

# L'APOCALISSE DI GIOVANNI

## Un manuale di sopravvivenza per Analisi Matematica I

Bolzano      Weierstrass

Fermat      Lagrange

Eulero      de l'Hopital

Rolle

Cauchy

Io



ORA INTEGRATO  
CON  
LE SERIE!!!

# Abstract - Che cosa è questo?

## Abstract

Questa *dispensa* è stata creata come risultato delle *lezioni* di *Analisi Matematica I* (A. A. 2023-2024) con *D. del Santo* in qualità di docente; il fine di questo documento è quello di servire una specie di "database" di informazioni, essenziale ma completa, per l'esame scritto e orale di Analisi Matematica I.

In questa dispensa andremo a vedere la *maggior parte* degli argomenti che abbiamo trattato nelle lezioni, sia quelli teorici che quelli pratici.

Inoltre, le parti trattati sui *numeri naturali* e sui *numeri complessi* verranno trattati come dei "*complementi*" dell'analisi matematica, ovvero come degli semplici argomenti "*extra*" (anche se forse in realtà non sarebbe il caso).

Ovviamente alcune parti saranno tagliate, tra cui esercizi proposti dal professore, alcune sezioni non necessarie per lo scritto, et cetera...

Dalla *versione 3.0.* della dispensa è stata integrata la parte relativa alle *serie numeriche*, come complemento in quanto parte del programma opzionale.

Inoltre questa dispensa *non* costituisce un'alternativa alla consultazione del libro di testo oppure alla frequenza delle lezioni, in quanto in queste pagine potrebbero contenere degli errori; semplicemente questo serve come un *punto di riferimento* per i contenuti di studio.

Tutto detto e auguro buona fortuna a chiunque stia leggendo questo "*manualino*".

**DINO MENG (2024, Studente UniTs, MiGE, Triennale IADA)**

# 1. Indice dei Contenuti

## I. Introduzione all'Analisi Matematica..... 1

- i. Funzioni (intro)..... 2
- ii. Successioni e Sottosuccessioni..... 20

## II. Numeri Reali e Funzioni Reali..... 23

### A. LA STRUTTURA DEI NUMERI REALI..... 24

- A1. Richiami sui numeri interi e razionali..... 24
  - A2. Gli assiomi AMDOS dei numeri reali..... 26
- ### B. LA CONSEGUENZA DELLA CONTINUITÀ..... 30
- B1. Intervalli..... 30
  - B2. Insiemi limitati, maggioranti, estremo superiore..... 34
  - B3. Le conseguenze dell'esistenza dell'estremo superiore..... 43
- ### C. LE FUNZIONI DI VARIABILE REALE..... 55
- C1. Funzioni di potenza, di radice e di valore assoluto..... 55
  - C2. Funzioni trigonometriche..... 61
  - C3. Funzioni esponenziali e logaritmiche..... 72

## III. La topologia della retta reale..... 81

### A. LE BASI DELLA TOPOLOGIA DELLA RETTA REALE..... 82

- A1. Intorni..... 82
- A2. Punti interni, esterni, e di frontiera per un insieme..... 89
- A3. Insiemi aperti e chiusi..... 94
- A4. Punti di aderenza e di accumulazione..... 100

## IV. I limiti..... 110

### A. I LIMITI DI FUNZIONE..... 111

- A1. Definizione di limite di funzione..... 123
  - A2. Proprietà e teoremi sui limiti di funzione..... 117
  - A3. Limiti notevoli ed esempi del calcolo di limiti..... 140
- ### B. I LIMITI DI SUCCESSIONE..... 165
- B1. Definizione di limite di successione..... 165
  - B2. Limiti notevoli ed esempi del calcolo di limiti..... 171
- ### C. LA PRASSI DEI LIMITI..... 177
- C1. Trucchi per l'algebra dei limiti..... 177
  - C2. Asintoti di una funzione..... 181

## IV ½. La topologia della retta reale..... 185

### A. ULTERIORI ARGOMENTI SULLA TOPOLOGIA DELLA RETTA REALE..... 186

A1. Il secondo teorema di Bolzano-Weierstraß.....	187
A2. Insiemi compatti.....	188
A3. Successioni di Cauchy.....	192
<b>V. La continuità delle funzioni reali.....</b>	<b>196</b>
<b>A. LE FUNZIONI CONTINUE.....</b>	<b>197</b>
A1. Definizione di continuità per le funzioni.....	197
A2. Le classificazioni della discontinuità.....	203
A3. Teoremi sulle funzioni continue.....	205
A4. Continuità di alcune funzioni.....	219
A5. Continuità uniforme.....	221
<b>VI. Calcolo Differenziale.....</b>	<b>225</b>
<b>0. INTRODUZIONE AL CALCOLO DIFFERENZIALE.....</b>	<b>226</b>
<b>A. LA TEORIA DEL CALCOLO DIFFERENZIALE.....</b>	<b>229</b>
A1. Rapporto incrementale.....	229
A2. Derivabilità e derivata.....	230
A3. Proprietà fondamentali delle derivate.....	232
A4. Derivate successive e classi C.....	237
<b>B. I RISULTATI DEL CALCOLO DIFFERENZIALE.....</b>	<b>241</b>
B1. Teorema di Fermat.....	241
B2. Teorema di Rolle.....	244
B3. Teorema di Cauchy.....	246
B4. Teorema di Lagrange.....	250
B5. Teorema di de l'Hôpital.....	253
B6. Lemmi di Peano e di Lagrange, formula di Taylor.....	257
<b>C. LA PRASSI DEL CALCOLO DIFFERENZIALE.....</b>	<b>267</b>
C1. Esempi di funzioni derivabili e non derivabili.....	267
C2. Conseguenze pratico-teoriche dei teoremi di Cauchy e di Lagrange....	276
C3. Derivata seconda e convessità delle funzioni.....	282
C4. Modelli scelti di problemi sulle derivate.....	289
<b>VII. Calcolo Integrale.....</b>	<b>292</b>
<b>0. NOMENCLATURE PRELIMINARI.....</b>	<b>293</b>
0A. La suddivisione di un intervallo.....	293
0B. La somma inferiore e superiore.....	295
<b>A. L'INTEGRAZIONE DI RIEMANN.....</b>	<b>302</b>
A1. L'integrabilità secondo Riemann.....	302
A2. Esempi di funzioni integrabili secondo Riemann.....	304
A3. Tipologie di funzioni integrabili.....	310
A4. Proprietà delle funzioni integrabili.....	314
A5. Teorema della media integrale.....	319

<i>B. LA PRIMITIVA DI UNA FUNZIONE</i> .....	324
<i>C. IL TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO</i> .....	327
C1. Definizione di Integralfunktion.....	327
C2. Il teorema fondamentale del calcolo integrale.....	330
C3. Teorema di Torricelli-Barrow.....	333
<i>D. IL CALCOLO DELLE PRIMITIVE</i> .....	337
D1. Gli integrali delle funzioni elementari.....	337
D2. Integrazione per parti.....	339
D3. Integrazione per sostituzione.....	341
<b>VIII. Studio di funzione.....</b>	<b>344</b>
<b>I complementi dell'Analisi Matematica.....</b>	<b>348</b>
<i>N. I NUMERI NATURALI</i> .....	349
N1. La struttura di N.....	349
N2. Gli assiomi di Peano e il principio di induzione.....	351
N3. Esempi di dimostrazione per induzione.....	355
N4. I problemi del calcolo combinatorio.....	362
N5. Il coefficiente binomiale e il triangolo di Tartaglia.....	368
<i>C. I NUMERI COMPLESSI</i> .....	376
C1. Introduzione ai numeri complessi.....	376
C2. Le operazioni tra i numeri complessi.....	376
C3. La rappresentazione algebrica dei numeri complessi.....	386
C4. La rappresentazione trigonometrica dei numeri complessi.....	388
<i>S. LE SERIE NUMERICHE</i> .....	396
S1. Definizione di Serie.....	396
S2. Carattere di una Serie.....	400
S3. Teoremi generali sulle Serie.....	407
S4. Teorema del Confronto per le Serie a termini non negativi.....	410
S5. Criteri per le serie a termini positivi.....	415
S7. Serie a termini di segno qualunque.....	417

# Capitolo I. Introduzione all'Analisi Matematica

## Abstract del Capitolo I

Il primo capitolo servirà come breve e concisa introduzione all'*analisi matematica*: daremo le prime nozioni di funzioni e tutte le sue caratteristiche possibili, tra cui l'iniettività, suriettività, periodicità, et cetera...

Si daranno inoltre delle prime nozioni sulle *successioni*.

Verranno date le conoscenze preliminari (di base) di *logica* e di *insiemistica* come conoscenze pregresse *già note*.

## Funzioni

Tutto sulle funzioni: dalla definizione di base alle proprietà specialissime.

### 1. Definizione generale di Funzione

#Definizione

Definizione (funzione).

Siano,

$A, B$  due insiemi

$f$  una "legge", ovvero una specie di **predicato**, oppure una **relazione** speciale che ad ogni valore di  $A$  associa **uno e uno solo** valore di  $B$ ; cioè se  $x \in A$ , allora  $\exists!y \in B$  (si legge esiste solo un valore di  $y$  in  $B$ ) è associato a  $x$  ( $f(x) = y$ )

Allora la terna  $(A, B, f)$  viene definita come **funzione**.

#Definizione

Definizione (dominio, codominio e legge).

L'insieme  $A$  si dice il **dominio** della **funzione**.

L'insieme  $B$  si dice il **codominio** della **funzione**.

La "legge"  $f$  è una **regola** che ad ogni elemento  $x$  del **dominio**  $A$  associa uno e uno solo elemento  $y$  del **codominio**  $B$ .

#Definizione

Definizione (scrittura esplicita di una funzione).

Con la scrittura compatta la terna può essere definita **esplicitamente** anche mediante la seguente notazione.

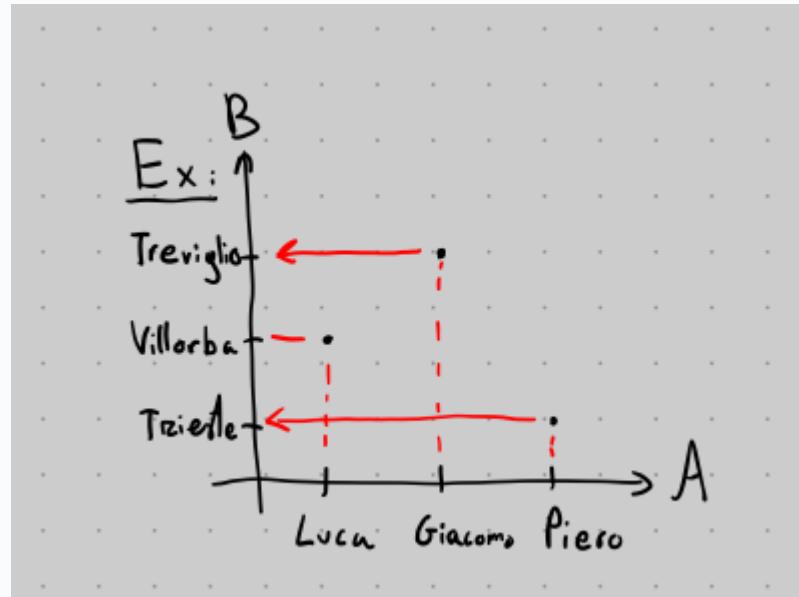
$$f : a \in A \mapsto b \in B$$

#Esempio

Esempio (Esempio 1.1.).

Siano  $A = \{\text{Persone in quest'aula}\}$ ,  $B = \{\text{Comuni italiani}\}$  e  
 $f : x \mapsto \text{comuni di residenza}$ ; allora si rappresenta il grafico della funzione  $(A, B, f)$   
nella *figura 1.1.*

**FIGURA 1.1.** (*Esempio 1.1.*)



#Definizione

**Definizione** (funzione di reale variabile).

In questo corso si studieranno le cosiddette *funzioni di reale variabile*, ovvero le funzioni  $f : A \mapsto B$ , con  $A, B \subseteq \mathbb{R}$ .

#Osservazione

**Osservazione** (la definizione di funzione non dipende solo dalla legge).

Secondo questa definizione di *funzione*, le sue proprietà non cambiano solamente per la legge  $f$ , ma anche per gli *insiemi*  $A, B$ .

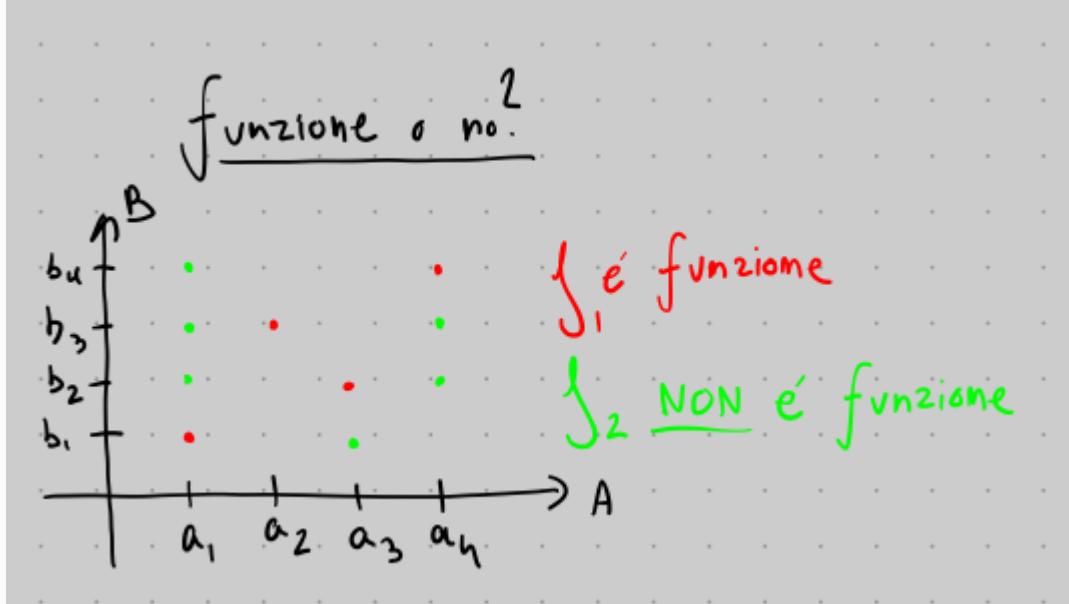
#Osservazione

**Osservazione** (esempio di funzione e di non-funzione).

Si osservi la *figura 1.2..*

Si nota che la parte *rossa* è definibile come funzione, invece la parte *verde* non lo è, in quanto ci sono più elementi di  $B$  associati ad un elemento di  $A$ ; quindi si parte da un valore  $a_n$  e tutti devono avere un solo corrispondente  $b_n$ .

**FIGURA 1.2.** (*Osservazione 1.2.*)



## 2. L'immagine di una funzione

#Definizione

**Definizione** (valore immagine di un punto di una funzione).

Sia  $f : A \rightarrow B$  una funzione.

Se  $x \in A$ , il valore  $f(x) \in B$  viene definita come il **valore immagine di  $x$** , una specie di "**proiezione**" del valore del dominio.

#Definizione

**Definizione** (l'insieme immagine di una funzione).

Riprendendo i presupposti di prima, si definisce l'insieme di tutti i **valori immagine** come **l'insieme immagine** e lo si indica con

$$f(A)$$

#Esempio

**Esempio** (Esempio 2.1.).

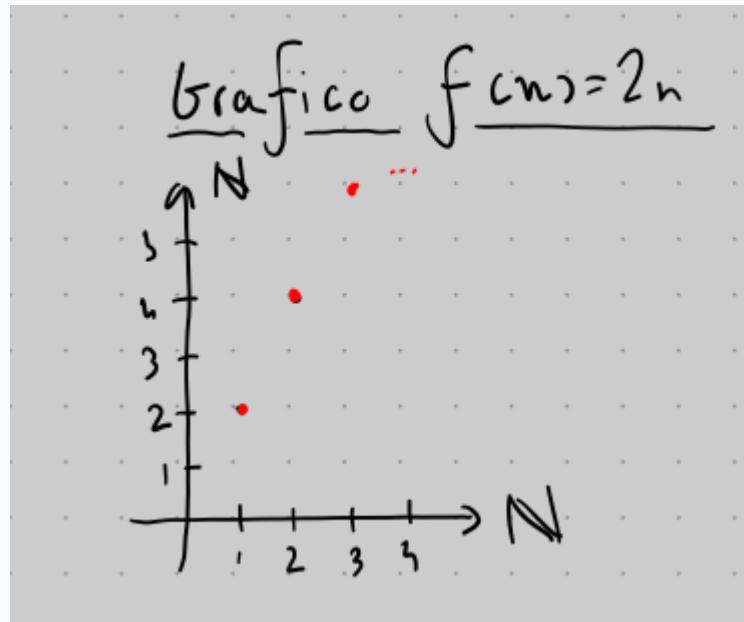
Siano  $A = \mathbb{N}$ ,  $B = \mathbb{N}$ ,  $f(n) = 2n$ . Allora dalle definizioni appena date abbiamo  $f(\mathbb{N}) = \{0, 2, 4, \dots\} = \mathbb{P}$  (l'insieme dei numeri pari);

#Osservazione

**Osservazione** (l'insieme immagine è sempre sottoinsieme del codominio).

Si nota che  $f(A) \subseteq B$ .

**FIGURA 2.1.** (*Esempio 2.1.*)



### 3. Iniettività, suriettività e biiettività

#### Funzione suriettiva (o surgettiva)

#Definizione

Definizione (funzione suriettiva).

Se

$$f(A) = B$$

Allora la funzione  $f$  si dice *suriettiva* (oppure come lo chiamano i pisani, *surgettiva*).

#Esempio

Esempio (Esempio 3.1.).

La funzione  $f(n) = 2n$  (tratto dall'[esempio 2.1.](#), [Esempio 10 \(Esempio 2.1.\)](#)) *non* è *surgettiva* se si definisce  $A = \mathbb{N}$ ; invece lo è se si definisce  $A = \mathbb{P}$ .

#### Funzione iniettiva (o ingettiva)

#Definizione

Definizione (funzione iniettiva).

Siano

$$f : A \mapsto B; x_1, x_2 \in A$$

Supponendo che

$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq x_2$$

Allora si dice che la funzione  $f$  è **iniettiva** (oppure in pisano **ingettiva**).

### #Esempio

#### Esempio (Esempio 3.2.).

Siano

$$\begin{aligned} A &= [0, \infty) \\ B &= [0, \infty) \\ f &: x \mapsto x^2 \end{aligned}$$

(dove la notazione  $[0, \infty)$  indica tutti i numeri  $\forall x \in \mathbb{R} : x \geq 0$ ). La funzione  $f(x)$  è **suriettiva**, in quanto  $\forall y \geq 0, \exists x \geq 0 : x^2 = y$ . Inoltre è anche **iniettiva**.

Infatti si dimostra che  $f$  è iniettiva; se  $0 \leq x_1 < x_2$ , (quindi  $x_1 \neq x_2$ ) allora moltiplicando da ambo le parti per  $x_1$  e per  $x_2$ , si ottengono:

$$\text{I. } 0 \leq x_1 < x_2$$

$$x_1^2 < x_1 x_2$$

$$\text{II. } 0 \leq x_1 < x_2$$

$$x_1 x_2 < x_2^2$$

Pertanto

$$x_1^2 < x_2^2 \iff f(x_1) < f(x_2) \implies f(x_1) \neq f(x_2) \blacksquare$$

### #Esempio

#### Esempio (Esempio 3.2.).

Riprendendo la medesima funzione  $f : x \mapsto x^2$  dall'**esempio 3.1.** e cambiando gli insiemi  $A, B = \mathbb{R}$ , la funzione  $f$  non è più **né suriettiva né iniettiva**.

Lo si dimostra che non è suriettiva prendendo un valore  $y = f(x) = -1$ ; si dimostra che  $\nexists x : x^2 = -1$  (guardando il grafico), pertanto  $-1 \notin f(\mathbb{R})$ .

