Dinamica - Sommario

Dinamica.

A. LA TEORIA DELLA DINAMICA

A1. Grandezze della Dinamica

Definizione di Massa e di Forza

Definizioni preliminari per la dinamica: la grandezza fondamentale massa, grandezza derivata forza.

---

1. Definizioni di massa

#Definizione

Definizione (le tre definizioni di massa).

Possiamo dare *tre definizioni* di *massa*.
i. Può essere definita come la *quantità di materia di un corpo*
ii. Può essere una *misura della resistenza alla variazione della velocità* (massa inerziale)
iii. Può essere una *misura proporzionale al peso* (massa gravitazionale)
In ogni caso la massa si misura in *kilogrammi* ($[\mathrm{kg}]$)

#Osservazione

Osservazione (la massa inerziale e gravitazionale non erano uguali).

> Fino alla teoria della *relatività di Einstein*, non c'era nessun motivo teorico per far *coincidere* la *massa inerziale* con la *massa gravitazionale*; solo gli esperimenti erano in grado di giustificare tale rapporto.

2. Definizione di Forza

#Definizione

Definizione (la forza).

Si definisce la *forza* come una *spinta che produce un cambiamento di moto*. Questa spinta è misurabile con un *dinamometro*.
La forza si misura in *Newton* ($[\mathrm{N}]$), in particolare si ha

$$1\ \mathrm{N} = 1\ \mathrm{kg} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Per una giustificazione di tale relazione, vedere le *leggi di Newton* (1)

A2. I principi della Dinamica

Principi della Dinamica

Le leggi di Newton o i principi della dinamica.

---

1. Le Leggi di Newton (o i principi della dinamica)

#Teorema

Teorema (i principi della dinamica o le leggi di Newton).

Enunciamo le leggi di Newton.

I. *"Se la forza risultante $\sum \vec{F}$ che agisce su un corpo è nulla, allora l'accelerazione di questo corpo è anche nulla."* Ovvero,

$$\sum \vec{F} = 0 \implies \vec{a} = 0$$

II. *"L'accelerazione di un corpo è proporzionale alla forza risultante su questo corpo"* Ovvero,

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

III. *"La forza esercitata da un corpo A su un corpo B è uguale in modulo e direzione e in verso opposto alla forza esercitata da B su A."* (legge di azione-reazione); ovvero,

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

#Osservazione

Osservazione (le prime due leggi sono apparentemente ridondanti).

Osserviamo che la prima legge sembra una *diretta conseguenza* della seconda legge di Newton. Infatti, se la risultante è nulla, allora anche l'accelerazione è nulla.

Tuttavia, è comunque utile tenerci conto della *prima legge*, in quanto sarà utile per *definire moti rettilinei uniformi* (oppure *sistemi di riferimento inerziali*); ovvero i moti dei corpi su cui non agiscono *forze*.

A3. Diagramma di Corpo Libero

Diagramma di Corpo Libero

Metodo convenzionale per la rappresentazione delle forze: diagramma di corpo libero. Regole per disegnare un diagramma di corpo libero.

---

0. Voci Correlate

- Definizione di Massa e di Forza

1. Diagramma di Corpo Libero

#Osservazione

> Osservazione (l'obbietivo di questa convenzione).
>
> Vogliamo trovare delle *regole precise* per rappresentare un *problema di fisica* che coinvolge tante *forze*. Uno dei modi è il *diagramma del corpo libero*, e le regole sono come seguono.

#Proposizione

> Proposizione (regole del diagramma di corpo libero).
>
> Enunciamo le seguenti regole per disegnare un *diagramma di corpo libero*.
> A. Ogni corpo viene *rappresentato come un punto* (anche se sarebbe un corpo esteso).
> B. Disegnare *tutte*, ma *solo*, le *forze* che sono *applicate* sul *corpo*, come dei *vettori*.
>
> Quindi, non vanno disegnate: la velocità del corpo; la forza applicata dal corpo su un altro corpo (invece va disegnata la contraria)

2. Esempio di Diagramma di Corpo Libero

#Esempio

> Esempio (esempio).
>
> Vedere esempio di forza peso e forza normale (1).

B. LE FORZE A CONTATTO DELLA DINAMICA

B1. Forza Peso e Forza Normale

Forza Peso e Forza Normale

Definizione di forza peso e forza normale ad una superficie. Esempio di forza peso e forza normale di un corpo.

---

0. Voci correlate

- Principi della Dinamica
- Definizione di Massa e di Forza

1. Forza Peso

#Definizione

Definizione (forza peso).

Supponiamo di avere un corpo con massa m. Come ci è noto, in caduta libera il corpo cade con un'accelerazione g.

Quindi per le leggi di Newton, possiamo definire la *forza peso* come la quantità

$$\vec{F}_g = m\vec{g} = -mg \cdot \hat{j}$$

#Osservazione

Osservazione (la forza peso non è necessariamente una forza inerziale).

Anche se la formula $F_g = mg$ assomiglia a $F = ma$, ricordiamo che queste sono *molto diverse*. Infatti, non è detto che le masse m siano necessariamente uguali (1).

Inoltre, si nota che

$$\vec{F} = m\vec{g}$$

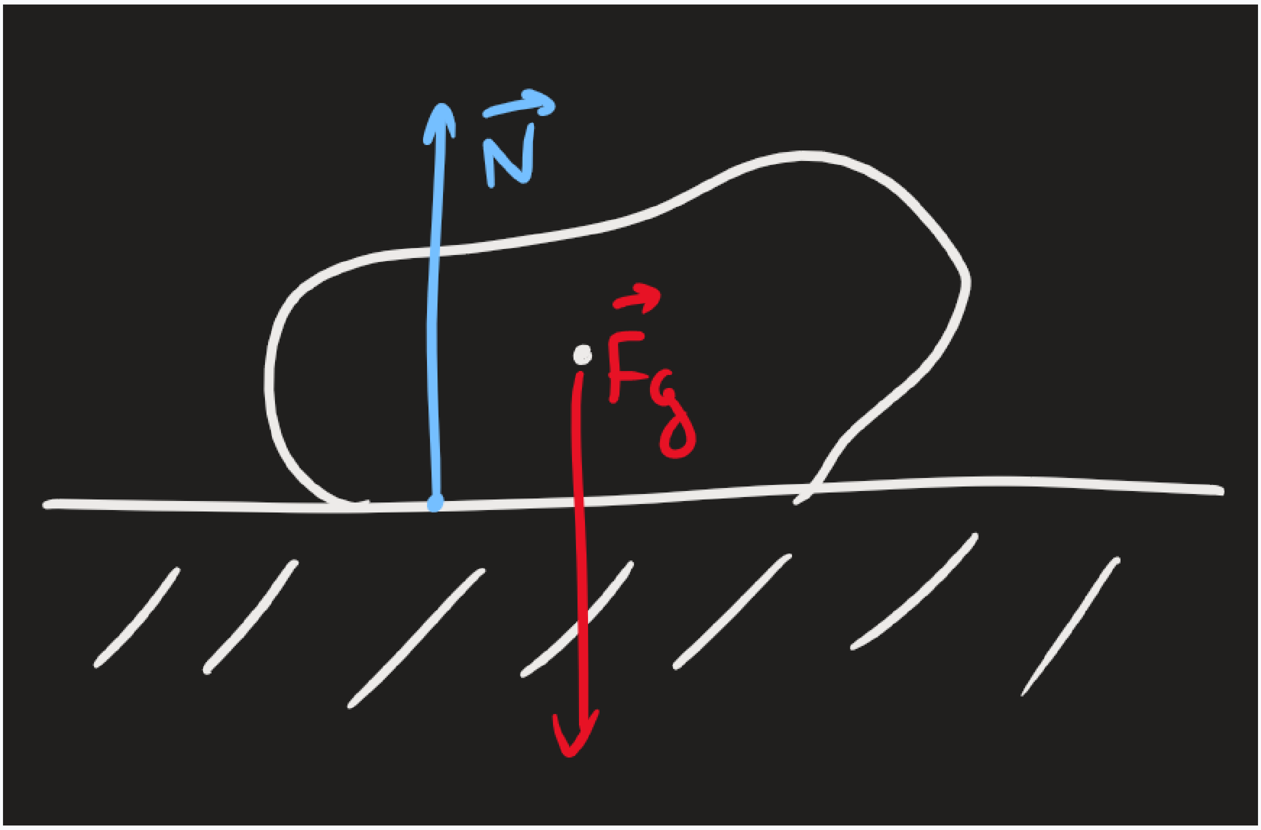
> è un *caso particolare* della *legge gravitazionale universale*; infatti, se si vuole essere più precisi, $\vec{g}$ è un valore al variare in *altezza dal centro della terra e massa della terra*; $\vec{g} = \vec{g}(r_T, m_T)$.

2. Forza Normale

#Definizione

> **Definizione (forza normale).**
>
> Adesso supponiamo di avere un *corpo* su una *superficie* (*figura 2.1.*).
> Come si potrebbe osservare, questo corpo subisce la *forza peso* (1), tuttavia non è in movimento.
> Allora, per la legge di Newton dev'esserci una forza che si oppone alla forza peso $\vec{F}_g$.
>
> Si ha infatti la *forza normale*, che è un *caso particolare* di *forza di contatto*; è la *spinta* della superficie. In particolare, il verso di questa forza è *perpendicolare* (ovvero normale) alla superficie.
>
> La forza normale si denota con $\vec{N}$.

FIGURA 2.1. (*Corpo su una superficie*)



3. Esempio Combinato

#Esempio

Esempio (esempio dei due blocchi).

Supponiamo di avere due blocchi, uno posto sopra l'altro (ovvero la *figura 3.1.*). Conoscendo le sole forze pesi dei corpi, vogliamo trovare la forza normale esercitata su entrambi i corpi.

Innanzitutto rappresentiamo le forze secondo il *diagramma di corpo libero* (1); ovvero abbiamo al *figura 3.2.*. Adesso, sfruttiamo le *leggi di Newton* (2).

Innanzitutto posso dire che la forza risultante sul *primo corpo* è

$$\sum \vec{F}_1 = \vec{N} + \vec{N}_{12} + \vec{F}_{g1} = m\vec{a}_1 = 0$$

Parimenti, sul secondo corpo abbiamo

$$\sum \vec{F}_2 = \vec{N}_{21} + \vec{F}_{g2} = m\vec{a}_2 = 0$$

L'obiettivo è di *isolare* la $\vec{N}$.
Allora usiamo la terza legge di Newton, per cui $\vec{N}_{12} = -\vec{N}_{21}$. Inoltre, per definizione di forza peso abbiamo $\vec{F}_{g1} = m_1\vec{g}$; $\vec{F}_{g2} = m_2\vec{g}$.

Infine, combinando tutto ho

$$\begin{aligned} \vec{N} &= -\vec{N}_{12} - \vec{F}_{g1} \\ &= \vec{N}_{21} - \vec{F}_{g1} \\ &= -\vec{F}_{g2} - \vec{F}_{g1} \\ &= -m_2\vec{g} - m_1\vec{g} = -(m_1 + m_2)\vec{g} \end{aligned}$$

che è la risposta voluta.

FIGURA 3.1. (*Situazione iniziale*)

