Nesso tra Topologia di R e Successioni - Sommario

Argomenti che collegano gli argomenti della topologia della retta reale e le successioni.

---

0. Preambolo

Questo sommario-capitolo è interessante in quanto qui si richiedono la preliminare conoscenza dei seguenti tre macro argomenti:

- Topologia della retta reale - Sommario
- Numeri Naturali - Sommario, in particolare Successione e Sottosuccessione
- Limiti - Sommario, in particolare Limite di Successione

A. Secondo teorema di Bolzano-Weierstraß

Secondo teorema di Bolzano-Weierstraß

Richiami al primo teorema di Bolzano-Weierstraß; interpretazione del medesimo teorema in termini di successioni; enunciato del teorema; dimostrazione del teorema.

---

0. Richiamo al primo teorema di B.W.

Richiamiamo il *primo teorema di Bolzano-Weierstraß* in Punti di aderenza e di accumulazione.

#Richiamo

Richiamo (Primo teorema di BW (richiamo)).

Sia $E \subseteq \mathbb{R}$, E un insieme *infinito* e *limitato*. (Insiemi limitati, maggioranti, massimo e teorema dell'estremo superiore, **DEF 1.3.**)
Allora si verifica il seguente:

$$\exists \xi \in \mathbb{R} : \xi \in \mathcal{D}E$$

ovvero che esista un numero ξ che sia *punto di accumulazione* per E.

1. Enunciato del teorema

Idea. Abbiamo appena letto l'enunciato del *primo* teorema di Bolzano-Weierstraß, che viene anche detta come la *"forma insiemistica"* di tale teorema: ora la vogliamo interpretare con le nozioni di *successione*, *successione convergente*, e di *sotto successione*. (Successione e Sottosuccessione)

#Teorema

Teorema 1.1. (Secondo teorema di Bolzano-Weierstraß).

Sia $(a_n)_n$ una *successione reale* e *limitata* (Successione e Sottosuccessione, **DEF 1.2.**, **DEF 1.3.**)
Allora deve esistere una *sotto successione convergente* $(a_{n_k})_k$ (Successione e Sottosuccessione, **DEF 2.1.**), ovvero deve esistere

$$\lim_k a_{n_k} = L \in \mathbb{R}$$

2. Dimostrazione

#Dimostrazione
Dimostrazione.@Teorema 1.1. (Secondo teorema di Bolzano-Weierstraß)
Chiamo $E = \{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ l'insieme dei *valori di* a_n, ovvero l'insieme immagine della successione $(a_n)_n$.
Ora ci sono due possibilità: che E sia o *finito* o *infinito*.

1. E è finito: esempi di questo caso può essere la successione costante $a_n = c, c \in \mathbb{R}$ oppure la successione pari-dispari $a_n = (-1)^n$.
   Allora *almeno* un elemento in E è immagine di *infiniti* indici n; scelgo allora una sotto successione *opportuna* tale da risultare una successione costante, che è ovviamente convergente.
   ESEMPIO 2.1. Ad esempio per $a_n = (-1)^n$ basta scegliere $(a_{2n})_n$ o $(a_{2n+1})_n$. L'idea è che abbiamo

   $$1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$$

   e scegliamo solo i termini pari o dispari: così abbiamo la *successione estratta*

   $$1, 1, 1, \ldots, 1 \text{ o } -1, -1, -1, \ldots, -1$$

2. E è infinito: ma comunque la *successione* $(a_n)_n$, per ipotesi, è limitata. Allora E è un insieme *limitato* e *infinito*; qui applico il *primo teorema di Bolzano-Weierstraß* richiamatasi all'inizio. Chiamo dunque il *punto di accumulazione* (Punti di aderenza e di accumulazione, **DEF 2.1.**) per E : $\xi \in \mathbb{R}$.
   Allora per definizione in *ogni intorno* di ξ ci sono *infiniti punti* di E.
   Ovvero in *ogni intorno di* ξ ci sono *infiniti punti-valori* a_n.
   Ora ci chiediamo se è possibile costruire una sottosuccessione tale che

   $$\lim_k a_{n_k} = \xi$$

   Allora per avere una risposta consideriamo i seguenti:
   0. Considero l'intorno $]\xi - 1, \xi + 1[$ e scelgo a_{n_0} in questo intorno.
   1. Stesso discorso per l'intorno $]\xi - \frac{1}{2}, \xi + \frac{1}{2}[$, con a_{n_1}, ma anche tale che $n_1 > n_0$ per conservare l'ordine. Posso farlo in quanto ci sono *infiniti* punti (ovvero valori a_n) attorno ξ.
   2. Vado avanti così fino all'infinito; ho allora

