

Calcolo Combinatorio - Sommario

Cenni al Calcolo Combinatorio, definizione del coefficiente binomiale $\binom{n}{k}$, problemi misti del Calcolo Combinatorio, teorema di Newton (o del binomio).

Problemi del Calcolo Combinatorio

Problemi del Calcolo Combinatorio

Significato del calcolo combinatorio; quali problemi esso mira di risolvere. Alcuni problemi: disposizioni con ripetizioni, disposizione di oggetti a m a m , permutazioni di n oggetti e combinazioni. Alcuni problemi misti del calcolo combinatorio

1. Cosa vuol dire "calcolo combinatorio"

Se si definisce l'insieme dei numeri **naturali** come l'insieme dei numeri che servono *per contare*, allora il **calcolo combinatorio** si basa sul problema di *contare* certi insiemi/oggetti/...

DEF 1. Cardinalità Si definisce la **cardinalità** di un *insieme* A come il numero n degli elementi contenuti nell'insieme A . Lo si denota come $|A|$.

2. I problemi del calcolo combinatorio

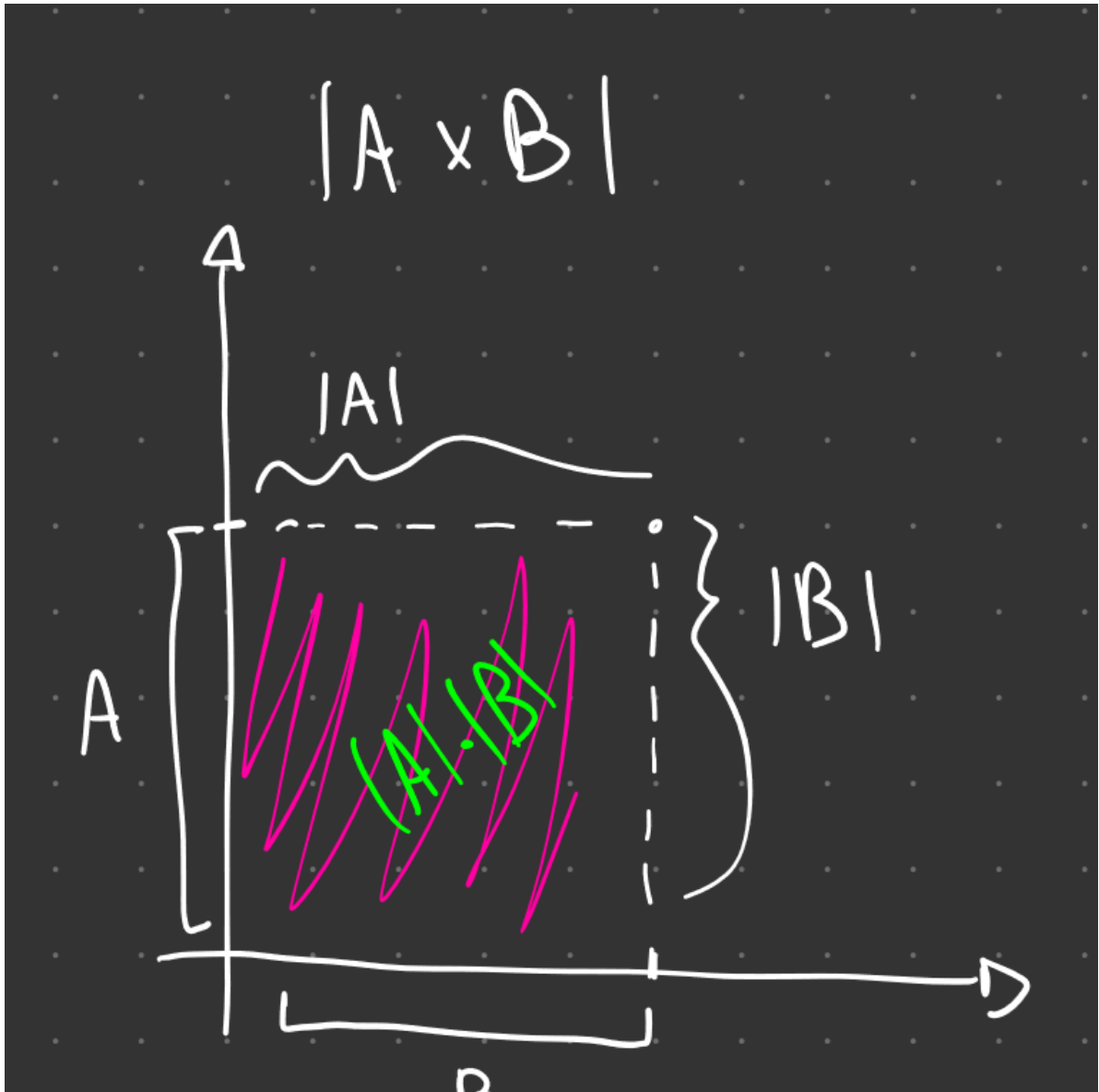
Il *calcolo combinatorio* ci presenta vari problemi che valgono la pena di essere studiati.