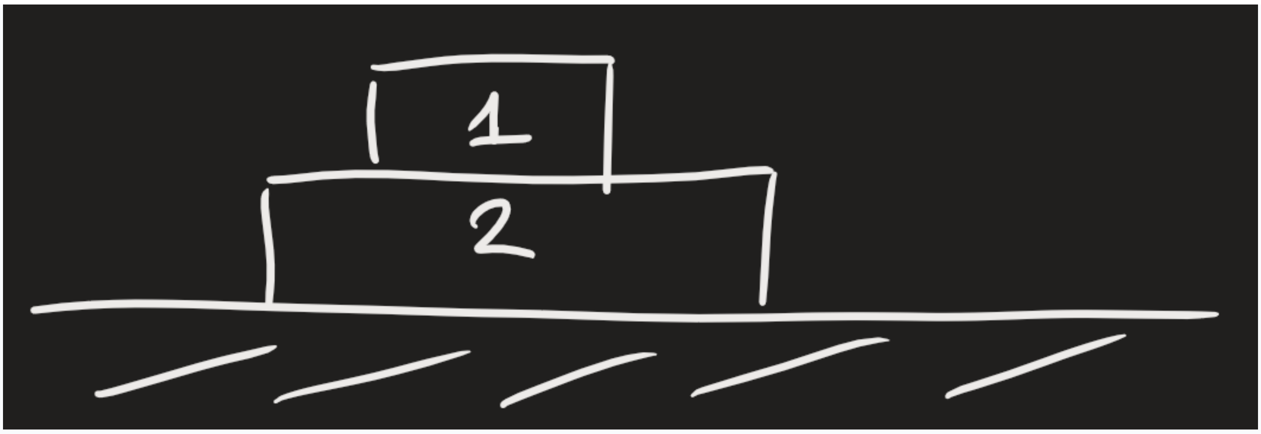
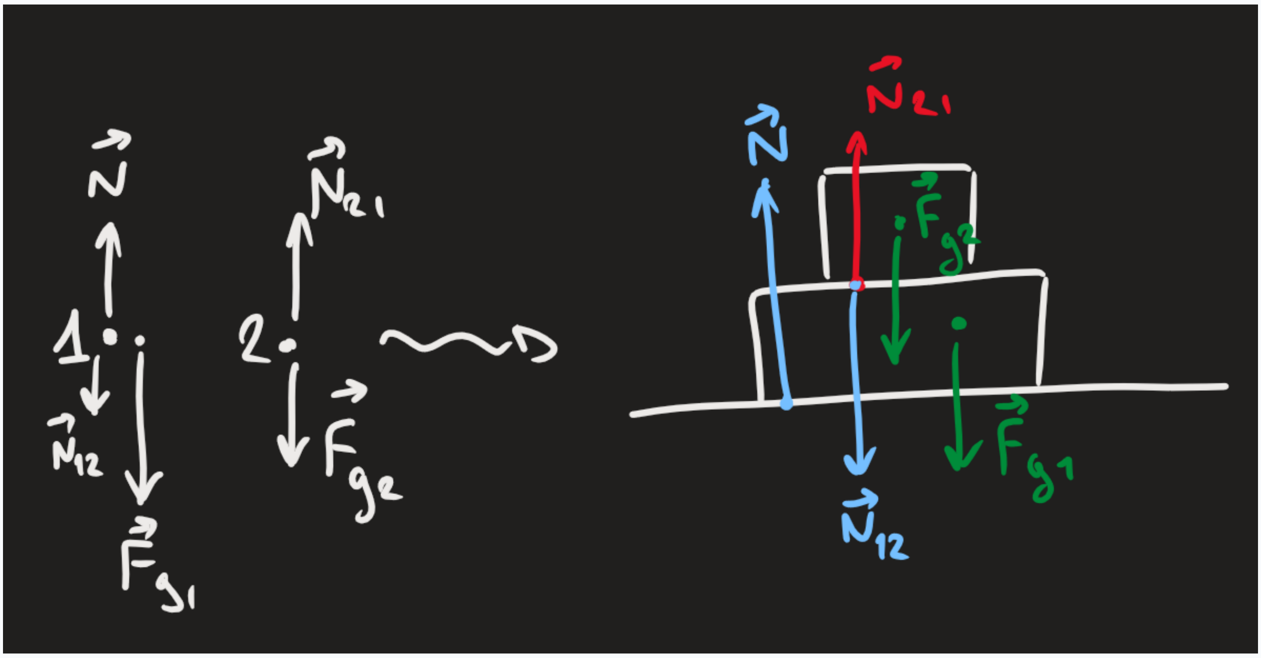


FIGURA 3.2. (*Diagramma dei corpi liberi*)



B2. Corde

Forza Tensione

Forza tensione generata da una corda ideale

---

0. Voci correlate

- Forza Peso e Forza Normale
- Definizione di Massa e di Forza

1. Forza Tensione

#Definizione

Definizione (tensione meccanica).

Prendiamo un *corpo sospeso* su una *corda idealizzata* (ovvero senza massa). Intuiamo che c'è una *forza* esercitata da questa *corda idealizzata*, che si oppone alla *forza peso*.

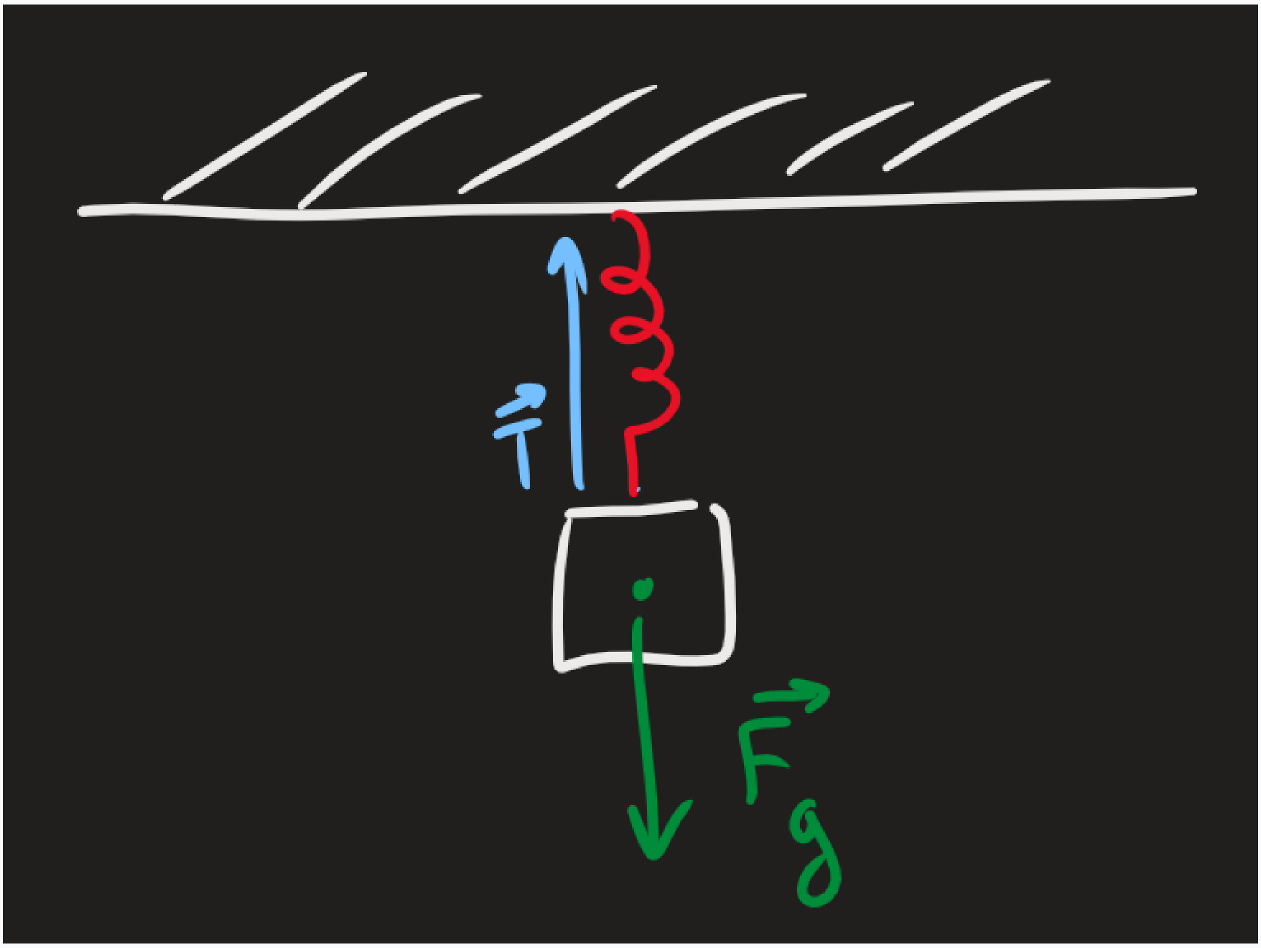
Chiamiamo questa forza come *"tensione meccanica"* e la indiamo con $\vec{T}$

#Proposizione

Proposizione (le proprietà della tensione).

Notiamo le seguenti proprietà della tensione.
I. La tensione $\vec{T}$ è *sempre* parallela alla corda esercitante della forza.
II. Il modulo $|\vec{T}|$ è *uguale lungo tutto la corda*; ovvero $|\vec{T}|$ si tramette lungo la corda.

FIGURA 1.1. (*Situazione ipotetica*)



B3. Attrito Statico e Dinamico

Attrito Statico e Dinamico

(c) Qual è la velocità di Mario quando la molla passa attraverso la sua posizione di equilibrio?
- - -
Attrito statico e dinamico. Definizioni, giustificazione microscopica e formule.

---

0. Voci correlate

- Forza Peso e Forza Normale
- Definizione di Massa e di Forza

1. Considerazione Preliminare

#Osservazione

> Osservazione (gli oggetti in moto si fermano).
>
> Prendiamo un oggetto in moto, con un'accelerazione $\vec{a}$ (quindi abbiamo dato una spinga). Dopo un certo intervallo di tempo, questo oggetto si ferma.
>
> Questo significa che *esiste* una forza che si opponga alla *"forza motrice"* F_m (ovvero quello che dà l'accelerazione $\vec{a}$). Per poter descrivere questa forza, facciamo un breve richiamo alla *forza normale* (1).
>
> La forza normale è *ortogonale* alla superficie, e ha il modulo tale che il moto è *vincolato*, permettendo solo un *movimento parallelo* alla superficie.

2. Definizione di Attrito

> Definizione (attrito statico e dinamico).
>
> L'attrito è la *"versione ortogonale"* della *forza normale* (1); ovvero è solo *parallela* alla superficie e il suo modulo *varia* a seconda della tipologia dell'attrito: statico e dinamico.

A. *Attrito statico*: L'attrito statico agisce quando abbiamo un *corpo fermo*, e ha il modulo tale che il moto sia vincolato. Questa forza viene indicata con F_s e vale che $F_s = -F_m$

Ad un certo punto la forza motrice diventa sufficientemente grande per far muovere il corpo, e a questo punto entra in gioco l'*attrito dinamico*.

B. *Attrito dinamico*: L'attrito dinamico agisce quando abbiamo un *corpo in movimento*, e ha il modulo *proporzionale* alla *forza normale* (quindi l'oggetto si sta muovendo). Questa forza viene indicata con F_d

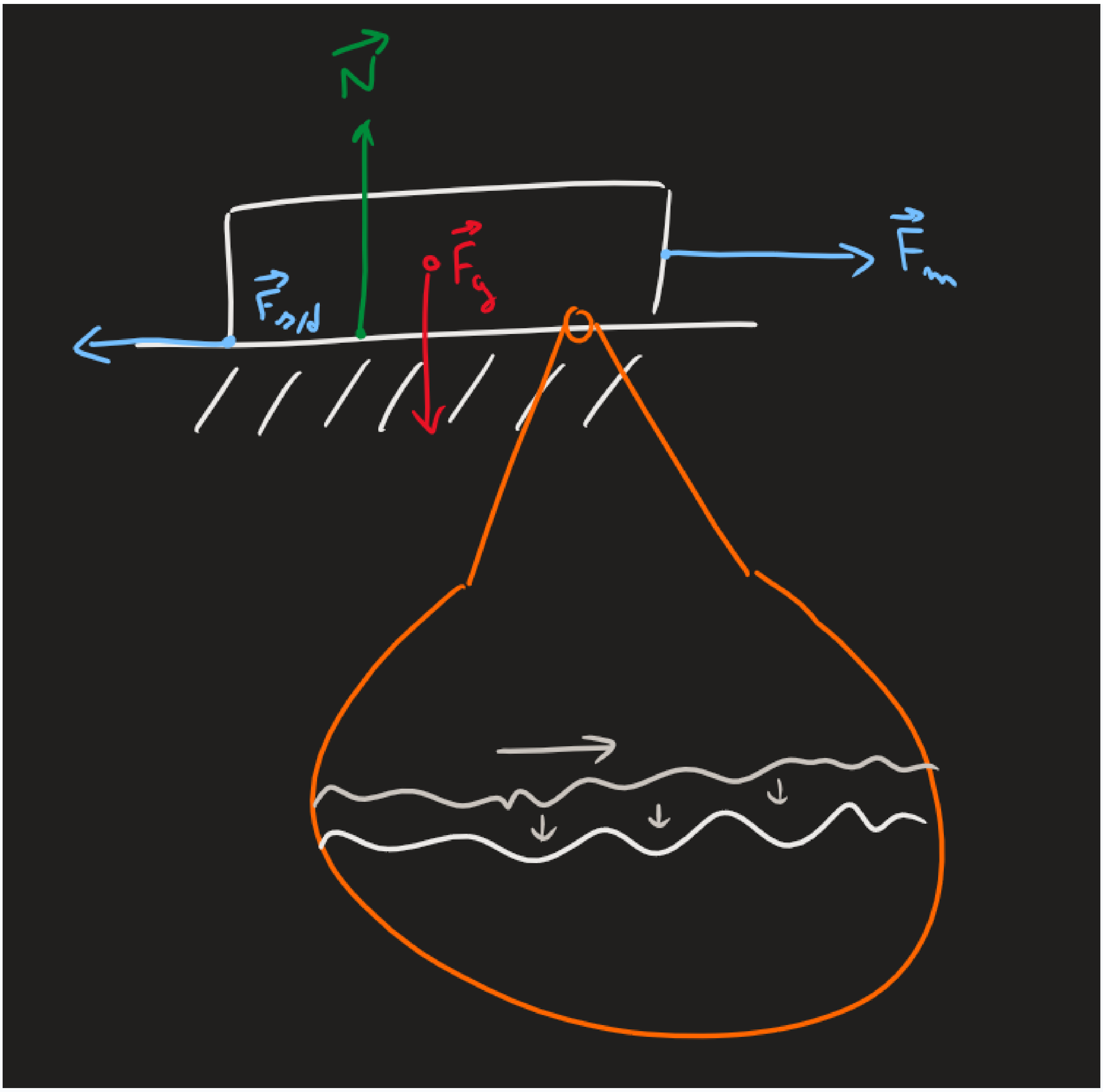
#Osservazione

Osservazione (giustificazione microscopica per l'attrito).

Come mai esiste l'attrito? Se prendiamo un microscopio e analizziamo le *superfici* del corpo e della superficie stessa, si potrà vedere che questi non saranno *mai* completamente regolari.

