Numeri Complessi - Sommario

Tutto sui numeri complessi $\mathbb{C}$

Introduzione ai Numeri Complessi

Introduzione ai numeri complessi: cenni storici, definizione basilare di $\mathbb{C}$ *come* $\mathbb{R}^2$.

---

0. Scopo storico

Lo *scopo storico* dei numeri complessi $\mathbb{C}$ è quello di risolvere le equazioni del tipo

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = 0 \\ a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

di cui alcune non ne hanno soluzione; ad esempio si prende

$$x^2 = -1$$

che *non* ha soluzione definita in $\mathbb{R}$, in quanto tutti i numeri moltiplicati per se stessi *due volte* sono sempre positivi.
Quindi vi è una necessità di *"ampliare"* i numeri reali in un modo tale da poter ottenere delle *soluzioni* di queste equazioni.

1. Costruzione a partire da $\mathbb{R}^2$

Pertanto si parte considerando la *l'insieme delle coppie ordinate* (Coppie Ordinate e Prodotto Cartesiano)

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$$

Quindi nel *contesto geometrico* stiamo attualmente considerando dei *vettori liberi con punto di applicazione* 0. (Vettori Liberi)

In Operazioni sui Numeri Complessi definiremo delle operazioni su questo insieme,, che quando li considereremo con $\mathbb{R}^2$ si andrà a formare il campo $\mathbb{C} = (\mathbb{R}^2, +, \cdot)$.

Operazioni sui Numeri Complessi

Tutte le operazioni possibili sui numeri complessi: somma componente per componente, moltiplicazione, campo $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ come $\mathbb{C}$; alcune proprietà di queste operazioni. Complesso coniugato e modulo di un numero complesso z; proprietà di queste operazioni, focus sulla disuguaglianza triangolare.

---

1. Somma componente per componente

DEF 1. Definisco su $\mathbb{R}^2$ l'operazione di **somma componente per componente**:

$$(a, b) \dagger (a', b') = (a + a', b + b')$$

che da ora in poi lo chiamiamo semplicemente $+$.

PROP 1.1. La *somma componente per componente* gode delle seguenti proprietà:

1. La proprietà associativa;

$$(a + b) + ((a', b') + (a'' + b'')) = ((a, b) + (a', b')) + (a'', b'')$$

2. L'esistenza dell'elemento neutro 0

$$0 : (0, 0);$$

3. L'esistenza dell'elemento opposto $(-a, -b)$;

$$(a, b) + (-a, -b) = (0, 0)$$

4. La proprietà commutativa

$$(a, b) + (a', b') = (a', b') + (a, b)$$

OSS 1.1. Allora in questo caso si definisce $(\mathbb{R}^2, +)$ come un *gruppo abeliano*.

2. Moltiplicazione

Ora l'operazione più "peculiare" sarebbe quella di moltiplicazione, in quanto grazie a questa riusciamo a formare il campo dei numeri complessi $\mathbb{C}$.
DEF 2. Sia $\circ$ l'operazione della **moltiplicazione**, che viene definita come

$$\begin{aligned} \circ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\langle a, b \rangle, \langle a', b' \rangle) &\mapsto (a, b) \circ (a', b') \end{aligned}$$

dove

$$(a, b) \circ (a', b') := (aa' - bb', ab' + ba')$$

e d'ora in poi chiameremo $\circ$ come $\cdot$.

NOTA. Come visto sopra, personalmente (avvolte) userò la notazione $\langle a, b \rangle$ per rappresentare la coppia dei numeri (a, b); lo faccio per evitare confusione con le parentesi. *Fidatevi, (forse) sarà meglio così (?)*.

