Vettori Aleatori e Variabili Aleatorie Complesse - Sommario

X

Vettori Aleatori e V.A. Complesse.

X

A. VETTORI ALEATORI

A1. Introduzione ai Vettori Aleatori Discreti

Introduzione ai Vettori Aleatori

X

Introduzione ai vettori aleatori: generalizzazione delle variabili aleatorie, esempi di costruzione dei vettori aleatori. Lemma di caratterizzazione dei vettori aleatori.

X

0. Voci correlate

- Definizione di Variabile Aleatoria

1. Generalizzazione delle variabili aleatorie

Vogliamo generalizzare le *variabili aleatorie reali* del tipo $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. Adesso vogliamo generalizzarlo sull'insieme E, in particolare dove poniamo $E = \mathbb{R}^N$ (e lo chiameremo vettore aleatorio). Segue che la definizione è identica alla definizione generalizzata di v.a. (1).

Questo ci è utile per svariati motivi; vogliamo studiare uno *spazio campionario* su più aspetti e capire il suo *comportamento congiunto*, oppure lo stesso spazio campionario presenta elementi in *più variabili* (pensiamo all'esempio delle freccette 1, dove approssimiamo ogni spazio con i boreliani $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$).

#Esempio

SCHEMA DELLE PROVE INDIPENDENTI.
Studiamo uno *schema delle prove indipendenti* (1) mettendo in risalto due aspetti: chiamiamo X_1 il *numero di successi nelle n prove* e X_2 il *numero in cui si verifica il primo*

successo.
Formalmente abbiamo

$$X_1(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i$$
$$X_2 = \begin{cases} \min\{j : \omega_j = 1\}, \omega_j \neq \underline{0} \\ +\infty, \omega_j = \underline{0} \end{cases}$$

Siamo interessati a sapere la probabilità di avere *almeno quattro successi*, in cui il *primo successo* avvenga *prima del terzo tentativo*. In altre parole, stiamo cercando

$$p(\{X_1 \geq 4\} \cap \{X_2 < 3\})$$

Ricordandoci che abbiamo gli intervalli

$$\{X_1 \geq 4\} \sim [4, +\infty], \{X_2 < 3\} \sim (-\infty, 3)$$

Adesso introduciamo il vettore aleatorio X definito come

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2, \omega \mapsto (X_1(\omega), X_2(\omega))$$

Adesso riscriviamo la domanda iniziale come

$$p(\{X \in E\})$$

con E definita come il prodotto cartesiano degli intervalli di X_1, X_2. Ovvero

$$E := [4, +\infty] \times (-\infty, 3)$$

LA NOVITA'. Fino ad ora non abbiamo fatto nulla di nuovo; abbiamo solo ridefinito cose. Adesso possiamo considerare il *codominio* come un *boreliano di* $\mathbb{R}^2$, ovvero poniamo $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. Vedremo bene questo aspetto col seguente lemma.

2. Lemma di Caratterizzazione dei Vettori Aleatori

Come abbiamo fatto con le *v.a.* (1), enunciamo un *lemma di caratterizzazione* per vettori aleatori.

#Lemma

Lemma (lemma di caratterizzazione dei vettori aleatori).

Sia $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N$ con $(\Omega, p, \mathcal{A})$ uno *spazio di probabilità*. Allora si ha che sono equivalenti le seguenti condizioni

$$\forall k \in \{1, \dots, N\}, X_k \text{ è variabile aleatoria}$$
$$\Updownarrow$$
$$\{X \in E\} \in \mathcal{A}, E := \prod_{k=1}^{N}(a_k, b_k)$$
$$\Updownarrow$$
$$\{X \in E\} \in \mathcal{A}, \forall E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Lemma 1 (lemma di caratterizzazione dei vettori aleatori)
Lo spirito di dimostrazione è identico a quello per dimostrare il caso scalare. Sappiamo che la *prima* e la *seconda* condizione sono equivalenti, dal momento che consideriamo solo i *boreliano* in $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. La *seconda* e la *terza* sono equivalenti, dal momento che possiamo prendere complementari, intersezioni ed unioni.

Notare per controllare se X sia un *vettore aleatorio* o meno, si usa spesso la condizione *i.* e *ii.* dato che sono le più facili da controllare. Invece dal punto di vista operativo si usa la *iii.*, dato che è la più flessibile.

Inoltre con questo lemma possiamo definire bene la nozione di vettore aleatorio.

3. Definizione di Vettore Aleatorio

#Definizione

> Definizione (vettore aleatorio).
>
> Si dice *"vettore aleatorio"* (o v.a. in più variabili) come una funzione
>
> $$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N$$
>
> (dove Ω fa parte dello spazio di probabilità) tale che
>
> $$\{X \in (E \subseteq_{\mathcal{B}} \mathbb{R}^N)\} \in \mathcal{A}$$
>
> che viene soddisfatta se e solo se vale il *lemma di caratterizzazione sui vettori aleatori* (1).

4. Caso Discreto

In particolare vedremo i *vettori aleatori discreti*.

#Osservazione

Osservazione (vettori aleatori discreti).

Osserviamo che i *vettori aleatori discreti* sono quei vettori che assumono al più una quantità numerabile di valori; equivalentemente, le loro *componenti* sono v.a. discrete.

Vettori Aleatori Discreti

X

Introduzione ai vettori aleatori: caso discreto.

X

0. Voci correlate

- Introduzione ai Vettori Aleatori
- Variabile Aleatoria Discreta

1. Vettori Aleatori Discreti

INTRODUZIONE. Sia $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ uno *spazio di probabilità*, con $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N$ una mappa. Questo è un *vettore aleatorio discreto* se ogni sua componente è una *v.ariabile aleatoria*; equivalentemente, se per ogni N-rettangolo $B = \bigtimes_{k=1}^{N}(a_k, b_k)$ (Definizione 1 (N-rettangolo)), vale

$$\{X \in B\} \in \mathcal{A}$$

Poi specificamente nel caso discreto l'attore principale è $q(\underline{x})$ definito come

$$q(\underline{x}) := p\{X = \underline{x}\}$$

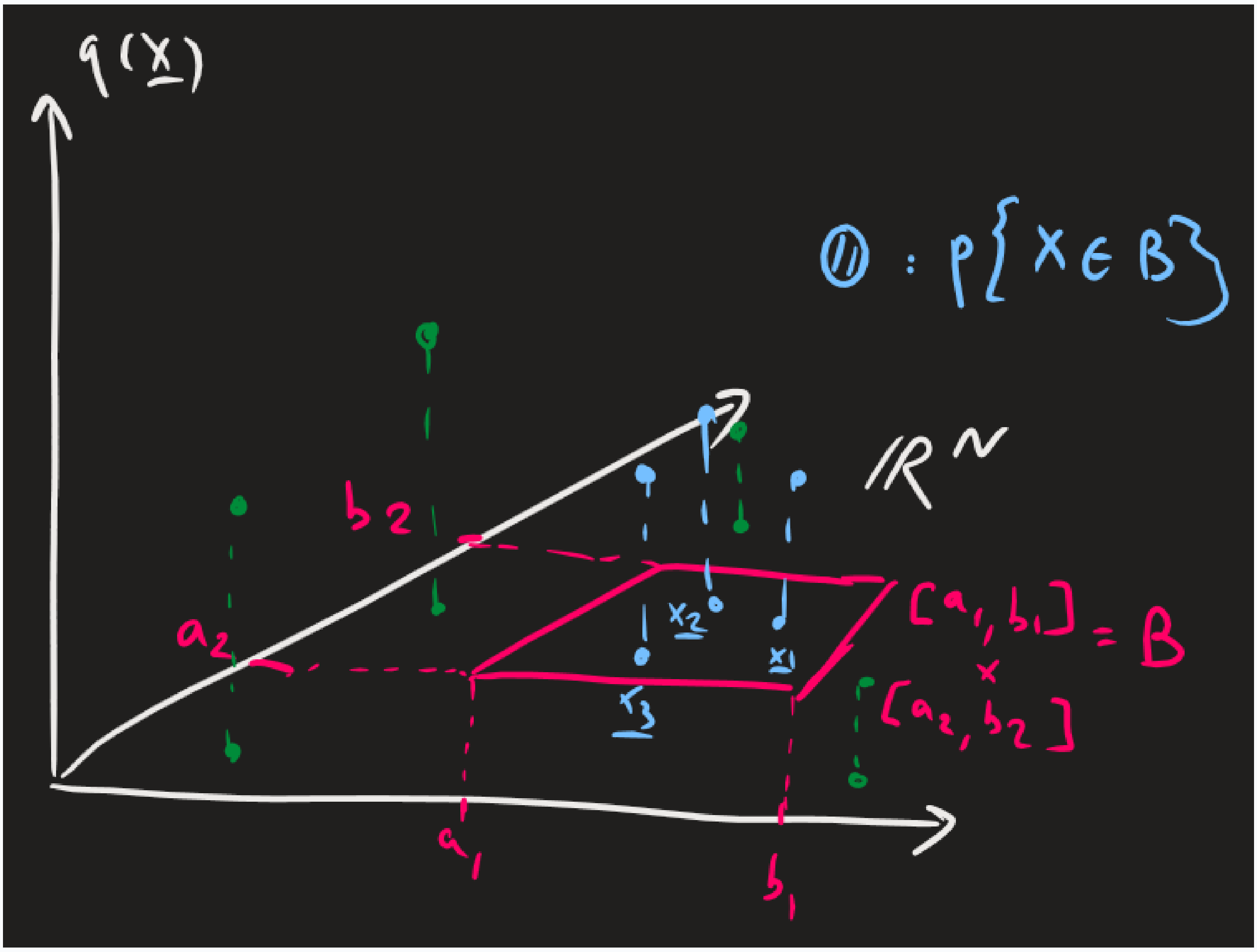
e ovviamente vale che

$$\sum_{\underline{x} \in \mathbb{R}^N} q(\underline{x}) = 1$$

Ricordo che poi q assume *valori non-nulli* per un numero finito o al più numerabile di valori, che chiameremo $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n$.
Allora la probabilità $p\{X \in B\}$ può essere calcolata come

$$p\{X \in B\} = \sum_{\underline{x} \in B} q(\underline{x}) = q(\underline{x}_1) + \ldots + q(\underline{x}_n)$$