Dopodiché si dimostra che non è neanche iniettiva tramite un **controesempio**; prendiamo  $x_1 = -1, x_2 = 1$  (quindi  $x_1 \neq x_2$ ) e i **valori immaginati** di  $x_1, x_2$  sono

$f(-1) = -1^2 = 1$ ,  $f(1) = 1^2 = 1$ , pertanto  $f(-1) = f(1)$ . ■

## Funzione biiettiva

#Definizione

Definizione (funzione biiettiva).

Se una funzione  $f : A \mapsto B$  è sia *iniettiva* e sia *suriettiva*, allora si dice che  $f$  è *biiettiva* (o "bigettiva" in pisano).

## 4. Funzione composta

#Definizione

Definizione (funzione composta).

Siano

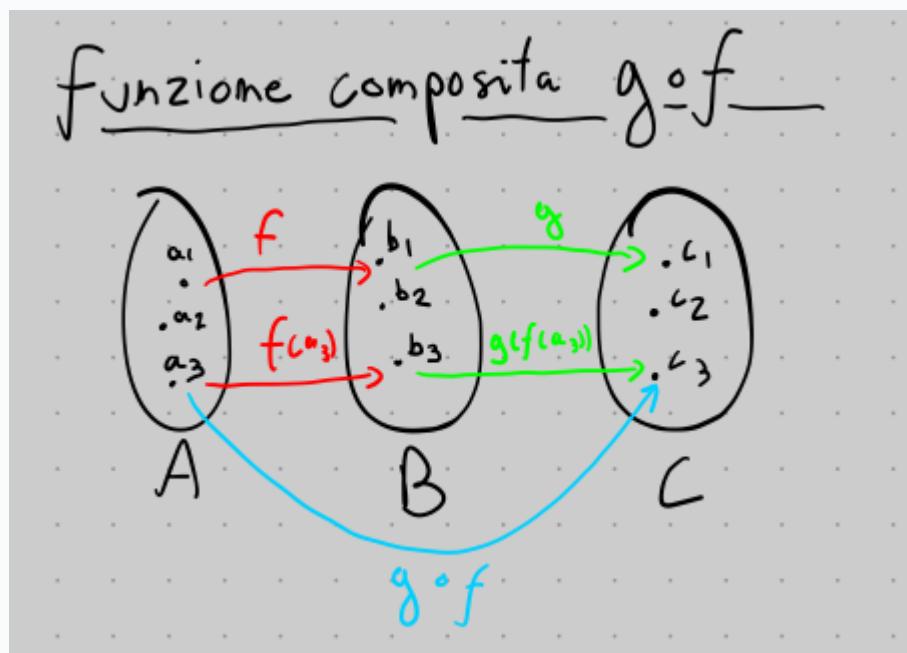
$$\begin{aligned} f : A &\mapsto B \\ g : B &\mapsto C \end{aligned}$$

Si definisce  $g \circ f$  la *funzione composita*, detta come "*g dopo f*".

$$\begin{aligned} g \circ f : A &\mapsto C \\ x &\mapsto g(f(x)) \end{aligned}$$

Si illustra la *funzione composita* tramite il seguente diagramma (*figura 4.1.*).

**FIGURA 4.1.** (Definizione 4.1.)



#Esempio

Siano

$$\begin{aligned}f : \mathbb{R} &\mapsto \mathbb{R}, g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \\f : x &\mapsto x^2, g : y \mapsto y + 2\end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 2 \\(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(x + 2) = (x + 2)^2\end{aligned}$$

## #Osservazione

Osservazione ( $f \circ g \neq g \circ f$ ).

Ovviamente da questo esempio si nota che *non è sempre vero* che  $f \circ g = g \circ f$ .

## 5. L'immagine di un pezzo del dominio

## #Definizione

Definizione (l'immagine di un pezzo del dominio).

Sia  $f : A \mapsto B$ ,  $A' \subseteq A$ ; allora si definisce

$$f(A') = \{f(x) : x \in A'\}$$

come *l'immagine di un pezzo del dominio*  $A$ .

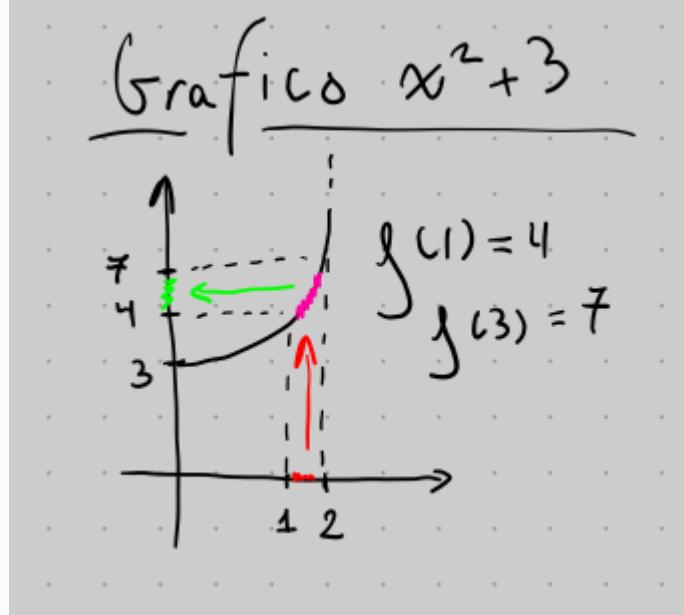
## #Esempio

Esempio (rappresentazione grafica).

Si rappresenta il grafico della funzione  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ ,  $f : x \mapsto x^2 + 3$ . Si vuole trovare (e rappresentare)  $f([1, 2])$ .

Dal grafico si evince chiaramente che  $f([1, 2]) = [4, 7]$ .

### FIGURA 6.1. (Esempio 6.1.)



## 6. La funzione inversa

#Definizione

Definizione (funzione inversa).

Sia

$$f : A \mapsto B$$

Supponiamo che esista una funzione  $g : B \mapsto A$ , tale che

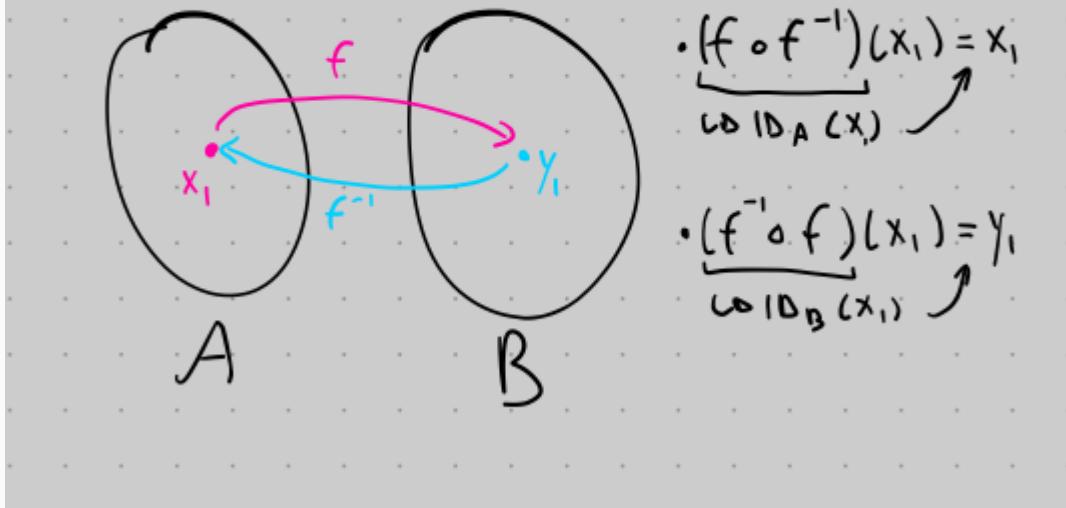
$$\begin{aligned} g \circ f &= \text{id}_A : A \mapsto A \\ f \circ g &= \text{id}_B : B \mapsto B \end{aligned}$$

, ove la funzione d'identità su un insieme  $A$  viene rappresentata da  $\text{id}_A : x \mapsto x$ , si dice che la funzione  $g$  è la **funzione inversa di  $f$** .

Si illustra la funzione inversa di  $f$  con un diagramma (**figura 6.1.**).

**FIGURA 6.1.** (Definizione 6.1.)

# Funzione Inversa



#Teorema

**Teorema** (condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza della funzione inversa  $f^{-1}$ ).

Una funzione  $f : A \mapsto B$  ha la sua inversa

$$f^{-1} : B \mapsto A$$

se e solo se è **biettiva**, ovvero se è sia **iniettiva** che **suriettiva**.

## 7. L'insieme contro immagine di una funzione

#Definizione

**Definizione** (insieme contro / pre - immagine di una funzione).

Sia

$$f : A \longrightarrow B$$

ove  $\tilde{A} \subseteq A, \tilde{B} \subseteq B$ .

Allora definisco **l'insieme contro immagine** (o **pre-immagine**) di  $f$

$$f^\leftarrow(\tilde{B}) = \{x \in A : f(x) \in \tilde{B}\}$$

ovvero gli elementi di  $A$  tali per cui le loro immagini  $f(a)$  appartengono all'insieme  $\tilde{B}$ .

## 8. Monotonia di una funzione

## Definizione (monotonia di una funzione).

Sia

$$f : A \longrightarrow B$$

e diciamo che questa sia *monotona* se sussistono una delle seguenti condizioni:

- i.  $\forall x, y \in A; x \leq y \implies f(x) \leq y$
- ii.  $\forall x, y \in A; x < y \implies f(x) < y$
- iii.  $\forall x, y \in A; x \leq y \implies f(x) \geq y$
- iv.  $\forall x, y \in A; x < y \implies f(x) > y$

## #Definizione

## Definizione (funzione strettamente/non crescente o decrescente).

In particolare,

- se sussiste la *i.*, allora la funzione è *crescente*;
- invece per la *ii.*, la funzione si dice *strettamente crescente*.
- Analoghi i discorsi per *iii.*, *iv.* in cui diciamo che la funzione è *decrescente o strettamente decrescente*.

## #Osservazione

## Osservazione (la "corretta" pronuncia del termine).

Si nota che il termine "*monotònono*", usata per indicare che la funzione rispetta la condizione delineata dalla *definizione 8.1.*, viene pronunciata ponendo l'accento sulla terza *o!* Infatti con l'altra maniera di pronunciare, "*monòtono*", questo termine acquisisce un significato completamente diverso, che a sua volta può portare un'accezione negativa.

## 9. Parità o disparità di una funzione

## #Definizione

## Definizione (funzione pari o dispari).

Siano  $A, B \subseteq \mathbb{R}$ , sia  $A$  *simmetrico rispetto all'origine* (ovvero  $\forall x \in A, -x \in A$ ).

$$f : A \longrightarrow B$$

e la chiamo:

- Una funzione *pari* se

$$f(x) = f(-x)$$

- Una funzione *dispari* se

$$f(x) = -f(-x)$$

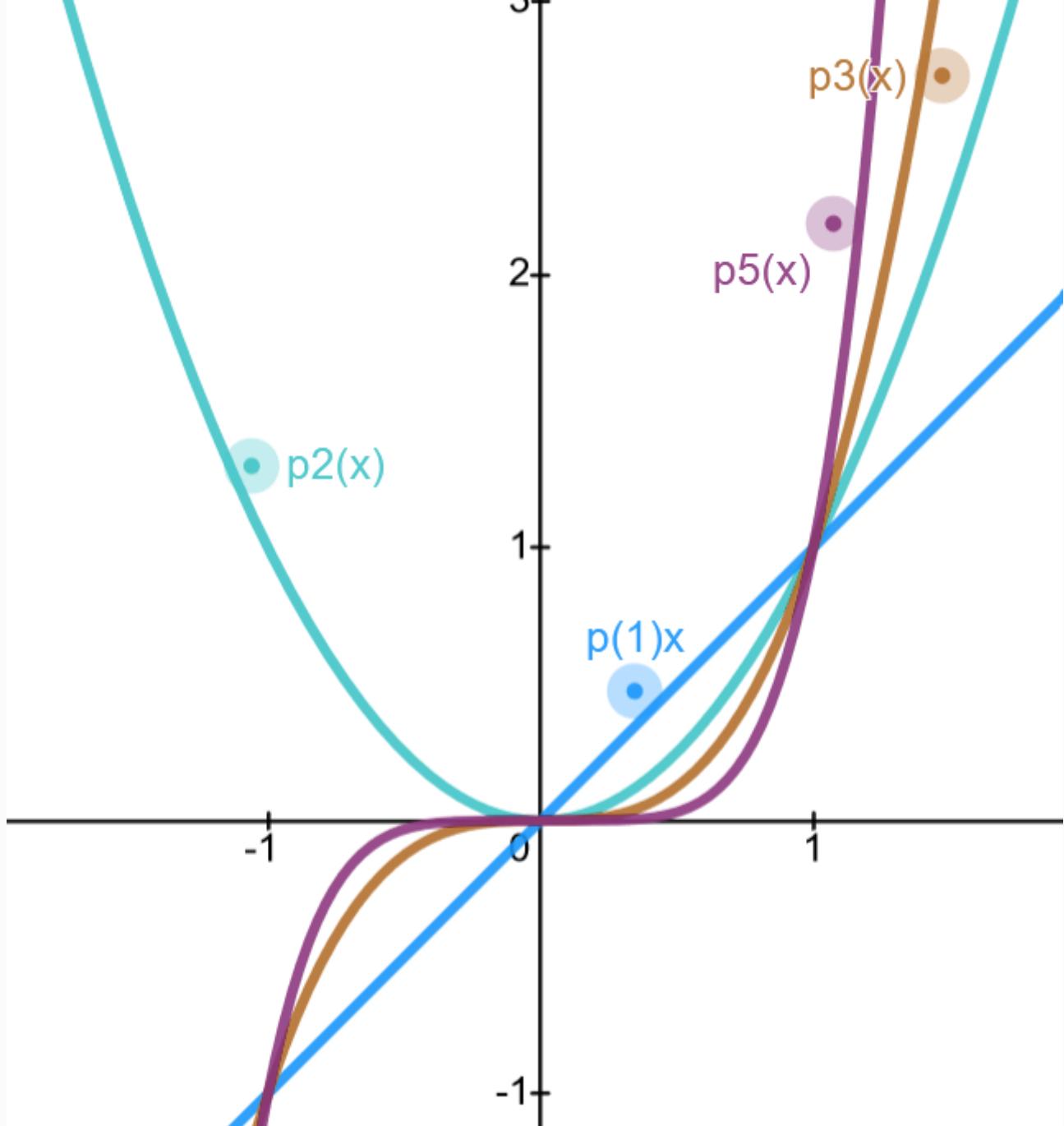
### #Esempio

**Esempio** (esempio di funzioni pari o dispari).

Osserviamo la funzione potenza ([Funzioni di potenza, radice e valore assoluto > ^2b25ba](#))  $p_n(x)$ .

La definizione appena data da noi ci "suggerisce" che per  $n$  pari,  $p_n$  è una funzione pari; similmente  $p_n$  è dispari se  $n$  è dispari ([figura 9.1.](#)).

**FIGURA 9.1.** ([Esempio 9.1.](#))



## 10. Periodicità di una funzione

#Definizione

**Definizione (funzione periodica).**

Sia  $T > 0$  un numero,  $A \subseteq \mathbb{R}$  tale che

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \forall x \in A; x + Tk \in A$$

Sia ora una funzione  $f$  del tipo

$$f : A \longrightarrow \mathbb{R}$$

è *periodica* se è vera che

$$\boxed{\forall x, k; f(x) = f(x + Tk)}$$

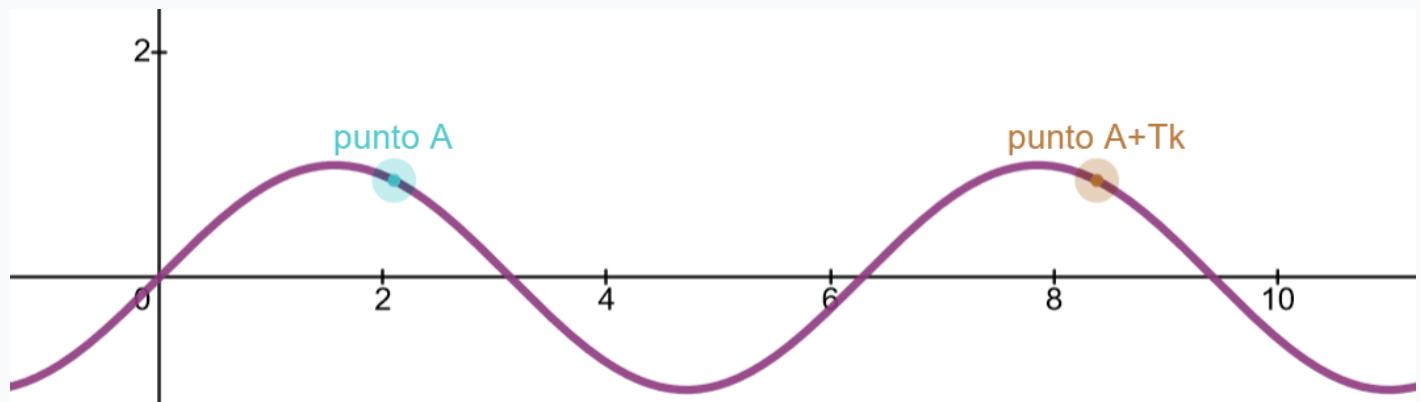
## Esempio (le funzioni trigonometriche sono periodiche).

Le **funzioni trigonometriche** sono periodiche: infatti secondo la [proposizione 2.3.](#) sulle funzioni trigonometriche (Proposizione 7 (seno e coseno sono funzioni periodiche)), abbiamo  $T = 2\pi$ . Ovvero

$$\sin(x) = \sin(x + 2\pi k), \forall k \in \mathbb{Z}$$

analogo il discorso per  $\cos$ .

**FIGURA 10.1.** (Esempio 10.1.)



## 11. Massimo e minimo assoluto di una funzione

### #Definizione

#### Definizione (Punto di massimo e minimo assoluto).

Sia  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in E$ .

Allora definiamo  $x_0$  punto di **massimo assoluto** se abbiamo

$$\forall x \in E, f(x) \leq f(x_0)$$

Alternativamente è punto di **minimo assoluto** se abbiamo

$$\forall x \in E, f(x) \geq f(x_0)$$

### #Definizione

#### Definizione (massimo e minimo di una funzione).

Se  $x_0$  è **punto di massimo** (minimo) **assoluto**, allora il **valore immagine** (Definizione 8 (valore immagine di un punto di una funzione))  $f(x_0)$  si dice **massimo** (minimo) **assoluto** della funzione.

## #Osservazione

Osservazione (ci possono essere più punti di massimo ma solo un massimo).

**ATTENZIONE!** Notiamo che se possiamo avere più di uno *punti di massimo* (minimo), ci ricordiamo che il *massimo* (minimo) della funzione è l'*immagine* del punto: dunque in quanto tale può esistere un unico *valore massimo* dell'insieme immagine  $f(E)$ .

## #Esempio

Esempio (Esempio 11.1. Funzione  $\sin$ ).

Sia  $f(x) = \sin x$ .

Allora sappiamo che i *punti di massimo* di  $\sin$  è costituita dalla classe di equivalenza

$$\left[ \frac{\pi}{2} \right]_{\equiv 2\pi}$$

Analogamente i *punti di minimo* di  $\sin$  sono

$$\left[ -\frac{\pi}{2} \right]_{\equiv 2\pi}$$

Tuttavia il *massimo* e *minimo* di  $\sin$  sono  $-1, 1$ ; infatti

$$-1 \leq \sin x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

L'illustrazione di questo esempio mediante grafici è lasciato al pubblico per *esercizio*.

## #Esempio

Esempio (Esempio 11.2. Funzione con dominio ristretto).

Guardiamo alla funzione  $x|_{[0,1]}$ , ovvero una funzione del tipo

$$f : [0, 1[ \longrightarrow \mathbb{R}$$

Notiamo che  $f$  *non ha massimo*, perché  $f([0, 1]) = [0, 1[$  dunque  $f(E)$  non ha max (anche se resta che esiste sup).

Invece  $f$  ha minimo con  $f(0) = 0$ .

Anche questo esempio è lasciato al pubblico da illustrare per *esercizio*.

Si lascia al lettore verificare se  $\frac{1}{x}$  ha **massimo** e/o **minimo** per il suo **dominio**.

