Geometria Affine - Sommario

Tutto sulla Geometria Affine, in particolare la Geometria Affine del piano e dello spazio.

---

0. INTRODUZIONE ALLA GEOMETRIA AFFINE

Introduzione alla Geometria Affine

Breve discorso di introduzione alla Geometria affine

---

0. Voci Correlate

- Spazi Vettoriali
- Vettori Liberi
- Vettori Applicati

1. Breve discordo introduttorio

DI COSA TRATTA LA GEOMETRIA AFFINE? La geometria affine è quel ramo affascinante che si occupa degli oggetti *"dritti"* - *piani* e *rette* - esplorandoli in modo intrigante. In questa esplorazione, attribuiremo a questi oggetti la caratteristica distintiva di essere *"spazi di punti"* e useremo i *"spazi vettoriali"* come dei *spazi di direzioni* (Spazi Vettoriali).

LA DIFFERENZA TRA SPAZI VETTORIALI E SPAZI AFFINI. Come mai non utilizziamo i *spazi vettoriali* direttamente come dei *spazi affini*? In altre parole, come mai non facciamo coincidere questi due concetti?
Questo perché un spazio vettoriale, ad esempio $\mathbb{R}^2$, ha delle proprietà *"extra"* rispetto dello *spazio euclideo*: ovvero l'elemento nullo 0_V, o nel caso di $\mathbb{R}^2$ il *vettore-colonna* $(0,0)$.
Invece in uno spazio euclideo la nozione di *"punto nullo"* non avrebbe senso.

IL PUNTO CRUCIALE. Uno dei punti cruciali di questo studio della geometria affine è lo studio dei *sottospazi affini* e in particolare troveremo due metodi interessanti per *codificarli*: da un lato abbiamo le *equazioni cartesiane*, dall'altro le *equazioni parametriche*.
Vedremo che sono particolarmente interessanti in quanto essi possono presentare collegamenti interessanti con la *statistica* e con l'*informatica*.

A. LO SPAZIO AFFINE

A1. Definizione di Spazio Affine

Definizione di Spazio Affine

Definizione di Spazio Affine: le proprietà caratterizzanti, l'origine del concetto di spazio affine.

---

0. Voci correlate

- Vettori Applicati
- Vettori Liberi
- Spazi Vettoriali

1. Definizione di Spazio Affine

#Definizione

Definizione (Definizione 1.1. (spazio affine)).

Sia V un K-*spazio vettoriale* (Definizione 1 (Definizione 1.1. (spazio vettoriale sul campo K))).
Definiamo un insieme $\mathbb{A}$ come uno *spazio affine su* V nel caso in cui esiste l'*applicazione* σ

$$\sigma : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \longrightarrow V$$

(Inoltre denotiamo l'applicazione σ degli elementi $P, Q \in \mathbb{A}$ come)

$$\sigma(P,Q) = \overrightarrow{PQ}$$

Poi questa applicazione σ deve rispettare i seguenti *criteri* (SA1., SA2.).

- SA1. (l'unicità del vettore di due punti)

$$\forall P \in \mathbb{A}, \forall v \in V, \exists! Q \in \mathbb{A} : v = \overrightarrow{PQ}$$

- SA2. (la somma di due punti è la risultante)

$$\forall P, Q, R \in \mathbb{A}, \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$$

#Definizione

Definizione (Definizione 1.2. (punto di spazio affine)).

Sia $\mathbb{A}$ uno *spazio affine* su V (Definizione 1 (Definizione 1.1. (spazio affine))), allora un qualunque elemento di $\mathbb{A}$ si dice *punto*.

2. Origine del concetto

#Osservazione

Osservazione 2.1. (spazio affine come generalizzazione dei vettori liberi)

Questa definizione di *spazio affine* emerge come *generalizzazione* delle proprietà dei *vettori liberi* (Vettori Liberi > ^d09c32).
Infatti abbiamo visto che questi *vettori liberi* formano uno *spazio vettoriale* (Definizione 1 (Definizione 1.1. (spazio vettoriale sul campo K))), e che per ogni *punto* P e per ogni *vettore libero* v esiste un *vettore applicato* (Vettori Applicati > ^cc8a3c) con punto di applicazione P e *classe di equipollenza* v (Vettori Liberi > ^dc78a7). Geometricamente questo ragionamento viene illustrato nella *figura 2.1.*.
Dopodiché il punto Q che abbiamo determinato è *unico* e vale che le classe di equipollenza del vettore PQ è uguale a v, che è una classe di equipollenza.

$$\overrightarrow{PQ} = v$$

> In particolare vale anche la proprietà *SA2.* della definizione di *spazio affine*: se ho *tre punti*, allora posso *"collegare"* solo il punto iniziale e finale, *"saltando"* il punto intermedio (*figura 2.2.*).

FIGURA 2.1. (*Vettore applicato come elemento particolare di un vettore libero*)

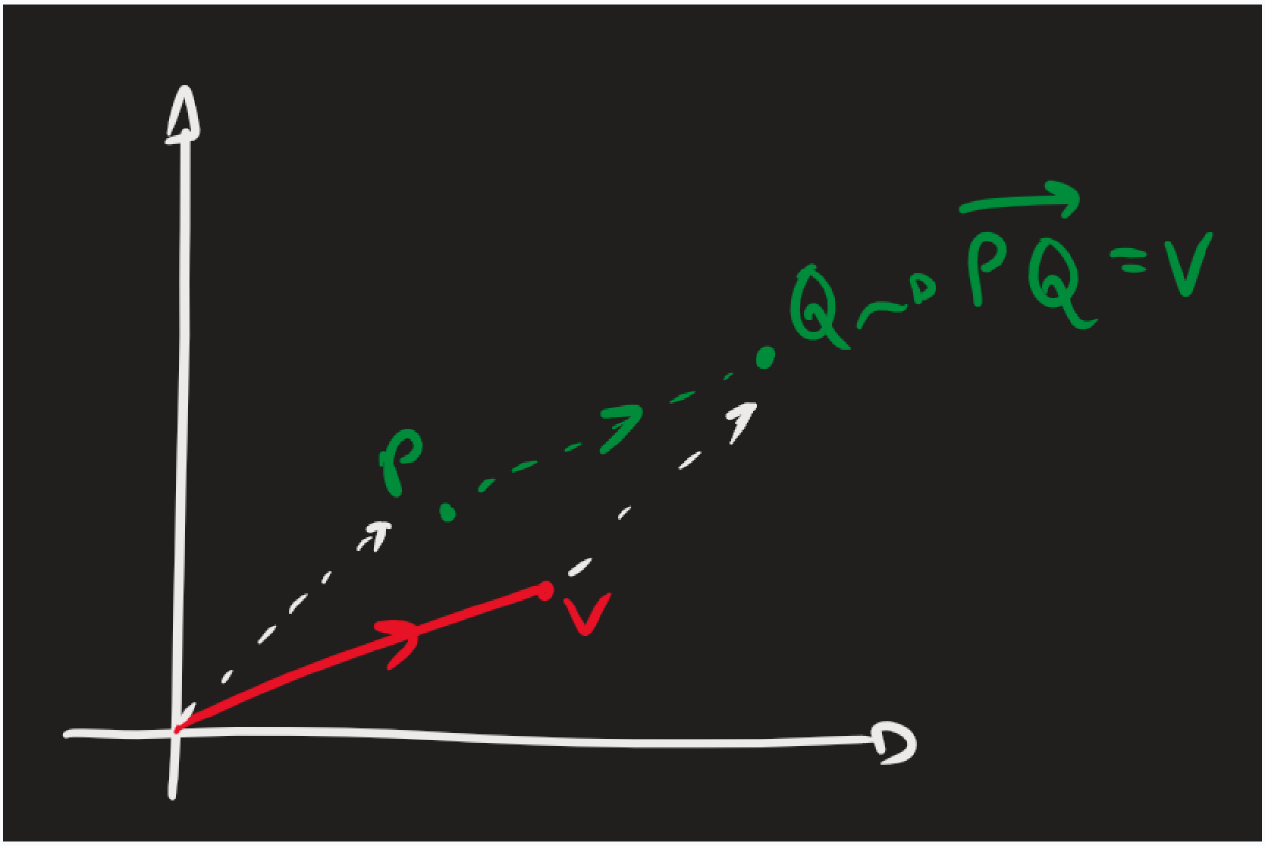
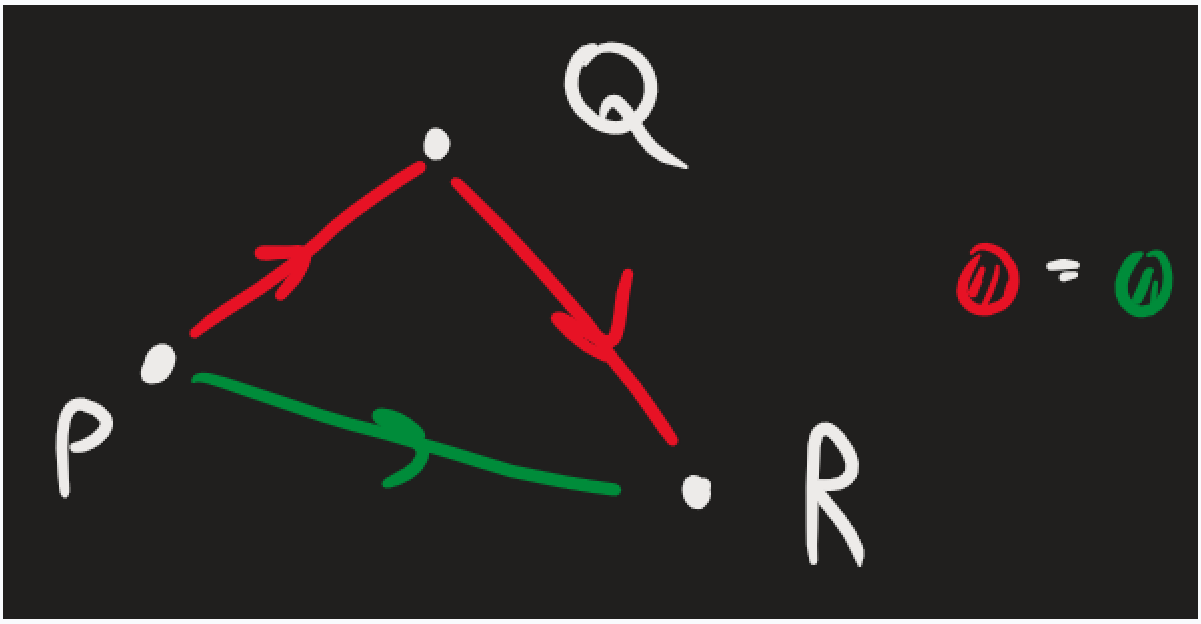


FIGURA 2.2. (*Regola SA2. in termini di vettori applicati*)



A2. Spazio Affine $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$

Spazio Affine su K

Esempio particolare di spazio affine: definizione di spazio affine su K^n, $\mathbb{A}_K^n$

---

0. Prerequisiti e/o voci correlate

- Introduzione alla Geometria Affine
- Definizione di Spazio Affine

1. Definizione particolare di spazio affine su K^n

#Esempio

Definizione (Definizione 1.1. (Esempio particolare $\mathbb{A}_K^n$)).

Si può prendere lo *spazio affine* $\mathbb{A} = K^n$ e scegliere il suo *spazio vettoriale "d'appoggio"* il medesimo (ovvero $V = K^n$): dal discorso introduttorio (Introduzione alla Geometria Affine) ricordiamoci che comunque K^n svolge due ruoli *diversi*! Da un lato abbiamo K^n in quanto *spazio affine*, dall'altro lato abbiamo K^n in quanto *spazio vettoriale*.

Allora quando pensiamo K^n in quanto *spazio affine*, denotiamo i suoi elementi come dei *vettori-riga*; invece quando la pensiamo in quanto *spazio vettoriale*, denotiamo i suoi elementi come dei *vettori-colonna*.

