

Numeri Complessi - Sommario

Tutto sui numeri complessi \mathbb{C}

Introduzione ai Numeri Complessi

Introduzione ai numeri complessi: cenni storici, definizione basilare di \mathbb{C} come \mathbb{R}^2 .

0. Scopo storico

Lo *scopo storico* dei numeri complessi \mathbb{C} è quello di risolvere le equazioni del tipo

$$\begin{cases} a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = 0 \\ a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

di cui alcune non ne hanno soluzione; ad esempio si prende

$$x^2 = -1$$

che *non* ha soluzione definita in \mathbb{R} , in quanto tutti i numeri moltiplicati per se stessi *due volte* sono sempre positivi.

Quindi vi è una necessità di *"ampliare"* i numeri reali in un modo tale da poter ottenere delle *soluzioni* di queste equazioni.

1. Costruzione a partire da \mathbb{R}^2

Pertanto si parte considerando la *l'insieme delle coppie ordinate* (*Coppie Ordinate e Prodotto Cartesiano*)

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$$

Quindi nel *contesto geometrico* stiamo attualmente considerando dei *vettori liberi con punto di applicazione* 0. (*Vettori Liberi*)

In *Operazioni sui Numeri Complessi* definiremo delle operazioni su questo insieme,, che quando li considereremo con \mathbb{R}^2 si andrà a formare il campo $\mathbb{C} = (\mathbb{R}^2, +, \cdot)$.

Operazioni sui Numeri Complessi

Tutte le operazioni possibili sui numeri complessi: somma componente per componente, moltiplicazione, campo $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ come \mathbb{C} ; alcune proprietà di queste operazioni. Complesso coniugato e modulo di un numero complesso z ; proprietà di queste operazioni, focus sulla disuguaglianza triangolare.

1. Somma componente per componente

DEF 1. Definisco su \mathbb{R}^2 l'operazione di **somma componente per componente**:

$$(a, b) \dagger (a', b') = (a + a', b + b')$$

che da ora in poi lo chiamiamo semplicemente $+$.

PROP 1.1. La *somma componente per componente* gode delle seguenti proprietà:

1. La proprietà associativa;

$$(a + b) + ((a', b') + (a'' + b'')) = ((a, b) + (a', b')) + (a'', b'')$$

2. L'esistenza dell'elemento neutro 0

$$0 : (0, 0);$$

3. L'esistenza dell'elemento opposto $(-a, -b)$;

$$(a, b) + (-a, -b) = (0, 0)$$

4. La proprietà commutativa

$$(a, b) + (a', b') = (a', b') + (a, b)$$

OSS 1.1. Allora in questo caso si definisce $(\mathbb{R}^2, +)$ come un *gruppo abeliano*.

2. Moltiplicazione

Ora l'operazione più "peculiare" sarebbe quella di moltiplicazione, in quanto grazie a questa riusciamo a formare il campo dei numeri complessi \mathbb{C} .

DEF 2. Sia \circ l'operazione della **moltiplicazione**, che viene definita come

$$\begin{aligned} \circ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\langle a, b \rangle, \langle a', b' \rangle) &\mapsto (a, b) \circ (a', b') \end{aligned}$$

dove

$$(a, b) \circ (a', b') := (aa' - bb', ab' + ba')$$

e d'ora in poi chiameremo \circ come \cdot .

NOTA. Come visto sopra, personalmente (avvolte) userò la notazione $\langle a, b \rangle$ per rappresentare la coppia dei numeri (a, b) ; lo faccio per evitare confusione con le parentesi. *Fidatevi, (forse) sarà meglio così (?)*.

OSS 2.1. Notiamo che questa definizione di moltiplicazione non è quella che ci si aspetta, di solito; infatti volendo si poteva anche definire la moltiplicazione nel seguente modo:

$$(a, b) \circ (a', b') \stackrel{?}{:=} (aa', bb')$$

Matematicamente questo avrebbe senso, però si *vorrebbe* che questa moltiplicazione avesse delle *proprietà* che ritroviamo anche in \mathbb{R} , in quanto lo scopo di questa costruzione è proprio quella di *"espandere"* la famiglia dei numeri. Ad esempio, qui non varrebbe la proprietà per cui $(0, 0)$ è *l'elemento nullo*. Infatti

$$(1, 0) \circ (0, 1) = (1 * 0, 0 * 1) = (0, 0)$$

Quindi per questo bisognava trovare un'altra definizione.

TRUCCO PERSONALE. Visto che potrebbe essere difficile imparare *questa* definizione di moltiplicazione, possiamo *"anticipare"* un argomento (ovvero *Rappresentazione dei Numeri Complessi*) rappresentando la coppia $(a, b) = a + ib$ dove $i^2 = -1$. Per *"scoprire"* la nostra definizione facciamo il seguente.

$$\begin{aligned}(a, b) \cdot (a', b') &= (a + ib)(a' + ib') \\ &= aa' + iab' + ia'b - bb' \\ &= (aa' - bb') + i(ab' + a'b) \\ &= (aa' - bb', ab' + a'b)\end{aligned}$$

PROP 2.1. Si può verificare che questa operazione gode delle proprietà, ovvero:

1. La proprietà associativa;

$$\langle a, b \rangle \cdot (\langle a', b' \rangle \cdot \langle a'', b'' \rangle) = (\langle a, b \rangle \cdot \langle a', b' \rangle) \cdot \langle a'', b'' \rangle$$

2. L'esistenza dell'elemento neutro $(1, 0)$;

$$\begin{aligned}(a, b) \cdot (1, 0) &= \langle (a * 1 - b * 0), (a * 0) + (b * 1) \rangle \\ &= \langle a, b \rangle = (a, b)\end{aligned}$$

3. L'esistenza dell'elemento reciproco ad ogni elemento non-zero;
Se ad ogni $c = (a, b) \neq (0, 0)$ considero

$$c^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2} \right)$$

Infatti moltiplicandoli ottengo

$$\begin{aligned} c \cdot c^{-1} &= \left(\frac{a^2}{a^2 + b^2} - \frac{-b^2}{a^2 + b^2}, \frac{-ab}{a^2 + b^2} + \frac{ab}{a^2 + b^2} \right) \\ &= \left(\frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2}, 0 \right) = (1, 0) \end{aligned}$$

4. La proprietà commutativa:

$$(a, b) \cdot (a', b') = (a', b') \cdot (a, b)$$

5. La proprietà distributiva:

$$\langle a, b \rangle \cdot (\langle a', b' \rangle + \langle a'', b'' \rangle) = (a, b) \cdot (a', b') + (a, b) \cdot (a'', b'')$$

DIMOSTRAZIONI.

