Esercizi n.1

key words: continuità di una funzione da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$, derivata direzionale, derivate parziali, gradiente, differenziabilità, differenziale, piano tangente al grafico, derivate direzionali seconde, matrice hessiana formula di Taylor, forma quadratica definita positiva e negativa, punti di massimo e di minimo e di sella, matrice jacobiana.

1) Trovare il dominio di definizione delle funzioni

$$\sin\frac{x+y}{x-y} - \sqrt{x-y^2}, \qquad \sqrt{xy(xy+1)}, \qquad \arctan\frac{x}{x^2+y^4}.$$

2) Verificare direttamente la continuità delle funzioni che seguono nei punti indicati, usando la definizione (trovando esplicitamente il rapporto tra ε e δ)

$$\frac{1+x}{\sqrt{1+y}}, \quad (0,2), \qquad \frac{x-y}{x+y}, \quad (0,1).$$

3) Dire se e dove è continua la funzione $f(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{se} \quad y \geq 0, \\ -\log\dfrac{1+xy}{-y} & \text{se} \quad y < 0. \end{cases}$

Stessa domanda con la funzione $g(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{se} \quad y \geq 0, \\ \dfrac{\log(1+xy)}{y} & \text{se} \quad y < 0. \end{cases}$

4) Trovare la derivata nella direzione del generico versore $\underline{v} = (v_1, v_2)$, nell'origine, per le funzioni

$$x + \sin y, \qquad \frac{x}{1+x^4+y^4}, \qquad (x+1)^2 + (y+1)^2 + 5.$$

5) Calcolare le derivate parziali delle funzioni

$$\frac{xy}{x+y}, \qquad (x+y^2)e^{x-y}, \qquad (\sqrt{x^2+y^2+1})\log(\frac{x-y}{x+y}).$$

6) Calcolare il differenziale in $(0,0)$ per le funzioni

$$e^{\frac{1}{x^2+y^2-1}}, \qquad \sin(y+x^2), \qquad f(x,y) = \begin{cases} x^2+x+y & \text{se} \quad y \geq 0, \\ x^2+y^2+x+y & \text{se} \quad y < 0. \end{cases}$$

7) Trovare in un generico punto (x_0, y_0) l'equazione del piano tangente al grafico delle funzioni

$$f(x,y) = \sqrt{1+x^2+y^2}, \qquad f(x,y) = x^2+y^2+x+y+1, \qquad f(x,y) = \sin(x+y).$$

8) Trovare i punti stazionari e dire se si tratta di punti di massimo, di minimo o di sella per le funzioni

$$x^2+y^3, \qquad x^3+6xy+y^2, \qquad x^2+y^2+z^2+xyz,$$

$$x^3+xy+y^2+yz+z^2, \qquad \sin(x-y)\cos x, \qquad (x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}.$$

9) Scrivere la formula di Taylor per la funzione e^{x+y^2} fino al secondo ordine relativamente al punto $(1,1)$.

10) Scrivere la matrice jacobiana nel generico punto (x,y) per le funzioni

$$(x+xy+xy^2, x+\sin(xy^2)), \qquad (x\sin(yz), y\log(\frac{x}{z}), \sqrt{x+z}).$$

11) Supponendo che $f(t) = \int_a^b F(t,x)dx$ e che $f'(t) = \int_a^b \partial_x F(t,x)dx$, si calcoli la derivata della funzione

$$\phi(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} F(t,x)dx.$$

Esercizi n.2

key words: Ripartizione di un rettangolo chiuso e limitato in $\mathbb{R}^2$, somma superiore e inferiore relativa a una ripartizione per una funzione limitata, funzione integrabile secondo Riemann su un rettangolo, condizione di integrabilità secondo Riemann, integrabilità delle funzioni continue, formule di riduzione, insiemi misurabili secondo Peano–Jordan, insiemi di misura nulla secondo P.–J., Insiemi con frontiera di misura nulla secondo P.–J., domini normali, integrabilità su un insieme misurabile, baricentro, funzioni generalmente continue, formula del cambiamento di variabili per integrali doppi, coordinate polari, integrali multipli, formule di riduzione per integrali multipli, volume, volume dei solidi di rotazione, cambio di variabili negli integrali multipli, coordinate sferiche.

1) Si calcoli la misura di Peano-Jordan per i seguenti insiemi

i) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le \sqrt{1-x}\}$,

ii) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \le x^2 + 4y^2 \le 4\}$,

iii) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \le x+y \le 2,\ 1 \le x-y \le 4\}$.