## 12. Massimo e minimo relativo di una funzione

#Definizione

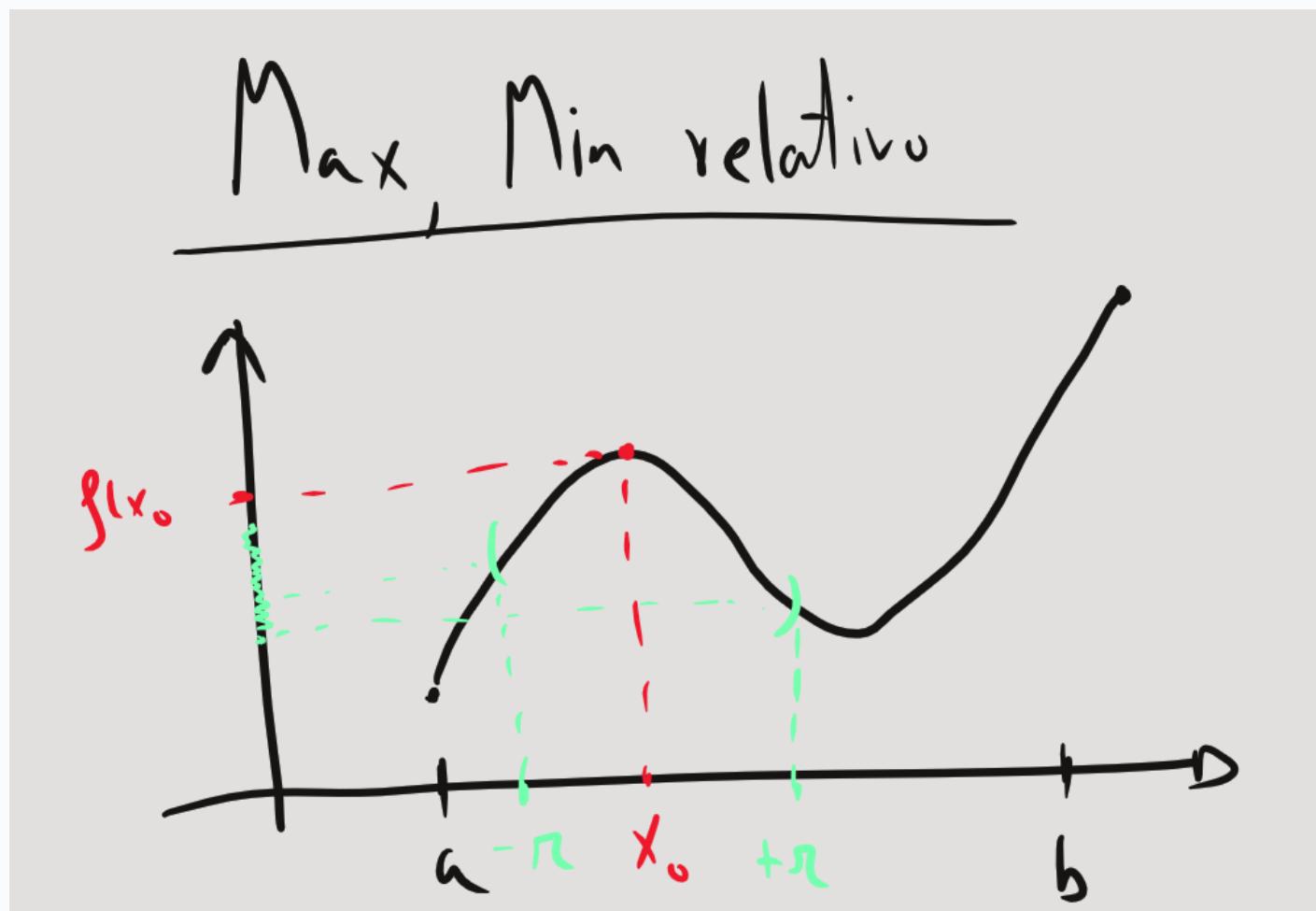
Definizione (max, min relativo).

Sia  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $E \subseteq \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in E$ .

Allora  $x_0$  è **punto di massimo (minimo) relativo** se vale che

$$\exists r > 0 : \forall x \in ]x_0 - r, x_0 + r[ \cap E, f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0))$$

**FIGURA 12.1.** (Idea del concetto)



## 13. Asintoto di una funzione (argomento avanzato)

Consultare la pagina [Asintoto di una funzione](#).

## 14. Classe C di una funzione (argomento avanzato)

Consultare la pagina [Derivata Successiva e Classe C](#)

## Funzione Convessa

Osservazioni geometrici preliminari; definizione di funzione convessa. Significato geometrico della convessità

### 0. Osservazione preliminare

#Osservazione

Osservazione (punti del segmento tra due punti).

Supponiamo di avere il *piano cartesiano*  $\pi$  (Coppie Ordinate e Prodotto Cartesiano > ^61dab9) e voglio rappresentare il segmento tra i punti

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2)$$

Ovvero ho una situazione grafica raffigurata in *figura 0.1..*

Allora considero il *vettore geometrico relativo al segmento*

$$\vec{v} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

Ora voglio trovare un *vettore* che ha la stessa *direzione* e lo stesso *verso* ma la intensità è più *piccola* di  $\vec{v}$ . Come faccio?

Ponendo un numero qualsiasi che chiamo  $\lambda$  e "restringendolo" in  $0 \leq \lambda \leq 1$  pongo il seguente vettore

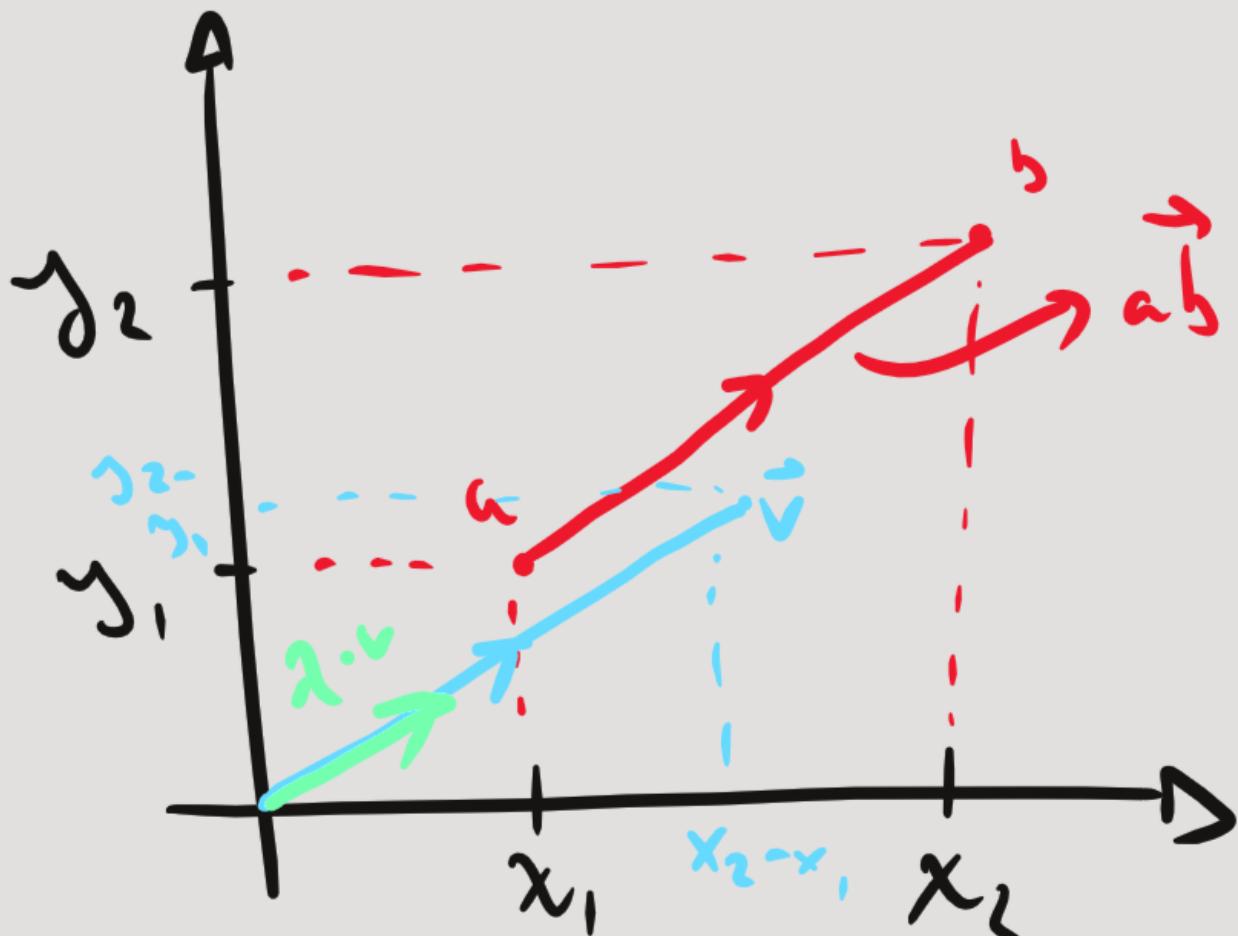
$$\lambda \cdot \vec{v} = (\lambda(x_2 - x_1), \lambda(y_2 - y_1))$$

Ora per considerare *tutti i punti del segmento del vettore*  $\vec{v}$  faccio la somma di uno dei punti considerati all'inizio con il vettore scalato per  $\lambda$ :

$$(x_1, y_1) + \lambda \cdot \vec{v} = \dots = ((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2, (1 - \lambda)y_1 + \lambda y_2), \lambda \in [0, 1]$$

Questo vale lo stesso se scambio  $x_1$  con  $x_2$  e altrettanto  $y_1$  con  $y_2$  (ovviamente per rimanere consistenti li si scambia sin dall'inizio!).

**FIGURA 0.a.** (*Idea grafica*)



## 1. Definizione di Funzione Convessa

#Definizione

Definizione (funzione convessa o concava).

Sia  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  ( $I$  intervallo) (Intervalli)

La funzione  $f$  si dice **convessa** se prendendo qualsiasi due punti  $x_1, x_2$  nell'intervallo  $I$ , uno più grande dell'altro, allora succede il seguente:

$$\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2, \forall \lambda \in [0, 1],$$

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

Se invece  $-f$  è **convessa**, allora  $f$  si dice **concava**.

#Osservazione

Osservazione (significato geometrico).

Ora vediamo cosa vuol dire la definizione data sopra.

Seguendo l'*osservazione preliminare* (oss. 0.a) svolta prima (Osservazione 1 (punti del segmento tra due punti)), notiamo che il membro destro della diseguaglianza è sostanzialmente un **punto qualsiasi della retta passante per**

$(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$ , se si considera  $y = f(x)$ .

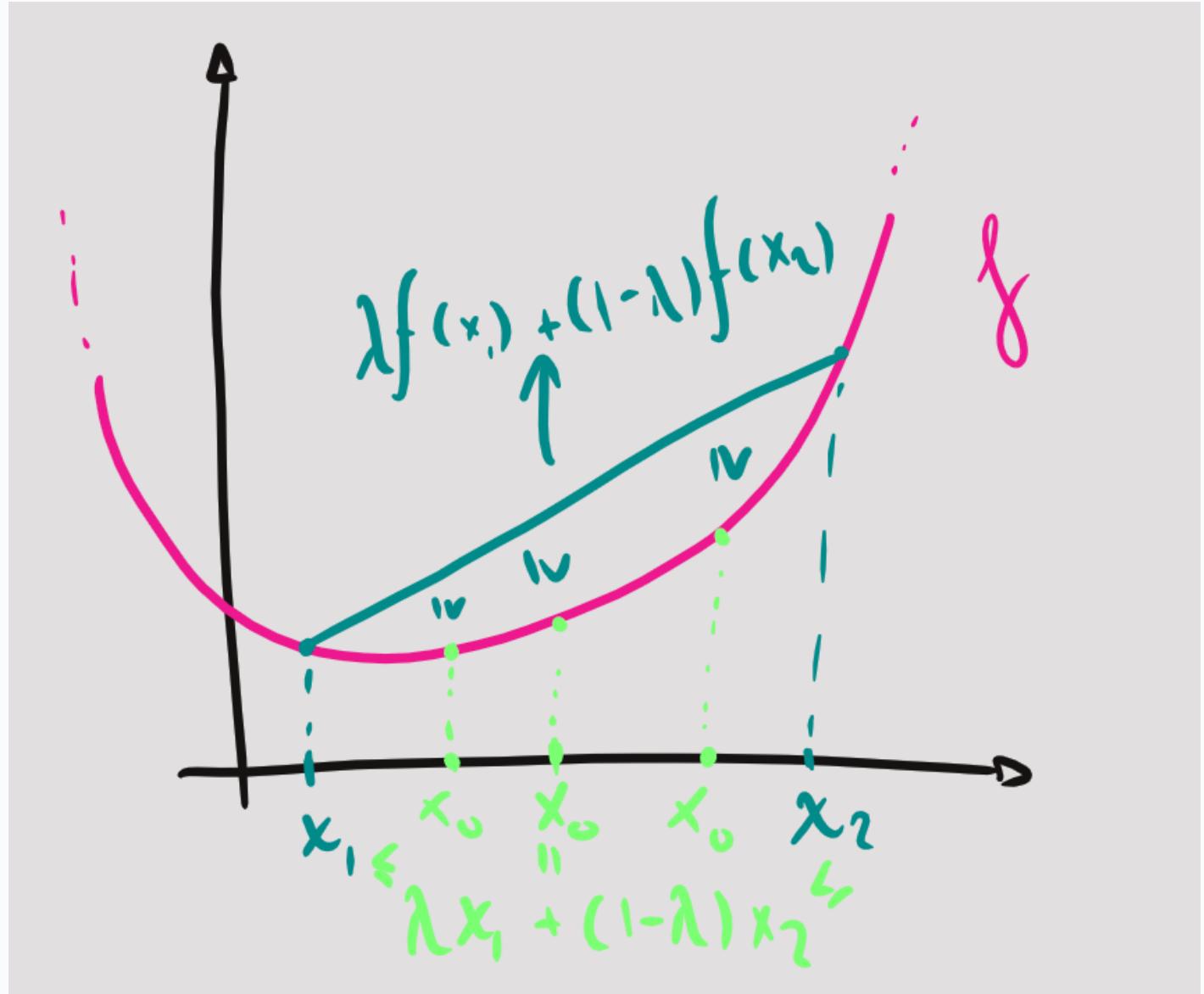
Invece a sinistra notiamo che  $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$  non è altro che una **combinazione lineare** di  $x_1, x_2$  (Definizione 1 (Definizione 1.1. (combinazione lineare))).

Inoltre dato che  $\lambda \in [0, 1]$ , si deduce che questa combinazione lineare vive in

$$x_1 \leq \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \leq x_2$$

Pertanto la disegualanza di **definizione** vuol semplicemente dire che  $f$  è **convessa** se la **retta passante tra**  $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$  sta "**sempre in alto (o ugualmente alto)**" di qualsiasi punto della funzione tra  $x_0 \in [x_1, x_2]$

**FIGURA 1.1.** (*Idea geometrica*)



#### #Osservazione

Osservazione (concavità e convessità simultanea).

Notiamo che una funzione  $f$  è sia **concava** che **convessa** se vale che

$$\begin{aligned} \forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2, \forall \lambda \in [0, 1], \\ \begin{cases} f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \\ f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \end{cases} \\ \Downarrow \\ f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) = \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \end{aligned}$$

Notiamo che il "*risultato*" di questa implicazione è il fatto che  $f$  sia un'*applicazione lineare* in quanto si vede valgono le proprietà di definizione AL (ovvero l'additività e l'omogeneità) ([Definizione 1 \(applicazione lineare da V a V primo\)](#)). Pertanto  $f$  può essere solo una *retta*.

*Nota: questa osservazione è stata svolta con i miei occhi, quindi non fa né parte degli appunti né delle dispense.*

## 2. Collegamento con la derivata seconda

Vedere pagina [Caratterizzazione delle Funzioni Convesse](#)

# Successioni e Sottosuccessioni

## Successione e Sottosuccessione

*Appunto ad-hoc sulle successioni e sulle sottosuccessioni (successioni estratte)*

---

### 1. Successione

#Definizione

Definizione (successione).

Sia  $f$  una funzione del tipo

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow A$$

dove  $\mathbb{N}$  è l'insieme dei numeri naturali ([Struttura dell'insieme dei numeri naturali](#)), la chiamiamo (*tradizionalmente*) come una *successione a valori in A* e la indichiamo con

$$(a_n)_n$$

dove  $f(n) = a_n$ ; ovvero

$$(a_n)_n = (a_0, a_1, \dots, a_n)$$

## Definizione (successione a variabile reale).

Se  $A = \mathbb{R}$ , allora avremmo una *successione a valori in  $\mathbb{R}$* , oppure una *successione reale*.

## #Definizione

## Definizione (successione limitata).

Si definisce una *successione limitata* quando si verifica che

$$\exists M > 0 : \forall n, |a_n| < M$$

## 2. Sottosuccessione (successione estratta)

## #Definizione

## Definizione (successione estratta).

Data una funzione  $j$  *strettamente crescente* che sia anche una successione a valori in  $\mathbb{N}$ , ovvero del tipo

$$j : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}; k \mapsto n_k$$

quindi abbiamo una successione del tipo

$$(n_k)_k = (n_0, n_1, \dots, n_k)$$

Ora sia  $(a_n)_n$  una *successione a valori in  $A$* , con la funzione  $f$ ; ovvero

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow A$$

Ora consideriamo la *composizione* (Definizione 18 (funzione composta))

$$f \circ j : \mathbb{N} \longrightarrow A; k \mapsto n_k \mapsto a_{n_k}$$

Questa la chiamiamo *sotto successione* o *successione estratta* di

$$(a_n)_n$$

e la chiamiamo

$$(a_{n_k})_k$$

## #Osservazione

**Idea.** L'idea di questo concetto consiste nel "**selezionare**" alcuni elementi di una successione e poi di "**ricompattarli**", ottenendo così una nuova successione. Consideriamo ad esempio la successione  $(a_n)_n$ :

$$a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$$

Ora voglio scegliere gli "**indici**"  $0, 2, 3, n$ ; quindi ora ho

$$n_0 = 0, n_1 = 2, n_2 = 3, n_3 = n$$

che va a formare proprio una nuova successione  $(n_k)_k$ . Ora se considero la successione di prima, considerando però solo gli elementi di  $(n_k)_k$ , ottengo la nuova successione

$$a_{n_0} = a_0, a_{n_1} = a_2, a_{n_2} = a_3, a_{n_3} = a_n$$

Ovvero

$$a_0, a_2, a_3, a_n$$

### #Osservazione

Osservazione (la monotonia di una sotto successione è una conseguenza).

Osservo che secondo questa "**costruzione**" di una **successione estratta**, la **monotonia crescente** della "**successione degli indici**"  $j$  è una semplice conseguenza.

## Abstract del Capitolo II

In questo capitolo andremo a studiare i *numeri reali*, le sua struttura fondamentale, in particolare la sua proprietà speciale: l'*assioma di continuità, o di Dedekind*.

A partire da questo assioma ne studieremo le conseguenze, in particolare gli intervalli, insiemi limitati, maggioranti e/o minoranti, estremo superiore e/o inferiore...

Dopodiché si andranno a studiare anche le *funzioni di variabile reale*, ovvero delle funzioni che come "*argomento*" prendono l'insieme dei numeri appena studiati.

## A1. Richiami sui numeri interi e razionali

### Richiami sui Numeri Razionali

*Richiami sui Numeri Razionali (propedeutica per studiare i numeri reali): la costruzione dei numeri interi  $\mathbb{Z}$ ; la costruzione dei numeri razionali  $\mathbb{Q}$ ; l'insufficienza di  $\mathbb{Q}$  per rappresentare tutti i numeri. Dimostrazione dell'incommensurabilità di  $\sqrt{2}$*

---

## 1. La costruzione dei numeri interi

### #Osservazione

Osservazione (la costruzione di  $\mathbb{Z}$  a partire da  $\mathbb{N}$ ).

