5/10/2021

I NUMERI COMPLESSI

Motivazione: i numeri complessi "nascono", storicamente per poter risolvere l'equazione polinomiale

$$x^2 = -1$$

È ben risaputo che l'equazione di cui sopra non ammette soluzioni appartenenti ai numeri reali.

Definiamo dunque con i, che denoteremo d'ora in avanti come unità immaginaria un elemento tc.

$$i^2 = -1$$

"Problematica" notiamo subito che se $i^2 = -1$ allora si ha che

$$(-i)^2 = (-1)^2 \, i^2 = -1$$

$\rightsquigarrow$ Molteplicità delle radici complesse.

Def Sia i l'unità immaginaria un numero complesso z è un'espressione della forma

$$z = x + iy \quad , \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

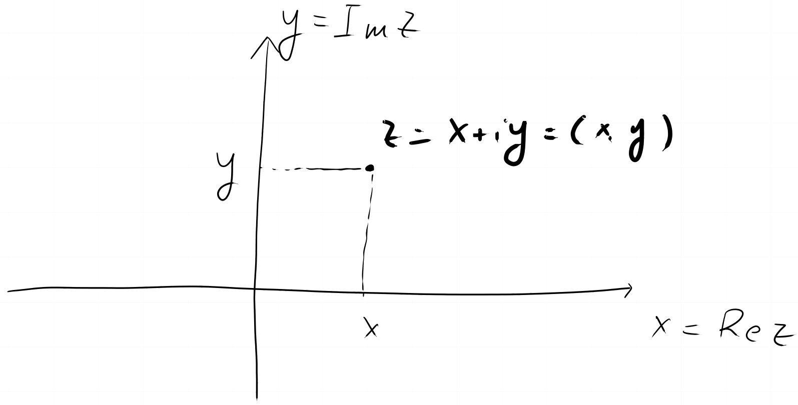
x è detta parte reale di z e può essere denotata con $x = \operatorname{Re} z$

y è detta parte immaginaria di z e può essere denotata con $y = \operatorname{Im} z$

L'insieme dei numeri complessi viene denotato con il simbolo $\mathbb{C}$ che è definito come

$$\mathbb{C} = \{ z : z = x + iy, \; x, y \in \mathbb{R} \}$$

I numeri complessi ammettono un'identificazione biunivoca con il piano reale $\mathbb{R}^2$



Def dato un numero complesso $z = x+iy \in \mathbb{C}$ definiamo il complesso coniugato di z come

$$\bar{z} = z^* = x - iy = \mathrm{Re}\, z - i\, \mathrm{Im}\, z .$$

Def sia $z \in \mathbb{C}$ definiamo il modulo di z come la quantità

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$$

NB il modulo di z è sempre una quantità reale e nonnegativa

$$z \cdot \bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2+y^2 \geq 0$$

NB Notiamo come il modulo di z non sia nient'altro che la norma euclidea del vettore $(x\ y) \in \mathbb{R}^2$.

Numeri complessi in forma trigonometrica

Sia $z = x + iy \in \mathbb{C}$, consideriamo l'identificazione canonica

$$z \simeq (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

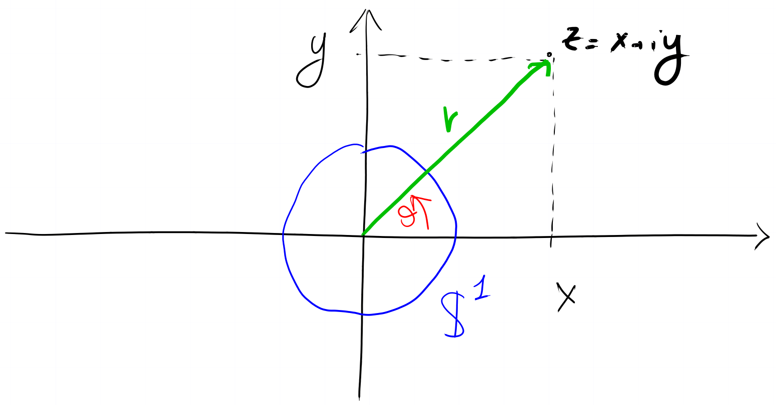
Da ciò che sappiamo dal corso di Analisi 2 $\exists! \, (r, \vartheta) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi)$ tc

$$\begin{cases} x = r\cos\vartheta \\ y = r\sin\vartheta \end{cases}$$

ed in particolare possiamo calcolare r e ϑ come funzioni di x ed y

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\vartheta = \begin{cases} \operatorname{arctg}(y/x) & \text{se } x \neq 0 \\ \pi/2 & \text{se } x = 0 \text{ ed } y > 0 \\ -\pi/2 & \text{se } x = 0 \text{ ed } y < 0 \\ \text{indefinito} & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$



Possiamo dunque scrivere

$$z = x + iy = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$$

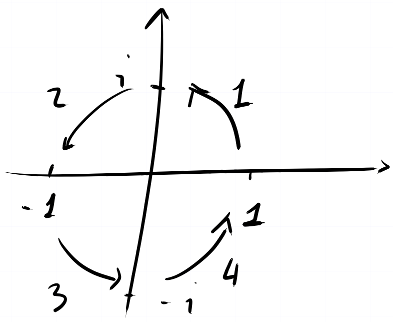
L'espressione di cui sopra è conosciuta come formulazione trigonometrica di un numero complesso, r è detto il modulo di z, $|z| = r$, mentre ϑ è l'argomento di z e lo indichiamo con $\vartheta = \arg z$

NB l'argomento di un numero complesso è univocamente definito sse ci restringiamo a considerare $\vartheta \in [0, 2\pi)$, altrimenti se ammettiamo che ϑ sia un valore reale qualsiasi l'argomento è dunque definito modulo rotazioni di $2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

L'esponenziale complesso

Notiamo dapprima le seguenti identità

$$i^0 = 1, \quad i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1$$



Ne deduciamo dunque che $\forall n \in \mathbb{Z}$

$$i^{4n} = 1, \quad i^{4n+1} = i, \quad i^{4n+2} = -1, \quad i^{4n+3} = -i$$

[Calcolo informale]

Sia $\vartheta \in \mathbb{R}$, consideriamo l'espressione

$$e^{i\vartheta} = \sum_{m \in \mathbb{N}} \frac{(i\vartheta)^m}{m!}$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(i\vartheta)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(i\vartheta)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$(i)^{2n} = [(i)^2]^n = (-1)^n$$

$$(i)^{2n+1} = (i)^{2n}\, i = i(-1)^n$$

$$= \underbrace{\sum_n \frac{(-1)^n \vartheta^{2n}}{(2n)!}}_{=\cos\vartheta} + i \underbrace{\sum_n \frac{(-1)^n \vartheta^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{=\sin\vartheta}$$

$$= \cos\vartheta + i \sin\vartheta$$

$\Rightarrow$ Ogni elemento di $S^1 = \{ z \in \mathbb{C} : |z| = 1 \}$ può essere scritto come $z = e^{i\vartheta}$, $\vartheta \in [0, 2\pi)$

<u>OSS</u> $\vartheta \in \mathbb{R}$, $\overline{e^{i\vartheta}} = \overline{(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)} = \cos\vartheta - i\sin\vartheta$

$$= \cos(-\vartheta) + i\sin(-\vartheta) = e^{-i\vartheta}$$

<u>ES</u> Dimostrare che $\forall \vartheta \in \mathbb{R}$

$$\cos\vartheta = \frac{e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}}{2}, \quad \sin\vartheta = \frac{e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta}}{2i}$$

Potenze e radici di un numero complesso

Sia $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} = \mathbb{C}^*$ sappiamo che $\exists! (r, \vartheta) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi)$ tc

$$z = r e^{i\vartheta}$$

dunque $\forall n \in \mathbb{N}$ definiamo

$$z^n = (r e^{i\vartheta})^n = r^n e^{in\vartheta}$$

Sia ora $n \in \mathbb{N}$, vogliamo calcolare la radice n-esima di z, ossia vogliamo determinare un $w \in \mathbb{C}$ tc

$$w^n = z.$$

Sia dunque $w = s e^{i\varphi}$, abbiamo dunque che

$$w^n = s^n e^{in\varphi} = z = r e^{i\vartheta}$$

$$\Rightarrow \quad s^n = r$$

$$n\varphi = \vartheta + 2k\pi \quad , k \in \mathbb{Z}$$

$$\rightsquigarrow \varphi = \frac{\vartheta}{n} + \frac{2k}{n}\pi \quad , \quad \forall k = 0, 1, \dots, n-1$$

Def Sia $z = re^{i\vartheta} \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ l'insieme delle radici n-esime di z è dato dall'insieme

$$\{w_1, w_2, \dots, w_n\} \quad t_c$$

$$|w_i| = r^{1/n} \quad , \quad \arg w_i = \frac{\vartheta}{n} + \frac{2i}{n}\pi \quad , \quad i = 1, \dots, n \, .$$

Def [esponenziale complesso] $\forall z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$ definiamo

$$e^z = e^{x+iy} = \underbrace{e^x}_{\in \mathbb{R}_+} \underbrace{e^{iy}}_{\in \mathbb{S}^1}$$

Def [funzioni trigonometriche complesse] $\forall z \in \mathbb{C}$ definiamo

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad , \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \qquad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

Logaritmo di un numero complesso

Sia $z \in \mathbb{C}$, sappiamo che $\exists\, \vartheta \in [0, 2\pi)$ t.c.

$$z = |z|\, e^{i\vartheta} = |z|\, e^{i(\vartheta + 2k\pi)} \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad \vartheta = \arg z$$

Calcoliamo ora

$$\begin{aligned} \log z &= \log\left(|z|\, e^{i(\vartheta+2k\pi)}\right) \\ &= \log|z| + i\vartheta + i\, 2k\pi, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ ⚠ Il logaritmo complesso non è univocamente definito

Funzioni di variabili reali a valori complessi

Def Una funzione $f: I (\subseteq \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$, con I intervallo è del tipo

$$f(x) = u(x) + i\, v(x),$$

con $u, v : I \longrightarrow \mathbb{R}$ funzioni reali a valori reali.

Tramite l'identificazione canonica $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ f è identificabile con una curva piana

$$f(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix}, \quad x \in I$$

Si ha

- f è continua $\iff$ u, v sono continue
- f è derivabile $\iff$ u, v sono derivabili e
$$f'(x) = u'(x) + i\, v'(x)$$

- f è integrabile in $[a,b] \subseteq I \longleftrightarrow u$ e v lo sono

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b u(x)\,dx + i\int_a^b v(x)\,dx .$$

Funzioni periodiche

- Una funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ è T-periodica con periodo $T>0$ se

$$f(x+T) = f(x) \qquad \forall\ x \in \mathbb{R}$$

- Si definiscono: $1/T$ frequenza, e $\omega = 2\pi/T$ frequenza angolare

- Una funzione T-periodica è individuale univocamente dalla restrizione

$$f\Big|_{[\alpha, \alpha+T)} \qquad \alpha \in \mathbb{R} \text{ fissato}$$

OSS Consideriamo la funzione

$$g(x) = \sin(2x)$$

Notiamo che $\sin(2x) = \sin(2x+\pi)$

Tuttavia è pur vero che $\sin(2x) = \sin(2x+2\pi)$

allo stesso modo $\sin(2x) = \sin(2x+k\pi) \quad \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

Sia ora $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione generica T-periodica

$\leadsto$ f è kT-periodica $\forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Esempi

- $f(x) = \sin(\pi x)$ è periodica di periodo 2
- $f(x) = \arcsin(\sin x)$ è periodica di periodo 2π
- $f(x) = e^{ix} = \cos x + i \sin x$ —— " ——

6/10/2021

- M. Codegone, Metodi matematici per l'ingegneria
- Saff, Snider, Fundaments of Complex Analysis with applications to Engineering ....

Ieri (5/10):

- Numeri complessi come estensione di $\mathbb{R}$
- formulazione trigonometrica di un NC
- formulazione exp di un NC
- Funzioni (radici / Fz trig / exp) complesse
- Fz periodiche

Es Fz periodiche : $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, e^{ix} etc....

1) $$f(x) = \underbrace{\sin(x/2)}_{=f_1(x)} + \underbrace{\cos(2x)}_{=f_2(x)}$$

Sappiamo che f_1 è 4π - periodica
— " — f_2 è π - periodica

Tuttavia utilizzando la definizione stessa di periodicità deduciamo che f_2 è 4π-periodica

$$\boxed{f_2(x+4\pi)} = f_2(x+3\pi+\pi) \underset{\uparrow}{=} f_2(x+3\pi) = \dots = \boxed{f_2(x)}$$

f_2 è π-periodica

Otteniamo dunque che f_2 soddisfa la condizione di 4π-periodicità

$\Longrightarrow f = f_1 + f_2$ è 4π - periodica

2) Siano $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$, considero

$$f(x) = \underbrace{e^{iq_1 x}}_{=f_1(x)} + \underbrace{e^{iq_2 x}}_{=f_2(x)} \quad , x \in \mathbb{R}$$

f è periodica? se si, di che periodo?

$$f_i\left(x + 2\pi/q_i\right) = \exp\left(i\left(x + \frac{2\pi}{q_i}\right) q_i \right)$$

$$= \exp\left(i x q_i + i \frac{2\pi}{\cancel{q_i}} \cancel{q_i} \right)$$

$$= e^{i x q_i} \cdot \underbrace{e^{i 2\pi}}_{=1} = e^{i x q_i}$$

$$= f_i(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$\rightsquigarrow f_i, \ i = 1,2$ è $2\pi/q_i$ - periodica

Se scegliamo dunque

$$T = \text{mcm}\left\{ \frac{2\pi}{q_1}, \frac{2\pi}{q_2} \right\},$$

e tale valore esiste e si può calcolare esplicitamente grazie all'ipotesi $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$, otteniamo che f è T - periodica

3) Supponiamo $f(x) = e^{2\pi i \alpha x} + e^{2\pi i q x}$, $q \in \mathbb{Q}$, $\alpha = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Argomentando come nel punto 2 possiamo definire

$f_1(x) = e^{2\pi i \alpha x}$ è $1/\alpha$ - periodica

$f_2(x) = e^{2\pi i q x}$ è $1/q$ - periodica

tuttavia siccome $q \in \mathbb{Q}$ e $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ non esiste un multiplo intero comune ai 2 $\Longrightarrow$ f <u>non</u> è periodica

Energia di una funzione periodica

Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, T-periodica, localmente integrabile in $\mathbb{R}$
si pone

$$\|f\|_2^2 = \|f\|_{L^2}^2 = \int_0^T |f(x)|^2 \, dx = \int_0^T u^2(x) + v^2(x) \, dx$$

$$= \int_\alpha^{\alpha+T} |f(x)|^2 dx \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

Tale quantità ($\|f\|_2$) è denotata come energia o norma L^2 della funzione f.

Fissiamo ora un periodo $T>0$ e poniamo $\omega = 2\pi/T$

Def Armoniche elementari

Sono funzioni del tipo

1) A_0, $A_n \cos(n\omega x + \varphi_n)$ o $A_n \sin(n\omega x + \varphi_n)$
dove $n \in \mathbb{N}^*$, $A_0 \in \mathbb{R}$, $A_n \in \mathbb{R}_+$, $\varphi_n \in (-\pi, \pi)$

2) $a_0/2$, $a_n \cos(n\omega x)$, $b_n \sin(n\omega x)$, $n \in \mathbb{N}^*$, $a_0, a_n, b_n \in \mathbb{R}$

fz R di var $\mathbb{R}$

3) $c_n e^{in\omega x}$, $n \in \mathbb{Z}$, $c_n \in \mathbb{C}$ armoniche complesse

Relazioni tra armoniche elementari

Vogliamo dimostrare che le tre famiglie di armoniche elementari sono equivalenti, ossia una particolare scelta dei coefficienti fa sì che possiamo esprimere una famiglia di armoniche come combinazione lineare (finita) di armoniche di un'altra famiglia

In particolare proveremo che

1) $\iff$ 2) $\iff$ 3)

1) $\Rightarrow$ 2) $A_n \cos(n\omega x + \varphi_n) = \underbrace{A_n \cos\varphi_n}_{a_n} \cos(n\omega x) - \underbrace{A_n \sin\varphi_n}_{b_n} \sin(n\omega x)$ (*)

$= a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)$

Proviamo ora che 2) $\Rightarrow$ 1).

Da (*) ne deduco che dati a_n e b_n cerco degli A_n e φ_n t.c.

$$\begin{cases} a_n = A_n \cos\varphi_n \\ b_n = -A_n \sin\varphi_n \end{cases}$$

$$a_n^2 + b_n^2 = (A_n \cos\varphi_n)^2 + (A_n \sin\varphi_n)^2$$

$$= A_n^2 \Longrightarrow A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$-\operatorname{tg}\varphi_n = b_n / a_n$$

Proviamo ora l'equivalenza 2) $\iff$ 3)

Proviamo che 2) $\Rightarrow$ 3)

$$a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x) = a_n \frac{e^{in\omega x} + e^{-in\omega x}}{2} + b_n \frac{e^{in\omega x} - e^{-in\omega x}}{2i}$$

$$(**) \qquad = \underbrace{\frac{1}{2}(a_n - i b_n)}_{=c_n} e^{in\omega x} + \underbrace{\frac{1}{2}(a_n + i b_n)}_{c_{-n}} e^{-in\omega x}$$

3) => 2)

Data $(**)$ ed una sequenza complessa $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ cerco $(a_n, b_n)_n$ che soddisfino il sistema lineare

$$\begin{cases} c_n = \frac{1}{2}(a_n - i b_n) \\ c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + i b_n) \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} a_n = c_n + c_{-n} \\ b_n = i(c_n - c_{-n}) \end{cases}$$

Energia di un'armonica elementare

$$\|f\|_2^2 = \int_0^T |f(x)|^2 dx$$

Caso reale

1) $$\|A_0\|_{L^2}^2 = \int_0^T A_0^2 \, dx = T A_0^2$$

$$\|A_n \cos(n\omega x + \varphi_n)\|_2^2 = A_n^2 \int_0^T \cos^2(n\omega x + \varphi_n) \, dx$$

$$= \frac{A_n^2}{n\omega} \int_{\varphi_n}^{\varphi_n + 2\pi n} \cos^2 t \, dt = A_n^2 \frac{T}{2\pi n} n\pi = A_n^2 \, T/2$$

2) $$\left\|\frac{1}{2} a_0\right\|_2^2 = \frac{T}{4} a_0^2$$

$$\|a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)\|_{L^2}^2 = \frac{T}{2}(a_n^2 + b_n^2)$$

3) $\|c_0\|_2^2 = \int_0^T |c_0|^2 dx = T\,|c_0|^2$

$$\|c_n e^{in\omega x}\|_2^2 = \int_0^T |c_n e^{in\omega x}|^2 dx$$

$$= \int_0^T |c_n|^2 dx = T\,|c_n|^2$$

Polinomi trigonometrici

Def Chiamiamo polinomio trigonometrico di ordine $N \in \mathbb{N}$ ognuna delle seguenti espressioni:

1) $P_N(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{N} A_n \cos(n\omega x + \varphi_n)$

2) $P_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left[a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x) \right]$

3) $P_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\omega x}$

Energia di un PT

Caso reale: $\|P_N\|_2^2 = T A_0^2 + \frac{T}{2} \sum_{n=1}^{N} A_n^2$

$$= \frac{T}{2} \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n^2 + b_n^2) \right)$$

Caso complesso: $\|P_N\|_2^2 = T \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2$

Serie trigonometriche

Def Una serie trigonometrica è un'espressione della forma

1) $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)\right)$, $a_0, a_n, b_n \in \mathbb{R}$

2) $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega x}$, $c_n \in \mathbb{C}$

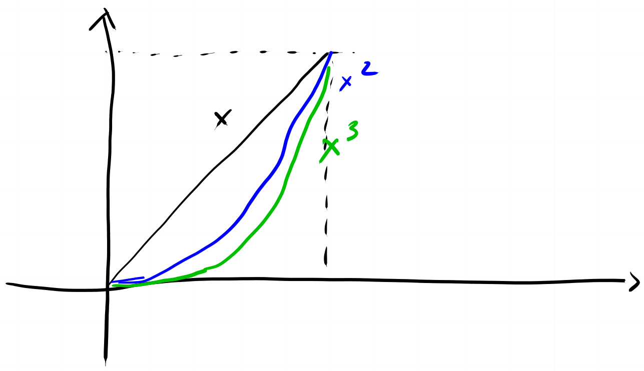
Def La ridotta N-esima di 1) è il PT

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)$$

La ridotta N-esima di 2) è il PT

$$S_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\omega x}$$

Es $f_n(x) = x^n$ in $[0,1]$



Puntualmente $\forall x \in [0,1)$ abbiamo che

$$\lim_n x^n = 0$$

tuttavia se $x = 1$ $\quad x^n \longrightarrow 1$

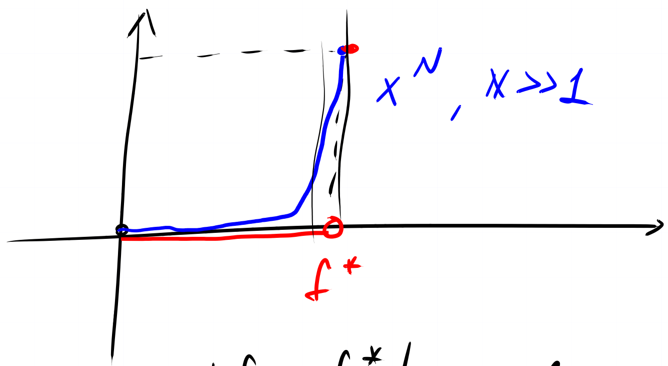
Puntualmente la successione $(f_n)_n$ converge alla funzione $f^*(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1) \\ 1 & x = 1 \end{cases}$

Consideriamo la norma $|\cdot|_\infty$ in $[0,1]$

Calcoliamo adesso

$$\lim_{n \to \infty} |f_n - f^*|_\infty$$

Ogni funzione f_n è continua in $[0,1]$, vale 0 in 0 ed 1 in 1 e dunque assume tutti i valori intermedi in $[0,1]$



$$\rightsquigarrow \quad |f_n - f^*|_\infty = 1$$

Determinate successioni di funzioni possono convergere ad un elemento limite in una topologia, ma non in un'altra.

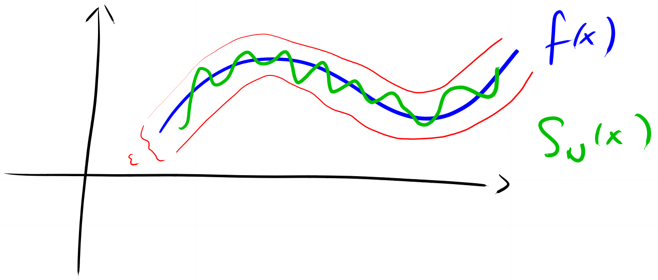
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione T-periodica, una serie trigonometrica del tipo 1) o 2)

- Converge puntualmente ad f su $\mathbb{R}$ se

$$\lim_{N \to \infty} S_N(x) = f(x)$$

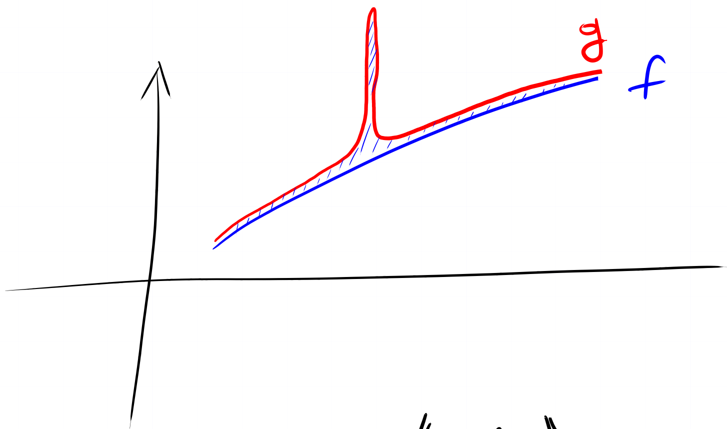
- <u>Converge uniformemente</u> a f su $\mathbb{R}$ se

$$\lim_{N\to\infty}\left(\sup_{x\in\mathbb{R}}\{S_N(x)-f(x)\}\right)=0$$



- Converge in energia o in L^2 and f se è loc integrabile in $\mathbb{R}$ c

$$\lim_{N\to\infty}\|S_N-f\|_2^2=\lim_{N\to\infty}\int_0^T|S_N(x)-f(x)|^2\,dx=0$$



La convergenza in energia "valuta" la regione ombreggiata nell'esempio di cui sopra

$\Longrightarrow$ f e g sono funzioni "vicine" nella topologia L^2

Tuttavia f e g sono "lontane" nella topologia uniforme.

