Limiti - Sommario

Tutto sui limiti.

A. Definizione di Limite di funzione

Definizione di Limite di funzione

Idea fondamentale del limite di una funzione; definizione di limite in tutti i casi; dimostrazione dell'esistenza di un limite. Definizione di limite destro e sinistro.

---

0. Argomenti propedeutici

Per affrontare uno degli argomenti più importanti dell'[redacted], ovvero i *limiti*, è necessario conoscere e ricordare alcuni argomenti:

- Intorni di $x_0 \in \tilde{\mathbb{R}}$
- Punti di aderenza e di accumulazione per un insieme $E \subseteq \mathbb{R}$

1. Idea fondamentale

IDEA. Prendiamo la una funzione di variabile reale (**DEF 1.1.**) del tipo

$$f : E \longrightarrow \mathbb{R}, E \subseteq \mathbb{R}$$

e consideriamo un punto $x_0 \in \tilde{\mathbb{R}}$ che è un *punto di accumulazione* per E (Punti di aderenza e di accumulazione, **DEF 2.1.**).
Ora voglio capire come posso *rigorosamente* formulare la seguente frase:
"Se $x \in E$ si avvicina a $x_0 \in \tilde{\mathbb{R}}$, allora $f(x)$ si avvicina a un valore $L \in \tilde{\mathbb{R}}$."
Ovvero col seguente grafico abbiamo
[GRAFICO DA FARE]

Oppure un caso più particolare, con

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} \diagdown \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x \cdot \sin(\frac{1}{x}) \end{aligned}$$

dove 0 è un punto di accumulazione per E (il dominio), ma non ne fa parte.
[GRAFICO DA FARE]

2. Definizione rigorosa

Ora diamo una *formalizzazione rigorosa* del concetto appena formulato sopra.

DEF 2.1. *Definizione del LIMITE*
Sia f una *funzione di variabile reale* di forma

$$f: E \longrightarrow \mathbb{R}, E \subseteq \mathbb{R}$$

Siano $x_0, L \in \tilde{\mathbb{R}}$, x_0 un *punto di accumulazione* per E.
Allora definiamo il **limite di una funzione**

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

se è vera la seguente:

$$\begin{gathered} \forall V \text{ intorno di } L, \exists E \text{ intorno di } x_0 \text{ tale che:} \\ \forall x \in E, x \in U \diagdown \{x_0\} \implies f(x) \in V \end{gathered}$$

PROP 2.1. Questa *definizione* del limite può essere può essere interpretata in più casi.
CASO 1. Siano $x_0, L \in \mathbb{R}$. Quindi dei valori *fissi* sulla *retta reale*.
Abbiamo dunque il seguente disegno:
[DISEGNO DA FARE]
Ora interpretiamo la definizione del *limite* di $f(x)$, $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ in questo caso:

$$\begin{gathered} \forall V \text{ intorno di } L, \exists E \text{ intorno di } x_0 \text{ tale che:} \\ \forall x \in E, x \in U \diagdown \{x_0\} \implies f(x) \in V \end{gathered}$$

significa

$$\begin{gathered} \forall \varepsilon > 0, (L - \varepsilon, L + \varepsilon) \subseteq V, \exists \delta > 0 : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq U \\ \text{tale che } \forall x \in E \\ 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon \end{gathered}$$

che graficamente corrisponde a
[DISEGNO DA FARE]
OSS 2.1. Grazie a questa interpretazione è possibile creare un'analogia per il limite; infatti se immaginiamo che l'intorno di L con raggio ε è il *bersaglio* e se esiste il *limite*, allora deve essere sempre possibile trovare un intorno attorno x_0 con raggio δ tale per cui facendo l'immagine di tutti i punti in questo intorno, *"colpisco"* il *"bersaglio"* (ovvero l'intorno di L).
OSS 2.2. Alternativamente è possibile pensare all'esistenza del *limite* come una *"macchina"* che dato un valore ε ti trova un valore δ.
Ora passiamo al secondo caso.
CASO 2. Ora interpretiamo

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

ovvero dove $L \in \tilde{\mathbb{R}}$. Allora interpretando il significato del limite abbiamo:

$$\begin{gathered}\forall M > 0, (M, +\infty), \exists \delta > 0 : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq U : \\ \text{tale che } \forall x \in E, \\ 0 < |x - x_0| < \delta \implies x > M\end{gathered}$$

ovvero abbiamo graficamente che per una qualsiasi retta orizzontale $x = M$, troveremo *sempre* un intervallo tale per cui l'immagine dei suoi punti superano sempre questa retta orizzontale.
[DISEGNO DA FARE]

Ora al terzo caso.
CASO 3. Ora abbiamo

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

ovvero dove $x_0 \in \tilde{\mathbb{R}}$. Interpretando la definizione si ha:

$$\begin{gathered}\forall \varepsilon > 0, (L - \varepsilon, L + \varepsilon), \exists N > 0 : (N, +\infty) : \\ \text{tale che } \forall x \in E, \\ x > N \implies |f(x) - L| < \varepsilon\end{gathered}$$

ovvero graficamente ho un grafico di una funzione $f(x)$, dove disegnando un qualsiasi intorno di L riuscirò sempre a trovare un valore N tale per cui tutti i punti dell'insieme immagine dell'intervallo $(N, +\infty)$ stanno *sempre* all'interno dell'intorno di L, indipendentemente da quanto stretto è questo intervallo.
[GRAFICO]

Infine all'ultimo caso.

CASO 4. Finalmente abbiamo

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

quindi *per definizione* ho

$$\begin{gathered} \forall M; (M, +\infty), \exists N; (N, +\infty) : \\ \text{tale che } \forall x \in E, \\ x > N \implies f(x) > M \end{gathered}$$

ovvero ciò vuol dire che fissando un qualunque valore M riuscirò *sempre* a trovare un valore N tale per cui prendendo un qualsiasi punto $x > N$, il valore immagine di questo punto supererà sempre M.
OSS 2.3. Nota che questo *NON* deve necessariamente significare che la funzione è *monotona crescente*. Però vale il contrario: infatti

$$\forall x_0, x_1 \in E, x_1 > x_0 \implies f(x_1) > f(x_0)$$

possiamo fissare $f(x_0) = M$, $x_0 = N$, abbiamo allora

$$\forall M, N, \exists x_1 \in E : x_1 > N \implies f(x_1) > M$$

questa condizione è sempre vera. In questo caso basta solamente prendere un qualsiasi $x_1 > x_0$.

2.1. Infinitesimo

APPROFONDIMENTO PERSONALE a. Usando la *nostra* definizione del limite e ponendo $L = 0, x = +\infty$, otteniamo un risultato che è consistente con la definizione di *infinitesimo*$^{(1)}$ secondo dei noti matematici russi, tra cui uno è Kolmogorov.
DEF 2.a. Si definisce un infinitesimo come una *grandezza variabile* α_n, denotata come

$$\lim_{x \to +\infty} \alpha_n = 0 \text{ oppure } \alpha_n \to 0$$

che possiede la seguente proprietà:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 : \forall x \in E, x > N \implies |\alpha_x| < \varepsilon$$

OSS 2.a. Notiamo che la definizione dell'*infinitesimo* diventerà importante per il calcolo degli *integrali*, in particolare la *somma di Riemann*.

> [1]*"[...] La quantità α_n che dipende da n, benché apparentemente complicata gode di una notevole proprietà: se n cresce indefinitamente, α_n tende a zero. Tale proprietà si può anche esprimere dicendo che dato un numero positivo ε, piccolo a piacere, è possibile scegliere un interno N talmente grande che per ogni n maggiore di N il numero α_n è minore, in valore assoluto, del lato numero ε."*
>
> Estratto tratto da *Le matematiche: analisi, algebra e geometria analitica* di *A.D. Aleksandrov*, *A. N. Kolmogorov* e *M. A. Lavrent'ev* (1974, ed. Bollati Boringhieri, trad. G. Venturini).

