Spazi Vettoriali - Sommario

Spazi e sottospazi vettoriali. Formalizzazione del linguaggio a partire dalla lezione del 31.10.2023

A. LE DEFINIZIONI BASILARI

A1. Spazio vettoriale

Spazi Vettoriali

Definizione di $\mathbb{R}$-spazio vettoriale, gli 8 assiomi dei spazi vettoriali. L'utilità di spazi vettoriali; esempi di spazi vettoriali.

---

1. Definizione di spazio vettoriale e vettore

Cerchiamo di astrarre quanto visto in Vettori Liberi e Operazioni sui vettori liberi.

#Definizione

Definizione (Definizione 1.1. (spazio vettoriale sul campo K)).

Un $\mathbb{K}$-*spazio vettoriale* (o *spazio vettoriale su* $\mathbb{K}$, dove $\mathbb{K}$ è un campo (Definizione 1 (Definizione 1.1 (campo)))) è un insieme V, dotato di due operazioni definiti come:

$$
\begin{gathered}
+: V \times V \longrightarrow V;\ (u, v) \mapsto u+v \\
\cdot: \mathbb{R} \times V \longrightarrow V;\ (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v
\end{gathered}
$$

tali per cui $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e $\forall u, v, w \in V$ sono soddisfatte le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{v}_1 : (u+v)+w = u+(v+w) \\
&\mathrm{v}_2 : u+v = v+u \\
&\mathrm{v}_3 : \exists 0 \in V \mid 0+v = v+0 = v \\
&\mathrm{v}_4 : \exists -v \in V \mid v+(-v) = (-v)+v = 0 \\
&\mathrm{v}_5 : \lambda \cdot (u+v) = \lambda u + \lambda v \\
&\mathrm{v}_6 : (\lambda+\mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u \\
&\mathrm{v}_7 : (\lambda \cdot \mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v) \\
&\mathrm{v}_8 : 1 \cdot v = v
\end{aligned}$$

Inoltre uno *spazio vettoriale* può essere anche definito con la seguente *terna*:

$$(V, +, \cdot)$$

#Definizione

Definizione (Definizione 1.2. (l'elemento neutro di un spazio vettoriale)).

Chiamiamo l'elemento 0 della v_3 l'elemento *neutro*. In alternativa si può denominarla come 0_V, in riferimento al spazio vettoriale V.

#Osservazione

Osservazione 1.1. (1 non verrà chiamato come l'elemento neutro)

Notare che nella v_8 non chiameremo 1 *l'elemento neutro* per ragioni di convenzione, particolarmente per quanto riguarda l'algebra astratta. Infatti, per essere definito tale, si dovrebbe trattare di una *moltiplicazione interna in* V (ovvero del tipo $\pi : V \longrightarrow V$)

#Proposizione

Proposizione 1.1. (V_2 è un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale)

Ciò che abbiamo visto fino ad ora ci mostra che V_2 (ovvero l'insieme dei vettori liberi nel piano (Vettori Liberi)) è un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale.

#Definizione

Definizione (Definizione 1.1. (vettore)).

Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale; gli elementi $v \in V$ si dicono *vettori*.
! ATTENZIONE ! Si nota immediatamente che questa definizione del *vettore* non deve necessariamente corrispondere alla nostra idea di un *vettore libero*.

2. Conseguenze immediate delle 8 "v"

#Proposizione

Proposizione 2.1. (l'unicità di 0)

L'assioma v_3 garantisce che *esiste* almeno un vettore neutro 0 tali che certe proprietà vengono soddisfatte; però ciò che *NON* garantisce è l'unicità del vettore neutro 0. Potrebbe esistere un altro vettore *neutro* che possiamo chiamare $0'$.
Però $0'$ non esiste e lo dimostreremo.

DIMOSTRAZIONE dell'*unicità di* 0_V
Voglio dimostrare che se V è un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale, allora l'elemento neutro 0 è unico.
Supponiamo quindi che esistano due elementi neutri: 0 e $0'$; mostreremo che con questa supposizione deve necessariamente valere $0 = 0'$, quindi da questo seguirà la tesi.
Per ipotesi, $\forall v \in V$,

$$A. \, 0 + v \overset{\mathrm{v}_3}{=} v + 0 = v$$
$$B. \, 0' + v \overset{\mathrm{v}_3}{=} v + 0' = v$$

In $A.$ scegliamo $v = 0'$; allora

$$0 + 0' = 0' + 0 = 0'$$

In $B.$ scegliamo invece $v = 0$; allora

$$0' + 0 = 0 + 0' = 0$$

Quindi notiamo che

$$0 = 0 + 0' = 0'$$

per la proprietà transitiva dell'uguaglianza, $0 = 0'$. ■

#Proposizione

Proposizione 2.2. ($0 \in \mathbb{K}$ è l'elemento nullo dello scalamento)

La proposizione

$$0 \cdot v = 0$$

sembra ovvia e banale, come ci suggerirebbe la notazione; però in realtà non lo è veramente, in quanto associamo due concetti *diversi*; da una parte abbiamo lo *scalamento* del vettore v per $\lambda = 0$, dall'altra abbiamo il *vettore neutro* 0.
Quindi vogliamo dimostrare che se V è un spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, allora per ogni $v \in V$ sussiste la proposizione.

DIMOSTRAZIONE della *proposizione 2.2.*
Per dimostrare la tesi, supponiamo che $v \in V$ e quindi abbiamo che:

$$\begin{aligned}
0 \cdot v &= (0+0) \cdot v \overset{\text{v}_6}{=} 0 \cdot v + 0 \cdot v \\
0 \cdot v &= 0 \cdot v + 0 \cdot v \\
(0 \cdot v) + (-(0 \cdot v)) &= (0 \cdot v) + (-(0 \cdot v)) + (0 \cdot v) \\
0 &= 0 \cdot v \\
0 \cdot v &= 0 \blacksquare
\end{aligned}$$

#Osservazione

Osservazione 2.1. (c'è ancora qualcosa da dimostrare)

Notare che in questi passaggi abbiamo fatto un *assunto* che non è dato per scontato; ovvero che il vettore opposto $-v$ è unico ad ogni vettore v. Infatti questo assunto è ancora da *dimostrare* (che è necessario per non invalidare questa dimostrazione).

#Proposizione

Proposizione 2.3. (l'elemento opposto è l'elemento scalato per -1)

Anche la proposizione

$$(-1) \cdot v = -v$$

sembra intuitiva, ma in realtà non è dato *per scontato* secondo gli assiomi v ; infatti da un lato abbiamo lo *scalamento* di un vettore, invece dall'altro abbiamo il *vettore opposto del vettore* v.
Quindi vogliamo dimostrare che se V è un spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, allora per ogni vettore $v \in V$ vale la proposizione appena enunciata.

DIMOSTRAZIONE della *proposizione 2.3.*
Per dimostrare la tesi, utilizziamo la proprietà v_3, ovvero

$$v + (-v) = -v + v = 0$$

e dimostriamo la seconda uguaglianza, assumendo che $-v = (-1) \cdot v$;

$$(-1) \cdot v + (1) \cdot v \overset{\mathrm{v}_6}{=} (-1+1) \cdot v = 0 \cdot v = 0$$

EXCURSUS. Il senso della definizione dei spazi vettoriali

#Osservazione

Osservazione filosofica (il senso di definire e studiare i spazi vettoriali)

Si nota che in questa pagina non abbiamo veramente imparato qualcosa di nuovo; come il filosofo *F. Nietzsche* criticherebbe l'uomo che produce la *definizione di un mammifero* poi per riconoscere un *cammello* come un *mammifero*$^{(1)}$, non abbiamo veramente scoperto nulla di nuovo: infatti abbiamo solo dato *definizioni* poi per riconoscerle, ad esempio abbiamo definito lo *spazio vettoriale* e abbiamo riconosciuto V_2 come uno spazio vettoriale.

In realtà il discorso del filosofo tedesco non varrebbe qui: abbiamo dato questa definizione di spazio vettoriale per un motivo ben preciso, ovvero quello di *astrarre, "abs-trahĕre"*. Astrarre nel senso che togliamo l'aspetto *"accidentale"* dei vettori geometrici, concentrandoci invece sull'aspetto *"sostanziale"*.

Infatti dopo potremmo vedere che esistono molti insiemi che sono dei *spazi vettoriali*; se dimostro che un certo insieme A è uno spazio vettoriale, allora le proprietà v_n saranno sicuramente vere.

---

[1] *"Se io produco la definizione di un mammifero e poi dichiaro, alla vista di un cammello: guarda, un mammifero! certo con questo una verità viene portata alla luce, ma essa è di valore limitato, mi pare; in tutto e per tutto essa è antropomorfica e non contiene un solo singolo punto che sia «vero in sé», reale e universalmente valido, al di là della prospettiva dell'uomo."* (Su verità e menzogna in senso extramorale, 1896, Friedrich Nietzsche)

---

3. Esempi di spazi vettoriali

#Esempio

Esempio 3.1. ($\mathbb{R}$)

Consideriamo $V = \mathbb{R}$; con l'usuale definizione di *somma* $+$ e *moltiplicazione* $\cdot$, si verifica che anche $\mathbb{R}$ è uno $\mathbb{R}$-spazio vettoriale.

#Esempio

Esempio 3.2. (V_2)

Consideriamo $V = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, ovvero

$$V = \{(a, b) : a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$$

con le operazioni

$$\begin{aligned}&(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)\\&\lambda \cdot (a, b) := (\lambda \cdot a, \lambda \cdot b)\end{aligned}$$

allora $V = \mathbb{R}^2$ è uno *spazio vettoriale*.

