Equazioni Differenziali - Sommario

Tutto sulle equazioni differenziali.

---

0. INTRODUZIONE ALLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI

0A. Introduzione

Introduzione alle Equazioni Differenziali

Introduzione alle equazioni differenziali: discorso introduttivo (applicazioni pratiche). Esempio della dinamica delle popolazioni: modello di Malthus, modello di Vermulst (o logistico).

---

1. Discorso Introduttivo

LA MODELLISTICA CON LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI. Molti fenomeni sono *modellizzati* secondo le regole della *matematica*. In particolare le *equazioni differenziali*, che sono delle *equazioni funzionali che presentano delle relazioni tra la funzione e le sue derivate*.
Infatti, alla soluzione di tali equazioni si può ricondurre lo *studio* di molti problemi *fisici e meccanici*: tutto riduce a risolvere *certe equazioni differenziali*.
Ad esempio, con la *meccanica newtoniana* possiamo studiare il *moto di un qualsiasi sistema meccanico*, usando le leggi di Newton (per ulteriori approfondimenti vedere la pagina Kolmogorov Equazioni Differenziali)
Adesso vediamo un *esempio biologico* (per altri esempi vedere la pagina Esempi di Equazioni Differenziali).

2. La Dinamica delle Popolazioni

Abbiamo una popolazione in un *ambiente isolato* e vogliamo capire la sua *dinamica* della *crescita*. I seguenti modelli descriveranno tale dinamica

#Esempio

MODELLO. (*Di Malthus o modello geometrico*)

Supponiamo inoltre di avere *infinite risorse* e di chiamare $p(t)$ il numeri di *individui* per un istante tempo t.
Allora abbiamo che $p(t)$ dipende *solamente* dal tasso di crescita: chiamiamo μ, ν i tassi di *crescita* e di *mortalità*. Da ciò ricaviamo l'equazione per l'incremento

$$p(t+\mathrm{d}t) - p(t) = \mu p(t)\mathrm{d}t - \nu p(t)\mathrm{d}t$$

Effettuando delle semplificazioni otteniamo l'equazione

$$\frac{p(t+\mathrm{d}t) - p(t)}{\mathrm{d}t} = (\mu - \nu)p(t)$$

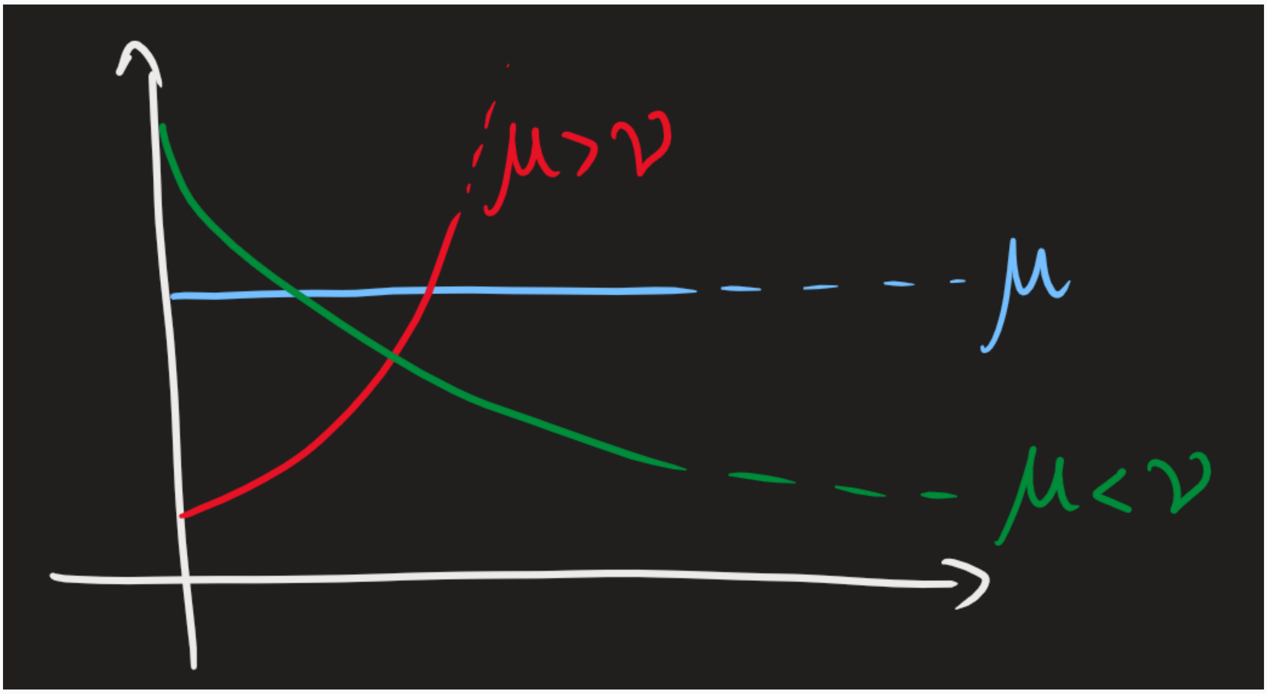
passando per il limite $\mathrm{d}t \to 0$, otteniamo l'equazione differenziale

$$\boxed{p'(t) - (\mu - \nu)p(t) = 0}$$

da cui ricaviamo la soluzione

$$\boxed{p(t) = e^{(\mu-\nu)t}}$$

Ovvero ho il grafico



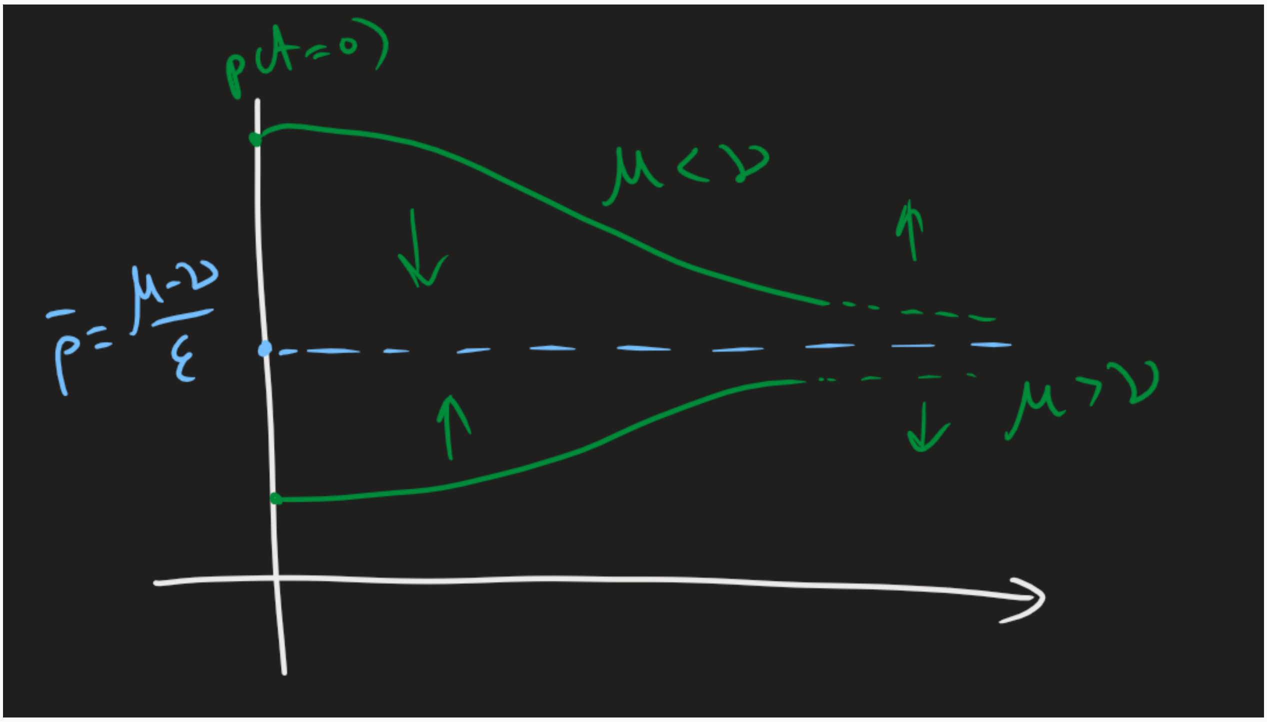
#Esempio
MODELLO. (*Di Vermulst, o logistico*)
Supponiamo di avere invece delle *risorse limitate* (condizione più realistica, ma vedremo che complica di più le cose). Allora in questo caso ricaviamo l'equazione per l'incremento, tenendo conto degli individui precedenti ε.

$$p(t+\mathrm{d}t) + p(t) = (\mu + \nu)p(t)\mathrm{d}t - \varepsilon p(t)p(t)\mathrm{d}t$$

Da cui ricaviamo, passando il limite per $\mathrm{d}t \to 0$,

$$\boxed{p'(t) - (\mu - \nu)p(t) - \varepsilon p^2(t) = 0}$$

In questo caso diventa più difficile dare una soluzione esplicita (che comunque esiste!), che ha il grafico di una *sigmoide*.



Nota. (*Approccio pratico*)
Da un lato possiamo *modellizzare* fenomeni mediante delle equazioni differenziali, *conoscendo* certi parametri.
Tuttavia rendiamo ben nota che esiste anche *un altro approccio*, quello contrario: assumo *vero* il modello e provo a stimare i *parametri* di $p(t)$ attuale per poi confrontarlo col modello (così da confermare che il modello sia effettivamente vero). Questo è stato fatto per l'*epidemia* del *COVID-19*.

0B. Esempi di Equazioni Differenziali

Esempi di Equazioni Differenziali

Esempi di Modelli descritti da Equazioni Differenziali: legge di decadimento del radio, moto di un oggetto con forza elastica e resistenza laminare, il pendolo, circuito RC, e il moto di pianeti.

---

0. Voci correlate

- Forza Elastica

1. Legge di Decadimento del Radio

Nota: ricavato dal testo "Le Matematiche" di "A.D. Aleksandrov, A.N. Kolmogorov, M.A. Lavrent'ev", p.394, esempio 1

#Esempio

ESEMPIO. (*La legge di decadimento del radio*)
La legge di decadimento del radio consiste nel fatto che la velocità del decadimento è proporzionale alla quantità di radio presente. Sia $R(t)$ la quantità di radio (in grammi) nell'istante t. Ponendo $R(t=0)=R_0$, abbiamo l'equazione

$$-\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}=kR$$

dove k è una *costante di proporzionalità*. Risolvendolo con un metodo che vedremo (per integrazione, Ansatz, quello che volete...) abbiamo la soluzione generale

$$R(t)=e^{-kt+kC}=C_1e^{-kt}$$

Considerando R_0, abbiamo la soluzione particolare

$$R(t)=R_0e^{-k(t-t_0)}$$

Notiamo che la soluzione appena ottenuta si trova in molti *campi di applicazione*, come ad esempio lo studio del raffreddamento di un corpo, con la quantità di calore perduta proporzionale alla differenza tra la temperatura del corpo e quelle dei mezzi circostanti.

2. Il Moto Armonico Smorzato

#Esempio

ESEMPIO. (*Moto armonico smorzato*)
Vedere pagina Moto Armonico Smorzato. In sintesi abbiamo l'equazione differenziale

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\omega^2x=0$$

che viene risolta da una delle equazioni

$$\begin{gathered}x(t)=Ae^{-\gamma t}\cos(\omega_st+\varphi)\\ x(t)=e^{-\gamma t}\left(Ae^{-ct}+Be^{ct}\right)\\ x(t)=e^{-\gamma t}\left(A+Bt\right)\end{gathered}$$

3. Il Pendolo

#Esempio

ESEMPIO. (*Il pendolo*)
Vedere pagina Esempio 1 (il pendolo). In sintesi abbiamo l'equazione differenziale

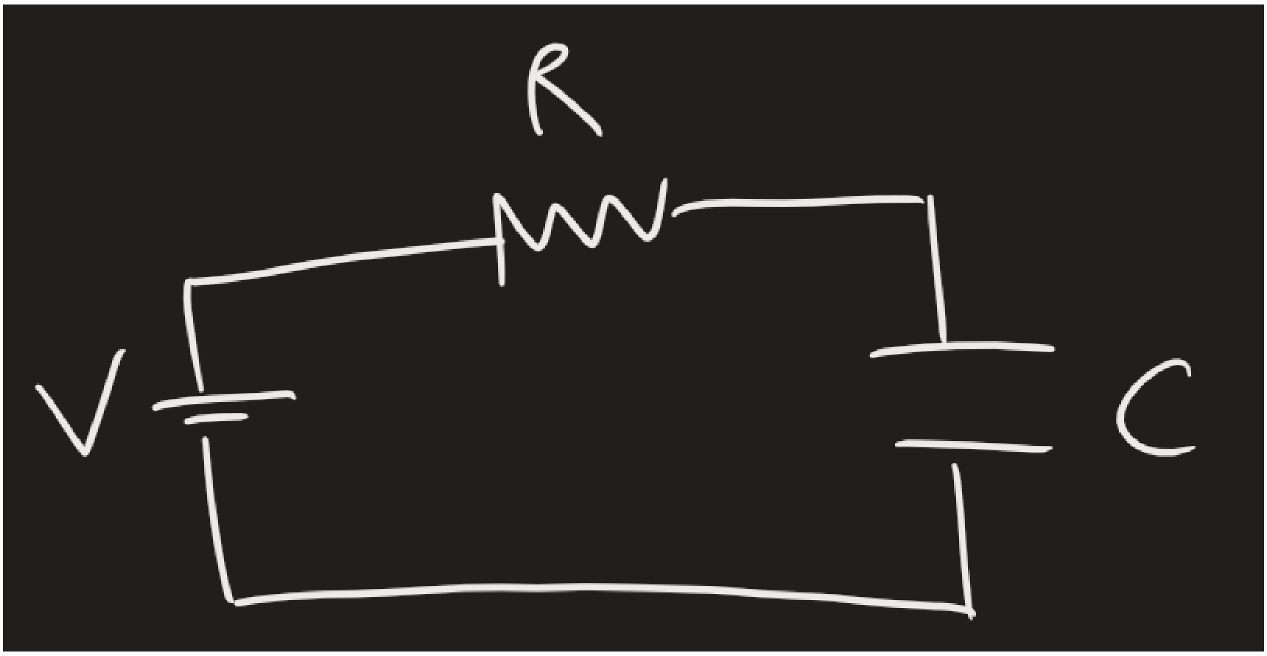
$$L\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} - g\sin x = 0$$

che non può presentare delle *equazioni esprimibile come una combinazione di funzioni elementari*, a meno che accettiamo l'approssimazione dei piccoli angoli $\sin x = x, x \to 0$.

4. Circuito RC

#Esempio

ESEMPIO. (*Circuito RC*)
Presentiamo un *circuito elettrico* caricato da una batteria ε di V_0 volt, collegandolo ad una *resistenza* di R ohm ed un *condensatore* C fahrad.



