Calcolo Differenziale in RN - Sommario

Tutto sul calcolo differenziale in più variabili.

---

0. Introduzione Preliminare (Motivazioni, ...)

Introduzione al Calcolo Differenziale in più variabili

Osservazione preliminare per il calcolo differenziale in più variabili: approssimazione delle funzioni con sviluppo di Taylor col resto di Peano, definizione o-piccolo e obbiettivi per il calcolo differenziale multivariata.

---

0. Voci correlate

- Formula di Taylor
- Derivata e derivabilità
- Definizione di Funzione in più variabili

1. Osservazione preliminare

#Osservazione

Osservazione (caso $N = 1$).

Prendiamo il caso $\mathbb{R}^1$. Dai risultati del *calcolo differenziale*, possiamo approssimare una funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ come

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R(x)$$

dove vale il limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{|x - x_0|^n} = 0$$

ovvero R_n è un *"o-piccolo"* di $|x - x_0|^n$ (per una definizione ben costruita vedere sotto).

#Definizione

Definizione (o-piccolo delle funzioni).

Siano f, g funzioni tali che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0 \wedge \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Allora si dice che f è un *"o-piccolo"* della funzione g, e la si scrive come

$$f = o(g)$$

#Osservazione

Osservazione (gli obbiettivi del calcolo differenziale multivariata).

Come osservato prima, vogliamo tenere conto di questa *rappresentazione locale*, estendendolo per *funzioni in più variabili* del tipo $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M$.
In particolare, voglio costruire l'approssimante

$$f(\underline{x}) = f(\underline{x_0}) + \mathbb{A}(\underline{x} - \underline{x_0}) + E(\underline{x})$$

dove vale il limite

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{x_0}} \frac{E(\underline{x})}{||\underline{x} - \underline{x_0}||}$$

(ovvero $E = o(\| \cdot \|)$)

A. CALCOLO DIFFERENZIALE PER CAMPI SCALARI

A1. Derivata Direzionale

Derivata Direzionale

Definizione di derivata direzionale per campi scalari. Interpretazione geometrica. Esempi di derivate direzionali.

0. Voci correlate

- Campo Scalare e Insieme di Livello
- Norma Euclidea in RN
- Derivata e derivabilità

1. Definizione di Derivata Direzionale

#Definizione

Definizione (derivata direzionale di una funzione in un punto lungo un versore).

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ con A aperto. Sia $\underline{x_0} \in A$, sia $\underline{v} \in \mathbb{R}^N$ un versore (ovvero un vettore tale che la sua norma sia 1).

Allora si dice che la funzione f è *"derivabile in $\underline{x_0}$ lungo la direzione orientata $\underline{v}$"* se esiste finito il limite

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\underline{x_0} + t\underline{v}) - f(\underline{x_0})}{t}$$

Se esiste finito tale limite, il *valore limite* si dice la *"derivata direzionale di f in $\underline{x_0}$ lungo $\underline{v}$"* e la si denota come

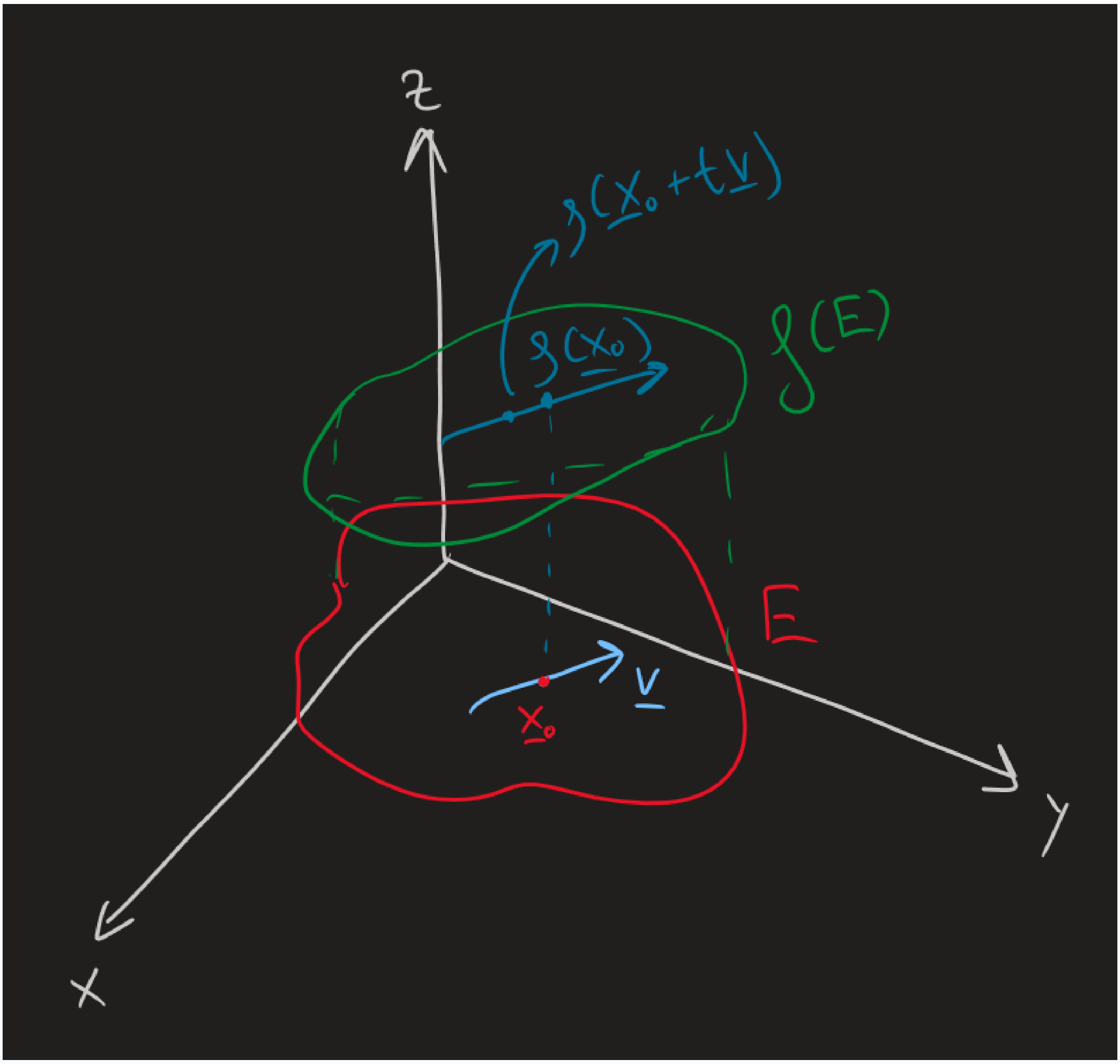
$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x_0})$$

#Osservazione

Osservazione (interpretazione geometrica).

Similmente alle *derivate per le funzioni per una variabile reale*, stiamo prendendo il *"rapporto incrementale"* di f e la stiamo dividendo per l'intervallo t che diventa piccolo a piacere, ottenendo così la *pendenza* della retta (1); in questo caso stiamo *"bloccando"* la direzione per il rapporto incrementale tende al valore $f(\underline{x_0} + t\underline{v}) \to f(\underline{x_0})$, prendendo la direzione del versore $\underline{v}$ (*figura 1.1.*).

