

# Numeri Naturali - Sommario

*I numeri naturali: definizione, proprietà strutturali, definizioni delle operazioni, relazione d'ordine totale  $\geq$ , e struttura algebrica  $(\mathbb{N}, +, \cdot, \geq)$ ; gli assiomi di Peano, il principio d'induzione e i suoi usi (con vari esempi); successioni a valori in  $A$  e suoi usi.*

---

## Struttura dell'insieme dei numeri naturali

*Definizione intuitiva dell'insieme dei numeri naturali  $\mathbb{N}$ , le proprietà strutturali su di esso, definizioni delle operazioni su esso, proprietà delle operazioni. Relazione d'ordine totale  $\geq$  su  $\mathbb{N}$ , struttura algebrica  $(\mathbb{N}, +, \cdot, \geq)$ .*

---

## DEF 1. Insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$

**DEF 1.** Si definisce **l'insieme dei numeri naturali** come *l'insieme dei numeri che servono per contare*, aggiungendoci il numero 0 per motivi di comodità che si vedranno dopo. Viene denotata come

$$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots\}$$

## DEF 2. Proprietà strutturali e operazioni di $\mathbb{N}$

## DEF 2.1. Operazione di somma/addizione

**DEF 2.1.** Si definisce su  $\mathbb{N}$  l'operazione di **somma** o **addizione** come la seguente **funzione**

$$\begin{aligned} + : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (n, m) &\mapsto k := n + m \end{aligned}$$

### 2.1. Proprietà dell'operazione +

L'operazione **somma/addizione** gode delle seguenti tre proprietà.

**PROPRIETA' 2.1.1.** La proprietà **associativa** dice che

$$\forall n, m, k \in \mathbb{N}; n + (m + k) = (n + m) + k$$

**PROPRIETA' 2.1.3.** La proprietà **commutativa** dice invece che

$$\forall m, n \in \mathbb{N}; m + n = n + m$$

**PROPRIETA' 2.1.2.** Con l'operazione + esiste l'elemento neutro  $e$  (in questo caso 0), tale che

$$\exists e \in \mathbb{N} : 0 + m = m + 0 = m$$

## DEF 2.2. Operazione di prodotto/moltiplicazione

**DEF 2.2.** Si definisce su  $\mathbb{N}$  l'operazione di **prodotto** o **moltiplicazione** come la funzione

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (n, m) &\mapsto k := (n \cdot m) \end{aligned}$$

## 2.2. Proprietà dell'operazione ·

L'operazione *prodotto/moltiplicazione* gode delle seguenti tre proprietà.

**PROPRIETA' 2.1.1.** La proprietà **associativa** dice che

$$\forall n, m, k \in \mathbb{N}; n \cdot (m \cdot k) = (n \cdot m) \cdot k$$

**PROPRIETA' 2.1.3.** La proprietà **commutativa** dice invece che

$$\forall m, n \in \mathbb{N}; m \cdot n = n \cdot m$$

**PROPRIETA' 2.1.2.** Con l'operazione + esiste l'elemento neutro  $e$  (in questo caso 1), tale che

$$\exists e \in \mathbb{N} : 1 \cdot m = m \cdot 1 = m$$

## 2.3. Proprietà distributiva

**DEF 2.3.** Esiste una proprietà che lega le *operazioni* + e · tra di loro; ovvero la **proprietà distributiva**, che dice

$$\forall m, n, k \in \mathbb{N}; n \cdot (m + k) = n \cdot m + n \cdot k$$

## DEF 2.4. Relazione d'ordine totale $\geq$

**DEF 2.4.** Su  $\mathbb{N}$  è definita una *relazione d'ordine totale* (**DEF. 4.1.**) che si chiama  $\geq$ .

**OSS 2.4.1.** Essa è *compatibile* con le altre operazioni, ovvero

$$\begin{aligned} \forall n, m, k \in \mathbb{N}; n \geq m &\implies n + k \geq m + k \\ n \geq m &\implies n \cdot k \geq m \cdot k \end{aligned}$$

## DEF 3. Struttura algebrica $(\mathbb{N}, +, \cdot, \geq)$

**DEF 3.** Avendo appena visto le operazioni  $+$ ,  $\cdot$  e la relazione  $\geq$  che vengono tutte definite su  $\mathbb{N}$ , possiamo definire la seguente **struttura algebrica**:

$$(\mathbb{N}, +, \cdot, \geq)$$

Pertanto d'ora in poi diamo per scontato che quando si parla di  $\mathbb{N}$  vengono già definite le operazioni collegate ad esso.

