Continuità - Sommario

Sommario generale sulla continuità: definizione, esempi, teoremi, ... (parte da svolgere)

A. Definizione della continuità

Definizione di continuità

Definizione puntuale e "globale" della continuità di una funzione. Esempi di funzioni continue

---

0. Osservazione preliminare

OSS 0.a. Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ e $x_0 \in E$. Da notare che ciò implica che $x_0 \in \mathbb{R}$; quindi x_0 in questo caso è un numero.
Allora abbiamo due possibilità:

1. x_0 è di accumulazione per E (Punti di aderenza e di accumulazione, **DEF 2.1.**)
2. x_0 non è di accumulazione per E (ovvero un punto isolato)

1. Definizione puntuale e globale

#Definizione

Definizione 1.1. (Funzione continua per un punto).

Siano $E \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in E$ e $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$: ovvero f è una funzione che ha per dominio E, x_0 un punto del dominio.
Allora f si dice *funzione continua nel punto* x_0 se si verifica uno dei due casi:
CASO 1. x_0 è un punto isolato per E (la possiamo considerare una specie di *"caso speciale"*)
CASO 2. x_0 è un punto di accumulazione e si verifica il limite

$$\lim_{x \to x_0 \in \mathbb{R}} f(x) = f(x_0) \in \mathbb{R}$$

Usando la nozione $\varepsilon - \delta$ del limite, avremmo

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in E$$
$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

OSS 1.1. Il *CASO 2.* è la parte interessante della definizione della continuità: stiamo sostanzialmente dicendo che f è continua in x_0 se esiste il limite per $x \to x_0$ e il limite è proprio il valore della funzione.

OSS 1.2. Notiamo che in questa definizione c'è una differenza dalla definizione originaria del limite: infatti la prima parte che rappresenta l'intorno δ di x_0 sarebbe

$$0 < |x - x_0| < \delta$$

però in questa definizione l'abbiamo tolta, perché x_0 appartiene al dominio, quindi è possibile avere $x = x_0 \implies f(x) = f(x_0)$, di conseguenza $|f(x) - f(x_0)| = 0$; quindi in questo caso non escludiamo più che $x - x_0 = 0, f(x) - f(x_0) = 0.$
Inoltre questa "eccezione" è utile in quanto possiamo comprendere il *CASO 1.*, ovvero quando x_0 è un punto isolato: infatti questo significa che esiste un intorno di x_0 che contiene solo se stesso.

FIGURA 1.1. L'idea grafica della continuità
[DA FARE]

Ora presentiamo la definizione *"globale"* della funzione, che è una semplice estensione della definizione di prima: al posto del singolo punto ci mettiamo un insieme di punti.

#Definizione

Definizione 1.2. (Funzione continua su un insieme).

Sia $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$
Se f è *continua* in tutti i punti di E, allora f si dice *continua*.

2. Esempi di funzioni continue e discontinue

#Esempio

Esempio 2.1. (Funzione Constante).

Sia

$$
\begin{aligned}
f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
x &\mapsto c
\end{aligned}
$$

Allora f è continua, in quanto

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}, \lim_{x \to x_0} c = c$$

Infatti basta scegliere un qualsiasi valore δ per qualsiasi ε.

FIGURA 2.1.
[Da fare]

#Esempio

Esempio 2.2. (Funzione identità).

$$\mathrm{id} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x$$

La funzione id è *continua*: basta scegliere $\varepsilon = \delta$.

FIGURA 2.2.
[Da fare]

#Esempio

Esempio 2.3. (Funzione Potenza).

$$p_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x^n$$

La funzione x^n è *continua*, infatti è possibile dimostrare che

$$\lim_{x \to x_0} x^n = x_0^n$$

mediante gli Esempi di Limiti di Funzione.

FIGURA 2.3.
[Da fare]

#Esempio

Esempio 2.4. (Funzione Radice).

$$\sqrt[n]{\cdot} : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \sqrt[n]{x}$$

Anche questa funzione è *continua*, anche se per adesso facciamo finta di conoscere

$$\forall x_0 \in (0, +\infty), \lim_{x \to x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}$$

mediante dei teoremi sulle funzioni inverse che definiremo in seguito.

FIGURA 2.4.
[Da fare]

#Esempio

Esempio 2.5. (Funzione Seno).

$$\sin : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]; x \mapsto \sin x$$

In Esempi di Limiti di Funzione abbiamo dimostrato che

$$\lim_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$$

quindi la funzione seno $\sin$ è *continua*.