FIGURA 2.1. (*Interpretazione geometrica della derivata direzionale*)



2. Esempi della Derivata Direzionale

#Esempio

Esempio.

Sia $f(x,y) = x + y^2$, sia $\underline{x_0} = (1,2)$ e sia

$$\underline{v} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Vogliamo calcolare la derivata direzionale

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x_0})$$

i. Per calcolare questa derivata, bisogna valutare il valore $\underline{x_0} + t\underline{v}$, al variare di $t \in \mathbb{R}$.

$$\underline{x}_0 + t\underline{v} = \left(1 + t\frac{\sqrt{2}}{2}, 2 + t\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

ii. Adesso valutiamo il rapporto incrementale

$$\begin{aligned}
&\lim_{t \to 0} \frac{f(\underline{x}_0 + t\underline{v}) - f(\underline{x}_0)}{t} \\
= &\lim_{t \to 0} \frac{1 + t\frac{\sqrt{2}}{2} + 4 + 2(2)t\frac{\sqrt{2}}{2} + t^2\frac{2}{4} - 1 - 4}{t} \\
= &\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{4}{t} + 2\sqrt{2} + \frac{1}{2}t - \frac{1}{t} - \frac{4}{t} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\sqrt{2}
\end{aligned}$$

allora ho la risposta

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x}_0) = \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\sqrt{2}$$

A2. Derivata Parziale

Derivata Parziale

Definizione di derivata parziale per un campo scalare.

---

0. Voci correlate

- Derivata Direzionale
- Campo Scalare e Insieme di Livello

1. Definizione di Derivata Parziale

#Definizione

Definizione (derivata parziale per un campo scalare).

Sia $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ un *campo scalare*. Sia $\mathcal{E}$ *base canonica* per il dominio $\mathbb{R}^N$. Denominiamo ogni elemento della base canonica come

$$\mathcal{E} = \{\underline{e}_1 \ldots, \underline{e}_N\} = \{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_N\}$$

Allora, prendendo un qualsiasi $\underline{v}_i$, si pone la *derivata parziale* come la *derivata direzionale* (qualora esista)

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}_i}(\underline{x}_0) := \lim_{t \to 0} \frac{f(x_{0;1}, \ldots, x_{0;i-1}, x_{0;i} + t, x_{0;i+1}, \ldots, x_{0;N}) - f(\underline{x}_0)}{t}$$
$$\iff \lim_{x_i \to x_{0;i}} \frac{f(x_{0;1}, \ldots, x_{0;i-1}, x_i, x_{0;i+1}, \ldots, x_{0;N}) - f(\underline{x}_0)}{x_i - x_{0;i}}$$

La denotiamo come

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}_0) = f_{x_i}(\underline{x}_0)$$

#Osservazione

Osservazione (interpretazione pratica).

Per una *comodità pratica*, possiamo vedere la *derivata parziale* come una *derivata in una variabile reale*, trattando x_i come la *sola variabile* e il resto come delle *costanti*. Applichiamo quest'osservazione con i seguenti esempi.

2. Esempi

#Esempio

Esempio (derivata parziale di campo scalare bidimensionale).

Sia $f(x, y)$ definita come $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 3x_1x_2 + 4x_2^5$.
Vogliamo calcolare la *derivata parziale* di f rispetto a x_1; scriviamo quindi

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = 2x_1 + 3x_2$$

#Esempio

Esempio (derivata parziale di un campo scalare tridimensionale).

Sia $f(x, y, z)$ definita come $f(x, y, z) = x^2 + xz + zy + z^5$. Allora abbiamo

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + z$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = y$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = x + y + 5z^4$$

Notare che

$$\frac{\partial f}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0 \neq 1 = \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

A3. Differenziale di Campi Scalari

Differenziale di Campi Scalari

Definizione di differenziabilità per funzioni in più variabili. Definizione di differenziale. Caso $N = 1$. Proprietà del differenziale di una funzione.

---

0. Voci correlate

- Formula di Taylor
- Definizione di Continuità di Funzione in più variabili
- Derivata Direzionale
- Topologia in RN

1. Definizione di Differenziabilità di una Funzione

#Definizione

Definizione (funzione differenziabile in un punto).

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$, con A aperto (1) e $\underline{x_0} \in A$.
Si dice che f è *"differenziabile in $\underline{x_0} \in A$"* se esiste un'*operatore lineare* L_{x_0} del tipo

$$L_{x_0}; \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$$

tale che valga

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} \frac{f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0) - L_{x_0}(\underline{x} - \underline{x}_0)}{\|\underline{x} - \underline{x}_0\|} = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0) + L_{x_0}(\underline{x} - \underline{x}_0) + o(\|\underline{x} - \underline{x}_0\|)$$

(*ovvero se il resto è un o-piccolo della norma* $\|\underline{x} - \underline{x}_0\|$)

Se la funzione f è *differenziabile*, l'operatore L_{x_0} si dice *"differenziale di f in $\underline{x}_0$"* e la si indica come

$$L_{x_0} = \mathrm{d}f_{x_0}$$

2. Esempi di differenziali

#Osservazione

Osservazione (caso $N = 1$).

In $\mathbb{R}$ ho il *differenziale* $\mathrm{d}f_{x_0} = f'(x_0)$. Infatti, prendendo la *formula di Taylor* per f col resto in forma di *Peano*, ho

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R(x)$$

dove $R = o(x - x_0)$ (quindi il resto è un *o-piccolo*, come voluto dalla definizione).

Allora ho $\mathrm{d}f_{x_0}$ come una funzione definita come

$$\mathrm{d}f_{x_0}(x) = f'(x_0)(x)$$

(*sempre ammessa se esista* $f'(x_0)$*!*)

3. Proprietà del differenziale

#Teorema

Teorema (proprietà del differenziale).

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$, con A aperto e $\underline{x}_0 \in A$. Allora valgono le seguenti.

i. Se f è *differenziabile* in $\underline{x}_0$, allora f è *continua* in $\underline{x}_0$; ovvero vale il limite

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0)$$

ii. Se f è *differenziabile* in $\underline{x}_0$, allora vale la seguente relazione tra il suo *differenziale* e la sua *derivata direzionale*;

$$\forall \underline{v} \in \mathbb{R}^N, \boxed{\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x_0}) = \mathrm{d}f_{x_0}(\underline{v})}$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 3 (proprietà del differenziale)

i. Osserviamo preliminarmente che il differenziale ha il seguente limite:

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{x_0}} \mathrm{d}f_{x_0}(\underline{x} - \underline{x_0}) = 0$$

Infatti, per il *teorema di Riesz* (Teorema 3 (di Riesz finito dimensionale)), e per la *disuguaglianza di Cauchy-Schwarz* (Teorema 3 (disuguaglianza di Cauchy-Schwarz)) ho

$$\mathrm{d}f_{x_0}(\underline{x} - \underline{x_0}) = \langle \underline{a}, \underline{x} - \underline{x_0} \rangle \leq \|\underline{a}\| \cdot \|\underline{x} - \underline{x_0}\|$$

dove $\underline{a}$ è un *vettore fisso* (di conseguenza la sua *norma* è un *valore fisso*) e la norma di $\underline{x} - \underline{x_0}$ tende a 0, per $\underline{x} \to \underline{x_0}$.

