Numeri Complessi - Sommario

Tutto sui numeri complessi $\mathbb{C}$

A. Introduzione

Introduzione ai Numeri Complessi

Introduzione ai numeri complessi: cenni storici, definizione basilare di $\mathbb{C}$ *come* $\mathbb{R}^2$*.*

---

0. Scopo storico

Lo *scopo storico* dei numeri complessi $\mathbb{C}$ è quello di risolvere le equazioni del tipo

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = 0 \\ a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

di cui alcune non ne hanno soluzione; ad esempio si prende

$$x^2 = -1$$

che *non* ha soluzione definita in $\mathbb{R}$, in quanto tutti i numeri moltiplicati per se stessi *due volte* sono sempre positivi.
Quindi vi è una necessità di *"ampliare"* i numeri reali in un modo tale da poter ottenere delle *soluzioni* di queste equazioni.

1. Costruzione a partire da $\mathbb{R}^2$

Pertanto si parte considerando la *l'insieme delle coppie ordinate* (Coppie Ordinate e Prodotto Cartesiano)

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$$

Quindi nel *contesto geometrico* stiamo attualmente considerando dei *vettori liberi con punto di applicazione* 0. (Vettori Liberi)

In Operazioni sui Numeri Complessi definiremo delle operazioni su questo insieme,, che quando li considereremo con $\mathbb{R}^2$ si andrà a formare il campo $\mathbb{C} = (\mathbb{R}^2, +, \cdot)$.

B. Operazioni sui complessi

Operazioni sui Numeri Complessi

Tutte le operazioni possibili sui numeri complessi: somma componente per componente, moltiplicazione, campo $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ *come* $\mathbb{C}$*; alcune proprietà di queste operazioni. Complesso coniugato e modulo di un numero complesso* z*; proprietà di queste operazioni, focus sulla disuguaglianza triangolare.*

---

1. Somma componente per componente

DEF 1. Definisco su $\mathbb{R}^2$ l'operazione di **somma componente per componente**:

$$(a, b) \dagger (a', b') = (a + a', b + b')$$

che da ora in poi lo chiamiamo semplicemente $+$.

PROP 1.1. La *somma componente per componente* gode delle seguenti proprietà:

1. La proprietà associativa;

$$(a + b) + ((a', b') + (a'' + b'')) = ((a, b) + (a', b')) + (a'', b'')$$

2. L'esistenza dell'elemento neutro 0

$$0 : (0, 0);$$

3. L'esistenza dell'elemento opposto $(-a,-b)$;

$$(a,b)+(-a,-b)=(0,0)$$

4. La proprietà commutativa

$$(a,b)+(a',b')=(a',b')+(a,b)$$

OSS 1.1. Allora in questo caso si definisce $(\mathbb{R}^2,+)$ come un *gruppo abeliano*.

2. Moltiplicazione

Ora l'operazione più "peculiare" sarebbe quella di moltiplicazione, in quanto grazie a questa riusciamo a formare il campo dei numeri complessi $\mathbb{C}$.
DEF 2. Sia $\circ$ l'operazione della **moltiplicazione**, che viene definita come

$$\begin{aligned} \circ: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\langle a,b\rangle,\langle a',b'\rangle) &\mapsto (a,b)\circ(a',b') \end{aligned}$$

dove

$$(a,b)\circ(a',b') := (aa'-bb', ab'+ba')$$

e d'ora in poi chiameremo $\circ$ come $\cdot$.

NOTA. Come visto sopra, personalmente (avvolte) userò la notazione $\langle a,b\rangle$ per rappresentare la coppia dei numeri (a,b); lo faccio per evitare confusione con le parentesi. *Fidatevi, (forse) sarà meglio così (?)*.

OSS 2.1. Notiamo che questa definizione di moltiplicazione non è quella che ci si aspetta, di solito; infatti volendo si poteva anche definire la moltiplicazione nel seguente modo:

$$(a,b)\circ(a',b') \overset{?}{:=} (aa',bb')$$

Matematicamente questo avrebbe senso, però si *vorrebbe* che questa moltiplicazione avesse delle *proprietà* che ritroviamo anche in $\mathbb{R}$, in quanto lo scopo di questa costruzione è proprio quella di *"espandere"* la famiglia dei numeri.

Ad esempio, qui non varrebbe la proprietà per cui $(0,0)$ è *l'elemento nullo*. Infatti

$$(1,0) \circ (0,1) = (1 * 0, 0 * 1) = (0,0)$$

Quindi per questo bisognava trovare un'altra definizione.

TRUCCO PERSONALE. Visto che potrebbe essere difficile imparare *questa* definizione di moltiplicazione, possiamo *"anticipare"* un argomento (ovvero Rappresentazione dei Numeri Complessi) rappresentando la coppia $(a,b) = a + ib$ dove $i^2 = -1$. Per *"scoprire"* la nostra definizione facciamo il seguente.

$$\begin{aligned}(a,b) \cdot (a',b') &= (a+ib)(a'+ib') \\ &= aa' + iab' + ia'b - bb' \\ &= (aa' - bb') + i(ab' + a'b) \\ &= (aa' - bb', ab' + a'b)\end{aligned}$$

PROP 2.1. Si può verificare che questa operazione gode delle proprietà, ovvero:

1. La proprietà associativa;

$$\langle a,b \rangle \cdot (\langle a',b' \rangle \cdot \langle a'',b'' \rangle) = (\langle a,b \rangle \cdot \langle a',b' \rangle) \cdot \langle a'',b'' \rangle$$

2. L'esistenza dell'elemento neutro $(1,0)$;

$$\begin{aligned}(a,b) \cdot (1,0) &= \langle (a*1 - b*0), (a*0) + (b*1) \rangle \\ &= \langle a,b \rangle = (a,b)\end{aligned}$$

3. L'esistenza dell'elemento reciproco ad ogni elemento non-zero; Se ad ogni $c = (a,b) \neq (0,0)$ considero

$$c^{-1} = (\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2})$$

Infatti moltiplicandoli ottengo

$$\begin{aligned}c \cdot c^{-1} &= (\frac{a^2}{a^2+b^2} - \frac{-b^2}{a^2+b^2}, \frac{-ab}{a^2+b^2} + \frac{ab}{a^2+b^2}) \\ &= (\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}, 0) = (1,0)\end{aligned}$$

4. La proprietà commutativa:

$$(a, b) \cdot (a', b') = (a', b') \cdot (a, b)$$

5. La proprietà distributiva:

$$\langle a, b\rangle \cdot (\langle a', b'\rangle + \langle a'', b''\rangle) = (a, b) \cdot (a', b') + (a, b) \cdot (a'', b'')$$

DIMOSTRAZIONI.