      $$a_{n_k} \in (\xi - \frac{1}{2^k}, \xi + \frac{1}{2^k})$$

      Allora

      $$|a_{n_k} - \xi| < \frac{1}{2^k} \implies 0 < |a_{n_k} - \xi| < \frac{1}{2^k}$$

      Considerando che

      $$\lim_n 0 = 0, \lim_n \frac{1}{2^k} = 0$$

      Allora per il *teorema dei due carabinieri* (Limite di Successione, **OSS 1.1.**) ho

      $$\lim_k a_{n_k} - \xi = 0 \implies \boxed{\lim_k a_{n_k} = \xi} \blacksquare$$

      $\square$

      Graficamente l'idea della dimostrazione è il seguente.
      FIGURA 2.1. (*Idea della dimostrazione*)
      [GRAFICO DA FARE]

B. Insiemi compatti in R

Definizione di insiemi compatti in R; R come spazio metrico; teorema di caratterizzazione dei compatti in R; lemma di caratterizzazione della chiusura tramite la successione; dimostrazione del teorema.

---

0. Preambolo - Spazi metrici e topologici

OSS 0.a. Osserviamo che dal titolo leggiamo che stiamo *in specifica* prendendo l'insieme $\mathbb{R}$, in quanto questo è un insieme su cui possiamo definire una *distanza* (Intorni, **DEF 1.1.**). Infatti si dice che $\mathbb{R}$ è uno *spazio metrico*, come lo è pure $\mathbb{R}^2, \dots, \mathbb{R}^n$. Altrimenti un insieme su cui non può essere definita una *distanza* si dice *spazio topologico*.
Per approfondire questo tema rivolgersi alla dispensa di *D.D.S.*, capitolo *10.2*, p. 33.

1. Definizione di insieme compatto in R

#Definizione

Teorema 1.1. (Insieme compatto in R per successioni).

Sia $E \subseteq \mathbb{R}$. E si dice **compatto per successione** (*d'ora in poi diremo compatto e basta*) se vale la seguente proprietà: se da *ogni successione* a valori in E posso estrarre *una sottosuccessione convergente ad un punto* $x \in E$.

OSS 1.1. Con questa definizione, un insieme compatto sembra un ente di cui è quasi impossibile da verificare: infatti diventa interessante trovare una *caratterizzazione alternativa* con un teorema.

2. Teorema di caratterizzazione dei compatti

#Teorema

Teorema 2.1. (Teorema di caratterizzazione dei compatti in R).

Sia $E \subseteq \mathbb{R}$.
Tesi. Allora E è compatto *se e solo se* E è chiuso e limitato.

Lemma di caratterizzazione della chiusura

Prima di poter procedere alla dimostrazione, ci serve il seguente lemma.

#Lemma

Lemma 2.1. (Caratterizzazione della chiusura tramite le successioni).

Sia $E \subseteq \mathbb{R}$.
Allora E è *chiuso* (Insiemi aperti e chiusi, **DEF 2.1.**) se e solo se vale la seguente proprietà:
$(*)$ Se una successione a valori in E è convergente, allora il limite appartiene all'insieme E.

#Dimostrazione
Dimostrazione.@Lemma 2.1. (Caratterizzazione della chiusura tramite le successioni)
Questo è un teorema del tipo $\iff$, quindi si procede in due passi distinti.

1. " $\implies$ ": Sia E *chiuso*; ora supponiamo (*per assurdo*) che sia falsa la proprietà $(*)$. Ovvero supponiamo che esiste una successione a valori in E tale che il suo punto di convergenza $\bar{a}$ appartiene ad un punto fuori da E (ovvero al suo complementare $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}E$).
   Però E è chiuso, di conseguenza $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}E$ è aperto: quindi abbiamo i seguenti.
   $$\bar{a} \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}E \implies \exists \varepsilon > 0,]\bar{a} - \varepsilon, \bar{a} + \varepsilon[\subseteq \mathcal{C}_{\mathbb{R}}E$$
   Però allo stesso tempo abbiamo, per definizione
   $$\lim_n a_n = \bar{a} \implies \begin{matrix} \forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} : \forall n \in E \\ n > \bar{n} \implies a_n \in \ ]\bar{a} - \varepsilon, \bar{a} + \varepsilon[\end{matrix}$$
   Tuttavia questo è un *assurdo* in quanto sappiamo che se a_n appartiene a E e invece l'intorno $]\bar{a} - \varepsilon, \bar{a} + \varepsilon[$ contiene *solo* elementi di $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}E$, questo è impossibile. Allora la proprietà $(*)$ è vera.
   L'idea della contraddizione sarebbe
   FIGURA 2.1.a. (*La contraddizione*)
   [DA FARE]
2. " $\impliedby$ ": Sia vera la proprietà $(*)$, allora dimostro che $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}E$ sia aperto.
   Per assurdo suppongo che $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}E$ *non* sia aperto: allora facciamo la negazione di
   $$\begin{gathered} \neg(\forall x \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}E, \exists \varepsilon > 0 : \ ]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subseteq \mathcal{C}_{\mathbb{R}}E) \\ \exists x \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}E : \forall \varepsilon > 0, \ ]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\ \cap E \neq \emptyset \end{gathered}$$
   Allora il gioco è fatto; quindi prendo l'intorno $\varepsilon = \frac{1}{n}$ posso individuare