#Esempio

Esempio 2.6. (Funzione Esponenziale).

$$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow]0, +\infty[; x \mapsto e^x$$

Questa è *continua* in quanto

$$\lim_{x \to x_0} e^x = e^{x_0}$$

ed è il figlio del fatto che

$$\lim_{n} \sqrt[n]{x} = 1$$

#Esempio

Esempio 2.7. (Funzione di Heaviside).

Definiamo

$$\mathrm{H} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

dove

$$\mathrm{H}(x) := \begin{cases} 0 \text{ se } x \leq 0 \\ 1 \text{ altrimenti} \end{cases}$$

Allora la funzione H *non* è *continua*: infatti il limite

$$\lim_{x \to 0} \mathrm{H}(x)$$

non esiste, visto che da destra tende a 1 e da sinistra a 0.
Infatti questa è una funzione *discontinua* e definiamo questo tipo di *discontinuità* come la discontinuità *"salto"* oppure *"di prima specie"*.

OSS 2.7. Notare che la funzione di Heaviside $\mathrm{H}(x)$ è comunque *continua* in tutti gli altri punti diversi da 0.

NOTIZIE STORICHE. Oliver Heaviside (*1850-1925*) è stato una figura significativa nella storia della matematica. La sua carriera era inizialmente legata a una compagnia che gestiva le allora innovative linee telegrafiche. Allora, il giovane Heaviside, dotato di una mente autodidatta e una passione per la matematica, utilizzò le sue competenze per sviluppare concetti che avrebbero avuto un impatto duraturo nel suo campo, in particolare nell'ambito dell'elettricità. Una delle sue pietre miliari fu lo studio delle equazioni differenziali con coefficienti discontinui, tra cui la funzione appena menzionata, che avrebbe dimostrato grande rilevanza nella teoria elettrica.
(Paragrafo rielaborato da ChatGPT)

FIGURA 2.7.
[Da fare]

Esempio 2.8. (Funzione di Dirichlet).

$$D : [0,1] \longrightarrow [0,1]; x \mapsto D(x) : \begin{cases} 1 \text{ se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$$

Questa è una funzione *discontinua* in quanto non esiste il limite

$$\lim_{x \to x_0} D(x)$$

per nessun valore di x_0 per la densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ (Conseguenze dell'esistenza dell'estremo superiore, **TEOREMA 4.1.**); vale anche il viceversa con la densità degli irrazionali nei razionali. Allora D è *discontinua* in ogni punto del suo dominio.

B. Teoremi sulle funzioni continue

Teoremi sulle funzioni continue: prime proprietà delle funzioni continue; permanenza del segno adattato, operazioni con le funzioni continue, composta di funzioni continue. Teoremi fondamentali delle funzioni continue: teorema degli zeri, dei valori intermedi, di compattezza e di Weierstraß

---

1. Prime proprietà delle funzioni continue

Consideriamo delle *proprietà* delle funzioni continue, di cui alcuni discendono direttamente dai teoremi sui limiti (Teoremi sui Limiti di Funzione).

Permanenza del segno adattato

#Teorema

Teorema 1.1. (Permanenza del segno).

Sia $f: E \longrightarrow \mathbb{R}$, sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e f continua in x_0.
Se $f(x_0) > 0$ (< 0) allora esiste intorno di x_0 in cui f ha segno *positivo* (*negativo*)

Operazioni con funzioni continue

#Teorema

Teorema 1.2. (Operazioni con funzioni continue).

Siano f, g funzioni *continue* in $x_0 \in \mathbb{R}$.
Allora

$$f \pm g, f \cdot g, \frac{f}{g}$$

sono *continue* (a patto che nel terzo caso sia $g(x_0) \neq 0$)

OSS 1.2. Da questo teorema si può dedurre che tutti i *polinomi* e *funzioni razionali* sono funzioni *continue*: infatti

$$p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

non è altro che una somma tra funzioni potenza, che sono *continue* (Definizione di continuità > ^dfa8a1).

Composta di funzioni continue

#Teorema

Teorema 1.3. (Composta di funzioni continue).

Siano

$$\begin{aligned} f &: E \longrightarrow \mathbb{R}, x_0 \in E \\ g &: F \longrightarrow \mathbb{R}, f(x_0) \in F, f(E) \subseteq F \end{aligned}$$

Supponendo che f sia *continua* in x_0 e g sia *continua* in $f(x_0) = y_0$, allora $g \circ f$ è *continua* in x_0.

