

Numeri Reali - Sommario

Tutto sui numeri reali \mathbb{R}

Richiami sui Numeri Razionali

Richiami sui Numeri Razionali (propedeutica per studiare i numeri reali): la costruzione dei numeri interi \mathbb{Z} ; la costruzione dei numeri razionali \mathbb{Q} ; l'insufficienza di \mathbb{Q} per rappresentare tutti i numeri. Dimostrazione dell'incommensurabilità di $\sqrt{2}$

1. La costruzione dei numeri interi

OSS 1.1. Osserviamo che a partire dai **numeri naturali** \mathbb{N} è possibile costruire un altro insieme numerico più **completo** che ci permette di fare altre operazioni (oltre alla somma e moltiplicazione), ovvero i numeri **interi relativi** \mathbb{Z} (*Zahl*), che viene definita come

$$\mathbb{Z} := \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

in cui ad ogni numero positivo z corrisponde ad un numero **negativo** per cui ci permette di fare una nuova operazione: ovvero la **sottrazione** $-$. Tuttavia questa non è sufficiente in quanto questa **costruzione** non ci permette di fare un'altra operazione molto importante, ovvero la **divisione** \div .

2. La costruzione dei numeri razionali

OSS 2.1. Quindi a partire da \mathbb{Z} è possibile costruire i numeri razionali \mathbb{Q} (**Quoziente**), dove un numero $q \in \mathbb{Q}$ è un quoziente di un numero intero \mathbb{Z} e di un numero razionale \mathbb{N} ;

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} \text{ con } p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$$

I numeri razionali quindi ci permettono **non solo** di **contare**, ma anche di **misurare**, dato che possiamo precisamente misurare delle grandezze tramite questi numeri. Tuttavia non posso misurare **tutto**; infatti se voglio descrivere un oggetto geometrico con i numeri, ovvero un quadrato con il lato $l = 1$, non posso misurare la lunghezza della diagonale del quadrato. Infatti questo segmento si dice una **grandezza incommensurabile**.

TEOREMA 2.1. Non esistono $n, k \in \mathbb{N}$ tali che

$$\left(\frac{n}{k}\right)^2 = 2$$

DIMOSTRAZIONE. Qui ragioniamo *per assurdo*; ipotizziamo che la tesi sia vera invece che falsa, poi per trovare un assurdo, una contraddizione.

1. Supponiamo che esistano $n, k \in \mathbb{N}$ tali che

$$\left(\frac{n}{k}\right)^2 = 2$$

inoltre non è restrittivo supporre che questi n, k non abbiano fattori in comune (quindi che siano ridotti ai minimi termini).

2. Ora,

$$\frac{n^2}{k^2} = 2$$

$$\text{allora } n^2 = 2k^2$$

$$\text{allora } 2 \mid n^2 \text{ è vera;}$$

3. Considerando la scomposizione di n in numeri primi, ovvero

$$n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_n^{k_n}$$

allora se n^2 è divisibile per un numero primo p_n , allora per forza anche n è divisibile per lo stesso numero primo, in quanto entrambi vengono moltiplicate per lo stesso p_n .

$$\text{allora } 2 \mid n \text{ è vera;}$$

$$\text{allora } n = 2m$$

$$\text{allora } \frac{4n^2}{k^2} = 2$$

$$\text{allora } 4n^2 = 2k^2$$

$$\text{allora } k^2 = 2n^2$$

$$\text{allora } 2 \mid k \text{ è vera}$$

$$\text{ma allora anche } 2 \mid n \text{ è vera}$$

4. Quindi sia n che k che sono pari, ciò vuol dire che hanno un fattore in comune (ovvero 2); ciò contraddice quello che abbiamo detto all'inizio, ovvero che n e k sono ridotti ai minimi termini. Di conseguenza non è possibile che esistano n e k . ■

CONCLUSIONE. Quindi i numeri razionali \mathbb{Q} non sono sufficienti per misurare la diagonale di un quadrato; infatti è impossibile definire un $x \in \mathbb{Q}$ tale che $x^2 = 2$.

Assiomi dei Numeri Reali

Assiomi dei numeri reali \mathbb{R} ; Il gruppo abeliano $(\mathbb{R}, +)$, il campo $(\mathbb{R}, +, \cdot)$; assiomi fondamentali di \mathbb{R} ; l'assioma caratterizzante di \mathbb{R} (di Dedekind)

1. Preambolo

Dopo aver dedotto che i numeri **razionali** non sono abbastanza "*estesi*" per poter rappresentare alcuni numeri (come la misura di $\sqrt{2}$), costruiamo i **numeri reali** \mathbb{R} con degli *assiomi* e *definendo* delle *operazioni* di *addizione* e *moltiplicazione*. Nominiamo questi assiomi come *A*), *M*), *O*) e *S*).

Definiamo quindi il *campo*

$$(\mathbb{R}, +, \cdot)$$

ovvero un insieme dotato di due operazioni che hanno le proprietà elencate qua sotto.

2. Assiomi A)

Esiste un insieme \mathbb{R} in cui viene definita la somma

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; (x, y) \mapsto x + y$$

per cui valgono le seguenti proprietà.

A1) La proprietà associativa: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$,

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

A2) La proprietà commutativa: $\forall x, y \in \mathbb{R}$,

$$x + y = y + x$$

A3) L'esistenza dell'elemento neutro 0: $\exists 0$ t.c.

$$x + 0 = 0 + x = x$$

A4) L'esistenza dell'elemento opposto: $\forall x \in \mathbb{R}, \exists x' \in \mathbb{R}$ t.c.

$$x + x' = x' + x = 0$$

Inoltre si dice che $(\mathbb{R}, +)$ è un gruppo abeliano (dal matematico norvegese Abel).

3. Assiomi M)

E' definita in \mathbb{R} un'operazione di prodotto o moltiplicazione per cui:

M1) Proprietà associativa: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$,

$$(x) \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot (z)$$

M2) L'esistenza dell'elemento neutro 1: $\exists 1 (\neq 0) \text{ t.c.}$

$$\forall x, x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$$

M3) L'esistenza dell'elemento opposto: $\forall x \in \mathbb{R}, \exists \tilde{x} \text{ t.c.}$

$$x \cdot \tilde{x} = \tilde{x} \cdot x = 1$$

M4) Proprietà commutativa: $\forall x, y$,

$$x \cdot y = y \cdot x$$

4. Assioma D)

E' possibile individuare una proprietà che collega le operazioni di somma + e prodotto ·.

D1) Proprietà distributiva: $\forall x, y, z$,

$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$$

5. Assiomi O)

In \mathbb{R} è definita una relazione d'ordine totale che chiamo \leq e valgono le seguenti

O1) Compatibilità di \leq dell'ordinamento con la somma: $\forall x, y, z$,

$$x \leq y \implies x + z \leq y + z$$

O2) Compatibilità di \leq dell'ordinamento con il prodotto: $\forall x, y, z$,

$$x \leq y \wedge 0 \leq z \implies x \cdot z \leq y \cdot z$$

6. Assioma S) (di Dedekind o di separazione)

OSS 6.1. Notiamo che avendo definito

$$(\mathbb{R}, +, \cdot, \geq)$$

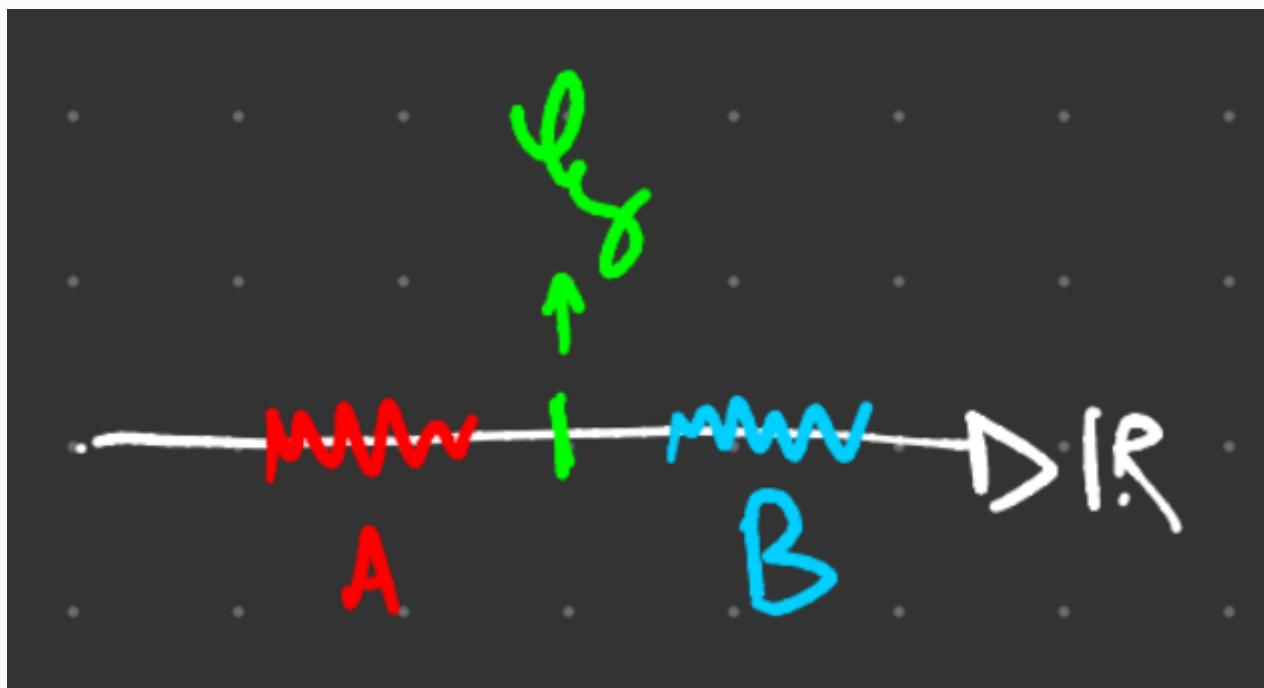
con gli assiomi *A)*, *M)*, *D)* e *O)* questi non possono bastare, in quanto i numeri razionali \mathbb{Q} godono delle stesse proprietà; infatti bisogna definire delle regole speciale, in particolare *l'assioma di Dedekind*, oppure nota come *l'assioma di separazione*.

S) Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$; $A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset$ (A e B sono non-vuoti),

- supponendo che $\forall a \in A, \forall b \in B, a \leq b$
- allora per l'assioma **S)**

$$\exists \xi \in \mathbb{R} \mid \forall a \in A, \forall b \in B, a \leq \xi \leq b$$

- Ovvero, graficamente



OSS 6.2. Questa proprietà non vale per \mathbb{Q} , infatti se definiamo gli insiemi

$$A = \{\forall a \in \mathbb{Q} : a^2 < 2\}$$

$$B = \{\forall b \in \mathbb{Q} : a^2 > 2\}$$

notiamo che tra A e B c'è un **bucco** che non potrà mai essere colmato, in quanto $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. (dimostrazione più rigorosa sul file di Del Santo)

Intervalli

Definizione di intervalli. Intervalli limitati, aperti, chiusi, inscatolati e dimezzati. Alcuni esempi

1. Intervalli limitati

Siano $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$ (ovvero $a \leq b \wedge a \neq b$), allora definiamo le seguenti definizioni degli **intervalli limitati**:

- **DEF 1.1.** Intervallo **chiuso** compresi gli estremi

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

- **DEF 1.2.** Intervallo **semichiuso**

$$]a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$

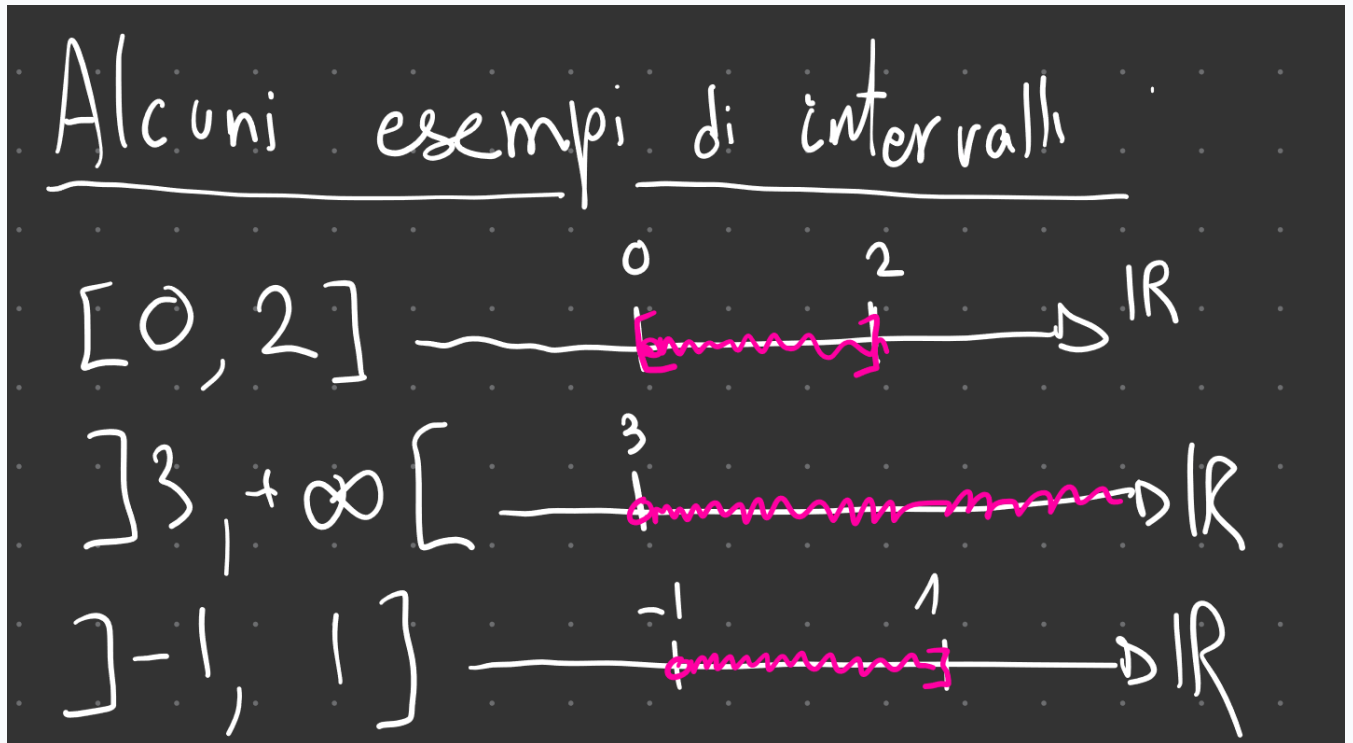
- **DEF 1.3.** Similmente (da **DEF 1.2.**), altro intervallo **semichiuso**

$$[a, b[:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$$

- **DEF 1.4.** Intervallo **aperto**

$$]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

Alcuni esempi di intervalli:



2. Intervalli illimitati

Se, invece consideriamo $a \in \mathbb{R}$, definiamo allora i seguenti **intervalli illimitati** (o anche **semirette**):

- **DEF 2.1.** Intervallo **inferiormente illimitato**

$$]-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$$

$$]-\infty, a[:= \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$$

- **DEF 2.2.** Intervallo **superiormente illimitato**

$$[a, +\infty[:= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$$

$$]a, +\infty[:= \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$$

OSS 2.1. Si può definire \mathbb{R} anche come

$$\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$$

OSS 2.2. Può essere comodo pensare che anche l'insieme con un unico punto $\{a\}$ è un *intervallo "degenere"*.

OSS 2.3. Notare che $-\infty$ e $+\infty$ **NON** sono numeri reali, bensì dei semplici simboli.

$$-\infty, +\infty \notin \mathbb{R}$$

Se voglio, posso estendere l'insieme dei numeri reali tale che

$$\tilde{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$$

3. Successione di intervalli

DEF 3.1. Sia

$$(I_n)_n$$

definita come una *successione* (**DEF 4.2.1.**) di intervalli *chiusi* e *limitati*. Quindi

$$(I_n)_n = I_0, I_1, \dots, I_n, \dots$$

ove

$$I_i = [a_i, b_i]$$

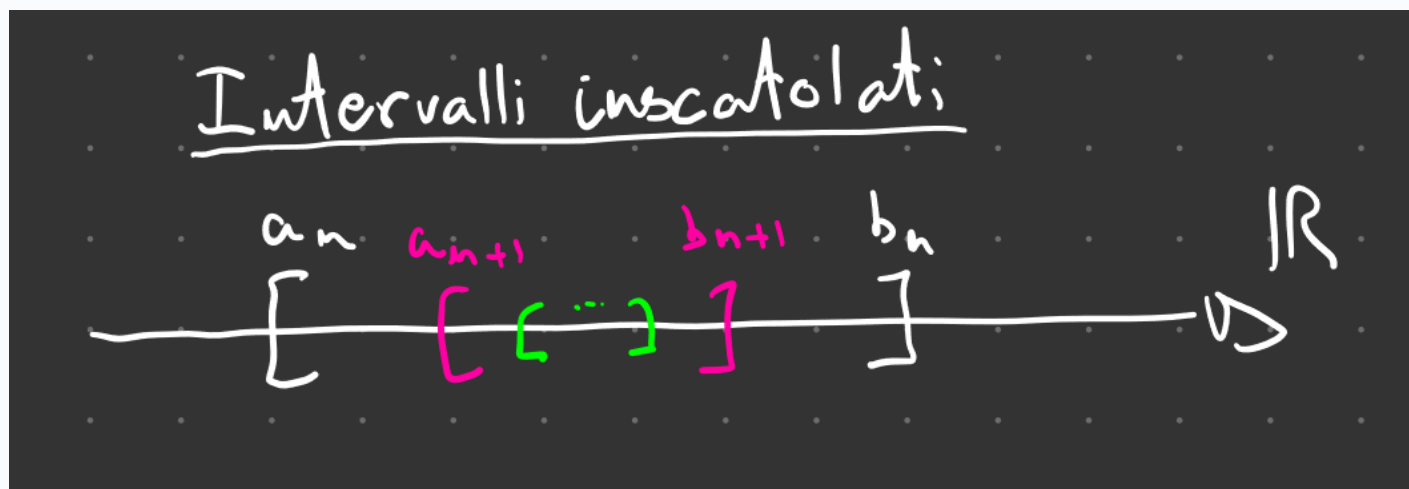
(quindi è un *intervallo chiuso e limitato*)

3.1. Intervalli inscatolati e dimezzati

DEF 3.1.1. Gli intervalli si dicono **inscatolati** se

$$\forall n, I_{n+1} \subseteq I_n$$

ovvero graficamente



DEF 3.1.2. Una *successione di intervalli* $(I_n)_n$ si dice di *intervalli chiusi, inscatolati* e **dimezzati** se

$$\forall n, I_{n+1} \subseteq I_n$$

ove il nuovo sottoinsieme ha gli elementi

$$I_{n+1} = [a_n, \frac{a_n + b_n}{2}] \text{ oppure } [\frac{a_n + b_n}{2}, b_n]$$

OSS 3.1.2.1. Notiamo che se prendiamo un

$$I_n = [a_n, b_n] = [a_{n-1}, \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}]$$

allora la *distanza* tra a_n e b_n è

$$a_n - b_n = \frac{2a_{n-1} - a_{n-1} - b_{n-1}}{2} = \frac{a_{n-1} - b_{n-1}}{2}$$

ovvero la *"metà della lunghezza del segmento di prima, ovvero $a_{n-1} - b_{n-1}$ "*.