Osserviamo che a partire dai **numeri naturali**  $\mathbb{N}$  è possibile costruire un altro insieme numerico più **completo** che ci permette di fare altre operazioni (oltre alla somma e moltiplicazione), ovvero i numeri **interi relativi**  $\mathbb{Z}$  (**Zahl**), che viene definita come

$$\mathbb{Z} := \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

in cui ad ogni numero positivo  $z$  corrisponde ad un numero **negativo** per cui ci permette di fare una nuova operazione: ovvero la **sottrazione**  $-$ .

Tuttavia questa non è sufficiente in quanto questa **costruzione** non ci permette di fare un'altra operazione molto importante, ovvero la **divisione**  $\div$ .

## 2. La costruzione dei numeri razionali

### #Osservazione

Osservazione (la costruzione di  $\mathbb{Q}$  a partire da  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ ).

Quindi a partire da  $\mathbb{Z}$  è possibile costruire i numeri razionali  $\mathbb{Q}$  (**Quoziente**), dove un numero  $q \in \mathbb{Q}$  è un quoziente di un numero intero  $\mathbb{Z}$  e di un numero razionale  $\mathbb{N}$ ;

$$\mathbb{Z} := \left\{ \frac{p}{q} \text{ con } p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$$

I numeri razionali quindi ci permettono **non solo** di **contare**, ma anche di **misurare**, dato che possiamo precisamente misurare delle grandezze tramite questi numeri. Tuttavia non posso misurare **tutto**; infatti se voglio descrivere un oggetto

Infatti questo segmento si dice una *grandezza incommensurabile*.

#Teorema

**Teorema** (l'incommensurabilità di  $\sqrt{2}$ ).

Non esistono  $n, k \in \mathbb{N}$  tali che

$$\left(\frac{n}{k}\right)^2 = 2$$

**DIMOSTRAZIONE** del [teorema 2.1](#). ([Teorema 3 \(l'incommensurabilità di  \$\sqrt{2}\$ \)](#))

Qui ragioniamo *per assurdo*; ipotizziamo che la tesi sia vera invece che falsa, poi per trovare un assurdo, una contraddizione.

1. Supponiamo che esistano  $n, k \in \mathbb{N}$  tali che

$$\left(\frac{n}{k}\right)^2 = 2$$

inoltre non è restrittivo supporre che questi  $n, k$  non abbiano fattori in comune (quindi che siano ridotti ai minimi termini).

2. Ora,

$$\begin{aligned} \frac{n^2}{k^2} &= 2 \\ \text{allora } n^2 &= 2k^2 \\ \text{allora } 2 &\mid n^2 \text{ è vera;} \end{aligned}$$

3. Considerando la scomposizione di  $n$  in numeri primi, ovvero

$$n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_n^{k_n}$$

allora se  $n^2$  è divisibile per un numero primo  $p_n$ , allora per forza anche  $n$  è divisibile per lo stesso numero primo, in quanto entrambi vengono moltiplicate per lo stesso  $p_n$ .

4.

allora  $2 \mid n$  è vera;  
 allora  $n = 2m$   
 allora  $\frac{4n^2}{k^2} = 2$   
 allora  $4n^2 = 2k^2$   
 allora  $k^2 = 2n^2$   
 allora  $2 \mid k$  è vera  
 ma allora anche  $2 \mid n$  è vera

5. Quindi sia  $n$  che  $k$  che sono pari, ciò vuol dire che hanno un fattore in comune (ovvero 2); ciò contraddice quello che abbiamo detto all'inizio, ovvero che  $n$  e  $k$  sono ridotti ai minimi termini. Di conseguenza non è possibile che esistano  $n$  e  $k$ . ■

**CONCLUSIONE.** Quindi i numeri razionali  $\mathbb{Q}$  non sono sufficienti per misurare la diagonale di un quadrato; infatti è impossibile definire un  $x \in \mathbb{Q}$  tale che  $x^2 = 2$ .

## A2. Assiomi AMDOS dei numeri reali

### Assiomi dei Numeri Reali

*Assiomi dei numeri reali  $\mathbb{R}$ ; Il gruppo abeliano  $(\mathbb{R}, +)$ , il campo  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ; assiomi fondamentali di  $\mathbb{R}$ ; l'assioma caratterizzante di  $\mathbb{R}$  (di Dedekind)*

## 1. Preambolo

#Osservazione

Osservazione (la necessità di costruire un nuovo insieme di numeri).

Dopo aver dedotto che i numeri **razionali** non sono abbastanza "**estesi**" per poter rappresentare alcuni numeri (come la misura di  $\sqrt{2}$ ), costruiamo i **numeri reali**  $\mathbb{R}$  con degli **assiomi** e **definendo** delle **operazioni** di **addizione** e **moltiplicazione**. Nominiamo questi assiomi come **A), M), O) e S)**.

#Definizione

Definizione (il campo dei reali).

$$(\mathbb{R}, +, \cdot)$$

ovvero un insieme dotato di due operazioni che hanno le proprietà elencate qua sotto.

## 2. Assiomi A)

#Assioma

*Esiste un insieme  $\mathbb{R}$  in cui viene definita la somma*

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; (x, y) \mapsto x + y$$

*per cui valgono le seguenti proprietà.*

**A1)** La proprietà associativa:  $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ ,

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

**A2)** La proprietà commutativa:  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ ,

$$x + y = y + x$$

**A3)** L'esistenza dell'elemento neutro 0:  $\exists 0$  t.c.

$$x + 0 = 0 + x = x$$

**A4)** L'esistenza dell'elemento opposto:  $\forall x \in \mathbb{R}, \exists x' \in \mathbb{R}$  t.c.

$$x + x' = x' + x = 0$$

*Inoltre si dice che  $(\mathbb{R}, +)$  è un gruppo abeliano (dal matematico norvegese Abel).*

## 3. Assiomi M)

#Assioma

*E' definita in  $\mathbb{R}$  un'operazione di prodotto o moltiplicazione per cui:*

**M1)** Proprietà associativa:  $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ ,

$$(x) \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot (z)$$

**M2)** L'esistenza dell'elemento neutro 1:  $\exists 1 (\neq 0)$  t.c.

$$\forall x, x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$$

**M3)** L'esistenza dell'elemento opposto:  $\forall x \in \mathbb{R}, \exists \tilde{x}$  t.c.

$$x \cdot \tilde{x} = \tilde{x} \cdot x = 1$$

$$x \cdot y = y \cdot x$$

## 4. Assioma D)

#Axioma

E' possibile individuare una proprietà che collega le operazioni di somma + e prodotto .

D1) Proprietà distributiva:  $\forall x, y, z,$

$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$$

## 5. Assiomi O)

#Axioma

In  $\mathbb{R}$  è definita una relazione d'ordine totale che chiamo  $\leq$  e valgono le seguenti

O1) Compatibilità di  $\leq$  dell'ordinamento con la somma:  $\forall x, y, z,$

$$x \leq y \implies x + z \leq y + z$$

O2) Compatibilità di  $\leq$  dell'ordinamento con il prodotto:  $\forall x, y, z,$

$$x \leq y \wedge 0 \leq z \implies x \cdot z \leq y \cdot z$$

## 6. Axioma S) (di Dedekind o di separazione)

#Osservazione

Osservazione (la necessità di trovare un "assioma speciale" per i reali).

Notiamo che avendo definito

$$(\mathbb{R}, +, \cdot, \geq)$$

con gli assiomi A), M), D) e O) questi non possono bastare, in quanto i numeri razionali  $\mathbb{Q}$  godono delle stesse proprietà; infatti bisogna definire delle regole speciali, in particolare l'assioma di Dedekind, oppure nota come l'assioma di separazione.

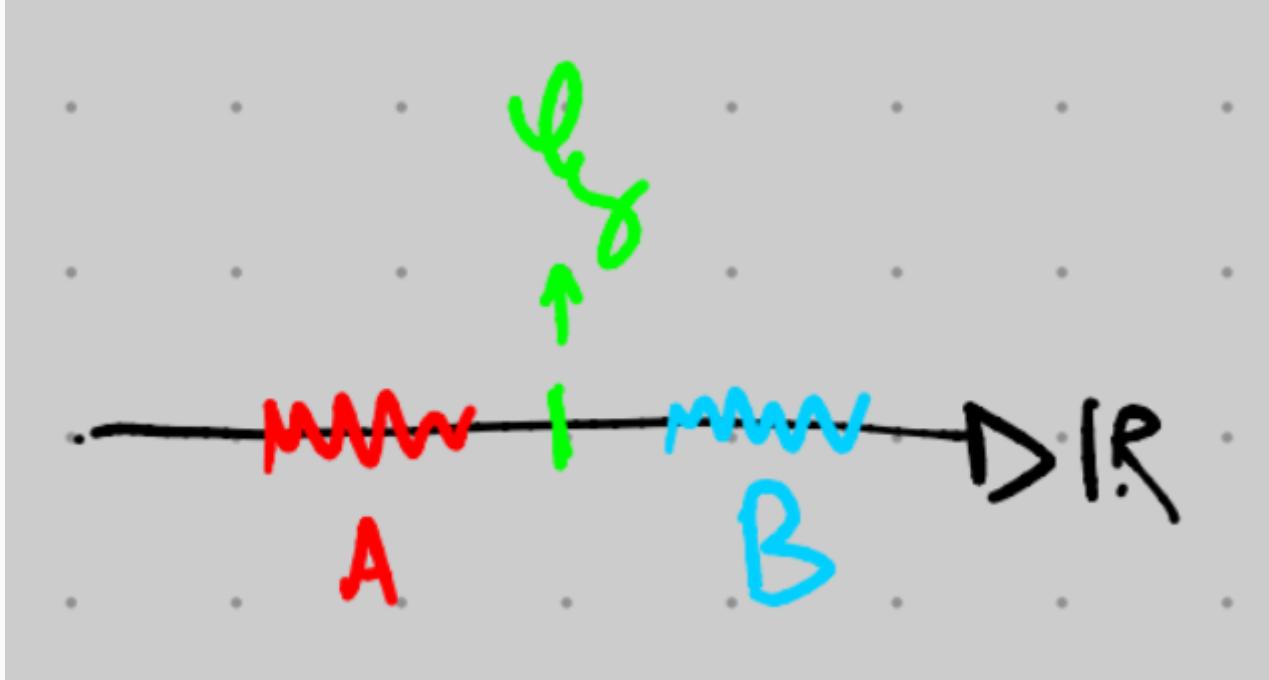
#Axioma

S) Siano  $A, B \subseteq \mathbb{R}; A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset$  ( $A$  e  $B$  sono non-vuoti),

- supponendo che  $\forall a \in A, \forall b \in B, a \leq b$
- allora per l'assioma S)

$$\exists \xi \in \mathbb{R} \mid \forall a \in A, \forall b \in B, a \leq \xi \leq b$$

Ovvero, graficamente, la figura S.1..



## #Osservazione

Osservazione (Dedekind non vale per  $\mathbb{Q}$ ).

Questa proprietà non vale per  $\mathbb{Q}$ , infatti se definiamo gli insiemi

$$A = \{\forall a \in \mathbb{Q} : a^2 < 2\}$$
$$B = \{\forall b \in \mathbb{Q} : a^2 > 2\}$$

notiamo che tra  $A$  e  $B$  c'è un *buco* che non potrà mai essere colmato, in quanto  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ . (dimostrazione più rigorosa sul file di Del Santo)

## B1. Intervalli

### Intervalli

*Definizione di intervalli. Intervalli limitati, aperti, chiusi, inscatolati e dimezzati. Alcuni esempi*

## 1. Intervalli limitati

#Definizione

**Definizione (intervalli limitati).**

Siano  $a, b \in \mathbb{R}$ , con  $a < b$  (ovvero  $a \leq b \wedge a \neq b$ ), allora definiamo le seguenti definizioni degli *intervalli limitati*:

*Intervallo chiuso* compresi gli estremi

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

*Intervallo semichiuso*, escluso l'estremo sinistro

$$]a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$

*Intervallo semichiuso*, escluso l'estremo destro

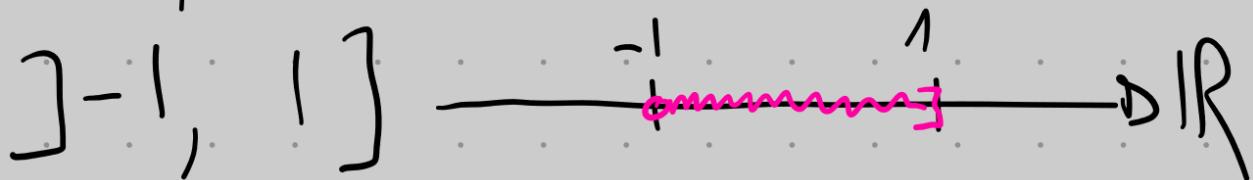
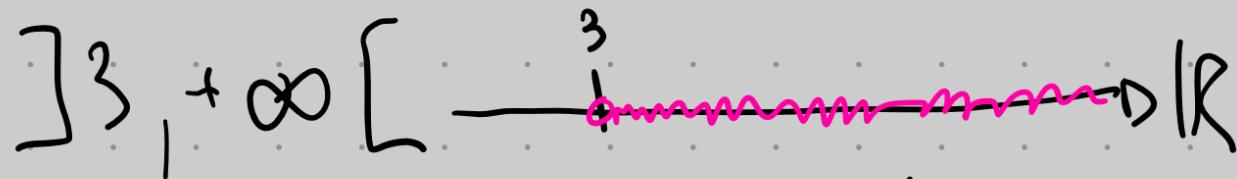
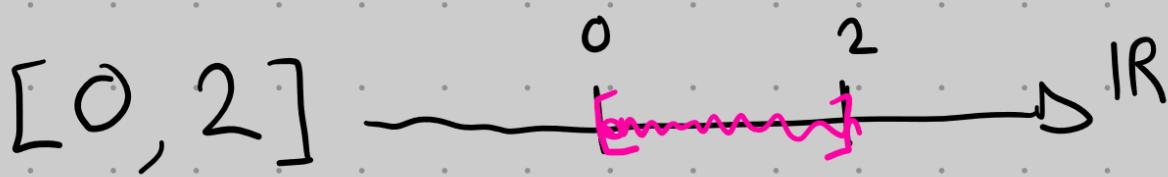
$$[a, b[ := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$$

*Intervallo aperto*, esclusi gli estremi

$$]a, b[ := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

**FIGURA 1.1.** (*Alcuni esempi di intervalli limitati*)

# Alcuni esempi di intervalli



## 2. Intervalli illimitati

#Definizione

Definizione (intervalli illimitati).

Se, invece consideriamo  $a \in \mathbb{R}$ , definiamo allora i seguenti **intervalli illimitati** (o anche **semirette**):

*Intervallo inferiormente illimitato*

$$\begin{aligned} ]-\infty, a] &:= \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\} \\ ]-\infty, a[ &:= \{x \in \mathbb{R} : x < a\} \end{aligned}$$

*Intervallo superiormente illimitato*

$$\begin{aligned} [a, +\infty[ &:= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\} \\ ]a, +\infty[ &:= \{x \in \mathbb{R} : x > a\} \end{aligned}$$

#Osservazione

Osservazione (l'insieme dei reali è l'intervallo illimitato).

Si può definire  $\mathbb{R}$  anche come

$$\mathbb{R} = ]-\infty, +\infty[$$

#Osservazione

Può essere comodo pensare che anche l'insieme con un unico punto  $\{a\}$  è un **intervallo**, e lo definiamo come un **intervallo "degenero"**.

## #Osservazione

Osservazione (l'infinito non è un numero).

Notare che  $-\infty$  e  $+\infty$  **NON** sono numeri reali, bensì dei semplici simboli.

$$-\infty, +\infty \notin \mathbb{R}$$

Se voglio, posso estendere l'insieme dei numeri reali tale che

$$\tilde{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$$

### 3. Successione di intervalli

## #Definizione

Definizione (successione di intervalli chiusi e limitati).

Sia

$$(I_n)_n$$

definita come una **successione** di intervalli **chiusi** e **limitati**.

Allora

$$(I_n)_n = I_0, I_1, \dots, I_n, \dots$$

ove

$$I_i = [a_i, b_i]$$

(quindi è un **intervallo chiuso e limitato**)

### Intervalli inscatolati e dimezzati

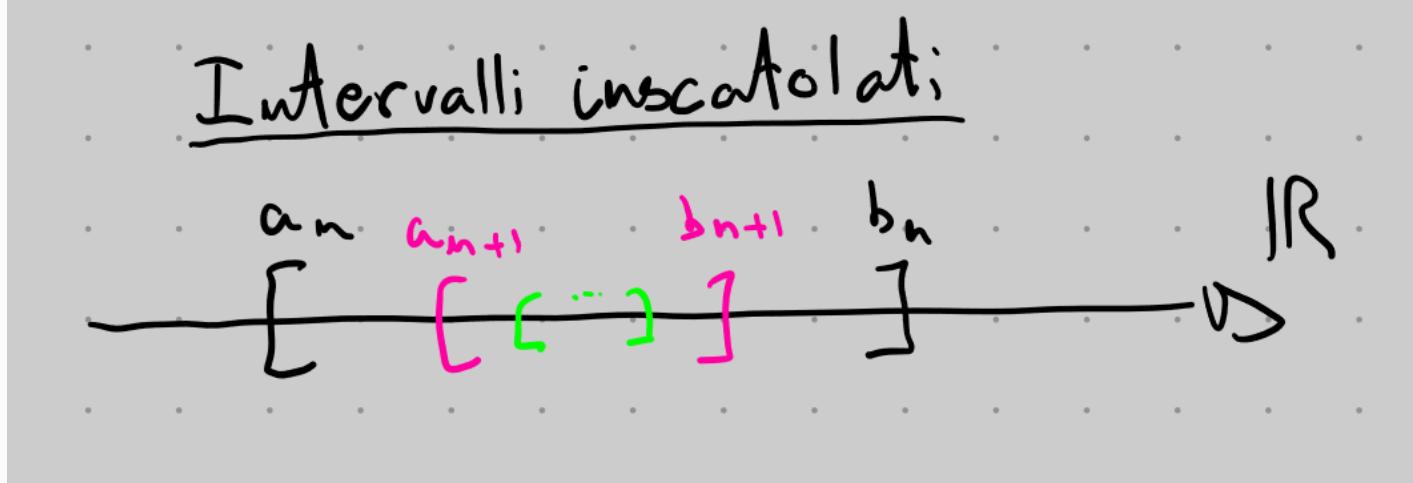
## #Definizione

Definizione (intervalli inscatolati).

$$\forall n, I_{n+1} \subseteq I_n$$

ovvero graficamente la *figura 3.1*.

**FIGURA 3.1.** (*Intervalli inscatolati*)



#### #Definizione

Definizione (intervalli chiusi, inscatolati e dimezzati).

Una *successione di intervalli*  $(I_n)_n$  si dice di *intervalli chiusi, inscatolati e dimezzati* se

$$\forall n, I_{n+1} \subseteq I_n$$

ove il nuovo sottoinsieme ha gli elementi

$$I_{n+1} = [a_n, \frac{a_n + b_n}{2}] \text{ oppure } [\frac{a_n + b_n}{2}, b_n]$$

#### #Osservazione

Osservazione (la lunghezza di un elemento di intervalli chiusi, inscatolati e dimezzati).

Notiamo che se prendiamo un

$$I_n = [a_n, b_n] = [a_{n-1}, \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}]$$

allora la *distanza* tra  $a_n$  e  $b_n$  è

$$a_n - b_n = \frac{2a_{n-1} - a_{n-1} - b_{n-1}}{2} = \frac{a_{n-1} - b_{n-1}}{2}$$

ovvero la "metà della lunghezza del segmento di prima, ovvero  $a_{n-1} - b_{n-1}$ ".

$$a_n - b_n = \frac{a_0 - b_0}{2^n}$$

## B2. Insiemi limitati, maggioranti, estremo superiore

### Insiemi limitati, maggioranti, massimo e teorema dell'estremo superiore

Tutte le definizioni sugli insiemi limitati e illimitati, maggioranti e minoranti, massimi e minimi, e tutte le proprietà.

