Spazi Vettoriali - Sommario

Spazi e sottospazi vettoriali. Formalizzazione del linguaggio a partire dalla lezione del 31.10.2023

A. Spazi Vettoriali

Spazi Vettoriali

Definizione di $\mathbb{R}$-spazio vettoriale, gli 8 assiomi dei spazi vettoriali. L'utilità di spazi vettoriali; esempi di spazi vettoriali.

---

1. Definizione di spazio vettoriale

Cerchiamo di astrarre quanto visto in Vettori Liberi e Operazioni sui vettori liberi.

DEF 1. Un **$\mathbb{R}$-spazio vettoriale** (o **spazio vettoriale su $\mathbb{R}$**) è un insieme V con 2 operazioni definiti come:

$$\begin{aligned} + : V \times V \longrightarrow V;\ (u, v) \mapsto u + v \\ \cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V;\ (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v \end{aligned}$$

tali per cui $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e $\forall u, v, w \in V$ sono soddisfatte le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{v}_1 : (u+v)+w = u+(v+w) \\
&\mathrm{v}_2 : u+v = v+u \\
&\mathrm{v}_3 : \exists 0 \in V \mid 0+v = v+0 = v \\
&\mathrm{v}_4 : \exists -v \in V \mid v+(-v) = (-v)+v = 0 \\
&\mathrm{v}_5 : \lambda \cdot (u+v) = \lambda u + \lambda v \\
&\mathrm{v}_6 : (\lambda+\mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u \\
&\mathrm{v}_7 : (\lambda \cdot \mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v) \\
&\mathrm{v}_8 : 1 \cdot v = v
\end{aligned}$$

Inoltre uno **spazio vettoriale** può essere anche definito con la seguente *terna*:

$$(V, +, \cdot)$$

DEF 1.1. Chiamiamo l'elemento 0 della v_3 l'elemento *neutro*.
OSS 1.1. Notare che nella v_8 non chiameremo 1 *l'elemento neutro* per ragioni di convenzione, particolarmente per quanto riguarda l'algebra astratta.

PROP 1.1. Ciò che abbiamo visto fino ad ora ci mostra che V_2 (ovvero l'insieme dei vettori liberi nel piano) è un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale.

1.1. Vettore

DEF 1.1. Sia V uno $\mathbb{R}$-spazio vettoriale; gli elementi $v \in V$ si dicono **vettore**
! ATTENZIONE ! Si nota immediatamente che questa definizione del *vettore* non deve necessariamente corrispondere alla nostra idea di un *vettore libero*.

PROP 1.2. L'unicità del vettore neutro 0

L'assioma v_3 garantisce che *esiste* almeno un vettore neutro 0 tali che certe proprietà vengono soddisfatte; però ciò che *NON* garantisce è l'unicità del vettore neutro 0. Potrebbe esistere un altro vettore *neutro* che possiamo chiamare $0'$.
Però $0'$ non esiste e lo dimostreremo.
DIMOSTRAZIONE. Voglio dimostrare che se V è un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale, allora l'elemento neutro 0 è unico.
Supponiamo quindi che esistano due elementi neutri: 0 e $0'$; mostreremo che con questa supposizione deve necessariamente valere $0 = 0'$, quindi da questo seguirà la tesi.
Per ipotesi, $\forall v \in V$,

$$A.\, 0 + v \overset{\mathrm{v}_3}{=} v + 0 = v$$
$$B.\, 0' + v \overset{\mathrm{v}_3}{=} v + 0' = v$$

In $A.$ scegliamo $v = 0'$; allora

$$0 + 0' = 0' + 0 = 0'$$

In $B.$ scegliamo invece $v = 0$; allora

$$0' + 0 = 0 + 0' = 0$$

Quindi notiamo che

$$0 = 0 + 0' = 0'$$

per la proprietà transitiva dell'uguaglianza, $0 = 0'$. ■

PROP 1.3. $0 \cdot v = 0$

La proposizione

$$0 \cdot v = 0$$

sembra ovvia e banale, come ci suggerirebbe la notazione; però in realtà non lo è veramente, in quanto associamo due concetti *diversi*; da una parte abbiamo lo *scalamento* del vettore v per $\lambda = 0$, dall'altra abbiamo il *vettore neutro* 0.
Quindi vogliamo dimostrare che se V è un spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, allora per ogni $v \in V$ sussiste la proposizione.
DIMOSTRAZIONE. Per dimostrare la tesi, supponiamo che $v \in V$ e quindi abbiamo che:

$$\begin{aligned}
0 \cdot v &= (0+0) \cdot v \overset{\mathrm{v}_6}{=} 0 \cdot v + 0 \cdot v \\
0 \cdot v &= 0 \cdot v + 0 \cdot v \\
(0 \cdot v) + (-(0 \cdot v)) &= (0 \cdot v) + (-(0 \cdot v)) + (0 \cdot v) \\
0 &= 0 \cdot v \\
0 \cdot v &= 0 \blacksquare
\end{aligned}$$

