Calcolo Integrale - Sommario

Tutto sul calcolo integrale.

SEZIONE 0. NOMENCLATURA PRELIMINARE

01. La suddivisione di un'intervallo

Suddivisione di un Intervallo

Breve descrizione qui

---

0. Prerequisiti e/o concetti correlati

- Nozione di intervallo: Intervalli
- Operazioni tra insiemi: Operazioni con gli Insiemi

1. Definizione di Suddivisione di un Intervallo

#Definizione

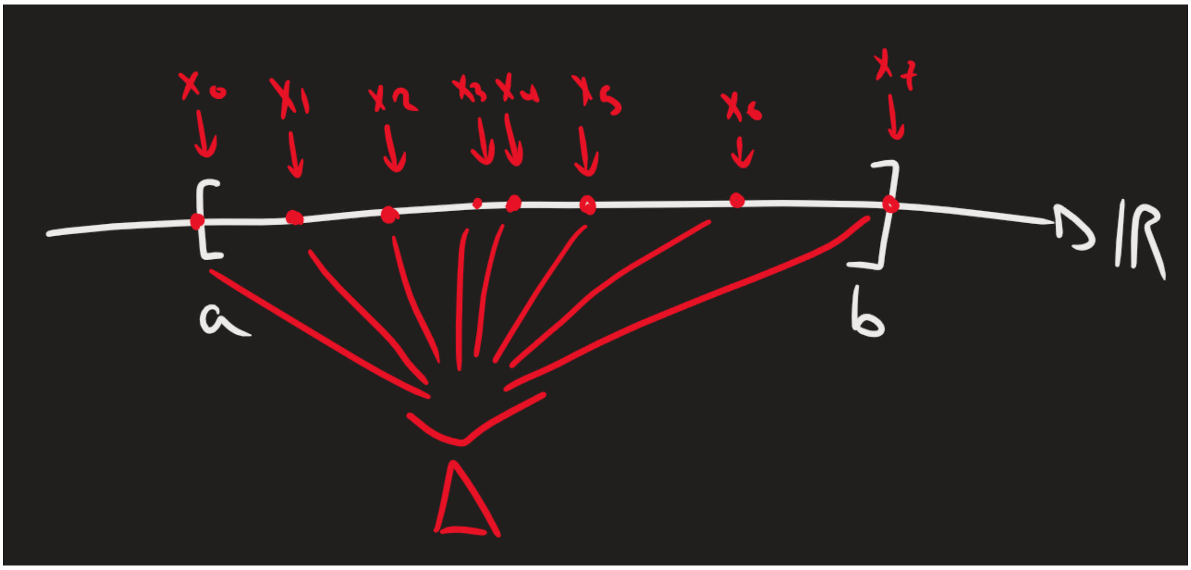
Definizione 1.1. (suddivisione di un'intervallo chiuso e limitato)

Sia $[a, b]$ un *intervallo chiuso e limitato* (Intervalli > ^a1a838), chiamo la *suddivisione* di $[a, b]$ un *insieme finito di punti* dentro $]a, b[$ che contiene sia a che b.
Lo denotiamo con il simbolo Δ e lo definiamo formalmente come

$$\Delta = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b\}$$

L'idea grafica viene raffigurata nella *figura 1.1.*.

FIGURA 1.1. (*Concetto grafico di suddivisione*)



#Definizione

Definizione 1.2. (l'insieme di tutte le suddivisione)

Indico l'insieme di *tutte le suddivisioni* di $[a, b]$ con

$$\mathcal{D}$$

2. Relazioni tra le suddivisioni

#Definizione

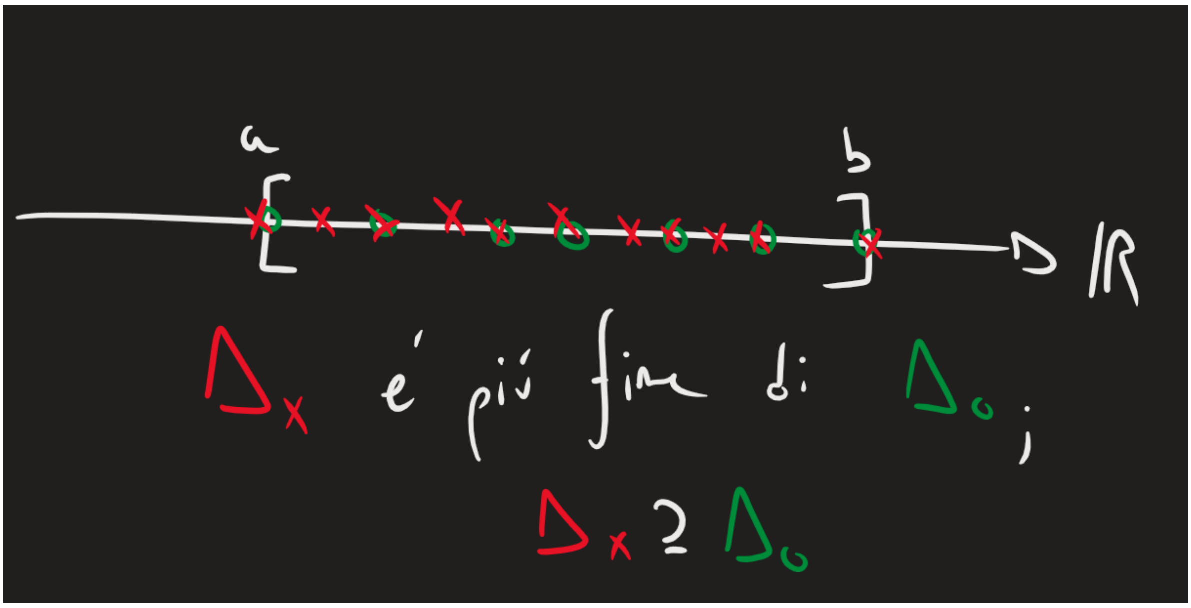
Definizione 2.1. (finezza della suddivisione)

Siano Δ_1, Δ_2 delle *suddivisioni*, dico che la suddivisione Δ_1 è *più fine* di Δ_2 se vale la seguente relazione:

$$\Delta_1 \supseteq \Delta_2$$

L'idea grafica viene raffigurata nella *figura 2.1.*.

FIGURA 2.1. (*Concetto grafico della finezza*)



TRUCCO MNEMONICO. Come *"trucchetto mnemonico"* si può *"trasformare"* il simbolo di *essere contenuto in* a *essere minore* di; ovvero Δ_1 è più fine di Δ_2 se $\Delta_1 \geq \Delta_2$, ovvero $\Delta_1 \supseteq \Delta_2$. Infatti l'idea di base della *finezza* consiste nel fatto che una suddivisione ha *"più elementi"* (anche se non necessariamente) dell'altra. Inoltre si vede che i simboli $\supseteq, \geq$ sono *graficamente* "simili".

#Osservazione

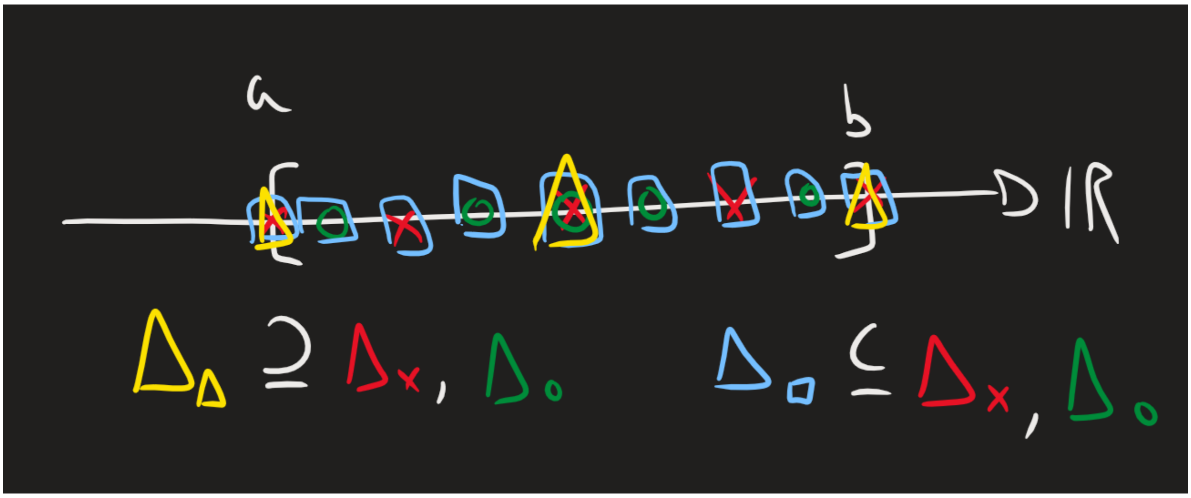
Osservazione 2.1. (l'insieme delle suddivisioni è un reticolo)

Supponiamo di avere *due suddivisioni* Δ_A e Δ_B; nessuna di queste due dev'essere più fine dell'altra (ad esempio potrebbe avere elementi diversi).
Possiamo comunque prendere una *suddivisione più fine* tra le due? Invece la *suddivisione meno fine*?
La risposta è sì, se consideriamo l'*unione* e l'*intersezione* tra queste due suddivisioni: prendendo *"l'unione"* comprendi tutti gli elementi sia di Δ_A che di Δ_B; quindi $\Delta_{A \cup B}$ è necessariamente *più fine* di entrambe.
Per quanto riguarda invece *l'intersezione*, questa prende *solo* gli elementi in comuni: ovvero, nel *"caso peggiore"* si prenderebbero solo gli estremi a, b. Allora in questo caso *entrambe* le suddivisioni Δ_A, Δ_B sono più fine di $\Delta_{A \cap B}$.
Riassumendo, abbiamo

$$\boxed{\Delta_{A \cup B} \supseteq \Delta_A, \Delta_B \, || \, \Delta_A, \Delta_B \supseteq \Delta_{A \cap B}}$$

Infatti si può dire che le *relazioni tra le suddivisioni* Δ determina il fatto che *l'insieme delle suddivisioni* $\mathcal{D}$ forma un *reticolo* (da approfondire, Reticolo).
L'idea di questa osservazione viene raffigurata nella *figura 2.2.*.

FIGURA 2.2. (*L'idea delle relazioni tra suddivisioni*)



02. La somma superiore e inferiore

Somma inferiore e superiore per una Funzione

Definizione di somma inferiore e superiore per una funzione relativa ad una suddivisione; osservazioni preliminari per l'integrazione secondo Riemann.

---

0. Prerequisiti e/o voci correlate

- Suddivisione di un Intervallo
- Integrabilità secondo Riemann

1. Definizione di somma inferiore e superiore

#Definizione

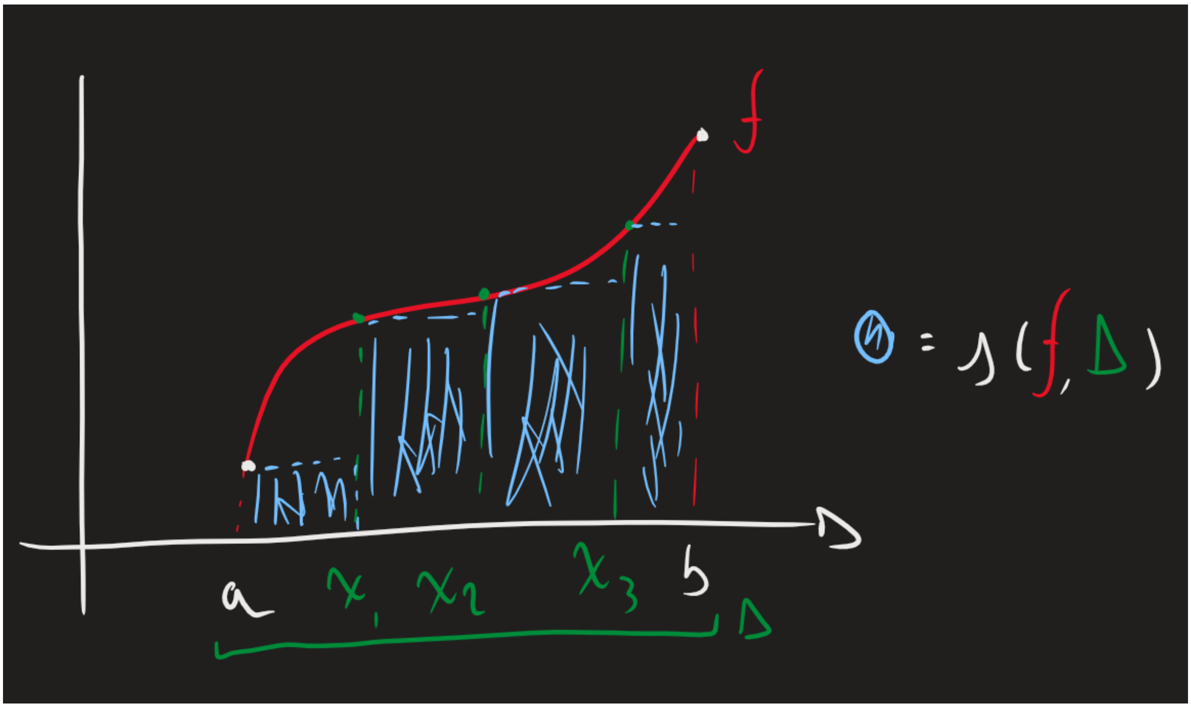
Definizione 1.1. (somma inferiore per una funzione relativa ad una suddivisione)

Sia $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *limitata* (ovvero l'immagine $f([a,b])$ è *limitata*).
Prendo una *suddivisione* (Suddivisione di un Intervallo > ^379a7b) qualsiasi Δ.
Chiamo la *somma inferiore per* f *relativa a* Δ come il seguente:

$$\boxed{s(f,\Delta)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]}f(x)}$$

Ovvero *graficamente* (figura 1.1.) questa significa la *somma delle aree di* *tutti i rettangolini composti dai punti della suddivisione*; ovvero la prima parte $x_i - x_{i-1}$ vuol semplicemente dire la *base* del rettangolino; invece $\inf f(x)$ è l'*altezza* "approssimata per difetto".