Adesso basta prendere l'ipotesi iniziale, per cui f si può esprimere come

$$f(\underline{x}) = f(\underline{x_0}) + \mathrm{d}f_{x_0}(\underline{x} - \underline{x_0}) + o(\|\underline{x} - \underline{x_0}\|)$$

da cui consegue il limite

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{x_0}} f(\underline{x}) = \lim_{\underline{x} \to \underline{x_0}} f(\underline{x_0}) + \underbrace{\mathrm{d}f_{x_0}(\underline{x} - \underline{x_0})}_{\to 0} + \underbrace{o(\|\underline{x} - \underline{x_0}\|)}_{\to 0} = f(\underline{x_0})$$

che è la tesi.

ii. Sia $t \geq 0$. Notiamo che per la differenziabilità di f abbiamo

$$f(\underline{x_0} + t\underline{v}) = f(\underline{x_0}) + \mathrm{d}f_{x_0}(t\underline{v}) + o(\|t\underline{v}\|) = \ldots + o(|t|)$$

Allora, prendendo il suo rapporto incrementale ho

$$\begin{aligned}
\lim_{t \to 0} \frac{f(\underline{x_0} + t\underline{v}) - f(\underline{x_0})}{t} &= \lim_{t \to 0} \frac{\mathrm{d}f_{x_0}(t\underline{v}) + o(|t|)}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{t \cdot \mathrm{d}f_{x_0}(\underline{v}) + o(|t|)}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} \mathrm{d}f_{x_0}(\underline{v}) + \frac{o(|t|)}{t} \\
&= \mathrm{d}f_{x_0}(\underline{v})
\end{aligned}$$

che è la tesi. ■

#Osservazione

> Osservazione (possiamo usare il teorema di Riesz).

Notiamo che se chiamo il differenziale $L = df_{\underline{x_0}}$ allora posso usare il *teorema di rappresentazione di Riesz* (1). Infatti se definisco un vettore $\mathbb{A} = (a_1, \ldots, a_N) \in \mathbb{R}^N$, allora posso dire che questa *rappresenta* il differenziale L. Allora, scegliendo un qualsiasi vettore v ho

$$\langle \mathbb{A}, v \rangle = a_1 v_1 + \ldots + a_N v_N = L(\underline{v})$$

Adesso, usando la proprietà *ii.* (2) del differenziale ho l'uguaglianza importante

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}} = L(\underline{v})$$

ovvero il *"differenziale di f applicato su $\underline{v}$ è la derivata direzionale lungo $\underline{v}$"*.

A4. Gradiente

Gradiente di Campi Scalari

Gradiente per campi scalari: corollario preliminare, definizione di gradiente. Osservazioni sul gradiente: formula del gradiente, formula di Taylor al primo ordine, l'equazione del piano tangente. Proprietà del gradiente.

---

0. Voci correlate

- Differenziale di Campi Scalari
- Formula di Taylor
- Norma Euclidea in RN

1. Corollario Preliminare

Giustificazione. Prima di definire il *gradiente per una funzione*, enunciamo il seguente teorema per assicurarci che la definizione a venire sarà *ben posta*.

#Corollario

Corollario (l'esistenza delle derivate parziali per funzioni differenziabili).

Sia $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ un *campo scalare*.
Se f è *differenziabile* in un vettore $\underline{x_0}$ allora esistono le tutte le *derivate parziali*, che godono della seguente uguaglianza.

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{e_i}} = \frac{\partial f}{\partial x_i} = L(\underline{e_i}) = e_i$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Corollario 1 (l'esistenza delle derivate parziali per funzioni differenziabili)
Basta vedere l'osservazione sulle proprietà del differenziale dei campi scalari, usando il teorema di Riesz finito-dimensionale (Osservazione 4 (possiamo usare il teorema di Riesz)). In questo caso abbiamo

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = L(\underline{e_i}) = \langle \underline{e_i}, \mathbb{A} \rangle = 0 + \ldots + \underline{e_i}_i a_i + 0 + \ldots + 0 = e_i$$

Che è la tesi. ■

2. Definizione di Gradiente

Adesso siamo pronti per *definire* il *gradiente* per una funzione *differenziabile*.

#Definizione

Definizione (gradiente di una funzione differenziabile).

Sia f un *campo scalare* in $\mathbb{R}^N$ differenziabile nel punto $\underline{x_0}$. Si dice il *"gradiente"* di f nel punto $\underline{x_0}$ come il vettore definito come

$$\nabla f(\underline{x_0}) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x_0}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_N}(\underline{x_0}) \right)$$

ovvero formato dalle *derivate parziali* di f nel punto $\underline{x_0}$.

Si può dare una definizione globale della funzione estendendo a più punti del dominio.

3. Formule sul Gradiente

Osservazioni. Con tale *definizione* del gradiente, siamo in grado di dare molte osservazioni su quest'ultimo oggetto, dato che presenta delle peculiarità.

#Osservazione

Osservazione (il gradiente rappresenta il differenziale).

Come prima osservazione si vede che il *gradiente* ∇f rappresenta il *differenziale* di questa funzione, che in particolare è *uguale* alla derivata direzionale su $\underline{v}$ (1).

Ovvero, abbiamo l'uguaglianza

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x_0}) = \langle \nabla f(\underline{x_0}), \underline{v} \rangle}$$

Questa formula si dice come *"la formula del gradiente"*.

Inoltre, notiamo che se la funzione è *non-differenziabile*, allora *di solito* non vale la formula del gradiente. Per convincerci di questo vedere la seguente funzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

#Osservazione

Osservazione (formule relative al gradiente).

Per l'osservazione posta sopra abbiamo che il differenziale $L = df_{\underline{x_0}}$ gode della seguente uguaglianza:

$$L(\underline{h}) = \langle \nabla f(\underline{x_0}), \underline{h} \rangle$$

Da queste nascono le seguente formule:
i. *formula di Taylor al primo ordine*

$$\boxed{f(\underline{x}) = f(\underline{x_0}) + \langle \nabla f(\underline{x_0}), \underline{x} - \underline{x_0} \rangle + o(\|\underline{x} - \underline{x_0}\|)}$$

(ricordiamoci che la notazione *o-piccolo* vuol dire che al tendere di $\underline{x} \to \underline{x_0}$ abbiamo la norma della differenza si annulla, 1).
ii. *l'equazione del piano tangente*: Per $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, abbiamo

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

iii. *l'equazione del piano tangente*: Sia $g(x) = f(x, y_0)$ con y_0 fissato, allora

$$g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}}_{=0} \dots$$

4. Proprietà del Gradiente

Adesso vediamo alcune *proprietà* del gradiente, utili per la *massimizzazione* e *minimizzazione* in più variabili.