Quindi, quando facciamo muovere il corpo, abbiamo che le due superfici irregolari si oppongono, finché questi si *"incastrano tra di loro perfettamente"*, per tenere il corpo fermo.

FIGURA 2.1. (*Giustificazione microscopica dell'attrito*)



#Teorema

Definizione (coefficienti di attrito).

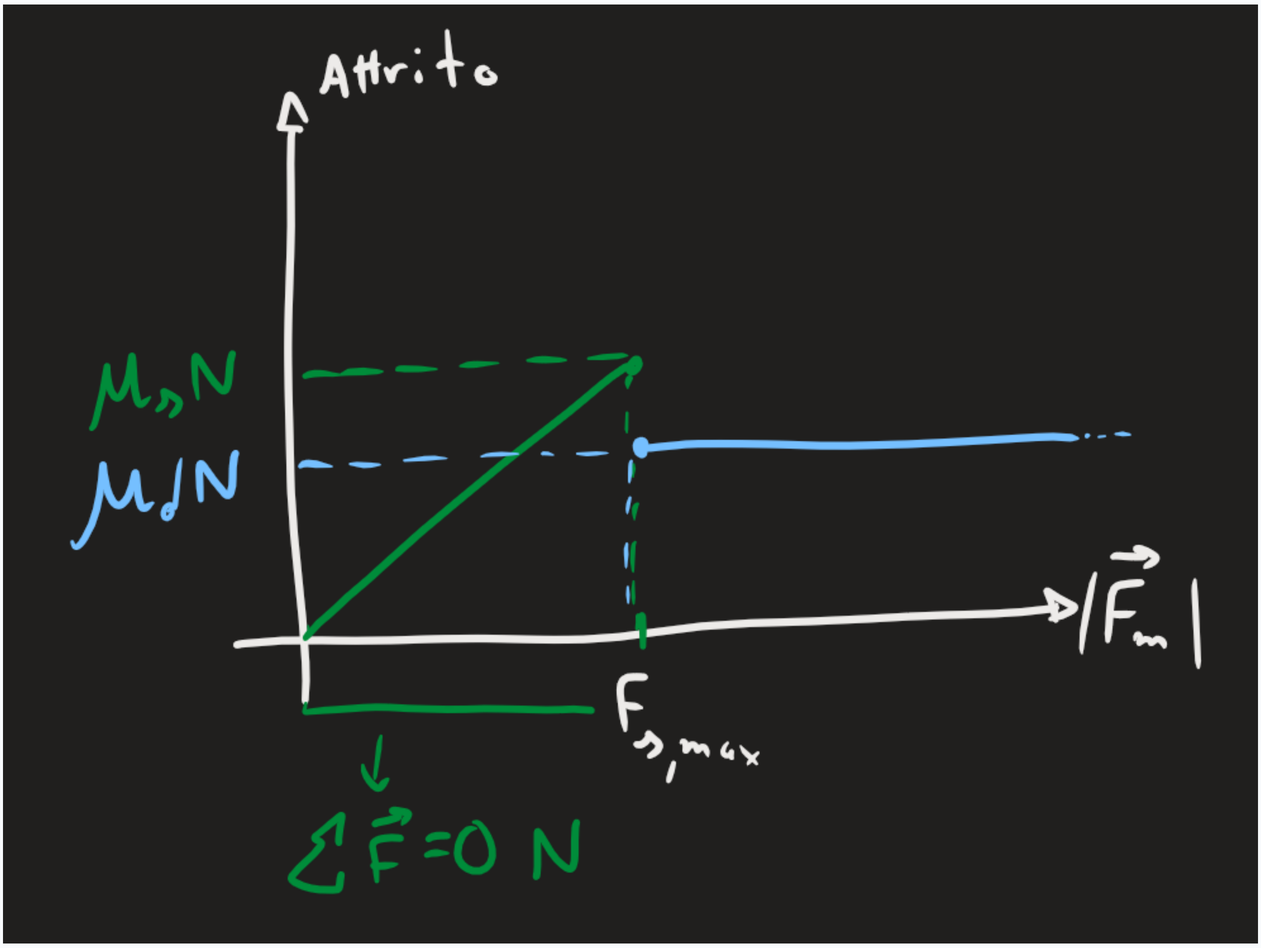
Definiamo i *coefficienti di attrito statico e dinamico* come i *numeri adimensionali* che descrivono la *quantità dell'attrito dinamico*.

In particolare abbiamo che valgono

$$\boxed{\begin{aligned} F_d &= \mu_d N \\ F_d &\leq \mu_s N \end{aligned}}$$

Quindi sicuramente possiamo dire che la *forza dinamica* è limitata dal valore $\mu_s N$.

FIGURA 2.2. (*Grafico generale dell'attrito al variare dell'intensità della forza motrice*)



#Osservazione

> Osservazione (situazioni generali).
>
> Osserviamo che generalmente vale che $\mu_s \mu_d < 1$ (ma non *sempre*!); inoltre in moltissimi casi, vale anche $\mu_s > \mu_d$.

B4. Resistenza dei Fluidi

Resistenza dei Fluidi

La forza dovuta alla resistenza dei fluidi. Flusso laminare e flusso turbolente.

---

0. Voci correlate

1. Flusso laminare

#Definizione

Definizione (flusso laminare, legge di Stoke).

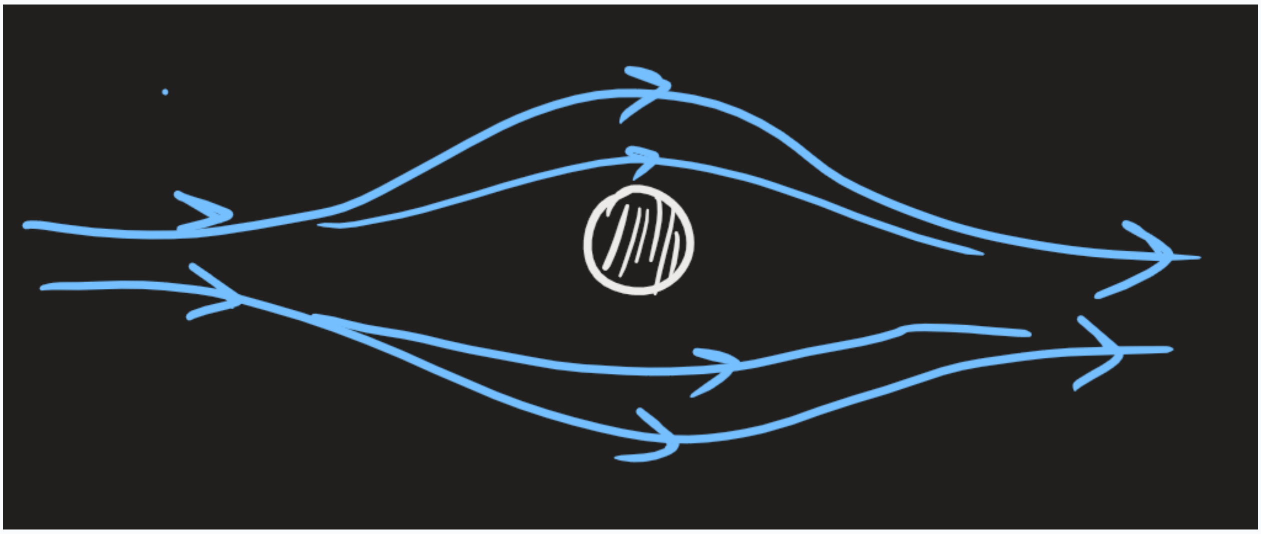
Supponendo che un *corpo* stia muovendo ad una *"velocità bassa"* con una *densità del fluido "bassa"*, possiamo modellizzare la resistenza con la *figura 1.1.*. Ovvero, il fluido si *"devia"* attorno l'oggetto.

Quantitativamente la forza di resistenza si misura con la *legge di Stoke*.

$$\boxed{\vec{F} = -b\vec{v}}$$

dove b è un *coefficiente* in $\frac{\text{kg}}{\text{s}}$.

FIGURA 1.1. (*Flusso laminare*)



#Osservazione

Osservazione (l'utilità di questo modello).

La *legge di Stoke* è utile dato che il modello dato è facilmente integrabile con la *seconda legge di Newton* (1), anche se nella realtà è raramente applicabile.

> Infatti, si mette *"velocità bassa"* e *"densità bassa"* tra le virgolette, dal momento che applichiamo questo modello anche con *velocità alte* e *densità alte*.

2. Flusso turbolente

#Definizione

> Definizione (flusso turbolente).
>
> In casi più realistici, si applica il *flusso turbolente*, dove il modulo della forza di resistenza viene descritta come segue.
>
> $$\boxed{\left|\vec{F}_v\right| = \frac{1}{2}\rho A C_D v^2}$$
>
> dove ρ è la *densità del fluido*; A è l'*area di proiezione dell'oggetto* secondo il fluido; C_D è un *coefficiente di resistenza* (drag), che dipende dalla forma dell'oggetto.

B5. Forza Elastica

Forza Elastica

Definizione di forza elastica. Formula matematica per descrivere la forza elastica al variare della posizione x (legge di Hooke).

---

0. Voci correlate

- Diagramma di Corpo Libero
- Formula di Taylor
- Definizione di Massa e di Forza

1. Definizione di Forza Elastica

#Definizione

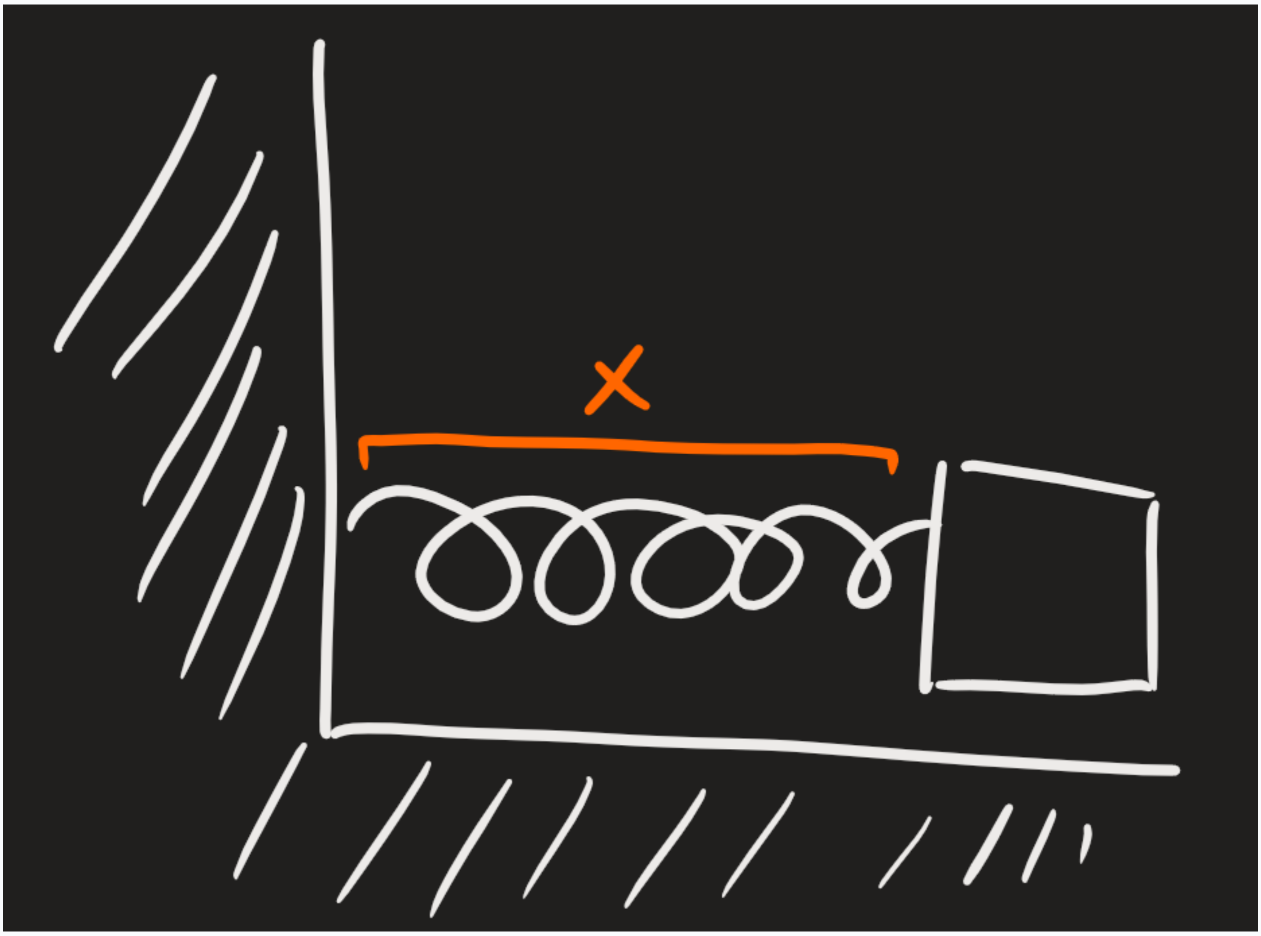
Definizione (forza elastica).

Supponiamo di avere un'oggetto fermo (o in quiete) attaccato ad una molla, con una distanza x dall'origine della molla (*figura 1.1.*).

