

Funzioni Reali - Sommario

Funzioni di variabile reale; funzioni di potenza e di radice; funzione del valore assoluto; funzioni trigonometriche.

A. Funzioni di potenza, radice e valore assoluto

Funzioni di potenza, radice e valore assoluto

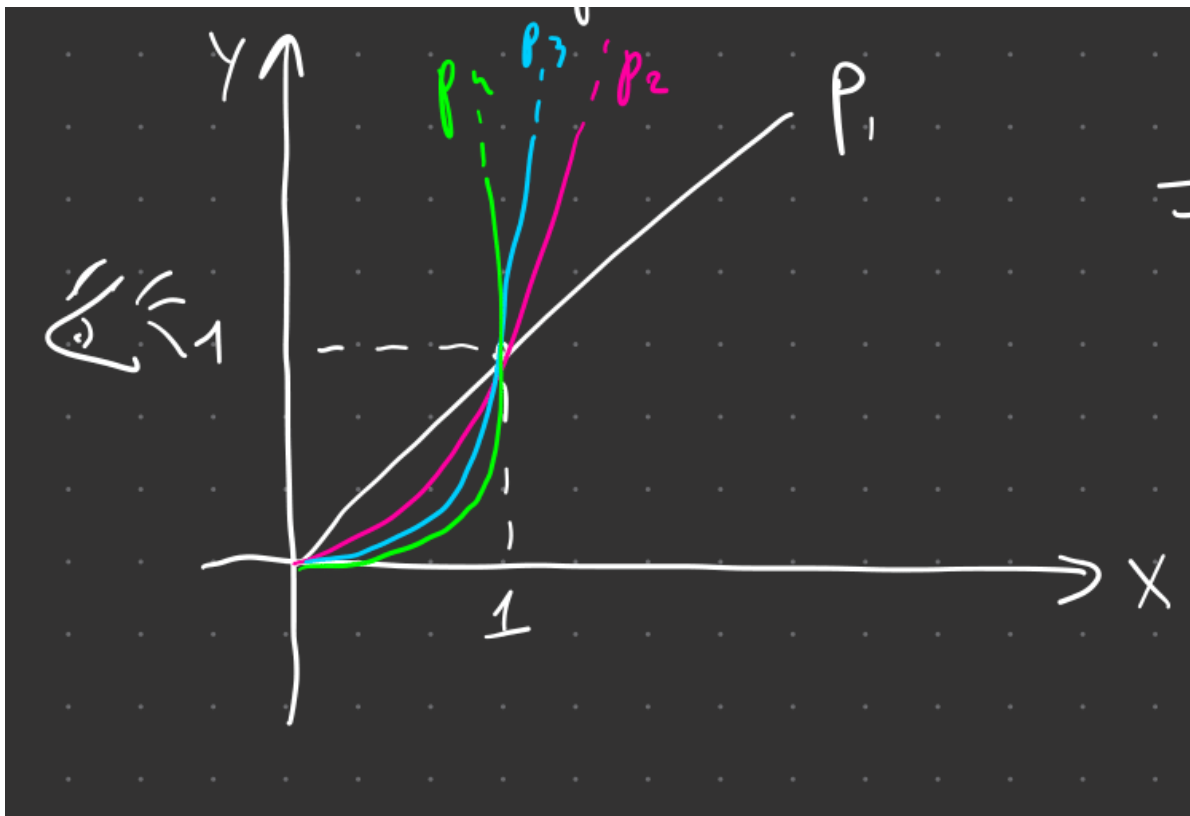
Definizioni di funzione potenza p_n e radice p_n^{-1} . Definizione del valore assoluto $|\cdot|$; disuguaglianza triangolare. Alcuni esercizi generali.

1. Funzione potenza

DEF 1.1. Sia $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$; definiamo quindi la **funzione potenza n -esima** come

$$p_n : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty); x \mapsto p_n(x) = x^n$$

Si riporta un grafico di alcune funzioni potenza p_n .



OSS 1.1. Si nota che

$$\begin{aligned} \forall x \in [0, 1) : p_1(x) &> p_2(x) > \dots > p_n(x) \\ \forall x \in (1, +\infty) : p_1(x) &< p_2(x) < \dots < p_n(x) \end{aligned}$$

OSS 1.2. Si vede dal grafico che la funzione è *strettamente crescente*, ovvero se prendiamo $x_1, x_2 \in E$ (dominio) ove $x_2 > x_1$, allora sicuramente abbiamo

$$p_n(x_2) > p_n(x_1)$$

DIMOSTRAZIONE.

Prendiamo ad esempio p_2 ; abbiamo innanzitutto

$$0 \leq x_1 < x_2$$

allora li moltiplichiamo per x_1 e x_2 , ottenendo

$$\begin{cases} x_1 < x_2 x_1 \\ x_1 x_2 < x_2^2 \end{cases}$$

quindi

$$0 \leq x_1^2 < x_2^2 \iff p_2(x_1) < p_2(x_2), \forall x_1, x_2$$

Notare che questa dimostra che è vera solo per p_2 ; sarebbe da dimostrare che è vera anche per p_n (forse si va per induzione? boh, vedrò o chiederò al prof qualcosa)

OSS 1.3. Notiamo che la *funzione potenza* p_n (o x^n) è *biiettiva* (Funzioni, DEF 3.3.), ovvero è sia *suriettiva* che *iniettiva*.

