Matrici - Sommario

Tutto sul capitolo delle matrici

A. Matrice

Matrice

> *Definizione di matrice, matrice quadrata, l'insieme delle matrici, matrice nulla. L'insieme delle matrici come $\mathbb{R}$-spazio vettoriale con le operazioni di somma interna e scalamento; Matrici triangolari superiori (e l'insieme delle matrici triangolari superiori come sottospazio vettoriale); Definizione della diagonale principale di una matrice; Matrici simmetriche ed antisimmetriche; Matrice identità; Matrice inversa e l'invertibilità delle matrici.*

---

1. Definizione di Matrice

DEF 1. Siano $m, n \in \mathbb{N} \diagdown \{0\}$; allora si definisce una **matrice** $m \times n$ a **coefficienti reali** come una *tabella rettangolare di $m \cdot n$ elementi* del tipo:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Dove ciascun *coefficiente* a_{ij} è un numero *reale*;

$$\forall i \in \{1, \dots, m\}; \forall j \in \{1, \dots, n\}; a_{ij} \in \mathbb{R}$$

Per convenzione i numeri (*indici*) i, j iniziano con 1.
Diciamo che il coefficiente a_{ij} è di posto i, j.

ESEMPIO 1.1. La seguente è una matrice 3×4.

$$\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 6 \\ 7 & -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Scegliamo qualche coefficiente:

$$a_{12} = \sqrt{2}; a_{21} = 0$$

Ovviamente si nota che *NON* è *sempre* vero che $a_{ij} = aji$; infatti qui abbiamo $a_{12} \neq a_{21}$

1.1. i-esima riga e colonna della matrice

Sia $A = (a_{ij})_{i=1,\ldots,m;j=1,\ldots,n}$ una matrice a coefficienti reali. Allora definiamo:

DEF 2.1. Per ogni $i \in \{1, \ldots, m\}$ la **i-esima riga** è la *matrice*

$$A_{(i)} := (a_{i1}, \ldots, a_{in})$$

DEF 2.2. Per ogni $j \in \{1, \ldots, n\}$ la **i-esima colonna** è la *matrice*

$$A^{(j)} := \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \ldots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

1.2. L'insieme delle matrici

DEF 1.2. Dati $m, n \in \mathbb{N}$, ove $m > 0, n > 0$, denotiamo **l'insieme delle matrici** con

$$M_{m,n}(\mathbb{R})$$

OSS 1.2.1. Notiamo che con le operazioni di *somma interna* e di *prodotto per uno scalare* definite in Operazioni basilari con matrici,

$$(M_{m,n}(\mathbb{R}), +, \cdot)$$

è uno spazio vettoriale.

2. Tipologie di matrici

2.1. Matrici quadrate

DEF 2.1. Una *matrice* si dice **quadrata** se il numero delle *righe* (n) coincide con il suo numero delle *colonne* (m).
SUBDEF 2.1.1. Per denotare **l'insieme delle matrici quadrate** si scrive

$$M_n(\mathbb{R})$$

ove $n \in \mathbb{N}, n > 0$.

ESEMPIO 2.1.1. La seguente è una *matrice quadrata* 2×2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

DEF 2.1.2 Nel caso delle *matrici quadrate* è possibile definire la **diagonale principale** come la *parte di A data dalle entrate di posto* $A_{ii}, i \in \{1, \dots, n\}$.

ESEMPIO 2.1.2. Nell'**ESEMPIO 2.1.1.** la *diagonale principale* sarebbe $(1, 5)$.

2.2. Matrici nulle

DEF 2.2. Una *matrice* $m \times n$ **nulla** è è la *matrice* $m \times n$ le cui *entrate* (o *coefficienti*) sono tutte nulle, 0.

$$0 := \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

2.3. Matrici triangolari superiori

DEF 2.3. Si definisce **l'insieme delle matrici triangolari superiori** 2×2 come

$$T_2(\mathbb{R}) := \{A \in M_2(\mathbb{R}) : a_{21} = 0\}$$

ovvero una matrice di forma

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$$

Ovviamente è possibile generalizzare per le matrici quadrate $M_n(\mathbb{R})$.