Allora è naturale pensare che, esercitando un ulteriore spostamento Δx, abbiamo una forza che spinge l'oggetto *indietro* o *avanti*, a seconda del valore Δx.

Questa forza si dice *forza elastica*.

FIGURA 1.1. (*Situazione iniziale*)



2. Legge di Hooke

#Teorema

Teorema (legge di Hooke).

La *forza elastica* esercitata da una molla si calcola come il seguente

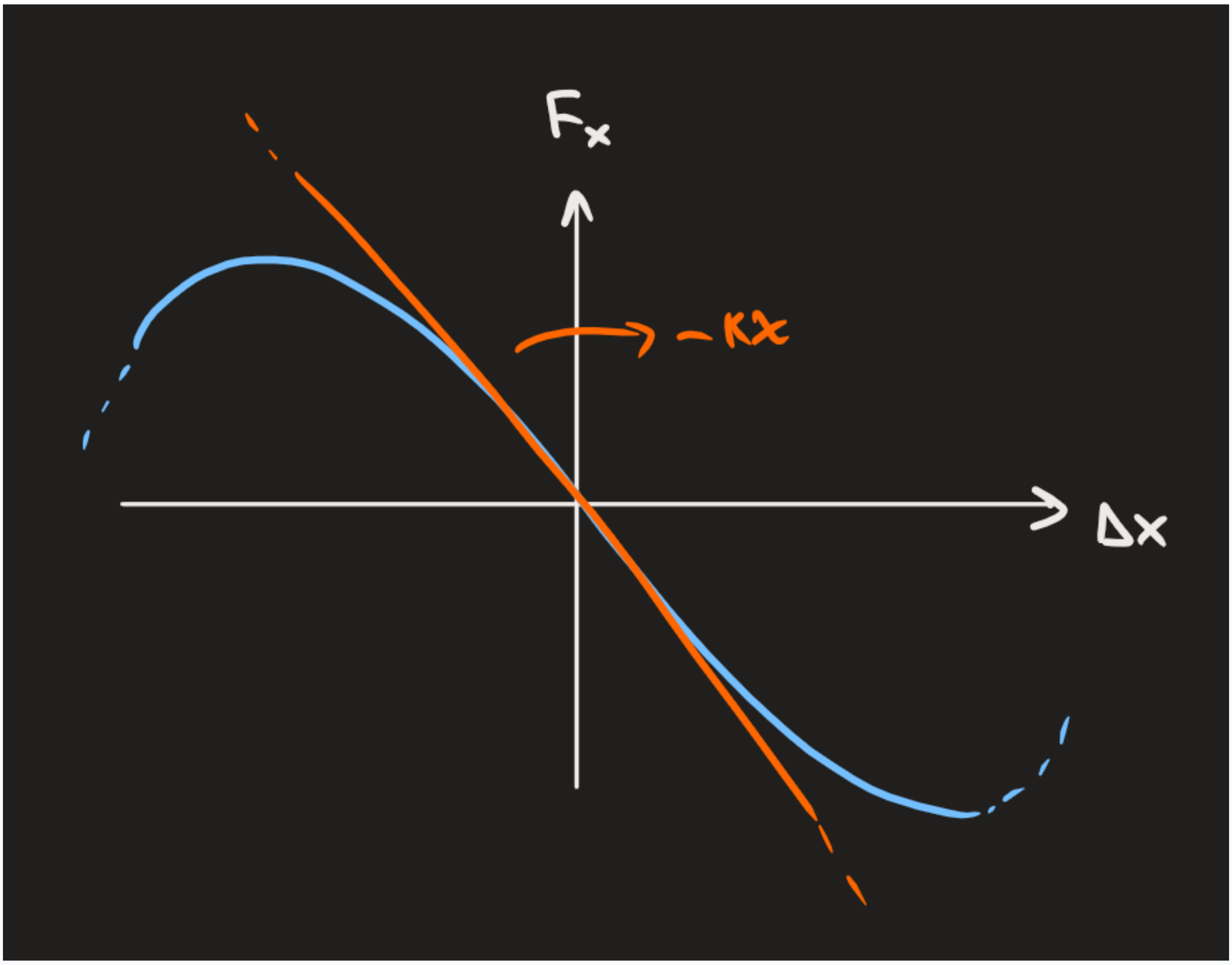
$$F_x = -k \cdot \Delta x$$

dove k è una *costante di proporzionalità* (detta *rigidità*), misurata in $\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}^2}$.

#Osservazione

> Osservazione (la legge di Hooke è un'approssimazione delle funzioni trigonometriche).
>
> Notiamo che la *legge di Hooke* non è altro che la *prima espansione di Taylor*. Infatti, per la *formula di Taylor* (1 o 2) abbiamo che
>
> $$\sin x \simeq x, \Delta x \to 0$$
>
> Quindi, possiamo rappresentare la forza elastica con questa funzione? Sì, questo avrebbe senso con la nostra realtà; infatti, se tirassimo l'oggetto attaccato alla molla *"troppo"* in avanti o indietro, la *molla si spezzerebbe* (*figura 2.1.*).
>
> Tuttavia, questo renderebbe tutto più complicato da un punto di vista matematico, rendendo preferibile la rappresentazione della forza elastica secondo la *legge di Hooke*.

FIGURA 2.1. (*Grafico più realistico dell'andamento della forza elastica*)



C. LE FORZE PARTICOLARI DELLA DINAMICA

C1. Forza Centripeta

Forza Centripeta

La dinamica del moto circolare: forza centripeta come forza qualificativa. Esempi di forza centripeta.

---

0. Voci correlate

- Moto Circolare Uniforme
- Definizione di Massa e di Forza

1. Dinamica del moto circolare

#Definizione

Definizione (forza centripeta).

Supponiamo che un oggetto stia muovendo con un *moto circolare uniforme* (1), con una *velocità* $|\vec{v}|$ *costante* e un'accelerazione $\vec{a}$ verso il centro.

Definiamo la *forza centripeta* come la *quantità di forza necessaria per mantenere questo moto circolare*. La formula per il modulo della forza centripeta è come segue (per il verso si sa che è sempre verso il centro).

$$\left|\vec{F}_c\right| = m|\vec{a}| = \frac{mv^2}{R}$$

#Osservazione

Osservazione (la forza centripeta è un qualificativo).

Osserviamo che, al contrario delle altre forze, la *forza centripeta* non spiega l'origine del *moto circolare*: descrive piuttosto il *moto*.

2. Esempi di Forza Centripeta

#Esempio

Esempio (lista di esempi).

Esempi di forza centripeta sono come seguono.

- Gravitazione Universale
- L'attrito statico di un'auto che va in cerchi
- Tensione
- Forza normale di un'oggetto che si gira (come il tagadà)
- Auto su una curva rialzata

Ci sono altri esempi, di cui non occupiamo.

C2. Forza Apparente

Forza Apparente

Dinamica dei sistemi di riferimento non inerziali: caso lineare. Definizione di forza apparente. Esempio di forza apparente: il treno che accelera.

---

0. Voci correlate

- Moti Relativi
- Definizione di Massa e di Forza

1. Sistemi di riferimento non inerziali

#Osservazione

> Osservazione (richiami preliminari).
>
> Facciamo dei brevi *richiami* ai *sistemi di riferimento* (1). Ci ricordiamo la seguente legge fondamentale per i sistemi di riferimento A e B:
>
> $$\vec{r}_{PA} = \vec{r}_{PB} + \vec{r}_{BA}$$
>
> da cui segue
>
> $$\vec{v}_{PA} = \vec{v}_{BA} + \vec{v}_{PB} + \text{rot}_1$$
>
> dove rot_1 è una *variabile* per tenere conto delle *rotazioni*. Inoltre, da qui segue anche
>
> $$\vec{a}_{PA} = \vec{a}_{BA} + \vec{a}_{PB} + \text{rot}_2$$
>
> dove rot_2 è una *variabile analoga* a rot_1. Esempi di casi in cui bisogna tenere conto di queste variabili sono le seguenti: forza centrifuga e forza di Coriolis.
>
> Adesso definiamo formalmente un *sistema di riferimento lineare non-inerziale*.

#Definizione

Definizione (sistema di riferimento lineare non-inerziale).

Siano A e B dei sistemi di riferimento. Se vale che

$$\vec{a}_{PB} = \vec{a}_{PA} + \vec{a}_{BA}$$

con $\vec{a}_{BA} \neq 0$, allora si dice che A è un *sistema di riferimento inerziale* e B è un *sistema di riferimento non-inerziale*. In questo caso particolare diciamo che i sistemi di riferimento sono *lineari*, dato che $\operatorname{rot}_2 = 0$.

2. Forza Apparente di un Sistema non-inerziale

#Osservazione

Osservazione (osservazione per la forza apparente).

Notiamo che dall'equazione

$$\vec{a}_{PB} = \vec{a}_{PA} + \vec{a}_{BA}$$

segue, per la *seconda legge di Newton* (1), che

$$\vec{F}_A = m\vec{a}_{PA} = m\vec{a}_{PB} + m\vec{a}_{BA}$$

ovvero

$$\vec{F}_B = m\vec{a}_{PB} = \vec{F} - m\vec{a}_{BA}$$

#Definizione

Definizione (forza apparente).

Siano A e B dei *sistemi di riferimento lineari*, rispettivamente uno inerziale e l'altro non-inerziale. Allora la quantità

$$\vec{F} = m\vec{a}_{BA}$$

si dice *"forza apparente"*. Questo nome ci suggerisce infatti che si tratta di una forza *"apparente"* che rappresenta solamente un moto, ma non si tratta di una vera e propria forza.

3. Esempio del treno

#Esempio

Esempio (il pendolo nel treno).

Supponiamo che in un *treno*, che si sta accelerando un un'accelerazione $\vec{a}$, c'è un *oggetto* attaccato al *soffitto* con una *corda ideale* (*figura 3.1.*).

Notiamo che quando il treno si accelera, l'oggetto si *muove indietro*. Come mai? Per scoprirlo, usiamo le nozioni appena apprese sulle *forze apparenti*.

Prima di tutto notiamo che dal *sistema di riferimento inerziale* (ovvero quello esterno), abbiamo che vale l'equazione

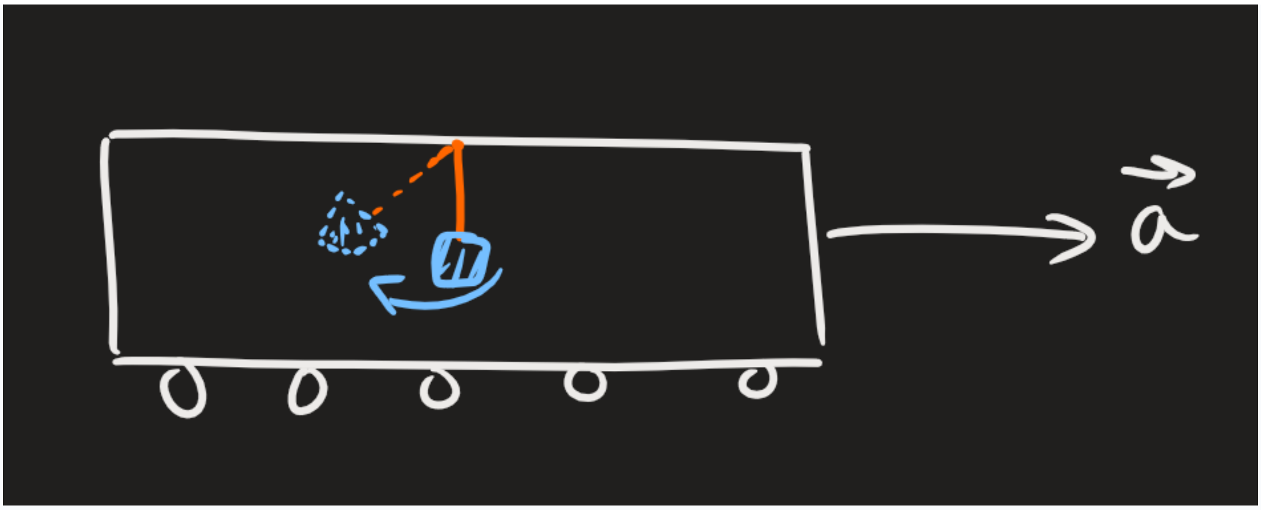
$$\sum \vec{F} = \vec{T} + \vec{F}_g = m\vec{a}$$

Poi per il *sistema di riferimento non-inerziale* (ovvero per il personaggio dentro il treno) abbiamo che l'oggetto è in *quiete*, ovvero

$$\sum \vec{F} = 0 \implies \vec{F} + \vec{T} + \vec{F}_g = 0 \implies \vec{F} = -m\vec{a}$$

allora vediamo che la *forza apparente* $\vec{F}$ è *negativa*, ovvero che spinge l'oggetto *indietro*.

FIGURA 3.1. (*Situazione iniziale*)



C3. Forza Gravitazionale

Forza Gravitazionale

La legge di gravitazione universale: enunciato e giustificazione pratica. Campo gravitazionale.