---

3. Limite destro e sinistro

PREMESSA. Sia una funzione f di variabile reale del tipo

$$f : E \longrightarrow \mathbb{R}, E \subseteq \mathbb{R}$$

$x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione per E, $L \in \tilde{\mathbb{R}}$.
Allora definisco le seguenti:
DEF 3.1. Il **limite della funzione f che tende a x_0 da destra** come

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$$

come

$$\begin{gathered}\forall V \text{ intorno di } L, \exists U \text{ intorno di } x_0 : \forall x \in E, \\ x \in U \cap (x_0, +\infty) \implies f(x) \in V\end{gathered}$$

ovvero come il *limite di* f, considerando però *solo* i punti che stanno a *destra* di x_0.
[GRAFICO DA FARE]

DEF 3.2. Analogamente **il limite della funzione f che tende a x_0 da sinistra** è

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$$

ovvero

$$\begin{gathered}\forall V \text{ intorno di } L, \exists U \text{ intorno di } x_0 : \forall x \in E, \\ x \in U \cap (-\infty, x_0) \implies f(x) \in V\end{gathered}$$

OSS 3.1. Si può immediatamente verificare che

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \iff \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = L$$

Infatti l'insieme dei x del limite *destro* e/o *sinistro* su cui verifichiamo che $f(x) \in V$ è un *sottoinsieme* dell'insieme di cui si verifica col limite generale. Pertanto facendo l'unione tra questi due sottoinsiemi abbiamo

$$[U \cap (-\infty, x_0)] \cup [U \cap (x_0, +\infty)] = U \diagdown \{x_0\}$$

DEF 3.1. (DALLA DISPENSA) Avevamo appena osservato che coi limiti *destri* e/o *sinistri* abbiamo semplicemente fatto una *restrizione* all'insieme $U \diagdown \{x_0\}$ di cui si cerca di verificare che $f(U \diagdown \{x_0\}) \subseteq V$. Dunque definiamo il **limite della funzione ristretta a** B, un qualunque sottoinsieme di E per cui x_0 è di accumulazione:

$$\lim_{x\to x_0} f_{|B}(x) = L$$

ovvero

$$\begin{gathered}\forall V \text{ intorno di } L, \exists U \text{ intorno di } x_0 : \forall x \in B, \\ x \in U \diagdown \{x_0\} \implies f(x) \in V\end{gathered}$$

4. Strategia per verificare l'esistenza di limiti

La nostra definizione presuppone che dobbiamo *eseguire* una serie *infinita* di verifiche per dimostrare che un limite esiste; infatti si dovrebbe scegliere tutti gli $\varepsilon > 0$ e trovare un δ associato.
Vogliamo invece sviluppare una serie di *strategie* per verificare l'esistenza dei limiti, come i *teoremi* e le *proprietà* sui limiti come vedremo in Teoremi sui Limiti di Funzione, oppure *interpretando* la definizione del limite per poter trovare una *"formula"* che associa ad ogni epsilon un delta.

ESEMPIO 4.1.
Voglio verificare che

$$\lim_{x\to 1} x^2 + 1 = 2$$

ovvero, interpretando la definizione otteniamo il seguente da verificare:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in E, 0 < |x-1| < \delta \implies |x^2 + 1 - 2| < \varepsilon$$

Allora *"faccio finta"* di conoscere un ε fissato, sviluppiamo dunque l'equazione a destra:

$$\begin{aligned}|x^2+1-2| &< \varepsilon \\ |x^2-1| &< \varepsilon \\ |(x+1)(x-1)| &< \varepsilon \\ |x+1||x-1| &< \varepsilon\end{aligned}$$

Osservo che se poniamo $x \in [0,2)$ e quindi $\delta < 1$, allora abbiamo $|x+1| < 3$. Allora da ciò discende che

$$|x+1||x-1| < 3|x-1| < 3\delta$$

abbiamo quindi

$$0 < |x-1| < \delta \implies |x+1||x-1| < 3\delta, \forall x \in [0,2)$$

Infatti abbiamo implicitamente scelto $\varepsilon = 3\delta$, verificando così il limite per $\forall x \in [0,2)$.
Invece se $x \geq 2$, basta scegliere $\delta = 1$ [Non ho ancora capito perchè]

B. Teoremi sui limiti di funzione

Teoremi sui Limiti di Funzione

Teoremi sui limiti: unicità del limite, permanenza del segno, teorema del confronto, teorema dei due carabinieri, operazioni con i limiti, limiti infinitesimi e limiti infiniti, forme indeterminate.

---

0. Preambolo

In questo capitolo si vuole creare una serie di *strategie* per poter verificare l'esistenza dei limiti senza dover ricorrere a fare dei *calcoli* infiniti in quanto richiesta dalla Definizione di Limite di funzione.
Una di queste strategie consiste proprio enunciare e dimostrare una serie di *teoremi.*

1. Unicità del limite

TEOREMA 1.1. (*L'unicità del limite*)
Sia

$$f : E \longrightarrow \mathbb{R}$$

poi $x_0 \in \tilde{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione per E.
Tesi. Poi siano i valori limiti $L_1, L_2 \in \tilde{\mathbb{R}}$ tali che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L_1; \lim_{x \to x_0} f(x) = L_2$$

allora

$$L_1 = L_2$$

DIMOSTRAZIONE 1.1. Si procede tramite una dimostrazione per *assurdo*.
Supponiamo dunque

$$L_1 \neq L_2$$

Allora ci chiediamo se è possibile trovare degli *intorni* (Intorni) di L_1, L_2 che chiameremo V_1, V_2 che sono *disgiunti*; ovvero se sono tali che

$$V_1 \cap V_2 = \emptyset$$

Dato che L_1 e L_2 sono diversi, da qui discende che la distanza tra L_1 e L_2 dev'essere maggiore di 0; quindi possiamo impostare il *raggio* di questi intorni come

$$r = \frac{|L_1 - L_2|}{3}$$

Allora concludiamo che possono esistere V_1 e V_2 tali da essere disgiunti tra di loro.
Ora li scegliamo: applicando le definizioni di limite, ovvero

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} f(x) = L_1 &\iff \text{per } V_1, \exists U_1 \text{ di } x_0 : \forall x \in E \\
&\qquad x \in U_1 \diagdown \{x_0\} \implies f(x) \in V_1 \\
\lim_{x \to x_0} f(x) = L_2 &\iff \text{per } V_2, \exists U_2 \text{ di } x_0 : \forall x \in E, \\
&\qquad x \in U_2 \diagdown \{x_0\} \implies f(x) \in V_2
\end{aligned}$$

Dato che U_1, U_2 sono *intorni* di x_0 che è di accumulazione per E (Punti di aderenza e di accumulazione) si ha che

$$(U_1 \cap U_2) \cap E \neq \emptyset \text{ escludendo } x_0$$

Posso scegliere allora un x che sta all'interno nell'intersezione di U_1 e U_2;

ovvero

$$x \in ((U_1 \cap U_2) \setminus \{x_0\})$$

e per ipotesi (ovvero che esistono tali limiti) deve valere che esiste un elemento $f(x)$ tale che

$$f(x) \in (V_1 \cap V_2)$$

il che è assurdo, in quanto $V_1 \cap V_2$ dovrebbe essere un *insieme vuoto*.