OSS 1.2.1. Notare che in questi passaggi abbiamo fatto un *assunto* che non è dato per scontato; ovvero che il vettore opposto $-v$ è unico ad ogni vettore v. Infatti questo assunto è ancora da *dimostrare* (che è necessario per non invalidare questa dimostrazione).

PROP 1.4. $(-1) \cdot v = -v$

Anche la proposizione

$$(-1) \cdot v = -v$$

sembra intuitiva, ma in realtà non è dato *per scontato* secondo gli assiomi v; infatti da un lato abbiamo lo *scalamento* di un vettore, invece dall'altro abbiamo il *vettore opposto del vettore* v.
Quindi vogliamo dimostrare che se V è un spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, allora per ogni vettore $v \in V$ vale la proposizione appena enunciata.
DIMOSTRAZIONE. Per dimostrare la tesi, utilizziamo la proprietà v_3,

ovvero

$$v + (-v) = -v + v = 0$$

e dimostriamo la seconda uguaglianza, assumendo che $-v = (-1) \cdot v$;

$$(-1) \cdot v + (1) \cdot v \overset{\mathrm{v}_6}{=} (-1+1) \cdot v = 0 \cdot v = 0$$

OSS 1.2. Il senso di studiare i campi vettoriali

Si nota che in questa pagina non abbiamo veramente imparato qualcosa di nuovo; come il filosofo *F. Nietzsche* criticherebbe l'uomo che produce la *definizione di un mammifero* poi per riconoscere un *cammello* come un *mammifero*[1], non abbiamo veramente scoperto nulla di nuovo: infatti abbiamo solo dato *definizioni* poi per riconoscerle, ad esempio abbiamo definito lo *spazio vettoriale* e abbiamo riconosciuto V_2 come uno spazio vettoriale.
In realtà il discorso del filosofo tedesco non varrebbe qui: abbiamo dato questa definizione di spazio vettoriale per un motivo ben preciso, ovvero quello di *astrarre, abs-trahĕre*. Astrarre nel senso che togliamo l'aspetto *"accidentale"* dei vettori geometrici, concentrandoci invece sull'aspetto *"sostanziale"*.
Infatti dopo potremmo vedere che esistono molti insiemi che sono dei *spazi vettoriali*; se dimostro che un certo insieme A è uno spazio vettoriale, allora le proprietà v_n saranno sicuramente vere.

---

[1] *"Se io produco la definizione di un mammifero e poi dichiaro, alla vista di un cammello: guarda, un mammifero! certo con questo una verità viene portata alla luce, ma essa è di valore limitato, mi pare; in tutto e per tutto essa è antropomorfica e non contiene un solo singolo punto che sia «vero in sé», reale e universalmente valido, al di là della prospettiva dell’uomo."* (Su verità e menzogna in senso extramorale, 1896, Friedrich Nietzsche)

---

2. Esempi di spazi vettoriali

Dopo il lungo preambolo enunciato in **OSS 1.2.**, andiamo a vedere qualche esempio di spazio vettoriale.

ESEMPIO 2.1. Numeri reali

Consideriamo $V = \mathbb{R}$; con l'usuale definizione di *somma* $+$ e *moltiplicazione* $\cdot$, si verifica che anche $\mathbb{R}$ è uno $\mathbb{R}$-spazio vettoriale.

ESEMPIO 2.1. Coppie ordinate V_2

Consideriamo $V = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, ovvero

$$V = \{(a, b) : a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$$

con le operazioni

$$\begin{aligned}&(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)\\ &\lambda \cdot (a, b) := (\lambda \cdot a, \lambda \cdot b)\end{aligned}$$

allora $V = \mathbb{R}^2$ è uno *spazio vettoriale*.

