Funzioni - Sommario

Tutto sulle funzioni (in generale, non sullo specifico delle funzioni di variabile reale).

A. Funzioni

Funzioni

> *Funzioni - Definizione base, esempi, definizione di immagine, funzione suriettiva, iniettiva; funzione composta; l'immagine di un pezzo di dominio; funzione inversa, teorema sulle funzioni inverse.*

DEF 1. Funzione

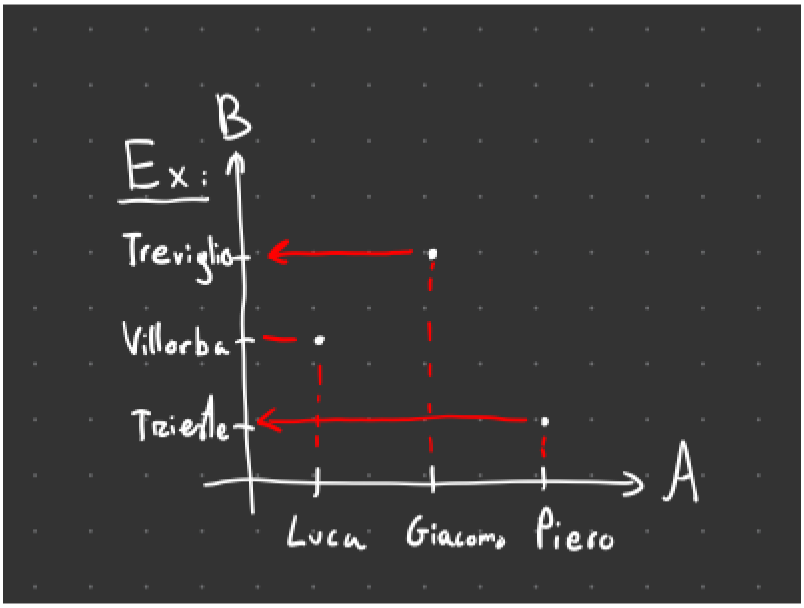
Siano,

- A, B due insiemi
- f una *"legge"*, ovvero una specie di predicato, oppure una relazione speciale che ad ogni valore di A associa *uno e uno solo* valore di B;
  - Cioè se $x \in A$, allora $\exists! y \in B$ (si legge esiste solo un valore di y in B) è associato a x ($f(x) = y$)
  DEF 1. La terna (A, B, f) viene definita come **funzione**.
  SUBDEF 1.1. L'insieme A si dice il **dominio** della *funzione*,
  SUBDEF 1.2. L'insieme B si dice il **codominio** della *funzione*,
  SUBDEF 1.3. La *"legge"* f è una **regola** che ad ogni elemento x del *dominio* A associa uno e uno solo elemento y del *codominio* B.

DEFINIZIONE ESPLICITA.
Con la scrittura compatta la terna può essere definita *esplicitamente* anche mediante la seguente notazione.