11/10/2021

Convergenza puntuale, uniforme ed in energia (in L^2)

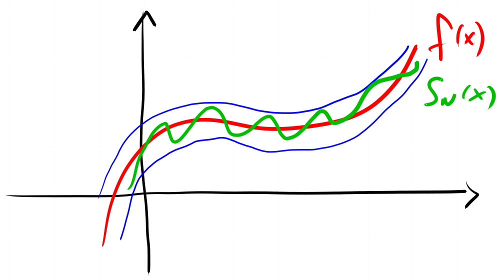
Def Una ridotta N-esima S_N converge puntualmente ad f in $\mathbb{R}$ se

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \lim_{N \to \infty} S_N(x) = f(x)$$

Converge uniformemente se

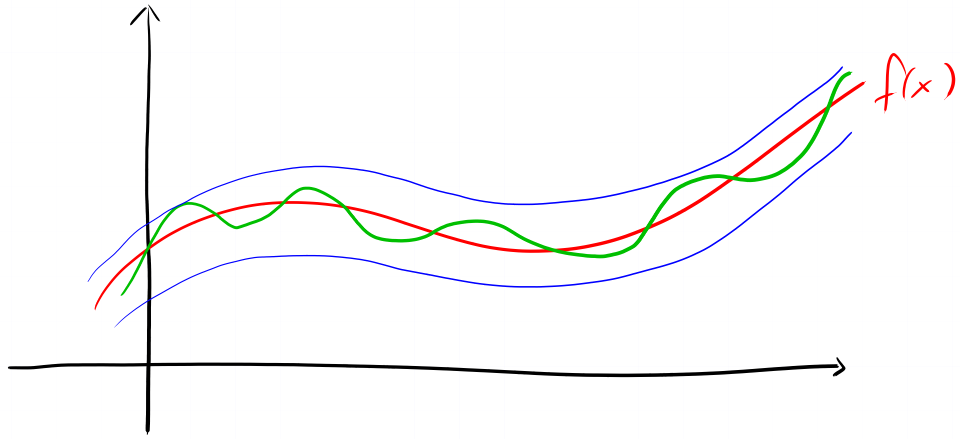
$$\lim_{N \to \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |S_N(x) - f(x)| = 0$$

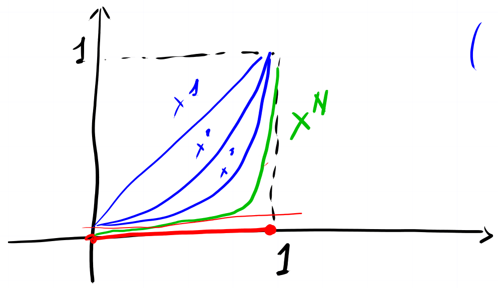
CONVERGENZA UNIFORME > CONVERGENZA PUNTUALE



Mentre S_N converge ad f in energia (o L^2) se

$$\lim_{N \to \infty} \underbrace{\int_0^T |S_N(x) - f(x)|^2 \, dx}_{\|S_N - f\|_{L^2}^2} = 0$$





$(x^n)_{n \geq 1}$

Se $x \in [0,1)$: $x^n \longrightarrow 0$

$x = 1$ $x^n = 1$

Richiami di risultati di Analisi

M-test di Weierstrass

Sia $(f_n)_n$ una successione di funzioni con $f_n : E (\subseteq \mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ $\forall n$. Se $\exists$ $(M_n)_n$ in $\mathbb{R}$ t.c.

- $\sup_{x \in E} |f_n(x)| < M_n \quad \forall n$
- $\sum_n M_n$ converge

allora $\sum_n f_n(x)$ converge uniformemente in E

OSS Perché non possiamo applicare l'M-test alla successione $(x^n)_n$ in $[0,1]$?

$$\sup_{x\in[0,1]} x^n = 1 \equiv M_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Proviamo a vedere se il secondo criterio dell'M-test è verificato

$$\sum_n M_n = \infty \qquad \underline{\underline{\text{NO}}}$$

Continuità Sia $(f_n)_n$ una successione di funzioni con $f_n : E (\subseteq \mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ continua in E $\forall n$

Se $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge uniformemente a f in E allora f è continua in E

Integrazione termine a termine

Sia $(f_n)_n$ successione di funzioni $f_n : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ integrabile in $[a,b]$ $\forall n$

Se $\sum_n f_n$ conv unif a f in $[a,b]$ allora f è integrabile in $[a,b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_a^b f_n(x)\,dx$$

cioè

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)\,dx = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_a^b f_n(x)\,dx$$

Derivazione termine a termine

Sia $(f_n)_n$ come sopra, se $\sum_n f_n$ converge puntualmente a f in $I = [a,b]$ e $\sum_n f_n'$ converge uniformemente a g in I

allora f è derivabile in I e si ha che $f' = g$

ossia

$$\frac{d}{dx}\sum_n f_n = \sum_n \frac{d}{dx} f_n$$

Esempio

Provare che la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^4}$ converge uniformemente in $\mathbb{R}$ e stabilire la regolarità della somma.

Si ha che

- $\displaystyle\left|\frac{\sin(nx)}{n^4}\right| \leq 1/n^4 = M_n \qquad \forall x \text{ e } \forall n$
- $\displaystyle\sum_n M_n$ è convergente.

$\longrightarrow$ Possiamo applicare l' M-test di Weierstrass ed otteniamo che la serie

$\displaystyle\sum_n \frac{\sin(nx)}{n^4}$ c.u. ad una funzione f che è continua in $\mathbb{R}$

Inoltre sempre utilizzando l' M-test deduco che le serie $\displaystyle\sum \frac{n\cos(nx)}{n^4}$ e $\displaystyle\sum -\frac{n^2\sin(nx)}{n^4}$

$\rightsquigarrow$ otteniamo dunque che f è $C^2(\mathbb{R})$.

Periodicità della somma di una serie trigonometrica

Se la serie trigonometrica

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(n\omega x) + b_n\sin(n\omega x)\right) \qquad \text{oppure}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega x}$$

converge puntualmente in $\mathbb{R}$ ad una funzione f allora f è T-periodica.

Dall' M-test possiamo dedurre la seguente

Condizione sufficiente per la conv uniforme

- Se $\left|\frac{a_0}{2}\right| + \sum_{n=1}^{\infty} \left(|a_n| + |b_n|\right)$ è convergente allora

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)\right)$$

converge uniformemente in $\mathbb{R}$.

- Se $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|$ è convergente allora $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega x}$ c.u. in $\mathbb{R}$.

Dim Basta osservare che

- $|a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)| \leq |a_n| + |b_n|$
- $|c_n e^{in\omega x}| \leq |c_n|$

ed applicare l' M-test di Weierstrass. #

(*) $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{in\omega x}$ → Determinano il periodo di f

la funz f sarà determinata da $(c_n)_n$

Q Data f possiamo determinare $(c_n)_n$ t.c. (*) sia valida?

Relazioni tra i coefficienti di una serie trigonometrica e la sua somma

- Se la serie trigonometrica $\frac{a_0}{2}+\sum_n \left(a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)\right)$ c.u. in $\mathbb{R}$ ad una f (f che è T-periodica e continua), allora

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos(n\omega x)\,dx$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin(n\omega x)\,dx$$

- Nel caso complesso se $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ c.u. a f allora

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)e^{-in\omega x}\,dx \qquad \forall n\in\mathbb{Z}$$

Dim

- Proviamo prima il risultato per $\sum_n c_n e^{in\omega x}$

Ricordiamo che

(*)

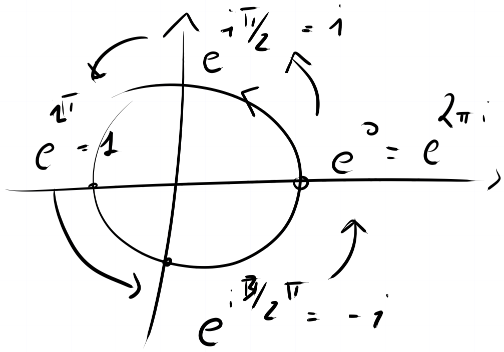
$$\int_{-T/2}^{T/2} e^{ik\omega x}e^{-in\omega x}\,dx = \int_{-T/2}^{T/2} e^{i(k-n)\omega x}\,dx$$

$$= \int_0^T e^{i(k-n)\omega x}\,dx =$$

se $k=n$ $= \int_0^T 1\,dx = T$

se $k\neq n$ $= \frac{1}{i(k-n)\frac{2\pi}{T}} e^{i(k-n)\omega x}\Big|_0^T$

$$= \frac{T}{2\pi i(k-n)}\Big[\underbrace{e^{i(k-n)\frac{2\pi}{T}T}}_{1} - e^0\Big] = 0$$



Abbiamo dunque ottenuto che

$$\int_{-T/2}^{T/2} e^{ik\omega x} e^{-in\omega x} \, dx = \begin{cases} T & \text{se } k=n \\ 0 & \text{se } k \neq n \end{cases}$$

Fissiamo dunque $k \in \mathbb{Z}$ e moltiplichiamo la relazione

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega x} = f(x)$$

per $e^{-ik\omega x} = \overline{e^{ik\omega x}}$ ed integriamo tra $-T/2$ e $T/2$

Poiché la serie converge uniformemente a f in $[-T/2, T/2]$ si può integrare termine a termine

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-ik\omega x} \, dx = \int_{-T/2}^{T/2} \left(\sum_n c_n e^{in\omega x} \right) e^{-ik\omega x} \, dx$$

$$= \sum_n c_n \int_{-T/2}^{T/2} e^{i(n-k)\omega x} \, dx = c_k T$$

otteniamo dunque che, dato k generico in $\mathbb{Z}$

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-ik\omega x} \, dx$$

OSS 1 Dalla relazione $(*)$ ne deduciamo che, dato lo spazio d'energia

$$L^2 = \left\{ f : \int_{-T/2}^{T/2} |f(x)|^2 \, dx < \infty \right\}$$

ed il prodotto scalare

$$\langle f, g \rangle_{L^2} = \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \, \overline{g(x)} \, dx \quad ,$$

la famiglia $\left(\frac{1}{\sqrt{T}} e^{in\omega x} \right)_{n \in \mathbb{Z}}$ è <u>ortonormale</u>

Continuazione della dimostrazione

- Ricordiamo le formule di Werner

$$\sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2} \left(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) \right)$$
$$\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2} \left(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) \right)$$
$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2} \left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta) \right)$$

Si ottiene che

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(n\omega x) \sin(k\omega x) \, dx = 0 \qquad \text{se } k \neq n$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos^2(n\omega x) \, dx = \int_{-T/2}^{T/2} \sin^2(n\omega x) \, dx = T/2$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(n\omega x) \cos(k\omega x) \, dx = 0 \qquad \text{se } k \neq n$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin(n\omega x)\,\sin(k\omega x)\,dx = 0 \quad \text{— '' —}$$

Possiamo a questo punto considerare la funzione

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_n \left(a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x) \right)$$

ed otteniamo che

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\,\sin(k\omega x)\,dx = \frac{T}{2} a_k$$

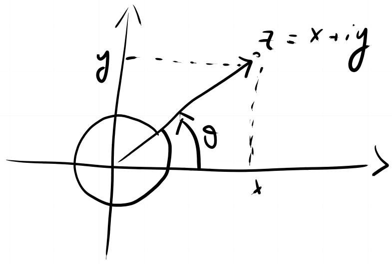
$$\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\,\cos(k\omega x)\,dx = \frac{T}{2} b_k$$

12/10/2021

Esercizio 1 Scrivere in forma esponenziale (e trigonometrica) il numero complesso $z = -1 + i\sqrt{3}$ e calcolare z^4

Numero complesso in forma esponenziale: $z = \rho e^{i\vartheta}$

$\rho > 0$, $\vartheta \in [0, 2\pi)$



Innanzitutto vogliamo determinare il modulo del numero complesso z

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z} = (-1 + i\sqrt{3})(-1 - i\sqrt{3}) = 1 + 3 = 4$$

$$\rightsquigarrow \quad |z| = 2$$

Otteniamo dunque che il $|z| = 2$

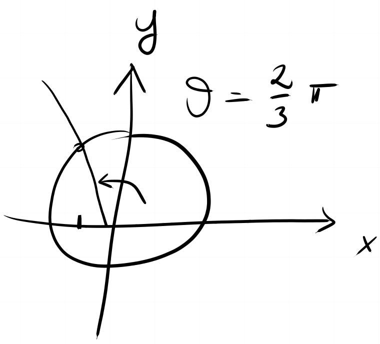
Sappiamo che per esprimere un numero complesso in forma esponenziale dobbiamo identificare un $\vartheta \in [0, 2\pi)$ t.c.

$$z = |z| e^{i\vartheta} \rightsquigarrow e^{i\vartheta} = z/|z|$$

Calcoliamo dunque $z/|z| = \underbrace{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i\sin\vartheta}_{=}$

Vogliamo dunque risolvere il sistema

$$\begin{cases} \cos\vartheta = -1/2 \\ \sin\vartheta = \sqrt{3}/2 \end{cases}$$



$\vartheta = \frac{2}{3}\pi$

Abbiamo dunque ottenuto che

$$\boxed{z = 2 e^{i \frac{2}{3} \pi}}$$

Calcoliamo $z^4 = \left(2 e^{i 2/3 \pi}\right)^4 = 2^4 \left(e^{i 2/3 \pi}\right)^4 = 2^4 e^{i 8/3 \pi}$
$= 16 e^{i \frac{8}{3} \pi}$

Esercizio

Calcoliamo la radice quarta di $z = -2 + i 2\sqrt{3}$

Calcoliamo z nella sua forma esponenziale

$|z|^2 = 4 + 4 \cdot 3 = 16$

Dunque $z/|z| = -1/2 + i \frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i \frac{2}{3} \pi}$

Quindi $z = 4 e^{i \frac{2}{3} \pi}$

Vogliamo dunque trovare un numero complesso

$$w = \rho e^{i s} \quad , \rho > 0, \; s \in [0, 2\pi)$$

t.c. $w^4 = z$ $= \rho^4 e^{4 i s}$

$$\begin{cases} \rho^4 = 4 \\ 4s = \frac{2}{3} \pi + 2k\pi \end{cases} \qquad \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$\rho = \sqrt{2}$$

$$s = \frac{\pi}{6} + \frac{k}{2} \pi \qquad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Dunque $w_k = \sqrt{2} \; e^{i \pi \left(\frac{1}{6} + \frac{k}{2}\right)}$

$w_0 = \sqrt{2}\, e^{i\pi/6}$, $w_1 = \sqrt{2}\, e^{i\pi \frac{4}{6}}$

$w_2 = \sqrt{2}\, e^{i\pi\, 7/6}$, $w_3 = \sqrt{2}\, e^{i\pi \frac{10}{6}}$

Calcoliamo ora $w_4 = e^{i\pi\left(\frac{1}{6}+2\right)} = e^{i\pi/6} \underbrace{e^{2i\pi}}_{=1} = e^{i\pi/6}$

$\rightsquigarrow$ $w_4 = w_0$ e procedendo come nel calcolo di w_1, w_2, w_3 ottengo che

$w_5 = w_1$, $w_6 = w_2$, $w_7 = w_3$ e così via

$\Longrightarrow$ $\{w_0, w_1, w_2, w_3\}$ sono le 4 radici di z.

Esercizio Determinare il modulo ed argomento del seguente numero complesso

$$z = \frac{1}{1+i\sqrt{3}}\, e^{i\pi/2}$$

$$\frac{1}{1+i\sqrt{3}} \cdot \frac{1-i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} = \frac{1-i\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{4} - i\,\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\rightsquigarrow \quad z = \frac{1}{4}\left(1 - i\sqrt{3}\right) e^{i\pi/2}$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{\left(\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}_{\text{questo è un elemento di } S^1} e^{i\pi/2}$$

$\frac{1}{2} = \cos\vartheta$ $\quad -\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\vartheta$ $\quad \rightsquigarrow \quad \vartheta = -\pi/3$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-i\pi/3}$$

$$z = \frac{1}{2} e^{-i\pi/3} e^{i\pi/2} = \frac{1}{2} e^{i\pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)}$$

$$= \frac{1}{2} e^{i\pi/6}$$

$$\Longrightarrow \quad \text{Modulo} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$\text{Argomento} = \pi/6$$

$$z = \frac{1}{4} (1 - i\sqrt{3}) e^{i\pi/2}$$

$$e^{i\pi/2} = i$$

$$= \frac{1}{4} (1 - i\sqrt{3}) i = \frac{1}{4} (\sqrt{3} + i) = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{i}{4}$$

$$\rightsquigarrow |z| = \sqrt{\frac{3}{16} + \frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{\cancel{4}}{\cancel{16}}\frac{1}{4}} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$\operatorname{Arg} z = \operatorname{arctg}\left(\frac{1/4}{\sqrt{3}/4}\right) = \operatorname{arctg}\left(1/\sqrt{3}\right) = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}/3\right)$$

$$= \pi/6$$

Esercizio

Provare che dati $z, w \in \mathbb{C}$ si ha che

1) $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$

2) $\overline{zw} = \bar{z}\,\bar{w}$

Proviamo 1) : $z = a + ib$, $w = c + id$

$$z+w = a+ib+c+id = (a+c)+i(b+d)$$

$$= \begin{cases} \boxed{\overline{z+w}} = \underline{(a+c)-i(b+d)} \\ \boxed{\bar{z}+\bar{w}} = a-ib+c-id = \underline{(a+c)-i(b+d)} \end{cases} =$$

Proviamo 2):

$$zw = (a+ib)(c+id) = (ac-bd)+i(ad+bc)$$

$$= \begin{cases} \boxed{\overline{zw}} = \underline{(ac-bd)-i(ad+bc)} \\ \boxed{\bar{z}\,\bar{w}} = (a-ib)(c-id) = \underline{(ac-bd)-i(ad+bc)} \end{cases} =$$

Esercizio

Provare che $(\bar{z})^2 = z^2$ quando z è puro reale o immaginario

1) Se $z \in \mathbb{R}$ allora $\bar{z} = z$ e quindi l'affermazione è immediata

2) Se z è immaginario allora $z = iy$, $y \in \mathbb{R}$

$\rightsquigarrow z^2 = (iy)^2 = i^2y^2 = -y^2$

$\bar{z} = -iy \rightsquigarrow (\bar{z})^2 = (-i)^2y^2 = -y^2$

Esercizio

Consideriamo un polinomio a coefficienti reali

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \qquad a_i \in \mathbb{R},\ i = 0, \dots, n$$

Vogliamo provare che se $z \in \mathbb{C}$ è radice di p allora pure $\bar{z}$ lo è

$$0 = p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$$

Vogliamo vedere che $p(\bar{z}) = 0$

Calcoliamo $p(\bar{z}) = a_0 + a_1 \bar{z} + \dots + a_n (\bar{z})^n$

Consideriamo il monomio

$$a_j (\bar{z})^j = a_j \overline{z^j}$$

Per ipotesi $a_j \in \mathbb{R} \rightsquigarrow a_j = \overline{a_j}$

$$= \overline{a_j}\ \overline{z^j} = \overline{a_j z^j}$$

Questo calcolo è valido $\forall j = 0, 1, \dots, n$

Dunque utilizzando l'identità

$$a_j (\bar{z})^j = \overline{a_j z^j}$$

Ne deduco che

$$\begin{aligned} p(\bar{z}) &= a_0 + a_1 \bar{z} + \dots + a_n (\bar{z})^n \\ &= \overline{a_0} + \overline{a_1 z} + \dots + \overline{a_n z^n} \\ &= \overline{a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n} \\ &= \overline{p(z)} \\ &= \overline{0} = 0 \end{aligned}$$

Esercizio

Siano $z, w \in \mathbb{C}$, dimostriamo che

$$\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w)$$

$$z = \rho e^{i\vartheta}, \quad w = a e^{ib}$$

$$zw = (\rho a)\, e^{i(\vartheta + b)}$$

$$\rightsquigarrow \arg(zw) = \vartheta + b$$

$$\arg(z) = \vartheta, \quad \arg(w) = b$$

$$\Rightarrow \arg z + \arg w = \vartheta + b$$

Esercizio [Formula di De Moivre]

Dimostrare che $\forall n \in \mathbb{N}$

$$(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)^n = \cos(n\vartheta) + i\sin(n\vartheta)$$

$$\cos\vartheta + i\sin\vartheta = e^{i\vartheta} \Longrightarrow (\cos\vartheta + i\sin\vartheta)^n = \left(e^{i\vartheta}\right)^n = e^{i\vartheta n}$$

$$= \cos(\vartheta n) + i\sin(\vartheta n)$$

13/10/2021

Coefficienti, polinomi e serie di Fourier

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, T-periodica, localmente integrabile in $\mathbb{R}$ o, equivalentemente, integrabile $[-T/2, T/2]$

- I coefficienti

$$c_n = c_n(f) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-in\omega x} \, dx \quad , n \in \mathbb{Z}$$

si dicono coefficienti di Fourier di f rispetto al sistema $(e^{in\omega x})_{n \in \mathbb{Z}}$. Le ridotte

$$S_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\omega x}$$

si dicono polinomi di Fourier di f, e, infine

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega x}$$

Si dice serie di Fourier di f.

- Possiamo definire analogamente a sopra i coefficienti

$$a_n = a_n(f) = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos(n\omega x) \, dx$$

$$b_n = b_n(f) = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin(n\omega x) \, dx \qquad n \in \mathbb{N}$$

che si dicono coefficienti di Fourier di f e la quantità

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} \left(a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x) \right)$$

si dice serie di Fourier di f rispetto al sistema

$$\left(1,\ \cos(n\omega x),\ \sin(n\omega x)\right)_{n\geq 1}$$

Analisi di Fourier (o analisi di frequenza) di una funzione periodica

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ periodica e loc. integrabile e siano $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ i coefficienti di Fourier di f rispetto al sistema $\left(e^{in\omega x}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$, ossia

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\, e^{-in\omega x}\, dx$$

Si definisce

$$\text{spettro di } f = \left(c_n(f)\right)_{n\in\mathbb{Z}}.$$

Siccome ogni $c_n \in \mathbb{C}$ sappiamo che

$$c_n = |c_n|\, e^{i\varphi_n},$$

dove $(|c_n|)_n \subseteq \mathbb{R}_+$ e $(\varphi_n)_n \subseteq [0, 2\pi)$, ovviamente $\varphi_n = \arg(c_n)$ ed è detto fase di c_n

Si definiscono

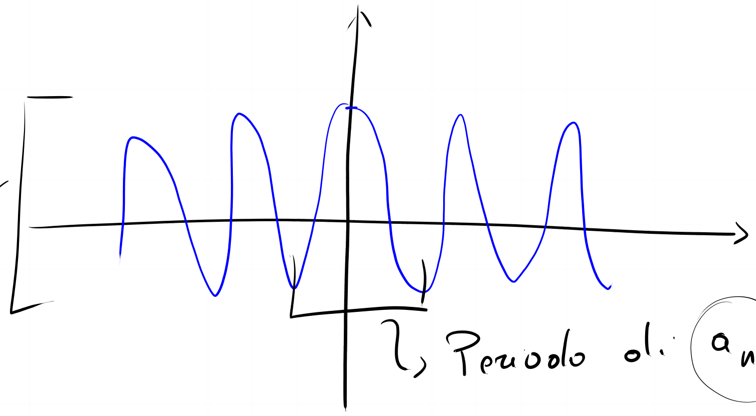
- spettro di ampiezza di $f = \left(|c_n|\right)_{n\in\mathbb{Z}}$
- spettro di fase di $f = (\varphi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$

Discussione euristica:

$$a_n \cos(nx)$$

Ampiezze

fasi



$\rightarrow$ Periodo di $a_n \cos(nx)$, $2\pi/n$

$\rightsquigarrow$ la fase indica la lunghezza del periodo e dunque ne determina la frequenza dell'onda

$\rightarrow$ L'ampiezza determina, letteralmente, l'ampiezza dell'onda

L'<u>analisi</u> di Fourier di f consiste nel determinare il suo spettro e quindi la corrispondente serie di Fourier.

