
Raccolta di esercizi per Analisi Matematica I, con o senza soluzioni.

---

1. Funzioni

Esercizi sulle funzioni

Alcuni esercizi misti sulle funzioni

---

0. Info

Questo appunto contiene degli esercizi misti sull'argomento delle Funzioni.
Notare che alcuni esercizi potrebbe richiedere già di essere preparati nell'argomento delle *funzioni di variabile reale*, ovvero Funzioni di potenza, radice e valore assoluto e/o Funzioni trigonometriche.

Dal 29.11.2023 in poi questa scheda conterrà anche degli esercizi sullo studio delle funzioni, sulla dimostrazione di certe proprietà di alcune funzioni partendo da certe proprietà ipotetiche.
Pertanto gli esercizi richiederanno anche la conoscenza dei seguenti macroargomenti:

- La Continuità delle Funzioni
- Calcolo Differenziale

1. TIPOLOGIA A. DEFINIZIONI MISTE

Qui si propone degli esercizi misti sulle funzioni svolte durante le lezioni dell'A.A. 2023-2024, in cui basta conoscere delle *definizioni*.

ESERCIZIO 1.a. Sia

$$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}; x\mapsto x^2+x-1$$

Si determini:

$$f(0), \{f(n), n \in \mathbb{N}\}, f([1,2]), f(3x)$$
$$f \circ f, (f(x))^2, f(x^2), f^{\leftarrow}([2,4])$$

Con il grafico della funzione da disegnare.

ESERCIZIO 1.b. Sia

$$\sin : \mathbb{R} \longrightarrow [-1,1]$$

Determinare $\sin([0, \frac{3}{4}\pi])$.

ESERCIZIO 1.c. Data la funzione $\arcsin$, trovare

$$\arcsin^{\leftarrow}([0, \frac{1}{2}])$$

ESERCIZIO 1.d. Data la funzione

$$f(x) = \frac{|x+1|}{x}$$

Disegnare $f(x)$ e determinare

$$f^{\leftarrow}(]0, +\infty[)$$

2. TIPOLOGIA B. STUDIO DI FUNZIONE

Lezione 26

#Esercizio

Esercizio (Esercizio B1.).

Si disegni il grafico della funzione

$$f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$$

Studiando il suo dominio, segno, limiti, asintoti e la prima derivata.

#Esercizio

Esercizio (Esercizio B2.).

Si disegni il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{e^{x+1}}{x}$$

Studiando il suo dominio, segno, i suoi limiti, e la sua derivata prima. Inoltre, si dica al variare di $a \in \mathbb{R}$, quante sono le *soluzioni* di

$$e^{x+1} = ax$$

#Esercizio

Esercizio (Esercizio B3.).

Si disegni il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{x^2+4}{2x-3}$$

Studiando ciò che è necessario, *evidenziando* i suoi *asintoti obliqui*.

Lezione 28

#Esercizio

Esercizio (Esercizio B4.).

Si studi la funzione

$$f(x) = xe^{-(x+1)}$$

determinando il suo *dominio*, *segno*, *limiti agli estremi*, *eventuali asintoti*, *prima derivata*, *crescenza/decrescenza*, *eventuali massimi e/o minimi*, *derivata seconda*, *concavità e convessità* ed *eventuali punti di flessi*.

#Esercizio

Esercizio (Esercizio B5.).

Si studi la funzione

$$f(x) = \ln(x+1) - \arctan(x)$$

determinando il suo *dominio*, *limiti agli estremi*, *eventuali asintoti*, *derivata prima e il suo segno* e *derivata seconda*.

3. TIPOLOGIA C. ESERCIZI TEORICI

Lezione 22
#Esercizio

Esercizio (Esercizio C1.).

Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione *continua*, con le seguenti proprietà:

$$f(0) = 0; \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

Dimostrare che f ha *minimo assoluto*.

#Esercizio

Esercizio (Esercizio C2.).

Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione *continua*.
Supponendo che $f(-1) = 1, f(0) = -1, f(1) = 1$, provare che $f(x) = 0$ ha *almeno* due *soluzioni*.

#Esercizio

Esercizio (Esercizio C3.).

Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *continua*.
Provare che l'insieme delle soluzioni $f(x) = 0$, ovvero $f^{\leftarrow}(\{0\})$ è un *insieme chiuso*.

Lezione 26
#Esercizio

Esercizio (Esercizio C4.).

Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione *derivabile*.
Supponendo che $f(0) = 0, f(1) = 1, f(2) = 2$, provare la seguente:

$$\exists \xi_1, \xi_2 : \xi_1 \neq \xi_2, f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 1$$

#Esercizio

Esercizio (Esercizio C5.).

Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione *derivabile*.
Sia $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) > \frac{1}{2}$.
Provare che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

e che

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

#Esercizio

Esercizio (Esercizio C6.).

Sia $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continua* su $[-1, 1]$ e *derivabile* su $(-1, 1)$.
Sia $f(-1) = 1, f(0) = 0, f(1) = \frac{1}{2}$.
Dimostrare le seguenti tre proposizioni:

$$\begin{aligned} &1)\ [0, 1] \subseteq f([-1, 1]) \\ &2)\ \exists \xi_1 \in (-1, 1) : f'(\xi_1) = 0 \\ &3)\ \exists \xi_2 \in (-1, 1) : f'(\xi_2) = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Lezione 31
#Esercizio

Esercizio (Esercizio C7.).

Sia F una funzione *lipschitziana* (Proposizione 3 (funzione lipschitziana è continua)), ovvero che vale la seguente condizione:

$$\exists M > 0 : \forall x_1, x_2 \in E, |F(x_2) - F(x_1)| \leq M|x_2 - x_1|$$

Dimostrare che F è *continua*.

2. Limiti

Esercizi sui Limiti

Tutti gli esercizi sui limiti

---

0. Propedeuticità

Questa parte (come è ben ovvia) richiede la conoscenza preliminare della parte teorica sui limiti; ovvero bisogna conoscere i contenuti di *tutti* i capitoli prima di poter affrontare gli esercizi.

- Definizione di Limite di funzione
- Teoremi sui Limiti di Funzione
- Esempi di Limiti di Funzione

1. Esercizi proposti in lezione

Qui si raccolgono *tutti* gli esercizi proposti da *D.D.S.* durante le lezioni dell'anno accademico 2023-2024.
Giorno 30.10.2023
ESERCIZIO 1.1.

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+x+1}{x^3+x^2+x+1}$$

ESERCIZIO 1.2.

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+1}{x^3+x^2+x-3}$$

ESERCIZIO 1.3.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3+3x^2+1}{x^3+7}$$

ESERCIZIO 1.4.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2}{x^2+2x+1}$$

ESERCIZIO 1.5.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x}$$

ESERCIZIO 1.6.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$$

ESERCIZIO 1.7.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

ESERCIZIO 1.8.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin \sqrt{x}}{x}$$

ESERCIZIO 1.9.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x^2}{x^2}$$

ESERCIZIO 1.10.

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$$

ESERCIZIO 1.11.

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$$

ESERCIZIO 1.12.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x}$$

ESERCIZIO 1.13.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\arcsin x}$$

ESERCIZIO 1.14.

$$\lim_{x \to +\infty} x(\frac{\pi}{2} - \arctan x)$$

ESERCIZIO 1.15.

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x}}$$

Giorno 06.11.2023

ESERCIZIO 1.16.

$$\lim_{x \to 0} (1 + \sin(x))^{\frac{1}{x}}$$

ESERCIZIO 1.17.

$$\lim_{x \to 0^+} x^x$$

ESERCIZIO 1.18.

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} \cdot \sin(\frac{\pi}{2} - \arctan x)$$

ESERCIZIO 1.19.

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x}$$

ESERCIZIO 1.20.

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos x)^2}{\log(1 + \sin^4 x)}$$

ESERCIZIO 1.21.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{\tan 3x}$$

ESERCIZIO 1.22.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2}$$

Giorno 09.11.2023

ESERCIZIO 1.23.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{e^{x^2}-1}$$

ESERCIZIO 1.24.

$$\lim_{x\to +\infty} (\frac{\pi}{2} - \arctan x)x$$

ESERCIZIO 1.25.

$$\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}$$

ESERCIZIO 1.26.

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(\sin x)\ln(\cos x)$$

ESERCIZIO 1.27.

$$\lim_{n\to +\infty} \frac{\cos(\pi n) - n}{\sin(\pi n) + n}$$

ESERCIZIO 1.28.

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\ln(\cos x) + \sin^2(x)}{x^4}$$

Girono 13.11.2023: Provetta

ESERCIZIO 1.29.

$$\lim_{x\to +\infty} n(e^{\sin\frac{1}{n}} - 1)$$

ESERCIZIO 1.30.

$$\lim_{x\to 0^+} \cos x^{\frac{1}{\sin x}}$$

ESERCIZIO 1.31.

$$\lim_{x\to +\infty} x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - 1\right)$$

ESERCIZIO 1.32.

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\sqrt{x}}$$

Giorno 27.11.2023: Lezione 26

#Esercizio

Esercizio (Esercizi 1.33. - 1.36.).

