Successioni e Serie di Funzioni - Sommario

Tutto sulle successioni e serie di funzioni

Abstract

Riassunto su questo capitolo

Il capitolo *"Successioni e Serie di Funzioni"* mira ad esplorare lo *spazio delle funzioni reali*; in particolare se consideriamo le *successioni* e le *serie numeriche*, e proviamo ad applicarle in questo spazio. In questo capitolo si andrà a definire la nozione di *"successione di funzioni"*, e i suoi possibili comportamenti; dopodiché si passa dalle *successioni di funzioni* alle *serie di funzioni*, studiando i suoi ulteriori comportamenti.

Questa parte culmina con le applicazioni pratiche delle conoscenze appena acquisite, in particolare con le *serie di potenze* e le *serie di Taylor-MacLaurin*.

SEZIONE A. SUCCESSIONI DI FUNZIONI

A1. Definizione di Successione di Funzioni

Definizione di Successione di Funzioni

Definizione di successione di funzioni. Esempi di successioni di funzioni.

---

1. Definizione di successione di funzioni

#Definizione

Definizione (successione di funzioni).

Una *successione di funzioni* è una *successione* che associa un *numero naturale* ad una *funzione*. Quindi è in particolare una *funzione* del tipo

$$f_n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{F}$$

Questa successione viene indicata come $(f_n)_n$.

2. Esempi di successioni di funzioni

#Esempio

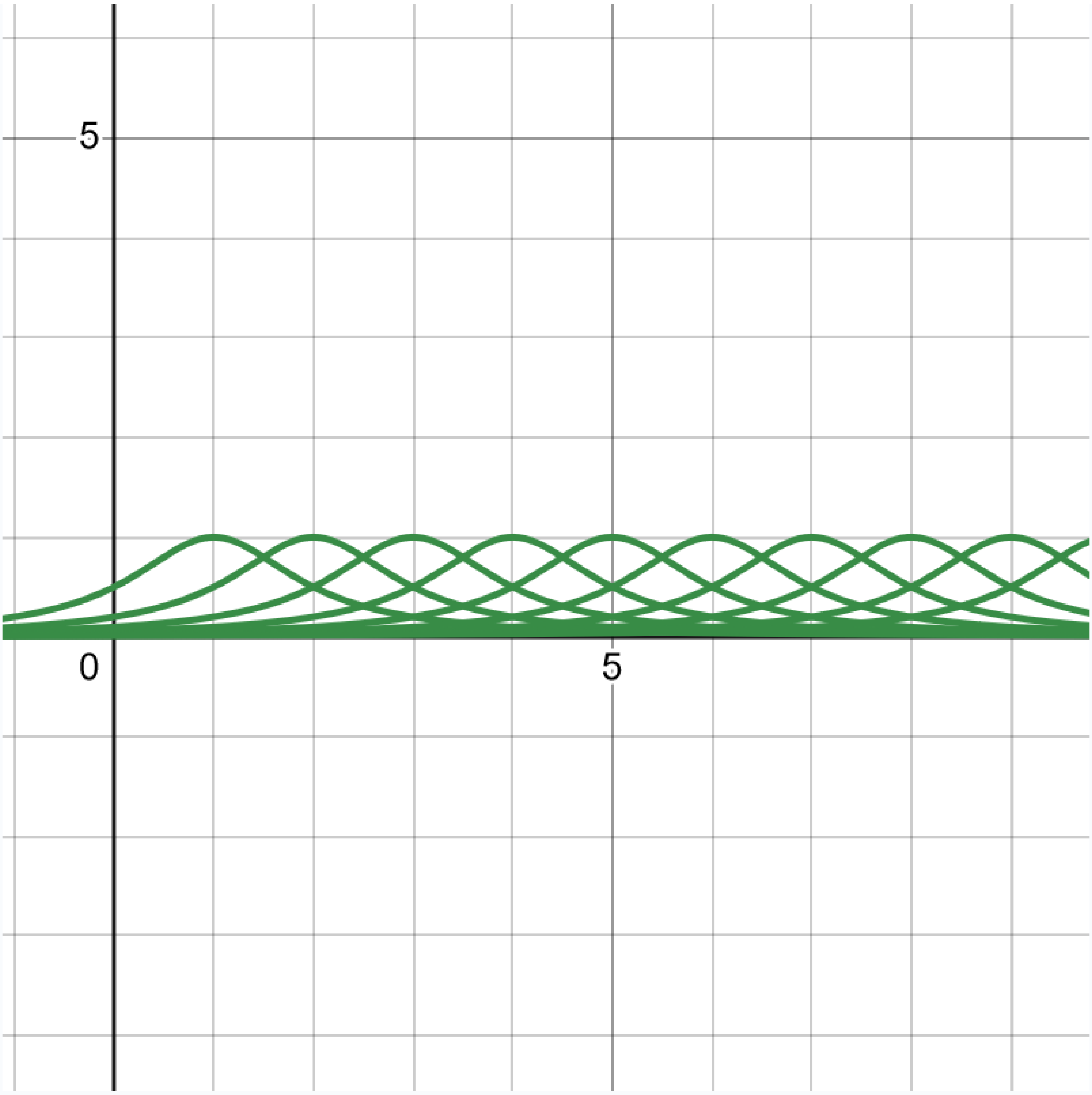
Esempio (esempio primo).

Sia $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (*ovvero che ogni membro della famiglia delle funzioni* $(f_n)_n$ *è a variabile reale*), definita come

$$f_n(x) = \frac{1}{1+(x-n)^2}$$

Il suo *"grafico"* viene rappresentato come nella *figura 2.1.*.

FIGURA 2.1. (*Esempio primo per* $n = 10$)



A2. Definizione di Convergenza Puntuale e Uniforme

Convergenza Puntuale e Uniforme per Successioni di Funzioni

Definizione di convergenza puntuale e uniforme per successioni di funzioni. Esempi di funzioni puntualmente e uniformemente convergenti. Teorema di caratterizzazione della convergenza uniforme. Interpretazione geometrica della convergenza uniforme.

---

1. Definizioni di Convergenza Puntuale e Uniforme

#Definizione

Definizione (convergenza puntuale di una successione di funzioni).

Sia $(f_n)_n$ una *successione di funzioni*, in particolare del tipo

$$f_n : E \longrightarrow \mathbb{R}$$

(ovvero di *variabile reale*). Si dice che $(f_n)_n$ *converge puntualmente sul dominio* E *ad una funzione* $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, se vale che *per ogni punto del dominio esiste il limite* $\lim_n f_n(x) = f(x)$. Ovvero, alla *"Cauchy"*, se vale la condizione

$$\begin{gathered}\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} = \bar{n}(\varepsilon, x) : \\ n \geq \bar{n} \implies |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon\end{gathered}$$

#Osservazione

Osservazione (la nozione di convergenza puntuale dipende dal punto).

Come potrebbe suggerire il nome della *"convergenza puntuale"*, questo tipo di *convergenza* dipende dal punto $x \in E$ scelto. Infatti, la notazione $\bar{n}(\varepsilon, x)$ vuole *enfatizzare* il fatto che il valore limite $\bar{n}$ dipende dal punto x scelto.

Se vogliamo invece *"liberarci"* da questa scelta, dobbiamo vedere la nozione di *convergenza uniforme*.

#Definizione

Definizione (convergenza uniforme di una successione di funzioni).

Sia $(f_n)_n$ una *successione di funzioni a variabile reale*, ovvero del tipo $f_n : E \longrightarrow \mathbb{R}$.
Si dice che $(f_n)_n$ *converge uniformemente alla funzione* $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ se vale che

$$\begin{gathered}\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} = \bar{n}(\varepsilon) : \forall x \in E, \\ n \geq \bar{n} \implies |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon\end{gathered}$$

#Osservazione

Osservazione (il legame tra convergenza puntuale e uniforme).

> Si nota che la *convergenza uniforme* impone una *condizione più forte* della *convergenza puntuale*. Infatti, una *successione di funzioni uniformemente convergente* è anche una *successione di funzioni puntualmente convergente*.

