Topologia della retta reale - Sommario

Tutto sulla topologia della retta reale.

A. Intorni

Intorni

Definizione di distanza (con le sue proprietà), intorno centrato aperto di centro x_0 e di raggio r, intorno di x_0; la retta estesa, l'intorno di $+\infty$ e di $-\infty$.

---

0. Preambolo

In questo capitolo studieremo e definiremo delle nomenclature necessarie per studiare i *limiti*.

1. Distanza euclidea

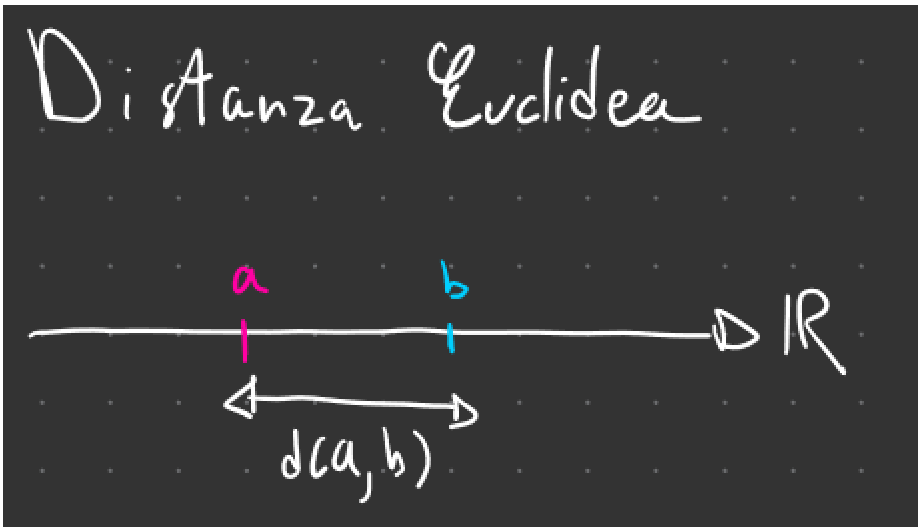
#Definizione

Definizione 1.1. (Distanza Euclidea).

Siano $x, y \in \mathbb{R}$, allora definisco la *distanza* (oppure *distanza euclidea*) di x, y il valore

$$d(x, y) = |x - y|$$

FIGURA 1.1. (*Idea grafica della distanza*)
Graficamente questo corrisponde, appunto, alla distanza tra due punti sulla retta reale.



Proprietà della distanza euclidea

Possiamo verificare alcune proprietà di questa applicazione (Funzioni); la prima essendo la proprietà *antiriflessiva*.

#Proposizione

Proposizione 1.1. (Antiriflessività).

$$\forall x, y \in \mathbb{R}; d(x,y) \geq 0 \land d(x,y) \iff x = y$$

#Proposizione

Proposizione 1.2. (Proprietà simmetrica).

$$\forall x, y \in \mathbb{R}; d(x,y) = d(y,x)$$

#Proposizione

Proposizione 1.3. (Disuguaglianza Triangolare).

Analogamente alle disuguaglianze triangolari già viste nei numeri complessi (**PROP. 4.7.**) e col valore assoluto (**OSS 3.1.1.**) si verifica che

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}; d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

Dimostrazione.@Proposizione 1.3. (Disuguaglianza Triangolare)
Infatti dall'**OSS 3.1.1.** di Funzioni di potenza, radice e valore assoluto so che se

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

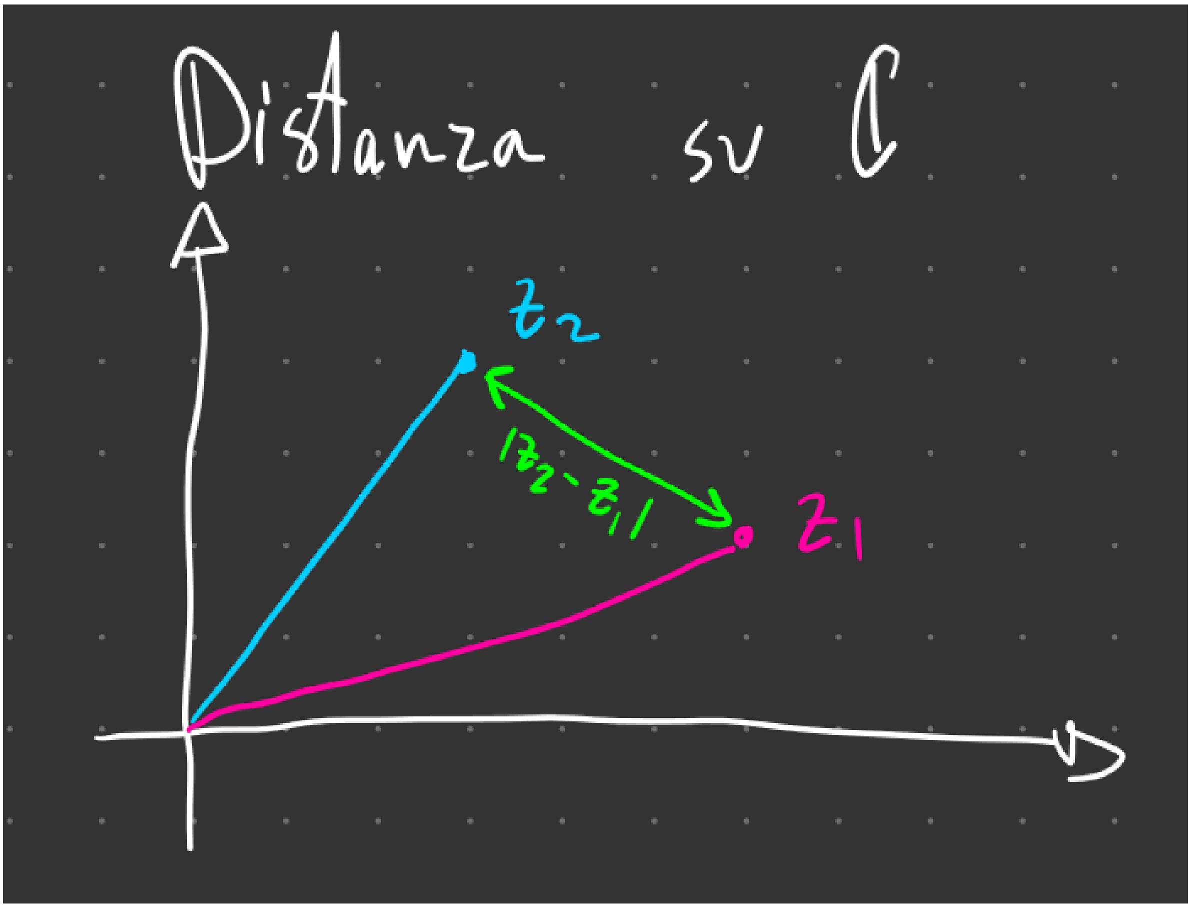
può essere applicato con $a = x - y$ e $b = y - z$, così diventa

$$|x - z| \leq |x - y| + |y - z| \iff d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \blacksquare$$

OSS 1.1. Noto che questa nozione di *distanza euclidea* può essere $\square$ anche definita sui numeri complessi $\mathbb{C}$; infatti posso porre

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$$

dove $|\cdot|$ rappresenta il *modulo* di un numero complesso (Operazioni sui Numeri Complessi, **DEF 4.** o **DEF 4.1.**).
Graficamente, questo corrisponde a



Inoltre scopriamo che questa definizione della distanza euclidea su $\mathbb{C}$ conserva le tre proprietà (**PROP 1.1., 1.2., 1.3.**) appena enunciate. Pertanto è possibile scambiare *modulo* e *distanza euclidea* in quanto vi è un *isomorfismo* tra queste due applicazioni.

2. Intorno centrato aperto di centro x e di raggio r

#Definizione

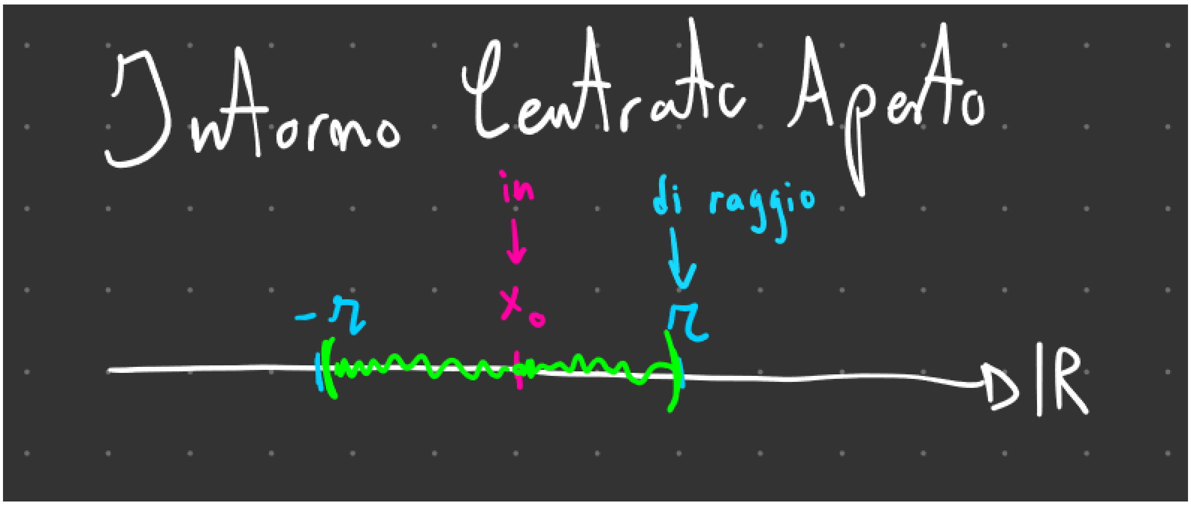
Definizione 2.1. (Intorno centrato).