OSS 2.3.1. Notiamo che questo insieme è un sottoinsieme di $M_2(\mathbb{R})$;

$$T_2(\mathbb{R}) \subseteq M_2(\mathbb{R})$$

Infatti se l'insieme delle matrici 2×2 $M_2(\mathbb{R})$ è un $\mathbb{R}$-*spazio vettoriale* (Spazi Vettoriali, **DEF 1.**), allora $T_2(\mathbb{R})$ è un *sottospazio vettoriale* (Sottospazi Vettoriali, **DEF 1.**).
Infatti valgono le seguenti:

1. La matrice nulla $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ appartiene anche a $T_2(\mathbb{R})$.
2. Le operazioni di *somma* e di *scalamento* sono chiuse; ovvero

$$A, B \in T_2(\mathbb{R}) \implies (A + B) \in T_2(\mathbb{R})$$

e

$$\lambda \in \mathbb{R}, A \in T_2(\mathbb{R}) \implies (\lambda \cdot A) \in T_2(\mathbb{R})$$

E' possibile verificare 2. verificando che la combinazione lineare di $A, B \in T_2(\mathbb{R})$ appartiene anch'esso a $T_2(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} \lambda_1 \cdot A + \lambda_2 \cdot B &= \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} & \lambda_1 a_{12} \\ 0 & \lambda_1 a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_2 b_{11} & \lambda_2 b_{12} \\ 0 & \lambda_2 b_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 b_{11} & \lambda_1 a_{12} + \lambda_2 b_{12} \\ 0 & \lambda_1 a_{22} + \lambda_2 b_{22} \end{pmatrix} \in T_2(\mathbb{R}) \blacksquare \end{aligned}$$

Questa osservazione è analoga per $T_n(\mathbb{R})$ e $M_n(\mathbb{R})$.

2.4. Matrici simmetriche e antisimmetriche

Considerando da quanto detto in Operazioni particolari con matrici (**OSS 1.1.**), abbiamo notato che *non* ha sempre senso chiedersi se la *trasposta* di una matrice è uguale alla matrice stessa, ovvero

$$¿\, {}^t A = A\, ?$$

tuttavia questo acquisisce significato quando consideriamo le matrici quadrate appartenenti a $M_n(\mathbb{R})$.
ESEMPIO 2.4.1. Prendo una matrice 3×3 che chiamo A.

Sapendo che alla prima riga $A_{(1)}$ ho fissato $A_{(1)} = (1 \quad 2 \quad 3)$, allora in questo modo ho già fissato $A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, in quanto voglio che $A^{(1)} = ({}^t A_{(1)})$. (ovvero che la trasposta della prima riga sia uguale alla prima colonna).

Il procedimento si ripete per $A_{(2)} = (2 \quad ? \quad ?)$, dove i punti segnati con $?$ possono essere sostituiti con qualsiasi valori. Per convenienza inseriremo con dei numeri crescenti, ovvero $4, 5$ (e alla fine 6). Alla fine otteniamo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

che soddisfa ${}^t A = A$. Inoltre osserviamo che questa matrice è *simmetrica* alla diagonale.

DEF 2.4. Allora definiamo una matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$:

1. **Simmetrica** se vale che

$$A = {}^t A$$

2. **Antisimmetrica** se vale che

$$A = -{}^t A$$

OSS 2.4.1. Osservo una peculiarità delle matrici *antisimmetriche*; infatti se voglio costruirne una mi accorgo che tutte le entrate della *diagonale principale* devono essere nulle, in quanto l'unico numero che rimane uguale quando moltiplicato per -1 è 0.

OSS 2.4.2. Notiamo che le *matrici nulle* e *quadrate* sono le *uniche* matrici che sono sia *antisimmetriche* che *simmetriche*. Infatti, $0 = 0$ e $0 = -0$.

2.5. Matrice unità (o identità)

Considerando da quanto detto e notato per quanto riguarda il *prodotto tra matrici* (Operazioni particolari con matrici), possiamo definire una matrice che comporta come il numero 1 dei numeri reali $\mathbb{R}$ per questa suddetta operazione. (Operazioni particolari con matrici, **PROP 2.4.3.**)

DEF 2.5. Sia $n \in \mathbb{N}$ e $n > 0$, allora la **matrice unità** (o **identità**) è quella matrice quadrata appartenente a $M_n(\mathbb{R})$ le cui entrate sono tutte nulle, fuorché quelle della *diagonale principale*, che sono tutti uguali a 1. Denotiamo questa matrice con

$$\mathbb{1}_n \text{ o } I_n \text{ o } \mathrm{Id}_n$$

ove

$$(\mathbb{1}_n)_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ se } i \neq j \\ 1 \text{ se } i = j \end{cases}$$

2.6. Matrice inversa

OSS 2.6.1. Nei dei numeri reali $\mathbb{R}$, dato un $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ diciamo che un altro numero $b \in \mathbb{R}$ è l'inversa di a se è vera che

$$a \cdot b = b \cdot a = 1$$

e b è unica. Infatti questo è esattamente *l'assioma M3)* dei numeri reali (Assiomi dei Numeri Reali).