In questo caso la funzione σ di *definizione* che rende K^n uno spazio affine è il seguente.

$$\begin{aligned}\sigma : K^n \times K^n &\longrightarrow K^n \\ (P, Q) &\mapsto \overrightarrow{PQ} \\ [(p_1, \ldots, p_n), (q_1, \ldots, q_n)] &\mapsto \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ \vdots \\ q_n - p_n \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Teniamo questa definizione in mente, in quanto questo ci servirà per studiare lo spazio $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$.
Infatti, indicheremo questo tipo di spazio affine con

$$\boxed{\mathbb{A}_K^n}$$

2. Esempio

#Esempio

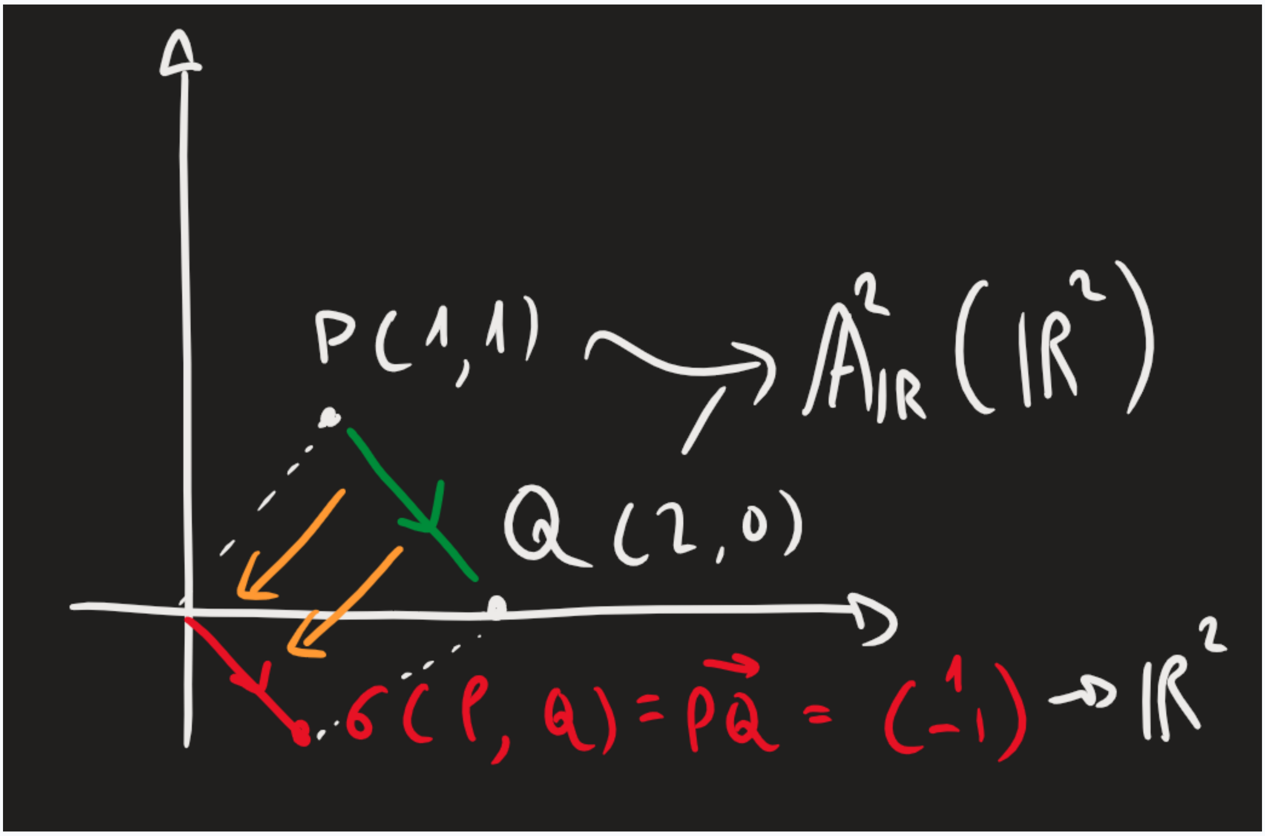
Esempio 1.1. (dello spazio affine $\mathbb{A}^2_\mathbb{R}$)

Consideriamo lo spazio affine $\mathbb{A}^2_\mathbb{R}$.
Prendiamo i punti $P, Q = (1,1), (2,0)$.
Allora in questo caso

$$\sigma(P,Q) = \overrightarrow{(PQ)} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(*figura 3.1.*)

FIGURA 3.1. (esempio dello spazio affine 2D sui reali)



A3. Proprietà dello spazio affine

Proprietà dello Spazio Affine

Lemma di proprietà dello spazio affine, scaturite dalle proprietà di definizione.

---

0. Prerequisiti e/o voci correlate

- Spazi Vettoriali
- Definizione di Spazio Affine

1. Proprietà dello Spazio Affine

#Lemma

Lemma (Lemma 1.1. (di proprietà dello spazio affine)).

Sia $\mathbb{A}$ uno *spazio affine* su V (Definizione 1 (Definizione 1.1. (spazio affine)), Definizione 1 (Definizione 1.1. (spazio vettoriale sul campo K))).
Allora valgono le seguenti proprietà.

$$
\begin{aligned}
&1.\ \forall P \in \mathbb{A}, \sigma(P,P) = \overrightarrow{PP} = 0_V \\
&2.\ \forall P,Q \in \mathbb{A}, \sigma(P,Q) = -\sigma(Q,P) \iff \overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}
\end{aligned}
$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *lemma 1.1.*
Le due proprietà seguono dalle *proprietà di definizione* SA1., SA2. dello *spazio affine* (Definizione 1 (Definizione 1.1. (spazio affine))).

1. Devo mostrare che per ogni *vettore* $v \in V$ vale

$$v + \overrightarrow{PP} = v$$

   in quanto il vettore $\sigma(P,P) = 0_V$.
   Allora per la *SA1.* della proprietà di definizione, vale che

$$\exists ! Q \in \mathbb{A} : v = \overrightarrow{PQ}$$

   Ma allora si ha

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PP} = \overrightarrow{PP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PQ} = v$$

2. Devo mostrare la somma

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} = 0_V$$

Ma allora

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} \overset{\text{SA1}}{=} \overrightarrow{PP} = 0_V \blacksquare$$

A4. Dimensione di uno spazio affine

Dimensione di uno Spazio Affine

Definizione di dimensione per uno spazio affine: casi particolari

---

0. Prerequisiti e/o voci correlate

- Dimensione
- Spazi Vettoriali
- Definizione di Spazio Affine

1. Definizione di Dimensione per uno Spazio Affine

#Definizione

Definizione (Definizione 1.1. (dimensione di uno spazio affine)).

Sia $\mathbb{A}$ uno *spazio affine* su V (Definizione 1 (Definizione 1.1. (spazio affine))), sia V un K-*spazio vettoriale* di *dimensione finita* (Definizione 1 (Definizione 1.1. (spazio vettoriale sul campo K)), Definizione 1 (Definizione 1.1. (dimensione di un spazio vettoriale))).
Allora definisco la *dimensione dello spazio affine* $\mathbb{A}$ come la *dimensione del suo spazio vettoriale "di appoggio"* V;

$$\boxed{\dim \mathbb{A} = \dim V}$$

2. Casi particolari

#Definizione

Definizione (Definizione 2.1. (punto, retta, piano e spazio affine)).

Voglio dividere *"casistiche"* in cui ho il numero $\dim \mathbb{A}$ diverse.

1. Se $\dim \mathbb{A} = 0$, parliamo di *punto affine*.
2. Se $\dim \mathbb{A} = 1$, parliamo di *retta affine*.
3. Se $\dim \mathbb{A} = 2$, parliamo di *piano affine*.
4. Se $\dim \mathbb{A} \geq 3$, parliamo di *spazio affine*.

Quindi abbiamo in totale *quattro casi*.

A5. Riferimento affine su uno spazio affine

Riferimento affine su uno Spazio Affine

Definizione di riferimento affine su uno spazio affine; esempio.

---

0. Prerequisiti e/o voci correlate

- Definizione di Spazio Affine
- Definizione di Base
- Spazio Affine su K

1. Definizione di riferimento affine

#Definizione

Definizione (Definizione 1.1. (riferimento affine su uno spazio affine relativo ad una base)).

Sia $\mathbb{A}$ uno *spazio affine* su V (Definizione 1 (Definizione 1.1. (spazio affine))), sia V di *dimensione finita* con $\dim V = n$ (Definizione 1 (Definizione 1.1. (dimensione di un spazio vettoriale))).
Definiamo un *riferimento affine su* $\mathbb{A}$ come la *coppia* $(O, \mathcal{B})$, dove

- $O \in \mathbb{A}$ è un punto che definiamo essere *"l'origine del riferimento affine"*.
- $\mathcal{B}$ è una *base* di V (Definizione 1.1. (Base)).

Allora dato un *riferimento affine* $(O, \mathcal{B})$ e dato un *punto* $P \in \mathbb{A}$, le *coordinate* di P rispetto a $(O, \mathcal{B})$ sono la n-upla (ovvero il *vettore-riga*) $(p_1, \ldots, p_n)$ data dalle *coordinate* rispetto alla base $\mathcal{B}$ del vettore $\sigma(O, P)$ (Definizione 1.2. (Coordinate di vettore rispetto alla base)).

2. Esempio con spazio affine su K

#Definizione

Definizione (Definizione 2.1. (riferimento standard / canonico)).

Se consideriamo lo spazio affine $\mathbb{A}^n_\mathbb{R}$ (Spazio Affine su K) e il riferimento affine $(O, \mathcal{E})$ dove:

- $O = (0, 0)$
- $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$ è la *base canonica* dove

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Allora il riferimento $(O, \mathcal{E})$ viene definito come il *"riferimento standard/canonico"* di $A^n_\mathbb{R}$ e le *coordinate* di un qualsiasi punto rispetto a $(O, \mathcal{E})$ sono dette le *"coordinate standard"*.

#Esempio

Esempio 2.1. (esempio con riferimento canonico)

Considero lo spazio affine $\mathbb{A}^3_\mathbb{R}$ e il *riferimento standard* $(O, \mathcal{E})$.
Allora fissando il punto $P = (3, 1, 2)$ voglio ottenere le sue *coordinate standard* rispetto al *riferimento standard*.
Considero dunque il vettore $\sigma(O, P)$:

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 3-0 \\ 1-0 \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Consideriamo dunque le sue *coordinate* rispetto alla *base standard* $\mathcal{E}$;

$$\overrightarrow{OP} = 3\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Pertanto le *coordinate* di $\sigma(O, P)$, ovvero le coordinate del punto P rispetto al riferimento standard, sono $3, 1, 2$.

#Esempio

Esempio 2.2. (esempio con riferimento non canonico)

Se avessimo considerato sempre lo stesso punto $P = (3, 1, 2) \in \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ ma avessimo preso un altro *riferimento affine* $(O', \mathcal{B})$, dove:

- $O' = (1, 0, 0)$
- La base non standard è

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} \right\}$$

Allora per calcolare le *coordinate* del punto P rispetto al *"nuovo"* riferimento affine si deve comunque prendere in considerazione il vettore $\sigma(O', P)$:

$$\overrightarrow{O'P} = \begin{pmatrix}3-1\\1-0\\2-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$$

Allora in questo caso le *coordinate* di $\sigma(O', P)$ rispetto a $\mathcal{B}$ sono $(1, 1, -2)$.

B. LO SOTTOSPAZIO AFFINE

B1. Definizione di sottospazio affine

Definizione di Sottospazio Affine

Definizione di Sottospazio Affine, esempio e definizione di dimensione per sottospazio affine.

---

0. Prerequisiti e/o voci correlate

- Spazi Vettoriali
- Dimensione
- Definizione di Spazio Affine
- Spazio Affine su K

1. Definizione di Sottospazio Affine

#Definizione

Definizione (Definizione 1.1. (sottospazio affine passante per Q e parallelo a W)).

Sia $\mathbb{A}$ uno *spazio affine* su V (Definizione 1 (Definizione 1.1. (spazio affine))) e consideriamo un *punto* $Q \in \mathbb{A}$ e un *sottospazio vettoriale* $W \subseteq V$ (Definizione 1 (Definizione 1.1. (sottospazio vettoriale))).
Definiamo allora il *sottospazio affine passante per* Q *e parallelo a* W il seguente insieme:

$$\mathbb{S} := \{P \in \mathbb{A} \mid \overrightarrow{QP} \in W\} \subseteq \mathbb{A}$$

Ovvero *"l'insieme di tutti i punti di uno spazio affine tali che l'applicazione* σ *di un punto qualsiasi e* Q *stia in* W*"*.
Inoltre, diciamo che il *sottospazio vettoriale* W è la *giacitura* di $\mathbb{S}$.