FIGURA 1.1. (*Concetto grafico di somma inferiore*)



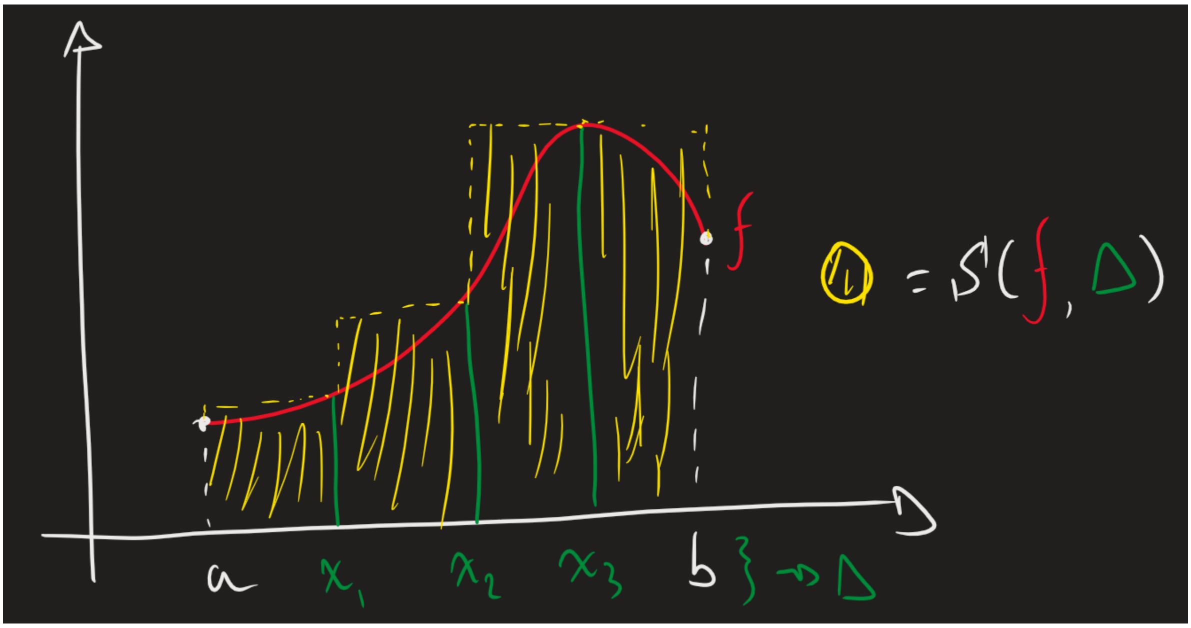
#Definizione

Definizione 1.2. (somma superiore per una funzione relativa ad una suddivisione)

Sia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *limitata*, sia Δ una suddivisione del dominio.
Analogamente alla definizione della *somma inferiore per* f *relativa a* Δ (^1ff0a9), definisco la *somma superiore per* f *relativa a* Δ come la stessa, solo che al posto di *"approssimare"* per difetto prendendo $\inf$, approssimo per *eccesso* prendendo $\sup$;

$$\boxed{S(f, \Delta) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)}$$

FIGURA 1.2. (*Idea grafica della somma superiore*)



2. Osservazioni sulle somme superiori e inferiore

Queste osservazioni vengono effettuate al fine di comprendere meglio il concetto di *integrabilità secondo Riemann* (Integrabilità secondo Riemann).
Come *"presupposto"* di queste osservazioni facciamo la seguente:
#Osservazione

Osservazione 2.1. (prima osservazione)

Ogni volta che prendo una suddivisione $\Delta \in \mathcal{D}$, posso calcolare sia la *somma superiore* $S(f, \Delta)$ ed *inferiore* $s(f, \Delta)$ relativa ad essa; ci poniamo le seguenti domande. (*osservazioni 2.2., 2.3., 2.4.*)

#Osservazione

Osservazione 2.2. (la somma inferiore è sempre più piccolo della somma superiore)

Qual è la relazione tra $s(f, \Delta)$ e $S(f, \Delta)$?
Dato che sia la *somma inferiore* e *superiore* sono definiti dalla stessa *"base"* $x_i - x_{i-1}$, allora l'unica parte per cui differiscono è *"l'altezza"*; da un lato abbiamo $\inf f$ e dall'altro abbiamo $\sup f$.
Ma allora, per definizione un *estremo inferiore* di f è sempre più piccolo di qualsiasi valore di f, incluso l'*estremo superiore* di f che a sua volta è più grande di qualsiasi valore di f.
Allora si evince che

$$\boxed{s(f, \Delta) \leq S(f, \Delta)}$$

Lo stesso vale anche se abbiamo funzioni che hanno *valori negativi*, in quanto le aree *"contano negativamente"*.

#Osservazione

Osservazione 2.3. (la somma inferiore e superiore di suddivisioni più fini)

Osserviamo che aggiungendo ad una qualsiasi suddivisione Δ un elemento questa diventa più *fine* (Suddivisione di un Intervallo > ^6c1bae), in quanto stiamo sostanzialmente facendo una unione di un elemento con un insieme.
Allora supponendo $\Delta_1 \supseteq \Delta_2$, ci chiediamo quale sia la relazione tra le loro *somme inferiori*.
Possiamo ragionare *graficamente* (figura 2.3.): aggiungendo un *"pezzo di suddivisione"* in più, abbiamo una specie di nuovo *"contributo"* da parte di questo elemento aggiunto.
Allora si evince che

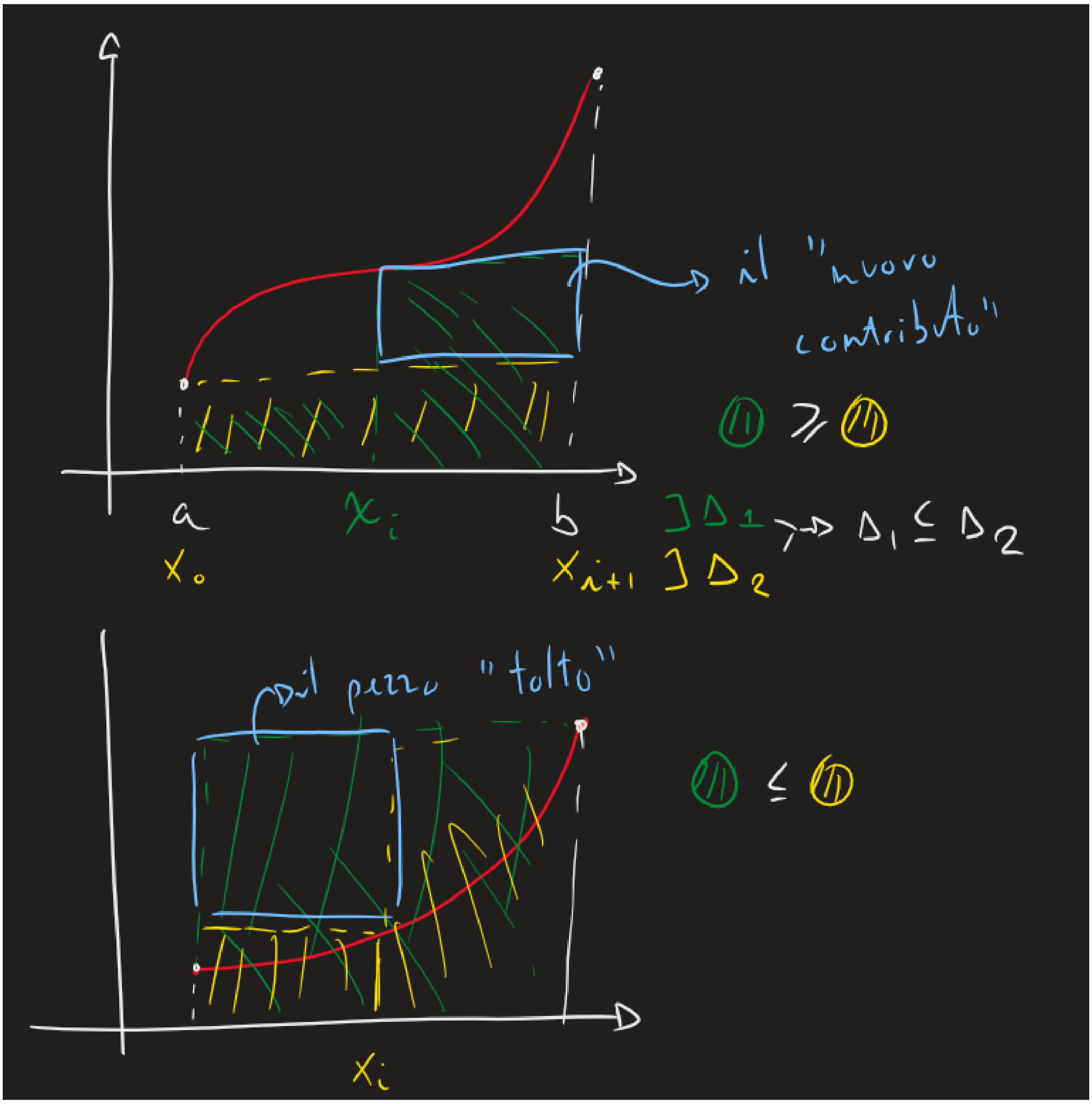
$$\boxed{s(f, \Delta_1) \geq s(f, \Delta_2)}$$

Analogamente si evince pure che

$$\boxed{S(f, \Delta_1) \leq S(f, \Delta_2)}$$

in quanto abbiamo dei *"pezzettini"* tolti (figura 2.3.).

FIGURA 2.3. (*Idea grafica delle somme superiori inferiori di suddivisioni più fini delle altre*)



#Osservazione

Osservazione 2.4. (la relazione tra somma inferiore e superiore di suddivisioni qualsiasi)

Siano Δ_1, Δ_2 delle *suddivisioni* qualsiasi.
Quale sarà mai la relazione tra la *somma inferiore* per Δ_1 e la *somma superiore* per Δ_2;

$$s(f, \Delta_1) \ ? \ S(f, \Delta_2)$$

Intuitivamente si può pensare che la *somma inferiore* sarà sempre piccola di una *somma superiore* per suddivisioni qualsiasi; infatti la somma superiore *"contiene"* sempre la *somma inferiore* (*figura 2.4.*).
Infatti questa sembra una sorta di *"panino"*, dove le linee delineate dalla somma superiore è la fetta di pane superiore; la parte in mezzo la carne; la parte sotto sono le linee delineate dalla somma inferiore. (*forse non consiglio di usare questa analogia all'orale*)
Infatti, ricordandoci delle osservazioni fatte sulle *suddivisioni* (Suddivisione

di un Intervallo > ^64461d) possiamo prendere *l'unione* delle suddivisioni, maggiorarlo per la *suddivisione inferiore* di Δ_1, poi maggioriamo a sua volta l'unione con la *somma superiore* dell'unione (per *osservazione 2.2.* ^fd1845), che a sua volta la maggioriamo con la *somma superiore* di Δ_2 (*osservazione 2.3.*, ^80234e).
Ovvero, in simboli matematici questo equivale a

$$s(f,\Delta_1) \leq s(f,\Delta_1 \cup \Delta_2) \leq S(f,\Delta_1 \cup \Delta_2) \leq S(f,\Delta_2)$$

Quindi, alla fine possiamo affermare che la *somma inferiore* di una qualsiasi suddivisione è *sempre minore o uguale* di una *somma superiore* di un'altra qualsiasi suddivisione. Ovvero la seguente proposizione.

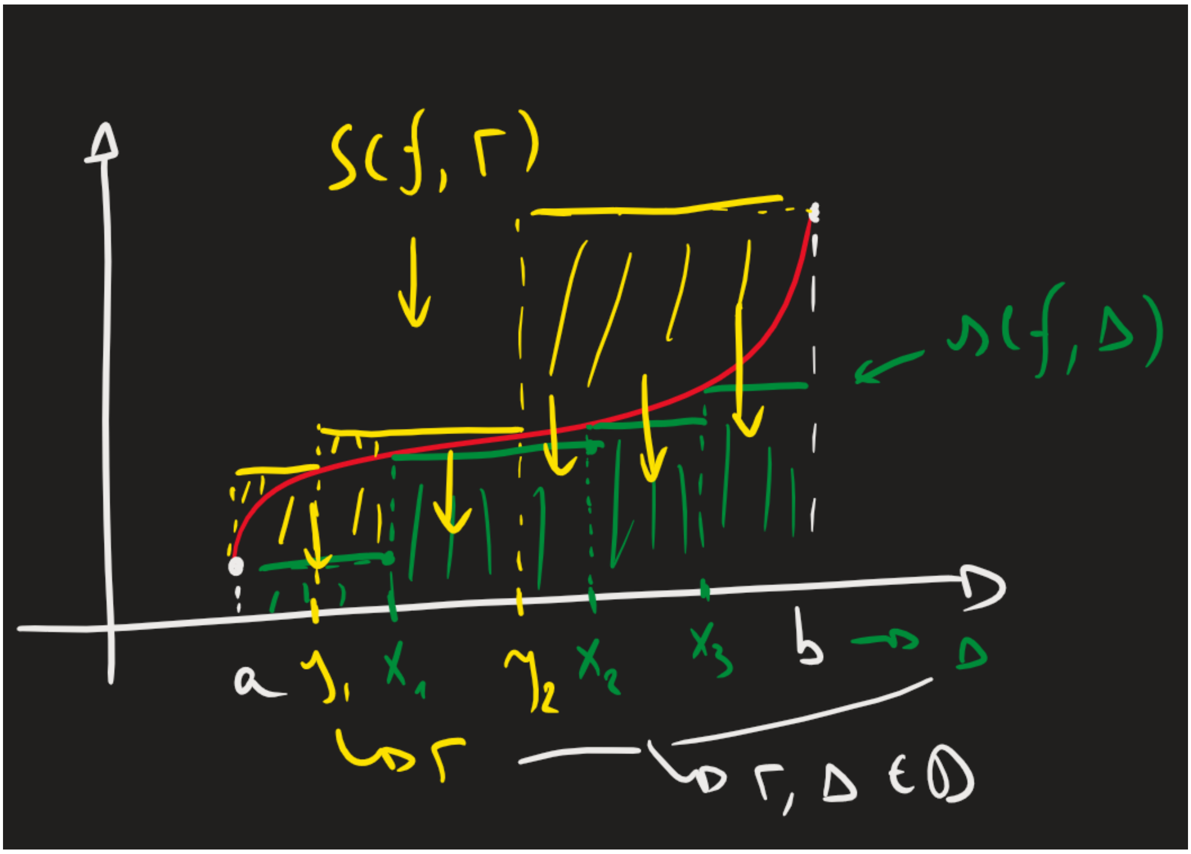
#Proposizione

Proposizione 2.1. (relazione tra somma inferiore e superiore)

Se f è *limitata*, allora le *somme inferiore* sono sempre *minori o uguali* alla somma *superiore*.

$$\boxed{\sup_{\Delta\in\mathcal{D}} s(f,\Delta) \leq \inf_{\Gamma\in\mathcal{D}} S(f,\Gamma)}$$

FIGURA 2.4. (*Intuizione grafica della proposizione 2.1.*)



SEZIONE A. L'INTEGRALE DI RIEMANN

A1. Definizione di Integrabilità secondo Riemann

Integrabilità secondo Riemann

Definizione di funzione integrabile secondo Riemann; teorema di caratterizzazione di funzione integrabile: enunciato e dimostrazione.

