabile)).

Sia $f : V \longrightarrow V$ un'*applicazione lineare* (Definizione 1 (Definizione 1.1. (applicazione lineare da V a V primo))) con $\dim V = n$.
f si dice *diagonalizzabile* se esiste una base $\mathcal{B}$ di V tale che la *matrice associata* $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ (Definizione 1 (Definizione 1.1. (matrice associata a f rispetto alle basi B, C))) è *diagonale*.

#Osservazione

Osservazione 2.1. (significato della diagonalizzabilità)

Dire che la *matrice associata* $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ è *diagonale* è equivalente a dire che *ogni immagine dell'elemento della base* $\mathcal{B}$ è *autovettore* per un certo autovalore λ_i.

Infatti se $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ è diagonale, allora è una matrice del tipo

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Allora, *per definizione*, ogni immagine del vettore di $\mathcal{B}$ è del tipo

$$f(v_i) = 0 \cdot \lambda_1 + \ldots + \lambda_i v_i + \ldots + 0 \cdot \lambda_n$$

Ovvero v_i è elemento dello spettro di λ_i.

C2. Caratterizzazione delle applicazioni lineari diagonalizzabili

Proposizioni sulle Applicazioni Lineari Diagonalizzabili

Proposizioni di caratterizzazione sulle applicazioni lineari diagonalizzabili.

---

1. Osservazione sulle matrici

#Osservazione

Osservazione 1.1. (condizione necessaria e sufficiente per la diagonalizzabilità di un'applicazione lineare)

Ricordiamo che se $f: V \longrightarrow V$ è un'*applicazione lineare* di *dimensione finita* (Definizione 1 (Definizione 1.1. (applicazione lineare da V a V primo))), e N, N' sono le *matrici associate di* f alle basi $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ di V, ovvero

$$N = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f); N' = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)$$

Supponiamo inoltre che N' sia diagonale.
Allora dato che N, N' sono simili sicuramente vale che

$$N' = P^{-1} \cdot N \cdot P$$

dove P è una *matrice quadrata* invertibile.

Pertanto si può dire che un'applicazione lineare f è *diagonalizzabile* se e solo se *presa una sua matrice associata N, questa è simile ad una matrice diagonale; ovvero esiste una matrice P tale che la matrice risultante del calcolo $P^{-1} \cdot N \cdot P$ sia diagonale.*

2. Proposizione di caratterizzazione delle applicazioni diagonalizzabili

#Proposizione

Proposizione 2.1. (proprietà fondamentale della diagonalizzabilità)

Sia $f : V \longrightarrow V$ un'*applicazione lineare* di *dimensione finita*.
Allora f è diagonalizzabile *se e solo se* esiste una base $\mathcal{B}$ di V costituita tutta da *autovettori*.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE della *proposizione 2.1.* (^b86a9d)
" $\Longrightarrow$ ": Basta considerare la definizione di *applicazione lineare diagonalizzabile* (Definizione 2 (Definizione 2.1. (applicazione lineare diagonalizzabile))).
" $\Longleftarrow$: Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una *base* costituita da *autovettori* (Definizione 3 (Definizione 2.1. (autovettore di un'applicazione lineare relativo ad un'autovalore))), allora ad ogni v_i è associato un *autovalore* λ_i (Definizione 1 (Definizione 1.1. (autovalore di un'applicazione lineare))) tale che valga l'uguaglianza $f(v_i) = \lambda_i v_i$.
Ma allora ciò vuol dire che la sua *matrice associata* (Definizione 1 (Definizione 1.1. (matrice associata a f rispetto alle basi B, C))) è

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Allora chiaramente questa matrice è *diagonale*, il che significa f è *diagonalizzabile*. $\blacksquare$

Gli autovalori possono essere uguali (osservazione fondamentale)

Osservazione 2.1.