DIMOSTRAZIONE.

Per dimostrare che è iniettiva basta riosservare quanto visto in **OSS 1.2.**; ovvero che la funzione è strettamente crescente.

Dopodiché la funzione è anche suriettiva in quanto una conseguenza dell'*assioma di separazione S*).

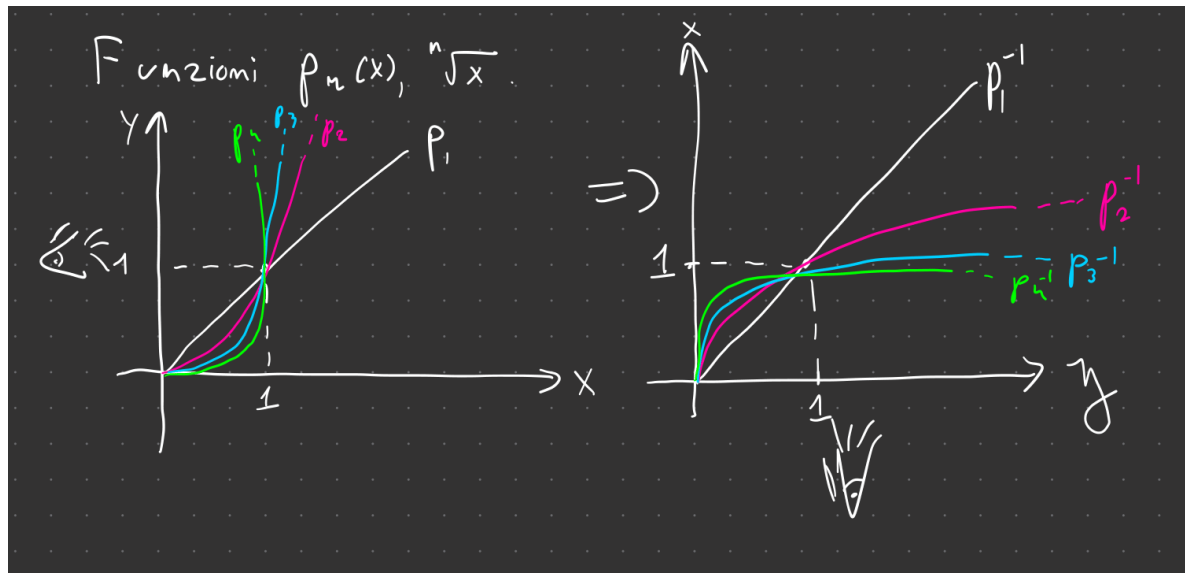
2. Funzione radice

OSS 2.1. Dall'**OSS 1.3.** abbiamo notato che la *funzione potenza* $p_n(x)$ è *biiettiva*; pertanto per il *teorema dell'esistenza della funzione inversa* (Funzioni, **TEOREMA 1.**) esiste una funzione inversa che definiremo.

DEF 2.1. Definiamo la **funzione radice n -esima** p_n^{-1}

$$p_n^{-1} : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty); x^n \mapsto x$$

Graficamente questo equivale a "*scambiare le assi*" del grafico della funzione, oppure di "*cambiare la prospettiva da cui si guarda il grafico*", ovvero