---

0. Prerequisiti e/o voci correlate

- Somma inferiore e superiore per una Funzione
- Esempi di Funzioni Integrabili
- Tipologie di Funzioni Integrabili

1. Definizione di Integrabilità secondo Riemann

#Definizione

Definizione 1.1. (integrabilità di una funzione secondo Riemann)

Sia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *limitata*.
Si dice che f è *"integrabile secondo Riemann"* se vale che

$$\boxed{\sup_{\Delta \in \mathcal{D}} s(f, \Delta) = \inf_{\Gamma \in \mathcal{D}} S(f, \Gamma)}$$

#Definizione

Definizione 1.2. (integrale di Riemann di una funzione su un intervallo)

ISia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *integrabile secondo Riemann*.
Allora il valore per cui vale la relazione di definizione

$$\sup_{\Delta \in \mathcal{D}} s(f, \Delta) = \inf_{\Gamma \in \mathcal{D}} S(f, \Gamma)$$

lo chiamo *integrale di Riemann di f sull'intervallo* $[a, b]$ e lo denoto come

$$\sup_{\Delta \in \mathcal{D}} s(f, \Delta) = \inf_{\Gamma \in \mathcal{D}} S(f, \Gamma) = \boxed{\int_{[a,b]} f = \int_a^b f(x)\, dx}$$

#Definizione

Definizione 1.3. (l'insieme delle funzioni integrabili secondo Riemann)

Indico l'*insieme delle funzioni integrabili secondo Riemann sull'intervallo* $[a,b]$ con la seguente notazione

$$\mathcal{R}([a,b])$$

2. Teorema di caratterizzazione delle funzioni integrabili

#Osservazione

Osservazione 2.1. (la necessità di una strategia per verificare l'integrabilità)

Notiamo che secondo la nostra *definizione* dell'integrabilità di una funzione, diventa molto difficile verificare se delle funzioni f siano effettivamente *integrabili* o meno; infatti bisogna fare delle *verifiche infinite* per vedere se l'estremo superiore delle somme inferiori coincida effettivamente con l'estremo inferiore delle somme superiori.
Allora si propone il seguente teorema per *"semplificarci"* la vita trovando un modo per raggirare questi *"calcoli infiniti"*.

#Teorema

Teorema 2.1. (condizione necessaria e sufficiente per l'integrabilità secondo Riemann)

Sia $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ *limitata*.
Allora f è *integrabile secondo Riemann* se e solo se vale che

$$\boxed{\begin{gathered}\forall\varepsilon>0,\exists\Delta\in\mathcal{D}:\\ S(f,\Delta)-s(f,\Delta)<\varepsilon\end{gathered}}$$

Ovvero, per ogni ε piccolo a piacere possiamo trovare una *suddivisione* Δ tale che la differenza tra la *somma superiore* e la *somma inferiore* di f relativa a Δ è minore di ε; ovvero la somma delle *"aree intermedie"* diventa piccolo a piacere.
Questo ci ricorda infatti la nozione di *limite* secondo *Cauchy* (Definizione di Limite di funzione > ^0f845a): abbiamo un valore *piccolo a piacere* a cui dobbiamo associare un *valore*.

#Dimostrazione
DIMOSTRAZIONE del *teorema 2.1.* (^92bcfb)
" $\implies$ ": Supponiamo f *integrabile secondo Riemann*.
Allora esiste un valore reale

$$\sup s(f,\Delta) = \inf S(f,\Delta) = \int_{[a,b]} f = \int f \text{ (scrivo per compattezza)}$$

Allora, per la *seconda proprietà* dell'estremo superiore e inferiore (Insiemi limitati, maggioranti, massimo e teorema dell'estremo superiore > ^601040), valgono che

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \exists \bar{\Delta} : \int f - \frac{\varepsilon}{2} < s(f,\bar{\Delta}) \\ \forall \varepsilon > 0, \exists \tilde{\Delta} : \int f + \frac{\varepsilon}{2} > S(f,\tilde{\Delta}) \end{cases}$$

Ma allora prendendo *l'unione delle due suddivisioni* $\Gamma = \bar{\Delta} \cup \tilde{\Delta}$ vale che

$$\begin{cases} s(f,\Gamma) > s(f,\bar{\Delta}) > \int f - \frac{\varepsilon}{2} \\ S(f,\Gamma) < S(f,\tilde{\Delta}) < \int f + \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

Ora manipolo la prima espressione, moltiplicando per -1, per ottenere

$$-s(f,\Gamma) \cancel{< S(f,\bar{\Delta})} < -\int f + \frac{\varepsilon}{2}$$

Allora sommo $-s(f,\Gamma) < -\int f + \frac{\varepsilon}{2}$ con $S(f,\tilde{\Delta}) < \int f + \frac{\varepsilon}{2}$ per ottenere

$$\boxed{S(f,\Gamma) - s(f,\Gamma) < \varepsilon}$$

che è esattamente la *tesi*.
" $\impliedby$ ": (*Idea*) Supponiamo per assurdo che vale la *condizione di caratterizzazione* e che non vale la *tesi*; ovvero supponiamo che la *somma superiore* è sempre lontana dalla *somma inferiore*. Ovvero

$$\sup s(f,\Delta) < \inf S(f,\Gamma)$$

Ma allora basta fissare

$$\varepsilon = \frac{1}{4}(\inf s - \sup S)$$

Si vede che non ci sarà *mai* un $\Delta \in \mathcal{D}$ che renda vera la *condizione di caratterizzazione*, che è un assurdo. ■

A2. Funzioni Integrabili secondo Riemann

Esempi di Funzioni Integrabili

Esempi di funzioni integrabili e non integrabili, corredato da calcoli.

---

0. Prerequisiti e/o voci correlate

- Integrabilità secondo Riemann
- Tipologie di Funzioni Integrabili
- Esempi di Induzione / Assiomi di Peano, il principio di induzione
- Somma inferiore e superiore per una Funzione
- Limite di Successione / Esempi di Limiti di Successione
- Conseguenze dell'esistenza dell'estremo superiore

1. Integrabilità di alcune funzioni elementari

Funzione costante

#Esempio

Esempio 1.1. (funzione costante)

Sia $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ la *funzione costante* $x \mapsto c \in \mathbb{R}$.
Allora, intuitivamente si può vedere la sua *area* sotto la *"curva"* (o linea retta) è semplicemente *base per altezza*, ovvero $c \cdot (b-a)$ (*figura 1.1.*).
Però usiamo l'*integrazione di Riemann* (Integrabilità secondo Riemann > ^64ad3b) per calcolare il suo *integrale*, ovvero l'*area*.
Calcolo dunque la sua *somma inferiore* (Somma inferiore e superiore per una Funzione > ^1ff0a9) per una sua qualsiasi suddivisione:

$$s(f, \Delta) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot \inf f(x)$$

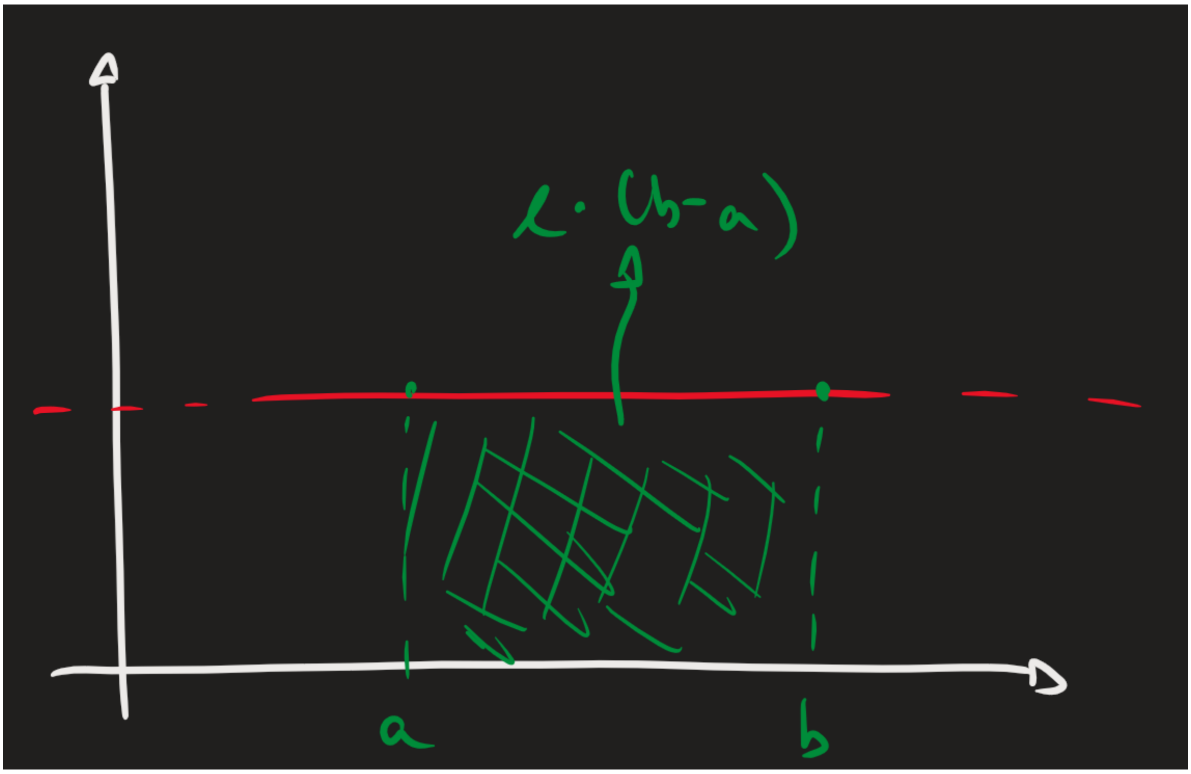
Però $f(x)$ è limitata *solo* su c; infatti $f(x) = c$. Allora ciò segue che

$$\begin{aligned} s(f, \Delta) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot c = c \sum_{i=1}^{n} x_i - x_{i-1} \\ &= c \cdot [(x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \ldots + (x_n - \\ &= c \cdot (x_n - x_0) = \boxed{c \cdot (b-a)} \end{aligned}$$

Facendo la stessa procedura, che è letteralmente la stessa, per la *somma superiore* $S(f, \Delta)$ otteniamo lo stesso risultato.
Dunque,

$$\boxed{\int_a^b c\, dx = c(b-a)}$$

FIGURA 1.1. (*Funzione costante*)



Funzione identità

#Esempio

Esempio 1.2. (funzione identità)

Sia $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ la *funzione identità* $\mathrm{id}(x) = x$.
Allora anche qui si può intuire che l'*area sotto la retta* è l'*area di un triangolo*, ovvero *base per altezza diviso due*. Pertanto $A = f(1)(1-0) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.
Ora verifichiamo quest'affermazione secondo l'*integrazione di Riemann*.
Prendiamo una *suddivisione particolare* $\Delta = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n} = 1\}$.
Con tale suddivisione calcoliamo la *somma inferiore* e la *somma superiore*.

1. Somma inferiore

$$\begin{aligned} s(f,\Delta) &= \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \\ &= \sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{n}) \cdot (\frac{i-1}{n}) \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(i-1) \end{aligned}$$

2. Somma superiore (passi analoghi)

$$S(f,\Delta) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i$$

Ma noi conosciamo una *proprietà della somma dei primi n numeri naturali*, ovvero

$$\sum_{x=1}^{n} x = \frac{n(n+1)}{2}$$

Naturalmente questa è dimostrabile per *induzione* (Esempi di Induzione > ^d8e983).
Allora prendiamo per buone le seguenti:

$$s(f,\Delta) = \frac{(n-1)(n)}{2n^2}; S(f,\Delta) = \frac{(n+1)(n)}{2n^2}$$

Sottraendo la somma superiore per la somma inferiore vediamo che questa risulta in

$$S - s = \frac{1}{n}$$

Ma per l'*archimedeità dei reali* (Conseguenze dell'esistenza dell'estremo superiore > ^d95d40) sappiamo che è vera la seguente:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n : 0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

Quindi sicuramente la funzione identità è *integrabile secondo Riemann*.
Ora procediamo a calcolare l'integrale: consideriamo innanzitutto che per definizione l'integrale *deve* stare tra la *somma inferiore* e la *somma superiore* della funzione, ovvero

$$s(f,\Delta) \leq \int_{[0,1]} f(x) \leq S(f,\Delta)$$

Però prendendo i *limiti di successione* (Limite di Successione >

^ef60f6) di $s(f,\Delta)$ e $S(f,\Delta)$ vediamo che entrambe *convergono* a $\frac{1}{2}$; infatti

$$\lim_n \frac{(n-1)(n)}{2n^2} = \lim_n \frac{1}{2}(1-\frac{1}{n}) = \frac{1}{2}$$

Allora per il *teorema dei due carabinieri versione successione* (Limite di Successione > ^72d83a), vale che anche *l'integrale* converge a $\frac{1}{2}$; pertanto

$$\boxed{\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}}$$

Funzione potenza quadrata

#Esempio

Esempio 1.3. (funzione quadrato)

Sia $f:[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=x^2$.
Vogliamo calcolare l'integrale $\int_0^1 f(x)\,dx$.
Analogamente all'*esempio 1.3.*, prendiamo la suddivisione

$$\Delta = \{0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n}=1\}$$

Ora calcoliamo la *somma inferiore* e *superiore*.

$$s(f,\Delta) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n}\cdot(\frac{i-1}{n})^2 = \frac{1}{n^3}\cdot\sum_{i=1}^n (i-1)^2$$
$$S(f,\Delta) = \frac{1}{n^3}\cdot\sum_{i=1}^n i^2$$

Allora calcolando le loro *differenze* otteniamo il medesimo risultato $\frac{1}{n}$; pertanto $f(x)=x^2$ è *integrabile secondo Riemann*.
Adesso consideriamo la proprietà della *somma dei quadrati* per cui si ha

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Anche questa è *dimostrabile per induzione*.
Ora vogliamo calcolare il valore dell'integrale; come prima consideriamo che l'integrale è *"compresso"* tra la sua somma inferiore e superiore, ovvero

$$\frac{1}{n^3} \cdot \frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6} \leq \int_0^1 f(x)\,dx \leq \frac{1}{n^3} \cdot \frac{(n)(n+1)(2n+1)}{6}$$

Però considerando i *limiti di successione* per gli *"estremi"* abbiamo che entrambi *convergono* per il valore $\frac{1}{3}$; pertanto l'integrale è

$$\boxed{\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}}$$

La difficoltà dell'integrazione

#Osservazione

Osservazione 1.1. (la necessità di una tecnica alternativa dell'integrazione)

Vediamo che calcolare l'*integrale* di una funzione secondo la *tecnica di Riemann* risulta spesso *"faticoso"* e *"difficile"* (anche se discutibile!): perciò sorge la necessità di trovare un altro modo più *"semplice"* per calcolare gli *integrali*, raggirando ad esempio il calcolo delle *somme inferiore e/o superiore*.
A proposito di ciò argomenterebbero a favore i noti matematici russi *A. N. Kolmogorov*, *A. D. Aleksandrov* e *M. A. Lavrent'ev*(1): loro affermerebbero che che ci serve un metodo più *"generale"* per calcolare gli integrali, in quanto fino ad ora abbiamo adoperato *"tecniche specialissime"*.