OSS 1.1. (*Tratto dalla dispensa di D.D.S.*) Questo teorema è anche utile per dimostrare la *non-esistenza* di un limite: prendendo la *contronominale* di questo teorema. Ovvero se due *restrizioni della stessa funzione* f (Definizione di Limite di funzione, **DEF 3.1.**) hanno limiti diversi $L_1 \neq L_2$, allora il limite *non* esiste.

2. Permanenza del segno

TEOREMA 2.1. (*Permanenza del segno*)
Sia

$$f : E \longrightarrow \mathbb{R}, E \subseteq \mathbb{R}$$

Siano $x_0, L \in \tilde{\mathbb{R}}$, x_0 punto di accumulazione per E.
Sia definito il *limite*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

Tesi. Allora supponendo che $L \in (0, +\infty)$ oppure $L = +\infty$, allora è vera che

$$\exists \bar{U} \text{ intorno di } x_0 : \forall x \in (\bar{U} \cap E) \setminus \{x_0\}, f(x) > 0$$

Ovvero a parole stiamo dicendo che se il limite è *positivo*, allora anche la *funzione* è positiva per un intorno opportuno di x_0; il segno si *"trasferisce"* dal limite alla funzione.

DIMOSTRAZIONE 2.1.
Parto dalle definizione del limite, ovvero

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} f(x) = L \iff \forall V \text{ di } L, \exists U \text{ di } x_0 : \forall x \in E, \\ x \in U \setminus \{x_0\} \implies f(x) \in V \end{aligned}$$

Per interpretarla nel nostro contesto (ovvero che L è positiva), abbiamo che l'intorno di L può essere $V = (0, +\infty)$, in quanto se è *positiva* allora sarà sicuramente contenuta in quell'intervallo.

Dunque viene verificato che esiste un intorno U tale che

$$\forall x \in E, x \in U \diagdown \{x_0\} \implies f(x) > 0$$

OSS 2.1. Posso usare questo teorema *"alla rovescia"*, prendendo la *contronominale* dell'enunciato; ovvero se $f(x)$ è sempre *negativo o uguale a zero* ed *il limite esiste*, allora sicuramente L è sempre *negativo o uguale a zero*.

$$f(x) \leq 0 \wedge \exists \lim_{x \to x_0} f(x) \implies L \leq 0$$

3. Teorema del confronto

TEOREMA 3.1. (*Teorema del confronto*)
Siano f, g funzioni di variabile reale del tipo

$$f, g : E \longrightarrow \mathbb{R}, E \subseteq \mathbb{R}$$

e x_0 un punto di accumulazione per E, e $x_0 \in \tilde{\mathbb{R}}$.
Tesi. Supponendo che siano vere le seguenti condizioni:
i. Che esista il limite

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

ii. Che la funzione g dev'essere *sempre* (nel dominio) maggiore o uguale di f.

$$\forall x \in E \diagdown \{x_0\}, g(x) \geq f(x)$$

Allora vale che

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$$

DIMOSTRAZIONE 3.1. Sia ad esempio $x_0 \in \mathbb{R}$, allora abbiamo la seguente definizione di limite:

$$\begin{gathered}\forall M > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in E, \\ 0 < |x - x_0| < \delta \implies f(x) > M\end{gathered}$$

e considerando che $g(x) \geq f(x)$, abbiamo a maggior ragione che

$$\forall x \in E, 0 < |x - x_0| < \delta \implies g(x) \geq f(x) > M$$

e considerando la *transitività* della relazione d'ordine $>$ (Relazioni, **DEF**

4.), abbiamo

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in E,$$
$$0 < |x - x_0| < \delta \implies g(x) > M$$

che è esattamente la definizione di

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty \blacksquare$$

4. Teorema dei due carabinieri

TEOREMA 4.1. (*Dei due carabinieri*)
Siano f, g, h funzioni del tipo

$$f, g, h : E \longrightarrow \mathbb{R}, E \subseteq \mathbb{R}$$

e x_0 un punto di accumulazione per E, $x_0, L \in \tilde{\mathbb{R}}$.
Tesi. Supponendo che

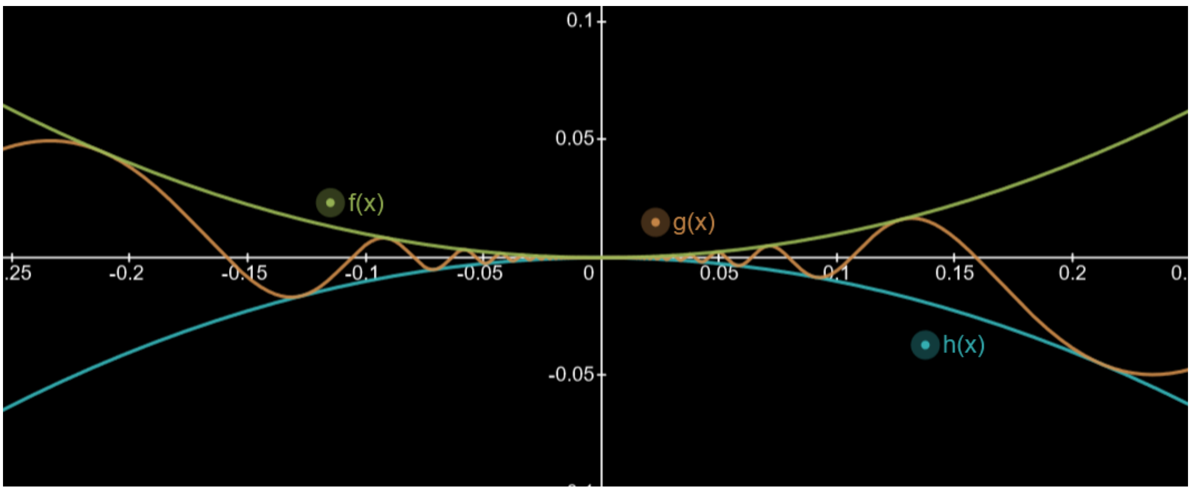
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = L$$

e che

$$\forall x \in E \diagdown \{x_0\}, f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

poi volendo possiamo chiamare f, g le *"funzioni carabinieri"*; abbiamo che

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = L$$



DIMOSTRAZIONE 4.2. Consideriamo $x_0 \in \mathbb{R}$.
Per la *definizione del limite*, abbiamo

$$
\begin{aligned}
&\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_f > 0 : \forall x \in E, \\
0 < |x - x_0| < \delta_f &\implies |f(x) - L| < \varepsilon \\
&\implies -\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon \\
&\implies L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon
\end{aligned}
$$

e analogamente

$$
\begin{gathered}
\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_h > 0 : \forall x \in E, \\
0 < |x - x_0| < \delta_h \implies L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon
\end{gathered}
$$

Se vogliamo che *entrambe* le espressioni valgano contemporaneamente, dobbiamo scegliere il *minimo* tra i due delta.
Per capire l'idea di questo ragionamento prendiamo dei numeri:

$$
(x < 3 \implies x < 4) \land (x < 6 \implies x < 7)
$$

se voglio essere *sicuro* che valgano entrambe, devo prendere $x < 3$ in quanto così abbiamo la garanzia che anche $x < 6$ sia vera.
Dunque sia

$$
\delta = \min\{\delta_f, \delta_h\}
$$

e mettendole assieme, abbiamo

$$
0 < |x - x_0| < \delta \implies L - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \varepsilon
$$

possiamo sfruttare la *transitorietà* di $>$ per ottenere

$$
0 < |x - x_0| < \delta \implies |g(x) - L| < \varepsilon
$$

Riassumendo, abbiamo il seguente:

$$
\begin{gathered}
\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \min\{\delta_f, \delta_h\} : \forall x \in E, \\
0 < |x - x_0| < \delta \implies |g(x) - L| < \varepsilon
\end{gathered}
$$

che è esattamente la *definizione* di

$$
\lim_{x \to x_0} g(x) = L
$$

come volevasi dimostrare. ■

5. Operazioni con i limiti

Ora presentiamo una serie di proposizioni, raccolte in un unico teorema, e queste ci permettono di fare delle operazioni *tra limiti*.
TEOREMA 5.1.