PROBLEMA 2.1. Cardinalità del prodotto cartesiano

PROBLEMA 2.1. Supponiamo che $|A| = n$, $|B| = m$, ove A, B sono *insiemi* e $n, m \in \mathbb{N}$. Allora ci poniamo il problema di trovare $|A \times B|$.

Se disegniamo il grafico di un qualsiasi prodotto cartesiano $A \times B$, si evince che per ogni riga (a_1, a_2, \dots, a_n) ci sono m colonne; quindi

$$|A \times B| = n \times m$$



PROBLEMA 2.2. Disposizioni con ripetizione

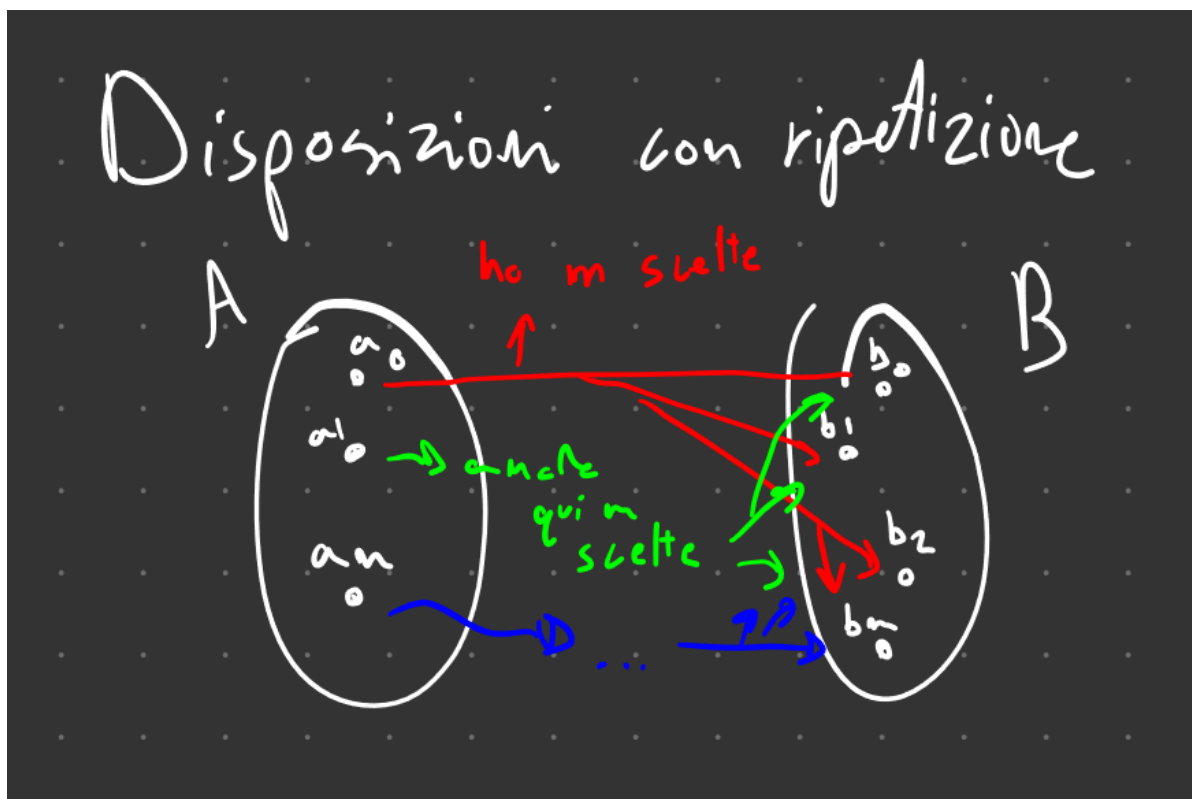
PROBLEMA 2.2. Siano A, B insiemi con $|A| = n; |B| = m$; voglio contare il numero degli elementi di