#Teorema

> Teorema (proprietà del gradiente).
>
> Sia f differenziabile in $\underline{x}_0$, col suo gradiente non-nullo; ovvero $\nabla f(\underline{x}_0) \neq \underline{x}_0$. Sia $\underline{v}$ un versore.
> Allora valgono le seguenti:
> i. *massima del gradiente*
>
> $$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x}_0) \text{ è massima se } \underline{v} = \frac{\nabla f(\underline{x}_0)}{\|\nabla f(\underline{x}_0)\|}$$
>
> ii. *minima del gradiente*
>
> $$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x}_0) \text{ è minima se } \underline{v} = -\frac{\nabla f(\underline{x}_0)}{\|\nabla f(\underline{x}_0)\|}$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 5 (proprietà del gradiente)
Si tratta di usare la *disuguaglianza di Cauchy-Schwarz* (Teorema 3 (disuguaglianza di Cauchy-Schwarz)), per minorare la derivata parziale e prendere gli estremi. Abbiamo dunque

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x}_0) = \langle \nabla f(\underline{x}_0), v \rangle$$
$$-\|\nabla f(\underline{x}_0)\| \leq -\|\nabla f(\underline{x}_0)\| \cdot \|\underline{v}\| \leq \langle \nabla f(\underline{x}_0), v \rangle \leq \|\nabla f(\underline{x}_0)\| \cdot \|\underline{v}\| \leq \|\nabla f(\underline{x}_0)\|$$

Prendendo $\underline{v} = \frac{\nabla f(\underline{x}_0)}{\|\nabla f(\underline{x}_0)\|}$ ottengo l'uguaglianza

$$\nabla f(\underline{x}_0)\| \cdot \|\underline{v}\| = \|\nabla f(\underline{x}_0)\|$$

che prova la tesi. ■

A5. Teorema del Differenziale Totale

Teorema del Differenziale Totale

Teorema del differenziale totale: enunciato e idea della dimostrazione. Osservazione: abbiamo solo condizioni sufficienti (osservazione preliminare per definire le funzioni di classi C).

---

0. Voci correlate

- Definizione di Continuità di Funzione in più variabili
- Differenziale di Campi Scalari

1. Teorema del Differenziale Totale

Scopo. Col seguente teorema vogliamo dare delle *condizioni sufficienti* per la *differenziabilità* di una funzione in più variabili (in particolare *campi scalari*).

#Teorema

> Teorema (del differenziale totale).
>
> Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$, con A aperto.
> Se f ha le *derivate parziali* in A *continue* in un punto $\underline{x_0} \in A$, allora f è *differenziabile* in $\underline{x_0}$.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 1 (del differenziale totale)
Nota: questa è solo un'idea della dimostrazione
Dimostriamo il teorema per $N = 2$. Ho quindi una funzione del tipo $f(x, y)$.
Allora considero lo scarto $f(x, y) - f(x_0, y_0)$ che diventa $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$ considerando delle ampiezze h, k opportune. Adesso aggiungo e sottraggo per $f(x_0, y_0 + k)$ facendo diventare l'espressione in

$$\underbrace{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k)}_{A} + \underbrace{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}_{B}$$

Nel blocchi A, B ho *l'incremento in una singola variabile*. Allora posso usare il *teorema di Lagrange* (Teorema 1 (di Lagrange)) per dire che esistono $\pi, \tau \in (0, 1)$ tali che otteniamo l'espressione

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \pi h, y_0 + k)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0 + \tau k)k$$

che prova la tesi, dato che abbiamo fatto comparire delle derivate parziali e abbiamo il limite del differenziale che tende al zero. ■

2. Osservazione

#Osservazione

> Osservazione (il teorema del differenziale totale ci dà solo una condizione sufficiente).
>
> Notiamo che questo teorema ci fornisce *solamente* una condizione sufficiente. Infatti esistono delle *funzioni* che sono *differenziabili* in un certo punto, ma le sue *derivate parziali* non sono continue.
>
> Per convincerci di questo prendiamo la seguente funzione in una variabile:
>
> $$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right), x\neq 0 \\ 0, x=0 \end{cases}$$
>
> Trovo che esiste $f'(0)$ ma non è continua.

A6. Regole di Differenziazione

Regole di Differenziazione per Campi Scalari

Regole di differenziazione (relative al gradiente) per campi scalari. Teorema di Schwarz.

---

0. Voci correlate

- Gradiente di Campi Scalari
- Proprietà delle derivate

1. Regole di Differenziazione

Motivazione. Vogliamo rendere il gradiente ∇f (1) una specie di *"sostituto"* della *derivata* per funzione di una variabile reale: infatti, entrambe rappresentano delle *differenziali* per funzioni, per la formula del gradiente (2). Introduciamo dunque delle *regole* per calcolare i *gradienti* in una maniera più sistematica e meccanica, che sono simili alle *regole per derivazione in una variabile* (3).

#Teorema

> Teorema (regole di differenziazione per campi scalari).

Siano $f, g : A \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ differenziabili su A. Allora valgono le seguenti regole.
i. La somma puntuale $f + g$ è differenziabile in A con

$$\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$$

ii. Il prodotto puntuale $f \cdot g$ è differenziabile in A con

$$\nabla(f \cdot g) = f \cdot \nabla g + g \cdot \nabla f$$

iii. Se g non si annulla in nessun punto del dominio, allora la divisione puntuale f/g è differenziabile con

$$\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$$

DIMOSTRAZIONE del Teorema 1 (regole di differenziazione per campi scalari)
Omessa: sono conti noiosi e non ci interessano. ■

A7. Teorema di Lagrange generalizzato

Teorema del Valor Medio Generalizzato

Teorema del valor medio (o di Lagrange) generalizzato su campi scalari in $\mathbb{R}^N$: enunciato, dimostrazione (idea). Corollario: le funzioni differenziabili sono lipschitziane.

---

0. Voci correlate

- Teorema di Lagrange
- Gradiente di Campi Scalari

1. Teorema di Lagrange Generalizzato

Generalizzazione. Adesso, vogliamo generalizzare alcuni risultati del *calcolo differenziale su una variabile*. In questo caso vogliamo estendere il *teorema di Lagrange* (1) su campi scalari $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$.

#Teorema

Teorema (di Lagrange o del valor medio, generalizzato).

> Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ con A aperto e f differenziabile su A.
> Allora per ogni punto $\underline{x}, \underline{y} \in A$ tali che il *segmento* g soddisfa
>
> $$g(t) = \underline{x} + t(\underline{y} - \underline{x}) \in A, \forall t \in [0, 1]$$
>
> (in parole vogliamo che questo segmento rettilineo che parte da $\underline{x}$ e finisce in $\underline{y}$ faccia *sempre* parte dell'aperto A)
> Allora esiste un numero $\sigma \in (0, 1)$ tale che
>
> $$f(\underline{y}) - f(\underline{x}) = \langle \nabla f(\underline{x} + \sigma(\underline{y} - \underline{x})), \underline{y} - \underline{x} \rangle$$

#Dimostrazione
DIMOSTRAZIONE del Teorema 1 (di Lagrange o del valor medio, generalizzato)
Nota: questa è un'idea della dimostrazione.
L'idea è quella di prendere il percorso g e applicarci il teorema del Lagrange su una dimensione (1). Per fare ciò dobbiamo *"preparare"* questa funzione per soddisfare i criteri del teorema e rendere comodo i calcoli.
Definiamo innanzitutto $h(t) = f(g(t))$, ovvero $h : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^N$. Abbiamo una situazione del tipo $h : [0, 1] \subset \mathbb{R} \to A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$.
Chiaramente si vede che h è una funzione *derivabile*, essendo f, g derivabili (2). Inoltre, sappiamo che vale

$$h'(t) = \langle \nabla f(g(t)), g'(t) \rangle$$

Infatti abbiamo $\nabla f(g(t)) = df(\underline{x_0})$ e $dg_t = g'(t)$.
Poi, trattando i vettori come delle costanti calcoliamo la derivata di g in t come

$$g'(t) = (y_1 - x_1, \ldots, y_N - x_N) = \underline{y} - \underline{x}$$

Adesso possiamo finalmente applicare il teorema di Lagrange su h e abbiamo

$$\exists \xi \in (0, 1) : \frac{h(1) - h(0)}{1 - 0} = h'(\xi)$$

Che diventa

$$h(1) = f(g(1)) = f(\underline{y}); h(0) = f(\underline{x})$$

e anche

$$h'(\xi) = \langle \nabla f(g(\xi)), \underline{y} - \underline{x} \rangle = \langle \nabla f(\underline{x} + \xi(\underline{y} - \underline{x})), \underline{y} - \underline{x} \rangle$$

che è la tesi. ■

2. Conseguenza del Teorema di Lagrange

#Osservazione

Osservazione (le funzioni differenziabili sono localmente lipschitziane).

