Numeri Reali - Sommario

Tutto sui numeri reali $\mathbb{R}$

Richiami sui Numeri Razionali

Richiami sui Numeri Razionali (propedeutica per studiare i numeri reali): la costruzione dei numeri interi $\mathbb{Z}$*; la costruzione dei numeri razionali* $\mathbb{Q}$*; l'insufficienza di* $\mathbb{Q}$ *per rappresentare tutti i numeri. Dimostrazione dell'incommensurabilità di* $\sqrt{2}$

---

1. La costruzione dei numeri interi

OSS 1.1. Osserviamo che a partire dai numeri naturali $\mathbb{R}$ è possibile costruire un altro insieme numerico più *completo* che ci permette di fare altre operazioni (oltre alla somma e moltiplicazione), ovvero i numeri *interi relativi* $\mathbb{Z}$ (*Zahl*), che viene definita come

$$\mathbb{Z} := \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$$

in cui ad ogni numero positivo z corrisponde ad un numero *negativo* per cui ci permette di fare una nuova operazione: ovvero la *sottrazione* $-$.
Tuttavia questa non è sufficiente in quanto questa *costruzione* non ci permette di fare un'altra operazione molto importante, ovvero la *divisione* $\div$.

2. La costruzione dei numeri razionali

OSS 2.1. Quindi a partire da $\mathbb{Z}$ è possibile costruire i numeri razionali $\mathbb{Q}$ (*Quoziente*), dove un numero $q \in \mathbb{Q}$ è un quoziente di un numero intero $\mathbb{Z}$ e di un numero razionale $\mathbb{N}$;

$$\mathbb{Z} := \{\frac{p}{q} \text{ con } p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \diagdown \{0\}\}$$

I numeri razionali quindi ci permettono *non solo* di *contare*, ma anche di *misurare*, dato che possiamo precisamente misurare delle grandezze tramite questi numeri.
Tuttavia non posso misurare *tutto*; infatti se voglio descrivere un oggetto geometrico con i numeri, ovvero un quadrato con il lato $l = 1$, non posso misurare la lunghezza della diagonale del quadrato.
Infatti questo segmento si dice una *grandezza incommensurabile*.

TEOREMA 2.1. Non esistono $n, k \in \mathbb{N}$ tali che

$$(\frac{n}{k})^2 = 2$$

DIMOSTRAZIONE. Qui ragioniamo *per assurdo*; ipotizziamo che la tesi sia vera invece che falsa, poi per trovare un assurdo, una contraddizione.

1. Supponiamo che esistano $n, k \in \mathbb{N}$ tali che

$$(\frac{n}{k})^2 = 2$$

   inoltre non è restrittivo supporre che questi n, k non abbiano fattori in comune (quindi che siano ridotti ai minimi termini).
2. Ora,

$$\begin{gathered}\frac{n^2}{k^2} = 2 \\ \text{allora } n^2 = 2k^2 \\ \text{allora } 2 \mid n^2 \text{ è vera;}\end{gathered}$$

3. Considerando la scomposizione di n in numeri primi, ovvero

$$n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_n^{k_n}$$

   allora se n^2 è divisibile per un numero primo p_n, allora per forza anche n è divisibile per lo stesso numero primo, in quanto entrambi vengono moltiplicate per lo stesso p_n.
4. $$\begin{gathered}\text{allora } 2 \mid n \text{ è vera;} \\ \text{allora } n = 2m \\ \text{allora } \frac{4n^2}{k^2} = 2 \\ \text{allora } 4n^2 = 2k^2 \\ \text{allora } k^2 = 2n^2 \\ \text{allora } 2 \mid k \text{ è vera} \\ \text{ma allora anche } 2 \mid n \text{ è vera}\end{gathered}$$
5. Quindi sia n che k che sono pari, ciò vuol dire che hanno un fattore in comune (ovvero 2); ciò contraddice quello che abbiamo detto all'inizio, ovvero che n e k sono ridotti ai minimi termini. Di conseguenza non è possibile che esistano n e k. ■

CONCLUSIONE. Quindi i numeri razionali $\mathbb{Q}$ non sono sufficienti per misurare la diagonale di un quadrato; infatti è impossibile definire un $x \in \mathbb{Q}$ tale che $x^2 = 2$.

Assiomi dei Numeri Reali

Assiomi dei numeri reali $\mathbb{R}$; Il gruppo abeliano $(\mathbb{R}, +)$, il campo $(\mathbb{R}, +, \cdot)$; assiomi fondamentali di $\mathbb{R}$; l'assioma caratterizzante di $\mathbb{R}$ (di Dedekind)

---

1. Preambolo

Dopo aver dedotto che i numeri razionali non sono abbastanza *"estesi"* per poter rappresentare alcuni numeri (come la misura di $\sqrt{2}$), costruiamo i **numeri reali** $\mathbb{R}$ con degli *assiomi* e *definendo* delle *operazioni* di *addizione* e *moltiplicazione*. Nominiamo questi assiomi come *A)*, *M)*, *O)* e *S)*.

Definiamo quindi il *campo*

$$(\mathbb{R}, +, \cdot)$$

ovvero un insieme dotato di due operazioni che hanno le proprietà elencate qua sotto.