6. Per verificare che questa operazione è **associativa**, dobbiamo dimostrare che il **membro destro** dell'uguaglianza è uguale al **membro sinistro**. Ovvero

$$\begin{aligned} \text{sx. } \langle a, b \rangle \cdot (\langle a', b' \rangle \cdot \langle a'', b'' \rangle) &= \\ \langle a, b \rangle \cdot (\langle a'a'' - b'b'', a'b'' + a''b' \rangle) &= \\ \langle a(a'a'' - b'b'') - b(a'b'' + a''b'), a(a'b'' + a''b') + b(a'a'' - b'b'') \rangle &= \\ \langle aa'a'' - ab'b'' - a'bb'' - a''bb', aa'b'' + aa''b' + a'a''b - bb'b'' \rangle \end{aligned}$$

e poi

$$\begin{aligned} \text{dx. } (\langle a, b \rangle \cdot \langle a', b' \rangle) \cdot \langle a'', b'' \rangle &= \\ \langle aa' - bb', ab' + a'b \rangle \cdot \langle a'', b'' \rangle &= \\ \langle (aa' - bb')a'' - (ab' + a'b)b'', (aa' - bb')b'' + (ab' + a'b)a'' \rangle &= \\ \langle aa'a'' - a''bb' - ab'b'' - a'bb'', aa'b'' - bb'b'' + aa''b' + a'a''b \rangle &= \\ \langle aa'a'' - ab'b'' - a'bb'' - a''bb', aa'b'' + aa''b' + a'a''b - bb'b'' \rangle \end{aligned}$$

E vediamo che i membri sono esattamente uguali. ■

7. **La proprietà 2. è già stata dimostrata sopra.**
8. **Stesso valesi per la proprietà 3.**

9. Occorre solo sfruttare le proprietà dei numeri reali \mathbb{R} , ovvero

$$\begin{aligned}(a', b') \cdot (a, b) &= (a'a - b'b, a'b + b'a) \\ &= (aa' - bb', ab' + a'b) \\ &= (a, b) \cdot (a', b') \blacksquare\end{aligned}$$

10. Consideriamo entrambi i membri dell'uguaglianza

$$\langle a, b \rangle \cdot (\langle a', b' \rangle + \langle a'', b'' \rangle) = \langle a, b \rangle \cdot \langle a', b' \rangle + \langle a, b \rangle \cdot \langle a'', b'' \rangle$$

Sviluppiamo il membro destro:

$$\begin{aligned}\langle a, b \rangle \cdot (\langle a', b' \rangle + \langle a'', b'' \rangle) &= \langle a, b \rangle \cdot \langle a' + a'', b' + b'' \rangle \\ &= \langle a(a' + a'') - b(b' + b''), a(b' + b'') + b(a' + a'') \rangle \\ &= \langle aa' + aa'' - bb' - bb'', ab' + ab'' + a'b + a''b \rangle\end{aligned}$$

Ora il membro sinistro:

$$\begin{aligned}\langle a, b \rangle \langle a', b' \rangle + \langle a, b \rangle \langle a'', b'' \rangle &= \langle aa' - bb', ab' + a'b \rangle + \langle aa'' - bb'', ab'' + a''b \rangle \\ &= \langle aa' + aa'' - bb' - bb'', ab' + ab'' + a'b + a''b \rangle\end{aligned}$$

E vediamo che entrambi i membri, quando sviluppati, sono uguali; dimostriamo così la tesi. ■

CONCLUSIONE.

Alla luce di queste proprietà riusciamo proprio a verificare che

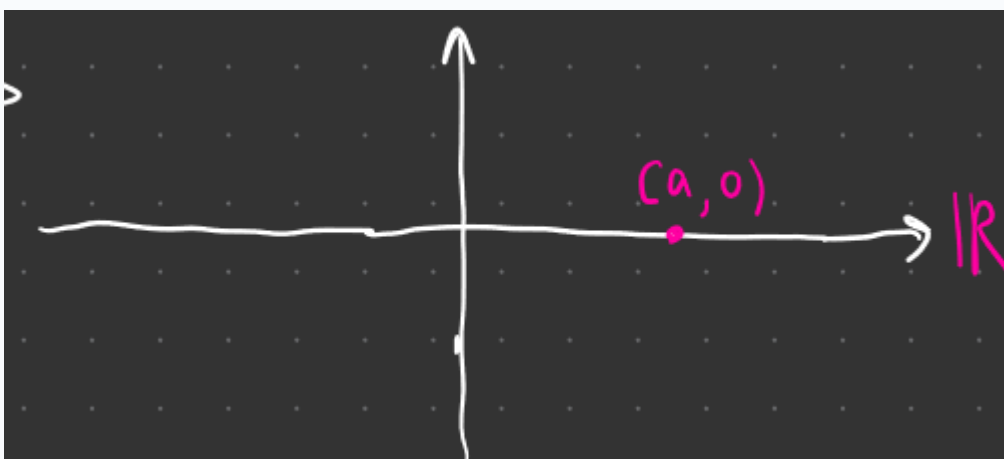
$$(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$$

è un **campo**, che chiameremo il **campo dei numeri complessi** \mathbb{C} .

OSS 2.2. Nel campo \mathbb{C} considero i numeri della seguente forma:

$$(a, 0) \in \mathbb{C}$$

ovvero quelli con la **seconda componente** nulla. Graficamente, questi punti giacciono sull'asse **orizzontale**, che chiameremo **l'asse reale**.



Allora notiamo che valgono le seguenti:

$$\text{a. } (a, 0) \cdot (b, 0) = (ab - 00, a0 + 0b) = (ab, 0)$$

$$\text{b. } (a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0)$$

nel senso che questi numeri si comportano come i *numeri reali* \mathbb{R} .

OSS 2.3. Inoltre, considerando

$$(a, 0) \cdot (c, d) = (ac - 0d, ad + 0c) = (ac, ad)$$

ovvero che $(a, 0)$ si comporta come lo *scalare* che *scala un numero* \mathbb{C} *componente per componente*.

3. Coniugio

DEF 3. Sia z un numero \mathbb{C} e lo rappresentiamo come $z = a + ib$ ([Rappresentazione dei Numeri Complessi](#)). Allora definisco il numero **complesso coniugato** \bar{z} come

