Serie Numeriche - Sommario

Tutto sulle serie numeriche.

A. LE DEFINIZIONI PER LE SERIE

A1. Definizione di Serie

Definizione di Serie

Problema preliminare per le serie; definizione di serie; definizione di successione dei termini, di somme parziali, di parziale n-esima per una serie. Esempi notevoli di serie.

---

0. Osservazione preliminare

#Osservazione

Osservazione (problema preliminare).

Supponiamo di avere una *successione* $(a_n)_n$ in $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) (Definizione 1 (successione)).
Voglio trovare un *modo rigoroso* per considerare la *somma* di tutti i termini $(a_n)_n$; si tratta tuttavia di *operazioni infinite*, dunque non posso effettivamente fare la somma.
Infatti, procedendo in questo modo si avrebbero dei risultati che *sembrano* degli assurdi, tra cui la c.d. *serie di Ramanujan* (ulteriori approfondimenti su Wikipedia).

$$1+2+3+\ldots=-\frac{1}{12} \ (\mathfrak{R})$$

> Vogliamo dunque trovare un altro modo per fare le somme dei termini a_n, senza dover ricorrere a teorie più speciali. Useremo dunque la *teoria dei limiti*, creando effettivamente un nesso tra la *teoria dei limiti* (per le successioni) con le *serie*.

1. Definizioni basilari

#Definizione

Definizione (Serie).

Sia $(a_n)_n$ una *successione a valori reali* (o complessi).
Per ogni $n \in \mathbb{N}$ definiamo la *"somma parziale"*

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$$

cioè

$$s_0 = a_0; s_1 = a_0 + a_1; \ldots; s_n = a_n + s_{n-1} = a_0 + \ldots + a_n$$

Allora definisco la coppia

$$((a_n)_n, (s_n)_n)$$

come *serie* e la indico come

$$\boxed{((a_n)_n, (s_n)_n) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} a_n}$$

#Definizione

Definizione (Successione dei terimini, somme parziali, parziale n-esima per una serie).

Data una *serie*

$$((a_n)_n, (s_n)_n) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

Definisco le seguenti:

- $(a_n)_n$ si dice la *successione dei termini* o il *termine generale* della serie.
- $(s_n)_n$ si dice la successione *delle somme parziali* o delle *ridotte n-esime* della serie
- s_n si dice successione *parziale* o *ridotta* n-esima della serie.

#Definizione

Definizione (Resto k-esimo della serie).

Data una *serie*

$$((a_n)_n, (s_n)_n) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

posso considerare un qualsiasi numero $k \in \mathbb{N}$ e definire la seguente sotto successione (Successione e Sottosuccessione > ^502a75).

$$(b_k)_k := (a_{n+k})_n$$

ovvero, scegliendo ad esempio $k = 3$

$$k = 3 \implies (b_k)_k = a_3, a_4, \dots, a_n, \dots$$

La serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = \sum_{n=k}^{+\infty} a_n$$

si dice il *resto k-esimo della serie* $((a_n)_n, (s_n)_n)$ (altrimenti detto come la *"coda di una serie"*)

2. Esempi notevoli di Serie

#Esempio

Esempio (Successione costante).

Sia $a_n = 1, \forall n$; allora abbiamo

$$\begin{aligned} &a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 1 \\ &s_0 = 1; s_1 = 1 + 1; \ldots; s_n = 1 + 1 + \ldots + 1 = n + 1 \end{aligned}$$

Allora abbiamo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} 1$$

#Esempio

Esempio (Successione identità).

Sia definita la successione $a_n = n, \forall n$; allora abbiamo la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \sim \left((n)_n, (\frac{n(n+1)}{2})_n \right)$$

Per una derivazione della nomenclatura a destra si provi per *induzione* che

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

#Esempio

Esempio (Successione binaria).

Sia definita la successione $a_n = (-1)^n$, ovvero del tipo

$$1, -1, 1, -1, \ldots, 1, -1, \ldots$$

Allora troviamo che

$$s_n = \begin{cases} 1 \text{ se } n \text{ pari} \\ 0 \text{ se } n \text{ dispari} \end{cases} = \frac{(-1)^n + 1}{2}$$

Allora

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \sim ((a_n)_n, (s_n)_n) = \ldots$$

#Esempio

Esempio (Serie geometrica di ragione ρ).

Sia $\rho \in \mathbb{R}$ (denominata come *ragione*) e definiamo la successione $a_n = \rho^n$.
Conoscendo la *ridotta della serie geometrica* (Esempi di Induzione > ^98ba76), sappiamo che

$$\rho^0 + \rho^1 + \ldots + \rho^n = \frac{1-\rho^{n+1}}{1-\rho} = s_n$$

Allora abbiamo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \rho^n \sim \left((\rho^n)_n, \left(\frac{1-\rho^{n+1}}{1-\rho}\right)_n\right)$$

#Osservazione

Osservazione (Casi $n = 0$ e $n = 1$).

Osserviamo che data una qualunque successione $(a_n)_n$, tratteremo in modi simili le situazioni in cui n parte da 0 o da 1.

#Esempio

Esempio (Serie armonica).

Sia $a_n = \frac{1}{n}$.
Allora abbiamo la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sim \left(\left(\frac{1}{n}\right)_n, \left(1 + \ldots + \frac{1}{n}\right)_n\right)$$

Notare che *non è possibile* trovare una formula che calcoli la *successione ridotta n-esima* $1 + \ldots + \frac{1}{n}$, dunque è necessario esprimerlo esplicitamente.

#Esempio

Esempio (Serie armonica generalizzata).

Sia $\alpha \in [0, +\infty)$. Prendendo la *serie armonica*, indico la *serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

come la *serie armonica generalizzata*.

A2. Carattere di una Serie

Carattere di una Serie

Carattere di una serie: definizione di serie convergente, divergente, indeterminata; esempi; osservazioni sulle serie convergenti.

---

0. Osservazione preliminare

#Osservazione

Osservazione (Problema preliminare).

Ora vogliamo capire come si *comporta* la ridotta $(s_n)_n$ a partire dal termine generale della serie $(a_n)_n$ (Definizione di Serie).

1. Definizione di serie convergente, divergente e indeterminata

#Definizione

Definizione (Serie convergente, divergente, indeterminata).

Data la serie

$$\sum_{n \in \{0,1\}}^{+\infty} a_n \sim ((a_n)_n, (s_n)_n)$$

questa si dice:

- *convergente* se esiste finito il limite

$$\lim_n s_n = s \in \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$$

in tal caso s si dice la *somma della serie*.

- *divergente* se invece esiste ma non è finito il limite

$$\lim_n s_n = \pm\infty \in \tilde{\mathbb{R}}$$

- *indeterminata* se non esiste il limite

$$\nexists \lim_n s_n$$

La *"caratteristica"* di essere convergente, divergente o indeterminata si dice il *carattere della serie*.

2. Osservazioni sulle serie convergenti

Notiamo che le *serie convergenti* hanno certe proprietà interessanti.

#Osservazione

Osservazione (Le ridotte di una serie condivide il carattere della serie padre).

Consideriamo una qualsiasi *serie convergente* e un suo qualsiasi *resto k-esimo*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n ; \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+k}$$

Ho che entrambe le serie hanno *lo stesso carattere*.

Considerando s_n come la ridotta di $\sum a_n$, σ_n la ridotta di $\sum a_{n+k}$,, troviamo una relazione tra le due ridotte, ovvero

$$\sigma_n = s_{n+k} - s_{k-1}$$

Infatti, guardando il membro destro dell'uguaglianza, il *primo termine* rappresenta la somma di tutti i termini della successione $(a_n)_n$ fino a $n+k$; invece il *secondo termine "toglie"* gli elementi che non appartengono al resto k-esimo, ovvero i termini $(a_0, \ldots, a_{k-1})$.
In definitiva possiamo dire che le ridotte differiscono per una *costante*.

#Osservazione

Osservazione (Le serie convergenti formano un spazio vettoriale su $\mathbb{R}$).

Considero una qualsiasi serie e un scalare $\lambda \in \mathbb{R}$;

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n; \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda \cdot a_n$$

Troviamo che entrambe le serie hanno lo *stesso carattere*. In particolare, se la serie è convergente allora *"scalandolo"* per un qualsiasi numero rimane comunque convergente.

Adesso consideriamo due serie convergenti del tipo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n; \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$$

Se sono entrambi *convergenti*, allora sicuramente sarà convergente pure la *somma* tra le due serie definita come

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n := \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n)$$

allora la serie ottenutosi a destra sarà pure *convergente*.

Infatti, da questa breve osservazione si evince che le *serie convergenti* formano un $\mathbb{R}$-*spazio vettoriale* (Definizione 1 (spazio vettoriale sul campo K)).

3. Esempi di studio delle serie

Nota: la maggior parte degli esempi verranno tratti dalla pagina Definizione di Serie

#Esempio

Esempio (Serie costante).

Prendiamo la serie

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} 1$$

Sappiamo che la successione delle somme parziali è $s_n = n + 1$.
Ma allora da ciò segue che

$$\lim_n s_n = \lim_n (n+1) = +\infty$$

Allora la serie è *divergente*.

