L'APOCALISSE DI GIOVANNI

Un manuale di sopravvivenza per Analisi Matematica I

DINO MENG, 2024

Abstract - Che cosa è questo?

Abstract

Questa *dispensa* è stata creata come risultato delle *lezioni* di Analisi Matematica I con *D. del Santo* in qualità di docente; il fine di questo documento è quello di servire una specie di "database" di informazioni, essenziale ma completa, per l'esame scritto e orale di Analisi Matematica I.

In questa dispensa andremo a vedere la *maggior parte* degli argomenti che abbiamo trattato nelle lezioni, sia quelli teorici che quelli pratici.
Ovviamente alcune parti saranno tagliate, tra cui esercizi proposti dal professore, alcune sezioni non necessarie per lo scritto, et cetera...

Inoltre questa dispensa *non* costituisce un'alternativa alla consultazione del libro di testo oppure alla frequenza delle lezioni, in quanto in queste pagine potrebbero contenere degli errori; semplicemente questo serve come un *punto di riferimento* per i contenuti di studio.

Tutto detto, auguro buona fortuna al lettore!

DINO MENG (2024, Studente UniTs, MiGE, Triennale IADA)

1. Indice dei Contenuti

Capitolo I. Introduzione all'Analisi Matematica

Abstract del Capitolo I

Il primo capitolo servirà come breve e concisa introduzione all'*analisi matematica*: daremo le prime nozioni di funzioni e tutte le sue caratteristiche possibili, tra cui l'iniettività, suriettività, periodicità, et cetera...
Si daranno inoltre delle prime nozioni sulle *successioni*.

Verranno date le conoscenze preliminari (di base) di *logica* e di *insiemistica* come conoscenze pregresse *già note*.

Funzioni (introduzione)

Funzioni

Tutto sulle funzioni: dalla definizione di base alle proprietà specialissime.

---

1. Definizione generale di Funzione

#Definizione

Definizione 1.1. (funzione)

Siano,
A, B due insiemi
f una *"legge"*, ovvero una specie di predicato, oppure una relazione speciale che ad ogni valore di A associa *uno e uno solo* valore di B; cioè se $x \in A$, allora $\exists ! y \in B$ (si legge esiste solo un valore di y in B) è associato a x ($f(x) = y$)
Allora la terna (A, B, f) viene definita come *funzione*.

#Definizione

Definizione 1.2. (dominio, codominio e legge)

L'insieme A si dice il *dominio* della *funzione*.
L'insieme B si dice il *codominio* della *funzione*.
La *"legge"* f è una *regola* che ad ogni elemento x del *dominio* A associa uno e uno solo elemento y del *codominio* B.

#Definizione

Definizione 1.3. (scrittura esplicita di una funzione)

Con la scrittura compatta la terna può essere definita *esplicitamente* anche mediante la seguente notazione.

$$f : a \in A \mapsto b \in B$$

#Esempio

Esempio 1.1.

Siano $A = \{\text{Persone in quest'aula}\}$, $B = \{\text{Comuni italiani}\}$ e $f : x \mapsto \text{comuni di residenza}$; allora si rappresenta il grafico della funzione (A, B, f) nella *figura 1.1.*.

FIGURA 1.1. (*Esempio 1.1.*)

#Definizione

Definizione 1.4. (funzione di reale variabile)

In questo corso si studieranno le cosiddette *funzioni di reale variabile*, ovvero le funzioni $f : A \mapsto B$, con $A, B \subseteq \mathbb{R}$.

#Osservazione

Osservazione 1.1. (la definizione di funzione non dipende solo dalla legge)

Secondo questa definizione di *funzione*, le sue proprietà non cambiano solamente per la legge f, ma anche per gli *insiemi* A, B.

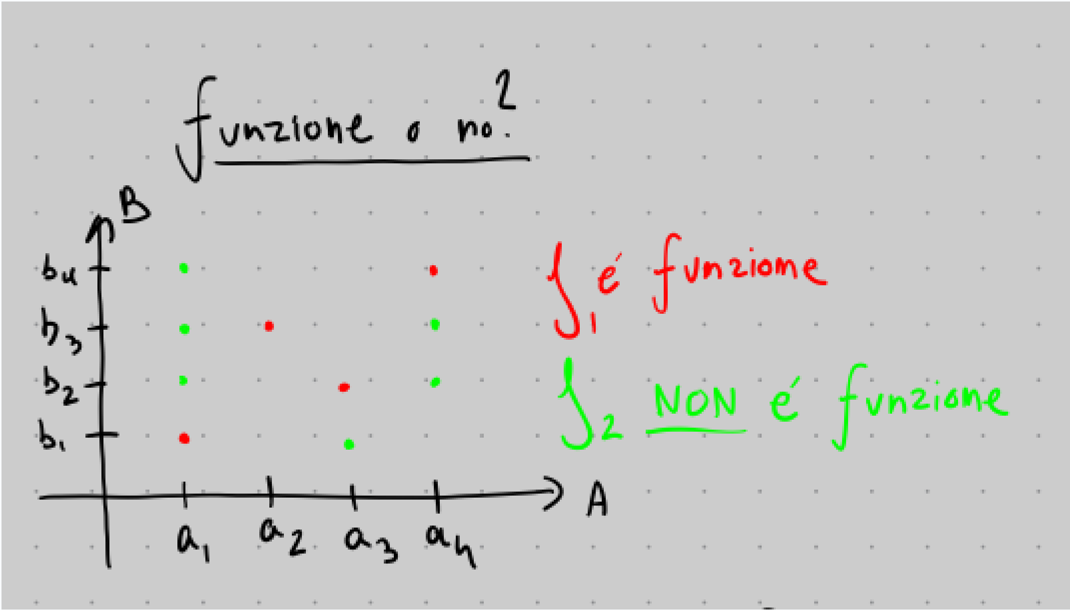
#Osservazione

Osservazione 1.2. (esempio di funzione e di non-funzione)

Si osservi la *figura 1.2.*.

Si nota che la parte *rossa* è definibile come funzione, invece la parte *verde* non lo è, in quanto ci sono più elementi di B associati ad un elemento di A; quindi si parte da un valore a_n e tutti devono avere un solo corrispondente b_n.

FIGURA 1.2. (*Osservazione 1.2.*)



2. L'immagine di una funzione

#Definizione

Definizione 2.1. (valore immagine di un punto di una funzione)

Sia $f : A \mapsto B$ una funzione.
Se $x \in A$, il valore $f(x) \in B$ viene definita come il *valore immagine di* x, una specie di *"proiezione"* del valore del dominio.

#Definizione

Definizione 2.2. (l'insieme immagine di una funzione)

Riprendendo i presupposti di prima, si definisce l'insieme di tutti i *valori immagine* come *l'insieme immagine* e lo si indica con

$$f(A)$$

#Esempio

Esempio 2.1.

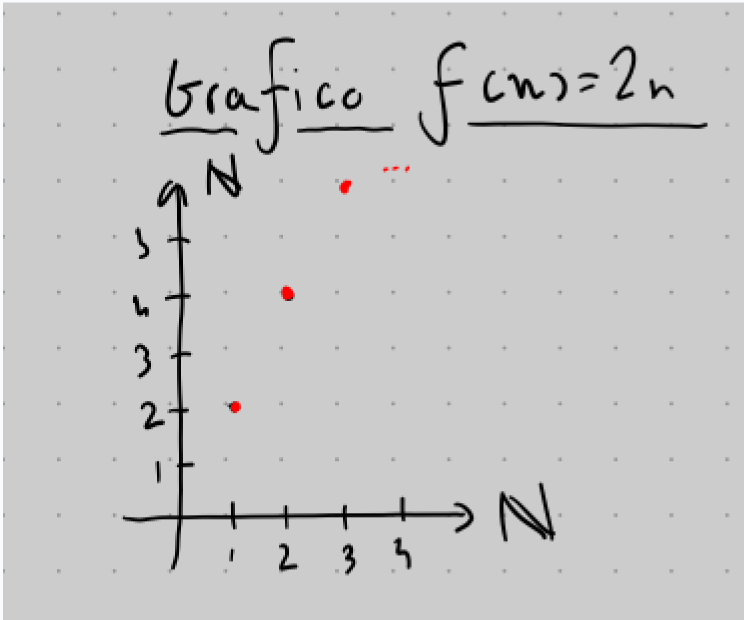
Siano $A = \mathbb{N}, B = \mathbb{N}$, $f(n) = 2n$. Allora dalle definizioni appena date abbiamo $f(\mathbb{N}) = \{0, 2, 4, \dots\} = \mathbb{P}$ (l'insieme dei numeri pari);

#Osservazione

Osservazione 2.1. (l'insieme immagine è sempre sottoinsieme del codominio)

Si nota che $\boxed{f(A) \subseteq B}$.

FIGURA 2.1. (*Esempio 2.1.*)



3. Iniettività, suriettività e biiettività

Funzione suriettiva (o surgettiva)

#Definizione

Definizione 3.1. (funzione suriettiva)

Se

$$f(A) = B$$

Allora la funzione f si dice *suriettiva* (oppure come lo chiamano i pisani, *surgettiva*).

#Esempio

Esempio 3.1.

La funzione $f(n) = 2n$ (tratto dall'*esempio 2.1.*, ^35d8bd) *non* è *surgettiva* se si definisce $A = \mathbb{N}$; invece lo è se si definisce $A = \mathbb{P}$.

Funzione iniettiva (o ingettiva)

#Definizione

Definizione 3.2. (funzione iniettiva)

Siano

$$f : A \mapsto B; x_1, x_2 \in A$$

Supponendo che

$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq x_2$$

Allora si dice che la funzione f è *iniettiva* (oppure in pisano *ingettiva*).

#Esempio

Esempio 3.2.

Siano

$$\begin{gathered} A = [0, \infty) \\ B = [0, \infty) \\ f : x \mapsto x^2 \end{gathered}$$

(dove la notazione $[0, \infty)$ indica tutti i numeri $\forall x \in \mathbb{R} : x \geq 0$). La funzione $f(x)$ è *suriettiva*, in quanto $\forall y \geq 0, \exists x \geq 0 : x^2 = y$. Inoltre è anche *iniettiva*.

Infatti si dimostra che f è iniettiva; se $0 \leq x_1 < x_2$, (quindi $x_1 \neq x_2$) allora moltiplicando da ambo le parti per x_1 e per x_2, si ottengono:

$$\begin{gathered} \text{I. } 0 \leq x_1 < x_2 \\ x_1^2 < x_1 x_2 \\ \text{II. } 0 \leq x_1 < x_2 \\ x_1 x_2 < x_2^2 \\ \text{Pertanto} \\ x_1^2 < x_2^2 \iff f(x_1) < f(x_2) \implies f(x_1) \neq f(x_2) \blacksquare \end{gathered}$$

#Esempio

Esempio 3.2.

Riprendendo la medesima funzione $f : x \mapsto x^2$ dall'*esempio 3.1.* e cambiando gli insiemi $A, B = \mathbb{R}$, la funzione f non è più *né suriettiva né iniettiva*.

Lo si dimostra che non è suriettiva prendendo un valore $y = f(x) = -1$; si dimostra che $\nexists x : x^2 = -1$ (guardando il grafico), pertanto $-1 \notin f(\mathbb{R})$.

Dopodiché si dimostra che non è neanche iniettiva tramite un *controesempio*; prendiamo $x_1 = -1, x_2 = 1$ (quindi $x_1 \neq x_2$) e i *valori immagini* di x_1, x_2 sono $f(-1) = -1^2 = 1$, $f(1) = 1^2 = 1$, pertanto $f(-1) = f(1)$. ■

Funzione biiettiva

#Definizione

Definizione 3.3. (funzione biiettiva)

Se una funzione $f : A \mapsto B$ è sia *iniettiva* e sia *suriettiva*, allora si dice che f è *biiettiva* (o *"bigettiva"* in pisano).

4. Funzione composta

#Definizione

Definizione 4.1. (funzione composta)

Siano

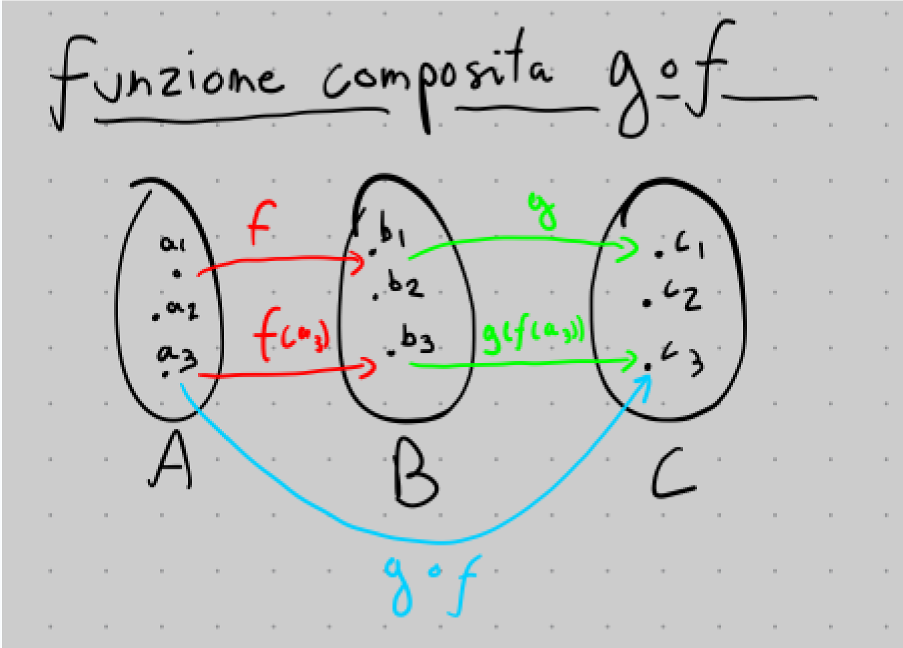
$$\begin{gathered} f : A \mapsto B \\ g : B \mapsto C \end{gathered}$$

Si definisce $g \circ f$ la *funzione composita*, letta come *"g dopo f"*.

$$\begin{gathered} g \circ f : A \mapsto C \\ x \mapsto g(f(x)) \end{gathered}$$

Si illustra la *funzione composita* tramite il seguente diagramma (*figura 4.1.*).

FIGURA 4.1. (*Definizione 4.1.*)



#Esempio

Esempio 4.1.

Siano

$$f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R},\, g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$$
$$f : x \mapsto x^2,\ g : y \mapsto y + 2$$

Allora

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 2$$
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 2) = (x + 2)^2$$

#Osservazione

Osservazione 4.1. ($f \circ g \neq g \circ f$)

Ovviamente da questo esempio si nota che *non è sempre vero* che $f \circ g = g \circ f$.

5. L'immagine di un pezzo del dominio

#Definizione

Definizione 5.1. (l'immagine di un pezzo del dominio)

Sia $f : A \mapsto B$, $A' \subseteq A$; allora si definisce

$$f(A') = \{f(x) : x \in A'\}$$

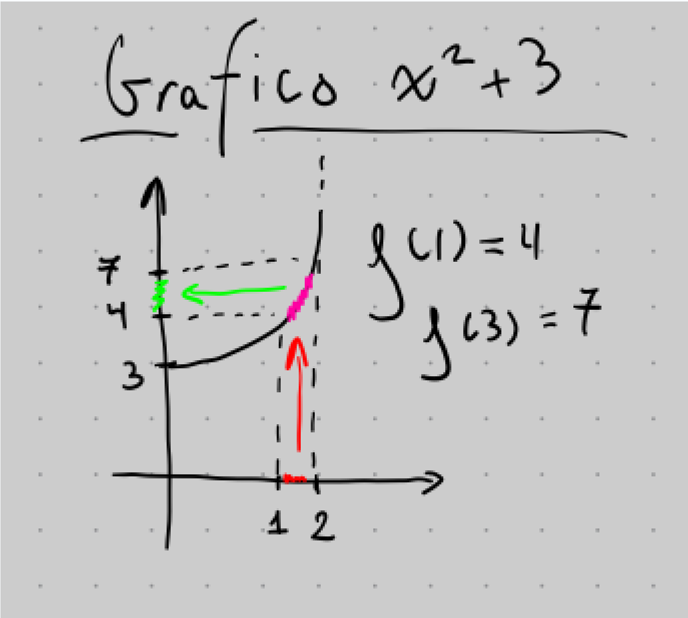
come *l'immagine di un pezzo del dominio* A.

#Esempio

Esempio 6.1. (rappresentazione grafica)

Si rappresenta il grafico della funzione $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$, $f:x\mapsto x^2+3$. Si vuole trovare (e rappresentare) $f([1,2])$.
Dal grafico si evince chiaramente che $f([1,2])=[4,7]$.

FIGURA 6.1. (*Esempio 6.1.*)



6. La funzione inversa

#Definizione

Definizione 6.1. (funzione inversa)

Sia

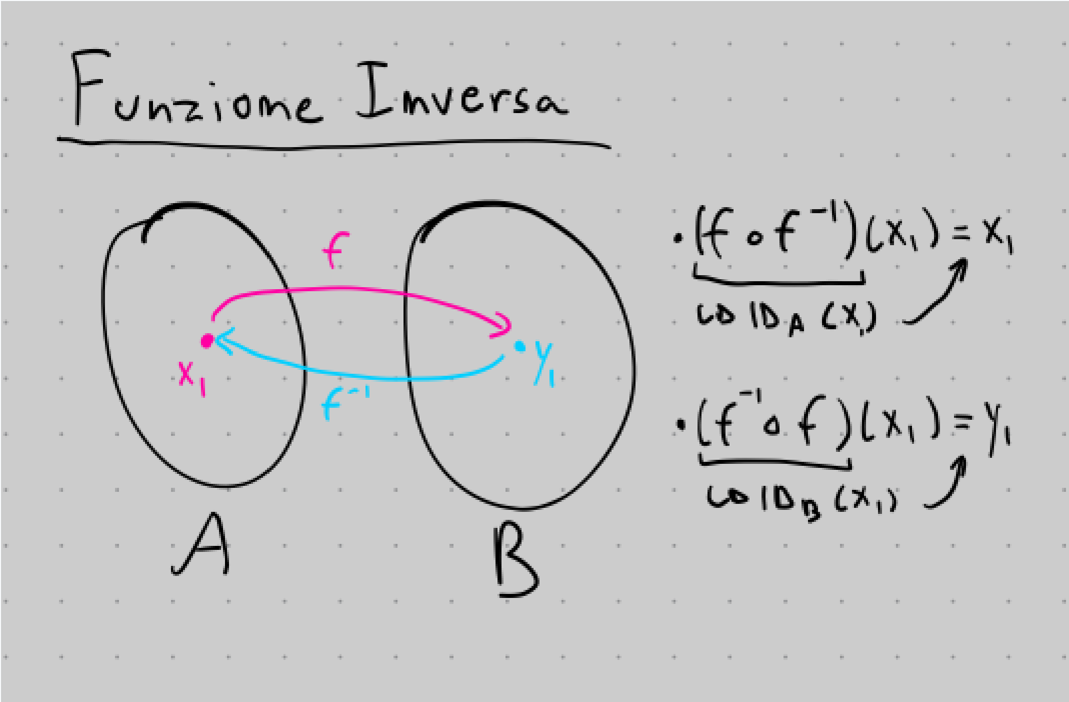
$$f:A\mapsto B$$

Supponiamo che esista una funzione $g:B\mapsto A$, tale che

$$\begin{gathered}g\circ f=\mathrm{id}_A:A\mapsto A\\ f\circ g=\mathrm{id}_B:B\mapsto B\end{gathered}$$

, ove la funzione d'identità su un insieme A viene rappresentata da $\mathrm{id}_A:x\mapsto x$, si dice che la funzione g è la *funzione inversa di* f.
Si illustra la funzione inversa di f con un diagramma (*figura 6.1.*).

FIGURA 6.1. (*Definizione 6.1.*)



#Teorema

Teorema 6.1. (condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza della funzione inversa $f^{-}1$)

Una funzione $f : A \mapsto B$ ha la sua inversa

$$f^{-}1 : B \mapsto A$$

se e solo se è *biettiva*, ovvero se è sia *iniettiva* che *suriettiva*.

7. L'insieme contro immagine di una funzione

#Definizione

Definizione 7.1. (insieme contro / pre - immagine di una funzione)

Sia

$$f : A \longrightarrow B$$

ove $\tilde{A} \subseteq A, \tilde{B} \subseteq B$.
Allora definisco *l'insieme contro immagine* (o *pre-immagine*) di f

$$f^{\leftarrow}(\tilde{B}) = \{x \in A : f(a) \in \tilde{B}\}$$

ovvero gli elementi di A tali per cui le loro immagini $f(a)$ appartengono all'insieme $\tilde{B}$.

8. Monotonia di una funzione

#Definizione

Definizione 8.1. (monotonia di una funzione)

Sia

$$f : A \longrightarrow B$$

e diciamo che questa sia *monotona* se sussistono una delle seguenti condizioni:

$$\begin{aligned}&\text{i. } \forall x, y \in A; x \leq y \implies f(x) \leq y \\ &\text{ii. } \forall x, y \in A; x < y \implies f(x) < y \\ &\text{iii. } \forall x, y \in A; x \leq y \implies f(x) \geq y \\ &\text{iv. } \forall x, y \in A; x < y \implies f(x) > y\end{aligned}$$

#Definizione

Definizione 8.2. (funzione strettamente/non crescente o decrescente)

In particolare,

- se sussiste la *i.*, allora la funzione è *crescente*;
- invece per la *ii.*, la funzione si dice *strettamente crescente*.
- Analoghi i discorsi per *iii, iv.* in cui diciamo che la funzione è *decrescente o strettamente decrescente*.

#Osservazione

Osservazione 8.1. (la "corretta" pronuncia del termine)

Si nota che il termine *"monotònono"*, usata per per indicare che la funzione rispetta la condizione delineata dalla *definizione 8.1.*, viene pronunciata ponendo l'accento sulla terza *o*! Infatti con l'altra maniera di pronunciare, *"monòtono"*, questo termine acquisisce un significato completamente diverso, che a sua volta può portare un'accezione negativa.

9. Parità o disparità di una funzione

#Definizione

Definizione 9.1. (funzione pari o dispari)

Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$, sia A *simmetrico rispetto all'origine* (ovvero $\forall x \in A, -x \in A$).

Sia la funzione f

$$f : A \longrightarrow B$$

e la chiamo:

- Una funzione *pari* se

$$f(x) = f(-x)$$

- Una funzione *dispari* se

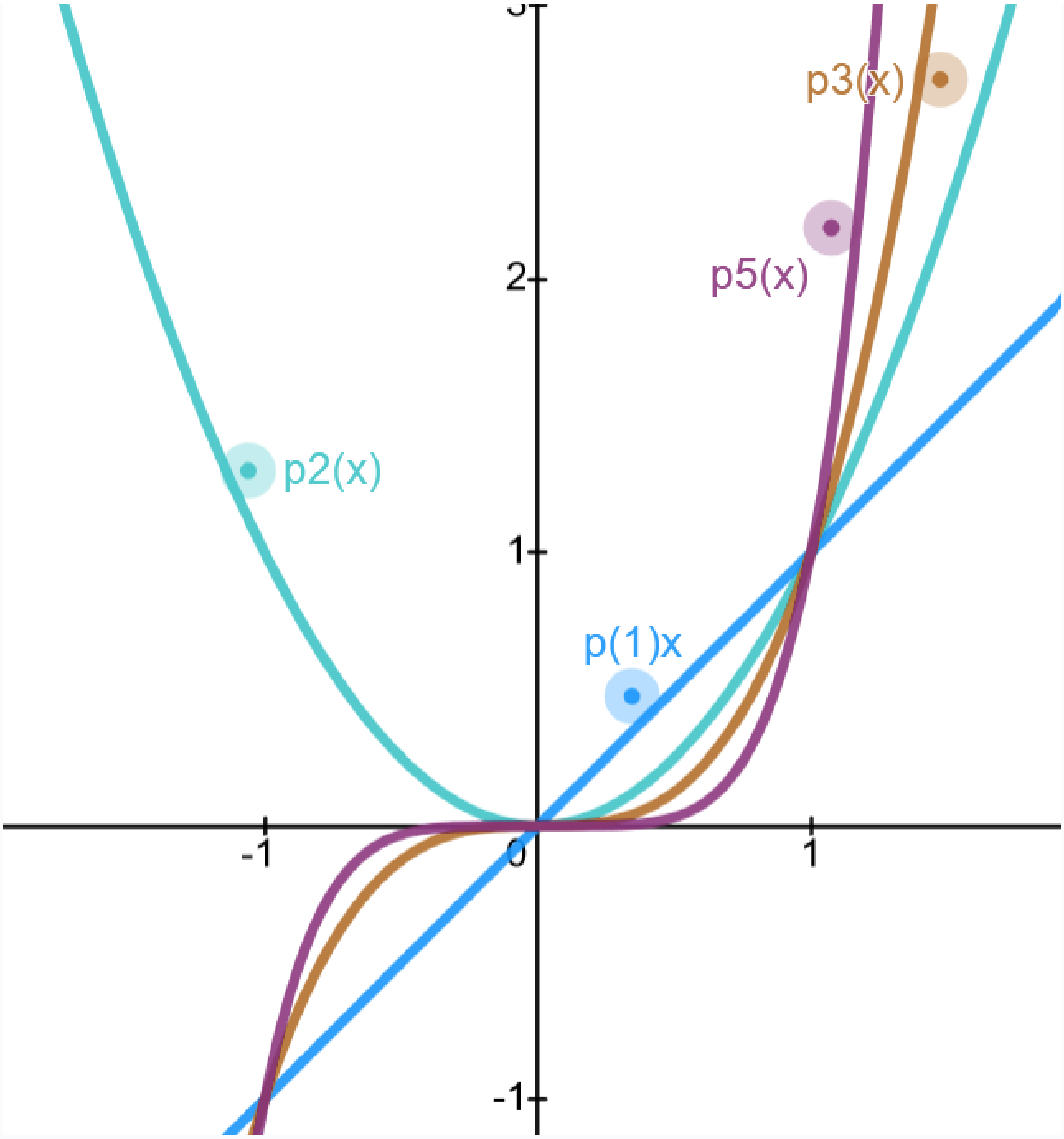
$$f(x) = -f(-x)$$

#Esempio

Esempio 9.1. (esempio di funzioni pari o dispari)

Osserviamo la funzione potenza (Funzioni di potenza, radice e valore assoluto > ^2b25ba) $p_n(x)$.
La definizione appena data da noi ci *"suggerisce"* che per n pari, p_n è una funzione pari; similmente p_n è dispari se n è dispari (*figura 9.1.*).

FIGURA 9.1. (*Esempio 9.1.*)



10. Periodicità di una funzione

#Definizione

Definizione 10.1. (funzione periodica)

Sia $T > 0$ un numero, $A \subseteq \mathbb{R}$ tale che

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \forall x \in A; x + Tk \in A$$

Sia ora una funzione f del tipo

$$f : A \longrightarrow \mathbb{R}$$

è *periodica* se è vera che

$$\boxed{\forall x, k; f(x) = f(x+Tk)}$$

#Esempio

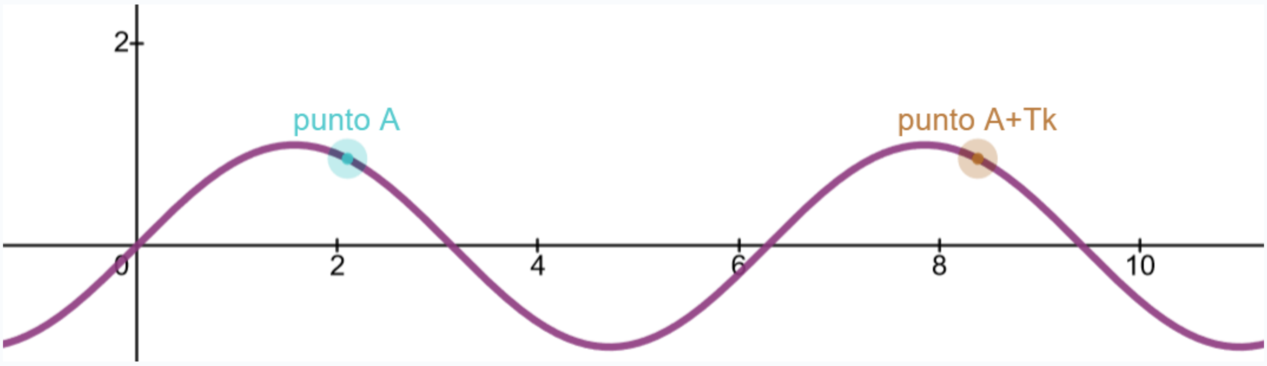
Esempio 10.1. (le funzioni trigonometriche sono periodiche)

Le *funzioni trigonometriche* sono periodiche: infatti secondo la *proposizione 2.3. sulle funzioni trigonometriche* (Funzioni trigonometriche > ^189c92), abbiamo $T = 2\pi$. Ovvero

$$\sin(x) = \sin(x + 2\pi k), \forall k \in \mathbb{Z}$$

analogo il discorso per $\cos$.

FIGURA 10.1. (*Esempio 10.1.*)



11. Massimo e minimo assoluto di una funzione

#Definizione

Definizione 11.1. (Punto di massimo e minimo assoluto)

Sia $f: E \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in E$.
Allora definiamo x_0 punto di *massimo assoluto* se abbiamo

$$\forall x \in E, f(x) \leq f(x_0)$$

Alternativamente è punto di *minimo assoluto* se abbiamo

$$\forall x \in E, f(x) \geq f(x_0)$$

#Definizione

Definizione 11.2. (massimo e minimo di una funzione)

Se x_0 è *punto di massimo* (minimo) *assoluto*, allora il *valore immagine* (^ee4c92) $f(x_0)$ si dice *massimo* (minimo) *assoluto* della funzione.

$$\max f, \min f$$

#Osservazione

Osservazione 11.1. (ci possono essere più punti di massimo ma solo un massimo)

ATTENZIONE! Notiamo che se possiamo avere più di uno *punti di massimo* (minimo), ci ricordiamo che il *massimo* (minimo) della funzione è l'*immagine* del punto: dunque in quanto tale può esistere un unico *valore massimo* dell'insieme immagine $f(E)$.

#Esempio

Esempio 11.1. Funzione $\sin$

Sia $f(x) = \sin x$.
Allora sappiamo che i *punti di massimo* di $\sin$ è costituita dalla classe di equivalenza

$$\left[\frac{\pi}{2}\right]_{\equiv 2\pi}$$

Analogamente i *punti di minimo* di $\sin$ sono

$$\left[-\frac{\pi}{2}\right]_{\equiv 2\pi}$$

Tuttavia il *massimo* e *minimo* di $\sin$ sono $-1, 1$; infatti

$$-1 \leq \sin x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

L'illustrazione di questo esempio mediante grafici è lasciato al pubblico per *esercizio*.

#Esempio

Esempio 11.2. Funzione con dominio ristretto

Guardiamo alla funzione $x_{|[0,1[}$, ovvero una funzione del tipo

$$f : [0, 1[\longrightarrow \mathbb{R}$$

Notiamo che f *non* ha *massimo*, perché $f([0,1[) = [0,1[$ dunque $f(E)$ non ha $\max$ (anche se resta che esiste $\sup$).
Invece f ha minimo con $f(0) = 0$.

Anche questo esempio è lasciato al pubblico da illustrare per *esercizio*.

Esercizio 11.3. Funzione $\frac{1}{x}$

Si lascia al lettore verificare se $\frac{1}{x}$ ha *massimo* e/o *minimo* per il suo *dominio*.

12. Massimo e minimo relativo di una funzione

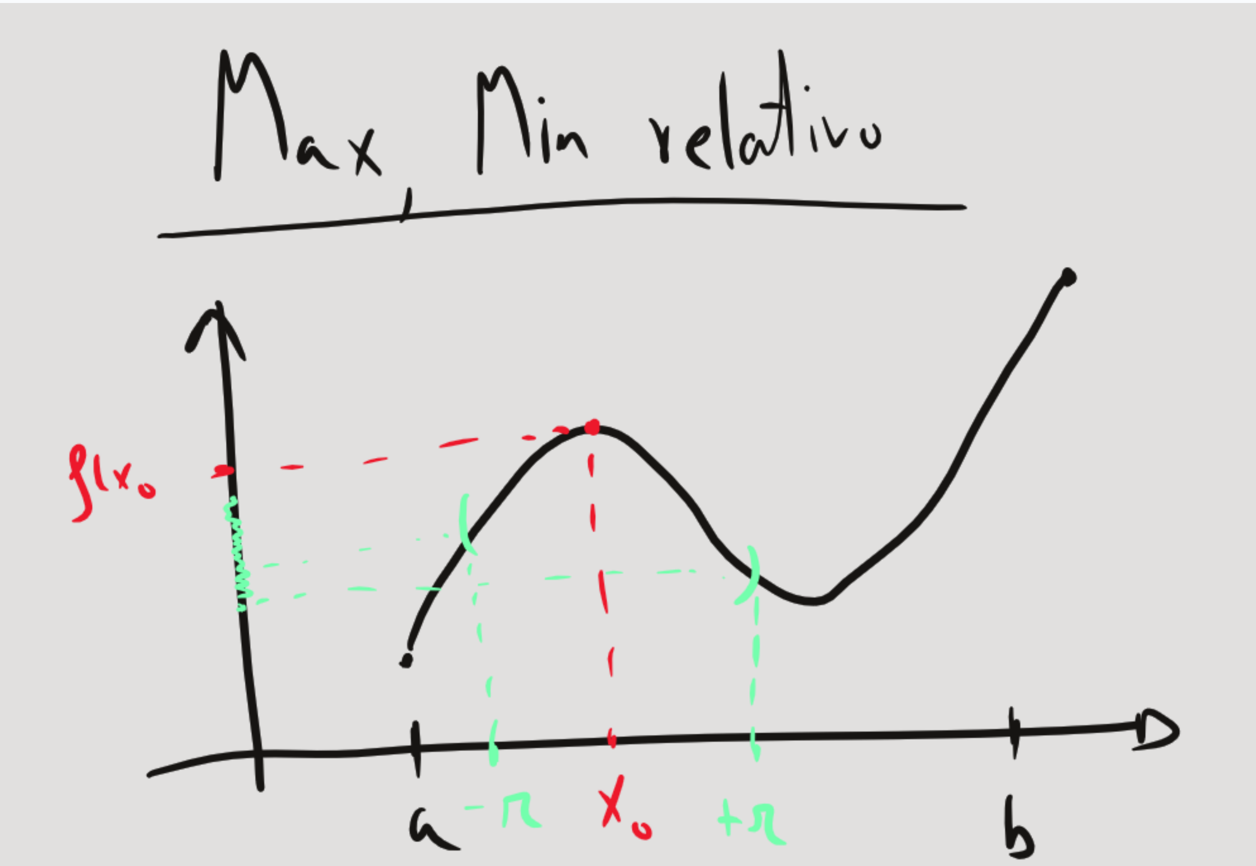
#Definizione

Definizione 12.1. (max, min relativo)

Sia $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $E \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in E$.
Allora x_0 è *punto di massimo (minimo) relativo* se vale che

$$\exists r > 0 : \forall x \in \;]x_0 - r, x_0 + r[\; \cap E, f(x) \leq f(x_0) \; (f(x) \geq (x_0))$$

FIGURA 12.1. (*Idea del concetto*)



13. Asintoto di una funzione (argomento avanzato)

Consultare la pagina Asintoto di una funzione.

14. Classe C di una funzione (argomento avanzato)

Consultare la pagina Derivata Successiva e Classe C

Funzioni Convesse

Funzione Convessa

Osservazioni geometrici preliminari; definizione di funzione convessa. Significato geometrico della convessità

---

0. Osservazione preliminare

#Osservazione

Osservazione 0.a (punti del segmento tra due punti)

Supponiamo di avere il *piano cartesiano* π (Coppie Ordinate e Prodotto Cartesiano > ^61dab9) e voglio rappresentare il segmento tra i punti

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2)$$

Ovvero ho una situazione grafica raffigurata in *figura 0.1.*.
Allora considero il *vettore geometrico relativo al segmento*

$$\vec{v} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

Ora voglio trovare un *vettore* che ha la stessa *direzione* e lo stesso *verso* ma la intensità è più *piccola* di $\vec{v}$. Come faccio?
Ponendo un numero qualsiasi che chiamo λ e *"restringendolo"* in $0 \leq \lambda \leq 1$ pongo il seguente vettore

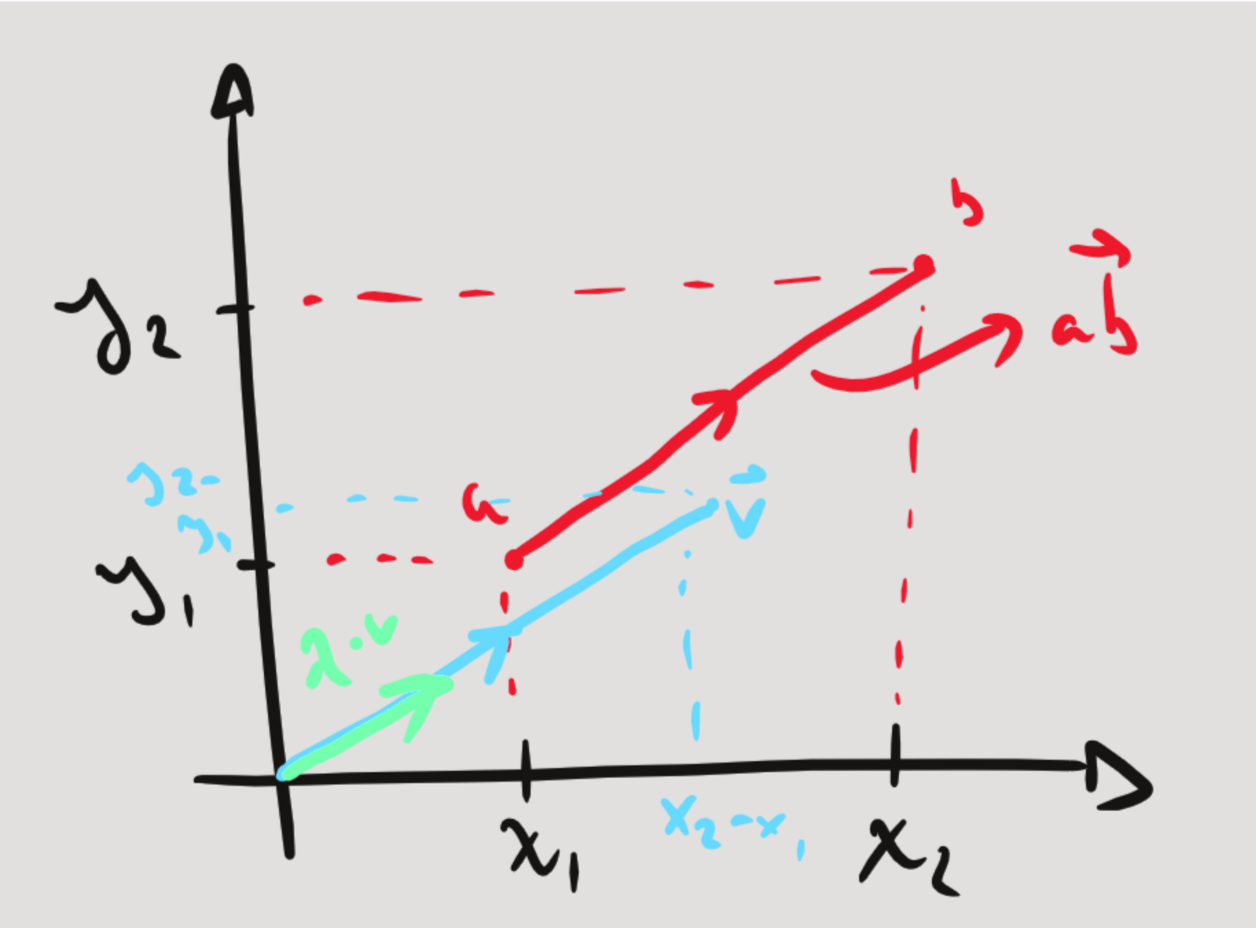
$$\lambda \cdot \vec{v} = (\lambda(x_2 - x_1), \lambda(y_2 - y_1))$$

Ora per considerare *tutti i punti del segmento del vettore* $\vec{v}$ faccio la somma di uno dei punti considerati all'inizio con il vettore scalato per λ;

$$(x_1, y_1) + \lambda \cdot \vec{v} = \ldots = ((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2, (1 - \lambda)y_1 + \lambda y_2), \lambda \in [0, 1]$$

Questo vale lo stesso se scambio x_1 con x_2 e altrettanto y_1 con y_2 (ovviamente per rimanere consistenti li si scambia sin dall'inizio!).

FIGURA 0.a. (*Idea grafica*)



1. Definizione di Funzione Convessa

#Definizione

Definizione 1.1. (funzione convessa o concava)

Sia $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ (I *intervallo*) (Intervalli)
La funzione f si dice *convessa* se prendendo qualsiasi due punti x_1, x_2 nell'intervallo I, uno più grande dell'altro, allora succede il seguente:

$$\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2, \forall \lambda \in [0,1],$$
$$\boxed{f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)}$$

Se invece $-f$ è *convessa*, allora f si dice *concava*.

#Osservazione

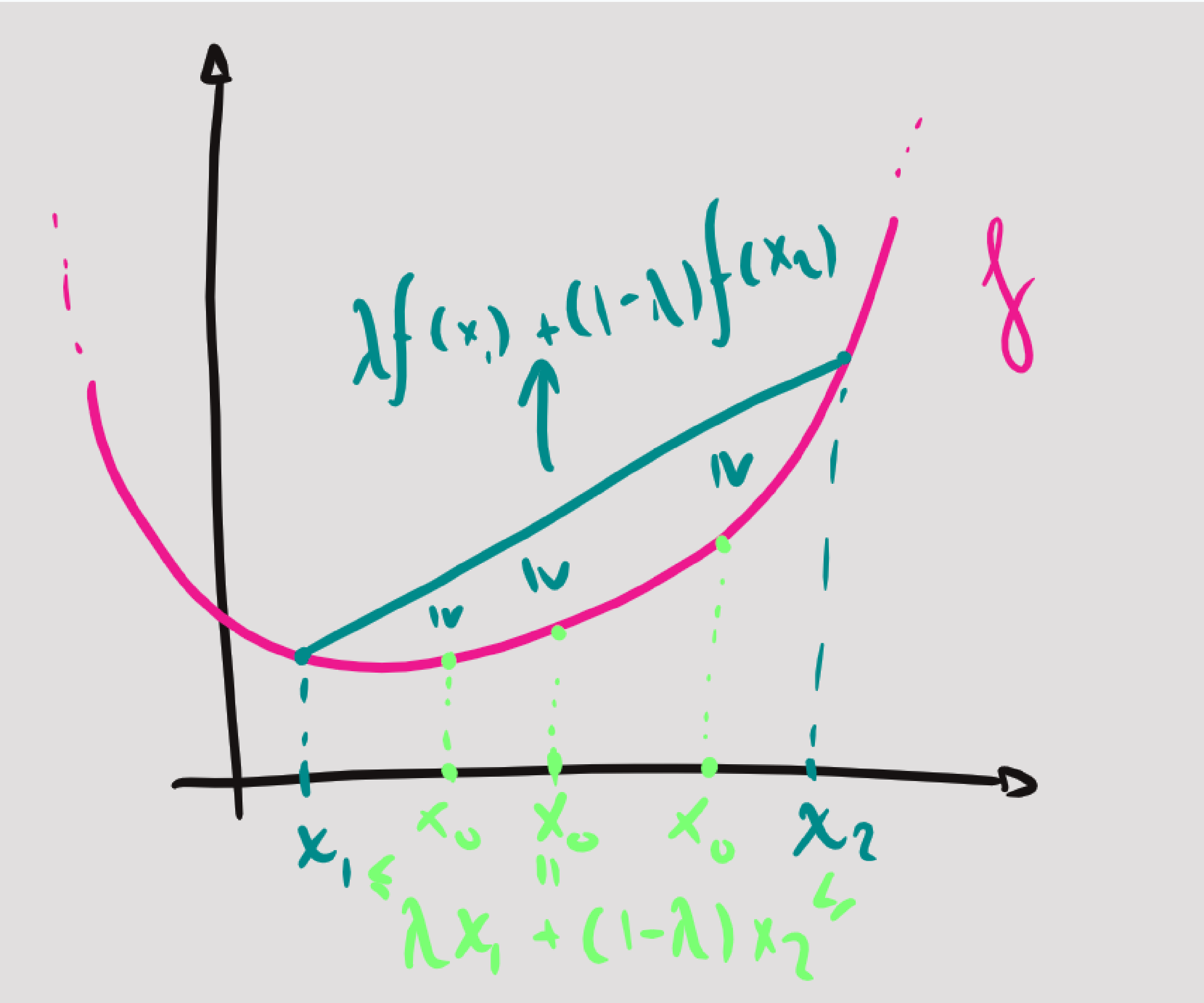
Osservazione 1.1. (significato geometrico)

Ora vediamo cosa vuol dire la definizione data sopra.
Seguendo l'*osservazione preliminare* (*oss. 0.a*) svolta prima (^a47002), notiamo che il membro destro della disuguaglianza è sostanzialmente un *punto qualsiasi della retta passante per* $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$, se si considera $y = f(x)$.
Invece a sinistra notiamo che $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ non è altro che una *combinazione lineare* di x_1, x_2 (Combinazione Lineare > ^8113de).
Inoltre dato che $\lambda \in [0, 1]$, si deduce che questa combinazione lineare vive in

$$x_1 \leq \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \leq x_2$$

Pertanto la disuguaglianza di *definizione* vuol semplicemente dire che f è *convessa* se la *retta passante tra* $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$ sta *"sempre in alto (o ugualmente alto)"* di qualsiasi punto della funzione tra $x_0 \in [x_1, x_2]$

FIGURA 1.1. (*Idea geometrica*)



#Osservazione

Osservazione 1.2. (concavità e convessità simultanea)

Notiamo che una funzione f è sia *concava* che *convessa* se vale che

$$\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2, \forall \lambda \in [0,1],$$
$$\begin{cases} f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \\ f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \end{cases}$$
$$\Downarrow$$
$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) = \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

Notiamo che il *"risultato"* di questa implicazione è il fatto che f sia un'*applicazione lineare* in quanto si vede valgono le proprietà di definizione AL (ovvero l'additività e l'omogeneità) (Definizione di Applicazione Lineare > ^9b39f9). Pertanto f può essere solo una *retta*.
Nota: questa osservazione è sta svolta con i miei occhi, quindi non fa né parte degli appunti né delle dispense.

2. Collegamento con la derivata seconda

Vedere pagina Caratterizzazione delle Funzioni Convesse

Successioni e Sottosuccessioni

Successione e Sottosuccessione

Appunto ad-hoc sulle successioni e sulle sottosuccessioni (successioni estratte)

---

1. Successione

#Definizione

Definizione 1.1. (successione)

Sia f una funzione del tipo

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow A$$

dove $\mathbb{N}$ è l'insieme dei numeri naturali (Struttura dell'insieme dei numeri naturali), la chiamiamo (*tradizionalmente*) come una *successione a valori in A* e la indichiamo con

$$(a_n)_n$$

dove $f(n) = a_n$; ovvero

$$(a_n)_n = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$$

#Definizione

Definizione 1.2. (successione a variabile reale)

Se $A = \mathbb{R}$, allora avremmo una *successione a valori in* $\mathbb{R}$, oppure una *successione reale*.

#Definizione

Definizione 1.3. (successione limitata)

Si definisce una *successione limitata* quando si verifica che

$$\exists M > 0 : \forall n, |a_n| < M$$

2. Sottosuccessione (successione estratta)

#Definizione

Definizione 2.1. (successione estratta)

Data una funzione j *strettamente crescente* che sia anche una successione a valori in $\mathbb{N}$, ovvero del tipo

$$j : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}; k \mapsto n_k$$

quindi abbiamo una successione del tipo

$$(n_k)_k = (n_0, n_1, \dots n_k)$$

Ora sia $(a_n)_n$ una *successione a valori in A*, con la funzione f; ovvero

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow A$$

Ora consideriamo la *composizione* (Funzioni > ^a248be)

$$f \circ j : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \longrightarrow A; k \mapsto n_k \mapsto a_{n_k}$$

Questa la chiamiamo *sotto successione* o *successione estratta* di

$$(a_n)_n$$

e la chiamiamo

$$(a_{n_k})_k$$

#Osservazione

Osservazione 2.1. (idea del concetto)

Idea. L'idea di questo concetto consiste nel *"selezionare"* alcuni elementi di una successione e poi di *"ricompattarli"*, ottenendo così una nuova successione. Consideriamo ad esempio la successione $(a_n)_n$:

$$a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n$$

Ora voglio scegliere gli *"indici"* $0, 2, 3, n$; quindi ora ho

$$n_0 = 0, n_1 = 2, n_2 = 3, n_3 = n$$

che va a formare proprio una nuova successione $(n_k)_k$. Ora se considero la successione di prima, considerando però solo gli elementi di $(n_k)_k$, ottengo la nuova successione

$$a_{n_0} = a_0, a_{n_1} = a_2, a_{n_2} = a_3, a_{n_3} = a_n$$

Ovvero

$$a_0, a_2, a_3, a_n$$

#Osservazione

Osservazione 2.2. (la monotonia di una sotto successione è una conseguenza)

Osservo che secondo questa *"costruzione"* di una *successione estratta*, la *monotonia crescente* della *"successione degli indici"* j è una semplice conseguenza.

Capitolo II. Numeri Reali e Funzioni di Variabile Reale

Abstract del Capitolo II

In questo capitolo andremo a studiare i *numeri reali*, le sua struttura fondamentale, in particolare la sua proprietà speciale: l'*assioma di continuità, o di Dedekind*.
A partire da questo assioma ne studieremo le conseguenze, in particolare gli intervalli, insiemi limitati, maggioranti e/o minoranti, estremo superiore e/o inferiore...

Dopodiché si andranno a studiare anche le *funzioni di variabile reale*, ovvero delle funzioni che come *"argomento"* prendono l'insieme dei numeri appena studiati.

SEZIONE A. LA STRUTTURA DEI NUMERI REALI

A1. Richiami sui numeri interi e razionali

Richiami sui Numeri Razionali

Richiami sui Numeri Razionali (propedeutica per studiare i numeri reali): la costruzione dei numeri interi $\mathbb{Z}$; la costruzione dei numeri razionali $\mathbb{Q}$; l'insufficienza di $\mathbb{Q}$ per rappresentare tutti i numeri. Dimostrazione dell'incommensurabilità di $\sqrt{2}$

---

1. La costruzione dei numeri interi

#Osservazione

Osservazione 1.1. (la costruzione di $\mathbb{Z}$ a partire da $\mathbb{N}$)

Osserviamo che a partire dai numeri naturali $\mathbb{R}$ è possibile costruire un altro insieme numerico più *completo* che ci permette di fare altre operazioni (oltre alla somma e moltiplicazione), ovvero i numeri *interi relativi* $\mathbb{Z}$ (*Zahl*), che viene definita come

$$\mathbb{Z} := \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$$

in cui ad ogni numero positivo z corrisponde ad un numero *negativo* per cui ci permette di fare una nuova operazione: ovvero la *sottrazione* $-$.
Tuttavia questa non è sufficiente in quanto questa *costruzione* non ci permette di fare un'altra operazione molto importante, ovvero la *divisione* $\div$.

2. La costruzione dei numeri razionali

#Osservazione

Osservazione 2.1. (la costruzione di $\mathbb{Q}$ a partire da $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$)

Quindi a partire da $\mathbb{Z}$ è possibile costruire i numeri razionali $\mathbb{Q}$ (*Quoziente*), dove un numero $q \in \mathbb{Q}$ è un quoziente di un numero intero $\mathbb{Z}$ e di un numero razionale $\mathbb{N}$;

$$\mathbb{Z} := \{\frac{p}{q} \text{ con } p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \diagdown \{0\}\}$$

I numeri razionali quindi ci permettono *non solo* di *contare*, ma anche di

misurare, dato che possiamo precisamente misurare delle grandezze tramite questi numeri.
Tuttavia non posso misurare *tutto*; infatti se voglio descrivere un oggetto geometrico con i numeri, ovvero un quadrato con il lato $l = 1$, non posso misurare la lunghezza della diagonale del quadrato.
Infatti questo segmento si dice una *grandezza incommensurabile*.

#Teorema

Teorema 2.1. (l'incommensurabilità di $\sqrt{2}$)

Non esistono $n, k \in \mathbb{N}$ tali che

$$(\frac{n}{k})^2 = 2$$

DIMOSTRAZIONE del *teorema 2.1.* (^4b9050)
Qui ragioniamo *per assurdo*; ipotizziamo che la tesi sia vera invece che falsa, poi per trovare un assurdo, una contraddizione.

1. Supponiamo che esistano $n, k \in \mathbb{N}$ tali che

   $$(\frac{n}{k})^2 = 2$$

   inoltre non è restrittivo supporre che questi n, k non abbiano fattori in comune (quindi che siano ridotti ai minimi termini).
2. Ora,

   $$\begin{gathered}\frac{n^2}{k^2} = 2 \\ \text{allora } n^2 = 2k^2 \\ \text{allora } 2 \mid n^2 \text{ è vera;}\end{gathered}$$

3. Considerando la scomposizione di n in numeri primi, ovvero

   $$n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_n^{k_n}$$

   allora se n^2 è divisibile per un numero primo p_n, allora per forza anche n è divisibile per lo stesso numero primo, in quanto entrambi vengono moltiplicate per lo stesso p_n.

4.
$$\begin{aligned}&\text{allora } 2 \mid n \text{ è vera;}\\&\text{allora } n = 2m\\&\text{allora } \frac{4n^2}{k^2} = 2\\&\text{allora } 4n^2 = 2k^2\\&\text{allora } k^2 = 2n^2\\&\text{allora } 2 \mid k \text{ è vera}\\\text{ma }&\text{allora anche } 2 \mid n \text{ è vera}\end{aligned}$$

5. Quindi sia n che k che sono pari, ciò vuol dire che hanno un fattore in comune (ovvero 2); ciò contraddice quello che abbiamo detto all'inizio, ovvero che n e k sono ridotti ai minimi termini. Di conseguenza non è possibile che esistano n e k. ■

CONCLUSIONE. Quindi i numeri razionali $\mathbb{Q}$ non sono sufficienti per misurare la diagonale di un quadrato; infatti è impossibile definire un $x \in \mathbb{Q}$ tale che $x^2 = 2$.

A2. Assiomi AMDOS dei numeri reali

Assiomi dei Numeri Reali

Assiomi dei numeri reali $\mathbb{R}$; Il gruppo abeliano $(\mathbb{R}, +)$, il campo $(\mathbb{R}, +, \cdot)$; assiomi fondamentali di $\mathbb{R}$; l'assioma caratterizzante di $\mathbb{R}$ (di Dedekind)

---

1. Preambolo

#Osservazione

Osservazione 1.1. (la necessità di costruire un nuovo insieme di numeri)

Dopo aver dedotto che i numeri razionali non sono abbastanza *"estesi"* per poter rappresentare alcuni numeri (come la misura di $\sqrt{2}$), costruiamo i *numeri reali* $\mathbb{R}$ con degli *assiomi* e *definendo* delle *operazioni* di *addizione* e *moltiplicazione*. Nominiamo questi assiomi come *A)*, *M)*, *O)* e *S)*.

#Definizione

Definizione 1.1. (il campo dei reali)

Definiamo quindi il *campo*

$$(\mathbb{R}, +, \cdot)$$

ovvero un insieme dotato di due operazioni che hanno le proprietà elencate qua sotto.

2. Assiomi A)

#Assioma

Esiste un insieme $\mathbb{R}$ in cui viene definita la somma

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; (x, y) \mapsto x + y$$

per cui valgono le seguenti proprietà.

A1) La proprietà associativa: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$,

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

A2) La proprietà commutativa: $\forall x, y \in \mathbb{R}$,

$$x + y = y + x$$

A3) L'esistenza dell'elemento neutro 0: $\exists 0 \text{ t.c.}$

$$x + 0 = 0 + x = x$$

A4) L'esistenza dell'elemento opposto: $\forall x \in \mathbb{R}, \exists x' \in \mathbb{R} \text{ t.c.}$

$$x + x' = x' + x = 0$$

Inoltre si dice che $(\mathbb{R}, +)$ è un gruppo abeliano (dal matematico norvegese Abel).

3. Assiomi M)

#Assioma

E' definita in $\mathbb{R}$ un'operazione di prodotto o moltiplicazione per cui:

M1) Proprietà associativa: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$,

$$(x) \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot (z)$$

M2) L'esistenza dell'elemento neutro 1: $\exists 1 (\neq 0) \text{ t.c.}$

$$\forall x, x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$$

M3) L'esistenza dell'elemento opposto: $\forall x \in \mathbb{R}, \exists \tilde{x} \text{ t.c.}$

$$x \cdot \tilde{x} = \tilde{x} \cdot x = 1$$

M4) Proprietà commutativa: $\forall x, y,$

$$x \cdot y = y \cdot x$$

4. Assioma D)

#Assioma

E' possibile individuare una proprietà che collega le operazioni di somma $+$ e prodotto $\cdot$

D1) Proprietà distributiva: $\forall x, y, z,$

$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$$

5. Assiomi O)

#Assioma

In $\mathbb{R}$ è definita una relazione d'ordine totale che chiamo $\leq$ e valgono le seguenti

O1) Compatibilità di $\leq$ dell'ordinamento con la somma: $\forall x, y, z,$

$$x \leq y \implies x + z \leq y + z$$

O2) Compatibilità di $\leq$ dell'ordinamento con il prodotto: $\forall x, y, z,$

$$x \leq y \land 0 \leq z \implies x \cdot z \leq y \cdot z$$

6. Assioma S) (di Dedekind o di separazione)

#Osservazione

Osservazione 6.1. (la necessità di trovare un "assioma speciale" per i reali)

Notiamo che avendo definito

$$(\mathbb{R}, +, \cdot, \geq)$$

con gli assiomi *A)*, *M)*, *D)* e *O)* questi non possono bastare, in quanto i numeri razionali $\mathbb{Q}$ godono delle stesse proprietà; infatti bisogna definire delle regole speciale, in particolare *l'assioma di Dedekind*, oppure nota come *l'assioma di separazione*.

#Assioma

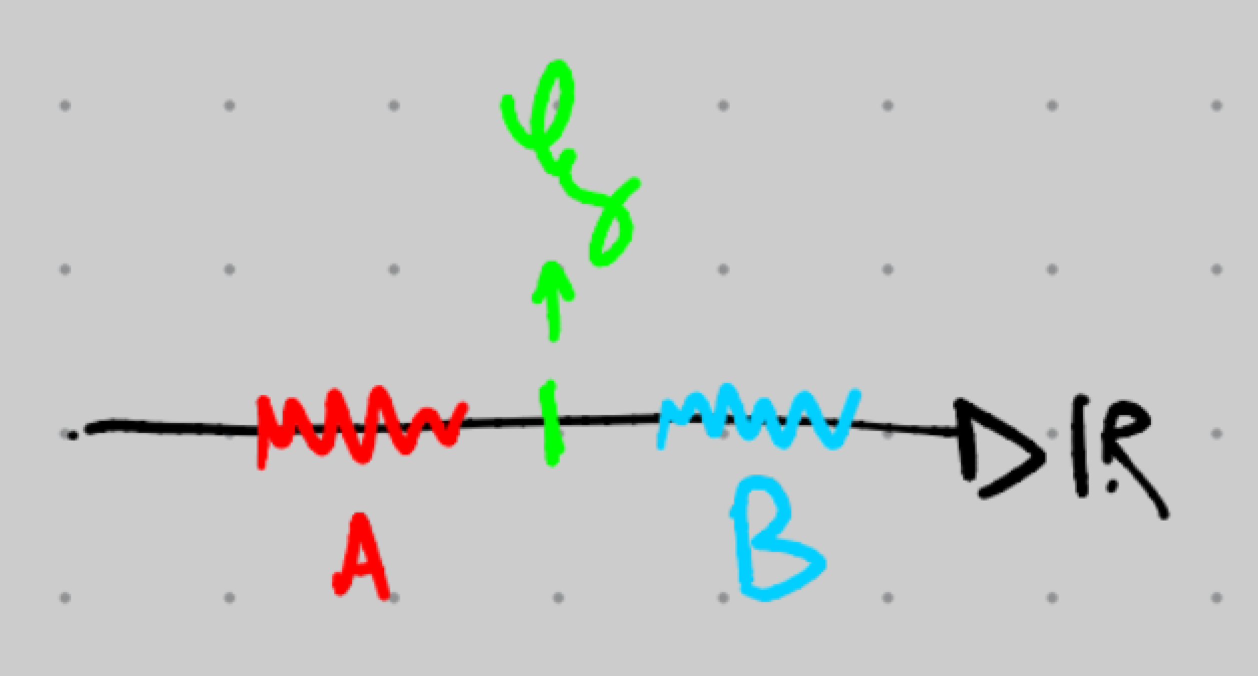
S) Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$; $A \neq \emptyset \land B \neq \emptyset$ (A e B sono non-vuoti),

- supponendo che $\forall a \in A, \forall b \in B, a \leq b$
- allora per l'assioma *S)*

$$\exists \xi \in \mathbb{R} \mid \forall a \in A, \forall b \in B, a \leq \xi \leq b$$

Ovvero, graficamente, la *figura S.1.*.

FIGURA S.1. (*L'assioma di Dedekind*)



#Osservazione

Osservazione 6.2. (Dedekind non vale per $\mathbb{Q}$)

Questa proprietà non vale per $\mathbb{Q}$, infatti se definiamo gli insiemi

$$
\begin{aligned}
A &= \{\forall a \in \mathbb{Q} : a^2 < 2\} \\
B &= \{\forall b \in \mathbb{Q} : a^2 > 2\}
\end{aligned}
$$

notiamo che tra A e B c'è un *buco* che non potrà mai essere colmato, in quanto $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. (dimostrazione più rigorosa sul file di Del Santo)

SEZIONE B. LA CONSEGUENZA DELLA CONTINUITÀ

B1. Intervalli

Intervalli

Definizione di intervalli. Intervalli limitati, aperti, chiusi, inscatolati e dimezzati. Alcuni esempi

---

1. Intervalli limitati

#Definizione

Definizione 1.1. (intervalli limitati)

Siano $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$ (ovvero $a \leq b \wedge a \neq b$), allora definiamo le seguenti definizioni degli *intervalli limitati*:
Intervallo chiuso compresi gli estremi

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

Intervallo semichiuso, escluso l'estremo sinistro

$$]a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$

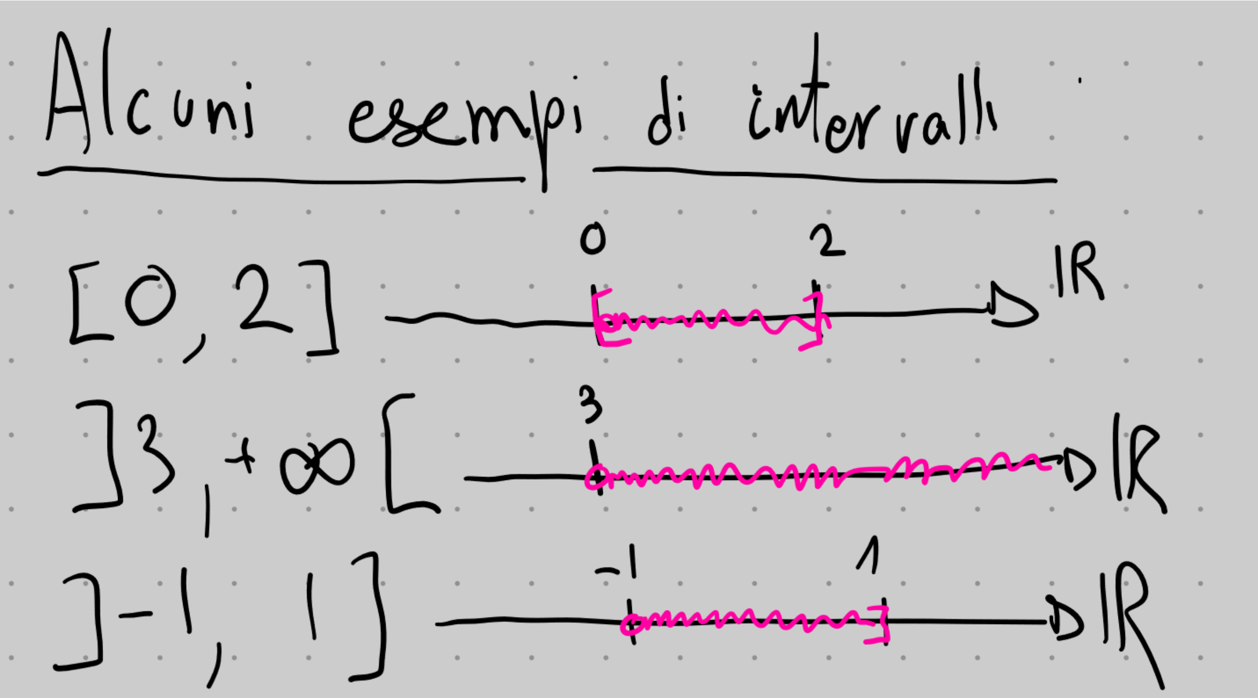
Intervallo semichiuso, escluso l'estremo destro

$$[a, b[\ := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$$

Intervallo aperto, esclusi gli estremi

$$]a, b[\ := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

FIGURA 1.1. (*Alcuni esempi di intervalli limitati*)



2. Intervalli illimitati

#Definizione

Definizione 2.1. (intervalli illimitati)

Se, invece consideriamo $a \in \mathbb{R}$, definiamo allora i seguenti *intervalli illimitati* (o anche *semirette*):
Intervallo inferiormente illimitato

$$
\begin{gathered}
]-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\} \\
]-\infty, a[:= \{x \in \mathbb{R} : x < a\}
\end{gathered}
$$

Intervallo superiormente illimitato

$$
\begin{gathered}
[a, +\infty[:= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\} \\
]a, +\infty[:= \{x \in \mathbb{R} : x > a\}
\end{gathered}
$$

#Osservazione

Osservazione 2.1. (l'insieme dei reali è l'intervallo illimitato)

Si può definire $\mathbb{R}$ anche come

$$
\mathbb{R} = \;]-\infty, +\infty[
$$

#Osservazione

Osservazione 2.1. (un insieme con un singolo elemento è degenere)

Può essere comodo pensare che anche l'insieme con un unico punto $\{a\}$ è un *intervallo*, e lo definiamo come un *intervallo "degenere"*.

#Osservazione

Osservazione 2.2. (l'infinito non è un numero)

Notare che $-\infty$ e $+\infty$ *NON* sono numeri reali, bensì dei semplici simboli.

$$-\infty, +\infty \notin \mathbb{R}$$

Se voglio, posso estendere l'insieme dei numeri reali tale che

$$\tilde{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$$

3. Successione di intervalli

#Definizione

Definizione 3.1. (successione di intervalli chiusi e limitati)

Sia

$$(I_n)_n$$

definita come una successione di intervalli *chiusi* e *limitati*.
Allora

$$(I_n)_n = I_0, I_1, \ldots, I_n, \ldots$$

ove

$$I_i = [a_i, b_i]$$

(quindi è un *intervallo chiuso e limitato*)

Intervalli inscatolati e dimezzati

#Definizione

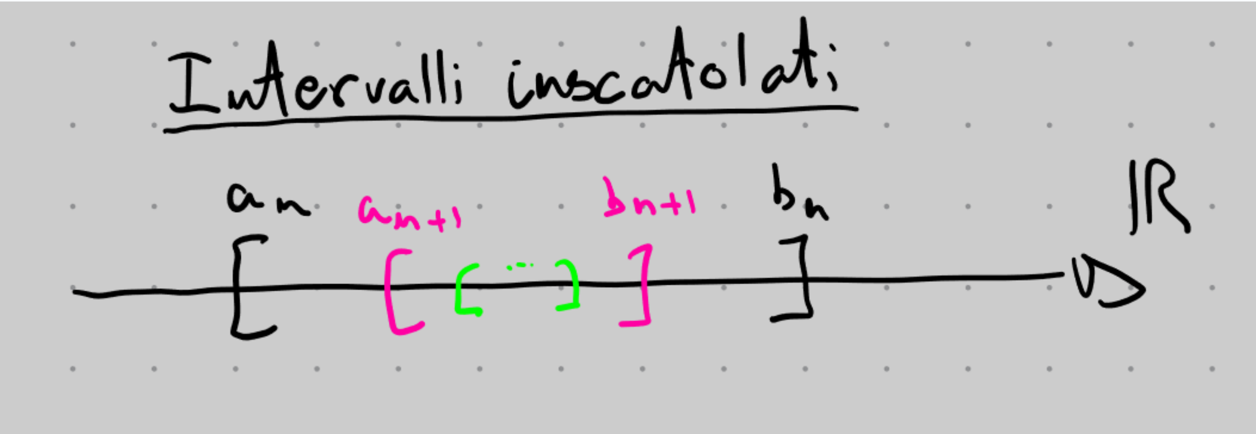
Definizione 3.2. (intervalli inscatolati)

Gli intervalli si dicono *inscatolati* se

$$\forall n, I_{n+1} \subseteq I_n$$

ovvero graficamente la *figura 3.1.*

FIGURA 3.1. (*Intervalli inscatolati*)



#Definizione

Definizione 3.2. (intervalli chiusi, inscatolati e dimezzati)

Una *successione di intervalli* $(I_n)_n$ si dice di *intervalli chiusi, inscatolati* e *dimezzati* se

$$\forall n, I_{n+1} \subseteq I_n$$

ove il nuovo sottoinsieme ha gli elementi

$$I_{n+1} = [a_n, \frac{a_n + b_n}{2}] \text{ oppure } [\frac{a_n + b_n}{2}, b_n]$$

#Osservazione

Osservazione 3.1. (la lunghezza di un elemento di intervalli chiusi, inscatolati e dimezzati)

Notiamo che se prendiamo un

$$I_n = [a_n, b_n] = [a_{n-1}, \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}]$$

allora la *distanza* tra a_n e b_n è

$$a_n - b_n = \frac{2a_{n-1} - a_{n-1} - b_{n-1}}{2} = \frac{a_{n-1} - b_{n-1}}{2}$$

ovvero la *"metà della lunghezza del segmento di prima, ovvero $a_{n-1} - b_{n-1}$"*.
Ricorsivamente si mostra che la lunghezza diventa

$$a_n - b_n = \frac{a_0 - b_0}{2^n}$$

B2. Insiemi limitati, maggioranti, estremo superiore

Insiemi limitati, maggioranti, massimo e teorema dell'estremo superiore

Tutte le definizioni sugli insiemi limitati e illimitati, maggioranti e minoranti, massimi e minimi, e tutte le proprietà.

---

1. Insiemi limitati

#Definizione

Definizione 1.1. (insieme limitato superiormente)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, A si dice un insieme *limitato superiormente* se

$$\exists M \in \mathbb{R} : \forall a, \in A; a \leq M$$

Graficamente, un insieme *limitato superiormente* si rappresenta con la *figura 1.1.*.

FIGURA 1.1.

#Esempio

Esempio 1.1.

Considero $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 3x + 1 = 0\}$.
A è *limitato superiormente*, in quanto risolvendo A otteniamo l'insieme $A = \{\frac{-3-\sqrt{5}}{2}, \frac{-3+\sqrt{5}}{2}\}$, e scegliendo $M = 0$ si ha che entrambi elementi di A sono minori di 0.

#Definizione

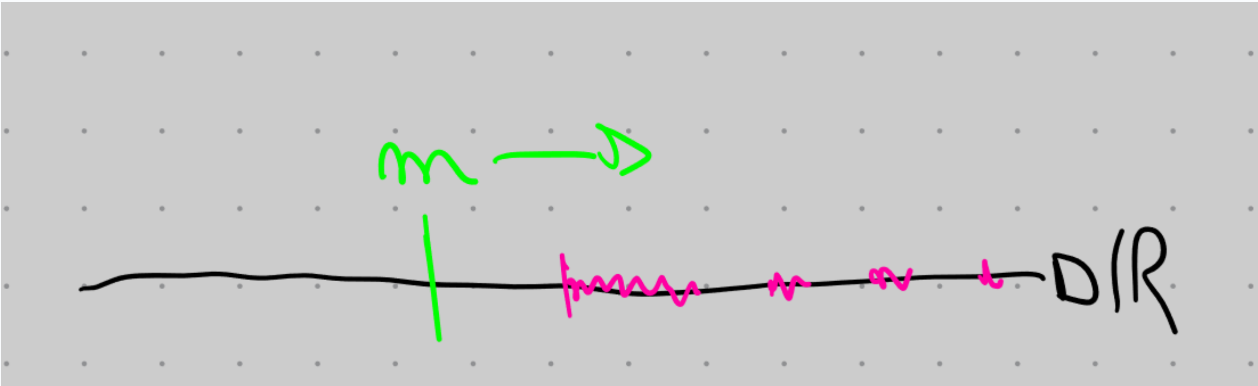
Definizione 1.2. (insieme limitato inferiormente)

$A \subseteq \mathbb{R}$ si dice un insieme *limitato inferiormente* se

$$\exists m \in \mathbb{R} : \forall a \in A; a \geq m$$

Graficamente la si rappresenta come nella *figura 1.2.*.

FIGURA 1.2.



#Definizione

Definizione 1.3. (insieme limitato)

$A \subseteq \mathbb{R}$ si dice *limitato* se è sia limitato *superiormente* che *inferiormente*.

#Esempio

Esempio 1.2.

$[a, b]$ è limitato.
Infatti se si scelgono $M = b, n = a$ per definizione risulta vero che questo intervallo è *limitato*.

#Proposizione

💬 **Proposizione 1.1. (condizione necessaria e sufficiente dell'insieme limitato)**

A è *limitato* se e solo se $\exists R > 0$ tale che $A \subseteq [-R, R]$

DIMOSTRAZIONE della *proposizione 1.1.* (^54b805)
Da quanto visto in Connettivi, basta dimostrare che entrambe le implicazioni sono vere; ovvero

1. $$\exists R : A \subseteq [-R, R] \implies A \text{ è limitato}$$

   che graficamente rappresenta la *figura 1.3.*; quindi è vera.

2. $$\text{A è limitato} \implies \exists R : A \subseteq [-R, R]$$

   che graficamente rappresenta la *figura 1.4.*; quindi anche questa è vera. ■

FIGURA 1.3.

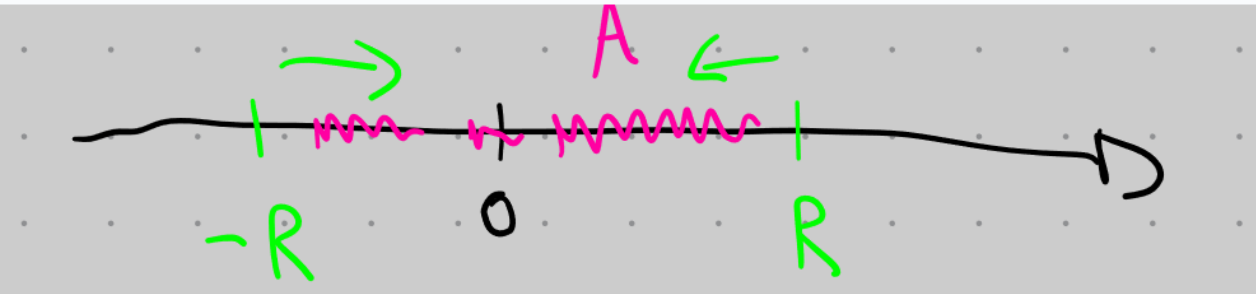
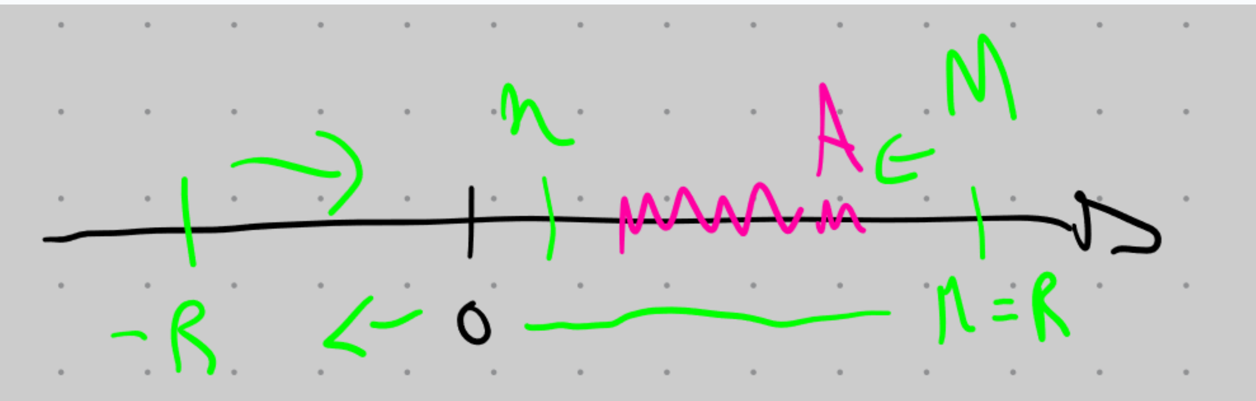


FIGURA 1.4.

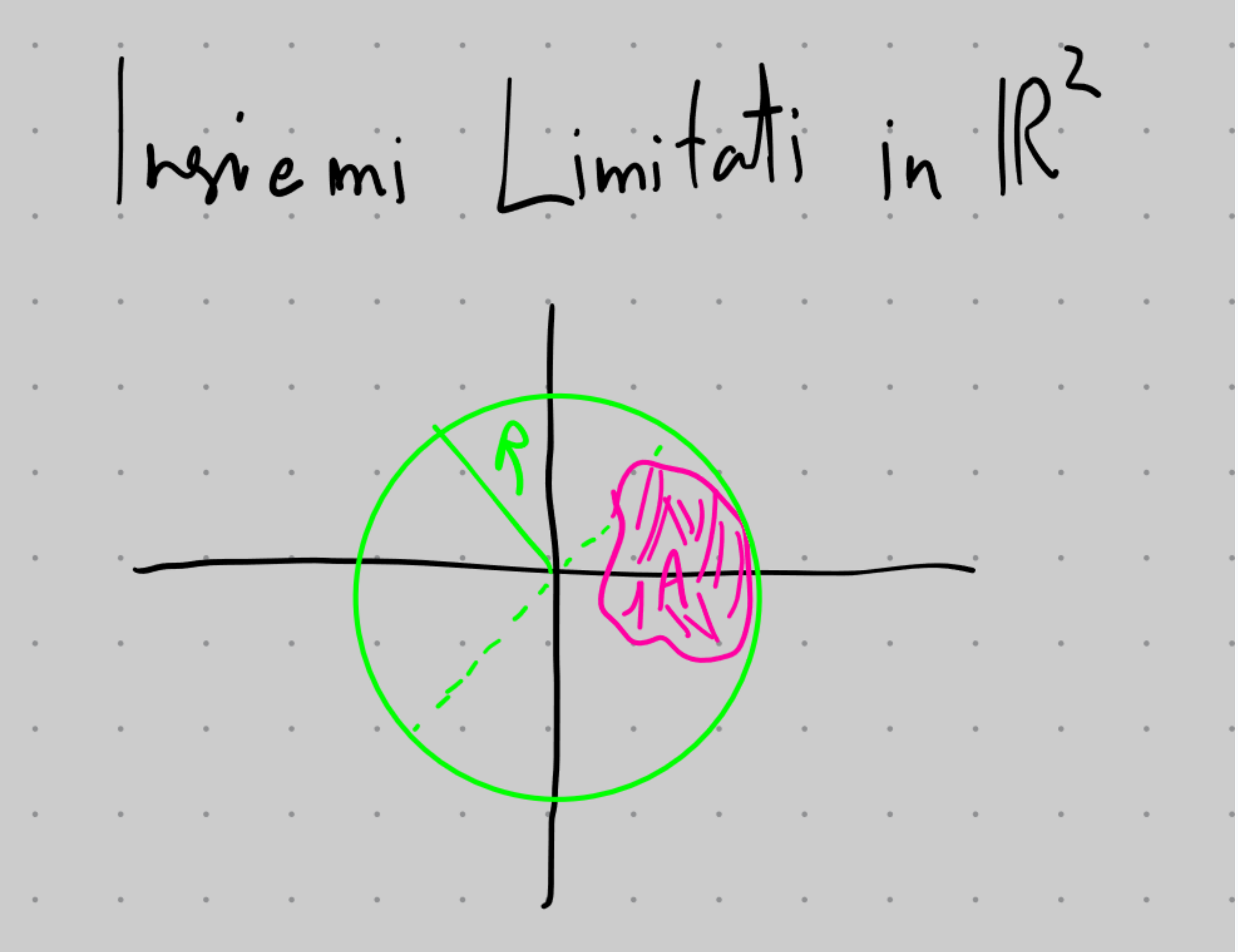


#Osservazione

👁 **Osservazione 1.1. (insiemi limitati in $\mathbb{R}^2$)**

Vorrei trovare un modo per definire gli *insiemi limitati* su un piano π.
E' possibile definirlo tramite il seguente: *"Se riesco a mettere l'insieme A all'interno di una sfera di raggio R, allora esso è limitato."*
Graficamente si ha la *figura 1.5.*.

FIGURA 1.5.



#Definizione

Definizione 1.4. (insieme superiormente illimitato)

Un insieme A si dice *superiormente illimitato* quando neghiamo che A è superiormente limitato; ovvero

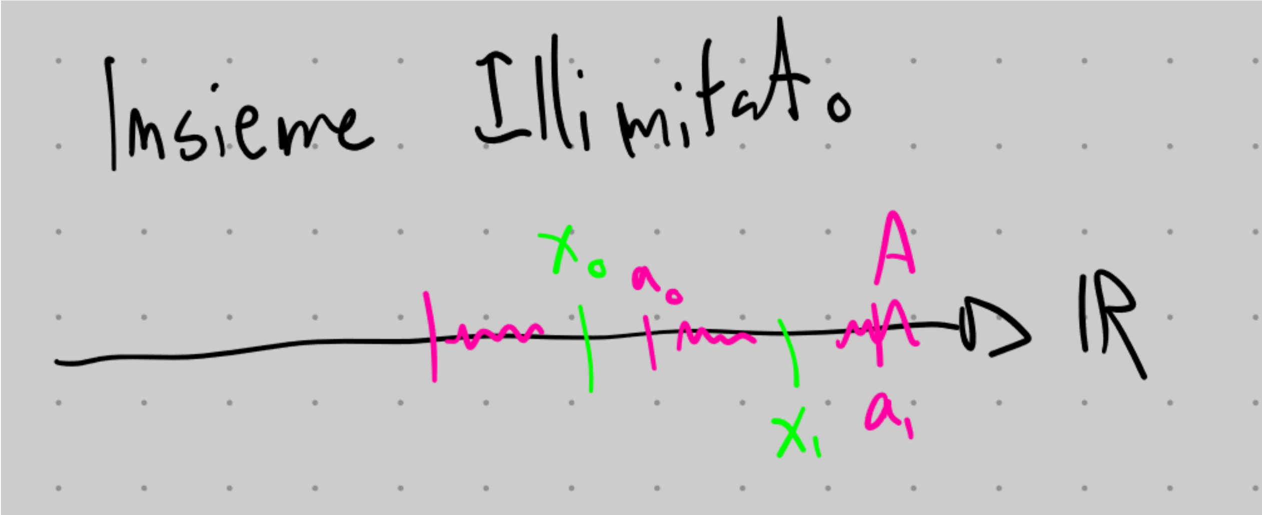
$$\neg(\exists M \in \mathbb{R}, \forall a \in A, a \leq M)$$

ovvero

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists a \in A : a > M$$

che graficamente vuol dire che ad ogni M_n che fissiamo, esiste *sempre* un valore a_n che è più grande di M (*figura 1.6.*).

FIGURA 1.6.



Il discorso è analogo per *insiemi inferiormente illimitati* e *insiemi illimitati*.

2. Maggioranti, massimi; minoranti e minimi

#Definizione

Definizione 2.1. (maggioranti e minoranti)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $M \in \mathbb{R}$.
Se $\forall a \in A, a \leq M$, (ovvero A è *limitato inferiormente*) il valore M si dice un *maggiorante di* A.
Analogamente, se $A \subseteq \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{R}$, m è *minorante di* A quando $\forall a \in A, m \leq a$.

#Definizione

Definizione 2.2. (massimi e minimi)

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$, se:

- μ è maggiorante di A e
- $\mu \in A$
  allora μ è il *massimo di* A.

$$\mu := \begin{cases} \mu \in A \\ \forall a \in A, a \leq \mu \end{cases}$$

Analogamente, se $A \subseteq \mathbb{R}$ e $\nu \in \mathbb{R}$, allora definisco il *minimo di* A:

$$\nu := \text{minimo di A} = \begin{cases} \nu \in A \\ \forall a \in A, a \geq \nu \end{cases}$$

#Proposizione

💬 **Proposizione 2.1. (l'unicità del massimo e/o del minimo)**

Sia A un insieme *limitato inferiormente*.
Suppongo che esistano due massimi di A, μ_1, μ_2; si avrebbe allora $\mu_1 = \mu_2$, in quanto può esistere *solo* il *massimo* di A.

DIMOSTRAZIONE della *proposizione 2.1.* (^85bb5a)
Per assurdo suppongo che $\mu_1 \neq \mu_2$. Per definizione del *massimo*,

$$\begin{cases} \mu_1 \implies \forall a \in A, a \leq \mu_1 \\ \mu_2 \implies \mu_2 \in A \end{cases} \implies \mu_2 \leq \mu_1 \; (1)$$

e

$$\begin{cases} \mu_1 \implies \mu_1 \in A \\ \mu_2 \implies \forall a \in A, a \leq \mu_2 \end{cases} \implies \mu_1 \leq \mu_2 \; (2)$$

Quindi combinando le *(1)* e *(2)*, abbiamo

$$(\mu_2 \leq \mu_1) \wedge (\mu_1 \leq \mu_2) \iff \mu_1 = \mu_2 \blacksquare$$

Il discorso è analogo per il *minimo* di A.

#Esempio

✏ **Esempio 2.1.**

Consideriamo l'intervallo

$$A = \;]1, 2[$$

ci chiediamo se questo intervallo ha *maggioranti e/o minorante* e se ha *massimo e/o minimo*.

1. A ha sia *maggioranti* che *minoranti*, infatti possiamo porre $M = 2$ e $m = 1$; ma possiamo anche porre $M = 3$ e $m = 0$.
   Allora *definiamo* l'insieme dei maggioranti di A,

   $$A^* := \{\text{maggioranti di } A\} = [2, +\infty[$$

   e l'insieme dei minoranti di A,

   $$A_* := \{\text{minoranti di } A\} = \;]-\infty, 1]$$

2. Però A non ha né *massimi* né *minimi.*
   Infatti devo provare che se $x \in A$, allora x NON può essere il *massimo di* A.
   Tracciando l'intervallo A e segnando un punto x all'interno, riesco a trovare

un elemento più grande di x? Sì, se considero la media aritmetica tra x e 2.
Infatti

$$x < \frac{x+2}{2} < 2$$

Analogo il discorso per i *minimi*

3. Estremi superiori e inferiori

Dall'*esempio 2.1.* abbiamo un problema interessante; ovvero *"gli insiemi limitati hanno sempre massimo e minimo?"*.
La risposta è *no*, da quanto visto prima; però è interessante osservare che esiste sempre il *"miglior"* maggiorante e il *"miglior"* minorante. Ora li vediamo.

#Definizione

Definizione 3.1. (estremo superiore e inferiore)

Sia A superiormente limitato.
Chiamo *l'estremo superiore di* A il *minimo* dell'insieme dei *maggioranti di* A (A^*).

Sia B inferiormente limitato.
Chiamo *l'estremo inferiore di* B il *massimo* dell'insieme dei *minoranti di* B (B_*).

4. Teoremi sugli estremi superiori (e inferiori)

#Teorema

Teorema 4.1. (dell'esistenza dell'estremo superiore)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, e A *superiormente limitato*, allora

$$\exists \xi \in \mathbb{R} : \xi \text{ è estremo superiore di } A$$

DIMOSTRAZIONE del *teorema 4.1.* (^1e6dec)
Per ipotesi, abbiamo $A \subseteq \mathbb{R}$ e $A \neq \emptyset$.
Sia quindi $A^* = \{\text{maggioranti di } A\}$; allora $A^* \neq \emptyset$ (in quanto A è non vuoto).
e per definizione del maggiorante di A,

$$\forall a \in A, \forall b \in A^*, a \leq b$$

Osservo quindi che posso applicare l'assioma di Dedekind (o di separazione) per gli insiemi A e A^*. Pertanto

$$\exists \xi : \forall a \in A, \forall b \in A^*; a \leq \xi \leq b$$

In particolare $a \leq \xi$ vuol dire che ξ è *maggiorante di A*; allora $\xi \leq b$ vuol dire che ξ è il *minimo* dei *maggioranti di A*.
Quindi, per definizione ξ è l'*estremo superiore di* A. ■

#Esercizio

Esercizio 4.1.

Dimostrare che se $A \neq \emptyset$ e A è inferiormente limitato, allora

$$\exists \eta \in \mathbb{R} : \eta \text{ è l'estremo inferiore di } A$$

Dato che per ipotesi A è non vuota ed è inferiormente limitata, allora sicuramente

$$\forall a \in A, \forall b \in A_*, b \leq a$$

per la definizione di minorante. Osserviamo che si può applicare l'assioma *S)*; quindi sicuramente

$$\exists \eta \in \mathbb{R} : b \leq \eta \leq a$$

Ovvero η è il massimo di A_* ed è un minorante di A. Ovvero *l'estremo inferiore di* A.

#Teorema

Teorema 4.2. (le proprietà dell'estremo superiore)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\alpha = \sup(A) \iff \begin{cases} \forall a \in A, a \leq \alpha \ (1) \\ \forall \varepsilon > 0, \exists \bar{a} \in A : \bar{a} > \alpha - \varepsilon \ (2) \end{cases}$$

In parole semplici, la *(1)* vuol dire che α è un maggiorante di A; la *(2)* invece vuol dire che per qualsiasi valore ε positivo, allora $a - \varepsilon$ non è maggiorante di A.

DIMOSTRAZIONE del *teorema 4.2.* (^601040)
Sia $\alpha = \sup(A)$, cioè se è il *minimo dei maggioranti* di A.
Ma allora innanzitutto α è un *maggiorante di* A (1)
Ma quindi α è il *minimo dei maggioranti di* A; quindi se sottraggo ad A qualsiasi valore positivo, non è più un maggiorante di A. Pertanto scrivo

$$\begin{gathered} \forall \varepsilon > 0, \ \neg(\forall a \in A, a \leq a - \varepsilon) \\ \exists a \in A : a > a - \varepsilon \end{gathered}$$

ovvero la (2). ■
Volendo si può ragionare anche sulla viceversa, partendo dai presupposti (1) e (2) e verificando che vogliono dire le stesse cose.

#Teorema

Teorema 4.3. (le proprietà dell'estremo inferiore)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, $\beta \in \mathbb{R}$.

$$\beta = \inf(A) \iff \begin{cases} \forall a \in A, a \geq \beta \; (1) \\ \forall \varepsilon > 0, \exists \bar{a} \in A : \bar{a} > a + \varepsilon \; (2) \end{cases}$$

5. Esempio generale

#Esempio

Esempio 5.1.

Considero

$$A = \{\forall n \in \mathbb{N} \diagdown \{0\}, 1 - \frac{1}{n}\}$$

Voglio trovare le seguenti: $\sup(A)$, $\inf(A)$, $\max(A)$, $\min(A)$.

1. Il primo passo è quello di fare un disegno che rappresenta per poter "visualizzare" l'insieme A. (*figura 5.1.*)

Quindi vediamo che

$$A = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots, \frac{n-1}{n}\}$$

1. A è quindi limitato, da quanto si può evincere dal disegno; infatti scegliamo $m = 0$, $M = 1$.
2. Siccome $A \neq \emptyset$, per il *teorema 4.1.* (o *esercizio 4.1.* per esattezza), posso trovare $\inf A$ e $\min A$;

$$\min(A) = \inf(A) = 0$$

   In quanto, per il *teorema 4.2.*

$$\begin{cases} 0 \leq 1 - \frac{1}{n}, \forall n \\ \forall \varepsilon > 0, x + \varepsilon \text{ non è minorante di A} \end{cases}$$

3. Possiamo trovare il *maggiorante* 1. Questo in quanto

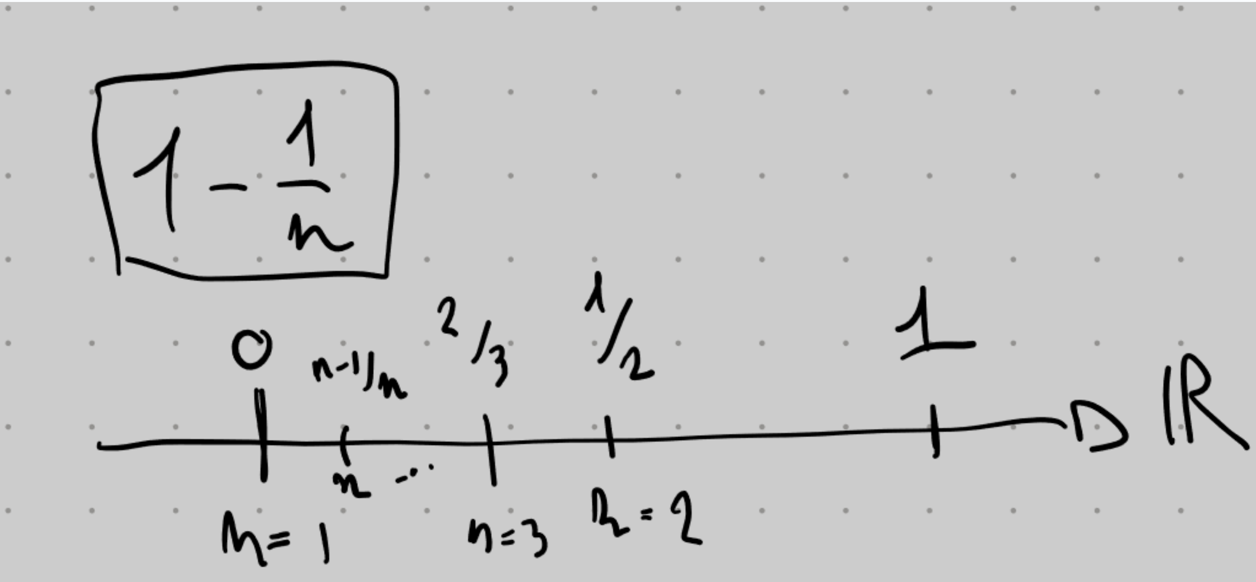
$$\forall n, n-1<n \implies \forall n, \frac{n-1}{n}<1 \iff \forall n, 1-\frac{1}{n}<1$$

In particolare si verifica che è l'*estremo superiore*.
Però se si sceglie $\alpha<1$, sicuramente si verifica

$$\exists n : \alpha < 1-\frac{1}{n}<1$$

ovvero per qualunque $a<1$ si scelga, esiste un n abbastanza grande da poter superare α.
4. Quindi $\sup(A)=1$ e non esiste $\max(A)$.

FIGURA 5.1.



#Osservazione

Osservazione 5.1. (l'esistenza del massimo implica l'esistenza dell'estremo superiore)

Se un insieme ha un *minimo* $\min$ (o *massimo* $\max$), allora tale valore è *l'estremo inferiore* $\inf$ (o *estremo superiore* $\sup$). Però il contrario non deve necessariamente valere, come visto sopra.