OSS 2.1. Notiamo che questa definizione di moltiplicazione non è quella che ci si aspetta, di solito; infatti volendo si poteva anche definire la moltiplicazione nel seguente modo:

$$(a, b) \circ (a', b') \overset{?}{:=} (aa', bb')$$

Matematicamente questo avrebbe senso, però si *vorrebbe* che questa moltiplicazione avesse delle *proprietà* che ritroviamo anche in $\mathbb{R}$, in quanto lo scopo di questa costruzione è proprio quella di *"espandere"* la famiglia dei numeri. Ad esempio, qui non varrebbe la proprietà per cui $(0, 0)$ è *l'elemento nullo*. Infatti

$$(1, 0) \circ (0, 1) = (1 * 0, 0 * 1) = (0, 0)$$

Quindi per questo bisognava trovare un altra definizione.

TRUCCO PERSONALE. Visto che potrebbe essere difficile imparare *questa* definizione di moltiplicazione, possiamo *"anticipare"* un argomento (ovvero Rappresentazione dei Numeri Complessi) rappresentando la coppia $(a, b) = a + ib$ dove $i^2 = -1$. Per *"scoprire"* la nostra definizione facciamo il seguente.

$$\begin{aligned}
(a, b) \cdot (a', b') &= (a + ib)(a' + ib') \\
&= aa' + iab' + ia'b - bb' \\
&= (aa' - bb') + i(ab' + a'b) \\
&= (aa' - bb', ab' + a'b)
\end{aligned}$$

PROP 2.1. Si può verificare che questa operazione gode delle proprietà, ovvero:

1. La proprietà associativa;

$$\langle a, b \rangle \cdot (\langle a', b' \rangle \cdot \langle a'', b'' \rangle) = (\langle a, b \rangle \cdot \langle a', b' \rangle) \cdot \langle a'', b'' \rangle$$

2. L'esistenza dell'elemento neutro $(1, 0)$;

$$\begin{aligned}
(a, b) \cdot (1, 0) &= \langle (a * 1 - b * 0), (a * 0) + (b * 1) \rangle \\
&= \langle a, b \rangle = (a, b)
\end{aligned}$$

3. L'esistenza dell'elemento reciproco ad ogni elemento non-zero;
   Se ad ogni $c = (a, b) \neq (0, 0)$ considero

$$c^{-1} = (\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2})$$

   Infatti moltiplicandoli ottengo

$$\begin{aligned} c \cdot c^{-1} &= (\frac{a^2}{a^2+b^2} - \frac{-b^2}{a^2+b^2}, \frac{-ab}{a^2+b^2} + \frac{ab}{a^2+b^2}) \\ &= (\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}, 0) = (1, 0) \end{aligned}$$

4. La proprietà commutativa:

$$(a, b) \cdot (a', b') = (a', b') \cdot (a, b)$$

5. La proprietà distributiva:

$$\langle a, b \rangle \cdot (\langle a', b' \rangle + \langle a'', b'' \rangle) = (a, b) \cdot (a', b') + (a, b) \cdot (a'', b'')$$

DIMOSTRAZIONI.

6. Per verificare che questa operazione è *associativa*, dobbiamo dimostrare che il *membro destro* dell'uguaglianza è uguale al *membro sinistro*. Ovvero

$$\begin{aligned} \text{sx. } & \langle a, b \rangle \cdot (\langle a', b' \rangle \cdot \langle a'', b'' \rangle) = \\ & \langle a, b \rangle \cdot (\langle a'a'' - b'b'', a'b'' + a''b' \rangle) = \\ & \langle a(a'a'' - b'b'') - b(a'b'' + a''b'), a(a'b'' + a''b') + b(a'a'' - b'b'') \rangle = \\ & \langle aa'a'' - ab'b'' - a'bb'' - a''bb', aa'b'' + aa''b' + a'a''b - bb'b'' \rangle \end{aligned}$$

   e poi

$$\begin{aligned} \text{dx. } & (\langle a, b \rangle \cdot \langle a', b' \rangle) \cdot \langle a'', b'' \rangle = \\ & \langle aa' - bb', ab' + a'b \rangle \cdot \langle a'', b'' \rangle = \\ & \langle (aa' - bb')a'' - (ab' + a'b)b'', (aa' - bb')b'' + (ab' + a'b)a'' \rangle = \\ & \langle aa'a'' - a''bb' - ab'b'' - a'bb'', aa'b'' - bb'b'' + aa''b' + a'a''b \rangle = \\ & \langle aa'a'' - ab'b'' - a'bb'' - a''bb', aa'b'' + aa''b' + a'a''b - bb'b'' \rangle \end{aligned}$$