La <u>sintesi</u> consiste invece nel ricostruire f attraverso la sua serie di Fourier

<u>Analisi</u>: $f \longmapsto (c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$

<u>Sintesi</u>: $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}} \longmapsto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega x} \xrightarrow{?} f$

<u>Problema</u> Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ T-periodica e loc. int. allora è determinato il suo spettro e quindi la sua serie di Fourier. Viceversa, dato lo spettro di f la serie di F. di f converge in qualche senso? Qualora converga, converge ad f?

Esempi: Determinare le serie di F. delle seguenti funzioni 2π-per

a) $f(x) = \chi_{[-\pi/2, \pi/2]}(x)$, $\quad -\pi \leq x \leq \pi$

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \forall x \in A \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

b) $f(x) = x$, $\quad -\pi \leq x \leq \pi$

c) $f(x) = |x|$

d) $f(x) = x^2$

Programma del corso

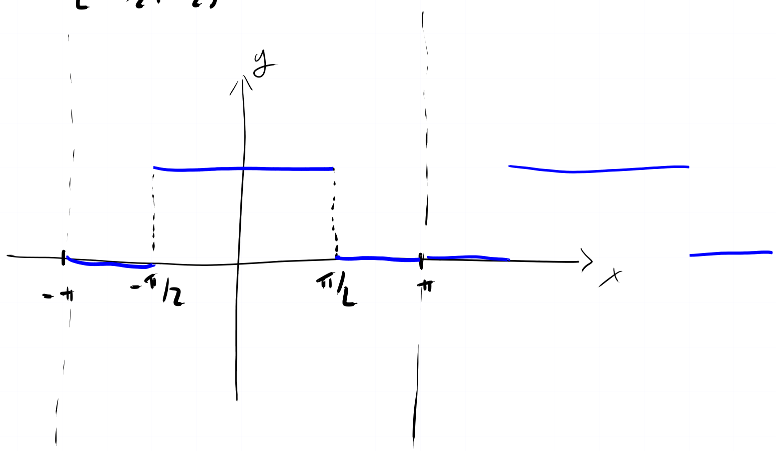
Discutere

- la convergenza puntuale
- la convergenza uniforme
- la convergenza in energia

delle serie di Fourier.

Esempio a)

$$f(x) = \chi_{[-\pi/2,\pi/2)}(x) \qquad -\pi \le x \le \pi$$



$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{in } [-\pi, -\pi/2] \\ 1 & \text{in } [-\pi/2, \pi/2) \\ 0 & \text{in } [\pi/2, \pi) \end{cases}$$

ed estesa periodicamente in tutto $\mathbb{R}$

Abbiamo dunque $T = 2\pi$, $\omega = 1$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} dx = 1$$

Per $n \geq 1$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos(nx)\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos(nx)\,dx =$$

$$(\sin(nx))' = \cos(nx)\cdot n$$

$$= \frac{2}{\pi}\frac{1}{n}\sin(nx)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{2}{\pi}\frac{1}{n}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } n = 2k \\ \dfrac{2(-1)^{k+1}}{(2k-1)\pi} & n = 2k-1 \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx \qquad\qquad -\sin(\alpha) = \sin(-\alpha)$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(nx)\,dx$$

$$\equiv 0 \qquad \forall\, n \geq 1$$

Abbiamo dunque ottenuto la serie di F. di f in forma reale

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\cos(nx) \; .$$

<u>OSS</u> Possiamo scrivere la serie in forma complessa utilizzando le relazioni

$$\begin{cases} c_0 = a_0/2 = 1/2 \\ c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{n\pi}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) = c_{-n} \qquad n \geq 1 \end{cases}$$

<u>Esempio 6</u> $\quad f(x) = x \qquad -\pi \leq x \leq \pi$ estesa periodicamente

Abbiamo che $\quad T = 2\pi, \; \omega = 1$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0$$

per $n \geq 1$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overset{x}{\overset{\parallel}{f(x)}}\cos(nx)\,dx = 0$$ siccome $x \mapsto x\cos(nx)$ è dispari

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(nx)\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin(nx)\,dx$$

Integriamo per parti ed otteniamo

$$= \frac{2}{\pi}\frac{1}{n}\left[-x\cos(nx)\right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi}\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos(nx)\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\frac{1}{n}\left(-\pi\cos(n\pi)\right) + \frac{2}{\pi}\frac{1}{n^2}\left[\sin(nx)\right]_0^{\pi}$$

$$= -\frac{2}{n}(-1)^n = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$$

Otteniamo dunque la serie di F. per f

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n}(-1)^{n+1}\sin(nx) \quad .$$

18/10/2021

Convergenza puntuale delle serie di Fourier

Problema Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ T-periodica e localmente integrabile in $\mathbb{R}$. Fissiamo $x_0 \in \mathbb{R}$, sotto quali condizioni

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega x_0} = f(x_0) \qquad \left[\omega = \frac{2\pi}{T}\right]$$

$$\| $$

$$\lim_{N \to \infty} S_N(x_0)$$

Esempio (Du Bois-Reymond, 1873)

Non basta la continuità, $\exists f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continua e T-periodica

$$S_N(0) \overset{N \to \infty}{\not\to} f(0)$$

Questo vuol dire che non vi è convergenza puntuale in 0.

Teorema (Dirichlet - Weierstrass)

Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ T periodica e localmente integrabile in $\mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Supponiamo che esistano finiti

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0^-), \qquad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0^+)$$

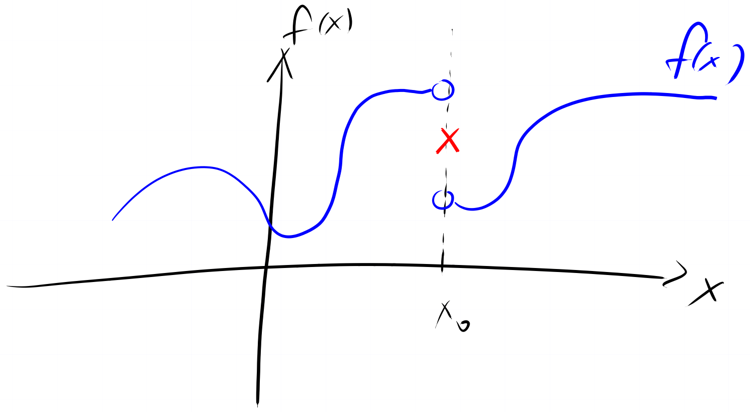
Possono essere $\neq$

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0^-)}{x - x_0^-} = f'(x_0^-),$$

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0^+)}{x - x_0^+} = f'(x_0^+)$$

Si ha dunque che

$$\exists \lim_{N\to\infty} S_N(x_0) = \frac{1}{2}\left(f(x_0^-) + f(x_0^+)\right)$$

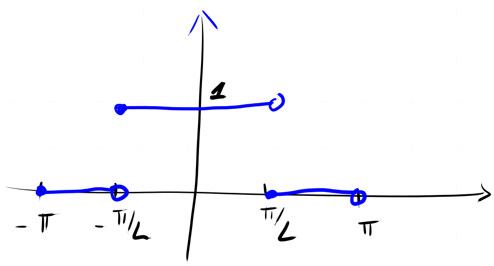


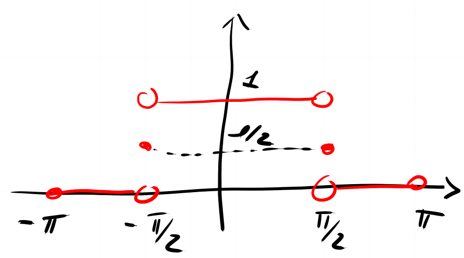
OSS Ovviamente se f è C^1 in x_0 $\rightsquigarrow$ $S_N(x_0) \to f(x_0)$

Questo semplicemente perché se $f \in C^1$

1) $f \in C^0$
2) $f' \in C^0$ e dunque $\exists$ limite dx e sx della funzione rapporto incrementale.

Esempio $f(x) = \chi_{[-\pi/2, \pi/2)}(x)$, $x \in [-\pi, \pi)$





$$S(x) = \lim_{N\to\infty} S_N(x)$$

La dimostrazione del thm di D.-W. si basa su dei risultati ausiliari che hanno un'importanza autonoma

Energia di un polinomio trigonometrico

Sia $P_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} p_n e^{in\omega x}$

Vogliamo calcolare l'energia di P_N, ossia

$$\|P_N\|_2^2 = \int_{-T/2}^{T/2} |P_N(x)|^2 \, dx$$

$$= \int_{-T/2}^{T/2} P_N(x) \cdot \overline{P_N(x)} \, dx$$

$$= \int_{-T/2}^{T/2} \left(\sum_{n=-N}^{N} p_n e^{in\omega x} \right) \overline{\left(\sum_{m=-N}^{N} p_m e^{im\omega x} \right)} \, dx$$

$$= \int_{-T/2}^{T/2} \left(\sum_{n=-N}^{N} p_n e^{in\omega x} \right) \left(\sum_{m=-N}^{N} \overline{p_m} \, e^{-im\omega x} \right) dx$$

$$= \sum_{n=-N}^{N} \sum_{m=-N}^{N} \int_{-T/2}^{T/2} p_n \overline{p_m} \, e^{i(n-m)\omega x} \, dx$$

$$= \sum_{n=-N}^{N} \sum_{m=-N}^{N} p_n \overline{p_m} \underbrace{\int_{-T/2}^{T/2} e^{i(n-m)\omega x} \, dx}_{= \begin{cases} T & \text{se } n = m \\ 0 & \text{se } n \neq m \end{cases} = T \delta_{n,m}}$$

$$= \sum_{n=-N}^{N} |p_N|^2 \, T$$

Abbiamo dunque ottenuto che

$$\|P_N\|_{L^2} = T \sum_{n=-N}^{N} |p_n|^2$$

Disuguaglianza di Bessel

Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, T-periodica e localmente integrabile allora

$$(1) \qquad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \leq \frac{1}{T} \|f\|_{L^2}^2 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(x)|^2 dx$$

OSS La disuguaglianza (1) si esprime quando i coefficienti di $\mathcal{F}_0$ $(c_n)_n$ (o spettro di f) sono dati da

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x)\, e^{-in\omega x} dx ,$$

Tuttavia potremmo riformulare (1) utilizzando i valori $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ validi per serie a valori reali. Tale risultato si può dedurre da (1) utilizzando le formule di cambio di coefficienti

$$\begin{cases} c_n = \frac{1}{2}(a_n - i b_n) \\ c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + i b_n) \end{cases}$$

Dim Sia $S_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\omega x}$ e calcoliamo

$$0 \leq \|f - S_N\|_2^2 = \int_{-T/2}^{T/2} |f(x) - S_N(x)|^2 \, dx$$

$$= \int_{-T/2}^{T/2} (f(x) - S_N(x)) \cdot \overline{(f(x) - S_N(x))} \, dx$$

$$= \int_{-T/2}^{T/2} |f|^2 dx - \int_{-T/2}^{T/2} f \overline{S_N} dx - \int_{-T/2}^{T/2} \overline{f} S_N dx + \int_{-T/2}^{T/2} |S_N|^2 dx$$

$$= \|f\|_2^2 - \sum_{n=-N}^{N} \left(\overline{c_n} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-in\omega x} dx - c_n \int_{-T/2}^{T/2} \overline{f}(x) e^{in\omega x} dx \right)$$

$$+ \underbrace{T \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2}_{= \|S_N\|_{L^2}^2} = (*)$$

Ci ricordiamo ora che

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-in\omega x} dx = T c_n$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \overline{f}(x) e^{in\omega x} dx = \int_{-T/2}^{T/2} \overline{f(x) e^{-in\omega x}} dx$$

$$= \overline{\int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-in\omega x} dx} = T \overline{c_n}$$

Con la quale semplifichiamo $(*)$ ottenendo

$$(*) = \|f\|_{L^2}^2 - \sum_{n=-N}^{N} \overline{c_n} T c_n - \sum_{n=-N}^{N} c_n T \overline{c_n} + T \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2$$

$$= \|f\|_{L^2}^2 - T \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2$$

Pertanto abbiamo ottenuto che

$$0 \leq \|f\|_{L^2}^2 - T \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2 \quad , \text{ ossia}$$

$$\sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2 \leq \frac{1}{T} \|f\|_{L^2}^2$$

Possiamo dunque far tendere $N \to \infty$ ed otteniamo

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \leq \frac{1}{T} \|f\|_{L^2}^2 .$$

#

OSS 1 Dalla disuguaglianza (1) ne deduciamo che, se f è localmente integrabile, $|c_n| \to 0$. La formulazione classica del lemma di Riemann-Lebesgue è formulata in termini di decadimento dei coeff di Fourier

OSS 2 I calcoli sviluppati per dimostrare la disuguaglianza (1) hanno un interessante risultato addizionale, ossia

$$\|f - S_N\|_{L^2}^2 + \|S_N\|_{L^2}^2 = \|f\|_{L^2}^2$$

Ossia otteniamo che le funzioni $f - S_N$ e S_N sono ortogonali rispetto $\langle \cdot , \cdot \rangle_{L^2}$. Otteniamo dunque una generalizzazione infinito-dimensionale del th di Pitagora.

Lemma di Riemann-Lebesgue

Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, T-periodica e loc integrabile in $\mathbb{R}$, allora

$$\lim_{n \to \pm\infty} c_n = 0.$$

Dim dalla disuguaglianza di Bessel otteniamo che $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 < \infty$

$$\Rightarrow |c_n| \xrightarrow{|n| \to \infty} 0 \Rightarrow \text{Ipotesi} \qquad \#$$

Def Sia $T > 0$, $\omega = 2\pi/T$ e definiamo il nucleo di Dirichlet di ordine $N \in \mathbb{N}$ come la funzione

$$D_N(x) = \frac{1}{T} \sum_{n=-N}^{N} e^{in\omega x}$$

Proprietà

1) D_N è T-periodica

2) La funzione D_N è una funzione pari.

$$D_N(x) \stackrel{?}{=} D_N(-x)$$

$$\frac{1}{T} \sum_{n=-N}^{N} e^{in\omega x} \underset{n=-m}{=} \frac{1}{T} \sum_{m=-N}^{N} e^{-im\omega x}$$

Def Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ localmente integrabili, definiamo con $f * g$ che denoteremo come convoluzione di f e g la funzione

$$f*g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\, g(y)\, dy$$

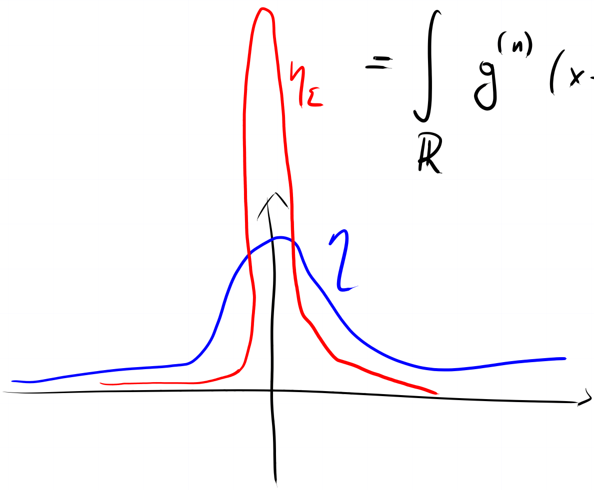
Discussione in formule

Supponiamo che f sia arbitraria (ma localmente integrabile) e g sia C^∞

$$f*g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\,g(y)\,dy \overset{\text{per cosa}}{=} \int_{\mathbb{R}} g(x-y)\,f(y)\,dy$$

$$\frac{d^n}{dx^n}(f*g)(x) = \frac{d^n}{dx^n}\left(\int_{\mathbb{R}} g(x-y)\,f(y)\,dy\right)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} g^{(n)}(x-y)\,f(y)\,dy$$



$$\eta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\,\eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

$f_\varepsilon = f * \eta_\varepsilon$ questa è una funzione <u>liscia</u> che "approssima" f.

20/10/2021

Recap:

Q: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ localmente integrabile, $x_0 \in \mathbb{R}$ quando

$$\lim_N S_N(x_0) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{i n \omega x_0} = f(x_0)$$

A: Thm D-W Se $\exists$ finiti,

$$\lim_{x \to x_0^\pm} f(x) = f(x_0^\pm) \quad , \quad \lim_{x \to x_0^\pm} \frac{f(x) - f(x_0^\pm)}{x - x_0^\pm} = f'(x_0^\pm)$$

allora

$$\exists \lim_{N \to \infty} S_N(x_0) = \frac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2}$$

Risultati introduttivi alla dimostrazione del thm di DW

1) Disuguaglianza di Bessel: $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 \leq \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(x)|^2 dx$

Lemma (di Riemann - Lebesgue)

Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, T-periodica e localmente int,

allora

$$c_n(f) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x)\, e^{-in\omega x}\, dx \xrightarrow{|n| \to \infty} 0$$

Oss La scorsa volta abbiamo visto che il Lemma di RL è una conseguenza immediata della disuguaglianza di Bessel se $|f|^2$ è loc int. Questo, tuttavia, è più che chiedere che f sia loc int. Per questo la lezione odierna concentrerà una buona parte nella dim di RL.

Per dimostrare il teorema di RL avremo bisogno di alcuni risultati ausiliari

Def Si dice funzione semplice o funzione a scalini una funzione φ del tipo

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{L} \alpha_j\, \chi_{[a_j, b_j)}(x) \qquad , L \in \mathbb{N}, \alpha_j \in \mathbb{C}$$

$[a_j, b_j)$ disgiunti

OSS φ è una funzione costante a tratti.

Def Definiamo con $L^1 = L^1([-T/2, T/2])$ la chiusura topologica dello spazio di funzioni semplici rispetto alla norma

$$\|f\|_{L^1} = \int_{-T/2}^{T/2} |f(x)|\, dx$$

Def Definiamo con $\ell^\infty = \ell^\infty(\mathbb{Z};\mathbb{C})$ lo spazio di successioni

$$n \in \mathbb{Z} \longmapsto z_n \in \mathbb{C} \qquad \text{tc}$$

$$\|z\|_{\ell^\infty} = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |z_n| < \infty$$

Lemma Considero l'operatore

$$\mathcal{F} : L^1 \longrightarrow \ell^\infty$$
$$f \longmapsto c_n(f) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\, e^{-in\omega x}\, dx \quad , n\in\mathbb{Z}$$

è un operatore lineare continuo tra L^1 e ℓ^∞.

Dim $f, g \in L^1$, $\lambda \in \mathbb{C}$

$$c_n(f) + \lambda c_n(g) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-in\omega x} + \frac{\lambda}{T}\int_{-T/2}^{T/2} g(x)\, e^{-in\omega x}$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} (f(x) + \lambda g(x))\, e^{-in\omega x}\, dx \;.\!= c_n(f + \lambda g)$$

Questo prova che è lineare.

Proviamo che è continuo

$$\| c_n(f) - c_n(g)\|_{\ell^\infty} = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f) - c_n(g)|$$

$$\le \sup_n \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |f(x) - g(x)|\, \underbrace{|e^{-in\omega x}|}_{\le 1}\, dx = \frac{1}{T}\|f-g\|_{L^1}$$

Dunque se $\|f-g\|_{L^1} \to 0$ allora

$\|c_n(f) - c_n(g)\|_{\ell^\infty} \to 0$. #

Dim del Lemma di RL

Dividiamo la dim in step

Step 1 $f = \chi_{[a,b)}$ $\quad [a,b) \subseteq [-T/2, T/2]$, abbiamo che

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\int_a^b e^{-in\omega x}\,dx = \frac{e^{-inb\omega} - e^{-ina\omega}}{T(-in\omega)} = O(n^{-1}) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Step 2 $f = \varphi$ funzione semplice

$$c_n(f) = \sum_{j=1}^{L} \alpha_j\, c_n(\chi_{[a_j,b_j)}) = \sum_{j=1}^{L} \alpha_j \underbrace{\frac{e^{-inb_j\omega} - e^{-ina_j\omega}}{T(-in\omega)}}_{= O(n^{-1})} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Step 3 $f \in L^1$ generica.

Se $f \in L^1$ allora $\forall \delta > 0\ \exists \varphi = \varphi_\delta$ tc $\|f-\varphi\|_{L^1} < \delta$.

L'applicazione $\mathcal{F}$ è continua tra L^1 e ℓ^∞, dunque $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tc se $\|f-\varphi\|_{L^1} < \delta$ allora

$\|c_n(f) - c_n(\varphi)\|_{\ell^\infty} < \varepsilon$.