B3. Conseguenze dell'esistenza dell'estremo superiore

Conseguenze dell'esistenza dell'estremo superiore

Alcuni importanti dei numeri reali $\mathbb{R}$ come conseguenza del teorema dell'esistenza dell'estremo superiore, numeri naturali $\mathbb{N}$ come sottoinsieme di $\mathbb{R}$, proprietà di Archimede, "$\frac{1}{n}$ diventa piccolo quanto si vuole", densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$. Intervalli chiusi, limitati, inscatolati e dimezzati; teorema di Cantor, forma forte del teorema di Cantor

---

0. Preambolo

Osservando Insiemi limitati, maggioranti, massimo e teorema dell'estremo superiore, notiamo che per qualunque insieme *superiormente limitato* deve esistere un *estremo superiore*. Da questo discendono a cascata una serie di proprietà (o teoremi) importanti.
Richiamiamo dunque il seguente teorema:

#Richiamo

Richiamo 0.a. (Esistenza di $\sup$).

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, e A *superiormente limitato*.
Allora

$$\exists \xi \in \mathbb{R} : \xi \text{ è estremo superiore di } A; \xi = \sup A$$

1. $\mathbb{N}$ è superiormente illimitato

#Teorema

Teorema 1.1. ($\mathbb{N}$ è superiormente illimitato).

$\mathbb{N}$ è superiormente illimitato. Ovvero *non è superiormente limitato*.
Infatti nei numeri reali $\mathbb{R}$ possiamo trovare i numeri naturali $\mathbb{N}$.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *teorema 1.1.* (^8eb65a)
Per assurdo suppongo che esista un $M \in \mathbb{R}$ maggiorante di $\mathbb{N}$ tale che

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \leq M$$

Quindi $\mathbb{N}$ è sia non vuoto che superiormente limitato. Da ciò (secondo il teorema dell'esistenza dell'estremo superiore) discende che esista il superiore estremo ξ;

$$\exists \xi \in \mathbb{R} : \xi = \sup(\mathbb{N})$$

Ora applico la *proprietà (2) degli estremi superiori con $\varepsilon = 1$; ovvero*

$$\exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \bar{n} > \xi - 1$$

Ma allora

$$\bar{n} + 1 > \xi = \sup(\mathbb{N})$$

il che è assurdo in quanto si troverebbe un numero che supera l'*estremo superiore*.
■

2. Proprietà di Archimede; Archimedeità di $\mathbb{R}$

#Teorema

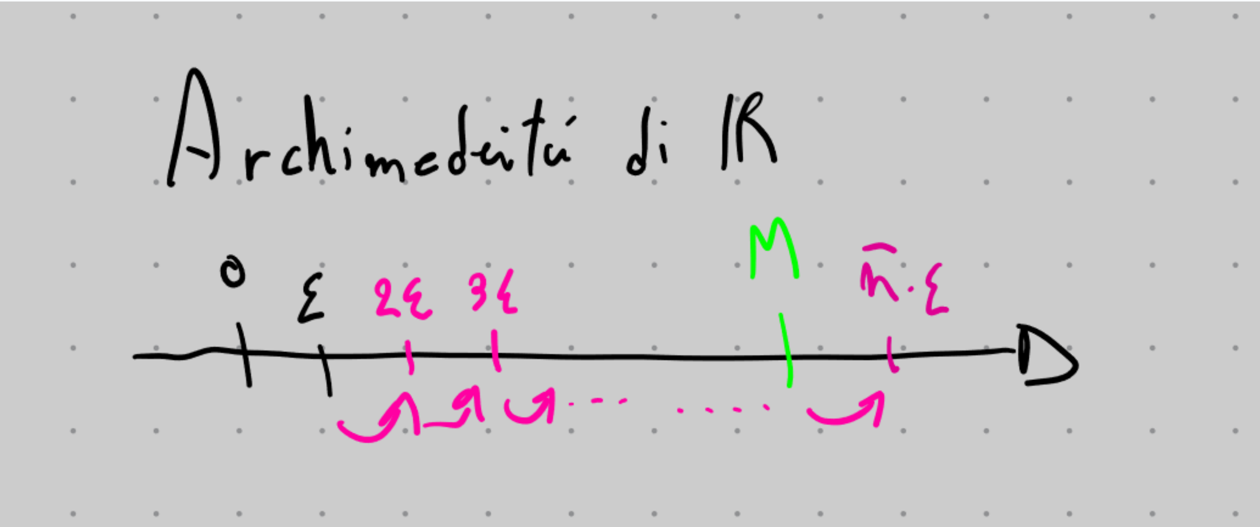
Teorema 2.1. (Archimedeità di $\mathbb{R}$).

Siano $\varepsilon, M \in \mathbb{R}$ ove $\varepsilon > 0$, $M > 0$ (l'idea sarebbe che ε è un numero *arbitrariamente piccolo*, M invece un numero *arbitrariamente grande*), allora vale la seguente:

$$\exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \bar{n} \cdot \varepsilon > M$$

Ovvero prendendo un piccolo arbitrariamente piccolo ε e possibile farlo sommare $\bar{n}$ volte e superare il numero arbitrariamente grande M.

FIGURA 2.1. (*Rappresentazione grafica della proprietà di Archimede*)



#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *teorema 2.1.* (^d95d40)
Suppongo (per assurdo) che questo teorema non è vero; ovvero negandolo, abbiamo

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \cdot \varepsilon < M$$

ovvero non saremo mai in grado di superare M.
Allora definendo E l'insieme di tutti i numeri *"ottenuti"* sommando ε a se stesso n volte,

$$E = \{\forall n \in \mathbb{N}, n \cdot \varepsilon\}$$

questo è *superiormente limitato* per supposizione (anche non vuoto).
Sia allora

$$\xi = \sup E$$

Applico la seconda proprietà dell'*estremo superiore* ξ, con ε quello inserito nella ipotesi, ovvero

$$\exists \bar{n} : \bar{n} \cdot \varepsilon > \xi - \varepsilon$$

ma allora consegue che

$$\varepsilon(1 + \bar{n}) > \xi$$

che implicherebbe l'esistenza di un numero moltiplicato per ε che supera $\xi = \sup E$, il che è un assurdo. ■

$\frac{1}{n}$ diventa piccolo quanto si vuole

#Corollario

Corollario 2.1. ($\frac{1}{n}$ diventa piccolo).

Sia $\varepsilon > 0$ (un numero piccolo).
Allora

$$\exists \bar{n} \in \mathbb{N} : 0 < \frac{1}{\bar{n}} < \varepsilon$$

ovvero prendendo un numero arbitrariamente *piccolo*, deve esistere un $\frac{1}{n}$ che sarà ancora più *piccolo* del numero piccolo scelto.

#Dimostrazione
DIMOSTRAZIONE del *corollario 2.1.* (^16a1fe)
Considero *la proprietà di Archimede* (^d95d40) ove fisso $\varepsilon > 0$ e $M = 1$.
Pertanto,

$$\exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \varepsilon \cdot \bar{n} > 1 (> 0)$$

Ora, dividendo per $\bar{n}$ da ambo le parti

$$\varepsilon > \frac{1}{\bar{n}} > 0 \blacksquare$$

3. Densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$

#Teorema

Teorema 3.1. (Densità dei razionali nei reali).

Si dice che $\mathbb{Q}$ è *denso* in $\mathbb{R}$, ovvero siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, allora esiste $q \in \mathbb{Q}$ tale che

$$a < q < b$$

quindi tra due numeri reali a, b possiamo sempre trovarci un numero razionale.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *teorema 3.1.* (^e279b1)
Per la dimostrazione tratteremo di tre casi distinti; ovvero

1. Quando $a < 0 < b$ non c'è nulla da dimostrare, in quanto abbiamo già $q = 0$.
2. Quando $a < b < 0$ allora possiamo invertire i segni, ottenendo la situazione nella *figura 3.1.*; quindi $q = -\frac{k}{n}$, che troveremo, va bene.
3. Quando $0 < a < b$, l'unico caso da trattare:
   Innanzitutto chiamo la distanza tra i due punti $\varepsilon = b - a$ (e per forza dev'essere maggiore di 0, in quanto $b > a > 0$).
   Dopodiché, usando il *teorema 3.1.* (^e279b1), abbiamo che

   $$0 < \frac{1}{n} < \varepsilon = b - a$$

   Ora, per il *principio di Archimede* (^d95d40), abbiamo (con $\varepsilon = \frac{1}{n}$ e $M = a$) che

   $$\exists k : \frac{k}{n} > a$$

   Quindi, aggiungendo a da tutte le parti e considerando l'ultimo punto ho,

   $$a < \frac{k}{n} < b$$

   e sicuramente so che non può essere che $\frac{k}{n} > b$ in quanto $\frac{1}{n} < b - a$. (ovvero il salto per arrivare a b sarebbe troppo *"grande"*)
   Graficamente, la situazione è descritta nella *figura 3.2.*. $\blacksquare$

FIGURA 3.1.

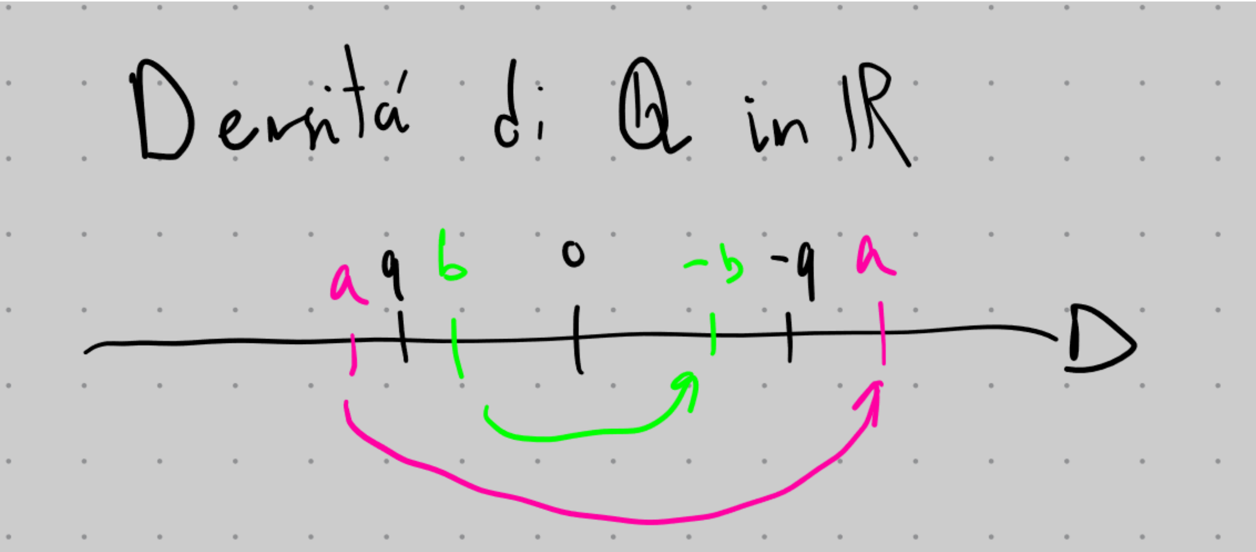
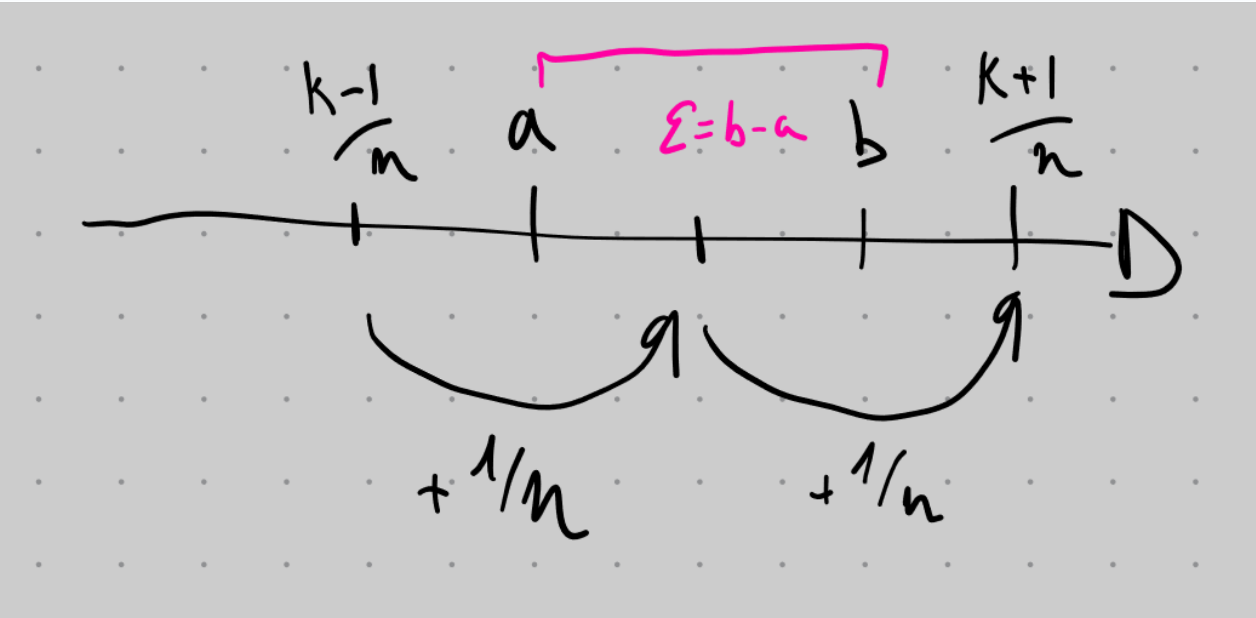


FIGURA 3.2.



4. Teorema di Cantor

Considerando gli intervalli chiusi, limitati, inscatolati e dimezzati, abbiamo il seguente teorema.

Forma debole

#Teorema

Teorema 4.1. (Teorema di Cantor, forma debole).

Sia $(I_n)_n$ una successione di intervalli *chiusi, limitati e inscatolati*; allora l'intersezione di tutti gli intervalli è non-vuota.

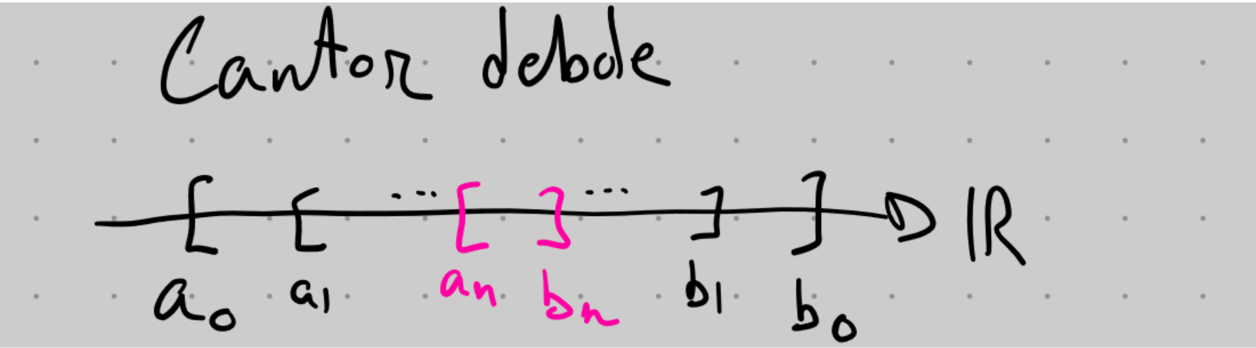
$$\bigcap_n I_n \neq \emptyset$$

#Osservazione

Osservazione 4.1. (la rappresentazione degli intervalli di Cantor)

Tutti gli intervalli si rappresentano graficamente come si fa nella *figura 4.1.*.

FIGURA 4.1. (*Osservazione 4.1.*)



#Osservazione

Osservazione 4.2. (il tipo degli intervalli scelti è una condizione necessaria)

Notiamo che il fatto che gli intervalli *debbono essere chiusi* è una condizione necessaria al *teorema 4.1.* (^a981ea); infatti troviamo un *controesempio* per cui non vale il *teorema debole di Cantor* quando consideriamo insiemi *aperti* o *illimitati*.

#Esempio

Esempio 4.1.

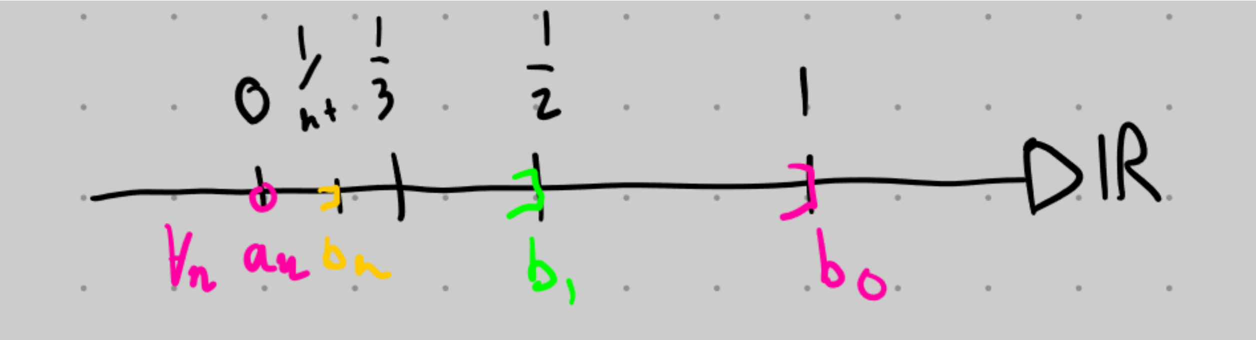
Consideriamo gli intervalli

$$I_0 = \,]0,1]\;;\; I_1 = \,]0, \frac{1}{2}\;;\; \ldots\;;\; I_n = \,]0, \frac{1}{n+1}]$$

Che graficamente viene rappresentato nella *figura 4.2.*.
Notiamo che l'intersezione di tutti gli intervalli in questo caso viene $\emptyset$;

$$\bigcap_n I_n = \emptyset$$

FIGURA 4.2. (*Esempio 4.1.*)



DIMOSTRAZIONE dell'*esempio 4.1.* (^493112)
Consideriamo i seguenti due casi:

1. Se $x \leq 0$, allora x automaticamente non sta all'interno di nessun intervallo I_n.
2. Se $x > 0$, allora per la *proprietà di Archimede* (^d95d40)

$$\exists n \in \mathbb{N} : x > \frac{1}{n+1} > 0$$

allora x sta al dì fuori dell'intervallo

$$x \notin \left]0, \frac{1}{n+1}\right]$$

Pertanto non ci sono elementi comuni, rendendo l'intersezione di tutti gli intervalli l'insieme vuoto $\emptyset$.

#Esempio

Esempio 4.2.

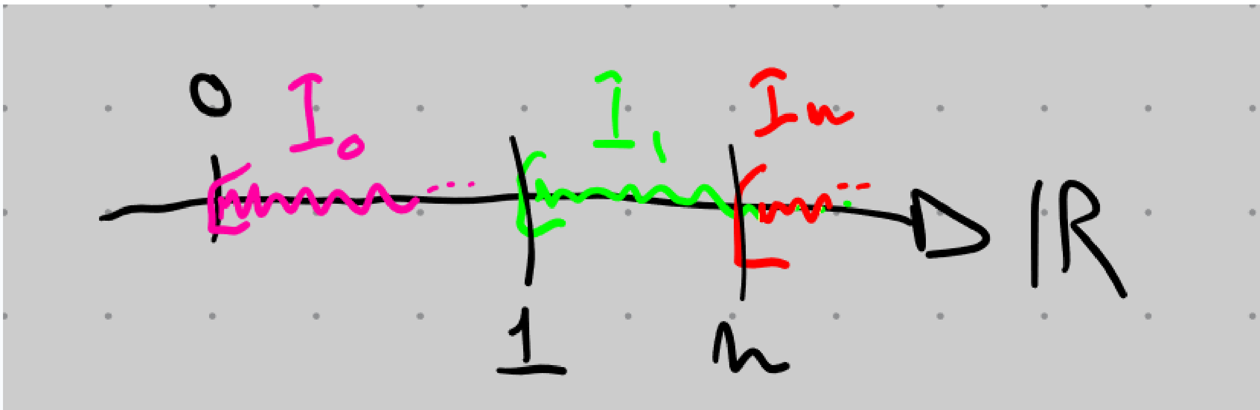
Consideriamo ora degli intervalli *illimitati* (ovvero *non limitati*); di nuovo il teorema non vale.
Ho

$$I_n = [n, +\infty[$$

Che graficamente viene rappresentato mediante la *figura 4.3.*
Supponiamo di scegliere un punto x nell'intorno I_n (ovvero ≥ 0); allora per *la proprietà di Archimede* (^d95d40) esisterà un intorno I_{n+1} che lo supera.
Quindi se ad ogni punto $x \geq 0$ fissiamo un intorno I_x vi è sempre un intorno I_k che supera quel punto fissato; pertanto l'intersezione di tutti gli insiemi è $\emptyset$.

$$\bigcap_n I_n = \emptyset$$

FIGURA 4.3. (*Esempio 4.2.*)



#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *teorema di Cantor, forma debole* (^a981ea)
Consideriamo gli insiemi A come gli *"estremi sinistri"* e B come gli *"estremi destri"*.

$$
\begin{aligned}
A = \{a_n, n \in \mathbb{N}\} \\
B = \{b_n, n \in \mathbb{N}\}
\end{aligned}
$$

Inoltre ho

$$
\begin{aligned}
\forall n, \forall m; \; a_n &\leq b_m \\
b_m &\geq a_n
\end{aligned}
$$

Se si vuole verificare la "proprietà" appena enunciata, allora si può considerare due casi:

1. $n \leq m$; si avrebbe $[a_m, b_m] \subseteq [a_n, b_n]$; che graficamente equivale alla *figura 4.4.*; pertanto è intuibile che $b_m \geq a_n$.
2. $n > m$; si avrebbe in questo caso $[a_n, b_n] \subseteq [a_m, b_m]$ che graficamente equivale alla *figura 4.5.*; stesso discorso di prima, è intuibile che $b_m \geq a_n$.

Ora chiamo $\alpha = \sup A$, il quale è garantito in quanto A è *limitato superiormente* (infatti abbiamo dalla proprietà appena enunciata abbiamo che b_m è il *maggiorante* di a_n)
Dato che abbiamo il *minorante* dei *maggioranti di* A (ovvero α), da qui segue che B è *inferiormente limitato*. (oppure dato che $a_n \leq b_m \iff b_m \geq a_n$)

Allora chiamo $\beta = \inf B$ e ho

$$
\beta \geq \alpha
$$

Graficamente ho la *figura 4.6.*.
Io ho quindi

$$
[\alpha, \beta] \subseteq [a_n, b_n], \forall n
$$

Allora

$$[\alpha, \beta] \subseteq \bigcap_n I_n \implies \bigcap_n I_n \neq \emptyset$$

Anzi, sapendo dalla seconda proprietà degli estremi superiori (o estremi inferiori) abbiamo che se scegliamo un $x = \alpha - \varepsilon$ (per un $\varepsilon > 0$), allora esiste un a_n tale che $a_n > x$; di conseguenza x sta al di fuori dell'intervallo $[a_n, b_n]$; analogamente se scegliamo un $y = \beta + \eta$ (per un $\eta > 0$), allora esiste un b_n tale che $y > b_n$,
Graficamente ho la *figura 4.7.*.
Di conseguenza

$$x, y \notin [a_n, b_n]$$

Pertanto si può sicuramente affermare che

$$\bigcap_n I_n = [\alpha, \beta] \blacksquare$$

FIGURA 4.4.

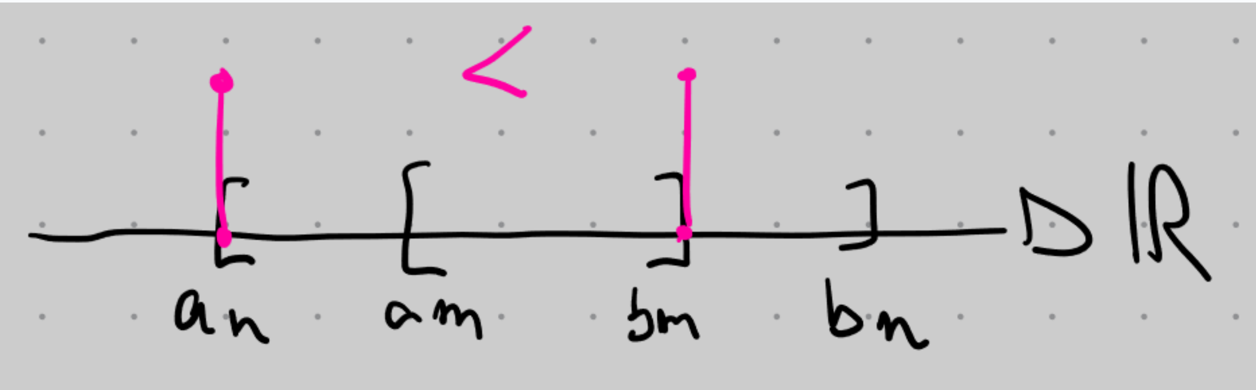


FIGURA 4.5.

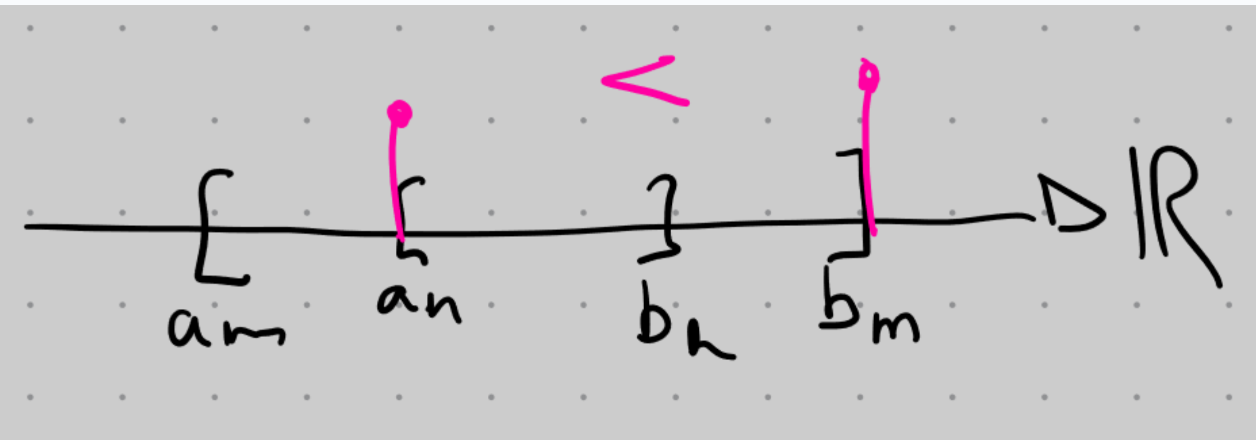


FIGURA 4.6. (*Idea iniziale*)

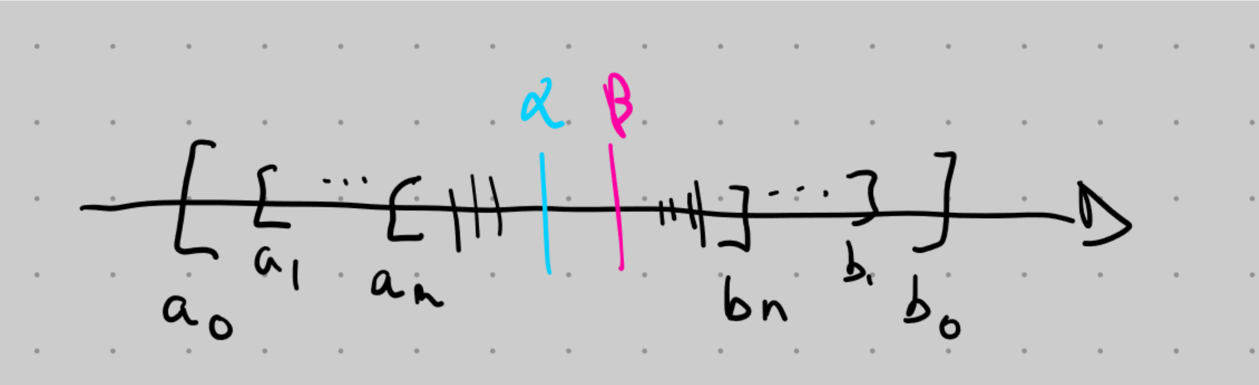
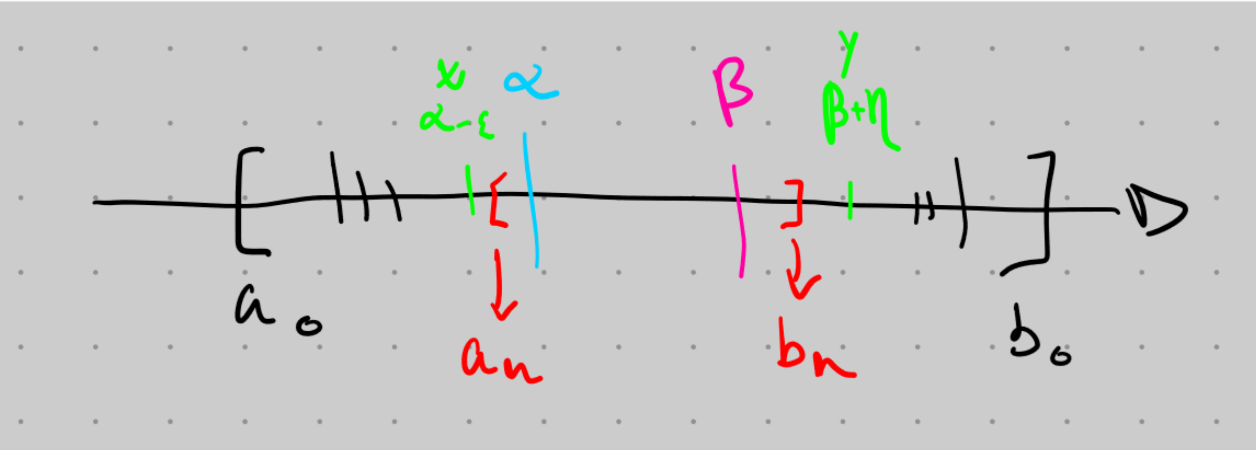


FIGURA 4.7. (*Situazione finale*)



Forma forte

#Teorema

Teorema 4.2. (Teorema di Cantor, forma forte).

Sia $(I_n)_n$ una successione di intervalli *chiusi, limitati, inscatolati e dimezzati*; allora l'intersezione di tutti gli intervalli deve contenere un unico punto ξ;

$$\exists \xi \in \mathbb{R} : \bigcap_n I_n = \{\xi\}$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *teorema di cantor, forma forte* (^78d038)
La *forma debole dello stesso teorema* (^a981ea) mi dice che

$$\bigcap_n I_n = [\alpha, \beta]$$

dove α è l'estremo superiore degli *"estremi sinistri"* a_n e b l'estremo inferiore degli *"estremi destri"* b_n.
Ora, considerando che gli insiemi sono pure *dimezzati*, so che (Intervalli > ^7942fa):

$$
\begin{aligned}
b_n - a_n &= \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} \\
&= \frac{b_{n-2} - a_{n-2}}{2^2} \\
&\text{...andando avanti finchè si raggiunge } n \text{...} \\
&= \frac{b_0 - a_0}{2^n}
\end{aligned}
$$

Ora mi ricordo che $n \leq 2^n$ (che può essere dimostrata per *induzione*)
Allora si può *"maggiorare"* l'espressione di prima, ovvero

$$
a_n - b_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n} \leq \frac{b_0 - a_0}{n}
$$

ovviamente ricordandosi di cambiare il verso in quanto i numeri li troviamo al denominatore.
Ora, supponendo per assurdo che $\alpha < \beta$ ovvero nel senso che l'intervallo $[\alpha, \beta]$ ha più di un elemento, allora avremmo che

$$
\forall n, \frac{b_0 - a_0}{n} \geq b_n - a_n \geq \beta - \alpha > 0
$$

ovvero

$$
\forall n, \frac{b_0 - a_0}{n} \geq \beta - \alpha > 0
$$

che però per *teorema 2.1.* (^d95d40) è impossibile, ovvero nel caso che abbiamo ora stiamo descrivendo che esiste un punto $\beta - \alpha$ maggiore di 0 che non è raggiungibile da $\frac{b_0 - a_0}{n}$(quando invece è vero che tutti i punti > 0 sono raggiungibili da tale espressione).
Quindi, per assurdo, raggiungiamo alla conclusione che

$$
\beta = \alpha
$$

ovvero abbiamo l'intorno

$$
[\beta, \beta] \text{ o } [\alpha, \alpha]
$$

che comprende solo il punto ξ. ■

SEZIONE C. LE FUNZIONI DI VARIABILE REALE

C1. Funzioni di potenza, radice e valore assoluto

Funzioni di potenza, radice e valore assoluto

Definizioni di funzione potenza p_n e radice p_n^{-1}. Definizione del valore assoluto $|\cdot|$; disuguaglianza triangolare. Alcuni esercizi generali.

---

1. Funzione potenza

#Definizione

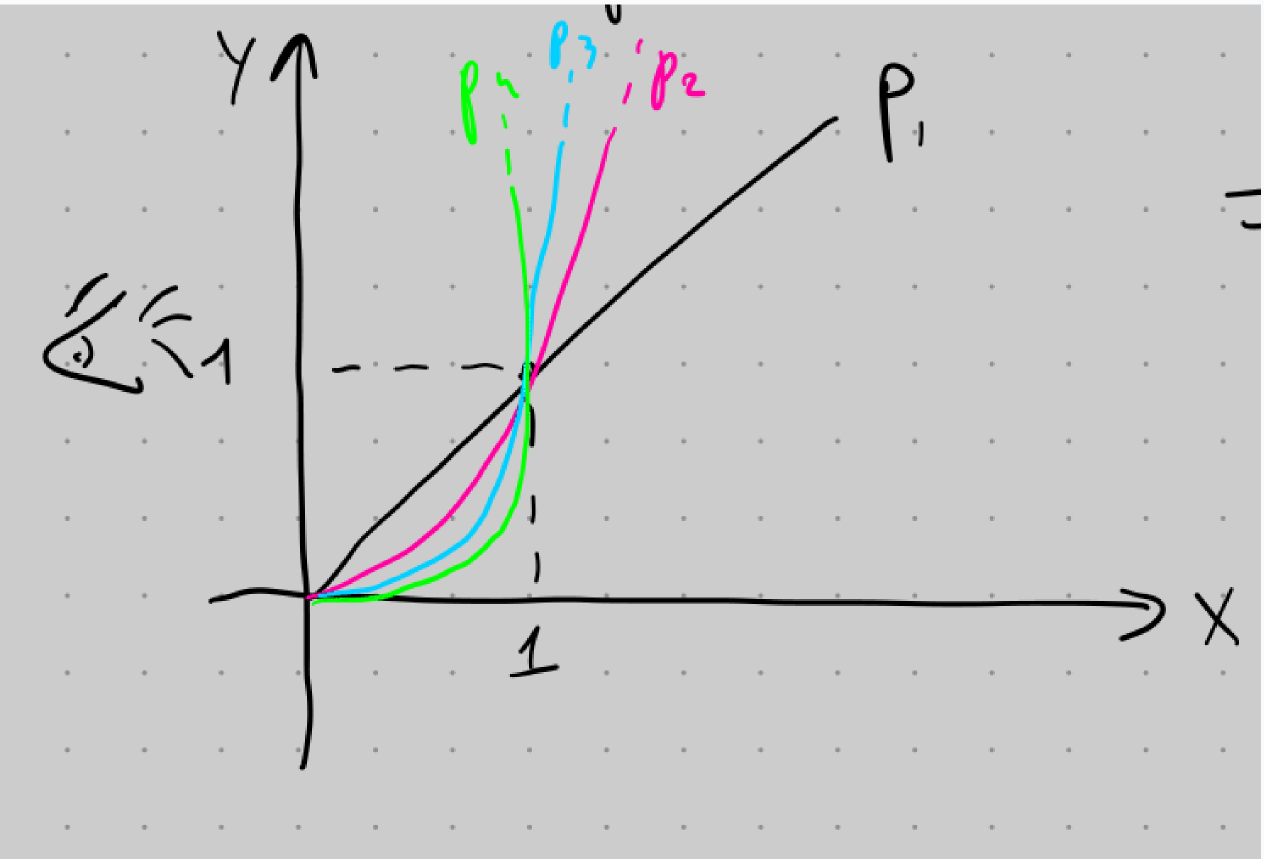
Definizione 1.1. (funzione potenza n-esima)

Sia $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$; definiamo quindi la *funzione potenza n-esima* come

$$p_n : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty); x \mapsto p_n(x) = x^n$$

Si riporta un grafico di alcune funzioni potenza p_n (*figura 1.1.*).

FIGURA 1.1.



#Osservazione

Osservazione 1.1. (l'ordinamento delle potenze n-esime)

Si nota che

$$\begin{aligned} &\forall x \in [0,1) : p_1(x) > p_2(x) > \ldots > p_n(x) \\ &\forall x \in (1,+\infty) : p_1(x) < p_2(x) < \ldots < p_n(x) \end{aligned}$$

#Proposizione

Proposizione 1.1. (la potenza è strettamente crescente)

Si vede dal grafico che la funzione è *strettamente crescente*, ovvero se prendiamo $x_1, x_2 \in E$ (dominio) ove $x_2 > x_1$, allora sicuramente abbiamo

$$p_n(x_2) > p_n(x_1)$$

DIMOSTRAZIONE della *proposizione 1.1.* (^0aedc2)
Prendiamo ad esempio p_2; abbiamo innanzitutto

$$0 \leq x_1 < x_2$$

allora li moltiplichiamo per x_1 e x_2, ottenendo

$$\begin{cases} x_1 < x_2 x_1 \\ x_1 x_2 < x_2^2 \end{cases}$$

quindi

$$0 \leq x_1^2 < x_2^2 \iff p_2(x_1) < p_2(x_2), \forall x_1, x_2$$

#Proposizione

Proposizione 1.2. (la potenza è biiettiva)

Notiamo che la *funzione potenza* p_n (o x^n) è *biiettiva* (Funzioni > ^d193b2), ovvero è sia *suriettiva* che *iniettiva*.

DIMOSTRAZIONE della *proposizione 1.2.* (^f020e9)
Per dimostrare che è iniettiva basta riosservare quanto visto nella *proposizione 1.1.*; ovvero che la funzione è strettamente crescente.
Dopodiché la funzione è anche suriettiva in quanto una conseguenza dell'assioma di separazione S). ■

2. Funzione radice

#Osservazione

Osservazione 2.1. (la funzione potenza è biettiva, pertanto invertibile)

Dalla *proposizione 1.2.* abbiamo notato che la *funzione potenza* $p_n(x)$ è *biiettiva*; pertanto per il *teorema dell'esistenza della funzione inversa* (Funzioni > ^7b369f) esiste una funzione inversa, la *"radice"*, che definiremo.

#Definizione

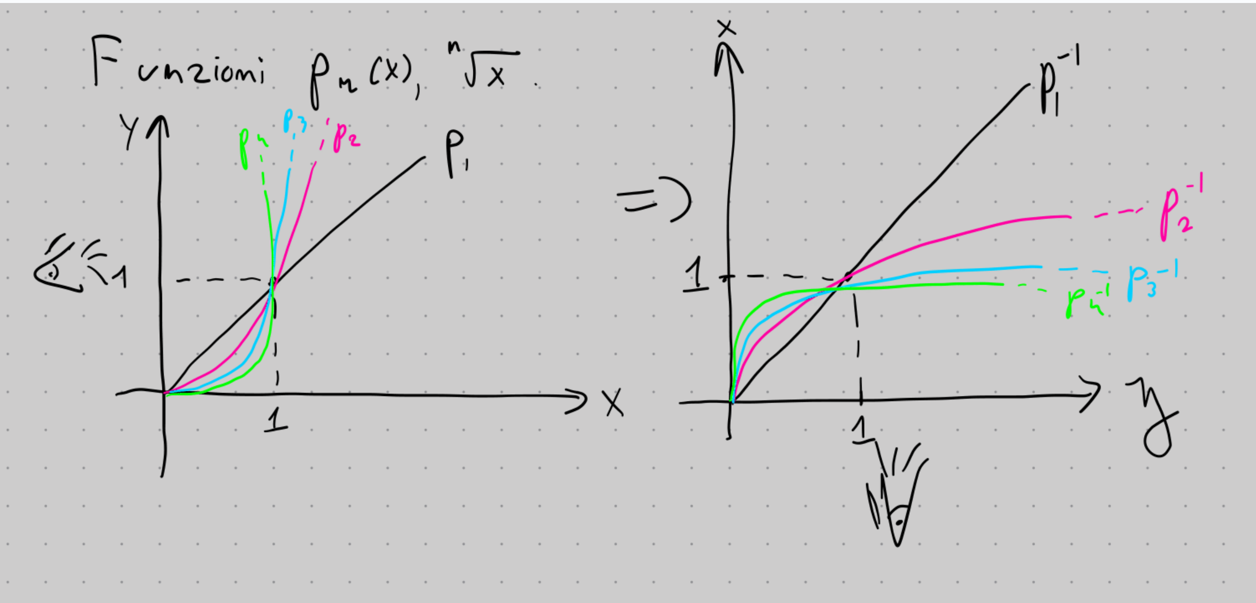
Definizione 2.1. (funzione radice n-esima)

Definiamo la **funzione radice n-esima** p_n^{-1}

$$p_n^{-1}:[0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty); x^n \mapsto x$$

Graficamente questo equivale a *"scambiare le assi"* del grafico della funzione, oppure di *"cambiare la prospettiva da cui si guarda il grafico"*, ovvero la *figura 2.1.*.

FIGURA 2.1.



3. Valore assoluto

#Definizione

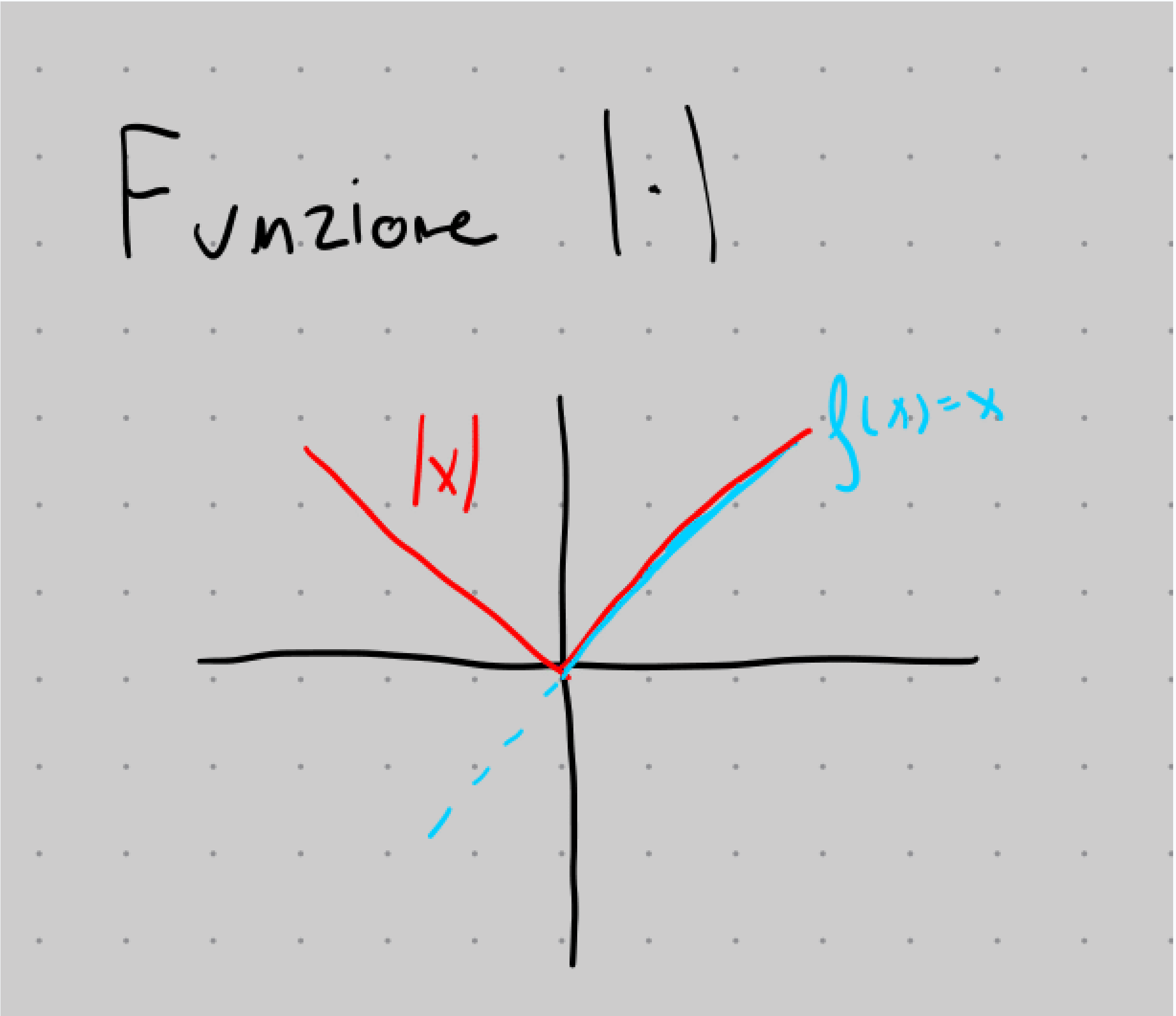
Definizione 3.1. (il valore assoluto)

Sia il *valore assoluto* una *funzione*

$$|\cdot|: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; x \mapsto |x| = \begin{cases} x : x \geq 0 \\ -x : x < 0 \end{cases}$$

Ad esempio, il grafico di $|x|$ si rappresenta nella *figura 3.1.*.

FIGURA 3.1.



#Osservazione

Osservazione 3.1. (nesso tra potenza, radice e valore assoluto)

Notare che

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

Proprietà del valore assoluto, disuguaglianza triangolare

#Teorema

Teorema 3.1. (prima condizione necessaria e sufficiente del valore assoluto)

Sia $a \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, allora

$$|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$$

DIMOSTRAZIONE del *teorema 3.1.* (^e39752)
Posso considerare due casi, ovvero
$x \geq 0$: abbiamo quindi $|x| = x$, pertanto

$$\begin{cases} |x| \leq a \implies x \leq a \\ x \geq 0 \implies x \geq -a \end{cases} \longrightarrow -a \leq x \leq a$$

$x \leq 0$: abbiamo quindi $|x| = -x$ e il discorso è analogo:

$$\begin{cases} |x| \leq a \implies -x \leq a \iff x \geq -a \\ x \leq 0 \implies x \leq a \end{cases} \longrightarrow -a \leq x \leq a$$

■

#Teorema

Teorema 3.2. (seconda condizione necessaria e sufficiente)

Prendendo le stesse premesse di prima, abbiamo

$$|x| \geq a \iff x \leq -a \land x \geq a$$

#Teorema

Teorema 3.3. (la disuguaglianza triangolare)

Siano $x, y \in \mathbb{R}$, allora abbiamo

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

DIMOSTRAZIONE del *teorema 3.3.* (^5bd8b3)
Se abbiamo da un lato

$$-|x| \leq x \leq |x|$$

e

$$-|y| \leq y \leq |y|$$

allora sommandoli si avrebbe

$$-(|x|+|y|) \leq x+y \leq |x|+|y|$$

che per la prima proprietà equivale a dire

$$|x+y| \leq |x|+|y| \blacksquare$$

4. Esercizi misti

Presentiamo degli esercizi, ovvero *equazioni* (Equazioni e soluzione) o *disequazioni* contenenti queste funzioni appena presentate.

ESERCIZIO 4.1. Determinare

$$3x+5=0$$

ESERCIZIO 4.2. Disegnare il grafico di

$$f(x)=3x+5$$

con $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

ESERCIZIO 4.3. Risolvere

$$x^2-2x-3=0$$

ESERCIZIO 4.4. Disegnare

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x^2-2x-3$$

ESERCIZIO 4.5. Risolvere

$$\frac{x^2-2x+3}{x-3} \geq 0$$

ESERCIZIO 4.6. Risolvere

$$\sqrt{x+1} \geq 3x+2$$

ESERCIZIO 4.8. Risolvere

$$\frac{x-3}{2x+1} > \frac{x-1}{x+1}$$

ESERCIZIO 4.8. Risolvere

$$\sqrt{6x+1} \geq 3-2x$$

ESERCIZIO 4.9. Risolvere

$$|x+4|<8$$

ESERCIZIO 4.10. Risolvere

$$|\frac{2x+1}{x^2-4}|\geq 1$$

ESERCIZIO 4.11. Risolvere

$$|x+1|\geq|x-1|$$

C2. Funzioni trigonometriche

Funzioni trigonometriche

Definizione delle funzioni trigonometriche $\sin$, $\cos$; *le proprietà di queste funzioni; alcuni valori noti; funzioni inverse* $\arcsin$, $\arccos$. *Forme di somma e sottrazione di* $\sin$ *e* $\cos$. *Funzioni* $\tan, \arctan$.

---

0. Preambolo

#Osservazione

Osservazione 0.0. (discorso introduttorio)

Per ora non abbiamo ancora gli strumenti per poter *rigorosamente* definire le funzioni di *seno* e *coseno*, tuttavia possiamo definirle per ora in questo modo. Però prima di tutto bisogna fare delle considerazioni.

Allora prendo il piano cartesiano e considero la *circonferenza unitaria* Γ:

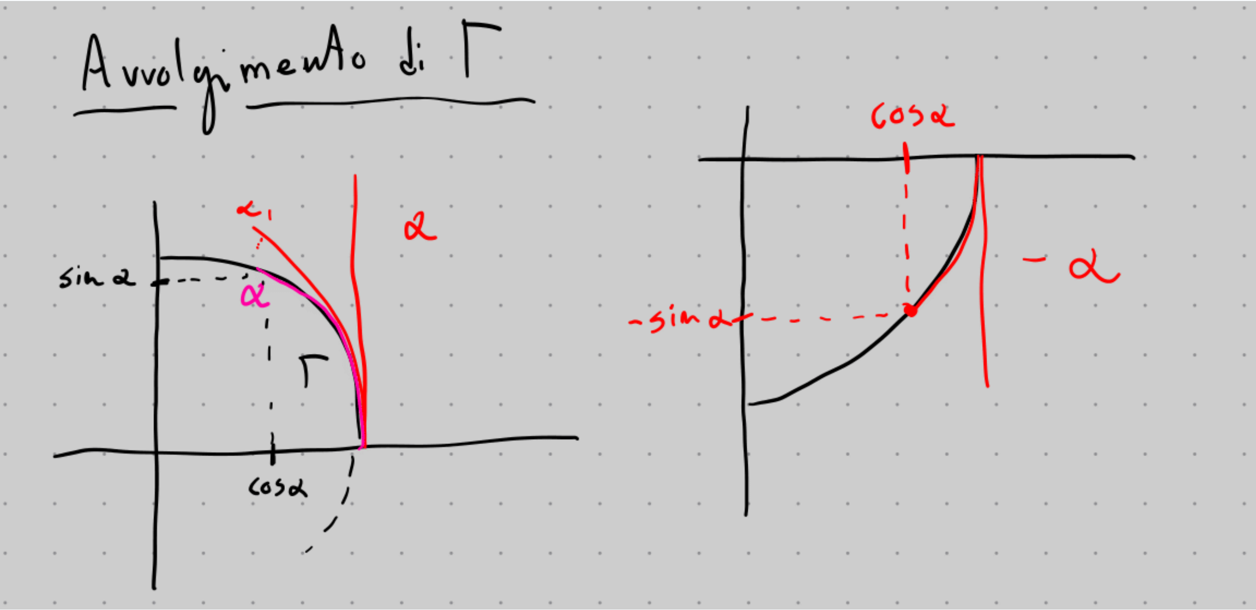
$$\Gamma := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$$

e considero l'asse r_1 concorde con l'asse y e che "*appoggiamo*" in $(1,0)$.

Quindi prendo un punto qualsiasi $\alpha \in \mathbb{R}$ dell'asse, lo *"avvolgo"* su Γ, poi la retta si avvicina man mano all'arco, infine il punto *"finisce"* su Γ e ottengo il punto $(c(\alpha), s(\alpha))$

Graficamente questo processo rappresenta il seguente (*figura 0.A.*)

FIGURA 0.A.



#Osservazione

Osservazione 0.1. (questa definizione è poco rigorosa)

Si osserva che in questo processo di *"avvolgimento"* si suppone che la lunghezza del segmento non si cambia mai, in quanto viene solo *"piegato"*; quindi se il segmento r_1 è lungo α, allora *l'arco* è lungo α, che non è banale da misurare. Infatti si deve fare un *procedimento di approssimazione* con segmenti. Questo è il problema di questa definizione *non-rigorosa*.

1. Definizione di seno e coseno

#Osservazione

Osservazione 1.1. (prima considerazione)

Considerando tutto detto sopra, consideriamo la funzione

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \Gamma \\ \alpha &\mapsto (c(\alpha), s(\alpha)) \end{aligned}$$

Dove Γ varia nell'intervallo $[0, 1]$.

Così otteniamo le seguenti funzioni.

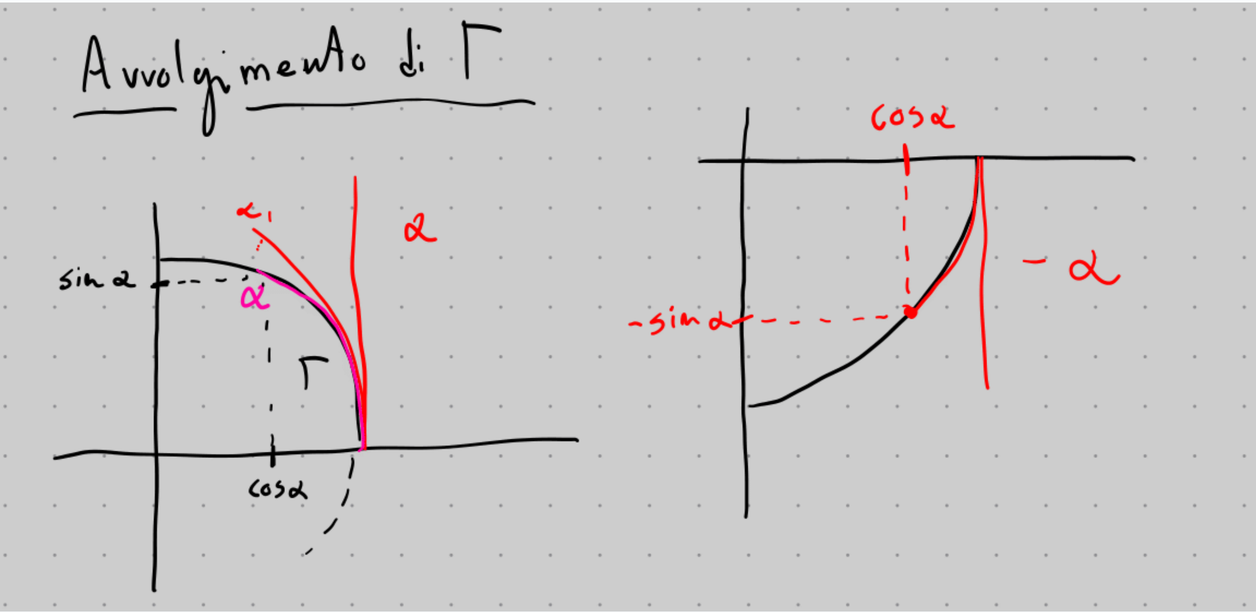
#Definizione

Definizione 1.1. (seno e coseno)

$$\begin{aligned}\cos : \ & \mathbb{R} \longrightarrow [-1,1] \\ & \alpha \mapsto \cos(\alpha) \in \Gamma \\ \sin : \ & \mathbb{R} \longrightarrow [-1,1] \\ & \alpha \mapsto \sin(\alpha) \in \Gamma\end{aligned}$$

Dove $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ rappresenta la posizione del punto dell'*arco piegato* e α rappresenta la *lunghezza dell'arco*. Se α è negativa, allora si orienta l'asso in basso. Graficamente si ha la *figura 1.1.*.

FIGURA 1.1.



2. Proprietà

#Proposizione

Proposizione 2.1. (π)

Diamo un nome alla *lunghezza della semi-circonferenza unitaria*,

$$(\pi \in \mathbb{R}, \pi \sim 3.14\dots)$$

quindi la *circonferenza* è lunga 2π.

#Proposizione

Proposizione 2.2. (l'identità fondamentale della trigonometria

Dato un $\alpha \in \mathbb{R}$, si verifica che

$$(\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 = 1$$

in quanto entrambi i punti $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ appartengono alla circonferenza Γ; infatti $x^2 + y^2 = 1$ è la proprietà caratterizzante di Γ.

#Proposizione

💬 Proposizione 2.3. (seno e coseno sono funzioni periodiche)

Le funzioni $\cos$, $\sin$ sono *periodiche*, ovvero che prendendo un $k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} &\text{i. } \cos(\alpha + 2k\pi) = \cos \alpha \\ &\text{ii. } \sin(\alpha + 2k\pi) = \sin \alpha \end{aligned}$$

Questo si verifica in quanto 2π rappresenta un *giro intero*; quindi prendendo un punto α e facendoci un giro intero, arrivo allo stesso punto.

#Proposizione

💬 Proposizione 2.4. (seno e coseno sono funzioni pari e dispari)

Le funzioni $\cos$, $\sin$ sono rispettivamente delle funzioni *pari* e *dispari*, ovvero che si verificano le seguenti.

$$\begin{aligned} &\cos(-\alpha) = \cos(\alpha) \\ &\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha) \end{aligned}$$

Questo discende dal fatto che la *"lunghezza negativa"* rappresenterebbe la stessa lunghezza orientato verso il basso.
Quindi graficamente lo si può vedere chiaramente.

#Proposizione

💬 Proposizione 2.5. (seno e coseno sono "shiftati" tra di loro)

Se al posto di aggiungere un *giro intero* aggiungo un *mezzo giro*, ovvero π, ottengo il suo opposto:

$$\begin{aligned} &\cos(\alpha + \pi) = -\cos(\alpha) \\ &\sin(\alpha + \pi) = -\sin(\alpha) \end{aligned}$$

#Proposizione

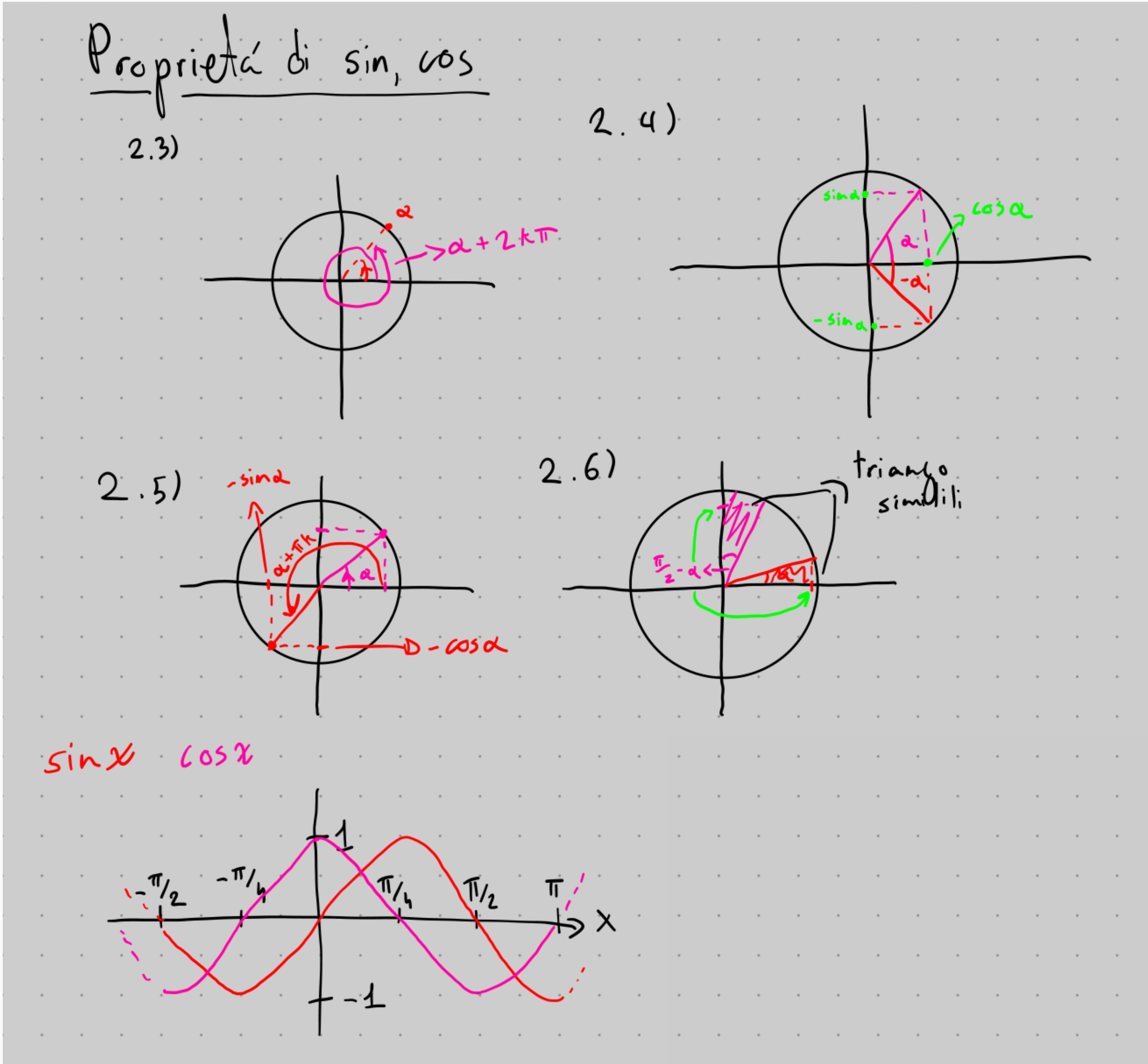
💬 Proposizione 2.6. (il coseno è il complemento del seno)

Ricorrendoci alla definizione etimologica del *coseno*, ovvero *"complementi sinus"*, notiamo che sottraendo *l'angolo complementare* $\frac{\pi}{2}$ da α ottengo $\sin$. Ovvero

$$\forall \alpha, \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin(\alpha)$$

Riassunto grafico

FIGURA 2.1. Graficamente si può riassumere (quasi) tutte le proprietà nel seguente grafico (con i grafici di $\cos$, $\sin$ stessi).



Alcuni valori noti

Dai risultati della *geometria elementare* sappiamo i seguenti valori noti del seno e del coseno:

α	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$
0	1	0

α	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	0	1

che verranno dati per noti.

Forme di somma e di sottrazione

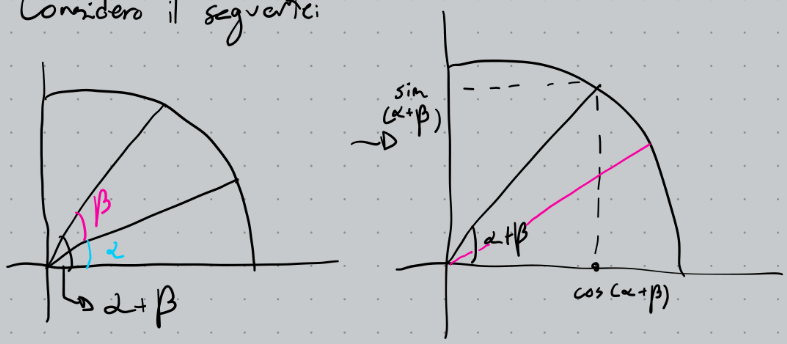
#Osservazione

Osservazione 2.1. (forme di somma e di sottrazione)

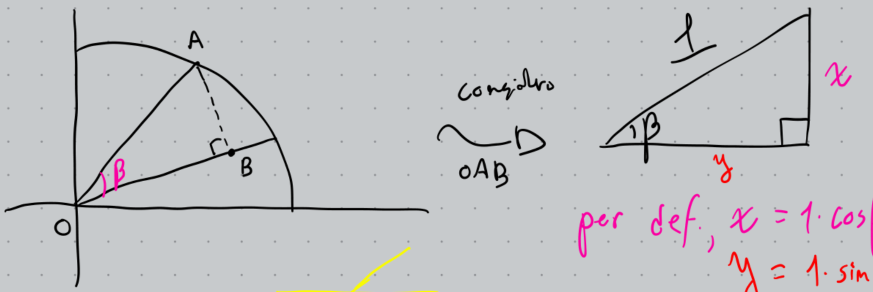
Consideriamo due angoli: $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Quindi disegniamo il seguente grafico:

Forme di somma e di sottrazione

1) Considero il seguente:



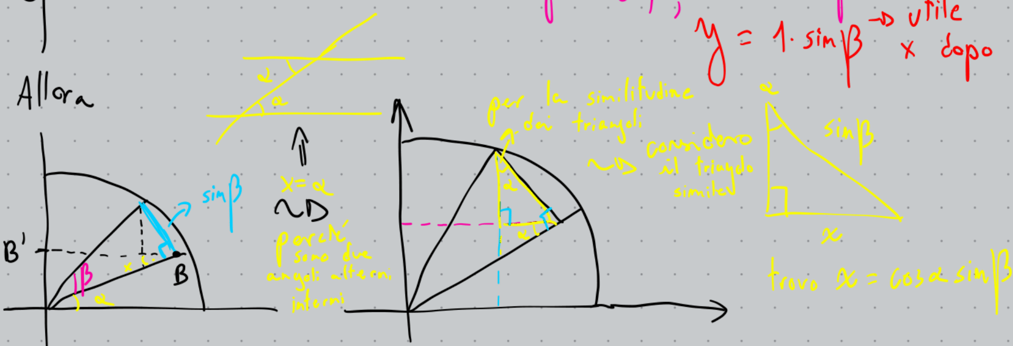
2) Proietto il segmento $\overline{AB}$ tale da formare angolo da 90° (⊥)



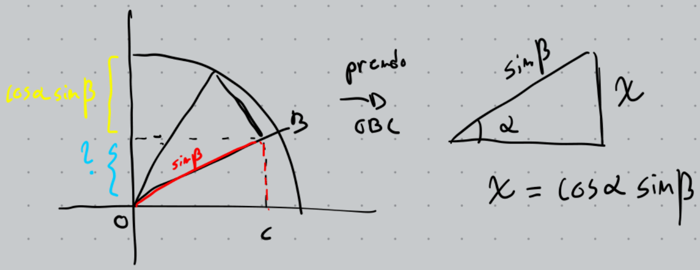
per def., $x = 1 \cdot \cos\beta$

$y = 1 \cdot \sin\beta$ → utile x dopo

Allora



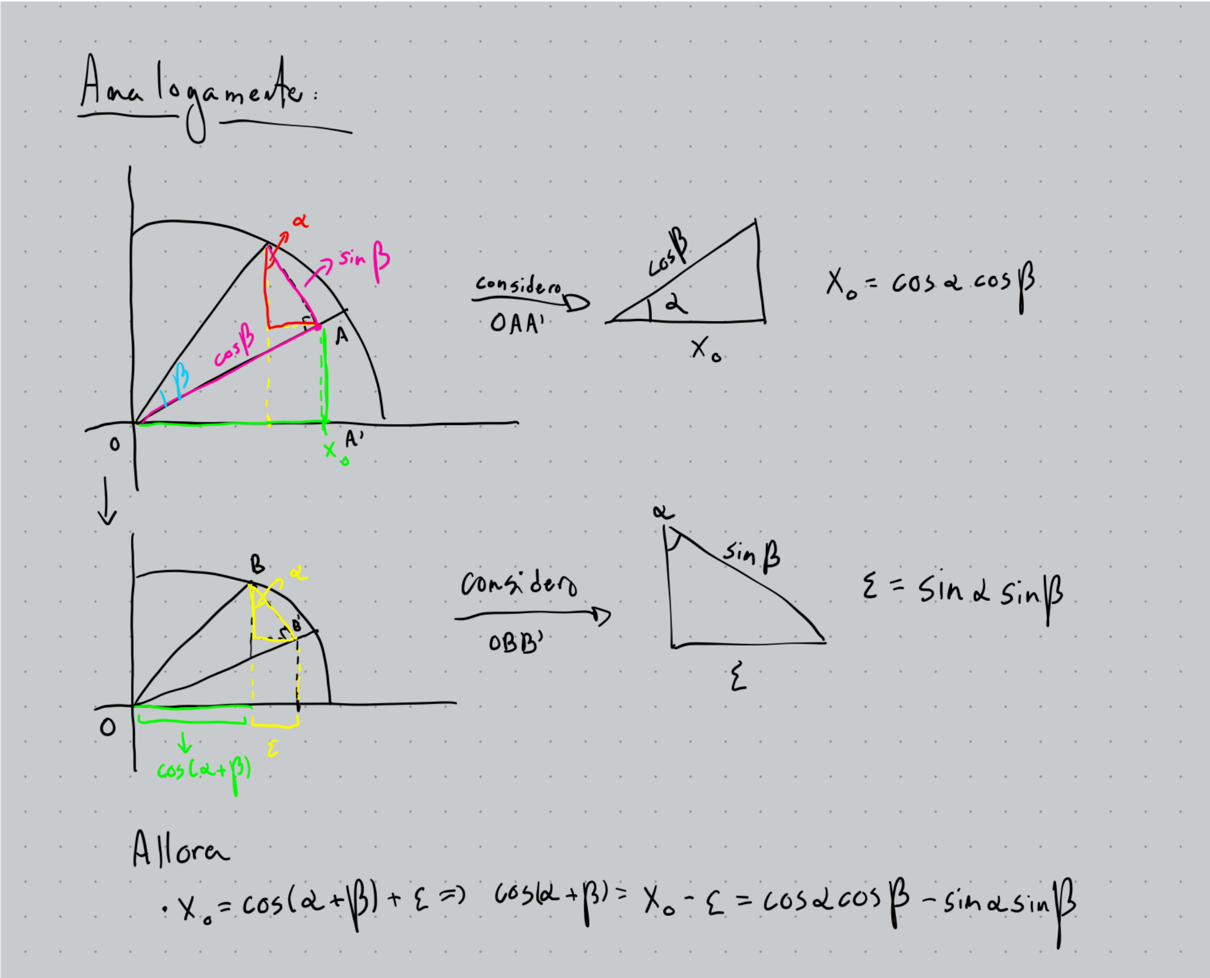
Allora ho trovato la mia "1ª porzione"; trovo la seconda



Pertanto sommo i pezzi e ottengo:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$$

Dopodiché, analogamente



Da cui si evince che

$$\boxed{\begin{aligned} \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin\alpha\cos\beta \pm sin\beta\cos\alpha \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \end{aligned}}$$

Queste formule saranno molto importanti per le formule di *prostaferesi* e di *Werner*.

Formule di prostaferesi

Recuperato dalla lezione del 26.10.2023

#Osservazione

Osservazione 2.2. (formule di prostaferesi)

Voglio calcolare $\sin a + \sin b$. Allora riscrivo le *forme di sottrazione e di addizione*;

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha \end{aligned}$$

e li sommo:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha-\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha \\ &= 2\sin\beta\cos\alpha\end{aligned}$$

e ponendo $\alpha+\beta=a$, $\alpha-\beta=b$, (dunque $a+b=2\alpha$ e $a-b=2\beta$) ottengo

$$\boxed{\sin a+\sin b=2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}}$$

Analogo il procedimento per $\cos\alpha+\cos\beta$.

3. Definizione di arcocoseno e arcoseno

#Osservazione

Osservazione 3.1. ($\cos$ può diventare biiettiva)

Considero la funzione $\cos$, però con una restrizione al suo *dominio* e *codominio*.

$$\begin{aligned}\cos_{[0,\pi]}:[0,\pi]&\longrightarrow[-1,1] \\ x&\mapsto\cos(x)\end{aligned}$$

Questa funzione allora è *biiettiva*; ovvero che sia *suriettiva* che *iniettiva* e *strettamente decrescente*.

1. Questa è *iniettiva* in quanto considerando tutti gli $x\in[0,\pi]$ si tocca un *solo* punto ad ogni x considerato. Inoltre è *strettamente decrescente* in quanto il valore parte da $\cos 0=1$ e finisce con $\cos\pi=-1$.
2. Per lo stesso motivo di prima $\cos$ è *suriettiva*.

#Definizione

Definizione 3.1. (arcocoseno)

Pertanto secondo il *teorema dell'esistenza della funzione inversa* la funzione $\cos_{[0,\pi]}$ ha una sua inversa che chiameremo *l'arcocoseno*;

$$\arccos:=\cos_{[0,\pi]}$$

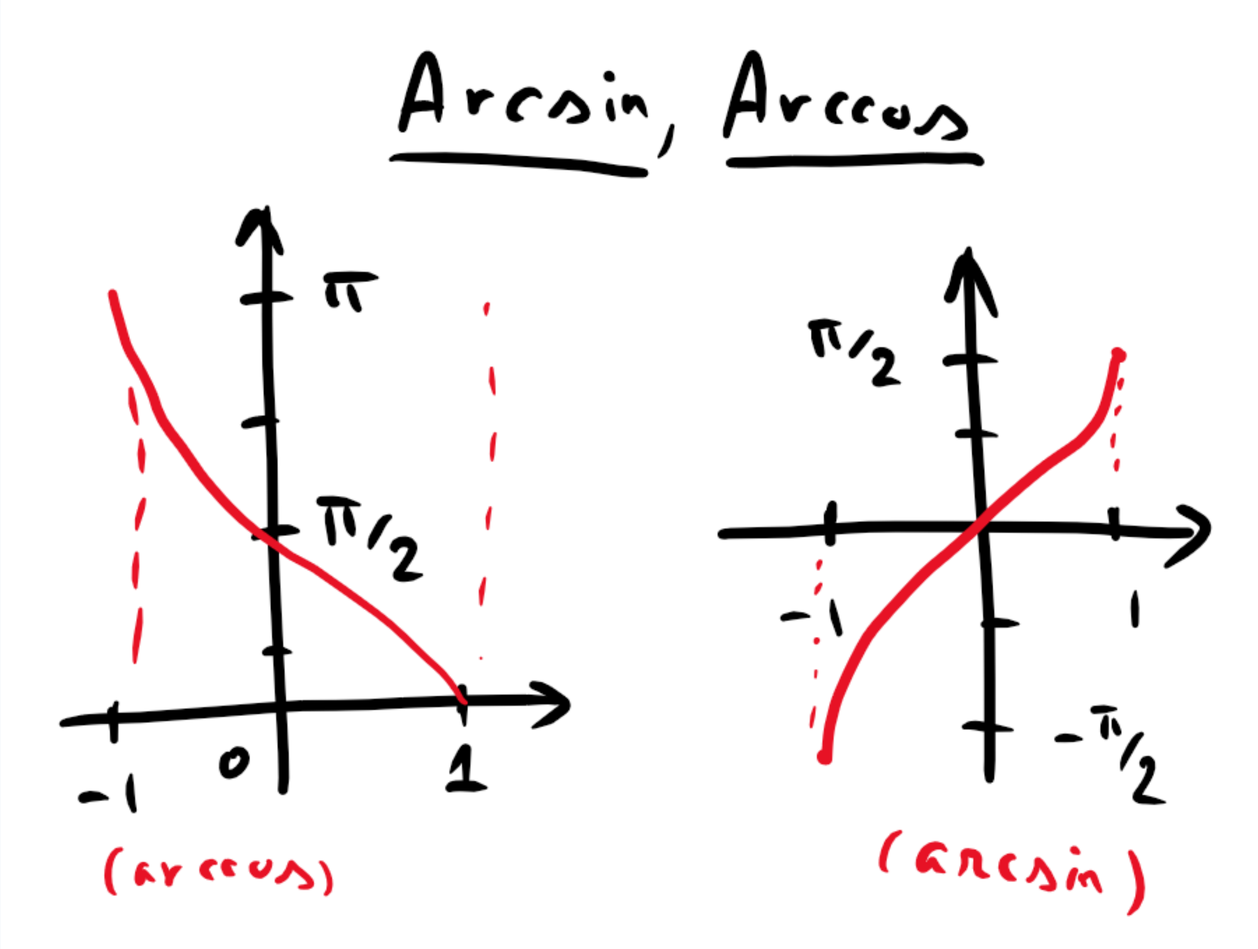
#Definizione

Definizione 3.2. (arcoseno)

Analogamente si definisce $\arcsin$ considerando però la restrizione di $\sin_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$. Quindi

$$\arcsin := \sin_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$$

FIGURA 3.1. (*Arcoseno e arcocoseno*)



4. Funzione tangente e arcotangente

#Definizione

Definizione 4.1. (tangente)

Definiamo la funzione **tangente** $\tan\alpha$ periodica in come

$$\tan : \mathbb{R}\diagdown[\frac{\pi}{2}]_{\equiv\pi} \longrightarrow \mathbb{R}$$

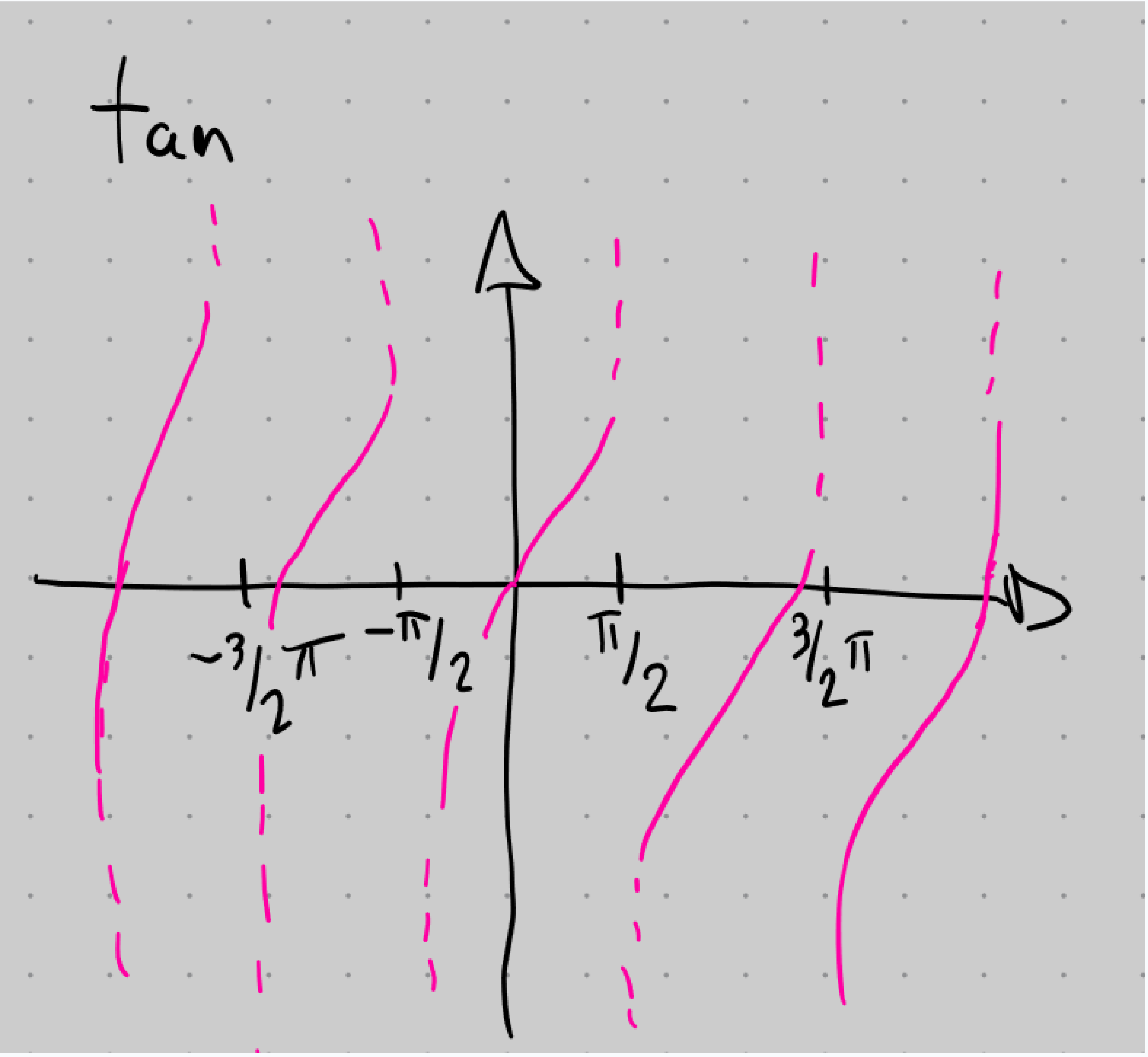
come il *rapporto* tra la funzione *seno* e *coseno*, ovvero

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Notiamo che le funzioni $\sin, \cos$ sono periodiche di 2π; quindi prendendo il

rapporto abbiamo che $\tan$ è periodica di π.
Osservando i *limiti* (Esempi di Limiti di Funzione > ^570db1) di questa funzione possiamo disegnare il seguente grafico (*figura 4.1.*).

FIGURA 4.1. $(\tan)$



#Definizione

Definizione 4.2. (arcotangente)

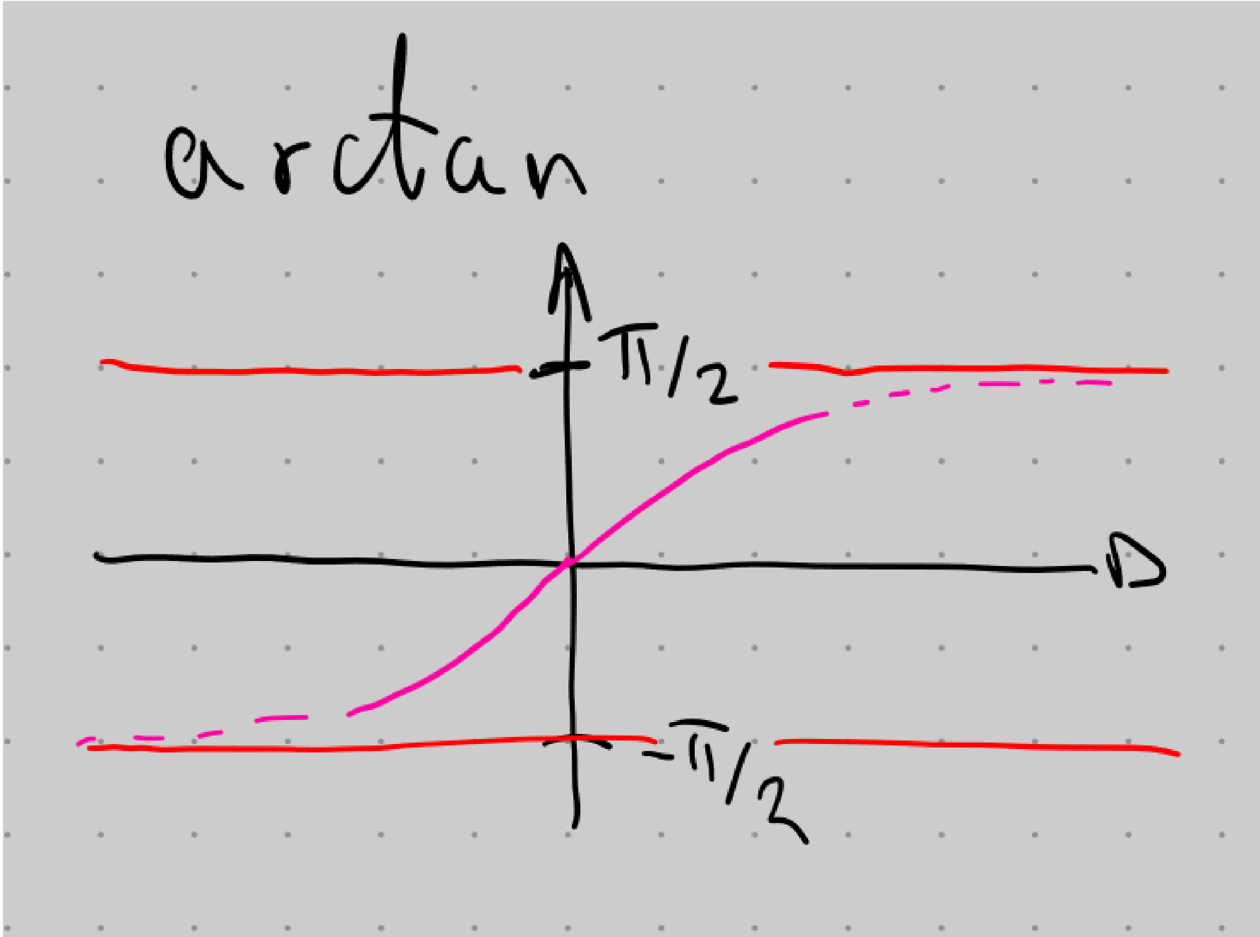
Se applico una restrizione della *tangente* in $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ allora ho:

$$\tan_{|(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})} : (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \longrightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \tan x$$

e questa diventa *biiettiva*, quindi invertibile, posso definire l'*arcotangente* la sua funzione inversa:

$$\arctan := (\tan_{|(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})})^{-1}$$

FIGURA 4.2. (arctan)



C3. Funzioni esponenziali e logaritmiche

Funzione esponenziale e Logaritmica

Definizione della funzione esponenziale su N; prime proprietà dell'esponenziale; estensione della definizione a Z; ulteriori proprietà; estensione a Q; ulteriori proprietà e limiti notevoli; definizione dell'esponenziale sui reali R; proprietà finali. Invertibilità di $\exp$, *funzione logaritmica; proprietà di* $\log$.

1. Funzione esponenziale

In questa parte definiremo la *funzione esponenziale* partendo dalla definizione *"basilare"* su $\mathbb{N}$, poi espandiamo l'insieme su cui definiamo questa funzione fino a $\mathbb{R}$. Ovviamente per semplificare lo studio si proporrà poi la definizione *"generale"* riassunta.

L'esponenziale sui naturali

#Definizione

Definizione 1.1. (definizione induttiva dell'esponenziale)

Consideriamo il numero

$$a \in (1, +\infty)$$

possiamo definire *l'esponenziale* come

$$a^n := \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ volte}}$$

#Proposizione

Proposizione 1.1. (le prime proprietà dell'esponenziale sui naturali)

Allora con questa definizione abbiamo le seguenti proprietà.

$$\begin{aligned}
&a^{n_1} \cdot a^{n_2} = a^{n_1+n_2} \\
&(a^{n_1})^{n_2} = a^{n_1 \cdot n_2} \\
&n_1 < n_2 \implies a^{n_1} < a^{n_2} \\
&1 < a_1 < a_2 \implies a_1^n < a_2^n \\
&\lim_n a^n = +\infty
\end{aligned}$$

L'esponenziale sugli interi

#Definizione

Definizione 1.2. (l'esponenziale sui numeri interi)

Ora voglio dare un significato a

$$a^m, m \in \mathbb{Z}$$

Allora la definisco come

$$a^m := \begin{cases} a^m \text{ se } m \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{a^{-m}} \text{ se } m \in \mathbb{Z} \text{ e } m < 0 \end{cases}$$

#Proposizione

Proposizione 1.2. (ulteriori proprietà dell'esponenziale)

Con questa definizione continuano a valere le proprietà date nella *proposizione 1.1.*, in particolare:

$$\begin{aligned} & a^{m_1} \cdot a^{m_2} = a^{m_1+m_2} \\ & (a^{m_1})^{m_2} = a^{m_1 \cdot m_2} \\ & m_1 < m_2 \implies a^{m_1} < a^{m_2} \\ & 1 < a_1 < a_2 \implies a_1^m < a_2^m \\ & \lim_{m \to +\infty} a^m = +\infty \\ \text{Novità: } & \lim_{m \to -\infty} a^m = 0 \end{aligned}$$

L'esponenziale sui razionali

#Definizione

Definizione 1.3. (l'esponenziale sui numeri razionali)

Ora voglio dare un significato a

$$a^p, p \in \mathbb{Q}$$

allora posso rappresentare p come frazione (Richiami sui Numeri Razionali), ovvero come

$$p = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}; n \in \mathbb{N} \diagdown \{0\}$$

Ora posso definire

$$a^p := a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

#Osservazione

Osservazione 1.1. (l'esponenziale rimane unico per un qualsiasi $p \in \mathbb{Q}$)

Con questa definizione sembra che ci possa essere il seguente problema: se un numero razionale p può essere rappresentata in modi diversi, ad esempio

$$2 = \frac{2}{1} = \frac{4}{2}$$

non è possibile che a^p può avere risultati diversi; ovvero è possibile che

$$p = \frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2} \implies \sqrt[n_1]{a^{m_1}} \overset{?}{\neq} \sqrt[n_2]{m_2}$$

La risposta è *"no"*. Ora vediamo di dimostrarla.

Partiamo dal presupposto che

$$\frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2} \implies m_1 n_2 = m_2 n_1$$

Allora

$$\begin{aligned} \sqrt[n_1]{a^{m_1}} &\overset{?}{=} \sqrt[n_2]{a^{m_2}} \\ a^{m_1} &\overset{?}{=} (\sqrt[n_2]{a^{m_2}})^{n_1} = \sqrt[n_2]{a^{m_2 \cdot n_1}} \\ a^{m_1 n_2} &= a^{m_2 n_1} \text{ OK } \blacksquare \end{aligned}$$

#Proposizione

Proposizione 1.3. (ulteriori proprietà dell'esponenziale sui razionali)

Ora si potrebbe dimostrare che continuano a valere le proprietà di prima (*proposizioni 1.2, 1.3.*), ovvero

$$\begin{gathered} a^{p_1} \cdot a^{p_2} = a^{p_1 + p_2} \mid (a^{p_1})^{p_2} = a^{p_1 p_2} \\ p_1 < p_2 \implies a^{p_1} < a^{p_2} \mid 1 < a_1 < a_2 \implies a_1^p < a_2^p \\ \lim_{p \to +\infty} a^p = +\infty \mid \lim_{p \to -\infty} a^p = 0 \\ \text{Novità} : \lim_{p \to p_0} a^p = a^{p_0} \end{gathered}$$

DIMOSTRAZIONE dell'*ultima proprietà della proposizione 1.3.* (^c127ca)
Dimostriamo la *"nuova"* proprietà ovvero

$$\lim_{p \to p_0} a^p = a^{p_0}$$

Ai fini di questa dimostriamo utilizziamo il limite notevole di una successione (Esempi di Limiti di Successione > ^492158), ovvero

$$\lim_n \sqrt[n]{a} = 1$$

Allora si potrebbe, secondo la *definizione 1.3.*, riscriverla come

$$\lim_{n} a^{\frac{1}{n}} = 1 \implies \lim_{p \to 0} a^p = 1$$

Adesso consideriamo

$$\lim_{p \to p_0} a^p - a^{p_0} = \underbrace{a^{p_0}}_{\text{valore fisso}} \cdot \underbrace{(a^{p-p_0} - 1)}_{\text{tende a } a^0 - 1 = 1 - 1 = 0} \to 0$$

Pertanto

$$\lim_{p \to p_0} a^p = a^{p_0} \blacksquare$$

L'esponenziale sui reali

Finalmente definiamo l'esponenziale con l'esponente reale; in realtà sarebbe possibile definirla mediante gli assiomi dei numeri reali (Assiomi dei Numeri Reali), in particolare con i *tagli di Dedekind*, tuttavia ai fini didattici si sceglie di usare una definizione più semplice.

#Definizione

Definizione 1.4. (l'esponenziale sui reali)

Adesso voglio definire

$$a^x, x \in \mathbb{R}$$

Posso usare il *teorema sulle successioni monotone* (Limite di Successione > ^b438ed) che enuncia il seguente: *"Una successione monotona crescente e limitata è sempre convergente"*.

Allora considero la successione a valori in $\mathbb{Q}$

$$(p_n)_n$$

che sia *convergente* al valore x. Ci chiediamo se una successione del genere esiste; la risposta qui è sì. Infatti, sfruttando la densità dei razionali nei reali (Conseguenze dell'esistenza dell'estremo superiore > ^e279b1) allora sappiamo che partendo da $1, x$ esiste un valore *razionale* tra questi due e questo può essere il candidato ideale per p_0; dopodiché prendiamo p_1, x dove deve starci almeno p_2.
Poi volendo si può andare all'infinito per la *densità di Q in R*. Quindi $(p_n)_n$ è definita su tutti i valori in $\mathbb{N}$.

Concludendo, definisco

$$a^x := \lim_n a^{p_n}, \lim_n p_n = x$$

Inoltre

$$0 < a < 1 \implies a^x = (\frac{1}{a})^{-x}$$

Osserviamo poi che a^{p_n} rimane monotona in quanto è necessaria per far valere il teorema.

#Proposizione

Proposizione 1.4. (proprietà dell'esponenziale sui reali)

Si può mostrare che continuano a valere tutte le proprietà elencate sopra;

$$\begin{gathered}\forall x_1, x_2; a^{x_1}a^{x_2} = a^{x_1+x_2} \mid (a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 x_2} \\ x_1 < x_2 \implies a^{x_1} < a^{x_2} \\ 1 < a_1 < a_2 \implies a_1^x < a_2^x \\ \lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty \\ \lim_{x \to -\infty} a^x = 0 \\ \lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}\end{gathered}$$

Riassunto generale

Dopo il nostro viaggio odisseico per definire la funzione esponenziale, possiamo finalmente definire a^x nella maniera più generale possibile.

#Definizione

Definizione 1.5. (funzione esponenziale)

Sia $a > 1, a \in \mathbb{R}$, è definita una *funzione* (Funzioni)

$$\exp_a : \mathbb{R} \longrightarrow (0, +\infty); x \to \exp_a(x) = a^x$$

e la chiamo *funzione esponenziale di base* a.