DEF 2.6. Allora, tracciando un parallelismo tra i *numeri reali* e le il *prodotto tra matrici* (Operazioni particolari con matrici), chiamiamo la *matrice quadrata* $A \in M_n(\mathbb{R})$ **invertibile** se esiste una matrice $B \in M_n(\mathbb{R})$ tale che valga

$$A \cdot B = B \cdot A = \mathbb{1}_n$$

che chiamiamo

$$B = A^{-1}$$

PROP 2.6.1. Prendendo $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, valgono le seguenti proprietà:

1. Se A è *invertibile*, allora la sua inversa A^{-1} è *unica*.
2. Se A, B sono invertibili allora $A \cdot B$ *invertibile*, la quale inversa sarebbe $B^{-1} \cdot A^{-1}$.

DIMOSTRAZIONI.

1. Prendiamo per assurdo B, C inverse di A.
   Allora per definizione

$$A \cdot B = B \cdot A = \mathbb{1}_n$$
$$A \cdot C = C \cdot A = \mathbb{1}_n$$

allora

$$B = B \cdot \mathbb{1}_n = B \cdot (A \cdot C) = (B \cdot A) \cdot C = \mathbb{1}_n \cdot C = C$$

quindi per proprietà transitiva

$$B = C$$

■

2. Qui basta fare dei calcoli per verificare che $B^{-1} \cdot A^{-1}$ è $(A \cdot B)^{-1}$. Ovvero basta verificare che $(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = \mathbb{1}_n$ (e viceversa);

$$\begin{aligned} (A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) &= A \cdot (B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1} \\ &= A \cdot \mathbb{1}_n \cdot A^{-1} \\ &= A \cdot A^{-1} \\ &= \mathbb{1}_n \\ \text{analogamente} \\ (B^{-1} \cdot A^{-1}) \cdot (A \cdot B) &= B^{-1} \cdot (A^{-1} \cdot A) \cdot B \\ &= B^{-1} \cdot \mathbb{1}_n \cdot B \\ &= B^{-1} \cdot B \\ &= \mathbb{1}_n \end{aligned}$$

■

OSS 2.6.2. L'analogia tra *l'invertibilità* rispetto al prodotto definito in $\mathbb{R}$ e l'invertibilità rispetto al *prodotto righe per colonne* di matrici *NON* si estende fino al punto di poter dire che *OGNI* matrice non-nulla è invertibile. Infatti si propone il seguente controesempio.
ESEMPIO 2.6.2.a. Considero la seguente matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

la matrice A *non* è *invertibile*.
DIMOSTRAZIONE. Per assurdo suppongo che esista $A^{-1} = B$. Allora

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

Allora per definizione deve valere

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Prendiamo le entrate C_{11} e C_{21}. Per definizione del *prodotto righe per colonne* abbiamo:

$$\begin{aligned} C_{11} = 1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} = b_{11} + b_{21} \\ C_{21} = 0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} = b_{11} + b_{21} \end{aligned}$$

Ma questo implicherebbe che

$$b_{11} + b_{21} = 1 = 0$$

che è un *assurdo*, in quanto $1 \neq 0$.

B. Operazioni basilari con matrici

Operazioni basilari con matrici

Definizioni di operazioni con matrici; somma interna $+$, *prodotto esterno (scalamento)* $\cdot$, *l'insieme delle matrici come* $\mathbb{R}$*-spazio vettoriale con queste operazioni.*

---

0. Preambolo

Avendo definito la Matrice, andiamo a introdurre delle *operazioni* con delle *matrici* al fine di rendere *l'insieme delle matrici* $M_{m,n}(\mathbb{R})$ (Matrice, **DEF 1.2.**) un $\mathbb{R}$-*spazio vettoriale*.