2. Teorema di caratterizzazione della convergenza uniforme

#Teorema

> Teorema (di caratterizzazione della convergenza uniforme).
>
> Sia $(f_n)_n$ una *successione di funzioni*. Sono equivalenti:
>
> $$\begin{gathered}(f_n)_n \text{ converge uniformemente a } f : E \longrightarrow \mathbb{R} \\ \Updownarrow \\ \lim_n \left(\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \right) = 0\end{gathered}$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 5 (di caratterizzazione della convergenza uniforme)
Questa dimostrazione sull'equivalenza (dato che ci troviamo in uno *spazio metrico*)

$$\forall x \in E, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \iff \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Ovvero se il limite tende ad annullarsi. ■

#Osservazione

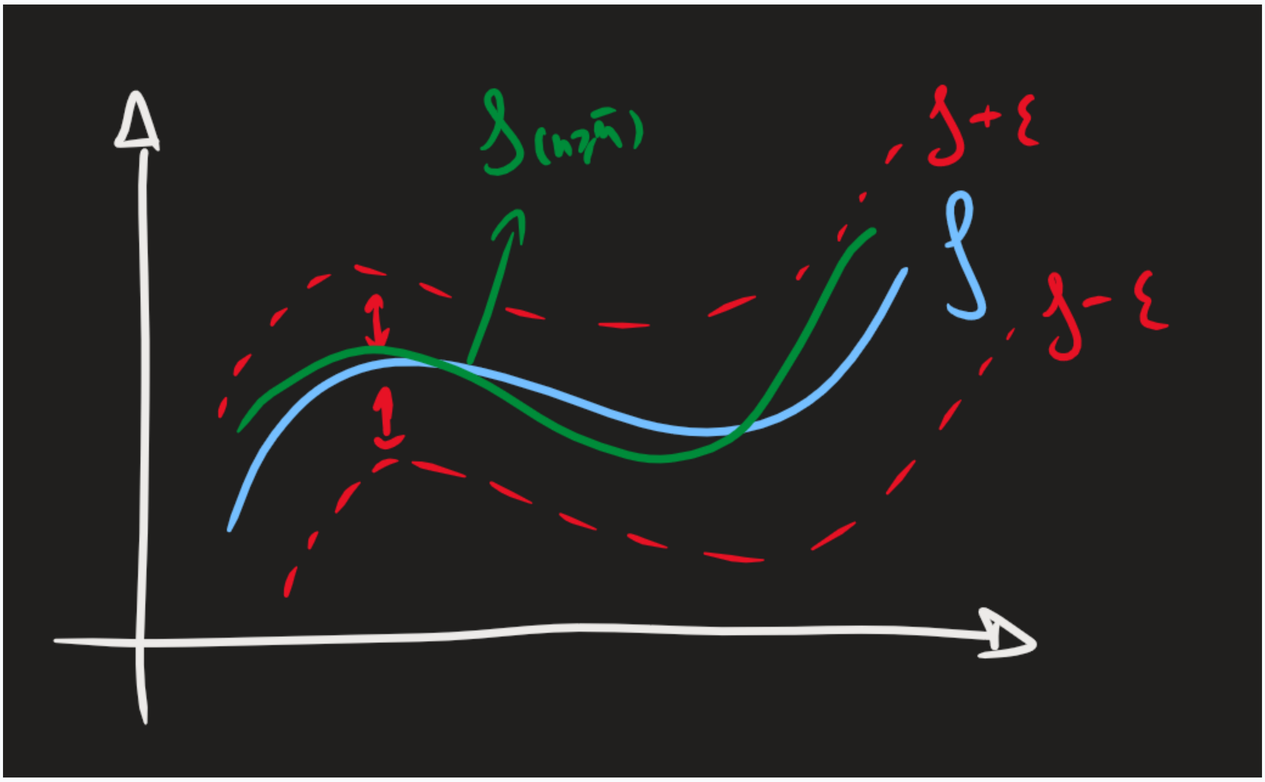
> Osservazione (il vantaggio del teorema).
>
> Il *vantaggio principale* di questo teoremino è l'*eliminazione* del quantificatore $\forall$; infatti basta controllare l'*estremo superiore* dello *scarto* $|f_n(x) - f(x)|$.

#Osservazione

> Osservazione (l'interpretazione geometrica di convergenza uniforme).
>
> Vogliamo capire cosa *vuol dire* che una *successione di funzioni* è *uniformemente convergente* ad una funzione $f(x)$.

> Supponiamo che una *successione di funzioni* $(f_n)_n$ sia *uniformemente convergente* verso f. Possiamo dunque disegnare la funzione $f(x)$.
> Prendiamo dunque le sue funzioni traslate $(f-\varepsilon)(x)$ e $(f+\varepsilon)(x)$; il significato della *convergenza uniforme* è che ad un certo numero $\bar{n} \in \mathbb{N}$ in poi, le funzioni f_n saranno *sempre* contenute nell'intervallo $f-\varepsilon, f+\varepsilon$ (*figura 2.1.*).

FIGURA 2.1. (*Interpretazione geometrica della convergenza uniforme*)



3. Esempi di Successioni di Funzioni Convergenti

#Esempio

> Esempio (successione puntualmente convergente).
>
> Sia $f_n(x)$ definita come
>
> $$f_n(x) = \frac{nx}{1+n|x|} = \begin{cases} \frac{nx}{1+nx}, x > 0 \\ 0, x = 0 \\ \frac{nx}{1-nx}, x < 0 \end{cases}$$
>
> Vogliamo controllare la *convergenza puntuale* di questa successione di funzioni.
>
> Per approcciarci a questo problema, dividiamo le casistiche.
> Sia $x > 0$. Allora prendo il limite

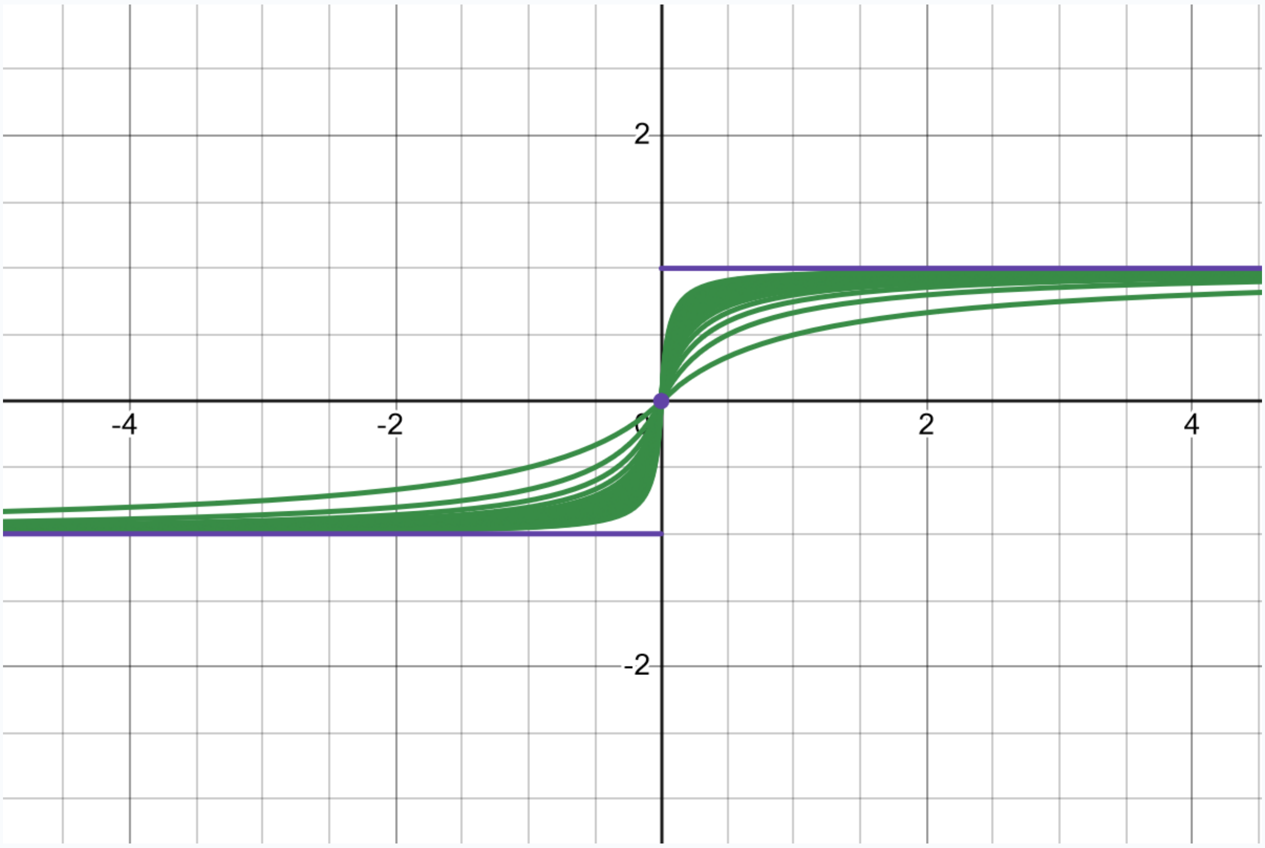
$$\lim_n \frac{nx}{1+nx} = 1$$

Analogamente per $x = 0$, la successione converge a $f(x) = 0$ e per $x < 0$ a $f(x) = -1$. Dunque la successione converge a $f(x)$ definita come

$$f(x) = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x = 0 \\ -1, x < 0 \end{cases}$$

Dunque sicuramente $(f_n)_n(x)$ converge puntualmente verso $f(x)$. Ovvero, abbiamo il grafico in *figura 3.1.*

FIGURA 3.1. (*Grafico delle successioni*)



#Esempio

Esempio (funzione puntualmente convergente all'iperbola).