## 1. Insiemi limitati

#Definizione

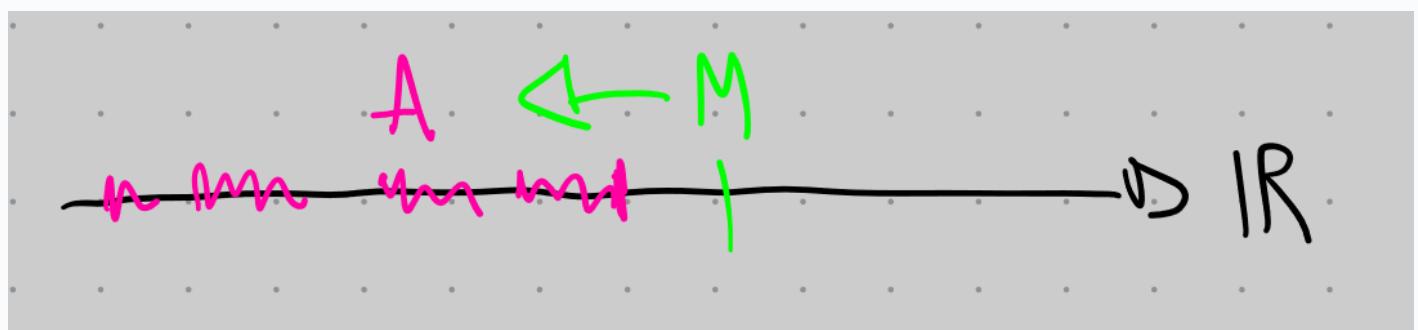
Definizione (insieme limitato superiormente).

Sia  $A \subseteq \mathbb{R}$ ,  $A$  si dice un insieme *limitato superiormente* se

$$\exists M \in \mathbb{R} : \forall a \in A; a \leq M$$

Graficamente, un insieme *limitato superiormente* si rappresenta con la *figura 1.1.*

### FIGURA 1.1.



#Esempio

Esempio (Esempio 1.1.).

Considero  $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 3x + 1 = 0\}$ .

$A$  è *limitato superiormente*, in quanto risolvendo  $A$  otteniamo l'insieme

#Definizione

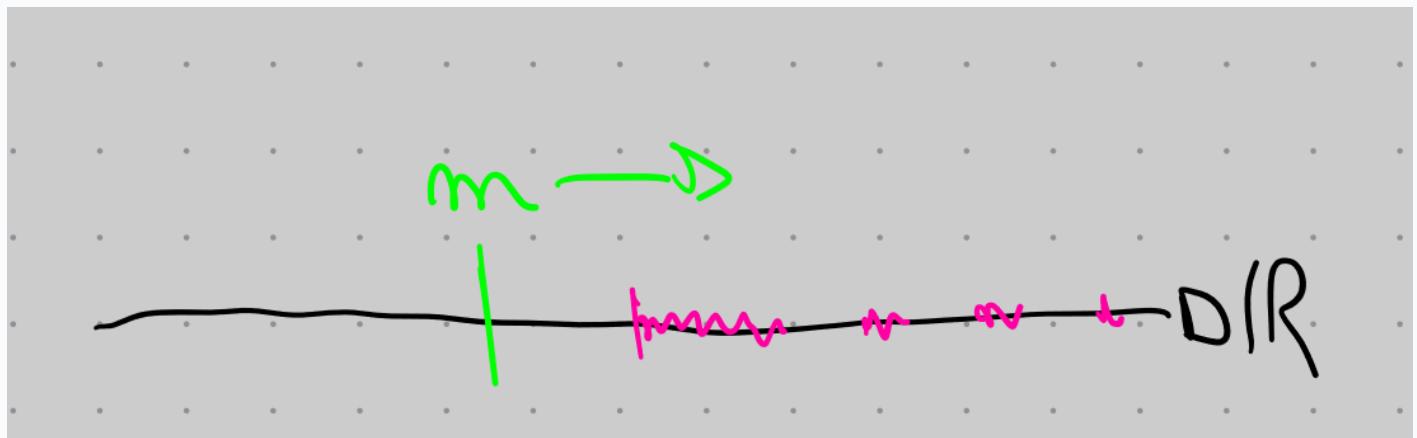
Definizione (insieme limitato inferiormente).

$A \subseteq \mathbb{R}$  si dice un insieme *limitato inferiormente* se

$$\exists m \in \mathbb{R} : \forall a \in A; a \geq m$$

Graficamente la si rappresenta come nella *figura 1.2..*

**FIGURA 1.2.**



#Definizione

Definizione (insieme limitato).

$A \subseteq \mathbb{R}$  si dice *limitato* se è sia limitato *superiormente* che *inferiormente*.

#Esempio

Esempio (Esempio 1.2.).

$[a, b]$  è limitato.

Infatti se si scelgono  $M = b, n = a$  per definizione risulta vero che questo intervallo è *limitato*.

#Proposizione

Proposizione (condizione necessaria e sufficiente dell'insieme limitato).

$A$  è *limitato* se e solo se  $\exists R > 0$  tale che  $A \subseteq [-R, R]$

Da quanto visto in [Connettivi](#), basta dimostrare che entrambe le implicazioni sono vere; ovvero

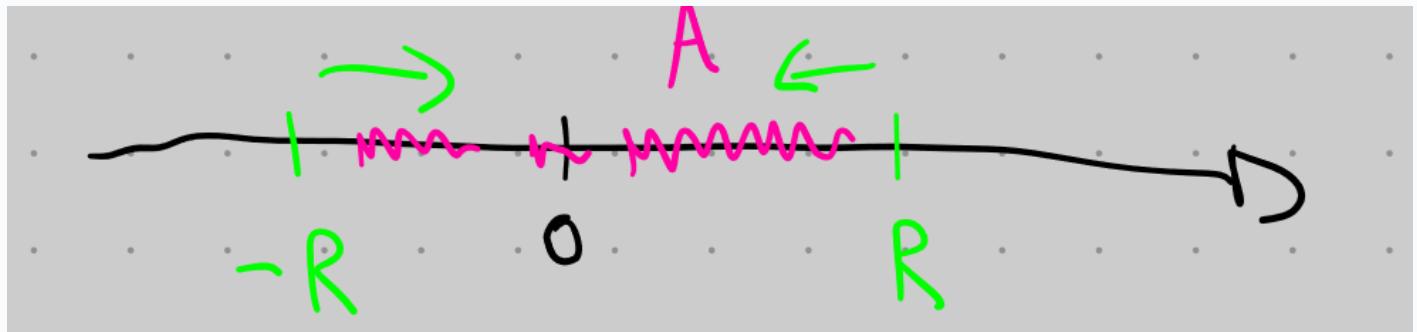
1.  $\exists R : A \subseteq [-R, R] \implies A \text{ è limitato}$

che graficamente rappresenta la *figura 1.3.*; quindi è vera.

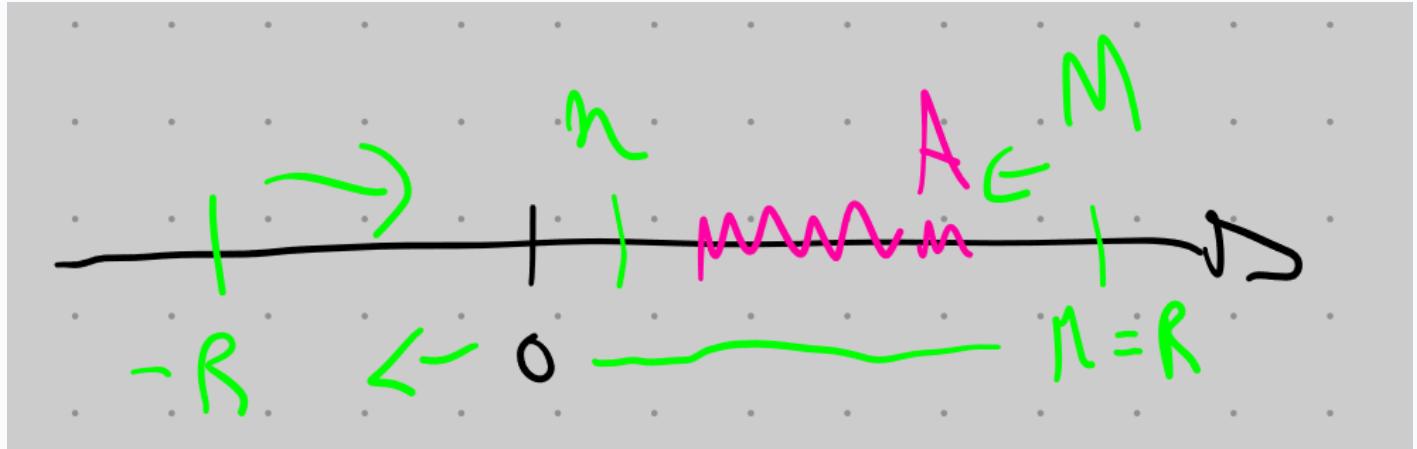
2.  $A \text{ è limitato} \implies \exists R : A \subseteq [-R, R]$

che graficamente rappresenta la *figura 1.4.*; quindi anche questa è vera. ■

**FIGURA 1.3.**



**FIGURA 1.4.**



#Osservazione

Osservazione (insiemi limitati in  $\mathbb{R}^2$ ).

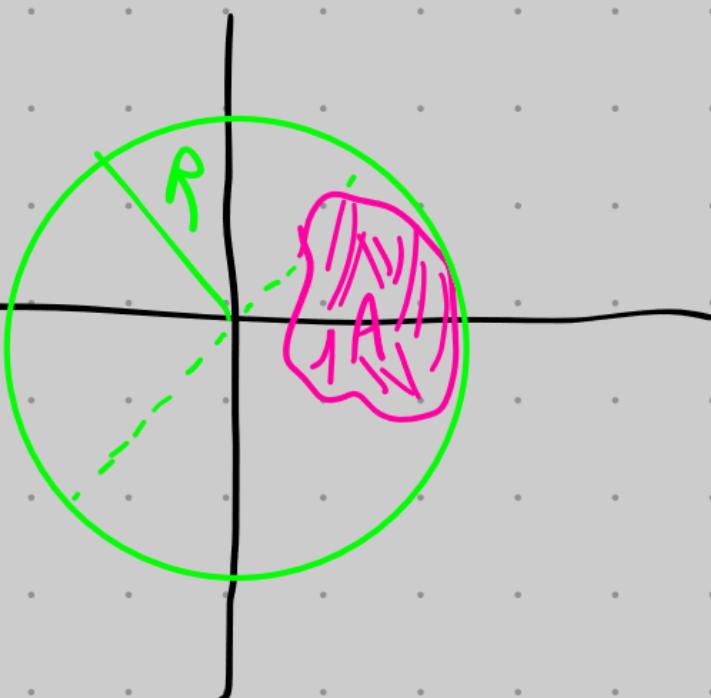
Vorrei trovare un modo per definire gli *insiemi limitati* su un piano  $\pi$ .

E' possibile definirlo tramite il seguente: "*Se riesco a mettere l'insieme A all'interno di una sfera di raggio R, allora esso è limitato.*"

Graficamente si ha la *figura 1.5..*

**FIGURA 1.5.**

# Insiemi limitati in $\mathbb{R}^2$



#Definizione

**Definizione** (insieme superiormente illimitato).

Un insieme  $A$  si dice *superiormente illimitato* quando neghiamo che  $A$  è superiormente limitato; ovvero

$$\neg(\exists M \in \mathbb{R}, \forall a \in A, a \leq M)$$

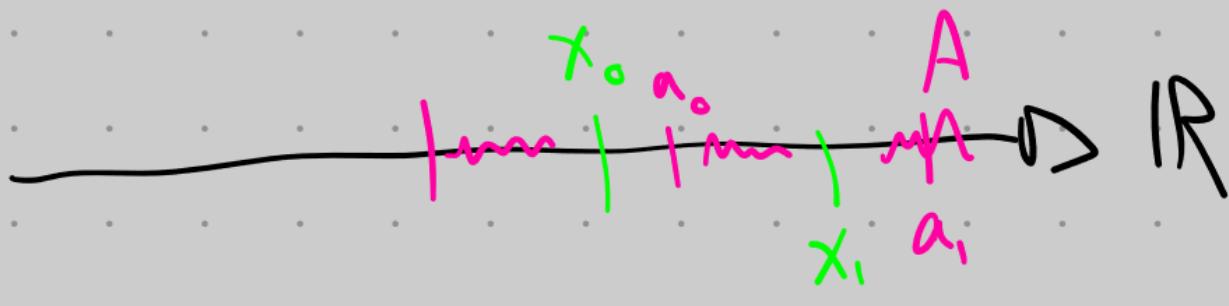
ovvero

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists a \in A : a > M$$

che graficamente vuol dire che ad ogni  $M_n$  che fissiamo, esiste *sempre* un valore  $a_n$  che è più grande di  $M$  (*figura 1.6.*).

**FIGURA 1.6.**

# Insieme Illimitato



Il discorso è analogo per *insiemi inferiormente illimitati* e *insiemi illimitati*.

## 2. Maggioranti, massimi; minoranti e minimi

#Definizione

**Definizione** (maggioranti e minoranti).

Sia  $A \subseteq \mathbb{R}$ ,  $M \in \mathbb{R}$ .

Se  $\forall a \in A, a \leq M$ , (ovvero  $A$  è *limitato inferiormente*) il valore  $M$  si dice un *maggiorante di*  $A$ .

Analogamente, se  $A \subseteq \mathbb{R}$ ,  $m \in \mathbb{R}$ ,  $m$  è *minorante di*  $A$  quando  $\forall a \in A, m \leq a$ .

#Definizione

**Definizione** (massimi e minimi).

Siano  $A \subseteq \mathbb{R}$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ , se:

- $\mu$  è maggiorante di  $A$  e
  - $\mu \in A$
- allora  $\mu$  è il *massimo di*  $A$ .

$$\mu := \begin{cases} \mu \in A \\ \forall a \in A, a \leq \mu \end{cases}$$

Analogamente, se  $A \subseteq \mathbb{R}$  e  $\nu \in \mathbb{R}$ , allora definisco il *minimo di*  $A$ :

$$\nu := \text{minimo di } A = \begin{cases} \nu \in A \\ \forall a \in A, a \geq \nu \end{cases}$$

#Proposizione

Sia  $A$  un insieme *limitato inferiormente*.

Suppongo che esistano due massimi di  $A$ ,  $\mu_1, \mu_2$ ; si avrebbe allora  $\mu_1 = \mu_2$ , in quanto può esistere *solo* il *massimo* di  $A$ .

**DIMOSTRAZIONE** della *proposizione 2.1.* (Proposizione 11 (l'unicità del massimo e/o del minimo))

Per assurdo suppongo che  $\mu_1 \neq \mu_2$ . Per definizione del *massimo*,

$$\begin{cases} \mu_1 \implies \forall a \in A, a \leq \mu_1 \\ \mu_2 \implies \mu_2 \in A \end{cases} \implies \mu_2 \leq \mu_1 \quad (1)$$

e

$$\begin{cases} \mu_1 \implies \mu_1 \in A \\ \mu_2 \implies \forall a \in A, a \leq \mu_2 \end{cases} \implies \mu_1 \leq \mu_2 \quad (2)$$

Quindi combinando le (1) e (2), abbiamo

$$(\mu_2 \leq \mu_1) \wedge (\mu_1 \leq \mu_2) \iff \mu_1 = \mu_2 \blacksquare$$

Il discorso è analogo per il *minimo* di  $A$ .

### #Esempio

Esempio (Esempio 2.1.).

Consideriamo l'*intervallo*

$$A = ]1, 2[$$

ci chiediamo se questo intervallo ha *maggioranti e/o minorante* e se ha *massimo e/o minimo*.

1.  $A$  ha sia *maggioranti* che *minoranti*, infatti possiamo porre  $M = 2$  e  $m = 1$ ; ma possiamo anche porre  $M = 3$  e  $m = 0$ .

Allora *definiamo* l'insieme dei maggioranti di  $A$ ,

$$A^* := \{\text{maggioranti di } A\} = [2, +\infty[$$

e l'insieme dei minoranti di  $A$ ,

$$A_* := \{\text{minoranti di } A\} = ]-\infty, 1]$$

2. Però  $A$  non ha né *massimi* né *minimi*.

Infatti devo provare che se  $x \in A$ , allora  $x$  NON può essere il *massimo di*  $A$ . Tracciando l'intervallo  $A$  e segnando un punto  $x$  all'interno, riesco a trovare

$$x < \frac{x+2}{2} < 2$$

Analogo il discorso per i *minimi*

### 3. Estremi superiori e inferiori

Dall'*esempio 2.1.* abbiamo un problema interessante; ovvero "*gli insiemi limitati hanno sempre massimo e minimo?*".

La risposta è *no*, da quanto visto prima; però è interessante osservare che esiste sempre il "*miglior*" maggiorante e il "*miglior*" minorante. Ora li vediamo.

#Definizione

**Definizione** (estremo superiore e inferiore).

Sia  $A$  superiormente limitato.

Chiamo *l'estremo superiore di A* il *minimo* dell'insieme dei *maggioranti di A* ( $A^*$ ).

Sia  $B$  inferiormente limitato.

Chiamo *l'estremo inferiore di B* il *massimo* dell'insieme dei *minoranti di B* ( $B_*$ ).

### 4. Teoremi sugli estremi superiori (e inferiori)

#Teorema

**Teorema** (dell'esistenza dell'estremo superiore).

Sia  $A \subseteq \mathbb{R}$ ,  $A \neq \emptyset$ , e  $A$  *superiormente limitato*, allora

$$\exists \xi \in \mathbb{R} : \xi \text{ è estremo superiore di } A$$

**DIMOSTRAZIONE** del *teorema 4.1.* (*Teorema 14 (dell'esistenza dell'estremo superiore)*)

Per ipotesi, abbiamo  $A \subseteq \mathbb{R}$  e  $A \neq \emptyset$ .

Sia quindi  $A^* = \{\text{maggioranti di } A\}$ ; allora  $A^* \neq \emptyset$  (in quanto  $A$  è non vuoto).  
e per definizione del maggiorante di  $A$ ,

$$\forall a \in A, \forall b \in A^*, a \leq b$$

Osservo quindi che posso applicare l'*assioma di Dedekind (o di separazione)* per gli insiemi  $A$  e  $A^*$ . Pertanto

$$\exists \xi : \forall a \in A, \forall b \in A^*, a \leq \xi \leq b$$

Quindi, per definizione  $\xi$  è l'*estremo superiore di A*. ■

### #Esercizio

#### Esercizio (Esercizio 4.1.).

Dimostrare che se  $A \neq \emptyset$  e  $A$  è inferiormente limitato, allora

$$\exists \eta \in \mathbb{R} : \eta \text{ è l'estremo inferiore di } A$$

Dato che per ipotesi  $A$  è non vuota ed è inferiormente limitata, allora sicuramente

$$\forall a \in A, \forall b \in A_*, b \leq a$$

per la definizione di minorante. Osserviamo che si può applicare l'assioma *S*); quindi sicuramente

$$\exists \eta \in \mathbb{R} : b \leq \eta \leq a$$

Ovvero  $\eta$  è il massimo di  $A_*$  ed è un minorante di  $A$ . Ovvero *l'estremo inferiore di A*.

### #Teorema

#### Teorema (le proprietà dell'estremo superiore).

Sia  $A \subseteq \mathbb{R}$ ,  $A \neq \emptyset$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

$$\alpha = \sup(A) \iff \begin{cases} \forall a \in A, a \leq \alpha & (1) \\ \forall \varepsilon > 0, \exists \bar{a} \in A : \bar{a} > \alpha - \varepsilon & (2) \end{cases}$$

In parole semplici, la (1) vuol dire che  $\alpha$  è un maggiorante di  $A$ ; la (2) invece vuol dire che per qualsiasi valore  $\varepsilon$  positivo, allora  $\alpha - \varepsilon$  non è maggiorante di  $A$ .

#### DIMOSTRAZIONE del teorema 4.2. (Teorema 16 (le proprietà dell'estremo superiore))

Sia  $\alpha = \sup(A)$ , cioè se è il *minimo dei maggioranti* di  $A$ .

