

Vettori Geometrici - Sommario

PSommario-appunti presi nel 27.06.2023, sui vettori applicati al passaggio di vettori liberi. Operazioni sui vettori e alcune osservazioni

Vettori Applicati

Vettori Applicati

Definizione basilare del vettore applicato, operazioni tra essi, vettore nullo, limitazioni dei vettori applicati, alcune proprietà.

Premessa

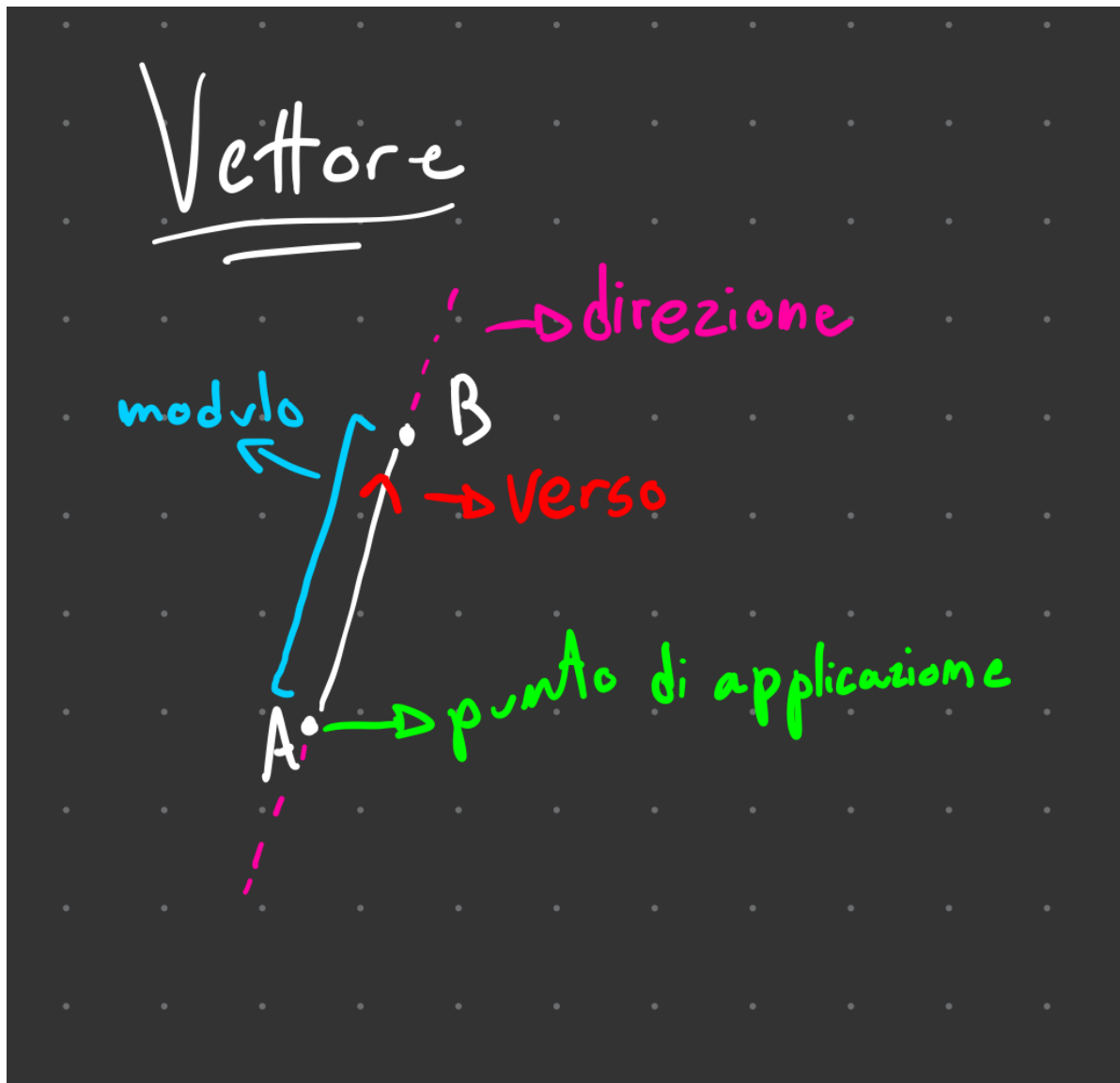
Ci mettiamo nel contesto della *geometria euclidea*, i quali postulati vengono descritti dagli *Elementi* (uno dei testi fondamentali della matematica) di Euclide (uno dei matematici greci più importanti); quindi ricorreremo a dei concetti geometrici che vengono dati come *elementi primitivi*, come il *punto*, il *piano*, la *retta*, ...