$$\bar{z} = a - ib$$

DEF 3.1. Chiamo **coniugio** la funzione

$$- : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}; z \mapsto \bar{z}$$

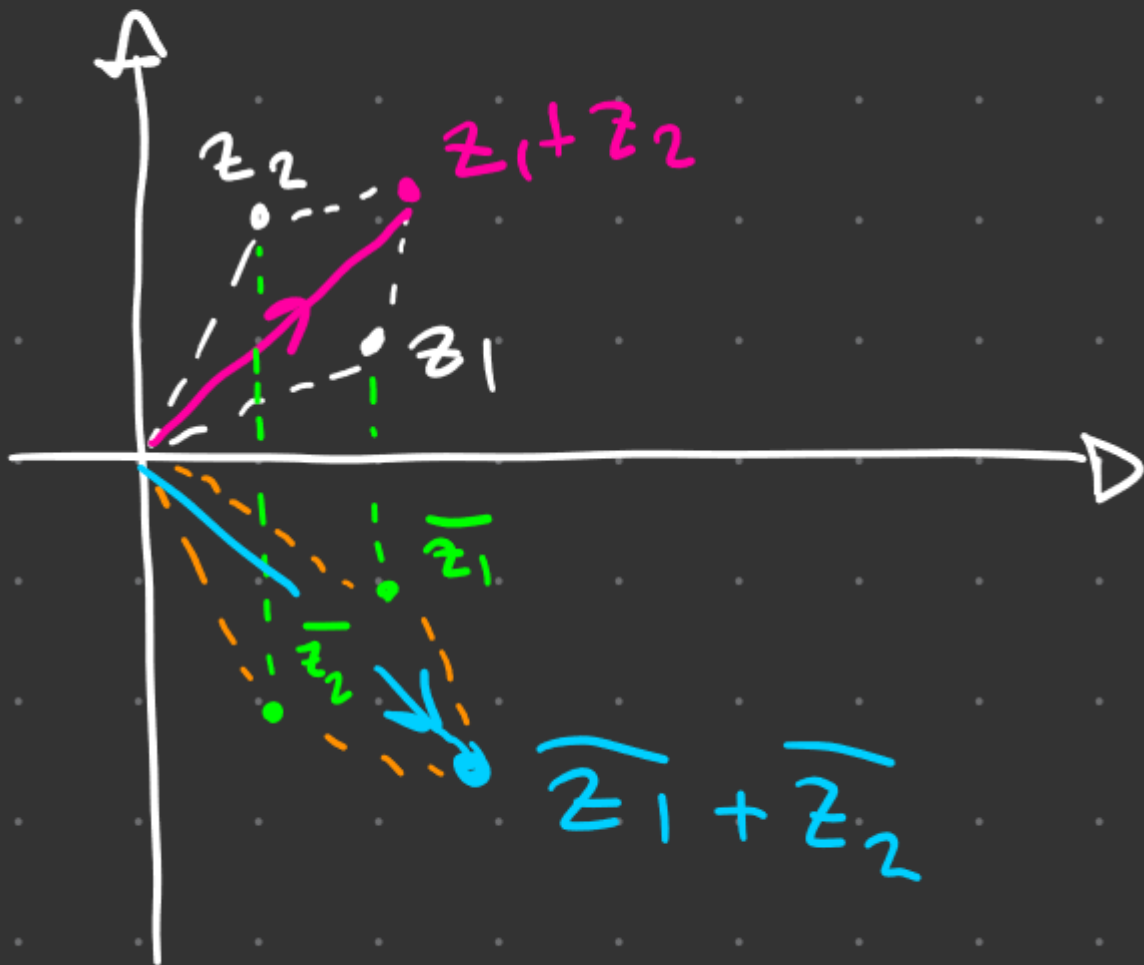
dove $\bar{i} = -i$

PROP 3.1. Questa funzione ha delle proprietà; presentiamo la prima.

$$\forall z_1, z_2; \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

Graficamente,

PROP 3.1



DIMOSTRAZIONE. Analiticamente è possibile dimostrare la tesi nel modo seguente.

$$\begin{aligned}
 \overline{z_1 + z_2} &= \overline{(a + ib) + (a' + ib')} \\
 &= \overline{(a + a') + i(b + b')} \\
 &= (a + a') - i(b + b') \\
 &= (a - ib) + (a' - ib') \\
 &= \overline{z_1} + \overline{z_2} \blacksquare
 \end{aligned}$$

PROP 3.2.

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

DIMOSTRAZIONE. Analogamente,

$$\begin{aligned}
 \overline{z_1 \cdot z_2} &= \overline{(a + ib)(a' + ib')} \\
 &= \overline{(aa' - bb') + i(ab' + a'b)} \\
 &= aa' - bb' - i(ab' + a'b)
 \end{aligned}$$

e sviluppando $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ otteniamo l'identità

$$\begin{aligned}\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} &= \overline{(a + ib)} \cdot \overline{(a' + ib')} \\ &= (a - ib) \cdot (a' - ib') \\ &= aa' - iab' - ia'b + (i^2)bb' \\ &= aa' - bb' - i(ab' + a'b)\end{aligned}$$

che è esattamente uguale all'espressione ottenuta prima; pertanto si considera la tesi vera. ■

PROP 3.3.

$$\begin{aligned}\overline{z} = z &\iff \operatorname{Im}(z) = 0 \\ &\iff z = \operatorname{Re}(z) \\ &\iff z \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

PROP 3.4. Sia $z = a + ib$, allora

$$z + \overline{z} = (a + ib) + (a - ib) = 2a = 2\operatorname{Re}(z)$$

4. Modulo

Se prendiamo il piano di *Argand-Gauss* ([Rappresentazione dei Numeri Complessi](#)) possiamo vedere dei *punti nel piano*, allora si potrebbe "*misurare*" la distanza di questo punto dall'origine $(0,0)$.

DEF 4. Allora definiamo la il **modulo** di \overline{z} come la *distanza dall'origine*; ovvero se $z = a + ib$, allora usando il *teorema di Pitagora* il modulo diventa $\sqrt{a^2 + b^2}$.

DEF 4.1. Allora definisco la funzione $|\cdot|$;

$$\begin{aligned}|\cdot| : \mathbb{C} &\longrightarrow [0, +\infty) \\ z &\mapsto |z| := \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2}\end{aligned}$$

OSS 4.1. Notiamo che se $z \in \mathbb{R}$, ovvero se $\operatorname{Im}(z) = 0$, allora

$$|z| = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2} = |\operatorname{Re}(z)|$$

Da nota che a sinistra si ha il *modulo* di z , invece a destra si ha il *valore assoluto* ([Funzioni di potenza, radice e valore assoluto](#), **DEF 3.1.**) della parte reale di z .

Ora presentiamo alcune proprietà del modulo.

PROP 4.1. Per definizione,

$$\forall z \in \mathbb{C}, |z| \geq 0; |z| = 0 \iff z = 0$$

PROP 4.2.

$$|z| \geq |\operatorname{Re}(z)| \wedge |z| \geq |\operatorname{Im}(z)|$$

Geometricamente, questo corrisponde al fatto che *l'ipotenusa* di un triangolo rettangolo è *sempre* più lungo o uguale ad uno dei cateti.

PROP 4.3.

$$|\bar{z}| = |z|$$

in quanto $-b^2 = b^2, \forall b \in \mathbb{R}$

PROP 4.4.

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| |z_2|$$

DIMOSTRAZIONE. Supponendo che $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$, allora

$$\begin{aligned} |z_1| \cdot |z_2| &= \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2} \\ &= \sqrt{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)} \\ &= \sqrt{(a_1^2 a_2^2 + a_1^2 b_2^2) + (a_2^2 b_1^2 + b_1^2 b_2^2)} \\ &= \sqrt{(a_1^2 a_2^2 + b_1^2 b_2^2) + (a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2)} \end{aligned}$$

e sviluppando

$$z_1 \cdot z_2 = a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

si ha quindi

$$\begin{aligned} |z_1 \cdot z_2| &= |(a_1 a_2 - b_1 b_2)^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)^2| \\ &= |(a_1^2 a_2^2 - 2a_1 a_2 b_1 b_2 + b_1^2 b_2^2) + (a_1^2 b_2^2 + 2a_1 a_2 b_1 b_2 + a_2^2 b_1^2)| \\ &= |(a_1^2 a_2^2 + b_1^2 b_2^2) + (a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2)| \end{aligned}$$

dimostrando così che

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \blacksquare$$

PROP 4.5.