#Esempio

Esempio 3.3. ($\mathbb{R}^n$)

Generalizziamo l'ESEMPIO 2.1. Coppie ordinate V_2; ovvero definiamo

$$V = \mathbb{R}^n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) : a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}$$

V è l'insieme delle n-*uple ordinate dei numeri reali*, con le operazioni

$$\begin{aligned}
+: V \times V &\longrightarrow V; \\
&((a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n)) \mapsto (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n) \\
\cdot : \mathbb{R} \times V &\longrightarrow V; \\
&\lambda \cdot (a_1, a_2, \dots, a_n) \mapsto (\lambda \cdot v_1, \lambda \cdot v_2, \dots, \lambda \cdot v_n)
\end{aligned}$$

$(V, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

#Esempio

Esempio 3.4. ($\mathcal{F}$, l'insieme delle funzioni reali)

Consideriamo l'insieme delle funzioni di variabile reale (Definizione 4 (Definizione 1.4. (funzione di reale variabile))), ovvero

$$V = \{\text{funzioni } f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow B \subseteq \mathbb{R}\}$$

con le operazioni

$$\begin{aligned}
+: V \times V \longrightarrow V;\ (f, g) \mapsto f + g \\
\cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V;\ (\lambda, f) \mapsto \lambda \cdot f
\end{aligned}$$

#Osservazione

Osservazione 3.1. (chiarimenti sul comportamento della sommo a dello scalamento)

Qui è importante chiarire il comportamento della *somma*, in quanto per noi non risulta immediatamente intuibile. Siano f, g funzioni, quindi

$$f + g = h$$

ove

$$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

data dalla seguente: se $a \in \mathbb{R}$, allora

$$h(a) = (f+g)(a) := f(a) + g(a)$$

Lo stesso discorso vale per lo *scalamento*;

$$\begin{gathered}\lambda \cdot f = F \\ F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\end{gathered}$$

ove per ogni a reale,

$$F := \lambda \cdot (f(a))$$

#Osservazione

Osservazione 3.2. (la "funzione nulla")

Vogliamo trovare la *funzione nulla*, ovvero la *funzione* che appartiene a V e gioca lo stesso ruolo di 0. La funzione la chiamiamo O e si definisce come

$$O : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto 0$$

infatti, se definiamo $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, allora

$$(f+O) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) + 0 = f(x)$$

Abbiamo visto che $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$(f+O)(x) = f(x)$$

pertanto

$$O + f = f; f + O = f$$

quindi abbiamo verificato che O è *l'elemento neutro* dello *spazio vettoriale* $(V, +, \cdot)$.

A2. Sottospazio vettoriale

Sottospazi Vettoriali

Sottospazio vettorali: definizione, esempi, interpretazione geometrica. Alcuni lemmi sui sottospazi vettoriali.

1. Sottospazio Vettoriale

#Definizione

Definizione (Definizione 1.1. (sottospazio vettoriale)).

Sia V un $\mathbb{K}$-*spazio vettoriale*; un sottoinsieme $W \subseteq V$ si dice un *sottospazio vettoriale* se valgono le seguenti:

1. Il vettore *nullo* di V appartiene a W
2. $\forall v, w \in W$; vale che $v + w \in W$ (*chiusura rispetto alla somma*)
3. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall v \in W$, vale che $\lambda \cdot v \in W$ (*chiusura rispetto allo scalamento*)

#Esempio

Esempio 1.1. (V_2)

Consideriamo ora l'$\mathbb{R}$-spazio vettoriale V_2, ovvero

$$V_2 : (\mathbb{R}^2, +, \cdot)$$

introdotto in precedenza (**ESEMPIO 2.1.**).
Ora consideriamo il seguente sottoinsieme $W \subseteq V_2$;

$$W := \{(x, y) \in V_2 : x - 3y = 0\}$$

Facciamo le seguenti *osservazioni*.

#Osservazione

Osservazione 1.1. (l'elemento nullo di V_2)

In V_2 esiste il vettore nullo $(0, 0)$; in questo caso il vettore nullo $(0, 0)$ vale anche in W.

#Osservazione

Osservazione 1.2. (somma in V_2)

In V_2 è definita una *somma* $+$. Se v, w sono due elementi di W, allora sono in particolare elementi di V_2; dunque $v+w \in V_2$. In aggiunta vale che $v+w \in W$. Infatti: se $v=(v_1,v_2)$ $w=(w_1,w_2)$ allora

$$\begin{aligned} v \in W &\implies v_1 - 3v_2 = 0 \\ w \in W &\implies w_1 - 3w_2 = 0 \end{aligned}$$

quindi

$$(v_1 - 3v_2) + (w_1 - 3w_2) = 0 = 0 + 0 = 0$$

ovvero

$$(v_1 + w_1) - 3(v_2 + w_2) = 0$$

ovvero $(v+w) \in W$

#Osservazione

Osservazione 1.3. (scalamento in V_2)

Infine consideriamo $v \in W$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Se

$$\lambda \cdot v \in V_2$$

allora vale anche

$$\lambda \cdot v \in W$$

Infatti se $v=(v_1,v_2)$, allora $\lambda \cdot v = (\lambda \cdot v_1, \lambda \cdot v_2)$;

$$\begin{aligned} v \in W &\implies v_1 - 3v_2 = 0 \\ \text{allora } \lambda \cdot (v_1 - 3v_2) &= \lambda \cdot 0 = 0 \\ \text{quindi } (\lambda \cdot v_1) - 3(\lambda \cdot v_2) &= 0 \\ \text{ovvero } \lambda \cdot v \in W & \end{aligned}$$

2. Interpretazione geometrica

#Esempio

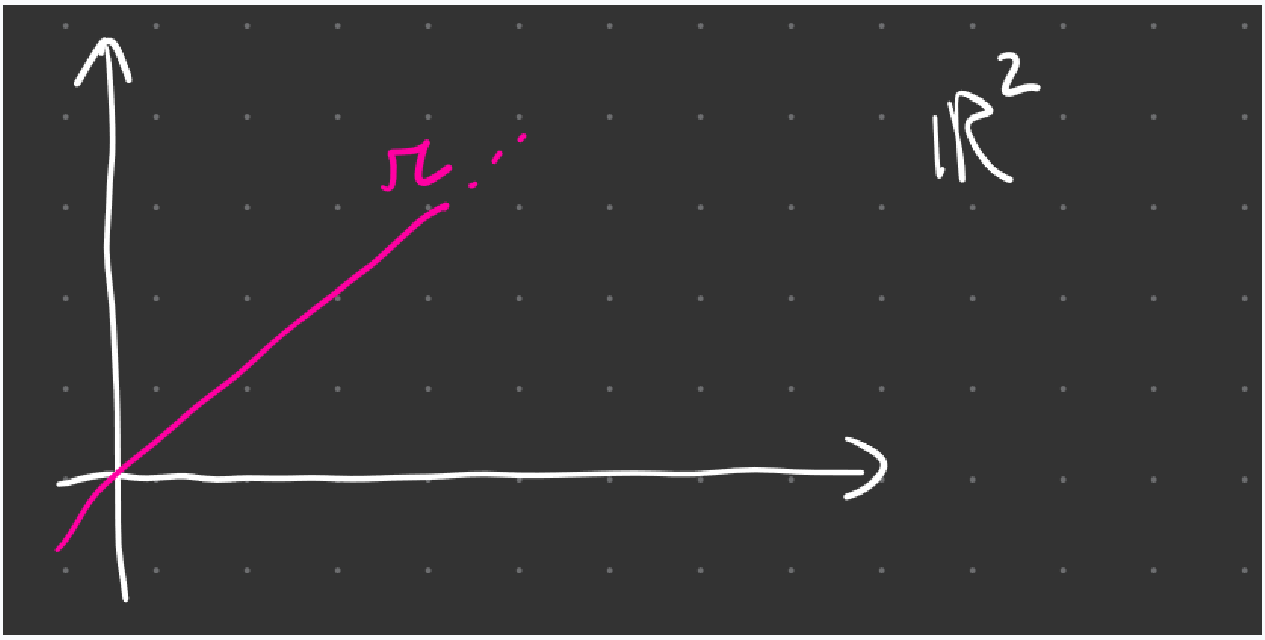
Esempio 2.1. (la retta sul piano)

Consideriamo $\mathbb{R}^2$ come l'insieme dei *punti nel piano*, ovvero il classico *piano cartesiano* π
Definiamo il sottoinsieme

$$W := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - 3y = 0\}$$

Ovviamente W è uno *sottospazio vettoriale* di $\mathbb{R}^2$; notiamo che se rappresentiamo $\mathbb{R}^2$ come l'insieme dei punti nel piano, allora si può rappresentare W come l'insieme dei *punti nella retta* r, ove $r : x - 3y = 0 \iff y = \frac{1}{3}x$

FIGURA 2.1. (*Esempio 2.1.*)



#Esempio

Esempio 2.2. (la circonferenza sul piano)

In $\mathbb{R}^2$ consideriamo il seguente:

$$C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

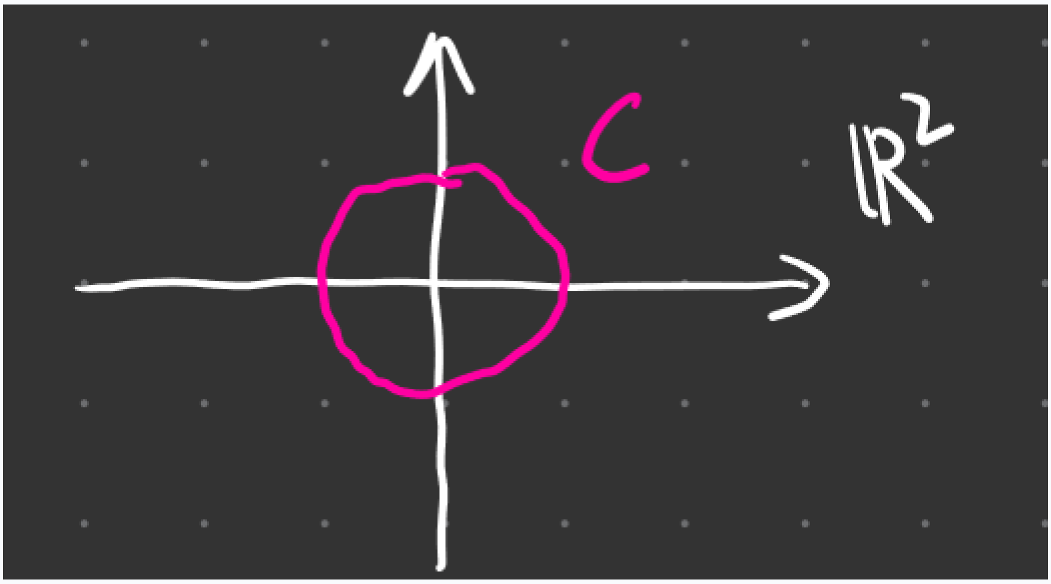
Osserviamo subito che la *proprietà caratterizzante di* C non è un'*equazione lineare*; infatti si tratta di un'equazione di secondo grado.
Precisamente nel contesto della *geometria analitica*, C rappresenterebbe la circonferenza

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \gamma^2$$

ove (α, β), quindi $(0, 0)$, rappresentano le coordinate dell'origine del cerchio

e γ, quindi 1, il raggio.
Vediamo subito che C *non* è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$, in quanto $(0,0)$ non appartiene a C.