Quindi

$$|c_n(f)| \le |c_n(f) - c_n(\varphi)| + |c_n(\varphi)|$$
$$< \underbrace{\varepsilon}_{\mathcal{F}\text{ è continua}} + \underbrace{O(n^{-1})}_{\text{Step 2}}$$

Per arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ concludo

Def Il nucleo di Dirichlet di ordine $N \in \mathbb{N}$ è la funzione

$$D_N(x) = \frac{1}{T} \sum_{n=-N}^{N} e^{in\omega x}.$$

Proprietà

1) D_N è T-periodica
2) D_N è pari

Formule di Dirichlet

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ e loc int e T-periodica allora

$$S_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\omega x} = \int_{-T/2}^{T/2} f(x-t)\, D_N(t)\, dt$$

o equivalentemente

$$S_N(x) = \int_{-T/2}^{T/2} f(x+t) D_N(t)\, dt = \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, D_N(x-t)\, dt$$

Dim

$$S_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n\, e^{in\omega x}$$

$$= \sum_{n=-N}^{N} \left(\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-in\omega t}\, dt \right) e^{in\omega x}$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sum_{n=-N}^{N} e^{in\omega(x-t)}\, dt$$

$$= \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \underbrace{\left[\frac{1}{T} \sum_{n=-N}^{N} e^{in\omega(x-t)} \right]}_{= D_N(x-t)} dt$$

Con il cambio di variabile $s = x - t$ si ottiene che

$$S_N(x) = -\int_{x+T/2}^{x-T/2} f(x-s)\, D_N(s)\, ds = \int_{x-T/2}^{x+T/2} f(x-s)\, D_N(s)\, ds$$

$$= \int_{-T/2}^{T/2} f(x-s)\, D_N(s)\, ds$$

Con l'ulteriore cambio di variabile $u = -s$

$$S_N(x) = -\int_{T/2}^{-T/2} f(x+u)\, D_N(-u)\, du = \int_{-T/2}^{T/2} f(x+u)\, D_N(u)\, du$$

$\#$

Lemma 1 si ha che $\displaystyle\int_0^{T/2} D_N(x)\, dx = 1/2$

OSS Siccome il nucleo di Dirichlet è una funzione pari il lemma 1 implica

$$\int_{-T/2}^{T/2} D_N(x)\, dx = 1 \quad e \quad \int_{-T/2}^{0} D_N(x)\, dx = 1/2$$

Dim

$$\int_{-T/2}^{T/2} D_N(x)\, dx = \frac{1}{T} \sum_{n=-N}^{N} \int_{-T/2}^{T/2} e^{in\omega x}\, dx$$

$$= \frac{1}{T}\left(\int_{-T/2}^{T/2} e^{-iN\omega x}\, dx + \_\_ + \int_{-T/2}^{T/2} 1\, dx + \_\_ + \int_{-T/2}^{T/2} e^{iN\omega x}\, dx \right)$$

Provare per caso

$$= \frac{1}{T}\left(\cancel{\left[\frac{e^{-iN\omega x}}{-iN\omega} \right]_{-T/2}^{T/2}} \to 0 + \_\_ + T + \_\_ + \cancel{\left[\frac{e^{iN\omega x}}{iN\omega} \right]_{-T/2}^{T/2}} \to 0 \right)$$

$$= \frac{1}{T}\left(0 + \_\_ + T + \_\_ + 0 \right) = 1 \quad \#$$

Lemma 2 Si ha che

$$D_N(x) = \begin{cases} \frac{1}{T} \dfrac{e^{i(N+1)\omega x} - e^{-iN\omega x}}{e^{in\omega x} - 1} & \text{se } x \neq kT,\ k \in \mathbb{Z} \\ \frac{1}{T}(2N+1) & \text{se } x = kT,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Dim Se $x = kT$ la dimostrazione è immediata.

$$D_N(kT) = \frac{1}{T}\sum_{n=-N}^{N} e^{in\omega(kT)} = \frac{1}{T}\sum_{n=-N}^{N} e^{in\frac{2\pi}{\cancel{T}}k\cancel{T}} = \frac{2N+1}{T}$$

Sia ora $x \neq kT$, $k \in \mathbb{Z}$, poniamo $z = e^{i\omega x}$

$$D_N(x) = \frac{1}{T}\sum_{n=-N}^{N} e^{in\omega x} = \frac{1}{T}\sum_{n=-N}^{N} z^n$$

$$= \frac{1}{T}\left(z^{-N} + \_\_ + 1 + \_\_ + z^N\right)$$

$$= \frac{z^{-N}}{T}\left(1 + \_\_ + z^{2N}\right) = \frac{z^{-N}}{T} \frac{z^{2N+1} - 1}{z - 1}$$

$$= \frac{1}{T} \frac{z^{N+1} - z^{-N}}{z - 1} \underset{z = e^{i\omega x}}{=} \frac{1}{T} \frac{e^{i\omega(N+1)x} - e^{-iN\omega x}}{e^{i\omega x} - 1}$$

OSS $$D_N(x) = \frac{1}{T} \frac{e^{i(N+1)\omega x} - e^{-iN\omega x}}{e^{i\omega x} - 1} \cdot \frac{e^{-\frac{1}{2}i\omega x}}{e^{-\frac{1}{2}i\omega x}}$$

$$= \frac{1}{T} \frac{e^{i(N+\frac{1}{2})\omega x} - e^{-i(N+\frac{1}{2})\omega x}}{e^{i\frac{\omega}{2}x} - e^{-i\frac{\omega}{2}x}} \cdot \frac{\frac{1}{2i}}{\frac{1}{2i}}$$

$$= \frac{1}{T} \frac{\dfrac{e^{i(N+\frac{1}{2})\omega x} - e^{-i(N+\frac{1}{2})\omega x}}{2i}}{\dfrac{e^{i\frac{\omega}{2}x} - e^{-i\frac{\omega}{2}x}}{2i}}$$

$$= \frac{1}{T} \quad \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega x}{\sin\left(\frac{\omega}{2}x\right)}$$

Dimostrazione del thm di DW

Vogliamo provare che $\lim_N S_N(x_0) = \frac{1}{2}\left(f(x_0^-) + f(x_0^+)\right)$

Utilizziamo la formula di Dirichlet per esprimere S_N come operatore integrale

$$S_N(x_0) = \int_{-T/2}^{T/2} f(x_0+t)\, D_N(t)\, dt$$

Calcoliamo ora

$$S_N(x_0) - \frac{1}{2}\left(f(x_0^-) + f(x_0^+)\right)$$

$$= \int_{-T/2}^{T/2} f(x_0+t)\, D_N(t)\, dt - \frac{1}{2}\left(f(x_0^-) + f(x_0^+)\right)$$

$$= \int_{-T/2}^{0} f(x_0+t)\, D_N(t)\, dt - \frac{1}{2} f(x_0^-)$$

$$+ \int_{0}^{T/2} f(x_0+t)\, D_N(t)\, dt - \frac{1}{2} f(x_0^+)$$

$$= \int_{-T/2}^{0} f(x_0+t)\, D_N(t)\, dt - \int_{-T/2}^{0} D_N(t)\, f(x_0^-)\, dt$$

$$+ \int_{0}^{T/2} f(x_0+t)\, D_N(t)\, dt - \int_{0}^{T/2} f(x_0^+)\, D_N(t)\, dt$$

$$= \int_{-T/2}^{0} \left[\overline{f}(x_0+t) - f(x_0^-)\right] D_N(t)\, dt$$

$$+ \int_{0}^{T/2} \left[\overline{f}(x_0+t) - f(x_0^+)\right] D_N(t)\, dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{0} \left[f(x_0+t) - f(x_0^-)\right] \frac{e^{i(N+1)\omega t} - e^{-iN\omega t}}{e^{i\omega t} - 1}\, dt$$

$$+ \frac{1}{T} \int_{0}^{T/2} \left[\overline{f}(x_0+t) - f(x_0^+)\right] \frac{e^{i(N+1)\omega t} - e^{-iN\omega t}}{e^{i\omega t} - 1}\, dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{0} \frac{f(x_0+t) - f(x_0^-)}{t} \frac{t}{e^{i\omega t}-1} \left(e^{i(N+1)\omega t} - e^{-iN\omega t}\right) dt$$

$$+ \frac{1}{T} \int_{0}^{T/2} \frac{f(x_0+t) - f(x_0^+)}{t} \frac{t}{e^{i\omega t}-1} \left(e^{i(N+1)\omega t} - e^{-iN\omega t}\right) dt$$

Notiamo che $e^{i\omega t} - 1 = (\cos(\omega t) - 1) + i \sin(\omega t)$

e dunque definiamo la funzione ausiliaria

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{f(x_0+t) - f(x_0^-)}{t} \dfrac{t}{(\cos(\omega t)-1) + i\sin(\omega t)} & -\pi \le t < 0 \\[2ex] \dfrac{f(x_0+t) - f(x_0^+)}{t} \dfrac{t}{(\cos(\omega t)-1) + i\sin(\omega t)} & \end{cases}$$

e prolunghiamo g periodicamente in $\mathbb{R}$.

Calcoliamo ora

$$\lim_{t \to 0^-} g(t) = \lim_{t \to 0^-} \underbrace{\frac{f(x_0+t) - f(x_0^-)}{t}}_{\to f'(x_0^-)} \quad \underbrace{\frac{t}{\underbrace{(\cos(\omega t) - 1)}_{\sim t^2} + i \underbrace{\sin(\omega t)}_{\sim \omega t}}}_{\to \frac{1}{i\omega}}$$

$$= f'(x_0^-) \frac{1}{i\omega}$$

$$\lim_{t \to 0^+} g(t) = f'(x_0^+) \frac{1}{i\omega}$$

Otteniamo dunque che g è limitata in $[-T/2, T/2]$.

La funzione integrale

$$G(x) = \int_{-T/2}^{x} g(t)\, dt$$

è uniformemente continua in $[-T/2, 0]$ e dunque esiste finito

$$\lim_{x \to 0^-} G(x) = \int_{-T/2}^{0} g(t)\, dt$$

$\rightsquigarrow$ g è integrabile in $[-T/2, 0]$

Si può analogamente vedere che g è int in $[0, T/2]$

$\rightsquigarrow$ g è int in $[-T/2, T/2]$ $\rightsquigarrow$ g è loc int

$$S_N(x_0) - \frac{1}{2}\left(f(x_0^-) + f(x_0^+)\right)$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{0} g(t)\left[e^{i(N+1)\omega t} - e^{iN\omega t}\right] dt$$

$$+ \frac{1}{T}\int_{0}^{T/2} g(t)\left[e^{i(N+1)\omega t} - e^{iN\omega t}\right] dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} g(t)\, e^{i(N+1)\omega t}\, dt - \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} g(t)\, e^{iN\omega t}\, dt$$

$$= c_{N+1}(g) - c_N(g)$$

Siccome g è localmente integrabile applichiamo il lemma di RL ed otteniamo che

$$c_{N+1}(g) - c_N(g) \xrightarrow{N\to\infty} 0$$

, provando dunque finalmente che

$$S_N(x) - \frac{1}{2}\left(f(x_0^-) + f(x_0^+)\right) \xrightarrow{N\to\infty} 0$$

$\#$

Problema di Basilea (Proposto da Mengoli nel 1644 e risolto da Eulero nel 1735)

Calcolare la somma della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

Consideriamo la funzione

$f(x) = x^2$, $-\pi \le x \le \pi$, estesa periodicamente

La serie di Fourier di f è

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} (-1)^n \cos(nx)$$

e per il thm di DIV la serie converge puntualmente a f $\forall x \in \mathbb{R}$

Se $x = \pi$ allora si ha che

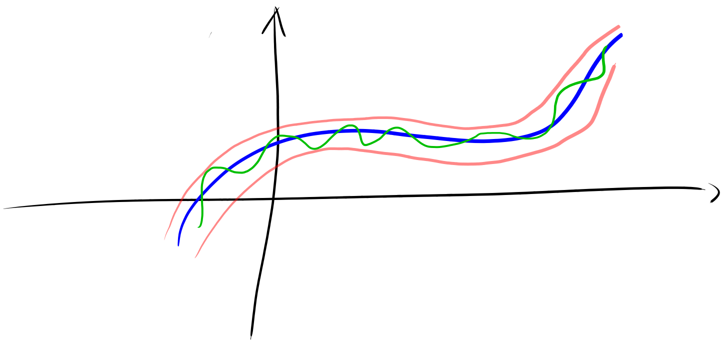
$$\pi^2 = f(\pi) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \boxed{(-1)^n (-1)^n}^{\equiv 1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4}\left(\pi^2 - \frac{\pi^2}{3}\right) = \frac{\pi^2}{6}$$

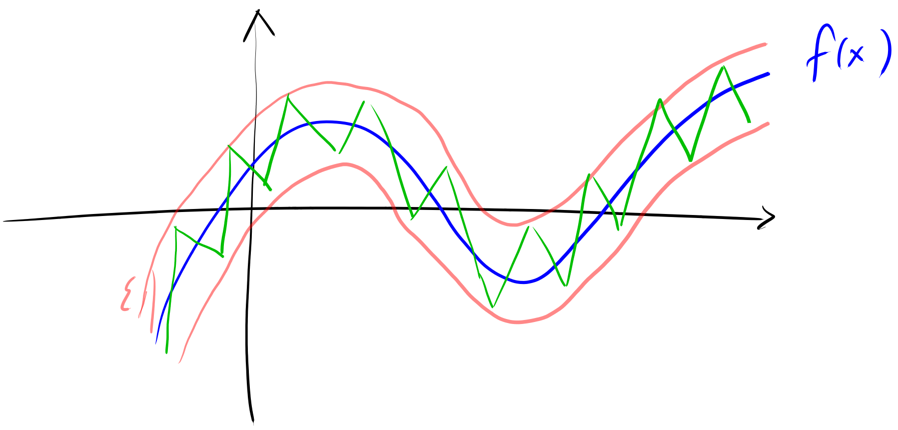
OSS Convergenza uniforme di una funzione e delle sue derivate

Recap una successione $(f_n)_n$ converge uniformemente a f in $\mathbb{R}$ se

$$\lim_n \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = 0$$



Esempio di una successione di funzioni che convergono unif ad una funzione $f \in C^\infty$ ma per le quali non è vero che f'_n converga a f'



In questo esempio grafico otteniamo che f'_n non converge a f'

26/10/2021

Recap

I parte : dimostrazione del thm di DVX

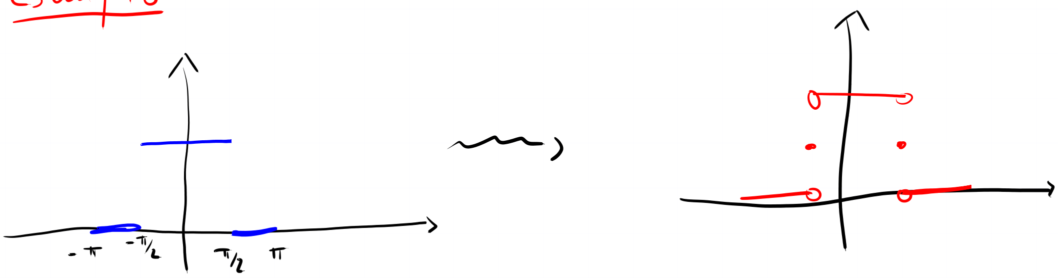
Thm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ T-per e loc int e supponiamo $\exists$ finiti i limiti

$$\lim_{x \to x_0^\pm} f(x) = f(x_0^\pm) \quad , \quad \lim_{x \to x_0^\pm} \frac{f(x) - f(x_0^\pm)}{x - x_0} = f'(x_0^\pm)$$

allora

$$S_N(x_0) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)\, e^{in\omega x_0} \xrightarrow{N \to \infty} \frac{1}{2}\left(f(x_0^+) + f(x_0^-)\right)$$

Esempio



Parte II

Problema di Basilea : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Principio d'identità per le serie di Fourier

Siano f e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, T-periodiche, localmente integrabili dotate $\forall x \in \mathbb{R}$ di derivate finite e supponiamo che

$$c_n(f) = c_n(g) \qquad \forall n \in \mathbb{Z}$$

allora $f(x) = g(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

Dim Se f e g sono derivabili $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ e g sono continue $\forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \exists$ limiti dx e sx di f e g in x e del loro rapporto incrementale

$\Rightarrow$ Le condizioni del thm di DIN sono soddisfatte

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)\, e^{in\omega x}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(g)\, e^{in\omega x}$$

Per ipotesi tuttavia $c_n(f) = c_n(g) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

$$\boxed{f(x) \overset{DIN}{=}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)\, e^{in\omega x} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(g)\, e^{in\omega x} \boxed{\overset{DIN}{=} g(x)}$$

$\leadsto$ la tesi del teorema $\#$

Ricordiamo il Lemma di RL

Lemma $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ T-per, loc. int.

$$\lim_{n \to \pm\infty} c_n(f) = 0$$

Relazioni tra i coefficienti di Fourier di una funzione e quelli delle sue derivate

Teorema Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, T-per e loc. int, derivabile k volte, con $k \in \mathbb{N}^*$ e sia $f^{(k)}$ loc int allora $\forall n \in \mathbb{Z}$

$$c_n(f^{(k)}) = (in\omega)^k c_n(f)$$

Dim se $k=0$ il claim è banale

$k=1$
$$c_n(f') = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f'(x)\, e^{-in\omega x}\, dx = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \partial_x f(x)\, e^{-in\omega x}\, dx$$

$(uv)' = u'v + uv'$

$$= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \left[\partial_x\left(f(x)\, e^{-in\omega x}\right) - f(x)\,\partial_x\left(e^{-in\omega x}\right)\right] dx$$

$\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$= \cancel{\frac{1}{T}\left[f(x)\, e^{-in\omega x}\right]_{-T/2}^{T/2}}_{=0} - \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\, e^{-in\omega x}\,(-in\omega)\, dx$$

$$= (in\omega)\underbrace{\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\, e^{-in\omega x}\, dx}_{= c_n(f)}$$

$$= in\omega\, c_n(f)$$

Per i successivi k si procede induttivamente #

Relazione tra regolarità di una funzione e velocità di decadimento dei coefficienti di Fourier

Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, T-periodica $f \in C^k(\mathbb{R})$ (f è derivabile k volte e $f^{(k)}$ è continua), $f^{(k)}$ è loc int. dal lemma di RL ne segue che

$$c_n(f^{(k)}) \xrightarrow{n \to \pm\infty} 0$$

Per il teorema precedente otteniamo la relazione

$$c_n(f^{(k)}) = (in\omega)^k \, c_n(f)$$

$$\leadsto \quad |c_n(f)| \le \frac{1}{|n\omega|^k} |c_n(f^{(k)})|$$

Tuttavia siccome $c_n(f^{(k)}) \xrightarrow{n \to \pm\infty} 0$ ne deduciamo che $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tc $|c_n(f^{(k)})| \le 1/2$ il quale dunque implica che

$$|c_n(f)| \le \frac{1}{2} \frac{1}{|\omega|^k} \cdot |n|^{-k} = \frac{T^k}{2 \cdot (2\pi)^k} |n|^{-k}$$

Questo mi dice che, utilizzando la notazione o

$$|c_n(f)| = o(|n|^{-k})$$

NB $f = o(g)$ quando $t \to \pm\infty$ sse

$$\lim_{t \to \pm\infty} f(t)/g(t) = 0$$

$$f \in C^k(\mathbb{R}) \Longrightarrow |c_n(f)| = o(|n|^{-k})$$

ANALISI

Q: Possiamo dedurre informazioni riguardanti la regolarità della funzione f analizzando il decadimento dei modi di Fourier ad infinito?

Lemma Consideriamo la serie trigonometrica

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n e^{in\omega x}$$

che converge puntualmente a f in $\mathbb{R}$ e supponiamo esista $p > k+1$ t.c.

$$|\gamma_n| = O\left(\left(\frac{1}{|n|}\right)^p\right) = O\left(|n|^{-p}\right),$$

allora $f \in C^k(\mathbb{R})$.

Dim Proviamo il risultato per $k=1$. In questo caso le ipotesi ci dicono che $p > 2$, poiché

$$|\gamma_n| = O(|n|^{-p}) \quad \text{e} \quad |in\omega\gamma_n| = O(|n|^{1-p}),$$

con $p-1 > 1$, le serie

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\gamma_n| \quad \text{e} \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |in\omega\gamma_n| \quad \text{convergono}$$

utilizzando l'M-test di Weierstrass deduciamo che

Una serie $\sum_{n=-N}^{+N} c_n e^{in\omega x}$ t.c. $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n| < \infty \Rightarrow \sum_{n=-N}^{+N} c_n e^{in\omega x}$ converge uniformemente in $\mathbb{R}$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n e^{in\omega x} \quad \text{conv unif a} \quad f(x)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} in\omega\gamma_n e^{in\omega x} \quad \text{——— " ———} \quad g(x)$$

Per il teorema di derivazione termine a termine f è derivabile e $f' = g$ con g continua. Quindi f è di classe C^1

Il risultato per k generico si può quindi dedurre per induzione #

Domanda Supponiamo che $p = k+1$, tale ipotesi è sufficiente a verificare il risultato di cui sopra?

Risposta: <u>No</u>

Esempio $f(x) = x^2$, $-\pi \leq x \leq \pi$ estesa per 2π-periodicità.

Foglio 1 es 9.2 sappiamo che

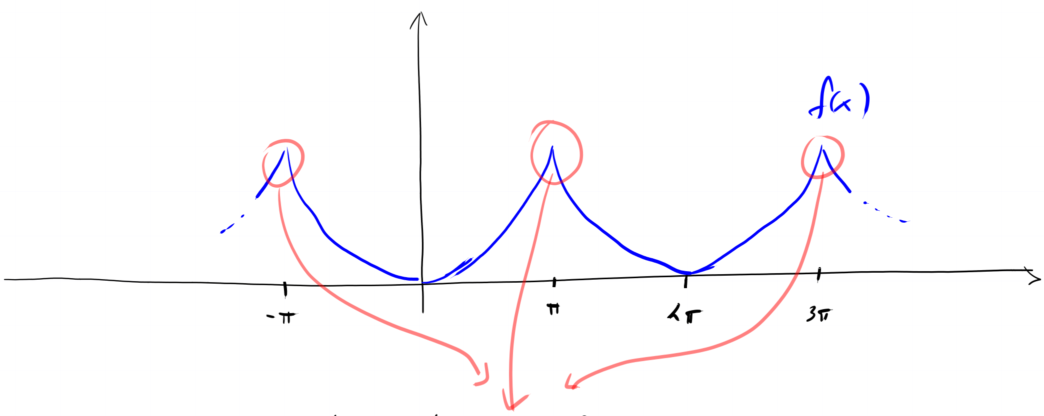
$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \boxed{\cos(nx)} \quad \text{in } \mathbb{R}$$

$$\cos(nx) = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}$$

$$C_{\pm n}(f) = \underline{\frac{2}{n^2}}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

↳ è esattamente il caso limite $p = k+1$ dove $k = 1$

tuttavia la funzione $f(x) = x^2$ estesa 2π-periodicamente <u>non</u> è C^1



In questi punti la funzione è sì continua, ma <u>non</u> è derivabile (punti di cuspide)

Esempio 2 Consideriamo la serie

$$(*) \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sin(nx)$$

è differenziabile? Che regolarità ha? Sappiamo calcolare $f(x)$?

Domanda 1 La serie trigonometrica $(*)$ converge ad qualche elemento limite? Se sì, in che topologia?

Risposta 1 Sì la serie è convergente.

$$\frac{1}{n!} = o(2^{-n})$$

e la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}$ è una serie geometrica, che converge e della quale sappiamo calcolare la somma.

Siccome la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n!$ è a termini positivi possiamo comparare i termini generici e dedurre che anche essa è convergente.

$\rightsquigarrow$ Utilizzo l'M-test di Weierstrass per dedurre che la serie

$$\sum_n \frac{\sin(nx)}{n!} \text{ conv unif in } \mathbb{R}.$$

Deriviamo la serie ed otteniamo la serie

$$\sum_n \frac{n\cos(nx)}{n!}, \qquad \text{con coefficiente generico } \frac{n}{n!}$$

Q $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!}$ converge?

$$\frac{n}{n!} \leq \frac{n}{2^n} \rightsquigarrow \text{converge}$$

$\Longrightarrow$ la serie è C^1.

Per casa provare che la serie è C^k $\forall k \in \mathbb{N}$.

27/10/2021

Recap

1) Principio di identità delle serie di Fourier

$f, g \in C^1$ tc $c_n(f) = c_n(g) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

$\Longrightarrow f(x) = g(x)$ puntualmente.

2) Relazioni tra coefficienti di Fourier e regolarità di una funzione f

a) $c_n(f^{(k)}) = (in\omega)^k c_n(f)$

$$c_n(f') = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f'(x)\, e^{-in\omega x}\, dx$$

$$\overset{IBP}{=} \frac{1}{T}\cancelto{0}{\left[f(x)\, e^{-in\omega x}\right]_{-T/2}^{T/2}} - \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)(-in\omega)\, e^{-in\omega x}\, dx$$

$$= in\omega \underbrace{\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\, e^{-in\omega x}\, dx}_{c_n(f)}$$

b) Supponiamo d'avere una serie di Fourier

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n e^{in\omega x}$$

dove $|\gamma_n| = O(|n|^{-p})$, $p > k+1$, $k \in \mathbb{N}$

$\rightsquigarrow f \in C^k$

$$\int_{-T/2}^{T/2} |f(x)|^2 dx < \infty$$

Convergenza uniforme delle serie di Fourier

Teorema $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, T-periodica e localmente integrabile e derivabile (attenzione, non stiamo chiedendo $f \in C^1$) con f' localmente integrabile in $\mathbb{R}$, allora

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)\, e^{in\omega x}$$

converge uniformemente a f in $\mathbb{R}$.

Dim Notiamo che le ipotesi che abbiamo assunto soddisfano le ipotesi del thm di DW per ogni $x \in \mathbb{R}$.