Vogliamo trovare la *carica del condensatore* $V_c(t)$. Per le *leggi di Ohm* e la definizione di *resistenza* sappiamo che

$$V_R(t) = Ri, V_C = \frac{q}{C}$$

Per le *leggi di Kirchoff* che la somma delle tensioni si annullano sempre: abbiamo dunque

$$V_0 + V_R + V_C \equiv 0$$

che implica

$$-V_0 + Ri + \frac{q}{C} = 0$$

Sappiamo che i non è altro che la derivata $q'(t)$. Allora lo presentiamo in forma

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}R + q\frac{1}{C} - V_0 = 0$$

risolvendo per $q(t)$ abbiamo

$$q(t) = Ae^{-\frac{t}{RC}} - V_0 t$$

e derivandolo otteniamo

$$\boxed{i(t) = Ae^{-\frac{t}{RC}}}$$

Poniamo $\tau = RC$ come la *costante del tempo* (si può dimostrare che è misurabile in secondi). Adesso troviamo $V_R(t)$ esplicitamente, sfruttando il fatto che $V_R(t=0) = V_0$ (infatti tutte le cariche vanno subito sulla resistenza), che ci dà la costante A

$$V_R = RAe^{-\frac{t}{\tau}} \implies V_R(t=0) = V_0 = RAe^{-\frac{t}{\tau}} \implies A = \frac{V_0}{R}$$

Ovvero abbiamo

$$\boxed{V_R(t) = V_0 e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

Adesso per trovare $V_C(t)$ basta sfruttare l'uguaglianza $V_C = V_0 - V_R$ da cui si ricava

$$V_C(t) = V_0 - V_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \implies \boxed{V_C(t) = V_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$$

che finisce l'esempio. ■

5. Il moto dei pianeti

#Esempio

ESEMPIO. (*Il moto dei pianeti*)
Nota: Tratto dal Pagani-Salta, p. 179 esempio 1.8.
Supponiamo che nell'origine del sistema in riferimento tridimensionale $\mathbb{R}^3$ sia posto un corpo di massa M (sole) il cui campo gravitazionale di forza per unità di massa è dato dal vettore $MG \cdot \nabla\left(\frac{1}{r}\right)$, con r definita come $r := \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, e G una costante.
Supponiamo inoltre che la massa del corpo m sia significativamente più piccolo di M, ovvero $m \ll M$. In altre parole, consideriamo solo *il campo di forza generato dal sole* data da $\mathcal{G}(r) = MG\frac{1}{r^2}$.
Allora l'equazione differenziale che ci dà il moto del pianeta m è dato dalle soluzioni per le posizioni x, y, z

$$\begin{cases} \ddot{x} = -MG\dfrac{x}{r^3} \\ \ddot{y} = -MG\dfrac{y}{r^3} \\ \ddot{z} = -MG\dfrac{z}{r^3} \end{cases}$$

Notiamo che dalle soluzioni possiamo ricavare le *leggi di Keplero*.

0C. Definizioni

Definizioni Relative alle Equazioni Differenziali

Terminologia e definizioni relative alle equazioni differenziali. Equazione differenziale generale, equazione differenziale ordinaria (ODE/EDO), equazione differenziale alle derivate parziale (PDE), l'ordine di un'equazione differenziale, forma normale di un'ODE, funzione incognita, funzione soluzione e problema di Cauchy.

---

0. Voci correlate

- Introduzione alle Equazioni Differenziali

1. Classificazioni di Equazioni Differenziali

Idea. Per definire *"equazione differenziale"* lo pensiamo come un *legame funzionale* tra una funzione e le sue derivate: qualche (o tutte) le derivate compaiono in una qualche combinazione. Per fare ciò usiamo la nozione di *funzione in più variabili*.

#Definizione

> Definizione (equazione differenziale ordinaria, incognita, ordine e soluzione).
>
> Siano $F: A \subseteq X^{N+2} \longrightarrow X$ e $f: A \subseteq X \longrightarrow X$ delle funzioni. F, f formano un'*equazione differenziale ordinaria* se tra di queste vi è un legame del tipo
>
> $$F(t, f(t), f'(t), \ldots, f^{(N)}(t)) = 0$$
>
> In tal caso f si dice *incognita*, N l'*ordine* (affinché sia $f^{(N)}(t) \neq 0$). Inoltre si dice *soluzione* una funzione $g: X \longrightarrow X$ che soddisfi l'uguaglianza sopra.
>
> Nota: di solito (e quasi sempre) si prende $X = \mathbb{R}$.

#Definizione

Definizione (equazione differenziale alle parziale derivate).

Se invece abbiamo che la funzione incognita ha *più variabili*, allora abbiamo un'equazione differenziale alle derivate parziali. Non ne parleremo.

#Definizione

Definizione (equazione differenziale autonoma).

Se l'equazione dell'equazione differenziale *non* dipende dal parametro t in alcun modo, allora si dice che è *autonoma*.

#Esempio

Esempio (esempi di equazioni differenziali).

Le equazioni

$$\begin{gathered}(a)\;\; y'(x) = 3y(x) \\ (b)\;\; y(x) - 3y^2(x) = 0\end{gathered}$$

sono entrambe *equazioni differenziali*. Notiamo che sono espresse in *forme diverse* e sono entrambe *autonome*.

2. ODE in forma normale

#Definizione

Definizione (forma normale di un'ODE).

Siano F, f delle funzioni che esprimono l'equazione differenziale

$$F(t, f(t), f'(t), \ldots, f^{(N)}(t)) = 0$$

Se è *possibile esplicitare* l'equazione in $f^{(N)}(t)$, allora si può scrivere

$$f^{(N)}(t) = F(t, f'(t), \ldots, f^{(N-1)}(t), 0)$$

e tale forma si dice *normale*. Se non è possibile esplicitare l'equazione differenziale in tale modo, l'ODE si dice *"non-normale"*.

3. ODE scalare del primo ordine in forma normale

Ci soffermiamo su *una categoria* delle *ODE*, ovvero *scalare e del primo ordine in forma normale*.

#Definizione

> Definizione (ODE scalare del primo ordine in forma normale, soluzione).
>
> Sia $F : E \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.
> Un'*equazione differenziale scalare del primo ordine in forma normale* è del tipo
>
> $$f'(x) = F(x, f(x))$$
>
> Una soluzione $y : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ di questo tipo di equazione differenziale è quando soddisfa le seguenti condizioni
> i. y è derivabile in I (nel suo dominio)
> ii. $(x, y(x)) \in E, \forall x \in I$ (ovvero otteniamo ancora un'equazione differenziale definibile)
> iii. $y'(x) = f(x, y(x)), \forall x \in I$ (la soluzione soddisfa l'uguaglianza nel dominio)

Notiamo che data un'equazione differenziale, possiamo avere una *classe infinita* di equazioni che risolvono tale equazione differenziale. Per avere un'*unica soluzione* poniamo condizioni più forti: ovvero la *condizione iniziale*.

4. Problema di Cauchy

Adesso definiamo una delle *categorie di equazioni differenziali* più importanti.

#Definizione

> Definizione (problema di Cauchy e una sua soluzione).
>
> Siano $f : E \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in E$ e $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. L'espressione PC definita come
>
> $$(PC) : \begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) & \text{(ODE)} \\ y(x_0) = y_0 & \text{(condizione iniziale)} \end{cases}$$
>
> si dice *"problema di Cauchy"*.
>
> Si dice che $y : I \subseteq \mathbb{R}$ è una *soluzione del problema di Cauchy* se vale che
> i. y risolve $y' = f(x, y)$
> ii. $x_0 \in I$ e soddisfa $y(x_0) = y_0$

OBBIETTIVI.
Con i problemi di Cauchy vorremmo risolvere i seguenti problemi:

1. ($\exists$) Voglio determinare condizioni necessarie per capire l'*esistenza* della/e soluzione/i

2. (!) Voglio determinare, se esiste, l'*unicità* della soluzione
3. La *stabilità* (dipendenza continua sui dati): se approssimo un problema di Cauchy con $z \to y$, come si propaga l'*errore* su y_0?
4. Lo studio *qualitativo* delle soluzioni
    - Infatti di solito *non* ho soluzioni esplicite. Consideriamo ad esempio l'*equazione di Riccati*, che per certi parametri $a > 0$ l'equazione differenziale $y' + ay^2 = x^2$ non ha soluzione che può essere espressa in *funzioni elementari*.
    - Potrei comunque ottenere delle *inforzioni qualitative* sulla soluzione; parliamo di *asintoti*, *limiti*, *dominio*, eccetera...
5. Il *metodo delle* risoluzioni delle *equazioni differenziali*; ce ne sono un sacco, che variano a seconda della *tipologia* dell'*ODE*.

A. PROBLEMI DI CAUCHY

A1. Teorema di Esistenza di Peano

Teorema di esistenza di Peano

Teorema di esistenza di Peano: enunciato e osservazioni.

---

0. Voci correlate

- Definizioni Relative alle Equazioni Differenziali

1. Teorema di esistenza di Peano

Come prima cosa studiamo le *condizioni sufficienti* per l'*esistenza* di soluzioni per *problemi di Cauchy*.

#Teorema

> Teorema (di esistenza locale, o di Peano).
>
> Siano $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \in \mathcal{C}^0(A)$ (*continua!*) con A aperto e $(x_0, y_0) \in A$. Sia posto il problema di Cauchy (PC) (1) con $f, (x_0, y_0)$.
>
> $$(PC) : \begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Allora esiste un raggio $h > 0$ sui cui posso definire una funzione y del tipo $y \in \mathcal{C}^1(A), y = (x_0 - h, x_0 + h) \longrightarrow \mathbb{R}$ che sia *soluzione* del problema di Cauchy (PC).

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 1 (di esistenza locale, o di Peano)

Omessa. ■

2. Questione dell'Unicità

Abbiamo dato una *condizione sufficiente* per l'*esistenza* di y, ovvero la *continuità* della funzione f. Tuttavia è abbastanza per garantirci anche l'*unicità*? Vediamo col seguente esempio.

#Esempio

Esempio (l'esistenza non implica unicità).

Prendiamo il problema di Cauchy (PC) definito come

$$(PC) : \begin{cases} y'(x) = 2\sqrt{|y|} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Abbiamo una soluzione? Dato che $f(y) = 2\sqrt{|y|}$ è *continua* su $\mathbb{R}$, deve esistere.

Infatti troviamo subito una soluzione $y \equiv 0$.

E' unica? No, infatti ponendo y come

$$y(x) = \begin{cases} x^2, x > 0 \\ -x^2, x \leq 0 \end{cases}$$

trovo che anche questa risolve (PC).

Anzi, peggio! Posso trovare una famiglia di funzioni $y_{\alpha,\beta}$ che risolvono il (PC).

$$y_{\alpha,\beta}(x) = \begin{cases} -(x-\alpha)^2, x \leq \alpha < 0 \\ 0, \alpha < x < \beta \\ (x-\beta)^2, x \geq \beta \end{cases}$$

Inoltre, osservo che la derivata parziale f_y non è definita (quindi non derivabile) in 0.

Conclusione. La continuità della funzione non basta; dall'esempio appena menzionato notiamo che la chiave potrebbe stare nella *derivabilità* di f su y (ovvero l'esistenza di f_y).

Infatti, vedremo col teorema di *Cauchy-Lipschitz* una condizione sufficiente che ci assicuri l'esistenza e l'unicità della soluzione.

A2. Teorema di Cauchy-Lipschitz

Teorema di Cauchy-Lipschitz

Teorema di Cauchy-Lipschitz per l'esistenza e l'unicità della soluzione per un problema di Cauchy ben-posto.

---

0. Voci correlate

- Definizioni Relative alle Equazioni Differenziali
- Teorema di esistenza di Peano

1. Teorema di Cauchy-Lipschitz

#Teorema

> Teorema (teorema di Cauchy-Lipschitz, dell'esistenza e dell'unicità locale delle soluzioni).
>
> Sia $f(x,y) : A \subseteq \mathbb{R}^2 \in \mathcal{C}^0(A)$ e tale che la sua derivata parziale f_y sia continua ($\frac{\partial f}{\partial y} \in \mathcal{C}^0(A)$), poi sia $(x_0, y_0) \in A$ un punto.
>
> Allora vale che
>
> $$\exists h > 0, \exists! y : I = (x_0 - h, x_0 + h) \longrightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^1(I)$$
>
> tale che questa $y(\cdot)$ risolva il *problema di Cauchy*
>
> $$(PC) : \begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Per dare una dimostrazione, si enuncia prima il *lemma di Volterra*.

#Lemma

> Lemma (di Volterra).
>
> Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \in \mathcal{C}^0(A)$ e il *problema di Cauchy* (PC) definita come

$$(PC): \begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Allora si ha che sono equivalenti:
i. Una funzione $y : [x_0 - h, x_0 + h] \longrightarrow \mathcal{C}^1$ risolve (PC)
se e solo se
ii. La funzione $y : [x_0 - h, x_0 + h] \longrightarrow \mathcal{C}^1$ è risolve l'equazione integrale di volterra, definita come

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t)) \, \mathrm{d}t$$

Adesso siamo pronti per dimostrare Cauchy-Lipschitz.

#Dimostrazione
DIMOSTRAZIONE del Teorema 1 (teorema di Cauchy-Lipschitz, dell'esistenza e dell'unicità locale delle soluzioni)
Nota: si dà solo l'idea costruttiva della dimostrazione, senza scendere troppo nei dettagli
Ci sono tanti modi per dimostrare questo teorema: qui useremo la nozione di *successione di funzioni* (1), cercando una famiglia $(y_n)_n$ che converga uniformemente alla soluzione. Procediamo dunque per costruzione: sia $y_0(x) \equiv y_0$ il *primo approssimante* per la soluzione. Adesso definiamo $y_1(x)$ come

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0(t)) \, \mathrm{d}t$$

Dopodiché si definisce il prossimo approssimante come

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t)) \, \mathrm{d}t$$

Per induzione estendiamo questa famiglia di funzioni $(y_n)_n$ su $\mathbb{N}$, definendo il termine generale come

$$(y_n)_n : \begin{cases} y_0(x) = y_0 \\ y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t)) \, \mathrm{d}t \end{cases}$$

Dopodiché si dimostra che la successione $(y_n)_n$ *converge uniformemente* su y, che è soluzione di *Cauchy* poiché soddisfa il *lemma di Volterra* (ovvero risolve *l'equazione integrale di Volterra*). In matematichese, si ha

$$\lim_n y_n(x) \stackrel{\text{unif}}{=} y(x) \iff y(x) = \lim_n y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t)) \, \mathrm{d}t$$

che garantisce sia *l'unicità* che *l'esistenza*, provando la tesi. ■

2. Problema di Cauchy ben-posto

Diamo una classificazione per *problemi di Cauchy* che rispettano i criteri del *teorema di Cauchy-Lipschitz*.

#Definizione

> Definizione (problema di Cauchy ben posto).
>
> Un *problema di Cauchy* (PC) del tipo
>
> $$(PC):\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$
>
> Si dice *"ben posto"* se f rispetta i *criteri del teorema di Cauchy-Lipschitz*, ovvero se f è *continua* e la sua derivata f_y è *continua*.

A3. Dipendenza continua dalle ipotesi iniziali

Dipendenza continua dai dati iniziali dei P.C. ben posti

Dipendenza continua dai dati iniziale dei problemi ben posti di Cauchy.