Siano f, g funzioni di variabile reale del tipo

$$f, g : E \longrightarrow \mathbb{R}, E \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in \tilde{\mathbb{R}}$$

e x_0 un punto di accumulazione per E.
Tesi. Supponendo che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$$
$$\lim_{x \to x_0} g(x) = m \in \mathbb{R}$$

allora abbiamo le seguenti:

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = l + m$$
$$\lim_{x \to x_0} (f(x)g(x)) = lm$$

inoltre se $m \neq 0$, allora

$$\lim_{x \to x_0} (\frac{f(x)}{g(x)}) = \frac{l}{m}$$

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo solo le prime due.

1. Prendiamo la definizione dei limiti

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$
$$\lim_{x \to x_0} g(x) = m$$

ovvero

$$\begin{gathered} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_f > 0 : \forall x \in E, \\ 0 < |x - x_0| < \delta_f \implies |f(x) - l| < \varepsilon \\ \text{ovvero } l - \varepsilon < f(x) < \varepsilon + l \end{gathered}$$

e analogamente

$$\begin{gathered} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_g > 0 : \forall x \in E, \\ 0 < |x - x_0| < \delta_g \implies |g(x) - m| < \varepsilon \\ \text{ovvero } m - \varepsilon < g(x) < \varepsilon + m \end{gathered}$$

osserviamo che, in quanto abbiamo definito ε come un valore *arbitrariamente piccolo*, allora possiamo porre $\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{2}$.
Infatti $\varepsilon > 0$ risulterà comunque vera, in quanto dividendo un qualsiasi numero infinitamente piccolo otteniamo un numero ancora più

piccolo, ma mai zero. Dunque abbiamo i seguenti:

$$\begin{aligned} 0 < |x - x_0| < \delta_f &\implies |f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2} \\ 0 < |x - x_0| < \delta_g &\implies |g(x) - m| < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

ora scegliendo $\delta = \min\{\delta_f, \delta_g\}$ abbiamo che valgono le seguenti proposizioni e possiamo dunque sommarle (analogo il discorso nella **DIMOSTRAZIONE 4.2.**): abbiamo allora

$$\begin{gathered} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta : \forall x \in E, \\ 0 < |x - x_0| < \delta \implies m - \frac{\varepsilon}{2} + l - \frac{\varepsilon}{2} < f(x) + g(x) < m + \frac{\varepsilon}{2} + l + \\ \implies (m + l) - \varepsilon < f(x) + g(x) < (m + l) + \varepsilon \\ \implies |f(x) + g(x)| < (m + l) + \varepsilon \end{gathered}$$

che è esattamente la definizione di $\lim_{x \to x_0}(f(x) \pm g(x)) = l + m$.

2. Qui il ragionamento per dimostrare la tesi diventa più sottile; la dimostrazione richiederà l'uso della *disuguaglianza triangolare* del *valore assoluto* (Funzioni di potenza, radice e valore assoluto, **OSS 3.1.1.**).
Secondo la definizione del limite, se ho $f(x)g(x) \to lm$ per $x \to x_0$ allora devo ragionare sulla seguente espressione:

$$|f(x)g(x) - lm|$$

e utilizzando un trucchetto in cui all'interno di questa aggiungo un'espressione equivalente a 0 (ovvero $-f(x)m + f(x)m \iff 0$), questo diventa

$$|f(x)g(x) - lm| \leq |f(x)g(x) - f(x)m + f(x)m - lm|$$

ora applicando la *disuguaglianza triangolare* ho:

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - lm| &\leq |f(x)g(x) - f(x)m + f(x)m - lm| \\ &\leq |f(x)g(x) - f(x)m| + |f(x)m - lm| \\ &\leq |f(x)(g(x) - m)| + |m(f(x) - l)| \\ &\leq |f(x)||g(x) - m| + |m||f(x) - l| \end{aligned}$$

Ora ragioniamo su ogni termine del membro destro dell'uguaglianza.
$|f(x) - l|$ è una quantità destinata a diventare *infinitamente* piccolo, in quanto esso rappresenta la distanza tra la funzione ed il limite; analogo il discorso per $|g(x) - m|$.
$|m|$ è una costante che viene moltiplicata per un numero che diventa più piccolo, allora anche questa diventa piccola.
Ora l'unico apparente *"intralcio"* è $|f(x)|$ in quanto non è una costante,

però quando è vicino a x_0 si comporta come una costante in quanto è limitata (dato che ha il limite $l \in \mathbb{R}$).
Allora tutto il quantitativo al membro destro diventa piccolo.

6. Limiti infiniti e infinitesimi

Notiamo che in **TEOREMA 5.1.** per il quoziente tra limiti abbiamo imposto che $m \neq 0$; infatti se la funzione che sta al denominatore $g(x)$ si avvicina a 0, il limite si comporterà in un altra maniera. Enunciare quindi i seguenti teoremi per illustrare questi comportamenti.
TEOREMA 6.1. (*Limiti* 0 *e* $\pm\infty$)
Sia $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $E \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \tilde{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione per E.
Tesi. Allora valgono le seguenti:

1. Limite infinitesimo

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \implies \lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$$

2. Limite infinito

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \wedge f(x) > 0, \forall x \neq x_0 \implies \lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$$

DIMOSTRAZIONE 6.1.
Dimostriamo solo la 1., in quanto la dimostrazione dell'altra è analoga.
Partiamo dalla definizione del limite di $f(x) \to +\infty$; ovvero

$$\begin{gathered}\forall M > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in E \diagdown \{x_0\} \\ 0 < |x - x_0| < \delta \implies f(x) > M \\ \implies \frac{1}{f(x)} < \frac{1}{M} \\ \text{sia } M = \frac{1}{\varepsilon}, \forall \varepsilon > 0 \implies -\varepsilon < 0 < \frac{1}{f(x)} < \varepsilon \\ 0 < |x - x_0| < \delta \implies |\frac{1}{f(x)}| < \varepsilon\end{gathered}$$

ovvero la definizione del limite di

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$$

7. Forme indeterminate

Ora definiamo delle *forme indeterminate* di alcuni limiti.

TEOREMA 7.1. (*Forme indeterminate*)

Tesi 1. Sia

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \text{ e } \lim_{x \to x_0} g(x) \neq -\infty$$

(la seconda vuol dire che g è inferiormente limitata; ovvero $\exists M > 0 : \forall x \in E \diagdown \{x_0\}, g(x) > -M$), allora abbiamo che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) + g(x) = +\infty$$

Analogo il discorso per

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \text{ e } \lim_{x \to x_0} \neq +\infty$$

Escludiamo infatti il caso $-\infty + \infty$ in quanto essa è una **forma indeterminata**.

Tesi 2. Sia

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty, \exists \rho > 0 : \forall x \in E \diagdown \{x_0\}, g(x) \geq \rho > 0$$

la seconda espressione vuole dire che $g(x)$ è un'espressione *sempre* positiva di 0, allora si ha

$$\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = +\infty$$

e qui escludiamo il caso $+\infty \cdot 0$.

Tesi 3 (dalla dispensa). Sia

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0, \exists M > 0 : |g(x)| < M$$

ovvero la seconda vuol dire che $g(x)$ è *limitata*, allora abbiamo che

$$\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = 0$$

escludendo i casi $\pm\infty \cdot 0$.

DIMOSTRAZIONE 7.1. Dimostriamo la *tesi 1.*, la *tesi 2.* potrà essere dimostrata in una maniera analoga.