6. Per verificare che questa operazione è *associativa*, dobbiamo dimostrare che il *membro destro* dell'uguaglianza è uguale al *membro sinistro*. Ovvero

$$\begin{aligned} \text{sx. } & \langle a, b\rangle \cdot (\langle a', b'\rangle \cdot \langle a'', b''\rangle) = \\ & \langle a, b\rangle \cdot (\langle a'a'' - b'b'', a'b'' + a''b'\rangle) = \\ & \langle a(a'a'' - b'b'') - b(a'b'' + a''b'), a(a'b'' + a''b') + b(a'a'' - b'b'' \\ & \langle aa'a'' - ab'b'' - a'bb'' - a''bb', aa'b'' + aa''b' + a'a''b - bb'b''\rangle \end{aligned}$$

e poi

$$\begin{aligned} \text{dx. } & (\langle a, b\rangle \cdot \langle a', b'\rangle) \cdot \langle a'', b''\rangle = \\ & \langle aa' - bb', ab' + a'b\rangle \cdot \langle a'', b''\rangle = \\ & \langle (aa' - bb')a'' - (ab' + a'b)b'', (aa' - bb')b'' + (ab' + a'b)a''\rangle = \\ & \langle aa'a'' - a''bb' - ab'b'' - a'bb'', aa'b'' - bb'b'' + aa''b' + a'a''b\rangle \\ & \langle aa'a'' - ab'b'' - a'bb'' - a''bb', aa'b'' + aa''b' + a'a''b - bb'b''\rangle \end{aligned}$$

E vediamo che i membri sono esattamente uguali. ■

7. *La proprietà 2. è già stata dimostrata sopra.*
8. *Stesso valesi per la proprietà 3.*
9. Occorre solo sfruttare le proprietà dei numeri reali $\mathbb{R}$, ovvero

$$\begin{aligned} (a', b') \cdot (a, b) &= (a'a - b'b, a'b + b'a) \\ &= (aa' - bb', ab' + a'b) \\ &= (a, b) \cdot (a', b') \blacksquare \end{aligned}$$

10. Consideriamo entrambi i membri dell'uguaglianza

$$\langle a, b\rangle \cdot (\langle a', b'\rangle + \langle a'', b''\rangle) = \langle a, b\rangle \cdot \langle a', b'\rangle + \langle a, b\rangle \cdot \langle a'', b''\rangle$$

Sviluppiamo il membro destro:

$$\begin{aligned}\langle a,b\rangle\cdot(\langle a',b'\rangle+\langle a'',b''\rangle) &= \langle a,b\rangle\cdot\langle a'+a'',b'+b''\rangle \\ &= \langle a(a'+a'')-b(b'+b''),a(b'+b'')+ \\ &= \langle aa'+aa''-bb'-bb'',ab'+ab''+a'\end{aligned}$$

Ora il membro sinistro:

$$\begin{aligned}\langle a,b\rangle\langle a',b'\rangle+\langle a,b\rangle\langle a'',b''\rangle &= \langle aa'-bb',ab'+a'b\rangle+\langle aa''-bb'',a \\ &= \langle aa'+aa''-bb'-bb'',ab'+ab''+\end{aligned}$$

E vediamo che entrambi i membri, quando sviluppati, sono uguali; dimostriamo così la tesi. ■

CONCLUSIONE.
Alla luce di queste proprietà riusciamo proprio a verificare che

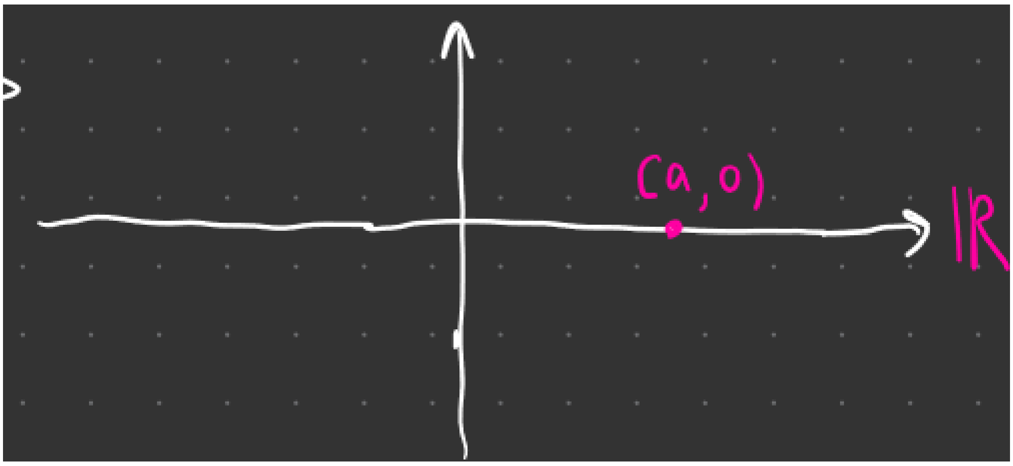
$$(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$$

è un campo, che chiameremo il *campo dei numeri complessi* $\mathbb{C}$.

OSS 2.2. Nel campo $\mathbb{C}$ considero i numeri della seguente forma:

$$(a,0)\in\mathbb{C}$$

ovvero quelli con la *seconda componente* nulla. Graficamente, questi punti giacciono sull'asse *orizzontale*, che chiameremo *l'asse reale*.



Allora notiamo che valgono le seguenti:

$$\begin{aligned}&\text{a. } (a,0)\cdot(b,0)=(ab-00,a0+0b)=(ab,0)\\ &\text{b. } (a,0)+(b,0)=(a+b,0)\end{aligned}$$

nel senso che questi numeri si comportano come i *numeri reali* $\mathbb{R}$.

OSS 2.3. Inoltre, considerando

$$(a, 0) \cdot (c, d) = (ac - 0d, ad + 0c) = (ac, ad)$$

ovvero che $(a, 0)$ si comporta come lo *scalare* che *scala un numero* $\mathbb{C}$ *componente per componente*.

3. Coniugio

DEF 3. Sia z un numero $\mathbb{C}$ e lo rappresentiamo come $z = a + ib$ (Rappresentazione dei Numeri Complessi). Allora definisco il numero **complesso coniugato** $\bar{z}$ come