FIGURA 2.2. (*Esempio 2.2.*)



3. Formare sottospazi a partire da due sottospazi

#Lemma

Lemma (Lemma 3.1. (l'intersezione di due sottospazi forma un sottospazio)).

Sia V un *K-spazio vettoriale*, siano $U, W \subseteq V$ dei *sottospazi vettoriali* di V.
Se voglio avere un *nuovo* sottospazio vettoriale a partire da U, W allora posso prendere la loro *intersezione* (Operazioni con gli Insiemi). Infatti

$$U \cap W$$

è *sottospazio vettoriale* di V.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *lemma 3.1.*
Verifichiamo che $U \cap W$ sia *sottospazio vettoriale di* V, quindi che soddisfa le *tre proprietà* elencate in **DEF 1.**.

1. $0 \in (U \cap W)$ è vera perché *per ipotesi* abbiamo che 0 appartiene sia ad U che W, in quanto sono dei sottospazi vettoriali; quindi è un *elemento* comune di questi due insiemi.

2. Possiamo verificare la *chiusura della somma*: infatti

$$\begin{aligned}\forall v_1, v_2 \in (U \cap W) &\implies v_1, v_2 \in U; v_1, v_2 \in W \\ \text{per ipotesi } &\implies v_1 + v_2 \in U; v_1 + v_2 \in W \\ &\implies (v_1 + v_2) \in (U \cap W)\end{aligned}$$

3. Ora verifichiamo la *chiusura dello scalamento* con lo stesso procedimento:

$$\begin{aligned}\forall \lambda \in K, \forall v \in (U \cap W) &\implies v \in U; v \in W \\ \text{per ipotesi } &\implies \lambda v \in U; \lambda v \in W \qquad \blacksquare \\ &\implies \lambda v \in (U \cap W)\end{aligned}$$

Il vuoto

#Osservazione

Osservazione 3.1. (l'unione di due sottospazi NON forma un sottospazio)

Purtroppo questa *non* vale per l'unione di due sottospazi vettoriali. Infatti, avendo V uno spazio vettoriale e U, W i suoi sottospazi vettoriali, *non* è sempre garantito che

$$U \cup W$$

sia anch'esso uno sottospazio vettoriale. Qui la simmetria si spezza.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE di *osservazione 3.1.*.
Per *"dimostrare"* questa osservazione troviamo alcuni esempi specifici di sottospazi vettoriali per cui non vale *almeno* una delle tre proprietà dello sottospazio vettoriale: scopriremo che non varrà la chiusura della somma per un caso specifico.
Considero $U, W \subseteq \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}U &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x - y = 0\} \\ W &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - 2y = 0\}\end{aligned}$$

Per ora mostriamo *algebricamente* che non vale la chiusura della somma per $U \cup W$.

1. Scegliamo alcuni elementi di U, W;

$$(1,2) \in U; (2,1) \in W$$

2. Ora li sommiamo

$$(1,2) + (2,1) = (3,3)$$

3. Verifichiamo che

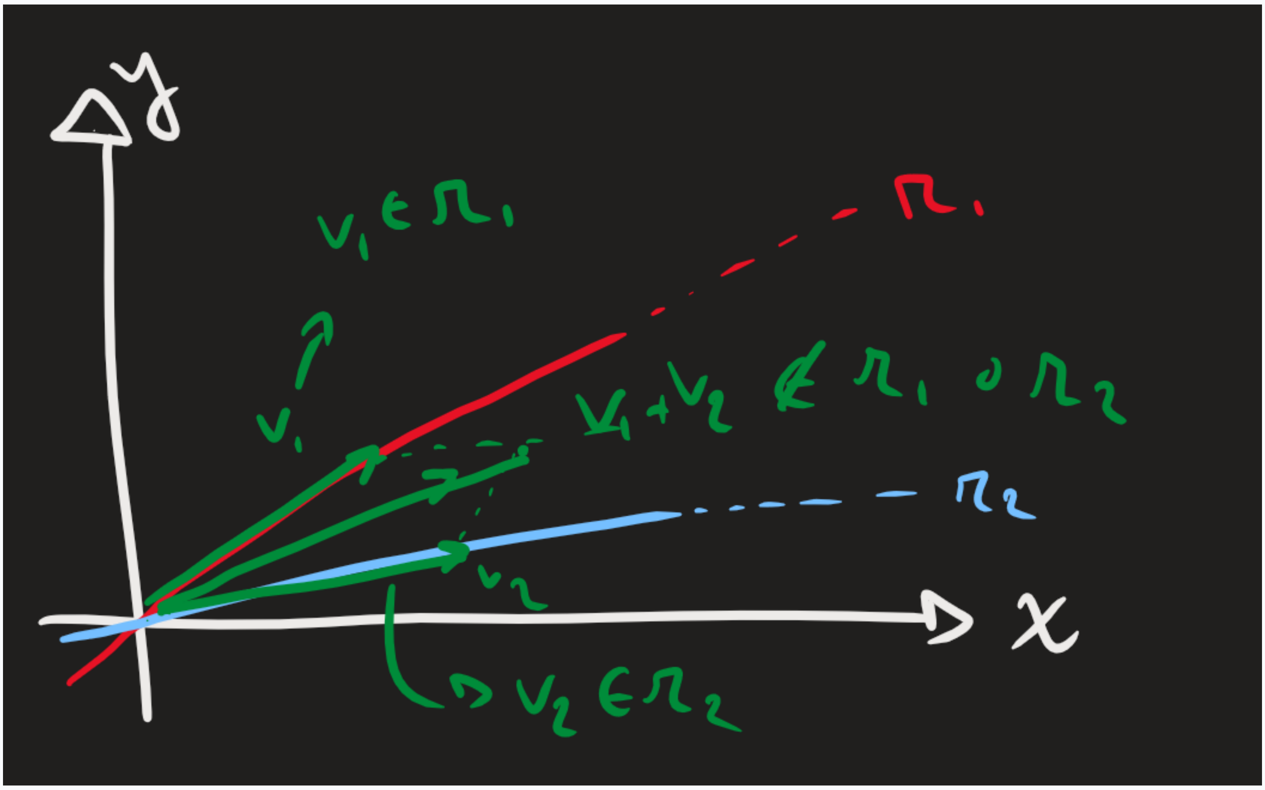
$$(3,3) \notin (U \cup W)$$

   Infatti

$$2(3) - 3 \neq 0; 3 - 3(3) \neq 0$$

   Volendo si può vedere la situazione graficamente, osservando che U e W *corrispondono* a rette passanti per l'origine e vedendo poi che *vettore libero* $(3,3)$ dato dalla somma di *due vettori* non appartiene alla nessuna delle due rette.

FIGURA 3.1. (*Osservazione 3.1.*)



Sottospazio somma

Allora vogliamo trovare un *"surrogato"* per questo vuoto formato dal fatto che $U \cup W$ non sia uno sottospazio.

#Definizione

Definizione (Definizione 3.1. (sottospazio somma)).

Sia V un K-spazio vettoriale, siano U, W due sottospazi vettoriali di V. Definiamo dunque il *sottospazio vettoriale somma di* U, V come

$$U + W := \{u + w : u \in U, w \in W\}$$

#Lemma

Lemma (Lemma 3.2. (la somma di due sottospazio forma un sottospazio)).

$U + W$ è sottospazio vettoriale di V.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE. (*Esercizio lasciato a noi*)

1. *L'appartenenza dell'elemento neutro*
   Verifichiamo che
   $$0 \in (U + W)$$
   è vera: infatti basta scegliere $u = 0, w = 0 \implies 0 + 0 = 0.$
2. *Chiusura della somma*
   $$\begin{aligned} v_1, v_2 \in (U + W) \implies & v_1 = u_1 + w_1, v_2 = u_2 + w_2 \\ v_1 + v_2 &= v_1 + v_2 + w_1 + w_2 \\ &= (v_1 + v_2) + (w_1 + w_2) \\ &= v + w \\ v_1 + v_2 &\in (U + W) \end{aligned}$$
3. *Chiusura dello scalamento*
   $$\begin{aligned} &\lambda \in K; v \in (U + W) \\ &v \in (U + W) \implies v = u + w; u \in U, w \in W \\ &\lambda \cdot v = \lambda u + \lambda w \\ &\text{per ipotesi } \lambda u \in U, \lambda w \in W \\ &\implies \lambda \cdot v \in (U + W) \end{aligned}$$ ■

#Lemma

Lemma (Lemma 3.3. (due sottospazi appartengono alla loro somma)).