$\rightsquigarrow$ Possiamo applicare DW $\forall x \in \mathbb{R}$ ottenendo che la serie

$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{in\omega x}$ converge puntualmente a $f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Siccome f' è T-periodica e localmente integrabile, applicando la disuguaglianza di Bessel otteniamo che

Deriva dal chiedere che f' sia loc int.

$$(*) \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f')|^2 \leq \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f'(x)|^2 dx < \infty$$

Combiniamo la disuguaglianza di cui sopra con

Qua vogliamo esprimere $c_n(f')$ in termini di $c_n(f)$

Vedi lezione di ieri

$$\begin{aligned} |c_n(f')|^2 &= |(in\omega)\, c_n(f)|^2 \\ &= (in\omega)\, c_n(f) \cdot \overline{(in\omega)\, c_n(f)} \\ &= (in\omega)\, c_n(f) \cdot (-in\omega)\, \overline{c_n(f)} \\ &= \boxed{n^2\omega^2 |c_n(f)|^2} \end{aligned}$$

dalla quale otteniamo che

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f')|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} n^2\omega^2 |c_n(f)|^2$$

Applichiamo tale risultato a (*) ottenendo che

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2 w^2 |c_n(t)|^2 < \infty \qquad \odot$$

Utilizziamo adesso la disuguaglianza di Young (o disuguaglianza di convessità)

$$ab \le \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 \quad / \cdot 2$$

$$2ab \le a^2+b^2$$

$$a^2+b^2-2ab = (a-b)^2 \ge 0$$

Per dedurre la seguente relazione

$$|c_n(t)| = \frac{1}{|nw|}\,|nw|\,|c_n(t)|$$

$$\le \frac{1}{2}\frac{1}{n^2w^2} + \frac{n^2w^2}{2}|c_n(t)|^2 ,$$

e calcolo

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(t)| \le \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2}\frac{1}{n^2w^2} + \frac{n^2w^2}{2}|c_n(t)|^2$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{n^2w^2}}_{<\infty} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2w^2|c_n(t)|^2}_{<\infty \text{ per } \odot}$$

$$< \infty$$

Applichiamo ora l'M-test di Weierstrass ottenendo che

$$S_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(t)\, e^{inwx} \xrightarrow{N\to\infty} f(x)$$

uniformemente in $\mathbb{R}$.

Convergenza in energia o media quadratica

Una serie trigonometrica $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \gamma_n e^{in\omega x}$ converge in energia (o in L^2) o in media quadratica a f se posto $S_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} \gamma_n e^{in\omega x}$ si ha che

$$\| f - S_N \|_{L^2}^2 = \int_{-T/2}^{T/2} |f(x) - S_N(x)|^2 dx \xrightarrow{N\to\infty} 0$$

Teorema identità di Parseval

Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, T-periodica e loc int $\int_{-T/2}^{T/2} |f(x)|^2 dx < \infty$ si ha che

$$S_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)\, e^{in\omega x}$$

converge a $f(x)$ in L^2 (o in energia) per $N\to\infty$ se e solo se $\Longleftrightarrow$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |f(x)|^2 dx$$

Dim Nella dimostrazione della disuguaglianza di Bessel abbiamo visto che per ogni $N\in\mathbb{N}^*$

$$\underbrace{\int_{-T/2}^{T/2} |f(x) - S_N(x)|^2 dx}_{=\,\| f - S_N \|_{L^2}^2} = \int_{-T/2}^{T/2} |f(x)|^2 dx - T \sum_{n=-N}^{N} |c_n(f)|^2 \qquad (\clubsuit)$$

"$\Longrightarrow$" Notiamo che se $S_N \xrightarrow{N\to\infty} f$ in L^2 allora facendo tendere $N\to\infty$ in $(\clubsuit)$ otteniamo che

Se abbiamo convergenza in L^2 allora l'identità di Parseval è vera

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |f(x)|^2 dx = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} |c_n(f)|^2 + \underbrace{\int_{-T/2}^{T/2} |f(x) - S_N(x)|^2 dx}_{\to 0}$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$$

"$\Longleftarrow$"

Se l'identità di Parseval è vera allora $S_N \to f$ in L^2

$$\int_{-T/2}^{T/2} |S_N(x) - f(x)|^2\,dx = \int_{-T/2}^{T/2} |f(x)|^2\,dx - T \sum_{n=-N}^{N} |c_n(f)|^2 \qquad (*)$$

Noi sappiamo che vale l'identità di Parseval, ossia

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |f(x)|^2\,dx$$

Facciamo tendere $N\to\infty$ in $(*)$ ottenendo che

$$\underbrace{\int_{-T/2}^{T/2} |f(x)|^2\,dx - T\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2}_{\substack{=\ \text{Per Parseval} \\ 0}} = \lim_{N\to\infty} \int_{-T/2}^{T/2} |S_N(x) - f(x)|^2\,dx$$

Otteniamo dunque che

$$\lim_{N\to\infty} \int_{-T/2}^{T/2} |S_N(x) - f(x)|^2\,dx = 0,$$

ossia si verifica la definizione di convergenza in L^2 #

Teorema (di convergenza in energia)

Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, T-periodica e localmente integrabile allora vale l'identità di Parseval e quindi $S_N(x)$ converge in energia (o in L^2) a f.

$$\int_{-T/2}^{T/2} |f(x)|^2\,dx < \infty$$

$\rightsquigarrow$ Cor $\displaystyle \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |f(x)|^2\,dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$

Domanda Quali sono le relazioni tra convergenza in energia, la convergenza puntuale e la convergenza uniforme di una serie di F?

- CU $\Rightarrow$ CP : ovvio

- CU $\Rightarrow$ CE

$$\int_{-T/2}^{T/2} |f(x) - S_N(x)|^2 dx \le \int_{-T/2}^{T/2} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - S_N(x)|^2 dx$$

$$= T \underbrace{\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - S_N(x)|^2}_{\longrightarrow 0} \longrightarrow 0$$

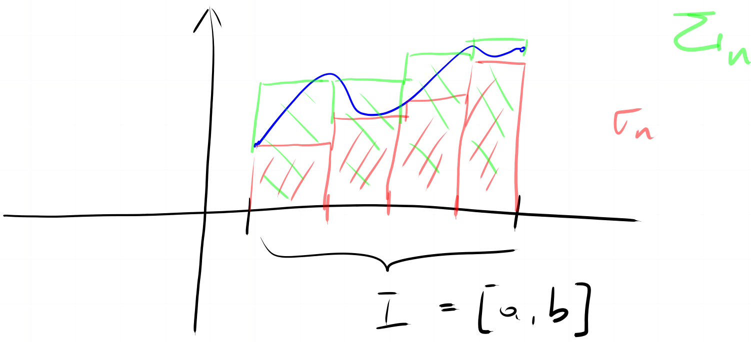
- CE $\Rightarrow$ CP ?

Teoria dell'integrazione secondo Lebesgue

Motivazione: colmare alcune debolezze della teoria di integrazione secondo Riemann.

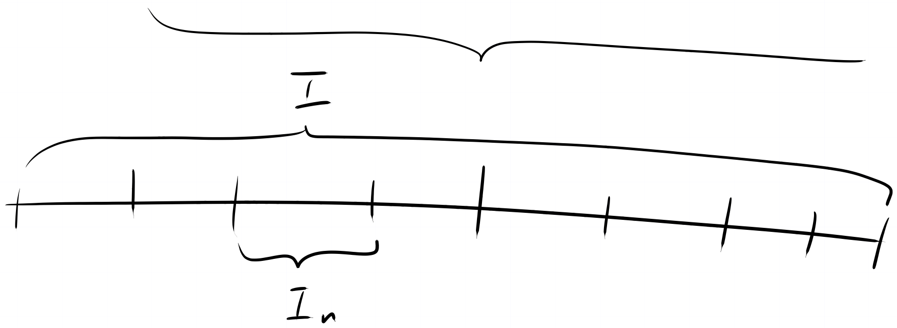
Recap (brevissimo) della teoria di Riemann

Sia $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



Consideriamo una partizione di I

$$I = \bigsqcup_{n=1}^{N} I_n \qquad I_n = \left[a + \frac{b-a}{N}(n-1),\ a + \frac{b-a}{N} n\right]$$



E consideriamo ora le somme parziali inferiori e superiori definite come

$$\Sigma_n = \sum_{n=1}^{N} |I_n| \sup_{x \in I_n} f(x)$$

$$\sigma_n = \sum_{n=1}^{N} |I_n| \inf_{x \in I_n} f(x)$$

Se $\exists$ finito il limite

$$\lim_{n \to \infty} \sigma_n = \lim_{n \to \infty} \Sigma_n = \mathcal{S}$$

allora f è R-integrabile in $I = [a,b]$ e $\int_a^b f(x)\,dx = \mathcal{S}$

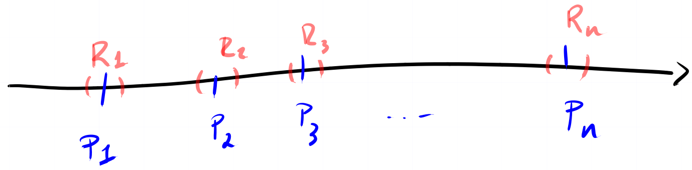
Insieme di misura nulla secondo Peano - Jordan

Si dice che un insieme $T \subseteq \mathbb{R}^N$ ha PJ-misura nulla se $\forall \varepsilon > 0$ $\exists\, n \in \mathbb{N}$ rettangoli $R_1, \dots, R_n$ tali che

$$T \subseteq R_1 \cup \dots \cup R_n \quad e \quad m(R_1) + \dots + m(R_n) < \varepsilon$$

Oss n può dipendere da ε ma è sempre una quantità finita

Esempio



$$R_k = \left[P_k - \frac{\varepsilon}{2n} , P_k + \frac{\varepsilon}{2n} \right]$$

$$m(R_1) + \dots + m(R_n) = \underbrace{\varepsilon/n + \dots + \varepsilon/n}_{\times n} = \varepsilon$$

Insieme di misura nulla secondo Lebesgue

Si dice che $T \subseteq \mathbb{R}^N$ ha L-misura nulla se $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ una successione di rettangoli $(R_j)_{j \in \mathbb{N}}$ t.c.

$$T \subseteq \bigcup_{j \in \mathbb{N}} R_j \quad e \quad \sum_{j \in \mathbb{N}} m(R_j) < \varepsilon$$

e scriveremo $m(T) = m^L(T) = 0$

Esempio Consideriamo l'insieme $\mathbb{Q} \cap [0,1] = Q$

Considerazioni:

- L'insieme $\mathbb{Q}$ è numerabile

$\mathbb{N} \backslash \mathbb{N}$	1	2	3	4 ...
1	1/1	2/1	3/1	4/1
2	1/2	2/2	3/2	4/2
3	1/3	2/3	3/3	3/4
4				

Diagonalizzazione di Cantor

- L'insieme $\mathbb{R}$ non è numerabile

Dim. Supponiamo che $[0,1]$ sia numerabile, dunque posso scrivere $[0,1]$ come biezione con $\mathbb{N}$

$$0,a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ a_{14}\ \dots$$
$$0,a_{21}\ a_{22}\ a_{23}\ a_{24}\ \dots$$
$$\vdots$$
$$0,a_{n1}\ a_{n2}\ \dots,\ a_{nn},\ \dots$$

$$0,b_1\ b_2\ b_3,\ \text{---} \qquad b_n \neq a_{nn}$$

In questo modo identifichiamo un numero che appartiene all'insieme $[0,1]$ ma è diverso da ogni elemento della successione numerica

$\lightning$

Riprendiamo l'esempio $Q = \mathbb{Q} \cap [0,1]$

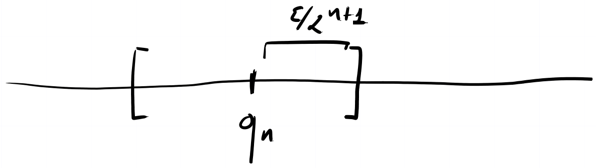
CLAIM: Q ha misura di Lebesgue nulla

Q è un sottoinsieme dei numeri razionali

$\Rightarrow Q = (q_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Posso dunque definire il rettangolo (chiuso) R_n centrato in q_n

$$\overline{R_n} = \left[q_j - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}},\ q_j + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \right]$$



Abbiamo dunque che

$$m^L(R_n) = \varepsilon/2^n$$

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} m^L(R_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \varepsilon/2^n = 2\varepsilon$$

Proprietà verificate quasi ovunque (q.o.)

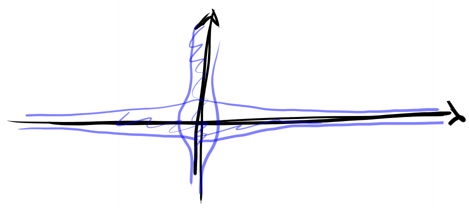
Si dice che una proprietà (o predicato) $p(x)$ definito $\forall x \in E \subseteq \mathbb{R}^N$ è verificata q.o. in E se $p(x)$ è verificata $\forall x \in T \subseteq E$ e t.c.

$$m(E \setminus T) = 0$$

Esempio · Proprietà: x è irrazionale in $[0,1]$.

- $p(x) =$ " $\lim_{n\to\infty} e^{-nx^2} = 0$ " $x \in E = \mathbb{R}$. p è vera q.o.

- $p(x,y) =$ " $xy = 0$ " $(x,y) \in E = \mathbb{R}^2$ p è falsa q.o. in $\mathbb{R}^2$



Convergenza puntuale q.o.

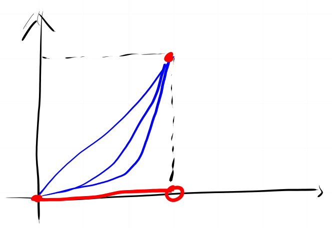
Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni con $f_n : E \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ e sia $f : E \to \mathbb{C}$ si dice che $(f_n)_n$ converge q.o. a f in E se

$$\lim_n f_n(x) = f(x) \qquad \text{q.o. in } E$$

Esempi

- $f_n(x) = e^{-nx^2}$, $f(x) = 0$ $\qquad E = \mathbb{R}$
- $f_n(x) = x^n$, $f(x) = 0$ $\qquad E = [0,1]$

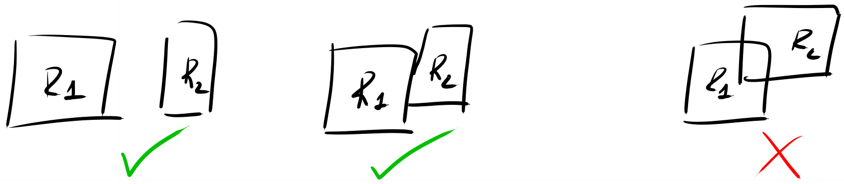
$f_n(1) \equiv 1 \quad \forall n$ dunque $f_n(1) \not\to f(1)$ tuttavia $f_n(x) \to f(x) \quad \forall x \in [0,1)$



Funzioni a scala

Una funzione $s : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ si dice *funzione a scala* se esistono k rettangoli $R_1, \dots, R_k$ con $\operatorname{int}(R_i) \cap \operatorname{int}(R_j) = \emptyset$ se $i \neq j$ e k numeri complessi $c_1, \dots, c_k$ t.c.

$$s(x) = c_1 \chi_{R_1}(x) + c_2 \chi_{R_2}(x) + \dots + c_k \chi_{R_k}(x) .$$



Oss Una funzione a scala è integrabile secondo Riemann e si ha

$$\int_{\mathbb{R}^N} s = \sum_{j=1}^{k} c_j \, m(R_j)$$

Funzione integrabile secondo Lebesgue in $\mathbb{R}^N$

Sia $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$, si dice che f è *integrabile secondo Lebesgue in $\mathbb{R}^N$* se $\exists$ una successione di funzioni a scala $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ t.c.

1) $\lim_{n \to \infty} s_n(x) = f(x)$ L-q.o. in $\mathbb{R}^N$

2) $\lim_{n,m \to \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |s_n - s_m| = 0$

(Condizione di Cauchy integrale)

In tal caso si pone

$$\int_{\mathbb{R}^N} f = \lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}^N} s_n \qquad (L)$$

Oss Una prima obiezione che può essere fatta è la seguente:

come possiamo essere sicuri che $\exists \lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}^N} s_n$?

Consideriamo la serie di valori complessi

$$J_n = \int_{\mathbb{R}^N} s_n \in \mathbb{C}$$

Calcoliamo ora $\forall n, m \in \mathbb{N}$

$$|J_n - J_m| = \left| \int_{\mathbb{R}^N} s_n - \int_{\mathbb{R}^n} s_m \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} (s_n - s_m) \right|$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^N} |s_n - s_m| \xrightarrow[\text{per la condizione 2)}]{n, m \to \infty} 0$$

$\rightsquigarrow$ Abbiamo dunque provato che la successione $(J_n)_n$ è una successione di Cauchy in $\mathbb{C}$.

Sappiamo tuttavia che $\mathbb{C}$ è completo, quindi

$$\exists \lim_n J_n = \lim_n \int_{\mathbb{R}^N} s_n$$

Funzioni misurabili secondo Lebesgue in $\mathbb{R}^N$

Una funzione $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ si dice misurabile in $\mathbb{R}^N$ se $\exists$ una successione di funzioni a scala $(s_n)_n$ t.c.

$$\lim_{n \to \infty} s_n(x) = f(x) \qquad L\text{-q.o. in } \mathbb{R}^N$$

Insiemi misurabili secondo Lebesgue in $\mathbb{R}^N$

Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^N$ è misurabile secondo Lebesgue se la funzione χ_E è L-integrabile. In tal caso definiamo

$$m^L(E) = \int_{\mathbb{R}^N} \chi_E$$

Funzioni integrabili in sottoinsiemi di $\mathbb{R}^N$

Sia $f : E \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ con E L-misurabile. Si dice che f è integrabile in E se, data la funzione

$$f_0(x) = \begin{cases} f(x) & x \in E \\ 0 & x \in \mathbb{R}^N \setminus E \end{cases}$$

allora f_0 è L-integrabile in $\mathbb{R}^N$.

Funzioni misurabili secondo Lebesgue su insiemi misurabili

Sia $f : E \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{C}$ con E L-misurabile si dice che f è misurabile secondo Lebesgue in E se la funzione f_0 definita sopra è L-misurabile in $\mathbb{R}^N$.

Tutti i concetti introdotti nelle pagine precedenti sono propedeutici al seguente teorema, che è il teorema fondamentale della teoria di integrazione secondo Lebesgue

Teorema [di convergenza dominata secondo Lebesgue]

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$ un insieme L-misurabile in $\mathbb{R}^N$ e sia $(f_n)_n$ una successione di funzioni, con $f_n : E \to \mathbb{C}$ misurabile $\forall n$, convergente q.o. in E a una funzione $f : E \to \mathbb{C}$.

Se $\exists$ una funzione $g : E \to \mathbb{R}_+$ integrabile e tale che $\forall n$

$$|f_n(x)| \leq g(x) \qquad \text{q.o. in } E$$

allora f_n è integrabile $\forall n$, e pure il limite puntuale q.o. f è integrabile e si ha che

$$\lim_n \int_E f_n = \int_E f$$

10/11/2021

Recap:

Teorema (convergenza dominata di Lebesgue)

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$ un insieme misurabile e sia $(f_n)_n$ di funzioni $f_n : E \to \mathbb{C}$ misurabili $\forall n$, convergente q.o. a una funzione $f : E \to \mathbb{C}$

Supponiamo che $\exists$ $g : E \to \mathbb{R}_+$ integrabile e t.c.

$$|f_n(x)| \leq g(x) \qquad \text{q.o. in } E \quad \forall n$$

allora f_n è integrabile $\forall n$ e pure il limite puntuale q.o. f è integrabile e si ha

$$\lim_{n \to \infty} \int_E f_n = \int_E f$$

Esempio

Calcolare, se esiste il $\lim_n \int_{\mathbb{R}} e^{-nx^2}$.

Denotiamo $\forall n \geq 1$ la funzione $f_n(x) = e^{-nx^2}$. $\forall n$ la funzione f_n è continua (infatti è C^∞) e quindi è una funzione misurabile.

- Notiamo che

$$\lim_n e^{-nx^2} = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Questo limite (puntuale) identifica dunque la funzione target, denotata come f nell'enunciato del thm di convergenza dominata di L.

Ossia $f(x) = 0$.

- $|f_n(x)| = |e^{-nx^2}| \leq |e^{-x^2}|$

Abbiamo identificato un candidato per essere definito come funzione g nell'enunciato del thm di L, ossia

$$g(x) = e^{-x^2}$$

Sappiamo che la funzione g è integrabile in $\mathbb{R}$.

$\rightsquigarrow$ Applichiamo il thm di conv dominata di L

$$\rightsquigarrow \quad \exists \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n = \int_{\mathbb{R}} f = \int_{\mathbb{R}} 0 = 0$$

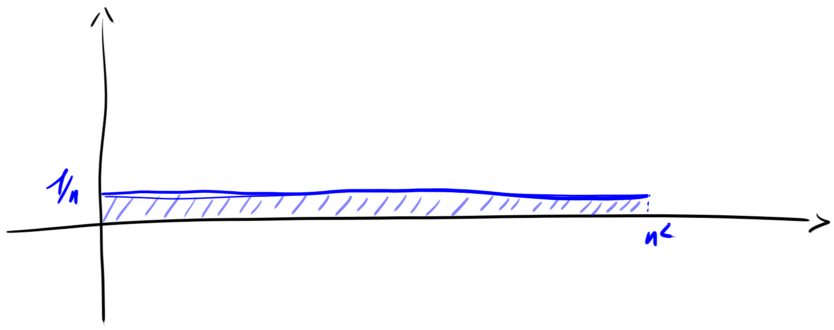
Oss Non è così banale il fatto che $\exists$ un limite degli integrali dell'esempio sopra. Infatti stiamo integrando una funzione che si converge a zero (puntualmente), ma che viene integrata in un dominio illimitato ($\mathbb{R}$).

!!

Necessità della funzione dominante g.

Esempio

$$\phi_n(x) = \begin{cases} 1/n & x \in [0, n^2] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



$$\int_{\mathbb{R}} \phi_n = n^2 \cdot \frac{1}{n} = n$$

Conseguenze del thm di convergenza dominata

1) Supponiamo $f : E \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ misurabile con E misurabile se $\exists\, g : E \to \mathbb{R}_+$ integrabile e t.c.

$$|f(x)| \leq g(x)$$

allora f è integrabile

2) $f : E \to \mathbb{C}$, con E misurabile, si ha che f è integrabile sse $|f|$ è integrabile

3) Siano $f, g : E \to \mathbb{C}$ misurabili e tc $f(x) = g(x)$ q.o.
si ha che f è integrabile in E sse g lo è, in tal caso si ha che

$$\int_E f = \int_E g.$$

Dim g int $\Longrightarrow$ f int

se g è int allora per il punto 2) $|g|$ è integrabile

Siccome $f = g$ q.o. la funzione $|g|$ è la funzione dominante, a questo punto possiamo applicare il thm di c.d. L

Oss Visto il punto 3) possiamo dire che ai fini della teoria dell'integrazione di L possiamo identificare tutte le funzioni che differiscono in un insieme di misura nulla.

Un primer in analisi funzionale

D'ora in avanti denotiamo con la lettera $\mathbb{K}$ il campo $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

[Per casa rivedere la definizione di campo]

Spazi normati

Sia E uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$. Un'applicazione $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ si dice **norma** se le seguenti condizioni sono verificate $\forall\, x, y \in E$ e $\lambda \in \mathbb{K}$:

1) $\|x\| = 0 \iff x = 0$ (non-degeneratezza)

2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\, \|x\|$ (omogeneità)

3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (subadditività)

In tal caso la coppia $(E, \|\cdot\|)$ si dice spazio normato

NB Se definiamo la funzione $d: E \times E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ come

$$d(x,y) = \|x-y\|$$

la funzione d soddisfa gli assiomi della funzione distanza.

otteniamo che (E,d) è uno spazio metrico

$\rightsquigarrow$ La condizione di essere spazio normato è una condizione più forte di quella di spazio metrico.