Stesso vale se invece di avere un n-rettangolo abbiamo un insieme B facente parte della *tribù boreliana* $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ (Definizione 10 (σ-algebra di Borel generalizzata in N)).



#Osservazione

> Osservazione (posso ridurre al caso unidimensionale).
>
> Notiamo che possiamo calcolare $q(\underline{x})$ avendo rispetto ad una sola variabile: si *"congela"* tutte le variabili tranne una, ottenendo la restrizione $q_k(t)$. In specifico scegliendo $1 < k < N$ ho qualcosa del tipo
>
> $$q_k(t) := \sum_{\underline{x} \in E} q(\underline{x}), E = \mathbb{R}^{k-1} \cdot \{t\} \cdot \mathbb{R}^{N-k}$$
>
> Ovvero sto calcolando su *una striscia*.

A2. Densità Associate ai Vettori Aleatori Discreti

Densità associate a Vettori Aleatori Discreti

X

Definizione generalizzata di distribuzione su vettori aleatori. Definizione di densità su vettori aleatori discreti. Proprietà delle densità.

---

0. Voci correlate

- Introduzione ai Vettori Aleatori
- Definizione di Distribuzione

1. Generalizzazione sulla Distribuzione e Densità

Generalizzazione. Come abbiamo definito la *distribuzione* e la *densità* su *variabili aleatorie*, possiamo definire la *distribuzione* e *densità* per *vettori aleatori*. Ovvero

#Definizione

Definizione (distribuzione e densità su vettori aleatori).

Sia $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N$ e $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^M)$. Sicuramente si ha X vettore aleatorio. Dunque ha senso considerare

$$p_x(E) := P(\{X \in E\})$$

e lo chiameremo *distribuzione*, oppure *densità* nel caso discreto come segue:

$$q(x) := p(\{X = x\})$$

2. Proprietà delle Densità Aleatorie

Come fatto per le *densità* sul caso scalare, enunciamo delle proprietà (1).

#Proposizione

Proposizione (proprietà delle densità aleatorie).

Sia q una densità associata ad un vettore aleatorio X. Allora valgono che:

$$q(x) = 0, x \in \mathbb{R}^N : x \notin X(\Omega)$$

poi

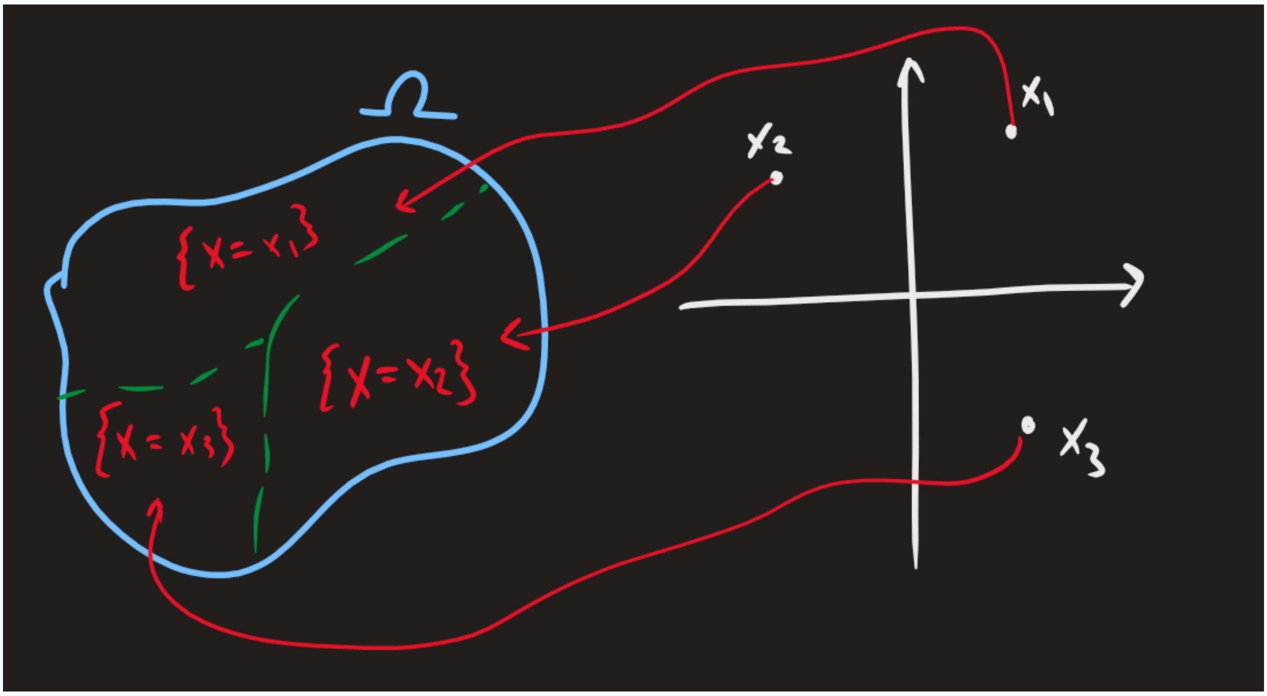
$$\sum_{x \in X(\Omega)} q(x) = 1$$

e infine

$$\boxed{p_x(E) = p\{X \in E\} = \sum_{x \in E} q(x)}$$

ovvero la *densità* identifica la *probabilità sul boreliano* E.

FIGURA 2.1. (*L'idea della proprietà 2*)



A3. Densità Congiunta e Marginale

Densità Congiunta e Marginale

X

Definizione di densità congiunta e marginale. Osservazione: legame tra densità marginale e congiunta

X

0. Voci correlate

- Densità associate a Vettori Aleatori Discreti
- Introduzione ai Vettori Aleatori

1. Separazione delle Densità Aleatorie

Come osservato all'inizio, possiamo *"unire"* delle variabili aleatorie singole in *un vettore aleatorio*. Oppure possiamo fare il viceversa: da un *vettore aleatorio* possiamo scomporlo in *variabili aleatorie*. Poniamo pene la loro definizione, concentrandosi sulla *densità*.

#Definizione

Definizione (densità congiunta).

Siano $X_1, \ldots, X_N$ delle *variabili aleatorie discrete*. La densità q del vettore aleatorio X definito come

$$X \to (X_1, \ldots, X_N)$$

allora chiamiamo la *densità congiunta* delle singole variabili aleatorie come la *densità su* X.

#Definizione

Definizione (densità marginale).

Sia $X \to (X_1, \ldots, X_N)$ un *vettore aleatorio*. Le densità $q_1, \ldots, q_N$ delle variabili aleatorie $X_1, \ldots, X_N$ si dicono *densità marginali*.

2. Legame tra Densità Congiunta e Densità Marginali

Qual è la differenza tra *densità congiunta* e *densità marginale*? Da una posso ricavare l'altra? Il viceversa? Adesso vediamo con gli seguenti esempi.

#Teorema

Teorema (legame densità congiunta e marginali).

Dalla densità di un *vettore aleatorio* X possiamo ricavare le *densità marginali*. Tuttavia dalle *densità marginali* non si ricava sempre il *vettore aleatorio*.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 3 (legame densità congiunta e marginali)
Parte 1. Dimostriamo la prima parte dell'enunciato (ovvero che possiamo ricavare le densità marginali da una densità congiunta).
Per un $t \in \mathbb{R}$ abbiamo

$$\begin{aligned} q_1(t) = p\{X_1 = t\} &= p\{X_1 = t \wedge \underbrace{(X_2, \ldots, X_N) \in \mathbb{R}^{N-1}\}}_{\text{fa ciò che vuole}} \\ &= p\{X_1 \in \{t\} \times \mathbb{R}^{N-1}\} = \sum_{x \in \{t\} \times \mathbb{R}^{N-1}} q(x) \end{aligned}$$

che dimostra $q_1(t)$ essere una *densità*. Ripetendo il ragionamento per un k qualsiasi abbiamo

$$q_k(t) = \sum_{x \in E} q(x)$$

con $E = \mathbb{R}^{k-1} \times \{t\} \times \mathbb{R}^{N-k}$. ■

Parte 2. Vedere l'esempio sottostante, che può essere presa come una *dimostrazione per assurdo*.