$$\bar{z} = a - ib$$

DEF 3.1. Chiamo **coniugio** la funzione

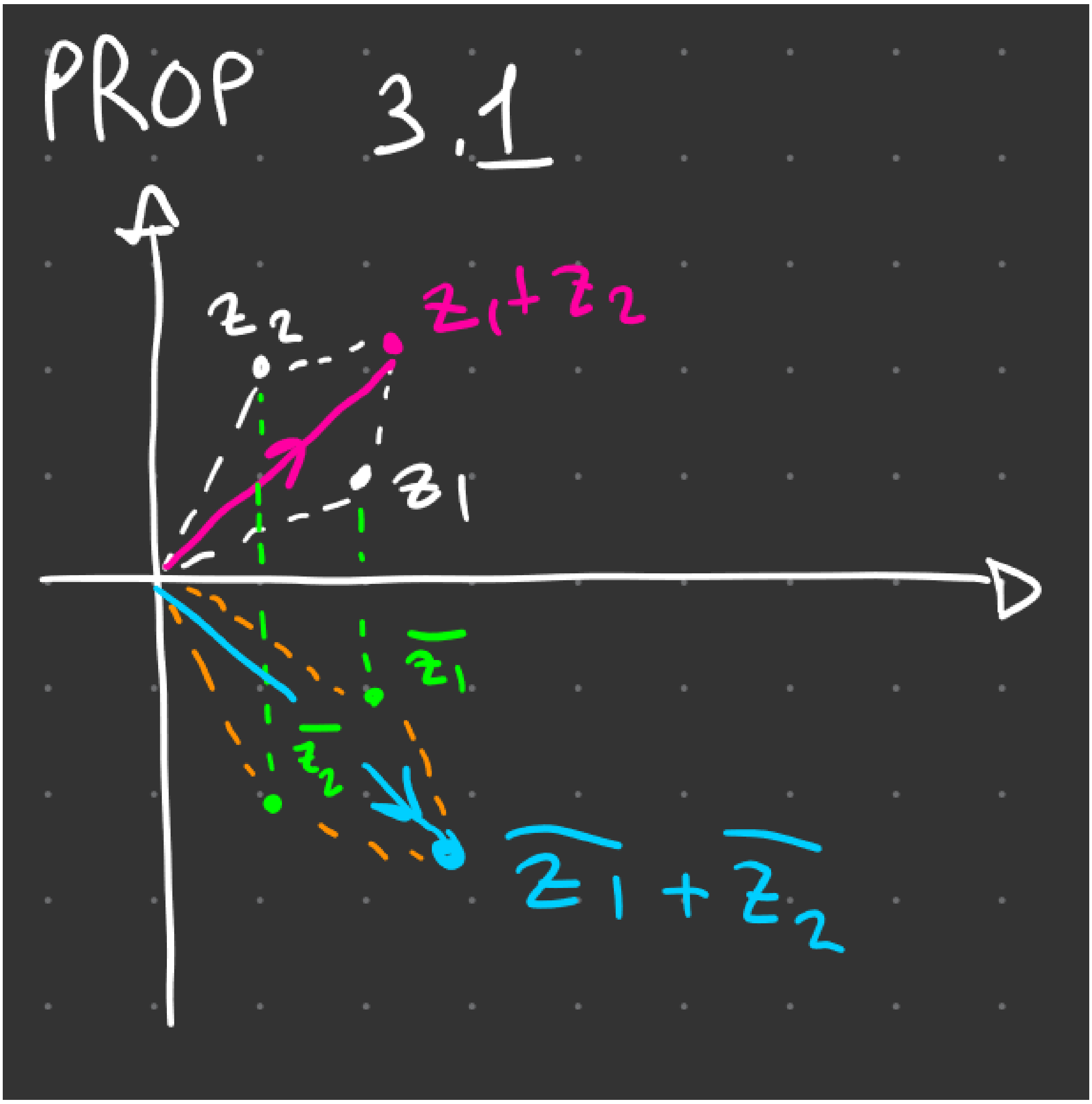
$$- : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}; z \mapsto \bar{z}$$

dove $\bar{i} = -i$

PROP 3.1. Questa funzione ha delle proprietà; presentiamo la prima.

$$\forall z_1, z_2; \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

Graficamente,



DIMOSTRAZIONE. Analiticamente è possibile dimostrare la tesi nel modo seguente.

$$\begin{aligned}
\overline{z_1+z_2} &= \overline{(a+ib)+(a'+ib')} \\
&= \overline{(a+a')+i(b+b')} \\
&= (a+a')-i(b+b') \\
&= (a-ib)+(a'-ib') \\
&= \overline{z_1}+\overline{z_2}\ \blacksquare
\end{aligned}$$

PROP 3.2.

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

DIMOSTRAZIONE. Analogamente,

$$\begin{aligned} \overline{z_1 \cdot z_2} &= \overline{(a+ib)(a'+ib')} \\ &= \overline{(aa'-bb')+i(ab'+a'b)} \\ &= aa'-bb'-i(ab'+a'b) \end{aligned}$$

e sviluppando $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ otteniamo l'identità

$$\begin{aligned} \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} &= \overline{(a+ib)} \cdot \overline{(a'+ib')} \\ &= (a-ib) \cdot (a'-ib') \\ &= aa' - iab' - ia'b + (i^2)bb' \\ &= aa'-bb'-i(ab'+a'b) \end{aligned}$$

che è esattamente uguale all'espressione ottenuta prima; pertanto si considera la tesi vera. ■

PROP 3.3.

$$\begin{aligned} \overline{z} = z &\iff \mathrm{Im}(z) = 0 \\ &\iff z = \mathrm{Re}(z) \\ &\iff z \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

PROP 3.4. Sia $z = a+ib$, allora

$$z + \overline{z} = (a+ib)+(a-ib) = 2a = 2\mathrm{Re}(z)$$

4. Modulo

Se prendiamo il piano di *Argand-Gauss* (Rappresentazione dei Numeri Complessi) possiamo vedere dei *punti nel piano*, allora si potrebbe *"misurare"* la distanza di questo punto dall'origine $(0,0)$.

DEF 4. Allora definiamo la il **modulo di** $\bar{z}$ come la *distanza dall'origine*; ovvero se $z = a+ib$, allora usando il *teorema di Pitagora* il modulo diventa $\sqrt{a^2+b^2}$.
DEF 4.1. Allora definisco la funzione $|\cdot|$;

$$\begin{aligned} |\cdot| :\ \mathbb{C} &\longrightarrow [0,+\infty) \\ z &\mapsto |z| := \sqrt{\mathrm{Re(z)}^2 + \mathrm{Im(z)}^2} \end{aligned}$$

OSS 4.1. Notiamo che se $z \in \mathbb{R}$, ovvero se $\mathrm{Im}(z) = 0$, allora

$$|z| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2} = |\mathrm{Re}(z)|$$

Da nota che a sinistra si ha il *modulo* di z, invece a destra si ha il *valore assoluto* (Funzioni di potenza, radice e valore assoluto, **DEF 3.1.**) della parte reale di z.

Ora presentiamo alcune proprietà del modulo.
PROP 4.1. Per definizione,

$$\forall z \in \mathbb{C}, |z| \geq 0; |z| = 0 \iff z = 0$$

PROP 4.2.

$$|z| \geq |\mathrm{Re}(z)| \wedge |z| \geq |\mathrm{Im}(z)|$$

Geometricamente, questo corrisponde al fatto che *l'ipotenusa* di un triangolo rettangolo è *sempre* più lungo o uguale ad uno dei cateti.

PROP 4.3.

$$|\overline{z}| = |z|$$

in quanto $-b^2 = b^2, \forall b \in \mathbb{R}$

PROP 4.4.

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1||z_2|$$

DIMOSTRAZIONE. Supponendo che $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2'$, allora

$$\begin{aligned}
|z_1| \cdot |z_2| &= \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2} \\
&= \sqrt{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)} \\
&= \sqrt{(a_1^2 a_2^2 + a_1^2 b_2^2) + (a_2^2 b_1^2 + b_1^2 b_2^2)} \\
&= \sqrt{(a_1^2 a_2^2 + b_1^2 b_2^2) + (a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2)}
\end{aligned}$$

e sviluppando

$$z_1 \cdot z_2 = a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

si ha quindi

$$\begin{aligned} |z_1 \cdot z_2| &= |(a_1a_2 - b_1b_2)^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)^2 \\ &= |(a_1^2a_2^2 - 2a_1a_2b_1b_2 + b_1^2b_2^2) + (a_1^2b_2^2 + 2a_1a_2b_1b_2 + a_2^2b_1^2)| \\ &= |(a_1^2a_2^2 + b_1^2b_2^2) + (a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2)| \end{aligned}$$

dimostrando così che

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \blacksquare$$

PROP 4.5.

$$z \cdot \overline{z} = |z|^2$$

DIMOSTRAZIONE. Supponendo che $z = a + ib$, allora

$$z \cdot \bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2$$

OSS 4.5.a. Questa proprietà è utile per trovare l'inversa di z; infatti

$$z \cdot \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{|z|^2}{|z|^2} = 1$$