ESEMPIO 2.2. $\mathbb{R}^n$

Generalizziamo ESEMPIO 2.1. Coppie ordinate V_2; ovvero definiamo

$$V = \mathbb{R}^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}$$

V è l'insieme delle n-*uple ordinate dei numeri reali*, con le operazioni

$$\begin{aligned}+ &: V \times V \longrightarrow V;\\ &((a_1, a_2, \ldots, a_n), (b_1, b_2, \ldots, b_n)) \mapsto (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)\\ \cdot &: \mathbb{R} \times V \longrightarrow V;\\ &\lambda \cdot (a_1, a_2, \ldots, a_n) \mapsto (\lambda \cdot v_1, \lambda \cdot v_2, \ldots, \lambda \cdot v_n)\end{aligned}$$

$(V, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

ESEMPIO 2.3. Insieme delle funzioni in variabile reale.

Consideriamo l'insieme delle funzioni di variabile reale (**DEF 1.1.**), ovvero

$$V = \{\text{funzioni } f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\}$$

con le operazioni

$$\begin{aligned}+ : V \times V \longrightarrow V;\ (f, g) \mapsto f + g\\ \cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V;\ (\lambda, f) \mapsto \lambda \cdot f\end{aligned}$$

OSS 2.3.1. Qui è importante chiarire il comportamento della *somma*, in quanto per noi non risulta immediatamente intuibile. Siano f, g funzioni, quindi

$$f + g = h$$

ove

$$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

data dalla seguente: se $a \in \mathbb{R}$, allora

$$h(a) = (f + g)(a) := f(a) + g(a)$$

OSS 2.3.2. Stesso discorso vale per lo *scalamento*;

$$\lambda \cdot f = F$$
$$F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

ove per ogni a reale,

$$F := \lambda \cdot (f(a))$$

OSS 2.3.3. Vogliamo trovare la *funzione nulla*, ovvero la *funzione* che appartiene a V e gioca lo stesso ruolo di 0. La funzione la chiamiamo O e si definisce come

$$O : \mathbb{R} \longrightarrow \ \mathbb{R}, \ x \mapsto 0$$

infatti, se definiamo $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, allora

$$(f + O) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \ x \mapsto f(x) + 0 = f(x)$$

Abbiamo visto che $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$(f + O)(x) = f(x)$$

pertanto

$$O + f = f; f + O = f$$

quindi abbiamo verificato che O è *l'elemento neutro* dello *spazio vettoriale* $(V, +, \cdot)$.

B. Sottospazi Vettoriali

Sottospazi Vettoriali

Sottospazio vettorali: definizione, esempi, interpretazione geometrica. Alcuni lemmi sui sottospazi vettoriali.

---

1. Sottospazio Vettoriale

DEF 1. Sia V un $\mathbb{R}$-*spazio vettoriale*; un sottoinsieme $W \subseteq V$ si dice un *sottospazio vettoriale* se valgono le seguenti:

1. Il vettore *nullo* di V appartiene a W
2. $\forall v, w \in W$; vale che $v + w \in W$ (*chiusura rispetto alla somma*)
3. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall v \in W$, vale che $\lambda \cdot v \in W$ (*chiusura rispetto allo scalamento*)

Consideriamo ora l'$\mathbb{R}$-spazio vettoriale V_2, ovvero

$$V_2 : (\mathbb{R}^2, +, \cdot)$$

introdotto in precedenza (**ESEMPIO 2.1.**).
Ora consideriamo il seguente sottoinsieme $W \subseteq V_2$;

$$W := \{(x, y) \in V_2 : x - 3y = 0\}$$

Facciamo le seguenti *osservazioni*.
OSS 1.1. In V_2 esiste il vettore nullo $(0, 0)$; in questo caso il vettore nullo $(0, 0)$ vale anche in W.
OSS 1.2. In V_2 è definita una *somma* $+$. Se v, w sono due elementi di W, allora sono in particolare elementi di V_2; dunque $v + w \in V_2$. In aggiunta vale che $v + w \in W$. Infatti: se $v = (v_1, v_2)$ $w = (w_1, w_2)$ allora

$$\begin{aligned} v \in W &\implies v_1 - 3v_2 = 0 \\ w \in W &\implies w_1 - 3w_2 = 0 \end{aligned}$$

quindi

$$(v_1 - 3v_2) + (w_1 - 3w_2) = 0 = 0 + 0 = 0$$

ovvero

$$(v_1 + w_1) - 3(v_2 + w_2) = 0$$

ovvero $(v + w) \in W$
OSS 1.3. Infine consideriamo $v \in W$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Se

$$\lambda \cdot v \in V_2$$

allora vale anche

$$\lambda \cdot v \in W$$

Infatti se $v = (v_1, v_2)$, allora $\lambda \cdot v = (\lambda \cdot v_1, \lambda \cdot v_2)$;