Calcolare, se esistono, i seguenti limiti.

$$1.33.\ \lim_{x\to+\infty} x^2(\arctan\frac{1}{x}-\arctan\frac{1}{x^2})$$
$$1.34.\ \lim_{x\to0^+}\frac{e^{\sqrt{\sin x}}-e^{\sqrt{x}}}{x^2\sqrt{x}}$$
$$1.35.\ \lim_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}\cdot(\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{\sqrt{x}})$$
$$1.36.\ \lim_{x\to-\infty} e^{-x}\ln(\ln(e-e^x))$$

Giorno 28.11.2023: Lezione 27

#Esercizio

Esercizio (Esercizi 1.37 - 1.44.).

Calcolare, se esistono, i seguenti limiti.

$$1.37.\ \lim_{x\to\pi}\frac{\tan x-x+\pi}{\sin^3 x}$$
$$1.38.\ \lim_{x\to+\infty} x^3(\arctan x-\frac{\pi}{2}+\frac{1}{x})$$
$$1.39.\ \lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$$
$$1.40.\ \lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$$
$$1.41.\ \lim_{x\to0}(\frac{\sin x}{x})^{\frac{1}{x}}$$
$$1.42.(\frac{\sin x}{x})^{\frac{1}{x^2}}$$
$$1.43.\ \lim_{n} n(\sqrt[n]{n}-1)$$
$$1.44.\ \lim_{x\to0}\frac{\sqrt{4-x^2}-2\cos x}{x^2}$$

2. Esercizi delle dispense

Qui si raccolgono *tutti* gli esercizi disponibili nella dispensa.

---

3. Esercizi dei papers

Qui si raccolgono *tutti* gli esercizi dei papers messi a disposizione.

---

4. Esercizi delle prove d'esame

In questa sezione segnerò quali esercizi ho svolto dei temi d'esame precedenti.

- [x] **Appello 24.01.2018 fila B primo limite** ✅ 2023-11-13

$$\lim_{x\to+\infty} x^2(\arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right))$$

- [ ] **Appello 24.01.2018 fila B secondo limite**
  ...
- [x] **Appello 14.02.2018 fila D primo limite** ✅ 2023-11-13

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

- [x] **Appello 14.02.2018 fila D secondo limite** ✅ 2023-11-13
  - *Nota: esercizio risolto con de l'Hopital*

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(\ln(e-e^x))}{e^x}$$

- [ ] ...
- [x] **Appello 27.01.2022 fila A primo limite** ✅ 2023-11-14
- [x] **Appello 27.01.2022 fila A secondo limite** ✅ 2023-11-14
- [ ] **Appello 27.01.2022 fila A terzo limite**
- [ ] **Appello 27.01.2022 fila A quarto limite**

---

5. Esercizi del libro

Fonte: Analisi Matematica (Vol. 1), E. Giusti

ESERCIZIO 12, PAG. 152.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sqrt{x^2}}$$

ESERCIZIO 21, PAG. 152.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(x+x^2\right)}{x}$$

ESERCIZIO 22, PAG 152.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\sqrt{x}}{x}$$

ESERCIZIO 23, PAG 152.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-\cos x}{x}$$

---

6. Svolgimento degli esercizi

6.1. Esercizi delle lezioni

VOID

6.2. Esercizi delle dispense

VOID

6.3. Esercizi dei papers

VOID

6.4. Esercizi delle prove d'esame

VOID

6.5. Esercizi del libro

ESERCIZIO 12, PAG. 152. Ho il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x^2}}$$

Qui si tratta di ricordarsi di una *osservazione* del *valore assoluto* (Funzioni di potenza, radice e valore assoluto, **OSS 3.1.1.**), ovvero che

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

Rimpiazziamo dunque $\sqrt{x^2}$ con $|x|$. Allora ho

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{|x|}$$

Ora basta richiamare la *definizione* del *valore assoluto*, avendo dunque

$$\frac{\sin x}{|x|} = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} \text{ per } x \geq 0 \\ -\frac{\sin x}{x} \text{ per } x < 0 \end{cases}$$

Visto che stiamo studiando il comportamento di *questa* funzione attorno 0, basta fare la restrizione del limite con il limite destro e sinistro (Definizione di Limite di funzione), in quanto approcciando a 0 da *"destra"* abbiamo sempre valori positivi (in quanto abbiamo la semiretta $]0, +\infty[$), similmente da *"sinistra"* abbiamo sempre valori negativi. Allora

$$\begin{gathered} \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ (limite fondamentale)} \\ \lim_{x\to 0^-} -\frac{\sin x}{x} = -\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} = -1 \end{gathered}$$

Dunque abbiamo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{|x|} \neq \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{|x|}$$

e ciò vuol dire che non esiste il limite per $x \to 0$.