Sia $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ \frac{1}{x}, \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}$$

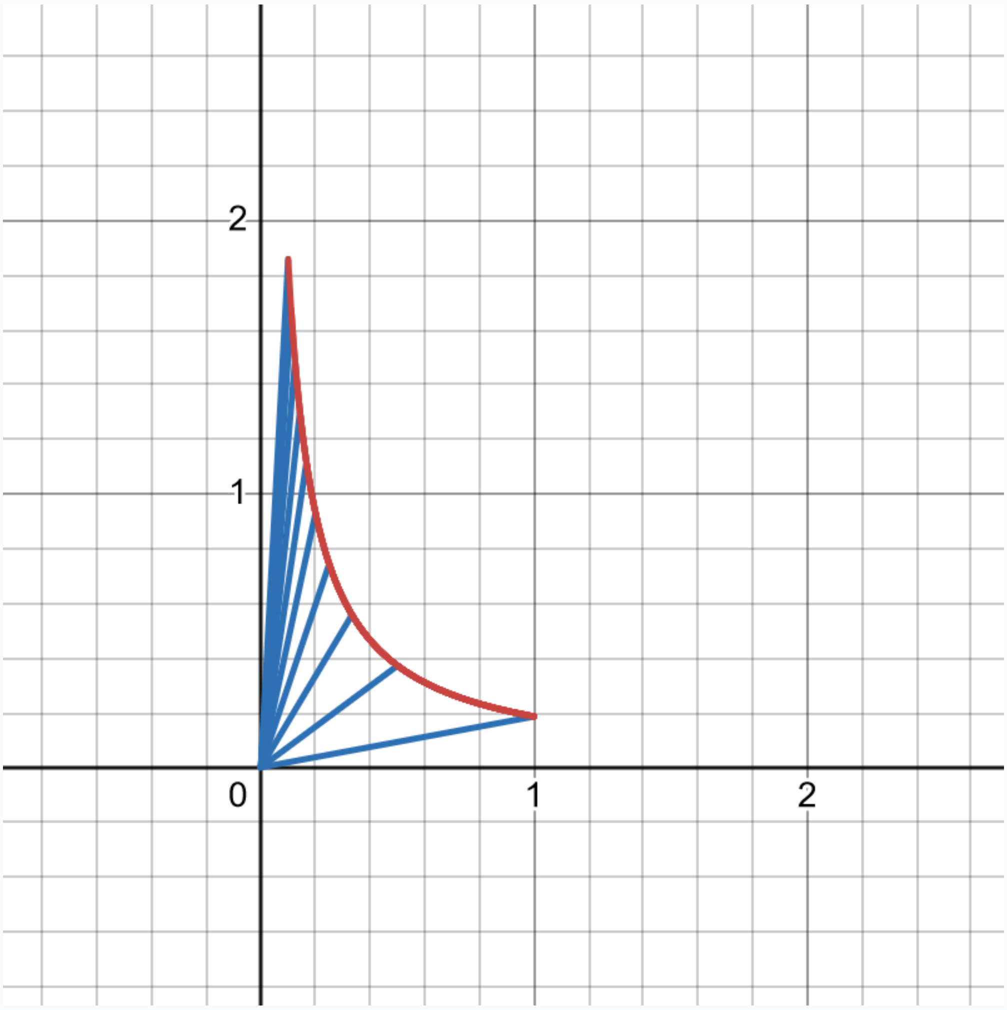
Questa successione di funzioni converge puntualmente a $f(x) = \frac{1}{x}$. Infatti, supponendo un $x > 0$ *vicino a* 0, ci sarà sempre un numero $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$0 < \frac{1}{\bar{n}} < x$ (Corollario 4 ($\frac{1}{n}$ diventa piccolo.)). Allora esisterà sempre un $\bar{n}$ tale che valga il limite la funzione cade sulla *seconda parte* $\frac{1}{x}$. Dunque ho il limite

$$\lim_n f_n(x) = \frac{1}{x}$$

Questo si visualizza nella. *figura 3.2.*.

FIGURA 3.2. (*Visualizzazione della successione di funzioni per* $n = 10$, *scalata per* $k = 0.186$)



#Esempio

Esempio (funzione non uniformemente convergente).

Vogliamo vedere un caso di una funzione *non uniformemente* convergente, ma solo *puntualmente convergente*.
Prendiamo $f_n(x) = x^n$, con $E = (0, 1)$. Questa è chiaramente *puntualmente convergente*, dal momento che $\lim_n f_n(x) = 0$.
Adesso verifichiamo la *convergenta uniforme* di questa funzione. Prendiamo prima di tutto l'estremo superiore dei scarti $f_n(x) - f(x)$;

$$\sup_{0<x<1} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{0<x<1} |x^n - 0| = \sup_{0<x<1} x^n = 1^n$$

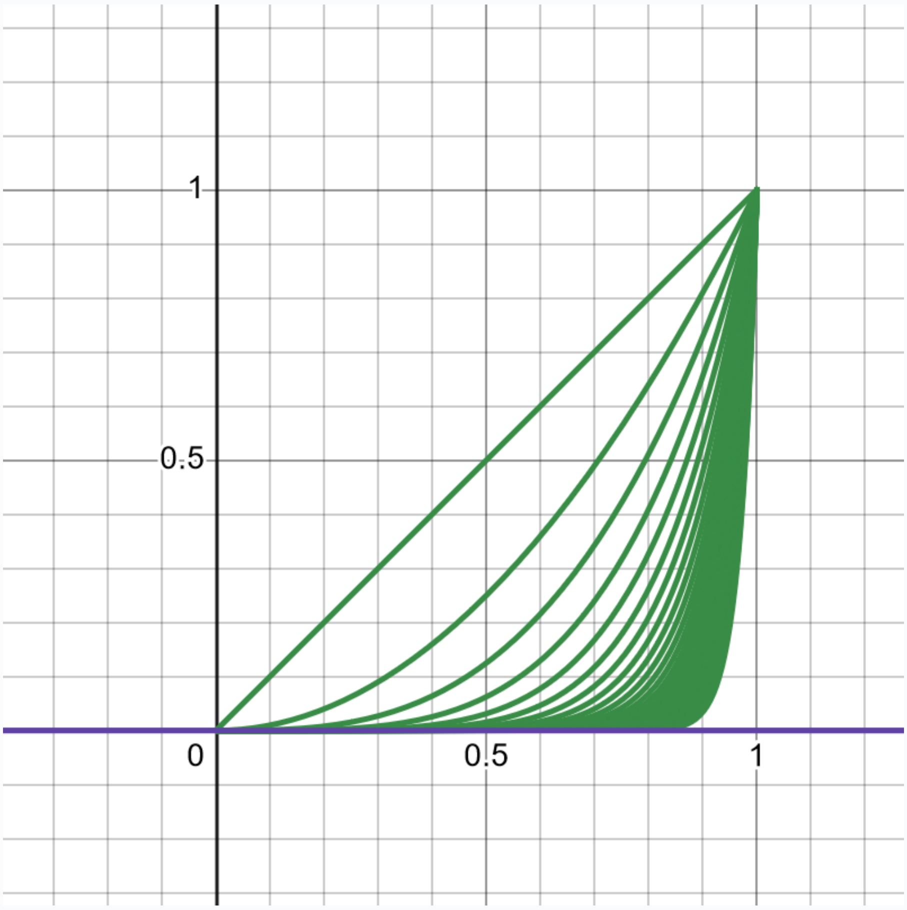
Adesso, prendendo il limite ho

$$\lim_n 1^n = 1$$

che ci dice che questa funzione *non* è *uniformemente convergente*.

Infatti, questa plottando questa successione di funzioni, troviamo che questa è *compatibile* con l'*interpretazione geometrica della convergenza uniforme*; ad un certo punto le funzioni $f_n(x)$ salgono sempre in una maniera *"incontrollabile"* verso 1 (*figura 3.3.*)

FIGURA 3.3. (*Funzione non uniformemente convergente*)



A3. Teoremi di passaggio del limite

Teoremi di Passaggio del Limite per le Successioni di Funzioni

---

Teoremi di Passaggio del Limite per le Successioni di Funzioni: Continuità, scambio con la derivata e con l'integrale. Esempi.

