Il Sacro Graal

Il file con TUTTI gli appunti possibili.

Algoritmo di Gauß

Definizioni preliminari per la descrizione dell'algoritmo di Gauß (Matrice completa e le operazioni elementari OE). Descrizione dell'algoritmo di Gauß per rendere un sistema lineare in un sistema lineare equivalente a scala come un programma.

Assiomi dei Numeri Reali

Assiomi dei numeri reali $\mathbb{R}$*; Il gruppo abeliano* $(\mathbb{R}, +)$*, il campo* $(\mathbb{R}, +, \cdot)$*; assiomi fondamentali di* $\mathbb{R}$*; l'assioma caratterizzante di* $\mathbb{R}$ *(di Dedekind)*

---

1. Preambolo

Dopo aver dedotto che i numeri razionali non sono abbastanza *"estesi"* per poter rappresentare alcuni numeri (come la misura di $\sqrt{2}$), costruiamo i **numeri reali** $\mathbb{R}$ con degli *assiomi* e *definendo* delle *operazioni* di *addizione* e *moltiplicazione*. Nominiamo questi assiomi come *A)*, *M)*, *O)* e *S)*.

Definiamo quindi il *campo*

$$(\mathbb{R}, +, \cdot)$$

ovvero un insieme dotato di due operazioni che hanno le proprietà elencate qua sotto.

2. Assiomi A)

Esiste un insieme $\mathbb{R}$ in cui viene definita la somma

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; (x, y) \mapsto x + y$$

per cui valgono le seguenti proprietà.
A1) La proprietà associativa: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$,

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

A2) La proprietà commutativa: $\forall x, y \in \mathbb{R}$,

$$x + y = y + x$$

A3) L'esistenza dell'elemento neutro 0: $\exists 0 \text{ t.c.}$

$$x + 0 = 0 + x = x$$

A4) L'esistenza dell'elemento opposto: $\forall x \in \mathbb{R}, \exists x' \in \mathbb{R} \text{ t.c.}$

$$x + x' = x' + x = 0$$

Inoltre si dice che $(\mathbb{R}, +)$ *è un gruppo abeliano (dal matematico norvegese Abel).*

3. Assiomi M)

E' definita in $\mathbb{R}$ un'operazione di prodotto o moltiplicazione per cui:
M1) Proprietà associativa: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$,

$$(x) \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot (z)$$

M2) L'esistenza dell'elemento neutro 1: $\exists 1 (\neq 0) \text{ t.c.}$

$$\forall x, x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$$

M3) L'esistenza dell'elemento opposto: $\forall x \in \mathbb{R}, \exists \tilde{x} \text{ t.c.}$

$$x \cdot \tilde{x} = \tilde{x} \cdot x = 1$$

M4) Proprietà commutativa: $\forall x, y,$

$$x \cdot y = y \cdot x$$

4. Assioma D)

E' possibile individuare una proprietà che collega le operazioni di somma $+$ e prodotto $\cdot$
D1) Proprietà distributiva: $\forall x, y, z,$

$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$$

5. Assiomi O)

In $\mathbb{R}$ è definita una relazione d'ordine totale che chiamo $\leq$ e valgono le seguenti
O1) Compatibilità di $\leq$ dell'ordinamento con la somma: $\forall x, y, z,$

$$x \leq y \implies x + z \leq y + z$$

O2) Compatibilità di $\leq$ dell'ordinamento con il prodotto: $\forall x, y, z,$

$$x \leq y \wedge 0 \leq z \implies x \cdot z \leq y \cdot z$$

6. Assioma S) (di Dedekind o di separazione)

OSS 6.1. Notiamo che avendo definito

$$(\mathbb{R}, +, \cdot, \geq)$$

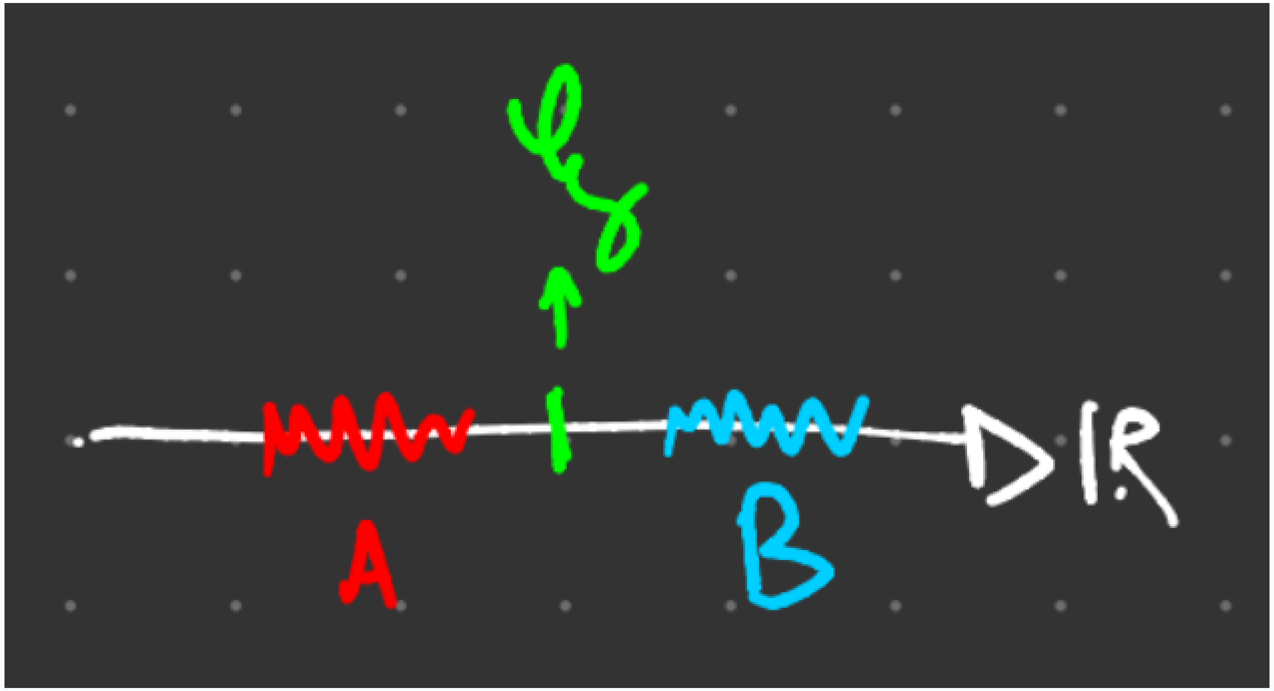
con gli assiomi *A)*, *M)*, *D)* e *O)* questi non possono bastare, in quanto i numeri razionali $\mathbb{Q}$ godono delle stesse proprietà; infatti bisogna definire delle regole speciale, in particolare *l'assioma di Dedekind*, oppure nota come *l'assioma di separazione*.

S) Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$; $A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset$ (A e B sono non-vuoti),

- supponendo che $\forall a \in A, \forall b \in B, a \leq b$
- allora per l'assioma *S)*

$$\exists \xi \in \mathbb{R} \mid \forall a \in A, \forall b \in B, a \leq \xi \leq b$$

- Ovvero, graficamente



OSS 6.2. Questa proprietà non vale per $\mathbb{Q}$, infatti se definiamo gli insiemi

$$A = \{\forall a \in \mathbb{Q} : a^2 < 2\}$$
$$B = \{\forall b \in \mathbb{Q} : a^2 > 2\}$$

notiamo che tra A e B c'è un *buco* che non potrà mai essere colmato, in quanto $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. (dimostrazione più rigorosa sul file di Del Santo)

Assiomi di Peano, il principio di induzione

Assiomi di G. Peano; significato nella matematica, quali sono. Il principio di induzione; le applicazioni del principio di induzione: dimostrazione per induzione e definizioni. Successioni.

---

1. Riflessioni sui fondamenti dei numeri $\mathbb{N}$

OSS 1. Mi pongo il seguente *problema*: è possibile trovare degli *assiomi* (ovvero delle prime proprietà che non vengono dimostrate ma sapute a priori) su $\mathbb{N}$ in modo che tutte le *proprietà* (descritte in Struttura dell'insieme dei numeri naturali) siano deducibili da questi?
Quindi sto riflettendo sui *fondamenti* della matematica, in particolare sui numeri *naturali* $\mathbb{N}$, poi per trovare una sistemazione particolarmente conveniente per noi.

2. Assiomi di Peano

Gli **assiomi di Peano** soddisfano tutte le seguenti regole enunciate:
(0.) Esiste un insieme $\mathbb{N}$ che denomineremo come l'insieme dei *numeri naturali*

1. Esiste un elemento di questo insieme, che chiamo 0; $0 \in \mathbb{N}$
2. Esiste una funzione *successivo* $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ che soddisfa le seguenti proprietà:
    1. σ è iniettiva, ovvero $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{N}; x_1 \neq x_2 \implies \sigma(x_1) \neq \sigma(x_2)$
    2. $0 \notin \sigma(\mathbb{N})$; ovvero lo 0 non è successivo di nessun numero in $\mathbb{N}$.
3. (*principio di induzione*) Sia l'insieme $S \subseteq \mathbb{N}$ e si suppone che: $0 \in S$ e $\forall n, n \in S \implies \sigma(n) \in S$; allora $S = \mathbb{N}$.

OSS 2.1. Dagli assiomi **2.1.** e **2.2.** appena enunciate è possibile dedurre che l'insieme $\mathbb{N}$ dev'essere necessariamente *infinito*: se il codominio della funzione $\mathbb{N}$ ha più elementi del dominio della funzione $\mathbb{N}$ (visto che σ è iniettiva ed il numero 0 non fa parte dell'immagine), **ma** si tratta del medesimo insieme $\mathbb{N} = A = B$, pertanto $\mathbb{N}$ dev'essere infinita in quanto è l'unico modo per soddisfare le condizioni dedotte.

DEF 2.1. Il sistema di Peano
Secondo gli seguenti assiomi appena enunciati, si può definire un **sistema di Peano** come la terna $(\mathbb{N}, 0, \sigma)$.

OSS 2.2. Si nota che la scelta dell'*"elemento iniziale"* (ovvero in questo caso 0) è una scelta arbitraria che può essere cambiata; infatti si può *"spostare"* questo *"punto di partenza"* e si avrebbe comunque un *sistema di*

Peano in cui valgono le stesse regole enunciate; infatti si può dimostrare che tutti i sistemi di Peano sono *isomorfi*, cioè che sono sostanzialmente lo stesso con qualche nome dei numeri alterati.
Questa osservazione diventerà molto importante per il *principio di induzione*.

APPROFONDIMENTO. (tratto da Analisi Matematica Vol. 1, E. Giusti). Se si vuole essere bibliograficamente accurati, allora bisognerebbe specificare che ci sono altri quattro *assiomi di Peano*, che sono piuttosto assiomi logici e abbastanza intuitivi, ovvero:

$$\begin{aligned}
&1.\ \forall a \in \mathbb{N}, a = a;\\
&2.\ \forall a, b \in \mathbb{N}, a = b \iff b = a\\
&3.\ \forall a, b, c \in \mathbb{N}, (a = b) \wedge (b \wedge c) \implies a = c\\
&4.\ (a = b) \vee b \in \mathbb{N} \implies a \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

3. Il principio di induzione

Uno degli *assiomi* più importanti appena enunciati è *l'assioma 4.*, che viene definito anche come il **principio di induzione**, che enuncia il seguente:

$$[(S \subseteq \mathbb{N}) \wedge (0 \in S) \wedge (\forall n \in \mathbb{N}, n \in S \implies (n+1) \in S)] \implies S = \mathbb{N}$$

Ora, riscrivendolo in un modo più comprensibile, questo principio enuncia che:

1. Supponendo che esista un insieme $S \subseteq \mathbb{N}$ (verificando così la prima condizione)
2. Poi supponendo che un numero 0 appartenga a S, quindi il *"punto di partenza"*
3. E infine se è vero che se un qualsiasi elemento n appartiene a S, allora il suo successivo $\sigma(n)$ appartiene anch'esso a S,
4. Allora $S = \mathbb{N}$.

3.1. L'idea fondamentale

Per capire fino a fondo l'idea del *principio d'induzione* si può riflettere sulla funzione *successivo* σ, ovvero: cos'è?
Se $\sigma(0) = 1$ e $\sigma(n) = n + 1$, allora si può pensare che a partire da 0 posso raggiungere tutti i numeri in $\mathbb{N}$. Ad esempio,

$$5 = \sigma(4) = \sigma(\sigma(3)) = \sigma(\sigma(\sigma(2))) = \sigma(\sigma(\sigma(\sigma(1)))) = \sigma(\sigma(\sigma(\sigma(\sigma(0)))))$$

Si può utilizzare la seguente analogia: se voglio salire di un piano, devo percorrere un numero di gradini; se posso salire sul primo gradino, che lo chiamo gradino 0, allora posso salire sul prossimo (analogia con la funzione successiva σ), poi sul prossimo e sul prossimo, finché raggiungo il prossimo piano.

4. Applicazioni del principio di induzione

Il **principio di induzione** può essere utilizzato principalmente per due scopi: o definire *oggetti* o verificare/dimostrare delle *proprietà* (ovvero dei predicati unari); nel primo caso si parla di **definizione per ricorrenza** e invece nel secondo di **dimostrazione per induzione**.

4.1. Dimostrazione per induzione

In questa pagina si parlerà principalmente di *dimostrazione per induzione*, corredato da vari esempi.
L'*idea* per la **dimostrazione per induzione** consiste nel seguente:

1. Ho una *proprietà* (ovvero un predicato unario) $\mathcal{P}(n)$ e voglio dimostrare che essa è *verificata* per ogni $n \in \mathbb{N}$;
2. Si crea quindi *l'insieme dei numeri che verificano* $\mathcal{P}(n)$ e la chiamiamo S.
3. Ora per dimostrare $\mathcal{P}(n)$ basta verificare le due condizioni:
    1. $0 \in S$, ovvero $\mathcal{P}(0)$ è vera;
    2. $\forall n \in S \implies \sigma(n) \in S$; ovvero se $\mathcal{P}(n)$ è vera, allora $\mathcal{P}(n+1)$. Da notare che si tratta **solo** di dimostrare

> *l'implicazione materiale*.
> 3. Allora $S = \mathbb{N}$, ovvero tutti i valori che rendono $\mathcal{P}(n)$ vera sono tutti i numeri in $\mathbb{N}$.

Si vedono alcuni esempi sulla *dimostrazione* per induzione in Esempi di Induzione

4.2. Definizioni per ricorrenza

DEF. 4.2.1. Successione a valori in A.

Sia A un insieme qualunque e f una funzione

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow A; n \mapsto f(n) = a_n$$

Quindi saranno determinati

$$f(0) = a_0, f(1) = a_1, \ldots, f(n) = a_n$$

Questa funzione f si chiama, *tradizionalmente*, una **successione a valori in** A (cioè nell'insieme A).
Lo rappresentiamo con

$$(a_n)_n : (a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots)$$

DEF 4.2.2. La sommatoria

Si può definire la *sommatoria*

$$\sum_{j=0}^{n} a_i = a_0 + \ldots + a_n$$

in una maniera rigorosa usando il *principio di induzione* e la definizione di *successione*:

DEF 4.2.2. Si pone

$$\sum_{j=0}^{n} a_n = s_n$$

poi, ponendo il caso base

$$s_0 = a_0$$

e in seguito

$$\forall n, s_{n+1} = s_n + a_{n+1}$$

definendo così la sommatoria, in quanto sono partito dall'elemento *base* a_0, e potendo generare la sommatoria di $n+1$ a partire da n; pertanto la *successione* $(s_n)_n$ viene definita su $\mathbb{N}$ a partire da 0.

DEF 4.2.3. Produttoria

Similmente si definisce la *produttoria*

$$\prod_{i=0}^{n} a_i = a_0 \cdot \ldots \cdot a_n$$

come

$$\prod_{i=0}^{n} a_i = p_n$$
$$p_0 = a_o$$
$$\forall n, p_{n+1} = p_n \cdot a_{n+1}$$

ESEMPIO 4.2.3.1. Fattoriale. Un caso particolare della *produttoria* è il cosiddetto **fattoriale**; la si definisce come

$$\Pi_{i=0}^{n} i = n!$$

Quindi

$$\begin{aligned}
&0! = 1 \\
&\forall n; (n+1)! = n!(n+1)
\end{aligned}$$

Campi

Definizione di un campo; le proprietà caratterizzanti dei campi; esempi di campi e non-campi.

---

0. Preambolo

Questo capitolo ci serve per riflettere sui *fondamenti* che abbiamo usato finora, in particolare quando abbiamo parlato di equazioni, sistemi lineari, matrici, spazi vettoriali, come quando parliamo delle matrici a *coefficienti reali*; oppure dei $\mathbb{R}$-*spazi vettoriali*. Tutte le proprietà di cui abbiamo visto valgono in quanto $\mathbb{R}$ è un *campo* con le sue operazioni $+, \cdot$.
Infatti avevamo implicitamente fatto una *meta-operazione* in cui usavamo le proprietà di questo campo. Ora definiamo rigorosamente un *campo*.

1. Definizione

DEF 1. Sia K un *insieme* (Teoria degli Insiemi) si cui sono definite delle operazioni (o funzioni) (Funzioni) di *somma* e *moltiplicazione*, ovvero:

$$
\begin{aligned}
+: \ & K \times K \longrightarrow K \\
& (a,b) \mapsto a+b \\
\cdot: \ & K \times K \longrightarrow K \\
& (a,b) \mapsto a \cdot b
\end{aligned}
$$

tali per cui vengono soddisfatte le seguenti proprietà K:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{K}_1 : \forall a,b \in K; a+b=b+a \mid a\cdot b = b \cdot a \\
&\mathrm{K}_2 : \forall a,b,c \in K; a+(b+c)=(a+b)+c \mid a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c \\
&\mathrm{K}_3 : \exists 0 \in K : \forall a \in K, a+0=0+a=a \\
&\mathrm{K}_{3.1} : \exists 1 \in K : \forall a \in K, a\cdot 1 = 1 \cdot a = a \\
&\mathrm{K}_4 : \forall a \in K, \exists(-a) \in K : a+(-a) = -a+a = 0 \\
&\mathrm{K}_{4.1} : \forall a \in K \diagdown, \{0\} \exists a^{-1} : a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1 \\
&\mathrm{K}_5 : \forall a,b,c \in K, (a+b)\cdot c = a \cdot c + b \cdot c
\end{aligned}
$$

Queste regole si chiamo rispettivamente nei seguenti modi:
K1: Commutatività rispetto alla somma e prodotto
K2: Associatività rispetto alla somma prodotto
K3: Esistenza degli elementi neutri $0, 1$ dove $0 \neq 1$
K4: Esistenza degli opposti (somma) e inversi (prodotto)
K5: Distributività
Allora un tale insieme si dice **campo**.

1.1. Esempi

ESEMPIO 1.1.a. Gli insiemi $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sono dei *campi infiniti*, invece $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ *non* sono *campi*.
OSS 1.1.a. Osserviamo che possono esistere anche dei *campi finiti*, che hanno una rilevanza fondamentale nella *crittografia*. L'esempio **1.1.c.** sarà l'esempio di un *campo finito*.

ESEMPIO 1.1.b. L'insieme delle *funzioni razionali* ovvero

$$\{\frac{p}{q} : p, q \text{ sono polinomi in una variabile}\}$$

può essere dotata di *somma* e *prodotto* in modo tale da rendere questa un *campo*.

ESEMPIO 1.1.c. Sia

$$\mathbb{Z}_2 := \{0, 1\}$$

su cui definiamo una operazione di *somma* e *prodotto* $(+, \cdot)$.
Definiamo queste mediante delle *tabelle di somma* e di *moltiplicazione*.

$+$	**0**	**1**
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	**0**	**1**
0	0	0
1	0	1

Allora concludo che

$$(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$$

è un *campo finito*.

2. Conclusione

Pertanto la precedente nozione di $\mathbb{R}$-*spazio vettoriale* sarà da ora in poi sostituita da quella di K-spazio vettoriale, con K un campo. Analogo il discorso per le *matrici a coefficienti in* K, ovvero $M_{m,n}(K)$.

Coefficiente Binomiale

Coefficiente binomiale come strumento per risolvere un problema del calcolo combinatorio; regole e teoremi sul coefficiente binomiale; costruzione del triangolo di Tartaglia; teorema di Newton (o del binomio) con dimostrazione. Applicazioni del teorema.

---

1. Coefficiente Binomiale

DEF 1. Dai risultati del Problemi del Calcolo Combinatorio, sappiamo che

$$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

2. Proprietà del coefficiente binomiale

Enunciamo le seguenti proprietà del *coefficiente binomiale* C_k^n:

1. $$\binom{0}{0} = 1$$

2. $$\forall n, \binom{n}{0} = 1$$
$$\binom{n}{n} = 1$$

3. **REGOLA DI STIFEL.** Sia $1 \leq k \leq (n-1)$,

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

DIMOSTRAZIONE FORMALE.
Per definizione,

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{m}$$
$$\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k)!(n-k-1)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$
$$(n-1)!(\frac{1}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{1}{k!(n-k-1)!}) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Osservare la proprietà che consegue dalla *definizione ricorrente del fattoriale* (Assiomi di Peano, il principio di induzione):

$$\forall n, (n+1)! = n!(n+1)$$

da ciò implica che

$$n! = \frac{(n+1)!}{(n+1)}$$

Quindi secondo questa logica, si può dire le seguenti:

$$(k-1)! = \frac{k!}{k};\ (n-k-1)! = \frac{(n-k)!}{(n-k)};\ n! = (n-1)!n$$

Allora

$$\begin{aligned}
(n-1)!(\frac{1}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{1}{k!(n-k-1)!}) &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
(n-1)!(\frac{k}{k!(n-k)!} + \frac{n-k}{k!(n-k)!}) &= (n-1)\frac{n}{k!(n-k)!} \\
\frac{k+n-k}{k!(n-k)!} &= \frac{n}{k!(n-k)!} \\
\frac{n}{k!(n-k)!} &= \frac{n}{k!(n-k)!} \text{ OK } \blacksquare
\end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE SENZA CALCOLI/TEORICA.
Alternativamente, si potrebbe pensare la *regola di Stifel* nel seguente modo:
"Voglio contare le contare i sottoinsiemi con k elementi dell'insieme A (ove $|A| = n$); quindi voglio C^n_k.
Ora distinguiamo uno degli elementi di A con un *contrassegno particolare*, come il colore *rosso*; adesso gli insiemi di k elementi si dividono in due.
Ovvero, l'insieme dei sottoinsiemi che *contengono l'elemento rosso* e l'insieme dei sottoinsiemi che *non contengono l'elemento rosso*.
Consideriamo l'insieme di *tutti i sottoinsiemi che contengono l'elemento speciale*: devo quindi

obbligatoriamente considerare *l'elemento* rosso, tirandolo fuori. Ho quindi da n elementi ne posso scegliere solo $n-1$, in quanto una è stata già scelta, e posso scegliere solo $k-1$ elementi visto che il primo elemento (ovvero il *rosso*) è stato già obbligatoriamente scelto.
Consideriamo invece l'altro insieme di *tutti i sottoinsiemi che NON contengono l'elemento contrassegnato*: in questo caso si tratta semplicemente di *escludere* l'elemento rosso dalle scelte possibili, dandoci solo $n-1$ scelte su k.
Pertanto

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

3. Costruzione del triangolo di Tartaglia

Enunciamo di nuovo le 3 regole sopra:

1. $\binom{0}{0}$
2. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
3. $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$

Da queste tre proprietà possiamo rappresentare i *coefficienti binomiali* tramite il c.d. *triangolo di Tartaglia*

3.1. Triangolo di Tartaglia

Disponiamo tutti i *coefficienti binomiali* $\binom{x}{y}$, dove la *"colonna"* (a partire dall'alto) rappresenta il numero x e dove la *"riga"* (a partire da sx.) rappresenta il numero y. Ad ogni riga rappresentiamo tutti i *coefficienti binomiali* $\binom{x}{y}$

finché x raggiunge y (ovvero $x = y$)

$$\begin{aligned}
&\binom{0}{0}\\
&\binom{1}{0}\binom{1}{1}\\
&\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{2}\\
&\binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3}\\
&\dots\\
&\binom{x}{0}\binom{x}{1}\dots\binom{x}{x-1}\binom{x}{x}
\end{aligned}$$

Ora, calcolando tutti i binomi (ricorrendo all'ausilio delle **proprietà del coefficiente binomiale**), otteniamo il seguente triangolo:

$$\begin{aligned}
&1\\
&1\ 1\\
&1\ 2\ 1\\
&1\ 3\ 3\ 1
\end{aligned}$$

Facciamo le seguenti osservazioni:
OSS 3.1.1. Alle *"estremità"* del triangolo risulta sempre il numero 1, in quanto seconda la **proprietà 2.**, $\forall x, \binom{x}{x} = \binom{x}{0} = 1$
OSS 3.1.2. Se sono arrivato alla riga x, posso ottenere facilmente tutti gli elementi della prossima riga $x+1$; infatti $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$. Facendo un'interpretazione "geometrica" si può dire che se sono alla riga $x+1$, allora

ottengo l'elemento di questa riga sulla colonna k sommando degli elementi che già conosciamo prima; ovvero $\binom{n-1}{k-1}, \binom{n-1}{k}$.
Questi sono gli elementi che stanno al di "sopra" e "sopra e sinistra" dell'elemento che vogliamo conoscere.
ESEMPIO 3.1.2.1. Per esempio ho

$$\begin{aligned} &1 \\ &1\ 1 \\ &1\ 2\ 1 \\ &1\ 3\ 3\ 1 \end{aligned}$$

e voglio ottenere gli elementi della riga 4; in questo caso metto alle "estremità" i numeri 1 (**OSS 3.1.1.**), poi per calcolare $\binom{4}{x}$ (ovviamente $x \leq 4$) sommo l'elemento che sta sopra con quello che sta sopra e a sinistra. Quindi otteniamo

$$1\ 4\ 6\ 4\ 1$$

OSS. 3.1.3. Il matematico *B. Pascal* nota il seguente nel suo trattato "Traité du triangle arithmétique": che se prendiamo una riga pari $2n$, allora il numero *"centrale"* della riga è uguale alla sommatoria di tutti i quadrati degli elementi della riga n.
Ovvero

$$\forall n \in \mathbb{N}, \binom{2n}{n} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^2$$

ESEMPIO 3.1.3.1. Prendiamo la riga 8,

$$1\ 8\ 28\ 56\ 70\ 56\ 28\ 8\ 1$$

ove l'elemento "centrale" è individuato con $70 = \binom{8}{4}$ e la riga 4,

$$1\;4\;6\;4\;1$$

Ora vediamo di sommare tutti gli elementi al quadrato:

$$1^2 + 4^2 + 6^2 + 4^2 + 1^2 = 1 + 16 + 36 + 16 + 1 = 70$$

4. TEOREMA DEL BINOMIO (o di Newton)

Il *triangolo di Tartaglia* è una costruzione matematica molto importante, in quanto essa può essere sfruttata per sviluppare la potenza di un binomio in n grazie al *teorema del Binomio (o di Newton)*
TEOREMA 1. Siano $a, b \in \mathbb{R}$ (volendo anche in $\mathbb{C}$), sia $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, allora

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} b^n$$

DIM. Si dimostra questo teorema per induzione.
1. Verificare che è vera per $P(1)$:

$$(a+b)^1 = \sum_{j=0}^{1} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j \iff a + b = \binom{1}{0} a^1 b^0 + \binom{1}{1} a^0 b^1 \text{ OK}$$

2. Verificare che, supponendo $P(n)$ allora $P(n) \implies P(n+1)$ è vera.

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j$$

$$(a+b)^n (a+b) = (a+b) \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j$$

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n+1-j} b^j + \sum_{j=0}^{n} a^{n-j} b^{j+1}$$

3. Adesso "estraiamo" il primo elemento dalla prima sommatoria e l'ultimo elemento dall'altra sommatoria.

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n+1-j} b^j + \sum_{j=0}^{n} a^{n-j} b^{j+1} \\ &= (a^{n+1}) + (b^{n+1}) + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} a^{n+1-j} b^j + \sum_{j=0}^{n-1} a^{n-j} b^{j+1}\end{aligned}$$

4. Effettuiamo un "trucco" alla seconda sommatoria, ovvero quella di porre $k = j+1$ (e pertanto $j = 0 \implies k = 1$)

e poi di porre $k = j$, che è possibile in quanto k è una *variabile muta*.

$$
\begin{aligned}
&(a^{n+1}) + (b^{n+1}) + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} a^{n+1-j} b^j + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} a^{(n+1)-(j+1)} b^{j+1} \\
&= \dots + \sum_{j=1}^{n} \dots + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k \\
&= \dots + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} a^{n+1-j} + b^j + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j-1} a^{n+1-j} + b^j \\
&= \dots + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} \binom{n}{j-1} a^{n+1-j} + b^j \\
&\text{Per la regola di Stiefe,} \binom{n}{j} \binom{n}{j-1} = \binom{n+1}{j} \\
&= (a^{n+1}) + (b^{n+1}) + \sum_{j=1}^{n} \binom{n+1}{j} a^{n+1-j} + b^j
\end{aligned}
$$

5. E riferendosi alla sommatoria presente nell'uguaglianza, se prendiamo $j = 0$ e $j = n + 1$, allora

$$
\begin{aligned}
&1. \binom{n+1}{0} a^{n+1} + b^0 = 1 \cdot a^{n+1} = a^{n+1} \\
&2. \binom{n+1}{n+1} a^{n+1-n-1} b^{n+1} = b^{n+1}
\end{aligned}
$$

e quindi possiamo "rintegrarli" nella sommatoria come l'elemento 0-esimo e $n+1$-esimo, ottenendo

$$\sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} a^{n+1-j} + b^j$$

$$P(n+1) : (a+b)^n = \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} a^{(n+1)-j} + b^j$$

che è ciò che volevamo ottenere. Quindi il teorema è stato così dimostrato. ■

4.1. ESEMPI SUL TEOREMA DEL BINOMIO

ESEMPIO 4.1.1. Vogliamo calcolare $(a+b)^6$.
Otteniamo innanzitutto lo sviluppo di $(a+b)^6$ secondo il teorema binomiale:

$$(a+b)^6 =$$
$$\binom{6}{0} a^6 + \binom{6}{1} a^5 b^1 + \binom{6}{2} a^4 b^2 + \binom{6}{3} a^3 b^3 + \binom{6}{4} a^2 b^4 + \binom{6}{5} a^1 b^5 + \binom{6}{6} b^6$$

Ora costruiamo il *triangolo di Tartaglia* fino alla 6-esima riga, secondo le regole notate in 3. Costruzione del triangolo di Tartaglia:

$$
\begin{array}{l}
1 \\
1\ 1 \\
1\ 2\ 1 \\
1\ 3\ 3\ 1 \\
1\ 4\ 6\ 4\ 1 \\
1\ 5\ 10\ 10\ 5\ 1 \\
1\ 6\ 15\ 20\ 15\ 6
\end{array}
$$

Ora sfruttiamo questo triangolo per poter sostituire tutti i coefficienti binomiali nella forma sviluppata appena scritta.

$$
\begin{aligned}
&\binom{6}{0}a^6 + \binom{6}{1}a^5b^1 + \binom{6}{2}a^4b^2 + \binom{6}{3}a^3b^3 + \binom{6}{4}a^2b^4 + \binom{6}{5}a^1b^5 + \binom{6}{6}b^6 \\
&\text{diventa} \\
&a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6
\end{aligned}
$$

ESEMPIO 4.1.2. Calcolare $\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}$.
Si può risolvere questo problema in due modi:

1. Se (per definizione) consideriamo il coefficiente binomiale $\binom{n}{j}$ come la cardinalità delle *combinazioni* di un insieme A (ove $|A| = n$) C_j^n, ovvero il numero degli sottoinsiemi di A con j elementi, allora possiamo considerare questo problema come il seguente: *"qual è la cardinalità di tutti gli sottoinsiemi di A (quindi da 0 a n elementi)?"*; dai risultati della Teoria degli Insiemi, sappiamo immediatamente che la risposta è 2^n.

2. Oppure possiamo semplicemente usare il *teorema del binomio*; ovvero ponendo $a = b = 1$, abbiamo

$$(1+1)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j \iff 2^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}$$

dandoci così immediatamente la risposta.

ESEMPIO 4.1.3. Calcolare

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j}$$

Se consideriamo il 3.1. Triangolo di Tartaglia, viene che la risposta intuitiva è 0, in quanto le righe dispari sono simmetriche; quindi "dividendo" quella riga, abbiamo un "lato" positivo e negativo, che sommandoli otteniamo 0. Tuttavia questa risposta non è abbastanza rigorosa per essere considerata; infatti per avere una giustificazione più sicura, si deve usare il *teorema del binomio* nel seguente modo.
Siano $a = -b = 1$, ovvero

$$\begin{aligned}
(1-1)^n &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} 1^{n-j} (-1)^j \\
0^n &= \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \\
0 &= \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \blacksquare
\end{aligned}$$

Connettivi

Connettivi: cosa sono, quali useremo...

Connettivi

Il connettivo, nella logica formale, viene usato per comporre una nuova Proposizioni partendo da quelle già esistenti.
Un connettivo viene caratterizzato da una tabella di verità, che descrive ogni valore di ogni proposizione.
Studieremo i seguenti connettivi: la ^negazione, la ^congiunzione, la ^disgiunzione, l'^implicazione e la ^doppiaimplicazione

Negazione

^negazione
La **negazione** è l'unico connettivo **unario** (che prende SOLO una proposizione) di cui studieremo.
Viene indicata con $\neg q$, e viene letta come *"non q"*
La sua tavola della verità è la seguente:

p	$\neg p$
V	F
F	V

Congiunzione

^congiunzione
La congiunzione tra due proposizioni viene indicata con $p \wedge q$ e si legge come *"p e q"*

La tavola della verità associata è la seguente:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Disgiunzione

^disgiunzione
La disgiunzione di due proposizioni viene indicata con $p \vee q$ e si legge come *"p oppure q"*. Tuttavia, nella lingua italiana vi è un'ambiguità nell'uso della congiunzione "o": può avere due significati diversi, che sono quella esclusiva (in latino *aut*) e quella inclusiva (in latino *vel*).
Nella matematica si preferisce usare $\vee$ per indicare la disgiunzione *vel*, ma esiste anche $\veebar$ per indicare quella *aut*.
La tavola della verità di $p \vee q$ è la seguente.

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Osservazione 1.

Quando due tabelle della verità, associate ad una proposizione l'una, danno gli stessi valori della verità, si dice che queste proposizioni sono equivalenti.
ESEMPIO 1. Ricavare le tavole della verità di $\neg(p \wedge q)$ e di $\neg p \vee \neg q$.
Si ricava la tavola della prima proposizione, ovvero $\neg(p \wedge q)$.

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

Ora l'altra tavola. ($\neg p \vee \neg q$)

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

Si nota che $\neg(p \wedge q)$ e $\neg p \vee \neg q$ ci danno i stessi valori, pertanto $\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$. (Leggi di De Morgan)
Lo stesso discorso vale per $\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$.

Implicazione materiale

^implicazione
L'implicazione viene indicata come $p \implies q$ e si legge come *p implica q*.
Prima di poter considerare la sua tavola della verità associata, è necessario fare delle considerazioni di natura linguistica sull'implicazione.
Prendiamo le proposizioni p :Piove e q :Prendo l'ombrello: se l'implicazione $p \implies q$ fosse vera, allora significherebbe che se piove allora prendo l'ombrello: pertanto è vera per $p = V$ e $q = V$.
Ora vediamo di negare l'implicazione $p \implies q$. Se non è vero che se piove, allora prendo l'ombrello, allora ciò vorrebbe dire che non è vero che piove e prendo l'ombrello allo stesso tempo: quindi, in un certo senso, $\neg(p \implies q)$ equivale a $\neg p \wedge q$.
Pertanto se si nega ambe le parti, $\neg\neg(p \implies q) = p \implies q = \neg(\neg p \wedge q) = Legge\ Di\ De\ Morgan = p \vee \neg q$
Si conclude che $(p \implies q) = (p \wedge \neg q)$
Quindi la tavola della verità associata è la seguente.

p	q	$p \implies q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Doppia implicazione

^doppiaimplicazione
La doppia implicazione viene indicata come $p \iff q$ e si legge come *"p se e solo se q"* oppure come *"p è equivalente a q"*.
La sua tavola associata è la seguente.

p	q	$p \iff q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

ESEMPIO 1. Consideriamo le proposizioni p e q:

- p: in un triangolo 2 lati sono uguali
- q: in un triangolo 2 angoli sono uguali
  Nel caso di un triangolo isoscele, $p \iff q$ in quanto sono necessarie entrambi le condizioni.

Osservazione 2.

Si osserva che la doppia implicazione non è che altro la congiunzione di due implicazioni, ovvero $(p \implies q) \wedge (q \implies p)$. Ciò diventa utile per dimostrare teoremi, in quanto ci permette di dividere il problema in due parti e si può verificare le due implicazioni singolarmente.

Conseguenze dell'esistenza dell'estremo superiore

Alcuni importanti dei numeri reali $\mathbb{R}$ come conseguenza del teorema dell'esistenza dell'estremo superiore, numeri naturali $\mathbb{N}$ come sottoinsieme di $\mathbb{R}$, proprietà di Archimede, "$\frac{1}{n}$ diventa piccolo quanto si vuole", densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$. Intervalli chiusi, limitati, inscatolati e dimezzati; teorema di Cantor, forma forte del teorema di Cantor

---

0. Preambolo

Osservando Insiemi limitati, maggioranti, massimo e teorema dell'estremo superiore, notiamo che per qualunque insieme *superiormente limitato* deve esistere un *estremo superiore*. Da questo discendono a cascata una serie di proprietà (o teoremi) importanti.

1. $\mathbb{N}$ è superiormente illimitato

TEOREMA 1.1. $\mathbb{N}$ è superiormente illimitato. Ovvero *non è superiormente limitato*.
Infatti nei numeri reali $\mathbb{R}$ possiamo trovare i numeri naturali $\mathbb{N}$.
DIMOSTRAZIONE.
Per assurdo suppongo che esista un $M \in \mathbb{R}$ maggiorante di $\mathbb{N}$ tale che

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \leq M$$

Quindi $\mathbb{N}$ è sia non vuoto che superiormente limitato. Da ciò (secondo il teorema dell'esistenza dell'estremo superiore) discende che esista il superiore estremo ξ;

$$\exists \xi \in \mathbb{R} : \xi = \sup(\mathbb{N})$$

Ora applico la *proprietà (2) degli estremi superiori con* $\varepsilon = 1$*; ovvero*

$$\exists \bar{n} \in \mathbb{N} : n > \xi - 1$$

Ma allora

$$\bar{n} + 1 > \xi = \sup(\mathbb{N})$$

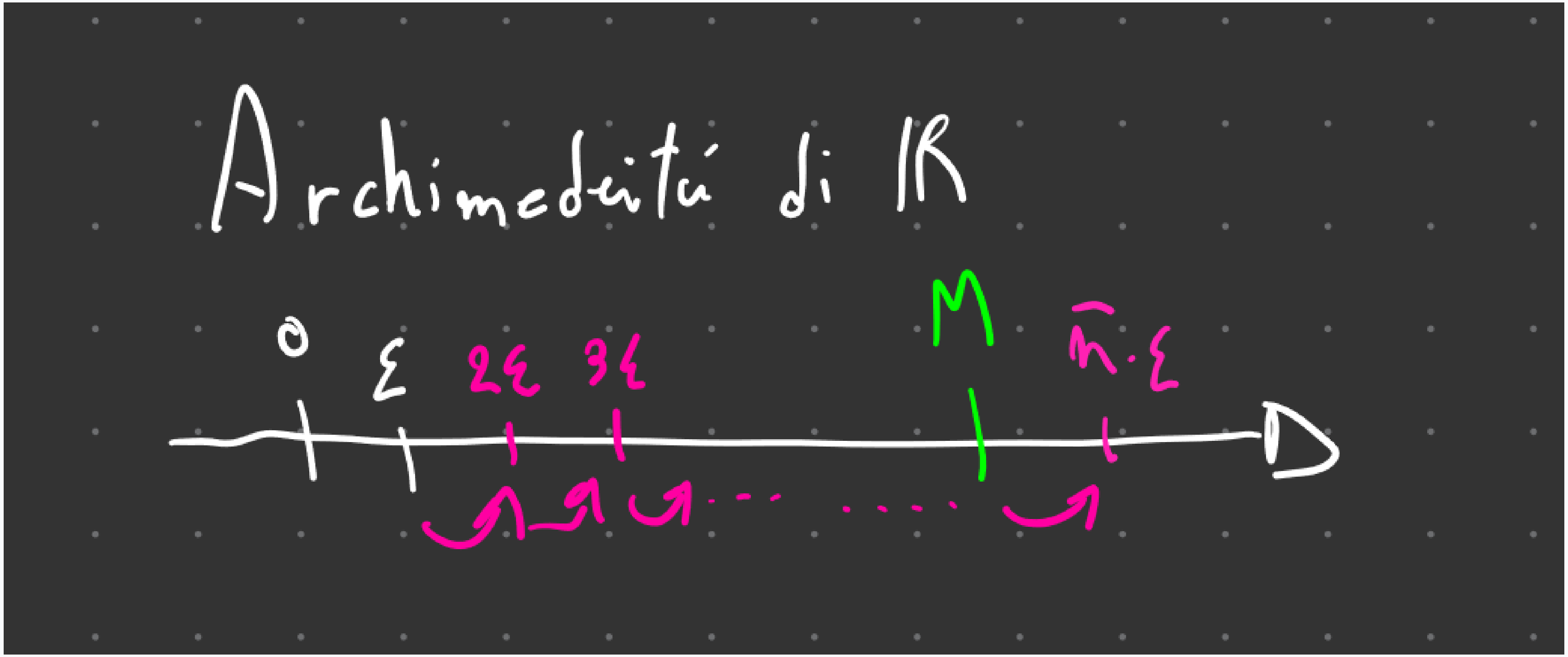
il che è assurdo in quanto si troverebbe un numero che supera l'*estremo superiore*. ■

2. Proprietà di Archimede; Archimedeità di $\mathbb{R}$

TEOREMA 2.1. Siano $\varepsilon, M \in \mathbb{R}$ ove $\varepsilon > 0$, $M > 0$ (l'idea sarebbe che ε è un numero *arbitrariamente piccolo*, M invece un numero *arbitrariamente grande*), allora vale la seguente:

$$\exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \bar{n} \cdot \varepsilon > M$$

Ovvero prendendo un piccolo arbitrariamente piccolo ε e possibile farlo sommare $\bar{n}$ volte e superare il numero arbitrariamente grande M.
Rappresentazione grafica:



DIMOSTRAZIONE.
Suppongo (per assurdo) che questo teorema non è vero; ovvero negandolo, abbiamo

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \cdot \varepsilon < M$$

ovvero non saremo mai in grado di superare M.
Allora definendo E l'insieme di tutti i numeri *"ottenuti"* sommando ε a se stesso n volte,

$$E = \{\forall n \in \mathbb{N}, n \cdot \varepsilon\}$$

questo è *superiormente limitato* per supposizione (anche non vuoto).
Sia allora

$$\xi = \sup E$$

Applico la seconda proprietà dell'*estremo superiore* ξ, con ε quello inserito nella ipotesi, ovvero

$$\exists \bar{n} : \bar{n} \cdot \varepsilon > \xi - \varepsilon$$

ma allora consegue che

$$\varepsilon(1 + \bar{n}) > \xi$$

che implicherebbe l'esistenza di un numero moltiplicato per ε che supera $\xi = \sup E$, il che è un assurdo. ■

3. $\frac{1}{n}$ diventa piccolo quanto si vuole

TEOREMA 3.1.
Sia $\varepsilon > 0$ (un numero piccolo); allora $\exists \bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

ovvero prendendo un numero arbitrariamente piccolo, deve esistere un $\frac{1}{n}$ che sarà ancora più piccolo del numero piccolo scelto.

DIMOSTRAZIONE.
Considero *la proprietà di Archimede* (**TEOREMA 2.1.**) ove fisso $\varepsilon > 0$ e $M = 1$.
Pertanto,

$$\exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \varepsilon \cdot \bar{n} > 1 (> 0)$$

Ora, dividendo per $\bar{n}$ da ambo le parti

$$\varepsilon > \frac{1}{\bar{n}} > 0$$

■

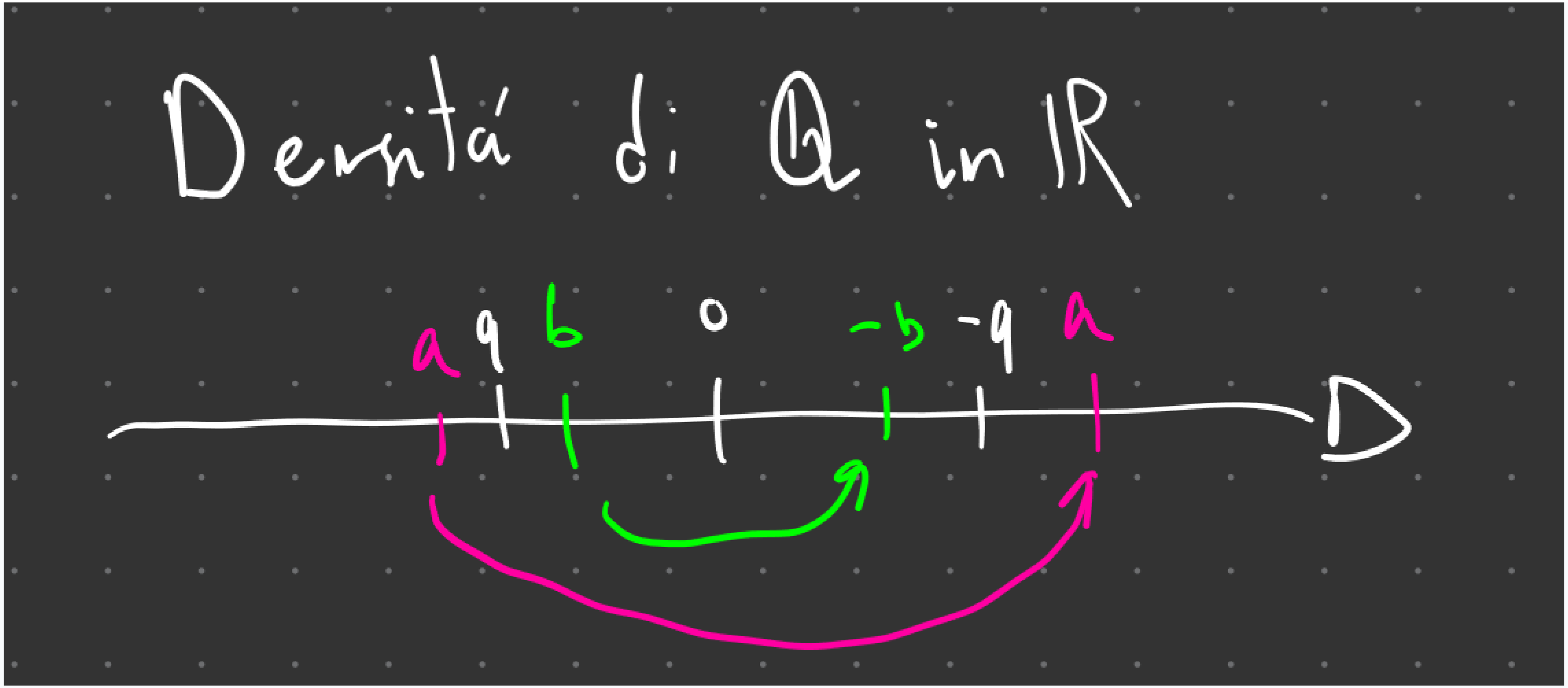
4. Densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$

TEOREMA 4.1.
Si dice che $\mathbb{Q}$ è *denso* in $\mathbb{R}$; ovvero siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, allora esiste $q \in \mathbb{Q}$ tale che

$$a < q < b$$

quindi tra due numeri reali a, b possiamo sempre trovarci un numero razionale in mezzo.

DIMOSTRAZIONE.
Per la dimostrazione tratteremo di tre casi distinti; ovvero
1. Quando $a < 0 < b$ non c'è nulla da dimostrare, in quanto abbiamo già $q = 0$.
2. Quando $a < b < 0$ allora possiamo invertire i segni, ottenendo il seguente grafico:



Quindi $q = -\frac{k}{n}$, che troveremo, va bene.
3. Quando $0 < a < b$, l'unico caso da trattare:
Innanzitutto chiamo la distanza tra i due punti $\varepsilon = b - a$ (e per forza dev'essere maggiore di 0, in quanto $b > a > 0$
).
Dopodiché, usando il **TEOREMA 3.1.**, abbiamo che

$$0 < \frac{1}{n} < \varepsilon = b - a$$

Ora, per il *principio di Archimede* (**TEOREMA 2.1.**), abbiamo (con $\varepsilon = \frac{1}{n}$ e $M = a$) che

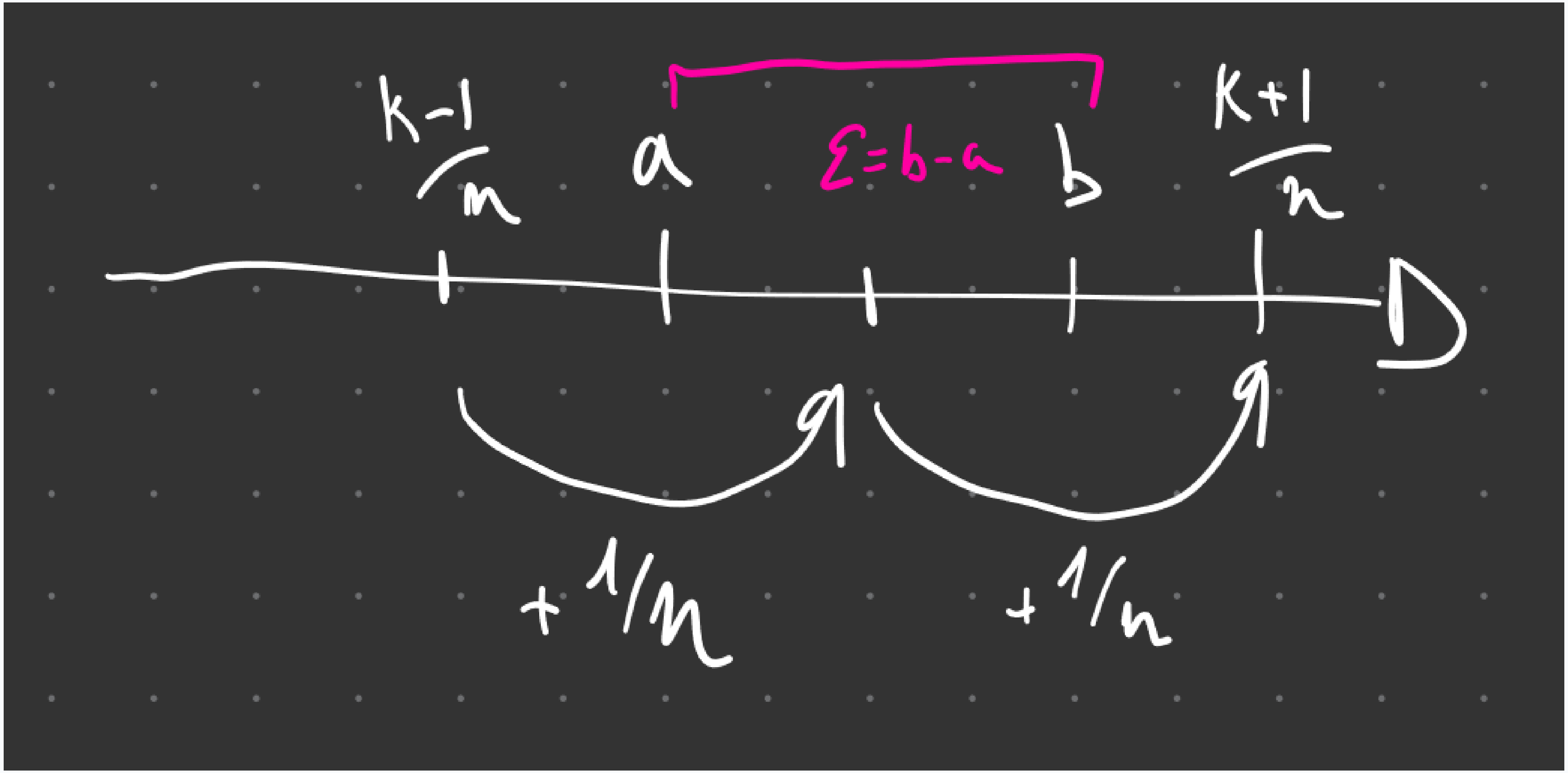
$$\exists k : \frac{k}{n} > a$$

Quindi, aggiungendo a da tutte le parti e considerando l'ultimo punto ho,

$$a < \frac{k}{n} < b$$

e sicuramente so che non può essere che $\frac{k}{n} > b$ in quanto $\frac{1}{n} < b - a$. (ovvero il salto per arrivare a b sarebbe troppo *"grande"*)

Graficamente,



5. Teorema di Cantor

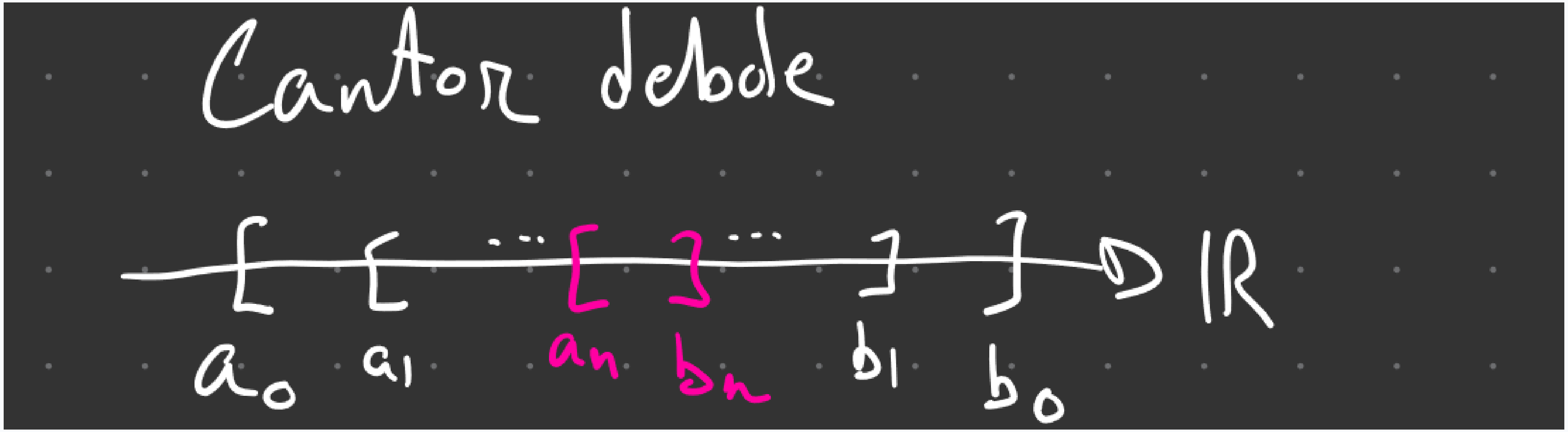
Considerando gli intervalli chiusi, limitati, inscatolati e dimezzati, abbiamo il seguente teorema.

TEOREMA 5.1. Forma debole del teorema di Cantor

Sia $(I_n)_n$ una successione di intervalli *chiusi, limitati e inscatolati*; allora l'intersezione di tutti gli intervalli è non-vuota;

$$\bigcap_n I_n \neq \emptyset$$

OSS 5.1.1. Tutti gli intervalli si rappresentano graficamente nel seguente modo:



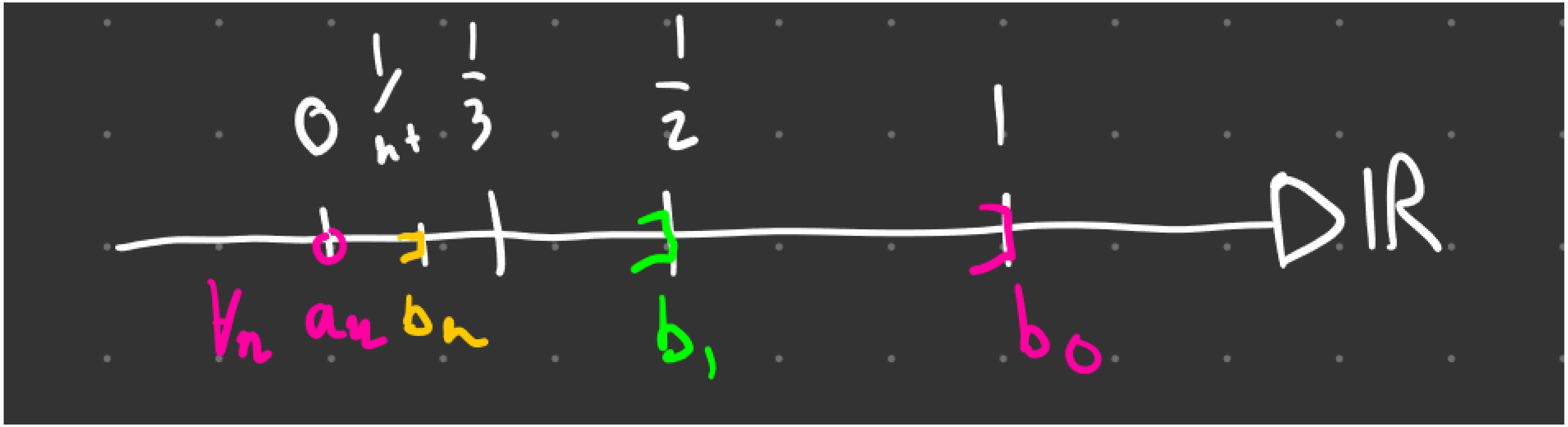
OSS 5.1.2. Notiamo che il fatto che gli intervalli *debbono essere chiusi* è una condizione necessaria al **TEOREMA 5.1.**; infatti troviamo un *controesempio* per cui non vale il **TEOREMA 5.1.** quando consideriamo insiemi *aperti* o *illimitati*.

ESEMPIO 5.1.2.1.

Consideriamo gli intervalli

$$I_0 = \ ]0, 1] \ ; \ I_1 = \ ]0, \frac{1}{2} \ ; \ \ldots \ ; \ I_n = \ ]0, \frac{1}{n+1}]$$

Che graficamente viene rappresentato come



Notiamo che l'intersezione di tutti gli intervalli in questo caso viene $\emptyset$;

$$\bigcap_n I_n = \emptyset$$

DIMOSTRAZIONE.
Consideriamo i seguenti due casi:
1. Se $x \leq 0$, allora x automaticamente non sta all'interno di nessun intervallo I_n.
2. Se $x > 0$, allora per la *proprietà di Archimede* (**TEOREMA 2.1.**)

$$\exists n \in \mathbb{N} : x > \frac{1}{n+1} > 0$$

allora x sta al dì fuori dell'intervallo

$$x \notin \;]0, \frac{1}{n+1}]$$

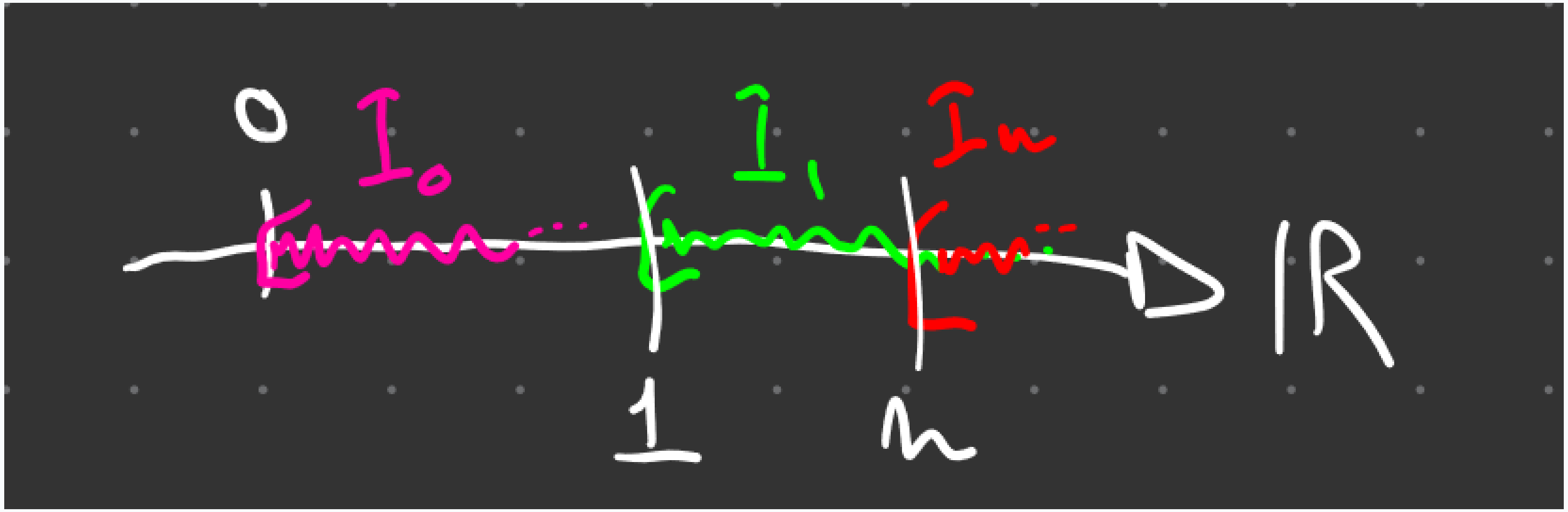
Pertanto non ci sono elementi comuni, rendendo l'intersezione di tutti gli intervalli l'insieme vuoto $\emptyset$.

- - -

ESEMPIO 5.1.2.2. Consideriamo ora degli intervalli *illimitati* (ovvero *non limitati*); di nuovo il teorema non vale. Ho

$$I_n = [n, +\infty[$$

Che graficamente viene rappresentato mediante



Supponiamo di scegliere un punto x nell'intorno I_n (ovvero ≥ 0); allora per *la proprietà di Archimede* (**TEOREMA 2.1.**) esisterà un intorno I_{n+1} che lo supera.
Quindi se ad ogni punto $x \geq 0$ fissiamo un intorno I_x vi è sempre un intorno I_k che supera quel punto fissato; pertanto l'intersezione di tutti gli insiemi è $\emptyset$.

$$\bigcap_n I_n = \emptyset$$

DIMOSTRAZIONE.

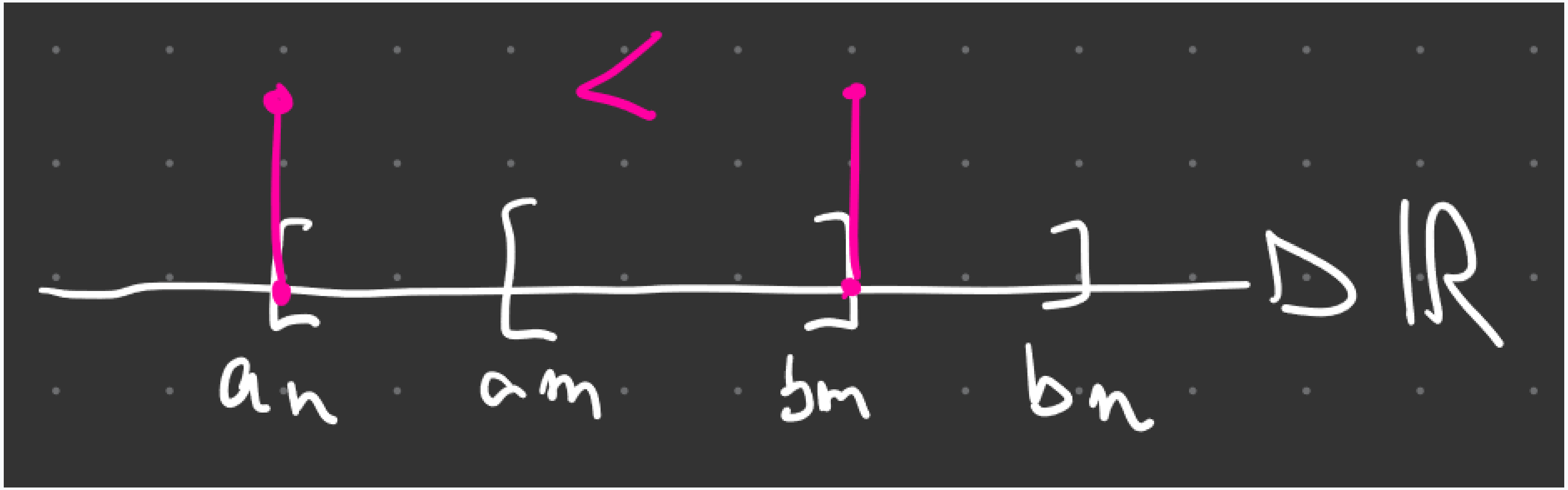
Consideriamo gli insiemi A come gli *"estremi sinistri"* e B come gli *"estremi destri"*.

$$
\begin{aligned}
A = \{a_n, n \in \mathbb{N}\} \\
B = \{b_n, n \in \mathbb{N}\}
\end{aligned}
$$

Inoltre ho

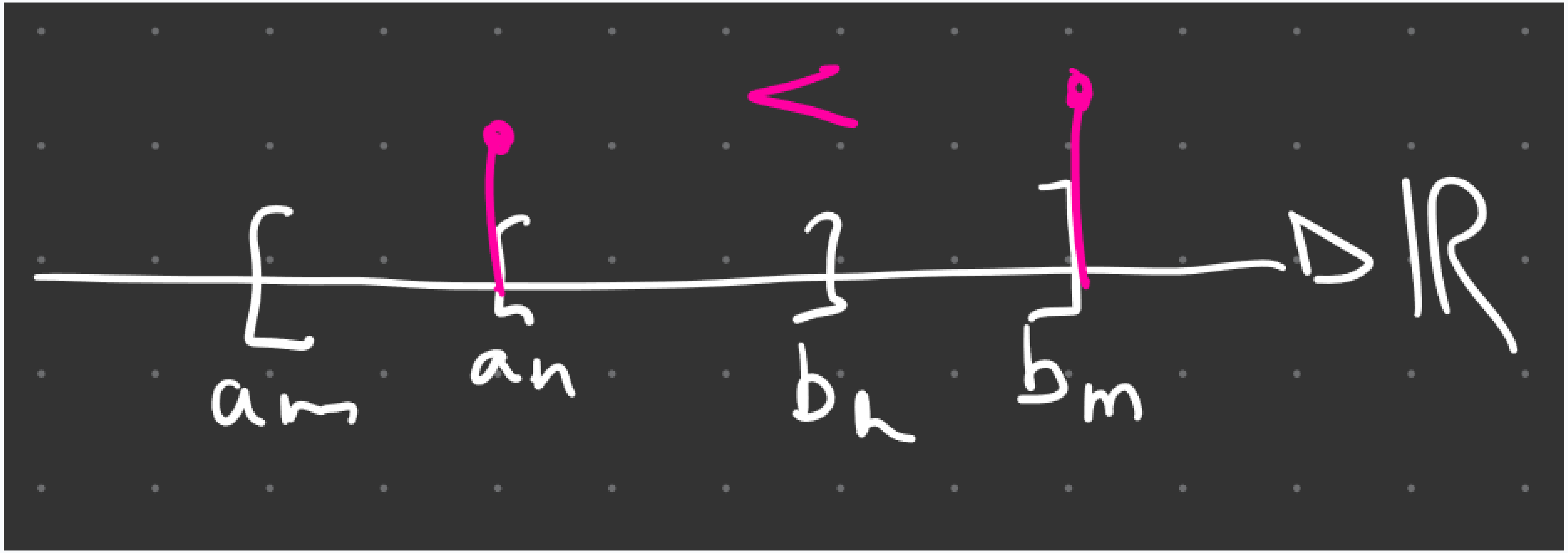
$$
\begin{aligned}
\forall n, \forall m;\ a_n \leq b_m \\
b_m \geq a_n
\end{aligned}
$$

SUBDIMOSTRAZIONE.
Se si vuole verificare la "proprietà" appena enunciata, allora si può considerare due casi:
1. $n \leq m$; si avrebbe $[a_m, b_m] \subseteq [a_n, b_n]$; che graficamente equivale a



pertanto è intuibile che $b_m \geq a_n$.

