

# Matrici - Sommario

Tutto sul capitolo delle matrici

## Matrice

*Definizione di matrice, matrice quadrata, l'insieme delle matrici, matrice nulla. L'insieme delle matrici come  $\mathbb{R}$ -spazio vettoriale con le operazioni di somma interna e scalamento; Matrici triangolari superiori (e l'insieme delle matrici triangolari superiori come sottospazio vettoriale); Definizione della diagonale principale di una matrice; Matrici simmetriche ed antisimmetriche; Matrice identità; Matrice inversa e l'invertibilità delle matrici.*

## 1. Definizione di Matrice

**DEF 1.** Siano  $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ; allora si definisce una **matrice**  $m \times n$  a **coefficienti reali** come una *tabella rettangolare di  $m \cdot n$  elementi* del tipo:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Dove ciascun *coefficiente*  $a_{ij}$  è un numero *reale*;

$$\forall i \in \{1, \dots, m\}; \forall j \in \{1, \dots, n\}; a_{ij} \in \mathbb{R}$$

Per convenzione i numeri (*indici*)  $i, j$  iniziano con 1.

Diciamo che il coefficiente  $a_{ij}$  è di posto  $i, j$ .

**ESEMPIO 1.1.** La seguente è una matrice  $3 \times 4$ .

$$\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 6 \\ 7 & -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Scegliamo qualche coefficiente:

$$a_{12} = \sqrt{2}; a_{21} = 0$$

Ovviamente si nota che **NON** è *sempre* vero che  $a_{ij} = a_{ji}$ ; infatti qui abbiamo  $a_{12} \neq a_{21}$

## 1.1. $i$ -esima riga e colonna della matrice

Sia  $A = (a_{ij})_{i=1,\dots,m;j=1,\dots,n}$  una matrice a coefficienti reali. Allora definiamo:

**DEF 2.1.** Per ogni  $i \in \{1, \dots, m\}$  la  **$i$ -esima riga** è la *matrice*

$$A_{(i)} := (a_{i1}, \dots, a_{in})$$

**DEF 2.2.** Per ogni  $j \in \{1, \dots, n\}$  la  **$j$ -esima colonna** è la *matrice*

$$A^{(j)} := \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

## 1.2. L'insieme delle matrici

**DEF 1.2.** Dati  $m, n \in \mathbb{N}$ , ove  $m > 0, n > 0$ , denotiamo **l'insieme delle matrici** con

$$M_{m,n}(\mathbb{R})$$

**OSS 1.2.1.** Notiamo che con le operazioni di *somma interna* e di *prodotto per uno scalare* definite in [Operazioni basilari con matrici](#),

$$(M_{m,n}(\mathbb{R}), +, \cdot)$$

è uno [spazio vettoriale](#).

## 2. Tipologie di matrici

### 2.1. Matrici quadrate

**DEF 2.1.** Una *matrice* si dice **quadrata** se il numero delle *righe* ( $n$ ) coincide con il suo numero delle *colonne* ( $m$ ).

**SUBDEF 2.1.1.** Per denotare **l'insieme delle matrici quadrate** si scrive

$$M_n(\mathbb{R})$$

ove  $n \in \mathbb{N}, n > 0$ .

**ESEMPIO 2.1.1.** La seguente è una *matrice quadrata*  $2 \times 2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

**DEF 2.1.2** Nel caso delle *matrici quadrate* è possibile definire la **diagonale principale** come la *parte di A data dalle entrate di posto*  $A_{ii}, i \in \{1, \dots, n\}$ .

**ESEMPIO 2.1.2.** Nell'**ESEMPIO 2.1.1.** la *diagonale principale* sarebbe  $(1, 5)$ .

## 2.2. Matrici nulle

**DEF 2.2.** Una *matrice*  $m \times n$  **nulla** è la *matrice*  $m \times n$  le cui *entrate* (o *coefficienti*) sono tutte nulle, 0.

$$0 := \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

## 2.3. Matrici triangolari superiori

**DEF 2.3.** Si definisce **l'insieme delle matrici triangolari superiori**  $2 \times 2$  come

$$T_2(\mathbb{R}) := \{A \in M_2(\mathbb{R}) : a_{21} = 0\}$$

ovvero una matrice di forma

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$$

Ovviamente è possibile generalizzare per le matrici quadrate  $M_n(\mathbb{R})$ .