Partiamo dalla definizione del limite di f: ovvero

$$\begin{gathered} \forall K > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in E \diagdown \{x_0\} \\ 0 < |x - x_0| < \delta \implies f(x) > K \end{gathered}$$

ma allo stesso tempo abbiamo che g è inferiormente limitata, ovvero

$$\exists M > 0 : \forall x \neq x_0, g(x) > -M$$

allora se scegliamo $K = K + M$ e sommiamo entrambe le espressioni, abbiamo

$$0 < |x - x_0| < \delta \implies f(x) + g(x) > K$$

che è la definizione di

$$\lim_{x \to x_0} f(x) + g(x) = +\infty$$

8. Limite della funzione composta

IDEA. Ho una funzione

$$f : E \longrightarrow \mathbb{R}$$

con $E \subseteq \mathbb{R}$, $x_0, y_0 \in \tilde{\mathbb{R}}$ e x_0 di accumulazione per E.
Suppongo che esiste il limite di $f(x) \to y_0$ per $x \to x_0$:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$$

Ora sia

$$g : F \longrightarrow \mathbb{R}$$

con $F \subseteq \mathbb{R}$, y_0 punto di accumulazione per F e $L \in \tilde{\mathbb{R}}$. Suppongo che esiste il limite di $g(y) \to L$ per $y \to y_0$. Ovvero

$$\lim_{y \to y_0} g(y) = L$$

Supponendo che l'immagine funzione del dominio sia sottoinsieme del dominio dell'altra funzione, ovvero $f(E) \subseteq F$, e $f(x) = y$ un punto di accumulazione per $f(E)$, ho la seguente situazione:
[GRAFICO DA FARE]
Allora posso fare la *funzione composita* $g \circ f$ (Funzioni, **DEF 4.**) che mi porta ad un certo punto in $\mathbb{R}$.
Quindi voglio capire se posso affermare il seguente:

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x_0)) = L$$

TEOREMA 8.1. (*Limite della funzione composta*)

Sia

$$f : E \longrightarrow \mathbb{R}; g : F \longrightarrow \mathbb{R}$$

con y_0, x_0 punti di accumulazione per (rispettivamente) E, F. Poi supponendo che esistono i limiti

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0 \text{ e } \lim_{y \to y_0} g(y) = L$$

e *se* vale una delle due *ipotesi supplementari*,

1. $\forall x \in E \diagdown \{x_0\}, f(x) \neq y_0$
2. $y_0 \in F, g(y_0) = L$
   allora vale che

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = L$$

DIMOSTRAZIONE (FACOLTATIVA).
Riscriviamo i limiti

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0 \text{ e } \lim_{y \to y_0} g(y) = L$$

secondo la *definizione rigorosa del limite* (Definizione di Limite di funzione, **DEF 2.1.**). Allora abbiamo:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0 \iff \begin{gathered} \forall U \text{ di } y_0, \exists V \text{ di } x_0 : \forall x \in E \diagdown \{x_0\} \\ x \in V \implies f(x) = y \in U \end{gathered}$$

e

$$\lim_{y \to y_0} g(y) = L \iff \begin{gathered} \forall W \text{ di } L, \exists U \text{ di } y_0 : \forall y \in F \diagdown \{y_0\} \\ y \in U \implies g(y) \in W \end{gathered}$$

Concatenando le due espressioni, otteniamo

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = L \iff \begin{gathered} \forall W \text{ di } L, \exists V \text{ di } x_0 : \forall x \in E \diagdown \{x_0\} \\ f(x) \in V \implies g(f(x)) \in W \end{gathered}$$

però per farlo dobbiamo assicurarci di una *condizione*: ovvero che

$$\forall x \in E, x \neq x_0 \implies f(x) = y \in F \diagdown \{y_0\}$$

così abbiamo un modo sicuro per garantirci che

$$\forall x, x \in V \implies f(x) \in V$$

Un modo per garantire la suddetta condizione è porre

$f(x) \neq y_0, \forall x \neq x_0$.
Allora posso scrivere

$$g(f(x)) = g(y) \in W$$

Se alla peggio ci capita che $\exists x' : f(x') = y_0$, allora essendo ancora fortunati allora possiamo porre $g(y_0) = L$ e abbiamo dunque $g(f(x')) = g(y_0) = L$, che ovviamente appartiene a W.

OSS 8.1. Per fortuna nostra le *condizioni supplementari* appena descritte di norma valgono quasi sempre.

OSS 8.2. Possiamo sfruttare questo *teorema* per poter svolgere ciò che chiameremo il meccanismo del *"cambio della variabile del limite"*; questo è un meccanismo non importante, ma importantissimo. Vediamo un esempio in cui entra in gioco questo meccanismo.

Cambio della variabile del limite

ESEMPIO 8.a Voglio calcolare il limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

Idea. L'idea fondamentale consiste nel pensare alla funzione del limite

$$x \mapsto \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

come la *funzione composta*. Ponendo infatti

$$x \mapsto \sqrt{x} = y \mapsto \frac{\sin y}{y}$$

Di conseguenza dobbiamo trovare il valore per cui tende y_0. Dunque

$$x \to 0^+ \implies \sqrt{x} = y \to 0^+$$

in quanto se x tende a 0 da destra, allora anche la sua radice tende a 0 da destra.
Ora verifichiamo se vale *l'ipotesi aggiuntiva*, ovvero se è vera che

$$\forall x, x \neq x_0 \implies f(x) \neq 0$$

il che è vera, in quanto non c'è nessun numero di cui la radice è 0, se non 0 stesso.
Dunque possiamo scrivere il limite iniziale come la *composizione* tra due

funzioni, di cui una è la originaria. Allora

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \lim_{y \to 0^+} \frac{\sin y}{y}$$

Ora questo limite è semplicissimo da risolvere, in quanto questo ci riconduce al limite fondamentale $\frac{\sin x}{x} = 1, x \to 0$ (Esempi di Limiti di Funzione, **ESEMPIO 6.1.**). Quindi $L = 1$.

9. Limite della funzione monotona

OSS 9.1. Osserviamo che fino ad adesso *tutti* i nostri *teoremi* sui limiti di funzione enunciati in questa pagina avevano *l'esistenza di qualche limite* per ipotesi.
Il teorema che enunceremo sarà *speciale* da questo punto di vista: infatti *non* avrà l'esistenza di un qualche limite per ipotesi, ma ha comunque nella *tesi* l'esistenza del limite.

TEOREMA 9.1. (*Limite della funzione monotona*)
Sia

$$f : E \longrightarrow \mathbb{R}, E \subseteq \mathbb{R}$$

e supponiamo che E sia *superiormente limitata* con $\sup E = x_0$ e $x_0 \notin E$. Oppure analogamente, se E è *inferiormente limitata* allora abbiamo $\inf E = x_0 \notin E$.
Inoltre è possibile supporre che $x_0 \in \tilde{\mathbb{R}}$, ovvero abbiamo $x_0 = \pm\infty$.
(Per esercizio verificare che se $\sup E \notin E$ allora $\sup E$ è di accumulazione per E.)
Inoltre sia f una funzione *monotona* crescente o decrescente (Funzioni, **DEF 8.**)
Tesi. Allora *esiste* il limite l