   E vediamo che i membri sono esattamente uguali. ■

7. *La proprietà 2. è già stata dimostrata sopra.*
8. *Stesso valesi per la proprietà 3.*

9. Occorre solo sfruttare le proprietà dei numeri reali $\mathbb{R}$, ovvero

$$\begin{aligned}(a', b') \cdot (a, b) &= (a'a - b'b, a'b + b'a) \\ &= (aa' - bb', ab' + a'b) \\ &= (a, b) \cdot (a', b') \blacksquare\end{aligned}$$

10. [DA VERIFICARE] (se riesco a trovare la voglia di farlo)

CONCLUSIONE.
Alla luce di queste proprietà riusciamo proprio a verificare che

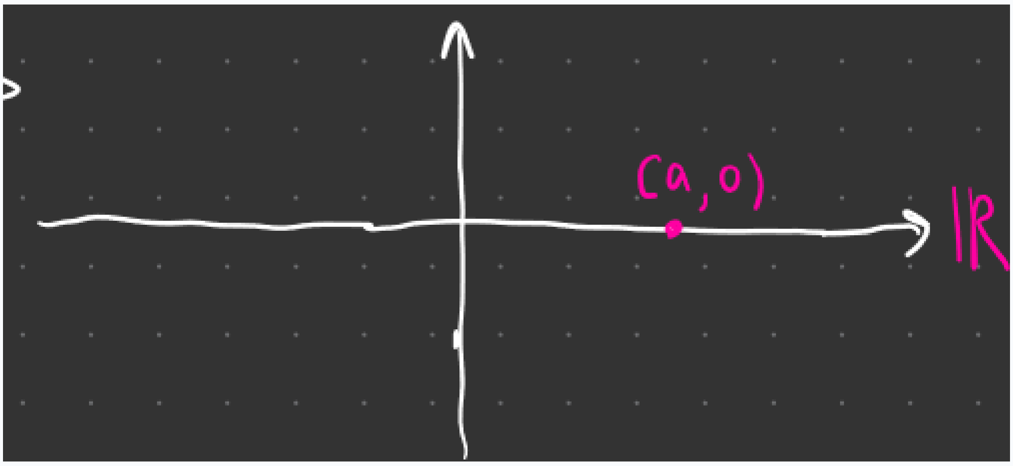
$$(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$$

è un campo, che chiameremo il *campo dei numeri complessi* $\mathbb{C}$.

OSS 2.2. Nel campo $\mathbb{C}$ considero i numeri della seguente forma:

$$(a, 0) \in \mathbb{C}$$

ovvero quelli con la *seconda componente* nulla. Graficamente, questi punti giacciono sull'asse *orizzontale*, che chiameremo *l'asse reale*.



Allora notiamo che valgono le seguenti:

$$\begin{aligned}&\text{a. } (a, 0) \cdot (b, 0) = (ab - 00, a0 + 0b) = (ab, 0) \\ &\text{b. } (a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0)\end{aligned}$$

nel senso che questi numeri si comportano come i *numeri reali* $\mathbb{R}$.

OSS 2.3. Inoltre, considerando

$$(a, 0) \cdot (c, d) = (ac - 0d, ad + 0c) = (ac, ad)$$

ovvero che $(a, 0)$ si comporta come lo *scalare* che *scala un numero* $\mathbb{C}$ *componente per componente*.

3. Coniugio

4. Modulo

Rappresentazione dei Numeri Complessi

Rappresentazione dei numeri complessi come somma di parte reale e parte immaginaria; il piano di Gauss.

Forma Trigonometrica dei Numeri Complessi

Rappresentazione dei numeri complessi come un z *associato a modulo e argomento; argomento come la classe di equivalenza dell'argomento principale; applicazione di questa forma per interpretare la moltiplicazione di due numeri complessi.*