2) Si calcoli il baricentro di una lastra di spessore costante

i) omogenea e di forma di trapezio rettangolo con angolo alla base di $\pi/3$, base maggiore B e altezza h

ii) di forma di triangolo isoscele di base B e altezza h e densità proporzionale alla distanza dalla base,

iii) omogenea e a forma di una metà di una ellisse di assi a e b.

3) Si calcolino i seguenti integrali

$$\int_E x\cos y\, dx\, dy, \qquad \int_E y\sqrt{1-x^2}\, dx\, dy, \qquad \int_E ye^x\, dx\, dy,$$

dove E è l'intersezione del disco di centro 0 e raggio 1 con il primo quadrante.

4) Si calcolino i seguenti integrali

$$\int_E \frac{x}{1+x+y}\, dx\, dy, \qquad \text{dove} \quad E = \{(x,y) \,:\, 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x\},$$

$$\int_E x^2 + y^2\, dx\, dy, \qquad \text{dove} \quad E = \{(x,y) \,:\, 0 \le y \le 1,\ 0 \le x \le 1 - y^2\},$$

$$\int_E x \arcsin y\, dx\, dy, \qquad \text{dove} \quad E = \{(x,y) \,:\, -1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 - |x|\}.$$

5) Si calcolino i seguenti integrali

$$\int_E \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy, \qquad \text{dove} \quad E=\{(x,y)\,:\,1\le x^2+y^2\le 9\},$$

$$\int_E (x+y)\,dx\,dy, \qquad \text{dove} \quad E=\{(x,y)\,:\,x^2+y^2-2x\le 0\},$$

$$\int_E x^2e^{x^2+y^2}\,dx\,dy, \qquad \text{dove} \quad E=\{(x,y)\,:\,x\ge 0,\ x^2+y^2\le 1\},$$

$$\int_E dx\,dy, \qquad \text{dove} \quad E=\{(x,y)\,:\,\frac{1}{2}\le \sin xy\le \frac{\sqrt{2}}{2},\ 0\le xy\le\pi,\ 1\le\frac{x}{y}\le 2\}.$$

6) Si calcoli il volume dei seguenti insiemi

i) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,:\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le\sqrt{1-x},\ |z|\le 1\}$,

ii) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,:\,1\le x^2+y^2\le 4,\ 0\le z\le 4-x-y\}$,

iii) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,:\,\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1\}$.

7) Si calcoli il volume dei solidi ottenuti facendo ruotare attorno all'asse x le funzioni

i) $f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=1+x^2$,

ii) $f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=1-x^2$,

iii) $f:[0,\pi]\to\mathbb{R},\ f(x)=\sin x$.

8) Si trovi il baricentro di

i) un cono retto omogeneo di altezza h e raggio di base R.

ii) un tronco di paraboloide omogeneo ottenuto facendo ruotare $z=\sqrt{x}$ con $a\le x\le b$,

iii) una semisfera omogenea di raggio R.

9) Si calcoli

$$\int_E (x+y+z)\,dx\,dy\,dz, \qquad \text{dove} \quad E=\{(x,y,z)\,:\,x^2+y^2+z^2\le 1,\ z\ge 0\},$$

$$\int_E x^2\,dx\,dy\,dz, \qquad \text{dove} \quad E=\{(x,y,z)\,:\,x^2+y^2+z^2\le 1\}.$$

Esercizi n.3

key words: successione di funzioni, convergenza puntuale, convergenza uniforme, continuità del limite, teorema dei due limiti, passaggi al limite sotto il segno, serie di funzioni, convergenza totale, serie di potenze, raggio di convergenza, funzione esponenziale complessa.

1) Trovare il limite puntuale e dire se c'è convergenza uniforme per

$$f_n(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad 0 \le x \le \dfrac{1}{n}, \\ 1-x & \text{se} \quad \dfrac{1}{n} \le x \le 1. \end{cases}$$

2) Trovare il limite puntuale e dire se c'è convergenza uniforme per

$$f_n(x) = \frac{1+x^n}{n+x^{2n}} \quad \text{per} \quad x \in \mathbb{R}.$$

3) Calcolare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\lim_n \left(\sqrt{1+(nx)^\alpha} - \sqrt{(nx)^\alpha}\right) \quad \text{per} \quad x \in]0.+\infty[.$$

Dire per quali valori di α la convergenza è uniforme.