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

e abbiamo

$$l = \begin{cases} \sup(f(E)) \text{ se crescente} \\ \sup(f(E)) \text{ se decrescente} \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE 9.1.
Dimostriamo il caso per cui supponiamo che $x_0 \in \mathbb{R}$, f sia *crescente* e $\sup(f(E)) = L \in \mathbb{R}$ (in parole il limite *"target"* è un numero reale): si tratta di

provare che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

Consideriamo dunque la *proprietà dell'estremo superiore* $\sup$ (Insiemi limitati, maggioranti, massimo e teorema dell'estremo superiore, **TEOREMA 4.2.**);

$$L = \sup(f(E)) \iff \begin{cases} \forall x \in E, f(x) \leq L \\ \forall \varepsilon > 0, \exists \bar{x} : L - \varepsilon < f(\bar{x}) \end{cases}$$

Ora considero un $x \in E : x > \bar{x}$ e applicando la *monotonia della funzione* ho

$$x \geq \bar{x} \implies f(x) \geq f(\bar{x})$$

Infinite metto le proposizioni assieme, ottenendo

$$\begin{gathered} \forall \varepsilon > 0, \exists \bar{x} : \forall x \in E, \\ \bar{x} \leq x < x_0 \implies L - \varepsilon < L \leq f(\bar{x}) \leq f(x) < L + \varepsilon \\ \implies |f(x) - L| < \varepsilon \end{gathered}$$

che è esattamente la *definizione* del limite appena enunciato. ■

COROLLARIO 9.1. Sia

$$f : \;]a, b[\; \longrightarrow \mathbb{R}$$

$c \in \;]a, b[$ e f crescente.
Tesi. Allora esistono i limiti

$$\lim_{x \to c^-} f(x); \lim_{x \to c^+} f(x)$$

e inoltre

$$\lim_{x \to c^-} f(x) \leq f(c) \leq \lim_{x \to c^+} f(x)$$

Abbiamo di fatto una situazione situazione del tipo
[GRAFICO DA FARE]

OSS 9.2.
Quindi secondo il **COROLLARIO 9.1.** possiamo avere le due seguenti situazioni; o il *limite destro* ed il *limite sinistro* si coincidono o abbiamo una specie di *"salto"*.
Questo sarà utile quando parleremo della *continuità* e della *discontinuità*, riferendoci in particolare ad un teorema che enuncia, data una funzione

monotona crescente, in un punto discontinuo possiamo avere *solo* la discontinuità del tipo *"salto"*.

C. Esempi di limiti di funzione

Esempi di Limiti di Funzione

Esempi di limiti: funzione costante, funzione identità, polinomi, funzioni razionali, funzioni trigonometriche, ...

---

0. Preambolo

Abbiamo appena visto che cos'è *generalmente* un limite mediante la sua definizione, poi abbiamo anche sviluppato delle strategie per calcolare o verificare l'esistenza dei limiti velocemente.
Quindi è ovvio che questo capitolo richiede la conoscenza (anche parziale) dei seguenti precedenti capitoli:

- Definizione di Limite di funzione
- Teoremi sui Limiti di Funzione (Almeno fino alla **sez. 7**)
  Infatti, mediante i nostri strumenti appena sviluppati, andremo a calcolare dei limiti notevoli.

1. Funzione costante e identità

ESEMPIO 1.1. *Funzione costante*
Sia f la funzione costante $f(x) = c, c \in \mathbb{R}$
Allora il suo limite è

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} c = c$$

ed è facile dimostrarla; infatti riscrivendo la definizione il limite risulta *sempre* verificato.

ESEMPIO 1.2. *Funzione identità*
Sia f la funzione identità $\text{id}_x = f(x) = x$, definita $\forall x \in E$.
Allora il suo limite è

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} x = x_0$$

che risulta sempre vera ponendo $\delta = \varepsilon$.

OSS 1.1. Notiamo che per la funzione identità il limite può valere anche per $x_0 \in \tilde{\mathbb{R}}$ (i numeri reali estesi); infatti abbiamo

$$\lim_{x \to \pm\infty} x = \pm\infty$$

ed è sempre vera in quanto possiamo porre $N = M$ o $n = m$.

OSS 1.2. Possiamo sfruttare altri teoremi per ricavare

$$\lim_{x \to x_0} x^n = \lim_{x \to x_0} (x \cdot x \cdot \ldots \cdot x) = \lim_{x \to x_0} x \cdot \ldots \cdot \lim_{x \to x_0} x = x_0^n$$

e secondo il nostro ragionamento questa vale per $\forall n \in \mathbb{N} > 0$.

2. Funzioni quozienti

ESEMPIO 2.1. *Funzione quoziente che tende all'infinito*
Dai risultati di Teoremi sui Limiti di Funzione, soprattutto con **TEOREMA 6.1.** conosciamo il limite di $\frac{1}{x}$ per x che tende all'infinito. Infatti

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

è un *infinitesimo*.

ESEMPIO 2.2. *Funzione quoziente che tende a zero*
Ora consideriamo la medesima funzione, studiando però il comportamento di x che tende a 0. Innanzitutto

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

e

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Infatti abbiamo il grafico della funzione $\frac{1}{x}$.
[GRAFICO DA INSERIRE]
Concludiamo che *non* esiste il limite

$$\nexists \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$$

in quanto il limite *destro* e *sinistro* sono diversi.

ESEMPIO 2.3. *Funzione quoziente alla* n
Allora sfruttando altri Teoremi sui Limiti di Funzione, dall'esempio precedente possiamo ricavare

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^n} = 0, \forall n \in \mathbb{N}, > 0$$

3. Funzione radice

ESEMPIO 3.1. *Funzione radice quadrata*
Sia $f(x) = \sqrt{x}$ e abbiamo

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$$

Infatti nella definizione del limite basta prendere $\delta = \varepsilon^2$.
Ora vediamo cosa succede se $0 < x_0, x_0 \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$$

Per dimostrarlo possiamo fare il seguente.

$$\begin{gathered}
\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x, \\
0 < |x - x_0| < \delta \implies |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| < \varepsilon \\
\text{manipolo la seconda:} \\
|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| \implies |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}| \\
|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}| \implies \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}} \leq \frac{|x-x_0|}{\sqrt{x_0}} \\
\text{allora} \\
|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| \leq \frac{|x-x_0|}{\sqrt{x_0}} < \varepsilon \implies |x - x_0| < \varepsilon\sqrt{x_0}
\end{gathered}$$

Quindi basta scegliere $\delta = \varepsilon\sqrt{x_0}$.
Ora vediamo che

$$\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

basta infatti scegliere $N = M^2$.
Analogamente tutto questo vale per $\sqrt[n]{x}$.

4. Funzioni polinomi e razionali

ESEMPIO 4.1. *Polinomio con limite costante*
Sia $f(x)$ un *polinomio di grado* n, ovvero del tipo

$$f(x) = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

Allora sfruttando le *operazioni con i limiti* (Teoremi sui Limiti di Funzione, **TEOREMA 5.1.**), possiamo ricavare il suo limite quando questa funzione tende a $x_0 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\lim_{x \to x_0} f(x) &= \lim_{x \to x_0} (a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n) \\ &= \lim_{x \to x_0} a_0 + \lim_{x \to x_0} a_1 x + \ldots + \lim_{x \to x_0} (a_n x^n) \\ &= a_0 + a_1 x_0 + \ldots + a_n x_0^n\end{aligned}$$

ESEMPIO 4.2. *Polinomio con limite infinito*
Nel caso in cui $x_0 = +\infty \in \tilde{\mathbb{R}}$, allora abbiamo

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n)$$

e possiamo raccogliere ogni termine con x^n, ottenendo dunque

$$\begin{aligned}\lim_{x \to +\infty} (a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n) &= \lim_{x \to +\infty} (x^n (a_n + a_{n-1} \frac{1}{x} + \ldots + a_0 \frac{1}{x^n})) \\ &= \lim_{x \to +\infty} x^n \cdot (\lim_{x \to +\infty} (a_n) + \lim_{x \to +\infty} a_{n-1} \frac{1}{x} + . \\ &= \lim_{x \to +\infty} x^n \cdot (a_n + 0 + 0 + \ldots + 0) \\ &= a_n \lim_{x \to +\infty} x^n\end{aligned}$$

Allora in questo caso dobbiamo vedere quale valore assume il *coefficiente* dell'ultimo *termine* x^n. Procediamo dunque per casistica:

$$a_n \lim_{x \to +\infty} x^n = \begin{cases} +\infty \text{ se } a_n > 0 \\ -\infty \text{ se } a_n < 0 \\ \text{forma indeterminata, altrimenti} \end{cases}$$

abbiamo ricavato questo dai risultati dei Teoremi sui Limiti di Funzione (**TEOREMA 7.1.**).