## Assiomi di Peano, il principio di induzione

*Assiomi di G. Peano; significato nella matematica, quali sono. Il principio di induzione; le applicazioni del principio di induzione: dimostrazione per induzione e definizioni. Successioni.*

---

### 1. Riflessioni sui fondamenti dei numeri $\mathbb{N}$

**OSS 1.** Mi pongo il seguente *problema*: è possibile trovare degli *assiomi* (ovvero delle prime proprietà che non vengono dimostrate ma sapute a priori) su  $\mathbb{N}$  in modo che tutte le *proprietà* (descritte in [Struttura dell'insieme dei numeri naturali](#)) siano deducibili da questi?

Quindi sto riflettendo sui *fondamenti* della matematica, in particolare sui numeri *naturali*  $\mathbb{N}$ , poi per trovare una sistemazione particolarmente conveniente per noi.

### 2. Assiomi di Peano

Gli **assiomi di Peano** soddisfano tutte le seguenti regole enunciate:

(0.) Esiste un insieme  $\mathbb{N}$  che denomineremo come l'insieme dei *numeri naturali*

1. Esiste un elemento di questo insieme, che chiamo 0;  $0 \in \mathbb{N}$

2. Esiste una funzione **successivo**  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  che soddisfa le seguenti proprietà:
1.  $\sigma$  è iniettiva, ovvero  $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{N}; x_1 \neq x_2 \implies \sigma(x_1) \neq \sigma(x_2)$
  2.  $0 \notin \sigma(\mathbb{N})$ ; ovvero lo 0 non è successivo di nessun numero in  $\mathbb{N}$ .
3. (**principio di induzione**) Sia l'insieme  $S \subseteq \mathbb{N}$  e si suppone che:  $0 \in S$  e  $\forall n, n \in S \implies \sigma(n) \in S$ ; allora  $S = \mathbb{N}$ .

**OSS 2.1.** Dagli assiomi **2.1.** e **2.2.** appena enunciate è possibile dedurre che l'insieme  $\mathbb{N}$  dev'essere necessariamente **infinito**: se il codominio della funzione  $\mathbb{N}$  ha più elementi del dominio della funzione  $\mathbb{N}$  (visto che  $\sigma$  è iniettiva ed il numero 0 non fa parte dell'immagine), **ma** si tratta del medesimo insieme  $\mathbb{N} = A = B$ , pertanto  $\mathbb{N}$  dev'essere infinita in quanto è l'unico modo per soddisfare le condizioni dedotte.

### DEF 2.1. Il sistema di Peano

Secondo gli seguenti assiomi appena enunciat, si può definire un **sistema di Peano** come la terna  $(\mathbb{N}, 0, \sigma)$ .

**OSS 2.2.** Si nota che la scelta dell'"**elemento iniziale**" (ovvero in questo caso 0) è una scelta arbitraria che può essere cambiata; infatti si può "**spostare**" questo "**punto di partenza**" e si avrebbe comunque un **sistema di Peano** in cui valgono le stesse regole enunciate; infatti si può dimostrare che tutti i sistemi di Peano sono **isomorfi**, cioè che sono sostanzialmente lo stesso con qualche nome dei numeri alterati.

Questa osservazione diventerà molto importante per il **principio di induzione**.