4) Trovare l'insieme di convergenza E delle serie di seguito indicate e dire su quali sottoinsiemi di E c'è convergenza totale

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e^{-n|x^2-x|}}{n \log^2 n}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(\sqrt[n]{1+\frac{x}{n}}\right), \qquad \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\log n}.$$

5) Posto

$$a_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad 0 \le x \le \dfrac{1}{n+1} \quad \text{oppure se} \quad \dfrac{1}{n} \le x \le 1, \\ \sin^2 \frac{\pi}{x} & \text{se} \quad \dfrac{1}{n+1} \le x \le \dfrac{1}{n}, \end{cases}$$

Dire se $\sum_n a_n(x)$ converge in $[0,1]$, se converge uniformemente in $[0,1]$, se converge uniformemente su $[0, \frac{1}{6}]$.

6) Calcolare il raggio di convergenza di

$$\sum_n x^{2n} \sin \frac{n\pi}{4}, \qquad \sum_n a_n x^n \quad \text{dove} \quad a_n = \sum_{k=1}^{n} k^7.$$

7) Calcolare la somma di

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1}.$$

Esercizi n.4

key words: curve in $\mathbb{R}^n$, parametrizzazione e sostegno di una curva, curve semplici, curve chiuse, curve di Jordan, curve regolari, curve equivalenti e strettamente equivalenti, cammini e cammini orientati, curve rettificabili, lunghezza di una curva, rettificabilità delle curve C^1, integrali al differenziale d'arco.

1) Calcolare la lunghezza delle seguenti curve

i) $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$.

ii) $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (t, \sqrt{t})$.

iii) $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (t \sin t, t \cos t)$.

iv) $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (t, e^t)$.

v) $\gamma : [0, 2] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (t^2, t^4)$.

2) Calcolare la lunghezza delle seguenti curve in forma polare

i) $\theta \in [0, 2\pi], \quad \rho(\theta) = R \ (R > 0)$.

ii) $\theta \in [0, 2\pi], \quad \rho(\theta) = R(1 + \cos\theta) \ (R > 0)$.

iii) $\theta \in [0, 2\pi], \quad \rho(\theta) = Re^{a\theta} \ (R,\ a > 0)$.

iv) $\theta \in [0, 2\pi], \quad \rho(\theta) = R(1 + 2\cos\theta) \ (R > 0)$.

3) Determinare l'equazione di una curva piana e C^1, passante per il punto $(1, 0)$, tale che, detto O l'origine degli assi cartesiani e P un punto della curva, sia costantemente uguale a $\pi/4$ l'angolo tra OP e il vettore tangente alla curva in P.

4) Calcolare il baricentro di un filo omogeneo con densità lineare ρ che abbia forma di una semicirconferenza di raggio R. Confrontare il risultato con quello relativo alla semicorona circolare omogenea.

5) Calcolare i seguenti integrali al differenziale d'arco

i) $\int_\varphi x ds$, dove $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) = (t, t^2)$.

ii) $\int_\varphi x ds$, dove $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) = (t, \sqrt{t})$.

iii) $\int_\varphi x ds$, dove φ ha equazione in forma polare $\rho(\theta) = 1 + \sin\theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

Esercizi n.5

key words: parametrizzazione di una superficie, superficie regolare, versore normale a una superficie regolare, area di una superficie regolare, integrale al differenziale di area, funzioni in forma implicita, teorema di Dini, minimi e massimi vincolati.

1) Si calcoli il versore normale e il piano tangente alle superficie nel punto a fianco indicato

i) $\varphi(u,v) = (u, v, uv)$ in $\varphi(1,1)$,

ii) $\varphi(u,v) = (u+v, u-v, u^2-v^2)$ in $\varphi(0,1)$,

iii) $\varphi(u,v) = (u, v, \sqrt{1-u^2+v^2})$ in $\varphi(1/2, 1/4)$.

2) Si calcoli l'area della porzione di cilindro di equazione $(\cos u, \sin u, v)$ contenuta nell'insieme $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : |x| \le z\}$.

3) Si calcoli l'area della superficie ottenuta facendo ruotare la cardioide di equazione $\rho(\theta) = 2(1+\cos\theta)$ attorno all'asse delle x.

4) Si calcoli l'area della superficie ottenuta facendo ruotare la cardioide di equazione $\rho(\theta) = 2(1+\cos\theta)$ con $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ attorno all'asse delle y.