Analogamente c'è un discorso verosimile per il limite quando la funzione tende a $-\infty$, però al contrario. Ovvero

$$a_n \lim_{x\to -\infty} x^n = \begin{cases} -\infty \text{ se } a_n > 0 \\ +\infty \text{ se } a_n < 0 \\ \text{forma indeterminata, altrimenti} \end{cases}$$

ESEMPIO 4.3. *Funzione razionale di grado n, m con limite finito*
Sia la *funzione razionale* un quoziente tra due *polinomi* di grado n, m ovvero del tipo

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, f(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m}$$

Allora sfruttando i Teoremi sui Limiti di Funzione possiamo avere

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \frac{a_0 + a_1 x_0 + \ldots + a_n x_0^n}{b_0 + b_1 x_0 + \ldots + b_m x_0^m}$$

e bisogna avere che

$$b_0 + b_1 x_0 + \ldots b_n x_0^m \neq 0$$

Se invece la sopra non viene verificata (ovvero il polinomio al denominatore è 0) bisogna vedere se è vera che

$$a_0 + a_1 x_0 + \ldots + a_n x_0^n \stackrel{?}{=} 0$$

1. Se è *vera* (ovvero che vale 0), allora dobbiamo usare il *teorema di Ruffini* per cui sappiamo che un polinomio si annulla in x_0 *se e solo se* $(x - x_0)$ è un fattore. Dunque a quel punto si può semplificare la frazione e vedere il risultato; può verificare che rimane il numeratore (e quindi il limite tende a 0) oppure che rimane il denominatore (e quindi il limite tende a $\pm\infty$).
2. Se è invece *falsa* (ovvero che *non* vale 0), allora il limite può essere $+\infty$ o $-\infty$, oppure può non esistere se il limite *destro* è diverso dal limite *sinistro*. C'è infatti un problema del segno: bisogna vedere il segno del numeratore.

ESEMPIO 4.4. *Funzione razionale di grado n, m che tende all'infinito*
Vogliamo valutare

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m}$$

Allora con un ragionamento simile all'esempio **ESEMPIO 4.2.** possiamo raccogliere in entrambi i polinomi per x^n o x^m e avere

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\ldots+b_mx^m}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^n(a_n+a_{n-1}\frac{1}{x}+\ldots+a_0\frac{1}{x^n})}{x^m(b_m+b_{m-1}\frac{1}{x}+\ldots+b_0\frac{1}{x^m})}$$
$$=\lim_{x\to\infty}x^{n-m}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{a_n}{b_m}+0+\ldots+0$$
$$=\frac{a_n}{b_m}\lim_{x\to\infty}x^{n-m}$$

Raggiunto qui dobbiamo procedere per casistica per x^{n-m}:

1. Se $n-m=0$ (ovvero i polinomi sono dello stesso grado) allora il limite tende a $\frac{a_n}{b_m}$
2. Se $n-m>0$ allora il limite tende a $\pm\infty$, il segno del limite varia a seconda del segno della costante $\frac{a_n}{b_m}$
3. Se $n-m<0$ allora il limite tende a 0.

5. Funzioni trigonometriche

Questa sezione ovviamente richiede la conoscenza di Funzioni trigonometriche

ESEMPIO 5.1. *Funzione seno*

Ricordiamoci delle *funzioni di prostaferesi* (Funzioni trigonometriche, **SEZIONE 2.4.**).

Voglio dimostrare che

$$\lim_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$$

Allora parto dalla distanza euclidea

$$|f(x)-L|\implies|\sin x-\sin x_0|$$

e conoscendo le *formule di prostaferesi* ottengo

$$2|\sin(\frac{x-x_0}{2})\cos(\frac{x+x_0}{2})|=2|\sin\frac{x-x_0}{2}||\cos\frac{x-x_0}{2}|$$

e sapendo che $\cos\alpha\leq1,\forall\alpha$ possiamo *"maggiorare"* questa espressione con

$$2|\cos\frac{x-x_0}{2}|\cdot1$$

allora

$$\begin{aligned}|\sin x - \sin x_0| &= 2|\sin\frac{x-x_0}{2}||\cos\frac{x-x_0}{2}| \\ &\leq 2|\sin\frac{x-x_0}{2}|\end{aligned}$$

Ora ci ricordiamo che $|\sin\alpha| \leq |\alpha|$ (infatti basta pensare che α è la lunghezza della retta e $\sin\alpha$ è invece la coordinata y del punto su cui cadiamo quando facciamo il processo di *"avvolgimento"* di questa retta; oppure basta disegnare i grafici di queste due funzioni),
[GRAFICI DA FARE]
Dunque otteniamo

$$|\sin x - \sin x_0| \leq 2|\sin\frac{x-x_0}{2}| \leq 2|\frac{x-x_0}{2}| = |x-x_0|$$

ovvero

$$|\sin x - \sin x_0| \leq |x-x_0|$$

allora nella *definizione del limite* (Definizione di Limite di funzione) basta scegliere $\delta = \varepsilon$ in quanto abbiamo appena verificato che sicuramente quest'ultima espressione è sicuramente vera.

ESEMPIO 5.2. *Funzione coseno*
Esercizio lasciato a me stesso.

ESEMPIO 5.3. *Funzione tangente (DA RIPROPORRE MEGLIO)*
Invece per la *funzione tangente* $\tan$ si ha che:

$$\lim_{x\to x_0}\tan x = \begin{cases}\tan x_0 \text{ se } x_0 \neq \frac{\pi}{2}+k\pi, \forall k \in \mathbb{Z} \\ \text{non def., altrimenti}\end{cases}$$

il limite di $\tan$ per $x \to \alpha, \forall \alpha \in [\frac{\pi}{2}]_{\equiv\pi}$ *non* è definita in quanto il limite destro e sinistro di questa non sono uguali; infatti

$$\lim_{x\to\alpha^-}\tan x = +\infty \text{ e } \lim_{x\to\alpha^+}\tan x = -\infty$$

e questi valgono per la *permanenza del segno*; infatti se da *sinistra* $\lim_{x\to\alpha^-}\frac{1}{\cos x} = +\infty$ allora sicuramente vale ciò che abbiamo detto prima. Analogo per l'altro limite.
Quindi

$$\lim_{x\to\alpha^+}\tan x \neq \lim_{x\to\alpha^-}\tan x$$

ESEMPIO 5.4. *Funzione arcotangente*
Riprendiamo invece la *funzione arcotangente* $\arctan x$.
Osserviamo dal grafico di tale funzione
[GRAFICO DA INSERIRE]
che valgono le seguenti:

$$\lim_{x \to -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$$
$$\lim_{x \to +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$$
$$\lim_{x \to x_0} \arctan x = \arctan x_0$$

ESEMPIO 5.5. *Funzione arcoseno e arcocoseno*
Riprendiamo ora le funzioni $\arcsin$ e $\arccos$.
Dai grafici
[GRAFICI DA INSERIRE]
osserviamo che

$$\lim_{x \to -1^+} \arcsin x = -\frac{\pi}{2}; \lim_{x \to -1^+} \arccos x = \pi$$

e

$$\lim_{x \to 1^-} \arcsin x = \frac{\pi}{2}; \lim_{x \to 1^-} \arccos x = \pi$$

6. Limiti fondamentali

Ora illustriamo ciò che chiameremo come i *limiti fondamentali*.

