Continuità - Sommario

Sommario generale sulla continuità: definizione, esempi, teoremi, ... (parte da svolgere)

A. Definizione della continuità

Definizione di continuità

Definizione puntuale e "globale" della continuità di una funzione. Esempi di funzioni continue

---

0. Osservazione preliminare

OSS 0.a. Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ e $x_0 \in E$. Da notare che ciò implica che $x_0 \in \mathbb{R}$; quindi x_0 in questo caso è un numero.
Allora abbiamo due possibilità:

1. x_0 è di accumulazione per E (Punti di aderenza e di accumulazione, **DEF 2.1.**)
2. x_0 non è di accumulazione per E (ovvero un punto isolato)

1. Definizione puntuale e globale

#Definizione

Definizione 1.1. (Funzione continua per un punto).

Siano $E \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in E$ e $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$: ovvero f è una funzione che ha per dominio E, x_0 un punto del dominio.
Allora f si dice *funzione continua nel punto* x_0 se si verifica uno dei due casi:
CASO 1. x_0 è un punto isolato per E (la possiamo considerare una specie di *"caso speciale"*)
CASO 2. x_0 è un punto di accumulazione e si verifica il limite

$$\lim_{x \to x_0 \in \mathbb{R}} f(x) = f(x_0) \in \mathbb{R}$$

Usando la nozione $\varepsilon - \delta$ del limite, avremmo

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in E$$
$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

OSS 1.1. Il *CASO 2.* è la parte interessante della definizione della continuità: stiamo sostanzialmente dicendo che f è continua in x_0 se esiste il limite per $x \to x_0$ e il limite è proprio il valore della funzione.

OSS 1.2. Notiamo che in questa definizione c'è una differenza dalla definizione originaria del limite: infatti la prima parte che rappresenta l'intorno δ di x_0 sarebbe

$$0 < |x - x_0| < \delta$$

però in questa definizione l'abbiamo tolta, perché x_0 appartiene al dominio, quindi è possibile avere $x = x_0 \implies f(x) = f(x_0)$, di conseguenza $|f(x) - f(x_0)| = 0$; quindi in questo caso non escludiamo più che $x - x_0 = 0, f(x) - f(x_0) = 0$.
Inoltre questa "eccezione" è utile in quanto possiamo comprendere il *CASO 1.*, ovvero quando x_0 è un punto isolato: infatti questo significa che esiste un intorno di x_0 che contiene solo se stesso.

FIGURA 1.1. L'idea grafica della continuità
[DA FARE]

Ora presentiamo la definizione *"globale"* della funzione, che è una semplice estensione della definizione di prima: al posto del singolo punto ci mettiamo un insieme di punti.

#Definizione

Definizione 1.2. (Funzione continua su un insieme).

Sia $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$
Se f è *continua* in tutti i punti di E, allora f si dice *continua*.

2. Esempi di funzioni continue e discontinue

#Esempio

Esempio 2.1. (Funzione Constante).

Sia

$$
\begin{aligned}
f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
x &\mapsto c
\end{aligned}
$$

Allora f è continua, in quanto

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}, \lim_{x \to x_0} c = c$$

Infatti basta scegliere un qualsiasi valore δ per qualsiasi ε.

FIGURA 2.1.
[Da fare]

#Esempio

Esempio 2.2. (Funzione identità).

$$\text{id} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x$$

La funzione id è *continua*: basta scegliere $\varepsilon = \delta$.

FIGURA 2.2.
[Da fare]

#Esempio

Esempio 2.3. (Funzione Potenza).

$$p_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x^n$$

La funzione x^n è *continua*, infatti è possibile dimostrare che

$$\lim_{x \to x_0} x^n = x_0^n$$

mediante gli Esempi di Limiti di Funzione.

FIGURA 2.3.
[Da fare]

#Esempio

Esempio 2.4. (Funzione Radice).

$$\sqrt[n]{\ } : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \sqrt[n]{x}$$

Anche questa funzione è *continua*, anche se per adesso facciamo finta di conoscere

$$\forall x_0 \in (0, +\infty), \lim_{x \to x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}$$

mediante dei teoremi sulle funzioni inverse che definiremo in seguito.

FIGURA 2.4.
[Da fare]

#Esempio

Esempio 2.5. (Funzione Seno).

$$\sin : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]; x \mapsto \sin x$$

In Esempi di Limiti di Funzione abbiamo dimostrato che

$$\lim_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$$

quindi la funzione seno sin è *continua*.

#Esempio

Esempio 2.6. (Funzione Esponenziale).

$$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow]0, +\infty[; x \mapsto e^x$$

Questa è *continua* in quanto

$$\lim_{x \to x_0} e^x = e^{x_0}$$

ed è il figlio del fatto che

$$\lim_n \sqrt[n]{x} = 1$$

#Esempio

Esempio 2.7. (Funzione di Heaviside).

