

Spazi Vettoriali - Sommario

Spazi e sottospazi vettoriali.

Spazi Vettoriali

Definizione di \mathbb{R} -spazio vettoriale, gli 8 assiomi dei spazi vettoriali.
L'utilità di spazi vettoriali; esempi di spazi vettoriali.

1. Definizione di spazio vettoriale

Cerchiamo di astrarre quanto visto in [Vettori Liberi](#) e [Operazioni sui vettori liberi](#).

DEF 1. Un \mathbb{R} -**spazio vettoriale** (o **spazio vettoriale su \mathbb{R}**) è un insieme V con 2 operazioni definiti come:

$$\begin{aligned} + : V \times V &\longrightarrow V; (u, v) \mapsto u + v \\ \cdot : \mathbb{R} \times V &\longrightarrow V; (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v \end{aligned}$$

tali per cui $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e $\forall u, v, w \in V$ sono soddisfatte le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} v_1 : (u + v) + w &= u + (v + w) \\ v_2 : u + v &= v + u \\ v_3 : \exists 0 \in V \mid 0 + v &= v + 0 = v \\ v_4 : \exists -v \in V \mid v + (-v) &= (-v) + v = 0 \\ v_5 : \lambda \cdot (u + v) &= \lambda u + \lambda v \\ v_6 : (\lambda + \mu) \cdot u &= \lambda \cdot u + \mu \cdot u \\ v_7 : (\lambda \cdot \mu) \cdot v &= \lambda \cdot (\mu \cdot v) \\ v_8 : 1 \cdot v &= v \end{aligned}$$

Inoltre uno **spazio vettoriale** può essere anche definito con la seguente *terna*:

$$(V, +, \cdot)$$

DEF 1.1. Chiamiamo l'elemento 0 della v_3 l'elemento *neutro*.

OSS 1.1. Notare che nella v_8 non chiameremo 1 *l'elemento neutro* per ragioni di convenzione, particolarmente per quanto riguarda l'algebra astratta.

PROP 1.1. Ciò che abbiamo visto fino ad ora ci mostra che V_2 (ovvero l'insieme dei vettori liberi nel piano) è un \mathbb{R} -spazio vettoriale.

DEF 1.1. Vettore

DEF 1.1. Sia V uno \mathbb{R} -spazio vettoriale; gli elementi $v \in V$ si dicono **vettore** ! **ATTENZIONE** ! Si nota immediatamente che questa definizione del *vettore* non deve necessariamente corrispondere alla nostra idea di un *vettore libero*.

PROP 1.1. L'unicità del vettore neutro 0

L'assioma v_3 garantisce che *esiste* almeno un vettore neutro 0 tali che certe proprietà vengono soddisfatte; però ciò che *NON* garantisce è l'unicità del vettore neutro 0. Potrebbe esistere un altro vettore *neutro* che possiamo chiamare $0'$.

Però $0'$ non esiste e lo dimostreremo.

DIMOSTRAZIONE. Voglio dimostrare che se V è un \mathbb{R} -spazio vettoriale, allora l'elemento neutro 0 è unico.

Supponiamo quindi che esistano due elementi neutri: 0 e $0'$; mostreremo che con questa supposizione deve necessariamente valere $0 = 0'$, quindi da questo seguirà la tesi.

Per ipotesi, $\forall v \in V$,

$$A. 0 + v \stackrel{v_3}{=} v + 0 = v$$

$$B. 0' + v \stackrel{v_3}{=} v + 0' = v$$

In *A*. scegliamo $v = 0'$; allora

$$0 + 0' = 0' + 0 = 0'$$

In *B*. scegliamo invece $v = 0$; allora

$$0' + 0 = 0 + 0' = 0$$

Quindi notiamo che

$$0 = 0 + 0' = 0'$$

per la proprietà transitiva dell'uguaglianza, $0 = 0'$. ■

PROP 1.2. $0 \cdot v = 0$

La proposizione

$$0 \cdot v = 0$$

sembra ovvia e banale, come ci suggerirebbe la notazione; però in realtà non lo è veramente, in quanto associamo due concetti *diversi*; da una parte abbiamo lo *scalamento* del vettore v per $\lambda = 0$, dall'altra abbiamo il *vettore neutro* 0 .

Quindi vogliamo dimostrare che se V è un spazio vettoriale su \mathbb{R} , allora per ogni $v \in V$ sussiste la proposizione.

DIMOSTRAZIONE. Per dimostrare la tesi, supponiamo che $v \in V$ e quindi abbiamo che:

$$\begin{aligned} 0 \cdot v &= (0 + 0) \cdot v \stackrel{v_6}{=} 0 \cdot v + 0 \cdot v \\ 0 \cdot v &= 0 \cdot v + 0 \cdot v \\ (0 \cdot v) + (-(0 \cdot v)) &= (0 \cdot v) + (-(0 \cdot v)) + (0 \cdot v) \\ 0 &= 0 \cdot v \\ 0 \cdot v &= 0 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

OSS 1.2.1. Notare che in questi passaggi abbiamo fatto un *assunto* che non è dato per scontato; ovvero che il vettore opposto $-v$ è unico ad ogni vettore v . Infatti questo assunto è ancora da *dimostrare* (che è necessario per non invalidare questa dimostrazione).

PROP 1.3. $(-1) \cdot v = -v$

Anche la proposizione

$$(-1) \cdot v = -v$$

sembra intuitiva, ma in realtà non è dato *per scontato* secondo gli assiomi v_i ; infatti da un lato abbiamo lo *scalamento* di un vettore, invece dall'altro abbiamo il *vettore opposto del vettore* v .