**OSS 2.3.1.** Notiamo che questo insieme è un sottoinsieme di  $M_2(\mathbb{R})$ ;

$$T_2(\mathbb{R}) \subseteq M_2(\mathbb{R})$$

Infatti se l'insieme delle matrici  $2 \times 2$   $M_2(\mathbb{R})$  è un  $\mathbb{R}$ -*spazio vettoriale* ([Spazi Vettoriali](#), **DEF 1.**), allora  $T_2(\mathbb{R})$  è un *sottospazio vettoriale* ([Sottospazi Vettoriali](#), **DEF 1.**).

Infatti valgono le seguenti:

1. La matrice nulla  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  appartiene anche a  $T_2(\mathbb{R})$ .
2. Le operazioni di *somma* e di *scalamento* sono chiuse; ovvero

$$A, B \in T_2(\mathbb{R}) \implies (A + B) \in T_2(\mathbb{R})$$

e

$$\lambda \in \mathbb{R}, A \in T_2(\mathbb{R}) \implies (\lambda \cdot A) \in T_2(\mathbb{R})$$

E' possibile verificare 2. verificando che la combinazione lineare di  $A, B \in T_2(\mathbb{R})$  appartiene anch'esso a  $T_2(\mathbb{R})$ .

$$\begin{aligned}\lambda_1 \cdot A + \lambda_2 \cdot B &= \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} & \lambda_1 a_{12} \\ 0 & \lambda_1 a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_2 b_{11} & \lambda_2 b_{12} \\ 0 & \lambda_2 b_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 b_{11} & \lambda_1 a_{12} + \lambda_2 b_{12} \\ 0 & \lambda_1 a_{22} + \lambda_2 b_{22} \end{pmatrix} \in T_2(\mathbb{R}) \blacksquare\end{aligned}$$

Questa osservazione è analoga per  $T_n(\mathbb{R})$  e  $M_n(\mathbb{R})$ .

## 2.4. Matrici simmetriche e antisimmetriche

Considerando da quanto detto in [Operazioni particolari con matrici \(OSS 1.1.\)](#), abbiamo notato che *non* ha sempre senso chiedersi se la *trasposta* di una matrice è uguale alla matrice stessa, ovvero

$${}^t A = A ?$$

tuttavia questo acquisisce significato quando consideriamo le matrici quadrate appartenenti a  $M_n(\mathbb{R})$ .

**ESEMPIO 2.4.1.** Prendo una matrice  $3 \times 3$  che chiamo  $A$ .

Sapendo che alla prima riga  $A_{(1)}$  ho fissato  $A_{(1)} = (1 \ 2 \ 3)$ , allora in questo modo

ho già fissato  $A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ , in quanto voglio che  $A^{(1)} = ({}^t A_{(1)})$ . (ovvero che la

trasposta della prima riga sia uguale alla prima colonna).

Il procedimento si ripete per  $A_{(2)} = (2 \ ? \ ?)$ , dove i punti segnati con ? possono essere sostituiti con qualsiasi valori. Per convenienza inseriremo con dei numeri crescenti, ovvero 4, 5 (e alla fine 6). Alla fine otteniamo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

che soddisfa  ${}^t A = A$ . Inoltre osserviamo che questa matrice è *simmetrica* alla diagonale.

**DEF 2.4.** Allora definiamo una matrice  $A \in M_n(\mathbb{R})$ :

1. **Simmetrica** se vale che

$$A = {}^t A$$

2. **Antisimmetrica** se vale che

$$A = -{}^t A$$

**OSS 2.4.1.** Osservo una peculiarità delle matrici *antisimmetriche*; infatti se voglio costruirne una mi accorgo che tutte le entrate della *diagonale*

*principale* devono essere nulle, in quanto l'unico numero che rimane uguale quando moltiplicato per  $-1$  è  $0$ .