Notiamo che con questo teorema possiamo provare che le funzioni differenziabili sono *localmente lipschitziane*, ovvero prendendo due punti $\underline{x}, \underline{y}$ abbiamo che il loro scarto è limitato per un valore limite L moltiplicato per la differenza della loro norma.

Abbiamo infatti, per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz (1),

$$\begin{gathered}\left|f(\underline{x})-f(\underline{y})\right|=\left|\langle\nabla f(\underline{x}+\xi(\underline{y}-\underline{x})), \underline{y}-\underline{x}\rangle\right| \\ \text{C.S.} \implies {''} \leq \|\nabla f(\underline{x}+\xi(\underline{y}-\underline{x}))\|-\|\underline{x}-\underline{y}\|\end{gathered}$$

allora possiamo prendere

$$L=\sup_{\xi \in[0,1]} \nabla f(\underline{x}+\xi(\underline{y}-\underline{x}))$$

come il valore-limite.

#Corollario

Corollario (formalizzazione dell'osservazione precedente).

Sia f una funzione differenziabile su A aperto. Allora è localmente lipschitizana sul dominio.

#Corollario

Corollario (condizioni necessarie per funzioni costanti).

Se $f: A \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ con A aperto e connesso, f differenziabile su A e tale che valga

$$\nabla f(\underline{x})=\underline{0}, \forall \underline{x} \in A$$

allora la funzione f è *costante in* A.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Corollario 4 (condizioni necessarie per funzioni costanti)
Si tratta di usare il *teorema del valor medio* (1), per cui si ha $f(\underline{x})=f(\underline{y})$. Infatti, il prodotto scalare di un vettore nullo per un qualsiasi altro vettore è sempre nullo. Allora

$$f(\underline{x}) - f(\underline{y}) = 0 \implies f(\underline{x}) = f(\underline{y})$$

che è la tesi. ■

B. CALCOLO DIFFERENZIALE IN PIU' DIMENSIONI

B1. Differenziale di Funzioni in più variabili

Differenziale di Funzioni in più Variabili

Generalizzazione delle nozioni di differenziabilità e differenziale di campi scalari a funzioni in più variabili. Definizione di derivata di Frèchet. Osservazione: non abbiamo singole equazioni, ma sistemi. Teorema: equazione equivalente per la differenziabilità di funzioni in più variabili.

---

0. Voci correlate

- Differenziale di Campi Scalari
- Sistemi Lineari
- Teorema di Riesz

1. Generalizzazione di Differenziabilità

Generalizzazione. Fino ad ora abbiamo definito le nozioni di *differenziabilità* e *differenziali* per *campi scalari* (1), ovvero funzioni del tipo $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$. Adesso vogliamo generalizzare queste stesse nozioni a *funzioni in più variabili* (2), ovvero funzioni del tipo $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M$. Per fare ciò useremo in particolare le nostre conoscenze sui *sistemi lineari* (3).

#Definizione

> Definizione (differenziabilità di funzioni in più variabili e derivata di Frèchet).
>
> Si dice che una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M$ è *differenziabile nel punto* $\underline{x_0} \in A$, con A *aperto*, se esiste un'operatore lineare $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$ tale che vale
>
> $$f(\underline{x}) = f(\underline{x_0}) + L(\underline{x} - \underline{x_0}) + o(\|\underline{x} - \underline{x_0}\|)$$
>
> L'operatore L si dice *"differenziale"*, oppure *"derivata di Frèchet"* di f in $\underline{x_0}$.

2. Osservazione con i sistemi lineari

#Osservazione

Osservazione (ho sistemi lineari).

Osserviamo che con l'equazione

$$f(\underline{x}) = f(\underline{x_0}) + L(\underline{x} - \underline{x_0}) + o(\|\underline{x} - \underline{x_0}\|)$$

Ho precisamente dei *sistemi lineari*, dal momento la funzione f si divide nelle sue singole componenti $f_1, \ldots, f_M$. Di conseguenza, per usare il *teorema di Riesz* (1) per trovare un rappresentante di L, devo usare una matrice.

Infatti, fissata una base $\mathcal{B}$ su $\mathbb{R}^N$ e un'altra base $\mathcal{C}$ su $\mathbb{R}^M$, ho il seguente:

$$\forall L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M), \exists! A \in M_{m,n}(\mathbb{R}) : L(\underline{h}) = A \cdot \underline{h}$$

Ovvero l'operatore è rappresentato dalla moltiplicazione riga per colonna di $A \cdot \underline{h}$.

3. Condizione Equivalente

Giustificazione. Vogliamo trovare delle *condizioni equivalenti* per la differenziabilità di funzioni in più variabili; in particolare delle condizioni che *leghino* le nozioni appena apprese sulla *differenziabilità di funzioni in più variabili* con le sue *singole componenti*, che sono dei *campi scalari*. Enunciamo il seguente teorema.

#Teorema

Teorema (condizione equivalente per la differenziabilità di funzioni in più variabili).

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M$. Sono equivalenti:
i. f è *differenziabile* in $\underline{x_0}$
se e solo se
ii. Ogni componente $f_i : A' \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ è *differenziabile* in $\underline{x_0}$, per $\forall i \in \{1, \ldots, M\}$.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 3 (condizione equivalente per la differenziabilità di funzioni in più variabili).
Questo teorema si basa sul fatto che la funzione f stessa è *definibile* mediante le sue singole componenti $f_1, \ldots, f_M$, quindi omessa. ■

Matrice Jacobiana di Funzioni in più Variabili

La matrice Jacobiana: generalizzazione del gradiente dei campi scalari su funzioni in più variabili. Corollario preliminare: rappresentazione delle differenziali con matrice Jacobiana con basi standard.

---

0. Voci correlate

- Gradiente di Campi Scalari
- Matrice
- Differenziale di Funzioni in più Variabili

1. Corollario Preliminare

#Corollario

Corollario (corollario preliminare per la matrice Jacobiana).

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M$. Se f è *differenziale* in $\underline{x_0}$, allora esistono le derivate parziali

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\underline{x_0}), \forall i, j \in \{\{1, \dots, M\} \times \{1, \dots, N\}\}$$

2. Definizione di Matrice Jacobiana

Generalizzazione. Come fatto prima, vogliamo generalizzare la nozione di *gradiente* (1) su *funzioni in più variabili*, usando in particolare le *matrici* (2).

#Definizione

Definizione (matrice Jacobiana di una funzione).