---

0. Voci correlate

- Teorema di Cauchy-Lipschitz
- Definizioni Relative alle Equazioni Differenziali

1. Dipendenza continua dai dati iniziali

Enunciamo una proprietà dei *problemi di Cauchy ben posti*, ovvero la *dipendenza continua* dai *dati iniziali*, che ci permette di *approssimare* le *soluzioni di Cauchy* su intorni dei dati iniziali.

#Teorema

> Teorema (dipendenza continua dai dati iniziali di problemi di Cauchy posti bene).
>
> Sia (PC) un *problema di Cauchy* ben posto, definito come

$$(PC): \begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Allora dato il problema di *Cauchy traslato* $(\overline{PC})$ definita come

$$(\overline{PC}): \begin{cases} z'(x) = f(x, z(x)) \\ z(x_0) = z_0 \end{cases}$$

Vale la seguente:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall z_0 \in \mathbb{R}, z \text{ risolve } (\overline{PC}), \\ |y_0 - z_0| < \delta \implies |y(x) - z(x)| < \varepsilon, \forall x \in B(x_0, h)$$

IDEA. L'idea di questo teorema è di dire che su intorni di x_0 con ampiezza h (ovvero il raggio di definizione di y, z) abbiamo che le soluzioni y, z non si discostano *troppo*; ovvero ho una specie di *"stabilità"*, se interpreto le soluzioni come *traiettorie* al variare in tempo (ovvero $\gamma_1(t) := (t, y(t))$ e $\gamma_2(t) := (t, z(t))$) (*figura 1.1.*)

FIGURA 1.1.

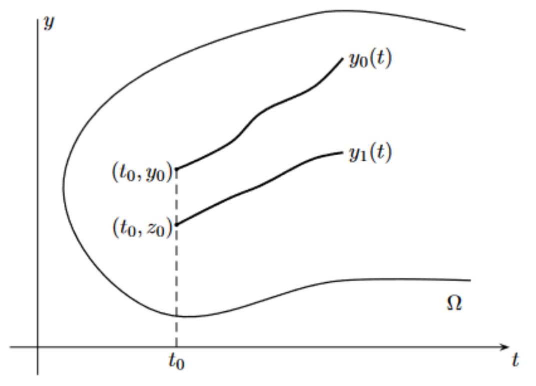


Figura 1: Confronto tra soluzioni

A4. Esistenza locale e globale

Esistenza locale e globale delle soluzioni ai Problemi di Cauchy

---

Esistenza locale e globale delle soluzioni ai Problemi di Cauchy. Esempio preliminare. Teorema: condizione sufficiente per l'esistenza globale (la sublinearità). Esempio.

---

0. Voci correlate

- Teorema di Cauchy-Lipschitz

- Definizioni Relative alle Equazioni Differenziali

1. Esempio preliminare

#Esempio

Esempio (esempio preliminare per la questione dell'esistenza locale e globale).

Definiamo i seguenti problemi di Cauchy.

$$(PC_1) : \begin{cases} y'(x) = y(x) \\ y(x_0) = 1 \end{cases}$$

e

$$(PC_2) : \begin{cases} y'(x) = y^2(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Banalmente si trova la soluzione al (PC_1) ponendo $y_1(x) = e^x$ (ovvero col metodo *Ansatz*), e con ulteriori calcoli si trova la soluzione al (PC_2), con $y_2(x) = (1-x)^{-1}$.

Inoltre notiamo che queste soluzioni *devono essere uniche*, dal momento che entrambi i problemi di Cauchy soddisfano le condizioni del teorema di Cauchy-Lipschitz.

Studiando i domini, troviamo che y_1 è definita sulla retta reale $I = \mathbb{R}$, invece y_2 è definita su un pezzo della retta $I = (-\infty, 1)$. Cosa succede? Perché ho situazioni diverse?

Vedremo che le equazioni $f_1(x,y) = y$ e $f_2(x,y) = y^2$ hanno *andamenti asintotici* diversi: ovvero in f_2 ho un *"esplosione incontrollabile"* della funzione, invece in f_1 ho una *"crescita sublineare"*.

2. Teorema dell'esistenza globale

#Teorema

Teorema (condizione sufficiente per l'esistenza globale).

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^0$, con $A = (a,b) \times \mathbb{R}$ (notiamo che $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ e $b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$), e $(x_0, y_0) \in A$ un punto scelto. Sia (PC) il problema di Cauchy definito da f.

Allora si ha che se per ogni compatto $H \Subset (a,b)$ esistono dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ tali che

$$|f(x,y)| \leq \alpha|y| + \beta, \forall (x,y) \in H \times \mathbb{R}$$

Questa proprietà si dice *sublinearità* di f su y.

Allora il *problema di Cauchy* (PC) ha una *soluzione definita globalmente*, su (a,b).

3. Esempio

#Esempio

Esempio (esempio).

Vediamo un esempio.

Sia $f(x,y) = x^2(1+y\sin y)$. La nostra intuizione ci dice che f è *sublineare* su y, dato che ho un seno che *"non fa nulla"*. Infatti ho:

$$\forall H \Subset \mathbb{R}, |f(x,y)| \leq |x^2||1+y\underbrace{|\sin y|}_{\leq 1} \leq \max_{x\in H} x^2 + x^2 y$$

Allora abbiamo che f è *sublineare*, con parametri $\alpha, \beta = \max H$ (il massimo *deve* esistere per Weierstraß).

Pertanto, per il *teorema dell'esistenza globale* ho che un qualsiasi problema di Cauchy definito con f ha *soluzioni globali*.

4. Lemma di Prolungabilità

Se si fosse nel caso in cui *non* abbiamo sublinearità, si avrebbe comunque un modo per salvarsi.

#Lemma

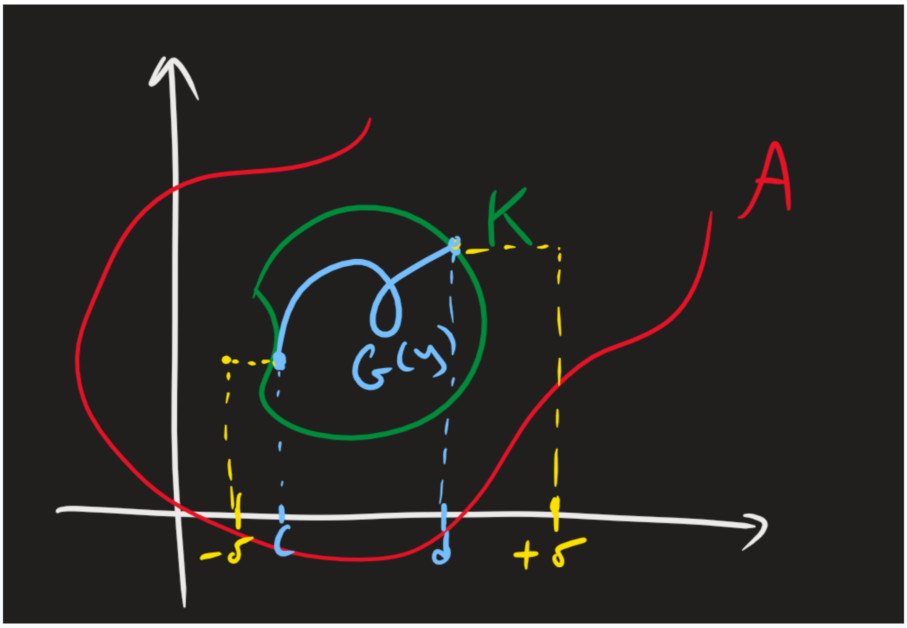
Lemma (di prolungabilita, o di fuga da un compatto).

Sia $f: A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^0$ con A aperto. Sia $y: (c,d) \longrightarrow \mathbb{R}$ una *soluzione* dell'equazione differenziale

$$y'(x) = f(x,y)$$

Se *esiste un compatto* $K \Subset A$ tale che $G(y) \subseteq K$ (ovvero il *grafico* di Y sta dentro K), allora esiste un raggio $\delta > 0$ tale che y è definibile su $(c-\delta, d+\delta)$. Ovvero posso ridefinire y come $y: (c-\delta, d+\delta) \longrightarrow \mathbb{R}$ (cioè prolungabile).

FIGURA 1.1. (*Idea del lemma*)



Questo teorema si rivela *particolarmente utile* per dimostrare l'esistenza delle soluzioni su tutto $\mathbb{R}$, procedendo per assurdo, dove non abbiamo funzioni sublineari.

DIMOSTRAZIONE del Lemma 4 (di prolungabilita, o di fuga da un compatto)
Nota: opzionale, si da solo l'idea
Si considera che se ho $f(x, y)$ continua racchiuso in un compatto $K \Subset A \subseteq \mathbb{R}^2$, per Weierstraß (Teorema di Weierstraß Generalizzato) ho l'esistenza di massimi e minimi;

$$\exists M = \max_K |f|, \exists m = \min_K |f|$$

Inoltre possiamo dire che y' è *lipschitziana* (Definizione 2 (funzione lipschitziana)), dato che è *limitato* in M: infatti ho

$$|y'| \leq M \implies |y(b) - y(a)| \leq M|b - a|$$

(questa è una conseguenza diretta del *teorema di Lagrange*, Teorema di Lagrange)
Dato che è lipschitziana, essa è estendibile: infatti esiste il limite

$$\bar{y} := \lim_{x \to d^-} y(x)$$

con $(d, \bar{y}) \in K$. In definita posso considerare il problema di Cauchy

$$(PC) : \begin{cases} z = f(x, z) \\ z(d) = \bar{y} \end{cases}$$

di cui soluzione è proprio y ridefinita nel suo nuovo intervallo.

A5. Studio qualitativo

Studio Qualitativo di Equazioni Differenziali

Strumenti vari per lo studio qualitativo dei problemi di Cauchy: lemma di prolungabilità (o fuga da un compatto), corollario del teorema di Cauchy-Lipschitz (soluzioni uniche non si intersecano): definizione di equilibri, teorema dell'asintoto.

---

0. Voci correlate

- Teorema di Cauchy-Lipschitz
- Esistenza locale e globale delle soluzioni ai Problemi di Cauchy

1. Equilibri dei Problemi di Cauchy

#Corollario

Corollario (relazione tra problemi di Cauchy aventi condizione iniziale diversi).

Siano (PC_1) e (PC_2) due *problemi di Cauchy ben posti*

$$(PC_1):\begin{cases} y'(x)=f(x,y(x)) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$$

e

$$(PC_2):\begin{cases} y'(x)=f(x,y(x)) \\ y(x_0)=\tilde{y_0}\neq y_0 \end{cases}$$

Se $y_1(t)$ e $y_2(t)$ sono *soluzioni distinte* dei *problemi di Cauchy* (rispettivamente per (PC_1), (PC_2)), allora l'intersezione dei loro grafici è nulla

$$G(y_1)\cap G(y_2)=\emptyset$$

Ovvero y_1, y_2 *non si incontrano mai*.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Corollario 1 (relazione tra problemi di Cauchy aventi condizione iniziale diversi)

Si dimostra per assurdo. Supponendo che esista un punto $(t_0,y_0)\in G(y_1)\cap G(y_2)$, posso considerare il *problema di Cauchy* definito sul dato iniziale (t_0,y_0) che dà due soluzioni y_1,y_2 e ciò contraddice *Cauchy-Lipschitz* (Teorema di Cauchy-Lipschitz). ■

#Definizione

Definizione (equilibrio di un Problema di Cauchy).

Sia (PC) un *problema di Cauchy* ben posto, con *dati iniziali al variare* $(x_0, y_0) \in A$. Si dice *"equilibrio"* una funzione una retta del tipo $y = c \in \mathbb{R}$ che risolve il problema di *Cauchy* in (x_0, y_0).

In altre parole, le soluzioni aventi *dati iniziali diversi* non possono mai *"attraversare"* l'equilibrio.

2. Teorema dell'Asintoto

Enunciamo un teorema utile per *valutare* il comportamento asintotico delle soluzioni.

#Teorema

Teorema (teorema dell'asintoto).

Sia $u : I = [a, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^1(I)$, con $a \in \tilde{\mathbb{R}}$.

Supponendo *che esistano i limiti*

$$\lim_{t \to +\infty} u(t) = l, \lim_{t \to +\infty} u'(t) = m$$

con $l, m \in \tilde{\mathbb{R}}$, abbiamo l'implicazione

$$l < +\infty \implies m = 0$$

o prendendo la sua contronomiale abbiamo

$$m \neq 0 \implies l = +\infty$$

3. Studio Qualitativo di Equazioni Differenziali

Diamo un *modello* per lo *studio qualitativo* di equazioni differenziali ordinarie, in particolare quelle *ben poste*.

#Esempio

ESEMPIO 3.1. (*Studio qualitativo di un problema di Cauchy*)
Come esempio prendiamo l'equazione differenziale

$$y'(x) = xy(x)$$

1. **Dominio**
   Prima di tutto studiamo il *dominio* della funzione f, in particolare definita su $I \times \mathbb{R}$, dove I è il dominio della soluzione $y(x)$. In questo caso si vede banalmente che I è la retta reale $\mathbb{R}$ ($I = \mathbb{R}$).

