

Topologia della retta reale - Sommario

Tutto sulla topologia della retta reale.

A. Intorni

Intorni

Definizione di distanza (con le sue proprietà), intorno centrato aperto di centro x_0 e di raggio r , intorno di x_0 ; la retta estesa, l'intorno di $+\infty$ e di $-\infty$.

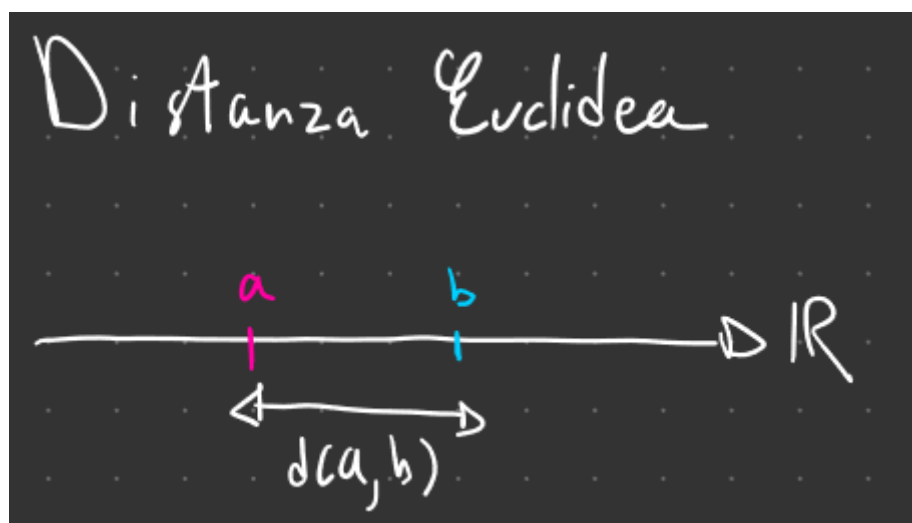
0. Preambolo

In questo capitolo studieremo e definiremo delle nomenclature necessarie per studiare i *limiti*.

1. Distanza euclidea

DEF 1.1. Siano $x, y \in \mathbb{R}$, allora definisco la **distanza** (oppure **distanza euclidea**) di x, y il valore $d(x, y) = |x - y|$

Graficamente questo corrisponde, infatti, alla distanza tra due punti sulla retta reale.



Proprietà della distanza euclidea

PROP 1.1. Possiamo verificare alcune proprietà di questa applicazione ([Funzioni](#)); la prima essendo

$$\forall x, y \in \mathbb{R}; d(x, y) \geq 0 \wedge d(x, y) \iff x = y$$

PROP 1.2. Proprietà simmetrica

$$\forall x, y \in \mathbb{R}; d(x, y) = d(y, x)$$

PROP 1.3. *Disuguaglianza triangolare*; analogamente alle disuguaglianze triangolari già viste nei numeri [complessi](#) (**PROP. 4.7.**) e col [valore assoluto](#) (**OSS 3.1.1.**) si verifica che

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}; d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

DIMOSTRAZIONE DI PROP 1.3. Infatti dall'**OSS 3.1.1.** di [Funzioni di potenza, radice e valore assoluto](#) so che se

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

può essere applicato con $a = x - y$ e $b = y - z$, così diventa

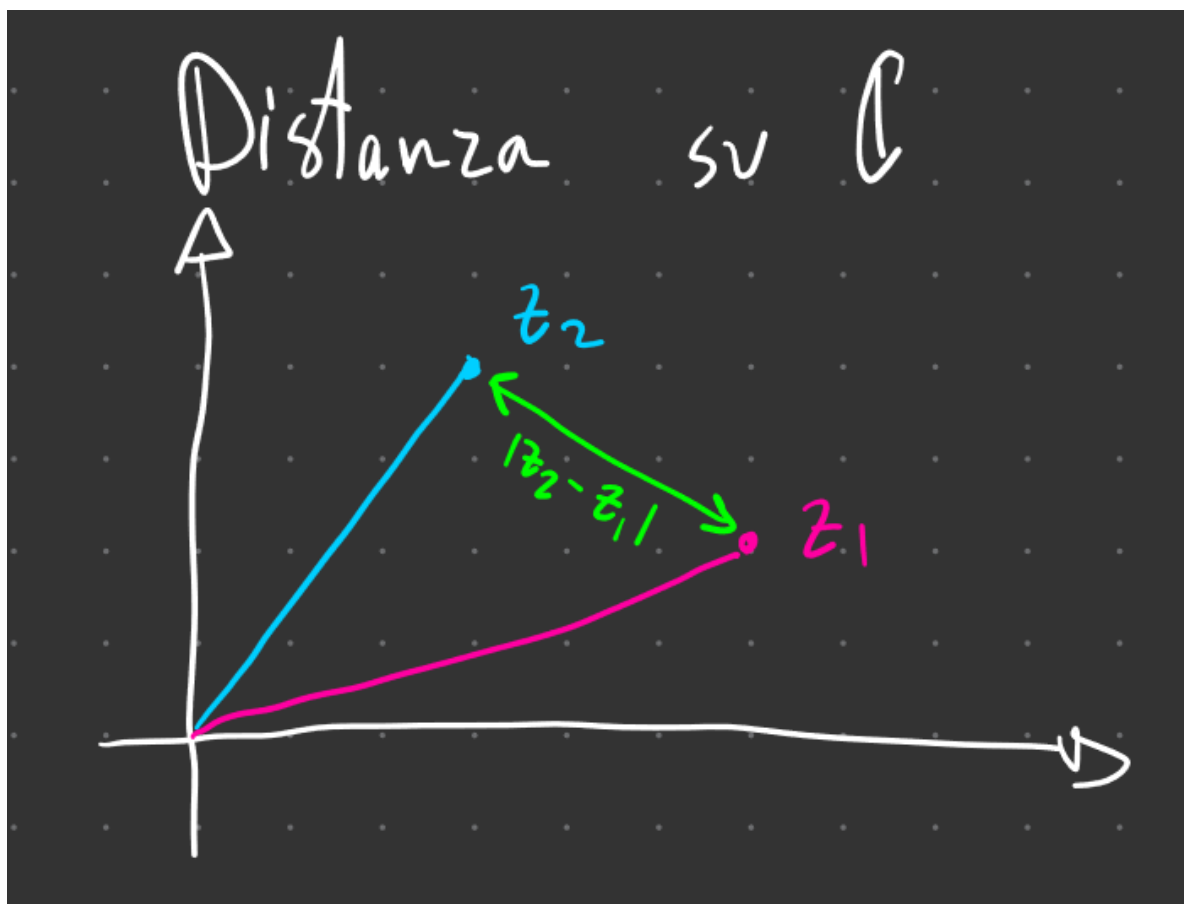
$$|x - z| \leq |x - y| + |y - z| \iff d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \blacksquare$$

OSS 1.1. Noto che questa nozione di *distanza euclidea* può essere anche definita sui numeri complessi \mathbb{C} ; infatti posso porre

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$$

dove $|\cdot|$ rappresenta il *modulo* di un numero complesso ([Operazioni sui Numeri Complessi](#), **DEF 4.** o **DEF 4.1.**).

Graficamente, questo corrisponde a



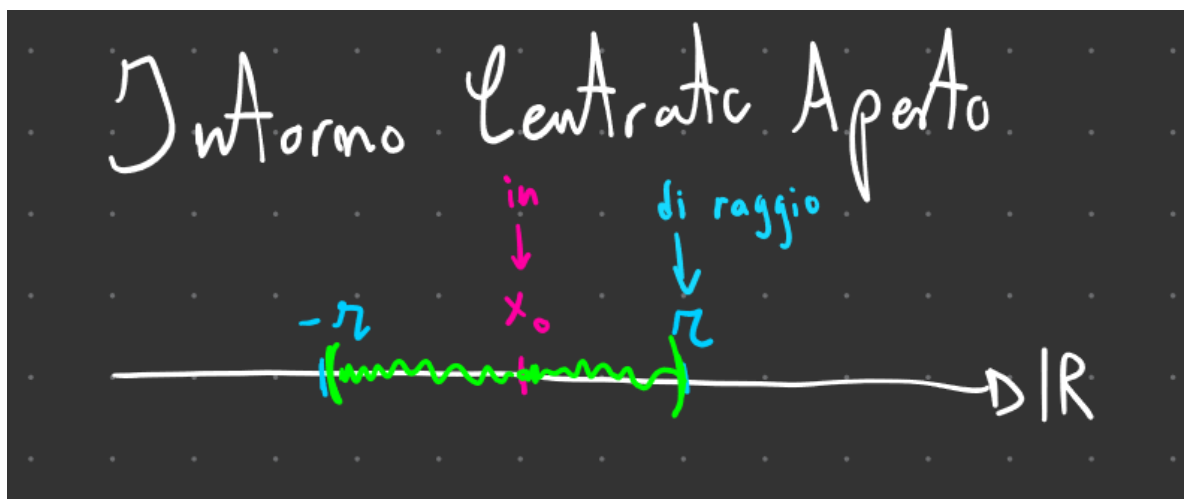
Inoltre scopriamo che questa definizione della distanza euclidea su \mathbb{C} conserva le tre proprietà (**PROP 1.1., 1.2., 1.3.**) appena enunciate. Pertanto è possibile scambiare *modulo* e *distanza euclidea* in quanto vi è un *isomorfismo* tra queste due applicazioni.