**APPROFONDIMENTO. (tratto da Analisi Matematica Vol. 1, E. Giusti).** Se si vuole essere bibliograficamente accurati, allora bisognerebbe specificare che ci sono altri quattro **assiomi di Peano**, che sono piuttosto assiomi logici e abbastanza intuitivi, ovvero:

1.  $\forall a \in \mathbb{N}, a = a$ ;
2.  $\forall a, b \in \mathbb{N}, a = b \iff b = a$
3.  $\forall a, b, c \in \mathbb{N}, (a = b) \wedge (b = c) \implies a = c$
4.  $(a = b) \vee b \in \mathbb{N} \implies a \in \mathbb{N}$

## 3. Il principio di induzione

Uno degli *assiomi* più importanti appena enunciati è *l'assioma 4.*, che viene definito anche come il **principio di induzione**, che enuncia il seguente:

$$[(S \subseteq \mathbb{N}) \wedge (0 \in S) \wedge (\forall n \in \mathbb{N}, n \in S \implies (n+1) \in S)] \implies S = \mathbb{N}$$

Ora, riscrivendolo in un modo più comprensibile, questo principio enuncia che:

1. Supponendo che esista un insieme  $S \subseteq \mathbb{N}$  (verificando così la prima condizione)
2. Poi supponendo che un numero 0 appartenga a  $S$ , quindi il *"punto di partenza"*
3. E infine se è vero che se un qualsiasi elemento  $n$  appartiene a  $S$ , allora il suo successivo  $\sigma(n)$  appartiene anch'esso a  $S$ ,
4. Allora  $S = \mathbb{N}$ .

### 3.1. L'idea fondamentale

Per capire fino a fondo l'idea del *principio d'induzione* si può riflettere sulla funzione *successivo*  $\sigma$ , ovvero: cos'è?

Se  $\sigma(0) = 1$  e  $\sigma(n) = n + 1$ , allora si può pensare che a partire da 0 posso raggiungere tutti i numeri in  $\mathbb{N}$ . Ad esempio,

$$5 = \sigma(4) = \sigma(\sigma(3)) = \sigma(\sigma(\sigma(2))) = \sigma(\sigma(\sigma(\sigma(1)))) = \sigma(\sigma(\sigma(\sigma(\sigma(0)))))$$

Si può utilizzare la seguente analogia: se voglio salire di un piano, devo percorrere un numero di gradini; se posso salire sul primo gradino, che lo chiamo gradino 0, allora posso salire sul prossimo (analogia con la funzione successiva  $\sigma$ ), poi sul prossimo e sul prossimo, finché raggiungo il prossimo piano.

## 4. Applicazioni del principio di induzione

Il **principio di induzione** può essere utilizzato principalmente per due scopi: o definire *oggetti* o verificare/dimostrare delle *proprietà* (ovvero dei *predicati unari*); nel primo caso si parla di **definizione per**

**ricorrenza** e invece nel secondo di **dimostrazione per induzione**.

## 4.1. Dimostrazione per induzione

In questa pagina si parlerà principalmente di *dimostrazione per induzione*, corredato da vari esempi.

L'*idea* per la **dimostrazione per induzione** consiste nel seguente:

1. Ho una *proprietà* (ovvero un *predicato unario*)  $\mathcal{P}(n)$  e voglio dimostrare che essa è *verificata* per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ;
2. Si crea quindi *l'insieme dei numeri che verificano*  $\mathcal{P}(n)$  e la chiamiamo  $S$ .
3. Ora per dimostrare  $\mathcal{P}(n)$  basta verificare le due condizioni:
  1.  $0 \in S$ , ovvero  $\mathcal{P}(0)$  è vera;
  2.  $\forall n \in S \implies \sigma(n) \in S$ ; ovvero se  $\mathcal{P}(n)$  è vera, allora  $\mathcal{P}(n+1)$ . Da notare che si tratta **solo** di dimostrare *l'implicazione materiale*.
  3. Allora  $S = \mathbb{N}$ , ovvero tutti i valori che rendono  $\mathcal{P}(n)$  vera sono tutti i numeri in  $\mathbb{N}$ .

Si vedono alcuni esempi sulla *dimostrazione* per induzione in [Esempi di Induzione](#)

## 4.2. Definizioni per ricorrenza

### DEF. 4.2.1. Successione a valori in $A$ .

Sia  $A$  un insieme qualunque e  $f$  una funzione

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow A; n \mapsto f(n) = a_n$$

Quindi saranno determinati

$$f(0) = a_0, f(1) = a_1, \dots, f(n) = a_n$$

Questa funzione  $f$  si chiama, *tradizionalmente*, una **successione a valori in  $A$**  (cioè nell'insieme  $A$ ).