0. Voci Correlate

- Convergenza Puntuale e Uniforme per Successioni di Funzioni
- Definizione di Continuità
- Funzioni di potenza, radice e valore assoluto
- Derivata e derivabilità
- Integrabilità secondo Riemann

1. Teorema di passaggio al limite per funzioni continue

#Teorema

> Teorema (di passaggio al limite per funzioni continue).
>
> Sia $f_n : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una *successione di funzioni continue*. Sia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$.
> Se f_n *converge uniformemente a* f, allora f è *continua*.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 1 (di passaggio al limite per funzioni continue)
Riscrivo le ipotesi come il seguente:
"f_n converge uniformemente a f" diventa

$$\begin{gathered}\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n}, \forall x \in [a, b] \\ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon\end{gathered}$$

"f_n sono continue" diventa

$$\begin{gathered}\forall x_0 \in [a, b], \forall m \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \\ x \in (x_0 - \delta_m, x_0 + \delta_m) \implies |f_m(x) - f_m(x_0)| \leq \varepsilon\end{gathered}$$

Adesso riscrivo la tesi, di cui voglio provare, come

$$\begin{gathered}\forall x_0 \in [a, b], \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \\ x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \implies |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon\end{gathered}$$

Per dimostrare questo prendere $|f(x) - f(x_0)|$ e aggiungere

$$f_m(x) - f_m(x) + f_m(x_0) - f_m(x_0) = 0$$

e si ha che

$$|f(x)-f(x_0)| = |f(x)-f_m(x)+f_m(x)-f_m(x_0)+f_m(x_0)-f(x_0)|$$

e per la disuguaglianza triangolare si ha

$$\begin{aligned}|f(x)-f(x_0)| &\leq \underbrace{|f(x)-f_m(x)|}_{\leq\varepsilon} + \underbrace{|f_m(x)-f_m(x_0)|}_{\leq\varepsilon} + \underbrace{|f_m(x_0)-f(x_0)|}_{\leq\varepsilon} \\ &\leq 3\varepsilon = \varepsilon'\end{aligned}$$

che è la tesi, dato che ε è un valore arbitrario. ■

2. Teorema del scambio del limite con la derivata

#Teorema

> Teorema (del scambio del limite con la derivata).
>
> Sia $f_n : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una *successione di funzioni derivabili*.
> Se valgono che:
> i. La successione delle derivate $(f_n')_n$ *converge uniformemente* in (a,b) verso g
> ;
> ii. La successione delle funzioni $(f_n)_n$ *converge uniformemente* in almeno in un punto $t_0 \in (a,b)$.
> Allora la successione delle funzioni $(f_n)_n$ *converge uniformemente* in (a,b).
> Sia f il suo *limite*, risulta f *derivabile* e si ha $f' = g$. In altre parole, si può scambiare la derivata col limite;
>
> $$\lim_n \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f_n(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\lim_n f_n(t)\right)$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE DEL Teorema 2 (del scambio del limite con la derivata)
Omessa. La dimostrazione è disponibile sulla p. 114 del Pagani-Salsa. ■

#Osservazione

> Osservazione (la convergenza uniforme di una successione non garantisce la convergenza delle derivate).
>
> Si osserva che la *convergenza uniforme* di una successione $(f_n)_n$ non garantisce la *derivabilità* della *convergenza delle derivate* $(f_n')_n$.
>
> Infatti, prendiamo il seguente controesempio. Posto $f_n(x)$ come

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$$

sappiamo che chiaramente $\lim_n f_n(x) = 0$, in una maniera uniforme. Adesso consideriamo le $(f_n')_n$; queste sono uguali a

$$f_n'(x) = \cos(nx)$$

tuttavia, queste *non hanno limite*, dunque *non convergenti in alcun modo*.

3. Teorema del scambio del limite con l'integrale

#Teorema

Teorema (del scambio del limite con l'integrale).

Se $f_n : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ è una *successione di funzioni limitate* ed *integrabili secondo Riemann* su $[a, b]$ e *converge uniformemente* a f, allora f è *integrabile secondo Riemann* su $[a, b]$ e vale che

$$\lim_n \int_a^b f_n(t) \ \mathrm{d}t = \int_a^b f(t) \ \mathrm{d}t$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 4 (del scambio del limite con l'integrale)
Omessa, dimostrazione disponibile sulla p. 115 del Pagani-Salsa. ■

#Osservazione

Osservazione (la convergenza uniforme è una condizione necessaria).

Si osserva che la *successione di funzioni* dev'essere *uniformemente* convergente a f. Dimostriamo questa necessità con un controesempio.

Sia $f_n : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$. Di questa funzione sappiamo, per l'archimedeità dei reali, che tende a $f_n(x) \to 0$. Per lo stesso motivo, *non* è *uniformemente* convergente, dato che l'*estremo superiore* della funzione è raggiunta in $x \to 0 \implies f_n(x) \to n$.

Adesso, se considero l'integrale della successione ho

$$\int_0^1 f_n(t) \ \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{n}} (n - n^2 x) \ \mathrm{d}x = 0.5$$

però allo stesso tempo ho

$$\int_0^1 f(x) \, \mathrm{d}x = 0$$

Quindi non è valido *"scambiare l'integrale col limite"*.

SEZIONE B. LE SERIE DI FUNZIONI

B1. Definizioni Relative alle Serie di Funzioni

Definizioni Relative alle Serie di Funzioni

Trasposizione teorica della parte relativa alle serie numeriche sulle serie di funzioni. Definizione di serie di funzioni; definizione di convergenza di una serie.

---

0. Voci Correlate

- Definizione di Serie
- Carattere di una Serie
- Convergenza Puntuale e Uniforme per Successioni di Funzioni

1. Trasposizione teorica

#Osservazione

> Osservazione (possiamo trasporre tutto ciò che sappiamo sulle serie numeriche alle serie di funzioni).
>
> Avendo studiato bene le *successioni di funzioni*, possiamo *"esportare"* ciò che sappiamo sulle *serie numeriche* alle *serie di funzioni*, con definizioni opportune.

2. Definizioni Miste

#Definizione

Definizione (ridotta di una serie di funzioni).

Sia $(f_n)_n$ una *successioni di funzioni* del tipo $f_n : E \longrightarrow \mathbb{R}$ Per ogni punto nel dominio $x \in E$ definisco la *ridotta n-esima* della serie di funzioni come

$$s_n(x) := f_1(x) + \ldots + f_n(x)$$

#Definizione

Definizione (serie di funzioni).

La somma formale

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}^{+\infty} f_n(x)$$

si dice *serie di funzioni*.

#Definizione

Definizione (convergenza di una serie).

Sia $\sum_n f_n(x)$ una serie di funzioni. Se la successione delle ridotte $(s_n)_n$ (*ricordiamoci che è una funzione!*) converge *uniformemente* (o *puntualmente*) ad una funzione $s(x)$ definita sul medesimo dominio E, allora si dice che la *serie* $\sum_n f_n(x)$ *converge uniformemente* (o *puntualmente*) su E con *somma* $s(x)$.

B2. Criteri sulle Serie di Funzioni

Criteri sulle Serie di Funzioni

Ulteriore trasposizione teorica dalle serie numeriche alle serie di funzioni. Novità: l'M-test di Weierstraß.

---

0. Voci Correlate

1. Condizione Necessaria per la Convergenza di una Serie

#Teorema

> Teorema (condizione necessaria per la convergenza di una serie di funzioni).
>
> Sia $\sum_n f_n(x)$ una *serie di funzioni*. Sia questa *serie convergente uniformemente con somma* $s(x)$, allora il limite della successione delle *funzioni generali* $(f_n)_n$ è *convergente uniformemente* verso $O(x) = 0$.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 1 (condizione necessaria per la convergenza di una serie di funzioni)

Dimostrazione completamente analoga alla dimostrazione della *condizione necessaria per la convergenza di una serie numerica* (Teorema 1 (condizione necessaria per la convergenza di una serie)). Infatti, basta considerare

$$f_n(x) = s_n(x) - s_{n-1}(x) \implies \lim_n f_n(x) = 0$$

che è la tesi. ■

2. Criterio di Cauchy per la convergenza uniforme

#Teorema

> Teorema (criterio di Cauchy per la convergenza uniforme di una serie di funzioni).
>
> Sia $\sum_n f_n(x)$ una *serie di funzioni*.
> Sono equivalenti:
> $*)$ $\sum_n f_n(x)$ converge uniformemente su E con somma $s(x)$
> *se e solo se*
> $**)$
>
> $$\begin{gathered}\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} : \forall n \in \mathbb{N}, \forall p > 0, \forall x \in E, \\ n \geq \bar{n} \implies |f_n(x) + f_{n+1}(x) + \ldots + f_{n+p}(x)| \leq \varepsilon\end{gathered}$$

#Dimostrazione

Omessa, dato che è completamente analoga alla sua controparte numerica

(Teorema 4 (Criterio di Cauchy per le serie)). ■

#Osservazione

> Osservazione (l'utilità di questo teorema).
>
> Questo teorema ci è utile in quanto se siamo in *grado* di maggiorare ogni *termine generale* con un *termine numerico* di cui ha una serie che *converge*, allora possiamo utilizzare il *teorema del confronto* per dire che la serie è *convergente*. Infatti, vedremo un teorema che sfrutta questa osservazione.