2. **Buona Posizione**
   Dopodiché vediamo *com'è fatta* questa funzione f. In questo caso, f soddisfa le *condizioni del teorema di Cauchy Lipschitz*, dal momento che f è continua e la derivata $f_y = x$ lo è pure.
3. **Dominio della soluzione**
   Adesso vediamo il *dominio* della soluzione al problema di Cauchy. Abbiamo variati strumenti, tra cui il *teorema dell'esistenza globale* (Teorema 2 (condizione sufficiente per l'esistenza globale)) o la *fuga dal compatto* (Lemma 4 (di prolungabilita, o di fuga da un compatto)).
   In questo caso vediamo che f è *sublineare*, infatti

$$\forall K \Subset \mathbb{R}^2, |f| \leq \left|\max_K xy(x)\right| = \underbrace{\alpha}_{\max_K} |y(x)| + \underbrace{\beta}_{0}$$

   Dato che f è definita su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, la soluzione è definita su tutta $\mathbb{R}$.
4. **Equilibri del problema di Cauchy**
   Dimenticandoci di eventuali condizioni iniziali, cerchiamo di trovare soluzioni a

$$y' = xy$$

   ponendo $y = c \in \mathbb{R}$ una *costante*, che implica

$$0 = x \cdot c \implies c = 0$$

   Abbiamo dunque $y = 0$ un *equilibrio* della soluzione. Ovvero se una *soluzione* parte da 0, rimane costante; se parte *sopra* rimane sopra, se sotto rimane sotto.
   Questo diventa più utile se conosciamo *più punti di equilibrio*, in tal modo di poter *"incastrare"* la funzione y in un *"rango"* di valori.
5. *Segno e flessione della funzione*
   Qui abbiamo che il segno di f' è *positiva* nel *primo* e nel *terzo quadrante* (ovvero $(+,+)$ e $(-,-)$).
   Inoltre siamo in grado di prendere la seconda derivata y'', dal momento che abbiamo $y \in \mathcal{C}^1 \implies y' \in \mathcal{C}^1$ (se è derivabile il termine generale y, allora lo è pure y').
   Possiamo dunque prendere

$$y'' = (x \cdot y(x))' = y(x) + xy(x) = y(x)(1 + x^2)$$

   Come prima, abbiamo lo stesso segno di $y(x)$ (ovvero è positiva nei positivi, negativa nei negativi).
6. **Simmetria della funzione**
   Vogliamo verificare se la *soluzione* y sia simmetrica o meno (in particolare pari o dispari). Per far questo, consideriamo il *problema di Cauchy* posto come

$$(PC) : \begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

   e poniamo $z(x) = y(-x)$ (o $-y(-x)$ se dobbiamo dimostrare che è *dispari*). L'idea è quella di verificare che *sia* $z(x)$ che $y(x)$ risolvono (PC), dunque per *Cauchy-*

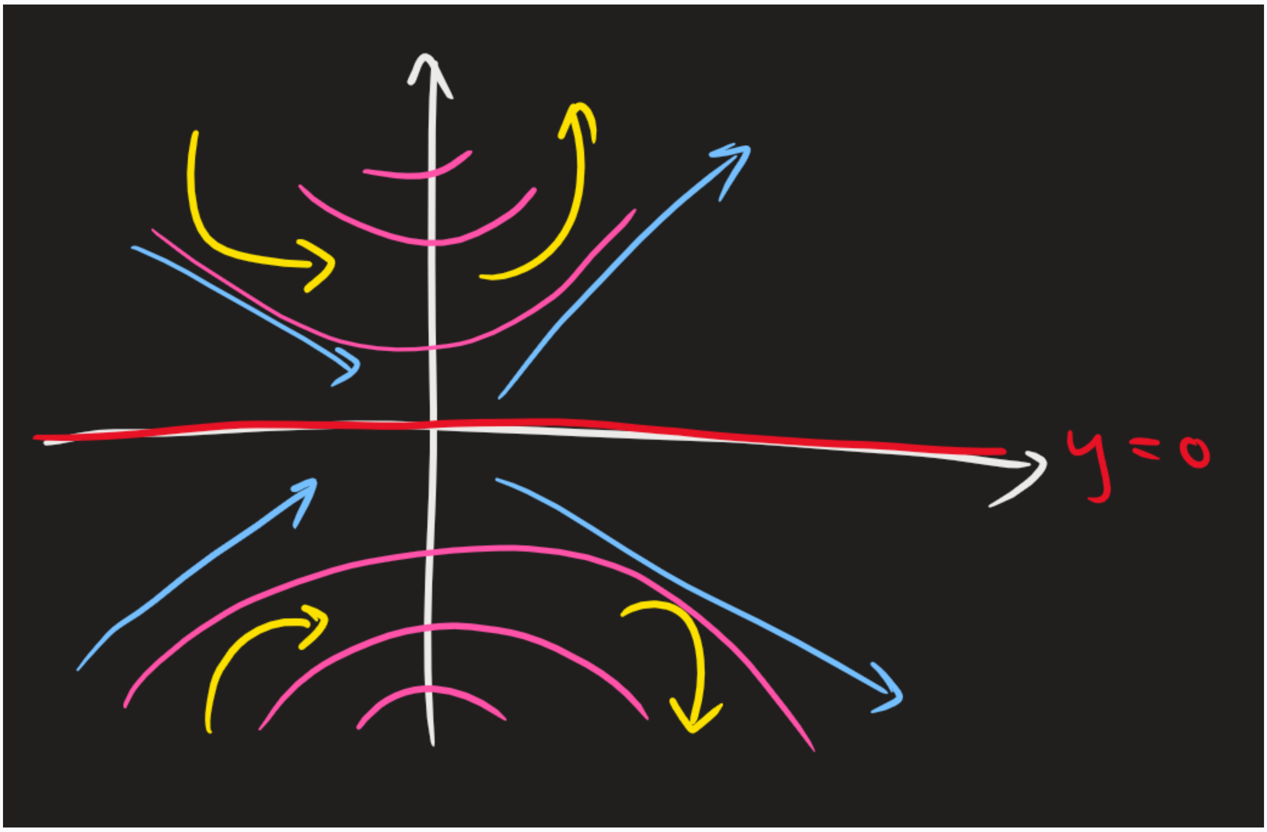
Lipschitz sono uguali ($y = z$). Questo è il caso: infatti abbiamo

$$(PC): \begin{cases} z'(x) = -y'(-x) = -(-x)y(-x) = xz(x) \\ z(0) = y(-0) = y_0 \end{cases}$$

come volevasi dimostrare.

7. **Limiti della soluzione**
In alcuni casi è utile determinare il *comportamento asintotico* dei limiti della soluzione. In questo caso ci avvaliamo dell'*teorema dell'asintoto* (Teorema 3 (teorema dell'asintoto)), per dire se la funzione tende a un valore finito o infinito. In questo caso abbiamo che il limite della sua derivata $\lim_\infty y' = +\infty \neq 0$, da cui si ha $\lim_\infty y = +\infty$. Utile per controllare se tutto ciò appena ottenuto è *consistente* con gli *equilibri determinati*, che *limitano* la soluzione y. ■

FIGURA 3.1. (*Risultati del primo studio qualitativo*)



#Esempio

ESEMPIO 3.2. (*Studio qualitativo con i limiti*)

B. EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL PRIMO ORDINE

B1. EDO a Variabili Separabili

Equazioni Differenziali a Variabili Separabili

Definizione di ODE a variabile separate (separabili). Metodo di risoluzione per le ODE a variabili separabili.

---

0. Voci correlate

- Definizioni Relative alle Equazioni Differenziali

1. Definizione di ODE a variabili separabili

Vediamo una *classe di equazioni differenziali* che possono avere una sua *soluzione esplicita* mediante l'*integrazione*.

#Definizione

> Definizione (equazione differenziale a variabili separabili).
>
> Siano $g, h : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^1$ con I un intervallo. Allora l'equazione differenziale
>
> $$y'(x) = g(x)h(y)$$
>
> si dice *"equazione differenziale ordinaria a variabili separate"*.

#Osservazione

> Osservazione (le equazioni differenziali a variabili separabili formano problemi di Cauchy ben definiti).
>
> Notiamo che con $f(x, y) := g(x)h(y)$ *verificano* le ipotesi del *teorema di Cauchy-Lipschitz*, dunque sappiamo che i *problemi di Cauchy* formati da f sono *ben definiti*.

2. Metodo di Risoluzione delle ODE a variabili separabili

Vediamo un suo metodo di risoluzione.

#Teorema

> Teorema (metodo di risoluzione per i problemi di Cauchy con ODE a variabili separabili).
>
> Sia (PC) il *problema di Cauchy* definito da

$$(PC):\begin{cases} y'(x) = g(x)h(y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Se vale che $h(y_0) = 0$, allora la soluzione è immediata, con

$$\boxed{h(y_0) = 0 \implies y(x) = y_0}$$

Se invece non vale tale condizione, allora vale che la soluzione è

$$h(y_0) \neq 0 \implies \boxed{y(x) = K^{-1}(G(x) - G(x_0) + K(y_0))}$$

con G una primitiva di g su $[a, b]$ e K una primitiva di h su $y(I)$.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 3 (metodo di risoluzione per i problemi di Cauchy con ODE a variabili separabili)

Per caso $h(y_0) = 0$ si considera che si avrebbe

$$y'(x_0) = g(x_0)h(y_0) = 0$$

da cui per *Lagrange* si ha che y è una *costante*, da cui si ha

$$y(x_0) = x_0$$

per soddisfare la condizione iniziale.

Invece nel caso $h(y_0) = 0$ bisogna usare ragionamenti più fini: posso affermare che con $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ la soluzione, si ha che $h(y(x)) \neq 0, \forall x \in I$ (sennò sarebbe *assurdo*, dal momento che esisterebbe un *"problema di Cauchy traslato con $z(x_1) = y_1 = 0$"* che ha due soluzioni distinte uguali). Dopodiché posso *dividere* per h (operazione consentita per la supposizione appena fatta), che ci dà

$$y'(x) = g(x)h(y(x)) \iff \frac{y'(x)}{h(y(x))} = g(x)$$

Adesso possiamo *integrare* ambo i lati su $[x_0, x]$ che ci dà

$$\int_{x_0}^{x} \frac{y'(t)}{h(y(t))}\ \mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x} g(t)\ \mathrm{d}t$$

Adesso effettuando la sostituzione di variabili $\boxed{y(t) = s}$ si ha

$$\int_{x_0}^{x} \frac{y'(t)}{h(y(t))}\ \mathrm{d}t \to \int_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{1}{h(s)}\ \mathrm{d}s = \int_{x_0}^{x} g(t)\ \mathrm{d}t$$

Adesso sia $G \in \int g$ e $K = \int \frac{1}{h}$ (ovvero abbiamo le loro primitive: esistono dal momento in cui stiamo integrando funzioni continue su compatti), da cui per il *teorema di Torricelli-*

Barrow (1) si ha

$$K(y(x)) - K(y(x_0)) = G(x) - G(x_0)$$

Poiché $K'(s) = \frac{1}{h(s)} \neq 0$ si ha che K è *iniettiva* (e ovviamente *suriettiva*), dunque invertibile. Allora esplicitiamo y con

$$y(x) = K^{-1}(G(x) - G(x_0) + K(y_0))$$

oppure possiamo pensare questa espressione come

$$y(x) = K^{-1}\left(G(x)|_{x_0}^{x} + K(y_0)\right)$$

che è un numero. ■

3. Esempio pratico

Per farci capire bene, usiamo un esempio pratico.

#Esempio

Esempio (esempio pratico).

Prendiamo il problema di Cauchy

$$(PC): \begin{cases} y'(x) = xy(x) \\ y(0) = y_0 > 0 \end{cases}$$

Abbiamo una *ODE a variabili separate*, con $g(x) = x$ e $h(y(x)) = y(x)$. Se abbiamo $h(0) = 0$. allora semplicemente $y(x) = 0$ è la *soluzione*.

Invece per caso contrario dobbiamo procedere per la procedura appena descritta. Ovvero prendiamo

$$\int_{x_0}^{x} \frac{y'(t)}{y(t)} \text{ d}t = \int_{x_0}^{x} t \text{ d}t$$

procedendo per sostituzione si ha

$$\int_{y_0}^{y} \frac{1}{s} \text{ d}s = \int_{x_0}^{x} t \text{ d}t$$

Calcolandolo abbiamo

$$\ln|s|\Big|_{y_0}^{y} = \frac{t^2}{2}\Big|_0^x \iff \ln|y| = \frac{x^2}{2} + \ln|y_0|$$

Applicando $\exp(\cdot)$ da ambo i lati si ha

$$y = y_0 e^{\frac{x^2}{2}}$$

che è la soluzione per il *problema di Cauchy*.

B2. Principio di Linearizzazione dei PC

Principio di Linearizzazione dei Problemi di Cauchy

Motivazione per le equazioni differenziali lineari: principio di linearizzazione dei problemi di Cauchy. Espansione della soluzione con Taylor al secondo grado.

---

0. Voci correlate

- Formula di Taylor
- Formula di Taylor del Secondo Ordine

1. Principio di Linearizzazione

IDEA. Supponiamo di avere $y' = f(x, y)$ equazione differenziale. Possiamo considerare il suo *approssimante lineare* $\bar{f} \in \mathcal{L}$ (ovvero è una funzione *lineare*, Definizione 1 (applicazione lineare da V a V primo)). In particolare voglio che questa si approssimi verso f, con un comportamento del tipo

$$\bar{f} \to f$$

In particolare faremo questa *linearizzazione* con l'*espansione di Taylor* (Formula di Taylor)

#Osservazione

> Osservazione (principio di linearizzazione).
>
> Sia (PC) il *principio di Cauchy* definito come
>
> $$(PC): \begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$
>
> con $f \in \mathcal{C}^1(A)$, con A aperto. Adesso prendiamo il *problema di Cauchy linearizzato* definito come
>
> $$(\overline{PC}): \begin{cases} z'(x) = \bar{f}(x, y(x)) \\ z(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Allora abbiamo $\bar{f}(x,y)$ definito mediante l'*espansione di Taylor* al *primo ordine* (1), con

$$\bar{f}(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

Lo riscriviamo in termini di $\alpha y, \beta x, \gamma$:

$$\bar{f}(x,y) = \alpha y + \beta x + \gamma$$

Dunque abbiamo

$$(\overline{PC}) : \begin{cases} z'(x) = \bar{f}(x, y(x)) = \alpha y + \beta x + \gamma \\ z(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Questa approssimazione funzione per valori vicini, $(x,y) \to (x_0,y_0)$.

#Osservazione

Osservazione (stima dell'errore).

Possiamo dare pure una *stima dell'errore* di quest'approssimazione. Infatti possiamo considerare le *espansioni di Taylor* di y, z al *secondo ordine* (1).

$$\begin{cases} y(x) = p_{2,x_0}(x) + \varepsilon(x)|x-x_0|^2 \\ z(x) = p_{2,x_0}(x) + \eta(x)|x-x_0|^2 \end{cases}$$

Abbiamo la stima

$$|y(x) - z(x)| = |\varepsilon(x) - \eta(x)||x-x_0|^2$$

Notiamo che questa stima è un *o-piccolo* di $|x-x_0|^2$ (2), ovvero questa decresce infinitamente con $x \to x_0$

2. Esempio di Linearizzazione

#Esempio

Esempio (esempio di linearizzazione).