$$f : A \mapsto B$$

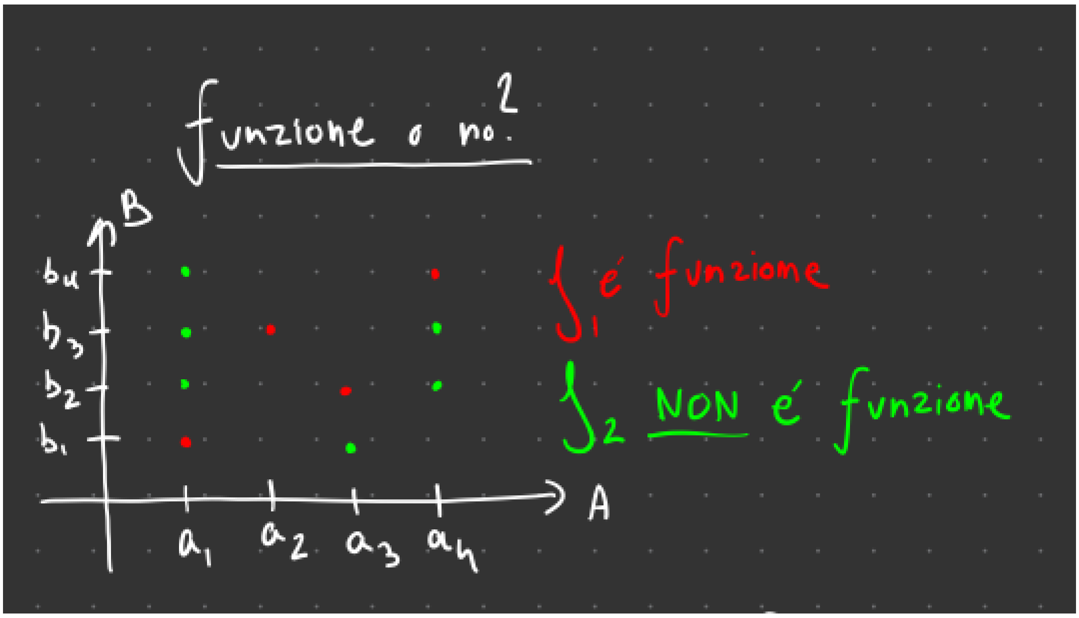
ESEMPIO 1.1.
Siano $A = \{\text{Persone in quest'aula}\}$, $B = \{\text{Comuni italiani}\}$ e $f : x \mapsto \text{comuni di residenza}$; allora si rappresenta il grafico della funzione (A, B, f) nel seguente modo:



DEF 1.1.
In questo corso si studieranno le cosiddette *funzioni di reale variabile*, ovvero le funzioni $f : A \mapsto B$, con $A, B \subseteq \mathbb{R}$.

OSS 1.1 Secondo questa definizione di *funzione*, le sue proprietà non cambiano solamente per la legge f, ma anche per gli *insiemi* A, B.

OSS 1.2. Si osserva il seguente grafico:



Si nota che la parte *rossa* è funzione, invece la parte *verde* non lo è, in quanto ci sono più elementi di B associati ad un elemento di A; quindi si parte da un valore a_n e tutti devono avere un solo corrispondente b_n.

DEF 2. Valore immagine

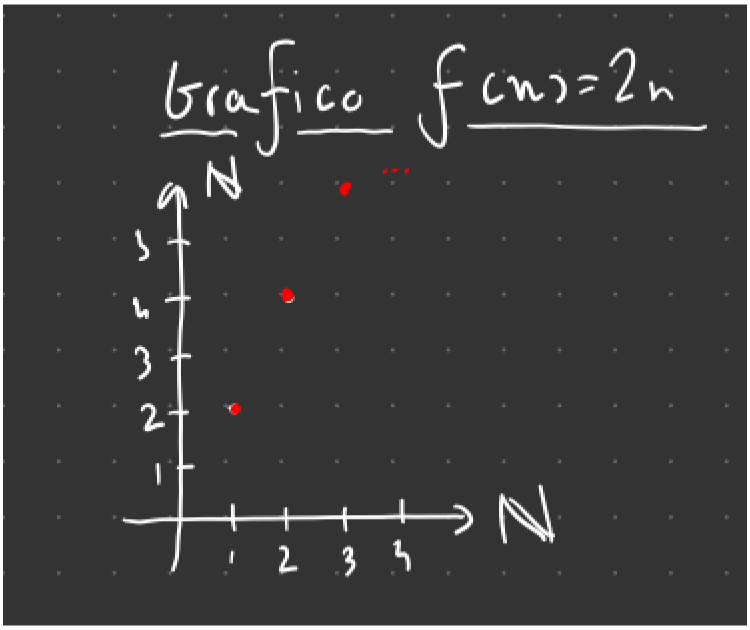
Sia $f : A \mapsto B$ una funzione.
Se $x \in A$, il valore $f(x) \in B$ viene definita come il **valore immagine di** x, una specie di proiezione.