FIGURA 1.3. (*Idea del teorema*)
[Da fare]

`\begin{proof}`@^c0ce66
Per ipotesi g è continua in $f(x_0)$, ovvero

$$\lim_{y \to f(x_0)} g(y) = g(f(x_0)) \iff \begin{gathered} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall y \in F, \\ |y - f(x_0)| < \delta \implies |g(y) - g(f(x_0))| < \varepsilon \end{gathered}$$

Ma anche f è continua, in x_0, ovvero

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \iff \begin{gathered} \forall \delta > 0, \exists \rho > 0 : \forall x \in E, \\ |x - x_0| < \rho \implies |f(x) - f(x_0)| < \delta \end{gathered}$$

Allora combinandoli ottengo

$$\begin{gathered} \forall \varepsilon > 0, \exists \rho > 0 : \forall x \in E, f(x) \in F \\ |x - x_0| < \rho \implies |\underbrace{f(x)}_{f(x) = y} - f(x_0)| < \delta \implies |g(y) - g(f(x_0))| < \varepsilon \end{gathered}$$

che è esattamente la definizione di

$$\lim_{y \to f(x_0)} g(y) = g(f(x_0))$$

`\end{proof}`

Caratterizzazione della continuità tramite le successioni

#Teorema

Teorema 1.4. (di caratterizzazione della continuità tramite le funzioni)

Sia $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $\bar{x} \in E$,
allora f è continua in $\bar{x}$ se e solo se vale la proprietà $(*)$.
$(*)$: per ogni *successione a valori in* E, $(x_n)_n$, tale che

$$\lim_n x_n = \bar{x}$$

si ha

$$\lim_n f(x_n) = f(\bar{x})$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE (*Teorema 1.4.*)
Questo è un teorema del tipo *"se e solo se"*, quindi procediamo per due sotto dimostrazioni.
"$\Downarrow$": Sia f continua in $\bar{x}$, sia $(x_n)_n$ una successione in E tale che

$$\lim_n x_n = \bar{x}$$

Allora ne traiamo le seguenti definizioni:

$$\text{1. } f \text{ continua in } \bar{x} \iff \begin{array}{c} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in E, \\ |x - \bar{x}| < \delta \implies |f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon \end{array}$$

e

$$\text{2. } \lim_n x_n = \bar{x} \iff \begin{array}{c} \forall \delta > 0, \exists \bar{n} : \forall n, \\ n > \bar{n} \implies |x_n - \bar{x}| < \delta \end{array}$$

Osserviamo che abbiamo una situazione del tipo

$$\varepsilon \to \delta, \delta \to \bar{n}$$

quindi possiamo *"combinarli"* avendo dunque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} : \forall n, n > \bar{n} \implies |x_n - \bar{x}| < \delta \implies |f(x_n) - f(\bar{x})| < \varepsilon$$

che è proprio la definizione di

$$\lim_n f(x_n) = f(\bar{x})$$

"$\Downarrow$": Suppongo di negare la proprietà iniziale, ovvero che f non è continua in $\bar{x}$.
Allora segue che

$$\neg\left(\begin{gathered}\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0:\forall x\in E,\\ |x-\bar{x}|<\delta\implies|f(x)-f(\bar{x})|<\varepsilon\end{gathered}\right)$$

diventa

$$\begin{gathered}\exists\varepsilon_0>0:\forall\delta>0,\exists x_\delta\in E:\\ |x_\delta-\bar{x}|<\delta\wedge|f(x_\delta)-f(\bar{x})|\geq\varepsilon_0\end{gathered}$$

Ora devo cercare una successione $(x_n)_n$ tale che

$$\lim_n f(x_n)\neq\bar{x}$$

Infatti $p\impliedby q\iff\neg p\implies\neg q$.
Prendo dunque $\delta=\frac{1}{n}$, allora

$$\ldots,\exists x_n:|x_n-\bar{x}|<\frac{1}{n}\wedge|f(x)-f(\bar{x})|\geq\varepsilon>0$$

Allora per la prima proposizione ho

$$0\leq|x_n-\bar{x}|\leq\frac{1}{n}$$

Allora per il *teorema dei due carabinieri* (Limite di Successione, **OSS 1.1.**) sappiamo che

$$\lim_n 0=0,\lim_n\frac{1}{n}=0\implies\lim_n x_n-\bar{x}=0\implies\lim_n x_n=\bar{x}$$

Ricapitolando ho

$$\lim_n x_n=\bar{x},\exists(f(x_n))_n:|f(x_n)-f(\bar{x})|\geq\varepsilon_0>0$$

e graficamente ho
[GRAFICO DA FARE]
che è assurdo (quindi falso). ■

OSS 1.4. (*Da recuperare*) ?? qualcosa sul fatto che questo è utile per *"provare"* la discontuità di certe funzioni; trova successioni, ??