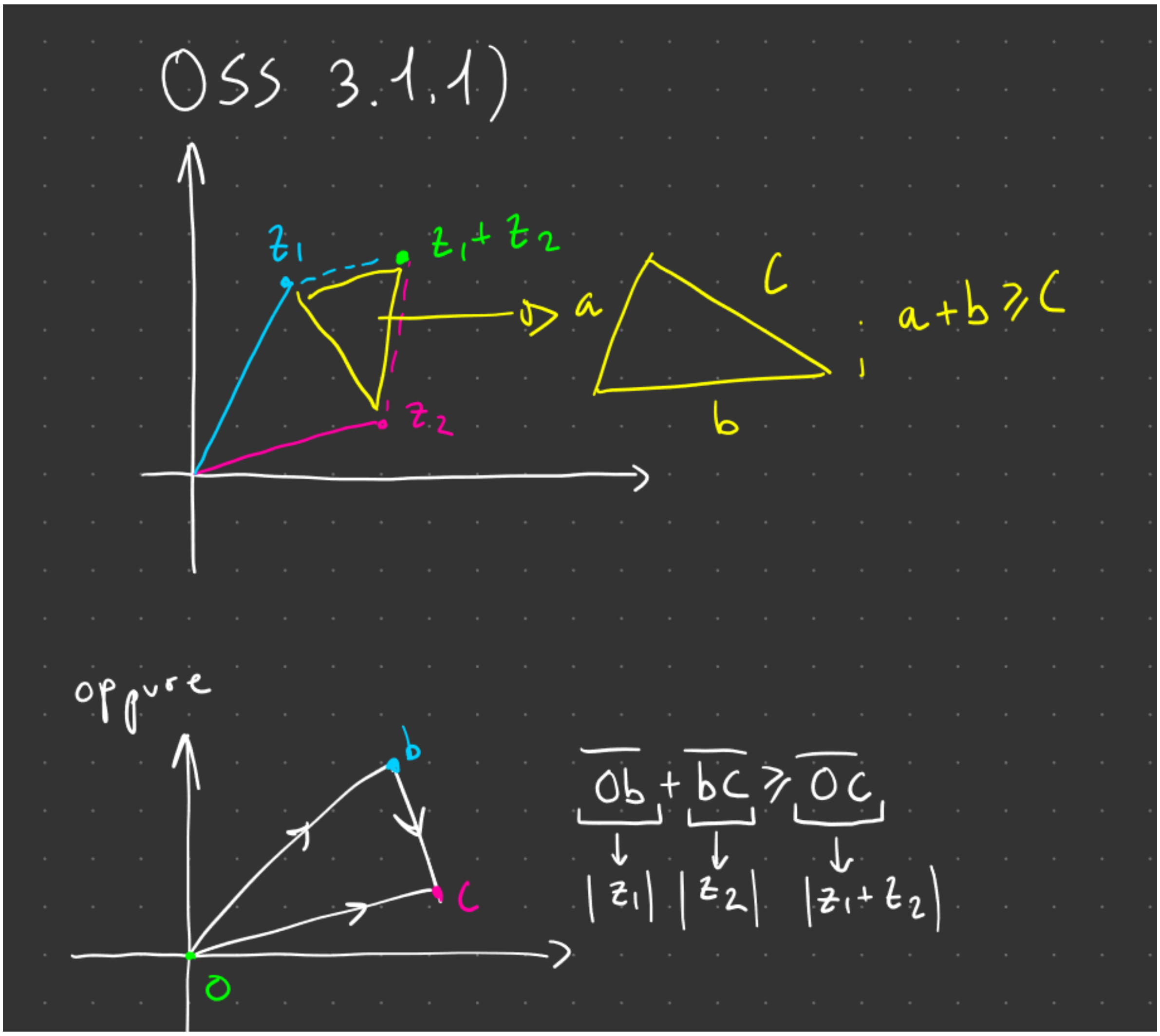
allora concludo che

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} + i\frac{-b}{a^2 + b^2}$$

PROP 4.7. *La disuguaglianza triangolare.*
Infine presentiamo la *proprietà fondamentale* del *modulo*.

$$\begin{gathered} \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \\ |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \end{gathered}$$

Che è *simbolicamente* simile alla *disuguaglianza triangolare* del valore assoluto (**OSS 3.1.1.**)
Però in questo contesto (ovvero del campo $\mathbb{C}$) la proprietà è ancora più *geometricamente suggestiva*; infatti usando il *Piano di Argand-Gauss* (Rappresentazione dei Numeri Complessi), si ha:



Ovvero che la somma della lunghezza due cateti di un triangolo rettangolo è *sempre* più lunga della lunghezza dell'ipotenusa.

DIMOSTRAZIONE.

Considero i seguenti: siano $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$; allora

$$\begin{aligned}
|z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} \\
&= (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) \\
&= z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 + z_2\overline{z_2} \\
&= |z_1|^2 + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1\overline{z_2}} + |z_2|^2 \\
|z_1 + z_2|^2 &= |z_1|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) + |z|^2
\end{aligned}$$

A questo punto mi ricordo che

$$|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$$

allora

$$\begin{aligned}
|z_1|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) + |z|^2 &\leq |z_1|^2 + 2|z_1\overline{z_2}| + |z_2|^2 \\
&\leq |z_1|^2 + 2|z_1||\overline{z_2}| + |z_2|^2 \\
&\leq |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 \\
|z_1 + z_2|^2 &\leq (|z_1| + |z_2|)^2 \\
|z_1 + z_2| &\leq |z_1| + |z_2| \blacksquare
\end{aligned}$$

C. Rappresentazione algebrica dei C

Rappresentazione dei Numeri Complessi

Rappresentazione dei numeri complessi come somma di parte reale e parte immaginaria; il piano di Argand-Gauss.

---

1. Rappresentazione

Dalle considerazioni prese in Operazioni sui Numeri Complessi possiamo fare le seguente considerazioni per poter rappresentare un numero complesso in un modo alternativo.

DEF 1.1. Prendendo un numero complesso di forma $(a,b) \in \mathbb{C}$, definiamo le seguenti.

1. $\mathbb{1}$ il numero complesso di forma $(1,0)$
2. i il numeri complesso di forma $(0,1)$

Se li moltiplichiamo per se stessi otteniamo:

1. $\mathbb{1} \cdot \mathbb{1} = \mathbb{1} = (1,0)$
2. $i \cdot i = (0,1) \cdot (0,1) = (0 * 0 - 1 * 1, 0 * 1 + 1 * 0) = (-1,0) = -\mathbb{1}$
   Allora si può affermare che $i^2 = -1$ è la soluzione dell'equazione $x^2 + 1 = 0$.