DEF 2.1. L'insieme immagine

Riprendendo i presupposti di prima, si definisce l'insieme di tutti i *valori immagine* come **l'insieme immagine** e lo si indica con

$$f(A)$$

ESEMPIO 2.1.1. Siano $A = \mathbb{N}, B = \mathbb{N}$, $f(n) = 2n$. $f(\mathbb{N}) = \{0, 2, 4, \ldots\} = \mathbb{P}$ (l'insieme dei numeri pari);
OSS 2.1.1.1. Si nota che $f(A) \subseteq B$.
Ecco il grafico della funzione f;



DEF 3. Funziona suriettiva e iniettiva

DEF 3.1. Funzione suriettiva (o surgettiva)

Se

$$f(A) = B$$

Allora la funzione f si dice **suriettiva** (oppure come lo chiamano i pisani, **surgettiva**).

ESEMPIO 3.1. La funzione $f(n) = 2n$ (tratto dall'**ESEMPIO 2.1.1.**) *non* è *surgettiva* se si definisce $A = \mathbb{N}$; invece lo è se si definisce $A = \mathbb{P}$.

DEF 3.2. Funzione iniettiva (o ingettiva)

Siano

$$f : A \mapsto B; x_1, x_2 \in A$$

Supponendo che

$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq x_2$$

Allora si dice che la funzione f è **iniettiva** (oppure in pisano **ingettiva**).

ESEMPIO 4.1. Siano

$$\begin{gathered} A = [0, \infty) \\ B = [0, \infty) \\ f : x \mapsto x^2 \end{gathered}$$

(dove la notazione $[0, \infty)$ indica tutti i numeri $\forall x \in \mathbb{R} : x \geq 0$). La funzione $f(x)$ è *suriettiva*, in quanto $\forall y \geq 0, \exists x \geq 0 : x^2 = y$. Inoltre è anche *iniettiva*.

DIM. Si dimostra che f è iniettiva; se $0 \leq x_1 < x_2$, (quindi $x_1 \neq x_2$) allora moltiplicando da ambo le parti per x_1 e per x_2, si ottengono:

$$\begin{gathered} \text{I. } 0 \leq x_1 < x_2 \\ x_1^2 < x_1 x_2 \\ \text{II. } 0 \leq x_1 < x_2 \\ x_1 x_2 < x_2^2 \\ \text{Pertanto} \\ x_1^2 < x_2^2 \iff f(x_1) < f(x_2) \implies f(x_1) \neq f(x_2) \blacksquare \end{gathered}$$

ESEMPIO 4.2. Riprendendo la medesima funzione $f : x \mapsto x^2$ dall'**ESEMPIO 4.1.**, però cambiando gli insiemi $A, B = \mathbb{R}$, la funzione f non è più *né suriettiva né iniettiva*;

DIM. Si dimostra che non è suriettiva prendendo un valore $y = f(x) = -1$; si dimostra che $\nexists x : x^2 = -1$ (guardando il grafico), pertanto $-1 \notin f(\mathbb{R})$.

Dopodiché si dimostra che non è neanche iniettiva tramite un *controesempio*; prendiamo $x_1 = -1, x_2 = 1$ (quindi $x_1 \neq x_2$) e i *valori immagini* di x_1, x_2 sono $f(-1) = -1^2 = 1$, $f(1) = 1^2 = 1$, pertanto $f(-1) = f(1)$. ■

DEF 3.3. Funzione biiettiva

Se una funzione $f : A \mapsto B$ è sia *iniettiva* e sia *suriettiva*, allora si dice che f è **biiettiva**