$$B^A := \{\text{funzioni da } A \text{ a } B\}$$

Per risolvere questo problema si può avvalere del diagramma in cui rappresentiamo gli due insiemi A, B . Ora, prendendo il primo elemento a_0 , vediamo che possiamo definire m funzioni, collegando l'elemento a_0 a b_m .

Stesso discorso vale per a_1, a_2, \dots, a_n ; quindi generalizzando possiamo vedere che il risultato viene $m^n = |B|^{|A|} = |B^A|$

DEF 2.2. Questo problema, nel calcolo combinatorio, si chiama **disposizioni con ripetizioni**, ovvero senza *vincoli* particolari.



ESEMPIO 2.2.1.

Se voglio costruire tutte le *bandiere tricolori* possibili (ove sono ammessi i anche colori ripetuti) con *4 colori* a disposizione, quante posso costruirne?

SOLUZIONE. Questo è un caso applicato di *disposizioni con ripetizione*; infatti se si definisce le caselle delle bandiere come un insieme a tre variabili, $A = 1, 2, 3$, allora vogliamo trovare tutte le *funzioni* associate da A a $B = \{\text{rosso, verde, giallo, bianco}\}$. Pertanto la soluzione è 3^4 .

PROBLEMA 2.3. Disposizioni di oggetti da m a n

PROBLEMA 2.3. Prendiamo lo stesso problema di prima; tuttavia vogliamo ora considerare un vincolo particolare: vogliamo cercare solo le *funzioni iniettive* (**DEF 3.2.**) da A a B . Ricapitolando, per *iniettiva* si intende che ad ogni a_x, a_y vengono associati immagini diversi. Pertanto, è necessario che $m \geq n$.

DEF 2.3.1. Inoltre indichiamo l'*insieme delle funzioni iniettive* come D_n^m .

SOLUZIONE. Si può avvalere dello stesso grafico di prima; se prendo il primo elemento a_0 , allora ho m scelte per lo stesso ragionamento di prima; ora, se prendo il secondo elemento a_1 , allora per rispettare il vincolo, ho una scelta in meno (ovvero l'elemento b_m associato ad a_0): quindi ora ho $m - 1$ scelte. Procedendo avanti così, arrivo fino

all'elemento a_n per cui ho $m - n + 1$ scelte.

Pertanto

$$|D_n^m| = m(m-1)(m-2)\dots(m-(n-1))$$

ESEMPIO 2.3.1.

Prendiamo in esame lo stesso problema di prima, ovvero quella avendo a disposizione una *bandiera tricolore da colorare* e *quattro colori*.

Ora non vogliamo più i stessi colori; infatti, se la funzione dev'essere iniettiva, allora in un senso applicato ciò vuol dire che ad ogni area della bandiera dev'esserci un colore diverso.

Quindi si tratta di calcolare $|D_3^4| = 4(3)(2)$

PROBLEMA 2.4. Permutazioni

PROBLEMA 2.4. Prendiamo il problema appena preso in esame (ovvero la *disposizione di oggetti da n a m*) e ora vogliamo ci aggiungiamo un ulteriore vincolo: cerchiamo le *funzioni biiettive*, ovvero quelle sia *iniettive* che *suriettive*. Da qui consegue necessariamente che $|A| = |B| = n$.