2. Assiomi A)

Esiste un insieme $\mathbb{R}$ in cui viene definita la somma

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; (x, y) \mapsto x + y$$

per cui valgono le seguenti proprietà.
A1) La proprietà associativa: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$,

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

A2) La proprietà commutativa: $\forall x, y \in \mathbb{R}$,

$$x + y = y + x$$

A3) L'esistenza dell'elemento neutro 0: $\exists 0 \text{ t.c.}$

$$x + 0 = 0 + x = x$$

A4) L'esistenza dell'elemento opposto: $\forall x \in \mathbb{R}, \exists x' \in \mathbb{R} \text{ t.c.}$

$$x + x' = x' + x = 0$$

Inoltre si dice che $(\mathbb{R}, +)$ è un gruppo abeliano (dal matematico norvegese Abel).

3. Assiomi M)

E' definita in $\mathbb{R}$ un'operazione di prodotto o moltiplicazione per cui:
M1) Proprietà associativa: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$,

$$(x) \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot (z)$$

M2) L'esistenza dell'elemento neutro 1: $\exists 1 (\neq 0) \text{ t.c.}$

$$\forall x, x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$$

M3) L'esistenza dell'elemento opposto: $\forall x \in \mathbb{R}, \exists \tilde{x} \text{ t.c.}$

$$x \cdot \tilde{x} = \tilde{x} \cdot x = 1$$

M4) Proprietà commutativa: $\forall x, y$,

$$x \cdot y = y \cdot x$$

4. Assioma D)

E' possibile individuare una proprietà che collega le operazioni di somma $+$ e prodotto $\cdot$
D1) Proprietà distributiva: $\forall x, y, z$,

$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$$

5. Assiomi O)

In $\mathbb{R}$ è definita una relazione d'ordine totale che chiamo $\leq$ e valgono le seguenti
O1) Compatibilità di $\leq$ dell'ordinamento con la somma: $\forall x, y, z$,

$$x \leq y \implies x + z \leq y + z$$

O2) Compatibilità di $\leq$ dell'ordinamento con il prodotto: $\forall x, y, z$,

$$x \leq y \wedge 0 \leq z \implies x \cdot z \leq y \cdot z$$

6. Assioma S) (di Dedekind o di separazione)

OSS 6.1. Notiamo che avendo definito

$$(\mathbb{R}, +, \cdot, \geq)$$

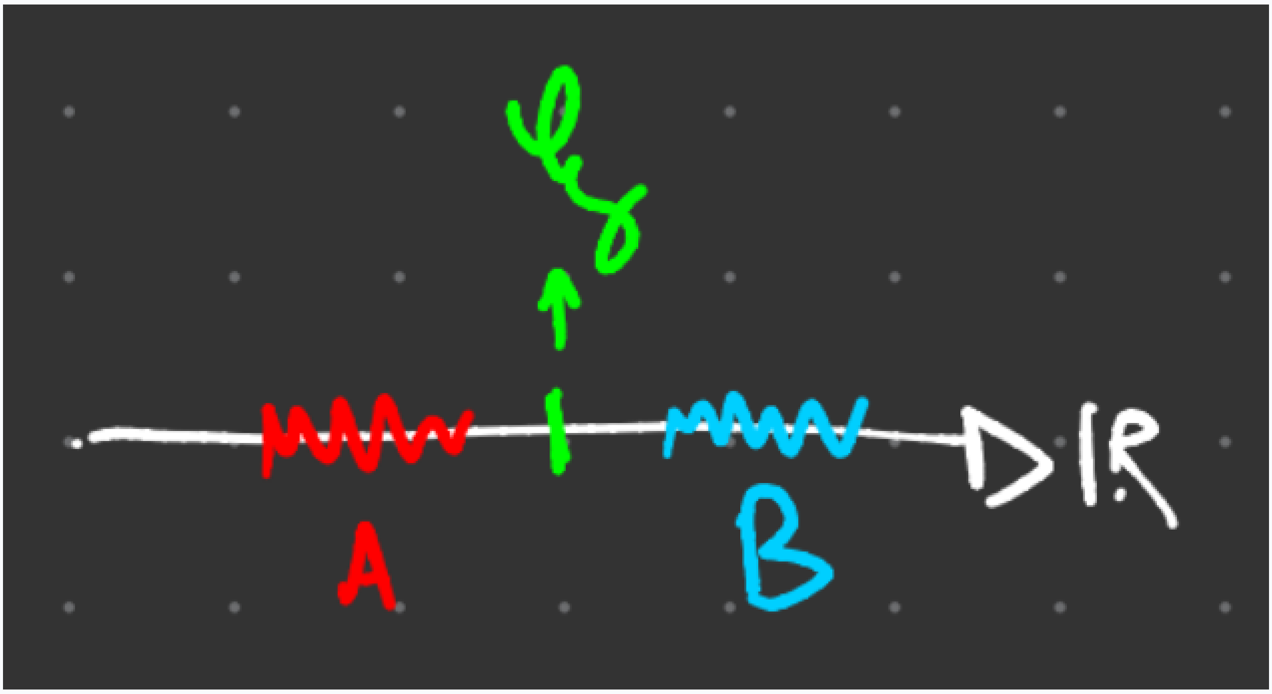
con gli assiomi *A)*, *M)*, *D)* e *O)* questi non possono bastare, in quanto i numeri razionali $\mathbb{Q}$ godono delle stesse proprietà; infatti bisogna definire delle regole speciale, in particolare *l'assioma di Dedekind*, oppure nota come *l'assioma di separazione*.

S) Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$; $A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset$ (A e B sono non-vuoti),

- supponendo che $\forall a \in A, \forall b \in B, a \leq b$
- allora per l'assioma *S)*

$$\exists \xi \in \mathbb{R} \mid \forall a \in A, \forall b \in B, a \leq \xi \leq b$$

- Ovvero, graficamente



OSS 6.2. Questa proprietà non vale per $\mathbb{Q}$, infatti se definiamo gli insiemi

$$A = \{\forall a \in \mathbb{Q} : a^2 < 2\}$$
$$B = \{\forall b \in \mathbb{Q} : a^2 > 2\}$$

notiamo che tra A e B c'è un *buco* che non potrà mai essere colmato, in quanto $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. (dimostrazione più rigorosa sul file di Del Santo)

Intervalli

Definizione di intervalli. Intervalli limitati, aperti, chiusi, inscatolati e dimezzati. Alcuni esempi

---

1. Intervalli limitati

Siano $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$ (ovvero $a \leq b \wedge a \neq b$), allora definiamo le seguenti definizioni degli *intervalli limitati*:

- **DEF 1.1.** Intervallo **chiuso** compresi gli estremi

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

- **DEF 1.2.** Intervallo **semichiuso**

$$]a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$

- **DEF 1.3.** Similmente (da **DEF 1.2.**), altro intervallo **semichiuso**

$$[a, b[\ := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$$

- **DEF 1.4.** Intervallo **aperto**

$$]a, b[\ := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

2. Intervalli illimitati

Se, invece consideriamo $a \in \mathbb{R}$, definiamo allora i seguenti *intervalli illimitati* (o anche *semirette*):

- **DEF 2.1.** Intervallo **inferiormente illimitato**

$$\begin{gathered}]-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\} \\ ]-\infty, a[:= \{x \in \mathbb{R} : x < a\} \end{gathered}$$

- **DEF 2.2.** Intervallo **superiormente illimitato**

$$\begin{gathered} [a, +\infty[:= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\} \\ ]a, +\infty[:= \{x \in \mathbb{R} : x > a\} \end{gathered}$$

  OSS 2.1. Si può definire $\mathbb{R}$ anche come

$$\mathbb{R} =\ ]-\infty, +\infty[$$

  OSS 2.2. Può essere comodo pensare che anche l'insieme con un unico punto $\{a\}$ è un *intervallo "degenere"*.

OSS 2.3. Notare che $-\infty$ e $+\infty$ *NON* sono numeri reali, bensì dei semplici simboli.

$$-\infty, +\infty \notin \mathbb{R}$$

Se voglio, posso estendere l'insieme dei numeri reali tale che

$$\tilde{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$$

3. Successione di intervalli

DEF 3.1. Sia

$$(I_n)_n$$

definita come una successione (**DEF 4.2.1.**) di intervalli *chiusi* e *limitati*. Quindi

$$(I_n)_n = I_0, I_1, \ldots, I_n, \ldots$$

ove

$$I_i = [a_i, b_i]$$

(quindi è un *intervallo chiuso e limitato*)

3.1. Intervalli inscatolati e dimezzati

DEF 3.1.1. Gli intervalli si dicono **inscatolati** se

$$\forall n, I_{n+1} \subseteq I_n$$

ovvero graficamente
[GRAFICO DA INSERIRE]

DEF 3.1.2. Una *successione di intervalli $(I_n)_n* si dice di *intervalli chiusi, inscatolati* e **dimezzati** se

$$\forall n, I_{n+1} \subseteq I_n$$

ove il nuovo sottoinsieme ha gli elementi

$$I_{n+1} = [a_n, \frac{a_n + b_n}{2}] \text{ oppure } [\frac{a_n + b_n}{2}, b_n]$$

OSS 3.1.2.1. Notiamo che se prendiamo un

$$I_n = [a_n, b_n] = [a_{n-1}, \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}]$$

allora la *distanza* tra a_n e b_n è

$$a_n - b_n = \frac{2a_{n-1} - a_{n-1} - b_{n-1}}{2} = \frac{a_{n-1} - b_{n-1}}{2}$$

ovvero la *"metà della lunghezza del segmento di prima, ovvero $a_{n-1} - b_{n-1}$"*.

Insiemi limitati, maggioranti, massimo e teorema dell'estremo superiore

---

1. Insiemi limitati

DEF 1.1. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, A si dice un insieme **limitato superiormente** se

$$\exists M \in \mathbb{R} : \forall a, \in A; a \leq M$$

Graficamente, un insieme *limitato superiormente* si rappresenta così:
[GRAFICO DA INSERIRE]
ESEMPIO 1.1.1. Considero $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 3x + 1 = 0\}$.
A è *limitato superiormente*, in quanto risolvendo A otteniamo l'insieme $A = \{\frac{-3-\sqrt{5}}{2}, \frac{-3+\sqrt{5}}{2}\}$, e scegliendo $M = 0$ si ha che entrambi elementi di A sono minori di 0.