DEF 4. Funzione composta

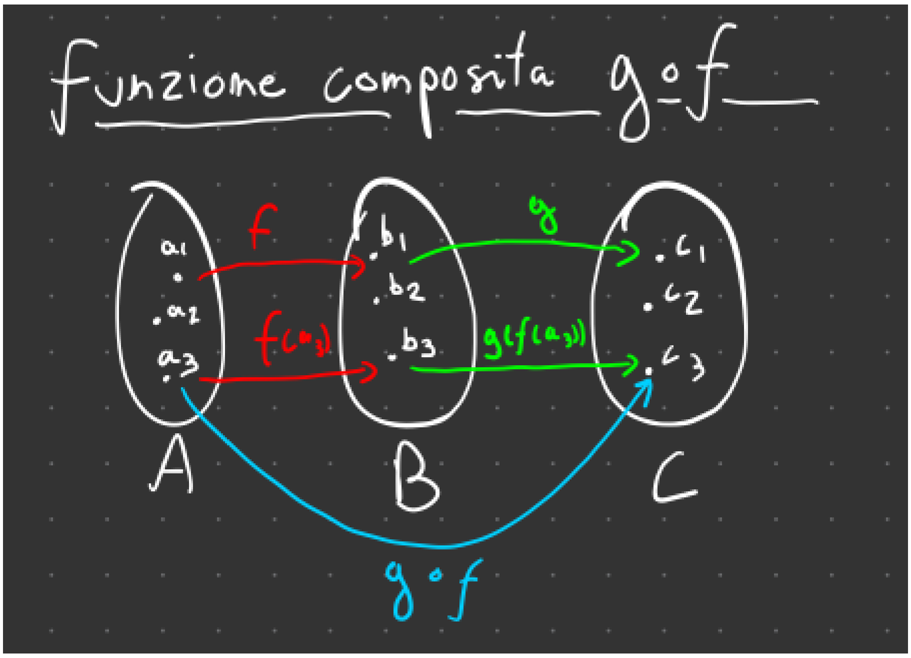
Siano

$$\begin{gathered} f : A \mapsto B \\ g : B \mapsto C \end{gathered}$$

Si definisce $g \circ f$ la **funzione composita** "g *dopo* f".

$$g \circ f : A \mapsto C$$
$$x \mapsto g(f(x))$$

Si illustra la **funzione composita** tramite il seguente diagramma:



ESEMPIO 5.1. Siano

$$f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$$
$$f : x \mapsto x^2, \ g : y \mapsto y + 2$$

Allora

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 2$$
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 2) = (x + 2)^2$$

OSS 5.1.1. Ovviamente da questo esempio si nota che *non è sempre vero* che $f \circ g = g \circ f$.

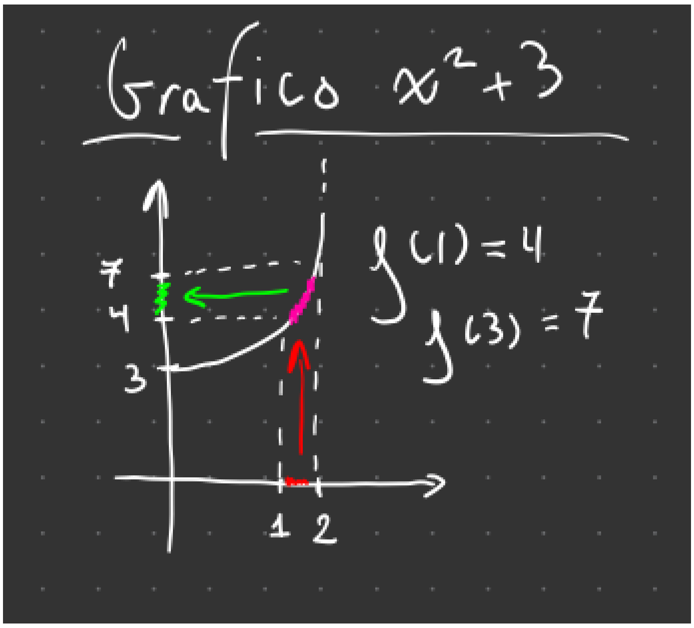
DEF 5. L'immagine di un pezzo del dominio

Sia $f : A \mapsto B$, $A' \subseteq A$; allora si definisce

$$f(A') = \{f(x) : x \in A'\}$$

come **l'immagine di un pezzo del dominio A.**

ESEMPIO 6.1. Si rappresenta il grafico della funzione $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $f : x \mapsto x^2 + 3$. Si vuole trovare (e rappresentare) $f([1, 2])$.