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e sia $r \in \mathbb{R}, r > 0$; allora chiamo *"l'intorno centrato aperto di centro x_0 e di raggio r"* l'intervallo aperto (Intervalli, **DEF 1.4.**)

$$]x_0 - r, x_0 + r[\ = \{x \in \mathbb{R} : d(x, x_0) < r\}$$

un altro nome può essere la *palla aperta di centro x_0 e di raggio r*
Quindi questo è l'insieme di *tutti i punti di $\mathbb{R}$ che hanno distanza da x_0 meno di r.*

FIGURA 2.1. (*Idea di intorno centrato*)



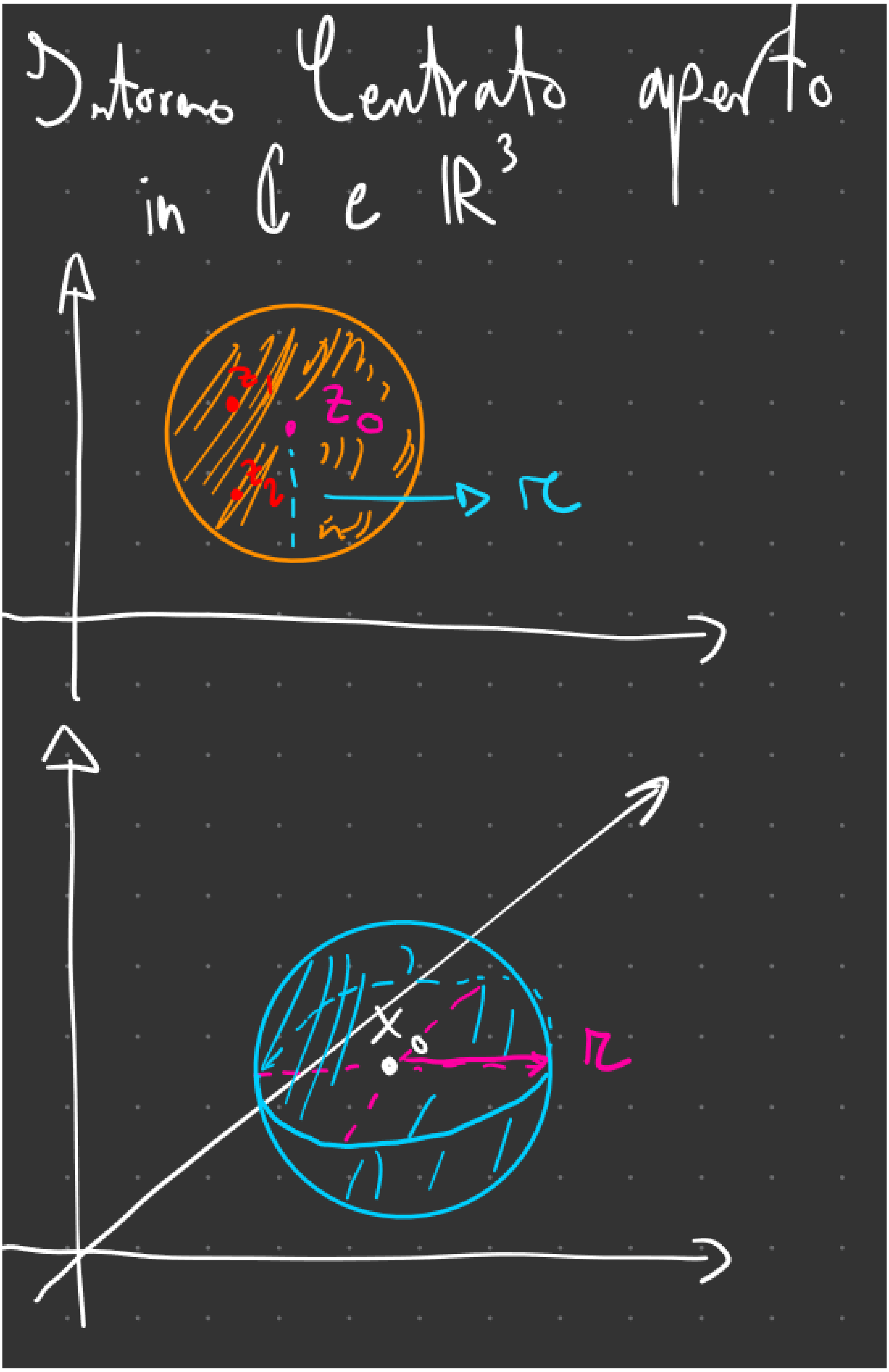
OSS 2.1. Analogamente a **OSS 1.1.**, questa nozione di *intorno centrato aperto* può essere applicato a $\mathbb{C}$ usando la nozione di *modulo*; infatti graficamente questa corrisponde ad una *palla 2-dimensionale di centro z_0 e di raggio r.* (*Figura 2.1.*)

OSS 2.2. Allora si può definire l'*intorno centrato aperto* in $\mathbb{R}^3$ dove definisco

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^3; d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$$

E graficamente questa corrisponde ad una vera *palla*. Letteralmente. (*Figura 2.1.*)

FIGURA 2.1.



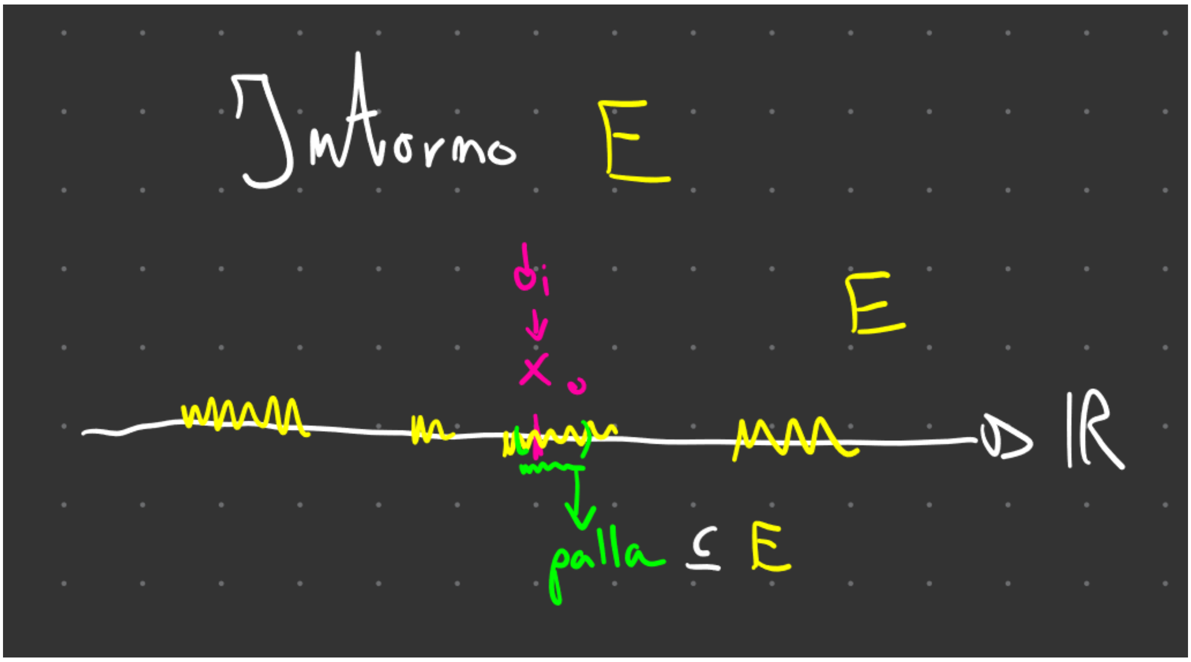
3. Intorno

#Definizione

Definizione 3.1. (Intorno di un punto).

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$, chiamo allora l'**intorno di** x_o un *qualunque insieme* E *di* $\mathbb{R}$ che contiene una *palla aperta di centro x_0 e raggio r* (**DEF 2.1.**).

FIGURA 3.1. (*Idea*)
Graficamente,



#Definizione

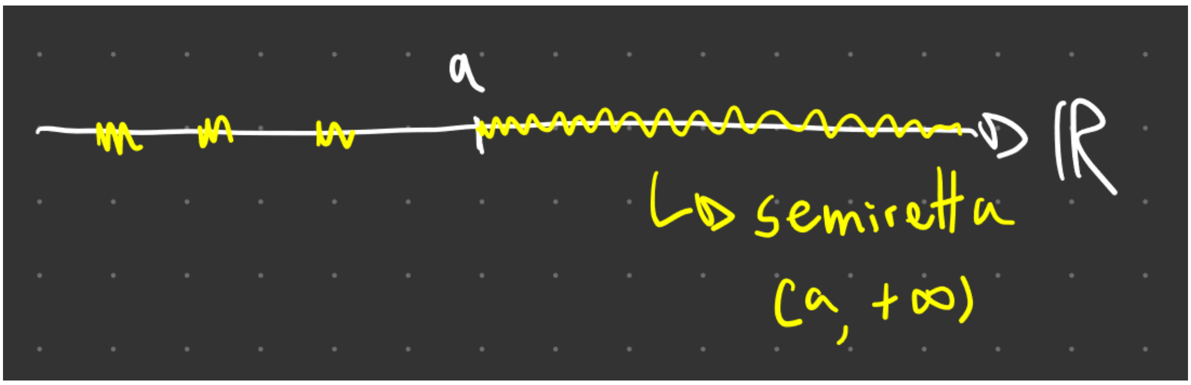
Definizione 3.2. (Intorno di $\pm\infty$).

Prendo $\tilde{\mathbb{R}}$ l'*insieme dei reali estesi*, ovvero

$$\tilde{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

e definisco *l'intorno di di* $+\infty$ un *qualunque sottoinsieme* $E \subseteq \mathbb{R}$ che contiene una *semiretta* $]a, +\infty[$; ovvero un insieme *superiormente illimitato* (Insiemi limitati, maggioranti, massimo e teorema dell'estremo superiore, **DEF 1.4.**) del tipo $]a, +\infty[$.

FIGURA 3.2. (*Idea*)

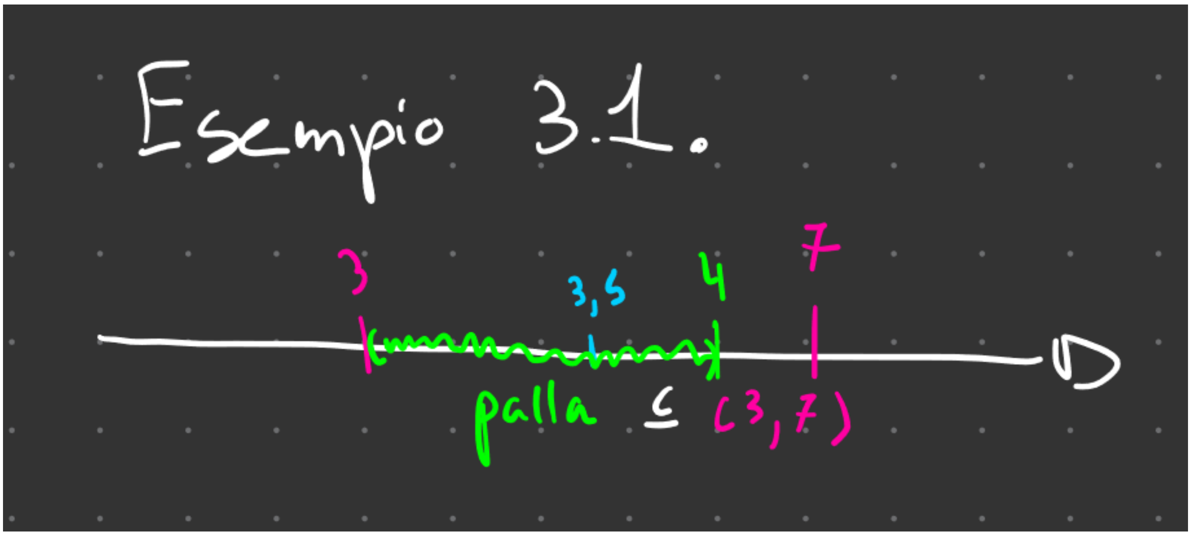


Esempi

ESEMPIO 3.1. L'intervallo $]3,7[$ è intorno di $3,5$; infatti è possibile prendere $r=0,5$ e ottenere la *palla aperta di centro* $3,5$ *e di raggio* $0,5$ che equivale a

$$]3,4[$$

che infatti è contenuto nell'intervallo $]3,7[$.
Graficamente,



ESEMPIO 3.2. Se prendendo l'insieme

$$S=\{0\}\cup\{\frac{1}{n},n\in\mathbb{N}\diagdown\{0\}\}$$

e il punto $x_0=\frac{1}{2}$, scopriamo che S *non* è intorno di x_0; infatti prendendo per qualsiasi r non riesco a formare una palla attorno a x_0, in quanto S è definita sui numeri naturali che contiene dei *"buchi"*.

ESEMPIO 3.3. Considerando i *numeri naturali* (Numeri Naturali - Sommario), ci chiediamo se questo insieme è *intorno di* $+\infty$; la risposta è *no*: esistono degli elementi in $\mathbb{R}$ che non sono contenuti in $\mathbb{N}$, come ad esempio i numeri razionali.
Tuttavia se consideriamo l'insieme $\mathbb{N}\cup]100,+\infty[$ allora la risposta è *sì* in quanto si considera un *intervallo* su $\mathbb{R}$.
Analogo il discorso per gli intervalli di $-\infty$.