**OSS 2.4.2.** Notiamo che le *matrici nulle* e *quadrate* sono le *uniche* matrici che sono sia *antisimmetriche* che *simmetriche*. Infatti,  $0 = 0$  e  $0 = -0$ .

## 2.5. Matrice unità (o identità)

Considerando da quanto detto e notato per quanto riguarda il *prodotto tra matrici* (*Operazioni particolari con matrici*), possiamo definire una matrice che comporta come il numero  $1$  dei numeri reali  $\mathbb{R}$  per questa suddetta operazione. (*Operazioni particolari con matrici*, **PROP 2.4.3.**)

**DEF 2.5.** Sia  $n \in \mathbb{N}$  e  $n > 0$ , allora la **matrice unità** (o **identità**) è quella matrice quadrata appartenente a  $M_n(\mathbb{R})$  le cui entrate sono tutte nulle, fuorché quelle della *diagonale principale*, che sono tutti uguali a  $1$ . Denotiamo questa matrice con

$$\mathbb{1}_n \text{ o } I_n \text{ o } \text{Id}_n$$

ove

$$(\mathbb{1}_n)_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$$

## 2.6. Matrice inversa

**OSS 2.6.1.** Nei dei numeri reali  $\mathbb{R}$ , dato un  $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$  diciamo che un altro numero  $b \in \mathbb{R}$  è l'inversa di  $a$  se è vera che

$$a \cdot b = b \cdot a = 1$$

e  $b$  è unica. Infatti questo è esattamente *l'assioma M3* dei numeri reali (*Assiomi dei Numeri Reali*).

**DEF 2.6.** Allora, tracciando un parallelismo tra i *numeri reali* e le *matrici* (*Operazioni particolari con matrici*), chiamiamo la *matrice quadrata*  $A \in M_n(\mathbb{R})$  **invertibile** se esiste una matrice  $B \in M_n(\mathbb{R})$  tale che valga

$$A \cdot B = B \cdot A = \mathbb{1}_n$$

che chiamiamo

$$B = A^{-1}$$

**PROP 2.6.1.** Prendendo  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ , valgono le seguenti proprietà:

1. Se  $A$  è *invertibile*, allora la sua inversa  $A^{-1}$  è *unica*.
2. Se  $A, B$  sono invertibili allora  $A \cdot B$  *invertibile*, la quale inversa sarebbe  $B^{-1} \cdot A^{-1}$ .

## DIMOSTRAZIONI.

1. Prendiamo per assurdo  $B, C$  inverse di  $A$ .

Allora per definizione

$$A \cdot B = B \cdot A = \mathbb{1}_n$$

$$A \cdot C = C \cdot A = \mathbb{1}_n$$

allora

$$B = B \cdot \mathbb{1}_n = B \cdot (A \cdot C) = (B \cdot A) \cdot C = \mathbb{1}_n \cdot C = C$$

quindi per proprietà transitiva

$$B = C$$

■

2. Qui basta fare dei calcoli per verificare che  $B^{-1} \cdot A^{-1}$  è  $(A \cdot B)^{-1}$ . Ovvero basta verificare che  $(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = \mathbb{1}_n$  (e viceversa);

$$\begin{aligned}(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) &= A \cdot (B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1} \\ &= A \cdot \mathbb{1}_n \cdot A^{-1} \\ &= A \cdot A^{-1} \\ &= \mathbb{1}_n\end{aligned}$$

analogamente

$$\begin{aligned}(B^{-1} \cdot A^{-1}) \cdot (A \cdot B) &= B^{-1} \cdot (A^{-1} \cdot A) \cdot B \\ &= B^{-1} \cdot \mathbb{1}_n \cdot B \\ &= B^{-1} \cdot B \\ &= \mathbb{1}_n\end{aligned}$$

■

**OSS 2.6.2.** L'analogia tra *l'invertibilità* rispetto al prodotto definito in  $\mathbb{R}$  e l'invertibilità rispetto al *prodotto righe per colonne* di matrici **NON** si estende fino al punto di poter dire che **OGNI** matrice non-nulla è invertibile. Infatti si propone il seguente controesempio.