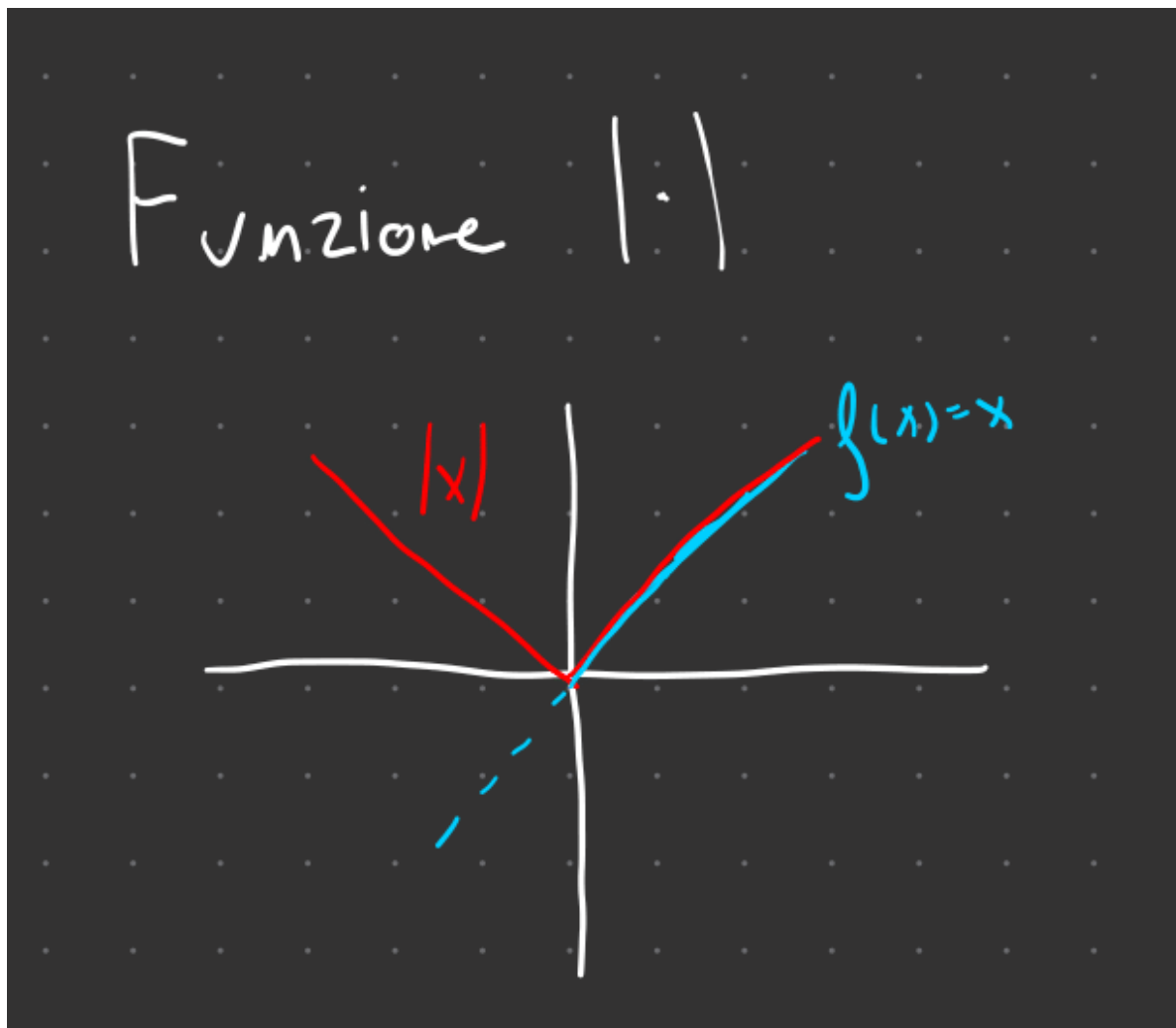


3. Valore assoluto

DEF 3.1. Sia il **valore assoluto** una *funzione*

$$|\cdot| : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; x \mapsto |x| = \begin{cases} x : x \geq 0 \\ -x : x < 0 \end{cases}$$

Ad esempio, il grafico di $|x|$ si rappresenta nel modo seguente:



OSS 3.1.1. Notare che

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

3.1. Proprietà, disuguaglianza triangolare

OSS 3.1.1. Si può osservare alcune proprietà del *valore assoluto*, ovvero:

1. Sia $a \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, allora

$$|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$$

DIMOSTRAZIONE.

Posso considerare due casi, ovvero

$x \geq 0$: abbiamo quindi $|x| = x$, pertanto

$$\begin{cases} |x| \leq a \implies x \leq a \\ x \geq 0 \implies x \geq -a \end{cases} \longrightarrow -a \leq x \leq a$$

$x \leq 0$: abbiamo quindi $|x| = -x$ e il discorso è analogo:

$$\begin{cases} |x| \leq a \implies -x \leq a \iff x \geq -a \\ x \leq 0 \implies x \leq a \end{cases} \longrightarrow -a \leq x \leq a$$

■

2. Prendendo le stesse premesse di prima, abbiamo

$$|x| \geq a \iff x \leq -a \wedge x \geq a$$

3. LA DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE.

Siano $x, y \in \mathbb{R}$, allora abbiamo

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

DIMOSTRAZIONE.

Se abbiamo da un lato

$$-|x| \leq x \leq |x|$$

e

$$-|y| \leq y \leq |y|$$

allora sommandoli si avrebbe

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$$

che per la prima proprietà equivale a dire

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

4. Esercizi misti

Presentiamo degli esercizi, ovvero *equazioni* ([Equazioni e soluzione](#)) o *diseguazioni* contenenti queste funzioni appena presentate.

ESERCIZIO 4.1. Determinare

$$3x + 5 = 0$$

ESERCIZIO 4.2. Disegnare il grafico di

$$f(x) = 3x + 5$$

con $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

ESERCIZIO 4.3. Risolvere

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

ESERCIZIO 4.4. Disegnare

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x^2 - 2x - 3$$

ESERCIZIO 4.5. Risolvere

$$\frac{x^2 - 2x + 3}{x - 3} \geq 0$$

ESERCIZIO 4.6. Risolvere

$$\sqrt{x + 1} \geq 3x + 2$$

ESERCIZIO 4.8. Risolvere

$$\frac{x - 3}{2x + 1} > \frac{x - 1}{x + 1}$$

ESERCIZIO 4.8. Risolvere

$$\sqrt{6x + 1} \geq 3 - 2x$$

ESERCIZIO 4.9. Risolvere

$$|x + 4| < 8$$

ESERCIZIO 4.10. Risolvere

$$\left| \frac{2x + 1}{x^2 - 4} \right| \geq 1$$

ESERCIZIO 4.11. Risolvere

$$|x + 1| \geq |x - 1|$$

B. Funzioni trigonometriche

Funzioni trigonometriche

Definizione delle funzioni trigonometriche sin, cos; le proprietà di queste funzioni; alcuni valori noti; funzioni inverse arcsin, arccos. Forme di somma e sottrazione di sin e cos. Funzioni tan, arctan.

0. Preambolo

Per ora non abbiamo ancora gli strumenti per poter *rigorosamente* definire le funzioni di *seno* e *coseno*, tuttavia possiamo definirle per ora in questo modo.