---

0. Voci correlate

- Forza Centripeta

1. La Legge di Gravitazione Universale

#Teorema

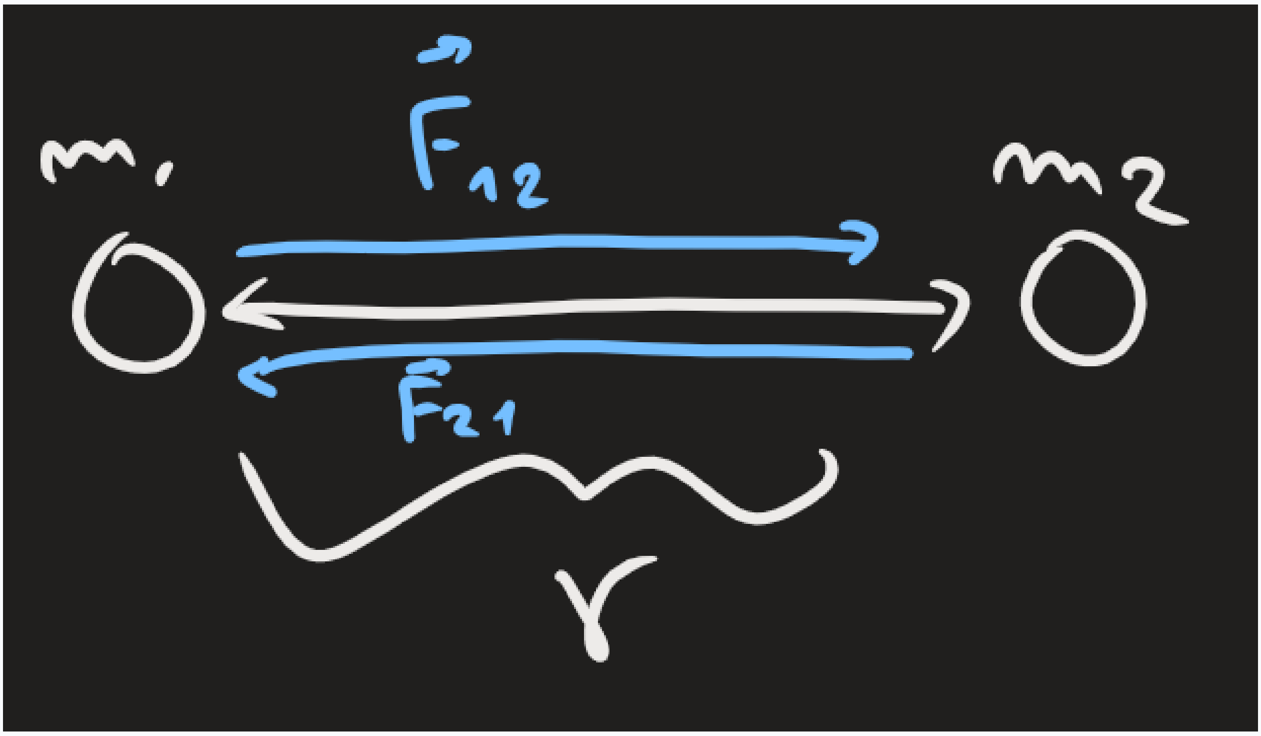
Teorema (legge di gravitazione universale).

Due corpi, distanziati con una distanza r e aventi *massa* m_1 e m_2 si *attraggono sempre* con la *forza gravitazionale*, del cui modulo è data dalla formula

$$\left|\vec{F}_{12}\right| = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

dove G è una *costante di conversione* per calcolare la forza in *Newton* $[\mathrm{N}]$
.

FIGURA 1.1. (*Diagramma esplicativo*)



#Osservazione

Osservazione (la giustificazione pratica di Newton).

Newton enunciò questa legge per *scrivere* una *teorica unica* per descrivere sia la *caduta degli oggetti* che il *movimento degli astri*. Infatti, lui ha ragionato come segue.

Possiamo calcolare l'accelerazione centripeta della luna $\vec{a}_c$;

$$a_c = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R \simeq 2.66 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

considerando che la distanza tra la luna e la terra è $R = 385\ 000 \text{ km}$ e il tempo per girare la terra è $27,3$ giorni.

Adesso osservo che alla superficie della terra ho l'accelerazione $g \simeq 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
.
Quindi, se le *causa della gravità terrestre* e l'*accelerazione centripeta della luna* sono le medesime, posso misurare le proporzioni

$$\frac{a_c}{g} \simeq 3600, \frac{R_L}{R_T} \simeq 60.43$$

Allora così noto che

$$\left(\frac{1}{\frac{R_T}{R_L}}\right)^2 \simeq \frac{a_c}{g} \longrightarrow F \propto \frac{1}{d^2}$$

ovvero la *forza è inversamente proporzionale* alla *distanza quadrata delle masse*.

2. Campo Gravitazionale

#Definizione

Definizione (campo gravitazionale).

Si definisce il *campo gravitazionale* di un'oggetto avente massa m come il *campo scalare* dato da

$$\mathcal{G}(r) = G\frac{m}{r^2}$$

C4. Forza Elettromagnetica

Forza Elettromagnetica

Interazione elettrostatica delle cariche, forza di Coulomb. Confronto numerico tra forza di Coulomb e forza gravitazionale. Campo elettrico. Interazione magnetica delle cariche data dal prodotto vettoriale di velocità e campo magnetico. Forza di Lorentz per l'interazione elettromagnetica.

---

0. Voci correlate

- Forza Gravitazionale

1. Forza di Coulomb

#Teorema

Teorema (forza di Coulomb).

Due *oggetti* con distanza r e aventi cariche q_1 e q_2 provano una *forza repulsiva o attrattiva* tra q_1 e q_2, detta come *forza di Coulomb*, e viene calcolata come segue

$$\vec{F}_{12} = -k_e \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_{12}|^2} \cdot \underbrace{\frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|}}_{\hat{r}}$$

dove k_e è la costante data da

$$k_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \simeq 8.99 \cdot 10^9 \ \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}^2}$$

#Definizione

Definizione (campo magnetico).

Si definisce il *campo magnetico* similmente al *campo gravitazionale* (1), ovvero come il *campo vettoriale* dato da

$$\vec{E}_q(\vec{r}) = -k_e \frac{q}{|\vec{r}|^2} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

2. Confronto Numerico tra Forza Elettrica e Gravitazionale

#Osservazione

Osservazione (confronto numerico tra forza di Coulomb e di Newton).

Notiamo che la *forza gravitazionale di Newton* (1) e la *forza di Coulomb* condividono la *medesima struttura matematica* per calcolare il *modulo delle forze*; tuttavia si trattano di forze completamente diverse.

Infatti, in certi contesti la *forza elettrica* è più *forte* della *forza gravitazionale*. Prendiamo le seguenti *particelle elementari*: un *protone* ed un *elettrone*, coi valori

$$\begin{pmatrix} m_p & q_p \\ m_e & q_e \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1.672 \cdot 10^{-27} \\ 9.109 \cdot 10^{-31} \end{matrix}}_{\text{kg}} & \underbrace{\begin{matrix} 1.602 \cdot 10^{-19} \\ -1.602 \cdot 10^{-19} \end{matrix}}_{\text{C}} \end{pmatrix}$$

Allora abbiamo che il *rapporto tra la forza elettrica* F_e e la *forza gravitazionale* F_g è data da

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{k_e q_e^2}{G m_e m_p} \cdot \frac{d^{-2}}{d^{-2}} \simeq 2 \cdot 10^{39}$$

Ovvero che la *forza elettrica* è più forte della *forza gravitazionale* $2 \cdot 10^{39}$ volte; in questo caso la forza gravitazionale F_g diventa *trascurabile*.

3. Interazione Magnetica

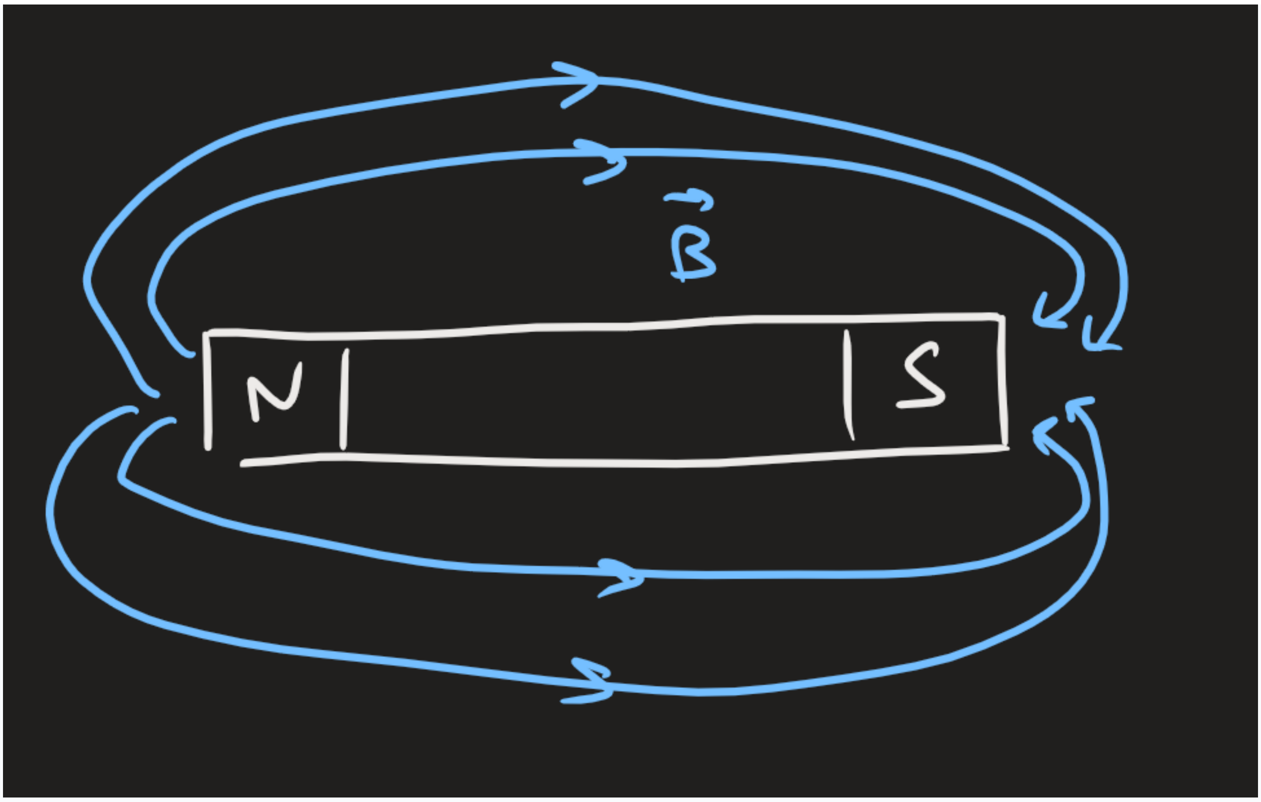
#Osservazione

Osservazione (osservazioni storiche del campo magnetico).

Il *campo magnetico* è stato *osservato* da tanto tempo, soprattutto assieme all'*interazione elettrica* della particella; ad esempio si ha il noto caso della *calamita*, col polo *nord* e *sud*.

Denomineremo il *campo magnetico* come $\vec{B}$.

FIGURA 3.1. (*La calamita*)



#Teorema

Teorema (forza magnetica).

Supponiamo di avere una *carica* q, *in movimento* con una velocità $\vec{v}$ all'interno di un *campo magnetico* $\vec{B}$.
Allora la *forza magnetica* è data dal *prodotto vettoriale*

$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

in particolare si ha che il suo modulo è

$$F = |\vec{v}||\vec{B}| \sin \theta$$

(*dove θ è l'angolo creato dai due vettori*)

Inoltre la direzione del vettore risultante del prodotto scalare $\vec{F}$ è data dalla *regola della mano destra*.

#Proposizione

Proposizione (regola della mano destra).

Siano v_1 e v_2 dei *vettori* in $\mathbb{R}^2$. Allora la *direzione* del vettore risultante dato dal prodotto vettoriale $v = v_1 \times v_2$ è *ortogonale* a entrambi i vettori v_1 e v_2 ed è data con la seguente procedura.

1. Estendere e aprire la mano destra
2. Estendere l'*indice* (o il *pollice*) come il *primo vettore* v_1
3. Estendere il *dito medio* (o l'*indice*) come il *secondo vettore* v_2
4. Il vettore risultante v è il *pollice* (o il *dito medio*)

Notare che abbiamo *due procedure possibili*; il risultato finale è *indifferente* dalle dita usate, quindi si può usare la maniera più *conveniente*.

4. Forza di Lorentz

#Teorema

Teorema (forza di Lorentz).

Sia q una *carica puntiforme* con velocità $\vec{v}$, immerso in un *campo magnetico* $\vec{B}$ e *campo elettrico* $\vec{E}$.

Allora si dice *la forza di Lorentz* come la *forza elettrica* e la *forza magnetica* esercitata su questa carica ed è data dalla formula seguente.

$$\boxed{\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)}$$

D. LE APPLICAZIONI DELLA DINAMICA

D1. Il piano inclinato

Il Piano Inclinato

Caso specifico della dinamica: il piano inclinato.

---

0. Voci Correlate

- Definizione di Massa e di Forza
- Forza Peso e Forza Normale
- Attrito Statico e Dinamico
- Diagramma di Corpo Libero
- Funzioni trigonometriche

1. Il Piano Inclinato senza Attrito

#Osservazione

Osservazione (il piano inclinato, osservazione preliminare).