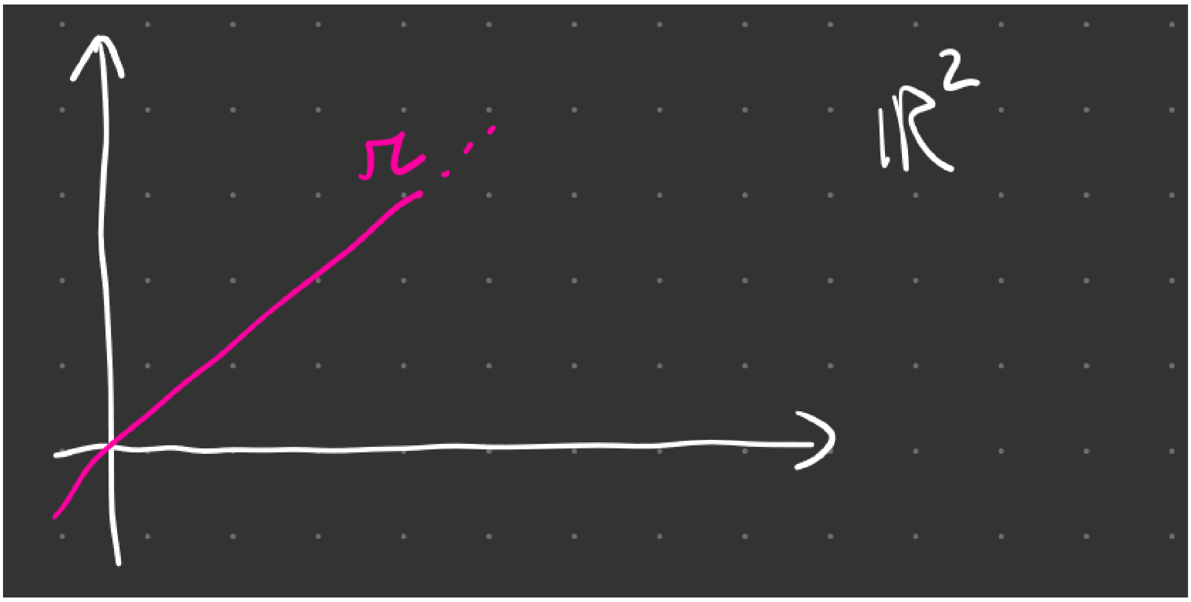
$$\begin{aligned}
v \in W &\implies v_1 - 3v_2 = 0 \\
\text{allora } \lambda \cdot (v_1 - 3v_2) &= \lambda \cdot 0 = 0 \\
\text{quindi } (\lambda \cdot v_1) - 3(\lambda \cdot v_2) &= 0 \\
\text{ovvero } \lambda \cdot v &\in W
\end{aligned}$$

2. Interpretazione geometrica

ESEMPIO 2.1. Consideriamo $\mathbb{R}^2$ come l'insieme dei *punti nel piano*, ovvero il classico *piano cartesiano* π
Definiamo il sottoinsieme

$$W := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - 3y = 0\}$$

Ovviamente W è uno *sottospazio vettoriale* di $\mathbb{R}^2$; notiamo che se rappresentiamo $\mathbb{R}^2$ come l'insieme dei punti nel piano, allora si può rappresentare W come l'insieme dei *punti nella retta* r, ove $r : x - 3y = 0 \iff y = \frac{1}{3}x$



ESEMPIO 2.2. In $\mathbb{R}^2$ consideriamo il seguente:

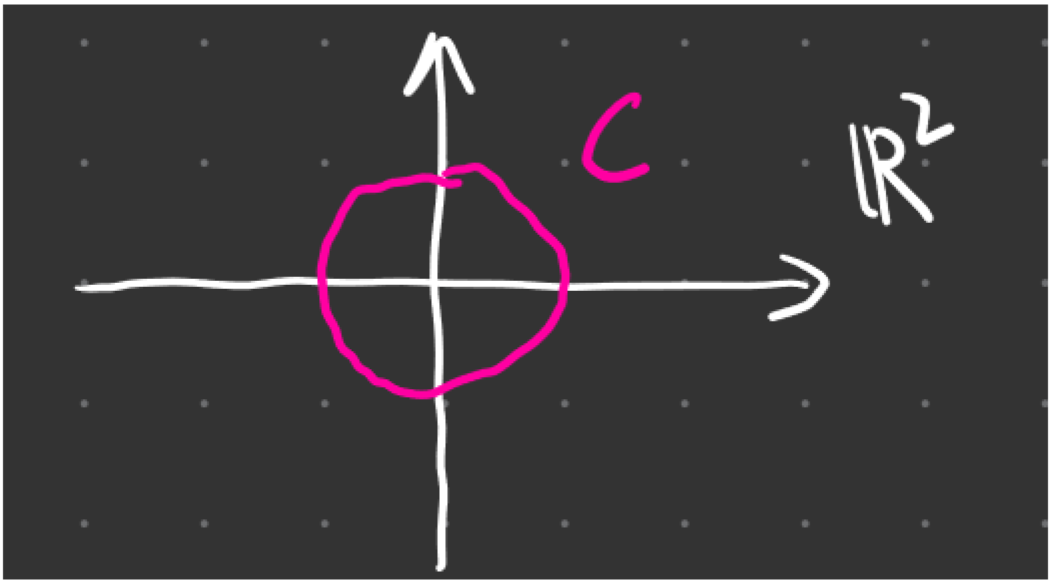
$$C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

Osserviamo subito che la *proprietà caratterizzante di* C non è un'*equazione lineare*; infatti si tratta di un'equazione di secondo grado.
Precisamente nel contesto della *geometria analitica*, C rappresenterebbe

la circonferenza

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \gamma^2$$

ove (α, β), quindi $(0, 0)$, rappresentano le coordinate dell'origine del cerchio e γ, quindi 1, il raggio.
Vediamo subito che C *non* è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$, in quanto $(0, 0)$ non appartiene a C.



3. Formare sottospazi a partire da due sottospazi

LEMMA 3.1. Sia V un *K-spazio vettoriale*, siano $U, W \subseteq V$ dei *sottospazi vettoriali* di V.
Se voglio avere un *nuovo* sottospazio vettoriale a partire da U, W allora posso prendere la loro *intersezione* (Operazioni con gli Insiemi). Infatti

$$U \cap W$$

è *sottospazio vettoriale* di V.
DIMOSTRAZIONE.
Verifichiamo che $U \cap W$ sia *sottospazio vettoriale di* V, quindi che soddisfa le *tre proprietà* elencate in **DEF.1.**.

1. $0 \in (U \cap W)$ è vera perché *per ipotesi* abbiamo che 0 appartiene sia ad U che W, in quanto sono dei sottospazi vettoriali; quindi è un *elemento* comune di questi due insiemi.
2. Possiamo verificare la *chiusura della somma*: infatti

$$\begin{gathered}\forall v_1, v_2 \in (U \cap W) \implies v_1, v_2 \in U; v_1, v_2 \in W \\ \text{per ipotesi} \implies v_1 + v_2 \in U; v_1 + v_2 \in W \\ \implies (v_1 + v_2) \in (U \cap W)\end{gathered}$$

3. Ora verifichiamo la *chiusura dello scalamento* con lo stesso procedimento:

$$\begin{aligned} \forall \lambda \in K, \forall v \in (U \cap W) &\implies v \in U; v \in W \\ \text{per ipotesi} &\implies \lambda v \in U; \lambda v \in W \qquad \blacksquare \\ &\implies \lambda v \in (U \cap W) \end{aligned}$$

La dimostrazione è conclusa.

Il vuoto

OSS 3.1. Purtroppo questa *non* vale per l'unione di due sottospazi vettoriali.
Infatti, avendo V uno spazio vettoriale e U, W i suoi sottospazi vettoriali, *non* è sempre garantito che

$$U \cup W$$

sia anch'esso uno sottospazio vettoriale. Qui la simmetria si spezza.
DIMOSTRAZIONE. Per *"dimostrare"* questa osservazione troviamo alcuni esempi specifici di sottospazi vettoriali per cui non vale *almeno* una delle tre proprietà dello sottospazio vettoriale: scopriremo che non varrà la chiusura della somma per un caso specifico.
ESERCIZIO: Mostrare che le proprietà 1, 3 valgono comunque
Considero $U, W \subseteq \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} U &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x - y = 0\} \\ W &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - 2y = 0\} \end{aligned}$$

Per ora mostriamo *algebricamente* che non vale la chiusura della somma per $U \cup W$.