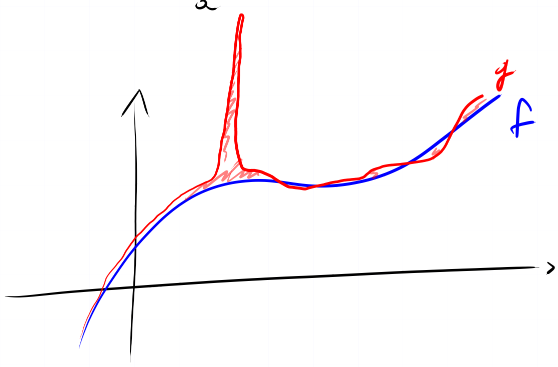
Esempi

- $(\mathbb{R}, |\cdot|)$
- $(\mathbb{C}, |\cdot|)$
- $(\mathbb{R}^N, |\cdot|_2)$, dove $|x|_2 = \left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right)^{1/2}$
- $(C^0([a,b];\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$

  dove $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$
- $(C^0([a,b];\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$

  $$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\, dx$$

NB



f e g sono "vicine" secondo la norma $\|\cdot\|_1$ mentre sono "lontane" per $\|\cdot\|_\infty$

Successione di Cauchy

Sia $(x_n)_n$ una successione in $(E, \|\cdot\|)$. Diciamo che $(x_n)_n$ è una **successione di Cauchy** se

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0$ tc $\forall n, m > n_0$ si ha che

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon .$$

Alternativamente

$$\lim_{n,m \to \infty} \|x_n - x_m\| = 0 .$$

OSS Ogni successione convergente è una successione di Cauchy, ma non è detto che una successione di Cauchy sia convergente.

Esempio canonico di spazio metrico non completo

$(\mathbb{Q}, |\cdot|)$

Sappiamo che esistono molti numeri irrazionali $\sqrt{2}, \pi, \ldots$

Consideriamo $\sqrt{2}$ e consideriamo l'intorno

$$U_n = (\sqrt{2} - 1/n, \sqrt{2} + 1/n) \qquad \forall n \geq 1$$

Sappiamo che $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$. Dunque so che $\exists q_n \in \mathbb{Q}$ tc $q_n \in U_n$

È possibile provare che la successione $(q_n)_n$ è di Cauchy (x casa)

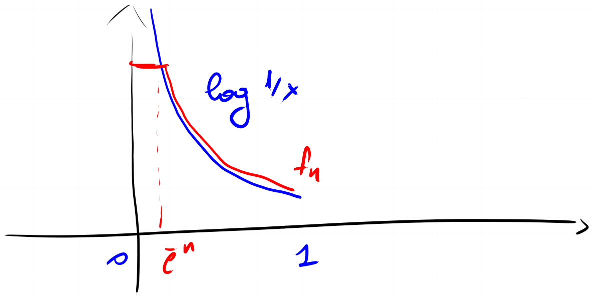
tuttavia per costruzione si ha che $q_n \xrightarrow{n \to \infty} \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Esercizio Costruire una successione di Cauchy nello spazio normato

$$\left(C^0([0,1]; \mathbb{R}), \|\cdot\|_1\right)$$

che non converge in $C^0([0,1]; \|\cdot\|_1)$

Suggerimento Considerare la successione $f_n(x) = \begin{cases} \log 1/x & \text{se } x \in [e^{-n}, 1] \\ n & \text{se } x \in [0, e^{-n}] \end{cases}$



Spazio di Banach

Uno spazio normato $(T, \|\cdot\|)$ nel quale ogni successione di Cauchy è convergente si dice spazio di Banach

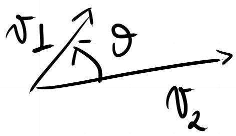
Recap

Spazio di Banach: $(E, \|\cdot\|)$ viene detto spazio normato se ogni successione di Cauchy è convergente in $(E, \|\cdot\|)$.

Sappiamo da Analisi 1 che una successione convergente è una successione di Cauchy, tuttavia l'implicazione opposta non è sempre vera.

Spazi dotati di un prodotto scalare

Esempio finito-dimensionale $\mathbb{R}^2$



$$v_1 \cdot v_2 = |v_1|\,|v_2| \cos\vartheta \rightsquigarrow \cos\vartheta = \frac{v_1 \cdot v_2}{|v_1|\,|v_2|}$$

Conseguenze: se $v_1 \perp v_2 \Rightarrow v_1 \cdot v_2 = 0$

Definizione Sia E uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}\,(=\mathbb{R}$ o $\mathbb{C})$ un'applicazione binaria $(\cdot,\cdot): E \times E \to \mathbb{K}$ si dice **prodotto scalare** se $\forall\, x, y, z \in E$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$

s1) $(x+y, z) = (x,z) + (y,z)$

s2) $(\lambda x, y) = \lambda (x,y)$

s3) $(x,y) = (y,x)$

(s1)–(s3): forma sesquilineare

s4) $(x,x) \geq 0$ e $(x,x) = 0$ sse $x = 0$.

OSS Se definiamo $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ è una funzione norma (x CASA).

Questo implica che dato un prodotto scalare su E possiamo canonicamente identificare uno spazio normato $(E, \|\cdot\|)$

Prodotto Scalare $\longrightarrow$ Norma $\longrightarrow$ funzione distanza

Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

$\forall x, y \in E \qquad |(x,y)| \leq \|x\| \, \|y\|$.

Esempi

- $(\mathbb{R}^N, (\cdot,\cdot))$, $\qquad (x,y) = \sum_{n=1}^{N} x_n y_n$
- $(\mathbb{C}^n, (\cdot,\cdot))$, $\qquad (x,y) = \sum_{n=1}^{N} x_n \overline{y_n}$
- $(C^0([a,b], \mathbb{C}), (\cdot,\cdot)_{L^2})$

$$(f,g)_{L^2} = \int_a^b f(x) \, \overline{g(x)} \, dx$$

Def Sia $(E, (\cdot,\cdot))$ uno spazio t.c. $(E, \|\cdot\|)$, $\|\cdot\| = \sqrt{(\cdot,\cdot)}$ è uno spazio di Banach si dice spazio di Hilbert

Ossia uno spazio vettoriale con prodotto scalare che risulti completo rispetto alla norma canonica indotta dal p.s. si dice sp. di Hilbert.

Famiglie ortogonali e ortonormali

Sia $(E, (\cdot,\cdot))$ uno spazio vettoriale dotato di p.s.

Una famiglia $(e_\alpha)_{\alpha\in J}$ con $J \subseteq \mathbb{R}$ (tipicamente $J = \mathbb{N}$ o $\mathbb{Z}$)

si dice ortogonale se

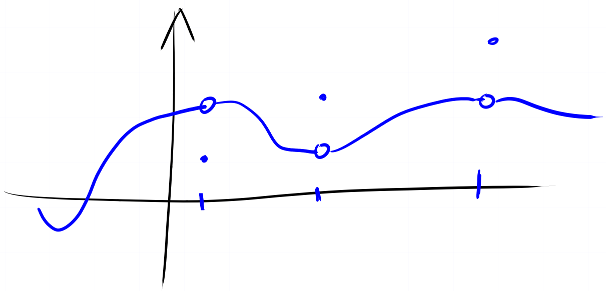
$$(e_\alpha, e_\beta) = 0 \qquad \forall\, \alpha \neq \beta \text{ in } J$$

Inoltre se $\|e_\alpha\| \equiv 1$ la famiglia si dice ortonormale

Esempio Le armoniche elementari sono famiglie ortogonali rispetto $(\cdot,\cdot)_{L^2}$

Gli spazi di Lebesgue L^1, L^2 e L^∞

D'ora in avanti $E \subseteq \mathbb{R}^N$ è da considerarsi un insieme misurabile e identifichiamo f e g e $f(x) = g(x)$ q.o. in E



Lo spazio $L^1(E)$

Poniamo

$$L^1(E) = L^1(E; \mathbb{C})$$
$$= \left\{ f : E \to \mathbb{C} \text{, misurabili e t.c. } \int_E |f| < \infty \right\}$$

definiamo altresì

$$\|f\|_1 = \int_E |f|$$

$\|\cdot\|_1$ è una norma su $L^1(E)$ e la coppia $(L^1(E), \|\cdot\|_1)$ è uno sp. di Banach

Supponiamo che $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $g^* \in L^1$ se
$$\lim_{n\to\infty} \|g_n - g^*\|_1 = 0$$

Proprietà C_1 Sia $(f_n)_n$ una successione in L^1 che converge a f in L^1. $\exists$ una sottosuccessione $(f_{n_k})_k$ di $(f_n)_n$ t.c. $f_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} f$ q.o. in E.

Lo spazio $L^2(E)$

Poniamo
$$L^2(E) = L^2(E;\mathbb{C})$$
$$= \left\{ f: E \to \mathbb{C},\ \text{misurabili e t.c. } \int_E |f|^2 < \infty \right\}$$

e definiamo
$$(f,g)_2 = \int_E f(x)\overline{g(x)} \qquad \text{e} \qquad \|f\|_2 = \left(\int_E |f|^2 \right)^{1/2}$$

$(\cdot,\cdot)_2$ è un prodotto scalare e $(L^2(E), (\cdot,\cdot))$ è uno spazio di Hilbert.

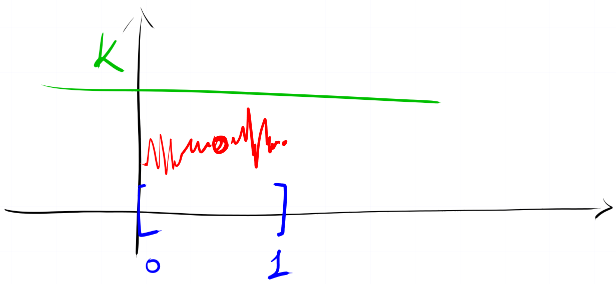
OSS Perché la norma è elevata alla potenza $1/2$?
Ricordiamoci il secondo assioma definente la f_2 norma
$$\|\lambda x\| = |\lambda|\ \|x\|$$
$$\|\lambda f\|_2 = \left(\int_E |\lambda f|^2 \right)^{1/2} = \left(\int_E |\lambda|^2 |f|^2 \right)^{1/2}$$
$$= \left(|\lambda|^2 \int_E |f|^2 \right)^{1/2} = |\lambda| \left(\int_E |f|^2 \right)^{1/2}$$
$$= |\lambda|\ \|f\|_2$$

Proprietà C_2

Se $(f_n)_n \subseteq L^2$ t.c. $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ in L^2 allora $\exists (f_{n_k})_k$ t.c. $f_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} f$ q.o. in E.

Lo spazio $L^\infty(E)$

$$L^\infty(E) = L^\infty(E; \mathbb{C})$$
$$= \{ f : E \to \mathbb{C} \text{ misurabili per le quali } \exists K > 0 \text{ t.c. } |f(x)| \le K \text{ q.o. in } E \}$$



$E = [0,1]$

Possiamo definire una norma in $L^\infty(E)$

$$\|f\|_\infty = \inf \{ K > 0 \text{ t.c. } |f(x)| \le K \text{ q.o. in } E \}$$

Lo spazio $(L^\infty(E), \|\cdot\|_\infty)$ è uno spazio di Banach.

Osservazioni

$E \subseteq \mathbb{R}^N$ misurabile

- Se E è limitato allora
$$L^\infty(E) \subsetneq L^2(E) \subsetneq L^1(E)$$
e valgono le seguenti disuguaglianze
$$\|f\|_1 \le \sqrt{m(E)}\, \|f\|_2 \qquad (1)$$
$$\|f\|_2 \le \sqrt{m(E)}\, \|f\|_\infty \qquad (2)$$

- Se E non è limitato allora non si hanno inclusioni

Dim Vogliamo dimostrare (1) ossia dato una funzione $f \in L^2(E)$ vogliamo dimostrare che $f \in L^1(E)$ e la disuguaglianza (1) è vera

$$\int_E |f| = \int_E 1 \cdot |f| = (1, |f|)$$

Per CS si ha che

$$\leq \left(\int_E 1\right)^{1/2} \underbrace{\left(\int_E |f|^2\right)^{1/2}}_{= \|f\|_2}$$

Mentre siccome E è limitato $\int_E 1 = m(E)$

Inserendo tale risultato ottengo che

$$\|f\|_1 \leq m(E)^{1/2} \|f\|_2 .$$

- Dimostriamo ora (2). Sia $f \in L^\infty(E)$ e calcoliamo

$$\|f\|_2 = \left(\int_E |f|^2\right)^{1/2} \leq \left(\sup_{x \in E} |f(x)|^2 \int_E 1\right)^{1/2}$$

$$\leq \sqrt{m(E)} \; \|f\|_\infty$$

Def Definiamo con

$$L^2(E) = L^2(E;\mathbb{C}) = \left\{ f : E \to \mathbb{C} \; : \; \int_E |f|^2 < \infty \right\}$$

Serie di Fourier in $L^2(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$

1) Teorema di convergenza in $L^2(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, T-periodica e $f \in L^2(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$

(ossia $\int_{-T/2}^{T/2} |f(x)|^2 dx < \infty$)

allora

$$\lim_{N \to \infty} \| f - S_N \|_2 = 0 ,$$

e la serie di Fourier

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) \, e^{in\omega x}$$

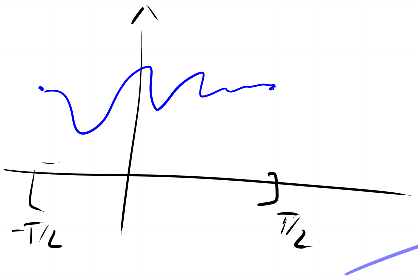
converge q.o. a f in $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$.

Introduzione alla trasformata di Fourier

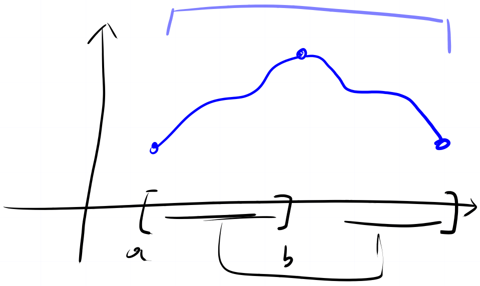
Problema: come generalizzare il concetto di serie di Fourier a funzioni che non sono periodiche?

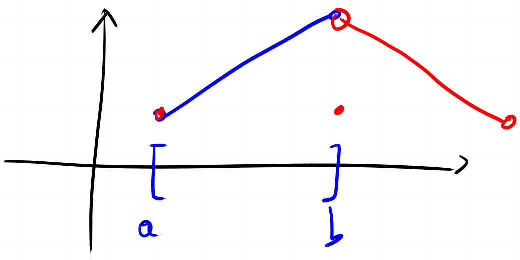
Caso 1: funzioni che sono definite su un intervallo compatto $[a,b]$

Sol 1: estendere periodicamente la funzione al di fuori di $[a,b)$ e procedere come nel caso periodico



I valori di questa estensione sono gli stessi nei 2 estremi





Caso 2: funzioni definite su tutta la retta reale

Questa parte del corso si propone come obiettivo di rispondere a tale domanda.

Discussione euristica

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Procediamo "formalmente" cioè senza specificare precise ipotesi necessarie e giustificare i passaggi.

Sappiamo che $\forall T > 0$ se f è definita in $[-T/2, T/2]$

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f)\, e^{in\omega x} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x)\, e^{-in\omega x}\, dx \right) e^{in\omega x} \qquad (1)$$

Supponiamo che T sia "grande" ossia $T \gg 1$

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\, e^{-in\omega x}\, dx \approx \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-in\omega x}\, dx$$

Possiamo dunque porre a questo punto

$$\hat{f}(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\alpha t}\, dt$$

Con tale notazione otteniamo dall'equazione (1) che

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-in\omega t}\, dt \right) e^{in\omega x}$$

$$\approx \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{2\pi}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-in\omega t}\, dt \right) e^{in\omega x}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \omega\, \hat{f}(n\omega)\, e^{in\omega x}$$

Sappiamo tuttavia che siccome $T \gg 1$, $\omega = \frac{2\pi}{T} \ll 1$

e dunque approssimiamo la somma discreta

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \omega\, \hat{f}(n\omega)\, e^{in\omega x}$$

con l'integrale

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\alpha)\, e^{i\alpha x}\, d\alpha$$

e quindi otteniamo che

$$f(x) \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\alpha)\, e^{i\alpha x}\, d\alpha$$

Nel gergo di analisi e sintesi otteniamo il seguente per una funzione definita in $\mathbb{R}$

$$\hat{f}(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\alpha x}\, dx \qquad \text{“Analisi”}$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\alpha)\, e^{i\alpha x}\, d\alpha \qquad \text{“Sintesi”}$$

$$f \xrightarrow{\text{Analisi}} \hat{f} \xrightarrow[?]{\text{Sintesi}} f$$

Sotto quali ipotesi la sintesi riproduce la funzione di partenza?

Trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R})$

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f \in L^1(\mathbb{R})$ (ossia $\int_{\mathbb{R}} |f| < \infty$) la trasformata di Fourier (FT) è la funzione

$$\mathcal{F}(f) = \hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$

definita come

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx$$

Osservazione Vista la definizione di $\hat{f}$ potrebbe essere che tale oggetto non sia ben definito nel caso, per esempio che la funzione $x \mapsto f(x)\, e^{-i\omega x}$ non sia integrabile.

Tuttavia noi assumiamo, per ipotesi, che $\underline{f \in L^1}$, dunque

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)\, e^{-i\omega x}|\, dx$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, \overbrace{|e^{-i\omega x}|}^{=1}\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx < \infty \quad \text{siccome } f \in L^1(\mathbb{R}).$$

Dunque se $f \in L^1(\mathbb{R})$ la trasformata di Fourier $\hat{f}$ è ben definita.

Osservazioni

Dalla formula di Eulero $e^{it} = \cos t + i \sin t$, si ottiene

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \left(\cos(-\omega x) + i\sin(-\omega x)\right) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left[\cos(\omega x) - i \sin(\omega x)\right] dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(\omega x)\, dx - i \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin(\omega x)\, dx .$$

Siccome $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ esistono 2 funzioni $u, v: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tc

$$f(x) = u(x) + i v(x)$$

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(u(x)\cos(\omega x) + v(x)\sin(\omega x)\right) dx$$
$$+ i \int_{-\infty}^{+\infty} \left(v(x)\cos(\omega x) - u(x)\sin(\omega x)\right) dx$$

Simmetrie

1) f pari $\rightsquigarrow$ u, v pari, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Esempio

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\underbrace{v(x)}_{p} \underbrace{\sin(\omega x)}_{d}}_{d}\, dx = \int_{-\infty}^{0} v(x) \sin(\omega x)\, dx + \int_{0}^{+\infty} v(x) \sin(\omega x)\, dx$$

Con il cambio di variabile $y = -x$

$$\int_{-\infty}^{0} v(x) \sin(\omega x)\, dx = -\int_{0}^{+\infty} v(y) \sin(\omega y)\, dy$$

$=$

e dunque $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} v(x)\,\sin(\omega x) = 0$

Utilizzando tali conclusioni ottengo la formula semplificata

$$\hat{f}(\omega) = 2\int_0^{\infty} f(x)\cos(\omega x)\,dx \qquad \text{e } \hat{f} \text{ è una funzione pari}$$

- Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dispari, risulta che

$$\hat{f}(\omega) = -2\int_0^{\infty} f(x)\sin(\omega x)\,dx, \qquad \hat{f} \text{ è dispari}$$

Esempi di FT di funzioni in $L^1(\mathbb{R})$

1) Trasformate di F di una f.z caratteristica di un intervallo compatto

$$f(x) = \chi_{[a,b]}(x)$$

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,e^{-i\omega x}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{[a,b]}(x)\,e^{-i\omega x}\,dx$$

$$= \int_a^b e^{-i\omega x}\,dx = \left[-\frac{e^{-i\omega x}}{i\omega}\right]_a^b = \frac{1}{i\omega}\left[e^{-i\omega a} - e^{-i\omega b}\right]$$

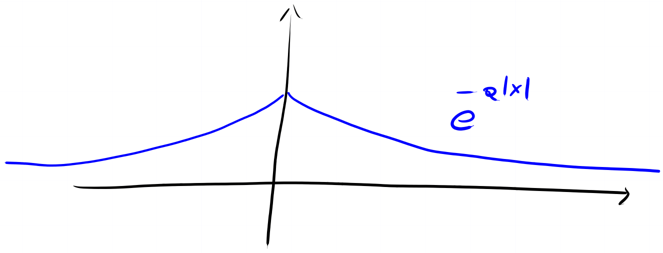
se $\omega \neq 0$

se $\omega = 0$ $\qquad \hat{f}(0) = \displaystyle\int_a^b 1\,dx = b-a$

Possiamo dunque concludere che

$$\hat{\chi}_{[a,b]}(\omega) = \begin{cases} b-a & \text{se } \omega = 0 \\ \dfrac{1}{i\omega}\left(e^{-i\omega a} - e^{-i\omega b}\right) & \text{se } \omega \neq 0. \end{cases}$$

- FT della funzione $e^{-a|x|}$ con $a>0$



Consideriamo $f(x) = e^{-a|x|} \rightsquigarrow f \in L^1(\mathbb{R})$ siccome l'esponenziale è integrabile.

Si ha che

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|} e^{-i\omega x} \, dx \qquad |x| = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{ax - i\omega x} \, dx + \int_{0}^{\infty} e^{-ax - i\omega x} \, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{(a-i\omega)x} \, dx + \int_{0}^{\infty} e^{-(a+i\omega)x} \, dx$$

$$= \frac{1}{a-i\omega} e^{(a-i\omega)x} \Big|_{-\infty}^{0} + \frac{1}{-(a+i\omega)} e^{-(a+i\omega)x} \Big|_{0}^{\infty}$$

$$= \frac{1}{a-i\omega} + \frac{1}{a+i\omega} = \frac{a+\cancel{i\omega} + a - \cancel{i\omega}}{(a-i\omega)(a+i\omega)}$$

$$= \frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

Abbiamo dunque ottenuto che

$$\hat{f}(\omega) = \frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

Osservazione

$$f(x) = e^{-a|x|} \xrightarrow{\text{analisi}} \hat{f}(\omega) = \frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

$$\xrightarrow{\text{sintesi}} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\, e^{i\omega x}\, d\omega$$ e vedere se ritrovo la funzione $f(x)$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} 2a \frac{e^{i\omega x}}{a^2+\omega^2}\, d\omega$$

14/12/2021

Proprietà della FT (Parte 3)

Proprietà 8 (derivata in x)

Sia $f \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ e sia $f' \in L^1(\mathbb{R})$, allora si ha che

$$\widehat{\frac{df}{dx}}(\omega) = i\omega \hat{f}(\omega)$$

Dim Siccome la funzione $f \in C^1$ si ha che

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt$$

Siccome $f \in L^1$, esistono finiti

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = f(0) + \int_0^{\infty} f'(t)\,dt$$

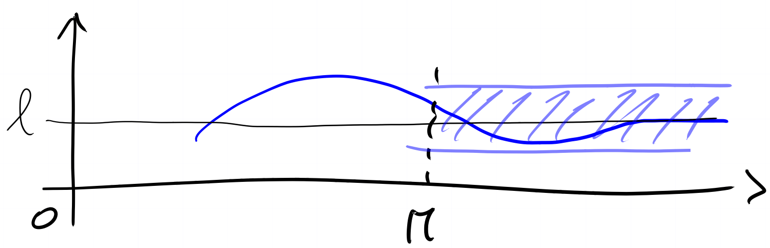
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = f(0) - \int_{-\infty}^{0} f'(t)\,dt$$

Siccome $f \in L^1$ tali limiti sono nulli, vediamo perché ciò è vero.