Dal grafico si evince chiaramente che $f([1,2]) = [4,7]$.

DEF 6. La funzione inversa

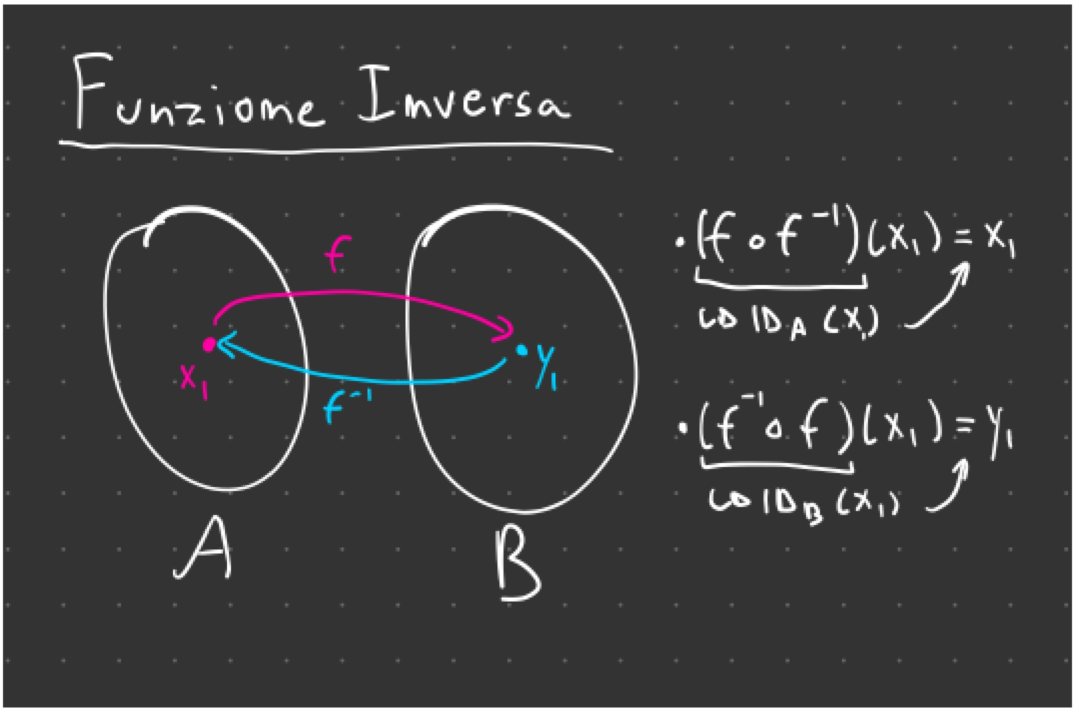
Sia

$$f : A \mapsto B$$

Supponiamo che esista una funzione $g : B \mapsto A$, tale che

$$\begin{aligned} g \circ f = \mathrm{id}_A : A \mapsto A \\ f \circ g = \mathrm{id}_B : B \mapsto B \end{aligned}$$

, ove la funzione d'identità su un insieme A viene rappresentata da $\mathrm{id}_A : x \mapsto x$, si dice che la funzione g è la **funzione inversa di** f.
Si illustra la funzione inversa di f con un diagramma.



TEOREMA 1. L'esistenza della funzione inversa f^-1

Una funzione $f : A \mapsto B$ ha la sua inversa

$$f^-1 : B \mapsto A$$

se e solo se è *biettiva*, ovvero se è entrambi *iniettiva* e *suriettiva*.

DEF 7. Insieme contro immagine

Sia

$$f : A \longrightarrow B$$

ove $\tilde{A} \subseteq A, \tilde{B} \subseteq B$.
Allora definisco **l'insieme contro immagine**

$$f^{\leftarrow}(\tilde{B}) = \{x \in A : f(a) \in \tilde{B}\}$$

ovvero gli elementi di A tali per cui le loro immagini $f(a)$ appartengono all'insieme $\tilde{B}$.