#Esempio

Esempio. (*Le urne senza reimmissione*)

Prendiamo un'urna con n palline, numerate da 1 a n. Estraiamo *due palline senza reimmissione* e indichiamo X_1, X_2 i numeri delle palline estratte. Allora abbiamo che

$$x_1 = x_2 \implies p(\{X_2 = x_2 | X_1 = x_1\}) = 0$$

e d'altra parte

$$x_1 \neq x_2 \implies p(\{X_2 = x_2 | X_1 = x_1\}) = \frac{1}{n-1}$$

(avendo la prima pallina estratta, abbiamo una scelta in meno).

Adesso, per calcolare la probabilità di un vettore qualsiasi sfrutto le regole della probabilità condizionale (in particolare la regola della catena, 1).

$$\begin{aligned} q(x) = p(\{X \in x\}) &= p(\{X_1 = x_1\} \cap \{X_2 = x_2\}) \\ &= p(\{X_1 = x_1\}) \cdot p(\{X_2 = x_2 | X_1 = x_1\}) \end{aligned}$$

da cui ricaviamo

$$q(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n(n-1)}, x \in \{1, 2, \ldots, n\}^2 \wedge x_1 \neq x_2 \\ 0, \text{altrimenti} \end{cases}$$

Ovvero, in forma compatta $q(x) = \frac{1}{n(n-1)} \chi_E$ con E le *"coppie ordinate di interi con componenti diversi"*.

Adesso, avendo ottenuto questa *densità congiunta*, vogliamo ricavarne la densità *marginale*. In particolare abbiamo

$$\tilde{q}_2(t) = \sum_{x \in \mathbb{R} \times \{t\}} q(x) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{x \in \{1, \ldots, \hat{t}, \ldots, N\}} \frac{1}{n(n-1)}, x \in \{1, \ldots, n\} \\ 0, \text{altrimenti} \end{cases}$$

Avendo una somma di esattamente $N-1$ elementi, abbiamo che

$$\sum_{x \in \{1,\ldots,\hat{t},\ldots,N\}} \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n}$$

ovvero

$$\tilde{q}_2(t) = \frac{1}{n}\chi_E$$

con $E = \{1, \ldots, N\}$. Questa è una brutta notizia! Infatti, dovrebbe essere

$$q_2(t) = \frac{1}{(n)(n-1)}\chi_E$$

Ovvero

$$\tilde{q}_2(t) \neq q_2(t)$$

Da questo ricaviamo che dalle *densità marginali* non si può sempre ricondurre alla *densità congiunta*.

#Osservazione

> Osservazione (caso possibile).
>
> Osserviamo che nel precedente caso, ricavare la *densità congiunta* dalle marginali è possibile nel caso in cui ammettessimo la *reimmissione* (da verificare per esercizio). Vedremo che questo non è un caso.

3. Condizione Necessaria e Sufficiente per far valere il viceversa

In base all'osservazione precedente, enunciamo la seguente proposizione

#Proposizione

> Proposizione (condizione necessaria e sufficiente per il legame forte tra densità marginale e congiunta).
>
> Siano $X_1, \ldots, X_N$ delle *variabili aleatorie discrete* e $X = (X_1, \ldots, X_N)$ il vettore aleatorio.
> Allora vale che la densità q su X è esprimibile come
>
> $$q(x) = \prod_{k=1}^{N} q_k(x_k), \forall x \in \mathbb{R}^N$$

> *se e solo se* vale che $X_1, \ldots, X_N$ sono *indipendenti*.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE della Proposizione 5 (condizione necessaria e sufficiente per il legame forte tra densità marginale e congiunta)

" $\Longleftarrow$ ": Banale, basta considerare la definizione di variabili aleatorie indipendenti. Infatti ho

$$q(x) := p\{X = x\} \equiv \prod_{k \in \{1, \ldots, N\}} p\{X_k = x_k\} =: \prod_{k \in \{1, \ldots, N\}} q_k(x_k)$$

" $\Longrightarrow$ ": Siano $E_1, \ldots, E_N \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ e $E = \bigtimes_i E_i$ (ovvero un sottoinsieme di $\mathbb{R}^N$) abbiamo che

$$p(\{X \in E\}) = \sum_{x \in E} q(x) = \sum_{x \in E} \prod_{k=1}^{N} q_k(x_k)$$

Possiamo commutare la *produttoria* con la *sommatoria*. Per convincerci di questo pensiamo al caso bidimensionale: ovvero con $E_1 = \{x_1, \bar{x}_1\}$ e $E_2 = \{x_2, \bar{x}_2\}$ abbiamo $(q_1(x_1) + q_1(\bar{x}_1)) \cdot (q_2(x_2) + q_2(\bar{x}_2))$, che sviluppandolo ci dà
$(q_1(x_1) + q_1(\bar{x}_1)) \cdot (q_2(x_2) + q_2(\bar{x}_2)) = q_1(x_1)q_2(x_2) + q_1(\bar{x}_1)q_2(x_2) + \ldots + q_1(\bar{x}_1) + q_2(\bar{x}_2)$
Dunque abbiamo

$$p(X_1 \in E_1, \ldots, X_N \in E_N) = \ldots = \prod_{k=1}^{N} \sum_{x_k \in E_k} q_k(x_k) := \prod_{k=1}^{N} p(\{X_k \in E_k\})$$

che prova la tesi. ■

A4. Vettori Aleatori Assolutamente Continui

Vettori Aleatori Assolutamente Continui

X

Generalizzazione sul discorso dei vettori aleatori discreti: vettori aleatori assolutamente continui.

X

0. Voci correlate

- Vettori Aleatori Discreti

- Introduzione ai Vettori Aleatori
- Variabile Aleatoria Assolutamente Continua

1. Definizione di Vettore Aleatorio Assolutamente Continuo

#Definizione

Definizione (vettore aleatorio assolutamente continuo).

Un vettore aleatorio $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N$ si dice *assolutamente continuo* se esiste *un campo scalare* $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow [0, +\infty)$ integrabile tale che *per ogni* n*-rettangolo* $B = \bigtimes_{k=1}^{N} [a_k, b_k]$ si ha

$$p\{X \in B\} = \int_B f(\underline{x}) \, \mathrm{d}\underline{x} = \int_{a_1}^{b_1} \ldots \int_{a_N}^{b_N} f(x_1, \ldots, x_N) \, \mathrm{d}x_1 \, \ldots \, \mathrm{d}x_N$$

In tal caso la funzione f è detta *densità* di X.

La formula che compare all'ultimo è un *integrale multiplo*, iterabile con *Fubini* (dato che ho n-rettangoli: Teorema 1 (di Fubini)).

Il discorso si generalizza anche con $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