2. Proprietà fondamentali delle funzioni continue

Teorema degli zeri

#Teorema

> **Teorema 2.1. (degli zeri)**

Sia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, f *continua* nel suo dominio. Sia $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ oppure $f(a) > 0 \wedge f(b) < 0$, cioè sono di segni *discordi* (ovvero $f(a)f(b) < 0$).
Allora

$$\exists \xi \in]a, b[: f(\xi) = 0$$

In parole deve esiste un valore ξ che *"taglia"* attraverso la linea orizzontale delle ascisse.

#Esempio

Esempio 2.1.

Sia $f(x) = x^5 + 7x + 1$. $f(x)$ ha soluzioni? (ovvero se esistono zeri)
Sì, sapendo che $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

#Dimostrazione
DIMOSTRAZIONE. (*Teorema 2.1.*)
Supponiamo $f(a) < 0$, $f(b) > 0$.
Se graficamente ho
[DA FARE]
allora posso intuitivamente disegnare una linea che *"taglia"* l'asse delle ascisse: tuttavia ciò non costituisce una dimostrazione rigorosa.
Allora chiamo $a = a_0, b = b_0$.
Ora considero il punto medio tra a, b e la chiamo $c_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$.
Adesso ho tre possibilità:

1. $f(c_0) = 0$: non serve più procedere e ho risolto il problema
2. $f(c_0) > 0$: considero la funzione f in $[a_0, c_0]$ e ripeto la stessa procedura, con $a_1 = a_0, b_1 = c_0, c_1 = \ldots$.
3. $f(c_0) < 0$: analogamente guardo la funzione f in $[c_0, b_0]$
   Se mi capitano i casi $2, 3$ ripeto: facendo questa procedura ho due possibilità:
4. Eventualmente riuscirò a trovare ξ tale che $f(\xi) = 0$.
5. Altrimenti costruisco una *successione di intervalli chiusi, dimezzati e inscatolati* del tipo

$$(I_n)_n = ([a_n, b_n])_n$$

dove $f(a_n) < 0$ e $f(b_n) > 0$. Allora per la *forma forte del teorema di Cantor* (Conseguenze dell'esistenza dell'estremo superiore, **TEOREMA 4.2.**) ho

$$\bigcap_n I_n = \{\xi\}, \xi \in [a, b] \implies a \le \xi \le b$$

Per concludere basta mostrare che

$$f(\xi) = 0$$

Prima osservo che

$$0 \leq |a_n - \xi| \leq |b_n - a_n| = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$$

e poi

$$\lim_n 0 = 0; \lim_n \frac{b_0 - a_0}{2^n} = 0$$

dunque per due carabinieri

$$\lim_n a_n = \xi$$

Analogamente vale lo stesso per b_n.
Adesso uso la nozione di *continuità* (Definizione di continuità), usando in particolare il **TEOREMA 1.4.** (^acbf64). Allora

$$f \text{ continua } \implies \begin{cases} \lim_n f(a_n) = f(\xi) \\ \lim_n f(b_n) = f(\xi) \end{cases}$$

Però ricordandoci della *permanenza del segno* (**TEOREMA 1.1.**, ^3a557a), abbiamo che

$$\begin{aligned} f(a_n) < 0, \forall n &\implies \lim_n f(a_n) \leq 0 \implies f(\xi) \leq 0 \\ f(b_n) > 0, \forall n &\implies \lim_n f(b_n) \geq 0 \implies f(\xi) \geq 0 \end{aligned}$$

Ma per la proprietà *antiriflessiva* di $\leq, \geq$ ho

$$f(\xi) = 0$$

■
OSS 2.1. Questo teorema è *costruttivo*: infatti la dimostrazione di questo ci fornisce un *modo* di trovare il valore ξ. Quindi si potrebbe implementare un algoritmo per poter calcolare un zero di una funzione.
ALGORITMO. (*Quasi-Python*)

```python
def f(x):
        # Inserisci qui la funzione, ad esempio
        return x**3 - 2

a = ... # Un valore tale che f(a) < 0
b = ... # Un valore tale che f(b) > 0
c = (a+b)/2

while (d(f(c), 0)>= epsilon):
        # d(a,b) è la funzione distanza, epsilon un valore
piccolo a piacere
        if f(c) == 0:
                break

        if f(c) > 0:
                a = a
                b = c
                c = (a+b)/2
        else if f(c) < 0:
                a = c
                b = b
                c = (a+b)/2
```

#Esempio

Trovare una soluzione di $x^3 - 2$

Supponiamo di voler trovare la soluzione per

$$f(x) = x^3 - 2$$

in $[0, 3]$.
Allora secondo la *"ricetta"* prescritta in questo algoritmo opero nel seguente modo:

1. $$a_0 = f(0) = -2; b_0 = f(3) = 25; c_0 = f(1.5) = \frac{11}{8}$$

2. $$a_1 = -2, b_1 = \frac{11}{8}, c_1 = \frac{3}{4} = \ldots = -\frac{99}{64}$$

3. $$a_2 = -\frac{99}{64}, b_2 = \frac{11}{8}, \dots$$

e operativamente mi fermo quando il valore desiderato è abbastanza "vicino" a quello cercato.