ESERCIZIO 21, PAG. 152. Ho il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x + x^2)}{x}$$

allora uso la *forma di addizione* per $\sin(a+b)$ (Funzioni trigonometriche). Poi manipolo opportunamente l'espressione ottenuta

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cos x^2+\sin x^2\cos x}{x}\\
&\frac{\sin x}{x}\cos x^2+\frac{\sin x^2}{x}\cos x\\
&\ldots+\frac{\sin x^2}{x^2}x\cos x\\
&\ldots+x\cos x\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}(\text{sia } y=x^2)\\
&\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cos x^2+x\cos x\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}\\
&1\cdot 1^2+0\cdot 1\cdot 1=1
\end{aligned}
$$

Allora

$$
\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x+x^2)}{x}=1
$$

ESERCIZIO 22, PAG. 152. Ho il limite

$$
\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\sqrt{x}}{x}
$$

Moltiplico sia sopra che sotto per $1+\cos\sqrt{x}$. Allora

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\sqrt{x}}{x}\\
&=\frac{1-\cos^2\sqrt{x}}{x}\frac{1}{(1+\cos\sqrt{x})}\\
&=\frac{\sin^2\sqrt{x}}{x}\ldots
\end{aligned}
$$

Ora il punto cruciale di questa manipolazione è di osservare che

$$
x=\sqrt{x^2}=\sqrt{x}^2,\forall x>0
$$

Questo passaggio presuppone di restringere il dominio della funzione a quello di tutti i *valori positivi*: tuttavia questa operazione non è restrittiva, in quanto la funzione radice quadrata $\sqrt{\cdot}$ presuppone già la restrizione ai valori positivi.

Allora abbiamo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}^2}\cdot\frac{1}{1+\cos\sqrt{x}}$$
$$\text{sia } y=\sqrt{x};\ \lim_{y\to 0^+}\left(\frac{\sin y}{y}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos y}$$
$$=1^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

Abbiamo ottenuto infine

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\sqrt{x}}{x}=\frac{1}{2}$$

ESERCIZIO 23, PAG. 152. Ho il limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-\cos x}{x}$$

Sviluppo l'espressione sul numeratore.

$$\frac{1}{1+x}-\cos x=\frac{1-\cos(x)(1+x)}{1+x}=\frac{1-\cos x-x\cos x}{1+x}$$

Ora raccolgo il numeratore del numeratore per x.

$$\frac{1-\cos x-x\cos x}{1+x}=\frac{x(\frac{1}{x}-\frac{\cos x}{x}-\cos x)}{1+x}$$

Quindi sul limite ho

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-\cos x}{x} &= \frac{x(\frac{1-\cos x}{x}-\cos x)}{x}\cdot\frac{1}{1+x} \\
&= (\frac{1-\cos x}{x}-\cos x)(\frac{1}{1+x}) \\
&= (\frac{1-\cos x}{(x)(1+x)})-\frac{\cos x}{1+x} \\
\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x}\to &= \frac{1-\cos^2 x}{x}\frac{1}{(1+x)(1+\cos x)}-\frac{\cos x}{1+x}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x} \\
&= \frac{\sin^2 x}{x}\frac{1}{1+x}\frac{1}{1+\cos x}-\frac{\cos x}{1+x} \\
&= \frac{\sin x}{x}\frac{\sin x}{1+x}\frac{1}{1+\cos x}-\frac{\cos x}{1+x} \\
\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-\cos x}{x} &= 0\cdot 0\cdot\frac{1}{2}-1=-1
\end{aligned}
$$

Allora

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-\cos x}{x}=-1$$

3. Continuità

Esercizi sulle Funzioni Continue

Esercizi sulle funzioni continue del tipo esame. Spesso constano in dimostrazioni da svolgere.

---

1. Esercizi proposti in classe

Giorno 16.11.2023

Esercizio (Esercizio 1.1.).

Sia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$.
Supponiamo f *continua*, $f(0)=0$ e di avere i limiti

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

Dimostrare che f ha *minimo assoluto*.

Esercizio (Esercizio 1.2.).

Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, *continua*.
Supponendo $f(-1) = 1$, $f(0) = -1$, $f(-1) = 1$, **dimostrare** che l'equazione

$$f(x) = 0$$

ha *almeno* due soluzioni.

Esercizio (Esercizio 1.3.).

Sia $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3\arcsin x}{\sin x} \text{ per } x > 0 \\ ax + b \text{ per } x \leq 0 \end{cases}$$

Dire se esistono valori per $a, b \in \mathbb{R}$ tali che f sia *continua* e in tal caso **trovarli**.

Esercizio (Esercizio 1.4.).