**ESEMPIO 2.6.2.a.** Considero la seguente matrice  $A \in M_2(\mathbb{R})$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

la matrice  $A$  **non** è *invertibile*.

**DIMOSTRAZIONE.** Per assurdo suppongo che esista  $A^{-1} = B$ . Allora

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

Allora per definizione deve valere

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Prendiamo le entrate  $C_{11}$  e  $C_{21}$ . Per definizione del *prodotto righe per colonne* abbiamo:

$$C_{11} = 1 = (1 \quad 1) \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} = b_{11} + b_{21}$$
$$C_{21} = 0 = (1 \quad 1) \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} = b_{11} + b_{21}$$

Ma questo implicherebbe che

$$b_{11} + b_{21} = 1 = 0$$

che è un *assurdo*, in quanto  $1 \neq 0$ .

## Operazioni basilari con matrici

*Definizioni di operazioni con matrici; somma interna +, prodotto esterno (scalamento) ·, l'insieme delle matrici come  $\mathbb{R}$ -spazio vettoriale con queste operazioni.*

## 0. Preambolo

Avendo definito la *Matrice*, andiamo a introdurre delle *operazioni* con delle *matrici* al fine di rendere *l'insieme delle matrici*  $M_{m,n}(\mathbb{R})$  (*Matrice*, **DEF 1.2.**) un  $\mathbb{R}$ -*spazio vettoriale*.

## 1. Somma interna

**DEF 1.** Siano  $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , definiamo la **somma** delle *matrici*  $A$  e  $B$  e lo denotiamo  $A + B$ ; per definire questa nuova matrice data dalla somma, definiamo *ogni sua entrata*. Quindi *l'entrata di posto*  $i, j$  di  $A + B$  è data da:

$$(A + B)_{ij} := A_{ij} + B_{ij}$$

Qui si utilizza il fatto che per descrivere una *matrice* è sufficiente determinare come ottenere ciascuna delle sue *entrate*.

### ESEMPIO 1.1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

**OSS 1.1.** La *matrice nulla* (*Matrice*, **DEF 2.2.**) è in effetti l'*elemento neutro* della somma tra matrici. Infatti questo sarà fondamentale per dimostrare che *l'insieme delle matrici*  $m \times n$   $M_{m,n}(\mathbb{R})$  è uno  $\mathbb{R}$ -*spazio vettoriale* (*Spazi Vettoriali*).

## 2. Prodotto per scalare (scalamento)

**DEF 2.** Sia  $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ ; definiamo allora il *prodotto (o la moltiplicazione) per uno scalare*  $\lambda$  per  $A$ , come la matrice  $(\lambda \cdot A)$ , le cui entrate sono ottenute facendo

$$(\lambda \cdot A)_{ij} := \lambda \cdot A_{ij}$$

### ESEMPIO 2.1.

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ -9 & -6 & -3 \end{pmatrix}$$

## Sistemi di generatori

*Breve definizione di combinazione lineare; Matrice come combinazione lineare di sistemi di generatori, indipendenza lineare*

## 0. Combinazione lineare

**DEF 0.** Per **combinazione lineare** si intende *l'espressione* per cui prendo una serie di *vettori*  $v_i$  dall' $\mathbb{R}$ -*spazio vettoriale*  $V$  (*Spazi Vettoriali*, **DEF 1.**, **DEF 1.1.**), scalo ciascuna di essa per uno scalare  $\lambda_i$  e li sommo; quindi stiamo parlando di

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n$$

## 1. Sistemi di generatori

Consideriamo una *matrice*  $2 \times 2$  (*Matrice*, **DEF 1.**),  $A$ . Consideriamo

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$



Ora consideriamo 4 matrici  $2 \times 2$  "speciali", ovvero

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; G = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

infatti queste matrici hanno *tutte* le *entrate* nulle (0), fuorché una, la quale uguale ad uno (1).

