# Numeri Naturali - Sommario

*I numeri naturali: definizione, proprietà strutturali, definizioni delle operazioni, relazione d'ordine totale $\geq$, e struttura algebrica $(\mathbb{N}, +, \cdot, \geq)$; gli assiomi di Peano, il principio d'induzione e i suoi usi (con vari esempi); successioni a valori in A e suoi usi.*

---

## Struttura dell'insieme dei numeri naturali

*Definizione intuitiva dell'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$, le proprietà strutturali su di esso, definizioni delle operazioni su esso, proprietà delle operazioni. Relazione d'ordine totale $\geq$ su $\mathbb{N}$, struttura algebrica $(\mathbb{N}, +, \cdot, \geq)$.*

---

# DEF 1. Insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$

**DEF 1.** Si definisce **l'insieme dei numeri naturali** come *l'insieme dei numeri che servono per contare*, aggiungendoci il numero $0$ per motivi di comodità che si vedranno dopo. Viene denotata come

$$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \ldots\}$$

# DEF 2. Proprietà strutturali e operazioni di $\mathbb{N}$

## DEF 2.1. Operazione di somma/addizione

**DEF 2.1.** Si definisce su $\mathbb{N}$ l'operazione di **somma** o **addizione** come la seguente funzione

$$\begin{aligned}+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (n, m) &\mapsto k := n + m\end{aligned}$$

### 2.1. Proprietà dell'operazione $+$

L'operazione *somma*/*addizione* gode delle seguenti tre proprietà.
**PROPRIETA' 2.1.1.** La proprietà **associativa** dice che

$$\forall n, m, k \in \mathbb{N}; n + (m + k) = (n + m) + k$$

**PROPRIETA' 2.1.3.** La proprietà **commutativa** dice invece che

$$\forall m, n \in \mathbb{N}; m + n = n + m$$

**PROPRIETA' 2.1.2.** Con l'operazione $+$ esiste l'elemento neutro $e$ (in questo caso $0$ ), tale che

$$\exists e \in \mathbb{N} : 0 + m = m + 0 = m$$

# DEF 2.2. Operazione di prodotto/moltiplicazione

**DEF 2.2.** Si definisce su $\mathbb{N}$ l'operazione di **prodotto** o **moltiplicazione** come la funzione

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (n, m) &\mapsto k := (n \cdot m) \end{aligned}$$

## 2.2. Proprietà dell'operazione $\cdot$

L'operazione *prodotto*/*moltiplicazione* gode delle seguenti tre proprietà.
**PROPRIETA' 2.1.1.** La proprietà **associativa** dice che

$$\forall n, m, k \in \mathbb{N}; n \cdot (m \cdot k) = (n \cdot m) \cdot k$$

**PROPRIETA' 2.1.3.** La proprietà **commutativa** dice invece che

$$\forall m, n \in \mathbb{N}; m \cdot n = n \cdot m$$

**PROPRIETA' 2.1.2.** Con l'operazione $+$ esiste l'elemento neutro $e$ (in questo caso $1$ ), tale che

$$\exists e \in \mathbb{N} : 1 \cdot m = m \cdot 1 = m$$

## 2.3. Proprietà distributiva

**DEF 2.3.** Esiste una proprietà che lega le *operazioni* $+$ e $\cdot$ tra di loro; ovvero la **proprietà distributiva**, che dice

$$\forall m, n, k \in \mathbb{N}; n \cdot (m + k) = n \cdot m + n \cdot k$$

# DEF 2.4. Relazione d'ordine totale $\geq$

**DEF 2.4.** Su $\mathbb{N}$ è definita una relazione d'ordine totale (**DEF. 4.1.**) che si chiama $\geq$.

**OSS 2.4.1.** Essa è *compatibile* con le altre operazioni, ovvero

$$\begin{aligned} \forall n, m, k \in \mathbb{N}; n \geq m &\implies n + k \geq m + k \\ n \geq m &\implies n \cdot k \geq m \cdot k \end{aligned}$$

# DEF 3. Struttura algebrica $(\mathbb{N}, +, \cdot, \geq)$

**DEF 3.** Avendo appena visto le operazioni $+$, $\cdot$ e la relazione $\geq$ che vengono tutte definite su $\mathbb{N}$, possiamo definire la seguente **struttura algebrica**:

$$(\mathbb{N}, +, \cdot, \geq)$$

Pertanto d'ora in poi diamo per scontato che quando si parla di $\mathbb{N}$ vengono già definite le operazioni collegate ad esso.