DEF 1. Vettore Applicato

Un **vettore applicato** è un segmento orientato, caratterizzato dunque da:

- **Punto di applicazione**; ovvero il "*punto di partenza*" A del vettore \overrightarrow{AB} .
- **Direzione**; essa è quella data dalla *retta* su cui giace il vettore
- **Verso**; esso è uno dei due *orientamenti* dalla retta
- **Modulo o lunghezza**; viene indicata con $|\overrightarrow{AB}|$

Graficamente il vettore si rappresenta così:



Dal grafico si evince che un **vettore applicato** è determinato da una **coppia ordinata** (A, B) di punti; in tal caso il vettore si denota \overrightarrow{AB}

DEF 1.2. Vettore applicato nullo

Per ogni **punto di applicazione** A , esiste il **vettore applicato nullo** \overrightarrow{AA} , che non ha un verso definito.

DEF 1.3. Somma dei due vettori applicati

I **vettori applicati** si possono **sommare** tra di loro, purché il punto finale del primo vettore coincida con il punto iniziale del secondo, ovvero purché siano della forma

$$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$$

DEF 1.3. Definiamo

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

OSS 1.3.1 Se i due vettori non sono della forma appena descritta sopra, ovvero

$$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD} \text{ ove } B \neq C$$

allora non è possibile sommare questi due vettori; infatti questo rappresenta la *prima limitazione* dei vettori liberi.

OSS 1.3.2. Se prendiamo

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$$

notiamo che \overrightarrow{BB} e \overrightarrow{AA} si comportano come il numero 0 con l'addizione; **però** notiamo che questi due sono dei vettori applicati *distinti* e non uguali, in quanto essi sono definiti dai loro rispettivi *punti di applicazione* (e ovviamente $A \neq B$). Pertanto è come se si avesse un numero 0 per ogni punto nel piano, dandoci così la *seconda limitazione* dei vettori liberi.

PROP 1.3.1: LA PROPRIETA' ASSOCIATIVA. La somma di vettori applicati, quando possibile, soddisfa la *proprietà associativa*;

DETOUR. Nei numeri reali \mathbb{R} la *proprietà associativa* della somma dice il seguente.

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} \text{ vale che } (a + b) + c = a + (b + c)$$

Infatti grazie a questa proprietà è possibile scrivere la somma per un n numero di numeri senza nessuna ambiguità; ad esempio $a + b + c$.

DIM. Dobbiamo dimostrare che per ogni vettore applicato $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}$ vale che