Teorema dei valori intermedi

#Corollario

Corollario 2.2. (teorema degli valori intermedi)

Sia $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Supponiamo $g(a) = \alpha$, $g(b) = \beta$, con $\alpha < \beta$. Sia $\gamma \in]\alpha, \beta[$. Allora

$$\exists \xi \in \ ]a, b[\ : g(\xi) = \gamma$$

in parole una *funzione continua su un certo intervallo* se assume due valori negli *estremi* allora questa assume *tutti* i valori *intermedi* in questo intervallo.

FIGURA 2.2.
[DA fare]

#Dimostrazione
DIMOSTRAZIONE (*Corollario 2.2.*)
Consideriamo la *composizione* delle funzioni.
Siano $\gamma \in (\alpha, \gamma) \implies \alpha < \gamma < \beta$,

$$f(x) = g(x) - \gamma$$

e sfruttando il *teorema sulle operazioni con funzioni continue* (^41a8ec), supponendo che g sia continua, sappiamo che f è sicuramente continua.
Inoltre

$$\begin{gathered} f(a) = g(a) - \gamma = \alpha - \gamma < 0 \\ f(b) = g(b) - \gamma = \beta - \gamma > 0 \end{gathered}$$

Allora per il *teorema dei zeri* (^8b33e1) sappiamo che

$$\exists \xi \in (a, b) : f(\xi) = 0 \implies g(\xi) - \gamma = 0 \implies g(\xi) = \gamma \blacksquare$$

OSS 2.2. Notiamo che tutte e *tre* le condizioni sono *importanti*: infatti deve valere che ci sia un intervallo singolo. Infatti supponendo

$$g : [1, 2] \cup [3, 4] \longrightarrow \mathbb{R}$$

allora possiamo supporre g *continua* ma non ha zeri, in quanto potrebbero esserci dei *"salti"* tra $]2,3[$. Infatti questo è il caso se

$$g(x) = \begin{cases} -1 \text{ se } x \in [1,2] \\ 1 \text{ se } x \in [3,4] \end{cases}$$

Lo stesso discorso vale per la funzione

$$p_{-1} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto p_{-1}(x) = \frac{1}{x}$$

Infatti il *"buco"* qui è proprio il numero 0.

OSS 2.3. Sia $E \subseteq \mathbb{R}$, con la seguente proprietà: $x_1, x_2 \in E \implies [x_1, x_2] \subseteq E$, chi è E?
E è *sempre* un intervallo: per dimostrarlo uso il teorema dell'esistenza di $\sup E, \inf E$ (Insiemi limitati, maggioranti, massimo e teorema dell'estremo superiore), le sue proprietà e di seguito il *teorema dei zeri*. Da questo discende il seguente corollario:

#Corollario

Corollario 2.3.

Sia I intervallo, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, f *continua*.
Allora $f(I)$ è intervallo.

Teorema di compattezza

Ora vediamo di collegare la nozione delle *funzioni continue* con gli *insiemi compatti* (Insiemi compatti in R > ^0eb138).

#Teorema

Teorema 2.4. (di compattezza)

Sia $K \subseteq \mathbb{R}$, K *compatto*; sia $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$, f *continua*.
Allora $f(K)$ è *compatto*.

#Dimostrazione
DIMOSTRAZIONE (*Teorema 2.4.*)
Provo che dalle supposizioni iniziali ho $f(K)$ compatto.
Allora prendo $(y_n)_n$ una *successione* a valori in $f(K)$ (Successione e Sottosuccessione > ^e6d66f). Allora devo dimostrare di essere di *estrarre* una *sotto successione* $(y_{n_k})_k$ tale che

$$\lim_k y_{n_k} = \bar{y} \in f(K)$$

Però prima partiamo considerando ciò che *conosciamo*, ovvero K compatto: quindi per ogni *successione* $(x_n)_n$ a valori in K, allora possiamo *estrarre* una *sotto successione* $(x_{n_k})_k$ tale che

$$\lim_k x_{n_k} = \bar{x} \in K$$

però mi ricordo che f è continua, quindi per la *caratterizzazione della continuità tramite le successioni* (^acbf64) ho che anche la sua *immagine* converge. Allora

$$\lim_k f(x_{n_k}) = f(\bar{x}) \in f(K)\$\$Ricordandociche\$y_{n_k} = f(x_{n_k}), \forall k \in \mathbb{N}\$, abbiam$$

\limk *y*{n_k} = \bar{y} \in f(K) \ \blacksquare$$

#Corollario

Corollario 2.5.