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2$$

DIMOSTRAZIONE. Supponendo che $z = a + ib$, allora

$$z \cdot \bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2$$

OSS 4.5.a. Questa proprietà è utile per trovare l'inversa di z ; infatti

$$z \cdot \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{|z|^2}{|z|^2} = 1$$

allora concludo che

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} + i \frac{-b}{a^2 + b^2}$$

PROP 4.7. *La disuguaglianza triangolare.*

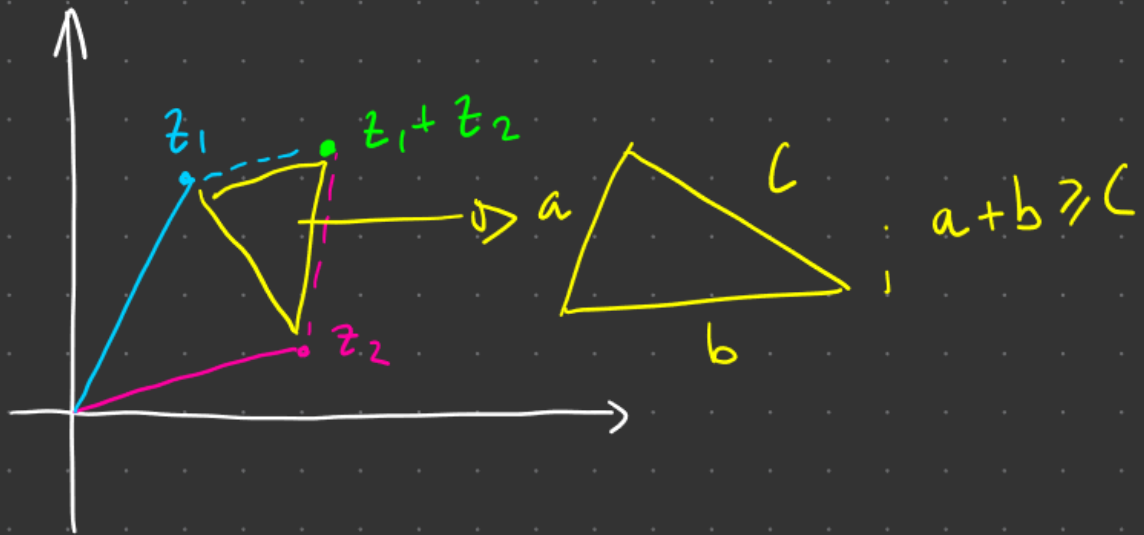
Infine presentiamo la *proprietà fondamentale* del *modulo*.

$$\begin{aligned} \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \\ |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \end{aligned}$$

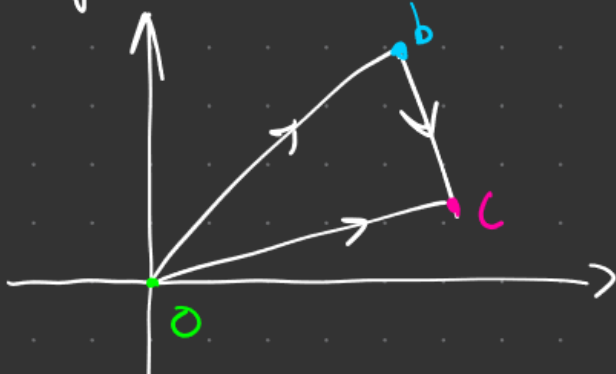
Che è *simbolicamente* simile alla *disuguaglianza triangolare* del *valore assoluto* (**OSS 3.1.1.**)

Però in questo contesto (ovvero del campo \mathbb{C}) la proprietà è ancora più *geometricamente suggestiva*; infatti usando il *Piano di Argand-Gauss* (*Rappresentazione dei Numeri Complessi*), si ha:

OSS 3.1.1)



oppure



$$\overline{Ob} + \overline{bc} \geq \overline{Oc}$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$|z_1| \quad |z_2| \quad |z_1 + z_2|$$

Ovvero che la somma della lunghezza due cateti di un triangolo rettangolo è **sempre** più lunga della lunghezza dell'ipotenusa.

DIMOSTRAZIONE.

Considero i seguenti: siano $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$; allora

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} \\ &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) \\ &= z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 + z_2\overline{z_2} \\ &= |z_1|^2 + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 + |z_2|^2 \\ |z_1 + z_2|^2 &= |z_1|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2 \end{aligned}$$

A questo punto mi ricordo che

$$|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$$

allora

$$\begin{aligned} |z_1|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2 &\leq |z_1|^2 + 2|z_1\overline{z_2}| + |z_2|^2 \\ &\leq |z_1|^2 + 2|z_1||\overline{z_2}| + |z_2|^2 \\ &\leq |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 \\ |z_1 + z_2|^2 &\leq (|z_1| + |z_2|)^2 \\ |z_1 + z_2| &\leq |z_1| + |z_2| \blacksquare \end{aligned}$$

Rappresentazione dei Numeri Complessi

Rappresentazione dei numeri complessi come somma di parte reale e parte immaginaria; il piano di Argand-Gauss.

1. Rappresentazione

Dalle considerazioni prese in [Operazioni sui Numeri Complessi](#) possiamo fare le seguenti considerazioni per poter rappresentare un numero complesso in un modo alternativo.

DEF 1.1. Prendendo un numero complesso di forma $(a, b) \in \mathbb{C}$, definiamo le seguenti.

1. $\mathbb{1}$ il numero complesso di forma $(1, 0)$
2. i il numero complesso di forma $(0, 1)$

Se li moltiplichiamo per se stessi otteniamo:

1. $\mathbb{1} \cdot \mathbb{1} = \mathbb{1} = (1, 0)$
2. $i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 * 0 - 1 * 1, 0 * 1 + 1 * 0) = (-1, 0) = -\mathbb{1}$

Allora si può affermare che $i^2 = -1$ è la soluzione dell'equazione $x^2 + 1 = 0$.

CONCLUSIONE.

Allora posso scrivere il numero complesso (a, b) come il seguente:

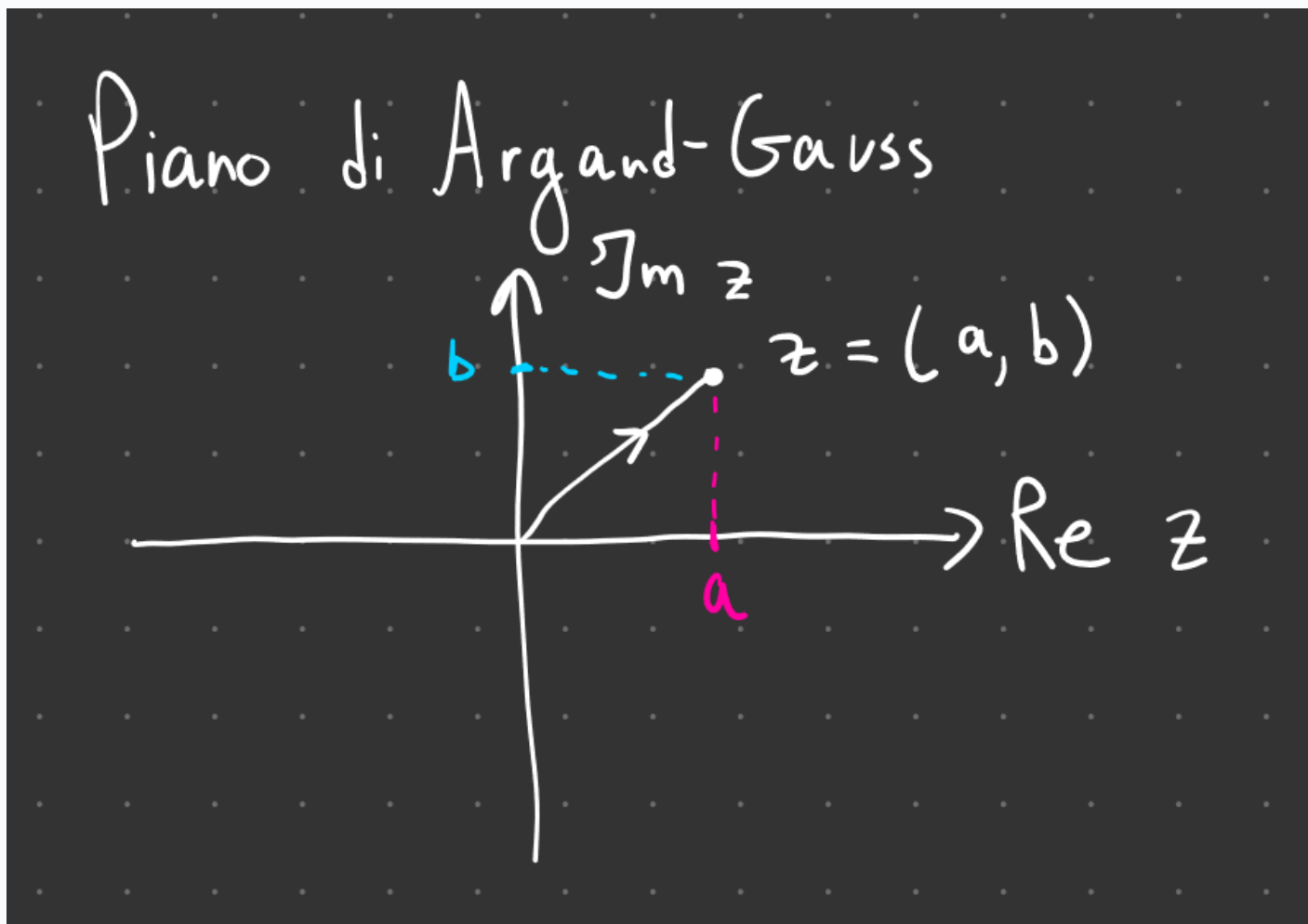
$$\begin{aligned} (a, b) &= (a, 0) \cdot (1, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1) \\ &= a(1, 0) + b(0, 1) \\ (a, b) &= a + ib \end{aligned}$$

DEF 2.2. Il numero a si dice la **parte reale** e viene definita come $\operatorname{Re}(z)$, il numero b ($\operatorname{Im}(z)$) si dice la **parte immaginaria**.

2. Piano di Argand-Gauss

Se prendiamo il *piano cartesiano* π applicando le regole definite per \mathbb{C} , allora otterremo il piano di *Gauss* (oppure di *Argand-Gauss*), dove ogni punto del piano è un *numero complesso*.

Eccovi un esempio grafico:



Infatti, *geometricamente* un punto z può rappresentare un *vettore geometrico* (*Vettori Liberi*) con punto di applicazione $(0,0)$.

Chiamiamo un punto del piano come z , che può essere scritto come

$$z = \operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z)$$

3. Esercizi

Considerando le *Operazioni sui Numeri Complessi* e questa rappresentazione di un numero complesso z , si propongono alcuni esercizi:

ESERCIZIO 3.1. Calcola

$$(2 + 3i) + (4 + i)$$

ESERCIZIO 3.2. Calcola

$$(2 - 3i)(2 + 3i)$$

ESERCIZIO 3.3. Calcola

$$(1 + i)(2 - i)(7i)$$

ESERCIZIO 3.4. Calcola

$$\frac{i+1}{i-1}$$

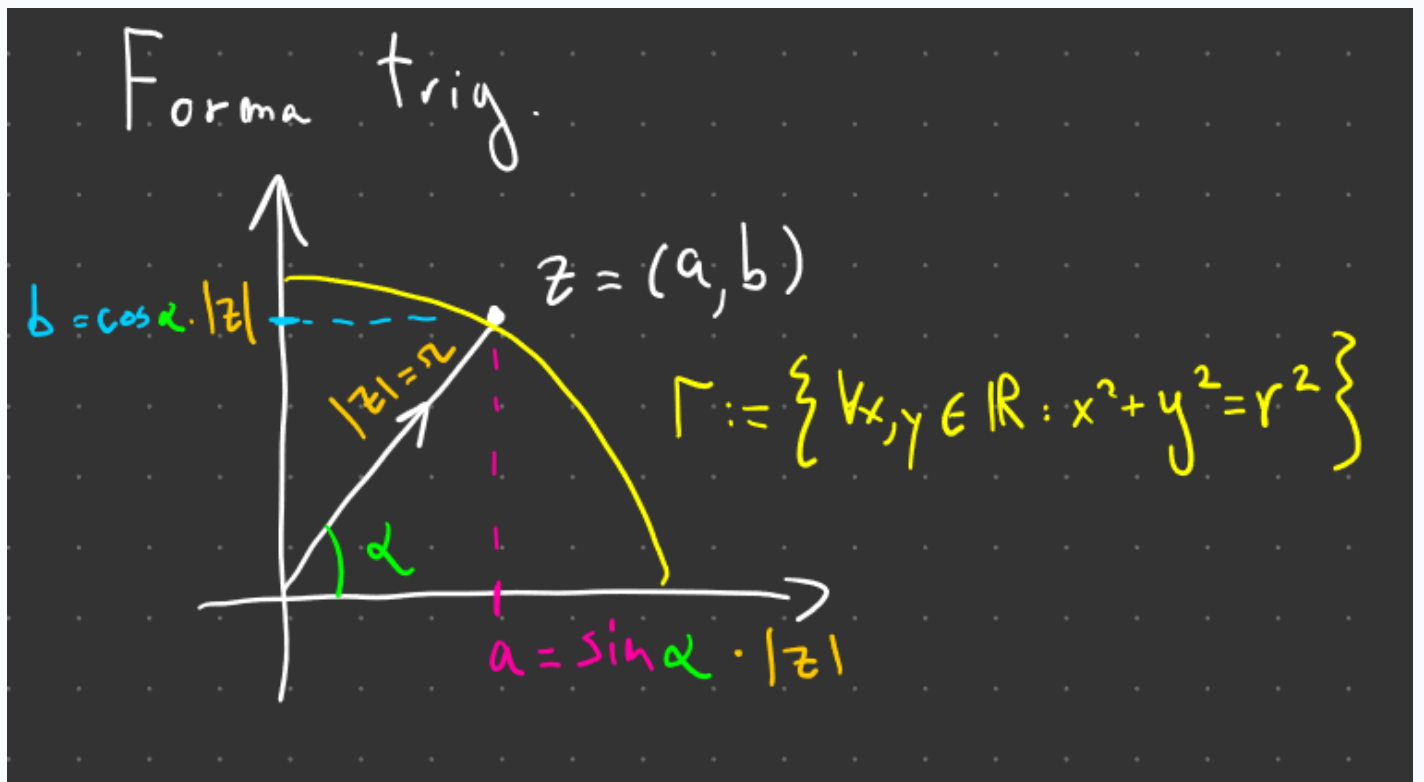
Forma Trigonometrica dei Numeri Complessi

Rappresentazione dei numeri complessi come un z associato a modulo e argomento; argomento come la classe di equivalenza dell'argomento principale; nuova interpretazione della moltiplicazione; esempi; Formula di De Moivre.