DEF 1.2. $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice un insieme **limitato inferiormente** se

$$\exists m \in \mathbb{R} : \forall a \in A; a \geq m$$

Graficamente,
[GRAFICO DA INSERIRE]

DEF 1.3. $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice **limitato** se è sia limitato *superiormente* che *inferiormente*.
ESEMPIO 1.3.1. $[a, b]$ è limitato.
Infatti se si scelgono $M = b, n = a$ per definizione risulta vero che questo intervallo è *limitato*.

OSS 1.3.1. Se A è *limitato* $\iff \exists R > 0$ tale che

$$A \subseteq [-R, R]$$

DIM. Da quanto visto in Connettivi, basta dimostrare che entrambe le implicazioni sono vere; ovvero
1.

$$\exists R : A \subseteq [-R, R] \implies A \text{ è limitato}$$

che graficamente rappresenta
[GRAFICO DA INSERIRE]
quindi è vera
1.

$$\text{A è limitato} \implies \exists R : A \subseteq [-R, R]$$

che graficamente rappresenta
[GRAFICO DA INSERIRE]
quindi anche questa è vera.

OSS 1.3.2. Vorrei trovare un modo per definire gli *insiemi limitati* su un piano π.
E' possibile definirlo tramite il seguente: *"Se riesco a mettere l'insieme A all'interno di una sfera di raggio R, allora esso è limitato."*

Graficamente,
[GRAFICO DA INSERIRE]

DEF 1.4. Un insieme A si dice *superiormente illimitato* quando neghiamo che A è superiormente limitato; ovvero

$$\neg(\exists M \in \mathbb{R}, \forall a \in A, a \leq M)$$

ovvero

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists a \in A : a > M$$

che graficamente vuol dire che ad ogni M_n che fissiamo, esiste *sempre* un valore a_n che è più grande di M.
[GRAFICO DA INSERIRE]

Il discorso è analogo per *insiemi inferiormente illimitati* e *insiemi illimitati*.

2. Maggioranti, massimi; minoranti e minimi

Maggioranti e minoranti
DEF 2.1. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $M \in \mathbb{R}$.
Se $\forall a \in A, a \leq M$, (ovvero A è *limitato inferiormente*) il valore M si dice un **maggiorante di** A.
DEF 2.2. Analogamente, se $A \subseteq \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{R}$, m è **minorante di** A quando $\forall a \in A, m \leq a$
.

Massimi e minimi
DEF 2.3. Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$, se:

- μ è maggiorante di A e
- $\mu \in A$
  allora μ è il **massimo di** A.

$$\mu := \begin{cases} \mu \in A \\ \forall a \in A, a \leq \mu \end{cases}$$

DEF 2.4. Analogamente, se $A \subseteq \mathbb{R}$ e $\nu \in \mathbb{R}$, allora definisco il **minimo di** A:

$$\nu := \text{minimo di A} = \begin{cases} \nu \in A \\ \forall a \in A, a \geq \nu \end{cases}$$

OSS 2.1. Sia A un insieme *limitato inferiormente*.
Suppongo che esistano due massimi di A, μ_1, μ_2; si avrebbe allora $\mu_1 = \mu_2$, in quanto può esistere *solo* il *massimo* di A.

DIM. Per assurdo suppongo che $\mu_1 \neq \mu_2$. Per definizione del *massimo*,

$$\begin{cases} \mu_1 \implies \forall a \in A, a \leq \mu_1 \\ \mu_2 \implies \mu_2 \in A \end{cases} \implies \mu_2 \leq \mu_1 \; (1)$$

e

$$\begin{cases} \mu_1 \implies \mu_1 \in A \\ \mu_2 \implies \forall a \in A, a \leq \mu_2 \end{cases} \implies \mu_1 \leq \mu_2 \; (2)$$

Quindi combinando le *(1)* e *(2)*, abbiamo

$$(\mu_2 \leq \mu_1) \wedge (\mu_1 \leq \mu_2) \iff \mu_1 = \mu_2 \blacksquare$$

Il discorso è analogo per il *minimo* di A.

ESEMPIO 2.A. Consideriamo l'intervallo

$$A = \;]1, 2[$$

ci chiediamo se questo intervallo ha *maggioranti e/o minorante* e se ha *massimo e/o minimo*.

1. A ha sia *maggioranti* che *minoranti*, infatti possiamo porre $M = 2$ e $m = 1$; ma possiamo anche porre $M = 3$ e $m = 0$.
   Allora *definiamo* l'insieme dei maggioranti di A,

   $$A^* := \{\text{maggioranti di } A\} = [2, +\infty[$$

   e l'insieme dei minoranti di A,

   $$A_* := \{\text{minoranti di } A\} = \;]-\infty, 1]$$

2. Però A non ha né *massimi* né *minimi.*
   Infatti devo provare che se $x \in A$, allora x NON può essere il *massimo di* A.
   Tracciando l'intervallo A e segnando un punto x all'interno, riesco a trovare un elemento più grande di x? Sì, se considero la media aritmetica tra x e 2. Infatti

   $$x < \frac{x+2}{2} < 2$$

   Analogo il discorso per i *minimi*

3. Estremi superiori e inferiori

l'esempio 2.A. di prima, abbiamo un problema interessante; ovvero "gli insiemi limitati hanno sempre massimo e minimo?".