Con la notazione precisa valgono che

$$U \subseteq (U+W) \wedge W \subseteq (U+W)$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *lemma 3.2.*.

Mostrare la prima significa mostrare che per ogni elemento u di U vale che u appartiene anche a $U+W$. Analogamente lo stesso discorso vale per w elemento di W.

$$u \in (U+W) \implies u = u + w \overset{w=0}{\implies} u = u \implies u \in U$$

#Corollario

Corollario (Corollario 3.1. (l'intersezione di due sottospazi appartiene alla loro somma)).

Vale che

$$(U \cup W) \subseteq (U+W)$$

inoltre si può dimostrare che $U+W$ è il *più piccolo* sottospazio vettoriale di V che contiene $U \cup W$.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *corollario 3.1.*.

Omessa.

B. LA COMBINAZIONE LINEARE E I SUOI FIGLI

B1. Combinazione lineare

Combinazione Lineare

Definizione di combinazione lineare di un K-spazio vettoriale; definizione di span*; definizione di sistema di generatori per uno sottospazio vettoriale.*

1. Definizione di Combinazione Lineare

#Definizione

Definizione (Definizione 1.1. (combinazione lineare)).

Sia V un *K-spazio vettoriale* (Spazi Vettoriali, **DEF 1.**), siano

$$\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n \in V$$

degli elementi di V. Alternativamente possiamo pensare questi elementi come il sottoinsieme $S \subseteq V$.
Allora definiamo *combinazione lineare* un qualsiasi *vettore* (Spazi Vettoriali, **DEF 1.1.**) della forma

$$\lambda_1 \mathrm{v}_1 + \ldots + \lambda_n \mathrm{v}_n$$

dove $\lambda_i \in K, \forall i \in \{1, \ldots, n\}$.

#Esempio

Esempio 1.1. (esempio su $\mathbb{Q}^2$)

In $\mathbb{Q}^2$ considero

$$q_1 = (1, 0); q_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}); q_3 = (1, 2)$$

Una *combinazione lineare* di $S = (q_1, q_2, q_3)$ può essere ad esempio

$$\frac{3}{4} q_1 - \frac{12}{7} q_2 + 15 q_3$$

2. L'insieme delle combinazioni lineari span

Ora voglio considerare l'*insieme* delle combinazioni lineari.

#Definizione

Definizione (Definizione 2.1. (span di un insieme di vettori)).

Sia V un K-spazio vettoriale e sia $S = (\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n)$.
Allora chiamo lo *span* di S o di $\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n$ come l'*insieme di tutte le combinazioni lineari di tale sottoinsieme* S:

$$\operatorname{span}(\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n) := \{\lambda_1 \mathrm{v}_1 + \ldots + \lambda_n \mathrm{v}_n : \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K\}$$

oppure in forma compatta

$$\operatorname{span}(S) := \{\sum_{i=1}^n \lambda_i \mathrm{v}_i : i \in \{1, \ldots, n\}, \lambda_i \in K\}$$

#Lemma

Lemma (Lemma 2.1. (lo span è sempre un sottospazio vettoriale)).

Lo span di un qualunque $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ è *sottospazio vettoriale* di V (Sottospazi Vettoriali).

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *lemma 2.1.*
Verifichiamo le tre proprietà fondamentali dello sottospazio vettoriale.

1. *L'appartenenza dell'elemento 0*
   Verifichiamo che 0 può essere espresso come una *combinazione lineare* ponendo tutti i *coefficienti* $\lambda_i = 0$.
2. *Chiusura della somma*
   Siano $u, w \in \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_n)$. Allora per ipotesi abbiamo

$$u = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \mid w = \sum_{i=1}^n \mu_i v_i$$

   Allora sommandoli abbiamo

$$u + w = \sum_{i=1}^n (\lambda_i + \mu_i) v_i \implies u + w \text{ è combinazione lineare}$$

3. *Chiusura dello scalamento*
   Sia $\lambda \in K$, $w \in \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_n)$. Allora

$$\lambda \cdot w = \lambda \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i = \sum_{i=1}^{n} (\lambda \mu_i) v_i \in \text{span}\,(v_1, \ldots, v_n)\ \blacksquare$$

3. Sistema di generatori

#Definizione

Definizione (Definizione 3.1. (sistema di generatori per un spazio vettoriale)).

Sia V un K-spazio vettoriale, $U \subseteq V$ un qualunque sottospazio vettoriale di V.
Un *insieme di elementi* $\{u_1, \ldots, u_n\} \subseteq U$ si dice un *sistema di generatori di/per* U se *ogni vettore* $u \in U$ è una *combinazione lineare dell'insieme di elementi stesso*; equivalentemente

$$\{u_1, \ldots, u_n\} \text{ è sistema di generatori } \iff U = \text{span}(\{u_1, \ldots, u_n\})$$

ovvero se *ogni* vettore di U è una combinazione lineare di quell'insieme di elementi, allora quell'insieme è un *sistema di generatori*.

#Esempio

Esempio 3.1. (su $\mathbb{R}^2$)

Consideriamo $V = \mathbb{R}^2$, $U = \mathbb{R}^2$ (ovvero $V = U$) e i vettori

$$u_1 = (1, 0) \mid u_2 = (0, 1)$$

Vale che $\{u_1, u_2\}$ è un *sistema di generatori* per U.
Infatti dato un vettore $(a, b) \in U$ abbiamo $(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1) = au_1 + bu_2$.
Notiamo inoltre che se definiamo

$$u_3 = (1, 1)$$

allora anche $\{u_1, u_2, u_3\}$ è un *sistema di generatori per* U.

#Osservazione

Osservazione 3.1. (la flessibilità dei sistemi di generatori)

Osserviamo che se $\{u_1, \ldots, u_n\}$ è un *sistema di generatori per* U allora

$$\forall u \in U, \{u_1, \ldots, u_n, u\}$$

anche questo è un *sistema di generatori* per U.
In parole, dato un *sistema di generatori* per un certo sottoinsieme allora possiamo aggiungerci qualsiasi elemento del sottoinsieme, dandoci comunque un altro *sistema di generatori* per lo stesso sottoinsieme.
Da questo discende che la definizione di *sistema di generatori* presenta in sé molta flessibilità e variabilità; tuttavia secondo una specie di *"legge meta-matematica"*, troppa flessibilità è un segno di un ente matematico meno forte.
Introdurremo dunque della *"rigidità"* con le *basi* (Definizione di Base), arricchendo questo concetto con ulteriori vincoli.

B2. Dipendenza, indipendenza lineare

Dipendenza e Indipendenza Lineare

Definizione di dipendenza o indipendenza lineare per degli elementi di uno spazio vettoriale.

---

1. Dipendenza lineare

#Definizione

Definizione (Definizione 1.1. (dipendenza lineare di vettori)).

Sia V un K-spazio vettoriale, siano $v_1, \ldots, v_n$ elementi (o vettori) di V (Spazi Vettoriali).
Allora gli *elementi/vettori* $v_1, \ldots, v_n$ si dicono *linearmente dipendenti* se possiamo scrivere il vettore nullo $0 \in V$ come la *combinazione lineare* (Combinazione Lineare) di $v_1, \ldots, v_n$ in cui *non* tutti i coefficienti λ_i in K sono nulli. Ovvero

$$0 = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n : \exists \lambda_i \neq 0$$

#Proposizione

Proposizione 1.1. (definizione 'alternativa' di dipendenza lineare)

Sia V un K-spazio vettoriale, siano $v_1, \ldots, v_n \in V$. Allora questi *vettori* $v_1, \ldots, v_n$ sono *linearmente dipendenti* se e solo se *uno di essi può essere scritto come combinazione lineare di altri vettori*.
Equivalentemente, se e solo se

$$\exists j \in \{1, \ldots, n\} : v_j \in \text{span}(v_1, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_n)$$

Definizione (Notazione (esclusione di alcuni elementi da una n-upla)).

Per poter compattare la scrittura sopra si può scrivere

$$(v_1, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_n)$$

come

$$(v_1, \ldots, \hat{v}_j, \ldots, v_n)$$

e il *"cappello"* su v_j vuol dire che lo escludiamo dalla n-upla.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE della *proposizione 1.1.*
Dimostro che vale l'implicazione da ambi i lati in quanto abbiamo un enunciato del tipo "se e solo se".
" $\implies$ ": Suppongo che $v_1, \ldots, v_n$ siano *linearmente* dipendenti. Allora

$$\begin{aligned}
\exists \lambda_i \neq 0, i \in \{1, \ldots, n\} : \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0 \\
&\implies -\lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n \\
&\implies v_i = \frac{(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n)}{-\lambda_i} \\
&\implies v_i = -\frac{\lambda_1}{\lambda_i} v_1 + \ldots + (-\frac{\lambda_n}{\lambda_i} v_n) \\
&\implies v_i \in \text{span}(v_1, \ldots, \hat{v}_j, \ldots, v_n)
\end{aligned}$$

" $\impliedby$ ": Suppongo che $\exists i \in \{1, \ldots, n\} : v_i \in \text{span}(v_1, \ldots, \hat{v}_j, \ldots, v_n)$. Allora

$$\begin{aligned}
v_i &= \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_{i-1} v_{i-1} + \mu_{i+1} v_{i+1} + \ldots + \mu_n v_n \\
0 &= \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_{i-1} v_{i-1} - v_i + \mu_{i+1} v_{i+1} + \ldots + \mu_n v_n \blacksquare \\
&\implies \exists \lambda_i = -1 \neq 0 : \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_n v_n = 0
\end{aligned}$$

2. Indipendenza lineare

Ora siamo pronti per definire l'*indipendenza lineare*.

#Definizione

Definizione (Definizione 2.1. (vettori linearmente indipendenti)).