B. Punti interni, esterni e di frontiera

Punti interni, esterni e di frontiera

---

0. Preambolo

Questo argomento presuppone la conoscenza dell'argomento di Intervalli.

1. Punti interni

#Definizione

Definizione 1.1. (Punto interno).

Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$, si definisce x_0 *punto interno* a E se viene verificato che

$$\exists r > 0 :]x_0 - r, x_o + r[\ \subseteq E$$

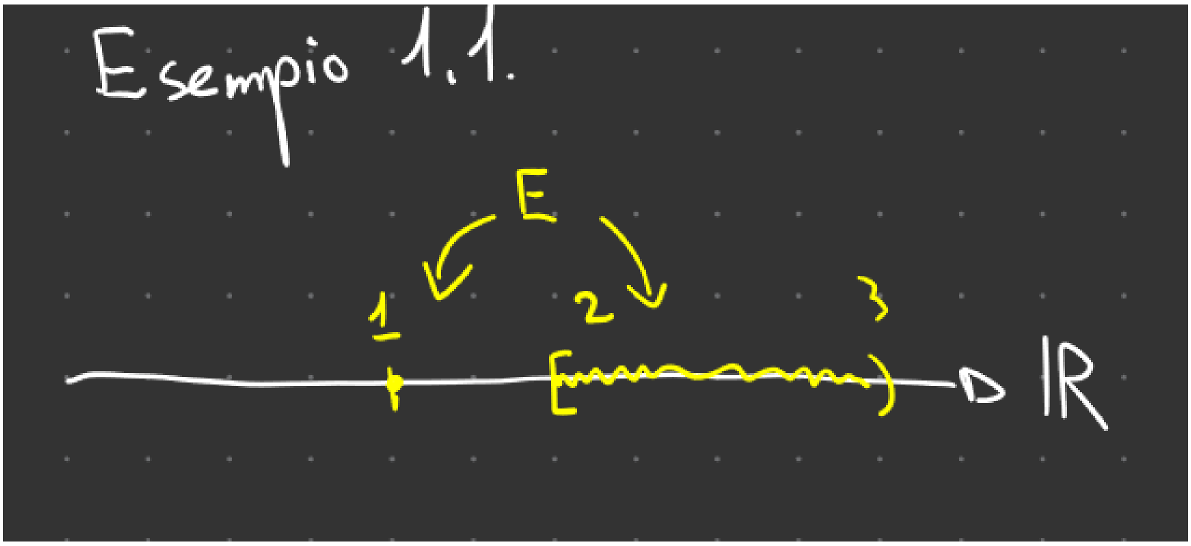
ovvero se esiste un *intorno* di x_0 che è contenuto in E (Definizione 3.1. (Intorno di un punto), **DEF 3.1.**).
Inoltre chiamo *l'insieme dei punti interni a* E come E°.

Esempio

ESEMPIO 1.1. Sia

$$E = \{1\} \cup [2, 3)$$

e voglio trovare *l'insieme dei punti interni* E°.
Per farlo devo innanzitutto disegnare il grafico di E per poter capire come procedere.



Ora *"provo"* ogni numero fissando x_0 il numero scelto;

- Scegliendo $x_0 = 1$ vedo chiaramente che non è *punto interno*, in quanto è impossibile che esista un intorno centrato a raggio r ad esso.
- Scegliendo $x_0 = 2$ vedo che neanche questo è un *punto interno*; non riesco a definire un intorno centrato tale che a *"sinistra"* di 2 c'è un punto appartenente a E.
- Però scegliendo $x_0 = 2.001$ è possibile; infatti posso definire un intorno di x con $r = 0.001$.
- Analoghi i discorsi per $x_0 = 3$ e $x_0 = 2.999$
- Concludo allora che

$$E^\circ = (2, 3)$$

2. Punti esterni

#Definizione

Definizione 2.1. (Punto esterno).

Un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ si dice **esterno** ad un *insieme* $E \subseteq \mathbb{R}$ se è *interno* al complementare di E, ovvero $\mathcal{C}_\mathbb{R}E$ (Teoria degli Insiemi).
Quindi

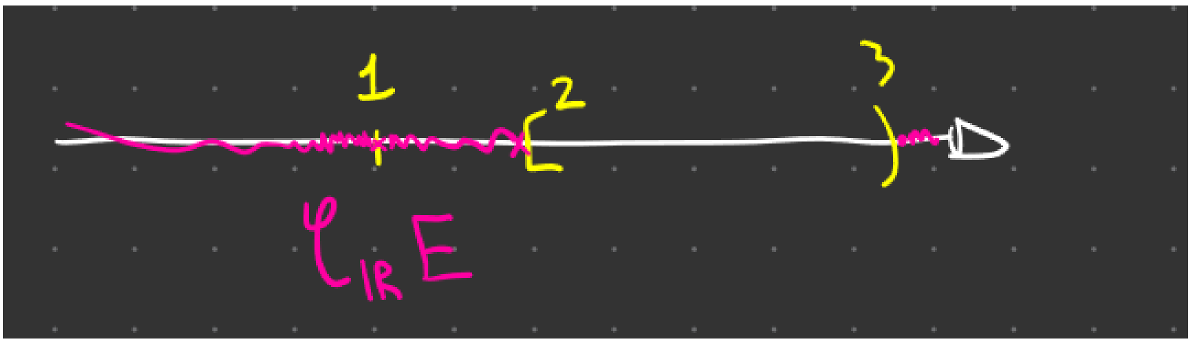
$$x_0 \text{ è esterno} \iff \exists r > 0 : (x_0 - r, x_0 + r) \subseteq \mathcal{C}_\mathbb{R}E$$

Esempio

ESEMPIO 2.1. Considerando l'esempio di prima con

$$E = \{1\} \cup [2, 3)$$

ora vogliamo trovare *l'insieme di tutti i punti esterni*. Allora usando lo stesso grafico di prima, faccio esattamente i stessi procedimenti di prima considerando però il *complemento di* E, ovvero tutti i punti che non appartengono ad E.



Usando la stessa procedura in **ESEMPIO 1.1.**, troviamo che

$$\{\text{punti esterni di } E\} = (-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (3, +\infty)$$

3. Punti di frontiera

#Definizione

Definizione 3.1. (Punto di frontiera).

Un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ si dice *di frontiera per* E se questo punto *non è ne interno ne esterno ad* E.
Inoltre definiamo *l'insieme dei punti di frontiera* di E come il

$$\partial E$$

e si legge come *"delta storto E"*

OSS 3.1. Questo equivale a negare la proposizione

$$[\exists r > 0 : (x_0 - r, x_0 + r) \subseteq E] \vee [\exists r' > 0 : (x_0 - r', x_0 + r') \subseteq \mathcal{C}E]$$

che secondo le *leggi di De Morgan* e delle regole osservate (Logica formale - Sommario) diventa

$$[\forall r > 0, (x_0 - r, x_0 + r) \not\subseteq E] \wedge [\forall r' > 0, (x_0 - r', x_0 + r') \not\subseteq \mathcal{C}E]$$

e dato che

$$A \not\subseteq B \iff A \cap \mathcal{C}_U B \neq \emptyset$$

ovvero che un insieme A non è sottoinsieme di B se e solo se l'intersezione tra A e il complemento di B non è vuota (ovvero ha almeno *un elemento*), questo diventa

$$[\forall r > 0, (x_0 - r, x_0 + r) \cap \mathcal{C}E \neq \emptyset] \wedge [\forall r' > 0, (x_0 - r', x_0 + r') \cap E \neq \emptyset]$$

ovvero che deve valere la seguente:

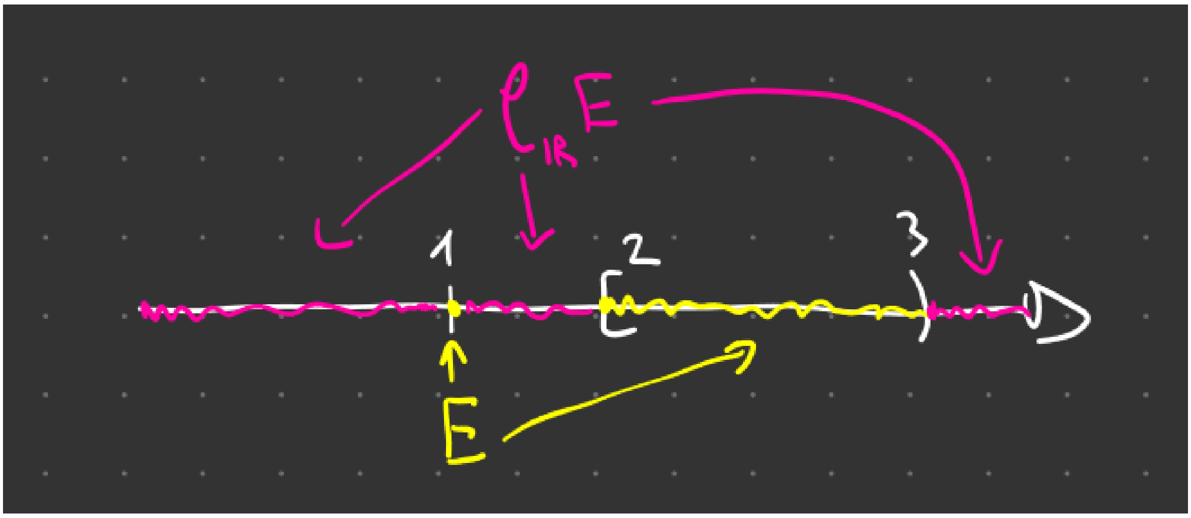
- *Ogni* intorno di x_0 deve contenere *sia* punti di E e il suo complemento $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}E$.

Esempi

ESEMPIO 3.1. Considerando lo stesso esempio di prima, ovvero

$$E = \{1\} \cup [2, 3)$$

vogliamo trovare ∂E.
Procedendo con lo stesso disegno, cerchiamo di *"provare"* ogni punto per trovare elementi di ∂E.