Insiemi limitati, maggioranti, massimo e teorema dell'estremo superiore

1. Insiemi limitati

DEF 1.1. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, si dice un insieme **limitato superiormente** se

$$\exists M \in \mathbb{R} : \forall a \in A; a \leq M$$

Graficamente, un insieme *limitato superiormente* si rappresenta così:



ESEMPIO 1.1.1. Considero $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 3x + 1 = 0\}$.

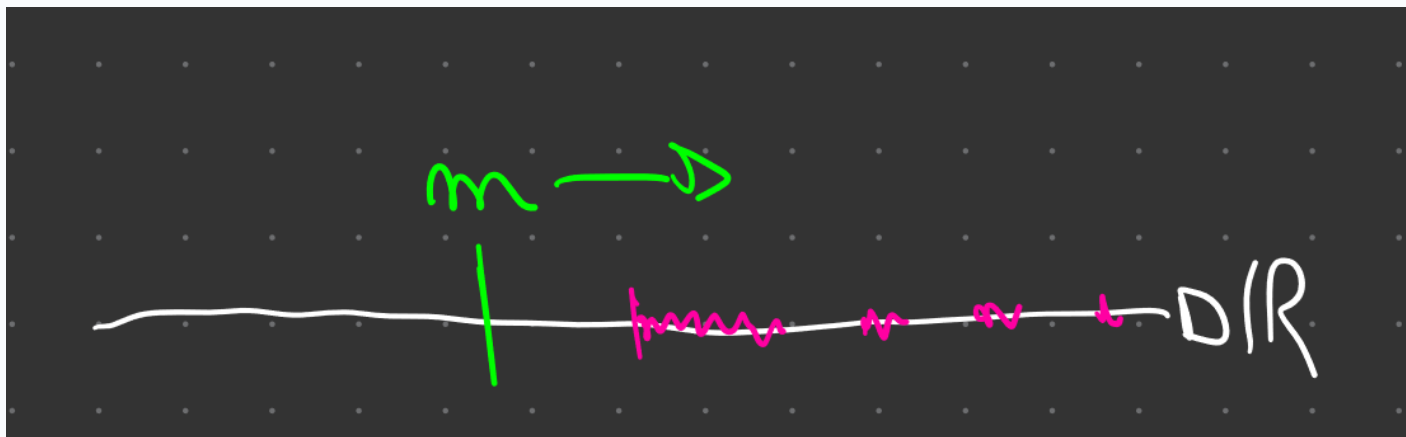
A è *limitato superiormente*, in quanto risolvendo A otteniamo l'insieme

$A = \{\frac{-3-\sqrt{5}}{2}, \frac{-3+\sqrt{5}}{2}\}$, e scegliendo $M = 0$ si ha che entrambi elementi di A sono minori di 0.

DEF 1.2. $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice un insieme **limitato inferiormente** se

$$\exists m \in \mathbb{R} : \forall a \in A; a \geq m$$

Graficamente,



DEF 1.3. $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice **limitato** se è sia limitato *superiormente* che *inferiormente*.

ESEMPIO 1.3.1. $[a, b]$ è limitato.

Infatti se si scelgono $M = b, n = a$ per definizione risulta vero che questo *intervallo* è *limitato*.

OSS 1.3.1. Se A è *limitato* $\iff \exists R > 0$ tale che

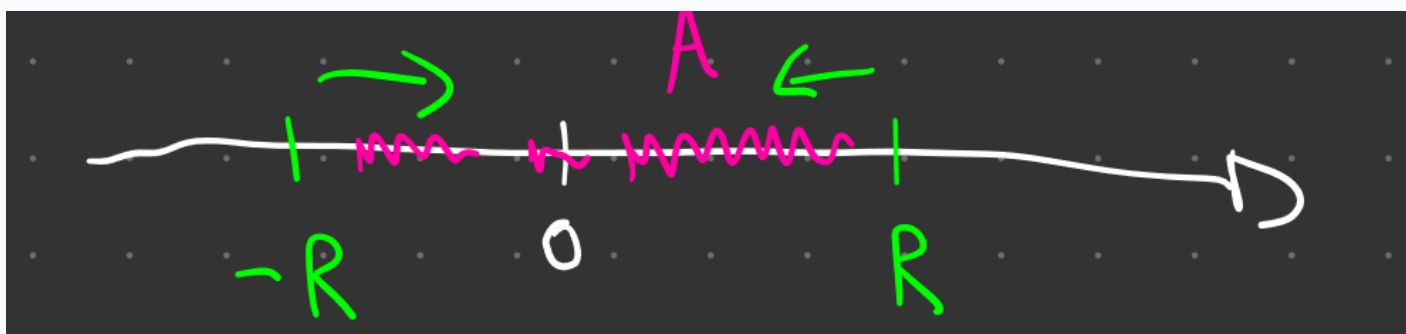
$$A \subseteq [-R, R]$$

DIM. Da quanto visto in *Connettivi*, basta dimostrare che entrambe le implicazioni sono vere; ovvero

1.

$$\exists R : A \subseteq [-R, R] \implies A \text{ è limitato}$$

che graficamente rappresenta

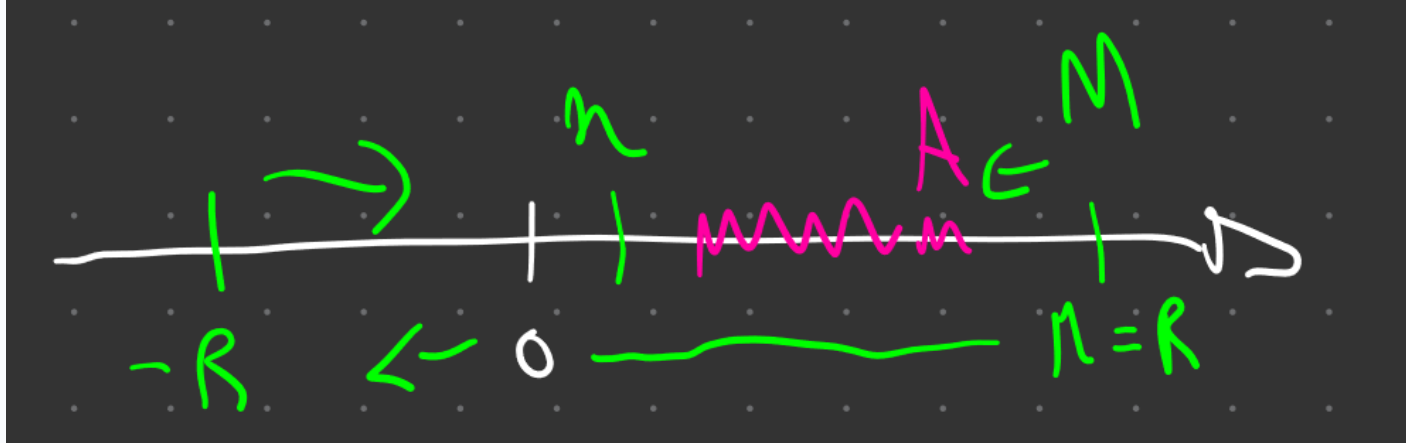


quindi è vera

1.

$$A \text{ è limitato} \implies \exists R : A \subseteq [-R, R]$$

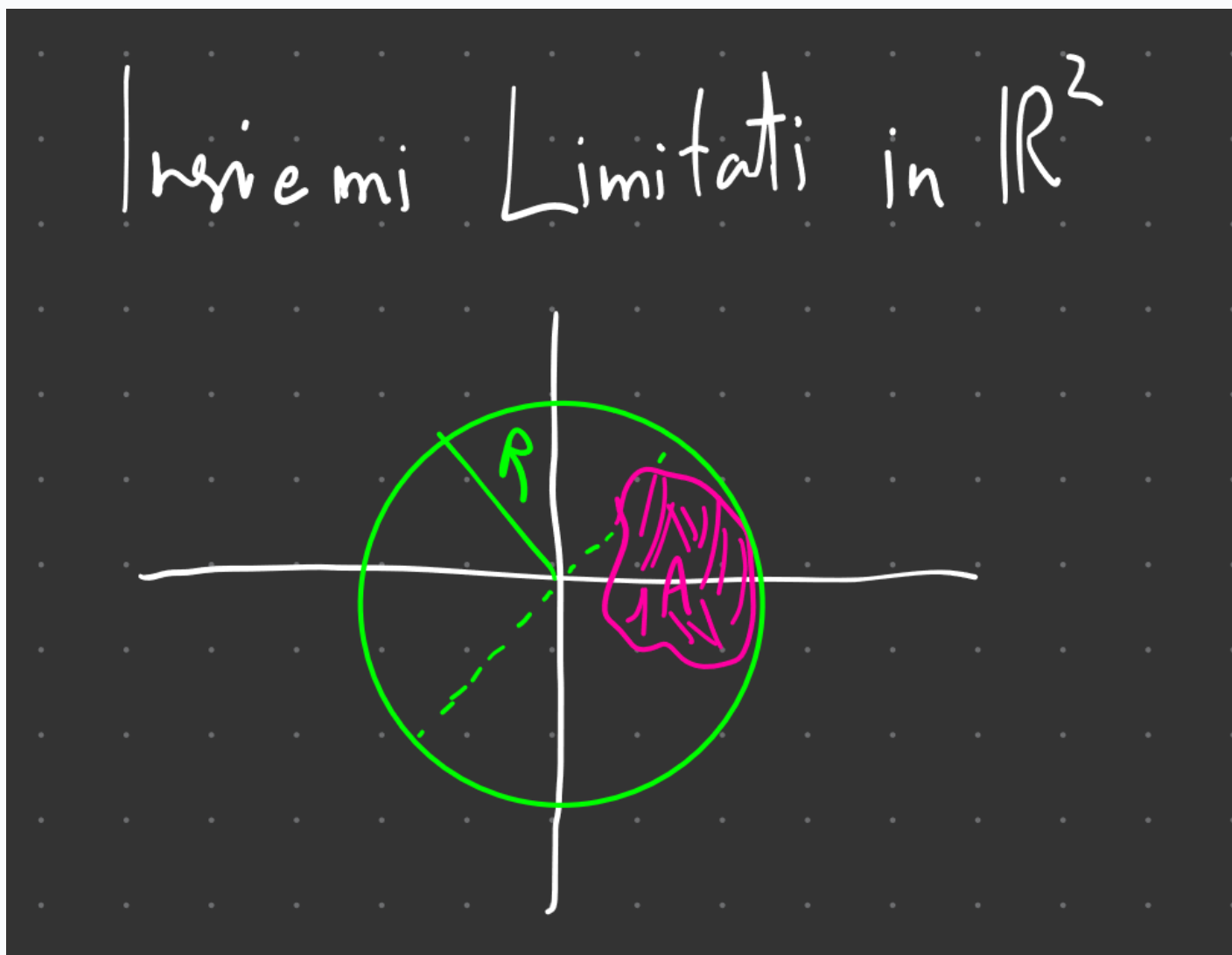
che graficamente rappresenta



quindi anche questa è vera.