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M$ differenziabile su $\underline{x_0} \in A$. Allora si definisce la sua *matrice Jacobiana* come la matrice formata dalle *derivate parziali* del campo scalare f_i sul versore x_j. In particolare, definiamo le entrate individuali come

$$(Jf(\underline{x_0}))_{ij} := \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\underline{x_0})$$

In forma estesa, la matrice Jacobiana è definita come

$$Jf(\underline{x_0}) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\underline{x_0}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N}(\underline{x_0}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_M}{\partial x_1}(\underline{x_0}) & \dots & \frac{\partial f_M}{\partial x_N}(\underline{x_0}) \end{pmatrix} \in M_{M,N}(\mathbb{R})$$

#Proposizione

Proposizione (formula della matrice jacobiana).

Vale che $df = Jf$.

B3. Differenziale di Composte

Differenziale di Funzioni Composte in più Variabili

Generalizzazione della derivazione di funzioni composte $P \to N \to M$: differenziale di funzioni composte in più variabili. Esempi: caso $M = 1$, $M = P = 1$.

---

0. Voci correlate

- Proprietà delle derivate
- Matrice Jacobiana di Funzioni in più Variabili

1. Il Differenziale della Funzione Composta

Motivazione. Dato *due funzioni* che collegano *dimensioni diverse*, dandoci una situazione del tipo $P \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} M$, vogliamo trovare un modo per *collegare* il *differenziale della composta* di questa funzione con le *differenziali* delle *funzioni individuali*.

#Proposizione

Proposizione (differenziale della funzione composta di funzioni in più variabili).

Siano $g : B \subseteq \mathbb{R}^P \longrightarrow \mathbb{R}^N$ con B aperto e differenziabile in $\underline{u_0}$ e $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M$ con A aperto e differenziabile in $\underline{x_0}$ (per capire con cosa stiamo avendo a che fare vedere la *figura 1.1.*), allora definendo $h = f \circ g$ vale che h è *differenziabile* in $\underline{u_0}$ e vale l'uguaglianza

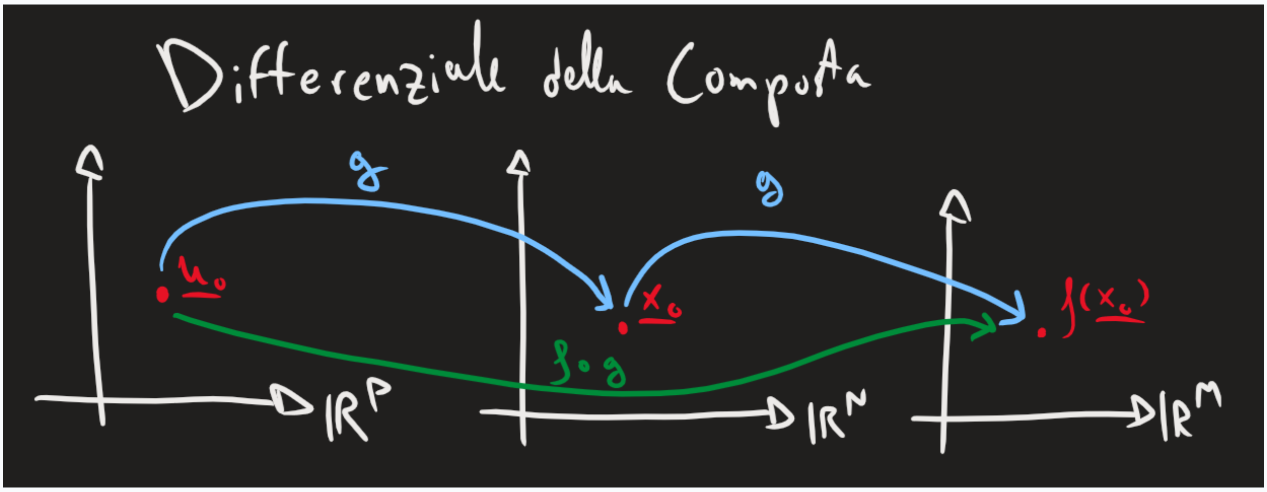
$$dh_{\underline{u_0}} = df_{\underline{x_0}} \circ dg_{\underline{u_0}}$$

ovvero

$$\underbrace{Jh_{u_0}}_{m\times p} = \underbrace{Jf_{x_0}}_{m\times n} \cdot \underbrace{Jg_{u_0}}_{n\times p}$$

Per esercizio scrivere la forma estesa (non ho voglia di farlo).

FIGURA 1.1. (*La situazione iniziale*)



2. Esempi del Differenziale della Composta

#Esempio

Esempio (caso $M = 1$).

Siano $g : \mathbb{R}^P \longrightarrow \mathbb{R}^N$ e $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$, entrambi differenziabili. Allora abbiamo $h := f \circ g : \mathbb{R}^P \longrightarrow \mathbb{R}$. Allora la Jacobiana Jh è una matrice del tipo $M_{1,P}(\mathbb{R})$, ovvero un *vettore* di dimensione P. Abbiamo infatti

$$Jh = \left(\frac{\partial h}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial h}{\partial u_P}\right) = \nabla f \cdot Jg$$

#Esempio

Esempio (caso scalare).

Sia $M = P = 1$, ovvero abbiamo una situazione del tipo $1 \to N \to 1$. Allora qui semplicemente abbiamo

$$Jh = \frac{d}{dt} h$$

che è uno *scalare*.

C. CALCOLO DIFFERENZIALE IN PIU' ORDINI

C1. Derivate di Ordine Superiore

Differenziabilità di Ordine Superiore su Campi Scalari

Estensione di concetto di derivata su campi scalari di ordine superiore: definizione di derivata seconda di una funzione in un punto nelle direzioni orientate. Definizione di derivata parziale secondo (o n-esimo) di una funzione rispetto a x_i, x_j. Modello di derivata parziale di secondo ordine.

---

0. Voci correlate

- Derivata Direzionale
- Derivata Parziale

1. Derivata Direzionale e Derivata Parziale Seconda

Preambolo. Vogliamo espandere le nozioni di *derivata direzionale* e *derivata parziale* di campi scalari f su più ordini; a parole, vogliamo essere in grado di definire la *"derivata seconda, terza, quarta, eccetera..."*.

#Definizione

Definizione (derivata seconda di una funzione in un punto lungo le due direzioni).

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$, con A aperto.
Sia $\underline{u} \in \mathbb{R}^N$ un versore (ovvero che abbia modulo 1) tale che esista la derivata direzionale $\frac{\partial f}{\partial \underline{u}}(\underline{x})$, per ogni punto di A: resta quindi definita la funzione $g = \frac{\partial f}{\partial \underline{u}}$ in A.
Sia $\underline{x_0} \in A$, sia $\underline{v} \in \mathbb{R}^N$ un altro versore.

Se esiste la derivata direzionale

$$\frac{\partial g}{\partial \underline{v}} = \frac{\partial}{\partial \underline{v}}\left(\frac{\partial f}{\partial \underline{u}}\right)(\underline{x_0})$$

allora quest'ultima si dice *"derivata seconda di f in $\underline{x_0}$ nelle direzioni orientate $\underline{v}, \underline{u}$"* e lo si indica con

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial \underline{v} \partial \underline{u}}(\underline{x_0})}$$

#Definizione

Definizione (derivata parziale seconda di una funzione in un punto rispetto a due variabili).