3. M-Test di Weierstraß

#Teorema

> Teorema (M&M'S-test di Weierstraß).
>
> Sia $\sum_n f_n(x)$ una *serie di funzioni*. Se esiste una *successione numerica* $(M_n)_n$, ovvero col termine generale $M_n \in \mathbb{R}$, tale che valga
>
> $$|f_n(x)| \leq M_n, \forall x \in E$$
>
> allora vale l'implicazione
>
> $$\sum_{n \in \mathbb{N}}^{+\infty} M_n < +\infty \implies \sum_{n \in \mathbb{N}}^{+\infty} f_n(x) \overset{\text{unif.}}{<} +\infty$$
>
> (ovvero se la serie di $(M_n)_n$ è *convergente* allora la serie di $(f_n)_n$ è *uniformemente convergente*)

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 4 (M&M'S-test di Weierstraß)

Supponiamo un punto fissato $x \in E$. Allora si ha per la disuguaglianza triangolare

$$|f_n(x) + f_{n+1}(x) + \ldots + f_{n+p}(x)| \leq ||f_n(x)| + |f_{n+1}(x)| + \ldots + |f_{n+p}(x)$$

per le ipotesi iniziali sappiamo che i termini generali $f_n(x)$ sono maggiorate dai termini generali M_n, dunque

$$|f_n(x) + f_{n+1}(x) + \ldots + f_{n+p}(x)| \leq |M_n + M_{n+1} + \ldots + M_{n+p}|$$

allora per il *criterio di Cauchy* (Teorema 2 (criterio di Cauchy per la convergenza uniforme di una serie di funzioni)) se $\sum_n f_n(x)$ è *uniformemente convergente* se e solo se $\sum_n M_n$ è *convergente*. ■

#Osservazione

> Osservazione (questo teorema ci dice qualcosa di più).
>
> Inoltre si nota che questo teorema ci dice che anche la *serie dei valori assoluti delle funzioni* $\sum_n |f_n(x)|$ è *uniformemente convergente*.

4. Criterio di Leibniz per le Serie di Funzioni

#Teorema

> Teorema (criterio di Leibniz per la convergenza uniforme).
>
> Sia $(f_n)_n$ una *serie di funzioni*, tali che $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in E$ valgano le seguenti:
>
> - $f_n(x) > 0$ (*la positività della funzione*)
> - $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ (*la monotonia della funzione*)
> - $f_n(x)$ converge uniformemente verso 0
>   Allora la serie
>
> $$\sum_{n\in\mathbb{N}}^{+\infty}(-1)^n f_n(x)$$
>
> *converge uniformemente* con una stima dell'errore data da
>
> $$|s(x) - s_n(x)| \leq f_{n+1}(x)$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 6 (criterio di Leibniz per la convergenza uniforme)
Questo teorema è la controparte numerica del *criterio di Leibniz per le serie numeriche a segno alternato* (Teorema 6 (criterio di Leibniz per le serie a termini di segno alternato)). ■

B3. Teoremi di passaggio del limite

Teoremi di Passaggio del Limite per le Serie di Funzioni

Teoremi di passaggio al limite per le serie di funzioni: derivata di una serie, integrale di una serie e una serie di funzioni continue.

---

0. Voci correlate

- Teoremi di Passaggio del Limite per le Successioni di Funzioni
- Definizioni Relative alle Serie di Funzioni

1. Teoremi di Passaggio del Limite per le Serie Funzionali

#Osservazione

Osservazione (possiamo trasporre altre conoscenze).

Conoscendo i *teoremi di passaggio del limite per le successioni di funzioni* (Teoremi di Passaggio del Limite per le Successioni di Funzioni), possiamo applicare queste conoscenze sulle *serie di funzioni*.

#Teorema

Teorema (derivata di una serie).

Sia $(f_n)_n$ una *successione di funzioni* con il termine generale $f_n : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *derivabile sul dominio*. Se valgono che:
i. La serie delle derivate $\sum_n f_n'(x)$ è *uniformemente convergente nel dominio* con *somma* $G(t)$
ii. La serie delle funzioni generali $\sum_n f_n(x)$ è *convergente almeno in un punto* $t_0 \in (a, b)$,
allora anche la serie $\sum_n f_n(x)$ è *uniformemente convergente* in (a, b), detta $F(t)$ la sua somma, risulta che F è *derivabile* e si ha $F'(t) = G(t)$. In altre parole, possiamo effettuare lo *"scambio"*

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x)$$

#Teorema

Teorema (l'integrale di una serie).

Sia data $(f_n)_n$ una *serie di funzioni* tali che il termine generale f_n sia *limitata* e *integrabile in* $[a, b]$.
Se $\sum_n f_n(t)$ è *convergente uniformemente* in $[a, b]$ con somma $F(t)$, allora vale che F è *integrabile secondo Riemann* in $[a, b]$ e risulta

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)\ \mathrm{dt} = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\ \mathrm{dt}$$

#Teorema

Teorema (la continuità di una serie).

Sia $(f_n)_n$ una *serie di funzioni continue* sull'intervallo I. Se vale che:
i. $\sum_n f_n(t)$ converge uniformemente con somma $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$
Allora f è *continua su* I.

SEZIONE C. LE SERIE DI POTENZE

C1. Definizione di Serie di Potenze

Definizione di Serie di Potenze

Osservazione preliminare. Definizione di serie di potenze a coefficienti reali con punto iniziale x_0 (o concentrata in x_0). Esempi di serie di potenze e la loro convergenza al variare di $x \in E$.

---

0. Voci correlate

- Definizioni Relative alle Serie di Funzioni
- Criteri sulle Serie di Funzioni

1. Definizione di Serie di Potenze

#Osservazione

Osservazione (osservazione preliminare).

Poniamoci il seguente problema: dato che le *funzioni* possono rappresentare delle *somme per le serie di funzioni*, possiamo approssimare le *funzioni* con delle *funzioni più gestibili*? Come ad esempio con potenze? In questa parte sulle *serie di potenze* si parlerà di questo argomento.

#Definizione

Definizione (serie di potenze a coefficienti reali con punto iniziale in x_0).

Sia $(a_n)_n$ una *successione reale*. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$.
Posto per ogni $n \in \mathbb{N}$ come $f_n := a_n(x-x_0)^n$, si definisce la *serie di funzioni*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$$

e questa si dice *"serie di potenze a coefficienti reali con punto iniziale x_0"*.

#Osservazione

Osservazione (sulla convergenza della serie).

Si osserva che per $x = x_0$, la serie è *sempre* convergente, dato che $x - x_0$ si anulla.
Inoltre, di solito si pone $x_0 = 0$.

2. Esempi di Serie di Potenze

#Esempio

Esempio (serie di potenze globalmente convergente).

Sia $x_0 = 0$ e $a_n = \frac{1}{n!}$. Allora si ha la *serie di potenze*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Questa serie di potenze converge per $x = 0$ e anche per $x \in \mathbb{R}$ per il *criterio del rapporto*.

#Esempio

Esempio (serie di potenze convergente su un intervallo non degenere).

Prendiamo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

Questa è esattamente una *serie geometrica* (Esempio 9 (Serie geometrica generalizzata)), pertanto è convergente per $|x| < 1$ e divergente per $|x| \geq 1$. Quindi la serie è convergente per l'intorno di 0 posto come $(-1, 1)$.

#Esempio

Esempio (serie di potenze convergente solo sul centro).

Prendiamo adesso

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n! x^n$$

Questa serie è convergente *se e solo se* $x = x_0 = 0$, per il criterio del rapporto.

#Osservazione

Osservazione (gli intervalli di convergenza sono degli intorni del centro).

Notiamo che l'*insieme di convergenza* sono sempre un *intorno* di x_0. In seguito parleremo di *raggio di convergenza* (Insieme e Raggio di Convergenza per una Serie di Potenze).

C2. Insieme e Raggio di Convergenza

Insieme e Raggio di Convergenza per una Serie di Potenze

Lemma preliminare (di Abel). Definizione di insieme e raggio di convergenza per una serie di potenze. Proprietà del raggio di convergenza, teorema di struttura *dell'insieme di convergenza.*

---

0. Voci Correlate

- Definizioni Relative alle Serie di Funzioni
- Definizione di Serie di Potenze
- Criteri sulle Serie di Funzioni

1. Lemma di Abel

#Lemma

Lemma (di Abel).