1. Scegliamo alcuni elementi di U, W;

$$(1, 2) \in U; (2, 1) \in W$$

2. Ora li sommiamo

$$(1, 2) + (2, 1) = (3, 3)$$

3. Verifichiamo che

$$(3, 3) \notin (U \cup W)$$

Infatti

$$2(3) - 3 \neq 0; 3 - 3(3) \neq 0$$

Volendo si può vedere la situazione graficamente, osservando che U e W *corrispondono* a rette passanti per l'origine e vedendo poi che *vettore libero* $(3,3)$ dato dalla somma di *due vettori* non appartiene alla nessuna delle due rette.
[GRAFICO DA FARE]

Sottospazio somma

Allora vogliamo trovare un *"surrogato"* per questo vuoto formato dal fatto che $U \cup W$ non sia uno sottospazio.
DEF 3.1. (*Sottospazio Somma*)
Sia V un K-spazio vettoriale, siano U, W due sottospazi vettoriali di V.
Definiamo dunque il **sottospazio vettoriale somma di** U, V come

$$U + W := \{u + w : u \in U, w \in W\}$$

LEMMA 3.2. $U + W$ è sottospazio vettoriale di V.
DIMOSTRAZIONE. *Esercizio lasciato a noi*

1. *L'appartenenza dell'elemento neutro*
   Verifichiamo che

   $$0 \in (U + W)$$

   è vera: infatti basta scegliere $u = 0, w = 0 \implies 0 + 0 = 0.$
2. *Chiusura della somma*

   $$\begin{aligned} v_1, v_2 \in (U+W) \implies & v_1 = u_1 + w_1, v_2 = u_2 + w_2 \\ v_1 + v_2 &= v_1 + v_2 + w_1 + w_2 \\ &= (v_1 + v_2) + (w_1 + w_2) \\ &= v + w \\ v_1 + v_2 &\in (U + W) \end{aligned}$$

3. *Chiusura dello scalamento*

   $$\begin{aligned} &\lambda \in K; v \in (U+W) \\ &v \in (U+W) \implies v = u + w; u \in U, w \in W \\ &\lambda \cdot v = \lambda u + \lambda w \\ &\text{per ipotesi } \lambda u \in U, \lambda w \in W \\ &\implies \lambda \cdot v \in (U+W) \end{aligned}$$

■

LEMMA 3.3. Con la notazione precisa valgono che

$$U \subseteq (U + W) \wedge W \subseteq (U + W)$$

DIMOSTRAZIONE. Mostrare la prima significa mostrare che per ogni elemento u di U vale che u appartiene anche a $U+W$. Analogamente lo stesso discorso vale per w elemento di W.

$$u \in (U+W) \implies u = u + w \overset{w=0}{\implies} u = u \implies u \in U$$

COROLLARIO 3.1. Vale che

$$(U \cup W) \subseteq (U+W)$$

inoltre si può dimostrare che $U+W$ è il *più piccolo* sottospazio vettoriale di V che contiene $U \cup W$.
DIMOSTRAZIONE. *Esercizio facoltativo*

C. Combinazione Lineare

Combinazione Lineare

Definizione di combinazione lineare di un K-spazio vettoriale; definizione di span; definizione di sistema di generatori per uno sottospazio vettoriale.

---

1. Definizione di Combinazione Lineare

DEF 1.1. (*Combinazione lineare*)
Sia V un *K-spazio vettoriale* (Spazi Vettoriali, **DEF 1.**), siano

$$\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n \in V$$

degli elementi di V. Alternativamente possiamo pensare questi elementi come il sottoinsieme $S \subseteq V$.
Allora definiamo **combinazione lineare** un qualsiasi *vettore* (Spazi Vettoriali, **DEF 1.1.**) della forma

$$\lambda_1 \mathrm{v}_1 + \ldots + \lambda_n \mathrm{v}_n$$

dove $\lambda_i \in K, \forall i \in \{1, \ldots, n\}$.