$$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD})$$

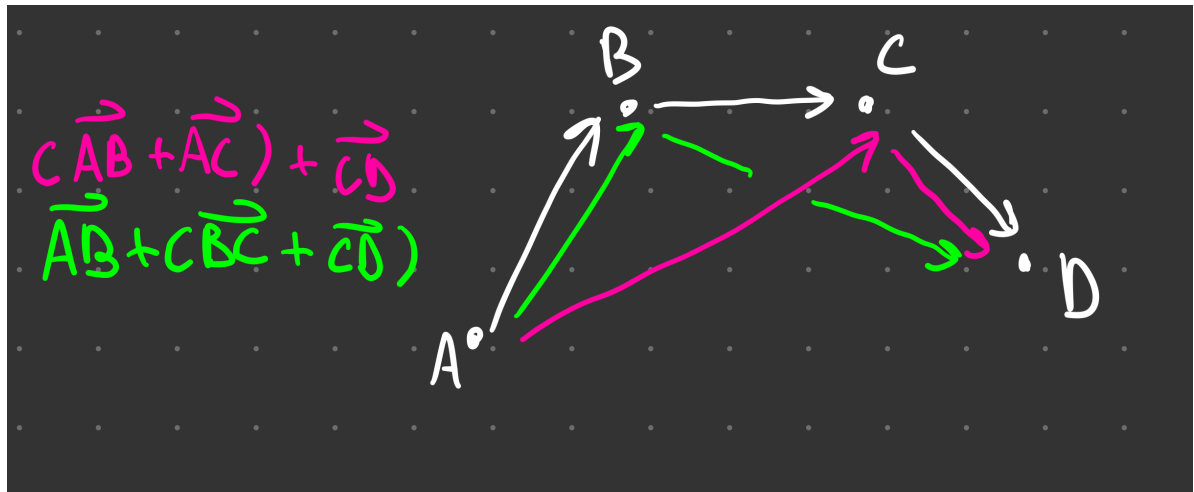
Ora, usando la definizione di *somme dei vettori* (**DEF 1.3.**), possiamo

scrivere:

$$\text{membro sx. } (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$$

$$\text{membro dx. } \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} \blacksquare$$

Oppure si può anche avvalere dell'interpretazione grafica:



DEF 1.4. Moltiplicazione di un vettore per uno scalare

DEF 1.4. Dato un vettore applicato \overrightarrow{AB} e un numero reale $a \in \mathbb{R}$, definiamo $a \cdot \overrightarrow{AB}$ in questo modo:

- Se $a = 0$, $a \cdot \overrightarrow{AB} := \overrightarrow{AA}$
- Se $a > 0$, $a \cdot \overrightarrow{AB} :=$ Un vettore applicato in A con le proprietà A)
- Se $a < 0$, $a \cdot \overrightarrow{AB} :=$ Un vettore applicato in A con le proprietà B)
 - **A)** Con la **stessa direzione** e lo **stesso verso**, ma con **modulo** uguale a $a \cdot |\overrightarrow{AB}|$;
 - **B)** Con la **stessa direzione**, il **verso opposto** dal vettore originario \overrightarrow{AB} e con **modulo** uguale a $|a| \cdot |\overrightarrow{AB}|$, ovvero $-(a) \cdot |\overrightarrow{AB}|$ ($|a|$ rappresenta il valore assoluto)

OSS 1.1. Parallelismo tra equazioni lineari e vettori applicati

Si nota un parallelismo tra due argomenti appena affrontati, ovvero le **soluzioni di un'equazione** e i **Vettori Applicati**. Infatti, da una certa

somma di vettori si ottiene un altro vettore; da una *moltiplicazione di un vettore con uno scalare* si ottiene un altro vettore, come proprio accade con le *soluzioni di un'equazione* (osservatosi in [Equazioni e Proprietà Lineari](#)).

Infatti entrambi i *vettori applicati* e le *soluzioni lineari* compongono dei **spazi vettoriali**; come lo stesso accade con le *soluzioni alle equazioni differenziali lineari*.

Vettori Liberi

Vettori Liberi

Costruzione dei vettori liberi, brevi richiami a relazioni e classi di equivalenza (in Analisi 1), significato di equipollenza, classe di equipollenza e definizione di somma tra vettori liberi.

Premessa

Come abbiamo osservato nei [Vettori Applicati](#), la costruzione di esse comportano delle *limitazioni* (**OSS 1.3.1** e **OSS 1.3.2**); quindi per ottenere una teoria più "*comprensiva*", introduciamo un nuovo oggetto: i **vettori liberi**.

Tuttavia è necessario prima introdurre dei nuovi concetti, tra cui il concetto dell'*equipollenza*, della *classe di equipollenza* e i *rappresentanti di una classe di equipollenza*.

DEF 1. Equipollenza

Due vettori applicati $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ si dicono **equipollenti** ($\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD}$) *se e solo se* i due vettori hanno:

- La medesima direzione
- Il medesimo verso
- Il medesimo modulo

OSS 1.1. Si verifica che l'**equipollenza** è una **relazione di equivalenza** (**DEF 5.**); ovvero essa è riflessiva, simmetrica e transitiva. Questo in quanto l'equipollenza è descritta dall'essere uguali \equiv .