una successione x_n

$$\varepsilon = \frac{1}{n} \implies \exists \bar{x} \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}} E : \forall n, \;]\bar{x} - \frac{1}{n}, \bar{x} + \frac{1}{n}[\; \cap E \neq \emptyset$$
$$\forall n, \exists x_n \in E : |x_n - \bar{x}| < \frac{1}{n} \implies \lim_n x_n = \bar{x} \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}} E$$

Quindi ho trovato una successione $(x_n)_n$ a valori in E che converge ad un punto *fuori di* E, che è impossibile in quanto violerebbe la l'ipotesi iniziale.
FIGURA 2.1.b. (*La seconda contraddizione*)
[DA FARE]

□

Dimostrazione del teorema

Ora siamo pronti per dimostrare il *teorema di caratterizzazione dei compatti*.

#Dimostrazione
Dimostrazione.@Teorema 2.1. (Teorema di caratterizzazione dei compatti in R)
Questo è un teorema del tipo *se e solo se*, quindi dimostriamo entrambi i lati delle implicazioni.

1. " $\implies$ ": Suppongo che E sia *compatto*, allora devo dimostrare che E è chiuso è limitato.
   Per assurdo suppongo che E non sia limitato: ora se considero una successione a valori in E divergente, allora per ipotesi questa deve avere una sottosuccessione *convergente*. Per esempio se E è *superiormente illimitato* (Insiemi limitati, maggioranti, massimo e teorema dell'estremo superiore) ho la seguente implicazione

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in E : x_n > n \implies \lim_n x_n = +\infty$$

   allora $(x_n)_n$ non avrebbe sottosuccessioni convergenti ad un punto in E.
   Per assurdo suppongo che E sia non chiuso; allora non vale la proprietà $(*)$ del Lemma 2.1. (Caratterizzazione della chiusura tramite le successioni) ovvero

$$\neg[\forall (a_n)_n \text{ è convergente in } E, \lim_n a_n \in E]$$
$$\exists (a_n)_n \text{ convergente in } E : \lim_n a_n \notin E$$

   Perciò *tutte* le sottosuccessioni di $(a_n)_n$ convergono ad un punto $\bar{a} \notin E$
   .
   Però essendo E per ipotesi *compatto*, la successione $(a_n)_n$ dovrebbe

avere almeno una successione che converge ad un punto in E, dandoci un assurdo.
Come si può vedere E deve essere necessariamente sia *limitato* che *chiuso*.

2. " $\Longleftarrow$ ": Sia E *chiuso* e *limitato*, proviamo che E è compatto.
Prendo una successione $(a_n)_n$ in E.
Se E è *limitato* allora per il Teorema 1.1. (Secondo teorema di Bolzano-Weierstraß) deve esistere una *sottosuccessione convergente* e la indichiamo con

$$(a_{n_k})_k : \lim_k a_{n_k} = \bar{a}$$

però E è anche *chiuso*, e per la proprietà $(*)$ del **LEMMA 2.1.** deve valere che il valore per cui converge il limite della sottosuccessione appartiene a E; ovvero

$$(a_{n_k})_k : \lim_k a_{n_k} = \bar{a} \in E$$

Pertanto E è compatto in quanto abbiamo individuato una sottosuccessione convergente ad un punto in E.

□

C. Successioni di Cauchy

Successioni di Cauchy

Definizione di successione di Cauchy; teorema sulla successione di Cauchy; teorema di completezza di R; esiti della dimostrazione del teorema di completezza di R.

---

1. Definizione di Successione di Cauchy

#Definizione

Definizione 1 (Successione di Cauchy).