2. Esempio su R2

#Esempio

Esempio 2.1. (esempio di sottospazio affine su $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$)

Consideriamo lo *spazio affine* $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ con $V = \mathbb{R}^2$ (Definizione 1 (Definizione 1.1. (Esempio particolare $\mathbb{A}^n_K$))).
Prendiamo il punto $Q = (2, 1)$ e $W = \operatorname{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$.
Allora vogliamo sapere *"chi è lo sottospazio affine* $\mathbb{S}$*"*.

Scriviamo innanzitutto la definizione dello sottospazio affine e vediamo di *"analizzarlo"*:

$$\begin{aligned}
\mathbb{S} &= \{P \in \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} : \overrightarrow{QP} \in W\} \\
&= \left\{(x_1, x_2) : \begin{pmatrix} x_1 - 2 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{span}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \\
&= \left\{(x_1, x_2) : \begin{pmatrix} x_1 - 2 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}\right\} \\
&= \left\{(x_1, x_2) : \begin{pmatrix} x_1 - 2 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}\right\} \\
&= \left\{(x_1, x_2) : \begin{cases} x_1 = 2 + t \\ x_2 = 1 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}\right\}
\end{aligned}$$

Vedremo in seguito che questa è la *forma parametrica* della descrizione di un *sottospazio vettoriale* e questa ci permette di *"generare"* tutti i possibili punti di $\mathbb{S}$ che vogliamo, ponendo t per un qualsiasi numero.

3. Dimensione di Sottospazio Affine

#Definizione

Definizione (Definizione 3.1. (dimensione di sottospazio affine)).

Sia $\mathbb{A}$ uno *sottospazio affine* su V e sia $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{A}$ un *sottospazio affine* di *giacitura* W.
Diciamo che la *dimensione* (Definizione 1 (Definizione 1.1. (dimensione di un spazio vettoriale))) di $\mathbb{S}$ è la medesima della sua *giacitura* W.

$$\boxed{\dim \mathbb{S} := \dim W}$$

B2. Proprietà dello sottospazio affine

Proprietà dello Sottospazio Affine

Tre proprietà dello sottospazio affine.

---

0. Prerequisiti e/o voci correlate

- Definizione di Sottospazio Affine

1. Le proprietà dello Sottospazio Affine

#Proposizione

Proposizione 1.1. (le tre proprietà dello sottospazio affine)

Sia $\mathbb{A}$ uno *spazio affine* su V (Definizione 1 (Definizione 1.1. (spazio affine))) e sia $\mathbb{S} \subseteq A$ uno *sottospazio affine* di giacitura W passante per Q (Definizione 1 (Definizione 1.1. (sottospazio affine passante per Q e parallelo a W))).
Allora valgono le seguenti proprietà:

1. Il punto Q per cui passa $\mathbb{S}$ appartiene a $\mathbb{S}$ stesso.
$$Q \in \mathbb{S}$$
2. Chiusura (?) di σ in W.
$$\forall P_1, P_2 \in \mathbb{S}, \sigma(P_1, P_2) = \overrightarrow{P_1 P_2} \in W$$
3. Lo sottospazio affine passante per un altro punto di $\mathbb{S}$ è lo stesso.
$$\forall R \in \mathbb{S}, \mathbb{S} = \{P \in \mathbb{A} : \sigma(R, P) \in W\}$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE della *proposizione 1.1.* (^7668d6)

1. Questo è evidentemente vero e sembra addirittura quasi una tautologia;
$$Q \in \mathbb{S} \implies \overrightarrow{QQ} \in W \iff 0_W \in W$$
e questo è palesemente vero in quanto W è *sottospazio vettoriale*.
2. Vogliamo verificare l'implicazione $P_1, P_2 \in \mathbb{S} \implies \sigma(P_1, P_2) \in W$.
Per definizione vale che
$$\overrightarrow{QP_1}, \overrightarrow{QP_2} \in W$$
Allora possiamo riscriverli come

$$\overrightarrow{P_1P_2} \overset{\text{SA2}}{=} \overrightarrow{P_1Q} + \overrightarrow{QP_2} = -\overrightarrow{QP_1} + \overrightarrow{QP_2} \in W$$

3. Devo mostrare la *doppia inclusione*

$$\mathbb{S} = \{P \in \mathbb{A} : \sigma(R, P) \in W\}$$

"$\subseteq$": Sia P un qualsiasi elemento di $\mathbb{S}$; allora per definizione vale che $\sigma(Q, P) \in W$.
D'altro canto abbiamo che $R \in \mathbb{S}$, allora vale pure $\sigma(R, P) \in W$. Pertanto

$$\overrightarrow{RP} \overset{\text{SA2}}{=} \overrightarrow{RQ} + \overrightarrow{QP} = -\underbrace{\overrightarrow{QR}}_{\in W} + \underbrace{\overrightarrow{QP}}_{\in W} \implies \sigma(R, P) \in W$$

"$\supseteq$": Sia $P \in \mathbb{A}$ un punto qualsiasi tale che $\sigma(R, P) \in W$. Dato che $R \in \mathbb{S}$, allora deve valere che $\sigma(Q, R) \in W$. Però possiamo scrivere $\sigma(Q, P)$ come

$$\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RP} \in W$$

ed entrambi appartengono a W, di conseguenza $\sigma(Q, P) \in W$, ovvero $P \in \mathbb{S}$. $\blacksquare$

#Osservazione

Osservazione 1.1. (lo sottospazio affine con giacitura W è spazio affine su W)

Notiamo che se $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{A}$ è *sottospazio affine* con *giacitura* W, allora si può mostrare che $\mathbb{S}$ è *spazio affine* su W.

B3. Definizione di Iperpiano

Iperpiano

Definizione di Iperpiano.

---

0. Prerequisiti e/o voci correlate

- Spazi Vettoriali
- Definizione di Spazio Affine
- Definizione di Sottospazio Affine
- Dimensione di uno Spazio Affine

1. Definizione di Iperpiano

#Definizione

Definizione (Definizione 1.1. (iperpiano di uno spazio affine)).

Sia $\mathbb{A}$ un *spazio affine* su V (Definizione 1 (Definizione 1.1. (spazio affine))), sia $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{A}$ un *sottospazio affine* (Definizione 1 (Definizione 1.1. (sottospazio affine passante per Q e parallelo a W))).
Se vale che

$$\boxed{\dim \mathbb{A} = n \implies \dim \mathbb{S} = n - 1}$$

allora $\mathbb{S}$ si dice *iperpiano*.

#Osservazione

Osservazione 1.1. (iperpiani di spazi affini su K)

Possiamo *"ridefinire"* i punti, le rette e i piani (Definizione 2 (Definizione 2.1. (punto, retta, piano e spazio affine))) in termini di *iperpiani*:

- Un punto è un *iperpiano* di $\mathbb{A}^1_K$;
- Una retta è un *iperpiano* di $\mathbb{A}^2_K$;
- Un piano è un *iperpiano* di $\mathbb{A}^3_K$ in poi.

Le definizioni sono quindi simili.

B4. Posizione reciproca tra sottospazi affini

Posizione Reciproca di Sottospazi Affini

Posizione reciproca tra sottospazi affini: definizione di sottospazi affini incidenti, coincidenti, paralleli e sghembi.

0. Prerequisiti e/o voci correlate

- Definizione di Sottospazio Affine
- Geometria del Piano Affine
- Geometria dello Spazio Affine

1. Sottospazi affini incidenti, coincidenti, paralleli e sghembi

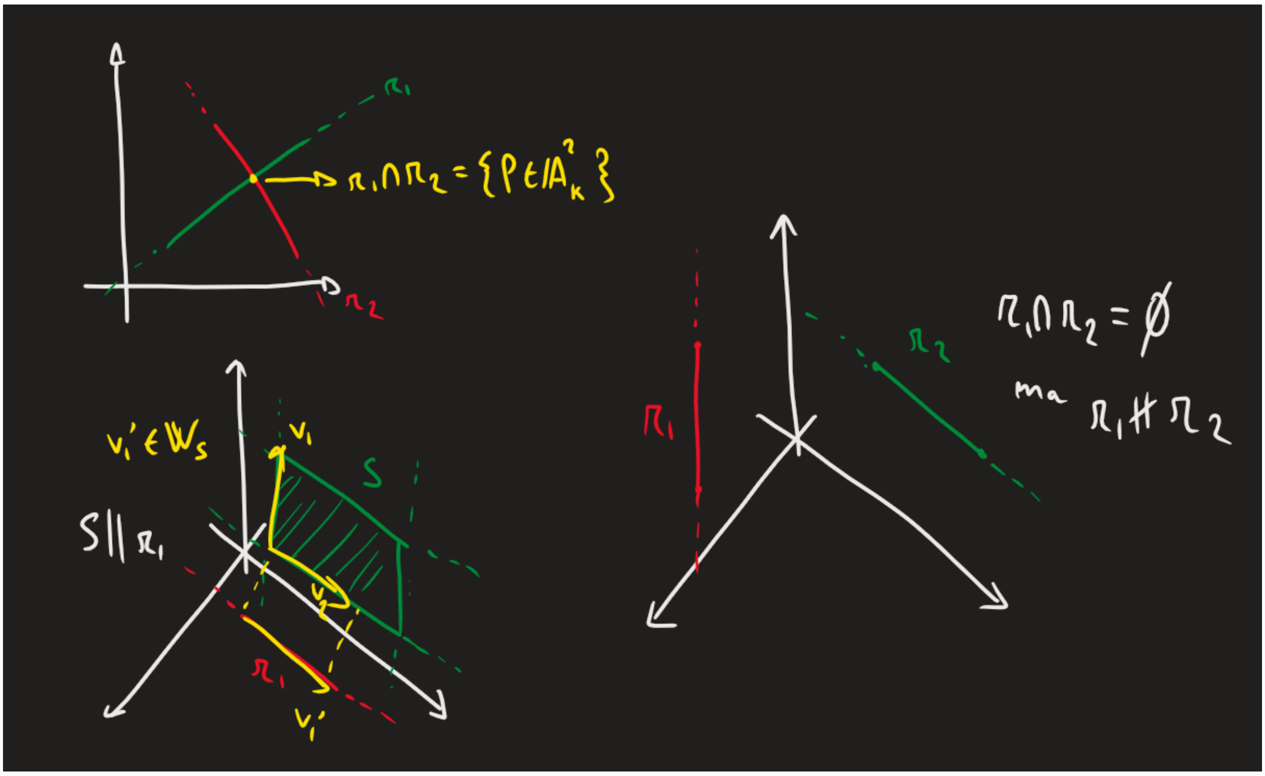
#Definizione

Definizione (Definizione 1.1. (sottospazi affini incidenti, coincidenti, paralleli e sghembi)).

Siano $\mathbb{S}$, $\mathbb{S}'$ dei *sottospazi affini* (Definizione 1 (Definizione 1.1. (sottospazio affine passante per Q e parallelo a W))) di *giacitura* rispettivamente W, W'. Allora $\mathbb{S}, \mathbb{S}'$ si dicono:

- *incidenti* se $\mathbb{S} \cap \mathbb{S}' \neq \emptyset$
    - in particolare *coincidenti* se si verifica che $\mathbb{S} = \mathbb{S}'$
- *paralleli* (e scriviamo $\mathbb{S} \parallel \mathbb{S}'$) se $W \subseteq W'$ o viceversa; in particolare si deve *considerare* la giacitura più *"debole"*, ovvero il sottospazio vettoriale di *dimensione minore*.
  In particolare se hanno la stessa dimensione, dev'essere $W = W'$
- *sghembi* se non sono né *incidenti* né *paralleli*; questo può succedere ad esempio con *due rette* in $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$.

FIGURA 1.1. (*Situazioni grafiche in 2D e 3D*)



C. LA CODIFICAZIONE DI UNO SOTTOSPAZIO AFFINE

C1. Equazioni cartesiane e parametriche di uno sottospazio affine

Definizione di Equazioni Cartesiane e Parametriche di uno Sottospazio Affine

---

Definizione di Equazioni Cartesiane ed Equazioni Parametriche per la codificazione per uno sottospazio affine; teorema preliminare, dimostrazione e definizioni.