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ con A aperto e tale che esista la derivata parziale $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ per un qualsiasi punto in A. Sia $\underline{x_0} \in A$ fissato.

Se esiste la derivata parziale

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(\underline{x_0})$$

allora quest'ultima si dice *"derivata parziale seconda di f in $\underline{x_0}$ rispetto a x_i, x_j"* e lo si indica con

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\underline{x_0}) \iff f_{x_i x_j}(\underline{x_0})}$$

2. Estensione generalizzata

#Osservazione

Osservazione (estensione generalizzata dei concetti).

Analogamente (per induzione se vogliamo essere eleganti) possiamo estendere queste definizioni su $n \in \mathbb{N}$ per definire

$$\frac{\partial^n f}{\partial \underline{v_n} \partial \underline{v_{n-1}} \ldots \partial \underline{v_1}}, \frac{\partial^n f}{\partial x_n \ldots \partial x_1} \iff f_{x_1 \ldots x_n}$$

3. Esempio di Modello con Derivate Parziali

Esempio pratico. Adesso presentiamo un *esempio pratico* che presentano delle *derivate parziali di secondo ordine*.

#Esempio

Esempio (l'equazione della corda elastica oscillante).

Prendiamo una corda elastica, che oscilla. Prima di tutto notiamo che all'istante $t=0$ ho la configurazione $y=f(x)$. Dopodiché, ho che negli successivi istanti la configurazione è descritta dal sistema $\mathcal{E}_0$, che è la seguente:

$$(\mathcal{E}_0) : \begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = 0 \\ u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = 0 \end{cases}$$

Dove $y = u(x,t)$ è lo *spostamento del punto di ascissa x al tempo* t. Se $f \in \mathcal{C}^2$ allora una soluzione per $(\mathcal{E}_0)$ può essere

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(f(x+ct) + f(x-ct))$$

B2. Classe C

Campi Scalari di Classe C

Definizione di funzioni classi C in più variabili (campi scalari). Corollario: i campi scalari sono differenziabili.

---

0. Voci correlate

- Teorema del Differenziale Totale
- Derivata Successiva e Classe C

1. Definizione di Classe C1 per Campi Scalari

Motivazione. Vogliamo introdurre una *classe di funzioni* che sia un'estensione delle *funzioni classi C in una variabile* (1). Dato che conosciamo il *teorema del differenziale totale* (2), possiamo dare una *definizione ben posta* di classe C di campi scalari.

#Definizione

Definizione (campi scalari classe $\mathcal{C}^1$).

Si dice che una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ è *"di classe $\mathcal{C}^1$ in A"* se f ammette le *derivate parziali continue* in A. In tal caso si scrive

$$f \in \mathcal{C}^1(A)$$

2. Proprietà Fondamentale di Classe C1

#Corollario

Corollario (proprietà delle funzioni di classe C).

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$. Allora vale la seguente implicazione

$$f \in \mathcal{C}^1(A) \implies f \text{ differenziabile su } A$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE. (Corollario 2 (proprietà delle funzioni di classe C))
Diretta conseguenza del teorema del differenziale totale (Teorema 1 (del differenziale totale)). ■

3. Definizione Generalizzata di Classe Ck

Motivazione. Adesso vogliamo generalizzare tale nozione di *"classe C1"* su *"classi CK"* con $\mathbb{N} \ni K > 1$.

#Definizione

Definizione (campi scalari di classe $\mathcal{C}^{K \in \mathbb{N} \geq 1}$).

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$, con A aperto. Sia $K \in \mathbb{N}, K \geq 1$.
Si dice che *"f è di classe $\mathcal{C}^K$"* se f è *dotata di tutte le derivate parziali* fino all'*ordine* K e sono *continue in* A.

In tal caso si scrive

$$f \in \mathcal{C}^K(A)$$

#Esempio

Esempio (classe C2 di una funzione in tre variabili).

Scrivere $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^2$ vuol dire

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \ldots, \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \text{ continue su } A$$

B3. Teorema di Schwarz

Teorema di Schwarz

Teorema di Schwarz: osservazione preliminare, enunciato e controesempio per i casi in cui non vale il teorema di Schwarz.

---

0. Voci correlate

- Campi Scalari di Classe C
- Differenziabilità di Ordine Superiore su Campi Scalari

1. Osservazione preliminare

#Osservazione

> Osservazione.
>
> Se avete svolto *l'esercizio sulla derivazione di funzioni di ordine* 2 (rif.), avrete notato che $f_{xy} = f_{yx}$. Questo non è un caso, infatti vedremo che è una condizione necessaria.

2. Teorema di Schwarz

#Teorema

> Teorema (di Schwarz).
>
> Se $f \in \mathcal{C}^2(A)$ (1), allora le derivata h-esime con $2 \leq h \leq k$ *non* dipendono dall'ordine seguito nell'eseguire la derivazione.

#Esempio

> Esempio (caso $K = N = 2$).
>
> Sia $K = N = 2$. Allora in questo caso ho
>
> $$f \in \mathcal{C}^2(A) \implies \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\underline{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\underline{x}), \forall \underline{x} \in A$$

3. Controesempio

#Osservazione

> Osservazione (ci sono dei casi in cui non vale Schwarz).
>
> Esistono delle funzioni che non soddisfano le *ipotesi* del teorema di Schwarz. Infatti prendiamo la funzione di Peano definita come
>
> $$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, (x,y)\neq(0,0) \\ 0, (x,y)=(0,0) \end{cases}$$
>
> Si dimostra che questa funzione *non* appartiene a classe $\mathcal{C}^2$; infatti ho
>
> $$f_{xy}(0,0)=-1\neq f_{yx}(0,0)=1$$
>
> Lo svolgimento dei calcoli è stato lasciato per esercizio.

B4. Forme Lineari e Quadratiche

Forme Lineari e Quadratiche

Nomenclatura necessaria per la formula di Taylor del secondo ordine: forme lineari e forme quadratiche. Esempi, proprietà e lemma.

---

0. Voci correlate

- Definizione di Applicazione Lineare
- Prodotto Scalare in RN

1. Definizione di Forma Quadratica e Lineare

#Definizione

> Definizione (forma lineare).
>
> Sia $\underline{h}$ un vettore fissato. Un'applicazione lineare $L\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$ con

$$L(\underline{h}) = \sum_{i=1}^{N} a_i h_i = \langle \underline{a}, \underline{h} \rangle$$

è detta *"forma lineare"*.

#Definizione

Definizione (forma quadratica).

Un'applicazione $Q : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ con

$$Q(\underline{h}) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} a_{ij} h_j h_i = \langle A \cdot \underline{h}, \underline{h} \rangle$$

dove $A \in M_{N,N}(\mathbb{R})$ è una matrice con $(A)_{ij} = a_i j$ fissata, è detta *"forma quadratica"*.

#Esempio

Esempio (esempi di forme lineari e quadratiche).

Una forma lineare può essere $\underline{h} = (h_1, h_2)$ e quindi

$$L(\underline{h}) = L(h_1, h_2) = \langle (a_1, a_2), (h_1, h_2) \rangle = a_1 h_1 + a_2 h_2$$

Invece una forma quadratica è ad esempio

$$Q(h_1, h_2) = a_{11} h_1^2 + (a_{12} + a_{21}) h_2 h_1 + a_{22} h_2^2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

2. Proprietà delle Forme Quadratiche

#Proposizione

Proposizione (proprietà delle forme quadratiche).