DEF 2.4.1. Definiamo *l'insieme delle permutazioni (ovvero delle funzioni biiettive)* come P^n .

SOLUZIONE. Questo non è altro che un caso speciale di $|D_n^m|$ ove $m = n$, quindi

$$|P^n| = |D_n^n| = n(n-1)(n-2)\dots(1) = n!$$

ESEMPIO 2.4.1.

Consideriamo un problema totalmente diverso; se ho la *stringa* "CIAO", quante volte posso cambiarlo in modo tale che le lettere presenti nella stringa ci siano comunque?

Questo si tratta ovviamente di una *permutazione*, quindi calcoliamo $|P^4| = 4!$.

PROBLEMA 2.5. Combinazioni, coefficienti binomiali

PROBLEMA 2.5. Se considero un insieme A con $|A| = n$, e un numero $k \in \mathbb{N}$ tale che $0 \leq k \leq n$, allora voglio calcolare il *numero di sottoinsiemi di A con k elementi*.

DEF. 2.5.1. Definiamo *l'insieme dei sottoinsiemi di A con k elementi* come

$$C_k^n \text{ oppure } \binom{n}{k}$$

e si legge come "*n su k*". Inoltre lo si chiama anche come il *coefficiente binomiale* oppure le *combinazioni di n oggetti a k a k*.

SOLUZIONE. Qui usiamo un esperimento mentale che presenta una situazione analoga a quella presentata.

Suppongo di aver n numero di palline, da cui voglio scegliere k ; per la prima pallina 0 posso sceglierne n , poi per la pallina 1 posso sceglierne $n - 1$, poi andando così finché si raggiunge l'ultima pallina k da cui posso scegliere $n - k + 1$. Si osserva che questo è esattamente le *disposizioni* da n a k , D_k^n .

Tuttavia in questo modo tengo conto dell'ordine in cui scelgo le palline; invece le *combinazioni* non tengo conto dell'ordine. Quindi se vogliamo considerare l'ordine, dobbiamo attribuire ad ogni *combinazione* una *permutazione*; ciò vuol dire che bisogna moltiplicare le *combinazioni di n oggetti a k a k* per le *permutazioni di k oggetti*; pertanto si scrive

$$D_k^n = P^k C_k^n$$

da cui deriva

$$C_k^n = \frac{D_k^n}{P^k} = \frac{(n)(n-1) \dots (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Nella pagina [Coefficiente Binomiale](#) ci soffermeremo particolare (appunto) sul *coefficiente binomiale*, in quanto essa porta con sé delle proprietà particolari che ci permetteranno di costruire certi oggetti matematici, tra cui il *triangolo di Tartaglia*.

ESEMPIO 2.5.1.

Se ho un sacco con 10 palline da cui ne estraggo 3, quante *combinazioni* possibili ho?

Semplicemente, $C^{10}_3 = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3!(7!)}$.

3. Esempi misti del Calcolo Combinatorio

Ora presentiamo alcuni esempi misti del calcolo combinatorio, che può comprendere l'ausilio di alcune delle definizioni date sopra e un buon approccio critico ai problemi.

PROBLEMA 3.1. Ho un mazzo da 40 carte e ne pesco 3; quanti sono i possibili risultati t ?

Questo è un caso quasi-banale di *combinazioni*, quindi

$$t = C_3^{40} = \frac{40!}{3!(37!)} = \frac{40 \cdot 39 \cdot 38}{3 \cdot 2} = 9880$$

PROBLEMA 3.1.A Ora considerando che ci sono 4 semi (quindi 10 carte per seme), quanti sono i risultati r che NON contengono le carte di *denari*?

Anche qui si tratta di un problema di *combinazioni*, che però va affrontato più criticamente: infatti vogliamo estrarre le 40 carte escludendone 10, in quanto essi rappresentano dei semi; quindi sostanzialmente il "corpo" delle carte sono solo 30.

$$r = \binom{40-10}{3} = \binom{30}{3} = 4060$$

PROBLEMA 3.1.B Considerando lo stesso mazzo di carte, ora voglio invece calcolare i risultati \tilde{r} che contengono invece i *denari*.

