Fondamenta degli Integrali Generalizzati - Sommario

Tutto sugli integrali generalizzati.

---

1. Funzioni Localmente Integrabili

Funzioni Localmente Integrabili

Scopo degli integrali generalizzati. Definizione di funzioni localmente integrabili.

---

0. Preambolo

#Osservazione

> Osservazione (lo scopo degli integrali generalizzati (o impropri)).
>
> Sappiamo che gli *integrali di Riemann* (Definizione 1 (integrabilità di una funzione secondo Riemann)) sono solitamente definite su *funzioni limitate* e su *insiemi compatti*. Noi vogliamo quindi estendere questi integrali ad una *classe di funzioni* più ampia: definiamo quindi le *funzioni localmente integrabili* su un intervallo e alla fine studieremo gli *integrali indefiniti*.

1. Definizione di funzione localmente integrabile

#Definizione

> Definizione (funzione localmente integrabile su un intervallo).
>
> Sia $J \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo arbitrario (ovvero può essere *chiuso*, *aperto*, *semichiuso* o *semiaperto*).

Una funzione $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice *localmente integrabile su* J se f è integrabile su ogni intervallo compatto $\forall K \subseteq J$.

#Esempio

Esempio (esempio immediato).

Un esempio immediato è quello delle funzioni continue e monotone su J.

#Osservazione

Osservazione (le funzioni localmente integrabili sono continue).

Osserviamo che ponendo $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ e $c \in J$ e definendo l'*Integralfunktion* (Funzione Integrale > ^4a5cb4) come

$$F(x) = \int_c^x f(t) \text{ d}t$$

vediamo che $F(x)$ è una funzione *continua* su J. Per una dimostrazione di questa proposizione, basta considerare che una qualsiasi integral-funzione è lipschitziana, dunque continua (Teorema 4 (die Integralfunktion ist lipschitzstetig)). Di conseguenza vale il seguente:

$$\forall d \in J, \lim_{x \to d} \int_c^x f(t) \text{ d}t = \lim_{x \to d} F(x) = F(d) = \int_c^d f(t) \text{ d}t$$

Con le *funzioni integrabili in senso generalizzato* vedremo di estendere questa nozione anche ai punti *non* appartenenti all'intervallo J, purché questi punti siano *punti di accumulazione* per J (Funzione Integrabile in Senso Generalizzato)).

2. Funzioni Integrabili in Senso Generalizzato

Funzione Integrabile in Senso Generalizzato

Definizione caso-per-caso di funzione integrabile in senso generalizzato su un intervallo. Esempi notevoli di funzioni integrabili in senso generalizzato. Definizione *di integrale generalizzato convergente e divergente.*

---

1. Definizione di Integrale Improprio

#Definizione

Definizione (funzione integrabile in senso generalizzato).

Per definire una *funzione integrabile in senso generalizzato* distinguiamo tre casi diversi per tipologie diverse dell'intervallo J.

A. *Intervallo aperto a destra*

Sia $J = [a, b)$ dove $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Sia $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$. Si dice che f è *integrabile in senso generalizzato su* J se *esiste* il limite

$$\lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t := \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$$

B. *Intervallo aperto a sinistra*

Sia $J = (a, b]$ dove $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Sia $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$. Si dice che f è *integrabile in senso generalizzato su* J se *esiste* il limite

$$\lim_{x \to a^+} \int_x^b f(t)\ \mathrm{d}t := \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$$

C. *Intervallo aperto*

Sia $J =]a, b[$ dove $a, b \in \tilde{\mathbb{R}}$. Sia $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ *localmente integrabile* su J.

Si dice che f è *integrabile in senso generalizzato* su J se esiste un numero $c \in J$ tale che f sia integrabile in senso generalizzato su $(a, c]$ e su $[c, a)$.

Inoltre si pone

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t := \int_a^c f(t)\ \mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\ \mathrm{d}t$$

#Definizione

Definizione (integrale improprio divergente e convergente).

Riprendendo le definizioni *A* e *B* della *funzione integrabile in senso improprio* (Definizione 1 (funzione integrabile in senso generalizzato)), se il *limite* esiste ma *non è finito*, allora l'integrale si dice *"divergente"*. Altrimenti se il limite esiste allora si dice che è *"convergente"*.

#Osservazione

Osservazione (la definizione di integrale improprio su un insieme aperto la stessa).