Però notiamo che non abbiamo supposto che tutti gli *autovalori* λ_i sono tutti distinti: infatti, alcuni *autovettori* possono avere lo stesso autovalore!
Per comprendere che una tale base possa esistere, andiamo a ripensare gli *autospazi* (Definizione 4 (Definizione 3.1. (autospazio di un autovalore))) in una nuova maniera.
In particolare, ridimostriamo che gli *autospazi* sono *sottospazi vettoriali* in una maniera alternativa.
Sia $f : V \longrightarrow V$ un'applicazione lineare di dimensione finita; sia $\lambda \in K$ un *autovalore*.
Allora per definizione deve esistere un *autovettore* per l'autovalore λ; ovvero

$$\begin{aligned} f(v) = \lambda \cdot v &\iff f(v) - \lambda \cdot v = 0 \\ &\iff f(v) - \lambda \cdot \mathrm{id}_V(v) = 0 \\ &\iff (f - \lambda \, \mathrm{id}_V)(v) = 0 \\ f_\lambda := f - \lambda \, \mathrm{id}_V &\iff f_\lambda(v) = 0 \end{aligned}$$

Consideriamo dunque la *"nuova applicazione"*

$$f_\lambda : V \longrightarrow V$$

Notiamo innanzitutto che $v \neq 0_V \in \ker f_\lambda$.
Pertanto $\ker f_\lambda \neq \{0\}$; allora f_λ *non* è *iniettiva*.
Allora f_λ *non* è neanche *invertibile*;
dunque per qualsiasi base $\mathcal{B}$ di V vale che

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \text{ non invertibile} &\iff \det(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f_\lambda)) = 0 \\ &\iff \det(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)) = 0 \\ &\iff \det(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) - \lambda M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V)) = 0 \\ &\iff \det(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) - \lambda \cdot \mathbb{1}_n) = 0 \end{aligned}$$

Pertanto gli *autovalori* di f sono *tutti e soli* gli *autovalori* $\lambda \in K$ tali per cui si ha

$$\boxed{\det(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) - \lambda \cdot \mathbb{1}_n) = 0}$$

Per una qualsiasi base $\mathcal{B}$ di V.
Il nostro problema principale sarà quello di trovare quei valori λ che soddisfano tale uguaglianza; ovvero dobbiamo trovare gli *autovalori* λ: lo risolveremo mediante la definizione del *polinomio caratteristico* (Definizione 1 (Definizione 1.1. (polinomio caratteristico di un'applicazione lineare))).

Infine, osserviamo che l'autospazio di λ è sottospazio vettoriale di V (come volevasi dimostrare all'inizio).

$$\begin{aligned}\operatorname{Aut}\lambda &= \{v \in V : f(v) = \lambda v\} \\ &= \{v \in V : f_\lambda(v) = 0\} \\ &= \ker f_\lambda\end{aligned}$$

Infatti, essendo $\ker f_\lambda$ uno *sottospazio vettoriale* di V, allora $\operatorname{Aut}\lambda$ è anch'esso uno *sottospazio vettoriale*.

C3. Polinomio caratteristico di un'applicazione lineare

Polinomio Caratteristico di una Applicazione Lineare

Definizione di polinomio caratteristico di una applicazione lineare; esempi.

---

1. Definizione del polinomio caratteristico di f

#Definizione

Definizione (Definizione 1.1. (polinomio caratteristico di un'applicazione lineare)).

Sia $f : V \longrightarrow V$ un'*applicazione lineare* con $\dim V = n$ (Definizione 1 (Definizione 1.1. (applicazione lineare da V a V primo))).
Consideriamo ora l'autovalore λ come un *parametro/incognita/variabile*; formiamo quindi il determinante

$$\det(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)$$

dove $\mathcal{B}$ è una qualsiasi *base* di V.
Per la *definizione del determinante* (Definizione 2 (Definizione 2.1. (determinante per lo sviluppo lungo la prima colonna)); si possono usare

altre definizioni alternative), il determinante della matrice $\det(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) - \lambda \cdot \text{id}_V)$ forma un *polinomio* in λ a *coefficienti* in K e questo polinomio è detto il *polinomio caratteristico* di f, ed e denotato come

$$P_f(\lambda)$$

#Osservazione

Osservazione 1.1. (utilità del polinomio caratteristico)