Un approccio particolarmente furbo è quello semplicemente di prendere t (ovvero tutte le combinazioni possibili) e sottrarli per il numero dei risultati senza i denari; infatti l'insieme dei risultati *con* i denari è complemento dell'insieme dei risultati *senza* i denari.

Quindi,

$$\tilde{r} = 9880 - 4060 = 5820$$

Oppure un altro approccio comunque accettabile è di considerare tutte le combinazioni dei risultati con esattamente *un* seme, poi *due* semi e infine *tre* semi e infine sommarli.

Infatti,

$$\tilde{r} = \binom{10}{1} \binom{30}{2} + \binom{10}{2} \binom{30}{1} + \binom{10}{3} \binom{30}{0} = 5820$$

PROBLEMA 3.2. Il Lotto. Ho 90 bussolotti, ovvero dei numeri; ne estraggo 5. Quali sono le possibili estrazioni?

Anche qui si tratta di un caso di *combinazioni* in quanto non tiene

conto dell'ordine dei numeri estratti (in quanto essi vengono già ordinati in un'ordine crescente).

$$n_{\text{estrazioni}} = \binom{90}{5} \approx 44 \cdot 10^6$$

PROBLEMA 3.3. Ho una scacchiera 5×5 e 6 pedine uguali.

In quanti modi posso mettere le pedine sulla scacchiera, se voglio che tutte le righe e tutte le colonne abbiano almeno una pedina?

Soluzione controllata con D.D.S.: Parzialmente corretta ma manca un pezzo.

PROPOSTA DELLA SOLUZIONE. Ragioniamo nel seguente modo:

1. Voglio porre le prime 5 pedine in modo tale che il vincolo venga rispettato (quindi tutte le righe e le colonne hanno almeno una pedina piazzata), poi per porre la 6-esima pedina liberamente.
2. Per le 5 pedine ragiono così:
 1. Voglio porre la prima pedina sulla prima riga e su qualsiasi colonna. Ho quindi 5 possibilità.
 2. Ora voglio porre la seconda pedina sulla seconda riga; però non posso porlo sulla stessa colonna scelta dalla prima pedina, dandomi una scelta in meno. Ho quindi 4 possibilità.
 3. Mi accorgo che qui si tratta di un semplice problema di *permutazioni (o disposizioni di oggetti a 5 a 5)*, ovvero che per calcolare tutte le possibilità devo fare $5! = 5 * 4 * 3 * 2 * 1$.
3. Ora considero la 6-esima pedina: se le altre 5 pedine hanno già occupato le loro caselle, allora mi rimangono solo 20 caselle ($25 - 5 = 20$).
4. Quindi ottengo il risultato

$$x = 20(5!) = 2400$$

Coefficiente Binomiale

Coefficiente Binomiale

Coefficiente binomiale come strumento per risolvere un problema del calcolo combinatorio; regole e teoremi sul coefficiente binomiale; costruzione del triangolo di Tartaglia; teorema di Newton (o del binomio) con dimostrazione. Applicazioni del teorema.

1. Coefficiente Binomiale

DEF 1. Dai risultati del [Problemi del Calcolo Combinatorio](#), sappiamo che

$$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

2. Proprietà del coefficiente binomiale

Enunciamo le seguenti proprietà del *coefficiente binomiale* C_k^n :

1.
$$\binom{0}{0} = 1$$

2.
$$\forall n, \binom{n}{0} = 1$$
$$\binom{n}{n} = 1$$

3. **REGOLA DI STIFEL.** Sia $1 \leq k \leq (n-1)$,

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

DIMOSTRAZIONE FORMALE.