Da notare che se invece abbiamo $0 < a < 1$, allora basta definire

$$\exp_a x := (\frac{1}{a})^{-x}$$

Allora

$$\exp_a(x) = \begin{cases} a^x, x \geq 0 \\ \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}, x < 0 \end{cases}$$

#Teorema

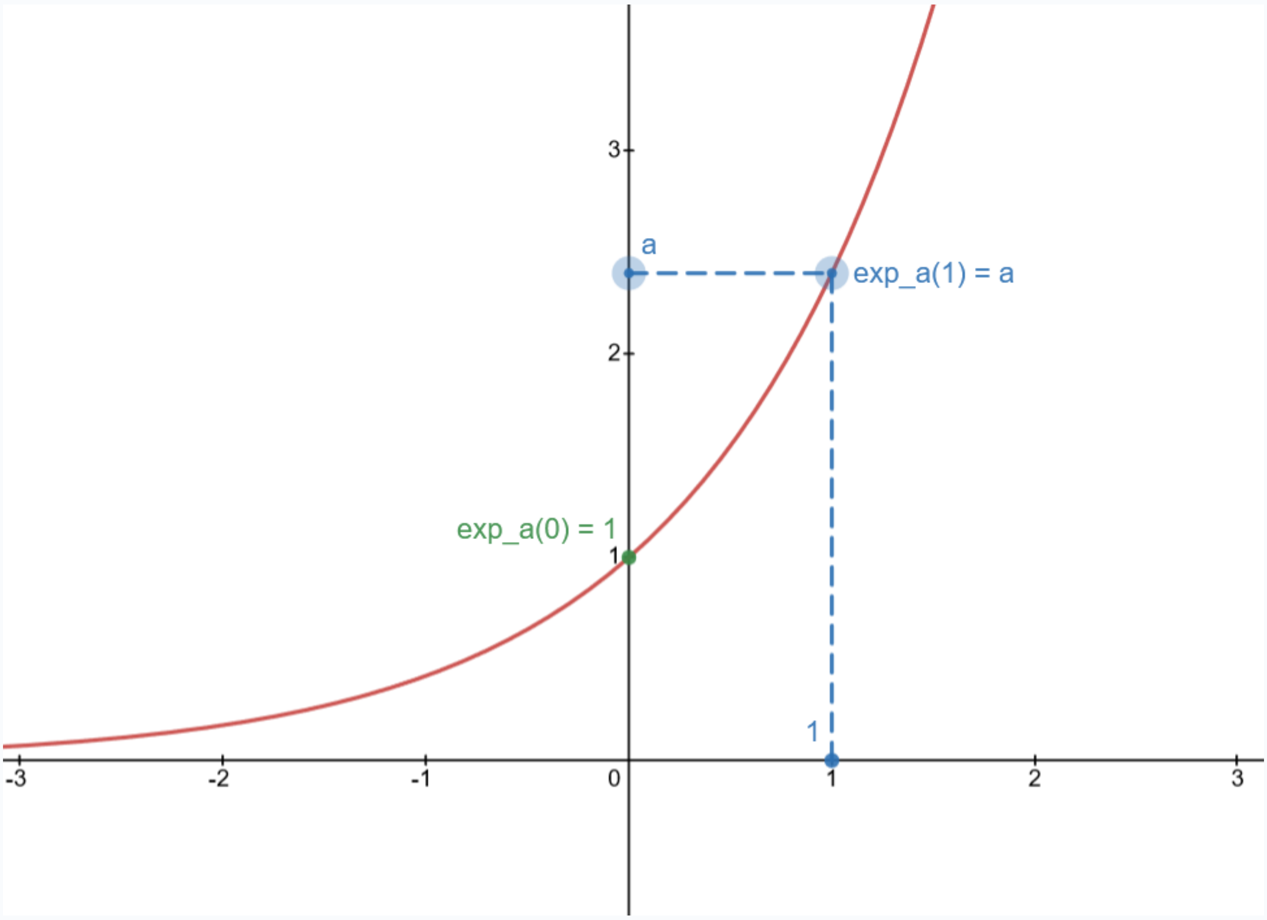
Teorema 1.5. (le proprietà della funzione esponenziale)

Valgono le seguenti:

1. $\exp_a(0) = 1$
2. $\exp_a(x_1) \cdot \exp_a(x_2) = \exp_a(x_1 + x_2)$
3. $\exp_a(x_1)^{x_2} = \exp_{\exp_a(x_1)}(x_2) = \exp_a(x_1 x_2)$
4. $\exp$ è *monotona crescente*
5. $\exp$ è *suriettiva*
6. I limiti di $\exp_a$

$$\lim_{x \to -\infty} \exp_a x = 0 \; ; \quad \lim_{x \to +\infty} \exp_a x = +\infty$$
$$\lim_{x \to x_0} \exp_a x = \exp_a x_0$$

FIGURA 1.5. (*Grafico generale di* $\exp$)
Si propone il seguente grafico di $\exp$ realizzato col sito Desmos.



2. Funzione logaritmica

#Osservazione

Osservazione 2.1. (l'esponenziale è biiettivo, dunque invertibile.)

Osservando dalle *proprietà dell'esponenziale*, sappiamo che se $\exp_a$ è sia *suriettiva* che *iniettiva*, allora deve esistere la funzione inversa $\exp_a^{-1}$. Allora possiamo definire la seguente funzione.

#Definizione

Defnizione 2.1. (funzione logaritmica)

Chiamo la *funzione logaritmica* la funzione inversa $\exp_a^{-1}$ come $\log_a$:

$$\log_a : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$

e si ha

$$\begin{gathered}\forall x \in \mathbb{R}, \log_a(\exp_a x) = x \\ \forall y \in (0, +\infty), \exp_a(\log_a y) = y\end{gathered}$$

#Teorema

Teorema 2.1. (le proprietà del logaritmo)

Per un $a \in \mathbb{R}$, valgono le seguenti:

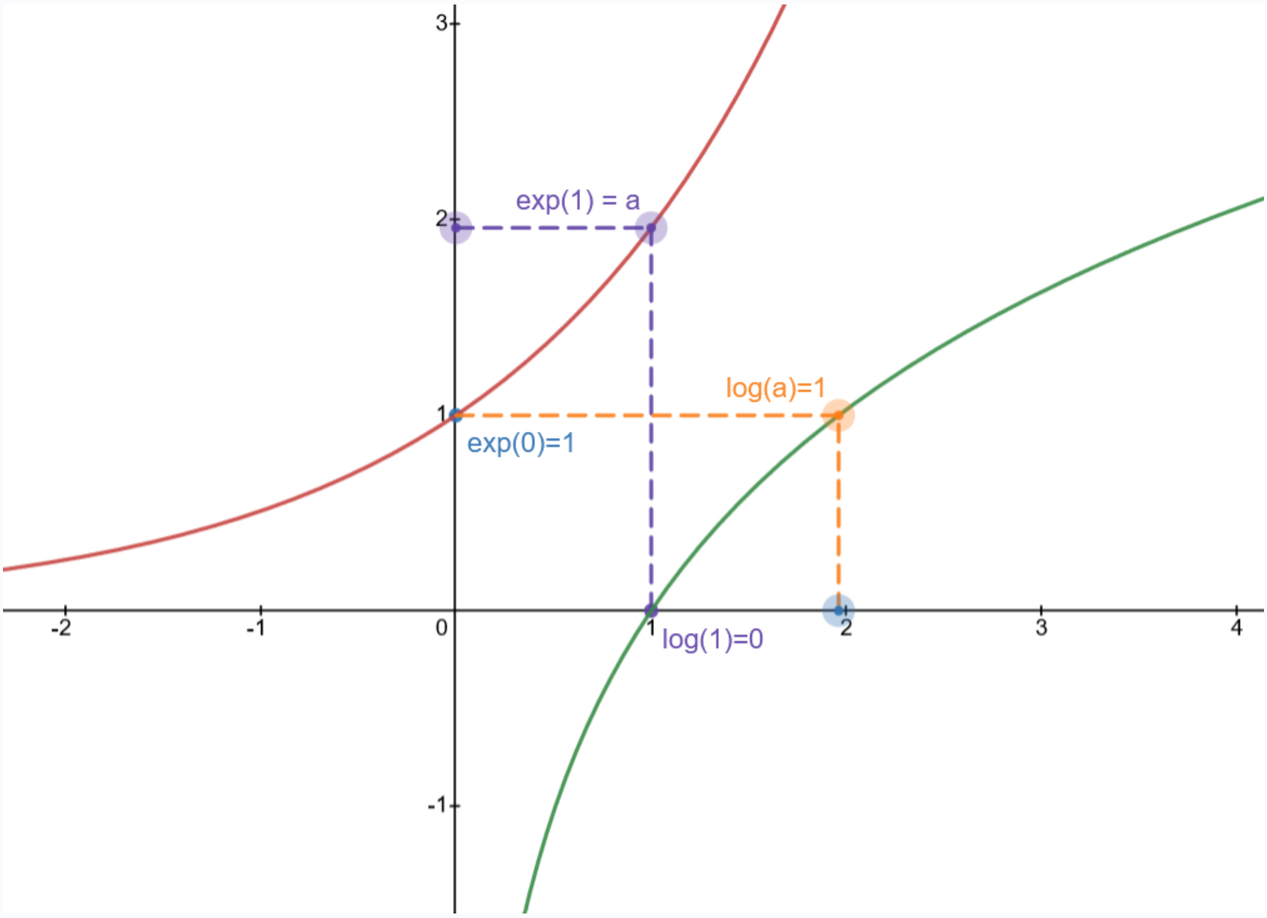
1. $\log_a(1) = 0$ (*per definizione*)
2. $\log_a(x_1) + \log_a(x_2) = \log_a(x_1 x_2)$
3. $\log_a(x^y) = y \log_a(x)$
4. $a > 1 \land 0 < x_1 < x_2 \implies \log_a(x_1) < \log_a(x_2)$
5. Limiti

$$\begin{gathered}\lim_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty \, ; \, \lim_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty \\ \lim_{x \to x_0} \log_a x = \log_a x_0\end{gathered}$$

3. Riassunto finale

FIGURA 3.1. Come riassunto finale si propongono i grafici di $\exp_a$ e $\log_a$ per $a = 1.96$. Anche questo ultimo grafico è realizzato su Desmos. Inoltre con i limiti (Esempi di

Limiti di Funzione) osserveremo che le funzioni $\exp, \log$ crescono e decrescono con una *"velocità"* più grande delle altre funzioni, in particolare le funzioni *razionali* per qualsiasi grado.



Capitolo III. La topologia della retta reale

Abstract del Capitolo III

In questo capitolo si andrà ad approfondire le *conseguenze* della *continuità* dei *numeri reali*; in particolare si studieranno delle *"forme topologiche"* che potranno essere definite sui *reali*, come ad esempio *intorni*, *punti interni* e *punti di accumulazione*.

Questo capitolo sarà particolarmente importante per poter studiare uno degli argomenti più importanti dell'*analisi matematica*: i limiti.

SEZIONE A. LA TOPOLOGIA DELLA RETTA REALE (BASI)

A1. Intorni

Intorni

Definizione di distanza (con le sue proprietà), intorno centrato aperto di centro x_0 e di raggio r, intorno di x_0; la retta estesa, l'intorno di $+\infty$ e di $-\infty$.

---

0. Preambolo, pagine correlate

In questo capitolo studieremo e definiremo delle nomenclature necessarie per studiare i *limiti* (Definizione di Limite di funzione).

- Punti di aderenza e di accumulazione
- Definizione di Limite di funzione

1. Distanza euclidea

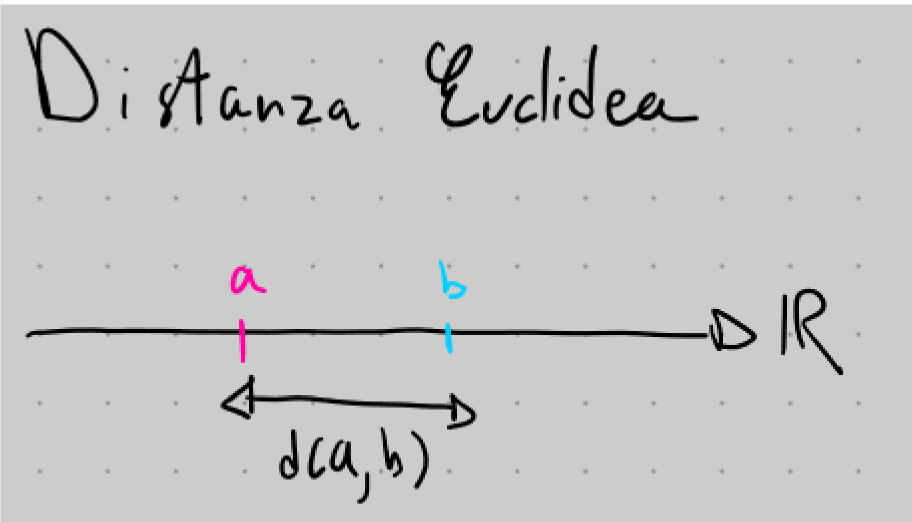
#Definizione

Definizione 1.1. (Distanza Euclidea).

Siano $x, y \in \mathbb{R}$, allora definisco la *distanza* (oppure *distanza euclidea*) di x, y il valore

$$d(x,y) = |x - y|$$

FIGURA 1.1. (*Idea grafica della distanza*)
Graficamente questo corrisponde, appunto, alla distanza tra due punti sulla retta reale.



Proprietà della distanza euclidea

Possiamo verificare alcune proprietà di questa applicazione (Funzioni); la prima essendo la proprietà *antiriflessiva*.

#Proposizione

Proposizione 1.1. (Antiriflessività).

$$\forall x, y \in \mathbb{R}; d(x, y) \geq 0 \land d(x, y) \iff x = y$$

#Proposizione

Proposizione 1.2. (Proprietà simmetrica).

$$\forall x, y \in \mathbb{R}; d(x, y) = d(y, x)$$

#Proposizione

Proposizione 1.3. (Disuguaglianza Triangolare).

Analogamente alle disuguaglianze triangolari già viste nei numeri complessi (**PROP. 4.7.**) e col valore assoluto (**OSS 3.1.1.**) si verifica che

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}; d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE della *proposizione 1.3.* (^ff0f13)
Infatti dall'*osservazione 3.1.1.* di Funzioni di potenza, radice e valore assoluto so che se

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

può essere applicato con $a = x - y$ e $b = y - z$, così diventa

$$|x - z| \leq |x - y| + |y - z| \iff d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \blacksquare$$

#Osservazione

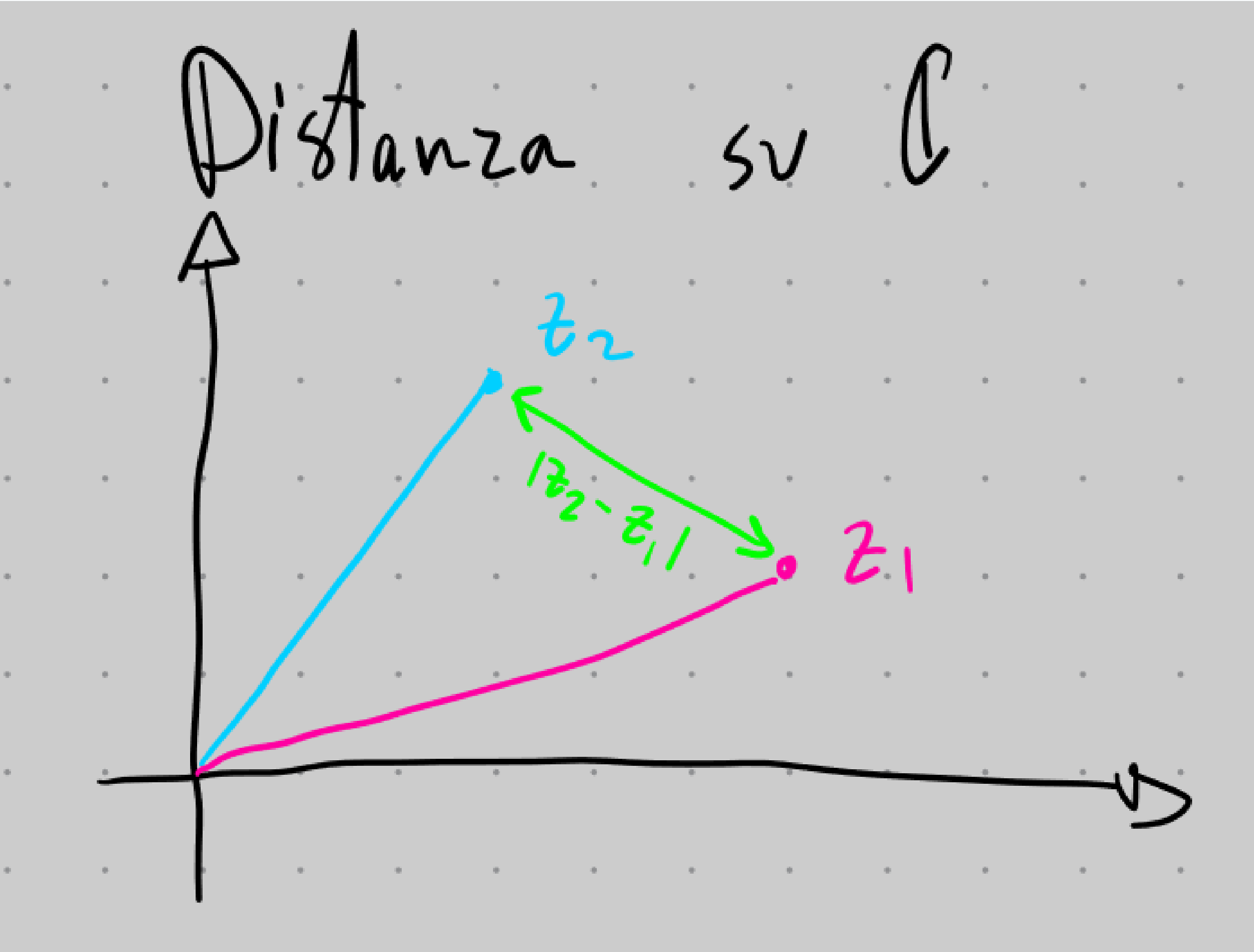
Osservazione 1.1. (distanza euclidea sui complessi)

Noto che questa nozione di *distanza euclidea* può essere anche definita sui numeri complessi $\mathbb{C}$; infatti posso porre

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$$

dove $|\cdot|$ rappresenta il *modulo* di un numero complesso (Operazioni sui Numeri Complessi > ^53f86b).
Inoltre scopriamo che questa definizione della distanza euclidea su $\mathbb{C}$ conserva le tre proprietà (**PROP 1.1., 1.2., 1.3.**) appena enunciate. Pertanto è possibile *"far coincidere" modulo* e *distanza euclidea* in quanto vi è un *isomorfismo* tra queste due applicazioni.

FIGURA 1.1. (*Idea della distanza euclidea su* $\mathbb{C}$)



2. Intorno centrato aperto di centro x e di raggio r

#Definizione

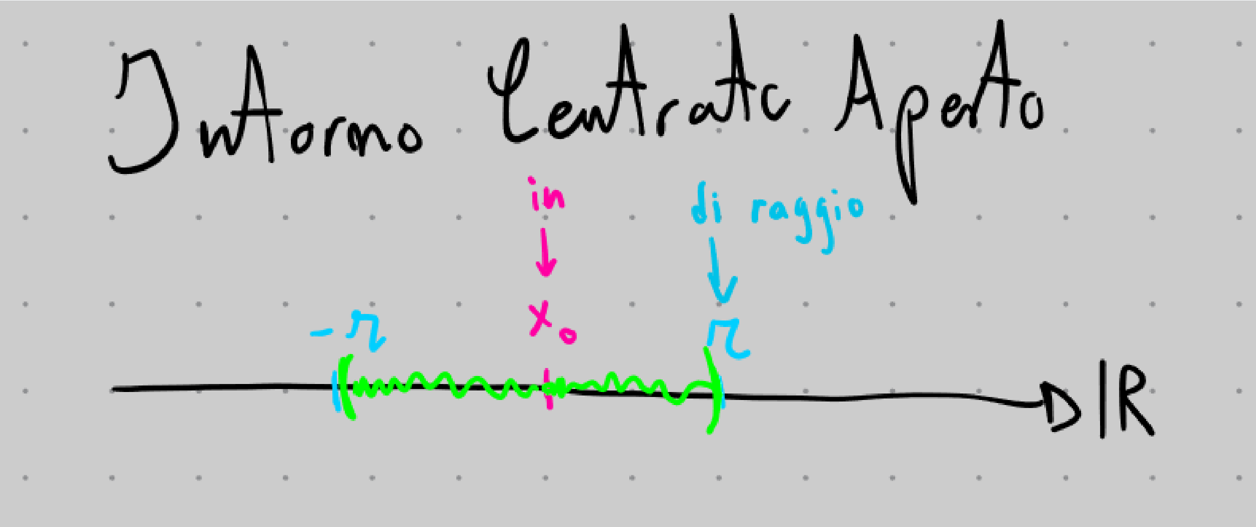
Definizione 2.1. (Intorno centrato).

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e sia $r \in \mathbb{R}, r > 0$; allora chiamo *"l'intorno centrato aperto di centro x_0 e di raggio r"* l'intervallo aperto (Intervalli > ^6d6e94)

$$]x_0 - r, x_0 + r[\ = \{x \in \mathbb{R} : d(x, x_0) < r\}$$

un altro nome può essere la *palla aperta di centro x_0 e di raggio r*
Quindi questo è l'insieme di *tutti i punti di $\mathbb{R}$ che hanno distanza da x_0 meno di r*.

FIGURA 2.1. (*Idea di intorno centrato*)



#Osservazione

Osservazione 2.1. (intorno centrato aperto nei complessi)

Come fatto nell'*osservazione 1.1.* (^03c61c), questa nozione di *intorno centrato aperto* può essere applicato a $\mathbb{C}$ usando la nozione di *modulo*; infatti graficamente questa corrisponde ad una *palla in 2D di centro z_0 e di raggio r*. (*Figura 2.1.*)

#Osservazione

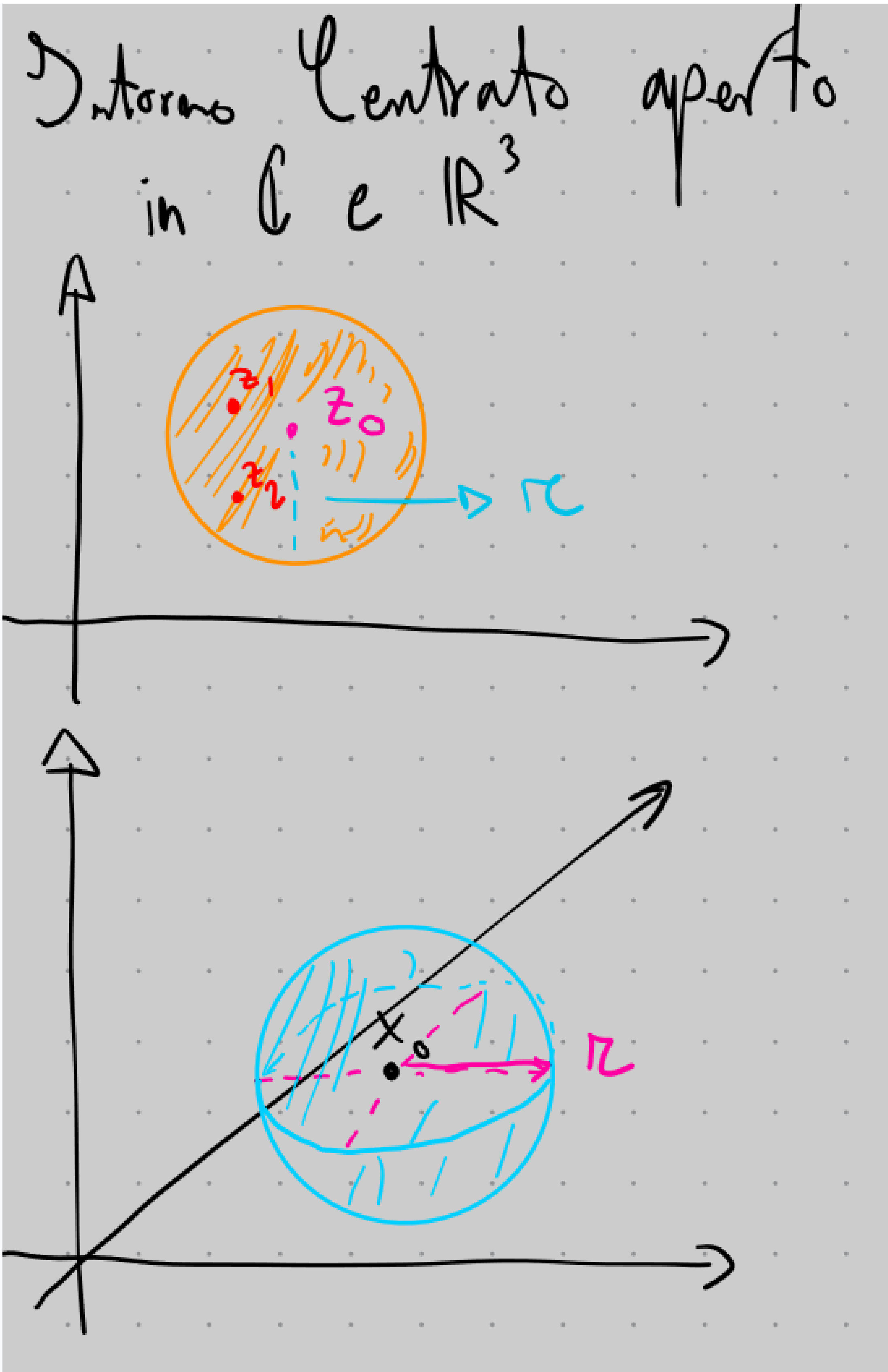
Osservazione 2.2. (intorno centrato aperto nello spazio tridimensionale)

Allora si può definire l'*intorno centrato aperto* in $\mathbb{R}^3$ dove definisco

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^3; d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$$

E graficamente questa corrisponde ad una vera *palla*. Letteralmente. (*Figura 2.1.*)

FIGURA 2.1. (*Intorno in $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^3$*)



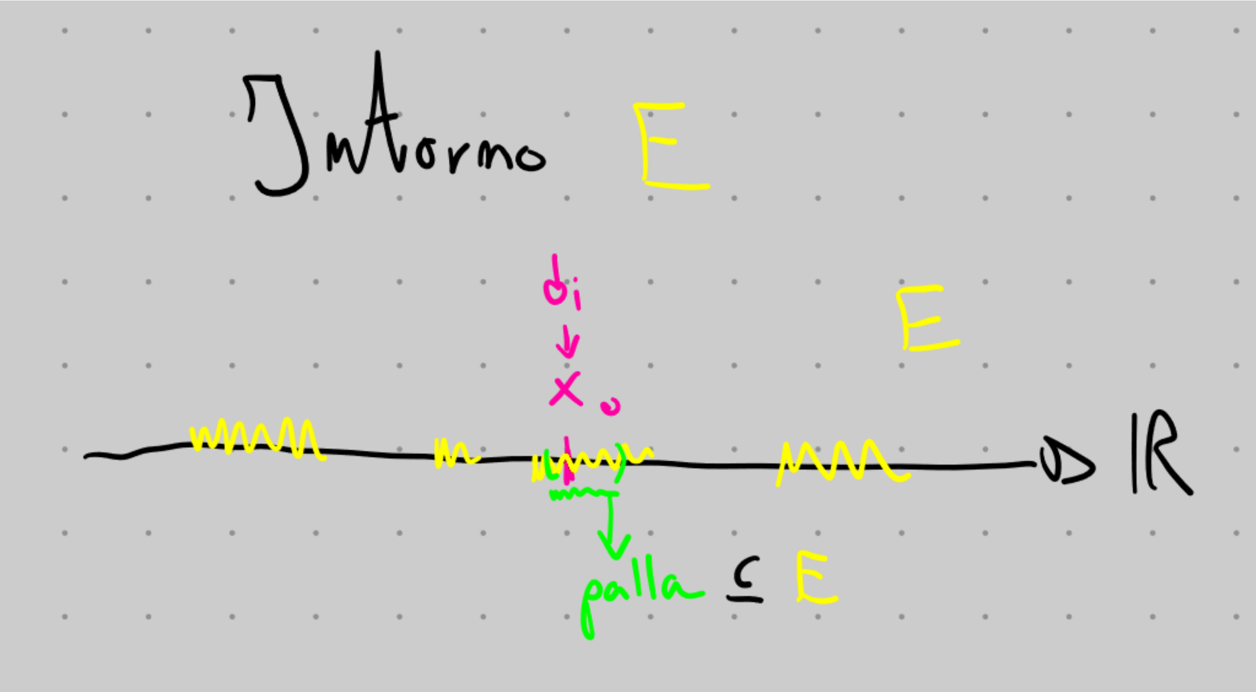
3. Intorno

#Definizione

Definizione 3.1. (Intorno di un punto).

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$, chiamo allora l'**intorno di** x_o un *qualunque insieme* E *di* $\mathbb{R}$ che contiene una *palla aperta di centro* x_0 *e raggio* r (^ffc6f8).

FIGURA 3.1. (*Idea di intorno*)



#Definizione

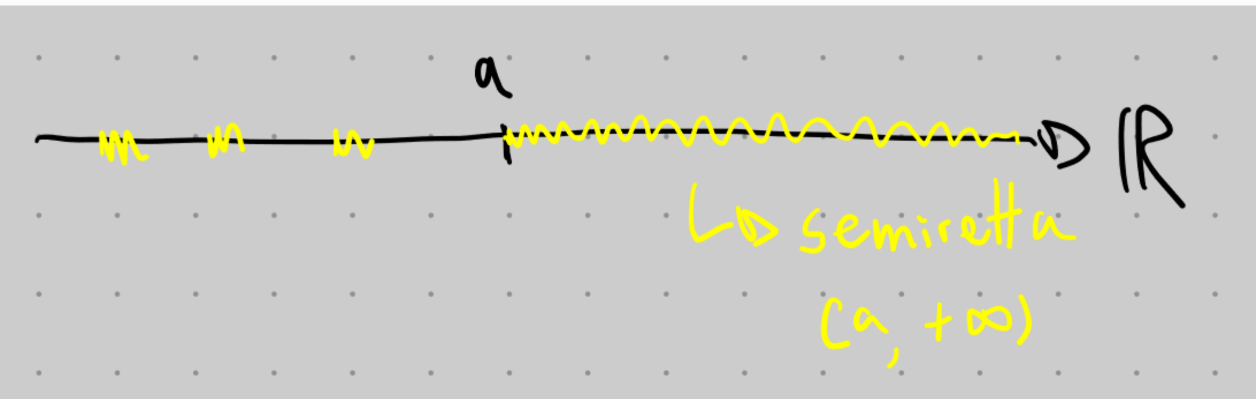
Definizione 3.2. (Intorno di $\pm\infty$).

Prendo $\tilde{\mathbb{R}}$ l'*insieme dei reali estesi*, ovvero

$$\tilde{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

e definisco *l'intorno di di* $+\infty$ un *qualunque sottoinsieme* $E \subseteq \mathbb{R}$ che contiene una *semiretta* $]a, +\infty[$; ovvero un insieme *superiormente illimitato* (Insiemi limitati, maggioranti, massimo e teorema dell'estremo superiore > ^12e552) del tipo $]a, +\infty[$.

FIGURA 3.2. (*Idea dell'intorno di* $\pm\infty$)



Esempi

#Esempio

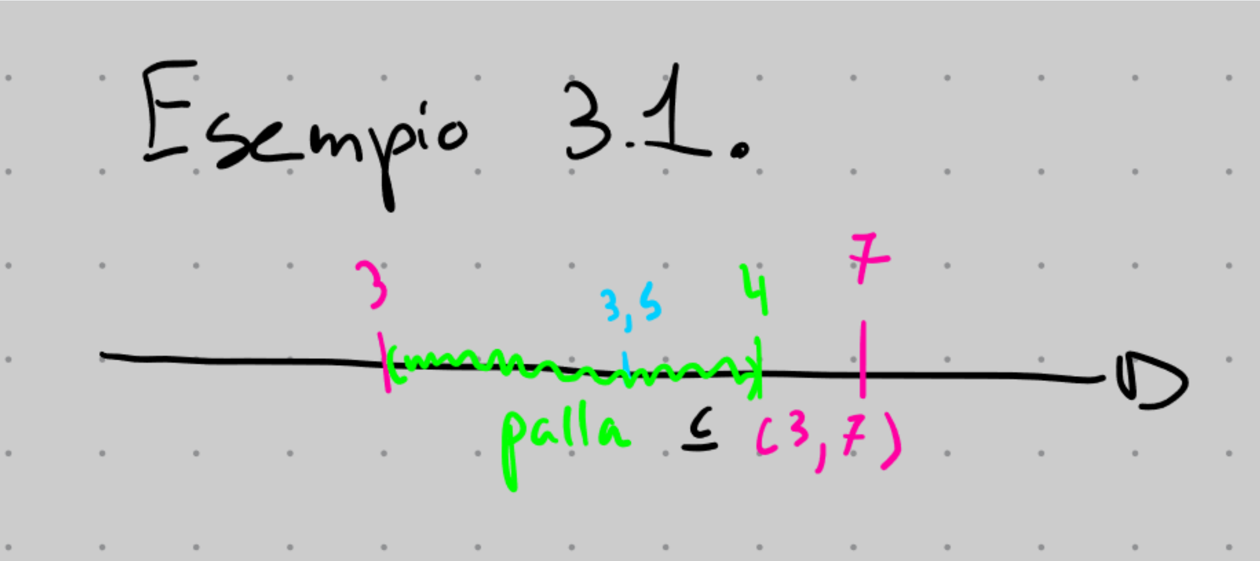
Esempio 3.1.

L'intervallo $]3,7[$ è intorno di $3,5$; infatti è possibile prendere $r = 0,5$ e ottenere la *palla aperta di centro* $3,5$ *e di raggio* $0,5$ che equivale a

$$]3,4[$$

che infatti è contenuto nell'intervallo $]3,7[$ (*figura 3.2.*)

FIGURA 3.2. (*Esempio grafico*)



#Esempio

Esempio 3.2.

Se prendendo l'insieme

$$S = \{0\} \cup \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \diagdown \{0\}\}$$

e il punto $x_0 = \frac{1}{2}$, scopriamo che S *non* è intorno di x_0; infatti prendendo per qualsiasi r non riesco a formare una palla attorno a x_0, in quanto S è definita sui numeri naturali che contiene dei *"buchi"*.

#Esempio

Esempio 3.3. ($\mathbb{R}$ è intorno di $+\infty$?)

Considerando i *numeri naturali* (Numeri Naturali - Sommario), ci chiediamo se questo insieme è *intorno di* $+\infty$; la risposta è *no*: esistono degli elementi in $\mathbb{R}$ che non sono contenuti in $\mathbb{N}$, come ad esempio i numeri razionali.
Tuttavia se consideriamo l'insieme $\mathbb{N} \cup]100, +\infty[$ allora la risposta è *sì* in quanto si considera un *intervallo* su $\mathbb{R}$.
Analogo il discorso per gli intervalli di $-\infty$.

A2. Punti interni, esterni e di frontiera per un insieme

Punti interni, esterni e di frontiera

Definizioni di punti interni, punti interni e punti di frontiera. Esempi.

---

0. Preambolo

Questo argomento presuppone la conoscenza dell'argomento di Intervalli.

1. Punto interno

#Definizione

Definizione 1.1. (Punto interno ad un insieme, l'insieme dei punti interni).

Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$, si definisce x_0 *punto interno* a E se viene verificato che

$$\exists r > 0 :]x_0 - r, x_o + r[\ \subseteq E$$

ovvero se esiste un *intorno* di x_0 che è contenuto in E (Intorni, **DEF 3.1.**).
Inoltre chiamo *l'insieme dei punti interni a* E come E°.

Esempio di punto interno

#Esempio

Esempio 1.1.

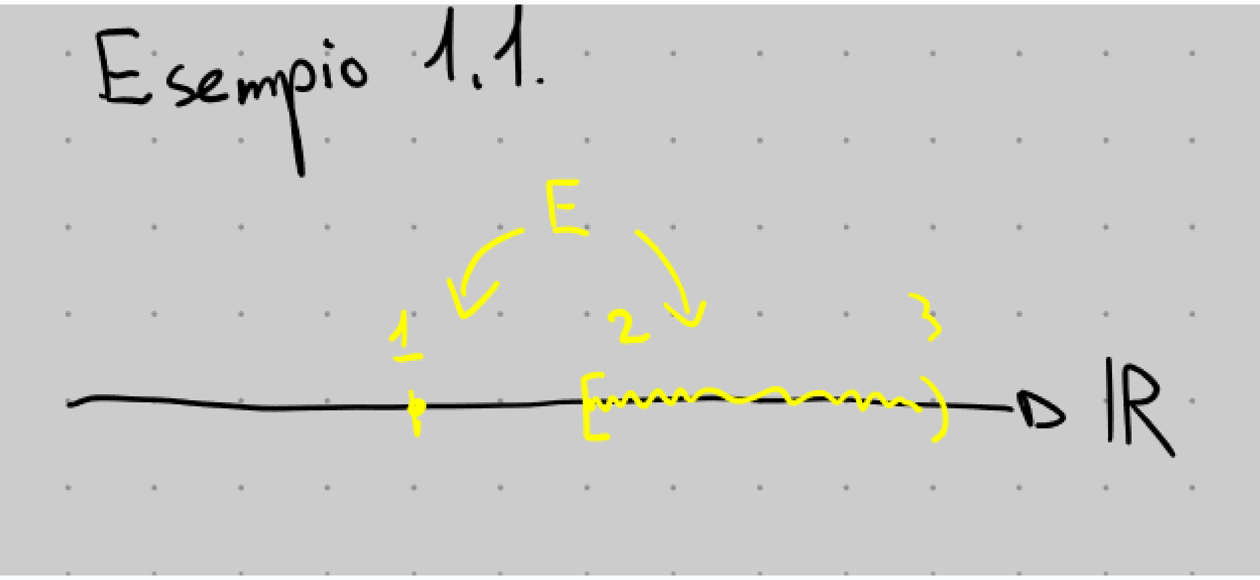
Sia

$$E = \{1\} \cup [2, 3)$$

e voglio trovare *l'insieme dei punti interni* E°.
Per farlo devo innanzitutto disegnare il grafico di E per poter capire come procedere (*figura 1.1.*).
Ora *"provo"* ogni numero fissando x_0 il numero scelto.
Scegliendo $x_0 = 1$ vedo chiaramente che non è *punto interno*, in quanto è impossibile che esista un intorno centrato a raggio r ad esso.
Scegliendo $x_0 = 2$ vedo che neanche questo è un *punto interno*; non riesco a definire un intorno centrato tale che a *"sinistra"* di 2 c'è un punto appartenente a E.
Però scegliendo $x_0 = 2.001$ è possibile; infatti posso definire un intorno di x con $r = 0.001$.
Analoghi i discorsi per $x_0 = 3$ e $x_0 = 2.999$
Concludo allora che

$$E^\circ = (2, 3)$$

FIGURA 1.1. (*Esempio 1.1.*)



2. Punto esterno

#Definizione

Definizione 2.1. (Punto esterno ad un insieme).

Un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ si dice *esterno ad un insieme* $E \subseteq \mathbb{R}$ se è *interno* al complementare di E, ovvero $\mathcal{C}_\mathbb{R} E$ (Operazioni con gli Insiemi > ^080cd5).
Quindi

$$x_0 \text{ è esterno} \iff \exists r > 0 : (x_0 - r, x_0 + r) \subseteq \mathcal{C}_\mathbb{R} E$$

Esempio di punto esterno

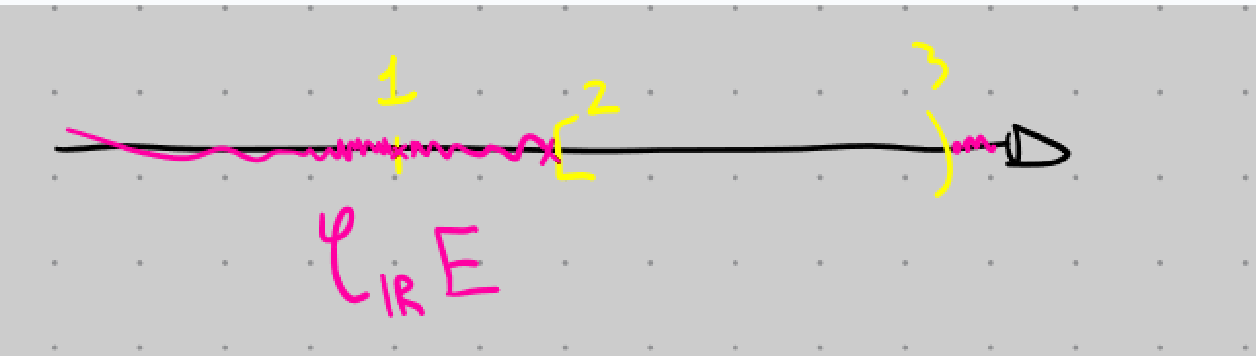
ESEMPIO 2.1. Considerando l'esempio di prima con

$$E = \{1\} \cup [2,3)$$

ora vogliamo trovare *l'insieme di tutti i punti esterni*. Allora usando lo stesso grafico di prima, faccio esattamente i stessi procedimenti di prima considerando però il *complemento di* E, ovvero tutti i punti che non appartengono ad E.
Usando la stessa procedura nell'*esempio 1.1.*, troviamo che

$$\{\text{punti esterni di } E\} = (-\infty, 1) \cup (1,2) \cup (3, +\infty)$$

FIGURA 2.1. (*Esempio 2.1.*)



3. Punti di frontiera

#Definizione

Definizione 3.1. (Punto di frontiera per un insieme, insieme dei punti di frontiera).

Un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ si dice *di frontiera per* E se questo punto *non è ne interno ne esterno ad* E.
Inoltre definiamo *l'insieme dei punti di frontiera* di E come

$$\{\text{punti di frontiera per } E\} := \partial E$$

e si legge come *"delta storto E"*

#Osservazione

Osservazione 3.1. (significato logico della definizione punto di frontiera)

Questa definizione equivale a negare la proposizione

$$[\exists r > 0 : (x_0 - r, x_0 + r) \subseteq E] \vee [\exists r' > 0 : (x_0 - r', x_0 + r') \subseteq \complement E]$$

Allora secondo le *leggi di De Morgan* e delle regole della logica formale (Logica formale - Sommario) questo diventa

$$[\forall r > 0, (x_0 - r, x_0 + r) \not\subseteq E] \land [\forall r' > 0, (x_0 - r', x_0 + r') \not\subseteq \mathcal{C}E]$$

Inoltre, dato che

$$A \not\subseteq B \iff A \cap \mathcal{C}_U B \neq \emptyset$$

ovvero che un insieme A non è sottoinsieme di B se e solo se l'intersezione tra A e il complemento di B non è vuota (ovvero ha almeno *un elemento*), questo diventa

$$[\forall r > 0, (x_0 - r, x_0 + r) \cap \mathcal{C}E \neq \emptyset] \land [\forall r' > 0, (x_0 - r', x_0 + r') \cap E \neq \emptyset]$$

In definitiva l'essere *punto di frontiera* per E equivale a soddisfare il seguente predicato:
"*Ogni* intorno di x_0 deve contenere *sia* punti di E e il suo complemento $\mathcal{C}_\mathbb{R}E$".

Esempi misti e di punti di frontiera

#Esempio

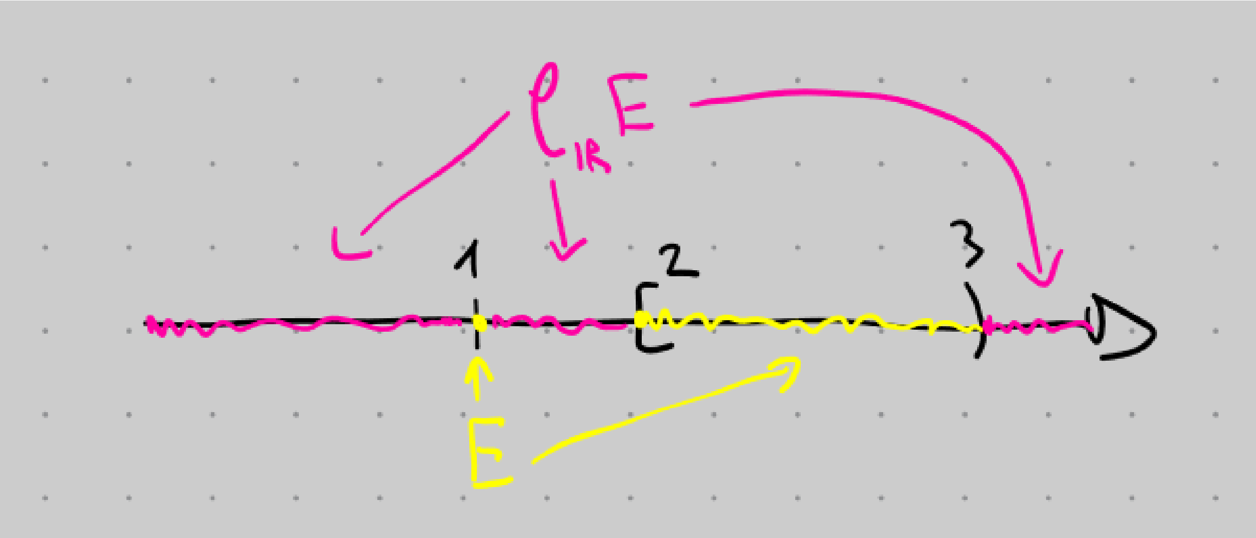
Esempio 3.1.

Considerando lo stesso esempio di prima, ovvero

$$E = \{1\} \cup [2, 3)$$

vogliamo trovare ∂E.
Procedendo con lo stesso disegno, cerchiamo di *"provare"* ogni punto per trovare elementi di ∂E.
$x_0 = 0$; Questo non è elemento di ∂E, in quanto posso facilmente trovare un intorno che contenga *solo* elementi del complemento di E.
$x_0 = 1$; Provando a considerare ogni intorno di x_0 trovo che deve per forza dev'esserci un punto sia in E che nel suo complemento.
$x_0 = 2$; Stesso discorso analogo di prima.
$x_0 = 3$; Di nuovo lo stesso discorso.
$x_0 = 2,5$; Qui invece è possibile trovare un intorno che contenga *solo* punti di E. Ad esempio un intorno centrato in $2,5$ con raggio $r = 0,1$.

FIGURA 3.1. (*Esempio 3.1.*)



#Esempio

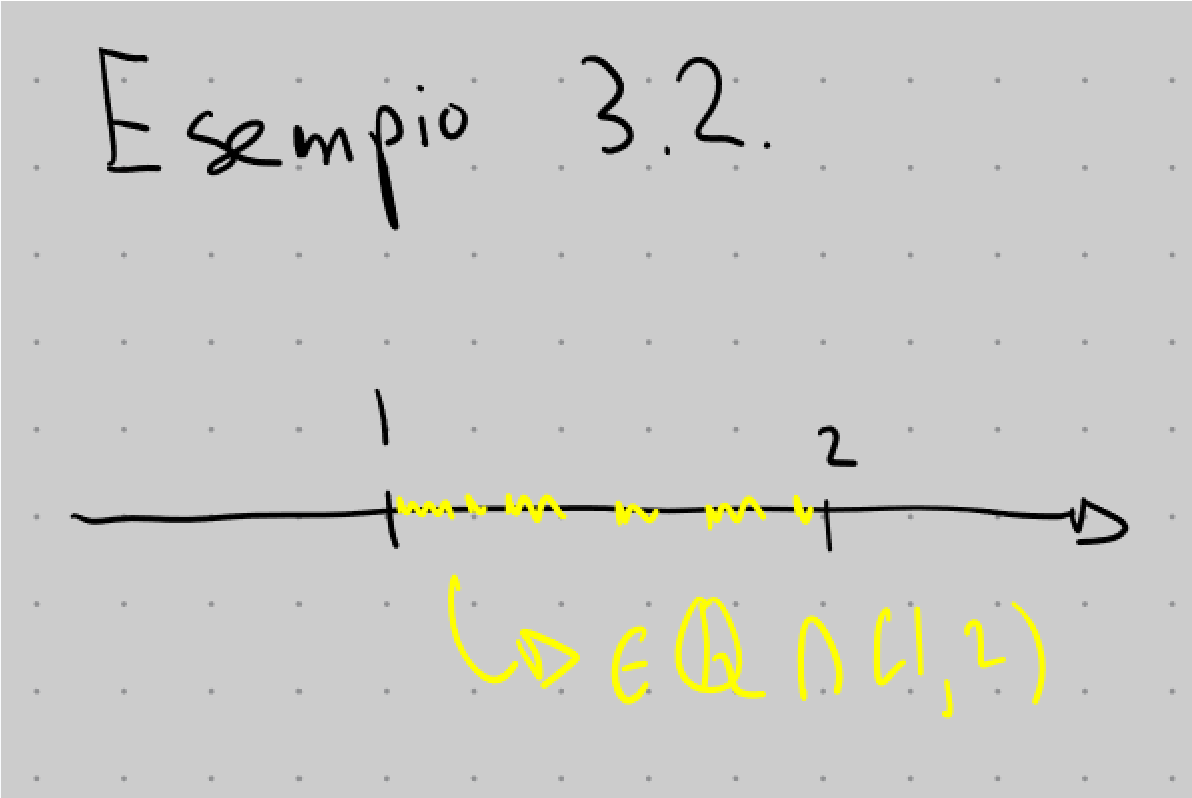
Esempio 3.2.

Consideriamo finalmente dei casi diversi da quelli esaminati prima. Sia

$$E = \mathbb{Q} \cap (1, 2)$$

ovvero tutti i numeri *razionali* compresi tra *1, 2* esclusi.
Scopro le seguenti:
$E^\circ = \emptyset$; infatti in questo insieme *non* vi ci sono punti interni, in quanto l'*assioma di separazione* non vale in $\mathbb{Q}$ (Assiomi dei Numeri Reali, **S)**, **OSS 6.2.**); quindi ci sono sempre dei *"buchi"* tra due numeri razionali, ovvero dei numeri irrazionali. Infatti è possibile dimostrare che i numeri irrazionali sono *densi* in $\mathbb{R}$.
$\partial E = [1, 2]$; qui si verifica un fenomeno strano, ovvero che si verifica che ∂E è più *"grande"* di E stessa.
Questo si verifica perché, da un lato abbiamo la *densità di* $\mathbb{Q}$ *in* $\mathbb{R}$ (Conseguenze dell'esistenza dell'estremo superiore, **TEOREMA 4.1.**); infatti se considero un punto q_0 in $\mathbb{Q}$ e considero gli *"estremi"* del suo intorno $(q_0 - r, q_0 + r)$ allora tra $q_0 - r$ e $q_0 + r$ dev'esserci almeno un numero razionale.
Però allo stesso tempo, come visto prima, i numeri irrazionali sono *densi* in $\mathbb{R}$; di conseguenza se ci sono sia dei numeri razionali (appartenenti a E) che dei irrazionali (appartenenti al complemento di E) allora vediamo che tutti i punti di E (gli estremi inclusi) sono *punti di frontiera*.

FIGURA 3.2. (*Esempio 3.2.*)



A3. Insiemi aperti e chiusi

Insiemi aperti e chiusi

Definizione di insieme aperto e chiuso. Teorema sugli insiemi aperti e chiusi.

---

1. Insieme aperto

#Definizione

Definizione 1.1. (Insieme Aperto).

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$; l'insieme A si dice **aperto** se e e solo se *tutti i suoi punti sono punti interni all'insieme stesso* (Punti interni, esterni e di frontiera > ^c78831); ovvero se

$$\forall x_0 \in A, \exists r > 0 : (x_0 - r, x_0 + r) \subseteq A$$

#Osservazione

Osservazione 1.1. (condizione necessaria e sufficiente per l'essere aperto di un insieme)

> Osservo che l'insieme A è aperto *se e solo se* $A = A^\circ$.

Esempi di insiemi aperti

#Esempio

Esempio 1.1.

Considero *l'intervallo aperto* (Intervalli > ^6d6e94)

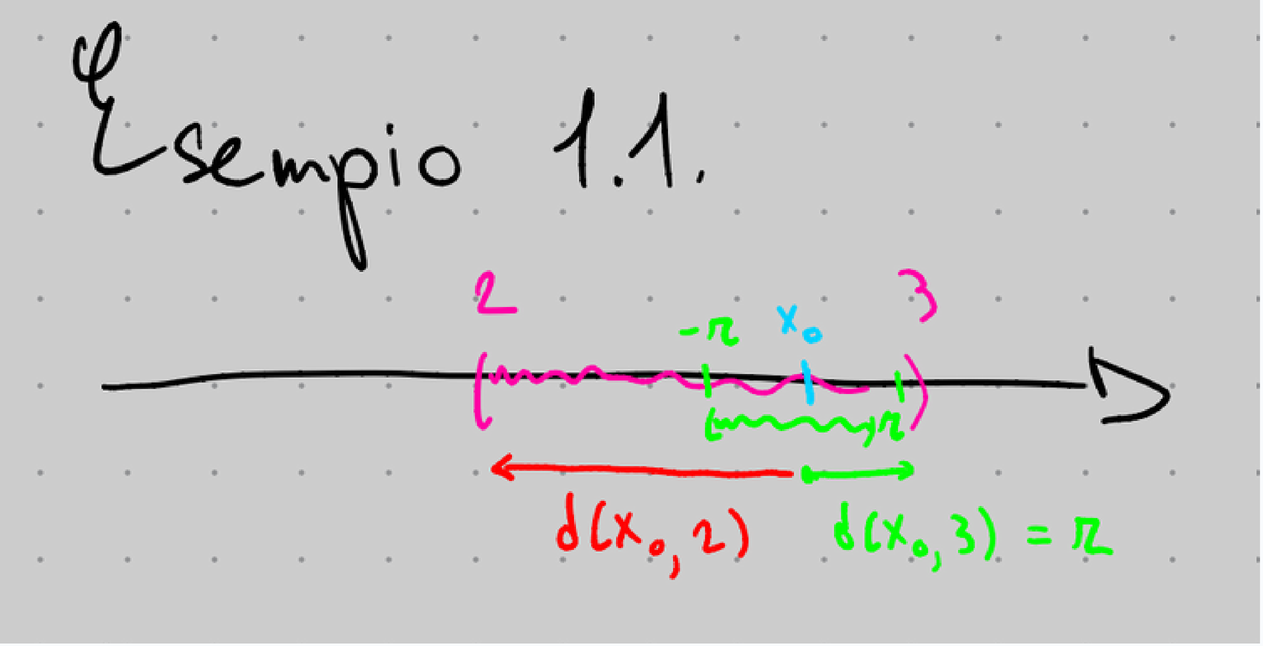
$$(2, 3)$$

voglio sapere se questo è *insieme aperto*; scegliendo un qualunque punto x all'interno di questo intervallo, allora posso sicuramente trovare un intorno in x tale per cui contiene *solo* elementi di $(2, 3)$. Infatti se scelgo r come la *distanza minima* tra x e ciascun estremo, scopro che l'*intorno centrato aperto* di questo raggio (Intorni) contiene *solo* punti di E (dunque esso è *sottoinsieme* di E). Formalizzando questo ragionamento, ho

$$\forall x, 2 < x < 3; r = \min(d(x, 2), d(x, 3))$$

Graficamente questo ragionamento corrisponde alla *figura 1.1.*

FIGURA 1.1. (*Esempio 1.1.*)



#Esempio

Esempio 1.2.

Ora considero l'insieme

$$E = \{1\} \cup [2, 3)$$

che *non è aperto*, in quanto considerando $x_0 = 1$ trovo che questo elemento (o punto) non è *interno* a E. Analogo il discorso per $x_0 = 2$.

2. Insieme chiuso

#Definizione

Definizione 2.1. (Insieme Chiuso).

Considerando un insieme $C \subseteq \mathbb{R}$, si dice che esso è *chiuso* se il suo *complemento* è *aperto*. Ovvero se $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}C$ è aperto.

Esempi di insiemi chiusi

Esempio 2.1.

ESEMPIO 2.1. Consideriamo *l'intervallo chiuso* (Intervalli, **DEF 1.1.**)

$$C = [2, 5]$$

Considerando il suo complemento

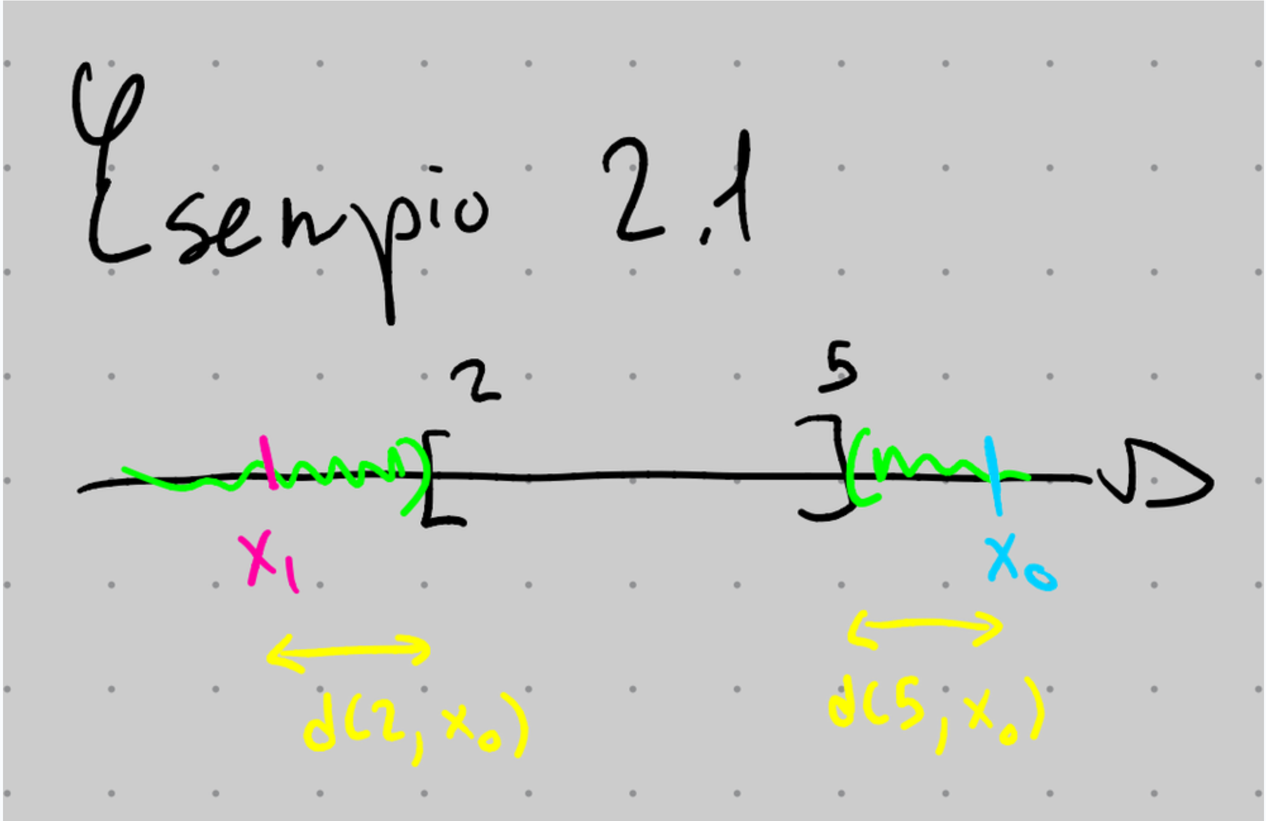
$$\mathcal{C}_{\mathbb{R}}C = (-\infty, 2) \cup (5, +\infty)$$

vediamo che questo insieme (il complemento) è *aperto*; infatti ad ogni punto x_0 del complemento vediamo che è possibile definire un r tale che l'*intorno centrato aperto* di questo raggio sia sottoinsieme di $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}C$.
Infatti definendo r come

$$r = \begin{cases} d(2, x_0) \text{ per } x_0 < 2 \\ d(5, x_0) \text{ per } x_0 > 5 \end{cases}$$

sicuramente troviamo che tutti i punti x_0 sono interni al complemento di C.
Graficamente questo ragionamento corrisponde alla *figura 2.1.*.

FIGURA 2.1. (*Esempio 2.1.*)



3. Teoremi sugli insiemi aperti e chiusi

#Teorema

Teorema 3.1. (Proprietà degli insiemi aperti).

Abbiamo le seguenti proposizioni:

1. Gli insiemi
$$\emptyset, \mathbb{R}$$
sono *insiemi aperti*
2. L'*unione* (Operazioni con gli Insiemi) di due *insiemi aperti* è sicuramente un *insieme aperto*.
3. L'*intersezione* (Operazioni con gli Insiemi) di due *insiemi aperti* è sicuramente un *insieme aperto*.

#Teorema

Teorema 3.2. (Proprietà degli insiemi chiusi).

Abbiamo invece le stesse proposizioni per gli insiemi chiusi:

1. Gli insiemi

$$\emptyset, \mathbb{R}$$

sono *insiemi chiusi*
2. L'*unione* (Operazioni con gli Insiemi) di due *insiemi chiusi* è sicuramente un *insieme chiuso*.
3. L'*intersezione* (Operazioni con gli Insiemi) di due *insiemi chiusi* è sicuramente un *insieme chiuso*.

#Osservazione

Osservazione 3.1. (basta dimostrare solo uno dei due teoremi)

Notiamo che se dimostriamo almeno uno di questi due teoremi, allora si ha automaticamente dimostrato l'altro teorema, in quanto la *definizione dell'insieme chiuso* (^36f40d) ci suggerisce che le stesse proprietà valgono. Infatti, la definizione dell'insieme chiuso si basa sulla definizione dell'insieme aperto, tenendo però conto del complementare dell'insieme; perciò basta tenere conto delle leggi di *De Morgan* (Logica formale - Sommario).

DIMOSTRAZIONE del *teorema 3.1.* (^63081b)

1. L'insieme vuoto

$$\emptyset$$

non ha *nessun elemento*; per verificare se questo insieme vuoto è *aperto*, bisognerebbe allora verificare che *tutti* gli elementi di questo insieme gode della proprietà necessaria. Pertanto si può pensare che tutti gli elementi (ovvero nessuno) di questo insieme può godere *tutte* le proprietà che si vuole. Altrimenti è possibile pensare in termini di insiemi complementari.

Per quanto riguarda l'insieme dei numeri reali

$$\mathbb{R}$$

e prendendo un elemento $x_0 \in \mathbb{R}$ allora si trova automaticamente che

$$\forall r > 0, (x_0 - r, x_0 + r) \subseteq \mathbb{R}$$

è verificata.

2. Sia

$$\{A_i, i \in I\}$$

un insieme di *insiemi aperti*. Per un insieme del genere vedere *esempio 3.2.*. Allora considero un

$$x_0 \in \bigcup_{i \in I} A_i$$

Allora da ciò discende che esiste un $\bar{i}$ tale che il punto x_0 appartenga all'insieme aperto $A_{\bar{i}}$, ovvero

$$x_0 \in A_{\bar{i}}$$

Allora è vero che esiste una *palla aperta* (Intorni > ^ffc6f8) che venga contenuta in quell'insieme aperto. Ovvero

$$x_0 \in A_{\bar{i}} \implies \exists r > 0 : (x_0 - r, x_0 + r) \subseteq A_{\bar{i}}$$

Ma allora ciò implica che

$$\exists r > 0 : (x_0 - r, x_0 + r) \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$$

3. Siano A_1 e A_2 due insiemi aperti; scelgo allora un $x_0 \in (A_1 \cap A_2)$. Quindi ciò vuol dire che

$$x_0 \in (A_1 \cap A_2) \implies \begin{cases} x_0 \in A_1 \implies \exists r_1 > 0 : (x_0 - r_1, x_0 + r_1) \subseteq A_1 \\ x_0 \in A_2 \implies \exists r_2 > 0 : (x_0 - r_2, x_0 + r_2) \subseteq A_2 \end{cases}$$

Poi scegliendo r il minimo tra r_1 e r_2, ovvero

$$r = \min(r_1, r_2)$$

Allora ho che

$$(x_0 - r, x_0 + r) \subseteq (A_1 \cap A_2)$$

il che vuol dire l'intersezione tra A_1 e A_2 è aperto. ■■■

#Osservazione

Osservazione 3.2. (l'intersezione infinita tra insiemi aperti non è un aperto)

Però questo *non* vuol dire che l'*intersezione infinita* tra insiemi aperti debba essere necessariamente *aperta*: infatti si propone il seguente controesempio.

#Esempio

Esempio 3.1. (controesempio per l'osservazione 3.2.)

Considero la *successione di intorni*

$$(I_n)_n : I_n = (1 - \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n})$$

e vediamo che l'intervallo I_n è aperto per ogni n.
Inoltre gli intervalli $(I_n)_n$ sono *inscatolati* (Intervalli > ^66568f).
Disegnando il grafico (*lasciato al lettore per esercizio*) notiamo che se prendiamo l'intersezione di tutti gli intervalli

$$\bigcap_n I_n$$

i numeri compresi tra $1, 2$ stanno sicuramente all'interno di questo intervallo, come si può evincere dal grafico; invece per la *proprietà di Archimede* (Conseguenze dell'esistenza dell'estremo superiore > ^d95d40), per ogni numero che sta fuori da $[1, 2]$, esiste un intervallo I_n che non lo include; ovvero

$$\begin{aligned}\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N} : 1 - \varepsilon \notin I_n \\ 2 + \varepsilon \notin I_n\end{aligned}$$

(*la dimostrazione completa è lasciata al lettore*)
Allora si può concludere che

$$\bigcap_n I_n = [1, 2]$$

che *non* è un *insieme aperto*.

#Esempio

Esempio 3.2. (famiglia di insiemi aperti)

Un insieme del tipo presentato nella dimostrazione può essere

$$\{(1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N} \diagdown \{0\}\}$$

A4. Punti di aderenza e di accumulazione

Punti di aderenza e di accumulazione

Definizione di punto di aderenza e di accumulazione. La chiusura e il derivato di un insieme. Primo teorema di Bolzano-Weierstraß.

---

1. Punti di aderenza (o di chiusura)

#Definizione

Definizione 1.1. (Punto di aderenza o di chiusura per un insieme, chiusura di un insieme).

Sia $E \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$.
Allora x_0 si dice *punto di chiusura (o di aderenza)* per E se è vera la seguente:

$$\forall r > 0 : ((x_0 - r, x_0 + r) \cap E) \neq \emptyset$$

Ovvero in ogni *palla/intorno centrato di* x_0 (Intorni > ^533fec) devono esserci elementi di E.
Inoltre definiamo l'insieme dei *punti di chiusura* dell'insieme E si dicono la *chiusura (o aderenza) di* E, scritto come $\overline{E}$.

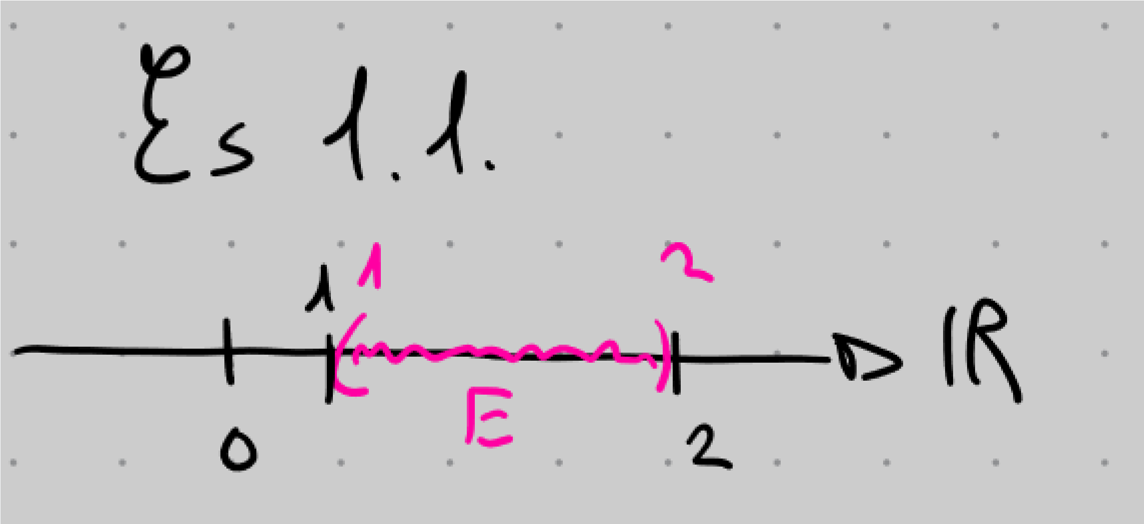
#Esempio

Esempio 1.1.

Consideriamo l'insieme $E = (1, 2)$ e voglio trovare gli elementi di $\overline{E}$.
Per farlo è possibile disegnare il grafico di E, poi *"testare"* ogni elemento della retta $\mathbb{R}$ per vedere quali sono i potenziali elementi di $\overline{E}$.
Si evince che:
I numeri $0, \frac{1}{2}$ *non* sono *punti di aderenza* per E, in quanto è possibile individuare *almeno* un intorno fuori da E (ovvero che non contenga elementi di E).
1 è un *punto di aderenza*, in quanto per tutti gli intorni in x_0 abbiamo sempre almeno un elemento di E; infatti si deve sempre *"andare a destra"*, *"entrando"* in E. Analogo il discorso per 2.
In conclusione è possibile individuare

$$\overline{E} = [1, 2]$$

FIGURA 1.1. (*Esempio 1.1.*)



#Osservazione

Osservazione 1.1. (proprietà della chiusura)

Osserviamo che per ogni insieme è vera che

$$E \subseteq \overline{E}$$

(*da rielaborare meglio, forse da dimostrare formalmente*)

#Esempio

Esempio 1.2.

Considero l'insieme

$$E = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \diagdown \{0\}\}$$

poi voglio trovare le seguenti: $\overline{E}, E^\circ, \partial E$.
$\overline{E} = E \cup \{0\}$ e $\partial E = E \cup \{0\}$; a questi insiemi aggiungiamo il numero 0 in quanto *per l'Archimedeità di* $\mathbb{R}$ (Conseguenze dell'esistenza dell'estremo superiore, **TEOREMA 3.1.**) è sempre possibile trovare un n tale che

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n : 0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

$E^\circ = \emptyset$; infatti E è definita tramite gli $\mathbb{N}$, che presenta dei *"buchi"* in $\mathbb{R}$.

#Esempio

Esempio 1.3.

Voglio studiare l'insieme dei *numeri razionali* $\mathbb{Q}$ (Richiami sui Numeri Razionali). Prima di tutto, sicuramente

$$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

per la *densità di* $\mathbb{Q}$ *in* $\mathbb{R}$ (Conseguenze dell'esistenza dell'estremo superiore > ^e279b1). Ovvero da ciò consegue che prendendo un punto $q_0 \in \mathbb{Q}$, è possibile trovare sempre dei numeri razionali per qualsiasi *intorno* con $r > 0$. Infatti

$$\forall r > 0, \exists a \in \mathbb{Q} : q_0 + r > a > q$$

In secondo luogo vediamo che l'insieme dei punti di frontiera $\partial\mathbb{Q}$ è anch'esso $\mathbb{R}$ per motivi analoghi.
In definitiva, per *l'assioma di Dedekind* (Assiomi dei Numeri Reali > ^c29076) sappiamo che tra un numero razionale q_0 e un altro numero (in questo caso prendiamo $q_0 + r, \forall \varepsilon > 0$) dev'esserci un numero *irrazionale* che non appartiene a $\mathbb{Q}$; allora non ci sono dei *punti interni* (Punti interni, esterni e di frontiera > ^c78831).

Proprietà della chiusura

Possiamo enunciare le seguenti proprietà per la *chiusura* di E.

#Teorema

Teorema 1.1. (Proprietà della chiusura $\bar{E}$).

Sia $E \subseteq \mathbb{R}$, allora sono vere che:

1. $\overline{E}$ è un *insieme chiuso* (Insiemi aperti e chiusi > ^36f40d). Per provare questo, bisognerebbe dimostrare che l'insieme complementare della chiusura di E è *aperto*; quindi bisogna considerare i punti che non stanno né in E né nella sua chiusura $\overline{E}$ e poi dimostrare che esiste un'intervallo di ogni punto che non sta nella chiusura.
2. $\overline{E}$ è *il più piccolo chiuso* che contiene E. Quindi ho in mente una *relazione d'ordine* (Relazioni, **DEF 4.1.**), ovvero dal punto di vista di quella d'inclusione. Ovvero

$$A > B \iff B \subseteq A$$

3. Un insieme E è *chiuso* se e solo se $\overline{E} = E$

2. Punti di accumulazione

#Definizione

Definizione 2.1. (Punto di accumulazione, derivato di un insieme).

Sia $E \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Si dice che x_0 è un **punto di accumulazione di** E se è vera che

$$\forall r > 0, (]x_0 - r, x_0 + r[\cap E) \diagdown \{x_0\} \neq \emptyset$$

ovvero un *punto di aderenza* escludendo però il punto x_0 stesso; quindi un punto x_0 è di accumulazione per E se in ogni intorno di x_0 ci sono punti di E diversi da se stesso.

L'insieme dei *punti di accumulazione per* E si chiama *derivato* di E, demarcata col simbolo

$$\mathcal{D}E$$

e si legge come *"d corsivo maiuscolo"*.

#Osservazione

Osservazione 2.1. (significato di $\pm\infty$ punto di accumulazione)

Come abbiamo definito degli *intorni di* $+\infty$ *o di* $-\infty$ (Intorni > ^4ff870) è possibile definire anche $+\infty$ o $-\infty$, in una maniera analoga, come *punti di accumulazione* di un insieme E. Un $+\infty$ è punto di accumulazione per E vuol dire che si verifica il seguente:

$$\forall M > 0, (M, +\infty) \cap E \neq \emptyset$$

ovvero

$$\forall M > 0, \exists x_0 \in E : x > M$$

ovvero che per ogni semiretta a partire da M, dev'esserci almeno un elemento in comune tra questa semiretta e l'insieme E con $+\infty$ come punto di accumulazione.
Analoga la definizione di un insieme E che ha $-\infty$ come punto di accumulazione.
Questo diventerà importante in particolare per studiare i *limiti di successioni* (Limite di Successione)

#Teorema

Teorema 2.1. (di caratterizzazione degli punti di accumulazione).

> Sia $E \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$. x_0 è *punto di accumulazione per* E se e solo se in *ogni* intorno di x_0 ci sono *infiniti* punti di E.

#Dimostrazione
DIMOSTRAZIONE del *teorema 2.1.* (^622755)
Questa dimostrazione si articola in due sotto-dimostrazioni.
" $\Longleftarrow$ ": Dimostriamo che *se in ogni intorno di x_0 ci sono infiniti punti di E, allora x_0 è di accumulazione per E*: questo è evidentemente vero, in quanto se in ogni intorno di x_0 ci sono infiniti punti di E, allora dev'esserci almeno un elemento di E in questo intorno diverso da x_0.
" $\Longrightarrow$ ": Ora notiamo il viceversa; ovvero che *se x_0 è di accumulazione per E allora in ogni suo intorno ci sono infiniti punti di E.*
Per dimostrare questa proposizione, procediamo dimostrando la *contronominale*; ovvero che se in *ogni intorno di x_0 ci sono elementi finiti di E, allora x_0 non è punto di accumulazione per E* (Logica formale - Sommario); in una maniera simile si può dimostrare per assurdo.
Supponiamo quindi che x_0 abbia un intorno in cui ci sono un numero finito punti di E: allora

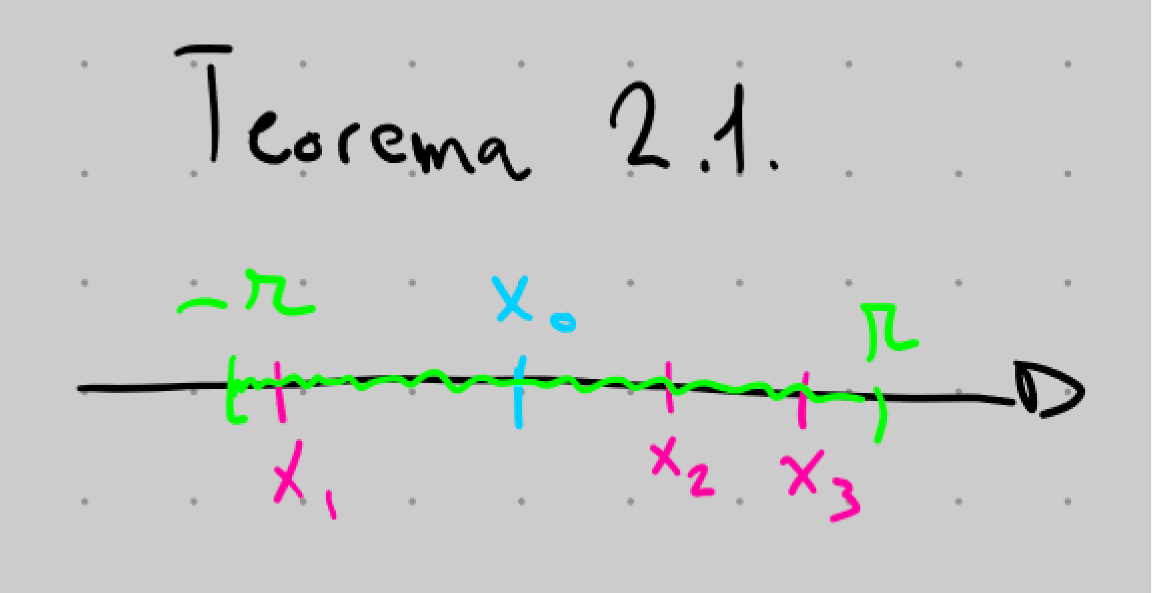
$$(x_0 - r, x_0 + r) \cap E = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$$

(*figura 2.1.*)
Considero dunque $r = \min(\{d(x_0, x_j), \forall j \in \{1, 2, \dots, k\}\})$ ovvero la *minima* distanza tra x_0 e un qualunque punto di E. Allora risulta che

$$((x_0 - r, x_0 + r) \cap E) \setminus \{x_0\} = \emptyset$$

il che ci dimostra che x_0 *non* è di accumulazione per E. (oppure è un punto isolato).

FIGURA 2.1. (*Idea del passaggio finale*)



Esempio di derivato di un insieme

#Esempio

Esempio 2.1.

Prendiamo di nuovo l'intervallo

$$E = (1,2)$$

E voglio individuare $\mathcal{D}E$. Con lo stesso approccio di *esempio 1.1.*, *"testiamo"* dei elementi della retta reale per vedere se possono essere dei *punti di accumulazione*.
Ovviamente 0 non può essere punto di accumulazione.
$1, 2$ sono *punti di accumulazione* per E in quanto disegnando un qualsiasi intorno di questi punti, si deve per forza disegnare un intervallo che contenga elementi di E. Analogo il discorso per i numeri $1 \leq x \leq 2$.
Allora

$$\mathcal{D}E = [1,2]$$

#Esempio

Esempio 2.2.

Prendiamo l'insieme

$$E = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \diagdown \{0\}\}$$

Con lo stesso approccio di sempre, individuiamo gli elementi di $\mathcal{D}E$.
Prima di tutto, vediamo che 1 non è punto di accumulazione. Infatti è possibile individuare un intorno $(1-r, 1+r)$ che non abbia elementi di E: basta porre $r = 0,1$.
Analogo discorso per tutti gli elementi n ponendo $r = |\frac{1}{n^2+n}|$.
Finalmente vediamo che 0 è punto di accumulazione per l'*Archimedeità* dei reali (Conseguenze dell'esistenza dell'estremo superiore, **TEOREMA 3.1.**). Infatti per qualsiasi r è sempre possibile trovare $n \in \mathbb{N}$ tale che

$$0 < \frac{1}{n} < 0 + r$$

Allora $\mathcal{D}E = \{0\}$.

#Esempio

Esempio 2.3. (punti di accumulazione per $\mathbb{N}$)

Prendiamo i *numeri naturali* (Numeri Naturali - Sommario).
Si scopre che $\mathcal{D}\mathbb{N} = \emptyset$; non esistono i numeri naturali che siano dei *punti $\mathbb{R}$ di accumulazione per* $\mathbb{N}$, in quanto tutti questi numeri distano tra di loro. Basta infatti prendere l'intorno in $n \in \mathbb{N}$ di raggio $0,5$. Invece è possibile dire che $+\infty$ è punto di accumulazione per $\mathbb{N}$, in quanto grazie all'*Archimedeità dei reali* (Conseguenze dell'esistenza dell'estremo superiore > ^d95d40) si verifica la seguente condizione:

$$\forall M > 0, \exists n \in \mathbb{N} : n > M \text{ dove } \varepsilon = 1$$

^740a07
Questo esempio si rivelerà fondamentale per la definizione di *limite di successione* (Limite di Successione > ^ef60f6).

A5. Primo teorema di Bolzano-Weierstraß

Primo Teorema di Bolzano-Weierstraß

Enunciato e dimostrazione del primo teorema di Bolzano-Weierstraß

---

0. Prerequisiti e/o voci correlate

- Punti di aderenza e di accumulazione
- Conseguenze dell'esistenza dell'estremo superiore
- Successione e Sottosuccessione

1. Enunciato del primo teorema di Bolzano-Weierstraß

Enunciamo uno dei teoremi più noti dell'*analisi matematica*, che ci garantisce l'esistenza di un punto di accumulazione in $\mathbb{R}$ per una categoria di insiemi.

#Teorema

Teorema 1.1. (Primo teorema di Bolzano-Weierstraß).

Sia $E \subseteq \mathbb{R}$, E un insieme *infinito* e *limitato*. (Insiemi limitati, maggioranti, massimo e teorema dell'estremo superiore > ^c0a632)
Allora si verifica il seguente:

$$\exists \xi \in \mathbb{R} : \xi \in \mathcal{D}E$$

ovvero che esista un numero ξ che sia *punto di accumulazione* per E.

#Dimostrazione
DIMOSTRAZIONE del *primo teorema di Bolzano-Weierstraß* (^8417b2)
Se E è un insieme *limitato* allora per il *teorema dell'esistenza dell'estremo superiore e inferiore* (Insiemi limitati, maggioranti, massimo e teorema dell'estremo superiore > ^55bb5a) esistono

$$a_0 = \inf(E); b_0 = \sup(E)$$

ovvero $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ e tali per cui $E \subseteq [a_0, b_0]$.
Allora considero c_0 il *punto medio tra* a_0 *e* b_0; ora considero i due intervalli

$$[a_0, c_0]; [c_0, b_0]$$

(*figura 2.1.*)
Inoltre *almeno* uno di questi intervalli devono essere *infiniti*, in quanto se supponessimo per assurdo che entrambi gli intervalli fossero finiti, allora la loro unione sarebbe anch'essa finita.
Tenendo questo in considerazione, scegliamo uno di questi. Ora chiamo questo intervallo $[a_1, b_1]$, dove $a_1 = c_0$ oppure $b_1 = c_0$, a seconda dell'intervallo scelto.
Quindi otteniamo una *successione di intervalli inscatolati, limitati, infiniti e dimezzati* (Intervalli)

$$(I_n)_n$$

La *forma forte del teorema di Cantor* (Conseguenze dell'esistenza dell'estremo superiore > ^78d038) ci dice che facendo l'intersezione di tutti questi intervalli otteniamo un ξ.
Ora voglio trovare un *intorno* di ξ che contenga un qualunque insieme *infinito* $[a_n, b_n]$. Ovvero voglio verificare che

$$\exists r > 0 : [a_n, b_n] \subseteq (\xi - r, \xi + r)$$

Allora la condizione è

$$r > d(a_n, b_n) = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$$

il che è possibile in quanto ricordandomi che

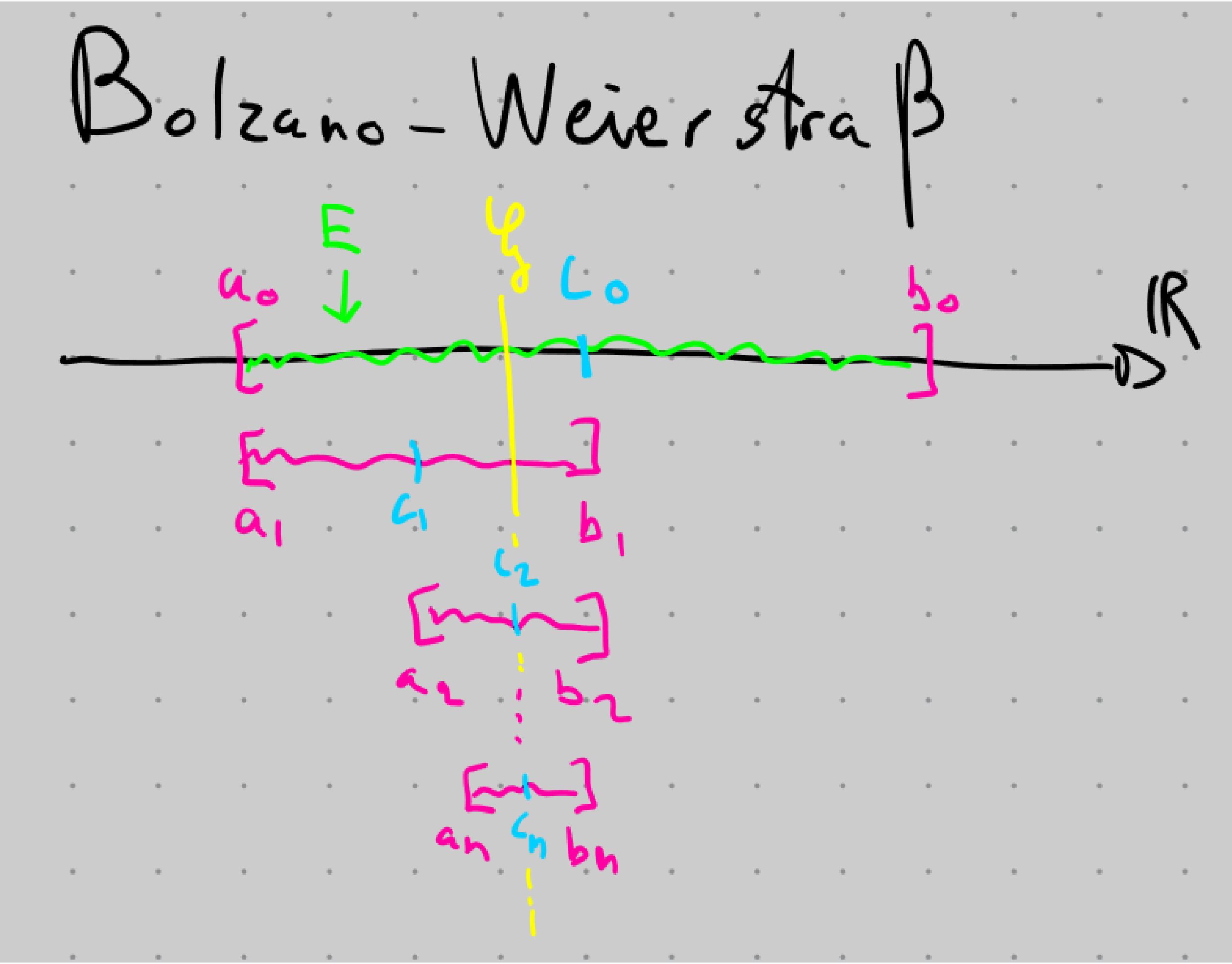
$$\frac{b_0 - a_0}{n} \geq \frac{b_0 - a_0}{2^n}$$

e tenendo conto *l'Archimedeità di* $\mathbb{R}$ (Conseguenze dell'esistenza dell'estremo superiore > ^d95d40) la condizione sopra citata è totalmente possibile visto che

$$\exists \bar{n} : 0 < \frac{b_0 - a_0}{2^{\bar{n}}} \leq \frac{b_0 - a_0}{\bar{n}} < r$$

Abbiamo quindi che l'intorno in ξ di raggio r contiene l'insieme infinito $[a_{\bar{n}}, b_{\bar{n}}]$, di conseguenza anche l'intorno stesso è infinito; dato che contiene infiniti punti di E, per il *teorema di caratterizzazione* dei punti di accumulazione (^622755), ξ è *punto di accumulazione* per E. ■

FIGURA 1.1. (*Idea grafica del primo passaggio*)



Capitolo IV. Limiti

Abstract del Capitolo IV

Siamo qui ad uno degli argomenti più importanti dell'*analisi matematica*: i limiti.
Da un lato andremo a definire in una maniera rigorosa il concetto di *limite di funzione* (e di *successione*), usando gli strumenti della *topologia della retta reale*; dall'altro lato andremo anche a scoprire dei *teoremi*, delle *proprietà* dei limiti per poter rendere la *"prassi dei limiti"* il più fattibile possibile.

L'obbiettivo di questo capitolo è quello di poter essere in grado di *valutare* un limite qualsiasi di una funzione qualsiasi, al fine di poter comprendere il comportamento di questa funzione nella sua interezza.

SEZIONE A. LIMITI DI FUNZIONE

A1. Definizione di limite di funzione

Definizione di Limite di funzione

Idea fondamentale del limite di una funzione; definizione di limite in tutti i casi; dimostrazione dell'esistenza di un limite. Definizione di limite destro e sinistro.

---

0. Argomenti propedeutici e/o voci correlate

Per affrontare uno degli argomenti più importanti dell'*analisi matematica*, ovvero i *limiti*, è necessario conoscere e ricordare alcuni argomenti:

- Intorni di $x_0 \in \tilde{\mathbb{R}}$
- Punti di aderenza e di accumulazione per un insieme $E \subseteq \mathbb{R}$
  Voci correlate:
- Studio di Funzione
- Derivata e derivabilità

1. Idea fondamentale

#Osservazione

Osservazione 1.1. (idea fondamentale del limite)

Prendiamo la una funzione di variabile reale (**DEF 1.1.**) del tipo

$$f : E \longrightarrow \mathbb{R}, E \subseteq \mathbb{R}$$

e consideriamo un punto $x_0 \in \tilde{\mathbb{R}}$ che è un *punto di accumulazione* per E (Punti di aderenza e di accumulazione, **DEF 2.1.**).
Ora voglio capire come posso *rigorosamente* formulare la seguente frase:
"Se $x \in E$ si avvicina a $x_0 \in \tilde{\mathbb{R}}$, allora $f(x)$ si avvicina a un valore $L \in \tilde{\mathbb{R}}$."
Ovvero col seguente grafico abbiamo la *figura 1.1.*
Oppure un caso più particolare, con

$$\begin{gathered} f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x \cdot \sin(\frac{1}{x}) \end{gathered}$$

dove 0 è un punto di accumulazione per E (il dominio), ma non ne fa parte.

FIGURA 1.1. (*Idea di base*)

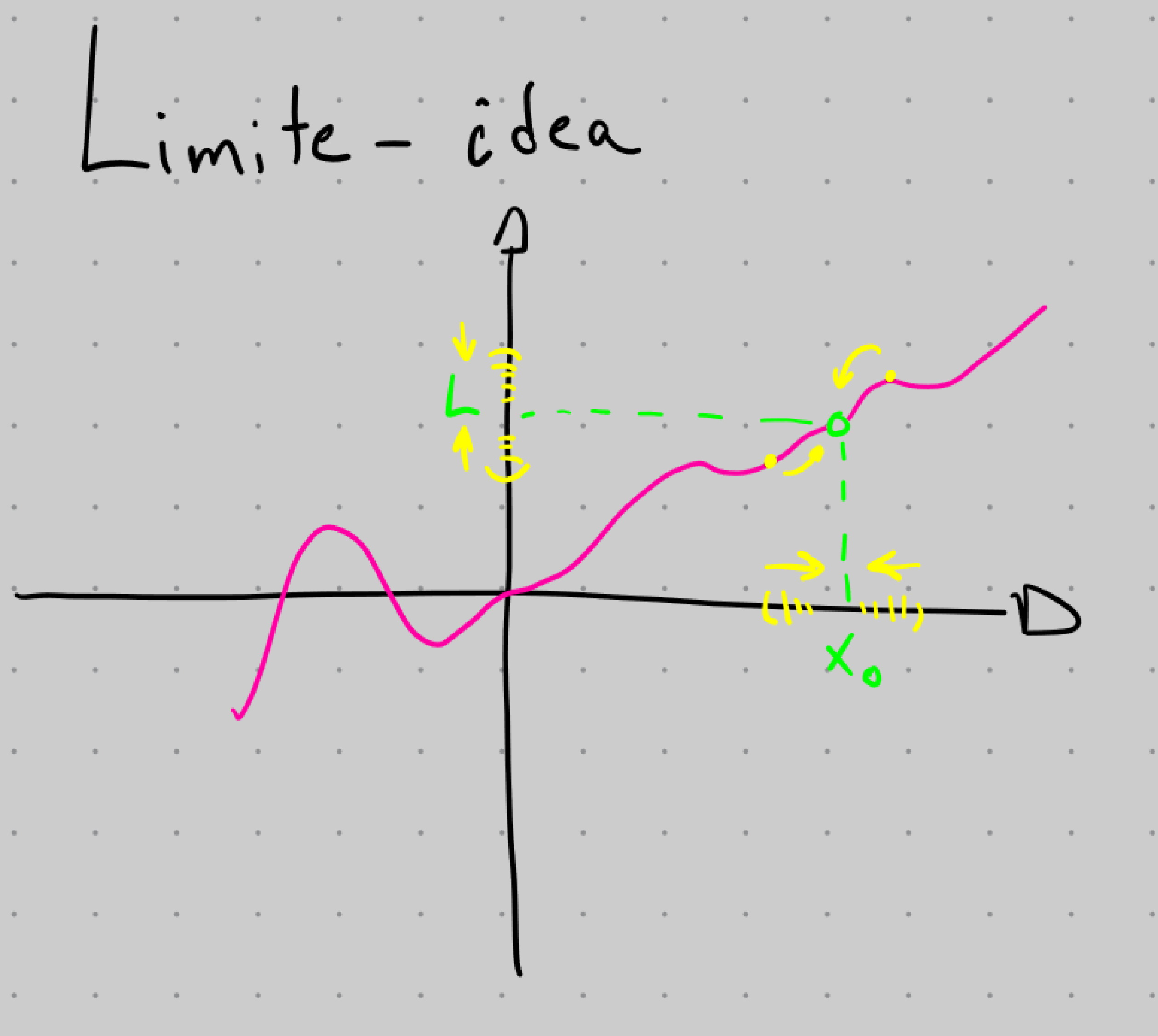
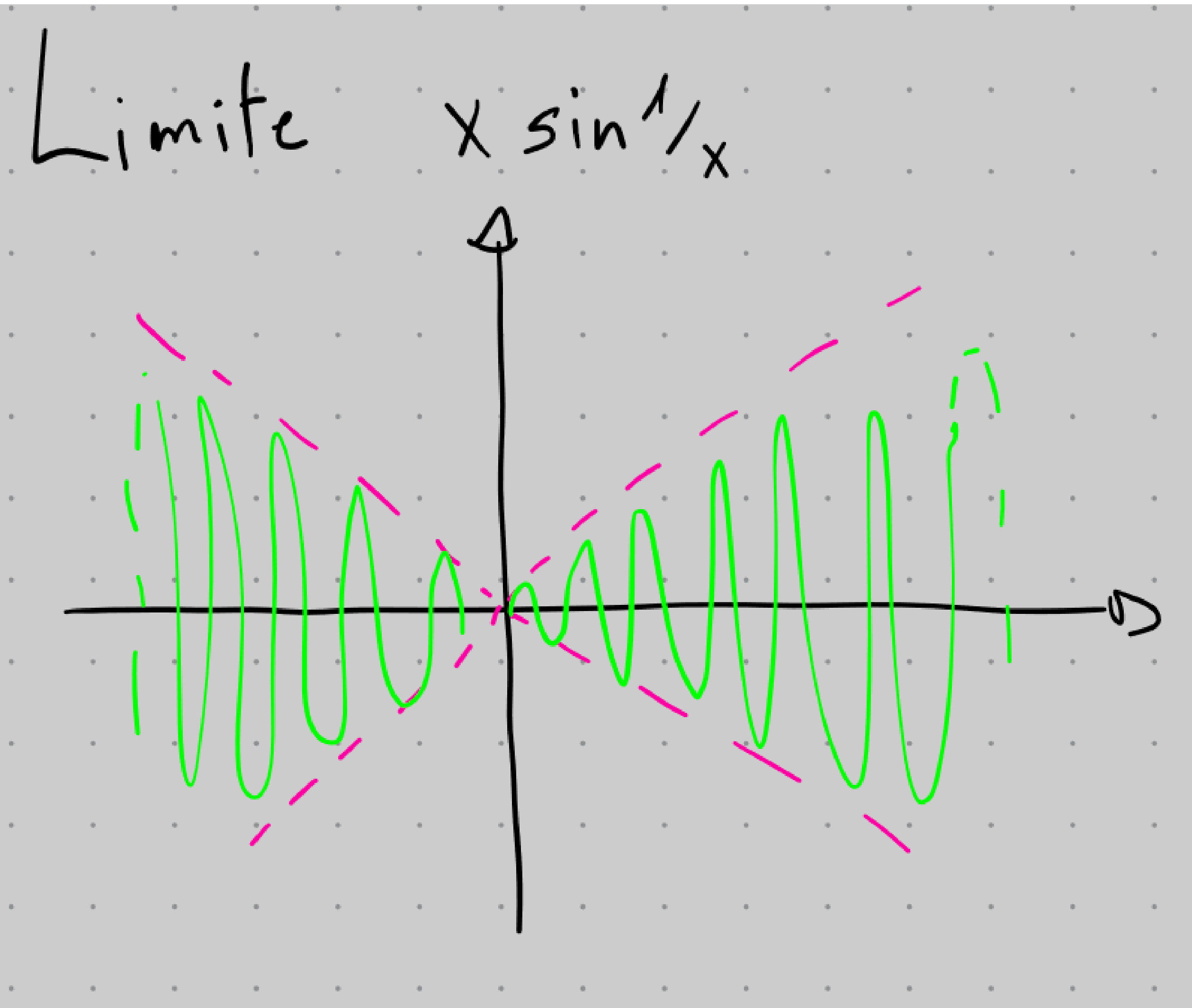


FIGURA 1.2. (*Esempio particolare* $x \sin \frac{1}{x}$)



2. Formulazione rigorosa del concetto del limite di funzione

Ora diamo una *formalizzazione rigorosa* del concetto appena formulato sopra.