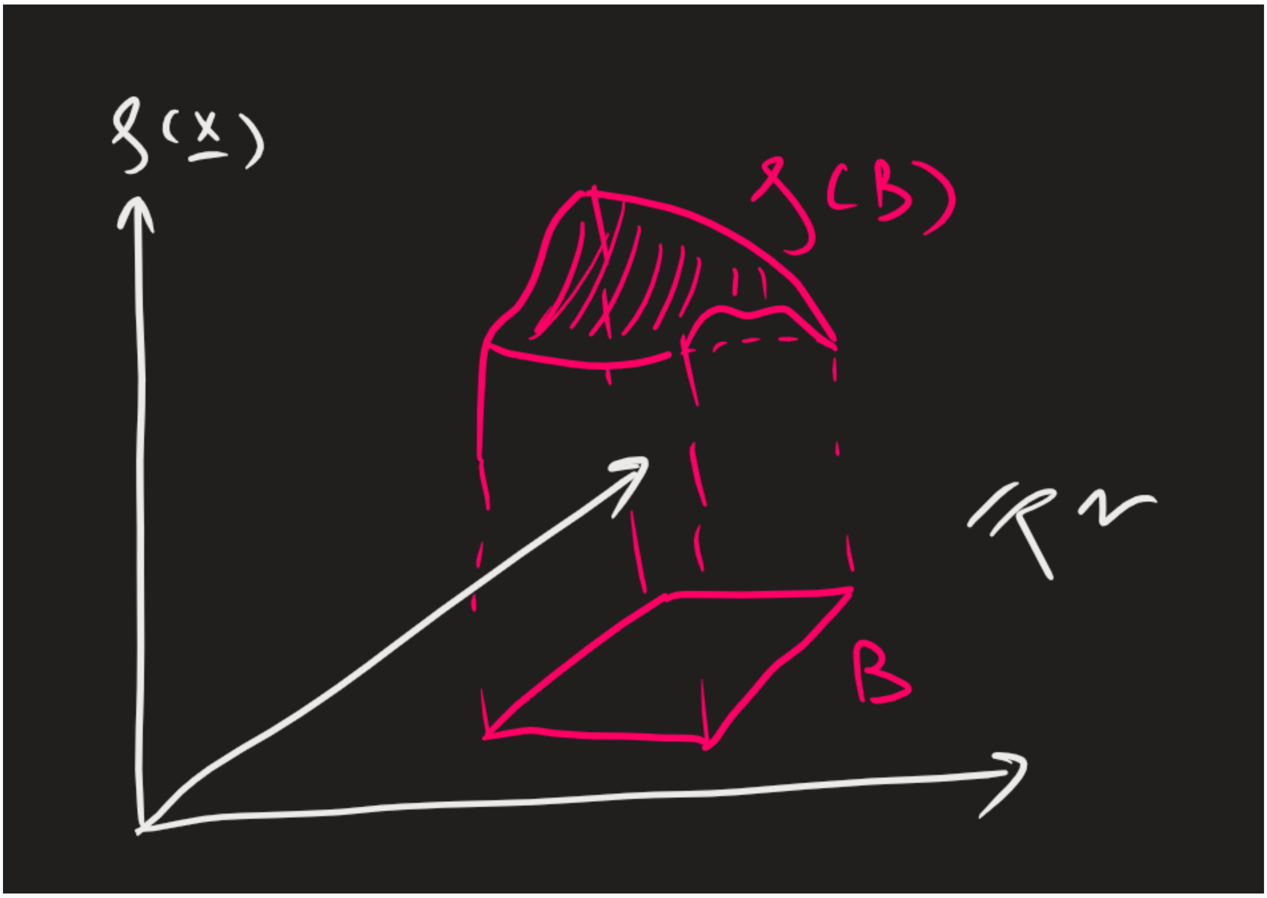
#Osservazione

Osservazione (proprietà immediata).

Ovviamente per essere una densità, deve valere l'integrale

$$\int_{\mathbb{R}^N} f = 1$$

FIGURA 1.1. (Caso $N = 2$)



2. Osservazioni sui v.a. assolutamente continui

#Osservazione

> Osservazione (posso ridurmi al caso unidimensionale).
>
> Osserviamo che se ho X un vettore aleatorio assolutamente continuo con densità f, allora ogni sua componente X_k ha una sua densità f_k definita da
>
> $$f_k(t) = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} f(x_1, \dots, t, \dots, x_N)\,\mathrm{d}x_1\ \dots\ \mathrm{d}x_{k-1}\ \dots \mathrm{d}x_N$$
>
> Ovvero stiamo *integrando* su una *sezione*.

#Osservazione

> Osservazione (componenti assolutamente continue non garantisce l'assoluta continuità).
>
> Notiamo che al contrario del *caso discreto*, il fatto che un *vettore aleatorio* abbia componenti *assolutamente continue* non garantisce che il *vettore aleatorio* sia assolutamente continuo!
>
> Prendiamo un esempio nel caso $N = 2$. Sia X una v.a. *assolutamente continua*, allora $\mathbf{X} := (X, X)$ non è assolutamente continuo.

Sia infatti (a,b) un intervallo tale che

$$p\{X \in (a,b)\} \neq 0$$

Posto l'insieme B come

$$B = \{(x,y)^T : x = y \wedge x \in (a,b)\}$$

(ovvero B è la striscia (a,b) intersecata con la bisettrice: ovvero abbiamo un insieme vuoto, dato che $(a > 0, b > 0)$)

Allora abbiamo che $m_2(B) = 0$ (ovvero la sua misura è nulla) ma

$$p\{\mathbf{X} \in B\} = p\{(X,X) \in B\} = p\{X \in (a,b) \wedge X \in (a,b)\} \neq 0$$

che è chiaramente un assurdo. ■

A5. Proprietà dei V.A. Assolutamente Continui

Proprietà dei Vettori Aleatori Assolutamente Continui

X

Proprietà dei vettori assolutamente continui: condizione equivalente per ricavare la congiunta dalle marginali; trasformazioni lineari dei vettori aleatori assolutamente continui; valor medio delle trasformazioni lineari; somma di due vettori aleatori bidimensionali (caso generico e indipendente).

X

0. Voci correlate

- Vettori Aleatori Assolutamente Continui
- Densità Congiunta e Marginale

1. Condizione Equivalente per l'indipendenza

Vediamo una serie di *proprietà* per i vettori aleatori assolutamente continui. Partiamo dalla controparte di quanto visto nel caso discreto; ovvero che possiamo *ricavare* la densità *congiunta* dalle *marginali* se e solo se abbiamo l'indipendenza (Proposizione 5 (condizione necessaria e sufficiente per il legame forte tra densità marginale e congiunta)).

#Proposizione

Proposizione (condizione sufficiente e necessaria per l'indipendenza).

Sia $X = (X_1, \ldots, X_n)$ un *vettore aleatorio assolutamente continuo* con $f_1, \ldots, f_n : \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty)$ delle densità associate a $X_1, \ldots, X_n$.

Allora X ha una densità del tipo

$$f(x) = \prod_{k=1}^{m} f_k(x_k)$$

se e solo se $X_1, \ldots, X_n$ sono *indipendenti*.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE della Proposizione 1 (condizione sufficiente e necessaria per l'indipendenza)

Omessa, analoga al caso discreto (Densità Congiunta e Marginale > ^a8eaaf). ■

2. Trasformazione Affine

Vediamo come si comporta un *vettore aleatorio assolutamente* continuo con le *trasformazioni affini*.

#Proposizione

Proposizione (densità delle trasformazioni affini sui v.a. assolutamente continui).

Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ una *matrice invertibile* (ovvero con rango $\operatorname{rk} A = n$ se e solo se $\det A \neq 0$) e $b \in \mathbb{R}^N$ e sia X un *vettore assolutamente continuo* con legge $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, +\infty)$.

Allora vale che $Y := AX + b$ è un *vettore assolutamente continuo* con densità

$$\boxed{g(y) = \frac{f(A^{-1}(y-b))}{|\det A|}}$$

#Osservazione

Osservazione (per il caso generico non è garantito che abbiamo sempre v.a. assolutamente continui).

Dato un *vettore aleatorio* X assolutamente continuo e una mappa continua ψ e di conseguenza la composta $Y := \psi \circ X$, sicuramente sotto certe ipotesi di regolarità (come la *continuità*) si avrà che Y rimane un vettore aleatorio, ma non che sarà assolutamente continua.

Pensiamo ad esempio il caso lineare con $\det A = 0$: una delle dimensioni verrebbe *"schiacciata"*, rendendo il vettore aleatorio assolutamente continuo in uno discreto.

In ogni caso, è possibile sfruttare la densità di X per conoscere $E[Y]$, come nel caso discreto.

#Teorema

Teorema (valor medio della composizione).

Sia X un vettore aleatorio n-dimensionale assolutamente continuo e una mappa continua ψ. Sia definita la composizione $Y := \psi \circ X$.

Allora Y ha *valor medio finito* se e solo se

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\psi(x)| f(x) \, \mathrm{d}x < +\infty$$

In tal caso si ha

$$\boxed{E[Y] = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) f(x) \, \mathrm{d}x}$$

3. Somma di Vettori Aleatori

Vediamo il caso particolare delle trasformazioni di vettori aleatori, con $n = 2$ e $\psi = +$ (l'operatore somma).

#Proposizione

Proposizione (somma di un vettore aleatorio).

Sia (X, Y) un *vettore aleatorio bidimensionale* assolutamente continuo con densità f.

Allora $X + Y$ è una *variabile aleatoria assolutamente continua* con densità

$$g(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x, t-x) \, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f(t-x, x) \, \mathrm{d}x$$

a patto che f è integrabile sulle variabili x e $t - x$.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE della Proposizione 5 (somma di un vettore aleatorio)

Si tratta di provare che

$$p\{X+Y \leq 2\} = \int_{-\infty}^{2} g(t)\ \mathrm{d}t$$

(in realtà al posto di due si potrebbe mettere un numero qualsiasi, poco importa)
Allora sia $B_2 := \{(x,y)^T : x+y \leq 2\}$. Possiamo scrivere dunque
$p\{X+Y \leq 2\} = p\{(X,Y) \in B_2\} = \int_{B_2} f$. Adesso si tratta di valutare questo ultimo integrale: utilizzeremo *Fubini* (in particolare la formula di riduzione su insiemi normali, con $\varphi = -\infty$ e $\psi = 2-x$) e il *cambiamento di variabili* con $y = t-x$ (o viceversa).

$$\begin{aligned}\int_{B_2} f &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{-\infty}^{2-x} f(x,y)\ \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{-\infty}^{2} f(x,t-x)\ \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{2} \left(\underbrace{\int_{\mathbb{R}} f(t-x,x)\ \mathrm{d}x}_{g(t)} \right) \mathrm{d}t\end{aligned}$$

Così abbiamo ottenuto la tesi

$$p\{X+Y \leq 2\} = \int_{-2}^{+\infty} g(t)\ \mathrm{d}t$$

con $g(t)$ la funzione appena *"rinominata"*. ■

Da questo teorema abbiamo il seguente corollario, già enunciato (Lemma 9 (la somma di variabili aleatorie))

#Corollario

> **Corollario (caso indipendente).**
>
> Siano X_1, X_2 due *variabili aleatorie assolutamente continue* con densità f_1, f_2. Supponiamo X_1, X_2 *indipendenti*.
>
> Allora abbiamo che la somma $Y := X_1 + X_2$ è una *variabile aleatoria assolutamente continua* con densità
>
> $$f_Y(t) = \int_{\mathbb{R}} f_1(x) f_2(t-x)\ \mathrm{d}x$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Corollario 6 (caso indipendente)
Basta usare il teorema generale appena nunciato, tenendo conto che $f(x,y) = f_1(x)f_2(x)$.
■

A6. Definizione di Media e Varianza per Vettori Aleatori

Media e Covarianza di Vettori Aleatori

X

Definizione di media e covarianza per vettori aleatori.