Per definizione,

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

$$\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$(n-1)! \left(\frac{1}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{1}{k!(n-k-1)!} \right) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Osservare la proprietà che consegue dalla *definizione ricorrente del fattoriale* (*Assiomi di Peano, il principio di induzione*):

$$\forall n, (n+1)! = n!(n+1)$$

da ciò implica che

$$n! = \frac{(n+1)!}{(n+1)}$$

Quindi secondo questa logica, si può dire le seguenti:

$$(k-1)! = \frac{k!}{k}; (n-k-1)! = \frac{(n-k)!}{(n-k)}; n! = (n-1)!n$$

Allora

$$(n-1)! \left(\frac{1}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{1}{k!(n-k-1)!} \right) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$(n-1)! \left(\frac{k}{k!(n-k)!} + \frac{n-k}{k!(n-k)!} \right) = (n-1)! \frac{n}{k!(n-k)!}$$

$$\frac{k+n-k}{k!(n-k)!} = \frac{n}{k!(n-k)!}$$

$$\frac{n}{k!(n-k)!} = \frac{n}{k!(n-k)!} \text{ OK } \blacksquare$$

DIMOSTRAZIONE SENZA CALCOLI/TEORICA.

Alternativamente, si potrebbe pensare la *regola di Stifel* nel seguente modo:

"Voglio contare le contare i sottoinsiemi con k elementi dell'insieme A (ove $|A| = n$); quindi voglio C_k^n .

Ora distinguiamo uno degli elementi di A con un *contrassegno particolare*, come il colore *rosso*; adesso gli insiemi di k elementi si dividono in due.

Ovvero, l'insieme dei sottoinsiemi che *contengono l'elemento rosso* e l'insieme dei sottoinsiemi che *non contengono l'elemento rosso*.

Consideriamo l'insieme di *tutti i sottoinsiemi che contengono l'elemento speciale*: devo quindi obbligatoriamente considerare *l'elemento rosso*, tirandolo fuori. Ho quindi da n elementi ne posso scegliere solo $n - 1$, in quanto una è stata già scelta, e posso scegliere solo $k - 1$ elementi visto che il primo elemento (ovvero il *rosso*) è stato già obbligatoriamente scelto.

Consideriamo invece l'altro insieme di *tutti i sottoinsiemi che NON contengono l'elemento contrassegnato*: in questo caso si tratta semplicemente di *escludere* l'elemento rosso dalle scelte possibili, dandoci solo $n - 1$ scelte su k .

Pertanto

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

3. Costruzione del triangolo di Tartaglia

Enunciamo di nuovo le 3 regole sopra:

1. $\binom{0}{0} = 1$
2. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
3. $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$

Da queste tre proprietà possiamo rappresentare i *coefficienti binomiali* tramite il c.d. *triangolo di Tartaglia*

3.1. Triangolo di Tartaglia

Disponiamo tutti i *coefficienti binomiali* $\binom{x}{y}$, dove la "*colonna*" (a partire dall'alto) rappresenta il numero x e dove la "*riga*" (a partire da sx.) rappresenta il numero y . Ad ogni riga rappresentiamo tutti i

coefficienti binomiali $\binom{x}{y}$ finché x raggiunge y (ovvero $x = y$)

$$\begin{array}{c} \binom{0}{0} \\ \binom{1}{0} \binom{1}{1} \\ \binom{2}{0} \binom{2}{1} \binom{2}{2} \\ \binom{3}{0} \binom{3}{1} \binom{3}{2} \binom{3}{3} \\ \dots \\ \binom{x}{0} \binom{x}{1} \dots \binom{x}{x-1} \binom{x}{x} \end{array}$$

Ora, calcolando tutti i binomi (ricorrendo all'ausilio delle **proprietà del coefficiente binomiale**), otteniamo il seguente triangolo:

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \ 1 \\ 1 \ 2 \ 1 \\ 1 \ 3 \ 3 \ 1 \end{array}$$

Facciamo le seguenti osservazioni:

OSS 3.1.1. Alle "*estremità*" del triangolo risulta sempre il numero 1, in quanto seconda la **proprietà 2.**, $\forall x, \binom{x}{x} = \binom{x}{0} = 1$

OSS 3.1.2. Se sono arrivato alla riga x , posso ottenere facilmente tutti gli elementi della prossima riga $x + 1$; infatti $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$. Facendo un'interpretazione "geometrica" si può dire che se sono alla riga $x + 1$, allora ottengo l'elemento di questa riga sulla colonna k sommando degli elementi che già conosciamo prima; ovvero $\binom{n-1}{k-1}, \binom{n-1}{k}$.