Una funzione f *continua* che ha per dominio *insiemi chiusi e limitati*, ovvero per la *caratterizzazione dei compatti* (Insiemi compatti in R > ^759c9b) insiemi *compatti*, allora il suo *insieme immagine* è un *insieme chiuso e limitato*.

Teorema di Weierstraß

#Teorema

Teorema 2.6. (di Weierstraß)

Sia K un insieme *compatto non vuoto* (pertanto *chiuso e limitato*), sia $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ *continua*.
Allora $f(E)$ ha $\max$ e $\inf$; ovvero riprendendo le definizioni di *massimo e minimo assoluto di una funzione* (Funzioni, **DEF 11.1**; **DEF 11.2.**) esistono il massimo e minimo assoluto della funzione.

OSS 2.4. Un insieme *chiuso* e *limitato* ha sempre $\min, \max$? Sì, in quanto per definizione un insieme limitato deve avere per forza $\inf, \sup \in \mathbb{R}$ e in quanto chiuso questi appartengono anche all'insieme stesso.

#Dimostrazione
DIMOSTRAZIONE (*Teorema 2.6.*)
In questa dimostrazione usiamo la nozione dei *insiemi compatti* (Insiemi compatti in R > ^0eb138).

Sia K *chiuso* e *limitato*, dunque *compatto*.
Dato che f è *continua*, $f(K)$ è *compatto*.
Allora $f(K)$ è *chiuso* e *limitato*.
Pertanto per **OSS 2.4.** (^3a916a),

$$\begin{cases} f(K) \text{ limitato} \implies \exists \sup(f(K)), \inf(f(K)) \in \mathbb{R} \\ f(K) \text{ chiuso} \implies \sup f(K), \inf f(K) \in f(K) \end{cases} \implies \begin{cases} \sup f(K) = \max \\ \inf f(K) = \min f \end{cases}$$

Concludendo così la dimostrazione. Inoltre è possibile anche dimostrare questo teorema *senza* usare la nozione dei *insiemi compatti* e la sua *caratterizzazione*.

#Dimostrazione
DIMOSTRAZIONE ALTERNATIVA (*Teorema 2.6.*)
In questa dimostrazione alternativa *non* useremo la nozione della compattezza (in particolare senza la sua caratterizzazione con insiemi chiusi e limitati).
Dimostrando che esista $\max$, avrei già analogamente dimostrato l'esistenza di $\min$.
Allora considero $f(K) \subseteq \mathbb{R}$: ho dunque due *possibilità*:

1. $f(K)$ è *superiormente illimitato*
2. $\sup f(K) < +\infty$ (ovvero non è *superiormente illimitato*)
   In entrambi i casi esiste in $f(K)$ una *successione* $(y_n)_n$ tale che

$$\lim_n y_n = \begin{cases} +\infty \text{ se caso } 1. \\ \sup f(K) \text{ se caso } 2. \end{cases}$$

Adesso guardo la successione $(x_n)_n$ in K. Sappiamo che K è *compatto*, dunque possiamo trovare una *sotto successione* $(x_{n_k})_k$ tale che

$$\lim_k x_{n_k} = \bar{x} \in K$$

Sapendo che f è *continua*, abbiamo che

$$\lim_k x_{n_k} = \bar{x} \in K \implies \lim_k f(x_{n_k}) = f(\bar{x}) = \bar{y} = \begin{cases} +\infty \text{ se caso } 1. \\ \sup f(K) \text{ se caso } 2. \end{cases}$$

Ora ci chiediamo se è possibile avere il *primo* caso: la risposta è *no*, in quanto sappiamo che $f(\bar{x}) \in f(K) \subseteq \mathbb{R} \implies f(\bar{x}) \in \mathbb{R}$. Do conseguenza l'unico caso rimanente è il *secondo*, ovvero

$$\lim_k y_{n_k} = \bar{y} = \sup f(K) \in f(K) \implies \sup f(K) = \max f(K)$$

ovvero $f(\bar{x})$ è di *massimo*.

C. Altri teoremi sulle funzioni continue

Continuità delle funzioni varie

Vari teoremi sulla continuità di certi tipi di funzioni: funzioni monotone, iniettive, surgettive, bigettive (dunque invertibili).

