# Richiami di Algebra - Sommario

*Alcuni richiami di algebra propedeutici, tra cui la nozione e il significato dell'equazione, della soluzione all'equazione. Appunti di ALEG il 26.09.2023*

---

# Equazioni e soluzione

### Equazioni e soluzione

*Cos'è un equazione? Una soluzione? Definizioni intuitive di questi concetti.*

---

# Equazione

Una definizione intuitiva di un'equazione può essere una domanda, a cui si presuppone di avere una risposta. Si illustra il concetto mediante un esempio.
**ESEMPIO 1.** L'equazione $x^2+2x+1=0$ è un modo di formalizzare la seguente domanda: *"Qual è quel numero", che indicheremo con* ***x****, tale che se calcolo* $x^2+2x+1$ *, esso è zero?"*
In questa domanda ci sono dei assunti che si presumono veri, per esempio ci si presuppone che c'è solo un numero che soddisfi alla risposta, oppure che la risposta sia un numero.

# Soluzione ad un'equazione

Se l'equazione è una domanda a cui si può dare una risposta, allora la soluzione di un'equazione non è che altro una risposta corretta alla domanda; dunque è un numero.
**ESEMPIO 2.** La soluzione dell'**esempio 1** (vedi sopra) è $-1$, in quanto sostituendo la $x$ nell'espressione $x^2+2x+1=0$ con $-1$, si avrebbe $0=0$, che è corretto.

Pertanto si capisce che il metodo **non** conta, dato che la quantità che si ottiene al *membro sinistro* (ovvero a sinistra del simbolo $=$ dell'equazione) è la medesima del *membro destro* (vedi sopra).

Inoltre, la teoria delle equazioni di 2° grado ci dice che **non** ci sono altre soluzioni e che $x^2+2x+1=(x+1)^2$.

Nel prossimo file si considereranno le Equazioni e Proprietà Lineari, ovvero le equazioni di primo grado, da cui si può osservare delle caratteristiche e delle proprietà peculiari.

## Equazioni e Proprietà Lineari

*Equazioni Lineari*

---

# Equazioni Lineari

Un'equazione lineare è un'equazione algebrica di primo grado.

**ESEMPIO 1.** Consideriamo la seguente equazione:

$$3x+y-2z=0$$

^ex1
Intanto osserviamo che in questa equazione sono presenti tre variabili, ossia $x, y, z$.
Richiamandoci alla definizione della soluzione, risolvere quest'equazione significa determinare una (o tutte) le terne di numeri $(x, y, z)$ tali che, se sostituiamo tali numeri alle variabili nel membro sinistro, si ottiene $0$.
**OSSERVAZIONE 1.1.** Se in un'equazione a una variabile (come nell'Esempio 1.) ci viene chiesto di determinare solo **un** numero, in questo esempio ogni soluzione dev'essere costituito da **tre numeri**; quindi ci viene chiesta una *terna* di numeri, che devono apparire insieme. Il numero che costituisce la terna si chiama *entrata*.
**ESEMPIO 1.1.1.** La terna $(x=0, y=0, z=0)$ è una soluzione all'equazione, infatti $3*0+1*0-2*0=0+0-0=0$
Parimenti, anche la scelta $(x=1, y=1, z=2)$ ovvero la terna $(1,1,2)$ è una soluzione perché $3*1+1*1-2*2=3+1-4=0$.
Similmente anche $(0,2,1)$ è soluzione.

# Sistema di Equazioni Lineari

Un *sistema di equazioni lineari* è costituito da più equazioni lineari; una soluzione viene considerata tale quando soddisfa tutte le equazioni nel

sistema.
**ESEMPIO** Un esempio di equazione lineare che verrà preso in considerazione è la seguente.

$$\begin{cases} 3x + y - 2z = 0 \\ -2x - 2y + 2z = 0 \\ 2x - 0y - z = 0 \end{cases}$$

## Proprietà lineari

C'è un motivo per studiare le equazioni lineari, in quanto emergono dei nuovi comportamenti particolari.
Ora accade che queste ultime 2 soluzioni in *esempio 1.1.1.* (vedi sopra) che abbiamo esibito possiamo costruire delle altre soluzioni, sfruttando le proprietà di base delle operazioni tra numeri, in particolare quella **associativa, commutativa e distributiva**.
Più concretamente si mostra che

$$(2, 2, 4)$$

è anch'essa soluzione all'esempio 1.
Però si può vedere questa terna nel modo seguente:

- Si parte da $(1, 1, 2)$
- Si moltiplica ogni *entrata* della terna per $2$, ottenendo $(2, 2, 4)$
  In una maniera più compatta introduciamo la seguente notazione.

  $$(2, 2, 4) = 2(1, 1, 2)$$

  Riprendiamo la quantità che abbiamo considerato prima

  $$\begin{aligned} 3 * 2 + 1 * 2 - 2 * 4 &= 3(2 * 1) + 1(2 * 1) - 2(2 * 1) \\ prop.\, associativa &= (3 * 2)1 + (1 * 2)1 - (2 * 2)2 \\ prop.\, commutativa &= 2(3 * 1) + 2(1 * 1) - 2(2 * 2) \\ prop.\, distributiva &= 2(3 * 1 + 1 * 1 - 2 * 2) \\ (1, 1, 2)\ è\ soluzione &= 0 \end{aligned}$$

  Pertanto si capisce che se moltiplichiamo la soluzione per un numero, otteniamo un'altra soluzione.
  Lo stesso ragionamento ci mostra che la terna

  $$(37, 37, 74)$$

è soluzione, perché

$$3*37+1*37-2*74=37(3*1+1*1-2*2)=37*0=0$$

## PRIMA PROPRIETA'

Generalizzando, vediamo che $\forall\alpha\in\mathbb{R}$ la terna $(\alpha,\alpha,2\alpha)=\alpha(1,1,2)$ è soluzione.