Riprendendo la definizione C della *funzione integrabile in senso improprio* (Definizione 1 (funzione integrabile in senso generalizzato)), la definizione dell'integrale improprio rimane uguale, indipendentemente dal valore c scelto.

2. Esempi di integrali impropri

#Esempio

Esempio (esempio dell'integrale improprio semiaperto).

Vogliamo calcolare l'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x$$

Prima di tutto prendiamo l'intervallo di definizione come $J = [0, 1)$, dal momento che per $x = 1$ la funzione integranda non è più definita.
Adesso calcoliamo la primitiva della funzione integranda.

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x = -2\int \frac{1}{2u}\,\mathrm{d}u \ni -2\sqrt{u} = -2\sqrt{1-x}$$

Infine calcoliamo il limite

$$\lim_{x\to 1^-} (-2\sqrt{1-x})\Big|_0^x = -2(\sqrt{1-x}-1) = 2$$

Allora

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x = 2$$

#Esempio

Esempio (esempio dell'integrale improprio su una semiretta).

Vogliamo valutare l'integrale

$$\int_{-\infty}^{0} e^x \, \mathrm{d}x$$

Prima di tutto poniamo $J = (-\infty, 0]$.
Il calcolo della primitiva è banale, dal momento che $(e^x)' = e^x$, andiamo quindi a calcolare il limite

$$\lim_{t \to -\infty} \int_t^0 e^x \, \mathrm{d}t = \lim_{t \to -\infty} e^x \Big|_t^0 = e^0 - e^t = 1 - e^t = 1$$

Allora

$$\int_{-\infty}^{0} e^x \, \mathrm{d}x = 1$$

#Esempio

Esempio (integrale improprio sulla retta reale).

Vogliamo valutare l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}x$$

Preliminarmente osserviamo che la primitiva della funzione integranda è l'*arcotangente*. Adesso scegliamo $c = 0$, dato che disegnando il grafico notiamo una simmetria in $x = 0$.
Ora basta valutare i limiti

$$\lim_{t \to +\infty} \int_{-t}^{0} f(x) \, \mathrm{d}x + \int_0^t f(x) \, \mathrm{d}x = \pi$$

3. Integrali Impropri delle Funzioni Campioni

Integrali Impropri Notevoli

Alcuni integrali impropri notevoli, sotto forma di teoremi. Integrali impropri su intervalli illimitati e limitati.

---

1. Integrali Impropri delle Funzioni Campione

#Osservazione

> Osservazione (l'idea di studiare il comportamento delle "funzioni campione").
>
> L'idea di questa sezione è quella di trovare alcune *funzioni campione*, che diventeranno dei *strumenti di confronto* per stimare alcuni *integrali* che potrebbero risultare difficili da *calcolare*. Infatti, si vedrà di usare questi integrali impropri notevoli con dei *teoremi di confronto*.

#Teorema

> Teorema (integrali impropri su semirette).
>
> A. *Semiretta verso destra*
> Sia $J = [a, +\infty)$ con $a > 0$.
> Si ha l'equivalenza
>
> $$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} \mathrm{d}x \text{ esiste finito} \iff \alpha > 1$$
>
> B. *Semiretta verso sinistra*
> Sia $J = (-\infty, b]$ con $b < 0$.
> Si ha l'equivalenza
>
> $$\int_{-\infty}^{b} \frac{1}{|x|^\alpha} \mathrm{d}x \text{ esiste finito} \iff \alpha > 1$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 2 (integrali impropri su semirette).
Per la dimostrazione di questo teorema è sufficiente considerare le primitive delle funzioni

$$\frac{1}{x^\alpha}$$

considerando per $\alpha = 1$ e $\alpha \neq 1$. ■

#Teorema

Teorema (integrali impropri su intervalli limitati).