Sia f una funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} \text{ se } x > 0 \\ a \text{ se } x = 0 \\ b + c \cdot x\log(-x) \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

Trovare (se *esistono*) valori di a, b, c tali che f sia *continua*.

Esercizio (Esercizio 1.5.).

Sia f una funzione del tipo

$$f(x) = \begin{cases} a \text{ se } x = 0 \\ \frac{x+e^{\frac{1}{x}}}{|x|-e^{\frac{1}{x}}} \text{ se } x \neq 0 \end{cases}$$

Trovare il valore/i del *parametri* a tale che f sia *continua* in $[-1, 1]$ (se esiste).

Esercizio (Esercizio 1.6.).

Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, *continua*.
Provare che $f^{\leftarrow}(\{0\})$ è un *chiuso* (Definizione 2.1. (Insieme Chiuso)).

4. Derivate

Esercizi sulle derivate

Tutti gli esercizi sulle derivate proposte da D. D. S. in lezione.

TIPOLOGIA A. CALCOLO DELLE DERIVATE

Modello A.

Qui banalmente si tratta di *calcolare derivate* di funzioni composte da *funzioni elementari* mediante le *proprietà delle derivate* (Proprietà delle derivate).

Lezione 23

#Esercizio

Esercizio (Esercizio A1.).

Calcolare (1+2x+3x^2)'

#Esercizio

Esercizio (Esercizio A2.).

Calcolare $(x \cos x)'$

#Esercizio

Esercizio (Esercizio A3.).

Calcolare $(\sin(\cos x))'$

#Esercizio

Esercizio (Esercizio A4.).

Calcolare $((\sin x)^3)'$

#Esercizio

Esercizio (Esercizio A5.).

Calcolare $\frac{1}{\tan x} \cdot (\tan x)'$.

#Esercizio

Esercizio (Esercizio A6.).

Calcolare $(3x^2 + 7x + 1)'$

#Esercizio

Esercizio (Esercizio A7.).

Calcolare

$$(\frac{3x^2 + 1}{x^2 - 1})'$$

#Esercizio

Esercizio (Esercizio A8.).

Calcolare

$$(\cos(\sqrt{x^2 + 1}))'$$

#Esercizio

Esercizio (Esercizio A9.).

Calcolare

$$((x+1)^{x-1})'$$

Lezione 26

#Esercizio

Esercizio (Esercizio A10.).

Sia f la seguente funzione a variabili reali:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ se } x \geq 0 \\ -x^2 \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

Determinare se f è *derivabile*, in tal caso calcolarne la derivata.
Successivamente determinare se f' è *derivabile*, in tal caso calcolarne la derivata (ovvero f'')

TIPOLOGIA B. PROBLEMA DELLE TANGENTI

Modello B.

Qui si tratta di *trovare* delle *tangenti* su un punto preciso di una funzione.

Lezione 23

#Esercizio

Esercizio (Esercizio B1.).

Sia $c : y = x^2$ una *curva* sul piano.
Trovare la *tangente alla curva* c nel punto $(1, 1)$.

#Esercizio

Esercizio (Esercizio B2.).

Sia $c : y = \sqrt{1-x^2}$ la *semicirconferenza* sul piano.
Dato un generico $x_0 \in [-1, 1]$, trovare la formula della *retta tangente* alla

semicirconferenza r.

TIPOLOGIA C. PROBLEMI DI MIN, MAX

Modello C.

In questa tipologia si tratta di trovare di trovare un *modello matematico* che descrive al meglio un problema, poi di eseguire delle operazioni di *"minimizzazione"* (o *"massimizzazione"*) su questo modello.

Lezione 24

#Esercizio

Esercizio (scatola di cartone senza superficie superiore).

Suppongo di aver un foglio quadrato di cartone, con lato lungo un metro ($1m$).
Suppongo di tagliare quattro quadrati più piccoli in corrispondenza degli angoli e voglio costruire una scatola a base quadrata, senza il coperchio.
Trovare il *miglior modo* per costruire questa scatola; ovvero col *volume massimo*.

#Esercizio

Esercizio (triangolo inscritto in una circonferenza di area massima).

Suppongo di creare un triangolo a partire da una circonferenza fissata, prendendo un *triangolo* inscritto.
Trovare il *triangolo di massima area*.

#Esercizio

Esercizio (lattina).

Supponiamo che l'azienda *Pepsi* ci offra il seguente progetto lavorativo:
"Progettare una lattina cilindrica che risparmi il più alluminio possibile, con un volume fissato."
Eseguire la richiesta dell'azienda nota.

#Esercizio

Esercizio (il recinto del pastore).