**OSSERVAZIONE 2.** Tuttavia così non si ottiene *tutte* le soluzioni di un'equazione; ad esempio la terna $(0,2,1)$ è anche una soluzione all'*esempio 1.* (vedi all'inizio).
Si dice che queste due soluzioni sono *linearmente indipendenti*.

## SECONDA PROPRIETA'

Analizziamo ora un secondo fenomeno. Si mostra che

$$(1,3,3)$$

è soluzione.
**OSSERVAZIONE 3.**

$$\begin{aligned}1&=1+0\\3&=1+2\\3&=2+1\end{aligned}$$

Ovvero, in una notazione più compatta,

$$(1,3,3)=(1,1,2)+(0,2,1)$$

Ora calcoliamo

$$\begin{aligned}3*1+1*3-2*3&=3(1+0)+1(1+2)-2(2+1)\\ prop.\,distributiva&=(3*1+1*1-2*2)+(3*0+1*2-2\\ entrambi\ sono\ soluzioni&=0+0=0\end{aligned}$$

# Generalizzazioni

Condensando quanto osservato, troviamo le tre proprietà principali:

1. La terna $(0,0,0)$ è soluzione
2. Se $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ è soluzione, allora $\forall\alpha\in\mathbb{R}$ anche $\alpha(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ è soluzione.

3. Se $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ sono due soluzioni, allora anche $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) + (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = ((\bar{x} + \hat{x}), (\bar{y} + \hat{y}), (\bar{z} + \hat{z}))$ è soluzione

# Metodo di Gauss

### Metodo di Eliminazione di Gauss

*Un metodo per risolvere un sistema: il metodo di Gauss.*

---

# Preliminari

Consideriamo il seguente sistema di equazioni lineari.

$$\begin{cases} 3x + y - 2z = 0 \\ -2x - 2y + 2z = 0 \\ 2x - 0y - z = 0 \end{cases}$$

Per calcolare le soluzioni di questo sistema, useremo una tecnica chiamata *l'eliminazione di Gauss*, che si fonda su dei principi per manipolare un sistema di equazioni in un altro sistema di equazioni *equivalente* (ovvero che ha le stesse soluzioni).

# Metodo di Gauss

Il metodo si consta principalmente di manipolare il sistema al fine di trovare uno equivalente più semplice da risolvere, ovvero nella forma in cui compaiono:

$$\begin{cases} \text{dove compaiono tutte le 3 variabili} \\ \text{" " " " " 2 variabili} \\ \text{" " " " " una variabile} \end{cases}$$

**ESEMPIO.**

1. Partiamo notando che

$$-2x - 2y + 2z = 0 \to^{*-0.5} x + y - z = 0$$

2. Scambiando la seconda equazione con la prima, il sistema diviene

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 3x + y - 2z = 0 \\ 2x - 0y - z = 0 \end{cases}$$

3. Manipolo la seconda equazione per "eliminare la $x$", sottraendo 3 volte la prima equazione.

$$\begin{aligned} (3x + y - 2z) - 3(x + y - z) = 0 \\ -2y + z = 0 \end{aligned}$$

4. Stesso procedimento per la terza equazione.

$$\begin{aligned} (2x + 0y - z) - 2(x + y - z) = 0 \\ -2y + z = 0 \end{aligned}$$

   Tuttavia essa è uguale al passo 3., dunque ridondante e non verrà considerata.
5. In definitiva il sistema è equivalente al seguente.

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ -2y + z = 0 \end{cases}$$

6. Assumendo che $z = \alpha \in \mathbb{R}$, allora $y = \frac{1}{2}\alpha$ e $x = y = \frac{1}{2}\alpha$.
7. Pertanto le soluzioni sono della forma

$$(0.5\alpha, 0.5\alpha, \alpha) = \alpha(1, 1, 2)$$

## Formalizzazione in matrici

Se ora, a partire dal sistema iniziale, si vuole avere una scrittura più compatta, allora si può estrarre i coefficienti e porli in una tabella. In tal caso otterremo il seguente.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Questa viene definita come una *matrice*, su cui ci si può eseguire una serie finita di operazioni per ottenere la soluzione; infatti, si dice che il procedimento è *algoritmico*.
In questo caso si può ripercorrere i passaggi appena svolti nel seguente

modo:

1. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{II^\circ - 3I} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{III^\circ - I^\circ} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{III^\circ - II^\circ} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

6. Pongo $z = \alpha$; $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -\alpha \\ 0 & -2 & \alpha \end{pmatrix}$

Consegue che $y = \frac{1}{2}\alpha = x$

**OSS.** Nel passaggio quinto (5.) si nota che la matrice è disposta a scalini; in questo caso si parla della *gradinizzazione* di una matrice.