#Esempio

Esempio (Serie identità).

Prendiamo adesso la serie

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} n = 1 + 2 + \dots$$

Vediamo che

$$\lim_n s_n = \lim_n \frac{(n)(n+1)}{2} = +\infty$$

Allora anche questa serie è divergente.

#Esempio

Esempio (Serie binaria).

Ora prendiamo la serie

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$$

Vediamo che

$$s_n = \begin{cases} -1, n \in \mathbb{P} \\ 1, n \in \mathbb{D} \end{cases}$$

Ma allora in questo caso il limite

$$\lim_n s_n$$

non esiste, dal momento che scegliendo opportune sotto successioni otteniamo valori diversi.

#Esempio

Esempio (Serie geometrica per $\rho = 0.5$).

Prendiamo la serie geometrica per $\rho = \frac{1}{2}$.
Ovvero,

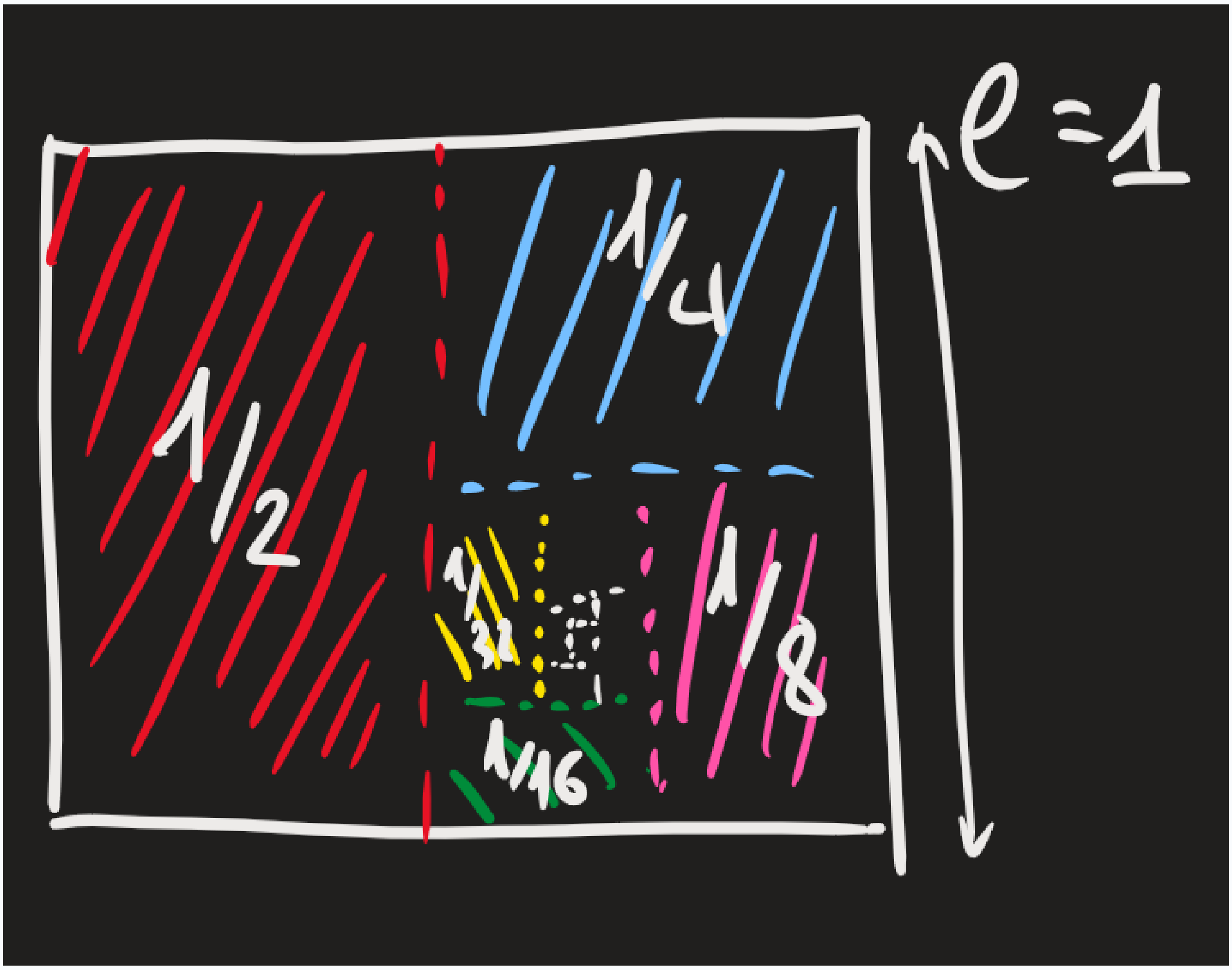
$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$$

Allora abbiamo

$$s_n = 2(1 - \frac{1}{2^n}) \implies \lim_n s_n = 2(1-0) = 2$$

Allora la serie S è "*convergente con somma* 2.

FIGURA 3.1. (*Illustrazione geometrica della convergenza*)



#Esempio

Esempio (Serie geometrica generalizzata).

Ora generalizziamo l'esempio precedente per un $\rho \in \mathbb{R}$.
Ovvero,

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \rho^n$$

Ora distinguiamo casi diversi.
Per $\rho = 1$, osserviamo che la serie si comporterà come la *serie costante* (ovvero $\sum_{0 \leq n < +\infty} 1$), dunque S diventa *divergente*.
Invece per $\rho \neq 1$, abbiamo che la *successione delle ridotte parziali* è

$$s_n = \frac{1-\rho^{n+1}}{1-\rho} \implies \lim_n s_n = \lim_n \frac{1-\rho^{n+1}}{1-\rho}$$

Notiamo che *"l'unica parte che si muove"* è ρ^{n+1}; studiamo dunque solo il limite

$$\lim_n \rho^n = \begin{cases} +\infty, \rho > 1 \\ 0, -1 < \rho < 1 \\ \nexists, \rho \leq -1 \end{cases}$$

Dunque deduciamo che

$$\boxed{\lim_n s_n = \begin{cases} +\infty, \rho \geq 1 \\ \frac{1}{1-\rho}, -1 < \rho < 1 \\ \nexists, \rho \leq -1 \end{cases}}$$

Allora la serie è *divergente* per $\rho \geq 1$, *convergente* per $\rho \in (-1, 1)$, e *indeterminata* per $\rho \leq -1$.

#Esempio

Esempio (Serie armonica).

Ora vogliamo studiare il carattere della serie

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

Consideriamo la successione $(s_n)_n$.

$$
\begin{aligned}
s_1 &= 1 \\
s_2 &= 1 + \frac{1}{2} \\
s_3 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \\
s_4 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \geq 1 + 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \geq 1 + 2\frac{1}{2} \\
&\vdots \\
s_8 &= 1 + \ldots + \frac{1}{8} \geq 1 + \frac{1}{2} + 2\frac{1}{4} + 4\frac{1}{8} = 1 + 3\frac{1}{2} \\
s_{2^n} &= 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \underbrace{\frac{1}{2^{n-1}} + \ldots + \frac{1}{2^n}}_{2^{n-1} \text{ termini}}
\end{aligned}
$$

Ma allora svolgendo un'operazione simile per s_4, s_8, possiamo minorare s_{2^n} come

$$
s_{2^n} \geq 1 + \frac{1}{2} + 2\frac{1}{4} + 4\frac{1}{8} + \ldots + 2^{n-1}\frac{1}{2^n} = 1 + \frac{n}{2}
$$

Pertanto, per il teorema del confronto (Osservazione 5 (i teoremi per i limiti di funzioni valgono anche per i limiti di successioni)), il limite è

$$
\lim_n s_{2^n} = +\infty
$$

Allora dato che stiamo considerando una *sottosuccessione su* s_n, anche il limite s_n è

$$
\lim_n s_n = +\infty
$$

(*N. B.* dimostreremo questo risultato nelle pagine successive, considerando le *successioni a termini positivi*).
Pertanto la serie armonica è *divergente*.

#Osservazione

Osservazione (dimostrazione alternativa della divergenza della serie armonica).