Sia $S(x, x_0) = \sum_n a_n(x-x_0)^n$ una *serie di potenze*. Se questa serie converge in $\bar{x}$, con $\bar{x} \neq x_0$, allora esso converge assolutamente per ogni $x \in \mathbb{R}$ tale che $|x-x_0| < |\bar{x}-x_0|$.
Ovvero,

$$S(\bar{x} \neq x_0, x_0) < +\infty \implies \forall x \in (x_0 - \bar{x}, x_0 + \bar{x}), S(x, x_0) < +\infty$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Lemma 1 (di Abel)
Consideriamo fissato un qualsiasi $x \in \mathbb{R} \cap (x_0 - \bar{x}, x_0 + \bar{x})$. Allora vale che

$$|a_n(x-x_0)^n| = |a_n(\bar{x}-x_0)^n| \cdot \underbrace{\left(\frac{|x-x_0|}{|\bar{x}-x_0|}\right)^n}_{<1}$$

Poiché la serie $\sum_n a_n(\bar{x}-x_0)$ converge, è *necessario* che il limite dei termini generali sia convergente a 0 (Teorema 1 (condizione necessaria per la convergenza di una serie)); ovvero

$$\lim_n |a_n(\bar{x}-x_0)|^n = 0$$

Allora per la *definizione* $\varepsilon - \bar{n}$ del limite (Definizione 3 (limite di successione)), esiste un $M > 0$ tale che

$$|a_n(\bar{x}-x_0)| \leq M$$

(ovvero ogni termine generale della *serie numerica* è limitata in $\bar{x}$).
Inoltre, definendo

$$q = \frac{|x - x_0|}{|\bar{x} - x_0|} < 1, \forall x$$

Allora posso metterli assieme, ottenendo la disuguaglianza

$$|a_n(x - x_0)^n| \leq M \cdot q^n \implies \sum_{n \in \mathbb{N}}^{+\infty} |a_n(x - x_0)^n| \leq \sum_{n \in \mathbb{N}}^{+\infty} M \cdot q^n$$

Allora, sapendo che la serie

$$\sum_{n \in \mathbb{N}}^{+\infty} M \cdot q^n$$

converge (si può usare il *criterio del rapporto* (Teorema 3 (criterio del rapporto col limite))) a $q \in (0, 1)$. Allora, per il *teorema del confronto*, la serie di funzioni è *convergente* (senza dover essere necessariamente *uniforme*). ■

#Corollario

> Corollario (ulteriori condizioni per la convergenza uniforme).
>
> Sia una *serie di potenze* $\sum_n a_n(x - x_0)^n$ convergente per $\bar{x} \neq x_0$. Per ogni $0 < r < |\bar{x} - x_0|$ la *serie di potenze* è *uniformemente convergente* su *ogni compatto* $[x_0 - r, x_0 + r]$.

#Dimostrazione
DIMOSTRAZIONE del Corollario 2 (ulteriori condizioni per la convergenza uniforme)
Si può dimostrare con l'*M-test di Weierstraß* (Teorema 4 (M&M'S-test di Weierstraß)). Per una dimostrazione completa vedere p. 142 (proposizione 2.11) del Pagani-Salsa. ■

2. Raggio e Insieme di Convergenza

#Definizione

> Definizione (insieme di convergenza per una serie di potenze).

Sia $\sum_n a_n(x-x_0)^n$ una *serie di potenze*.
Poniamo l'insieme

$$I := \left\{ x \in \mathbb{R} \middle| \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n < +\infty \right\}$$

come il suo *insieme di convergenza*. Notiamo che $I \neq \emptyset$, qualunque *serie di potenze* abbiamo.

#Definizione

Definizione (raggio di convergenza per una serie di potenze).

Sia $\sum_n a_n(x-x_0)^n$ una *serie di potenze* col suo raggio di convergenza I.
Allora poniamo il numero della *retta reale estesa* (ovvero $\mathcal{R} \in \tilde{\mathbb{R}}$) come

$$\mathcal{R} := \sup\{|x-x_0|, x \in I\}$$

il suo *raggio di convergenza*.
Si nota che si ha *sempre* $0 \leq \mathcal{R} \leq +\infty$.

3. Struttura del Raggio e dell'Insieme di Convergenza

#Teorema

Teorema (proprietà del raggio di convergenza).

Il raggio di convergenza $\mathcal{R}$ per una serie di potenze $\sum_n a_n(x-x_0)^n$ con intervallo di convergenza I soddisfa le seguenti:
i. Se un $x \in \mathbb{R}$ è tale che $|x-x_0| < \mathcal{R}$, allora $\sum_n a_n(x-x_0)^n$ è *assolutamente convergente*.
ii. Se un $x \in \mathbb{R}$ tale che $|x-x_0| > \mathcal{R}$, allora $\sum_n a_n(x-x_0)^n$ non è *convergente*.

Viceversa se esiste un $\mathcal{R}' \in [0, +\infty]$ che verifica le *i.*, *ii.*, allora $\mathcal{R}' = \mathcal{R}$ (ovvero è il raggio di convergenza).

DIMOSTRAZIONE (parziale) del Teorema 5 (proprietà del raggio di convergenza).
Dimostriamo solo il punto i. del teorema.

Sapendo che per definizione $\mathcal{R}$ è un *estremo superiore* di un insieme, possiamo usare le *proprietà caratterizzanti* di un $\sup$ (Teorema 16 (le proprietà dell'estremo superiore)). In particolare, usiamo il seguente punto:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{x} \in I : |\bar{x} - x_0| + \varepsilon > \mathcal{R}$$

Adesso scelgo $\varepsilon = \mathcal{R} - |x - x_0| > 0$; ho quindi

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &< |\bar{x} - x_0| + \mathcal{R} - |x - x_0| \\ \implies |x - x_0| &< |\bar{x} - x_0| \end{aligned}$$

e per il *lemma di Abel* ho l'assoluta convergenza in x.
Per dimostrare il punto ii. si procede invece *per assurdo*. $\blacksquare$

#Teorema

> Teorema (struttura dell'insieme di convergenza).
>
> Sia $\sum_n a_n(x - x_0)^n$ una serie di potenze con insieme di convergenza I.
> Questo insieme di convergenza è un *insieme connesso in* $\mathbb{R}$ ed è:
>
> - o il singoletto x_0 (in caso si ha un insieme degenere)
> - o un intervallo centrato in x_0 qualsiasi

DIMOSTRAZIONE del Teorema 6 (struttura dell'insieme di convergenza)
Sia $\mathcal{R} = +\infty$; allora $I = \mathbb{R}$.
Se invece $\mathcal{R} > 0$, allora ho l'intervallo

$$(x_0 - \mathcal{R}, x_0 + \mathcal{R}) \subseteq I \subseteq [x_0 - \mathcal{R}, x_0 + \mathcal{R}]$$

Se invece $\mathcal{R} = 0$, allora ho $I = \{x_0\}$. $\blacksquare$

C3. Funzione Somma

Funzione Somma di una Serie di Potenze

Definizione di funzione somma di una serie di potenze, proprietà della funzione somma.

---

0. Voci correlate

- Insieme e Raggio di Convergenza per una Serie di Potenze
- Definizione di Serie di Potenze
- Teoremi di Passaggio del Limite per le Serie di Funzioni

1. Definizione di Funzione Somma

#Definizione

Definizione (funzione somma di una serie di potenze).

Sia $\sum_n a_n(x-x_0)^n$ una serie di potenze con insieme di convergenza $I_\mathcal{R}$. Per ogni $x \in I_\mathcal{R}$ definiamo la *funzione somma* come

$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$$

ovvero una funzione del tipo $f: I_\mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

2. Proprietà della Funzione Somma

#Teorema

Teorema (proprietà della funzione somma).

Sia $f(x)$ la *funzione somma* per la *serie di potenze* $\sum_n a_n(x-x_0)^n$. Allora valgono le seguenti.
i. (*teorema di integrazione termina a termine*) f è *continua* in $I_\mathcal{R}$ e vale che

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^x f(t)\ \mathrm{d}t &= \int_{x_0}^x \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(t-x_0)^n\ \mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{x_0}^x a_n(t-x_0)^n\ \mathrm{d}t = \boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}}\end{aligned}$$

ii. (*teorema di derivazione termine a termine*) f è *derivabile* in $I_\mathcal{R}$ e vale che

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x)] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n\right]$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[a_n(x-x_0)^n] = \boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}}$$

#Corollario

Corollario (la funzione somma è infinitamente derivabile).

La funzione somma f è *derivabile infinitamente volte* in $I_\mathcal{R}$ e $\forall k \in \mathbb{Z}$ vale che

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} f(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} (n)(n-1)\dots(n-k+1)(x-x_0)^{n-k} \cdot a_n$$

e la serie-derivata ha *raggio di convergenza* $\mathcal{R}$.

SEZIONE D. LE SERIE DI TAYLOR

D1. Definizione di Serie di Taylor

Definizione di Serie di Taylor

Osservazione preliminare per le serie di Taylor: le serie di potenze possono diventare i coefficienti di Taylor. Definizione di serie di Taylor

---

0. Voci correlate

- Formula di Taylor
- Definizione di Serie di Potenze
- Funzione Somma di una Serie di Potenze

1. Osservazione preliminare

#Osservazione

Osservazione (le serie di potenze sono riconducibili alla formula di Taylor).