Sia V un K-spazio vettoriale, $v_1, \ldots, v_n$ dei vettori di V.
Dichiamo che questi vettori $v_1, \ldots, v_n$ sono *linearmente indipendenti* se *non* sono *linearmente dipendenti*.
Equivalentemente, $v_1, \ldots, v_n$ sono *linearmente indipendenti* se e solo se *l'unico modo di scrivere* 0 *è quello di porre tutti i coefficienti* $\lambda_i = 0$
Alternativamente,

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$$

#Esempio

Esempio 2.1. (esempio su $\mathbb{R}^2$)

Considero in $V = \mathbb{R}^2$ i seguenti vettori:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vale che v_1, v_2, v_3 sono *linearmente dipendenti* dal momento che

$$v_3 = 1v_1 + 1v_2$$

Invece vale che v_1, v_2 sono *linearmente indipendenti* in quanto se suppongo

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

allora vale che

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

In parole l'*unico* modo di scrivere il *vettore nullo* come la *combinazione lineare di* v_1, v_2 è quello di porre $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

B3. Nesso tra i spazi vettoriali e i sistemi lineari

Generatori, Indipendenza Lineare e Sistemi Lineari

Breve osservazione sui concetti di generatori, indipendenza lineare come astrazioni di aspetti dei sistemi lineare.

Osservazione sui sistemi di generatori e indipendenza lineare

#Osservazione

Osservazione 1.1. (sistemi di generatori in termini di sistemi lineari)

In K^n, l'essere un *sistema di generatori* può essere *"parafrasato"* in termini di *sistemi lineari* (Sistemi Lineari); infatti se $\{v_1, \dots, v_s\} \subseteq K^n$ è un *sistema di generatori* per K^n, allora abbiamo

$$\forall v \in K^n, \exists \lambda_1, \dots, \lambda_s : v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_s v_s$$

ATTENZIONE! Notiamo che usiamo l'altro valore s in quanto n è stato già fissato con K^n: infatti non abbiamo stabilito a priori che $s = n$.
Scriviamo dunque

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{pmatrix}; \dots; v_s = \begin{pmatrix} a_{s1} \\ \vdots \\ a_{sn} \end{pmatrix}; v = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Allora *"l'essere v una combinazione lineare del sistema di generatori"* equivale ad avere il seguente *sistema lineare*:

$$\begin{cases} \lambda_1 a_{11} + \ldots + \lambda_s a_{s1} = b_1 \\ \vdots \\ \lambda_1 a_{1n} + \ldots + \lambda_s a_{sn} = b_n \end{cases}$$

Quindi si dice che v è *combinazione lineare di* $v_1, \dots, v_s$ se e solo se il *sistema lineare* del tipo

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{s1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{sn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

è *compatibile*.

#Osservazione

Osservazione 1.2. (indipendenza lineare in termini di sistemi lineari)

Analogamente l'essere *linearmente indipendenti* può essere parafrasata in termini di *sistemi lineari* usando il *sistema lineare omogeneo associato*: infatti avendo un sistema del tipo

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{s1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{sn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

e se questa è *compatibile* e la sua *soluzione* è *unica*, allora tutti i vettori $v_1, \dots, v_s$ sono *linearmente indipendenti*.

#Osservazione

Osservazione 1.3. (a mo' di conclusione)

Concludiamo che i concetti di *sistemi di generatori* (Combinazione Lineare, **DEF 3.1.**) e di *indipendenza lineare* (Dipendenza e Indipendenza Lineare) sono modi di *astrarre* dei concetti che riguardano i *sistemi lineari* (Sistemi Lineari).

C. BASE, DIMENSIONE E RANGO

C1. Definizione di base

Definizione di Base

Definizione di base. Teorema di caratterizzazione della base. Coordinate del vettore v rispetto alla base B. Esempi di base.

---

1. Definizione di base

#Definizione

Definizione 1.1. (Definizione 1.1. (Base).).

Sia V un *K-spazio vettoriale* (Definizione 1 (Definizione 1.1. (spazio vettoriale sul campo K))) e sia $U \subseteq V$ un *sottospazio vettoriale di V* (Definizione 1 (Definizione 1.1. (sottospazio vettoriale))).
Allora una *base di* U è un *insieme* $\{u_1, \dots, u_n\}$ formato da *vettori* di U tali che:
$\{u_1, \dots, u_n\}$ è un *sistema di generatori per* U (Definizione 4 (Definizione 3.1. (sistema di generatori per un spazio vettoriale)))
e anche
$u_1, \dots, u_n$ sono *linearmente indipendenti* (Definizione 3 (Definizione 2.1. (vettori linearmente indipendenti)))

Teorema di caratterizzazione delle basi

#Teorema

Teorema 1.1. (Teorema 1.1. (Caratterizzazione delle basi).).

Sia V un *K-spazio vettoriale finitamente generato*, allora un sottoinsieme $B \subseteq V$, $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di V *se e solo se* ogni vettore $v \in V$ si può scrivere in modo *unico* come *combinazione lineare* di B.

$$B \text{ è base di } V \iff \forall v \in V, \exists! \lambda_1, \dots, \lambda_n : \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *teorema di caratterizzazione delle basi* (Teorema 1.1. (Caratterizzazione delle basi))
Questo è un teorema del tipo *se e solo se*: quindi andiamo per due passi.

" $\Longrightarrow$ ": Sia B una *base* di V, allora devo dimostrare che ogni elemento di V può essere scritta come combinazione lineare di B in un modo unico.
Dato che B è in particolare un *sistema di generatori* di V, allora dato $v \in V$ si può scrivere come combinazione lineare di B, cioè

$$v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$$

Ora ci rimane da dimostrare l'*unicità* di tale scrittura: supponiamo allora che esiste

$$v = \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_n v_n$$

Allora

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_n v_n$$

Pertanto

$$(\lambda_1 - \mu_1) v_1 + \ldots + (\lambda_n - \mu_n) v_n = 0$$

Questa è una *combinazione lineare nulla* di $v_1, \ldots, v_n$ (ovvero elementi di B): dato che questi sono anche *linearmente indipendenti*, allora l'unica possibilità di tale scrittura è solo se

$$\lambda_1 = \mu_1, \ldots, \lambda_n = \mu_n$$

che dimostra *l'unicità* della scrittura del vettore.

" $\Longleftarrow$ ": Ora supponiamo che ogni elemento $v \in V$ può essere scritta in una maniera *unica* come combinazione lineare di B.
Allora in particolare B è *sistema di generatori* per V.
Ci rimane da dimostrare che gli elementi di B sono *linearmente indipendenti*; per farlo prendiamo il vettore nullo $0 \in v$ e scriviamo la sua *combinazione lineare* di elementi di B:

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$$

D'altra parte si può scrivere

$$0 v_1 + \ldots + 0 v_n = 0$$

Per ipotesi la scrittura di combinazioni lineare di 0 come elementi di B è *unica*, allora discende che *tutti* i coefficienti λ_i sono *nulli*. Ovvero

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_i = 0, \forall_i \in \{1, \ldots, n\}$$

ovvero $v_1, \ldots v_n$ sono *linearmente indipendenti*.

Coordinate di vettori rispetto ad una base

#Definizione

Definizione 1.2. (Definizione 1.2. (Coordinate di vettore rispetto alla base).).

Sia V un *K-spazio vettoriale finitamente generato*, sia $B = (v_1, \ldots, v_n)$ una base di V, e sia v un *vettore* $v \in V$. Allora possiamo scrivere

$$v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$$

in modo unico con $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$.
Gli scalari $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sono detti le *coordinate di v rispetto alla base B*.

2. Esempi di basi

Ora consideriamo degli *esempi* di *basi di spazi vettoriali*.

#Esempio

Esempio 2.1. (Esempio 2.1. (Basi di K^n).).

In K^n possiamo considerare l'insieme

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Si può dimostrare che $\mathcal{B}$ è una base per K^n.
Infatti è chiaramente sia *sistema di generatori* per K^n e ogni vettore v di $\mathcal{B}$ sono *linearmente indipendenti*: si lascia la dimostrazione da svolgere per esercizio.
Si definisce tale base la *base standard* di K^n.

#Esempio

Esempio 2.2. (Esempio 2.2. (Basi delle matrici $M_{m,n}(K)$).).

Nell'insieme delle *matrici* $M_{m,n}(K)$ (Matrice, **DEF 1.2.**) possiamo considerare le matrici del tipo

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

dove ogni matrice $v \in \mathcal{B}$ è una matrice dove *tutte* le entrate sono 0 a parte un elemento del posto a_{ij}, che è uguale a 1.
In parole prendiamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

e la *"spacchettiamo"* in matrici con un singolo elemento. Quindi è possibile dimostrare che tutti gli elementi di $\mathcal{B}$ sono sia *sistema di generatori* per una qualsiasi matrice che *linearmente indipendenti*.

#Osservazione

Osservazione 2.1.

Notiamo che il *numero degli elementi* (ovvero la cardinalità) dell'insieme $\mathcal{B}$ è esattamente $m \cdot n$.

C2. Teoremi sulle basi

Teoremi sulle Basi

Tutti i teoremi sulle basi: teorema di estrazione di una base, teorema del completamento/estensione, lemma di Steinitz, teorema sul numero di elementi delle basi. Cenni/idee alle dimostrazioni di questi teoremi

1. Teorema di estrazione di una base

Questo primo teorema, come ci suggerisce il titolo, serve per *"estrarre"* una base da uno *spazio vettoriale* (Spazi Vettoriali), ovvero di determinarla.

#Teorema

Teorema 1.1. (Teorema 1.1. (Teorema di estrazione di una base).).