Vogliamo studiare il *piano inclinato*. Ovvero, abbiamo un *blocco* con massa m su un *piano inclinato* (*figura 1.1.*). Prima di modellizzare questa situazione, facciamo delle considerazioni preliminari.

Innanzitutto ci chiediamo *cosa vogliamo sapere*: supponiamo di conoscere l'angolo θ dell'angolo, la massa m e l'accelerazione gravitazionale $\vec{g}$. Allora, è naturale chiederci *come calcolare* l'*accelerazione* parallela al piano $|\vec{a}|$ della forza risultante (che non è nulla) e la *forza normale* $|\vec{N}|$.

Adesso pensiamo ai casi limiti. Se $\theta = 0$, abbiamo un *piano perfettamente normale*; quindi l'accelerazione è nulla, invece la forza normale è massimale. Al contrario abbiamo $\theta = \frac{\pi}{2}$; poiché in questo caso si ha una *caduta libera*, la *forza normale* è non-esistente (se si assume di ignorare forze di attrito).
Pertanto, possiamo concludere di avere qualcosa a che fare con le *funzioni trigonometriche* $\sin$ e/o $\cos$ (1).

Disegniamo adesso il *diagramma del corpo libero* (*figura 1.2.*) (2). Per procedere, bisognerà effettuare delle *scelte nel sistema di riferimento*.

FIGURA 1.1. (*Situazione preliminare*)

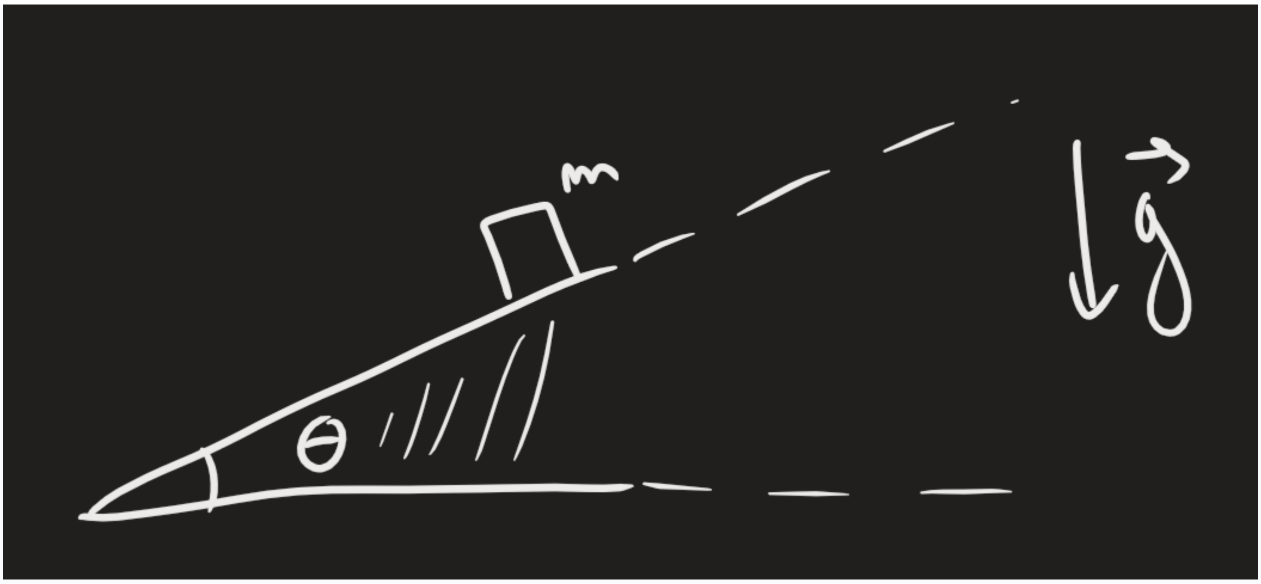
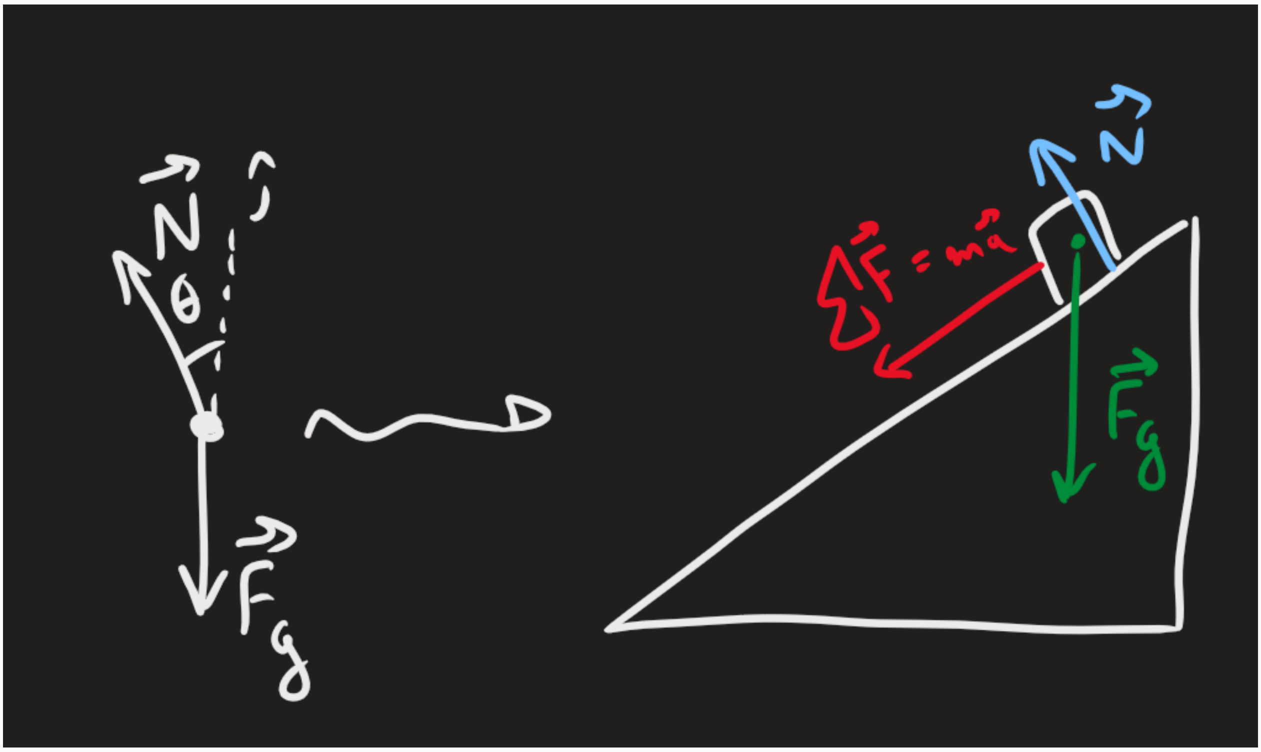


FIGURA 1.2. (*Diagramma di corpo libero*)



#Proposizione

> Proposizione (ver. 1).
>
> Osserviamo che $\vec{a}$ è ortogonale a $\vec{N}$.
>
> Scegliamo il seguente sistema di riferimento: invece di scegliere la base standard $\mathcal{E}^2 = (\hat{\imath}, \hat{\jmath})$, facciamo la seguente scelta. Prendiamo $\hat{\imath}'$ come l'asse *parallela* al vettore $\vec{a}$ e prendiamo $\hat{\jmath}'$ come l'asse *parallela* alla normale $\vec{N}$. Ovviamente questi devono essere versori quindi devono avere norma unitaria e avere il prodotto scalare nullo.
> Inoltre, richiamando la definizione di prodotto scalare ho

$$\hat{j} \cdot \hat{j}' = \cos\theta$$

e

$$\hat{j} \cdot \hat{i}' = \sin\theta$$

Adesso procediamo con la nostra modellizzazione; le leggi della fisica valgono lo stesso.
Scomponiamo le forze in vettori; ovvero con

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} = \vec{a}\hat{i}'$$

e

$$\vec{N} = N_x\hat{i} + N_y\hat{j} = \vec{N}\hat{j}'$$

Usando la *seconda legge di Newton* ho

$$\vec{F}_g + \vec{N} = m\vec{a}$$

Ricordandomi che posso effettuare il *cambiamento di base* moltiplicando una qualsiasi forza con i versori $\hat{i}'$ o $\hat{j}'$, ho le coordinate della forza risultante $\sum \vec{F}$

$$\sum F \to \begin{cases} \hat{i}' : \vec{F}_g \cdot \hat{i}' = -mg\sin\theta = m\vec{a} \\ \hat{j}' : \vec{F}_g \cdot \hat{j}' + N = -mg\cos\theta + N = 0 \end{cases}$$

(*la componente $\hat{j}'$ è nulla per vincolo geometrico; infatti il corpo non può "cadere o salire sotto o sopra il piano"*)
Infine, ottengo i valori

$$\boxed{\begin{gathered} \vec{a} = -g\sin\theta \cdot \hat{i}' \\ \vec{N} = mg\cos\theta \cdot \hat{j}' \end{gathered}}$$

che sono sufficienti per fornire il *modulo delle forze*.

#Proposizione

Proposizione (ver 2.).

> Omessa (materiale disponibile su Moodle)

D2. Esempi Notevoli della Dinamica

Esempi Notevoli di Forze della Dinamica

Applicazioni della dinamica a situazioni realistiche: distanza di frenatura; angolo critico su una superficie angolata; ...

---

0. Voci correlate

- Definizione di Massa e di Forza
- Principi della Dinamica
- Attrito Statico e Dinamico
- Resistenza dei Fluidi
- Forza Elastica
- Forza Gravitazionale
- Forza Elettromagnetica

1. Distanza di Frenatura (attrito dinamico)

#Osservazione

> Osservazione (la distanza di frenatura dato l'attrito).
>
> Precedentemente siamo riusciti a calcolare la *distanza di frenatura* di un'automobile, data una velocità iniziale v_0 e un'accelerazione negativa (1).
> Adesso generalizziamo questa situazione con l'attrito.
>
> Prendiamo le componenti della forza di un'automobile in movimento:
>
> $$\sum \vec{F} = m\vec{a} \implies \vec{F}_g + \vec{N} + \vec{F}_d = m\vec{a}$$
>
> Separando le forze per componenti, abbiamo che

$$\begin{cases} \hat{j}: -mg = N \\ \hat{i}: \vec{F}_d = \mu_d N = -m\mu_d g = ma_x \implies -\mu_d g = a_x \end{cases}$$

abbiamo ottenuto che $a_x = -\mu_d g$. Adesso, richiamo la formula per lo scarto dei quadrati delle velocità (2):

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$$

Allora, dato che $v = 0$ (la velocità finale è nulla) segue che abbiamo

$$a_x = -\frac{v_0^2}{2d}$$

Pertanto ottenere il risultato finale

$$\frac{v_0^2}{2d} = \mu_d g \implies \boxed{d = \frac{v_0^2}{2g\mu_d}}$$

Da notare che anche con l'attrito la *distanza* aumenta con un'andamento quadratico in funzione della velocità; questo è uno dei tanti motivi per imporre i *limiti di velocità*.

2. Angolo critico di un oggetto sul piano inclinato (attrito statico)

#Osservazione

Osservazione (l'angolo critico).

Prendiamo un oggetto su un piano inclinato (1). Considerandoci l'attrito, la forza attrito cambia al variare dell'angolazione θ; esiste un certo *"angolo critico"* θ_c tale che l'accelerazione $|\vec{a}|$ diventa sufficientemente grande per far spostare l'oggetto, facendo attivare l'*attrito dinamico*.

Vogliamo determinare tale θ_c al variare del coefficiente μ_s (2). Innanzitutto prendiamo la prima legge di Newton, per cui quando l'oggetto è fermo abbiamo che la somma di forze è

$$\vec{F}_s + \vec{N} + m\vec{g} = 0$$

Adesso prendiamo il modulo di $|\vec{F}_s|$;

$$\left|\vec{F}_s\right| = mg\sin\theta \leq \mu_s N = \mu_s mg\cos\theta$$

Allora otteniamo immediatamente il risultato

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} \leq \mu_s \implies \tan\theta \leq \mu_s$$

(*Nota bene: il coefficiente μ_s NON rientra nella definizione dell'attrito, bensì è semplicemente un "valore limite"*)
Quindi sappiamo che l'angolo massimale θ_c che soddisfi l'equazione sopra è

$$\boxed{\theta_c = \arctan\mu_s}$$

#Osservazione

Osservazione (metodo sperimentale per misurare l'attrito statico).

Possiamo usare l'equazione sopra *"al contrario"*, ovvero sapendo l'angolo determiniamo il coefficiente μ_s.

3. Angolo stabile del drone (flusso laminare)

#Osservazione

Osservazione (l'angolo stabile di un drone).

Supponiamo di avere un *drone* come nella *figura 3.1.*. Supponiamo di avere il *flusso laminare* (1). Allora vogliamo conoscere l'angolo θ tale che questo drone possa muoversi con una *velocità costante* v.