La risposta è *no*, da quanto visto prima; però è interessante osservare che esiste sempre il *"miglior"* maggiorante e il *"miglior"* minorante. Ora li vediamo.

DEF 3.1. Sia A superiormente limitato.
Chiamo **l'estremo superiore di** A il *minimo* dell'insieme dei *maggioranti di* A (A^*).

DEF 3.2. Sia A inferiormente limitato.
Chiamo **l'estremo inferiore di** A il *massimo* dell'insieme dei *minoranti di* A (A_*).

4. Teoremi sugli estremi superiori (e inferiori)

TEOREMA 4.1. (*Teorema dell'esistenza dell'estremo superiore*)
Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, e A *superiormente limitato*, allora

$$\exists \xi \in \mathbb{R} : \xi \text{ è estremo superiore di } A$$

DIM. Per ipotesi, abbiamo $A \subseteq \mathbb{R}$ e $A \neq \emptyset$.
Sia quindi $A^* = \{\text{maggioranti di } A\}$; allora $A^* \neq \emptyset$ (in quanto A è non vuoto).
e per definizione del maggiorante di A,

$$\forall a \in A, \forall b \in A^*, a \leq b$$

Osservo quindi che posso applicare l'assioma di Dedekind (o di separazione) per gli insiemi A e A^*. Pertanto

$$\exists \xi : \forall a \in A, \forall b \in A^*; a \leq \xi \leq b$$

In particolare $a \leq \xi$ vuol dire che ξ è *maggiorante di A*;
e $\xi \leq b$ vuol dire che ξ è il *minimo* dei *maggioranti di A*.
Quindi, per definizione ξ è l'*estremo superiore di* A. ■

ESERCIZIO 4.1. Dimostrare che se $A \neq \emptyset$ e A è inferiormente limitato, allora

$$\exists \eta \in \mathbb{R} : \eta \text{ è l'estremo inferiore di } A$$

Dato che per ipotesi A è non vuota ed è inferiormente limitata, allora sicuramente

$$\forall a \in A, \forall b \in A_*, b \leq a$$

per la definizione di minorante. Osserviamo che si può applicare l'assioma *S)*;
quindi sicuramente

$$\exists \eta \in \mathbb{R} : b \leq \eta \leq a$$

Ovvero η è il *massimo di $A_{}$* ed è un minorante di A*. Ovvero* l'estremo inferiore di A*.

TEOREMA 4.2. *(le proprietà dell'estremo superiore* $\sup A$*)*
Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\alpha=\sup(A) \iff \begin{cases}\forall a \in A, a \leq \alpha \text{ } (1) \\ \forall \varepsilon > 0, \exists \bar{a} \in A : \bar{a} > \alpha - \varepsilon \text{ } (2)\end{cases}$$

In parole semplici, la *(1)* vuol dire che α è un maggiorante di A; la *(2)* invece vuol dire che per qualsiasi valore ε positivo, allora $a-\varepsilon$ non è maggiorante di A.
DIM. Sia $\alpha=\sup(A)$, cioè se è il *minimo dei maggioranti* di A.
Ma allora innanzitutto α è un *maggiorante di* A (1)
Ma quindi α è il *minimo dei maggioranti di* A; quindi se sottraggo ad A qualsiasi valore positivo, non è più un maggiorante di A. Pertanto scrivo

$$\begin{gathered}\forall \varepsilon > 0, \ \neg(\forall a \in A, a \leq a-\varepsilon) \\ \exists a \in A : a > a - \varepsilon\end{gathered}$$

ovvero la (2). ■
Volendo si può ragionare anche viceversa, partendo dai presupposti (1) e (2) e verificando che vogliono dire le stesse cose.

TEOREMA 4.2.1. *(versione* $\inf A$)
Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, $\beta \in \mathbb{R}$.

$$\beta=\inf(A) \iff \begin{cases}\forall a \in A, a \geq \beta \text{ } (1) \\ \forall \varepsilon > 0, \exists \bar{a} \in A : \bar{a} > a + \varepsilon \text{ } (2)\end{cases}$$

5. Esempio generale

ESEMPIO 5. Considero

$$A=\{\forall n \in \mathbb{N} \diagdown \{0\}, 1-\frac{1}{n}\}$$

Voglio trovare le seguenti: $\sup(A)$, $\inf(A)$, $\max(A)$, $\min(A)$.