Consideriamo una *serie di potenze* (1) $\sum_n a_n(x-x_0)^n$, col *raggio di convergenza* $\mathcal{R} \in (0, +\infty]$ (2) e sia f la *funzione somma* (3).
Per i *teoremi enunciati su* f (4), sappiamo che $f \in \mathcal{C}^\infty$ (5) e si ha

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} f(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} (n)(n-1)\dots(n-k+1)(x-x_0)^{n-k} \cdot a_n$$

Adesso applichiamo questa formula per $x = x_0$; si ha

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} f(x_0) = k! a_k$$

(si nota che stiamo usando la convenzione $0^0 = 1$)
Si ricava il *termine generale* k-esimo della successione $(a_n)_n$ come

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

che è proprio il *termine* k-esimo del *polinomio di Taylor* (6).
Dunque, possiamo scrivere per $x \in I_\mathcal{R}$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

2. Definizione di Serie di Taylor

#Definizione

Definizione (serie di Taylor di una funzione avente un punto iniziale).

Sia $f \in \mathcal{C}^\infty$ su $I = (x_0 - k, x_0 + k)$ con $k > 0$.
La *serie di funzioni* (in particolare la *serie di potenze*)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

si dice *"serie di Taylor di f avente punto iniziale x_0"*.

#Osservazione

Osservazione (relazione tra funzione e la sua serie di Taylor).

Per una funzione di classe infinito abbiamo definito una sua *"serie di Taylor"*. Possiamo trovare un legame tra gli due oggetti matematici? Vedremo questo con la nozione di *sviluppabilità in serie di Taylor* (Sviluppabilità di una Funzione in Serie di Taylor).

D2. Sviluppabilità in Serie di Taylor

Sviluppabilità di una Funzione in Serie di Taylor

Definizione di serie sviluppabile in serie di Taylor centrata in x_0. Teorema di convergenza della serie di Taylor. Definizione di funzione analitica su un intervallo.

---

0. Voci Correlate

- Definizione di Serie di Taylor
- Definizione di Serie di Potenze
- Formula di Taylor

1. Definizione di Sviluppabilità in Taylor

#Definizione

Definizione (funzione sviluppabile in serie di Taylor centrata in un punto).

Una funzione $f \in \mathcal{C}^\infty$ si dice *"sviluppabile in serie di Taylor centrata in x_0"* se esiste un'*ampiezza* (numero) $h > 0$ tale che $\forall x \in (x_0 - h, x_0 + h)$, valga

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

2. Definizione di Funzione Analitica

#Osservazione

Osservazione (ci sono funzioni non sviluppabili in Taylor).

Si chiede se *vale sempre* la seguente implicazione:

$$f \in \mathcal{C}^\infty \implies f \text{ sviluppabile in Taylor}$$

la risposta è *no*. Infatti, vediamo il seguente controesempio.

Definiamo la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$$

Notiamo che f è *sempre continua e derivabile*. Infatti,

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} R_n(x) e^{-\frac{1}{x^2}}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$$

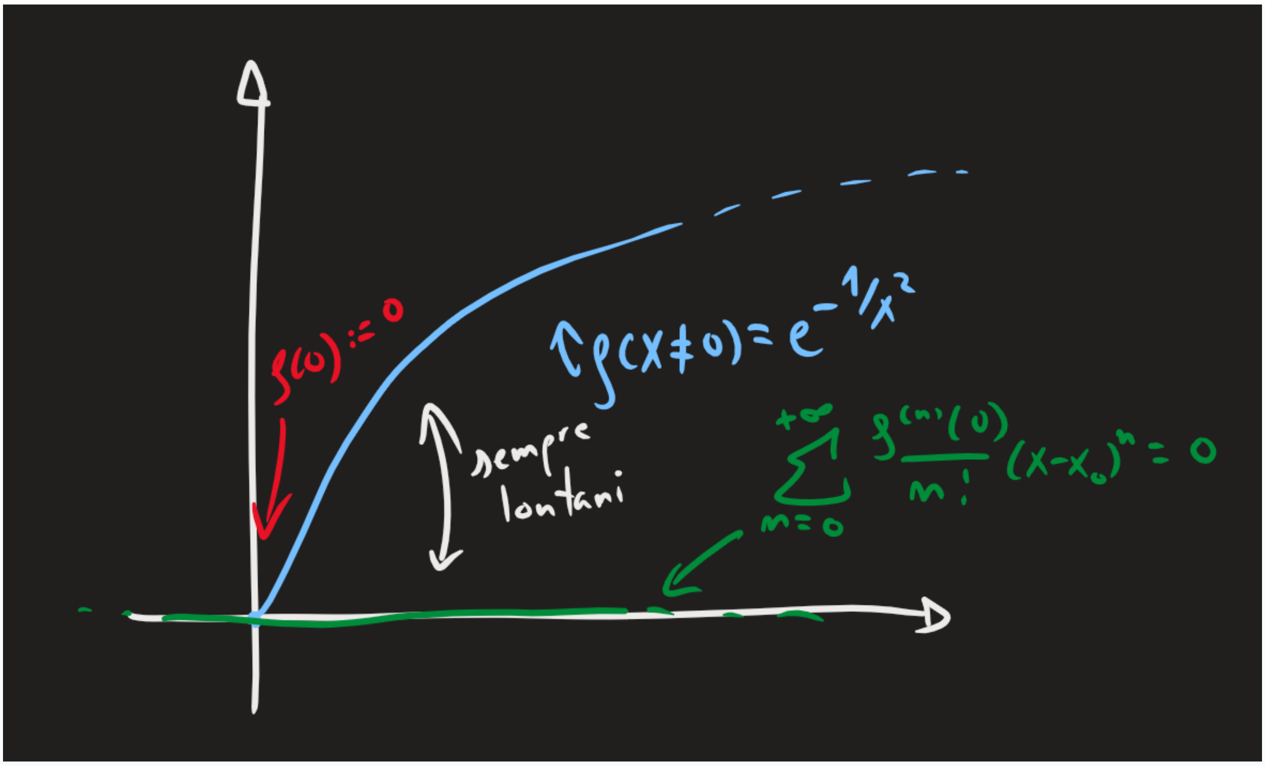
dove R_n è una qualsiasi *funzione razionale*, ottenuta applicando la *regola della catena per le derivate*.
Adesso prendiamo la sua *serie di Taylor* centrata in $x_0 = 0$. (in particolare si ha una serie di *Taylor-MacLaurin*); si ha dunque

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} x^n = 0 + \ldots + 0 = 0$$

Ma allora per un qualsiasi $h > 0$, si avrà sempre che la serie di Taylor è la funzione nulla $f(x) = 0$, che *non* è la funzione originaria (graficamente si ha la *figura 2.1.*).

Conclusione: solo una parte ristretta di funzioni $\mathcal{C}^\infty$ sono sviluppabili in Taylor; chiameremo queste funzioni *"analitiche"*.

FIGURA 2.1. (*Funzione non sviluppabile in Taylor*)



#Definizione

Definizione (funzione analitica su un intervallo).

Si dice che $f:(a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ è *analitica* se vale che per $\forall x_0 \in (a,b)$, f è *sviluppabile in serie di Taylor centrato in* x_0.
Vengono indicate come

$$\mathcal{H}(]a,b[)$$

#Osservazione

Osservazione (conclusione dell'osservazione precedente).

Concludiamo l'osservazione precedente col seguente formalismo.

$$\boxed{\mathcal{H}(]a,b[) \subset \mathcal{C}^\infty(]a,b[)}$$

3. Teorema di Convergenza della Serie di Taylor

#Osservazione

Osservazione (preambolo).

> Adesso vediamo una *condizione sufficiente* per la *sviluppabilità in Serie di Taylor* di una funzione.

#Teorema

Teorema (di convergenza della serie di Taylor).

Sia $f:(x_0-h, x_0+h) \longrightarrow \mathbb{R}$, con $f \in \mathcal{C}^{\infty}$, e supponiamo che esista un $M>0$ tale che $\forall n$ valga

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \leq M \cdot \frac{n!}{h^n}$$

allora si ha la *sviluppabilità in serie di Taylor* di f in x_0. Ovvero,

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

#Corollario

Corollario (ulteriori condizioni per la convergenza uniforme).