Si può dimostrare che la serie

$$
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}
$$

è *divergente*, utilizzando la nozione di *integrale generalizzato in senso improprio* (Definizione 1 (funzione integrabile in senso generalizzato)).
Infatti se introduciamo la funzione

$$f(x) = \frac{1}{1+x}$$

notiamo subito che vale la relazione

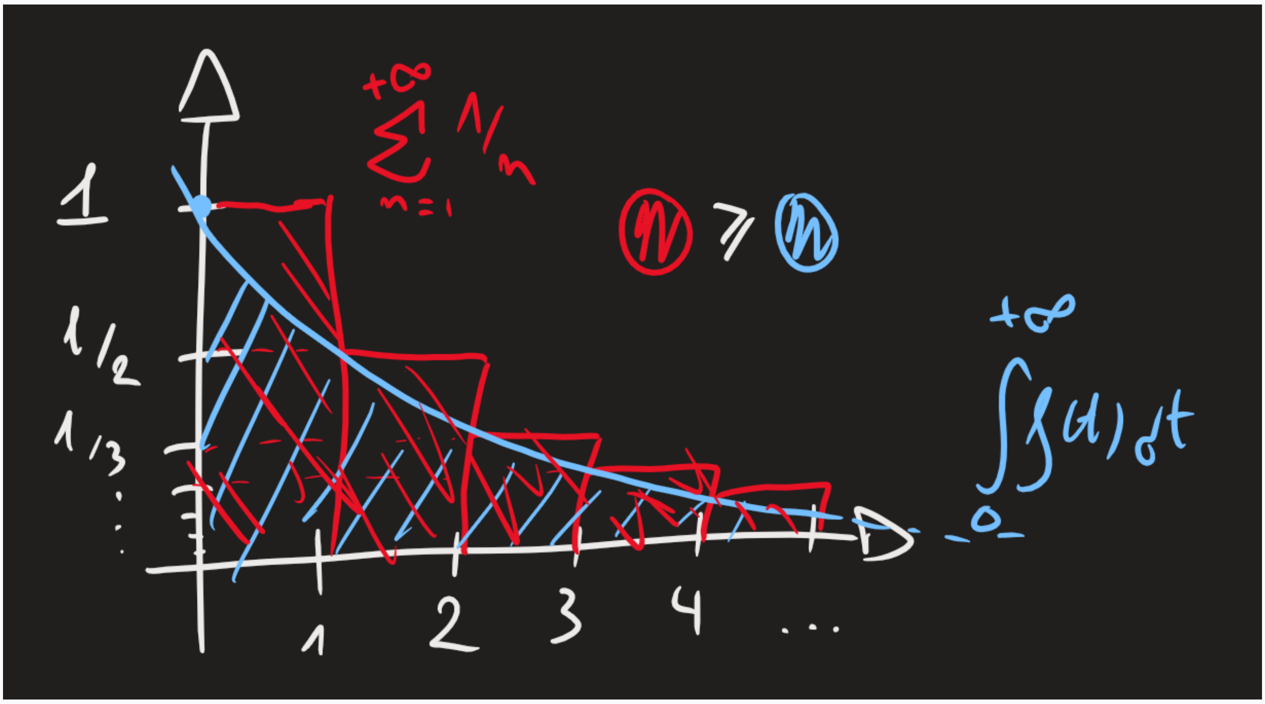
$$s_n \geq \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t, \forall n \in \mathbb{N}$$

Di conseguenza vale che

$$\lim_n s_n \geq \lim_n \ln(n+1) \implies \lim_n s_n = +\infty$$

per il *teorema del confronto* (di cui vedremo dopo) (Teorema 1 (del confronto per le serie a termini non negativi)).
Questo esempio ci dà un buon spunto per intravedere una *relazione* tra l'*integrale generalizzato* e le *serie* (Relazione tra Serie Numeriche e Integrali Generalizzati)

FIGURA 3.2. (*Confronto della serie armonica con l'integrale della funzione*)



#Osservazione

Osservazione (la dimostrazione per assurdo della divergenza della serie armonica).

Volendo, si può fornire un'altra dimostrazione per la *divergenza della serie armonica*, utilizzando un procedimento *"per assurdo"*.
Supponiamo per assurdo che $\sum_n \frac{1}{n}$ sia convergente con *somma* s. Vediamo che deve necessariamente discendere che $\lim_n s_n = 0$, ovvero per la definizione $\varepsilon - \bar{n}$ del limite ho

$$\forall n \geq \bar{n}, |s_n - s| < \varepsilon$$

Adesso osserviamo che

$$s_{2n} - s_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \underbrace{\frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ termini}} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

Prendendo il limite, si ha

$$\lim_n s_{2n} - s_n = s - s = 0 \geq \frac{1}{2}$$

che è chiaramente un assurdo. ■

#Esempio

Esempio (Serie di Mengoli).

Consideriamo la serie

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{(1)(2)} + \frac{1}{(2)(3)} + \ldots + \frac{1}{(n)(n+1)} + \ldots$$

Vogliamo determinare il carattere della serie S (di Mengoli).
Innanzitutto osserviamo che

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Allora, considerando la successione delle ridotte di S abbiamo una *serie telescopica*:

$$\begin{aligned} s_n = \frac{1}{1(2)} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Di conseguenza il suo limite è

$$s_n = 1 - \frac{1}{n+1} \implies \lim_n s_n = 1$$

Allora la *serie di Mengoli* è *"convergente con somma* 1*"*.

#Esempio

Esempio (Problema di Basilea).

Consideriamo la serie

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Notiamo che questa è *"approssimabile"* con la *serie di Mengoli*; allora si deduce che S è *convergente*. Ma con quale somma?
Questa domanda venne posta per la prima volta nel *1644* come il *problema di Basilea* (approfondimenti storici su Wikipedia) e risolta dal noto matematico *L. Euler*, dimostrando che la somma esatta è

$$\frac{\pi}{6}$$

FIGURA 3.3. (*Foto di Pietro Mengoli e Leonhard Euler*)

B. I TEOREMI GENERALI SULLE SERIE

B1. Primi teoremi sulle Serie

Teoremi Generali sulle Serie

Primi teoremi sulle serie: condizione necessaria per una serie convergente, criterio di Cauchy per le serie.

---

0. Voci correlate

- Definizione di Serie
- Carattere di una Serie

1. Condizione necessaria per serie convergenti

#Teorema

Teorema (condizione necessaria per la convergenza di una serie).

Sia

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}^{+\infty} a_n$$

una serie *convergente*.
Allora la *successione dei termini generali* $(a_n)_n$ presenta il limite nullo, ovvero

$$\lim_n a_n = 0$$

#Osservazione

Osservazione (attenzione!).

Osservare attentamente che questo teorema ci fornisce *solamente* una condizione necessaria per una serie convergente, ma *non* una condizione sufficiente; infatti, prendendo la *serie armonica*, abbiamo che il limite della successione $\lim_n a_n$ si annulla; ma la sua serie è *divergente* (Esempio 10 (Serie armonica)).

#Dimostrazione
DIMOSTRAZIONE del Teorema 1 (condizione necessaria per la convergenza di una serie).
Supponiamo, per ipotesi che la serie

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}^{+\infty} a_n$$

sia *convergente*.
Allora per ipotesi segue che il *limite della successione delle ridotte* è convergente per tale serie:

$$\lim_n s_n = s \in \mathbb{R}$$

Allora vale anche

$$\lim_n s_{n-1} = \lim_n s_n = s$$

Ma allora possiamo sottrarli e ottenere

$$\lim_n (s_n - s_{n-1}) = s - s = 0$$

Però ci ricordiamo che $s_{n-1} - s_n$ non è altro che un modo per esprimere a_n, dal momento che *sottraiamo* tutti i termini $a_0, \ldots, a_{n-1}$ da $a_0, \ldots, a_n$.
Di conseguente

$$\lim_n (s_n - s_{n-1}) = \boxed{\lim_n a_n = 0} \blacksquare$$

#Osservazione

> Osservazione (l'utilità di questo teorema).
>
> Come osservato prima, non si può sfruttare questo teorema come una *condizione sufficiente*; tuttavia è possibile comunque sfruttare la *contronominale* di questo teorema, ovvero
>
> $$((a_n)_n, (s_n)_n) \text{ convergente} \implies \lim_n a_n = 0$$
>
> diventa
>
> $$\lim_n a_n \neq 0 \vee \nexists \lim_n a_n \implies ((a_n)_n, (s_n)_n) \text{ divergente o indeterminata}$$
>
> Allora guardando semplicemente il *comportamento* del limite per a_n, possiamo già escludere se la sua serie è *convergente* o meno.
>
> Ad esempio, voglio studiare la *serie costante* del tipo $1 + 1 + \ldots + 1 + \ldots$; osservo che il limite della successione dei suoi termini generali è divergente, dunque è impossibile che sia *convergente*. Infatti, la serie costante è *divergente* per $+\infty$.

2. Criterio di Cauchy

#Teorema

> Teorema (Criterio di Cauchy per le serie).
>
> Sia
>
> $$\sum_{n \in \mathbb{N}}^{+\infty} a_n$$

una *serie a valori in* $\mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$.
Allora sono equivalenti:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}^{+\infty} a_n \text{ convergente} \iff \begin{gathered}\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} : \forall n > \bar{n} \wedge \forall k \in \mathbb{N} \\ |a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+k}| < \varepsilon\end{gathered}$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 4 (Criterio di Cauchy per le serie).
Ricordo il *teorema di completezza di* $\mathbb{R}$ (Teorema 4 (Completezza di R.)) e il *teorema di caratterizzazione delle successioni convergenti* (Teorema 3 (di caratterizzazione delle successioni convergenti)), per i quali una *successione qualsiasi* $(\alpha_n)_n$ è *convergente* se e solo se è di *Cauchy* (in $\mathbb{R}$).
Per definizione, la serie è convergente se la sua successione delle ridotte $(s_n)_n$ è *convergente*. Allora la serie è convergente *se e solo se* $(s_n)_n$ è di *Cauchy*.
Ora richiamo la definizione di successione di Cauchy: una successione si dice di Cauchy quando vale

$$\begin{gathered}\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} : \\ n, k > \bar{n} \implies |s_n - s_k| < \varepsilon\end{gathered}$$

Adesso supponendo che $n > k$ (non è restrittiva dal momento che se è vero il contrario, posso "scambiare i nomi" di n, k), posso ottenere la relazione

$$n > \bar{n}; \exists m \in \mathbb{N} : k = n + m$$

Allora riprendendo la definizione di successione di Cauchy ho

$$\begin{gathered}\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} : \\ n, k > \bar{n} \implies |s_n - s_{n+m}| < \varepsilon\end{gathered}$$

Osserviamo che il membro sinistro della disuguaglianza a destra può essere riformulata come

$$|s_n - s_{n+m}| = |s_{n+m} - s_n| = |a_{n+1} + \ldots + a_{n+k}|$$

che è la tesi. ■

B2. Relazione tra Serie e Integrali

Relazione tra Serie Numeriche e Integrali Generalizzati

Nesso tra serie numeriche e integrali generalizzati. Definizione di funzione scalino per una serie. Teorema di equivalenza tra serie e integrali.