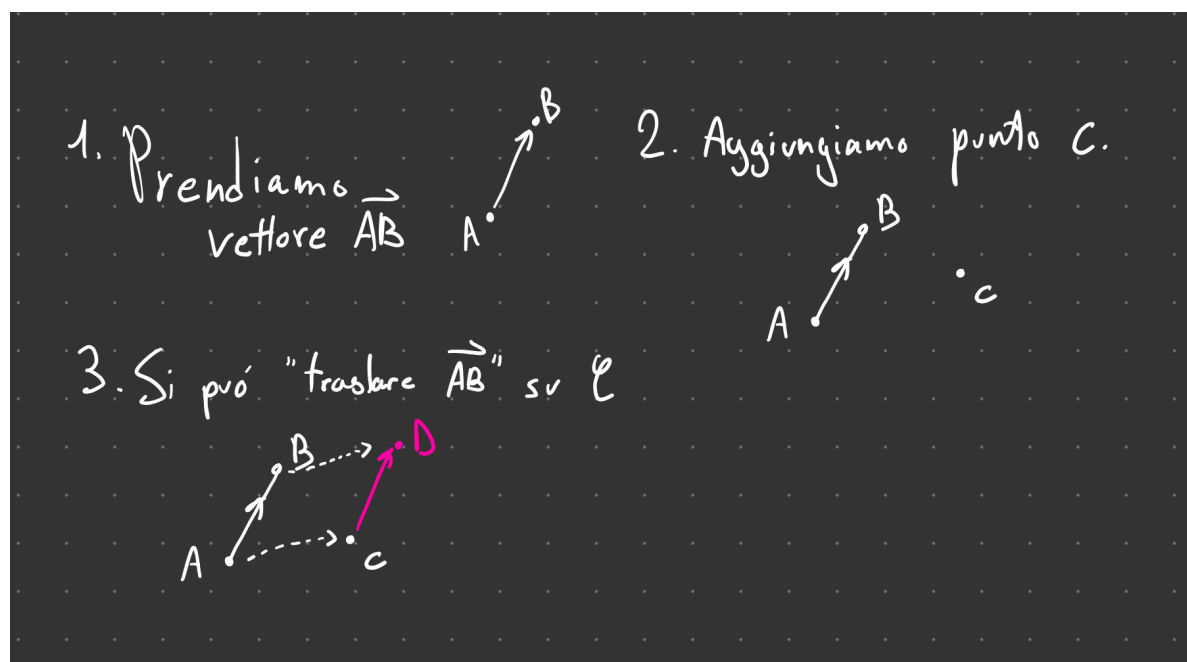
DEF 2. Classe di equipollenza

Dato un vettore applicato \overrightarrow{AB} , si definisce la sua **classe di equipollenza**

$$[\overrightarrow{AB}] := \{\text{tutti i vettori applicati } \overrightarrow{CD} : \overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD}\}$$

PROP 2.1. Dai risultati della **geometria euclidea** segue che dati un vettore applicato \overrightarrow{AB} e un punto C , allora esiste **sempre** un **vettore applicato** $\overrightarrow{CD} \equiv \overrightarrow{AB}$; da questo segue che una classe di equipollenza denotata \vec{v} e dato un punto C nel piano, esiste **sempre** un vettore applicato che appartiene a \vec{v} e che ha come punto iniziale C .

INTERPRETAZIONE GRAFICA.



OSS 2.1. Si nota che

$$\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD} \iff [\overrightarrow{AB}] = [\overrightarrow{CD}]$$

Quindi si dice che i vettori $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ sono dei **rappresentanti** della medesima classe di equipollenza.

DEF 3. Vettore libero

Ora finalmente si definisce il **vettore libero**, che si dice come una classe di **equipollenza** \vec{v} .

Infatti è una **quantità infinita** di vettori applicati, che condividono una medesima direzione, un medesimo verso e una medesima lunghezza; sostanzialmente si "*estrania*" dal vettore applicato il *punto di applicazione* e si considerano solo le tre proprietà appena elencate sopra.