---

0. Prerequisiti e/o voci correlate

- Sistemi Lineari
- Teoremi sui Sistemi Lineari (di struttura delle soluzioni per i sistemi lineari arbitrari)
- Definizione di Spazio Affine
- Spazio Affine su K

- Definizione di Sottospazio Affine

1. Teorema preliminare

#Teorema

Teorema (Teorema 1.1. (di codificazione dei sottospazi affini)).

Sia $A \in M_{m,n}(K)$ (Matrice > ^c6b210), $b \in K^m$.
Supponiamo che il *sistema lineare* $Ax = b$ (Definizione 2 (Definizione 1.1. (sistema lineare di m equazioni in n incognite a coefficienti in K))) sia *compatibile* e sia S l'insieme delle *soluzioni* (Definizione 4 (Definizione 1.3. (soluzione di un sistema))).
Allora

$$S = \mathbb{S} \subseteq \mathbb{A}_K^n$$

è uno *sottospazio affine* la cui *giacitura* è il *sottospazio vettoriale* $W \subseteq K^n$ delle *soluzioni* del *sistema lineare omogeneo associato* $Ax = 0$ (Definizione 1 (Definizione 1.1. (sottospazio affine passante per Q e parallelo a W)))
Inoltre,

$$\dim \mathbb{S} = \dim W = n - \operatorname{rg} A$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *teorema 1.1.* (Teorema 1 (Teorema 1.1. (di codificazione dei sottospazi affini)))
Questo teorema segue direttamente dal *teorema di struttura per le soluzioni dei sistemi lineari arbitrari* (Definizione 4 (Definizione 1.1. (sistema lineare omogeneo associato))). Infatti *tutte e sole* le soluzioni di $Ax = b$ sono della forma

$$s = \tilde{s} + s_0 \implies s - \tilde{s} = s_0$$

dove $\tilde{s}$ è una *soluzione fissata* di $Ax = b$, invece x_0 è una *soluzione qualsiasi* di $Ax = 0$.
Pertanto se *"interpretiamo"* $\tilde{s} \in K^n$ come un *punto* $Q \in \mathbb{A}_K^n$ e pensiamo ad una soluzione di $AX = b$, come un *altro punto* $P \in \mathbb{A}_K^n$, allora vediamo che i punti $\sigma(Q, P)$ sono del tipo

$$\overrightarrow{QP} = s - \tilde{s} = s_0 \in W \implies \sigma(Q, P) \in W$$

e s_0 appartiene a W, che sarebbe l'insieme delle *soluzioni* di $Ax = 0$. Questo è esattamente la *definizione* di un *sottospazio affine* passante per Q di giacitura W (Definizione 1 (Definizione 1.1. (sottospazio affine passante per Q e parallelo a W))).
In tal caso dal *teorema di dimensione* (Teorema di dimensione delle soluzioni di sistemi lineari) discende che

$$\dim \mathbb{S} = \dim W = n - \operatorname{rg} A \blacksquare$$

2. Definizione di Equazioni Cartesiane e Parametriche

Equazioni Cartesiane

#Definizione

Definizione (Definizione 2.1. (equazioni cartesiane di uno sottospazio affine)).

Sia $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{A}$ un *sottospazio affine "codificata"* dal sistema lineare (in parole più rigorose, $\mathbb{S}$ rappresenta le soluzioni del seguente sistema lineare)

$$Ax = b$$

Allora le *equazioni* del sistema lineare si dicono *equazioni cartesiane* per $\mathbb{S}$, ovvero le equazioni del tipo

$$\boxed{\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}}$$

#Osservazione

Osservazione 2.1.

Se un sistema lineare $Ax = b$ ha come *insieme delle soluzioni* S, allora ogni *sistema lineare equivalente* (Definizione 8 (Definizione 1.7. (sistemi lineari equivalenti))) a $Ax = b$ avrà il *medesimo* insieme S.
Pertanto, applicando le *operazioni elementari* (Algoritmo di Gauß > ^ccc408) a $Ax = b$, otteniamo *altre* equazioni cartesiane per S.
Infatti, questa osservazione diventerà la base dell'*"algoritmo"* del

passaggio dalle equazioni cartesiane a quelle parametriche (Passaggio tra Equazioni Cartesiane e Parametriche di uno Sottospazio Affine).

Equazioni Parametriche

#Osservazione

Osservazione 2.2. (osservazione preliminare per la definizione di equazioni parametriche)

Sia ora $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{A}^n_K$ un *sottospazio affine* passante per $Q \in \mathbb{A}^n_K$ e di *giacitura* $W \subseteq K^n$. Supponiamo che W è generata dalla *base* (Definizione 1.1. (Base)) $w_1, \ldots, w_k$; ovvero $W = \text{span}(w_1, \ldots, w_k)$.
Allora possiamo scrivere ogni *elemento* della base come *elemento* di K^n:

$$w_1 = \begin{pmatrix} w_{11} \\ \vdots \\ w_{n1} \end{pmatrix}, \ldots, w_k = \begin{pmatrix} w_{1n} \\ \vdots \\ v_{nk} \end{pmatrix}, \forall w_{ij} \in K$$

Allora per *definizione* se $Q = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{A}^n_K$, i punti $P = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{A}^n_K$ di $\mathbb{S}$ sono *tutti e soli* punti che soddisfano $\sigma(Q, P) \in W$.
Riscriviamo quindi questa condizione utilizzando i termini che abbiamo appena introdotto.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{QP} \in W &\iff \begin{pmatrix} x_1 - q_1 \\ \vdots \\ x_n - q_n \end{pmatrix} \in W \\ &\iff \begin{pmatrix} x_1 - q_1 \\ \vdots \\ x_n - q_n \end{pmatrix} = t_1 w_1 + \ldots + t_k w_k, t_i \in K \\ &\iff \begin{pmatrix} x_1 - q_1 \\ \vdots \\ x_n - q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 w_{11} + \ldots + t_k w_{1k} \\ \vdots \\ t_1 w_{n1} + \ldots + t_k w_{nk} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

In definitiva abbiamo il *sistema di equazioni*

$$\begin{cases} x_1 = q_1 + t_1 w_{11} + \ldots + t_k w_{1k} \\ \vdots \\ x_n = q_n + t_1 w_{n1} + \ldots + t_k w_{nk} \end{cases}$$

#Definizione

Definizione (Definizione 2.2. (equazioni parametriche per uno sottospazio affine)).

Sia $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{A}$ uno *sottospazio affine* di giacitura W e passante per Q. Sia la base di W generata dai vettori $w_1, \ldots, w_k \in V$. Sia Q il punto $(q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{A}$. Allora il seguente sistema di equazioni si dice *equazioni parametriche per uno sottospazio affine con k parametri*.

$$\boxed{\begin{cases} x_1 = q_1 + t_1 w_{11} + \ldots + t_k w_{1k} \\ \vdots \\ x_n = q_n + t_1 w_{n1} + \ldots + t_k w_{nk} \end{cases}}$$

dove t_i sono detti *parametri*.

3. Pro e Contro

#Osservazione

Osservazione 3.1. (vantaggi e svantaggi delle due forme)

Vediamo che abbiamo due *forme* distinte per *"codificare"* un *sottospazio affine*; entrambi di essi hanno i suoi vantaggi e svantaggi.
Nel caso delle *equazioni parametriche* possiamo facilmente generare punti dello sottospazio, quindi possiamo mediante *gli strumenti dell'informatica* generare una *visualizzazione grafica* dello sottospazio affine inserendo valori di t a piacimento; tuttavia se invece vogliamo verificare che un *punto specifico* appartenga ad uno sottospazio affine, allora si dovrebbe *"provare"* tutti i valori t.
Però saremmo facilitati con le *equazioni cartesiane* a questo fine: basta inserire i valori numerici del punto per verificare se esso appartenga o meno al sottospazio affine.

Questa distinzione vale anche per gli oggetti algebrici!

4. Conseguenze di queste forme

#Osservazione

Osservazione 4.1. (un sottospazio affine è descritto da $n-k$ equazioni cartesiane)

Da quanto visto, un *sottospazio affine* $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{A}^n_K$ di *dimensione* k (Definizione 2 (Definizione 3.1. (dimensione di sottospazio affine))) è *sempre* descritto da $n-k$ *equazioni cartesiane* (Definizione 2 (Definizione 2.1. (equazioni cartesiane di uno sottospazio affine))), data la sua definizione.
In particolare un *retta* in $\mathbb{A}^2_K$ è descritta da *una sola* equazione cartesiana; invece in $\mathbb{A}^3_K$ verrebbe descritta da *due* equazioni cartesiane.

#Osservazione

Osservazione 4.2. (ogni iperpiano è descritta da una sola equazione)

Sia $\mathbb{S} in \mathbb{A}^n_K$ un *iperpiano* (Definizione 1 (Definizione 1.1. (iperpiano di uno spazio affine))), ovvero un *sottospazio affine* di dimensione $n-1$.
Allora come visto sopra, $\mathbb{S}$ è descritta da $n-(n-1)=1$ *equazione cartesiana*.
Viceversa, ogni volte che imponiamo un'*equazione non banale* (ovvero non del tipo $0=0$) allora determiniamo un *iperpiano* in $\mathbb{A}^n_K$; in altre parole *ogni* iperpiano di $\mathbb{A}^n_K$ è descritta da un'equazione del tipo

$$\boxed{a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = d}$$

#Osservazione

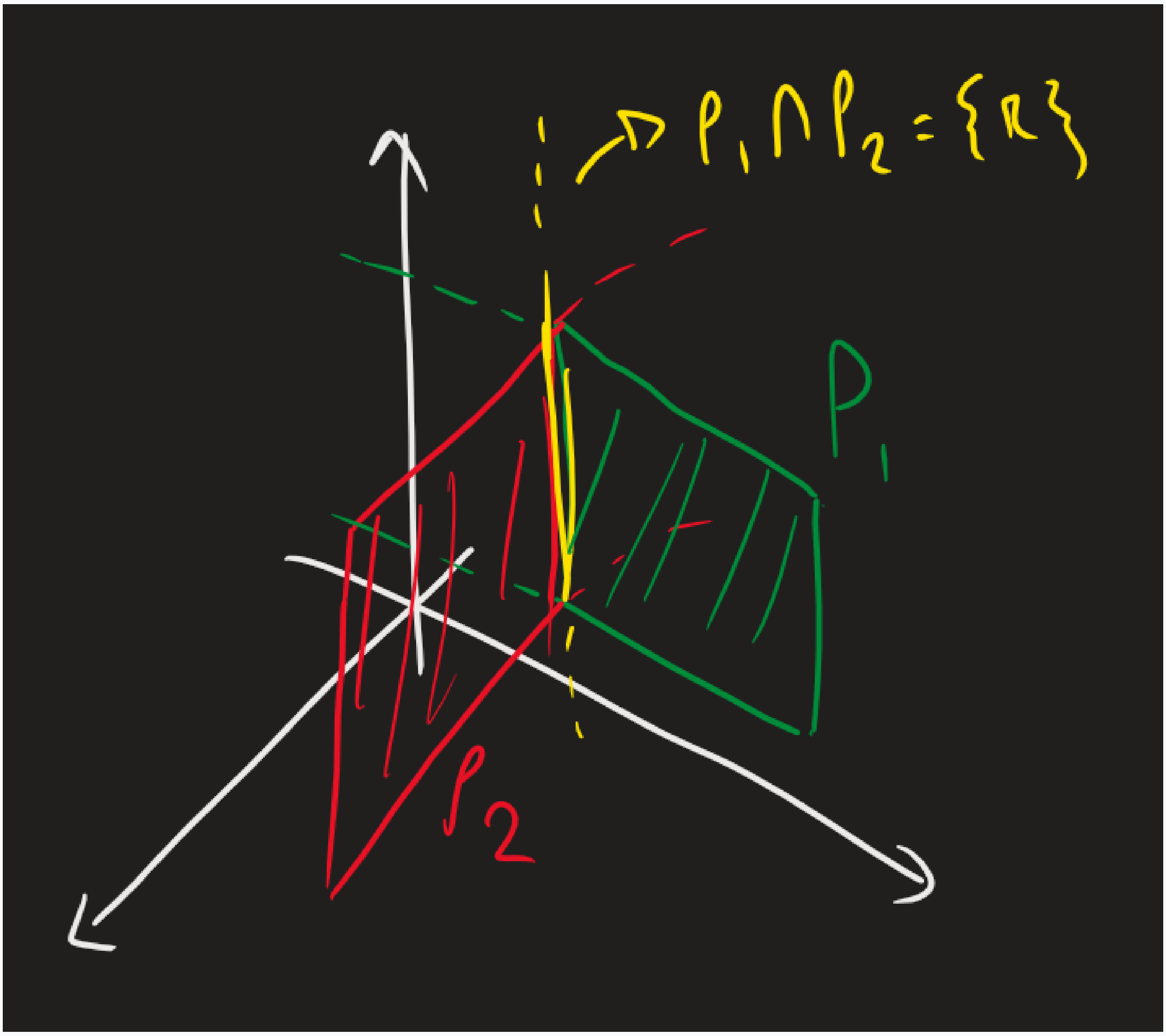
Osservazione 4.2. (una retta è determinata da due equazioni nello spazio)

Come vedremo nella *geometria dello spazio affine* (Geometria dello Spazio Affine), una *retta* in $\mathbb{A}^3_\mathbb{R}$ è descritta da un *sistema di equazioni* del tipo

$$\boxed{\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = d_1 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = d_3 \end{cases}}$$

> Graficamente questo significa *"l'intersezione di due piani distinti forma una retta nello spazio"*.