---

0. Voci correlate

- Definizione di Serie
- Carattere di una Serie
- Funzione Integrabile in Senso Generalizzato

1. Definizione di funzione scalino

#Definizione

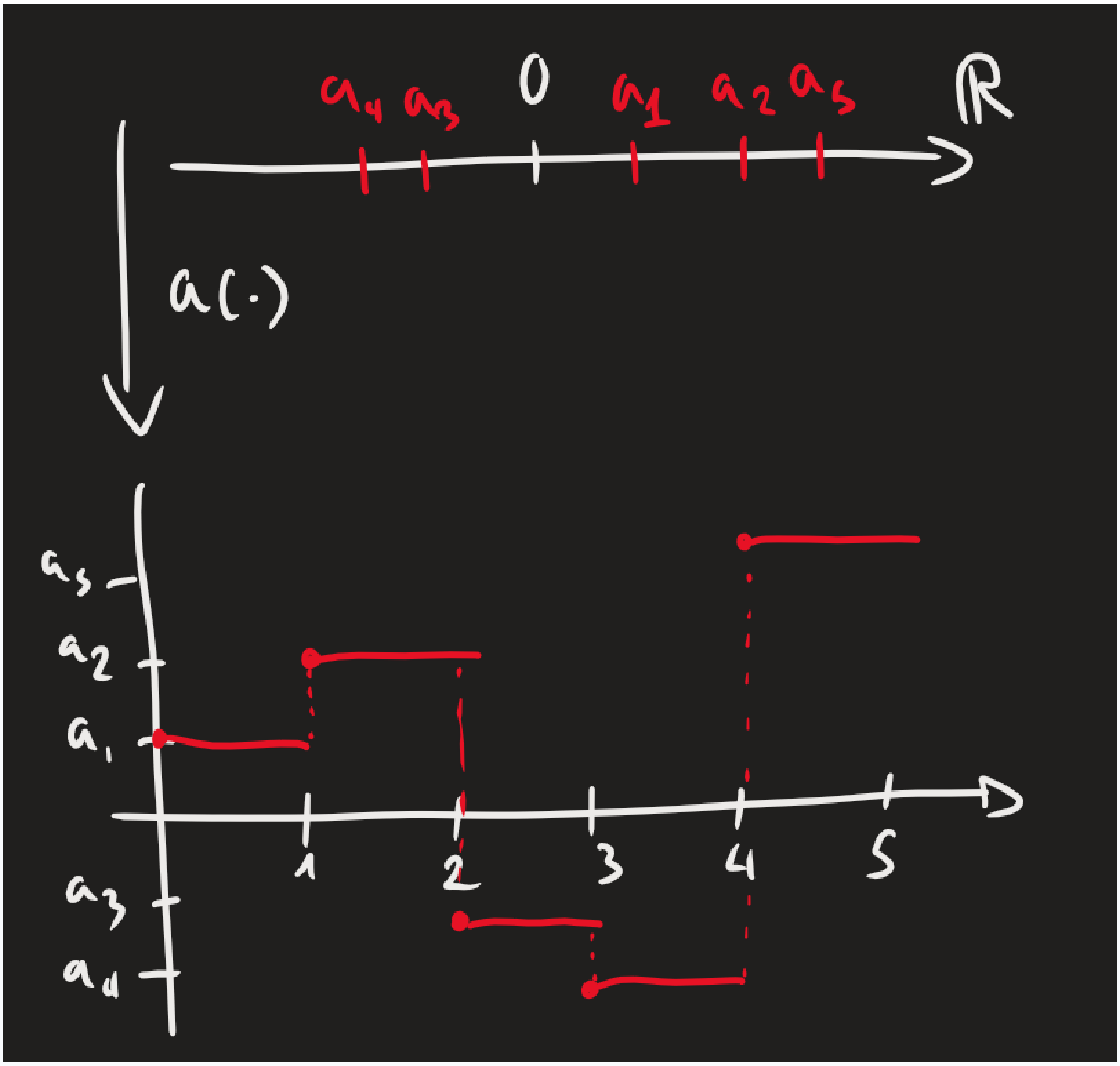
Definizione (funzione scalino per una serie).

Data una *serie* $\sum a_n$ si definisce la *funzione scalino* $a : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ come

$$a(x) := a_n, \forall x \in [n-1, n)$$

Graficamente prendiamo il la successione dei termini generali della serie $(a_n)_n$, e ad ogni termine a_k si associa ogni numero reale tra $[k-1, k)$ su a_k (*figura 1.1.*).

FIGURA 1.1. (*L'idea della funzione scalino*)



#Osservazione

> Osservazione (l'integrabilità della funzione scalino).
>
> Data una qualsiasi serie $\sum a_n$, la sua funzione scalino $a(\cdot)$ è *localmente integrabile* su $[0, +\infty)$ e l'integrale viene valutata come
>
> $$\int_0^n a(x)\,\mathrm{d}x = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = s_n$$
>
> Questa osservazione ci permetterà di vedere più chiaramente il *nesso* tra questa funzione inventata *"ad-hoc"* e le *serie*.

2. Teorema di relazione tra le serie e gli integrali

#Teorema

Teorema (di relazione tra le serie e gli integrali).

Sia $\sum a_n$ una *serie* e $a(x)$ la sua *funzione scalino associata*.
Allora sono equivalenti:

1. *Convergenza*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = s \in \mathbb{R} \iff \lim_{x \to +\infty} \int_0^x a(t)\ \mathrm{d}t =: \int_0^{+\infty} a(t)\ \mathrm{d}t = s$$

2. *Divergenza*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \pm\infty \iff \int_0^{+\infty} a(t)\ \mathrm{d}t = \pm\infty$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 3 (di relazione tra le serie e gli integrali)
Dimostriamo il primo punto.
" $\Longleftarrow$ ": Basta osservare che la funzione scalino a è *integrabile localmente* su $[0, +\infty)$ e in particolare *in senso generalizzato* per ipotesi. Allora vale che

$$\int_0^n a(t)\ \mathrm{d}t = s_n \implies \lim_n \int_0^n a(t)\ \mathrm{d}t = \lim_n s_n = s$$

" $\implies$ ": Si suppone che la serie vale

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = s$$

Allora considero che per ogni $x \in [n, n+1)$ vale la relazione

$$\int_0^x a(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^n a(t)\ \mathrm{d}t + \underbrace{\int_n^x a(t)\ \mathrm{d}t}_{\text{rimane costante}}$$

Da cui, per definizione di $a(x)$, discende

$$\int_0^x a(t)\ \mathrm{d}t = s_n + a_{n+1}(x-n) \implies \lim_n s_n + \underbrace{a_{n+1}}_{\to 0} \underbrace{(x-n)}_{\leq 1} = s + 0 = s$$

dato che $\lim_n a_n = 0$ (Teorema 1 (condizione necessaria per la convergenza di una serie)).

Ora dimostriamo il secondo punto.
" $\Longleftarrow$ ": Si fa un conto analogo alla dimostrazione del primo punto, ovvero considerando che

$$\int_0^n a(t)\ \mathrm{d}t = s_n$$

" $\Longrightarrow$ ": Supponiamo che la serie sia divergente positivamente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$$

Come fatto prima, consideriamo che per un qualsiasi $x \in [n, n+1)$. Supponiamo pure che l'ultimo termine della serie sia non negativa $(a_{n+1} \geq 0)$.
Allora vale che

$$\int_0^x a(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^n a(t)\ \mathrm{d}t + \int_n^x a(t)\ \mathrm{d}t$$

Ovvero

$$\int_0^{+\infty} a(t)\ \mathrm{d}t = \lim_n \int_0^n a(t)\ \mathrm{d}t + \int_n^x a_{n+1} = s_n + a_{n+1}(x-n) \leq s_n + a_n.$$

Da cui, per il teorema del confronto (Teorema 3 (criterio del confronto)) si ha la divergenza dell'integrale.
In maniera analoga, supponendo $s_{n+1} \leq 0$ (ovvero includendo i casi in cui il termine a_{n+1} sia negativa) si ha

$$s_{n+1} \leq \int_0^x a(t)\ \mathrm{d}t \leq s_n$$

Quindi, in una maniera definitiva si ha

$$\min\{s_n, s_{n+1}\} \leq \int_0^x a(t)\ \mathrm{d}t \leq \max\{s_n, s_{n+1}\}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Ovvero, usando il teorema del confronto

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^x a(t)\ \mathrm{d}t = +\infty \ \blacksquare$$

C. LE SERIE A TERMINI NON NEGATIVI

C1. Serie a termini non negativi

Serie a Termini non negativi

Definizione di serie a termini non negativi (o positivi); proprietà fondamentale delle serie a termini non negativi (o positivi); teorema dell'aut-aut per le serie a termini non negativi.