OSS 1.3.2. Vorrei trovare un modo per definire gli *insiemi limitati* su un piano π . E' possibile definirlo tramite il seguente: "Se riesco a mettere l'insieme A all'interno di una sfera di raggio R , allora esso è limitato."

Graficamente,



DEF 1.4. Un insieme A si dice *superiormente illimitato* quando neghiamo che A è superiormente limitato; ovvero

$$\neg(\exists M \in \mathbb{R}, \forall a \in A, a \leq M)$$

ovvero

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists a \in A : a > M$$

che graficamente vuol dire che ad ogni M_n che fissiamo, esiste *sempre* un valore a_n che è più grande di M .



Il discorso è analogo per *insiemi inferiormente illimitati* e *insiemi illimitati*.

2. Maggioranti, massimi; minoranti e minimi

Maggioranti e minoranti

DEF 2.1. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $M \in \mathbb{R}$.

Se $\forall a \in A, a \leq M$, (ovvero A è *limitato inferiormente*) il valore M si dice un **maggiorante di A** .

DEF 2.2. Analogamente, se $A \subseteq \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{R}$, m è **minorante di A** quando $\forall a \in A, m \leq a$.

Massimi e minimi

DEF 2.3. Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$, se:

- μ è maggiorante di A e
 - $\mu \in A$
- allora μ è il **massimo di A** .

$$\mu := \begin{cases} \mu \in A \\ \forall a \in A, a \leq \mu \end{cases}$$

DEF 2.4. Analogamente, se $A \subseteq \mathbb{R}$ e $\nu \in \mathbb{R}$, allora definisco il **minimo di A** :

$$\nu := \text{minimo di } A = \begin{cases} \nu \in A \\ \forall a \in A, a \geq \nu \end{cases}$$

OSS 2.1. Sia A un insieme *limitato inferiormente*.

Suppongo che esistano due massimi di A , μ_1, μ_2 ; si avrebbe allora $\mu_1 = \mu_2$, in quanto può esistere *solo* il *massimo* di A .

DIM. Per assurdo suppongo che $\mu_1 \neq \mu_2$. Per definizione del *massimo*,

$$\begin{cases} \mu_1 \implies \forall a \in A, a \leq \mu_1 \\ \mu_2 \implies \mu_2 \in A \end{cases} \implies \mu_2 \leq \mu_1 \quad (1)$$

e

$$\begin{cases} \mu_1 \implies \mu_1 \in A \\ \mu_2 \implies \forall a \in A, a \leq \mu_2 \end{cases} \implies \mu_1 \leq \mu_2 \quad (2)$$

Quindi combinando le (1) e (2), abbiamo

$$(\mu_2 \leq \mu_1) \wedge (\mu_1 \leq \mu_2) \iff \mu_1 = \mu_2 \blacksquare$$

Il discorso è analogo per il *minimo* di A .

ESEMPIO 2.A. Consideriamo l'intervallo

$$A =]1, 2[$$

ci chiediamo se questo intervallo ha *maggioranti e/o minorante* e se ha *massimo e/o minimo*.

1. A ha sia *maggioranti* che *minoranti*, infatti possiamo porre $M = 2$ e $m = 1$; ma possiamo anche porre $M = 3$ e $m = 0$.

Allora *definiamo* l'insieme dei maggioranti di A ,

$$A^* := \{\text{maggioranti di } A\} = [2, +\infty[$$

e l'insieme dei minoranti di A ,

$$A_* := \{\text{minoranti di } A\} =]-\infty, 1]$$

2. Però A non ha né *massimi* né *minimi*.

Infatti devo provare che se $x \in A$, allora x NON può essere il *massimo di* A .

Tracciando l'intervallo A e segnando un punto x all'interno, riesco a trovare un elemento più grande di x ? Sì, se considero la media aritmetica tra x e 2. Infatti

$$x < \frac{x+2}{2} < 2$$

Analogo il discorso per i *minimi*

3. Estremi superiori e inferiori

l'esempio 2.A. di prima, abbiamo un problema interessante; ovvero "gli insiemi limitati hanno sempre massimo e minimo?".

La risposta è *no*, da quanto visto prima; però è interessante osservare che esiste sempre il "*miglior*" maggiorante e il "*miglior*" minorante. Ora li vediamo.

DEF 3.1. Sia A superiormente limitato.

Chiamo **l'estremo superiore di A** il *minimo* dell'insieme dei *maggioranti di A* (A^*).

DEF 3.2. Sia A inferiormente limitato.

Chiamo **l'estremo inferiore di A** il *massimo* dell'insieme dei *minoranti di A* (A_*).

4. Teoremi sugli estremi superiori (e inferiori)

TEOREMA 4.1. (*Teorema dell'esistenza dell'estremo superiore*)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, e A *superiormente limitato*, allora

$$\exists \xi \in \mathbb{R} : \xi \text{ è estremo superiore di } A$$

DIM. Per ipotesi, abbiamo $A \subseteq \mathbb{R}$ e $A \neq \emptyset$.

Sia quindi $A^* = \{\text{maggioranti di } A\}$; allora $A^* \neq \emptyset$ (in quanto A è non vuoto).
e per definizione del maggiorante di A ,

$$\forall a \in A, \forall b \in A^*, a \leq b$$

Osservo quindi che posso applicare *l'assioma di Dedekind (o di separazione)* per gli insiemi A e A^* . Pertanto

$$\exists \xi : \forall a \in A, \forall b \in A^*; a \leq \xi \leq b$$

In particolare $a \leq \xi$ vuol dire che ξ è *maggiorante di A* ;
e $\xi \leq b$ vuol dire che ξ è il *minimo* dei *maggioranti di A* .
Quindi, per definizione ξ è l'*estremo superiore di A* . ■

ESERCIZIO 4.1. Dimostrare che se $A \neq \emptyset$ e A è inferiormente limitato, allora

$$\exists \eta \in \mathbb{R} : \eta \text{ è l'estremo inferiore di } A$$

Dato che per ipotesi A è non vuota ed è inferiormente limitata, allora sicuramente

$$\forall a \in A, \forall b \in A_*, b \leq a$$

per la definizione di minorante. Osserviamo che si può applicare l'assioma *S*);
quindi sicuramente

$$\exists \eta \in \mathbb{R} : b \leq \eta \leq a$$

Ovvero η è il massimo di A_* ed è un minorante di A . Ovvero *l'estremo inferiore di A*

TEOREMA 4.2. (le proprietà dell'estremo superiore $\sup A$)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\alpha = \sup(A) \iff \begin{cases} \forall a \in A, a \leq \alpha & (1) \\ \forall \varepsilon > 0, \exists \bar{a} \in A : \bar{a} > \alpha - \varepsilon & (2) \end{cases}$$

In parole semplici, la (1) vuol dire che α è un maggiorante di A ; la (2) invece vuol dire che per qualsiasi valore ε positivo, allora $\alpha - \varepsilon$ non è maggiorante di A .

DIM. Sia $\alpha = \sup(A)$, cioè se è il *minimo dei maggioranti* di A .

Ma allora innanzitutto α è un *maggiorante di* A (1)

Ma quindi α è il *minimo dei maggioranti di* A ; quindi se sottraggo ad A qualsiasi valore positivo, non è più un maggiorante di A . Pertanto scrivo

$$\forall \varepsilon > 0, \neg(\forall a \in A, a \leq \alpha - \varepsilon) \\ \exists a \in A : a > \alpha - \varepsilon$$

ovvero la (2). ■

Volendo si può ragionare anche viceversa, partendo dai presupposti (1) e (2) e verificando che vogliono dire le stesse cose.