## Assiomi di Peano, il principio di induzione

*Assiomi di G. Peano; significato nella matematica, quali sono. Il principio di induzione; le applicazioni del principio di induzione: dimostrazione per induzione e definizioni. Successioni.*

---

# 1. Riflessioni sui fondamenti dei numeri $\mathbb{N}$

**OSS 1.** Mi pongo il seguente *problema*: è possibile trovare degli *assiomi* (ovvero delle prime proprietà che non vengono dimostrate ma sapute a priori) su $\mathbb{N}$ in modo che tutte le *proprietà* (descritte in Struttura dell'insieme dei numeri naturali) siano deducibili da questi?
Quindi sto riflettendo sui *fondamenti* della matematica, in particolare sui numeri *naturali* $\mathbb{N}$, poi per trovare una sistemazione particolarmente conveniente per noi.

# 2. Assiomi di Peano

Gli **assiomi di Peano** soddisfano tutte le seguenti regole enunciate:
(0.) Esiste un insieme $\mathbb{N}$ che denomineremo come l'insieme dei *numeri naturali*

1. Esiste un elemento di questo insieme, che chiamo $0$; $0 \in \mathbb{N}$
2. Esiste una funzione *successivo* $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ che soddisfa le seguenti proprietà:
    1. $\sigma$ è iniettiva, ovvero $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{N}; x_1 \neq x_2 \implies \sigma(x_1) \neq \sigma(x_2)$
    2. $0 \notin \sigma(\mathbb{N})$; ovvero lo $0$ non è successivo di nessun numero in $\mathbb{N}$.
3. (*principio di induzione*) Sia l'insieme $S \subseteq \mathbb{N}$ e si suppone che: $0 \in S$ e $\forall n, n \in S \implies \sigma(n) \in S$; allora $S = \mathbb{N}$.

**OSS 2.1.** Dagli assiomi **2.1.** e **2.2.** appena enunciate è possibile dedurre che l'insieme $\mathbb{N}$ dev'essere necessariamente *infinito*: se il codominio della funzione $\mathbb{N}$ ha più elementi del dominio della funzione $\mathbb{N}$ (visto che $\sigma$ è iniettiva ed il numero $0$ non fa parte dell'immagine), **ma** si tratta del medesimo insieme $\mathbb{N} = A = B$, pertanto $\mathbb{N}$ dev'essere infinita in quanto è l'unico modo per soddisfare le condizioni dedotte.

**DEF 2.1. Il sistema di Peano**
Secondo gli seguenti assiomi appena enunciati, si può definire un **sistema di Peano** come la terna $(\mathbb{N}, 0, \sigma)$.

**OSS 2.2.** Si nota che la scelta dell'*"elemento iniziale"* (ovvero in questo caso $0$) è una scelta arbitraria che può essere cambiata; infatti si può *"spostare"* questo *"punto di partenza"* e si avrebbe comunque un *sistema di Peano* in cui valgono le stesse regole enunciate; infatti si può dimostrare che tutti i sistemi di Peano sono *isomorfi*, cioè che sono sostanzialmente lo stesso con qualche nome dei numeri alterati.
Questa osservazione diventerà molto importante per il *principio di induzione*.

**APPROFONDIMENTO. (tratto da Analisi Matematica Vol. 1, E. Giusti).** Se si vuole essere bibliograficamente accurati, allora bisognerebbe specificare che ci sono altri quattro *assiomi di Peano*, che sono piuttosto assiomi logici e abbastanza intuitivi, ovvero:

$$\begin{aligned}
&1.\ \forall a \in \mathbb{N}, a = a; \\
&2.\ \forall a, b \in \mathbb{N}, a = b \iff b = a \\
&3.\ \forall a, b, c \in \mathbb{N}, (a = b) \wedge (b \wedge c) \implies a = c \\
&4.\ (a = b) \vee b \in \mathbb{N} \implies a \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