---

1. Funzione monotona e suriettiva

#Teorema

Teorema 1.1. (continuità della funzione strettamente monotona e suriettiva)

Sia $f : I \longrightarrow J$, I, J degli intervalli, f *strettamente monotona* e *suriettiva* (Funzioni > ^6068af, Funzioni > ^3fb408).
Allora f è *continua*.

#Dimostrazione
DIMOSTRAZIONE (*Teorema 1.1.*)
Nota: questa è solo una idea della dimostrazione
Prendo un punto $x_0 \in I$, inoltre supponiamo che x_0 sia un *punto interno* per I (Punti interni, esterni e di frontiera > ^c78831).
Allora abbiamo la situazione in *figura 1.1.*: da qui posso evincere che esistono i *limiti destri e sinistri* di $x \to x_0^{\pm}$ (Definizione di Limite di funzione > ^406c13) e che

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

(inoltre questa proposizione è direttamente ricavata da Teoremi sui Limiti di Funzione > ^165965)
Supponendo *per assurdo* che il limite destro e sinistro sono diversi (dandoci così una discontinuità del primo ordine), avremmo una specie di *"buco"* nella funzione immagine J; tuttavia è assurdo in quanto contraddirebbe con la supposizione iniziale di f *suriettiva*.
Di conseguenza abbiamo l'unica possibilità

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) \implies f \text{ continua} \blacksquare$$

FIGURA 1.1. (*Idea della situazione*)
[DA FARE]

Funzione strettamente crescente e suriettiva

#Corollario

Corollario 1.2. (continuità della funzione strettamente crescente e suriettiva)

Sia $f : I \longrightarrow J$, I, J *intervalli*, f *strettamente crescente* e *suriettiva*.
Allora f, f^{-1} sono *continue*.

#Esempio

Funzione esponenziale e logaritmica

Questo teorema è utile per poter dimostrare la continuità di certe funzioni: infatti ad esempio sappiamo che $\exp$ è *continua*, *strettamente crescente* e *suriettiva* per $]0, +\infty[$: di conseguenza $\exp^{-1} = \log$ è anch'essa *continua*.

2. Funzione iniettiva e continua

#Teorema

Teorema 2.1. (monotonia della funzione iniettiva e continua)

Sia $f : I \longrightarrow J$ una funzione *continua* e *iniettiva*.
Allora f è *strettamente crescente*.

#Dimostrazione
Nota: questa è solo una idea della dimostrazione
Dimostriamo la *contronominale* della tesi; ovvero supponendo, per assurdo, che f sia *non* strettamente crescente dobbiamo dimostrare che f non è *iniettiva*.
Allora abbiamo la situazione in *figura 2.1.*: ci possono essere tre (o più) punti in cui la funzione inizia a *"cambiare direzione"*, cambiando dalla tendenza di crescere a quella di decrescere (e viceversa).
Per il *teorema dei valori intermedi* (Teoremi sulle funzioni continue > ^1c6f7c), sappiamo che ci sono almeno *due* soluzioni ξ_1, ξ_2 tali che per un valore fissato $f(x_0) \in J$ si ha $f(x) = f(x_0)$.
Infatti possiamo prendere un *"ramo"* crescente e un ramo *"decrescente"* e applicare il *teorema dei valori intermedi* a ciascuno.

Se esistono due numeri che, per una funzione, ci danno lo stesso numero, f non è *iniettiva*. ■

FIGURA 2.1. (*Idea della situazione*)
[DA FARE]

Funzione continua e invertibile

#Corollario

Corollario 3.1. (continuità dell'inversa della funzione continua e invertibile)

Sia $f: I \longrightarrow J$ *continua* e *invertibile*.
Allora f^{-1} è *continua*.

D. Continuità uniforme

Continuità Uniforme

Osservazioni preliminari, definizione di continuità uniforme, esempi. Teorema di Heine.

---

0. Osservazione preliminare

La seguente osservazione si baserà sul concetto della *continuità* (Definizione di continuità).
OSS 0.a. Supponiamo di avere una funzione $f: E \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in E$.
Per definizione sappiamo *"tradurre"* il concetto della *continuità* di una funzione per un punto x_0 *"alla Cauchy"*, ovvero:

$$f \text{ continua in } x_0 \iff \begin{gathered} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in E, \\ |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \end{gathered}$$

Quindi abbiamo sostanzialmente una *"macchina"* limite per cui dato un ε fissato ottengo un δ (ulteriori chiarimenti sull'analogia della macchina in Definizione di Limite di funzione > ^0f845a).
Ora se cambio il punto x_0 e prendo x_1 tale che f sia continua, allora ho

$$f \text{ continua in } x_1 \iff \begin{array}{c} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta' > 0 : \forall x \in E, \\ |x - x_1| < \delta' \implies |f(x) - f(x_1)| < \varepsilon \end{array}$$

Se tengo fisso lo stesso ε sia per x_0 che per x_1, allora i valori δ, δ' potrebbero essere diversi.
Infatti se trovo un δ che va bene per *tutti* i punti del dominio, allora non solo f è continua ma ha anche una proprietà in più, che definiremo a seguire.

