Funzioni Reali - Sommario

Funzioni di variabile reale; funzioni di potenza e di radice; funzione del valore assoluto; funzioni trigonometriche; ... (parte ancora da finire)

Funzioni di potenza, radice e valore assoluto

Definizioni di funzione potenza p_n e radice p_n^{-1}. Definizione del valore assoluto $|\cdot|$; disuguaglianza triangolare. Alcuni esercizi generali.

---

1. Funzione potenza

DEF 1.1. Sia $n \in \mathbb{N} \diagdown \{0\}$; definiamo quindi la **funzione potenza n-esima** come

$$p_n : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty); x \mapsto p_n(x) = x^n$$

Si riporta un grafico di alcune funzioni potenza p_n.
[GRAFICO DA INSERIRE]

OSS 1.1. Si vede dal grafico che la funzione è *strettamente crescente*, ovvero se prendiamo $x_1, x_2 \in E$ (dominio) ove $x_2 > x_1$, allora sicuramente abbiamo

$$p_n(x_2) > p_n(x_1)$$

DIMOSTRAZIONE.
Prendiamo ad esempio p_2; abbiamo innanzitutto

$$0 \leq x_1 < x_2$$

allora li moltiplichiamo per x_1 e x_2, ottenendo

$$\begin{cases} x_1 < x_2 x_1 \\ x_1 x_2 < x_2^2 \end{cases}$$

quindi

$$0 \leq x_1^2 < x_2^2 \iff p_2(x_1) < p_2(x_2), \forall x_1, x_2$$

> ⚠ **Notare che questa dimostra che è vera solo per p_2; sarebbe da dimostrare che è vera anche per p_n (forse si va per induzione? boh, vedrò o chiederò al prof qualcosa)**

OSS 1.2. Notiamo che la *funzione potenza* p_n (o x^n) è *biiettiva* (Funzioni, **DEF 3.3.**), ovvero è sia *suriettiva* che *iniettiva*.
DIMOSTRAZIONE.
Per dimostrare che è iniettiva basta riosservare quanto visto in **OSS 1.2.**; ovvero che la funzione è strettamente crescente.
Dopodiché la funzione è anche suriettiva in quanto una conseguenza dell'assioma di separazione S).

2. Funzione radice

OSS 2.1. Dall'**OSS 1.2.** abbiamo notato che la *funzione potenza* $p_n(x)$ è *biiettiva*; pertanto per il *teorema dell'esistenza della funzione inversa* (Funzioni, **TEOREMA 1.**) esiste una funzione inversa che definiremo.

DEF 2.1. Definiamo la **funzione radice n-esima** p_n^{-1}

$$p_n^{-1}:[0,+\infty)\longrightarrow[0,+\infty);x^n\mapsto x$$

Graficamente questo equivale a *"scambiare le assi"* del grafico della funzione, oppure di *"cambiare la prospettiva da cui si guarda il grafico"*, ovvero
[GRAFICO DA INSERIRE]

3. Valore assoluto

DEF 3.1. Sia il **valore assoluto** una *funzione*

$$|\cdot|:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R};x\mapsto|x|=\begin{cases}x:x\geq0\\-x:x<0\end{cases}$$

Ad esempio, il grafico di $|x|$ si rappresenta nel modo seguente:
[GRAFICO DA INSERIRE]

3.1. Proprietà, disuguaglianza triangolare

OSS 3.1.1. Si può osservare alcune proprietà del *valore assoluto*, ovvero:

1. Sia $a\geq0$, $x\in\mathbb{R}$, allora

$$|x|\leq a\iff -a\leq x\leq a$$

DIMOSTRAZIONE.
Posso considerare due casi, ovvero
$x\geq0$: abbiamo quindi $|x|=x$, pertanto

$$\begin{cases}|x|\leq a\implies x\leq a\\x\geq0\implies x\geq -a\end{cases}\longrightarrow -a\leq x\leq a$$

$x \leq 0$: abbiamo quindi $|x| = -x$ e il discorso è analogo:

$$\begin{cases} |x| \leq a \implies -x \leq a \iff x \geq -a \\ x \leq 0 \implies x \leq a \end{cases} \longrightarrow -a \leq x \leq a$$

■

2. Prendendo le stesse premesse di prima, abbiamo

$$|x| \geq a \iff x \leq -a \wedge x \geq a$$

3. **LA DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE.**
   Siano $x, y \in \mathbb{R}$, allora abbiamo

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

   DIMOSTRAZIONE.
   Infatti se abbiamo da un lato

$$-|x| \leq x \leq |x|$$

   e

$$-|y| \leq y \leq |y|$$

   allora sommandoli si avrebbe

$$-(|x|+|y|) \leq x+y \leq |x|+|y|$$

   che per la prima proprietà equivale a dire

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

4. Esercizi misti

Presentiamo degli esercizi, ovvero *equazioni* (Equazioni e soluzione) o *disequazioni* contenenti queste funzioni appena presentate.

ESERCIZIO 4.1. Determinare

$$3x + 5 = 0$$

ESERCIZIO 4.2. Disegnare il grafico di

$$f(x) = 3x + 5$$

con $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

ESERCIZIO 4.3. Risolvere

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

ESERCIZIO 4.4. Disegnare

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x^2 - 2x - 3$$

ESERCIZIO 4.5. Risolvere

$$\frac{x^2 - 2x + 3}{x - 3} \geq 0$$

ESERCIZIO 4.6. Risolvere

$$\sqrt{x + 1} \geq 3x + 2$$

ESERCIZIO 4.8. Risolvere

$$\frac{x - 3}{2x + 1} > \frac{x - 1}{x + 1}$$

ESERCIZIO 4.8. Risolvere

$$\sqrt{6x + 1} \geq 3 - 2x$$

ESERCIZIO 4.9. Risolvere

$$|x + 4| < 8$$

ESERCIZIO 4.10. Risolvere

$$|\frac{2x + 1}{x^2 - 4}| \geq 1$$

ESERCIZIO 4.11. Risolvere

$$|x + 1| \geq |x - 1|$$

Funzioni trigonometriche

Breve descrizione qui