FIGURA 4.2. (*OSS 4.2.*)



C2. Passaggio tra equazioni cartesiane e parametriche

Passaggio tra Equazioni Cartesiane e Parametriche di uno Sottospazio Affine

---

Passaggio tra equazione cartesiana a parametrica (e viceversa) di uno sottospazio affine.

---

0. Prerequisiti e/o voci correlate

- Definizione di Sottospazio Affine
- Sistemi Lineari
- Teorema di Rouché-Capelli
- Definizione di Base
- Dipendenza e Indipendenza Lineare
- Rango
- Teoremi su Rango

1. Da cartesiana a parametrica

#Proposizione

Proposizione 1.1. (algoritmo di passaggio da equazione cartesiane a parametriche)

Sia $Ax = b$ un *sistema lineare* (Definizione 2 (Definizione 1.1. (sistema lineare di m equazioni in n incognite a coefficienti in K))) che *esprime* le *equazioni cartesiane* (Definizione 2 (Definizione 2.1. (equazioni cartesiane di uno sottospazio affine))) di un *sottospazio affine* (Definizione 1 (Definizione 1.1. (sottospazio affine passante per Q e parallelo a W))).

Allora per trovare le *equazioni parametriche* di questo *sottospazio affine* è sufficiente considerare il *teorema di struttura delle soluzioni per i sistemi lineari* (Definizione 4 (Definizione 1.1. (sistema lineare omogeneo associato))): ovvero si tratta prima di determinare una *soluzione particolare* $\tilde{s}$ risolvendo $Ax = b$, e poi determinando l'insieme delle soluzioni W di $Ax = 0$; essendo W lo *span* (Combinazione Lineare) di alcuni vettori, allora avremo dei parametri liberi che chiameremo $t_1, \ldots, t_n$.

Infine un *qualunque elemento* della soluzione di $Ax = b$ è un *elemento* dello *sottospazio affine* (Teorema 1 (Teorema 1.1. (di codificazione dei sottospazi affini))): pertanto si avrà un *sistema di equazioni* con delle variabili libere arbitrarie, che è esattamente la nozione di *equazioni parametriche*.

#Esempio

Esempio 1.1.

Si consideri il seguente esempio.

$$S : \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 1 \\ 6x_1 - 4x_2 = 2 \end{cases}$$

Per il *teorema di Rouché-Capelli* (Teorema di Rouché-Capelli), questo *sistema lineare* è compatibile. Calcoliamo dunque la sua generica soluzione s.

In primo luogo determiniamo il *numero di equazioni* necessarie per descrivere il sottospazio, calcolando $\dim S = \dim W = 2 - rg(A) = 1$
Allora S è una *retta* e la sua sola equazione cartesiana è

$$\{3x_1 - 2x_2 = 1$$

Ora, considerando il *teorema di struttura delle soluzioni di un sistema lineare qualsiasi*, sappiamo che $s = s_0 + \tilde{s}$.
Teniamo la *soluzione particolare*

$$\tilde{s} \overset{x_1=0}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Ora calcoliamo il sottospazio delle soluzioni s_0;

$$3x_1 - 2x_2 = 0 \implies 3x_1 = 2x_2 \implies \{s_0\} = \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}\right)$$

Pertanto le equazioni parametriche di S sono

$$S : \begin{cases} x_1 = 2t \\ x_2 = 3t - \frac{1}{2} \end{cases}$$

2. Da parametrica a cartesiana

#Proposizione

Proposizione 2.1. (algoritmo di passaggio da equazioni parametriche a cartesiane)

Supponiamo di avere le seguenti *equazioni parametriche* (Definizione 3 (Definizione 2.2. (equazioni parametriche per uno sottospazio affine))) per un *sottospazio affine* $S \subseteq \mathbb{A}_K^n$, ovvero un sistema del tipo

$$\begin{cases} x_1 - q_1 = t_1 w_{11} + \ldots + t_k w_{1k} \\ \vdots \\ x_n - q_n = t_1 w_{n1} + \ldots + t_k w_{nk} \end{cases}$$

Queste valgono *se e solo se* i vettori $x_i - q_i$ sono *combinazioni lineari* della *base* di W, ovvero $w_1, \dots, w_k$; allora questo vale se e solo se i vettori

$$\left\{ w_1, \dots, w_k, \begin{pmatrix} x_1 - q_1 \\ \vdots \\ x_n - q_n \end{pmatrix} \right\}$$

sono *linearmente dipendenti* (Definizione 1 (Definizione 1.1. (dipendenza lineare di vettori))): questo vale *se e solo se* la matrice completa del sistema ha rango k; infatti il *rango minimo* dev'essere k in quanto $w_1, \dots, w_k$ sono *linearmente indipendenti* in quanto elementi della base, ma il *rango massimo* dev'essere anche k dato che abbiamo *un vettore linearmente dipendente*.

In altre parole, bisogna imporre la condizione

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} w_{11} & \dots & w_{1k} & x_1 - q_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ w_{n1} & \dots & w_{nk} & x_n - q_n \end{pmatrix} = k$$

Allora usiamo il *teorema di caratterizzazione del rango* (Teoremi su Rango > ^9290df): prima gradinizziamo la matrice $(A|b)$ mediante *l'algoritmo di Gauß* (Algoritmo di Gauß), dopodiché imponiamo le ultime $n-k$ righe nulle. Ovvero, avremmo una matrice del tipo

$$\begin{pmatrix} * & | & * \\ 0 & | & \boxed{*} \end{pmatrix}$$

Infatti imponiamo le equazioni che troviamo nella parte segnata uguale a 0. Così troviamo le *equazioni cartesiane* per S.

#Esempio

Esempio 2.1.

Si consideri il seguente esempio.
Abbiamo in $\mathbb{A}^2_\mathbb{R}$ il *sottospazio affine* S dei punti $P : (x, y)$ con le *equazioni parametriche*

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2 + t \end{cases} \equiv \begin{pmatrix} x \\ y - 2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Allora per ottenere le equazioni cartesiano e considero la *matrice completa* e lo gradinizzo mediante *l'algoritmo di Gauß*

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 1 & y-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y-2-x \end{pmatrix}$$

Ora dobbiamo imporre che $rg(A|b) = 1$, ovvero $y - 2 - x = 0$.
In definitiva, l'equazione cartesiana ottenuta è l'unica equazione

$$y = x + 2$$

che ha senso, dato che $\dim S = \dim \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 1$.

D. LA GEOMETRIA DEL PIANO E DELLO SPAZIO AFFINE

D1. La geometria del piano affine 2D

Geometria del Piano Affine

Cenni alla geometria del piano affine: tutti i sottospazi affini possibili; le rette nel piano, equazioni cartesiane e parametriche; generare retta da due punti; condizioni di coincidenza e parallelismo per due rette.

---

0. Prerequisiti e/o voci correlate

- Definizione di Sottospazio Affine
- Definizione di Equazioni Cartesiane e Parametriche di uno Sottospazio Affine
- Passaggio tra Equazioni Cartesiane e Parametriche di uno Sottospazio Affine
- Posizione Reciproca di Sottospazi Affini

1. I sottospazi del Piano

#Definizione

Definizione (Definizione 1.1. (punto, retta e piano)).

Sia $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ un *spazio affine* (Definizione 1 (Definizione 1.1. (Esempio particolare $\mathbb{A}^n_K$))).
Allora, prendendo un *sottospazio affine* S tale che $\dim S \leq 2$, ho *tre* possibilità:

1. $\dim S = 0$; allora S rappresenta un *punto* del piano.
2. $\dim S = 1$; allora S è una *retta*.
3. $\dim S = 2$; allora S *coincide* con il suo spazio affine $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$.

In questa pagina ci concentreremo particolarmente sulle *rette*.

2. Equazioni parametriche e cartesiane per le rette

#Teorema

Teorema (Teorema 2.1. (equazioni parametriche e cartesiane per le rette sul piano)).

Sia S una *retta* su $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$, passante per $Q = (q_1, q_2)$ e di giacitura $W = \operatorname{span}(\begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix})$.
Allora S può essere rappresentate mediante le seguenti forme:

1. *Equazione parametrica* (Definizione 3 (Definizione 2.2. (equazioni parametriche per uno sottospazio affine)))

$$\boxed{S : \begin{cases} x = q_1 + tl \\ y = q_2 + tm \end{cases}}, t \in \mathbb{R}$$

2. *Equazione cartesiana*

$$\boxed{S : m(x - q_1) = l(y - q_2)}$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *teorema 2.1.* (Teorema 2 (Teorema 2.1. (equazioni parametriche e cartesiane per le rette sul piano)))

1. *Equazione parametrica*
   Per generare l'equazione parametrica è sufficiente considerare il *teorema di struttura delle soluzioni di un sistema lineare arbitrario* (Definizione 4 (Definizione 1.1. (sistema lineare omogeneo associato))). Infatti, consideriamo S come l'insieme dei punti $P = (x, y)$ che rappresentano una soluzione del tipo $s = \tilde{s} + s_0$, dove $\tilde{s}$ viene *"rappresentata"* dai punti di Q e s_0 da W.
2. *Equazione cartesiana*
   Se un punto generico $P = (x, y)$ appartiene a S, allora (x, y) è *soluzione* all'equazione parametrica

$$S : \begin{cases} x = q_1 + tl \\ y = q_2 + tm \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Ovvero, svolgendo delle manipolazioni abbiamo

$$S : \begin{cases} x - q_1 = tl \\ y - q_2 = tm \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Allora il punto $(x - q_1, y - q_2)$ è soluzione del sistema, quindi *linearmente dipendente* dal vettore $\begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix}$.
Ora consideriamo la matrice completa

$$A = \begin{pmatrix} l & x - q_1 \\ m & y - q_2 \end{pmatrix}$$

Per definizione il *rango* dev'essere necessariamente $\operatorname{rk} A = 1$. Ma allora, per il *teorema di Rouché-Capelli* e delle considerazioni ulteriori sul nesso tra rango e determinante di una matrice (Teoremi su Rango > ^4dbbdd), il *determinante* $\det A$ dev'essere nullo.
Ovvero, per *definizione* del *determinante* di una matrice $M_2(\mathbb{R})$, abbiamo l'equazione

$$m(x - q_1) - l(y - q_2) = 0 \implies m(x - q_1) = l(y - q_2) \blacksquare$$

3. Determinare equazioni per le rette dati due punti

#Osservazione

Osservazione 3.1. (richiamo dalla geometria elementare)

Dalla *geometria elementare euclidea* sappiamo che per due *punti distinti* nel *piano* passa *una ed una sola* retta. Graficamente, questo enunciato è

banale; infatti, possiamo collegare due punti distinti con una *"riga dritta"* in un unico modo.
Però ora vediamo di procedere con un *enunciato rigoroso*, seguito da una *dimostrazione rigorosa*.