Questi sono gli elementi che stanno al di "sopra" e "sopra e sinistra" dell'elemento che vogliamo conoscere.

ESEMPIO 3.1.2.1. Per esempio ho

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \ 1 \\ 1 \ 2 \ 1 \\ 1 \ 3 \ 3 \ 1 \end{array}$$

e voglio ottenere gli elementi della riga 4; in questo caso metto alle "estremità" i numeri 1 (**OSS 3.1.1.**), poi per calcolare $\binom{4}{x}$ (ovviamente $x \leq 4$) sommo l'elemento che sta sopra con quello che sta sopra e a sinistra. Quindi otteniamo

$$1 \ 4 \ 6 \ 4 \ 1$$

OSS. 3.1.3. Il matematico *B. Pascal* nota il seguente nel suo trattato "Traité du triangle arithmétique": che se prendiamo una riga pari $2n$, allora il numero "*centrale*" della riga è uguale alla sommatoria di tutti i quadrati degli elementi della riga n .

Ovvero

$$\forall n \in \mathbb{N}, \binom{2n}{n} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j}^2$$

ESEMPIO 3.1.3.1. Prendiamo la riga 8,

$$1 \ 8 \ 28 \ 56 \ 70 \ 56 \ 28 \ 8 \ 1$$

ove l'elemento "centrale" è individuato con $70 = \binom{8}{4}$ e la riga 4,

$$1 \ 4 \ 6 \ 4 \ 1$$

Ora vediamo di sommare tutti gli elementi al quadrato:

$$1^2 + 4^2 + 6^2 + 4^2 + 1^2 = 1 + 16 + 36 + 16 + 1 = 70$$

4. TEOREMA DEL BINOMIO (o di Newton)

Il *triangolo di Tartaglia* è una costruzione matematica molto importante, in quanto essa può essere sfruttata per sviluppare la potenza di un binomio in n grazie al *teorema del Binomio (o di Newton)*

TEOREMA 1. Siano $a, b \in \mathbb{R}$ (volendo anche in \mathbb{C}), sia $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, allora

$$(a + b)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^{n-j} b^j$$

DIM. Si dimostra questo teorema per *induzione*.

1. Verificare che è vera per $P(1)$:

$$(a+b)^1 = \sum_{j=0}^1 \binom{1}{j} a^{1-j} b^j \iff a+b = \binom{1}{0} a^1 b^0 + \binom{1}{1} a^0 b^1 \text{ OK}$$

2. Verificare che, supponendo $P(n)$ allora $P(n) \implies P(n+1)$ è vera.

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^{n-j} b^j \\ (a+b)^n (a+b) &= (a+b) \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^{n-j} b^j \\ (a+b)^{n+1} &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^{n+1-j} b^j + \sum_{j=0}^n a^{n-j} b^{j+1}\end{aligned}$$

3. Adesso "estraiamo" il primo elemento dalla prima sommatoria e l'ultimo elemento dall'altra sommatoria.

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^{n+1-j} b^j + \sum_{j=0}^n a^{n-j} b^{j+1} \\ &= (a^{n+1}) + (b^{n+1}) + \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} a^{n+1-j} b^j + \sum_{j=0}^{n-1} a^{n-j} b^{j+1}\end{aligned}$$

4. Effettuiamo un "trucco" alla seconda sommatoria, ovvero quella di porre $k = j+1$ (e pertanto $j=0 \implies k=1$) e poi di porre $k=j$, che è

possibile in quanto k è una *variabile muta*.

$$\begin{aligned}
 & (a^{n+1}) + (b^{n+1}) + \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} a^{n+1-j} b^j + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} a^{(n+1)-(j+1)} b^{j+1} \\
 &= \dots + \sum_{j=1}^n \dots + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k \\
 &= \dots + \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} a^{n+1-j} + b^j + \sum_{j=1}^n \binom{n}{j-1} a^{n+1-j} + b^j \\
 &= \dots + \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} \binom{n}{j-1} a^{n+1-j} + b^j \\
 &\text{Per la regola di Stiefe, } \binom{n}{j} \binom{n}{j-1} = \binom{n+1}{j} \\
 &= (a^{n+1}) + (b^{n+1}) + \sum_{j=1}^n \binom{n+1}{j} a^{n+1-j} + b^j
 \end{aligned}$$