Però prima di tutto bisogna fare delle considerazioni.

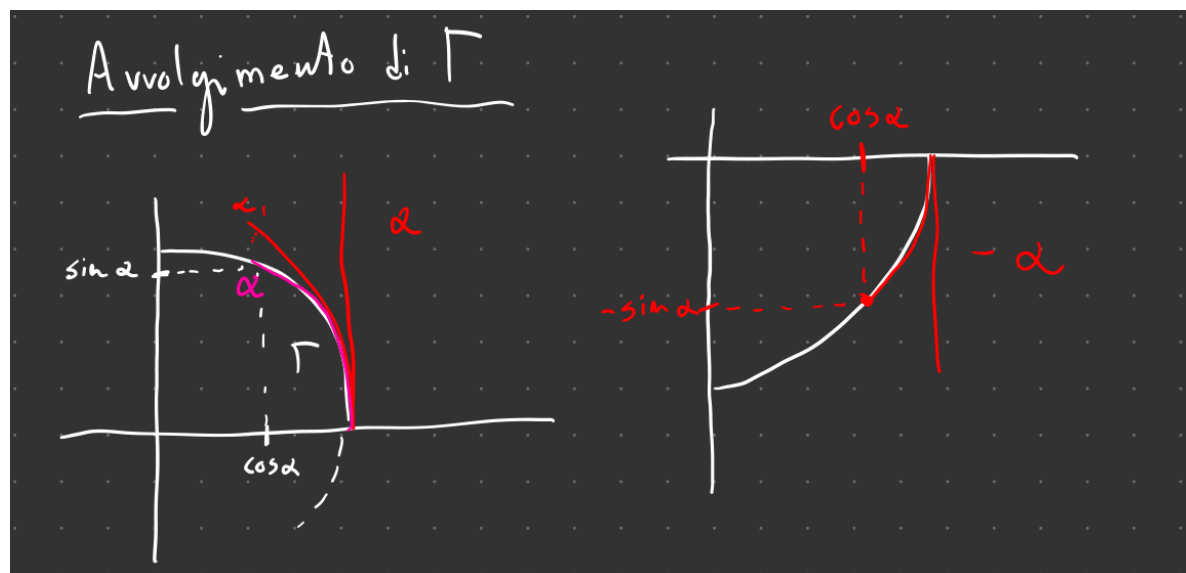
Ovvero prendo il *piano cartesiano* (**ESEMPIO 2.1.**) e considero la *circonferenza unitaria* Γ :

$$\Gamma := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

e considero l'asse r_1 concorde con l'asse y e che "*appoggiamo*" in $(1, 0)$.

Quindi prendo un punto qualsiasi $\alpha \in \mathbb{R}$ dell'asse, lo "*avvolgo*" su Γ , poi la retta si avvicina man mano all'arco, infine il punto "*finisce*" su Γ e ottengo il punto $(c(\alpha), s(\alpha))$

Graficamente questo processo rappresenta il seguente.



OSS 0.1.

Si osserva che in questo processo di "*avvolgimento*" si suppone che la lunghezza del segmento non si cambia mai, in quanto viene solo "*piegato*"; quindi se il segmento r_1 è lungo α , allora l'*arco* è lungo α , che non è banale da misurare. Infatti si deve fare un *procedimento di approssimazione* con segmenti. Questo è il problema di questa definizione *non-rigorosa*.

1. Definizione di seno e coseno

Considerando tutto detto sopra, consideriamo la funzione

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \Gamma \\ \alpha &\mapsto (c(\alpha), s(\alpha)) \end{aligned}$$

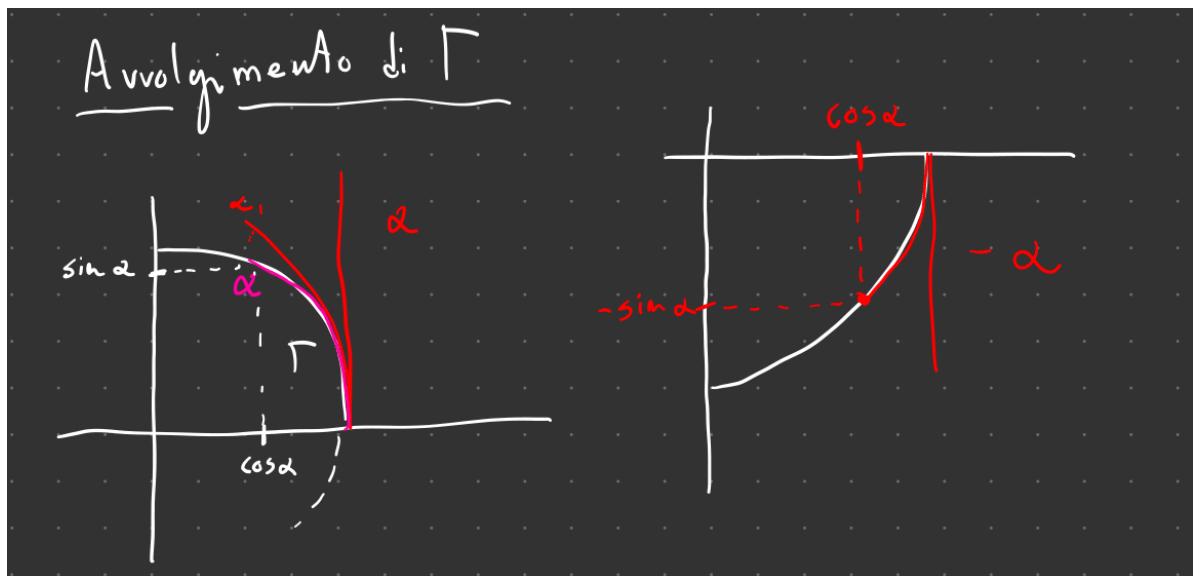
Dove Γ varia nell'intervallo $[0, 1]$.