---

(1): *"[...] Per di più, anche quando sia possibile eseguire tale somma, ciò non si può fare con un metodo generale, ma con tecniche specialissime, dipendenti dal singolo problema.*
Sorge quindi il problema di trovare un metodo generale peri l calcolo dell'integrale definito. Il problema generale del calcolo delle aree e dei volumi, così ricco di conseguenze pratiche, interessò i matematici per lungo tempo" - tratto da *"Le Matematiche - Analisi, Algebra, Geometria Analitica"* (1974) di A. N. Kolmogorov, A. D. Aleksandrov e M. A. Lavrent'ev

---

Funzione esponenziale

#Esercizio

Esercizio 1.1.

Per esercizio calcolare l'integrale

$$\int_0^1 e^x \, dx$$

2. Funzioni non integrabili

#Osservazione

Osservazione 2.1. (esempio di funzione non integrabile)

Esistono funzioni che *non* siano *integrabili secondo Riemann*?
La risposta è sì, in quanto se consideriamo la *funzione di Dirichlet* scopriamo che questa non sia derivabile.
La funzione di Dirichlet è definita nel seguente modo:

$$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}; f(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Allora se prendo la sua *somma superiore* vedo che questa è sempre 1, in quanto prendendo un qualsiasi intervallo $[x_{i-1}, x_i]$ ci dev'essere *almeno* un numero razionale tra questi (Conseguenze dell'esistenza dell'estremo superiore > ^e279b1). Pertanto il $\sup$ della funzione diventa 1.
Analogamente la *somma inferiore* è sempre 0.
Pertanto, vedo che

$$s(f, \Delta) \neq S(f, \Delta) \implies f \notin \mathcal{R}$$

A3. Tipologie di funzioni integrabili

Tipologie di Funzioni Integrabili

Teoremi che prescrivono l'integrabilità di certe famiglie di funzioni.

---

0. Prerequisiti e/o voci correlate

- Funzioni (monotonia)

- Teoremi sulle funzioni continue (thm. di Weierstraß)
- Definizione di continuità
- Continuità Uniforme
- Conseguenze dell'esistenza dell'estremo superiore
- Suddivisione di un Intervallo
- Somma inferiore e superiore per una Funzione
- Integrabilità secondo Riemann
- Esempi di Funzioni Integrabili

1. L'integrabilità delle funzioni monotone

#Teorema

Teorema 1.1. (di integrabilità della funzioni monotone)

Sia $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$; sia f *monotona* (Funzioni > ^3fb408).
Allora f è *integrabile secondo Riemann* (Integrabilità secondo Riemann > ^5455b8).

$$\boxed{f \text{ monotona} \implies f \in \mathcal{R}([a,b])}$$

#Dimostrazione
DIMOSTRAZIONE del *teorema 1.1.* (^12da61)
Dimostriamo il caso in cui f è *monotona crescente*; la dimostrazione è analoga anche nel caso in cui f è *monotona decrescente*.
Osserviamo che f è anche *limitata* in $[f(a),f(b)]$ in quanto *monotona crescente*.
Allora considero la seguente *suddivisione* (Suddivisione di un Intervallo > ^318045).

$$\Delta = \{a, a+\frac{b-a}{n}, a+2(\frac{b-a}{n}), \dots, a+(n-1)\frac{b-a}{n}, b\}$$

Adesso calcolo la *differenza* tra la *somma superiore* e la *somma inferiore* relativa a questa suddivisione:

$$
\begin{aligned}
S(f,\Delta)-s(f,\Delta) &= \sum_{i=1}^{n}\frac{b-a}{n}(f(a+i(b-a))-f(a+(i-1)(b-a))) \\
&= \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)-f(x_{i-1}) \\
&= \frac{b-a}{n}(f(x_1)-f(x_0))+(f(x_2)-f(x_1))+\ldots+(f(x_n) \\
&= \frac{b-a}{n}(f(x_n)-f(x_0)) \\
&= (b-a)(f(b)-f(a))\cdot\frac{1}{n}
\end{aligned}
$$

Ma per *Archimede* (Conseguenze dell'esistenza dell'estremo superiore > ^d95d40) questa quantità diventa piccola a piacere; pertanto per il *teorema di caratterizzazione delle funzioni integrabili* (Integrabilità secondo Riemann > ^92bcfb), la funzione f è *integrabile secondo Riemann*. ■

2. Integrabilità delle funzioni continue

#Teorema

Teorema 2.1. (di integrabilità delle funzioni continue)

Sia $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ una funzione *continua* (Definizione di continuità > ^d2f56f) sul suo dominio.
Allora f è *integrabile secondo Riemann*.

$$
\boxed{f\text{ continua}\implies f\in\mathcal{R}([a,b])}
$$

#Dimostrazione
DIMOSTRAZIONE del *teorema 2.1.* (^dd4f09)
Richiamiamoci ad una delle *proprietà delle funzioni continue*, ovvero il *teorema di Heine* (Continuità Uniforme > ^d030d1).

Teorema 2.1. (di Heine)

Sia $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ *continua* (e ovviamente $[a,b]$ è *compatta* (Insiemi compatti in R > ^0eb138)).
Allora f è *uniformemente continua*.

Ovvero *"alla Cauchy"* sappiamo che è vero il seguente:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in [a, b]$$
$$|x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Allora fissiamo un qualunque $\varepsilon > 0$ e grazie alla continuità uniforme possiamo garantirci che esiste un δ tale che

$$\forall x_1, x_2 \in [a, b], |x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

In tal caso considero una *suddivisione* (Suddivisione di un Intervallo > ^318045) dove ogni *"distanza"* tra due punti della suddivisione è minore di tale δ trovato. Ovvero, considero un

$$\Delta \in \mathcal{D} : \forall i, x_i - x_{i-1} < \delta$$

Graficamente questo ragionamento corrisponde alla *figura 2.1.*
Ora calcolo la *differenza tra la somma superiore e la somma inferiore* (Somma inferiore e superiore per una Funzione)

$$S(f, \Delta) - s(f, \Delta) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})(\sup_{[x_i, x_{i-1}]} f(x) - \inf_{[x_i, x_{i-1}]} f(x))$$

Ora considero il fatto che la funzione f è *continua* e che *"agiamo"* su un intervallo chiuso e limitato: vediamo che così vale il *teorema di Weierstraß* (Teoremi sulle funzioni continue > ^918fc1). Di conseguenza, possiamo considerare l'estremo superiore e inferiore come il minimo e massimo della funzione.

$$\sup_{[x_i, x_{i-1}]} f(x) = \max_{[x_i, x_{i-1}]} f(x) = f(x_{\max,i})$$

e analogamente

$$\inf_{[x_i, x_{i-1}]} f(x) = \min_{[x_i, x_{i-1}]} f(x) = f(x_{\min,i})$$

Pertanto

$$\sup_{[x_i, x_{i-1}]} f(x) - \inf_{[x_i, x_{i-1}]} f(x) = f(x_{\max,i}) - f(x_{\min,i})$$

Ma sapendo che sia i *punti di massimo e minimo* $x_{\max,i}$ e $x_{\min,i}$ devono necessariamente vivere in $[x_i, x_{i-1}]$, anche la loro distanza è minore di δ.
Graficamente quest'idea viene raffigurata nella *figura 2.2.*.
Pertanto, per l'ipotesi della continuità uniforme vale che

$$|x_{\max,i} - x_{\min,i}| < \delta \implies |f(x_{\min,i}) - f(x_{\max,i})| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

In definitiva, tutto assieme possiamo concludere la dimostrazione.

$$\begin{aligned}
S(f,\Delta) - s(f,\Delta) &= \sum_{i=1}^{n}(x_i, x_{i-1})(\sup_{[x_i,x_{i-1}]} f(x) - \inf_{[x_i,x_{i-1}]} f(x)) \\
&< \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})\frac{\varepsilon}{b-a} \\
&< \cancel{(b-a)}\frac{\varepsilon}{\cancel{b-a}} = \varepsilon \\
&\boxed{S(f,\Delta) - s(f,\Delta) < \varepsilon}
\end{aligned}$$

Che corrisponde alla *condizione necessaria e sufficiente dell'integrabilità* (Integrabilità secondo Riemann > ^92bcfb), pertanto f è *integrabile secondo Riemann*. ■

FIGURA 2.1. (*La suddivisione 'delta'*)

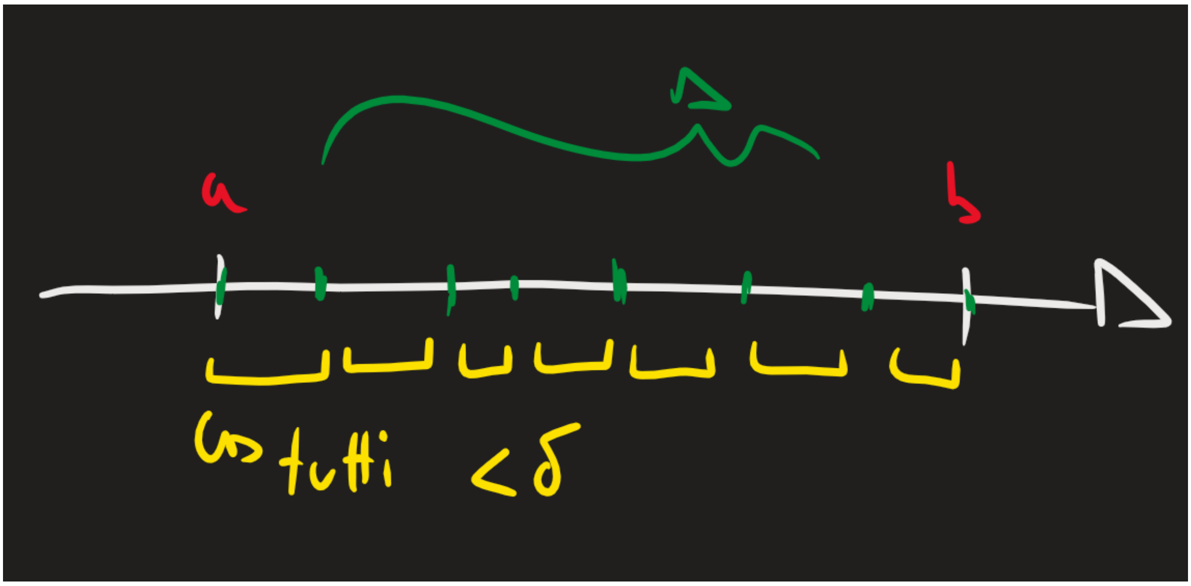
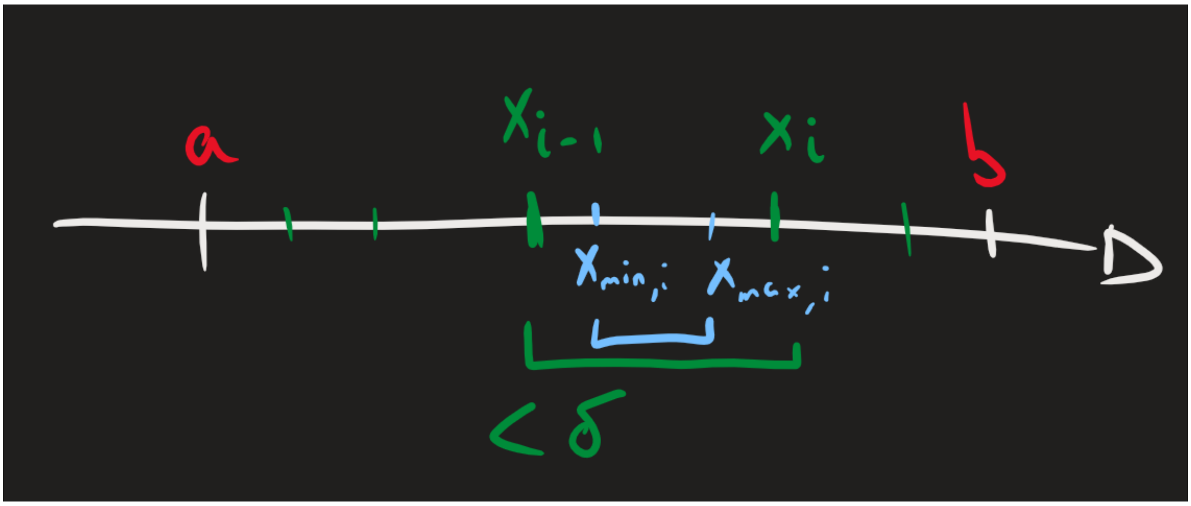


FIGURA 2.2. (*I punti di max e min vivono in delta*)



A4. Proprietà delle funzioni integrabili

Proprietà delle Funzioni Integrabili

Tutte le proprietà elementari delle funzioni integrabili: operazioni tra funzioni integrabili, confronto tra funzioni integrabili, pezzo di un integrale, convenzione di notazione degli integrali.

---

0. Prerequisiti e/o voci correlate

- Integrabilità secondo Riemann
- Suddivisione di un Intervallo
- Somma inferiore e superiore per una Funzione
- Funzioni di potenza, radice e valore assoluto (valore assoluto)
- Spazi Vettoriali
- Definizione di Applicazione Lineare

---

1. Integrali delle operazioni con funzioni

#Proposizione

Proposizione 1.1. (l'integrale di due funzioni sullo stesso intervallo)

Siano f, g delle *funzioni integrabili secondo Riemann* sull'intervallo $[a, b]$ (Integrabilità secondo Riemann > ^5455b8). Allora

$$f+g \in \mathcal{R}([a,b]); \int_a^b (f+g)(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE della *proposizione 1.1.* (^b48600)

Una *dimostrazione* che costituirà come la *"base di ragionamento"* delle proposizioni a venire è la seguente (infatti non dimostreremo le altre proposizioni, daremo una semplice idea grafica).

Consideriamo innanzitutto la *condizione necessaria e sufficiente per l'integrabilità* delle funzioni f, g (Integrabilità secondo Riemann > ^92bcfb).

Ovvero, fissando un $\varepsilon > 0$ ho

$$\begin{aligned} &1.\ \exists \Delta \in \mathcal{D} : S(f,\Delta) - s(f,\Delta) < \frac{\varepsilon}{2} \\ &2.\ \exists \Gamma \in \mathcal{D} : S(f,\Gamma) - s(f,\Gamma) < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Ora considero l'*unione delle suddivisioni* $\Delta \cup \Gamma$, che comporta una *suddivisione più fine* sia di Γ che di Δ (Suddivisione di un Intervallo > ^6c1bae).

Però in ogni caso vale che la differenza tra la *somma superiore e inferiore* è comunque *"contenuta"* in $\frac{\varepsilon}{2}$; questo vale sia per f che g relativa alla suddivisione $\Delta \cup \Gamma$.