#Definizione

Definizione 2.1. (formulazione generale e rigorosa del limite di una funzione che tende ad un punto di accumulazione)

Sia f una *funzione di variabile reale* di forma

$$f : E \longrightarrow \mathbb{R}, E \subseteq \mathbb{R}$$

Siano $x_0, L \in \tilde{\mathbb{R}}$, x_0 un *punto di accumulazione* per E.
Allora denotiamo il *limite di funzione* per un *punto di accumulazione* come

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

e la definiamo se è vera la seguente:

$$\forall V \text{ intorno di } L, \exists E \text{ intorno di } x_0 \text{ tale che:}$$
$$\forall x \in E, x \in U \setminus \{x_0\} \implies f(x) \in V$$

#Osservazione

Osservazione 2.1. (la formulazione generale del limite comprende tutti i casi)

Questa *definizione* del limite può essere può essere interpretata in più casi.

#Definizione

Definizione 2.2. (formulazione di Cauchy del limite di una funzione)

Siano $x_0, L \in \mathbb{R}$. Quindi dei valori *fissi* sulla *retta reale*.
Ora *"interpretiamo"* la definizione del *limite* di $f(x)$, $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ in questo caso:

$$\forall V \text{ intorno di } L, \exists E \text{ intorno di } x_0 \text{ tale che:}$$
$$\forall x \in E, x \in U \setminus \{x_0\} \implies f(x) \in V$$

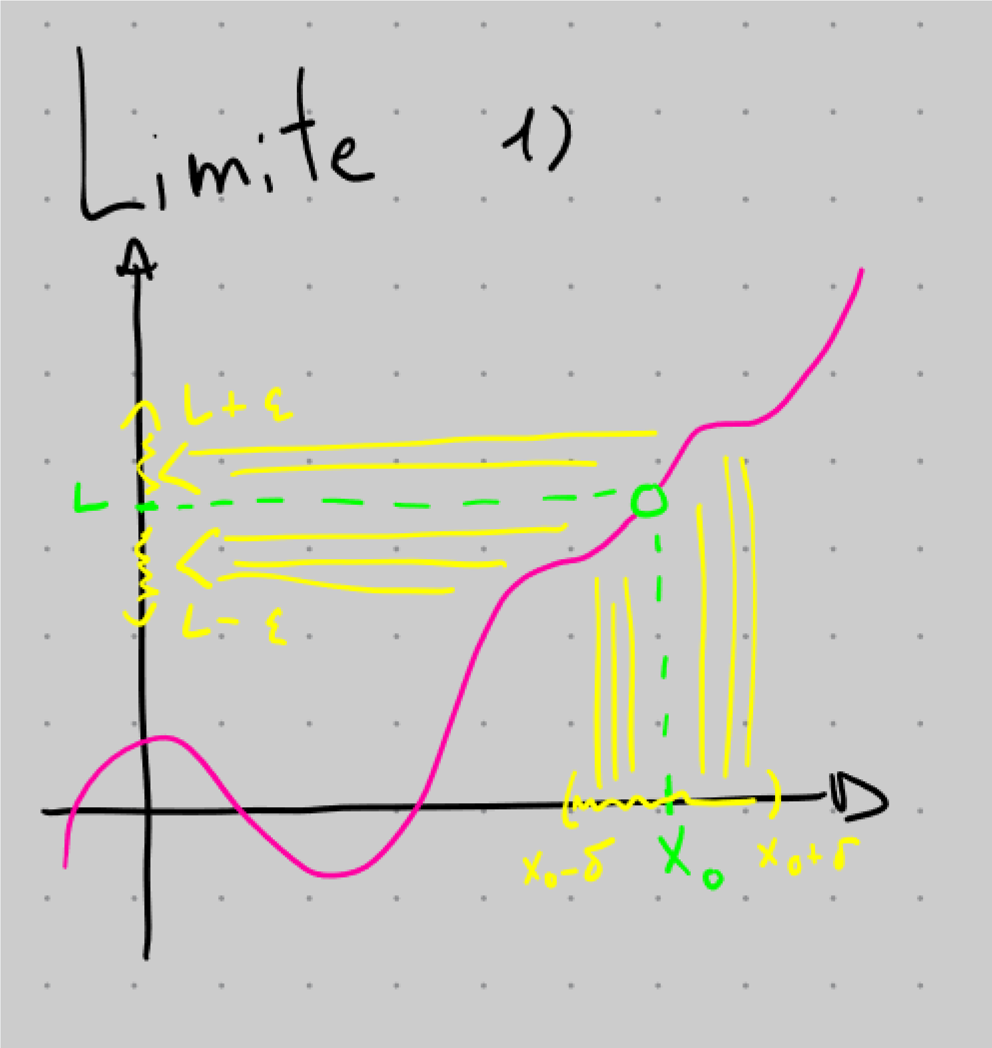
significa

$$\forall \varepsilon > 0, (L - \varepsilon, L + \varepsilon) \subseteq V, \exists \delta > 0 : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq U$$
$$\text{tale che } \forall x \in E$$
$$0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon$$

e questo graficamente corrisponde alla *figura 2.2.*
In sintesi;

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = L \iff \begin{array}{c} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in E, \\ |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon \end{array}}$$

FIGURA 2.2. (*Formulazione epsilon-delta del limite*)



#Osservazione

👁 Osservazione 2.1. (analogia "ludica" del limite)

Grazie a questa interpretazione è possibile creare un'analogia per il limite; infatti se immaginiamo l'intorno di L con raggio ε come un *"bersaglio"* e vale la condizione del *limite*, allora deve essere sempre possibile trovare un intorno attorno x_0 con raggio δ tale per cui facendo l'immagine di tutti i punti in questo intorno, *"colpisco"* il *"bersaglio"* (ovvero l'intorno di L).

#Osservazione

👁 Osservazione 2.2. (analogia "meccanica" del limite)

Alternativamente è possibile pensare all'esistenza del *limite* come una *"macchina"* che dato un valore ε ti trova un valore δ; dato un ε qualsiasi, questa macchina ti darà sempre un δ.

#Definizione

Definizione 2.3. (limite infinito di una funzione)

Ora interpretiamo

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

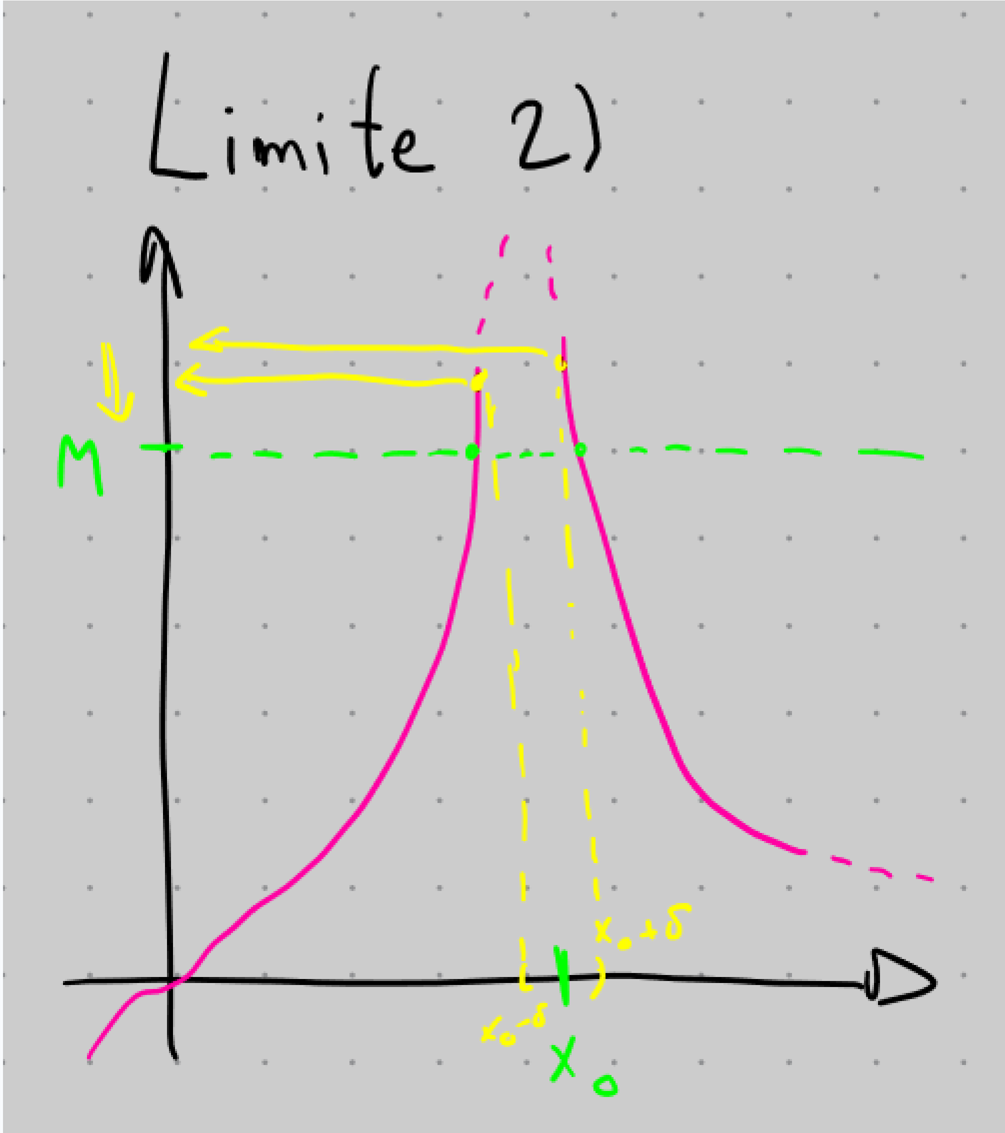
ovvero dove $L \in \tilde{\mathbb{R}}$. Allora interpretando il significato del limite abbiamo:

$$\begin{gathered}\forall M > 0, (M, +\infty), \exists \delta > 0 : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq U : \\ \text{tale che } \forall x \in E, \\ 0 < |x - x_0| < \delta \implies f(x) > M\end{gathered}$$

ovvero abbiamo graficamente che per una qualsiasi retta orizzontale $x = M$, troveremo *sempre* un intervallo tale per cui l'immagine dei suoi punti superano sempre questa retta orizzontale.
Analogamente vale lo stesso per

$$\lim_{x \to x_0} \quad = -\infty$$

FIGURA 2.3. (*Idea del limite infinito di una funzione*)



#Definizione

Definizione 2.4. (limite di una funzione all'infinito)

Ora abbiamo

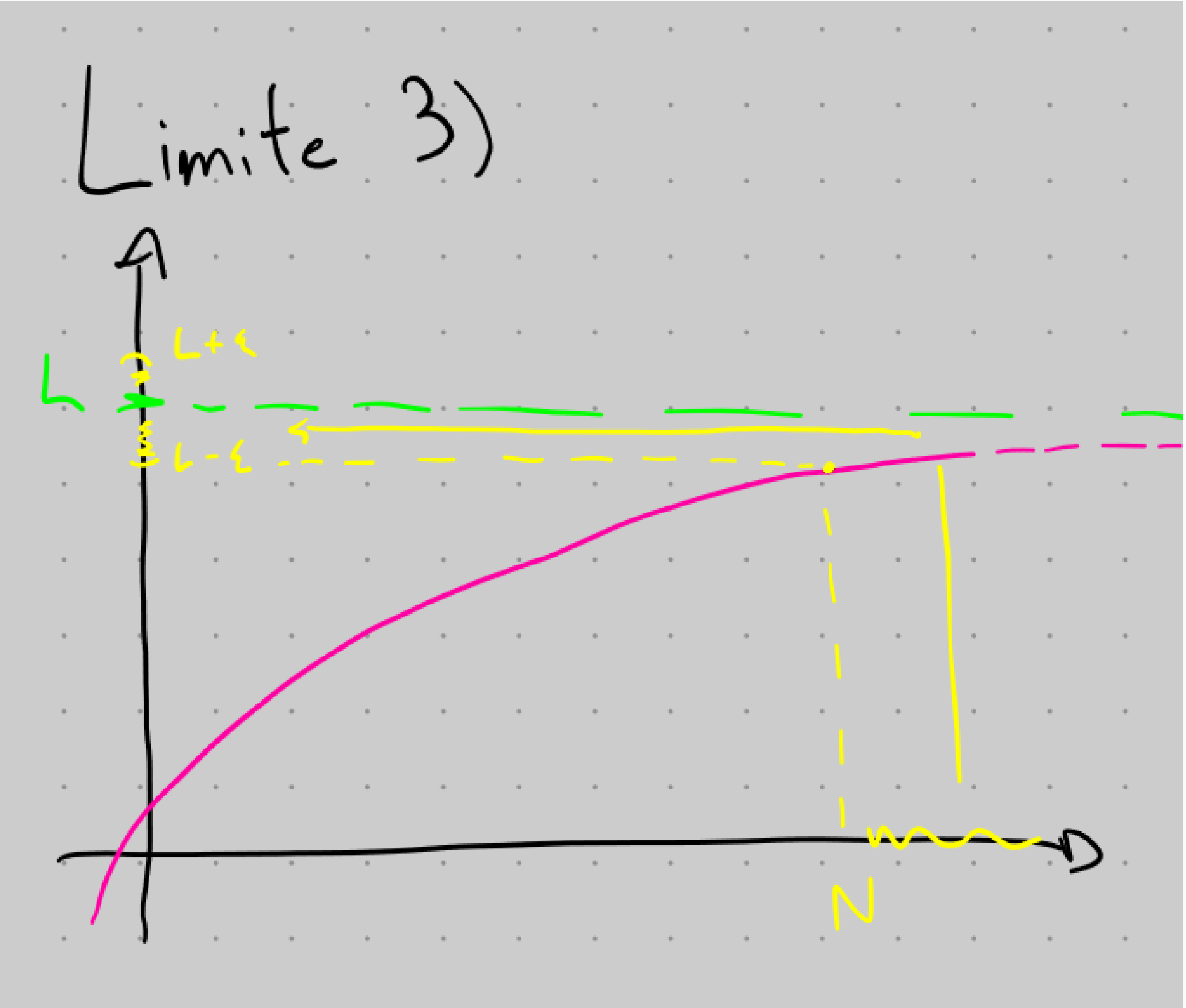
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

ovvero dove $x_0 \in \tilde{\mathbb{R}}$. Interpretando la definizione si ha:

$$\begin{gathered} \forall \varepsilon > 0, (L-\varepsilon, L+\varepsilon), \exists N > 0 : (N, +\infty) : \\ \text{tale che } \forall x \in E, \\ x > N \implies |f(x) - L| < \varepsilon \end{gathered}$$

graficamente ho un grafico di una funzione $f(x)$, dove disegnando un qualsiasi intorno di L riuscirò sempre a trovare un valore N tale per cui tutti i punti dell'insieme immagine dell'intervallo $(N, +\infty)$ stanno *sempre* all'interno dell'intorno di L, indipendentemente da quanto stretto è questo intervallo (*figura 2.4.*)

FIGURA 2.4. (*Idea grafica del limite all'infinito*)



#Definizione

Definizione 2.5. (limite infinito di una funzione all'infinito)

Finalmente consideriamo il caso

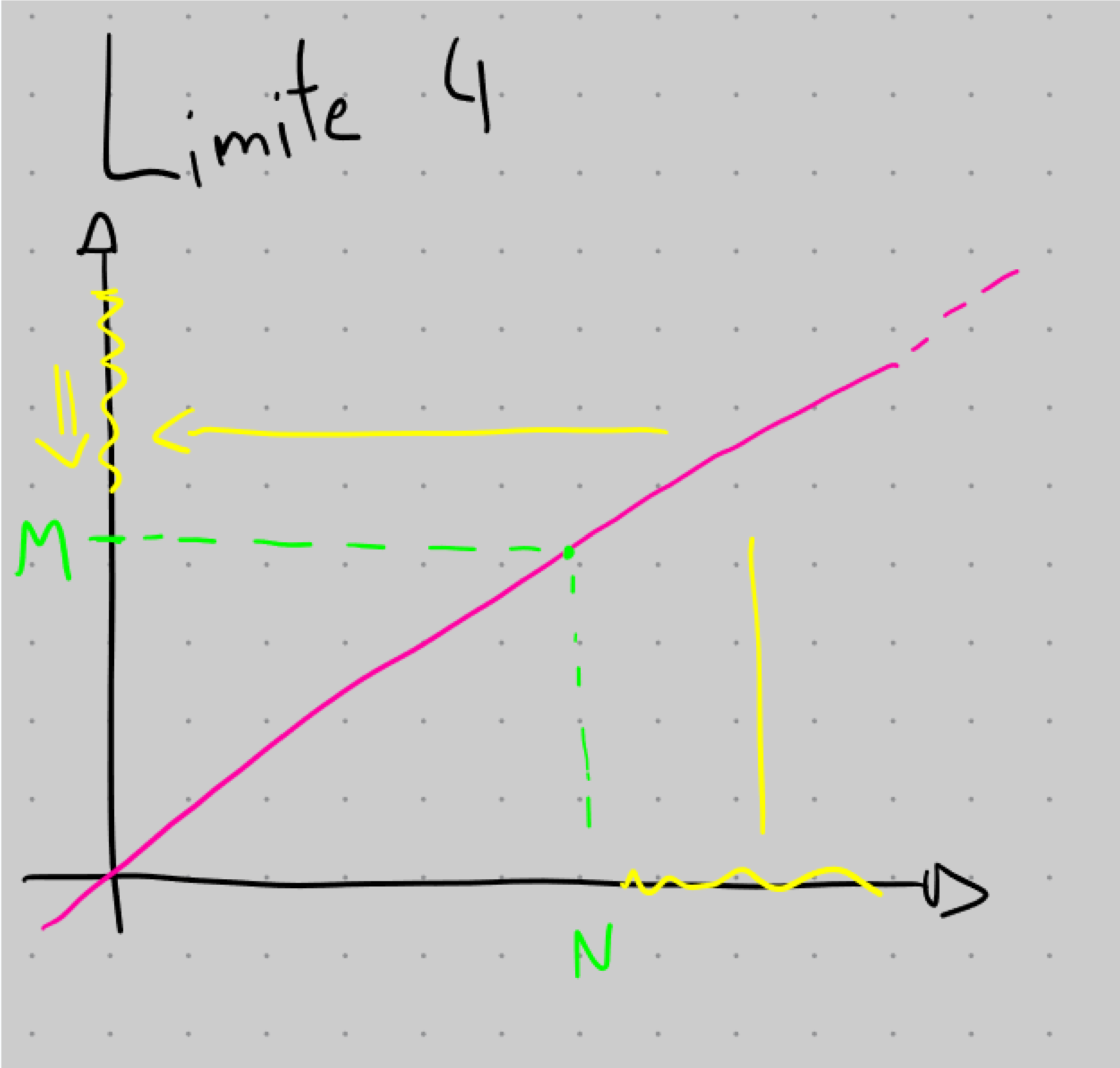
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Per definizione ho

$$\begin{gathered}\forall M; (M, +\infty), \exists N; (N, +\infty): \\ \text{tale che } \forall x \in E, \\ x > N \implies f(x) > M\end{gathered}$$

questo vuol dire che fissando un qualunque valore M, riuscirò *sempre* a trovare un valore N tale per cui prendendo un qualsiasi punto $x > N$, il valore immagine di questo punto supererà sempre M (*figura 2.5.*).

FIGURA 2.5. (*Idea grafica del limite infinito all'infinito*)



2.1. Infinitesimo

APPROFONDIMENTO PERSONALE a. Usando la formulazione rigorosa del limite (^c5e4ec) e ponendo $L = 0, x = +\infty$, otteniamo un risultato che è consistente con la definizione di *infinitesimo*[1] secondo dei noti matematici russi, tra cui uno è Kolmogorov.

#Definizione

Definizione 2.a. (l'infinitesimo)

DEF 2.a. Si definisce un infinitesimo come una *grandezza variabile* α_n, denotata come

$$\lim_{x \to +\infty} \alpha_n = 0 \text{ oppure } \alpha_n \to 0$$

che possiede la seguente proprietà:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 : \forall x \in E, x > N \implies |\alpha_x| < \varepsilon$$

#Osservazione

Osservazione 2.a. (infinitesimo e integrale)

OSS 2.a. Notiamo che la definizione dell'*infinitesimo* diventerà importante per il calcolo degli *integrali*, in particolare per la *somma di Riemann* (Integrabilità secondo Riemann > ^64ad3b).

---

(1) *"[...] La quantità α_n che dipende da n, benché apparentemente complicata gode di una notevole proprietà: se n cresce indefinitamente, α_n tende a zero. Tale proprietà si può anche esprimere dicendo che dato un numero positivo ε, piccolo a piacere, è possibile scegliere un interno N talmente grande che per ogni n maggiore di N il numero α_n è minore, in valore assoluto, del lato numero ε."*

Estratto tratto da *Le matematiche: analisi, algebra e geometria analitica* di *A.D. Aleksandrov*, *A. N. Kolmogorov* e *M. A. Lavrent'ev* (1974, ed. Bollati Boringhieri, trad. G. Venturini).

---

3. Limite destro e sinistro

PREMESSA. Sia una funzione f di variabile reale del tipo

$$f : E \longrightarrow \mathbb{R}, E \subseteq \mathbb{R}$$

$x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione per E, $L \in \tilde{\mathbb{R}}$.

#Definizione

Definizione 3.1. (limite destro di una funzione)

Si denota Il *limite della funzione f che tende a x_0 da destra* come

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$$

In termini rigorosi lo si definisce come

$$\begin{gathered}\forall V \text{ intorno di } L, \exists U \text{ intorno di } x_0 : \forall x \in E, \\ x \in U \cap (x_0, +\infty) \implies f(x) \in V\end{gathered}$$

Ovvero come il *limite di* f, considerando però *solo* i punti che stanno a *destra* di x_0.

#Definizione

Definizione 3.2. (limite sinistro di una funzione)

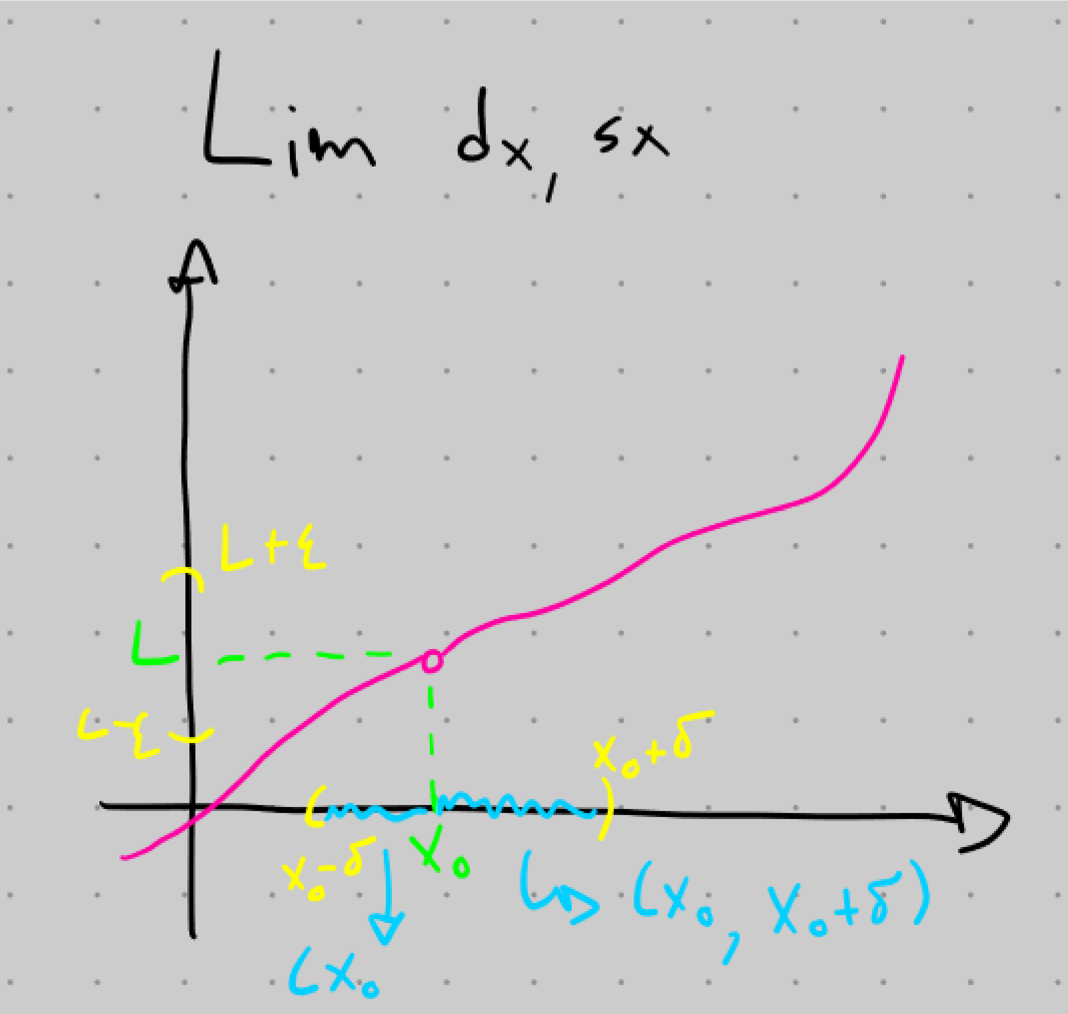
Analogamente *il limite della funzione* f *che tende a* x_0 *da sinistra* è

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$$

ovvero

$$\begin{gathered}\forall V \text{ intorno di } L, \exists U \text{ intorno di } x_0 : \forall x \in E, \\ x \in U \cap (-\infty, x_0) \implies f(x) \in V\end{gathered}$$

FIGURA 3.1. (*Limite destro e sinistro di una funzione*)



#Osservazione

Osservazione 3.1. (condizione necessaria e sufficiente dell'esistenza di limite)

Si può immediatamente verificare che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \iff \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$$

Infatti l'insieme dei x del limite *destro* e/o *sinistro* su cui verifichiamo che $f(x) \in V$ è un *sottoinsieme* dell'insieme di cui si verifica col limite generale. Pertanto facendo l'unione tra questi due sottoinsiemi abbiamo

$$[U \cap (-\infty, x_0)] \cup [U \cap (x_0, +\infty)] = U \diagdown \{x_0\}$$

#Definizione

Definizione 3.3. (restrizione del limite)

Nota: definizione ricavata direttamente dalla dispensa di D. D. S.
Avevamo appena osservato che coi limiti *destri* e/o *sinistri* abbiamo semplicemente fatto una *restrizione* all'insieme $U \diagdown \{x_0\}$ di cui si cerca di verificare che $f(U \diagdown \{x_0\}) \subseteq V$.
Dunque definiamo il *limite della funzione ristretta a* B, un qualunque sottoinsieme di E per cui x_0 è di accumulazione:

$$\lim_{x \to x_0} f_{|B}(x) = L$$

ovvero

$$\begin{gathered}\forall V \text{ intorno di } L, \exists U \text{ intorno di } x_0 : \forall x \in B, \\ x \in U \diagdown \{x_0\} \implies f(x) \in V\end{gathered}$$

4. Strategia per verificare l'esistenza di limiti

La nostra definizione presuppone che dobbiamo *eseguire* una serie *infinita* di verifiche per dimostrare che un limite esiste; infatti si dovrebbe scegliere tutti gli $\varepsilon > 0$ e trovare un δ associato.
Vogliamo invece sviluppare una serie di *strategie* per verificare l'esistenza dei limiti, come i *teoremi* e le *proprietà* sui limiti come vedremo in Teoremi sui Limiti di Funzione, oppure *interpretando* la definizione del limite per poter trovare una *"formula"* che associa ad ogni epsilon un delta.

#Esempio

Esempio 4.1. (dimostrazione "analitica" di un limite)

Voglio verificare che

$$\lim_{x \to 1} x^2 + 1 = 2$$

ovvero, interpretando la definizione otteniamo il seguente da verificare:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in E, 0 < |x-1| < \delta \implies |x^2 + 1 - 2| < \varepsilon$$

Allora *"faccio finta"* di conoscere un ε fissato, sviluppiamo dunque la disuguaglianza a destra:

$$\begin{aligned} |x^2 + 1 - 2| &< \varepsilon \\ |x^2 - 1| &< \varepsilon \\ |(x+1)(x-1)| &< \varepsilon \\ |x+1||x-1| &< \varepsilon \end{aligned}$$

Osservo che se poniamo $x \in [0,2)$ e quindi $\delta < 1$, allora abbiamo $|x+1| < 3$.
Allora da ciò discende sicuramente la disuguaglianza

$$|x+1||x-1| < 3|x-1| < 3\delta, x \in [0,2)$$

abbiamo quindi

$$0 < |x-1| < \delta \implies |x+1||x-1| < 3\delta, \forall x \in [0,2)$$

Infatti abbiamo implicitamente scelto $\varepsilon = 3\delta$, verificando così il limite per $\forall x \in [0,2)$.
Invece se $x \geq 2$, basta scegliere $\delta = 1$.
"Completando" la dimostrazione ho:

$$|x-1| < \frac{\varepsilon}{3} \implies 3|x-1| < \varepsilon \implies |x+1||x-1| < \varepsilon, \forall x \in [0,2)$$

A2. Proprietà e teoremi sui limiti di funzione

Teoremi sui Limiti di Funzione

Teoremi sui limiti: unicità del limite, permanenza del segno, teorema del confronto, teorema dei due carabinieri, operazioni con i limiti, limiti infinitesimi e limiti infiniti, forme indeterminate.

---

0. Preambolo

In questo capitolo si vuole creare una serie di *strategie* per poter verificare l'esistenza dei limiti senza dover ricorrere a fare dei *calcoli* infiniti in quanto richiesta dalla Definizione di Limite di funzione.
Una di queste strategie consiste proprio enunciare e dimostrare una serie di *teoremi*.

1. Unicità del limite

#Teorema

Teorema 1.1. (dell'unicità del limite)

Sia

$$f: E \longrightarrow \mathbb{R}$$

poi $x_0 \in \tilde{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione per E.
Tesi. Poi siano i valori limiti $L_1, L_2 \in \tilde{\mathbb{R}}$ tali che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L_1; \lim_{x \to x_0} f(x) = L_2$$

allora

$$L_1 = L_2$$

"Se esiste il limite di una funzione allora essa è unica"

#Dimostrazione
DIMOSTRAZIONE del *teorema 1.1.* (^8aa5b9)
Si procede tramite una dimostrazione per *assurdo*.
Supponiamo dunque

$$L_1 \neq L_2$$

Allora ci chiediamo se è possibile trovare degli *intorni* (Intorni) di L_1, L_2 che chiameremo V_1, V_2 che sono *disgiunti*; ovvero se sono tali che

$$V_1 \cap V_2 = \emptyset$$

Dato che L_1 e L_2 sono diversi, da qui discende che la distanza tra L_1 e L_2 dev'essere maggiore di 0; quindi possiamo impostare il *raggio* di questi intorni come

$$r = \frac{|L_1 - L_2|}{3}$$

Allora concludiamo che possono esistere V_1 e V_2 tali da essere disgiunti tra di loro. Ora li scegliamo: applicando le definizioni di limite, ovvero

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} f(x)=L_1 &\iff \text{per } V_1, \exists U_1 \text{ di } x_0 : \forall x \in E \\ &\qquad x \in U_1 \diagdown \{x_0\} \implies f(x) \in V_1 \\ \lim_{x\to x_0} f(x)=L_2 &\iff \text{per } V_2, \exists U_2 \text{ di } x_0 : \forall x \in E, \\ &\qquad x \in U_2 \diagdown \{x_0\} \implies f(x) \in V_2\end{aligned}$$

Dato che U_1, U_2 sono *intorni* di x_0 che è di accumulazione per E (Punti di aderenza e di accumulazione) si ha che

$$(U_1 \cap U_2) \cap E \neq \emptyset \text{ escludendo } x_0$$

Posso scegliere allora un x che sta all'interno nell'intersezione di U_1 e U_2; ovvero

$$x \in ((U_1 \cap U_2) \diagdown \{x_0\})$$

e per ipotesi (ovvero che esistono tali limiti) deve valere che esiste un elemento $f(x)$ tale che

$$f(x) \in (V_1 \cap V_2)$$

il che è assurdo, in quanto $V_1 \cap V_2$ dovrebbe essere un *insieme vuoto*.

#Osservazione

Osservazione 1.1. (l'utilità dell'unicità del limite alla rovescia)

Questo teorema è anche utile per dimostrare la *non-esistenza* di un limite: prendendo la *contronominale* di questo teorema. Ovvero se due *restrizioni della stessa funzione* f (Definizione di Limite di funzione, **DEF 3.1.**) hanno limiti diversi $L_1 \neq L_2$, allora il limite *non* esiste.

2. Permanenza del segno

#Teorema

Teorema 2.1. (della permanenza del segno)

Sia

$$f : E \longrightarrow \mathbb{R}, E \subseteq \mathbb{R}$$

Siano $x_0, L \in \tilde{\mathbb{R}}$, x_0 punto di accumulazione per E.

Sia definito il *limite*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

Tesi. Allora supponendo che $L \in (0, +\infty)$ oppure $L = +\infty$, allora è vera che

$$\exists \bar{U} \text{ intorno di } x_0 : \forall x \in (\bar{U} \cap E) \diagdown \{x_0\}, f(x) > 0$$

Ovvero a parole stiamo dicendo che se il limite è *positivo*, allora anche la *funzione* è positiva per un intorno opportuno di x_0; il segno si *"trasferisce"* dal limite alla funzione.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *teorema 2.1.* (^06a2e3)
Parto dalle definizione del limite, ovvero

$$\begin{aligned}\lim_{x \to x_0} f(x) = L \iff \forall V \text{ di } L, \exists U \text{ di } x_0 : \forall x \in E, \\ x \in U \diagdown \{x_0\} \implies f(x) \in V\end{aligned}$$

Per interpretarla nel nostro contesto (ovvero che L è positiva), abbiamo che l'intorno di L può essere $V = (0, +\infty)$, in quanto se è *positiva* allora sarà sicuramente contenuta in quell'intervallo.
Dunque viene verificato che esiste un intorno U tale che

$$\forall x \in E, x \in U \diagdown \{x_0\} \implies f(x) > 0$$

#Osservazione

Osservazione 2.1. (utilità della permanenza del segno "alla rovescia")

Posso usare questo teorema *"alla rovescia"*, prendendo la *contronominale* dell'enunciato; ovvero se $f(x)$ è sempre *negativo o uguale a zero* ed *il limite esiste*, allora sicuramente L è sempre *negativo o uguale a zero*.

$$f(x) \leq 0 \wedge \exists \lim_{x \to x_0} f(x) \implies L \leq 0$$

3. Teorema del confronto

#Teorema

Teorema 3.1. (del confronto)

Siano f, g funzioni di variabile reale del tipo

$$f, g : E \longrightarrow \mathbb{R}, E \subseteq \mathbb{R}$$

e x_0 un punto di accumulazione per E, e $x_0 \in \tilde{\mathbb{R}}$.
Tesi. Supponendo che siano vere le seguenti condizioni:
i. Che esista il limite

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

ii. Che la funzione g dev'essere *sempre* (nel dominio) maggiore o uguale di f.

$$\forall x \in E \diagdown \{x_0\}, g(x) \geq f(x)$$

Allora vale che

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$$

#Dimostrazione
DIMOSTRAZIONE del *teorema del confronto* (^7c97c5)
Sia ad esempio $x_0 \in \mathbb{R}$, allora abbiamo la seguente definizione di limite:

$$\begin{gathered}\forall M > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in E, \\ 0 < |x - x_0| < \delta \implies f(x) > M\end{gathered}$$

e considerando che $g(x) \geq f(x)$, abbiamo a maggior ragione che

$$\forall x \in E, 0 < |x - x_0| < \delta \implies g(x) \geq f(x) > M$$

e considerando la *transitività* della relazione d'ordine $>$ (Relazioni, **DEF 4.**), abbiamo

$$\begin{gathered}\forall M > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in E, \\ 0 < |x - x_0| < \delta \implies g(x) > M\end{gathered}$$

che è esattamente la definizione di

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty \blacksquare$$

4. Teorema dei due carabinieri

#Teorema

Teorema 4.1. (dei due carabinieri)

Siano f, g, h funzioni del tipo

$$f, g, h : E \longrightarrow \mathbb{R}, E \subseteq \mathbb{R}$$

e x_0 un punto di accumulazione per E, $x_0, L \in \tilde{\mathbb{R}}$.
Tesi. Supponendo che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = L$$

e che

$$\forall x \in E \diagdown \{x_0\}, f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

poi volendo possiamo chiamare f, g le *"funzioni carabinieri"*; abbiamo che

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = L$$

FIGURA 4.1. (*L'idea del teorema*)

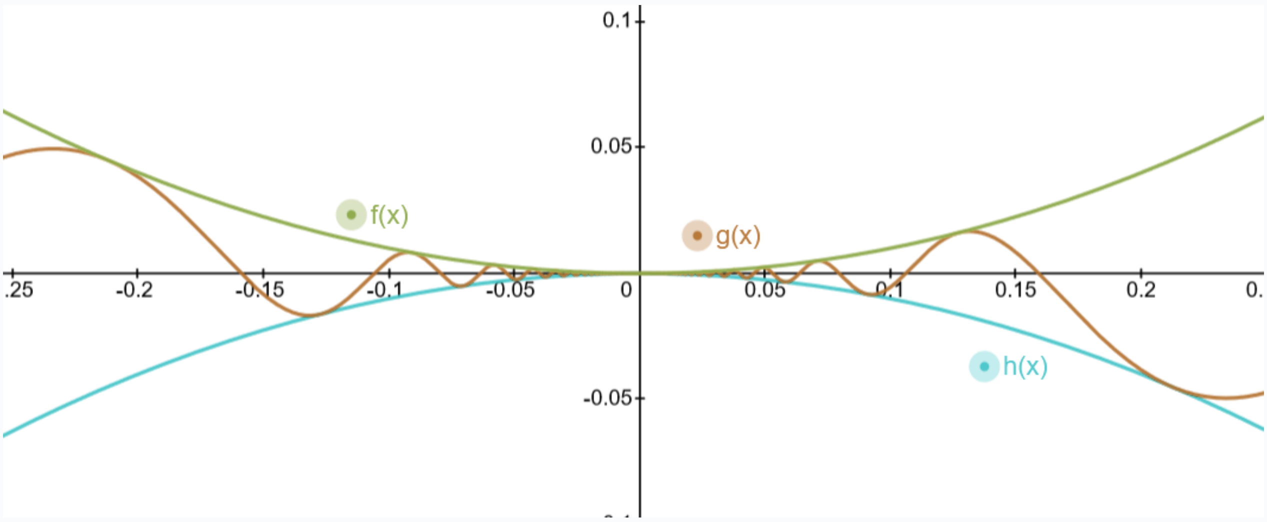
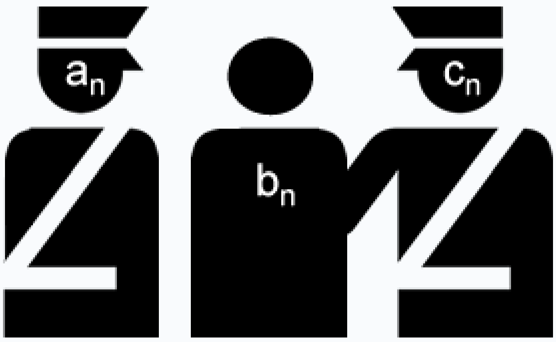


FIGURA 4.2. (*Immagine divertente-illustrativa del teorema*)



#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *teorema dei due carabinieri* (^04916c])
Consideriamo solamente il caso per $x_0 \in \mathbb{R}$.

Per la *definizione del limite*, abbiamo

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_f > 0 : \forall x \in E, \\ 0 < |x - x_0| < \delta_f &\implies |f(x) - L| < \varepsilon \\ &\implies -\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon \\ &\implies L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon \end{aligned}$$

e analogamente

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_h > 0 : \forall x \in E, \\ 0 < |x - x_0| < \delta_h &\implies L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon \end{aligned}$$

Se vogliamo che *entrambe* le espressioni valgano contemporaneamente, dobbiamo scegliere il *minimo* tra i due delta.
Per capire l'idea di questo ragionamento prendiamo dei numeri:

$$(x < 3 \implies x < 4) \land (x < 6 \implies x < 7)$$

se voglio essere *sicuro* che valgano entrambe, devo prendere $x < 3$ in quanto così abbiamo la garanzia che anche $x < 6$ sia vera.
Dunque sia

$$\delta = \min\{\delta_f, \delta_h\}$$

e mettendole assieme, abbiamo

$$0 < |x - x_0| < \delta \implies L - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \varepsilon$$

possiamo sfruttare la *transitorietà* di $>$ per ottenere

$$0 < |x - x_0| < \delta \implies |g(x) - L| < \varepsilon$$

Riassumendo, abbiamo il seguente:

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \min\{\delta_f, \delta_h\} : \forall x \in E, \\ &0 < |x - x_0| < \delta \implies |g(x) - L| < \varepsilon \end{aligned}$$

che è esattamente la *definizione* di

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = L$$

come volevasi dimostrare. ■

5. Operazioni con i limiti

Ora presentiamo una serie di proposizioni, raccolte in un unico teorema, e queste ci permettono di fare delle operazioni *tra limiti*.

#Teorema

Teorema 5.1. (operazioni tra limiti)

Siano f, g funzioni di variabile reale del tipo

$$f, g : E \longrightarrow \mathbb{R}, E \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in \tilde{\mathbb{R}}$$

e x_0 un punto di accumulazione per E.
Tesi. Supponendo che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$$
$$\lim_{x \to x_0} g(x) = m \in \mathbb{R}$$

allora abbiamo le seguenti:

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = l + m$$
$$\lim_{x \to x_0} (f(x) g(x)) = lm$$

inoltre se $m \neq 0$, allora

$$\lim_{x \to x_0} (\frac{f(x)}{g(x)}) = \frac{l}{m}$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE dei primi due punti del *teorema 5.1.* (^48b492)

1. Prendiamo la definizione dei limiti

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$
$$\lim_{x \to x_0} g(x) = m$$

ovvero

$$\begin{gathered} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_f > 0 : \forall x \in E, \\ 0 < |x - x_0| < \delta_f \implies |f(x) - l| < \varepsilon \\ \text{ovvero } l - \varepsilon < f(x) < \varepsilon + l \end{gathered}$$

e analogamente

$$\begin{gathered} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_g > 0 : \forall x \in E, \\ 0 < |x - x_0| < \delta_g \implies |g(x) - m| < \varepsilon \\ \text{ovvero } m - \varepsilon < g(x) < \varepsilon + m \end{gathered}$$

osserviamo che, in quanto abbiamo definito ε come un valore *arbitrariamente piccolo*, allora possiamo porre $\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{2}$.
Infatti $\varepsilon > 0$ risulterà comunque vera, in quanto dividendo un qualsiasi numero infinitamente piccolo otteniamo un numero ancora più piccolo, ma mai zero.
Dunque abbiamo i seguenti:

$$\begin{aligned} 0 < |x - x_0| < \delta_f &\implies |f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2} \\ 0 < |x - x_0| < \delta_g &\implies |g(x) - m| < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

ora scegliendo $\delta = \min\{\delta_f, \delta_g\}$ abbiamo che valgono le seguenti proposizioni e possiamo dunque sommarle (analogo il discorso nella **DIMOSTRAZIONE 4.2.**): abbiamo allora

$$\begin{gathered} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta : \forall x \in E, \\ 0 < |x - x_0| < \delta \implies m - \frac{\varepsilon}{2} + l - \frac{\varepsilon}{2} < f(x) + g(x) < m + \frac{\varepsilon}{2} + l + \frac{\varepsilon}{2} \\ \implies (m + l) - \varepsilon < f(x) + g(x) < (m + l) + \varepsilon \\ \implies |f(x) + g(x)| < (m + l) + \varepsilon \end{gathered}$$

che è esattamente la definizione del limite

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = l + m$$

2. Qui il ragionamento per dimostrare la tesi diventa più sottile; la dimostrazione richiederà l'uso della *disuguaglianza triangolare* del *valore assoluto* (Funzioni di potenza, radice e valore assoluto, **OSS 3.1.1.**).
Secondo la definizione del limite, se ho $f(x)g(x) \to lm$ per $x \to x_0$ allora devo ragionare sulla seguente espressione:

$$|f(x)g(x) - lm|$$

e utilizzando un trucchetto in cui all'interno di questa aggiungo un'espressione equivalente a 0 (ovvero $-f(x)m + f(x)m \iff 0$), questo diventa

$$|f(x)g(x) - lm| \leq |f(x)g(x) - f(x)m + f(x)m - lm|$$

ora applicando la *disuguaglianza triangolare* ho:

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - lm| &\leq |f(x)g(x) - f(x)m + f(x)m - lm| \\ &\leq |f(x)g(x) - f(x)m| + |f(x)m - lm| \\ &\leq |f(x)(g(x) - m)| + |m(f(x) - l)| \\ &\leq |f(x)||g(x) - m| + |m||f(x) - l| \end{aligned}$$

Ora ragioniamo su ogni termine del membro destro dell'uguaglianza.
$|f(x) - l|$ è una quantità destinata a diventare *infinitamente* piccolo, in quanto esso rappresenta la distanza tra la funzione ed il limite; analogo il discorso per $|g(x) - m|$.

$|m|$ è una costante che viene moltiplicata per un numero che diventa più piccolo, allora anche questa diventa piccola.
Ora l'unico apparente *"intralcio"* è $|f(x)|$ in quanto non è una costante, *però* quando è vicino a x_0 si comporta come una costante in quanto è limitata (dato che ha il limite $l \in \mathbb{R}$).
Allora tutto il quantitativo al membro destro diventa piccolo a piacimento. ■

6. Limiti infiniti e infinitesimi

Notiamo che in **TEOREMA 5.1.** per il quoziente tra limiti abbiamo imposto che $m \neq 0$; infatti se la funzione che sta al denominatore $g(x)$ si avvicina a 0, il limite si comporterà in un altra maniera. Enunciare quindi i seguenti teoremi per illustrare questi comportamenti.

#Teorema

Teorema 6.1. (limiti finiti e infinitesimi)

Sia $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $E \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \tilde{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione per E.
Tesi. Allora valgono le seguenti:
Limite infinitesimo

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \implies \lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$$

Limite infinito

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \wedge f(x) > 0, \forall x \neq x_0 \implies \lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$$

#Dimostrazione
DIMOSTRAZIONE del *teorema 6.1.* (^380b0f)
Dimostriamo solo il *limite infinitesimo*, in quanto la dimostrazione del *limite infinito* è analoga.
Partiamo dalla definizione del limite di $f(x) \to +\infty$; ovvero

$$\begin{gathered}\forall M > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in E \diagdown \{x_0\} \\ 0 < |x - x_0| < \delta \implies f(x) > M \\ \implies \frac{1}{f(x)} < \frac{1}{M} \\ \text{sia } M = \frac{1}{\varepsilon}, \forall \varepsilon > 0 \implies -\varepsilon < 0 < \frac{1}{f(x)} < \varepsilon \\ 0 < |x - x_0| < \delta \implies |\frac{1}{f(x)}| < \varepsilon\end{gathered}$$

ovvero la definizione del limite di

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$$

7. Forme indeterminate

Ora definiamo delle *forme indeterminate* di alcuni limiti.

#Teorema

Teorema 7.1. (forme indeterminate)

Tesi 1. Sia

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \text{ e } \lim_{x \to x_0} g(x) \neq -\infty$$

(la seconda vuol dire che g è inferiormente limitata; ovvero $\exists M > 0 : \forall x \in E \diagdown \{x_0\}, g(x) > -M$), allora abbiamo che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) + g(x) = +\infty$$

Analogo il discorso per

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \text{ e } \lim_{x \to x_0} \neq +\infty$$

Escludiamo infatti il caso $-\infty + \infty$ in quanto essa è una *forma indeterminata*.
Tesi 2. Sia

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty, \exists \rho > 0 : \forall x \in E \diagdown \{x_0\}, g(x) \geq \rho > 0$$

la seconda espressione vuole dire che $g(x)$ è un'espressione *sempre* positiva di 0, allora si ha

$$\lim_{x \to x_0} f(x) g(x) = +\infty$$

e qui escludiamo il caso $+\infty \cdot 0$.
Tesi 3 (dalla dispensa). Sia

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0, \exists M > 0 : |g(x)| < M$$

ovvero la seconda vuol dire che $g(x)$ è *limitata*, allora abbiamo che

$$\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = 0$$

escludendo i casi $\pm\infty \cdot 0$.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE della tesi 1 del *teorema 7.1.* (^adc58a)
Partiamo dalla definizione del limite di f: ovvero

$$\begin{gathered}\forall K > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in E \diagdown \{x_0\} \\ 0 < |x - x_0| < \delta \implies f(x) > K\end{gathered}$$

ma allo stesso tempo abbiamo che g è inferiormente limitata, ovvero

$$\exists M > 0 : \forall x \neq x_0, g(x) > -M$$

allora se scegliamo $K = K + M$ e sommiamo entrambe le espressioni, abbiamo

$$0 < |x - x_0| < \delta \implies f(x) + g(x) > K$$

che è la definizione di

$$\lim_{x \to x_0} f(x) + g(x) = +\infty$$

8. Limite della funzione composta

#Osservazione

Osservazione 8.1. (l'idea del concetto)

Ho una funzione

$$f : E \longrightarrow \mathbb{R}$$

con $E \subseteq \mathbb{R}$, $x_0, y_0 \in \tilde{\mathbb{R}}$ e x_0 di accumulazione per E.
Suppongo che esiste il limite di $f(x) \to y_0$ per $x \to x_0$:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$$

Ora sia

$$g : F \longrightarrow \mathbb{R}$$

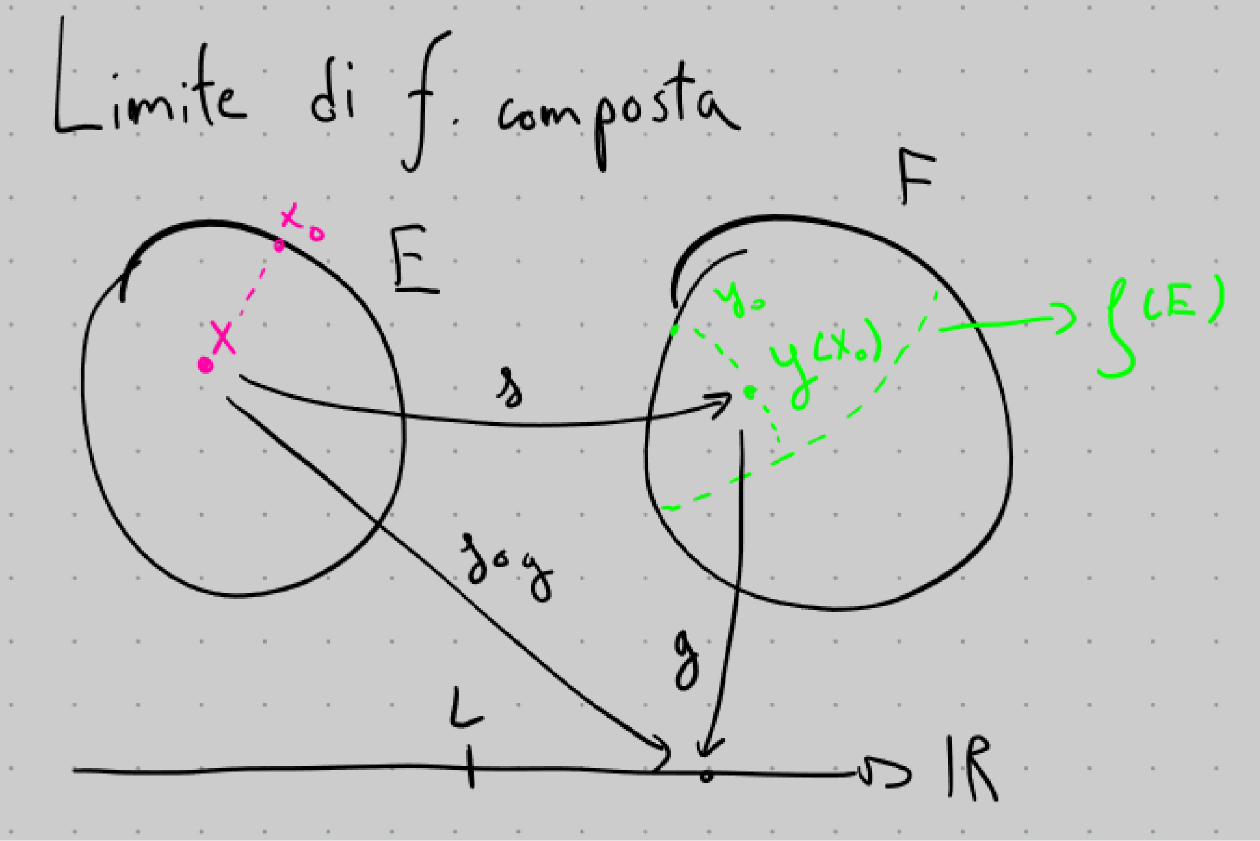
con $F \subseteq \mathbb{R}$, y_0 punto di accumulazione per F e $L \in \tilde{\mathbb{R}}$. Suppongo che esiste il limite di $g(y) \to L$ per $y \to y_0$. Ovvero

$$\lim_{y \to y_0} g(y) = L$$

Supponendo che l'immagine funzione del dominio sia sottoinsieme del dominio dell'altra funzione, ovvero $f(E) \subseteq F$, e $f(x) = y$ un punto di accumulazione per $f(E)$, ho la situazione nella *figura 8.1.*.
Allora posso fare la *funzione composita* $g \circ f$ (Funzioni, **DEF 4.**) che mi porta ad un certo punto in $\mathbb{R}$.
Quindi voglio capire se posso affermare il seguente:

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x_0)) = L$$

FIGURA 8.1. (*Idea del concetto*)



#Teorema

Teorema 8.1. (del limite della funzione composta)

Siano

$$f : E \longrightarrow \mathbb{R}; g : F \longrightarrow \mathbb{R}$$

con y_0, x_0 punti di accumulazione per (rispettivamente) E, F. Poi supponendo che esistono i limiti

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0 \text{ e } \lim_{y \to y_0} g(y) = L$$

e *se* vale una delle due *ipotesi supplementari*;

$$1)\ \forall x \in E \diagdown \{x_0\}, f(x) \neq y_0$$
$$2)\ y_0 \in F, g(y_0) = L$$

allora vale che

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = L$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE (FACOLTATIVA) del *teorema 8.1.* (^55caf4)
Riscriviamo i limiti

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0 \text{ e } \lim_{y \to y_0} g(y) = L$$

secondo la *definizione rigorosa del limite* (Definizione di Limite di funzione, **DEF 2.1.**). Allora abbiamo:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0 \iff \begin{array}{c} \forall U \text{ di } y_0, \exists V \text{ di } x_0 : \forall x \in E \diagdown \{x_0\} \\ x \in V \implies f(x) = y \in U \end{array}$$

e

$$\lim_{y \to y_0} g(y) = L \iff \begin{array}{c} \forall W \text{ di } L, \exists U \text{ di } y_0 : \forall y \in F \diagdown \{y_0\} \\ y \in U \implies g(y) \in W \end{array}$$

Concatenando le due espressioni, otteniamo

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = L \iff \begin{array}{c} \forall W \text{ di } L, \exists V \text{ di } x_0 : \forall x \in E \diagdown \{x_0\} \\ f(x) \in V \implies g(f(x)) \in W \end{array}$$

però per farlo dobbiamo assicurarci di una *condizione*: ovvero che

$$\forall x \in E, x \neq x_0 \implies f(x) = y \in F \diagdown \{y_0\}$$

così abbiamo un modo sicuro per garantirci che

$$\forall x, x \in V \implies f(x) \in V$$

Un modo per garantire la suddetta condizione è porre $f(x) \neq y_0, \forall x \neq x_0$.
Allora posso scrivere

$$g(f(x)) = g(y) \in W$$

Se invece ci capita che $\exists x' : f(x') = y_0$, allora possiamo comunque avvalerci dell'altra ipotesi supplementare ponendo $g(y_0) = L$ e abbiamo dunque $g(f(x')) = g(y_0) = L$, che ovviamente appartiene a W.

#Osservazione

Osservazione 8.1. (le condizioni supplementari sono solitamente vere)

Per fortuna nostra le *condizioni supplementari* appena descritte di norma valgono quasi sempre.

#Osservazione

Osservazione 8.2. (cambio della variabile del limite)

Possiamo sfruttare questo *teorema* per poter svolgere ciò che chiameremo il meccanismo del *"cambio della variabile del limite"*; questo è un meccanismo non importante, ma importantissimo. Vediamo un esempio in cui entra in gioco questo meccanismo.

Cambio della variabile del limite

#Esempio

Esempio 8.a. (di un cambio della variabile del limite)

Voglio calcolare il limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

Idea. L'idea fondamentale consiste nel pensare alla funzione del limite

$$x \mapsto \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

come la *funzione composta*. Ponendo infatti

$$x \mapsto \sqrt{x} = y \mapsto \frac{\sin y}{y}$$

Di conseguenza dobbiamo trovare il valore per cui tende y_0. Dunque

$$x \to 0^+ \implies \sqrt{x} = y \to 0^+$$

in quanto se x tende a 0 da destra, allora anche la sua radice tende a 0 da destra.

Ora verifichiamo se vale *l'ipotesi aggiuntiva*, ovvero se è vera che

$$\forall x, x \neq x_0 \implies f(x) \neq 0$$

il che è vera, in quanto non c'è nessun numero di cui la radice è 0, se non 0 stesso.
Dunque possiamo scrivere il limite iniziale come la *composizione* tra due funzioni, di cui una è la originaria. Allora

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \lim_{y \to 0^+} \frac{\sin y}{y}$$

Ora questo limite è semplicissimo da risolvere, in quanto questo ci riconduce al limite fondamentale $\frac{\sin x}{x} = 1, x \to 0$ (Esempi di Limiti di Funzione, **ESEMPIO 6.1.**).
Quindi $L = 1$.

9. Limite della funzione monotona

#Osservazione

Osservazione 9.1. (carattere "speciale" di questo teorema)

Osserviamo che fino ad adesso *tutti* i nostri *teoremi* sui limiti di funzione enunciati in questa pagina avevano *l'esistenza di qualche limite* per ipotesi.
Il teorema che enunceremo sarà *speciale* da questo punto di vista: infatti *non* avrà l'esistenza di un qualche limite per ipotesi, ma ha comunque nella *tesi* l'esistenza del limite.

#Esercizio

(Per esercizio verificare che se $\sup E \notin E$ allora $\sup E$ è di accumulazione per E.)

#Teorema

Teorema 9.1. (della funzione monotona)

Sia

$$f : E \longrightarrow \mathbb{R}, E \subseteq \mathbb{R}$$

e supponiamo che E sia *superiormente limitata* con $\sup E = x_0$ e $x_0 \notin E$. Oppure analogamente, se E è *inferiormente limitata* allora abbiamo $\inf E = x_0 \notin E$.
Inoltre è possibile supporre che $x_0 \in \tilde{\mathbb{R}}$, ovvero abbiamo $x_0 = \pm\infty$.

Inoltre sia f una funzione *monotona* crescente o decrescente (Funzioni, **DEF 8.**)
Tesi. Allora *esiste* il limite l

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

e abbiamo

$$l = \begin{cases} \sup(f(E)) \text{ se crescente} \\ \sup(f(E)) \text{ se decrescente} \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE del *teorema 9.1.* (^e5c912)
Dimostriamo il caso per cui supponiamo che $x_0 \in \mathbb{R}$, f sia *crescente* e $\sup(f(E)) = L \in \mathbb{R}$ (in parole il limite *"target"* è un numero reale): si tratta di provare che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

Consideriamo dunque la *proprietà dell'estremo superiore* $\sup$ (Insiemi limitati, maggioranti, massimo e teorema dell'estremo superiore > ^601040);

$$L = \sup(f(E)) \iff \begin{cases} \forall x \in E, f(x) \leq L \\ \forall \varepsilon > 0, \exists \bar{x} : L - \varepsilon < f(\bar{x}) \end{cases}$$

Ora considero un $x \in E : x > \bar{x}$ e applicando la *monotonia della funzione* ho

$$x \geq \bar{x} \implies f(x) \geq f(\bar{x})$$

Infinite metto le proposizioni assieme, ottenendo

$$\begin{gathered} \forall \varepsilon > 0, \exists \bar{x} : \forall x \in E, \\ \bar{x} \leq x < x_0 \implies L - \varepsilon < f(\bar{x}) \leq f(x) \leq L < L + \varepsilon \\ \implies |f(x) - L| < \varepsilon \end{gathered}$$

che è esattamente la *definizione* del limite appena enunciato. ■

#Corollario

Corollario 9.1.

Sia

$$f : \ ]a, b[\ \longrightarrow \mathbb{R}$$

$c \in \ ]a, b[$ e f crescente.

Tesi. Allora esistono i limiti

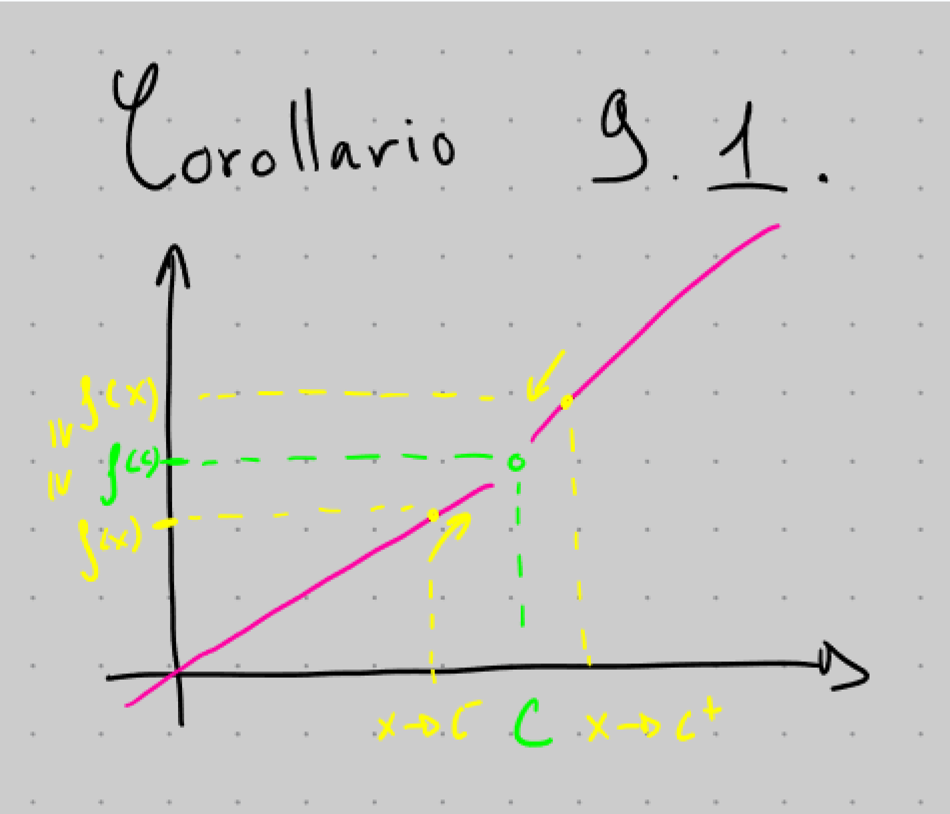
$$\lim_{x \to c^-} f(x); \lim_{x \to c^+} f(x)$$

e inoltre

$$\lim_{x \to c^-} f(x) \leq f(c) \leq \lim_{x \to c^+} f(x)$$

Abbiamo di fatto una situazione situazione del raffigurata nella *figura 9.1.*.

FIGURA 9.1. (*Idea grafica del corollario 9.1.*)



#Osservazione

Osservazione 9.2. (la definizione di discontinuità di prima specie)

Quindi secondo il **COROLLARIO 9.1.** possiamo avere le due seguenti situazioni; o il *limite destro* ed il *limite sinistro* si coincidono o abbiamo una specie di *"salto"*.
Questo sarà utile quando parleremo della *continuità* e della *discontinuità*, riferendoci in particolare ad un teorema che enuncia, data una funzione monotona crescente, in un punto discontinuo possiamo avere *solo* la discontinuità del tipo *"salto"* (Classificazioni di Discontinuità > ^006fee).

Esempi di Limiti di Funzione

Esempi di limiti: funzione costante, funzione identità, polinomi, funzioni razionali, funzioni trigonometriche, ...

---

0. Preambolo

Abbiamo appena visto che cos'è *generalmente* un limite mediante la sua definizione, poi abbiamo anche sviluppato delle strategie per calcolare o verificare l'esistenza dei limiti velocemente.
Quindi è ovvio che questo capitolo richiede la conoscenza (anche parziale) dei seguenti precedenti capitoli:

- Definizione di Limite di funzione
- Teoremi sui Limiti di Funzione (Almeno fino alla **sez. 7**)
- Limite di Successione
- Esempi di Limiti di Successione
  Infatti, mediante i nostri strumenti appena sviluppati, andremo a calcolare dei limiti notevoli.

1. Funzione costante e identità

#Esempio

Esempio 1.1. (funzione costante)

Sia f la funzione costante $f(x) = c, c \in \mathbb{R}$
Allora il suo limite è

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} c = c$$

ed è facile dimostrarla; infatti riscrivendo la definizione di questo limite, la condizione necessaria risulta *sempre* verificato.

#Esempio

Esempio 1.2. (funzione identità)

Sia f la funzione identità $\text{id}_x = f(x) = x$, definita $\forall x \in E$.
Allora il suo limite è

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} x = x_0$$

che risulta sempre vera ponendo $\delta = \varepsilon$.

#Osservazione

Osservazione 1.1. (i limiti valgono anche in $\tilde{\mathbb{R}}$)

Notiamo che per la funzione identità il limite può valere anche per $x_0 \in \tilde{\mathbb{R}}$ (i numeri reali estesi); infatti abbiamo

$$\lim_{x \to \pm\infty} x = \pm\infty$$

ed è sempre vera in quanto possiamo porre $N = M$ o $n = m$.

#Osservazione

Osservazione 1.2. (ricavare altri limiti dai questi due limiti)

Possiamo sfruttare altri teoremi per ricavare

$$\lim_{x \to x_0} x^n = \lim_{x \to x_0} (x \cdot x \cdot \ldots \cdot x) = \lim_{x \to x_0} x \cdot \ldots \cdot \lim_{x \to x_0} x = x_0^n$$

tutta secondo il nostro ragionamento questa vale per $\forall n \in \mathbb{N} > 0$ dato che stiamo ragionando in *"termini discreti"*.

2. Funzioni quozienti

#Esempio

Esempio 2.1. (limite della funzione quoziente all'infinito)

Dai *teoremi sui limiti* (Teoremi sui Limiti di Funzione > ^380b0f) , possiamo conosciamo il limite di $\frac{1}{x}$ per x che tende all'infinito. Infatti

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

è un *infinitesimo*.

#Esempio

Esempio 2.2. (limite della funzione quoziente a zero)

Ora consideriamo la medesima funzione, studiando però il comportamento di x che tende a 0. Innanzitutto

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

e

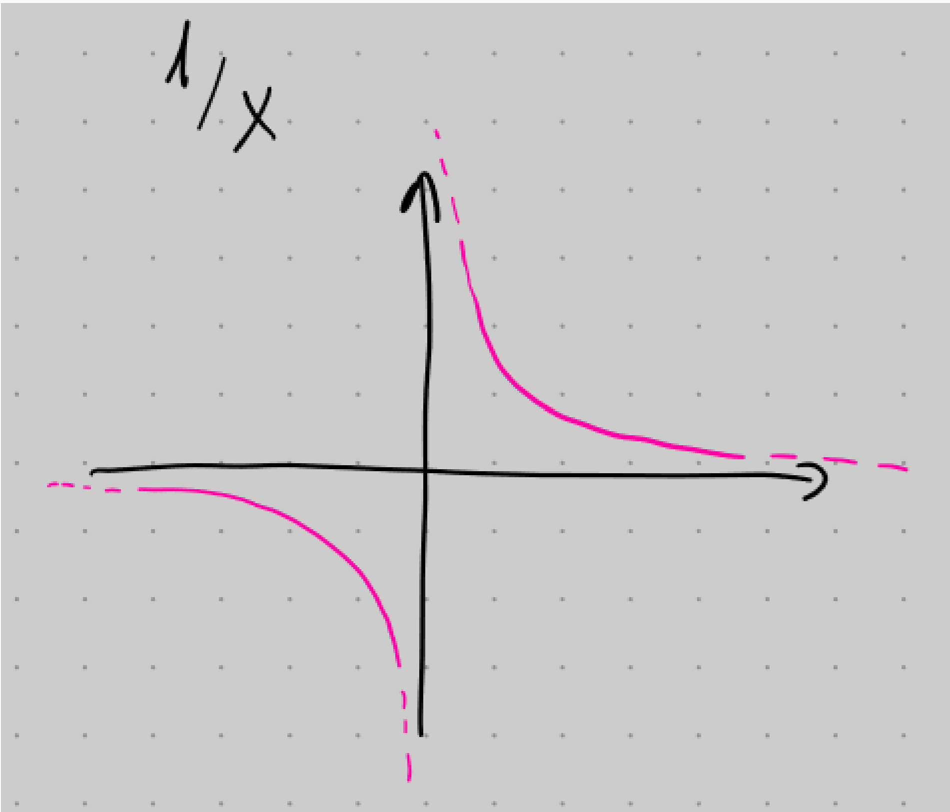
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Infatti in questo modo abbiamo il grafico della funzione $\frac{1}{x}$ (*figura 2.1.*).
Concludiamo che *non* esiste il limite

$$\nexists \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$$

in quanto il limite *destro* e *sinistro* sono diversi.

FIGURA 2.1. (*Grafico della funzione quoziente*)



#Esempio

Esempio 2.3. (limite della funzione quoziente alla n esima potenza)

Allora sfruttando altri *teoremi sui limiti di funzione* (Teoremi sui Limiti di Funzione > ^48b492), dall'esempio precedente possiamo ricavare

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^n} = 0, \forall n \in \mathbb{N}, > 0$$

3. Funzione radice

#Esempio

Esempio 3.1. (funzione radice quadrata)

Sia $f(x) = \sqrt{x}$ e abbiamo

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$$

Infatti nella definizione del limite basta prendere $\delta = \varepsilon^2$.
Ora vediamo cosa succede se $0 < x_0, x_0 \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$$

Per dimostrarlo possiamo fare il seguente.

$$\begin{gathered}
\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x, \\
0 < |x - x_0| < \delta \implies |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| < \varepsilon \\
\text{manipolo la seconda:} \\
|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| \implies |\sqrt{x} - \sqrt{x_0} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}| \\
|\sqrt{x} - \sqrt{x_0} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}| \implies \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \leq \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}} \\
\text{allora} \\
|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| \leq \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}} < \varepsilon \implies |x - x_0| < \varepsilon \sqrt{x_0}
\end{gathered}$$

Quindi basta scegliere $\delta = \varepsilon \sqrt{x_0}$.
Ora vediamo che

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

basta infatti scegliere $N = M^2$.
Analogamente tutto questo vale per $\sqrt[n]{x}$.

4. Funzioni polinomi e razionali

#Esempio

Esempio 4.1. (limite ad una costante del polinomio)

Sia $f(x)$ un *polinomio di grado* n, ovvero del tipo

$$f(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

Allora sfruttando le *operazioni con i limiti* (Teoremi sui Limiti di Funzione > ^48b492), possiamo ricavare il suo limite quando questa funzione tende a $x_0 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} f(x) &= \lim_{x\to x_0}(a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n) \\ &= \lim_{x\to x_0} a_0 + \lim_{x\to x_0} a_1x + \ldots + \lim_{x\to x_0}(a_nx^n) \\ &= a_0 + a_1x_0 + \ldots + a_nx_0^n\end{aligned}$$

#Esempio

Esempio 4.2. (limite del polinomio all'infinito)

Nel caso in cui $x_0 = +\infty \in \tilde{\mathbb{R}}$, allora abbiamo

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n)$$

e possiamo raccogliere ogni termine con x^n, ottenendo dunque

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}(a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n) &= \lim_{x\to+\infty}(x^n(a_n + a_{n-1}\frac{1}{x} + \ldots + a_0\frac{1}{x^n})) \\ &= \lim_{x\to+\infty} x^n \cdot (\lim_{x\to+\infty}(a_n) + \lim_{x\to+\infty} a_{n-1}\frac{1}{x} + \ldots) \\ &= \lim_{x\to+\infty} x^n \cdot (a_n + 0 + 0 + \ldots + 0) \\ &= a_n \lim_{x\to+\infty} x^n\end{aligned}$$

Allora in questo caso dobbiamo vedere quale valore assume il *coefficiente* dell'ultimo *termine* x^n. Procediamo dunque per casistica:

$$a_n \lim_{x\to+\infty} x^n = \begin{cases} +\infty \text{ se } a_n > 0 \\ -\infty \text{ se } a_n < 0 \\ \text{forma indeterminata, altrimenti}\end{cases}$$

abbiamo ricavato questo dai *teoremi sui limiti di funzione* (Teoremi sui Limiti di

Funzione > ^adc58a).
Analogamente c'è un discorso verosimile per il limite quando la funzione tende a $-\infty$, però al contrario. Ovvero

$$a_n \lim_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} -\infty \text{ se } a_n > 0 \\ +\infty \text{ se } a_n < 0 \\ \text{forma indeterminata, altrimenti} \end{cases}$$

#Esempio

Esempio 4.3. (limite finito della funzione razionale di grado n, m)

Sia la *funzione razionale* un quoziente tra due *polinomi* di grado n, m ovvero del tipo

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, f(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m}$$

Allora sfruttando dei teoremi (Teoremi sui Limiti di Funzione > ^48b492) possiamo avere

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \frac{a_0 + a_1 x_0 + \ldots + a_n x_0^n}{b_0 + b_1 x_0 + \ldots + b_m x_0^m}$$

e bisogna avere che

$$b_0 + b_1 x_0 + \ldots b_n x_0^m \neq 0$$

Se invece la sopra non viene verificata (ovvero il polinomio al denominatore è 0) bisogna vedere se è vera la seguente.

$$a_0 + a_1 x_0 + \ldots + a_n x_0^n \stackrel{?}{=} 0$$

A. Se è *vera* (ovvero che vale 0), allora dobbiamo usare il *teorema di Ruffini* per cui sappiamo che un polinomio si annulla in x_0 *se e solo se* $(x - x_0)$ è un fattore. Dunque a quel punto si può semplificare la frazione e vedere il risultato; può verificare che rimane il numeratore (e quindi il limite tende a 0) oppure che rimane il denominatore (e quindi il limite tende a $\pm\infty$).
B. Se è invece *falsa* (ovvero che *non* vale 0), allora il limite può essere $+\infty$ o $-\infty$, oppure può non esistere se il limite *destro* è diverso dal limite *sinistro*. C'è infatti un problema del segno: bisogna vedere il segno del numeratore.

#Esempio

Esempio 4.4. (limite all'infinito della funzione razionale)

Vogliamo valutare

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m}$$

Allora con un ragionamento simile all'esempio precedente (^dd4e07) possiamo raccogliere in entrambi i polinomi per x^n o x^m e avere

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m} &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^n(a_n + a_{n-1}\frac{1}{x} + \ldots + a_0 \frac{1}{x^n})}{x^m(b_m + b_{m-1}\frac{1}{x} + \ldots + b_0 \frac{1}{x^m})} \\ &= \lim_{x\to\infty} x^{n-m} \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{a_n}{b_m} + 0 + \ldots + 0 \\ &= \frac{a_n}{b_m} \lim_{x\to\infty} x^{n-m}\end{aligned}$$

Raggiunto qui dobbiamo procedere per casistica per x^{n-m}:
A. Se $n-m=0$ (ovvero i polinomi sono dello stesso grado) allora il limite tende a $\frac{a_n}{b_m}$
B. Se $n-m>0$ allora il limite tende a $\pm\infty$, il segno del limite varia a seconda del segno della costante $\frac{a_n}{b_m}$
C. Se $n-m<0$ allora il limite tende a 0.

5. Funzioni trigonometriche

Questa sezione ovviamente richiede la conoscenza di Funzioni trigonometriche

#Esempio

Esempio 5.1. (funzione seno)

Ricordiamoci delle *funzioni di prostaferesi* (Funzioni trigonometriche > ^5d221c). Voglio dimostrare che

$$\lim_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0$$

Allora parto dalla distanza euclidea

$$|f(x) - L| \implies |\sin x - \sin x_0|$$

e conoscendo le *formule di prostaferesi* ottengo

$$2|\sin(\frac{x-x_0}{2})\cos(\frac{x+x_0}{2})| = 2|\sin\frac{x-x_0}{2}||\cos\frac{x-x_0}{2}|$$

e sapendo che $\cos \alpha \leq 1, \forall \alpha$ possiamo *"maggiorare"* questa espressione con

$$2|\cos \frac{x-x_0}{2}| \cdot 1$$

allora

$$\begin{aligned}|\sin x - \sin x_0| &= 2|\sin \frac{x-x_0}{2}||\cos \frac{x-x_0}{2}| \\ &\leq 2|\sin \frac{x-x_0}{2}|\end{aligned}$$

Ora ci ricordiamo che $|\sin \alpha| \leq |\alpha|$ (infatti basta pensare che α è la lunghezza della retta e $\sin \alpha$ è invece la coordinata y del punto su cui cadiamo quando facciamo il processo di *"avvolgimento"* di questa retta; oppure per convincerci di questo basta disegnare i grafici di queste due funzioni, *figura 5.1.*).
Dunque otteniamo

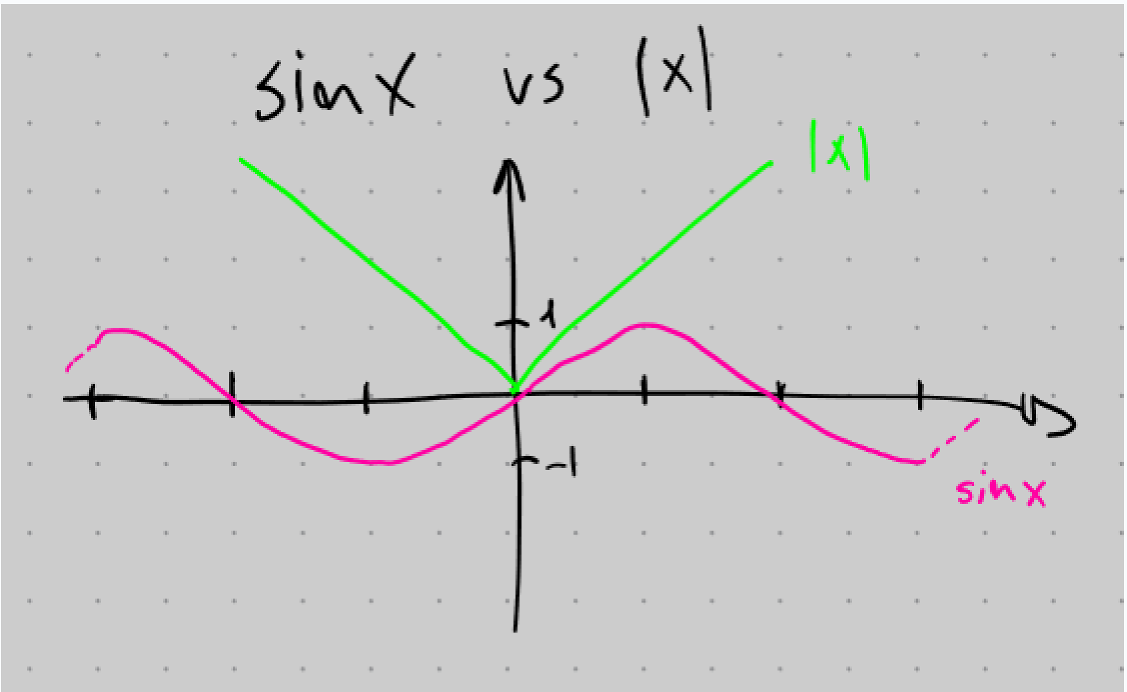
$$|\sin x - \sin x_0| \leq 2|\sin \frac{x-x_0}{2}| \leq 2|\frac{x-x_0}{2}| = |x-x_0|$$

ovvero

$$|\sin x - \sin x_0| \leq |x-x_0|$$

allora nella *definizione del limite* (Definizione di Limite di funzione) basta scegliere $\delta = \varepsilon$ in quanto abbiamo appena verificato che sicuramente quest'ultima espressione è sicuramente vera.

FIGURA 5.1. ($|x| \geq \sin x$)



#Esercizio

Esercizio 5.2 (funzione coseno)

Esercizio lasciato al lettore: provare che

$$\lim_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0$$

#Esempio

Esempio 5.3. (funzione tangente)

Invece per la *funzione tangente* $\tan$ si ha che:

$$\lim_{x \to x_0} \tan x = \begin{cases} \tan x_0 \text{ se } x_0 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \forall k \in \mathbb{Z} \\ \text{non def., altrimenti} \end{cases}$$

il limite di $\tan$ per $x \to \alpha, \forall \alpha \in [\frac{\pi}{2}]_{\equiv \pi}$ *non* è definita in quanto il limite destro e sinistro di questa non sono uguali; infatti

$$\lim_{x \to \alpha^-} \tan x = +\infty \text{ e } \lim_{x \to \alpha^+} \tan x = -\infty$$

e questi valgono per la *permanenza del segno*; infatti se da *sinistra* $\lim_{x \to \alpha^-} \frac{1}{\cos x} = +\infty$ allora sicuramente vale ciò che abbiamo detto prima.
Analogo per l'altro limite.
Quindi

$$\lim_{x \to \alpha^+} \tan x \neq \lim_{x \to \alpha^-} \tan x$$

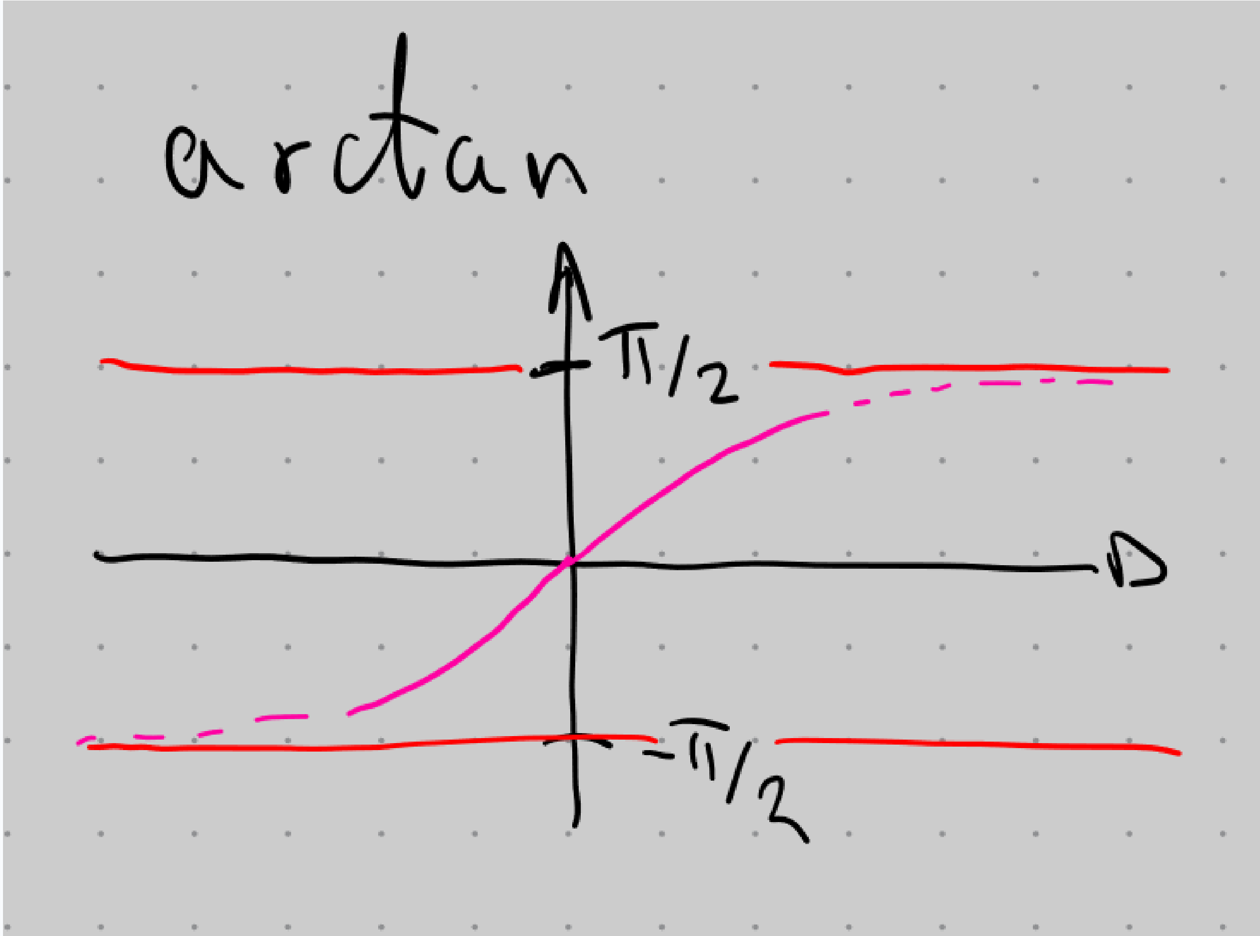
#Esempio

Esempio 5.4. (funzione arcotangente)

Riprendiamo invece la *funzione arcotangente* $\arctan x$.
Osserviamo dal grafico di tale funzione (*figura 5.4.*) che valgono le seguenti:

$$\lim_{x \to -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$$
$$\lim_{x \to +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$$
$$\lim_{x \to x_0} \arctan x = \arctan x_0$$

FIGURA 5.4. (*Funzione* $\arctan$)



#Esempio

Esempio 5.5. (funzione arcoseno e arcocoseno)

Riprendiamo ora le funzioni $\arcsin$ e $\arccos$.
Dai grafici di queste (*figura 5.5.*) osserviamo che

$$\lim_{x \to -1^+} \arcsin x = -\frac{\pi}{2}; \lim_{x \to -1^+} \arccos x = \pi$$

e

$$\lim_{x \to 1^-} \arcsin x = \frac{\pi}{2}; \lim_{x \to 1^-} \arccos x = \pi$$

FIGURA 5.5. (*Grafici di* $\arcsin$, $\arccos$)

"Pasted image 20231017172546.png" could not be found.

6. Funzione esponenziale e logaritmica

Per la funzione esponenziale e logaritmica si tengono in conto i risultati delle definizioni delle *funzioni esponenziali e logaritmiche* (Funzione esponenziale e Logaritmica > ^df6840, Funzione esponenziale e Logaritmica > ^16fe54).

Esponenziale vs quoziente 1

#Teorema

Teorema 6.1. (l'esponenziale confrontato con l'identità)

In alcuni esempi dei limiti di successione (Esempi di Limiti di Successione > ^3d1aba) abbiamo visto che

$$\lim_n \frac{a^n}{n} = +\infty$$

Allora si può provare che

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x} = +\infty}$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *teorema 6.1.* (^f5b822)
Partiamo dal fatto che

$$n \leq x < n+1 \iff [x] \leq x < [x]+1$$

e chiamo $n = [x]$ la *parte intera di* x. Allora si vede che

$$a^{[x]} \leq a^x < a^{[x]+1}$$

Naturalmente

$$\frac{1}{[x]+1} < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{[x]}$$

Allora li combino, ottenendo

$$\frac{a^{[x]}}{[x]+1} < \frac{a^x}{x} < \frac{a^{[x]+1}}{[x]}$$

e osservando che

$$\lim_n \frac{a^n}{n+1} = +\infty, \lim_n \frac{a^{n+1}}{n} = +\infty$$

allora per il *teorema dei due carabinieri* (Limite di Successione > ^72d83a), abbiamo

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x}=+\infty \blacksquare$$

Esponenziale vs quoziente k

#Teorema

Teorema 6.2. (l'esponenziale è l'infinito "più grande")

Voglio calcolare

$$a>1,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^k},k\in\mathbb{N}$$

In questo esempio ho una *forma indeterminata* del tipo $\frac{+\infty}{+\infty}$ (Teoremi sui Limiti di Funzione > ^adc58a); la domanda che ci poniamo è il seguente: *"chi vince tra l'esponenziale a^x e il quoziente x^k? Ovvero avremmo $+\infty$ o 0?"* Spoiler: vincerà l'esponenziale e di conseguenza il limite è $+\infty$.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^k}=+\infty}$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *teorema 6.2.* (^d4765a)
Qui uso le proprietà degli esponenti (Funzione esponenziale e Logaritmica, **TEOREMA 1.5.**).

$$\frac{a^x}{x^k}=(\frac{(a^{\frac{1}{k}})^x}{x})^k$$

Ora considero il limite di

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(a^{\frac{1}{k}})^x}{x}=+\infty$$

e facendo la sostituzione con $y=\frac{x}{k}$ ho

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{a^y}{y}\cdot\frac{1}{k}=+\infty$$

che è infatti una situazione del tipo **ESEMPIO 6.1.**.
Allora ho una situazione del tipo

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^k}\to(+\infty)^k\to+\infty$$

Pertanto il risultato finale è

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^k}=+\infty}$$

Esponenziale vs potenza

#Corollario

Corollario 6.1. (l'esponenziale decresce il più velocemente)

Ora facciamo lo stesso scontro, solo che al posto del quoziente abbiamo la potenza $p_n(x)=x^n$. Allora

$$\lim_{x\to-\infty}x^ka^x=\underbrace{\pm\infty\cdot 0}_{\text{forma ind.}}$$

Allora qui ci chiediamo quale *"decresce"* la più velocemente; x^k oppure a^x? Ora vediamo.
Poniamo, mediante la *sostituzione di variabile*, $y=-x$; allora

$$\lim_{y\to+\infty}-y^ka^{-y}=(-1)^ky^ka^{-y}=(-1)^k\frac{y^k}{a^y}$$

Notiamo che

$$\frac{y^k}{a^y}=(\frac{a^y}{y^k})^{-1}$$

quindi abbiamo una situazione del tipo

$$(-1)^k\cdot(\frac{1}{+\infty})\to(-1)^k\cdot 0\to 0$$

Allora il limite è

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}x^ka^x=0}$$

aggiudicandoci un'altra vittoria per l'esponenziale.

Logaritmo vs identità

#Esempio

Esempio 6.4. (la decrescita del logaritmo viene annullata dall'identità)

Voglio calcolare

$$\lim_{x \to 0^+} x \log_a x, a > 1$$

notiamo che questa è una situazione del tipo $0 \cdot (+\infty)$, ovvero una *forma indeterminata*. Allora procediamo per *sostituzione di variabile*, ponendo $y = \log_a x \implies x = a^y$;

$$\boxed{\lim_{y \to -\infty} y a^y = 0}$$

che è una situazione del tipo presentato in un altro limite (^cfc9a5) con $k = 1$. Generalizzando si ha

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} x^\alpha \log x = 0, \alpha > 0}$$

#Esempio

Esempio 6.5. (logaritmo vs radice quadrata)

ESEMPIO 6.5. (*Logaritmo vs radice quadrata*)

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} \log_a x, a > 1$$

Analogamente procediamo per sostituzione; $y = \log_a x \implies \sqrt{x} = a^{\frac{y}{2}}$ allora

$$\lim_{y \to -\infty} a^{\frac{y}{2}} y \implies \lim_{z \to -\infty} a^z (2z) = 0$$

Logaritmo vs quoziente

#Esempio

Esempio 6.6. (il logaritmo cresce più lentamente)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log_a x}{x}$$

Come di consueto procedo per sostituzione: ovvero $y = \log_a x \implies x = a^y$;

$$\lim_{y \to +\infty} \frac{y}{a^y} = y a^{-y}$$

Sostituisco di nuovo le variabili, $z=-y \implies y=-z$ e ho

$$\lim_{z\to-\infty}(-z)a^z = -\lim_{z\to-\infty} za^z = -0 = 0$$

7. Limiti fondamentali

Ora illustriamo ciò che chiameremo come i *limiti fondamentali*.
Prima di considerare il primo esempio facciamo le seguenti osservazioni.