2. $n > m$; si avrebbe in questo caso $[a_n, b_n] \subseteq [a_m, b_m]$ che graficamente equivale a

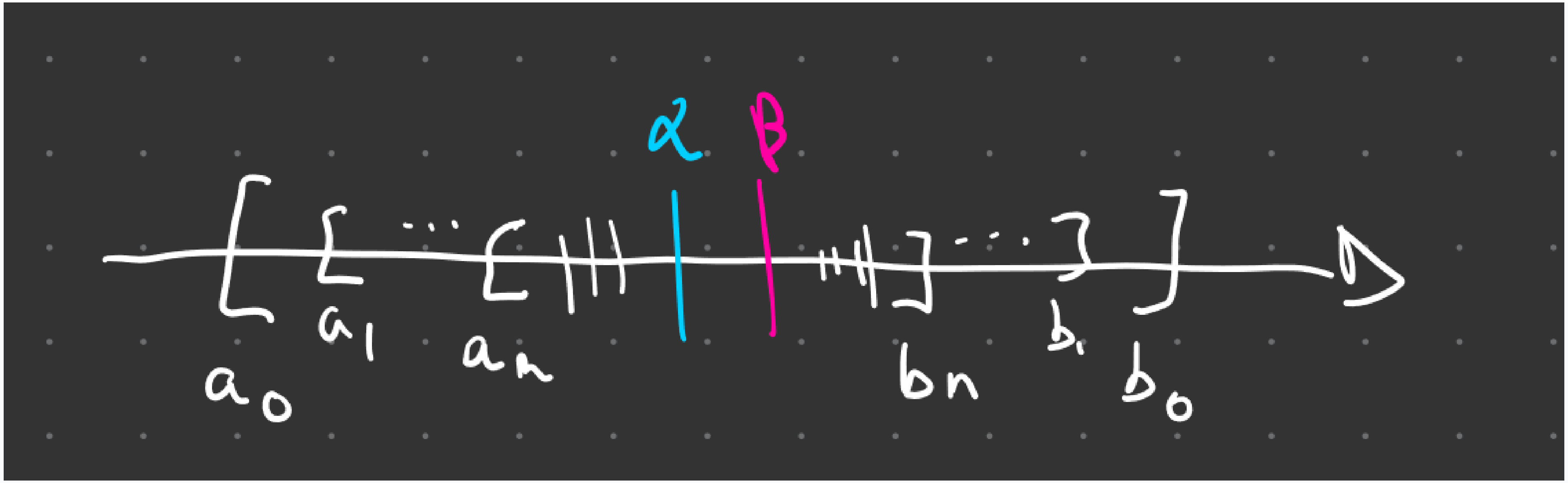


stesso discorso di prima; intuibile che $b_m \geq a_n$.

Ora chiamo $\alpha = \sup A$, il quale è garantito in quanto A è *limitato superiormente* (infatti abbiamo dalla proprietà appena enunciata abbiamo che b_m è il *maggiorante* di a_n)
Dato che abbiamo il *minorante* dei *maggioranti di* A (ovvero α), da qui segue che B è *inferiormente limitato*.
(oppure dato che $a_n \leq b_m \iff b_m \geq a_n$)
Allora chiamo $\beta = \inf B$ e ho

$$\beta \geq \alpha$$

Graficamente ho



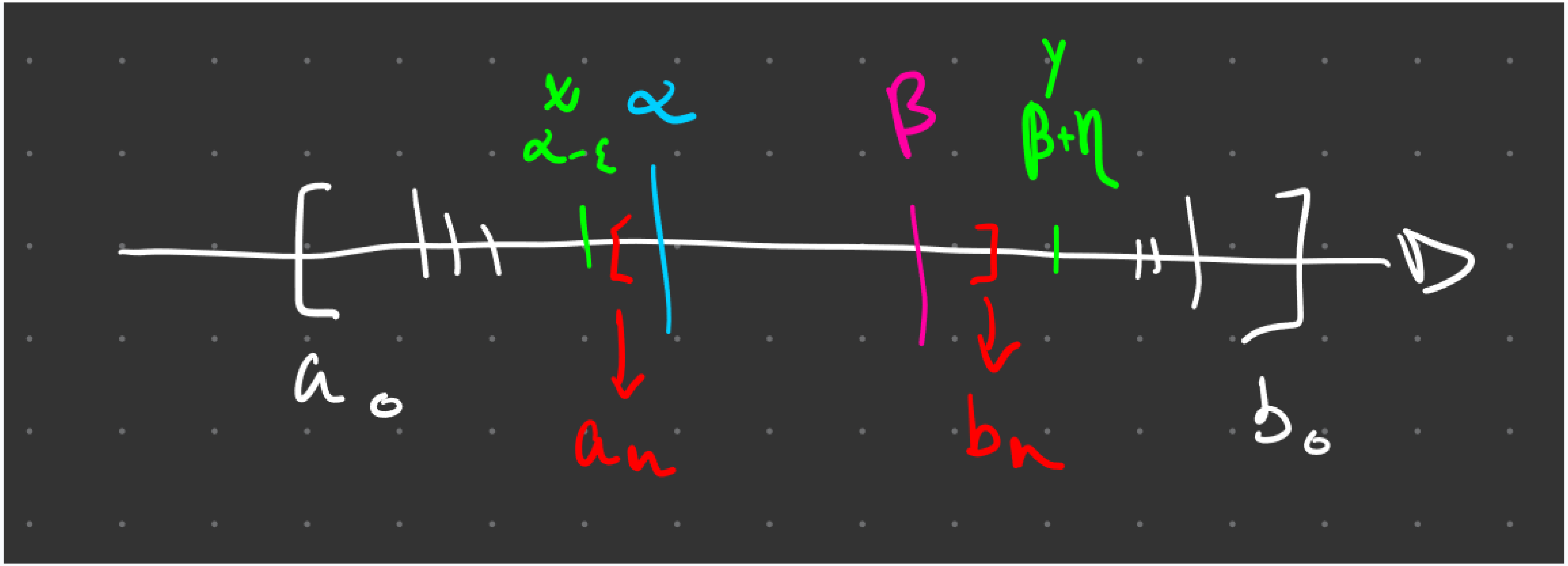
Io ho quindi

$$[\alpha, \beta] \subseteq [a_n, b_n], \forall n$$

Allora

$$[\alpha, \beta] \subseteq \bigcap_n I_n \implies \bigcap_n I_n \neq \emptyset$$

Anzi, sapendo dalla seconda proprietà degli estremi superiori (o estremi inferiori) abbiamo che se scegliamo un $x = \alpha - \varepsilon$ (per un $\varepsilon > 0$), allora esiste un a_n tale che $a_n > x$; di conseguenza x sta al di fuori dell'intervallo $[a_n, b_n]$; analogamente se scegliamo un $y = \beta + \eta$ (per un $\eta > 0$), allora esiste un b_n tale che $y > b_n$,
Graficamente,



Di conseguenza

$$x, y \notin [a_n, b_n]$$

Pertanto si può sicuramente affermare che

$$\bigcap_n I_n = [\alpha, \beta]$$

TEOREMA 5.2. Forma forte del teorema di Cantor

Sia $(I_n)_n$ una successione di intervalli *chiusi, limitati, inscatolati e dimezzati*; allora l'intersezione di tutti gli intervalli deve contenere un unico punto ξ;

$$\exists \xi \in \mathbb{R} : \bigcap_n I_n = \{\xi\}$$

DIMOSTRAZIONE.

La *forma debole dello stesso teorema* (**TEOREMA 5.1.**) mi dice che

$$\bigcap_n I_n = [\alpha, \beta]$$

dove α è l'estremo superiore degli *"estremi sinistri"* a_n e b l'estremo inferiore degli *"estremi destri"* b_n.
Ora, considerando che gli insiemi sono pure *dimezzati*, so che (**OSS 3.1.2.1.**, Intervalli):

$$\begin{aligned} b_n - a_n &= \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} \\ &= \frac{b_{n-2} - a_{n-2}}{2^2} \\ &\ldots \text{andando avanti finchè si raggiunge } n \ldots \\ &= \frac{b_0 - a_0}{2^n} \end{aligned}$$

Ora mi ricordo che $n \leq 2^n$ (che può essere dimostrata per *induzione*)
Allora si può *"maggiorare"* l'espressione di prima, ovvero

$$a_n - b_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n} \leq \frac{b_0 - a_0}{n}$$

ovviamente ricordandosi di cambiare il segno in quanto i numeri li troviamo al denominatore.
Ora, supponendo per assurdo che $\alpha < \beta$ ovvero nel senso che l'intervallo $[\alpha, \beta]$ ha più di un elemento, allora

avremmo che

$$\forall n, \frac{b_0 - a_0}{n} \geq b_n - a_n \geq \beta - \alpha > 0$$

ovvero

$$\forall n, \frac{b_0 - a_0}{n} \geq \beta - \alpha > 0$$

che però per **TEOREMA 3.1.** è impossibile, ovvero nel caso che abbiamo ora stiamo descrivendo che esiste un punto $\beta - \alpha$ maggiore di 0 che non è raggiungibile da $\frac{b_0 - a_0}{n}$ (quando invece è vero che tutti i punti > 0 sono raggiungibili da tale espressione).
Quindi, per assurdo, raggiungiamo alla conclusione che

$$\beta = \alpha$$

ovvero abbiamo l'intorno

$$[\beta, \beta] \text{ o } [\alpha, \alpha]$$

che comprendono solo il punto ξ. ■

Controlli del flusso di esecuzione

Istruzioni che servono per controllare il flusso di esecuzione di un programma; istruzione condizionale if-else, espressioni logiche; istruzioni iterative while, for; blocchi di codice e pile di frame

---

Coppie Ordinate e Prodotto Cartesiano

Nozione primitiva di coppia ordinata, differenze tra insiemi e coppie ordinate.

DEF 1. Nozione primitiva di coppia ordinata

Una **coppia ordinata** è un **aggregato** con **due** elementi, in cui si distingue il primo e il secondo elemento. Una coppia ordinata con elementi a e b viene indicata come (a, b).
ATTENZIONE. Si deve notare che la *coppia ordinata* è un concetto diverso da quello dell'insieme; infatti $(a, b) \neq \{a, b\}$, in quanto $\{a, b\} = \{b, a\}$ è vera per $\forall a, b$, invece $(a, b) = (a', b') \iff a = a'; b = b'$, di conseguenza $(a, b) \neq (b, a)$ a meno che $a = b$.

DEF 2. Prodotto Cartesiano

Siano A, B insiemi;
Si definisce il **prodotto cartesiano** di A e B come il seguente:

$$A \times B := \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

ESEMPIO 2.1. Il *Piano Cartesiano* π studiato alle scuole superiori si costruisce e si definisce nel seguente modo:

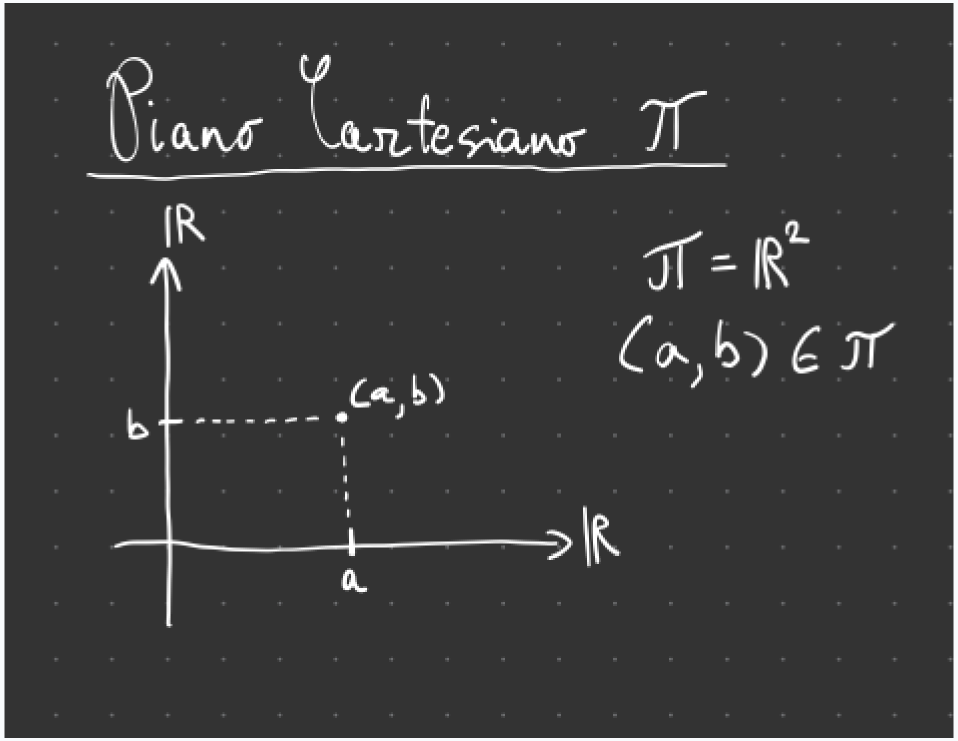
$$\pi = \{(a, b) : a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$$

Notiamo che gli insiemi A, B sono uguali; infatti

$$\pi = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$$

OSS 2.1.1. Il *Piano Cartesiano* appena descritto è un concetto molto importante per la matematica, in quanto esso costituisce un nesso tra i numeri e il piano π.

ILLUSTRAZIONE GRAFICA.

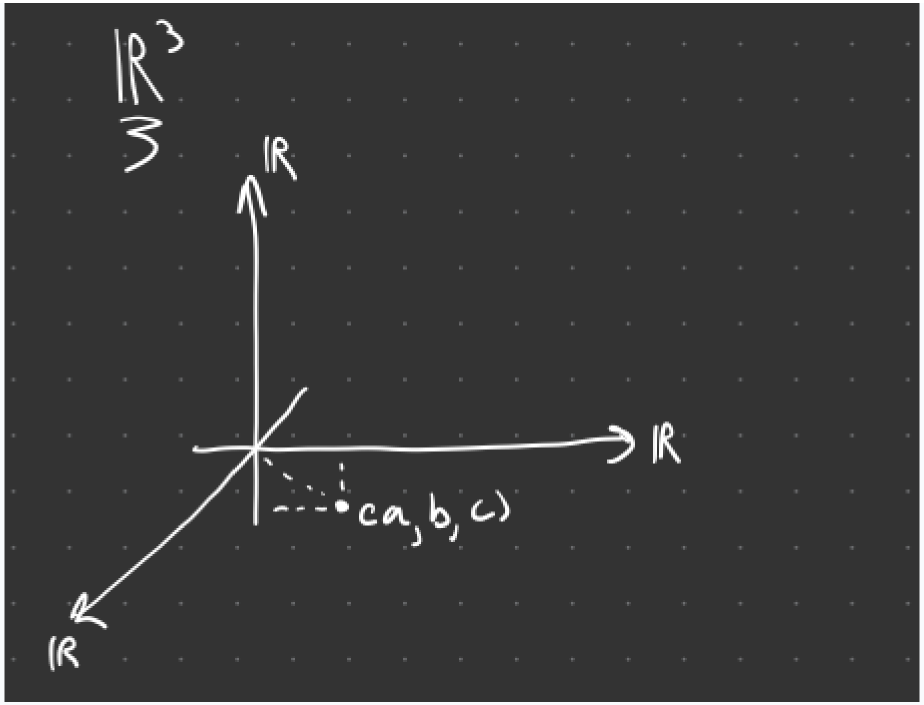


ESEMPIO 2.2. Similmente

$$A \times B \times C := \{(a, b, c) : a \in A, b \in B, c \in C\}$$

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$$

ILLUSTRAZIONE GRAFICA



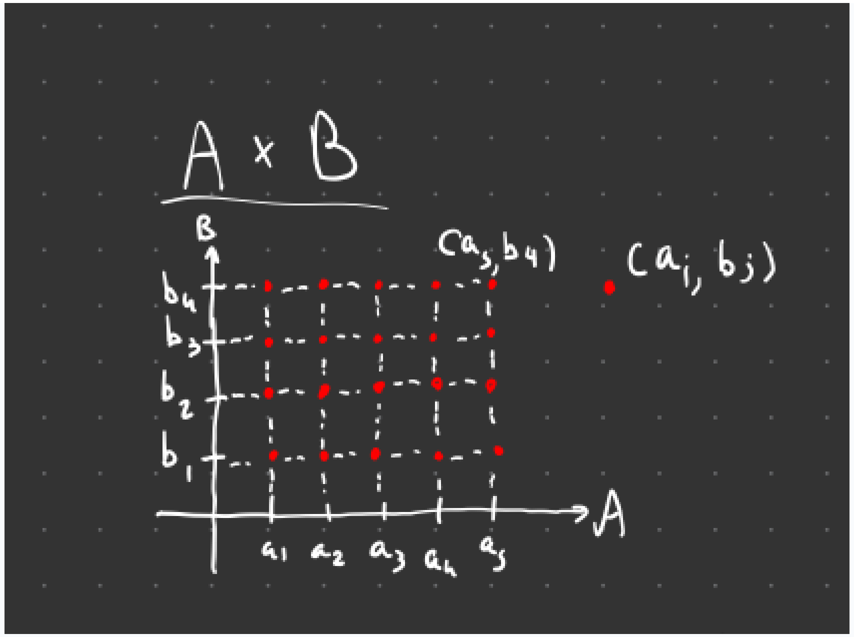
SUBDEF 2.1. Generalizzando, si definisce $\mathbb{R}^n$ come:

$$\mathbb{R}^n := \{(x_1, \ldots, x_n : x_1) \in \mathbb{R}, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

SUBDEF 2.1.1 Si definisce la componente $(x_1, \ldots, x_n : x_1)$ come una **n-upla** (vettore)

ESEMPIO 2.3. Si hanno $A = \{a_1, \ldots, a_5\}$ e $B = \{b_1, \ldots, b_4\}$; scrivi e rappresenta graficamente $A \times B$.

$$A \times B = \{(a_i, b_j) : i = 1, 2, 3, 4, 5; j = 1, 2, 3, 4\}$$



Definizione di Limite di funzione

Idea fondamentale del limite di una funzione; definizione di limite in tutti i casi; dimostrazione dell'esistenza di un limite. Definizione di limite destro e sinistro.

---

0. Argomenti propedeutici

Per affrontare uno degli argomenti più importanti dell'***analisi matematica***, ovvero i *limiti*, è necessario conoscere e ricordare alcuni argomenti:

- Intorni di $x_0 \in \tilde{\mathbb{R}}$
- Punti di aderenza e di accumulazione per un insieme $E \subseteq \mathbb{R}$

1. Idea fondamentale

IDEA. Prendiamo la una funzione di variabile reale (**DEF 1.1.**) del tipo

$$f : E \longrightarrow \mathbb{R}, E \subseteq \mathbb{R}$$

e consideriamo un punto $x_0 \in \tilde{\mathbb{R}}$ che è un *punto di accumulazione* per E (Punti di aderenza e di accumulazione, **DEF 2.1.**).
Ora voglio capire come posso *rigorosamente* formulare la seguente frase:
"Se $x \in E$ si avvicina a $x_0 \in \tilde{\mathbb{R}}$, allora $f(x)$ si avvicina a un valore $L \in \tilde{\mathbb{R}}$."
Ovvero col seguente grafico abbiamo
[GRAFICO DA FARE]

Oppure un caso più particolare, con

$$\begin{gathered}f : \mathbb{R} \diagdown \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x \cdot \sin(\frac{1}{x})\end{gathered}$$

dove 0 è un punto di accumulazione per E (il dominio), ma non ne fa parte.
[GRAFICO DA FARE]

2. Definizione rigorosa

Ora diamo una *formalizzazione rigorosa* del concetto appena formulato sopra.

DEF 2.1. *Definizione del LIMITE*
Sia f una *funzione di variabile reale* di forma

$$f : E \longrightarrow \mathbb{R}, E \subseteq \mathbb{R}$$

Siano $x_0, L \in \tilde{\mathbb{R}}$, x_0 un *punto di accumulazione* per E.
Allora definiamo il **limite di una funzione**

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

se è vera la seguente:

$$\begin{gathered}\forall V \text{ intorno di } L, \exists E \text{ intorno di } x_0 \text{ tale che:} \\ \forall x \in E, x \in U \diagdown \{x_0\} \implies f(x) \in V\end{gathered}$$

PROP 2.1. Questa *definizione* del limite può essere può essere interpretata in più casi.
CASO 1. Siano $x_0, L \in \mathbb{R}$. Quindi dei valori *fissi* sulla *retta reale*.
Abbiamo dunque il seguente disegno:
[DISEGNO DA FARE]
Ora interpretiamo la definizione del *limite* di $f(x)$, $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ in questo caso:

$$\begin{gathered}\forall V \text{ intorno di } L, \exists E \text{ intorno di } x_0 \text{ tale che:} \\ \forall x \in E, x \in U \diagdown \{x_0\} \implies f(x) \in V\end{gathered}$$

significa

$$\begin{gathered}\forall \varepsilon > 0, (L - \varepsilon, L + \varepsilon) \subseteq V, \exists \delta > 0 : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq U \\ \text{tale che } \forall x \in E \\ 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon\end{gathered}$$

che graficamente corrisponde a
[DISEGNO DA FARE]
OSS 2.1. Grazie a questa interpretazione è possibile creare un'analogia per il limite; infatti se immaginiamo che l'intorno di L con raggio ε è il *bersaglio* e se esiste il *limite*, allora deve essere sempre possibile trovare un

intorno attorno x_0 con raggio δ tale per cui facendo l'immagine di tutti i punti in questo intorno, *"colpisco"* il *"bersaglio"* (ovvero l'intorno di L).

OSS 2.2. Alternativamente è possibile pensare all'esistenza del *limite* come una *"macchina"* che dato un valore ε ti trova un valore δ.

Ora passiamo al secondo caso.

CASO 2. Ora interpretiamo

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

ovvero dove $L \in \tilde{\mathbb{R}}$. Allora interpretando il significato del limite abbiamo:

$$\begin{gathered}\forall M > 0, (M, +\infty), \exists \delta > 0 : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq U : \\ \text{tale che } \forall x \in E, \\ 0 < |x - x_0| < \delta \implies x > M\end{gathered}$$

ovvero abbiamo graficamente che per una qualsiasi retta orizzontale $x = M$, troveremo *sempre* un intervallo tale per cui l'immagine dei suoi punti superano sempre questa retta orizzontale.

[DISEGNO DA FARE]

Ora al terzo caso.

CASO 3. Ora abbiamo

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

ovvero dove $x_0 \in \tilde{\mathbb{R}}$. Interpretando la definizione si ha:

$$\begin{gathered}\forall \varepsilon > 0, (L-\varepsilon, L+\varepsilon), \exists N > 0 : (N, +\infty) : \\ \text{tale che } \forall x \in E, \\ x > N \implies |f(x) - L| < \varepsilon\end{gathered}$$

ovvero graficamente ho un grafico di una funzione $f(x)$, dove disegnando un qualsiasi intorno di L riuscirò sempre a trovare un valore N tale per cui tutti i punti dell'insieme immagine dell'intervallo $(N, +\infty)$ stanno *sempre* all'interno dell'intorno di L, indipendentemente da quanto stretto è questo intervallo.
[GRAFICO]

Infine all'ultimo caso.
CASO 4. Finalmente abbiamo

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

quindi *per definizione* ho

$$\begin{gathered}\forall M; (M, +\infty), \exists N; (N, +\infty) : \\ \text{tale che } \forall x \in E, \\ x > N \implies f(x) > M\end{gathered}$$

ovvero ciò vuol dire che fissando un qualunque valore M riuscirò *sempre* a trovare un valore N tale per cui prendendo un qualsiasi punto $x > N$, il valore immagine di questo punto supererà sempre M.
OSS 2.3. Nota che questo *NON* deve necessariamente significare che la funzione è *monotona crescente*. Però vale il contrario: infatti

$$\forall x_0, x_1 \in E, x_1 > x_0 \implies f(x_1) > f(x_0)$$

possiamo fissare $f(x_0) = M$, $x_0 = N$, abbiamo allora

$$\forall M, N, \exists x_1 \in E : x_1 > N \implies f(x_1) > M$$

questa condizione è sempre vera. In questo caso basta solamente prendere un qualsiasi $x_1 > x_0$.

2.1. Infinitesimo

APPROFONDIMENTO PERSONALE a. Usando la *nostra* definizione del limite e ponendo $L = 0, x = +\infty$, otteniamo un risultato che è consistente con la definizione di *infinitesimo*$^{(1)}$ secondo dei noti matematici russi, tra cui uno è Kolmogorov.
DEF 2.a. Si definisce un infinitesimo come una *grandezza variabile* α_n, denotata come

$$\lim_{x \to +\infty} \alpha_n = 0 \text{ oppure } \alpha_n \to 0$$

che possiede la seguente proprietà:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 : \forall x \in E, x > N \implies |\alpha_x| < \varepsilon$$

OSS 2.a. Notiamo che la definizione dell'*infinitesimo* diventerà importante per il calcolo degli *integrali*, in particolare la *somma di Riemann*.

> [1] *"[...] La quantità α_n che dipende da n, benché apparentemente complicata gode di una notevole proprietà: se n cresce indefinitamente, α_n tende a zero. Tale proprietà si può anche esprimere dicendo che dato un numero positivo ε, piccolo a piacere, è possibile scegliere un interno N talmente grande che per ogni n maggiore di N il numero α_n è minore, in valore assoluto, del lato numero ε."*
>
> Estratto tratto da *Le matematiche: analisi, algebra e geometria analitica* di *A.D. Aleksandrov*, *A. N. Kolmogorov* e *M. A. Lavrent'ev* (1974, ed. Bollati Boringhieri, trad. G. Venturini).

---

3. Limite destro e sinistro

PREMESSA. Sia una funzione f di variabile reale del tipo

$$f : E \longrightarrow \mathbb{R}, E \subseteq \mathbb{R}$$

$x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione per E, $L \in \tilde{\mathbb{R}}$.
Allora definisco le seguenti:
DEF 3.1. Il **limite della funzione f che tende a x_0 da destra** come

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$$

come

$$\begin{gathered}\forall V \text{ intorno di } L, \exists U \text{ intorno di } x_0 : \forall x \in E, \\ x \in U \cap (x_0, +\infty) \implies f(x) \in V\end{gathered}$$

ovvero come il *limite di* f, considerando però *solo* i punti che stanno a *destra* di x_0.
[GRAFICO DA FARE]

DEF 3.2. Analogamente **il limite della funzione f che tende a x_0 da sinistra** è

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$$

ovvero

$$\forall V \text{ intorno di } L, \exists U \text{ intorno di } x_0 : \forall x \in E,$$
$$x \in U \cap (-\infty, x_0) \implies f(x) \in V$$

OSS 3.1. Si può immediatamente verificare che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \iff \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$$

Infatti l'insieme dei x del limite *destro* e/o *sinistro* su cui verifichiamo che $f(x) \in V$ è un *sottoinsieme* dell'insieme di cui si verifica col limite generale. Pertanto facendo l'unione tra questi due sottoinsiemi abbiamo

$$[U \cap (-\infty, x_0)] \cup [U \cap (x_0, +\infty)] = U \diagdown \{x_0\}$$

DEF 3.1. (DALLA DISPENSA) Avevamo appena osservato che coi limiti *destri* e/o *sinistri* abbiamo semplicemente fatto una *restrizione* all'insieme $U \diagdown \{x_0\}$ di cui si cerca di verificare che $f(U \diagdown \{x_0\}) \subseteq V$. Dunque definiamo il **limite della funzione ristretta a** B, un qualunque sottoinsieme di E per cui x_0 è di accumulazione:

$$\lim_{x \to x_0} f_{|B}(x) = L$$

ovvero

$$\forall V \text{ intorno di } L, \exists U \text{ intorno di } x_0 : \forall x \in B,$$
$$x \in U \diagdown \{x_0\} \implies f(x) \in V$$

4. Strategia per verificare l'esistenza di limiti

Vogliamo sviluppare una serie di *strategie* per verificare l'esistenza dei limiti, ...

Equazioni e Proprietà Lineari

Equazioni Lineari

Equazioni Lineari

Un'equazione lineare è un'equazione algebrica di primo grado.

ESEMPIO 1. Consideriamo la seguente equazione:

$$3x + y - 2z = 0$$

^ex1
Intanto osserviamo che in questa equazione sono presenti tre variabili, ossia x, y, z.
Richiamandoci alla definizione della soluzione, risolvere quest'equazione significa determinare una (o tutte) le terne di numeri (x, y, z) tali che, se sostituiamo tali numeri alle variabili nel membro sinistro, si ottiene 0.
OSSERVAZIONE 1.1. Se in un'equazione a una variabile (come nell'Esempio 1.) ci viene chiesto di determinare solo **un** numero, in questo esempio ogni soluzione dev'essere costituito da **tre numeri**; quindi ci viene chiesta una *terna* di numeri, che devono apparire insieme. Il numero che costituisce la terna si chiama *entrata*.
ESEMPIO 1.1.1. La terna $(x = 0, y = 0, z = 0)$ è una soluzione all'equazione, infatti $3 * 0 + 1 * 0 - 2 * 0 = 0 + 0 - 0 = 0$
Parimenti, anche la scelta $(x = 1, y = 1, z = 2)$ ovvero la terna $(1, 1, 2)$ è una soluzione perché $3 * 1 + 1 * 1 - 2 * 2 = 3 + 1 - 4 = 0$.
Similmente anche $(0, 2, 1)$ è soluzione.

Sistema di Equazioni Lineari

Un *sistema di equazioni lineari* è costituito da più equazioni lineari; una soluzione viene considerata tale quando soddisfa tutte le equazioni nel sistema.
ESEMPIO Un esempio di equazione lineare che verrà preso in considerazione è la seguente.

$$\begin{cases} 3x + y - 2z = 0 \\ -2x - 2y + 2z = 0 \\ 2x - 0y - z = 0 \end{cases}$$

Proprietà lineari

C'è un motivo per studiare le equazioni lineari, in quanto emergono dei nuovi comportamenti particolari.
Ora accade che queste ultime 2 soluzioni in *esempio 1.1.1.* (vedi sopra) che abbiamo esibito possiamo costruire delle altre soluzioni, sfruttando le proprietà di base delle operazioni tra numeri, in particolare quella **associativa, commutativa e distributiva**.
Più concretamente si mostra che

$$(2, 2, 4)$$

è anch'essa soluzione all'esempio 1.
Però si può vedere questa terna nel modo seguente:

- Si parte da $(1, 1, 2)$
- Si moltiplica ogni *entrata* della terna per 2, ottenendo $(2, 2, 4)$
  In una maniera più compatta introduciamo la seguente notazione.

$$(2, 2, 4) = 2(1, 1, 2)$$

Riprendiamo la quantità che abbiamo considerato prima

$$\begin{aligned} 3*2+1*2-2*4 &= 3(2*1)+1(2*1)-2(2*1) \\ prop.\, associativa &= (3*2)1+(1*2)1-(2*2)2 \\ prop.\, commutativa &= 2(3*1)+2(1*1)-2(2*2) \\ prop.\, distributiva &= 2(3*1+1*1-2*2) \\ (1,1,2)\text{ è } soluzione &= 0 \end{aligned}$$

Pertanto si capisce che se moltiplichiamo la soluzione per un numero, otteniamo un'altra soluzione.
Lo stesso ragionamento ci mostra che la terna

$$(37,37,74)$$

è soluzione, perché

$$3*37+1*37-2*74=37(3*1+1*1-2*2)=37*0=0$$

PRIMA PROPRIETA'

Generalizzando, vediamo che $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ la terna $(\alpha,\alpha,2\alpha)=\alpha(1,1,2)$ è soluzione.

OSSERVAZIONE 2. Tuttavia così non si ottiene *tutte* le soluzioni di un'equazione; ad esempio la terna $(0,2,1)$ è anche una soluzione all'*esempio 1.* (vedi all'inizio).
Si dice che queste due soluzioni sono *linearmente indipendenti*.

SECONDA PROPRIETA'

Analizziamo ora un secondo fenomeno. Si mostra che

$$(1,3,3)$$

è soluzione.
OSSERVAZIONE 3.

$$\begin{aligned} 1 &= 1 + 0 \\ 3 &= 1 + 2 \\ 3 &= 2 + 1 \end{aligned}$$

Ovvero, in una notazione più compatta,

$$(1,3,3) = (1,1,2) + (0,2,1)$$

Ora calcoliamo

$$\begin{aligned} 3 * 1 + 1 * 3 - 2 * 3 &= 3(1 + 0) + 1(1 + 2) - 2(2 + 1) \\ prop.\, distributiva &= (3 * 1 + 1 * 1 - 2 * 2) + (3 * 0 + 1 * 2 - 2 * 1) \\ entrambi\ sono\ soluzioni &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

Generalizzazioni

Condensando quanto osservato, troviamo le tre proprietà principali:

1. La terna $(0,0,0)$ è soluzione
2. Se $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ è soluzione, allora $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ anche $\alpha(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ è soluzione.
3. Se $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ sono due soluzioni, allora anche $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) + (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = ((\bar{x} + \hat{x}), (\bar{y} + \hat{y}), (\bar{z} + \hat{z}))$ è soluzione

Equazioni e soluzione

Cos'è un equazione? Una soluzione? Definizioni intuitive di questi concetti.

Equazione

Una definizione intuitiva di un'equazione può essere una domanda, a cui si presuppone di avere una risposta. Si illustra il concetto mediante un esempio.
ESEMPIO 1. L'equazione $x^2+2x+1=0$ è un modo di formalizzare la seguente domanda: *"Qual è quel numero", che indicheremo con* ***x****, tale che se calcolo* x^2+2x+1 *, esso è zero?"*
In questa domanda ci sono dei assunti che si presumono veri, per esempio ci si presuppone che c'è solo un numero che soddisfi alla risposta, oppure che la risposta sia un numero.

Soluzione ad un'equazione

Se l'equazione è una domanda a cui si può dare una risposta, allora la soluzione di un'equazione non è che altro una risposta corretta alla domanda; dunque è un numero.
ESEMPIO 2. La soluzione dell'**esempio 1** (vedi sopra) è -1, in quanto sostituendo la x nell'espressione $x^2+2x+1=0$ con -1, si avrebbe $0=0$, che è corretto.

Pertanto si capisce che il metodo **non** conta, dato che la quantità che si ottiene al *membro sinistro* (ovvero a sinistra del simbolo $=$ dell'equazione) è la medesima del *membro destro* (vedi sopra).

Inoltre, la teoria delle equazioni di 2° grado ci dice che **non** ci sono altre soluzioni e che $x^2+2x+1=(x+1)^2$.

Nel prossimo file si considereranno le Equazioni e Proprietà Lineari, ovvero le equazioni di primo grado, da cui si può osservare delle caratteristiche e delle proprietà peculiari.

Esempi di Induzione

Esempi sulle prove per induzione. Articolo creato ad-hoc per la quantità presente degli esempi, rendendo il file originario troppo pesante.

1. Esempi di dimostrazione per induzione

ESEMPIO 1.1. Aneddoto di Gauss.

Si racconta che quando il matematico *C. F. Gauss* frequentava le scuole elementari, il suo professore di matematica aveva dato un esercizio da fare in quanto punizione: ovvero quello di sommare tutti i numeri da 0 a 100; quindi tutti i numeri $0+1+2+\ldots+100$.
Alla sorpresa del professore e dei suoi compagni, Gauss riuscì, non solo a risolvere il problema quasi immediatamente consegnando la sua lavagna sulla cattedra, ma anche essere l'unico alunno ad aver dato la risposta corretta: 5050.
Grazie alla sua intuizione, Gauss riuscì a ingegnare un metodo per calcolare quel numero con una velocità strabiliante: ovvero quella di determinare la somma da 0 a 100 come A, che è uguale alla somma da 100 a 1 (proprietà commutativa); Quindi sommando A con sé stesso ma disposti in una maniera diversa (ovvero la prima con un criterio crescente, la seconda decrescente), ottiene $2A = 100(101) \iff A = \frac{100(101)}{2}$

Generalizzando da questo aneddoto abbiamo la seguente proprietà:

$$\mathcal{P}(n) = 0+1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Ora vogliamo dimostrarla rigorosamente *per induzione*.
DIM.
1. Caso base: verificare $\mathcal{P}(0)$;

$$\mathcal{P}(0) : 0 = \frac{0(1)}{2} = 0 \text{ OK}$$

2. Ipotesi induttiva; supponendo che $\forall n, \mathcal{P}(n)$ è vera, allora anche $\mathcal{P}(n+1)$ è vera.

$$\mathcal{P}(n) : 0 + 1 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Avvolte è utile anche già "*prevedere*" dove vogliamo arrivare a partire da $\mathcal{P}(n)$, ovvero $\mathcal{P}(n+1)$. In questo caso si potrebbe anche utilizzare l'ipotesi induttiva, ovvero

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(n+1) : 0 + 1 + \ldots + n + (n+1) &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\ \mathcal{P}(n) + (n+1) &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\ \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) &= \ldots \\ (n+1)(\frac{n}{2} + 1) &= \ldots \\ (n+1)(\frac{n+2}{2}) &= \ldots \\ \frac{(n+1)(n+2)}{2} &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \text{ OK}\end{aligned}$$

3. Pertanto si verifica che i numeri che rendono $\mathcal{P}(n)$ vera sono tutti i numeri naturali $\mathbb{N}$ a partire da 0.

ESEMPIO 1.2. Somma dei quadrati

Provare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale

$$P(n) : 0 + 1 + 4 + \ldots + n^2 = \frac{(n)(n+1)(2n+1)}{6}$$

Anche qui possiamo usare l'induzione, dato che anche qui si tratta di una *proprietà* sui numeri naturali $\mathbb{N}$.

1. Caso base:

$$P(0) : 0 \stackrel{?}{=} \frac{0(0+1)(2(0)+1)}{0}$$
$$0 = 0 \text{ OK}$$

2. Ipotesi induttiva:

$$P(n) : 0 + 1 + 4 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$P(n+1) : 0 + 1 + 4 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$$

3. Sviluppando $P(n+1)$,

$$\begin{aligned}
P(n+1): 0+1+4+\ldots+n^2+(n+1)^2 &= \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6} \\
P(n)+(n+1)^2 &= \ldots \\
\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2 &= \ldots \\
(n+1)(\frac{n(2n+1)}{6}+(n+1)) &= \ldots \\
\frac{(n+1)(n)(2n+1)+6(n+1)^2}{6} &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \\
\frac{(n+1)((n)(2n+1)+6n+6)}{6} &= \frac{(n+1)(n^2+7n+6)}{6} \\
(n+1)(2n^2+n+6n+6) &= (n+1)(n^2+n+6n+6) \\
\text{OK} \blacksquare
\end{aligned}$$

ESEMPIO 1.3. Disuguaglianza di Bernoulli.

Sia $a > -1$, $a \in \mathbb{R}$. Allora $\forall n \in \mathbb{N}$ vale la seguente:

$$(1+a)^n \geq 1+na$$

DIM. Sia $P(n): (1+a)^n \geq 1+na$.

1. Verificare $P(0)$;

$$P(0): (1+a)^1 \geq 1 \iff 1 \geq 1 \text{ OK} \blacksquare$$

2. Supponendo che $P(n)$ sia vera, verificare $P(n) \implies P(n+1)$.

$$\begin{aligned} P(n) : (1+a)^n &\geq 1 + na \\ (1+a)^n(1+a) &\geq (1+na)(1+a) \\ (1+a)^{n+1} &\geq 1 + (n+1)a + na^2 \end{aligned}$$

Sapendo che $1 + (n+1)a$ è sicuramente maggiore o uguale a $P(n+1)$ ovvero $1 + (n+1)a$, in quanto na^2 è necessariamente positivo, allora consegue che

$$P(n+1) : (1+a)^{n+1} \geq 1 + (n+1)a$$

è vera, verificando $P(n) \implies P(n+1)$. ■

ESEMPIO-ESERCIZIO 1.4. Disuguaglianza di Bernoulli incrementata.

PROVARE CHE VALE LA PROPRIETA' $P(n) : (1+a)^n \geq 1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2$, **OVE $a > 0$ e $\forall n \geq 1$.

1. Provare $P(1)$;

$$P(0) : 1 + a \geq 1 + a + 0 \text{ OK}$$

2. Supponendo che $P(n)$ sia vera, provare che $P(n) \implies P(n+1)$

$$P(n) : (1+a)^n \geq 1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2$$

ed è utile "prevedere" $P(n+1)$, quindi

$$P(n+1):(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a+\frac{(n+1)(n)}{2}a^2$$

3. Ora prendiamo $P(n)$ e moltiplichiamo per $(1+a)$ da ambo le parti (che è possibile in quanto la relazione d'ordine $\geq$ è compatibile con $(1+a)$)

$$P(n):(1+a)^n(1+a) \geq (1+na+\frac{n(n-1)}{2}a^2)(1+a)$$
$$(1+a)^{n+1} \geq (1+na+\frac{n(n-1)}{2}a^2)+(a+na^2+\frac{n(n+1)}{2}a^3)$$
$$(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a+(\frac{n(n-1)}{2}+n)a^2+\dots a^3$$

4. Ora vogliamo dimostrare che il membro destro della disuguaglianza è necessariamente maggiore di $1+(n+1)a+\frac{(n+1)(n)}{2}a^2$, rendendo per la *proprietà transitiva* $(1+a)^{n+1}$ anch'esso maggiore di $1+(n+1)a+\frac{(n+1)(n)}{2}a^2$, verificando così l'implicazione.

$$1+(n+1)a+(\frac{n(n-1)}{2}+n)a^2+\dots a^3 \geq 1+(n+1)a+\frac{(n+1)(n)}{2}a^2$$
$$(\frac{n(n-1)+2n}{2})a^2+\dots a^3 \geq \frac{(n+1)(n)}{2}a^2$$

Dato che $\dots a^3$ (parte omessa in quanto non è rilevante, dato che n è sempre un numero positivo) è anch'essa sempre positiva in quanto $a>0$, ora basta dimostrare che

$$
\begin{aligned}
n(n-1)+2n &\geq (n+1)(n)\\
n(n-1+2) &\geq (n+1)(n)\\
n(n+1) &\geq n(n+1) \text{ OK } \blacksquare
\end{aligned}
$$

5. Verificando così $P(n) \implies P(n+1)$, dato che da $P(n)$ si verifica $P(n+1)$.

ESEMPIO 1.5. Ridotta della serie geometrica.

Sia $a \neq 1$; allora con $\forall n \in \mathbb{N}$ si ha

$$P(n) : a^0 + a^1 + \ldots + a^n = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$$

DIM.

1. Dato che $n \in \mathbb{N}$, si può usare l'induzione; allora partiamo verificando $P(0)$;

$$P(0) : a^0 = \frac{a^1-1}{a-1} \iff 1 = 1 \text{ OK}$$

2. Ora supponendo $P(n)$, verifichiamo $P(n) \implies P(n+1)$.

$$\begin{aligned} P(n): a^0 + a^1 + \ldots + a^n &= \frac{a^{n+1}-1}{a-1} \\ a^0 + a^1 + \ldots + a^n + a^{n+1} &= \frac{a^{n+1}-1}{a-1} + a^{n+1} \\ P(n+1): a^0 + a^1 + \ldots + a^{n+1} &= \frac{a^{n+1}-1+a^{n+1}(a-1)}{a-1} \\ \ldots &= \frac{a^{n+1}-1+a^{(n+1)+1}-a^{n+1}}{a-1} \\ P(n+1): \ldots &= \frac{a^{(n+1)+1}-1}{a-1} \end{aligned}$$

Da qui si vede che $P(n) \implies P(n+1)$ è vera.

ESEMPIO 1.6.

PROVARE CHE PER OGNI $n \geq 1$ VALE CHE IL NUMERO $n^3 + 5n$ E' DIVISIBILE PER 6.

1. Provare $P(1)$;

$$P(1): \exists k \in \mathbb{Z} \mid 1^3 + 5 = 6k \iff 6 = 6k; k = 1 \text{ OK}$$

2. Provare che, supponendo $P(n)$, allora $P(n+1)$;

$$\begin{aligned} P(n) &: \exists k_1 |\ n^3 + 5n = 6k_1 \\ P(n+1) &: \exists k_2 |\ (n+1)^3 + 5(n+1) = 6k_2 \\ &\dots |\ n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 5n + 5 = 6k_2 \\ &\dots |\ (n^3 + 5n) + (3n^2 + 3n + 6) = 6k_2 \\ &\dots |\ 6k_1 + 3(n^2 + n + 2) = 6k_2 \\ &\dots |\ 3(n^2 + n + 2) = 6(k_1 - k_2) \\ &\dots |\ n^2 + n + 2 = 2(k_1 - k_2) \\ &\dots |\ (n)(n+1) = 2(k_1 - k_2 - 1) \end{aligned}$$

3. Vediamo che il problema si riduce a dimostrare che $(n+1)(n)$ è *pari* (ovvero divisibile per 2), il che è facile da dimostrare se consideriamo due casi per $(n+1)(n)$:
   > 1. Se n è pari, ovvero della forma $2m$, allora
   >
   > $$(n+1)(n) \iff (2m+1)(2m) \iff 4m^2 + 2m \iff 2(2m^2 + m)$$
   >
   > è pari in quanto l'espressione finale è comunque moltiplicata per due.
   > 2. Se n è dispari, ovvero della forma $2m+1$, allora
   >
   > $$(n+1)(n) \iff (2m+2)(2m+1) = 2(m+1)(2m+1)$$
   >
   > anche qui è pari per lo stesso ragionamento di prima. ■

ESEMPIO 1.7.

PROVARE CHE PER OGNI $n \geq 1$ VALE CHE $n! \geq 2^{n-1}$

1. Provare $P(1)$;

$$P(1) : 1! \geq 2^0 \iff 1 \geq 1 \text{ OK}$$

2. Supponendo $P(n)$, provare $P(n) \implies P(n+1)$:

$$\begin{aligned} P(n) : n! &\geq 2^{n-1} \\ n!(n+1) &\geq 2^{n-1}(n+1) \\ (n+1)! &\geq 2^{n-1}(n+1) \end{aligned}$$

3. Dato che $n \geq 1$, ne consegue che $n+1 \geq 2$; quindi possiamo scrivere

$$2^{n-1}(n+1) \geq 2(2^{n-1}) = 2^n$$

4. Quindi per la proprietà transitiva della relazione $\geq$, si verifica che

$$P(n+1) : (n+1)! \geq 2^n$$

Verificando così $P(n) \implies P(n+1)\blacksquare$.

PROBLEMA 1.1.

PROBLEMA. *Disegniamo nel piano una retta e notiamo subito che questa retta suddivide il piano in 2 "regioni"; ora disegniamo 2 rette e vediamo che ora abbiamo 4 regioni; ora 3 rette e notiamo che possiamo avere al massimo 7 regioni.*

Se si desidera, si può visualizzare il problema con il grafico sottostante. Ora ci poniamo i seguenti problemi.
[GRAFICO DA FARE]

TRACCIA 1. (DA COMPLETARE)

Trovare una formula (o funzione, successione) che individui il numero delle regioni per n rette.

SOLUZIONE 1. L'idea è la seguente.
Individuiamo una *retta* orizzontale,

Ora, avendo definito la *successione* della funzione delle regioni in n f_n, possiamo usare un metodo simile a quello chiamato *"Ansatz"*, usato per risolvere le equazioni differenziali; ovvero congetturando una *soluzione generale*, poi per inserirla nella definizione di f_n, allora otteniamo la soluzione specifica $f(n)$.
Congetturiamo che

$$f(n) = an^2 + b^n + c$$

[Questa parte è molto complicata da fare, quindi lo farò un weekend in chill; tanto in teoria non è proprio 100% del programma, eh]

TRACCIA 2.

Provare che le regioni individuate con n rette sono al massimo $\frac{n^2+n}{2} + 1$.

OSS 1.1.1. Si nota, a posteriori (o anche dimostrata sopra), che indicando f_n il numero di regioni con n rette, si ha

$$f_{n+1} = f_n + (n+1)$$

dove $f_1 = 2$.

SOLUZIONE. Si può dimostrare la formula $f(n) = \frac{n^2+n}{2} + 1$ con il principio di induzione e anche grazie al suggerimento indicato sopra.

1. Provare $f(1)$;

$$f(1) : f_1 = \frac{1+1}{2} + 1 \iff 2 = 2 \text{ OK}$$

2. Supponendo $f(n)$, provare $f(n+1)$;

$$\begin{aligned} f(n) : f_n &= \frac{n^2+n}{2} + 1 \\ f_n + (n+1) &= \frac{n^2+n}{2} + 1 + (n+1) \\ f_{n+1} &= \frac{n^2+n+2n+2}{2} + 1 \\ \ldots &= \frac{n^2+n+2n+2}{2} + 1 \\ \ldots &= \frac{n^2+3n+2}{2} + 1 \\ \ldots &= \frac{(n+1)^2+(n+1)}{2} + 1 \end{aligned}$$

3. Quindi da $f(n)$ si ottiene $f(n+1)$, terminando così la dimostrazione. ■

Esercizi sulle funzioni

Alcuni esercizi misti sulle funzioni

---

0. Info

Questo appunto contiene degli esercizi misti sull'argomento delle Funzioni. Notare che alcuni esercizi potrebbe richiedere già di essere preparati nell'argomento delle *funzioni di variabile reale*, ovvero Funzioni di potenza, radice e valore assoluto e/o Funzioni trigonometriche.

1. Esercizi misti proposti da D.D.S.

Qui si propone degli esercizi misti sulle funzioni svolte durante le lezioni dell'A.A. 2023-2024.

ESERCIZIO 1.a. Sia

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x^2 + x - 1$$

Si determini:

$$\begin{gathered} f(0), \{f(n), n \in \mathbb{N}\}, f([1,2]), f(3x) \\ f \circ f, (f(x))^2, f(x^2), f^{\leftarrow}([2,4]) \end{gathered}$$

Con il grafico della funzione da disegnare.

ESERCIZIO 1.b. Sia

$$\sin : \mathbb{R} \longrightarrow [-1,1]$$

Determinare $\sin([0, \frac{3}{4}\pi])$.

ESERCIZIO 1.c. Data la funzione $\arcsin$, trovare

$$\arcsin^{\leftarrow}([0, \frac{1}{2}])$$

ESERCIZIO 1.d. Data la funzione

$$f(x) = \frac{|x+1|}{x}$$

Disegnare $f(x)$ e determinare

$$f^{\leftarrow}(]0, +\infty[)$$

2. Svolgimento degli esercizi

Se un giorno avessi la voglia di farlo, mi sistemerei pure lo svolgimento e la soluzione di questi esercizi. Però questo sarebbe da vedere.

Forma Trigonometrica dei Numeri Complessi

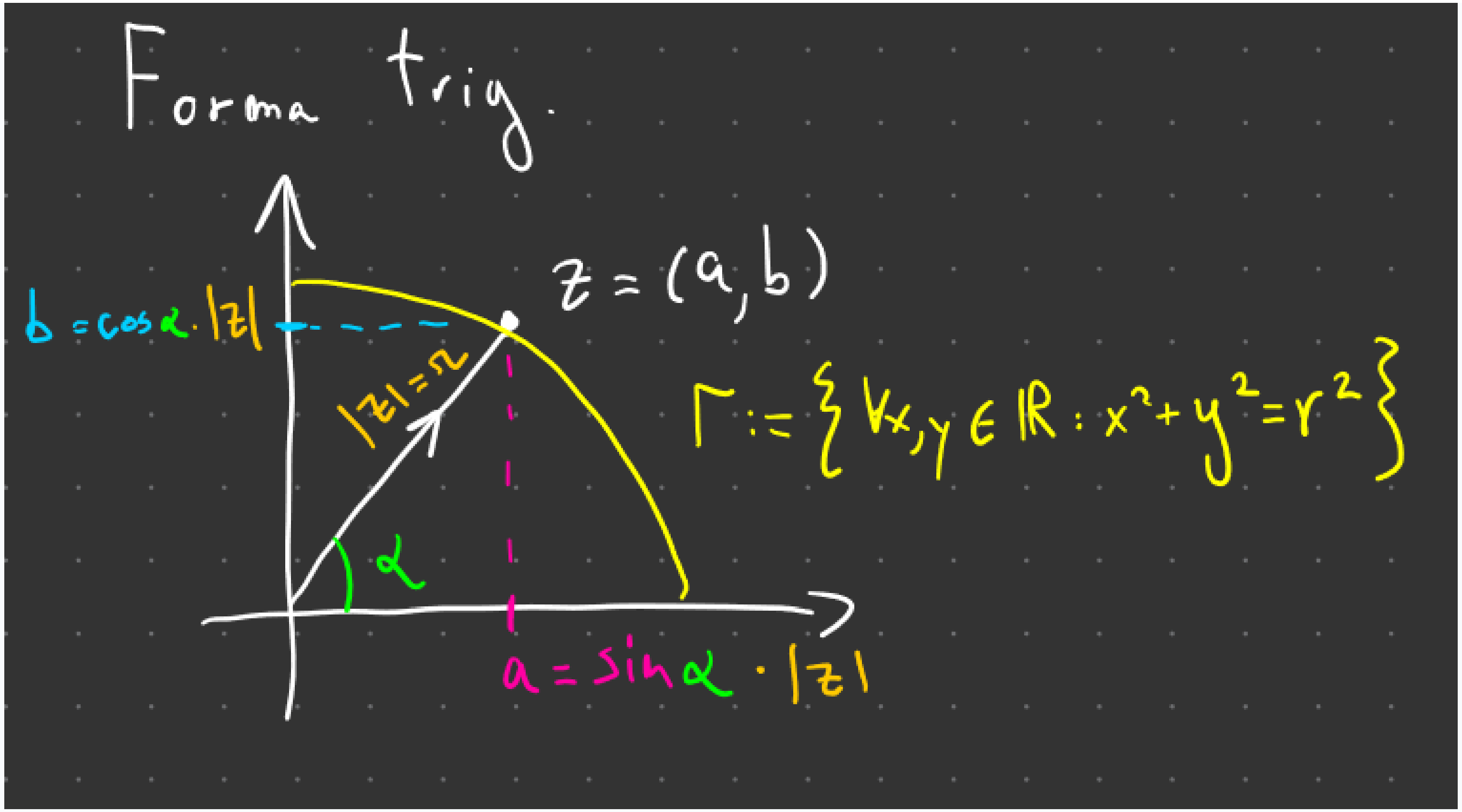
Rappresentazione dei numeri complessi come un z associato a modulo e argomento; argomento come la classe di equivalenza dell'argomento principale; nuova interpretazione della moltiplicazione; esempi; Formula di De Moivre.

---

1. Rappresentazione trigonometrica

Oltre alla rappresentazione *"algebrica"* dei numeri complessi $\mathbb{C}$ (Rappresentazione dei Numeri Complessi), è possibile anche considerare un'altra rappresentazione che fa uso delle Funzioni trigonometriche.

NOZIONE. Prendiamo un $z \in \mathbb{C}$, che geometricamente vuol dire



Allora secondo le definizioni del *seno* e del *coseno* (Funzioni trigonometriche, **DEF 1.**) possiamo considerare

$$
\begin{aligned}
a &= \cos\alpha \cdot |z| \\
b &= \sin\alpha \cdot |z|
\end{aligned}
$$

dove $|z|$ rappresenta il *modulo* di z. (Operazioni sui Numeri Complessi, **DEF 4.**)
Dunque

$$
z = a + ib = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)
$$

e lo si può scrivere come

$$z \sim (|z|, [\alpha])$$

che si legge come "z *lo rappresento come* $(|z|, [\alpha])$".

DEF 1. Quindi definisco le due *componenti* che sono associate a z:

- **Modulo** come $|z|$, che d'ora in poi verrà genericamente chiamato come ρ. Ovviamente può essere solo maggiore o uguale a 0.
- **Argomento** come l'angolo α;
  - Dai risultati della *trigonometria*, sarebbe meglio considerare **l'argomento principale** come la classe di equivalenza $[a]_{\equiv 2\pi}$ dove $\alpha \in [0, 2\pi)$. Qui si parla della *congruenza modulo* 2π (Relazioni, **ESEMPIO 3.2**); questo in quanto 2π rappresenterebbe un giro intero, quindi $\alpha = \alpha + 2\pi$. Allora

$$[\alpha] = \{\forall k \in \mathbb{Z}, \alpha + 2k\pi\}$$

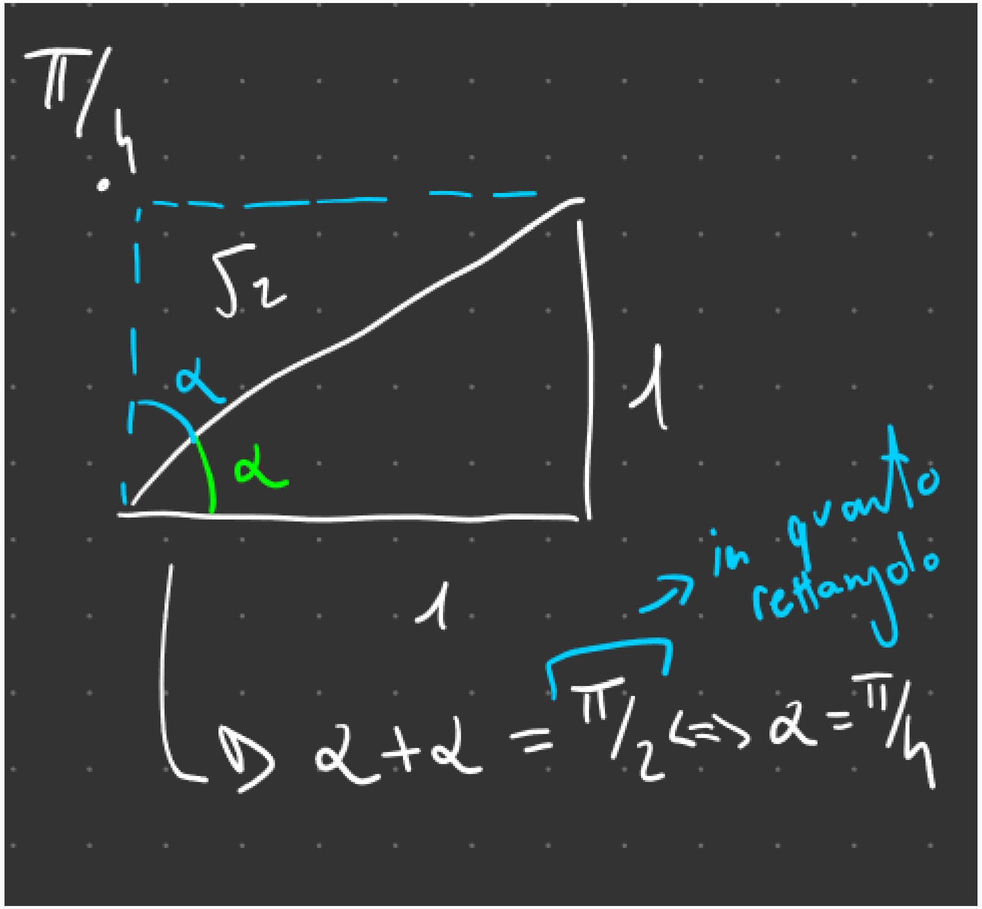
OSS 1.1. Inoltre possiamo definire l'applicazione

$$\mathbb{C} \diagdown \{0\} \longrightarrow (0, +\infty) \times \{[\alpha]_{\equiv 2\pi}, \alpha \in \mathbb{R}\}; z \mapsto (\rho, [\alpha])$$

ed è *biiettiva*. Non si considera lo 0 in quanto questo può creare dei problemi; infatti a $z = 0 + i0$ può essere associato qualsiasi angolo, rendendo questa applicazione una *non funzione*.

1.1. Esempi

ESEMPIO 1.1.a. Prendendo $z = 1 + i$, voglio trovare la sua rappresentazione trigonometrica.
Innanzitutto trovo il suo *modulo* $|z|$ che per definizione è $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.
Dopodiché trovo il suo *argomento*. Per farlo bisogna considerare la *geometria elementare*, nel senso che se abbiamo un triangolo del tipo



allora chiaramente si evince che l'angolo α è $\frac{\pi}{4}$.

ESEMPIO 1.1.b. $z = 1 + i0$; allora chiaramente

$$z \sim (1, 0)$$

ESEMPIO 1.1.c.

$$z = 0 + i \sim (1, \frac{\pi}{2})$$

1.2. Interpretazione della moltiplicazione

OSS 1.2. Si osserva che secondo la *forma trigonometrica* possiamo interpretare la *moltiplicazione tra due numeri complessi* nel modo seguente:

$$
\begin{gathered}
\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \\
z_1 \sim (\rho_1, \alpha_1) \\
z_2 \sim (\rho_2, \alpha_2)
\end{gathered}
$$

Allora

$$z_1 \cdot z_2$$

è uguale a

$$
\begin{aligned}
&\rho_1(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)\cdot\rho_2(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2) = \\
&(\rho_1\cos\alpha_1 + \rho_1 i\sin\alpha_1)(\rho_2\cos\alpha_1 + \rho_2 i\sin\alpha_2) = \\
&\rho_1\rho_2\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \rho_1\rho_2 i\cos\alpha_1\sin\alpha_2 + \rho_1\rho_2 i\sin\alpha_1\cos\alpha_2 - \rho_1\rho_2\sin\alpha_2\cos\alpha_1
\end{aligned}
$$

poi raccogliamo per i termini dovuti,

$$\rho_1\rho_2(\cos\alpha_1\cos\alpha_2 - \sin\alpha_1\sin\alpha_2 + i(\cos\alpha_1\sin\alpha_2 + \sin\alpha_1\cos\alpha_2))$$

e qui identifichiamo le *forme di addizione e sottrazione del seno e del coseno* (Funzioni trigonometriche, **SEZIONE 2.3.**). Allora abbiamo infine

$$z = \rho_1\rho_2(\cos(\alpha_1+\alpha_2) + i\sin(\alpha_1+\alpha_2)$$

Quindi secondo questa *interpretazione* abbiamo che i *moduli* si moltiplicano e gli *angoli* si sommano. Ovvero:

$$z_1 z_2 \sim (\rho_1 \rho_2, \alpha_1 + \alpha_2)$$

2. Formula di de Moivre

TEOREMA 2. Sia $z = a + ib \sim (\rho, [\alpha])$; quindi $z = \rho(\cos \alpha + i \sin \alpha)$.
Allora

$$z^n \sim (\rho^n, n[\alpha]) = \rho^n(\cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha))$$

2.1. Esempi

Alcuni esempi in cui si applica la *formula di de Moivre*.

3. Le radici di un numero complesso

Consideriamo un caso fondamentale del *teorema fondamentale dell'algebra*, ovvero le *radici dell'unità*.

PROBLEMA 3. Dato un numero $n \in \mathbb{N} \diagdown \{0\}$, voglio trovare tutti i numeri $z \in \mathbb{C}$ tali che

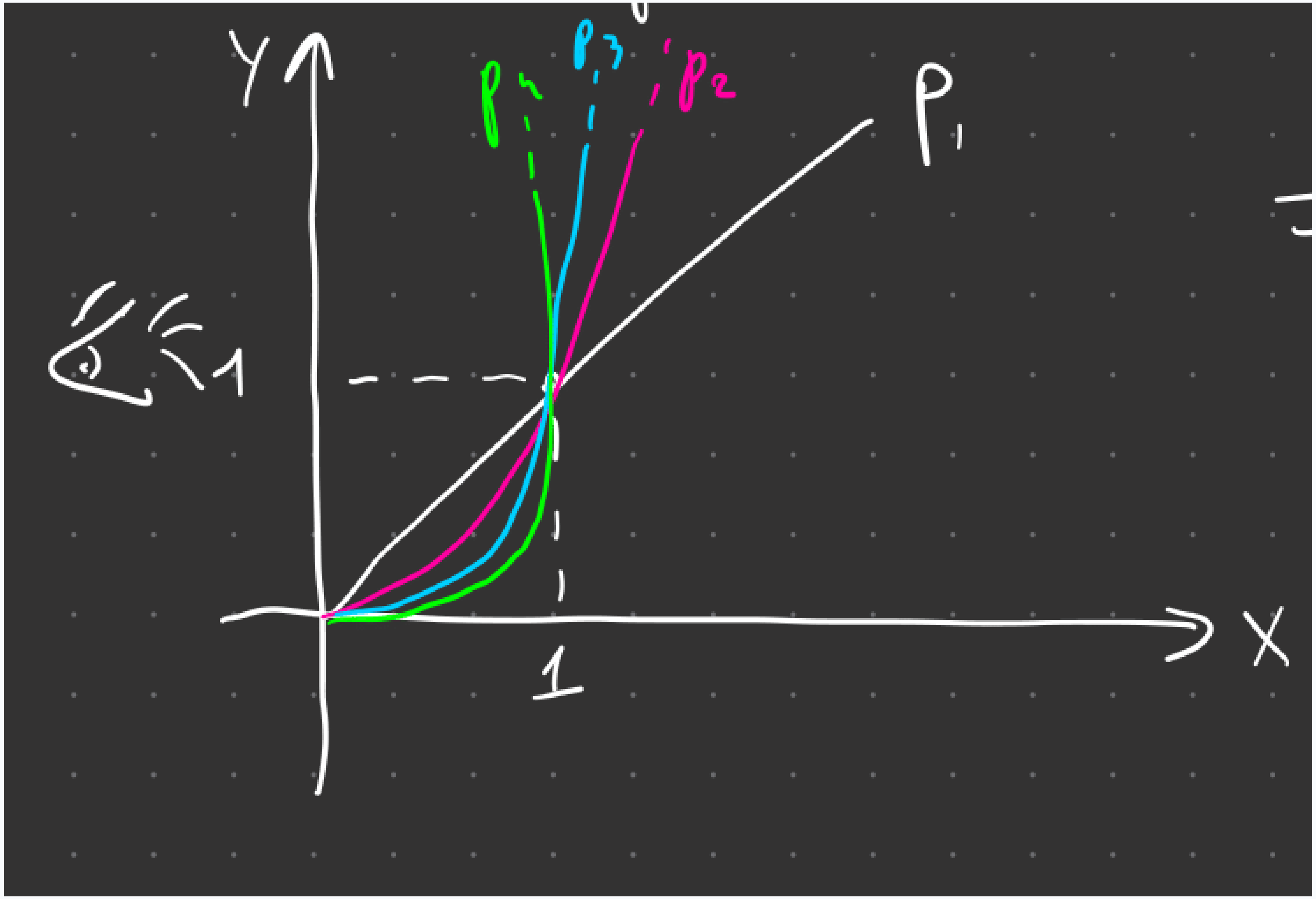
$$z^n = 1$$

OSS 3.1. Vediamo cosa succede in $\mathbb{R}$, ovvero se $\text{Im}(z) = 0$. Allora devo trovare tutti i numeri $x \in \mathbb{R}$ tali che

$$x^n = 1$$

Se restringo ulteriormente il nostro insieme di considerazione a $[0, +\infty)$, allora posso considerare la funzione *potenza n-esima* (Funzioni di potenza, radice e valore assoluto, **DEF 1.1.**).

Osservando di nuovo il grafico di *potenza*,



Si nota subito che $x^n = 1$ ha un'unica soluzione in $[0, +\infty)$; ovvero $x_1 = 1$.
Ora se consideriamo pure i numeri negativi, allora:

- per n pari, $x^n = 1$ ha anche una soluzione secondaria $x_2 = -1$.
- per n dispari, $x^n = 1$ ha come soluzione solo $x_1 = 1$.