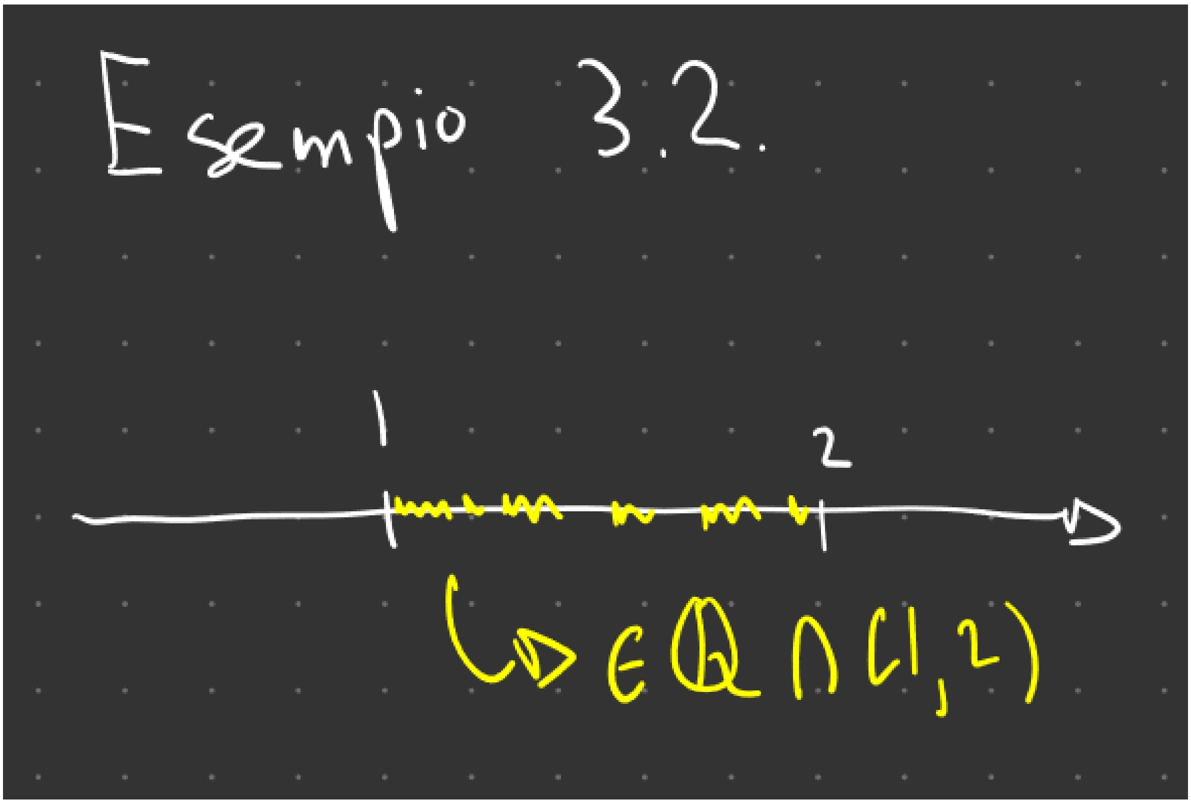


- $x_0 = 0$; Questo non è elemento di ∂E, in quanto posso facilmente trovare un intorno che contenga *solo* elementi del complemento di E.
- $x_0 = 1$; Provando a considerare ogni intorno di x_0 trovo che deve per forza dev'esserci un punto sia in E che nel suo complemento.
- $x_0 = 2$; Stesso discorso analogo di prima.
- $x_0 = 3$; Di nuovo lo stesso discorso.
- $x_0 = 2,5$; Qui invece è possibile trovare un intorno che contenga *solo* punti di E. Ad esempio un intorno centrato in $2,5$ con raggio $r = 0,1$.

ESEMPIO 3.2. Consideriamo finalmente dei casi diversi da quelli esaminati prima. Sia

$$E = \mathbb{Q} \cap (1,2)$$

ovvero tutti i numeri *razionali* compresi tra *1, 2* esclusi.
Disegnando di nuovo un disegno,



Scopro le seguenti:

- $E^\circ = \emptyset$; infatti in questo insieme *non* vi ci sono punti interni, in quanto l'*assioma di separazione* non vale in $\mathbb{Q}$ (Assiomi dei Numeri Reali, **S)**, **OSS 6.2.**); quindi ci sono sempre dei *"buchi"* tra due numeri razionali, ovvero dei numeri irrazionali. Infatti è possibile dimostrare che i numeri irrazionali sono *densi* in $\mathbb{R}$.
- $\partial E = [1, 2]$; qui si verifica un fenomeno strano, ovvero che si verifica che ∂E è più *"grande"* di E stessa.
  Questo si verifica perché, da un lato abbiamo la *densità di* $\mathbb{Q}$ *in* $\mathbb{R}$ (Conseguenze dell'esistenza dell'estremo superiore, **TEOREMA 4.1.**); infatti se considero un punto q_0 in $\mathbb{Q}$ e considero gli *"estremi"* del suo intorno $(q_0 - r, q_0 + r)$ allora tra $q_0 - r$ e $q_0 + r$ dev'esserci almeno un numero razionale.
  Però allo stesso tempo, come visto prima, i numeri irrazionali sono *densi* in $\mathbb{R}$; di conseguenza se ci sono sia dei numeri razionali (appartenenti a E) che dei irrazionali (appartenenti al complemento di E) allora vediamo che tutti i punti di E (gli estremi inclusi) sono *punti di frontiera*.

C. Insiemi aperti e chiusi

Insiemi aperti e chiusi

Definizione di insieme aperto e chiuso. Teorema sugli insiemi aperti e chiusi.

---

1. Insieme aperto

#Definizione

Definizione 1.1. (Insieme Aperto).

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$; l'insieme A si dice **aperto** se e e solo se *tutti i suoi punti sono punti interni all'insieme stesso* (Punti interni, esterni e di frontiera > Definizione 1.1. (Punto interno)); ovvero se

$$\forall x_0 \in A, \exists r > 0 : (x_0 - r, x_0 + r) \subseteq A$$

OSS 1.1. Osservo che l'insieme A è aperto *se e solo se* $A = A^\circ$.

Esempi

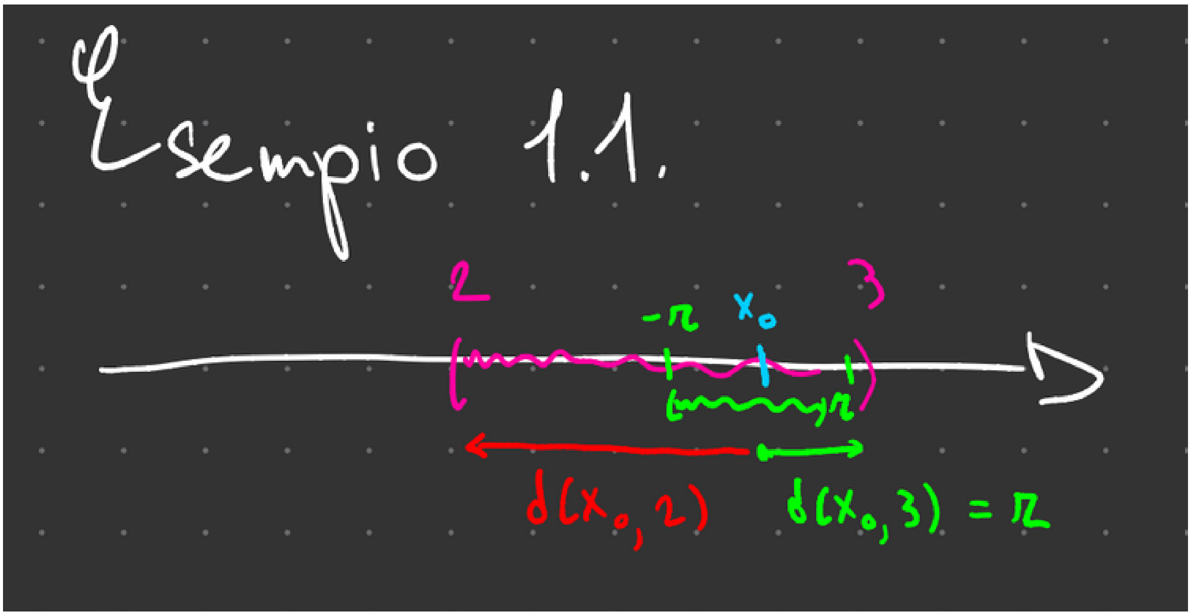
ESEMPIO 1.1. Considero *l'intervallo aperto* (Intervalli, **DEF 1.4.**)

$$(2, 3)$$

voglio sapere se questo è *insieme aperto*; scegliendo un qualunque punto x all'interno di questo intervallo, allora posso sicuramente trovare un intorno in x tale per cui contiene *solo* elementi di $(2, 3)$. Infatti se scelgo r come la *distanza minima* tra x e ciascun estremo, scopro che l'*intorno centrato aperto* di questo raggio (Definizione 3.1. (Intorno di un punto)) contiene *solo* punti di E (dunque esso è *sottoinsieme* di E).
Formalizzando questo ragionamento, ho

$$\forall x, 2 < x < 3; r = \min(d(x, 2), d(x, 3))$$

Graficamente questo ragionamento corrisponde a



ESEMPIO 1.2. Ora considero l'insieme

$$E = \{1\} \cup [2, 3)$$

che *non è aperto*, in quanto considerando $x_0 = 1$ trovo che questo elemento (o punto) non è *interno* a E. Analogo il discorso per $x_0 = 2$.

2. Insieme chiuso

#Definizione

Definizione 2.1. (Insieme Chiuso).

Considerando un insieme $C \subseteq \mathbb{R}$, si dice che esso è *chiuso* se il suo *complemento* è *aperto*. Ovvero se $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}C$ è aperto.

Esempi

ESEMPIO 2.1. Consideriamo *l'intervallo chiuso* (Intervalli, **DEF 1.1.**)

$$C = [2, 5]$$

Considerando il suo complemento

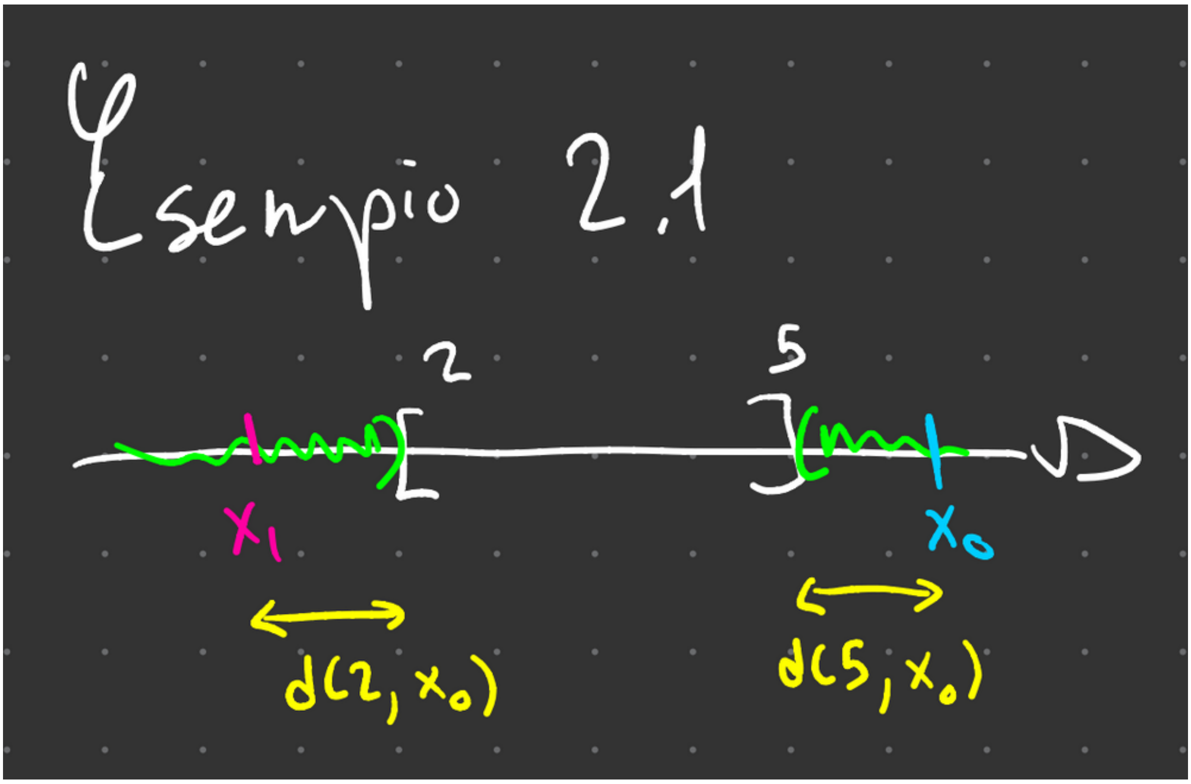
$$\mathcal{C}_{\mathbb{R}}C = (-\infty, 2) \cup (5, +\infty)$$

vediamo che questo insieme (il complemento) è *aperto*; infatti ad ogni punto x_0 del complemento vediamo che è possibile definire un r tale che l'*intorno centrato aperto* di questo raggio sia sottoinsieme di $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}C$.