Consideriamo allora la seguente *combinazione lineare* di queste quattro matrici:

$$3E + F - 2G + 4H$$

che secondo dei calcoli diventa proprio  $A$ , ovvero

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Si può ripetere questa costruzione, qualsiasi sia matrice  $A$ ; infatti se

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

allora

$$A = aE + bF + cG + dH$$

**DEF 1.** In questo diciamo che  $E, F, G, H$  sono un **sistema di generatori** di  $M_2(\mathbb{R})$ .

**OSS 1.1.** Notiamo che questo ragionamento può essere formulato allo stesso modo per qualsiasi insieme di *matrici*  $M_{m,n}(\mathbb{R})$ : abbiamo quindi "dimostrato" il seguente:

**PROP 1.1.** Se consideriamo l'insieme delle *matrici*  $M_{m,n}(\mathbb{R})$  che sono costruite nel seguente modo: *esse hanno tutte le entrate nulle 0 fuorché una, la quale uguale ad 1*; allora tale insieme è un **sistema di generatori** per  $M_{m,n}(\mathbb{R})$ .

## 2. Indipendenza lineare

Considerando ancora le *matrici quadrate*  $2 \times 2$ , ne consideriamo la *matrice nulla*

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che può essere scritta come la combinazione lineare (considerando  $E, F, G, H$  come i *sistemi di generatori di*  $M_2(\mathbb{R})$ ):

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0E + 0F + 0G + 0H$$

Si vede che non c'è nessun altro modo di ottenere la *matrice nulla*, se non di impostare ogni *coefficiente* 0. Infatti

$$eE + fF + gG + hH = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi affinché valga la sovrastante,  $(e, f, g, h) = (0, 0, 0, 0)$ .

**DEF 2.** In questo caso diciamo che queste quattro matrici sono **linearmente indipendenti**; ovvero che *l'unico modo di ottenere la matrice nulla mediante la combinazione lineare di queste matrici* è quella di imporre tutti i coefficienti nulli. Questi ragionamenti possono essere formulati (e generalizzati) anche per *matrici*  $m \times n$ .

**OSS 2.1.** Se ho

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

allora la per ottenere 0 (la matrice nulla) è necessaria fare la seguente combinazione lineare:

$$-1 \cdot A + \left(-\frac{1}{2}\right)B$$

e i coefficienti non sono nulli; pertanto  $A, B$  *non* sono linearmente indipendenti.

## Operazioni particolari con matrici

*Trasposta di una matrice (definizione di matrice simmetrica e antisimmetrica). Definizione di prodotto tra due matrici. Esempi scelti del prodotto righe per colonne. Proprietà del prodotto tra matrici.*

### 1. Matrice trasposta

**traspórre** (ant. **transpórre**) v. tr. [dal lat. *transponĕre*, comp. di *trans-* «trans-» e *ponĕre* «porre»] (coniug. come *porre*). – **1.** Porre, collocare una cosa dopo un'altra, invertendo l'ordine in cui tali cose erano inizialmente: *il copista per errore ha trasposto i versi 24-25 dopo i versi 26-30*; col senso più generico di porre in diverso ordine: *il periodo potrebbe migliorarsi notevolmente trasponendo qualche*

parola; se necessario si potrà t. qualche numero del programma; t. i fili di una linea telefonica.

---

**DEF 1.** Sia  $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ ; definiamo la **trasposta** di  $A$  come quella matrice, che indichiamo con  ${}^tA$ , che è un elemento di  $M_{m,n}(\mathbb{R})$ , determinato dalla seguente proprietà: *"l'entrata di posto  $i, j$  di  ${}^tA$  è uguale all'entrata di posto  $j, i$  di  $A$ ".* In parole povere, scambiamo le **righe** della matrice con le **colonne** (invertendo così l'ordine).