#Teorema

Teorema (Teorema 3.1. (equazione parametrica e cartesiana della retta tra due punti distinti)).

Siano Q, R *punti distinti* nel *piano* $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$.
Ovvero, siano $Q = (q_1, q_2)$ e $R = (r_1, r_2)$, con $q_1 \neq r_1 \wedge q_2 \neq r_2$.
Allora la *retta* $S \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ è determinata dalla seguente equazione parametrica:

$$\boxed{S : \begin{cases} x = q_1 + (r_1 - q_1)t \\ y = q_2 + (r_2 - q_2)t \end{cases}}$$

In particolare, S è determinata anche dalla seguente equazione cartesiana:

$$\boxed{S : (x - q_1)(r_2 - q_2) = (r_1 - q_1)(y - q_2)}$$

Inoltre se sussiste che $r_1 - q_1 \neq 0$, allora l'equazione cartesiana è equivalente a

$$\boxed{S : y = q_2 + \frac{r_2 - q_2}{r_1 - q_1}(x - q_1)}$$

#Osservazione

Osservazione 3.1. (il significato della condizione supplementare per l'equazione cartesiana)

Notiamo che possiamo ottenere l'equazione cartesiana più *"elegante"* se è vera la condizione per cui $r_1 - q_1 \neq 0$.
Questa condizione, in termini geometrici, vuol dire che la *retta* passante per i due punti non è *verticale*; infatti, $r_1 - q_1 \neq 0 \implies r_1 \neq q_1$.
Allora, ciò significa che Q, R *non* sono verticalmente allineati.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *teorema 3.1.* (Teorema 3 (Teorema 3.1. (equazione

parametrica e cartesiana della retta tra due punti distinti)))
Partiamo considerando che se S è la retta che contiene sia Q, R, allora per definizione vale che $Q \in S \wedge R \in S$.
Ora calcoliamo il *vettore* $\sigma(Q, R)$. Sicuramente questo vettore soddisfa la seguente proprietà:

$$\sigma(Q, R) = \overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix} r_1 - q_1 \\ r_2 - q_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Infatti questo vale per le *ipotesi iniziali*.
Quindi $\sigma(Q, R)$ è il *"vettore di direzione"* che *"collega"* i punti Q, R, ovvero la giacitura di S.
Così abbiamo abbastanza informazioni per ottenere le equazioni *cartesiane* e *parametriche* con le formule date nel *teorema 2.1.* (Teorema 2 (Teorema 2.1. (equazioni parametriche e cartesiane per le rette sul piano))). ■

4. Condizioni di incidenza e di parallelismo per due rette

#Osservazione

Osservazione 4.1. (richiamo dalla geometria euclidea)

Dalla *geometria elementare* ci ricordiamo che, se ho due rette allora ho le seguenti possibilità: che siano *parallele*, *coincidenti* o *incidenti*.
In particolare, sono *parallele* se e solo se le rette sono *identiche* o *non hanno punti in comune*; sono *incidenti* se hanno un solo punto in comune.
Però, ora vediamo di *"tradurre"* questo postulato in termini nostri.
Effettuiamo questa transizione dalla *geometria elementare* alla formulazione *affine* della geometria.

#Teorema

Teorema (Teorema 4.1. (condizioni di parallelismo e di incidenza per due rette)).

Siano $r, s \subset \mathbb{A}^2_\mathbb{R}$ due *rette*, rispettivamente passanti per (q_1, q_2) e (q_1', q_2') e di giacitura $W = \operatorname{span}\begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix}$, $W' = \operatorname{span}\begin{pmatrix} l' \\ m' \end{pmatrix}$.
Allora r, s sono *parallele* se e solo se hanno la *stessa giacitura*, in particolare *non* sono coincidenti se il sistema lineare

$$\begin{cases} lt - l'\tau = q_1' - q_1 \\ mt - m'\tau = q_2' - q_2 \end{cases}$$

è *incompatibile*.

$$\boxed{\text{rg}\begin{pmatrix} l & -l' \\ m & -m' \end{pmatrix} \neq \text{rg}\begin{pmatrix} l & -l' & q_1' - q_1 \\ m & -m' & q_2' - q_2 \end{pmatrix}}$$

Inoltre r, s sono *incidenti* (ma *non coincidenti*) se e solo se il sistema lineare

$$\begin{pmatrix} l & -l' \\ m & -m' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1' - q_1 \\ q_2' - q_2 \end{pmatrix}$$

ha la sua *matrice dei coefficienti* rango massimo (2), ovvero *compatibile con un'unica soluzione*.

$$\boxed{\text{rg}\begin{pmatrix} l & -l' \\ m & -m' \end{pmatrix} = 2}$$

#Osservazione

Osservazione 4.2. (la generalizzazione del concetto di parallelismo e di incidenza)

Notiamo che queste condizioni di *parallelismo* e di *incidenza* non sono altro che una *generalizzazione* del concetto delle *posizioni reciproche tra sottospazi* (Posizione Reciproca di Sottospazi Affini), in questo caso abbiamo applicato queste definizioni allo spazio affine $\mathbb{A}^2_\mathbb{R}$.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *teorema 4.2.* (Teorema 4 (Teorema 4.1. (condizioni di parallelismo e di incidenza per due rette)))

- *Condizioni di parallelismo*
  Partiamo dal presupposto che $r \neq s$ (infatti altrimenti la dimostrazione sarebbe banale; se le rette sono le stesse, allora sono coincidenti, ergo paralleli) e che *non* abbiamo punti in comune.
  Allora r, s hanno *equazioni parametriche* del tipo

$$r: \begin{cases} x = q_1 + lt \\ y = q_2 + mt \end{cases}; s: \begin{cases} x = q_1' + l'\tau \\ y = q_2' + m'\tau \end{cases}$$

Osserviamo che dire r, s *non hanno punti in comune* equivale a dire che *non esistono* $\bar{t}, \bar{\tau}$ tali che

$$\begin{cases} q_1 + l\bar{t} = q_1' + l'\bar{\tau} \\ q_2 + m\bar{t} = q_2' + m'\bar{\tau} \end{cases} \implies \begin{cases} l\bar{t} - l'\bar{\tau} = q_1' - q_1 \\ m\bar{t} - m'\bar{\tau} = q_2' - q_2 \end{cases}$$

Ma allora se *non esistono* tali coefficienti, allora ciò equivale a dire che il sistema lineare appena costruito è *incompatibile*.
Ma allora per il *teorema di Rouché-Capelli* (Teorema 1 (Teorema 1.1. (di Rouché-Capelli))), il rango della *matrice dei coefficienti* e della *matrice completa* devono essere diversi.
Dato che nessuna di queste matrici è la matrice nulla, il rango dev'essere di minimo 1. Ma al massimo il rango può essere 2 per A, o 2 per $A|b$; pertanto l'unica possibilità è che

$$\operatorname{rg} A = 1; \operatorname{rg}(A|b) = 2$$

Ma allora se la matrice dei coefficienti

$$A = \begin{pmatrix} l, -l' \\ m, -m' \end{pmatrix}$$

ha *rango* 1, allora i due *vettori-colonna* devono essere linearmente dipendenti. Ma allora se sono linearmente dipendenti, il loro span devono essere gli stessi.
Pertanto,

$$\operatorname{span}\begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} = \operatorname{span}\begin{pmatrix} l' \\ m' \end{pmatrix} \implies W = W'$$

- *Condizioni di incidenza*
  Ora consideriamo il caso in cui r, s sono *distinte tra di loro* e *non parallele*.
  Ovvero, supponendo che $W \neq W'$, ovvero i vettori

  $$\begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} l' \\ m' \end{pmatrix}$$

  sono *linearmente indipendenti*. Inoltre notiamo che ovviamente da ciò discende che

  $$\begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -l' \\ -m' \end{pmatrix}$$

  sono *linearmente indipendenti*.
  Ora, come fatto prima, consideriamo il sistema lineare nelle variabili t, τ e

capiamo se questa è *compatibile* o meno.

$$\begin{pmatrix} l & -l' \\ m & -m' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1' - q_1 \\ q_2' - q_2 \end{pmatrix}$$

Dato che i vettori-colonna della matrice dei coefficienti sono *linearmente indipendenti*, abbiamo che il suo rango è *massimo*: pertanto, per il *teorema di caratterizzazione del rango* (Teoremi su Rango > ^4dbbdd) questa è *invertibile*; pertanto per il *teorema di Cramer* (Teorema 1 (Teorema 1.1. (di Cramer))) questo sistema ammette un'*unica soluzione*, che è data dalla sua *inversa* moltiplicata per i coefficienti b.

5. Esercizi misti

#Esercizio

Esercizio 5.1.

Siano Q, P i punti $(1,0)$ e $(3,4)$. Trovare la retta S passante per Q, R, sia in forma parametrica che cartesiana.

D2. La geometria dello spazio affine 3D

Geometria dello Spazio Affine

Geometria dello Spazio Affine: tutti i sottospazi possibili; equazioni per la retta nello spazio; determinare una retta nello spazio da due punti; equazioni del piano; determinare un piano da tre punti non allineati; determinare se tre punti sono allineati o meno; condizioni di coincidenza e di parallelismo per le rette e gli spazi; condizioni di complanarità tra due rette

---

0. Prerequisiti e/o voci correlate

- Definizione di Sottospazio Affine
- Definizione di Equazioni Cartesiane e Parametriche di uno Sottospazio Affine
- Passaggio tra Equazioni Cartesiane e Parametriche di uno Sottospazio Affine

- Posizione Reciproca di Sottospazi Affini

1. I sottospazi dello Spazio

#Definizione

Definizione (Definizione 1.1. (punto, retta, piano)).

Sia $S \subseteq \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ un *sottospazio affine* (Definizione 2 (Definizione 3.1. (dimensione di sottospazio affine))), allora S può essere identificata con una delle seguenti:

- $\dim S = 0$; S si dice *punto*;
- $\dim S = 1$; S si dice *retta*;
- $\dim S = 2$; S si dice *piano*;
- $\dim S = 3$; allora S è il spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ stesso.

2. Equazioni della retta nello spazio

#Teorema

Teorema (Teorema 2.1. (equazioni parametriche e cartesiane della retta nello spazio)).

Sia $S \subseteq \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ una *retta* (ovvero con $\dim S = 2$), passante per il punto $Q = (q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ e di giacitura $W = \operatorname{span}\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$.
Allora abbiamo le seguenti equazioni parametriche e cartesiane per descrivere S;

- *Equazioni parametriche*

$$\boxed{\begin{cases} x = q_1 + lt \\ y = q_2 + mt \\ z = q_3 + nt \end{cases}}$$

- *Equazioni cartesiane*

$$\boxed{\begin{cases} y - q_2 = \frac{m}{l}(x - q_1) \\ z - q_3 = \frac{n}{l}(x - q_1) \end{cases}}$$

(vale solo se $l \neq 0$; altrimenti si deve considerare un altro parametro $m, n \neq 0$)

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *teorema 2.1.*
La dimostrazione è stata omessa, in quanto il ragionamento è completamente analogo a quello presentato nella derivazione delle equazioni parametriche e cartesiane per una retta in $\mathbb{A}^2_\mathbb{R}$ (Geometria del Piano Affine > ^ff21d0). ■

3. Determinare rette nello spazio da due punti

#Teorema

Teorema (Teorema 3.1. (equazioni della retta passante per due punti)).

Siano $Q, R \in \mathbb{A}^3_\mathbb{R}$ due *punti distinti nello spazio*, con $P = (q_1, q_2, q_3)$ e $R = (r_1, r_2, r_3)$.
Allora per questi due punti pasa *una ed una sola* retta e le sue equazioni sono le seguenti.

- *Equazioni parametriche*

$$\boxed{\begin{cases} x = q_1 + (r_1 - q_1)t \\ y = q_2 + (r_2 - q_2)t \\ z = q_3 + (r_3 - q_3)t \end{cases}}$$

- *Equazioni cartesiane*

$$\boxed{\begin{cases} y - q_2 = \frac{r_2 - q_2}{r_1 - q_1}(x - q_1) \\ z - q_3 = \frac{r_3 - q_3}{r_1 - q_1}(x - q_1) \end{cases}}$$

(questo vale solo se $r_1 \neq q_1$; altrimenti bisogna considerare casi diversi)

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *teorema 3.1.*
Omessa per le stesse ragioni della *dimostrazione del teorema 3.2.*. ■

4. Equazioni del piano nello spazio

#Teorema

Teorema (Teorema 4.1. (equazioni del piano nello spazio)).