Tenendo in conto le considerazioni fatte sulle *applicazioni lineari diagonalizzabili*, in particolare sui suoi *autovalori* (Proposizioni sulle Applicazioni Lineari Diagonalizzabili > ^b8112c), questa definizione del *polinomio caratteristico* $P_f(\lambda)$ serve per *trovare* gli autovalori di f: basta porre infatti

$$\boxed{P_f(\lambda) = 0}$$

e risolvere tale equazione.

2. Esempio

#Esempio

Esempio 2.1. (esempio)

Considerare $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, ove

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ 2x + 2y \end{pmatrix}$$

Con la sua *base canonica*

$$\mathcal{E} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

Allora la sua *matrice associata* è

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Pertanto il *polinomio caratteristico* è

$$
\begin{aligned}
P_f(\lambda) &= \det(M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) - \lambda \cdot \mathbb{1}_n) \\
&= \det(\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 2 & 2-\lambda \end{pmatrix}) \\
&= (1-\lambda)(2-\lambda) - 2 \\
&= \lambda^2 - 3\lambda
\end{aligned}
$$

Allora ponendo $P_f(\lambda) = 0$ si ha che *gli autovalori di* f sono

$$P_f(\lambda) = \implies \lambda \in \{0, 3\}$$

Di conseguenza

$$\exists v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2 \diagdown \{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} : f(v_1) = \lambda_1 v_1 ; f(v_2) = \lambda_2 v_2$$

Notiamo che v_1, v_2 possono formare una *base* di V in quanto sono *linearmente indipendenti*.
Allora calcoliamo v_1, v_2 determinando

$$\ker f_0 = \ker f$$

e

$$\ker f_3 = \ker(f - 3\,\mathrm{id}_V)$$

che sono rispettivamente gli *autospazi* di $0, 3$.

C4. Molteplicità algebrica e geometrica di un autovalore

Molteplicità Geometrica e Algebrica di uno Autovalore

Definizione di molteplicità geometrica e algebrica di un autovalore. Esempi. Proposizioni e osservazioni.

---

1. Definizione di molteplicità geometrica

#Definizione

Definizione (Definizione 1.1. (molteplicità geometrica di un autovalore)).

Sia $f : V \longrightarrow V$ un'*applicazione lineare* con $\dim V$ finita (Definizione 1 (Definizione 1.1. (applicazione lineare da V a V primo))). Sia $\bar{\lambda} \in K$ un *autovalore* per f (Definizione 1 (Definizione 1.1. (autovalore di un'applicazione lineare)));
allora si definisce il numero

$$\dim_K \operatorname{Aut} \bar{\lambda}$$

come la *molteplicità geometrica* dell'autovalore $\bar{\lambda}$.
A parole questo vuol dire *"il numero di autovettori associati a $\bar{\lambda}$"*.
Inoltre lo denotiamo con

$$m_g(\bar{\lambda})$$

2. Definizione di molteplicità algebrica

#Definizione

Definizione (Definizione 2.1. (molteplicità algebrica di un autovalore)).

Sia $f : V \longrightarrow V$ un'*applicazione lineare* con $\dim V$ finita.
Sia $P_f(\lambda)$ il *polinomio caratteristico* (Polinomio Caratteristico di una Applicazione Lineare > ^3daf01).
Allora, supponendo che $\bar{\lambda}$ sia *autovalore* per f (ovvero $P_f(lam\bar{b}da) = 0$), per il teorema di Ruffini (Teorema 1 (Teorema 1.1. (di Ruffini))) vale che

$$P_f(\lambda) = (\lambda - \bar{\lambda}) \cdot g(\lambda)$$

Definiamo la *molteplicità algebrica* di $\bar{\lambda}$ come il *numero naturale* m per cui si ha