1. Somma interna

DEF 1. Siano $m, n \in \mathbb{N} \diagdown \{0\}$, definiamo la **somma** delle *matrici* A e B e lo denotiamo $A + B$; per definire questa nuova matrice data dalla somma, definiamo *ogni sua entrata*. Quindi *l'entrata di posto* i, j di

$A + B$ è data da:

$$(A + B)_{ij} := A_{ij} + B_{ij}$$

Qui si utilizza il fatto che per descrivere una *matrice* è sufficiente determinare come ottenere ciascuna delle sue *entrate*.

ESEMPIO 1.1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

OSS 1.1. La *matrice nulla* (Matrice, **DEF 2.2.**) è in effetti l'*elemento neutro* della somma tra matrici. Infatti questo sarà fondamentale per dimostrare che *l'insieme delle matrici* $m \times n$ $M_{m,n}(\mathbb{R})$ è uno $\mathbb{R}$-*spazio vettoriale* (Spazi Vettoriali).

2. Prodotto per scalare (scalamento)

DEF 2. Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$; definiamo allora il *prodotto (o la moltiplicazione) per uno scalare* λ per A, come la matrice $(\lambda \cdot A)$, le cui entrate sono ottenute facendo

$$(\lambda \cdot A)_{ij} := \lambda \cdot A_{ij}$$

ESEMPIO 2.1.

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ -9 & -6 & -3 \end{pmatrix}$$

C. Sistemi di generatori

Sistemi di generatori

Breve definizione di combinazione lineare; Matrice come combinazione lineare di sistemi di generatori, indipendenza lineare

---

0. Combinazione lineare

DEF 0. Per **combinazione lineare** si intende *l'espressione* per cui prendo una serie di *vettori* v_i dall'$\mathbb{R}$-*spazio vettoriale* V (Spazi Vettoriali, **DEF 1.**, **DEF 1.1.**), scalo ciascuna di essa per uno scalare λ_i e li sommo; quindi stiamo parlando di

$$\lambda_1 \mathrm{v}_1 + \lambda_2 \mathrm{v}_2 + \cdots + \lambda_n \mathrm{v}_n$$

1. Sistemi di generatori

Consideriamo una *matrice* 2×2 (Matrice, **DEF 1.**), A. Consideriamo

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Ora consideriamo 4 matrici 2×2 *"speciali"*, ovvero

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};\ F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};\ G = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

infatti queste matrici hanno *tutte* le *entrate* nulle (0), fuorché una, la quale uguale ad uno (1).

Consideriamo allora la seguente *combinazione lineare* di queste quattro matrici:

$$3E + F - 2G + 4H$$

che secondo dei calcoli diventa proprio A, ovvero

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Si può ripetere questa costruzione, qualsiasi sia matrice A; infatti se

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

allora

$$A = aE + bF + cG + dH$$

DEF 1. In questo diciamo che E, F, G, H sono un **sistema di generatori** di $M_2(\mathbb{R})$.

OSS 1.1. Notiamo che questo ragionamento può essere formulato allo stesso modo per qualsiasi insieme di *matrici* $M_{m,n}(\mathbb{R})$: abbiamo quindi "dimostrato" il seguente:
PROP 1.1. Se consideriamo l'insieme delle *matrici* $M_{m,n}(\mathbb{R})$ che sono costruite nel seguente modo: *esse hanno tutte le entrate nulle* 0 *fuorché una, la quale uguale ad* 1; allora tale insieme è **un sistema di generatori** per $M_{m,n}(\mathbb{R})$.

2. Indipendenza lineare

Considerando ancora le *matrici quadrate* 2×2, ne consideriamo la *matrice nulla*

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che può essere scritta come la combinazione lineare (considerando E, F, G, H come i *sistemi di generatori di* $M_2(\mathbb{R})$):

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0E + 0F + 0G + 0H$$

Si vede che non c'è nessun altro modo di ottenere la *matrice nulla*, se non di impostare ogni *coefficiente* 0. Infatti

$$eE + fF + gG + hH = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi affinché valga la sovrastante, $(e, f, g, h) = (0, 0, 0, 0)$.

DEF 2. In questo caso diciamo che queste quattro matrici sono **linearmente indipendenti**; ovvero che *l'unico modo di ottenere la matrice nulla mediante la combinazione lineare di queste matrici* è quella di imporre tutti i coefficienti nulli.
Questi ragionamenti possono essere formulati (e generalizzati) anche per *matrici* $m \times n$.