5) Si calcoli l'area della superficie $\varphi : K \to \mathbb{R}^3$ dove

i) $\varphi(u,v) = (uv, u+v, u-v)$, $K = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u \ge 0,\ v \ge 0,\ u^2+v^2 \le 1\}$,

ii) $\varphi(u,v) = (u^2, v^2, uv)$, $K = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u^2+v^2 \le 4\}$,

iii) $\varphi(u,v) = (u, v, \sqrt{1+u^2+v^2})$, $K = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le u \le 1, 0 \le v \le 1\}$.

6) Si calcoli l'area della frontiera dei seguenti insiemi

i) $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2}\}$,

ii) $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2}\}$,

iii) $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \le z \le 1-\sqrt{x^2+y^2}\}$.

6) Si calcoli il baricentro di una supeficie semisferica di densità superficiale costante.

7) Si calcoli il momento d'inerzia di una superficie sferica di densità costante rispetto ad un asse passante per il centro della sfera. Si confronti il risultato con quello di una sfera omogenea avente stessa massa.

8) Si trovi il massimo e il minimo della funzioni

i) $f(x,y) = x + 2y$ sull'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 4x^2 + y^2 = 1\}$,

ii) $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy$ sull'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, |x| \leq 1,\ |y| \leq 1\}$,

iii) $f(x,y) = x + 2y$ sull'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \geq 1,\ y \geq 0,\ xy \leq 4\}$.

9) Si calcoli massimo e minimo della funzione $f(x,y,z) = xyz$ sull'insieme $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

10) Trovare massimo e minimo (se esistono) della funzione $f(x,y,z) = xy + 2yz + 2xz$ sulla porzione di superficie $xyz = V$ contenuta nel primo ottante.

11) Trovare la minima distanza tra la retta $x = -4$ e la parabola $x^2 + 2xy + y^2 + 6y = 0$.

12) Trovare massimo e minimo dell'ascissa x sulla curva di equazione $y^2 - 2xy + 2x^2 - 2x = 0$.

Esercizi n.6

key words: campi vettoriali, integrale di seconda specie, campi vettoriali conservativi, funzione potenziale, campi vettoriali irrotazionali, domini stellati, domini semplicemente connessi, formula di Gauss-Green, divergenza, teorema della divergenza, formula di Stokes.

1) Dato il campo vettoriale

$$\underline{\mathrm{a}}(x,y) = (\frac{y}{x^2+y^2},\ \frac{-x}{x^2+y^2})$$

sul dominio $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x > 0\}$, dire se è conservativo ed eventualmente trovare una funzione potenziale. Stesse domande per $\underline{\mathrm{a}}(x,y)$ e $\tilde{\Omega} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$.

2) Dato il campo vettoriale

$$\underline{\mathrm{a}}(x,y) = (\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},\ \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}),$$

dire se è conservativo sul suo dominio di definizione ed eventualmente calcolarne un potenziale.

3) Dato il campo vettoriale

$$\underline{\mathrm{a}}(x,y) = (1 - \frac{y}{x}e^{\frac{y}{x}},\ e^{\frac{y}{x}}),$$

dire se è conservativo sul suo dominio di definizione ed eventualmente calcolarne un potenziale.

4) Dato il campo vettoriale

$$\underline{\mathrm{a}}(x,y) = (3x^2y^2 + y^2,\ 3x^3y^2 + 2xy),$$

dire se è conservativo sul suo dominio di definizione ed eventualmente calcolarne un potenziale. Calcolare $\int_\gamma \underline{\mathrm{a}}$, dove $\gamma : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t\cos t, t\sin t)$.

5) Dato il campo vettoriale

$$\underline{\mathrm{a}}(x,y) = (\frac{y}{1+x^2y^2},\ \frac{x}{1+x^2y^2}),$$

calcolare $\int_\gamma \underline{\mathrm{a}}$, dove $\gamma : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t\cos t, t + \sin t)$.

6) Dato il campo vettoriale

$$\underline{\mathrm{a}}(x,y) = (\frac{-2y}{4x^2+y^2},\ \frac{2x}{4x^2+y^2}),$$

calcolare $\int_\gamma \underline{\mathrm{a}}$, dove $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$.

7) Dato il campo di forze (espresso trascurando l'unità di misura)

$$F(x, y, z) = (x - xe^z,\ -y,\ e^z),$$

calcolare il lavoro compiuto nello spostamento $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$.

8) Data la curva $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t(1-t),\ \sin(2\pi t))$, calcolare l'area della regione di piano da essa racchiusa.