1. Il primo passo è quello di fare un disegno che rappresenta per poter "visualizzare" l'insieme A.
   [GRAFICO DA INSERIRE]
   Quindi vediamo che

$$A=\{0,1,\frac{1}{2},\frac{2}{3},\dots,\frac{n-1}{n}\}$$

2. A è quindi limitato, da quanto si può evincere dal disegno; infatti scegliamo $m=0$, $M=1$.
3. Siccome $A \neq \emptyset$, per il *teorema 4.1.* (o *esercizio 4.1.* per esattezza), posso trovare $\inf A$ e $\min A$;

$$\min(A)=\inf(A)=0$$

In quanto, per il *teorema 4.2.*

$$\begin{cases} 0 \leq 1 - \frac{1}{n}, \forall n \\ \forall \varepsilon > 0, x + \varepsilon \text{ non è minorante di A} \end{cases}$$

4. Possiamo trovare il *maggiorante* 1. Questo in quanto

$$\forall n, n-1 < n \implies \forall n, \frac{n-1}{n} < 1 \iff \forall n, 1 - \frac{1}{n} < 1$$

   In particolare si verifica che è l'*estremo superiore*.
   Però se si sceglie $\alpha < 1$, sicuramente (per la proprietà di Archimede????) si verifica

$$\exists n : \alpha < 1 - \frac{1}{n} < 1$$

   ovvero per qualunque $a < 1$ si scelga, esiste un n abbastanza grande da poter superare α.
5. Quindi $\sup(A) = 1$ e non esiste $\max(A)$.

OSS 5.1. Se un insieme ha un *minimo* $\min$ (o *massimo* $\max$), allora tale valore è *l'estremo inferiore* $\inf$ (o *estremo superiore* $\sup$). Però il contrario non deve necessariamente valere, come visto sopra.

Conseguenze dell'esistenza dell'estremo superiore

Alcuni importanti dei numeri reali $\mathbb{R}$ come conseguenza del teorema dell'esistenza dell'estremo superiore, numeri naturali $\mathbb{N}$ come sottoinsieme di $\mathbb{R}$, proprietà di Archimede, "$\frac{1}{n}$ diventa piccolo quanto si vuole", densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$. Intervalli chiusi, limitati, inscatolati e dimezzati; teorema di Cantor, forma forte del teorema di Cantor

---

0. Preambolo

Osservando Insiemi limitati, maggioranti, massimo e teorema dell'estremo superiore, notiamo che per qualunque insieme *superiormente limitato* deve esistere un *estremo superiore*. Da questo discendono a cascata una serie di proprietà (o teoremi) importanti.

1. $\mathbb{N}$ è superiormente illimitato

TEOREMA 1.1. $\mathbb{N}$ è superiormente illimitato. Ovvero *non è superiormente limitato*. Infatti nei numeri reali $\mathbb{R}$ possiamo trovare i numeri naturali $\mathbb{N}$.

DIMOSTRAZIONE.
Per assurdo suppongo che esista un $M \in \mathbb{R}$ maggiorante di $\mathbb{N}$ tale che

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \leq M$$

Quindi $\mathbb{N}$ è sia non vuoto che superiormente limitato. Da ciò (secondo il teorema dell'esistenza dell'estremo superiore) discende che esista il superiore estremo ξ;

$$\exists \xi \in \mathbb{R} : \xi = \sup(\mathbb{N})$$

Ora applico la *proprietà (2) degli estremi superiori con $\varepsilon = 1$; ovvero*

$$\exists \bar{n} \in \mathbb{N} : n > \xi - 1$$

Ma allora

$$\bar{n} + 1 > \xi = \sup(\mathbb{N})$$

il che è assurdo in quanto si troverebbe un numero che supera l'*estremo superiore*. ■

2. Proprietà di Archimede; Archimedeità di $\mathbb{R}$

TEOREMA 2.1. Siano $\varepsilon, M \in \mathbb{R}$ ove $\varepsilon > 0$, $M > 0$ (l'idea sarebbe che ε è un numero *arbitrariamente piccolo*, M invece un numero *arbitrariamente grande*), allora vale la seguente:

$$\exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \bar{n} \cdot \varepsilon > M$$

Ovvero prendendo un piccolo arbitrariamente piccolo ε e possibile farlo sommare $\bar{n}$ volte e superare il numero arbitrariamente grande M.
Rappresentazione grafica:
[GRAFICO DA INSERIRE]

DIMOSTRAZIONE.
Suppongo (per assurdo) che questo teorema non è vero; ovvero negandolo, abbiamo

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \cdot \varepsilon < M$$

ovvero non saremo mai in grado di superare M.
Allora definendo E l'insieme di tutti i numeri *"ottenuti"* sommando ε a se stesso n volte,

$$E = \{\forall n \in \mathbb{N}, n \cdot \varepsilon\}$$

questo è *superiormente limitato* per supposizione (anche non vuoto).

Sia allora

$$\xi = \sup E$$

Applico la seconda proprietà dell'*estremo superiore* ξ, con ε quello inserito nella ipotesi, ovvero

$$\exists \bar{n} : \bar{n} \cdot \varepsilon > \xi - \varepsilon$$

ma allora consegue che

$$\varepsilon(1 + \bar{n}) > \xi$$

che implicherebbe l'esistenza di un numero moltiplicato per ε che supera $\xi = \sup E$, il che è un assurdo. ■

3. $\frac{1}{n}$ diventa piccolo quanto si vuole

TEOREMA 3.1.
Sia $\varepsilon > 0$ (un numero piccolo); allora $\exists \bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

ovvero prendendo un numero arbitrariamente piccolo, deve esistere un $\frac{1}{n}$ che sarà ancora più piccolo del numero piccolo scelto.