Lo rappresentiamo con

$$(a_n)_n : (a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$$

### DEF 4.2.2. La sommatoria

Si può definire la *sommatoria*

$$\sum_{j=0}^n a_j = a_0 + \dots + a_n$$

in una maniera rigorosa usando il *principio di induzione* e la definizione di *successione*:

**DEF 4.2.2.** Si pone

$$\sum_{j=0}^n a_j = s_n$$

poi, ponendo il caso base

$$s_0 = a_0$$

e in seguito

$$\forall n, s_{n+1} = s_n + a_{n+1}$$

definendo così la sommatoria, in quanto sono partito dall'elemento *base*  $a_0$ , e potendo generare la sommatoria di  $n + 1$  a partire da  $n$ ; pertanto la *successione*  $(s_n)_n$  viene definita su  $\mathbb{N}$  a partire da 0.



### DEF 4.2.3. Produttoria

Similmente si definisce la *produttoria*

$$\prod_{i=0}^n a_i = a_0 \cdot \dots \cdot a_n$$

come

$$\prod_{i=0}^n a_i = p_n$$

$$p_0 = a_0$$

$$\forall n, p_{n+1} = p_n \cdot a_{n+1}$$

**ESEMPIO 4.2.3.1. Fattoriale.** Un caso particolare della *produttoria* è il cosiddetto **fattoriale**; la si definisce come

$$\prod_{i=0}^n i = n!$$

Quindi

$$0! = 1$$

$$\forall n; (n+1)! = n!(n+1)$$

### Esempi di Induzione

*Esempi sulle prove per induzione. Articolo creato ad-hoc per la quantità presente degli esempi, rendendo il file originario troppo pesante.*

---

# 1. Esempi di dimostrazione per induzione

## ESEMPIO 1.1. Aneddoto di Gauss.

Si racconta che quando il matematico *C. F. Gauss* frequentava le scuole elementari, il suo professore di matematica aveva dato un esercizio da fare in quanto punizione: ovvero quello di sommare tutti i numeri da 0 a 100; quindi tutti i numeri  $0 + 1 + 2 + \dots + 100$ .

Alla sorpresa del professore e dei suoi compagni, Gauss riuscì, non solo a risolvere il problema quasi immediatamente consegnando la sua lavagna sulla cattedra, ma anche essere l'unico alunno ad aver dato la risposta corretta: 5050.

Grazie alla sua intuizione, Gauss riuscì a ingegnare un metodo per calcolare quel numero con una velocità strabiliante: ovvero quella di determinare la somma da 0 a 100 come  $A$ , che è uguale alla somma da 100 a 1 (proprietà commutativa); Quindi sommando  $A$  con sé stesso ma disposti in una maniera diversa (ovvero la prima con un criterio crescente, la seconda decrescente), ottiene  $2A = 100(101) \iff A = \frac{100(101)}{2}$

Generalizzando da questo aneddoto abbiamo la seguente proprietà:

$$\mathcal{P}(n) = 0 + 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Ora vogliamo dimostrarla rigorosamente *per induzione*.

**DIM.**

1. Caso base: verificare  $\mathcal{P}(0)$ ;

$$\mathcal{P}(0) : 0 = \frac{0(1)}{2} = 0 \text{ OK}$$

2. Ipotesi induttiva; supponendo che  $\forall n, \mathcal{P}(n)$  è vera, allora anche  $\mathcal{P}(n+1)$  è vera.

$$\mathcal{P}(n) : 0 + 1 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Avvolte è utile anche già "*prevedere*" dove vogliamo arrivare a partire da  $\mathcal{P}(n)$ , ovvero  $\mathcal{P}(n+1)$ . In questo caso si potrebbe anche utilizzare l'ipotesi induttiva, ovvero

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(n+1) : 0 + 1 + \dots + n + (n+1) &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\ \mathcal{P}(n) + (n+1) &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\ \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) &= \dots \\ (n+1)\left(\frac{n}{2} + 1\right) &= \dots \\ (n+1)\left(\frac{n+2}{2}\right) &= \dots \\ \frac{(n+1)(n+2)}{2} &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \text{ OK}\end{aligned}$$

3. Pertanto si verifica che i numeri che rendono  $\mathcal{P}(n)$  vera sono tutti i numeri naturali  $\mathbb{N}$  a partire da 0.