A. *Aperto a destra*
Sia $J = [a, b)$ con $0 \leq a < b < +\infty$.
Si ha l'equivalenza

$$\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha} \, \mathrm{d}x \text{ esiste finito} \iff \alpha < 1$$

B. *Aperto a sinistra*
Sia $J = (a, b]$ con $0 \leq a < b < +\infty$.
Si ha l'equivalenza

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha} \, \mathrm{d}x \text{ esiste finito} \iff \alpha < 1$$

2. Applicazione alla Probabilità

#Osservazione

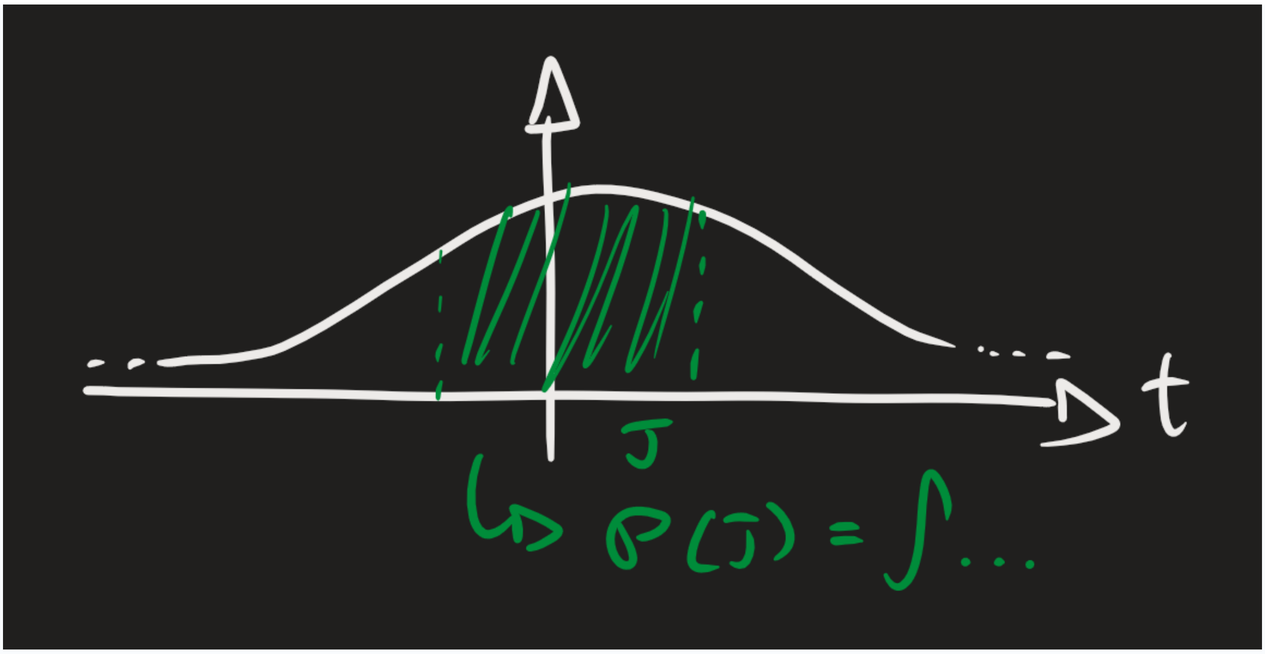
Osservazione (applicazione degli integrali impropri nella probabilità).

Nella probabilità, si ha che le *funzioni* rappresentano la *densità di probabilità* per un certo evento.
Ad esempio si ha la *distribuzione normale*

$$\phi = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}t^2} \, \mathrm{d}t\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

(*figura 2.1.*). Per calcolare la probabilità di uno o più eventi si prende semplicemente l'*integrale di un pezzo sotto la curva*.

FIGURA 2.1. (*la distribuzione normale*)



4. Teoremi sugli Integrali Impropri

Teoremi sugli Integrali Impropri

Teoremi sugli integrali impropri: teorema Aut-Aut per gli integrali generalizzati; criterio del confronto; criterio del confronto asintotico. Esempi di applicazioni dei teoremi.

---

1. Teorema Aut-Aut per gli integrali impropri

#Teorema

> Teorema (Aut-Aut per gli integrali generalizzati).
>
> Se $f: J \longrightarrow \mathbb{R}$, dove $J = [a, b)$ (o anche $J = (a, b]$) e f è *localmente integrabile* e *positiva* su J, allora l'integrale improprio
>
> $$\int_{[a,b]} f$$
>
> deve o *esistere finito* o *divergere all'infinito* ($+\infty$ nel primo caso). In particolare nel primo caso il limite (se finito) corrisponde a

$$\lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t) \ \mathrm{d}t = \sup_{x \in J} \int_a^x f(t) \ \mathrm{d}t$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 1 (Aut-Aut per gli integrali generalizzati).
Il teorema segue dall'osservazione che *la funzione integrale*

$$F(x) = \int_a^x f(t) \ \mathrm{d}t$$

è *crescente*. Utilizzando quindi i *teoremi sulle funzioni monotone* (Teorema 16 (della funzione monotona)) abbiamo la tesi. ■

#Osservazione

Osservazione (la positività della funzione è una condizione necessaria).