Sia $(a_n)_n$ una *successione reale* (Successione e Sottosuccessione, **DEF 1.2.**), allora definiamo $(a_n)_n$ come *successione di Cauchy* se vale la seguente:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} : n, m > \bar{n} \implies |a_n - a_m| < \varepsilon$$

OSS 1.1. Osserviamo che questa definizione è ben *diversa* dalla nozione di *convergenza*: con la *convergenza* abbiamo *un punto* che si avvicina ad un certo valore, invece qui abbiamo *due punti* a_n e a_m che si *"avvicinano"* tra di loro.
Tuttavia in $\mathbb{R}$ è possibile dire che questi sono *equivalenti* in quanto ci troviamo in uno *spazio metrico*. Dimostreremo questa affermazione con due teoremi.

#Teorema

Teorema 2.

Se una successione in $\mathbb{R}$ è convergente, allora è di *Cauchy*.

#Dimostrazione

Dimostrazione.@Teorema 2
Sia $(a_n)_n$ convergente, allora

$$\lim_n a_n = \bar{a} \in \mathbb{N}$$

Cioè

$$\begin{gathered} \forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} : \forall n \\ n > \bar{n} \implies |a_n - \bar{n}| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \end{gathered}$$

Allora se $m, n > \bar{n}$ abbiamo i seguenti:

$$\begin{gathered} \forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} : \forall n, m \\ n > \bar{n} \implies |a_n - \bar{a}| < \frac{\varepsilon}{2} \\ m > \bar{n} \implies |a_m - \bar{a}| < \frac{\varepsilon}{2} \end{gathered}$$

Allora sommandoli abbiamo

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - \bar{a} + a_m - \bar{a}| \leq |a_n - \bar{a}| + |a_m - \bar{a}| < 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Dunque abbiamo verificato

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} : n, m > \bar{n} \implies |a_n - a_m| < \varepsilon$$

che è la definizione della *successione di Cauchy*.

□

Completezza di R

#Teorema

Teorema 3 (Completezza di R).

In $\mathbb{R}$ le *successioni di Cauchy* sono *convergenti*.

#Dimostrazione

Dimostrazione.@Teorema 3 (Completezza di R)

La dimostrazione si articola in tre parti, ad ognuna con un suo esito.

1. Una *successione di Cauchy* è *limitata*. Infatti $(a_n)_n$ di Cauchy significa

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} : n, m > \bar{n} \implies |a_m - a_n| < \varepsilon$$

Fissando $\varepsilon = 1$ ottengo

$$\exists \bar{n} : n, m > \bar{n} \implies |a_n - a_m| < 1$$

Quindi

$$m > \bar{n} \implies |a_{\bar{n}+1} - a_m| < 1$$

Analogamente

$$n > \bar{n} \implies |a_n - a_{\bar{n}+1}| < 1$$

Quindi

$$a_n \in (a_{\bar{n}+1} - 1, a_{\bar{n}+1} + 1)$$

Allora $(a_n)_n$:

> 1. Fino a $\bar{n}$ si comporta come vuole;
> 2. Da $\bar{n}+1$ in poi tutti i suoi valori immagine $a_n, n > \bar{n}$ sono *tutti* dentro un intervallo fissato. Ovvero è questa successione è limitata.

2. Per il Teorema 1.1. (Secondo teorema di Bolzano-Weierstraß), se $(a_n)_n$ è di *Cauchy* ed è *limitata* allora esiste una successione estratta convergente.

3. "Se una *successione di Cauchy* ha una sottosuccessione convergente, allora la successione originaria è convergente.": infatti teniamo in conto i seguenti:

- (∗) $(a_n)_n$ è di Cauchy vuol dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} : \forall n, m$$
$$n, m > \bar{n} \implies |a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

- (∗∗) $(a_{n_k})_k$ è *convergente a* $\bar{a}$ vuol dire

$$\lim_k a_{n_k} = \bar{a} \iff \begin{array}{c} \forall \varepsilon > 0, \exists \bar{k} : \forall k \\ k > \bar{k} \implies |a_{n_k} - \bar{a}| < \dfrac{\varepsilon}{2} \end{array}$$

  Ora per far valere $m > \bar{n} \wedge k > m \implies k > \bar{n}$ prendiamo e $k > \max\{\bar{n}, \bar{k}\}$. Ora li *"combiniamo"* e valuto $|a_n - \bar{a}|$. Ora vale $a_{n_k} > a_m$; allora $\forall n > \bar{n}, k > \max\{\bar{n}, \bar{k}\}$

$$|a_n - \bar{a}| \leq |a_n - a_m + a_{n_k} - \bar{a}| < |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - \bar{a}| < 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

  e abbiamo esattamente la definizione di

$$\lim_n a_n = \bar{a} \blacksquare$$

$\square$