OSS 3.2.
Invece su $\mathbb{C}$ ci sono esattamente n soluzioni.

$$z^n = 1$$

DIM. Consideriamo la forma trigonometrica di z e 1, ovvero

$$z \sim (\rho, [\alpha]); 1 \sim (1, [0])$$

e secondo l'equazione voglio che

$$z^n \sim (\rho^n, n[\alpha]) = (1, [0])$$

quindi deve essere vera la seguente:

$$\rho^n = 1 \iff \rho = 1$$

Da un punto di vista *geometrico*, questo vuol dire che non voglio avere né spirali che vanno fuori ($\rho > 1$) né quelli che vanno all'interno ($\rho < 1$).
Inoltre deve valere

$$[n\alpha] = [0]$$

cioè

$$n\alpha = 0 + 2k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}$$

allora

$$\alpha = \frac{2k\pi}{n}, \forall k \in \mathbb{Z}$$

ora iniziamo a fissare dei valori di k, a partire da 0. Allora

$$\begin{aligned}
&k = 0 \implies \alpha_1 = 0 \\
&k = 1 \implies \alpha_2 = \frac{2\pi}{n} \\
&k = 2 \implies \alpha_3 = \frac{4\pi}{n} \\
&\dots \\
&k = n-1 \implies \alpha_n = \frac{2(n-1)\pi}{n} \\
&k = n \implies \alpha_{n+1} = \frac{2n\pi}{n} = 2\pi \in [0]_{\equiv 2\pi} \\
&k = n+1 \implies \alpha_{n+2} = \frac{2(n+1)\pi}{n} = \frac{2n\pi + 2\pi}{n} = 2\pi + \frac{2\pi}{n} \in [\frac{2\pi}{n}]_{\equiv 2\pi}
\end{aligned}$$

Notiamo che da $k = n$ (ovvero dalla $n+1$-esima soluzione) in poi otteniamo elementi che appartengono alle classi equivalenza di soluzioni già trovate: ovvero non vanno considerate, in quanto le loro classi di equivalenza sono uguali. Quindi le radici dell'unità sono:

$$\begin{aligned}
&z_0 \sim (1, [0]) = \cos(0) + i\sin(0) = 1 \\
&z_1 \sim (1, [\frac{2\pi}{n}]) = \cos(\frac{2\pi}{n}) + i\sin(\frac{2\pi}{n}) \\
&\dots \\
&z_n \sim (1, [\frac{2(n-1)\pi}{n}]) = \cos(\frac{2(n-1)\pi}{n}) + i\sin(\frac{2(n-1)\pi}{n})
\end{aligned}$$

Allora vediamo che ci sono n soluzioni; generalizzando da qui discende il *teorema fondamentale dell'algebra*.

3.1. Esempio

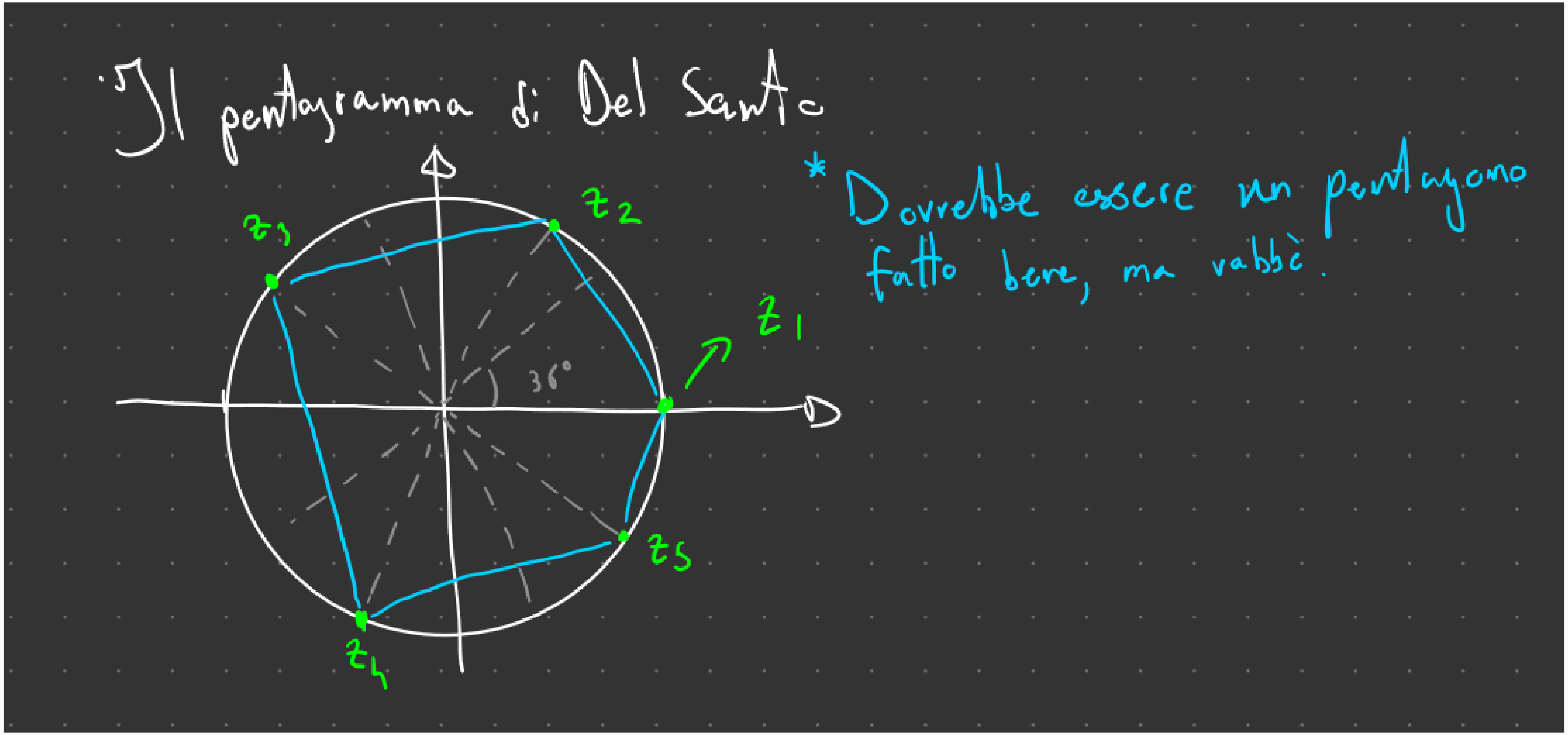
ESEMPIO 3.1. Trovare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$z^5 = 1$$

Considerando ciò detto prima, ho le soluzioni

$$\begin{aligned}
z_1 &\sim (1, [0]) = 1 \\
z_2 &\sim (1, [\frac{2\pi}{5}]) = \cos(\frac{2\pi}{5}) + i\sin(\frac{2\pi}{5}) \\
z_3 &\sim (1, [\frac{2(2)\pi}{5}]) = (1, [\frac{4\pi}{5}]) \\
z_4 &\sim (1, [\frac{2(3)\pi}{5}]) = (1, [\frac{6\pi}{5}]) \\
z_5 &\sim (1, [\frac{2(4)\pi}{5}]) = (1, [\frac{8\pi}{5}])
\end{aligned}$$

Graficamente posso prendere il *piano di Argand-Gauss* (Rappresentazione dei Numeri Complessi), prendere un cerchio con $r = 1$, dividere i due *semicerchi* in 5 parti, poi prendere il secondo, quarto, sesto e ottavo punto della sezione; infine se li collego ottengo un *pentagono*.



3.2. Teorema fondamentale dell'algebra

TEOREMA 3.2.
Siano a_n dei numeri tali che:

$$a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}; a_n \neq 0$$

e considerando *l'equazione*

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n = 0$$

allora questa ha esattamente n *soluzioni* in $\mathbb{C}$.

OSS 3.2.1. Allora possiamo riscrivere l'equazione come

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n = a_n (z - z_1) \ldots (z - z_n)$$

con $\forall n, z_n \in \mathbb{C}$. Notiamo che *tutte* le soluzioni appartengono al *campo dei numeri complessi*; per questo si dice che $\mathbb{C}$ è un *campo chiuso*.

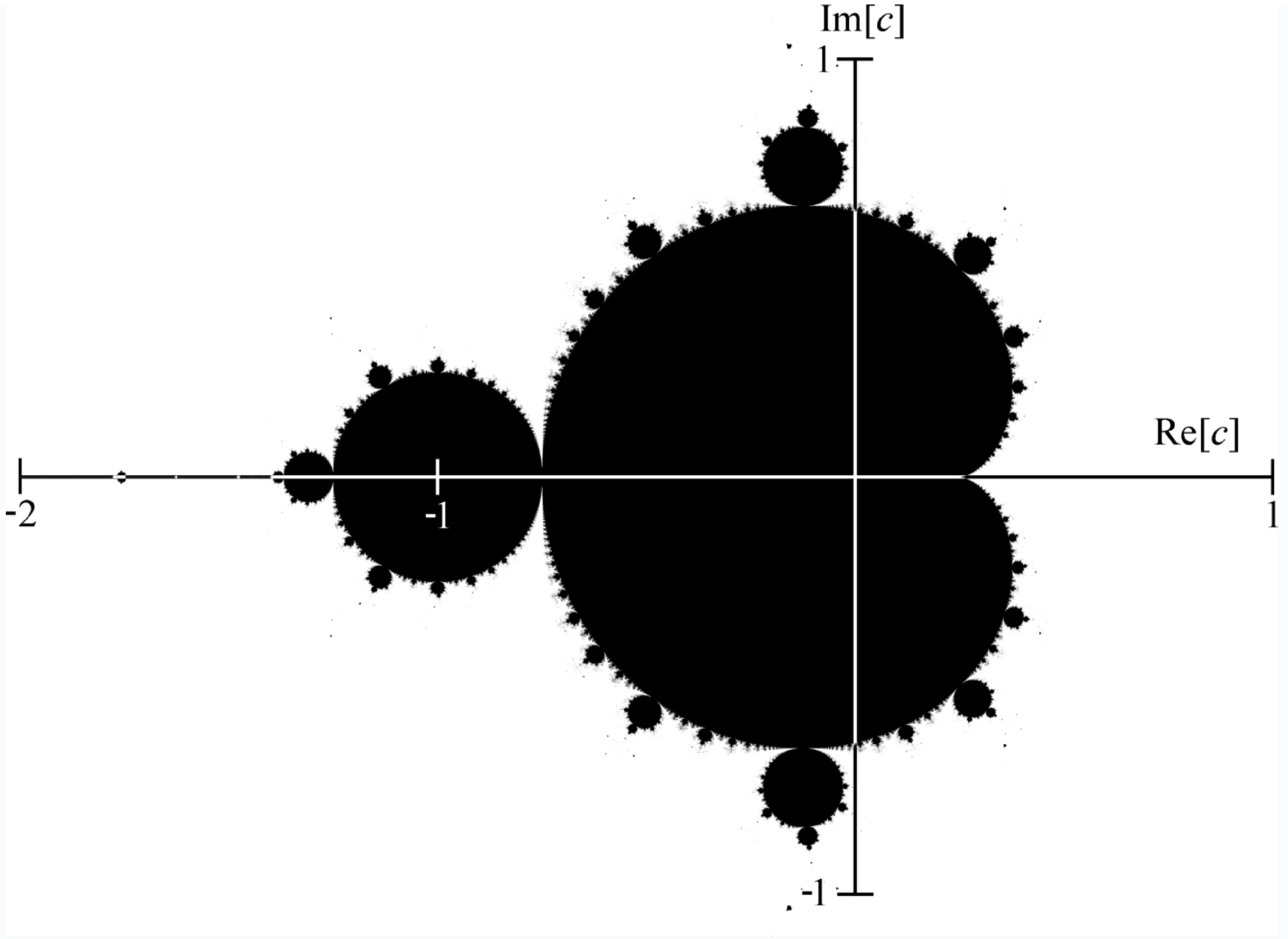
4. (EXTRA) L'insieme di Mandelbrot

PROBLEMA 4. Considero il *piano di Argand-Gauss* e $z = c \in \mathbb{C}$; adesso considero una *successione* (Assiomi di Peano, il principio di induzione, **DEF 4.2.1.**) di *punti su* $\mathbb{C}$, ovvero

$$z_0 = c; z_1 = c^2 + c; \forall n, z_{n+1} = (z_n)^2 + c$$

Quindi scelgo un punto c, a cui applico la successione z_n.
Adesso distinguo i *punti di partenza* c in due famiglie principali:

1. I punti di partenza che rimangono in un *insieme limitato* (ovvero un raggio di palla) dopo un numero di iterazioni
2. I punti di partenza dei quali moduli vanno all'infinito
   Graficamente posso colorare i punti della prima famiglia di colore nero, i secondi di colore bianco.
   Tramite gli strumenti dell'*informatica* posso usare un *pixel* per rappresentare un punto *c*, poi di eseguire un numero preciso di iterazioni (come 500) e infine di colorare i pixel a seconda del suo comportamento.
   Così otteniamo il cosiddetto *frattale di Mandelbrot*.



Im[c]
1
-1
Re[c]
-2
-1
1

Funzioni di potenza, radice e valore assoluto

Definizioni di funzione potenza p_n e radice p_n^{-1}. Definizione del valore assoluto $|\cdot|$; disuguaglianza triangolare. Alcuni esercizi generali.

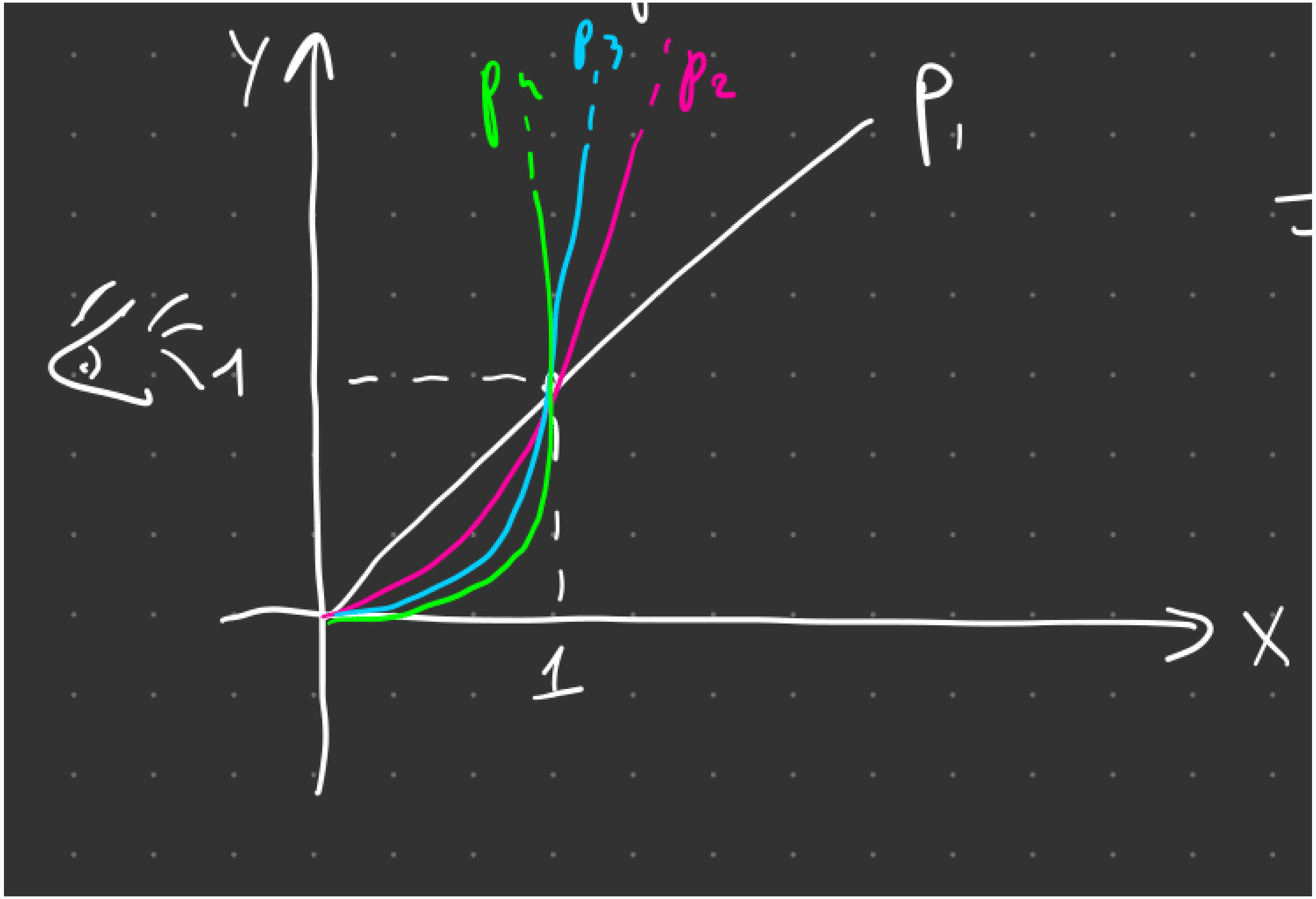
---

1. Funzione potenza

DEF 1.1. Sia $n \in \mathbb{N} \diagdown \{0\}$; definiamo quindi la **funzione potenza n-esima** come

$$p_n : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty); x \mapsto p_n(x) = x^n$$

Si riporta un grafico di alcune funzioni potenza p_n.



OSS 1.1. Si nota che

$$\forall x \in [0,1) : p_1(x) > p_2(x) > \ldots > p_n(x)$$
$$\forall x \in (1,+\infty) : p_1(x) < p_2(x) < \ldots < p_n(x)$$

OSS 1.2. Si vede dal grafico che la funzione è *strettamente crescente*, ovvero se prendiamo $x_1, x_2 \in E$ (dominio) ove $x_2 > x_1$, allora sicuramente abbiamo

$$p_n(x_2) > p_n(x_1)$$

DIMOSTRAZIONE.
Prendiamo ad esempio p_2; abbiamo innanzitutto

$$0 \leq x_1 < x_2$$

allora li moltiplichiamo per x_1 e x_2, ottenendo

$$\begin{cases} x_1 < x_2 x_1 \\ x_1 x_2 < x_2^2 \end{cases}$$

quindi

$$0 \leq x_1^2 < x_2^2 \iff p_2(x_1) < p_2(x_2), \forall x_1, x_2$$

> ⚠ **Notare che questa dimostra che è vera solo per p_2; sarebbe da dimostrare che è vera anche per p_n (forse si va per induzione? boh, vedrò o chiederò al prof qualcosa)**

OSS 1.3. Notiamo che la *funzione potenza* p_n (o x^n) è *biiettiva* (Funzioni, **DEF 3.3.**), ovvero è sia *suriettiva* che *iniettiva*.
DIMOSTRAZIONE.
Per dimostrare che è iniettiva basta riosservare quanto visto in **OSS 1.2.**; ovvero che la funzione è strettamente crescente.
Dopodiché la funzione è anche suriettiva in quanto una conseguenza dell'assioma di separazione S).

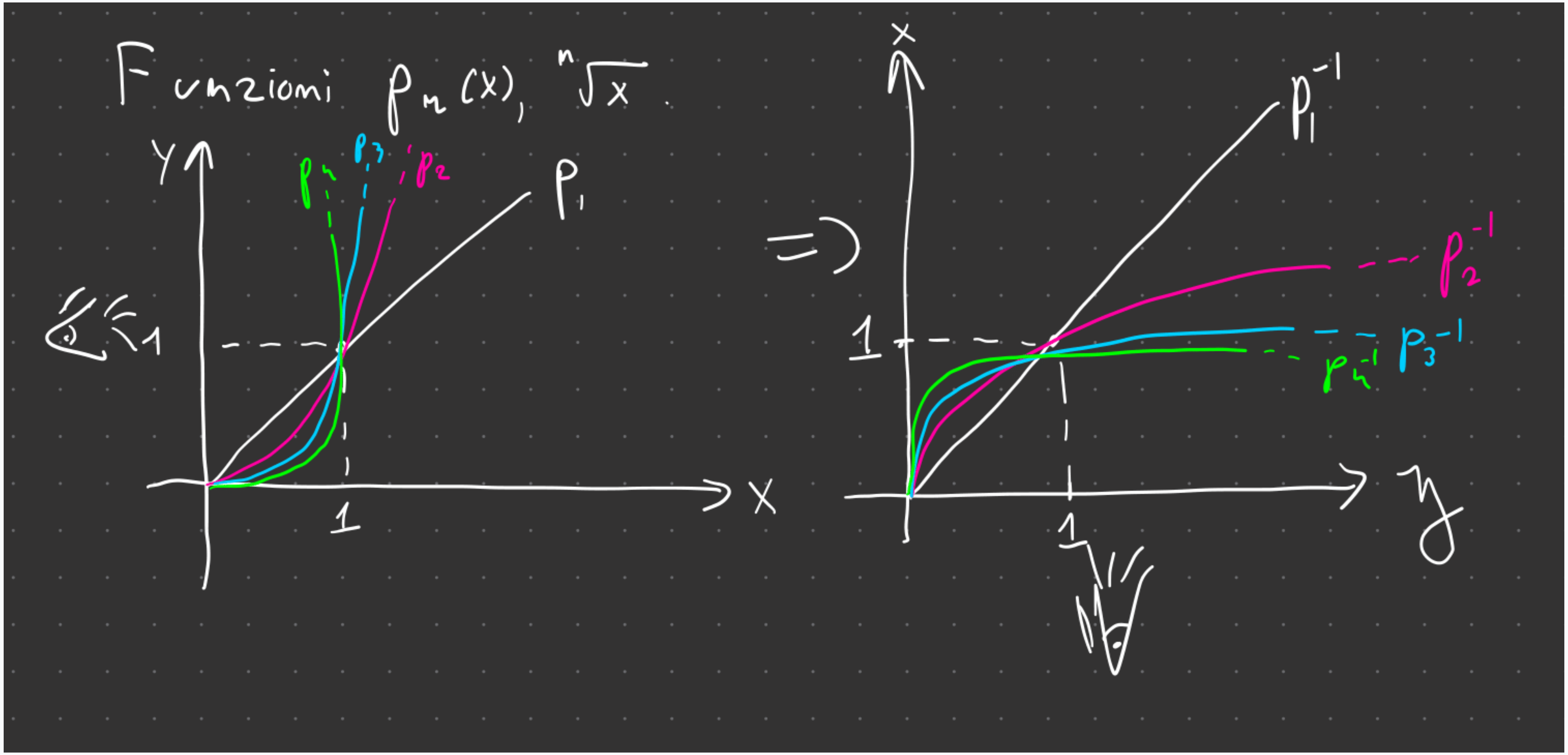
2. Funzione radice

OSS 2.1. Dall'**OSS 1.3.** abbiamo notato che la *funzione potenza* $p_n(x)$ è *biiettiva*; pertanto per il *teorema dell'esistenza della funzione inversa* (Funzioni, **TEOREMA 1.**) esiste una funzione inversa che definiremo.

DEF 2.1. Definiamo la **funzione radice n-esima** p_n^{-1}

$$p_n^{-1} : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty); x^n \mapsto x$$

Graficamente questo equivale a *"scambiare le assi"* del grafico della funzione, oppure di *"cambiare la prospettiva da cui si guarda il grafico"*, ovvero

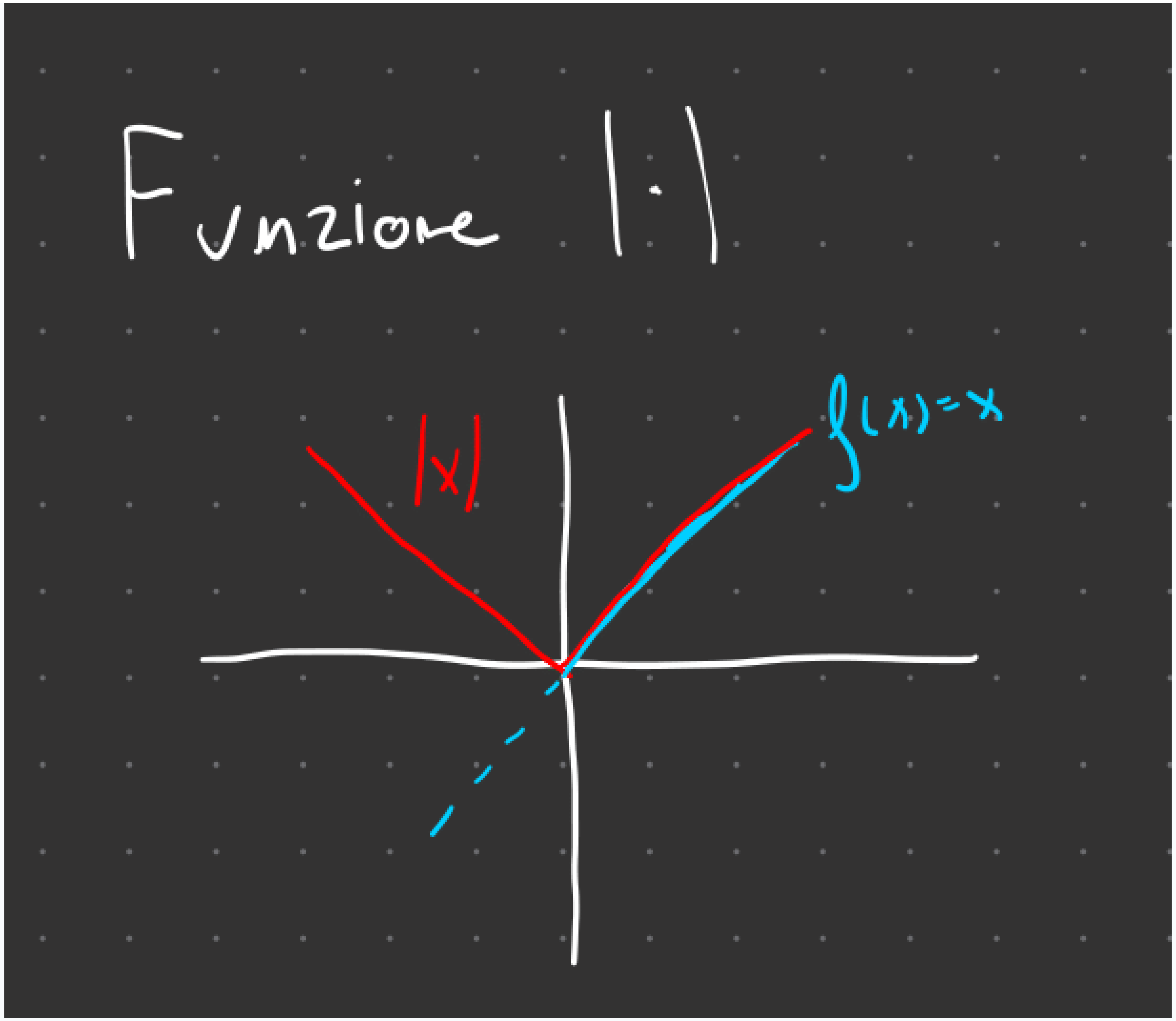


3. Valore assoluto

DEF 3.1. Sia il **valore assoluto** una *funzione*

$$|\cdot| : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; x \mapsto |x| = \begin{cases} x : x \geq 0 \\ -x : x < 0 \end{cases}$$

Ad esempio, il grafico di $|x|$ si rappresenta nel modo seguente:



OSS 3.1.1. Notare che

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

3.1. Proprietà, disuguaglianza triangolare

OSS 3.1.1. Si può osservare alcune proprietà del *valore assoluto*, ovvero:

1. Sia $a \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, allora

$$|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$$

   DIMOSTRAZIONE.
   Posso considerare due casi, ovvero
   $x \geq 0$: abbiamo quindi $|x| = x$, pertanto

$$\begin{cases} |x| \leq a \implies x \leq a \\ x \geq 0 \implies x \geq -a \end{cases} \longrightarrow -a \leq x \leq a$$

   $x \leq 0$: abbiamo quindi $|x| = -x$ e il discorso è analogo:

$$\begin{cases} |x| \leq a \implies -x \leq a \iff x \geq -a \\ x \leq 0 \implies x \leq a \end{cases} \longrightarrow -a \leq x \leq a$$

   ■

2. Prendendo le stesse premesse di prima, abbiamo

$$|x| \geq a \iff x \leq -a \land x \geq a$$

3. **LA DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE.**
   Siano $x, y \in \mathbb{R}$, allora abbiamo

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

DIMOSTRAZIONE.
Se abbiamo da un lato

$$-|x| \leq x \leq |x|$$

e

$$-|y| \leq y \leq |y|$$

allora sommandoli si avrebbe

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$$

che per la prima proprietà equivale a dire

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

4. Esercizi misti

Presentiamo degli esercizi, ovvero *equazioni* (Equazioni e soluzione) o *disequazioni* contenenti queste funzioni appena presentate.

ESERCIZIO 4.1. Determinare

$$3x + 5 = 0$$

ESERCIZIO 4.2. Disegnare il grafico di

$$f(x) = 3x + 5$$

con $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

ESERCIZIO 4.3. Risolvere

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

ESERCIZIO 4.4. Disegnare

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x^2 - 2x - 3$$

ESERCIZIO 4.5. Risolvere

$$\frac{x^2 - 2x + 3}{x - 3} \geq 0$$

ESERCIZIO 4.6. Risolvere

$$\sqrt{x+1} \geq 3x + 2$$

ESERCIZIO 4.8. Risolvere

$$\frac{x-3}{2x+1} > \frac{x-1}{x+1}$$

ESERCIZIO 4.8. Risolvere

$$\sqrt{6x+1} \geq 3 - 2x$$

ESERCIZIO 4.9. Risolvere

$$|x+4| < 8$$

ESERCIZIO 4.10. Risolvere

$$|\frac{2x+1}{x^2-4}| \geq 1$$

ESERCIZIO 4.11. Risolvere

$$|x+1| \geq |x-1|$$

Funzioni trigonometriche

Definizione delle funzioni trigonometriche $\sin$, $\cos$; *le proprietà di queste funzioni; alcuni valori noti; funzioni inverse* $\arcsin$, $\arccos$. *Forme di somma e sottrazione di* $\sin$ *e* $\cos$.

---

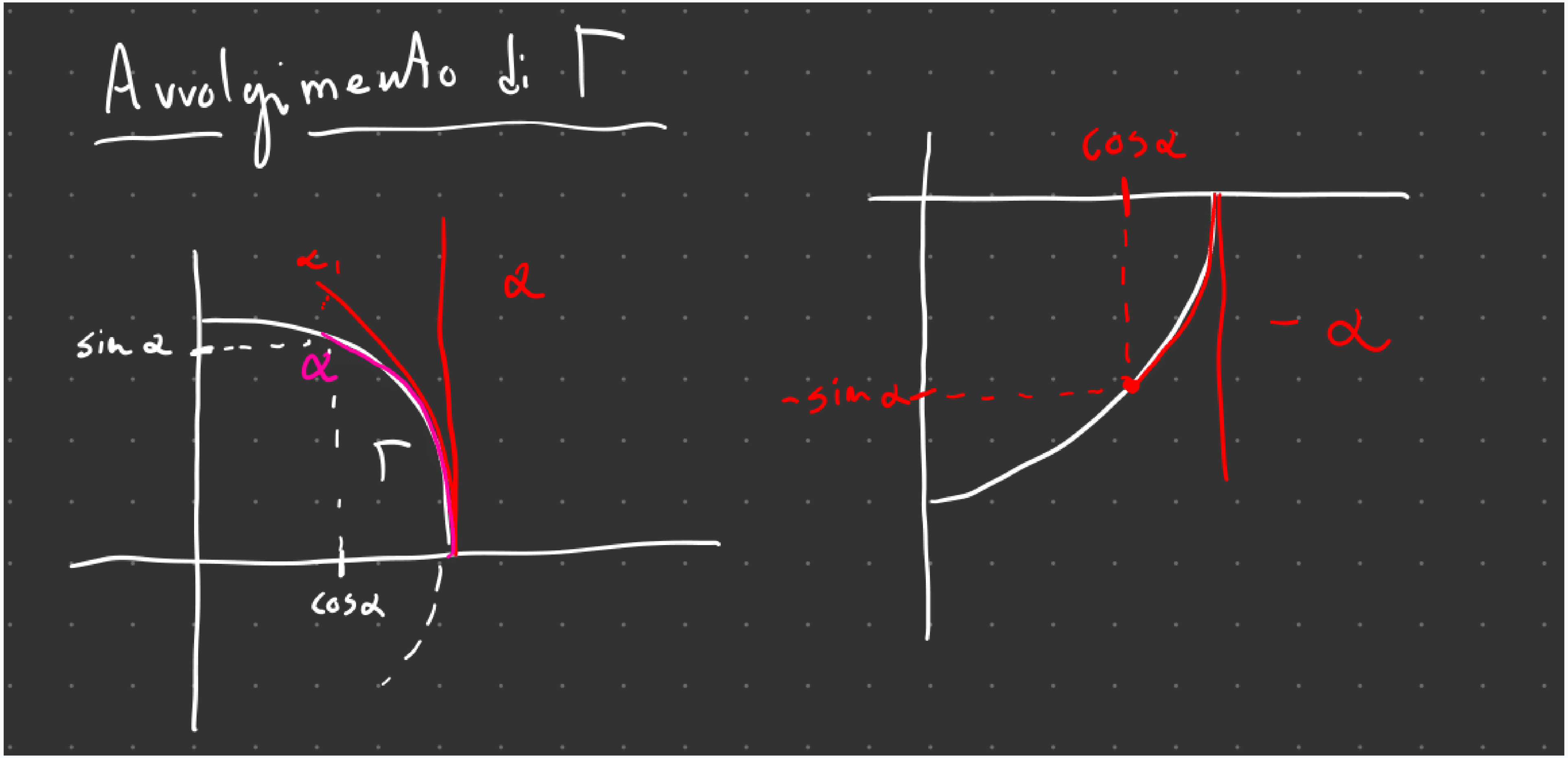
0. Preambolo

Per ora non abbiamo ancora gli strumenti per poter *rigorosamente* definire le funzioni di *seno* e *coseno*, tuttavia possiamo definirle per ora in questo modo.
Però prima di tutto bisogna fare delle considerazioni.
Ovvero prendo il piano cartesiano (**ESEMPIO 2.1.**) e considero la *circonferenza unitaria* Γ:

$$\Gamma := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

e considero l'asse r_1 concorde con l'asse y e che *"appoggiamo"* in $(1,0)$.
Quindi prendo un punto qualsiasi $\alpha \in \mathbb{R}$ dell'asse, lo *"avvolgo"* su Γ, poi la retta si avvicina man mano all'arco, infine il punto *"finisce"* su Γ e ottengo il punto $(c(\alpha), s(\alpha))$

Graficamente questo processo rappresenta il seguente.



OSS 0.1.

Si osserva che in questo processo di *"avvolgimento"* si suppone che la lunghezza del segmento non si cambia mai, in quanto viene solo *"piegato"*; quindi se il segmento r_1 è lungo α, allora *l'arco* è lungo α, che non è banale da misurare. Infatti si deve fare un *procedimento di approssimazione* con segmenti. Questo è il problema di questa definizione *non-rigorosa*.

1. Definizione di seno e coseno

Considerando tutto detto sopra, consideriamo la funzione

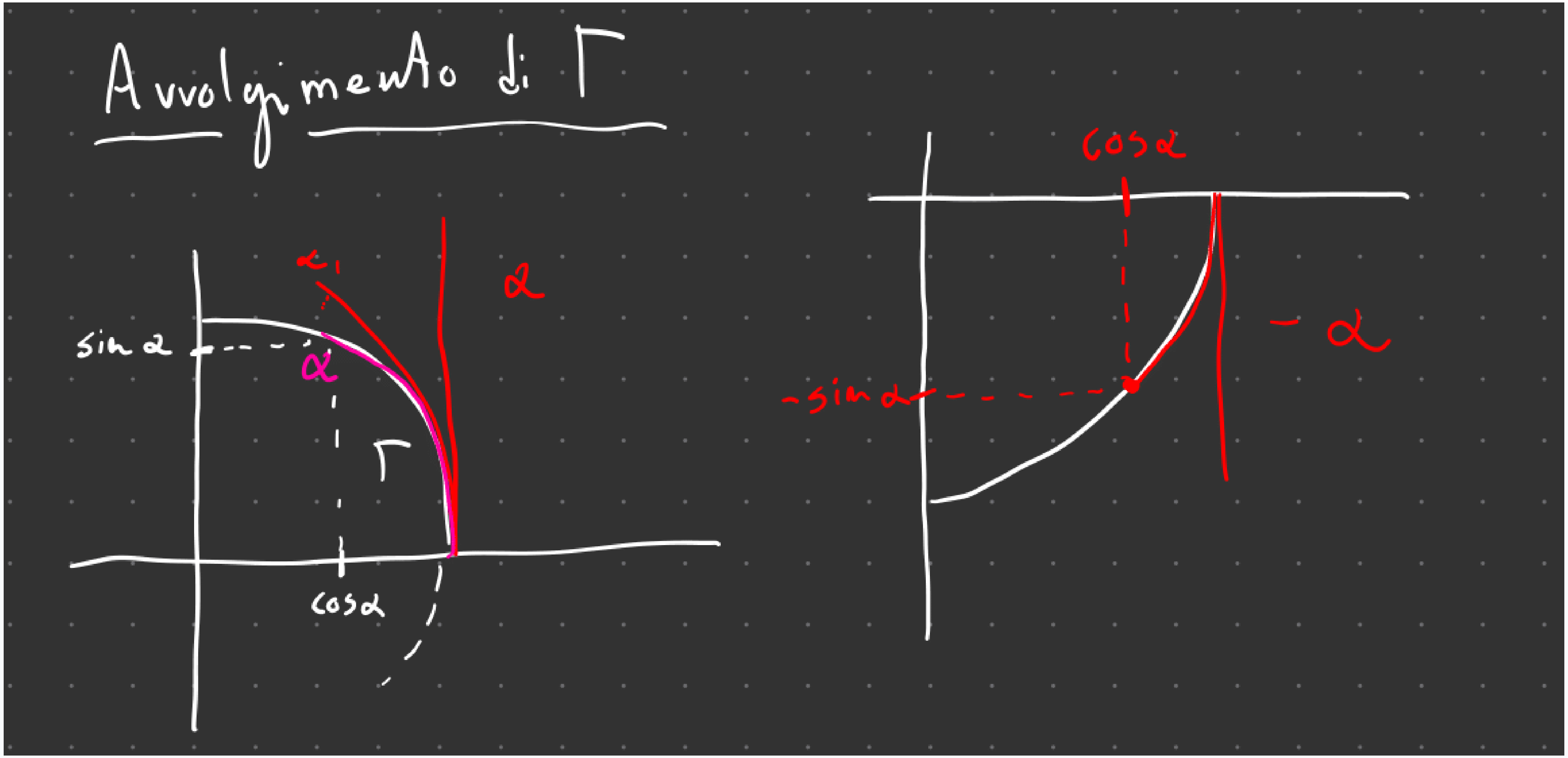
$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \Gamma \\ \alpha &\mapsto (c(\alpha), s(\alpha)) \end{aligned}$$

Dove Γ varia nell'intervallo $[0, 1]$.

Così otteniamo le seguenti funzioni:
DEF 1.

$$\begin{aligned} \cos: \ \mathbb{R} &\longrightarrow [-1, 1] \\ \alpha &\mapsto \cos(\alpha) \in \Gamma \\ \sin: \ \mathbb{R} &\longrightarrow [-1, 1] \\ \alpha &\mapsto \sin(\alpha) \in \Gamma \end{aligned}$$

Dove $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ rappresenta la posizione del punto dell'*arco piegato* e α rappresenta la *lunghezza dell'arco*. Se α è negativa, allora si orienta l'asso in basso. Graficamente,



2. Proprietà

PROP 2.1. Diamo un nome alla *lunghezza della semi-circonferenza unitaria*,

$$(\pi \in \mathbb{R}, \pi \sim 3.14\dots)$$

quindi la *circonferenza* è lunga 2π.

PROP 2.2. Dato un $\alpha \in \mathbb{R}$, si verifica che

$$(\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 = 1$$

in quanto entrambi i punti $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ appartengono alla circonferenza Γ; infatti $x^2 + y^2 = 1$ è la proprietà caratterizzante di Γ.

PROP 2.3. Le funzioni $\cos$, $\sin$ sono *periodiche*, ovvero che prendendo un $k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} \text{i.}\ \ & \cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha \\ \text{ii.}\ \ & \sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha \end{aligned}$$

Questo si verificai n quanto 2π rappresenta un giro intero; quindi prendendo un punto α e facendoci un giro intero, arrivo allo stesso punto.

PROP 2.4. Le funzioni $\cos$, $\sin$ sono rispettivamente delle funzioni *pari* e *dispari*, ovvero che si verificano le seguenti.

$$\begin{aligned} \cos(-\alpha) &= \cos(\alpha) \\ \sin(-\alpha) &= -\sin(\alpha) \end{aligned}$$

Questo in quanto, come detto prima in **DEF 1.**, la *"lunghezza negativa"* rappresenterebbe la stessa lunghezza orientato verso il basso. Quindi graficamente lo si può evincere chiaramente.

PROP 2.5. Se al posto di aggiungere un *giro intero* aggiungo un *mezzo giro*, ovvero π, ottengo il suo opposto:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \pi) &= -\cos(\alpha) \\ \sin(\alpha + \pi) &= -\sin(\alpha) \end{aligned}$$

PROP 2.6. Ricorrendoci alla definizione etimologica del *coseno*, ovvero *"complementi sinus"*, notiamo che sottraendo *l'angolo complementare* $\frac{\pi}{2}$ da α ottengo $\sin$. Ovvero

$$\forall \alpha, \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin(\alpha)$$

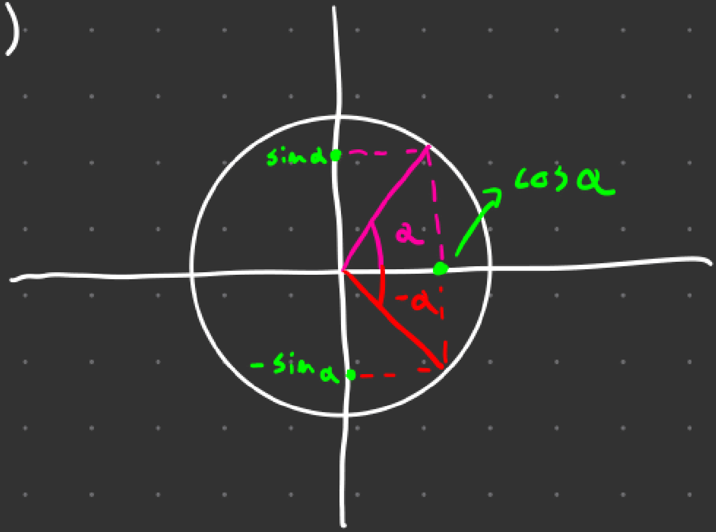
2.1. Riassunto grafico

Graficamente si può riassumere (quasi) tutte le proprietà nel seguente grafico (con i grafici di $\cos$, $\sin$ stessi).

Proprietà di sin, cos

2.3)

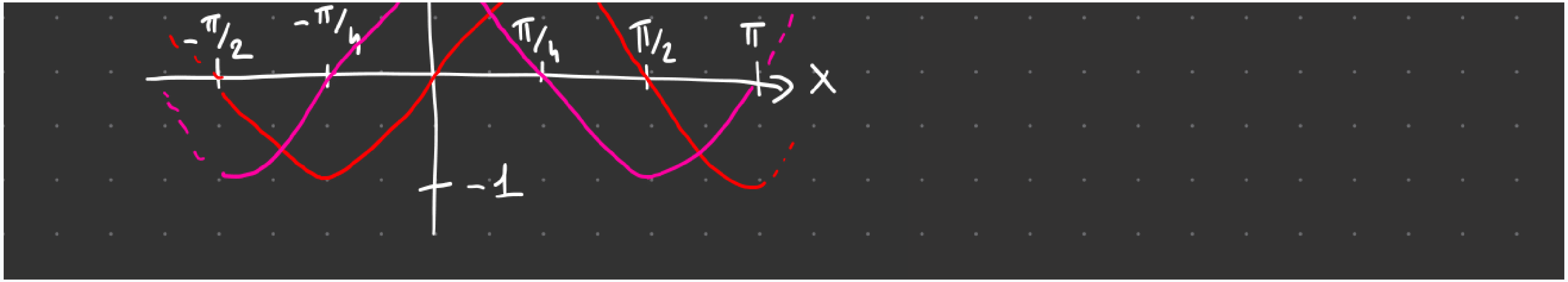
2.4)



2.5)

2.6)

$\sin x$ $\cos x$



2.2. Alcuni valori noti

Dai risultati della *geometria elementare* sappiamo i seguenti valori noti del seno e del coseno:

α	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$
0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	0	1

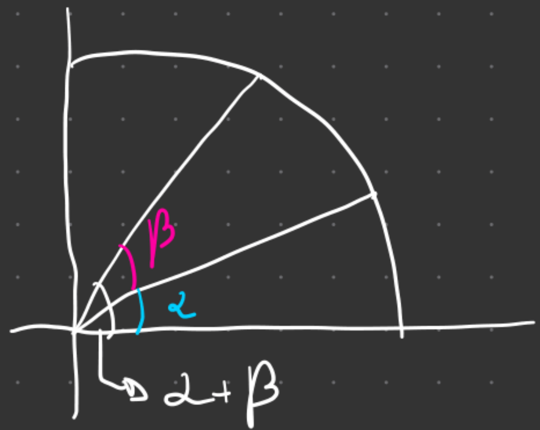
che verranno dati per noti.

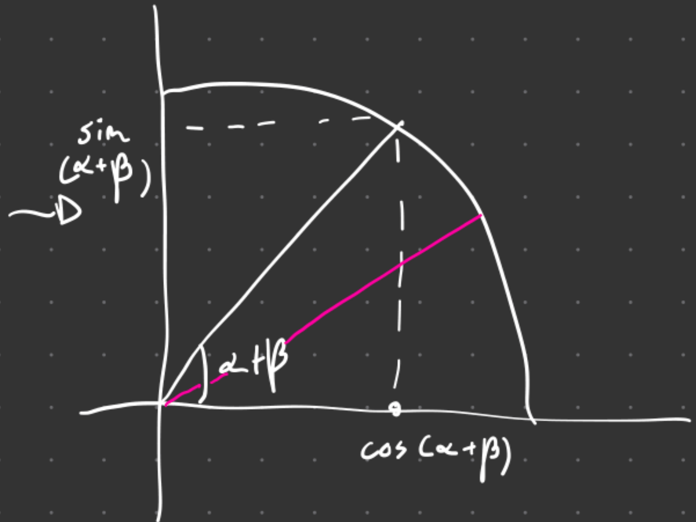
2.3. Forme di somma e di sottrazione

Consideriamo due angoli: $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Quindi disegniamo il seguente grafico:

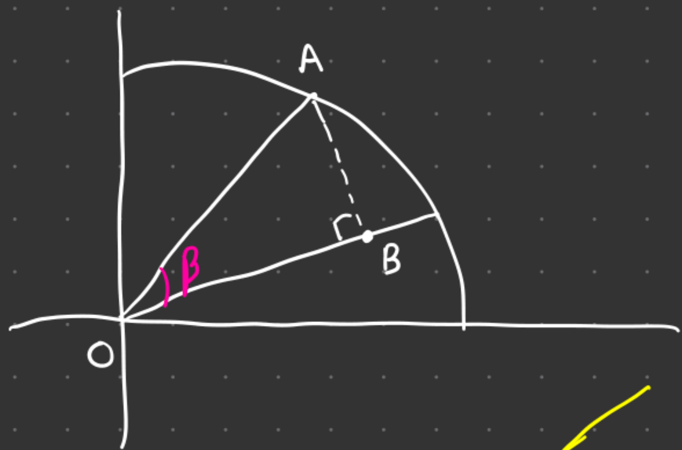
Forme di somma e di sottrazione

1) Considero il seguente:

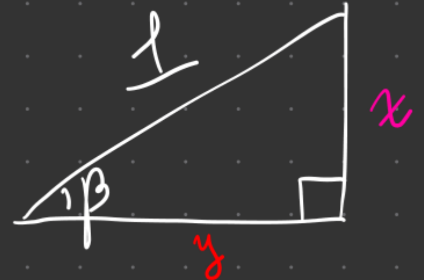




2) Proietto il segmento $\overline{AB}$ tale da formare angolo da $90°$ ($\perp$)



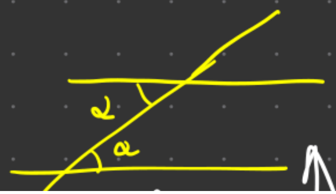
considero $\rightsquigarrow$ OAB



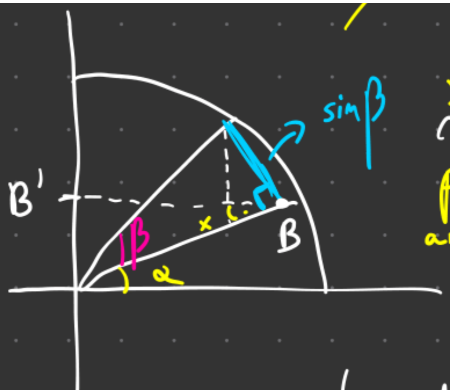
per def., $x = 1 \cdot \cos\beta$

$y = 1 \cdot \sin\beta \rightarrow$ utile x dopo

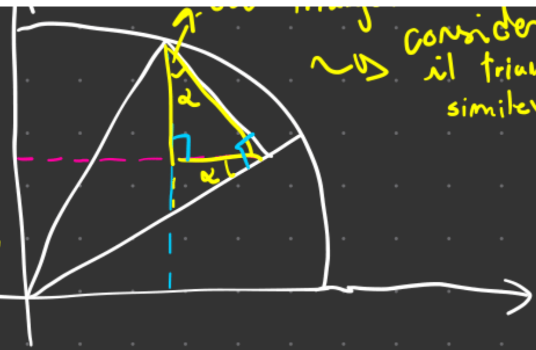
Allora



per la similitudine dei triangoli



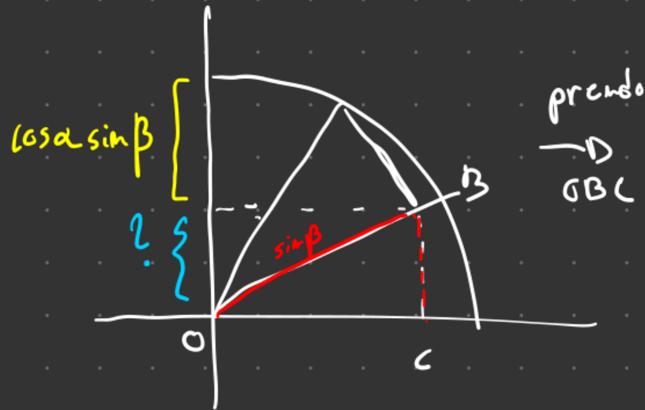
$x = \alpha$ $\rightsquigarrow$ perché sono due angoli alterni interni



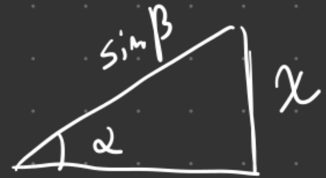
$\rightsquigarrow$ considero il triangolo simile

trovo $x = \cos\alpha \sin\beta$

Allora ho trovato la mia "1ª porzione"; trovo la seconda



prendo $\longrightarrow$ OBC

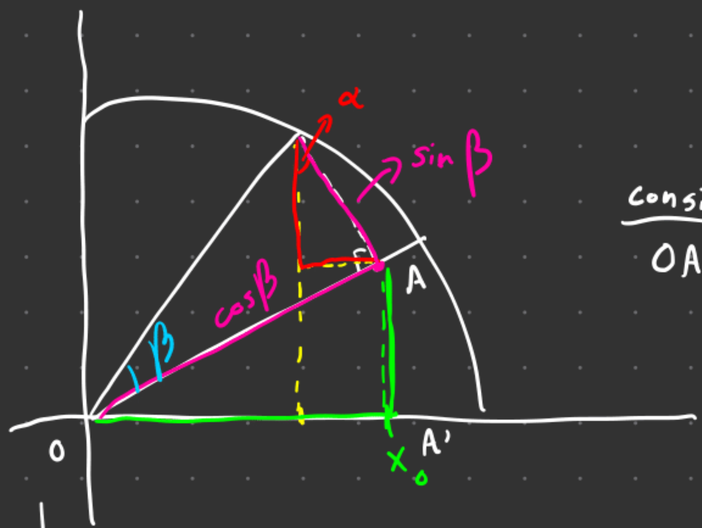


$x = \cos\alpha \sin\beta$

Pertanto sommo i pezzi e ottengo:

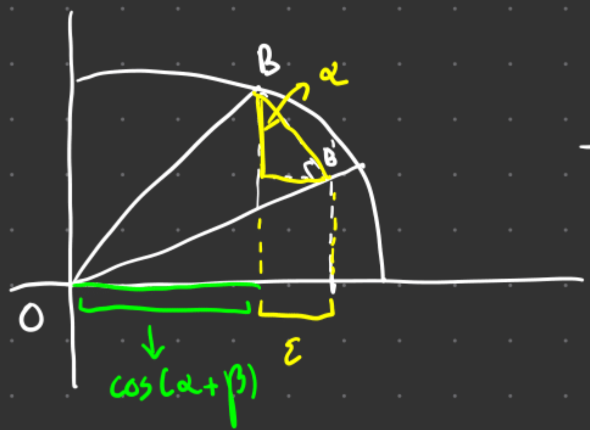
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$$

Analogamente:

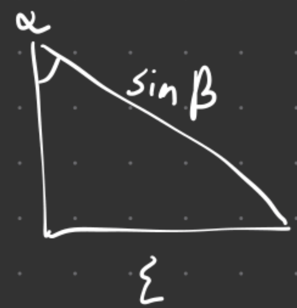


considero $\xrightarrow{}$ OAA'

$$X_0 = \cos\alpha \cos\beta$$



considero $\xrightarrow{}$ OBB'



$$\varepsilon = \sin\alpha \sin\beta$$

Allora

- $X_0 = \cos(\alpha+\beta) + \varepsilon \Rightarrow \cos(\alpha+\beta) = X_0 - \varepsilon = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

Da cui si evince che

$$
\begin{aligned}
\sin(\alpha \pm \beta) &= \sin\alpha\cos\beta \pm sin\beta\cos\alpha \\
\cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta
\end{aligned}
$$

Queste formule saranno molto importanti per le formule di *prostaferesi* e di *Werner*.

3. Definizione di arcocoseno e arcoseno

OSS 3.1. Considero la funzione $\cos$, però con una restrizione al suo *dominio* e *codominio*.

$$
\begin{aligned}
\cos_{[0,\pi]} : [0,\pi] &\longrightarrow [-1,1] \\
x &\mapsto \cos(x)
\end{aligned}
$$

Questa funzione allora è *biiettiva* (Funzioni, **DEF 3.3.**); ovvero p sia *suriettiva* che *iniettiva* e *strettamente decrescente*.

1. Questa è *iniettiva* in quanto considerando tutti gli $x \in [0,\pi]$ si tocca un *solo* punto ad ogni x considerato. Inoltre è *strettamente decrescente* in quanto il valore parte da $\cos 0 = 1$ e finisce con $\cos\pi = -1$.
2. Per lo stesso motivo di prima $\cos$ è *suriettiva*.

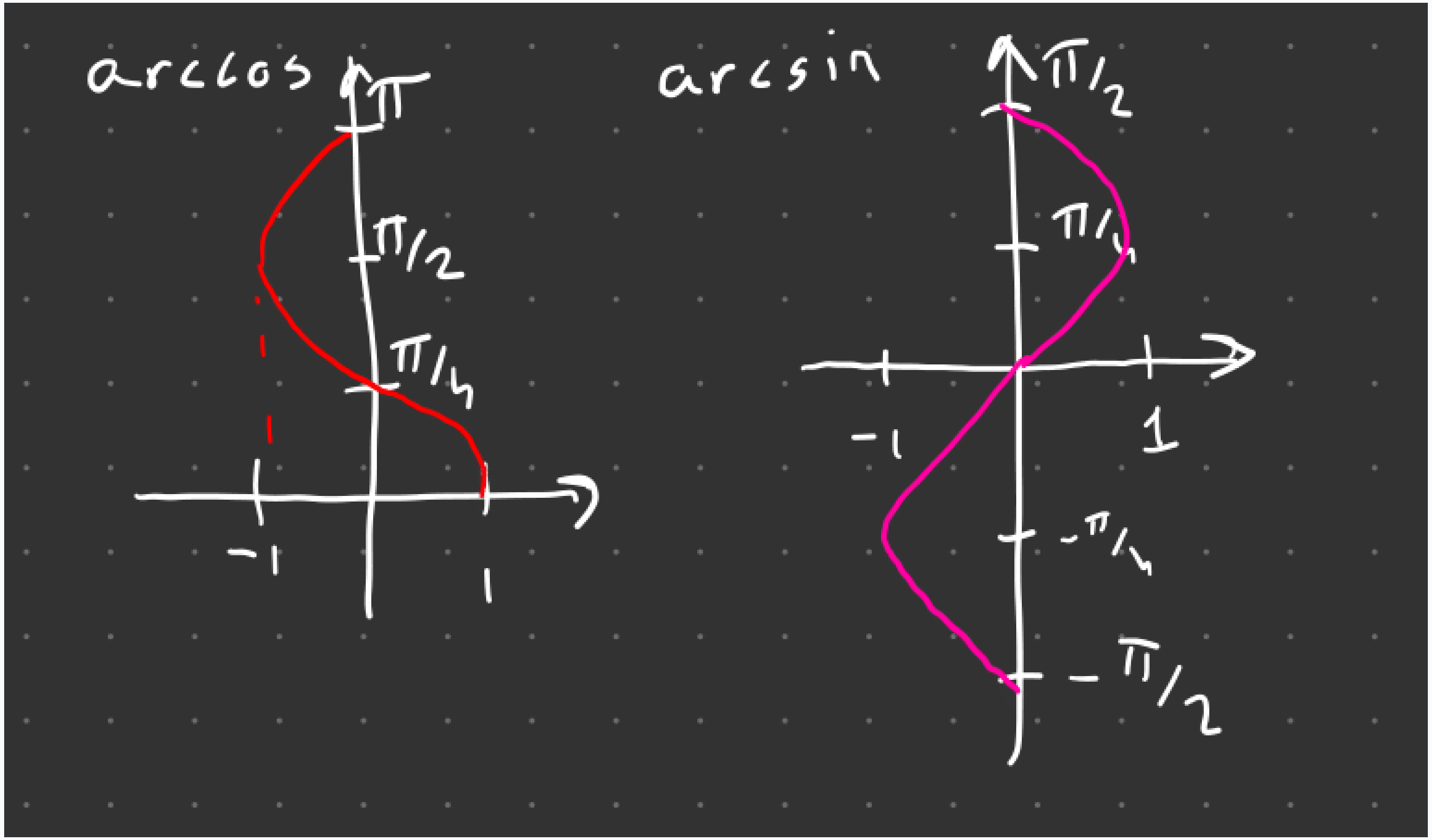
DEF 3.1.
Pertanto secondo il *teorema dell'esistenza della funzione inversa* (Funzioni, **TEOREMA 1.**) la funzione $\cos_{[0,\pi]}$ ha una sua inversa che chiameremo **l'arcocoseno**;

$$
\arccos := \cos_{[0,\pi]}
$$

DEF 3.2.
Analogamente si definisce $\arcsin$ considerando però la restrizione di $\sin_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$.
Quindi

$$\arcsin := \sin_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$$

Ecco alcuni grafici delle funzioni $\arccos$, $\arcsin$.



Funzioni

Funzioni - Definizione base, esempi, definizione di immagine, funzione suriettiva, iniettiva; funzione composta; l'immagine di un pezzo di dominio; funzione inversa, teorema sulle funzioni inverse.

DEF 1. Funzione

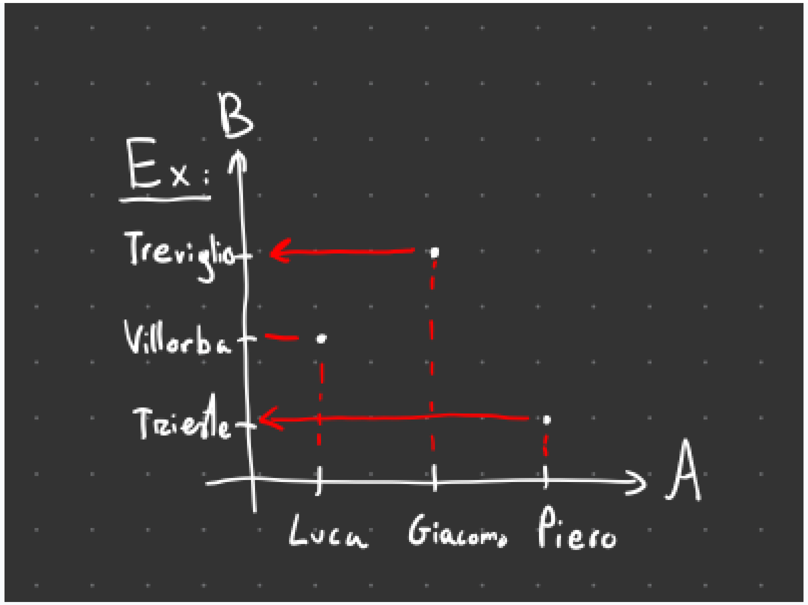
Siano,

- A, B due insiemi
- f una *"legge"*, ovvero una specie di predicato, oppure una relazione speciale che ad ogni valore di A associa *uno e uno solo* valore di B;
  - Cioè se $x \in A$, allora $\exists! y \in B$ (si legge esiste solo un valore di y in B) è associato a x ($f(x) = y$)
  DEF 1. La terna (A, B, f) viene definita come **funzione**.
  SUBDEF 1.1. L'insieme A si dice il **dominio** della *funzione*,
  SUBDEF 1.2. L'insieme B si dice il **codominio** della *funzione*,
  SUBDEF 1.3. La *"legge"* f è una **regola** che ad ogni elemento x del *dominio* A associa uno e uno solo elemento y del *codominio* B.

DEFINIZIONE ESPLICITA.
Con la scrittura compatta la terna può essere definita *esplicitamente* anche mediante la seguente notazione.

$$f : A \mapsto B$$

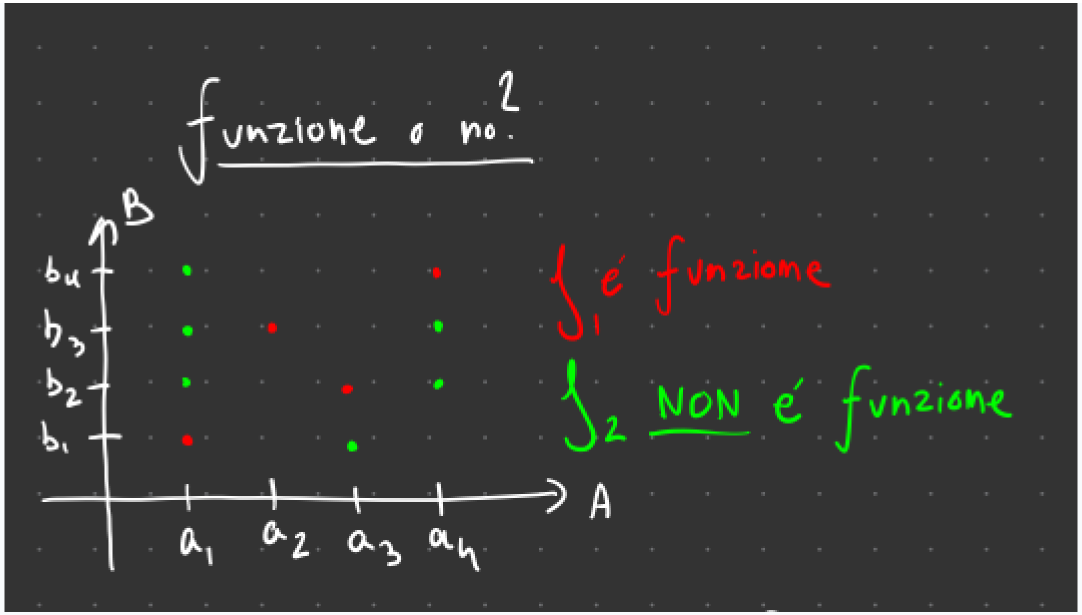
ESEMPIO 1.1.
Siano $A = \{\text{Persone in quest'aula}\}$, $B = \{\text{Comuni italiani}\}$ e $f : x \mapsto \text{comuni di residenza}$; allora si rappresenta il grafico della funzione (A, B, f) nel seguente modo:



DEF 1.1.
In questo corso si studieranno le cosiddette *funzioni di reale variabile*, ovvero le funzioni $f : A \mapsto B$, con $A, B \subseteq \mathbb{R}$.

OSS 1.1 Secondo questa definizione di *funzione*, le sue proprietà non cambiano solamente per la legge f, ma anche per gli *insiemi* A, B.

OSS 1.2. Si osserva il seguente grafico:



Si nota che la parte *rossa* è funzione, invece la parte *verde* non lo è, in quanto ci sono più elementi di B associati ad un elemento di A; quindi si parte da un valore a_n e tutti devono avere un solo corrispondente b_n.

DEF 2. Valore immagine

Sia $f : A \mapsto B$ una funzione.
Se $x \in A$, il valore $f(x) \in B$ viene definita come il **valore immagine di** x, una specie di proiezione.

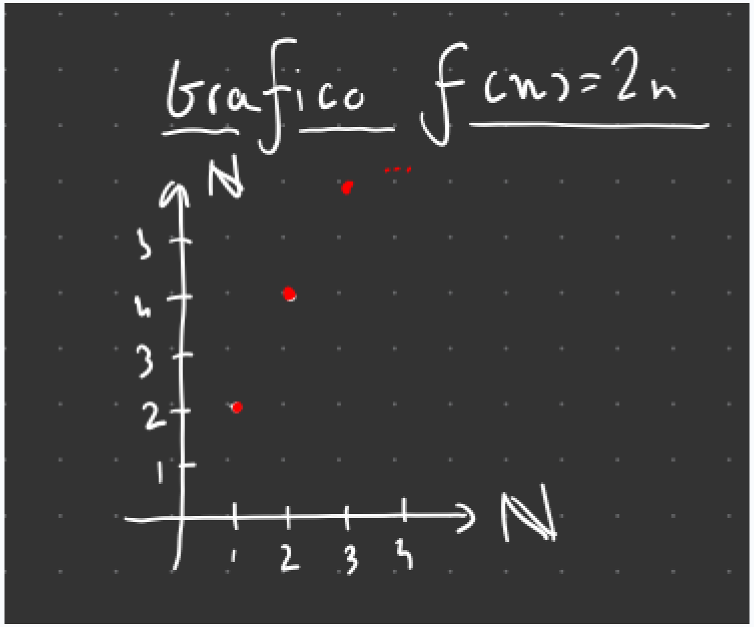
DEF 2.1. L'insieme immagine

Riprendendo i presupposti di prima, si definisce l'insieme di tutti i *valori immagine* come **l'insieme immagine** e lo si indica con

$$f(A)$$

ESEMPIO 2.1.1. Siano $A = \mathbb{N}, B = \mathbb{N},\ f(n) = 2n.\ f(\mathbb{N}) = \{0, 2, 4, \ldots\} = \mathbb{P}$ (l'insieme dei numeri pari);

OSS 2.1.1.1. Si nota che $f(A) \subseteq B$.
Ecco il grafico della funzione f;



DEF 3. Funziona suriettiva e iniettiva

DEF 3.1. Funzione suriettiva (o surgettiva)

Se

$$f(A) = B$$

Allora la funzione f si dice **suriettiva** (oppure come lo chiamano i pisani, **surgettiva**).

ESEMPIO 3.1. La funzione $f(n) = 2n$ (tratto dall'**ESEMPIO 2.1.1.**) *non* è *surgettiva* se si definisce $A = \mathbb{N}$; invece lo è se si definisce $A = \mathbb{P}$.

DEF 3.2. Funzione iniettiva (o ingettiva)

Siano

$$f : A \mapsto B; x_1, x_2 \in A$$

Supponendo che

$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq x_2$$

Allora si dice che la funzione f è **iniettiva** (oppure in pisano **ingettiva**).