X

0. Voci correlate

- Definizione del Valore Medio
- Definizione di Covarianza

1. Definizione di Media e Covarianza per vettori aleatori

#Definizione

Definizione (media vettoriale).

Sia $\mathbf{X}$ un *vettore aleatorio* n-dimensionale.

Allora si dice la *media* di $\mathbf{X}$, $E[\mathbf{X}]$ come il vettore

$$E[\mathbf{X}] := (E[X_1], \ldots, E[X_n])$$

#Definizione

Definizione (covarianza quadratica).

Sia $\mathbf{X}$ un *vettore aleatorio* n-dimensionale.

Si dice la *covarianza* di $\mathbf{X}$ come la *matrice* $Q(\mathbf{X}) \in M_n(\mathbb{R})$ definita come

$$(Q)_{ij} := \operatorname{cov}(X_i, X_j)$$

ovvero tutte le *covarianze miste*.

Si osserva che la *diagonale di* Q è costituita dalle *varianze* (Osservazione 2 (la covarianza delle stesse variabili aleatorie))

v

^

B. VARIABILI ALEATORIE COMPLESSE

B1. Variabili Aleatorie Complesse

Variabili Aleatorie Complesse

X

Introduzione alle variabili aleatorie complesse: definizione, caso discreto e continuo.

X

1. Variabili Aleatorie Complesse

#Definizione

Definizione (v.a. complessa).

Sia $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ uno *spazio di probabilità*. Si dice $Z : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una *variabile aleatoria complessa* se esistono due *variabili aleatorie reali* Z_1, Z_2 tali che

$$Z = Z_1 + iZ_2$$

#Definizione

Definizione (valor medio di una v.a. complessa).

Sia $Z = Z_1 + iZ_2$ una *variabile aleatoria complessa*. Si dice che ha *media finita* se entrambe Z_1, Z_2 hanno *media finita*. In tal caso si pone

$$E[Z] = E[Z_1] + iE[Z_2]$$

Nel caso discreto si avrebbe

$$E[Z] = \sum_{x \in \mathbb{R}} x q_1(x) + \sum_{x \in \mathbb{R}} x q_2(x)$$

o nel caso assolutamente continuo

$$E[Z] = \int_{\mathbb{R}} x f_1(x)\ \mathrm{d}x + i \int_{\mathbb{R}} x f_2(x)\ \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{C}} z f(z)\ \mathrm{d}z$$

Come mai abbiamo visto questa tipologia di variabili aleatorie? Sarà utile per la *funzione caratteristica*, che sarà in grado di caratterizzare le *variabili aleatorie* (sia discrete che continue).

B2. Funzione Caratteristica

Funzione Caratteristica per Variabili Aleatorie

X

Funzione caratteristica delle variabili aleatorie: definizione, proprietà. Proprietà: caratterizzazione delle variabili aleatorie identiche, indipendenti. Funzione caratteristica della somma di v.a. indipendenti (e trasformazioni). Funzione caratteristica per v.a. aventi momento secondo finito.

X

0. Voci correlate

- Variabili Aleatorie Complesse

1. Definizione di Funzione Caratteristica

Vediamo uno strumento potente per *"caratterizzare"* le variabili aleatorie.

#Lemma

Lemma (lemma preliminare di buona posizione).

Sia X un *vettore aleatorio* n-dimensionale e $y \in \mathbb{R}^n$.

La mappa $Z = \exp(i, \langle y, X \rangle) = \cos\langle y, X \rangle + i \sin\langle y, X \rangle$ è una *variabile aleatoria con media finita* (in quanto $\cos, \sin$ sono funzioni limitate).

#Definizione

Definizione (funzione caratteristica).

Sia X un *vettore aleatorio* n-dimensionale e $y \in \mathbb{R}^n$.
Allora si dice la *funzione caratteristica di* X, $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$, definita come

$$\phi(y) := E[\exp(i\langle y, X \rangle)]$$

(si fa variare y su $\mathbb{R}^n$)

Nel caso discreto si ha, ponendo $q(x)$ la densità associata a X,

$$\phi(y) = \sum_{x \in \mathbb{R}^n} \exp(i\langle y, X\rangle) q(x)$$

Nel caso assolutamente continuo ho, ponendo $f(x)$ la legge associata a X,

$$\phi(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(i\langle y, X\rangle) f(x) \, \mathrm{d}x$$

X

2. Caratterizzazione mediante la funzione caratteristica

#Osservazione

Osservazione (la funzione caratteristica dipende solamente dalla legge).

Notiamo che sia nel *caso discreto* che *continuo* abbiamo che la funzione caratteristica $\phi(y)$ dipende *solamente* dalla loro *legge* p_x: vedremo che due variabili aleatorie con la stessa legge hanno la stessa funzione caratteristica e viceversa.

In questo modo, non sarà più necessario controllare le *funzioni di ripartizioni* per vedere se le densità sono uguali o meno.

#Teorema

Teorema (caratterizzazione delle v.a. identiche).

Siano X, Y delle *variabili aleatorie reali* aventi legge f, g (e funzioni di ripartizione F, G) e funzioni caratteristiche ϕ, ψ.

Allora hanno la *stessa legge* se e solo se hanno la *stessa funzione caratteristica*.

$$f = g \iff F = G \iff \phi = \psi$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 4 (caratterizzazione delle v.a. identiche)
Omessa. ■

X

#Osservazione

Osservazione (possiamo caratterizzare pure le v.a. indipendenti).

Notiamo che con la funzione caratteristica possiamo pure *caratterizzare* le v.a. indipendenti.

Supponiamo che $X_1, \ldots, X_n$ delle *variabili aleatorie* assolutamente continue indipendenti con leggi $f_1, \ldots, f_n$. Supponendo indipendenza, allora $X = (X_1, \ldots, X_n)$ è assolutamente continuo con la densità

$$f(x) = \prod_{k=1}^{n} f_n(x)$$

Si ha dunque che la caratteristica della congiunta è

$$\begin{aligned}\phi(y) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle y, X\rangle} f(x)\ \mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{k=1}^{n} e^{i(y_k x_k)} f_k(x_k)\ \mathrm{d}x_k \\ &= \prod_{k=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} e^{i(y_k x_k)} f_k(x_k)\ \mathrm{d}x_k = \prod_{k=1}^{n} \phi_k(y_k)\end{aligned}$$

Ovvero che è il prodotto delle funzioni caratteristiche. Vedremo che vale anche il viceversa, fornendoci una vera e propria caratterizzazione.

#Teorema

Teorema (caratterizzazione delle v.a. indipendenti).

Siano $X_1, \ldots, X_n$ delle v.a. con funzioni caratteristiche $\phi_1, \ldots, \phi_n$. Sia $X = (X_1, \ldots, X_n)$ la densità congiunta con funzione caratteristica ϕ. Allora si ha la seguente equivalenza:

$$X_1, \ldots, X_n \text{ indipendenti} \iff \phi(y) = \prod_{k=1}^{n} \phi_k(y_k)$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 6 (caratterizzazione delle v.a. indipendenti)
" $\Longrightarrow$: Si è già stata un'idea generale nell'osservazione precedente (Osservazione 5 (possiamo caratterizzare pure le v.a. indipendenti)). Rendiamo tutto più generale usando la nozione di *valor medio*.

$$
\begin{aligned}
\phi(y) &= E[\exp(i\langle y, X\rangle)] \\
&= E\left[\prod_{k=1}^{n} \exp(iy_k X_k)\right] \\
&= \prod_{k=1}^{n} E[\exp(iy_k X_k)] = \prod_{k=1}^{n} \phi_k(y_k)
\end{aligned}
$$

" $\impliedby$ ": Omessa, in quanto servirebbero degli argomenti di *analisi funzionale*. ■

X

#Proposizione

> Proposizione (caratterizzazione delle v.a. aventi momento secondo finito).
>
> Sia X una *variabile aleatoria* con momento secondo finito.
> Allora la sua funzione caratteristica $\phi(y)$ ammette derivata seconda, con $\phi''(0) = -E[X^2]$.
>
> Notiamo che questo teorema è molto utile per calcolare $E[X^2]$!