Supponiamo di avere il problema di Cauchy definito come

$$(PC) : \begin{cases} y'(x) = e^{y(x)} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Possiamo linearizzare col principio di linearizzazione appena osservato, abbiamo dunque

$$e^{y(x)} \rightsquigarrow e^{y_0} + y = 1 + y$$

Dunque abbiamo il problema linearizzato come segue

$$(\overline{PC}) : \begin{cases} z'(x) = 1 + z \\ z(0) = 0 \end{cases}$$

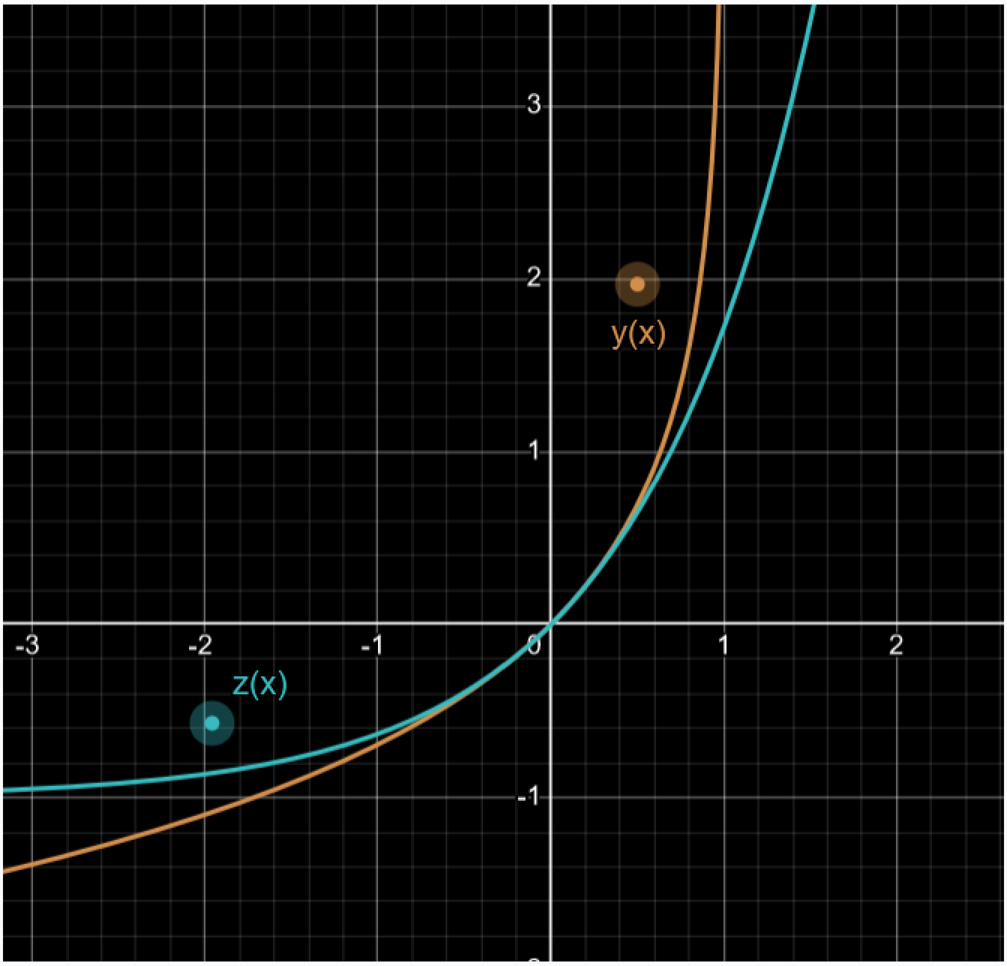
Vedremo che un problema del genere sarà *banalissimo da risolvere*, dandoci la soluzione esplicita

$$z(x) = e^x - 1$$

Notiamo che (PC) rimarrebbe comunque *risolvibile* col metodo delle *variabili separate*, dandoci la soluzione

$$y(x) = -\ln(1 - x)$$

FIGURA 2.1. (*Stima tra le funzioni*)



B3. EDO lineari

Equazioni Differenziali Lineari del primo ordine

Equazioni differenziali lineari: definizione di ODE lineare del primo ordine completa e omogenea. Struttura delle ODE lineari del primo ordine, metodo di risoluzione per le soluzioni particolari.

---

0. Voci correlate

- Definizioni Relative alle Equazioni Differenziali
- Definizione di Applicazione Lineare
- Teoremi sui Sistemi Lineari

1. Definizione di ODE lineare del primo ordine

Diamo un po' di nomenclature.

#Definizione

> Definizione (Equazione differenziale ordinaria lineare del primo ordine).
>
> Siano $a, b : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^0$ con I, aperto. Allora le equazioni di forma
>
> $$(*)\ y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$$
> $$(**)\ y'(x) = a(x)y(x)$$
>
> L'equazione $(*)$ si definisce *ODE lineare del primo ordine completa*, invece $(**)$ è un'*ODE lineare del primo ordine omogenea*.

#Esempio

> Esempio (esempi).
>
> L'equazione differenziale ordinaria lineare del primo ordine
>
> $$y'(x) = \cos(x)y(x) + x^3$$
>
> è *completa*.
>
> Invece l'equazione differenziale

$$y'(x) = \cos(x)y(x)$$

è *omogenea*.

#Teorema

Teorema (le ODE lineari qualsiasi ammettono soluzioni uniche).

I *problemi di Cauchy* definiti mediante *equazioni differenziali ordinarie lineari del primo ordine* ammettono sempre *soluzioni uniche* definite *globalmente* su I.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 3 (le ODE lineari qualsiasi ammettono soluzioni uniche)
Si tratta di usare i teoremi a disposizione per dimostrare l'*esistenza unica* e la *definizione globale*.
$\exists!$: Si applica banalmente il *teorema di Cauchy-Lipschitz* (Teorema 1 (teorema di Cauchy-Lipschitz, dell'esistenza e dell'unicità locale delle soluzioni)), dal momento che abbiamo a, b, y continue da cui discende che f è continua. Inoltre la derivata parziale f_y è a stessa, che è continua.
I: Banalmente si usa il fatto che f è *lineare*, dunque definita *globalmente* (Teorema 2 (condizione sufficiente per l'esistenza globale)). Infatti, si ha $\alpha = \max_{K \in I} a(x)$ e $\beta = \max_{K \in I} b(x)$. ■

2. Struttura delle ODE lineari del primo ordine

#Definizione

Definizione (operatore lineare di un'ODE lineare).

Si definisce l'*operatore lineare* di un'*equazione differenziale ordinaria lineare* del tipo

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$$

come l'*applicazione lineare* $L \in \mathcal{L}[\mathcal{C}^1(I); \mathcal{C}^0(I)]$ (ovvero manda *funzioni derivabili con derivate continue* in *funzioni continue*) definita mediante l'operazione

$$L(y(x)) := y'(x) - a(x)y(x)$$

In altre parole *valuta* lo scarto tra $y'(x)$ e la parte lineare $a(x)y(x)$ di una soluzione.

#Osservazione

Osservazione (L è lineare).

Si ha che L è lineare, dunque

$$L(\alpha y_1(x)+\beta y_2(x)) = \alpha L(y_1(x)) + \beta L(y_2(x))$$

#Definizione

Definizione (l'insieme delle soluzioni generale e omogenea).

Possiamo definire i seguenti spazi.
i. le soluzioni appartengono a $L^{-1}(\{b\})$.

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x) \iff L(y) = b \iff \boxed{y \in L^{-1}(\{b\}) := S_b}$$

ii. caso $b=0$, $\ker L$: definiamo l'insieme delle *soluzioni all'omogenea* come

$$y \in S_0 \iff L^{-1}(\{0\}) = \ker L$$

#Teorema

Teorema (di struttura delle soluzioni per le equazioni differenziali lineari).

L'insieme $S_b \equiv L^{-1}(\{b\})$ è costituito da *tutte e sole* le funzioni y del tipo

$$y(x) = \bar{y}(x) + z(x)$$

Dove $\bar{y}$ è una *soluzione particolare della completa* e z è una *generica soluzione* dell'omogenea $\ker L$. In altre parole si ha

$$\boxed{S_b = \bar{y} + \ker L}$$

Si nota che questo teorema è estremamente simile al *teorema di struttura per le soluzioni ai sistemi lineari* (Teorema 8 (di struttura per i sistemi lineari arbitrari)). Adesso vogliamo trovare *come sono fatte* le soluzioni $\bar{y}$ e z.

#Teorema

Teorema (di struttura delle soluzioni per le equazioni differenziali lineari omogenee).

L'insieme $S_0 = \ker L$ forma uno *spazio vettoriale* con $\dim S_0 = 1$ (ovvero abbiamo che è costituita da *una* funzione).
Risulta che la sua generica soluzione è

$$z(x) \in \ker L = \left\{c \in \mathbb{R} : ce^{A(\cdot)}\right\}$$

> dove $A(\cdot)$ è la *primitiva di* $a(\cdot)$, ovvero $A \in \int a$.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 8 (di struttura delle soluzioni per le equazioni differenziali lineari omogenee)
" $\Longleftarrow$ ": Proviamo che se definiamo $z(x) := ce^{A(x)}$ allora questa risolve l'ODE omogenea. Derivandolo abbiamo

$$z'(x) = cA'(x)e^{A(x)} = a(x) \cdot ce^{A(x)} = a(x)z(x)$$

come volevasi dimostrare.
" $\Longrightarrow$ ": Proviamo che se $z(x)$ risolve S_0, allora verifica l'equazione. Procediamo dunque *per costruzione*:

$$z'(x) - a(x)z(x) = 0 \implies e^{-A(x)}z'(x) - e^{-A(x)}a(x)z(x) = 0$$

Abbiamo che quest'ultima equazione rappresenta una derivata di $z(x)e^{-A(x)}$. Allora

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(z(x)e^{-A(x)}\right) = 0$$

Dunque per *Lagrange* abbiamo che questa è costante, ovvero abbiamo

$$z(x)e^{-A(x)} = c \implies z(x) = ce^{A(x)}$$

che prova la tesi. ■

Adesso completiamo il quadro trovando una *soluzione particolare* per la completa.

#Teorema

> Teorema (di struttura delle soluzioni particolari di un'ODE completa).
>
> Una *soluzione particolare* della completa è data da
>
> $$\bar{y}(x) = \int_{x_0}^{x} e^{A(x)-A(t)}b(t)\ \mathrm{d}t$$
>
> con $x_0 \in I$ fissato.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 9 (di struttura delle soluzioni particolari di un'ODE completa)
Si tratta di usare un trucco, per cui pensiamo c come una *variabile* $c(x)$ (anche se in realtà sarebbe una costante). Adesso una soluzione che abbia una struttura del tipo

$$\bar{y}(x) = c(x)e^{A(x)}$$

Suppongo $c \in \mathcal{C}^1$ e impongo che sia la soluzione all'ODE completa

$$\bar{y}(x) = c'(x)e^{A(x)} + c(x)a(x)e^{A(x)} \equiv a(x)\color{red}{\bar{y}(x)}\color{black} + b(x) = a(x)\color{red}{c(x)e^{A(x)}}\color{black} + b(x)$$

Quindi abbiamo

$$c'(x)e^{A(x)} + c(x)a(x)e^{A(x)} = a(x)c(x)e^{A(x)} + b(x)$$

da cui possiamo cancellare $c(x)a(x)e^{A(x)}$. Abbiamo dunque

$$c'(x)e^{A(x)} = b(x)$$

Adesso si tratta semplicemente trovare questa $c(x)$ calcolando l'integrale

$$c(x) = \int_{x_0}^{x} b(t)e^{-A(t)} \ \mathrm{d}t$$

Ovvero abbiamo

$$\bar{y}(x) = c(x)e^{A(x)} \implies \bar{y}(x) = \int_{x_0}^{x} b(t)e^{A(x)-A(t)} \ \mathrm{d}t$$

che prova la tesi. ■

3. Soluzione di un'ODE lineare

#Corollario

Corollario (la soluzione generica di un'ODE lineare).

La generica soluzione di un'equazione differenziale ordinaria lineare completa è data da

$$\boxed{y(x) = Ce^{A(x)} + \int_{x_0}^{x} e^{A(x)-A(t)}b(t) \ \mathrm{d}t}$$

con $x_0 \in I$ fissato, $C \in \mathbb{R}$ qualsiasi e $A \in \int a$.

#Esempio

Esempio (problema di Cauchy lineare).

Col problema di Cauchy associata ad un'ODE lineare completa

$$(PC): \begin{cases} y'(x) = a(x)y(x) + b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Abbiamo che l'*unica* soluzione al (PC) è rappresentata da

$$\boxed{y(x) = y_0 e^{A(x)-A(x_0)} + \int_{x_0}^{x} e^{A(x)-A(t)} b(t)\ \mathrm{d}t}$$

(per trovare questa equazione abbiamo trovato la costante C come $C = y_0 e^{-A(x_0)}$, ponendo $y_0 = Ce^{A(x)}$)

B4. EDO di Bernoulli

Equazioni Differenziali di Bernoulli

Equazioni differenziali non-lineari di Bernoulli: definizione, metodo di risoluzione.

---

0. Voci correlate

- Equazioni Differenziali Lineari del primo ordine
- Definizioni Relative alle Equazioni Differenziali

1. Definizione di Equazione Differenziale di Bernoulli

Se *non* abbiamo *equazioni differenziali lineari*, possiamo comunque tentare di *"salvarci"* facendoli ricondurre al caso *lineare*.

#Definizione

Definizione (equazione differenziale di Bernoulli).

Un'*equazione differenziale ordinaria del primo ordine* si dice *di Bernoulli* se abbiamo un'equazione del tipo

$$(\mathrm{B})\ \ y'(x) = a(x)y(x) + b(x)y(x)^{\gamma}$$

dove $\gamma \in \mathbb{R} \diagdown \{0, 1\}$ (se lo fossero, non avrebbe considerare tale *ODE*; sarebbe lineare), e $a, b : I \longrightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^0(I)$ (ovvero delle funzioni continue su I).

#Teorema

Teorema (riduzione delle Bernoulli alle lineari).

L'equazione differenziale *di Bernoulli* è riconducibile al caso lineare con

$$z'(x) = (1-\gamma)(a(x)z(x) + b(x))$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 2 (riduzione delle Bernoulli alle lineari)

Importante ricordarsi il passaggio fondamentale!

Si prende la (B) e lo si moltiplica per $y(x)^{-\gamma}$, dandoci

$$\begin{aligned} y'(x)y(x)^{-\gamma} &= a(x)y(x)y(x)^{-\gamma} + b(x)y(x)^0 \\ y'(x)y(x)^{-\gamma} &= a(x)y(x)^{1-\gamma} + b(x) \end{aligned}$$

Noto che a sinistra ho una derivata del tipo $(y(x))^\lambda \overset{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}}{\to} \lambda y'(x)y^{\lambda-1}$, ottenendo $(1-\gamma)y'(x)y(x)^{-\gamma} = [(y(x))^{1-\gamma}]'$.

$$\frac{[(y(x)^{1-\gamma})]'}{1-\gamma} = a(x)y(x)^{1-\gamma} + b(x)$$

Adesso sostituisco la parte in rosso $y(x)^{1-\gamma}$ definendo ad-hoc la funzione $z(x) := y(x)^{1-\gamma}$, ottenendo la lineare

$$\frac{z'(x)}{1-\gamma} = a(x)z(x) + b(x)$$

Rinormalizzando segue la tesi. ■

NOTA! Qualora dovessimo risolvere una *Bernoulli*, ricordiamoci che una volta ottenuta la soluzione su z devo comunque *riportare* questa soluzione alla forma originale y!

B5. Sistemi di EDO

“Sistemi di Equazioni Differenziali del Primo Ordine” is not created yet. Click to create.

B6. Sistemi di EDO lineari

Sistemi di Equazioni Differenziali Lineari del Primo Ordine

Sistemi di equazioni differenziali lineari. Caso $N=1$ (scalare); necessità di definire l'esponenziazione di matrici. Definizione di spazio delle matrici euclideo normato.

Lemma: convergenza della matrice esponenziale. Teorema: soluzioni a sistemi di equazioni differenziali lineari.

---

0. Voci correlate

- Sistema di Equazioni Differenziali del Primo Ordine
- Equazioni Differenziali Lineari del primo ordine

1. Definizione di Sistema di Equazioni Differenziali Lineari

Vediamo un *caso particolare* di sistemi di equazioni differenziali.

#Definizione

Definizione (sistema di equazioni differenziali lineari).