1. Rappresentazione trigonometrica

Oltre alla rappresentazione "*algebraica*" dei numeri complessi \mathbb{C} ([Rappresentazione dei Numeri Complessi](#)), è possibile anche considerare un'altra rappresentazione che fa uso delle [Funzioni trigonometriche](#).

NOZIONE. Prendiamo un $z \in \mathbb{C}$, che geometricamente vuol dire



Allora secondo le definizioni del *seno* e del *coseno* ([Funzioni trigonometriche](#), **DEF 1.**) possiamo considerare

$$\begin{aligned} a &= \cos \alpha \cdot |z| \\ b &= \sin \alpha \cdot |z| \end{aligned}$$

dove $|z|$ rappresenta il *modulo* di z . ([Operazioni sui Numeri Complessi](#), **DEF 4.**)

Dunque

$$z = a + ib = |z|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

e lo si può scrivere come

$$z \sim (|z|, [\alpha])$$

che si legge come "*z lo rappresento come* $(|z|, [\alpha])$ ".

DEF 1. Quindi definisco le due *componenti* che sono associate a z :

- **Modulo** come $|z|$, che d'ora in poi verrà genericamente chiamato come ρ . Ovviamente può essere solo maggiore o uguale a 0.
- **Argomento** come l'angolo α ;
 - Dai risultati della *trigonometria*, sarebbe meglio considerare **l'argomento principale** come la classe di equivalenza $[\alpha]_{\equiv 2\pi}$ dove $\alpha \in [0, 2\pi)$. Qui si parla della *congruenza modulo* 2π ([Relazioni](#), **ESEMPIO 3.2**); questo in quanto 2π rappresenterebbe un giro intero, quindi $\alpha = \alpha + 2\pi$. Allora

$$[\alpha] = \{\forall k \in \mathbb{Z}, \alpha + 2k\pi\}$$

OSS 1.1. Inoltre possiamo definire l'applicazione

$$\mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow (0, +\infty) \times \{[\alpha]_{\equiv 2\pi}, \alpha \in \mathbb{R}\}; z \mapsto (\rho, [\alpha])$$

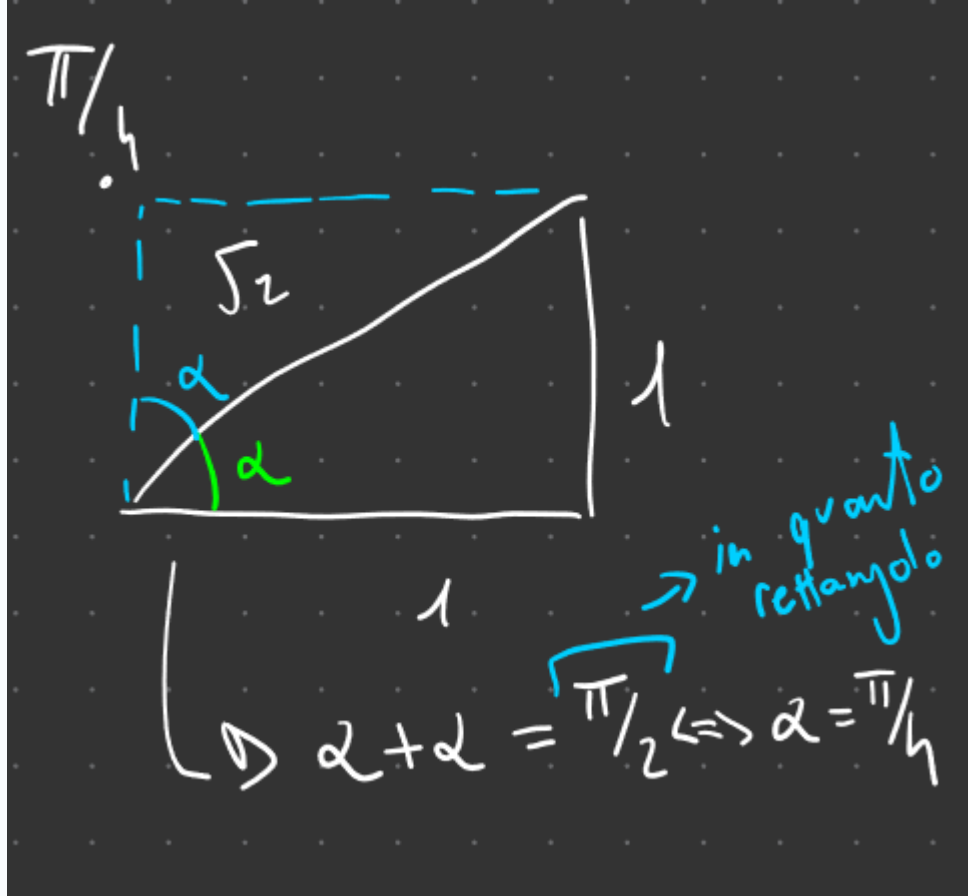
ed è *biiettiva*. Non si considera lo 0 in quanto questo può creare dei problemi; infatti a $z = 0 + i0$ può essere associato qualsiasi angolo, rendendo questa applicazione una *non funzione*.

1.1. Esempi

ESEMPIO 1.1.a. Prendendo $z = 1 + i$, voglio trovare la sua rappresentazione trigonometrica.

Innanzitutto trovo il suo *modulo* $|z|$ che per definizione è $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

Dopodiché trovo il suo *argomento*. Per farlo bisogna considerare la *geometria elementare*, nel senso che se abbiamo un triangolo del tipo



allora chiaramente si evince che l'angolo α è $\frac{\pi}{4}$.

ESEMPIO 1.1.b. $z = 1 + i0$; allora chiaramente

$$z \sim (1, 0)$$

ESEMPIO 1.1.c.

$$z = 0 + i \sim (1, \frac{\pi}{2})$$

1.2. Interpretazione della moltiplicazione

OSS 1.2. Si osserva che secondo la *forma trigonometrica* possiamo interpretare la *moltiplicazione tra due numeri complessi* nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \\ z_1 &\sim (\rho_1, \alpha_1) \\ z_2 &\sim (\rho_2, \alpha_2) \end{aligned}$$

Allora

$$z_1 \cdot z_2$$

è uguale a

$$\begin{aligned} & \rho_1(\cos \alpha_1 + i \sin \alpha_1) \cdot \rho_2(\cos \alpha_2 + i \sin \alpha_2) = \\ & (\rho_1 \cos \alpha_1 + \rho_1 i \sin \alpha_1)(\rho_2 \cos \alpha_2 + \rho_2 i \sin \alpha_2) = \\ & \rho_1 \rho_2 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \rho_1 \rho_2 i \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 + \rho_1 \rho_2 i \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 - \rho_1 \rho_2 \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \end{aligned}$$

poi raccogliamo per i termini dovuti,

$$\rho_1 \rho_2 (\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 + i(\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 + \sin \alpha_1 \cos \alpha_2))$$

e qui identifichiamo le *forme di addizione e sottrazione del seno e del coseno* ([Funzioni trigonometriche](#), **SEZIONE 2.3.**). Allora abbiamo infine

$$z = \rho_1 \rho_2 (\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i \sin(\alpha_1 + \alpha_2))$$

Quindi secondo questa *interpretazione* abbiamo che i *moduli* si moltiplicano e gli *angoli* si sommano. Ovvero:

$$z_1 z_2 \sim (\rho_1 \rho_2, \alpha_1 + \alpha_2)$$

2. Formula di de Moivre

TEOREMA 2. Sia $z = a + ib \sim (\rho, [\alpha])$; quindi $z = \rho(\cos \alpha + i \sin \alpha)$.