Un pastore devastato ed in lacrime ci sta disperatamente chiedendo di aiutarlo: vuole costruire un recinto a partire da un certo quantitativo di materiali (ovvero con un *perimetro fissato*) costituito da un *rettangolo* e da un *semicerchio* col raggio di uno dei lati del rettangolo. Però vuole anche ottimizzare questa forma, cercando la *"proporzione perfetta"* tra i due lati per avere l'*area massima*.
Aiutare il pastore disperato.

#Esercizio

Esercizio (le due torri).

Supponiamo di avere due torri con una piazza un mezzo; la torre A alta h, la torre B alta g. Inoltre c'è una distanza orizzontale d tra le torri A, B.
Trovare il *"miglior punto"* tra le due torri tale che, partendo dal punto A, scendendo al punto selezionato poi risalendo al punto C, abbiamo il *percorso di lunghezza minimo*.

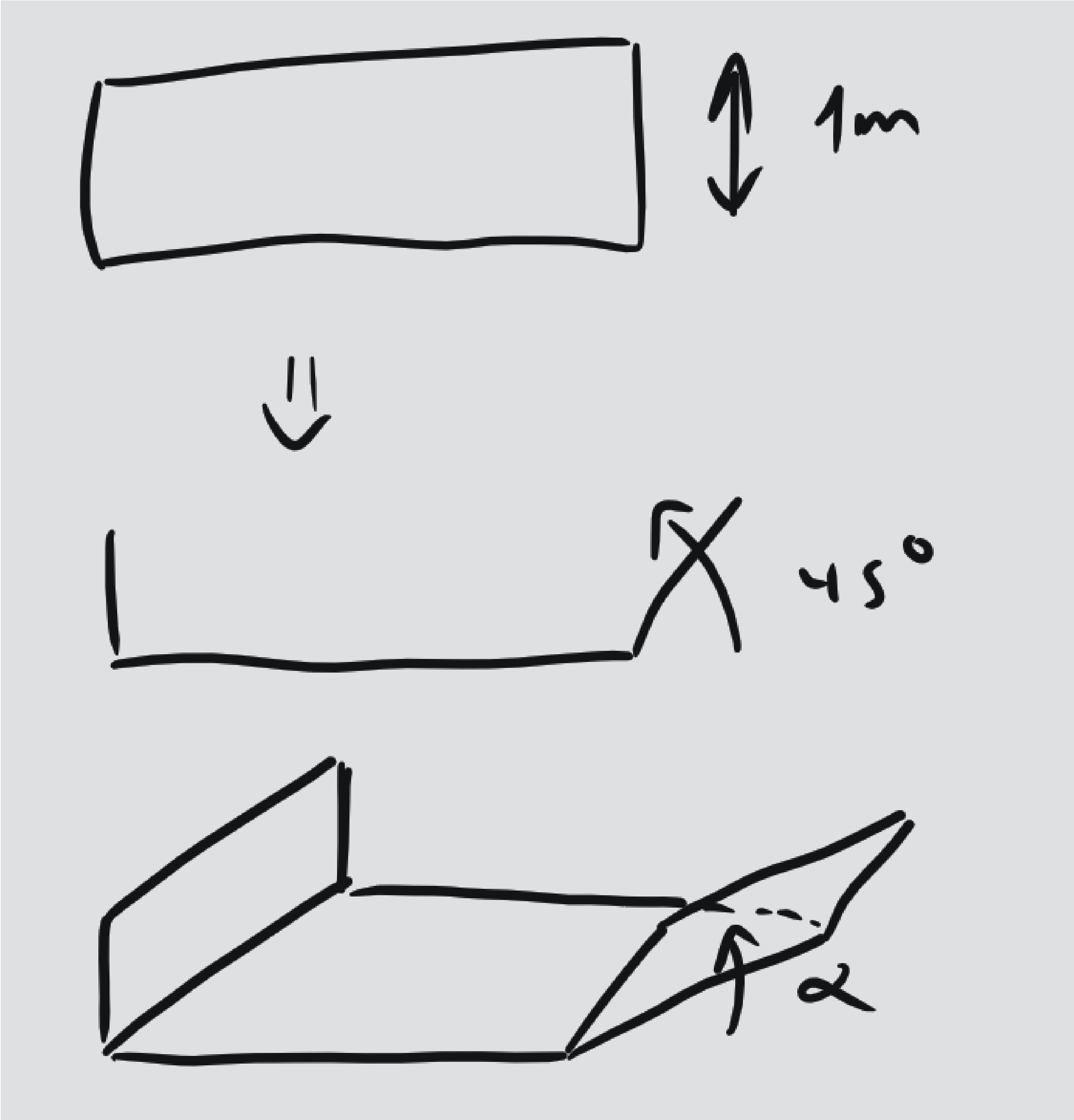
Lezione 25

#Esercizio

Esercizio (lamiera grondaia).