Così otteniamo le seguenti funzioni:

DEF 1.

$$\begin{aligned} \cos : \mathbb{R} &\longrightarrow [-1, 1] \\ \alpha &\mapsto \cos(\alpha) \in \Gamma \\ \sin : \mathbb{R} &\longrightarrow [-1, 1] \\ \alpha &\mapsto \sin(\alpha) \in \Gamma \end{aligned}$$

Dove $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ rappresenta la posizione del punto dell'*arco piegato* e α rappresenta la *lunghezza dell'arco*. Se α è negativa, allora si orienta l'asso in basso. Graficamente,



2. Proprietà

PROP 2.1. Diamo un nome alla *lunghezza della semi-circonferenza unitaria*,

$$(\pi \in \mathbb{R}, \pi \sim 3.14\dots)$$

quindi la *circonferenza* è lunga 2π .

PROP 2.2. Dato un $\alpha \in \mathbb{R}$, si verifica che

$$(\cos \alpha)^2 + (\sin \alpha)^2 = 1$$

in quanto entrambi i punti $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ appartengono alla circonferenza Γ ; infatti $x^2 + y^2 = 1$ è la proprietà caratterizzante di Γ .

PROP 2.3. Le funzioni \cos , \sin sono *periodiche*, ovvero che prendendo un $k \in \mathbb{Z}$,

- i. $\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos \alpha$
- ii. $\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin \alpha$

Questo si verifica in quanto 2π rappresenta un giro intero; quindi prendendo un punto α e facendoci un giro intero, arrivo allo stesso punto.

PROP 2.4. Le funzioni \cos , \sin sono rispettivamente delle funzioni *pari* e *dispari*, ovvero che si verificano le seguenti.

$$\begin{aligned}\cos(-\alpha) &= \cos(\alpha) \\ \sin(-\alpha) &= -\sin(\alpha)\end{aligned}$$

Questo in quanto, come detto prima in **DEF 1.**, la "*lunghezza negativa*" rappresenterebbe la stessa lunghezza orientata verso il basso. Quindi graficamente lo si può evincere chiaramente.

PROP 2.5. Se al posto di aggiungere un *giro intero* aggiungo un *mezzo giro*, ovvero π , ottengo il suo opposto:

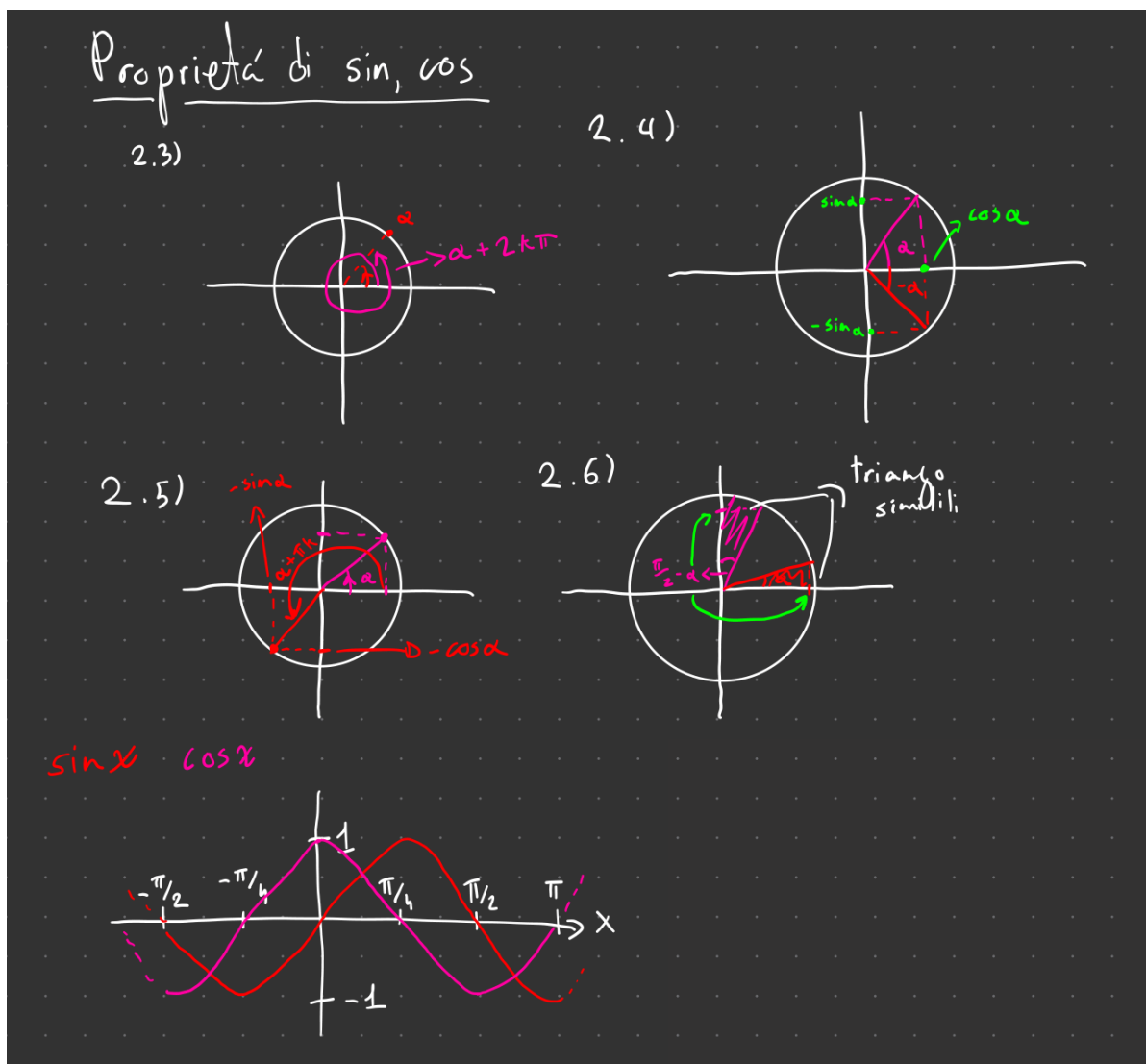
$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \pi) &= -\cos(\alpha) \\ \sin(\alpha + \pi) &= -\sin(\alpha)\end{aligned}$$