Sia V un *K-spazio vettoriale*, *finitamente generato*, sia $\{v_1, \ldots, v_k\}$ un *sistemi di generatori* di V.
Allora esiste $\mathcal{B} \subseteq \{v_1, \ldots, v_k\}$ tale che $\mathcal{B}$ è *base* di V.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *teorema di estrazione* (Teorema 1.1. (Teorema di estrazione di una base))
Nota: questa non è una vera e propria dimostrazione, bensì un semplice cenno. Ci si focalizza in particolare su un algoritmo per scopi informatici.
In questa dimostrazione procediamo per *costruzione*, ovvero troviamo la *base* $\mathcal{B}$ mediante il cosiddetto *algoritmo* dello scarto.
Inoltre supponiamo $V \neq \{0\}$.

ALGORITMO (*dello scarto*)

1. Inizializziamo la *"lista vuota"* $\mathcal{B} = \{\}$ (nel linguaggio C sarebbe un vettore/array, in Python una lista)
2. Iterare tutti gli elementi di $(v_1, \ldots, v_k)$ (equiv. `for v in V`)
   1. Consideriamo v_1 di: se $v_1 = 0$, allora passiamo al prossimo; altrimenti aggiungo v_1 a $\mathcal{B}$.
      ATTENZIONE! Per 0 ovviamente si intende il *vettore nullo* di V.
   2. Consideriamo v_2: se $v_2 = 0$ oppure $v_2 \in \mathrm{span}(\mathcal{B})$, allora procedere al prossimo; altrimenti aggiungo questo a $\mathcal{B}$.
   3. Ripetere fino a v_k.
3. Alla fine otteniamo una lista che è sicuramente contenuto in $(v_1, \ldots, v_k)$ che si può dimostrare essere base di V (*omessa, anche se semplice da dimostrare*).

PSEUDOCODICE (*quasi-Python*)

PYTHON

```python
def TrovaBase(vettore_nullo, sistema_di_generatori):
        B = []
        for v in sistema_di_generatori:
                if v == vettore_nullo or v in span(B):
                        continue
                else:
                        B.append(v)
                # Alternativamente si può solo negare la condizione e scrivere
                if v != vettore_nullo and v not in span(B):
                        B.append(v)
        return B
```

2. Teorema del completamento

Ora consideriamo un teorema *"speculare"* a parte, ovvero a partire da un insieme di *vettori linearmente indipendenti* possiamo avere una *base* aggiungendo degli elementi (o anche nessuno).

#Teorema

Teorema 2.1. (Teorema 2.1. (Teorema del completamento/estensione).).

Sia V un *K-spazio vettoriale*, *finitamente generato*, siano $\{v_1, \ldots, v_p\}$ elementi di V *linearmente indipendenti*.
Allora esiste una base $\mathcal{B}$ di V tale che

$$\{v_1, \ldots, v_p\} \subseteq \mathcal{B}$$

in parole gli elementi $\{v_1, \ldots, v_p\}$ possono essere *"completati"* per formare una base.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *teorema di estensione/completamento* (Teorema 2.1. (Teorema del completamento/estensione))
Nota: anche qui diamo semplicemente un'idea della dimostrazione.
Dato che V è *finitamente generato*, esiste un insieme di vettori di V $\{w_1, \ldots, w_r\}$ che è *sistema di generatori* per V.
Allora se considero $\{v_1, \ldots, v_p, w_1, \ldots, w_r\}$, vedo che anche questo è un

sistema di generatori per V. Infatti aggiungendo qualsiasi vettore $v \in V$ ad un sistema di generatori, questo rimane comunque un sistema di generatori.
A quest'ultimo applico *l'algoritmo dello scarto*, ottenendo una base $\mathcal{B}$ di V, in quanto per come è fatto l'algoritmo *"scarto"* i vettori *linearmente dipendenti*.

Connessione tra base e indipendenza lineare

#Osservazione

Osservazione 2.1. (enti minimali e massimali)

Da questi due teoremi osserviamo una relazione tra il concetto di *base* (Definizione di Base), *indipendenza lineare* (Dipendenza e Indipendenza Lineare) e *sistema di generatori* (Combinazione Lineare).
Da un lato abbiamo una *base* come un *sistema di generatori "minimale"*, ovvero che contiene un numero *minimo* di vettori; oppure possiamo equivalentemente caratterizzare una *base* come un *insieme di vettori linearmente dipendenti "massimale"*, ovvero che può essere *estesa*.

3. Teorema sulla cardinalità delle basi

Ora enunciamo un teorema importante che ci permetterà di definire la *dimensione* (Definizione 1 (Definizione 1.1. (dimensione di un spazio vettoriale))) di un spazio vettoriale.

Lemma di Steinitz

#Lemma

Lemma (Lemma 3.1. (di Steinitz).).

Sia V un *K-spazio vettoriale*, *finitamente generato*, sia $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una *base* di V.
Allora $\forall k > n$ e per ogni scelta di vettori $\{w_1, \ldots, w_k\} \subseteq V$ vale che $\{w_1, \ldots, w_k\}$ sono *linearmente dipendenti*.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *lemma di Steinitz* (Lemma 1 (Lemma 3.1. (di Steinitz).))
Per ipotesi vale che gli elementi $w_1, \ldots, w_k$ sono elementi di V (dunque esprimibili come combinazione lineari della base), ovvero:

$$\begin{cases} w_1 = c_{11}v_1 + \ldots + c_{n1}v_n \\ \vdots \\ w_k = c_{1k}v_1 + \ldots + c_{nk}v_n \end{cases}$$

Ora consideriamo le *coordinate* di ogni vettore w_i esprimibile come

$$\begin{pmatrix} c_{1i} \\ \vdots \\ c_{ni} \end{pmatrix}$$

Adesso consideriamo la *combinazione lineare* delle coordinate di w_i, ovvero

$$a_1 \begin{pmatrix} c_{11} \\ \vdots \\ c_{n1} \end{pmatrix} + \ldots + a_k \begin{pmatrix} c_{1k} \\ \vdots \\ c_{nk} \end{pmatrix}$$

Ora consideriamo il *sistema lineare omogeneo* del tipo

$$\begin{pmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \ldots & c_{nk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

di cui possiamo dimostrare che è *compatibile* con una *una soluzione* non (tutta) nulla. ■

#Osservazione

Osservazione 3.1. (giustificazione dell'ultimo passaggio)

Osserviamo che la matrice dei *coefficienti*

$$\begin{pmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \ldots & c_{nk} \end{pmatrix}$$

per ipotesi ha $k > n$, ovvero è più *"lunga"* orizzontalmente. Quindi per *"accuratezza"* la scriviamo come

$$\begin{pmatrix} c_{11} & \ldots & \ldots & c_{1k} \\ \vdots & & & \vdots \\ c_{n1} & \ldots & \ldots & c_{nk} \end{pmatrix}$$

quindi gradinizzandola con Gauß (Algoritmo di Gauß) abbiamo dei *"gradini"* più lunghi di un elemento. Allora ho più *"parametri liberi"* non-nulli, determinando così *soluzioni non nulle*.

Teorema principale

#Teorema

Teorema (Teorema 3.1. (sulla cardinalità delle basi)).

Sia V un *K-spazio vettoriale*, *finitamente generato*, siano $\{v_1, \dots, v_n\}$ e $\{w_1, \dots, w_m\}$ due *basi* di V.
Allora $n = m$; ovvero le due basi hanno lo stesso *numero di elementi* (alt. *"cardinalità"*).

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *teorema 3.1.* (Teorema 2 (Teorema 3.1. (sulla cardinalità delle basi)))
Per il *lemma di Steinitz* (Lemma 1 (Lemma 3.1. (di Steinitz).)), abbiamo che questi due insiemi di vettori per essere *basi* (ovvero *linearmente indipendenti* e *sistemi di generatori*), deve valere

$$m \leq n \wedge n \leq m \implies m = n$$

C3. Dimensione di un spazio vettoriale

Dimensione

Definizione di dimensione, esempi, osservazioni.

---

1. Definizione di Dimensione

#Definizione

Definizione (Definizione 1.1. (dimensione di un spazio vettoriale)).

Sia V un *K-spazio vettoriale*, *finitamente generato*; per definire la *dimensione* di V abbiamo due opzioni.
Se $V = \{0\}$, dove 0 rappresenta il *vettore nullo* allora definiamo la

dimensione di V come il numero $0 \in \mathbb{N}$.
Altrimenti la definiamo come *il numero di elementi di una sua qualsiasi base*, ovvero la cardinalità della sua base $\mathcal{B}$.
Inoltre la denotiamo con

$$\dim_K V \text{ oppure } \dim V \text{ se chiaro}$$

#Osservazione

Osservazione 1.1. (la definizione è ben posta)

Per il *teorema sulla cardinalità delle basi* (Teorema 2 (Teorema 3.1. (sulla cardinalità delle basi))), questa definizione è ben posta.

2. Esempi vari

#Esempio

Esempio 2.1. (esempi misti)

Consideriamo le *dimensioni* dei seguenti spazi vettoriali:

$$\begin{aligned}
&\text{i. } \dim \mathbb{R}^2 = 2 \\
&\text{ii. } \dim_K K^2 = 2 \\
&\text{iii. } \dim_K K^n = n \\
&\text{iv. } \dim_K M_{m,n}(K) = m \cdot n
\end{aligned}$$

#Esempio

Esempio 2.2. (numeri complessi)

Nota: questo esempio è tratto dalla dispensa e l'ho riproposta in quanto la si ritiene interessante
Ora consideriamo l'insieme dei numeri complessi $\mathbb{C}$ (Introduzione ai Numeri Complessi), che sappiamo essere un *campo*.
Se lo consideriamo come il spazio vettoriale su *se stesso*, allora questa ovviamente ha

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1 \impliedby \mathcal{B} = \{(1,1)\}$$

Tuttavia, possiamo considerare l'$\mathbb{R}$ spazio vettoriale $\mathbb{C}$, dando a $\mathbb{C}$ un operazione di *scalamento* su $\mathbb{R}$, secondo delle osservazioni (Operazioni sui Numeri Complessi > ^d57f49), e un operazione di *somma componente per componente*: allora in questo caso si ha

$$\mathcal{B} = \{0, i\} \implies \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$$

Questo esempio è importante per ricordarci che la nozione di $\dim$ non dipende *solo* dal spazio vettoriale in sé, ma anche la *"base d'appoggio"* della base stessa.