Quindi

$$({}^tA)_{ij} := A_{ji}; \quad \begin{matrix} i \in \{1, \dots, n\} \\ j \in \{1, \dots, m\} \end{matrix}$$

### ESEMPIO 1.1.

Se prendiamo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

allora si ha

$${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

**OSS 1.1.** Notiamo che **generalmente** non ha senso chiedersi se

$${}^tA = A$$

in quanto in una buona parte dei casi (ovvero delle **matrici non quadrate** (**Matrice**, **DEF 2.1.**)) il numero delle colonne  $m$  e il numero delle righe  $n$  vengono scambiate (per definizione); infatti se  $A$  è una matrice  $m \times n$ , allora  ${}^tA$  sarà una matrice di  $n \times m$ .

## 1.1. Proprietà della trasposta

**PROP 1.1.** Prendendo  $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$  allora si verificano le due proprietà:

- (i)  ${}^t(A + B) = ({}^tA) + ({}^tB)$
- (ii)  ${}^t({}^tA) = A$

### DIMOSTRAZIONE.

Innanzitutto osserviamo che ha senso chiedersi se queste proprietà sono valide, in quanto per definizione in **Operazioni basilari con matrici**, sommando due matrici

$m \times n$  si ottiene un'altra matrice  $m \times n$ ; infatti da un lato si sommano prima due matrici  $m \times n$  poi per trasporlo in una matrice  $n \times m$ , dall'altro si sommano due matrici trasposte  $n \times m$  (ottenendo ovviamente un'altra matrice  $n \times m$ ).

Per dimostrare la (i), dimostriamo che tutte le entrate della matrice nel **membro sinistro dell'uguaglianza** e nel **membro destro** sono, infatti, effettivamente uguali. Per farlo fissiamo le  $i, j$  e prendiamo le entrate di posto  $i, j$ . Allora

$$\begin{aligned} (*) \quad ({}^t(A+B))_{ij} &\stackrel{\text{def.}}{=} (A+B)_{ji} \stackrel{\text{def.}}{=} A_{ji} + B_{ji} \\ (\triangle) \quad ({}^tA)_{ij} + ({}^tB)_{ij} &\stackrel{\text{def.}}{=} A_{ji} + B_{ji} \end{aligned}$$

E notiamo che (\*) e ( $\triangle$ ) sono uguali, completando così la dimostrazione.

Per la dimostrazione di (ii) basta fissare  $i, j$  e considerare le entrate di posto  $i, j$ :

$$({}^t({}^tA))_{ij} = ({}^tA)_{ji} = A_{ij}$$

■

## 2. Prodotto righe per colonne

Ora andiamo a introdurre una nuova operazione tra matrici e per farlo è opportuno considerare una specie di analogia, una situazione che ci aiuti a comprendere il concetto.

### 2.1. Definizione analogica

Immaginiamo di trovarci in un negozio A che presenta i seguenti prezzi (tralasciando questioni economico-finanziarie):

- Costo pasta:  $C_p = 1$
- Costo latte:  $C_l = 2$
- Costo uova:  $C_u = 3$

Ora supponiamo di dover comprare  $n_p, n_l, n_u$  quantità di pasta, latte e uova; ora vogliamo calcolare il costo totale, che sarebbe una specie di **"combinazione lineare"** dove i **coefficienti scalari** vengono rappresentati dai quantitativi, i **vettori** invece dai **costi**. Quindi abbiamo

$$n_p C_p + n_l C_l + n_u C_u$$

Ora definiamo il **prodotto righe per colonne** come

$$(C_p \quad C_l \quad C_u) \cdot \begin{pmatrix} n_p \\ n_l \\ n_u \end{pmatrix} := n_p C_p + n_l C_l + n_u C_u$$