---

0. Voci correlate

- Definizione di Serie
- Carattere di una Serie

1. Definizione di serie a termini non negativi

#Definizione

Definizione (Serie a termini non negativi o positivi).

Sia

$$\sum_{n \in \mathbb{N}}^{+\infty} a_n$$

una serie, tale che $\forall n, a_n \geq 0$ (ovvero tutti i *termini della successione dei termini della serie sono positivi*), allora la serie si dice *a termini non negativi*. Parimenti, se invece si verifica $a_n > 0$, allora la serie si dice *a termini positivi*.

2. Proprietà fondamentale delle serie a termini non negativi

#Osservazione

Osservazione (Proprietà fondamentale delle serie a termini non negativi).

> Osserviamo che se una serie è a *termini non negativi*, allora $(s_n)_n$ è sicuramente una successione *monotona crescente*. Questa proprietà sarà importante in quanto ci permetterà di enunciare il c.d. teorema dell'*aut-aut* per le serie a termini non negativi.

#Teorema

> Teorema (dell'aut-aut per le serie a termini non negativi).
>
> Sia
>
> $$\sum_{n\in\mathbb{N}}^{+\infty} a_n$$
>
> una *serie* a termini non negativi, allora la serie o *è divergente* o *è convergente*, come suggerirebbe il termine Kierkegaardiano *"Aut-Aut"* (approfondimenti sull'Aut-Aut di S. Kierkegaard].

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 3 (dell'aut-aut per le serie a termini non negativi).
La dimostrazione è semplice, basta prendere *l'osservazione 2* (vedere sopra) e applicare il *teorema dei limiti per le successioni monotone* (Teorema 7 (esistenza dei limiti delle successioni monotone)), per cui se una successione è *monotona* (in particolare $(s_n)_n$), allora il suo limite deve *esistere*.
Pertanto se esiste il limite

$$\lim_n s_n = s \in \tilde{\mathbb{R}}$$

allora la serie non può essere indeterminata, per definizione. ■

C2. Serie Notevoli

Serie Numeriche Notevoli

Serie numeriche notevoli, campioni per il confronto con altre serie.

---

0. Voci correlate

- Teorema del Confronto per le Serie a Termini non negativi
- Relazione tra Serie Numeriche e Integrali Generalizzati

1. Serie Armonica Generalizzata

#Teorema

> Teorema (serie armonica generalizzata).
>
> Consideriamo la serie
>
> $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$$
>
> per $p > 0$.
> Se $p \in (0, 1]$, allora la serie *diverge*.
> Se $p \in (1, +\infty)$ allora la serie *converge* con somma $s \leq \frac{p}{p-1}$.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 1 (serie armonica generalizzata).
N.B. Questa è un'idea della dimostrazione
Sfruttiamo la *relazione tra le serie numeriche e gli integrali generalizzati*, con la *funzione scalino* per $\frac{1}{n^p}$. Abbiamo dunque una situazione del tipo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \longleftrightarrow \int_0^{+\infty} a(t) \text{ d}t \leq \int_0^{+\infty} f(t) \text{ d}t$$

Vogliamo trovare un'opportuna funzione $f(t)$ di cui sappiamo essere convergente e dominare $a(t)$.
Definiamo dunque

$$f(x) := \begin{cases} 1, 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{x^p}, x \geq 1 \end{cases}$$

Come visto con gli *integrali impropri notevoli* (Teorema 2 (integrali impropri su semirette)), possiamo studiare l'*integrabilità* di f su $(0, +\infty)$. ■

#Osservazione

> Osservazione (l'utilità delle serie armoniche generalizzate).

> Questa serie sarà particolarmente utile per studiare il *carattere* delle *altre serie*, dal momento che la *serie armonica generalizzata* funge da *"serie campione"* per i confronti.

C3. Teorema del Confronto

Teorema del Confronto per le Serie a Termini non negativi

Teoremi sulle serie a termini non negativi: teorema del confronto (+ due corollari), tecnica di valutazione delle serie con Taylor.

---

0. Voci correlate

- Serie a Termini non negativi
- Definizione di Serie
- Carattere di una Serie
- Formula di Taylor
- Insiemi limitati, maggioranti, massimo e teorema dell'estremo superiore

1. Teorema del confronto per le serie a t. n. n.

#Teorema

> Teorema (del confronto per le serie a termini non negativi).
>
> Siano $\sum_n a_n, \sum_n b_n$ due *serie a termini non negativi*.
> Supponiamo che valga $a_n \leq b_n, \forall n$ (ovvero che tutti i termini di $(b_n)_n$ *"stanno sopra"* tutti quelli di $(a_n)_n$)
> Allora:
> i. Se $\sum_n a_n$ è divergente, allora anche $\sum_n b_n$ è divergente.
> ii. Se $\sum_n b_n$ è convergente con somma s_b, allora anche $\sum_n a_n$ è convergente con somma s_a, con $s_a \leq s_b$.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 1 (del confronto per le serie a termini non negativi).
N.B. Dimostrazione omessa con Eva Sincich, dimostrazione fatta con Daniele del

Santo
i. Supponiamo che $\sum_n a_n$ sia *divergente*. Ora consideriamo le *ridotte* n-esime per le serie $\sum_n a_n$, $\sum_n b_n$ e le denotiamo rispettivamente con s_n^a, s_n^b.
Per ipotesi so che per una qualsiasi $n \in \mathbb{N}$ ho $a_n \leq b_n$, di conseguenza $a_0 + a_1 \leq b_0 + b_1$; $a_0 + a_1 + a_2 \leq b_0 + b_1 + b_2$; e procedendo per induzione ottengo

$$a_0 + \ldots + a_n \leq b_0 + \ldots + b_n$$

I membri della disuguaglianza sono esattamente s_n^a, s_n^b.
Ma allora

$$s_n^a \leq s_n^b$$

Dato che $\sum_n a_n$ è *divergente*, per definizione deve seguire il limite

$$\lim_n s_n^a = \pm\infty$$

Ma allora per il *teorema del cfr. per i limiti di successione* (Osservazione 5 (i teoremi per i limiti di funzioni valgono anche per i limiti di successioni)) ho il limite

$$\lim_n s_n^a = \pm\infty \land s_n^a \leq s_n^b \implies \lim_n s_n^b = \pm\infty$$

Allora per definizione la serie $\sum_n b_n$ è *divergente*.
ii. Ora supponiamo invece che $\sum_n b_n$ sia *convergente* con somma s_b.
Per definizione ho il limite finito

$$\lim_n s_n^b = s_b$$

Però, considerando che trattiamo di *serie a termini non negativi*, abbiamo che la *successione delle ridotte* è monotona crescente; allora vale anche

$$s_b = \sup_{n \in \mathbb{N}} s_n^b$$

Ovvero *"s_b è il maggiorante di tutti i termini di $(s_n^b)_n$"*, dunque $s_n^b \leq s_b$.
Ora possiamo concatenare l'ipotesi iniziale col risultato appena ottenuto:

$$s_n^a \leq s_n^b \leq s_b$$

Ma allora s_n^a è una *successione strettamente crescente e limitata da* s_b; allora per il teorema sulle successioni monotone e limitate (Corollario 8 (convergenza delle successioni monotone e limitate)), s_n^a dev'essere convergente, ovvero

$$\lim_n s_n^a = s_a \leq s_b$$

che è la tesi. ■

2. Conseguenze del teorema del cfr.

#Corollario

Corollario (caso resto k-esimo).

Siano $\sum_n a_n$, $\sum_n b_n$ due *serie a termini non negativi*.
Supponendo che valga

$$\exists k \in \mathbb{N} : \forall n, n > k \implies a_n \leq b_n$$

(ovvero *"da un certo punto a_n sta sotto b_n"*)
allora:
i. Se $\sum_n b_n$ è *convergente*, allora anche $\sum_n a_n$ è *convergente*.
ii. Se $\sum_n a_n$ è *divergente*, allora anche $\sum_n b_n$ è *divergente*.

#Osservazione

Osservazione (pezzo mancante).

Notare attentamente che questo corollario *non coincide completamente* col teorema del confronto, dal momento che nel caso delle serie *convergenti* non vale più la tesi $s_a \leq s_b$, dato che stiamo *solo* considerando il resto k-esimo delle serie.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Corollario 2 (caso resto k-esimo).
Basta applicare il *teorema del confronto* ai *resti* k-esimo delle serie $\sum_n a_n$, $\sum_n b_n$, ovvero $\sum_{n=k} a_n$, $\sum_{n=k} b_n$. ■

#Corollario

Corollario (seconda conseguenza).