Siano $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ dei *"vettori di direzione"* linearmente indipendenti, dove

$$v_1 = \begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix} ; v_2 = \begin{pmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{pmatrix}$$

sia $Q = (q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{A}^3_\mathbb{R}$ un *punto nello spazio*.
Allora un *piano* S passante per Q e di giacitura $W = \operatorname{span}(v_1, v_2)$ ha le seguenti equazioni:

- *Equazioni parametriche*

$$\boxed{\begin{cases} x = q_1 + t_1 l_1 + t_2 l_2 \\ y = q_2 + t_1 m_1 + t_2 m_2 \\ z = q_3 + t_1 n_1 + t_2 n_2 \end{cases}}$$

- *Equazione cartesiana*

$$\boxed{(m_1 n_2 - n_1 m_2)(x - q_1) + (m_1 l_2 - l_1 m_2)(y - q_2) + (l_1 m_2 - m_1 l_2)}$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *teorema 4.1.*
La derivazione delle equazioni parametriche è stata omessa; invece sarà utile riflettere sulla derivazione dell'equazione cartesiana.
Pigliamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & x - q_1 \\ m_1 & m_2 & y - q_2 \\ n_1 & n_2 & z - q_3 \end{pmatrix}$$

Per ipotesi iniziali sappiamo che $\operatorname{rg}(A)$ dev'essere *almeno* 2, dato che le prime due colonne sono linearmente indipendenti. Tuttavia sappiamo che il range può essere *al massimo* 2, dato che la terza colonna è linearmente dipendente dalle prime due.
Di conseguenza, da questi fatti discerne che $\operatorname{rg}(A) = 2$; di conseguenza per le *condizioni di invertibilità del determinante* (Corollario 3 (Corollario 3.1. (condizioni di determinante nullo))), A non è invertibile, ergo $\det A = 0$. Di conseguenza possiamo usare la *definizione di Sarrus* del determinante

(Teorema 3 (Definizione 3.1. (determinante di una matrice 3×3 secondo la regola di Sarrus))) e ottenere l'equazione finale. ■

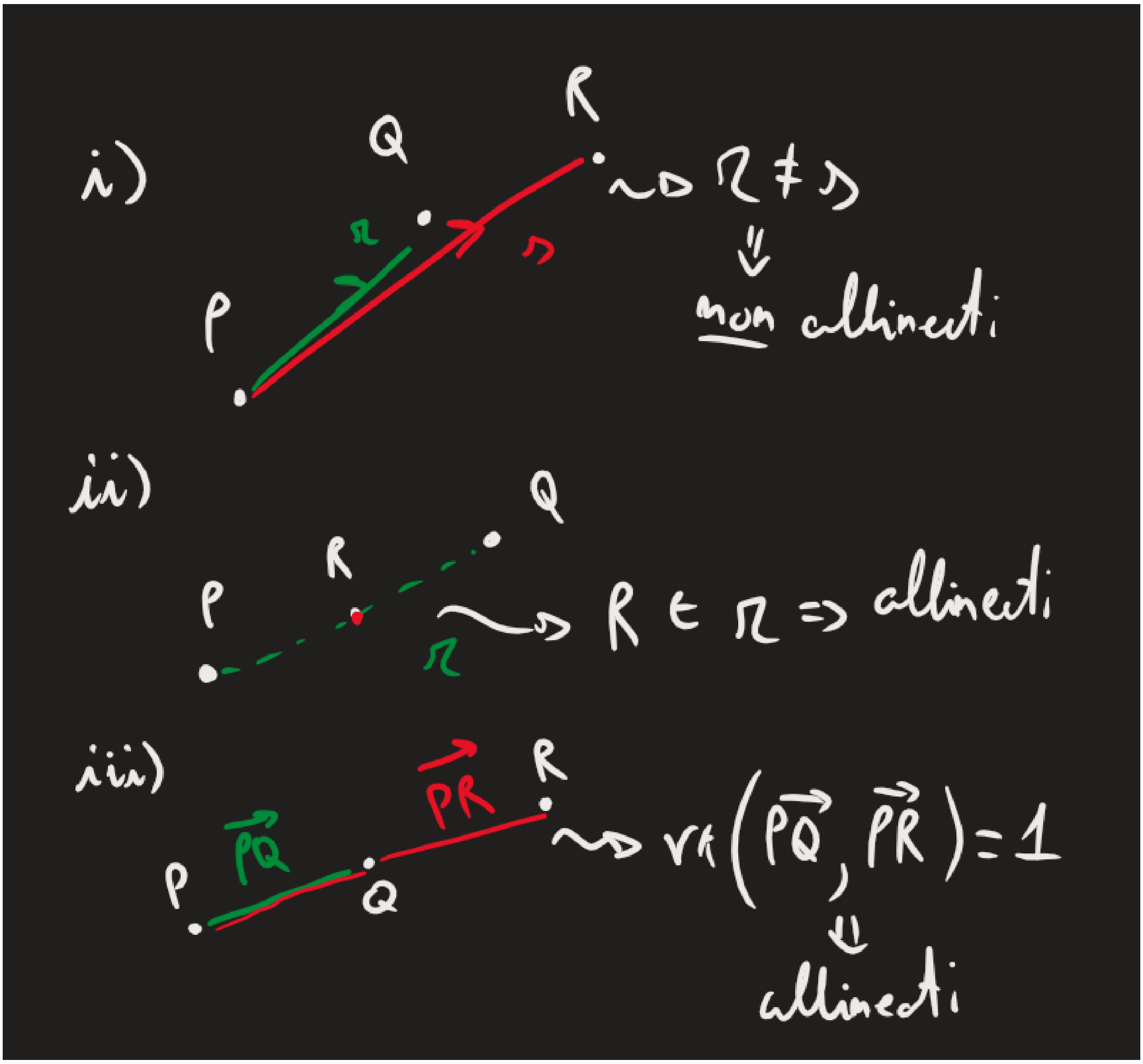
5. Determinare l'allineamento di tre punti

#Teorema

Teorema (Teorema 5.1. (criteri di allineamento di tre punti nello spazio)).

Siano $P, Q, R \in \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ tre *punti nello spazio*.
Allora, per determinare se questi siano *"allineati"* o meno possiamo adoperare uno dei criteri:
i. Determinare le rette passanti per P, Q e P, R e vedere se siano *coincidenti* o meno;
ii. Determinare la retta P, Q e vedere se il punto R ci appartenga o meno;
iii. Verificare la *dipendenza lineare* tra i vettori $\sigma(P, Q)$ e $\sigma(P, R)$.
(*Figura 5.1.*)

FIGURA 5.1. (*L'idea grafica dei criteri*)



6. Determinare un piano da tre punti nello spazio

#Osservazione

Osservazione 6.1. (per tre punti passa un solo piano)

Come osservato con la *geometria del piano affine* (Geometria del Piano Affine > ^9a91b2), per due punti distinti passa una e sola retta.
Parimenti, per *tre punti* passa *un solo piano*, se questi punti *non sono allineati*.
Ora vediamo di derivare l'equazione di questo piano.

#Teorema

Teorema (Teorema 6.1. (l'equazione del piano passante per tre punti)).

Siano $P, Q, R \in \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ dei *punti distinti e non allineati* del tipo
$P = (p_1, p_2, p_3), Q = (q_1, q_2, q_3), R = (r_1, r_2, r_3)$.
Allora esiste *uno e solo piano* S passante per P, Q, R ed è descritto dalle seguenti equazioni:

- *Equazioni parametriche*

$$\boxed{S : \begin{cases} x = q_1 + (r_1 - p_1)t_1 + (q_1 - p_1)t_2 \\ y = q_2 + (r_2 - p_2)t_1 + (q_2 - p_2)t_2 \\ z = q_3 + (r_3 - p_3)t_1 + (q_3 - p_3)t_2 \end{cases}}$$

- *Equazioni cartesiane*

$$S : (z - q_3) - \frac{\alpha_3}{\alpha_1}(x - q_1) - \frac{\beta_3 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1}\beta_1}{\beta_2 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\beta_1}(y - q_2) + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}(x - q_1) =$$

con $\alpha_n = r_n - p_n, \beta_n = q_n - p_n$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *teorema 6.1.*
Per questa derivazione scegliamo a piacere due applicazioni lineari σ tra *due punti*; nel caso dell'enunciato abbiamo scelto $v_1 = \sigma(P, Q)$ e $v_2 = \sigma(P, R)$. Dato che i tre punti *non* sono allineati, allora sicuramente v_1, v_2 saranno *linearmente indipendenti*; di conseguenza, definendo il sottospazio vettoriale $W = \operatorname{span}(v_1, v_2)$, abbiamo proprio la *giacitura* del piano.
Da qui in poi sarà semplice determinare le equazioni parametriche e cartesiane per S. ■

7. Condizioni di parallelismo e di incidenza tra retta e spazio

#Teorema

Teorema (Teorema 7.1. (condizioni di parallelismo e di incidenza tra una retta e un spazio)).

Sia $S \subseteq \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ di giacitura W un *piano* e sia $S' \subseteq \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ di giacitura W una *retta*.
Allora $S \parallel S'$ (sono paralleli) *se e solo se* $W' \subset W$ (infatti è impossibile che si verifichi $W \subseteq W'$).
Infatti, se $W = \operatorname{span}(w_1, w_2)$ e $W' = \operatorname{span}(w')$, allora la condizione di parallelismo è

$$\mathrm{rg}(w_1, w_2, w') = 2$$

Invece sono *incidenti* e si incontrano in un *solo punto* se e solo se il sistema lineare

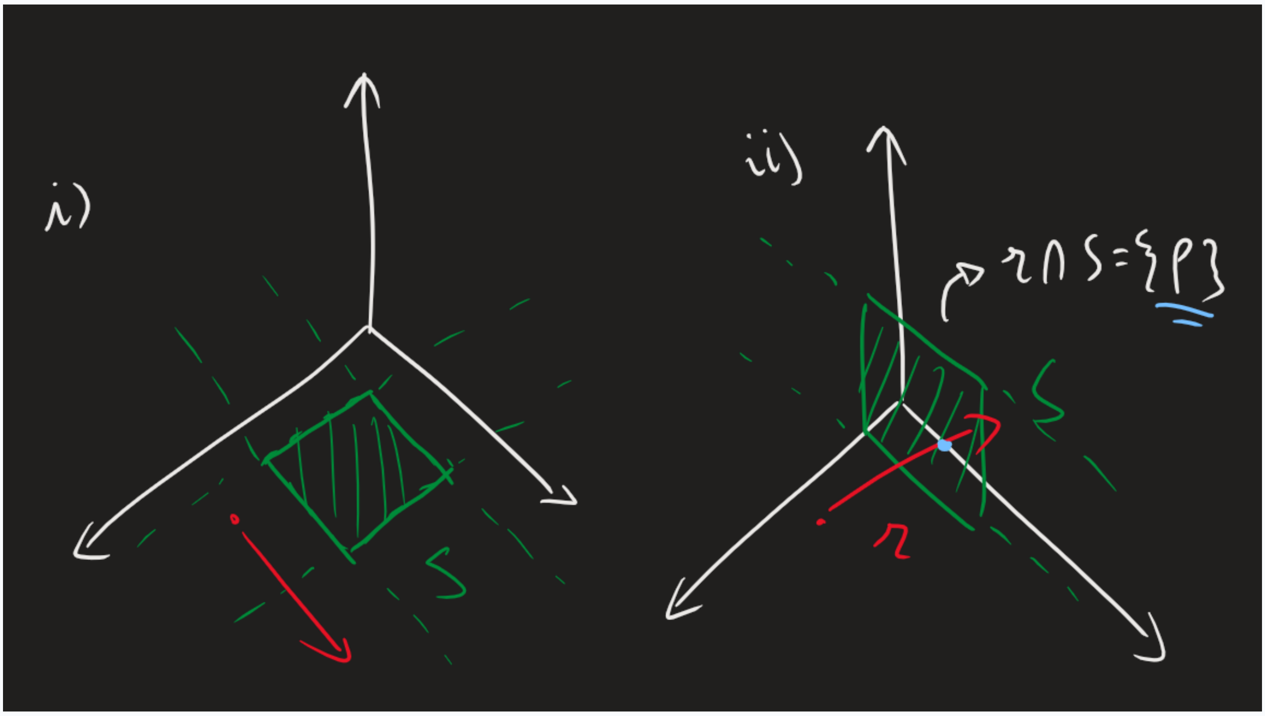
$$(w_1 \quad w_2)t = (w')$$

è *compatibile* con un'unica soluzione; ovvero

$$\mathrm{rg}\left(w_1 \quad w_2 \quad w'\right) = 3$$

Per calcolare tale punto bisogna risolvere il *sistema lineare* costituito dalle *equazioni cartesiane* per S, S'.