Supponiamo, per esempio che $\lim_{x \to \infty} f(x) = \ell \neq 0$

Se ciò è il caso $\exists M > 0$ tc $\forall x > M$ si ha che

$\ell/2 < |f(x)| < 3/2\,\ell$



Se ciò è vero allora $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f| \geq \int_{x>M} |f| \geq \int_{|x|>M} \ell/2 = \infty$ $\lightning$

Ad ogni modo: abbiamo dimostrato che

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$$

dunque risulta che

$$\widehat{f'}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\, e^{-i\omega x}\, dx \overset{(IPP)}{=} \cancel{\left[f(x) e^{-i\omega x} \right]_{-\infty}^{+\infty}}^{=0} + i\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx$$

$$= i\omega\, \hat{f}(\omega)$$

#

Osservazione Non serve che $f \in C^1$ ma basta che

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\, dt$$

Proprietà 9 (derivate successive in x)

Sia $f \in C^k(\mathbb{R})$, $f', f'', \dots, f^{(k)} \in L^1(\mathbb{R})$ allora

$$\widehat{\frac{d^j f}{dx^j}}(\omega) = (i\omega)^j \hat{f}(\omega) \qquad \text{per ogni } j = 1, \dots, k.$$

Proprietà 10 (derivata in ω)

primo momento o momento lineare

Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ e, posto $g(x) = x f(x)$ allora

$$\frac{d\hat{f}}{d\omega} = -i\, \hat{g}(\omega) = -i \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx$$

$$= \frac{1}{i} \hat{g}(\omega)$$

Dim Usiamo il thm di derivazione sotto il segno di integrale. Definiamo la funzione ausiliaria

$$h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$(x, \omega) \longmapsto f(x)\, e^{-i\omega x}$$

Si ha che

- $h(\circ, \omega) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ è integrabile $\forall \omega \in \mathbb{R}$
- $h(x, \circ) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ è di classe C^1 q.o. $x \in \mathbb{R}$
- $|h(x,\omega)| = |f(x)|$ e $|\partial/\partial\omega\, h(x,\omega)| = |i x f(x) e^{-i\omega x}|$
$$= |g(x)|$$

per q.o. $x \in \mathbb{R}$ e per ogni $\omega \in \mathbb{R}$ con $|f|, |g| \in L^1$

Dunque il thm di derivazione sotto segno di integrale ci assicura che

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x,\omega)\, dx$$

è di classe C^1 e inoltre

$$\frac{d\hat{f}}{d\omega} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial\omega} h(x,\omega)\, dx = -i \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx$$
$$= -i\, \hat{g}(\omega).$$

Calcolo esplicito della FT di una gaussiana

$$G_a(x) = e^{-ax^2}$$

Caso $a = 1$ Sia $f(x) = G_1(x) = e^{-x^2}$.

$\rightsquigarrow f \in L^1(\mathbb{R})$ $[\, \partial_x^k f$ è L^1 $\forall k \in \mathbb{N}\,]$

e in particolare

$$\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \|f\|_1 = \sqrt{\pi}$$

Poiché $x f(x) = x e^{-x^2} \in L^1(\mathbb{R})$ per la proprietà della derivazione in frequenza risulta che

$$\frac{d}{d\omega}\hat{f}(\omega) = \frac{1}{i}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} e^{-i\omega x}\, dx}_{=A}.$$

Consideriamo ora la funzione $f'(x) = -2x e^{-x^2} \in L^1(\mathbb{R})$

e per la proprietà di derivazione nello spazio si ha che

$$\hat{f'}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-i\omega x}\, dx = -2\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} e^{-i\omega x}\, dx}_{=A}$$

$$= i\omega \hat{f}(\omega)$$

Otteniamo dunque che

$$\left.\begin{aligned} A &= i\frac{d}{d\omega}\hat{f} \\ A &= -\frac{i}{2}\omega\hat{f} \end{aligned}\right] \Rightarrow$$

$$i\frac{d}{d\omega}\hat{f} = -\frac{i}{2}\omega\hat{f} \iff \frac{d}{d\omega}\hat{f} = -\frac{1}{2}\omega\hat{f}$$

$$\int \frac{d\hat{f}}{\hat{f}} = -\int \frac{\omega}{2}\, d\omega \rightsquigarrow \log\hat{f} = -c\,\frac{\omega^2}{4}$$

$$\rightsquigarrow \hat{f}(\omega) = k\, e^{-\omega^2/4}$$

E questo conclude il calcolo esplicito della FT di una Gaussiana #

Caso $a > 0$ Sia $g(x) = e^{-ax^2}$ con $a > 0$ si ha che

$$g(x) = e^{-(\sqrt{a}\,x)^2} = f(\sqrt{a}\,x) = f\left(\frac{x}{1/\sqrt{a}}\right)$$

Per le proprietà di cambio di scala otteniamo che

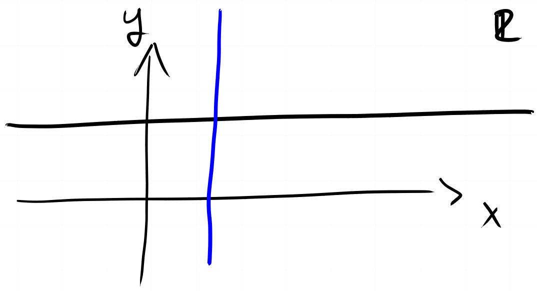
$$\hat{g}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{a}}\hat{f}(\sqrt{a}\,x) = \frac{1}{\sqrt{a}}\, e^{-\omega^2/4a} \qquad \#$$

Relazioni tra integrali doppi e integrali iterati

Teorema di Fubini - Tonelli

(F) Sia $h : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ e integrabile, allora

- per q.o. $x\in\mathbb{R}$, $h(x,\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ è integrabile
- per q.o. $y\in\mathbb{R}$ $h(\cdot,y) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ è integrabile
- $\int_{\mathbb{R}} h(\cdot, y)\, dy : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ è integrabile
- $$\iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} h(x,y)\, dx\, dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} h(x,y)\, dy \right) dx$$
  $$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} h(x,y)\, dx \right) dy$$



(T) Sia $h : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ misurabile e

- $h(x,y) \geq 0$ q.o. in $\mathbb{R}^2$
- per q.o. $x\in\mathbb{R}$, $h(x,\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è integrabile
- $\int_{\mathbb{R}} h(\cdot, y)\, dy : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è integrabile

allora h è integrabile in $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ e si ha che

$$\iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} h(x,y)\, dx\, dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} h(x,y)\, dy \right) dx$$

OSS esiste una versione di (T) nel quale x e y si scambiano i ruoli.

Convoluzione di 2 funzioni

Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tali che, posto $h(x,y) = f(x-y)\, g(y)$ $h(x,\cdot) \in L^1(\mathbb{R})$ per q.o. $x \in \mathbb{R}$. Definiamo la convoluzione di f e g la funzione $f * g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ data da

$$(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{f(x-y)\, g(y)}_{h(x,y)}\, dy = -\int_{+\infty}^{-\infty} f(t)\, g(x-t)\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, g(x-t)\, dt = (g*f)(x)$$

Teorema Siano f e $g \in L^1(\mathbb{R})$, allora $h(x,\cdot) \in L^1(\mathbb{R})$ per q.o. $x \in \mathbb{R}$, $f*g \in L^1(\mathbb{R})$ e $\|f*g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$

Dim Applichiamo il teorema di Tonelli alla funzione $|h(\cdot,\cdot)|$ per mostrare che $h \in L^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$.

Si ha che

- per q.o. $y \in \mathbb{R}$ $|h(\cdot,y)| \in L^1$, infatti

$$\int_{\mathbb{R}} |h(x,y)|\, dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|\, |g(y)|\, dx = |g(y)| \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|\, dx$$

$$= |g(y)| \int_{\mathbb{R}} |f(t)|\, dt < \infty \qquad \text{q.o. } y \in \mathbb{R}.$$

- $\int_{\mathbb{R}} |h(x,\cdot)|\, dx \in L^1(\mathbb{R})$, infatti

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |h(x,y)|\, dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |g(y)|\, |f(x-y)|\, dx \right) dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}} |g(y)| \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|\, dx \right) dy$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|\, dt \right) \left(\int_{\mathbb{R}} |g(y)|\, dy \right) < \infty$$

Dunque il teorema di Tonelli garantisce che $|h(\cdot,\cdot)| \in L^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ e quindi $h(\cdot,\cdot) \in L^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$. Il teorema di Fubini implica allora che per q.o. $x\in\mathbb{R}$

$$h(x,\cdot) = f(x-\cdot)\, g(\cdot) \in L^1(\mathbb{R})$$

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}} h(x,y)\, dy \in L^1(\mathbb{R})$$

Inoltre risulta che

$$\|f*g\|_1 = \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} h(x,y)\, dy \right| dx = \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\, g(y)\, dy \right| dx$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|\, |g(y)|\, dy \right) dx \qquad \text{(Teorema del modulo)}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|\, |g(y)|\, dx \right) dy \qquad \text{(Teorema di Fubini)}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|\, |g(y)|\, dt \right) dy \qquad \text{(cambio di variabile } x-y=t\text{)}$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|\, dt \right) \left(\int_{\mathbb{R}} |g(y)|\, dy \right)$$

$$= \|f\|_1\, \|g\|_1$$

Proprietà 11 (FT della convoluzione)

Se $f,g \in L^1(\mathbb{R})$, allora

$$\widehat{f*g}(\omega) = \hat{f}(\omega)\, \hat{g}(\omega)$$

Dim Applichiamo il teorema di Fubini:

$$\widehat{f*g}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} (f*g)(x)\, e^{-i\omega x}\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x-y)\, g(y)\, dy \right) e^{-i\omega x}\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x-y)\, e^{-i\omega x}\, dx \right) g(y)\, dy$$

$$\overset{x-y=t}{=} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(t)\, e^{-i\omega t}\, e^{-i\omega y}\, dt \right) g(y)\, dy$$

$$= \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt \right)}_{\hat{f}(\omega)} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} g(y)\, e^{-i\omega y}\, dy \right)}_{\hat{g}(\omega)}$$

$$= \hat{f}(\omega) \cdot \hat{g}(\omega)$$

#

23/11/2021

Recap

La trasformata di Fourier di una funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ è definita come

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx$$

Esempi $\chi_{[a,b]} = f$

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{[a,b]}(x)\, e^{-ix\omega}\, dx$$

$$= \int_a^b e^{-ix\omega}\, dx = \frac{e^{-ix\omega}}{-i\omega}\Big|_a^b$$

Integrali dipendenti da parametri

Teorema di continuità

Sia $h: \mathbb{R} \times I \to \mathbb{C}$ con $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo t.c.

- $h(\cdot, t): \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ è integrabile $\forall t \in I$
- $h(x, \cdot): I \to \mathbb{C}$ è continua q.o. in $x \in \mathbb{R}$

Se $\exists$ $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrabile e t.c.

$$|h(x,t)| \leq g(x) \qquad \forall t \in I, \text{ e q.o. } x \in \mathbb{R}$$

allora la funzione $H: I \to \mathbb{C}$ definita come

$$H(t) = \int_{\mathbb{R}} h(x,t)\, dx$$

è continua in I.

Teorema di derivazione sotto il segno di integrale.

Sia $h : \mathbb{R} \times I \to \mathbb{C}$ con $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo t.c.

- $h(\cdot, t) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ è integrabile $\forall t \in I$
- $h(x, \cdot) : I \to \mathbb{C}$ è di classe C^1 q.o. $x \in \mathbb{R}$

Se $\exists\, g_1, g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrabili t.c.

$$|h(x,t)| \leq g_1(x) \qquad e \qquad \left|\frac{\partial h}{\partial t}(x,t)\right| \leq g_2(x)$$

$\forall t \in I$ e q.o. in $x \in \mathbb{R}$. Allora la funzione

$$H(t) = \int_{\mathbb{R}} h(x,t)\, dx$$

è di classe C^1 e si ha

$$\frac{d}{dt} H(t) = \int_{\mathbb{R}} \partial_t h(x,t)\, dx$$

Proprietà della FT

1| Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ allora $\hat{f} \in C^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ ed inoltre

$$\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$$

Dim

1) Proviamo che $\hat{f} \in C^0(\mathbb{R})$, applichiamo il thm di continuità (vedi sopra). Definiamo la funzione ausiliaria

$h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\quad h(x,\omega) = f(x) e^{-i\omega x}$ si ha che

- $h(\cdot, \omega) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ è integrabile
- $h(x, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ è continua

ed inoltre

$$|h(x,\omega)| = |f(x)\, e^{-ix\omega}| \leq |f(x)|$$ che per ipotesi è L^1

Il teorema di continuità implica che

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x,\omega)\, dx$$

è continua rispetto a ω. #

ii) Proviamo che $\hat{f} \in L^\infty(\mathbb{R})$

$$(*) \quad |\hat{f}(\omega)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-ix\omega}\, dx \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)\, e^{-ix\omega}|\, dx$$

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx = \|f\|_1$$

Notiamo che la quantità alla dx nella disuguaglianza (*) è indipendente da ω

$$\underbrace{\sup_\omega |\hat{f}(\omega)|}_{\|\hat{f}\|_\infty} \leq \sup_\omega \|f\|_1 = \|f\|_1$$

#

Foglio 3 es 3

Dimostrare che le seguenti successioni di funzioni sono successioni di Cauchy nello spazio

$$\left(C^1([-1,1]), \|\cdot\|_1 \right)$$

che però non convergono ad alcun elemento di $C([-1,1])$

Def Sia $(E, \|\cdot\|)$ uno spazio normato. Una successione $(x_n)_n$ è di Cauchy se:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \, n_0 \in \mathbb{N} \text{ tc } \forall n,m > n_0$$

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

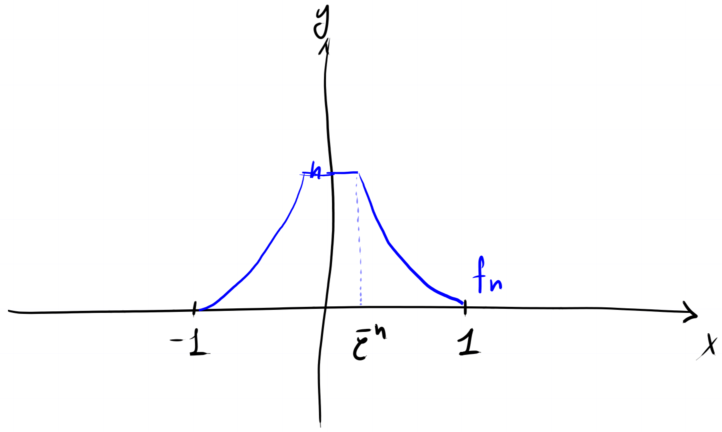
Alternativamente $\lim\limits_{n,m \to \infty} \|x_n - x_m\| = 0$

Def Sia (X, d) uno spazio metrico, si dice completo quando ogni successione di Cauchy è convergente.

Esempio $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ è uno spazio metrico completo

OSS Ogni successione convergente è di Cauchy, ma non è vero che ogni successione di Cauchy sia convergente.

1) $$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{se} \quad |x| \le e^{-n} \\ -\log|x| & \text{se} \quad e^{-n} \le |x| \le 1 \end{cases}$$



$\forall n$ la funzione $x \mapsto f_n(x)$ è una funzione pari

Calcoliamo f_n in e^{-n}

$$f_n(e^{-n}) = -\log|e^{-n}| = -\log e^{-n} = \log(e^{-n})^{-1}$$
$$= \log e^{n} = n$$

$\rightsquigarrow$ Abbiamo dunque provato che la funzione $f_n(x)$ è continua nei punti $x = \pm e^{-n}$

Cerchiamo di identificare un possibile limite per la successione $(f_n)_n$

Se $n \to \infty$ $e^{-n} \longrightarrow 0$ per cui il nostro limite target sarà la funzione

$$f(x) = -\log|x| \qquad \forall x \in [-1,0) \cup (0,1]$$

OSS la funzione f così identificata <u>non</u> è continua in 0, dunque

$$f \notin C^0([-1,1])$$

Resta dunque da provare solamente che la successione $(f_n)_n$ è di Cauchy rispetto $\|\cdot\|_1$

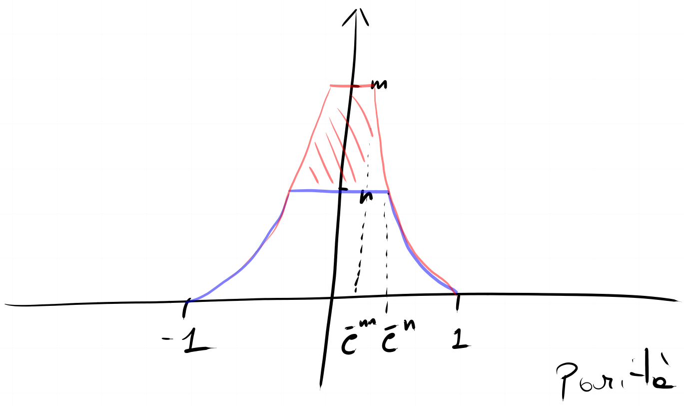
Secondo la definizione di successione di Cauchy applicata allo spazio normato specifico $(C([-1,1]), \|\cdot\|_1)$ vogliamo vedere che

$$\lim_{n,m\to\infty} \|f_n - f_m\|_1 = 0$$

$$\|$$

$$\lim_{n,m\to\infty} \int_{-1}^{1} |f_n(x) - f_m(x)|\, dx$$

Ipotesi operativa $m \geq n$



$m \geq n$

$$f_k(x) = \begin{cases} k & \text{se } |x| \leq e^{-k} \\ -\log|x| & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Parità delle funzioni

$$\int_{-1}^{1} |f_m(x) - f_n(x)|\, dx = 2\int_0^1 |f_m(x) - f_n(x)|\, dx$$

$$= 2\int_0^{e^{-m}} (m-n)\, dx + 2\int_{e^{-m}}^{e^{-n}} (-\log x - n)\, dx + 2\int_{e^{-n}}^{1} \cancel{-\log x - (-\log x)}\, dx \to 0$$

$$= 2(m-n)e^{-m} - 2n(e^{-n} - e^{-m}) - 2\int_{e^{-m}}^{e^{-n}} \log x\, dx = (1)$$

$$\int \log x\, dx = \int \partial_x(x) \log x\, dx$$

$$= x\log x - \int dx = x(\log x - 1) + C$$

Il che ci permette di calcolare

$$\int_{e^{-m}}^{e^{-n}} \log x\, dx = x(\log x - 1)\Big|_{e^{-m}}^{e^{-n}} = e^{-n}(-n-1) - e^{-m}(-m-1)$$

$$= (m+1)e^{-m} - (n+1)e^{-n}$$

$$(1) = \underbrace{2(m-n)e^{-m}}_{\xrightarrow{n,m\to\infty} 0} - \underbrace{2n(e^{-n}-e^{-m})}_{\xrightarrow{n,m\to\infty} 0} - 2\Big[\underbrace{(m+1)e^{-m} - (n+1)e^{-n}}_{\xrightarrow{n,m\to\infty} 0}\Big]$$

Abbiamo dunque dimostrato che la successione $(f_n)_n$ è di Cauchy rispetto $\|\cdot\|_1$ tuttavia <u>non</u> converge ad un elemento di $C^1([-1,1])$.

15/12/2021

Recap

Abbiamo definito l'operatore convoluzione

Se f e g sono funzioni C^∞ a supporto compatto allora

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\,dy$$

E abbiamo visto che non serve supporre tanta regolarità in f e g ma se abbiamo

$$f,g \in L^1(\mathbb{R}) \Longrightarrow f*g \in L^1(\mathbb{R}) \text{ e si ha che}$$

$$\|f*g\|_1 \le \|f\|_1 \|g\|_1$$

Convoluzioni: esempi, applicazioni e proprietà

Esempio Sia $p_1(x) = \chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| \le 1/2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

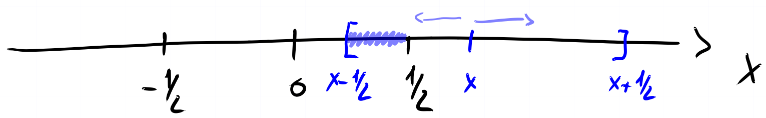
Essendo $p_1(x-y) = 1 \iff -1/2 \le x-y \le 1/2$

$$\iff x-\frac{1}{2} \le y \le x+\frac{1}{2}$$

Si ottiene che

$$(p_1 * p_1)(x) = \int_{\mathbb{R}} p_1(x-y)\,p_1(y)\,dy = \int_{-1/2}^{1/2} p_1(x-y)\,dy$$

$$= \int_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]\cap[x-\frac{1}{2},\,x+\frac{1}{2}]} 1\,dy = m\left([-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}] \cap [x-\tfrac{1}{2},\, x+\tfrac{1}{2}]\right)$$



OSS La funzione p_1 non è continua, ma la funzione $p_1 * p_1$ lo è, al di là dell'esempio specifico riportato sopra l'operatore di convoluzione ha degli effetti 'regolarizzanti'.

Proprietà delle convoluzioni

Siano $f, g, h \in L^1(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{C}$ si ha che

i) $f * g = g * f$

ii) $(f+g) * h = f * h + g * h$

iii) $(f*g)*h = f*(g*h)$

iv) $(\lambda f) * g = \lambda (f * g)$

Provare per casa le proprietà i) — iv)

v) Se f ha supporto compatto, ossia $f(x) \equiv 0 \ \forall x \in B^c(0,R)$, e almeno una tra f e g è una funzione di classe $\mathcal{C}^k$ allora $f*g \in \mathcal{C}^k$.

Idea della dimostrazione

Supponiamo che $f \in C^k$

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\, g(y)\, dy \quad \text{e dunque}$$

$$\partial_x^k (f*g)(x) = \partial_x^k \left[\int_{\mathbb{R}} f(x-y)\, g(y)\, dy \right]$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f^{(k)}(x-y)\, g(y)\, dy$$

Se g è $\mathcal{C}^k$ allora utilizzo la proprietà i) (commutatività della convoluzione) e ottengo il claim.

Un accenno al caso multi-dimensionale

Se $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ allora

$$(f*g)(x_1,\dots,x_n) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1-y_1,\dots,x_n-y_n)\, g(y_1,\dots,y_n)\, dy_1\dots dy_n$$

Esempio

Sia f una funzione che associa a ogni elemento $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ un tono di grigio

→ g è un fattore di convoluzione o nucleo convolutivo, ossia una funzione positiva con $\|g\|_1 = 0$ e $g \in C^\infty$.

f descrive l'immagine B/N originale

$f*g$ descrive un'immagine filtrata

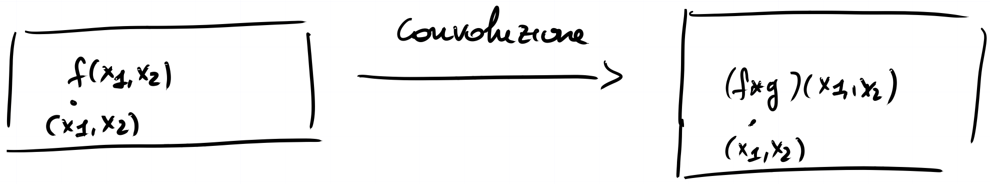
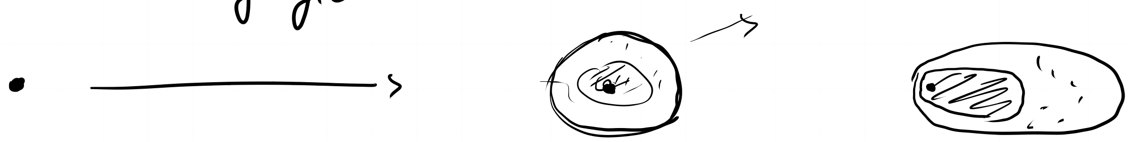


IMMAGINE ORIGINALE IMMAGINE FILTRATA

L'applicazione dell'operatore convoluzione regolarizza e "sfoca" le tonalità di grigio



L'effetto "flou".