DEF 3.1. Vettore libero nullo

OSS 3.1.1. Tutti i *vettori applicati nulli* sono equipollenti e dunque formano una **sola classe di equipollenza** che si denota $\vec{0}$. Qui si vede superato la *prima limitazione* osservata nei **Vettori Applicati (OSS. 1.3.1)**; quindi definiamo il *vettore libero nullo* come

$$\vec{0} := [\overrightarrow{AA}]$$

ovvero *tutti* i vettori per cui il punto di applicazione coincide con il punto di arrivo.

OSS 3.1.2. Tenendo in considerazione la definizione della **somma tra due vettori liberi**, si ha

$$\begin{aligned}\vec{0} + \vec{v} &= [\overrightarrow{AA}] + [\overrightarrow{AB}] = [\overrightarrow{AB}] \\ \vec{v} + \vec{0} &= [\overrightarrow{AB}] + [\overrightarrow{BB}] = [\overrightarrow{AB}]\end{aligned}$$

Quindi il *vettore libero nullo* $\vec{0}$ si comporta come il numero 0 rispetto all'operazione di *somma*.

Operazioni sui vettori liberi

Operazioni sui vettori liberi: somma, scalamento; proprietà di queste operazioni, proprietà associativa.

DEF 1. Somma di due vettori liberi

Dati due **Vettori Liberi** \vec{u}, \vec{v} , definiamo la loro **somma** $\vec{u} + \vec{v}$ nella maniera seguente:

1. Si sceglie un rappresentante \overrightarrow{AB} per \vec{u}
2. Per la **PROP. 2.1. (Vettori Liberi)**, si può sempre scegliere un vettore applicato in \vec{v} tale che il suo punto iniziale sia B , ovvero un vettore applicato $\overrightarrow{BC} \in \vec{v}$, ovvero $\vec{v} = [\overrightarrow{BC}]$.
3. Definiamo infine

$$\vec{u} + \vec{v} := [\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}] = [\overrightarrow{AC}]$$

PROP. 1.1. Si sceglie arbitrariamente un rappresentante per \vec{u} ; tuttavia secondo il passaggio 3. si nota che *indipendentemente* dal vettore scelto iniziale, si raggiunge sempre allo stesso risultato finale; ovvero la classe di equipollenza $[\overrightarrow{AC}]$

DIM. Si vuole dimostrare che si raggiunge sempre allo stesso risultato finale, indipendentemente dal vettore iniziale scelto. Ripercorriamo i passaggi definiti in **DEF 3.1.** con delle leggere variazioni;

1. Si scelgono due distinti rappresentanti per \vec{u} , ovvero

$$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'} \in \vec{u}; \overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{A'B'}$$

2. Si scelgono i corrispettivi rappresentanti di \vec{v} , tali che i loro punti iniziali coincidano con i punti finali dei vettori-rappresentanti di \vec{u} ;

$$\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{B'C'} \in \vec{v}; \overrightarrow{BC} \neq \overrightarrow{B'C'}$$

3. Ora, per definizione in **DEF 3.1.**, la somma di $\vec{u} + \vec{v}$ viene

$$\vec{u} + \vec{v} = [\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}] = [\overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'}] \iff [\overrightarrow{AC}] = [\overrightarrow{A'C'}] = \vec{w}$$

Da qui si evince che *indipendentemente* dai punti di applicazione A e A' scelti, si arriva **sempre** allo stesso risultato; ovvero il *vettore-risultante* \vec{w} .

La definizione quindi è *ben posta*, ovvero *non* dipende dal rappresentante scelto.

OSS 1.1. Rigorosamente parlando, la *somma* è una *funzione*, ovvero la si scrive come

$$+ : V_2 \times V_2 \longrightarrow V_2$$

$$(\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \vec{u} + \vec{v}$$

ove V_2 rappresenta l'insieme dei vettori liberi.