2. Intorno centrato aperto di centro x e di raggio r

DEF 2.1. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e sia $r \in \mathbb{R}, r > 0$; allora chiamo "l'intorno centrato aperto di centro x_0 e di raggio r " l'*intervallo aperto* (Intervalli, DEF 1.4.)

$$]x_0 - r, x_0 + r[= \{x \in \mathbb{R} : d(x, x_0) < r\}$$

che graficamente corrisponde a



ovvero la **palla aperta di centro** x_0 **e di raggio** r

ovvero l'insieme di *tutti i punti di \mathbb{R} che hanno distanza da x_0 meno di r .*

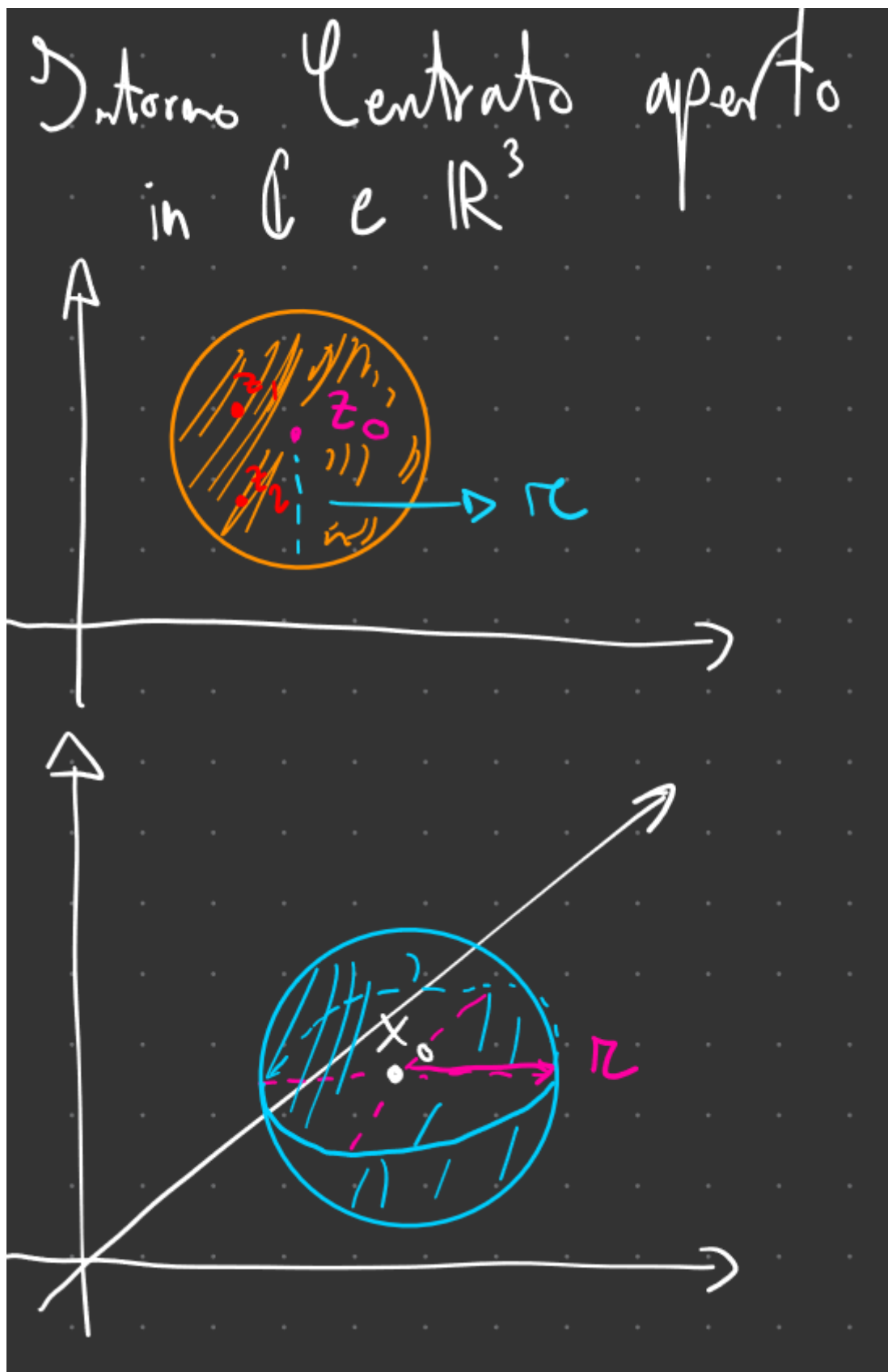
OSS 2.1. Analogamente a **OSS 1.1.**, questa nozione di *intorno centrato aperto* può essere applicato a \mathbb{C} usando la nozione di *modulo*; infatti graficamente questa corrisponde ad una *palla 2-dimensionale di centro z_0 e di raggio r .* (*Figura 2.1.*)

OSS 2.2. Allora si può definire l'*intorno centrato aperto* in \mathbb{R}^3 dove definisco

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^3; d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$$

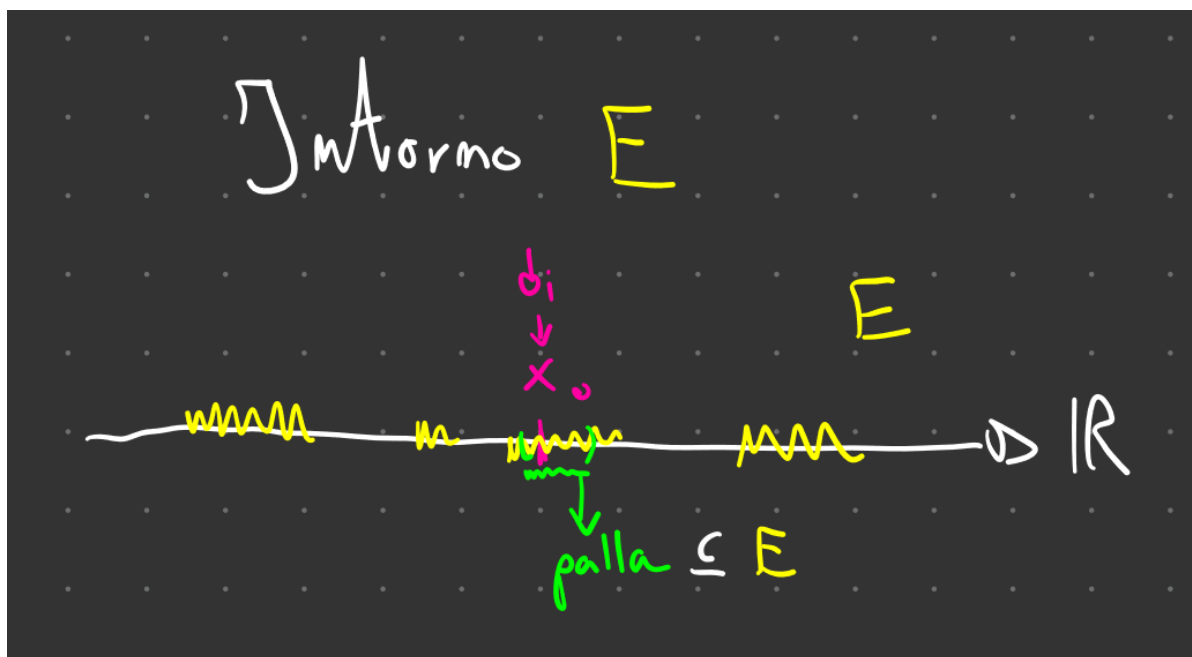
E graficamente questa corrisponde ad una vera *palla*. Letteralmente. (*Figura 2.1.*)

FIGURA 2.1.