PROP 2.6. Ricorrendoci alla definizione etimologica del *coseno*, ovvero "*complementi sinus*", notiamo che sottraendo *l'angolo complementare* $\frac{\pi}{2}$ da α ottengo \sin . Ovvero

$$\forall \alpha, \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\alpha)$$

2.1. Riassunto grafico

Graficamente si può riassumere (quasi) tutte le proprietà nel seguente grafico (con i grafici di \cos , \sin stessi).



2.2. Alcuni valori noti

Dai risultati della *geometria elementare* sappiamo i seguenti valori noti del seno e del coseno:

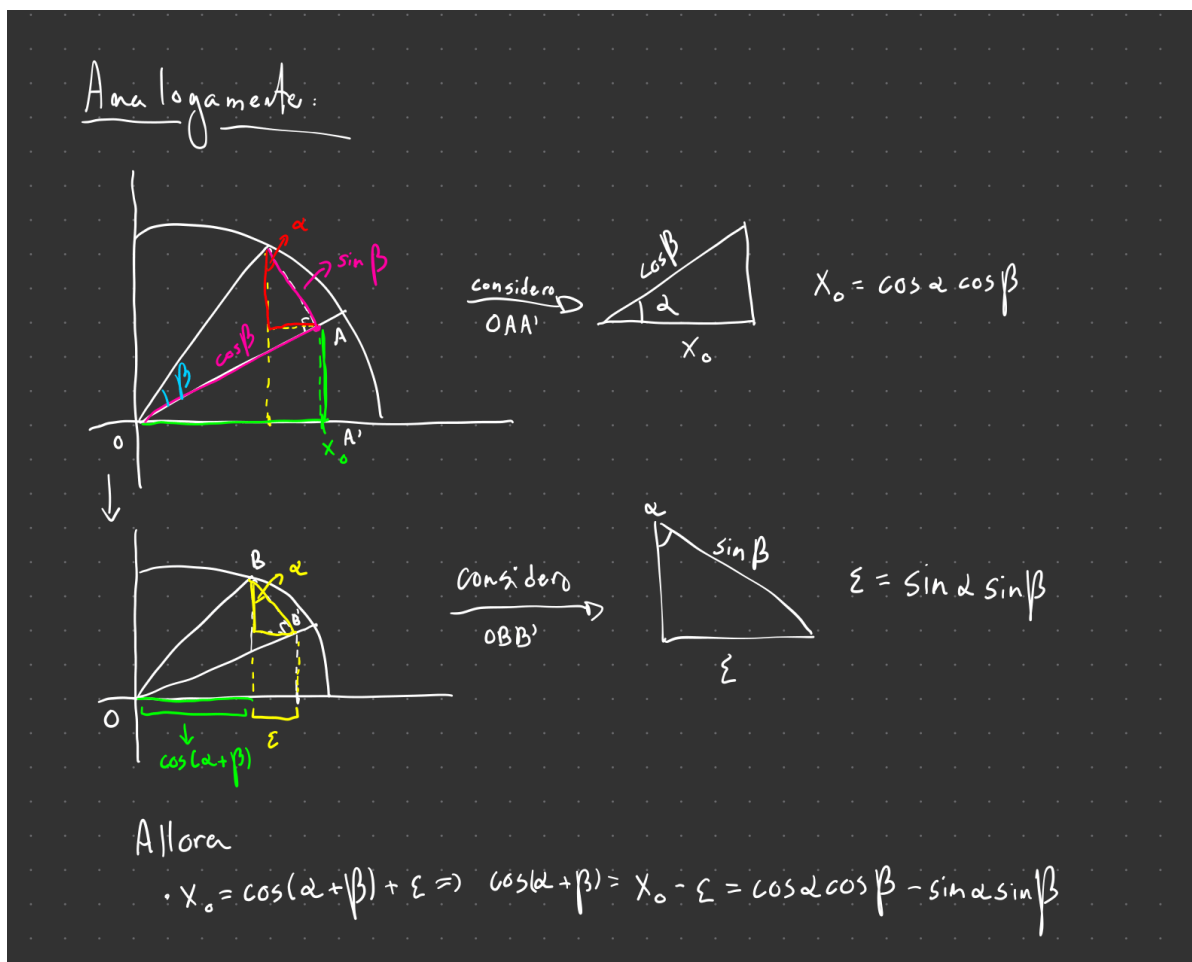
α	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$
0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	0	1

che verranno dati per noti.