Si vede che l'ipotesi $f(x) \geq 0$ è un'*ipotesi chiave*.
Come *controesempio* prendiamo l'integrale improprio

$$\int_0^1 -\cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot x^{-2} \ \mathrm{d}x$$

Prima di tutto si osserva che

$$\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = -\cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot x^{-2}$$

dunque il membro a destra è proprio la *primitiva* della funzione integranda.
Adesso calcoliamo (o tentiamo di farlo) il limite

$$\lim_{x \to 0^+} \int_t^1 f(t) \ \mathrm{d}t = \lim_{x \to 0^+} \sin\left(\frac{1}{t}\right)\Big|_t^1 = \lim_{x \to 0^+} \sin(1) - \sin\left(\frac{1}{t}\right) = \nexists$$

Infatti il *problema* consiste nel fatto che la *funzione integranda* non è *positiva* per tutti i valori dell'intervallo $(0,1]$; in particolare il $\cos$ ci fa *"oscillare velocemente"* tra -1 e 1.

2. Criterio del confronto

#Teorema

Teorema (criterio del confronto).

Siano $f, g : J = [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ (o anche $J = (a, b]$) delle funzioni *localmente integrabili* e tali che

$$0 \leq f(x) \leq g(x), \forall x \in J$$

allora segue che se g è *integrabile in senso generale su* J, allora lo è *anche* f e vale che

$$\int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} g$$

Oppure se f *non* è *integrabile in senso generale su* J, allora non lo è neanche g.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 3 (criterio del confronto)
Innanzitutto definiamo le *funzioni integrali*

$$F(x) = \int_a^x f(t) \text{ d}t; G(x) = \int_a^x f(t) \text{ d}t$$

Poiché $f(x) \leq g(x)$, si ha anche $F(x) \leq G(x)$.
Per il *teorema di Aut-Aut per gli integrali impropri* (Teorema 1 (Aut-Aut per gli integrali generalizzati)), si ha

$$\lim_{x \to b^-} F(x) = \sup_{x \in J} F(x) \leq \sup_{x \in J} G(x) = \lim_{x \to b^-} G(x) \underbrace{< +\infty}_{\text{per ipotesi}}$$

Allora segue che anche f è *integrabile nel senso generale* e vale che

$$\lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t) \text{ d}t \leq \lim_{x \to b^-} \int_a^x g(t) \text{ d}t$$

Per la tesi secondaria basta prendere la *contronominale* della tesi. ■

#Corollario

Corollario (teorema del confronto asintotico).

Siano $f, g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ *localmente integrabili sul dominio* e tali che

$$f(x), g(x) > 0, \forall x \in J$$

ed esiste il limite

$$\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)}{g(x)}=L\in(0,+\infty)$$

Allora $f(x),g(x)$ hanno lo *"stesso carattere"*, nel senso che o sono *entrambe convergenti* o *entrambi divergenti*.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Corollario 4 (teorema del confronto asintotico)
Si tratta di esplicitare la *definizione "alla Cauchy"* del limite dell'ipotesi (Definizione 2 (formulazione generale e rigorosa del limite di una funzione che tende ad un punto di accumulazione)).

$$\begin{aligned}&\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0:\forall x\in J,\\ &x\in(b-\delta,b)\implies\left|\frac{f(x)}{g(x)}-L\right|<\varepsilon\\ &\qquad\implies -\varepsilon+L<\frac{f(x)}{g(x)}<\varepsilon+L\\ &f,g>0\implies(-\varepsilon+L)g(x)<f(x)<(\varepsilon+L)g(x)\end{aligned}$$

dall'ultimo passaggio possiamo applicare il *teorema del confronto* (Teorema 3 (criterio del confronto)) per ricavare la tesi. ■

3. Esempi di esercizi

Ora applichiamo i teoremi appena enunciati con i seguenti esercizi.

#Esercizio

Esercizio.