DIMOSTRAZIONE.
Considero *la proprietà di Archimede* (**TEOREMA 2.1.**) ove fisso $\varepsilon > 0$ e $M = 1$. Pertanto,

$$\exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \varepsilon \cdot \bar{n} > 1 (> 0)$$

Ora, dividendo per $\bar{n}$ da ambo le parti

$$\varepsilon > \frac{1}{\bar{n}} > 0$$

■

4. Densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$

TEOREMA 4.1.
Si dice che $\mathbb{Q}$ è *denso* in $\mathbb{R}$; ovvero siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, allora esiste $q \in \mathbb{Q}$ tale che

$$a < q < b$$

quindi tra due numeri reali a, b possiamo sempre trovarci un numero razionale in mezzo.

DIMOSTRAZIONE.
Per la dimostrazione tratteremo di tre casi distinti; ovvero
1. Quando $a < 0 < b$ non c'è nulla da dimostrare, in quanto abbiamo già $q = 0$.
2. Quando $a < b < 0$ allora possiamo invertire i segni, ottenendo il seguente grafico:
[GRAFICO DA INSERIRE]
Quindi $q = -\frac{k}{n}$, che troveremo, va bene.
3. Quando $0 < a < b$, l'unico caso da trattare:
Innanzitutto chiamo la distanza tra i due punti $\varepsilon = b - a$ (e per forza dev'essere maggiore di 0, in quanto $b > a > 0$).
Dopodiché, usando il **TEOREMA 3.1.**, abbiamo che

$$0 < \frac{1}{n} < \varepsilon = b - a$$

Ora, per il *principio di Archimede* (**TEOREMA 2.1.**), abbiamo (con $\varepsilon = \frac{1}{n}$ e $M = a$) che

$$\exists k : \frac{k}{n} > a$$

Quindi, aggiungendo a da tutte le parti e considerando l'ultimo punto ho,

$$a < \frac{k}{n} < b$$

e sicuramente so che non può essere che $\frac{k}{n} > b$ in quanto $\frac{1}{n} < b - a$. (ovvero il salto per arrivare a b sarebbe troppo *"grande"*)
Graficamente, [GRAFICO DA INSERIRE]

5. Teorema di Cantor

Considerando gli intervalli chiusi, limitati, inscatolati e dimezzati, abbiamo il seguente teorema.

TEOREMA 5.1. Forma debole del teorema di Cantor

Sia $(I_n)_n$ una successione di intervalli *chiusi, limitati e inscatolati*; allora l'intersezione di tutti gli intervalli è non-vuota;

$$\bigcap_n I_n \neq \emptyset$$

OSS 5.1.1. Tutti gli intervalli si rappresentano graficamente nel seguente modo:
[GRAFICO DA INSERIRE]

OSS 5.1.2. Notiamo che il fatto che gli intervalli *debbono essere chiusi* è una condizione necessaria al **TEOREMA 5.1.**; infatti troviamo un *controesempio* per cui non vale il **TEOREMA 5.1.** quando consideriamo insiemi *aperti* o *illimitati*.
ESEMPIO 5.1.2.1.
Consideriamo gli intervalli

$$I_0 = \ ]0,1] \ ; \ I_1 = \ ]0, \frac{1}{2} \ ; \ \dots \ ; \ I_n = \ ]0, \frac{1}{n+1}]$$

Che graficamente viene rappresentato come
[GRAFICO DA INSERIRE]
Notiamo che l'intersezione di tutti gli intervalli in questo caso viene $\emptyset$;

$$\bigcap_n I_n = \emptyset$$

DIMOSTRAZIONE.
Consideriamo i seguenti due casi:
1. Se $x \leq 0$, allora x automaticamente non sta all'interno di nessun intervallo I_n.
2. Se $x > 0$, allora per la *proprietà di Archimede* (**TEOREMA 2.1.**)

$$\exists n \in \ \mathbb{N} : x > \frac{1}{n+1} > 0$$

allora x sta al dì fuori dell'intervallo

$$x \notin \ ]0, \frac{1}{n+1}]$$

Pertanto non ci sono elementi comuni, rendendo l'intersezione di tutti gli intervalli l'insieme vuoto $\emptyset$.
- - -
ESEMPIO 5.1.2.2. Consideriamo ora degli intervalli *illimitati* (ovvero *non limitati*); di nuovo il teorema non vale.
Ho

$$I_n = [n, +\infty[$$

Che graficamente viene rappresentato mediante
[GRAFICO DA FARE]
Supponiamo di scegliere un punto x nell'intorno I_n (ovvero ≥ 0); allora per *la proprietà di Archimede* (**TEOREMA 2.1.**) esisterà un intorno I_{n+1} che lo supera.
Quindi se ad ogni punto $x \geq 0$ fissiamo un intorno I_x vi è sempre un intorno I_k che

supera quel punto fissato; pertanto l'intersezione di tutti gli insiemi è $\emptyset$.

$$\bigcap_n I_n = \emptyset$$

DIMOSTRAZIONE.