2.3. Forme di somma e di sottrazione

Consideriamo due angoli: $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Quindi disegniamo il seguente grafico:



Da cui si evince che

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

Queste formule saranno molto importanti per le formule di *prostaferesi* e di *Werner*.

2.4. Formule di prostaferesi

Recuperato dalla lezione del 26.10.2023

Voglio calcolare $\sin a + \sin b$. Allora riscrivo le *forme di sottrazione e di addizione*;

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha$$

e li sommo:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha - \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha \\ &= 2 \sin \beta \cos \alpha \end{aligned}$$

e ponendo $\alpha + \beta = a$, $\alpha - \beta = b$, (dunque $a + b = 2\alpha$ e $a - b = 2\beta$) ottengo

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

Analogo il procedimento per $\cos \alpha + \cos \beta$.

3. Definizione di arcocoseno e arcoseno

OSS 3.1. Considero la funzione \cos , però con una restrizione al suo *dominio* e *codominio*.

$$\begin{aligned} \cos_{[0,\pi]} : [0, \pi] &\longrightarrow [-1, 1] \\ x &\mapsto \cos(x) \end{aligned}$$

Questa funzione allora è *biiettiva* (**Funzioni, DEF 3.3.**); ovvero p sia *suriettiva* che *iniettiva* e *strettamente decrescente*.

1. Questa è *iniettiva* in quanto considerando tutti gli $x \in [0, \pi]$ si tocca un *solo* punto ad ogni x considerato. Inoltre è *strettamente decrescente* in quanto il valore parte da $\cos 0 = 1$ e finisce con $\cos \pi = -1$.
2. Per lo stesso motivo di prima \cos è *suriettiva*.

DEF 3.1.

Pertanto secondo il *teorema dell'esistenza della funzione inversa* (**Funzioni, TEOREMA 1.**) la funzione $\cos_{[0,\pi]}$ ha una sua inversa che chiameremo **l'arcocoseno**;

$$\arccos := \cos_{[0,\pi]}$$

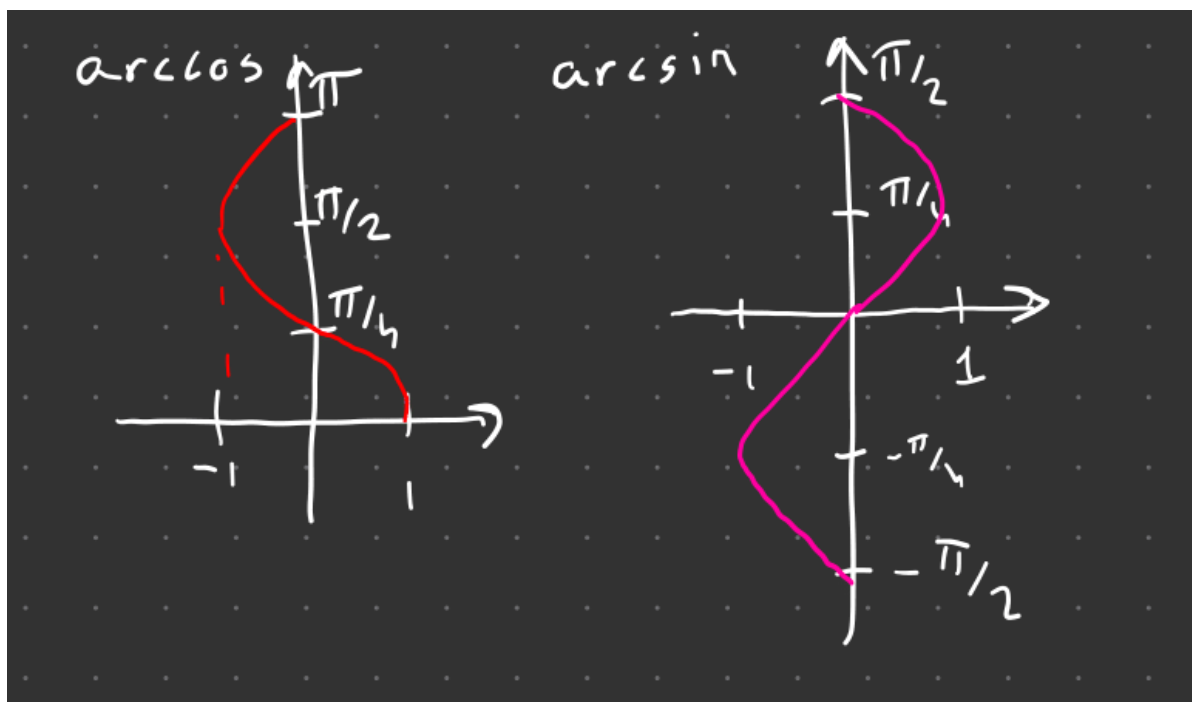
DEF 3.2.