# 3. Il principio di induzione

Uno degli *assiomi* più importanti appena enunciati è *l'assioma 4.*, che viene definito anche come il **principio di induzione**, che enuncia il seguente:

$$[(S \subseteq \mathbb{N}) \wedge (0 \in S) \wedge (\forall n \in \mathbb{N}, n \in S \implies (n+1) \in S)] \implies S = \mathbb{N}$$

Ora, riscrivendolo in un modo più comprensibile, questo principio enuncia che:

1. Supponendo che esista un insieme $S \subseteq \mathbb{N}$ (verificando così la prima condizione)
2. Poi supponendo che un numero $0$ appartenga a $S$, quindi il *"punto di partenza"*
3. E infine se è vero che se un qualsiasi elemento $n$ appartiene a $S$, allora il suo successivo $\sigma(n)$ appartiene anch'esso a $S$,
4. Allora $S = \mathbb{N}$.

## 3.1. L'idea fondamentale

Per capire fino a fondo l'idea del *principio d'induzione* si può riflettere sulla funzione *successivo* $\sigma$, ovvero: cos'è?
Se $\sigma(0) = 1$ e $\sigma(n) = n + 1$, allora si può pensare che a partire da $0$ posso raggiungere tutti i numeri in $\mathbb{N}$. Ad esempio,

$$5 = \sigma(4) = \sigma(\sigma(3)) = \sigma(\sigma(\sigma(2))) = \sigma(\sigma(\sigma(\sigma(1)))) = \sigma(\sigma(\sigma(\sigma(\sigma(0)))))$$

Si può utilizzare la seguente analogia: se voglio salire di un piano, devo percorrere un numero di gradini; se posso salire sul primo gradino, che lo chiamo gradino $0$, allora posso salire sul prossimo (analogia con la funzione successiva $\sigma$), poi sul prossimo e sul prossimo, finché raggiungo il prossimo piano.

# 4. Applicazioni del principio di induzione

Il **principio di induzione** può essere utilizzato principalmente per due scopi: o definire *oggetti* o verificare/dimostrare delle *proprietà* (ovvero dei predicati unari); nel primo caso si parla di **definizione per ricorrenza** e invece nel secondo di **dimostrazione per induzione**.

## 4.1. Dimostrazione per induzione

In questa pagina si parlerà principalmente di *dimostrazione per induzione*, corredato da vari esempi.
L'*idea* per la **dimostrazione per induzione** consiste nel seguente:

1. Ho una *proprietà* (ovvero un predicato unario) $\mathcal{P}(n)$ e voglio dimostrare che essa è *verificata* per ogni $n \in \mathbb{N}$;
2. Si crea quindi *l'insieme dei numeri che verificano* $\mathcal{P}(n)$ e la chiamiamo $S$.
3. Ora per dimostrare $\mathcal{P}(n)$ basta verificare le due condizioni:
   1. $0 \in S$, ovvero $\mathcal{P}(0)$ è vera;
   2. $\forall n \in S \implies \sigma(n) \in S$; ovvero se $\mathcal{P}(n)$ è vera, allora $\mathcal{P}(n+1)$. Da notare che si tratta **solo** di dimostrare *l'implicazione materiale*.
   3. Allora $S = \mathbb{N}$, ovvero tutti i valori che rendono $\mathcal{P}(n)$ vera sono tutti i numeri in $\mathbb{N}$.

Si vedono alcuni esempi sulla *dimostrazione* per induzione in Esempi di Induzione

## 4.2. Definizioni per ricorrenza

### DEF. 4.2.1. Successione a valori in $A$.

Sia $A$ un insieme qualunque e $f$ una funzione

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow A; n \mapsto f(n) = a_n$$