Infatti definendo r come

$$r = \begin{cases} d(2, x_0) \text{ per } x_0 < 2 \\ d(5, x_0) \text{ per } x_0 > 5 \end{cases}$$

sicuramente troviamo che tutti i punti x_0 sono interni al complemento di C
.
Graficamente questo ragionamento corrisponde a



3. Teoremi sugli insiemi aperti e chiusi

#Teorema

Teorema 3.1. (Proprietà degli insiemi aperti).

Abbiamo le seguenti proposizioni:

1. Gli insiemi

$$\emptyset, \mathbb{R}$$

   sono *insiemi aperti*
2. L'*unione* (Operazioni con gli Insiemi) di due *insiemi aperti* è sicuramente un *insieme aperto*.
3. L'*intersezione* (Operazioni con gli Insiemi) di due *insiemi aperti* è sicuramente un *insieme aperto*.

#Teorema

Teorema 3.2. (Proprietà degli insiemi chiusi).

> Abbiamo invece le stesse proposizioni per gli insiemi chiusi:
>
> 1. Gli insiemi
>
> $$\emptyset, \mathbb{R}$$
>
> sono *insiemi chiusi*
> 2. L'*unione* (Operazioni con gli Insiemi) di due *insiemi chiusi* è sicuramente un *insieme chiuso*.
> 3. L'*intersezione* (Operazioni con gli Insiemi) di due *insiemi chiusi* è sicuramente un *insieme chiuso*.

OSS 3.1. Notiamo che se dimostriamo almeno una di queste due teoremi, allora si ha automaticamente dimostrato l'altro teorema, in quanto la *definizione dell'insieme chiuso* (Definizione 2.1. (Insieme Chiuso)) ci suggerisce che le stesse proprietà valgono. Infatti, la definizione dell'insieme chiuso si basa sulla definizione dell'insieme aperto, tenendo però conto del complementare dell'insieme; perciò basta tenere conto delle leggi di *De Morgan* (Logica formale - Sommario).

Dimostrazione.@Teorema 3.1. (Proprietà degli insiemi aperti)
Allora ci limitiamo a dimostrare solo il teorema **3.1.**

1. L'insieme vuoto

$$\emptyset$$

non ha *nessun elemento*; per verificare se questo insieme vuoto è *aperto*, bisognerebbe allora verificare che *tutti* gli elementi di questo insieme gode della proprietà necessaria. Pertanto si può pensare che tutti gli elementi (ovvero nessuno) di questo insieme può godere *tutte* le proprietà che si vuole.
Altrimenti è possibile pensare in termini di insiemi complementari.

Per quanto riguarda l'insieme dei numeri reali

$$\mathbb{R}$$

e prendendo un elemento $x_0 \in \mathbb{R}$ allora si trova automaticamente che

$$\forall r > 0, (x_0 - r, x_0 + r) \subseteq \mathbb{R}$$

è verificata.

2. Sia

$$\{A_i, i \in I\}$$

un insieme di *insiemi aperti*.

ESEMPIO 3.1. Un insieme del genere può essere

$$\{(1-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N} \diagdown \{0\}\}$$

Allora considero un

$$x_0 \in \bigcup_{i \in I} A_i$$

Allora da ciò discende che esiste un $\bar{i}$ tale che il punto x_0 appartenga all'insieme aperto $A_{\bar{i}}$, ovvero

$$x_0 \in A_{\bar{i}}$$

Allora è vero che esiste una *palla aperta* (Definizione 3.1. (Intorno di un punto)) che venga contenuta in quell'insieme aperto. Ovvero

$$x_0 \in A_{\bar{i}} \implies \exists r > 0 : (x_0 - r, x_0 + r) \subseteq A_{\bar{i}}$$

Ma allora ciò implica che

$$\exists r > 0 : (x_0 - r, x_0 + r) \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$$

3. Siano A_1 e A_2 due insiemi aperti; scelgo allora un $x_0 \in (A_1 \cap A_2)$. Quindi ciò vuol dire che

$$x_0 \in (A_1 \cap A_2) \implies \begin{cases} x_0 \in A_1 \implies \exists r_1 > 0 : (x_0 - r_1, x_0 + r_1) \subseteq A \\ x_0 \in A_2 \implies \exists r_2 > 0 : (x_0 - r_2, x_0 + r_2) \subseteq A \end{cases}$$

Poi scegliendo r il minimo tra r_1 e r_2, ovvero

$$r = \min(r_1, r_2)$$

Allora ho che

$$(x_0 - r, x_0 + r) \subseteq (A_1 \cap A_2)$$

il che vuol dire l'intersezione tra A_1 e A_2 è aperto.

$\square$

OSS 3.2. Però questo *non* vuol dire che l'*intersezione infinita* tra insiemi aperti debba essere necessariamente *aperta*: infatti si propone il seguente controesempio.

ESEMPIO 3.2.

Considero la *successione di intorni*

$$(I_n)_n : I_n = (1 - \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n})$$

e vediamo che l'intervallo I_n è aperto per ogni n.
Inoltre gli intervalli $(I_n)_n$ sono *inscatolati* (Intervalli, **DEF 3.1.1.**).
Disegnando il grafico (*lasciato al lettore per esercizio*) notiamo che se prendiamo l'intersezione di tutti gli intervalli

$$\bigcap_n I_n$$

i numeri compresi tra $1, 2$ stanno sicuramente all'interno di questo intervallo, come si può evincere dal grafico; invece per la *proprietà di Archimede* (Conseguenze dell'esistenza dell'estremo superiore, **TEOREMA 3.1.**), per ogni numero che sta fuori da $[1, 2]$, esiste un intervallo I_n che non lo include; ovvero

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N} : 1 - \varepsilon &\notin I_n \\ 2 + \varepsilon &\notin I_n \end{aligned}$$

(*la dimostrazione completa è lasciata al lettore*)
Allora si può concludere che

$$\bigcap_n I_n = [1, 2]$$

che *non* è un *insieme aperto*.

D. Punti di aderenza e di accumulazione

Punti di aderenza e di accumulazione

Definizione di punto di aderenza e di accumulazione. La chiusura e il derivato di un insieme. Primo teorema di Bolzano-Weierstraß.

---

1. Punti di aderenza (o di chiusura)

#Definizione

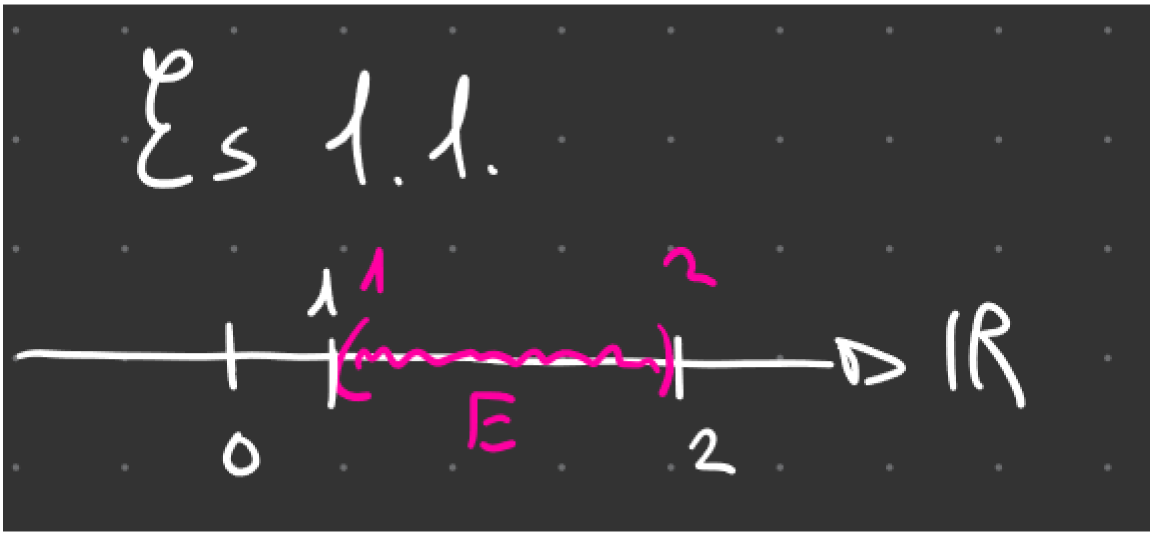
> Definizione 1.1. (Punto di aderenza (o di chiusura)).

Sia $E \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$.
Allora x_0 si dice *punto di chiusura (o di aderenza)* per E se è vera la seguente:

$$\forall r > 0 : ((x_0 - r, x_0 + r) \cap E) \neq \emptyset$$

Ovvero in ogni *palla/intorno centrato di* x_0 (Definizione 3.1. (Intorno di un punto) > Definizione 3.1. (Intorno di un punto)) devono esserci elementi di E.
Inoltre definiamo l'insieme dei *punti di chiusura* dell'insieme E si dicono la *chiusura (o aderenza) di* E, scritto come $\overline{E}$.

ESEMPIO 1.1.
Consideriamo l'insieme $E = (1, 2)$ e voglio trovare gli elementi di $\overline{E}$.
Per farlo è possibile disegnare il grafico di E, poi *"testare"* ogni elemento della retta $\mathbb{R}$ per vedere quali sono i potenziali elementi di $\overline{E}$.



Si evince che:

1. I numeri $0, \frac{1}{2}$ *non* sono *punti di aderenza* per E, in quanto è possibile individuare *almeno* un intorno fuori da E (ovvero che non contenga elementi di E).
2. 1 è un *punto di aderenza*, in quanto per tutti gli intorni in x_0 abbiamo sempre almeno un elemento di E; infatti si deve sempre *"andare a destra"*, *"entrando"* in E. Analogo il discorso per 2.
   In conclusione è possibile individuare

$$\overline{E} = [1, 2]$$

OSS 1.1. Osserviamo che per ogni insieme è vera che

$$E \subseteq \overline{E}$$

ESEMPIO 1.2.

Considero l'insieme

$$E = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \diagdown \{0\}\}$$

poi voglio trovare le seguenti: $\overline{E}, E^{\circ}, \partial E$.

3. $\overline{E} = E \cup \{0\}$ e $\partial E = E \cup \{0\}$; a questi insiemi aggiungiamo il numero 0 in quanto *per l'Archimedeità di* $\mathbb{R}$ (Conseguenze dell'esistenza dell'estremo superiore, **TEOREMA 3.1.**) è sempre possibile trovare un n tale che

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n : 0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

4. $E^{\circ} = \emptyset$; infatti E è definita tramite gli $\mathbb{N}$, che presenta dei *"buchi"* in $\mathbb{R}$.

ESEMPIO 1.3.
Voglio studiare l'insieme dei *numeri razionali* $\mathbb{Q}$ (Richiami sui Numeri Razionali).