3. Intorno

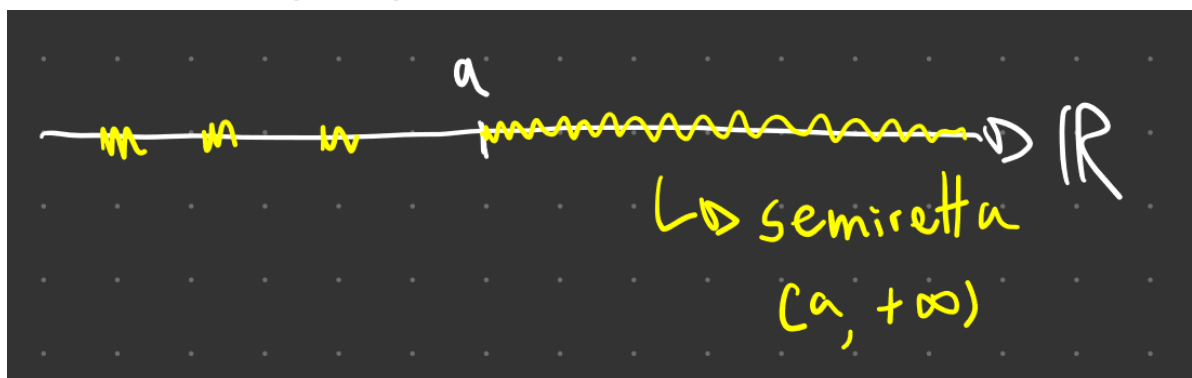
DEF 3.1. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$, chiamiamo allora l'**intorno di x_0** un *qualunque insieme E di \mathbb{R} che contiene una palla aperta di centro x_0 e raggio r* (DEF 2.1.).
Graficamente,



DEF 3.2. Prendo $\tilde{\mathbb{R}}$ l'*insieme dei reali estesi*, ovvero

$$\tilde{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

e definisco **l'intorno di** $+\infty$ un *qualunque sottoinsieme* $E \subseteq \mathbb{R}$ che contiene una *semiretta* $]a, +\infty[$; ovvero un insieme *superiormente illimitato* (*Insiemi limitati, maggioranti, massimo e teorema dell'estremo superiore*, **DEF 1.4.**) del tipo $]a, +\infty[$.

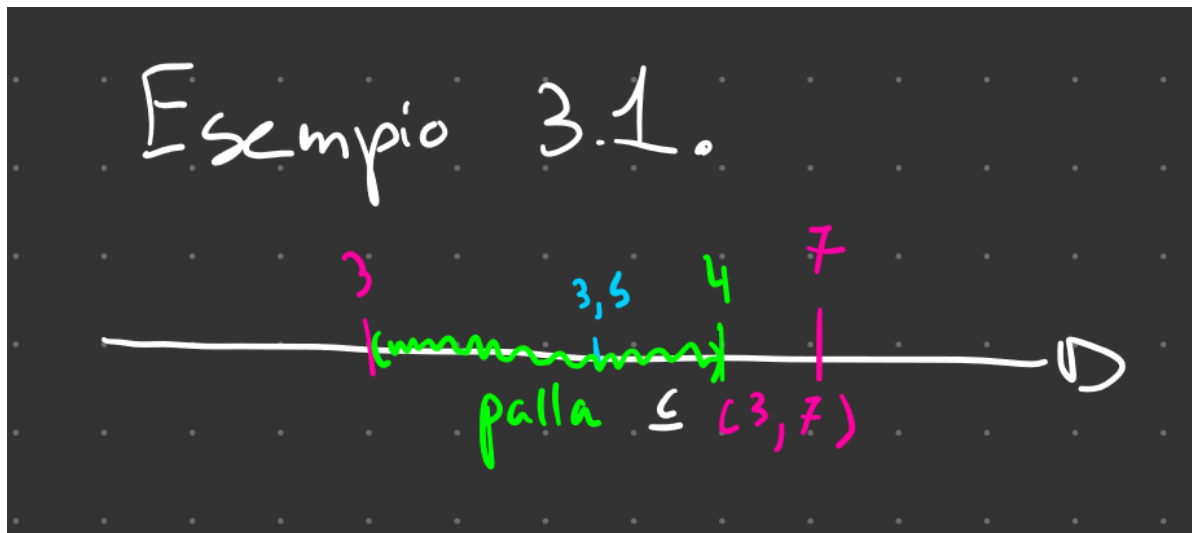


Esempi

ESEMPIO 3.1. L'intervallo $]3, 7[$ è intorno di $3, 5$; infatti è possibile prendere $r = 0, 5$ e ottenere la *palla aperta di centro* $3, 5$ *e di raggio* $0, 5$ che equivale a

$$]3, 4[$$

che infatti è contenuto nell'intervallo $]3, 7[$.
Graficamente,



ESEMPIO 3.2. Se prendendo l'insieme

$$S = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$$

e il punto $x_0 = \frac{1}{2}$, scopriamo che S **non** è intorno di x_0 ; infatti prendendo per qualsiasi r non riesco a formare una palla attorno a x_0 , in quanto S è definita sui numeri naturali che contiene dei "**buchi**".

ESEMPIO 3.3. Considerando i **numeri naturali** ([Numeri Naturali - Sommario](#)), ci chiediamo se questo insieme è **intorno di** $+\infty$; la risposta è **no**: esistono degli elementi in \mathbb{R} che non sono contenuti in \mathbb{N} , come ad esempio i numeri razionali.

Tuttavia se consideriamo l'insieme $\mathbb{N} \cup]100, +\infty[$ allora la risposta è **sì** in quanto si considera un **intervallo** su \mathbb{R} .

Analogo il discorso per gli intervalli di $-\infty$.

B. Punti interni, esterni e di frontiera

Punti interni, esterni e di frontiera

Definizioni di punti interni, punti interni e punti di frontiera. Esempi.

0. Preambolo

Questo argomento presuppone la conoscenza dell'argomento di [Intervalli](#).

1. Punti interni

DEF 1.1. Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$, si definisce x_0 **interno** a E se viene verificato che

$$\exists r > 0 :]x_0 - r, x_0 + r[\subseteq E$$

ovvero se esiste un *intorno* di x_0 che è contenuto in E (*Intorni*, DEF 3.1.).

DEF 1.2. Chiamo **l'insieme dei punti interni** a E come E° .

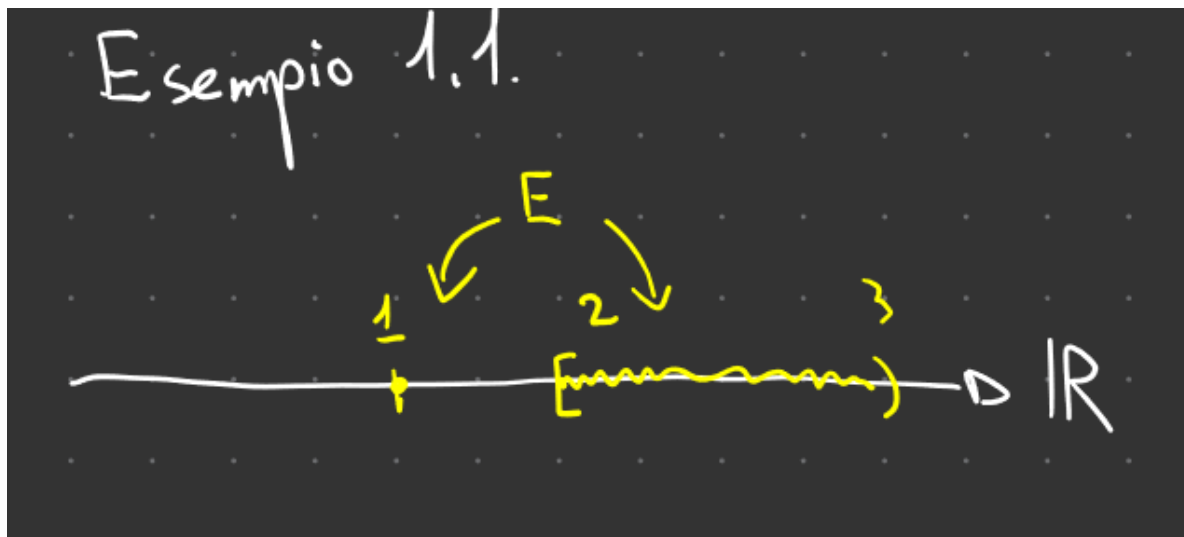
Esempio

ESEMPIO 1.1. Sia

$$E = \{1\} \cup [2, 3)$$

e voglio trovare *l'insieme dei punti interni* E° .

Per farlo devo innanzitutto disegnare il grafico di E per poter capire come procedere.



Ora *"provo"* ogni numero fissando x_0 il numero scelto;

- Scegliendo $x_0 = 1$ vedo chiaramente che non è *punto interno*, in quanto è impossibile che esista un intorno centrato a raggio r ad esso.
- Scegliendo $x_0 = 2$ vedo che neanche questo è un *punto interno*; non riesco a definire un intorno centrato tale che a *"sinistra"* di 2 c'è un punto appartenente a E .
- Però scegliendo $x_0 = 2.001$ è possibile; infatti posso definire un intorno di x con $r = 0.001$.
- Analoghi i discorsi per $x_0 = 3$ e $x_0 = 2.999$
- Concludo allora che

$$E^\circ = (2, 3)$$

2. Punti esterni

DEF 2.1. Un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ si dice **esterno** ad un *insieme* $E \subseteq \mathbb{R}$ se è *interno* al complementare di E , ovvero $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}E$ (*Teoria degli Insiemi*).