Quindi saranno determinati

$$f(0) = a_0, f(1) = a_1, \ldots, f(n) = a_n$$

Questa funzione $f$ si chiama, *tradizionalmente*, una **successione a valori in $A$** (cioè nell'insieme $A$).
Lo rappresentiamo con

$$(a_n)_n : (a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots)$$

## DEF 4.2.2. La sommatoria

Si può definire la *sommatoria*

$$\sum_{j=0}^{n} a_i = a_0 + \ldots + a_n$$

in una maniera rigorosa usando il *principio di induzione* e la definizione di *successione*:
**DEF 4.2.2.** Si pone

$$\sum_{j=0}^{n} a_n = s_n$$

poi, ponendo il caso base

$$s_0 = a_0$$

e in seguito

$$\forall n, s_{n+1} = s_n + a_{n+1}$$

definendo così la sommatoria, in quanto sono partito dall'elemento *base* $a_0$, e potendo generare la sommatoria di $n+1$ a partire da $n$; pertanto la *successione* $(s_n)_n$ viene definita su $\mathbb{N}$ a partire da $0$.

## DEF 4.2.3. Produttoria

Similmente si definisce la *produttoria*

$$\prod_{i=0}^{n} a_i = a_0 \cdot \ldots \cdot a_n$$

come

$$\prod_{i=0}^{n} a_i = p_n$$
$$p_0 = a_o$$
$$\forall n, p_{n+1} = p_n \cdot a_{n+1}$$

**ESEMPIO 4.2.3.1. Fattoriale.** Un caso particolare della *produttoria* è il cosiddetto **fattoriale**; la si definisce come

$$\Pi_{i=0}^{n} i = n!$$

Quindi

$$
\begin{aligned}
&0! = 1 \\
&\forall n; (n+1)! = n!(n+1)
\end{aligned}
$$

## Esempi di Induzione

*Esempi sulle prove per induzione. Articolo creato ad-hoc per la quantità presente degli esempi, rendendo il file originario troppo pesante.*

---

# 1. Esempi di dimostrazione per induzione

## ESEMPIO 1.1. Aneddoto di Gauss.

Si racconta che quando il matematico *C. F. Gauss* frequentava le scuole elementari, il suo professore di matematica aveva dato un esercizio da fare in quanto punizione: ovvero quello di sommare tutti i numeri da $0$ a $100$; quindi tutti i numeri $0+1+2+\ldots+100$.
Alla sorpresa del professore e dei suoi compagni, Gauss riuscì, non solo a risolvere il problema quasi immediatamente consegnando la sua lavagna sulla cattedra, ma anche essere l'unico alunno ad aver dato la risposta corretta: $5050$.
Grazie alla sua intuizione, Gauss riuscì a ingegnare un metodo per calcolare quel numero con una velocità strabiliante: ovvero quella di determinare la somma da $0$ a $100$ come $A$, che è uguale alla somma da $100$ a $1$ (proprietà commutativa); Quindi sommando $A$ con sé stesso ma disposti in una maniera diversa (ovvero la prima con un criterio crescente, la seconda decrescente), ottiene
$2A = 100(101) \iff A = \frac{100(101)}{2}$

Generalizzando da questo aneddoto abbiamo la seguente proprietà:

$$
\mathcal{P}(n) = 0+1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}
$$

Ora vogliamo dimostrarla rigorosamente *per induzione*.
**DIM.**
1. Caso base: verificare $\mathcal{P}(0)$;

$$
\mathcal{P}(0) : 0 = \frac{0(1)}{2} = 0 \text{ OK}
$$

2. Ipotesi induttiva; supponendo che $\forall n, \mathcal{P}(n)$ è vera, allora anche $\mathcal{P}(n+1)$ è vera.

$$
\mathcal{P}(n) : 0+1+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}
$$

Avvolte è utile anche già "*prevedere*" dove vogliamo arrivare a partire da $\mathcal{P}(n)$, ovvero $\mathcal{P}(n+1)$. In questo caso si potrebbe anche utilizzare l'ipotesi induttiva, ovvero

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(n+1): 0+1+\ldots+n+(n+1) &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\ \mathcal{P}(n)+(n+1) &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\ \frac{n(n+1)}{2}+(n+1) &= \ldots \\ (n+1)(\frac{n}{2}+1) &= \ldots \\ (n+1)(\frac{n+2}{2}) &= \ldots \\ \frac{(n+1)(n+2)}{2} &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \text{ OK} \end{aligned}$$

3. Pertanto si verifica che i numeri che rendono $\mathcal{P}(n)$ vera sono tutti i numeri naturali $\mathbb{N}$ a partire da $0$.