DEF 8. Funzione monotona, crescente o decrescente.

DEF 8. Sia

$$f : A \longrightarrow B$$

e diciamo che questa sia **monotona** se sussistono una delle seguenti condizioni:

$$\begin{aligned}
&\text{i. } \forall x, y \in A; x \leq y \implies f(x) \leq y \\
&\text{ii. } \forall x, y \in A; x < y \implies f(x) < y \\
&\text{iii. } \forall x, y \in A; x \leq y \implies f(x) \geq y \\
&\text{iv. } \forall x, y \in A; x < y \implies f(x) > y
\end{aligned}$$

in particolare,

- se sussiste la *i.*, allora la funzione è **crescente**;
- invece per la *ii.*, la funzione si dice **strettamente crescente**.
- Analoghi i discorsi per *iii, iv.* in cui diciamo che la funzione è **decrescente o strettamente decrescente.

DEF 9. Funzione pari e dispari

PREMESSA. Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$, sia A *simmetrico rispetto all'origine* (ovvero $\forall x \in A, -x \in A$).
Sia la funzione f

$$f : A \longrightarrow B$$

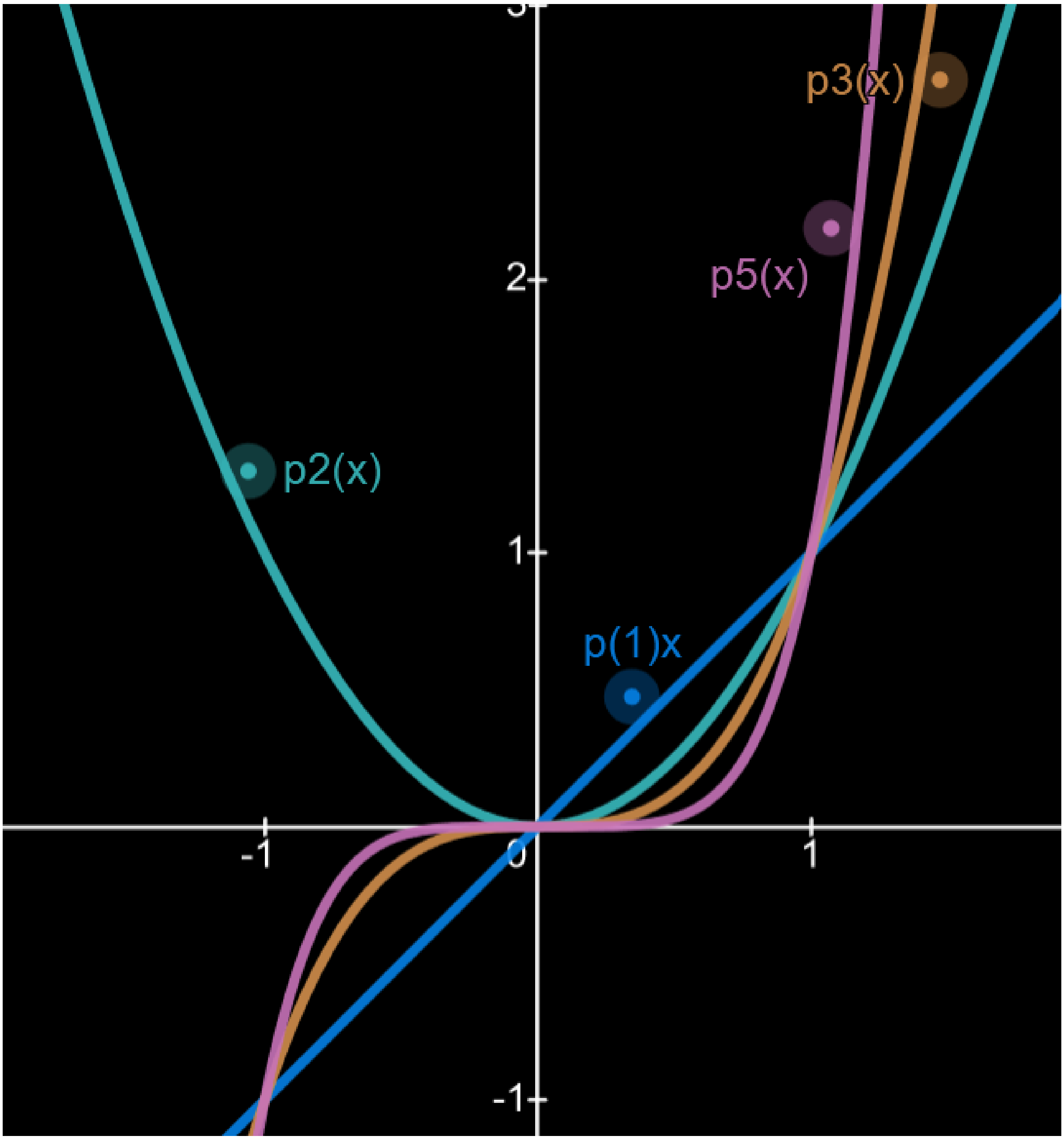
e la chiamo:
DEF 9.1. Una funzione **pari** se accade che