Adesso supponiamo di aver trovato un altro negozio B che offre altri prezzi ancora più competitivi; ovvero

$$C'_p = -3 ; C'_l = -2 ; C'_u = -1$$

quindi per tenere sotto controllo i due *totali di spesa*, potrei "impacchettare" le due righe dei *costi unitari* in una matrice:

$$\begin{pmatrix} C_p & C_l & C_u \\ C'_p & C'_l & C'_u \end{pmatrix}$$

e sarebbe ragionevole definire il prodotto di:

$$\begin{pmatrix} C_p & C_l & C_u \\ C'_p & C'_l & C'_u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_p \\ n_l \\ n_u \end{pmatrix}$$

come la matrice  $2 \times 1$  dove la prima riga rappresenta il *costo totale del primo negozio* e la seconda riga invece il *costo totale del secondo negozio*:

$$\begin{pmatrix} n_p C_p + n_l C_l + n_u C_u \\ n_p C'_p + n_l C'_l + n_u C'_u \end{pmatrix}$$

Ricapitolando, abbiamo moltiplicato una *matrice 2x3* per una *matrice 3x1* e abbiamo ottenuto una *matrice 2x1*.

In altre parole, la matrice ottenuta dalla moltiplicazione è quella matrice le cui *entrate* sono date dalla *moltiplicazione di ciascuna delle due righe della prima matrice con la colonna della seconda matrice*.

In questo modo, se volessimo aggiungere la seconda colonna di quantitativi  $\begin{pmatrix} n'_p \\ n'_l \\ n'_u \end{pmatrix}$ , quello che andremmo a ottenere è una situazione del tipo:

$$\begin{pmatrix} C_p & C_l & C_u \\ C'_p & C'_l & C'_u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_p & n'_p \\ n_l & n'_l \\ n_u & n'_u \end{pmatrix}$$

che diventa

$$\begin{pmatrix} n_p C_p + n_l C_l + n_u C_u & n'_p C_p + n'_l C_l + n'_u C_u \\ n_p C'_p + n_l C'_l + n_u C'_u & n'_p C'_p + n'_l C'_l + n'_u C'_u \end{pmatrix}$$

dove a sinistra abbiamo i *quantitativi della prima colonna*, a destra i *quantitativi della seconda colonna* '.

## 2.2. Definizione generale

**DEF 2.2.1.** Siano  $A \in M_{1,n}(\mathbb{R})$ ,  $B \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ ; allora definiamo il **prodotto riga per colonna** come *la combinazione lineare* data da

$$A_{(1)} \cdot B^{(1)} := a_{11}b_{11} + \dots + a_{1n}b_{n1} = \sum_{i=1}^n a_{1i}b_{i1}$$

**DEF 2.2.2.** In generale, se  $A \in M_{m,p}(\mathbb{R})$  e  $B \in M_{p,n}(\mathbb{R})$  allora definiamo il **prodotto**  $A \cdot B$  come la *matrice*  $m \times n$  la cui *entrata di posto*  $ij$  è data dalla seguente:

$$(A \cdot B)_{ij} := A_{(i)} \cdot B^{(i)} = \sum_{k=1}^p a_{1k}b_{k1}$$

**OSS 2.2.1.** Notiamo che il *prodotto tra due matrici*  $A \cdot B$  è definita solo se il numero di colonne di  $A$  coincide con il numero di righe di  $B$ .

Inoltre, la *"matrice risultante"* diventa una matrice  $a \times b$  (ove  $a$  è il numero delle colonne di  $A$ ,  $b$  il numero di righe di  $B$ ).

## 2.3. Esempi

Diamo alcuni esempi-esercizi.

**ESEMPIO 2.3.1.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

usando le definizioni otteniamo

$$\begin{pmatrix} (1 \ 2 \ 3) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & (1 \ 2 \ 3) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ (-3 \ -2 \ -1) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & (-3 \ -2 \ -1) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

poi calcolando tutti i *prodotti righe per colonne*, infine abbiamo

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

**ESEMPIO 2.3.2.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+0+0 & 2+0+0 \\ 0+0+0 & 0-1+0 \\ 0+0+1 & 0+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**OSS 2.3.2.a.**

Notiamo di aver ottenuto la stessa matrice a destra.

**ESEMPIO 2.3.3.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0+0 & 0+2+0 & 0+0+3 \\ -3+0+0 & 0-2+0 & 0+0-1 \end{pmatrix}$$

facendo i conti,

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

**OSS 2.3.3.a.**

Come appena notato prima, la *seconda matrice* sembra di comportarsi come il numero 1.; infatti se lo moltiplichiamo a destra o a sinistra, otteniamo la stessa matrice moltiplicata.