1. Sicuramente

$$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

per la *densità di* $\mathbb{Q}$ *in* $\mathbb{R}$ (Conseguenze dell'esistenza dell'estremo superiore, **TEOREMA 4.1.**). Ovvero da ciò consegue che prendendo un punto $q_0 \in \mathbb{Q}$, è possibile trovare sempre dei numeri razionali per qualsiasi *intorno* con $r > 0$. Infatti

$$\forall r > 0, \exists a \in \mathbb{Q} : q_0 + r > a > q$$

2. I punti di frontiera $\partial\mathbb{Q}$ è anch'esso $\mathbb{R}$ per motivi analoghi.
3. Per *l'assioma di Dedekind* (Assiomi dei Numeri Reali, **ASSIOMA S)**) sappiamo che tra un numero razionale q_0 e un altro numero (in questo caso prendiamo $q_0 + r, \forall \varepsilon > 0$) dev'esserci un numero *irrazionale* che non appartiene a $\mathbb{Q}$; allora non ci sono dei *punti interni* (Punti interni, esterni e di frontiera, **DEF 1.1.**).

Proprietà della chiusura

Possiamo enunciare le seguenti proprietà per la *chiusura* di E.

#Teorema

Teorema 1.1. (Proprietà della chiusura $\bar{E}$).

Sia $E \subseteq \mathbb{R}$, allora sono vere che:

1. $\overline{E}$ è un *insieme chiuso* (Insiemi aperti e chiusi > Definizione 2.1. (Insieme Chiuso)). Per provare questo, bisognerebbe dimostrare che l'insieme complementare della chiusura di E è *aperto*; quindi bisogna considerare i punti che non stanno né in E né nella sua chiusura $\overline{E}$ e poi dimostrare che esiste un'intervallo di ogni punto che non sta nella chiusura.
2. $\overline{E}$ è *il più piccolo chiuso* che contiene E. Quindi ho in mente una *relazione d'ordine* (Relazioni, **DEF 4.1.**), ovvero dal punto di vista di quella d'inclusione. Ovvero

$$A > B \iff B \subseteq A$$

3. Un insieme E è *chiuso* se e solo se $\overline{E} = E$

2. Punti di accumulazione

#Definizione

Definizione 2.1. (Punto di accumulazione).

Sia $E \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Si dice che x_0 è un **punto di accumulazione di** E se è vera che

$$\forall r > 0, (]x_0 - r, x_0 + r[\cap E) \diagdown \{x_0\} \neq \emptyset$$

ovvero un *punto di aderenza* escludendo però il punto x_0 stesso; quindi un punto x_0 è di accumulazione per E se in ogni intorno di x_0 ci sono punti di E diversi da se stesso.

L'insieme dei *punti di accumulazione per* E si chiama **derivato** di E, demarcata col simbolo

$$\mathcal{D}E$$

e si legge come *"d corsivo maiuscolo"*.

OSS 2.1. Come abbiamo definito degli *intorni di* $+\infty$ *o di* $-\infty$ in Definizione 3.1. (Intorno di un punto), **DEF.3.2.**, è possibile analogamente definire anche $+\infty$ o $-\infty$ come *punti di accumulazione* di un insieme E. Un $+\infty$ è punto di accumulazione per E vuol dire che si verifica il seguente:

$$\forall M > 0, (M, +\infty) \cap E \neq \emptyset$$

ovvero

$$\forall M > 0, \exists x_0 \in E : x > M$$

ovvero che per ogni semiretta a partire da M, dev'esserci almeno un elemento in comune tra questa semiretta e l'insieme E con $+\infty$ come punto di accumulazione.
Analoga la definizione di un insieme E che ha $-\infty$ come punto di accumulazione.

#Teorema

Teorema 2.1. (Teorema di caratterizzazione degli punti di accumulazione).

Sia $E \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$. x_0 è *punto di accumulazione per* E se e solo se in *ogni* intorno di x_0 ci sono *infiniti* punti di E.

#Dimostrazione
Dimostrazione. (del **TEOREMA 2.1.**)
Questa dimostrazione si articola in due sotto-dimostrazioni.
" $\Longleftarrow$ ": Dimostriamo che *se in ogni intorno di x_0 ci sono infiniti punti di E, allora x_0 è di accumulazione per E*: questo è evidentemente vero, in quanto se in ogni intorno di x_0 ci sono infiniti punti di E, allora dev'esserci almeno un elemento di E in questo intorno diverso da x_0.
" $\Longrightarrow$ ": Ora notiamo il viceversa; ovvero che *se x_0 è di accumulazione per E allora in ogni suo intorno ci sono infiniti punti di E.*
Per dimostrare questa proposizione, procediamo dimostrando la *contronominale*; ovvero che se in *ogni intorno di x_0 ci sono elementi finiti di E, allora x_0 non è punto di accumulazione per E.* (Logica formale - Sommario)
Supponiamo quindi che x_0 abbia un intorno in cui ci sono un numero finito punti di E: allora

$$(x_0 - r, x_0 + r) \cap E = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$$

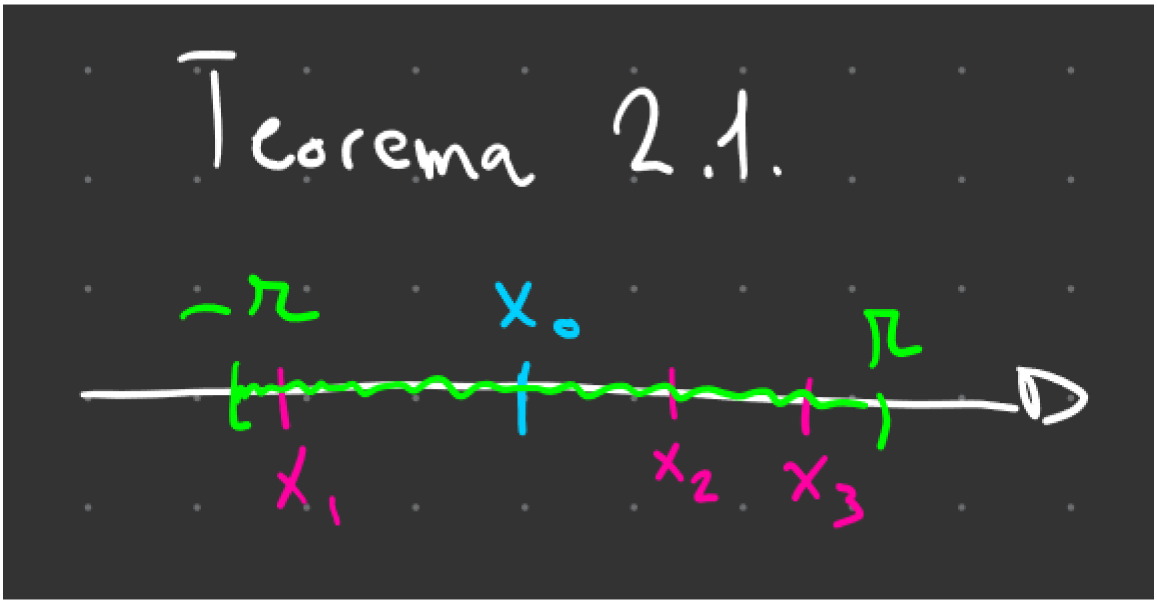
Che graficamente (**FIGURA 2.1.**) corrisponde a
Considero dunque $r = \min(\{d(x_0, x_j), \forall j \in \{1, 2, \ldots, k\}\})$ ovvero la *minima* distanza tra x_0 e un qualunque punto di E. Allora risulta che

$$((x_0 - r, x_0 + r) \cap E) \setminus \{x_0\} = \emptyset$$

il che ci dimostra che x_0 *non* è di accumulazione per E. (oppure è un punto isolato).

□

FIGURA 2.1. (*Idea*)



ESEMPIO 2.1. Prendiamo di nuovo l'intervallo

$$E = (1, 2)$$

E voglio individuare $\mathcal{D}E$. Con lo stesso approccio di **ESEMPIO 1.1.**, *"testiamo"* dei elementi della retta reale per vedere se possono essere dei *punti di accumulazione*.

1. Ovviamente 0 non può essere punto di accumulazione.
2. $1, 2$ sono *punti di accumulazione* per E in quanto disegnando un qualsiasi intorno di questi punti, si deve per forza disegnare un intervallo che contenga elementi di E. Analogo il discorso per i numeri $1 \leq x \leq 2$.
   Allora

$$\mathcal{D}E = [1, 2]$$

ESEMPIO 2.2. Prendiamo l'insieme

$$E = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \diagdown \{0\}\}$$

Con lo stesso approccio di sempre, individuiamo gli elementi di $\mathcal{D}E$.

3. 1 non è punto di accumulazione. Infatti è possibile individuare un intorno $(1-r, 1+r)$ che non abbia elementi di E: basta porre $r = 0,1$.
4. Analogo discorso per tutti gli elementi n ponendo $r = |\frac{1}{n^2+n}|$.
5. 0 è punto di accumulazione per l'*Archimedeità* dei reali (Conseguenze dell'esistenza dell'estremo superiore, **TEOREMA 3.1.**). Infatti per qualsiasi r è sempre possibile trovare $n \in \mathbb{N}$ tale che

$$0 < \frac{1}{n} < 0 + r$$

Allora $\mathcal{D}E = \{0\}$.

ESEMPIO 3.3. Prendiamo i *numeri naturali* (Numeri Naturali - Sommario). Si scopre che $\mathcal{D}\mathbb{N} = \emptyset$; non esistono i numeri naturali che siano dei *punti* $\mathbb{R}$ *di accumulazione per* $\mathbb{N}$, in quanto tutti questi numeri distano tra di loro. Basta infatti prendere l'intorno in $n \in \mathbb{N}$ di raggio $0,5$. Invece è possibile dire che $+\infty$ è punto di accumulazione per $\mathbb{N}$, in quanto grazie all'*Archimedeità dei reali* (Conseguenze dell'esistenza dell'estremo superiore, **TEOREMA 2.1.**) si verifica la seguente condizione:

$$\forall M > 0, \exists n \in \mathbb{N} : n > M \text{ dove } \varepsilon = 1$$

Primo teorema di Bolzano-Weierstraß (forma insiemistica)

Enunciamo uno dei teoremi più importanti dell'*analisi matematica*, che ci garantisce l'esistenza di un punto di accumulazione in $\mathbb{R}$ per una categoria di insiemi.

#Teorema

Teorema 2.2. (Primo teorema di Bolzano-Weierstraß).

Sia $E \subseteq \mathbb{R}$, E un insieme *infinito* e *limitato*. (Insiemi limitati, maggioranti, massimo e teorema dell'estremo superiore, **DEF 1.3.**)
Allora si verifica il seguente:

$$\exists \xi \in \mathbb{R} : \xi \in \mathcal{D}E$$

ovvero che esista un numero ξ che sia *punto di accumulazione* per E.