OSS 2.1. Se ho

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \ B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

allora la per ottenere 0 (la matrice nulla) è necessaria fare la seguente combinazione lineare:

$$-1 \cdot A + (-\frac{1}{2})B$$

e i coefficienti non sono nulli; pertanto A, B *non* sono linearmente indipendenti.

D. Operazioni particolari con matrici

Operazioni particolari con matrici

Trasposta di una matrice (definizione di matrice simmetrica e antisimmetrica). Definizione di prodotto tra due matrici. Esempi scelti del prodotto righe per colonne. Proprietà del prodotto tra matrici.

---

1. Matrice trasposta

---

traspórre (ant. **transpórre**) v. tr. [dal lat. *transponĕre*, comp. di *trans-* «trans-» e *ponĕre* «porre»] (coniug. come *porre*). – **1.** Porre, collocare una cosa dopo un'altra, invertendo l'ordine in cui tali cose erano inizialmente: *il copista per errore ha trasposto i versi 24-25 dopo i versi 26-30*; col senso più generico di porre in diverso ordine: *il periodo potrebbe migliorarsi notevolmente trasponendo qualche parola*; *se necessario si potrà t. qualche numero del programma*; *t. i fili di una linea telefonica*.

DEF 1. Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$; definiamo la **trasposta** di A come quella matrice, che indichiamo con ${}^tA$, che è un elemento di $M_{m,n}(\mathbb{R})$, determinato dalla seguente proprietà: *"l'entrata di posto i, j di ${}^tA$ è uguale all'entrata di posto j, i di A"*. In parole povere, scambiamo le *righe* della matrice con le *colonne* (invertendo così l'ordine).
Quindi

$$({}^tA)_{ij} := A_{ji} \ ; \begin{array}{c} i \in \{1, \ldots, n\} \\ j \in \{1, \ldots, m\} \end{array}$$

ESEMPIO 1.1.
Se prendiamo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

allora si ha

$${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

OSS 1.1. Notiamo che *generalmente* non ha senso chiedersi se

$${}^tA = A$$

in quanto in una buona parte dei casi (ovvero delle *matrici non quadrate* (Matrice, **DEF 2.1.**)) il numero delle colonne m e il numero delle righe n vengono scambiate (per definizione); infatti se A è una matrice $m \times n$, allora ${}^tA$ sarà una matrice di $n \times m$.

1.1. Proprietà della trasposta

PROP 1.1. Prendendo $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ allora si verificano le due proprietà:

$$\begin{array}{l} \text{(i) } {}^t(A+B) = ({}^tA) + ({}^tB) \\ \text{(ii) } {}^t({}^tA) = A \end{array}$$

DIMOSTRAZIONE.
Innanzitutto osserviamo che ha senso chiedersi se queste proprietà sono valide, in quanto per definizione in Operazioni basilari con matrici, sommando due matrici $m \times n$ si ottiene un'altra matrice $m \times n$

; infatti da un lato si sommano prima due matrici $m \times n$ poi per trasporlo in una matrice $n \times m$, dall'altro si sommano due matrici trasposte $n \times m$ (ottenendo ovviamente un altra matrice $n \times m$).

Per dimostrare la *(i)*, dimostriamo che tutte le entrate della matrice nel *membro sinistro dell'uguaglianza* e nel *membro destro* sono, infatti, effettivamente uguali.
Per farlo fissiamo le i, j e prendiamo le entrate di posto i, j. Allora

$$\begin{aligned}
&(*)\ ({}^t(A+B))_{ij} \overset{\text{def.}}{=} (A+B)_{ji} \overset{\text{def.}}{=} A_{ji} + B_{ji} \\
&(\triangle)\ ({}^tA)_{ij} + ({}^tB)_{ij} \overset{\text{def.}}{=} A_{ji} + B_{ji}
\end{aligned}$$

E notiamo che (*) e ($\triangle$) sono uguali, completando così la dimostrazione.

Per la dimostrazione di *(ii)* basta fissare i, j e considerare le entrate di posto i, j;

$$({}^t({}^tA))_{ij} = ({}^tA)_{ji} = A_{ij}$$

■

2. Prodotto righe per colonne

Ora andiamo a introdurre una nuova operazione tra matrici e per farlo è opportuno considerare una specie di analogia, una situazione che ci aiuti a comprendere il concetto.