Quindi vogliamo dimostrare che se V è un spazio vettoriale su \mathbb{R} , allora per ogni vettore $v \in V$ vale la proposizione appena enunciata.

DIMOSTRAZIONE. Per dimostrare la tesi, utilizziamo la proprietà v_3 ,

ovvero

$$v + (-v) = -v + v = 0$$

e dimostriamo la seconda uguaglianza, assumendo che $-v = (-1) \cdot v$;

$$(-1) \cdot v + (1) \cdot v \stackrel{v_6}{=} (-1 + 1) \cdot v = 0 \cdot v = 0$$

OSS 1.2. Il senso di studiare i campi vettoriali

Si nota che in questa pagina non abbiamo veramente imparato qualcosa di nuovo; come il filosofo *F. Nietzsche* criticerebbe l'uomo che produce la *definizione di un mammifero* poi per riconoscere un *cammello* come un *mammifero*⁽¹⁾, in quanto non avremmo veramente scoperto nulla di nuovo: infatti abbiamo solo dato *definizioni* poi per riconoscerle, ad esempio abbiamo definito lo *spazio vettoriale* e abbiamo riconosciuto V_2 come uno spazio vettoriale.

In realtà il discorso del filosofo tedesco non varrebbe qui: abbiamo dato questa definizione di spazio vettoriale per un motivo ben preciso, ovvero quello di *astrarre, abs-trahĕre*. Astrarre nel senso che togliamo l'aspetto "*accidentale*" dei vettori geometrici, concentrandoci invece sull'aspetto "*sostanziale*".

Infatti dopo potremmo vedere che esistono molti insiemi che sono dei *spazi vettoriali*; se dimostro che un certo insieme A è uno spazio vettoriale, allora le proprietà v_n saranno sicuramente vere.

⁽¹⁾ *"Se io produco la definizione di un mammifero e poi dichiaro, alla vista di un cammello: guarda, un mammifero! certo con questo una verità viene portata alla luce, ma essa è di valore limitato, mi pare; in tutto e per tutto essa è antropomorfica e non contiene un solo singolo punto che sia «vero in sé», reale e universalmente valido, al di là della prospettiva dell'uomo."* (Su verità e menzogna in senso extramorale, 1896, Friedrich Nietzsche)

2. Esempi di spazi vettoriali

Dopo il lungo preambolo enunciato in **OSS 1.2.**, andiamo a vedere qualche esempio di spazio vettoriale.

ESEMPIO 2.1. Numeri reali

Consideriamo $V = \mathbb{R}$; con l'usuale definizione di *somma* $+$ e *moltiplicazione* \cdot , si verifica che anche \mathbb{R} è uno \mathbb{R} -spazio vettoriale.

ESEMPIO 2.1. Coppie ordinate V_2

Consideriamo $V = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, ovvero

$$V = \{(a, b) : a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$$

con le operazioni

$$\begin{aligned}(a, b) + (c, d) &:= (a + c, b + d) \\ \lambda \cdot (a, b) &:= (\lambda \cdot a, \lambda \cdot b)\end{aligned}$$

allora $V = \mathbb{R}^2$ è uno *spazio vettoriale*.

ESEMPIO 2.2. \mathbb{R}^n

Generalizziamo [ESEMPIO 2.1. Coppie ordinate \$V_2\$](#) ; ovvero definiamo

$$V = \mathbb{R}^n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) : a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}$$

V è l'insieme delle *n -uple ordinate dei numeri reali*, con le operazioni

$$\begin{aligned}+ : V \times V &\longrightarrow V; \\ ((a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n)) &\mapsto (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n) \\ \cdot : \mathbb{R} \times V &\longrightarrow V; \\ \lambda \cdot (a_1, a_2, \dots, a_n) &\mapsto (\lambda \cdot a_1, \lambda \cdot a_2, \dots, \lambda \cdot a_n)\end{aligned}$$

$(V, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale su \mathbb{R} .

ESEMPIO 2.3. Insieme delle funzioni in variabile reale.

Consideriamo l'insieme delle *funzioni di variabile reale* (**DEF 1.1.**), ovvero

$$V = \{\text{funzioni } f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\}$$

con le operazioni

$$\begin{aligned}+ : V \times V &\longrightarrow V; (f, g) \mapsto f + g \\ \cdot : \mathbb{R} \times V &\longrightarrow V; (\lambda, f) \mapsto \lambda \cdot f\end{aligned}$$

OSS 2.3.1. Qui è importante chiarire il comportamento della *somma*, in

quanto per noi non risulta immediatamente intuibile. Siano f, g funzioni, quindi

$$f + g = h$$

ove

$$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

data dalla seguente: se $a \in \mathbb{R}$, allora

$$h(a) = (f + g)(a) := f(a) + g(a)$$

OSS 2.3.2. Stesso discorso vale per lo *scalamento*;

$$\begin{aligned}\lambda \cdot f &= F \\ F : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}\end{aligned}$$

ove per ogni a reale,

$$F := \lambda \cdot (f(a))$$

OSS 2.3.3. Vogliamo trovare la *funzione nulla*, ovvero la *funzione* che appartiene a V e gioca lo stesso ruolo di 0. La funzione la chiamiamo O e si definisce come

$$O : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 0$$

infatti, se definiamo $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, allora

$$(f + O) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) + 0 = f(x)$$

Abbiamo visto che $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$(f + O)(x) = f(x)$$

pertanto

$$O + f = f; f + O = f$$

quindi abbiamo verificato che O è *l'elemento neutro* dello *spazio vettoriale* $(V, +, \cdot)$.

Sottospazi Vettoriali

Breve descrizione qui