Sia dato Σ un *sistema lineare* (1) di dimensione N a *coefficienti costanti*, definita come

$$\boxed{\Sigma : X' = AX}$$

con $A \in M_N(\mathbb{R})$ e X un *vettore-colonna* che contiene le *derivate* $(x'_1(t), \ldots, x'_N(t))$ e X le funzioni $(x_1(t), \ldots, x_N(t))$. Equivalentemente posso leggere Σ come

$$\begin{pmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \\ \vdots \\ x'_N(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1N} \\ a_{21} & \ldots & a_{2N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & \ldots & a_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_N(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\prod_{1 \leq i \leq N} a_{1i})x_1(t) \\ \vdots \\ (\prod_{1 \leq i \leq N} a_{Ni})x_N(t) \end{pmatrix}$$

2. Detour sull'esponenziazione delle matirici

#Osservazione

Osservazione (caso scalare).

Per $N = 1$ ho il caso scalare $x'(t) = ax(t)$, con la soluzione $x(t) = Ae^{at}$ (1). Come posso generalizzare tale soluzione? Voglio trovare un modo per *definire* l'esponenziazione delle metrici e^A.

L'idea per *esponenziare* le matrici è quella di usare la *serie di Taylor* per $\exp$ (Teorema 1 (sviluppo di Taylor-MacLaurin per la funzione esponenziale)), ovvero

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Per usare $x \in M_N(\mathbb{R})$, definendo così l'*esponenziazione di una matrice* come una *serie di matrici*, devo prima introdurre la nozione di norma per lo spazio $M_N(\mathbb{R})$ per poter valutare la *convergenza* di tale serie.

#Definizione

> **Definizione (norma di una matrice).**
>
> Si definisce la norma di una matrice $A \in M_N(\mathbb{R})$ come
>
> $$\|A\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2}$$
>
> Ovvero questa è la *norma euclidea* su $M_N(\mathbb{R}) \sim \mathbb{R}^{N \times N}$.
>
> Allora definisco $(M_N(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$ come uno *spazio euclideo normato*.

#Lemma

> **Lemma (convergenza della matrice esponenziale).**
>
> Si dimostra che data una matrice $A \in M_N(\mathbb{R})$, si ha che la serie
>
> $$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} = I + A + \ldots + \frac{A^N}{N!} + \ldots = S_k + \ldots + = \overline{S} < +\infty$$
>
> è *convergente*. Ovvero
>
> $$\exists \overline{S} \in M_N(\mathbb{R}) : \lim_N \|S_N - \overline{S}\| = 0$$

#Definizione

> **Definizione (matrice esponenziale).**
>
> Si definisce la *matrice esponenziale*, data una matrice $A \in M_N(\mathbb{R})$ come la serie di potenze
>
> $$e^A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$$

3. Soluzioni a Sistemi di ODE lineari

#Teorema

> Teorema (sistemi a soluzioni di equazioni differenziali del primo ordine lineari).
>
> Sia Σ un *sistema di equazioni differenziali lineari del primo ordine*. Allora una sua soluzione è data da
>
> $$\boxed{X(t) = e^{t \cdot A} \cdot c}$$
>
> Con X un vettore $n \times 1$, e^{tA} un vettore $n \times n$, e c un vettore arbitrario $n \times 1$.

C. MODELLI DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI

C1. Decadimento del Carbonio

Modello di Applicazione delle ODE lineari

Modello biologico di applicazione delle ODE lineari: il decadimento del carbonio. Ipotesi, modellizzazione e risultato finale.

---

0. Voci correlate

- Equazioni Differenziali Lineari del primo ordine

1. Ipotesi del Modello

Vediamo un *esempio biologico* per le *equazioni differenziali lineari*.

IPOTESI. (*Decadimento del carbonio degli organismi*)

- Gli organismi scambiano carbonio
  - Alla morte questo scambio *cessa*, dunque perdono *concentrazione di carbonio*
- Supponiamo di avere in t_0 una quantità X di carbonio
- Poi in $t_0 + 5730$ (incremento di un periodo di tempo) una quantità $0.5X$ di carbonio.

MODELLO. (*Decadimento del carbonio*)

- Dalle ipotesi possiamo ipotizzare il seguente modello matematico. Sia definita ricorsivamente $(C_n)_n$ la *successione* che indica la concentrazione del carbonio nei vari scarti temporali.

> - In particolare si definisce C_N come la *"concentrazione del carbonio dopo $t_0 + N(5730)$ anni*.
> - Come caso base poniamo C_0 la concentrazione del carbonio al tempo t_0. Ovvero $C_0 = X$.

- In base a questa legge ho che la *concentrazione* ha un andamento *"esponenziale"*, con base minore di uno. In particolare

$$C_N = \frac{C_0}{2^N}$$

- Per *trovare le variazioni istantanee*, passo dal *continuo al discreto*.
  - Prima di tutto calcolo lo scarto discreto, che è calcolata come

$$C_{K+1} - C_K = \frac{1}{2}C_K - C_K = -\frac{1}{2}C_K$$
$$\frac{C_{K+1} - C_K}{\Delta t} = -\frac{1}{2\Delta t}C_K$$

```
- Adesso passo al discreto, ponendo il parametro $\frac{1}{2\Delta t}$ come un parametro sconosciuto $\tau$ e interpretando il membro sinistro come una derivata.
```

$$C'(t) = -\frac{1}{\tau}C(t)$$

```
- Questa è un'*equazione differenziale ordinaria del primo ordine lineare omogenea* facilmente risolvibile, dandoci
```

$$C(t) = C_0 e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}$$

```
- Per trovare $\tau$ uso le condizioni iniziali e il fatto che $\Delta t=5730$.
```

$$\frac{C_0}{2} = \frac{C(t_0)}{2} = C(t_0 + \Delta t) = C_0 \exp\left(\frac{\Delta t}{\tau}\right) = C_0 \exp\left(-\frac{5730}{\tau}\right)$$

```
- Isolando la $\tau$ si ottiene
```

$$\tau = \frac{5730}{\ln 2} \approx 8266.64$$

- Abbiamo finito con la costruzione del modello, con l'*equazione della concentrazione del carbonio* data da

$$C(t) = C_0 \exp\left(-\frac{t-t_0}{8266.64}\right)$$

- Siamo pronti per rispondere ad eventuale domande.

ESEMPIO. (*Domanda*)
Supponiamo di aver scoperto un fossile vegetale, con 0.75 concentrazione di carbonio rispetto ad altri organismi attualmente viventi. Vogliamo stimare l'età di questo fossile. Applico il modello $C(t)$, ponendo $t = 2024$. Così abbiamo

$$C(2024) = (0.75)C_0$$

Per trovare il suo tempo iniziale t_0 (ovvero la data in cui ha iniziato a cessare di vivere), usiamo il modello. In particolare

$$\begin{aligned} C(2024) &= C(t_0) \exp\left(-\frac{2024-t_0}{\tau}\right) \\ &= C_0 \exp\left(-\frac{2024-t_0}{\tau}\right) \end{aligned}$$

Adesso pongo l'uguaglianza

$$C_0(0.75) = C_0 \exp\left(-\frac{2024-t_0}{\tau}\right)$$

Facendo i calcoli, ottengo

$$t_0 = 2024 + \tau \ln(0.75) \approx -353$$

Ovvero siamo circa nel 431 avanti cristo. ■

C2. Modello S.I.R.

Modelli di Applicazione dei Sistemi di ODE

Esempio di modello che applica un sistema di ODE: il modello SIR per le epidemie.

---

0. Voci correlate

- Sistema di Equazioni Differenziali del Primo Ordine

1. Ipotesi del Modello SIR

Prendiamo un *modello biologico noto*, che è in grado di descrivere la *propagazione di una malattia infettiva*. Poniamo le seguenti ipotesi:
IPOTESI. (*Modello SIR*)

- Si distingue la *popolazione* in *tre classi disgiunte*: *infetti*, *suscettibili* e *rimossi*,
  - *Infetti (Infected)*: sono infetti (I)
  - *Suscettibili (Susceptible)*: sono sani ma contagiabili S
  - *Rimossi (Removed)*: non è infetto e non può più ne ammalarsi ne trasmettere la malattia. O sono immunizzati alla malattia, o sono morti. R
- La *dinamica* della popolazione è unidirezionale, del tipo *S→I→R*
  - Posso *solo* infettare gli suscettibili
- Ho un *numero di individui* N costante. Quindi si ha $I+S+R=N$, per una qualsiasi istanza del tempo.
- Ho c un numero di *contatti* di ciascun individuo per l'unità di tempo h.
  - Ho $\xi = \frac{I}{N}$ la frazione degli infetti che un sano può incontrare
    - $\rho \in [0,1]$ è la probabilità che da tale contatto nasca un infezione
- Per ogni unità di tempo h la probabilità γ che un infetto diventi rimosso

2. Modello SIR

Adesso per modellizzare tutto, traduciamo le *ipotesi* in formule.

1. Notiamo che $S(t)$ dev'essere decrescente. Infatti valutando la sua variazione ho

$$-\Delta S = S(t) - S(t+h) = \left(I(t)h\underbrace{\frac{c\rho}{N}}_{\beta} \right) S(t)$$

   Passando all'incremento infinitesimale, ottengo

$$\frac{S(t)-S(t+h)}{h} = (\beta I(t))S(t)$$

   Dunque ho l'equazione differenziale

$$-S'(t) = \beta I(t) S(t) \implies \boxed{S'(t) = -\beta I(t) S(t) < 0 \ (*)}$$

2. Adesso studio la dinamica *I→R* (come gli infetti diventano rimossi). In questo caso è *crescente*. Valutando la sua variazione ottengo

$$R(t+h) - R(t) = \gamma h I(t) > 0 \implies \frac{R(t+h) - R(t)}{h} = \boxed{R'(t) = \gamma I(t) \ (*}$$

3. Dato che $I = N - R - S$, ottengo direttamente $I'(t) = \beta I(t)S(t) - \gamma I(t)$, permettendoci di passare direttamente al sistema, ponendo le condizioni iniziali $I(0) = I_0$ e $S(0) = S_0 = N - I(0) - R(0)$. Nota che $R(0)$ non deve essere necessariamente 0! Possiamo avere casi in cui ci sono già delle immunizzazioni.

$$(PC_\Sigma) : \begin{cases} S'(t) = -\beta I(t)S(t) \ \ (1) \\ I'(t) = \beta I(t)S(t) - \gamma I(t) \ \ (2) \\ I(0) = I_0 > 0, S(0) = S_0 > 0 \end{cases}$$

Qui PC_Σ è un *sistema di equazioni differenziali del secondo grado e del primo ordine* (Definizione 1 (sistema di equazioni differenziali del primo ordine)). Volendo possiamo porre $Y' = F(t, Y)$ con $Y(t) = (S(t), Y(t))$ e $Y^0 = (S_0, Y_0)$ ed eccetera.

3. Studio Qualitativo delle Soluzioni

Ho ottenuto il sistema. Adesso? Vogliamo capire *come* è fatto questo modello.

1. Per ora facciamo una serie di manipolazioni, per poter studiare qualitativamente le soluzioni. Manipolo la (1) per ottenere

$$S'(t) = -\beta I(t)S(t) \iff I(t) = -\frac{1}{\beta}\frac{S'(t)}{S(t)} \ \ (1.1)$$

2. Sommo (1), (2) per ottenere

$$S'(t) + I(t) = -\beta I(t)S(t) + \beta I(t)S(t) - \gamma I(t) = -\gamma I(t)$$

da cui ho

$$S'(t) + I'(t) - \gamma I(t) = 0$$

3. Uso la (1.1) per ottenere

$$S'(t) + I'(t) - \frac{\gamma}{\beta}\frac{S'(t)}{S(t)} = 0$$

Noto che tutte queste sono *derivate* di qualcosa. In particolare il terzo membro è una derivata del tipo $k\ln(S(t))$ (derivare per crederci!).

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(S(t) + I(t) - \frac{\gamma}{\beta}\ln(S(t))\right) = 0$$

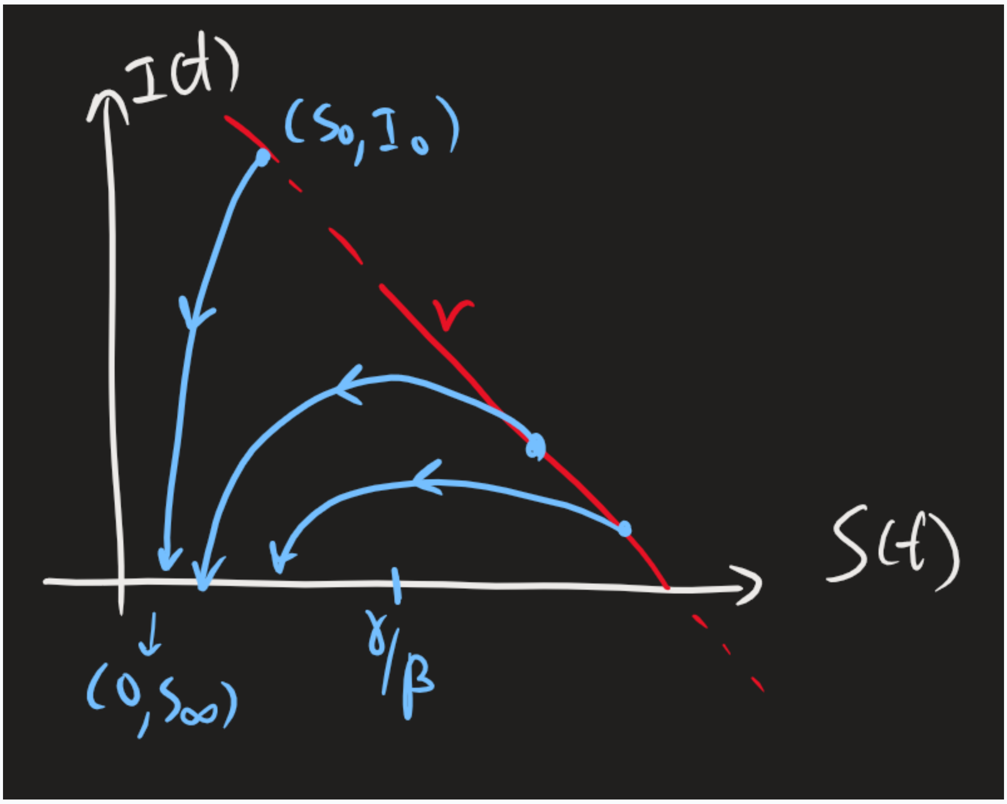
Ovvero la *derivanda* è costante:

$$S(t) + I(t) - \frac{\gamma}{\beta}\ln S(t) = \mu \in \mathbb{R}$$

Esplicitando per I ottengo la soluzione

$$I(t) = -S(t) - \frac{\gamma}{\beta}\ln(S(t)) + \mu$$

4. Adesso vedo la soluzione-vettore $(S(t), I(t))$ come una *curva*. Ovvero stiamo considerando il *piano delle fasi*. Supponendo $R(0) = 0$ si ha la retta $r: S(t) = N - I(t)$. Supponendo che la condizione iniziale (S_0, I_0) sia *dentro* la retta, si ha una curva del tipo



5. Inoltre si dimostra che abbiamo i seguenti comportamenti asintotici: $I(t \to +\infty) = 0$ e $S(t \to +\infty) = S_\infty > 0$.
6. Per capire meglio l'andamento di $I(t)$, vedo il suo segno. Dalla (2) ho

$$I'(t) = \underbrace{\beta I(t)}_{>0}\left(S(t) - \frac{\gamma}{\beta}\right)$$

Allora mi studio *solo* il segno di $S(t) - \frac{\gamma}{\beta}$. Se $S(t)$ supera tale parametro, è crescente; se no inizia a decresce, altrimenti se è uguale ho un *punto stazionario*. Concludo che se $S_0 \leq \frac{\gamma}{\beta}$, allora ho che l'infezione *non si propaga*, inizia subito a morire.

D. EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL SECONDO ORDINE

D1. Definizione

Definizione di Equazione Differenziale Secondo Ordine

Definizione di ODE scalare del secondo ordine. Teoremi: Peano-Cauchy-Lipschitz, dell'esistenza globale.

---

0. Voci correlate

- Definizioni Relative alle Equazioni Differenziali
- Teorema di esistenza di Peano
- Teorema di Cauchy-Lipschitz
- Esistenza locale e globale delle soluzioni ai Problemi di Cauchy

1. Definizione di ODE del Secondo ordine, scalare

#Definizione

> Definizione (ODE scalare del secondo ordine).
>
> Sia $f : E \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. Allora l'equazione
>
> $$y''(x) = f(x, y(x), y'(x))$$
>
> si dice *ODE del secondo ordine scalare*. Una funzione $y : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice *soluzione* dell'*ODE* se è di classe $\mathcal{C}^2$, se è soddisfatta l'equazione e poi vale che $(x, y(x), y'(x)) \in E, \forall x \in I$.
>
> Fissata una *condizione iniziale* $(x_0, y_0, y_0' := v_0) \in E$, mettendolo in *sistema* con l'*ODE* si ha il *problema di Cauchy*
>
> $$(PC) : \begin{cases} y''(x) = f(x, y(x), y'(x)) \\ y(x_0) = y_0 \land y'(x_0) = y_0' := v_0 \end{cases}$$

Motivazione: Studiare la *dinamica dei punti materiali*.

#Esempio

> Esempio (oscillatore armonico).
>
> Un punto che risente la *forza elastica* $F = ma = m\ddot{x} = -kx$ a posizione iniziale $x(t = 0) = x_0$ e a velocità iniziale $x'(0) = v(0) = v_0$ ha il moto descritto dal seguente problema di Cauchy
>
> $$(PC) : \begin{cases} x''(t) = -\dfrac{k}{m}x(t) \\ x(0) = x_0 \land x'(0) = v_0 \end{cases}$$

2. Teoremi Misti

Posso usare dei *teoremi già noti* nel caso dell'ordine $N = 1$ (1, 2, 3).

#Teorema

Teorema (Peano-Cauchy-Lipschitz e dell'esistenza globale).

Si definisca il *problema di Cauchy* associato all'ODE del secondo ordine come

$$(PC) : \begin{cases} y''(x) = f(x, y(x), y'(x)) \\ y(x_0) = y_0 \wedge y'(x_0) = v_0 \end{cases}$$

Allora valgono le seguenti:

i. *Esistenza*

$$f \in \mathcal{C}^2 \implies \exists h > 0, y : (x_0 - h, x_0 + h) \longrightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^2 \text{ risolve } (PC)$$

ii. *Unicità*

$$f_y, f_{y'} \in \mathcal{C}^0 \implies \exists ! y$$

iii. *Esistenza globale*

$$\begin{gathered} \forall H \Subset I, \exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} : |f(x, y, y')| \leq \alpha|y| + \beta|y'| + \gamma \\ \Downarrow \\ \exists y : I \longrightarrow \mathbb{R} \text{ risolve } (PC) \end{gathered}$$

D2. Equazione di Newton

Equazione di Newton

Equazione di Newton: definizione e metodo risolutivo.

---

0. Voci correlate

- Definizione di Equazione Differenziale Secondo Ordine

1. Definizione di Equazione di Newton

#Definizione

Definizione (equazione di Newton, equazione differenziale autonoma e conservativa).

Sia $f : J \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^1$ con J aperto. Allora *l'equazione differenziale*

$$y'' = f(y)$$

si dice *equazione di Newton*. In particolare si dice che è *autonoma* e *conservativa*, dato che non dipendono dai parametri x, y'.

#Osservazione

Osservazione (proprietà dell'equazione di Newton).

Per i *teoremi* sulle *equazioni differenziali* abbiamo sicuramente l'*esistenza unica* della soluzione y. Infatti, $f_y = f_{y'} = 0$, che sono continue.

Tuttavia per quanto riguarda la *globalità* non si sa nulla.

2. Metodo Risolutivo

Per risolvere quest'*ODE* vogliamo trovare un modo per *ridurlo* dal secondo ordine al primo.

#Teorema

Teorema (riduzione dell'equazione di Newton).

Sia definita l'*equazione di Newton* con le *condizioni iniziali* (x_0, y_0, v_0).

$$y'' = f(y)$$

Sia detta F una primitiva di f; allora l'equazione differenziale può essere *ridotta* in un'*equazione differenziale del primo ordine*, con:
i. *Caso* $y'(x_0) = v_0 \neq 0$:

$$y''(x) = f(y(x)) \rightarrow \begin{cases} v_0 > 0 \implies y'(x) = +\sqrt{2F(y(x)) + v_0^2 - 2F(y_0)} \\ v_0 < 0 \implies y'(x) = -\sqrt{2F(y(x)) + v_0^2 - 2F(y_0)} \end{cases}$$

ii. *Caso* $y'(x_0) = v_0 = 0, f(y_0) \neq 0$:

$$\begin{cases} f(y_0) > 0 \implies y'(x) = \operatorname{sgn}(x - x_0)\sqrt{2F(y(x)) + v_0^2 - 2F(y_0)} \\ f(y_0) < 0 \implies y'(x) = \underbrace{-\operatorname{sgn}(x - x_0)}_{\operatorname{sgn}(x_0 - x)}\sqrt{2F(y(x)) + v_0^2 - 2F(y_0)} \end{cases}$$

> iii. *Caso* $y'(x_0) = v_0 = f(y_0) = 0$:
>
> $$y'(x) = 0, y(x) \equiv y_0$$
>
> Nota: i casi *i*, *ii* valgono meglio per intorni di x_0.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 3 (riduzione dell'equazione di Newton)

Nota: qui è più importante impararsi la dimostrazione che le formule! Anzi, si invita SOLAMENTE di impararsi la procedura risolutiva.

Partiamo dal caso *iii.*. Banalmente in questo caso $y(x) := y_0$ soddisfa tutte le condizioni per la definizione di soluzione, dato che

$$y'(x) = 0 \wedge y''(x) = 0 = f(y(x) = y_0) = 0 \wedge f(y(x_0) = y_0) = 0 \mid \text{OK!}$$

i. Adesso torniamo ai casi precedenti. La prima idea è quella di *moltiplicare* l'equazione differenziale per $y'(t)$, ottenendo

$$y''(t)y'(t) = f(y)y'(t)$$

Cos'è la prima? Esatto, proprio la derivata $\frac{1}{2}y'(t)^2$! (per crederci, derivare); allora l'ODE diventa

$$\frac{1}{2}\left(y'(t)^2\right)' = f(y(t))y'(t)$$

Siano definite G, F le primitive di $(y'(t))^2$ e di $f(y)$. Notiamo che in questo caso avrei $(F(y(t)))' = f(y)y'(t)$. Allora l'equazione differenziale diventa

$$\frac{1}{2}(G(t))' = (F(y(t)))'$$

Integrando da ambo i lati nell'intervallo t_0, t otteniamo

$$\int_{t_0}^{t} \frac{1}{2}(y(s)^2)' \,\mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t} (F(y(s)))' \,\mathrm{d}s$$

Per il *teorema fondamentale del calcolo integrale* (Teorema 1 (fondamentale del calcolo integrale)) ho banalmente

$$\frac{1}{2}(y'(t))^2\Big|_{t_0}^{t} = F(y(t))\Big|_{t_0}^{t} \implies \frac{1}{2}(y'(t))^2 + F(y(t)) = \frac{1}{2}v_0^2 - F(y_0)$$

Isolando termini opportuni ottengo l'*equazione differenziale* del primo ordine

$$[y'(t)]^2 = 2F(y(t)) - 2F(y_0) + v_0^2$$

Adesso per esplicitare il termine $y'(t)$ devo iniziare a ragionare in termini di segni di v_0 e $f(y_0)$. Partiamo dal *caso i.*: ovvero v_0 non è nulla.
ii. Assumendo $v_0 > 0$, possiamo sicuramente dire che per la *continuità* di y' la soluzione sicuramente esiste, e tale soluzione dev'essere pure continua. Allora si ha che per *un intorno di* x_0 la derivata y' rimane positiva, dato che $y'(x_0) > 0$. Dunque posso tranquillamente prendere la *soluzione positiva*

$$y'(x) = \sqrt{2F(y(t)) - 2F(y_0) + v_0^2}, x \in \forall U(x_0)$$

Il ragionamento vale *analogamente* per $v_0 < 0$, solo che prendiamo la *soluzione negativa*.
iii. Adesso sia $v_0 = 0$: devo creare altri *sottocasi*, separandoli per il *segno di* $f(y_0)$.
Assumendo $f(y_0) > 0$, abbiamo il segno di $y''(x_0)$ positivo

$$y''(x_0) = f(y(x_0)) = f(y_0) > 0$$

Dato che $y'(x) = v_0 = 0$ e $y''(x_0)$ positiva (ovvero abbiamo una specie di *punto di minimo*), abbiamo che vale

$$\begin{cases} y'(x) < 0, \forall x < x_0 \\ y'(x) > 0, \forall x > x_0 \end{cases}$$

Quindi a *"seconda di dove sta x rispetto a x_0"*, dobbiamo scegliere il segno della soluzione. In conclusione abbiamo

$$y'(x) = \operatorname{sgn}(x - x_0)\sqrt{2F(y(t)) - 2F(y_0) + v_0^2}$$

Lo stesso ragionamento vale per $f(y_0) < 0$, solo che invertiamo i segni. ■

D3. EDO lineari del secondo ordine

Equazioni Differenziali Lineari del Secondo Ordine

Equazioni differenziali lineari del secondo ordine: definizione, l'esistenza unica della soluzione. Struttura: teorema di struttura delle equazioni differenziali lineari del secondo ordine. Descrizione del kernel. Teorema: costruzione di base per il kernel, di una soluzione particolare della completa (metodo della somiglianza o il metodo del nucleo risolvente).

---

0. Voci correlate

1. Definizione di ODE lineare del secondo ordine

#Definizione

Definizione (ODE lineare del secondo ordine a coefficienti costanti).

Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $c : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^0(I)$, con I aperta. L'equazione differenziale della forma

$$f(x, y, y') : y''(x) + ay'(x) + by(x) = c(x)$$

si dice *"equazione differenziale ordinaria lineare del secondo ordine scalare con coefficienti costanti completa"*.

Se si ha $c(x) \equiv 0$, allora in tal caso si dice che è *"omogenea"*

#Esempio

Esempio (le vibrazioni meccaniche).

Un esempio fisico è un *oggetto* sottoposto ad una forza variabile $F(t)$, forza di attrito viscoso $F_a = -\xi v$. Allora si ha l'equazione differenziale

$$mx''(t) = -\xi x'(t) - kx(t) + F(t)$$

Vediamo una proprietà immediata delle *ODE lineari del secondo ordine complete, a coefficienti costanti*.

#Teorema

Teorema (proprietà delle ODE lineari del secondo ordine a coefficienti costanti).

Si ha che il *problema di Cauchy* (PC), composto da un'*ODE lineare del secondo ordine* e dalla condizione iniziale $(x_0 \in I, y_0 \in \mathbb{R}, v_0 \in \mathbb{R})$

$$(PC) : \begin{cases} y''(x) + ay'(x) + by(x) = c(x) \\ y(x_0) = y_0 \wedge y'(x_0) = v_0 \end{cases}$$

Allora $\exists! y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ che risolve (PC).

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 3 (proprietà delle ODE lineari del secondo ordine a

coefficienti costanti)
Si tratta di usare i teoremi già noti (Teorema 1 (teorema di Cauchy-Lipschitz, dell'esistenza e dell'unicità locale delle soluzioni), Teorema 2 (condizione sufficiente per l'esistenza globale)).
i. ∃!: Si ha il campo

$$f(x,y,v) = -av + by + c(x)$$

Questa dev'essere continua (dato che lo è c). Inoltre si ha le derivate $f_y = -b$ e $f_v = -a$, che per forza sono continue. Dunque si ha l'*esistenza unica* della soluzione
ii. $y(I)$: f è chiaramente sublineare (poiché c'è un motivo che si chiamano *equazioni differenziali lineari*....), dato che

$$\forall K \Subset I, |f(x,y,v)| \leq \alpha|x| + \beta|y| + \gamma \impliedby \begin{cases} \alpha = |a| \\ \beta = |b| \\ \gamma = \max\limits_{x \in K} |c(x)| \end{cases}$$

■

2. Struttura delle ODE lineari del secondo ordine

Vediamo la struttura di queste equazioni differenziali, poi per determinare tali *soluzioni*. Simile come fatto col caso *ordine* $N=1$ (Equazioni Differenziali Lineari del primo ordine)

#Definizione

Definizione (applicazione lineare).

D'ora in poi chiamiamo $L : \mathcal{C}^2 \longrightarrow \mathcal{C}^0$ come la funzione funzionale $L(y) := y'' + ay' + by$.

#Definizione

Definizione (spazio di soluzioni).

Siano definite gli *spazi di soluzioni* come

$$S_{c(\cdot)} := L^{-1}(\{c(\cdot)\}) = \{y \in \mathcal{C}^2 : y'' + ay' + by = c\}$$

e

$$S_0 := \ker L = L^{-1}(\{0\})$$

#Teorema

Teorema (di struttura).

Si ha che lo spazio S_c rispetta la struttura

$$S_c = \tilde{s} + \ker L$$

dove $\tilde{s} \in S$ è un *elemento particolare*, $\ker L$ la struttura generale del nucleo.

Ovvero questo teorema si traduce come

$$s \in S_c \iff s(t) = \tilde{y}(t) + z(t)$$

con $\tilde{y}$ una soluzione particolare della completa, e z una soluzione generale per il nucleo.

#Teorema

Teorema (descrizione del nucleo).