## ESEMPIO 1.2. Somma dei quadrati

Provare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale

$$P(n): 0+1+4+\ldots+n^2 = \frac{(n)(n+1)(2n+1)}{6}$$

Anche qui possiamo usare l'induzione, dato che anche qui si tratta di una *proprietà* sui numeri naturali $\mathbb{N}$.

1. Caso base:

$$\begin{aligned} P(0): 0 &\stackrel{?}{=} \frac{0(0+1)(2(0)+1)}{0} \\ 0 &= 0 \text{ OK} \end{aligned}$$

2. Ipotesi induttiva:

$$\begin{aligned} &P(n): 0+1+4+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &P(n+1): 0+1+4+\ldots+n^2+(n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1}{6} \end{aligned}$$

3. Sviluppando $P(n+1)$,

$$\begin{aligned} P(n+1): 0+1+4+\ldots+n^2+(n+1)^2 &= \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1}{6} \\ P(n)+(n+1)^2 &= \ldots \\ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2 &= \ldots \\ (n+1)(\frac{n(2n+1)}{6}+(n+1)) &= \ldots \\ \frac{(n+1)(n)(2n+1)+6(n+1)^2}{6} &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \\ \frac{(n+1)((n)(2n+1)+6n+6)}{6} &= \frac{(n+1)(n^2+7n+6)}{6} \\ (n+1)(2n^2+n+6n+6) &= (n+1)(n^2+n+6n+6) \\ &\text{OK} \blacksquare \end{aligned}$$

## ESEMPIO 1.3. Disuguaglianza di Bernoulli.

Sia $a>-1$, $a \in \mathbb{R}$. Allora $\forall n \in \mathbb{N}$ vale la seguente:

$$(1+a)^n \geq 1+na$$

**DIM.** Sia $P(n): (1+a)^n \geq 1+na$.

1. Verificare $P(0)$;

$$P(0): (1+a)^1 \geq 1 \iff 1 \geq 1 \text{ OK} \blacksquare$$

2. Supponendo che $P(n)$ sia vera, verificare $P(n) \implies P(n+1)$.

$$\begin{aligned} P(n): (1+a)^n &\geq 1+na \\ (1+a)^n(1+a) &\geq (1+na)(1+a) \\ (1+a)^{n+1} &\geq 1+(n+1)a+na^2 \end{aligned}$$

Sapendo che $1+(n+1)a$ è sicuramente maggiore o uguale a $P(n+1)$ ovvero $1+(n+1)a$, in quanto $na^2$ è necessariamente positivo, allora consegue che

$$P(n+1): (1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a$$

è vera, verificando $P(n) \implies P(n+1)$. $\blacksquare$

## ESEMPIO-ESERCIZIO 1.4. Disuguaglianza di Bernoulli incrementata.

**PROVARE CHE VALE LA PROPRIETA'** $P(n) : (1+a)^n \geq 1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2$, **OVE $a > 0$ e $\forall n \geq 1$.

1. Provare $P(1)$;

$$P(0) : 1 + a \geq 1 + a + 0 \text{ OK}$$

2. Supponendo che $P(n)$ sia vera, provare che $P(n) \implies P(n+1)$

$$P(n) : (1+a)^n \geq 1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2$$

ed è utile "prevedere" $P(n+1)$, quindi

$$P(n+1) : (1+a)^{n+1} \geq 1 + (n+1)a + \frac{(n+1)(n)}{2}a^2$$

3. Ora prendiamo $P(n)$ e moltiplichiamo per $(1+a)$ da ambo le parti (che è possibile in quanto la relazione d'ordine $\geq$ è compatibile con $(1+a)$)

$$P(n) : (1+a)^n(1+a) \geq (1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2)(1+a)$$
$$(1+a)^{n+1} \geq (1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2) + (a + na^2 + \frac{n(n+1)}{2}a^3)$$
$$(1+a)^{n+1} \geq 1 + (n+1)a + (\frac{n(n-1)}{2} + n)a^2 + \ldots a^3$$