## ESEMPIO 1.2. Somma dei quadrati

Provare che per ogni  $n \in \mathbb{N}$  vale

$$P(n) : 0 + 1 + 4 + \dots + n^2 = \frac{(n)(n+1)(2n+1)}{6}$$

Anche qui possiamo usare l'induzione, dato che anche qui si tratta di una *proprietà* sui numeri naturali  $\mathbb{N}$ .

1. Caso base:

$$P(0) : 0 \stackrel{?}{=} \frac{0(0+1)(2(0)+1)}{0}$$
$$0 = 0 \text{ OK}$$

2. Ipotesi induttiva:

$$P(n) : 0 + 1 + 4 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$P(n+1) : 0 + 1 + 4 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$$

3. Sviluppando  $P(n+1)$ ,

$$P(n+1) : 0 + 1 + 4 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$$

$$P(n) + (n+1)^2 = \dots$$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \dots$$

$$(n+1)\left(\frac{n(2n+1)}{6} + (n+1)\right) = \dots$$

$$\frac{(n+1)(n)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$\frac{(n+1)((n)(2n+1) + 6n + 6)}{6} = \frac{(n+1)(n^2 + 7n + 6)}{6}$$

$$(n+1)(2n^2 + n + 6n + 6) = (n+1)(n^2 + n + 6n + 6)$$

OK ■

### ESEMPIO 1.3. Disuguaglianza di Bernoulli.

Sia  $a > -1$ ,  $a \in \mathbb{R}$ . Allora  $\forall n \in \mathbb{N}$  vale la seguente:

$$(1+a)^n \geq 1 + na$$

**DIM.** Sia  $P(n) : (1+a)^n \geq 1 + na$ .

1. Verificare  $P(0)$ ;

$$P(0) : (1+a)^1 \geq 1 \iff 1 \geq 1 \text{ OK } \blacksquare$$

2. Supponendo che  $P(n)$  sia vera, verificare  $P(n) \implies P(n+1)$ .

$$\begin{aligned}P(n) : (1+a)^n &\geq 1+na \\(1+a)^n(1+a) &\geq (1+na)(1+a) \\(1+a)^{n+1} &\geq 1+(n+1)a+na^2\end{aligned}$$

Sapendo che  $1+(n+1)a$  è sicuramente maggiore o uguale a  $P(n+1)$  ovvero  $1+(n+1)a$ , in quanto  $na^2$  è necessariamente positivo, allora consegue che

$$P(n+1) : (1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a$$

è vera, verificando  $P(n) \implies P(n+1)$ . ■

## ESEMPIO-ESERCIZIO 1.4. Disuguaglianza di Bernoulli incrementata.

**PROVARE CHE VALE LA PROPRIETA'**  $P(n) : (1+a)^n \geq 1+na + \frac{n(n-1)}{2}a^2$ , \*\*OVE  $a > 0$  e  $\forall n \geq 1$ .

1. Provare  $P(1)$ ;

$$P(0) : 1+a \geq 1+a+0 \text{ OK}$$

2. Supponendo che  $P(n)$  sia vera, provare che  $P(n) \implies P(n+1)$

$$P(n) : (1+a)^n \geq 1+na + \frac{n(n-1)}{2}a^2$$

ed è utile "prevedere"  $P(n+1)$ , quindi

$$P(n+1) : (1+a)^{n+1} \geq 1 + (n+1)a + \frac{(n+1)(n)}{2}a^2$$

3. Ora prendiamo  $P(n)$  e moltiplichiamo per  $(1+a)$  da ambo le parti (che è possibile in quanto la relazione d'ordine  $\geq$  è compatibile con  $(1+a)$ )

$$P(n) : (1+a)^n(1+a) \geq (1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2)(1+a)$$

$$(1+a)^{n+1} \geq (1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2) + (a + na^2 + \frac{n(n+1)}{2}a^3)$$

$$(1+a)^{n+1} \geq 1 + (n+1)a + (\frac{n(n-1)}{2} + n)a^2 + \dots a^3$$

4. Ora vogliamo dimostrare che il membro destro della disuguaglianza è necessariamente maggiore di  $1 + (n+1)a + \frac{(n+1)(n)}{2}a^2$ , rendendo per la **proprietà transitiva**  $(1+a)^{n+1}$  anch'esso maggiore di  $1 + (n+1)a + \frac{(n+1)(n)}{2}a^2$ , verificando così l'implicazione.