Per avere anche la *convergenza uniforme*, bisogna prendere un $0<r<h$ e un compatto $[x_0-r, x_0+r]$.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 6 (di convergenza della serie di Taylor)
Innanzitutto osserviamo che per l'ipotesi iniziale abbiamo, per un qualsiasi x nel dominio

$$\left|f^{(n+1)}(x)\right| \leq M \cdot \frac{(n+1)!}{h^{n+1}}$$

Ora scriviamo lo scarto tra la somma e il resto $n+1$-esimo della serie; si ha che $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$|f(x)-s_{n+1}(x)|=|f(x)-p_{n, x_0}(x)|$$

dove $p_{n, x_0}(x)$ è il *polinomio di Taylor* di ordine n-esimo centrato in x_0 (Definizione 2.1. (polinomio di Taylor)). Per la *formula di Taylor col resto di Lagrange* (Teorema 2.2. (di Taylor col resto di Lagrange)), esiste un $\xi \in (x_0, x)$ (oppure (x, x_0)) tale che

$$
\begin{aligned}
|f(x) - p_{n,x_0}(x)| &= \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \right| \\
&\leq M \frac{(n+1)!}{h^{n+1}} \cdot \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} = M\left(\frac{|x-x_0|}{h}\right)^{n+1}
\end{aligned}
$$

Adesso osserviamo che il termine

$$
q(x) = \frac{|x-x_0|}{h} \in (0,1)
$$

(ovvero è limitata in $(0;1)$); di conseguenza si ha il limite

$$
\lim_n |f(x) - p_{n,x_0}(x)| \leq \lim_n M \cdot q(x)^n = 0
$$

di conseguenza, vale che anche il limite dell'errore è nullo. Ovvero,

$$
\lim_n |f(x) - s_{n+1}(x)| = 0
$$

il ché dimostra che la serie è sviluppabile su Taylor, dal momento che l'errore diventa arbitrariamente piccolo. ■

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Corollario 7 (ulteriori condizioni per la convergenza uniforme)

In questo caso basta osservare che

$$
x \in [x_0 - r, x_0 + r] \subset (x_0 - h, x_0 + h)
$$

quindi qualsiasi punto x prendo, la sua distanza da r sarà sempre più piccola della sua distanza da h. Ovvero, $|x-x_0| < h < r$

Ma allora se prendo l'estremo superiore dello scarto ho

$$
\sup_x |f(x) - s_{n+1}(x)| \leq M\left(\frac{r}{h}\right)^{n+1}
$$

ricordandoci che l'ultimo termine è limitato da

$$
0 < \frac{r}{h} < 1
$$

ho il limite dell'estremo superiore

$$
\lim_n \left(\sup_{0<|x-x_0|<r} |f(x) - s_{n+1}(x)| \right) = 0
$$

il ché prova la convergenza uniforme (Teorema 5 (di caratterizzazione della convergenza uniforme)). ■

#Osservazione

> Osservazione (condizione più generale ma restrittiva).
>
> Osservare che, sebbene ho una condizione *molto "particolare"*, abbiamo comunque una condizione poco restrittiva. Infatti, ho il limite
>
> $$\lim_n \frac{n!}{h^n} = +\infty$$
>
> Quindi per controllare la *sviluppabilità di una serie in Taylor*, bisogna che una funzione non *"esploda in una maniera più incontrollata del limite limitante"*.
>
> Infatti, spesso si verifica che esiste un $K > 0$ tale che
>
> $$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in (x_0 - h, x_0 + h), \left|f^{(n)}(x)\right| \le K$$
>
> che è *sufficiente* per la *sviluppabilità di una serie in Taylor*; se il limite è finito, allora a maggior ragione è meno di infinito.

D3. Esempi di Sviluppi di Taylor

Esempi di Serie di Taylor-MacLaurin

Esempi di sviluppi di funzioni in Serie di Taylor. Funzione esponenziale $\exp$*, trigonometriche* $\sin$, $\cos$, $\sinh$, $\cosh$.

---

0. Voci correlate

- Definizione di Serie di Taylor
- Sviluppabilità di una Funzione in Serie di Taylor

1. Funzione esponenziale

#Teorema

Teorema (sviluppo di Taylor-MacLaurin per la funzione esponenziale).

Sia $f:(-h,h)\longrightarrow\mathbb{R}$ con $f(x)=e^x$. Risulta che f è *sviluppabile in serie di Taylor-MacLaurin* con $h>0$ qualsiasi e si ha

$$e^x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$$

DIMOSTRAZIONE del Teorema 1 (sviluppo di Taylor-MacLaurin per la funzione esponenziale)
Verifichiamo che e^x è *sviluppabile in serie di Taylor*; basta prendere $K=e^h$ ed effettuare la seguente maggiorazione

$$\left|f^{(n)}(x)\right|=|e^x|\leq K$$

quindi per il *teorema di convergenza* (Teorema 6 (di convergenza della serie di Taylor)) e^x è *sviluppabile in serie di Taylor* per un h qualsiasi.
Poiché $f^{(n)}(0)$ rimane uguale a $e^0=1$, ho

$$e^x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}x^n$$

che è la tesi. ■

2. Funzioni Trigonometriche

#Teorema

Teorema (sviluppo di Taylor-MacLaurin per le funzioni trigonometriche).

Siano $f(x)=\sin x$ e $g(x)=\cos x$. Allora risulta che entrambi sono *sviluppabili in serie di Taylor* con $x_0=0$ e con $h>0$ qualsiasi. Risulta che

$$\sin x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

e

$$\cos x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 2 (sviluppo di Taylor-MacLaurin per le funzioni trigonometriche)
Si dimostra solo per $\sin x$. Si nota preliminarmente che le derivate oscillano per un numero finito per valore, in particolare

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} f^{(4n+1)}(x) = \cos x \to \cos 0 = 1 \\ f^{(4n+2)}(x) = -\sin x \to -\sin 0 = 0 \\ f^{(4n+3)}(x) = -\cos x \to -\cos 0 = -1 \\ f^{(4n+0)}(x) = \sin x \to \sin 0 = 0 \end{cases}$$

Allora notiamo che sono sempre limitate per $K = 1$ (provando la sviluppabilità in serie di Taylor) e in particolare si ha che i termini della serie si annullano per numeri dispari. Quindi si ha

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

il ragionamento è analogo per $\cos x$. ■

#Teorema

> Teorema (sviluppo di Taylor-MacLaurin per le funzioni trigonometriche iperboliche).
>
> Siano $\sinh x$ e $\cosh x$ le *funzioni trigonometriche iperboliche*. Si ha che sono *sviluppabili in serie di Taylor* in x_0 con $h > 0$ qualsiasi e risultano le somme
>
> $$\sinh x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$
>
> e
>
> $$\cosh x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 3 (sviluppo di Taylor-MacLaurin per le funzioni trigonometriche iperboliche)
Basta tenere conto che le funzioni trigonometriche iperboliche $\sinh$ e $\cosh$ vengono definite come

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

e

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

e usando lo *sviluppo di serie in Taylor* per la funzione $\exp$ otteniamo la tesi. ■

SEZIONE E. ESERCIZI

E1. Successioni di Funzioni

Esercizi sulle Successioni di Funzioni

Esercizi sulle successioni di funzioni.

---

1. Convergenza puntuale e uniforme

#Esercizio

Esercizio.

Studiare la convergenza puntuale e uniforme di

$$f_n(x) = \frac{nx^3}{1+nx^2}$$

#Esercizio

Esercizio.

Sia $(a_n)_n$ una successione reale e si consideri la successione di funzioni definita come

$$f_n(x) = a_n \cdot \mathcal{X}_{[n,n+1)}(x)$$

dove $\mathcal{X}_E(x)$ è la funzione caratteristica definita sull'intervallo E definita come

$$\mathcal{X}_E(x) = \begin{cases} 0, x \notin E \\ 1, x \in E \end{cases}$$

studiare la convergenza puntiforme e uniforme in $\mathbb{R}^+$.

#Esercizio

Esercizio.

Studiare la successione di funzioni in $\mathbb{R}$ della successione di funzioni

$$f_n(x) = \arctan(nx)$$

#Esercizio

Esercizio.

Discutere la convergenza delle successioni di funzioni

$$f_n(x) = x + \frac{x}{n}\sin(nx)$$

su $[-2, 2]$ e su $\mathbb{R}$.

E2. Serie di Funzioni

Esercizi sulle Serie di Funzioni

Esercizi sulle Serie di Funzioni.

---

1. Convergenza delle Serie di Funzioni

#Esercizio

Esercizio.

Studiare la convergenza uniforme di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{1+n^3}$$

su $E = \mathbb{R}$.

#Esercizio

Esercizio.

Studiare la convergenza uniforme di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sqrt{\frac{n+x}{n^2 x}}$$

su $E = [1, 2]$.

2. Serie di Potenze

#Esercizio

Esercizio.

Studiare il raggio di convergenza di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^n$$

#Esercizio

Esercizio.

Studiare il raggio di convergenza di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1}$$

#Esercizio

Esercizio.

Studiare il raggio di convergenza di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)^2}$$

#Esercizio

Esercizio.

Determinare il raggio di convergenza e la somma della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{2^n} x^n$$

(*consiglio: usare il teorema del passaggio al limite per le derivate*)

#Esercizio

Esercizio.

Studiare la serie, determinando il raggio di convergenza e la somma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

(*consiglio: vedere l'argomento della sommatoria come l'integrale di una funzione*)

3. Serie di Taylor-MacLaurin

#Esercizio

Esercizio.

Sia f la funzione definita su $\mathbb{R}$ come

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, x \neq 0 \\ 1, x = 0 \end{cases}$$

Dire se è sviluppabile in Taylor-MacLaurin, se sì dire la serie di Taylor-MacLaurin.

#Esercizio

Esercizio.

Sia $f(x) = \arctan x$ definita per $|x| < 1$. Dire se è sviluppabile in serie di Taylor-MacLaurin, se sì dire la serie.