Infatti quando prendiamo una suddivisione più fine, la *somma inferiore* tende ad *"alzarsi"*, invece la *somma superiore* tende ad *"abbassarsi"* (Suddivisione di un Intervallo > ^64461d).

$$S(f, \Delta \cup \Gamma) - s(f, \Delta \cup \Gamma) < \frac{\varepsilon}{2}$$

e analogamente

$$S(g, \Delta \cup \Gamma) - s(g, \Delta \cup \Gamma) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Inoltre chiamo l'unione delle suddivisioni come $\Delta \cup \Gamma = \Phi$ per comodità; adesso sommo le due precedenti disequazioni termine per termine e abbiamo il seguente:

$$S(f,\Phi) + S(g,\Phi) - (s(f,\Phi) + s(g,\Phi)) < \varepsilon$$

Ora osservo che la *somma superiore* della *somma delle due funzioni* è sempre *minore o uguale* alla *somma delle somme superiori delle funzioni* considerate separatamente, ovvero

$$S(f+g,\Phi) \leq S(f,\Phi) + S(g,\Phi)$$

Infatti, da un lato abbiamo un *"solo"* estremo superiore da cui prendere, dall'altro ne abbiamo due.
Inoltre l'osservazione appena effettuata vale lo stesso anche per *la somma inferiore*:

$$s(f+g,\Phi) \leq s(f,\Phi) + s(g,\Phi)$$

Allora, combinandoli insieme ottengo

$$S(f+g,\Phi) - s(f+g,\Phi) < \varepsilon$$

che è proprio la *condizione necessaria e sufficiente di integrabilità* per la funzione $f+g$ relativo all'intervallo Φ. ■

#Proposizione

Proposizione 1.2. (l'integrale dello scalamento di una funzione)

Sia f una funzione *integrabile secondo Riemann* su $[a,b]$ e sia λ uno *"scalare"* (ovvero numero) in $\mathbb{R}$.
Allora vale che $\lambda \cdot f$ è *integrabile* e che il suo *integrale* è il seguente.

$$\lambda \cdot f \in \mathcal{R}([a,b]); \int_a^b (\lambda \cdot f)(t)\ dt = \lambda \int_a^b f(t)\ dt$$

L'integrabilità delle funzioni in termini di algebra lineare

#Osservazione

Osservazione 1.1. (le funzioni integrabili costituiscono uno sottospazio vettoriale)

Notiamo che le proprietà appena enunciate sono molto *simili* a delle medesime proprietà per cui si definiscono enti certi matematici.
Parliamo infatti dei *spazi vettoriali* (in particolare dei *sottospazi vettoriali*): infatti, se consideriamo $\mathcal{F}$ come l'*insieme delle funzioni* e la dotiamo delle operazioni di *somma interna* e dello *scalamento esterno su* $\mathbb{R}$, allora $\mathcal{F}$ è un $\mathbb{R}$-*spazio vettoriale*. (Spazi Vettoriali > ^7e2c4e)

Per le proprietà appena viste, vediamo che chiaramente l'*insieme delle funzioni integrabili* $\mathcal{R}$ non è solo un *sottoinsieme* di $\mathcal{F}$, ma è pure *sottospazio vettoriale*: vale infatti che la *"funzione nulla"* $0: \mathbb{R} \longrightarrow 0$ è *integrabile* e le *proposizioni 1.1., 1.2.* sono esattamente la *chiusura della somma e dello scalamento*. (Sottospazi Vettoriali > ^9bcbf2)

Inoltre, la *dimensione* (Dimensione > ^3a9321) dell'insieme $\mathcal{R}$ è *infinita* in quanto l'insieme $\mathcal{F}$ è *infinitamente generata*.

#Osservazione

Osservazione 1.2. (l'applicazione lineare integrale)

Inoltre, definendo l'*"applicazione integrale"* (*non è il miglior termine che possiamo usare, ma ahimè*) come quella funzione in cui inseriamo una funzione integrabile e otteniamo il suo integrale, vediamo che questa costituisce un'*applicazione lineare*. Vale infatti l'additività e l'omogeneità. (Definizione di Applicazione Lineare > ^9b39f9)

$$\begin{aligned}\int_a^b : \mathcal{R}([a,b]) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto \int_{[a,b]} f\end{aligned}$$

2. Confronto tra gli integrali delle funzioni integrabili

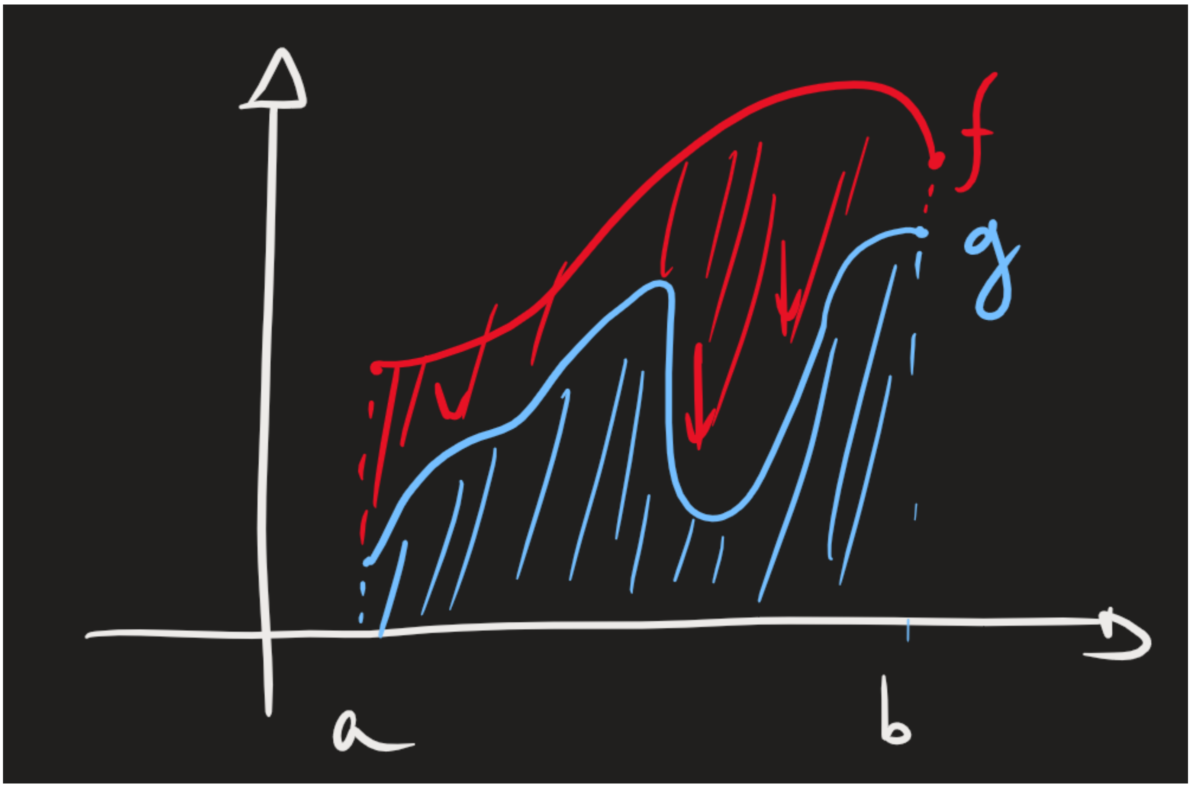
#Proposizione

Proposizione 2.1. (l'integrale di una funzione grande è più grande dell'integrale di una funzione piccola)

Siano f, g delle *funzioni* definite su $[a,b]$. Siano inoltre $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$. Valga che $\forall x \in [a,b], f(x) \geq g(x)$. (ovvero una funzione sta sempre in *"alto"* dell'altro)
Allora vale che

$$\int_{[a,b]} f \geq \int_{[a,b]} g$$

FIGURA 2.1. (*Idea intuitiva della proposizione 2.1.*)



#Proposizione

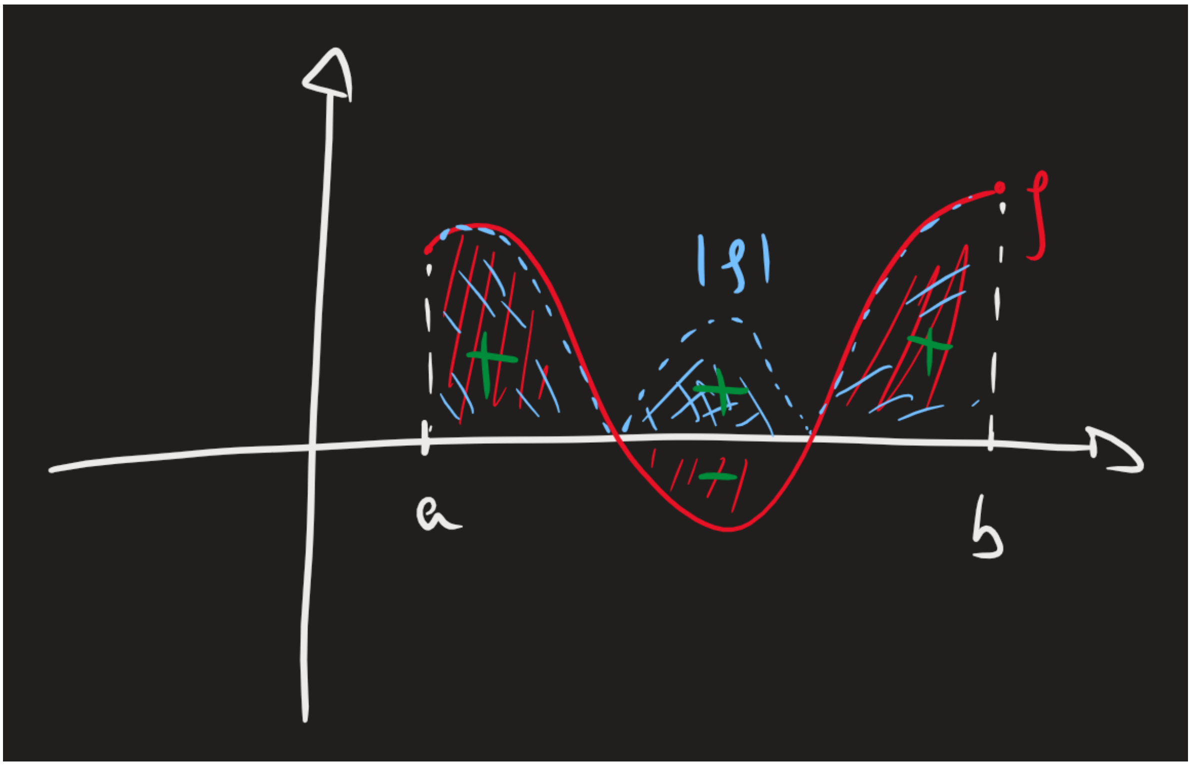
Proposizione 2.2. (l'integrale del valore assoluto di una funzione è più grande dell'integrale della funzione)

Sia f una funzione definita su $[a, b]$. Sia $f \in \mathcal{R}([a, b])$.
Allora $|f| \in \mathcal{R}([a, b])$ e vale che

$$\left| \int_b^a f(t)\, dt \right| \leq \int_b^a |f(t)|\, dt$$

Idealmente a sinistra abbiamo che *consideriamo l'area totale*, dove comunque le *"parti negative"* vengono sottratte alle *"parte positive"*. Invece a destra abbiamo che le *"parti negative"* diventano *"positive"*, dunque abbiamo la somma delle solo *"parti positive"*.

FIGURA 2.2. (*Idea grafica della proposizione 2.2.*)



3. Partizione di un'integrale

#Proposizione

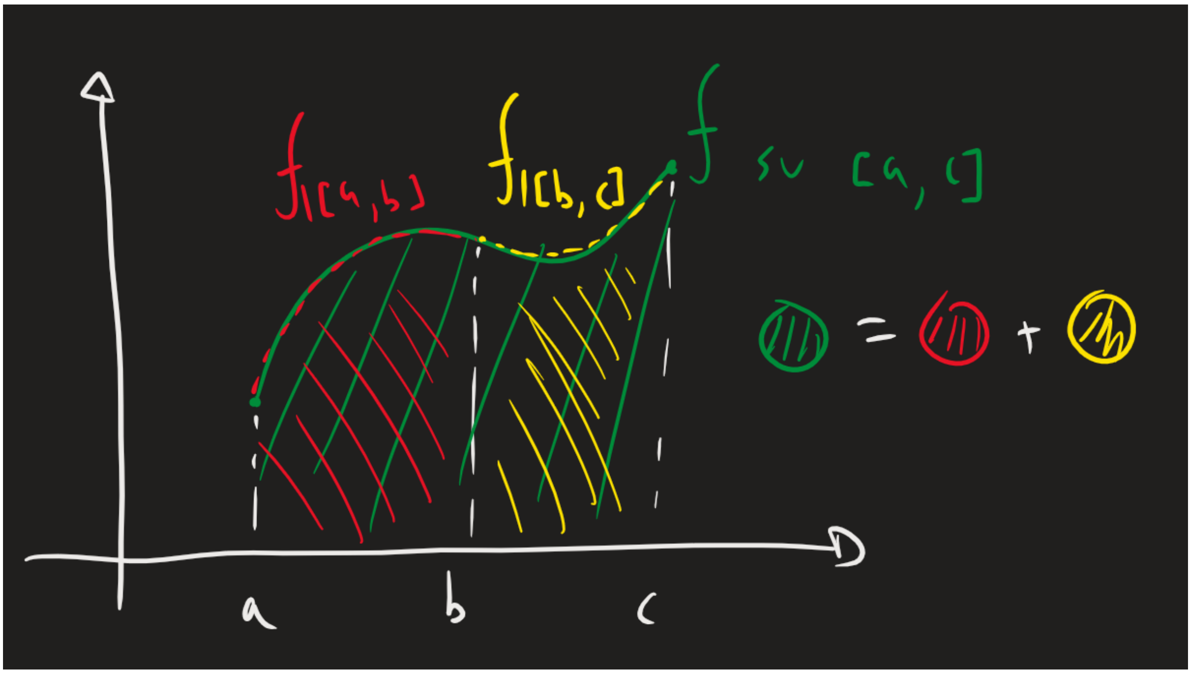
Proposizione 3.1. (la partizione di un'integrale)

Sia $f \in \mathcal{R}([a,b])$ e sia $c \in \ ]a,b[$ (punto *interno*).
Allora considerando la *restrizione* di f in $[a,c]$ e $[c,b]$ abbiamo che

$$f_{|[a,c]} \in \mathcal{R}([a,c]); f_{|[c,b]} \in \mathcal{R}([c,b])$$
$$\int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f = \int_{a,b} f$$

Graficamente quest'idea corrisponde a prendere *l'area* sotto la curva, prendere un punto c per lui la *dividiamo* e vediamo che la somma delle due aree tagliate è l'area intera totale.

FIGURA 3.1. (*Idea grafica della proposizione 3.1.*)



4. Convenzione di scrittura degli integrali

Convenzione di scrittura per gli integrali

Si propone la seguente convenzione per scrivere gli integrali, in particolare per quanto riguarda gli *intervalli* di definizione.
Siano $a, b, c \in \mathbb{R}$ dei numeri disposti in *qualsiasi modo*; possiamo avere $a < b < c$, $a < c < b$, e così via...
Allora se abbiamo l'integrale

$$\int_a^b f(t)\ dt$$

Possiamo *"scambiare"* il pedice e l'apice cambiando il segno; ovvero

$$\boxed{\int_a^b f(t)\ dt = -\int_b^a f(t)\ dt}$$

Notiamo inoltre che con questa convenzione valgono comunque tutte le *proprietà* enunciate, in particolare la *proposizione 3.1.*. Infatti possiamo *"giocare con i segni"* per ottenere ciò che vogliamo.