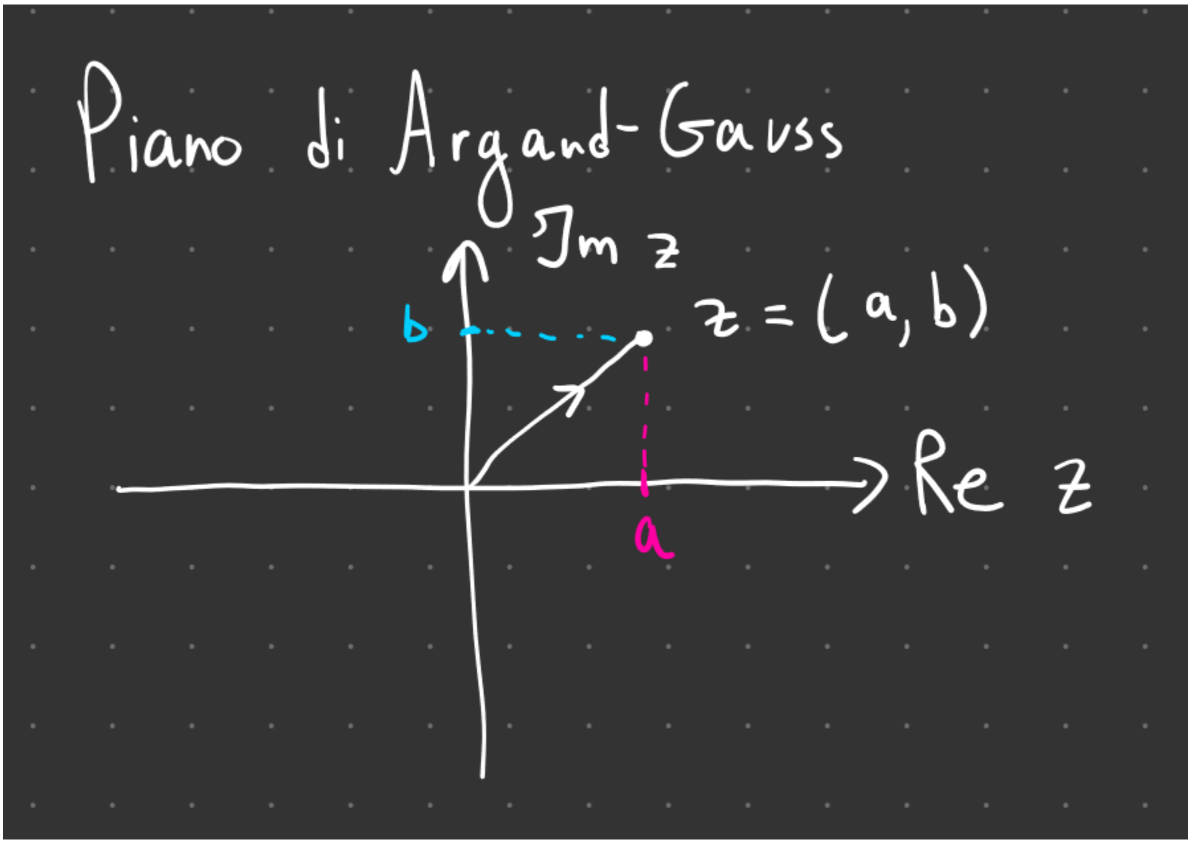
CONCLUSIONE.
Allora posso scrivere il numero complesso (a,b) come il seguente:

$$
\begin{aligned}
(a,b) &= (a,0)\cdot(1,0)+(b,0)\cdot(0,1) \\
&= a(1,0)+b(0,1) \\
(a,b) &= a+ib
\end{aligned}
$$

DEF 2.2. Il numero a si dice la **parte reale** e viene definita come $\mathrm{Re}(z)$, il numero b ($\mathrm{Im}(z)$)si dice la **parte immaginaria**.

2. Piano di Argand-Gauss

Se prendiamo il *piano cartesiano* π applicando le regole definite per $\mathbb{C}$, allora otterremo il piano di *Gauss* (oppure di *Argand-Gauss*), dove ogni punto del piano è un *numero complesso*.
Eccovi un esempio grafico:



Infatti, *geometricamente* un punto z può rappresentare un *vettore geometrico* (Vettori Liberi) con punto di applicazione $(0,0)$.
Chiamiamo un punto del piano come z, che può essere scritto come

$$z=\mathrm{Re}(z)+i\mathrm{Im}(z)$$

3. Esercizi

Considerando le Operazioni sui Numeri Complessi e questa rappresentazione di un numero complesso z, si propongono alcuni esercizi:

ESERCIZIO 3.1. Calcola

$$(2+3i)+(4+i)$$

ESERCIZIO 3.2. Calcola

$$(2-3i)(2+3i)$$

ESERCIZIO 3.3. Calcola

$$(1+i)(2-i)(7i)$$

ESERCIZIO 3.4. Calcola

$$\frac{i+1}{i-1}$$

D. Rappresentazione trigonometrica dei C

Forma Trigonometrica dei Numeri Complessi

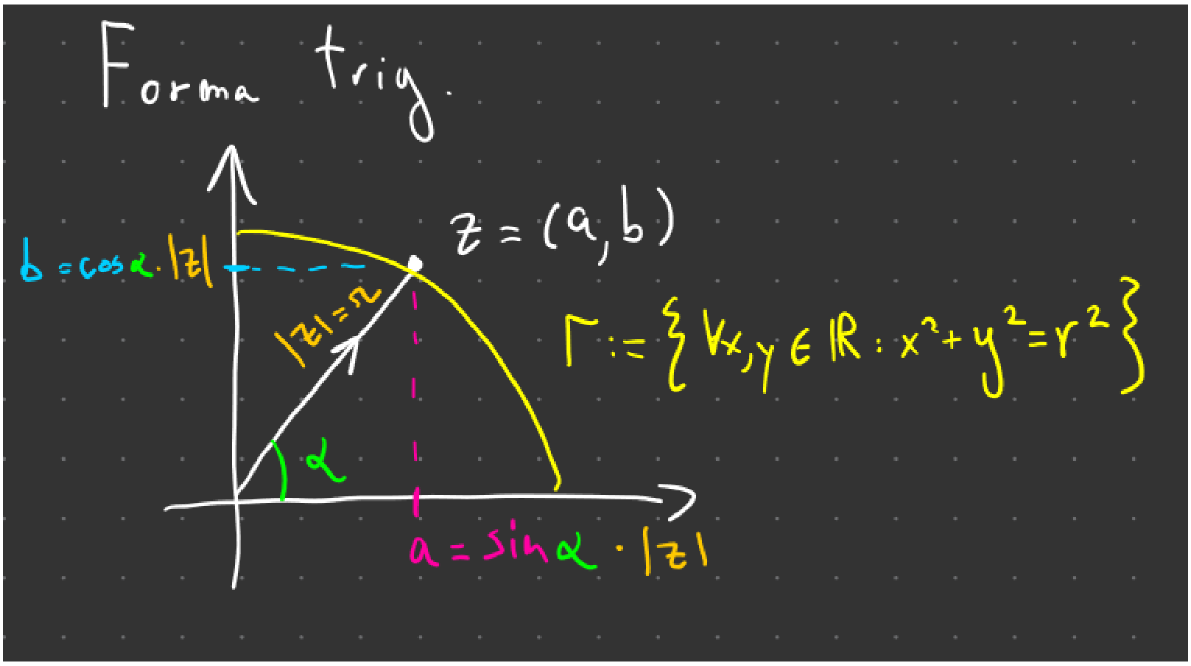
Rappresentazione dei numeri complessi come un z associato a modulo e argomento; argomento come la classe di equivalenza dell'argomento principale; nuova interpretazione della moltiplicazione; esempi; Formula di De Moivre.

---

1. Rappresentazione trigonometrica

Oltre alla rappresentazione *"algebrica"* dei numeri complessi $\mathbb{C}$ (Rappresentazione dei Numeri Complessi), è possibile anche considerare un'altra rappresentazione che fa uso delle Funzioni trigonometriche.

NOZIONE. Prendiamo un $z \in \mathbb{C}$, che geometricamente vuol dire



Allora secondo le definizioni del *seno* e del *coseno* (Funzioni trigonometriche, **DEF 1.**) possiamo considerare

$$a = \cos\alpha \cdot |z|$$
$$b = \sin\alpha \cdot |z|$$

dove $|z|$ rappresenta il *modulo* di z. (Operazioni sui Numeri Complessi, **DEF 4.**)
Dunque

$$z = a + ib = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

e lo si può scrivere come

$$z \sim (|z|, [\alpha])$$

che si legge come "z *lo rappresento come* $(|z|, [\alpha])$".