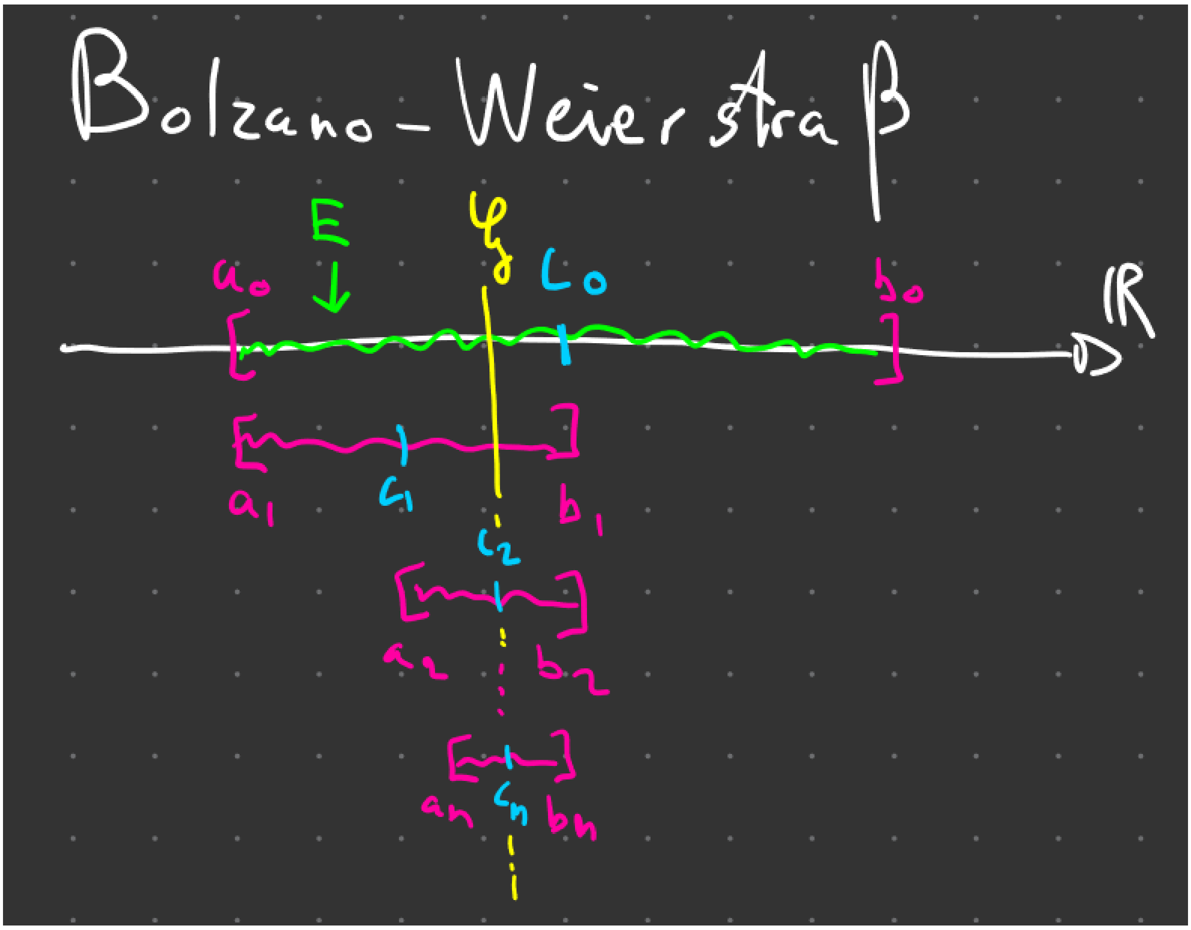
#Dimostrazione
Dimostrazione.@Teorema 2.2. (Primo teorema di Bolzano-Weierstraß)
Se E è un insieme *limitato* allora per il *teorema dell'esistenza dell'estremo superiore e inferiore* (Insiemi limitati, maggioranti, massimo e teorema dell'estremo superiore, **TEOREMA 4.1.**) esistono

$$a_0 = \inf(E); b_0 = \sup(E)$$

ovvero $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ e tali per cui $E \subseteq [a_0, b_0]$.
Allora considero c_0 il *punto medio tra* a_0 *e* b_0; ora considero i due intervalli

$$[a_0, c_0]; [c_0, b_0]$$

che graficamente corrisponde a



Inoltre *almeno* uno di questi intervalli devono essere *infiniti*, in quanto se supponessimo per assurdo che entrambi gli intervalli fossero finiti, allora la loro unione sarebbe anch'essa finita.
Tenendo questo in considerazione, scegliamo uno di questi. Ora chiamo questo intervallo $[a_1, b_1]$, dove $a_1 = c_0$ oppure $b_1 = c_0$, a seconda dell'intervallo scelto.
Quindi otteniamo una *successione di intervalli inscatolati, limitati, infiniti e dimezzati* (Intervalli)

$$(I_n)_n$$

La *forma forte del teorema di Cantor* (Conseguenze dell'esistenza dell'estremo superiore, **TEOREMA 5.2.**) ci dice che facendo l'intersezione di tutti questi intervalli otteniamo un ξ.
Ora voglio trovare un *intorno* di ξ che contenga un qualunque insieme *infinito* $[a_n, b_n]$. Ovvero voglio verificare che

$$\exists r > 0 : [a_n, b_n] \subseteq (\xi - r, \xi + r)$$

Allora la condizione è

$$r > d(a_n, b_n) = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$$

il che è possibile in quanto ricordandomi che

$$\frac{b_0 - a_0}{n} \geq \frac{b_0 - a_0}{2^n}$$

e tenendo conto *l'Archimedeità di* $\mathbb{R}$ (Conseguenze dell'esistenza dell'estremo superiore, **TEOREMA 3.1.**) la condizione sopra citata è totalmente possibile visto che

$$\exists \bar{n} : 0 < \frac{b_0 - a_0}{2^{\bar{n}}} \leq \frac{b_0 - a_0}{\bar{n}} < r$$

Abbiamo quindi che l'intorno in ξ di raggio r contiene l'insieme infinito $[a_{\bar{n}}, b_{\bar{n}}]$, di conseguenza anche l'intorno stesso è infinito; dato che contiene infiniti punti di E, per il **TEOREMA 2.1.** ξ è *punto di accumulazione* per E.

$\square$

E. Nesso con successioni (File a parte disponibile)

Se si vuole consultare il file messo a parte per questa sezione visitare Nesso tra Topologia di R e Successioni - Sommario

E1. Secondo teorema di B.W.

Secondo teorema di Bolzano-Weierstraß

Richiami al primo teorema di Bolzano-Weierstraß; interpretazione del medesimo teorema in termini di successioni; enunciato del teorema; dimostrazione del teorema.

---

0. Richiamo al primo teorema di B.W.

Richiamiamo il *primo teorema di Bolzano-Weierstraß* in Punti di aderenza e di accumulazione.

#Richiamo

> Richiamo (Primo teorema di BW (richiamo)).

Sia $E \subseteq \mathbb{R}$, E un insieme *infinito* e *limitato*. (Insiemi limitati, maggioranti, massimo e teorema dell'estremo superiore, **DEF 1.3.**)
Allora si verifica il seguente:

$$\exists \xi \in \mathbb{R} : \xi \in \mathcal{D}E$$

ovvero che esista un numero ξ che sia *punto di accumulazione* per E.

1. Enunciato del teorema

Idea. Abbiamo appena letto l'enunciato del *primo* teorema di Bolzano-Weierstraß, che viene anche detta come la *"forma insiemistica"* di tale teorema: ora la vogliamo interpretare con le nozioni di *successione*, *successione convergente*, e di *sotto successione*. (Successione e Sottosuccessione)

#Teorema

Teorema 1.1. (Secondo teorema di Bolzano-Weierstraß).

Sia $(a_n)_n$ una *successione reale* e *limitata* (Successione e Sottosuccessione, **DEF 1.2.**, **DEF 1.3.**)
Allora deve esistere una *sotto successione convergente* $(a_{n_k})_k$ (Successione e Sottosuccessione, **DEF 2.1.**), ovvero deve esistere

$$\lim_k a_{n_k} = L \in \mathbb{R}$$

2. Dimostrazione

#Dimostrazione
Dimostrazione.@Teorema 1.1. (Secondo teorema di Bolzano-Weierstraß)
Chiamo $E = \{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ l'insieme dei *valori di* a_n, ovvero l'insieme immagine della successione $(a_n)_n$.
Ora ci sono due possibilità: che E sia o *finito* o *infinito*.

1. E è finito: esempi di questo caso può essere la successione costante $a_n = c, c \in \mathbb{R}$ oppure la successione pari-dispari $a_n = (-1)^n$.
   Allora *almeno* un elemento in E è immagine di *infiniti* indici n; scelgo allora una sotto successione *opportuna* tale da risultare una successione costante, che è ovviamente convergente.
   ESEMPIO 2.1. Ad esempio per $a_n = (-1)^n$ basta scegliere $(a_{2n})_n$ o $(a_{2n+1})_n$. L'idea è che abbiamo

$$1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$$

e scegliamo solo i termini pari o dispari: così abbiamo la *successione estratta*

$$1, 1, 1, \ldots, 1 \text{ o } -1, -1, -1, \ldots, -1$$

2. E è infinito: ma comunque la *successione* $(a_n)_n$, per ipotesi, è limitata. Allora E è un insieme *limitato* e *infinito*; qui applico il *primo teorema di Bolzano-Weierstraß* richiamatasi all'inizio. Chiamo dunque il *punto di accumulazione* (Punti di aderenza e di accumulazione, **DEF 2.1.**) per E : $\xi \in \mathbb{R}$.
Allora per definizione in *ogni intorno* di ξ ci sono *infiniti punti* di E.
Ovvero in *ogni intorno di* ξ ci sono *infiniti punti-valori* a_n.
Ora ci chiediamo se è possibile costruire una sottosuccessione tale che

$$\lim_k a_{n_k} = \xi$$

Allora per avere una risposta consideriamo i seguenti:
0. Considero l'intorno $]\xi - 1, \xi + 1[$ e scelgo a_{n_0} in questo intorno.
   1. Stesso discorso per l'intorno $]\xi - \frac{1}{2}, \xi + \frac{1}{2}[$, con a_{n_1}, ma anche tale che $n_1 > n_0$ per conservare l'ordine. Posso farlo in quanto ci sono *infiniti* punti (ovvero valori a_n) attorno ξ.
   2. Vado avanti così fino all'infinito; ho allora

$$a_{n_k} \in (\xi - \frac{1}{2^k}, \xi + \frac{1}{2^k})$$

Allora

$$|a_{n_k} - \xi| < \frac{1}{2^k} \implies 0 < |a_{n_k} - \xi| < \frac{1}{2^k}$$

Considerando che

$$\lim_n 0 = 0, \lim_n \frac{1}{2^k} = 0$$

Allora per il *teorema dei due carabinieri* (Limite di Successione, **OSS 1.1.**) ho

$$\lim_k a_{n_k} - \xi = 0 \implies \boxed{\lim_k a_{n_k} = \xi} \blacksquare$$

$\square$

Graficamente l'idea della dimostrazione è il seguente.
FIGURA 2.1. (*Idea della dimostrazione*)
[GRAFICO DA FARE]

E2. Insiemi compatti

Insiemi compatti in R

Definizione di insiemi compatti in R; R come spazio metrico; teorema di caratterizzazione dei compatti in R; lemma di caratterizzazione della chiusura tramite la successione; dimostrazione del teorema.

---

0. Preambolo - Spazi metrici e topologici

OSS 0.a. Osserviamo che dal titolo leggiamo che stiamo *in specifica* prendendo l'insieme $\mathbb{R}$, in quanto questo è un insieme su cui possiamo definire una *distanza* (Definizione 3.1. (Intorno di un punto), **DEF 1.1.**). Infatti si dice che $\mathbb{R}$ è uno *spazio metrico*, come lo è pure $\mathbb{R}^2, \ldots, \mathbb{R}^n$. Altrimenti un insieme su cui non può essere definita una *distanza* si dice *spazio topologico*.
Per approfondire questo tema rivolgersi alla dispensa di *D.D.S.*, capitolo *10.2*, p. 33.

1. Definizione di insieme compatto in R

#Definizione

Teorema 1.1. (Insieme compatto in R per successioni).

Sia $E \subseteq \mathbb{R}$. E si dice **compatto per successione** (*d'ora in poi diremo compatto e basta*) se vale la seguente proprietà: se da *ogni successione* a valori in E posso estrarre *una sottosuccessione convergente ad un punto* $x \in E$.