Quindi

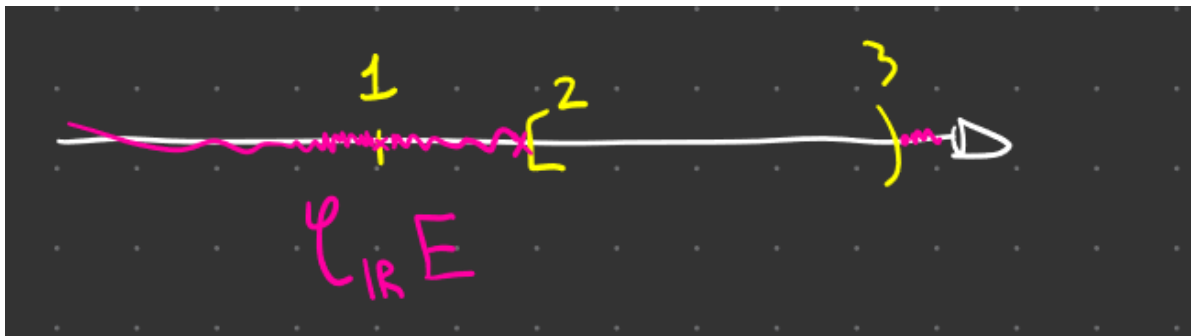
$$x_0 \text{ è esterno} \iff \exists r > 0 : (x_0 - r, x_0 + r) \subseteq \mathcal{C}_{\mathbb{R}}E$$

Esempio

ESEMPIO 2.1. Considerando l'esempio di prima con

$$E = \{1\} \cup [2, 3)$$

ora vogliamo trovare *l'insieme di tutti i punti esterni*. Allora usando lo stesso grafico di prima, faccio esattamente i stessi procedimenti di prima considerando però il *complemento di E* , ovvero tutti i punti che non appartengono ad E .



Usando la stessa procedura in **ESEMPIO 1.1.**, troviamo che

$$\{\text{punti esterni di } E\} = (-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (3, +\infty)$$

3. Punti di frontiera

DEF 3.1. Un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ si dice **frontiera per E** se questo punto *non è né interno né esterno ad E* .

OSS 3.1. Questo equivale a negare la proposizione

$$[\exists r > 0 : (x_0 - r, x_0 + r) \subseteq E] \vee [\exists r' > 0 : (x_0 - r', x_0 + r') \subseteq \mathcal{C}E]$$

che secondo le *leggi di De Morgan* e delle regole osservate (*Logica formale - Sommario*) diventa

$$[\forall r > 0, (x_0 - r, x_0 + r) \not\subseteq E] \wedge [\forall r' > 0, (x_0 - r', x_0 + r') \not\subseteq \mathcal{C}E]$$

e dato che

$$A \not\subseteq B \iff A \cap \mathcal{C}_U B \neq \emptyset$$

ovvero che un insieme A non è sottoinsieme di B se e solo se l'intersezione tra A e il complemento di B non è vuota (ovvero ha almeno **un elemento**), questo diventa

$$[\forall r > 0, (x_0 - r, x_0 + r) \cap \mathcal{C}E \neq \emptyset] \wedge [\forall r' > 0, (x_0 - r', x_0 + r') \cap E \neq \emptyset]$$

ovvero che deve valere la seguente:

- **Ogni** intorno di x_0 deve contenere **sia** punti di E e il suo complemento $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}E$.

DEF 3.2. Definiamo **l'insieme dei punti di frontiera di E** come

$$\partial E$$

e si legge come **"delta storto E"**

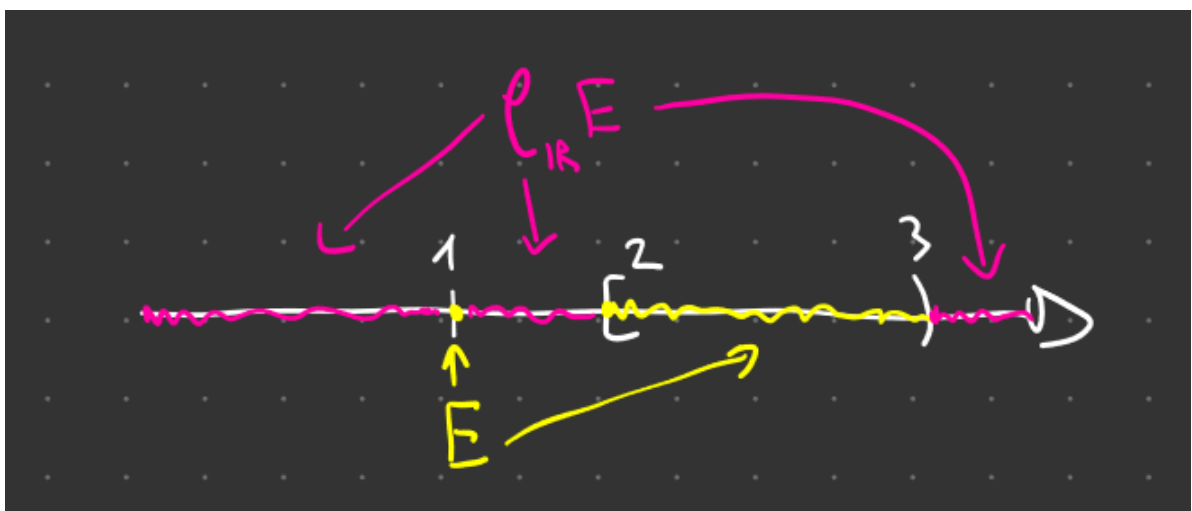
Esempi

ESEMPIO 3.1. Considerando lo stesso esempio di prima, ovvero

$$E = \{1\} \cup [2, 3)$$

vogliamo trovare ∂E .

Procedendo con lo stesso disegno, cerchiamo di **"provare"** ogni punto per trovare elementi di ∂E .



- $x_0 = 0$; Questo non è elemento di ∂E , in quanto posso facilmente trovare un intorno che contenga **solo** elementi del complemento di E .
- $x_0 = 1$; Provando a considerare ogni intorno di x_0 trovo che deve per forza esserci un punto sia in E che nel suo complemento.
- $x_0 = 2$; Stesso discorso analogo di prima.

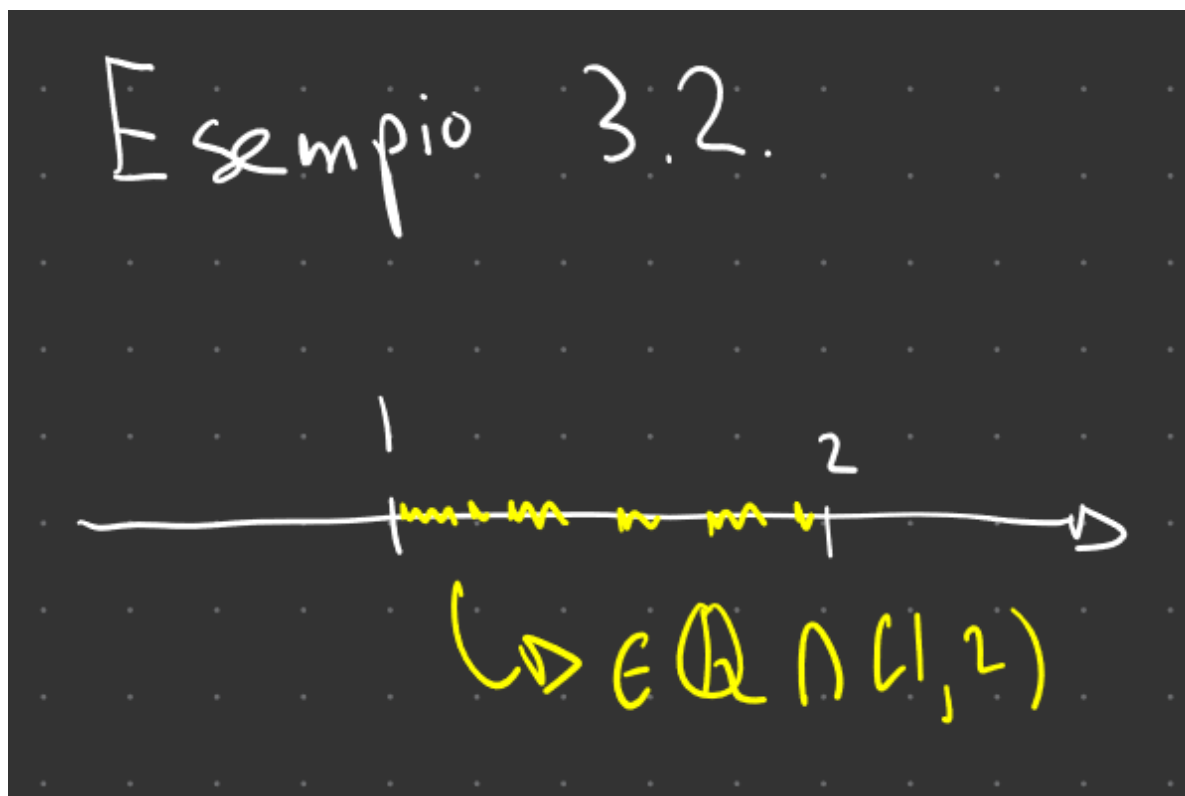
- $x_0 = 3$; Di nuovo lo stesso discorso.
- $x_0 = 2,5$; Qui invece è possibile trovare un intorno che contenga *solo* punti di E . Ad esempio un intorno centrato in $2,5$ con raggio $r = 0,1$.