Ma allora innanzitutto  $\alpha$  è un *maggiorante di A* (1)

Ma quindi  $\alpha$  è il *minimo dei maggioranti di A*; quindi se sottraggo ad  $A$  qualsiasi valore positivo, non è più un maggiorante di  $A$ . Pertanto scrivo

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \neg(\forall a \in A, a \leq \alpha - \varepsilon) \\ \exists a \in A : a > \alpha - \varepsilon \end{aligned}$$

ovvero la (2). ■

#Teorema

**Teorema** (le proprietà dell'estremo inferiore).

Sia  $A \subseteq \mathbb{R}$ ,  $A \neq \emptyset$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ .

$$\beta = \inf(A) \iff \begin{cases} \forall a \in A, a \geq \beta & (1) \\ \forall \varepsilon > 0, \exists \bar{a} \in A : \bar{a} > a + \varepsilon & (2) \end{cases}$$

## 5. Esempio generale

#Esempio

**Esempio** (Esempio 5.1.).

Considero

$$A = \{\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, 1 - \frac{1}{n}\}$$

Voglio trovare le seguenti:  $\sup(A)$ ,  $\inf(A)$ ,  $\max(A)$ ,  $\min(A)$ .

- Il primo passo è quello di fare un disegno che rappresenta per poter "visualizzare" l'insieme  $A$ . (*figura 5.1.*)

Quindi vediamo che

$$A = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots, \frac{n-1}{n}\}$$

- $A$  è quindi limitato, da quanto si può evincere dal disegno; infatti scegliamo  $m = 0$ ,  $M = 1$ .
- Siccome  $A \neq \emptyset$ , per il *teorema 4.1.* (o *esercizio 4.1.* per esattezza), posso trovare  $\inf A$  e  $\min A$ ;

$$\min(A) = \inf(A) = 0$$

In quanto, per il *teorema 4.2.*

$$\begin{cases} 0 \leq 1 - \frac{1}{n}, \forall n \\ \forall \varepsilon > 0, x + \varepsilon \text{ non è minorante di } A \end{cases}$$

$$\forall n, n - 1 < n \implies \forall n, \frac{n-1}{n} < 1 \iff \forall n, 1 - \frac{1}{n} < 1$$

In particolare si verifica che è l'*estremo superiore*.

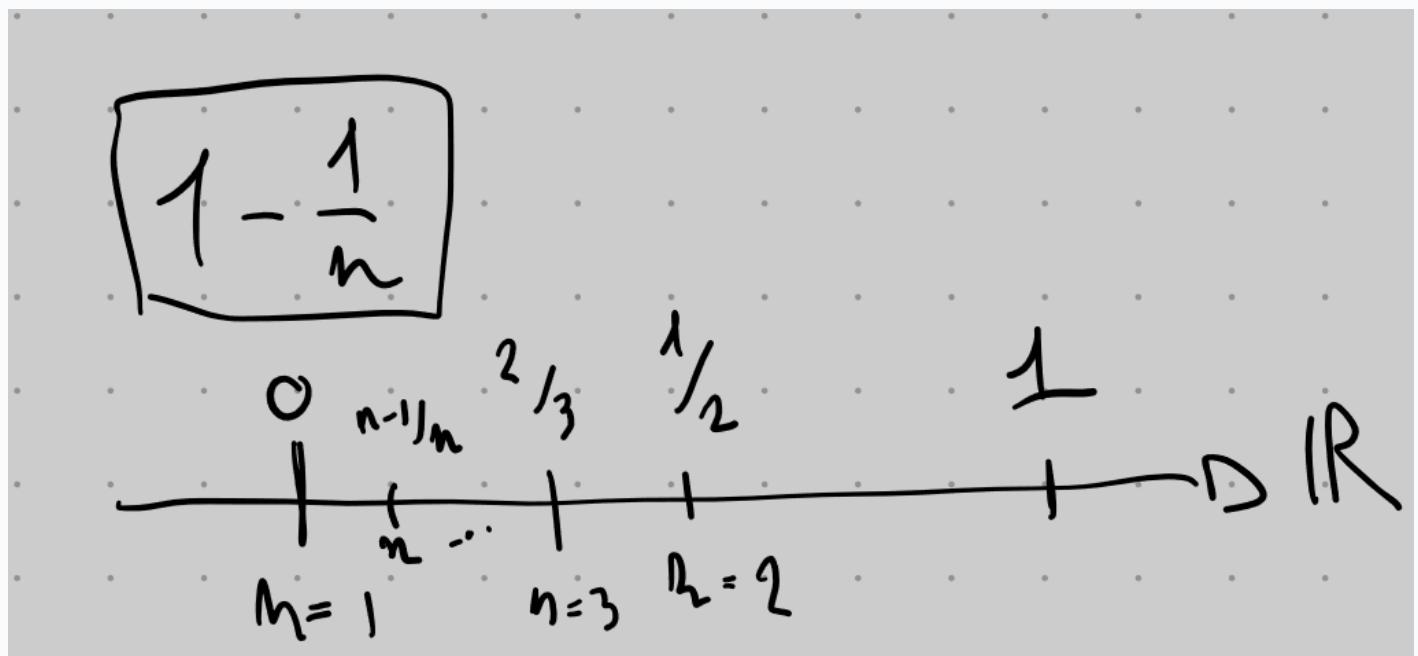
Però se si sceglie  $\alpha < 1$ , sicuramente si verifica

$$\exists n : \alpha < 1 - \frac{1}{n} < 1$$

ovvero per qualunque  $a < 1$  si scelga, esiste un  $n$  abbastanza grande da poter superare  $\alpha$ .

4. Quindi  $\sup(A) = 1$  e non esiste  $\max(A)$ .

### FIGURA 5.1.



#### #Osservazione

Osservazione (l'esistenza del massimo implica l'esistenza dell'estremo superiore).

Se un insieme ha un *minimo* min (o *massimo* max), allora tale valore è l'*estremo inferiore* inf (o *estremo superiore* sup). Però il contrario non deve necessariamente valere, come visto sopra.

## B3. Conseguenze dell'esistenza dell'estremo superiore

### Conseguenze dell'esistenza dell'estremo superiore

## 0. Preambolo

Osservando **Insiemi limitati, maggioranti, massimo e teorema dell'estremo superiore**, notiamo che per qualunque insieme **superiormente limitato** deve esistere un **estremo superiore**. Da questo discendono a cascata una serie di proprietà (o teoremi) importanti.

Richiamiamo dunque il seguente teorema:

#Richiamo

**Teorema (Esistenza di sup.).**

Sia  $A \subseteq \mathbb{R}$ ,  $A \neq \emptyset$ , e  $A$  **superiormente limitato**.

Allora

$$\exists \xi \in \mathbb{R} : \xi \text{ è estremo superiore di } A; \xi = \sup A$$

## 1. $\mathbb{N}$ è superiormente illimitato

#Teorema

**Teorema ( $\mathbb{N}$  è superiormente illimitato.).**

$\mathbb{N}$  è superiormente illimitato. Ovvero **non è superiormente limitato**.

Infatti nei numeri reali  $\mathbb{R}$  possiamo trovare i numeri naturali  $\mathbb{N}$ .

#Dimostrazione

**DIMOSTRAZIONE** del **teorema 1.1. (Teorema 2 ( $\mathbb{N}$  è superiormente illimitato.))**

Per assurdo suppongo che esista un  $M \in \mathbb{R}$  maggiorante di  $\mathbb{N}$  tale che

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \leq M$$

Quindi  $\mathbb{N}$  è sia non vuoto che superiormente limitato. Da ciò (secondo il teorema dell'esistenza dell'estremo superiore) discende che esiste il superiore estremo  $\xi$ :

$$\exists \xi \in \mathbb{R} : \xi = \sup(\mathbb{N})$$

$$\exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \bar{n} > \xi - 1$$

Ma allora

$$\bar{n} + 1 > \xi = \sup(\mathbb{N})$$

il che è assurdo in quanto si troverebbe un numero che supera l'estremo superiore. ■

## 2. Proprietà di Archimede; Archimedicità di $\mathbb{R}$

#Teorema

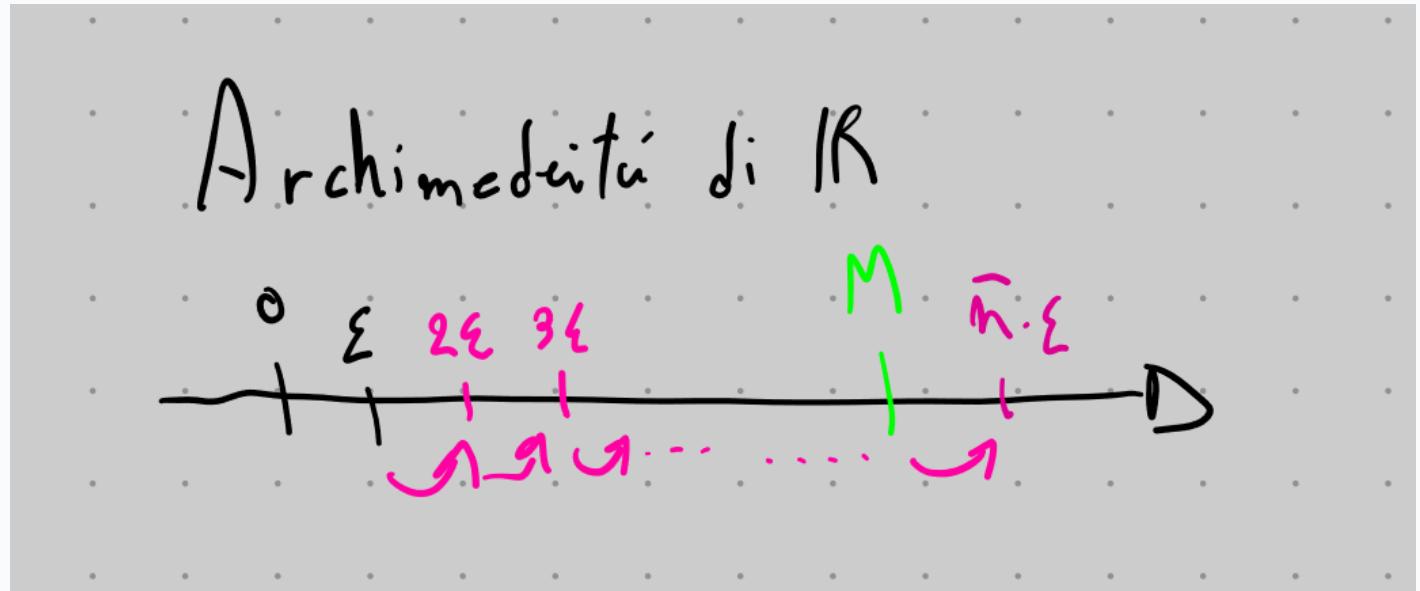
**Teorema** (Archimedicità di  $\mathbb{R}$ ).

Siano  $\varepsilon, M \in \mathbb{R}$  ove  $\varepsilon > 0, M > 0$  (l'idea sarebbe che  $\varepsilon$  è un numero arbitrariamente piccolo,  $M$  invece un numero arbitrariamente grande), allora vale la seguente:

$$\exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \bar{n} \cdot \varepsilon > M$$

Ovvero prendendo un piccolo arbitrariamente piccolo  $\varepsilon$  è possibile farlo sommare  $\bar{n}$  volte e superare il numero arbitrariamente grande  $M$ .

**FIGURA 2.1.** (Rappresentazione grafica della proprietà di Archimede)



#Dimostrazione

**DIMOSTRAZIONE** del teorema 2.1. (Teorema 3 (Archimedicità di  $\mathbb{R}$ ))

Suppongo (per assurdo) che questo teorema non è vero; ovvero negandolo, abbiamo

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \cdot \varepsilon < M$$

ovvero non saremo mai in grado di superare  $M$ .

Allora definendo  $E$  l'insieme di tutti i numeri "ottenuti" sommando  $\varepsilon$  a se stesso  $n$  volte,

$$E = \{\forall n \in \mathbb{N}, n \cdot \varepsilon\}$$

Sia allora

$$\xi = \sup E$$

Applico la seconda proprietà dell'*estremo superiore*  $\xi$ , con  $\varepsilon$  quello inserito nella ipotesi, ovvero

$$\exists \bar{n} : \bar{n} \cdot \varepsilon > \xi - \varepsilon$$

ma allora consegue che

$$\varepsilon(1 + \bar{n}) > \xi$$

che implicherebbe l'esistenza di un numero moltiplicato per  $\varepsilon$  che supera  $\xi = \sup E$ , il che è un assurdo. ■

## $\frac{1}{n}$ diventa piccolo quanto si vuole

#Corollario

**Corollario** ( $\frac{1}{n}$  diventa piccolo.).

Sia  $\varepsilon > 0$  (un numero piccolo).

Allora

$$\exists \bar{n} \in \mathbb{N} : 0 < \frac{1}{\bar{n}} < \varepsilon$$

ovvero prendendo un numero arbitrariamente *piccolo*, deve esistere un  $\frac{1}{n}$  che sarà ancora più *piccolo* del numero piccolo scelto.

#Dimostrazione

**DIMOSTRAZIONE** del *corollario 2.1. (Corollario 4 ( $\frac{1}{n}$  diventa piccolo.))*

Considero *la proprietà di Archimede* (*Teorema 3 (Archimedicità di  $\mathbb{R}$ )*) ove fisso  $\varepsilon > 0$  e  $M = 1$ .

Pertanto,

$$\exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \varepsilon \cdot \bar{n} > 1 (> 0)$$

Ora, dividendo per  $\bar{n}$  da ambo le parti

$$\varepsilon > \frac{1}{\bar{n}} > 0 \blacksquare$$

## 3. Densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$

#Teorema

Si dice che  $\mathbb{Q}$  è **denso** in  $\mathbb{R}$ , ovvero siano  $a, b \in \mathbb{R}$  con  $a < b$ , allora esiste  $q \in \mathbb{Q}$  tale che

$$a < q < b$$

quindi tra due numeri reali  $a, b$  possiamo sempre trovarci un numero razionale.

#### #Dimostrazione

#### DIMOSTRAZIONE del **teorema 3.1.** (Teorema 5 (Densità dei razionali nei reali.))

Per la dimostrazione tratteremo di tre casi distinti; ovvero

1. Quando  $a < 0 < b$  non c'è nulla da dimostrare, in quanto abbiamo già  $q = 0$ .
2. Quando  $a < b < 0$  allora possiamo invertire i segni, ottenendo la situazione nella **figura 3.1.**; quindi  $q = -\frac{k}{n}$ , che troveremo, va bene.
3. Quando  $0 < a < b$ , l'unico caso da trattare:

Innanzitutto chiamo la distanza tra i due punti  $\varepsilon = b - a$  (e per forza dev'essere maggiore di 0, in quanto  $b > a > 0$ ).

Dopodiché, usando il **teorema 3.1.** (Teorema 5 (Densità dei razionali nei reali.)), abbiamo che

$$0 < \frac{1}{n} < \varepsilon = b - a$$

Ora, per il **principio di Archimede** (Teorema 3 (Archimedietà di  $\mathbb{R}$ )), abbiamo (con  $\varepsilon = \frac{1}{n}$  e  $M = a$ ) che

$$\exists k : \frac{k}{n} > a$$

Quindi, aggiungendo  $a$  da tutte le parti e considerando l'ultimo punto ho,

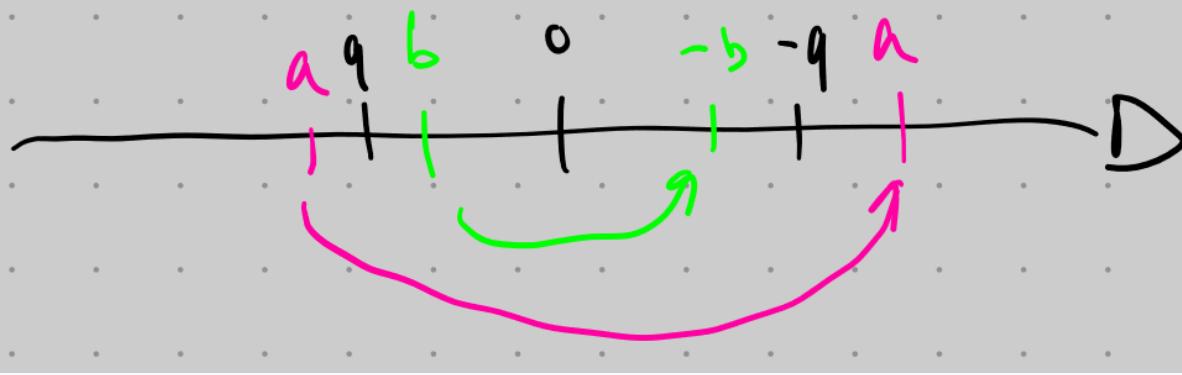
$$a < \frac{k}{n} < b$$

e sicuramente so che non può essere che  $\frac{k}{n} > b$  in quanto  $\frac{1}{n} < b - a$ . (ovvero il salto per arrivare a  $b$  sarebbe troppo "**grande**")

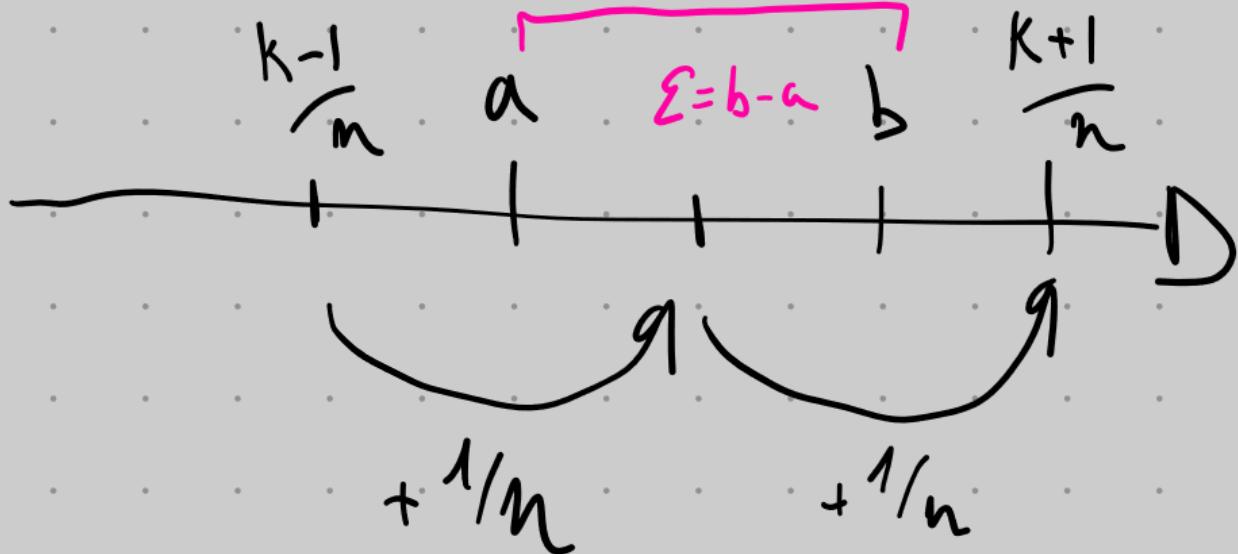
Graficamente, la situazione è descritta nella **figura 3.2..** ■

#### FIGURA 3.1.

# Derivata di $Q$ in $\mathbb{R}$



**FIGURA 3.2.**



## 4. Teorema di Cantor

Considerando gli **intervalli chiusi, limitati, inscatolati e dimezzati**, abbiamo il seguente teorema.

### Forma debole

#Teorema

**Teorema** (Teorema di Cantor, forma debole.).

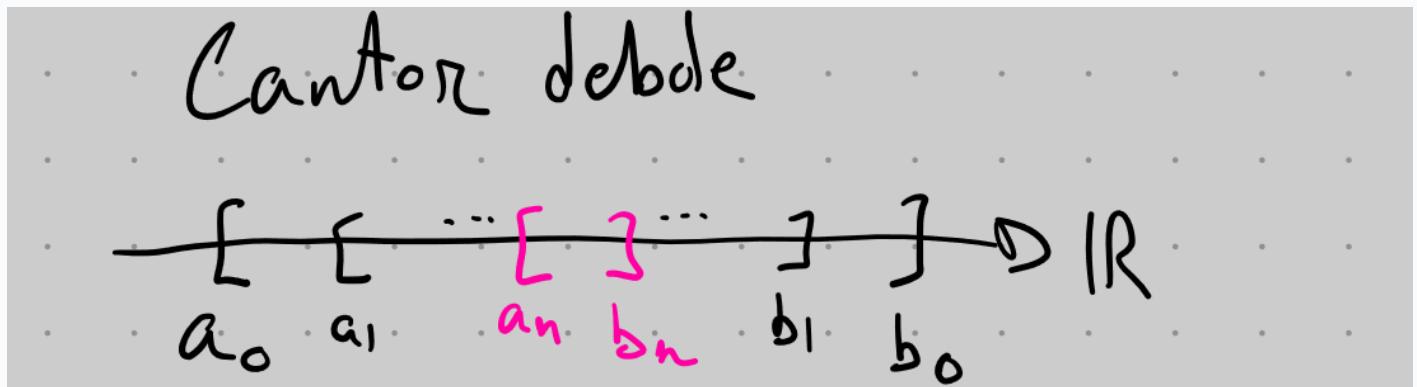
Sia  $(I_n)_n$  una successione di intervalli **chiusi, limitati e inscatolati**; allora l'intersezione di tutti gli intervalli è non-vuota.

$$\bigcap_n I_n \neq \emptyset$$

Osservazione (la rappresentazione degli intervalli di Cantor).