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE della Proposizione 7 (caratterizzazione delle v.a. aventi momento secondo finito)
Nota: idea.
Ammettiamo che si possa commutare l'operazione di media con la derivazione (va motivata, ma vabbè).
Allora possiamo scrivere

$$
\phi'(t) = E[\exp(itX)]' = E[\exp(itX)'] = E[iX\exp(itX)] < +\infty
$$

adesso calcoliamo la derivata seconda

$$
\begin{aligned}
\phi''(t) = E[iX\exp(itX)]' &= E[(iX\exp(itX))'] \\
&= E[(iX)^2\exp(itX)] \\
&= E[-X^2\exp(itX)] < +\infty
\end{aligned}
$$

Dimostrando la tesi. ■

X

3. Caratteristiche delle Trasformazioni

Vediamo come si comporta la caratteristica rispetto alle trasformazioni.

#Proposizione

Proposizione (somma delle v.a. indipendenti).

Siano $X_1, \ldots, X_n$ delle *variabili aleatorie* con funzione caratteristica $\phi_1, \ldots, \phi_n$.

Allora se $X_1, \ldots, X_n$ sono *indipendenti* si che ponendo $X = \sum_n X_n$ con ϕ la sua funzione caratteristica, si ha

$$\phi(y) = \prod_{k=1}^{n} \phi_k(y)$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE della Proposizione 8 (somma delle v.a. indipendenti)

Si tratta di usare la linearità del valor medio, proprietà dell'esponenziale e l'indipendenza.

$$\begin{aligned}\phi(y) &= E[\exp(i\langle y, X\rangle)] \\ &= E\left[\exp\left(\sum_{k=1}^{n} iyX_k\right)\right] \\ &= E\left[\prod_{k=1}^{n} \exp(iyX_k)\right] \\ &= \prod_{k=1}^{n} E[\exp(iyX_k)] =: \prod_{k=1}^{n} \phi_k(y)\end{aligned}$$

che è la tesi. ■

X

#Teorema

Teorema (funzione caratteristiche delle v.a. simmetriche).

Sia X una *variabile aleatoria*. Se vale che è simmetrica (ovvero $X = -X$), allora vale che la sua funzione caratteristica ϕ è una funzione a *valori reali*.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 9 (funzione caratteristiche delle v.a. simmetriche)

Sia $X = -X$. Chiamiamo ϕ la funzione caratteristica di ϕ e ϕ_- quella di $-X$. Abbiamo che

$$\phi_-(y) = E[\exp(-i\langle y, X\rangle)] = E\overline{[\exp(i\langle y, X\rangle)]} = \overline{\phi(y)}$$

Ovvero $\phi_-(y)$ è il *coniugato* della funzione $\phi(y)$. Allora in tal caso si ha che

$$\Im(X+(-X)) = k \iff k = 0$$

ovvero la sua parte immaginaria è nulla. ■

X

#Teorema

> Teorema (funzione caratteristica di una trasformazione affine su un vettore aleatorio).
>
> Sia X un *vettore aleatorio* n-dimensionale, $A \in M_{k,n}(\mathbb{R})$ e $b \in \mathbb{R}^k$. Allora $Y = AX + b$ è un *vettore aleatorio* k-dimensionale.
>
> Dette ϕ la funzione caratteristica di X e ψ quella di Y, si ha
>
> $$\psi(y) = \exp(i\langle y, b\rangle)\phi({}^tA \cdot y)$$
>
> In particolare nel caso scalare si ha, scegliendo $a \in \mathbb{R}^n$ e $b \in \mathbb{R}$ (ovvero $k = 1$):
>
> $$\psi(t) = \exp(itb)\phi(ta)$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 10 (funzione caratteristica di una trasformazione affine su un vettore aleatorio)

Si tratta di calcolare ψ normalmente. Ovvero

$$\begin{aligned}\psi(y) &= E[\exp(i\langle y, AX + b)] \\ &= E\left[\exp(i\langle {}^TA \cdot y, X\rangle)\right] \exp[i\langle y, b\rangle] \\ &= \exp(i\langle y, b\rangle)\phi({}^tA \cdot y)\end{aligned}$$

che è la tesi. ■

B3. Esempi Notevoli di Funzione Caratteristica

Esempi di Funzione Caratteristica per Variabili Aleatorie

X

Esempi notevoli di funzione caratteristica per le v.a.: gaussiana standard, parametrizzata e concentrata in un punto. Osservazione: con varianza nulla si ha una concentrata in un punto.

X

0. Voci correlate

- Funzione Caratteristica per Variabili Aleatorie
- Densità Gaussiana

1. Gaussiana Standard

#Teorema

Teorema (funzione caratteristica di una gaussiana standard).

Sia $X \sim \mathcal{N}(0,1)$: allora ha la funzione caratteristica

$$\boxed{\phi(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)}$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 1 (funzione caratteristica di una gaussiana standard)
Scriviamo la sua funzione caratteristica:

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}} \, \mathrm{d}x$$

Purtroppo, questo integrale è difficile da calcolare. Dunque eseguiamo il seguente trucchetto: sapendo che ha media finita, possiamo prendere la sua derivata

$$\phi'(t) = E[iX \exp(itX)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \underbrace{ixe^{itx}}_{\psi(x)} e^{-\frac{x^2}{2}} \, \mathrm{d}x$$

Integrando per parti, scegliendo ie^{itx} come la derivanda e $xe^{-\frac{x^2}{2}}$ l'integranda, si ha

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \underbrace{ixe^{itx}}_{\psi(x)} e^{-\frac{x^2}{2}} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\underbrace{ie^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty}}_{0} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}} i \cdot ite^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}} \, \mathrm{d}x}_{-t\phi(t)} \right)$$

La prima parte della somma va a 0, poiché ho che e^{-x^2} va a 0 sia per $\pm\infty$; la seconda parte non è altro che $-t\phi(t)$. Allora ho

$$\phi'(t) = -t\phi(t)$$

Ponendo $t_0 = 0$ e di conseguenza avendo $\phi(t_0) = 1$ (segue dal fatto che ho una densità), ho la soluzione

$$\phi(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$$

che è la tesi. ■

X

2. Gaussiana generica

#Teorema

Teorema (funzione caratteristica della gaussiana).

Sia $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Allora si ha che la sua funzione caratteristica è

$$\boxed{\phi(t) = \exp\left(i\mu t - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)}$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 2 (funzione caratteristica della gaussiana)
Si tratta di sapere che per $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$ si ha che ψ la funzione caratteristica di Y è

$$\psi(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$$

Dato che $Y = \sigma X + \mu$, ho che ho una semplice *trasformazione lineare*, da cui per la formula sulle trasformazioni affini (Teorema 10 (funzione caratteristica di una trasformazione affine su un vettore aleatorio)), ho

$$\phi(t) = \exp(i\mu t) + \psi(\sigma^{-1}t)$$

Sostituendo la ψ ottengo la tesi. ■

X

3. Gaussiana Degenere

#Osservazione

Osservazione (la gaussiana degenere è una discreta).

Sia X una *v.a. costante* in $a \in \mathbb{R}$ definita come

$$q(x) = \chi_{\{a\}}(x)$$

Allora abbiamo che la sua funzione caratteristica è

$$\phi(t) = E[\exp(itX)] = \sum_{x \in \mathbb{R}} e^{itx} q(x) = e^{ita} = \exp(ita)$$

Notiamo che $E[X] = a$.

Adesso, prendendo una gaussiana $Y \sim \mathcal{N}(a, 0)$ ho che la sua funzione caratteristica è

$$\psi(t) = \exp\left(iat - \frac{0^2 t^2}{2}\right) = \exp(ita)$$

Notiamo che $\phi(t) = \psi(t)$; di conseguenza $X = Y$, per il teorema di caratterizzazione.

Ciò osservato è in linea che abbiamo detto sulle gaussiane (Densità Gaussiana > ^e4c8f8).

X

C. ALCUNE DENSITA' IN PIU' DIMENSIONI...

C1. Densità Multinomiale

Densità Multinomiale

X

Densità multinomiale: definizione e modello tipico.

X

0. Voci correlate

- Densità associate a Vettori Aleatori Discreti

1. Definizione di Densità Multinomiale

Vediamo una *generalizzazione* della *densità binomiale*, ovvero una generalizzazione dello *schema delle prove indipendenti* sul numero degli esiti.

#Definizione

Definizione (densità multinomiale).

Prendiamo uno *schema di N prove ripetute* con n esiti. Sia $x = (x_1, \ldots, x_n)$ il vettore in cui contiamo *"il numero di vittorie per gli esiti* $1, 2, \ldots, n$. Sia q_n la probabilità di avere vittoria su n, tali che $\sum q_n = 1$.
Si definisce *densità multinomiale* come la funzione

$$\boxed{q(x) = \frac{N!}{\prod_n (x_n!)} \prod_n q_n^{x_n} \chi_E}$$

con E l'insieme delle n-uple con somma n. Formalmente.

$$E := \left\{ x \in \mathbb{R}^N : \sum_{j=1}^N x_j = n \right\}$$

2. Modello Tipico

Vediamo il *modello tipico* della densità multinomiale.