ESEMPIO 3.2. Consideriamo finalmente dei casi diversi da quelli esaminati prima. Sia

$$E = \mathbb{Q} \cap (1, 2)$$

ovvero tutti i numeri *razionali* compresi tra $1, 2$ esclusi.

Disegnando di nuovo un disegno,



Scopro le seguenti:

- $E^\circ = \emptyset$; infatti in questo insieme *non* vi ci sono punti interni, in quanto l'*assioma di separazione* non vale in \mathbb{Q} ([Assiomi dei Numeri Reali](#), **S**), **OSS 6.2.**); quindi ci sono sempre dei "*buchi*" tra due numeri razionali, ovvero dei numeri irrazionali. Infatti è possibile dimostrare che i numeri irrazionali sono *densi* in \mathbb{R} .
- $\partial E = [1, 2]$; qui si verifica un fenomeno strano, ovvero che si verifica che ∂E è più "*grande*" di E stessa.
Questo si verifica perché, da un lato abbiamo la *densità di \mathbb{Q} in \mathbb{R}* ([Conseguenze dell'esistenza dell'estremo superiore](#), **TEOREMA 4.1.**); infatti se considero un punto q_0 in \mathbb{Q} e considero gli "*estremi*" del suo intorno $(q_0 - r, q_0 + r)$ allora tra $q_0 - r$ e $q_0 + r$ dev'esserci almeno un numero razionale.
Però allo stesso tempo, come visto prima, i numeri irrazionali sono *densi* in \mathbb{R} ; di conseguenza se ci sono sia dei numeri razionali

(appartenenti a E) che dei irrazionali (appartenenti al complemento di E) allora vediamo che tutti i punti di E (gli estremi inclusi) sono *punti di frontiera*.

C. Insiemi aperti e chiusi

Insiemi aperti e chiusi

Definizione di insieme aperto e chiuso. Teorema sugli insiemi aperti e chiusi.

1. Insieme aperto

DEF 1.1. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$; l'insieme A si dice **aperto** se e solo se *tutti i suoi punti sono punti interni all'insieme stesso* (Punti interni, esterni e di frontiera, **DEF 1.1.**); ovvero se

$$\forall x_0 \in A, \exists r > 0 : (x_0 - r, x_0 + r) \subseteq A$$

OSS 1.1. Osservo che l'insieme A è aperto *se e solo se* $A = A^\circ$.

Esempi

ESEMPIO 1.1. Considero *l'intervallo aperto* (Intervalli, **DEF 1.4.**)

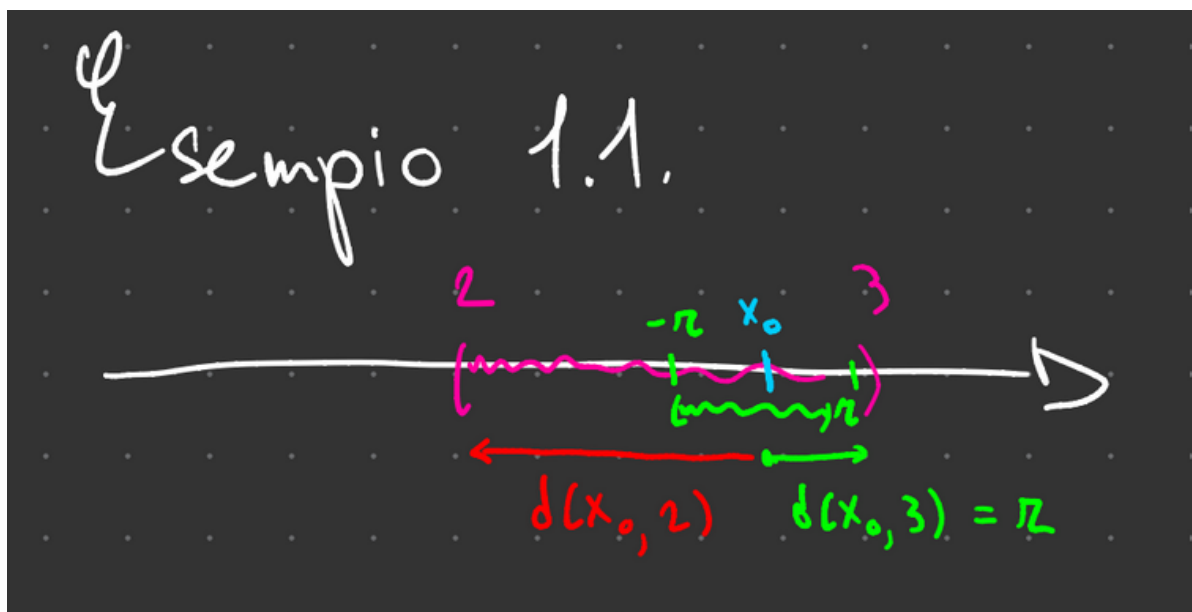
$$(2, 3)$$

voglio sapere se questo è *insieme aperto*; scegliendo un qualunque punto x all'interno di questo intervallo, allora posso sicuramente trovare un intorno in x tale per cui contiene *solo* elementi di $(2, 3)$. Infatti se scelgo r come la *distanza minima* tra x e ciascun estremo, scopro che l'*intorno centrato aperto* di questo raggio (Intorni) contiene *solo* punti di E (dunque esso è *sottoinsieme* di E).

Formalizzando questo ragionamento, ho

$$\forall x, 2 < x < 3; r = \min(d(x, 2), d(x, 3))$$

Graficamente questo ragionamento corrisponde a



ESEMPIO 1.2. Ora considero l'insieme

$$E = \{1\} \cup [2, 3)$$

che *non è aperto*, in quanto considerando $x_0 = 1$ trovo che questo elemento (o punto) non è *interno* a E . Analogo il discorso per $x_0 = 2$.

2. Intervallo chiuso

DEF 2.1. Considerando un insieme $C \subseteq \mathbb{R}$, si dice che esso è **chiuso** se il suo *complemento* è *aperto*. Ovvero se $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}C$ è aperto.

Esempi

ESEMPIO 2.1. Consideriamo *l'intervallo chiuso* (Intervalli, DEF 1.1.)

$$C = [2, 5]$$

Considerando il suo complemento

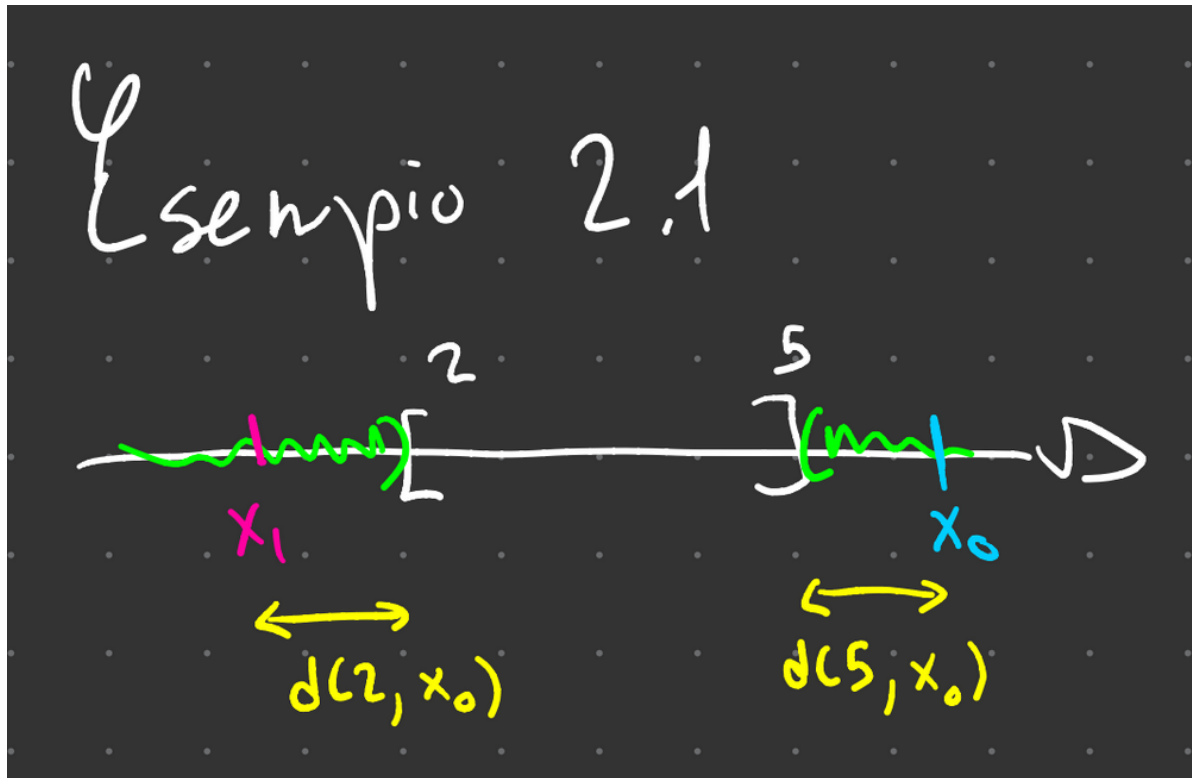
$$\mathcal{C}_{\mathbb{R}}C = (-\infty, 2) \cup (5, +\infty)$$

vediamo che questo insieme (il complemento) è *aperto*; infatti ad ogni punto x_0 del complemento vediamo che è possibile definire un r tale che *l'intorno centrato aperto* di questo raggio sia sottoinsieme di $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}C$. Infatti definendo r come

$$r = \begin{cases} d(2, x_0) & \text{per } x_0 < 2 \\ d(5, x_0) & \text{per } x_0 > 5 \end{cases}$$

sicuramente troviamo che tutti i punti x_0 sono interni al complemento di C .