ESEMPIO 4.1. Siano

$$\begin{gathered} A = [0, \infty) \\ B = [0, \infty) \\ f : x \mapsto x^2 \end{gathered}$$

(dove la notazione $[0, \infty)$ indica tutti i numeri $\forall x \in \mathbb{R} : x \geq 0$). La funzione $f(x)$ è *suriettiva*, in quanto $\forall y \geq 0, \exists x \geq 0 : x^2 = y$. Inoltre è anche *iniettiva*.
DIM. Si dimostra che f è iniettiva; se $0 \leq x_1 < x_2$, (quindi $x_1 \neq x_2$) allora moltiplicando da ambo le parti per x_1 e per x_2, si ottengono:

$$\text{I. } 0 \leq x_1 < x_2$$
$$x_1^2 < x_1 x_2$$
$$\text{II. } 0 \leq x_1 < x_2$$
$$x_1 x_2 < x_2^2$$
$$\text{Pertanto}$$
$$x_1^2 < x_2^2 \iff f(x_1) < f(x_2) \implies f(x_1) \neq f(x_2) \blacksquare$$

ESEMPIO 4.2. Riprendendo la medesima funzione $f : x \mapsto x^2$ dall'**ESEMPIO 4.1.**, però cambiando gli insiemi $A, B = \mathbb{R}$, la funzione f non è più *né suriettiva né iniettiva*;
DIM. Si dimostra che non è suriettiva prendendo un valore $y = f(x) = -1$; si dimostra che $\nexists x : x^2 = -1$ (guardando il grafico), pertanto $-1 \notin f(\mathbb{R})$.
Dopodiché si dimostra che non è neanche iniettiva tramite un *controesempio*; prendiamo $x_1 = -1, x_2 = 1$ (quindi $x_1 \neq x_2$) e i *valori immagini* di x_1, x_2 sono $f(-1) = -1^2 = 1$, $f(1) = 1^2 = 1$, pertanto $f(-1) = f(1)$. $\blacksquare$

DEF 3.3. Funzione biiettiva

Se una funzione $f : A \mapsto B$ è sia *iniettiva* e sia *suriettiva*, allora si dice che f è **biiettiva**

DEF 4. Funzione composta

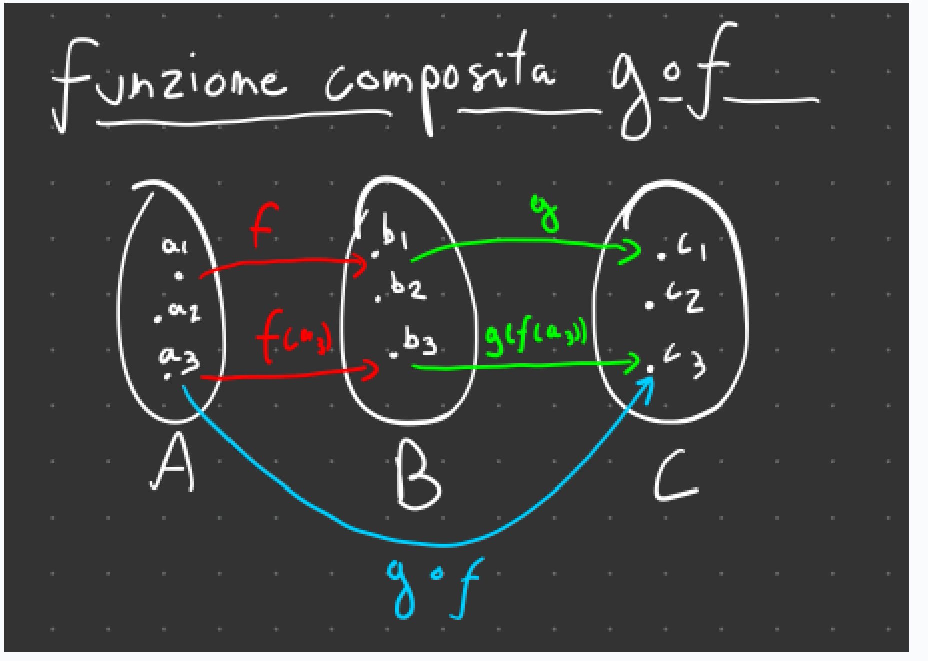
Siano

$$f : A \mapsto B$$
$$g : B \mapsto C$$

Si definisce $g \circ f$ la **funzione composita** "*g dopo f*".

$$g \circ f : A \mapsto C$$
$$x \mapsto g(f(x))$$

Si illustra la **funzione composita** tramite il seguente diagramma:



ESEMPIO 5.1. Siano

$$f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$$
$$f : x \mapsto x^2,\ g : y \mapsto y + 2$$

Allora

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 2$$
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 2) = (x + 2)^2$$

OSS 5.1.1. Ovviamente da questo esempio si nota che *non è sempre vero* che $f \circ g = g \circ f$.

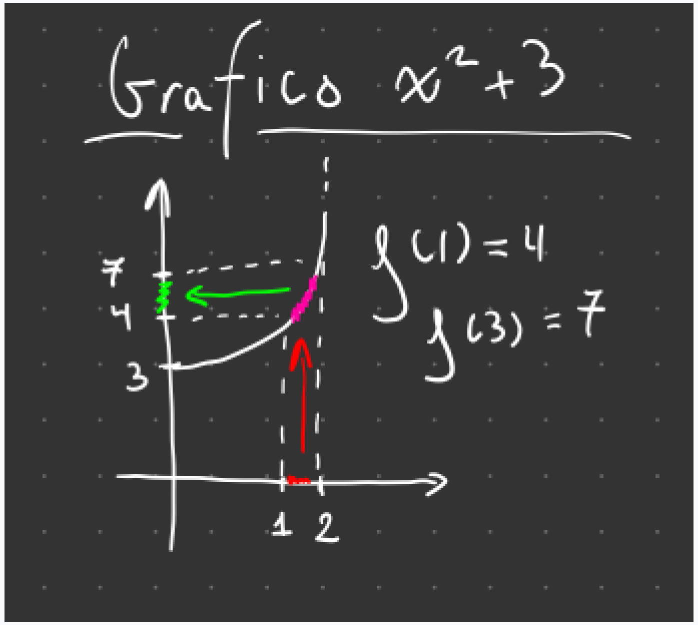
DEF 5. L'immagine di un pezzo del dominio

Sia $f : A \mapsto B$, $A' \subseteq A$; allora si definisce

$$f(A') = \{f(x) : x \in A'\}$$

come **l'immagine di un pezzo del dominio A.**

ESEMPIO 6.1. Si rappresenta il grafico della funzione $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $f : x \mapsto x^2 + 3$. Si vuole trovare (e rappresentare) $f([1,2])$.



Dal grafico si evince chiaramente che $f([1,2]) = [4,7]$.

DEF 6. La funzione inversa

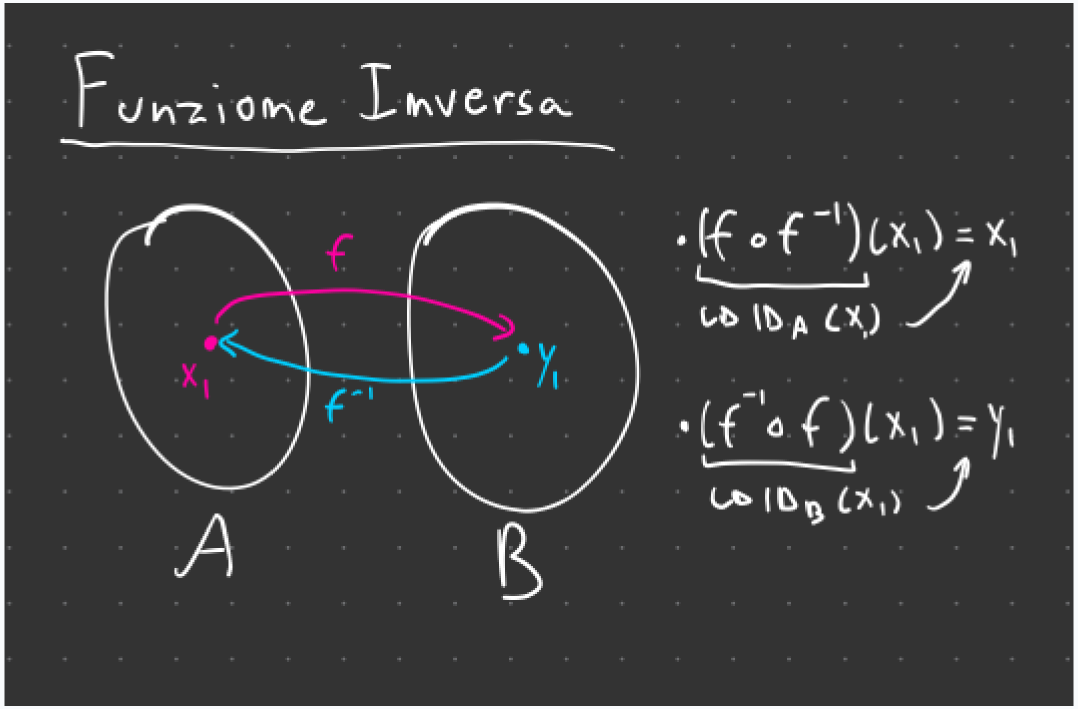
Sia

$$f : A \mapsto B$$

Supponiamo che esista una funzione $g : B \mapsto A$, tale che

$$g \circ f = \mathrm{id}_A : A \mapsto A$$
$$f \circ g = \mathrm{id}_B : B \mapsto B$$

, ove la funzione d'identità su un insieme A viene rappresentata da $\mathrm{id}_A : x \mapsto x$, si dice che la funzione g è la **funzione inversa di** f.
Si illustra la funzione inversa di f con un diagramma.



TEOREMA 1. L'esistenza della funzione inversa f^-1

Una funzione $f : A \mapsto B$ ha la sua inversa

$$f^-1 : B \mapsto A$$

se e solo se è *biettiva*, ovvero se è entrambi *iniettiva* e *suriettiva*.

DEF 7. Insieme contro immagine

Sia

$$f : A \longrightarrow B$$

ove $\tilde{A} \subseteq A, \tilde{B} \subseteq B$.
Allora definisco **l'insieme contro immagine**

$$f^{\leftarrow}(\tilde{B}) = \{x \in A : f(a) \in \tilde{B}\}$$

ovvero gli elementi di A tali per cui le loro immagini $f(a)$ appartengono all'insieme $\tilde{B}$.

DEF 8. Funzione monotona, crescente o decrescente.

DEF 8. Sia

$$f : A \longrightarrow B$$

e diciamo che questa sia **monotona** se sussistono una delle seguenti condizioni:

$$\begin{aligned}
&\text{i. } \forall x, y \in A; x \leq y \implies f(x) \leq y \\
&\text{ii. } \forall x, y \in A; x < y \implies f(x) < y \\
&\text{iii. } \forall x, y \in A; x \leq y \implies f(x) \geq y \\
&\text{iv. } \forall x, y \in A; x < y \implies f(x) > y
\end{aligned}$$

in particolare,

- se sussiste la *i.*, allora la funzione è **crescente**;
- invece per la *ii.*, la funzione si dice **strettamente crescente**.
- Analoghi i discorsi per *iii, iv.* in cui diciamo che la funzione è **decrescente o strettamente decrescente.

DEF 9. Funzione pari e dispari

PREMESSA. Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$, sia A *simmetrico rispetto all'origine* (ovvero $\forall x \in A, -x \in A$).
Sia la funzione f

$$f : A \longrightarrow B$$

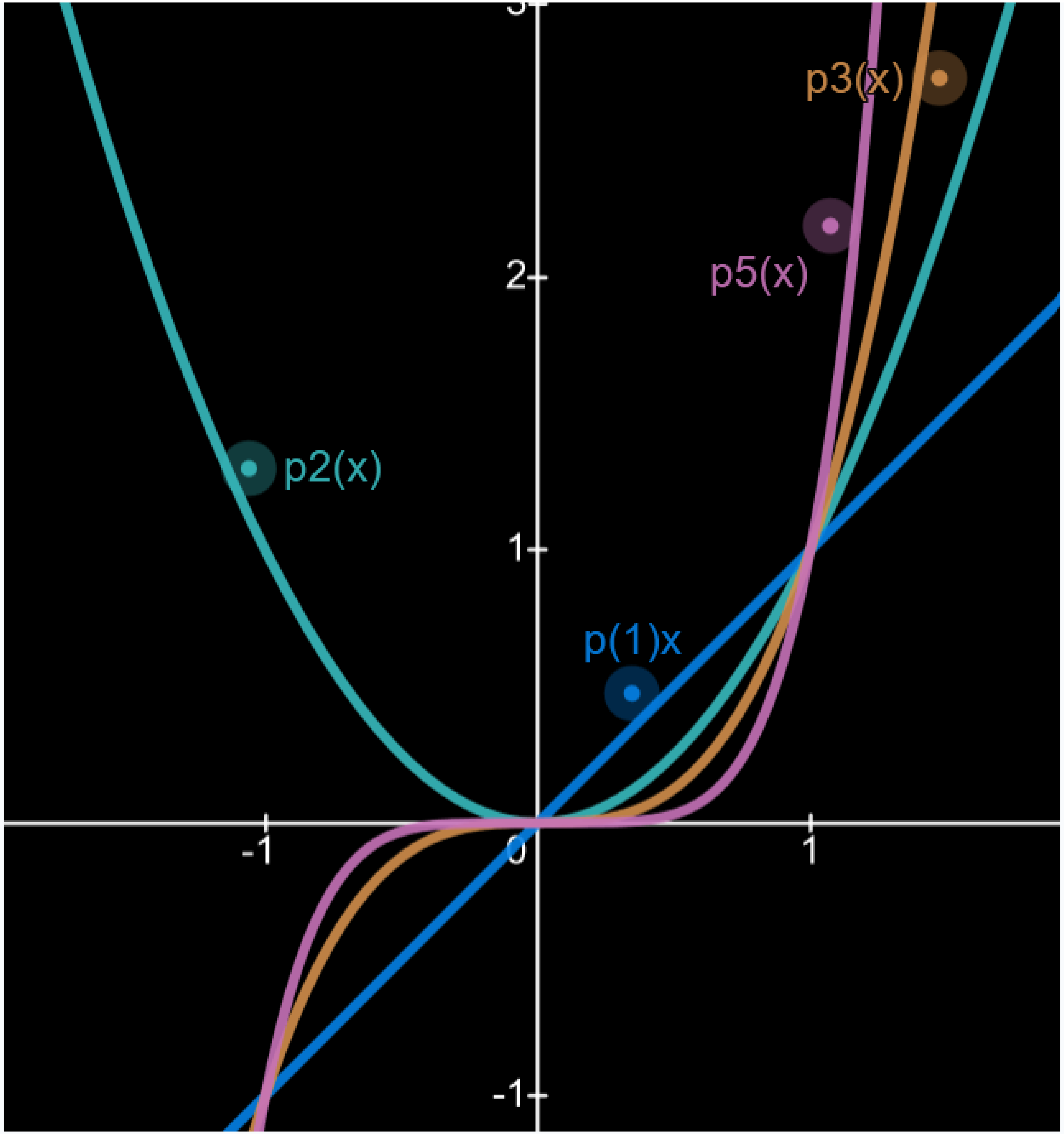
e la chiamo:
DEF 9.1. Una funzione **pari** se accade che

$$f(x) = f(-x)$$

DEF 9.2. Una funzione **dispari** se

$$f(x) = -f(-x)$$

ESEMPIO 9.1. Osserviamo la funzione potenza (Funzioni di potenza, radice e valore assoluto, **DEF 1.1.**) $p_n(x)$.
La definizione appena data da noi ci *"suggerisce"* che per n pari, p_n è una funzione pari; similmente p_n è dispari se n è dispari.



p3(x)
p5(x)
p2(x)
p(1)x
2
1
-1
-1
0
1

DEF 10. Funzione periodica

DEF 10. Sia $T > 0$, $A \subseteq \mathbb{R}$ tale che

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \forall x \in A; x + Tk \in A$$

Sia ora una funzione f del tipo

$$f : A \longrightarrow \mathbb{R}$$

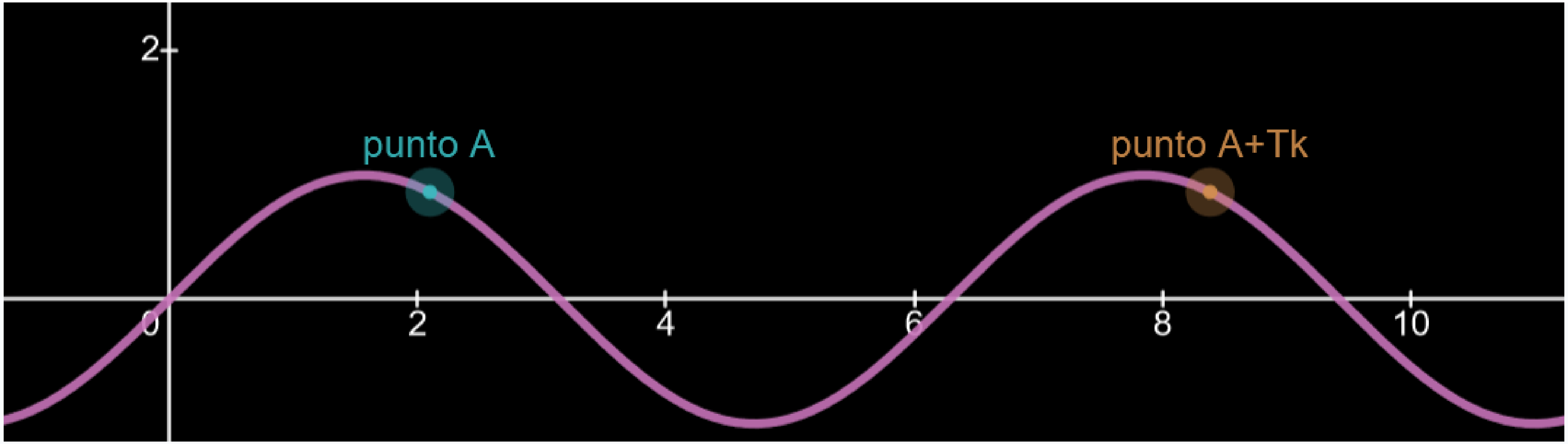
è **periodica** se è vera che

$$\forall x, k; f(x) = f(x + Tk)$$

ESEMPIO 10.1. Le Funzioni trigonometriche sono periodiche: infatti secondo la **PROP 2.3.**, abbiamo $T = 2\pi$. Ovvero

$$\sin(x) = \sin(x + 2\pi k), \forall k \in \mathbb{Z}$$

analogo il discorso per $\cos$.



Insiemi aperti e chiusi

Definizione di insieme aperto e chiuso. Teorema sugli insiemi aperti e chiusi.

---

1. Insieme aperto

DEF 1.1. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$; l'insieme A si dice **aperto** se e e solo se *tutti i suoi punti sono punti interni all'insieme stesso* (Punti interni, esterni e di frontiera, **DEF 1.1.**); ovvero se

$$\forall x_0 \in A, \exists r > 0 : (x_0 - r, x_0 + r) \subseteq A$$

OSS 1.1. Osservo che l'insieme A è aperto *se e solo se* $A = A^\circ$.

Esempi

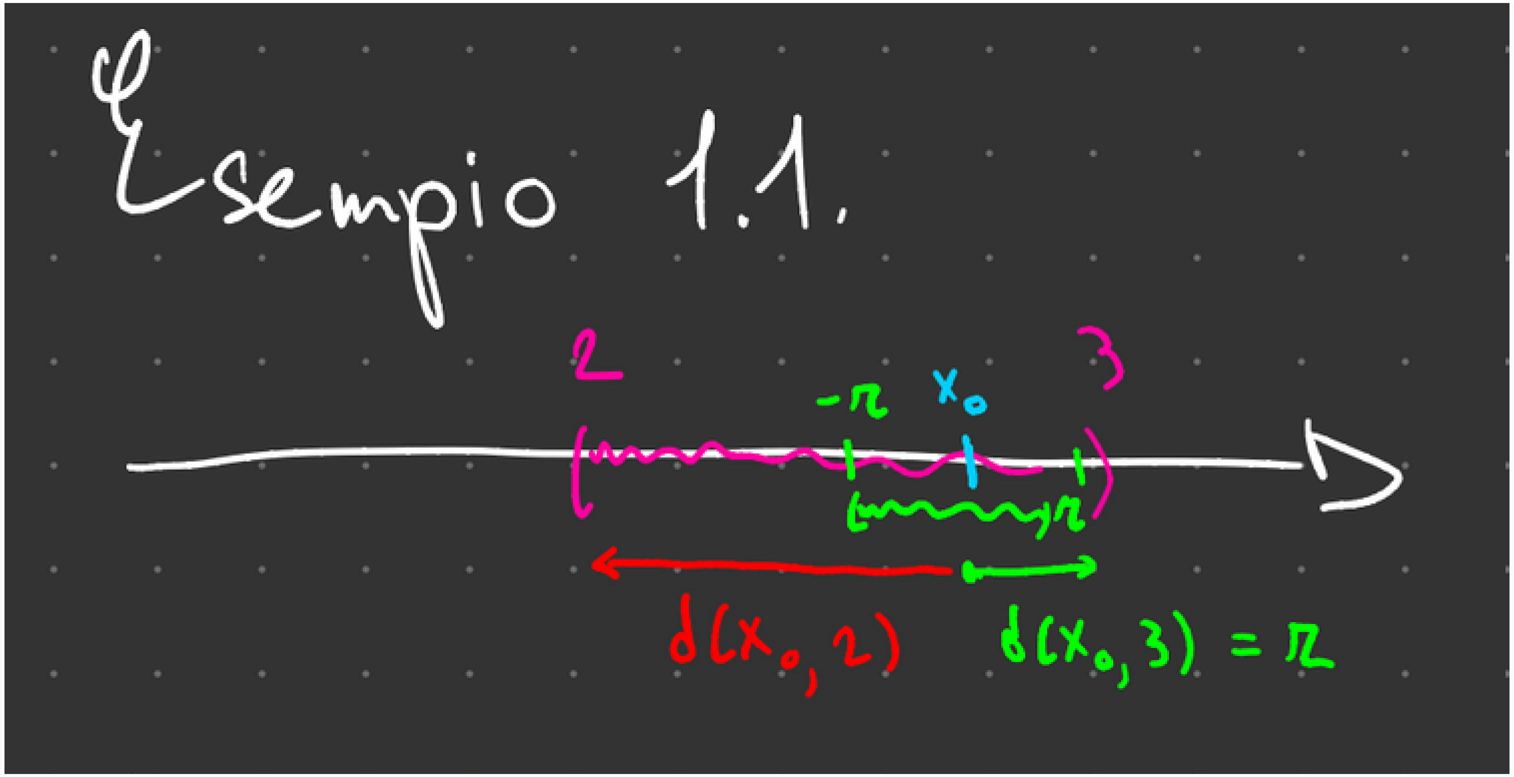
ESEMPIO 1.1. Considero *l'intervallo aperto* (Intervalli, **DEF 1.4.**)

$$(2,3)$$

voglio sapere se questo è *insieme aperto*; scegliendo un qualunque punto x all'interno di questo intervallo, allora posso sicuramente trovare un intorno in x tale per cui contiene *solo* elementi di $(2,3)$. Infatti se scelgo r come la *distanza minima* tra x e ciascun estremo, scopro che l'*intorno centrato aperto* di questo raggio (Intorni) contiene *solo* punti di E (dunque esso è *sottoinsieme* di E).
Formalizzando questo ragionamento, ho

$$\forall x, 2 < x < 3; r = \min(d(x,2), d(x,3))$$

Graficamente questo ragionamento corrisponde a



ESEMPIO 1.2. Ora considero l'insieme

$$E = \{1\} \cup [2, 3)$$

che *non è aperto*, in quanto considerando $x_0 = 1$ trovo che questo elemento (o punto) non è *interno* a E. Analogo il discorso per $x_0 = 2$.

2. Intervallo chiuso

DEF 2.1. Considerando un insieme $C \subseteq \mathbb{R}$, si dice che esso è **chiuso** se il suo *complemento* è *aperto*. Ovvero se $\mathcal{C}_{\mathbb{R}} C$ è aperto.

Esempi

ESEMPIO 2.1. Consideriamo *l'intervallo chiuso* (Intervalli, **DEF 1.1.**)

$$C=[2,5]$$

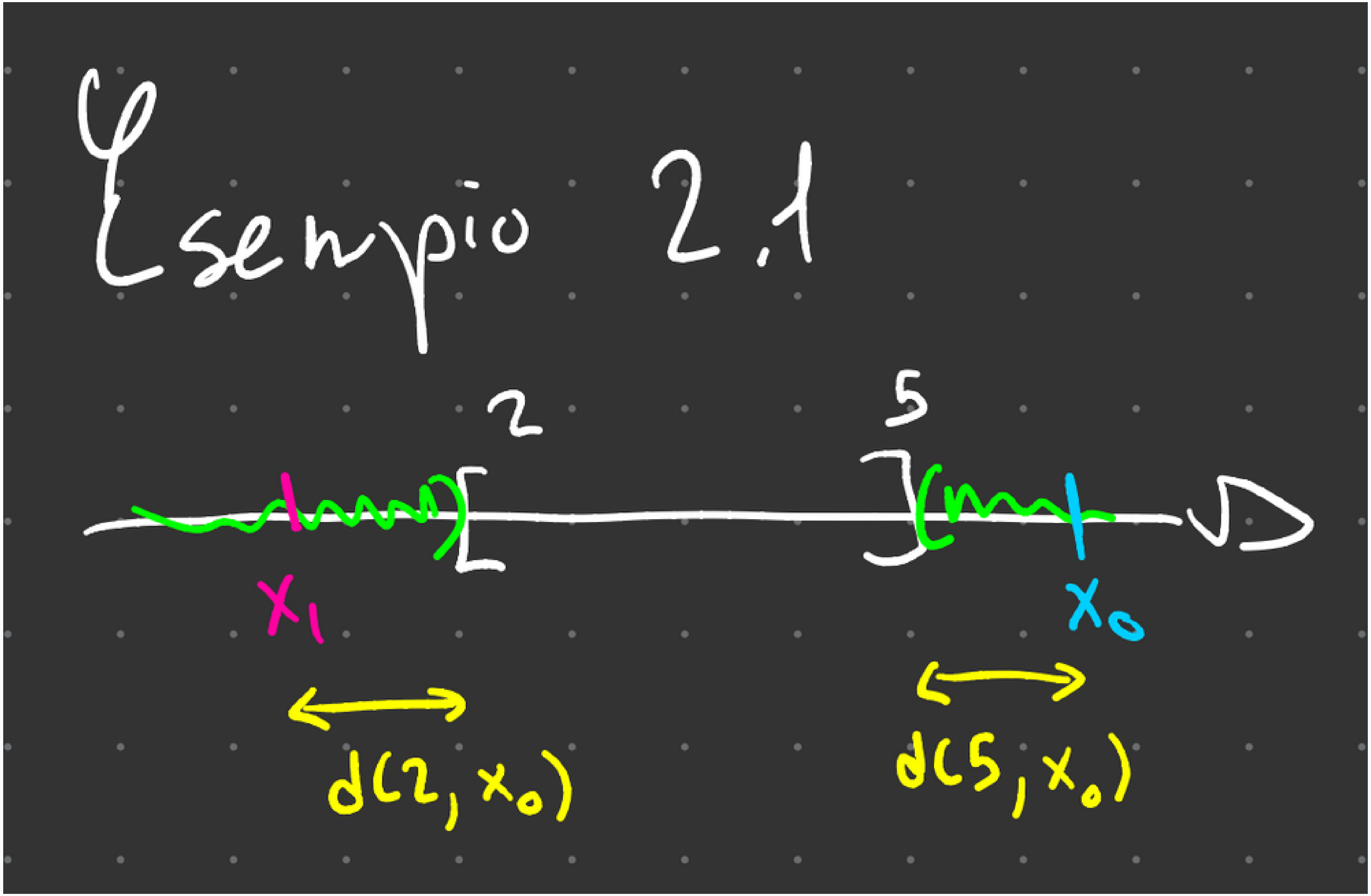
Considerando il suo complemento

$$\mathcal{C}_{\mathbb{R}}C=(-\infty,2)\cup(5,+\infty)$$

vediamo che questo insieme (il complemento) è *aperto*; infatti ad ogni punto x_0 del complemento vediamo che è possibile definire un r tale che l'*intorno centrato aperto* di questo raggio sia sottoinsieme di $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}C$.
Infatti definendo r come

$$r=\begin{cases}d(2,x_0) \text{ per } x_0<2\\ d(5,x_0) \text{ per } x_0>5\end{cases}$$

sicuramente troviamo che tutti i punti x_0 sono interni al complemento di C.
Graficamente questo ragionamento corrisponde a



3. Teoremi sugli insiemi aperti e chiusi

TEOREMA 3.1. Abbiamo le seguenti proposizioni:

1. Gli insiemi

$$\emptyset, \mathbb{R}$$

   sono *insiemi aperti*
2. L'*unione* (Operazioni con gli Insiemi) di due *insiemi aperti* è sicuramente un *insieme aperto*.
3. L'*intersezione* (Operazioni con gli Insiemi) di due *insiemi aperti* è sicuramente un *insieme aperto*.

TEOREMA 3.2. Abbiamo invece le stesse proposizioni per gli insiemi chiusi:

1. Gli insiemi

$$\emptyset, \mathbb{R}$$

   sono *insiemi chiusi*
2. L'*unione* (Operazioni con gli Insiemi) di due *insiemi chiusi* è sicuramente un *insieme chiuso*.
3. L'*intersezione* (Operazioni con gli Insiemi) di due *insiemi chiusi* è sicuramente un *insieme chiuso*.

OSS 3.1. Notiamo che se dimostriamo almeno una di queste due teoremi, allora si ha automaticamente dimostrato l'altro teorema, in quanto la *definizione dell'insieme chiuso* (**DEF 2.1.**) ci suggerisce che le stesse proprietà valgono. Infatti, la definizione dell'insieme chiuso si basa sulla definizione dell'insieme aperto, tenendo però conto del complementare dell'insieme; perciò basta tenere conto delle leggi di *De Morgan* (Logica formale - Sommario).

DIMOSTRAZIONE 3.1. Allora ci limitiamo a dimostrare solo il teorema **3.1.**

1. L'insieme vuoto

$$\emptyset$$

   non ha *nessun elemento*; per verificare se questo insieme vuoto è *aperto*, bisognerebbe allora verificare che

tutti gli elementi di questo insieme gode della proprietà necessaria. Pertanto si può pensare che tutti gli elementi (ovvero nessuno) di questo insieme può godere *tutte* le proprietà che si vuole.
Altrimenti è possibile pensare in termini di insiemi complementari.

Per quanto riguarda l'insieme dei numeri reali

$$\mathbb{R}$$

e prendendo un elemento $x_0 \in \mathbb{R}$ allora si trova automaticamente che

$$\forall r > 0, (x_0 - r, x_0 + r) \subseteq \mathbb{R}$$

è verificata.

2. Sia

$$\{A_i, i \in I\}$$

un insieme di *insiemi aperti*.
ESEMPIO 3.1. Un insieme del genere può essere

$$\{(1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N} \diagdown \{0\}\}$$

Allora considero un

$$x_0 \in \bigcup_{i \in I} A_i$$

Allora da ciò discende che esiste un $\bar{i}$ tale che quel punto appartenga all'insieme aperto $A_{\bar{i}}$, ovvero

$$x_0 \in A_{\bar{i}}$$

Allora è vero che esiste una *palla aperta* (Intorni, **DEF 2.1.**) che venga contenuta in quell'insieme aperto. Ovvero

$$x_0 \in A_{\bar{i}} \implies \exists r > 0 : (x_0 - r, x_0 + r) \subseteq A_{\bar{i}}$$

Ma allora ciò implica che

$$\exists r > 0 : (x_0 - r, x_0 + r) \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$$

3. Siano A_1 e A_2 due insiemi aperti; scelgo allora un $x_0 \in (A_1 \cap A_2)$. Quindi ciò vuol dire che

$$x_0 \in (A_1 \cap A_2) \implies \begin{cases} x_0 \in A_1 \implies \exists r_1 > 0 : (x_0 - r_1, x_0 + r_1) \subseteq A_1 \\ x_0 \in A_2 \implies \exists r_2 > 0 : (x_0 - r_2, x_0 + r_2) \subseteq A_2 \end{cases}$$

Poi scegliendo r il minimo tra r_1 e r_2, ovvero

$$r = \min(r_1, r_2)$$

[Grafico da fare]

4. Allora ho che

$$(x_0 - r, x_0 + r) \subseteq (A_1 \cap A_2)$$

il che vuol dire l'intersezione tra A_1 e A_2 è aperto.

OSS 3.2. Però questo *non* vuol dire che l'*intersezione infinita* tra insiemi aperti debba essere necessariamente *aperta*: infatti si propone il seguente controesempio.

ESEMPIO 3.2.
Considero la *successione di intorni*

$$(I_n)_n : I_n = (1 - \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n})$$

e vediamo che l'intervallo I_n è aperto per ogni n.
Inoltre gli intervalli $(I_n)_n$ sono *inscatolati* (Intervalli, **DEF 3.1.1.**).
[GRafico da fare]
Dal grafico notiamo che se prendiamo l'intersezione di tutti gli intervalli

$$\bigcap_n I_n$$

i numeri compresi tra $1, 2$ stanno sicuramente all'interno di questo intervallo, come si può evincere dal grafico; invece per la *proprietà di Archimede* (Conseguenze dell'esistenza dell'estremo superiore, **TEOREMA 3.1.**), per ogni numero che sta fuori da $[1, 2]$, esiste un intervallo I_n che non lo include; ovvero

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N} : 1 - \varepsilon &\notin I_n \\ 2 + \varepsilon &\notin I_n \end{aligned}$$

Allora si può concludere che

$$\bigcap_n I_n = [1, 2]$$

che *non* è un *insieme aperto*.

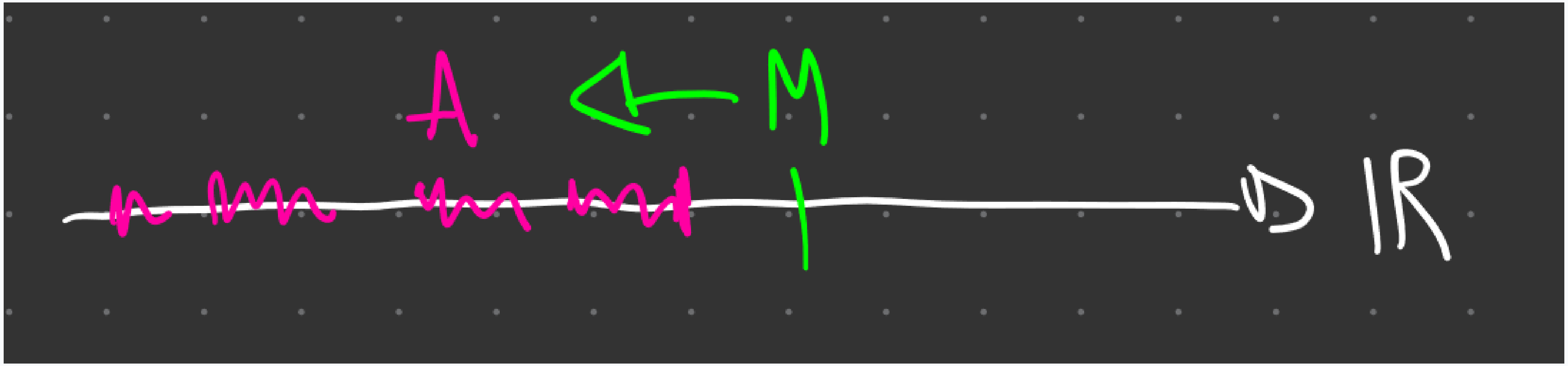
Insiemi limitati, maggioranti, massimo e teorema dell'estremo superiore

1. Insiemi limitati

DEF 1.1. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, A si dice un insieme **limitato superiormente** se

$$\exists M \in \mathbb{R} : \forall a, \in A; a \leq M$$

Graficamente, un insieme *limitato superiormente* si rappresenta così:

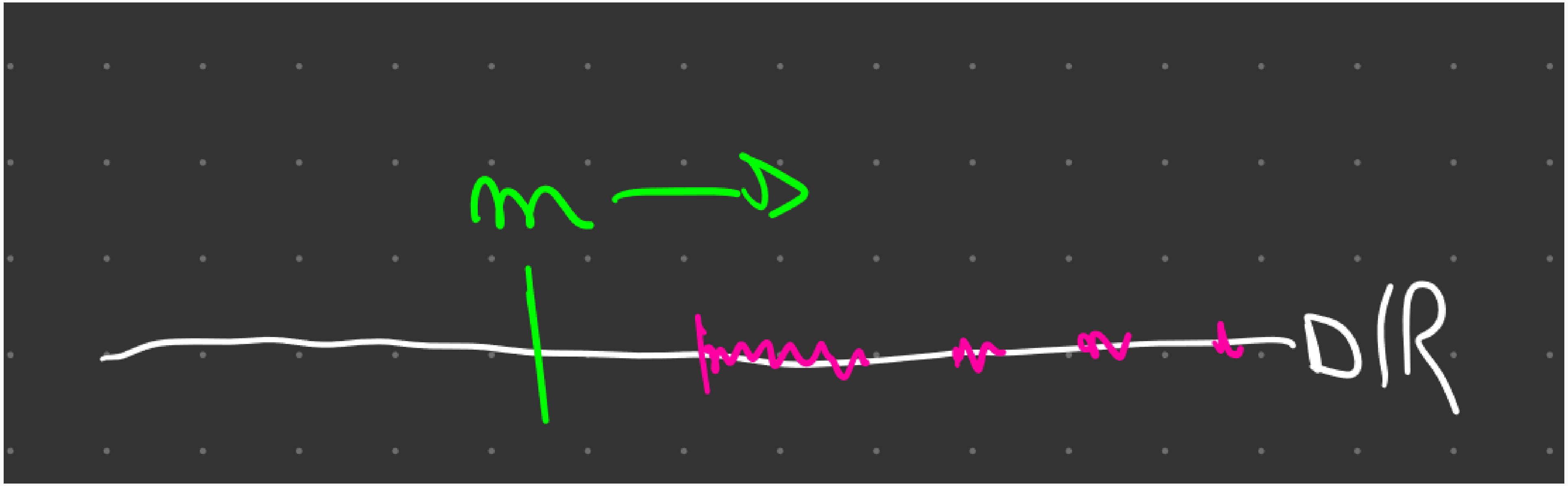


ESEMPIO 1.1.1. Considero $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 3x + 1 = 0\}$.
A è *limitato superiormente*, in quanto risolvendo A otteniamo l'insieme $A = \{\frac{-3-\sqrt{5}}{2}, \frac{-3+\sqrt{5}}{2}\}$, e scegliendo $M = 0$ si ha che entrambi elementi di A sono minori di 0.

DEF 1.2. $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice un insieme **limitato inferiormente** se

$$\exists m \in \mathbb{R} : \forall a \in A; a \geq m$$

Graficamente,



DEF 1.3. $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice **limitato** se è sia limitato *superiormente* che *inferiormente*.
ESEMPIO 1.3.1. $[a, b]$ è limitato.
Infatti se si scelgono $M = b, n = a$ per definizione risulta vero che questo intervallo è *limitato*.

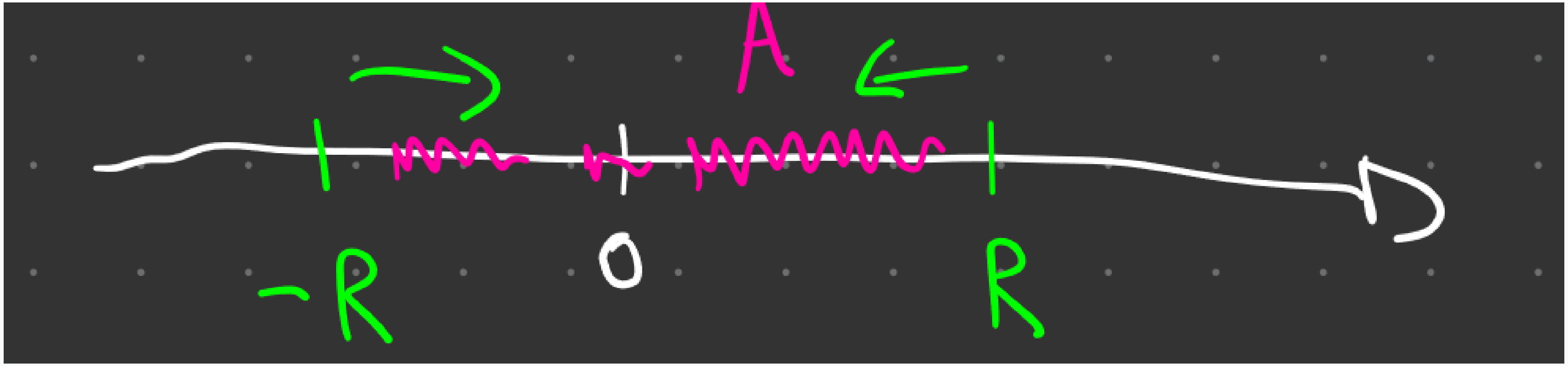
OSS 1.3.1. Se A è *limitato* $\iff$ $\exists R > 0$ tale che

$$A \subseteq [-R, R]$$

DIM. Da quanto visto in Connettivi, basta dimostrare che entrambe le implicazioni sono vere; ovvero
1.

$$\exists R : A \subseteq [-R, R] \implies A \text{ è limitato}$$

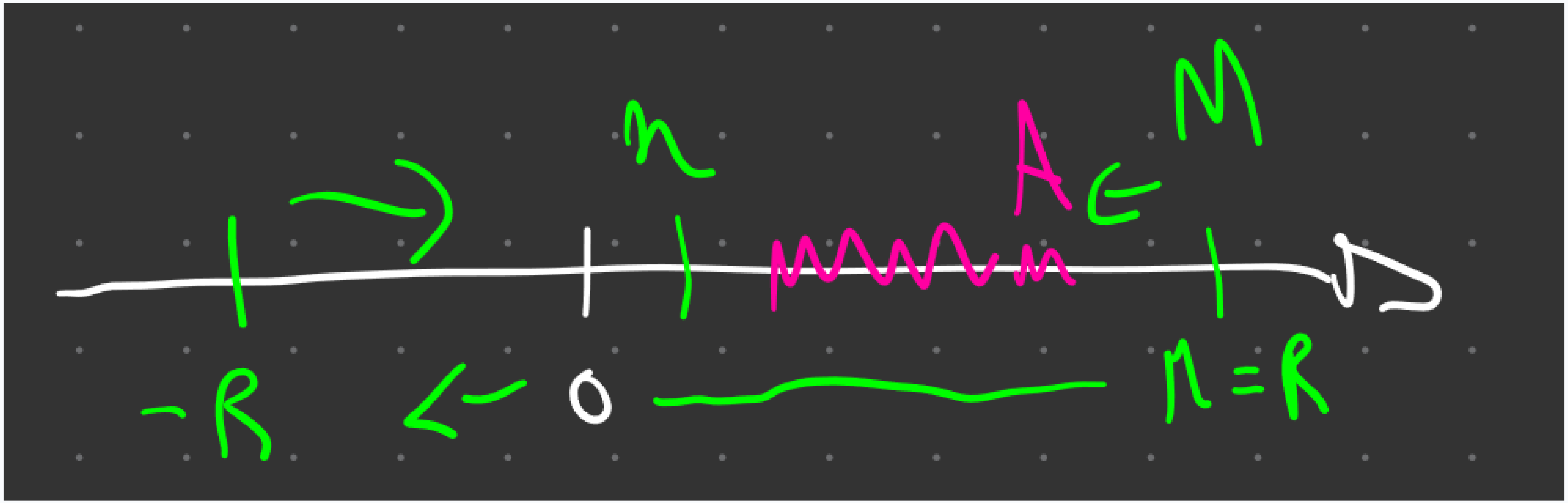
che graficamente rappresenta



quindi è vera
1.

$$\text{A è limitato} \implies \exists R : A \subseteq [-R, R]$$

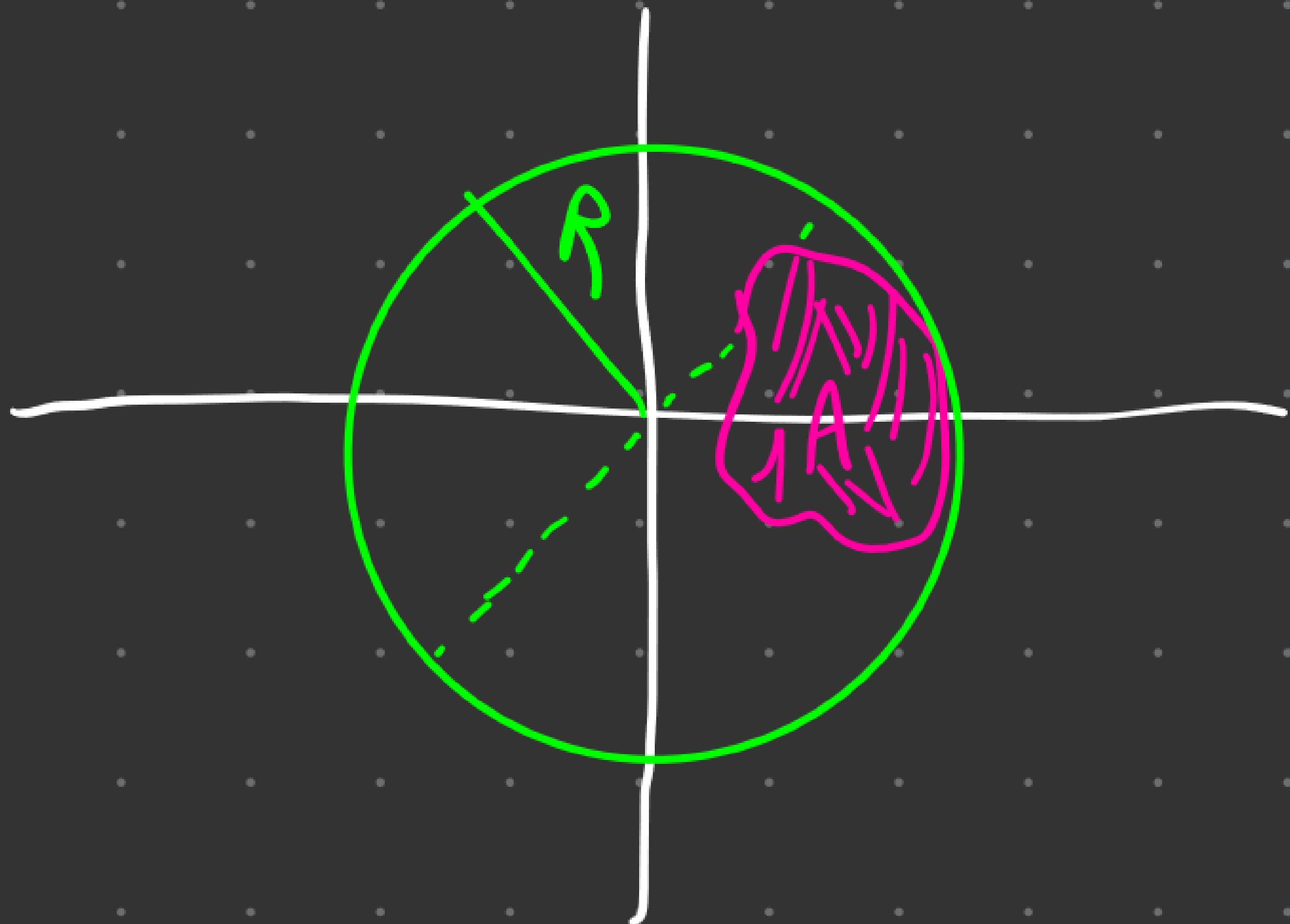
che graficamente rappresenta



quindi anche questa è vera.

OSS 1.3.2. Vorrei trovare un modo per definire gli *insiemi limitati* su un piano π.
E' possibile definirlo tramite il seguente: *"Se riesco a mettere l'insieme A all'interno di una sfera di raggio R, allora esso è limitato."*
Graficamente,

Insiemi Limitati in $\mathbb{R}^2$



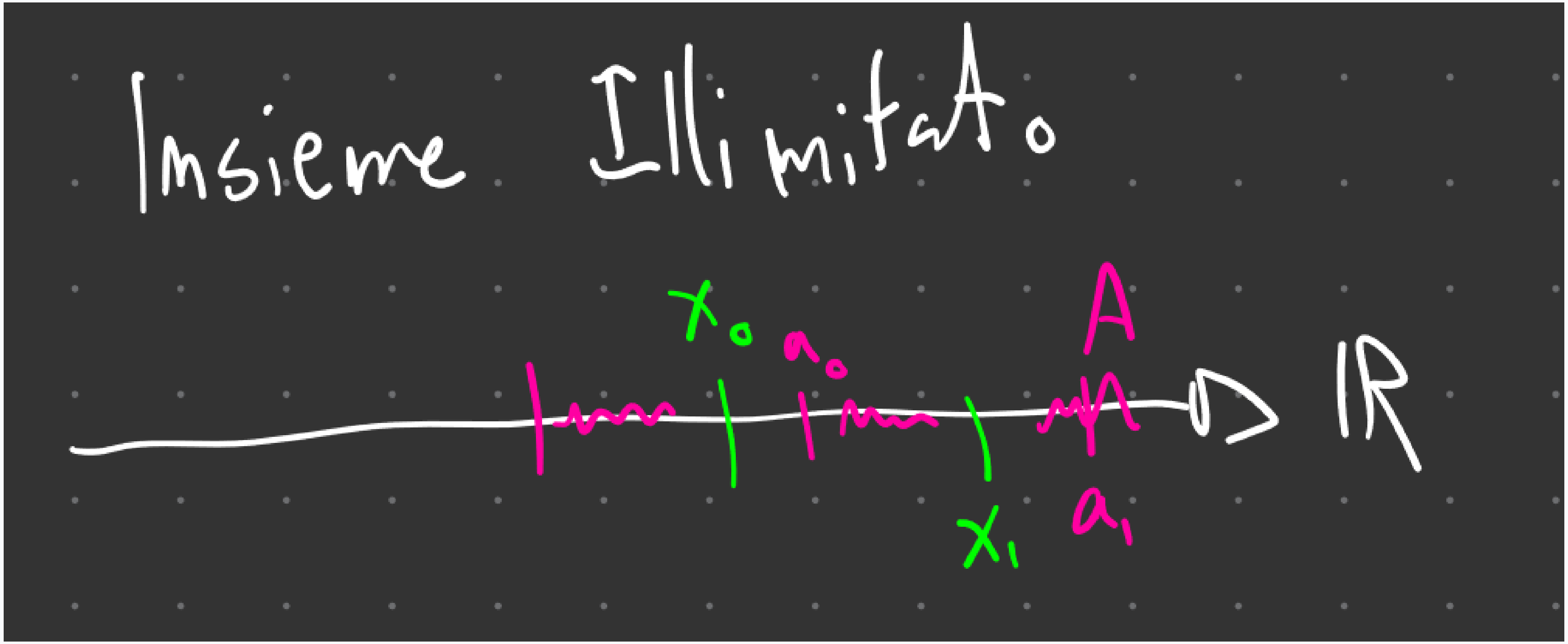
DEF 1.4. Un insieme A si dice *superiormente illimitato* quando neghiamo che A è superiormente limitato; ovvero

$$\neg(\exists M \in \mathbb{R}, \forall a \in A, a \leq M)$$

ovvero

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists a \in A : a > M$$

che graficamente vuol dire che ad ogni M_n che fissiamo, esiste *sempre* un valore a_n che è più grande di M.



Il discorso è analogo per *insiemi inferiormente illimitati* e *insiemi illimitati*.

2. Maggioranti, massimi; minoranti e minimi

Maggioranti e minoranti

DEF 2.1. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $M \in \mathbb{R}$.

Se $\forall a \in A, a \leq M$, (ovvero A è *limitato inferiormente*) il valore M si dice un **maggiorante di** A.

DEF 2.2. Analogamente, se $A \subseteq \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{R}$, m è **minorante di** A quando $\forall a \in A, m \leq a$.

Massimi e minimi

DEF 2.3. Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$, se:

- μ è maggiorante di A e
- $\mu \in A$
  allora μ è il **massimo di** A.

$$\mu := \begin{cases} \mu \in A \\ \forall a \in A, a \leq \mu \end{cases}$$

DEF 2.4. Analogamente, se $A \subseteq \mathbb{R}$ e $\nu \in \mathbb{R}$, allora definisco il **minimo di** A:

$$\nu := \text{minimo di A} = \begin{cases} \nu \in A \\ \forall a \in A, a \geq \nu \end{cases}$$

OSS 2.1. Sia A un insieme *limitato inferiormente*.

Supponi che esistano due massimi di A, μ_1, μ_2; si avrebbe allora $\mu_1 = \mu_2$, in quanto può esistere *solo* il *massimo* di A.

DIM. Per assurdo suppongo che $\mu_1 \neq \mu_2$. Per definizione del *massimo*,

$$\begin{cases} \mu_1 \implies \forall a \in A, a \leq \mu_1 \\ \mu_2 \implies \mu_2 \in A \end{cases} \implies \mu_2 \leq \mu_1 \text{ (1)}$$

e

$$\begin{cases} \mu_1 \implies \mu_1 \in A \\ \mu_2 \implies \forall a \in A, a \leq \mu_2 \end{cases} \implies \mu_1 \leq \mu_2 \text{ (2)}$$

Quindi combinando le *(1)* e *(2)*, abbiamo

$$(\mu_2 \leq \mu_1) \wedge (\mu_1 \leq \mu_2) \iff \mu_1 = \mu_2 \blacksquare$$

Il discorso è analogo per il *minimo* di A.

ESEMPIO 2.A. Consideriamo l'intervallo

$$A = \ ]1, 2[$$

ci chiediamo se questo intervallo ha *maggioranti e/o minorante* e se ha *massimo e/o minimo*.

1. A ha sia *maggioranti* che *minoranti*, infatti possiamo porre $M = 2$ e $m = 1$; ma possiamo anche porre $M = 3$ e $m = 0$.
   Allora *definiamo* l'insieme dei maggioranti di A,

   $$A^* := \{\text{maggioranti di } A\} = [2, +\infty[$$

   e l'insieme dei minoranti di A,

   $$A_* := \{\text{minoranti di } A\} = \ ]-\infty, 1]$$

2. Però A non ha né *massimi* né *minimi.*
   Infatti devo provare che se $x \in A$, allora x NON può essere il *massimo di* A.
   Tracciando l'intervallo A e segnando un punto x all'interno, riesco a trovare un elemento più grande di x? Sì,

se considero la media aritmetica tra x e 2. Infatti

$$x < \frac{x+2}{2} < 2$$

Analogo il discorso per i *minimi*

3. Estremi superiori e inferiori

l'esempio 2.A. di prima, abbiamo un problema interessante; ovvero "gli insiemi limitati hanno sempre massimo e minimo?".
La risposta è *no*, da quanto visto prima; però è interessante osservare che esiste sempre il *"miglior"* maggiorante e il *"miglior"* minorante. Ora li vediamo.

DEF 3.1. Sia A superiormente limitato.
Chiamo **l'estremo superiore di** A il *minimo* dell'insieme dei *maggioranti di* A (A^*).

DEF 3.2. Sia A inferiormente limitato.
Chiamo **l'estremo inferiore di** A il *massimo* dell'insieme dei *minoranti di* A (A_*).

4. Teoremi sugli estremi superiori (e inferiori)

TEOREMA 4.1. (*Teorema dell'esistenza dell'estremo superiore*)
Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, e A *superiormente limitato*, allora

$$\exists \xi \in \mathbb{R} : \xi \text{ è estremo superiore di } A$$

DIM. Per ipotesi, abbiamo $A \subseteq \mathbb{R}$ e $A \neq \emptyset$.
Sia quindi $A^* = \{\text{maggioranti di } A\}$; allora $A^* \neq \emptyset$ (in quanto A è non vuoto).

e per definizione del maggiorante di A,

$$\forall a \in A, \forall b \in A^*, a \leq b$$

Osservo quindi che posso applicare l'assioma di Dedekind (o di separazione) per gli insiemi A e A^*. Pertanto

$$\exists \xi : \forall a \in A, \forall b \in A^*; a \leq \xi \leq b$$

In particolare $a \leq \xi$ vuol dire che ξ è *maggiorante di A*;
e $\xi \leq b$ vuol dire che ξ è il *minimo* dei *maggioranti di A*.
Quindi, per definizione ξ è l'*estremo superiore di* A. ■

ESERCIZIO 4.1. Dimostrare che se $A \neq \emptyset$ e A è inferiormente limitato, allora

$$\exists \eta \in \mathbb{R} : \eta \text{ è l'estremo inferiore di } A$$

Dato che per ipotesi A è non vuota ed è inferiormente limitata, allora sicuramente

$$\forall a \in A, \forall b \in A_*, b \leq a$$

per la definizione di minorante. Osserviamo che si può applicare l'assioma *S)*; quindi sicuramente

$$\exists \eta \in \mathbb{R} : b \leq \eta \leq a$$

Ovvero η è il massimo di A_* ed è un minorante di A. Ovvero *l'estremo inferiore di* A.

TEOREMA 4.2. *(le proprietà dell'estremo superiore* $\sup A$*)*
Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\alpha = \sup(A) \iff \begin{cases} \forall a \in A, a \leq \alpha \ (1) \\ \forall \varepsilon > 0, \exists \bar{a} \in A : \bar{a} > \alpha - \varepsilon \ (2) \end{cases}$$

In parole semplici, la *(1)* vuol dire che α è un maggiorante di A; la *(2)* invece vuol dire che per qualsiasi valore ε positivo, allora $a - \varepsilon$ non è maggiorante di A.
DIM. Sia $\alpha = \sup(A)$, cioè se è il *minimo dei maggioranti* di A.
Ma allora innanzitutto α è un *maggiorante di* A (1)
Ma quindi α è il *minimo dei maggioranti di* A; quindi se sottraggo ad A qualsiasi valore positivo, non è più un maggiorante di A. Pertanto scrivo

$$\begin{gathered}\forall \varepsilon > 0, \ \neg(\forall a \in A, a \leq a - \varepsilon) \\ \exists a \in A : a > a - \varepsilon\end{gathered}$$

ovvero la (2). ■
Volendo si può ragionare anche viceversa, partendo dai presupposti (1) e (2) e verificando che vogliono dire le stesse cose.

TEOREMA 4.2.1. *(versione* $\inf A$)
Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, $\beta \in \mathbb{R}$.

$$\beta = \inf(A) \iff \begin{cases}\forall a \in A, a \geq \beta \ (1) \\ \forall \varepsilon > 0, \exists \bar{a} \in A : \bar{a} > a + \varepsilon \ (2)\end{cases}$$

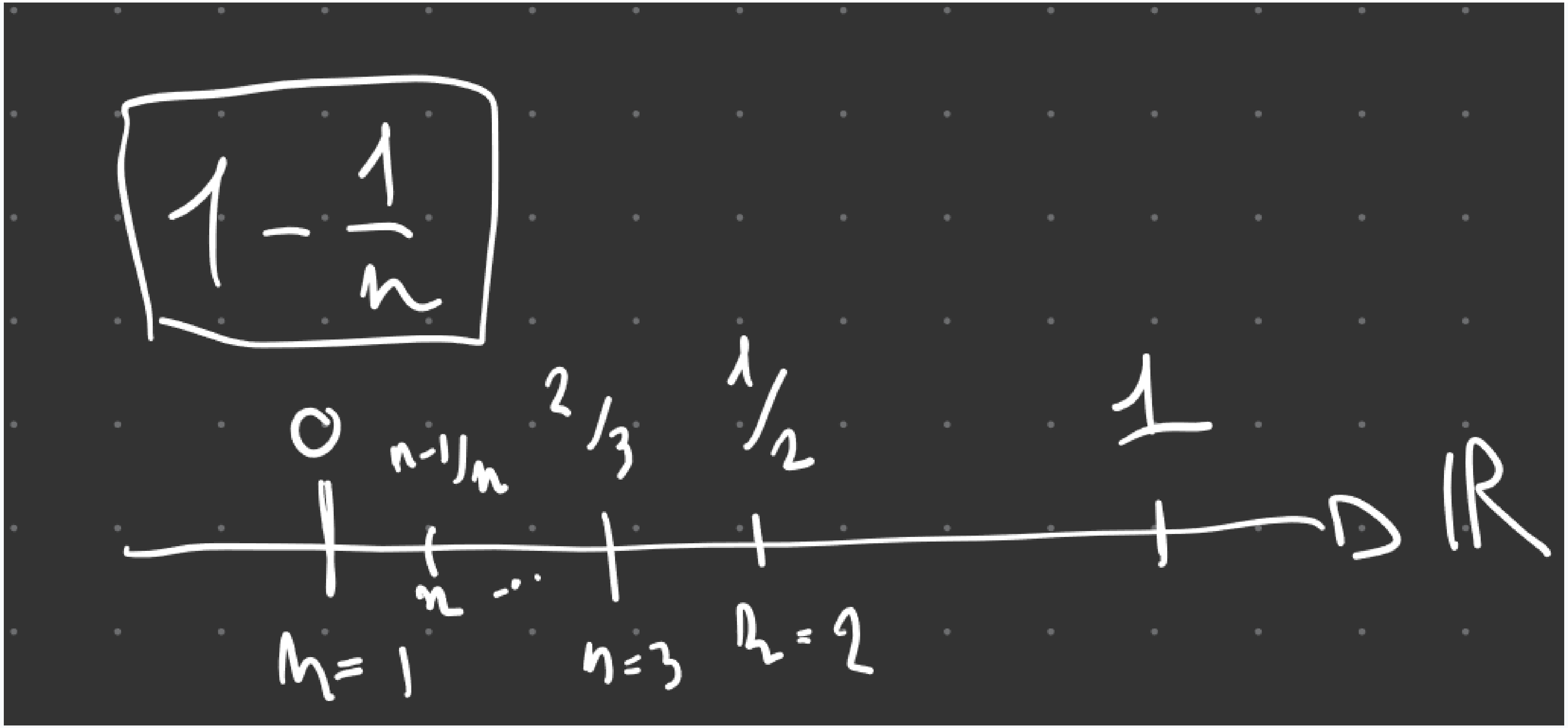
5. Esempio generale

ESEMPIO 5. Considero

$$A = \{\forall n \in \mathbb{N} \diagdown \{0\}, 1 - \frac{1}{n}\}$$

Voglio trovare le seguenti: $\sup(A)$, $\inf(A)$, $\max(A)$, $\min(A)$.

1. Il primo passo è quello di fare un disegno che rappresenta per poter "visualizzare" l'insieme A.



Quindi vediamo che

$$A = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots, \frac{n-1}{n}\}$$

2. A è quindi limitato, da quanto si può evincere dal disegno; infatti scegliamo $m = 0$, $M = 1$.
3. Siccome $A \neq \emptyset$, per il *teorema 4.1.* (o *esercizio 4.1.* per esattezza), posso trovare $\inf A$ e $\min A$;

$$\min(A) = \inf(A) = 0$$

In quanto, per il *teorema 4.2.*

$$\begin{cases} 0 \leq 1-\frac{1}{n}, \forall n \\ \forall \varepsilon > 0, x+\varepsilon \text{ non è minorante di A} \end{cases}$$

4. Possiamo trovare il *maggiorante* 1. Questo in quanto

$$\forall n, n-1 < n \implies \forall n, \frac{n-1}{n} < 1 \iff \forall n, 1-\frac{1}{n} < 1$$

   In particolare si verifica che è l'*estremo superiore*.
   Però se si sceglie $\alpha < 1$, sicuramente (per la proprietà di Archimede????) si verifica

$$\exists n : \alpha < 1-\frac{1}{n} < 1$$

   ovvero per qualunque $a < 1$ si scelga, esiste un n abbastanza grande da poter superare α.
5. Quindi $\sup(A) = 1$ e non esiste $\max(A)$.

OSS 5.1. Se un insieme ha un *minimo* $\min$ (o *massimo* $\max$), allora tale valore è *l'estremo inferiore* $\inf$ (o *estremo superiore* $\sup$). Però il contrario non deve necessariamente valere, come visto sopra.

Intervalli

Definizione di intervalli. Intervalli limitati, aperti, chiusi, inscatolati e dimezzati. Alcuni esempi

---

1. Intervalli limitati

Siano $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$ (ovvero $a \leq b \wedge a \neq b$), allora definiamo le seguenti definizioni degli *intervalli limitati*:

- **DEF 1.1.** Intervallo **chiuso** compresi gli estremi

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

- **DEF 1.2.** Intervallo **semichiuso**

$$]a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$

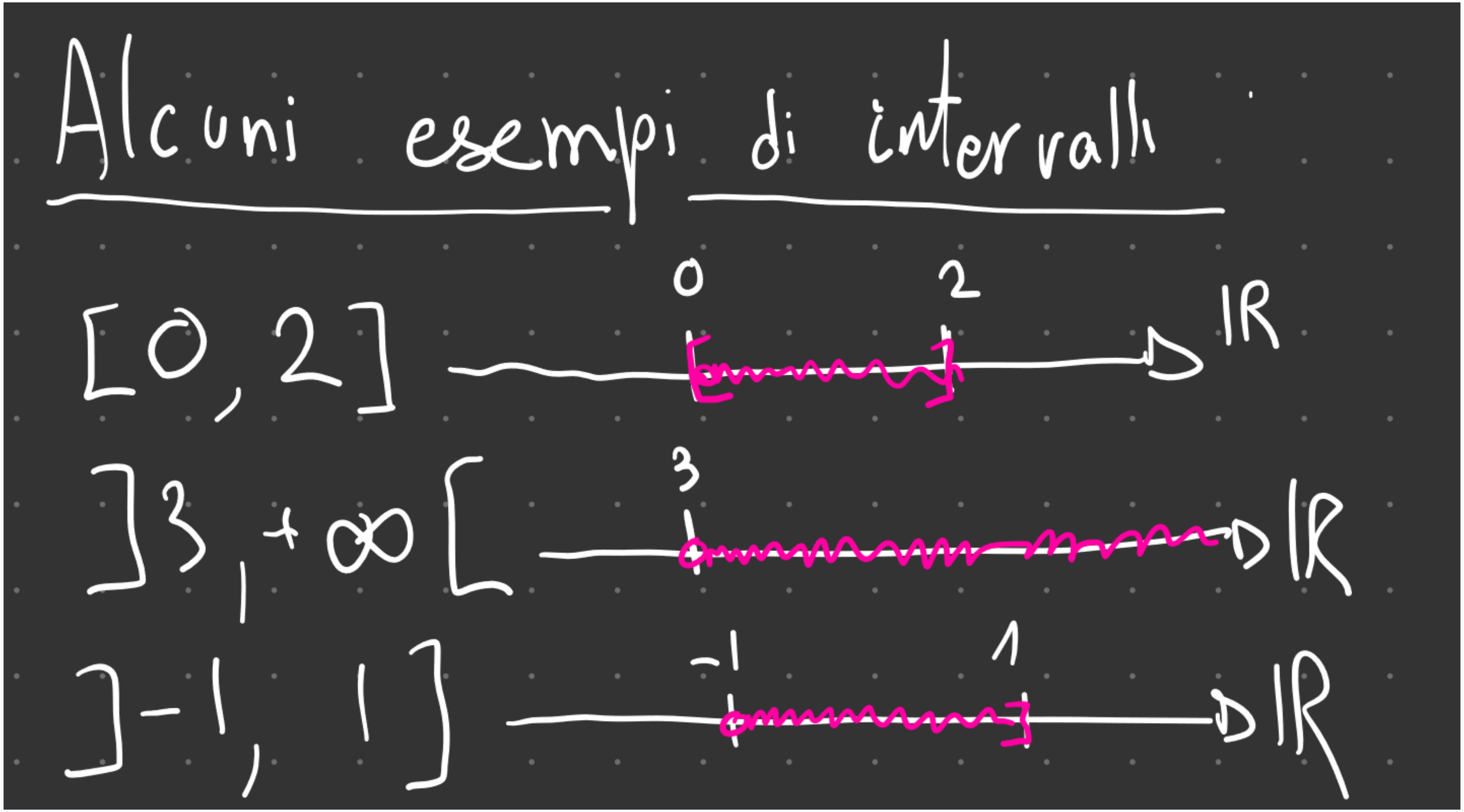
- **DEF 1.3.** Similmente (da **DEF 1.2.**), altro intervallo **semichiuso**

$$[a, b[\ := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$$

- **DEF 1.4.** Intervallo **aperto**

$$]a, b[\ := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

  Alcuni esempi di intervalli:



2. Intervalli illimitati

Se, invece consideriamo $a \in \mathbb{R}$, definiamo allora i seguenti *intervalli illimitati* (o anche *semirette*):

- **DEF 2.1.** Intervallo **inferiormente illimitato**

$$
\begin{gathered}
]-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\} \\
]-\infty, a[:= \{x \in \mathbb{R} : x < a\}
\end{gathered}
$$

- **DEF 2.2.** Intervallo **superiormente illimitato**

$$\begin{aligned}[a,+\infty[&:= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\} \\ ]a,+\infty[&:= \{x \in \mathbb{R} : x > a\}\end{aligned}$$

  OSS 2.1. Si può definire $\mathbb{R}$ anche come

$$\mathbb{R} = \ ]-\infty,+\infty[$$

  OSS 2.2. Può essere comodo pensare che anche l'insieme con un unico punto $\{a\}$ è un *intervallo "degenere"*.