$$P_f(\lambda) = (\lambda - \bar{\lambda})^m \cdot \tilde{g}(\lambda)$$

ove $\lambda - \bar{\lambda}$ *non* divide $\tilde{g}(\lambda)$.
Ovvero a parole la *molteplicità algebrica* di $\bar{\lambda}$ è *"l'esponente più alto associato al valore $\bar{\lambda}$ del polinomio caratteristico linearizzato"*.
Inoltre denotiamo questo con

$$m_a(\bar{\lambda})$$

#Esempio

Esempio 2.1. (esempio)

Sia $P_f(\lambda) = (\lambda - 5)^2 \cdot (\lambda + 1)^3$
Allora $5, -1$ sono *autovalori* per f e la molteplicità algebrica per questi sono rispettivamente $2, 3$.

3. Relazione tra la molteplicità algebrica e geometrica

#Proposizione

Proposizione 3.1. (relazione tra molteplicità algebrica e geometrica)

Sia $f : V \longrightarrow V$ un'*applicazione lineare* con $\dim V$ finita e con λ autovalore per f.
Allora vale che

$$m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$$

#Dimostrazione
DIMOSTRAZIONE della *proposizione 3.1.* (^f9542a)
Omessa.

4. Osservazione finale

#Osservazione

Osservazione 4.1. (osservazione sulla molteplicità algebrica)

Se $f : V \longrightarrow V$ è un'*applicazione lineare* con dimensione finita e chiamo tale dimensione n, allora $P_f(\lambda)$ è un polinomio di grado *esattamente* n.
Pertanto la *somma* delle *molteplicità algebrica* di tutti gli autovalori è *al più* n.

D. TEOREMA DEL CRITERIO DI DIAGONALIZZAZIONE

Teorema del Criterio di Diagonalizzazione

Teorema del Criterio di Diagonalizzazione: osservazione preliminare, enunciato ed esempio.

---

0. Osservazione preliminare

#Osservazione

Osservazione 0.a. (osservazione preliminare)

Supponiamo che $f: V \longrightarrow V$ sia un'*applicazione lineare* con $\dim V = n$ (Definizione 1 (Definizione 1.1. (applicazione lineare da V a V primo))), tale per cui il *polinomio caratteristico* (Polinomio Caratteristico di una Applicazione Lineare > ^3daf01) $P_f(\lambda)$ si scompone nel prodotto di n *fattori lineari* che sono tutti *distinti*; ovvero un polinomio del tipo

$$P_f(\lambda = (\lambda - \alpha_1) \cdot \ldots \cdot (\lambda - \alpha_n); \alpha_1 \neq \ldots \neq \alpha_n$$

Allora $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sono *autovalori* (Definizione 1 (Definizione 1.1. (autovalore di un'applicazione lineare))) in quanto radici del *polinomio caratteristico*.
Per definizione, si verifica che

$$\forall \alpha_i, \exists v_i \neq 0_V : f(v_i) = \alpha_i v_i$$

In questo modo determiniamo tutti gli *autovettori* v_i relativi ad ogni autovalore α_i diverso.
Quindi si evince che $v_1, \ldots, v_n$ sono *linearmente indipendenti* in quanto appartengono ad *autospazi diversi* (Definizione 4 (Definizione 3.1. (autospazio di un autovalore)), Proposizioni su Autospazi > ^529f85).
Pertanto, gli *autovettori* $v_1, \ldots, v_n$ per il *teorema di estensione* (Teorema 2.1. (Teorema del completamento/estensione)) e per il *teorema dello scarto* (Teorema 1.1. (Teorema di estrazione di una base)) saranno in grado di formare una base $\mathcal{B}$ per V.
Pertanto ho una *base di autovettori* per V; ciò significa che f è *diagonalizzabile*.