#Osservazione

Osservazione 7.1. (calcolare l'area del settore circolare)

OSS 7.1. Voglio calcolare l'area del *settore circolare* con raggio r e angolo α e la lunghezza dell'arco $l=r\alpha$ (*figura 7.1.*)
Idea. Che vuol dire calcolare l'area di una figura? Questo significa prendere una "misura" standard per misurare l'area, poi per contare. Infatti ad esempio, per calcolare l'area di un *triangolo* partiamo dall'area di due *rettangoli* "distorti" che formano un triangolo.
Analogamente facciamo la stessa cosa col settore circolare: la dividiamo in *"triangolini"* piccolissimi, poi li *"apro"* disponendoli fila per fila.
Ora arriviamo al punto cruciale: *"faccio finta"* (oppure approssimo) la lunghezza dell'*arco* con quello della *coda*. Graficamente il ragionamento consiste nella *figura 7.2.*
Dove la *"base"* di questi triangoli è αr in quanto questa è proprio la *"base"* della figura originaria e l'*"altezza"* è il raggio r.
Quindi possiamo unire tutti questi triangoli in uno singolo triangolo con le stesse misure e avere dunque un singolo triangolo con base αr e altezza r. Usiamo dunque la formula per calcolare l'area di questo triangolo.

$$A = \frac{\alpha r^2}{2}$$

FIGURA 7.1. (*Il problema*)

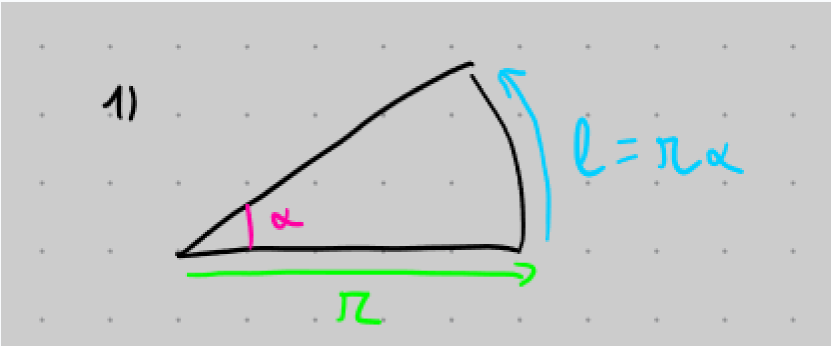
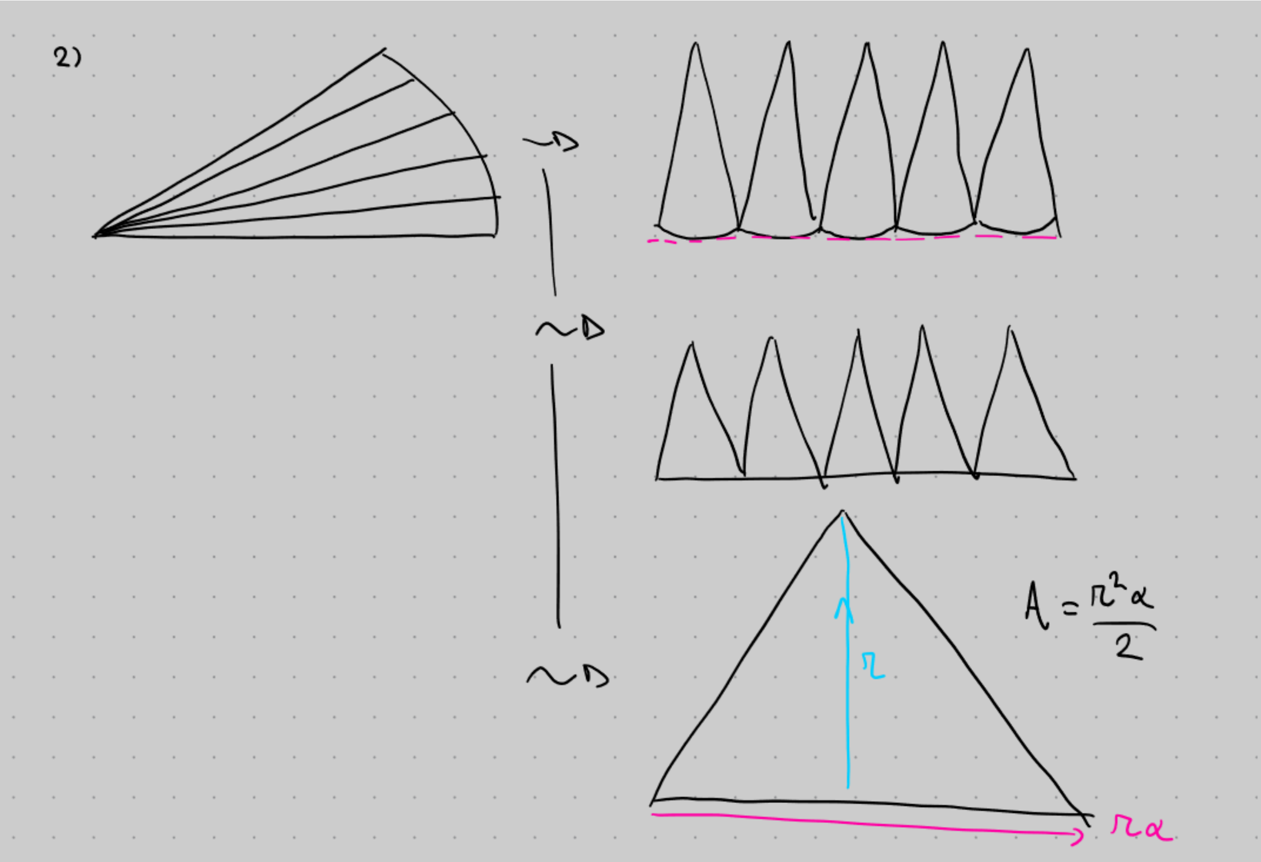


FIGURA 7.2. (*Il fulcro del ragionamento*)



#Osservazione

Osservazione 7.2. (relazione tra i triangoli formatosi col settore circolare)

Ora, riprendendo il cerchio unitario Γ, traccio *tre figure geometriche* di cui due sono triangoli ed uno è il settore circolare. Segniamo i tre triangoli $A_{1,2,3}$ nella *figura 7.3.*.
Chiaramente si vede che

$$A_1 \leq A_2 \leq A_3$$

L'area del triangolo delineato dalla *coda* è

$$A_1 = \frac{\sin \alpha}{2}$$

Invece l'area del *settore* è

$$A_2 = \frac{a}{2}$$

Ora l'area del triangolo ottenuto *"estendendo"* la retta orizzontale in $x = 1$ e la *"diagonale"* che taglia il cerchio è

$$A_3 = \frac{\tan \alpha}{2}$$

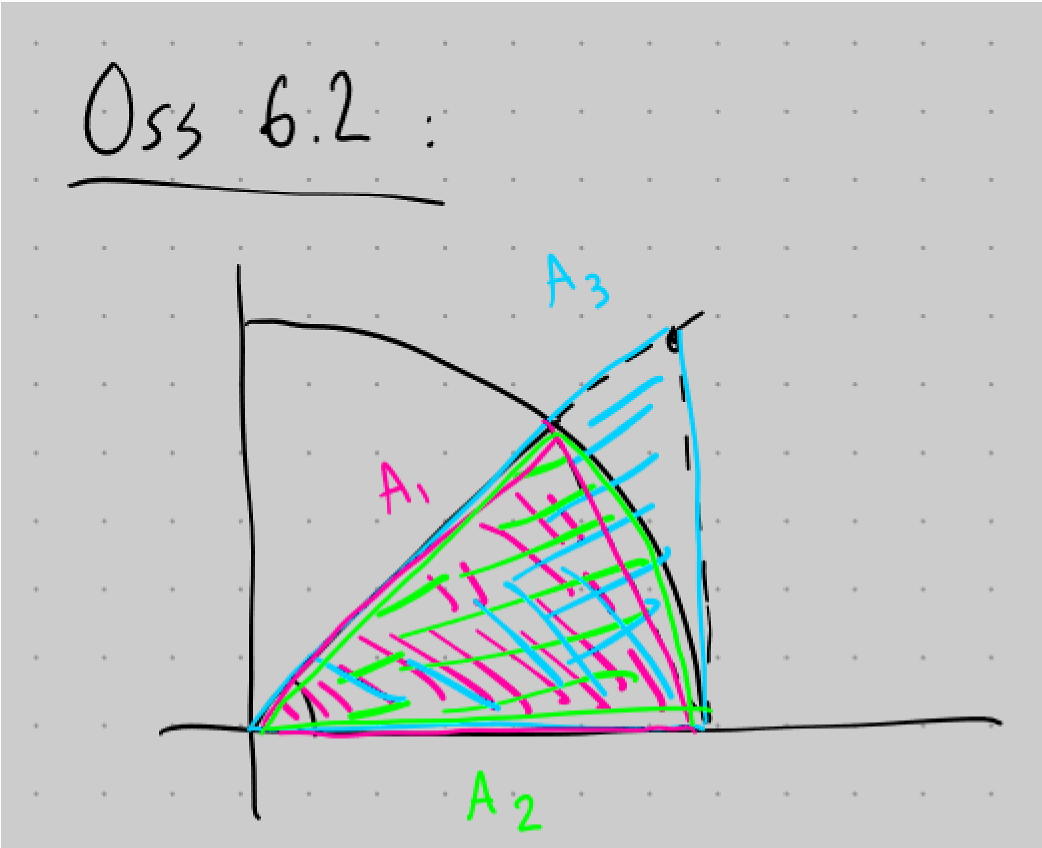
ed è ottenuta facendo le proporzioni tra il triangolo A_1 e questo triangolo dove la base è 1(ed è possibile farlo in quanto i due triangoli in merito sono simili). Infatti

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{x} \implies x = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$$

Allora possiamo concludere che in questa figura sussiste la seguente relazione per $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$:

$$\frac{\sin\alpha}{2} \leq \frac{\alpha}{2} \leq \frac{\tan\alpha}{2}$$

FIGURA 7.3. (*Le aree segnate*)



Limite fondamentale sinx / x

#Teorema

Teorema 7.1. (primo limite fondamentale $\sin x / x$

Il *primo limite fondamentale* noto che conosceremo è il limite

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

DIMOSTRAZIONE del *teorema 7.1.* (^727823)
Voglio calcolare

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$$

e usando alcuni dei Teoremi sui Limiti di Funzione per trattare i limiti separatamente le x con 0, otteniamo la frazione $\frac{0}{0}$, ovvero una *forma indeterminata*. Dobbiamo allora trovare un modo alternativo di calcolare questo limite; questo è possibile grazie alle osservazioni precedenti già fatte, in particolare l'*osservazione 7.2.* (^3856a8).
Infatti possiamo manipolare l'espressione finale per ottenere il seguente:

$$\begin{gathered}
\frac{\sin \alpha}{2} \leq \frac{\alpha}{2} \leq \frac{\tan \alpha}{2} \\
\sin \alpha \leq \alpha \leq \tan \alpha \\
1 \leq \frac{\alpha}{\sin \alpha} \leq \frac{\tan \alpha}{\sin \alpha} = \cos \alpha \\
\cos \alpha \leq \frac{\sin \alpha}{\alpha} \leq 1
\end{gathered}$$

Per il teorema dei *due carabinieri* (Teoremi sui Limiti di Funzione, **TEOREMA 4.1.**), abbiamo i seguenti:

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \to 0^+} \cos \alpha \leq \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin \alpha}{\alpha} \leq \lim_{x \to 0^+} 1 \\
\implies & 1 \leq \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin \alpha}{\alpha} \leq 1 \\
\implies & \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1
\end{aligned}$$

Però ricordiamoci che $\frac{\sin x}{x}$ è una funzione *pari* (Funzioni, **DEF 9.**), in quanto abbiamo due funzioni dispari; quindi questo limite può valere anche per il *limite destro* 0^-. Concludiamo dunque

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

#Corollario

Corollario 7.1. (altro "mini" limite fondamentale $1 - \cos x / x^2$)

Ci sarà utile anche ricordare il limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = ?$$

Per calcolarlo dobbiamo avvalerci di un *trucco*, ovvero quello di moltiplicare per un'espressione equivalente a $\frac{1}{1}$. In questo caso prendiamo

$$\frac{1+\cos x}{1+\cos x}$$

Dunque il nostro limite diventa

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\frac{1+\cos x}{1+\cos x} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} \\
\cos^2 x+\sin^2 x = 1 \implies &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\cos x} \\
&= \lim_{x\to 0}(\frac{\sin x}{x})^2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x} \\
&= 1^2\cdot\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Concludiamo allora

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}}$$

Limiti esponenziali e logaritmici

Dai risultati del *capitolo 6* (^96da3e). *è opportuno ricordarsi i seguenti* limiti notevoli*:

#Corollario

Corollario 7.2. (limiti esponenziali e logaritmici)

$$\boxed{\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^k} = +\infty \\
&\lim_{x\to-\infty} x^k a^k = 0 \\
&\lim_{x\to 0^+} x^\varepsilon \log_a x = 0, \varepsilon > 0 \\
&\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^\varepsilon} = 0, \varepsilon > 0
\end{aligned}}$$

Limite fondamentale (1+1/n)^n

Dai risultati di Esempi di Limiti di Successione, in particolare l'**ESEMPIO 1.4.**, abbiamo visto che

$$\lim_n (1+\frac{1}{n})^n = e$$

DETOUR. Si nota che da adesso in poi, quando si scrive $\log$, $\exp$ senza specificare le loro basi si implicitamente intende $\log_e = \ln$ e $\exp_e = e^{\cdots}$. Facciamo questo in quanto vedremo che usando questa nomenclatura diventerà tutto più semplice.

#Teorema

Teorema 7.2. (limite fondamentale e)

Si nota il seguente limite fondamentale

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e}$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *teorema 7.2.* (^0c3749)
Voglio calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x$$

Idea. Il ragionamento è analogo a quello presentato nel *teorema 6.1.* (^7c9b77), ovvero quella di usare la *parte intera* $n = [x]$. Allora sappiamo già che

$$[x] \leq x < [x]+1 \implies \frac{1}{[x]+1} < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{[x]}$$

Ora ci aggiungiamo $+1$ da tutte le parti, poi li eleviamo elle loro rispettive potenze di partenza:

$$\begin{gathered}\frac{1}{[x]+1}+1 < \frac{1}{x}+1 \leq \frac{1}{[x]}+1 \\ (\frac{1}{[x]+1}+1)^{[x]} < (1+\frac{1}{x})^x < (\frac{1}{[x]}+1)^{[x]+1}\end{gathered}$$

Adesso analizziamo il membro sinistro e destro.

1. Membro sinistro

$$\begin{aligned}(\frac{1}{[x]+1}+1)^{[x]} &= \lim_n (1+\frac{1}{n+1})^n \\ &= \lim_n (1+\frac{1}{n+1})^{n+1} \cdot \frac{1}{(1+\frac{1}{n+1})} \\ &= e \cdot 1 = e\end{aligned}$$

2. Membro destro

$$\begin{aligned}(\frac{1}{[x]}+1)^{[x]+1} &= (1+\frac{1}{[x]})^{[x]+1} \\ &= \lim_n (1+\frac{1}{n})^n \cdot (1+\frac{1}{n}) \\ &= e \cdot 1 = e\end{aligned}$$

Vediamo che ambo i lati convergono a e; di conseguenza per il *teorema dei due carabinieri* (Teoremi sui Limiti di Funzione > ^04916c) abbiamo

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} (1+\frac{1}{x})^x = e}$$

#Corollario

Corollario 7.3. (forma "negativa" del limite fondamentale di e)

Si nota che vale anche il limite

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} (1+\frac{1}{x})^x = e}$$

DIMOSTRAZIONE del *corollario 7.3.* (^110bc4)
Ora voglio calcolare

$$\lim_{x \to -\infty} (1+\frac{1}{x})^x$$

L'idea principale è quella di usare la *sostituzione di variabile*, ovvero $y = -x$. Allora

$$\begin{aligned}\lim_{y\to+\infty}(1-\frac{1}{y})^{-y} &= \frac{1}{(1-\frac{1}{y})^y} \\ &= \frac{1}{(\frac{y-1}{y})^y} \\ &= (\frac{y}{y-1})^y \\ &= (\frac{y-1+1}{y-1})^y \\ &= (1+\frac{1}{y-1})^y \\ &= (1+\frac{1}{y-1})^{y-1}\cdot(1+\frac{1}{y-1}) \\ &= e\cdot 1 = e \blacksquare\end{aligned}$$

Limite fondamentale (1+n)^(1/n)

#Corollario

Corollario 7.4. (seconda forma del limite fondamentale di e)

Si nota la *seconda forma* del limite fondamentale per e:

$$\boxed{\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e}$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *corollario 7.4.* (^c378ca)
Voglio calcolare

$$\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

Se voglio usare la sostituzione di variabile ponendo $y = \frac{1}{x}$ è necessario procedere per casistica, in quanto $x \to 0 \implies \frac{1}{x} \to \pm\infty$. Allora

1. Limite destro

$$\lim_{x\to0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}} \overset{y=\frac{1}{x}}{\implies} \lim_{y\to+\infty}(1+\frac{1}{y})^y = e$$

2. Limite sinistro

$$\lim_{x\to0^-}(1+x)^{\frac{1}{x}} \implies \lim_{y\to-\infty}(1+y)^y = e$$

Pertanto è definito il limite

$$\boxed{\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e} \square$$

Limite fondamentale log(1+x)/x

#Teorema

Teorema 7.3. (limite fondamentale $\log(1+x)/x$)

Si nota un altro importante limite fondamentale che sfrutta il logaritmo:

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1}$$

DIMOSTRAZIONE del *teorema 7.3.* (^927938)
Idea. Uso le proprietà del logaritmo (Funzione esponenziale e Logaritmica, **TEOREMA 2.1.**). Dunque

$$\frac{\log(1+x)}{x} = \log(1+x)\cdot x^{-1} = \log(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log((1+x)^{\frac{1}{x}})$$

Osservo che

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} \to e \text{ per } x \to 0$$

Allora ho

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = \log(e) = 1} \blacksquare$$

Limite fondamentale (e^x-1)/x

#Corollario

Corollario 7.5. (limite fondamentale $e^x - 1/x$)

Alla base di quanto visto prima, voglio calcolare

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$$

Idea. Qui usiamo la *sostituzione di variabile*, dove $y = e^x - 1 \implies x = \log(y+1)$.

Allora

$$\lim_{y \to 0} \frac{y}{\log(y+1)} = (\frac{\log(1+y)}{y})^{-1} = 1^{-1} = 1$$

Dunque

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1}$$

#Osservazione

Osservazione 7.3. (generalizzazione del corollario 7.5.)

Se invece ho

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x}, a > 1$$

Idea. Qui invece l'idea principale è di *cambiare le basi*, riconducendoci così al *corollario 7.5.*. Allora per cambiare la base di un'esponenziale possiamo considerare il seguente:

$$g(x)^{f(x)} = e^{\ln(g(x)^{f(x)})} = e^{f(x)\ln(g(x))}, f(x) > 0$$

Dunque considerando $g(x) = a$, $f(x) = x$, abbiamo

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x \ln a} - 1}{x} \stackrel{y = x \ln a}{\Longrightarrow} \lim_{y \to 0} \frac{e^y - 1}{\frac{y}{\ln a}} = \frac{e^y - 1}{y} \cdot \ln a = e \cdot \ln a$$

Dunque

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \cdot e}$$

Infatti il *corollario 7.5.* (^e516e3) è un *caso specifico* di questo con $a = e \implies \ln a = 1$.

L'utilità dei limiti fondamentali

#Osservazione

Osservazione 7.3. (generalizzazione dei limiti fondamentali con sostituzione di variabile)

Abbiamo osservato i seguenti limiti fondamentali:

$$\text{TEOREMA 7.1. } \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$
$$\text{COROLLARIO 7.5. } \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$
$$\text{TEOREMA 7.3. } \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Se ho $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ oppure $f(x) \neq 0, \forall x \neq 0$, allora possiamo considerare il limite delle *funzioni composte* (Teoremi sui Limiti di Funzione > ^55caf4)

$$\boxed{\begin{aligned} &\lim_{f(x) \to 0} \frac{\sin(f(x))}{f(x)} = 1 \\ &\lim_{f(x) \to 0} \frac{e^{f(x)} - 1}{x} = 1 \\ &\lim_{f(x) \to 0} \frac{\ln(1 + f(x))}{f(x)} = 1 \end{aligned}}$$

Questo strumento è *utilissimo* per risolvere degli esercizi sui limiti; infatti questo potrebbe essere addirittura più potente del *Teorema de l'Hopital* (Teorema di De l'Hôpital > ^67a7cd).

SEZIONE B. LIMITI DI SUCCESSIONE

B1. Definizione di limite di successione

Limite di Successione

Definizione di limite di successione.

---

0. Argomenti ed osservazioni preliminari

Questo argomento richiede la conoscenza degli argomenti seguenti.

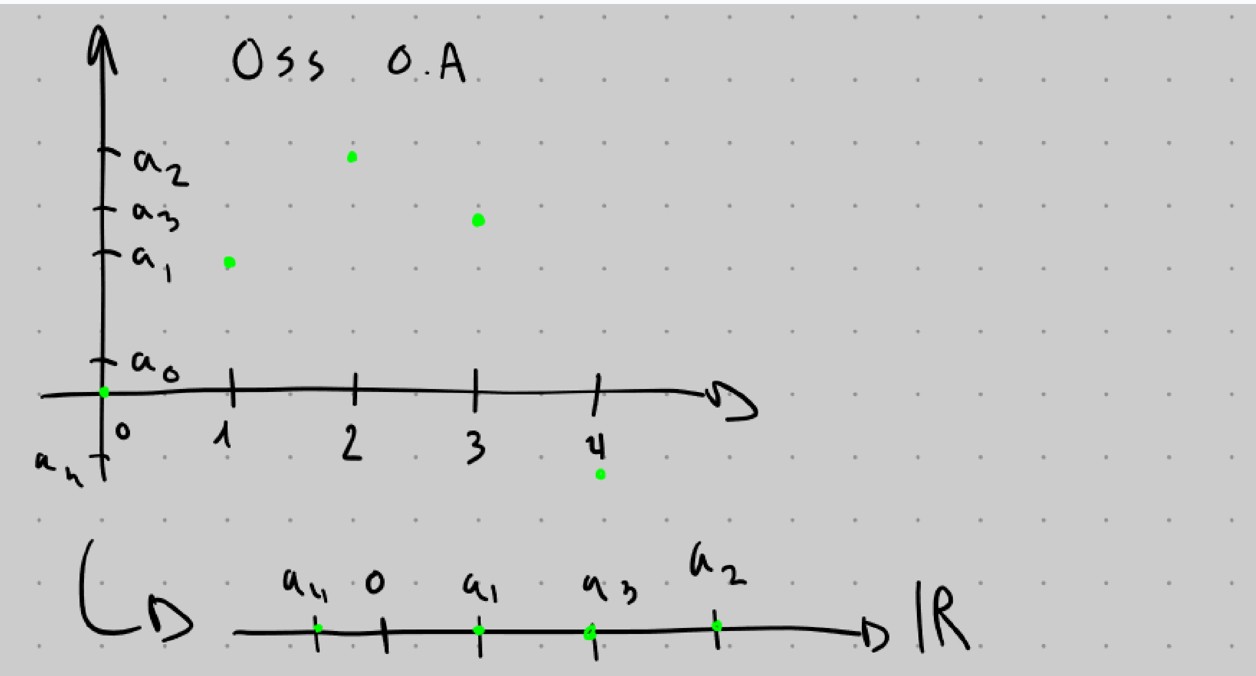
- Assiomi di Peano, il principio di induzione
- Successione e Sottosuccessione

Inoltre facciamo alcune osservazioni preliminari che ci possono aiutare a comprendere il
contenuto di questa pagina.

Osservazione 0.A. (rappresentazione delle successioni sul piano cartesiano π)

Posso rappresentare una *successione* sul piano cartesiano mediante la maniera rappresentata nella *figura 0.A.*; alternativamente si può rappresentare una successione anche come dei punti sulla *retta reale*.

FIGURA 0.A. (*Osservazione 0.A.*)



1. Limite di Successione

#Osservazione

Osservazione 1.1. (origine del concetto)

Voglio introdurre il concetto di *limite* (Definizione di Limite di funzione > ^c5e4ec) per una *successione* (Successione e Sottosuccessione > ^e6d66f).

Innanzitutto mi chiedo quale sia il *dominio* di una qualsiasi *successione*: la risposta è l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$.
Se posso definire il limite di una funzione che si avvicina ad un *punto di accumulazione del dominio*, allora posso certamente definire il limite di una successione che si avvicina ad un punto
di accumulazione per $\mathbb{N}$.

Tuttavia come osservato (Punti di aderenza e di accumulazione > ^740a07), non ci sono punti di accumulazione in $\mathbb{R}$; quindi bisogna *"ampliare"* i nostri orizzonti e considerare invece $\tilde{\mathbb{R}}$, in particolare il simbolo $+\infty$. Per definizione possiamo definire il punto di accumulazione di $+\infty$ come una semiretta qualsiasi $(a, +\infty)$.

In questo caso possiamo prendere $+\infty$ come punto di accumulazione per $\mathbb{N}$.
Allora *l'unico valore* di cui ha senso calcolare il limite di una successione è $+\infty$; di conseguenza possiamo scrivere

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_n a_n$$

in una e sola maniera univoca.

#Definizione

Definizione 1.1. (limite di successione)

Allora definiamo

$$\boxed{\lim_n a_n = L}$$

come

$$\boxed{\begin{gathered}\forall V \text{ di } L, \exists U \text{ di } +\infty : \forall n, \\ n \in U \implies a_n \in V\end{gathered}}$$

ovvero, supponendo $L \in \mathbb{R}$,

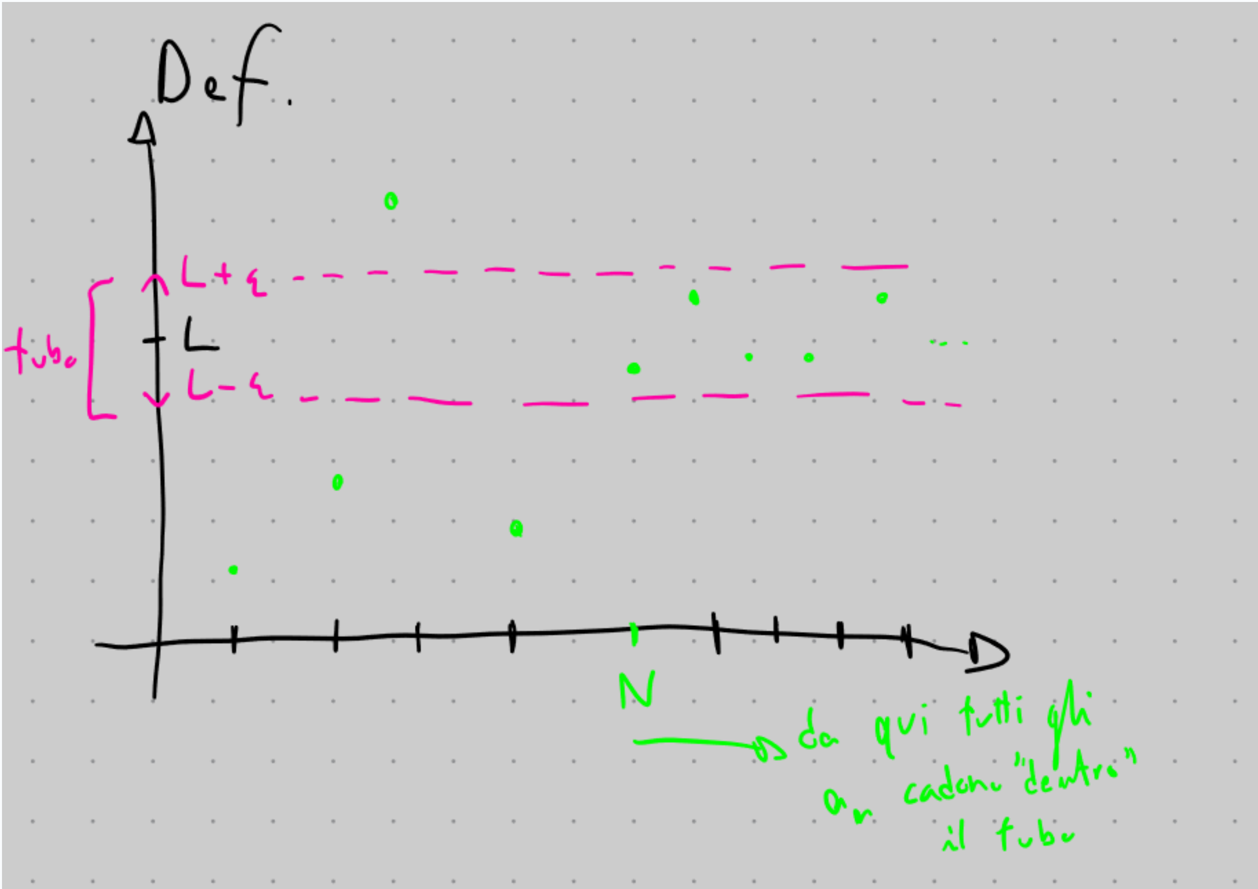
$$\begin{gathered}\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 : \forall n, \\ n > N \implies |a_n - L| < \varepsilon\end{gathered}$$

oppure se $L \in \tilde{\mathbb{R}}$,

$$\begin{gathered}\forall M > 0, \exists N > 0 : \forall n, \\ n > N \implies a_n > M \; (a_n < -M \text{ per } -\infty)\end{gathered}$$

Graficamente ho la *figura 1.1.*.

FIGURA 1.1. (*definizione di limite di successione*)



#Definizione

Definizione 1.2. (convergenza e divergenza di una successione)

Se

$$\lim_n a_n = L$$

esiste e il limite è un *numero* $L \in \mathbb{N}$, allora si dice che a_n è *convergente*.
Altrimenti se esiste ma ho

$$\lim_n a_n = \pm\infty$$

allora si dice che a_n è *divergente a* $\pm\infty$.

2. Proprietà di limiti di successione

#Osservazione

Osservazione 2.1. (i teoremi per i limiti di funzioni valgono anche per i limiti di successioni)

Osserviamo che per il *limite di successione* valgono *tutte* le *proprietà dei limiti di funzione* (Teoremi sui Limiti di Funzione), in quanto stiamo considerando un *caso particolare* di un *caso generale*.
Quindi valgono le seguenti:

- L'unicità del limite
- Permanenza del segno
- Teorema del confronto
- Teorema dei due carabinieri
- Operazioni sui limiti
- Limite zero e infinitesimo
- Forme indeterminate

Inoltre abbiamo altri *due altri teoremi*, specifici per le successioni.

#Teorema

Teorema 2.1. (le sottosuccessioni convergono allo stesso valore delle loro successioni padre)

Sia $(a_n)_n$ una successione a valori in A, e $(a_{n_k})_k$ una *successione estratta* di a_n (Successione e Sottosuccessione).
Tesi. Supponendo che

$$\lim_n a_n = l$$

allora vale la seguente implicazione

$$\boxed{\lim_n a_n = l \implies \lim_k a_{n_k} = l}$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *teorema 1.1.* (^f55fde)

Il punto cruciale consiste nel seguente.
Se

$$\lim_n a_n = l \in \mathbb{R}$$

vuol dire

$$\begin{gathered}\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} > 0 : \forall n, \\ n > \bar{n} \implies |a_n - l| < \varepsilon\end{gathered}$$

adesso considero la *sotto successione* $(a_{n_k})_k$, *quale numero deve essere superata da* k?
Ovvero mi chiedo se vale che

$$\begin{gathered}\forall \varepsilon > 0, \overset{?}{\exists}\, \bar{k} : \forall n, \\ k > \bar{k} \implies |a_{n_k} - l| < \varepsilon\end{gathered}$$

Scopriamo che basta scegliere $\bar{k} \geq \bar{n}$ in quanto se i valori k di n_k è *strettamente crescente*, allora sicuramente ho

$$n_k \geq k \geq \bar{n}$$

In parole, l'idea consiste nel pensare che il *"peggior" caso* di *successione estratta* di una *successione* può essere la *successione stessa* (infatti estraggo dalla successione la stessa successione); quindi se considero la stessa successione posso avere $\bar{k} = \bar{n}$. In altri casi devo scegliere $\bar{k}$ in un punto più *"lontano"*, in particolare se

$$a_{\bar{n}} \notin (a_{n_k})_k$$

#Teorema

Teorema 2.2. (esistenza dei limiti delle successioni monotone)

Se la successione $(a_n)_n$ è *monotona*, allora esiste *sempre* il limite

$$\lim_n a_n$$

#Corollario

Corollario 2.2.a. (convergenza delle successioni monotone e limitate)

Se $(a_n)_n$ è *monotona* e *limitata* (Successione e Sottosuccessione > ^73b5cc), allora sicuramente il limite

$$\lim_n a_n$$

è *convergente*.

#Osservazione

Osservazione 2.2. (nesso tra limiti di funzione e di successione)

Se consideriamo la successione $(a_n)_n$ come la *restrizione* del dominio da $A \subseteq \mathbb{R}$ a $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ di una qualsiasi *funzione di variabile reale*, ovvero se considero

$$f : A \subseteq [0, +\infty) \longrightarrow B$$

e

$$(a_n)_n : A \cap \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$

allora posso fare la seguente osservazione.

Se conosco il *limite della funzione*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$

allora in automatico conosco pure il *limite della successione*

$$\lim_n a_n = l$$

Notiamo che vale anche il *viceversa* (inversa); se conosco il *limite di una successione*, allora conosco anche il *limite di una funzione* per $x \to +\infty$.

ATTENZIONE! Da qui non bisogna dedurre vale anche la *contraria* (tesi negata); se il limite della funzione per $x \to +\infty$ *non* è definita, allora ciò *non* significa che $\lim_n a_n$ *non* è neanche definita. Infatti $\lim_n a_n$ può esistere quando non esiste $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

#Esempio

Esempio 2.1. (osservazione 2.2.)

Vediamo alcuni esempi di quest'ultima osservazione.

1. $$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \implies \lim_n \frac{1}{n} = 0$$

2. $$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty \implies \lim_n \sqrt{n} = +\infty$$

3. $$\nexists \lim_{x \to +\infty} \sin(n\pi) \not\Longleftarrow \lim_n \sin(n\pi) = 0$$

2. Voci correlate

- Esempi di Limiti di Successione

B2. Esempi, limiti notevoli

Esempi di Limiti di Successione

Alcuni esempi di limiti di successione, in particolare quelle notevoli

---

0. Prerequisiti

Ovviamente questo capitolo serve la conoscenza di Limite di Successione.
Inoltre è opportuno tenere a mente alcuni risultati di Assiomi di Peano, il principio di induzione, in particolare Esempi di Induzione

1. Limiti notevoli (per successioni)

Esponenziale a alla n

#Esempio

Esempio 1.1. (limite dell'esponenziale)

Sia $a > 1$; considero il limite della successione

$$\lim_n a^n; \text{ovvero } a_n = a^n$$

Procediamo prima per *casistica*:
Se $a = 2$, il limite *diverge* per $+\infty$:

$$\lim_n 2^n = +\infty$$

Infatti se ci ricordiamo che $2^n \geq n, \forall n \in \mathbb{N}$, allora ho

$$\lim_n 2^n \geq \lim_n n = +\infty$$

Allora per il *teorema del confronto* (Teoremi sui Limiti di Funzione > ^7c97c5), ho

$$\lim_n 2^n = +\infty$$

Stesso discorso per tutti i numeri $1 < a \leq 2$.
Allora *generalizzo* scrivendo

$$\lim_n a^n = +\infty, \forall a > 0$$

Usando la *disuguaglianza di Bernoulli* (Esempi di Induzione > ^66c5ee) che enuncia il seguente:

$$(1+\rho)^n \geq 1 + \rho n$$

Allora ponendo $a = 1 + \rho$, ho

$$\lim_n a^n \geq \lim_n (1 + \rho n)$$

E calcolando la seconda, ottengo

$$\lim_n (1 + \rho n) = 1 + \rho \lim_n n = +\infty$$

Pertanto, per il *teorema del confronto*

$$\boxed{\lim_n a^n = +\infty}$$

Esponenziale a alla n diviso per n

#Esempio

Esempio 1.2. (limite dell'esponenziale contro potenza)

Considero un caso analogo a quello precedente.

$$\lim_n \frac{a^n}{n}$$

Qui basta usare la *disuguaglianza di Bernoulli incrementata* (Esempi di Induzione > ^815bb7): ovvero

$$(1+\rho)^n \geq 1 + \rho n + \frac{n(n-1)}{2}\rho^2$$

e dividendo da ambo le parti per n, ottengo

$$\frac{(1+\rho)^n}{n} \geq \frac{1}{n} + \rho + \frac{n-1}{2}\rho^2$$

e considerando che la seconda espressione tende a $+\infty$, visto che

$$\frac{1}{n} \to 0; \rho \to n; \frac{n-1}{2}\rho^2 \to +\infty$$

allora ho

$$\boxed{\lim_n \frac{a^n}{n} = +\infty}$$

Radice n di a

Esempio 1.3. (limite della radice n-esima di un numero)

Ora considero una nuova funzione:

$$\lim_n \sqrt[n]{a}, \forall a > 1$$

Qui basta osservare il grafico della funzione *radice* (Funzioni di potenza, radice e valore assoluto), che è la *funzione potenza "capovolta"* (*figura 1.3.*).

Possiamo quindi congetturare che $l = 1$ (ovvero che la successione è *convergente* a 1).
Quindi lo dimostriamo:
Supponendo $\varepsilon > 0$ e considerando $(1+\varepsilon)^n$, sappiamo che

$$\lim_n (1+\varepsilon)^n = +\infty$$

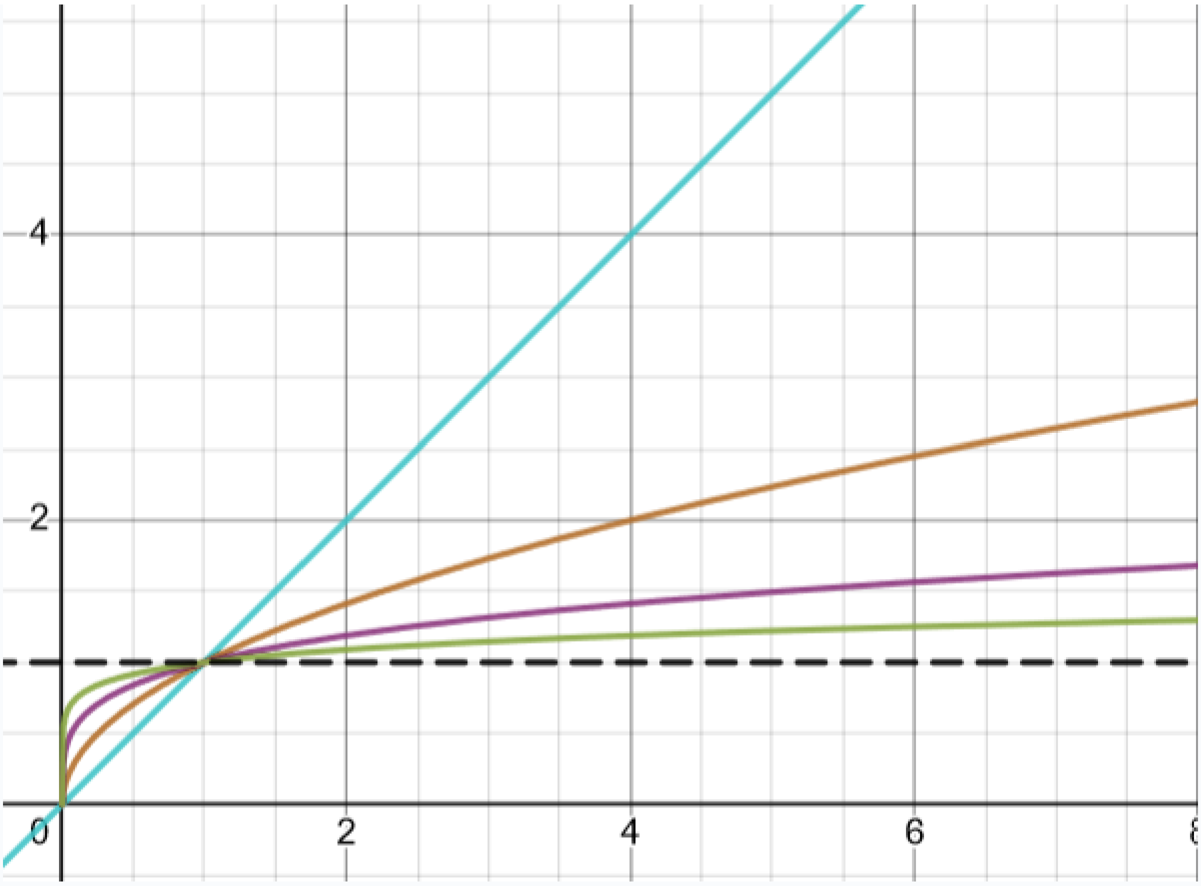
Allora se $a > 1$ avrò che

$$\exists \bar{n} : n > \bar{n} \implies (1+\varepsilon)^n > a \iff (1+\varepsilon) > \sqrt[n]{a}$$

Ora rileggiamo l'*espressione iniziale* $\lim_n \sqrt[n]{a}$,

$$\begin{gathered} \forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} > 0 : \forall n, \\ n > \bar{n} \implies 1 < \sqrt[n]{a} < 1+\varepsilon \\ \implies 1-\varepsilon < \sqrt[n]{a} < 1+\varepsilon \\ \implies |\sqrt[n]{a} - 1| < \varepsilon \end{gathered} \blacksquare$$

FIGURA 1.3. (*Esempio 1.3.*)



#Esercizio

Esercizio 1.1. (radice n-esima di n)

Con un conto analogo posso dimostrare che

$$\lim_n \sqrt[n]{n} = 1$$

(*Per esercizio*)

Limite fondamentale $(1+\frac{1}{n})^n$

#Teorema

Teorema 1.1. (limite fondamentale (1+1/n)^n)

Consideriamo uno dei *limiti* più importanti dell'*analisi matematica*;

$$\lim_n (1+\frac{1}{n})^n$$

Non è immediato capire se questo limite *converge* o *diverge*, in quanto da un lato sappiamo che $\forall \varepsilon > 0, (1+\varepsilon)^n \to +\infty$; ma dall'altro sappiamo che $(1)^n \to 1$. Enunciamo che questo limite *esiste* e *converge* ad un numero reale che chiameremo e, e si trova tra 2 e 3;

$$2 < e < 3$$

$$\boxed{\lim_n (1+\frac{1}{n})^n = e}$$

DIMOSTRAZIONE del *teorema 1.1.* (^3a6188)
Uso il teorema sulle *successioni monotone e limitate* per dimostrare che innanzitutto il limite *converge*: si tratta di provare che $(1+\frac{1}{n})^n$ è sia monotona che limitata.

1. Suppongo che

$$\forall n, 2 \leq (1+\frac{1}{n})^n \leq 3$$

Ora uso il *teorema del binomio* (Coefficiente Binomiale > ^66fdbf) per sviluppare $(1+\frac{1}{n})^n$.

$$\begin{aligned}(1+\frac{1}{n})^n &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} 1^{n-j} (\frac{1}{n})^j \\ &= \binom{n}{0}\frac{1}{n^0} + \binom{n}{1}\frac{1}{n^1} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \ldots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n} \\ &= 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-(n-1))}{n!} \\ &= 2 + \frac{1}{2!}\frac{n-1}{n} + \frac{1}{3!}\frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n} + \ldots + \frac{1}{n!}\frac{n-1}{n}\ldots\frac{n-(}{}\end{aligned}$$

Ora considerando l'ultima espressione, abbiamo che ogni *"secondo membro"* (ovvero dove stanno tutti i quozienti divisi per n) è minore o uguale a 1; infatti

$$\forall j \geq 0, \frac{n-j}{n} \leq 1$$

allora posso *"maggiorare"* questa con la somma dei *"primi membri"* (ovvero dove stanno tutti i fattoriali)

$$(1+\frac{1}{n})^n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}$$

Ora se ricordo che $n! \geq 2^{n-1}$, posso *"minorare"* quest'ultima con

$$(1+\frac{1}{n})^n \leq 1 + \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

Ora se prendo in considerazione tutti i valori da $\frac{1}{2^0}$ in poi, mi accorgo che ho una serie geometrica, che converge esattamente a questo valore (Esempi di Induzione > ^7a9cd3):

$$\frac{1-q^n}{1-q} \implies \sum_{i=0}^{n}(\frac{1}{2})^n = 2$$

Quindi alla fine ottengo

$$2 \leq (1+\frac{1}{n})^n \leq 1+2, \forall n$$

Inoltre abbiamo aggiunto che il valore è maggiore di 2 in quanto ho comunque il numero 2 aggiunto a dei numeri piccoli (vedere lo sviluppo binomiale all'inizio).

2. Ora voglio dimostrare che

$$\forall n, (1+\frac{1}{n})^n \leq (1+\frac{1}{n+1})^{n+1}$$

Uso lo stesso sviluppo binomiale di *1.*;

$$\text{i. } (1+\frac{1}{n})^n = 2 + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n}) + \ldots + \frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})\ldots(1-\frac{n-1}{n})$$

e

$$\text{ii. } (1+\frac{1}{n+1})^{n+1} = 2 + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n+1}) + \ldots + \frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n+1})\ldots(1-$$

e confrontando *ogni* termine della secondo sviluppo, scopriamo che ogni termine della *ii.* è maggiore o uguale ad ogni termine della *i.*. Pertanto è vera la tesi, ovvero che $(1+\frac{1}{n})^n$ è monotona crescente. ■

#Definizione

Definizione 1.1. (costante di Eulero / Nepero)

Indico il valore per cui il limite converge con

$$\lim_n (1+\frac{1}{n})^n = e$$

e si chiama *costante di Eulero*, oppure *costante di Nepero*.

SEZIONE C. LA PRASSI DEI LIMITI

C1. Trucchetti per valutare i limiti

Trucchetti per Limiti

Lista di "trucchetti" utili per valutare limiti: modi di manipolare espressioni algebriche, proprietà, ..., etc.

Trucco 1. Divide et impera

#Osservazione

Osservazione 1.1. (divide et impera)

Dai *teoremi sui limiti* (Teoremi sui Limiti di Funzione > ^48b492) sappiamo che se vale che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l, \lim_{x \to x_0} g(x) = m$$

allora valgono che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) + g(x) = l + m; \lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = lm; \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}$$

Allora possiamo sfruttare questo teorema per *"scomporre"* dei limiti piuttosto complessi in limiti più semplici da valutare. Infatti non stiamo facendo altro che applicare questo esatto teorema.

#Osservazione

Osservazione 1.2. (attenzione!)

Bisogna stare attenti che in certi casi non si può applicare questa tecnica!
In particolare non lo si applica quando abbiamo certi casi.

1. Uno dei limiti non esistono (allora in questo caso il limite in generale potrebbe non esistere)
2. Uno dei limiti sono infiniti (bisogna vedere la "gerarchia degli infiniti")
3. Li separo ma non li valuto "contemporaneamente" (si otterranno dei risultati sbagliati!)

Trucco 2. Sfruttare gli elementi neutri delle operazioni

#Osservazione

Osservazione 2.1. (elementi neutri delle operazioni)

Notiamo che possiamo sfruttare i c.d. *elementi neutri* delle operazioni, ovvero dei *numeri* che "non vanno ad influire" sul risultato di un'espressione algebrica.
Per la somma $+$ l'elemento neutro è 0; infatti $\forall x \in \mathbb{R}, x+0=x$.
Invece per il prodotto $\cdot$ l'elemento neutro è 1; infatti $\forall x \in \mathbb{R}, x \cdot 1 = x$.

Possiamo sfruttarli in particolare per *"trasformare"* delle espressioni algebriche in limiti notevoli, oppure per *"sbarazzarci"* delle situazioni *"scomode"*.

#Osservazione

Osservazione 2.2. (razionalizzare espressioni con le radici)

Questo primo trucchetto può essere già declinato nella tecnica della *"razionalizzazione"*; ovvero se abbiamo in una frazione (o senza) delle espressioni in cui compaiono delle *radici*

$\sqrt{\cdot}$, allora potrebbe essere una buona idea quella di sfruttare la seguente tecnica.
Sapendo che $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$, allora possiamo avere

$$\sqrt{a}-b=\frac{a-b^2}{\sqrt{a}+b}$$

Trucco 3. Sfruttare i limiti notevoli

#Osservazione

Osservazione 3.1. (sfruttare limiti notevoli)

Come accennato prima, possiamo sfruttare il trucchetto appena citato per *"trasformare"* limiti complessi in dei limiti che assomigliano a dei limiti notevoli.
Teniamo in mente che i limiti notevoli sono i seguenti.

$$\boxed{\begin{gathered}\lim_{f(x)\to 0}\frac{\sin f(x)}{f(x)}=1 \\ \lim_{f(x)\to 0}\frac{\cos(1+f(x))}{f(x)}=1 \\ \lim_{f(x)\to 0}\frac{e^{f(x)}-1}{f(x)}=1\end{gathered}}$$

#Esempio

Esempio 3.1. (esempio specifico)

Come esempio specifico sfruttiamo il *secondo limite notevole* presentato prima. Supponiamo di avere un limite del tipo

$$\lim_{f(x)\to 1}\frac{\cos(f(x))}{g(x)}$$

Allora posso sfruttare il *trucco 2.* aggiungendo $+1-1$ all'espressione all'interno del *coseno* per farlo *"assomigliare"* al secondo limite notevole, poi moltiplichiamo per $1=\frac{f(x)-1}{f(x)-1}$.
Riepilogando,

$$\lim_{f(x)\to 1}\frac{\cos(f(x))}{g(x)} \to \frac{\cos(1+f(x)-1)}{g(x)} \to \underbrace{\frac{\cos(1+(f(x)-1))}{f(x)-1}}_{\to 1}\cdot\frac{f(x)-1}{g(x)}$$

Ovvero

$$\lim_{f(x)\to 1}\frac{\cos(f(x))}{g(x)}=\lim_{f(x)\to 1}\frac{f(x)-1}{g(x)}$$

Trucco 4. Gerarchizzare gli infiniti

#Osservazione

Osservazione 4.1. (la "gerarchia" degli infiniti)

Osservando i *limiti notevoli* possiamo costruire la seguente "gerarchia degli infiniti", dove certi infiniti sono più "grandi" degli altri.

LA GERARCHIA DEGLI INFINITI

- *1. l'esponenziale*
  L'infinito più "grande" è quello *esponenziale*; infatti

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{f(x)} = +\infty$$

  se $f(x)$ non è esponenziale (in tal caso bisogna confrontare le basi delle esponenziali, e *"vince"* la base più grande).
- *2. potenza*
  L'infinito che appare più comunemente ma è più *"debole"* dell'esponenziale è la *potenza*; la potenza più *"forte"* è quella a partire dal grado più alto.
  Se abbiamo *"scontri"* tra potenze di gradi diversi, è conveniente raccogliere tutte le potenze per il *grado massimo* e poi di effettuare delle eventuali cancellazioni.
- *3. logaritmo*
  L'infinito più *"debole"* è quella *logaritmica*; infatti

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{f(x)} = 0$$

  Se $f(x)$ non è *logaritmica* o una *costante* o è *limitata*. In tali casi il logaritmo *"vince"* e abbiamo $L = +\infty$.
- *4. costanti, funzioni limitate*
  Se abbiamo *costanti* o in particolare delle *funzioni limitate*, allora questi non vanno neanche considerati per la gerarchia degli infiniti. Infatti questi vengono *"assorbiti"* dagli eventuali 0 o $\pm\infty$, se ci sono nel limite.

Trucco 5. Sfruttare l'esponenziale

#Osservazione

Osservazione 5.1. (l'esponenziale)

Possiamo sfruttare la seguente identità per l'esponenziale:

$$\boxed{f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}}$$

Dopodiché si andrà a studiare il limite per

$$\lim_{x \to x_0} g(x) \ln f(x) = L$$

Infine per valutarla in

$$e^L$$

Trucco 6. Sfruttare identità algebriche e/o trigonometriche

#Osservazione

Osservazione 6.1. (identità algebriche)

Rendiamo note le seguenti identità algebriche.

$$\boxed{\begin{gathered}(a^2 - b^2) = (a+b)(a-b) \\ (a^n - b^n) = (a-b)\left(\sum_{i=0}^{n-1} a^i b^{n-1-i}\right)\end{gathered}}$$

#Osservazione

Osservazione 6.2. (identità trigonometriche)

Rendiamo note le seguenti identità trigonometriche.

$$\boxed{\begin{gathered}\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \\ \sin 2x = 2 \sin x \cos x \\ \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \\ \sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a \\ \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b\end{gathered}}$$

Capitolo IV 1/2. Topologia della retta reale (avanzato)

Abstract del Capitolo IV 1/2

In questo capitolo si andrà a toccare di nuovo la *topologia della retta reale*, avendo sviluppato però delle *nuove consapevolezze* sulle successioni; andremo quindi a studiare e definire altri oggetti matematici, tra cui *teoremi sulle sottosuccessioni*, *successioni di Cauchy* e infine *insiemi compatti*.

SEZIONE A. Topologia della retta reale (argomenti avanzati)

A1. Secondo Teorema di Bolzano-Weierstraß

Secondo teorema di Bolzano-Weierstraß

Richiami al primo teorema di Bolzano-Weierstraß; interpretazione del medesimo teorema in termini di successioni; enunciato del teorema; dimostrazione del teorema.

---

0. Richiamo al primo teorema di B.W.

Richiamiamo il *primo teorema di Bolzano-Weierstraß* in Punti di aderenza e di accumulazione.

#Richiamo

Richiamo (Primo teorema di BW (richiamo)).

Sia $E \subseteq \mathbb{R}$, E un insieme *infinito* e *limitato*. (Insiemi limitati, maggioranti, massimo e teorema dell'estremo superiore, **DEF 1.3.**)
Allora si verifica il seguente:

$$\exists \xi \in \mathbb{R} : \xi \in \mathcal{D}E$$

ovvero che esista un numero ξ che sia *punto di accumulazione* per E.

1. Enunciato del teorema

Idea. Abbiamo appena letto l'enunciato del *primo* teorema di Bolzano-Weierstraß, che viene anche detta come la *"forma insiemistica"* di tale teorema: ora la vogliamo interpretare con le nozioni di *successione*, *successione convergente*, e di *sotto successione*. (Successione e Sottosuccessione)

#Teorema

Teorema 1.1. (Secondo teorema di Bolzano-Weierstraß).

Sia $(a_n)_n$ una *successione reale* e *limitata* (Successione e Sottosuccessione, **DEF 1.2.**, **DEF 1.3.**)
Allora deve esistere una *sotto successione convergente* $(a_{n_k})_k$ (Successione e

Sottosuccessione, **DEF 2.1.**), ovvero deve esistere

$$\lim_k a_{n_k} = L \in \mathbb{R}$$

2. Dimostrazione

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *secondo teorema di Bolzano-Weierstraß* (^69cfa9)
Chiamo $E = \{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ l'insieme dei *valori di* a_n, ovvero l'insieme immagine della successione $(a_n)_n$.
Ora ci sono due possibilità: che E sia o *finito* o *infinito*.

1. E è finito: esempi di questo caso può essere la successione costante $a_n = c, c \in \mathbb{R}$ oppure la successione pari-dispari $a_n = (-1)^n$.
   Allora *almeno* un elemento in E è immagine di *infiniti* indici n; scelgo allora una sotto successione *opportuna* tale da risultare una successione costante, che è ovviamente convergente.
   ESEMPIO 2.1. Ad esempio per $a_n = (-1)^n$ basta scegliere $(a_{2n})_n$ o $(a_{2n+1})_n$.
   L'idea è che abbiamo

   $$1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$$

   e scegliamo solo i termini pari o dispari: così abbiamo la *successione estratta*

   $$1, 1, 1, \dots, 1 \text{ o } -1, -1, -1, \dots, -1$$

2. E è infinito: ma comunque la *successione* $(a_n)_n$, per ipotesi, è limitata. Allora E è un insieme *limitato* e *infinito*; qui applico il *primo teorema di Bolzano-Weierstraß* richiamatasi all'inizio. Chiamo dunque il *punto di accumulazione* (Punti di aderenza e di accumulazione > ^b12c00) per E: $\xi \in \mathbb{R}$.
   Allora per definizione in *ogni intorno* di ξ ci sono *infiniti punti* di E.
   Ovvero in *ogni intorno di* ξ ci sono *infiniti punti-valori* a_n.
   Ora ci chiediamo se è possibile costruire una sottosuccessione tale che

   $$\lim_k a_{n_k} = \xi$$

   Allora per avere una risposta (che sarà ovviamente positiva) riflettiamo un attimo.
   0. Considero l'intorno $]\xi - 1, \xi + 1[$ e scelgo a_{n_0} in questo intorno.
      1. Stesso discorso per l'intorno $]\xi - \frac{1}{2}, \xi + \frac{1}{2}[$, con a_{n_1}, ma anche tale che $n_1 > n_0$ per conservare l'ordine. Posso farlo in quanto ci sono *infiniti* punti (ovvero valori a_n) attorno ξ.
      2. Vado avanti così fino all'infinito; ho allora

      $$a_{n_k} \in (\xi - \frac{1}{2^k}, \xi + \frac{1}{2^k})$$

Allora

$$|a_{n_k} - \xi| < \frac{1}{2^k} \implies 0 < |a_{n_k} - \xi| < \frac{1}{2^k}$$

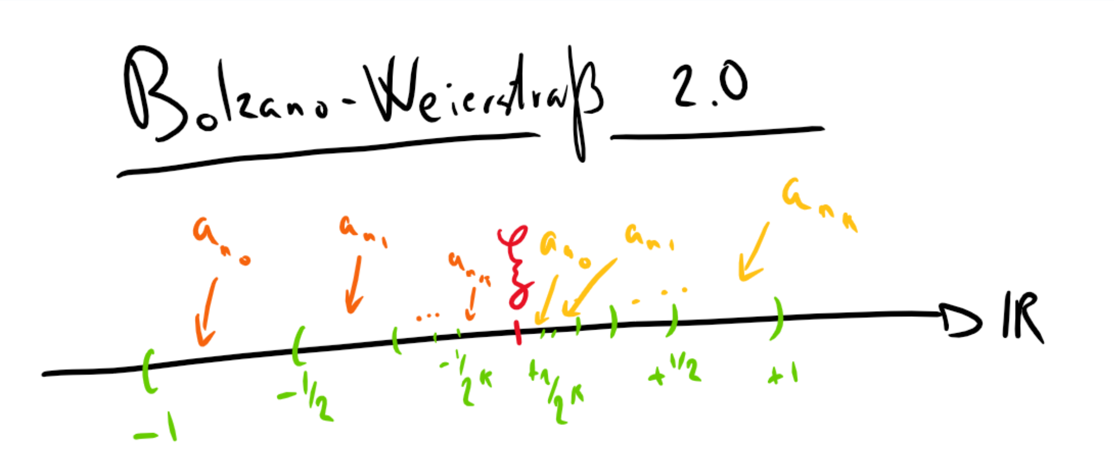
Considerando che

$$\lim_n 0 = 0, \lim_n \frac{1}{2^k} = 0$$

Allora per il *teorema dei due carabinieri* (Limite di Successione > ^72d83a) ho

$$\lim_k a_{n_k} - \xi = 0 \implies \boxed{\lim_k a_{n_k} = \xi} \blacksquare$$

FIGURA 2.1. (*L'idea dell'ultimo passaggio*)



A2. Insiemi Compatti

Insiemi compatti in R

Definizione di insiemi compatti in R; R come spazio metrico; teorema di caratterizzazione dei compatti in R; lemma di caratterizzazione della chiusura tramite la successione; dimostrazione del teorema.

---

0. Preambolo - Spazi metrici e topologici

#Osservazione

Osservazione 0.a. (spazi metrici e topologici)

Osserviamo che dal titolo leggiamo che stiamo *in specifica* prendendo l'insieme $\mathbb{R}$, in quanto questo è un insieme su cui possiamo definire una *distanza* (Intorni > ^f7536a). Infatti si dice che $\mathbb{R}$ è uno *spazio metrico*, come lo è pure $\mathbb{R}^2, \ldots, \mathbb{R}^n$.
Altrimenti un insieme su cui non può essere definita una *distanza* si dice *spazio topologico*.
Per approfondire questo tema rivolgersi alla dispensa di *D.D.S.*, capitolo *10.2*, p. 33.

1. Definizione di insieme compatto in R

#Definizione

Definizione 1.1. (Insieme compatto in R per successioni).

Sia $E \subseteq \mathbb{R}$. E si dice *compatto per successione* (*d'ora in poi diremo compatto e basta*) se vale la seguente proprietà: se da *ogni successione* a valori in E posso estrarre *una sottosuccessione convergente ad un punto* $x \in E$.

#Osservazione

Osservazione 1.1. (la necessità di un teorema di caratterizzazione dei compatti)

Con questa definizione, un insieme compatto sembra un ente di cui è quasi impossibile da verificare: infatti diventa interessante trovare una *caratterizzazione alternativa* con un teorema.

2. Teorema di caratterizzazione dei compatti

#Teorema

Teorema 2.1. (Teorema di caratterizzazione dei compatti in R).

Sia $E \subseteq \mathbb{R}$.
Tesi. Allora E è compatto *se e solo se* E è chiuso e limitato.

Lemma di caratterizzazione della chiusura

Prima di poter procedere alla dimostrazione, ci serve il seguente lemma.

#Lemma

Lemma 2.1. (Caratterizzazione della chiusura tramite le successioni).

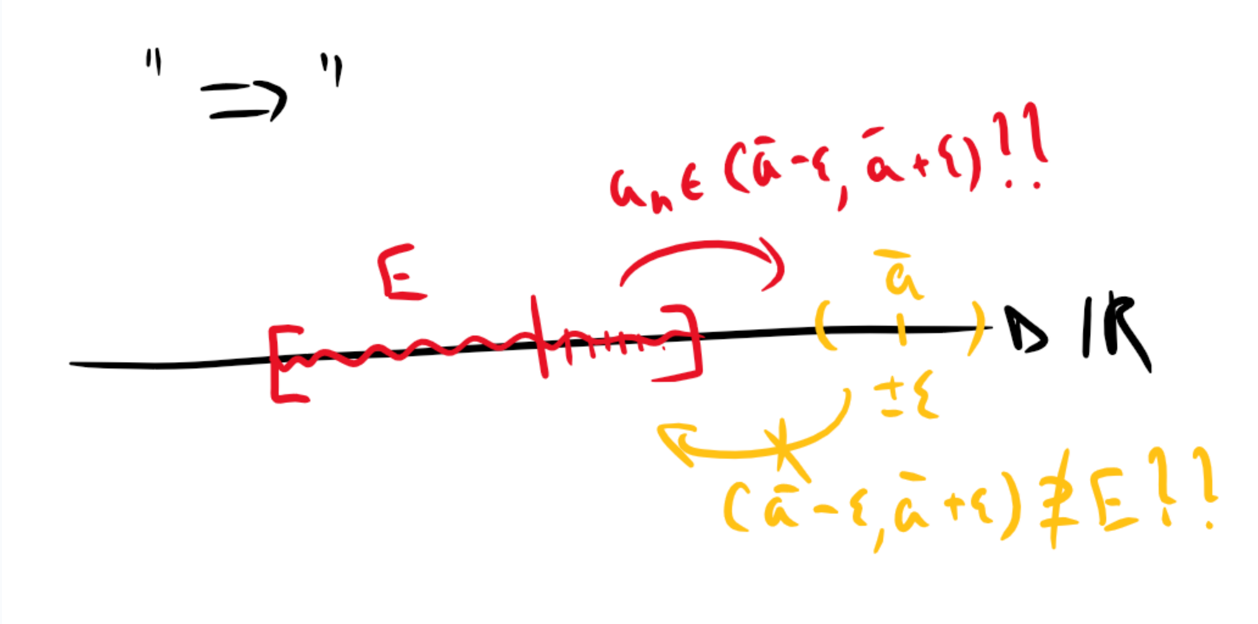
Sia $E \subseteq \mathbb{R}$.
Allora E è *chiuso* (Insiemi aperti e chiusi > ^36f40d) se e solo se vale la seguente proprietà:
$(*)$ Se una successione a valori in E è convergente, allora il limite appartiene all'insieme E.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *lemma 2.1.* (^9c1b28)
Questo è un teorema del tipo $\iff$, dimostriamo quindi entrambi i versi delle implicazioni.

1. "$\implies$": Sia E *chiuso*; ora supponiamo (*per assurdo*) che sia falsa la proprietà $(*)$. Ovvero supponiamo che esiste una successione a valori in E tale che il suo punto di convergenza $\bar{a}$ appartiene ad un punto fuori da E (ovvero al suo complementare $\mathcal{C}_\mathbb{R}E$).
   Però E è chiuso, quindi per definizione $\mathcal{C}_\mathbb{R}E$ è aperto: quindi abbiamo i seguenti.
   $$\bar{a} \in \mathcal{C}_\mathbb{R}E \implies \exists \varepsilon > 0,]\bar{a}-\varepsilon, \bar{a}+\varepsilon[\subseteq \mathcal{C}_\mathbb{R}E$$
   Però allo stesso tempo abbiamo, per definizione
   $$\lim_n a_n = \bar{a} \implies \begin{gathered} \forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} : \forall n \in E \\ n > \bar{n} \implies a_n \in \ ]\bar{a}-\varepsilon, \bar{a}+\varepsilon[\end{gathered}$$
   Tuttavia questo è un *assurdo* in quanto sappiamo che a_n appartiene a E, ma invece l'intorno $]\bar{a}-\varepsilon, \bar{a}+\varepsilon[$ contiene *solo* elementi di $\mathcal{C}_\mathbb{R}E$. Pertanto questo è impossibile! Allora la proprietà $(*)$ è e dev'essere vera.

FIGURA 2.1.a. (*La prima contraddizione*)



1. " $\Longleftarrow$ ": Sia vera la proprietà $(*)$, allora dimostro che $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}E$ sia aperto (oppure E chiuso).
   Per assurdo suppongo che $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}E$ *non* sia aperto: facciamo la negazione della proprietà,

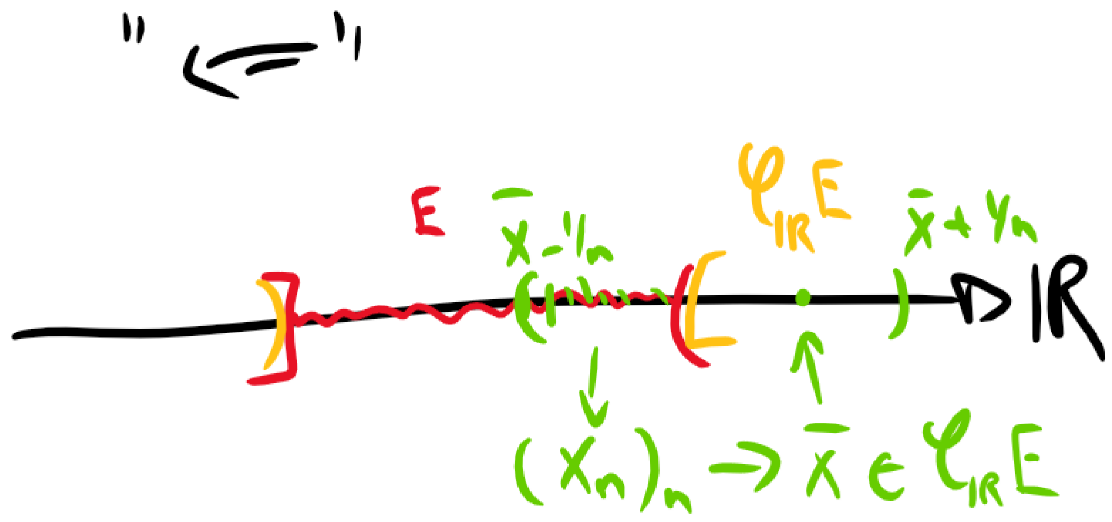
$$\neg(\forall x \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}E, \exists \varepsilon > 0 : \ ]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subseteq \mathcal{C}_{\mathbb{R}}E)$$
$$\exists x \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}E : \forall \varepsilon > 0, \ ]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\ \cap E \neq \emptyset$$

   Allora il gioco è fatto; quindi prendo l'intorno $\varepsilon = \frac{1}{n}$ posso individuare una successione x_n e applicare la regoletta appena individuata

$$\varepsilon = \frac{1}{n} \implies \exists \bar{x} \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}E : \forall n, \ ]\bar{x} - \frac{1}{n}, \bar{x} + \frac{1}{n}[\ \cap E \neq \emptyset$$
$$\forall n, \exists x_n \in E : |x_n - \bar{x}| < \frac{1}{n} \implies \lim_n x_n = \bar{x} \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}E$$

   Quindi ho trovato una successione $(x_n)_n$ a valori in E che converge ad un punto *fuori di* E, che è impossibile in quanto violerebbe la l'ipotesi iniziale.

FIGURA 2.1.b. (*La seconda contraddizione*)



Dimostrazione del teorema

Ora siamo pronti per dimostrare il *teorema di caratterizzazione dei compatti*.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *teorema di caratterizzazione dei compatti* (^759c9b)
Questo è un teorema del tipo *se e solo se*, quindi dimostriamo entrambi i lati delle implicazioni.

1. " $\implies$ ": Suppongo che E sia *compatto*, allora devo dimostrare che E è chiuso è limitato.
   Per assurdo suppongo che E non sia limitato: ora se considero una successione a valori in E divergente, allora per ipotesi questa deve avere una sottosuccessione *convergente*. Per esempio se E è *superiormente illimitato* (Insiemi limitati, maggioranti, massimo e teorema dell'estremo superiore) ho la seguente implicazione

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in E : x_n > n \implies \lim_n x_n = +\infty$$

   allora $(x_n)_n$ non avrebbe sottosuccessioni convergenti ad un punto in E.
   Per assurdo suppongo che E sia non chiuso; allora non vale la proprietà $(*)$ del ^9c1b28 ovvero

$$\neg[\forall (a_n)_n \text{ è convergente in } E, \lim_n a_n \in E]$$
$$\exists (a_n)_n \text{ convergente in } E : \lim_n a_n \notin E$$

   Perciò *tutte* le sottosuccessioni di $(a_n)_n$ convergono ad un punto $\bar{a} \notin E$.
   Però essendo E per ipotesi *compatto*, la successione $(a_n)_n$ dovrebbe avere almeno una successione che converge ad un punto in E, dandoci un assurdo.
   Come si può vedere E deve essere necessariamente sia *limitato* che *chiuso*.

2. " $\Longleftarrow$ ": Sia E *chiuso* e *limitato*, proviamo che E è compatto.
Prendo una successione $(a_n)_n$ in E.
Se E è *limitato* allora per il Secondo teorema di Bolzano-Weierstraß deve esistere una *sottosuccessione convergente* e la indichiamo con

$$(a_{n_k})_k : \lim_k a_{n_k} = \bar{a}$$

però E è anche *chiuso*, e per la proprietà $(*)$ del *lemma 2.1.* (^9c1b28) deve valere che il valore per cui converge il limite della sottosuccessione appartiene a E; ovvero

$$(a_{n_k})_k : \lim_k a_{n_k} = \bar{a} \in E$$

Pertanto E è compatto in quanto abbiamo individuato una sottosuccessione convergente ad un punto in E.

A3. Successioni di Cauchy

Successioni di Cauchy

Definizione di successione di Cauchy; teorema sulla successione di Cauchy; teorema di completezza di R; esiti della dimostrazione del teorema di completezza di R.

---

1. Definizione di Successione di Cauchy

#Definizione

Definizione 1.1. (Successione di Cauchy).

Sia $(a_n)_n$ una *successione reale* (Successione e Sottosuccessione, **DEF 1.2.**), allora definiamo $(a_n)_n$ come *successione di Cauchy* se vale la seguente:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} : n, m > \bar{n} \implies |a_n - a_m| < \varepsilon$$

#Osservazione

Osservazione 1.1. (convergenza e Cauchy)

> Osserviamo che questa definizione è ben *diversa* dalla nozione di *convergenza*: con la *convergenza* abbiamo *un punto* che si avvicina ad un certo valore, invece qui abbiamo *due punti* a_n e a_m che si *"avvicinano"* tra di loro.
> Tuttavia in $\mathbb{R}$ è possibile dire che questi sono *equivalenti* in quanto ci troviamo in uno *spazio metrico*. Dimostreremo questa affermazione con due teoremi.

#Teorema

> **Teorema 1.2. (di caratterizzazione delle successioni convergenti)**
>
> Se una successione in $\mathbb{R}$ è convergente, allora è di *Cauchy*.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *teorema 1.2.* (^6e84e5)
Sia $(a_n)_n$ convergente, allora

$$\lim_n a_n = \bar{a} \in \mathbb{N}$$

Cioè

$$\begin{gathered}\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} : \forall n \\ n > \bar{n} \implies |a_n - \bar{n}| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\end{gathered}$$

Allora se $m, n > \bar{n}$ abbiamo i seguenti:

$$\begin{gathered}\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} : \forall n, m \\ n > \bar{n} \implies |a_n - \bar{a}| < \frac{\varepsilon}{2} \\ m > \bar{n} \implies |a_m - \bar{a}| < \frac{\varepsilon}{2}\end{gathered}$$

Allora sommandoli abbiamo

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - \bar{a} + a_m - \bar{a}| \leq |a_n - \bar{a}| + |a_m - \bar{a}| < 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Dunque abbiamo verificato

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} : n, m > \bar{n} \implies |a_n - a_m| < \varepsilon$$

che è la definizione della *successione di Cauchy*.

Completezza di R

#Teorema

Teorema 1.3. (Completezza di R).

In $\mathbb{R}$ le *successioni di Cauchy* sono *convergenti*.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *teorema di completezza di R* (^bc7fc3)
La dimostrazione si articola in tre parti, ad ognuna con un suo esito.

1. Una *successione di Cauchy* è *limitata*. Infatti $(a_n)_n$ di Cauchy significa

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} : n, m > \bar{n} \implies |a_m - a_n| < \varepsilon$$

   Fissando $\varepsilon = 1$ ottengo

$$\exists \bar{n} : n, m > \bar{n} \implies |a_n - a_m| < 1$$

   Quindi

$$m > \bar{n} \implies |a_{\bar{n}+1} - a_m| < 1$$

   Analogamente

$$n > \bar{n} \implies |a_n - a_{\bar{n}+1}| < 1$$

   Quindi

$$a_n \in (a_{\bar{n}+1} - 1, a_{\bar{n}+1} + 1)$$

   Allora $(a_n)_n$:

   > 1. Fino a $\bar{n}$ si comporta come vuole;
   > 2. Da $\bar{n}+1$ in poi tutti i suoi valori immagine $a_n, n > \bar{n}$ sono *tutti* dentro un intervallo fissato. Ovvero è questa successione è limitata.

2. Per il Secondo teorema di Bolzano-Weierstraß, se $(a_n)_n$ è di *Cauchy* ed è *limitata* allora esiste una successione estratta convergente.

3. "Se una *successione di Cauchy* ha una sottosuccessione convergente, allora la successione originaria è convergente.": infatti teniamo in conto i seguenti:

   > - $(*)$ $(a_n)_n$ è di Cauchy vuol dire
   >
   > $$\begin{gathered}\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} : \forall n, m \\ n, m > \bar{n} \implies |a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}\end{gathered}$$

- $(**)$ $(a_{n_k})_k$ è *convergente a* $\bar{a}$ vuol dire

$$\lim_k a_{n_k} = \bar{a} \iff \begin{array}{c} \forall \varepsilon > 0, \exists \bar{k} : \forall k \\ k > \bar{k} \implies |a_{n_k} - \bar{a}| < \dfrac{\varepsilon}{2} \end{array}$$

Ora per far valere $m > \bar{n} \wedge k > m \implies k > \bar{n}$ prendiamo e $k > \max\{\bar{n}, \bar{k}\}$. Ora li *"combiniamo"* e valuto $|a_n - \bar{a}|$. Ora vale $a_{n_k} > a_m$; allora $\forall n > \bar{n}, k > \max\{\bar{n}, \bar{k}\}$

$$|a_n - \bar{a}| \leq |a_n - a_m + a_{n_k} - \bar{a}| < |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - \bar{a}| < 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

e abbiamo esattamente la definizione di

$$\lim_n a_n = \bar{a} \ \blacksquare$$

Capitolo V. La continuità delle funzioni reali

Abstract del Capitolo V

Al liceo ci è stato insegnato che una funzione è *"continua"* se questa può essere rappresentata sul piano cartesiano con un *"unico tratto di penna, senza dover staccarlo"*; vedremo che invece non è così.

Studieremo la *definizione rigorosa di una funzione continua* e le sue *proprietà fondamentali*; inoltre classificheremo delle *funzioni* per cui possiamo dire che sono sicuramente *continue*. Alternativamente possiamo *"dedurre"* delle caratteristiche delle funzioni a partire dal fatto che queste sono continue.

Lo studio della *continuità delle funzioni* si rivelerà fondamentale per lo *studio del calcolo differenziale*.

SEZIONE A. LE FUNZIONI CONTINUE

A1. Definizione di continuità di funzioni

Definizione di continuità

Definizione puntuale e "globale" della continuità di una funzione. Esempi di funzioni continue

---

0. Osservazione preliminare

#Osservazione

Osservazione 0.a. (osservazione preliminare)

Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ e $x_0 \in E$. Da notare che ciò implica che $x_0 \in \mathbb{R}$; quindi x_0 in questo caso è un numero.
Allora abbiamo due possibilità:

1. x_0 è di accumulazione per E (Punti di aderenza e di accumulazione, **DEF 2.1.**)
2. x_0 non è di accumulazione per E (ovvero un punto isolato)

1. Definizione puntuale e globale

#Definizione

Definizione 1.1. (Funzione continua per un punto)

Siano $E \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in E$ e $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$: ovvero f è una funzione che ha per dominio E, x_0 un punto del dominio.
Allora f si dice *funzione continua nel punto* x_0 se si verifica uno dei due casi:
CASO 1. x_0 è un punto isolato per E (la possiamo considerare una specie di *"caso speciale"*)
CASO 2. x_0 è un punto di accumulazione e si verifica il limite

$$\lim_{x \to x_0 \in \mathbb{R}} f(x) = f(x_0) \in \mathbb{R}$$

Usando la nozione $\varepsilon - \delta$ del limite, avremmo

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in E$$
$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

#Osservazione

Osservazione 1.1. (il secondo caso è interessante)

Il *CASO 2.* è la parte interessante della definizione della continuità: stiamo sostanzialmente dicendo che f è continua in x_0 se esiste il limite per $x \to x_0$ e il limite è proprio il valore della funzione.

#Osservazione

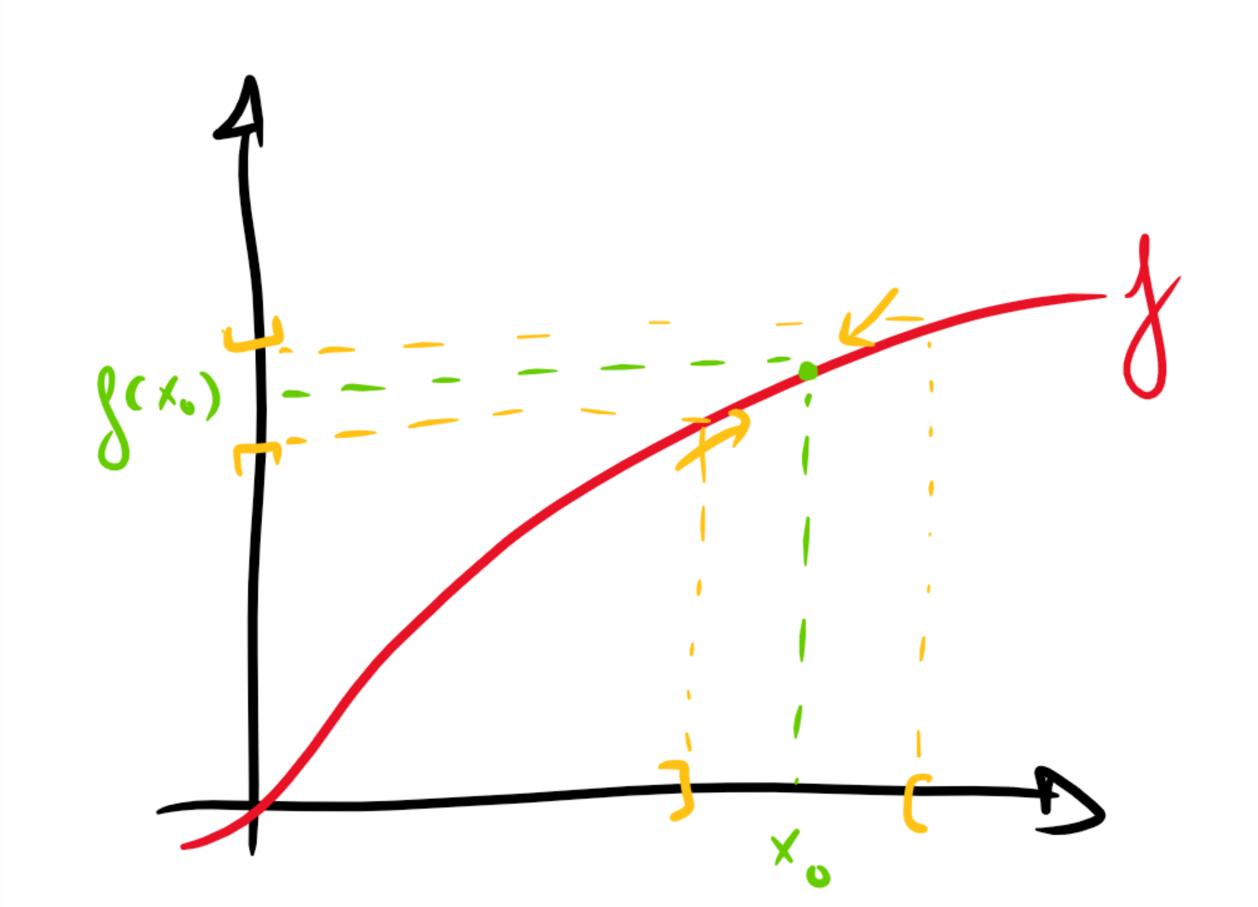
Osservazione 1.2. (differenza tra continuità e limite)

Notiamo che in questa definizione c'è una differenza dalla definizione originaria del limite: infatti la prima parte che rappresenta l'intorno δ di x_0 sarebbe

$$0 < |x - x_0| < \delta$$

però in questa definizione l'abbiamo tolta, perché x_0 appartiene al dominio, quindi è possibile avere $x = x_0 \implies f(x) = f(x_0)$, di conseguenza $|f(x) - f(x_0)| = 0$; quindi in questo caso non escludiamo più che $x - x_0 = 0, f(x) - f(x_0) = 0$.
Inoltre questa "eccezione" è utile in quanto possiamo comprendere il *CASO 1.*, ovvero quando x_0 è un punto isolato: infatti questo significa che esiste un intorno di x_0 che contiene solo se stesso.

FIGURA 1.1. (*l'idea grafica della continuità*)



Ora presentiamo la definizione *"globale"* della funzione, che è una semplice estensione della definizione di prima: al posto del singolo punto ci mettiamo un insieme di punti.

#Definizione

Definizione 1.2. (Funzione continua su un insieme)

Sia $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$
Se f è *continua* in tutti i punti di E, allora f si dice *continua* (e basta).

2. Esempi di funzioni continue e discontinue

#Esempio

Esempio 2.1. (Funzione Constante).

Sia

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto c \end{aligned}$$

Allora f è continua, in quanto

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}, \lim_{x \to x_0} c = c$$

Infatti basta scegliere un qualsiasi valore δ per qualsiasi ε.

#Esempio

Esempio 2.2. (Funzione identità).

$$\text{id} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x$$

La funzione id è *continua*: basta scegliere $\varepsilon = \delta$.

#Esempio

Esempio 2.3. (Funzione Potenza).

$$p_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x^n$$

La funzione x^n è *continua*, infatti è possibile dimostrare che

$$\lim_{x \to x_0} x^n = x_0^n$$

mediante gli Esempi di Limiti di Funzione.

#Esempio

Esempio 2.4. (Funzione Radice).

$$\sqrt[n]{\ } : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \sqrt[n]{x}$$

Anche questa funzione è *continua*, anche se per adesso facciamo finta di conoscere

$$\forall x_0 \in (0, +\infty), \lim_{x \to x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}$$

mediante dei teoremi sulle funzioni inverse che definiremo in seguito.

#Esempio

Esempio 2.5. (Funzione Seno).

$$\sin : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]; x \mapsto \sin x$$

In Esempi di Limiti di Funzione abbiamo dimostrato che

$$\lim_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$$

quindi la funzione seno $\sin$ è *continua*.

#Esempio

Esempio 2.6. (Funzione Esponenziale).

$$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow]0, +\infty[; x \mapsto e^x$$

Questa è *continua* in quanto

$$\lim_{x \to x_0} e^x = e^{x_0}$$

ed è il figlio del fatto che

$$\lim_n \sqrt[n]{x} = 1$$

#Esempio

Esempio 2.7. (Funzione di Heaviside).

Definiamo

$$\mathrm{H} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

dove

$$\mathrm{H}(x) := \begin{cases} 0 \text{ se } x \leq 0 \\ 1 \text{ altrimenti} \end{cases}$$

Allora la funzione H *non* è *continua*: infatti il limite

$$\lim_{x \to 0} \mathrm{H}(x)$$

non esiste, visto che da destra tende a 1 e da sinistra a 0.
Infatti questa è una funzione *discontinua* e definiamo questo tipo di *discontinuità* come la discontinuità *"salto"* oppure *"di prima specie"*.

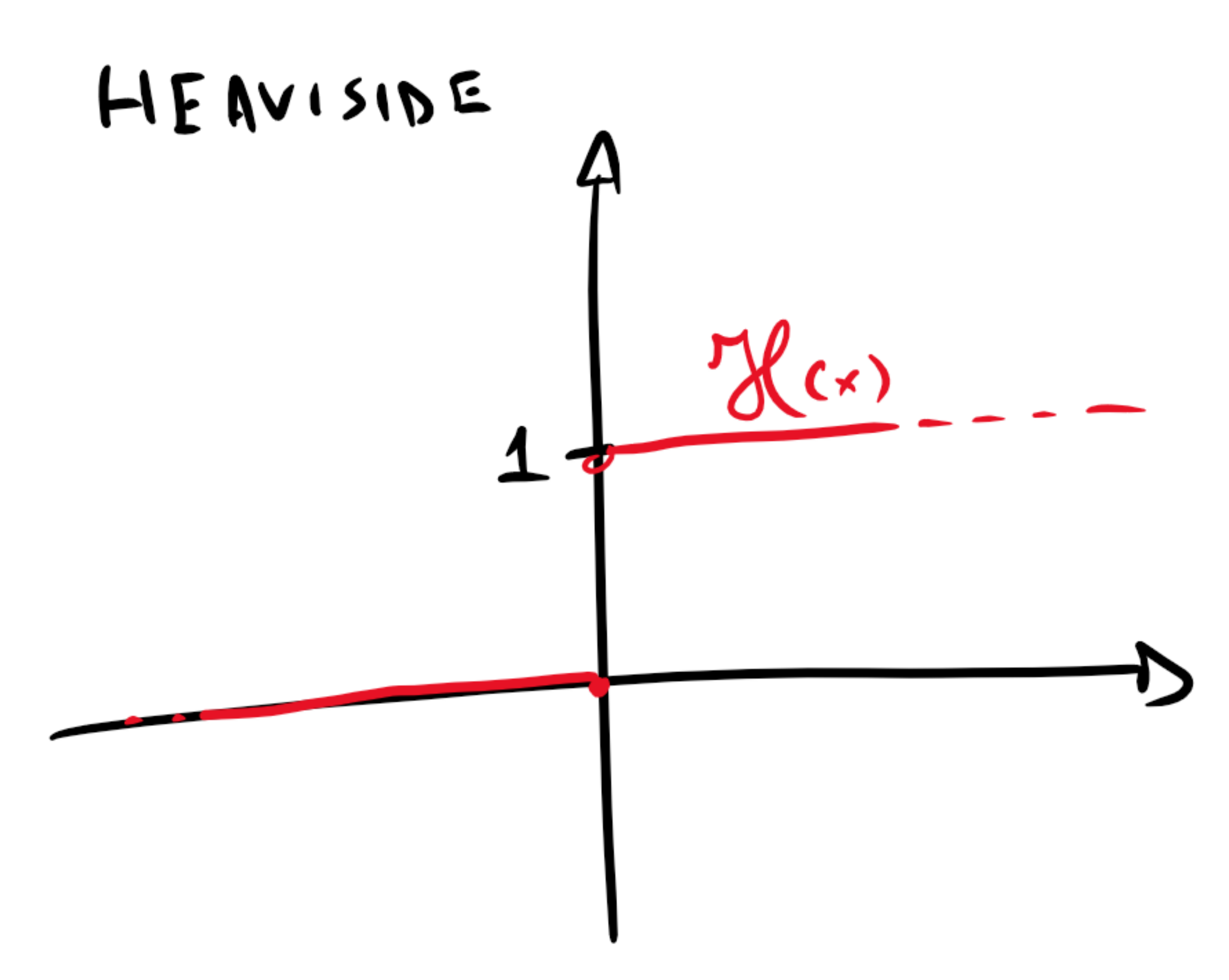
#Osservazione

Osservazione 2.7. (la funzione di Heaviside è continua altrove)

> Notare che la funzione di Heaviside $\mathrm{H}(x)$ è comunque *continua* in tutti gli altri punti diversi da 0.

NOTIZIE STORICHE. Oliver Heaviside (*1850-1925*) è stato una figura significativa nella storia della matematica. La sua carriera era inizialmente legata a una compagnia che gestiva le allora innovative linee telegrafiche. Allora, il giovane Heaviside, dotato di una mente autodidatta e una passione per la matematica, utilizzò le sue competenze per sviluppare concetti che avrebbero avuto un impatto duraturo nel suo campo, in particolare nell'ambito dell'elettricità. Una delle sue pietre miliari fu lo studio delle equazioni differenziali con coefficienti discontinui, tra cui la funzione appena menzionata, che avrebbe dimostrato grande rilevanza nella teoria elettrica.
(Paragrafo rielaborato da ChatGPT)

FIGURA 2.7. (*funzione di Heaviside*)



Esempio 2.8. (Funzione di Dirichlet).

$$D : [0,1] \longrightarrow [0,1]; x \mapsto D(x) : \begin{cases} 1 \text{ se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$$

Questa è una funzione *discontinua* in quanto non esiste il limite

$$\lim_{x \to x_0} D(x)$$

per nessun valore di x_0 per la densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ (Conseguenze dell'esistenza dell'estremo superiore > ^e279b1); vale anche il viceversa con la densità degli irrazionali nei razionali. Allora D è *discontinua* in ogni punto del suo dominio.

A2. Classificazioni di discontinuità

Classificazioni di Discontinuità

Classificazioni di punti discontinue: discontinuità eliminabile; discontinuità di primo, secondo e terzo ordine.

---

0. Prerequisiti e/o voci correlate

- Definizione di continuità
- Continuità delle funzioni varie
  Nota: questa pagina è stata scritta riprendendo il testo di E. Giusti di Analisi Matematica (volume 1)

1. Discontinuità eliminabile

#Definizione

Definizione 1.1. (punto di discontinuità eliminabile)

Sia f una *funzione discontinua per un punto* x_0 (Definizione di continuità > ^ddf65d).
Il *punto di discontinuità* in x_0 si dice *"discontinuità eliminabile"* se il limite

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

esiste ed è finito (appartenente a $\mathbb{R}$) ma non corrisponde al valore $f(x_0)$; ovvero

$$\boxed{f(x_0) \neq \lim_{x \to x_0} f(x) = k \in \mathbb{R}}$$

Si dice *"eliminabile"* in quanto è possibile *"ripristinare"* la continuità imponendo il valore $f(x_0)$ uguale al limite: però comunque bisogna stare attenti che in questo caso si tratta di un'altra funzione, non più quella originaria.

2. Discontinuità di primo, secondo e terzo ordine

#Definizione

Definizione 2.1. (discontinuità di primo ordine / di salto)

Sia f una *funzione discontinua nel punto* x_0.
Il *punto di discontinuità* x_0 si classifica *"di primo ordine"* o *"di salto"* se esistono entrambi i limiti *destri e sinistri* (Definizione di Limite di funzione > ^406c13) ma non sono uguali.

$$\boxed{\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x)}$$

In altre parole, abbiamo una specie di *"salto"* tra i due *"punti"*.

#Definizione

Definizione 2.2. (discontinuità di secondo ordine)

Sia f una *funzione discontinua nel punto* x_0.
Si classifica x_0 come un *"punto di discontinuità del secondo ordine"* se esistono entrambi il *limite destro* che il *limite sinistro*, ma una di essi non è finita ed è $+\infty$ o $-\infty$.
Ovvero

$$\boxed{\lim_{x \to x_0^-} f(x) \in \tilde{\mathbb{R}} \vee \lim_{x \to x_0^+} f(x) \in \tilde{\mathbb{R}}}$$

In altre parole, abbiamo una specie di *"salto infinito"* tra i due *"punti"*.

#Definizione

Definizione 2.3. (discontinuità di terzo ordine)

Sia f una *funzione discontinua nel punto* x_0.
Classifichiamo x_0 come un *"punto di discontinuità del terzo ordine"* se non esiste il *limite destro* e/o *limite sinistro*.

$$\boxed{\nexists \lim_{x \to x_0^{\pm}} f(x)}$$

> In questo non abbiamo neanche dei *"salti"*, in quanto non abbiamo nessun dato quantificabile per *"misurarla"*.

A3. Continuità di alcune funzioni

Continuità delle funzioni varie

Vari teoremi sulla continuità di certi tipi di funzioni: funzioni monotone, iniettive, surgettive, bigettive (dunque invertibili).

---

1. Funzione monotona e suriettiva

#Teorema

> **Teorema 1.1. (continuità della funzione strettamente monotona e suriettiva)**
>
> Sia $f : I \longrightarrow J$, I, J degli intervalli, f *strettamente monotona* e *suriettiva* (Funzioni > ^6068af, Funzioni > ^3fb408).
> Allora f è *continua*.

#Dimostrazione
DIMOSTRAZIONE (*Teorema 1.1.*)
Nota: questa è solo una idea della dimostrazione
Prendo un punto $x_0 \in I$, inoltre supponiamo che x_0 sia un *punto interno* per I (Punti interni, esterni e di frontiera > ^c78831).
Allora abbiamo la situazione in *figura 1.1.*: da qui posso evincere che esistono i *limiti destri e sinistri* di $x \to x_0^{\pm}$ (Definizione di Limite di funzione > ^406c13) e che

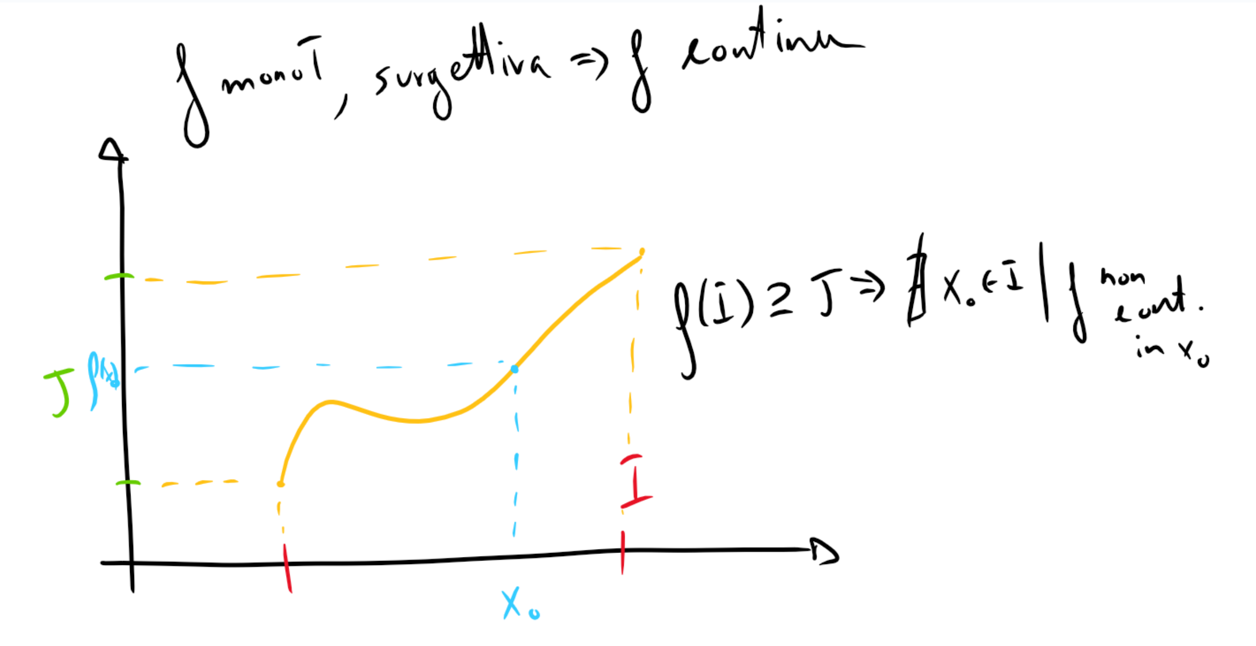
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

(inoltre questa proposizione è direttamente ricavata da Teoremi sui Limiti di Funzione > ^165965)
Supponendo *per assurdo* che il limite destro e sinistro sono diversi (dandoci così una discontinuità del primo ordine), avremmo una specie di *"buco"* nella funzione immagine J; tuttavia è assurdo in quanto contraddirebbe con la supposizione

iniziale di f *suriettiva*.
Di conseguenza abbiamo l'unica possibilità

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) \implies f \text{ continua} \blacksquare$$

FIGURA 1.1. (*Idea della situazione*)



Funzione strettamente crescente e suriettiva

#Corollario

Corollario 1.2. (continuità della funzione strettamente crescente e suriettiva)

Sia $f: I \longrightarrow J$, I, J *intervalli*, f *strettamente crescente* e *suriettiva*.
Allora f, f^{-1} sono *continue*.