ESEMPIO 1.1. In $\mathbb{Q}^2$ considero

$$q_1 = (1, 0); q_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}); q_3 = (1, 2)$$

Una *combinazione lineare* di $S = (q_1, q_2, q_3)$ può essere ad esempio

$$\frac{3}{4}q_1 - \frac{12}{7}q_2 + 15q_3$$

2. L'insieme delle combinazioni lineari span

Ora voglio considerare l'*insieme* delle combinazioni lineari.
DEF 2.1. *Span di S*
Sia V un K-spazio vettoriale e sia $S = (\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n)$.
Allora chiamo lo **span** di S o di $\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n$ come l'**insieme di tutte le combinazioni lineari di tale sottoinsieme** S:

$$\mathrm{span}(\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n) := \{\lambda_1 \mathrm{v}_1 + \ldots + \lambda_n \mathrm{v}_n : \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K\}$$

oppure in forma compatta

$$\mathrm{span}(S) := \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathrm{v}_i : i \in \{1, \ldots, n\}, \lambda_i \in K\}$$

LEMMA 2.1. Lo span di un qualunque $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ è *sottospazio vettoriale* di V (Sottospazi Vettoriali).
DIMOSTRAZIONE. Verifichiamo le tre proprietà fondamentali dello sottospazio vettoriale.

1. *L'appartenenza dell'elemento 0*
   Verifichiamo che 0 può essere espresso come una *combinazione lineare* ponendo tutti i *coefficienti* $\lambda_i = 0$.
2. *Chiusura della somma*
   Siano $u, w \in \mathrm{span}\,(v_1, \ldots, v_n)$. Allora per ipotesi abbiamo

   $$u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \mid w = \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i$$

   Allora sommandoli abbiamo

   $$u + w = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \mu_i) v_i \implies u + w \text{ è combinazione lineare}$$

3. *Chiusura dello scalamento*
   Sia $\lambda \in K$, $w \in \mathrm{span}\,(v_1, \ldots, v_n)$. Allora

$$\lambda \cdot w = \lambda \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i = \sum_{i=1}^{n} (\lambda \mu_i) v_i \in \operatorname{span}(v_1, \dots, v_n) \blacksquare$$

3. Sistema di generatori

DEF 3.1. Sia V un K-spazio vettoriale, $U \subseteq V$ un qualunque sottospazio vettoriale di V.
Un *insieme di elementi* $\{u_1, \dots, u_n\} \subseteq U$ si dice un **sistema di generatori di/per** U se *ogni vettore* $u \in U$ è una *combinazione lineare dell'insieme di elementi stesso*; equivalentemente

$$\{u_1, \dots, u_n\} \text{ è sistema di generatori } \iff U = \operatorname{span}(\{u_1, \dots, u_n\})$$

ovvero se *ogni* vettore di U è una combinazione lineare di quell'insieme di elementi, allora quell'insieme è un *sistema di generatori*.

ESEMPIO 3.1. Consideriamo $V = \mathbb{R}^2$, $U = \mathbb{R}^2$ (ovvero $V = U$) e i vettori

$$u_1 = (1, 0) \mid u_2 = (0, 1)$$

Vale che $\{u_1, u_2\}$ è un *sistema di generatori* per U.
Infatti dato un vettore $(a, b) \in U$ abbiamo $(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1) = au_1 + bu_2$.
Notiamo inoltre che se definiamo

$$u_3 = (1, 1)$$

allora anche $\{u_1, u_2, u_3\}$ è un *sistema di generatori per* U.

OSS 3.1. Osserviamo che se $\{u_1, \dots, u_n\}$ è un *sistema di generatori per* U allora

$$\forall u \in U, \{u_1, \dots, u_n, u\}$$

anche questo è un *sistema di generatori* per U.
In parole, dato un *sistema di generatori* per un certo sottoinsieme allora possiamo aggiungerci qualsiasi elemento del sottoinsieme, dandoci comunque un altro *sistema di generatori* per lo stesso sottoinsieme.
Da questo discende che la definizione di *sistema di generatori* presenta in sé molta flessibilità e variabilità; tuttavia secondo una specie di *"legge meta-matematica"*, troppa flessibilità è un segno di un ente matematico meno forte.
Infatti introdurremmo un po' di *"rigidità"* con le *basi* (Base).

D. Dipendenza e Indipendenza Lineare

Dipendenza e Indipendenza Lineare

Definizione di dipendenza o indipendenza lineare per degli elementi di uno spazio vettoriale.