Disegniamo prima di tutto il *diagramma di corpo libero*, che è come nella *figura 3.2.*. Adesso, usando la seconda e la prima legge di Newton, ricaviamo che la forza risultante è *nulla*. Ovvero,

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_s + \vec{F}_g + \vec{F}_R = 0$$

Prendendo le singole componenti, abbiamo

$$\begin{cases} \hat{i} : -bv + \sin\theta \left|\vec{F}_s\right| = 0 \\ \hat{j} : -mg + \cos\theta \left|\vec{F}_s\right| = 0 \end{cases}$$

Allora abbiamo

$$\tan\theta = \frac{bv}{mg}$$

dandoci il risultato finale

$$\boxed{\theta = \arctan\left(\frac{bv}{mg}\right)}$$

FIGURA 3.1. (*Situazione iniziale*)

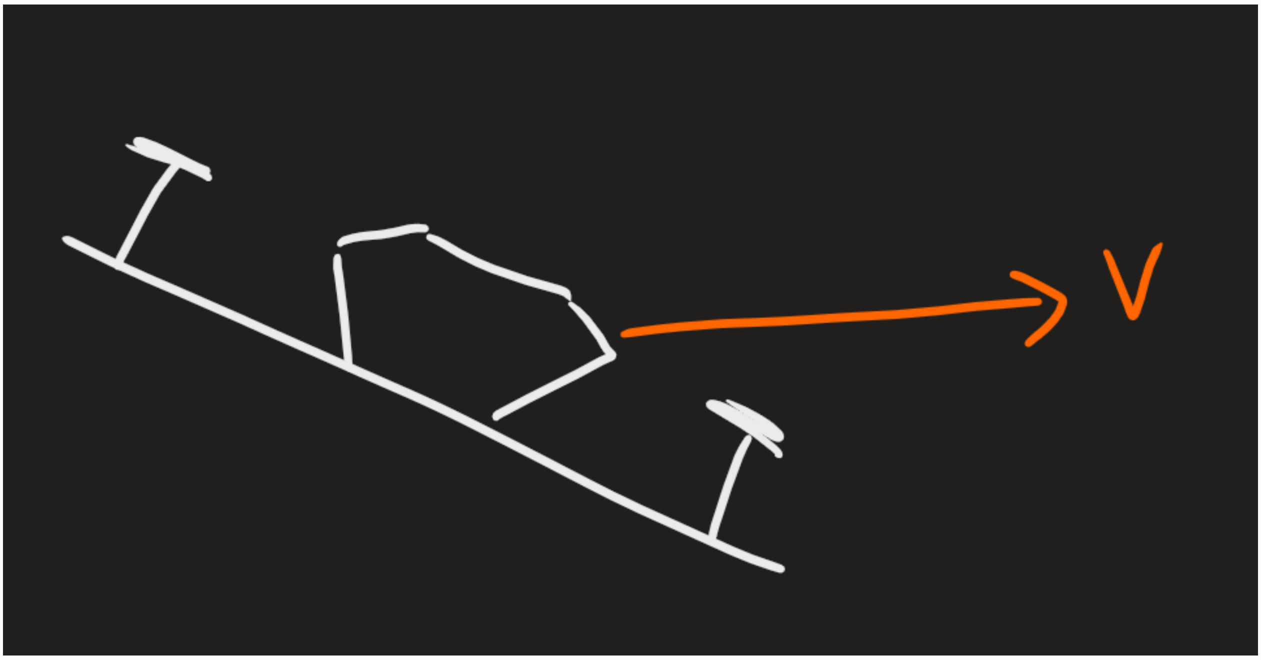
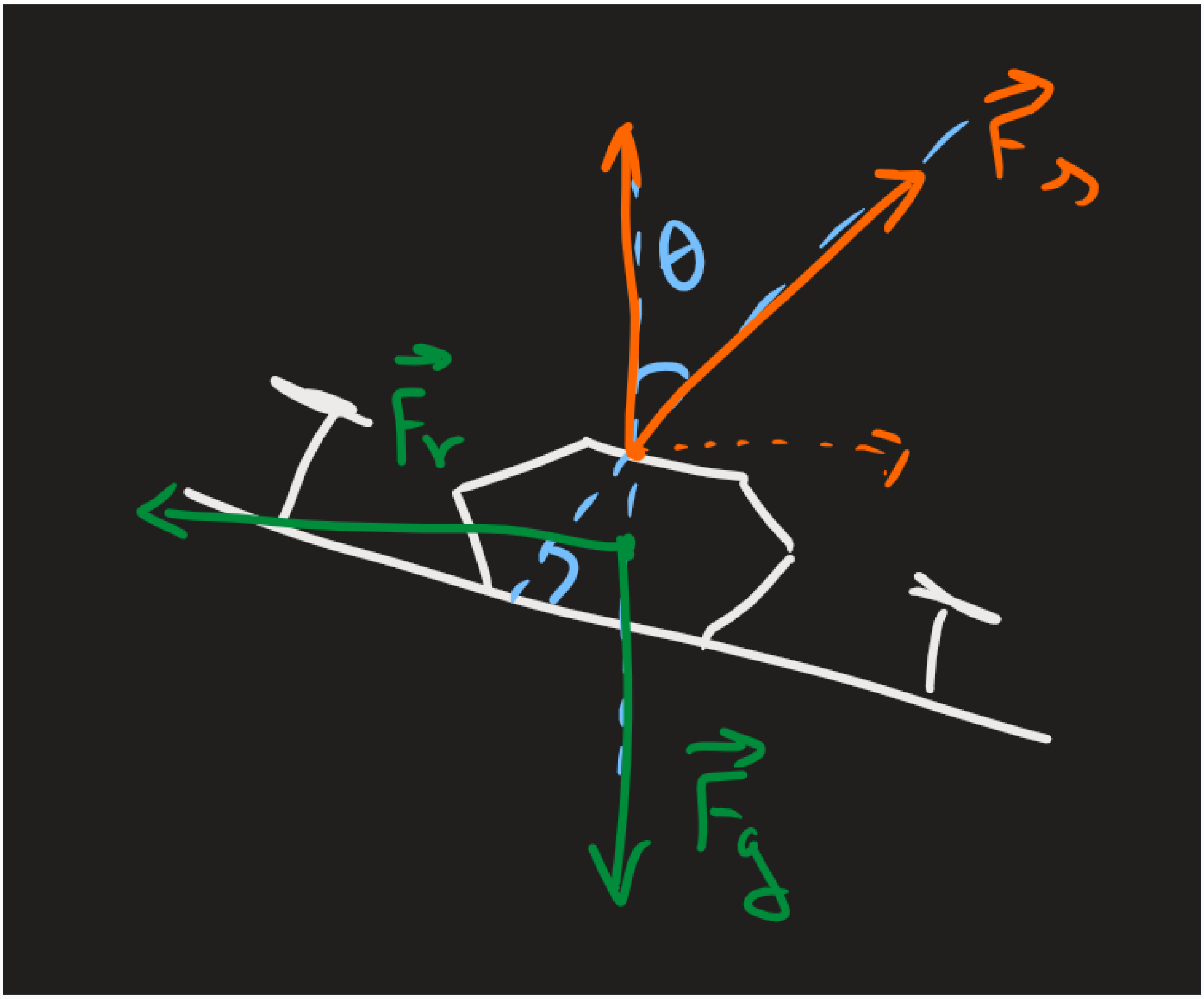


FIGURA 3.2. (*Diagramma di corpo libero*)



4. Velocità terminale di un paracadutista (flusso turbolente)

#Osservazione

> Osservazione (la velocità terminale di un oggetto in caduta libera).
>
> Riprendiamo il problema dell'oggetto in *caduta libera* (1). Adesso consideriamo la *resistenza dell'aria*, in particolare con un *flusso turbolento* (2).
>
> Allora, sapendo che ad un certo punto l'oggetto si muove con una *velocità costante* (detta *velocità terminale*), abbiamo dunque accelerazione $\vec{a}$ nulla. Possiamo usare i principi della dinamica, per cui
>
> $$\sum \vec{F} = \vec{F}_g + \vec{F}_R = 0 \implies \vec{F}_R = -\vec{F}_g$$
>
> Allora da questo segue che

$$\frac{1}{2}\rho A C_d v^2 = mg$$

che ci dà il risultato finale

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{2mg}{\rho A C_D}}}$$

#Osservazione

Osservazione (la dipendenza dalla massa).

Qui osserviamo che, a differenza dall'attrito statico e dinamico, abbiamo un fattore che *dipende* dalla massa m.

5. Strada inclinata in curva (forza centripeta)

#Osservazione

Osservazione (strada inclinata in curva).

Supponiamo che una *strada* sia *inclinata in curva*, con un raggio R e un'angolazione θ (*figura 5.1.*). Conoscendo il raggio R e la velocità v dell'auto, vogliamo conoscere l'angolo θ.

Prendendo un pezzo della curva e disegnandoci il diagramma di corpo libero dell'auto sulla curva (*figura 5.2.*), otteniamo che

$$\begin{cases} \hat{i} : N \sin\theta = \dfrac{mv^2}{R} \\ \hat{j} : N \cos\theta = mg \end{cases}$$

Allora abbiamo

$$\boxed{\tan\theta = \frac{v^2}{Rg}}$$

che è il risultato desiderato.

FIGURA 5.1. (*Situazione iniziale*)

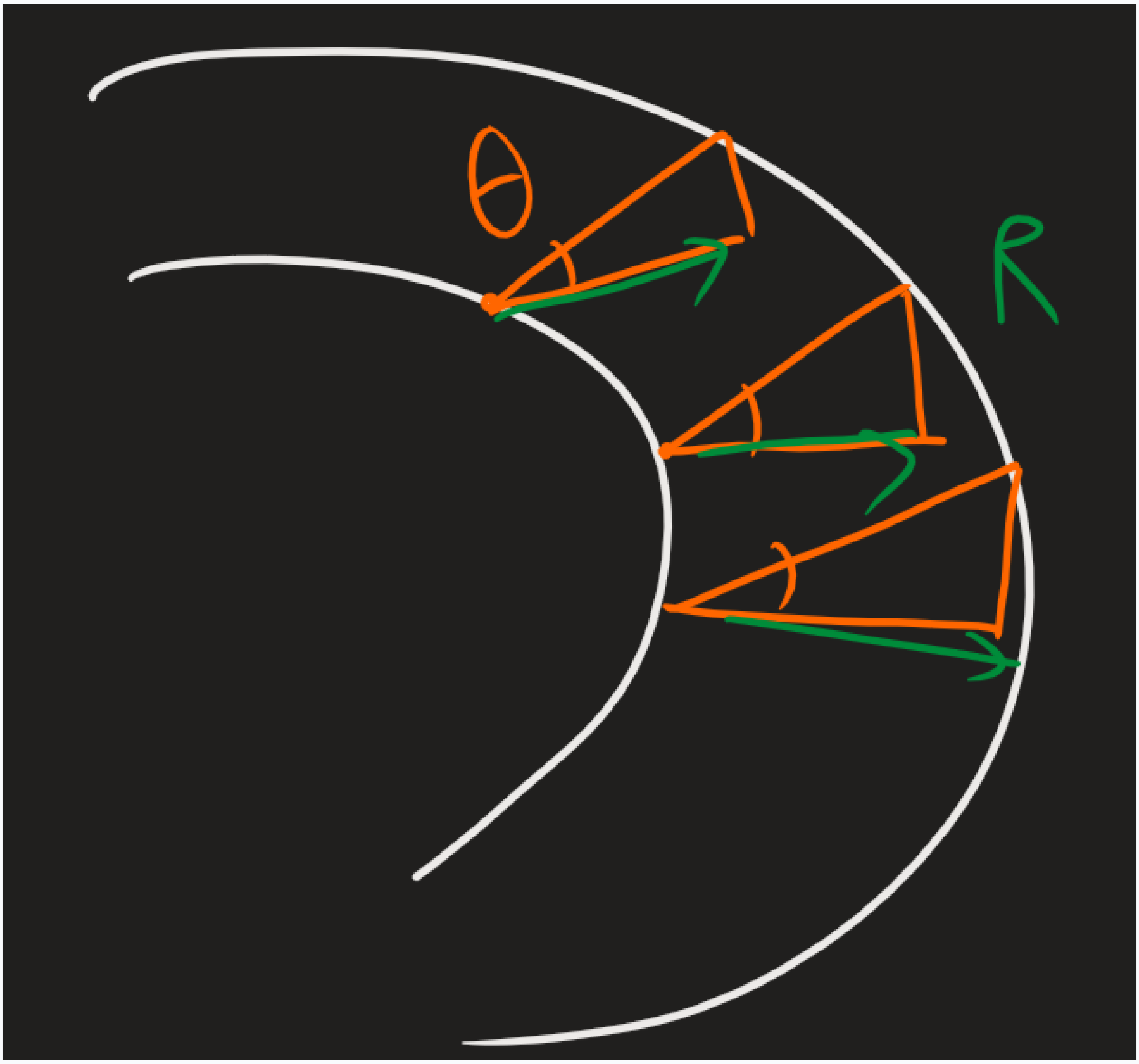
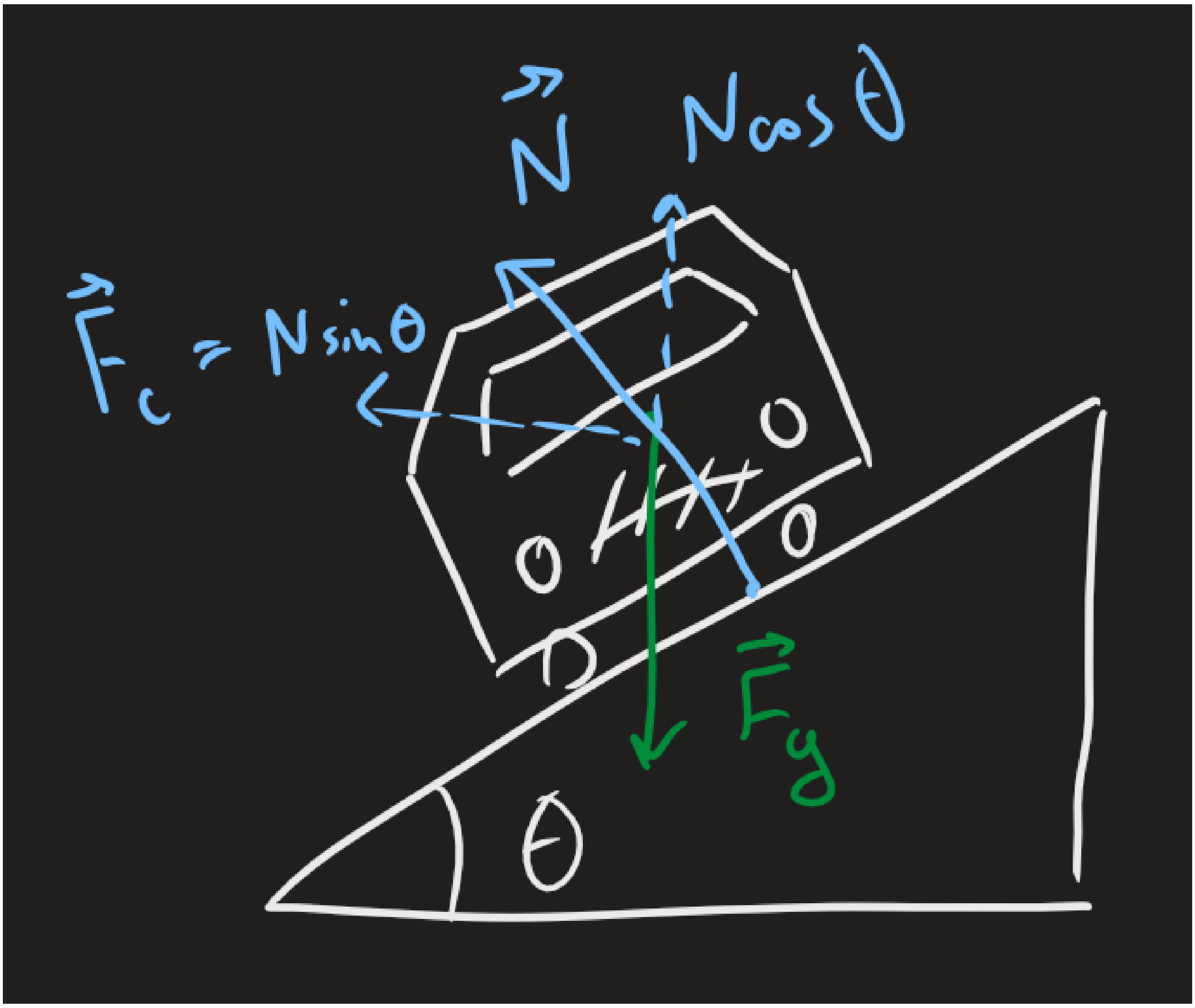