Siano $\sum_n a_n$, $\sum_n b_n$ serie a *termini positivi*.
Supponendo che *esista finito e strettamente positivo il limite*

$$\lim_n \frac{a_n}{b_n} = \lambda \in (0, +\infty)$$

> Allora le due serie hanno lo *stesso carattere*.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Corollario 4 (seconda conseguenza).
Supponiamo il limite

$$\lim_n \frac{a_n}{b_n} = \lambda \in (0, +\infty)$$

Allora per definizione del limite ho

$$\begin{gathered}\forall \varepsilon > 0, \exists k \in \mathbb{N} : \forall n, \\ n > k \implies \left| \frac{a_n}{b_n} - \lambda \right| < \varepsilon \iff \lambda - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < \lambda + \varepsilon\end{gathered}$$

Scegliamo $\varepsilon = \frac{\lambda}{2}$. Allora ho

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\lambda < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3}{2}\lambda \\ \frac{1}{2}\lambda \cdot b_n < a_n < \frac{3}{2}\lambda \cdot b_n\end{aligned}$$

Il secondo passaggio è giustificato dal momento che b_n è sempre *strettamente positivo*.
Allora, supponendo che $\sum_n a_n$ sia *convergente*, allora segue che $\sum_n \frac{\lambda}{2} b_n$ è *convergente*, ovvero $\sum_n b_n$ è anche *convergente*.
Il ragionamento è analogo per il caso in cui $\sum_n a_n$ è *divergente*. ■

3. Tecnica di valutazione delle serie con Taylor

#Osservazione

> Osservazione (L'utilità pratica del corollario del teorema del confronto).
>
> Sarà utile utilizzare il Corollario 4 (seconda conseguenza) per valutare il carattere di certe serie, in specie se lo si usa accompagnandolo ai *sviluppi di Taylor per le funzioni* (Teorema 2.1. (di Taylor col resto di Peano))
>
> Supponiamo di dover studiare il carattere di una serie del tipo
>
> $$\sum_n^{+\infty} f(\frac{1}{n})$$

Prendiamo lo sviluppo di Taylor per $f(x)$ con $x_0 = 0$ e $n = 2$. Ovvero la f diventa una funzione del tipo

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + r_2(0, x)$$

con il limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{r_2(0, x)}{x^2} = 0$$

Ora supponiamo di avere i seguenti casi:

- Se $f(0) \neq 0$, allora la *funzione vicino a* 0 non si annulla mai; dunque per qualsiasi valori di x, abbiamo la somma di un numero più grande di $f(0)$. Allora la serie è *divergente*.
- Se $f(0) = 0$ e $f'(0) \neq 0$, allora sarà utile valutare f in $\frac{1}{n}$ e prendere il suo limite.
  Infatti si avrebbe una situazione del tipo

  $$\lim_n \frac{f(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = \lim_n f'(0) + \frac{r_2(0, \frac{1}{n})}{\frac{1}{n^2}} \cdot \frac{1}{n} \neq 0$$

  dunque la serie sarà *sicuramente divergente*, dato che si comporta come $\frac{1}{n}$.
- Se $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ e $f''(0) \in \mathbb{R}$, ripetiamo lo stesso procedimento di prima e si avrebbe la situazione del tipo

  $$\lim_n \frac{f(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n^2}} = \lim_n \frac{f''(0)}{2} + \frac{r_2(0, \frac{1}{n})}{\frac{1}{n^2}}$$

  Infatti, se il limite fosse 0, allora $f(\frac{1}{n})$ sarebbe più piccola di $\frac{1}{n^2}$, dunque convergente in ogni caso.

C4. Criteri per le Serie a Termini non Negativi

Teoremi sulle Serie a Termini positivi

Tre criteri di convergenza sulle serie a termini positivi: criterio del rapporto, della radice, della serie condensata.

---

0. Voci correlate

- Definizione di Serie
- Serie a Termini non negativi
- Limite di Successione

1. Criterio dell'ordine di infinitesimo

#Teorema

Teorema (dell'ordine di infinitesimo).

Sia $\sum_n a_n$ una *serie a termini non negativi*. Si ha che:
A. *Convergenza della serie*
Se esiste $p > 1$ tale che esista il limite

$$\lim_n a_n \cdot n^p = L \in [0, +\infty)$$

Allora la serie $\sum_n a_n$ è *convergente*.
B. *Divergenza della serie*
Se esiste $p \leq 1$ tale che esista il limite

$$\lim_n a_n \cdot n^p = L \in (0, +\infty) \cup \{+\infty\}$$

allora la serie $\sum_n a_n$ è *divergente*.

#Dimostrazione
DIMOSTRAZIONE del Teorema 1 (dell'ordine di infinitesimo)
N.B. Questa è solo un'idea della dimostrazione
Questo criterio sostanzialmente discendo dal confronto delle successioni $(a_n)_n$ e $(\frac{1}{n^p}{}_n)_n$ e si legge dunque le ipotesi come

$$\lim_n \frac{a_n}{\frac{1}{n^p}} \blacksquare$$

2. Criterio del rapporto

#Teorema

Teorema (criterio del rapporto).

Sia $\sum_n a_n$ una serie a termini positivi. Se *esiste* un $0 < k < 1$, tale che $\forall n \in \mathbb{N}$ valga

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq k$$

allora la *serie è convergente*.

DIMOSTRAZIONE del Teorema 2 (criterio del rapporto)
Segue dal *teorema del confronto* (Teorema 1 (del confronto per le serie a termini non negativi)]) e dalla *convergenza* di $\frac{1}{n^\alpha}$ per $|\alpha| < 1$.
Infatti,

$$\begin{aligned}
&a_2 \leq k \cdot a_1 \\
&a_3 \leq k \cdot a_2 \leq k^2 \cdot a_1 \\
&\vdots \\
&a_n \leq k^{n+1} a_1
\end{aligned}$$

che è proprio la *serie geometrica* con $0 < k < 1$. ■

#Teorema

Teorema (criterio del rapporto col limite).

Sia $\sum_n a_n$ una *serie a termini positivi*. Supponendo che *esiste* e *valga* l il limite

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$$

Allora:

- Se $l < 1$, allora la serie è *convergente*.
- Se $l > 1$, allora la serie è *divergente*.
- Se invece $l = 1$ o il limite non esiste, allora *non si può dire niente*.

#Osservazione

Osservazione (casi inconcludenti).

> Vediamo che se il limite vale $l = 1$ allora lo studio è inconcludente, dal momento che sia *serie convergenti* che sia *serie divergenti* possono avere tale limite $l = 1$.
> Posso infatti prendere $a_n = \frac{1}{n}$ e $b_n = \frac{1}{n^2}$ come esempi.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 3 (criterio del rapporto col limite).
Basta prendere le definizione del limite $\varepsilon - \bar{n}$ e scegliere opportuni valori ε.
Altrimenti si può procedere con la seguente dimostrazione.
N.B. Questa dimostrazione è stata svolta con Daniele del Santo
i. Supponiamo che valga il limite $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = l < 1$.
Allora prendiamo un valore qualsiasi ρ tale che $l < \rho < 1$; ovvero "ρ *sta in mezzo tra* $l, 1$".
Quindi per definizione del limite vale che *esiste* un $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$n \geq \bar{n} \implies \frac{a_{n+1}}{a_n} < \rho$$

Allora di conseguenza deve seguire

$$\frac{a_{\bar{n}+1}}{a_{\bar{n}}} < \rho \implies a_{\bar{n}+1} < \rho \cdot a_{\bar{n}}$$

Ma allora vale anche per

$$\frac{a_{\bar{n}+2}}{a_{\bar{n}+1}} < \rho \implies a_{\bar{n}+2} < \rho^2 \cdot a_{\bar{n}+1} \leq \rho \cdot a_{\bar{n}+1}$$

Notiamo che questo vale anche prendendo $\bar{n} + 3$, $\bar{n} + 4$ e così via...
Dunque *per induzione* vale che

$$\forall k \in \mathbb{N}, a_{\bar{n}+k} < \rho^k \cdot a_{\bar{n}}$$

Allora da $\bar{n}$ in poi, il termine a_n è *maggiorata* dal numero $\rho^{n-\bar{n}} \cdot a_{\bar{n}}$; ovvero

$$a_n \leq \rho^n \cdot \frac{a_{\bar{n}}}{\rho^{\bar{n}}}$$

Ora utilizzo il *teorema del confronto per le serie a termini positivi* (Teorema 1 (del confronto per le serie a termini non negativi)), confrontando $\sum_n a_n$ con $\sum_n \rho^n \cdot \frac{a_{\bar{n}}}{\rho^{\bar{n}}}$.
Sicuramente la serie

$$\frac{a_{\bar{n}}}{\rho^{\bar{n}}} \sum_n \rho^n$$

è *convergente* per $\rho \in (0,1)$. Allora $\sum_n a_n$ è *convergente*.
ii. Supponiamo invece il limite $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = l > 1$.
Allora per definizione del limite

$$\exists \bar{n} : n > \bar{n} \implies \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$$

Ovvero $a_{n+1} > a_n$. Allora da un certo $\bar{n}$ in poi, la successione $(a_n)_n$ sarà sempre *crescente*; dunque il resto $\bar{n}$-esimo della serie è *divergente*, dunque la serie $\sum_n a_n$ è divergente. ■

3. Criterio della radice

#Teorema

> Teorema (criterio della radice).
>
> Sia $\sum_n a_n$ una *serie a termini non negativi* e supponiamo che esista $0 < k < 1$ tale che valga sempre
>
> $$\sqrt[n]{a_n} \leq k, \forall n$$
>
> allora la *serie è convergente*.