$$1 + (n+1)a + (\frac{n(n-1)}{2} + n)a^2 + \dots a^3 \geq 1 + (n+1)a + \frac{(n+1)(n)}{2}a^2$$

$$(\frac{n(n-1)}{2} + 2n)a^2 + \dots a^3 \geq \frac{(n+1)(n)}{2}a^2$$

Dato che  $\dots a^3$  (parte omessa in quanto non è rilevante, dato che  $n$  è sempre un numero positivo) è anch'essa sempre positiva in quanto  $a > 0$ , ora basta dimostrare che

$$\begin{aligned}
 n(n-1) + 2n &\geq (n+1)(n) \\
 n(n-1+2) &\geq (n+1)(n) \\
 n(n+1) &\geq n(n+1) \text{ OK } \blacksquare
 \end{aligned}$$

5. Verificando così  $P(n) \implies P(n+1)$ , dato che da  $P(n)$  si verifica  $P(n+1)$ .

## ESEMPIO 1.5. Ridotta della serie geometrica.

Sia  $a \neq 1$ ; allora con  $\forall n \in \mathbb{N}$  si ha

$$P(n) : a^0 + a^1 + \dots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

**DIM.**

1. Dato che  $n \in \mathbb{N}$ , si può usare l'induzione; allora partiamo verificando  $P(0)$ ;

$$P(0) : a^0 = \frac{a^1 - 1}{a - 1} \iff 1 = 1 \text{ OK}$$



2. Ora supponendo  $P(n)$ , verifichiamo  $P(n) \implies P(n+1)$ .

$$\begin{aligned}P(n) : a^0 + a^1 + \dots + a^n &= \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} \\a^0 + a^1 + \dots + a^n + a^{n+1} &= \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} + a^{n+1} \\P(n+1) : a^0 + a^1 + \dots + a^{n+1} &= \frac{a^{n+1} - 1 + a^{n+1}(a - 1)}{a - 1} \\&= \frac{a^{n+1} - 1 + a^{(n+1)+1} - a^{n+1}}{a - 1} \\P(n+1) : \dots &= \frac{a^{(n+1)+1} - 1}{a - 1}\end{aligned}$$

Da qui si vede che  $P(n) \implies P(n+1)$  è vera.

## ESEMPIO 1.6.

**PROVARE CHE PER OGNI  $n \geq 1$  VALE CHE IL NUMERO  $n^3 + 5n$  E' DIVISIBILE PER 6.**

1. Provare  $P(1)$ ;

$$P(1) : \exists k \in \mathbb{Z} \mid 1^3 + 5 = 6k \iff 6 = 6k; k = 1 \text{ OK}$$

2. Provare che, supponendo  $P(n)$ , allora  $P(n+1)$ ;

$$\begin{aligned}P(n) &: \exists k_1 \mid n^3 + 5n = 6k_1 \\P(n+1) &: \exists k_2 \mid (n+1)^3 + 5(n+1) = 6k_2 \\&\dots \mid n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 5n + 5 = 6k_2 \\&\dots \mid (n^3 + 5n) + (3n^2 + 3n + 6) = 6k_2 \\&\dots \mid 6k_1 + 3(n^2 + n + 2) = 6k_2 \\&\dots \mid 3(n^2 + n + 2) = 6(k_1 - k_2) \\&\dots \mid n^2 + n + 2 = 2(k_1 - k_2) \\&\dots \mid (n)(n+1) = 2(k_1 - k_2 - 1)\end{aligned}$$

3. Vediamo che il problema si riduce a dimostrare che  $(n+1)(n)$  è **pari** (ovvero divisibile per 2), il che è facile da dimostrare se consideriamo due casi per  $(n+1)(n)$ :

1. Se  $n$  è pari, ovvero della forma  $2m$ , allora

$$(n+1)(n) \iff (2m+1)(2m) \iff 4m^2 + 2m \iff 2(2m^2 + m)$$

è pari in quanto l'espressione finale è comunque moltiplicata per due.