Supponiamo di aver una *lamiera* largo 1 metro ($1m$) (la lunghezza è irrilevante) e lo vogliamo *"piegare"* in modo da formare un profilo di grondaia rettangolare; ovvero del tipo raffigurato in *figura C6.*.
Progettare il *"modo"* di piegare questa lamiera per cui si ha la massima capienza (volume).

FIGURA C6.

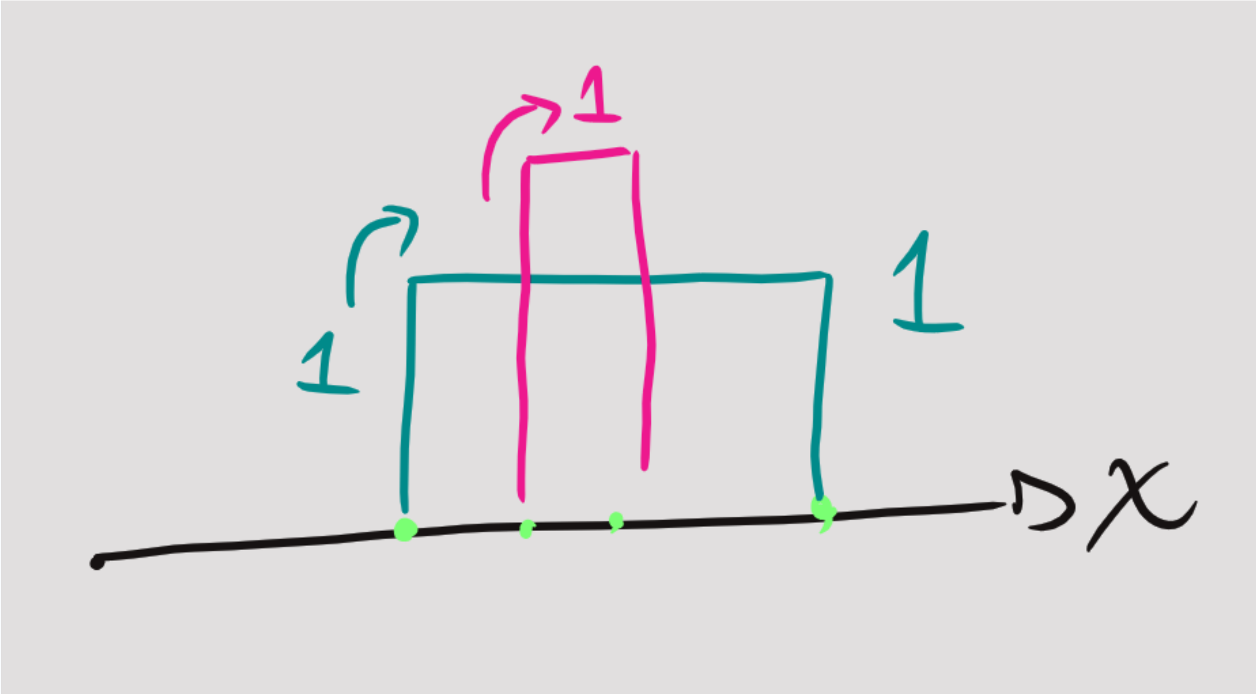


#Esercizio

Esercizio (curva con massima area).

Si ha una curva con lunghezza 1, con i suoi vertici sull'*asse delle ascisse*. Trovare la *"curva"* che racchiuda la *massima area* col profilo raffigurato in *figura C7.*.

FIGURA C7.



5. Integrali

Esercizi sugli Integrali

Tutti gli esercizi sugli integrali: da Riemann al calcolo delle primitive.

TIPOLOGIA A. VALUTAZIONE SECONDO RIEMANN

Lezione 30

#Esercizio

Esercizio (esponenziale).

Calcolare

$$\int_0^1 e^x \, dx$$

mediante l'*integrazione secondo Riemann*.

#Esercizio

Esercizio (potenza).

Calcolare

$$\int_0^1 x^n \, dx$$

per un qualunque $n \in \mathbb{N}$, mediante l'*integrazione secondo Riemann*.

TIPOLOGIA B. CALCOLO DELLE PRIMITIVE

Lezione 31

#Esercizio

Esercizio (integrali vari).

Calcolare i seguenti integrali *mediante il calcolo delle primitive*.

$$\int_0^1 e^x \, dx \; || \; \int_1^2 \frac{1}{x} \, dx \; || \; \int_0^1 x^n \, dx$$

Lezione 32

#Esercizio

Esercizio (integrali misti).