Dire il carattere dell'integrale improprio

$$\int_0^1\frac{1+\sqrt[3]{x}}{x^2+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

Svolgimento. Prima di tutto prendiamo $J=(0,1]$. Adesso osserviamo il *denominatore*; vediamo che x^2 si *"avvicina* a 0 più velocemente di $\sqrt{x}$; quindi cerco una *funzione-campione di confronto* $g(x)$ con cui applicare il *criterio del confronto asintotico*.
Scegliamo $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$; infatti calcolando il limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1+\sqrt[3]{x}}{x^2+\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x} = 1$$

Abbiamo proprio il risultato voluto, ovvero che la *funzione integranda* si comporta come $\frac{1}{\sqrt{x}}$, che è convergente. Di conseguenza l'integrale iniziale è *integrabile in senso improprio* su J.

5. Assoluta e Semplice Integrabilità

Assoluta e Semplice Integrabilità

Definizione di assoluta e semplice integrabilità in senso generalizzato. Teorema dell'assoluta integrabilità in senso improprio.

---

1. Definizione di Assoluta e Semplice Integrabilità

#Definizione

Definizione (assoluta e semplice integrabilità in senso generalizzato).

Sia $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ localmente integrabile sul dominio.
Si dice che f è *"assolutamente integrabile in senso generalizzato"* se $|f|$ è *integrabile in senso generalizzato*.
Altrimenti si dice che f è *"semplicemente integrabile in senso generalizzato"* se f è *integrabile in senso generalizzato* ma $|f|$ *non* lo è.

#Osservazione

Osservazione (il senso delle definizioni).

Vediamo che abbiamo dato due definizioni di *integrabilità in senso generalizzato*: una assoluta e l'altra semplice. Esiste un legame tra le funzioni *assolutamente integrabili* e le funzioni *integrabili* (ovviamente sempre in senso improprio!)? Sono equivalenti? Oppure solo una implica l'altra? Ma

> allora la nozione di funzione semplicemente integrabile ha senso? Ora vedremo col teorema dell'assoluta integrabilità.

2. Teorema dell'Assoluta Integrabilità

#Teorema

> Teorema (dell'assoluta integrabilità).
>
> Sia $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ una *funzione assolutamente integrabile in senso generalizzato sul dominio*.
> Allora anche f è *integrabile in senso generalizzato sul dominio* e vale la relazione
>
> $$\left|\int_J f\right| \leq \int_J |f|$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 3 (dell'assoluta integrabilità)
Si considera la relazione

$$0 \leq |f(x)| - f(x) \leq 2|f(x)|$$

Applico il *criterio del confronto per gli integrali generalizzati* (Teorema 3 (criterio del confronto)): se $2|f(x)|$ è *integrabile in senso improprio*, allora lo sarà pure $|f(x)| - f(x)$. Da ciò discende che lo è pure $f(x)$; infatti, definendo per costruzione $f(x) := |f(x)| - [|f(x)| - f(x)]$, si ottiene questo risultato.
Inoltre per ottenere la relazione enunciata dalla tesi, si considera la seguente disuguaglianza.

$$\begin{aligned} -|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| &\Longrightarrow -\int_J |f| \leq \int_J f \leq \int_J f \\ &\Longrightarrow \left|\int_J f\right| \leq \int_J |f| \end{aligned}$$

che è proprio l'enunciato della tesi. ■

3. Esempi di Assoluta e Semplice Integrabilità

#Esempio

> Esempio (funzione assolutamente integrabile).

La funzione

$$f(x) = \frac{\sin x}{x^2}$$

è *assolutamente integrabile* sull'intervallo $J = [1, +\infty)$. Infatti basta usare il teorema del confronto con $g(x) = x^{-2}$. Considerando il suo *valore assoluto* si ha infatti

$$\left| \frac{\sin x}{x^2} \right| \leq \frac{|\sin x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

Dato che il membro destro della disuguaglianza è proprio una *funzione campione* (Teorema 2 (integrali impropri su semirette)), sappiamo che questa è *integrabile in senso generalizzato*, dunque il valore assoluto $|f(x)|$ è *integrabile in senso generalizzato*, ovvero $f(x)$ è *assolutamente integrabile in senso generalizzato*.

#Esempio

Esempio (funzione semplicemente integrabile).