Analogamente si definisce \arcsin considerando però la restrizione di $\sin_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$.

Quindi

$$\arcsin := \sin_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$$

Ecco alcuni grafici delle funzioni \arccos , \arcsin .



4. Funzione tangente e arcotangente

DEF 4.1. Definiamo la funzione **tangente** $\tan \alpha$ periodica in come

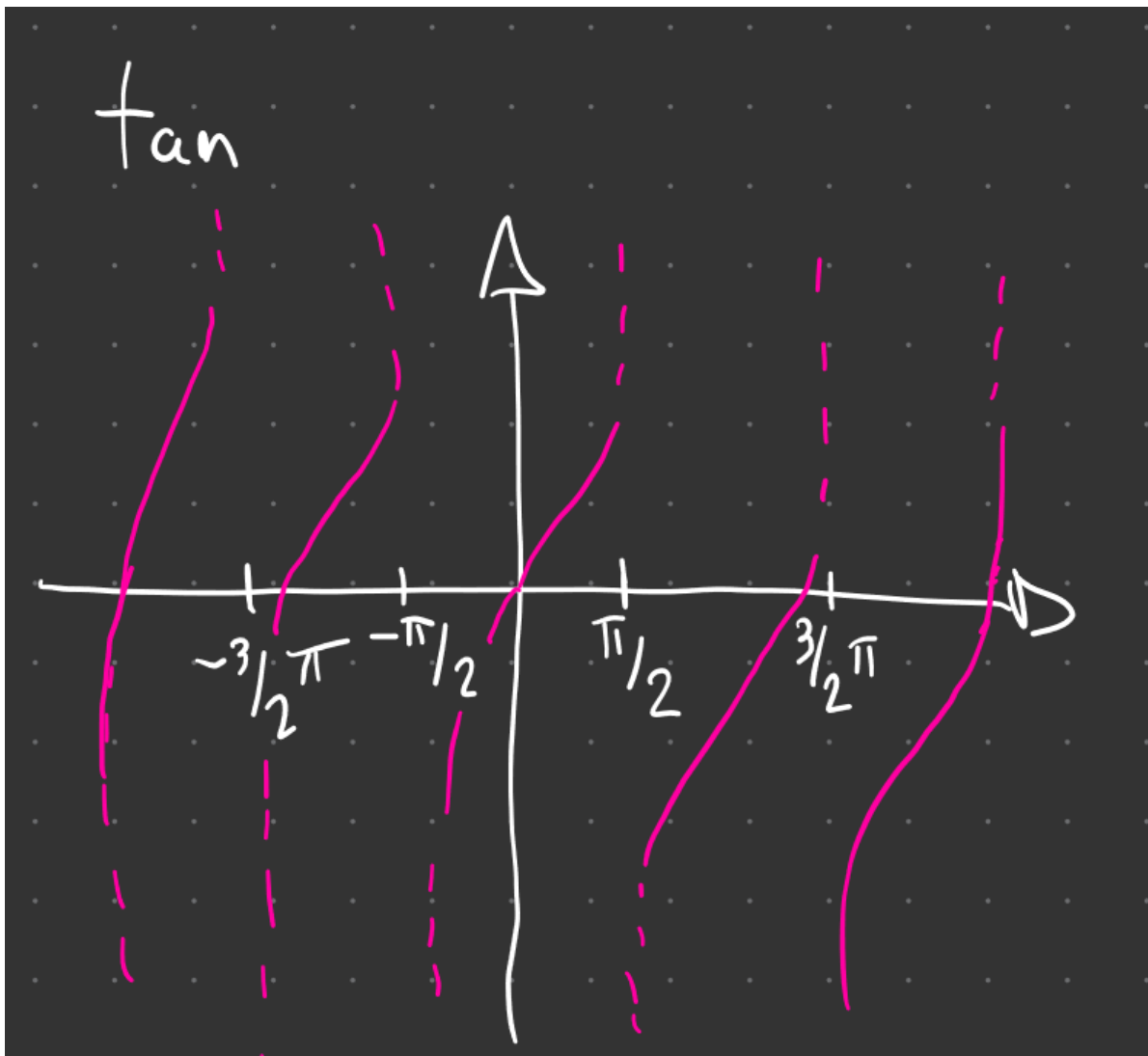
$$\tan : \mathbb{R} \setminus \left[\frac{\pi}{2} \right]_{\equiv \pi} \longrightarrow \mathbb{R}$$

come il **rapporto** tra la funzione **seno** e **coseno**, ovvero

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

Notiamo che le funzioni \sin, \cos sono periodiche di 2π ; quindi prendendo il rapporto abbiamo che \tan è periodica di π .

Osservando i **limiti** ([Esempi di Limiti di Funzione](#), **ESEMPIO 5.3.**) di questa funzione possiamo disegnare il seguente grafico:



DEF 4.2. Se ho la restrizione della *tangente* in $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ allora ho:

$$\tan|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})} : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \longrightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \tan x$$

e questa diventa *biiettiva*, quindi invertibile, posso definire l'**arcotangente** la sua funzione inversa:

$$\arctan := (\tan|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})})^{-1}$$

arctan