Consideriamo gli insiemi A come gli *"estremi sinistri"* e B come gli *"estremi destri"*.

$$\begin{aligned} A &= \{a_n, n \in \mathbb{N}\} \\ B &= \{b_n, n \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

Inoltre ho

$$\begin{aligned} \forall n, \forall m;\ a_n &\leq b_m \\ b_m &\geq a_n \end{aligned}$$

SUBDIMOSTRAZIONE.
Se si vuole verificare la "proprietà" appena enunciata, allora si può considerare due casi:
1. $n \leq m$; si avrebbe $[a_m, b_m] \subseteq [a_n, b_n]$; che graficamente equivale a
[GRAFICO DA INSERIRE]
pertanto è intuibile che $b_m \geq a_n$.
2. $n > m$; si avrebbe in questo caso $[a_n, b_n] \subseteq [a_m, b_m]$ che graficamente equivale a
[GRAFICO DA INSERIRE]
stesso discorso di prima; intuibile che $b_m \geq a_n$.

Ora chiamo $\alpha = \sup A$, il quale è garantito in quanto A è *limitato superiormente* (infatti abbiamo dalla proprietà appena enunciata abbiamo che b_m è il *maggiorante* di a_n)
Dato che abbiamo il *minorante* dei *maggioranti di* A (ovvero α), da qui segue che B è *inferiormente limitato*. (oppure dato che $a_n \leq b_m \iff b_m \geq a_n$)
Allora chiamo $\beta = \inf B$ e ho

$$\beta \geq \alpha$$

Graficamente ho
[GRAFICO DA INSERIRE]
Io ho quindi

$$[\alpha, \beta] \subseteq [a_n, b_n], \forall n$$

Allora

$$[\alpha, \beta] \subseteq \bigcap_n I_n \implies \bigcap_n I_n \neq \emptyset$$

Anzi, sapendo dalla seconda proprietà degli estremi superiori (o estremi inferiori) abbiamo che se scegliamo un $x = \alpha - \varepsilon$ (per un $\varepsilon > 0$), allora esiste un a_n tale che $a_n > x$ di conseguenza x sta al di fuori dell'intervallo $[a_n, b_n]$; analogamente se scegliamo un $y = \beta + \eta$ (per un $\eta > 0$), allora esiste un b_n tale che $y > b_n$,
Graficamente,
[GRAFICO DA INSERIRE]
Di conseguenza

$$x, y \notin [a_n, b_n]$$

Pertanto si può sicuramente affermare che

$$\bigcap_n I_n = [\alpha, \beta]$$

TEOREMA 5.2. Forma forte del teorema di Cantor

Sia $(I_n)_n$ una successione di intervalli *chiusi, limitati, inscatolati e dimezzati*; allora l'intersezione di tutti gli intervalli deve contenere un unico punto ξ;

$$\exists \xi \in \mathbb{R} : \bigcap_n I_n = \{\xi\}$$

DIMOSTRAZIONE.

La *forma debole dello stesso teorema* (**TEOREMA 5.1.**) mi dice che

$$\bigcap_n I_n = [\alpha, \beta]$$

dove α è l'estremo superiore degli *"estremi sinistri"* a_n e b l'estremo inferiore degli *"estremi destri"* b_n.
Ora, considerando che gli insiemi sono pure *dimezzati*, so che (**OSS 3.1.2.1.**, Intervalli):

$$\begin{aligned} b_n - a_n &= \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} \\ &= \frac{b_{n-2} - a_{n-2}}{2^2} \\ &\ldots \text{andando avanti finchè si raggiunge } n \ldots \\ &= \frac{b_0 - a_0}{2^n} \end{aligned}$$

Ora mi ricordo che $n \leq 2^n$ (che può essere dimostrata per *induzione*)

Allora si può *"maggiorare"* l'espressione di prima, ovvero

$$a_n - b_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n} \leq \frac{b_0 - a_0}{n}$$

ovviamente ricordandosi di cambiare il segno in quanto i numeri li troviamo al denominatore.
Ora, supponendo per assurdo che $\alpha < \beta$ ovvero nel senso che l'intervallo $[\alpha, \beta]$ ha almeno più di un elemento, allora avremmo che

$$\forall n, \frac{b_0 - a_0}{n} \geq b_n - a_n \geq \beta - \alpha > 0$$

ovvero

$$\forall n, \frac{b_0 - a_0}{n} \geq \beta - \alpha > 0$$

che però per **TEOREMA 3.1.** è impossibile, ovvero nel caso che abbiamo ora stiamo descrivendo che esiste un punto $\beta - \alpha$ maggiore di 0 che non è raggiungibile da $\frac{b_0-a_0}{n}$ (quando invece è vero che tutti i punti > 0 sono raggiungibili da tale espressione).
Quindi, per assurdo, raggiungiamo alla conclusione che

$$\beta = \alpha$$

ovvero abbiamo l'intorno

$$[\beta, \beta] \text{ o } [\alpha, \alpha]$$

che comprendono solo il punto ξ. ■