La funzione

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

è invece *semplicemente integrabile* su $[1, +\infty)$.
Per dimostrarlo bene, bisogna dimostrare che il suo valore assoluto non è integrabile, confrontandola con una funzione $g(x)$ per cui $|f(x)| \geq g(x)$. In questo caso basta scegliere

$$g(x) = \frac{\sin^2 x}{x}$$

Ora basta provare che $g(x)$ non è integrabile, da cui *per il teorema del confronto* $|f(x)|$ non è *integrabile*. Per farlo, bisogna usare l'identità trigonometrica

$$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

Invece per motivi analoghi al motivo precedente, la funzione $f(x)$ senza il valore assoluto è integrabile.

6. Criteri per l'Assoluta Integrabilità

Criteri per l'Assoluta Convergenza in senso Generalizzato

Criteri (teoremi) per determinare l'assoluta convergenza in senso generalizzato per una funzione: criterio dell'ordine di infinitesimo su un dominio illimitato, criterio dell'ordine di infinito su un dominio limitato. Esempi.

---

1. Criterio dell'ordine di infinitesimo e dell'infinito

#Teorema

Teorema (criterio dell'ordine di infinitesimo su un insieme illimitato).

Sia $f: J \longrightarrow \mathbb{R}$ localmente integrabile, dove J è una semiretta.
Si ha:

1. Se esiste $\alpha > 1$ tale che
$$\lim_{x \to +\infty} |f(x)| \cdot x^\alpha = L \in [0, +\infty)$$
Allora f è *assolutamente integrabile* in senso generalizzato su J.
2. Se invece esiste $\alpha \leq 1$ tale che
$$\lim_{x \to +\infty} |f(x)| \cdot x^\alpha = L \in (0, +\infty) \cup \{+\infty\}$$
Allora f *non è assolutamente integrabile* in senso generalizzato su J.

#Osservazione

Osservazione (il senso di questo teorema).

Per leggere bene le ipotesi del teorema, si deve leggere il prodotto

$$|f(x)| \cdot x^\alpha$$

come

$$\frac{|f(x)|}{\frac{1}{x^\alpha}}$$

e utilizzare il *teorema del confronto asintotico* (Corollario 4 (teorema del confronto asintotico)). Infatti, se il limite è 0, allora semplicemente $|f(x)|$ si annulla. Altrimenti, se è un numero positivo $|f(x)|$ si avvicina a 0 *"come o più velocemente"* di $\frac{1}{x^\alpha}$, che è una funzione notevole per l'integrale improprio (Teorema 2 (integrali impropri su semirette)).

#Teorema

Teorema (criterio dell'ordine di infinito su intervalli limitati).

Sia $f : J = [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ con $b \in \mathbb{R}$.
Si hanno le seguenti.
A. Se si verifica che

$$\exists \alpha < 1 : \lim_{x \to b^-} |f(x)| \cdot (b - x)^\alpha = L \in [0, +\infty)$$

Allora f è *assolutamente integrabile in senso generalizzato* su J.
B. Se si verifica invece

$$\exists \alpha \geq 1 : \lim_{x \to b^-} |f(x)| \cdot (b - x)^\alpha = L \in (0, +\infty) \cup \{+\infty\}$$

Allora f *non* è *assolutamente integrabile in senso generalizzato* su J.

2. Esempi di applicazione

#Esempio

Esempio (la distribuzione gaussiana).

Si considera la distribuzione gaussiana

$$f(x) = e^{-x^2}$$

Posso dire se questa è *integrabile in senso generalizzato* su $[0, +\infty)$? Sì, usando i teoremi appena enunciati con $\alpha = 2$, si ha

$$\lim_{x \to +\infty} e^{-x^2} \cdot x^2 \in [0, +\infty)$$

Quindi sicuramente si sa che

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \, \mathrm{d}x$$

esiste ed è finito.

#Esercizio

Esercizio.

Stabilire se la funzione f è *integrabile* su $J = (0, 3]$.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x + x^3}}$$

Prima di tutto si osserva che posso *"scartare"* x^3, dato che x va più velocemente a 0 di x^3. Allora scelgo $\alpha = \frac{1}{2}$ e uso il *criterio dell'ordine dell'infinito*.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{1 + x^2}} = 1 \in (0, +\infty) \cup \{+\infty\}$$

Allora la funzione è *integrabile in senso generalizzato*, dato che lo è pure $\frac{1}{\sqrt{x}}$.