OSS 2.3. Notare che $-\infty$ e $+\infty$ *NON* sono numeri reali, bensì dei semplici simboli.

$$-\infty,+\infty \notin \mathbb{R}$$

Se voglio, posso estendere l'insieme dei numeri reali tale che

$$\tilde{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty,-\infty\}$$

3. Successione di intervalli

DEF 3.1. Sia

$$(I_n)_n$$

definita come una successione (**DEF 4.2.1.**) di intervalli *chiusi* e *limitati*. Quindi

$$(I_n)_n = I_0, I_1, \dots, I_n, \dots$$

ove

$$I_i = [a_i, b_i]$$

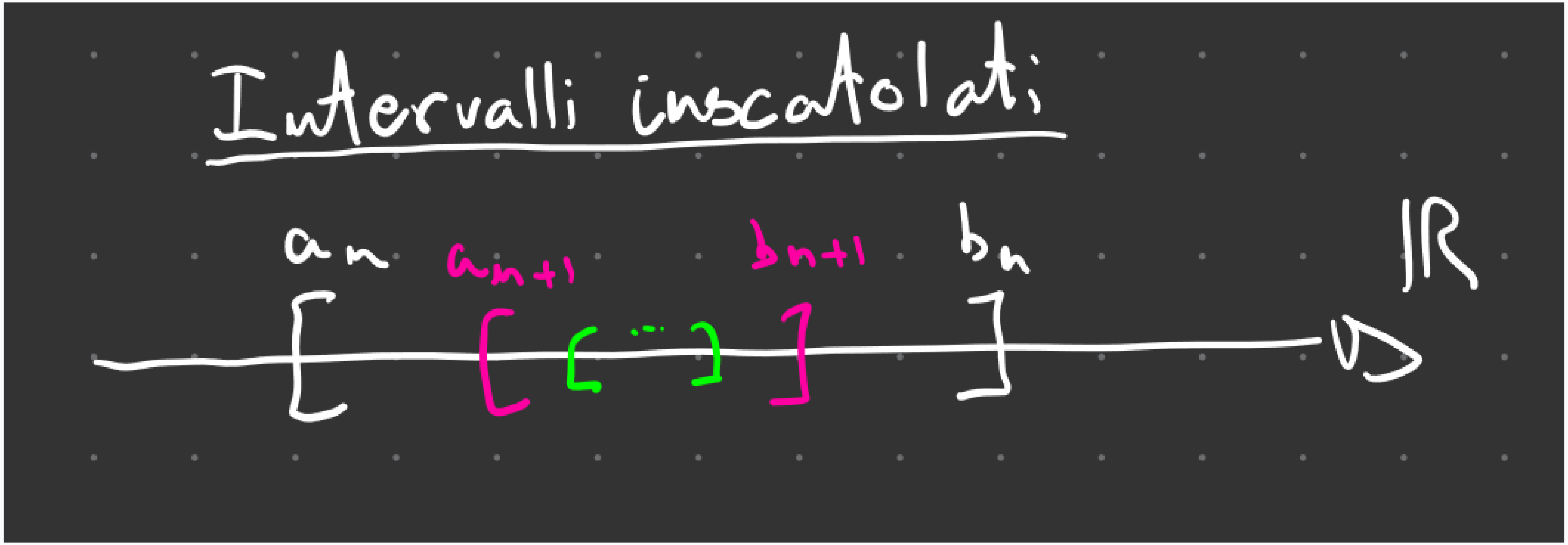
(quindi è un *intervallo chiuso e limitato*)

3.1. Intervalli inscatolati e dimezzati

DEF 3.1.1. Gli intervalli si dicono **inscatolati** se

$$\forall n, I_{n+1} \subseteq I_n$$

ovvero graficamente



DEF 3.1.2. Una *successione di intervalli* $(I_n)_n$ si dice di *intervalli chiusi, inscatolati* e **dimezzati** se

$$\forall n, I_{n+1} \subseteq I_n$$

ove il nuovo sottoinsieme ha gli elementi

$$I_{n+1} = [a_n, \frac{a_n + b_n}{2}] \text{ oppure } [\frac{a_n + b_n}{2}, b_n]$$

OSS 3.1.2.1. Notiamo che se prendiamo un

$$I_n = [a_n, b_n] = [a_{n-1}, \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}]$$

allora la *distanza* tra a_n e b_n è

$$a_n - b_n = \frac{2a_{n-1} - a_{n-1} - b_{n-1}}{2} = \frac{a_{n-1} - b_{n-1}}{2}$$

ovvero la *"metà della lunghezza del segmento di prima, ovvero $a_{n-1} - b_{n-1}$"*.

Intorni

Definizione di distanza (con le sue proprietà), intorno centrato aperto di centro x_0 e di raggio r, intorno di x_0; la retta estesa, l'intorno di $+\infty$ e di $-\infty$.

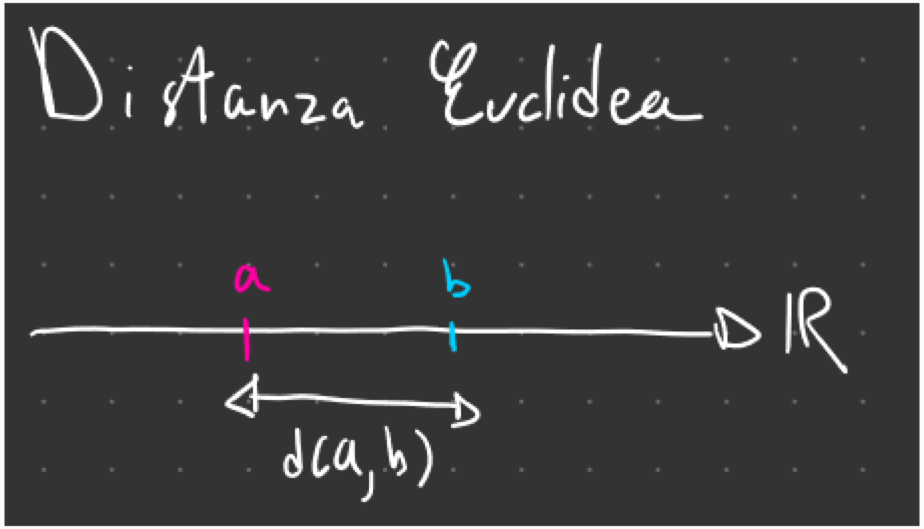
---

0. Preambolo

In questo capitolo studieremo e definiremo delle nomenclature necessarie per studiare i *limiti*.

1. Distanza euclidea

DEF 1.1. Siano $x, y \in \mathbb{R}$, allora definisco la **distanza** (oppure **distanza euclidea**) di x, y il valore $d(x, y) = |x - y|$
Graficamente questo corrisponde, infatti, alla distanza tra due punti sulla retta reale.



Proprietà della distanza euclidea

PROP 1.1. Possiamo verificare alcune proprietà di questa applicazione (Funzioni); la prima essendo

$$\forall x, y \in \mathbb{R}; d(x, y) \geq 0 \wedge d(x, y) \iff x = y$$

PROP 1.2. Proprietà simmetrica

$$\forall x, y \in \mathbb{R}; d(x, y) = d(y, x)$$

PROP 1.3. *Disuguaglianza triangolare*; analogamente alle disuguaglianze triangolari già viste nei numeri complessi (**PROP. 4.7.**) e col valore assoluto (**OSS 3.1.1.**) si verifica che

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}; d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

DIMOSTRAZIONE DI PROP 1.3. Infatti dall'**OSS 3.1.1.** di Funzioni di potenza, radice e valore assoluto so che se

$$|a+b| \leq |a|+|b|$$

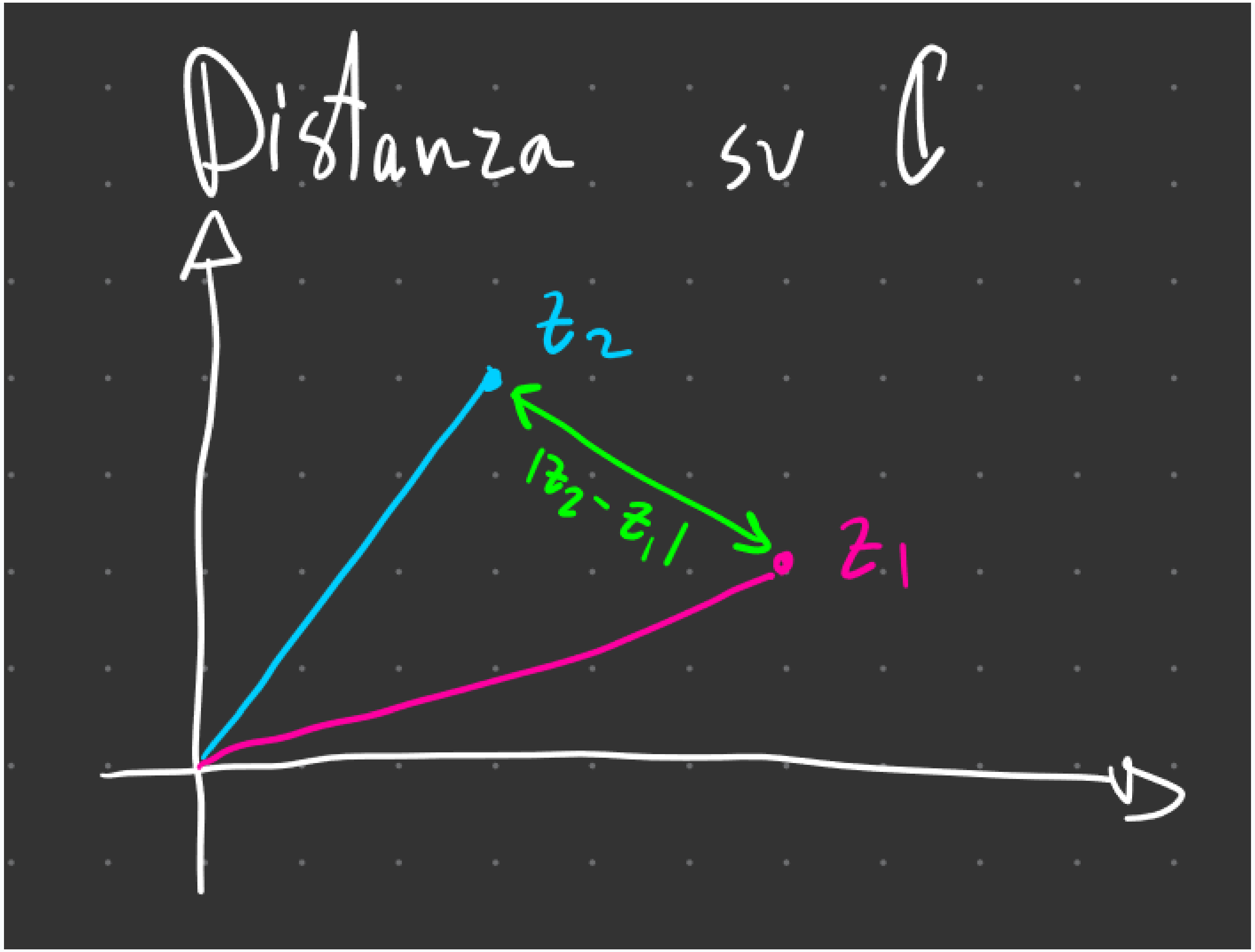
può essere applicato con $a=x-y$ e $b=y-z$, così diventa

$$|x-z| \leq |x-y|+|y-z| \iff d(x,z) \leq d(x,y)+d(y,z) \blacksquare$$

OSS 1.1. Noto che questa nozione di *distanza euclidea* può essere anche definita sui numeri complessi $\mathbb{C}$; infatti posso porre

$$d(z_1,z_2) = |z_1 - z_2|$$

dove $|\cdot|$ rappresenta il *modulo* di un numero complesso (Operazioni sui Numeri Complessi, **DEF 4.** o **DEF 4.1.**). Graficamente, questo corrisponde a



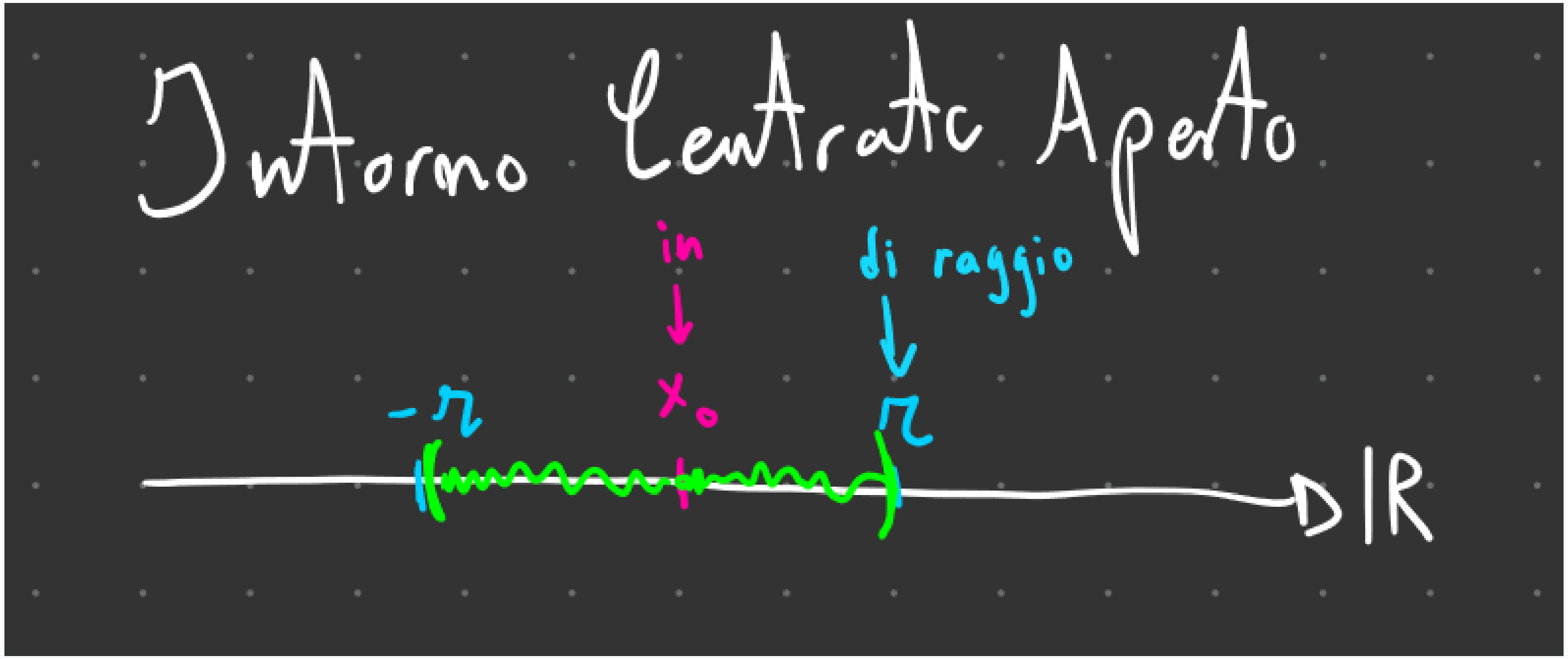
Inoltre scopriamo che questa definizione della distanza euclidea su $\mathbb{C}$ conserva le tre proprietà (**PROP 1.1., 1.2., 1.3.**) appena enunciate. Pertanto è possibile scambiare *modulo* e *distanza euclidea* in quanto vi è un *isomorfismo* tra queste due applicazioni.

2. Intorno centrato aperto di centro x e di raggio r

DEF 2.1. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e sia $r \in \mathbb{R}, r > 0$; allora chiamo **"l'intorno centrato aperto di centro x_0 e di raggio r"** l'*intervallo aperto* (Intervalli, **DEF 1.4.**)

$$]x_0 - r, x_o + r[\ = \{x \in \mathbb{R} : d(x, x_0) < r\}$$

che graficamente corrisponde a



ovvero la **palla aperta di centro x_0 e di raggio r**

ovvero l'insieme di *tutti i punti di $\mathbb{R}$ che hanno distanza da x_0 meno di r.*

OSS 2.1. Analogamente a **OSS 1.1.**, questa nozione di *intorno centrato aperto* può essere applicato a $\mathbb{C}$ usando la nozione di *modulo*; infatti graficamente questa corrisponde ad una *palla 2-dimensionale di centro z_0 e di raggio r*. (*Figura 2.1.*)

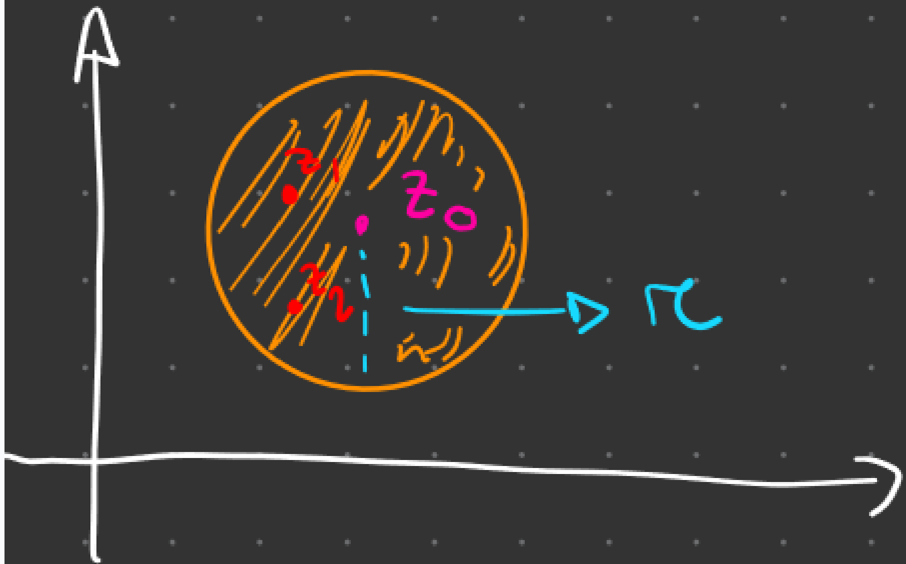
OSS 2.2. Allora si può definire l'*intorno centrato aperto* in $\mathbb{R}^3$ dove definisco

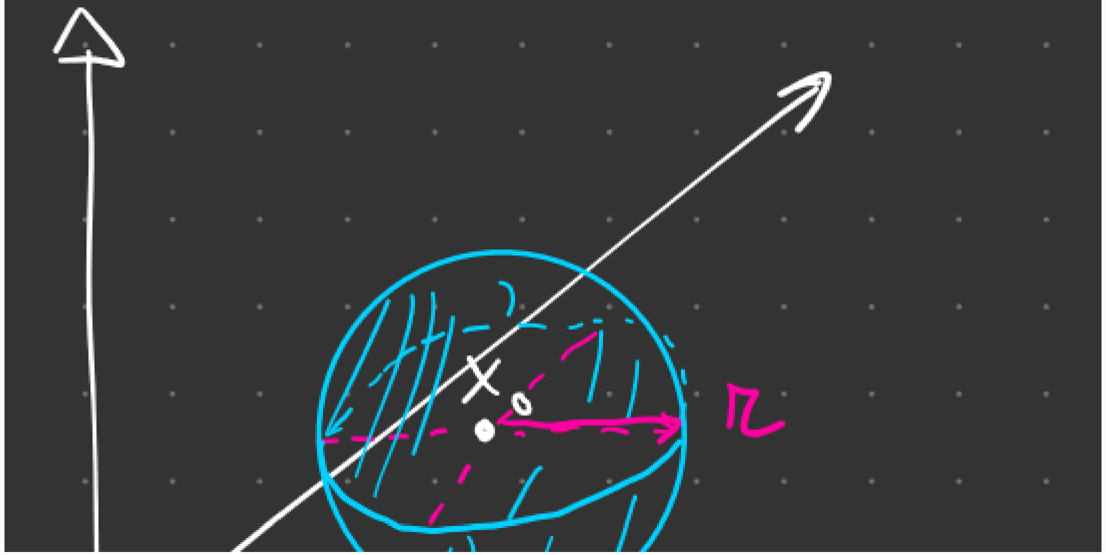
$$\forall x, y \in \mathbb{R}^3; d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$$

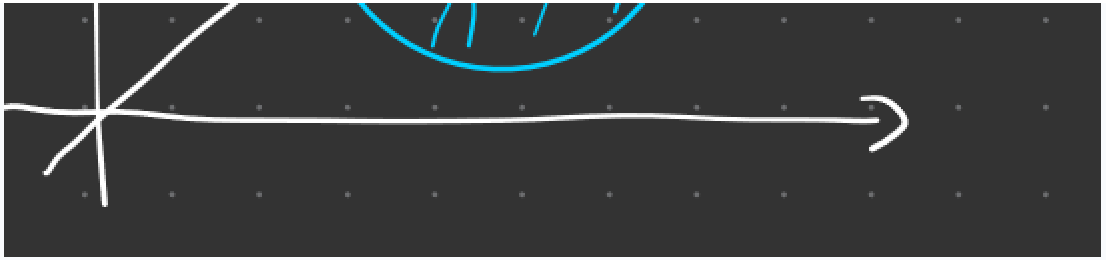
E graficamente questa corrisponde ad una vera *palla*. Letteralmente. (*Figura 2.1.*)

FIGURA 2.1.

Intorno centrato aperto in $\mathbb{C}$ e $\mathbb{R}^3$

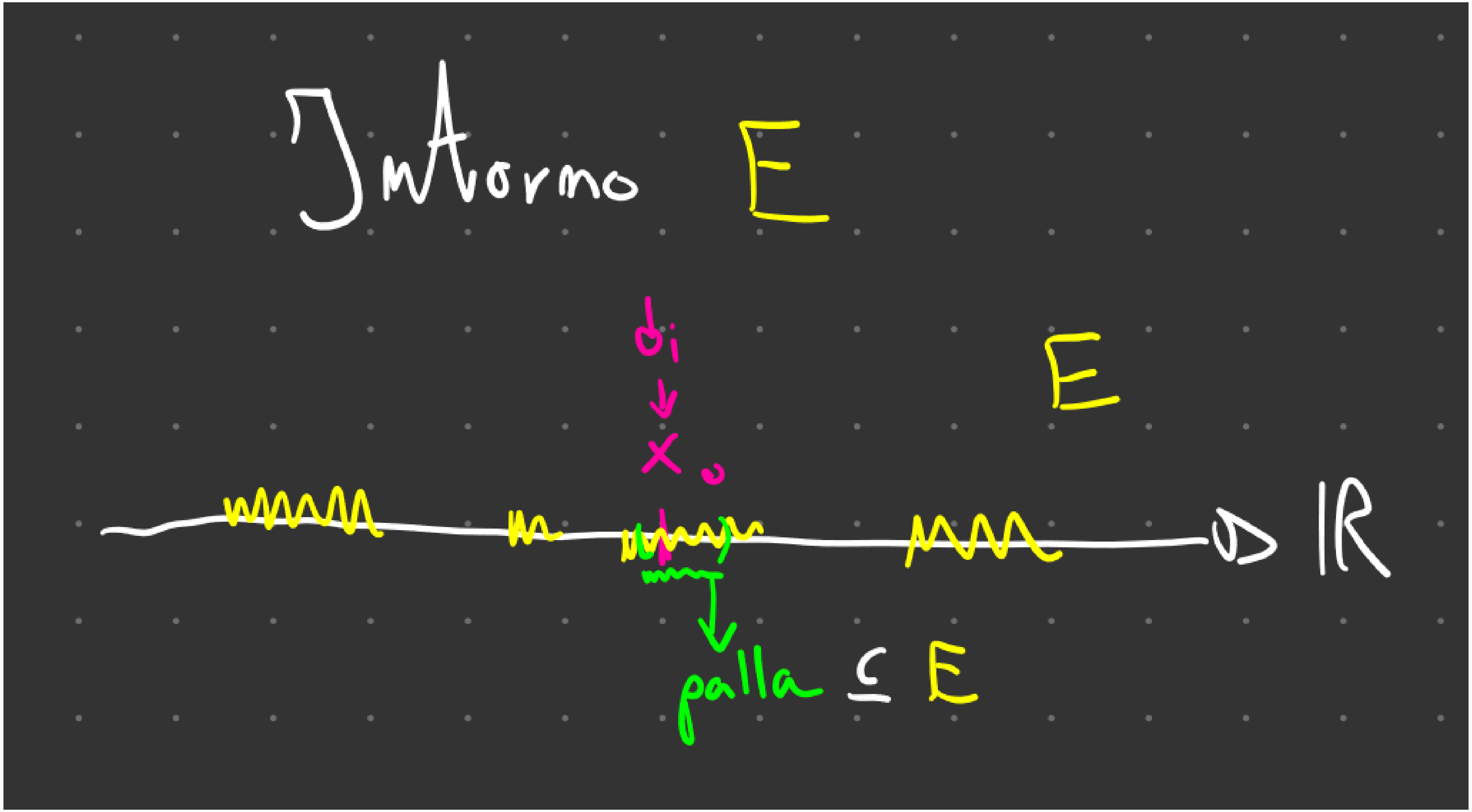






3. Intorno

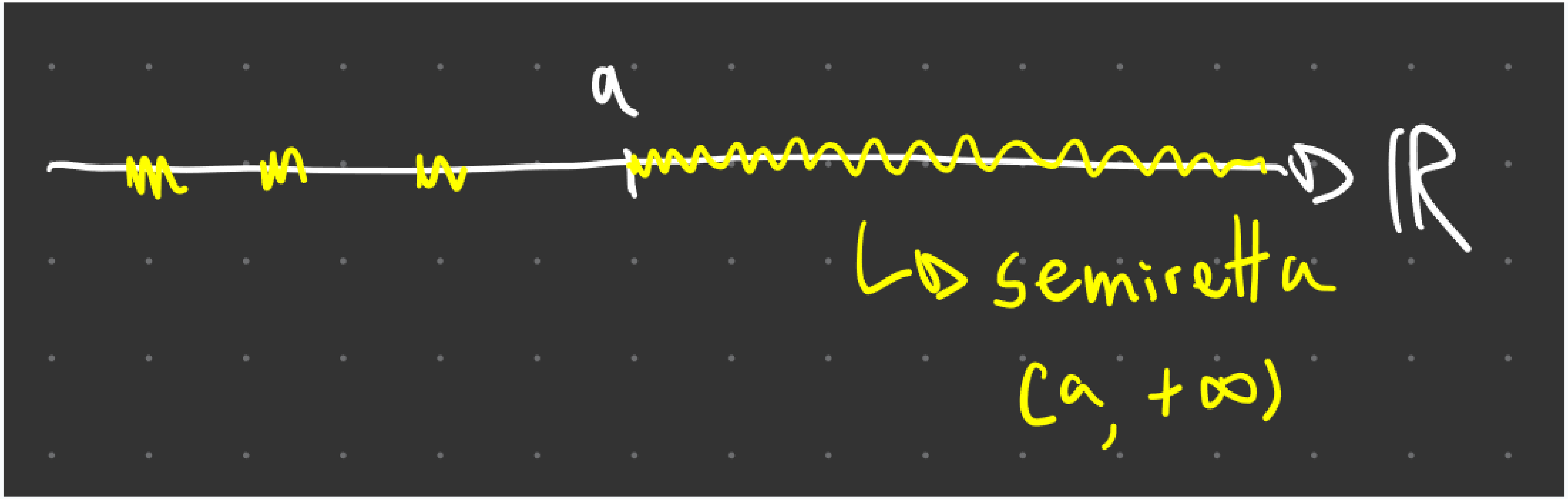
DEF 3.1. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$, chiamo allora l'**intorno di** x_o un *qualunque insieme E di $\mathbb{R}$* che contiene una *palla aperta di centro x_0 e raggio r* (**DEF 2.1.**).
Graficamente,



DEF 3.2. Prendo $\tilde{\mathbb{R}}$ l'*insieme dei reali estesi*, ovvero

$$\tilde{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

e definisco **l'intorno di** $+\infty$ un *qualunque sottoinsieme* $E \subseteq \mathbb{R}$ che contiene una *semiretta* $]a, +\infty[$; ovvero un insieme *superiormente illimitato* (Insiemi limitati, maggioranti, massimo e teorema dell'estremo superiore, **DEF 1.4.**) del tipo $]a, +\infty[$.

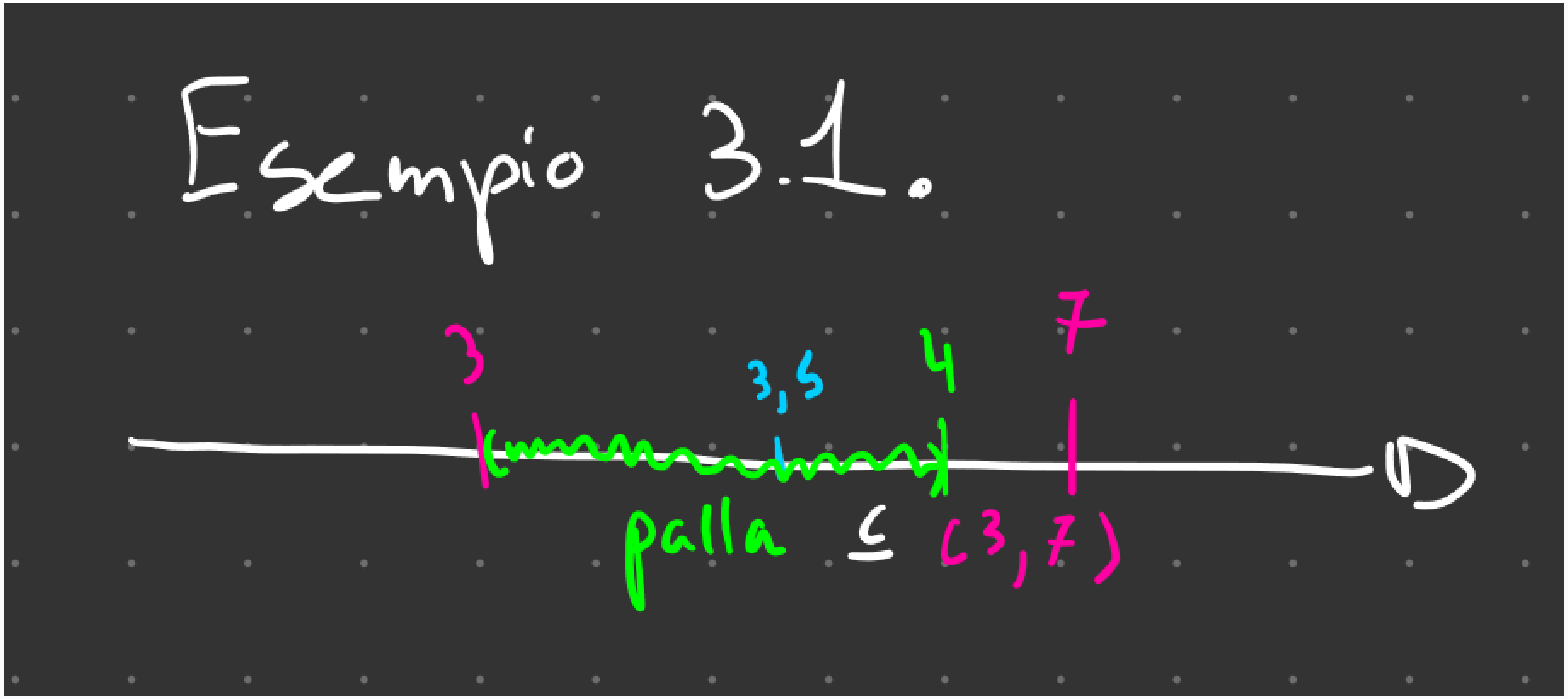


Esempi

ESEMPIO 3.1. L'intervallo $]3,7[$ è intorno di $3,5$; infatti è possibile prendere $r=0,5$ e ottenere la *palla aperta di centro* $3,5$ *e di raggio* $0,5$ che equivale a

$$]3,4[$$

che infatti è contenuto nell'intervallo $]3,7[$.
Graficamente,



ESEMPIO 3.2. Se prendendo l'insieme

$$S = \{0\} \cup \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \diagdown \{0\}\}$$

e il punto $x_0 = \frac{1}{2}$, scopriamo che S *non* è intorno di x_0; infatti prendendo per qualsiasi r non riesco a formare una palla attorno a x_0, in quanto S è definita sui numeri naturali che contiene dei *"buchi"*.

ESEMPIO 3.3. Considerando i *numeri naturali* (Numeri Naturali - Sommario), ci chiediamo se questo insieme è *intorno di* $+\infty$; la risposta è *no*: esistono degli elementi in $\mathbb{R}$ che non sono contenuti in $\mathbb{N}$, come ad esempio i numeri razionali.

Tuttavia se consideriamo l'insieme $\mathbb{N} \cup]100, +\infty[$ allora la risposta è *sì* in quanto si considera un *intervallo* su $\mathbb{R}$.
Analogo il discorso per gli intervalli di $-\infty$.

Introduzione ai Numeri Complessi

Introduzione ai numeri complessi: cenni storici, definizione basilare di $\mathbb{C}$ come $\mathbb{R}^2$.

---

0. Scopo storico

Lo *scopo storico* dei numeri complessi $\mathbb{C}$ è quello di risolvere le equazioni del tipo

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = 0 \\ a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

di cui alcune non ne hanno soluzione; ad esempio si prende

$$x^2 = -1$$

che *non* ha soluzione definita in $\mathbb{R}$, in quanto tutti i numeri moltiplicati per se stessi *due volte* sono sempre positivi.
Quindi vi è una necessità di *"ampliare"* i numeri reali in un modo tale da poter ottenere delle *soluzioni* di queste equazioni.

1. Costruzione a partire da $\mathbb{R}^2$

Pertanto si parte considerando la *l'insieme delle coppie ordinate* (Coppie Ordinate e Prodotto Cartesiano)

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$$

Quindi nel *contesto geometrico* stiamo attualmente considerando dei *vettori liberi con punto di applicazione* 0. (Vettori Liberi)

In Operazioni sui Numeri Complessi definiremo delle operazioni su questo insieme,, che quando li considereremo con $\mathbb{R}^2$ si andrà a formare il campo $\mathbb{C} = (\mathbb{R}^2, +, \cdot)$.

Matrice

Definizione di matrice, matrice quadrata, l'insieme delle matrici, matrice nulla. L'insieme delle matrici come $\mathbb{R}$-spazio vettoriale con le operazioni di somma interna e scalamento; Matrici triangolari superiori (e l'insieme delle matrici triangolari superiori come sottospazio vettoriale); Definizione della diagonale principale di una matrice; Matrici simmetriche ed antisimmetriche; Matrice identità; Matrice inversa e l'invertibilità delle matrici.

---

1. Definizione di Matrice

DEF 1. Siano $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$; allora si definisce una **matrice** $m \times n$ a **coefficienti reali** come una *tabella rettangolare di $m \cdot n$ elementi* del tipo:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Dove ciascun *coefficiente* a_{ij} è un numero *reale*;

$$\forall i \in \{1, \ldots, m\}; \forall j \in \{1, \ldots, n\}; a_{ij} \in \mathbb{R}$$

Per convenzione i numeri (*indici*) i, j iniziano con 1.
Diciamo che il coefficiente a_{ij} è di posto i, j.

ESEMPIO 1.1. La seguente è una matrice 3×4.

$$\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 6 \\ 7 & -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Scegliamo qualche coefficiente:

$$a_{12} = \sqrt{2}; a_{21} = 0$$

Ovviamente si nota che *NON* è *sempre* vero che $a_{ij} = aji$; infatti qui abbiamo $a_{12} \neq a_{21}$

1.1. i-esima riga e colonna della matrice

Sia $A = (a_{ij})_{i=1, \ldots, m; j=1, \ldots, n}$ una matrice a coefficienti reali. Allora definiamo:
DEF 2.1. Per ogni $i \in \{1, \ldots, m\}$ la **i-esima riga** è la *matrice*

$$A_{(i)} := (a_{i1}, \ldots, a_{in})$$

DEF 2.2. Per ogni $j \in \{1, \dots, n\}$ la **i-esima colonna** è la *matrice*

$$A^{(j)} := \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

1.2. L'insieme delle matrici

DEF 1.2. Dati $m, n \in \mathbb{N}$, ove $m > 0, n > 0$, denotiamo **l'insieme delle matrici** con

$$M_{m,n}(\mathbb{R})$$

OSS 1.2.1. Notiamo che con le operazioni di *somma interna* e di *prodotto per uno scalare* definite in Operazioni basilari con matrici,

$$(M_{m,n}(\mathbb{R}), +, \cdot)$$

è uno spazio vettoriale.

2. Tipologie di matrici

2.1. Matrici quadrate

DEF 2.1. Una *matrice* si dice **quadrata** se il numero delle *righe* (n) coincide con il suo numero delle *colonne* (m).
SUBDEF 2.1.1. Per denotare **l'insieme delle matrici quadrate** si scrive

$$M_n(\mathbb{R})$$

ove $n \in \mathbb{N}, n > 0$.

ESEMPIO 2.1.1. La seguente è una *matrice quadrata* 2×2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

DEF 2.1.2 Nel caso delle *matrici quadrate* è possibile definire la **diagonale principale** come la *parte di* A *data dalle entrate di posto* $A_{ii}, i \in \{1, \dots, n\}$.

ESEMPIO 2.1.2. Nell'**ESEMPIO 2.1.1.** la *diagonale principale* sarebbe $(1, 5)$.

2.2. Matrici nulle

DEF 2.2. Una *matrice* $m \times n$ **nulla** è è la *matrice* $m \times n$ le cui *entrate* (o *coefficienti*) sono tutte nulle, 0.

$$0 := \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

2.3. Matrici triangolari superiori

DEF 2.3. Si definisce **l'insieme delle matrici triangolari superiori** 2×2 come

$$T_2(\mathbb{R}) := \{A \in M_2(\mathbb{R}) : a_{21} = 0\}$$

ovvero una matrice di forma

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$$

Ovviamente è possibile generalizzare per le matrici quadrate $M_n(\mathbb{R})$.

OSS 2.3.1. Notiamo che questo insieme è un sottoinsieme di $M_2(\mathbb{R})$;

$$T_2(\mathbb{R}) \subseteq M_2(\mathbb{R})$$

Infatti se l'insieme delle matrici 2×2 $M_2(\mathbb{R})$ è un $\mathbb{R}$-*spazio vettoriale* (Spazi Vettoriali, **DEF 1.**), allora $T_2(\mathbb{R})$ è un *sottospazio vettoriale* (Sottospazi Vettoriali, **DEF 1.**).
Infatti valgono le seguenti:

1. La matrice nulla $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ appartiene anche a $T_2(\mathbb{R})$.
2. Le operazioni di *somma* e di *scalamento* sono chiuse; ovvero

$$A, B \in T_2(\mathbb{R}) \implies (A+B) \in T_2(\mathbb{R})$$

e

$$\lambda \in \mathbb{R}, A \in T_2(\mathbb{R}) \implies (\lambda \cdot A) \in T_2(\mathbb{R})$$

E' possibile verificare 2. verificando che la combinazione lineare di $A, B \in T_2(\mathbb{R})$ appartiene anch'esso a $T_2(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} \lambda_1 \cdot A + \lambda_2 \cdot B &= \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} & \lambda_1 a_{12} \\ 0 & \lambda_1 a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_2 b_{11} & \lambda_2 b_{12} \\ 0 & \lambda_2 b_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 b_{11} & \lambda_1 a_{12} + \lambda_2 b_{12} \\ 0 & \lambda_1 a_{22} + \lambda_2 b_{22} \end{pmatrix} \in T_2(\mathbb{R}) \blacksquare \end{aligned}$$

Questa osservazione è analoga per $T_n(\mathbb{R})$ e $M_n(\mathbb{R})$.

2.4. Matrici simmetriche e antisimmetriche

Considerando da quanto detto in Operazioni particolari con matrici (**OSS 1.1.**), abbiamo notato che *non* ha sempre senso chiedersi se la *trasposta* di una matrice è uguale alla matrice stessa, ovvero

$$¿\ {}^tA = A\ ?$$

tuttavia questo acquisisce significato quando consideriamo le matrici quadrate appartenenti a $M_n(\mathbb{R})$.
ESEMPIO 2.4.1. Prendo una matrice 3×3 che chiamo A.

Sapendo che alla prima riga $A_{(1)}$ ho fissato $A_{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, allora in questo modo ho già fissato $A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, in quanto voglio che $A^{(1)} = ({}^tA_{(1)})$. (ovvero che la trasposta della prima riga sia uguale alla prima colonna).
Il procedimento si ripete per $A_{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & ? & ? \end{pmatrix}$, dove i punti segnati con $?$ possono essere sostituiti con qualsiasi valori. Per convenienza inseriremo con dei numeri crescenti, ovvero $4, 5$ (e alla fine 6). Alla fine otteniamo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

che soddisfa ${}^tA = A$. Inoltre osserviamo che questa matrice è *simmetrica* alla diagonale.

DEF 2.4. Allora definiamo una matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$:

1. **Simmetrica** se vale che

$$A = {}^tA$$

2. **Antisimmetrica** se vale che

$$A = -{}^tA$$

OSS 2.4.1. Osservo una peculiarità delle matrici *antisimmetriche*; infatti se voglio costruirne una mi accorgo che tutte le entrate della *diagonale principale* devono essere nulle, in quanto l'unico numero che rimane uguale quando moltiplicato per -1 è 0.

OSS 2.4.2. Notiamo che le *matrici nulle* e *quadrate* sono le *uniche* matrici che sono sia *antisimmetriche* che *simmetriche*. Infatti, $0 = 0$ e $0 = -0$.

2.5. Matrice unità (o identità)

Considerando da quanto detto e notato per quanto riguarda il *prodotto tra matrici* (Operazioni particolari con matrici), possiamo definire una matrice che comporta come il numero 1 dei numeri reali $\mathbb{R}$ per questa suddetta operazione. (Operazioni particolari con matrici, **PROP 2.4.3.**)

DEF 2.5. Sia $n \in \mathbb{N}$ e $n > 0$, allora la **matrice unità** (o **identità**) è quella matrice quadrata appartenente a $M_n(\mathbb{R})$ le cui entrate sono tutte nulle, fuorché quelle della *diagonale principale*, che sono tutti uguali a 1. Denotiamo questa matrice con

$$\mathbb{1}_n \text{ o } I_n \text{ o } \mathrm{Id}_n$$

ove

$$(\mathbb{1}_n)_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ se } i \neq j \\ 1 \text{ se } i = j \end{cases}$$

2.6. Matrice inversa

OSS 2.6.1. Nei dei numeri reali $\mathbb{R}$, dato un $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ diciamo che un altro numero $b \in \mathbb{R}$ è l'inversa di a se è vera che

$$a \cdot b = b \cdot a = 1$$

e b è unica. Infatti questo è esattamente *l'assioma M3)* dei numeri reali (Assiomi dei Numeri Reali).

DEF 2.6. Allora, tracciando un parallelismo tra i *numeri reali* e le il *prodotto tra matrici* (Operazioni particolari con matrici), chiamiamo la *matrice quadrata* $A \in M_n(\mathbb{R})$ **invertibile** se esiste una matrice $B \in M_n(\mathbb{R})$ tale che valga

$$A \cdot B = B \cdot A = \mathbb{1}_n$$

che chiamiamo

$$B = A^{-1}$$

PROP 2.6.1. Prendendo $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, valgono le seguenti proprietà:

1. Se A è *invertibile*, allora la sua inversa A^{-1} è *unica*.
2. Se A, B sono invertibili allora $A \cdot B$ *invertibile*, la quale inversa sarebbe $B^{-1} \cdot A^{-1}$.

DIMOSTRAZIONI.

1. Prendiamo per assurdo B, C inverse di A.
   Allora per definizione

$$\begin{aligned} A \cdot B = B \cdot A = \mathbb{1}_n \\ A \cdot C = C \cdot A = \mathbb{1}_n \end{aligned}$$

   allora

$$B = B \cdot \mathbb{1}_n = B \cdot (A \cdot C) = (B \cdot A) \cdot C = \mathbb{1}_n \cdot C = C$$

   quindi per proprietà transitiva

$$B = C$$

   ■

2. Qui basta fare dei calcoli per verificare che $B^{-1} \cdot A^{-1}$ è $(A \cdot B)^{-1}$. Ovvero basta verificare che $(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = \mathbb{1}_n$ (e viceversa);

$$\begin{aligned}(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) &= A \cdot (B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1} \\ &= A \cdot \mathbb{1}_n \cdot A^{-1} \\ &= A \cdot A^{-1} \\ &= \mathbb{1}_n \\ \text{analogamente} \\ (B^{-1} \cdot A^{-1}) \cdot (A \cdot B) &= B^{-1} \cdot (A^{-1} \cdot A) \cdot B \\ &= B^{-1} \cdot \mathbb{1}_n \cdot B \\ &= B^{-1} \cdot B \\ &= \mathbb{1}_n\end{aligned}$$

■

OSS 2.6.2. L'analogia tra *l'invertibilità* rispetto al prodotto definito in $\mathbb{R}$ e l'invertibilità rispetto al *prodotto righe per colonne* di matrici *NON* si estende fino al punto di poter dire che *OGNI* matrice non-nulla è invertibile. Infatti si propone il seguente controesempio.
ESEMPIO 2.6.2.a. Considero la seguente matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

la matrice A *non* è *invertibile*.
DIMOSTRAZIONE. Per assurdo suppongo che esista $A^{-1} = B$. Allora

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

Allora per definizione deve valere

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Prendiamo le entrate C_{11} e C_{21}. Per definizione del *prodotto righe per colonne* abbiamo:

$$\begin{aligned} C_{11} = 1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} = b_{11} + b_{21} \\ C_{21} = 0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} = b_{11} + b_{21} \end{aligned}$$

Ma questo implicherebbe che

$$b_{11} + b_{21} = 1 = 0$$

che è un *assurdo*, in quanto $1 \neq 0$.

Metodo di Eliminazione di Gauss

Un metodo per risolvere un sistema: il metodo di Gauss.

Preliminari

Consideriamo il seguente sistema di equazioni lineari.

$$\begin{cases} 3x + y - 2z = 0 \\ -2x - 2y + 2z = 0 \\ 2x - 0y - z = 0 \end{cases}$$

Per calcolare le soluzioni di questo sistema, useremo una tecnica chiamata *l'eliminazione di Gauss*, che si fonda su dei principi per manipolare un sistema di equazioni in un altro sistema di equazioni *equivalente* (ovvero che ha le stesse soluzioni).

Metodo di Gauss

Il metodo si consta principalmente di manipolare il sistema al fine di trovare uno equivalente più semplice da risolvere, ovvero nella forma in cui compaiono:

$$\begin{cases} \text{dove compaiono tutte le 3 variabili} \\ \text{" " " " " 2 variabili} \\ \text{" " " " " una variabile} \end{cases}$$

ESEMPIO.

1. Partiamo notando che

$$-2x - 2y + 2z = 0 \to^{*-0.5} x + y - z = 0$$

2. Scambiando la seconda equazione con la prima, il sistema diviene

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 3x + y - 2z = 0 \\ 2x - 0y - z = 0 \end{cases}$$

3. Manipolo la seconda equazione per "eliminare la x", sottraendo 3 volte la prima equazione.

$$\begin{aligned}(3x+y-2z)-3(x+y-z)&=0\\ -2y+z&=0\end{aligned}$$

4. Stesso procedimento per la terza equazione.

$$\begin{aligned}(2x+0y-z)-2(x+y-z)&=0\\ -2y+z&=0\end{aligned}$$

   Tuttavia essa è uguale al passo 3., dunque ridondante e non verrà considerata.
5. In definitiva il sistema è equivalente al seguente.

$$\begin{cases}x+y-z=0\\ -2y+z=0\end{cases}$$

6. Assumendo che $z=\alpha\in\mathbb{R}$, allora $y=\frac{1}{2}\alpha$ e $x=y=\frac{1}{2}\alpha$.
7. Pertanto le soluzioni sono della forma

$$(0.5\alpha, 0.5\alpha, \alpha)=\alpha(1,1,2)$$

Formalizzazione in matrici

Se ora, a partire dal sistema iniziale, si vuole avere una scrittura più compatta, allora si può estrarre i coefficienti e porli in una tabella. In tal caso otterremo il seguente.

$$\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ -2 & -2 & 2\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Questa viene definita come una *matrice*, su cui ci si può eseguire una serie finita di operazioni per ottenere la soluzione; infatti, si dice che il procedimento è *algoritmico*.
In questo caso si può ripercorrere i passaggi appena svolti nel seguente modo:

1. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \; \mathrm{II}^\circ - 3\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \; \mathrm{III}^\circ - \mathrm{I}^\circ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \; \mathrm{III}^\circ - \mathrm{II}^\circ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

6. Pongo $z = \alpha$; $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -\alpha \\ 0 & -2 & \alpha \end{pmatrix}$

Conseque che $y = \frac{1}{2}\alpha = x$

OSS. Nel passaggio quinto (5.) si nota che la matrice è disposta a scalini; in questo caso si parla della *gradinizzazione* di una matrice.

Nozioni Fondamentali di Programmazione

Elenco di nozioni fondamentali di programmazione: programma, algoritmo, input/output, variabile, stato di programma. Assegnamento, sintassi.

NOZIONE 1. PROGRAMMA

PROGRAMMA: Un programma è una descrizione *eseguibile da un calcolatore* di un metodo (*algoritmo*) per il calcolo di un risultato voluto (*output*) a partire da un *input*.

CHIARIMENTI SU ALCUNI TERMINI

Ora vediamo di analizzare alcune parole sottolineate per poter comprendere i concetti;

- *Eseguibile da un calcolatore*; ciò vuol dire che esiste qualcosa, ovvero un *calcolatore* (come un *PC*) che può eseguire il programma.
  Un'analogia per illustrare questo concetto è quello del *DNA* e delle *proteine*; il *DNA* contiene il codice genetico, come il programma contiene la *descrizione di un algoritmo*; e le *proteine* trascrivono il codice genetico dal *DNA*, come il *calcolatore* esegue *l'algoritmo* del programma.
- *Algoritmo*; dal nome d'origine *al*-*Khuwārizmī*, è un procedimento che serve per fare un *calcolo preciso*. Quindi è una *serie di operazioni finite* e il numero di passi o calcoli o operazioni necessarie per ottenere l'output viene intuitivamente definita come *complessità*.
- *Input*: I dati, le variabili, le informazioni inserite.
  - **OSS.** Quando non c'è nessuna informazione o nessun dato inserito, allora si dice che l'input è *vuoto*.

ANALOGIA CON FUNZIONE MATEMATICA

Il concetto del *programma* è intuitivamente analoga al concetto della funzione nella matematica; ovvero

$$f(x) = y$$

ogni termine in quell'espressione equivale a:

- $f()$ = l'algoritmo
- x = l'input
- y = l'output
  ESEMPIO. Ad esempio, se si ha $f(x) = log(x) + 1$ e si inserisce $x = 10$, allora $log() + 1$ sarebbe l'algoritmo, 10 sarebbe l'input e 2 sarebbe l'output.

MOLTEPLICITA' DI PROGRAMMI

Normalmente, in una macchina molti programmi coesistono; infatti oggi si può addirittura parlare di migliaia di programmi in un PC moderno.
Ciò vuol dire che devono condividere uno *spazio di memoria*, ovvero la *RAM*; in questo caso si parla di *memoria virtuale*.

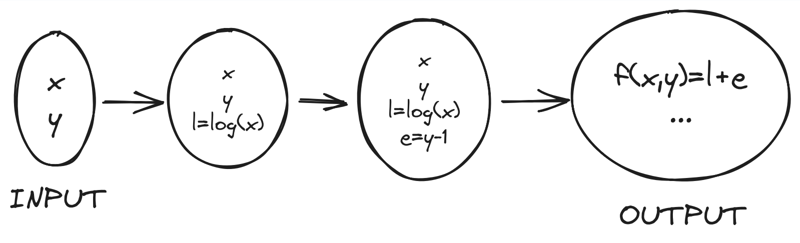
NOZIONE 2. VARIABILE

VARIABILE: Una variabile è un nome associato ad un valore, *modificabile*

NOZIONE 3. STATO

STATO: Lo stato di un *programma* è un insieme di *variabili* che rappresentano la *quantità d'interesse per il programma*.

Per rappresentare graficamente *lo stato interno* di un programma, si può usare dei *cerchi* in cui all'interno si inseriscono le *variabili*; quindi lo nello *stato iniziale* vi è l'input, invece nello *stato finale* vi è l'output desiderato.
ESEMPIO. Sia $f(x, y) = log(x) + (y - 1)$ un programma. Se voglio rappresentare lo stato interno del programma dallo stato iniziale fino a quello finale, devo fare il seguente:



OSS. Dal grafico sopra osservato possiamo vedere che abbiamo eseguito la cosiddetta *operazione di assegnamento*, che definisce la programmazione imperativa, in quanto si istruisce al calcolatore di assegnare un certo valore ad una certa variabile.

NOZIONE 4. ASSEGNAMENTO (SINTASSI)

Per rappresentare la sintassi di assegnamento si scrive il seguente.

`NOME = EXPR;`

- Notare che alcuni simboli sono *necessari*, ovvero `=` (per distinguere NOME ed EXPR) e `;` (per concludere l'operazione di assegnamento).
- Intuitivamente, il NOME rappresenta la denominazione della variabile;
- EXPR rappresenta tutte quelle combinazioni di simboli che mettono assieme *operatori* (aritmetici o logici), *costanti*, *variabili*, *funzioni*.
  - **OSS: DISAMBIGUIRE LE ESPRESSIONI.** Ogni tanto si nota che delle espressioni possono essere ambigue; per esempio $3+4*2$ per un calcolatore potrebbe significare due espressioni: o $(3+4)*2$ o $3+(4*2)$. Ovviamente queste due espressioni danni due risultati diversi.
    Allora un calcolatore usa un **albero di sintassi astratta**, che danno delle precise *precedenze* a degli operatori. Ad esempio, in questo caso l'operatore moltiplicazione $*$ ha la precedenza sull'addizione $+$.

ESEMPI VARI

ESEMPIO 1. IL PROBLEMA DELLA MACCHINA

Abbiamo il seguente problema:
"Con 30.000€ voglio coprire il costo dei miei spostamenti in auto svolti nell'arco di un anno."
Vogliamo quindi formalizzare un *ragionamento* preciso per risolvere questo problema.

1. Prima di tutto ragioniamo su ciò che possono essere le *variabili* (nella linea generale, senza dover entrare nei minimi dettagli); quindi suppongo le seguenti variabili/input.
   1. Il costo dell'auto C = 20.000€
   2. Il costo della benzina (prima dei rincari prezzi) $B = 0.2 \frac{€}{km}$
   3. La distanza percorsa in un anno $K = 10.000 \frac{km}{A}$
      Abbiamo fatto dunque tre assegnamenti; ovvero `C = 20000;`, `B = 0.2;` e `K = 10000;`.
2. Ora congegniamo l'algoritmo per calcolare l'output `TOT = ?;` spento all'anno.
   1. $B*K = 20.000*0.2 = 2000 \frac{€}{A}$ (Totale spento sulla benzina); `TOT = B*K;`

2. $C+(B*K)=20000+2000=22000€$ (Il totale) `TOT = TOT+C`

Ora, ragionando sullo *stato interno del programma*, si ha il seguente diagramma:

ESEMPIO 2. L'ALGORITMO DI MOLTIPLICAZIONE DEL CONTADINO RUSSO

ALGORITMO. Supponiamo di voler moltiplicare due numeri 146 e 37; per farlo useremo l'*algoritmo del contadino russo*, che consiste nel seguente.

1. Vogliamo calcolare 146×37; costruiamo quindi una tabella dove si posizione 146 a destra e 37 a sinistra; compiliamo man mano la tabella dividendo la colonna sinistra per due (arrotondato per difetto) e moltiplicando la colonna sinistra per due, fino a quando il numero nella colonna sinistra diventa 0.
2. La tabella risulta così:

146	37
73	74
36	148
18	296
9	592
4	1184
2	2368
1	4736

3. Ora eliminiamo le righe, dove a sinistra compaiono i numeri pari. Quindi ora la tabella diventa così:

DESTRA	SINISTRA
73	74

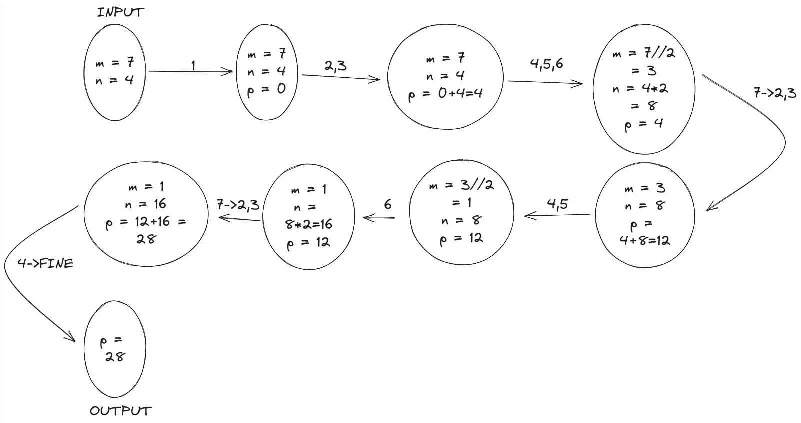
DESTRA	SINISTRA
9	592
1	4736

4. Ora per ottenere il risultato $p = 146 \times 37$ si sommano tutti i numeri sulla colonna sinistra, ovvero $p = 146 \times 37 = 74 + 592 + 4796 = 5402.$

PROGRAMMA. Ora vogliamo trasformare questo algoritmo in un programma, con il seguente *pseudocodice*.

```
1. CREA p
2. SE m è PARI, SALTA A (5)
3. ASSEGNA p = p+n
4. SE m=1, FINE
5. ASSEGNA m = m//2
6. ASSEGNA n = n*2
7. SALTA A (2)
```

ESERCIZIO-ESEMPIO. Con il seguente programma, disegnare lo *stato interno del programma* quando abbiamo gli input `m = 7; n =4;`.



NOZIONE 5. AMBIENTE E MEMORIA

Riprendiamo la **NOZIONE 3.**, in quanto tutto ciò che abbiamo detto in precedenza non è totalmente accurata; infatti bisogna introdurre le nozioni di *ambiente* e *memoria*.

NOZIONE 6. OPERAZIONE DI DICHIARAZIONE DI VARIABILE

Operazioni basilari con matrici

Definizioni di operazioni con matrici; somma interna $+$, prodotto esterno (scalamento) $\cdot$, l'insieme delle matrici come $\mathbb{R}$-spazio vettoriale con queste operazioni.

---

0. Preambolo

Avendo definito la Matrice, andiamo a introdurre delle *operazioni* con delle *matrici* al fine di rendere *l'insieme delle matrici* $M_{m,n}(\mathbb{R})$ (Matrice, **DEF 1.2.**) un $\mathbb{R}$-*spazio vettoriale*.

1. Somma interna

DEF 1. Siano $m, n \in \mathbb{N} \diagdown \{0\}$, definiamo la **somma** delle *matrici* A e B e lo denotiamo $A + B$; per definire questa nuova matrice data dalla somma, definiamo *ogni sua entrata*. Quindi *l'entrata di posto* i, j di $A + B$ è data da:

$$(A + B)_{ij} := A_{ij} + B_{ij}$$

Qui si utilizza il fatto che per descrivere una *matrice* è sufficiente determinare come ottenere ciascuna delle sue *entrate*.

ESEMPIO 1.1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

OSS 1.1. La *matrice nulla* (Matrice, **DEF 2.2.**) è in effetti l'*elemento neutro* della somma tra matrici. Infatti questo sarà fondamentale per dimostrare che *l'insieme delle matrici* $m \times n$ $M_{m,n}(\mathbb{R})$ è uno $\mathbb{R}$-*spazio vettoriale* (Spazi Vettoriali).

2. Prodotto per scalare (scalamento)

DEF 2. Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$; definiamo allora il *prodotto (o la moltiplicazione) per uno scalare* λ per A, come la matrice $(\lambda \cdot A)$, le cui entrate sono ottenute facendo

$$(\lambda \cdot A)_{ij} := \lambda \cdot A_{ij}$$

ESEMPIO 2.1.

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ -9 & -6 & -3 \end{pmatrix}$$

Operazioni con gli Insiemi

Elenco di operazioni che possono essere svolte con/tra insiemi.

Operazioni con gli insiemi: breve introduzione ed elenco

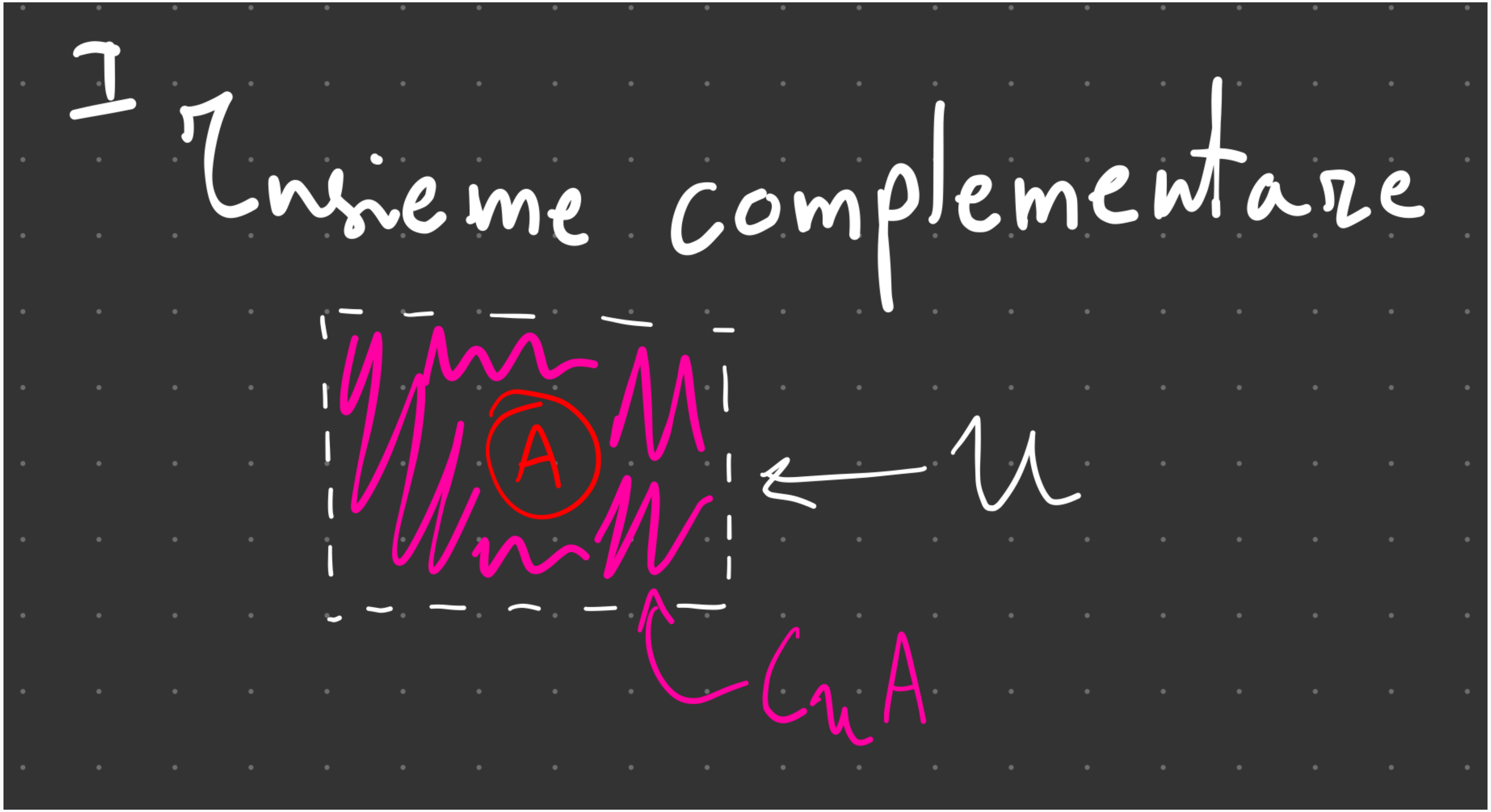
E' possibile formare un nuovo insieme partendo da uno o più insiemi, ed è possibile farlo grazie alle operazioni con gli insiemi.
In particolare ne studieremo tre: l'*insieme complementare*, l'*intersezione* e l'*unione*.

Insieme Complementare

Sia $\mathcal{U}$ l'*insieme universo/ambiente* e A un insieme, allora si definisce

$$\mathcal{C}_{\mathcal{U}}A := \{x \in \mathcal{U} : x \notin A\}$$

Secondo il *diagramma Eulero-Venn*, essa si rappresenta come:



OSS. Si nota che l'*insieme complementare* dipende dall'*insieme universo* scelto; quindi si tratta comunque di un'*operazione binaria* (?, in realtà da chiedere al prof. come specifica), in quanto si deve fare la scelta di due variabili.

Intersezione, Unione

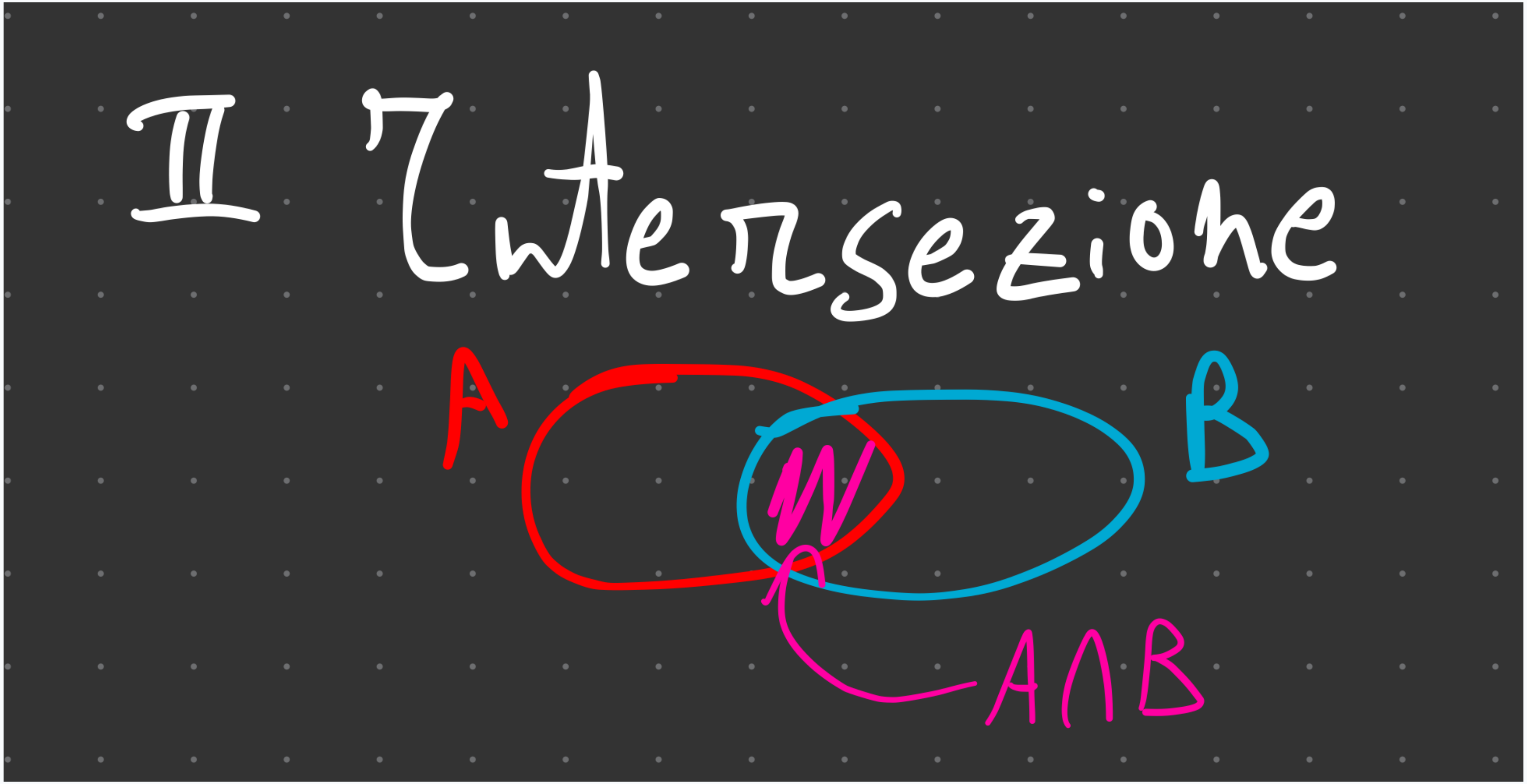
Altre due operazioni importanti sono *l'intersezione* e *l'unione*.