$$f(x) = f(-x)$$

DEF 9.2. Una funzione **dispari** se

$$f(x) = -f(-x)$$

ESEMPIO 9.1. Osserviamo la funzione potenza (Funzioni di potenza, radice e valore assoluto, **DEF 1.1.**) $p_n(x)$.
La definizione appena data da noi ci *"suggerisce"* che per n pari, p_n è una funzione pari; similmente p_n è dispari se n è dispari.



DEF 10. Funzione periodica

DEF 10. Sia $T > 0$, $A \subseteq \mathbb{R}$ tale che

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \forall x \in A; x + Tk \in A$$

Sia ora una funzione f del tipo

$$f : A \longrightarrow \mathbb{R}$$

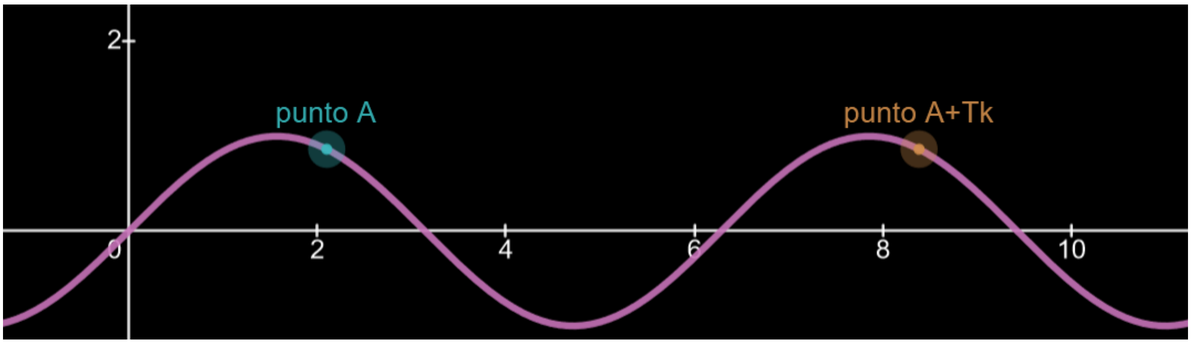
è **periodica** se è vera che

$$\forall x, k; f(x) = f(x + Tk)$$

ESEMPIO 10.1. Le Funzioni trigonometriche sono periodiche: infatti secondo la **PROP 2.3.**, abbiamo $T = 2\pi$. Ovvero

$$\sin(x) = \sin(x + 2\pi k), \forall k \in \mathbb{Z}$$

analogo il discorso per $\cos$.