TEOREMA 4.2.1. (versione $\inf A$)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, $\beta \in \mathbb{R}$.

$$\beta = \inf(A) \iff \begin{cases} \forall a \in A, a \geq \beta & (1) \\ \forall \varepsilon > 0, \exists \bar{a} \in A : \bar{a} < \beta + \varepsilon & (2) \end{cases}$$

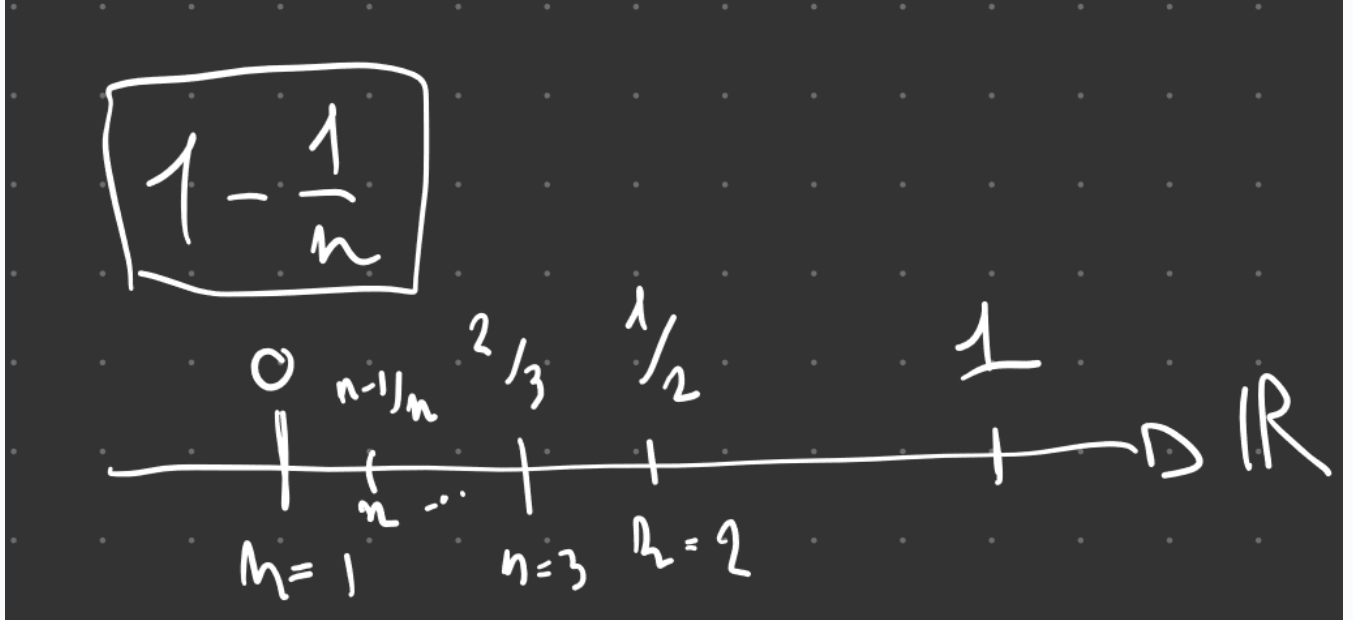
5. Esempio generale

ESEMPIO 5. Considero

$$A = \left\{ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, 1 - \frac{1}{n} \right\}$$

Voglio trovare le seguenti: $\sup(A)$, $\inf(A)$, $\max(A)$, $\min(A)$.

1. Il primo passo è quello di fare un disegno che rappresenta per poter "visualizzare" l'insieme A .



Quindi vediamo che

$$A = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots, \frac{n-1}{n}\}$$

2. A è quindi limitato, da quanto si può evincere dal disegno; infatti scegliamo $m = 0$, $M = 1$.
3. Siccome $A \neq \emptyset$, per il [teorema 4.1](#). (o [esercizio 4.1](#). per esattezza), posso trovare $\inf A$ e $\min A$;

$$\min(A) = \inf(A) = 0$$

In quanto, per il [teorema 4.2](#).

$$\begin{cases} 0 \leq 1 - \frac{1}{n}, \forall n \\ \forall \varepsilon > 0, x + \varepsilon \text{ non è minorante di } A \end{cases}$$

4. Possiamo trovare il [maggiorante](#) 1. Questo in quanto

$$\forall n, n-1 < n \implies \forall n, \frac{n-1}{n} < 1 \iff \forall n, 1 - \frac{1}{n} < 1$$

In particolare si verifica che è l'[estremo superiore](#).

Però se si sceglie $\alpha < 1$, sicuramente (per la [proprietà di Archimede](#)????) si verifica

$$\exists n : \alpha < 1 - \frac{1}{n} < 1$$

ovvero per qualunque $\alpha < 1$ si scelga, esiste un n abbastanza grande da poter superare α .

5. Quindi $\sup(A) = 1$ e non esiste $\max(A)$.

OSS 5.1. Se un insieme ha un [minimo](#) \min (o [massimo](#) \max), allora tale valore è [l'estremo inferiore](#) \inf (o [estremo superiore](#) \sup). Però il contrario non deve

necessariamente valere, come visto sopra.

Conseguenze dell'esistenza dell'estremo superiore

Alcuni importanti dei numeri reali \mathbb{R} come conseguenza del teorema dell'esistenza dell'estremo superiore, numeri naturali \mathbb{N} come sottoinsieme di \mathbb{R} , proprietà di Archimede, " $\frac{1}{n}$ diventa piccolo quanto si vuole", densità di \mathbb{Q} in \mathbb{R} . Intervalli chiusi, limitati, inscatolati e dimezzati; teorema di Cantor, forma forte del teorema di Cantor

0. Preambolo

Osservando [Insiemi limitati, maggioranti, massimo e teorema dell'estremo superiore](#), notiamo che per qualunque insieme *superiormente limitato* deve esistere un *estremo superiore*. Da questo discendono a cascata una serie di proprietà (o teoremi) importanti.

1. \mathbb{N} è superiormente illimitato

TEOREMA 1.1. \mathbb{N} è superiormente illimitato. Ovvero *non è superiormente limitato*. Infatti nei numeri reali \mathbb{R} possiamo trovare i numeri naturali \mathbb{N} .

DIMOSTRAZIONE.

Per assurdo suppongo che esista un $M \in \mathbb{R}$ maggiorante di \mathbb{N} tale che

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \leq M$$

Quindi \mathbb{N} è sia non vuoto che superiormente limitato. Da ciò (secondo il teorema dell'esistenza dell'estremo superiore) discende che esista il superiore estremo ξ ;

$$\exists \xi \in \mathbb{R} : \xi = \sup(\mathbb{N})$$

Ora applico la *proprietà (2) degli estremi superiori con $\varepsilon = 1$; ovvero*

$$\exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \bar{n} > \xi - 1$$

Ma allora

$$\bar{n} + 1 > \xi = \sup(\mathbb{N})$$

il che è assurdo in quanto si troverebbe un numero che supera l'*estremo superiore*. ■

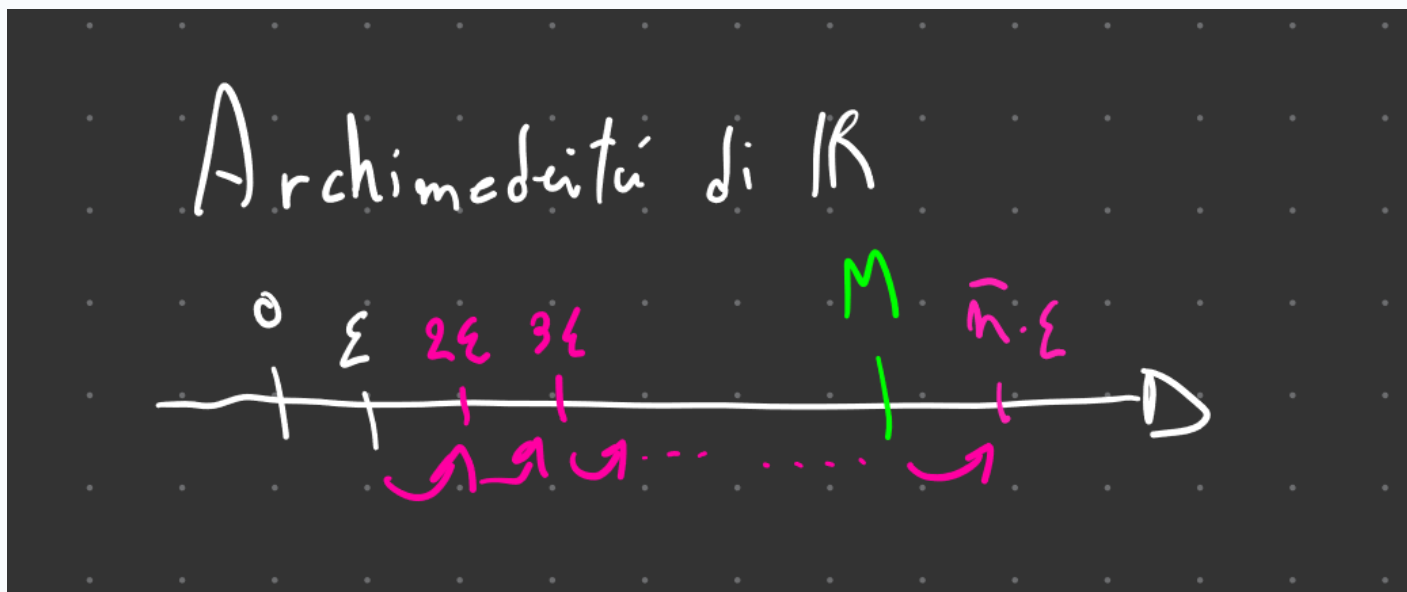
2. Proprietà di Archimede; Archimedeità di \mathbb{R}

TEOREMA 2.1. Siano $\varepsilon, M \in \mathbb{R}$ ove $\varepsilon > 0$, $M > 0$ (l'idea sarebbe che ε è un numero *arbitrariamente piccolo*, M invece un numero *arbitrariamente grande*), allora vale la seguente:

$$\exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \bar{n} \cdot \varepsilon > M$$

Ovvero prendendo un piccolo arbitrariamente piccolo ε e possibile farlo sommare \bar{n} volte e superare il numero arbitrariamente grande M .

Rappresentazione grafica:



DIMOSTRAZIONE.

Suppongo (per assurdo) che questo teorema non è vero; ovvero negandolo, abbiamo

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \cdot \varepsilon < M$$

ovvero non saremo mai in grado di superare M .