OSS 1.2. Se definiamo il *vettore libero nullo* come $\vec{0} := [\overrightarrow{AA}]$, allora notiamo che questo comporta come il numero 0 rispetto alla *somma* in \mathbb{R} . Infatti,

$$\vec{0} + \vec{v} = [\overrightarrow{AA}] + [\overrightarrow{AB}] = [\overrightarrow{AB}] = \vec{v}$$

$$\vec{v} + \vec{0} = [\overrightarrow{AB}] + [\overrightarrow{BB}] = [\overrightarrow{AB}] = \vec{v}$$

DEF 2. Moltiplicazione di un vettore per uno scalare

Analogamente si definisce lo *scalamento* come l'operazione della moltiplicazione di un vettore per uno *scalare* (ovvero numero reale \mathbb{R});

Se $\lambda \in \mathbb{R}$, $\vec{v} \in V_2$, allora possiamo definire $\lambda \cdot \vec{v}$;

$$\vec{v} = [\overrightarrow{AB}] \implies \lambda \cdot \vec{v} := [\lambda \cdot \overrightarrow{AB}]$$

Di cui $\lambda \cdot \overrightarrow{AB}$ è stata già definita in *Vettori Liberi (DEF 3.2.)*.

OSS 2.1. Anche in questo caso la *moltiplicazione di un vettore per uno scalare* è una definizione *ben posta*.

OSS 2.2. Anche in questo caso la moltiplicazione di un vettore per uno scalare è una *funzione*, allora

$$\cdot : \mathbb{R} \times V_2 \longrightarrow V_2$$

$$(\lambda, \vec{v}) \mapsto \lambda \cdot \vec{v}$$

OSS 2.3. Si nota che

$$1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$$

ATTENZIONE! La **moltiplicazione di un vettore per uno scalare** NON va confusa con il *prodotto scalare*; si trattano di due operazioni completamente diverse, in quanto con la moltiplicazione di un vettore

per uno scalare si ottiene un altro vettore; invece per il *prodotto scalare* si ottiene un altro vettore.

DEF 3. Proprietà delle operazioni sui vettori liberi

OSS 3.1. Si nota entrambe le operazioni $+$, \cdot sono *suriettive* (DEF 3.1.), ovvero che a partire da due vettori è possibile raggiungere qualsiasi vettore; infatti se si considerano gli *elementi neutri* di queste operazioni (ovvero 0 per $+$; 1 per \cdot), possiamo prendere un qualsiasi rappresentante \overrightarrow{AB} di \vec{v} e metterli in funzione con questi elementi neutri, riotteniamo il medesimo vettore.

3.1. Proprietà della somma $+$

1. **PROPRIETA' ASSOCIATIVA.** $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w},$

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$$

2. **PROPRIETA' COMMUTATIVA.** $\forall \vec{u}, \vec{v},$

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$$

3. **L'ESISTENZA DELL'ELEMENTO NEUTRO.** $\forall \vec{v},$

$$\vec{0} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$$

4. **L'ESISTENZA DELL'ELEMENTO OPPOSTO** $\forall \vec{v}, \exists \vec{w} :$

$$\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v} = \vec{0}$$

OSS. 3.1.1. Tale elemento \vec{w} si denota con $-\vec{v}$ e definiamo la *sottrazione*

$$\vec{v} + (-\vec{v}) := \vec{v} - \vec{v} = \vec{0}$$

Se $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, allora $-\vec{v} = \overrightarrow{BA}$.

3.2. Proprietà dello scalamento

1. $\forall \vec{v},$

$$1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$$

2. $\forall \vec{v}$,

$$(-1) \cdot \vec{v} = -\vec{v}$$

3. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e $\forall \vec{v}$,

$$(\lambda\mu) \cdot \vec{v} = \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{v})$$

OSS 3.2.1. Notare che questa proprietà non è banale, al contrario di quello che si può pensare; infatti nella prima si definisce una singola operazione tra un reale $\gamma = \lambda\mu$ e un vettore \vec{v} , invece nella seconda si definiscono due moltiplicazioni tra uno reale e un vettore.

4. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e $\forall \vec{u}, \vec{v}$,

$$1. (\lambda + \mu) \cdot \vec{v} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{v}$$

$$2. \lambda \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \vec{v}$$