Calcolare i seguenti integrali:

$$\int_2^3 (x^2 + x^3) \, dx \; || \; \int_1^2 (e^x + \sin x) \, dx$$

#Esercizio

Esercizio (integrali misti).

Calcolare

$$\int_0^1 xe^x \, dx \; || \; \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx \; || \; \int_0^1 x \sin x \cdot e^x \, dx \; || \; \int_1^2 \ln x \, dx$$

#Esercizio

Esercizio (integrali misti).

Calcolare

$$\int_1^2 \frac{e^t}{e^t+1}\,dt \;||\; \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{e^x}{1-e^x}\,dx \;||\; \int_1^2 x^3 \ln x^2\,dx \;||\; \int x \sin x\,dx \;||\; \int_0^\pi$$

TIPOLOGIA C. LIMITI CON GLI INTEGRALI

Lezione 32

#Esercizio

Esercizio (Esercizio C1.).

$$\lim_{x\to 0^+} x \int_x^1 \ln t^4\,dt$$

#Esercizio

Esercizio (Esercizio C2.).

$$\lim_{x\to 1} \frac{\int_x^{2x} \frac{1}{1+\ln t}\,dt}{x-1}$$

#Esercizio

Esercizio (Esercizio C3.).

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_{x^3}^{x^2} (1-t^2)e^{-t^2}\,dt}{x \sin x}$$

TIPOLOGIA D. ESERCIZI TEORICI

Lezione 33 (esercitazione)

#Esercizio

Esercizio (Esercizio D1.).

Dire se la funzione integrale $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t}\, dt$$

è *crescente* sull'intervallo $]\frac{1}{2}, 1[$.

Esercizi interessanti trovati su internet

Esercizio (Esercizio D2.).

Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione *continua* e tale che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = a \in \mathbb{R}$$

Provare che da ciò discende

$$\lim_{x \to +\infty} \int_x^{x+1} f(x) dx = a$$

Discutere se vale *l'implicazione inversa* o meno.

6. Serie

Esercizi sulle Serie (D. D. S.)

Esercizi sulle serie, proposti dal prof. Daniele del Santo durante il corso "Matematica I con esercitazioni" (parte del programma riservata al CdL di Chimifca).

---

1. Serie a termini non negativi

#Esercizio

Esercizio.

Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

#Esercizio

Esercizio.

Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

usando il *teorema del confronto* e poi studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$$

utilizzando ciò che avete visto prima.

#Esercizio

Esercizio.

Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\ln(1 + \frac{1}{n}) - \frac{1}{n} \right)$$

Consiglio: *vedere lo sviluppo di Taylor* per $\ln(1 + \frac{1}{n})$ e utilizzare il *teorema del confronto*.

#Osservazione

Osservazione (La costante di Eulero-Mascheroni).

Risolvendo l'esercizio precedente si vede che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \ln(1 + \frac{1}{n}) = \gamma$$

è convergente, con γ un *numero*. Questa costante si chiama la costante di *Eulero-Mascheroni*, ed è noto dal momento che non è ancora chiaro se questo numero è *irrazionale* o meno ([approfondimenti su Wikipedia]).

#Esercizio

Esercizio.

Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

#Esercizio

Esercizio.

Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

#Esercizio

Esercizio.

Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

per al variare di α.

Consiglio: *separare α per $\alpha \leq 1$, $\alpha \geq 2$ e altri casi*.

#Esercizio

Esercizio.

Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$$

#Esercizio

Esercizio.

Dire per quali valori $x \in \mathbb{R}$ la seguente serie è convergente.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$$

#Esercizio

Esercizio.

Studiare la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \log n}$$

e la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(\log n)^2}$$

Infine dire il carattere della serie al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(\log n)^\alpha}$$

#Esercizio

Esercizio.

Studiare il carattere della serie, al variare di $\beta \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(\log n)(\log(\log n)^{\beta})}$$

#Esercizio

Esercizio.

Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

se convergente, dire la somma della serie.

Consiglio: *se si vuole trovare la somma della serie, considerare lo sviluppo di Taylor per una certa funzione*.

#Esercizio

Esercizio.

Dimostrare che le serie semplicemente convergenti *non* soddisfano il *teorema di Riemann*.

Consiglio: *In particolare considerare* $\ln 2$ *e* $\frac{3}{2} \ln 2$.

#Esercizio

Esercizio.

Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(\pi n)}{n+2}$$

#Esercizio

Esercizio.

Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1+\frac{1}{n^3})$$

#Esercizio

Esercizio.

Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\sin(\frac{1}{n+1})$$

#Esercizio

Esercizio.

Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{\binom{2n}{n}}$$