Infatti questa matrice verrà definita come la *matrice identità* (**DEF 2.5.**) 1.

**ESEMPIO 2.3.4.**

Consideriamo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Posso fare sia  $A \cdot B$  che  $B \cdot A$  in quanto abbiamo i tali requisiti. Allora

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 * 1 + 1 * 2 & 0 * 1 + 2 * 1 \\ -1 * 3 + 4 * 1 & 3 * 0 + 1 * 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

e

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -1 * 1 + 0 * 3 & -1 * 2 + 0 * 4 \\ 1 * 1 + 1 * 3 & 1 * 2 + 1 * 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

**OSS 2.3.4.a.**

Notiamo che il *prodotto delle matrici* non è un'operazione *commutativa*; questo

determina delle forti conseguenze, in particolare nella *meccanica quantistica* con il *principio di indeterminazione di Heisenberg*.

## 2.4. Proprietà

Il *prodotto righe per colonne* soddisfa alcune proprietà:

**PROP 2.4.1.** Siano  $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$  e  $C, D \in M_{p,n}(\mathbb{R})$ . Allora valgono le seguenti uguaglianze:

1.  $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$
2.  $A \cdot (C + D) = A \cdot C + A \cdot D$

la **1.** si chiama "proprietà distributiva a *destra*", la **2.** invece "proprietà distributiva a *sinistra*". Utilizziamo questa nomenclatura in quanto sappiamo che l'operazione di prodotto righe per colonna **NON** è commutativa; quindi non si è sempre certi che questa proprietà valga da entrambi i lati (in questo caso sì).

**PROP 2.4.2.** Sia  $A \in M_{m,p}(\mathbb{R})$  e  $B \in M_{p,n}(\mathbb{R})$ ; allora vale che

$${}^t(A \cdot B) = ({}^tB) \cdot ({}^tA)$$

**ATTENZIONE!** Invece bisogna stare attenti che

$${}^t(A \cdot B) \neq ({}^tA) \cdot ({}^tB)$$

in quanto essa non è definita. Infatti a destra si vede che proviamo a moltiplicare una matrice  $p, m$  e  $n, p$ ; a meno che  $m = n$ , questa moltiplicazione NON è ben posta.

**DIMOSTRAZIONE.** Per mostrare la forma corretta, ovvero

$${}^t(A \cdot B) = ({}^tB) \cdot ({}^tA)$$

mostriamo che tutte le entrate del membro destro sono uguali a tutte le entrate del membro sinistro; siano dunque  $i \in \{1, \dots, n\}$  e  $j \in \{1, \dots, m\}$ . Allora:

$$\text{dx. } ({}^t(A \cdot B))_{ij} = (A \cdot B)_{ji} = A_{(j)} \cdot B^{(i)}$$

$$\text{sx. } (({}^tB) \cdot ({}^tA))_{ij} = {}^tB_{(i)} \cdot {}^tA^{(j)} = \text{le quantità sono uguali} = A_{(j)} \cdot B^{(i)}$$

e questo mostra che le due sono uguali.

**PROP 2.4.3.** Sia  $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ , allora

$$\mathbb{1}_m \cdot A = A; A \cdot \mathbb{1}_n = A$$

Per  $\mathbb{1}_m$  si intende la *matrice identità* (*Matrice*, **DEF 2.5.**).

**OSS 2.4.3.a** Nel caso delle matrici quadrate  $M_n(\mathbb{R})$ , la matrice unità  $\mathbb{1}_n$  funge



dunque da *elemento neutro* per il *prodotto righe per colonne*. Ovvero

$$\mathbb{1}_n \cdot A = A \cdot \mathbb{1}_n = A$$

e possiamo denominarlo come *elemento neutro* in quanto tutti gli elementi in questa uguaglianza sono appartenenti a  $M_n(\mathbb{R})$ .