Graficamente questo ragionamento corrisponde a



3. Teoremi sugli insiemi aperti e chiusi

TEOREMA 3.1. Abbiamo le seguenti proposizioni:

1. Gli insiemi

$$\emptyset, \mathbb{R}$$

sono *insiemi aperti*

2. L'*unione* (*Operazioni con gli Insiemi*) di due *insiemi aperti* è sicuramente un *insieme aperto*.
3. L'*intersezione* (*Operazioni con gli Insiemi*) di due *insiemi aperti* è sicuramente un *insieme aperto*.

TEOREMA 3.2. Abbiamo invece le stesse proposizioni per gli insiemi chiusi:

1. Gli insiemi

$$\emptyset, \mathbb{R}$$

sono *insiemi chiusi*

2. L'*unione* (*Operazioni con gli Insiemi*) di due *insiemi chiusi* è sicuramente un *insieme chiuso*.
3. L'*intersezione* (*Operazioni con gli Insiemi*) di due *insiemi chiusi* è sicuramente un *insieme chiuso*.

OSS 3.1. Notiamo che se dimostriamo almeno una di queste due teoremi, allora si ha automaticamente dimostrato l'altro teorema, in quanto la *definizione dell'insieme chiuso* (DEF 2.1.) ci suggerisce che le stesse proprietà valgono. Infatti, la definizione dell'insieme chiuso si basa sulla definizione dell'insieme aperto, tenendo però conto del complementare dell'insieme; perciò basta tenere conto delle leggi di *De Morgan* (*Logica formale - Sommario*).

DIMOSTRAZIONE 3.1. Allora ci limitiamo a dimostrare solo il teorema 3.1.

1. L'insieme vuoto

$$\emptyset$$

non ha *nessun elemento*; per verificare se questo insieme vuoto è *aperto*, bisognerebbe allora verificare che *tutti* gli elementi di questo insieme gode della proprietà necessaria. Pertanto si può pensare che tutti gli elementi (ovvero nessuno) di questo insieme può godere *tutte* le proprietà che si vuole.

Altrimenti è possibile pensare in termini di insiemi complementari.

Per quanto riguarda l'insieme dei numeri reali

$$\mathbb{R}$$

e prendendo un elemento $x_0 \in \mathbb{R}$ allora si trova automaticamente che

$$\forall r > 0, (x_0 - r, x_0 + r) \subseteq \mathbb{R}$$

è verificata.

2. Sia

$$\{A_i, i \in I\}$$

un insieme di *insiemi aperti*.

ESEMPIO 3.1. Un insieme del genere può essere

$$\{(1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$$

Allora considero un

$$x_0 \in \bigcup_{i \in I} A_i$$

Allora da ciò discende che esiste un \bar{i} tale che quel punto appartenga

all'insieme aperto A_i , ovvero

$$x_0 \in A_i$$

Allora è vero che esiste una *palla aperta* (Intorni, DEF 2.1.) che venga contenuta in quell'insieme aperto. Ovvero

$$x_0 \in A_i \implies \exists r > 0 : (x_0 - r, x_0 + r) \subseteq A_i$$

Ma allora ciò implica che

$$\exists r > 0 : (x_0 - r, x_0 + r) \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$$

3. Siano A_1 e A_2 due insiemi aperti; scelgo allora un $x_0 \in (A_1 \cap A_2)$. Quindi ciò vuol dire che

$$x_0 \in (A_1 \cap A_2) \implies \begin{cases} x_0 \in A_1 \implies \exists r_1 > 0 : (x_0 - r_1, x_0 + r_1) \subseteq A_1 \\ x_0 \in A_2 \implies \exists r_2 > 0 : (x_0 - r_2, x_0 + r_2) \subseteq A_2 \end{cases}$$

Poi scegliendo r il minimo tra r_1 e r_2 , ovvero

$$r = \min(r_1, r_2)$$

[Grafico da fare]

4. Allora ho che

$$(x_0 - r, x_0 + r) \subseteq (A_1 \cap A_2)$$

il che vuol dire l'intersezione tra A_1 e A_2 è aperto.

OSS 3.2. Però questo *non* vuol dire che l'*intersezione infinita* tra insiemi aperti debba essere necessariamente *aperta*: infatti si propone il seguente controesempio.

ESEMPIO 3.2.

Considero la *successione di intorni*

$$(I_n)_n : I_n = \left(1 - \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}\right)$$

e vediamo che l'intervallo I_n è aperto per ogni n .

Inoltre gli intervalli $(I_n)_n$ sono *inscatolati* (Intervalli, DEF 3.1.1.).

[Grafico da fare]

Dal grafico notiamo che se prendiamo l'intersezione di tutti gli intervalli

$$\bigcap_n I_n$$

i numeri compresi tra 1,2 stanno sicuramente all'interno di questo intervallo, come si può evincere dal grafico; invece per la *proprietà di Archimede* (Conseguenze dell'esistenza dell'estremo superiore, **TEOREMA 3.1.**), per ogni numero che sta fuori da $[1,2]$, esiste un intervallo I_n che non lo include; ovvero

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N} : 1 - \varepsilon \notin I_n \\ 2 + \varepsilon \notin I_n$$

Allora si può concludere che

$$\bigcap_n I_n = [1, 2]$$

che *non* è un *insieme aperto*.

D. Punti di aderenza e di accumulazione

Punti di aderenza e di accumulazione

Definizione di punto di aderenza e di accumulazione. La chiusura e il derivato di un insieme. Primo teorema di Bolzano-Weierstraß.

1. Punti di aderenza (o di chiusura)

DEF 1.1. Sia $E \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$.

x_0 si dice **punto di chiusura (o di aderenza)** per E se è vera la seguente:

$$\forall r > 0 : ((x_0 - r, x_0 + r) \cap E) \neq \emptyset$$

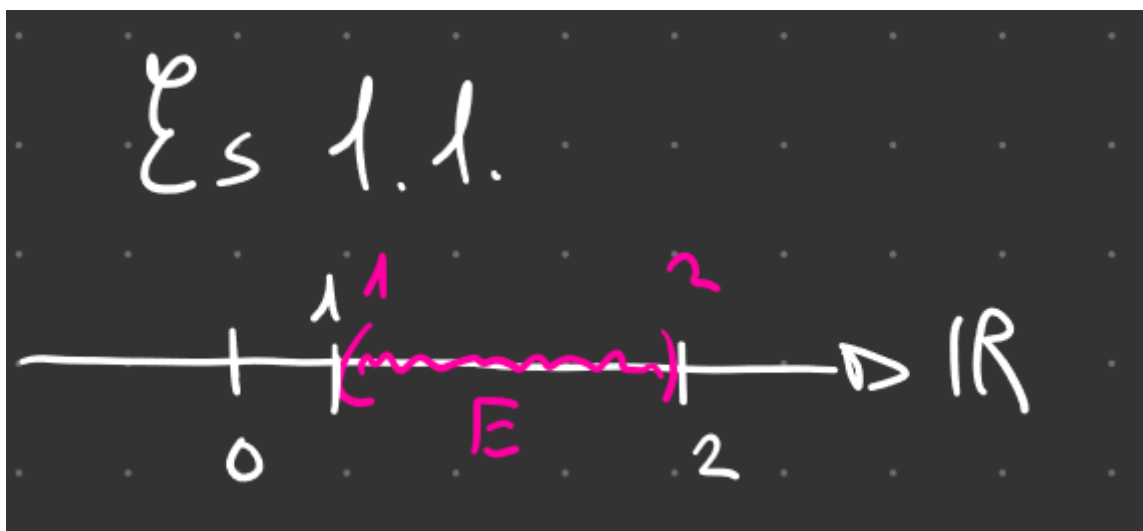
Ovvero in ogni *palla/intorno centrato di* x_0 (*Intorni*, **DEF 2.1.**) devono esserci elementi di E .

SUBDEF 1.1.1. L'insieme dei *punti di chiusura* dell'insieme E si dicono la **chiusura (o aderenza) di** E , scritto come \overline{E} .