Dall'analisi di Fourier alla sintesi

Caso periodico:

f periodica di periodo T

Analisi

$\longrightarrow$ Associamo $c_n(f) = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\, e^{-in\omega x}\, dx$ $\quad \omega = \frac{2\pi}{T}$

Ci dà una serie di Fourier $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\, e^{in\omega x}$

Abbiamo visto che dato una serie di Fourier non è sempre facile ritornare alla funzione di partenza (fase di sintesi).

Q Possiamo sviluppare un discorso analogo per funzioni che non sono periodiche ma sono definite in $\mathbb{R}$?

Premessa

Data la FT $\mathcal{F}(f)$ di f è possibile risalire alla funzione f?

In altre parole, è possibile invertire la trasformata di Fourier come operatore tra spazi funzionali?

Schema: funzione $\xrightarrow[\text{analisi}]{FT}$ spettro $\xrightarrow[\text{sintesi}]{¿AFT?}$ funzione

Antitrasformata di Fourier

Sia $g \in L^1(\mathbb{R})$, si definisce come antitrasformata di Fourier (AFT) di g la funzione

$$\mathcal{G}(g)(x) = \check{g}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} g(\omega)\, e^{i\omega x}\, dx$$

⚠ **Osservazione importante**

Si ha che

$$\mathcal{G}(g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} g(\omega)\, e^{-i(-x)\omega}\, d\omega = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(g)(-x)$$

Esercizio x casa Provare le proprietà 1-11 date per la FT per la AFT.

Problema Data $f \in L^1(\mathbb{R})$, vale la formula

$$\mathcal{G}(\mathcal{F}(f)) = f \quad ?$$

Ossia

$$\mathcal{G}(\mathcal{F}(f))(x) = f(x) \quad \text{per q.o. } x \in \mathbb{R} \quad ?$$

Condizione necessaria

Sia $f \in L^1$ e sia $\hat{f} = \mathcal{F}(f)$ la FT di f. Se vale la relazione

$$\mathcal{G}(\mathcal{F}(f))(x) = f(x) \quad \text{per q.o. } x \in \mathbb{R}$$

allora, per le proprietà della FT e della AFT deve esistere

$$h \in C^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$$

e tale che

$$\lim_{|x| \to \infty} h(x) = 0$$

tale che

$$f(x) = h(x) \quad \text{per q.o. } x \in \mathbb{R}$$

Teorema di inversione di Fourier

Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ allora per q.o. $x \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{G}(\hat{f})(x) = f(x)$$

cioè $$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} f(y)\, e^{-i\omega y}\, dy\right)}_{\hat{f}(\omega)} e^{i\omega x}\, d\omega = f(x)$$

Conseguenze del teorema di inversione di Fourier

Formula di dualità Sia $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ allora per q.o. $x \in \mathbb{R}$

$$\underset{\underset{\mathcal{F}(\mathcal{F}(f))}{\|}}{(\mathcal{F} \circ \mathcal{F})(f)}(x) = 2\pi f(-x)$$

Dim Segue dal teorema di inversione di Fourier osservando che

$$\mathcal{G}(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(f)(-x).$$

$$\| $$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f(\omega)\, e^{i\omega x}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f(\omega)\, e^{-i\omega(-x)}\, d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(f)(-x)$$

Teorema di unicità

Siano $f, g \in L^1$ e t.c. $\hat{f}, \hat{g} \in L^1$, si ha

$$\underline{\hat{f} = \hat{g} \text{ in } \mathbb{R}} \iff \underline{f = g \quad \text{q.o. in } \mathbb{R}}$$

ossia ogni funzione integrabile individua il suo spettro in maniera univoca e viceversa.

FT di un prodotto di funzioni

$f, g, fg \in L^1$ e $\hat{f}, \hat{g}, \widehat{fg} \in L^1$ allora

$$\widehat{fg}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\, \hat{f} * \hat{g}\,(\omega)$$

Dim Siccome per ipotesi $\hat f, \hat g \in L^1 \Rightarrow \hat f * \hat g \in L^1$, essendo dunque $\hat f * \hat g \in L^1$, sappiamo che $\forall \hat h \in L^1$

$$|\mathcal{G}(\hat h)(x)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\mathbb{R}} \hat h(\omega)\, e^{i\omega x}\, d\omega\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |\hat h(\omega)|\, d\omega < \infty$$

Possiamo dunque calcolare

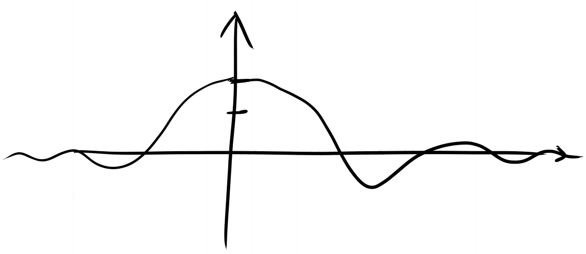
$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(\hat f * \hat g)(x) &= \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}(\hat f * \hat g)(-x) \\
&= 2\pi\, \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}(\hat f)(-x) \cdot \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}(\hat g)(-x) \\
&= 2\pi\, \mathcal{G}(\hat f)(x) \cdot \mathcal{G}(\hat g)(x) \\
&= 2\pi\, f(x)\, g(x)
\end{aligned}$$

e quindi applicando $\mathcal{F}$ si conclude che

$$\frac{1}{2\pi}(\hat f * \hat g)(\omega) = \mathcal{F}(f \cdot g)(\omega) = \widehat{fg}(\omega)$$

Problema Come definire la FT per $f \notin L^1(\mathbb{R})$?

Un esempio potrebbe essere la funzione $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$



$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x}\, dx < \infty$$

tuttavia

$$\int_{\mathbb{R}} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx = \infty$$

e infatti si ha che $x \mapsto \frac{\sin x}{x} \in L^2(\mathbb{R})$ ma **non** è L^1

$$\int \left|\frac{\sin x}{x}\right|^2 dx < \infty$$

Trasformata di Fourier in $L^2(\mathbb{R})$

Nelle applicazioni risulta utile (e fisicamente rilevante) applicare la FT a funzioni che hanno energia finita.
Tuttavia se $f \in L^2(\mathbb{R})$ non è garantito che $f \in L^1(\mathbb{R})$ e quindi, a priori, non possiamo garantire che

$$|\hat{f}(\omega)| = \left| \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx \right| < \infty$$

Teorema di Plancherel

FT in $L^2(\mathbb{R})$ L'operatore FT $\mathcal{F}: L^1 \cap L^2 \longrightarrow L^\infty$ si estende in modo univoco a un operatore $\overline{\mathcal{F}}: L^2 \longrightarrow L^2$ lineare, continuo, biettivo e che verifica $\forall\, f, g \in L^2$

$$\left(\overline{\mathcal{F}}(f), \overline{\mathcal{F}}(g)\right)_2 = 2\pi\, (f, g)_2$$

In particolare ciò implica che

$$\|\overline{\mathcal{F}}(f)\|_2^2 = 2\pi\, \|f\|_2^2$$

11/01/2022

La trasformata di Hilbert

Def Sia $f \in C^1([-\pi,\pi])$ definiamo la trasformata di Hilbert come

$$\mathcal{H}f(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{[-\pi,\pi]\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)} \cot(z/2)\, f(x-z)\, dz$$

Nota $\cot(y) = \dfrac{\cos(y)}{\sin(y)} = (\tan(y))^{-1}$

Notazione Scriviamo

$$\text{p.v.} \int \bullet \, dz = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{[-\pi,\pi]\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)} \bullet \, dz$$

e

$$\text{p.v.} ⨍ \bullet \, dz = \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{[-\pi,\pi]\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)} \bullet \, dz$$

tale operatore integrale viene detto valore principale

Es Dimostrare che se $f \in C^1$ allora $\mathcal{H}f$ è ben definita $\forall x \in [-\pi,\pi]$, ossia $\|\mathcal{H}f\|_{L^\infty} \leq C \|f'\|_{L^\infty}$

Dim $\text{p.v.} ⨍ \cot(z/2)\, f(x-z)\, dz = \mathcal{H}f(x)$ vogliamo dimostrare che questa quantità è limitata.

Notiamo la seguente osservazione

$$\text{p.v.} \fint \cot(z/2)\, f(x)\, dz = 0$$

$$\| $$

$$\frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{[-\pi,\pi]\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)} \cot(z/2)\, dz \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{[-\pi,\pi]\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)} \frac{\cos(z/2)}{\sin(z/2)}\, dz \quad f(x)$$

è una funzione dispari

l'insieme di integrazione è simmetrico rispetto all'origine

OSS Notiamo come la definizione di valore principale sia fondamentale in questo caso, infatti il limite per $\varepsilon \to 0$ preserva la simmetria dell'insieme di integrazione rispetto all'origine, per il quale possiamo dunque concludere che l'int della cot è nullo

In soldoni:

$$\lim_{\varepsilon_2\to 0} \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int_{-\pi}^{\varepsilon_2} + \int_{\varepsilon_1}^{\pi} \cot(z/2)\, dz$$

Non sarebbe definito

$$\mathcal{H}f(x) = \mathcal{H}f(x) - 0$$

$$= \text{p.v.} \fint \cot(z/2)\, f(x-z)\, dz - \text{p.v.} \fint \cot(z/2)\, f(x)\, dz$$

$$= \text{p.v.} \fint \cot(z/2) \left[f(x-z) - f(x) \right] dz$$

$$|\mathcal{H}f(x)| = \left| \text{p.v.} \fint \cot(z/2) \left[f(x-z) - f(x) \right] dz \right|$$

$$\leq \text{p.v.} \fint |\cot(z/2)|\, |f(x-z) - f(x)|\, dz$$

$$\leq \text{p.v.} \fint \frac{|\cos(z/2)|}{|\sin(z/2)|}\, |f(x-z) - f(x)|\, dz$$

$$\leq \text{p.v.} \fint \underbrace{\left| \frac{z/2}{\sin(z/2)} \right|}_{\leq C'} \frac{\overset{\overset{|f'(\xi)|\,|z|}{\leq}}{|f(x-z) - f(x)|}}{|z/2|}\, dz$$

$$\leq C' \text{ p.v.} \int \|f'\|_{L^\infty} \frac{|z|}{|z/2|}\, dz \leq 4\pi C' \|f'\|_{L^\infty} \quad \#$$

Abbiamo dunque provato che $\forall f \in C^1 \ \exists \ K > 0$ t.c. $\|\mathcal{H} f\|_{L^\infty} \leq K \|f'\|_{L^\infty}$

Notazione $\forall f \in L^2$ indichiamo con $\hat{f}(n) = c_n(f)$.

Es Dimostrare che $\forall f \in L^2$ si ha che

$$\widehat{\mathcal{H}f}(n) = -i \operatorname{sgn}(n) \hat{f}(n),$$

ossia

$$c_n(\mathcal{H}f) = -i \operatorname{sgn}(n) \, c_n(f)$$

Dim Se $f \in L^2$ sappiamo che essa può venire espressa come serie di Fourier. Dunque $\forall x \in [-\pi, \pi]$ abbiamo che

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{inx}$$

Calcoliamo adesso

$$\mathcal{H}f(x) = \text{p.v.} \int \cot(z/2) f(x-z)\, dz$$

$$= \text{p.v.} \int \cot(z/2) \left[\sum_n \hat{f}(n) e^{in(x-z)} \right] dz$$

(*)

$$= \sum_n \hat{f}(n) e^{inx} \underbrace{\left(\text{p.v.} \int \cot(z/2) e^{-inz}\, dz \right)}_{I_n}$$

Se calcoliamo il valore esplicito di questo integrale concludiamo

$$I_n = p.v. \int \frac{\cos(z/2)}{\sin(z/2)} \left(\cos(nz) - i\sin(nz)\right) dz$$

$$= p.v. \int \cancel{\frac{\cos(z/2)}{\sin(z/2)} \cos(nz)\, dz} \to 0 \quad - i\ p.v. \int \frac{\cos(z/2)}{\sin(z/2)} \sin(nz)\, dz$$

$$= -i\ p.v. \int \frac{\cos(z/2)}{\sin(z/2)} \sin(nz)\, dz$$

Siccome inoltre $\left| \frac{\sin(nz)}{\sin(z/2)} \right| \leq C$ quindi non ho più bisogno del valore principale, ossia

$$I_n = -i \int \frac{\cos(z/2)}{\sin(z/2)} \sin(nz)\, dz$$

Ci ricordiamo che $n \in \mathbb{Z}$, utilizziamo dunque la relazione

$$\sin(nz) = \operatorname{sgn}(n) \sin(|n| z)$$

$$I_n = -i \operatorname{sgn}(n) \int \frac{\cos(z/2)}{\sin(z/2)} \sin(|n|z)\, dz$$

Utilizziamo le formule di Eulero

$$I_n = -i \operatorname{sgn}(n) \int \frac{e^{iz/2} + e^{-iz/2}}{2} \frac{\frac{e^{i|n|z} - e^{-i|n|z}}{\cancel{2i}}}{\frac{e^{iz/2} - e^{-iz/2}}{\cancel{2i}}} dz$$

$$= -i \operatorname{sgn}(n) \int \frac{e^{iz/2} + e^{-iz/2}}{2} \frac{e^{i|n|z}}{e^{iz/2}} \frac{1 - e^{-i2|n|z}}{1 - e^{-iz}} dz$$

$$= -\frac{i}{2} \operatorname{sgn}(n) \int \left(1 + e^{-iz}\right) e^{i|n|z} \sum_{k=0}^{2|n|+1} e^{-ikz}\, dz$$

$$= -\frac{i}{2} \operatorname{sgn}(n) \sum_{k=0}^{2|n|+1} \int \left[e^{iz(|n|-k)} + e^{iz(|n|-k-1)} \right] dz$$

Notiamo che stiamo integrando esponenziali con arg un numero puramente immaginario, dunque

$$\sum_{k=0}^{2|n|+1} \int e^{it(|n|-k)} + e^{it(|n|-k-1)} \, dt = 2 ,$$

sostituisco tale risultato ed ottengo che

$$I_n = -\frac{i}{2} \operatorname{sgn}(n) \cdot 2 = -i \operatorname{sgn}(n) .$$

Sostituisco il valore esplicito così incontrato per I_n nell'eq (*) ottenendo che

$$\mathcal{H}f(x) = \sum_n \hat{f}(n) e^{inx} I_n$$

$$= -i \sum_n \operatorname{sgn}(n) \hat{f}(n) e^{inx} ,$$

e quindi concludiamo che

$$\widehat{\mathcal{H}f}(n) = -i \operatorname{sgn}(n) \hat{f}(n) \qquad \text{c.v.d.} \qquad \#$$

Es Dimostrare che $\|\mathcal{H}f\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$.

Dim Ci ricordiamo che $\forall \phi \in L^2$ vale la relazione

(*) $$\frac{1}{2\pi} \|\phi\|_{L^2}^2 = \sum_n |\hat{\phi}(n)|^2$$

$$c_n(\mathcal{H}f) = -i \operatorname{sgn}(n) c_n(f)$$

Per quanto visto prima sappiamo che

$$\mathcal{H}f(x) = \sum_n c_n(\mathcal{H}f) e^{inx} = -i \sum_n \operatorname{sgn}(n) c_n(f) e^{inx},$$

utilizziamo dunque la relazione (*) per calcolare la norma L^2 di $\mathcal{H}f$, questo ci dà che

$$\frac{1}{2\pi}\|\mathcal{H}f\|^2_{L^2} \overset{(*)\text{ per }\mathcal{H}f}{=} \sum_n |c_n(\mathcal{H}f)|^2$$

$$= \sum_n |-i\,\mathrm{sgn}(n)\,c_n(f)|^2$$

$$\overset{(*)\text{ per }f}{=} \sum_n |c_n(f)|^2$$

$$= \frac{1}{2\pi}\|f\|^2_{L^2}$$

Confrontando i 2 lati dell'uguaglianza di cui sopra otteniamo quindi che

$$\|f\|_{L^2} = \|\mathcal{H}f\|_{L^2}$$

Es Dimostrare che $\forall f \in L^2$ vale la relazione

$$\mathcal{H}^2 f = -f$$

$$[\ \mathcal{H}^2 f = \mathcal{H}(\mathcal{H}f)\ ]$$

Dim So che $\mathcal{H}g(x) = \sum_n (-i)\,\mathrm{sgn}(n)\,\hat{g}(n)\,e^{inx}$,

quindi

$$\mathcal{H}^2 f(x) = \mathcal{H}(\mathcal{H}f)(x) = \sum_n (-i)\,\mathrm{sgn}(n)\,\widehat{\mathcal{H}f}(n)\,e^{inx}$$

$$= \sum_n (-i\,\mathrm{sgn}(n))^2\,\hat{f}(n)\,e^{inx}$$

$$= - \sum_n \hat{f}(n)\,e^{inx} = -f(x)$$

12/01/2022

Recap

La trasformata di Hilbert è data dalla seguente espressione

$$\mathcal{H}f(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{[-\pi,\pi]\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)} \cot(z/2)\, f(x-z)\, dz$$

ed è ben definita $\forall f \in L^2((-\pi,\pi))$

Abbiamo visto inoltre la seguente relazione tra i coefficienti di Fourier di f e quelli di $\mathcal{H}f$.

$$\underbrace{\widehat{\mathcal{H}f}(n)}_{c_n(\mathcal{H}f)} = \underbrace{-i\,\mathrm{sgn}(n)\,\hat{f}(n)}_{-i\,\mathrm{sgn}(n)\,c_n(f)}$$

Proprietà

1) $\|\mathcal{H}f\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$
2) $\mathcal{H}^2 f = \mathcal{H}(\mathcal{H}f) = -f$

Es Dare un controesempio di una funzione $f \in L^\infty(-\pi,\pi)$ t.c. $\mathcal{H}f \notin L^\infty(-\pi,\pi)$

OSS Come interpretare il risultato di cui sopra.
Ieri abbiamo visto che

$$\mathcal{H} : f \in C^1 \longmapsto \mathcal{H}f \in L^\infty$$
$$: f \in L^2 \longmapsto \mathcal{H}f \in L^2$$

La trasformata di Hilbert è un operatore continuo tra C^1 e L^∞ e tra L^2 e sè stesso.

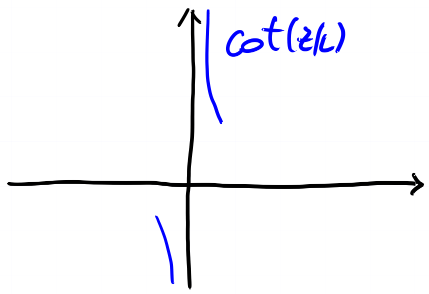
Q: Esiste un caso in cui la trasformata di H. non è un op continuo? La risposta a tale domanda è affermativa e proponiamo il controesempio nell'esercizio.

Dim Cerchiamo una funzione $f \in L^\infty$ tc $\mathcal{H}f \notin L^\infty$
Ricordiamo che $\mathcal{H}f = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{H}_\varepsilon f$ dove

$$\mathcal{H}_\varepsilon f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi,\pi]\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)} \cot(z/2)\, f(x-z)\, dz$$

$\cot(z/2) = \dfrac{\cos(z/2)}{\sin(z/2)}$

Guardiamo più da vicino la funzione che funge da nucleo integrale ossia $z \longmapsto \cot(z/2)$



$$\cot(z/2) = \frac{\cos(z/2)}{\sin(z/2)} = \frac{1 + O(z^2)}{\frac{z}{2} + O(z^3)}$$

$$= \frac{2}{z} + O(z^2)$$

$\rightsquigarrow$ Quando $z \sim 0$ $\cot(z/2) \sim 2/z$

In particolare questo calcolo approssimativo deduciamo che $z \mapsto \cot(z/2)$ <u>non è</u> assolutamente integrabile in un intorno di zero

Consideriamo dunque la funzione

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

quindi

$$f(x-z) = \operatorname{sgn}(x-z) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > z \\ 0 & \text{se } x = z \\ -1 & \text{se } x < z \end{cases}$$

Calcoliamo

$$\mathcal{H}_\varepsilon f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi,\pi]\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)} \cot(z/2) \operatorname{sgn}(x-z)\, dz$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi,x)\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)} \cot(z/2)\, dz$$

$$- \frac{1}{2\pi} \int_{(x,\pi]\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)} \cot(z/2)\, dz$$

Passo al limite per $\varepsilon \to 0$ e ne deduco che, se $x \neq 0$

$$\mathcal{H}f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{x} \cot(z/2)\, dz - \frac{1}{2\pi} \int_{x}^{\pi} \cot(z/2)\, dz$$

$$\cot(z/2) = \frac{\cos(z/2)}{\sin(z/2)} = 2\, \partial_z \left(\log|\sin(z/2)| \right)$$

Quindi

$$\mathcal{H}f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{x} \partial_z \left(\log|\sin(z/2)| \right) dz - \frac{1}{\pi} \int_{x}^{\pi} \partial_z \left(\log|\sin(z/2)| \right) dz$$

$$= 1/\pi \log|\sin(x/2)| - \frac{1}{\pi} \cancelto{0}{\log|\sin(-\pi/2)|}$$

$$- \frac{1}{\pi} \cancelto{0}{\log|\sin(\pi/2)|} + \frac{1}{\pi} \log|\sin(x/2)|$$

$$= \frac{2}{\pi} \log |\sin(x/2)|$$

Notiamo che la funzione $x \mapsto \frac{2}{\pi} \log|\sin(x/2)|$ <u>non</u> è limitata in $x=0$, infatti

$$\lim_{x \to 0} \frac{2}{\pi} \log|\sin(x/2)| = -\infty,$$

dunque $\mathcal{H}f = \mathcal{H}(\mathrm{sgn})$ non è una funzione L^∞.

"Wavelets" e sistemi ortonormali completi in $L^2(0,1)$

<u>Def</u> sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^2(0,1)$, la famiglia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si dice <u>completa</u> in L^2 se $\forall g \in L^2$, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N > 0$ e una famiglia λ_j, $j=0,\dots,N$ t.c.

$$\left\| g - \sum_{j=0}^{N} \lambda_j f_j \right\|_{L^2} < \varepsilon$$

<u>Es</u> le armoniche elementari

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}, \sin(2\pi n x), \cos(2\pi n x)\right)_{n\geq 1}$$

e

$$\left(e^{i 2\pi n x}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$$

Sono sistemi <u>ortonormali</u> e <u>completi</u> di $L^2(0,1)$ come visto nella teoria sviluppata nei mesi scorsi

Tali famiglie (ortonormali e complete) sono importanti in quanto ci permettono di "approssimare" una funzione L^2 in maniera arbitraria attraverso una somma finita di funzioni elementari.
Ci sono tuttavia delle limitazioni, essendo le armoniche elementari funzioni continue non approssimano bene funzioni discrete.

Def Sia
$$\psi(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \in [0, 1/2) \\ 0 & \text{se } x = 1/2 \\ 1 & \text{se } x = (1/2, 1] \end{cases}$$

e ψ funzione madre

$\forall n \in \mathbb{N}$ e $\forall k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$ definiamo la funzione
$$\psi_{n,k}(x) = 2^{n/2} \psi(2^n x - k)$$

L'insieme $(1, \psi_{n,k})_{n \in \mathbb{N}, k \in \{0, \dots, 2^n-1\}}$ è detto Base di Haar

Es Provare che gli elementi della base di Haar sono ortonormali rispetto al prodotto scalare in L^2

Teorema La base di Haar è un sistema ortonormale e completo in $L^2(0,1)$ ossia $\forall f \in L^2$ se definiamo
$$f_0^H = \int_0^1 f(x)\, dx \quad , \quad f_{n,k}^H = \int_0^1 f(x)\, \psi_{n,k}(x)\, dx$$

allora

$$f_0^H + \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=0}^{2^n-1} f_{n,k}^H \, \psi_{n,k} \xrightarrow{N \to \infty} f$$

in $L^2(0,1)$.