2.1. Definizione analogica

Immaginiamo di trovarci in un negozio A che presenta i seguenti prezzi (tralasciando questioni economico-finanziarie):

- Costo pasta: $C_p = 1$
- Costo latte: $C_l = 2$
- Costo uova: $C_u = 3$
  Ora supponiamo di dover comprare n_p, n_l, n_u quantità di pasta, latte e uova; ora vogliamo calcolare il costo totale, che sarebbe una specie di *"combinazione lineare"* dove i *coefficienti scalari* vengono rappresentati dai quantitativi, i *vettori* invece dai *costi*.
  Quindi abbiamo

$$n_p C_p + n_l C_l + n_u C_u$$

Ora definiamo il *prodotto righe per colonne* come

$$\begin{pmatrix} C_p & C_l & C_u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_p \\ n_l \\ n_u \end{pmatrix} := n_p C_p + n_l C_l + n_u C_u$$

Adesso supponiamo di aver trovato un altro negozio B che offre altri prezzi ancora più competitivi; ovvero

$$C'_p = -3\ ;\ C'_l = -2\ ; C'_u = -1$$

quindi per tenere sotto controllo i due *totali di spesa*, potrei *"impacchettare"* le due righe dei *costi unitari* in una matrice:

$$\begin{pmatrix} C_p & C_l & C_u \\ C'_p & C'_l & C'_u \end{pmatrix}$$

e sarebbe ragionevole definire il prodotto di:

$$\begin{pmatrix} C_p & C_l & C_u \\ C'_p & C'_l & C'_u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_p \\ n_l \\ n_u \end{pmatrix}$$

come la matrice 2×1 dove la prima riga rappresenta il *costo totale del primo negozio* e la seconda riga invece il *costo totale del secondo negozio*:

$$\begin{pmatrix} n_p C_p + n_l C_l + n_u C_u \\ n_p C'_p + n_l C'_l + n_u C'_u \end{pmatrix}$$

Ricapitolando, abbiamo moltiplicato una *matrice 2x3* per una *matrice 3x1* e abbiamo ottenuto una *matrice 2x1*.
In altre parole, la matrice ottenuta dalla moltiplicazione è quella matrice le cui *entrate* sono date dalla *moltiplicazione di ciascuna delle due righe della prima matrice con la colonna della seconda matrice*.
In questo modo, se volessimo aggiungere la seconda colonna di quantitativi $\begin{pmatrix} n'_p \\ n'_l \\ n'_u \end{pmatrix}$, quello che andremmo a ottenere è una

situazione del tipo:

$$\begin{pmatrix} C_p & C_l & C_u \\ C'_p & C'_l & C'_u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_p & n'_p \\ n_l & n'_l \\ n_u & n'_u \end{pmatrix}$$

che diventa

$$\begin{pmatrix} n_pC_p + n_lC_l + n_uC_u & n'_pC_p + n'_lC_l + n'_uC_u \\ n_pC'_p + n_lC'_l + n_uC'_u & n'_pC'_p + n'_lC'_l + n'_uC'_u \end{pmatrix}$$

dove a sinistra abbiamo i *quantitativi della prima colonna*, a destra *i quantitativi della seconda colonna* $'$.

2.2. Definizione generale

DEF 2.2.1. Siano $A \in M_{1,n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{n,1}(\mathbb{R})$; allora definiamo il **prodotto riga per colonna** come *la combinazione lineare* data da

$$A_{(1)} \cdot B^{(1)} := a_{11}b_{11} + \ldots + a_{1n}b_{n1} = \sum_{i=1}^{n} a_{1i}b_{i1}$$

DEF 2.2.2. In generale, se $A \in M_{m,p}(\mathbb{R})$ e $B \in M_{p,n}(\mathbb{R})$ allora definiamo il **prodotto** $A \cdot B$ come la *matrice* $m \times n$ la cui *entrata di posto* ij è data dalla seguente:

$$(A \cdot B)_{ij} := A_{(i)} \cdot B^{(j)} = \sum_{k=1}^{p} a_{1k}b_{k1}$$

OSS 2.2.1. Notiamo che il *prodotto tra due matrici* $A \cdot B$ è definita solo se il numero di colonne di A coincide con il numero di righe di B. Inoltre, la *"matrice risultante"* diventa una matrice $a \times b$ (ove a è il numero delle colonne di A, b il numero di righe di B).