DEF 11. Massimo e minimo assoluto

#Definizione

DEF 11.1. (*Punto di massimo e minimo assoluto*)
Sia $f: E \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in E$.
Allora definiamo x_0 punto di *massimo assoluto* se abbiamo

$$\forall x \in E, f(x) \leq f(x_0)$$

Alternativamente è punto di *minimo assoluto* se abbiamo

$$\forall x \in E, f(x) \geq f(x_0)$$

#Definizione

DEF 11.2. Se x_0 è *punto di massimo* (minimo) *assoluto*, allora il *valore immagine* (^ee4c92) $f(x_0)$ si dice *massimo* (minimo) *assoluto* della funzione.

ATTENZIONE! Notiamo che se possiamo avere più di uno *punti di massimo* (minimo), ci ricordiamo che il *massimo* (minimo) della funzione è l'*immagine* del punto: dunque in quanto tale può esistere un unico *valore massimo* dell'insieme immagine $f(E)$.

#Esempio

Esempio 11.1. Funzione $\sin$

Sia $f(x) = \sin x$.
Allora sappiamo che i *punti di massimo* di $\sin$ è costituita dalla classe di equivalenza

$$\left[\frac{\pi}{2}\right]_{\equiv 2\pi}$$

Analogamente i *punti di minimo* di $\sin$ sono

$$\left[-\frac{\pi}{2}\right]_{\equiv 2\pi}$$

Tuttavia il *massimo* e *minimo* di $\sin$ sono $-1, 1$; infatti

$$-1 \leq \sin x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

L'illustrazione di questo esempio mediante grafici è lasciato al pubblico per *esercizio*.

#Esempio

Esempio 11.2. Funzione con dominio ristretto

Guardiamo alla funzione $x_{|[0,1[}$, ovvero una funzione del tipo

$$f : [0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$$

Notiamo che f *non* ha *massimo*, perché $f([0,1[) = [0,1[$ dunque $f(E)$ non ha $\max$ (anche se resta che esiste $\sup$).
Invece f ha minimo con $f(0) = 0$.

Anche questo esempio è lasciato al pubblico da illustrare per *esercizio*.

Esercizio 11.3. Funzione $\frac{1}{x}$

Si lascia al lettore verificare se $\frac{1}{x}$ ha *massimo* e/o *minimo* per il suo *dominio*.

B. Esercizi sulle funzioni

Esercizi sulle funzioni

Alcuni esercizi misti sulle funzioni

---

0. Info

Questo appunto contiene degli esercizi misti sull'argomento delle Funzioni. Notare che alcuni esercizi potrebbe richiedere già di essere preparati nell'argomento delle *funzioni di variabile reale*, ovvero Funzioni di potenza, radice e valore assoluto e/o Funzioni trigonometriche.

1. Esercizi misti proposti da D.D.S.

Qui si propone degli esercizi misti sulle funzioni svolte durante le lezioni dell'A.A. 2023-2024.

ESERCIZIO 1.a. Sia

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x^2 + x - 1$$

Si determini:

$$f(0), \{f(n), n \in \ \mathbb{N}\}, f([1,2]), f(3x)$$
$$f \circ f, (f(x))^2, f(x^2), f^{\leftarrow}([2,4])$$

Con il grafico della funzione da disegnare.

ESERCIZIO 1.b. Sia

$$\sin : \mathbb{R} \longrightarrow [-1,1]$$

Determinare $\sin([0, \frac{3}{4}\pi])$.

ESERCIZIO 1.c. Data la funzione $\arcsin$, trovare

$$\arcsin^{\leftarrow}([0, \frac{1}{2}])$$

ESERCIZIO 1.d. Data la funzione

$$f(x) = \frac{|x+1|}{x}$$

Disegnare $f(x)$ e determinare

$$f^{\leftarrow}(]0, +\infty[)$$

2. Svolgimento degli esercizi

Se un giorno avessi la voglia di farlo, mi sistemerei pure lo svolgimento e la soluzione di questi esercizi. Però questo sarebbe da vedere.