Prima di considerare il primo esempio facciamo le seguenti osservazioni.
OSS 6.1. Voglio calcolare l'area del *settore circolare* con raggio r e angolo α e la lunghezza dell'arco $l = r\alpha$.
[GRAFICO DA FARE]
Idea. Che vuol dire calcolare l'area di una figura? Questo significa prendere una "misura" standard per misurare l'area, poi per contare. Infatti ad esempio, per calcolare l'area di un *triangolo* partiamo dall'area di due *rettangoli* "distorti" che formano un triangolo.
Analogamente facciamo la stessa cosa col settore circolare: la dividiamo in *"triangolini"* piccolissimi, poi li *"apro"* disponendoli fila per fila.
Graficamente il ragionamento consiste in questo:
[GRAFICO DA FARE]
Ora arriviamo al punto cruciale: *"faccio finta"* (oppure approssimo) la lunghezza dell'*arco* con quello della *coda*. Abbiamo dunque il seguente:
[GRAFICO DA FARE]
Dove la *"base"* di questi triangoli è αr in quanto questa è proprio la *"base"*

della figura originaria e l'*"altezza"* è il raggio r.
Quindi possiamo unire tutti questi triangoli in uno singolo triangolo con le stesse misure e avere dunque un singolo triangolo con base αr e altezza r. Usiamo dunque la formula per calcolare l'area di questo triangolo.

$$A = \frac{\alpha r^2}{2}$$

OSS 6.2. Ora, riprendendo il cerchio unitario Γ, traccio *tre figure geometriche* di cui due sono triangoli ed uno è il settore circolare. Segniamo i tre triangoli $A_{1,2,3}$.
[GRAFICO DA FARE]
Chiaramente si vede che

$$A_1 \leq A_2 \leq A_3$$

L'area del triangolo delineato dalla *coda* è

$$A_1 = \frac{\sin \alpha}{2}$$

Invece l'area del *settore* è

$$A_2 = \frac{a}{2}$$

Ora l'area del triangolo ottenuto *"estendendo"* la retta orizzontale in $x = 1$ e la *"diagonale"* che taglia il cerchio è

$$A_3 = \frac{\tan \alpha}{2}$$

ed è ottenuta facendo le proporzioni tra il triangolo A_1 e questo triangolo dove la base è 1(ed è possibile farlo in quanto i due triangoli in merito sono simili). Infatti

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{x} \implies x = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$$

Allora possiamo concludere che in questa figura sussiste la seguente relazione per $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$:

$$\frac{\sin \alpha}{2} \leq \frac{\alpha}{2} \leq \frac{\tan \alpha}{2}$$

ESEMPIO 6.1. *Quoziente tra seno e l'identità*
Voglio calcolare

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$$

e usando alcuni dei Teoremi sui Limiti di Funzione per trattare i limiti separatamente e sostituire i rispettivi x con 0, otteniamo la frazione $\frac{0}{0}$, ovvero una *forma indeterminata*. Dobbiamo allora trovare un modo alternativo di calcolare questo limite; questo è possibile grazie alle osservazioni precedenti già fatte, in particolare l'**OSS 5.2.**.
Infatti possiamo manipolare l'espressione finale per ottenere il seguente:

$$\begin{gathered} \frac{\sin \alpha}{2} \leq \frac{\alpha}{2} \leq \frac{\tan \alpha}{2} \\ \sin \alpha \leq \alpha \leq \tan \alpha \\ 1 \leq \frac{\alpha}{\sin \alpha} \leq \frac{\tan \alpha}{\sin \alpha} = \cos \alpha \\ \cos \alpha \leq \frac{\sin \alpha}{\alpha} \leq 1 \end{gathered}$$

Per il teorema dei *due carabinieri* (Teoremi sui Limiti di Funzione, **TEOREMA 4.1.**), abbiamo i seguenti:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \to 0^+} \cos \alpha \leq \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin \alpha}{\alpha} \leq \lim_{x \to 0^+} 1 \\ \implies & 1 \leq \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin \alpha}{\alpha} \leq 1 \\ \implies & \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1 \end{aligned}$$

Però ricordiamoci che $\frac{\sin x}{x}$ è una funzione *pari* (Funzioni, **DEF 9.**), in quanto abbiamo due funzioni dispari; quindi questo limite può valere anche per il *limite destro* 0^-. Concludiamo dunque

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

ESEMPIO 6.2. *Secondo limite fondamentale* $\frac{1-\cos x}{x^2}$
Ci sarà utile anche ricordare il limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

Per calcolarlo dobbiamo avvalerci di un *trucco*, ovvero quello di moltiplicare per un'espressione equivalente a $\frac{1}{1}$. In questo caso prendiamo

$$\frac{1+\cos x}{1+\cos x}$$

Dunque il nostro limite diventa

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\frac{1+\cos x}{1+\cos x} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} \\
\cos^2 x+\sin^2 x = 1 \implies &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\cos x} \\
&= \lim_{x\to 0}(\frac{\sin x}{x})^2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x} \\
&= 1^2\cdot\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Concludiamo allora

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

D. Esercizi sui limiti di funzione

Esercizi sui Limiti di Funzione

Tutti gli esercizi sui limiti

---

0. Propedeuticità

Questa parte (come è ben ovvia) richiede la conoscenza preliminare della parte teorica sui limiti; ovvero bisogna conoscere i contenuti di *tutti* i capitoli prima di poter affrontare gli esercizi.

- Definizione di Limite di funzione
- Teoremi sui Limiti di Funzione
- Esempi di Limiti di Funzione

1. Esercizi proposti in lezione

Qui si raccolgono *tutti* gli esercizi proposti da *D.D.S.* durante le lezioni dell'anno accademico 2023-2024.

Giorno 30.10.2023

ESERCIZIO 1.1.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x + 1}{x^3 + x^2 + x + 1}$$

ESERCIZIO 1.2.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 1}{x^3 + x^2 + x - 3}$$

ESERCIZIO 1.3.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3 + 3x^2 + 1}{x^3 + 7}$$

ESERCIZIO 1.4.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x + 2}{x^2 + 2x + 1}$$

ESERCIZIO 1.5.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x}$$

ESERCIZIO 1.6.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$$

ESERCIZIO 1.7.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

ESERCIZIO 1.8.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin \sqrt{x}}{x}$$

ESERCIZIO 1.9.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2}{x^2}$$

ESERCIZIO 1.10.

$$\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$$

ESERCIZIO 1.11.

$$\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$$

ESERCIZIO 1.12.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x}$$

ESERCIZIO 1.13.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\arcsin x}$$

ESERCIZIO 1.14.

$$\lim_{x\to +\infty} x(\frac{\pi}{2} - \arctan x)$$

ESERCIZIO 1.15.

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x}}$$

---

2. Esercizi delle dispense

Qui si raccolgono *tutti* gli esercizi disponibili nella dispensa.

---

3. Esercizi dei papers

Qui si raccolgono *tutti* gli esercizi dei papers messi a disposizione.

---

4. Esercizi delle prove d'esame

Qui si prova a raccogliere *tutti* gli esercizi delle prove d'esame precedenti. Ovviamente questa sezione sarà la più *"sostanziale"* di tutte.

---

5. Esercizi del libro

Fonte: Analisi Matematica (Vol. 1), E. Giusti

---

6. Svolgimento degli esercizi

E. Definizione di limite di successione