#Esempio

Funzione esponenziale e logaritmica

Questo teorema è utile per poter dimostrare la continuità di certe funzioni: infatti ad esempio sappiamo che $\exp$ è *continua*, *strettamente crescente* e *suriettiva* per $]0, +\infty[$: di conseguenza $\exp^{-1} = \log$ è anch'essa *continua*.

2. Funzione iniettiva e continua

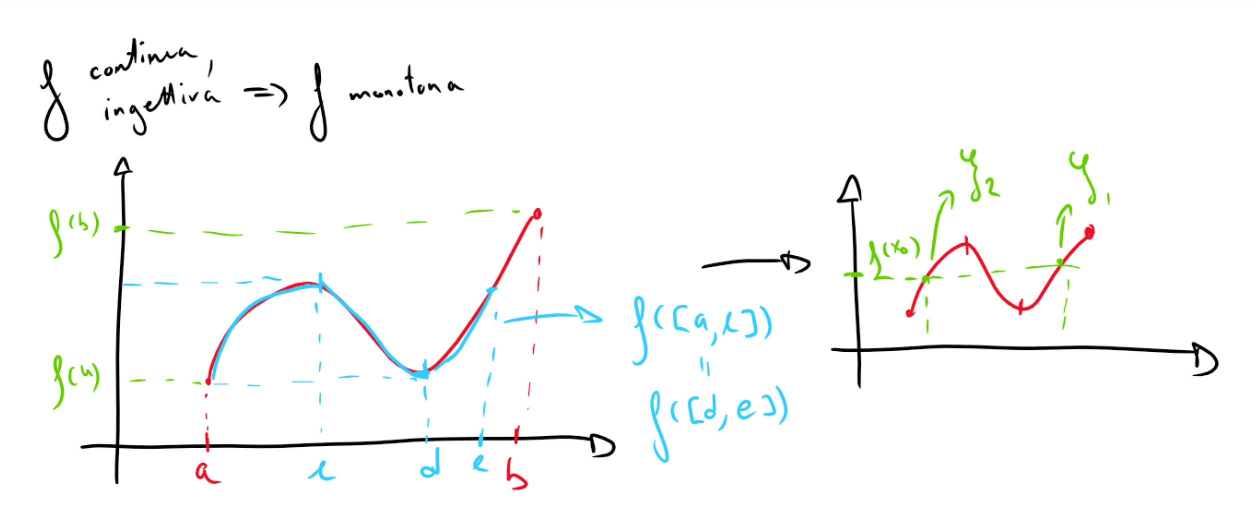
#Teorema

Teorema 2.1. (monotonia della funzione iniettiva e continua)

Sia $f : I \longrightarrow J$ una funzione *continua* e *iniettiva*.
Allora f è *strettamente crescente*.

#Dimostrazione
Nota: questa è solo una idea della dimostrazione
Dimostriamo la *contronominale* della tesi; ovvero supponendo che f sia *non* strettamente crescente dobbiamo dimostrare che f non è *iniettiva*.
Allora abbiamo la situazione in *figura 2.1.*: ci possono essere tre (o più) punti in cui la funzione inizia a *"cambiare direzione"*, cambiando dalla tendenza di crescere a quella di decrescere (e viceversa).
Per il *teorema dei valori intermedi* (Teoremi sulle funzioni continue > ^1c6f7c), sappiamo che ci sono almeno *due* soluzioni ξ_1, ξ_2 tali che per un valore fissato $f(x_0) \in J$ si ha $f(x) = f(x_0)$.
Infatti possiamo prendere un *"ramo"* crescente e un ramo *"decrescente"* e applicare il *teorema dei valori intermedi* a ciascuno.
Se esistono allora due numeri che, per una funzione, ci danno lo stesso numero, allora f non è *iniettiva*. ■

FIGURA 2.1. (*Idea della situazione*)



Funzione continua e invertibile

#Corollario

Corollario 3.1. (continuità dell'inversa della funzione continua e invertibile)

Sia $f : I \longrightarrow J$ *continua* e *invertibile*.
Allora f^{-1} è *continua*.

Continuità Uniforme

Osservazioni preliminari, definizione di continuità uniforme, esempi. Teorema di Heine.

---

0. Osservazione preliminare

La seguente osservazione si baserà sul concetto della *continuità* (Definizione di continuità).

#Osservazione

Osservazione 0.a. (osservazione preliminare)

Supponiamo di avere una funzione continua $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in E$.
Per definizione sappiamo *"tradurre"* il concetto della *continuità* di una funzione per un punto x_0 *"alla Cauchy"*, ovvero:

$$f \text{ continua in } x_0 \iff \begin{gathered}\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in E, \\ |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\end{gathered}$$

Quindi abbiamo sostanzialmente una *"macchina"* limite per cui dato un ε fissato ottengo un δ (ulteriori chiarimenti sull'analogia della macchina in Definizione di Limite di funzione > ^0f845a).
Ora se cambio il punto x_0 e prendo x_1 tale che f sia continua, allora ho

$$f \text{ continua in } x_1 \iff \begin{gathered}\forall \varepsilon > 0, \exists \delta' > 0 : \forall x \in E, \\ |x - x_1| < \delta' \implies |f(x) - f(x_1)| < \varepsilon\end{gathered}$$

Se tengo fisso lo stesso ε sia per x_0 che per x_1, allora i valori δ, δ' potrebbero essere diversi.
Infatti se trovo un δ che va bene per *tutti* i punti del dominio, allora non solo f è continua ma ha anche una proprietà in più, che definiremo a seguire.

1. Definizione di continuità uniforme

#Definizione

Definizione 1.1. (funzione uniformemente continua)

Data una funzione $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, diciamo che f è *uniformemente continua* se vale la seguente proprietà.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in E,$$
$$|x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

OSS 1.1. Notiamo quindi che se una funzione è *uniformemente continua* è anche (ovviamente) *continua*. Attenzione però che non vale necessariamente il *viceversa*.

#Esempio

Esempio 1.1.

Sia $f(x) = 1$ con $E = [0, 1]$;
sia $g(x) = x$ con $E = [0, 1]$;
sia $h(x) = \frac{1}{x}$ con $E = \;]0, +\infty[$.
Le funzioni f, g, h sono tutte *continue*; tuttavia solo f, g sono anche *uniformemente continue*.
Infatti h non è *uniformemente continua*: infatti supponendo per assurdo che h sia *uniformemente continua* e fissando $\varepsilon = 1$, si avrebbe

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in E :$$
$$|x_1 - x_2| < \delta \implies \left| \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right| < 1$$

Ora considero la *successioni a valori in E*

$$(x_{1,n})_n = \frac{1}{n}, (x_{2,n})_n = \frac{1}{n+1}$$

avremmo quindi

$$|x_{1,n} - x_{2,n}| = |\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}| = |\frac{1}{n(n+1)}|$$

ma dato che f è continua possiamo considerare

$$|f(x_{1,n}) - f(x_{2,n})| = 1 \iff \left| f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n+1}\right) \right| = 1$$

Però

$$\lim_n \frac{1}{n(n+1)} = 0$$

Quindi da un lato abbiamo i due numeri che man mano si avvicinano, però la loro distanza delle immagini rimane *sempre* costante.

2. Teorema di Heine (dell'uniforme continuità)

#Teorema

Teorema 2.1. (di Heine)

Sia $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continua* e sia $[a,b]$ *compatta* (Insiemi compatti in R > ^0eb138).
Allora f è *uniformemente continua*.

#Osservazione

Osservazione 2.1.

Quindi in generale si può dire che una funzione f è uniformemente continua *se e solo* se continua, se vale la ipotesi iniziale del teorema: ovvero se $[a,b]$ *chiusa e limitata*, ovvero *compatta*.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE (*Teorema 2.1.*)
Omessa, facoltativa sulla dispensa di D.D.S.

Capitolo VI. Calcolo Differenziale

Abstract del Capitolo VI

Il *calcolo differenziale* è uno dei traguardi dell'*analisi matematica*: questo capitolo ci fornirà uno degli strumenti più potenti per *studiare funzioni*.

A livello teorico questo capitolo ci introduce al *calcolo differenziale* mediante un cenno *storico e fisico*: la meccanica newtoniana.
Dopodiché astraiamo questi concetti dal loro contesto meccanico e definiamo la nozione di *derivata* in una maniera rigorosa, con i strumenti forniti dai *limiti*.

Infine studieremo questi concetti nella maniera più approfondita possibile, in particolare dei *teoremi teorici* (come quello di *Rolle, Cauchy e Lagrange*) e le loro conseguenze.

SEZIONE 0. INTRODUZIONE AL CALCOLO DIFFERENZIALE

0. Cenni storici e fisici

Introduzione al Calcolo Differenziale

Introduzione al calcolo differenziale: cenni storici ed esempio meccanico del rapporto incrementale e derivata

---

1. Origine storico del concetto

#Osservazione

Osservazione 1.1. (contestualizzazione storica-matematica del XVII secolo)

Ci troviamo nella seconda metà del XVII secolo, un periodo caratterizzato dagli straordinari contributi di due giganti della matematica: Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz. Questi due luminari sono diventati figure fondamentali nello sviluppo del *calcolo differenziale*, introducendo concetti rivoluzionari come la *derivata*, che poi diventerà materia d'esame per quanto ci concerne.

Focalizziamoci ora sul genio di Isaac Newton: autodidatta straordinario, Newton, già a soli 21 anni, ha delineato la concettualizzazione della *velocità*. È interessante notare che le seguenti definizioni, sebbene non siano direttamente oggetto d'esame, possono essere considerate come un buon cenno alla *fisica newtoniana* (Introduzione Alla Fisica).

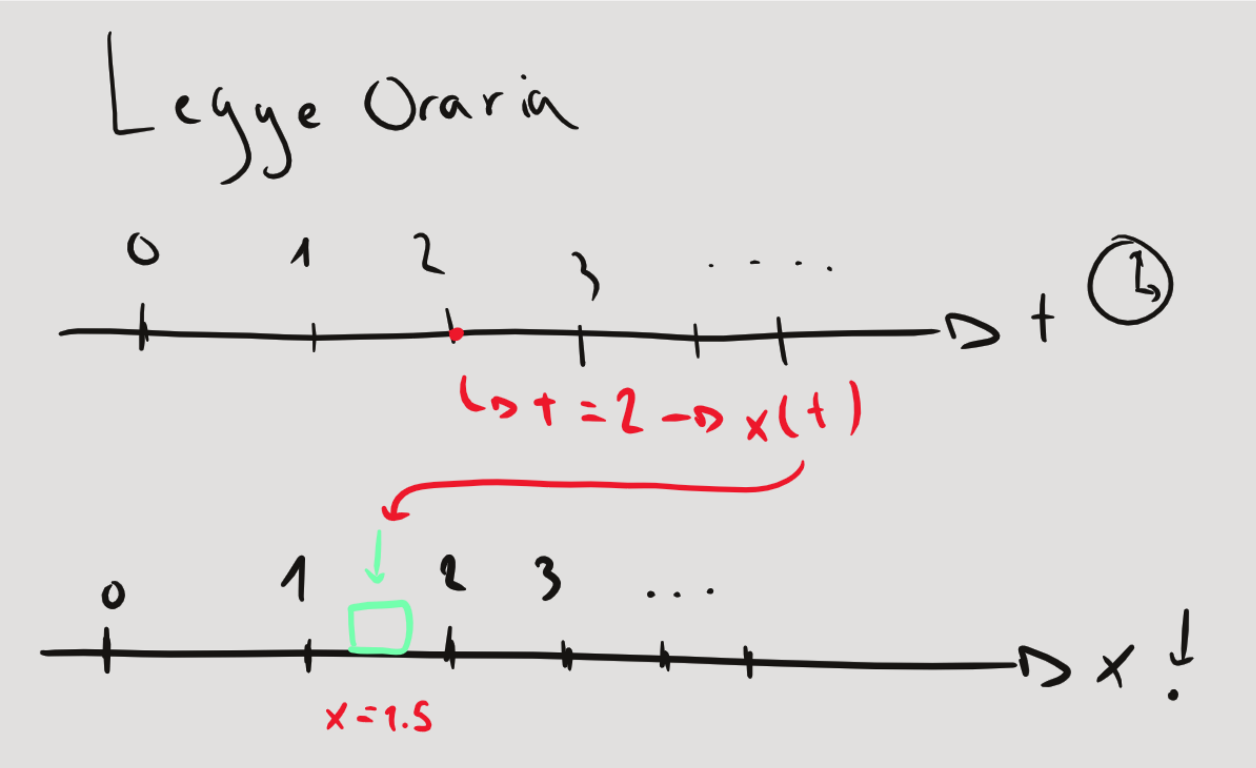
Esempio meccanico del calcolo differenziale

#Definizione

Definizione 1.1. (legge oraria)

Sia $x \mapsto x(t)$ una funzione che associa al tempo t la *posizione* di un punto mobile su un asse x.
Allora $x(t)$ si dice legge oraria.

FIGURA 1.1. (*Legge oraria*)



#Definizione

Definizione 1.2. (velocità media dati due istanti di tempo)

Si definisce la *velocità*, dati due istanti di tempo t_1 e t_2 la velocità media $v(t_1, t_2)$ nel seguente modo:

$$v(t_1, t_2) = \frac{x(t_1) - x(t_2)}{t_1 - t_2}$$

Sul numeratore abbiamo *l'incremento* dello spazio, sul denominatore *incremento* del tempo.

ATTENZIONE! Per *"incremento"* si intende semplicemente la differenza tra il punto finale e iniziale; quindi non dev'esserci necessariamente un *"incremento"*: può esserci nessuna variazione o anche un *"decremento"* (ovvero una specie di incremento negativo).

Ora voglio legare questo concetto di *velocità* ad una sola variabile di tempo t; allora definisco la *velocità* istantanea mediante il concetto di *limite* (Definizione di Limite di funzione > ^0f845a).

#Definizione

Definizione 1.3. (velocità istantanea)

Sia $x(t)$ una legge oraria.
Allora chiamo la velocità istantanea $v(t)$

$$v(t) = \lim_{t_1 \to t_2} v(t_1, t_2)$$

Ora abbiamo il *concetto* meccanico della derivata: nei successivi capitoli ci prescindiamo dai presupposti fisici e ci dirigiamo verso all'astrazione puramente matematica.

SEZIONE A. LA TEORIA DEL CALCOLO DIFFERENZIALE

A1. Rapporto Incrementale

Rapporto Incrementale

Definizione di rapporto incrementale di una funzione in un punto.

---

1. Definizione di rapporto incrementale

#Definizione

Definizione 1.1. (rapporto incrementale di una funzione relativo un punto del dominio)

Sia $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, I un *intervallo* (Intervalli).
Sia x_0 un punto del dominio I.
Allora chiamo il *rapporto incrementale* $R^f_{x_0}(x)$ della funzione f relativamente al punto x_0 come

$$R^f_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

#Proposizione

Proposizione 1.1. (rapporto incrementale come funzione)

Allora si può pensare al *rapporto incrementale* $R^f_{x_0}(x)$ come una funzione che lega ad un qualsiasi punto x in I, escluso x_0 in quanto si avrebbe la forma indeterminata $\frac{0}{0}$, un altro punto della retta reale.

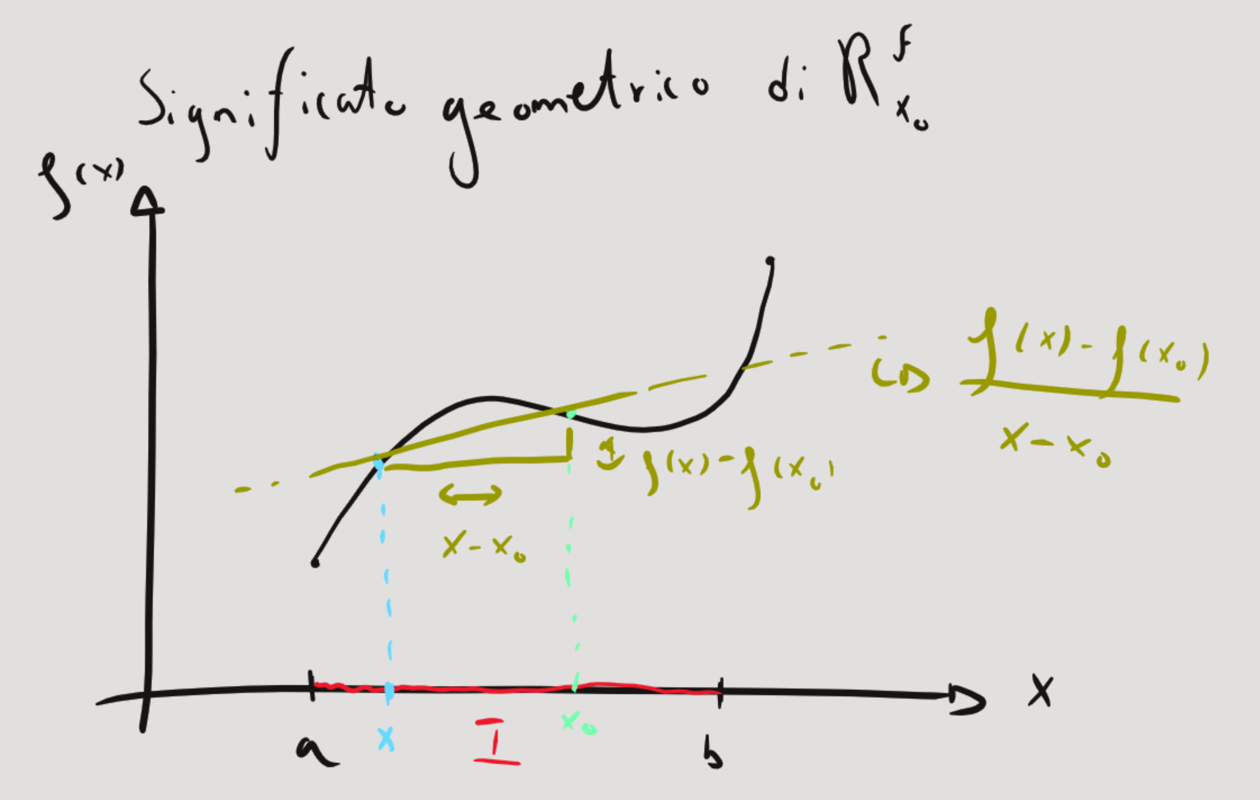
$$R^f_{x_0} : I \diagdown x_0 \longrightarrow \mathbb{R}$$

#Osservazione

Osservazione 1.1. (interpretazione geometrica della derivata)

Osserviamo che questa definizione ha anche un *significato geometrico*: infatti $R^f_{x_0}$ è anche la *pendenza* (coefficiente angolare) della *retta secante* dei punti $(x_0, f(x_0))$ e $(x, f(x))$.

FIGURA 1.1. (*Significato geometrico*)



A2. Derivabilità e derivata

Derivata e derivabilità

Definizione di derivata, derivabilità in un punto, derivabilità generale, funzione derivata.

---

1. Derivata

#Definizione

Definizione 1.1. (derivata di una funzione relativa ad un punto)

Sia $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$.
Sia $R^f_{x_0}(x)$ il *rapporto incrementale* (Rapporto Incrementale > ^ccc58b).
Allora definisco la *derivata* di f in x_0 il *limite* (Definizione di Limite di funzione > ^0f845a) del rapporto incrementale con x che tende a x_0.

$$f'(x) = \lim_{x \to x_0} R^f_{x_0}(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

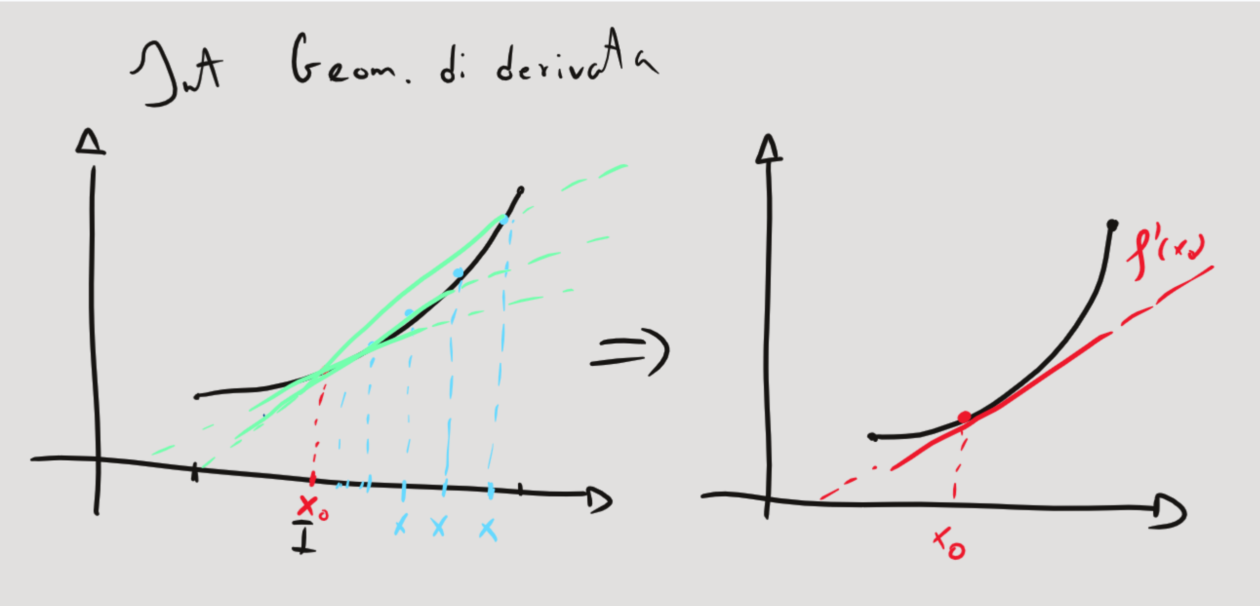
Naturalmente si definisce tale *se* tale limite esiste.

#Osservazione

Osservazione 1.1. (interpretazione geometrica della derivata)

Come precedentemente osservato in Rapporto Incrementale > ^c7cbf0, la *derivata in un punto* ha la sua interpretazione geometrica. Ovvero questa è semplicemente la *pendenza* della *retta tangente* in un punto: infatti se prendendo due punti sulla funzione, di cui una *"mobile"* e l'altra *"fissa"*, poi facendo avvicinare il punto mobile a quello fisso, noteremo che la retta secante dei due punti si *"convergerà"* ad una retta sola (ovviamente supponendo che esista).

FIGURA 1.1. (*Interpretazione geometrica di derivata*)



2. Derivabilità

#Definizione

Definizione 2.1. (derivabilità in un punto)

Sia $f : I \longrightarrow \mathbb{R}, x_0 \in I$.
Se *esiste finito* la *derivata* (^478a87)

$$f'(x) = \lim_{x \to x_0} R^f_{x_0}(x) \in \mathbb{R}$$

Allora f si dice *derivabile nel punto* x_0.

#Definizione

Definizione 2.2. (derivabilità di una funzione)

Sia $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *derivabile* (^6e7606) in *ogni* punto del suo dominio I, allora f si dice *derivabile* (e basta).

#Osservazione

Osservazione 2.1. (collegamento derivata-derivabilità e continuità)

Notiamo che queste due definizioni *"seguono"* lo schema delle definizioni di *continuità* (Definizione di continuità > ^ddf65d, Definizione di continuità > ^d2f56f)

3. Funzione derivata

#Definizione

Definizione 3.1. (funzione derivata)

Sia $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *derivabile*.
Chiamo la *funzione derivata* la funzione

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}; x \mapsto f'(x)$$

A3. Proprietà fondamentali delle derivate

Proprietà delle derivate

Proprietà fondamentali delle derivate: Continuità delle funzioni derivabili, derivata di operazione tra funzioni, derivata di funzione composta, derivata della funzione inversa.

---

1. Proprietà fondamentali

Continuità della funzione derivabile

#Teorema

Teorema 1.1. (continuità delle funzioni derivabili)

Sia $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$, I intervallo, $x_0 \in I$.
Sia f *derivabile* in x_0 (Derivata e derivabilità > ^6e7606).
Allora f è *continua* in x_0 (Definizione di continuità > ^ddf65d).

$$\boxed{f \text{ derivabile } \implies f \text{ continua}}$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *teorema 1.1.* (^dac6dc)
Intanto sappiamo che I è un intervallo, quindi *tutti* i suoi punti all'interno ne sono *punti di accumulazione*: pertanto possiamo prendere $\lim x \to x_0$ per un qualsiasi $x_0 \in I$.
Ora dimostriamo che f è *continua* usando il fatto che f è *derivabile*:

$$\begin{aligned} f \text{ continua} &\iff \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \\ &\iff \lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = 0 \\ &\iff \lim_{x \to x_0} \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{=f'(x) \in \mathbb{R}} \underbrace{(x - x_0)}_{x - x_0 \to 0} \stackrel{?}{=} 0 \\ &\iff f'(x)0 \to 0 = 0 \blacksquare \end{aligned}$$

#Proposizione

Proposizione 1.1. (la non derivabilità delle funzioni continue)

Vale il viceversa del *teorema 1.1.* (^dac6dc)? La risposta è *no*, in quanto esistono controesempi di funzioni *continue* ma non derivabili (dunque negando l'implicazione $p \implies q$)

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE della *proposizione 1.1.* (^e5ee1a)
Per l'esempio di una funzione continua non derivabile rivolgersi a Esempi di derivate.

Derivata di operazioni tra funzioni

#Teorema

Teorema 1.2. (derivata di operazioni tra funzioni)

Siano $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ delle funzioni.
Sia $x_0 \in I$.
Allora $f \pm g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ sono *derivabili*.
In particolare valgono le seguenti:

$$\begin{aligned}
&i.\,(f \pm g)' = f' \pm g' \\
&ii.\,(fg)' = f'g + fg' \text{ (regola di Leibniz)} \\
&iii.\,\frac{f}{g} = \frac{f'g - fg'}{g^2}
\end{aligned}$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE dei punti *i.*, *ii.*, *iii.* del *teorema 1.2.* (^fd716f)
i. Sia $R^{f+g}_{x_0}(x)$ il seguente:

$$\begin{aligned}
R^{f+g}_{x_0}(x) &= \frac{f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\
&= R^f_{x_0}(x) + R^g_{x_0}(x) \\
&\implies f'(x) + g'(x)
\end{aligned}$$

Questo vale analogamente per la sottrazione.
ii. Sia $R^{fg}_{x_0}(x)$ il seguente:

$$\begin{aligned}
R^{fg}_{x_0}(x) &= \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \frac{f(x)g(x) - f(x)g(x_0) + f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \frac{f(x)(g(x) - g(x_0))}{x - x_0} + \frac{g(x_0)(f(x) - f(x_0))}{x - x_0} \\
&= f(x)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + g(x_0)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\
f \text{ continua} &\implies f(x_0)g'(x_0) + g(x_0)f'(x_0) \\
x \to x_0 &\implies f(x)g'(x) + g(x)f'(x)
\end{aligned}$$

iii. Sia $R^{\frac{f}{g}}_{x_0}$ il seguente:

$$
\begin{aligned}
R_{x_0}^{\frac{f}{g}}(x) &= \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x - x_0} \\
&= \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)} \cdot \frac{1}{x - x_0} \\
&= \frac{f(x)g(x_0) - f(g)g(x) + f(x)g(x) - f(x_0)g(x)}{x - x_0} \cdot \frac{1}{g(x)g(x_0)} \\
&= (-f(x)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + g(x)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}) \cdot \ldots \\
&= (g(x)f'(x_0) - f(x)g'(x_0)) \cdot \frac{1}{g(x)g(x_0)} \\
f \text{ continua} &\implies \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \blacksquare
\end{aligned}
$$

(*svolto la dimostrazione del punto iii. da me stesso per esercizio*)

2. Derivate di funzioni particolari

Derivata della funzione composta

#Teorema

Teorema 2.1. (derivata di funzione composta)

Siano $f : I \longrightarrow J$, $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$; $x_0 \in I$, $f(x_0) = y_0 \in J$.
Sia f derivabile in x_0, g derivabile in $f(x_0)$.
Allora $g \circ f$ è *derivabile* in x_0 e vale che

$$\boxed{(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)}$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *teorema 2.1.* (^250330)
Nota: la prima parte della dimostrazione sarà l'idea della dimostrazione per cui vogliamo "orientare" la dimostrazione; la seconda parte sarà la dimostrazione vera e propria, anche se leggermente artificiale e forzata.
L'idea della dimostrazione consiste nella seguente:

$$
\begin{aligned}
R_{x_0}^{g \circ f}(x) &= \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} \\
&= \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\
&= g'(f(x)) \cdot f'(x_0) \\
&\implies g'(f(x)) \cdot f'(x)
\end{aligned}
$$

Tuttavia c'è un problema: in uno dei passaggi moltiplico la frazione per $\frac{f(x)-f(x_0)}{f(x)-f(x_0)}$, che è equivalente a 1. Tuttavia se ci troviamo nel caso in cui $f(x) = f(x_0)$, avremmo un problema in quanto la frazione precedentemente definita non sarebbe più definita.
Allora per evitare questo problema creiamo, in una maniera *"artificiale"*, una funzione continua che ci permette di evitare questo problema.
Sia

$$H(y) = \begin{cases} \frac{g(y)-g(f(x_0))}{y-f(x_0)} \text{ se } y \neq f(x_0) \\ g'(f(x_0)) \text{ se } y = f(x_0) \end{cases}$$

Trovo che H è continua in $f(x_0)$, in quanto per ipotesi g è *derivabile* in $f(x_0)$.
Inoltre posso verificare che vale la seguente relazione:

$$R_{x_0}^{g \circ f}(x) = H(f(x)) \cdot R_{x_0}^{f}(x)$$

In particolare per $f(x) = f(x_0)$ abbiamo

$$R_{x_0}^{g \circ f}(x) = H(f(x_0)) \cdot R_{x_0}^{f}(x)$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\frac{g(f(x_0)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = g'(f(x_0)) \frac{f(x_0) - f(x_0)}{x - x_0}$$
$$0 = 0$$

A questo punto prendendo i rispettivi limiti, ottengo

$$(g \circ f)' = \lim_{x \to x_0} H(f(x)) \cdot R_{x_0}^{f}(x) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) = g'(f(x)) \cdot f'(x) \blacksquare$$

Derivata della funzione inversa

#Teorema

Teorema 2.2. (derivata della funzione inversa)

Sia $f: I \longrightarrow J$ una funzione *biiettiva* (Funzioni > ^d193b2), dunque *invertibile* (Funzioni > ^7b369f); sia f *derivabile* in x_0 con $f'(x) \neq 0$.
Allora $f^{-1}(x)$ è *derivabile* in x_0 e si ha

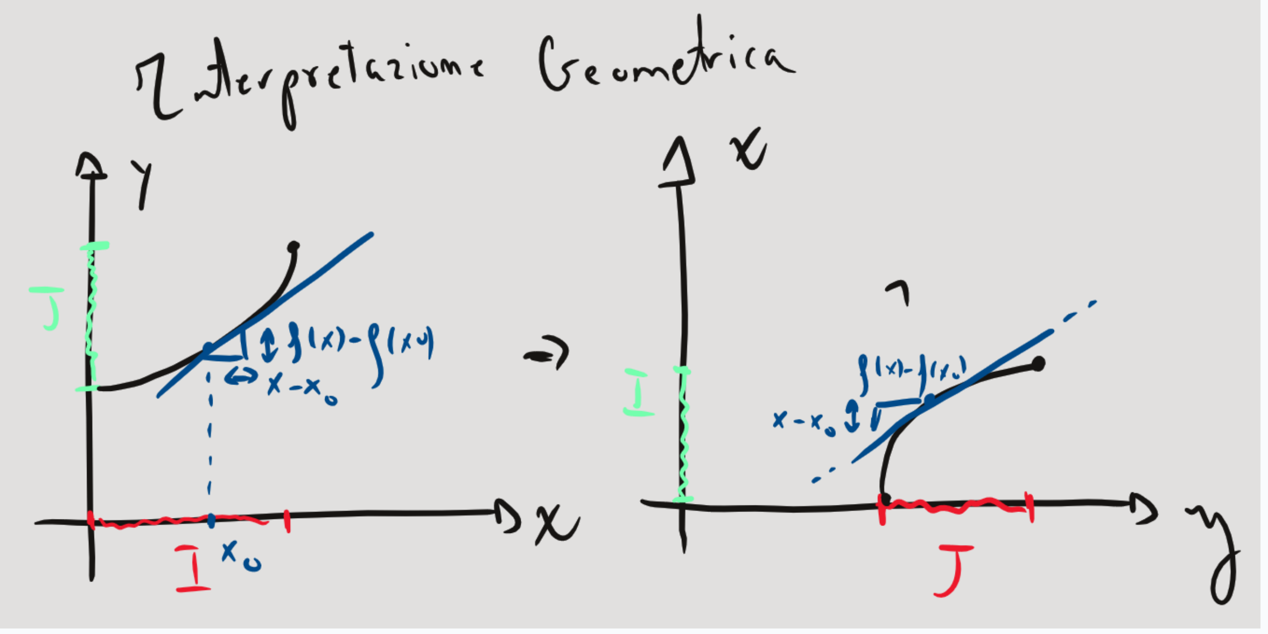
$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

#Osservazione

Osservazione 2.2. (interpretazione geometrica del teorema 2.2.)

> Anche questo teorema ha un suo significato geometrico: infatti se prendo la funzione originale, la inverto prendendo la sua simmetrica e scambiando le assi, allora prendendo lo stesso punto mi accorgo che la sua *tangente* esiste ed è proprio la *inversa* di quella originale.

FIGURA 2.2. (*Interpretazione geometrica della derivata della funzione inversa*)



DIMOSTRAZIONE del *teorema 2.2.* (^97198c)
Si tratta semplicemente (con dei trucchetti) di calcolare il rapporto incrementale $R^{f^{-1}}_{f(x_0)}(y)$.

$$\begin{aligned} R^{f^{-1}}_{f(x_0)}(y) &= \frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(f(x_0))}{y-f(x_0)} \\ &= \frac{f^{-1}(y)-x_0}{y-f(x_0)} \\ &\implies \lim_{y \to f(x_0)} \frac{f^{-1}(y)-x_0}{y-f(x_0)} \\ \begin{cases} x = f^{-1}(y) \\ y = f(x) \\ x \to x_0 \end{cases} &\implies \lim_{x \to x_0} \frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)} \\ &= \frac{1}{R^f_{x_0}(x)} \blacksquare \end{aligned}$$

Derivata Successiva e Classe C

Definizione di derivata seconda, terza, ..., di ordine k; definizione di classe C.

---

1. Derivata di ordine k-esimo

#Definizione

Definizione 1.1. (derivata di ordine k-esimo)

Sia $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, I un *intervallo* (Intervalli).
Sia f *derivabile* (Derivata e derivabilità > ^12c1df).
Allora ha senso considerare la *funzione derivata*

$$f' : I \longrightarrow \mathbb{R}; x \mapsto f'(x)$$

Ma quindi si può chiedere se la *funzione derivata* è anch'essa *derivabile*; in tal caso chiamo la *derivata* della *funzione derivata* la *derivata seconda* e la indico con

$$f'' \text{ oppure } f^{(2)}$$

Per *induzione* (Assiomi di Peano, il principio di induzione > ^76b850) posso definire la derivata di ordine k*-esimo* come il seguente:

$$\begin{gathered} f^{(0)} = f \\ f^{(k+1)} = (f^{(k)})', \forall k \in \mathbb{N} \end{gathered}$$

2. La classe C di una funzione

#Definizione

Definizione 2.1. (classe C di una funzione reale)

Sia f *derivabile* e sia la sua *funzione derivata* f' anch'essa *derivabile* (Definizione di continuità > ^d2f56f), allora dico che f è di *classe* $\mathcal{C}^1$;

$$f \in \mathcal{C}^1$$

Generalizzando, se f è *derivabile* fino all'ordine $f^{(k)}$; ovvero

$$f', f'', \ldots, f^{(k)}$$

sono tutte derivabili, allora f si dice di *classe* $\mathcal{C}^k$.

$$f \in \mathcal{C}^k$$

Inoltre se f è *derivabile* per *qualunque* ordine, allora si dice che f è di classe $\mathcal{C}^\infty$;

$$f \in \mathcal{C}^\infty$$

3. Esempi

#Esempio

Esempio 3.1. (funzione esponenziale)

Consideriamo la classica funzione *esponenziale* e^x (Funzione esponenziale e Logaritmica); se consideriamo la sua *derivata* $(e^x)'$, notiamo che è la stessa. Allora per *qualunque* ordine viene derivata, questa rimane la stessa; pertanto e^x è *sempre* derivabile.

$$e^x \in \mathcal{C}^\infty$$

#Esempio

Esempio 3.2. (funzione potenza)

Consideriamo la *funzione potenza* x^n (Funzioni di potenza, radice e valore assoluto); se consideriamo la sua derivata $(x^n)' = nx^{n-1}$, vediamo che fino ad un certo punto (precisamente all'ordine $n+1$-esimo) questa si annulla; però la funzione *costante* è sempre derivabile.
Allora anche $x^n \in \mathcal{C}^\infty$.

#Esempio

Esempio 3.3. (funzione seno)

Consideriamo adesso la *funzione seno* $\sin x$ (Funzioni trigonometriche); derivando $\sin x$ fino al quarto ordine vediamo che risulta la stessa funzione. Infatti

$$
\begin{aligned}
&(\sin x)' = \cos x \\
\implies &(\cos x)' = -\sin x \\
\implies &(-\sin x)' = -\cos x \\
\implies &(-\cos x)' = \sin x \\
\implies &\ldots
\end{aligned}
$$

Allora $\sin x \in \mathcal{C}^\infty$.

#Esempio

Esempio-Esercizio 3.4. (funzione valore assoluto per identità)

Consideriamo la funzione $f(x) = x \cdot |x|$.
Si può dimostrare che questa è derivabile fino al *primo ordine* $f'(x)$; però f' non è derivabile. La dimostrazione è stata lasciata al lettore per esercizio.
Allora $x \cdot |x| \in \mathcal{C}^1$.

SEZIONE B. LE CONSEGUENZE DEL CALCOLO DIFFERENZIALE

B1. Teorema di Fermat

Teorema di Fermat

Teorema di Fermat: cenno storico, enunciato e dimostrazione. Modello di applicazione (collegamento).

---

0. Cenni storici alla figura di Pierre Fermat

(Paragrafo scritto da me poi rielaborato da ChatGPT)
Pierre de Fermat (*1601-1665*) è stato un giudice francese di notevole fama. Oltre al suo ruolo di giurista nelle corti francesi, Fermat coltivava la matematica come passatempo, dimostrando però di essere molto più di un dilettante: infatti si guadagno l'appellativo *"il principe dei dilettanti"*.

Tra i suoi contributi più significativi, possiamo citare la sua corrispondenza con Blaise Pascal sul problema della suddivisione della posta, il celebre teorema di Fermat (che esporremo a breve) e l'enigmatico ultimo teorema di Fermat.

Particolarmente noto è l'ultimo teorema di Fermat, su cui il matematico francese sostenne di avere una dimostrazione. Tuttavia, non la pubblicò mai, affermando che la dimostrazione *"non stava dentro nel margine dentro nella pagina"*[(1)].

Ai giorni nostri, il teorema è stato finalmente dimostrato dal matematico Sir Andrew J. Wiles, il cui trattato estende per più di 100 pagine. Insomma, forse questa *meravigliosa dimostrazione* era un po' troppo lunghetta? Forse, comparandoci a Fermat, potremmo scrivere sul nostro esame che la nostra dimostrazione è troppo meravigliosa e lunga per poter essere contenuta, ai fini di giustificare la nostra omissione di eventuali dimostrazioni.

[(1)] *«È impossibile separare un cubo in due cubi, o una potenza quarta in due potenze quarte, o in generale, tutte le potenze maggiori di 2 come somma della stessa potenza. Dispongo di una meravigliosa dimostrazione di questo teorema, che non può essere contenuta nel margine troppo stretto della pagina»*
("Arithmetica", Diofanto di Alessandria (note di P. de Fermat))

---

1. Enunciato del teorema di Fermat

#Teorema

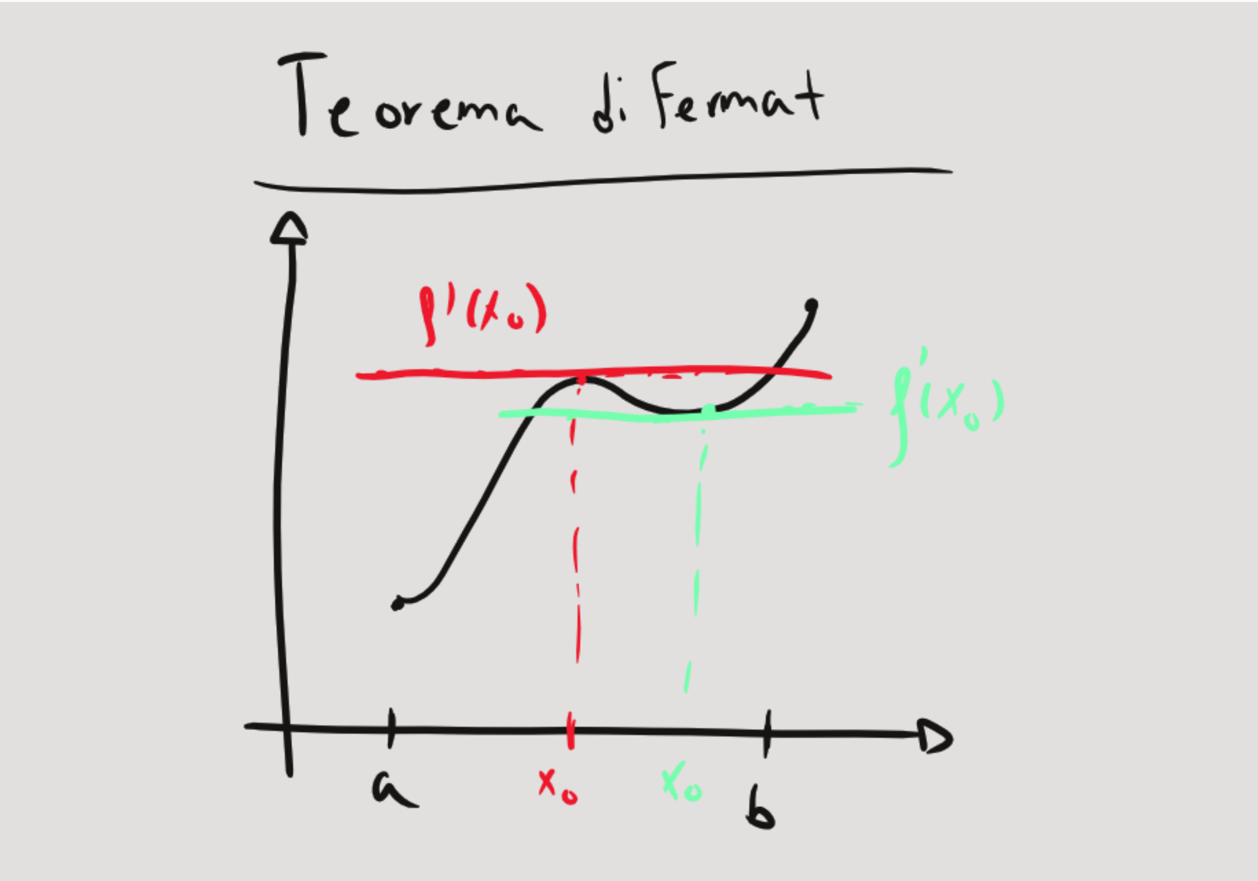
Teorema 1.1. (di Fermat)

Sia $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$.
Se valgono che:
i. x_0 è punto di *massimo* (minimo) *relativo* (Funzioni > ^f3e49c).
ii. x_0 è punto *interno* per il dominio I (Punti interni, esterni e di frontiera > ^c78831); quindi x_0 non si trova agli estremi.
iii. f è *derivabile* in x_0 (Derivata e derivabilità > ^6e7606).
Allora vale che

$$\boxed{f'(x_0) = 0}$$

ovvero x_0 è un *punto stazionario* (vedere la definizione sottostante)
A parole, questo teorema di dice che *"se f è derivabile in un punto di massimo o minimo interno al dominio, allora la sua derivata è nulla."*

FIGURA 1.1. (*Idea grafica*)



Punto stazionario

#Definizione

Definizione 1.1. (punto stazionario, cenno)

Se vale che $f'(x_0) = 0$, allora x_0 si dice *punto stazionario*

2. Dimostrazione del teorema di Fermat

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *teorema 1.1.* (^8ab68b)
Consideriamo un punto x_0 che sia *massimo relativo* per un certo intorno r, interno al dominio I e per cui f è derivabile.
Allora considero gli intervalli $I_- = [x_0 - r, x_0]$ e $I_+ = [x_0, x_0 + r]$.

- Nel primo intervallo abbiamo che $x_0 \geq x_0 - r \implies x_0 \geq x \in I_-$ e che $f(x_0) \geq f(x) \in I_-$.
  Allora considerando il rapporto incrementale $R^f_{x_0}(x)$, scopriamo che questa è sempre positiva in quanto $x - x_0 \leq 0$ e $f(x) - f(x_0) \leq 0$; allora per la *permanenza del segno* (usandone la contronominale) (Teoremi sui Limiti di Funzione > ^06a2e3)

$$\lim_{x \to x_0^-} R^f_{x_0}(x) \geq 0$$

- Nel secondo intervallo abbiamo che $x_0 + r \geq x_0 \implies x \in I_+, x \geq x_0$ ma comunque $f(x) \leq f(x_0)$ in quanto x_0 è di massimo.
  Allora riconsiderando il rapporto incrementale $R^f_{x_0}(x)$ vediamo che questa è negativa, in quanto abbiamo il prodotto tra un segno *negativo* e *positivo*.
  Allora

$$\lim_{x \to x_0^+} R^f_{x_0}(x) \leq 0$$

  Ma sappiamo che, in quanto f è *derivabile* in x_0, deve esistere il limite

$$\lim_{x \to x_0} R^f_{x_0}(x) \in \mathbb{R}$$

  Allora l'unico modo per far valere tutte le condizioni ottenute è quella di imporre

$$f'(x_0) = 0 \blacksquare$$

3. Modello di applicazione

Questo teorema ci è utile in quanto ci permette di costruire un *modello* per risolvere un certo tipo di problemi: vedere dunque la *sezione 3* di Modelli di problemi su derivate.

B2. Teorema di Rolle

Teorema di Rolle

Teorema di Rolle: enunciato, dimostrazione e interpretazione grafica.

---

1. Enunciato del teorema di Rolle

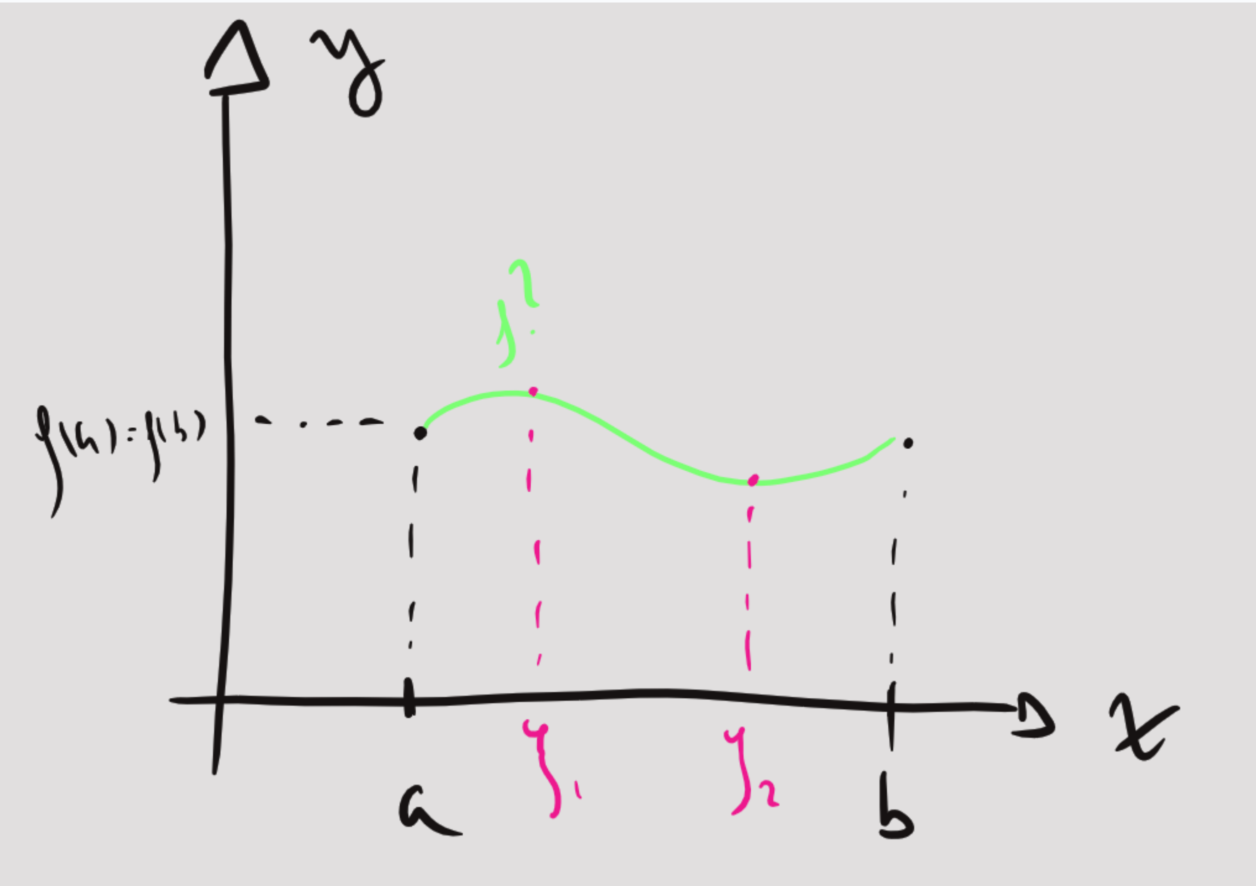
#Teorema

Teorema 1.1. (di Rolle)

Sia $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, sia f *continua* su $[a,b]$ e *derivabile* su $]a,b[$.
Sia inoltre $f(a)=f(b)$. Riassumendo ho la situazione in *figura 1.1.*.
Allora si verifica che

$$\boxed{\exists \xi \in \ ]a,b[\ : f'(\xi)=0}$$

FIGURA 1.1. (*Situazione grafica delle supposizioni*)



2. Dimostrazione

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *teorema di Rolle* (^2d8bff)
Prima di dimostrare il teorema a tutti gli effetti, svolgo la seguente osservazione preliminare.

#Osservazione

Osservazione 2.1. (osservazione preliminare alla dimostrazione del teorema di Rolle)

Notiamo che f è *continua* per tutto il suo dominio, quindi per il *teorema di Weierstraß* (Teoremi sulle funzioni continue > ^918fc1) sappiamo che *esistono* almeno un *massimo* e *minimo* di f (Funzioni > ^e1ab12).

Ora distinguo due casi, dove *"posiziono"* questi punti di $\max$ e $\min$ precedentemente osservati:

1. Tutti i punti di *massimo* e *minimo* assoluto sono agli estremi, dunque gli stessi: allora in questo caso se il massimo assoluto è lo stesso del minimo assoluto di una funzione allora si tratta di una *funzione costante* del tipo $f(x) = c \in \mathbb{R}$.
   Però calcolandone la derivata $(c)' = 0$ troviamo che la proposizione
   $$f'(x) = 0$$
   è *sempre* vera nel suo dominio.
2. Almeno uno fra *massimo* e/o *minimo* assoluto della funzione è *punto interno* a $[a, b]$ (Punti interni, esterni e di frontiera > ^c78831). Dunque chiamo quel punto ξ.
   Però sapendo che f è *non-costante*, *derivabile*, *continua* e il punto scelto è *interno*, allora per il *teorema di Fermat* (Teorema di Fermat > ^8ab68b) trovo che
   $$f'(\xi) = 0 \blacksquare$$

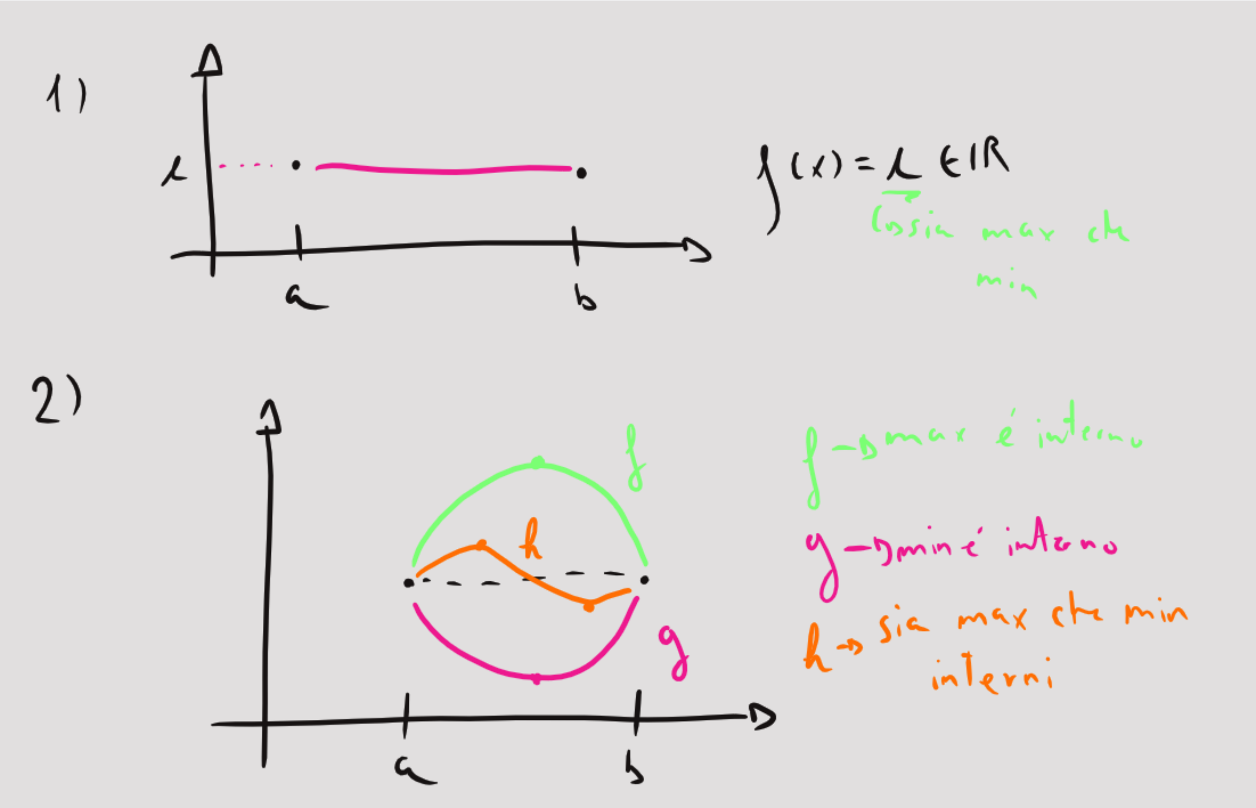
3. Interpretazione geometrica (dimostrazione grafica)

#Osservazione

Osservazione 3.1. (interpretazione grafica della dimostrazione del teorema di Rolle)

Si nota che è possibile dare una buona interpretazione grafica a questo teorema; anzi è addirittura possibile dare una dimostrazione *grafica* considerando i casi disegnati nella dimostrazione.

FIGURA 3.1. (*Disegno*)



B3. Teorema di Cauchy

Teorema di Cauchy

Teorema di Cauchy: enunciato e dimostrazione. Osservazione grafica (da vedere dopo aver visto quella di Lagrange)

---

1. Enunciato del teorema di Cauchy

#Teorema

Teorema 1.1. (di Cauchy)

Siano $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continue* in $[a, b]$ (Definizione di continuità > ^ddf65d), *derivabili* in $]a, b[$ (Derivata e derivabilità > ^6e7606).

Sia inoltre $\forall x \in \ ]a, b[\ , g'(x) \neq 0$. (*ipotesi supplementare*)
Allora vale che

$$\boxed{\exists \xi \in \ ]a, b[\ : \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}}$$

2. Dimostrazione

#Dimostrazione
DIMOSTRAZIONE del *teorema di Cauchy* (^0c9255)
Prima di tutto *"do un senso"* all'ipotesi supplementare: provo dunque $g(b)-g(a) \neq 0$. Infatti supponendo che, per assurdo, se fosse tale allora per il *teorema di Rolle* (Teorema di Rolle > ^2d8bff) avrei un ξ per cui si annullerebbe $g'(\xi)$. Infatti si avrebbe la divisione per una quantità che è uguale a 0.
Pertanto è necessario che $g'(x) \neq 0 \implies g(b) \neq g(a)$.
Ora considero una funzione che chiameremo *"phi grande"* Φ:

$$\Phi(x) = f(x)(g(b)-g(a)) - g(x)(f(b)-f(a))$$

Quindi considerandola scopro le seguenti.

- Il dominio di Φ è lo stesso di f, g.
- Φ è *continua* in $[a, b]$ in quanto si tratta di una *sottrazione* tra funzioni continue (Teoremi sulle funzioni continue > ^41a8ec).
- Φ è *derivabile* in $]a, b[$ per motivo analogo di prima (Proprietà delle derivate > ^fd716f).
  Dato che Φ è continua, posso calcolare $\Phi(a)$ e $\Phi(b)$.

1. $\Phi(a)$ diventa

$$\begin{aligned}\Phi(a) &= f(a)(\dots) - g(a)(\dots) \\ &= f(a)g(b) - f(a)g(a) - f(b)g(a) + f(a)g(a) \\ &= f(a)g(b) - f(b)g(a)\end{aligned}$$

2. $\Phi(b)$ diventa invece

$$\begin{aligned}\Phi(b) &= f(b)(\dots) - g(b)(\dots) \\ &= f(b)g(b) - f(b)g(a) - f(b)g(b) + f(a)g(b) \\ &= f(a)g(b) - f(b)g(a)\end{aligned}$$

Ora scopro che

$$\Phi(b) = \Phi(a)$$

Quindi per il *teorema di Rolle* (Teorema di Rolle > ^2d8bff) ho

$$\exists \xi \in \;]a,b[\; : \Phi(\xi) = 0$$

Ora considero la sua derivata Φ' e la *"calcoliamo"* in ξ. Svolgendo i conti ottengo

$$\begin{aligned} \Phi'(x) &= (f(x)(g(b)-g(a)))' - (g(x)(f(b)-f(a))' \\ &= f'(x)(g(b)-g(a)) - g'(x)(f(b)-f(a)) \\ \implies \Phi'(\xi) &= f'(\xi)(g(b)-g(a)) - g'(\xi)(f(b)-f(a)) = 0 \\ &= \boxed{\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}} \blacksquare \end{aligned}$$

#Osservazione

Osservazione 2.1. (anche se non vale l'ipotesi aggiuntiva il teorema di Cauchy vale fino ad un certo punto)

Se nel *teorema di Cauchy* (^0c9255) supponessimo di *non* far valere l'ipotesi aggiuntiva $g'(x) \neq 0$, allora si potrebbe comunque dire che

$$\boxed{\exists \xi \in \;]a,b[\; : f'(\xi)(g(b)-g(a)) = g'(\xi)(f(b)-f(a))}$$

3. Interpretazione grafica

Nota: qui si consiglia fortemente prima di leggere l'interpretazione grafica del teorema di Lagrange (Teorema di Lagrange) per poter capire bene questa osservazione.

#Osservazione

Osservazione 3.1. (interpretazione grafica del teorema di Cauchy)

OSS 3.1. (*Interpretazione grafica*) Con il *teorema di Lagrange* abbiamo visto che la sua interpretazione grafica consiste nell'intravedere che esiste un punto per il quale la sua tangente è parallela alla retta secante di a, b (Teorema di Lagrange > ^a12a1e).
Ora ci chiediamo come sarebbe possibile interpretare il *teorema di Cauchy* da un punto di vista grafico.

Immaginiamo innanzitutto che f, g siano delle *leggi orarie* (Introduzione al Calcolo Differenziale > ^56240d) che vivono in $[a, b]$.
Ora immaginiamo di *"appiattire"* la funzione f, *"distorcendo"* la funzione g: quindi disegniamo una specie di piano cartesiano in cui la retta delle ascisse viene rappresentata da $f(x)$, la retta della ordinate invece da $g(x)$.

Immaginandoci questo piano, posizioniamo il punto $A : (f(a), g(a))$ e l'altro punto $B : (f(b), g(b))$.
Possiamo disegnare una specie di *funzione* che parte da A e finisce in B: però in realtà non si tratta di una vera funzione in quanto non vi è nessun nesso tra f e g, quindi questa linea può comportarsi come vuole.

Ora immagino il vettore $\overrightarrow{AB}$ (Vettori Applicati > ^8447d6) come il *"vettore di spostamento"* e il *"vettore velocità"* rappresentato da

$$\overrightarrow{P} : (f'(\xi), g'(\xi))$$

ovvero prendendo un qualsiasi punto della *linea* disegnata prendo la sua tangente.
Allora per il *teorema di Cauchy* sappiamo che

$$f'(\xi)(g(b) - g(a)) = g'(\xi)(f(b) - f(a))$$

Allora considerando la matrice quadrata 2×2 $M_2(\mathbb{R})$ (Matrice > ^a95650)

$$A = \begin{pmatrix} f(b) - f(a) & g(b) - g(a) \\ f'(\xi) & g'(\xi) \end{pmatrix}$$

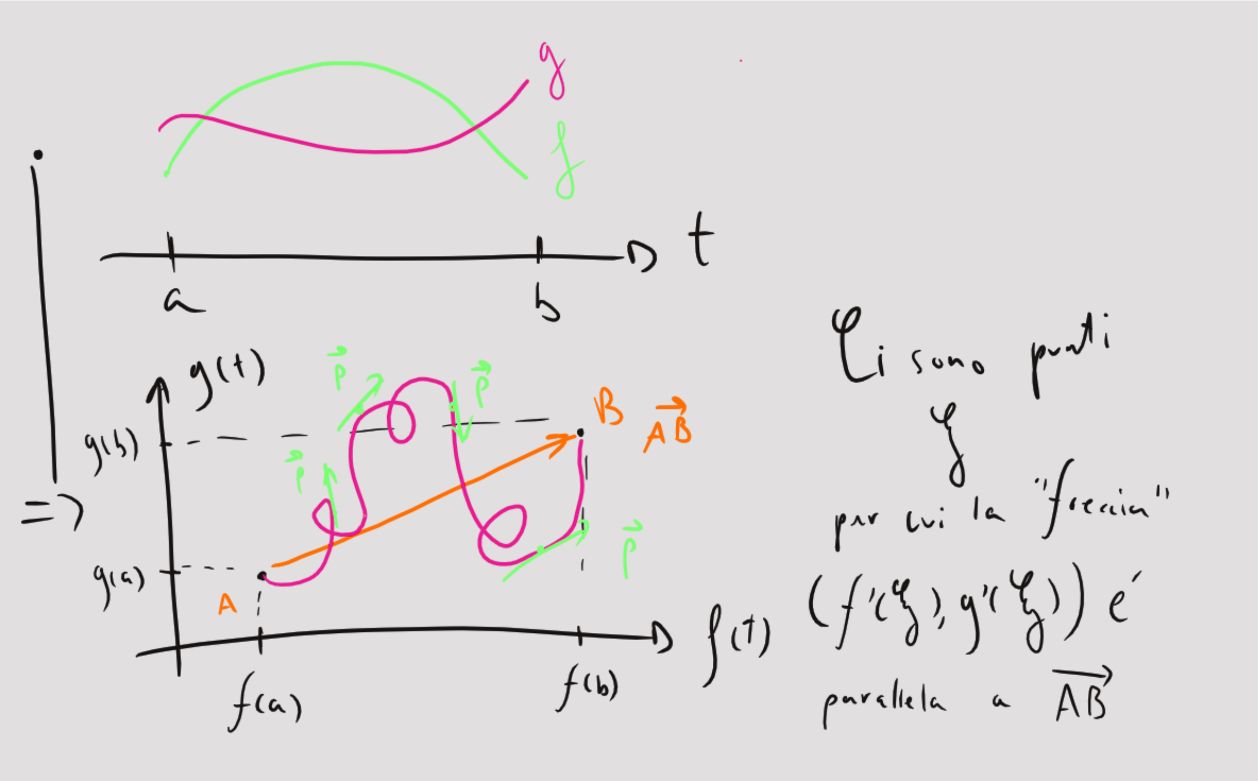
Ora prendendo il *determinante* (Determinante > ^2bb1d4) sappiamo che per *Cauchy* abbiamo

$$\det A = 0$$

Di conseguenza abbiamo la *condizione di parallelismo* per i vettori

$$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{P}$$

FIGURA 3.1. (*Idea dell'interpretazione geometrica*)



#Osservazione

Osservazione 3.2. (Cauchy vale in $\mathbb{R}^3$?)

Vedere Conseguenze del teorema di Cauchy e di Lagrange in quanto la ritengo una pagina più appropriata per contenere tale informazione. Vedere l'*osservazione 1.2.*.

B4. Teorema di Lagrange

Teorema di Lagrange

Teorema di Lagrange: enunciato, dimostrazione e interpretazione grafica.

---

1. Enunciato del teorema di Lagrange

#Teorema

Teorema 1.1. (di Lagrange)

Sia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, f *continua* in $[a, b]$ e *derivabile* in $]a, b[$ (Definizione di continuità > ^ddf65d, Derivata e derivabilità > ^6e7606).

Allora si verifica il seguente:

$$\boxed{\exists \xi \in \ ]a,b[\ : f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$$

2. Dimostrazione del teorema di Lagrange

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *teorema di Lagrange* (^ef03c2)
Per dimostrare il *teorema di Lagrange* basta considerare il *teorema di Cauchy* (Teorema di Cauchy > ^0c9255) per $g(x)=x$; possiamo verificare che $(x)'$ non sarà *mai* 0, in quanto la derivata della funzione identità è 1; infatti $1 \neq 0$.
Infatti per questo motivo si potrebbe considerare il *teorema di Lagrange* come un *corollario* del *teorema di Cauchy*. ■

3. Interpretazione grafica

#Osservazione

Osservazione 3.1. (interpretazione grafica del teorema di Lagrange)

Osserviamo che l'espressione

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

è *equivalente* al *rapporto incrementale* $R_a^f(b)$ (Rapporto Incrementale > ^ccc58b).
Quindi il *teorema di Lagrange* ci sta semplicemente dicendo che se considerando la *retta secante* (che chiamiamo r_{ab}) tra il punto $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ allora dev'esserci *almeno* un punto per cui la sua tangente è *parallela* a r_{ab}.

FIGURA 3.1. (*Idea grafica*)

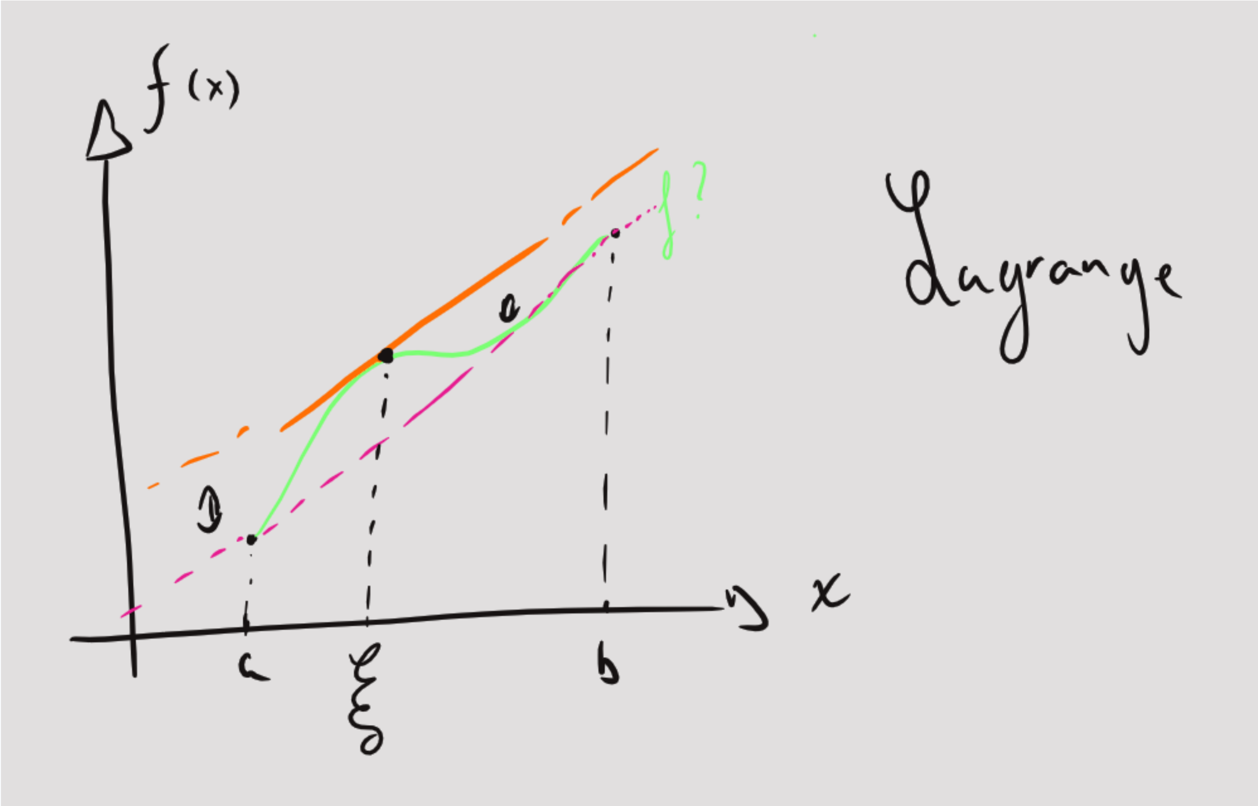
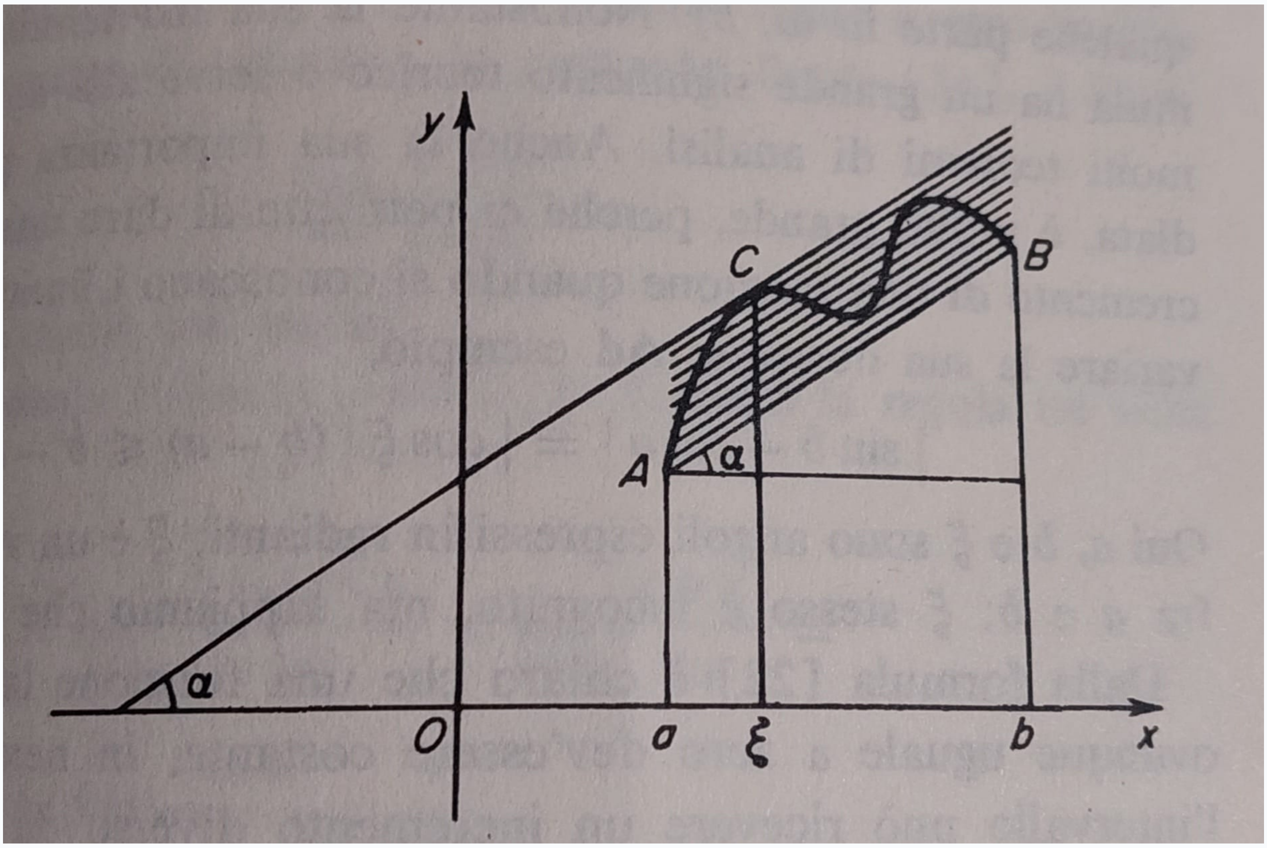


FIGURA 3.2. (*Idea grafica 2, tratto da "Le Matematiche" di A. D. Aleksandrov, A. N. Kolmogorov, M. A. Lavrent'ev*)



B5. Teorema di De l'Hôpital

Teorema di De l'Hôpital

Uno dei strumenti più potenti e versatili dell'analisi matematica: il teorema del marchese De l'Hôpital

---

0. Curiosità storiche

TRATTO DAL SITO http://scienzaemusica.blogspot.com/2012/06/de-lhopital-e-il-quesito-dellesame-di.html

---

L'Hôpital nacque in una ricca famiglia.
Il padre, Anne-Alexandre, era un *"pezzo grosso"* dell'epoca; infatti, tra le altre cose, fu generale dell'esercito del Re.
Se, da piccolo, il piccolo Guillaume intraprese una *carriera militare*, in seguito dovette abbandonarla a causa di rilevanti *problemi alla vista*.

Ergo, il suo interesse si spostò verso la Matematica.
Nei primi anni '90 del XVII secolo, de l'Hôpital ingaggiò Johann Bernoulli affinché gli insegnasse il calcolo infinitesimale.

Il marchese si mostrò così interessato all'argomento che lo imparò in breve tempo e che riassunse in un manuale intitolato *"Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes"*, datato *1696*.
Il suddetto rappresenta il *primo manuale di calcolo infinitesimale d'Europa!*

Rouse Bell scrive a proposito del libro di de l'Hôpital:
"Il merito di aver redatto il primo trattato che spiega i principi e l'uso del metodo va tutto a de l'Hôpital...Questo lavoro ebbe ampia circolazione; rese la notazione differenziale di uso comune in Francia e contribuì a diffonderla in Europa."

Sappiamo che de l'Hôpital, dal 1694, pagò Bernoulli ben 300 franchi all'anno per raccontargli delle sue scoperte, descritte poi nel suo testo.
Nel 1704, a seguito del decesso di de l'Hôpital, Bernoulli raccontò dell'accordo, asserendo che molti dei risultati nell'*Analyse des infiniment petits* erano opera sua!

---

1. Enunciato del teorema

#Teorema

Teorema 1.1. (di De l'Hôpital)

Siano $f, g : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$.
Supponiamo che f, g siano *derivabili* (Derivata e derivabilità > ^12c1df).
Supponiamo inoltre che per ogni punto (a *escluso*) nel dominio la derivata g' *non* si annulla mai;

$$\forall x \in]a, b[, g'(x) \neq 0$$

Supponiamo infine che il *limite destro* di b per f, g sono nulli.

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = \lim_{x \to b^-} g(x) = 0$$

Se esiste il limite

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \tilde{\mathbb{R}}$$

Allora esiste il limite

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

$$\boxed{\exists L \in \tilde{\mathbb{R}} : \lim_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \implies \lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L}$$

2. Dimostrazione del teorema

Osservazione 2.1. (osservazione preliminare; g non si annulla mai)

OSS 2.1. (*Osservazione preliminare*) Supponendo $g(b) = 0$ e $g'(x) \neq 0$ per $]a, b[$, potrà esserci mai un $x_0 \in]a, b$ tale che $g(x_0)$ si annulla? No, in quanto sennò avremmo $g(x_0) = g(b) = 0$ e per il *teorema di Rolle* (Teorema di Rolle > ^2d8bff) avremmo un ξ in $]a, b[$ tale che la derivata g' si annullerebbe; il che è *assurdo*, in quanto contraddice con le supposizioni iniziali.

#Dimostrazione
DIMOSTRAZIONE del *teorema di De l'Hôpital* (^67a7cd)
Prima di tutto per comodità *"prolungo"* le funzioni f, g in b ponendo $f(b) = g(b) = 0$; ciò è consentito e non sarebbe restrittivo in quanto le funzioni rimarrebbero comunque *continue* e *derivabili* in $]a, b[$.
Ora tenendo in conto l'osservazione preliminare (**OSS 2.1.**, ^ce8190), ha senso considerare la frazione

$$\frac{f(x)}{g(x)}, \forall x \in]a,b[$$

Allora *"facendo finta di conoscere"* il limite

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}$$

Che tradotto *"alla Cauchy"* (Definizione di Limite di funzione > ^0f845a) vorrebbe dire

$$\begin{gathered} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in]a,b[\\ b-\delta < x < b \implies \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - L \right| < \varepsilon \end{gathered}$$

Ora considero un punto nell'intervallo $x \in]b-\delta, b[$ e applico il *teorema di Cauchy* (Teorema di Cauchy > ^0c9255) alle funzioni f, g in $[x, b]$.
Ovvero

$$\exists \xi \in]x,b[: \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(x)}{g(b)-f(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$$

e sappiamo che $x < \xi < b$.
Pertanto considerando che x non è altro che un punto tra $b-\delta$ e b, si potrebbe *"maggiorare"* ξ come $b-d < \xi < b$.
Allora questa uguaglianza vale per l'intorno considerato per x: mettendo tutto assieme e riconsiderando la definizione *"alla Cauchy"* del limite precedentemente scritto, abbiamo

$$\begin{gathered} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in]a,b[\\ b-\delta < x < b \implies \left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| < \varepsilon \end{gathered}$$

che è proprio la *definizione* del limite

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L \blacksquare$$

#Osservazione

Osservazione 2.2. (De l'Hôpital vale anche per limiti all'infinito)

Se al posto di b un numero *finito* pongo $b = +\infty$; allora il teorema varrebbe lo stesso. Basta ragionare con la definizione ε-N al posto di ε-δ.

#Osservazione

Osservazione 2.3. (De l'Hôpital vale anche per la forma indeterminata ∞/∞)

Questo teorema vale anche se si verificano entrambi i limiti:

$$\lim_{x\to b^-} f(x) = +\infty = \lim_{x\to b^-} g(x)$$

#Osservazione

Osservazione 2.4. (De l'Hôpital vale anche quando il limite diverge a $+\infty$)

Questo teorema vale anche se il limite L vale $+\infty$.

3. Utilità pratica

Proposizione 3.1. (utilità pratica del teorema di De l'Hôpital)

Se in un limite ho un *caso indeterminato* del tipo

$$\frac{0}{0} \text{ oppure } \frac{\infty}{\infty}$$

e se ho

$$g'(x) \neq 0$$

Allora posso calcolare il limite

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

il quale risultato sarà lo stesso del limite

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

A parole, se ho un *caso indeterminato* e ho la funzione sul denominatore che non si annulla mai, allora posso derivare entrambe le frazioni per avere un limite *"equivalente"*.

ATTENZIONE! Questo non è un teorema del tipo *"se e solo se"*; l'implicazione qui è univoca, pertanto non deve *necessariamente* valere il viceversa.
Infatti quando si usa il *teorema di De l'Hôpital*, lo si rende noto usando il simbolo

$$\lim_{\dots} \dots \overset{H}{\Longleftarrow} \lim_{\dots} \dots$$

B6. Formula di Taylor

Formula di Taylor

Formula di Taylor: osservazione preliminare, lemma di Peano, teorema di Taylor col resto di Peano e dimostrazione. Esempi.

---

0. L'idea della formula di Taylor

#Osservazione

Osservazione 0.a. (idea del concetto)

Se f è *derivabile* (Derivata e derivabilità > ^6e7606) in x_0, allora esiste la *tangente* al grafico nel punto x_0; infatti questa viene descritta come

$$r : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Se ora *"ingrandisco"* questo grafico della funzione vicino al punto $(x_0, f(x_0))$, si troverebbe che stiamo *"linearizzando"* la funzione f come la *tangente* r: una curva qualsiasi si *"trasforma"* in una linea, una retta lineare; l'idea viene raffigurata nella *figura 0.a.*
Ora ci chiediamo il seguente: se f fosse *derivabile* fino al grado n, possiamo costruire un *polinomio* che *"trasforma"* f in un polinomio? La risposta è sì, con la *formula di Taylor*.

Si svolgono operazioni simili anche nel *campo della fisica*, ad esempio con lo *studio del movimento* del pendolo: per studiarlo bisognerebbe studiare l'equazione differenziale

$$\sin x = \ddot{x}$$

(dove $\ddot{x}$ indica la *seconda derivata* della legge oraria $x(t)$; notazione di Newton)
Però è difficile esprimere la soluzione di quest'equazione differenziale in *termini di funzioni elementari*: pertanto è necessario trovare una buona

"approssimazione", in particolare per *"angoli piccoli"* (ovvero vicini a 0).
Trasformando $\sin$ nella retta tangente nel punto $x_0 = 0$, si avrebbe

$$\sin x \sim \cos x_0(x - x_0) + \sin x_0 = \cos(0)(x) + \sin(0) = x$$

Ovvero, ponendo

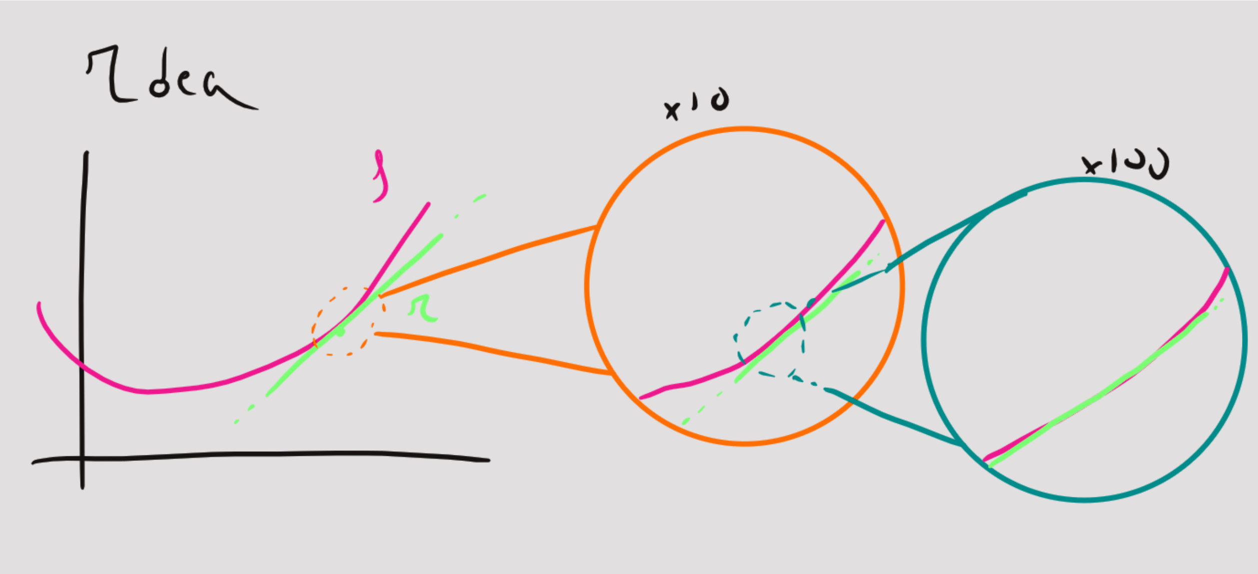
$$\sin x = x$$

Si avrebbe la nuova equazione differenziale

$$x = \ddot{x}$$

che è più *"semplice"* da risolvere.

FIGURA 0.a. (*La linearizzazione della funzione*)



1. Lemma di Peano e di Lagrange

Lemma di Peano

#Lemma

Lemma 1.1. (di Peano)

Sia $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$.
Sia inoltre f *derivabile* (Derivata e derivabilità > ^12c1df) fino all'ordine n nell'intervallo I.
Supponiamo che la *derivata di ogni ordine in* x_0 sia nullo;

$$f(x_0) = 0; f'(x_0) = 0, \ldots, f^{(n)}(x_0) = 0$$

Allora si verifica il seguente limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *lemma di Peano* (^0fe338)

Per verificare il *lemma di Peano* basta calcolare il *limite della tesi*, ovvero

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^n}$$

Allora, dato che sia $f(x)$ che $(x-x_0)^n$ sono *continue*, possiamo semplicemente procedere a sostituire con $x = x_0$. Però questo ci porta ad una *forma indeterminata* del tipo $\frac{0}{0}$.

A questo punto uso il *teorema di de L'Hôpital* (Teorema di De l'Hôpital > ^67a7cd):

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^n} \overset{H}{\Longleftarrow} \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}}$$

Quindi calcoliamo il *"nuovo limite"*; però abbiamo di nuovo una situazione $\frac{0}{0}$! Allora applico *de L'Hôpital* una seconda volta! Però anche questa è indeterminata; allora la applico $n-1$ volte, ovvero fino a quando ottengo il limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^n} \overset{H}{\Longleftarrow} \dots \overset{H}{\Longleftarrow} \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x)}{n \cdot \ldots \cdot 2(x-x_0)^1}$$

Adesso considero quest'ultimo limite come

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x)}{n \cdot \ldots \cdot 2(x-x_0)^1} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{n!} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0} = \frac{1}{n} \lim_{x \to x_0} R^{f^{(n-1)}}_{x_0}(x$$

Notiamo che il *limite* del rapporto incrementale è semplicemente la *derivata* della funzione (per definizione): allora, considerando che f è *derivabile* fino all'n-esimo ordine, infine abbiamo

$$\frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) = \boxed{0} \blacksquare$$

Lemma di Lagrange

#Lemma

Lemma 1.2. (di Lagrange)

Sia $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, *derivabile* fino all'ordine $n+1$ (ovvero $f \in \mathcal{C}^{n+1}$).

Sia $x_0 \in I$ e la sua immagine nulla per tutte le sue derivate; ovvero

$$f(x_0) = f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n)}(x_0) = 0$$

Allora, si verifica il seguente:

$$\forall x \in I\{x_0\}, \exists \xi \in (x_0, x) \text{ oppure } (x, x_0) : \\ \frac{f(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *lemma di Lagrange* (^39ee3b)
Posso partire *"riscrivendo"* l'equazione

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{(x-x_0)^{n+1} - (x_0 - x_0)^{n+1}}$$

Questa è lecita in quanto sto semplicemente aggiungendo 0 ad entrambi i termini: infatti per ipotesi $f(x_0) = 0$ e ovviamente $(x_0 - x_0) = 0$.
Allora considerando la funzione

$$g(x) = (x - x_0)^{n+1}$$

Osservandola noto che questa *non* si annulla mai fuori dall'intervallo (escludendo infatti x_0), ed è pure *derivabile* fino al grado $n+1$.
Ma allora posso usare il *teorema di Cauchy* (Teorema di Cauchy > ^0c9255) su questa espressione: allora ho

$$\exists \xi_1 \in (x, x_0) : \frac{f(x) - f(x_0)}{(x-x_0)^{n+1} - (x_0 - x_0)^{n+1}} = \frac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_1)} = \frac{f'(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1 - x_0)^n}$$

Ma allora posso ripetere questa procedura con quest'ultima espressione, ripetendo lo stesso *"trucchetto"*: allora alla seconda iterazione ho

$$\frac{f'(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1 - x_0)^n} = \frac{f''(\xi_2)}{(n+1)(n)(\xi_2 - x_0)^{n-1}}, \xi_2 \in (x, \xi_1)$$

Ripetendo questa procedura e fermandomi fino al punto per cui ho applicato Cauchy n volte:

$$\frac{f^{(n)}(\xi_n)}{(n+1)!(\xi_n - x_0)}, x < \xi_n < \xi_{n-1} < \ldots < \xi_1 < x_0$$

Ma mi accorgo che ho un'espressione del tipo

$$\ldots \cdot \frac{f^{(n)}(\xi_n)}{\xi_n - x_0}$$

Quindi posso usare ora il *teorema di Lagrange* (Teorema di Lagrange > ^ef03c2), ottenendo così alla fine

$$\exists \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+1} : \frac{f(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{(n+1)!}$$

Che è la tesi del teorema. ■

2. Formula di Taylor col resto di Peano/Lagrange

#Definizione

Definizione 2.1.

Per *compattare* la nostra scrittura nei seguenti enunciati, chiamiamo il *polinomio di Taylor* come il *"polinomio principale"* che compariranno nelle tesi dei teoremi. Ovvero

$$T_n(f, x_0, x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Formula di Taylor col resto di Peano

#Teorema

Teorema 2.1. (di Taylor col resto di Peano)

Sia $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$, I *intervallo*, $x_0 \in I$.
Supponiamo g *derivabile* fino all'ordine n; ovvero $g \in \mathcal{C}^n$
Allora, per ogni punto dell'intervallo *escluso* il punto x_0, vale il seguente:

$$\forall x \in I \diagdown \{x_0\}$$

$$\boxed{g(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x-x_0)^1 + \ldots + \frac{g^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + r(x_0, x)}$$

dove $r_n(x_0, x)$ è il *resto di Peano*; ovvero $r(x_0, x) = g(x) - (\ldots)$ e ha la speciale proprietà per cui

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r_n(x_0, x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

ovvero avvicinandosi al punto x_0 il *resto* crolla a 0.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *teorema di Taylor col resto di Peano* (^947c8a)
Voglio dimostrare che il *limite* della tesi effettivamente vale; ovvero

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r_n(x_0, x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

allora definisco f come il *resto*

$$f(x) = r_n(x_0, x) = g(x) - T_n(g, x_0, x)$$

ovvero

$$f(x) = r_n(x_0, x) = g(x) - (g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + \ldots + g^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n)$$

Inoltre sappiamo che f è *derivabile* fino all'ordine n, dato che si tratta di due *funzioni derivabili fino all'ordine* n. Infatti g lo è *per ipotesi* e un polinomio qualsiasi è *derivabile* per qualsiasi ordine.
Allora iniziamo a derivare f.

$$\begin{gathered}
f'(x) = g'(x) - 0 - g'(x_0) - 2\frac{g''(x_0)}{2!}(x - x_0) - \ldots - n\frac{g^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^{n-1} \\
f'(x_0) = g'(x_0) - 0 - g'(x_0) - 0 - \ldots - 0 = 0
\end{gathered}$$

Ora prendiamo la sua *seconda derivata*:

$$\begin{gathered}
f''(x) = g''(x) - 0 - 0 - g''(x_0) - 0 - \ldots - (n)(n-1)\frac{g^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^{n-2} \\
f''(x_0) = g''(x_0) - g''(x_0) - 0 - \ldots - 0 = 0
\end{gathered}$$

Mi accorgo che per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale che

$$f^{(n)}(x_0) = 0$$

(che è dimostrabile *per induzione* (Assiomi di Peano, il principio di induzione > ^76b850))
Allora per il *lemma di Peano* (^0fe338) vale che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{(x - x_0)^n} = \boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{r_n(x, x_0)}{(x - x_0)^n} = 0} \blacksquare$$

Formula di Taylor col resto di Lagrange

#Teorema

Teorema 2.2. (di Taylor col resto di Lagrange)

Sia $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$, I intervallo e $x_0 \in I$.
Sia f *derivabile fino all'ordine* $n+1$.
Allora vale che

$$\forall x \in I\{x_0\}, \exists \xi \in]x_0, x[\text{ oppure }]x, x_0[\text{ t.c.}$$
$$\boxed{f(x) = T_n(f, x_0, x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}$$

Dove il secondo membro della soma si chiama *resto nella forma di Lagrange*.

#Dimostrazione
DIMOSTRAZIONE del *teorema 2.2.* (^9b9be7)
Vediamo che f è *derivabile* fino all'ordine $n+1$.
Allora, scrivendo g come la funzione

$$g(x) = f(x) - T_n(f, x_0, x)$$

questa è anche *derivabile* fino all'ordine $n+1$-esimo.
Allora prima di tutto *"calcoliamo"* $g(x_0)$;

$$g(x_0) = f(x_0) - f(x_0) = 0$$

Ora calcoliamo la *derivata* $g'(x)$;

$$g'(x) = f'(x) - [0 + f'(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}2(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{x}(n)(x-x_0)^($$

Allora calcolandola in x_0 si ha

$$g'(x_0) = f'(x_0) - 0 - f'(x_0) - \ldots \cdot 0 - \ldots - \ldots \cdot 0 = 0$$

Infatti per ogni *"termine"* che presenta il *"binomio"* $x - x_0$ vengono annullate.
Facendo il conto si nota che

$$g(x_0) = g'(x_0) = \ldots = g^{(n)}(x_0) = 0$$

Ma allora per il *lemma di Lagrange* (^39ee3b),

$$g(x) = \frac{g^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Però osserviamo che la *derivata* $n+1$-esima di g annulla la *"seconda componente"* (ovvero il polinomio di Taylor), in quanto la $n+1$-esima derivata di un polinomio di grado n è sempre nulla.
Pertanto questa è equivalente a

$$g(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Allora si ottiene alla fine

$$\begin{aligned} g(x) = f(x) - T_n(f, x_0, x) \implies f(x) &= T_n(f, x_0, x) + g(x) \\ &= T_n(f, x_0, x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \end{aligned}$$

che è la tesi. ■

3. Esempio dell'esponenziale

Consideriamo un esempio celebre della *formula di Taylor col resto di Peano* di una funzione.