ESEMPIO 1.1.

Consideriamo l'insieme $E = (1, 2)$ e voglio trovare gli elementi di \overline{E} .

Per farlo è possibile disegnare il grafico di E , poi "testare" ogni elemento della retta \mathbb{R} per vedere quali sono i potenziali elementi di \overline{E} .



Si evince che:

1. I numeri $0, \frac{1}{2}$ *non* sono *punti di aderenza* per E , in quanto è possibile individuare *almeno* un intorno fuori da E (ovvero che non contenga elementi di E).
2. 1 è un *punto di aderenza*, in quanto per tutti gli intorni in x_0 abbiamo sempre almeno un elemento di E ; infatti si deve sempre "andare a destra", "entrando" in E . Analogo il discorso per 2.

In conclusione è possibile individuare

$$\overline{E} = [1, 2]$$

OSS 1.1. Osserviamo che per ogni insieme è vera che

$$E \subseteq \overline{E}$$

ESEMPIO 1.2.

Considero l'insieme

$$E = \left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$$

poi voglio trovare le seguenti: $\overline{E}, E^\circ, \partial E$.

3. $\overline{E} = E \cup \{0\}$ e $\partial E = E \cup \{0\}$; a questi insiemi aggiungiamo il numero 0 in quanto *per l'Archimedeità di \mathbb{R}* (*Conseguenze dell'esistenza dell'estremo superiore*, **TEOREMA 3.1.**) è sempre possibile trovare un n tale che

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n : 0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

4. $E^\circ = \emptyset$; infatti E è definita tramite gli \mathbb{N} , che presenta dei "buchi" in \mathbb{R} .

ESEMPIO 1.3.

Voglio studiare l'insieme dei *numeri razionali* \mathbb{Q} (Richiami sui Numeri Razionali).

1. Sicuramente

$$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

per la *densità di \mathbb{Q} in \mathbb{R}* (Conseguenze dell'esistenza dell'estremo superiore, **TEOREMA 4.1.**). Ovvero da ciò consegue che prendendo un punto $q_0 \in \mathbb{Q}$, è possibile trovare sempre dei numeri razionali per qualsiasi *intorno* con $r > 0$. Infatti

$$\forall r > 0, \exists a \in \mathbb{Q} : q_0 + r > a > q_0$$

2. I punti di frontiera $\partial\mathbb{Q}$ è anch'esso \mathbb{R} per motivi analoghi.

3. Per *l'assioma di Dedekind* (Assiomi dei Numeri Reali, **ASSIOMA S**) sappiamo che tra un numero razionale q_0 e un altro numero (in questo caso prendiamo $q_0 + r, \forall \varepsilon > 0$) dev'esserci un numero *irrazionale* che non appartiene a \mathbb{Q} ; allora non ci sono dei *punti interni* (Punti interni, esterni e di frontiera, **DEF 1.1.**).

Proprietà della chiusura

TEOREMA 1.1. Possiamo enunciare le seguenti proprietà per la *chiusura* di E .

Sia $E \subseteq \mathbb{R}$, allora sono vere che:

1. \overline{E} è un *insieme chiuso*. Per provare questo, bisognerebbe dimostrare che l'insieme complementare della chiusura di E è *aperto*; quindi bisogna considerare i punti che non stanno né in E né nella sua chiusura \overline{E} e poi dimostrare che esiste un'intervallo di ogni punto che non sta nella chiusura.
2. \overline{E} è *il più piccolo chiuso* che contiene E . Quindi ho in mente una *relazione d'ordine* (Relazioni, **DEF 4.1.**), ovvero dal punto di vista di quella d'inclusione. Ovvero

$$A > B \iff B \subseteq A$$

3. Un insieme E è *chiuso* se e solo se $\overline{E} = E$

2. Punti di accumulazione

DEF 2.1. Sia $E \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Si dice che x_0 è un **punto di accumulazione di E** se è vera che

$$\forall r > 0, ([x_0 - r, x_0 + r[\cap E) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$$

ovvero un *punto di aderenza* escludendo però il punto x_0 stesso; quindi un punto x_0 è di accumulazione per E se in ogni intorno di x_0 ci sono punti di E diversi da se stesso.

SUBDEF 2.1.1. L'insieme dei *punti di accumulazione per E* si chiama **derivato** di E , demarcata col simbolo

$$\mathcal{D}E$$

e si legge come "*d corsivo maiuscolo*".

OSS 2.1. Come abbiamo definito degli *interni di $+\infty$ o di $-\infty$* in *Interni*,

DEF.3.2., è possibile analogamente definire anche $+\infty$ o $-\infty$ come *punti di accumulazione* di un insieme E . Un $+\infty$ è punto di accumulazione per E vuol dire che si verifica il seguente:

$$\forall M > 0, (M, +\infty) \cap E \neq \emptyset$$

ovvero

$$\forall M > 0, \exists x_0 \in E : x > M$$

ovvero che per ogni semiretta a partire da M , dev'esserci almeno un elemento in comune tra questa semiretta e l'insieme E con $+\infty$ come punto di accumulazione.

Analoga la definizione di un insieme E che ha $-\infty$ come punto di accumulazione.

TEOREMA 2.1. Sia $E \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$. x_0 è *punto di accumulazione per E* **se e solo se** in *ogni* intorno di x_0 ci sono *infiniti* punti di E .

DIMOSTRAZIONE 2.1. Questa dimostrazione si articola in due sotto-dimostrazioni.

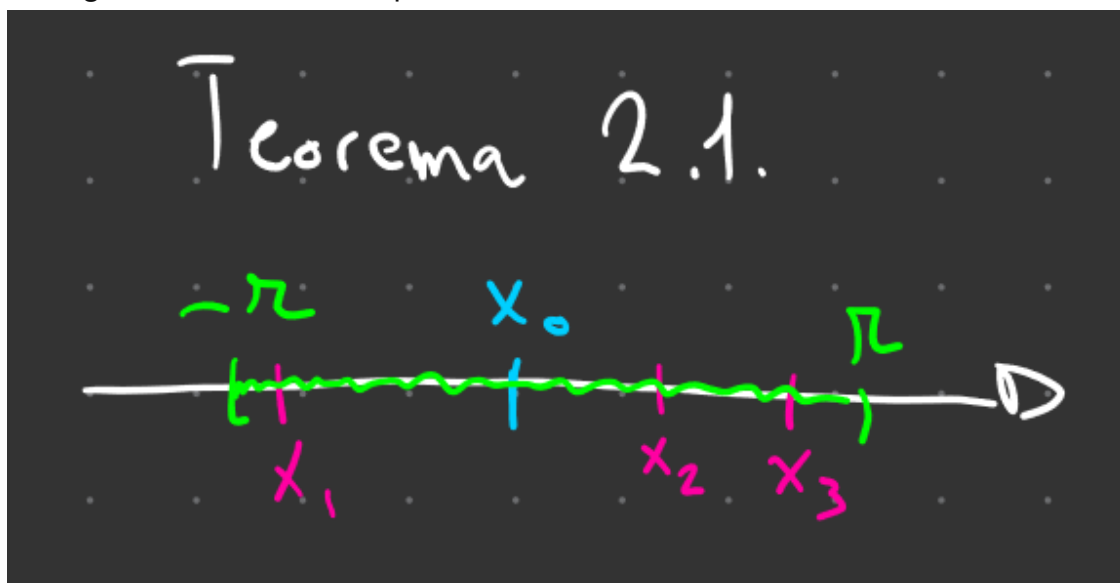
1. Dimostriamo che *se in ogni intorno di x_0 ci sono infiniti punti di E , allora x_0 è di accumulazione per E* : questo è evidentemente vero, in quanto se in ogni intorno di x_0 ci sono infiniti punti di E , allora dev'esserci almeno un elemento di E in questo intorno diverso da x_0 .
2. Ora notiamo il viceversa; ovvero che *se x_0 è di accumulazione per E allora in ogni suo intorno ci sono infiniti punti di E* .

Per dimostrare questa proposizione, dimostriamo la negazione della contraria; ovvero che se in *ogni intorno di x_0 ci sono elementi finiti di E , allora x_0 non è punto di accumulazione per E* . ([Logica formale - Sommario](#))

Supponiamo quindi che x_0 abbia un intorno in cui ci sono un numero finito punti di E : allora

$$(x_0 - r, x_0 + r) \cap E = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$$

Che graficamente corrisponde a



Considero dunque $r = \min(\{d(x_0, x_j), \forall j \in \{1, 2, \dots, k\}\})$ ovvero la *minima* distanza tra x_0 e un qualunque punto di E . Allora risulta che

$$((x_0 - r, x_0 + r) \cap E) \setminus \{x_0\} = \emptyset$$

il che ci dimostra che x_0 *non* è di accumulazione per E . (oppure è un punto isolato).

■

ESEMPIO 2.1. Prendiamo di nuovo l'intervallo

$$E = (1, 2)$$

E voglio individuare $\mathcal{D}E$. Con lo stesso approccio di **ESEMPIO 1.1.**, "*testiamo*" dei elementi della retta reale per vedere se possono essere dei *punti di accumulazione*.