DEF 1. Quindi definisco le due *componenti* che sono associate a z:

- **Modulo** come $|z|$, che d'ora in poi verrà genericamente chiamato come ρ. Ovviamente può essere solo maggiore o uguale a 0.
- **Argomento** come l'angolo α;
  - Dai risultati della *trigonometria*, sarebbe meglio considerare **l'argomento principale** come la classe di equivalenza $[a]_{\equiv 2\pi}$ dove $\alpha \in [0, 2\pi)$. Qui si parla della *congruenza modulo* 2π (Relazioni, **ESEMPIO 3.2**); questo in quanto 2π

rappresenterebbe un giro intero, quindi $\alpha = \alpha + 2\pi$. Allora

$$[\alpha] = \{\forall k \in \mathbb{Z}, \alpha + 2k\pi\}$$

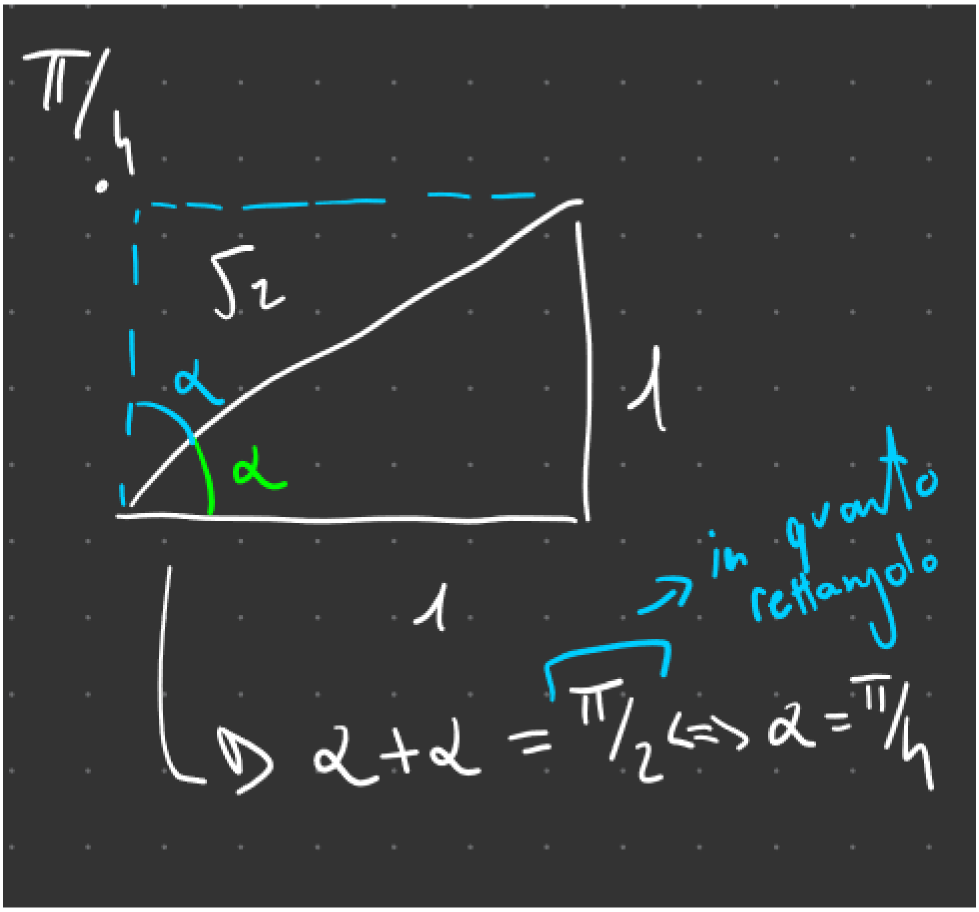
OSS 1.1. Inoltre possiamo definire l'applicazione

$$\mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow (0, +\infty) \times \{[\alpha]_{\equiv 2\pi}, \alpha \in \mathbb{R}\}; z \mapsto (\rho, [\alpha])$$

ed è *biiettiva*. Non si considera lo 0 in quanto questo può creare dei problemi; infatti a $z = 0 + i0$ può essere associato qualsiasi angolo, rendendo questa applicazione una *non funzione*.

1.1. Esempi

ESEMPIO 1.1.a. Prendendo $z = 1 + i$, voglio trovare la sua rappresentazione trigonometrica.
Innanzitutto trovo il suo *modulo* $|z|$ che per definizione è $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.
Dopodiché trovo il suo *argomento*. Per farlo bisogna considerare la *geometria elementare*, nel senso che se abbiamo un triangolo del tipo



allora chiaramente si evince che l'angolo α è $\frac{\pi}{4}$.

ESEMPIO 1.1.b. $z = 1 + i0$; allora chiaramente

$$z \sim (1, 0)$$

ESEMPIO 1.1.c.

$$z = 0 + i \sim (1, \frac{\pi}{2})$$

1.2. Interpretazione della moltiplicazione

OSS 1.2. Si osserva che secondo la *forma trigonometrica* possiamo interpretare la *moltiplicazione tra due numeri complessi* nel modo seguente:

$$\begin{aligned}
&\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \\
&z_1 \sim (\rho_1, \alpha_1) \\
&z_2 \sim (\rho_2, \alpha_2)
\end{aligned}$$

Allora

$$z_1 \cdot z_2$$

è uguale a

$$\begin{aligned}
&\rho_1(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1) \cdot \rho_2(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2) = \\
&(\rho_1\cos\alpha_1 + \rho_1 i\sin\alpha_1)(\rho_2\cos\alpha_1 + \rho_2 i\sin\alpha_2) = \\
&\rho_1\rho_2\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \rho_1\rho_2 i\cos\alpha_1\sin\alpha_2 + \rho_1\rho_2 i\sin\alpha_1\cos\alpha_2 - \rho_1\rho_2\sin
\end{aligned}$$

poi raccogliamo per i termini dovuti,

$$\rho_1\rho_2(\cos\alpha_1\cos\alpha_2 - \sin\alpha_1\sin\alpha_2 + i(\cos\alpha_1\sin\alpha_2 + \sin\alpha_1\cos\alpha_2))$$

e qui identifichiamo le *forme di addizione e sottrazione del seno e del coseno* (Funzioni trigonometriche, **SEZIONE 2.3.**). Allora abbiamo infine

$$z = \rho_1\rho_2(\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i\sin(\alpha_1 + \alpha_2))$$

Quindi secondo questa *interpretazione* abbiamo che i *moduli* si moltiplicano e gli *angoli* si sommano. Ovvero:

$$z_1 z_2 \sim (\rho_1\rho_2, \alpha_1 + \alpha_2)$$

2. Formula di de Moivre

TEOREMA 2. Sia $z = a + ib \sim (\rho, [\alpha])$; quindi $z = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$. Allora

$$z^n \sim (\rho^n, n[\alpha]) = \rho^n(\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha))$$

2.1. Esempi

Alcuni esempi in cui si applica la *formula di de Moivre*.

3. Le radici di un numero complesso

Consideriamo un caso fondamentale del *teorema fondamentale dell'algebra*, ovvero le *radici dell'unità*.