DIMOSTRAZIONE del Teorema 5 (criterio della radice)
Si eleva tutto alla n; infatti

$$\sqrt[n]{a_n} \leq k \implies a_n \leq k^n$$

da cui, per il *teorema del confronto* e per la *convergenza* di $\sum_n k^n$ per $0 < k < 1$, abbiamo la tesi. ■

#Teorema

> Teorema (criterio della radice col limite).
>
> Sia $\sum_n a_n$ una *serie a termini positivi*.
> Supponendo che esista e sia finita il limite
>
> $$\lim_n \sqrt[n]{a_n} = l$$

Allora:

- Se $l < 1$, allora la serie è *convergente*.
- Se $l > 1$, allora la serie è *divergente*.
- Altrimenti non posso dire nulla

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 6 (criterio della radice col limite).
La dimostrazione è analoga a quella vista per il Teorema 3 (criterio del rapporto col limite), dunque omessa. ■

4. Criterio della serie condensata

N.B. Parte svolta con Daniele del Santo

#Teorema

Teorema (criterio della serie condensata).

Sia $\sum_n a_n$ una *serie a termini positivi*.
Supponendo che $(a_n)_n$ sia *decrescente*, ovvero che $\forall n, a_{n+1} \leq a_n$.
Allora la serie $\sum_n a_n$ ha lo stesso carattere della serie $\sum_n b_n := \sum_n (2^n a_{2^n})$.

#Definizione

Definizione (serie condensata di una serie).

Sia $\sum_n a_n$ una serie. Allora la serie

$$\sum_{n \in \mathbb{N}}^{+\infty} 2^n a_{2^n}$$

si dice la *"serie condensata"* di a_n.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 7 (criterio della serie condensata).
Omessa (anche a lezione). ■

D. LE SERIE A TERMINI DI SEGNO QUALUNQUE

D1. Assoluta e Semplice Convergenza per una Serie

Assoluta e Semplice Convergenza di una Serie

Serie a termini di segno qualunque: serie assolutamente, semplicemente convergente; teorema dell'assoluta convergenza; criterio di Leibniz per le serie di segno alternato.

---

0. Voci correlate

- Definizione di Serie
- Serie a Termini non negativi
- Teoremi Generali sulle Serie
- Conseguenze dell'esistenza dell'estremo superiore

1. Definizione di assoluta e semplice convergenza

#Definizione

Definizione (serie assolutamente convergente).

Sia $\sum_n a_n$ una *serie* con termini in $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.
La serie $\sum_n a_n$ si dice *assolutamente convergente* se è convergente la serie $\sum_n |a_n|$.

#Definizione

Definizione (serie semplicemente convergente).

Sia $\sum_n a_n$ una *serie* con termini in $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.
Se $\sum_n a_n$ è *convergente* ma $\sum_n |a_n|$ è *divergente*, allora $\sum_n a_n$ si dice *semplicemente convergente*.

2. Rapporto tra le serie e le serie assolute

#Osservazione

Osservazione (preambolo).

> Ora ci chiediamo se esiste un rapporto che lega $\sum_n a_n$ con $\sum_n |a_n|$; ovvero vogliamo trovare dei teoremi che sono in grado di garantire (o meno) il rapporto dei caratteri delle serie $\sum_n a_n$ e $\sum_n |a_n|$.
> Se una serie è assolutamente convergente, allora è convergente? Oppure vale il viceversa? Se è convergente, allora dev'essere assolutamente convergente?
> Ora lo vediamo.

#Teorema

> **Teorema (dell'assoluta convergenza).**
>
> Sia $\sum_n a_n$ una serie qualunque.
> Se $\sum_n |a_n|$ è *convergente*, allora $\sum_n a_n$ è sicuramente convergente.
> Ovvero *"se una serie è assolutamente convergente, allora è convergente"*.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 4 (dell'assoluta convergenza).
Supponiamo che $\sum_n a_n$ sia *assolutamente convergente*, ovvero $\sum_n |a_n|$ è *convergente*.
Allora applico il *criterio di Cauchy* sulla serie $\sum_n |a_n|$ (Teorema 4 (Criterio di Cauchy per le serie)).

$$\begin{gathered}\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} : \forall n, k \\ n > \bar{n} \wedge k \in \mathbb{N} \implies ||a_n| + |a_{n+1}| + \ldots + |a_{n+k}|| < \varepsilon\end{gathered}$$

Applico la *disuguaglianza triangolare* al membro sinistro della disuguaglianza (Teorema 11 (la disuguaglianza triangolare)).
Allora ho una situazione del tipo

$$|a_n + \ldots + a_{n+k}| \leq |a_n| + \ldots + |a_{n+k}| = ||a_n| + \ldots + |a_{n+k}|| < \varepsilon$$

Ma allora ho

$$\begin{gathered}\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} : \forall n, k \\ n > \bar{n} \wedge k \in \mathbb{N} \implies |a_n + a_{n+1} + \ldots + a_{n+k}| < \varepsilon\end{gathered}$$

che è il *criterio di Cauchy* per la serie $\sum_n a_n$. ■

#Osservazione

> Osservazione (non vale il viceversa).

> Abbiamo solo dimostrare che vale l'implicazione " $\implies$ ", ma non " $\impliedby$ "; ovvero non abbiamo dimostrato che le successioni convergenti sono assolutamente convergenti.
> Non sarebbe infatti possibile *"replicare"* la stessa dimostrazione al contrario, dal momento che in questo caso la disuguaglianza triangolare non vale più.
> Infatti si proporrà il *criterio di Leibniz* come *"controesempio"* per sfatare l'inversa della tesi, ovvero che *esistono* delle serie semplicemente convergenti.

3. Criterio di Leibniz

#Teorema

> Teorema (criterio di Leibniz per le serie a termini di segno alternato).
>
> Sia $(a_n)_n$ una successione in $\mathbb{R}$ tale che:
> i. la successione è decrescente e a termini non negativi, ovvero
>
> $$\forall n, 0 \leq a_{n+1} \leq a_n$$
>
> ii. il suo limite è nullo;
>
> $$\lim_n a_n = 0$$
>
> Allora la serie $\sum_n (-1)^n \cdot a_n$ è *convergente*. Inoltre si può stimare la somma con un errore, dato come
>
> $$|s - s_n| \leq a_{n+1}$$

#Dimostrazione
DIMOSTRAZIONE del Teorema 6 (criterio di Leibniz per le serie a termini di segno alternato).
Si tratta di dimostrare che il limite della *successione delle ridotte della serie* esiste finito, ovvero il limite $\lim_n s_n$.
Osservo preliminarmente che si costruisce $(s_n)_n$, per ipotesi iniziali, nel seguente modo:

$$s_0 = a_0; s_1 = a_0 - a_1; s_2 = a_0 - a_1 + a_2; \dots$$

Inoltre tengo conto del fatto che i termini sono *"più piccoli di quello precedente"*, dal momento che la successione è *decrescente*.

Allora ho una situazione del tipo raffigurato nella *figura 1.*.
In parole costruisco la *successione di intervalli* definita come la seguente:

$$(I_n)_n : [\alpha_n, \beta_n] := \begin{cases} [s_{n-1}, s_n], \exists k \in \mathbb{N} : n = 2k \\ [s_n, s_{n-1}] \text{ alt.} \end{cases}$$

Inoltre noto che la distanza di due *"estremi"* di un qualunque intorno è proprio $|a_n|$.
Vedo che posso usare il teorema di *Cantor*; per dimostrarlo bene devo solo dimostrare bene la seguente catena di disuguaglianze

$$\boxed{s_{2n+1} \leq s_{2n+3} \leq s_{2n+2} \leq s_{2n}}$$

ovvero che *"le ridotte pari sono decrescenti e stanno sopra le ridotte dispari che sono a loro volta crescenti"*.
Per dimostrare un pezzo faccio dei calcoli relativi a s_{2n+1}, s_{2n+2}:

$$\begin{cases} s_{2n+1} = s_{2n} + (-1)^{2n+1} a_{2n+1} = s_{2n} - a_{2n+1} \implies s_{2n} \geq s_{2n+1} \\ s_{2n+2} = s_{2n+1} + (-1)^{2n+2} a_{2n+2} = s_{2n+1} + a_{2n+2} \implies s_{2n+2} \geq s_{2n+1} \\ s_{2n+2} = s_{2n} - \underbrace{(a_{2n+1} - a_{2n+2})}_{\geq 0} \implies s_{2n} \geq s_{2n+2} \end{cases}$$

Ultimamente ho $s_{2n+1} \leq s_{2n+2} \leq s_{2n}$.
Per *"completare la catena di disuguaglianza"* segnata sopra, faccio un calcolo analogo per s_{2n+3};

$$\begin{cases} s_{2n+3} = s_{2n+2} - a_{2n+3} \implies s_{2n+3} \leq s_{2n+2} \\ s_{2n+3} = s_{2n+1} + \underbrace{(a_{2n+2} - a_{2n+3})}_{\geq 0} \implies s_{2n+3} \geq s_{2n+1} \end{cases}$$