FIGURA 7.1. (*Teorema 7.1.*)



#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *teorema 7.1.*

Omessa (è già stata fornita una dimostrazione parziale nell'enunciato).

8. Condizioni di parallelismo e di incidenza tra due spazi

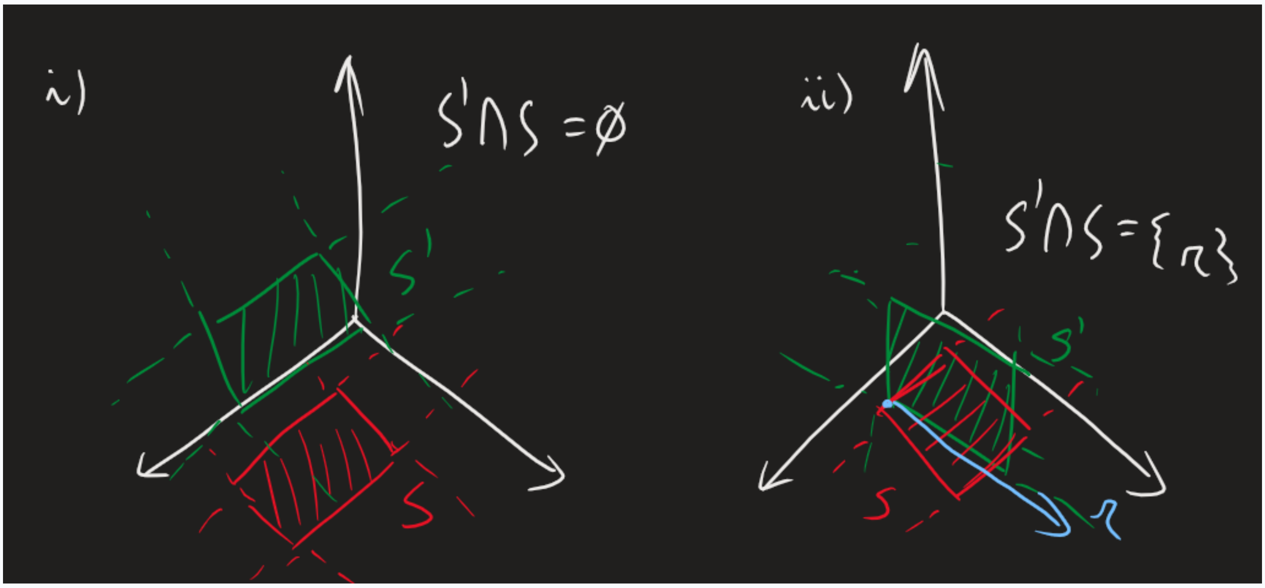
#Teorema

Teorema (Teorema 8.1. (condizioni di parallelismo e di incidenza per due spazi)).

Siano $S, S' \subseteq \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ due *piani*, rispettivamente di giacitura W, W'.
Allora $S \parallel S'$ se e solo se $W = W'$ $(W \subseteq W' \wedge W' \subseteq W)$

Oppure *non* sono paralleli se $S' \cap S$ si *intersecano* lungo una retta; per determinare tale retta bisogna determinare la soluzione generica al sistema lineare formata dalle equazioni cartesiane per S, S'.

FIGURA 8.1. (*Teorema 8.1.*)



9. Condizioni di complanarità tra due rette

#Definizione

Definizione (Definizione 9.1. (rette complanari)).

Due *rette* $r, s \subseteq \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ si dicono *complanari* se esiste un *piano* $\pi \subseteq \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ tale che $r, s \subseteq \pi$.

#Teorema

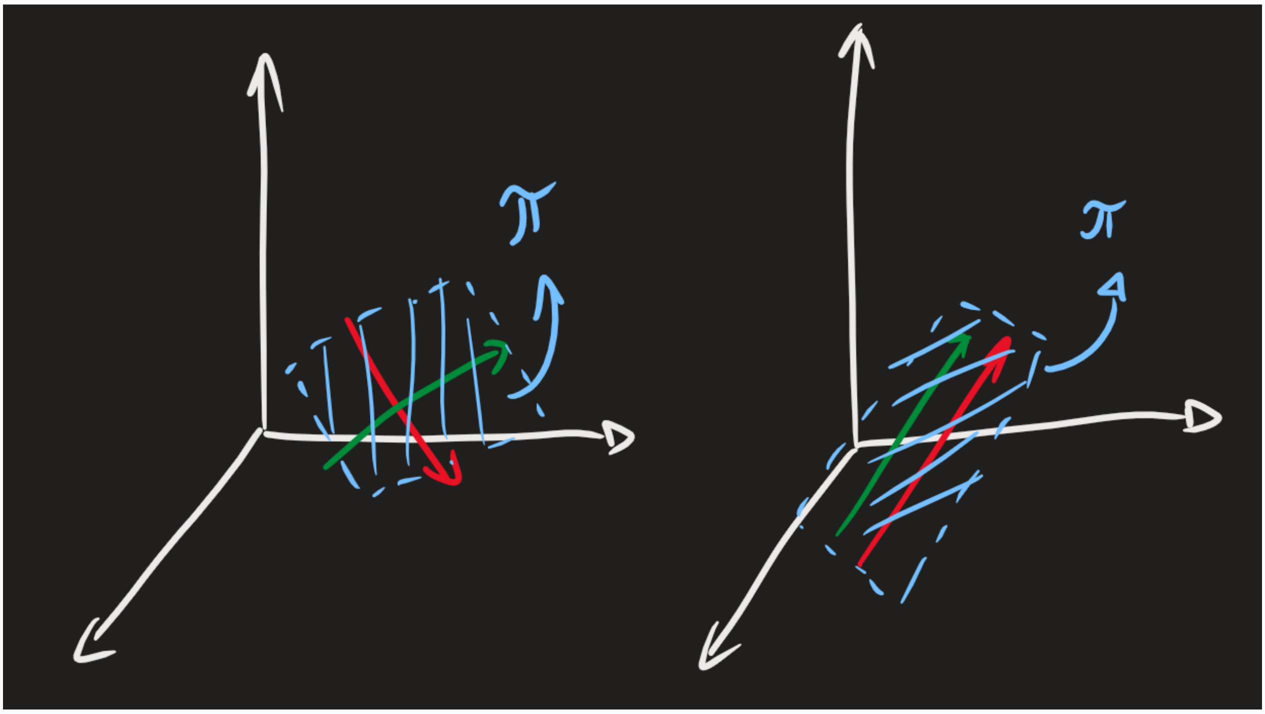
Teorema (Teorema 9.1. (condizione necessaria e sufficiente di complanarità)).

Due rette $r, s \subseteq \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ sono *complanari* se e solo se accade una delle due condizioni:

- le rette sono *incidenti*
- le rette sono *paralleli* o *coincidenti*

> In particolare, r, s sono *complanari* e *distinte* allora esiste un *unico* piano π che contenga r, s.

FIGURA 9.1. (*Definizione 9.1., teorema 9.1.*)



#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE (*parziale*) del *teorema 9.1.* (Teorema 10 (Teorema 9.1. (condizione necessaria e sufficiente di complanarità)))
Questa dimostrazione si articolerà solo nella dimostrazione del *solo* verso $\Uparrow$, ovvero "se le rette sono *incidenti* o *paralleli* (ovvero *non sghembi*), allora le rette sono complanari".
Supponiamo dunque che r, s siano dei *sottospazi affini* rispettivamente passanti per Q, Q' e di giacitura $\operatorname{span}(v), \operatorname{span}(v')$.
In primo luogo vediamo il caso in cui r, s sono *incidenti*.
Allora per le *condizioni di incidenza* per due rette (???), v, v' sono *linearmente indipendenti*; quindi possiamo scegliere la *giacitura* di π come $\operatorname{span}(v, v')$ e questo sottospazio affine sarà passante per Q, Q'.
In secondo luogo supponiamo che r, s siano *parallele*.
Ma $r \parallel s \implies \operatorname{span}(v) = \operatorname{span}(v')$; allora se imponiamo un'ulteriore condizione, ovvero $r \neq s$, allora esiste un *unico* piano π tale che $r, s \subseteq \pi$. Per ottenere la *giacitura* di π, possiamo scegliere v o v', ma non entrambe dal momento che questi due vettori sono *linearmente dipendenti*.
Scegliamo pertanto il vettore $\sigma(Q, Q')$ che è *non-nullo* in quanto $r \neq s$ e *linearmente indipendente* dai vettori v, v' (*altrimenti ci sarebbe un assurdo!*).
In definitiva, il piano π è il piano passante per Q, Q' e di giacitura $\operatorname{span}(v, \sigma(Q, Q'))$.

#Osservazione

Osservazione 9.1. (ottenere descrizioni di π)

Vediamo che la *dimostrazione* al *teorema 9.1.* (^a1282f) è una dimostrazione *"costruttiva"*, dato che ci dà proprio le formule per descrivere π.
Si illustra questa osservazione col seguente esempio.

#Esempio

Esempio 9.1.

Consideriamo le *rette* nello *spazio*

$$r: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-t \\ z = t \end{cases}; s: \begin{cases} x = 2\tau \\ y = 3-2\tau \\ z = 1+2\tau \end{cases}$$

Prima di tutto osserviamo che per definizione r, s sono rispettivamente di giacitura

$$\operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$

Inoltre i due vettori *"di direzione"* (ovvero della giacitura) sono *linearmente dipendenti*. Da ciò discende, per le condizioni di parallelismo, le che le rette sono *parallele*.

Ora verifichiamo se è possibile che $r = s$; prendiamo il punto $Q = (0,3,1) \overset{\tau=0}{\in} s$. Allora supponendo $r = s$, da ciò si verificherebbe $(0,3,1) \in r$. Tuttavia facendo dei conti veloci vediamo immediatamente che il sistema

$$\begin{cases} 1+t = 0 \\ 2-t = 3 \\ t = 1 \end{cases}$$

è *incompatibile*, dunque qui si ottiene un *assurdo*. Pertanto $r \neq s$.

Allora l'unico piano è quello passante per $(0,3,1)$ e di giacitura

$$\operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0-1\\3-2\\1-0\end{pmatrix}\right) = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$$

Si ottiene immediatamente l'equazione parametrica

$$\pi : \begin{cases} x = u - v \\ y = 3 - u + v \\ z = 1 + u + v \end{cases}$$

Dopodiché, se la si ritiene opportuna, possiamo convertirla in un'equazione cartesiana, che è data da

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & x \\ -1 & 1 & y-3 \\ 1 & 1 & z-1 \end{pmatrix} = 0$$

#Osservazione

Osservazione 9.2. (e se le rette sono sghembe?)

Come visto nel *teorema 9.1.* (Teorema 10 (Teorema 9.1. (condizione necessaria e sufficiente di complanarità))), se due *rette sono sghembe*, allora sicuramente *non* sono *complanari*. Tuttavia possiamo osservare che vale invece un'altra implicazione: esistono due *piani* π_r, π_s che sono *paralleli tra di loro*, uno di cui passante per r e l'altro per s.
La giacitura di tali piani è $\operatorname{span}(v, v')$.

#Osservazione

Osservazione 9.3. (parametrica o cartesiana?)

Osserviamo infine che nella *generalità* dei casi, conviene usare le *equazioni parametriche* quando trattiamo di *rette paralleli*, se invece trattiamo di *rette incidenti* allora conviene usare le *equazioni cartesiane*.