2.3. Esempi

Diamo alcuni esempi-esercizi.
ESEMPIO 2.3.1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

usando le definizioni otteniamo

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

poi calcolando tutti i *prodotti righe per colonne*, infine abbiamo

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

ESEMPIO 2.3.2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+0+0 & 2+0+0 \\ 0+0+0 & 0-1+0 \\ 0+0+1 & 0+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

OSS 2.3.2.a.
Notiamo di aver ottenuto la stessa matrice a destra.

ESEMPIO 2.3.3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0+0 & 0+2+0 & 0+0+3 \\ -3+0+0 & 0-2+0 & 0+0-1 \end{pmatrix}$$

facendo i conti,

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

OSS 2.3.3.a.
Come appena notato prima, la *seconda matrice* sembra di comportarsi come il numero 1.; infatti se lo moltiplichi a destra o a sinistra, ottieni la stessa matrice moltiplicata.
Infatti questa matrice verrà definita come la matrice identità (**DEF 2.5.**) $\mathbb{1}$.

ESEMPIO 2.3.4.
Consideriamo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$
$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Posso fare sia $A \cdot B$ che $B \cdot A$ in quanto abbiamo i tali requisiti. Allora

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 * 1 + 1 * 2 & 0 * 1 + 2 * 1 \\ -1 * 3 + 4 * 1 & 3 * 0 + 1 * 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

e

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -1 * 1 + 0 * 3 & -1 * 2 + 0 * 4 \\ 1 * 1 + 1 * 3 & 1 * 2 + 1 * 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

OSS 2.3.4.a.
Notiamo che il *prodotto delle matrici* non è un'operazione *commutativa*; questo determina delle forti conseguenze, in particolare nella *meccanica quantistica* con il *principio di indeterminazione di Heisenberg*.

2.4. Proprietà

Il *prodotto righe per colonne* soddisfa alcune proprietà:
PROP 2.4.1. Siano $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ e $C, D \in M_{p,n}(\mathbb{R})$. Allora valgono le seguenti uguaglianze:

$$1.\ (A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$
$$2.\ A \cdot (C + D) = A \cdot C + A \cdot D$$

la *1.* si chiama "proprietà distributiva a *destra*", la *2.* invece "proprietà distributiva a *sinistra*". Utilizziamo questa nomenclatura in quanto sappiamo che l'operazione di prodotto righe per colonna *NON* è commutativa; quindi non si è sempre certi che questa proprietà valga da entrambi i lati (in questo caso sì).

PROP 2.4.2. Sia $A \in M_{m,p}(\mathbb{R})$ e $B \in M_{p,n}(\mathbb{R})$; allora vale che

$${}^t(A \cdot B) = ({}^tB) \cdot ({}^tA)$$

ATTENZIONE! Invece bisogna stare attenti che

$$^t(A \cdot B) \neq (^tA) \cdot (^tB)$$

in quanto essa non è definita. Infatti a destra si vede che proviamo a moltiplicare una matrice p, m e n, p; a meno che $m = n$, questa moltiplicazione NON è ben posta.

DIMOSTRAZIONE. Per mostrare la forma corretta, ovvero

$$^t(A \cdot B) = (^tB) \cdot (^tA)$$

mostriamo che tutte le entrate del membro destro sono uguali a tutte le entrati del membro sinistro; siano dunque $i \in \{1, \ldots, n\}$ e $j \in \{1, \ldots, m\}$. Allora:

$$\begin{aligned}
&\text{dx. } (^t(A \cdot B))_{ij} = (A \cdot B)_{ji} = A_{(j)} \cdot B^{(i)} \\
&\text{sx. } ((^tB) \cdot (^tA))_{ij} = \ ^tB_{(i)} \cdot \ ^tA^{(j)} = \text{le quantità sono uguali} = A_{(j)} \cdot B
\end{aligned}$$

e questo mostra che le due sono uguali.

PROP 2.4.3. Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, allora

$$\mathbb{1}_m \cdot A = A; \ A \cdot \mathbb{1}_n = A$$

Per $\mathbb{1}_m$ si intende la *matrice identità* (Matrice, **DEF 2.5.**).

OSS 2.4.3.a Nel caso delle matrici quadrate $M_n(\mathbb{R})$, la matrice unità $\mathbb{1}_n$ funge dunque da *elemento neutro* per il *prodotto righe per colonne*. Ovvero

$$\mathbb{1}_n \cdot A = A \cdot \mathbb{1}_n = A$$

e possiamo denominarlo come *elemento neutro* in quanto tutti gli elementi in questa uguaglianza sono appartenenti a $M_n(\mathbb{R})$.