FIGURA 5.2. (*Diagramma di corpo libero*)



6. Spostamento di un oggetto su una molla al variare della massa (forza elastica)

#Osservazione

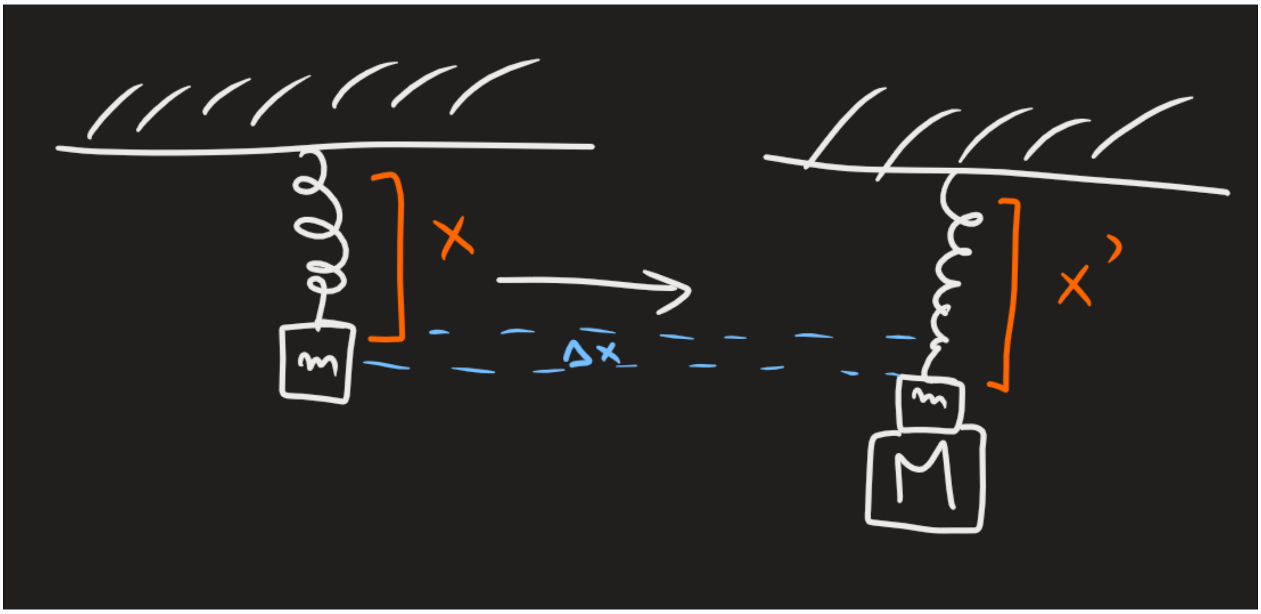
> Osservazione (spostamento di un oggetto su una molla).
>
> Supponiamo di avere una *molla*, su cui attacchiamo un'oggetto di *massa* m con *estensione* x. Adesso attacco all'oggetto con un *altro oggetto* con massa M (*figura 6.1.*).
>
> L'estensione x cambia o no? Se sì, qual è lo scarto Δx tra la nuova posizione x' e la posizione originaria x?
>
> Usiamo le nozioni sulla *forza elastica* per scoprire le risposte.
> Prima di tutto disegno il *diagramma del corpo libero* di entrambi i corpi, rappresentando il primo corpo come 1 e il secondo come 2; così scopriamo che

$$
\begin{cases} \vec{F}_{x1} + \vec{F}_{g1} = 0 \\ \vec{F}_{x2} + \vec{F}_{g2} = 0 \end{cases} \implies kx = mg \wedge k(x + \Delta x) = (m + M)g
$$

Allora segue che

$$
\Delta x = \frac{Mg}{k}
$$

FIGURA 6.1. (*Problema*)



7. Velocità necessaria per orbitare la terra (forza gravitazionale)

#Osservazione

Osservazione (superman che corre sulla terra).

Il supereroe *Superman* sta correndo attorno la terra con una velocità piuttosto alta (trascurando eventuali attriti). Vogliamo sapere la *velocità necessaria* per il supereroe per poter *orbitare la terra*, alzandosi un po' (quantità di spazio trascurabile a 0).

L'unica forza di cui conosciamo è la *forza gravitazionale* data da

$$
F_g = G\frac{m \cdot m_T}{r_T^2}
$$

vogliamo far *coincidere* la *forza gravitazionale* con la *forza centripeta*. Sappiamo che quest'ultima è data da

$$F_c = m\frac{v^2}{R}$$

allora otteniamo la formula finale

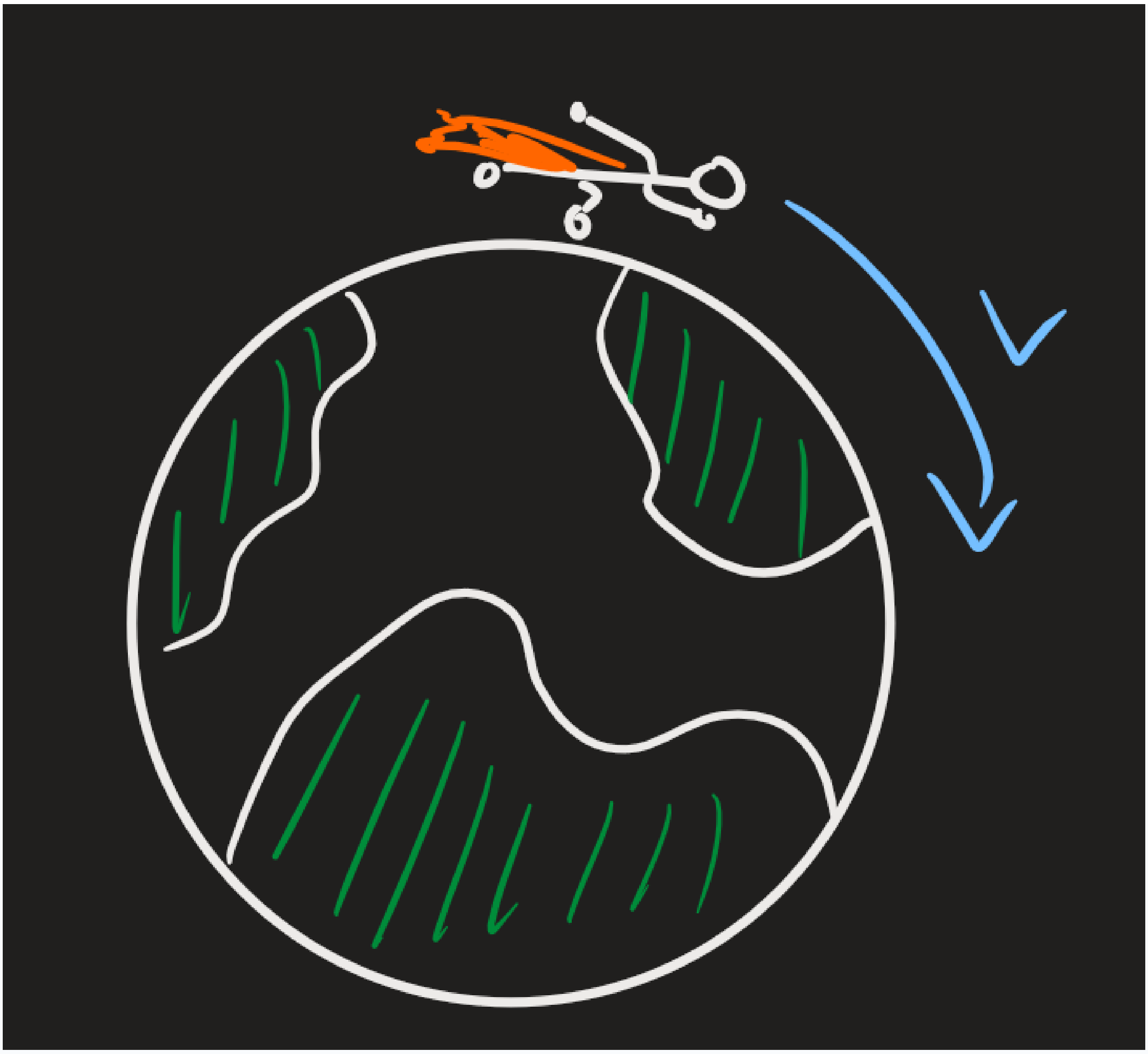
$$v = \sqrt{\frac{Gm_T}{r_T}} = \sqrt{gr_T}$$

in questo caso abbiamo $v \simeq 28\,000\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.

Per calcolare il periodo dell'orbita basta considerare che $\omega = \frac{r_T}{v}$ e quindi

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{r_T}{g}} \simeq 84 \cdot 60\ \mathrm{s}$$

FIGURA 7.1. (*Problema*)



8. Elettrone sparato in un condensatore (forza elettrica)

#Osservazione

> Osservazione (carica sparata verso un condensatore).
>
> Supponiamo di *sparare* una *carica qualsiasi* q ad una velocità $\vec{v}$, verso un *circuito elettrico* collegato ad un *condensatore a facce piane*, che a sua volta genera il campo elettrico $\vec{E}$ (in particolare dalla sua differenza di potenziale d.d.p.).
>
> Vogliamo determinare la sua *accelerazione* al variare di q.
>
> Prima di tutto prendiamo il *campo elettrico* in riferimento al solo versore $\hat{j}$ (dato che il campo elettrico prodotto da un condensatore punta solo ad un verso).

$$\vec{E} = E \cdot \hat{j}$$

Adesso prendiamo la *forza elettrica* della particella

$$\vec{F} = q\vec{E} = m\vec{a}$$

Allora abbiamo

$$\boxed{\vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E}}$$

Ovvero

$$a \cdot \hat{j} = \frac{qE}{m} \cdot \hat{j}$$

Notiamo che la particella si comporta come il *moto di un proiettile* (1).

FIGURA 8.1. (*La carica-proiettile*)