#Esempio

MODELLO. (*Densità multinomiale*)
Prendiamo uno schema di N prove ripetute con n esiti. Etichettiamo tali esiti con $1, \ldots, n$. Si assume che la loro probabilità singolare è

$$q_1, q_2, \ldots, q_n \in (0, 1) : \sum_{0 \leq i \leq n} q_i = 1$$

Adesso prendiamo lo spazio delle probabilità elementari come

$$\Omega = \{1, \ldots, n\}^N$$

ovvero come la N-upla di n esiti.
Adesso consideriamo la variabile aleatoria X_j che conta *"il numeri di volte che l'output j si presenta nelle N prove*. Di questo vogliamo calcolarne la probabilità p.
Per farlo, dobbiamo prima introdurre un altro evento, $A_{k,j}$ che *"conta alla k-esima prova se è venuto il risultato j-esimo*. Possiamo dunque scrivere un elemento $\omega \in \Omega$ come l'intersezione di eventi indipendenti

$$\{\omega\} = \bigcap_{i=1}^N A_{i,\omega_i}$$

Abbiamo la probabilità p definita come

$$p(\omega) = \prod_{i=1}^N A_{i,\omega_i} = \prod_{i=1}^N q_i^{X_i(\omega)}$$

Adesso introduciamo l'ultimo vettore aleatorio, definito come

$$X = (X_1, \dots, X_N)$$

che conta *"il numero di successi per il primo, secondo, l'N-esimo esito"*. Notiamo subito che $\{X = x\}$ è non vuoto se e solamente se abbiamo un vettore sensato. Ovvero tale che

$$x \in \mathbb{N}^N, \sum_{j=1}^{N} x_j = 1$$

Quindi se $\omega \in \{X = x\}$, vale che

$$p(\{\omega\}) = \prod_{i=1}^{N} q_i^{x_i}$$

Per calcolare $q(x)$, basta contare il numero degli elementi di $\{X = x\}$.
A prima vista abbiamo $N!$ combinazioni possibili di N-uple; tuttavia, per rimuovere eventuali duplicati, dobbiamo *togliere tutti i modi in cui gli stessi numeri possono permutare*. Ovvero $x_1!x_2! \dots x_N!$
Ovvero abbiamo

$$|\{X = x\}| = \frac{N!}{\prod_{i=1}^{N}(x_i!)}$$

Quindi infine abbiamo la *densità multinomiale*

$$\boxed{q(x) = \frac{N!}{\prod(x_n!)} \prod q_n^{x_n} \chi_E}$$

■

C2. Gaussiana Multivariata

Densità Gaussiana in più dimensioni

X

Vettore aleatorio notevole: densità gaussiana in più dimensioni: definizione, caratterizzazione (mediante funzione caratteristica e trasformazione affine di una "standard"), esempi grafici.

X

0. Voci correlate

- Densità Gaussiana
- Vettori Aleatori Assolutamente Continui
- Funzione Caratteristica per Variabili Aleatorie
- Media e Covarianza di Vettori Aleatori

1. Definizione di Densità Gaussiana

#Definizione

Definizione (densità gaussiana n-dimensionale).

Un vettore aleatorio X n-dimensionale ha legge *gaussiana multivariata* se per ogni trasformazione lineare $\psi \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ si ha $\psi \circ X$ *gaussiano*.

$$\forall \psi \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), \psi \circ X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

Per il teorema di Riesz (1), può essere equivalentemente riformulato come il seguente:

$$\forall \underline{l} \in \mathbb{R}^n, \langle X, \underline{l} \rangle \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

Oppure, esplicitando il prodotto scalare

$$\forall \underline{l} \in \mathbb{R}^n, \sum_{k=1}^{n} l_k X_k \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

#Osservazione

Osservazione (condizione necessaria ma non sufficiente per i v.a. gaussiani).

Notiamo che se un vettore aleatorio X è gaussiano, allora esso deve avere le *componenti gaussiane*: infatti si tratta di prendere la proiezione n-esima π_k, rappresentata dal vettore della base standard $\underline{e_i} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ da cui si ha $X_k = \pi_k \circ X$.

Tuttavia questa è *solamente* una condizione necessaria: non vale il viceversa.

Come controesempio si prende il seguente: sia $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ e sia S una v.a. discreta in $\{1, -1\}$ tale che $p\{S = 1\} = p\{S = -1\} = 0.5$. Proviamo che la composizione $Y = S \circ X \sim \mathcal{N}(0, 1)$: per la formula delle probabilità totali abbiamo

$$\begin{aligned} p\{Y \leq x\} &= \frac{1}{2}(p\{Y \leq x | S = 1\} + p\{Y \leq x | S = -1\}) \\ &= \frac{1}{2}(p\{X \leq x\} + p\{X \geq -x\}) \end{aligned}$$

> Tenendo conto che $p\{X \geq -x\} = \{X \leq x\}$ (*simmetria della gaussiana*), si ha
>
> $$p\{Y \leq x\} = p\{X \leq x\}$$
>
> che prova Y essere una gaussiana normale.
> Allora essendo X, Y entrambe gaussiane, ci aspettiamo che (X, Y) è gaussiana?
> No! Infatti, considerando la loro somma (una trasformazione consentita) si ha che
>
> $$p\{X+Y=0\} = \underbrace{p\{X=1\}}_{1} + p\{Y=-1\} = p\{S=-1\} = 0.5$$
>
> che è un assurdo, dato che per gaussiane si dovrebbe avere
> $p\{\mathcal{N}(\mu, \sigma^2) = 0\} \in \{0, 1\}$ (o è 0 nel caso regolare, 1 nel caso degenere).

X

2. Proprietà dei Vettori Gaussiani

Vediamo qualche proprietà dei vettori gaussiani.

#Lemma

> Lemma (trasformazione lineari delle gaussiane multivariate).
>
> Sia $X = (X_1, \ldots, X_n)$ una *gaussiana multivariata* n-dimensionale e sia
> $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una trasformazione lineare.
>
> Allora la composizione $Y = \phi \circ X$ è *gaussiano*.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Lemma 3 (trasformazione lineari delle gaussiane multivariate)
Si ha che se $\psi : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ è lineare, allora $\psi \circ \phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ è lineare. Da questo ho
$\psi \circ Y = (\psi \circ \phi) \circ X$, da cui segue che $\psi \circ Y$ è gaussiano.
Alternativamente possiamo pensare in termini di *rappresentazione* mediante matrici e vettori: siano $A \in M_{n,m}(\mathbb{R}), \underline{v} \in \mathbb{R}^m$ che rappresentano ϕ e ψ. Allora $A \cdot \underline{v}$ è un *prodotto righe per colonne* del tipo $n, m \times m, 1$ da cui ho come risultato un vettore $n \times 1$, che chiameremo $\underline{u} \in \mathbb{R}^n$: questo rappresenta $\psi \circ \phi$. Facendo variare $A, \underline{v}$ e di conseguenza $\underline{u}$, dalla definizione segue la tesi $\blacksquare$.

X

#Lemma

> Lemma (concatenazione di due vettori aleatori gaussiani indipendenti è gaussiana).

> Siano $X = (X_1, \dots, X_n)$ e $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$ due *vettori aleatori gaussiani indipendenti tra di loro*.
>
> Allora $Z := (X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m)$ è *gaussiano*.

DIMOSTRAZIONE del Lemma 4 (concatenazione di due vettori aleatori gaussiani indipendenti è gaussiana)
Si tratta di considerare una *combinazione lineare* di Z (ovvero la sua forma estesa dal prodotto scalare): ho

$$\underbrace{s_1X_1 + \ldots + s_nX_n}_{A} + \underbrace{t_1Y_1 + \ldots + t_mY_m}_{B}$$

Essendo tutte le $(X_n)_n$ e $(Y_m)_m$ gaussiane e indipendenti, ho la loro somma gaussiana (Proposizione 6 (la somma di gaussiane)). Notiamo che con questa dimostrazione è possibile generalizzare per la concatenazione di $(X_n)_n$ vettori aleatori. ■

X

#Teorema

> **Teorema (funzione caratteristica dei vettori aleatori gaussiani).**
>
> Sia X un *vettore aleatorio* n-dimensionale: allora è *gaussiano* se e solo se esistono $a \in \mathbb{R}^n$ e $Q \in M_n(\mathbb{R}^n)$ tale che si ha la *funzione caratteristica* $\phi(y)$ definita come
>
> $$\boxed{\phi(y) = \exp\left(i\langle a, y\rangle - \frac{1}{2}\langle Qy, y\rangle\right)}$$
>
> Inoltre X è *assolutamente continuo* se e solo se Q *non è degenere* (ovvero $\det Q > 0$). In tal caso ho la densità
>
> $$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det Q}} \exp\left(-\frac{1}{2}\langle Q^{-1}(x-a), x-a\rangle\right)}$$

#Dimostrazione
DIMOSTRAZIONE del Teorema 5 (funzione caratteristica dei vettori aleatori gaussiani)
Omessa, in quanto è troppo contosa. Notiamo solo che a diventa la controparte vettoriale per la media μ e Q diventa la controparte matriciale per la varianza σ^2. ■

Dall'osservazione compiuta definiamo una notazione per *le densità gaussiane multivariate*.