Definiamo

$$\mathrm{H} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

dove

$$\mathrm{H}(x) := \begin{cases} 0 \text{ se } x \leq 0 \\ 1 \text{ altrimenti} \end{cases}$$

Allora la funzione H *non* è *continua*: infatti il limite

$$\lim_{x \to 0} \mathrm{H}(x)$$

non esiste, visto che da destra tende a 1 e da sinistra a 0.
Infatti questa è una funzione *discontinua* e definiamo questo tipo di *discontinuità* come la discontinuità *"salto"* oppure *"di prima specie"*.

OSS 2.7. Notare che la funzione di Heaviside $\mathrm{H}(x)$ è comunque *continua* in tutti gli altri punti diversi da 0.

NOTIZIE STORICHE. Oliver Heaviside (*1850-1925*) è stato una figura significativa nella storia della matematica. La sua carriera era inizialmente legata a una compagnia che gestiva le allora innovative linee telegrafiche. Allora, il giovane Heaviside, dotato di una mente autodidatta e una passione per la matematica, utilizzò le sue competenze per sviluppare concetti che avrebbero avuto un impatto duraturo nel suo campo, in particolare nell'ambito dell'elettricità. Una delle sue pietre miliari fu lo studio delle equazioni differenziali con coefficienti discontinui, tra cui la funzione appena menzionata, che avrebbe dimostrato grande rilevanza nella teoria elettrica.
(Paragrafo rielaborato da ChatGPT)

FIGURA 2.7.
[Da fare]

Esempio 2.8. (Funzione di Dirichlet).

$$D : [0,1] \longrightarrow [0,1]; x \mapsto D(x) : \begin{cases} 1 \text{ se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$$

Questa è una funzione *discontinua* in quanto non esiste il limite

$$\lim_{x \to x_0} D(x)$$

per nessun valore di x_0 per la densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ (Conseguenze dell'esistenza dell'estremo superiore, **TEOREMA 4.1.**); vale anche il viceversa con la densità degli irrazionali nei razionali. Allora D è *discontinua* in ogni punto del suo dominio.

B. Teoremi sulle funzioni continue

Teoremi sulle funzioni continue: prime proprietà delle funzioni continue; permanenza del segno adattato, operazioni con le funzioni continue, composta di funzioni continue.

---

1. Prime proprietà delle funzioni continue

Consideriamo delle *proprietà* delle funzioni continue, di cui alcuni discendono direttamente dai teoremi sui limiti (Teoremi sui Limiti di Funzione).

Permanenza del segno adattato

#Teorema

Teorema 1.1. (Permanenza del segno).

Sia $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e f continua in x_0.
Se $f(x_0) > 0$ (< 0) allora esiste intorno di x_0 in cui f ha segno *positivo* (*negativo*)

Operazioni con funzioni continue

#Teorema

Teorema 1.2. (Operazioni con funzioni continue).

Siano f, g funzioni *continue* in $x_0 \in \mathbb{R}$.
Allora

$$f \pm g, f \cdot g, \frac{f}{g}$$

sono *continue* (a patto che nel terzo caso sia $g(x_0) \neq 0$)

OSS 1.2. Da questo teorema si può dedurre che tutti i *polinomi* e *funzioni razionali* sono funzioni *continue*: infatti

$$p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

non è altro che una somma tra funzioni potenza, che sono *continue* (Definizione 1.1. (Funzione continua per un punto) > Esempio 2.3. (Funzione Potenza)).

Composta di funzioni continue

#Teorema

Teorema 1.3. (Composta di funzioni continue).

Siano

$$\begin{aligned} & f : E \longrightarrow \mathbb{R}, x_0 \in E \\ & g : F \longrightarrow \mathbb{R}, f(x_0) \in F, f(E) \subseteq F \end{aligned}$$

Supponendo che f sia *continua* in x_0 e g sia *continua* in $f(x_0) = y_0$, allora $g \circ f$ è *continua* in x_0.

FIGURA 1.3. (*Idea del teorema*)
[Da fare]

Dimostrazione.@Teorema 1.3. (Composta di funzioni continue)
Per ipotesi g è continua in $f(x_0)$, ovvero

$$\lim_{y \to f(x_0)} g(y) = g(f(x_0)) \iff \begin{gathered} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall y \in F, \\ |y - f(x_0)| < \delta \implies |g(y) - g(f(x_0))| < \varepsilon \end{gathered}$$

Ma anche f è continua, in x_0, ovvero

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \iff \begin{gathered} \forall \delta > 0, \exists \rho > 0 : \forall x \in E, \\ |x - x_0| < \rho \implies |f(x) - f(x_0)| < \delta \end{gathered}$$

Allora combinandoli ottengo

$$\begin{gathered} \forall \varepsilon > 0, \exists \rho > 0 : \forall x \in E, f(x) \in F \\ |x - x_0| < \rho \implies |\underbrace{f(x)}_{f(x)=y} - f(x_0)| < \delta \implies |g(y) - g(f(x_0))| < \varepsilon \end{gathered}$$

che è esattamente la definizione di

$$\lim_{y \to f(x_0)} g(y) = g(f(x_0))$$

□