Allora definendo E l'insieme di tutti i numeri "*ottenuti*" sommando ε a se stesso n volte,

$$E = \{ \forall n \in \mathbb{N}, n \cdot \varepsilon \}$$

questo è *superiormente limitato* per supposizione (anche non vuoto).

Sia allora

$$\xi = \sup E$$

Applico la seconda proprietà dell'*estremo superiore* ξ , con ε quello inserito nella ipotesi, ovvero

$$\exists \bar{n} : \bar{n} \cdot \varepsilon > \xi - \varepsilon$$

ma allora consegue che

$$\varepsilon(1 + \bar{n}) > \xi$$

che implicherebbe l'esistenza di un numero moltiplicato per ε che supera $\xi = \sup E$, il che è un assurdo. ■

3. $\frac{1}{n}$ diventa piccolo quanto si vuole

TEOREMA 3.1.

Sia $\varepsilon > 0$ (un numero piccolo); allora $\exists \bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

ovvero prendendo un numero arbitrariamente piccolo, deve esistere un $\frac{1}{n}$ che sarà ancora più piccolo del numero piccolo scelto.

DIMOSTRAZIONE.

Considero *la proprietà di Archimede* (**TEOREMA 2.1.**) ove fisso $\varepsilon > 0$ e $M = 1$. Pertanto,

$$\exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \varepsilon \cdot \bar{n} > 1(> 0)$$

Ora, dividendo per \bar{n} da ambo le parti

$$\varepsilon > \frac{1}{\bar{n}} > 0$$

■

4. Densità di \mathbb{Q} in \mathbb{R}

TEOREMA 4.1.

Si dice che \mathbb{Q} è *denso* in \mathbb{R} ; ovvero siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, allora esiste $q \in \mathbb{Q}$ tale che

$$a < q < b$$

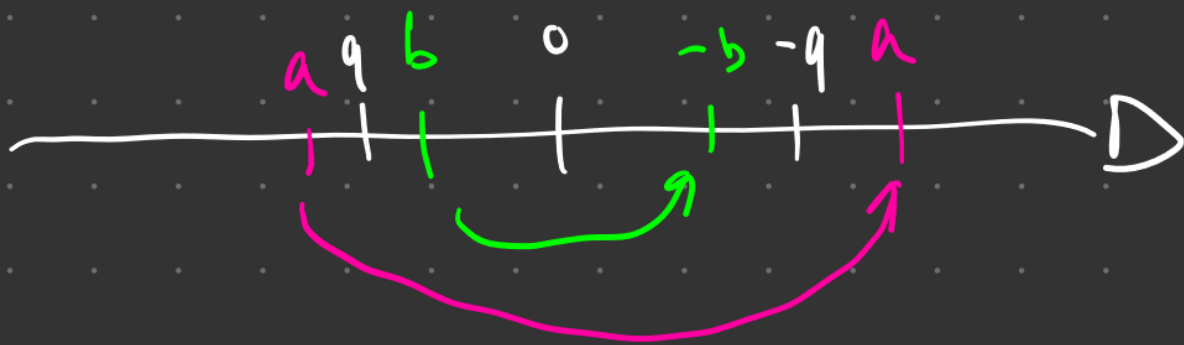
quindi tra due numeri reali a, b possiamo sempre trovarci un numero razionale in mezzo.

DIMOSTRAZIONE.

Per la dimostrazione tratteremo di tre casi distinti; ovvero

1. Quando $a < 0 < b$ non c'è nulla da dimostrare, in quanto abbiamo già $q = 0$.
2. Quando $a < b < 0$ allora possiamo invertire i segni, ottenendo il seguente grafico:

Densità di \mathbb{Q} in \mathbb{R}



Quindi $q = -\frac{k}{n}$, che troveremo, va bene.

3. Quando $0 < a < b$, l'unico caso da trattare:

Innanzitutto chiamo la distanza tra i due punti $\varepsilon = b - a$ (e per forza dev'essere maggiore di 0, in quanto $b > a > 0$).

Dopodiché, usando il **TEOREMA 3.1.**, abbiamo che

$$0 < \frac{1}{n} < \varepsilon = b - a$$

Ora, per il **principio di Archimede** (**TEOREMA 2.1.**), abbiamo (con $\varepsilon = \frac{1}{n}$ e $M = a$) che

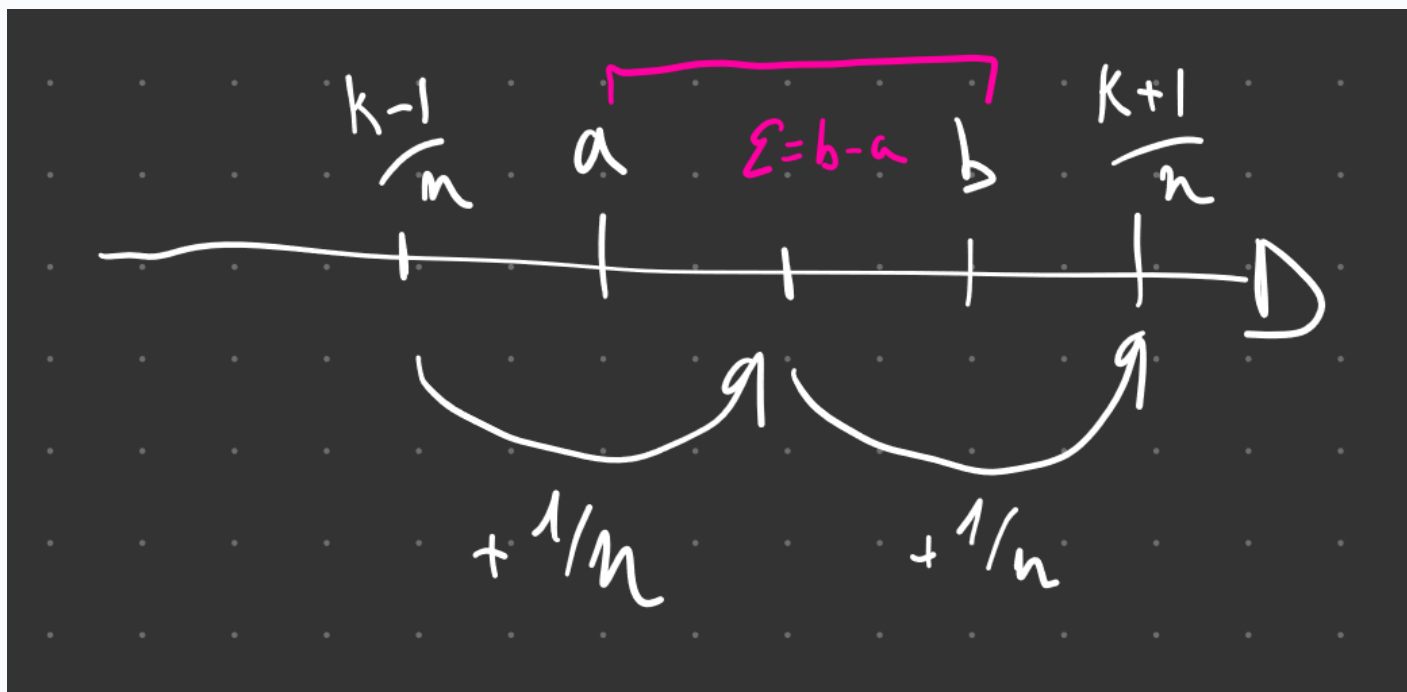
$$\exists k : \frac{k}{n} > a$$

Quindi, aggiungendo a da tutte le parti e considerando l'ultimo punto ho,

$$a < \frac{k}{n} < b$$

e sicuramente so che non può essere che $\frac{k}{n} > b$ in quanto $\frac{1}{n} < b - a$. (ovvero il salto per arrivare a b sarebbe troppo "grande")

Graficamente,



5. Teorema di Cantor

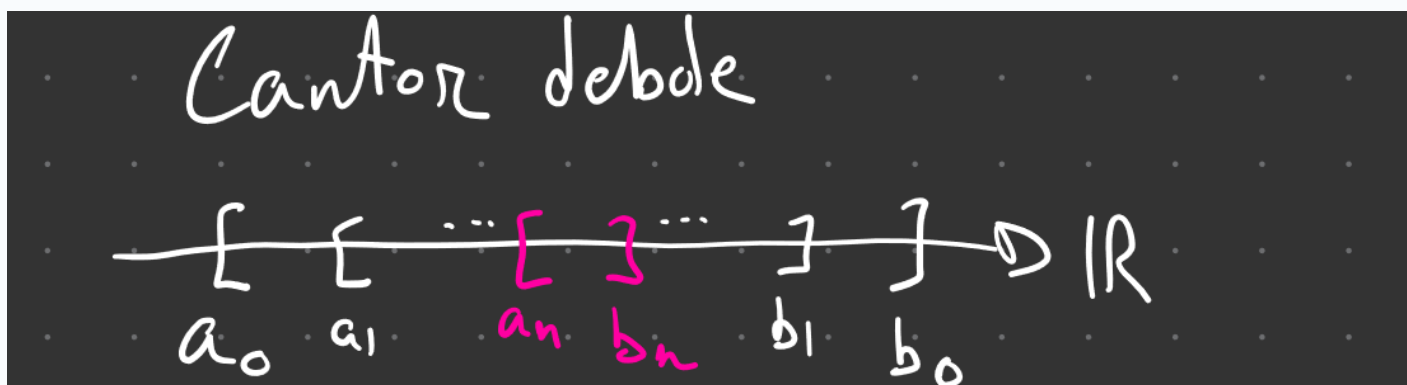
Considerando gli **intervalli chiusi, limitati, inscatolati e dimezzati**, abbiamo il seguente teorema.