2. Se  $n$  è dispari, ovvero della forma  $2m+1$ , allora

$$(n+1)(n) \iff (2m+2)(2m+1) = 2(m+1)(2m+1)$$

anche qui è pari per lo stesso ragionamento di prima. ■

## ESEMPIO 1.7.

**PROVARE CHE PER OGNI  $n \geq 1$  VALE CHE  $n! \geq 2^{n-1}$**

1. Provare  $P(1)$ ;

$$P(1) : 1! \geq 2^0 \iff 1 \geq 1 \text{ OK}$$

2. Supponendo  $P(n)$ , provare  $P(n) \implies P(n+1)$ :

$$\begin{aligned} P(n) : n! &\geq 2^{n-1} \\ n!(n+1) &\geq 2^{n-1}(n+1) \\ (n+1)! &\geq 2^{n-1}(n+1) \end{aligned}$$

3. Dato che  $n \geq 1$ , ne consegue che  $n+1 \geq 2$ ; quindi possiamo scrivere

$$2^{n-1}(n+1) \geq 2(2^{n-1}) = 2^n$$

4. Quindi per la proprietà transitiva della relazione  $\geq$ , si verifica che

$$P(n+1) : (n+1)! \geq 2^n$$

Verificando così  $P(n) \implies P(n+1)$  ■.

## PROBLEMA 1.1.

**PROBLEMA.** *Disegniamo nel piano una retta e notiamo subito che questa retta suddivide il piano in 2 "regioni"; ora disegniamo 2 rette e vediamo che ora abbiamo 4 regioni; ora 3 rette e notiamo che possiamo avere al massimo 7 regioni.*

Se si desidera, si può visualizzare il problema con il grafico sottostante. Ora ci poniamo i seguenti problemi.

[GRAFICO DA FARE]

## TRACCIA 1. (DA COMPLETARE)

Trovare una formula (o funzione, successione) che individui il numero delle regioni per  $n$  rette.

**SOLUZIONE 1.** L'idea è la seguente.

Individuiamo una *retta* orizzontale,

Ora, avendo definito la *successione* della funzione delle regioni in  $n$   $f_n$ , possiamo usare un metodo simile a quello chiamato "*Ansatz*", usato per risolvere le equazioni differenziali; ovvero congetturando una *soluzione generale*, poi per inserirla nella definizione di  $f_n$ , allora otteniamo la soluzione specifica  $f(n)$ .

Congetturiamo che

$$f(n) = an^2 + b^n + c$$

[ Questa parte è molto complicata da fare, quindi lo farò un weekend in chill; tanto in teoria non è proprio 100% del programma, eh ]

## TRACCIA 2.

Provare che le regioni individuate con  $n$  rette sono al massimo  $\frac{n^2+n}{2} + 1$ .

**OSS 1.1.1.** Si nota, a posteriori (o anche dimostrata sopra), che indicando  $f_n$  il numero di regioni con  $n$  rette, si ha

$$f_{n+1} = f_n + (n + 1)$$

dove  $f_1 = 2$ .

**SOLUZIONE.** Si può dimostrare la formula  $f(n) = \frac{n^2+n}{2} + 1$  con il principio di induzione e anche grazie al suggerimento indicato sopra.

1. Provare  $f(1)$ ;

$$f(1) : f_1 = \frac{1+1}{2} + 1 \iff 2 = 2 \text{ OK}$$

2. Supponendo  $f(n)$ , provare  $f(n+1)$ ;

$$f(n) : f_n = \frac{n^2 + n}{2} + 1$$

$$f_n + (n+1) = \frac{n^2 + n}{2} + 1 + (n+1)$$

$$f_{n+1} = \frac{n^2 + n + 2n + 2}{2} + 1$$

$$\dots = \frac{n^2 + n + 2n + 2}{2} + 1$$

$$\dots = \frac{n^2 + 3n + 2}{2} + 1$$

$$\dots = \frac{(n+1)^2 + (n+1)}{2} + 1$$

3. Quindi da  $f(n)$  si ottiene  $f(n+1)$ , terminando così la dimostrazione. ■