Intersezione

Si definisce l'intersezione

$$A \cap B := \{x \in \mathcal{U} : x \in A \land x \in B\}$$

A seguito la rappresentazione in *diagramma di Eulero-Venn*

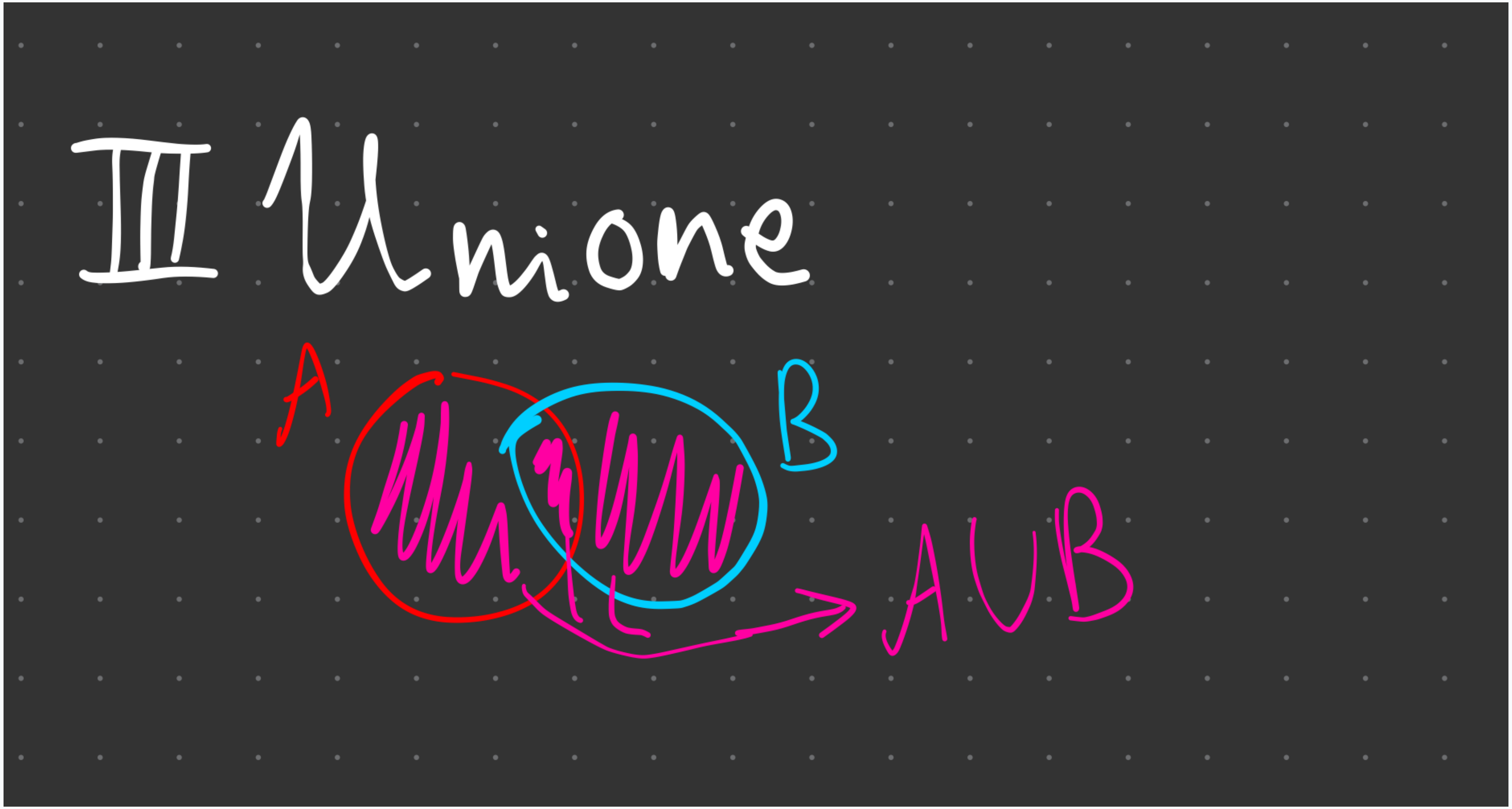


Unione

Si definisce l'unione

$$A \cup B := \{x \in \mathcal{U} : x \in A \lor x \in B\}$$

A seguito la rappresentazione in *diagramma di Eulero-Venn*



OSS 1. Nesso tra matematica logica e teoria degli insiemi

E' interessante notare che le operazioni di intersezione $\cap$ e unione $\cup$ costituisce una specie di ponte, o collegamento tra la Teoria degli Insiemi e la logica formale, particolarmente con i Connettivi.
Si nota che da un lato viene usata la forma intensiva per rappresentare un insieme, mentre dall'altro vengono usati i connettivi $\wedge$ e $\vee$ per rappresentare le proprietà caratterizzanti.
Inoltre si osserva un parallelismo piuttosto interessante tra $\cup, \vee$ e $\cap, \wedge$.

OSS 2. Proprietà tra intersezione e l'unione

Si osservano delle **proprietà** di queste due operazioni quanti si interagiscono tra di esse.
PROPRIETA' 1. Proprietà associativa

$$\begin{gathered}(A \cup B) \cup C=A \cup(B \cap C) \\ (A \cap B) \cap C=A \cap(B \cap C)\end{gathered}$$

PROPRIETA' 2. Proprietà simmetrica

$$\begin{gathered}A \cup B=B \cup A \\ A \cap B=B \cap A\end{gathered}$$

PROPRIETA' 2. Proprietà distributiva

$$\begin{gathered}A \cup(B \cap C)=(A \cup B) \cap(B \cup C) \\ A \cap(B \cup C)=(A \cap B) \cup(A \cap C)\end{gathered}$$

E' possibile anche illustrarli tramite i diagrammi di Eulero-Venn.

Operazioni particolari con matrici

Trasposta di una matrice (definizione di matrice simmetrica e antisimmetrica). Definizione di prodotto tra due matrici. Esempi scelti del prodotto righe per colonne. Proprietà del prodotto tra matrici.

---

1. Matrice trasposta

---

traspórre (ant. **transpórre**) v. tr. [dal lat. *transponĕre*, comp. di *trans-* «trans-» e *ponĕre* «porre»] (coniug. come *porre*). – **1.** Porre, collocare una cosa dopo un'altra, invertendo l'ordine in cui tali cose erano inizialmente: *il copista per errore ha trasposto i versi 24-25 dopo i versi 26-30*; col senso più generico di porre in diverso ordine: *il periodo potrebbe migliorarsi notevolmente trasponendo qualche parola*; *se necessario si potrà t. qualche numero del programma*; *t. i fili di una linea telefonica*.

DEF 1. Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$; definiamo la **trasposta** di A come quella matrice, che indichiamo con ${}^tA$, che è un elemento di $M_{m,n}(\mathbb{R})$, determinato dalla seguente proprietà: *"l'entrata di posto i,j di ${}^tA$ è uguale all'entrata di posto j,i di A"*. In parole povere, scambiamo le *righe* della matrice con le *colonne* (invertendo così l'ordine). Quindi

$$({}^tA)_{ij} := A_{ji} \; ; \; \begin{matrix} i \in \{1, \ldots, n\} \\ j \in \{1, \ldots, m\} \end{matrix}$$

ESEMPIO 1.1.

Se prendiamo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

allora si ha

$${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

OSS 1.1. Notiamo che *generalmente* non ha senso chiedersi se

$${}^tA = A$$

in quanto in una buona parte dei casi (ovvero delle *matrici non quadrate* (Matrice, **DEF 2.1.**)) il numero delle colonne m e il numero delle righe n vengono scambiate (per definizione); infatti se A è una matrice $m \times n$, allora ${}^tA$ sarà una matrice di $n \times m$.

1.1. Proprietà della trasposta

PROP 1.1. Prendendo $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ allora si verificano le due proprietà:

$$\begin{aligned} &\text{(i) } {}^t(A+B) = ({}^tA) + ({}^tB) \\ &\text{(ii) } {}^t({}^tA) = A \end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE.
Innanzitutto osserviamo che ha senso chiedersi se queste proprietà sono valide, in quanto per definizione in Operazioni basilari con matrici, sommando due matrici $m \times n$ si ottiene un altra matrice $m \times n$; infatti da un lato si

sommano prima due matrici $m \times n$ poi per trasporlo in una matrice $n \times m$, dall'altro si sommano due matrici trasposte $n \times m$ (ottenendo ovviamente un altra matrice $n \times m$).

Per dimostrare la *(i)*, dimostriamo che tutte le entrate della matrice nel *membro sinistro dell'uguaglianza* e nel *membro destro* sono, infatti, effettivamente uguali.
Per farlo fissiamo le i, j e prendiamo le entrate di posto i, j. Allora

$$
\begin{aligned}
&(*)\ ({}^t(A+B))_{ij} \overset{\text{def.}}{=} (A+B)_{ji} \overset{\text{def.}}{=} A_{ji} + B_{ji} \\
&(\triangle)\ ({}^tA)_{ij} + ({}^tB)_{ij} \overset{\text{def.}}{=} A_{ji} + B_{ji}
\end{aligned}
$$

E notiamo che (*) e ($\triangle$) sono uguali, completando così la dimostrazione.

Per la dimostrazione di *(ii)* basta fissare i, j e considerare le entrate di posto i, j;

$$({}^t({}^tA))_{ij} = ({}^tA)_{ji} = A_{ij}$$

■

2. Prodotto righe per colonne

Ora andiamo a introdurre una nuova operazione tra matrici e per farlo è opportuno considerare una specie di analogia, una situazione che ci aiuti a comprendere il concetto.

2.1. Definizione analogica

Immaginiamo di trovarci in un negozio A che presenta i seguenti prezzi (tralasciando questioni economico-finanziarie):

- Costo pasta: $C_p = 1$

- Costo latte: $C_l = 2$
- Costo uova: $C_u = 3$
  Ora supponiamo di dover comprare n_p, n_l, n_u quantità di pasta, latte e uova; ora vogliamo calcolare il costo totale, che sarebbe una specie di *"combinazione lineare"* dove i *coefficienti scalari* vengono rappresentati dai quantitativi, i *vettori* invece dai *costi*. Quindi abbiamo

$$n_p C_p + n_l C_l + n_u C_u$$

  Ora definiamo il *prodotto righe per colonne* come

$$\begin{pmatrix} C_p & C_l & C_u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_p \\ n_l \\ n_u \end{pmatrix} := n_p C_p + n_l C_l + n_u C_u$$

  Adesso supponiamo di aver trovato un altro negozio B che offre altri prezzi ancora più competitivi; ovvero

$$C'_p = -3\ ;\ C'_l = -2\ ; C'_u = -1$$

  quindi per tenere sotto controllo i due *totali di spesa*, potrei *"impacchettare"* le due righe dei *costi unitari* in una matrice:

$$\begin{pmatrix} C_p & C_l & C_u \\ C'_p & C'_l & C'_u \end{pmatrix}$$

  e sarebbe ragionevole definire il prodotto di:

$$\begin{pmatrix} C_p & C_l & C_u \\ C'_p & C'_l & C'_u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_p \\ n_l \\ n_u \end{pmatrix}$$

come la matrice 2×1 dove la prima riga rappresenta il *costo totale del primo negozio* e la seconda riga invece il *costo totale del secondo negozio*:

$$\begin{pmatrix} n_p C_p + n_l C_l + n_u C_u \\ n_p C'_p + n_l C'_l + n_u C'_u \end{pmatrix}$$

Ricapitolando, abbiamo moltiplicato una *matrice 2x3* per una *matrice 3x1* e abbiamo ottenuto una *matrice 2x1*.
In altre parole, la matrice ottenuta dalla moltiplicazione è quella matrice le cui *entrate* sono date dalla *moltiplicazione di ciascuna delle due righe della prima matrice con la colonna della seconda matrice*.

In questo modo, se volessimo aggiungere la seconda colonna di quantitativi $\begin{pmatrix} n'_p \\ n'_l \\ n'_u \end{pmatrix}$, quello che andremmo a ottenere è una situazione del tipo:

$$\begin{pmatrix} C_p & C_l & C_u \\ C'_p & C'_l & C'_u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_p & n'_p \\ n_l & n'_l \\ n_u & n'_u \end{pmatrix}$$

che diventa

$$\begin{pmatrix} n_p C_p + n_l C_l + n_u C_u & n'_p C_p + n'_l C_l + n'_u C_u \\ n_p C'_p + n_l C'_l + n_u C'_u & n'_p C'_p + n'_l C'_l + n'_u C'_u \end{pmatrix}$$

dove a sinistra abbiamo i *quantitativi della prima colonna*, a destra *i quantitativi della seconda colonna* $'$.

2.2. Definizione generale

DEF 2.2.1. Siano $A \in M_{1,n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{n,1}(\mathbb{R})$; allora definiamo il **prodotto riga per colonna** come *la combinazione lineare* data da

$$A_{(1)} \cdot B^{(1)} := a_{11}b_{11} + \ldots + a_{1n}b_{n1} = \sum_{i=1}^{n} a_{1i}b_{i1}$$

DEF 2.2.2. In generale, se $A \in M_{m,p}(\mathbb{R})$ e $B \in M_{p,n}(\mathbb{R})$ allora definiamo il **prodotto** $A \cdot B$ come la *matrice* $m \times n$ la cui *entrata di posto* ij è data dalla seguente:

$$(A \cdot B)_{ij} := A_{(i)} \cdot B^{(j)} = \sum_{k=1}^{p} a_{1k}b_{k1}$$

OSS 2.2.1. Notiamo che il *prodotto tra due matrici* $A \cdot B$ è definita solo se il numero di colonne di A coincide con il numero di righe di B.
Inoltre, la *"matrice risultante"* diventa una matrice $a \times b$ (ove a è il numero delle colonne di A, b il numero di righe di B).

2.3. Esempi

Diamo alcuni esempi-esercizi.
ESEMPIO 2.3.1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

usando le definizioni otteniamo

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}-3 & -2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-3 & -2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

poi calcolando tutti i *prodotti righe per colonne*, infine abbiamo

$$\begin{pmatrix}2 & 0\\3 & 4\end{pmatrix}$$

ESEMPIO 2.3.2.

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2\\0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1+0+0 & 2+0+0\\0+0+0 & 0-1+0\\0+0+1 & 0+0+0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 2\\0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}$$

OSS 2.3.2.a.
Notiamo di aver ottenuto la stessa matrice a destra.

ESEMPIO 2.3.3.

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\-3 & -2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+0+0 & 0+2+0 & 0+0+3\\-3+0+0 & 0-2+0 & 0+0-1\end{pmatrix}$$

facendo i conti,

$$
= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}
$$

OSS 2.3.3.a.
Come appena notato prima, la *seconda matrice* sembra di comportarsi come il numero $1.$; infatti se lo moltiplichi a destra o a sinistra, ottieni la stessa matrice moltiplicata.
Infatti questa matrice verrà definita come la matrice identità (**DEF 2.5.**) $\mathbb{1}$.

ESEMPIO 2.3.4.
Consideriamo

$$
\begin{gathered}
A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \\
B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}
\end{gathered}
$$

Posso fare sia $A \cdot B$ che $B \cdot A$ in quanto abbiamo i tali requisiti. Allora

$$
A \cdot B = \begin{pmatrix} -1*1+1*2 & 0*1+2*1 \\ -1*3+4*1 & 3*0+1*4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}
$$

e

$$
B \cdot A = \begin{pmatrix} -1*1+0*3 & -1*2+0*4 \\ 1*1+1*3 & 1*2+1*4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}
$$

OSS 2.3.4.a.
Notiamo che il *prodotto delle matrici* non è un'operazione *commutativa*; questo determina delle forti conseguenze, in particolare nella *meccanica quantistica* con il *principio di indeterminazione di Heisenberg*.

2.4. Proprietà

Il *prodotto righe per colonne* soddisfa alcune proprietà:
PROP 2.4.1. Siano $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ e $C, D \in M_{p,n}(\mathbb{R})$. Allora valgono le seguenti uguaglianze:

$$1. \ (A+B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$
$$2. \ A \cdot (C+D) = A \cdot C + A \cdot D$$

la *1.* si chiama "proprietà distributiva a *destra*", la *2.* invece "proprietà distributiva a *sinistra*". Utilizziamo questa nomenclatura in quanto sappiamo che l'operazione di prodotto righe per colonna *NON* è commutativa; quindi non si è sempre certi che questa proprietà valga da entrambi i lati (in questo caso sì).

PROP 2.4.2. Sia $A \in M_{m,p}(\mathbb{R})$ e $B \in M_{p,n}(\mathbb{R})$; allora vale che

$$^t(A \cdot B) = (^tB) \cdot (^tA)$$

ATTENZIONE! Invece bisogna stare attenti che

$$^t(A \cdot B) \neq (^tA) \cdot (^tB)$$

in quanto essa non è definita. Infatti a destra si vede che proviamo a moltiplicare una matrice p, m e n, p; a meno che $m = n$, questa moltiplicazione NON è ben posta.

DIMOSTRAZIONE. Per mostrare la forma corretta, ovvero

$$^t(A \cdot B) = (^tB) \cdot (^tA)$$

mostriamo che tutte le entrate del membro destro sono uguali a tutte le entrati del membro sinistro; siano dunque $i \in \{1, \ldots, n\}$ e $j \in \{1, \ldots, m\}$. Allora:

$$\begin{aligned}
&\text{dx. } ({}^t(A \cdot B))_{ij} = (A \cdot B)_{ji} = A_{(j)} \cdot B^{(i)} \\
&\text{sx. } (({}^tB) \cdot ({}^tA))_{ij} = {}^tB_{(i)} \cdot {}^tA^{(j)} = \text{le quantità sono uguali} = A_{(j)} \cdot B^{(i)}
\end{aligned}$$

e questo mostra che le due sono uguali.

PROP 2.4.3. Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, allora

$$\mathbb{1}_m \cdot A = A; \; A \cdot \mathbb{1}_n = A$$

Per $\mathbb{1}_m$ si intende la *matrice identità* (Matrice, **DEF 2.5.**).
OSS 2.4.3.a Nel caso delle matrici quadrate $M_n(\mathbb{R})$, la matrice unità $\mathbb{1}_n$ funge dunque da *elemento neutro* per il *prodotto righe per colonne*. Ovvero

$$\mathbb{1}_n \cdot A = A \cdot \mathbb{1}_n = A$$

e possiamo denominarlo come *elemento neutro* in quanto tutti gli elementi in questa uguaglianza sono appartenenti a $M_n(\mathbb{R})$.

Operazioni sui Numeri Complessi

Tutte le operazioni possibili sui numeri complessi: somma componente per componente, moltiplicazione, campo $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ *come* $\mathbb{C}$*; alcune proprietà di queste operazioni. Complesso coniugato e modulo di un numero complesso* z*; proprietà di queste operazioni, focus sulla disuguaglianza triangolare.*

---

1. Somma componente per componente

DEF 1. Definisco su $\mathbb{R}^2$ l'operazione di **somma componente per componente**:

$$(a,b) \dagger (a',b') = (a+a', b+b')$$

che da ora in poi lo chiamiamo semplicemente $+$.

PROP 1.1. La *somma componente per componente* gode delle seguenti proprietà:

1. La proprietà associativa;

$$(a+b) + ((a',b') + (a''+b'')) = ((a,b) + (a',b')) + (a'',b'')$$

2. L'esistenza dell'elemento neutro 0

$$0 : (0,0);$$

3. L'esistenza dell'elemento opposto $(-a,-b)$;

$$(a,b) + (-a,-b) = (0,0)$$

4. La proprietà commutativa

$$(a,b) + (a',b') = (a',b') + (a,b)$$

OSS 1.1. Allora in questo caso si definisce $(\mathbb{R}^2, +)$ come un *gruppo abeliano*.

2. Moltiplicazione

Ora l'operazione più "peculiare" sarebbe quella di moltiplicazione, in quanto grazie a questa riusciamo a formare il campo dei numeri complessi $\mathbb{C}$.

DEF 2. Sia $\circ$ l'operazione della **moltiplicazione**, che viene definita come

$$\begin{aligned}\circ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\langle a, b\rangle, \langle a', b'\rangle) &\mapsto (a, b) \circ (a', b')\end{aligned}$$

dove

$$(a, b) \circ (a', b') := (aa' - bb', ab' + ba')$$

e d'ora in poi chiameremo $\circ$ come $\cdot$.

NOTA. Come visto sopra, personalmente (avvolte) userò la notazione $\langle a, b\rangle$ per rappresentare la coppia dei numeri (a, b); lo faccio per evitare confusione con le parentesi. *Fidatevi, (forse) sarà meglio così (?)*.

OSS 2.1. Notiamo che questa definizione di moltiplicazione non è quella che ci si aspetta, di solito; infatti volendo si poteva anche definire la moltiplicazione nel seguente modo:

$$(a, b) \circ (a', b') \overset{?}{:=} (aa', bb')$$

Matematicamente questo avrebbe senso, però si *vorrebbe* che questa moltiplicazione avesse delle *proprietà* che ritroviamo anche in $\mathbb{R}$, in quanto lo scopo di questa costruzione è proprio quella di *"espandere"* la famiglia dei numeri.

Ad esempio, qui non varrebbe la proprietà per cui $(0, 0)$ è *l'elemento nullo*. Infatti

$$(1, 0) \circ (0, 1) = (1 * 0, 0 * 1) = (0, 0)$$

Quindi per questo bisognava trovare un'altra definizione.

TRUCCO PERSONALE. Visto che potrebbe essere difficile imparare *questa* definizione di moltiplicazione, possiamo *"anticipare"* un argomento (ovvero Rappresentazione dei Numeri Complessi) rappresentando la coppia $(a, b) = a + ib$ dove $i^2 = -1$. Per *"scoprire"* la nostra definizione facciamo il seguente.

$$\begin{aligned}(a, b) \cdot (a', b') &= (a + ib)(a' + ib') \\ &= aa' + iab' + ia'b - bb' \\ &= (aa' - bb') + i(ab' + a'b) \\ &= (aa' - bb', ab' + a'b)\end{aligned}$$

PROP 2.1. Si può verificare che questa operazione gode delle proprietà, ovvero:

1. La proprietà associativa;

$$\langle a, b\rangle \cdot (\langle a', b'\rangle \cdot \langle a'', b''\rangle) = (\langle a, b\rangle \cdot \langle a', b'\rangle) \cdot \langle a'', b''\rangle$$

2. L'esistenza dell'elemento neutro $(1, 0)$;

$$\begin{aligned}(a, b) \cdot (1, 0) &= \langle (a * 1 - b * 0), (a * 0) + (b * 1)\rangle \\ &= \langle a, b\rangle = (a, b)\end{aligned}$$

3. L'esistenza dell'elemento reciproco ad ogni elemento non-zero;
   Se ad ogni $c = (a, b) \neq (0, 0)$ considero

$$c^{-1} = (\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2})$$

Infatti moltiplicandoli ottengo

$$\begin{aligned} c \cdot c^{-1} &= (\frac{a^2}{a^2+b^2} - \frac{-b^2}{a^2+b^2}, \frac{-ab}{a^2+b^2} + \frac{ab}{a^2+b^2}) \\ &= (\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}, 0) = (1,0) \end{aligned}$$

4. La proprietà commutativa:

$$(a,b) \cdot (a',b') = (a',b') \cdot (a,b)$$

5. La proprietà distributiva:

$$\langle a,b\rangle \cdot (\langle a',b'\rangle + \langle a'',b''\rangle) = (a,b) \cdot (a',b') + (a,b) \cdot (a'',b'')$$

DIMOSTRAZIONI.

6. Per verificare che questa operazione è *associativa*, dobbiamo dimostrare che il *membro destro* dell'uguaglianza è uguale al *membro sinistro*. Ovvero

$$\begin{aligned} \text{sx. } &\langle a,b\rangle \cdot (\langle a',b'\rangle \cdot \langle a'',b''\rangle) = \\ &\langle a,b\rangle \cdot (\langle a'a''-b'b'', a'b''+a''b'\rangle) = \\ &\langle a(a'a''-b'b'') - b(a'b''+a''b'), a(a'b''+a''b') + b(a'a''-b'b'')\rangle = \\ &\langle aa'a'' - ab'b'' - a'bb'' - a''bb', aa'b'' + aa''b' + a'a''b - bb'b''\rangle \end{aligned}$$

e poi

$$
\begin{aligned}
\text{dx. } & (\langle a, b\rangle \cdot \langle a', b'\rangle) \cdot \langle a'', b''\rangle = \\
& \langle aa' - bb', ab' + a'b\rangle \cdot \langle a'', b''\rangle = \\
& \langle (aa' - bb')a'' - (ab' + a'b)b'', (aa' - bb')b'' + (ab' + a'b)a''\rangle = \\
& \langle aa'a'' - a''bb' - ab'b'' - a'bb'', aa'b'' - bb'b'' + aa''b' + a'a''b\rangle = \\
& \langle aa'a'' - ab'b'' - a'bb'' - a''bb', aa'b'' + aa''b' + a'a''b - bb'b''\rangle
\end{aligned}
$$

E vediamo che i membri sono esattamente uguali. ■

7. *La proprietà 2. è già stata dimostrata sopra.*
8. *Stesso valesi per la proprietà 3.*
9. Occorre solo sfruttare le proprietà dei numeri reali $\mathbb{R}$, ovvero

$$
\begin{aligned}
(a', b') \cdot (a, b) &= (a'a - b'b, a'b + b'a) \\
&= (aa' - bb', ab' + a'b) \\
&= (a, b) \cdot (a', b') \blacksquare
\end{aligned}
$$

10. Consideriamo entrambi i membri dell'uguaglianza

$$
\langle a, b\rangle \cdot (\langle a', b'\rangle + \langle a'', b''\rangle) = \langle a, b\rangle \cdot \langle a', b'\rangle + \langle a, b\rangle \cdot \langle a'', b''\rangle
$$

Sviluppiamo il membro destro:

$$
\begin{aligned}
\langle a, b\rangle \cdot (\langle a', b'\rangle + \langle a'', b''\rangle) &= \langle a, b\rangle \cdot \langle a' + a'', b' + b''\rangle \\
&= \langle a(a' + a'') - b(b' + b''), a(b' + b'') + b(a' + a'')\rangle \\
&= \langle aa' + aa'' - bb' - bb'', ab' + ab'' + a'b + a''b\rangle
\end{aligned}
$$

Ora il membro sinistro:

$$\begin{aligned}\langle a,b\rangle\langle a',b'\rangle+\langle a,b\rangle\langle a'',b''\rangle &= \langle aa'-bb',ab'+a'b\rangle+\langle aa''-bb'',ab''+a''b\rangle \\ &= \langle aa'+aa''-bb'-bb'',ab'+ab''+a'b+a''b\rangle\end{aligned}$$

E vediamo che entrambi i membri, quando sviluppati, sono uguali; dimostriamo così la tesi. ■

CONCLUSIONE.
Alla luce di queste proprietà riusciamo proprio a verificare che

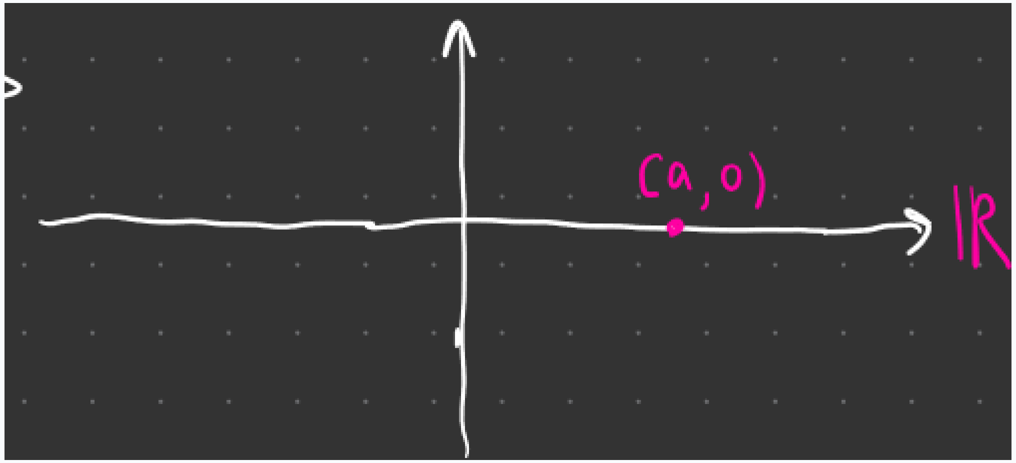
$$(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$$

è un campo, che chiameremo il *campo dei numeri complessi* $\mathbb{C}$.

OSS 2.2. Nel campo $\mathbb{C}$ considero i numeri della seguente forma:

$$(a,0)\in\mathbb{C}$$

ovvero quelli con la *seconda componente* nulla. Graficamente, questi punti giacciono sull'asse *orizzontale*, che chiameremo *l'asse reale*.



Allora notiamo che valgono le seguenti:

$$\begin{aligned}&\text{a. } (a,0)\cdot(b,0) = (ab - 00, a0 + 0b) = (ab, 0)\\&\text{b. } (a,0)+(b,0) = (a+b,0)\end{aligned}$$

nel senso che questi numeri si comportano come i *numeri reali* $\mathbb{R}$.

OSS 2.3. Inoltre, considerando

$$(a,0)\cdot(c,d) = (ac - 0d, ad + 0c) = (ac, ad)$$

ovvero che $(a,0)$ si comporta come lo *scalare* che *scala un numero* $\mathbb{C}$ *componente per componente*.

3. Coniugio

DEF 3. Sia z un numero $\mathbb{C}$ e lo rappresentiamo come $z = a + ib$ (Rappresentazione dei Numeri Complessi). Allora definisco il numero **complesso coniugato** $\bar{z}$ come

$$\bar{z} = a - ib$$

DEF 3.1. Chiamo **coniugio** la funzione

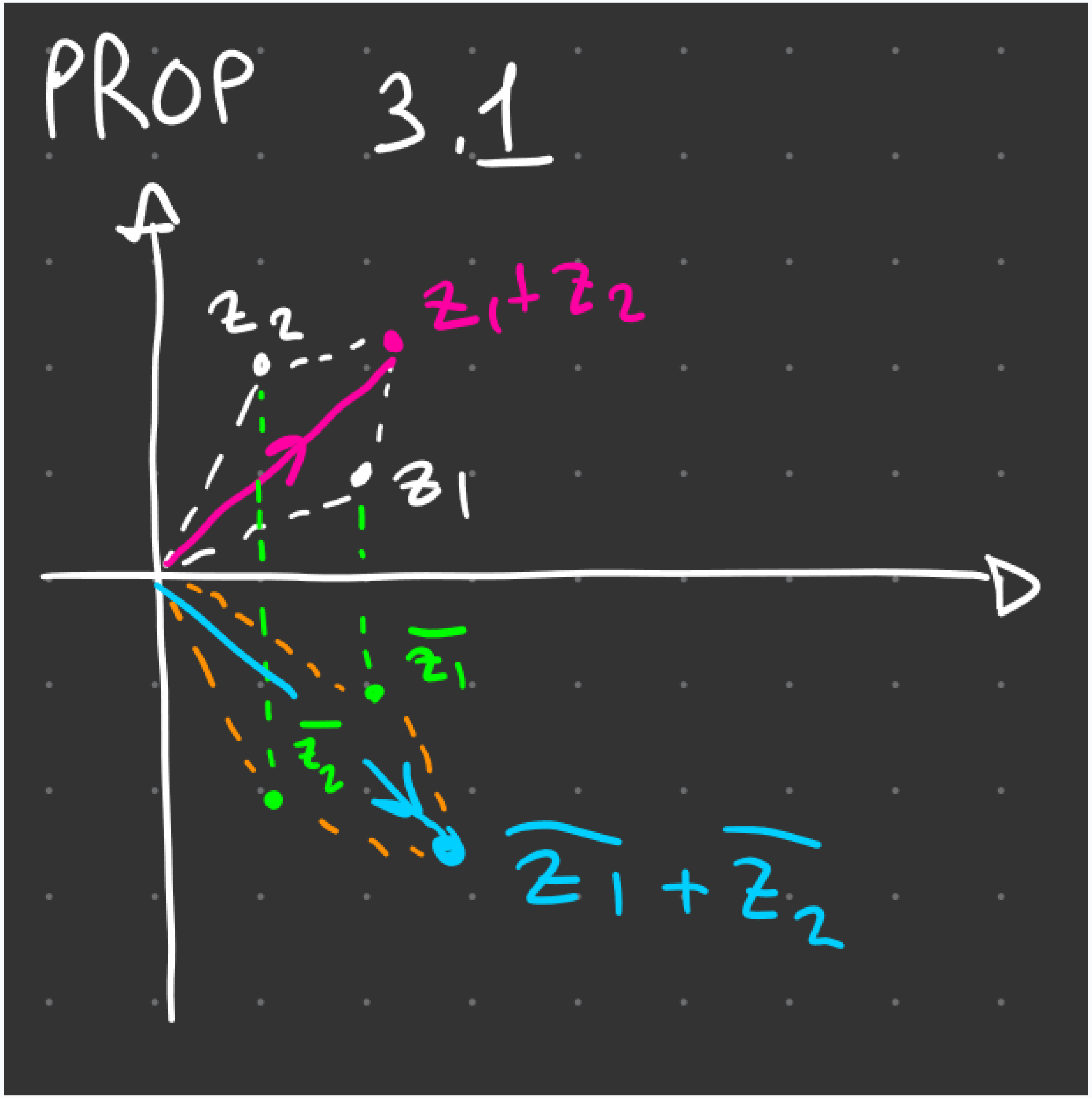
$$- : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}; z \mapsto \bar{z}$$

dove $\bar{i} = -i$

PROP 3.1. Questa funzione ha delle proprietà; presentiamo la prima.

$$\forall z_1, z_2; \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

Graficamente,



DIMOSTRAZIONE. Analiticamente è possibile dimostrare la tesi nel modo seguente.

$$
\begin{aligned}
\overline{z_1 + z_2} &= \overline{(a+ib)+(a'+ib')} \\
&= \overline{(a+a')+i(b+b')} \\
&= (a+a')-i(b+b') \\
&= (a-ib)+(a'-ib') \\
&= \overline{z_1}+\overline{z_2} \blacksquare
\end{aligned}
$$

PROP 3.2.

$$
\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}
$$

DIMOSTRAZIONE. Analogamente,

$$
\begin{aligned}
\overline{z_1 \cdot z_2} &= \overline{(a+ib)(a'+ib')} \\
&= \overline{(aa'-bb')+i(ab'+a'b)} \\
&= aa'-bb'-i(ab'+a'b)
\end{aligned}
$$

e sviluppando $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ otteniamo l'identità

$$
\begin{aligned}
\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} &= \overline{(a+ib)} \cdot \overline{(a'+ib')} \\
&= (a-ib) \cdot (a'-ib') \\
&= aa'-iab'-ia'b+(i^2)bb' \\
&= aa'-bb'-i(ab'+a'b)
\end{aligned}
$$

che è esattamente uguale all'espressione ottenuta prima; pertanto si considera la tesi vera. ■

PROP 3.3.

$$\begin{aligned}\overline{z} = z &\iff \mathrm{Im}(z) = 0 \\ &\iff z = \mathrm{Re}(z) \\ &\iff z \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

PROP 3.4. Sia $z = a + ib$, allora

$$z + \overline{z} = (a + ib) + (a - ib) = 2a = 2\mathrm{Re}(z)$$

4. Modulo

Se prendiamo il piano di *Argand-Gauss* (Rappresentazione dei Numeri Complessi) possiamo vedere dei *punti nel piano*, allora si potrebbe *"misurare"* la distanza di questo punto dall'origine $(0, 0)$.

DEF 4. Allora definiamo la il **modulo di** $\bar{z}$ come la *distanza dall'origine*; ovvero se $z = a + ib$, allora usando il *teorema di Pitagora* il modulo diventa $\sqrt{a^2 + b^2}$.
DEF 4.1. Allora definisco la funzione $|\cdot|$;

$$\begin{aligned}|\cdot| : \ \mathbb{C} &\longrightarrow [0, +\infty) \\ z &\mapsto |z| := \sqrt{\mathrm{Re(z)}^2 + \mathrm{Im(z)}^2}\end{aligned}$$

OSS 4.1. Notiamo che se $z \in \mathbb{R}$, ovvero se $\mathrm{Im}(z) = 0$, allora

$$|z| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2} = |\mathrm{Re}(z)|$$

Da nota che a sinistra si ha il *modulo* di z, invece a destra si ha il *valore assoluto* (Funzioni di potenza, radice e valore assoluto, **DEF 3.1.**) della parte reale di z.

Ora presentiamo alcune proprietà del modulo.
PROP 4.1. Per definizione,

$$\forall z \in \mathbb{C}, |z| \geq 0; |z| = 0 \iff z = 0$$

PROP 4.2.

$$|z| \geq |\mathrm{Re}(z)| \wedge |z| \geq |\mathrm{Im}(z)|$$

Geometricamente, questo corrisponde al fatto che *l'ipotenusa* di un triangolo rettangolo è *sempre* più lungo o uguale ad uno dei cateti.

PROP 4.3.

$$|\overline{z}| = |z|$$

in quanto $-b^2 = b^2, \forall b \in \mathbb{R}$

PROP 4.4.

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1||z_2|$$

DIMOSTRAZIONE. Supponendo che $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2'$, allora

$$\begin{aligned}
|z_1| \cdot |z_2| &= \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2} \\
&= \sqrt{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)} \\
&= \sqrt{(a_1^2 a_2^2 + a_1^2 b_2^2) + (a_2^2 b_1^2 + b_1^2 b_2^2)} \\
&= \sqrt{(a_1^2 a_2^2 + b_1^2 b_2^2) + (a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2)}
\end{aligned}$$

e sviluppando

$$z_1 \cdot z_2 = a_1a_2 - b_1b_2 + i(a_1b_2 + a_2b_1)$$

si ha quindi

$$\begin{aligned} |z_1 \cdot z_2| &= |(a_1a_2 - b_1b_2)^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)^2 \\ &= |(a_1^2a_2^2 - 2a_1a_2b_1b_2 + b_1^2b_2^2) + (a_1^2b_2^2 + 2a_1a_2b_1b_2 + a_2^2b_1^2)| \\ &= |(a_1^2a_2^2 + b_1^2b_2^2) + (a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2)| \end{aligned}$$

dimostrando così che

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \ \blacksquare$$

PROP 4.5.

$$z \cdot \overline{z} = |z|^2$$

DIMOSTRAZIONE. Supponendo che $z = a + ib$, allora

$$z \cdot \bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2$$

OSS 4.5.a. Questa proprietà è utile per trovare l'inversa di z; infatti

$$z \cdot \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{|z|^2}{|z|^2} = 1$$

allora concludo che

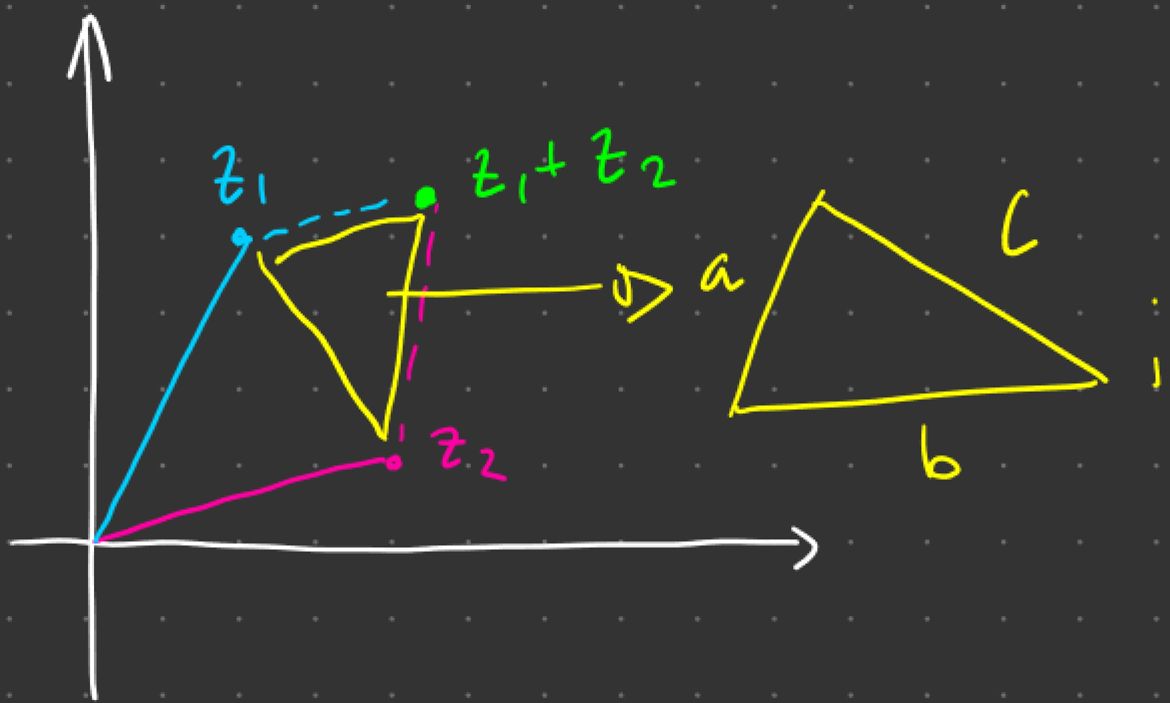
$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} + i\frac{-b}{a^2+b^2}$$

PROP 4.7. *La disuguaglianza triangolare.*
Infine presentiamo la *proprietà fondamentale* del *modulo*.

$$\begin{gathered}\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \\ |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|\end{gathered}$$

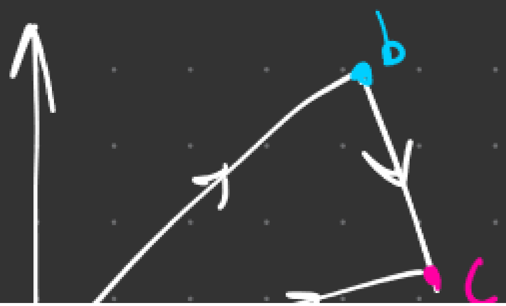
Che è *simbolicamente* simile alla *disuguaglianza triangolare* del valore assoluto (**OSS 3.1.1.**)
Però in questo contesto (ovvero del campo $\mathbb{C}$) la proprietà è ancora più *geometricamente suggestiva*; infatti usando il *Piano di Argand-Gauss* (Rappresentazione dei Numeri Complessi), si ha:

OSS 3.1.1)



; $a+b \geq c$

oppure



$$\underbrace{\overline{Ob}}_{|z_1|}+\underbrace{\overline{bc}}_{|z_2|}\geq\underbrace{\overline{Oc}}_{|z_1+z_2|}$$

Ovvero che la somma della lunghezza due cateti di un triangolo rettangolo è *sempre* più lunga della lunghezza dell'ipotenusa.

DIMOSTRAZIONE.

Considero i seguenti: siano $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$; allora

$$\begin{aligned}
|z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} \\
&= (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) \\
&= z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 + z_2\overline{z_2} \\
&= |z_1|^2 + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1\overline{z_2}} + |z_2|^2 \\
|z_1 + z_2|^2 &= |z_1|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) + |z|^2
\end{aligned}$$

A questo punto mi ricordo che

$$|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$$

allora

$$\begin{aligned}
|z_1|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) + |z|^2 &\leq |z_1|^2 + 2|z_1\overline{z_2}| + |z_2|^2 \\
&\leq |z_1|^2 + 2|z_1||\overline{z_2}| + |z_2|^2 \\
&\leq |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 \\
|z_1 + z_2|^2 &\leq (|z_1| + |z_2|)^2 \\
|z_1 + z_2| &\leq |z_1| + |z_2| \blacksquare
\end{aligned}$$

Operazioni sui vettori liberi

Operazioni sui vettori liberi: somma, scalamento; proprietà di queste operazioni, proprietà asssociativa.

DEF 1. Somma di due vettori liberi

Dati due Vettori Liberi $\vec{u}, \vec{v}$, definiamo la loro **somma** $\vec{u}+\vec{v}$ nella maniera seguente:

1. Si sceglie un rappresentante $\overrightarrow{AB}$ per $\vec{u}$
2. Per la **PROP. 2.1.** (Vettori Liberi), si può sempre scegliere un vettore applicato in $\vec{v}$ tale che il suo punto iniziale sia B, ovvero un vettore applicato $\overrightarrow{BC} \in \vec{v}$, ovvero $\vec{v} = [\overrightarrow{BC}]$.
3. Definiamo infine

$$\vec{u}+\vec{v} := [\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}] = [\overrightarrow{AC}]$$

PROP. 1.1. Si sceglie arbitrariamente un rappresentante per $\vec{u}$; tuttavia secondo il passaggio 3. si nota che *indipendentemente* dal vettore scelto iniziale, si raggiunge sempre allo stesso risultato finale; ovvero la classe di equipollenza $[\overrightarrow{AC}]$
DIM. Si vuole dimostrare che si raggiunge sempre allo stesso risultato finale, indipendentemente dal vettore iniziale scelto.
Ripercorriamo i passaggi definiti in **DEF 3.1.** con delle leggere variazioni;
1. Si scelgono due distinti rappresentanti per $\vec{u}$, ovvero

$$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'} \in \vec{u}; \overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{A'B'}$$

2. Si scelgono i corrispettivi rappresentanti di $\vec{v}$, tali che i loro punti iniziali coincidano con i punti finali dei vettori-rappresentanti di $\vec{u}$;

$$\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{B'C'} \in \vec{v}; \overrightarrow{BC} \neq \overrightarrow{B'C'}$$

3. Ora, per definizione in **DEF 3.1.**, la somma di $\vec{u}+\vec{v}$ viene

$$\vec{u}+\vec{v} = [\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}] = [\overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'}] \iff [\overrightarrow{AC}] = [\overrightarrow{A'C'}] = \vec{w}$$

Da qui si evince che *indipendentemente* dai punti di applicazione A e A' scelti, si arriva **sempre** allo stesso risultato; ovvero il *vettore-risultante* $\vec{w}$.
La definizione quindi è *ben posta*, ovvero *non* dipende dal rappresentante scelto.

OSS 1.1. Rigorosamente parlando, la *somma* è una funzione, ovvero la si scrive come

$$\begin{aligned} + : V_2 \times V_2 &\longrightarrow V_2 \\ (\vec{u}, \vec{v}) &\mapsto \vec{u}+\vec{v} \end{aligned}$$

ove V_2 rappresenta l'insieme dei vettori liberi.

OSS 1.2. Se definiamo il *vettore libero nullo* come $\vec{0} := [\overrightarrow{AA}]$, allora notiamo che questo comporta come il numero 0 rispetto alla *somma in* $\mathbb{R}$. Infatti,

$$\vec{0} + \vec{v} = [\overrightarrow{AA}] + [\overrightarrow{AB}] = [\overrightarrow{AB}] = \vec{v}$$
$$\vec{v} + \vec{0} = [\overrightarrow{AB}] + [\overrightarrow{BB}] = [\overrightarrow{AB}] = \vec{v}$$

DEF 2. Moltiplicazione di un vettore per uno scalare

Analogamente si definisce lo *scalamento* come l'operazione della moltiplicazione di un vettore per uno *scalare* (ovvero numero reale $\mathbb{R}$);
Se $\lambda \in \mathbb{R}$, $\vec{v} \in V_2$, allora possiamo definire $\lambda \cdot \vec{v}$;

$$\vec{v} = [\overrightarrow{AB}] \implies \lambda \cdot \vec{v} := [\lambda \cdot \overrightarrow{AB}]$$

Di cui $\lambda \cdot \overrightarrow{AB}$ è stata già definita in Vettori Liberi (**DEF 3.2.**).
OSS 2.1. Anche in questo caso la *moltiplicazione di un vettore per uno scalare* è una definizione *ben posta*.

OSS 2.2. Anche in questo caso la moltiplicazione di un vettore per uno scalare è una *funzione*, allora

$$\begin{gathered} \cdot : \mathbb{R} \times V_2 \longrightarrow V_2 \\ (\lambda, \vec{v}) \mapsto \lambda \cdot \vec{v} \end{gathered}$$

OSS 2.3. Si nota che

$$1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$$

ATTENZIONE! La **moltiplicazione di un vettore per uno scalare** NON va confusa con il *prodotto scalare*; si trattano di due operazioni completamente diverse, in quanto con la moltiplicazione di un vettore per uno scalare si ottiene un altro vettore; invece per il *prodotto scalare* si ottiene un altro vettore.

DEF 3. Proprietà delle operazioni sui vettori liberi

OSS 3.1. Si nota entrambe le operazioni $+$, $\cdot$ sono suriettive (**DEF 3.1.**), ovvero che a partire da due vettori è possibile raggiungere qualsiasi vettore; infatti se si considerano gli *elementi neutri* di queste operazioni (ovvero 0 per $+$; 1 per $\cdot$), possiamo prendere un qualsiasi rappresentante $\overrightarrow{AB}$ di $\vec{v}$ e metterli in funzione con questi elementi neutri, riotteniamo il medesimo vettore.

3.1. Proprietà della somma $+$

1. **PROPRIETA' ASSOCIATIVA.** $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$,

$$(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$$

2. **PROPRIETA' COMMUTATIVA.** $\forall \vec{u}, \vec{v}$,

$$\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$$

3. **L'ESISTENZA DELL'ELEMENTO NEUTRO.** $\forall \vec{v}$,

$$\vec{0}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{0}=\vec{v}$$

4. **L'ESISTENZA DELL'ELEMENTO OPPOSTO** $\forall \vec{v}, \exists \vec{w}:$

$$\vec{v}+\vec{w}=\vec{w}+\vec{v}=\vec{0}$$

OSS. 3.1.1. Tale elemento $\vec{w}$ si denota con $-\vec{v}$ e definiamo la *sottrazione*

$$\vec{v}+(-\vec{v}):=\vec{v}-\vec{v}=0$$

Se $\vec{v}=[\overrightarrow{AB}]$, allora $-\vec{v}=[\overrightarrow{BA}]$.

3.2. Proprietà dello scalamento

1. $\forall \vec{v}$,

$$1 \cdot \vec{v}=\vec{v}$$

2. $\forall \vec{v}$,

$$(-1) \cdot \vec{v} = -\vec{v}$$

3. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e $\forall \vec{v}$,

$$(\lambda\mu) \cdot \vec{v} = \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{v})$$

   OSS 3.2.1. Notare che questa proprietà non è banale, al contrario di quello che si può pensare; infatti nella prima si definisce una singola operazione tra un reale $\gamma = \lambda\mu$ e un vettore $\vec{v}$, invece nella seconda si definiscono due moltiplicazioni tra uno reale e un vettore.

4. $\forall \lambda\mu \in \mathbb{R}$ e $\forall \vec{u}, \vec{v}$,

$$1.\ (\lambda + \mu) \cdot \vec{v} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{v}$$
$$2.\ \lambda \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \vec{v}$$

Paradigmi di Programmazione

Breve introduzione alla programmazione; paradigmi di programmazione con esempi

---

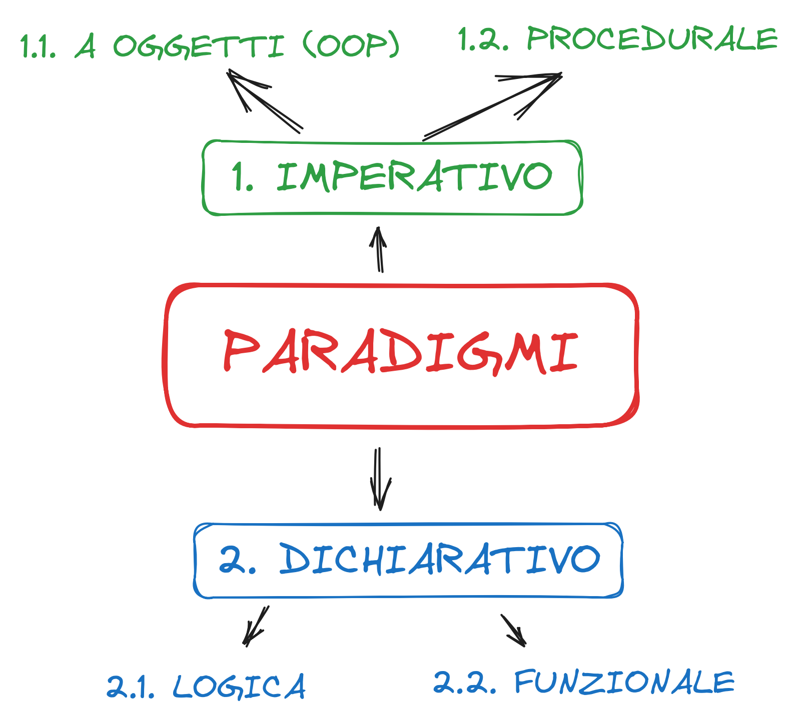
Paradigma: cos'è

Nella *programmazione* un **paradigma** (di programmazione) è una *macroarea*, uno *stile* in cui si sviluppa un *linguaggio di programmazione*; nei vari linguaggi di programmazione (soprattutto quelli moderni) si ha molteplici *paradigmi di programmazione*.

Ad esempio in *Python* v'è presente il paradigma *imperativo ad oggetti* con le *classi*, e anche il *paradigma dichiarativo funzionale* con la funzione *lambda*.

Quali sono? Quanti sono?

Generalmente si hanno i seguenti *paradigmi* rappresentati nel diagramma sottostante:



Principalmente i paradigmi sono le seguenti due:

1. **Paradigma IMPERATIVO**
   Il paradigma *imperativo* pone l'enfasi sullo *specificare* le istruzioni al fine di ottenere un risultato voluto. Un esempio di *paradigma imperativo procedurale* è il linguaggio *C*, oppure un esempio di *paradigma imperativo a oggetti (OOP)* è *Java*.

2. **Paradigma DICHIARATIVO**
   In questo caso il paradigma *dichiarativo* esprime la *logica* di un calcolo senza dover descrivere il flusso di controllo. Per esempio nel in un linguaggio dichiarativo *logico* si usa, appunto, la logica per rappresentare e/o elaborare delle informazioni, oppure con la programmazione *funzionale* si usa una serie di valutazioni matematiche.

Differenza tra imperativo e dichiarativo: esempi

La differenza tra il paradigma **IMPERATIVO** e **DICHIARATIVO** si illustra mediante il seguente esempio; due *"pseudocodici"* che rappresentano, da un lato il paradigma *imperativo*, e dall'altro il paradigma *dichiarativo*. Entrambi vogliono esprimere l'utilizzo di un ascensore.

IMPERATIVO	DICHIARATIVO
- ATTESA	- SE ARRIVATO e APERTO, ENTRA
- APRI	- SE PUOI ENTRARE, DEVI ASPETTARE ARRIVI
- CHIUDI	- ...
- BOTTONE	
- ...	

A sinistra si può vedere che impongo *una serie di istruzioni*, come quello di attendere, aprire, chiudere, et cetera . . .; invece a destra impongo una *struttura logica*, per esempio SE l'ascensore è ARRIVATO e APERTO, allora posso entrare.

Un'altra analogia potrebbe essere quella di una *ricetta di cucina*, che solitamente esprime una serie di istruzioni (pertanto usa una struttura *imperativa*), come *"cucina per 10 minuti"*, *"sbatti le uova"* e via così . . .
Invece se si vuole, per qualche motivo, scrivere una ricetta mediante il paradigma *dichiarativo*, allora si troverebbe scritto qualcosa del genere di *"se l'acqua bolle a 100 gradi °C, allora la pasta è pronta"*.

Predicati e Quantificatori

Definizione generale dei predicati corredata con degli esempi, breve focus sui quantificatori, negazione dei predicati con quantificatori

---

Definizioni generali

DEF 1. Si definisce il *predicato* come la parte del linguaggio che contiene delle variabili. Esempi di seguito per illustrare il concetto del *predicato*.

ES 1. Sia definisce il predicato $\mathcal{P}(x)$: lo studente x è più alto di 1,7m
Se x è Pietro, allora $\mathcal{P}(x)$ si legge come *"Lo studente **Pietro** è più alto di 1,7m."*
In questo caso si ha un predicato *unario*, nel senso che accetta solo **una** variabile, ovvero x.

ES 2. Sia $\mathcal{Q}(x, y)$: Lo studente x è amico della studentessa y.
Se x è Pietro e y è Francesca, allora $\mathcal{Q}(x, y)$ si legge come *"Lo studente **Pietro** è amico della studentessa **Francesca**"*.
In questo caso si ha un predicato *binario*; continuando così si può definire anche dei predicati n-ari.

ES 3. Sia $\mathcal{S}(x, y, z)$: Nell'ospedale x, il medico y ha sbagliato la diagnosi z.

DEF 2. Si definisce il *quantificatore* come l'espressione che, nel nostro linguaggio, corrisponde a *"esiste"* oppure *"tutti"*.
Essi sono i seguenti.

$$\begin{gathered}\forall \text{ si legge come "per ogni"} \\ \exists \text{ si legge come "esiste"}\end{gathered}$$

OSSERVAZIONE 1. Un modo per trasformare i predicati in una Proposizione è di utilizzare i quantificatori appena definiti.

ES. 1.1. $\forall x \mathcal{P}(x)$ si legge come *"Ogni studente è più alto di 1,7m"*
Si nota che, mediante il quantificatore, il predicato $\mathcal{P}(x)$ è una proposizione; si definisce in questo caso x come *variabile muta*.

Ora si può comporre frasi come la seguente.

$$\forall x, \mathcal{Q}(x,y) = \mathcal{R}(y)$$

che si legge come *"Tutti sono amici di y"*; dopodiché si può anche comporre un'altra fase, come

$$\exists y : (\forall x, \mathcal{Q}(x,y)) = \exists y : \mathcal{R}(y)$$

che si legge come *"Esiste una studentessa y di cui tutti sono amici"*

ES 1.2. Per comporre la frase *"In ogni ospedale c'è un medico che ha sbagliato tutte le diagnosi"* si usa la seguente:

$$\forall x (\exists y : \forall z, \mathcal{S}(x,y,z))$$

⚠ **OSSERVAZIONE 2. Però si deve fare subito un'osservazione importante: in questo caso l'ordine conta, in quanto**

$$\forall x, \exists y : \mathcal{Q}(x,y)$$

si legge come *"Ogni studente x ha un'amica studentessa y"*; pertanto

$$\exists y : (\forall x, \mathcal{Q}(x,y)) \neq \forall x, \exists y : \mathcal{Q}(x,y)$$

Negazione dei predicati con i quantificatori

OSSERVAZIONE 1. Si prende in esame il seguente.

$$\forall x, \mathcal{P}(x) : \text{ogni studente } x \text{ è più alto di } 1{,}7\text{m}$$

che si legge come *"Tutti i studenti sono più alti di 1,7m"*
Pensando col procedimento linguistico, la negazione di questa frase verrebbe come *"Esiste almeno un studente meno alto o uguale a 1,7m"*.
Pertanto,

$$\neg(\forall x, \mathcal{P}(x)) \iff \exists x : \neg\mathcal{P}(x)$$

⚠ **OSSERVAZIONE 2. Da quanto detto si deduce che $\neg(\forall x, \mathcal{P}(x))$ NON è necessariamente equivalente a $\forall x : \neg\mathcal{P}(x)$, in quanto ci vuole solo un ente x per rendere $\mathcal{P}(x)$ falsa.**

Analogamente, lo stesso discorso vale per

$$\neg(\exists y : \mathcal{Q}(y)) \iff \forall y : \neg\mathcal{Q}(x)$$

REGOLA GENERALE Da qui si evince la regola generale per negare un predicato con i quantificatori;

1. I quantificatori esistenziali devono essere scambiati con quelli opposti; nel senso che da il *quantificatore esistenziale* $\exists$ si trasforma nel *quantificatore universale* $\forall$, viceversa per $\forall$.
2. Si nega il predicato $\mathcal{P}(x)$.

ES 1. Riprendendo l'**esempio 2** da Definizioni generali, se si vuole dire che *"Non è vero che esiste una studentessa che è amica di tutti"*, si esegue così:

$$\neg(\exists y : \forall x, \mathcal{Q}(x, y)) = \forall y, \exists x : \neg\mathcal{Q}(x, y)$$

ES 2. Riprendendo l'**esempio 3** da Definizioni generali, per dire che *"Non è vero che in ogni ospedale c'è un medico che ha sbagliato tutte le diagnosi"* si fa il seguente:

$$\neg(\forall x, \exists y : \forall z, \mathcal{S}(x, y, z)) = \exists x : \forall y, \exists z : \neg\mathcal{S}(x, y, z)$$

ES. 3 Richiamandoci alla definizione del *limite*, rigorosamente definito dal matematico Cauchy nel suo scritto *Cours d'analyse* (1821), ovvero

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \to x_0} f(x) = L \\
&\text{è come dire} \\
&\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon
\end{aligned}$$

Se si vuole negare che esiste il limite L in x_0, allora ciò significa, dal punto di vista matematico, il seguente.

$$\begin{aligned}
&\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0, \neg(p \implies q) \\
&\text{ove } p = 0 < |x - x_0| < \delta,\ q = |f(x) - L| < \varepsilon \\
&\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0, \neg(\neg p \lor q) = p \land q \\
&\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0, 0 < |x - x_0| < \delta \land |f(x) - L| \geq \varepsilon
\end{aligned}$$

Problemi del Calcolo Combinatorio

Significato del calcolo combinatorio; quali problemi esso mira di risolvere. Alcuni problemi: disposizioni con ripetizioni, disposizione di oggetti a m a m, permutazioni di n oggetti e combinazioni. Alcuni problemi misti del calcolo combinatorio

---

1. Cosa vuol dire "calcolo combinatorio"

Se si definisce l'insieme dei numeri naturali come l'insieme dei numeri che servono *per contare*, allora il **calcolo combinatorio** si basa sul problema di *contare* certi insiemi/oggetti/$\ldots$

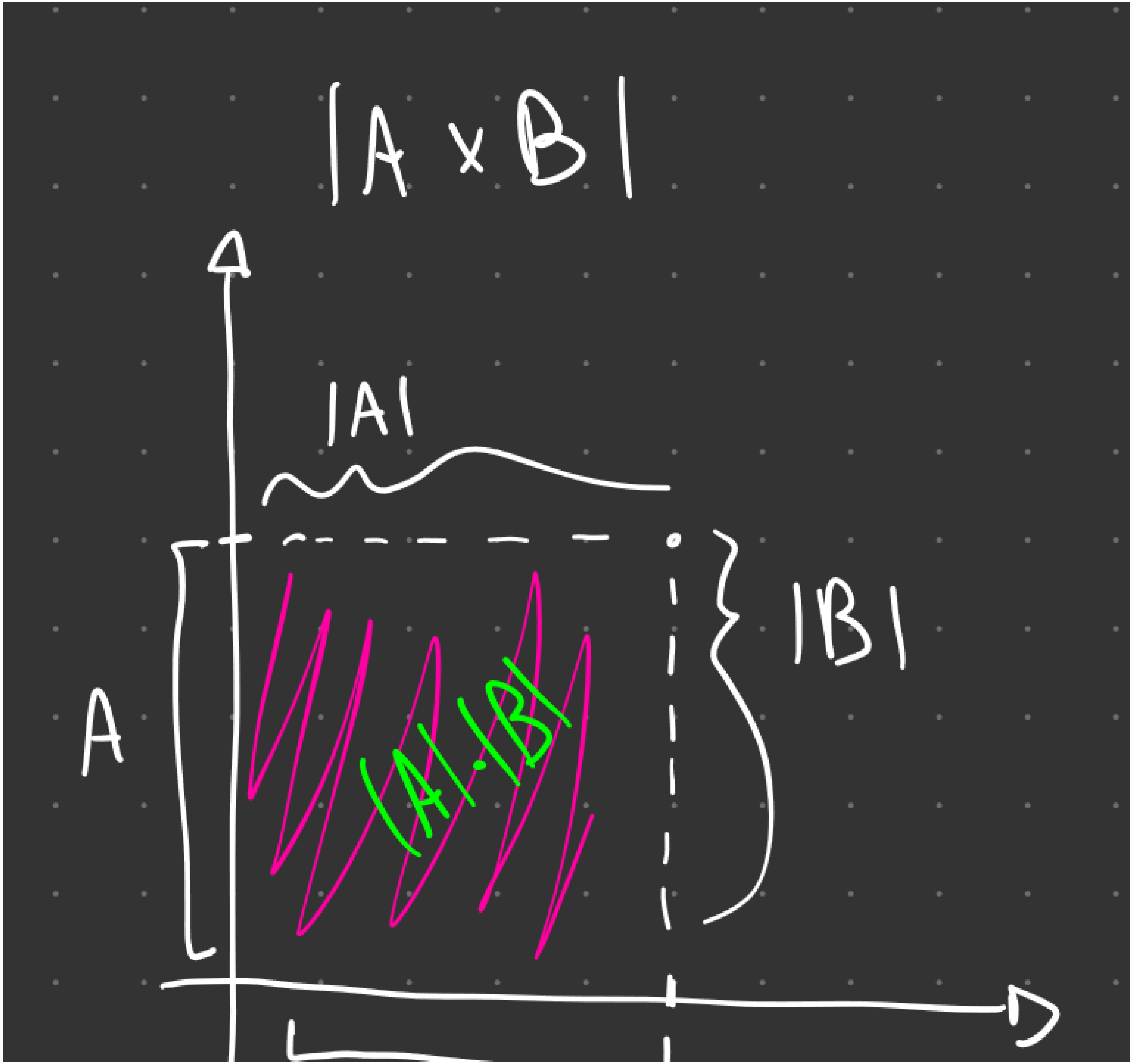
DEF 1. Cardinalità Si definisce la **cardinalità** di un *insieme* A come il numero n degli elementi contenuti nell'insieme A. Lo si denota come $|A|$.

2. I problemi del calcolo combinatorio

Il *calcolo combinatorio* ci presenta vari problemi che valgono la pena di essere studiati.