4. Ora vogliamo dimostrare che il membro destro della disuguaglianza è necessariamente maggiore di $1 + (n+1)a + \frac{(n+1)(n)}{2}a^2$, rendendo per la *proprietà transitiva* $(1+a)^{n+1}$ anch'esso maggiore di $1 + (n+1)a + \frac{(n+1)(n)}{2}a^2$, verificando così l'implicazione.

$$1 + (n+1)a + (\frac{n(n-1)}{2} + n)a^2 + \ldots a^3 \geq 1 + (n+1)a + \frac{(n+1)(n)}{2}a^2$$
$$(\frac{n(n-1) + 2n)}{2})a^2 + \ldots a^3 \geq \frac{(n+1)(n)}{2}a^2$$

Dato che $\ldots a^3$ (parte omessa in quanto non è rilevante, dato che $n$ è sempre un numero positivo) è anch'essa sempre positiva in quanto $a > 0$, ora basta dimostrare che

$$\begin{aligned} n(n-1)+2n &\geq (n+1)(n) \\ n(n-1+2) &\geq (n+1)(n) \\ n(n+1) &\geq n(n+1) \text{ OK } \blacksquare \end{aligned}$$

5. Verificando così $P(n) \implies P(n+1)$, dato che da $P(n)$ si verifica $P(n+1)$.

## ESEMPIO 1.5. Ridotta della serie geometrica.

Sia $a \neq 1$; allora con $\forall n \in \mathbb{N}$ si ha

$$P(n) : a^0 + a^1 + \ldots + a^n = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$$

**DIM.**

1. Dato che $n \in \mathbb{N}$, si può usare l'induzione; allora partiamo verificando $P(0)$;

$$P(0) : a^0 = \frac{a^1 - 1}{a-1} \iff 1 = 1 \text{ OK}$$

2. Ora supponendo $P(n)$, verifichiamo $P(n) \implies P(n+1)$.

$$\begin{aligned} P(n) : a^0 + a^1 + \ldots + a^n &= \frac{a^{n+1}-1}{a-1} \\ a^0 + a^1 + \ldots + a^n + a^{n+1} &= \frac{a^{n+1}-1}{a-1} + a^{n+1} \\ P(n+1) : a^0 + a^1 + \ldots + a^{n+1} &= \frac{a^{n+1} - 1 + a^{n+1}(a-1)}{a-1} \\ \ldots &= \frac{a^{n+1} - 1 + a^{(n+1)+1} - a^{n+1}}{a-1} \\ P(n+1) : \ldots &= \frac{a^{(n+1)+1} - 1}{a-1} \end{aligned}$$

Da qui si vede che $P(n) \implies P(n+1)$ è vera.

## ESEMPIO 1.6.

**PROVARE CHE PER OGNI $n \geq 1$ VALE CHE IL NUMERO $n^3 + 5n$ E' DIVISIBILE PER 6.**

1. Provare $P(1)$;

$$P(1) : \exists k \in \mathbb{Z} \mid 1^3 + 5 = 6k \iff 6 = 6k; k = 1 \text{ OK}$$

2. Provare che, supponendo $P(n)$, allora $P(n+1)$;

$$\begin{aligned} P(n) &: \exists k_1 |\ n^3 + 5n = 6k_1 \\ P(n+1) &: \exists k_2 |\ (n+1)^3 + 5(n+1) = 6k_2 \\ &\quad \ldots |\ n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 5n + 5 = 6k_2 \\ &\quad \ldots |\ (n^3 + 5n) + (3n^2 + 3n + 6) = 6k_2 \\ &\quad \ldots |\ 6k_1 + 3(n^2 + n + 2) = 6k_2 \\ &\quad \ldots |\ 3(n^2 + n + 2) = 6(k_1 - k_2) \\ &\quad \ldots |\ n^2 + n + 2 = 2(k_1 - k_2) \\ &\quad \ldots |\ (n)(n+1) = 2(k_1 - k_2 - 1) \end{aligned}$$