PROBLEMA 3. Dato un numero $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, voglio trovare tutti i numeri $z \in \mathbb{C}$ tali che

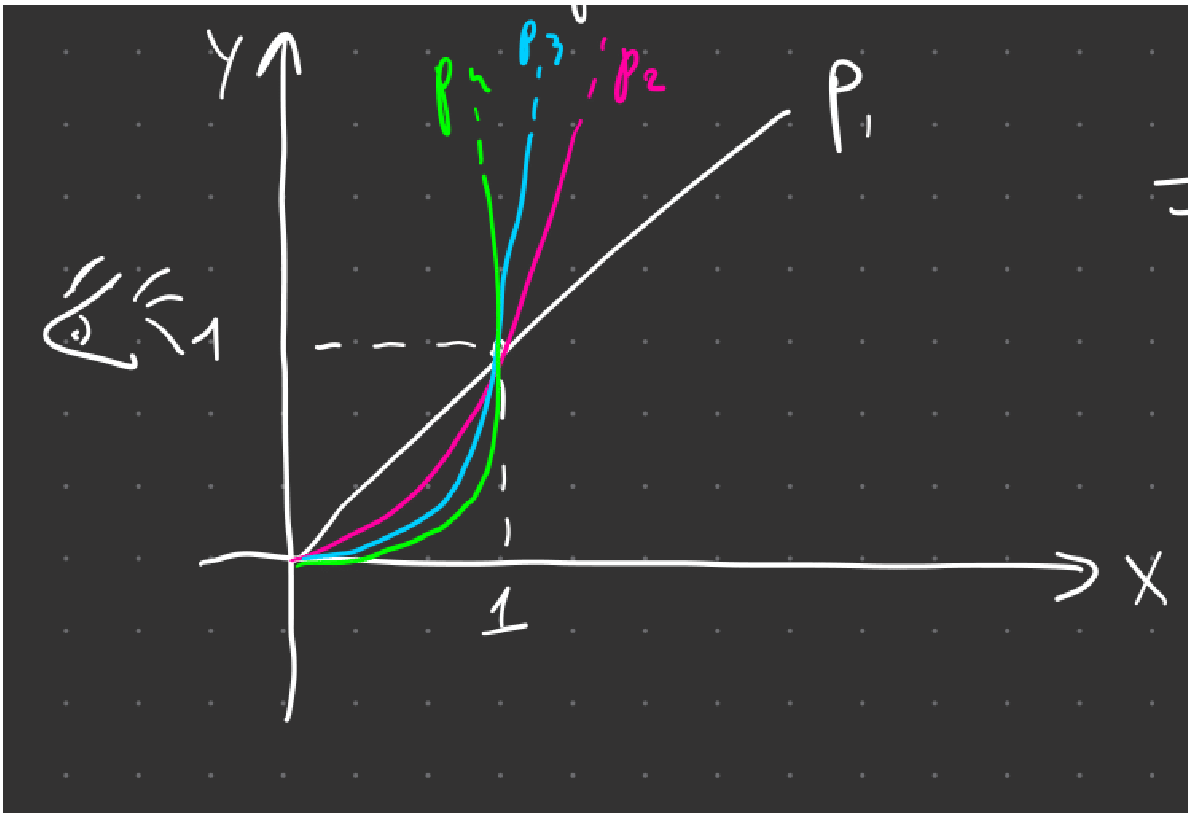
$$z^n = 1$$

OSS 3.1. Vediamo cosa succede in $\mathbb{R}$, ovvero se $\operatorname{Im}(z) = 0$. Allora devo trovare tutti i numeri $x \in \mathbb{R}$ tali che

$$x^n = 1$$

Se restringo ulteriormente il nostro insieme di considerazione a $[0, +\infty)$, allora posso considerare la funzione *potenza* n*-esima* (Funzioni di potenza, radice e valore assoluto, **DEF 1.1.**).

Osservando di nuovo il grafico di *potenza*,



Si nota subito che $x^n = 1$ ha un'unica soluzione in $[0, +\infty)$; ovvero $x_1 = 1$.
Ora se consideriamo pure i numeri negativi, allora:

- per n pari, $x^n = 1$ ha anche una soluzione secondaria $x_2 = -1$.
- per n dispari, $x^n = 1$ ha come soluzione solo $x_1 = 1$.

OSS 3.2.
Invece su $\mathbb{C}$ ci sono esattamente n soluzioni.

$$z^n = 1$$

DIM. Consideriamo la forma trigonometrica di z e 1, ovvero

$$z \sim (\rho, [\alpha]); 1 \sim (1, [0])$$

e secondo l'equazione voglio che

$$z^n \sim (\rho^n, n[\alpha]) = (1, [0])$$

quindi deve essere vera la seguente:

$$\rho^n = 1 \iff \rho = 1$$

Da un punto di vista *geometrico*, questo vuol dire che non voglio

avere né spirali che vanno fuori ($\rho > 1$) né quelli che vanno all'interno ($\rho < 1$).
Inoltre deve valere

$$[n\alpha] = [0]$$

cioè

$$n\alpha = 0 + 2k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}$$

allora

$$\alpha = \frac{2k\pi}{n}, \forall k \in \mathbb{Z}$$

ora iniziamo a fissare dei valori di k, a partire da 0. Allora

$$\begin{aligned}
&k = 0 \implies \alpha_1 = 0 \\
&k = 1 \implies \alpha_2 = \frac{2\pi}{n} \\
&k = 2 \implies \alpha_3 = \frac{4\pi}{n} \\
&\dots \\
&k = n-1 \implies \alpha_n = \frac{2(n-1)\pi}{n} \\
&k = n \implies \alpha_{n+1} = \frac{2n\pi}{n} = 2\pi \in [0]_{\equiv 2\pi} \\
&k = n+1 \implies \alpha_{n+2} = \frac{2(n+1)\pi}{n} = \frac{2n\pi + 2\pi}{n} = 2\pi + \frac{2\pi}{n} \in [\frac{2\pi}{n}]_{\equiv}
\end{aligned}$$

Notiamo che da $k = n$ (ovvero dalla $n+1$-esima soluzione) in poi otteniamo elementi che appartengono alle classi equivalenza di soluzioni già trovate: ovvero non vanno considerate, in quanto le loro classi di equivalenza sono uguali. Quindi le radici dell'unità sono:

$$\begin{aligned}
&z_0 \sim (1, [0]) = \cos(0) + i\sin(0) = 1 \\
&z_1 \sim (1, [\frac{2\pi}{n}]) = \cos(\frac{2\pi}{n}) + i\sin(\frac{2\pi}{n}) \\
&\dots \\
&z_n \sim (1, [\frac{2(n-1)\pi}{n}]) = \cos(\frac{2(n-1)\pi}{n}) + i\sin(\frac{2(n-1)\pi}{n})
\end{aligned}$$

Allora vediamo che ci sono n soluzioni; generalizzando da qui discende il *teorema fondamentale dell'algebra*.