PROBLEMA 2.1. Cardinalità del prodotto cartesiano

PROBLEMA 2.1. Supponiamo che $|A|=n$, $|B|=m$, ove A, B sono *insiemi* e $n, m \in \mathbb{N}$. Allora ci poniamo il problema di trovare $|A \times B|$.
Se disegniamo il grafico di un qualsiasi prodotto cartesiano $A \times B$, si evince che per ogni riga $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ci sono m colonne; quindi $|A \times B| = n \times m$



|A x B|
|A|
|B|
A
|A|·|B|

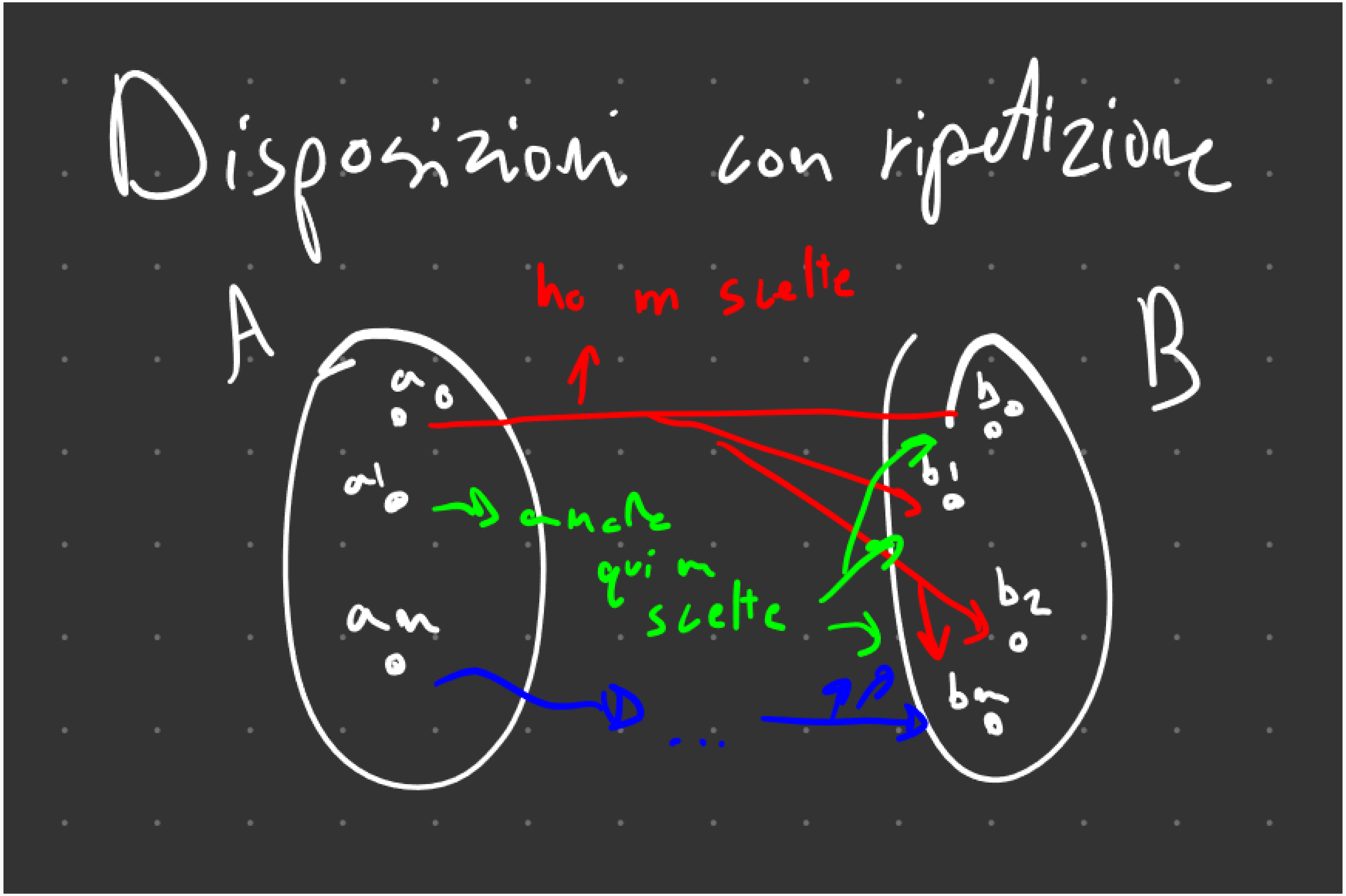
PROBLEMA 2.2. Disposizioni con ripetizione

PROBLEMA 2.2. Siano A, B insiemi con $|A| = n; |B| = m$; voglio contare il numero degli elementi di

$$B^A := \{\text{funzioni da } A \text{ a B}\}$$

Per risolvere questo problema si può avvalere del diagramma in cui rappresentiamo gli due insiemi A, B. Ora, prendendo il primo elemento a_0, vediamo che possiamo definire m funzioni, collegando l'elemento a_0 a b_m. Stesso discorso vale per $a_1, a_2, \dots, a_n$; quindi generalizzando possiamo vedere che il risultato viene $m^n = |B|^{|A|} = |B^A|$

DEF 2.2. Questo problema, nel calcolo combinatorio, si chiama **disposizioni con ripetizioni**, ovvero senza *vincoli* particolari.



ESEMPIO 2.2.1.

Se voglio costruire tutte le *bandiere tricolori* possibili (ove sono ammessi i anche colori ripetuti) con *4 colori* a disposizione, quante posso costruirne?

SOLUZIONE. Questo è un caso applicato di *disposizioni con ripetizione*; infatti se si definisce le caselle delle

bandiere come un insieme a tre variabili, $A = 1, 2, 3$, allora vogliamo trovare tutte le *funzioni* associate da A a $B = \{\text{rosso}, \text{verde}, \text{giallo}, \text{bianco}\}$
Pertanto la soluzione è 3^4.

PROBLEMA 2.3. Disposizioni di oggetti da m a n

PROBLEMA 2.3. Prendiamo lo stesso problema di prima; tuttavia vogliamo ora considerare un vincolo particolare: vogliamo cercare solo le *funzioni iniettive* (**DEF 3.2.**) da A a B. Ricapitolando, per *iniettiva* si intende che ad ogni a_x, a_y vengono associati immagini diversi. Pertanto, è necessario che $m \geq n$.
DEF 2.3.1. Inoltre indichiamo l'*insieme delle funzioni iniettive* come D_n^m.
SOLUZIONE. Si può avvalere dello stesso grafico di prima; se prendo il primo elemento a_0, allora ho m scelte per lo stesso ragionamento di prima; ora, se prendo il secondo elemento a_1, allora per rispettare il vincolo, ho una scelta in meno (ovvero l'elemento b_m associato ad a_0): quindi ora ho $m-1$ scelte. Procedendo avanti così, arrivo fino all'elemento a_n per cui ho $m-n+1$ scelte.
Pertanto

$$|D_n^m| = m(m-1)(m-2)\dots(m-(n-1))$$

ESEMPIO 2.3.1.

Prendiamo in esame lo stesso problema di prima, ovvero quella avendo a disposizione una *bandiera tricolore da colorare* e *quattro colori*.
Ora non vogliamo più i stessi colori; infatti, se la funzione dev'essere iniettiva, allora in un senso applicato ciò vuol dire che ad ogni area della bandiera dev'esserci un colore diverso.
Quindi si tratta di calcolare $|D_3^4| = 4(3)(2)$

PROBLEMA 2.4. Permutazioni

PROBLEMA 2.4. Prendiamo il problema appena preso in esame (ovvero la *disposizione di oggetti da n a m*) e ora vogliamo ci aggiungiamo un ulteriore vincolo: cerchiamo le *funzioni biiettive*, ovvero quelle sia *iniettive* che *suriettive*. Da qui consegue necessariamente che $|A| = |B| = n$.
DEF 2.4.1. Definiamo *l'insieme delle permutazioni (ovvero delle funzioni biiettive)* come P^n.
SOLUZIONE. Questo non è altro che un caso speciale di $|D_n^m|$ ove $m = n$, quindi

$$|P^n| = |D_n^n| = n(n-1)(n-2)\dots(1) = n!$$

ESEMPIO 2.4.1.

Consideriamo un problema totalmente diverso; se ho la *stringa* "CIAO", quante volte posso cambiarlo in modo tale che le lettere presenti nella stringa ci siano comunque?
Questo si tratta ovviamente di una *permutazione*, quindi calcoliamo $|P^4| = 4!$.

PROBLEMA 2.5. Combinazioni, coefficienti binomiali

PROBLEMA 2.5. Se considero un insieme A con $|A| = n$, e un numero $k \in \mathbb{N}$ tale che $0 \leq k \leq n$, allora voglio calcolare il *numero di sottoinsiemi di A con k elementi*.
DEF. 2.5.1. Definiamo *l'insieme dei sottoinsiemi di A con k elementi* come

$$C_k^n \text{ oppure } \binom{n}{k}$$

e si legge come *"n su k"*. Inoltre lo si chiama anche come il *coefficiente binomiale* oppure le *combinazioni di n oggetti a k a k*.
SOLUZIONE. Qui usiamo un esperimento mentale che presenta una situazione analoga a quella presentata. Suppongo di aver n numero di palline, da cui voglio sceglierne k; per la prima pallina 0 posso sceglierne n, poi per

la pallina 1 posso sceglierne $n-1$, poi andando così finche si raggiunge l'ultima pallina k da cui posso scegliere $n-k+1$. Si osserva che questo è esattamente le *disposizioni* da n a k, D^n_k.
Tuttavia in questo modo tengo conto dell'ordine in cui scelgo le palline; invece le *combinazioni* non tengo conto dell'ordine. Quindi se vogliamo considerare l'ordine, dobbiamo attribuire ad ogni *combinazione* una *permutazione*; ciò vuol dire che bisogna moltiplicare le *combinazioni di n oggetti a k a k* per le *permutazioni di k oggetti*; pertanto si scrive

$$D^n_k = P^k C^n_k$$

da cui deriva

$$C^n_k = \frac{D^n_k}{P^k} = \frac{(n)(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Nella pagina Coefficiente Binomiale ci soffermeremo particolare (appunto) sul *coefficiente binomiale*, in quanto essa porta con sé delle proprietà particolari che ci permetteranno di costruire certi oggetti matematici, tra cui il *triangolo di Tartaglia*.

ESEMPIO 2.5.1.

Se ho un sacco con 10 palline da cui ne estraggo 3, quante *combinazioni* possibili ho?
Semplicemente, $C^10_3 = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3!(7!)}$.

3. Esempi misti del Calcolo Combinatorio

Ora presentiamo alcuni esempi misti del calcolo combinatorio, che può comprendere l'ausilio di alcune delle definizioni date sopra e un buon approccio critico ai problemi.

PROBLEMA 3.1. Ho un mazzo da 40 carte e ne pesco 3; quanti sono i possibili risultati t?
Questo è un caso quasi-banale di *combinazioni*, quindi

$$t = C_3^{40} = \frac{40!}{3!(37!)} = \frac{40 \cdot 39 \cdot 38}{3 \cdot 2} = 9880$$

PROBLEMA 3.1.A Ora considerando che ci sono 4 semi (quindi 10 carte per seme), quanti sono i risultati r che NON contengono le carte di *denari*?
Anche qui si tratta di un problema di *combinazioni*, che però va affrontato più criticamente: infatti vogliamo estrarre le 40 carte escludendone 10, in quanto essi rappresentano dei semi; quindi sostanzialmente il "corpo" delle carte sono solo 30.

$$r = \binom{40-10}{3} = \binom{30}{3} = 4060$$

PROBLEMA 3.1.B Considerando lo stesso mazzo di carte, ora voglio invece calcolare i risultati $\tilde{r}$ che contengono invece i *denari*.
Un approccio particolarmente furbo è quello semplicemente di prendere t (ovvero tutte le combinazioni possibili) e sottrarli per il numero dei risultati senza i denari; infatti l'insieme dei risultati *con* i denari è complemento dell'insieme dei risultati *senza* i denari.
Quindi,

$$\tilde{r} = 9880 - 4060 = 5820$$

Oppure un altro approccio comunque accettabile è di considerare tutte le combinazioni dei risultati con esattamente *un* seme, poi *due* semi e infine *tre* semi e infine sommarli.
Infatti,

$$\tilde{r} = \binom{10}{1}\binom{30}{2} + \binom{10}{2}\binom{30}{1} + \binom{10}{3}\binom{30}{0} = 5820$$

PROBLEMA 3.2. Il Lotto. Ho 90 bussolotti, ovvero dei numeri; ne estraggo 5. Quali sono le possibili estrazioni? Anche qui si tratta di un caso di *combinazioni* in quanto non tiene conto dell'ordine dei numeri estratti (in quanto essi vengono già ordinati in un'ordine crescente).

$$n_{\text{estrazioni}} = \binom{90}{5} \approx 44 \cdot 10^6$$

PROBLEMA 3.3. Ho una scacchiera 5×5 e 6 pedine uguali.
In quanti modi posso mettere le pedine sulla scacchiera, se voglio che tutte le righe e tutte le colonne abbiano almeno una pedina?

⚠ **Questa è semplicemente la MIA soluzione proposta, quindi può essere che risulti sbagliata.**

PROPOSTA DELLA SOLUZIONE. Ragioniamo nel seguente modo:

1. Voglio porre le prime 5 pedine in modo tale che il vincolo venga rispettato (quindi tutte le righe e le colonne hanno almeno una pedina piazzata), poi per porre la 6-esima pedina liberamente.
2. Per le 5 pedine ragiono così:
    1. Voglio porre la prima pedina sulla prima riga e su qualsiasi colonna. Ho quindi 5 possibilità.
    2. Ora voglio porre la seconda pedina sulla seconda riga; però non posso porlo sulla stessa colonna scelta dalla prima pedina, dandomi una scelta in meno. Ho quindi 4 possibilità.
    3. Mi accorgo che qui si tratta di un semplice problema di *permutazioni (o disposizioni di oggetti a 5 a 5)*, ovvero che per calcolare tutte le possibilità devo fare $5! = 5 * 4 * 3 * 2 * 1$.
3. Ora considero la 6-esima pedina: se le altre 5 pedine hanno già occupato le loro caselle, allora mi rimangono solo 20 caselle $(25 - 5 = 20)$.
4. Quindi ottengo il risultato

$$x = 20(5!) = 2400$$

Proposizioni

Breve descrizione di cos'è una proposizione...

Proposizione

Una proposizione è una parte del discorso, ovvero un'affermazione, a cui si associa un valore di verità o falsità
ESEMPI

- q: *Guillame* è *più alto di 1,80m* -> V
- r: *Rome* è la capitale della *Francia* -> F
- r: *Domani pioverà* -> ? => NON è ammissibile come proposizione, in quanto non si può dire con certezza; invece con la teoria della probabilità si può assegnare un valore da 0 a 1.
  Per dare un nome a una proposizione si usano le lettere $p, q, r, \dots$
  Invece per i valori di verità o falsità essi sono V o F

Punti di aderenza e di accumulazione

Definizione di punto di aderenza e di accumulazione. La chiusura e il derivato di un insieme. Primo teorema di Bolzano-Weierstraß.

---

1. Punti di aderenza (o di chiusura)

DEF 1.1. Sia $E \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$.
x_0 si dice **punto di chiusura (o di aderenza)** per E se è vera la seguente:

$$\forall r > 0 : ((x_0 - r, x_0 + r) \cap E) \neq \emptyset$$

Ovvero in ogni *palla/intorno centrato di* x_0 (Intorni, **DEF 2.1.**) devono esserci elementi di E.
SUBDEF 1.1.1. L'insieme dei *punti di chiusura* dell'insieme E si dicono la **chiusura (o aderenza) di** E, scritto come $\overline{E}$.

ESEMPIO 1.1.
Consideriamo l'insieme $E = (1, 2)$ e voglio trovare gli elementi di $\overline{E}$.
Per farlo è possibile disegnare il grafico di E, poi *"testare"* ogni elemento della retta $\mathbb{R}$ per vedere quali sono i potenziali elementi di $\overline{E}$.
[GRAFICO DA FARE]
Si evince che:

1. I numeri $0, \frac{1}{2}$ *non* sono *punti di aderenza* per E, in quanto è possibile individuare *almeno* un intorno fuori da E (ovvero che non contenga elementi di E).
2. 1 è un *punto di aderenza*, in quanto per tutti gli intorni in x_0 abbiamo sempre almeno un elemento di E; infatti si deve sempre *"andare a destra"*, *"entrando"* in E. Analogo il discorso per 2.
   In conclusione è possibile individuare

$$\overline{E} = [1, 2]$$

   OSS 1.1. Osserviamo che per ogni insieme è vera che

$$E \subseteq \overline{E}$$

   ESEMPIO 1.2.
   Considero l'insieme

$$E = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \diagdown \{0\}\}$$

poi voglio trovare le seguenti: $\overline{E}, E^{\circ}, \partial E$.

3. $\overline{E} = E \cup \{0\}$ e $\partial E = E \cup \{0\}$; a questi insiemi aggiungiamo il numero 0 in quanto *per l'Archimedeità di* $\mathbb{R}$ (Conseguenze dell'esistenza dell'estremo superiore, **TEOREMA 3.1.**) è sempre possibile trovare un n tale che

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n : 0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

4. $E^{\circ} = \emptyset$; infatti E è definita tramite gli $\mathbb{N}$, che presenta dei *"buchi"* in $\mathbb{R}$.

ESEMPIO 1.3.
Voglio studiare l'insieme dei *numeri razionali* $\mathbb{Q}$ (Richiami sui Numeri Razionali).

1. Sicuramente

$$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

per la *densità di* $\mathbb{Q}$ *in* $\mathbb{R}$ (Conseguenze dell'esistenza dell'estremo superiore, **TEOREMA 4.1.**). Ovvero da ciò consegue che prendendo un punto $q_0 \in \mathbb{Q}$, è possibile trovare sempre dei numeri razionali per qualsiasi *intorno* con $r > 0$. Infatti

$$\forall r > 0, \exists a \in \mathbb{Q} : q_0 + r > a > q$$

2. I punti di frontiera $\partial \mathbb{Q}$ è anch'esso $\mathbb{R}$ per motivi analoghi.
3. Per *l'assioma di Dedekind* (Assiomi dei Numeri Reali, **ASSIOMA S)**) sappiamo che tra un numero razionale q_0 e un altro numero (in questo caso prendiamo $q_0 + r, \forall \varepsilon > 0$) dev'esserci un numero *irrazionale* che non appartiene a $\mathbb{Q}$; allora non ci sono dei *punti interni* (Punti interni, esterni e di frontiera, **DEF 1.1.**).

Proprietà della chiusura

TEOREMA 1.1. Possiamo enunciare le seguenti proprietà per la *chiusura* di E.
Sia $E \subseteq \mathbb{R}$, allora sono vere che:

1. $\overline{E}$ è un *insieme chiuso*. Per provare questo, bisognerebbe dimostrare che l'insieme complementare della chiusura di E è *aperto*; quindi bisogna considerare i punti che non stanno né in E né nella sua chiusura $\overline{E}$ e poi dimostrare che esiste un'intervallo di ogni punto che non sta nella chiusura.
2. $\overline{E}$ è *il più piccolo chiuso* che contiene E. Quindi ho in mente una *relazione d'ordine* (Relazioni, **DEF 4.1.**), ovvero dal punto di vista di quella d'inclusione. Ovvero

$$A > B \iff B \subseteq A$$

3. Un insieme E è *chiuso* se e solo se $\overline{E} = E$

2. Punti di accumulazione

DEF 2.1. Sia $E \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Si dice che x_0 è un **punto di accumulazione di** E se è vera che

$$\forall r > 0, (]x_0 - r, x_0 + r[\ \cap E) \diagdown \{x_0\} \neq \emptyset$$

ovvero un *punto di aderenza* escludendo però il punto x_0 stesso; quindi un punto x_0 è di accumulazione per E se in ogni intorno di x_0 ci sono punti di E diversi da se stesso.
SUBDEF 2.1.1. L'insieme dei *punti di accumulazione per* E si chiama **derivato** di E, demarcata col simbolo

$$\mathcal{D}E$$

e si legge come *"d corsivo maiuscolo"*.

OSS 2.1. Come abbiamo definito degli *intorni di* $+\infty$ *o di* $-\infty$ in Intorni, **DEF.3.2.**, è possibile analogamente definire anche $+\infty$ o $-\infty$ come *punti di accumulazione* di un insieme E. Un $+\infty$ è punto di accumulazione per E

vuol dire che si verifica il seguente:

$$\forall M > 0, (M, +\infty) \cap E \neq \emptyset$$

ovvero

$$\forall M > 0, \exists x_0 \in E : x > M$$

ovvero che per ogni semiretta a partire da M, dev'esserci almeno un elemento in comune tra questa semiretta e l'insieme E con $+\infty$ come punto di accumulazione.
Analoga la definizione di un insieme E che ha $-\infty$ come punto di accumulazione.

TEOREMA 2.1. Sia $E \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$. x_0 è *punto di accumulazione per* E **se e solo se** in *ogni* intorno di x_0 ci sono *infiniti* punti di E.
DIMOSTRAZIONE 2.1. Questa dimostrazione si articola in due sotto-dimostrazioni.

1. Dimostriamo che *se in ogni intorno di* x_0 *ci sono infiniti punti di* E*, allora* x_0 *è di accumulazione per* E: questo è evidentemente vero, in quanto se in ogni intorno di x_0 ci sono infiniti punti di E, allora dev'esserci almeno un elemento di E in questo intorno diverso da x_0.
2. Ora notiamo il viceversa; ovvero che *se* x_0 *è di accumulazione per* E *allora in ogni suo intorno ci sono infiniti punti di* E.
   Per dimostrare questa proposizione, dimostriamo la negazione della contraria; ovvero che se in *ogni intorno di* x_0 *ci sono elementi finiti di* E*, allora* x_0 *non è punto di accumulazione per* E. (Logica formale - Sommario)
   Supponiamo quindi che x_0 abbia un intorno in cui ci sono un numero finito punti di E: allora

$$(x_0 - r, x_0 + r) \cap E = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$$

   Che graficamente corrisponde a
   [GRAFICO DA FARE]
   Considero dunque $r = \min(\{d(x_0, x_j), \forall j \in \{1, 2, \dots, k\}\})$ ovvero la *minima* distanza tra x_0 e un qualunque punto

di E. Allora risulta che

$$((x_0 - r, x_0 + r) \cap E) \diagdown \{x_0\} = \emptyset$$

il che ci dimostra che x_0 *non* è di accumulazione per E. (oppure è un punto isolato).
■

ESEMPIO 2.1. Prendiamo di nuovo l'intervallo

$$E = (1, 2)$$

E voglio individuare $\mathcal{D}E$. Con lo stesso approccio di **ESEMPIO 1.1.**, *"testiamo"* dei elementi della retta reale per vedere se possono essere dei *punti di accumulazione*.

1. Ovviamente 0 non può essere punto di accumulazione.
2. $1, 2$ sono *punti di accumulazione* per E in quanto disegnando un qualsiasi intorno di questi punti, si deve per forza disegnare un intervallo che contenga elementi di E. Analogo il discorso per i numeri $1 \leq x \leq 2$.
   Allora

$$\mathcal{D}E = [1, 2]$$

ESEMPIO 2.2. Prendiamo l'insieme

$$E = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \diagdown \{0\}\}$$

Con lo stesso approccio di sempre, individuiamo gli elementi di $\mathcal{D}E$.

3. 1 non è punto di accumulazione. Infatti è possibile individuare un intorno $(1 - r, 1 + r)$ che non abbia elementi di E: basta porre $r = 0, 1$.
4. Analogo discorso per tutti gli elementi n ponendo $r = |\frac{1}{n^2+n}|$.

5. 0 è punto di accumulazione per l'*Archimedeità* dei reali (Conseguenze dell'esistenza dell'estremo superiore, **TEOREMA 3.1.**). Infatti per qualsiasi r è sempre possibile trovare $n \in \mathbb{N}$ tale che

$$0 < \frac{1}{n} < 0 + r$$

Allora $\mathcal{D}E = \{0\}$.

ESEMPIO 3.3. Prendiamo i *numeri naturali* (Numeri Naturali - Sommario).
Si scopre che $\mathcal{D}\mathbb{N} = \emptyset$; non esistono i numeri naturali che siano dei *punti* $\mathbb{R}$ *di accumulazione per* $\mathbb{N}$, in quanto tutti questi numeri distano tra di loro. Basta infatti prendere l'intorno in $n \in \mathbb{N}$ di raggio $0,5$. Invece è possibile dire che $+\infty$ è punto di accumulazione per $\mathbb{N}$, in quanto grazie all'*Archimedeità dei reali* (Conseguenze dell'esistenza dell'estremo superiore, **TEOREMA 2.1.**) si verifica la seguente condizione:

$$\forall M > 0, \exists n \in \mathbb{N} : n > M \text{ dove } \varepsilon = 1$$

Primo teorema di Bolzano-Weierstraß (forma insiemistica)

Enunciamo uno dei teoremi più importanti dell'*analisi matematica*, che ci garantisce l'esistenza di un punto di accumulazione in $\mathbb{R}$ per una categoria di insiemi.

TEOREMA 2.2. *Primo teorema di Bolzano-Weierstraß*
Sia $E \subseteq \mathbb{R}$, E un insieme *infinito* e *limitato*. (Insiemi limitati, maggioranti, massimo e teorema dell'estremo superiore, **DEF 1.3.**)
Allora si verifica il seguente:

$$\exists \xi \in \mathbb{R} : \xi \in \mathcal{D}E$$

ovvero che esista un numero ξ che sia *punto di accumulazione* per E.

DIMOSTRAZIONE 2.2.

Se E è un insieme *limitato* allora per il *teorema dell'esistenza dell'estremo superiore e inferiore* (Insiemi limitati, maggioranti, massimo e teorema dell'estremo superiore, **TEOREMA 4.1.**) esistono

$$a_0 = \inf(E); b_0 = \sup(E)$$

ovvero $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ e tali per cui $E \subseteq [a_0, b_0]$.
Allora considero c_0 il *punto medio tra* a_0 *e* b_0; ora considero i due intervalli

$$[a_0, c_0]; [c_0, b_0]$$

che graficamente corrisponde a
[GRAFICO DA FARE]
Inoltre *almeno* uno di questi intervalli devono essere *infiniti*, in quanto se supponessimo per assurdo che entrambi gli intervalli fossero finiti, allora la loro unione sarebbe anch'essa finita.
Tenendo questo in considerazione, scegliamo uno di questi. Ora chiamo questo intervallo $[a_1, b_1]$, dove $a_1 = c_0$ oppure $b_1 = c_0$, a seconda dell'intervallo scelto.
Quindi otteniamo una *successione di intervalli inscatolati, limitati, infiniti e dimezzati* (Intervalli)

$$(I_n)_n$$

La *forma forte del teorema di Cantor* (Conseguenze dell'esistenza dell'estremo superiore, **TEOREMA 5.2.**) ci dice che facendo l'intersezione di tutti questi intervalli otteniamo un ξ.
Ora voglio trovare un *intorno* di ξ che contenga un qualunque insieme *infinito* $[a_n, b_n]$. Ovvero voglio verificare che

$$\exists r > 0 : [a_n, b_n] \subseteq (\xi - r, \xi + r)$$

Allora la condizione è

$$r > d(a_n, b_n) = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$$

il che è possibile in quanto ricordandomi che

$$\frac{b_0 - a_0}{n} \geq \frac{b_0 - a_0}{2^n}$$

e tenendo conto *l'Archimedeità di* $\mathbb{R}$ (Conseguenze dell'esistenza dell'estremo superiore, **TEOREMA 3.1.**) la condizione sopra citata è totalmente possibile visto che

$$\exists \bar{n} : 0 < \frac{b_0 - a_0}{2^{\bar{n}}} \leq \frac{b_0 - a_0}{\bar{n}} < r$$

Abbiamo quindi che l'intorno in ξ di raggio r contiene l'insieme infinito $[a_{\bar{n}}, b_{\bar{n}}]$, di conseguenza anche l'intorno stesso è infinito; dato che contiene infiniti punti di E, per il **TEOREMA 2.1.** ξ è *punto di accumulazione* per E.

Punti interni, esterni e di frontiera

Definizioni di punti interni, punti interni e punti di frontiera. Esempi.

---

0. Preambolo

Questo argomento presuppone la conoscenza dell'argomento di Intervalli.

1. Punti interni

DEF 1.1. Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$, si definisce x_0 **interno** a E se viene verificato che

$$\exists r > 0 :]x_0 - r, x_o + r[\ \subseteq E$$

ovvero se esiste un *intorno* di x_0 che è contenuto in E (Intorni, **DEF 3.1.**).

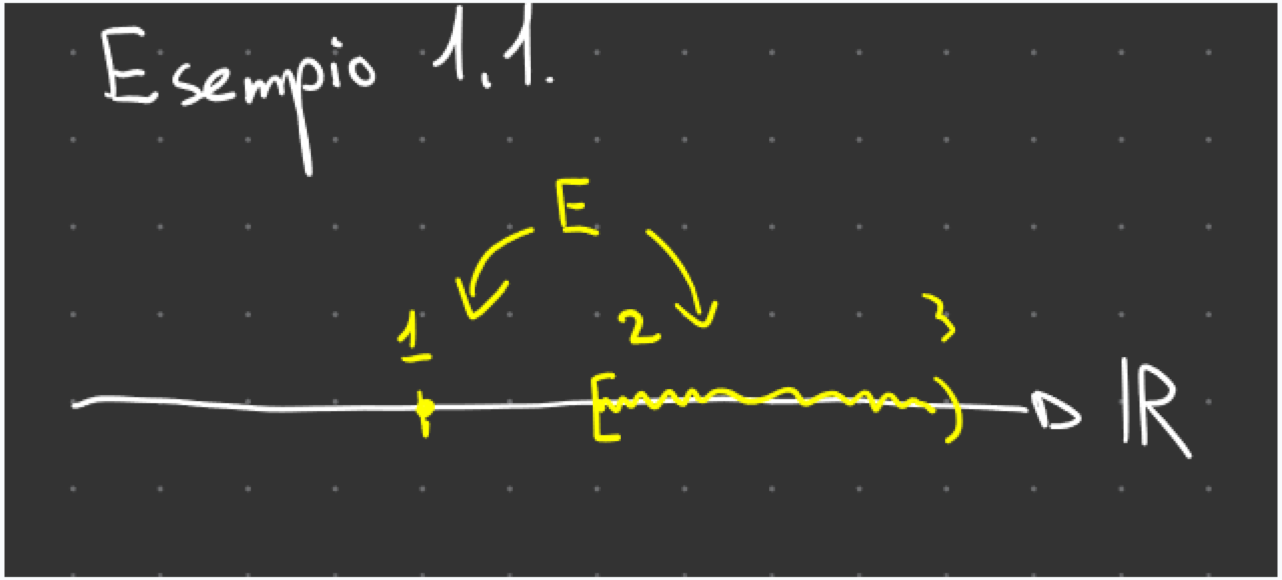
DEF 1.2. Chiamo **l'insieme dei punti interni a** E come E°.

Esempio

ESEMPIO 1.1. Sia

$$E = \{1\} \cup [2, 3)$$

e voglio trovare *l'insieme dei punti interni* E°.
Per farlo devo innanzitutto disegnare il grafico di E per poter capire come procedere.



Ora *"provo"* ogni numero fissando x_0 il numero scelto;

- Scegliendo $x_0 = 1$ vedo chiaramente che non è *punto interno*, in quanto è impossibile che esista un intorno centrato a raggio r ad esso.
- Scegliendo $x_0 = 2$ vedo che neanche questo è un *punto interno*; non riesco a definire un intorno centrato tale che a *"sinistra"* di 2 c'è un punto appartenente a E.
- Però scegliendo $x_0 = 2.001$ è possibile; infatti posso definire un intorno di x con $r = 0.001$.
- Analoghi i discorsi per $x_0 = 3$ e $x_0 = 2.999$
- Concludo allora che

$$E^\circ = (2, 3)$$

2. Punti esterni

DEF 2.1. Un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ si dice **esterno** ad un *insieme* $E \subseteq \mathbb{R}$ se è *interno* al complementare di E, ovvero $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}E$ (Teoria degli Insiemi).
Quindi

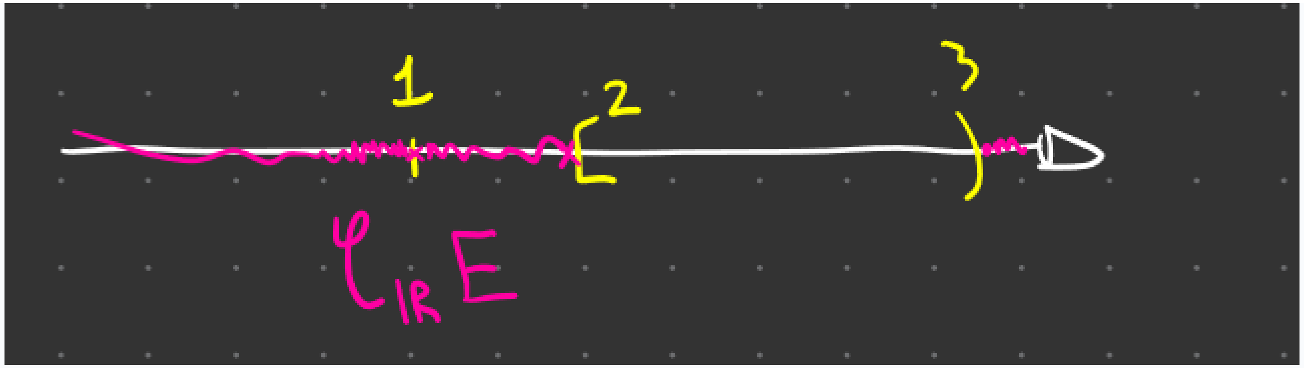
$$x_0 \text{ è esterno} \iff \exists r > 0 : (x_0 - r, x_0 + r) \subseteq \mathcal{C}_{\mathbb{R}}E$$

Esempio

ESEMPIO 2.1. Considerando l'esempio di prima con

$$E = \{1\} \cup [2, 3)$$

ora vogliamo trovare *l'insieme di tutti i punti esterni*. Allora usando lo stesso grafico di prima, faccio esattamente i stessi procedimenti di prima considerando però il *complemento di* E, ovvero tutti i punti che non appartengono ad E.



Usando la stessa procedura in **ESEMPIO 1.1.**, troviamo che

$$\{\text{punti esterni di } E\} = (-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (3, +\infty)$$

3. Punti di frontiera

DEF 3.1. Un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ si dice **frontiera per** E se questo punto *non è ne interno ne esterno ad* E.
OSS 3.1. Questo equivale a negare la proposizione

$$[\exists r > 0 : (x_0 - r, x_0 + r) \subseteq E] \vee [\exists r' > 0 : (x_0 - r', x_0 + r') \subseteq \mathcal{C}E]$$

che secondo le *leggi di De Morgan* e delle regole osservate (Logica formale - Sommario) diventa

$$[\forall r > 0, (x_0 - r, x_0 + r) \not\subseteq E] \wedge [\forall r' > 0, (x_0 - r', x_0 + r') \not\subseteq \mathcal{C}E]$$

e dato che

$$A \not\subseteq B \iff A \cap \mathcal{C}_U B \neq \emptyset$$

ovvero che un insieme A non è sottoinsieme di B se e solo se l'intersezione tra A e il complemento di B non è vuota (ovvero ha almeno *un elemento*), questo diventa

$$[\forall r > 0, (x_0 - r, x_0 + r) \cap \mathcal{C}E \neq \emptyset] \land [\forall r' > 0, (x_0 - r', x_0 + r') \cap E \neq \emptyset]$$

ovvero che deve valere la seguente:

- *Ogni* intorno di x_0 deve contenere *sia* punti di E e il suo complemento $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}E$.

DEF 3.2. Definiamo **l'insieme dei punti di frontiera di** E come

$$\partial E$$

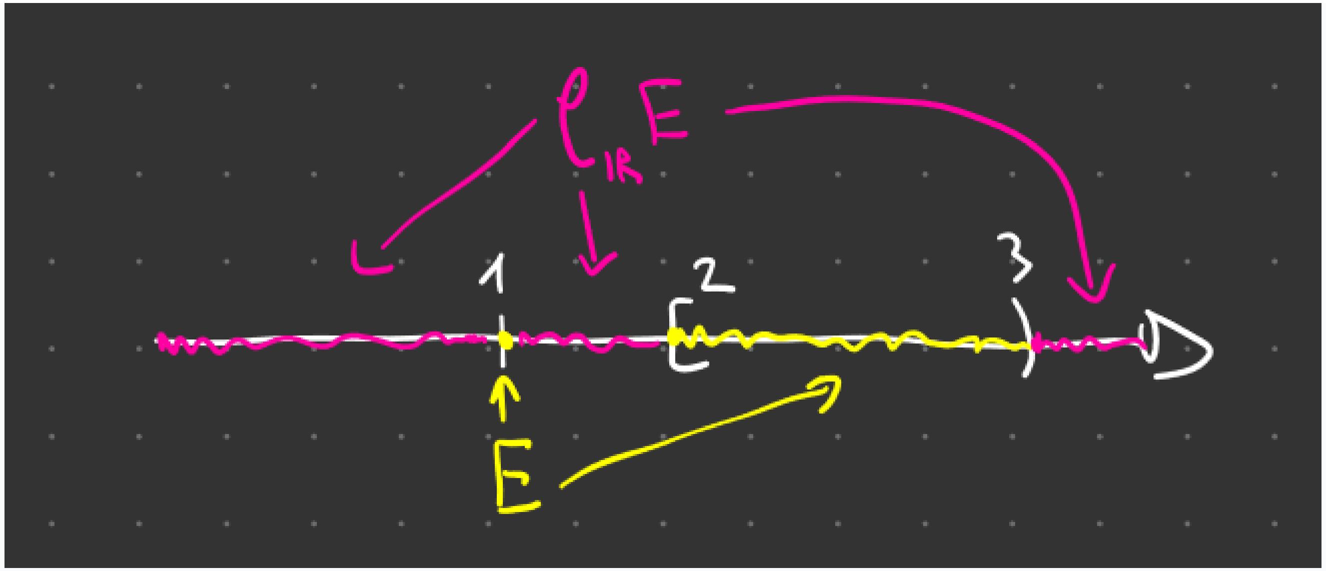
e si legge come *"delta storto E"*

Esempi

ESEMPIO 3.1. Considerando lo stesso esempio di prima, ovvero

$$E = \{1\} \cup [2, 3)$$

vogliamo trovare ∂E.
Procedendo con lo stesso disegno, cerchiamo di *"provare"* ogni punto per trovare elementi di ∂E.

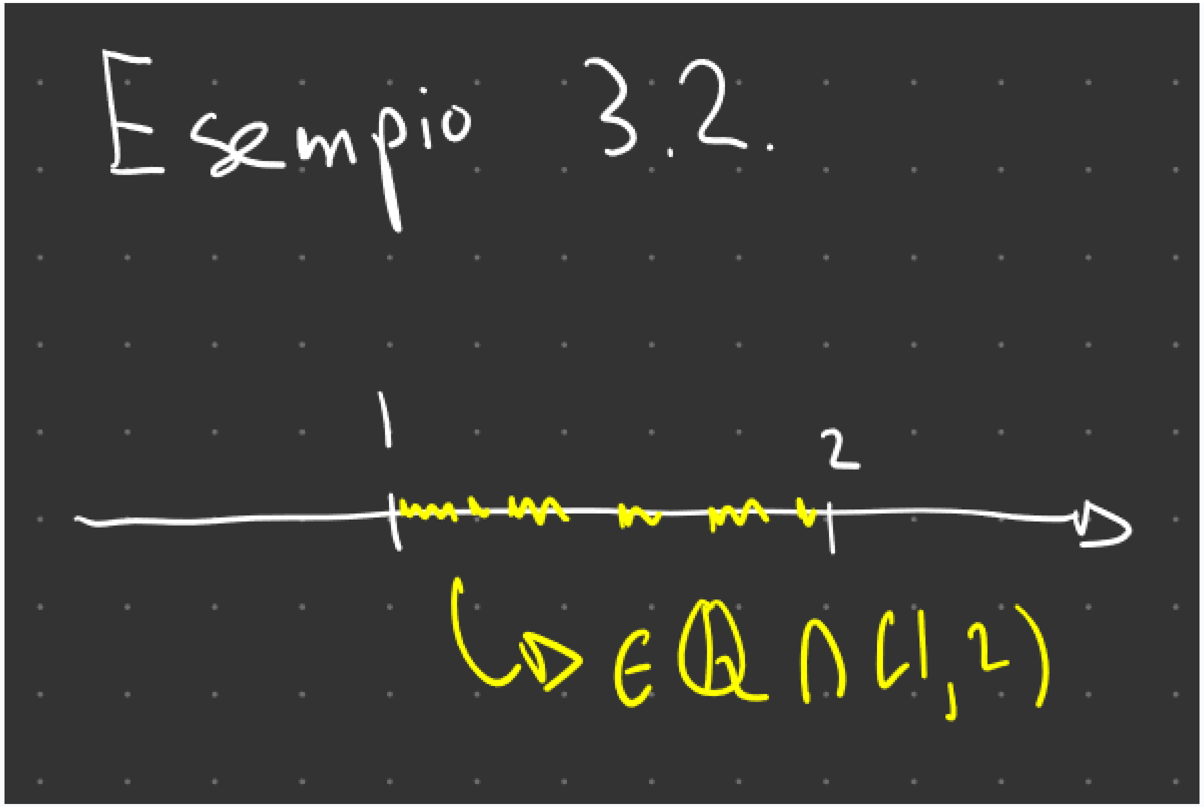


- $x_0 = 0$; Questo non è elemento di ∂E, in quanto posso facilmente trovare un intorno che contenga *solo* elementi del complemento di E.
- $x_0 = 1$; Provando a considerare ogni intorno di x_0 trovo che deve per forza dev'esserci un punto sia in E che nel suo complemento.
- $x_0 = 2$; Stesso discorso analogo di prima.
- $x_0 = 3$; Di nuovo lo stesso discorso.
- $x_0 = 2,5$; Qui invece è possibile trovare un intorno che contenga *solo* punti di E. Ad esempio un intorno centrato in $2,5$ con raggio $r = 0,1$.

ESEMPIO 3.2. Consideriamo finalmente dei casi diversi da quelli esaminati prima. Sia

$$E = \mathbb{Q} \cap (1, 2)$$

ovvero tutti i numeri *razionali* compresi tra *1, 2* esclusi.
Disegnando di nuovo un disegno,



Scopro le seguenti:

- $E^\circ = \emptyset$; infatti in questo insieme *non* vi ci sono punti interni, in quanto l'*assioma di separazione* non vale in $\mathbb{Q}$ (Assiomi dei Numeri Reali, **S)**, **OSS 6.2.**); quindi ci sono sempre dei *"buchi"* tra due numeri razionali, ovvero dei numeri irrazionali. Infatti è possibile dimostrare che i numeri irrazionali sono *densi* in $\mathbb{R}$.
- $\partial E = [1, 2]$; qui si verifica un fenomeno strano, ovvero che si verifica che ∂E è più *"grande"* di E stessa.
  Questo si verifica perché, da un lato abbiamo la *densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$* (Conseguenze dell'esistenza dell'estremo superiore, **TEOREMA 4.1.**); infatti se considero un punto q_0 in $\mathbb{Q}$ e considero gli *"estremi"* del suo intorno $(q_0 - r, q_0 + r)$ allora tra $q_0 - r$ e $q_0 + r$ dev'esserci almeno un numero razionale.
  Però allo stesso tempo, come visto prima, i numeri irrazionali sono *densi* in $\mathbb{R}$; di conseguenza se ci sono sia dei numeri razionali (appartenenti a E) che dei irrazionali (appartenenti al complemento di E) allora vediamo che tutti i punti di E (gli estremi inclusi) sono *punti di frontiera*.

Rappresentazione dei Numeri Complessi

Rappresentazione dei numeri complessi come somma di parte reale e parte immaginaria; il piano di Argand-Gauss.

---

1. Rappresentazione

Dalle considerazioni prese in Operazioni sui Numeri Complessi possiamo fare le seguente considerazioni per poter rappresentare un numero complesso in un modo alternativo.

DEF 1.1. Prendendo un numero complesso di forma $(a, b) \in \mathbb{C}$, definiamo le seguenti.

1. $\mathbb{1}$ il numero complesso di forma $(1, 0)$
2. i il numeri complesso di forma $(0, 1)$

Se li moltiplichiamo per se stessi otteniamo:

1. $\mathbb{1} \cdot \mathbb{1} = \mathbb{1} = (1, 0)$
2. $i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 * 0 - 1 * 1, 0 * 1 + 1 * 0) = (-1, 0) = -\mathbb{1}$
   Allora si può affermare che $i^2 = -1$ è la soluzione dell'equazione $x^2 + 1 = 0$.

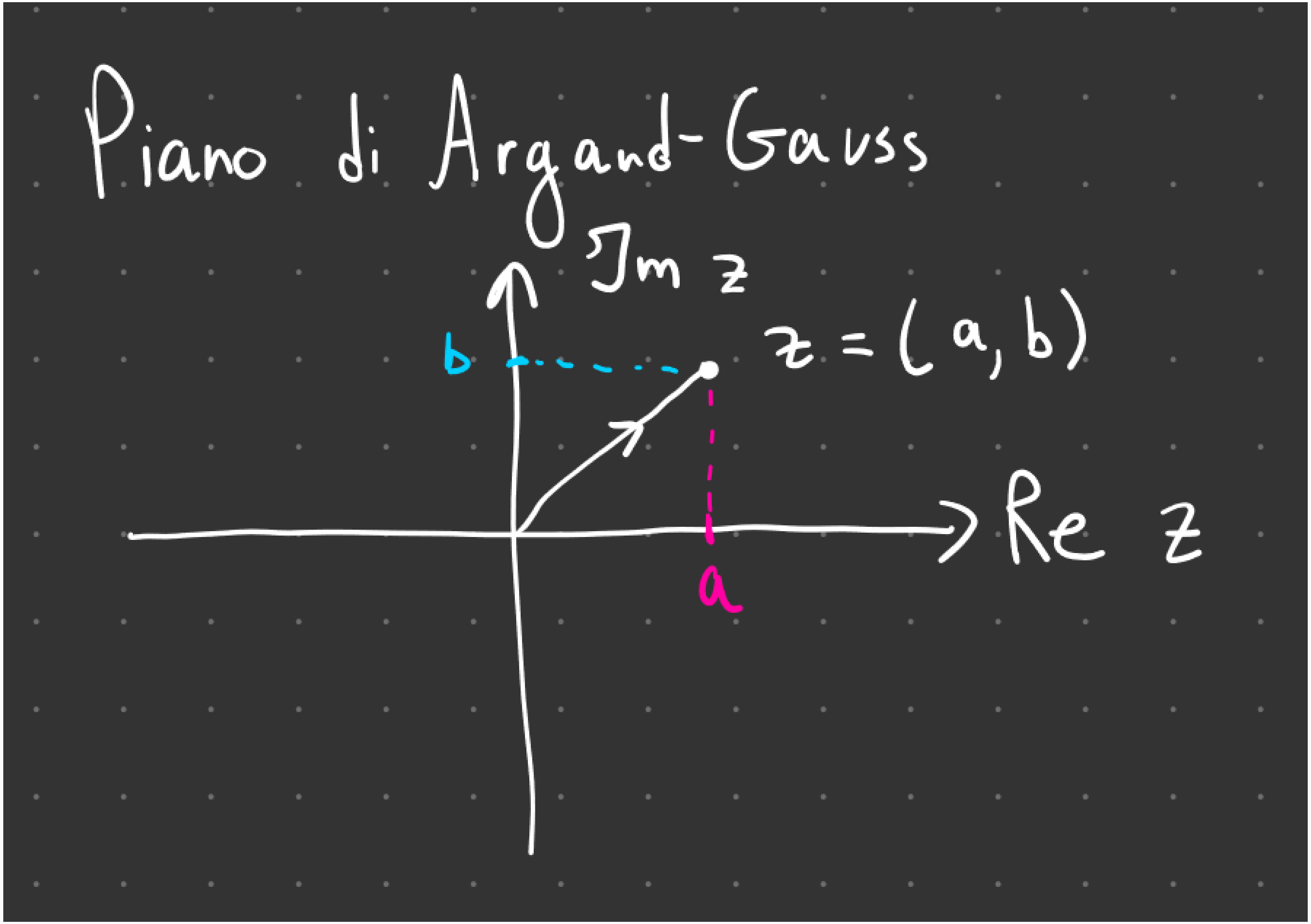
CONCLUSIONE.
Allora posso scrivere il numero complesso (a, b) come il seguente:

$$\begin{aligned}(a, b) &= (a, 0) \cdot (1, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1) \\ &= a(1, 0) + b(0, 1) \\ (a, b) &= a + ib\end{aligned}$$

DEF 2.2. Il numero a si dice la **parte reale** e viene definita come $\mathrm{Re}(z)$, il numero b $(\mathrm{Im}(z)$)si dice la **parte immaginaria**.

2. Piano di Argand-Gauss

Se prendiamo il *piano cartesiano* π applicando le regole definite per $\mathbb{C}$, allora otterremo il piano di *Gauss* (oppure di *Argand-Gauss*), dove ogni punto del piano è un *numero complesso*.
Eccovi un esempio grafico:



Infatti, *geometricamente* un punto z può rappresentare un *vettore geometrico* (Vettori Liberi) con punto di applicazione $(0, 0)$.

Chiamiamo un punto del piano come z, che può essere scritto come

$$z = \mathrm{Re}(z) + i\mathrm{Im}(z)$$

3. Esercizi

Considerando le Operazioni sui Numeri Complessi e questa rappresentazione di un numero complesso z, si propongono alcuni esercizi:

ESERCIZIO 3.1. Calcola

$$(2+3i)+(4+i)$$

ESERCIZIO 3.2. Calcola

$$(2-3i)(2+3i)$$

ESERCIZIO 3.3. Calcola

$$(1+i)(2-i)(7i)$$

ESERCIZIO 3.4. Calcola

$$\frac{i+1}{i-1}$$

Relazioni

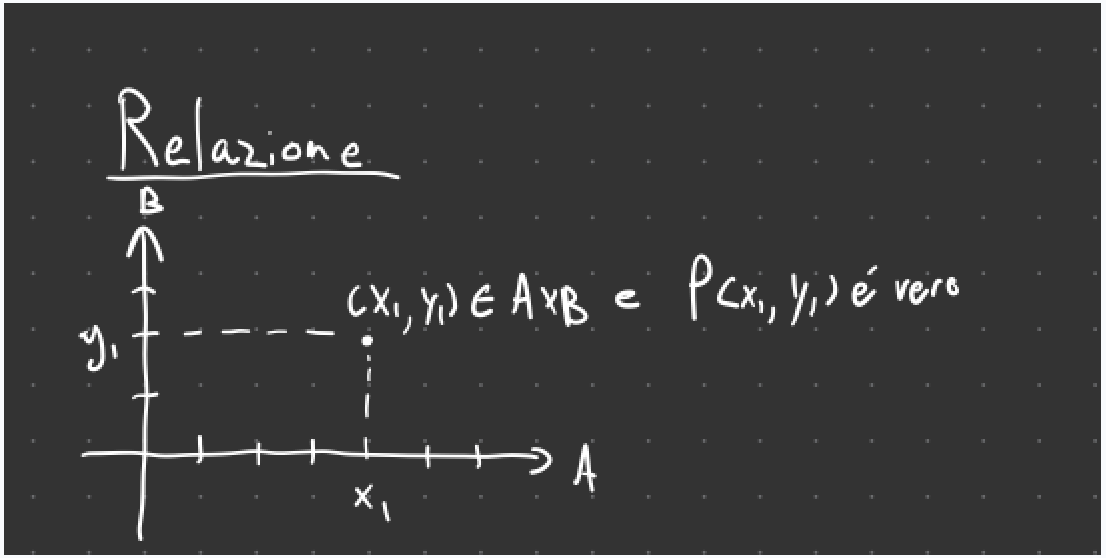
Definizione di relazioni con esempi; alcuni attributi che possono essere dati, relazioni di equivalenza e classi di equivalenza.

DEF 1. Relazioni

OSS 3.1. Si vuole rappresentare A come l'insieme dei numeri divisibili per tre:

$$\begin{aligned} A &= \{n \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N} : n = 3k\} \\ &= \{n \in \mathbb{N} : \mathcal{P}(n)\} \end{aligned}$$

Notiamo che per definire A viene usato un predicato unario; si individuano *singoli elementi n* che soddisfano $\mathcal{P}(n)$.
Invece per definire *prodotti cartesiani* si può usare i *predicati binari*; qui individuo in $A \times B$ le coppie (a, b) che soddisfano un certo predicato $\mathcal{Q}(a, b)$.
ESEMPIO 3.1.1.
Siano gli insiemi A l'insieme dei *ragazzi in questa aula*, B l'insieme delle *ragazze in questa aula*; il predicato $\mathcal{P}(x, y) : \text{x è amico di y}$. Ora si vuole rappresentare graficamente il prodotto cartesiano $A \times B$.

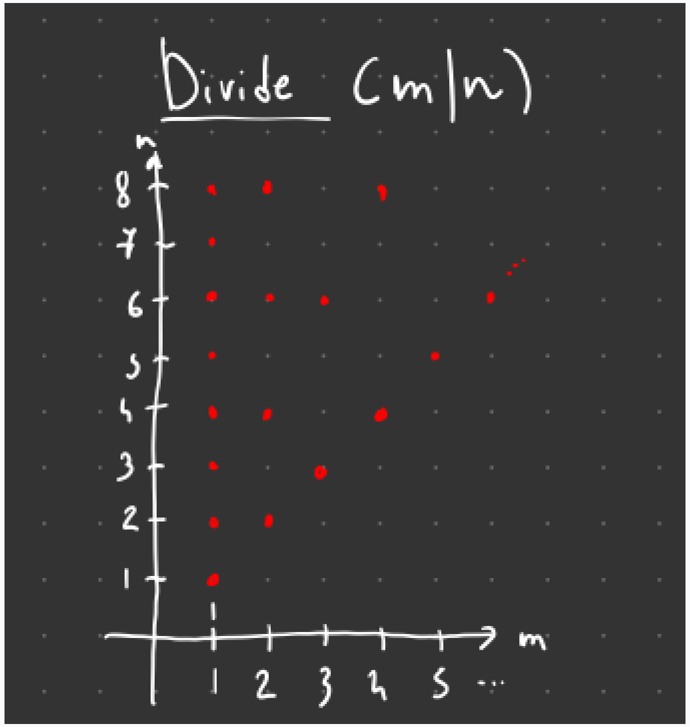


Se si individua che x è amico di y, allora si segna il punto (x, y) dove si verifica il predicato $\mathcal{P}(x, y)$.

Il predicato si definisce come una **relazione tra due insiemi**; in questo caso possiamo chiamarlo come una relazione *"d'amicizia"*.

DEF 3. Una **relazione** tra A e B si definisce come il *predicato $\mathcal{P}(x,y)$ a valori in $A \times B$.*
SUBDEF 3.1. Se $A = B$, allora si dice che la **relazione** è una **relazione su A.

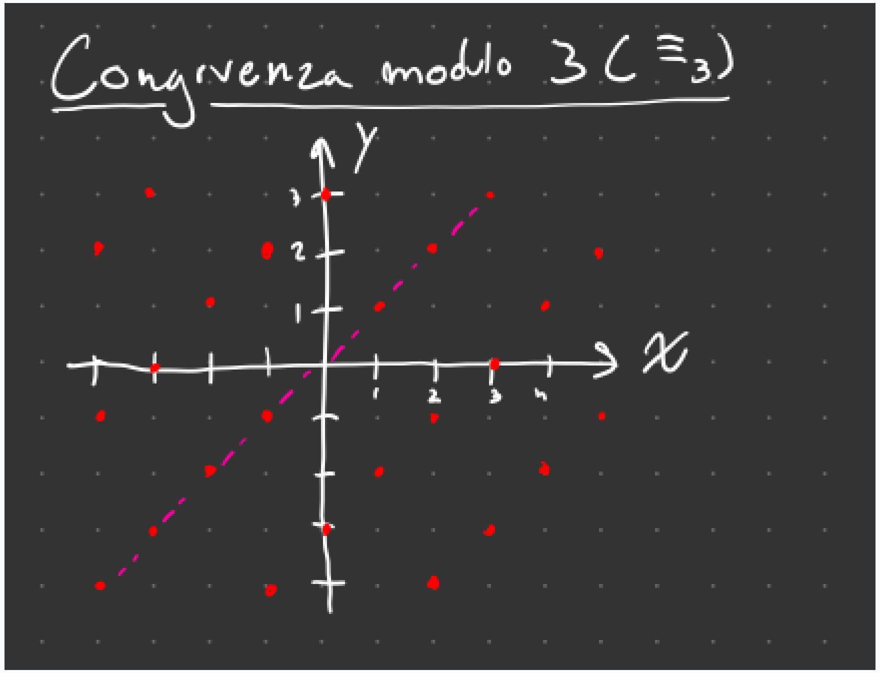
ESEMPIO 3.1.
Sia $A = \mathbb{N} \diagdown \{0\}$; "|" la relazione *"divide"*; diciamo che $n|m$ se $\exists k \in \mathbb{N} : m = nk$
SUBESEMPIO 3.1.1. $3|12$ è vero in quanto $k = 4$, $3|5$ invece è falso in quanto $\nexists k$.
GRAFICO DELLA RELAZIONE DIVIDE.



ESEMPIO 3.2. Consideriamo:

- $A = \mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
  - Breve nota storica: I numeri interi si denotano con $\mathbb{Z}$ dal tedesco *"(der) Zahl"*, ovvero *"Numero"*

- Sia $m = 3$
- x è in relazione con y se $\exists k \in \mathbb{Z} : x - y = 3k$
  - Questa relazione si definisce come **congruenza modulo n** e viene denotata come $x \equiv_n y$ o $x \equiv y \bmod n$
  GRAFICO DELLA RELAZIONE CONGRUENZA MODULO N(3).



DEF 2. Relazioni riflessive, simmetriche e transitive

Sia A un insieme; sia ρ una relazione in A; per dire che un elemento $a \in A$ è in relazione con $b \in A$ si scrive $a\rho b$.

DEF 4.1. Si dice che la relazione ρ è **riflessiva** se

$$\forall x \in A, x\rho x$$

DEF 4.2. Si dice che relazione ρ è **simmetrica** se

$$\forall x, y \in A, x\rho y \implies y\rho x$$

DEF 4.3. Si dice che la relazione ρ è **transitiva** se

$$\forall x, y, z \in A, x\rho y \wedge y\rho z \implies x\rho z$$

ESEMPIO 4.3.1. La relazione | (divide) è transitiva.
DIM.

$$\begin{aligned}&x|y \wedge y|z \overset{?}{\implies} x|z\\&1.\ x|y \iff \exists k_1 : y = k_1 x\\&2.\ y|z \iff \exists k_2 : z = k_2 y = (k_1 k_2)x = k_3 x \implies x|z\ \blacksquare\end{aligned}$$

ESERCIZIO. Verificare se $\equiv_n$ è transitiva.

1. Si prendono tre valori $x, y, z \in \mathbb{Z}$ e la relazione $\equiv_n$ su $\mathbb{Z}$
2. Dire che $\equiv_n$ è transitiva equivale a dire la seguente:
   1. $$x \equiv_n y \wedge y \equiv_n z \overset{?}{\implies} x \equiv_n z$$
   2. Per definizione,
   $$\begin{aligned}x \equiv_n y &\iff \exists k_1 \in \mathbb{Z} : x - y = nk_1\\y \equiv_n z &\iff \exists k_2 \in \mathbb{Z} : y - z = nk_2\\x \equiv_n z &\iff \exists k_3 \in \mathbb{Z} : x - z = nk_3\end{aligned}$$
   3. Si osserva che $(x - y) + (y - z) = x - z$; pertanto $x - z = nk_1 + nk_2 = n(k_1 + k_2)$ e si pone $k_3 = k_1 + k_2$, completando così la dimostrazione. $\blacksquare$

DEF 3. Relazione antisimmetrica

DEF 3. Siano: A un insieme, ρ una relazione; ρ si dice **antisimmetrica** se

$$\forall x, y \in A, x\rho y \land y\rho x \implies x = y$$

ESERCIZIO. Mostrare che $|$ è antisimmetrica.

1. Si considerano i due valori $x, y \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e la relazione $|$ su $\mathbb{N} \setminus \{0\}$
2. Per definizione,

$$\begin{aligned} x|y &\iff \exists k_1 \in \mathbb{N} : y = k_1 x \\ y|x &\iff \exists k_2 \in \mathbb{N} : x = k_2 y \end{aligned}$$

3. Osservare che:

$$x = y \iff k_1 x = k_2 y$$

   è vera se e solo se $k_1 = k_2$
4. Riprendendo il passaggio **2.**,

$$\begin{aligned} x|y \iff \exists k_1 \in \mathbb{N} : y &= k_1 x \\ y|x \iff \exists k_2 \in \mathbb{N} : x &= k_2 y \\ x &= k_1 k_2 x \\ k_1 k_2 &= 1 \end{aligned}$$

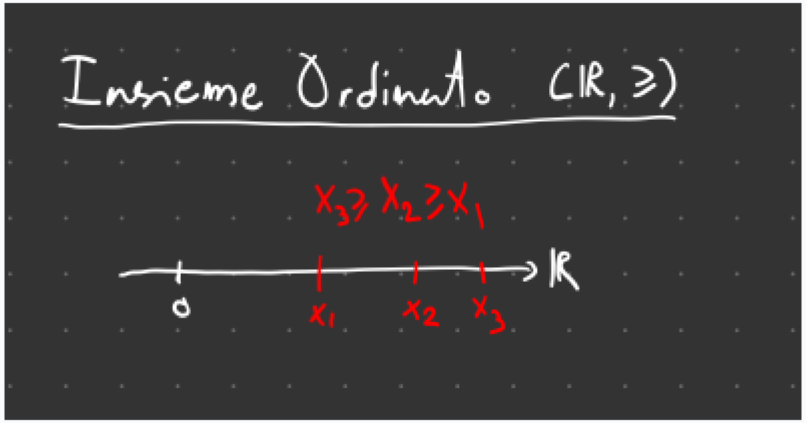
5. Osservare che $k_1 k_2 = 1$ è vera in $\mathbb{N}$ solo per l'unico valore $k_1 = k_2 = 1$. Riosservando il passaggio tre, notiamo che si è verificato che $k_1 = k_2$, dimostrando così che $|$ è antisimmetrica. ■

DEF 4. Relazione d'ordine

DEF 4. Se ρ è:

- Riflessiva
- Antisimmetrica
- Transitiva

  Allora si dice che ρ è una **relazione d'ordine** (ordinamento)
  SUBDEF 4.1. Se A è l'insieme, ρ una relazione d'ordine, allora si definisce (A, ρ) come un **insieme ordinato**
  ESEMPIO 4.1.1. $(\mathbb{R}, \geq)$ è un *insieme ordinato*; infatti se disponiamo su una riga tutti i numeri $\mathbb{R}$, si vede immediatamente che tutte e tre le condizioni si verificano. Ad esempio $x \geq x$ è vero in quanto $x = x$; oppure se $x \geq y \wedge y \geq x$, allora $x = y$.



DEF 4.1. Relazione d'ordine totale

DEF 4.1. Inoltre una *relazione d'ordine* ρ si definisce anche come una *relazione d'ordine* **totale** se $\forall x, y \in A, x\rho y \vee y\rho x$.

DEF 5. Relazione di equivalenza

DEF 5. Se ρ è:

- Riflessiva
- Simmetrica

- Transitiva
  Allora ρ viene definita come una **relazione d'equivalenza**.

DEF 5.1. Classe di equivalenza

DEF 5.1. Siano A un insieme (e $a \in A$) e ρ una relazione d'equivalenza, definisco la classe di equivalenza

$$[a]_\rho := \{b \in A : a\rho b\}$$

Quindi è un insieme che contiene *tutti* gli elementi in reazione di A.

ESEMPIO 5.1.

$$\begin{aligned}[0]_{\equiv_3} &= \{\dots, -3, 0, 3, \dots\} \\ [1]_{\equiv_3} &= \{\dots, -2, 1, 4, \dots\} \\ [2]_{\equiv_3} &= \{\dots, -1, 2, 5, \dots\}\end{aligned}$$

Si nota che $\forall k \in \mathbb{Z}, [0k]_{\equiv_3}$ sono le medesime; stesso discorso per $[1]_{\equiv_3}$ e per $[2]_{\equiv_3}$

DEF 5.1.1. Insieme Quoziente

L'insieme delle classi di equivalenza su un insieme A si chiama **insieme quoziente rispetto all'equivalenza**;

$$A \diagup \rho$$

ESEMPIO 5.1.1.1.

$$\mathbb{Z} \diagup \equiv_3 \quad = \{[0]_{\equiv_3}, [1]_{\equiv_3}, [2]_{\equiv_3}\}$$

Il concetto dell'**insieme quoziente** è utile in quanto essa può essere usata per certe situazioni nella vita reale.
ESEMPIO 5.1.1.2. Si vuole studiare $\equiv_{12}$, 12 essendo il numero delle lancette dell'orologio. Questo è utile in

quanto, se iniziassimo a contare le ore dall'ora 0 denotandolo come h, allora possiamo automaticamente trovare la posizione della lancetta ad una certa ora h, facendo semplicemente $[h]_{\equiv_{12}}$.

⚠ **Poi sono state spiegate altre robe su questo che non ho capito, boh**

Richiami sui Numeri Razionali

Richiami sui Numeri Razionali (propedeutica per studiare i numeri reali): la costruzione dei numeri interi $\mathbb{Z}$; la costruzione dei numeri razionali $\mathbb{Q}$; l'insufficienza di $\mathbb{Q}$ per rappresentare tutti i numeri. Dimostrazione dell'incommensurabilità di $\sqrt{2}$

---

1. La costruzione dei numeri interi

OSS 1.1. Osserviamo che a partire dai numeri naturali $\mathbb{R}$ è possibile costruire un altro insieme numerico più *completo* che ci permette di fare altre operazioni (oltre alla somma e moltiplicazione), ovvero i numeri *interi relativi* $\mathbb{Z}$ (*Zahl*), che viene definita come

$$\mathbb{Z} := \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$$

in cui ad ogni numero positivo z corrisponde ad un numero *negativo* per cui ci permette di fare una nuova operazione: ovvero la *sottrazione* $-$.
Tuttavia questa non è sufficiente in quanto questa *costruzione* non ci permette di fare un'altra operazione molto importante, ovvero la *divisione* $\div$.

2. La costruzione dei numeri razionali

OSS 2.1. Quindi a partire da $\mathbb{Z}$ è possibile costruire i numeri razionali $\mathbb{Q}$ (*Quoziente*), dove un numero $q \in \mathbb{Q}$ è un quoziente di un numero intero $\mathbb{Z}$ e di un numero razionale $\mathbb{N}$;

$$\mathbb{Z} := \{\frac{p}{q} \text{ con } p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \diagdown \{0\}\}$$

I numeri razionali quindi ci permettono *non solo* di *contare*, ma anche di *misurare*, dato che possiamo precisamente misurare delle grandezze tramite questi numeri.
Tuttavia non posso misurare *tutto*; infatti se voglio descrivere un oggetto geometrico con i numeri, ovvero un quadrato con il lato $l = 1$, non posso misurare la lunghezza della diagonale del quadrato.
Infatti questo segmento si dice una *grandezza incommensurabile*.

TEOREMA 2.1. Non esistono $n, k \in \mathbb{N}$ tali che

$$(\frac{n}{k})^2 = 2$$

DIMOSTRAZIONE. Qui ragioniamo *per assurdo*; ipotizziamo che la tesi sia vera invece che falsa, poi per trovare un assurdo, una contraddizione.

1. Supponiamo che esistano $n, k \in \mathbb{N}$ tali che

   $$(\frac{n}{k})^2 = 2$$

   inoltre non è restrittivo supporre che questi n, k non abbiano fattori in comune (quindi che siano ridotti ai minimi termini).

2. Ora,

$$\frac{n^2}{k^2} = 2$$
$$\text{allora } n^2 = 2k^2$$
$$\text{allora } 2 \mid n^2 \text{ è vera;}$$

3. Considerando la scomposizione di n in numeri primi, ovvero

$$n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_n^{k_n}$$

allora se n^2 è divisibile per un numero primo p_n, allora per forza anche n è divisibile per lo stesso numero primo, in quanto entrambi vengono moltiplicate per lo stesso p_n.

4. $$\begin{aligned} &\text{allora } 2 \mid n \text{ è vera;} \\ &\text{allora } n = 2m \\ &\text{allora } \frac{4n^2}{k^2} = 2 \\ &\text{allora } 4n^2 = 2k^2 \\ &\text{allora } k^2 = 2n^2 \\ &\text{allora } 2 \mid k \text{ è vera} \\ \text{ma allora anche } &2 \mid n \text{ è vera} \end{aligned}$$

5. Quindi sia n che k che sono pari, ciò vuol dire che hanno un fattore in comune (ovvero 2); ciò contraddice quello che abbiamo detto all'inizio, ovvero che n e k sono ridotti ai minimi termini. Di conseguenza non è possibile che esistano n e k. ■

CONCLUSIONE. Quindi i numeri razionali $\mathbb{Q}$ non sono sufficienti per misurare la diagonale di un quadrato; infatti è impossibile definire un $x \in \mathbb{Q}$ tale che $x^2 = 2$.

Sistemi di generatori

Breve definizione di combinazione lineare; Matrice come combinazione lineare di sistemi di generatori, indipendenza lineare

---

0. Combinazione lineare

DEF 0. Per **combinazione lineare** si intende *l'espressione* per cui prendo una serie di *vettori* v_i dall'$\mathbb{R}$-*spazio vettoriale* V (Spazi Vettoriali, **DEF 1.**, **DEF 1.1.**), scalo ciascuna di essa per uno scalare λ_i e li sommo; quindi stiamo parlando di

$$\lambda_1 \mathrm{v}_1 + \lambda_2 \mathrm{v}_2 + \cdots + \lambda_n \mathrm{v}_n$$

1. Sistemi di generatori

Consideriamo una *matrice* 2×2 (Matrice, **DEF 1.**), A. Consideriamo

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Ora consideriamo 4 matrici 2×2 *"speciali"*, ovvero

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};\ F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};\ G = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

infatti queste matrici hanno *tutte* le *entrate* nulle (0), fuorché una, la quale uguale ad uno (1).