3. Dimensione di un sottospazio

#Osservazione

Osservazione 3.1. (osservazione sui sottospazi vettoriali)

Notiamo che il concetto di *dimensione* $\dim$ di un spazio vettoriale V si applica anche ai suoi *sottospazi vettoriali* (Definizione 1 (Definizione 1.1. (sottospazio vettoriale))) $U \subseteq V$.

#Proposizione

Proposizione 3.1. (dimensione di un sottospazio vettoriale)

Sia V un *K-spazio vettoriale*, *finitamente generato*; sia $W \subseteq V$ un *sottospazio vettoriale*. Allora valgono le seguenti:

$$\begin{aligned} &1. \dim W \leq \dim V \\ &2. \dim W = \dim V \iff W = V \end{aligned}$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE della *proposizione 3.1.* (^265196)
Nota: la dimostrazione è stata lasciata per esercizio, quindi non è detto che sia corretta.
La dimostrazione segue dal *teorema di completamento della base* (Teorema 2.1. (Teorema del completamento/estensione)); supponiamo la base di W $\mathcal{B}_W = \{w_1, \dots, w_k\}$.
Allora sapendo che $W \subseteq V$ deduciamo che $\mathcal{B}_W \subseteq V$ (ovvero tutti gli *elementi della base di* W sono *elementi di* V); poiché questi sono anche *linearmente indipendenti*, per il *teorema di completamento della base* abbiamo

$\mathcal{B}_V = \mathcal{B}_W \cup \{\dots\}$, dove l'insieme a destra rappresenta gli elementi necessari per poter *"completare"* la base.
Pertanto gli elementi dell'insieme che sta a sinistra sarà sempre *maggiore* o uguale agli elementi dell'insieme a destra, in quanto a questo *"aggiungo o qualcosa o nulla"*. ■
Supponendo che non ho nessun elemento da *aggiungere* per completare la base, avrei $\mathcal{B}_V = \mathcal{B}_W$.
Quindi le basi sono le *stesse*, che vuol dire che una base di W è anche di V e viceversa: pertanto $W = V$. ■

4. Idea del concetto

#Osservazione

Conclusione.

Con il concetto della *dimensione* per i spazi vettoriali siamo riusciti ad associare ogni *K-spazio vettoriale* finitamente generato ad un numero naturale $\mathbb{N}$; infatti è possibile pensare la *dimensione* come una funzione che dato un certo spazio vettoriale ci manda un numero naturale. Infatti

$$\dim : V(K) \longrightarrow \mathbb{N}$$

Dopodiché compiremo una azione analoga con le *matrici* mediante il concetto di Rango.

C4. Rango di una matrice

Rango

Definizione di rango, osservazioni, esempi.

---

1. Definizione di rango

#Osservazione

Osservazione 1.1. (le colonne di una matrice vivono in K^m)

Sia $A \in M_{m,n}(K)$, allora le *colonne* di A sono *tutti* elementi di K^m. Dunque

$$A^{(1)}, \dots, A^{(n)} \in K^n$$

#Definizione

Definizione (Definizione 1.1. (rango)).

Sia $A \in M_{m,n}(K)$; definiamo il *rango* della *matrice* (Definizione 1 (Definizione 1.1. (matrice $m \times n$ a coefficienti in K))) A e lo denotiamo con $\text{rg}(A)$ oppure $\text{rk}(A)$ (*la seconda è la dicitura internazionale*) come la *dimensione* (Definizione 1 (Definizione 1.1. (dimensione di un spazio vettoriale))) dello *span* (Lemma 3 (Lemma 2.1. (lo span è sempre un sottospazio vettoriale))) dello *sottospazio* generato dalle *colonne* di A:

$$\text{rg}(A) := \dim(\text{span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}))$$

2. Osservazioni sul rango

#Osservazione

Osservazione 2.1. (il rango è limitato da due numeri)

Se $A \in M_{m,n}(K)$ allora

- $\text{rg}(A) \leq m$; infatti

$$A^{(1)}, \dots, A^{(n)} \in K^m \implies \text{span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}) \subseteq K^m$$

  dunque per la *proposizione 3.1.* sulla dimensione (Dimensione > ^265196)

$$\dim(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}) \leq \dim(K^m) = m$$

- $\text{rg}(A) \leq n$; infatti abbiamo n colonne, dunque $\text{span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)})$ ha n generatori; pertanto una *base* di $\text{span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)})$ ha al più n generatori (che viene verificato quando *tutti* i vettori colonna solo linearmente indipendenti); pertanto

$$\text{span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}) \leq K^n = n$$

Per concludere, traiamo che

$$A \in M_{m,n}(K) \implies \operatorname{rg} A \leq \min\{m,n\}$$

#Osservazione

Osservazione 2.2.

Noteremo che questa definizione *non* cambierebbe, se invece di considerare le *colonne* considerassimo le *righe*.

3. Esempio

#Esempio

Esempio 3.1. (matrice 2×3)

Consideriamo la matrice

$$A \in M_{2,3}(K) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Dalla definizione di *rango* e dall'*osservazione 1.2.* sappiamo che

$$\operatorname{rg}(A) = \dim(\operatorname{span}((2,1),(1,0),(3,-1))) \leq \min\{2,3\} = 2$$

Dato che tutte le *colonne* sono linearmente indipendenti.
Invece se due colonne fossero invece *linearmente dipendenti*, quindi *proporzionali* tra di loro (in quanto una di queste sono ottenibili mediante lo scalamento dell'altro), allora avremmo

$$\operatorname{rg}(A) = 1$$

#Esempio

Esempio 3.2. (matrice identità $\mathbb{1}_n$)

Sia $\mathbb{1}_n$ la *matrice identità* n x n (Definizione 8 (Definizione 2.5. (matrice identità di ordine n))), abbiamo

$$\text{rg}(\mathbb{1}_n) = \dim(\text{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}), \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}) = \dim(K^n) = n$$

4. Teoremi

Per dei teoremi vedere questa pagina: Teoremi su Rango

C5. Teoremi sul rango

Teoremi su Rango

Teoremi e/o proposizioni sul rango: metodo per computare il rango, connessione colonne-righe.

---

1. Metodo per computare il rango

Ora vedremo una proposizione che ci permetterà di calcolare il rango di una matrice usando l'algoritmo di Gauß (Algoritmo di Gauß)

#Proposizione

Proposizione 1.1. (Effetti degli O.E. sul rango)

Sia $A \in M_{m,n}(K)$ e $\tilde{A}$ una matrice ottenuta da A applicando le *operazioni elementari* OE1,2,3,. (Algoritmo di Gauß > ^8a7c5e, Algoritmo di Gauß > ^1f10d6, Definizione 2 (Definizione 2.1. (le operazioni elementari))); allora valgono le seguenti:

$$\begin{aligned} &1.\ \text{rg}(A) = \text{rg}(\tilde{A}) \\ &2.\ \tilde{A} \text{ a scala } \implies \text{rg}(\tilde{A}) = r, \text{ ove } r \text{ è il numero di righe non nulle} \end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE della *proposizione 1.1.*.
Omessa. ■

2. Connessione colonne-righe

#Proposizione

Proposizione 2.1.

Sia $A \in M_{m,n}(K)$; allora vale che

$$\text{rg}(A) = \text{rg}({}^t A)$$

ovvero che il *rango* di una matrice è alla stessa della sua *trasposta* (Operazioni particolari con matrici > ^bf11d7); quindi considerare la *colonna* oppure la *riga* per trovare il rango non cambia.

3. Invertibilità di una matrice

#Osservazione

Osservazione 3.1. (collegamento Rouché-Capelli e Cramer)

Guardando il *corollario del teorema di Rouché-Capelli* (Corollario 2 (Corollario 3.1. (del teorema di Rouché-Capelli))), notiamo che questo ci ricorda il *teorema di Cramer* (Teorema 1 (Teorema 1.1. (di Cramer))): infatti entrambe prescrivono la *compatibilità* di un sistema lineare, sotto certe condizioni. C'è una connessione più profonda tra questi due teoremi? Ora vediamo con la seguente proposizione.

#Proposizione

Proposizione 3.1. (Invertibilità di una matrice)

Sia $A \in M_n(K)$ una *matrice quadrata* (Definizione 4 (Definizione 2.1. (matrice quadrata di ordine n))).
Allora il rango di questa matrice è *massima* (ovvero n) se e solo se questa è *invertibile*:

$$\boxed{\text{rg}(A) = n \iff \exists A^{-1} : A \cdot A^{-1} = \mathbb{1}_n}$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE della *Proposizione 3.1.*.
Questo è un teorema del tipo *"se e solo se"*: dimostriamo dunque due implicazioni.
" $\Longleftarrow$ ": Sia A *invertibile*, allora per il *teorema di Cramer*,

$$\forall b \in K^n, Ax = b \text{ compatibile}$$

Dunque per il *corollario di Rouché-Capelli* (Corollario 2 (Corollario 3.1. (del teorema di Rouché-Capelli))),

$$\forall b \in K^n, Ax = b \text{ compatibile} \implies \operatorname{rg}(A) = n$$

" $\implies$ ": Supponendo $\operatorname{rg}(A) = n$, voglio mostrare che esiste $B \in M_n(K)$ *inversa* di A (ovvero $AB = BA = \mathbb{1}_n$).
Allora è sufficiente *costruire* la matrice B tale che $AB = \mathbb{1}_n$.
Ora, vale che

$$AB = \mathbb{1}_n \iff A \cdot B^{(i)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dove il numero 1 sta in posizione i-esimo.
Chiamo dunque e_i il vettore-colonna

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = (K^n)_j, \begin{cases} 0 \text{ se } j \neq i \\ 1 \text{ se } j = 1 \end{cases}$$

Allora $AB = \mathbb{1}_n$ se e solo se *tutti i sistemi lineari*

$$A \cdot B^{(i)} = e_i$$

sono *compatibili* per $i \in \{1, \dots, n\}$.
Dato che $\operatorname{rg}(A) = n$, sappiamo che *tutti* questi sistemi lineari sono compatibili e dunque le loro *soluzioni* determineranno le colonne della matrice B. ■

D. CONSEGUENZE TEORICHE

D1. Teorema di dimensione di soluzione dei sistemi lineari

Teorema di dimensione delle soluzioni di sistemi lineari

Teorema di dimensione delle soluzioni di sistemi lineari: enunciato e dimostrazione

---

1. Enunciato del teorema

#Teorema

Teorema (Teorema 1.1. (teorema di dimensione delle soluzioni di sistemi lineari)).