1. Definizione di continuità uniforme

#Definizione

Definizione 1.1. (funzione uniformemente continua)

Data una funzione $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, diciamo che f è *uniformemente continua* se vale la seguente proprietà.

$$\begin{array}{c} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in E, \\ |x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \end{array}$$

OSS 1.1. Notiamo quindi che una funzione è *uniformemente continua* è anche (ovviamente) *continua*. Attenzione però che non vale necessariamente il *viceversa*.

#Esempio

Esempio 1.1.

Sia $f(x) = 1$ con $E = [0, 1]$;
sia $g(x) = x$ con $E = [0, 1]$;
sia $h(x) = \frac{1}{x}$ con $E = \,]0, +\infty[$.
Le funzioni f, g, h sono tutte *continue*; tuttavia solo f, g sono anche *uniformemente continue*.
Infatti h non è *uniformemente continua*: infatti supponendo per assurdo che h sia *uniformemente continua* e fissando $\varepsilon = 1$, si avrebbe

$$\begin{array}{c} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in E : \\ |x_1 - x_2| < \delta \implies \left| \dfrac{1}{x_1} - \dfrac{1}{x_2} \right| < 1 \end{array}$$

Ora considero la *successioni a valori in E*

$$(x_{1,n})_n = \frac{1}{n}, (x_{2,n})_n = \frac{1}{n+1}$$

avremmo quindi

$$|x_{1,n} - x_{2,n}| = |\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}| = |\frac{1}{n(n+1)}|$$

ma dato che f è continua possiamo considerare

$$|f(x_{1,n}) - f(x_{2,n})| = 1 \iff \left| f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n+1}\right) \right| = 1$$

Però

$$\lim_n \frac{1}{n(n+1)} = 0$$

Quindi da un lato abbiamo i due numeri che man mano si avvicinano, però la loro distanza delle immagini rimane *sempre* costante.

2. Teorema di Heine (dell'uniforme continuità)

#Teorema

Teorema 2.1. (di Heine)

Sia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continua* (e ovviamente $[a, b]$ è *compatta* (Insiemi compatti in R > ^0eb138)).
Allora f è *uniformemente continua*.

OSS 2.1. Quindi in generale si può dire che una funzione f è uniformemente continua *se e solo* se continua, se vale la ipotesi iniziale del teorema.

#Dimostrazione
DIMOSTRAZIONE (*Teorema 2.1.*)
Omessa, facoltativa sulla dispensa di D.D.S.

C. Esercizi sulle funzioni continue

Esercizi sulle Funzioni Continue

Esercizi sulle funzioni continue del tipo esame. Spesso constano in dimostrazioni da svolgere.

1. Esercizi proposti in classe

Giorno 16.11.2023

Esercizio 1.1.

Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.
Supponiamo f *continua*, $f(0) = 0$ e di avere i limiti

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

Dimostrare che f ha *minimo assoluto*.

Esercizio 1.2.

Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, *continua*.
Supponendo $f(-1) = 1$, $f(0) = -1$, $f(-1) = 1$, **dimostrare** che l'equazione

$$f(x) = 0$$

ha *almeno* due soluzioni.

Esercizio 1.3.

Sia $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3 \arcsin x}{\sin x} \text{ per } x > 0 \\ ax + b \text{ per } x \leq 0 \end{cases}$$

Dire se esistono valori per $a, b \in \mathbb{R}$ tali che f sia *continua* e in tal caso **trovarli**.

Esercizio 1.4.

Sia f una funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} \text{ se } x > 0 \\ a \text{ se } x = 0 \\ b + c \cdot x \log(-x) \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

Trovare (se *esistono*) valori di a, b, c tali che f sia *continua*.

Esercizio 1.5.

Sia f una funzione del tipo

$$f(x) = \begin{cases} a \text{ se } x = 0 \\ \frac{x+e^{\frac{1}{x}}}{|x|-e^{\frac{1}{x}}} \text{ se } x \neq 0 \end{cases}$$

Trovare il valore/i del *parametri* a tale che f sia *continua* in $[-1,1]$ (se esiste).

Esercizio 1.6.

Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, *continua*.
Provare che $f^{\leftarrow}(\{0\})$ è un *chiuso*.

2. Esercizi dei temi d'esame

3. Esercizi dei papers (?)

4. Svolgimento degli esercizi