#Esempio

Esempio 3.1. (funzione esponenziale in termini di Taylor)

Sia $\exp x = e^x$. Pongo $x_0 = 0$. Voglio trovare la *formula di Taylor* per $\exp$ e $x_0 = 0$. Prima di tutto considero che

$$(e^x)^{(n)} = e^x, \forall n \in \mathbb{N}$$

Pertanto

$$(e^x)^{(n)}(x_0) = 1, \forall n$$

Allora per *Taylor*, si ha

$$e^x = 1 + 1(x-0) + \frac{1}{2!}(x-0)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}(x-0)^n + r_n$$

Ponendo il limite $x \to x_0$, si avrebbe

$$e^{x_0} = 1 + x_0 + \frac{1}{2}x_0^2 + \ldots + \frac{1}{n!}(x_0)^n + 0$$

#Osservazione

Osservazione 3.1. (dimostrare l'identità di Eulero)

Sia nota la *cosiddetta identità di Eulero*, oppure come è nota per certi matematici, *"la formula matematica più bella"*:

$$\boxed{e^{i\pi} = -1}$$

In realtà questa è una generalizzazione di

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

ovvero la *forma trigonometrica di un numero complesso* $\mathbb{C}$ con modulo $\rho = 1$ (Forma Trigonometrica dei Numeri Complessi > ^5bb422).
Se vogliamo considerarla da un *punto di vista puramente analitico*, ovvero senza effettuare delle *considerazioni geometriche* dei numeri complessi, possiamo comunque *"dimostrare"* questa forma mediante le formule di Taylor.
Infatti, considerando:

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \ldots + \frac{x^n}{n!} \\ \sin x &= 1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \\ \cos x &= x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots \end{aligned}$$

Ora *"calcolo"* e^{ix} mediante *Taylor*;

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - \frac{ix^7}{7!} + \ldots \\ &= (1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots) + i(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots) \\ &= \boxed{\cos x + i \sin x} \end{aligned}$$

4. Esempio di applicazione della formula di Taylor col resto di Lagrange

#Esempio

Esempio 4.1. (calcolare la costante di Eulero)

Supponiamo di voler calcolare il numero e con un errore *inferiore* a 10^{-3}.
Prima di tutto ricapitoliamo *ricordando* cos'è la costante di Eulero: per definizione questa costante è il limite fondamentale

$$\lim_n (1 + \frac{1}{n})^n$$

Ricordando inoltre dei calcoli effettuati (Esempi di Limiti di Successione > ^bb767b), sappiamo che il numero e è *limitato*:

$$2 \leq e \leq 3$$

Ora scrivo la *formula di Taylor col resto di Lagrange* per e^x, con n generico (da determinare in seguito) e $x_0 = 0$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1}, 0 < \xi < 1$$

Adesso poniamo $x = 1$ e prendiamo la *"distanza"* tra e^1 e il polinomio di Taylor $T_n(f, 0, 1)$, e come visto prima questa dev'essere *minore o uguale* al resto di Lagrange.

$$|e - (1 + 1 + \ldots + \frac{1}{n!})| \leq \frac{e^\xi}{(n+1)!}$$

Ricordiamo che se ξ *"vive"* tra $0, 1$, allora e^ξ vive tra $1, e$; pertanto possiamo maggiorare e^ξ con 3, in quanto e è *limitata* da 3. Poniamo pertanto

$$|e - 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3!} - \ldots - \frac{1}{n!}| \leq \frac{3}{(n+1)!}$$

Ora *"proviamo"* ad inserire degli n a partire da $n = 4$, per vedere se innanzitutto il resto (ovvero l'*"errore"*) che ci viene fuori è effettivamente minore di 10^{-3}; in tal caso procediamo a calcolare la somma/sottrazione del polinomio.
L'idea è quello di *"stimare il resto"*.

$$\begin{aligned}
n = 4 &\implies r_4 = \frac{3}{120} > 10^3 \text{ NO} \\
n = 5 &\implies r_5 = \frac{3}{720} = \frac{1}{240} > 10^{-3} \text{ NO} \\
n = 6 &\implies r_6 = \frac{3}{5040} < 10^{-3} \text{ OK.}
\end{aligned}$$

Quindi il *"candidato perfetto"* è $n = 6$.
Procedendo ad inserire $n = 6$ nel *polinomio di Taylor* $T_6(e^x, 0, 1)$ abbiamo

$$2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} = 2.718$$

che è proprio il numero e fino alla 10^{-3}-esima cifra.

SEZIONE C. LA PRASSI DEL CALCOLO DIFFERENZIALE

C1. Esempi di funzioni derivabili e non derivabili

Esempi di derivate

Esempi di funzioni derivabili e il calcolo delle loro derivate: tutte (più o meno) le funzioni elementari. Esempi di funzioni non derivabili.

---

1. Derivate delle funzioni elementari

Funzione costante

#Esempio

Esempio 1.1. (funzione costante)

Sia $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ la *funzione costante*, ovvero del tipo

$$f(x) = c \in \mathbb{R}$$

Allora calcolando il *rapporto incrementale* (Rapporto Incrementale > ^ccc58b) $R^f_{x_0}(x)$, otteniamo

$$R^f_{x_0}(x) = \frac{c-c}{x-x_0} = \frac{0}{x-x_0} = 0$$

Pertanto

$$\boxed{(c)' = 0, \forall x \in I}$$

Funzione identità

#Esempio

Esempio 1.2. (funzione identità)

Sia $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ la *funzione identità*, ovvero del tipo

$$f(x) = x$$

Allora calcolando il suo *rapporto incrementale* si otterrebbe

$$R^f_{x_0}(x) = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$$

Pertanto

$$\boxed{(x)' = 1, \forall x \in I}$$

Funzione potenza (in N)

#Esempio

Esempio 1.3. (funzione potenza naturale)

Sia $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ la *funzione potenza* (Funzioni di potenza, radice e valore assoluto > ^2b25ba), ovvero del tipo

$$x^n, n \in \mathbb{N}$$

Allora calcolando il *rapporto incrementale* si ottiene

$$R^f_{x_0}(x) = \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0}$$

Ricordandoci che abbiamo una *differenza di potenze n-esime* e quindi vale la seguente relazione:

$$(A^n - B^n) = (A - B)(A^{n-1} + A^{n-2}B^1 + \ldots + A^1 B^{n-2} + B^{n-1})$$

Allora si avrebbe

$$\begin{aligned} R^f_{x_0}(x) &= \frac{(x - x_0)(x^{n-1} + x^{n-2}x_0^1 + \ldots + x^1 x_0^{n-2} + x_0^{n-1})}{x - x_0} \\ &= x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \ldots + x \cdot x_0^{n-2} + x_0^{n-1} \end{aligned}$$

Passando il limite per $x \to x_0$ si avrebbe il limite di un *polinomio*, quindi

$$\lim_{x \to x_0} R^f_{x_0}(x) = x_0^{n-1} + \ldots + x_0^{n-1} = n(x^{n-1})$$

Pertanto

$$\boxed{(x^n)' = nx^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}, x \in I}$$

ATTENZIONE! Con questa *"dimostrazione"* abbiamo dimostrato che questa vale *solo* in $\mathbb{N}$; per dimostrare che vale anche in $\mathbb{R}$, che verrà fatta successivamente, bisogna usare un altro trucchetto. Però per ora diamo questa buona anche per n reale.

Funzione esponenziale

#Esempio

Esempio 1.4. (funzione exp)

Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow (0, +\infty)$ la *funzione esponenziale* a base e (Funzione esponenziale e Logaritmica > ^8c9812), ovvero del tipo

$$f(x) = e^x$$

Allora calcolando il suo rapporto incrementale si avrebbe

$$\begin{aligned} R^f_{x_0} &= \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} \\ &= \frac{e^{x_0}(e^{x-x_0} - 1)}{x - x_0} \end{aligned}$$

Ora, passando al limite per $x \to x_0$, si ha

$$\lim_{x \to x_0} R^f_{x_0}(x) = e^{x_0} \lim_{x \to x_0} \frac{e^{x-x_0} - 1}{x - x_0} = \lim_{y \to 0} \frac{e^y - 1}{y} = e^{x_0} \cdot 1 = e^{x_0}$$

Pertanto

$$\boxed{(e^x)' = e^x}$$

#Osservazione

Osservazione 1.4. (la peculiarità di exp)

Da qui notiamo che se $f(x) = e^x$ allora vale che

$$f'(x) = f(x)$$

ed è l'*unica* funzione per cui vale questa.
Infatti *"l'esponenziale risolve l'equazione differenziale"*

$$f = f'$$

Funzione logaritmica

#Esempio

Esempio 1.5. (funzione log)

Sia $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ la *funzione logaritmica* a base e (Funzione esponenziale e Logaritmica > ^16fe54), ovvero del tipo

$$f(x) = \ln x$$

Allora prendendo il suo rapporto incrementale si ottiene

$$\begin{aligned} R^f_{x_0}(x) &= \frac{\ln x - \ln x_0}{x - x_0} \\ &= \frac{\ln(\frac{x}{x_0})}{x - x_0} \\ &= \frac{\ln(\frac{x - x_0 + x_0}{x_0})}{x - x_0} \\ &= \frac{\ln(1 + \frac{x - x_0}{x_0})}{x - x_0} \\ &= \frac{\ln(1 + \frac{x - x_0}{x_0})}{\frac{x - x_0}{x_0}} \cdot \frac{1}{x_0} \end{aligned}$$

Notiamo che, passando al limite $x \to x_0$ si ha uno dei *limiti fondamentali* (Esempi di Limiti di Funzione > ^35600e), ovvero

$$\lim_{y \to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1$$

Allora si ha

$$\lim_{x \to x_0} R^f_{x_0}(x) = 1 \cdot \frac{1}{x_0} = \frac{1}{x_0}$$

Pertanto

$$\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}}$$

#Osservazione

Osservazione 1.5. (dimostrazione alternativa di exp'(x), approfondimento personale)

Approfondimento personale tratto da: Le Matematiche di A. D. Aleksandrov, A. N. Kolmogorov, M. A. Lavrent'ev (1974)

Notiamo che è possibile *"dimostrare"* la derivata $(e^x)' = e^x$, usando il *teorema sulla derivata della funzione inversa* (Proprietà delle derivate > ^97198c) e conoscendo la derivata del logaritmo naturale.
Infatti, supponiamo di avere la funzione $y = e^x$ e la sua inversa $x = \ln y$.
Ora, usando il teorema sulla derivata della funzione inversa, si ha

$$(a^x)'_x = \frac{1}{\log_a(y)'_y} = \frac{1}{\frac{1}{y}} = y = e^x$$

---

riferimento bibliografico: pagina 123

#Osservazione

Osservazione 1.5.b. (dimostrazione della derivata della funzione potenza in R)

Finalmente abbiamo abbastanza strumenti per poter calcolare la derivata di

$$x^\gamma, \gamma \in \mathbb{R}$$

Prima di tutto consideriamo questa *potenza* in termini di *esponenziali* e *logaritmi*;

$$x^\gamma = e^{\gamma \ln x}$$

Quindi le derivate di entrambe sono le stesse; deriviamo dunque la funzione del membro destro.

$$(e^{\gamma \ln x})' = \frac{\gamma}{x} e^{\gamma \ln x} = \gamma \frac{x^\gamma}{x} = \gamma x^{\gamma - 1}$$

Pertanto

$$(e^{\gamma \ln x})' = \boxed{(x^\gamma)' = \gamma x^{\gamma-1}}$$

Funzioni trigonometriche seno, coseno e tangente

#Esempio

Esempio 1.6. (funzione seno)

Sia $f(x) = \sin(x)$ la *funzione seno* (Funzioni trigonometriche > ^dd4b35) e vogliamo calcolare la sua *derivata*. Ricordandoci le *formule di prostaferesi* (Funzioni trigonometriche > ^5d221c), svolgiamo i calcoli.

$$\begin{aligned} R_{x_0}^f(x) &= \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} \\ &= \frac{2\sin(\frac{x-x_0}{2})\cos(\frac{x-x_0}{2})}{x - x_0} \\ &= \frac{\sin(\frac{x-x_0}{2})}{\frac{x-x_0}{2}} \cdot \cos(\frac{x+x_0}{2}) \end{aligned}$$

Passando al *limite* di $x \to x_0$, ricordiamoci dei *limiti notevoli* (in particolare quella di $\frac{\sin(f(x))}{f(x)}$, abbiamo

$$\lim_{x \to x_0} R_{x_0}^f(x) = 1 \cdot \cos x_0$$

Pertanto

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x}$$

#Esempio

Esempio 1.7. (funzione coseno)

Analogamente al ragionamento svolto sopra, avendo $f(x) = \cos x$ si avrebbe

$$\boxed{(\cos x)' = -\sin x}$$

#Esempio

Esempio 1.8. (funzione tangente)

Applicando la *proprietà sulla derivata di quozienti* si potrebbe derivare $\tan x$ (ove derivabile) e ottenere

$$\boxed{(\tan x)'} = \frac{(\cos x)^2 + (\sin x)^2}{(\cos x)^2} = \boxed{\frac{1}{(\cos x)^2} = 1 + (\tan x)^2}$$

Funzioni trigonometriche arcoseno, arcocoseno, arcotangente

#Esempio

Esempio 1.9. (funzione arcoseno)

Voglio calcolare la derivata di $\arcsin x$.
Allora, usando la *proprietà sulla derivata delle inverse* ho

$$(\arcsin)'(\sin x) = \frac{1}{\cos x}$$

Ora, sostituendo $y = \sin x \iff x = \arcsin y$, ho

$$(\arcsin')(y) = \frac{1}{\cos(\arcsin y)}$$

Ma considerando gli *intervalli di definizione* della funzione $\arcsin$, ovvero $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, notiamo che la funzione $\cos$ è *sempre positiva*. Pertanto, facendo valere la relazione fondamentale $\cos^2 + \sin^2 = 1$, ho

$$(\cos u)^2 + (\sin u)^2 = 1 \implies \cos = \sqrt{1 - (\sin u)^2}$$

Quindi sostituendo u con $\arcsin y$, alla fine ho

$$(\arcsin')(y) = \frac{1}{\cos(\arcsin y)} = \frac{1}{\sqrt{1 - (\sin(\arcsin(y)))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

Pertanto infine abbiamo

$$\boxed{(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}$$

#Esempio

Esempio 1.10. (funzione arcocoseno)

Analogamente si dimostra che la derivata della funzione *arcocoseno* è

$$-(\arcsin x)' = \boxed{(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

#Esempio

Esempio 1.11. (funzione arcotangente)

Ora vogliamo calcolare la derivata di $\arctan x$ (funzione *arcotangente*).

$$(\arctan(x))'(\tan x) = \frac{1}{(\tan x)'} = \frac{1}{1+(\tan x)^2}$$

Pertanto

$$\boxed{(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}}$$

2. Funzioni non derivabili

Valore assoluto

#Esempio

Esempio 2.1. (funzione valore assoluto)

Vediamo un esempio basilare del fatto che *non è vera* l'implicazione

$$f \text{ continua} \implies f \text{ derivabile}$$

Infatti consideriamo $f(x) = |x|$.
Notiamo che questa funzione è *continua* in x_0; in particolare per 0, dato che $f(0) = 0$.
Tuttavia la storia è diversa per il *limite* del *rapporto incrementale*: considerando prima $R^f_{x_0}(x)$, abbiamo

$$R^f_{x_0}(x) = \frac{|x|-|x_0|}{x-x_0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 \text{ se } x > 0 \\ -1 \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

A occhio si vede immediatamente che il *limite* di questa funzione non esiste più per $x \to 0$; infatti prendendo il limite *destro* e *sinistro*, abbiamo

$$\begin{cases} \lim_{x \to x_0^-} R^f_{x_0}(x) = -1 \\ \lim_{x \to x_0^+} R^f_{x_0}(x) = 1 \end{cases} \implies \nexists \lim_{x \to x_0} R^f_{x_0}(x)$$

Pertanto $f'(0)$ *non è definita*.

#Osservazione

Osservazione 2.1. (però la funzione è derivabile altrove)

Però usando al *definizione locale* di derivabilità notiamo che $f(x)$ è comunque *derivabile* per $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Infatti $f'(x) = 1$ se $x > 0$, $f'(x) = -1$ se invece $x < 0$.

Funzione di Weierstraß

#Esempio

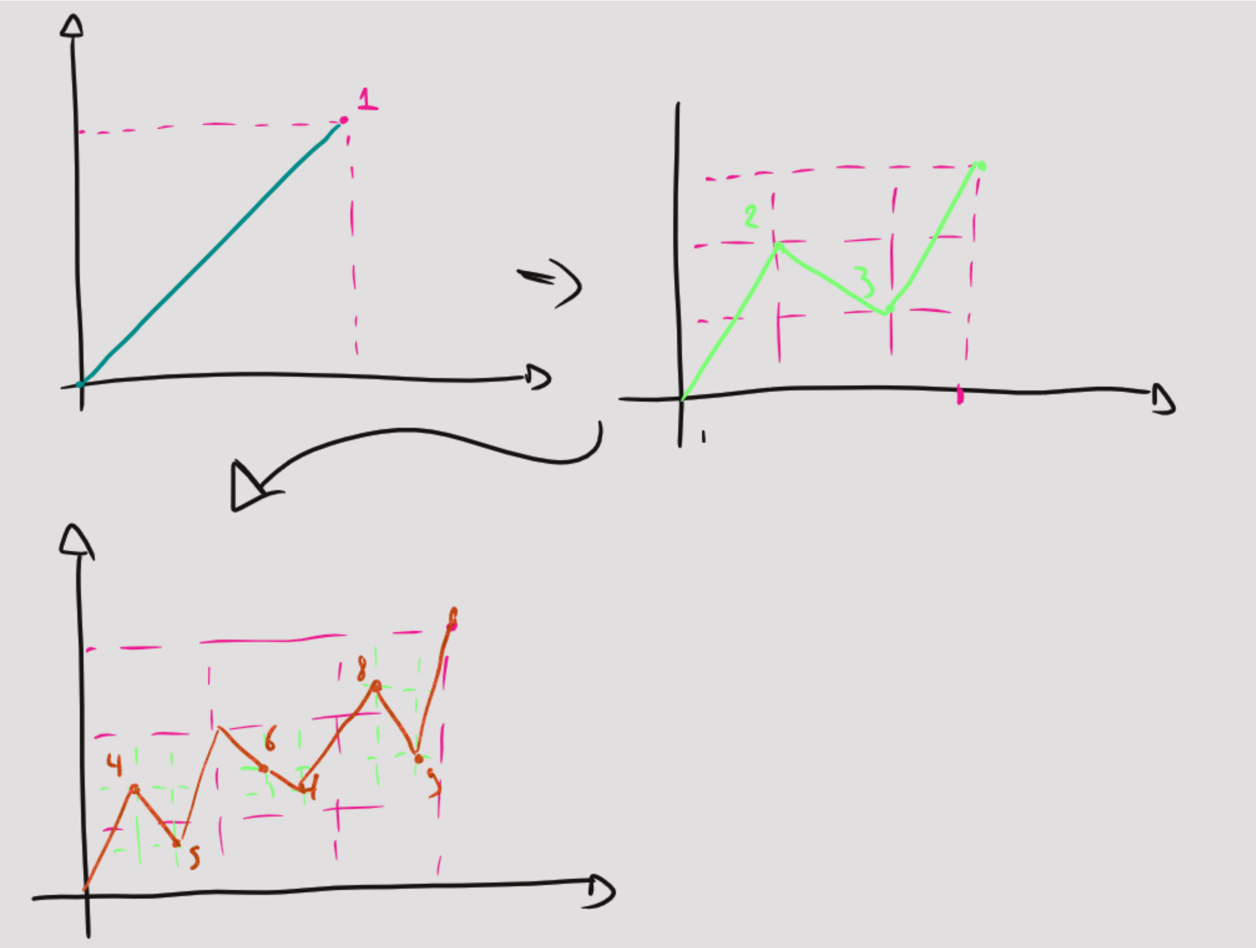
Esempio 2.2. (funzione di Weierstraß)

Abbiamo trovato una funzione continua ma *non derivabile* per un punto. Ma allora esistono comunque funzioni *continue* ma *non derivabili* dappertutto? Ovvero *derivabili* da nessuna parte.
Questo problema è stato risolto dal celebre matematico K. Weierstraß nel 1872 riuscendo a definire una funzione *continua* ma *derivabile da nessuna parte*.

L'idea di questa funzione consiste nella seguente: immaginiamo, sul piano cartesiano, di avere un'elastico immaginario fissato da *due punti*. Ora, suddividiamo l'area formata da due punti in *tre sotto-aree quadrate*.

Ora, prendendo il punto *sinistro alto* e *destro basso* del quadrato centrale, fissiamo altri *due punti* e ricreiamo l'elastico.
Poi ricorsivamente ripeto questa procedura per le sotto aree dove passa il nuovo elastico, dandoci così un elastico *"spigoloso dappertutto"* (quindi derivabile da nessuna parte).
L'idea grafica viene raffigurata nella *figura 2.2.*.

FIGURA 2.2. (*Funzione di Weierstraß*)



Frattali

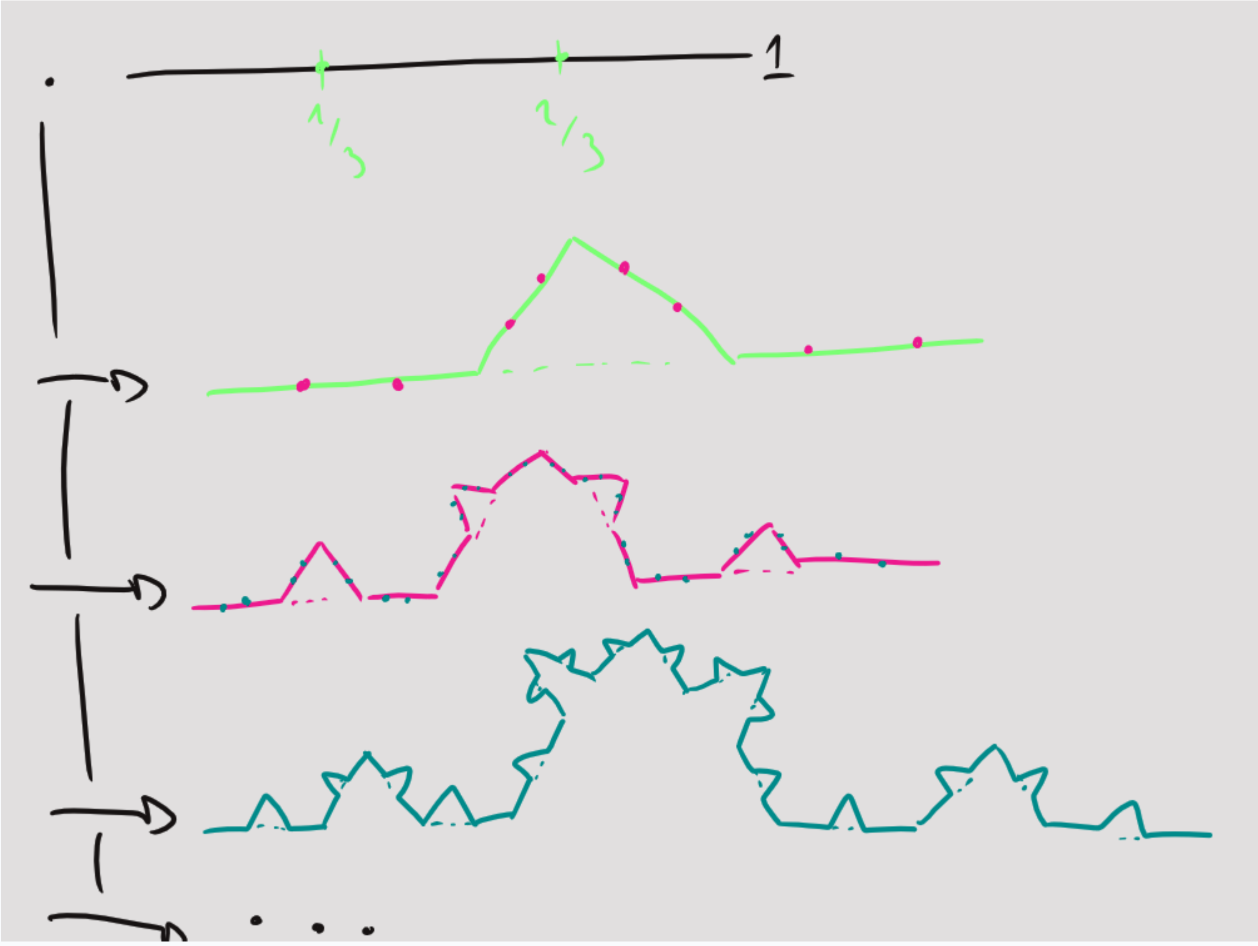
Osservazione 2.2. (frattale)

Notiamo che con la generazione della funzione di Weierstraß, come risultato otteniamo un *frattale*, che è una forma geometrica speciale: infatti il frattale acquisisce rilevanza particolare nell'arte contemporanea, come ad esempio con la "body art" di J. Pollock

La proprietà *"speciale"* dei frattali è quella dell'*"auto similarità"*, ovvero che *"zoomando"* all'interno di questi frattali vediamo certi schemi geometrici ripetere.

Come esempi di frattali abbiamo la *curva di Koch* (*figura 2.2.b.*) e l'*insieme di Mandelbrot* (Forma Trigonometrica dei Numeri Complessi > ^1a7f5c).

FIGURA 2.2.b. (*Curva di Koch*)



C2. Conseguenze dei teoremi di Cauchy e di Lagrange

Conseguenze del teorema di Cauchy e di Lagrange

Conseguenze che discendono dai teoremi di Cauchy e Lagrange: conseguenze pratiche e conseguenze di natura "matematica".

---

1. Considerazioni Pratiche e Quotidiane

Lagrange e il sistema "Tutor"

#Osservazione

Osservazione 1.1. (Lagrange e il sistema "Tutor")

Dal 2004 è stato introdotto il cosiddetto sistema *"Tutor"* sulle autostrade italiane, al fine di determinare se stiamo rispettando le limitazioni di velocità o meno.

Il sistema *Tutor* consiste nel seguente: lungo l'autostrada si fissano piazzano due telecamere, tra le quali c'è una distanza s. Allora queste fotocamere fotografano le nostre automobili e registrano i seguenti dati: la targa del veicolo e l'istante del tempo in cui siamo stati ripresi. L'idea di questo sistema viene raffigurato nella *figura 1.1.*.

Quindi una volta passate entrambe le telecamere, le autorità hanno dei dati per determinare una misura importante: la nostra *velocità media* (Introduzione al Calcolo Differenziale > ^190e60).

Infatti loro hanno

$$v_m = \frac{s}{t_2 - t_1} = R_{t_2}^x(t_1)$$

Ipotizziamo di aver infranto la legge e di aver superato ad un certo punto la velocità massima 130 km/h, ricevendo così una multa. Tuttavia, notiamo qualcosa: una parte del testo afferma che secondo il *codice della strada* (CdS) la *velocità istantanea* non può essere superata di 130 km/h: quindi c'è un errore! Loro hanno semplicemente misurato la nostra *velocità media*, non quella *istantanea*!

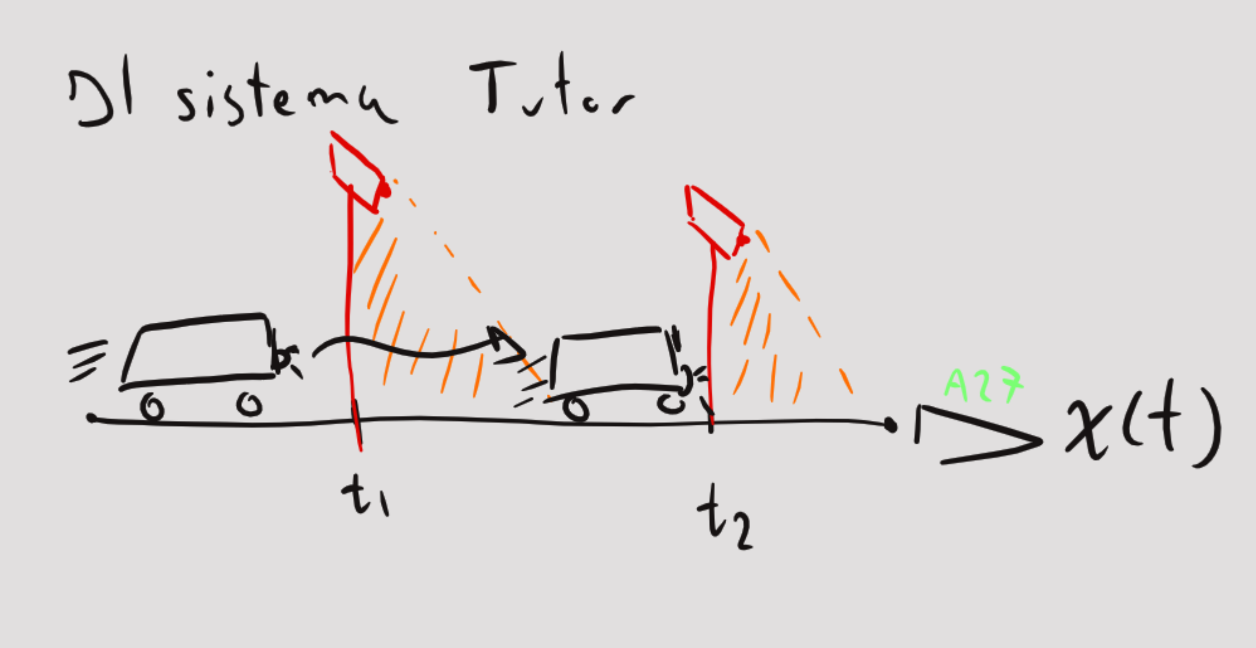
Allora presentiamo un ricorso al giudice per farci annullare la muta; inaspettatamente il giudice si rivela di essere un esperto di matematica e richiama il *teorema di Lagrange* (Teorema di Lagrange > ^ef03c2), affermando che se la nostra velocità media v_m ha ad un certo punto superato il limite, allora c'è almeno un istante di tempo t_ξ tale che la velocità istantanea misurata è maggiore del limite previsto.

Ovvero

$$v_m = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} > 130 \implies \exists t_\xi \in]t_2, t_1[: x'(t_\xi) = v(t_\xi) > 130$$

Quindi, alla fine niente ricorso per noi.

FIGURA 1.1. (*Idea grafica del sistema Tutor*)



Cauchy nel nostro spazio tridimensionale

#Osservazione

Osservazione 1.2. (Cauchy in 3D)

Dall'interpretazione geometrica di Cauchy in $\mathbb{R}^2$ (Teorema di Cauchy > ^30644e) vediamo due *punti* nello spazio, la retta secante di questi due punti e per *Cauchy* vediamo che almeno c'è almeno un punto per cui il suo *"vettore velocità"* è parallela a questa retta secante.

Ora ci chiediamo il seguente: *"come funzionerebbe in $\mathbb{R}^3$?"*

Allora in questo caso immaginiamo una situazione simile, solo che ci immaginiamo una mosca che gironzola da un punto iniziale a fino ad un punto finale b, e la retta secante tra a e b sarebbe la *"pendenza"*. La situazione verrà raffigurata nella *FIGURA 1.2.*.
Varrebbe comunque il *teorema di Cauchy* qua? La risposta è *no*.

Infatti se ragioniamo sulle *strade*, vediamo che spesso le strade di montagne tendono ad avere molte curve e tornanti; queste servono infatti a *"diminuire"* la pendenza dal punto di partenza fino alla montagna! Infatti, se *Cauchy* valesse anche qui, saremmo tutti costretti ad un certo punto di salire il passo con la stessa *"pendenza"* della *"retta"* che collegherebbe il punto di partenza fino alla destinazione.

Un caso più eclatante è quello delle *scale a chiocciola*; infatti queste rendono possibile per noi di salire verticalmente da un punto all'altro senza dover affrontare pendenze incamminabili.

I gradini di queste scale servono ad *"appiattire"* la pendenza; l'idea di questo concetto viene raffigurato in *figura 1.3.*.

FIGURA 1.2. (*Idea della situazione*)

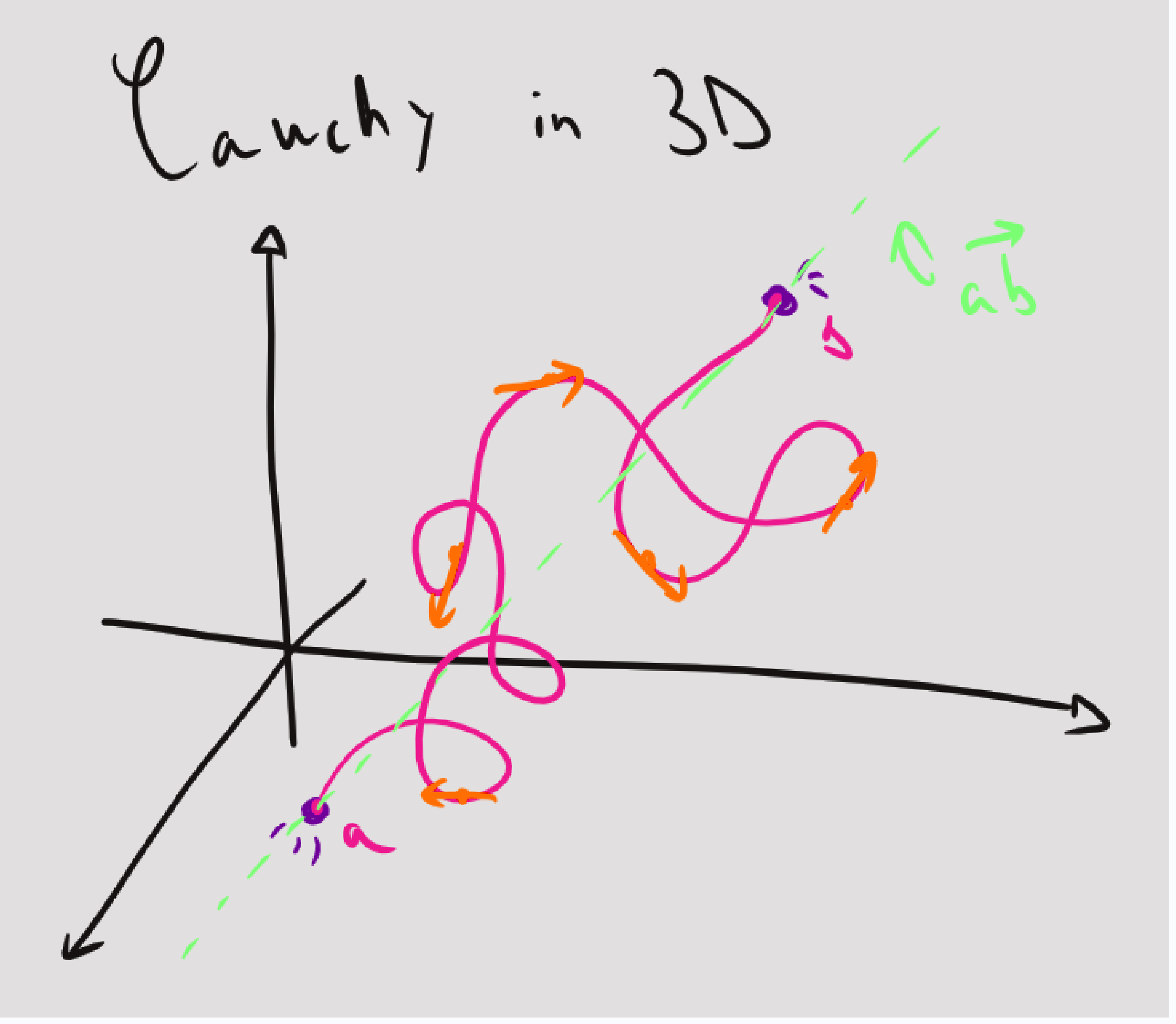
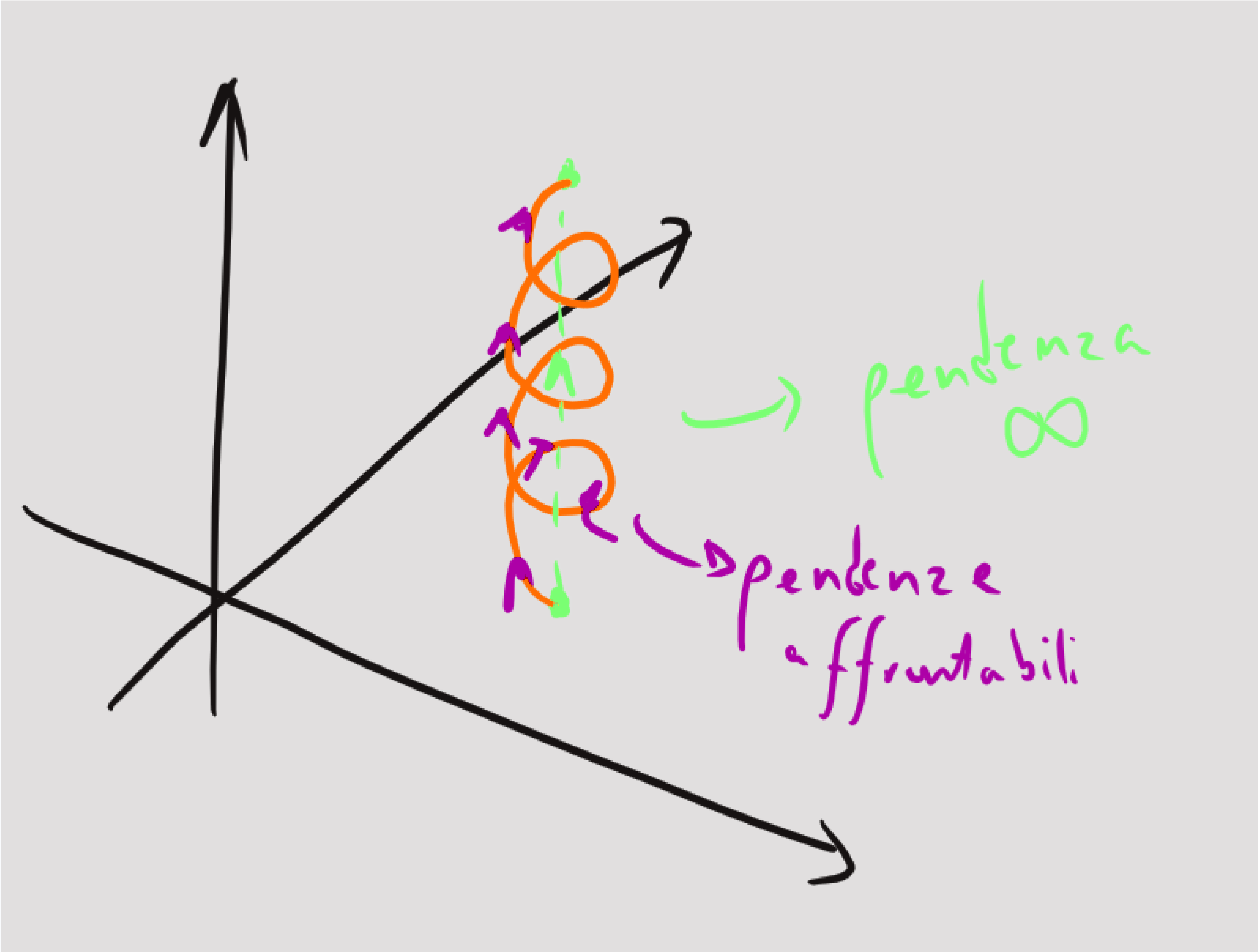


FIGURA 1.3. (*Scale a chiocciola*)



2. Considerazioni "Astratte"

Derivate nulle e funzioni costanti

#Teorema

Teorema 2.1. (derivata nulla è sempre una costante)

Suppongo $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$, f *derivabile* in I (Derivata e derivabilità > ^478a87).
Supponendo che $\forall x \in I, f'(x) = 0$ allora si ha che $f(x) = c \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{f'(x) = 0 \implies f(x) = c \in \mathbb{R}}$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *teorema 2.1.* (^19eb72)
Dimostriamo questo teorema con *Lagrange* (Teorema di Lagrange > ^ef03c2) e usando il ragionamento *per assurdo*.
Partiamo supponendo $f'(x) = 0$.
Ora supponiamo, per assurdo, che f sia una funzione *non costante*; ovvero ci sono due punti $x_1, x_2 \in I$ tali che le loro immagini sono diverse.

$$\exists x_1, x_2 \in I : f(x_1) \neq f(x_2)$$

Ora posso applicare il *teorema di Lagrange* sull'intervallo $[x_1, x_2]$; questo è ammissibile in quanto abbiamo f *derivabile* su I, pertanto f è anche *continua* su I (Proprietà delle derivate > ^dac6dc). Inoltre $[x_1, x_2] \subseteq I$.
Allora per il *teorema di Lagrange*,

$$\exists \xi \in \ ]x_1, x_2[\ : f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Tuttavia notiamo che il numeratore non può essere mai 0 in quanto per ipotesi $f(x_1), f(x_2)$ sono diverse e analogamente neanche il denominatore può essere mai 0.
Allora si avrebbe $f'(\xi) \neq 0$; però questo è impossibile in quanto questo contraddirebbe con la tesi $f'(\xi) = 0$. ■

Osservazione 2.1. (questo teorema non vale se abbiamo dei buchi)

Notiamo che per essere vero questo teorema, I deve essere definita su un *intervallo*, perché senno avrei dei *"buchi"* su cui la funzione può compiere dei *"salti"*.

Crescenza e derivate

#Teorema

Teorema 2.2. (la derivata positiva significa funzione crescente)

Sia $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *derivabile*.
Allora f è *crescente* su I se e solo se la sua derivata è positiva;

$$\boxed{f \text{ crescente su } I \iff \forall x \in I, f'(x) \geq 0}$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *teorema 2.2.* (^45aa1e)
" $\implies$ ": Supponiamo f *crescente* su I. Allora fissando $x_0 \in I$, posso considerare il *rapporto incrementale* $R^f_{x_0}(x)$;

$$R^f_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Però visto che f crescente sappiamo che se $x > x_0$, allora $f(x) \geq f(x_0)$; invece se $x < x_0$ allora $f(x) \leq f(x_0)$. Pertanto in entrambi i casi abbiamo la divisione di due *segni concordi*, quindi il rapport incrementale sarà sempre positivo per $x \neq x_0$.
Quindi $R^f_{x_0}(x) \geq 0$.

Prendendo il limite

$$\lim_{x \to x_0} R^f_{x_0}(x)$$

possiamo usare la *permanenza del segno* (Teoremi sui Limiti di Funzione > ^06a2e3) *"alla rovescia"* per dire che anche il *limite* del rapporto incrementale, che non è altro che la *derivata* $f'(x_0)$, è sempre *positiva*.
Pertanto abbiamo verificato che

$$f \text{ crescente } \implies R^f_{x_0}(x) \geq 0 \implies f'(x) \geq 0$$

" $\impliedby$ ": Sia la derivata $f'(x)$ *sempre* positiva, per $\forall x \in I$.
Allora per assurdo suppongo che f *non* sia crescente: ovvero abbiamo una situazione in cui almeno due punti non sono *"più alti dell'altro"*.

$$\exists x_1, x_2 \in I : x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$$

Allora posso applicare il *teorema di Lagrange* (Teorema di Lagrange > ^ef03c2) sull'intervallo $[x_1, x_2]$ per trovare l'assurdo come priva: infatti

$$\exists \xi \in \;]x_1, x_2[\; : \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

e per ipotesi questa frazione è *negativa*, in quanto abbiamo la moltiplicazione di due segni *discordi*. Però questo è assurdo in quanto all'inizio abbiamo supposto $f'(x)$ sempre positiva.

C3. Derivata seconda per determinare la convessità di una funzione

Caratterizzazione delle Funzioni Convesse

Teoremi di caratterizzazione per funzioni convesse; una mediante rette, l'altra mediante la derivata seconda

---

1. Primo teorema di caratterizzazione mediante le rette

#Teorema

Teorema 1.1. (di caratterizzazione mediante le rette)

Sia $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, I *intervallo*.
Allora sono equivalenti i seguenti:

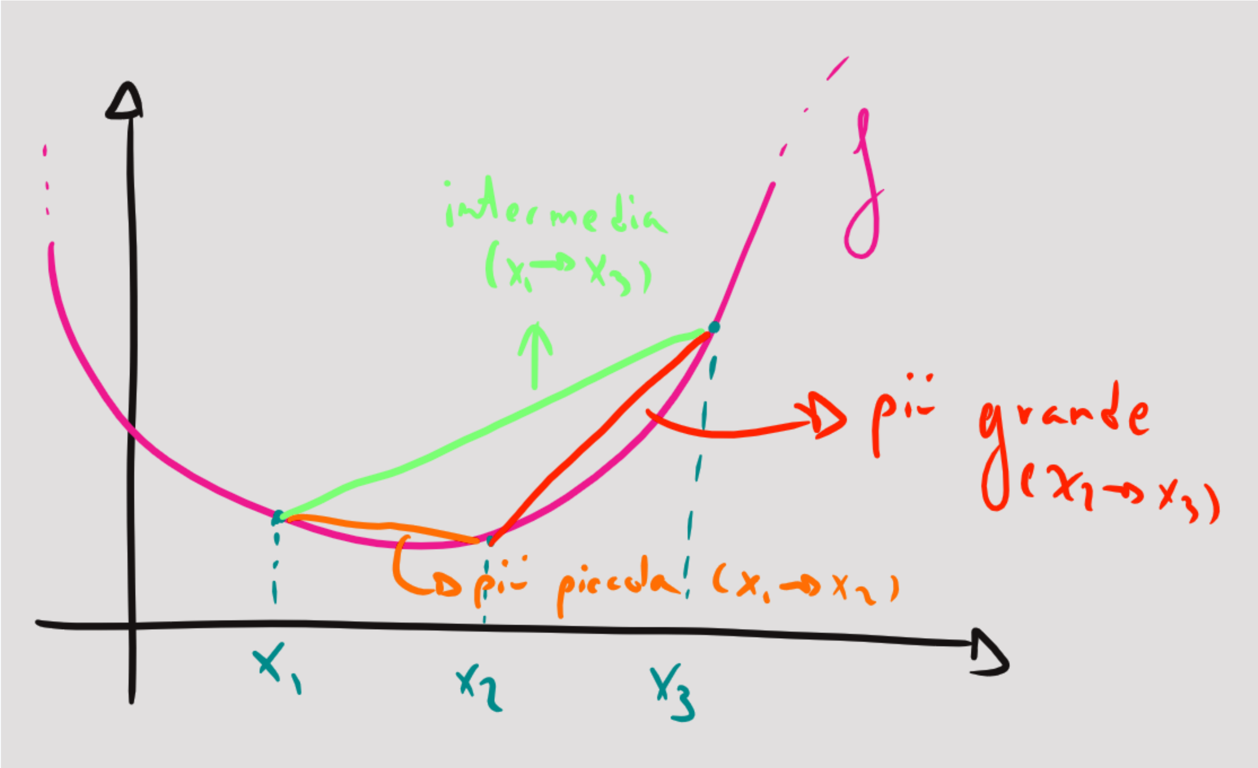
$$
\begin{gathered}
1).\ f \text{ convessa} \\
\Updownarrow \\
2).\ \forall x_1, x_2, x_3 \in I, x_1 < x_2 < x_3 \\
\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \\
\Updownarrow \\
3).\ \forall x_1, x_2, x_3 \in I, x_1 < x_2 < x_3 \\
\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}
\end{gathered}
$$

#Osservazione

Osservazione 1.1. (interpretazione grafica)

Il significato geometrico di questo teorema vuol semplicemente dire che, quando prendiamo tre punti di una funzione concava e prendiamo le loro *rette secanti passanti tra di loro*, abbiamo sempre una retta con la *"pendenza più grande"*, con la *"pendenza intermedia"* e con la *"pendenza più piccola"*.
Nel caso della *2)* prendiamo *tre* pendenze, invece nel caso della tre *"dimentichiamo"* una di queste pendenze per prendere in considerazione solo due.

FIGURA 1.1. (*Significato geometrico*)



#Osservazione

Osservazione 1.2. (sulle implicazioni)

Al fine della dimostrazione osserviamo che

$$1 \iff 2 \iff 3$$

è equivalente a dire che

$$1 \implies 2 \implies 3 \implies 1$$

in quanto così si *"completa il giro delle implicazioni"*.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *teorema 1.1.* (^742cae)
Da quanto visto nell'*osservazione 1.2.* (^b50a27) dobbiamo semplicemente dimostrare *tre* implicazioni; $1 \implies 2$, $2 \implies 3$ e infine $3 \implies 1$.
$1 \implies 2$. Prendendo i punti $x_1 < x_2 < x_3$ e un qualsiasi *"scalare"* $\lambda \in [0, 1]$, notiamo che x_2 sta tra x_1, x_2; quindi x_2 può essere scritta in *termini di combinazione lineare di* x_1, x_3 (Combinazione Lineare > ^8113de). Ovvero

$$x_2 = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_3$$

Ora, risolvendo l'equazione in λ, ottengo

$$\lambda = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} \iff 1 - \lambda = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}$$

(*i calcoli sono lasciati da svolgere per esercizio*)
Ora applico la *condizione di convessità* (Funzione Convessa > ^f4cbdd) a x_1, x_3 con λ appena calcolato.

$$
\begin{aligned}
f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_3) &\leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_3) \\
f(x_2) &\leq \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3) \\
(*) \implies &\boxed{(x_3 - x_1)f(x_2) \leq (x_3 - x_2)f(x_1) + (x_2 - x_1)f(x_3)}
\end{aligned}
$$

(*anche qui i conti sono lasciati da svolgere per esercizio*)
Teniamo la parte segnata come $(*)$ fissata.
Per dimostrare il *primo pezzo* della tesi di *2)* usiamo $(*)$ sommando ambo i lati con $(x_3 - x_1)f(x_1)$;

$$
\begin{aligned}
(*)\ (x_3 - x_1)f(x_2) &\leq (x_3 - x_2)f(x_1) + (x_2 - x_1)f(x_3) \\
(x_3 - x_1)f(x_2) - (x_3 - x_1)f(x_1) &\leq (x_3 - x_2)f(x_1) + (x_3 - x_1)f(x_1) + (x_2 - \\
(x_3 - x_1)(f(x_2) - f(x_1)) &\leq (-x_2 + x_1)f(x_1) + (x_2 - x_1)f(x_3) \\
&\leq (f(x_3) - f(x_1))(x_2 - x_1) \\
\implies &\boxed{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}}
\end{aligned}
$$

Analogamente si dimostra il *secondo pezzo* della tesi di *2)*. (da svolgere al lettore per esercizio)
Infine ho completato la dimostrazione di $1 \implies 2$.
$2 \implies 3$. Questa è banale da dimostrare ed è immediata da dimostrare.
$3 \implies 1$. Per ipotesi ho il seguente:

$$
\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}
$$

Allora scrivo la *combinazione lineare* $x_1 < \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 < x_2$ (ovvero $x_1 = x_1; x_2 = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2; x_3 = x_2$) per $\lambda \in [0,1]$; ora riapplico il *punto 3)*, ottenendo così la tesi di *1)*. ■

2. Secondo teorema di caratterizzazione mediante la derivata seconda

#Teorema

Teorema 2.1. (di caratterizzazione mediante la derivata seconda)

Sia $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, f *derivabile* (Derivata e derivabilità > ^12c1df).
Allora

$$\boxed{f \text{ convessa } \iff f' \text{ crescente } \iff \forall x_0 \in I, f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) \leq f(x}$$

#Corollario

Corollario 2.1. (di caratterizzazione mediante il segno della derivata seconda)

Sia $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2$ (Derivata Successiva e Classe C > ^dbae48); ovvero f derivabile fino al *secondo ordine* f''.
Allora

$$\boxed{f \text{ convessa } \iff f' \text{ crescente } \iff f''(x) > 0, \forall x \in I}$$

DIMOSTRAZIONE del *teorema 2.1.* (^318646)
Questo è un teorema *"se e solo se"* (per le prime due condizioni), quindi si mira a mostrare *entrambi* i versi della doppia implicazione.
" $\Longleftarrow$ ". Sia f' *crescente*.
Allora prendo $x_1, x_2, x_3 \in I : x_1 < x_2 < x_3$.
Uso il *teorema di Lagrange* (Teorema di Lagrange > ^ef03c2) sull'intervallo $[x_1, x_2]$ e $[x_2, x_3]$; allora esistono ξ_1, ξ_2 tali che

$$\begin{cases} \exists \xi_1 \in (x_1, x_2) : \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(\xi_1) \\ \exists \xi_2 \in (x_2, x_3) : \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} = f'(\xi_2) \end{cases}$$

Però le condizioni di $\xi_{1,2}$ prescrivono che dev'essere vera

$$x_1 < \xi_1 < x_2 < \xi_2 < x_3 \implies \xi_1 < \xi_2$$

Allora dato che f' è *crescente*, si ha

$$\xi_1 < \xi_2 \implies f'(\xi_1) < f'(x_2)$$

Pertanto

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}, \forall x_1 < x_2 < x_3 \in I$$

che è esattamente la *condizione di convessità*.
" $\implies$ ". Sia f *convessa*.
Prendendo un *qualsiasi* punto x_ξ tra x_1, x_2 notiamo che per la *condizione di convessità* la *pendenza* tra x_ξ, x_2 sarà *sempre* più piccola della pendenza di x_2.
Allora graficamente (*figura 2.1.*) si evince che

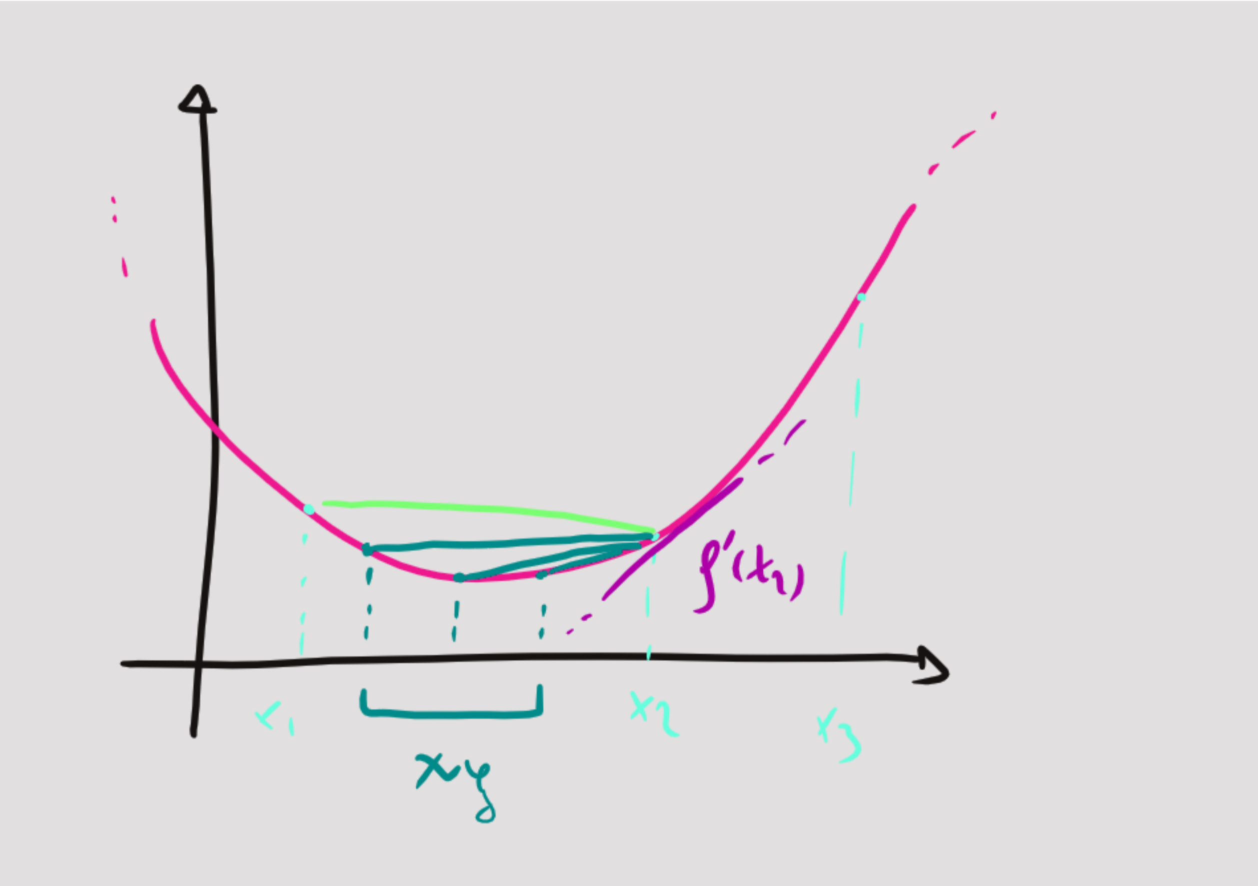
$$x_1 < x_2 \implies f'(x_1) \leq f'(x_2)$$

Analogamente si dimostra che

$$x_2 < x_3 \implies f'(x_2) \leq f(x_3) \blacksquare$$

Invece la terza implicazione, ovvero che per ogni *tangente* del punto x_0 sta sempre sotto il grafico, deriva dalla *condizione sulle pendenze* (^742cae) e dal *teorema di Lagrange* (Teorema di Lagrange > ^ef03c2).

FIGURA 2.1. (*Idea grafica della dimostrazione dell'implicazione* $\implies$)



#Osservazione

Osservazione 2.1. (interpretazione grafica alternativa, approfondimento personale)

Approfondimento personale tratto da: Le Matematiche di A. D. Aleksandrov, A. N. Kolmogorov, M. A. Lavrent'ev (1974)

Volendo si può dare una interpretazione grafica al fatto che la *il segno della derivata prima* attribuisce la *concavità* o la *convessità* di una funzione; però prima consideriamo il fatto che *il segno della derivata prima* determina la *crescenza* o la *decrescenza* della funzione.

Per esempio prendiamo una funzione con derivata *sempre* positiva: pertanto è crescente e può avere due possibili curve (escludendo la rettilinea) raffigurate

in *figura 2.2.*.
Se vogliamo capire come si comporta la curva, basta pensare che la *derivata* della *derivata* non è altro che il *"verso"* per cui cresce (o scende) la derivata stessa!

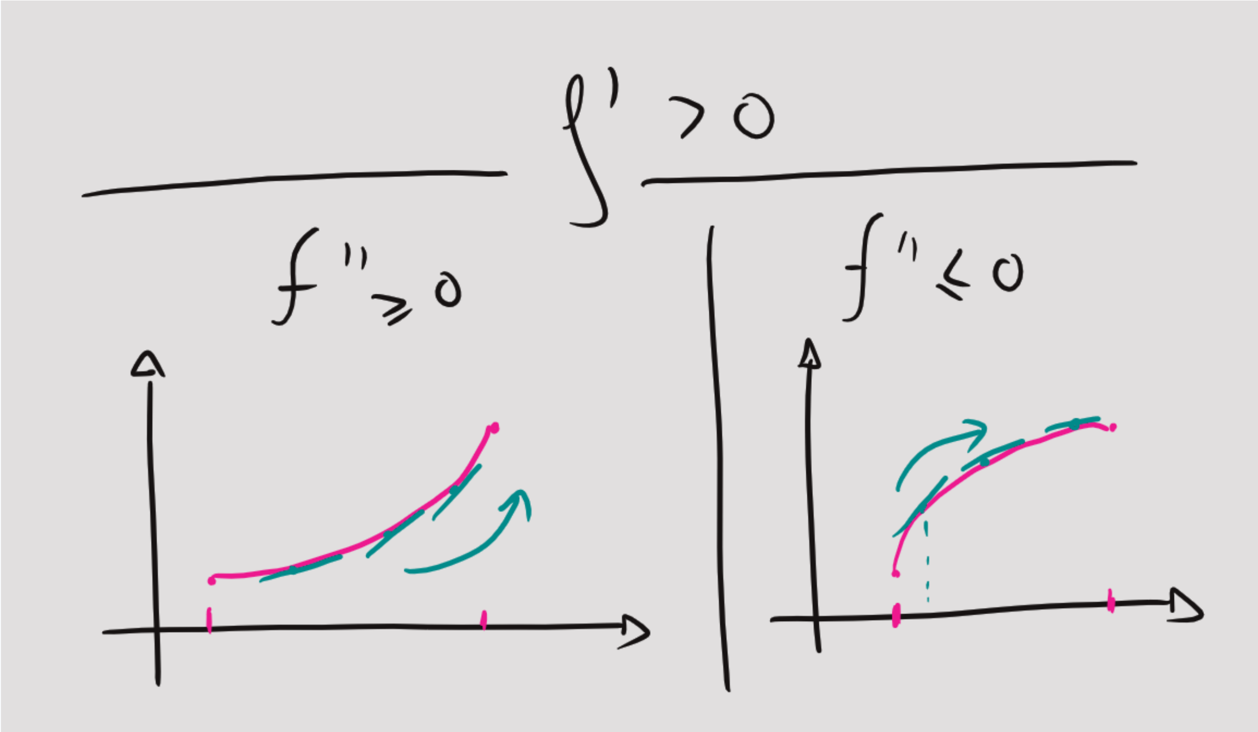
A sinistra del disegno, muovendoci lungo la curva vediamo che la *derivata* della funzione continua a man mano incrementare; si muove quindi verso l'*alto*.
Pertanto si dice che la funzione è *"convessa verso il basso"* o *"concava verso l'alto"*.
A destra, invece, si avrebbe che la *derivata* continua a decrescere fino a (quasi) appiattirsi completamente; si muove quindi verso il *"basso"*, suggerendoci così la nozione di *"convessa verso l'alto"* o *"concava verso il basso"*.
Analogamente questo ragionamento vale lo stesso per le funzioni decrescenti con derivata di segno negativo.

Pertanto, il segno della derivata seconda *determina* il modo in cui si sviluppa la curva della funzione.

---

*'La derivata seconda ha anche un semplice significato geometrico.
[...], così dal segno si può giudicare da quale parte si incurva il grafico della funzione.
Supponiamo, per esempio, che in un dato intervallo la derivata seconda sia ovunque positiva; [...]. Pertanto, muovendoci lungo la curva questa si incurva costantemente dalla stessa parte, precisamente verso l'alto, ed è pertanto, come si dice, "convessa verso il basso". Viceversa, in una parte della curva dove la derivata seconda sia negativa ([...]) il grafico della funzione è "convesso verso l'alto" '* - riferimento bibliografico all'inizio, pp. 134-136

FIGURA 2.1. (*Interpretazione grafica alternativa*)



Punto di flesso

#Definizione

Definizione 2.1. (punto di flesso)

Sia $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$.
Sia $x_0 \in I$; supponiamo che f sia *continua* in x_0.
Allora x_0 si dice *punto di flesso* se si verificano entrambe le condizioni:

$$\begin{cases} x_0 \in I \cap (-\infty, x_0), f \text{ è convessa (concava)} \\ x_0 \in I \cap (x_0, +\infty), f \text{ è concava (convessa)} \end{cases}$$

#Osservazione

Osservazione 2.1.

Se $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$, f derivabile fino al *secondo ordine*, e supponendo che *prima di* x_0 si ha $f''(x_0) \leq 0$ e *dopo di* x_0 si ha $f''(x_0) \geq 0$, allora x_0 è di *flesso*. Vale lo stesso se si ha il viceversa.

C4. Modelli scelti di problemi sulle derivate

Modelli di problemi su derivate

Esempi di problemi con le derivate.

---

1. Problema delle tangenti di un punto

Modello 1.1. (trovare la tangente di un punto di una funzione)

Sia f una *funzione derivabile* (Derivata e derivabilità > ^6e7606) in un punto x_0.
Dato che è *derivabile* nel punto x_0, allora dev'esserci una tangente su quel punto.
Quindi, supponiamo che il nostro problema è di quello *trovare* la retta r che definisce la *tangente* sul punto x_0.

1. Impostiamo la retta come
$$r : y = mx + q$$
2. Naturalmente il valore m è la derivata di f nel punto x_0; pertanto $m = f'(x_0)$.
3. Poi per definizione la retta tangente r passa per il punto $(x_0, f(x_0))$; facendo i conti ottengo
$$q = f(x_0) - f'(x_0)x_0$$
4. Rimettendo tutto assieme, abbiamo
$$\begin{aligned} r: \ & y = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)(x_0) \\ & \boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)} \end{aligned}$$

2. Ortogonalità della retta tangente di un cerchio e raggio del cerchio

Omessa.

3. Problemi di massimo e/o minimo

Modello 3.1. (problema di massimo e/o minimo)

Suppongo di avere $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, che sia *continua* (Definizione di continuità > ^ddf65d), che sia derivabile (*almeno*) su $]a, b[$.

1. f ha minimo e/o assoluto? Sì, per il *teorema di Weierstraß* (Teoremi sulle funzioni continue > ^918fc1)

2. Dove si trovano questi punti di massimo e/o minimo assoluto? Usiamo il *teorema di Fermat* (Teorema di Fermat > ^8ab68b) per costruire *l'insieme dei punti stazionari* unito agli *"estremi"* P dove

$$P = \{x \in \ ]a,b[\mid f'(x) = 0\} \cup \{a,b\}$$

3. Come faccio ad individuare gli effettivi $\max$, $\min$ di f? Basta prendere $\max(f(P))$ e $\min(f(P))$.

4. Approssimazione delle funzioni in certi valori

Modello 4.1. (approssimazione delle funzioni)

Suppongo di avere una funzione f derivabile (*almeno*) $n+1$ volte, e di voler trovare il valore di una sua immagine. Ad esempio $f(k)$: ora non voglio trovare il suo valore *esatto*, ma solo una sua *approssimazione* con un errore inferiore a 10^n.

1. Considerare il *polinomio di Taylor* (Formula di Taylor > ^556164) $T_n(f, x_0, x)$ per un n *generico* (ovvero incognita) e x_0 opportuno.
2. Considerare la *"distanza"* tra la funzione f stessa (inserita col valore voluto k) e il polinomio di Taylor calcolato in k $T_n(f, x_0, k)$.
3. Maggiorare il *resto di Lagrange* per un certo valore; ovvero trovare un valore che *"limita"* il resto; l'idea di base sarebbe quello di *"stimare il resto (l'errore)"*, trovando il *"valore peggiore"*.

$$\frac{f(\xi)}{k!}(k - x_0)^k$$

4. Tentare di inserire n finché si ottiene che il resto è *minore* di 10^n.
5. Quando ho trovato $\bar{n}$ che soddisfa le mie esigenze, calcolo il polinomio di Taylor

$$T_{\bar{n}}(f, x_0, x)$$

Che è il risultato voluto dalla consegna.

Capitolo VII. Calcolo Integrale

Abstract del Capitolo VII

Il *calcolo integrale* è il *traguardo finale* dell'analisi matematica: studieremo i cosiddetti *integrali*, che potrebbero essere stati accennati al liceo.

Questi argomenti faranno certamente paura, in quanto sia a livello *teorico* che *pratico* saranno molto complessi da maneggiare. Tuttavia tenteremo di avere un approccio *"semplice"* al concetto dell'integrale, partendo dall'*integrazione di Riemann*.

SEZIONE 0. NOMENCLATURE PRELIMINARI

0A. La suddivisione di un intervallo

Suddivisione di un Intervallo

Breve descrizione qui

---

0. Prerequisiti e/o concetti correlati

- Nozione di intervallo: Intervalli
- Operazioni tra insiemi: Operazioni con gli Insiemi

1. Definizione di Suddivisione di un Intervallo

#Definizione

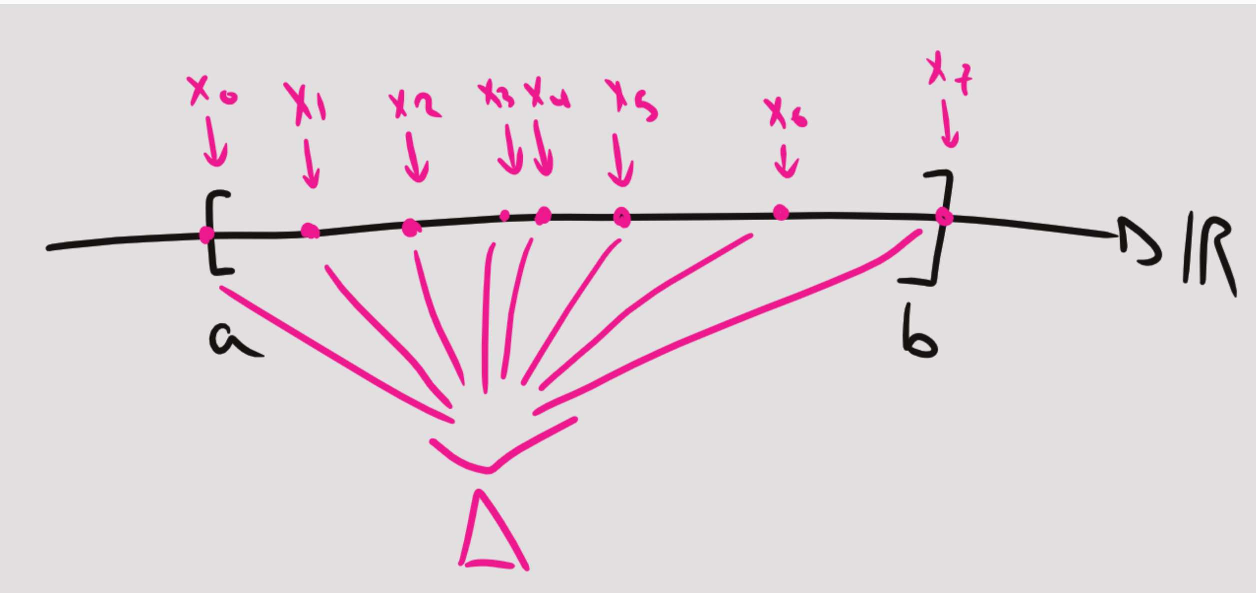
Definizione 1.1. (suddivisione di un'intervallo chiuso e limitato)

Sia $[a,b]$ un *intervallo chiuso e limitato* (Intervalli > ^a1a838), chiamo la *suddivisione* di $[a,b]$ un *insieme finito di punti* dentro $]a,b[$ che contiene sia a che b.
Lo denotiamo con il simbolo Δ e lo definiamo formalmente come

$$\Delta = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b\}$$

L'idea grafica viene raffigurata nella *figura 1.1.*.

FIGURA 1.1. (*Concetto grafico di suddivisione*)



#Definizione

Definizione 1.2. (l'insieme di tutte le suddivisione)

Indico l'insieme di *tutte le suddivisioni* di $[a, b]$ con

$$\mathcal{D}$$

2. Relazioni tra le suddivisioni

#Definizione

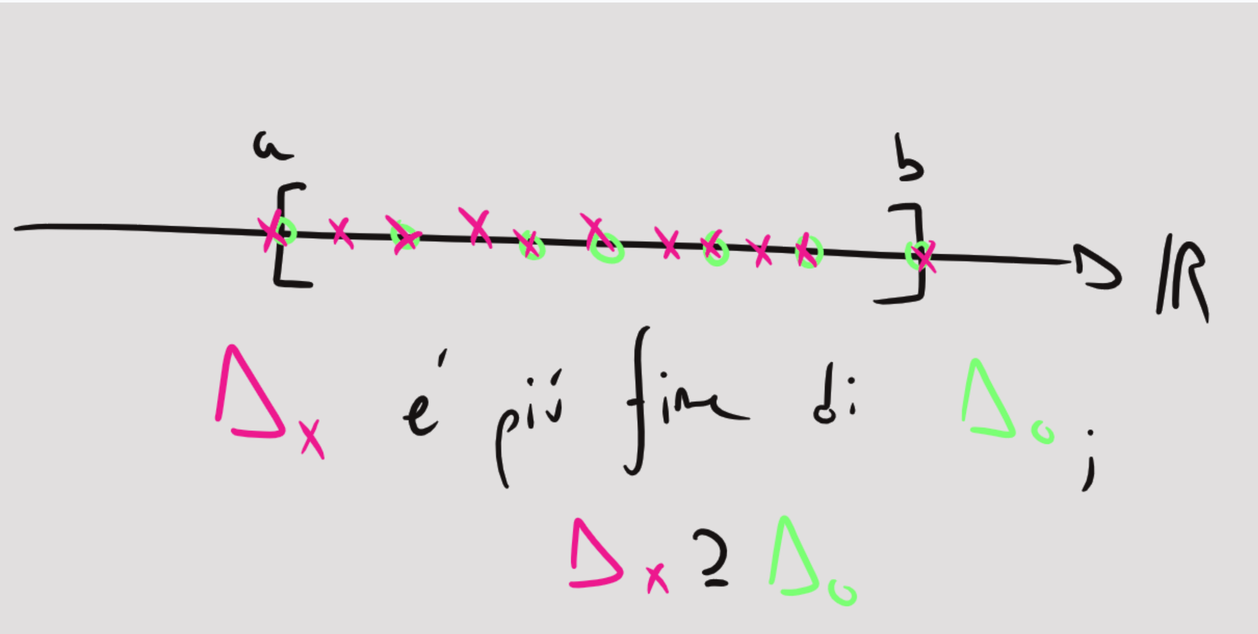
Definizione 2.1. (finezza della suddivisione)

Siano Δ_1, Δ_2 delle *suddivisioni*, dico che la suddivisione Δ_1 è *più fine* di Δ_2 se vale la seguente relazione:

$$\Delta_1 \supseteq \Delta_2$$

L'idea grafica viene raffigurata nella *figura 2.1.*.

FIGURA 2.1. (*Concetto grafico della finezza*)



TRUCCO MNEMONICO. Come *"trucchetto mnemonico"* si può *"trasformare"* il simbolo di *essere contenuto in* a *essere minore* di; ovvero Δ_1 è più fine di Δ_2 se $\Delta_1 \geq \Delta_2$, ovvero $\Delta_1 \supseteq \Delta_2$. Infatti l'idea di base della *finezza* consiste nel fatto che una suddivisione ha *"più elementi"* (anche se non necessariamente) dell'altra. Inoltre si vede che i simboli $\supseteq, \geq$ sono *graficamente* "simili".

#Osservazione

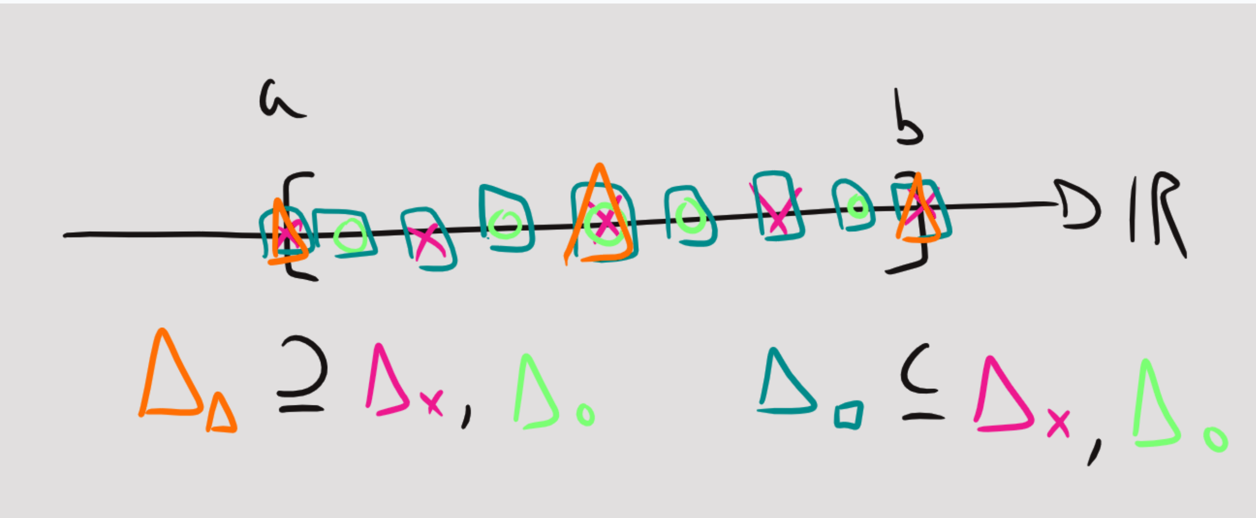
Osservazione 2.1. (l'insieme delle suddivisioni è un reticolo)

Supponiamo di avere *due suddivisioni* Δ_A e Δ_B; nessuna di queste due dev'essere più fine dell'altra (ad esempio potrebbe avere elementi diversi). Possiamo comunque prendere una *suddivisione più fine* tra le due? Invece la *suddivisione meno fine*?
La risposta è sì, se consideriamo l'*unione* e l'*intersezione* tra queste due suddivisioni: prendendo *"l'unione"* comprendi tutti gli elementi sia di Δ_A che di Δ_B; quindi $\Delta_{A \cup B}$ è necessariamente *più fine* di entrambe.
Per quanto riguarda invece *l'intersezione*, questa prende *solo* gli elementi in comuni: ovvero, nel *"caso peggiore"* si prenderebbero solo gli estremi a, b. Allora in questo caso *entrambe* le suddivisioni Δ_A, Δ_B sono più fine di $\Delta_{A \cap B}$.
Riassumendo, abbiamo

$$\boxed{\Delta_{A \cup B} \supseteq \Delta_A, \Delta_B \mid\mid \Delta_A, \Delta_B \supseteq \Delta_{A \cap B}}$$

Infatti si può dire che le *relazioni tra le suddivisioni* Δ determina il fatto che *l'insieme delle suddivisioni* $\mathcal{D}$ forma un *reticolo* (da approfondire, Reticolo).
L'idea di questa osservazione viene raffigurata nella *figura 2.2.*.

FIGURA 2.2. (*L'idea delle relazioni tra suddivisioni*)



0B. La somma inferiore e superiore

Somma inferiore e superiore per una Funzione

Definizione di somma inferiore e superiore per una funzione relativa ad una suddivisione; osservazioni preliminari per l'integrazione secondo Riemann.

0. Prerequisiti e/o voci correlate

- Suddivisione di un Intervallo
- Integrabilità secondo Riemann

1. Definizione di somma inferiore e superiore

#Definizione

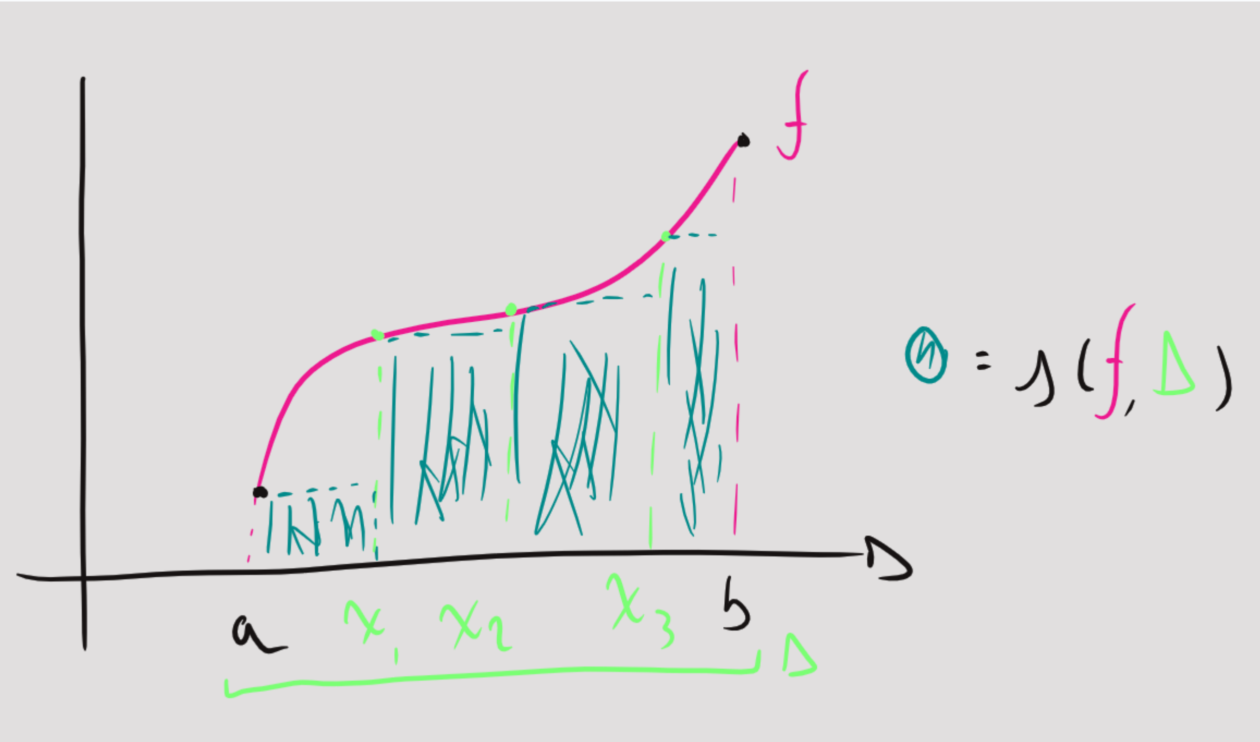
Definizione 1.1. (somma inferiore per una funzione relativa ad una suddivisione)

Sia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *limitata* (ovvero l'immagine $f([a, b])$ è *limitata*).
Prendo una *suddivisione* (Suddivisione di un Intervallo > ^379a7b) qualsiasi Δ.
Chiamo la *somma inferiore per f relativa a Δ* come il seguente:

$$\boxed{s(f, \Delta) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)}$$

Ovvero *graficamente* (figura 1.1.) questa significa la *somma delle aree di tutti i rettangolini composti dai punti della suddivisione*; ovvero la prima parte $x_i - x_{i-1}$ vuol semplicemente dire la *base* del rettangolino; invece $\inf f(x)$ è l'*altezza* "approssimata per difetto".

FIGURA 1.1. (*Concetto grafico di somma inferiore*)



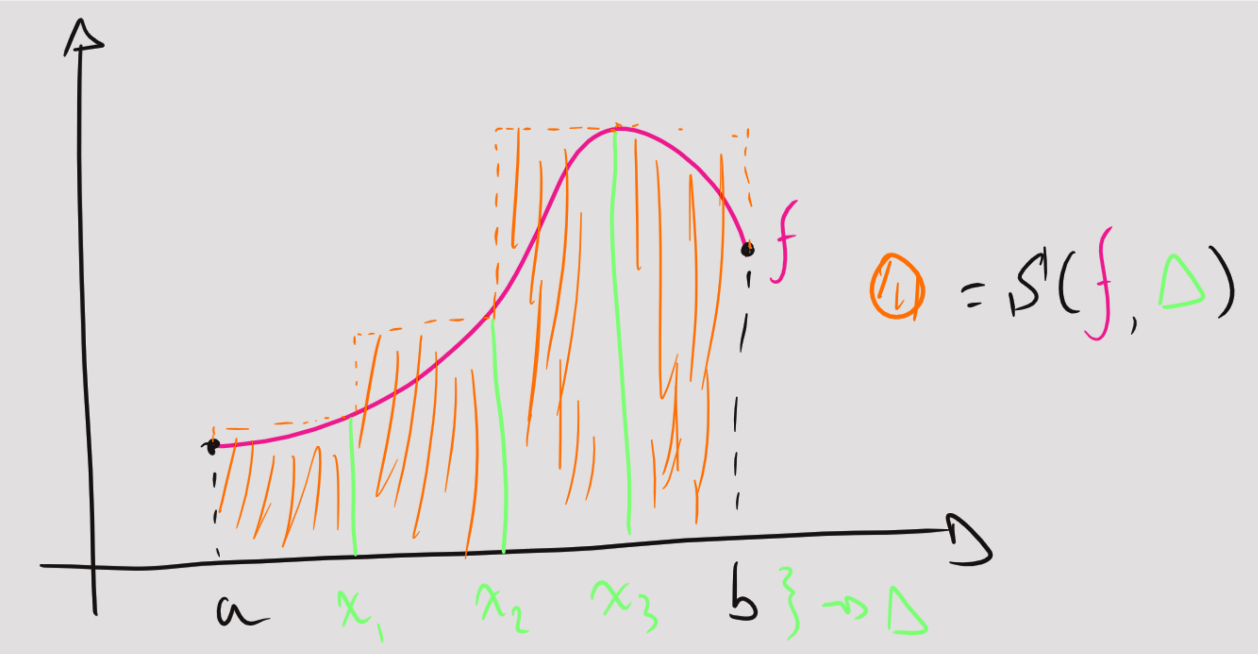
#Definizione

Definizione 1.2. (somma superiore per una funzione relativa ad una suddivisione)

Sia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *limitata*, sia Δ una suddivisione del dominio.
Analogamente alla definizione della *somma inferiore per f relativa a* Δ (^1ff0a9), definisco la *somma superiore per f relativa a* Δ come la stessa, solo che al posto di *"approssimare"* per difetto prendendo $\inf$, approssimo per *eccesso* prendendo $\sup$;

$$\boxed{S(f, \Delta) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)}$$

FIGURA 1.2. (*Idea grafica della somma superiore*)



2. Osservazioni sulle somme superiori e inferiore

Queste osservazioni vengono effettuate al fine di comprendere meglio il concetto di *integrabilità secondo Riemann* (Integrabilità secondo Riemann).
Come *"presupposto"* di queste osservazioni facciamo la seguente:
#Osservazione

Osservazione 2.1. (prima osservazione)

Ogni volta che prendo una suddivisione $\Delta \in \mathcal{D}$, posso calcolare sia la *somma superiore* $S(f, \Delta)$ ed *inferiore* $s(f, \Delta)$ relativa ad essa; ci poniamo le seguenti domande. (*osservazioni 2.2., 2.3., 2.4.*)

#Osservazione

👁 Osservazione 2.2. (la somma inferiore è sempre più piccolo della somma superiore)

Qual è la relazione tra $s(f, \Delta)$ e $S(f, \Delta)$?
Dato che sia la *somma inferiore* e *superiore* sono definiti dalla stessa *"base"* $x_i - x_{i-1}$, allora l'unica parte per cui differiscono è *"l'altezza"*; da un lato abbiamo $\inf f$ e dall'altro abbiamo $\sup f$.
Ma allora, per definizione un *estremo inferiore* di f è sempre più piccolo di qualsiasi valore di f, incluso l'*estremo superiore* di f che a sua volta è più grande di qualsiasi valore di f.
Allora si evince che

$$\boxed{s(f, \Delta) \leq S(f, \Delta)}$$

Lo stesso vale anche se abbiamo funzioni che hanno *valori negativi*, in quanto le aree *"contano negativamente"*.

#Osservazione

👁 Osservazione 2.3. (la somma inferiore e superiore di suddivisioni più fini)

Osserviamo che aggiungendo ad una qualsiasi suddivisione Δ un elemento questa diventa più *fine* (Suddivisione di un Intervallo > ^6c1bae), in quanto stiamo sostanzialmente facendo una unione di un elemento con un insieme.
Allora supponendo $\Delta_1 \supseteq \Delta_2$, ci chiediamo quale sia la relazione tra le loro *somme inferiori*.
Possiamo ragionare *graficamente* (figura 2.3.): aggiungendo un *"pezzo di suddivisione"* in più, abbiamo una specie di nuovo *"contributo"* da parte di questo elemento aggiunto.
Allora si evince che

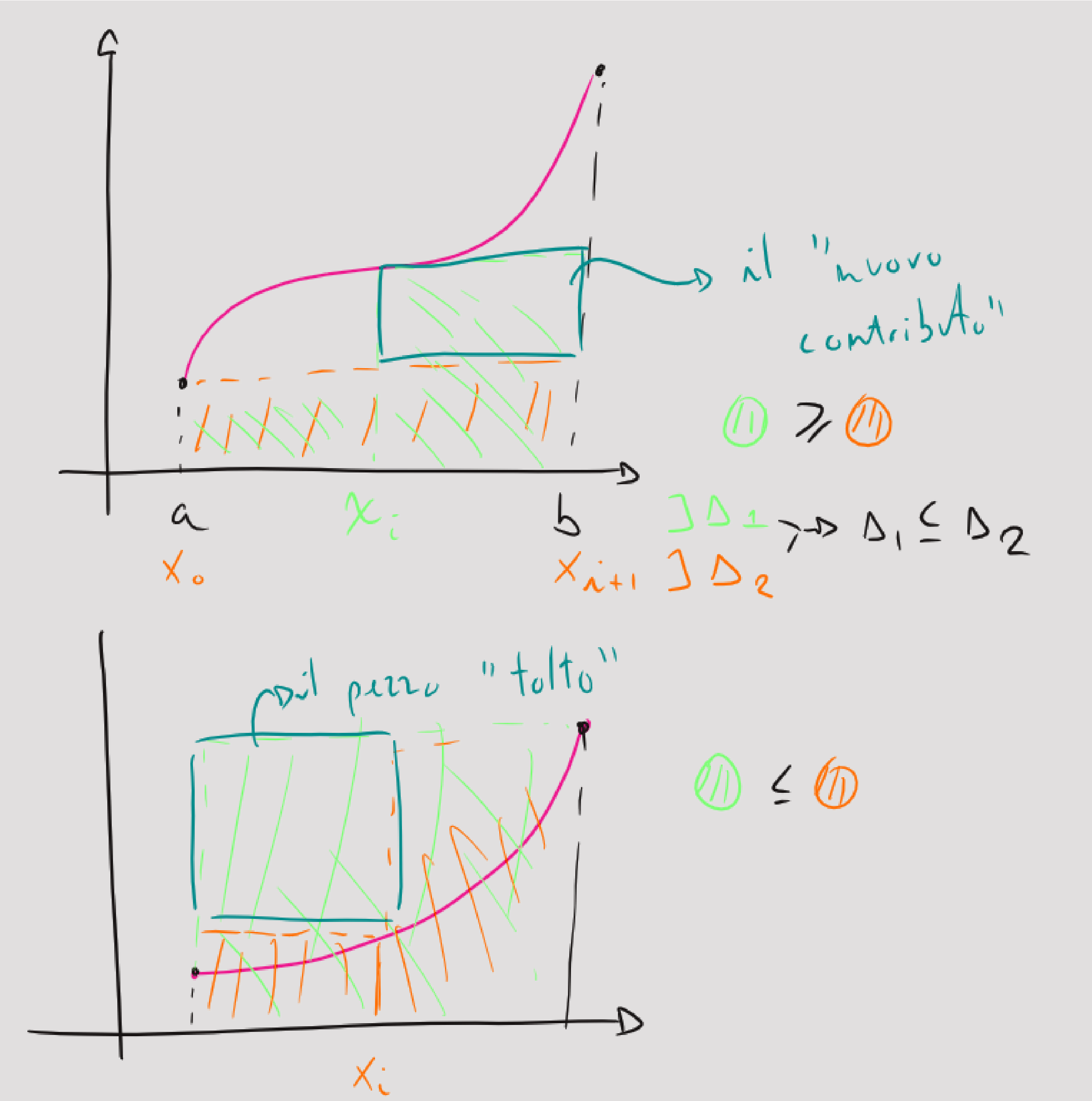
$$\boxed{s(f, \Delta_1) \geq s(f, \Delta_2)}$$

Analogamente si evince pure che

$$\boxed{S(f, \Delta_1) \leq S(f, \Delta_2)}$$

in quanto abbiamo dei *"pezzettini"* tolti (figura 2.3.).

FIGURA 2.3. (*Idea grafica delle somme superiori inferiori di suddivisioni più fini delle altre*)



#Osservazione

👁 Osservazione 2.4. (la relazione tra somma inferiore e superiore di suddivisioni qualsiasi)

Siano Δ_1, Δ_2 delle *suddivisioni* qualsiasi.
Quale sarà mai la relazione tra la *somma inferiore* per Δ_1 e la *somma superiore* per Δ_2;

$$s(f, \Delta_1) \ ? \ S(f, \Delta_2)$$

Intuitivamente si può pensare che la *somma inferiore* sarà sempre piccola di una *somma superiore* per suddivisioni qualsiasi; infatti la somma superiore *"contiene"* sempre la *somma inferiore* (*figura 2.4.*).

Infatti questa sembra una sorta di *"panino"*, dove le linee delineate dalla somma superiore è la fetta di pane superiore; la parte in mezzo la carne; la parte sotto sono le linee delineate dalla somma inferiore. (*forse non consiglio di usare questa analogia all'orale*)

Infatti, ricordandoci delle osservazioni fatte sulle *suddivisioni* (Suddivisione di un Intervallo > ^64461d) possiamo prendere *l'unione* delle suddivisioni, maggiorarlo per la *suddivisione inferiore* di Δ_1, poi maggioriamo a sua volta l'unione con la *somma superiore* dell'unione (per *osservazione 2.2.* ^fd1845), che a sua volta la maggioriamo con la *somma superiore* di Δ_2 (*osservazione 2.3.*, ^80234e).

Ovvero, in termini matematici questo equivale a

$$s(f, \Delta_1) \leq s(f, \Delta_1 \cup \Delta_2) \leq S(f, \Delta_1 \cup \Delta_2) \leq S(f, \Delta_2)$$

Quindi, alla fine possiamo affermare che la *somma inferiore* di una qualsiasi suddivisione è *sempre minore o uguale* di una *somma superiore* di un'altra qualsiasi suddivisione. Ovvero la seguente proposizione.

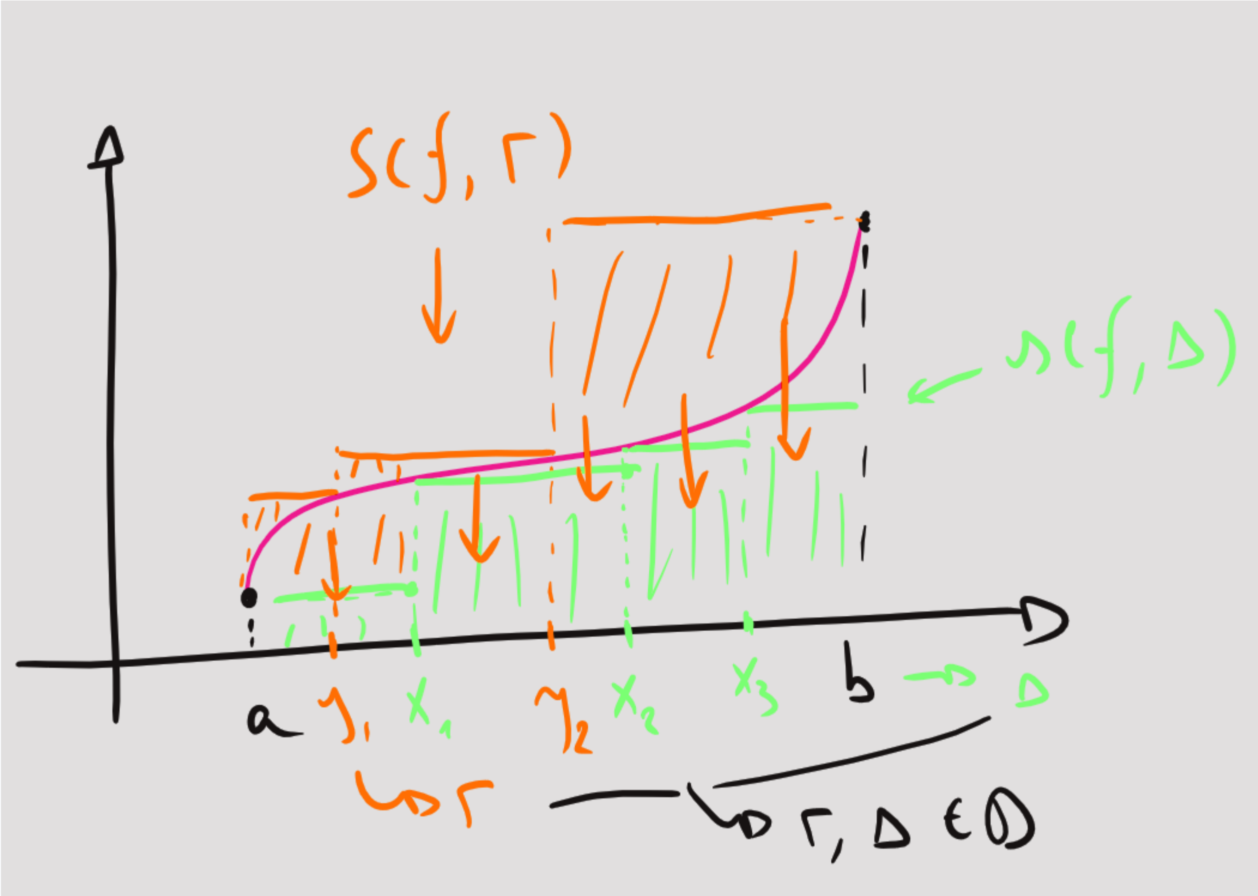
#Proposizione

💬 Proposizione 2.1. (relazione tra somma inferiore e superiore)

Se f è *limitata*, allora le *somme inferiore* sono sempre *minori o uguali* alla somma *superiore*.

$$\boxed{\sup_{\Delta \in \mathcal{D}} s(f, \Delta) \leq \inf_{\Gamma \in \mathcal{D}} S(f, \Gamma)}$$

FIGURA 2.4. (*Intuizione grafica della proposizione 2.1.*)



$s(f,\Gamma)$
$s(f,\Delta)$
a
y_1
x_1
y_2
x_2
x_3
b
$\to \Delta$
$\to \Gamma$
$\to \Gamma, \Delta \in \mathcal{D}$

SEZIONE A. L'INTEGRAZIONE DI RIEMANN

A1. L'integrabilità secondo Riemann

Integrabilità secondo Riemann

Definizione di funzione integrabile secondo Riemann; teorema di caratterizzazione di funzione integrabile: enunciato e dimostrazione.