Allora

$$z^n \sim (\rho^n, n[\alpha]) = \rho^n (\cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha))$$

2.1. Esempi

Alcuni esempi in cui si applica la *formula di de Moivre*.

3. Le radici di un numero complesso

Consideriamo un caso fondamentale del *teorema fondamentale dell'algebra*, ovvero le *radici dell'unità*.

PROBLEMA 3. Dato un numero $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, voglio trovare tutti i numeri $z \in \mathbb{C}$ tali che

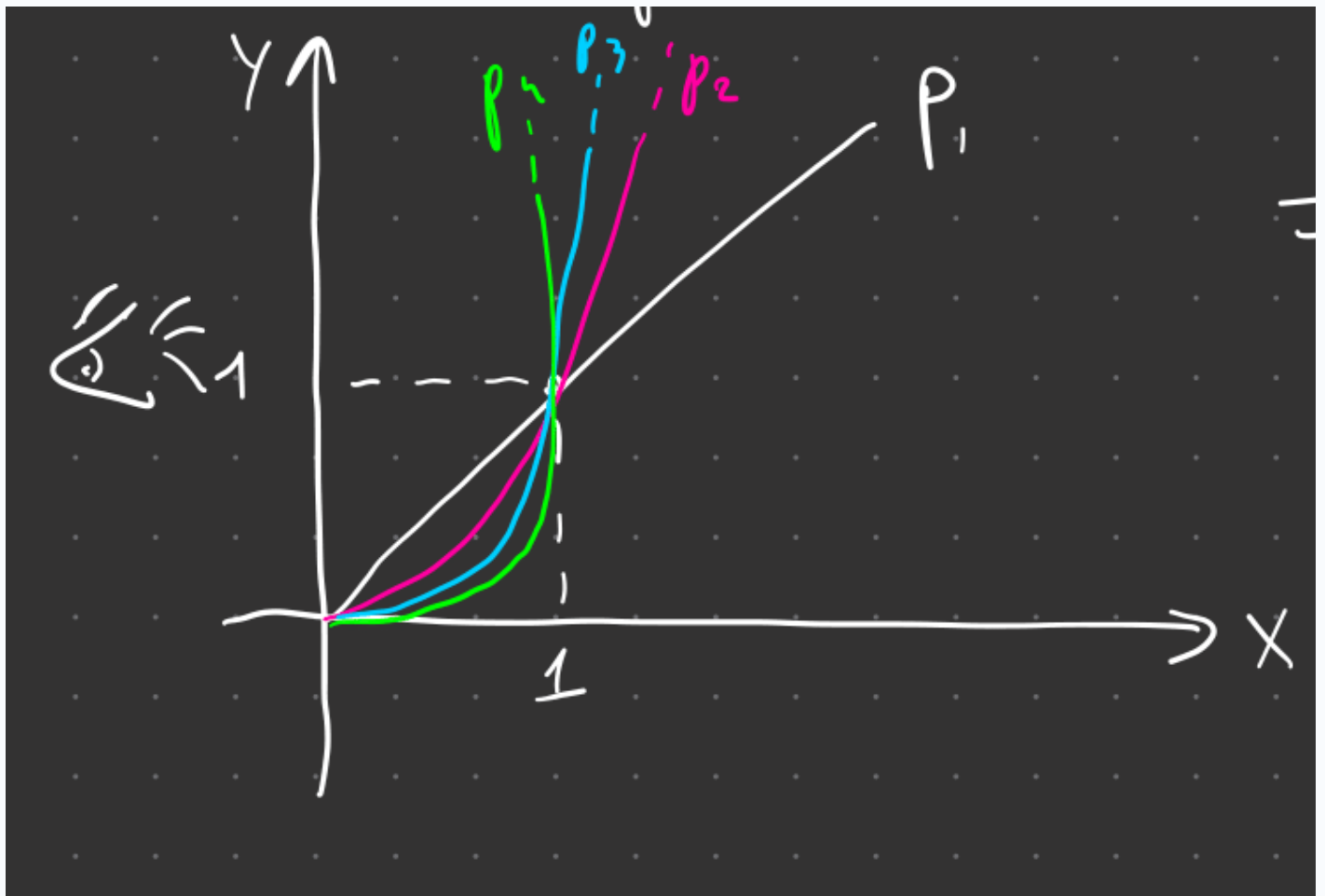
$$z^n = 1$$

OSS 3.1. Vediamo cosa succede in \mathbb{R} , ovvero se $\text{Im}(z) = 0$. Allora devo trovare tutti i numeri $x \in \mathbb{R}$ tali che

$$x^n = 1$$

Se restringo ulteriormente il nostro insieme di considerazione a $[0, +\infty)$, allora posso considerare la funzione *potenza n -esima* ([Funzioni di potenza, radice e valore assoluto](#), **DEF 1.1.**).

Osservando di nuovo il grafico di *potenza*,



Si nota subito che $x^n = 1$ ha un'unica soluzione in $[0, +\infty)$; ovvero $x_1 = 1$.
Ora se consideriamo pure i numeri negativi, allora:

- per n pari, $x^n = 1$ ha anche una soluzione secondaria $x_2 = -1$.
- per n dispari, $x^n = 1$ ha come soluzione solo $x_1 = 1$.

OSS 3.2.

Invece su \mathbb{C} ci sono esattamente n soluzioni.

$$z^n = 1$$

DIM. Consideriamo la forma trigonometrica di z e 1, ovvero

$$z \sim (\rho, [\alpha]); 1 \sim (1, [0])$$

e secondo l'equazione voglio che

$$z^n \sim (\rho^n, n[\alpha]) = (1, [0])$$

quindi deve essere vera la seguente:

$$\rho^n = 1 \iff \rho = 1$$

Da un punto di vista *geometrico*, questo vuol dire che non voglio avere né spirali che vanno fuori ($\rho > 1$) né quelli che vanno all'interno ($\rho < 1$).