Si ha che $\ker L$ è uno *spazio vettoriale* e che la sua dimensione è 2

$$\dim \ker L = 2$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 7 (descrizione del nucleo)
Prima del tutto prendiamo la base canonica per $\mathbb{R}^2$, che è

$$\mathcal{E} = \{(1,0),(0,1)\}$$

Siano adesso y_1, y_2 delle *soluzioni* al nucleo (ovvero $y_1, y_2 \in \ker L$). Adesso siano definiti dei *problemi di Cauchy* con le *condizioni iniziali* degli *elementi* di $\mathcal{E}$. Ovvero $(y_1(t_0). y_1'(t_0)) = (1,0)$ e $(y_2(t_0), y_2'(t_0)) = (0,1)$. Ovvero

$$(PC_1) : \begin{cases} ay''(x) + by'(x) + c(x) = 0 \\ y(x_0) = 1 \wedge y'(x_0) = 0 \end{cases}$$

e (PC_2) si definisce nella maniera identica, solo che abbiamo $y(x_0) = 0 \wedge y'(x_0) = 1$.
Supponiamo che y_1, y_2 creino una *base* per $\ker L$. Per dimostrarlo, dobbiamo dimostrare che essi sono *linearmente indipendenti* e siano un *sistema di generatori* per $\ker L$.
i. *Indipendenza lineare*
Considero un'elemento della combinazione lineare $\operatorname{span}(y_1, y_2)$, ovvero

$$C(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

Si tratta di dimostrare che $C(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \iff c_1 = c_2 = 0$. Per farlo, pongo $C(0) = 0$ ottenendo

$$c_1 \underbrace{y_1(x_0)}_{1} + \underbrace{c_2 y_2(x_0)}_{0} = 0 \implies c_1 \cdot 1 + 0 = 0 \implies c_1 = 0$$

Adesso per trovare c_2 derivo C e lo pongo a 0:

$$C'(x_0) = c_1 \underbrace{y_1'(x_0)}_{0} + c_2 \underbrace{y_2'(x_0)}_{1} = 0 \implies c_2 = 0$$

Dimostrando così $c_1 = c_2 = 0 \impliedby C(x) = 0$. L'altro verso dell'implicazione viene banalmente verificata mediante calcoli.
ii. *Sistema di generatori*
Si tratta di dimostrare che ogni *elemento del nucleo* fa parte dello span $\operatorname{span}(y_1, y_2)$ Sia fissata $s(x) \in \ker L$, devo dimostrare che $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : s(x) = \alpha y_1(x) + \beta y_2(x)$. Partiamo da ciò che conosciamo: ovvero s risolve il problema

$$(PC) : \begin{cases} s''(x) + as'(x) + bs(x) = 0 \\ s(x_0) = s_0, s'(x_0) = v_0 \end{cases}$$

Scegliendo $\alpha = s_0$ e $\beta = v_0$ si ha banalmente la tesi. ■

3. Costruzione delle Soluzioni

Ora iniziamo a trovare delle *soluzioni* per un'equazione differenziale lineare del secondo ordine, sfruttando la *struttura* di S_c. Partiamo dall'*omogenea*.

3.1. Soluzioni dell'Omogenea

#Teorema

> Teorema (costruzione della base delle omogenee).
>
> Sia definita l'equazione differenziale omogenea
>
> $$\boxed{y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0}$$
>
> Sia definita l'equazione caratteristica associata
>
> $$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$
>
> Allora abbiamo che le soluzioni per l'equazione differenziale sono definite mediante le seguente casistiche.
> i. $a^2 > 4b$ (*il discriminante è positivo*)
> Si ha che esistono delle *soluzioni reali* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ con $\lambda_1 \neq \lambda_2$, e la base alla soluzione dell'omogenea è formata da
>
> $$y(x) \in S_0 = \operatorname{span}\left(e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}\right)$$

> ii. $a^2 < 4b$ (*il discriminante è negativo*)
> Si ha che esistono delle *soluzioni complesse* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ con $\lambda_1 \sim a_1 + ib_1$ e $\lambda_2 \sim a_2 + ib_2$ con $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ e $b_1, b_2 \in \mathbb{R} \diagdown \{0\}$. Allora la base dell'omogenea è formata da
>
> $$y(x) \in S_0 = \text{span}\left(e^{a_1 x}\cos(b_1 x), e^{a_2 x}\cos(b_2 x)\right)$$
>
> iii. $a^2 = 4b$ (*il discriminante è nullo*)
> Si ha che ho l'unica soluzione all'associata $\lambda_0 = \frac{a}{2} \in \mathbb{R}$ e che la base di S_0 è formata da
>
> $$y(x) \in S_0 = \text{span}\left(e^{\lambda_0 x}, xe^{\lambda_0 x}\right)$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 8 (costruzione della base delle omogenee)
Partiamo considerando delle funzioni del tipo $z(x) = e^{\lambda x}$, con $\lambda \in \mathbb{C}$. Sostituendolo nell'*equazione differenziale* otteniamo l'equazione

$$e^{\lambda x}(\lambda^2 + a\lambda + b) = 0$$

Dato che $\exp$ è una funzione *sempre positiva*, l'unica che può risolvere l'equazione è quella algebrica.

$$\lambda^2 + a\lambda + b$$

Poi si dimostra che in *ciascuno dei casi* le funzioni generati risolvono l'*equazione differenziale*; quindi si tratta di dimostrare che sono *linearmente indipendenti* (non serve verificare che sono un *sistema di generatori*, dal momento che abbiamo $\dim \ker L = 2$).
Per esempio dimostriamo il caso *i.*: sia definita $y(x) = \alpha e^{\lambda_1 x} + \beta e^{\lambda_2 x}$. Adesso vogliamo dimostrare che questa si annulla se e solo se $\alpha = \beta = 0$ (definizione di indipendenza lineare). Vogliamo sfruttare il fatto che $\lambda_1 \neq \lambda_2$, da cui si ha $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$. Per farlo, raccogliamo i termini ottenendo

$$\alpha e^{\lambda_1 x} + \beta e^{\lambda_2 x} = \underbrace{e^{\lambda_1 x}}_{\neq 0}\left(\alpha + \beta e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x}\right) = 0$$

da cui si ha

$$\alpha + \beta e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} = 0$$

Adesso deriviamo quest'espressione, ottenendo

$$\underbrace{(\lambda_2 - \lambda_1)}_{\neq 0}\beta \underbrace{e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x}}_{\neq 0} = 0$$

L'unico termine che può cancellare è β, ottenendo $\beta = 0$.
In una maniera analoga si dimostra che $\alpha = 0$; infatti sostituendo $\beta = 0$ si ottiene

$$\alpha \underbrace{e^{\lambda_1 x}}_{\neq 0} = 0$$

da cui ho la tesi. Poi banalmente si dimostra che risolve l'ode calcolando $L(y(x))$. ■

3.2. Soluzione della Completa

Adesso vediamo dei *metodi* per determinare *una* soluzione della completa, potendo dare così una soluzione ad un'*equazione differenziale lineare del secondo ordine*.

#Teorema

Teorema (metodo di somiglianza).

Se l'*equazione differenziale*

$$y'' + ay' + b = c(x) \;\; (*)$$

presenta $c(x)$ con una forma del tipo

$$c(x) \sim P_n(x)e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

oppure

$$c(x) \sim P_n(x)e^{\alpha x} \cos(\beta x)$$

(dove P_n è un polinomio del grado n-esimo) allora, definendo $\xi = \alpha + i\beta$, si ha che una *soluzione della completa* è determinata dalle seguenti casistiche:
i. ξ non l'equazione associata: allora si cercano soluzioni del tipo

$$\xi^2 + a\xi + b \neq 0 \implies y(x) = e^{\alpha x}(Q_1(x) \cos(\beta x) + Q_2(x) \sin(\beta x))$$

con Q_1, Q_2 dei polinomi da determinarsi sostituendo y nella $(*)$.
ii. ξ risolve l'equazione associata ed è di molteplicità 1 (ovvero è una delle due soluzioni)

$$\xi^2 + a\xi + b = 0 \implies y(x) = xe^{\alpha x}(Q_1(x) \cos(\beta x) + Q_2(x) \sin(\beta x))$$

iii. ξ è risolve l'equazione associata ed è di molteplicità 2 (ovvero è l'unica soluzione)

$$\xi^2 + a\xi + b = 0 \implies y(x) = x^2 Q(x) e^{\alpha x}$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 9 (metodo di somiglianza)

Soluzione algoritmica, si tratta di sostituire y nella $(*)$ per determinare la soluzione completa. ■

#Teorema

Teorema (metodo del nucleo risolvente).

Siano $\{z_1, z_2\}$ elementi che costituiscono una base per $\ker L = S_0$. Allora una *soluzione particolare della completa* è data da

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} K(x,t)c(t)\ \mathrm{d}t$$

con $x \in I, x_0 \in I, x, t \in \mathbb{R}$ dei valori. In particolare o $K(x,t)$ la *"funzione di Green"*, definita come

$$K(x,t) = \frac{\det \begin{pmatrix} z_1(0) & z_2(0) \\ z_1(x-t) & z_2(x-t) \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} z_1(0) & z_2(0) \\ z_1'(0) & z_2'(0) \end{pmatrix}}$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 10 (metodo del nucleo risolvente)

Partiamo da una considerazione preliminare: supponiamo di avere un integral-funzione del tipo

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} G(x,t)\ \mathrm{d}t$$

Come faccio a derivarlo rispetto a x? Per rendere il calcolo semplice e fattibile, introduco la funzione ausiliaria $\varphi(y,z) = \int_{x_0}^{y} G(z,t)\ \mathrm{d}t$. A questo punto introduco la funzione ausiliaria *"identità"* definita come $\psi(x) = (x,x)$. A questo punto prendo la composizione $F = \phi \circ \psi$. Infatti ho una situazione del tipo

$$x \xrightarrow{\psi} (x,x) \xrightarrow{\phi} \int_{x_0}^{x} G(x,t)\ \mathrm{d}t$$

Adesso per derivarlo *basta usare le regole già note* per la composizione di funzioni (Proposizione 1 (differenziale della funzione composta di funzioni in più variabili)); ovvero faccio il prodotto tra $\nabla\phi$ e la jacobiana $J\psi$, dandoci

$$F'(x) = \nabla\varphi \cdot J\psi = \begin{pmatrix} G(x,x) \\ \int_{x_0}^{x} \frac{\partial G}{\partial x}(x,t)\ \mathrm{d}t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} = G(x,x) + \int_{x_0}^{x} \frac{\partial G}{\partial x}(x,t)\ \mathrm{d}t$$

Adesso si tratta di fare solo dei conti. Siano z_1, z_2 gli elementi della base per S_0 tali che

$$\begin{pmatrix} z_1(0) & z_1'(0) \\ z_2(0) & z_2'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}_2$$

(in realtà non sarebbe proprio necessaria, ma facciamo così per semplificarci la vita): così ho

$$K(x,t) = \frac{z_1(0)z_2(x-t) - z_2(0)z_1(x-t)}{z_1(0)z_2'(0) - z_2(0)z_1'(0)} = z_2(x-t)$$

Adesso prendo $y(x)$ definita come nella tesi, ovvero

$$\boxed{y(x) = \int_{x_0}^{x} z_2(x-t)c(t) \text{ d}t}$$

Adesso ci applico la *regola di derivazione appena enunciata*, dandoci

$$y'(x) = \underbrace{z_2(\underbrace{x-x}_{0})c(x)}_{0} + \int_{x_0}^{x} z_2'(x-t)c(t) \text{ d}t$$

Derivandolo di nuovo, ottengo

$$y''(x) = \underbrace{z_2'(x-x)c(x)}_{1} + \int_{x_0}^{x} z_2''(x-t)c(t) \text{ d}t$$

Adesso si tratta di sostituire tutto nell'*equazione differenziale* da risolvere, dandoci

$$\begin{aligned}
&y''(x) + ay'(x) + by(x) = \\
&= c(x) + \int_{x_0}^{x} z_2''(x-t)c(t) \text{ d}t + a\int_{x_0}^{x} z_2'(x-t)c(t) \text{ d}t + b\int_{x_0}^{x} z_2(x-t)c(t)\text{d}t \\
&= c(x) + \int_{x_0}^{x} \underbrace{\left[z''(x-t) + az_2'(x-t) + bz_2(x-t)\right]}_{\in S_0} c(t) \text{ c}t \\
&= c(x) + 0 = c(x)
\end{aligned}$$

che soddisfa l'identità $y''(x) + ay'(x) + by(x) = c(x)$, provando il teorema. ■

E. ESERCIZI

Esercizi sulle Equazioni Differenziali

Breve descrizione qui

---

1. Esercizi sulle Equazioni Differenziali del Primo Ordine

#Esercizio

Esercizio.

Trovare le soluzioni al problema di Cauchy

$$(PC) : \begin{cases} y'(x) = y^2(x) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

#Esercizio

Esercizio.

Trovare le soluzioni all'ODE

$$y'(x) = \sqrt{1 - y^2(x)}$$

#Esercizio

Esercizio.

Trovare la soluzioni del problema di Cauchy

$$(PC) : \begin{cases} y'(x) = -2xy(x) + x^3 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

#Esercizio

Esercizio.

Trovare le soluzioni all'ODE

$$y'(x) = -\frac{y(x)}{x} + 4x$$

#Esercizio

Esercizio.

Provare la soluzione al problema di Cauchy

$$(PC) : \begin{cases} y'(x) = y(x) - xy^4(x) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

2. Studio Qualitativo di Problemi di Cauchy

#Esercizio

Esercizio.

Sia (PC) il problema di Cauchy definita come

$$(PC) : \begin{cases} y'(x) = x^2 \cos y(x) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Effettuare uno studio qualitativo su questa, provando che:
i. Esiste una ed unica soluzione $y(x)$
ii. Calcolare il limite $\lim_{x \to +\infty} y(x)$
iii. La soluzione $y(x)$ è dispari

#Esercizio

Esercizio.

Sia (PC) l'equazione logistica definito come

$$(PC) : \begin{cases} y'(x) = ay(x)(1 - y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \in (0, 1) \end{cases}$$

Effettuare uno studio qualitativo sul (PC), determinando:
i. Equilibri della soluzione
ii. Intervallo di definizione della soluzione
iii. Il comportamento asintotico della soluzione verso $-\infty$ e $+\infty$ della soluzione e della sua derivata
iv. Concludere con un disegno qualitativo della funzione

3. Equazioni Differenziali del Secondo Ordine

#Esercizio

Esercizio.

Risolvere il PC

$$(PC):\begin{cases} y''(x)=3y^2(x)\\ y(0)=\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}\wedge y'(0)=1\end{cases}$$

#Esercizio

Esercizio.

Risolvere il PC

$$(PC):\begin{cases} y''(x)-10y(x)=0\\ y(0)=0\wedge y'(0)=1\end{cases}$$

#Esercizio

Esercizio.

Risolvere il PC

$$(PC):\begin{cases} y''(x)+\dfrac{2}{3}y'(x)+\dfrac{1}{9}y(x)=0\\ y(0)=0\wedge y'(0)=1\end{cases}$$

#Esercizio

Esercizio.

Risolvere il PC

$$(PC):\begin{cases} y''+4y=4\cos(2x)\\ y(0)=0\wedge y'(0)=0\end{cases}$$

#Esercizio

Esercizio.

Risolvere il PC

$$(PC):\begin{cases} y''-10y=-10x^2\\ y(0)=\dfrac{1}{5}\wedge y'(0)=0\end{cases}$$

#Esercizio

Esercizio.

Risolvere il PC

$$(PC) : \begin{cases} y'' - 10y = -10x^2 \\ y(0) = 1 \wedge y'(0) = 3 \end{cases}$$

#Esercizio

Esercizio.

Risolvere il PC

$$(PC) : \begin{cases} y'' + y = \dfrac{1}{\sin x} \\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0 \wedge y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$$