9) Data la curva $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (e^t \cos t,\ e^t \sin t)$, calcolare l'area della regione di piano delimitata da γ^* e dall'asse delle x.

10) Sia il campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (3xy^2,\ 3x^2y,\ z^3),$$

e sia $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ :\ x^2 + y^2z^2 \leq 4, y \geq 0, z \geq 0\}$. Calcolare il flusso di F uscente da E.

11) Sia il campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (0,\ 0,\ z),$$

e sia $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ :\ x^2 + y^2 \leq a^2, 0 \geq z \geq x\}$. Calcolare il flusso di F uscente da E.

Esercizi n.7

1) Calcolare la lunghezza della curva

$$\gamma : [0, \pi/3] \to \mathbb{R}^2, \qquad \gamma(t) = (t, \log(\cos t)).$$

2) Dato

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 \leq \min\{1 - z, \frac{1}{4}\}, \ z \geq 0\},$$

calcolare l'area di ∂V.

3) Dato

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (z \leq 0 \ \text{ e } \ x^2+y^2+z^2 \leq 1) \text{ oppure } (z \geq 0 \ \text{ e } \ x^2+y^2 \leq e^{-z})\},$$

calcolare volume di E e l'area di ∂E.

4) Dati

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z \geq 0 \ \text{ e } \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

e

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad F(x, y, z) = (yz, \ xz, \ xy),$$

determinare il flusso di F uscente da A attraverso la porzione di ∂A in cui è $z > 0$.

5) Sia

$$\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad \gamma(t) = (\cos^2 t, \sin^2 t).$$

i) calcolare la lunghezza di γ;

ii) calcolare l'area della regione di piano racchiusa da γ^*;

iii) dato il campo vettoriale

$$\underline{a}(x, y) = (\frac{y}{x^2 + y^2}, \ \frac{-x}{x^2 + y^2}),$$

calcolare $\int_\gamma \underline{a}$.

6) Sia

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ x^2 + y^2 \leq 1 \ \text{ e } \ 0 < y \leq \frac{x}{\sqrt{3}}\},$$

e sia $\varphi : K \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(x, y) = (x, \ y, \ xy)$. Calcolare $\displaystyle\int_\varphi x^2 z \, d\sigma$.

7) Sia V il solido di rotazione ottenuto ruotando attorno all'asse z il trapezoide

$$\{(y,z) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leq y \leq z^2 \;\text{ e }\; 1 \leq z \leq 2\}.$$

Calcolare il volume di V e l'area di ∂V.

8) Sia

$$K = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \;,\; 0 \leq u \leq \frac{\pi}{2} \;\text{ e }\; 0 \leq v \leq u\},$$

e sia $\varphi : K \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(u,v) = (u\cos v,\; v,\; \cos v)$. Calcolare $\displaystyle\int_\varphi \frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 y}}\, d\sigma$.

9) Data la curva $\gamma : [0,\; \log 2] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t,\; e^t)$, calcolare $\displaystyle\int_\gamma 2y^2\, ds$.

10) Siano

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\},$$
$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2+y^2 \leq z \leq \sqrt{2-x^2-y^2}\},$$

Calcolare il volume e l'area della fontiera di E e di F.

11) Calcolare il volume e l'area della frontiera del solido che si ottiene intersecando due sfere di raggio 1 i cui centri siano a distanza 1 uno dall'altro.

12) Si consideri la curva in forma polare $\rho(\theta) = 1 + \sin\theta$, con $\theta \in [0,\pi]$. Se ne calcoli la lunghezza e si calcoli il volume e l'area della frontiera del solido che si ottiene facendola ruotare attorno all'asse x.

13) Determinare l'area della porzione di piano delimitata dal sostegno di $\gamma : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t - \frac{\pi}{2}\sin t,\; \sin t \cos t)$.

14) Siano

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; 0 \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2+y^2}\},$$

e

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2 - x + y^2 \leq 0\}.$$

i) Calcolare il volume e l'area della frontiera di $E \cap C$.

ii) Si verifichi che l'intersezione di ∂C con $\tilde{E} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; z = 1 - \sqrt{x^2+y^2}\}$ è una curva γ (usare eventualmente *Dini*).

iii) Chiamando L la costante $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1+\sin^2 x}\, dx$, si calcoli la lunghezza di γ.

iv) Che curva piana si ottiene da γ se ∂C viene tagliata lungo l'asse z e "distesa" su un piano?