Consideriamo allora la seguente *combinazione lineare* di queste quattro matrici:

$$3E + F - 2G + 4H$$

che secondo dei calcoli diventa proprio A, ovvero

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Si può ripetere questa costruzione, qualsiasi sia matrice A; infatti se

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

allora

$$A = aE + bF + cG + dH$$

DEF 1. In questo diciamo che E, F, G, H sono un **sistema di generatori** di $M_2(\mathbb{R})$.

OSS 1.1. Notiamo che questo ragionamento può essere formulato allo stesso modo per qualsiasi insieme di *matrici* $M_{m,n}(\mathbb{R})$: abbiamo quindi "dimostrato" il seguente:
PROP 1.1. Se consideriamo l'insieme delle *matrici* $M_{m,n}(\mathbb{R})$ che sono costruite nel seguente modo: *esse hanno tutte le entrate nulle* 0 *fuorché una, la quale uguale ad* 1; allora tale insieme è **un sistema di generatori** per $M_{m,n}(\mathbb{R})$.

2. Indipendenza lineare

Considerando ancora le *matrici quadrate* 2×2, ne consideriamo la *matrice nulla*

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che può essere scritta come la combinazione lineare (considerando E, F, G, H come i *sistemi di generatori di* $M_2(\mathbb{R})$):

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0E + 0F + 0G + 0H$$

Si vede che non c'è nessun altro modo di ottenere la *matrice nulla*, se non di impostare ogni *coefficiente* 0.
Infatti

$$eE + fF + gG + hH = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi affinché valga la sovrastante, $(e, f, g, h) = (0, 0, 0, 0)$.

DEF 2. In questo caso diciamo che queste quattro matrici sono **linearmente indipendenti**; ovvero che *l'unico modo di ottenere la matrice nulla mediante la combinazione lineare di queste matrici* è quella di imporre tutti i coefficienti nulli.
Questi ragionamenti possono essere formulati (e generalizzati) anche per *matrici* $m \times n$.

OSS 2.1. Se ho

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

allora la per ottenere 0 (la matrice nulla) è necessaria fare la seguente combinazione lineare:

$$-1 \cdot A + (-\frac{1}{2})B$$

e i coefficienti non sono nulli; pertanto A, B *non* sono linearmente indipendenti.

Sistemi lineari a scala

Definizione dei sistemi lineari a scala; elementi di pivot; compatibilità dei sistemi lineari gradinizzati.

Sistemi Lineari

Definizione rigorosa di sistema lineare. Nesso tra sistemi lineari, matrici e campi. Teoremi sui sistemi lineari.

---

0. Preambolo

Avevamo accennato che cosa sono i *sistemi lineari* nel capitolo sulle Equazioni e Proprietà Lineari; però avendo definito i Campi, ora è opportuno definirli in una maniera rigorosa e formale. Inoltre rendiamo nota la seguente notazione:

NOTAZIONE 0. Andiamo a identificare i due seguenti spazi vettoriali: la matrice colonna $M_{m,1}(K)$ di tipo

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

e la m-tupla K^m di tipo

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

e questi due spazi vettoriali sono *isomorfi* (ovvero che presentano gli stessi comportamenti).

1. Definizione formale

DEF 1. Sia K un *campo* (Campi, **DEF 1.**); definiamo un **sistema di m equazioni in n incognite a coefficienti in K** come un *sistema di equazioni* nella forma seguente:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

dove $a_{ij} \in K$, $\forall i \in \{1, \ldots, m\}$ e $\forall j \in \{1, \ldots, n\}$; inoltre $\forall b_i \in K, \forall i \in \{1, \ldots, m\}$.

1.a. Incognite

SUBDEF 1.a. Gli elementi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sono dette **incognite**.

1.b. Termini noti

SUBDEF 1.b. Gli elementi $b_1, b_2, \ldots, b_m$ sono detti **termini noti**.

1.c. Coefficienti

SUBDEF 1.c. Gli elementi a_{ij} sono detti **coefficienti** del *sistema lineare*.

1.1. Soluzione di un sistema

DEF 1.1. La **soluzione** di un *sistema lineare* è una *n-upla ordinata* di elementi di K, che rappresentiamo come un *vettore-colonna*, $S \in K^n$, ovvero

$$S = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$$

ove $s_i \in K$, tali per cui se ad ogni s_i sostituiamo x_i (dove $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$), allora tutte le *uguaglianze* del *sistema lineare* diventano *vere*.

1.2. Omogeneità di un sistema

DEF 1.2. Un *sistema lineare* si dice **omogeneo** se tutti i *termini noti* sono nulli: ovvero se $b_1, b_2, \ldots, b_m = 0, 0, \ldots, 0.$ Analogamente, un *sistema lineare* si dice **non omogeneo** se questo sistema non è omogeneo. (Lo so, informazione sorprendentemente non ovvia)

1.3. Compatibilità di un sistema

DEF 1.3. Un *sistema lineare* si dice **compatibile** se ammette almeno una *soluzione* S; altrimenti si dice **incompatibile**.

OSS 1.1. Se un *sistema lineare* è *omogenea*, allora essa dev'essere anche *compatibile*. Infatti la n-upla nulla è *sempre* soluzione di un sistema *omogeneo*.

1.4. Forma compatta di un sistema

DEF 1.4. Dato un *sistema lineare* come in **DEF 1.**, definiamo la la matrice A dei *coefficienti*

$$A = (a_{ij})_{\substack{i \in \{1, \ldots, m\} \\ j \in \{1, \ldots, n\}}}; A \in M_{m,n}(K)$$

e X la n-upla delle incognite, b la n-upla dei termini noti, ovvero $X, b \in M_{m,1}(K)$ dove

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}; b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

allora posso scrivere il *sistema lineare* in **forma compatta** come

$$A \cdot X = b$$

DEF 1.5. Dato due *sistemi lineari*, queste si dicono **equivalenti** se ammettono le *medesime soluzioni*; ovvero se i loro insiemi delle soluzioni sono uguali.

OSS 1.2. Questa nozione è molto utile per risolvere dei sistemi lineari, quindi uno degli obbiettivi principali di questo corso sarà di trovare le operazioni che trasformano dei sistemi lineari in un altro mantenendoli *equivalenti*.

2. Esempi

Tentiamo di applicare queste nozioni mediante degli esempi.

ESEMPIO 2.1. Consideriamo il seguente sistema.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ x_1 + 2x_2 = 5 \end{cases}$$

che in *forma compatta* si scrive

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

1. Questo è un sistema *non omogeneo*, in quanto *almeno uno* termine noto è *non-nullo*.
2. Si può immediatamente stabilire che questo sistema è *incompatibile*; infatti se si suppone che esiste una soluzione $S = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$ allora varrebbe che $s_1 + 2s_2 = 3 = 5$, il che è un assurdo.

ESEMPIO 2.2. Consideriamo il seguente sistema.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$$

1. Chiaramente questo sistema è *non-omogeneo*

2. Qui non è possibile stabilire a priori se questo sistema sia *compatibile* o meno. Allora mediante delle trasformazioni tentiamo di trovare una soluzione.
   Quindi

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \sim x_1 = 3 - 2x_2 \\ x_1 - x_2 = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = 3 - 2x_2 \\ 3 - 2x_2 - x_2 = 1 \sim x_2 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

   allora

$$x_1 = 3 - 2x_2 \implies x_1 = 3 - 2\frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

   quindi il *sistema* ha un'unica *soluzione*

$$S = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

   Perciò abbiamo stabilito che il sistema è anche *compatibile*.
   OSS 2.1. Qui diciamo che la *soluzione* non solo esiste, ma è addirittura *unica* in quanto per ottenere il *sistema finale* abbiamo trasformato il *sistema iniziale* tramite delle operazioni che mantengono i due sistemi *equivalenti*.

ESEMPIO 2.3. Consideriamo il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 = 6 \end{cases}$$

e tentiamo di trovare una soluzione. Iniziamo dunque effettuando delle manipolazioni;

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \text{ (a)} \\ 2x_1 + 4x_2 = 6 \implies 2(x_1 + 2x_2) = 2(3) \overset{(a)}{\implies} 2(3) = 2(3) \end{cases}$$

vediamo che la seconda equazione è *sempre vera*; allora ciò significa che anche l'equazione

$$x_1 + 2x_2 = 3 \iff x_1 = 3 - 2x_2$$

è sempre vera.
Perciò posso trovare una soluzione fissando un valore di x_2 preciso per poter determinare x_1; quindi generalizzando fisso $x_2 = t \in \mathbb{R}$ ed esprimo le soluzioni così:

$$x_1 = 3 - 2t$$

Ovvero le soluzioni sono della forma

$$S = \{t \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix} 3 - 2t \\ t \end{pmatrix}\}$$

da cui discende che abbiamo *infinite* soluzioni.
OSS 2.2. Possiamo riscrivere l'insieme delle soluzioni come

$$S = \{t \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

che *geometricamente* corrisponde ai *punti* di una *retta* passante per $(3, 0)$ e $(1, 1)$.

Sottospazi Vettoriali

Sottospazio vettorali: definizione, esempi, interpretazione geometrica.

---

1. Sottospazio Vettoriale

DEF 1. Sia V un $\mathbb{R}$-*spazio vettoriale*; un sottoinsieme $W \subseteq V$ si dice un *sottospazio vettoriale* se valgono le seguenti:

1. Il vettore *nullo* di V appartiene a W
2. $\forall v, w \in W$; vale che $v + w \in W$ (*chiusura rispetto alla somma*)
3. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall v \in W$, vale che $\lambda \cdot v \in W$ (*chiusura rispetto allo scalamento*)

Consideriamo ora l'$\mathbb{R}$-spazio vettoriale V_2, ovvero

$$V_2 : (\mathbb{R}^2, +, \cdot)$$

introdotto in precedenza (**ESEMPIO 2.1.**).
Ora consideriamo il seguente sottoinsieme $W \subseteq V_2$;

$$W := \{(x, y) \in V_2 : x - 3y = 0\}$$

Facciamo le seguenti *osservazioni*.
OSS 1.1. In V_2 esiste il vettore nullo $(0, 0)$; in questo caso il vettore nullo $(0, 0)$ vale anche in W.
OSS 1.2. In V_2 è definita una *somma* $+$. Se v, w sono due elementi di W, allora sono in particolare elementi di V_2; dunque $v + w \in V_2$. In aggiunta vale che $v + w \in W$. Infatti: se $v = (v_1, v_2)$ $w = (w_1, w_2)$ allora

$$\begin{aligned} v \in W &\implies v_1 - 3v_2 = 0 \\ w \in W &\implies w_1 - 3w_2 = 0 \end{aligned}$$

quindi

$$(v_1 - 3v_2) + (w_1 - 3w_2) = 0 = 0 + 0 = 0$$

ovvero

$$(v_1 + w_1) - 3(v_2 + w_2) = 0$$

ovvero $(v + w) \in W$
OSS 1.3. Infine consideriamo $v \in W$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Se

$$\lambda \cdot v \in V_2$$

allora vale anche

$$\lambda \cdot v \in W$$

Infatti se $v = (v_1, v_2)$, allora $\lambda \cdot v = (\lambda \cdot v_1, \lambda \cdot v_2)$;

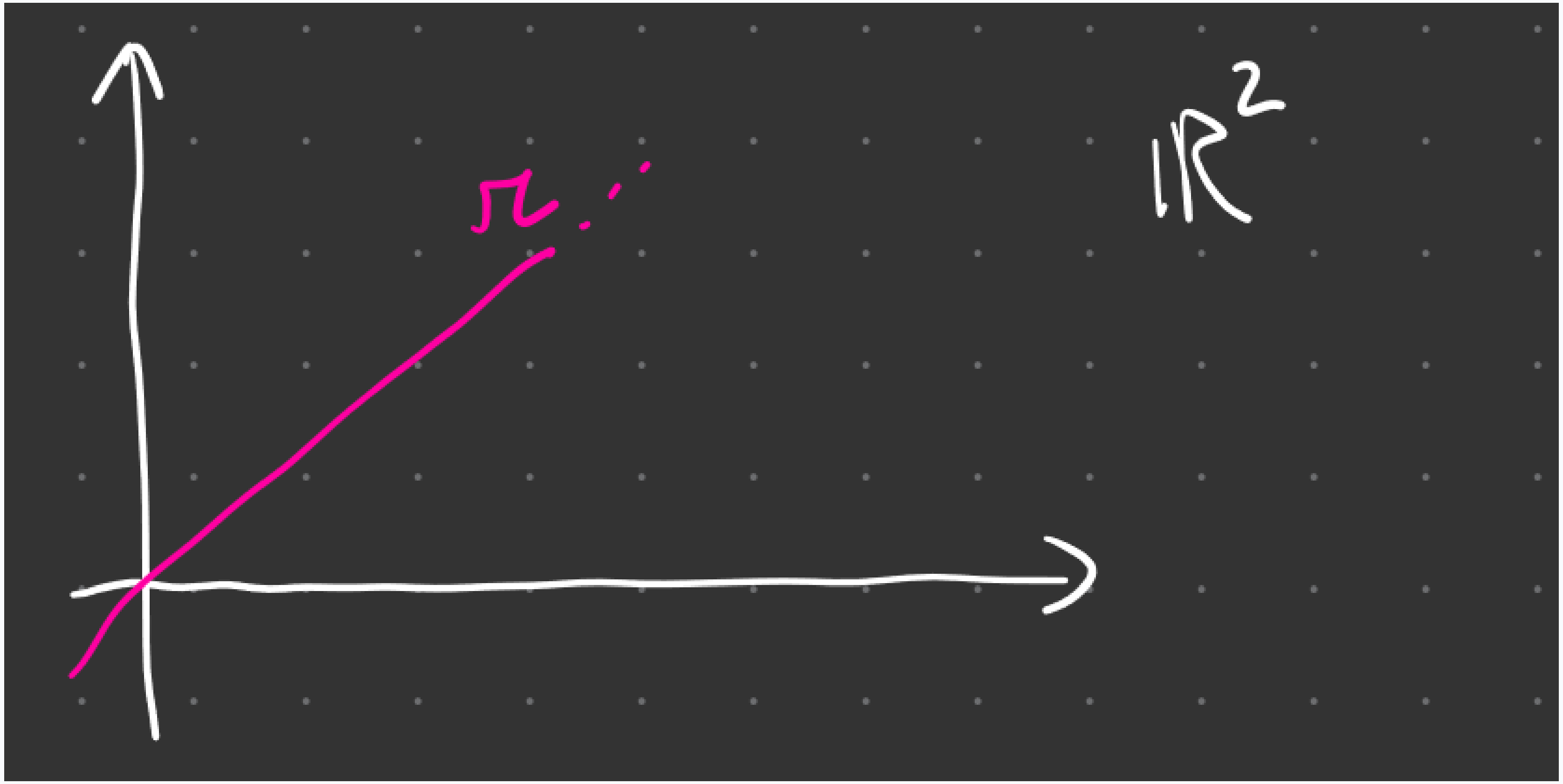
$$\begin{aligned} v \in W &\implies v_1 - 3v_2 = 0 \\ \text{allora } &\lambda \cdot (v_1 - 3v_2) = \lambda \cdot 0 = 0 \\ \text{quindi } &(\lambda \cdot v_1) - 3(\lambda \cdot v_2) = 0 \\ \text{ovvero } &\lambda \cdot v \in W \end{aligned}$$

2. Interpretazione geometrica

ESEMPIO 2.1. Consideriamo $\mathbb{R}^2$ come l'insieme dei *punti nel piano*, ovvero il classico *piano cartesiano* π
Definiamo il sottoinsieme

$$W := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - 3y = 0\}$$

Ovviamente W è uno *sottospazio vettoriale* di $\mathbb{R}^2$; notiamo che se rappresentiamo $\mathbb{R}^2$ come l'insieme dei punti nel piano, allora si può rappresentare W come l'insieme dei *punti nella retta* r, ove $r : x - 3y = 0 \iff y = \frac{1}{3}x$



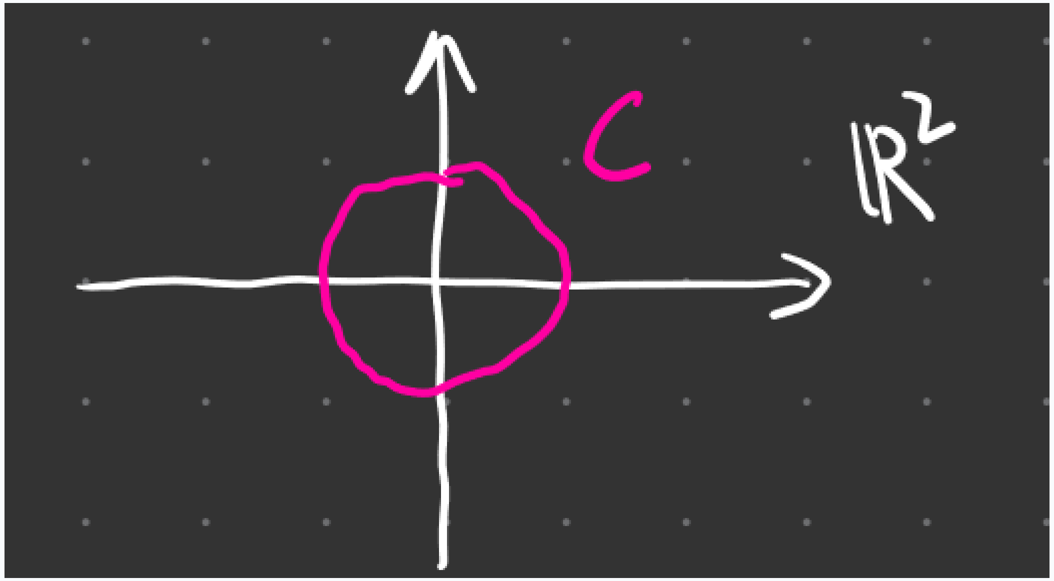
ESEMPIO 2.2. In $\mathbb{R}^2$ consideriamo il seguente:

$$C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

Osserviamo subito che la *proprietà caratterizzante di C* non è un'*equazione lineare*; infatti si tratta di un'equazione di secondo grado.
Precisamente nel contesto della *geometria analitica*, C rappresenterebbe la circonferenza

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \gamma^2$$

ove (α, β), quindi $(0,0)$, rappresentano le coordinate dell'origine del cerchio e γ, quindi 1, il raggio.
Vediamo subito che C *non* è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$, in quanto $(0,0)$ non appartiene a C.



Spazi Vettoriali

Definizione di $\mathbb{R}$-spazio vettoriale, gli 8 assiomi dei spazi vettoriali. L'utilità di spazi vettoriali; esempi di spazi vettoriali.

---

1. Definizione di spazio vettoriale

Cerchiamo di astrarre quanto visto in Vettori Liberi e Operazioni sui vettori liberi.

DEF 1. Un $\mathbb{R}$**-spazio vettoriale** (o **spazio vettoriale su** $\mathbb{R}$) è un insieme V con 2 operazioni definiti come:

$$+ : V \times V \longrightarrow V;\ (u,v) \mapsto u+v$$
$$\cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V;\ (\lambda,v) \mapsto \lambda \cdot v$$

tali per cui $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e $\forall u, v, w \in V$ sono soddisfatte le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{v}_1 : (u+v)+w = u+(v+w)\\
&\mathrm{v}_2 : u+v = v+u\\
&\mathrm{v}_3 : \exists 0 \in V \mid 0+v = v+0 = v\\
&\mathrm{v}_4 : \exists -v \in V \mid v+(-v) = (-v)+v = 0\\
&\mathrm{v}_5 : \lambda \cdot (u+v) = \lambda u + \lambda v\\
&\mathrm{v}_6 : (\lambda+\mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u\\
&\mathrm{v}_7 : (\lambda \cdot \mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v)\\
&\mathrm{v}_8 : 1 \cdot v = v
\end{aligned}$$

Inoltre uno **spazio vettoriale** può essere anche definito con la seguente *terna*:

$$(V, +, \cdot)$$

DEF 1.1. Chiamiamo l'elemento 0 della v_3 l'elemento *neutro*.
OSS 1.1. Notare che nella v_8 non chiameremo 1 *l'elemento neutro* per ragioni di convenzione, particolarmente per quanto riguarda l'algebra astratta.

PROP 1.1. Ciò che abbiamo visto fino ad ora ci mostra che V_2 (ovvero l'insieme dei vettori liberi nel piano) è un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale.

1.1. Vettore

DEF 1.1. Sia V uno $\mathbb{R}$-spazio vettoriale; gli elementi $v \in V$ si dicono **vettore**
! ATTENZIONE ! Si nota immediatamente che questa definizione del *vettore* non deve necessariamente corrispondere alla nostra idea di un *vettore libero*.

PROP 1.2. L'unicità del vettore neutro 0

L'assioma v_3 garantisce che *esiste* almeno un vettore neutro 0 tali che certe proprietà vengono soddisfatte; però ciò che *NON* garantisce è l'unicità del vettore neutro 0. Potrebbe esistere un altro vettore *neutro* che possiamo chiamare $0'$.
Però $0'$ non esiste e lo dimostreremo.
DIMOSTRAZIONE. Voglio dimostrare che se V è un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale, allora l'elemento neutro 0 è unico.
Supponiamo quindi che esistano due elementi neutri: 0 e $0'$; mostreremo che con questa supposizione deve necessariamente valere $0 = 0'$, quindi da questo seguirà la tesi.
Per ipotesi, $\forall v \in V$,

$$A.\, 0 + v \overset{\mathrm{v}_3}{=} v + 0 = v$$
$$B.\, 0' + v \overset{\mathrm{v}_3}{=} v + 0' = v$$

In $A.$ scegliamo $v = 0'$; allora

$$0 + 0' = 0' + 0 = 0'$$

In $B.$ scegliamo invece $v = 0$; allora

$$0' + 0 = 0 + 0' = 0$$

Quindi notiamo che

$$0 = 0 + 0' = 0'$$

per la proprietà transitiva dell'uguaglianza, $0 = 0'$. ■

PROP 1.3. $0 \cdot v = 0$

La proposizione

$$0 \cdot v = 0$$

sembra ovvia e banale, come ci suggerirebbe la notazione; però in realtà non lo è veramente, in quanto associamo due concetti *diversi*; da una parte abbiamo lo *scalamento* del vettore v per $\lambda = 0$, dall'altra abbiamo il *vettore neutro* 0.
Quindi vogliamo dimostrare che se V è un spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, allora per ogni $v \in V$ sussiste la proposizione.
DIMOSTRAZIONE. Per dimostrare la tesi, supponiamo che $v \in V$ e quindi abbiamo che:

$$\begin{aligned}
0 \cdot v &= (0 + 0) \cdot v \overset{\mathrm{v}_6}{=} 0 \cdot v + 0 \cdot v \\
0 \cdot v &= 0 \cdot v + 0 \cdot v \\
(0 \cdot v) + (-(0 \cdot v)) &= (0 \cdot v) + (-(0 \cdot v)) + (0 \cdot v) \\
0 &= 0 \cdot v \\
0 \cdot v &= 0 \blacksquare
\end{aligned}$$

OSS 1.2.1. Notare che in questi passaggi abbiamo fatto un *assunto* che non è dato per scontato; ovvero che il vettore opposto $-v$ è unico ad ogni vettore v. Infatti questo assunto è ancora da *dimostrare* (che è necessario per non invalidare questa dimostrazione).

PROP 1.4. $(-1) \cdot v = -v$

Anche la proposizione

$$(-1) \cdot v = -v$$

sembra intuitiva, ma in realtà non è dato *per scontato* secondo gli assiomi v; infatti da un lato abbiamo lo *scalamento* di un vettore, invece dall'altro abbiamo il *vettore opposto del vettore* v.
Quindi vogliamo dimostrare che se V è un spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, allora per ogni vettore $v \in V$ vale la proposizione appena enunciata.
DIMOSTRAZIONE. Per dimostrare la tesi, utilizziamo la proprietà v_3, ovvero

$$v + (-v) = -v + v = 0$$

e dimostriamo la seconda uguaglianza, assumendo che $-v = (-1) \cdot v$;

$$(-1) \cdot v + (1) \cdot v \overset{\mathrm{v}_6}{=} (-1+1) \cdot v = 0 \cdot v = 0$$

OSS 1.2. Il senso di studiare i campi vettoriali

Si nota che in questa pagina non abbiamo veramente imparato qualcosa di nuovo; come il filosofo *F. Nietzsche* criticherebbe l'uomo che produce la *definizione di un mammifero* poi per riconoscere un *cammello* come un *mammifero*$^{(1)}$, non abbiamo veramente scoperto nulla di nuovo: infatti abbiamo solo dato *definizioni* poi per riconoscerle, ad esempio abbiamo definito lo *spazio vettoriale* e abbiamo riconosciuto V_2 come uno spazio vettoriale.
In realtà il discorso del filosofo tedesco non varrebbe qui: abbiamo dato questa definizione di spazio vettoriale per un motivo ben preciso, ovvero quello di *astrarre, abs-trahĕre*. Astrarre nel senso che togliamo l'aspetto *"accidentale"* dei vettori geometrici, concentrandoci invece sull'aspetto *"sostanziale"*.

Infatti dopo potremmo vedere che esistono molti insiemi che sono dei *spazi vettoriali*; se dimostro che un certo insieme A è uno spazio vettoriale, allora le proprietà v_n saranno sicuramente vere.

[(1)]*"Se io produco la definizione di un mammifero e poi dichiaro, alla vista di un cammello: guarda, un mammifero! certo con questo una verità viene portata alla luce, ma essa è di valore limitato, mi pare; in tutto e per tutto essa è antropomorfica e non contiene un solo singolo punto che sia «vero in sé», reale e universalmente valido, al di là della prospettiva dell'uomo."* (Su verità e menzogna in senso extramorale, 1896, Friedrich Nietzsche)

---

2. Esempi di spazi vettoriali

Dopo il lungo preambolo enunciato in **OSS 1.2.**, andiamo a vedere qualche esempio di spazio vettoriale.

ESEMPIO 2.1. Numeri reali

Consideriamo $V = \mathbb{R}$; con l'usuale definizione di *somma* $+$ e *moltiplicazione* $\cdot$, si verifica che anche $\mathbb{R}$ è uno $\mathbb{R}$-spazio vettoriale.

ESEMPIO 2.1. Coppie ordinate V_2

Consideriamo $V = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, ovvero

$$V = \{(a, b) : a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$$

con le operazioni

$$
\begin{aligned}
&(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d) \\
&\lambda \cdot (a, b) := (\lambda \cdot a, \lambda \cdot b)
\end{aligned}
$$

allora $V = \mathbb{R}^2$ è uno *spazio vettoriale*.

ESEMPIO 2.2. $\mathbb{R}^n$

Generalizziamo ESEMPIO 2.1. Coppie ordinate V_2; ovvero definiamo

$$
V = \mathbb{R}^n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) : a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}
$$

V è l'insieme delle n-*uple ordinate dei numeri reali*, con le operazioni

$$
\begin{aligned}
+ : V \times V &\longrightarrow V; \\
((a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n)) &\mapsto (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n) \\
\cdot : \mathbb{R} \times V &\longrightarrow V; \\
\lambda \cdot (a_1, a_2, \dots, a_n) &\mapsto (\lambda \cdot v_1, \lambda \cdot v_2, \dots, \lambda \cdot v_n)
\end{aligned}
$$

$(V, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

ESEMPIO 2.3. Insieme delle funzioni in variabile reale.

Consideriamo l'insieme delle funzioni di variabile reale (**DEF 1.1.**), ovvero

$$
V = \{\text{funzioni } f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\}
$$

con le operazioni

$$+ : V \times V \longrightarrow V; \ (f, g) \mapsto f + g$$
$$\cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V; \ (\lambda, f) \mapsto \lambda \cdot f$$

OSS 2.3.1. Qui è importante chiarire il comportamento della *somma*, in quanto per noi non risulta immediatamente intuibile. Siano f, g funzioni, quindi

$$f + g = h$$

ove

$$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

data dalla seguente: se $a \in \mathbb{R}$, allora

$$h(a) = (f + g)(a) := f(a) + g(a)$$

OSS 2.3.2. Stesso discorso vale per lo *scalamento*;

$$\lambda \cdot f = F$$
$$F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

ove per ogni a reale,

$$F := \lambda \cdot (f(a))$$

OSS 2.3.3. Vogliamo trovare la *funzione nulla*, ovvero la *funzione* che appartiene a V e gioca lo stesso ruolo di 0. La funzione la chiamiamo O e si definisce come

$$O : \mathbb{R} \longrightarrow \ \mathbb{R}, \ x \mapsto 0$$

infatti, se definiamo $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, allora

$$(f + O) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) + 0 = f(x)$$

Abbiamo visto che $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$(f + O)(x) = f(x)$$

pertanto

$$O + f = f; f + O = f$$

quindi abbiamo verificato che O è *l'elemento neutro* dello *spazio vettoriale* $(V, +, \cdot)$.

Struttura dell'insieme dei numeri naturali

Definizione intuitiva dell'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$*, le proprietà strutturali su di esso, definizioni delle operazioni su esso, proprietà delle operazioni. Relazione d'ordine totale* $\geq$ *su* $\mathbb{N}$*, struttura algebrica* $(\mathbb{N}, +, \cdot, \geq)$.

DEF 1. Insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$

DEF 1. Si definisce **l'insieme dei numeri naturali** come *l'insieme dei numeri che servono per contare*, aggiungendoci il numero 0 per motivi di comodità che si vedranno dopo. Viene denotata come

$$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \ldots\}$$

DEF 2. Proprietà strutturali e operazioni di $\mathbb{N}$

DEF 2.1. Operazione di somma/addizione

DEF 2.1. Si definisce su $\mathbb{N}$ l'operazione di **somma** o **addizione** come la seguente funzione

$$\begin{aligned} + : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (n, m) &\mapsto k := n + m \end{aligned}$$

2.1. Proprietà dell'operazione $+$

L'operazione *somma*/*addizione* gode delle seguenti tre proprietà.
PROPRIETA' 2.1.1. La proprietà **associativa** dice che

$$\forall n, m, k \in \mathbb{N}; n + (m + k) = (n + m) + k$$

PROPRIETA' 2.1.3. La proprietà **commutativa** dice invece che

$$\forall m, n \in \mathbb{N}; m + n = n + m$$

PROPRIETA' 2.1.2. Con l'operazione $+$ esiste l'elemento neutro e (in questo caso 0), tale che

$$\exists e \in \mathbb{N} : 0 + m = m + 0 = m$$

DEF 2.2. Operazione di prodotto/moltiplicazione

DEF 2.2. Si definisce su $\mathbb{N}$ l'operazione di **prodotto** o **moltiplicazione** come la funzione

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (n, m) &\mapsto k := (n \cdot m) \end{aligned}$$

2.2. Proprietà dell'operazione $\cdot$

L'operazione *prodotto*/*moltiplicazione* gode delle seguenti tre proprietà.
PROPRIETA' 2.1.1. La proprietà **associativa** dice che

$$\forall n, m, k \in \mathbb{N}; n \cdot (m \cdot k) = (n \cdot m) \cdot k$$

PROPRIETA' 2.1.3. La proprietà **commutativa** dice invece che

$$\forall m, n \in \mathbb{N}; m \cdot n = n \cdot m$$

PROPRIETA' 2.1.2. Con l'operazione $+$ esiste l'elemento neutro e (in questo caso 1), tale che

$$\exists e \in \mathbb{N} : 1 \cdot m = m \cdot 1 = m$$

2.3. Proprietà distributiva

DEF 2.3. Esiste una proprietà che lega le *operazioni* $+$ e $\cdot$ tra di loro; ovvero la **proprietà distributiva**, che dice

$$\forall m, n, k \in \mathbb{N}; n \cdot (m + k) = n \cdot m + n \cdot k$$

DEF 2.4. Relazione d'ordine totale $\geq$

DEF 2.4. Su $\mathbb{N}$ è definita una relazione d'ordine totale (**DEF. 4.1.**) che si chiama $\geq$.

OSS 2.4.1. Essa è *compatibile* con le altre operazioni, ovvero

$$\begin{aligned}\forall n, m, k \in \mathbb{N}; n \geq m &\implies n + k \geq m + k \\ n \geq m &\implies n \cdot k \geq m \cdot k\end{aligned}$$

DEF 3. Struttura algebrica $(\mathbb{N}, +, \cdot, \geq)$

DEF 3. Avendo appena visto le operazioni $+$, $\cdot$ e la relazione $\geq$ che vengono tutte definite su $\mathbb{N}$, possiamo definire la seguente **struttura algebrica**:

$$(\mathbb{N}, +, \cdot, \geq)$$

Pertanto d'ora in poi diamo per scontato che quando si parla di $\mathbb{N}$ vengono già definite le operazioni collegate ad esso.

Tautologia

Tautologia: cos'è, alcuni esempi. Dimostrazione-esempio di una delle tautologie

---

Una tautologia è una proposizione composta che è *sempre* vera, indipendentemente dai valori delle proposizioni.
Eccovi alcuni esempi.

- $p \vee \neg p$: tertium non datur
- $\neg(p \wedge p)$: non contraddictio
- $(p \wedge (p \implies q)) \implies q$: modus ponens
- $(\neg q \wedge (p \implies q)) \implies \neg p$: modus tollens
- $((p \wedge \neg q) \implies (r \wedge \neg r)) \iff (p \implies q)$: reductio ad absurdum

DIMOSTRAZIONE (EX. 5) $((p \wedge \neg q) \implies (r \wedge \neg r)) \iff (p \implies q)$

1. Si osserva che $r \wedge \neg r$ è sempre falsa: di conseguenza si può riscriverla come F, per indicare che è una proposizione sempre falsa, indipendentemente dai valori p, q, r.
2. Si osservano le seguenti per $p \wedge \neg q$:

1. Per la legge di De Morgan, $(p \wedge \neg q) \iff \neg(\neg p \vee q)$
2. Per la definizione dell'implicazione in Connettivi, $\neg p \vee q = p \implies q$
3. Pertanto $p \wedge \neg q = \neg(p \implies q)$

3. Secondo le osservazioni appena svolte, si deduce che $((p \wedge \neg q) \implies (r \wedge \neg r)) \iff (\neg(p \implies q) \implies F)$
4. Inoltre, osservando che $p \implies q \iff \neg q \implies p$, $(\neg(p \implies q) \implies F) \iff (V \implies (p \implies q))$
5. Usando di nuovo la definizione dell'implicazione, $(V \implies (p \implies q)) \iff (F \vee (p \implies q))$
6. Osservando che $F \vee p \iff p$, si conclude che $(F \vee (p \implies q)) \iff (p \implies q)$
7. Pertanto $((p \wedge \neg q) \implies (r \wedge \neg r)) \iff (p \implies q)$ $\blacksquare$

Teoremi sui Limiti

Teoremi sui limiti: unicità del limite, permanenza del segno, teorema dei due carabinieri, ... (DA FINIRE)

Teoremi sui Sistemi Lineari

Teoremi sui sistemi lineari; teorema di Cramer; teoremi di strutture per i sistemi lineari; da continuare

---

1. Teoremi sui sistemi lineari

Presentiamo dei teoremi importanti sui Sistemi Lineari.

1.1. Teorema di Cramer

TEOREMA 1.1. (*di Cramer*) Considero un sistema lineare con n equazioni ed n incognite, di forma

$$A \cdot X = b$$

Ovvero $A \in M_n(K)$.
Ora supponiamo che A sia anche *invertibile* (Matrice, **DEF 2.6.**); allora da qui discende che esiste un'*unica soluzione* S del sistema lineare ed essa è data da

$$S = A^{-1} \cdot b$$

OSS 1.1.1. Questo teorema è molto importante in quanto ci dà due dati importanti:

1. Da un lato ci dice quando un *sistema lineare* è *compatibile*, quindi c'è questa componente *"esistenziale"* di questo teorema.
2. Dall'altro lato ci fornisce una formula per *calcolare* la soluzione.
   L'unico problema di questo teorema è che **per ora** non abbiamo gli strumenti per *invertire una matrice* o *determinare se una matrice sia invertibile o meno*.

DIMOSTRAZIONE 1.1. La dimostrazione si struttura in due parti:

1. Una parte in cui devo dimostrare che la soluzione effettivamente *esiste* ed equivale a $A^{-1} \cdot b$

2. Un'altra parte in cui devo dimostrare che essa è effettivamente l'*unica* soluzione

3. Supponendo che $A^{-1} \cdot b$ sia *soluzione*, allora per tale definizione devo essere in grado di sostituirla ad X per poter ottenere un'uguaglianza vera; quindi faccio

$$
\begin{aligned}
&A \cdot X = b \\
&A \cdot (A^{-1} \cdot b) = b \\
&(A \cdot A^{-1}) \cdot b = b \\
&\mathbb{1}_n \cdot b = b \iff b = b
\end{aligned}
$$

e l'ultima uguaglianza è vera.

4. Ora supponiamo per assurdo che esiste un'altra soluzione S' sia un'altra soluzione; allora per definizione questa verifica

$$
\begin{aligned}
&A \cdot S' = b \\
&A^{-1} \cdot (A \cdot S') = A^{-1} \cdot b \, (!) \\
&(A^{-1} \cdot A) \cdot S' = A^{-1} \cdot b \\
&S' = A^{-1} \cdot b
\end{aligned}
$$

che è esattamente uguale alla soluzione proposta dal teorema di *Cramer*; quindi esiste solo la soluzione $S = A^{-1} \cdot b$.

OSS 1.1.2. Focalizziamoci sulla parte contrassegnata con *(!)*; notiamo che abbiamo moltiplicato da ambo le parti per A^{-1} a *SINISTRA*, e non a *DESTRA*; infatti nel contesto delle *matrici* la moltiplicazione a *sinistra* può comportarsi diversamente da quella a *destra*; infatti se avessimo moltiplicato a *destra*, tutta l'espressione avrebbe perso senso in quanto avremmo ottenuto $b \cdot A^{-1}$ in quanto moltiplichiamo una matrice $n \times 1$ per $n \times n$, che non è definita.

1.2. Teorema di struttura per i sistemi lineari omogenei

TEOREMA 1.2. (*di struttura per le soluzioni dei sistemi lineari omogenei*)
Considero un *sistema lineare omogeneo* di m equazioni in n incognite. Ovvero

$$A \cdot X = 0$$

dove $A = M_{m,n}(K)$ e $X = K^n$, 0 è la *matrice nulla* (Matrice, **DEF. 2.2.**).
Poi siano $s, s' \in K^n$ due soluzioni distinte e sia $\lambda \in K$, allora:

1. $s + s'$ è soluzione
2. $\lambda \cdot s$ è soluzione
   Pertanto ricordandoci che il vettore (o la matrice) nullo/a è *sempre* soluzione di un sistema *omogeneo*, ottengo che l'*l'insieme delle soluzioni* di questo sistema è l'insieme

$$S = \{r \in K^n : A \cdot r = 0\}$$

   allora si verifica che S è un *sottospazio vettoriale* (Sottospazi Vettoriali, **DEF 1.**) di K^n.

OSS 1.2.1. Notiamo che in questo teorema ci interessa *il sistema lineare* sé stesso, invece nel **TEOREMA 1.1.** (di Cramer) ci interessava solo la *matrice* dei coefficienti A

DIMOSTRAZIONE 1.2.
Dimostriamo la prima parte del teorema

1. Dato che s e s' sono soluzioni, allora devono valere che:

$$\begin{cases} A \cdot s = 0 \\ A \cdot s' = 0 \end{cases}$$

   E supponendo che $s + s'$ sia soluzione, deve valere anche che:

$$A \cdot (s + s') = 0$$

   e sviluppandolo, otterremo

$$A \cdot (s + s') = 0$$
$$A \cdot s + A \cdot s' = 0$$
$$0 + 0 = 0 \iff 0 = 0$$

che è vera.

Prima di dimostrare la seconda parte del teorema ci occorre fare un'osservazione:
OSS 1.2.2. Dati un $A \in M_{m,n}(K)$ e un $s = K^n$ e un $\lambda \in K$ allora abbiamo

$$A \cdot (\lambda \cdot s) = \lambda \cdot (A \cdot s)$$

Ora siamo pronti per concludere la dimostrazione.
2. Se s è soluzione, allora è vera che

$$A \cdot s = 0$$

allora supponendo che λs sia soluzione abbiamo

$$A \cdot (\lambda \cdot s) = 0$$

e sviluppandola otterremo

$$A \cdot (\lambda \cdot s) = 0$$
$$\lambda \cdot (A \cdot s) = 0$$
$$\lambda \cdot 0 = 0 \iff 0 = 0$$

il che è vera. ■

1.3. Osservazione

OSS 1.3. Osserviamo che possiamo *"combinare"* questi due teoremi e verificare un fenomeno:
Sia $A \in M_n(K)$ e supponiamo che questa matrice sia anche *invertibile*; ora consideriamo il sistema lineare *omogeneo*

$$A \cdot X = 0$$

Allora da qui discende che 0 è *l'unica* soluzione di questo sistema (per il **TEOREMA 1.1.** (di Cramer)).
Infatti $\lambda \cdot 0 = 0$ e $0 + 0 = 0$ sono anche *soluzioni* in quanto sono uguali all'*unica soluzione* 0.

1.4. Teorema di struttura per i sistemi lineari

TEOREMA 1.4. (*di struttura per le soluzioni dei sistemi lineari*)
Considero un *sistema lineare*

$$A \cdot X = b$$

con $A \in M_{m,n}(K)$ e $b \in K^n$. Sia $\tilde{s}$ una soluzione; allora un elemento $s \in K^n$ è soluzione di questo sistema lineare se e solo se possiamo scrivere

$$s = \tilde{s} + s_0$$

dove s_0 è una soluzione del *sistema lineare omogeneo*

$$A \cdot X = 0$$

In altre parole l'insieme delle soluzione di $A \cdot X = b$ è

$$S = \{s \in K^n : s = \tilde{s} + s_0 \text{ per un qualche } x_0 \text{ sia soluzione}\}$$

DEF 1.4.1. Il *sistema lineare omogeneo* $A \cdot X = 0$ si dice il **sistema lineare omogeneo associato** al sistema $A \cdot X = b$.

DIMOSTRAZIONE 1.4. Per pianificare la struttura di questo teorema, facciamo due considerazioni sulla logica formale, in particolare sulla *doppia implicazione* (Connettivi).
Questo teorema, da un punto di vista logico, vuole dire che

$$\text{s è soluzione} \iff s = \tilde{s} + s_0$$

allora vogliamo dimostrare che entrambe le *implicazioni* sono vere; ovvero nel senso che valgono

$$\begin{cases} s \text{ è soluzione} \implies s = \tilde{s} + s_0 \\ s = \tilde{s} + s_0 \implies s \text{ è soluzione} \end{cases}$$

... [DA FARE IN CLASSE]

Teoria degli Insiemi

Nozione primitiva di insieme, metodi di rappresentazione di un insieme, la questione dell'insieme vuoto $\emptyset$*, sottoinsiemi.*

Nozione primitiva dell'insieme

Una *nozione primitiva* (ovvero una definizione, un concetto che viene dato per saputo) della matematica è l'*insieme*.
L'insieme equivale a ciò che riferiamo come un'aggregazione, una famiglia, un gruppo, oppure un ente che contiene oggetti (chiamati *elementi*) che condividono qualche caratteristica.

Per dire che un *elemento* appartiene ad un certo *insieme*, si usa la seguente notazione.

$$a \in A \text{ si legge come "a appartiene ad A"}$$

Rappresentazione degli insiemi

OSS. Si può rappresentare un insieme nei seguenti due modi:

1. Mediante la *forma estensiva*, ovvero quella di elencare tutti gli elementi uno per uno.
2. Con la *forma intensiva*, ovvero quella di fissare un insieme *"universo"* (ambiente) e poi di caratterizzare gli elementi con una certa *proprietà*

ESEMPIO DI 1. Un insieme rappresentato mediante la forma estensiva è la seguente:

$$A = 1, 2, 3$$

ESEMPIO DI 2. Un insieme rappresentato tramite la forma intensiva è l'insieme dei numeri pari A,

$$A = \{n \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{Z} : n = 2k\}$$

In questo caso la l'insieme universo è $\mathbb{N}$ (ovvero i numeri naturali) e la proprietà caratterizzante è che deve esiste un numero intero k, tale che se moltiplicato per 2 risulta n.
Per esempio il numero 4 è pari in quanto esiste il numero intero 2 a cui se moltiplicato 2 viene fuori 4. $4 = 2 * 2$
Alternativamente 3 non è pari in quanto non si può trovare nessun numero intero k a cui se si moltiplica 2 viene fuori 3. $1 * 2 = 2, 2 * 2 = 4, ? * 2 = 3$

Uguaglianza degli insiemi

Secondo questa nozione primitiva due insiemi vengono considerati *uguali* se hanno gli stessi elementi; per esempio scriviamo

$$A = \{a, b, c\} = \{b, a, c\}$$

OSS. Notiamo subito che qui non conta l'ordine, a contrario di altri oggetti matematici, che potrebbero essere come le coppie ordinate.

In una notazione più rigorosa, si dice che due insiemi A e B sono uguali se e solo se valgono entrambe le seguenti condizioni:

$$\begin{aligned} \forall a, a \in A &\implies a \in B \\ \forall b, b \in B &\implies b \in A \end{aligned}$$

Sottoinsieme

Osservando da Uguaglianza degli insiemi, se vale solo una delle condizioni, che in questo caso prendiamo $\forall a, a \in A \implies a \in B$, allora si può riscriverla come la seguente:

$$A \subseteq B \text{ si legge come "A contenuto in B" o "A è sottoinsieme di B"}$$

Prestando questa notazione, si può riscrivere $A = B$ come $A \subseteq B \land B \subseteq A$;

$$A = B \iff A \subseteq B \land B \subseteq A$$

L'esistenza dell'insieme vuoto

OSS. Nella matematica è conveniente far esistere un insieme speciale **senza** elementi, ovvero l'insieme vuoto; indicato con $\emptyset$.

PROPOSIZIONE 1. Esiste solo un insieme vuoto; non possono esistere due o più insieme vuoti.
DIMOSTRAZIONE. Non possono esistere due o più insieme vuoti in quanto due insiemi A e B si differiscono per

degli elementi che hanno; però questo non può essere per due insiemi vuoti. Questo perché, per definizione, questi insiemi vuoti non hanno elementi.

PROPOSIZIONE 2. L'insieme vuoto è contenuto in tutti gli insiemi;

$$\forall A, \emptyset \subseteq A$$

Insieme delle parti di un insieme

DEF. Si definisce *l'insieme delle parti* di un certo insieme A come l'*insieme di tutti i sottoinsiemi di A*. Nella teoria degli insiemi, si dà che questa esiste.
Viene denotata come

$$\mathcal{P}(A) \text{ si legge come "l'insieme delle parti di } A\text{"}$$

ESEMPIO. Sia $A = \{a, b, c\}$, costruire $\mathcal{P}(a)$.
DEF. Si definiscono i *sottoinsiemi propri* le seguenti: $\emptyset, \{a\}\{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$; ovvero gli insiemi appartenenti a $\mathcal{P}(a)$ e non uguale ad A.
Quindi un *sottoinsieme proprio* si definisce tale quando valgono entrambe le condizioni:
$A_i \subset A \land A_i \neq A \text{ ove } A_i \text{ rappresenta un sottoinsieme proprio di A}$
L'insieme della parti è formato dall'insieme stesso e dai sottoinsiemi propri di A; pertanto

$$\mathcal{P}(a) = \{\emptyset, \{a\}\{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

ESERCIZIO 1. Se A ha n elementi, quanti elementi ha $\mathcal{P}(a)$?
SOLUZIONE-CONGETTURA. $\mathcal{P}(a)$ ha 2^n elementi
DIMOSTRAZIONE. La seguente dimostrazione è strutturata in 4 passi.

1. Si definisce come esempio l'insieme $A = \{a, b, c, d\}$, quindi $n = 4$.

2. Ora si rappresenta un sottoinsieme di A mediante la codificazione in *binario*; ovvero quella di porre ogni elemento dell'insieme A in una posizione j e di segnare, se non presente 0; se presente 1
   ESEMPIO 1. L'insieme vuoto $\emptyset$ viene rappresentato come 0.
   ESEMPIO 2. Il numero 1010 rappresenta $\{a, c\}$
3. Ora se si vuole contare il numero di tutti i sottoinsiemi, si può partire dal numero 0, che sarebbe il primo sottoinsieme fino ad arrivare il sottoinsieme 1111; tuttavia si deve considerare il sottoinsieme vuoto $\emptyset$, pertanto il numero totale di sottoinsiemi diventa $1111 + 1$, che in binario eguaglia a 10000.
4. Traducendo 10000_2 al sistema decimale, esso diventa 2^4, e il numero 4 coincide con n. ■

Vettori Applicati

Definizione basilare del vettore applicato, operazioni tra essi, vettore nullo, limitazioni dei vettori applicati, alcune proprietà.

Premessa

Ci mettiamo nel contesto della *geometria euclidea*, i quali postulati vengono descritti dagli *Elementi* (uno dei testi fondamentali della matematica) di Euclide (uno dei matematici greci più importanti); quindi ricorreremo a dei concetti geometrici che vengono dati come *elementi primitivi*, come il *punto*, il *piano*, la *retta*, $\ldots$

DEF 1. Vettore Applicato

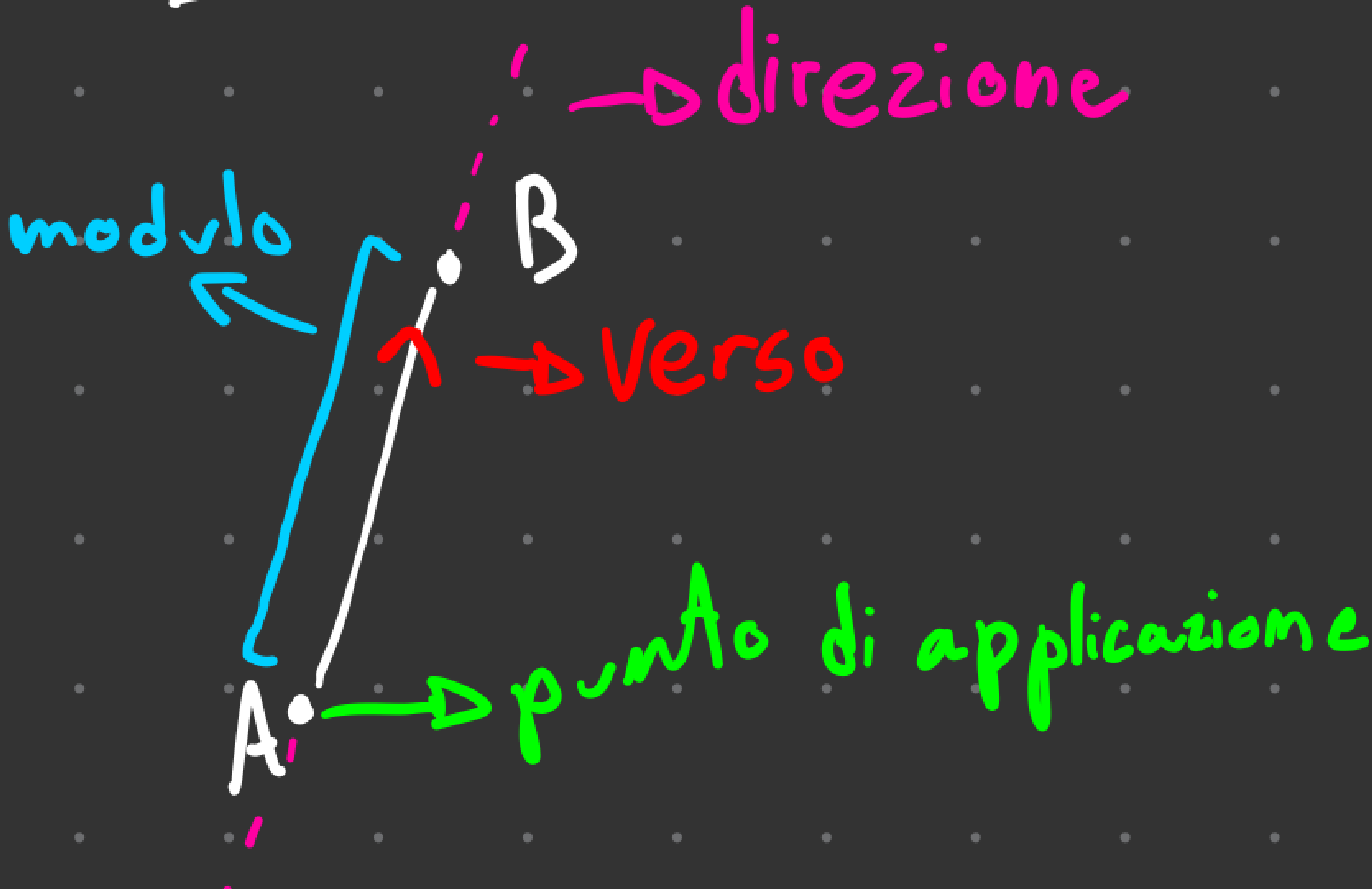
Un **vettore applicato** è un segmento orientato, caratterizzato dunque da:

- **Punto di applicazione**; ovvero il *"punto di partenza"* A del vettore $\overrightarrow{AB}$.
- **Direzione**; essa è quella data dalla *retta* su cui giace il vettore
- **Verso**; esso è uno dei due *orientamenti* dalla retta

- **Modulo o lunghezza**; viene indicata con $|\overrightarrow{AB}|$

Graficamente il vettore si rappresenta così:

Vettore



Dal grafico si evince che un **vettore applicato** è determinato da una coppia ordinata (A, B) di punti; in tal caso il vettore si denota $\overrightarrow{AB}$

DEF 1.2. Vettore applicato nullo

Per ogni *punto di applicazione* A, esiste il **vettore applicato nullo** $\overrightarrow{AA}$, che non ha un verso definito.

DEF 1.3. Somma dei due vettori applicati

I *vettori applicati* si possono **sommare** tra di loro, purché il punto finale del primo vettore coincida con il punto iniziale del secondo, ovvero purché siano della forma

$$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$$

DEF 1.3. Definiamo

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

OSS 1.3.1 Se i due vettori non sono della forma appena descritta sopra, ovvero

$$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD} \text{ ove } B \neq C$$

allora non è possibile sommare questi due vettori; infatti questo rappresenta la *prima limitazione* dei vettori liberi.

OSS 1.3.2. Se prendiamo

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$$

notiamo che $\overrightarrow{BB}$ e $\overrightarrow{AA}$ si comportano come il numero 0 con l'addizione; **però** notiamo che questi due sono dei vettori applicati *distinti* e non uguali, in quanto essi sono definiti dai loro rispettivi *punti di applicazione* (e ovviamente $A \neq B$). Pertanto è come se si avesse un numero 0 per ogni punto nel piano, dandoci così la *seconda limitazione* dei vettori liberi.

PROP 1.3.1: LA PROPRIETA' ASSOCIATIVA. La somma di vettori applicati, quando possibile, soddisfa la *proprietà associativa*;
DETOUR. Nei numeri reali $\mathbb{R}$ la *proprietà associativa* della somma dice il seguente.

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} \text{ vale che } (a+b)+c = a+(b+c)$$

Infatti grazie a questa proprietà è possibile scrivere la somma per un n numero di numeri senza nessuna ambiguità; ad esempio $a+b+c$.

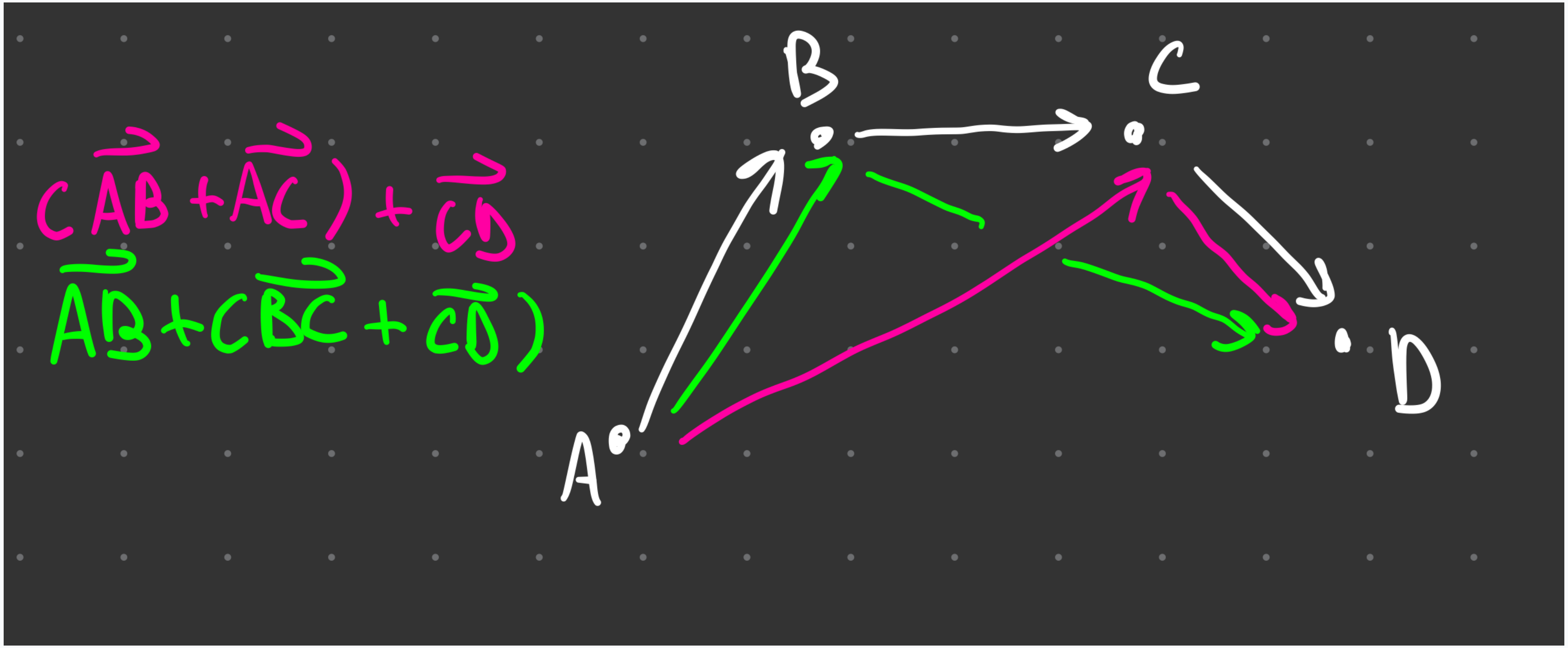
DIM. Dobbiamo dimostrare che per ogni vettore applicato $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}$ vale che

$$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD})$$

Ora, usando la definizione di *somme dei vettori* (**DEF 1.3.**), possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} &\text{membro sx. } (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} \\ &\text{membro dx. } \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} \ \blacksquare \end{aligned}$$

Oppure si può anche avvalere dell'interpretazione grafica:



DEF 1.4. Moltiplicazione di un vettore per uno scalare

DEF 1.4. Dato un vettore applicato $\overrightarrow{AB}$ e un numero reale $a \in \mathbb{R}$, definiamo $a \cdot \overrightarrow{AB}$ in questo modo:

$$\text{- Se } a = 0,\ a \cdot \overrightarrow{AB} := \overrightarrow{AA}$$

$$\text{- Se } a > 0,\ a \cdot \overrightarrow{AB} := \text{Un vettore applicato in } A \text{ con le proprietà A)}$$

$$\text{- Se } a < 0,\ a \cdot \overrightarrow{AB} := \text{Un vettore applicato in A con le proprietà B)}$$

- **A)** Con la *stessa* **direzione** e lo *stesso* **verso**, **ma** con **modulo** uguale a $a \cdot |\overrightarrow{AB}|$;
- **B**) Con la *stessa* **direzione**, il **verso** *opposto* dal vettore originario $\overrightarrow{AB}$ e con **modulo** uguale a $|(a)| \cdot |\overrightarrow{AB}|$, ovvero $-(a) \cdot |\overrightarrow{AB}|$ ($|a|$ rappresenta il valore assoluto)

OSS 1.1. Parallelismo tra equazioni lineari e vettori applicati

Si nota un parallelismo tra due argomenti appena affrontati, ovvero le soluzioni di un'equazione e i Vettori Applicati. Infatti, da una certa *somma di vettori* si ottiene un altro vettore; da una *moltiplicazione di un vettore con uno scalare* si ottiene un altro vettore, come proprio accade con le *soluzioni di un'equazione* (osservatosi in Equazioni e Proprietà Lineari).
Infatti entrambi i *vettori applicati* e le *soluzioni lineari* compongono dei **spazi vettoriali**; come lo stesso accade con le *soluzioni alle equazioni differenziali lineari*.

Vettori Liberi

Costruzione dei vettori liberi, brevi richiami a relazioni e classi di equivalenza (in Analisi 1), significato di equipollenza, classe di equipollenza e definizione di somma tra vettori liberi.

Premessa

Come abbiamo osservato nei Vettori Applicati, la costruzione di esse comportano delle *limitazioni* (**OSS 1.3.1** e **OSS 1.3.2**); quindi per ottenere una teoria più *"comprensiva"*, introduciamo un nuovo oggetto: i **vettori liberi**. Tuttavia è necessario prima introdurre dei nuovi concetti, tra cui il concetto dell'*equipollenza*, della *classe di equipollenza* e i *rappresentanti di una classe di equipollenza*.

DEF 1. Equipollenza

Due vettori applicati $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ si dicono **equipollenti** ($\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD}$) *se e solo se* i due vettori hanno:

- La medesima direzione
- Il medesimo verso
- Il medesimo modulo

OSS 1.1. Si verifica che l'*equipollenza* è una relazione di equivalenza (**DEF 5.**); ovvero essa è riflessiva, simmetrica e transitiva. Questo in quanto l'equipollenza è descritta dall'essere uguali $=$.

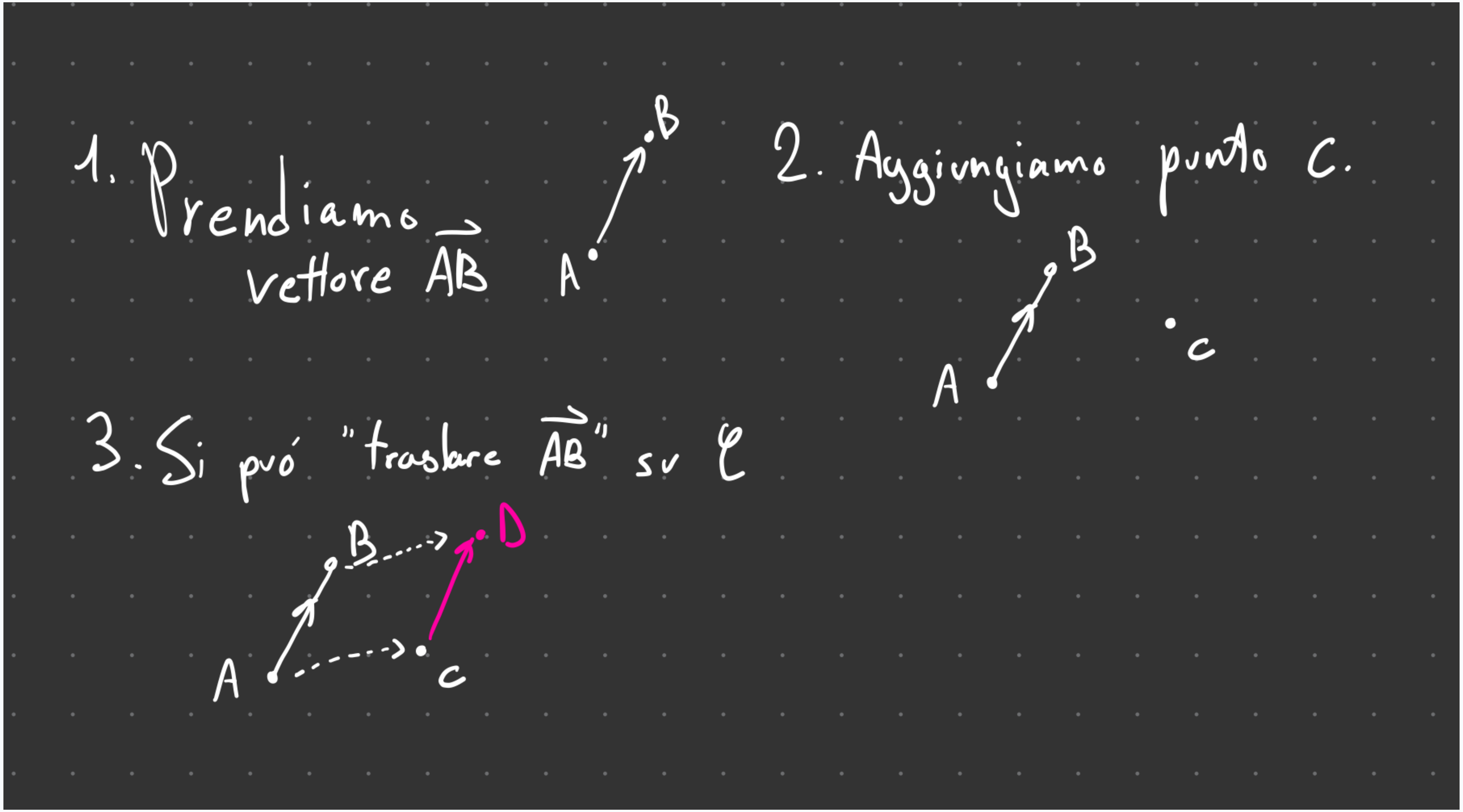
DEF 2. Classe di equipollenza

Dato un vettore applicato $\overrightarrow{AB}$, si definisce la sua **classe di equipollenza**

$$[\overrightarrow{AB}] := \{\text{tutti i vettori applicati } \overrightarrow{CD} : \overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD}\}$$

PROP 2.1. Dai risultati della *geometria euclidea* segue che dati un vettore applicato $\overrightarrow{AB}$ e un punto C, allora esiste *sempre* un **vettore applicato** $\overrightarrow{CD} \equiv \overrightarrow{AB}$; da questo segue che una classe di equipollenza denotata $\vec{v}$ e dato un punto C nel piano, esiste *sempre* un vettore applicato che appartiene a $\vec{v}$ e che ha come punto iniziale C.

INTERPRETAZIONE GRAFICA.



OSS 2.1. Si nota che

$$\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD} \iff [\overrightarrow{AB}] = [\overrightarrow{CD}]$$

Quindi si dice che i vettori $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ sono dei *rappresentanti* della medesima classe di equipollenza.

DEF 3. Vettore libero

Ora finalmente si definisce il **vettore libero**, che si dice come una classe di **equipollenza** $\vec{v}$.
Infatti è una **quantità infinita** di vettori applicati, che condividono una medesima direzione, un medesimo verso e una medesima lunghezza; sostanzialmente si *"estrania"* dal vettore applicato il *punto di applicazione* e si considerano solo le tre proprietà appena elencate sopra.

DEF 3.1. Vettore libero nullo

OSS 3.1.1. Tutti i *vettori applicati nulli* sono equipollenti e dunque formano una **sola classe di equipollenza** che si denota $\vec{0}$. Qui si vede superato la *prima limitazione* osservata nei Vettori Applicati (**OSS. 1.3.1**); quindi definiamo il *vettore libero nullo* come

$$\vec{0} := [\overrightarrow{AA}]$$

ovvero *tutti* i vettori per cui il punto di applicazione coincide con il punto di arrivo.

OSS 3.1.2. Tenendo in considerazione la definizione della somma tra due vettori liberi, si ha

$$\begin{aligned}\vec{0} + \vec{v} = [\overrightarrow{AA}] + [\overrightarrow{AB}] = [\overrightarrow{AB}] \\ \vec{v} + \vec{0} = [\overrightarrow{AB}] + [\overrightarrow{BB}] = [\overrightarrow{AB}]\end{aligned}$$

Quindi il *vettore libero nullo* $\vec{0}$ si comporta come il numero 0 rispetto all'operazione di *somma*.