A5. Il teorema della media integrale

Teorema della Media Integrale

Breve descrizione qui

0. Prerequisiti e/o voci correlate

- Suddivisione di un Intervallo
- Insiemi limitati, maggioranti, massimo e teorema dell'estremo superiore
- Funzioni (minimo, massimo)
- Teoremi sulle funzioni continue (di Weierstraß e dei valori medi)
- Teorema di Torricelli-Barrow (ai fini della dimostrazione)

1. Enunciato del teorema

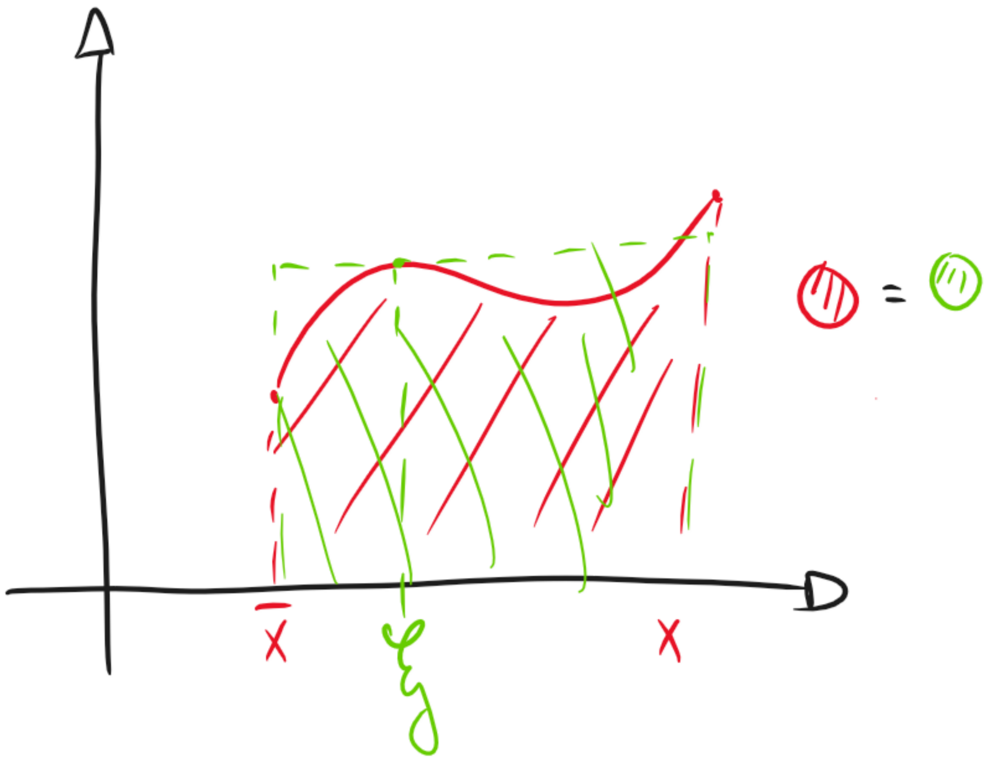
#Teorema

Teorema 1.1. (della media integrale)

Sia $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continua* (Definizione di continuità > ^d2f56f), pertanto *integrabile secondo Riemann* (Integrabilità secondo Riemann > ^5455b8). Allora per *esiste un valore nell'intervallo per cui l'immagine del valore sia uguale all'integrale della funzione diviso per la base*

$$\exists \xi \in [a,b] : f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt$$

FIGURA 1.1. (*Idea*)



2. Dimostrazione

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *teorema della media integrale* (^c2f053)
Innanzitutto tengo conto di una *proprietà di definizione* dell'integrale:

$$\forall \Delta \in \mathcal{D}, s(f, \Delta) \leq \int_a^b f(t)dt \leq S(f, \Delta)$$

Questo vale in particolare se scelgo la *suddivisione* più banale, ovvero

$$\Delta = \{a, b\}$$

che è la *meno fine* (Suddivisione di un Intervallo > ^6c1bae) di tutte le suddivisioni possibili.
Cosa succede in questo caso? Vediamo che abbiamo

$$\inf_{[a,b]} f \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(t)dt \leq \sup_{[a,b]} f \cdot (b-a)$$

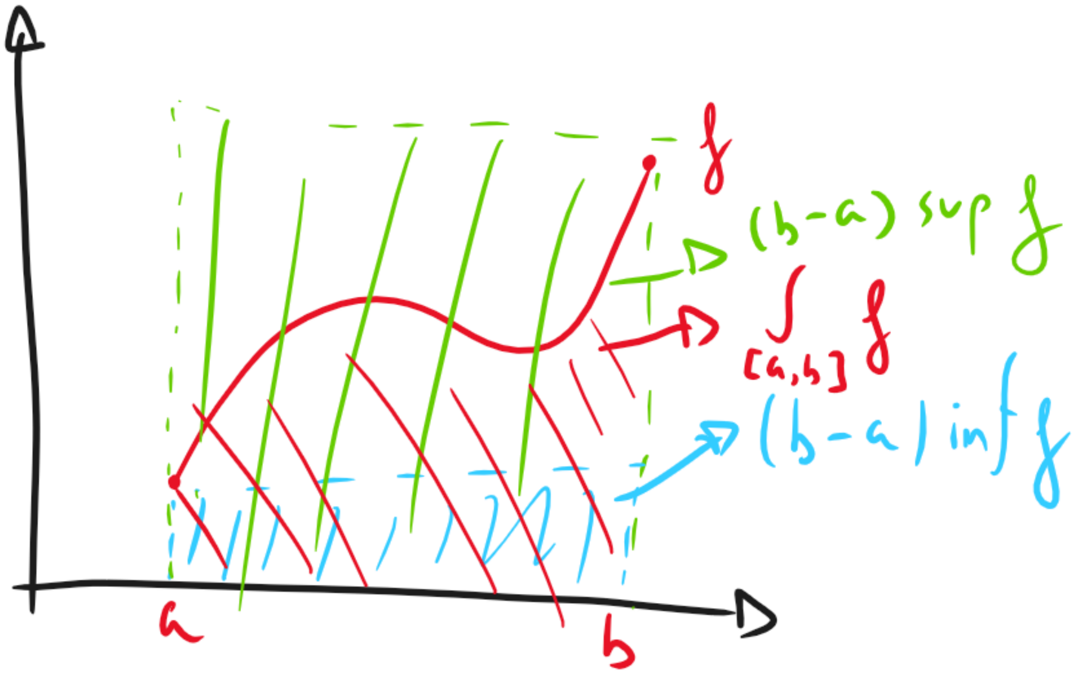
Graficamente se disegno il *rettangolo "più basso" possibile* e quello *"più alto" possibile*, ho che l'*area della funzione* viene *"incastrata"* tra di essi (*figura 2.1.*).
Ma per il *teorema di Weierstraß* (Teoremi sulle funzioni continue > ^918fc1) f ha sia $\min$ che $\max$ dato che essa è *continua* e viene definita su un *insieme chiuso e limitato*; allora $\inf, \min$ e $\sup, \max$ coincidono. Ovvero, definendo x_m il punto di *minimo* e x_M il punto di *massimo*, ho

$$f(x_m) \leq \frac{\int_a^b f(t)dt}{b-a} \leq f(x_M)$$

Infine applico il *teorema dei valori intermedi* (Teoremi sulle funzioni continue > ^1c6f7c) su $[a,b]$ e dunque ho

$$\exists \xi \in [a,b] : f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$$

FIGURA 2.1.



B. DETOUR SULLA PRIMITIVA DI FUNZIONE

B1. LA PRIMITIVA DI UNA FUNZIONE

Primitiva di una Funzione

La primitiva di una funzione: definizione, osservazioni.

---

1. Definizione di Primitiva di una Funzione

#Definizione

Definizione 1.1. (la primitiva di una funzione)

Siano $f, F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ due *funzioni di variabile reale*.
Allora se sussiste il seguente:

$$\boxed{\forall x \in [a, b], F'(x) = f(x)}$$

allora F si dice *primitiva* di f.

#Definizione

Definizione 1.2. (funzione primitivabile)

Sia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Se questa funzione ammette una funzione F primitiva (^eb48c4) per cui $F' = f$, allora f si dice *primitivabile*.

#Definizione

Definizione 1.3. (integrale indefinito di una funzione)

Tradizionalmente si chiama l'insieme delle *primitive* di una funzione $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ come *"l'integrale indefinito di f"* e lo si denota con

$$\int f(x)\ dx$$

NOTA. Al primo impatto questa definizione *tradizionale* è chiaramente confusionaria in quanto sembra di collegare due argomenti totalmente distaccati tra di loro: da un lato stiamo semplicemente considerando le *primitive* di una funzione, dall'altro degli *integrali* (Integrabilità secondo Riemann > ^64ad3b). Quale sarà mai il collegamento tra di loro, se esiste? Scopriremo questo nesso col *teorema fondamentale del calcolo integrale* (Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale).

2. Esempi di primitive funzioni e di funzioni non primitivabili

#Esempio

Esempio 2.1. (la primitiva della funzione identità)

Voglio calcolare la *primitiva* della funzione identità $f(x) = x$.
Un possibile approccio è quello di fare delle *"ipotesi ragionate"* su ciò che

possono essere dei *"buoni canditati"*: prendiamo ad esempio x^2. Prendendo la sua derivata $(x^2)' = 2x$, vedo che sono vicino (*fuocherello*). Allora basta dividere tutto per due e alla fine ottengo

$$(\frac{x^2}{2})' = x$$

Pertanto $\frac{x^2}{2}$ per definizione è *primitiva* di x.

#Esempio

Esempio 2.2. (funzioni non primitivabili)

Vediamo che possono *non* esistere delle funzioni non primitivabili; ovvero delle funzioni delle quali primitive *non* possono essere espresse in *termini di funzioni elementari* (ovvero quelle che conosciamo). Bisognerebbe infatti proprio *"inventare"* nuove funzioni ad-hoc che definiscono delle primitive di funzioni non primitivabili.
Ad esempio la funzione

$$f(x) = \frac{1}{\ln x}$$

non è *primitivabile*.

3. Generare altre primitive da una primitiva

#Osservazione

Osservazione 3.1. (possiamo trovare altre primitive a partire da una)

Osservo che a partire da una primitiva F di una funzione f (che ovviamente sia *primitivabile*), posso trovare le sue altre primitive: basterebbe aggiunge una costante $c \in \mathbb{R}$, in quanto la *derivata* della costante è 0.
Infatti

$$(F+c)' = F + 0 \implies (F+c)' = f$$

#Teorema

Teorema 3.1. (di struttura delle primitive di una funzione)

Sia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *primitivabile* (^5b45ed).
Sia F una sua *qualunque* primitiva.
Allora le *tutte e sole* primitive di f sono del tipo $F + c, c \in \mathbb{R}$.

> (riformulazione). Ovvero una funzione G è *primitiva* di f se e solo se è di forma $F+c$.

#Dimostrazione
DIMOSTRAZIONE del *teorema 3.1.* (^3a574e)
" $\Longleftarrow$ ". Questa è banalmente immediata: infatti $(F+c)'=F'=f$.
" $\Longrightarrow$ ". Considero $G-F$ per calcolarne la derivata:

$$(G-F)'=G'-F'=f-f=0$$

Per il *teorema di Lagrange* (Teorema di Lagrange > ^ef03c2) sappiamo che se $(G-F)'=0$ su $[a,b]$, allora la funzione $G-F$ è necessariamente una *funzione costante* (Conseguenze del teorema di Cauchy e di Lagrange > ^19eb72). Ma allora

$$G-F=c \Longrightarrow \boxed{G=F+c} \blacksquare$$

C. IL TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

C1. La (die) Integralfunktion

Funzione Integrale

Funzione Integrale: definizione di Funzione Integrale (Integralfunktion); prime proprietà della funzione integrale (lipschitziana e continua).

---

0. Prerequisiti e/o voci correlate

- Funzioni
- Integrabilità secondo Riemann
- Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale
- Esempi di Calcolo delle Primitive
- Primitive delle Funzioni Elementari
- Integrazione per Parti
- Integrazione per Sostituzione

1. Definizione di Integralfunktion (Funzione Integrale)

#Definizione

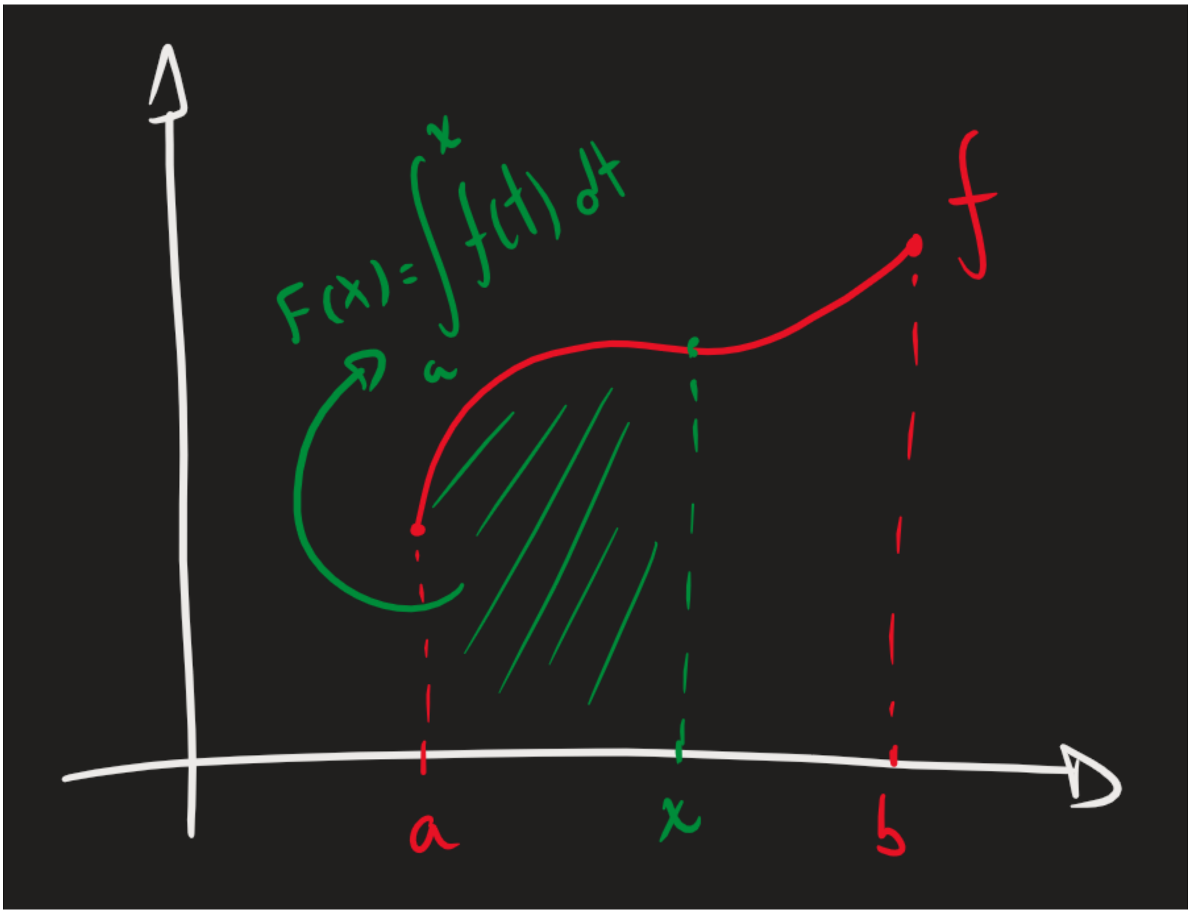
Definizione 1.1. (la funzione integrale / die Integralfunktion)

Sia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione *integrabile secondo Riemann sull'intervallo* $[a, b]$ (Integrabilità secondo Riemann > ^5455b8).
Allora definisco la *funzione integrale di* f su $[a, b]$ (oppure in tedesco *die Integralfunktion*) come il seguente:

$$\boxed{F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ F(x) = \int_a^x f(t)\ dt}$$

Geometricamente questo corrisponde a *prendere la singola area partizionata tra il punto* a, x (Proprietà delle Funzioni Integrabili > ^157e15) (*figura 1.1.*).