3.1. Esempio

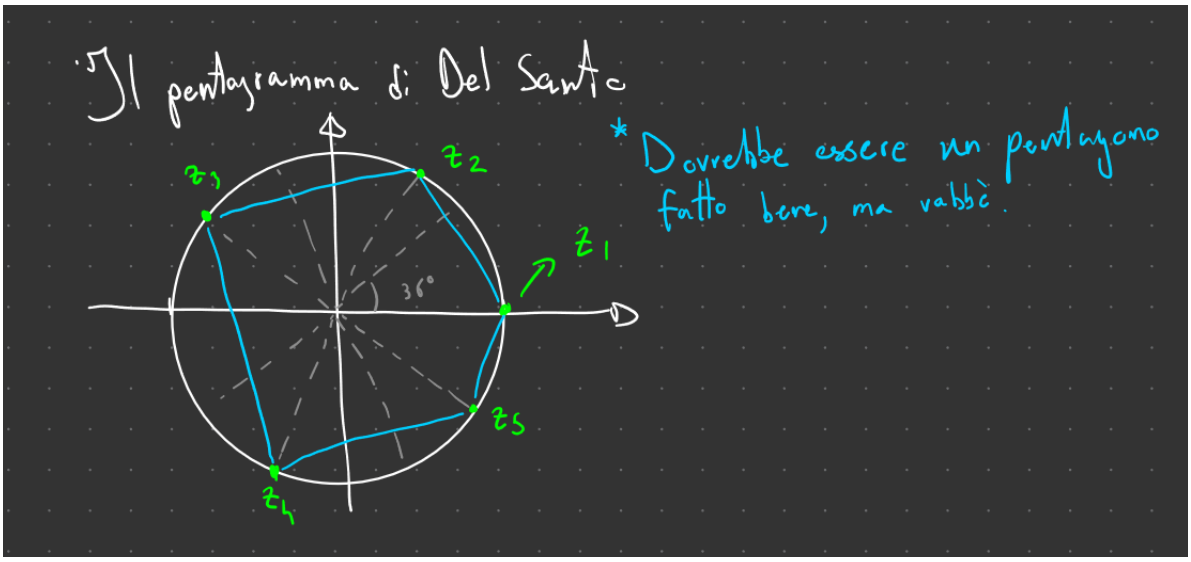
ESEMPIO 3.1. Trovare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$z^5 = 1$$

Considerando ciò detto prima, ho le soluzioni

$$\begin{aligned}
z_1 &\sim (1, [0]) = 1 \\
z_2 &\sim (1, [\frac{2\pi}{5}]) = \cos(\frac{2\pi}{5}) + i\sin(\frac{2\pi}{5}) \\
z_3 &\sim (1, [\frac{2(2)\pi}{5}]) = (1, [\frac{4\pi}{5}]) \\
z_4 &\sim (1, [\frac{2(3)\pi}{5}]) = (1, [\frac{6\pi}{5}]) \\
z_5 &\sim (1, [\frac{2(4)\pi}{5}]) = (1, [\frac{8\pi}{5}])
\end{aligned}$$

Graficamente posso prendere il *piano di Argand-Gauss* (Rappresentazione dei Numeri Complessi), prendere un cerchio con $r = 1$, dividere i due *semicerchi* in 5 parti, poi prendere il secondo, quarto, sesto e ottavo punto della sezione; infine se li collego ottengo un *pentagono*.



3.2. Teorema fondamentale dell'algebra

TEOREMA 3.2.
Siano a_n dei numeri tali che:

$$a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}; a_n \neq 0$$

e considerando *l'equazione*

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n = 0$$

allora questa ha esattamente n *soluzioni* in $\mathbb{C}$.

OSS 3.2.1. Allora possiamo riscrivere l'equazione come

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n = a_n (z - z_1) \ldots (z - z_n)$$

con $\forall n, z_n \in \mathbb{C}$. Notiamo che *tutte* le soluzioni appartengono al *campo dei numeri complessi*; per questo si dice che $\mathbb{C}$ è un *campo chiuso*.

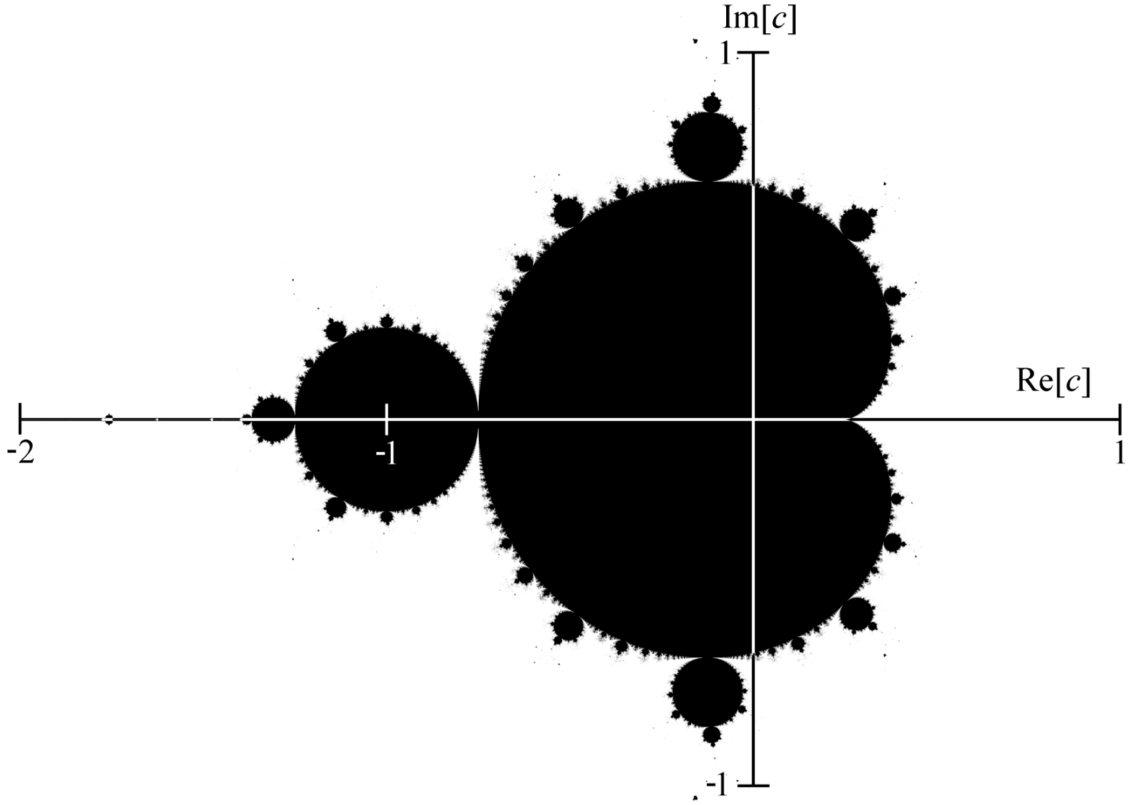
4. (EXTRA) L'insieme di Mandelbrot

PROBLEMA 4. Considero il *piano di Argand-Gauss* e $z = c \in \mathbb{C}$; adesso considero una *successione* (Assiomi di Peano, il principio di induzione, **DEF 4.2.1.**) di *punti su* $\mathbb{C}$, ovvero

$$z_0 = c; z_1 = c^2 + c; \forall n, z_{n+1} = (z_n)^2 + c$$

Quindi scelgo un punto c, a cui applico la successione z_n.
Adesso distinguo i *punti di partenza* c in due famiglie principali:

1. I punti di partenza che rimangono in un *insieme limitato* (ovvero un raggio di palla) dopo un numero di iterazioni
2. I punti di partenza dei quali moduli vanno all'infinito
   Graficamente posso colorare i punti della prima famiglia di colore nero, i secondi di colore bianco.
   Tramite gli strumenti dell'*informatica* posso usare un *pixel* per rappresentare un punto *c*, poi di eseguire un numero preciso di iterazioni (come 500) e infine di colorare i pixel a seconda del suo comportamento.
   Così otteniamo il cosiddetto *frattale di Mandelbrot*.


Im[c]
1
-1
Re[c]
-2
-1
1