TEOREMA 5.1. Forma debole del teorema di Cantor

Sia $(I_n)_n$ una successione di intervalli **chiusi, limitati e inscatolati**; allora l'intersezione di tutti gli intervalli è non-vuota;

$$\bigcap_n I_n \neq \emptyset$$

OSS 5.1.1. Tutti gli intervalli si rappresentano graficamente nel seguente modo:



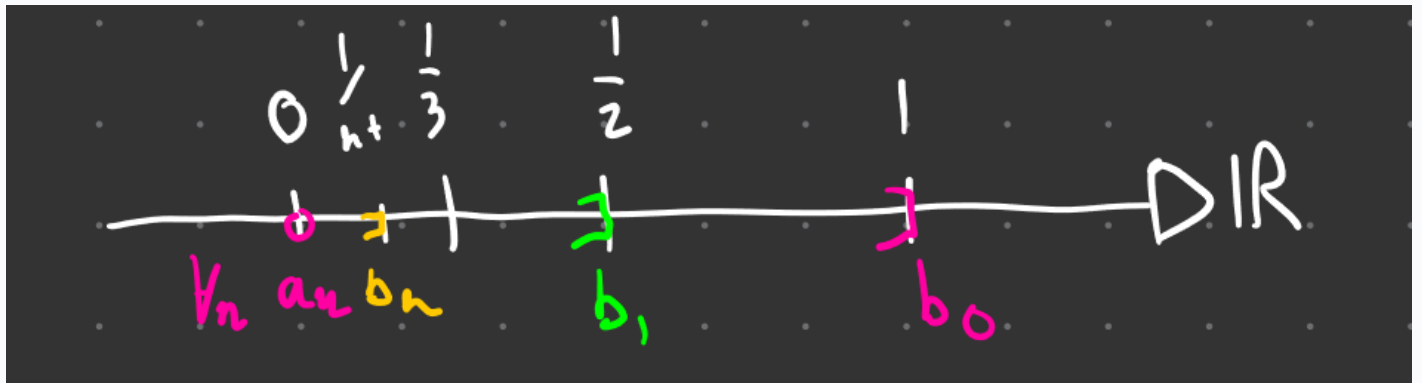
OSS 5.1.2. Notiamo che il fatto che gli intervalli **debbono essere chiusi** è una condizione necessaria al **TEOREMA 5.1.**; infatti troviamo un **controesempio** per cui non vale il **TEOREMA 5.1.** quando consideriamo insiemi **aperti** o **illimitati**.

ESEMPIO 5.1.2.1.

Consideriamo gli intervalli

$$I_0 =]0, 1] ; I_1 =]0, \frac{1}{2}] ; \dots ; I_n =]0, \frac{1}{n+1}]$$

Che graficamente viene rappresentato come



Notiamo che l'intersezione di tutti gli intervalli in questo caso viene \emptyset ;

$$\bigcap_n I_n = \emptyset$$

DIMOSTRAZIONE.

Consideriamo i seguenti due casi:

1. Se $x \leq 0$, allora x automaticamente non sta all'interno di nessun intervallo I_n .
2. Se $x > 0$, allora per la **proprietà di Archimede** (**TEOREMA 2.1.**)

$$\exists n \in \mathbb{N} : x > \frac{1}{n+1} > 0$$

allora x sta al di fuori dell'intervallo

$$x \notin]0, \frac{1}{n+1}]$$

Pertanto non ci sono elementi comuni, rendendo l'intersezione di tutti gli intervalli l'insieme vuoto \emptyset .

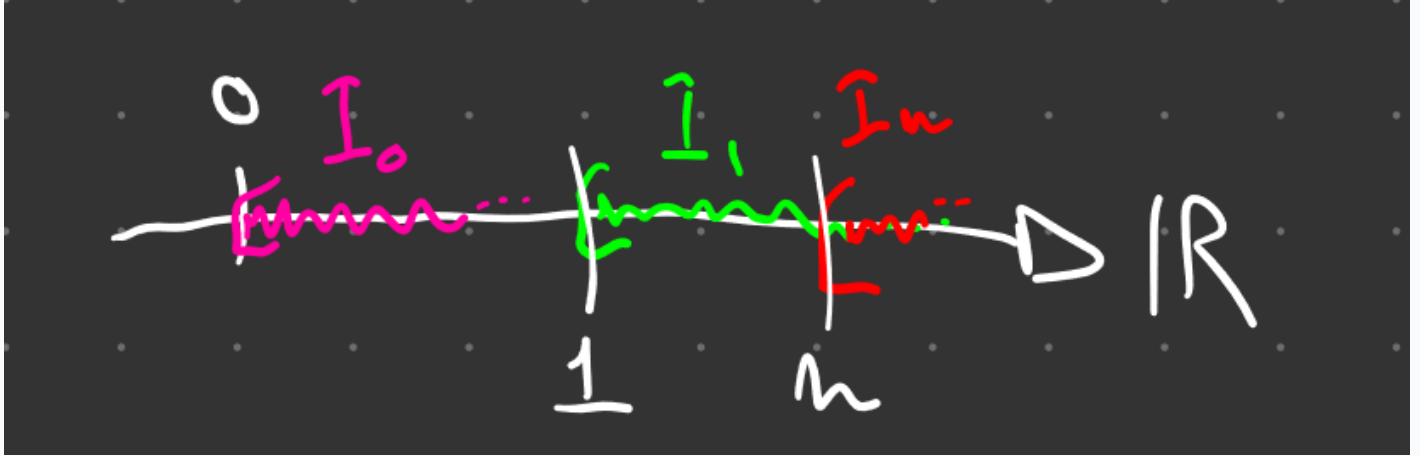
- - -

ESEMPIO 5.1.2.2. Consideriamo ora degli intervalli *illimitati* (ovvero *non limitati*); di nuovo il teorema non vale.

Ho

$$I_n = [n, +\infty[$$

Che graficamente viene rappresentato mediante



Supponiamo di scegliere un punto x nell'intorno I_n (ovvero ≥ 0); allora per *la proprietà di Archimede* (**TEOREMA 2.1.**) esisterà un intorno I_{n+1} che lo supera. Quindi se ad ogni punto $x \geq 0$ fissiamo un intorno I_x vi è sempre un intorno I_k che supera quel punto fissato; pertanto l'intersezione di tutti gli insiemi è \emptyset .

$$\bigcap_n I_n = \emptyset$$

DIMOSTRAZIONE.

Consideriamo gli insiemi A come gli "*estremi sinistri*" e B come gli "*estremi destri*".

$$A = \{a_n, n \in \mathbb{N}\}$$

$$B = \{b_n, n \in \mathbb{N}\}$$

Inoltre ho

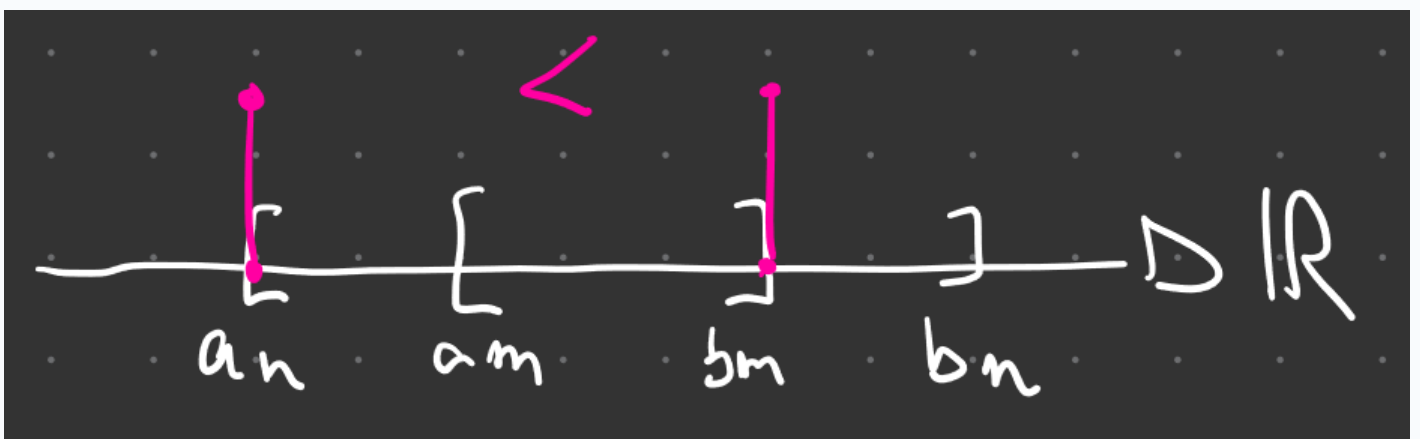
$$\forall n, \forall m; \quad a_n \leq b_m$$

$$b_m \geq a_n$$

SUBDIMOSTRAZIONE.