Finalmente ho ottenuto ciò che volevo dimostrare all'inizio.
Pertanto adesso posso essere sicuro di dire che la successione $(s_{2n+1})_n$ è *crescente*, invece la successione $(s_{2n})_n$ è decrescente ma vale che $\forall n, s_{2n+1} \leq s_{2n}$. Ora posso finalmente applicare il *teorema di Cantor* in una maniera rigorosa.
Ora definisco il limite di queste due successioni come

$$\lim_n s_{2n+1} = \sigma, \lim_n s_{2n} = \eta$$

ovvero *"σ è l'estremo sinistro, η è l'estremo destro"*.
Per concludere mi basta solo dimostrare che $\sigma = \eta$, ovvero che due *successioni estratte* di $(s_n)_n$ convergono allo stesso valore, di conseguenza il limite della successione $\lim_n s_n$ esiste.
Considero dunque il fatto che *"il limite delle ridotte pari stanno sopra a quelle*

dispari", e che i limiti delle successioni monotone sono gli *estremi* delle successioni. Ovvero,

$$\forall n, s_{2n+1} \leq \sigma \leq \eta \leq s_{2n}$$

Ora, manipolando l'espressione ottengo

$$\forall n, 0 \leq |\sigma - \eta| \leq s_{2n} - s_{2n+1} = a_{2n+1}$$

Per ipotesi iniziale il limite della *successione dei termini generali* è nulla; ovvero

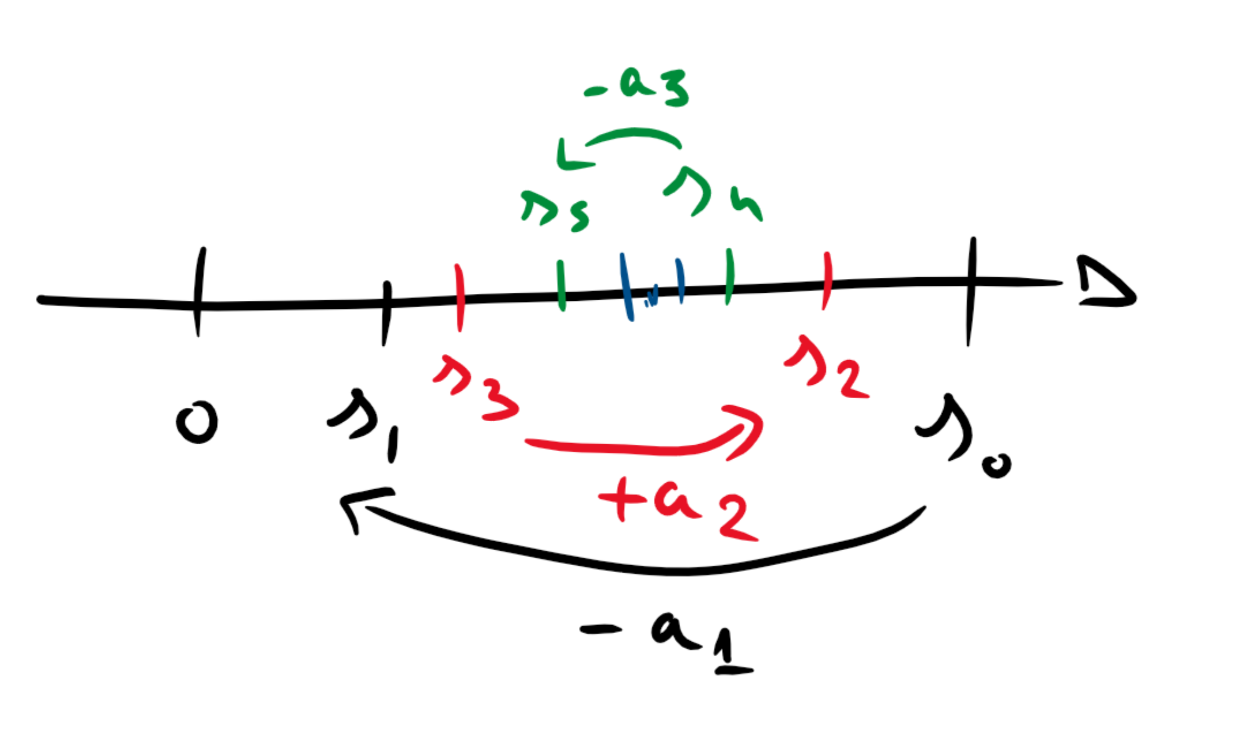
$$\lim_n a_n = 0 \implies \lim_n a_{2n+1} = 0$$

Allora per il *teorema dei due Carabinieri* (Osservazione 5 (i teoremi per i limiti di funzioni valgono anche per i limiti di successioni)) ho il limite

$$\lim_n |\eta - \sigma| = 0 \implies \eta = \sigma$$

Che dimostra $\sigma = \eta$, come volevasi dimostrare. ■

FIGURA 1. (*Situazione iniziale*)



4. Teorema di Riemann

#Teorema

> Teorema (di Riemann).

> Sia $\sum_n a_n$ *assolutamente convergente*.
> Allora *tutte le serie* $\sum_n b_n$ del tipo $b_n := a_{\varphi(n)}$, dove φ è una *biiezione* del tipo $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, saranno sicuramente *convergenti* con la stessa somma.
> Ovvero *"se una serie è assolutamente convergente, allora una qualsiasi altra serie con i stessi termini ma rimescolati sarà convergente con la stessa somma"*.
> Notare che vale anche il *viceversa*.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 7 (di Riemann).
Omessa. ■

E. ESERCIZI SULLE SERIE

E1. Daniele del Santo

Esercizi sulle Serie (D. D. S.)

Esercizi sulle serie, proposti dal prof. Daniele del Santo durante il corso "Matematica I con esercitazioni" (parte del programma riservata al CdL di Chimifca).

---

1. Serie a termini non negativi

#Esercizio

> Esercizio.
>
> Studiare il carattere della serie
>
> $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

#Esercizio

Esercizio.

Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

usando il *teorema del confronto* e poi studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$$

utilizzando ciò che avete visto prima.

#Esercizio

Esercizio.

Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\ln(1+\frac{1}{n}) - \frac{1}{n} \right)$$

Consiglio: *vedere lo sviluppo di Taylor* per $\ln(1+\frac{1}{n})$ e utilizzare il *teorema del confronto*.

#Osservazione

Osservazione (La costante di Eulero-Mascheroni).

Risolvendo l'esercizio precedente si vede che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \ln(1+\frac{1}{n}) = \gamma$$

è convergente, con γ un *numero*. Questa costante si chiama la costante di *Eulero-Mascheroni*, ed è noto dal momento che non è ancora chiaro se questo numero è *irrazionale* o meno (approfondimenti su Wikipedia).

#Esercizio

Esercizio.

Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

#Esercizio

Esercizio.

Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

#Esercizio

Esercizio.

Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

per al variare di α.

Consiglio: *separare α per $\alpha \leq 1$, $\alpha \geq 2$ e altri casi*.

#Esercizio

Esercizio.

Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$$

#Esercizio

Esercizio.

Dire per quali valori $x \in \mathbb{R}$ la seguente serie è convergente.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}$$

#Esercizio

Esercizio.

Studiare la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \log n}$$

e la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(\log n)^2}$$

Infine dire il carattere della serie al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(\log n)^\alpha}$$

#Esercizio

Esercizio.

Studiare il carattere della serie, al variare di $\beta \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(\log n)(\log(\log n)^\beta)}$$

#Esercizio

Esercizio.

Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$$

se convergente, dire la somma della serie.

Consiglio: *se si vuole trovare la somma della serie, considerare lo sviluppo di Taylor per una certa funzione*.

#Esercizio

Esercizio.

Dimostrare che le serie semplicemente convergenti *non* soddisfano il *teorema di Riemann*.

Consiglio: *In particolare considerare* $\ln 2$ *e* $\frac{3}{2}\ln 2$.

#Esercizio

Esercizio.

Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos(\pi n)}{n+2}$$

#Esercizio

Esercizio.

Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1+\frac{1}{n^3})$$

#Esercizio

Esercizio.

Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\sin(\frac{1}{n+1})$$

#Esercizio

Esercizio.

Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{\binom{2n}{n}}$$

E2. Eva Sincich

Esercizi Sulle Serie (E. S.)

Esercizi sulle serie numeriche durante dalla prof. Eva Sincich durante il corso di "Analisi Matematica II"

---

1. Serie a termini positivi

#Esercizio

Esercizio.

Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n + 3^n}{3^n + 4^n}$$

#Esercizio

Esercizio.

Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

#Esercizio

Esercizio.

Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 - \sin n}{n^6 - 2n \cdot \sin n}$$

#Esercizio

Esercizio.

Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{n+1}{n^2+1}\right)$$

#Esercizio

Esercizio.

Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$$

#Esercizio

Esercizio.

Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}^{+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$$

#Esercizio

Esercizio.

Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$$

2. Serie a termini di segno qualunque