3. Vediamo che il problema si riduce a dimostrare che $(n+1)(n)$ è *pari* (ovvero divisibile per $2$), il che è facile da dimostrare se consideriamo due casi per $(n+1)(n)$:
   1. Se $n$ è pari, ovvero della forma $2m$, allora

      $$(n+1)(n) \iff (2m+1)(2m) \iff 4m^2 + 2m \iff 2(2m^2 + m)$$

      è pari in quanto l'espressione finale è comunque moltiplicata per due.
   2. Se $n$ è dispari, ovvero della forma $2m+1$, allora

      $$(n+1)(n) \iff (2m+2)(2m+1) = 2(m+1)(2m+1)$$

      anche qui è pari per lo stesso ragionamento di prima. ■

## ESEMPIO 1.7.

**PROVARE CHE PER OGNI $n \geq 1$ VALE CHE $n! \geq 2^{n-1}$**

1. Provare $P(1)$;

$$P(1) : 1! \geq 2^0 \iff 1 \geq 1 \text{ OK}$$

2. Supponendo $P(n)$, provare $P(n) \implies P(n+1)$:

$$\begin{aligned} P(n) : n! &\geq 2^{n-1} \\ n!(n+1) &\geq 2^{n-1}(n+1) \\ (n+1)! &\geq 2^{n-1}(n+1) \end{aligned}$$

3. Dato che $n \geq 1$, ne consegue che $n+1 \geq 2$; quindi possiamo scrivere

$$2^{n-1}(n+1) \geq 2(2^{n-1}) = 2^n$$

4. Quindi per la proprietà transitiva della relazione $\geq$, si verifica che

$$P(n+1) : (n+1)! \geq 2^n$$

Verificando così $P(n) \implies P(n+1)\blacksquare$.

## PROBLEMA 1.1.

**PROBLEMA.** *Disegniamo nel piano una retta e notiamo subito che questa retta suddivide il piano in 2 "regioni"; ora disegniamo 2 rette e vediamo che ora abbiamo 4 regioni; ora 3 rette e notiamo che possiamo avere al massimo 7 regioni.*
Se si desidera, si può visualizzare il problema con il grafico sottostante. Ora ci poniamo i seguenti problemi.
[GRAFICO DA FARE]

## TRACCIA 1. (DA COMPLETARE)

Trovare una formula (o funzione, successione) che individui il numero delle regioni per $n$ rette.

**SOLUZIONE 1.** L'idea è la seguente.
Individuiamo una *retta* orizzontale,

Ora, avendo definito la *successione* della funzione delle regioni in $n$ $f_n$, possiamo usare un metodo simile a quello chiamato *"Ansatz"*, usato per risolvere le equazioni differenziali; ovvero congetturando una *soluzione generale*, poi per inserirla nella definizione di $f_n$, allora otteniamo la soluzione specifica $f(n)$.
Congetturiamo che

$$f(n) = an^2 + b^n + c$$

[ Questa parte è molto complicata da fare, quindi lo farò un weekend in chill; tanto in teoria non è proprio 100% del programma, eh ]

## TRACCIA 2.

Provare che le regioni individuate con $n$ rette sono al massimo $\frac{n^2+n}{2} + 1$.

**OSS 1.1.1.** Si nota, a posteriori (o anche dimostrata sopra), che indicando $f_n$ il numero di regioni con $n$ rette, si ha

$$f_{n+1} = f_n + (n+1)$$

dove $f_1 = 2$.

**SOLUZIONE.** Si può dimostrare la formula $f(n) = \frac{n^2+n}{2} + 1$ con il principio di induzione e anche grazie al suggerimento indicato sopra.

1. Provare $f(1)$;

$$f(1) : f_1 = \frac{1+1}{2} + 1 \iff 2 = 2 \text{ OK}$$

2. Supponendo $f(n)$, provare $f(n+1)$;

$$\begin{aligned} f(n) : f_n = \frac{n^2+n}{2} + 1 \\ f_n + (n+1) &= \frac{n^2+n}{2} + 1 + (n+1) \\ f_{n+1} &= \frac{n^2+n+2n+2}{2} + 1 \\ \ldots &= \frac{n^2+n+2n+2}{2} + 1 \\ \ldots &= \frac{n^2+3n+2}{2} + 1 \\ \ldots &= \frac{(n+1)^2+(n+1)}{2} + 1 \end{aligned}$$

3. Quindi da $f(n)$ si ottiene $f(n+1)$, terminando così la dimostrazione. ■