1. Ovviamente 0 non può essere punto di accumulazione.
2. 1, 2 sono *punti di accumulazione* per E in quanto disegnando un qualsiasi intorno di questi punti, si deve per forza disegnare un intervallo che contenga elementi di E . Analogo il discorso per i numeri $1 \leq x \leq 2$.

Allora

$$\mathcal{D}E = [1, 2]$$

ESEMPIO 2.2. Prendiamo l'insieme

$$E = \left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$$

Con lo stesso approccio di sempre, individuiamo gli elementi di $\mathcal{D}E$.

3. 1 non è punto di accumulazione. Infatti è possibile individuare un intorno $(1-r, 1+r)$ che non abbia elementi di E : basta porre $r = 0,1$.
4. Analogo discorso per tutti gli elementi n ponendo $r = \left| \frac{1}{n^2+n} \right|$.
5. 0 è punto di accumulazione per l'*Archimedeità* dei reali (*Conseguenze dell'esistenza dell'estremo superiore*, **TEOREMA 3.1.**). Infatti per qualsiasi r è sempre possibile trovare $n \in \mathbb{N}$ tale che

$$0 < \frac{1}{n} < 0 + r$$

Allora $\mathcal{D}E = \{0\}$.

ESEMPIO 3.3. Prendiamo i *numeri naturali* (*Numeri Naturali - Sommario*).

Si scopre che $\mathcal{D}\mathbb{N} = \emptyset$; non esistono i numeri naturali che siano dei *punti di accumulazione per* \mathbb{N} , in quanto tutti questi numeri distano tra di loro. Basta infatti prendere l'intorno in $n \in \mathbb{N}$ di raggio 0,5. Invece è possibile dire che $+\infty$ è punto di accumulazione per \mathbb{N} , in quanto grazie all'*Archimedeità dei reali* (*Conseguenze dell'esistenza dell'estremo superiore*, **TEOREMA 2.1.**) si verifica la seguente condizione:

$$\forall M > 0, \exists n \in \mathbb{N} : n > M \text{ dove } \varepsilon = 1$$

Primo teorema di Bolzano-Weierstraß (forma insiemistica)

Enunciamo uno dei teoremi più importanti dell'*analisi matematica*, che ci garantisce l'esistenza di un punto di accumulazione in \mathbb{R} per una categoria di insiemi.

TEOREMA 2.2. *Primo teorema di Bolzano-Weierstraß*

Sia $E \subseteq \mathbb{R}$, E un insieme *infinito* e *limitato*. (*Insiemi limitati, maggioranti, massimo e teorema dell'estremo superiore*, **DEF 1.3.**)

Allora si verifica il seguente:

$$\exists \xi \in \mathbb{R} : \xi \in \mathcal{D}E$$

ovvero che esista un numero ξ che sia *punto di accumulazione* per E .

DIMOSTRAZIONE 2.2.

Se E è un insieme *limitato* allora per il *teorema dell'esistenza dell'estremo superiore e inferiore* (*Insiemi limitati, maggioranti, massimo e teorema*

dell'estremo superiore, **TEOREMA 4.1.**) esistono

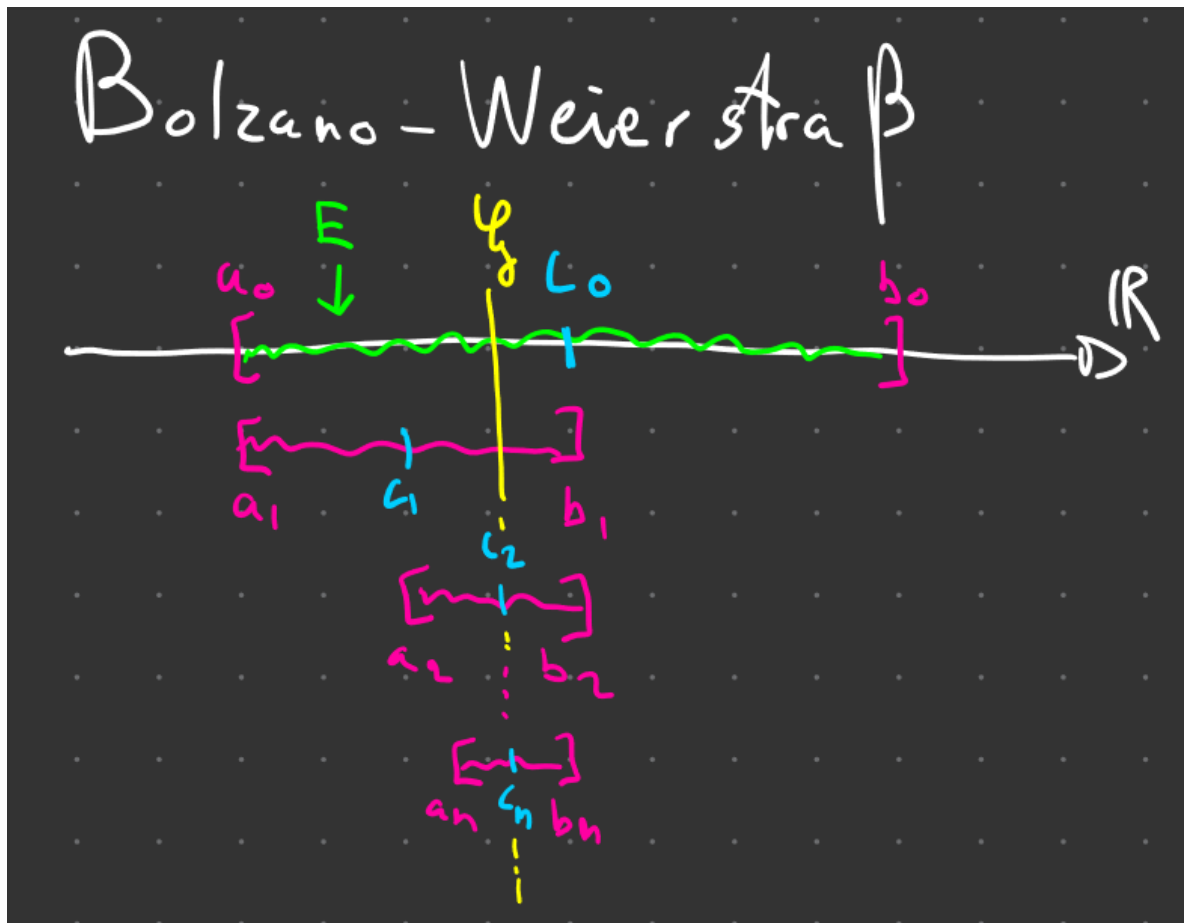
$$a_0 = \inf(E); b_0 = \sup(E)$$

ovvero $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ e tali per cui $E \subseteq [a_0, b_0]$.

Allora considero c_0 il *punto medio tra* a_0 e b_0 ; ora considero i due intervalli

$$[a_0, c_0]; [c_0, b_0]$$

che graficamente corrisponde a



Inoltre *almeno* uno di questi intervalli devono essere *infiniti*, in quanto se supponessimo per assurdo che entrambi gli intervalli fossero finiti, allora la loro unione sarebbe anch'essa finita.

Tenendo questo in considerazione, scegliamo uno di questi. Ora chiamo questo intervallo $[a_1, b_1]$, dove $a_1 = c_0$ oppure $b_1 = c_0$, a seconda dell'intervallo scelto.

Quindi otteniamo una *successione di intervalli inscatolati, limitati, infiniti e dimezzati* (Intervalli)

$$(I_n)_n$$

La *forma forte del teorema di Cantor* (Conseguenze dell'esistenza dell'estremo superiore, **TEOREMA 5.2.**) ci dice che facendo l'intersezione di tutti questi intervalli otteniamo un ξ .

Ora voglio trovare un *intorno* di ξ che contenga un qualunque insieme *infinito* $[a_n, b_n]$. Ovvero voglio verificare che

$$\exists r > 0 : [a_n, b_n] \subseteq (\xi - r, \xi + r)$$

Allora la condizione è

$$r > d(a_n, b_n) = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$$

il che è possibile in quanto ricordandomi che

$$\frac{b_0 - a_0}{n} \geq \frac{b_0 - a_0}{2^n}$$

e tenendo conto *l'Archimedeità di* \mathbb{R} (*Conseguenze dell'esistenza dell'estremo superiore*, **TEOREMA 3.1.**) la condizione sopra citata è totalmente possibile visto che

$$\exists \bar{n} : 0 < \frac{b_0 - a_0}{2^{\bar{n}}} \leq \frac{b_0 - a_0}{\bar{n}} < r$$

Abbiamo quindi che l'intorno in ξ di raggio r contiene l'insieme infinito $[a_{\bar{n}}, b_{\bar{n}}]$, di conseguenza anche l'intorno stesso è infinito; dato che contiene infiniti punti di E , per il **TEOREMA 2.1.** ξ è *punto di accumulazione* per E .