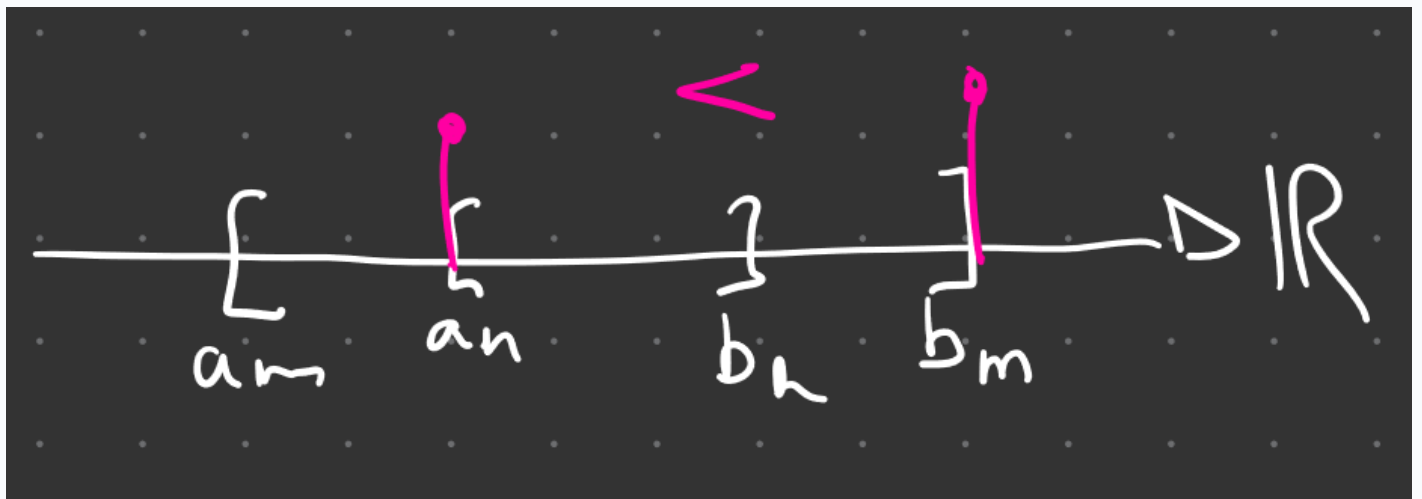
Se si vuole verificare la "proprietà" appena enunciata, allora si può considerare due casi:

1. $n \leq m$; si avrebbe $[a_m, b_m] \subseteq [a_n, b_n]$; che graficamente equivale a



pertanto è intuibile che $b_m \geq a_n$.

2. $n > m$; si avrebbe in questo caso $[a_n, b_n] \subseteq [a_m, b_m]$ che graficamente equivale a



stesso discorso di prima; intuibile che $b_m \geq a_n$.

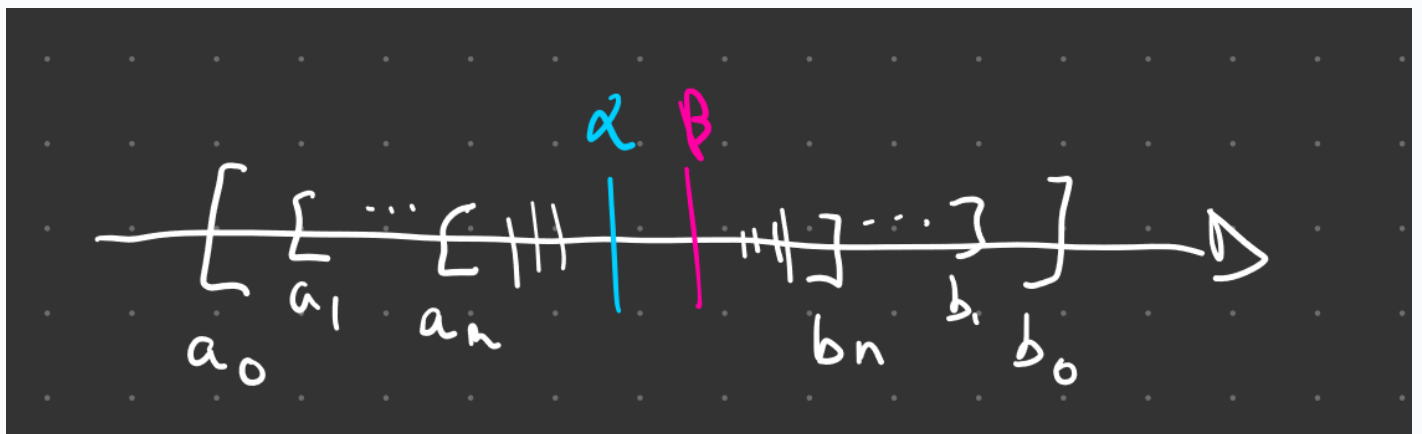
Ora chiamo $\alpha = \sup A$, il quale è garantito in quanto A è *limitato superiormente* (infatti abbiamo dalla proprietà appena enunciata abbiamo che b_m è il *maggiorante* di a_n)

Dato che abbiamo il *minorante* dei *maggioranti* di A (ovvero α), da qui segue che B è *inferiormente limitato*. (oppure dato che $a_n \leq b_m \iff b_m \geq a_n$)

Allora chiamo $\beta = \inf B$ e ho

$$\beta \geq \alpha$$

Graficamente ho



Io ho quindi

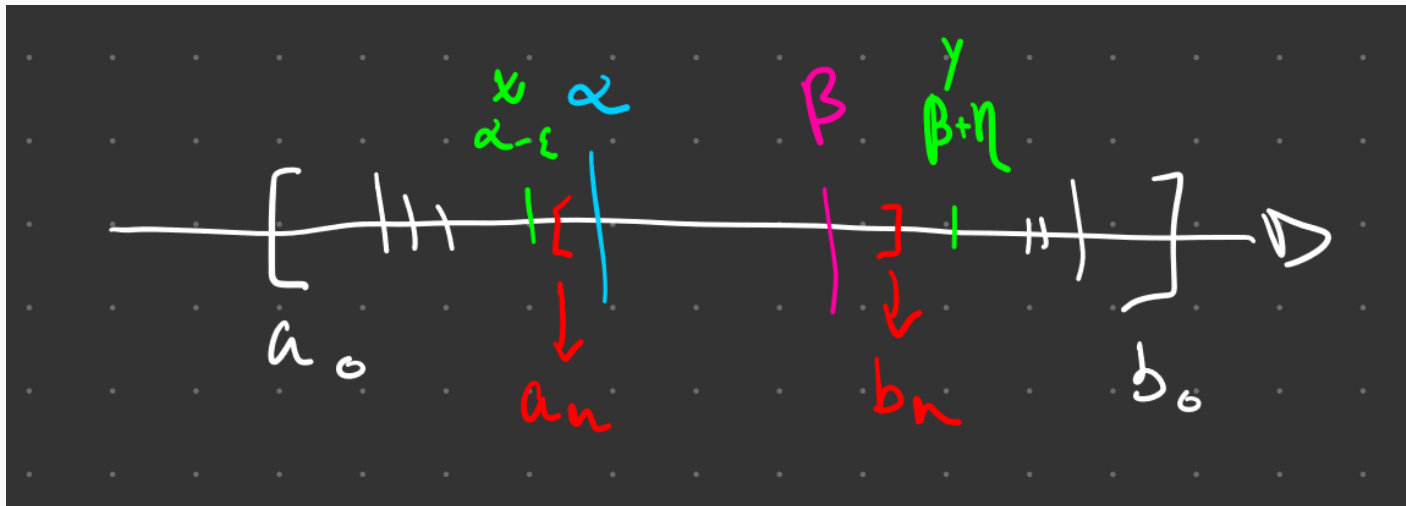
$$[\alpha, \beta] \subseteq [a_n, b_n], \forall n$$

Allora

$$[\alpha, \beta] \subseteq \bigcap_n I_n \implies \bigcap_n I_n \neq \emptyset$$

Anzi, sapendo dalla *seconda proprietà degli estremi superiori* (o *estremi inferiori*) abbiamo che se scegliamo un $x = \alpha - \varepsilon$ (per un $\varepsilon > 0$), allora esiste un a_n tale che $a_n > x$; di conseguenza x sta al di fuori dell'intervallo $[a_n, b_n]$; analogamente se

scegliamo un $y = \beta + \eta$ (per un $\eta > 0$), allora esiste un b_n tale che $y > b_n$.
Graficamente,



Di conseguenza

$$x, y \notin [a_n, b_n]$$

Pertanto si può sicuramente affermare che

$$\bigcap_n I_n = [\alpha, \beta]$$

TEOREMA 5.2. Forma forte del teorema di Cantor

Sia $(I_n)_n$ una successione di intervalli *chiusi, limitati, inscatolati e dimezzati*; allora l'intersezione di tutti gli intervalli deve contenere un unico punto ξ ;

$$\exists \xi \in \mathbb{R} : \bigcap_n I_n = \{\xi\}$$

DIMOSTRAZIONE.

La *forma debole dello stesso teorema* (**TEOREMA 5.1.**) mi dice che

$$\bigcap_n I_n = [\alpha, \beta]$$

dove α è l'estremo superiore degli "*estremi sinistri*" a_n e β l'estremo inferiore degli "*estremi destri*" b_n .

Ora, considerando che gli insiemi sono pure *dimezzati*, so che (**OSS 3.1.2.1., Intervalli**):

$$\begin{aligned}
 b_n - a_n &= \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} \\
 &= \frac{b_{n-2} - a_{n-2}}{2^2} \\
 &\dots \text{andando avanti finchè si raggiunge } n \dots \\
 &= \frac{b_0 - a_0}{2^n}
 \end{aligned}$$

Ora mi ricordo che $n \leq 2^n$ (che può essere dimostrata per *induzione*)

Allora si può "*maggiorare*" l'espressione di prima, ovvero

$$a_n - b_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n} \leq \frac{b_0 - a_0}{n}$$

ovviamente ricordandosi di cambiare il segno in quanto i numeri li troviamo al denominatore.

Ora, supponendo per assurdo che $\alpha < \beta$ ovvero nel senso che l'intervallo $[\alpha, \beta]$ ha almeno più di un elemento, allora avremmo che

$$\forall n, \frac{b_0 - a_0}{n} \geq b_n - a_n \geq \beta - \alpha > 0$$

ovvero

$$\forall n, \frac{b_0 - a_0}{n} \geq \beta - \alpha > 0$$

che però per **TEOREMA 3.1.** è impossibile, ovvero nel caso che abbiamo ora stiamo descrivendo che esiste un punto $\beta - \alpha$ maggiore di 0 che non è raggiungibile da $\frac{b_0 - a_0}{n}$ (quando invece è vero che tutti i punti > 0 sono raggiungibili da tale espressione).

Quindi, per assurdo, raggiungiamo alla conclusione che

$$\beta = \alpha$$

ovvero abbiamo l'intorno

$$[\beta, \beta] \text{ o } [\alpha, \alpha]$$

che comprendono solo il punto ξ . ■