5. E riferendosi alla sommatoria presente nell'uguaglianza, se prendiamo $j = 0$ e $j = n + 1$, allora

$$\begin{aligned}
 1. & \binom{n+1}{0} a^{n+1} + b^0 = 1 \cdot a^{n+1} = a^{n+1} \\
 2. & \binom{n+1}{n+1} a^{n+1-n-1} b^{n+1} = b^{n+1}
 \end{aligned}$$

e quindi possiamo "rintegrarli" nella sommatoria come l'elemento 0-esimo e $n + 1$ -esimo, ottenendo

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} a^{n+1-j} + b^j \\
 P(n+1) : (a+b)^n &= \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} a^{(n+1)-j} + b^j
 \end{aligned}$$

che è ciò che volevamo ottenere. Quindi il teorema è stato così dimostrato. ■

4.1. ESEMPI SUL TEOREMA DEL BINOMIO

ESEMPIO 4.1.1. Vogliamo calcolare $(a+b)^6$.

Otteniamo innanzitutto lo sviluppo di $(a+b)^6$ secondo il teorema

binomiale:

$$(a + b)^6 = \binom{6}{0}a^6 + \binom{6}{1}a^5b^1 + \binom{6}{2}a^4b^2 + \binom{6}{3}a^3b^3 + \binom{6}{4}a^2b^4 + \binom{6}{5}a^1b^5 +$$

Ora costruiamo il *triangolo di Tartaglia* fino alla 6-esima riga, secondo le regole notate in [3. Costruzione del triangolo di Tartaglia](#):

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & 1 \\ & & & & & 1 & 1 \\ & & & 1 & 2 & 1 & \\ & & 1 & 3 & 3 & 1 & \\ & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \\ 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & \end{array}$$

Ora sfruttiamo questo triangolo per poter sostituire tutti i coefficienti binomiali nella forma sviluppata appena scritta.

$$\binom{6}{0}a^6 + \binom{6}{1}a^5b^1 + \binom{6}{2}a^4b^2 + \binom{6}{3}a^3b^3 + \binom{6}{4}a^2b^4 + \binom{6}{5}a^1b^5 +$$

diventa

$$a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

ESEMPIO 4.1.2. Calcolare $\sum_{j=0}^n \binom{n}{j}$.

Si può risolvere questo problema in due modi:

1. Se (per definizione) consideriamo il coefficiente binomiale $\binom{n}{j}$ come la cardinalità delle *combinazioni* di un insieme A (ove $|A| = n$) C_j^n , ovvero il numero degli sottoinsiemi di A con j elementi, allora possiamo considerare questo problema come il seguente: "*qual è la cardinalità di tutti gli sottoinsiemi di A (quindi da 0 a n elementi)?*"; dai risultati della [Teoria degli Insiemi](#), sappiamo immediatamente che la risposta è 2^n .
2. Oppure possiamo semplicemente usare il *teorema del binomio*; ovvero ponendo $a = b = 1$, abbiamo

$$(1 + 1)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^{n-j} b^j \iff 2^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j}$$

dandoci così immediatamente la risposta.

ESEMPIO 4.1.3. Calcolare

$$\sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j}$$

Se consideriamo il [3.1. Triangolo di Tartaglia](#), viene che la risposta intuitiva è 0, in quanto le righe dispari sono simmetriche; quindi "dividendo" quella riga, abbiamo un "lato" positivo e negativo, che sommandoli otteniamo 0.

Tuttavia questa risposta non è abbastanza rigorosa per essere considerata; infatti per avere una giustificazione più sicura, si deve usare il [teorema del binomio](#) nel seguente modo.

Siano $a = -b = 1$, ovvero

$$\begin{aligned} (1 - 1)^n &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} 1^{n-j} (-1)^j \\ 0^n &= \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \\ 0 &= \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \blacksquare \end{aligned}$$