---

1. Dipendenza lineare

DEF 1.1. (*Vettori linearmente dipendenti*)
Sia V un K-spazio vettoriale, siano $v_1, \dots, v_n$ elementi (o vettori) di V (Spazi Vettoriali).
Allora gli *elementi/vettori* $v_1, \dots, v_n$ si dicono **linearmente dipendenti** se possiamo scrivere il vettore nullo $0 \in V$ come la *combinazione lineare* (Combinazione Lineare) di $v_1, \dots, v_n$ in cui *non* tutti i coefficienti λ_i in K sono nulli. Ovvero

$$0 = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n : \exists \lambda_i \neq 0$$

PROP 1.1. Sia V un K-spazio vettoriale, siano $v_1, \dots, v_n \in V$. Allora questi *vettori* $v_1, \dots, v_n$ sono *linearmente dipendenti* se e solo se *uno di essi può essere scritto come combinazione lineare di altri vettori*.
Equivalentemente, se e solo se

$$\exists j \in \{1, \dots, n\} : v_j \in \operatorname{span}(v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n)$$

NOTAZIONE. Per poter compattare la scrittura sopra si può scrivere

$$(v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n)$$

come

$$(v_1, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_n)$$

e il *"cappello"* su v_j vuol dire che lo escludiamo dalla n-upla.
DIMOSTRAZIONE. Dimostro che vale l'implicazione da ambi i lati.

" $\implies$ ": Suppongo che $v_1, \dots, v_n$ siano *linearmente* dipendenti. Allora

$$\begin{aligned}\exists\lambda_i \neq 0, i \in \{1, \dots, n\} : \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0 \\ &\implies -\lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \\ &\implies v_i = \frac{(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n)}{-\lambda_i} \\ &\implies v_i = -\frac{\lambda_1}{\lambda_i} v_1 + \dots + (-\frac{\lambda_n}{\lambda_i} v_n) \\ &\implies v_i \in \text{span}(v_1, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_n)\end{aligned}$$

" $\impliedby$ ": Suppongo che $\exists i \in \{1, \dots, n\} : v_i \in \text{span}(v_1, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_n)$. Allora

$$\begin{aligned}v_i &= \mu_1 v_1 + \dots + \mu_{i-1} v_{i-1} + \mu_{i+1} v_{i+1} + \dots + \mu_n v_n \\ 0 &= \mu_1 v_1 + \dots + \mu_{i-1} v_{i-1} - v_i + \mu_{i+1} v_{i+1} + \dots + \mu_n v_n \blacksquare \\ &\implies \exists\lambda_i = -1 \neq 0 : \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n = 0\end{aligned}$$

2. Indipendenza lineare

Ora siamo pronti per definire l'*indipendenza lineare*.
DEF 2.1. (*Indipendenza lineare*)
Sia V un K-spazio vettoriale, $v_1, \dots, v_n$ dei vettori di V.
Dichiamo che questi vettori $v_1, \dots, v_n$ sono **linearmente indipendenti** se *non* sono *linearmente dipendenti*.
Equivalentemente, $v_1, \dots, v_n$ sono *linearmente indipendenti* se e solo se *l'unico modo di scrivere* 0 *è quello di porre tutti i coefficienti* $\lambda_i = 0$
Alternativamente,

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$$

ESEMPIO 2.1. Considero in $V = \mathbb{R}^2$ i seguenti vettori:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vale che v_1, v_2, v_3 sono *linearmente dipendenti* dal momento che

$$v_3 = 1v_1 + 1v_2$$

Invece vale che v_1, v_2 sono *linearmente indipendenti* in quanto se suppongo

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

allora vale che

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

In parole l'*unico* modo di scrivere il *vettore nullo* come la *combinazione lineare di* v_1, v_2 è quello di porre $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

E. Base

Base

Definizione di base.

---

1. Definizione di base

DEF 1.1. Sia V un *K-spazio vettoriale* (Spazi Vettoriali, **DEF 1.**) e sia $U \subseteq V$ un *sottospazio vettoriale di V* (Sottospazi Vettoriali, **DEF 1.**).
Allora una **base di** U è un *insieme* $\{u_1, \dots, u_n\}$ formato da *vettori* di U tali che:

- $\{u_1, \dots, u_n\}$ è un *sistema di generatori per* U
- $u_1, \dots, u_n$ sono *linearmente indipendenti*