Sia $A \in M_{m,n}(K)$;
sia W l'insieme delle *soluzioni* del *sistema lineare omogeneo associato ad* A (Definizione 5 (Definizione 1.4. (sistema omogeneo))) con $A = A$, $s \in K^n$, ovvero

$$W = \{s \in K^n : A \cdot s = 0\}$$

Allora

$$\boxed{\dim W = n - \operatorname{rg}(A)}$$

2. Dimostrazione

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE (*Teorema 1.1.*)
Questo teorema segue *direttamente* dal *teorema di struttura della dimensione delle applicazioni lineari* (Teorema 1 (Teorema 1.1. (di dimensione per le applicazioni lineari)))

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *corollario 1.1.* (Corollario 1 (Corollario 1.1. (teorema di dimensione delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo)))
Visto che $W = \ker L_A$, allora per il *teorema di dimensione* (Teorema 1

(Teorema 1.1. (di dimensione per le applicazioni lineari))) sappiamo che

$$\begin{aligned} & \dim K^n = \dim \ker L_A + \dim \operatorname{im} L_A \\ & \implies n = \dim W + \operatorname{rg} L_A \\ \operatorname{rg} L_A = \operatorname{rg} A & \implies \boxed{\dim W = n - \operatorname{rg} A} \end{aligned}$$

D2. Teorema di Rouché-Capelli

Teorema di Rouché-Capelli

Teorema Rouché-Capelli: enunciato, dimostrazione e corollario. Esempio di applicazione

---

1. Enunciato

#Teorema

Teorema (Teorema 1.1. (di Rouché-Capelli)).

Sia $A \in M_{m,n}(K)$ una *matrice*, sia $b \in K^m$ un *"vettore-colonna"*.
Allora il *sistema lineare* composto da

$$A \cdot x = b$$

è *compatibile* se e solo se vale che il rango di A è uguale a quella della matrice completa $(A|b)$ (Definizione 1 (Definizione 1.1. (matrice completa di un sistema lineare)));

$$\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A|b)$$

In tal caso la *generica soluzione* della soluzione dipende da $n - \operatorname{rg}(A)$ parametri liberi.

2. Dimostrazione

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE (*Teorema 1.1.*)
La dimostrazione si articolerà in due parti principali: nella prima dimostriamo l'equivalenza *"se e solo se"*, nella seconda dimostriamo che la *generica*

soluzione dipende da $n - \text{rg}(A)$.
Dunque dimostriamo l'equivalenza

$$\boxed{Ax = b \text{ compatibile} \iff \text{rg}(A) = \text{rg}(A|b)}$$

" $\implies$ ": Suppongo che $Ax = b$ sia *compatibile*; allora esiste una soluzione $s \in K^n$ tale che $As = b$. Notiamo che possiamo *"esplicitare la scrittura"* applicando la definizione della *moltiplicazione righe per colonne* (Operazioni particolari con matrici > ^eecbc9); allora questo equivale a dire

$$s_1 A^{(1)} + \ldots + s_n A^{(n)} = b$$

il che significa b è *combinazione lineare* dei *vettori colonna* della matrice A.
Dunque

$$b \in \text{span}(A^{(1)}, \ldots, A^{(n)})$$

e ciò implica il seguente

$$\text{span}(A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}) = \text{span}(A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}, b)$$

(la dimostrazione è lasciata da svolgere per esercizio)
Allora

$$\dim(\text{span}(A^{(1)}, \ldots, A^{(n)})) = \dim(\text{span}(A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}, b))$$

che per definizione è proprio

$$\boxed{\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b)}$$

Ora dimostriamo il viceversa.
" $\impliedby$ ": Supponiamo che valga $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b)$.
Allora per definizione del rango (Definizione 1 (Definizione 1.1. (rango))) ricaviamo che

$$\dim(\text{span}(A^{(1)}, \ldots, A^{(n)})) = \dim(\text{span}(A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}, b))$$

Il fatto che le *dimensioni* (Definizione 1 (Definizione 1.1. (dimensione di un spazio vettoriale))) di queste sono uguali implica che i sottospazi stessi sono uguali (Dimensione > ^265196); allora

$$\text{span}(A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}) = \text{span}(A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}, b)$$

Pertanto

$$b \in \operatorname{span}(A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}, b) \implies b \in \operatorname{span}(A^{(1)}, \ldots, A^{(n)})$$

Ma precedentemente abbiamo osservato che quest'ultima equivale a dire che il sistema

$$Ax = b$$

è *compatibile*.

⚠ Passaggio non banale

Il passaggio meno scontato di questa dimostrazione è quella di esplicitare la scrittura, applicando la nozione di prodotto righe per colonne.
Inoltre un altro passaggio non banale è quello di applicare la proposizione per cui se due vettori sono linearmente dipendenti, allora il span di entrambi è uguale a span di una dei vettori.

$$a \in \operatorname{span} b \implies \operatorname{span} b = \operatorname{span}(a, b)$$

Ora mostriamo la *seconda parte* del teorema: ovvero che se $Ax = b$ è compatibile, allora la sua generica soluzione dipende da $n - \operatorname{rg}(A)$ *parametri liberi*.
Per farlo useremo il *teorema di struttura delle soluzioni di sistemi lineari* (Definizione 4 (Definizione 1.1. (sistema lineare omogeneo associato))) e il *teorema di dimensione per le soluzioni di un sistema lineare omogeneo* (Teorema 1 (Teorema 1.1. (teorema di dimensione delle soluzioni di sistemi lineari))).
Il primo ci dice che la generica soluzione s è della forma

$$s = \tilde{s} + s_0$$

dove $\tilde{s}$ è una soluzione fissata di $Ax = b$, s_0 invece una soluzione per il *sistema lineare omogeneo associato* $Ax = 0$.
Il secondo teorema ci dice che il sottospazio vettoriale W delle soluzioni del *sistema lineare omogeneo associato* ha la dimensione $n - \operatorname{rg}(A)$.
Allora esiste una base $\mathcal{B}_W$ di W formata da $k = n - \operatorname{rg}(A)$ elementi;

$$\mathcal{B}_W = \{w_1, \ldots, w_k\}$$

e ogni $s_i \in W$ è *combinazione lineare* (unica) di $\mathcal{B}_W$.
Allora

$$s_0 = t_1 w_1 + \ldots + t_k w_k, \forall t_i \in K$$

In definitiva la generica soluzione s di $Ax = b$ è della forma

$$s = \tilde{s} + t_1 w_1 + \ldots + t_k w_k \blacksquare$$

3. Corollario

Dalla dimostrazione di questo teorema segue il seguente corollario.

#Corollario

Corollario (Corollario 3.1. (del teorema di Rouché-Capelli)).

Sia $A \in M_{m,n}(K)$.
Allora $\operatorname{rg}(A) = n$ (ovvero il rango è il *massimo* possibile) se e solo se per ogni $b \in K^n$ il sistema lineare $Ax = b$ è *compatibile*.

$$\boxed{\operatorname{rg}(A) = n \iff \forall b \in K^n, \exists s \in K^m : As = b}$$

#Dimostrazione
DIMOSTRAZIONE (*Corollario 3.1.*)
Nella dimostrazione del *teorema 1.1.* (^fe5f64) abbiamo visto che

$$Ax = b \text{ compatibile} \iff b \in \operatorname{span}(A^{(1)}, \ldots, A^{(n)})$$

Nella nostra situazione abbiamo che $\operatorname{span}(A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}) \subseteq K^n$ e $\dim K^n = n$; pertanto

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg}(A) &\iff \dim(\operatorname{span}(A^{(1)}, \ldots, A^{(n)})) = n = \dim K^n \\
&\iff \operatorname{span}(A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}) = K^n \\
&\iff \forall b \in K^n, b \in \operatorname{span}(A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}) \\
&\iff \forall b \in K^n, Ax = b \text{ è compatibile}
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

4. Esempio

Vediamo un esempio che fa uso di questo teorema.

Esempio 4.1.

Considero il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ x_2 - x_4 = 2 \end{cases}$$

Lo *"traduciamo"* in termini di matrici e vettori colonna:

$$Ax = b$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}; x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}; b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Calcolando $\operatorname{rg}(A)$ e $\operatorname{rg}(\mathrm{A}|\mathrm{b})$, ci viene fuori

$$\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A|b)$$

dato che sono entrambi a scala e non hanno righe nulle.
Dunque per il *teorema di Rouché-Capelli* il sistema lineare $Ax = b$ ammette soluzione/i; inoltre la generica soluzione dipende da $4 - 2 = 2$ elementi.
Si lascia al lettore di completare l'esempio determinando la *generica soluzione* per esercizio.