FIGURA 1.1. (*Idea grafica dell'Integralfunktion*)



2. Proprietà dell'Integralfunktion

Integralfunktion Lipschitziana

#Definizione

Definizione 2.1. (funzione lipschitziana)

Sia una $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una *funzione*, se vale la seguente condizione, ovvero

$$\exists M > 0 : \forall x_1, x_2 \in [a, b],$$
$$|g(x_1) - g(x_2)| \leq M|x_1 - x_2|$$

allora g si dice *lipschitziana* (o in tedesco *lipschitzstetig*).

#Proposizione

Proposizione 2.1. (funzione lipschitziana è continua)

In particolare, una funzione *lipschitziana* è anche *continua*: dalla condizione di *Lipschitz* deve discendere

$$\lim_{x_1 \to x_2} g(x_1) = g(x_2)$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE della *proposizione 2.1.* (^2635f6)

Dimostrazione lasciata al lettore per esercizio (Esercizi sulle funzioni > ^488ad5) ■

Consiglio: usare la definizione "alla Cauchy" della continuità.

#Teorema

Teorema 2.1. (die Integralfunktion ist lipschitzstetig)

Sia f una *funzione integrabile secondo Riemann sull'intervallo* $[a, b]$ (Integrabilità secondo Riemann) (ovvero $f \in \mathcal{R}([a, b])$).

Sia F l'*Integralfunktion* di f, ovvero $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$F(x) = \int_a^x f(x)\, dx$$

Allora la *funzione integrale* F è *lipschitziana* (^2635f6)

$$\exists M > 0 : \forall x_1, x_2 \in [a, b]$$
$$|F(x_1) - F(x_2)| \leq M|x_1 - x_2|$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *teorema 2.1.* (^7e839c)

Sia f *integrabile secondo Riemann*. Allora f è *limitata*, ovvero:

$$\exists M > 0 : \forall x \in [a, b], |f(x)| < M$$

dove, per due qualsiasi punti x_1, x_2 nell'intervallo di definizione abbiamo

$$\begin{aligned} F(x_1) - F(x_2) &= \int_a^{x_1} f(t)\ dt\ - \int_a^{x_2} f(t)\ dt \\ &= \int_a^{x_1} f(t)\ dt\ + \int_{x_2}^{a} f(t)\ dt \\ &= \int_{x_2}^{a} f(t)\ dt\ + \int_a^{x_1} f(t)\ dt \\ &= \int_{x_2}^{x_1} f(t)\ dt \end{aligned}$$

Allora

$$|F(x_1) - F(x_2)| = \left| \int_{x_2}^{x_1} f(t)\ dt \right| \leq \int_{x_2}^{x_1} |f(t)|\ dt$$

Posso piazzare il *valore assoluto* dell'integrale in quanto non è *garantito* che $x_1 < x_2$; infatti potremmo avere delle *"aree negative"* (Proprietà delle Funzioni Integrabili > ^cd03da).
Ma allora posso *"rimpiazzare"* $|f(t)|$ col valore per cui è limitato, ovvero M.

$$|f(t)| \leq M \implies |F(x_1) - F(x_2)| \leq \left| \int_{x_2}^{x_1} M\ dt \right| = M|x_1 - x_2|$$

Ovvero, in definitiva,

$$\boxed{|F(x_1) - F(x_2)| \leq M|x_1 - x_2|}\ \blacksquare$$

Integralfunktion Continua

#Corollario

Corollario 2.1. (die Integralfunktion ist kontinuierlich)

Sia f una *funzione integrabile secondo Riemann sull'intervallo* $[a, b]$ (Integrabilità secondo Riemann) (ovvero $f \in \mathcal{R}([a, b])$).
Sia F l'*Integralfunktion* di f, ovvero $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$F(x) = \int_a^x f(x)\, dx$$

Allora la *funzione integrale* F è *continua*, in quanto lipschitziana.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *corollario 2.1.* (^abcab0)
Questo teorema segue direttamente dal *teorema 2.1.* (^7e839c) e dalla *proposizione 2.1.* (^2635f6). Infatti la dimostrazione è già stata *"inclusa"* nell'enunciato. ■

C2. Il teorema fondamentale del calcolo integrale (FCI)

Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale

Teorema fondamentale del Calcolo Integrale: enunciato, dimostrazione e corollari.

---

0. Prerequisiti e/o voci correlate

- Funzioni
- Definizione di continuità
- Integrabilità secondo Riemann
- Funzione Integrale
- Derivata e derivabilità
- Rapporto Incrementale

1. Enunciato del Teorema F.C.I.

#Teorema

Teorema 1.1. (fondamentale del calcolo integrale)

Sia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione *integrabile secondo Riemann* (Integrabilità secondo Riemann > ^5455b8), ovvero $f \in \mathcal{R}([a, b])$.
Sia $\bar{x} \in [a, b]$. Sia f *continua* in $\bar{x}$ (Definizione di continuità > ^ddf65d).
Sia $F(x)$ l'*Integralfunktion* di f (Funzione Integrale > ^e5e02b), ovvero

$$F(x)=\int_a^x f(x)\,dx$$

Allora F è *derivabile* in $\bar{x}$ e vale che

$$\boxed{F'(\bar{x})=f(\bar{x})}$$

#Dimostrazione
DIMOSTRAZIONE del *teorema fondamentale del calcolo integrale* (^99ef41).
Per dimostrare il *teorema fondamentale del calcolo integrale* mi basta provare che la funzione integrale F è *derivabile* in $\bar{x}$ e che $F'(\bar{x})=\bar{x}$, ovvero *per definizione* della derivata (Derivata e derivabilità > ^478a87) devo provare il limite

$$\lim_{x\to\bar{x}} R_{\bar{x}}^F(x)=f(\bar{x}) \implies \lim_{x\to\bar{x}} R_{\bar{x}}^F-f(\bar{x})=0$$

dove $R_{\bar{x}}^F$ è il *rapporto incrementale* (Rapporto Incrementale > ^ccc58b)

$$\frac{F(x)-F(\bar{x})}{x-\bar{x}}$$

Allora riformulando nuovamente devo provare il limite

$$\lim_{x\to\bar{x}} \frac{\int_a^x f(t)dt-\int_a^{\bar{x}} f(t)dt}{x-\bar{x}}-f(\bar{x})=0$$

Però ricordandoci una delle proprietà per cui possiamo *"invertire"* il pedice con l'apice scambiando i segni ed effettuando delle manipolazioni posso avere

$$\int_a^x f(t)dt+\int_{\bar{x}}^a f(t)dt=\int_{\bar{x}}^a f(t)dt+\int_a^x f(t)dt=\int_{\bar{x}}^x f(t)dt$$

Inoltre mi ricordo che

$$f(\bar{x})=\frac{\int_{\bar{x}}^x f(\bar{x})dt}{x-\bar{x}}$$

infatti sto *"calcolando"* l'altezza partendo dall'*area* $\int f(\bar{x})dt$ e dalla *base* $x-\bar{x}$ (ovvero faccio $h=A/b$)
Allora in definitiva ho

$$\lim_{x\to\bar{x}} \frac{\int_{\bar{x}}^x f(t)-f(\bar{x})dt}{x-\bar{x}}$$

Ma so che f è *continua* in $\bar{x}$, ovvero che vale il limite

$$\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = f(\bar{x}) \implies \lim_{x \to \bar{x}} f(x) - f(\bar{x}) = 0$$

Ovvero, *"alla Cauchy"* ciò equivale al seguente:

$$\begin{gathered} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x, \\ |x - \bar{x}| < \delta \implies |f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon \end{gathered}$$

Allora, considerando un qualsiasi $t \in [\bar{x}, x]$ (ovvero tra gli *"estremi"* dell'integrale), ho

$$|t - \bar{x}| < \delta \implies |f(t) - f(\bar{x})| < \varepsilon$$

Allora con tutte le considerazioni appena effettuate e ricordandoci un'altra *proprietà* dell'*integrale* (Proprietà delle Funzioni Integrabili > ^cd03da) ho

$$|R_{\bar{x}}^F(x) - f(\bar{x})| = \frac{1}{x - \bar{x}} \left| \int_{\bar{x}}^{x} f(t) - f(\bar{x}) dt \right| \leq \frac{1}{x - \bar{x}} \int_{\bar{x}}^{x} |f(t) - f(\bar{x})| dt <$$

In definitiva, rimettendo tutto apposto ho il seguente:

$$\begin{gathered} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x, \\ |x - \bar{x}| < \delta \implies |R_{\bar{x}}^F(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon \end{gathered}$$

che è proprio la *definizione* del *limite*

$$\lim_{x \to \bar{x}} R_{\bar{x}}^F(x) = f(\bar{x}) \implies \boxed{F'(\bar{x}) = f(\bar{x})} \blacksquare$$

2. Conseguenze del teorema

#Corollario

Corollario 2.1. (primitivabilità delle funzioni continue)

Se f è *continua*, allora f è *primitivabile* (Primitiva di una Funzione > ^5b45ed) e la sua funzione integrale è *una* sua primitiva.

DIMOSTRAZIONE del *corollario 2.1.* (^796d23)
Questo corollario segue *direttamente* dal *teorema fondamentale del calcolo integrale*: infatti se una funzione è *continua nel suo dominio*, allora per il teorema sopracitato questa l'*Integralfunktion* di questa funzione è la *primitiva* per ogni punto nel dominio. ■
Inoltre nella dispensa si trova una *dimostrazione alternativa*.

#Corollario

Corollario 2.2. (teorema di Torricelli-Barrow)

> Vedere la pagina Teorema di Torricelli-Barrow dato che è possibile dimostrarla senza l'ausilio del *"teorema padre"*, ovvero il *teorema fondamentale del calcolo integrale*.

C3. Teorema di Torricelli-Barrow

Teorema di Torricelli-Barrow

Teorema di Torricelli-Barrow: enunciato, dimostrazione alternativa e conseguenza principale.

---

0. Prerequisiti e/o voci correlate

- Integrabilità secondo Riemann
- Primitiva di una Funzione
- Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale
- Teoremi sulle funzioni continue (Weierstraß e dei valori medi)
- Primitiva di una Funzione
- Suddivisione di un Intervallo
- Teorema della Media Integrale

1. Enunciato del teorema di Torricelli-Barrow

#Teorema

Teorema 1.1. (di Torricelli-Barrow)

Sia $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continua* nel dominio (Definizione di continuità > ^ddf65d).
Allora f è *integrabile* (Tipologie di Funzioni Integrabili > ^dd4f09).
Ha senso dunque considerare la sua *funzione integrale* (Funzione Integrale > ^e5e02b),

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

> Allora F è *derivabile nel dominio* e vale che
>
> $$\boxed{\forall x \in [a,b], F'(x) = f(x)}$$

#Dimostrazione
Naturalmente questo teorema non è altro che il *figlio* del *teorema fondamentale del calcolo integrale* (Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale > ^99ef41), solo che al posto di concentrarci su un *singolo punto* la generalizziamo su *tutto il dominio* $[a,b]$.
Alternativamente è possibile dare la seguente dimostrazione *"bypassando"* il *teorema fondamentale del calcolo integrale*.
Innanzitutto tengo conto del *teorema della media integrale* (Teorema della Media Integrale > ^c2f053).
Sia f *continua* su $[a,b]$ e considero il *rapporto incrementale* $R^F_{\bar{x}}(x)$.

$$\begin{aligned}
R^F_{\bar{x}}(x) &= \frac{F(x)-F(\bar{x})}{x-\bar{x}} \\
&= \int_a^x f(t)dt - \int_a^{\bar{x}} f(t)dt \cdot \frac{1}{x-\bar{x}} \\
&= \frac{1}{x-\bar{x}} \int_{\bar{x}}^x f(t)dt
\end{aligned}$$

Possiamo illustrare in una maniera grafica il fatto che

$$\int_{[a,x]} f - \int_{[a,\bar{x}]} f = \int_{[\bar{x},x]} f$$

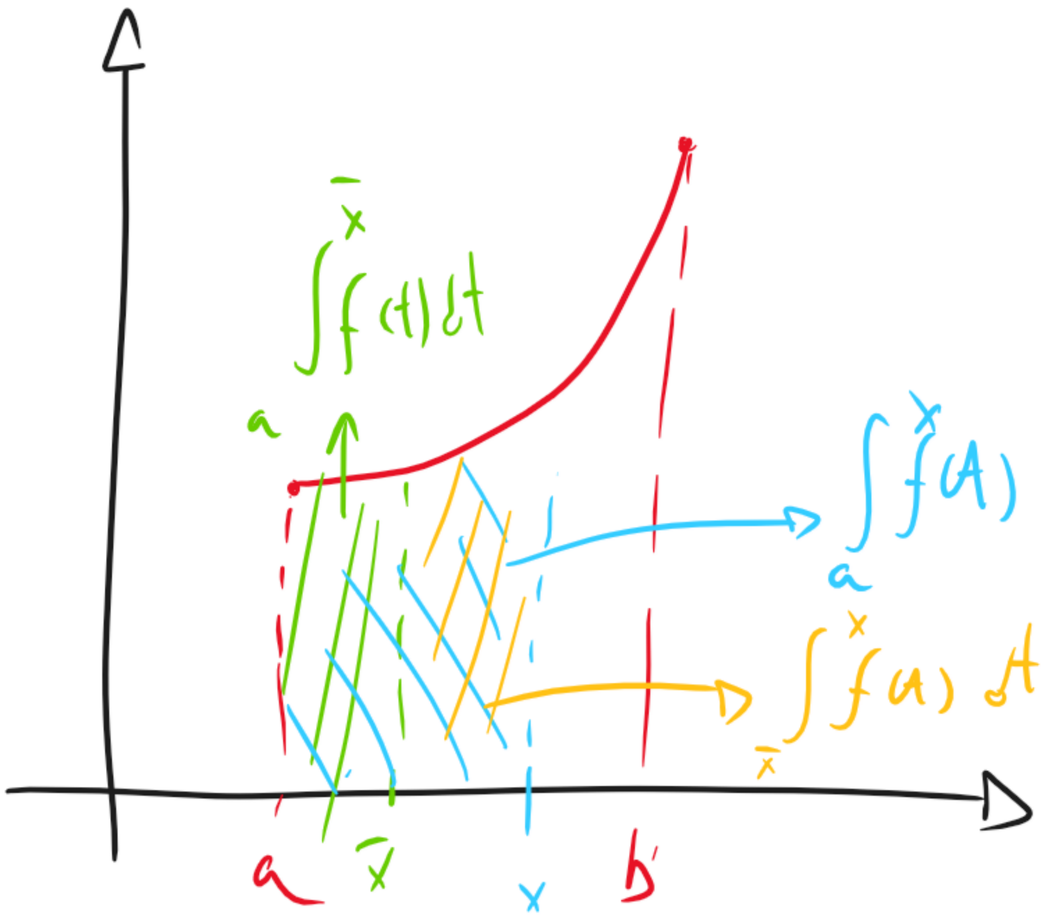
(*figura 1.1.*)
Ma allora possiamo considerare il *teorema delle media integrale* per cui ho un dato $\xi \in (\bar{x}, x)$ vale che

$$f(\xi) = \frac{1}{x-\bar{x}} \int_{\bar{x}}^x f(t)dt$$

Pertanto passando al *limite* $x \to \bar{x}$ ho

$$\lim_{x\to\bar{x}} R^F_{\bar{x}}(x) = \lim_{x\to\bar{x}} f(\xi) \underbrace{\Longrightarrow}_{\bar{x}<\xi<x} \lim_{\xi\to\bar{x}} f(\xi) = f(\bar{x}) \blacksquare$$

FIGURA 1.1.