Inoltre notiamo che la *molteplicità geometrica* (Definizione 1 (Definizione 1.1. (molteplicità geometrica di un autovalore))) di *ogni autovalore* α_i è uguale alla sua *molteplicità algebrica* (Definizione 2 (Definizione 2.1. (molteplicità algebrica di un autovalore))), per la *proposizione 3.1.*

(Molteplicità Geometrica e Algebrica di uno Autovalore > ^f9542a).
Ciò implica che

$$\dim \operatorname{Aut} \alpha_i = 1$$

Inoltre, dato che

$$v_i \in \operatorname{Aut} \alpha_i, v_i \neq 0_V \implies \operatorname{Aut} \alpha_i = \operatorname{span} v_i$$

Questa è *una* situazione della diagonalizzabilità: però ce ne sono altre, e li presentiamo col seguente teorema.

1. Enunciato

#Teorema

Teorema (Teorema 1.1. (del criterio della diagonalizzabilità di un'applicazione lineare)).

Sia $f : V \longrightarrow V$ un'*applicazione lineare* di *dimensione finita*.
Allora f è *diagonalizzabile* se e solo se valgono le seguenti proprietà:

1. Il *polinomio caratteristico* $P_f(\lambda)$ si scompone *completamente* in fattori di *primo grado* (non necessariamente distinti).
2. Per ogni autovalore $\bar{\lambda}$ (ovvero radice del polinomio caratteristico $P_f(\lambda)$), vale la seguente relazione:

$$m_g(\bar{\lambda}) = m_a(\bar{\lambda})$$

Alternativamente si può *"parafrasare"* le due condizioni come il seguente:

1. $$P_f(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \alpha_k)^{m_k}, k \leq n$$
2. $$m_i = \dim \operatorname{Aut} \alpha_i$$

2. Dimostrazione

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *teorema del criterio di diagonalizzazione*
Omessa.

3. Esempio (prototipo di un'esercizio dell'esame)

#Esempio

Esempio 3.1.

Consideriamo il seguente esempio, che sarà un possibile *modello-base* dell'esercizio dell'esame.
Consideriamo la *seguente applicazione lineare* $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con la sua *base canonica* $\mathcal{E}_3$.

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 0y - 3z \\ 0x - y + 0z \\ -3x + 0y + 2z \end{pmatrix}$$

1. Calcolo la matrice associata $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Considero il polinomio associato $P_f(\lambda)$ e lo pongo a 0

$$\begin{aligned} P_f(\lambda) = 0 \iff \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & -3 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ -3 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = 0 \\ (2-\lambda)(-1-\lambda)(2-\lambda) + (-3)(-3)(1-\lambda) = 0 \\ \ldots = 0 \\ (\lambda+1)^2(\lambda-5) = 0 \end{aligned}$$

3. Considero lo spettro di f

$$\operatorname{Sp} f = \{-1, 5\}$$

4. Considero la molteplicità algebrica di ogni autovalore

$$m_a(-1) = 2; m_a(5) = 1$$

5. Per determinare se f è diagonalizzabile dobbiamo verificare che

$$\begin{cases} m_a(-1) = 2 \implies m_g(-1) = 2 \\ m_a(5) = 1 \implies m_g(5) = 1 \end{cases}$$

Notiamo che la seconda si verifica da sola gratuitamente: quindi ci resta da determinare se la molteplicità geometrica di -1 è effettivamente 2.

6. Per calcolare $\text{Aut}\,(-1)$ consideriamo

$$(M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) - (-1)\mathbb{1}_3) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Ma, dato che *seconda colonna* di questa matrice è l'*immagine* della *seconda colonna* della base standard (in quanto è la matrice associata a f_{-1}); allora l'immagine di del vettore e_2 è *sempre* base del nucleo di questa matrice.

$$\ker \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \text{span}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$$

Che dimostra

$$\dim \ker(f_{-1}) = 2 \implies m_g(-1) = 2$$

Pertanto per il *teorema del criterio di diagonalizzabilità*, f è *diagonalizzabile*.