Tutti gli intervalli si rappresentano graficamente come si fa nella [figura 4.1.](#)

**FIGURA 4.1.** ([Osservazione 4.1.](#))



Osservazione (il tipo degli intervalli scelti è una condizione necessaria).

Notiamo che il fatto che gli intervalli **debbono essere chiusi** è una condizione necessaria al [teorema 4.1.](#) ([Teorema 6 \(Teorema di Cantor, forma debole.\)](#)); infatti troviamo un [controesempio](#) per cui non vale il [teorema debole di Cantor](#) quando consideriamo insiemi **aperti** o **illimitati**.

**Esempio** ([Esempio 4.1.](#)).

Consideriamo gli intervalli

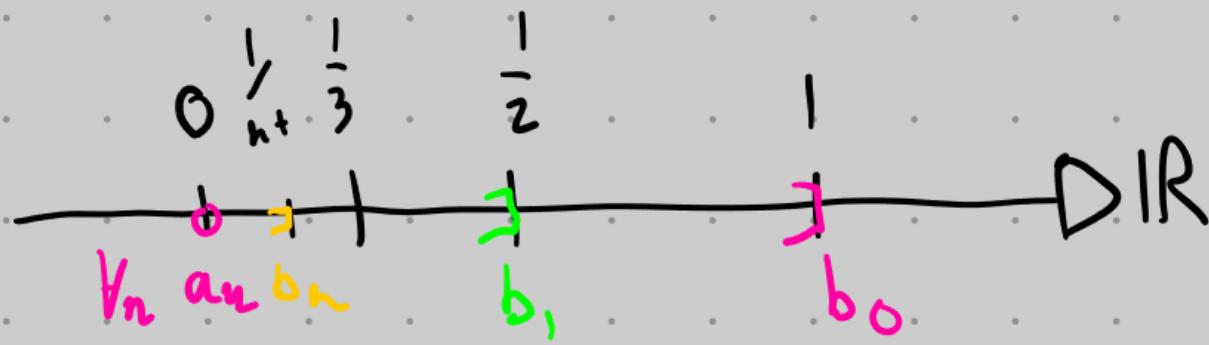
$$I_0 = ]0, 1]; I_1 = ]0, \frac{1}{2}]; \dots; I_n = ]0, \frac{1}{n+1}]$$

Che graficamente viene rappresentato nella [figura 4.2.](#)

Notiamo che l'intersezione di tutti gli intervalli in questo caso viene  $\emptyset$ ;

$$\bigcap_n I_n = \emptyset$$

**FIGURA 4.2.** ([Esempio 4.1.](#))



### DIMOSTRAZIONE dell'esempio 4.1. (Esempio 9 (Esempio 4.1.))

Consideriamo i seguenti due casi:

1. Se  $x \leq 0$ , allora  $x$  automaticamente non sta all'interno di nessun intervallo  $I_n$ .
2. Se  $x > 0$ , allora per la *proprietà di Archimede* (Teorema 3 (Archimedicità di  $\mathbb{R}$ ))

$$\exists n \in \mathbb{N} : x > \frac{1}{n+1} > 0$$

allora  $x$  sta al dì fuori dell'intervallo

$$x \notin ]0, \frac{1}{n+1}]$$

Pertanto non ci sono elementi comuni, rendendo l'intersezione di tutti gli intervalli l'insieme vuoto  $\emptyset$ .

#Esempio

### Esempio (Esempio 4.2.).

Consideriamo ora degli intervalli *illimitati* (ovvero *non limitati*); di nuovo il teorema non vale.

Ho

$$I_n = [n, +\infty[$$

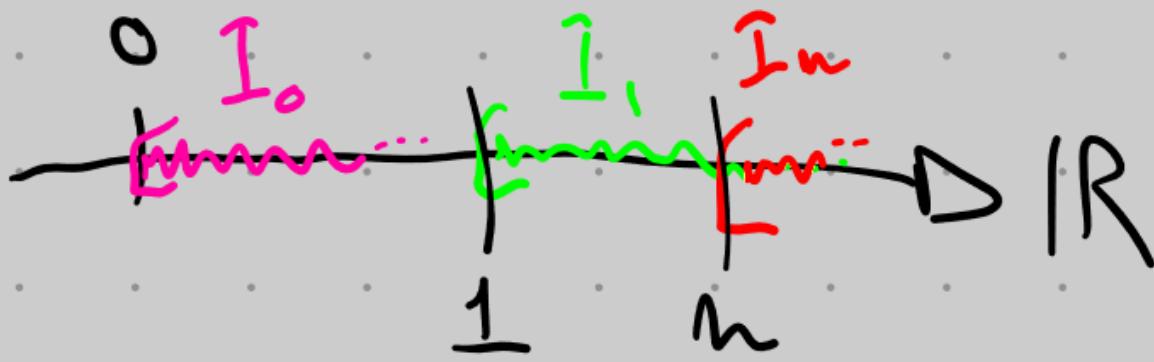
Che graficamente viene rappresentato mediante la *figura 4.3*.

Supponiamo di scegliere un punto  $x$  nell'intorno  $I_n$  (ovvero  $x \geq n$ ); allora per la *proprietà di Archimede* (Teorema 3 (Archimedicità di  $\mathbb{R}$ )) esisterà un intorno  $I_{n+1}$  che lo supera.

Quindi se ad ogni punto  $x \geq 0$  fissiamo un intorno  $I_x$  vi è sempre un intorno  $I_k$  che supera quel punto fissato; pertanto l'intersezione di tutti gli insiemi è  $\emptyset$ .

$$\bigcap_n I_n = \emptyset$$

**FIGURA 4.3. (Esempio 4.2.)**



#Dimostrazione

**DIMOSTRAZIONE** del **teorema di Cantor, forma debole** (Teorema 6 (Teorema di Cantor, forma debole.))

Consideriamo gli insiemi  $A$  come gli "estremi sinistri" e  $B$  come gli "estremi destri".

$$\begin{aligned} A &= \{a_n, n \in \mathbb{N}\} \\ B &= \{b_n, n \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

Inoltre ho

$$\begin{aligned} \forall n, \forall m; a_n &\leq b_m \\ b_m &\geq a_n \end{aligned}$$

Se si vuole verificare la "proprietà" appena enunciata, allora si può considerare due casi:

1.  $n \leq m$ ; si avrebbe  $[a_m, b_m] \subseteq [a_n, b_n]$ ; che graficamente equivale alla **figura 4.4.**; pertanto è intuitivo che  $b_m \geq a_n$ .
2.  $n > m$ ; si avrebbe in questo caso  $[a_n, b_n] \subseteq [a_m, b_m]$  che graficamente equivale alla **figura 4.5.**; stesso discorso di prima, è intuitivo che  $b_m \geq a_n$ .

Ora chiamo  $\alpha = \sup A$ , il quale è garantito in quanto  $A$  è **limitato superiormente** (infatti abbiamo dalla proprietà appena enunciata abbiamo che  $b_m$  è il **maggiorante** di  $a_n$ )  
Dato che abbiamo il **minorante** dei **maggioranti di  $A$**  (ovvero  $\alpha$ ), da qui segue che  $B$  è **inferiormente limitato**. (oppure dato che  $a_n \leq b_m \iff b_m \geq a_n$ )

Allora chiamo  $\beta = \inf B$  e ho

$$\beta \geq \alpha$$

Graficamente ho la **figura 4.6..**

Io ho quindi

$$[\alpha, \beta] \subseteq [a_n, b_n], \forall n$$

$$[\alpha, \beta] \subseteq \bigcap_n I_n \implies \bigcap_n I_n \neq \emptyset$$

Anzi, sapendo dalla **seconda proprietà degli estremi superiori (o estremi inferiori)** abbiamo che se scegliamo un  $x = \alpha - \varepsilon$  (per un  $\varepsilon > 0$ ), allora esiste un  $a_n$  tale che  $a_n > x$ ; di conseguenza  $x$  sta al di fuori dell'intervallo  $[a_n, b_n]$ ; analogamente se scegliamo un  $y = \beta + \eta$  (per un  $\eta > 0$ ), allora esiste un  $b_n$  tale che  $y > b_n$ .

Graficamente ho la **figura 4.7.**

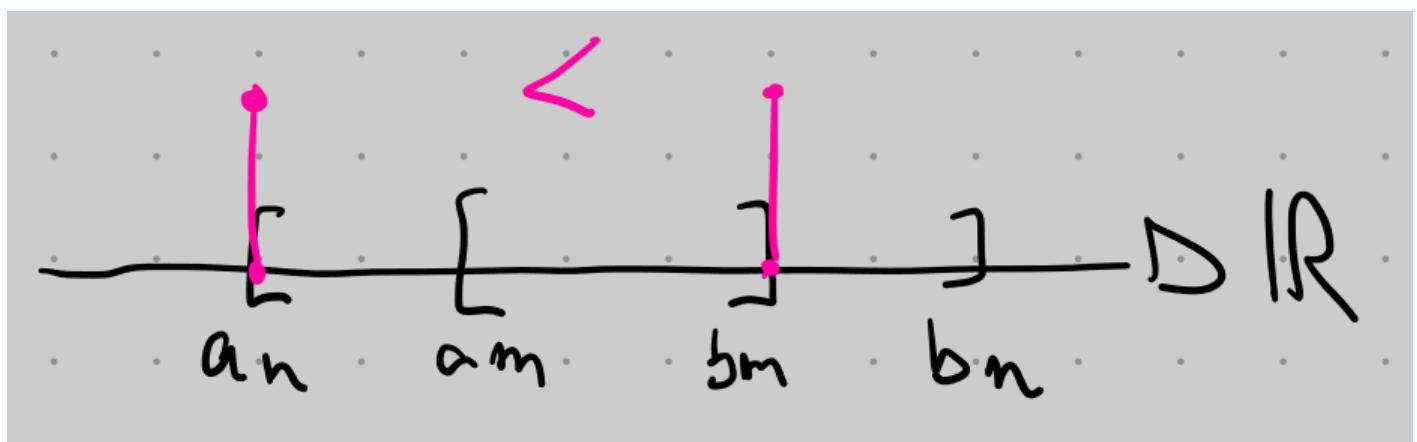
Di conseguenza

$$x, y \notin [a_n, b_n]$$

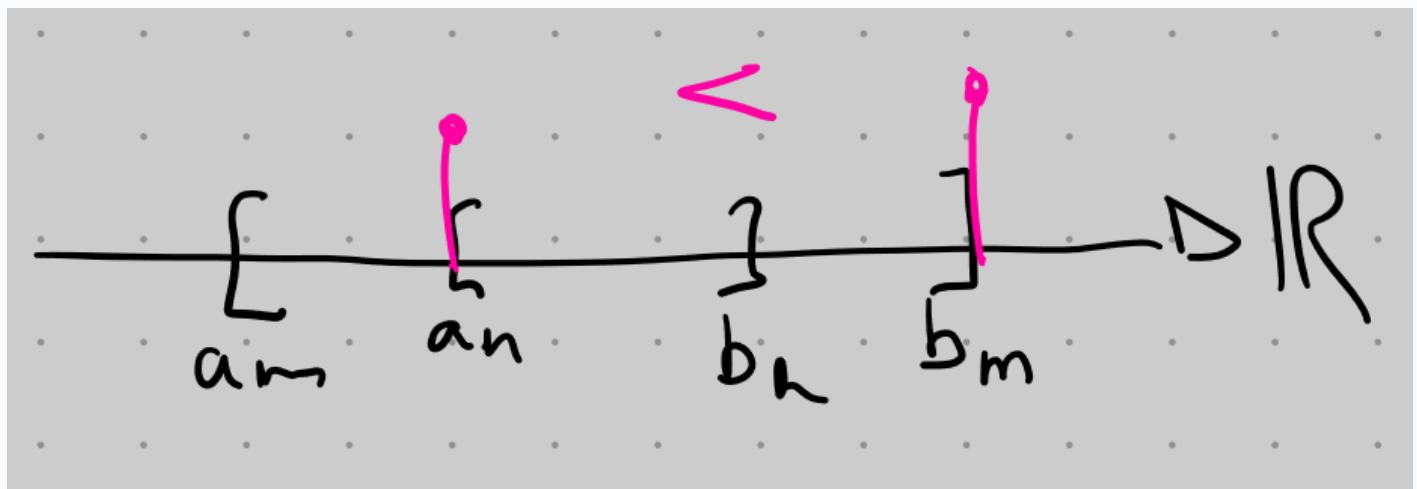
Pertanto si può sicuramente affermare che

$$\bigcap_n I_n = [\alpha, \beta] \blacksquare$$

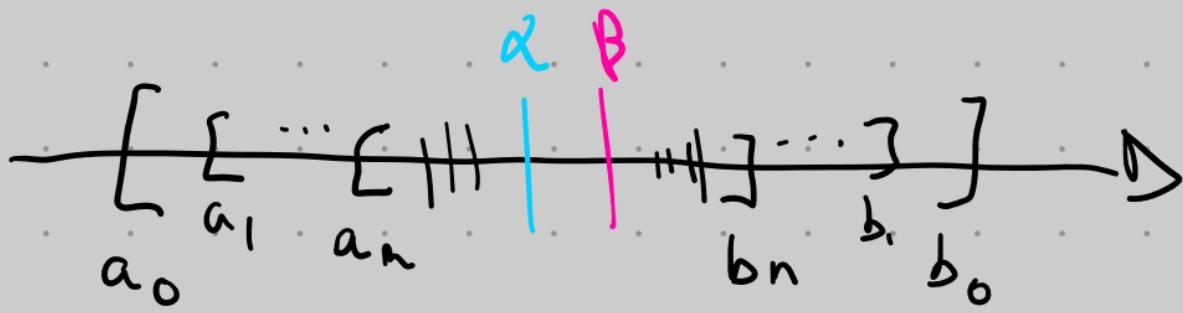
**FIGURA 4.4.**



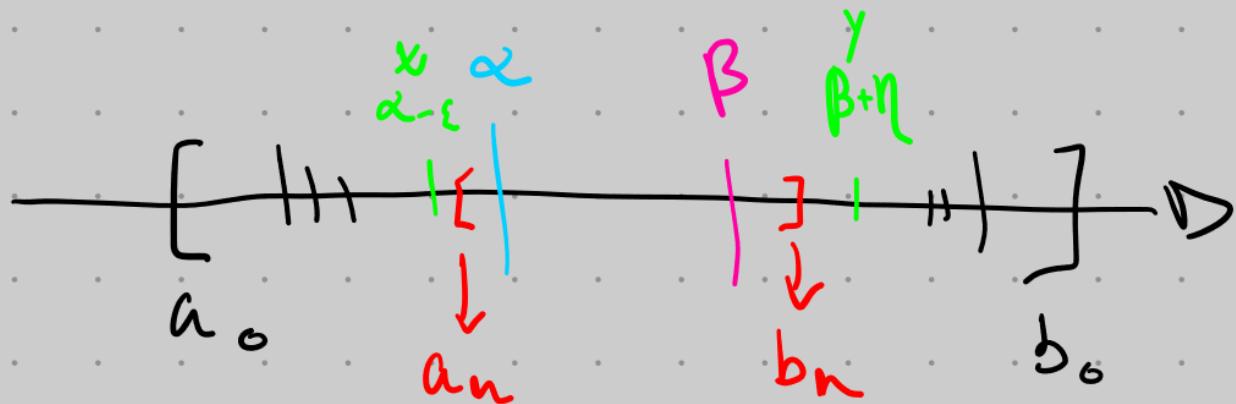
**FIGURA 4.5.**



**FIGURA 4.6. (Idea iniziale)**



**FIGURA 4.7.** (*Situazione finale*)



## Forma forte

#Teorema

**Teorema** (Teorema di Cantor, forma forte.).

Sia  $(I_n)_n$  una successione di intervalli *chiusi, limitati, inscatolati e dimezzati*; allora l'intersezione di tutti gli intervalli deve contenere un unico punto  $\xi$ ;

$$\exists \xi \in \mathbb{R} : \bigcap_n I_n = \{\xi\}$$

#Dimostrazione

**DIMOSTRAZIONE** del *teorema di cantor, forma forte* (Teorema 11 (Teorema di Cantor, forma forte.))

La *forma debole dello stesso teorema* (Teorema 6 (Teorema di Cantor, forma debole.)) mi dice che

$$\bigcap_n I_n = [\alpha, \beta]$$

dove  $\alpha$  è l'estremo superiore degli *"estremi sinistri"*  $a_n$  e  $b$  l'estremo inferiore degli *"estremi destri"*  $b_n$ .

Ora, considerando che gli insiemi sono pure *dimezzati*, so che (Osservazione 9 (la

$$\begin{aligned} b_n - a_n &= \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} \\ &= \frac{b_{n-2} - a_{n-2}}{2^2} \end{aligned}$$

...andando avanti finchè si raggiunge  $n \dots$

$$= \frac{b_0 - a_0}{2^n}$$

Ora mi ricordo che  $n \leq 2^n$  (che può essere dimostrata per *induzione*)

Allora si può "*maggiorare*" l'espressione di prima, ovvero

$$a_n - b_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n} \leq \frac{b_0 - a_0}{n}$$

ovviamente ricordandosi di cambiare il verso in quanto i numeri li troviamo al denominatore.

Ora, supponendo per assurdo che  $\alpha < \beta$  ovvero nel senso che l'intervallo  $[\alpha, \beta]$  ha più di un elemento, allora avremmo che

$$\forall n, \frac{b_0 - a_0}{n} \geq b_n - a_n \geq \beta - \alpha > 0$$

ovvero

$$\forall n, \frac{b_0 - a_0}{n} \geq \beta - \alpha > 0$$

che però per *teorema 2.1. (Teorema 3 (Archimedicità di  $\mathbb{R}$ ))* è impossibile, ovvero nel caso che abbiamo ora stiamo descrivendo che esiste un punto  $\beta - \alpha$  maggiore di 0 che non è raggiungibile da  $\frac{b_0 - a_0}{n}$  (quando invece è vero che tutti i punti  $> 0$  sono raggiungibili da tale espressione).

Quindi, per assurdo, raggiungiamo alla conclusione che

$$\beta = \alpha$$

ovvero abbiamo l'intorno

$$[\beta, \beta] \text{ o } [\alpha, \alpha]$$

che comprende solo il punto  $\xi$ . ■

## C1. Funzioni di potenza, radice e valore assoluto

## Funzioni di potenza, radice e valore assoluto

Definizioni di funzione potenza  $p_n$  e radice  $p_n^{-1}$ . Definizione del valore assoluto  $|\cdot|$ ; disegualanza triangolare. Alcuni esercizi generali.