2. Conseguenze del teorema di Torricelli-Barrow

#Corollario

Corollario 2.1. (l'integrale è la differenza tra le primitive calcolate negli estremi)

Sia G una *primitiva* di f, che è *continua* in $[a, b]$, allora si ha

$$\boxed{\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a)}$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *corollario 2.1.* (^981032)

Dal teorema di *Torricelli-Barrow* (^ebd157) so che la *funzione integrale*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

è una *primitiva* di F.

Allora, essendo G una *primitiva qualsiasi*, so che la *differenza puntuale* tra F, G è *necessariamente una costante*, dato che G è di forma $F + c$. Ovvero

$$F - G = c \in \mathbb{R}$$

Poi so che $F(a) = 0$, dato che $\int_a^a f(t)dt = 0$: quindi

$$F(a) - G(a) = c \implies 0 - G(a) = c \implies c = -G(a)$$

Infine scrivo

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) = G(b) + c = G(b) - G(a) \blacksquare$$

#Osservazione

> **Osservazione 2.1. (lo spostamento del problema del calcolo integrale)**
>
> Questo corollario è importante, dato che da questo momento il problema del *calcolo integrale* diventa quello di *trovare le primitive* di una funzione.

D. IL CALCOLO DELLE PRIMITIVE

D1. Tecnica I (primitive delle elementari)

Primitive delle Funzioni Elementari

Tabella delle primitive delle funzioni elementari.

---

0. Prerequisiti e/o voci correlate

- Primitiva di una Funzione
- Tabella delle derivate

1. Tabella delle Primitive delle Funzioni Elementari

Prendiamo la *tabella delle derivate delle funzioni* e la *"leggiamo al contrario"*:

f	$G \in \int f$
0	$C \in \mathbb{R}$

f	$G \in \int f$
1	x
x^n	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}, n \neq -1$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln -x-, x \neq 0$
e^x	e^x
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$ oppure $\arccos x$
$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\arctan x$

#Osservazione

Osservazione 1.1. (l'arcoseno e l'arcocoseno sono la stessa cosa in questo contesto)

Notiamo che per la frazione $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ abbiamo *due primitive* ammissibili: questo al primo impatto può sembrare strano, ma in una seconda analisi (matematica) vedremo che questa situazione ha perfettamente senso!

Consideriamo infatti la funzione

$$f(x) = \arcsin x + \arccos x$$

Che è definita in $[-1, 1]$ dato che entrambe sono definite in tale intervallo. La calcoliamo in 0 (ricordandoci delle definizioni! Funzioni trigonometriche > ^07affd):

$$f(0) = \arcsin 0 + \arccos 0 = 0 + \frac{\pi}{2}$$

Calcoliamo la *derivata* di f:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

Ma per una *conseguenza del teorema di Lagrange* (Conseguenze del teorema di Cauchy e di Lagrange > ^19eb72), f dev'essere una funzione *costante*, di conseguenza deve valere

$$\frac{\pi}{2} = \arcsin x + \arccos x \implies -\arccos x = \arcsin x + \frac{\pi}{2}$$

Quindi vediamo che queste funzioni *sono* effettivamente le stesse, solo che una è traslata dell'altra. Poi, come osserveremo nel contesto del *calcolo integrale*, questo li rende effettivamente uguali.

#Osservazione

Osservazione 1.2.

Per comodità chiamo l'*insieme delle primitive* di f come $\int f(x)dx$, ovvero *"l'integrale indefinito"* di $f(x)$; inoltre indico un *qualsiasi* elemento di $\int f(x)dx$ come $F(x) + c$.

D2. Tecnica II (integrazione per parti)

Integrazione per Parti

Teorema dell'integrazione per parti: enunciato, dimostrazione e applicazione.

---

0. Prerequisiti e/o voci correlate

- Derivata e derivabilità
- Proprietà delle derivate (regola di Leibniz)

- Primitiva di una Funzione

1. Enunciato della regola

#Teorema

Teorema 1.1. (integrazione per parti)

Siano $f, g \in \mathcal{C}^1$ (ovvero *derivabili* almeno una volta con la loro derivata continua) (Derivata Successiva e Classe C > ^dbae48).
Allora vale che

$$\boxed{\int f(x)g'(x)\ dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\ dx}$$

Da cui

$$\boxed{\int_a^b f(x)g(x)\ dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)\ dx}$$

2. Dimostrazione

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *teorema 1.1.* (^4f8e66)
Ricordiamoci la *regola di Leibniz* per le derivate (Proprietà delle derivate > ^fd716f):

$$(fg)' = f'g + fg'$$

So che sia $f'g$ che fg' sono *continue*. Allora possiamo considerare la *funzione integrale* di $f'g + fg'$:

$$\int_a^x f(t)g'(t)\ dt + \int_a^x f'(t)g(t)\ dt = f(x)g(x) - f(a)g(a)$$

da cui, calcolandola in b, deriva

$$\int_a^b f(t)g'(t)\ dt = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(t)g(t)\ dt\ \blacksquare$$

#Osservazione

Osservazione 2.1. (trucchetto mnemonico)

Approfondimento tratto da "Le Matematiche" di A. D. Aleksandrov, A. N. Kolmogorov e M. A. Lavrent'ev (pp. 169-170)

Si può alternativamente imparare una *"dimostrazione"* meno formale ma più *"facile"* da imparare a memoria di questo teorema: consideriamo l'integrazione come un'*"operazione"* che prende in argomento funzioni.
Allora, ricordandoci la regola di Leibniz possiamo derivare

$$\begin{gathered}(uv)' = uv' + u'v \\ uv' = (uv)' - u'v \\ \int (uv)' dx = uv - \int (u'v)\, dx\end{gathered}$$

3. Regola pratica

#Osservazione

Osservazione 3.1. (regola pratica)

Come *"regoletta pratica"* possiamo considerare la f come la funzione *"derivanda"* chiamandola D, e invece possiamo considerare g' come la funzione *"integranda"* chiamandola I.
Riformulando il teorema iniziale abbiamo

$$\int DI = D \smallint I - \int D' \smallint I$$

Dove D, I sono le *funzioni originali*, D' la funzione derivata e $\smallint I$ la funzione integrata.

Metodo D-I (approfondimento personale)

#Osservazione

Osservazione 3.2. (metodo D-I)

Inoltre è possibile impararsi un *"trucchetto pratico"* per questa tecnica di integrazione, spiegato nel seguente video dal professore universitario cinese-statunitense *Steve Chow*
https://www.youtube.com/watch?v=2I-_SV8cwsw

D3. Tecnica III (integrazione per sostituzione)

Integrazione per Sostituzione

Integrazione per sostituzione: teorema, dimostrazione e utilità pratica.

---

0. Prerequisiti e/o voci correlate

- Funzione Integrale
- Primitiva di una Funzione
- Derivata e derivabilità
- Funzioni

1. Enunciato del teorema

#Teorema

Teorema 1.1. (integrazione per sostituzione)

Sia $g \in \mathcal{C}^1$ (ovvero *derivabile fino ad almeno* f' con f' continua),

$$g : [\alpha, \beta] \longrightarrow [a, b]$$

Sia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continua* (Definizione di continuità > ^ddf65d).
Sia F l'*Integralfunktion* di f (Funzione Integrale > ^e5e02b).
Allora vale che

$$(F(g(x))' = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x))g'(x)$$

Di conseguenza vale anche

$$\boxed{\int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))g'(t)\ dt = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x)\ dx}$$

In particolare se g è *invertibile* e vale che $g(\alpha) = a, g(\beta) = b$, allora vale anche

$$\boxed{\int_{a}^{b} f(x)\ dx = \int_{g^{-1}(a)=\alpha}^{g^{-1}(b)=\beta} f(g(t))g'(t)\ dt}$$

2. Dimostrazione

#Dimostrazione
DIMOSTRAZIONE del *teorema 1.1.* (^4d29d1)
La dimostrazione è immediata: questa segue dalle *regole di derivazione* (Proprietà delle derivate) e dal *teorema fondamentale del calcolo integrale* (Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale > ^99ef41): infatti vale che

$$F(g(\beta)) - F(g(\alpha)) = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x)\, dx$$

3. Regola pratica

#Osservazione

Osservazione 3.1. (regoletta pratica)

Anche se l'enunciato del teorema in sé potrebbe sembrar complicato, in realtà è più facile di quello che si pensa. Infatti possiamo usare la seguente regoletta pratica:

- Poniamo una nuova *"variabile"* e la chiamiamo u in funzione di x; ovvero abbiamo qualcosa del tipo $u = f(x)$.
- Prendendo la derivata di u ottengo $du = f'(x)dx$.
- Se nell'integrale riesco a trovare $f'(x)dx$, posso *"sostituirla"* con du e posso sostituire altrettanto $f(x)$ con u. Inoltre dobbiamo ricordarci pure di sostituire gli *estremi* dell'integrando! Supponendo che α, β siano gli estremi allora li troviamo ponendo $u_\alpha = e^\alpha$ e $u_\beta = e^\beta$.

Si illustra questa regoletta nel seguente esempio.

#Esempio

Esempio 3.1. (sostituzione per u)

Voglio calcolare

$$\int_1^2 2x \cdot x^2 \, dx$$

Anche se questo integrale sarebbe troppo banalmente facile da calcolare con le altre *tecniche* di integrazione (come ad esempio mediante la tabella delle primitive), supponiamo però di esser pagati una modica cifra di denaro per ogni volta che usiamo l'*integrazione per sostituzione*.
Siamo avari di denaro, quindi tentiamo di usare questa tecnica.
Poniamo dunque $u = x^2$, da cui implica $du = 2x\, dx$.
Inoltre, *"trasformiamo"* gli estremi calcolando

$$u_1 = 1^2 = 1; u_2 = 2^2 = 4$$

Ho tutte le condizioni per svolgere l'integrale? Sì! Ho proprio $2x\ dx$ nell'integrale stesso.

$$\int_1^2 x^2 \cdot 2x\ dx$$

Allora lo effettuo la *sostituzione per u*:

$$\int_1^2 x^2 \cdot 2x\ dx = \int_1^4 u\ du$$

Alla fine calcolo l'integrale

$$\int_1^4 u\ du = \left.\frac{u^2}{2}\right|_1^4 = \frac{15}{2}$$

che è ciò che volevamo.

E. ESERCIZI SUGLI INTEGRALI

Esercizi sugli Integrali

Tutti gli esercizi sugli integrali: da Riemann al calcolo delle primitive.

TIPOLOGIA A. VALUTAZIONE SECONDO RIEMANN

Lezione 30
#Esercizio

Esercizio A1. (esponenziale)

Calcolare

$$\int_0^1 e^x \, dx$$

mediante l'*integrazione secondo Riemann*.

#Esercizio

Esercizio A2. (potenza)

Calcolare

$$\int_0^1 x^n \, dx$$

per un qualunque $n \in \mathbb{N}$, mediante l'*integrazione secondo Riemann*.

TIPOLOGIA B. CALCOLO DELLE PRIMITIVE

Lezione 31
#Esercizio

Esercizio B1. (integrali vari)

Calcolare i seguenti integrali *mediante il calcolo delle primitive*.

$$\int_0^1 e^x \, dx \mid\mid \int_1^2 \frac{1}{x} \, dx \mid\mid \int_0^1 x^n \, dx$$

Lezione 32
#Esercizio

Esercizio B2. (integrali misti)

Calcolare i seguenti integrali:

$$\int_2^3 (x^2 + x^3) \, dx \mid\mid \int_1^2 (e^x + \sin x) \, dx$$

#Esercizio

Esercizio B3. (integrali misti)

Calcolare

$$\int_0^1 xe^x\,dx \;||\; \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx \;||\; \int_0^1 x\sin x\cdot e^x\,dx \;||\; \int_1^2 \ln x\,dx$$

#Esercizio

Esercizio B4. (integrali misti)

Calcolare

$$\int_1^2 \frac{e^t}{e^t+1}\,dt \;||\; \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{e^x}{1-e^x}\,dx \;||\; \int_1^2 x^3\ln x^2\,dx \;||\; \int x\sin x\,dx \;||\; \int_0^{\pi} \text{c}$$

TIPOLOGIA C. LIMITI CON GLI INTEGRALI

Lezione 32
#Esercizio

Esercizio C1.

$$\lim_{x\to 0^+} x\int_x^1 \ln t^4\,dt$$

#Esercizio

Esercizio C2.

$$\lim_{x\to 1} \frac{\int_x^{2x} \frac{1}{1+\ln t}\,dt}{x-1}$$

#Esercizio

Esercizio C3.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_{x^3}^{x^2} (1-t^2)e^{-t^2}\,dt}{x\sin x}$$

TIPOLOGIA D. ESERCIZI TEORICI

Lezione 33 (esercitazione)
#Esercizio

Esercizio D1.

Dire se la funzione integrale $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t}\, dt$$

è *crescente* sull'intervallo $]\frac{1}{2}, 1[$.