#Definizione

Definizione (notazione per densità gaussiana).

Sia X un *vettore aleatorio*.

Se è *gaussiana multavariata*, lo indicheremo con

$$X \sim \mathcal{N}(a, Q)$$

Notiamo che se $a = \underline{0}$ e $Q = \mathbb{1}_n$, allora ho una *"specie di gaussiana standard"*: infatti vale che X ha componenti normali standard ed indipendenti se e solo se $X \sim \mathcal{N}(\underline{0}, \mathbb{1}_n)$.

#Osservazione

Osservazione (rappresentazione delle gaussiane multivariate generiche in standard).

Sia $X \sim \mathcal{N}(\underline{a}, Q)$. Allora per quanto detto sulle *trasformazioni affini* possiamo affermare che X è rappresentabile come la trasformazione di una gaussiana standard $Z \sim \mathcal{N}(\underline{0}, \mathbb{1}_n)$:

$$\boxed{X = \sqrt{Q} Z + \underline{a}}$$

Notiamo che se Q è degenere, non abbiamo l'assoluta continuità.

#Osservazione

Osservazione (di caratterizzazione delle gaussiane con componenti indipendenti).

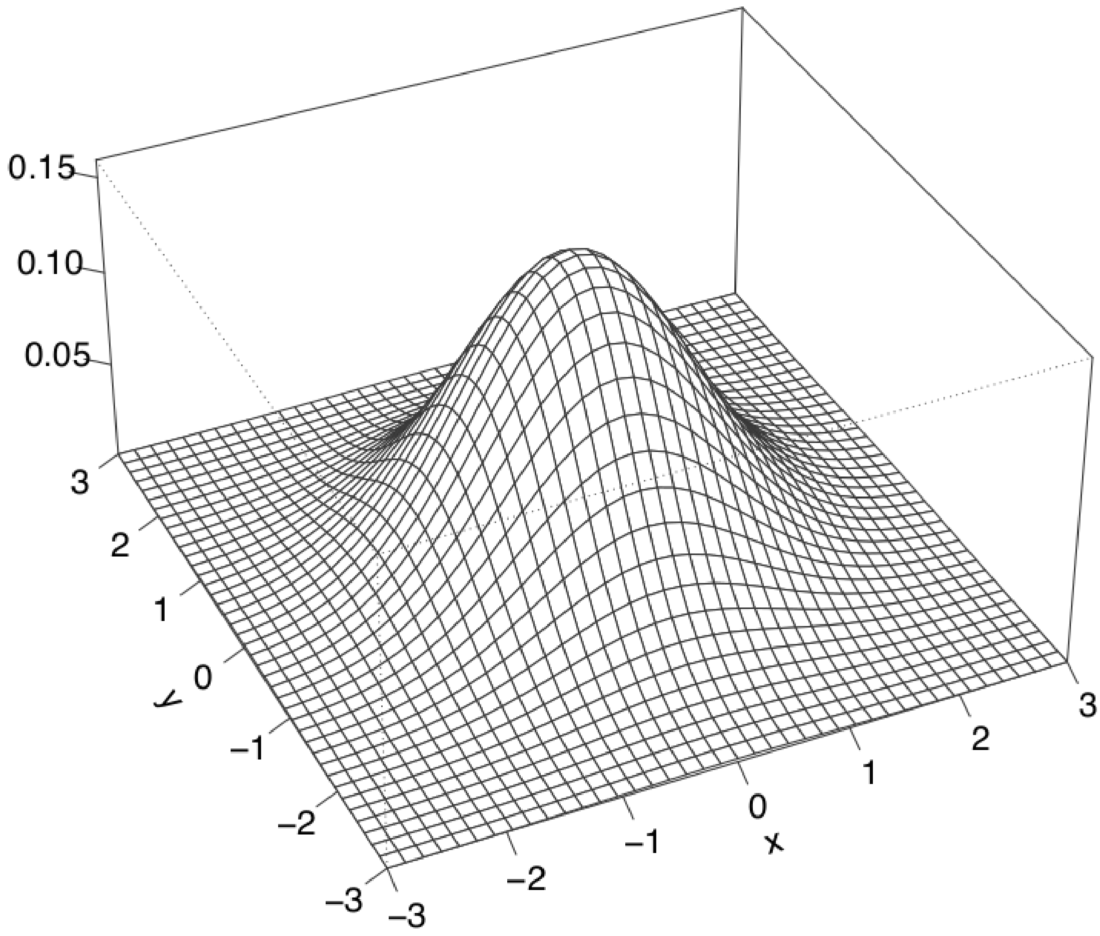
Notiamo che se X è un vettore aleatorio gaussiano, le sue componenti sono *indipendenti* se e solo se *scorrelate*.

Infatti se sono scorrelate, allora Q è diagonale e quindi la funzione caratteristica si scrive come il prodotto delle funzioni caratteristiche.

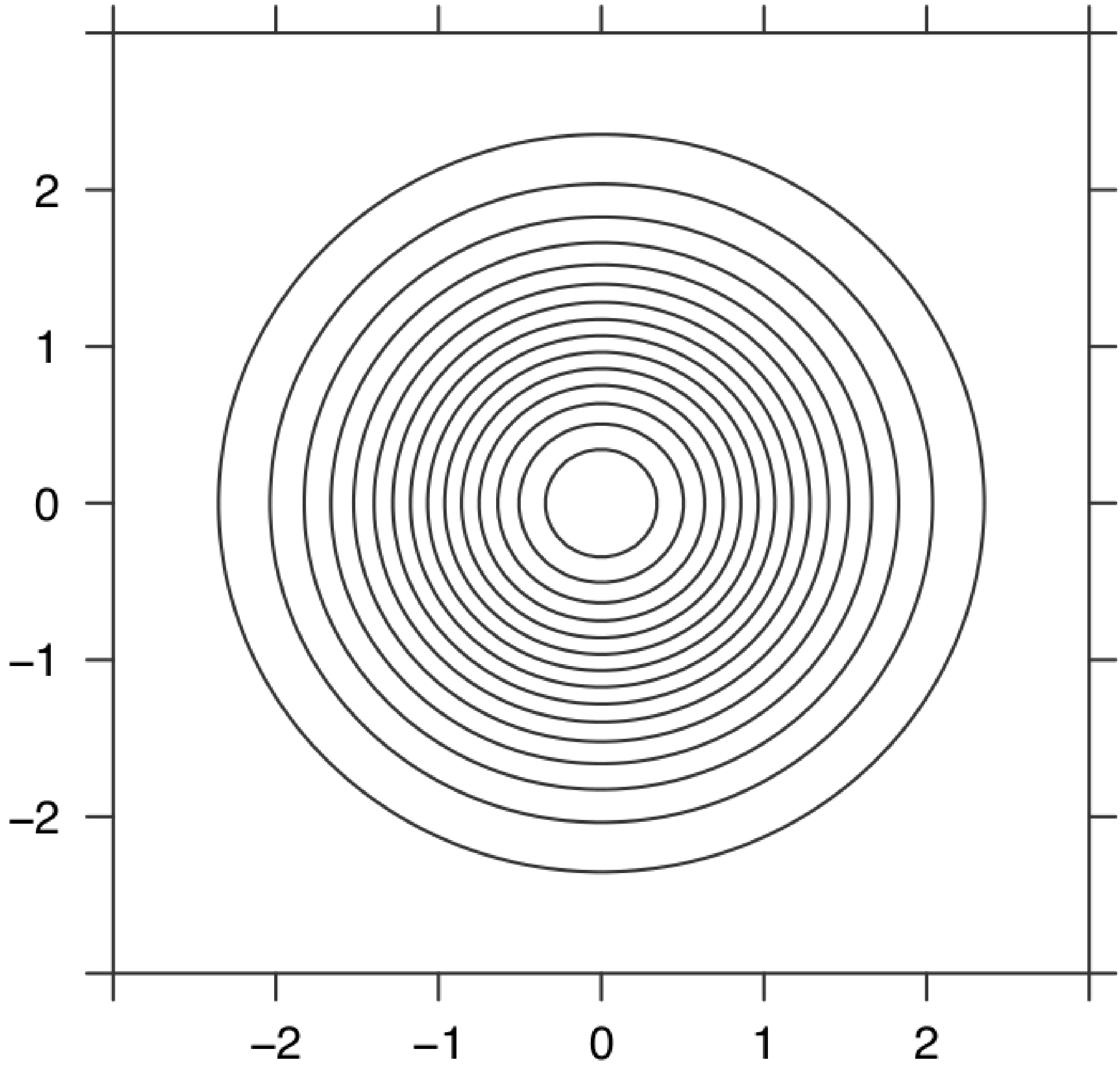
Nel caso Q non-degenere, ho una serie di semplici gaussiane: se invece è degenere allora mi sono rovinato l'assoluta continuità, in quanto *"alcune dimensioni si sono appiattite"*.

X

3. Figure



0.15
0.10
0.05
3
2
1
0
y
−1
−2
−3
−3
−2
−1
0
x
1
2
3


2
1
0
−1
−2
−2
−1
0
1
2