OSS 1.1. Con questa definizione, un insieme compatto sembra un ente di cui è quasi impossibile da verificare: infatti diventa interessante trovare una *caratterizzazione alternativa* con un teorema.

2. Teorema di caratterizzazione dei compatti

#Teorema

Teorema 2.1. (Teorema di caratterizzazione dei compatti in R).

Sia $E \subseteq \mathbb{R}$.
Tesi. Allora E è compatto *se e solo se* E è chiuso e limitato.

Lemma di caratterizzazione della chiusura

Prima di poter procedere alla dimostrazione, ci serve il seguente lemma.

#Lemma

Lemma 2.1. (Caratterizzazione della chiusura tramite le successioni).

Sia $E \subseteq \mathbb{R}$.
Allora E è *chiuso* (Insiemi aperti e chiusi, **DEF 2.1.**) se e solo se vale la seguente proprietà:
$(*)$ Se una successione a valori in E è convergente, allora il limite appartiene all'insieme E.

#Dimostrazione
Dimostrazione.@Lemma 2.1. (Caratterizzazione della chiusura tramite le successioni)
Questo è un teorema del tipo $\iff$, quindi si procede in due passi distinti.

1. "$\implies$": Sia E *chiuso*; ora supponiamo (*per assurdo*) che sia falsa la proprietà $(*)$. Ovvero supponiamo che esiste una successione a valori in E tale che il suo punto di convergenza $\bar{a}$ appartiene ad un punto fuori da E (ovvero al suo complementare $\mathcal{C}_\mathbb{R}E$).
   Però E è chiuso, di conseguenza $\mathcal{C}_\mathbb{R}E$ è aperto: quindi abbiamo i seguenti.
   $$\bar{a} \in \mathcal{C}_\mathbb{R}E \implies \exists \varepsilon > 0,]\bar{a}-\varepsilon, \bar{a}+\varepsilon[\subseteq \mathcal{C}_\mathbb{R}E$$
   Però allo stesso tempo abbiamo, per definizione
   $$\lim_n a_n = \bar{a} \implies \begin{gathered} \forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} : \forall n \in E \\ n > \bar{n} \implies a_n \in \;]\bar{a}-\varepsilon, \bar{a}+\varepsilon[\end{gathered}$$
   Tuttavia questo è un *assurdo* in quanto sappiamo che se a_n appartiene a E e invece l'intorno $]\bar{a}-\varepsilon, \bar{a}+\varepsilon[$ contiene *solo* elementi di $\mathcal{C}_\mathbb{R}E$, questo è impossibile. Allora la proprietà $(*)$ è vera.
   L'idea della contraddizione sarebbe
   FIGURA 2.1.a. (*La contraddizione*)
   [DA FARE]

2. " $\Longleftarrow$ ": Sia vera la proprietà $(*)$, allora dimostro che $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}E$ sia aperto.
   Per assurdo suppongo che $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}E$ *non* sia aperto: allora facciamo la negazione di

$$
\begin{gathered}
\neg(\forall x \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}E, \exists \varepsilon > 0 : \ ]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subseteq \mathcal{C}_{\mathbb{R}}E) \\
\exists x \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}E : \forall \varepsilon > 0, \ ]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\ \cap E \neq \emptyset
\end{gathered}
$$

   Allora il gioco è fatto; quindi prendo l'intorno $\varepsilon = \frac{1}{n}$ posso individuare una successione x_n

$$
\begin{gathered}
\varepsilon = \frac{1}{n} \implies \exists \bar{x} \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}E : \forall n, \ ]\bar{x} - \frac{1}{n}, \bar{x} + \frac{1}{n}[\ \cap E \neq \emptyset \\
\forall n, \exists x_n \in E : |x_n - \bar{x}| < \frac{1}{n} \implies \lim_n x_n = \bar{x} \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}E
\end{gathered}
$$

   Quindi ho trovato una successione $(x_n)_n$ a valori in E che converge ad un punto *fuori di* E, che è impossibile in quanto violerebbe la l'ipotesi iniziale.
   FIGURA 2.1.b. (*La seconda contraddizione*)
   [DA FARE]

$\square$

Dimostrazione del teorema

Ora siamo pronti per dimostrare il *teorema di caratterizzazione dei compatti*.

#Dimostrazione
Dimostrazione.@Teorema 2.1. (Teorema di caratterizzazione dei compatti in R)
Questo è un teorema del tipo *se e solo se*, quindi dimostriamo entrambi i lati delle implicazioni.

1. " $\implies$ ": Suppongo che E sia *compatto*, allora devo dimostrare che E è chiuso è limitato.
   Per assurdo suppongo che E non sia limitato: ora se considero una successione a valori in E divergente, allora per ipotesi questa deve avere una sottosuccessione *convergente*. Per esempio se E è *superiormente illimitato* (Insiemi limitati, maggioranti, massimo e teorema dell'estremo superiore) ho la seguente implicazione

$$
\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in E : x_n > n \implies \lim_n x_n = +\infty
$$

   allora $(x_n)_n$ non avrebbe sottosuccessioni convergenti ad un punto in E.
   Per assurdo suppongo che E sia non chiuso; allora non vale la proprietà $(*)$ del Lemma 2.1. (Caratterizzazione della chiusura tramite

le successioni) ovvero

$$\neg[\forall (a_n)_n \text{ è convergente in } E, \lim_n a_n \in E]$$
$$\exists (a_n)_n \text{ convergente in } E : \lim_n a_n \notin E$$

Perciò *tutte* le sottosuccessioni di $(a_n)_n$ convergono ad un punto $\bar{a} \notin E$
.
Però essendo E per ipotesi *compatto*, la successione $(a_n)_n$ dovrebbe avere almeno una successione che converge ad un punto in E, dandoci un assurdo.
Come si può vedere E deve essere necessariamente sia *limitato* che *chiuso*.

2. " $\Longleftarrow$ ": Sia E *chiuso* e *limitato*, proviamo che E è compatto.
   Prendo una successione $(a_n)_n$ in E.
   Se E è *limitato* allora per il Teorema 1.1. (Secondo teorema di Bolzano-Weierstraß) deve esistere una *sottosuccessione convergente* e la indichiamo con

$$(a_{n_k})_k : \lim_k a_{n_k} = \bar{a}$$

   però E è anche *chiuso*, e per la proprietà $(*)$ del **LEMMA 2.1.** deve valere che il valore per cui converge il limite della sottosuccessione appartiene a E; ovvero

$$(a_{n_k})_k : \lim_k a_{n_k} = \bar{a} \in E$$

   Pertanto E è compatto in quanto abbiamo individuato una sottosuccessione convergente ad un punto in E.

□

E3. Successioni di Cauchy

Successioni di Cauchy

Definizione di successione di Cauchy; teorema sulla successione di Cauchy; teorema di completezza di R; esiti della dimostrazione del teorema di completezza di R.

---

1. Definizione di Successione di Cauchy

#Definizione

Definizione 1 (Successione di Cauchy).

Sia $(a_n)_n$ una *successione reale* (Successione e Sottosuccessione, **DEF 1.2.**), allora definiamo $(a_n)_n$ come *successione di Cauchy* se vale la seguente:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} : n, m > \bar{n} \implies |a_n - a_m| < \varepsilon$$

OSS 1.1. Osserviamo che questa definizione è ben *diversa* dalla nozione di *convergenza*: con la *convergenza* abbiamo *un punto* che si avvicina ad un certo valore, invece qui abbiamo *due punti* a_n e a_m che si *"avvicinano"* tra di loro.
Tuttavia in $\mathbb{R}$ è possibile dire che questi sono *equivalenti* in quanto ci troviamo in uno *spazio metrico*. Dimostreremo questa affermazione con due teoremi.

#Teorema

Teorema 2.

Se una successione in $\mathbb{R}$ è convergente, allora è di *Cauchy*.

#Dimostrazione

Dimostrazione.@Teorema 2
Sia $(a_n)_n$ convergente, allora

$$\lim_n a_n = \bar{a} \in \mathbb{N}$$

Cioè

$$\begin{gathered}\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} : \forall n \\ n > \bar{n} \implies |a_n - \bar{n}| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\end{gathered}$$

Allora se $m, n > \bar{n}$ abbiamo i seguenti:

$$\begin{gathered}\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} : \forall n, m \\ n > \bar{n} \implies |a_n - \bar{a}| < \frac{\varepsilon}{2} \\ m > \bar{n} \implies |a_m - \bar{a}| < \frac{\varepsilon}{2}\end{gathered}$$

Allora sommandoli abbiamo

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - \bar{a} + a_m - \bar{a}| \leq |a_n - \bar{a}| + |a_m - \bar{a}| < 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Dunque abbiamo verificato

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} : n, m > \bar{n} \implies |a_n - a_m| < \varepsilon$$

che è la definizione della *successione di Cauchy*.

□

Completezza di R

#Teorema

Teorema 3 (Completezza di R).

In $\mathbb{R}$ le *successioni di Cauchy* sono *convergenti*.

#Dimostrazione

Dimostrazione.@Teorema 3 (Completezza di R)

La dimostrazione si articola in tre parti, ad ognuna con un suo esito.

1. Una *successione di Cauchy* è *limitata*. Infatti $(a_n)_n$ di Cauchy significa

   $$\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} : n, m > \bar{n} \implies |a_m - a_n| < \varepsilon$$

   Fissando $\varepsilon = 1$ ottengo

   $$\exists \bar{n} : n, m > \bar{n} \implies |a_n - a_m| < 1$$

   Quindi

   $$m > \bar{n} \implies |a_{\bar{n}+1} - a_m| < 1$$

   Analogamente

   $$n > \bar{n} \implies |a_n - a_{\bar{n}+1}| < 1$$

   Quindi

   $$a_n \in (a_{\bar{n}+1} - 1, a_{\bar{n}+1} + 1)$$

   Allora $(a_n)_n$:

   > 1. Fino a $\bar{n}$ si comporta come vuole;
   > 2. Da $\bar{n} + 1$ in poi tutti i suoi valori immagine $a_n, n > \bar{n}$ sono *tutti* dentro un intervallo fissato. Ovvero è questa successione è limitata.

2. Per il Teorema 1.1. (Secondo teorema di Bolzano-Weierstraß), se $(a_n)_n$ è di *Cauchy* ed è *limitata* allora esiste una successione estratta convergente.

3. "Se una *successione di Cauchy* ha una sottosuccessione convergente, allora la successione originaria è convergente.": infatti teniamo in conto i seguenti:

   - $(*)$ $(a_n)_n$ è di Cauchy vuol dire

   $$\begin{gathered}\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} : \forall n, m \\ n, m > \bar{n} \implies |a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}\end{gathered}$$

   - $(**)$ $(a_{n_k})_k$ è *convergente a* $\bar{a}$ vuol dire

   $$\lim_k a_{n_k} = \bar{a} \iff \begin{gathered}\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{k} : \forall k \\ k > \bar{k} \implies |a_{n_k} - \bar{a}| < \frac{\varepsilon}{2}\end{gathered}$$

   Ora per far valere $m > \bar{n} \wedge k > m \implies k > \bar{n}$ prendiamo e $k > \max\{\bar{n}, \bar{k}\}$. Ora li *"combiniamo"* e valuto $|a_n - \bar{a}|$. Ora vale $a_{n_k} > a_m$; allora $\forall n > \bar{n}, k > \max\{\bar{n}, \bar{k}\}$

   $$|a_n - \bar{a}| \leq |a_n - a_m + a_{n_k} - \bar{a}| < |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - \bar{a}| < 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

   e abbiamo esattamente la definizione di

   $$\lim_n a_n = \bar{a} \blacksquare$$

$\square$