Inoltre deve valere

$$[n\alpha] = [0]$$

cioè

$$n\alpha = 0 + 2k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}$$

allora

$$\alpha = \frac{2k\pi}{n}, \forall k \in \mathbb{Z}$$

ora iniziamo a fissare dei valori di k , a partire da 0. Allora

$$k = 0 \implies \alpha_1 = 0$$

$$k = 1 \implies \alpha_2 = \frac{2\pi}{n}$$

$$k = 2 \implies \alpha_3 = \frac{4\pi}{n}$$

...

$$k = n - 1 \implies \alpha_n = \frac{2(n-1)\pi}{n}$$

$$k = n \implies \alpha_{n+1} = \frac{2n\pi}{n} = 2\pi \in [0]_{\equiv 2\pi}$$

$$k = n + 1 \implies \alpha_{n+2} = \frac{2(n+1)\pi}{n} = \frac{2n\pi + 2\pi}{n} = 2\pi + \frac{2\pi}{n} \in [\frac{2\pi}{n}]_{\equiv 2\pi}$$

Notiamo che da $k = n$ (ovvero dalla $n + 1$ -esima soluzione) in poi otteniamo elementi che appartengono alle classi equivalenza di soluzioni già trovate: ovvero non vanno considerate, in quanto le loro classi di equivalenza sono uguali. Quindi le radici dell'unità sono:

$$z_0 \sim (1, [0]) = \cos(0) + i \sin(0) = 1$$

$$z_1 \sim (1, [\frac{2\pi}{n}]) = \cos(\frac{2\pi}{n}) + i \sin(\frac{2\pi}{n})$$

...

$$z_n \sim (1, [\frac{2(n-1)\pi}{n}]) = \cos(\frac{2(n-1)\pi}{n}) + i \sin(\frac{2(n-1)\pi}{n})$$

Allora vediamo che ci sono n soluzioni; generalizzando da qui discende il **teorema fondamentale dell'algebra**.

3.1. Esempio

ESEMPIO 3.1. Trovare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$z^5 = 1$$

Considerando ciò detto prima, ho le soluzioni

$$z_1 \sim (1, [0]) = 1$$

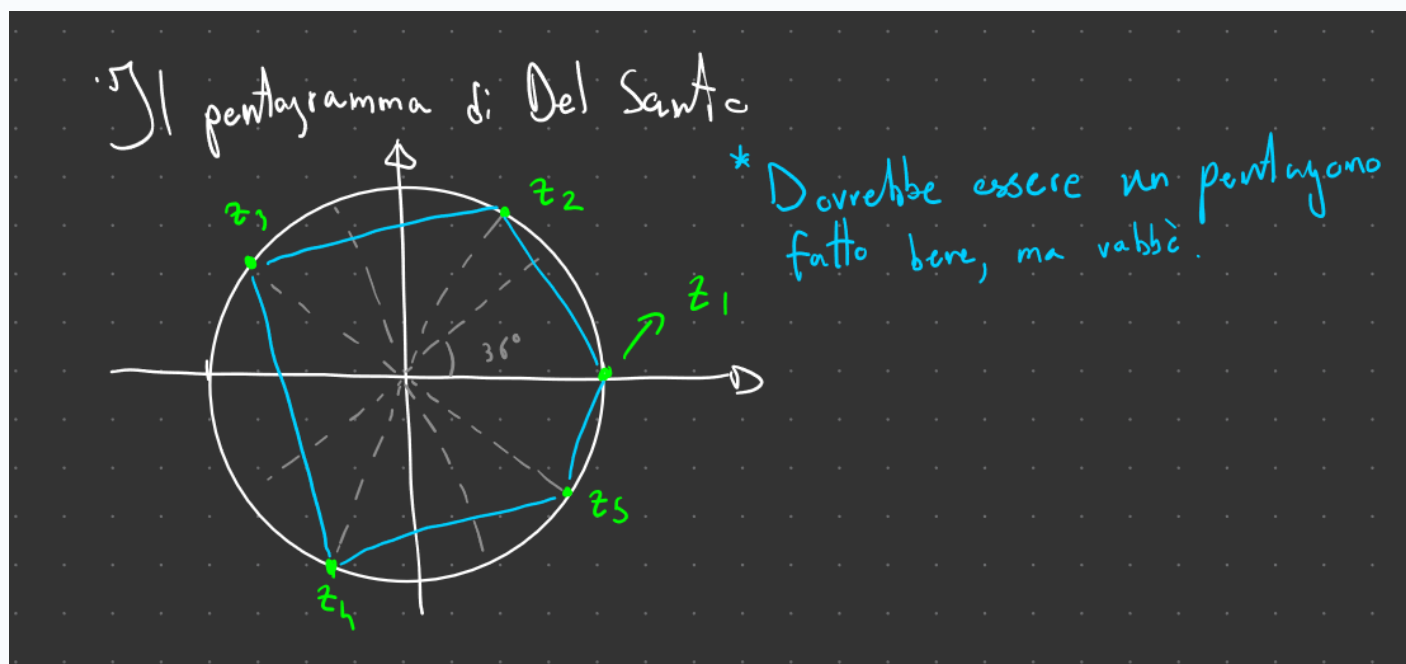
$$z_2 \sim (1, [\frac{2\pi}{5}]) = \cos(\frac{2\pi}{5}) + i \sin(\frac{2\pi}{5})$$

$$z_3 \sim (1, [\frac{2(2)\pi}{5}]) = (1, [\frac{4\pi}{5}])$$

$$z_4 \sim (1, [\frac{2(3)\pi}{5}]) = (1, [\frac{6\pi}{5}])$$

$$z_5 \sim (1, [\frac{2(4)\pi}{5}]) = (1, [\frac{8\pi}{5}])$$

Graficamente posso prendere il *piano di Argand-Gauss* (*Rappresentazione dei Numeri Complessi*), prendere un cerchio con $r = 1$, dividere i due *semicerchi* in 5 parti, poi prendere il secondo, quarto, sesto e ottavo punto della sezione; infine se li collego ottengo un *pentagono*.



3.2. Teorema fondamentale dell'algebra

TEOREMA 3.2.

Siano a_n dei numeri tali che:

$$a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}; a_n \neq 0$$

e considerando *l'equazione*

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n = 0$$

allora questa ha esattamente n **soluzioni** in \mathbb{C} .

OSS 3.2.1. Allora possiamo riscrivere l'equazione come

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n = a_n (z - z_1) \dots (z - z_n)$$

con $\forall n, z_n \in \mathbb{C}$. Notiamo che **tutte** le soluzioni appartengono al **campo dei numeri complessi**; per questo si dice che \mathbb{C} è un **campo chiuso**.

4. (EXTRA) L'insieme di Mandelbrot

PROBLEMA 4. Considero il **piano di Argand-Gauss** e $z = c \in \mathbb{C}$; adesso considero una **successione** (**Assiomi di Peano**, **il principio di induzione**, **DEF 4.2.1.**) di **punti su** \mathbb{C} , ovvero

$$z_0 = c; z_1 = c^2 + c; \forall n, z_{n+1} = (z_n)^2 + c$$

Quindi scelgo un punto c , a cui applico la successione z_n .

Adesso distinguo i **punti di partenza** c in due famiglie principali:

1. I punti di partenza che rimangono in un **insieme limitato** (ovvero un raggio di palla) dopo un numero di iterazioni
2. I punti di partenza dei quali moduli vanno all'infinito

Graficamente posso colorare i punti della prima famiglia di colore nero, i secondi di colore bianco.

Tramite gli strumenti dell'**informatica** posso usare un **pixel** per rappresentare un punto c , poi di eseguire un numero preciso di iterazioni (come 500) e infine di colorare i pixel a seconda del suo comportamento.

Così otteniamo il cosiddetto **frattale di Mandelbrot**.