---

0. Prerequisiti e/o voci correlate

- Somma inferiore e superiore per una Funzione
- Esempi di Funzioni Integrabili
- Tipologie di Funzioni Integrabili

1. Definizione di Integrabilità secondo Riemann

#Definizione

Definizione 1.1. (integrabilità di una funzione secondo Riemann)

Sia $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *limitata*.
Si dice che f è *"integrabile secondo Riemann"* se vale che

$$\boxed{\sup_{\Delta \in \mathcal{D}} s(f,\Delta) = \inf_{\Gamma \in \mathcal{D}} S(f,\Gamma)}$$

#Definizione

Definizione 1.2. (integrale di Riemann di una funzione su un intervallo)

lSia $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *integrabile secondo Riemann*.
Allora il valore per cui vale la relazione di definizione

$$\sup_{\Delta \in \mathcal{D}} s(f,\Delta) = \inf_{\Gamma \in \mathcal{D}} S(f,\Gamma)$$

lo chiamo *integrale di Riemann di f sull'intervallo* $[a,b]$ e lo denoto come

$$\sup_{\Delta \in \mathcal{D}} s(f,\Delta) = \inf_{\Gamma \in \mathcal{D}} S(f,\Gamma) = \boxed{\int_{[a,b]} f = \int_a^b f(x)\, dx}$$

#Definizione

Definizione 1.3. (l'insieme delle funzioni integrabili secondo Riemann)

Indico l'*insieme delle funzioni integrabili secondo Riemann sull'intervallo* $[a, b]$ con la seguente notazione

$$\mathcal{R}([a, b])$$

2. Teorema di caratterizzazione delle funzioni integrabili

#Osservazione

Osservazione 2.1. (la necessità di una strategia per verificare l'integrabilità)

Notiamo che secondo la nostra *definizione* dell'integrabilità di una funzione, diventa molto difficile verificare se delle funzioni f siano effettivamente *integrabili* o meno; infatti bisogna fare delle *verifiche infinite* per vedere se l'estremo superiore delle somme inferiori coincida effettivamente con l'estremo inferiore delle somme superiori.
Allora si propone il seguente teorema per *"semplificarci"* la vita trovando un modo per raggirare questi *"calcoli infiniti"*.

#Teorema

Teorema 2.1. (condizione necessaria e sufficiente per l'integrabilità secondo Riemann)

Sia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *limitata*.
Allora f è *integrabile secondo Riemann* se e solo se vale che

$$\boxed{\begin{gathered}\forall \varepsilon > 0, \exists \Delta \in \mathcal{D} : \\ S(f, \Delta) - s(f, \Delta) < \varepsilon\end{gathered}}$$

Ovvero, per ogni ε piccolo a piacere possiamo trovare una *suddivisione* Δ tale che la differenza tra la *somma superiore* e la *somma inferiore* di f relativa a Δ è minore di ε; ovvero la somma delle *"aree intermedie"* diventa piccolo a piacere. Questo ci ricorda infatti la nozione di *limite* secondo *Cauchy* (Definizione di Limite di funzione > ^0f845a): abbiamo un valore *piccolo a piacere* a cui dobbiamo associare un *valore*.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *teorema 2.1.* (^92bcfb)

" $\implies$ ": Supponiamo f *integrabile secondo Riemann*.

Allora esiste un valore reale

$$\sup s(f, \Delta) = \inf S(f, \Delta) = \int_{[a,b]} f = \int f \text{ (scrivo per compattezza)}$$

Allora, per la *seconda proprietà* dell'estremo superiore e inferiore (Insiemi limitati, maggioranti, massimo e teorema dell'estremo superiore > ^601040), valgono che

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \exists \bar{\Delta} : \int f - \frac{\varepsilon}{2} < s(f, \bar{\Delta}) \\ \forall \varepsilon > 0, \exists \tilde{\Delta} : \int f + \frac{\varepsilon}{2} > S(f, \tilde{\Delta}) \end{cases}$$

Ma allora prendendo *l'unione delle due suddivisioni* $\Gamma = \bar{\Delta} \cup \tilde{\Delta}$ vale che

$$\begin{cases} s(f, \Gamma) > s(f, \bar{\Delta}) > \int f - \frac{\varepsilon}{2} \\ S(f, \Gamma) < S(f, \tilde{\Delta}) < \int f + \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

Ora manipolo la prima espressione, moltiplicando per -1, per ottenere

$$-s(f, \Gamma) \cancel{< S(f, \bar{\Delta})} < -\int f + \frac{\varepsilon}{2}$$

Allora sommo $-s(f, \Gamma) < -\int f + \frac{\varepsilon}{2}$ con $S(f, \tilde{\Delta}) < \int f + \frac{\varepsilon}{2}$ per ottenere

$$\boxed{S(f, \Gamma) - s(f, \Gamma) < \varepsilon}$$

che è esattamente la *tesi*.

" $\impliedby$ ": (*Idea*) Supponiamo per assurdo che vale la *condizione di caratterizzazione* e che non vale la *tesi*; ovvero supponiamo che la *somma superiore* è sempre lontana dalla *somma inferiore*. Ovvero

$$\sup s(f, \Delta) < \inf S(f, \Gamma)$$

Ma allora basta fissare

$$\varepsilon = \frac{1}{4}(\inf s - \sup S)$$

Si vede che non ci sarà *mai* un $\Delta \in \mathcal{D}$ che renda vera la *condizione di caratterizzazione*, che è un assurdo. ■

A2. Esempi di funzioni integrabili secondo Riemann

Esempi di Funzioni Integrabili

Esempi di funzioni integrabili e non integrabili, corredato da calcoli.

---

0. Prerequisiti e/o voci correlate

- Integrabilità secondo Riemann
- Tipologie di Funzioni Integrabili
- Esempi di Induzione / Assiomi di Peano, il principio di induzione
- Somma inferiore e superiore per una Funzione
- Limite di Successione / Esempi di Limiti di Successione
- Conseguenze dell'esistenza dell'estremo superiore

1. Integrabilità di alcune funzioni elementari

Funzione costante

#Esempio

Esempio 1.1. (funzione costante)

Sia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ la *funzione costante* $x \mapsto c \in \mathbb{R}$.
Allora, intuitivamente si può vedere la sua *area* sotto la *"curva"* (o linea retta) è semplicemente *base per altezza*, ovvero $c \cdot (b - a)$ (*figura 1.1.*).
Però usiamo l'*integrazione di Riemann* (Integrabilità secondo Riemann > ^64ad3b) per calcolare il suo *integrale*, ovvero l'*area*.
Calcolo dunque la sua *somma inferiore* (Somma inferiore e superiore per una Funzione > ^1ff0a9) per una sua qualsiasi suddivisione:

$$s(f, \Delta) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot \inf f(x)$$

Però $f(x)$ è limitata *solo* su c; infatti $f(x) = c$. Allora ciò segue che

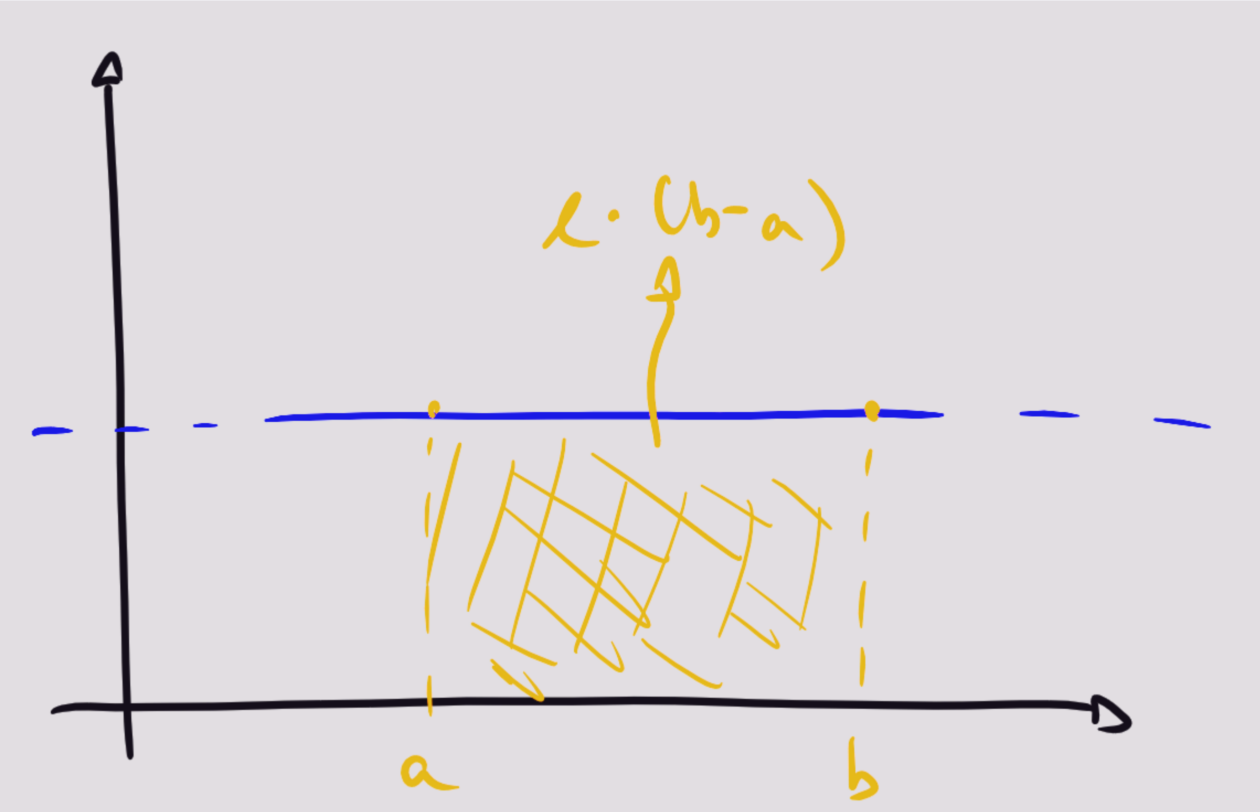
$$\begin{aligned} s(f, \Delta) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot c = c \sum_{i=1}^{n} x_i - x_{i-1} \\ = c \cdot [(x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \ldots + (x_n - x_{n-1} \\ = c \cdot (x_n - x_0) = \boxed{c \cdot (b - a)} \end{aligned}$$

Facendo la stessa procedura, che è letteralmente la stessa, per la *somma*

superiore $S(f, \Delta)$ otteniamo lo stesso risultato.
Dunque,

$$\boxed{\int_a^b c\,dx = c(b-a)}$$

FIGURA 1.1. (*Funzione costante*)



Funzione identità

#Esempio

Esempio 1.2. (funzione identità)

Sia $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ la *funzione identità* $\mathrm{id}(x) = x$.
Allora anche qui si può intuire che l'*area sotto la retta* è l'*area di un triangolo*, ovvero *base per altezza diviso due*. Pertanto $A = f(1)(1-0) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.
Ora verifichiamo quest'affermazione secondo l'*integrazione di Riemann*.
Prendiamo una *suddivisione particolare* $\Delta = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n} = 1\}$.
Con tale suddivisione calcoliamo la *somma inferiore* e la *somma superiore*.

1. Somma inferiore

$$
\begin{aligned}
s(f, \Delta) &= \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \\
&= \sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{n}) \cdot (\frac{i-1}{n}) \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(i-1)
\end{aligned}
$$

2. Somma superiore (passi analoghi)

$$
S(f, \Delta) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i
$$

Ma noi conosciamo una *proprietà della somma dei primi n numeri naturali*, ovvero

$$
\sum_{x=1}^{n} x = \frac{n(n+1)}{2}
$$

Naturalmente questa è dimostrabile per *induzione* (Esempi di Induzione > ^d8e983).
Allora prendiamo per buone le seguenti:

$$
s(f, \Delta) = \frac{(n-1)(n)}{2n^2}; S(f, \Delta) = \frac{(n+1)(n)}{2n^2}
$$

Sottraendo la somma superiore per la somma inferiore vediamo che questa risulta in

$$
S - s = \frac{1}{n}
$$

Ma per l'*archimedeità dei reali* (Conseguenze dell'esistenza dell'estremo superiore > ^d95d40) sappiamo che è vera la seguente:

$$
\forall \varepsilon > 0, \exists n : 0 < \frac{1}{n} < \varepsilon
$$

Quindi sicuramente la funzione identità è *integrabile secondo Riemann*.
Ora procediamo a calcolare l'integrale: consideriamo innanzitutto che per definizione l'integrale *deve* stare tra la *somma inferiore* e la *somma superiore* della funzione, ovvero

$$
s(f, \Delta) \leq \int_{[0,1]} f(x) \leq S(f, \Delta)
$$

Però prendendo i *limiti di successione* (Limite di Successione > ^ef60f6) di

$s(f,\Delta)$ e $S(f,\Delta)$ vediamo che entrambe *convergono* a $\frac{1}{2}$; infatti

$$\lim_n \frac{(n-1)(n)}{2n^2} = \lim_n \frac{1}{2}(1-\frac{1}{n}) = \frac{1}{2}$$

Allora per il *teorema dei due carabinieri versione successione* (Limite di Successione > ^72d83a), vale che anche *l'integrale* converge a $\frac{1}{2}$; pertanto

$$\boxed{\int_0^1 x\ dx = \frac{1}{2}}$$

Funzione potenza quadrata

#Esempio

Esempio 1.3. (funzione quadrato)

Sia $f:[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=x^2$.
Vogliamo calcolare l'integrale $\int_0^1 f(x)\ dx$.
Analogamente all'*esempio 1.3.*, prendiamo la suddivisione

$$\Delta = \{0, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n} = 1\}$$

Ora calcoliamo la *somma inferiore* e *superiore*.

$$s(f,\Delta) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot (\frac{i-1}{n})^2 = \frac{1}{n^3} \cdot \sum_{i=1}^{n} (i-1)^2$$
$$S(f,\Delta) = \frac{1}{n^3} \cdot \sum_{i=1}^{n} i^2$$

Allora calcolando le loro *differenze* otteniamo il medesimo risultato $\frac{1}{n}$; pertanto $f(x)=x^2$ è *integrabile secondo Riemann*.
Adesso consideriamo la proprietà della *somma dei quadrati* per cui si ha

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Anche questa è *dimostrabile per induzione*.
Ora vogliamo calcolare il valore dell'integrale; come prima consideriamo che l'integrale è *"compresso"* tra la sua somma inferiore e superiore, ovvero

$$\frac{1}{n^3} \cdot \frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6} \leq \int_0^1 f(x)\ dx \leq \frac{1}{n^3} \cdot \frac{(n)(n+1)(2n+1)}{6}$$

Però considerando i *limiti di successione* per gli *"estremi"* abbiamo che entrambi *convergono* per il valore $\frac{1}{3}$; pertanto l'integrale è

$$\boxed{\int_0^1 x^2 \, dx = \frac{1}{3}}$$

La difficoltà dell'integrazione

#Osservazione

Osservazione 1.1. (la necessità di una tecnica alternativa dell'integrazione)

Vediamo che calcolare l'*integrale* di una funzione secondo la *tecnica di Riemann* risulta spesso *"faticoso"* e *"difficile"* (anche se discutibile!): perciò sorge la necessità di trovare un altro modo più *"semplice"* per calcolare gli *integrali*, raggirando ad esempio il calcolo delle *somme inferiore e/o superiore*.
A proposito di ciò argomenterebbero a favore i noti matematici russi *A. N. Kolmogorov*, *A. D. Aleksandrov* e *M. A. Lavrent'ev*[(1)]: loro affermerebbero che che ci serve un metodo più *"generale"* per calcolare gli integrali, in quanto fino ad ora abbiamo adoperato *"tecniche specialissime"*.

[(1)]: *"[...] Per di più, anche quando sia possibile eseguire tale somma, ciò non si può fare con un metodo generale, ma con tecniche specialissime, dipendenti dal singolo problema.*
Sorge quindi il problema di trovare un metodo generale peri l calcolo dell'integrale definito. Il problema generale del calcolo delle aree e dei volumi, così ricco di conseguenze pratiche, interessò i matematici per lungo tempo" - tratto da *"Le Matematiche - Analisi, Algebra, Geometria Analitica"* (1974) di A. N. Kolmogorov, A. D. Aleksandrov e M. A. Lavrent'ev

---

Funzione esponenziale

#Esercizio

Esercizio 1.1.

Per esercizio calcolare l'integrale

$$\int_0^1 e^x \, dx$$

2. Funzioni non integrabili

#Osservazione

Osservazione 2.1. (esempio di funzione non integrabile)

Esistono funzioni che *non* siano *integrabili secondo Riemann*?
La risposta è sì, in quanto se consideriamo la *funzione di Dirichlet* scopriamo che questa non sia derivabile.
La funzione di Dirichlet è definita nel seguente modo:

$$f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}; f(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Allora se prendo la sua *somma superiore* vedo che questa è sempre 1, in quanto prendendo un qualsiasi intervallo $[x_{i-1}, x_i]$ ci dev'essere *almeno* un numero razionale tra questi (Conseguenze dell'esistenza dell'estremo superiore > ^e279b1). Pertanto il $\sup$ della funzione diventa 1.
Analogamente la *somma inferiore* è sempre 0.
Pertanto, vedo che

$$s(f, \Delta) \neq S(f, \Delta) \implies f \notin \mathcal{R}$$

A3. Tipologie di funzioni integrabili

Tipologie di Funzioni Integrabili

Teoremi che prescrivono l'integrabilità di certe famiglie di funzioni.

---

0. Prerequisiti e/o voci correlate

- Funzioni (monotonia)
- Teoremi sulle funzioni continue (thm. di Weierstraß)
- Definizione di continuità
- Continuità Uniforme
- Conseguenze dell'esistenza dell'estremo superiore

- Suddivisione di un Intervallo
- Somma inferiore e superiore per una Funzione
- Integrabilità secondo Riemann
- Esempi di Funzioni Integrabili

1. L'integrabilità delle funzioni monotone

#Teorema

Teorema 1.1. (di integrabilità della funzioni monotone)

Sia $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$; sia f *monotona* (Funzioni > ^3fb408).
Allora f è *integrabile secondo Riemann* (Integrabilità secondo Riemann > ^5455b8).

$$\boxed{f \text{ monotona } \implies f \in \mathcal{R}([a,b])}$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *teorema 1.1.* (^12da61)
Dimostriamo il caso in cui f è *monotona crescente*; la dimostrazione è analoga anche nel caso in cui f è *monotona decrescente*.
Osserviamo che f è anche *limitata* in $[f(a), f(b)]$ in quanto *monotona crescente*.
Allora considero la seguente *suddivisione* (Suddivisione di un Intervallo > ^318045).

$$\Delta = \{a, a + \frac{b-a}{n}, a + 2(\frac{b-a}{n}), \ldots, a + (n-1)\frac{b-a}{n}, b\}$$

Adesso calcolo la *differenza* tra la *somma superiore* e la *somma inferiore* relativa a questa suddivisione:

$$\begin{aligned}
S(f, \Delta) - s(f, \Delta) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n}(f(a + i(b-a)) - f(a + (i-1)(b-a))) \\
&= \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) - f(x_{i-1}) \\
&= \frac{b-a}{n}(f(x_1) - f(x_0)) + (f(x_2) - f(x_1)) + \ldots + (f(x_n) \\
&= \frac{b-a}{n}(f(x_n) - f(x_0)) \\
&= (b-a)(f(b) - f(a)) \cdot \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Ma per *Archimede* (Conseguenze dell'esistenza dell'estremo superiore > ^d95d40) questa quantità diventa piccola a piacere; pertanto per il *teorema di* *caratterizzazione delle funzioni integrabili* (Integrabilità secondo Riemann > ^92bcfb), la funzione f è *integrabile secondo Riemann*. ■

2. Integrabilità delle funzioni continue

#Teorema

Teorema 2.1. (di integrabilità delle funzioni continue)

Sia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione *continua* (Definizione di continuità > ^d2f56f) sul suo dominio.
Allora f è *integrabile secondo Riemann*.

$$\boxed{f \text{ continua } \implies f \in \mathcal{R}([a, b])}$$

#Dimostrazione
DIMOSTRAZIONE del *teorema 2.1.* (^dd4f09)
Richiamiamoci ad una delle *proprietà delle funzioni continue*, ovvero il *teorema di Heine* (Continuità Uniforme > ^d030d1).

Teorema 2.1. (di Heine)

Sia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continua* e sia $[a, b]$ *compatta* (Insiemi compatti in R > ^0eb138).
Allora f è *uniformemente continua*.

Ovvero *"alla Cauchy"* sappiamo che è vero il seguente:

$$\begin{gathered}\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in [a, b] \\ |x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon\end{gathered}$$

Allora fissiamo un qualunque $\varepsilon > 0$ e grazie alla continuità uniforme possiamo garantirci che esiste un δ tale che

$$\forall x_1, x_2 \in [a, b], |x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{b - a}$$

In tal caso considero una *suddivisione* (Suddivisione di un Intervallo > ^318045) dove ogni *"distanza"* tra due punti della suddivisione è minore di tale δ trovato. Ovvero, considero un

$$\Delta \in \mathcal{D} : \forall i, x_i - x_{i-1} < \delta$$

Graficamente questo ragionamento corrisponde alla *figura 2.1.*

Ora calcolo la *differenza tra la somma superiore e la somma inferiore* (Somma inferiore e superiore per una Funzione)

$$S(f,\Delta)-s(f,\Delta)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})(\sup_{[x_i,x_{i-1}]}f(x)-\inf_{[x_i,x_{i-1}]}f(x))$$

Ora considero il fatto che la funzione f è *continua* e che *"agiamo"* su un intervallo chiuso e limitato: vediamo che così vale il *teorema di Weierstraß* (Teoremi sulle funzioni continue > ^918fc1). Di conseguenza, possiamo considerare l'estremo superiore e inferiore come il minimo e massimo della funzione.

$$\sup_{[x_i,x_{i-1}]}f(x)=\max_{[x_i,x_{i-1}]}f(x)=f(x_{\max,i})$$

e analogamente

$$\inf_{[x_i,x_{i-1}]}f(x)=\min_{[x_i,x_{i-1}]}f(x)=f(x_{\min,i})$$

Pertanto

$$\sup_{[x_i,x_{i-1}]}f(x)-\inf_{[x_i,x_{i-1}]}f(x)=f(x_{\max,i})-f(x_{\min,i})$$

Ma sapendo che sia i *punti di massimo e minimo* $x_{\max,i}$ e $x_{\min,i}$ devono necessariamente vivere in $[x_i,x_{i-1}]$, anche la loro distanza è minore di δ. Graficamente quest'idea viene raffigurata nella *figura 2.2.*.
Pertanto, per l'ipotesi della continuità uniforme vale che

$$|x_{\max,i}-x_{\min,i}|<\delta\implies|f(x_{\min,i})-f(x_{\max,i})|<\frac{\varepsilon}{b-a}$$

In definitiva, tutto assieme possiamo concludere la dimostrazione.

$$\begin{aligned}S(f,\Delta)-s(f,\Delta)&=\sum_{i=1}^{n}(x_i,x_{i-1})(\sup_{[x_i,x_{i-1}]}f(x)-\inf_{[x_i,x_{i-1}]}f(x))\\&<\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})\frac{\varepsilon}{b-a}\\&<\cancel{(b-a)}\frac{\varepsilon}{\cancel{b-a}}=\varepsilon\\&\boxed{S(f,\Delta)-s(f,\Delta)<\varepsilon}\end{aligned}$$

Che corrisponde alla *condizione necessaria e sufficiente dell'integrabilità* (Integrabilità secondo Riemann > ^92bcfb), pertanto f è *integrabile secondo Riemann*. ■

FIGURA 2.1. (*La suddivisione 'delta'*)

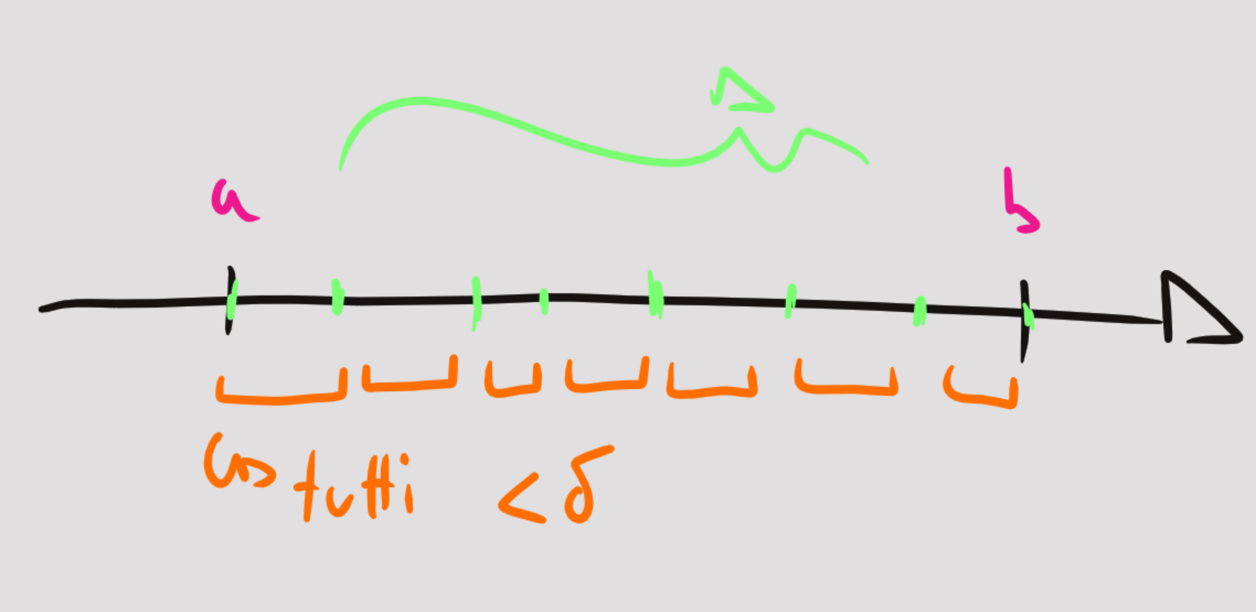
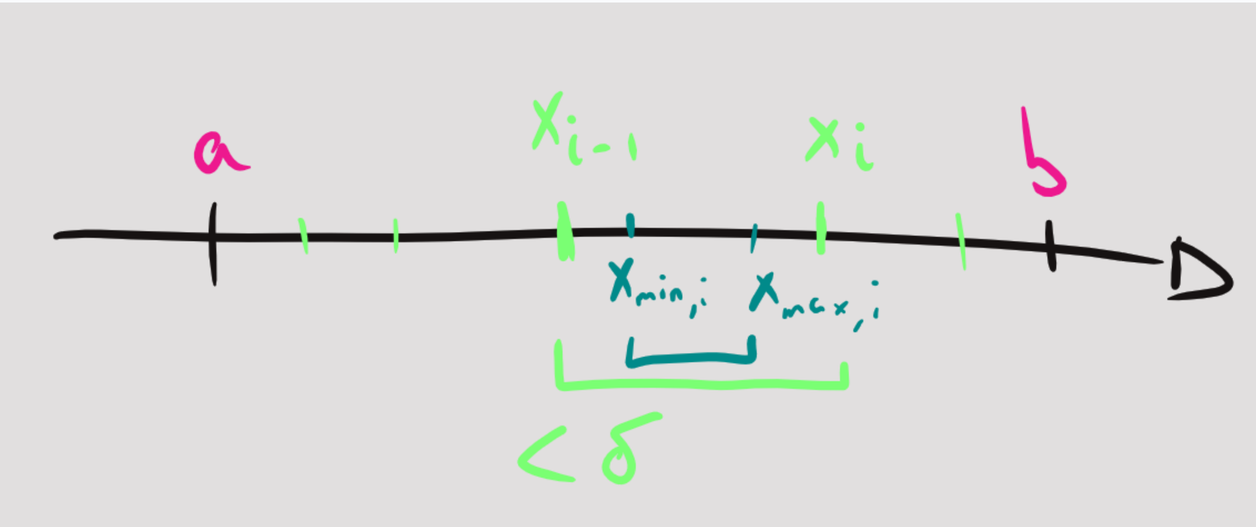


FIGURA 2.2. (*I punti di max e min vivono in delta*)



A4. Proprietà delle funzioni integrabili

Proprietà delle Funzioni Integrabili

Tutte le proprietà elementari delle funzioni integrabili: operazioni tra funzioni integrabili, confronto tra funzioni integrabili, pezzo di un integrale, convenzione di notazione degli integrali.

---

0. Prerequisiti e/o voci correlate

- Integrabilità secondo Riemann

- Suddivisione di un Intervallo
- Somma inferiore e superiore per una Funzione
- Funzioni di potenza, radice e valore assoluto (valore assoluto)
- Spazi Vettoriali
- Definizione di Applicazione Lineare

---

1. Integrali delle operazioni con funzioni

#Proposizione

> 💬 **Proposizione 1.1. (l'integrale di due funzioni sullo stesso intervallo)**
>
> Siano f, g delle *funzioni integrabili secondo Riemann* sull'intervallo $[a, b]$ (Integrabilità secondo Riemann > ^5455b8). Allora
>
> $$f + g \in \mathcal{R}([a, b]); \int_a^b (f+g)(t)\ dt = \int_a^b f(t)\ dt + \int_a^b g(t)\ dt$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE della *proposizione 1.1.* (^b48600)
Una *dimostrazione* che costituirà come la *"base di ragionamento"* delle proposizioni a venire è la seguente (infatti non dimostreremo le altre proposizioni, daremo una semplice idea grafica).
Consideriamo innanzitutto la *condizione necessaria e sufficiente per l'integrabilità* delle funzioni f, g (Integrabilità secondo Riemann > ^92bcfb).
Ovvero, fissando un $\varepsilon > 0$ ho

$$\begin{aligned} &1.\ \exists \Delta \in \mathcal{D} : S(f, \Delta) - s(f, \Delta) < \frac{\varepsilon}{2} \\ &2.\ \exists \Gamma \in \mathcal{D} : S(f, \Gamma) - s(f, \Gamma) < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Ora considero l'*unione delle suddivisioni* $\Delta \cup \Gamma$, che comporta una *suddivisione più fine* sia di Γ che di Δ (Suddivisione di un Intervallo > ^6c1bae).
Però in ogni caso vale che la differenza tra la *somma superiore e inferiore* è comunque *"contenuta"* in $\frac{\varepsilon}{2}$; questo vale sia per f che g relativa alla suddivisione $\Delta \cup \Gamma$.
Infatti quando prendiamo una suddivisione più fine, la *somma inferiore* tende ad *"alzarsi"*, invece la *somma superiore* tende ad *"abbassarsi"* (Suddivisione di un Intervallo > ^64461d).

$$S(f, \Delta \cup \Gamma) - s(f, \Delta \cup \Gamma) < \frac{\varepsilon}{2}$$

e analogamente

$$S(g,\Delta\cup\Gamma)-s(g,\Delta\cup\Gamma)<\frac{\varepsilon}{2}$$

Inoltre chiamo l'unione delle suddivisioni come $\Delta\cup\Gamma=\Phi$ per comodità; adesso sommo le due precedenti disequazioni termine per termine e abbiamo il seguente:

$$S(f,\Phi)+S(g,\Phi)-(s(f,\Phi)+s(g,\Phi))<\varepsilon$$

Ora osservo che la *somma superiore* della *somma delle due funzioni* è sempre *minore o uguale* alla *somma delle somme superiori delle funzioni* considerate separatamente, ovvero

$$S(f+g,\Phi)\leq S(f,\Phi)+S(g,\Phi)$$

Infatti, da un lato abbiamo un *"solo"* estremo superiore da cui prendere, dall'altro ne abbiamo due.
Inoltre l'osservazione appena effettuata vale lo stesso anche per *la somma inferiore*:

$$s(f+g,\Phi)\leq s(f,\Phi)+s(g,\Phi)$$

Allora, combinandoli insieme ottengo

$$S(f+g,\Phi)-s(f+g,\Phi)<\varepsilon$$

che è proprio la *condizione necessaria e sufficiente di integrabilità* per la funzione $f+g$ relativo all'intervallo Φ. ■

#Proposizione

Proposizione 1.2. (l'integrale dello scalamento di una funzione)

Sia f una funzione *integrabile secondo Riemann* su $[a,b]$ e sia λ uno *"scalare"* (ovvero numero) in $\mathbb{R}$.
Allora vale che $\lambda\cdot f$ è *integrabile* e che il suo *integrale* è il seguente.

$$\lambda\cdot f\in\mathcal{R}([a,b]);\int_a^b(\lambda\cdot f)(t)\,dt=\lambda\int_a^b f(t)\,dt$$

L'integrabilità delle funzioni in termini di algebra lineare

#Osservazione

Osservazione 1.1. (le funzioni integrabili costituiscono uno sottospazio vettoriale)

Notiamo che le proprietà appena enunciate sono molto *simili* a delle medesime proprietà per cui si definiscono enti certi matematici.
Parliamo infatti dei *spazi vettoriali* (in particolare dei *sottospazi vettoriali*): infatti, se consideriamo $\mathcal{F}$ come l'*insieme delle funzioni* e la dotiamo delle operazioni di *somma interna* e dello *scalamento esterno su* $\mathbb{R}$, allora $\mathcal{F}$ è un $\mathbb{R}$-*spazio vettoriale*. (Spazi Vettoriali > ^7e2c4e)

Per le proprietà appena viste, vediamo che chiaramente l'*insieme delle funzioni integrabili* $\mathcal{R}$ non è solo un *sottoinsieme* di $\mathcal{F}$, ma è pure *sottospazio vettoriale*: vale infatti che la *"funzione nulla"* $0 : \mathbb{R} \longrightarrow 0$ è *integrabile* e le *proposizioni 1.1., 1.2.* sono esattamente la *chiusura della somma e dello scalamento*. (Sottospazi Vettoriali > ^9bcbf2)

Inoltre, la *dimensione* (Dimensione > ^3a9321) dell'insieme $\mathcal{R}$ è *infinita* in quanto l'insieme $\mathcal{F}$ è *infinitamente generata*.

#Osservazione

Osservazione 1.2. (l'applicazione lineare integrale)

Inoltre, definendo l'*"applicazione integrale"* (*non è il miglior termine che possiamo usare, ma ahimè*) come quella funzione in cui inseriamo una funzione integrabile e otteniamo il suo integrale, vediamo che questa costituisce un'*applicazione lineare*. Vale infatti l'additività e l'omogeneità. (Definizione di Applicazione Lineare > ^9b39f9)

$$\begin{aligned}\int_a^b : \mathcal{R}([a,b]) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto \int_{[a,b]} f\end{aligned}$$

2. Confronto tra gli integrali delle funzioni integrabili

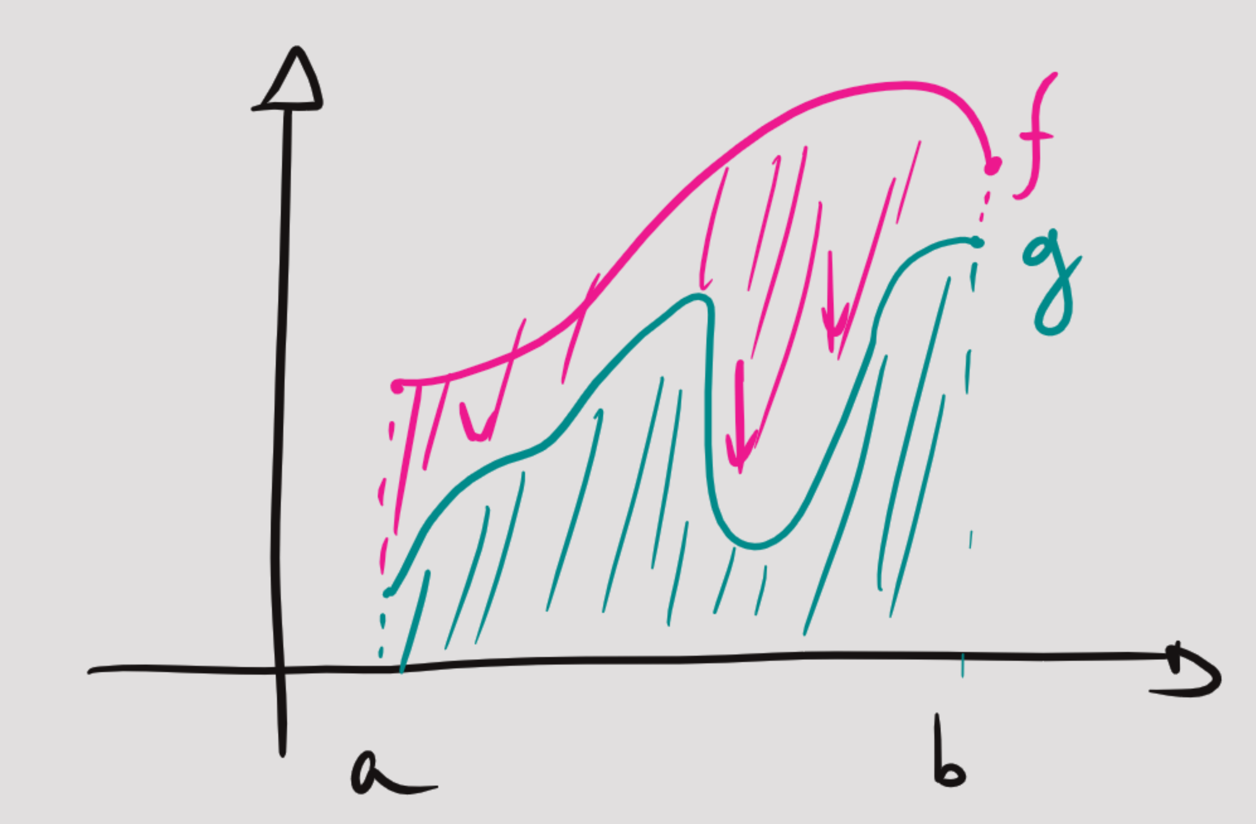
#Proposizione

Proposizione 2.1. (L'integrale di una funzione grande è più grande dell'integrale di una funzione piccola)

Siano f, g delle *funzioni* definite su $[a,b]$. Siano inoltre $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$. Valga che $\forall x \in [a,b], f(x) \geq g(x)$. (ovvero una funzione sta sempre in *"alto"* dell'altro)
Allora vale che

$$\int_{[a,b]} f \geq \int_{[a,b]} g$$

FIGURA 2.1. (*Idea intuitiva della proposizione 2.1.*)



#Proposizione

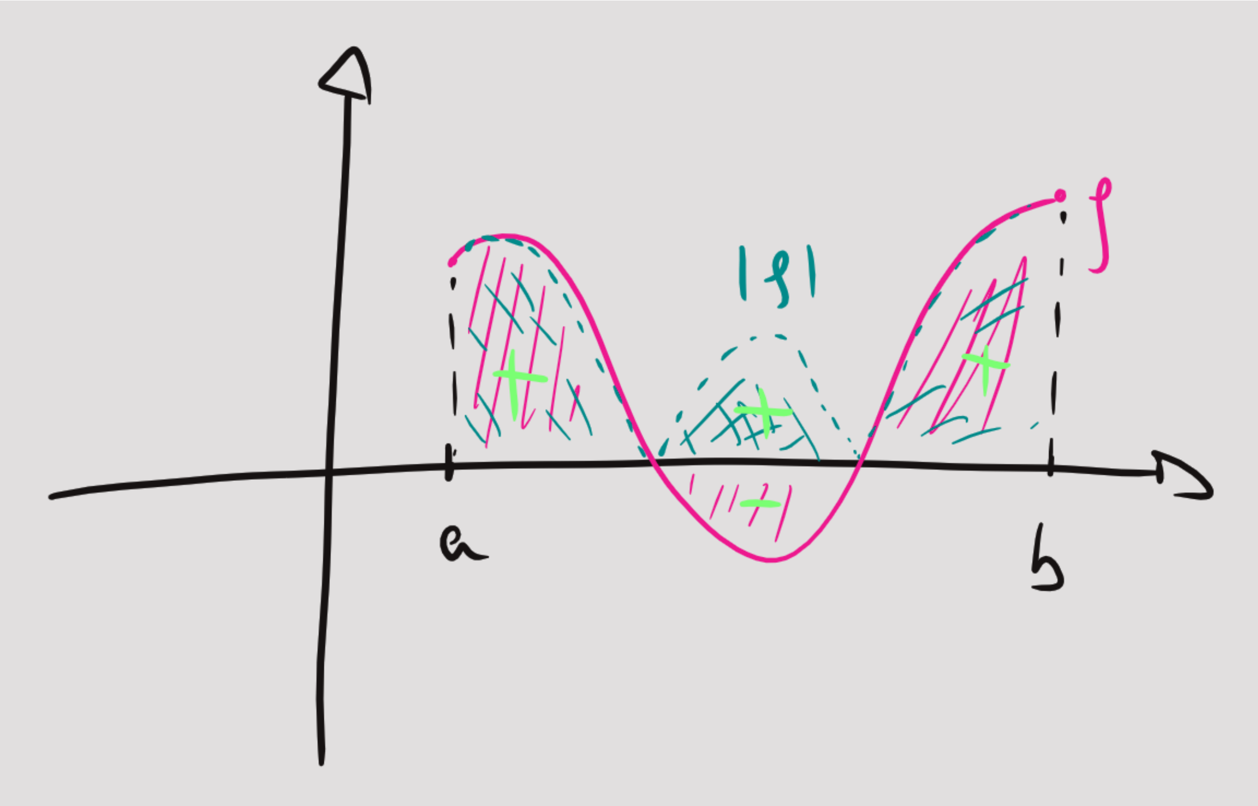
Proposizione 2.2. (l'integrale del valore assoluto di una funzione è più grande dell'integrale della funzione)

Sia f una funzione definita su $[a,b]$. Sia $f \in \mathcal{R}([a,b])$.
Allora $|f| \in \mathcal{R}([a,b])$ e vale che

$$\left| \int_b^a f(t)\, dt \right| \leq \int_b^a |f(t)|\, dt$$

Idealmente a sinistra abbiamo che *consideriamo l'area totale*, dove comunque le *"parti negative"* vengono sottratte alle *"parte positive"*. Invece a destra abbiamo che le *"parti negative"* diventano *"positive"*, dunque abbiamo la somma delle solo *"parti positive"*.

FIGURA 2.2. (*Idea grafica della proposizione 2.2.*)



3. Partizione di un'integrale

#Proposizione

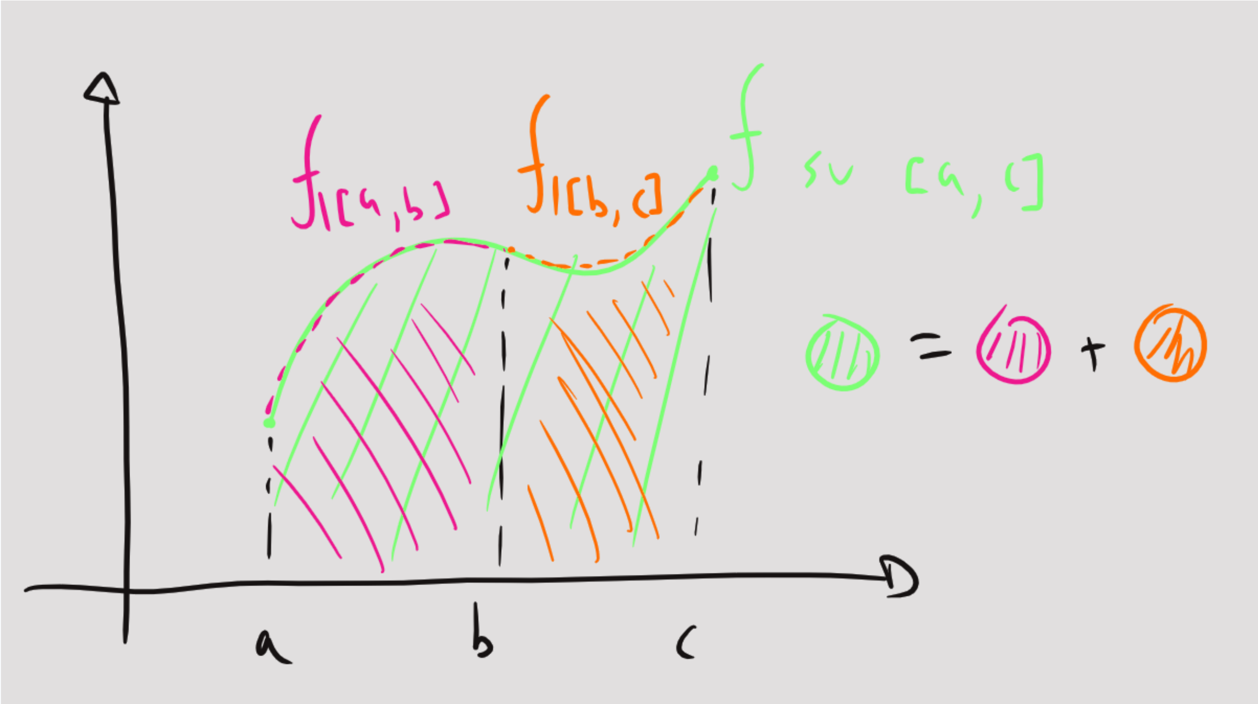
Proposizione 3.1. (la partizione di un'integrale)

Sia $f \in \mathcal{R}([a,b])$ e sia $c \in \;]a,b[$ (punto *interno*).
Allora considerando la *restrizione* di f in $[a,c]$ e $[c,b]$ abbiamo che

$$f_{|[a,c]} \in \mathcal{R}([a,c]); f_{|[c,b]} \in \mathcal{R}([c,b])$$
$$\int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f = \int_{a,b} f$$

Graficamente quest'idea corrisponde a prendere *l'area* sotto la curva, prendere un punto c per lui la *dividiamo* e vediamo che la somma delle due aree tagliate è l'area intera totale.

FIGURA 3.1. (*Idea grafica della proposizione 3.1.*)



4. Convenzione di scrittura degli integrali

Convenzione di scrittura per gli integrali

Si propone la seguente convenzione per scrivere gli integrali, in particolare per quanto riguarda gli *intervalli* di definizione.
Siano $a, b, c \in \mathbb{R}$ dei numeri disposti in *qualsiasi modo*; possiamo avere $a < b < c$, $a < c < b$, e così via...
Allora se abbiamo l'integrale

$$\int_a^b f(t)\, dt$$

Possiamo *"scambiare"* il pedice e l'apice cambiando il segno; ovvero

$$\boxed{\int_a^b f(t)\, dt = -\int_b^a f(t)\, dt}$$

Notiamo inoltre che con questa convenzione valgono comunque tutte le *proprietà* enunciate, in particolare la *proposizione 3.1.*. Infatti possiamo *"giocare con i segni"* per ottenere ciò che vogliamo.

A5. Teorema della media integrale

Teorema della Media Integrale

Breve descrizione qui

---

0. Prerequisiti e/o voci correlate

- Suddivisione di un Intervallo
- Insiemi limitati, maggioranti, massimo e teorema dell'estremo superiore
- Funzioni (minimo, massimo)
- Teoremi sulle funzioni continue (di Weierstraß e dei valori medi)
- Teorema di Torricelli-Barrow (ai fini della dimostrazione)

1. Enunciato del teorema

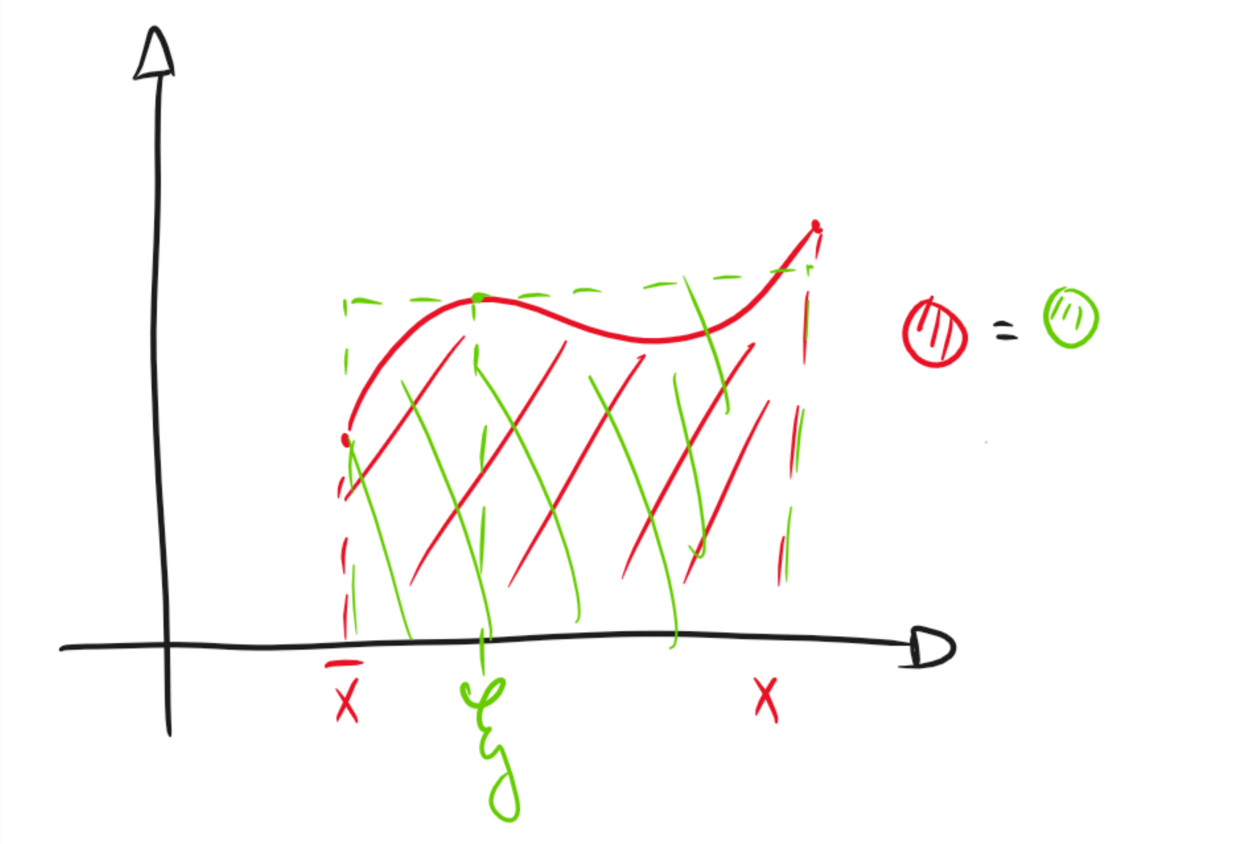
#Teorema

Teorema 1.1. (della media integrale)

Sia $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ *continua* (Definizione di continuità > ^d2f56f), pertanto *integrabile secondo Riemann* (Integrabilità secondo Riemann > ^5455b8).
Allora per *esiste un valore nell'intervallo per cui l'immagine del valore sia uguale all'integrale della funzione diviso per la base*

$$\exists\xi\in[a,b]:f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$$

FIGURA 1.1. (*Idea*)



2. Dimostrazione

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *teorema della media integrale* (^c2f053)
Innanzitutto tengo conto di una *proprietà di definizione* dell'integrale:

$$\forall \Delta \in \mathcal{D}, s(f, \Delta) \leq \int_a^b f(t)dt \leq S(f, \Delta)$$

Questo vale in particolare se scelgo la *suddivisione* più banale, ovvero

$$\Delta = \{a, b\}$$

che è la *meno fine* (Suddivisione di un Intervallo > ^6c1bae) di tutte le suddivisioni possibili.
Cosa succede in questo caso? Vediamo che abbiamo

$$\inf_{[a,b]} f \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(t)dt \leq \sup_{[a,b]} f \cdot (b-a)$$

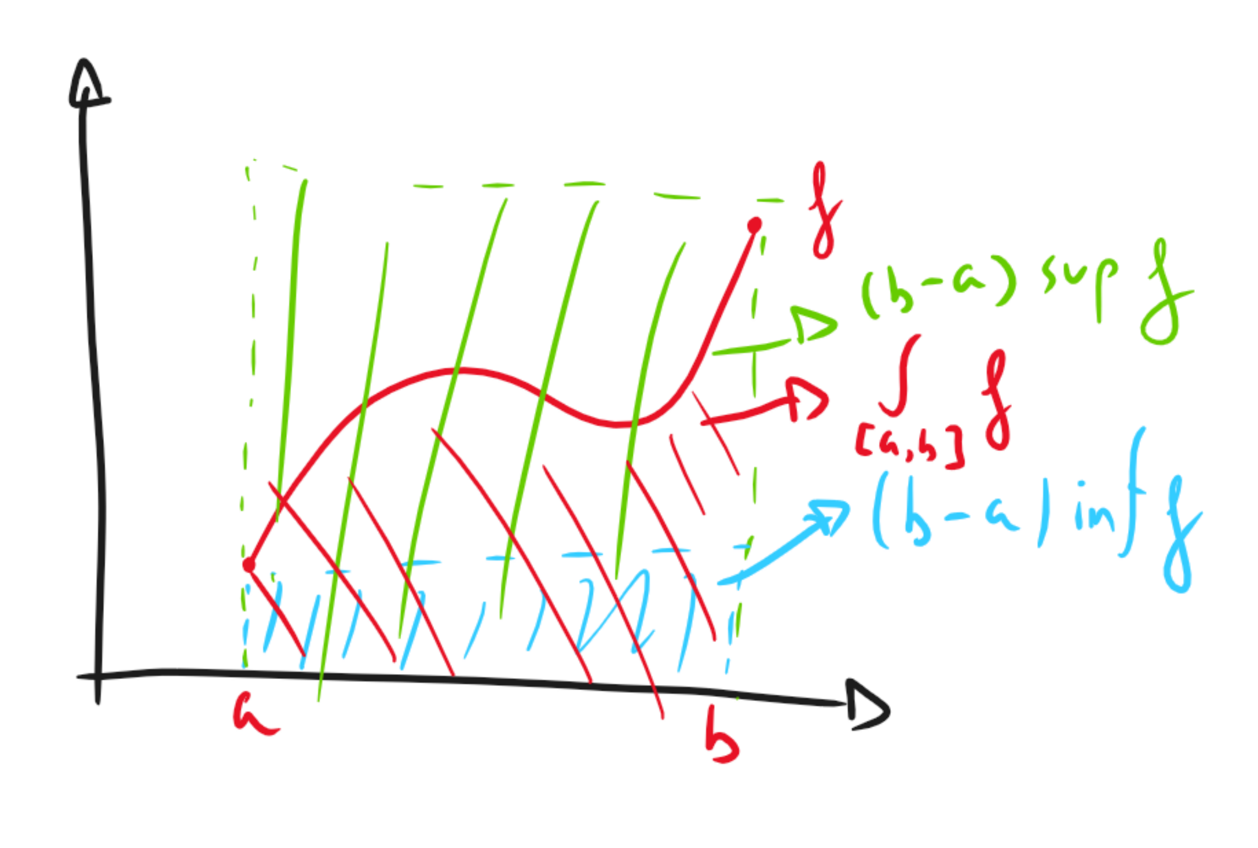
Graficamente se disegno il *rettangolo "più basso" possibile* e quello *"più alto" possibile*, ho che l'*area della funzione* viene *"incastrata"* tra di essi (*figura 2.1.*).
Ma per il *teorema di Weierstraß* (Teoremi sulle funzioni continue > ^918fc1) f ha sia $\min$ che $\max$ dato che essa è *continua* e viene definita su un *insieme chiuso e limitato*; allora $\inf, \min$ e $\sup, \max$ coincidono. Ovvero, definendo x_m il punto di *minimo* e x_M il punto di *massimo*, ho

$$f(x_m) \leq \frac{\int_a^b f(t)dt}{b-a} \leq f(x_M)$$

Infine applico il *teorema dei valori intermedi* (Teoremi sulle funzioni continue > ^1c6f7c) su $[a, b]$ e dunque ho

$$\exists \xi \in [a, b] : f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt$$

FIGURA 2.1.



SEZIONE B. LA PRIMITIVA DI UNA FUNZIONE

B1. La definizione di primitiva di funzione

Primitiva di una Funzione

La primitiva di una funzione: definizione, osservazioni.

---

1. Definizione di Primitiva di una Funzione

#Definizione

Definizione 1.1. (la primitiva di una funzione)

Siano $f, F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ due *funzioni di variabile reale*.
Allora se sussiste il seguente:

$$\boxed{\forall x \in [a, b], F'(x) = f(x)}$$

allora F si dice *primitiva* di f.

#Definizione

Definizione 1.2. (funzione primitivabile)

Sia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Se questa funzione ammette una funzione F primitiva (^eb48c4) per cui $F' = f$, allora f si dice *primitivabile*.

#Definizione

Definizione 1.3. (integrale indefinito di una funzione)

Tradizionalmente si chiama l'insieme delle *primitive* di una funzione $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ come *"l'integrale indefinito di f"* e lo si denota con

$$\int f(x)\, dx$$

NOTA. Al primo impatto questa definizione *tradizionale* è chiaramente confusionaria in quanto sembra di collegare due argomenti totalmente distaccati tra di loro: da un lato stiamo semplicemente considerando le *primitive* di una funzione, dall'altro degli *integrali* (Integrabilità secondo Riemann > ^64ad3b). Quale sarà mai il collegamento tra di loro, se esiste? Scopriremo questo nesso col *teorema fondamentale del calcolo integrale* (Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale).

2. Esempi di primitive funzioni e di funzioni non primitivabili

#Esempio

Esempio 2.1. (la primitiva della funzione identità)

Voglio calcolare la *primitiva* della funzione identità $f(x) = x$.
Un possibile approccio è quello di fare delle *"ipotesi ragionate"* su ciò che possono essere dei *"buoni canditati"*: prendiamo ad esempio x^2. Prendendo la sua derivata $(x^2)' = 2x$, vedo che sono vicino (*fuocherello*).
Allora basta dividere tutto per due e alla fine ottengo

$$(\frac{x^2}{2})' = x$$

Pertanto $\frac{x^2}{2}$ per definizione è *primitiva* di x.

#Esempio

Esempio 2.2. (funzioni non primitivabili)

Vediamo che possono *non* esistere delle funzioni non primitivabili; ovvero delle funzioni delle quali primitive *non* possono essere espresse in *termini di funzioni elementari* (ovvero quelle che conosciamo). Bisognerebbe infatti proprio *"inventare"* nuove funzioni ad-hoc che definiscono delle primitive di funzioni non primitivabili.
Ad esempio la funzione

$$f(x) = \frac{1}{\ln x}$$

non è *primitivabile*.

3. Generare altre primitive da una primitiva

#Osservazione

Osservazione 3.1. (possiamo trovare altre primitive a partire da una)

Osservo che a partire da una primitiva F di una funzione f (che ovviamente sia *primitivabile*), posso trovare le sue altre primitive: basterebbe aggiunge una costante $c \in \mathbb{R}$, in quanto la *derivata* della costante è 0.
Infatti

$$(F+c)' = F+0 \implies (F+c)' = f$$

#Teorema

Teorema 3.1. (di struttura delle primitive di una funzione)

Sia $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *primitivabile* (^5b45ed).
Sia F una sua *qualunque* primitiva.
Allora le *tutte e sole* primitive di f sono del tipo $F+c, c \in \mathbb{R}$.
(riformulazione). Ovvero una funzione G è *primitiva* di f se e solo se è di forma $F+c$.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *teorema 3.1.* (^3a574e)
" $\impliedby$ ". Questa è banalmente immediata: infatti $(F+c)' = F' = f$.
" $\implies$ ". Considero $G-F$ per calcolarne la derivata:

$$(G-F)' = G' - F' = f - f = 0$$

Per il *teorema di Lagrange* (Teorema di Lagrange > ^ef03c2) sappiamo che se $(G-F)' = 0$ su $[a,b]$, allora la funzione $G-F$ è necessariamente una *funzione costante* (Conseguenze del teorema di Cauchy e di Lagrange > ^19eb72). Ma allora

$$G - F = c \implies \boxed{G = F+c} \blacksquare$$

SEZIONE C. IL TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO

C1. Definizione di Funzione Integrale (die Integralfunktion)

Funzione Integrale

Funzione Integrale: definizione di Funzione Integrale (Integralfunktion); prime proprietà della funzione integrale (lipschitziana e continua).

---

0. Prerequisiti e/o voci correlate

- Funzioni
- Integrabilità secondo Riemann
- Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale
- Esempi di Calcolo delle Primitive
- Primitive delle Funzioni Elementari
- Integrazione per Parti
- Integrazione per Sostituzione

1. Definizione di Integralfunktion (Funzione Integrale)

#Definizione

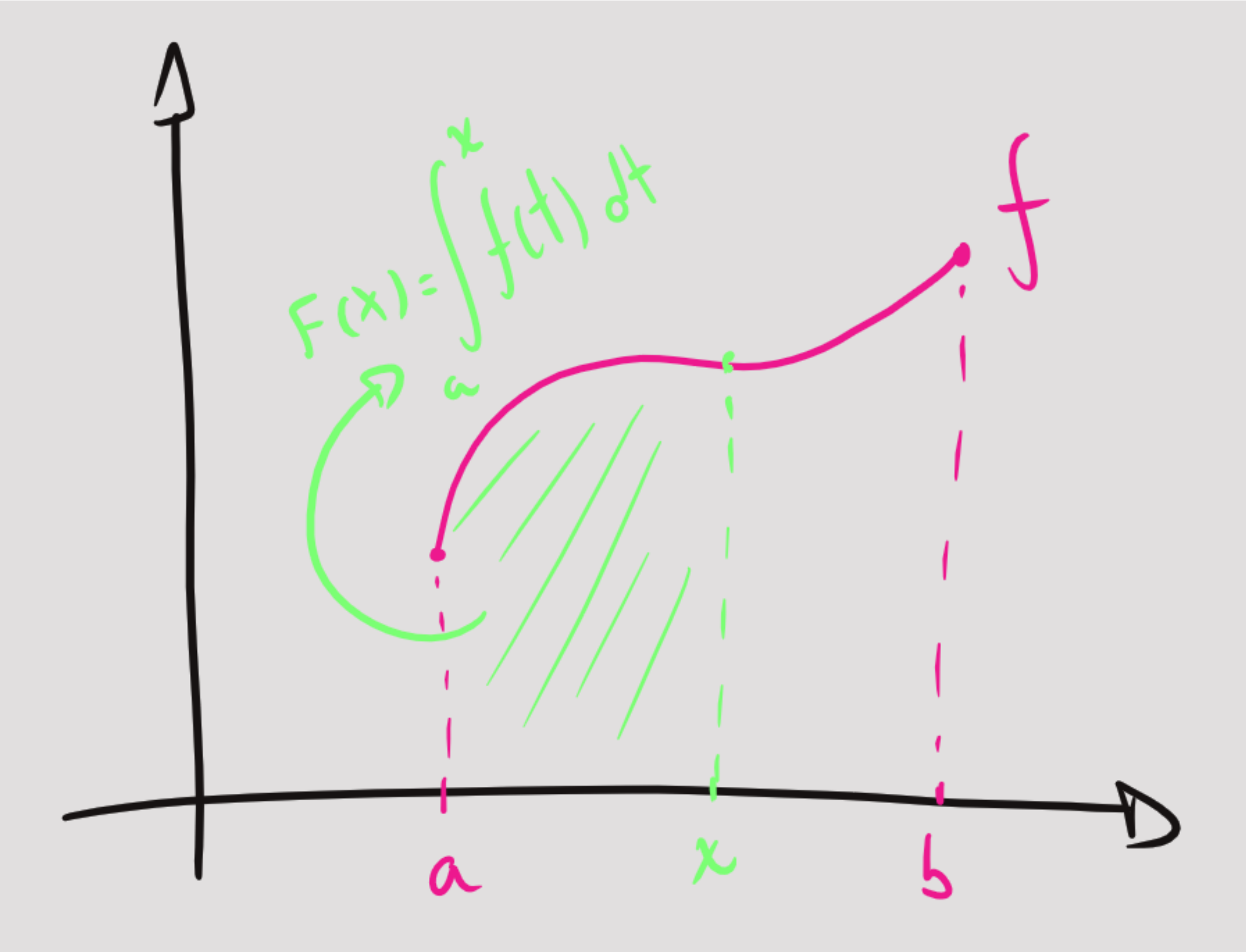
Definizione 1.1. (la funzione integrale / die Integralfunktion)

Sia $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ una funzione *integrabile secondo Riemann sull'intervallo* $[a,b]$ (Integrabilità secondo Riemann > ^5455b8).
Allora definisco la *funzione integrale di* f su $[a,b]$ (oppure in tedesco *die Integralfunktion*) come il seguente:

$$\boxed{F:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}\ ;\ F(x)=\int_a^x f(t)\ dt}$$

Geometricamente questo corrisponde a *prendere la singola area partizionata tra il punto* a,x (Proprietà delle Funzioni Integrabili > ^157e15) (*figura 1.1.*).

FIGURA 1.1. (*Idea grafica dell'Integralfunktion*)



2. Proprietà dell'Integralfunktion

Integralfunktion Lipschitziana

#Definizione

Definizione 2.1. (funzione lipschitziana)

Sia una $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una *funzione*, se vale la seguente condizione, ovvero

$$\exists M > 0 : \forall x_1, x_2 \in [a, b],$$
$$|g(x_1) - g(x_2)| \leq M|x_1 - x_2|$$

allora g si dice *lipschitziana* (o in tedesco *lipschitzstetig*).

#Proposizione

Proposizione 2.1. (funzione lipschitziana è continua)

In particolare, una funzione *lipschitziana* è anche *continua*: dalla condizione di *Lipschitz* deve discendere

$$\lim_{x_1 \to x_2} g(x_1) = g(x_2)$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE della *proposizione 2.1.* (^2635f6)
Dimostrazione lasciata al lettore per esercizio (Esercizi sulle funzioni > ^488ad5) ■
Consiglio: usare la definizione "alla Cauchy" della continuità.

#Teorema

Teorema 2.1. (die Integralfunktion ist lipschitzstetig)

Sia f una *funzione integrabile secondo Riemann sull'intervallo* $[a, b]$ (Integrabilità secondo Riemann) (ovvero $f \in \mathcal{R}([a, b])$).
Sia F l'*Integralfunktion* di f, ovvero $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$F(x) = \int_a^x f(x)\, dx$$

Allora la *funzione integrale* F è *lipschitziana* (^2635f6)

$$\begin{gathered} \exists M > 0 : \forall x_1, x_2 \in [a, b] \\ |F(x_1) - F(x_2)| \leq M|x_1 - x_2| \end{gathered}$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *teorema 2.1.* (^7e839c)
Sia f *integrabile secondo Riemann*. Allora f è *limitata*, ovvero:

$$\exists M > 0 : \forall x \in [a, b], |f(x)| < M$$

dove, per due qualsiasi punti x_1, x_2 nell'intervallo di definizione abbiamo

$$\begin{aligned} F(x_1) - F(x_2) &= \int_a^{x_1} f(t)\, dt \, - \int_a^{x_2} f(t)\, dt \\ &= \int_a^{x_1} f(t)\, dt \, + \int_{x_2}^{a} f(t)\, dt \\ &= \int_{x_2}^{a} f(t)\, dt \, + \int_a^{x_1} f(t)\, dt \\ &= \int_{x_2}^{x_1} f(t)\, dt \end{aligned}$$

Allora

$$|F(x_1) - F(x_2)| = \left| \int_{x_2}^{x_1} f(t)\, dt \right| \leq \int_{x_2}^{x_1} |f(t)|\, dt$$

Posso piazzare il *valore assoluto* dell'integrale in quanto non è *garantito* che $x_1 < x_2$; infatti potremmo avere delle *"aree negative"* (Proprietà delle Funzioni Integrabili > ^cd03da).
Ma allora posso *"rimpiazzare"* $|f(t)|$ col valore per cui è limitato, ovvero M.

$$|f(t)| \leq M \implies |F(x_1) - F(x_2)| \leq \left| \int_{x_2}^{x_1} M \, dt \right| = M|x_1 - x_2|$$

Ovvero, in definitiva,

$$\boxed{|F(x_1) - F(x_2)| \leq M|x_1 - x_2|} \blacksquare$$

Integralfunktion Continua

#Corollario

Corollario 2.1. (die Integralfunktion ist kontinuierlich)

Sia f una *funzione integrabile secondo Riemann sull'intervallo* $[a, b]$ (Integrabilità secondo Riemann) (ovvero $f \in \mathcal{R}([a, b])$).
Sia F l'*Integralfunktion* di f, ovvero $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$F(x) = \int_a^x f(x) \, dx$$

Allora la *funzione integrale* F è *continua*, in quanto lipschitziana.

#Dimostrazione
DIMOSTRAZIONE del *corollario 2.1.* (^abcab0)
Questo teorema segue direttamente dal *teorema 2.1.* (^7e839c) e dalla *proposizione 2.1.* (^2635f6). Infatti la dimostrazione è già stata *"inclusa"* nell'enunciato. ■

C2. Il teorema fondamentale del calcolo integrale

Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale

Teorema fondamentale del Calcolo Integrale: enunciato, dimostrazione e corollari.

---

0. Prerequisiti e/o voci correlate

- Funzioni
- Definizione di continuità
- Integrabilità secondo Riemann
- Funzione Integrale
- Derivata e derivabilità
- Rapporto Incrementale

1. Enunciato del Teorema F.C.I.

#Teorema

Teorema 1.1. (fondamentale del calcolo integrale)

Sia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione *integrabile secondo Riemann* (Integrabilità secondo Riemann > ^5455b8), ovvero $f \in \mathcal{R}([a, b])$.
Sia $\bar{x} \in [a, b]$. Sia f *continua* in $\bar{x}$ (Definizione di continuità > ^ddf65d).
Sia $F(x)$ l'*Integralfunktion* di f (Funzione Integrale > ^e5e02b), ovvero

$$F(x) = \int_a^x f(x)\, dx$$

Allora F è *derivabile* in $\bar{x}$ e vale che

$$\boxed{F'(\bar{x}) = f(\bar{x})}$$

#Dimostrazione
DIMOSTRAZIONE del *teorema fondamentale del calcolo integrale* (^99ef41).
Per dimostrare il *teorema fondamentale del calcolo integrale* mi basta provare che la funzione integrale F è *derivabile* in $\bar{x}$ e che $F'(\bar{x}) = \bar{x}$, ovvero *per definizione* della derivata (Derivata e derivabilità > ^478a87) devo provare il limite

$$\lim_{x \to \bar{x}} R^F_{\bar{x}}(x) = f(\bar{x}) \implies \lim_{x \to \bar{x}} R^F_{\bar{x}} - f(\bar{x}) = 0$$

dove $R^F_{\bar{x}}$ è il *rapporto incrementale* (Rapporto Incrementale > ^ccc58b)

$$\frac{F(x) - F(\bar{x})}{x - \bar{x}}$$

Allora riformulando nuovamente devo provare il limite

$$\lim_{x \to \bar{x}} \frac{\int_a^x f(t)dt - \int_a^{\bar{x}} f(t)dt}{x - \bar{x}} - f(\bar{x}) = 0$$

Però ricordandoci una delle proprietà per cui possiamo *"invertire"* il pedice con l'apice scambiando i segni ed effettuando delle manipolazioni posso avere

$$\int_a^x f(t)dt + \int_{\bar{x}}^a f(t)dt = \int_{\bar{x}}^a f(t)dt + \int_a^x f(t)dt = \int_{\bar{x}}^x f(t)dt$$

Inoltre mi ricordo che

$$f(\bar{x}) = \frac{\int_{\bar{x}}^x f(\bar{x})dt}{x - \bar{x}}$$

infatti sto *"calcolando"* l'altezza partendo dall'*area* $\int f(\bar{x})dt$ e dalla *base* $x - \bar{x}$ (ovvero faccio $h = A/b$)
Allora in definitiva ho

$$\lim_{x \to \bar{x}} \frac{\int_{\bar{x}}^x f(t) - f(\bar{x})dt}{x - \bar{x}}$$

Ma so che f è *continua* in $\bar{x}$, ovvero che vale il limite

$$\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = f(\bar{x}) \implies \lim_{x \to \bar{x}} f(x) - f(\bar{x}) = 0$$

Ovvero, *"alla Cauchy"* ciò equivale al seguente:

$$\begin{gathered}\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x, \\ |x - \bar{x}| < \delta \implies |f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon\end{gathered}$$

Allora, considerando un qualsiasi $t \in [\bar{x}, x]$ (ovvero tra gli *"estremi"* dell'integrale), ho

$$|t - \bar{x}| < \delta \implies |f(t) - f(\bar{x})| < \varepsilon$$

Allora con tutte le considerazioni appena effettuate e ricordandoci un'altra *proprietà* dell'*integrale* (Proprietà delle Funzioni Integrabili > ^cd03da) ho

$$|R_{\bar{x}}^F(x) - f(\bar{x})| = \frac{1}{x - \bar{x}} \left| \int_{\bar{x}}^x f(t) - f(\bar{x})dt \right| \leq \frac{1}{x - \bar{x}} \int_{\bar{x}}^x |f(t) - f(\bar{x})|dt <$$

In definitiva, rimettendo tutto apposto ho il seguente:

$$\begin{gathered}\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x, \\ |x - \bar{x}| < \delta \implies |R_{\bar{x}}^F(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon\end{gathered}$$

che è proprio la *definizione* del *limite*

$$\lim_{x \to \bar{x}} R_{\bar{x}}^F(x) = f(\bar{x}) \implies \boxed{F'(\bar{x}) = f(\bar{x})} \blacksquare$$

2. Conseguenze del teorema

#Corollario

Corollario 2.1. (primitivabilità delle funzioni continue)

Se f è *continua*, allora f è *primitivabile* (Primitiva di una Funzione > ^5b45ed) e la sua funzione integrale è *una* sua primitiva.

DIMOSTRAZIONE del *corollario 2.1.* (^796d23)
Questo corollario segue *direttamente* dal *teorema fondamentale del calcolo integrale*: infatti se una funzione è *continua nel suo dominio*, allora per il teorema sopracitato questa l'*Integralfunktion* di questa funzione è la *primitiva* per ogni punto nel dominio. ■
Inoltre nella dispensa si trova una *dimostrazione alternativa*.

#Corollario

Corollario 2.2. (teorema di Torricelli-Barrow)

Vedere la pagina Teorema di Torricelli-Barrow dato che è possibile dimostrarla senza l'ausilio del *"teorema padre"*, ovvero il *teorema fondamentale del calcolo integrale*.

C3. Il teorema di Torricelli-Barrow

Teorema di Torricelli-Barrow

Teorema di Torricelli-Barrow: enunciato, dimostrazione alternativa e conseguenza principale.

---

0. Prerequisiti e/o voci correlate

- Integrabilità secondo Riemann
- Primitiva di una Funzione
- Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale
- Teoremi sulle funzioni continue (Weierstraß e dei valori medi)
- Primitiva di una Funzione

- Suddivisione di un Intervallo
- Teorema della Media Integrale

1. Enunciato del teorema di Torricelli-Barrow

#Teorema

Teorema 1.1. (di Torricelli-Barrow)

Sia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continua* nel dominio (Definizione di continuità > ^ddf65d).
Allora f è *integrabile* (Tipologie di Funzioni Integrabili > ^dd4f09).
Ha senso dunque considerare la sua *funzione integrale* (Funzione Integrale > ^e5e02b),

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Allora F è *derivabile nel dominio* e vale che

$$\boxed{\forall x \in [a, b], F'(x) = f(x)}$$

#Dimostrazione
Naturalmente questo teorema non è altro che il *figlio* del *teorema fondamentale del calcolo integrale* (Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale > ^99ef41), solo che al posto di concentrarci su un *singolo punto* la generalizziamo su *tutto il dominio* $[a, b]$.
Alternativamente è possibile dare la seguente dimostrazione *"bypassando"* il *teorema fondamentale del calcolo integrale*.
Innanzitutto tengo conto del *teorema della media integrale* (Teorema della Media Integrale > ^c2f053).
Sia f *continua* su $[a, b]$ e considero il *rapporto incrementale* $R^F_{\bar{x}}(x)$.

$$\begin{aligned} R^F_{\bar{x}}(x) &= \frac{F(x) - F(\bar{x})}{x - \bar{x}} \\ &= \int_a^x f(t)dt - \int_a^{\bar{x}} f(t)dt \cdot \frac{1}{x - \bar{x}} \\ &= \frac{1}{x - \bar{x}} \int_{\bar{x}}^x f(t)dt \end{aligned}$$

Possiamo illustrare in una maniera grafica il fatto che

$$\int_{[a,x]} f - \int_{[a,\bar{x}]} f = \int_{[\bar{x},x]} f$$

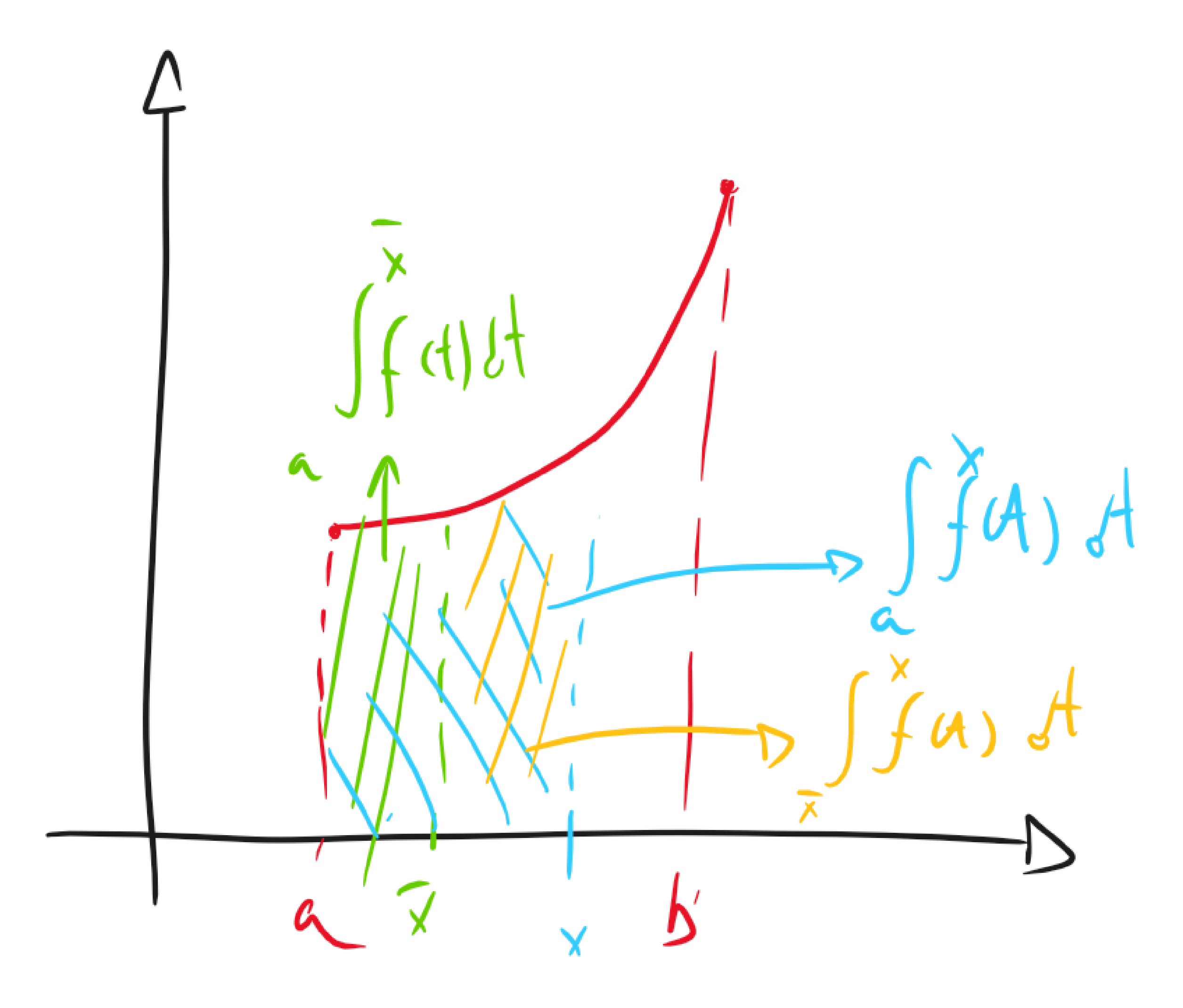
(*figura 1.1.*)
Ma allora possiamo considerare il *teorema delle media integrale* per cui ho un dato $\xi \in (\bar{x}, x)$ vale che

$$f(\xi) = \frac{1}{x - \bar{x}} \int_{\bar{x}}^{x} f(t)dt$$

Pertanto passando al *limite* $x \to \bar{x}$ ho

$$\lim_{x \to \bar{x}} R_{\bar{x}}^{F}(x) = \lim_{x \to \bar{x}} f(\xi) \underbrace{\Longrightarrow}_{\bar{x}<\xi<x} \lim_{\xi \to \bar{x}} f(\xi) = f(\bar{x}) \blacksquare$$

FIGURA 1.1.



2. Conseguenze del teorema di Torricelli-Barrow

#Corollario

Corollario 2.1. (l'integrale è la differenza tra le primitive calcolate negli estremi)

Sia G una *primitiva* di f, che è *continua* in $[a, b]$, allora si ha

$$\boxed{\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a)}$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *corollario 2.1.* (^981032)
Dal teorema di *Torricelli-Barrow* (^ebd157) so che la *funzione integrale*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

è una *primitiva* di F.
Allora, essendo G una *primitiva qualsiasi*, so che la *differenza puntuale* tra F, G è *necessariamente una costante*, dato che G è di forma $F + c$. Ovvero

$$F - G = c \in \mathbb{R}$$

Poi so che $F(a) = 0$, dato che $\int_a^a f(t)dt = 0$: quindi

$$F(a) - G(a) = c \implies 0 - G(a) = c \implies c = -G(a)$$

Infine scrivo

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) = G(b) + c = G(b) - G(a) \blacksquare$$

#Osservazione

Osservazione 2.1. (lo spostamento del problema del calcolo integrale)

Questo corollario è importante, dato che da questo momento il problema del *calcolo integrale* diventa quello di *trovare le primitive* di una funzione.

SEZIONE D. IL CALCOLO DELLE PRIMITIVE

D1. Gli integrali delle funzioni elementari

Primitive delle Funzioni Elementari

Tabella delle primitive delle funzioni elementari.

---

0. Prerequisiti e/o voci correlate

- Primitiva di una Funzione
- Tabella delle derivate

1. Tabella delle Primitive delle Funzioni Elementari

Prendiamo la *tabella delle derivate delle funzioni* e la *"leggiamo al contrario"*:

f	$G \in \int f$
0	$C \in \mathbb{R}$
1	x
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}, n \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln -x-, x \neq 0$
e^x	e^x
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$

f	$G \in \int f$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$ oppure $\arccos x$
$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\arctan x$

#Osservazione

Osservazione 1.1. (l'arcoseno e l'arcocoseno sono la stessa cosa in questo contesto)

Notiamo che per la frazione $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ abbiamo *due primitive* ammissibili: questo al primo impatto può sembrare strano, ma in una seconda analisi (matematica) vedremo che questa situazione ha perfettamente senso!

Consideriamo infatti la funzione

$$f(x) = \arcsin x + \arccos x$$

Che è definita in $[-1, 1]$ dato che entrambe sono definite in tale intervallo.
La calcoliamo in 0 (ricordandoci delle definizioni! Funzioni trigonometriche > ^07affd):

$$f(0) = \arcsin 0 + \arccos 0 = 0 + \frac{\pi}{2}$$

Calcoliamo la *derivata* di f:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

Ma per una *conseguenza del teorema di Lagrange* (Conseguenze del teorema di Cauchy e di Lagrange > ^19eb72), f dev'essere una funzione *costante*, di conseguenza deve valere

$$\frac{\pi}{2} = \arcsin x + \arccos x \implies -\arccos x = \arcsin x + \frac{\pi}{2}$$

Quindi vediamo che queste funzioni *sono* effettivamente le stesse, solo che una è traslata dell'altra. Poi, come osserveremo nel contesto del *calcolo integrale*, questo li rende effettivamente uguali.

#Osservazione

Osservazione 1.2.

Per comodità chiamo l'*insieme delle primitive* di f come $\int f(x)dx$, ovvero *"l'integrale indefinito"* di $f(x)$; inoltre indico un *qualsiasi* elemento di $\int f(x)dx$ come $F(x)+c$.

D2. L'integrazione per parti

Integrazione per Parti

Teorema dell'integrazione per parti: enunciato, dimostrazione e applicazione.

---

0. Prerequisiti e/o voci correlate

- Derivata e derivabilità
- Proprietà delle derivate (regola di Leibniz)
- Primitiva di una Funzione

1. Enunciato della regola

#Teorema

Teorema 1.1. (integrazione per parti)

Siano $f,g \in \mathcal{C}^1$ (ovvero *derivabili* almeno una volta con la loro derivata continua) (Derivata Successiva e Classe C > ^dbae48).
Allora vale che

$$\boxed{\int f(x)g'(x)\ dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\ dx}$$

Da cui

$$\boxed{\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx}$$

2. Dimostrazione

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *teorema 1.1.* (^4f8e66)
Ricordiamoci la *regola di Leibniz* per le derivate (Proprietà delle derivate > ^fd716f):

$$(fg)' = f'g + fg'$$

So che sia $f'g$ che fg' sono *continue*. Allora possiamo considerare la *funzione integrale* di $f'g + fg'$:

$$\int_a^x f(t)g'(t)\,dt + \int_a^x f'(t)g(t)\,dt = f(x)g(x) - f(a)g(a)$$

da cui, calcolandola in b, deriva

$$\int_a^b f(t)g'(t)\,dt = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(t)g(t)\,dt \blacksquare$$

#Osservazione

Osservazione 2.1. (trucchetto mnemonico)

Approfondimento tratto da "Le Matematiche" di A. D. Aleksandrov, A. N. Kolmogorov e M. A. Lavrent'ev (pp. 169-170)
Si può alternativamente imparare una *"dimostrazione"* meno formale ma più *"facile"* da imparare a memoria di questo teorema: consideriamo l'integrazione come un'*"operazione"* che prende in argomento funzioni.
Allora, ricordandoci la regola di Leibniz possiamo derivare

$$\begin{aligned}(uv)' &= uv' + u'v \\ uv' &= (uv)' - u'v \\ \int (uv)'dx &= uv - \int (u'v)\,dx\end{aligned}$$

3. Regola pratica

#Osservazione

Osservazione 3.1. (regola pratica)

Come *"regoletta pratica"* possiamo considerare la f come la funzione *"derivanda"* chiamandola D, e invece possiamo considerare g' come la funzione *"integranda"* chiamandola I.
Riformulando il teorema iniziale abbiamo

$$\int DI = D\int I - \int D' \int I$$

Dove D, I sono le *funzioni originali*, D' la funzione derivata e $\int I$ la funzione integrata.

Metodo D-I (approfondimento personale)

#Osservazione

Osservazione 3.2. (metodo D-I)

Inoltre è possibile impararsi un *"trucchetto pratico"* per questa tecnica di integrazione, spiegato nel seguente video dal professore universitario cinese-statunitense *Steve Chow*
https://www.youtube.com/watch?v=2I-_SV8cwsw

D3. L'integrazione per sostituzione

Integrazione per Sostituzione

Integrazione per sostituzione: teorema, dimostrazione e utilità pratica.

---

0. Prerequisiti e/o voci correlate

- Funzione Integrale
- Primitiva di una Funzione
- Derivata e derivabilità
- Funzioni

1. Enunciato del teorema

#Teorema

Teorema 1.1. (integrazione per sostituzione)

Sia $g \in \mathcal{C}^1$ (ovvero *derivabile fino ad almeno* f' con f' continua),

$$g : [\alpha, \beta] \longrightarrow [a, b]$$

Sia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continua* (Definizione di continuità > ^ddf65d).
Sia F l'*Integralfunktion* di f (Funzione Integrale > ^e5e02b).
Allora vale che

$$(F(g(x)))' = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x))g'(x)$$

Di conseguenza vale anche

$$\boxed{\int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))g'(t)\ dt = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x)\ dx}$$

In particolare se g è *invertibile* e vale che $g(\alpha) = a, g(\beta) = b$, allora vale anche

$$\boxed{\int_{a}^{b} f(x)\ dx = \int_{g^{-1}(a)=\alpha}^{g^{-1}(b)=\beta} f(g(t))g'(t)\ dt}$$

2. Dimostrazione

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *teorema 1.1.* (^4d29d1)
La dimostrazione è immediata: questa segue dalle *regole di derivazione* (Proprietà delle derivate) e dal *teorema fondamentale del calcolo integrale* (Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale > ^99ef41): infatti vale che

$$F(g(\beta)) - F(g(\alpha)) = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x)\ dx$$

3. Regola pratica

#Osservazione

Osservazione 3.1. (regoletta pratica)

Anche se l'enunciato del teorema in sé potrebbe sembrar complicato, in realtà è più facile di quello che si pensa. Infatti possiamo usare la seguente regoletta pratica:

- Poniamo una nuova *"variabile"* e la chiamiamo u in funzione di x; ovvero abbiamo qualcosa del tipo $u = f(x)$.
- Prendendo la derivata di u ottengo $du = f'(x)dx$.
- Se nell'integrale riesco a trovare $f'(x)dx$, posso *"sostituirla"* con du e posso sostituire altrettanto $f(x)$ con u. Inoltre dobbiamo ricordarci pure di sostituire gli *estremi* dell'integrando! Supponendo che α, β siano gli estremi allora li troviamo ponendo $u_\alpha = e^\alpha$ e $u_\beta = e^\beta$.

Si illustra questa regoletta nel seguente esempio.

#Esempio

Esempio 3.1. (sostituzione per u)

Voglio calcolare

$$\int_1^2 2x \cdot x^2 \, dx$$

Anche se questo integrale sarebbe troppo banalmente facile da calcolare con le altre *tecniche* di integrazione (come ad esempio mediante la tabella delle primitive), supponiamo però di esser pagati una modica cifra di denaro per ogni volta che usiamo l'*integrazione per sostituzione*.
Siamo avari di denaro, quindi tentiamo di usare questa tecnica.
Poniamo dunque $u = x^2$, da cui implica $du = 2x \, dx$.
Inoltre, *"trasformiamo"* gli estremi calcolando

$$u_1 = 1^2 = 1; u_2 = 2^2 = 4$$

Ho tutte le condizioni per svolgere l'integrale? Sì! Ho proprio $2x \, dx$ nell'integrale stesso.

$$\int_1^2 x^2 \cdot 2x \, dx$$

Allora lo effettuo la *sostituzione per* u:

$$\int_1^2 x^2 \cdot 2x \, dx = \int_1^4 u \, du$$

Alla fine calcolo l'integrale

$$\int_1^4 u \, du = \frac{u^2}{2}\bigg|_1^4 = \frac{15}{2}$$

che è ciò che volevamo.

CAPITOLO VIII. Studio delle funzioni

Abstract del Capitolo VIII

Dopo aver *ottenuto* tutte le *"armi"* dell'*analisi matematica*, possiamo finalmente effettuare lo *"studio della funzione"*.

Studio di funzione

Studio di Funzione

Schema "generale" e "riassuntivo" di quello che potrebbe essere lo svolgimento di uno studio di funzione

---

0. Preambolo

In questo articolo si elencheranno dei *"step"* principali, che sono da svolgere generalmente in uno studio di funzione; ovviamente al variare di esercizio potranno sorgere delle necessità diverse.
Quindi anche lo schema che presenterò dovrebbe essere generalmente valido, però bisogna comunque stare attenti ad eventuali *"sorprese"* da parte del testo.

1. Procedimento generale

Questo procedimento riguarderà la consegna *"principale"* di uno studio di funzione: ovvero quella di realizzare un *disegno* (approssimativo) della funzione richiesta

I. Dominio della funzione

Trovare il dominio per cui è *definita* la funzione.
Questo problema è elementare in quanto considerare il *dominio* delle *funzioni elementari* (Funzioni di potenza, radice e valore assoluto, Funzioni trigonometriche, Funzione esponenziale e Logaritmica), farci un sistema e prendere l'insieme più *"restrittivo"*.

II. Incrocio con le assi

Trovare i *punti* in cui la funzione incrocia con l'asse dell'ascissa e delle ordinate.
Per trovare i punti per cui f incrocia con la retta delle ordinate basta sostituire $f(x)$ con $x = 0$. Ovviamente questo è possibile *solo se* 0 appartiene al *dominio* di f.
Nel secondo caso si tratterebbe di trovare una *soluzione* all'*equazione* $f(x) = 0$; però non è sempre scontato che sia *sempre* possibile trovare punti in cui la funzione f incontra l'asse x; infatti, ad esempio $f(x) = x^2 + 1$ non incrocia con x da nessuna parte.

III. Segno della funzione e parità

Anche qui il problema è elementare, in quanto di solito basta far *"ricondurre"* il segno delle funzioni complicate a quelle elementari.
Dopodiché è anche utile controllare se la funzione è *pari* o *dispari* calcolando $f(-x)$

; in questo modo abbiamo un'*automatismo* utile per vedere se ciò che stiamo svolgendo sia giusto o meno, in quanto il segno della funzione e la parità sono correlate.
Ad esempio, una funzione pari ha i segni *"riflessi"*.

IV. Limiti agli estremi e punti particolari

Qui bisogna sapere come calcolare i *limiti* (Definizione di Limite di funzione); allora questa parte richiederà un po' di tecnica con i limiti.
In particolare è utile calcolare i limiti per x che tende a $\pm\infty$, e ad alcuni punti per cui *non* è *definita*. Ovviamente qui serve la discrezione personale, in quanto in alcuni casi non ci sarebbe neanche il senso di farlo.
A questo punto sarebbe già opportuno fare una *"bozza"* del disegno della funzione, giusto per avere un'idea generale.

V. Trovare gli eventuali asintoti

In realtà questa parte è più una *"conseguenza"* di quella di calcolare i limiti; in particolare si vuole, se opportuno, trovare eventuali *asintoti obliqui* (Asintoto di una funzione > ^74920d) mediante la tecnica descritta (Asintoto di una funzione > ^8bab7e).

VI. Funzione derivata (prima)

Qui basta sapere come calcolare la *derivata* (Derivata e derivabilità > ^ae9417) di una qualsiasi funzione.

VII. Segno della derivata prima (crescenza e decrescenza)

Analogamente qui bisogna trovare il *segno* della *derivata prima* per determinare la (*de*)*crescenza* della funzione f; questa è determinabile in questo modo in quanto conseguenza del *teorema di Lagrange* (Conseguenze del teorema di Cauchy e di Lagrange > ^45aa1e).

VIII. Funzione derivata (seconda)

Stessa cosa della *funzione derivata* (ovvero lo step *VI*), solo che si considera la *derivata* della *derivata*. Ovvero la *derivata seconda* di f.

IX. Segno della derivata seconda (concavità e convessità)

Secondo i risultati dell'analisi matematica (Caratterizzazione delle Funzioni Convesse), il *segno della seconda derivata della funzione* può determinare il *"modo"* in cui curva il grafico; se f'' è positiva, allora è *"concava in alto"*, altrimenti è *"concava in basso"*.

2. Esercizio particolare

Ogni tanto negli appelli si potrebbe trovare di fronte ad un quesito del tipo: al variare di una grandezza α reale, trovare quante soluzioni ci sono per la seguente equazione...
Solitamente l'equazione si presenta in una maniera analoga della funzione studiata nello stesso esercizio, quindi basta riportare l'equazione in *"forma"* della funzione.
Di solito conviene fare questo esercizio *alla fine* dello studio di funzione, quando si ha già un buon disegno della funzione; in questo modo si può *"tracciare"* la linea orizzontale α e vedere quante volte questa *"incrocia"* la funzione.