Sia $A \in M_{N,N}(\mathbb{R})$. Si ha che, scegliendo vettori arbitrari $\underline{h}, \underline{k} \in \mathbb{R}^N$ ho le seguenti proprietà.
i. *"antisimmetria"*

$$\langle A\underline{h}, \underline{k} \rangle = \langle {}^t A\underline{k}, \underline{h} \rangle$$

ii. *"le forme quadratiche hanno sempre matrici simmetriche"*

$$Q(\underline{h}) = \left\langle \frac{1}{2}(A +^t A)\underline{k}, \underline{h} \right\rangle = \langle A_s \underline{k}, \underline{h} \rangle$$

Il secondo punto è dimostrabile con le proprietà del prodotto scalare (1).

#Lemma

Lemma (il differenziale delle forme lineari e quadratiche).

Si ha che:
i. Se ho $\underline{a} \in \mathbb{R}^N$ fissato, allora vale che

$$\forall \underline{h} \in \mathbb{R}^N, \nabla(\langle \underline{a}, \underline{h} \rangle) = \underline{a}$$

ii. Sia un $A \in M_{N,N}(\mathbb{R})$ fissato. Allora ho

$$\nabla(\langle A\underline{h}, \underline{h} \rangle) = 2A_s \underline{h},\ A_s = \frac{1}{2}(A +^t A)$$

B5. Funzioni Due-Volte Differenziabili e Differenziale Secondo

Funzione due-volte Differenziabile e Differenziale Secondo

Definizione di funzione due-volte differenziabile in un punto, definizione di matrice Hessiana di una funzione in un punto. Definizione di differenziale secondo.

---

0. Voci correlate

- Forme Lineari e Quadratiche
- Differenziale di Funzioni in più Variabili
- Differenziabilità di Ordine Superiore su Campi Scalari

1. Definizioni

#Definizione

Definizione (funzione due-volte differenziale, matrice Hessiana).

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ con A aperto e con f differenziabile su A. Sia $\underline{x_0} \in A$ un punto fissato. Pongo $g(\underline{x}) := \nabla f(\underline{x})$, ovvero $g : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$.

Se g è *differenziabile* in $\underline{x_0} \in A$, si dice che f è *"due volte differenziabile in $\underline{x_0}$"* e la matrice Jacobiana di $g = \nabla f$ si dice la *"matrice Hessiana di f in $\underline{x_0}$"* e la indichiamo con

$$Hf(\underline{x_0}) := Jg(\underline{x_0}) = J\nabla f(\underline{x_0})$$

che in forma estesa si scrive come

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(\underline{x_0}) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_N \partial x_1}(\underline{x_0}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_N}(\underline{x_0}) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_N \partial x_N}(\underline{x_0}) \end{pmatrix}$$

#Definizione

Definizione (differenziale secondo di una funzione in un punto).

Sia f una funzione *due-volte differenziabile* con $Hf(\underline{x_0})$ la sua matrice Hessiana. La *forma quadratica* (1) della matrice $Hf(\underline{x_0})$ definita come

$$Q(\underline{h}) = \langle Hf(\underline{x_0})\underline{h}, \underline{h} \rangle$$

si dice il *"differenziale secondo di f in $\underline{x_0}$"* e lo si denota come

$$(\mathrm{d}^2 f)(\underline{x_0})$$

2. Proprietà delle funzioni 2-volte differenziabili

#Teorema

Teorema (di Young).

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ con A aperto e con f 2-volte differenziabile in $\underline{x_0}$.

Allora la *matrice Hessiana* $Hf(\underline{x_0})$ è *simmetrica*, ovvero le *derivate miste* non *dipendono dall'ordine di derivazione*. Ovvero, vale che

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\underline{x_0}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\underline{x_0}), \forall i, j \in \{1, \dots, N\}^2$$

#Teorema

Teorema (condizione sufficiente per 2-volte differenziabilità).

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ con A aperto. Vale la seguente implicazione:

$$f \in \mathcal{C}^2(A) \implies f \text{ due volte differenziabile in } A$$

DIMOSTRAZIONE del Teorema 4 (condizione sufficiente per 2-volte differenziabilità)
Questa non è altro che la versione $N = 2$ del *teorema del differenziale totale* (1) sulla funzione g definita come $g := \nabla f$. ■

B6. Taylor del Secondo Ordine

Formula di Taylor del Secondo Ordine

Formula di Taylor del secondo ordine.

---

0. Voci correlate

- Formula di Taylor

1. Formula di Taylor del Secondo Ordine

#Teorema

Teorema (formula di Taylor del secondo ordine).

Se f è *due-volte differenziabile* in $\underline{x_0}$ allora vale che

$$\boxed{f(\underline{x}) = f(\underline{x_0}) + \langle \nabla f(\underline{x_0}), (\underline{x} - \underline{x_0}) \rangle + \frac{1}{2} \langle Hf_{\underline{x_0}}(\underline{x} - \underline{x_0}), \underline{x} - \underline{x_0} \rangle + o}$$

con $o = o(\|\underline{x} - \underline{x_0}\|^2)$.

D. ESERCIZI

Esercizi sul Calcolo Differenziale Multivariata

Esercizi sul calcolo differenziale in $\mathbb{R}^N$.

1. Differenziabilità e Derivate

#Esercizio

Esercizio.

Sia f un campo scalare definita come

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Dimostrare che f ammette tutte le derivate parziali nell'origine, ma non è differenziabile nell'origine.

#Esercizio

Esercizio.

Sia f un campo scalare definito come

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Dire se è differenziabile in $(0,0)$. Dire se vale la formula del gradiente, con $\underline{v} = \left(\sqrt{2}^{-1}, \sqrt{2}^{-1}\right)$.

#Esercizio

Esercizio.

Sia f un campo scalare definito come

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Provare che la funzione è differenziabile in $(0,0)$.

2. Differenziazione

#Esercizio

Esercizio.

Scrivere l'equazione del piano tangente nel punto $(1, 1)$ della funzione

$$f(x, y) = 2x^3y - y^2 + 3xy$$

#Esercizio

Esercizio (l'equazione del trasporto).

Verificare che la funzione

$$u(x, t) = f(x - ct)$$

dove f è una *funzione in una variabile*, soddisfa il sistema (detta come *"l'equazione del trasporto"*)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x, t) + c\dfrac{\partial u}{\partial x}(x, t) = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases}$$

dove la prima è la *"concentrazione di fluido"* e la seconda è la *"condizione inerziale"*.

#Esercizio

Esercizio.

Sia $f(x, y) = x^3y + \sin(3x^2y^4)$. Calcolare le tutte le derivate al secondo ordine (ovvero $f_{xx}, f_{yy}, f_{xy}, f_{yx}$). Cosa noti?

#Esercizio

Esercizio.

Sia f il campo scalare definito come

$$f(x, y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Dimostrare che $f_{xy} = -1$ e $f_{yx} = 1$.

#Esercizio

Esercizio.

Scrivere la formula di Taylor del secondo ordine per $f(x, y) = xe^y$ centrato in $\underline{x_0} = (1, 1)$.