Prova d'esame Analisi Matematica I - 19.01.2024 (FILA A)

Esercizio 1 - Limiti (2+3+2+3)

i.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{6x^4+x^2+\sin x}{x^2-x^3+\cos x}$$

ii.

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{\tan(\pi x)}$$

iii.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sqrt{1+x^2}-1)}{\arcsin x}$$

iv.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1-x^2}-\cos x}{\ln(\ln(e+x^2))}$$

Esercizio 2 - Studio di funzione (8, di cui 3 per vii.)

- Studiare la funzione

  $$f(x)=(x-1)e^x+1$$

  determinando:
  i. Dominio
  ii. Limiti agli estremi del dominio
  iii. Derivata primo e segno di f'
  iv. Intervalli di crescenza, decrescenza, eventuali punti di minimo e massimo
  v. Segno di f
  vi. Grafico di f
  vii. Dire, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ le soluzioni di

  $$\frac{e^x-1}{x}=\alpha$$

  (Consiglio: effettuare uno mini-studio di funzione su $g(x)=\frac{e^x-1}{x}$, usando ciò che si sa su f)

Esercizio 3 - Esercizio teorico (2+2+2)

- Sia $f : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile su $[0,2]$ tale che $f(0) = -1, f(1) = 1, f(2) = -2$;
  i. Provare che f si annulla almeno in due punti
  ii. Provare che f' si annulla almeno in un punto
  iii. Provare che f non può essere convessa

Esercizio 4 - Esercizi misti (2+2+3)

i. Scrivere la formula di Taylor col resto di Lagrange per la funzione

$$f(x) = \sqrt{4 + x^2}$$

con $x_0 = 0, n = 3$.

ii. Calcolare

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x(\tan x)^2 \mathrm{d}x$$

iii. (AIDA) Dire se la funzione

$$F(x) = \int_{1+x}^{1+2x} \ln(t + e^t) \mathrm{d}t$$

è crescente sull'intervallo $[0,1]$.

N.B. Il punteggio degli esercizi che ho segnato sono molto probabilmente sbagliati, dal momento che sto andando di memoria