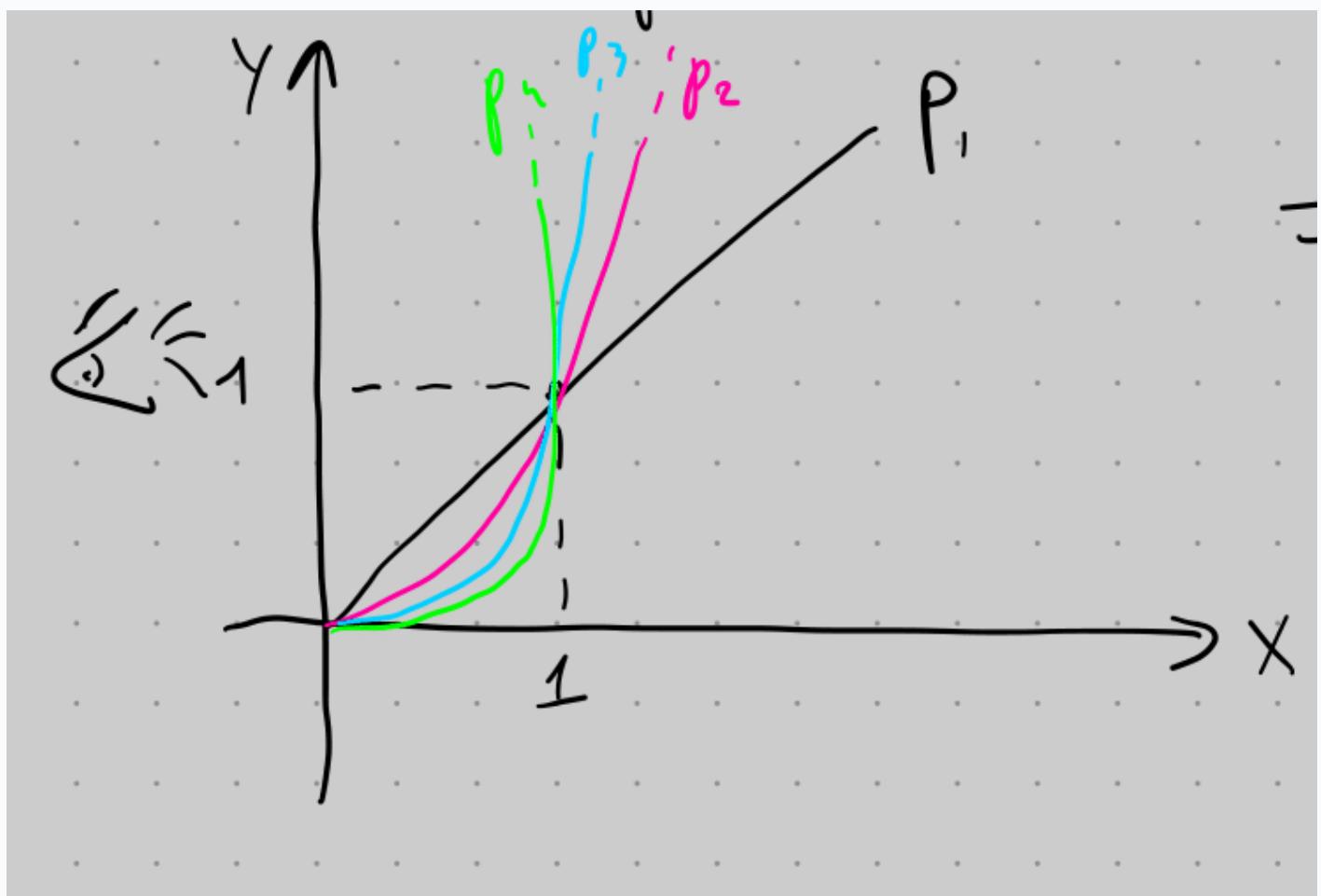
## 1. Funzione potenza

#Definizione

Definizione (funzione potenza n-esima).

Sia  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ; definiamo quindi la **funzione potenza n-esima** come

$$p_n : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty); x \mapsto p_n(x) = x^n$$

Si riporta un grafico di alcune funzioni potenza  $p_n$  (**figura 1.1.**).**FIGURA 1.1.**

#Osservazione

Si nota che

$$\begin{aligned}\forall x \in [0, 1) : p_1(x) &> p_2(x) > \dots > p_n(x) \\ \forall x \in (1, +\infty) : p_1(x) &< p_2(x) < \dots < p_n(x)\end{aligned}$$

#Proposizione

**Proposizione** (la potenza è strettamente crescente).

Si vede dal grafico che la funzione è **strettamente crescente**, ovvero se prendiamo  $x_1, x_2 \in E$  (dominio) ove  $x_2 > x_1$ , allora sicuramente abbiamo

$$p_n(x_2) > p_n(x_1)$$

**DIMOSTRAZIONE** della *proposizione 1.1.* (*Proposizione 3 (la potenza è strettamente crescente)*)

Prendiamo ad esempio  $p_2$ ; abbiamo innanzitutto

$$0 \leq x_1 < x_2$$

allora li moltiplichiamo per  $x_1$  e  $x_2$ , ottenendo

$$\begin{cases} x_1 < x_2 x_1 \\ x_1 x_2 < x_2^2 \end{cases}$$

quindi

$$0 \leq x_1^2 < x_2^2 \iff p_2(x_1) < p_2(x_2), \forall x_1, x_2$$

#Proposizione

**Proposizione** (la potenza è biiettiva).

Notiamo che la **funzione potenza**  $p_n$  (o  $x^n$ ) è **biettiva** (*Definizione 17 (funzione biettiva)*), ovvero è sia **suriettiva** che **iniettiva**.

**DIMOSTRAZIONE** della *proposizione 1.2.* (*Proposizione 4 (la potenza è biettiva)*)

Per dimostrare che è iniettiva basta riosservare quanto visto nella *proposizione 1.1.*; ovvero che la funzione è strettamente crescente.

Dopodiché la funzione è anche suriettiva in quanto una conseguenza dell'*assioma di separazione S*). ■

## 2. Funzione radice

Osservazione (la funzione potenza è biettiva, pertanto invertibile).

Dalla [proposizione 1.2.](#) abbiamo notato che la [funzione potenza](#)  $p_n(x)$  è [biettiva](#); pertanto per il [teorema dell'esistenza della funzione inversa](#) ([Teorema 24](#)) (condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza della funzione inversa  $f^{-1}$ ) esiste una funzione inversa, la "[radice](#)", che definiremo.

## #Definizione

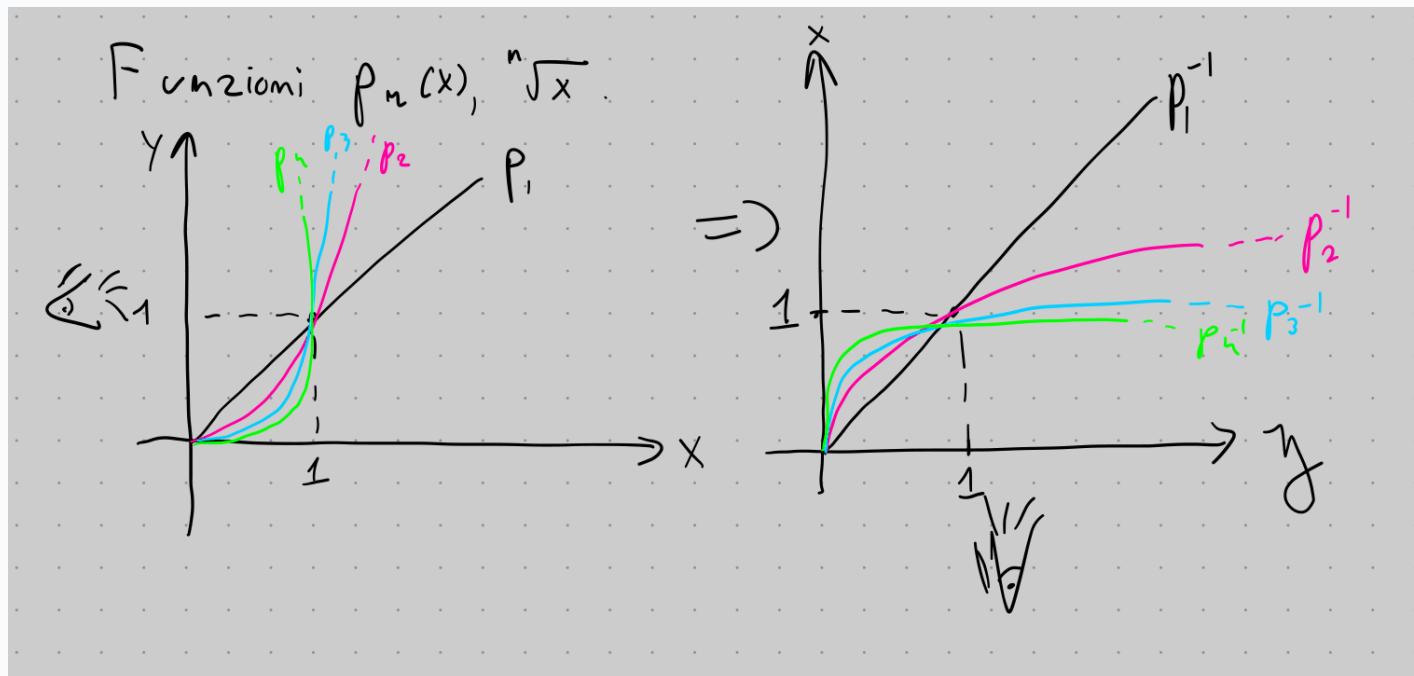
[Definizione](#) (funzione radice n-esima).

Definiamo la **funzione radice n-esima**  $p_n^{-1}$

$$p_n^{-1} : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty); x^n \mapsto x$$

Graficamente questo equivale a "[scambiare le assi](#)" del grafico della funzione, oppure di "[cambiare la prospettiva da cui si guarda il grafico](#)", ovvero la [figura 2.1.](#).

**FIGURA 2.1.**



### 3. Valore assoluto

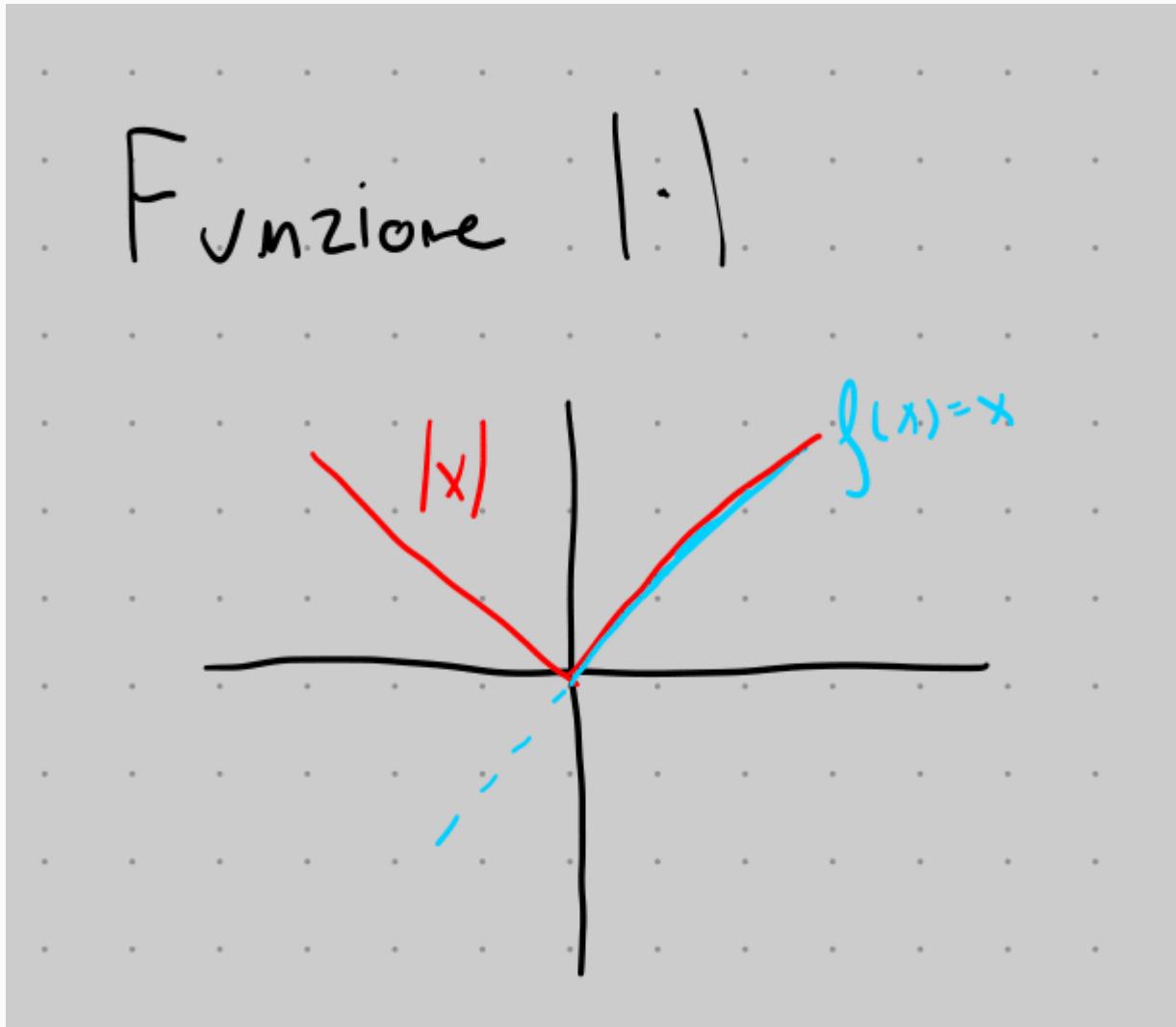
## #Definizione

[Definizione](#) (il valore assoluto).

$$|\cdot| : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; x \mapsto |x| = \begin{cases} x & : x \geq 0 \\ -x & : x < 0 \end{cases}$$

Ad esempio, il grafico di  $|x|$  si rappresenta nella *figura 3.1..*

**FIGURA 3.1.**



#Osservazione

Osservazione (nesso tra potenza, radice e valore assoluto).

Notare che

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

## Proprietà del valore assoluto, diseguaglianza triangolare

#Teorema

Teorema (prima condizione necessaria e sufficiente del valore assoluto).

$$|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$$

**DIMOSTRAZIONE** del [teorema 3.1.](#) ([Teorema 9 \(prima condizione necessaria e sufficiente del valore assoluto\)](#))

Posso considerare due casi, ovvero

$x \geq 0$ : abbiamo quindi  $|x| = x$ , pertanto

$$\begin{cases} |x| \leq a \implies x \leq a \\ x \geq 0 \implies x \geq -a \end{cases} \rightarrow -a \leq x \leq a$$

$x \leq 0$ : abbiamo quindi  $|x| = -x$  e il discorso è analogo:

$$\begin{cases} |x| \leq a \implies -x \leq a \iff x \geq -a \\ x \leq 0 \implies x \leq a \end{cases} \rightarrow -a \leq x \leq a$$

■

#Teorema

**Teorema** (seconda condizione necessaria e sufficiente).

Prendendo le stesse premesse di prima, abbiamo

$$|x| \geq a \iff x \leq -a \wedge x \geq a$$

#Teorema

**Teorema** (la diseguaglianza triangolare).

Siano  $x, y \in \mathbb{R}$ , allora abbiamo

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

**DIMOSTRAZIONE** del [teorema 3.3.](#) ([Teorema 11 \(la diseguaglianza triangolare\)](#))

Se abbiamo da un lato

$$-|x| \leq x \leq |x|$$

e

$$-|y| \leq y \leq |y|$$

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$$

che per la prima proprietà equivale a dire

$$|x + y| \leq |x| + |y| \blacksquare$$

## 4. Esercizi misti

Presentiamo degli esercizi, ovvero *equazioni* (Equazioni e soluzione) o *disequazioni* contenenti queste funzioni appena presentate.

**ESERCIZIO 4.1.** Determinare

$$3x + 5 = 0$$

**ESERCIZIO 4.2.** Disegnare il grafico di

$$f(x) = 3x + 5$$

con  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

**ESERCIZIO 4.3.** Risolvere

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

**ESERCIZIO 4.4.** Disegnare

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x^2 - 2x - 3$$

**ESERCIZIO 4.5.** Risolvere

$$\frac{x^2 - 2x + 3}{x - 3} \geq 0$$

**ESERCIZIO 4.6.** Risolvere

$$\sqrt{x + 1} \geq 3x + 2$$

**ESERCIZIO 4.8.** Risolvere

$$\frac{x - 3}{2x + 1} > \frac{x - 1}{x + 1}$$

**ESERCIZIO 4.8.** Risolvere

$$\sqrt{6x + 1} \geq 3 - 2x$$

$$|x + 4| < 8$$

**ESERCIZIO 4.10.** Risolvere

$$\left| \frac{2x+1}{x^2-4} \right| \geq 1$$

**ESERCIZIO 4.11.** Risolvere

$$|x + 1| \geq |x - 1|$$

## C2. Funzioni trigonometriche

### Funzioni trigonometriche

*Definizione delle funzioni trigonometriche* sin, cos; *le proprietà di queste funzioni; alcuni valori noti; funzioni inverse* arcsin, arccos. *Forme di somma e sottrazione di* sin e cos. *Funzioni* tan, arctan.

## 0. Preambolo

### #Osservazione

Osservazione (discorso introduttivo).

Per ora non abbiamo ancora gli strumenti per poter *rigorosamente* definire le funzioni di *seno* e *coseno*, tuttavia possiamo definirle per ora in questo modo. Però prima di tutto bisogna fare delle considerazioni.

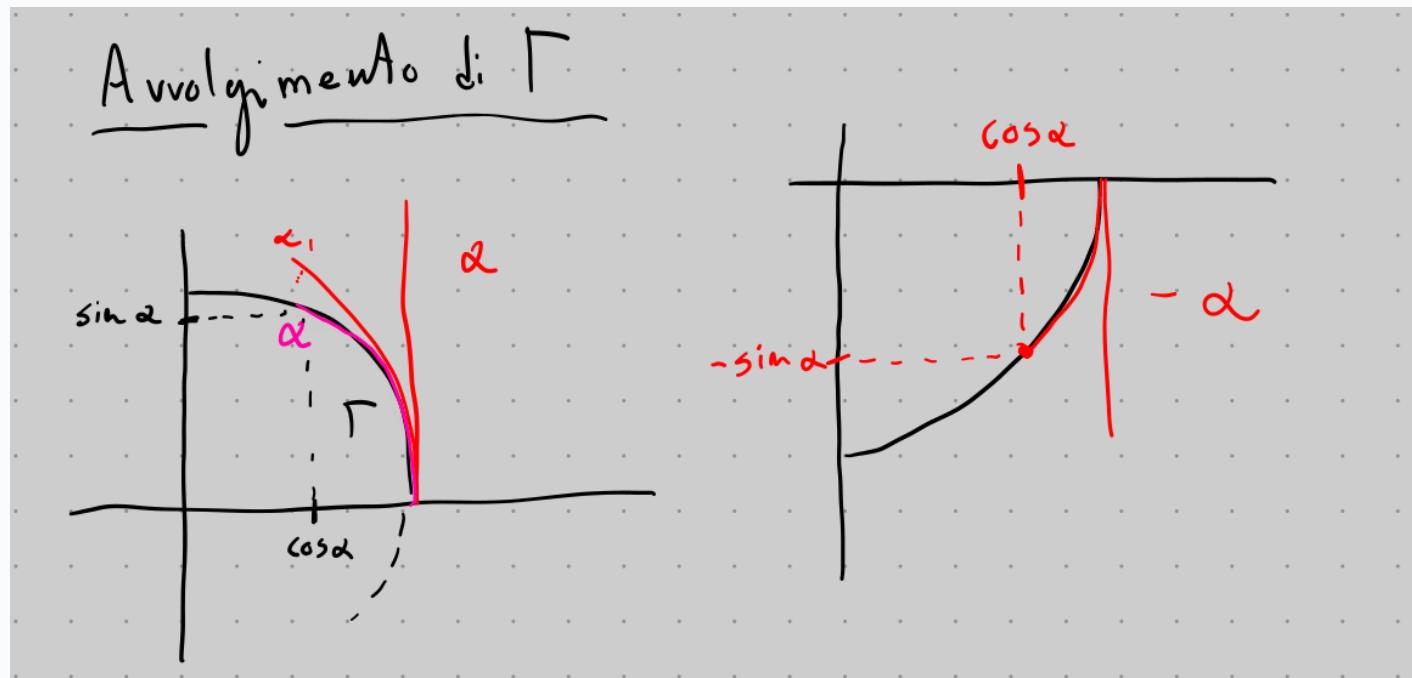
Allora prendo il *piano cartesiano* e considero la *circonferenza unitaria*  $\Gamma$ :

$$\Gamma := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

e considero l'asse  $r_1$  concorde con l'asse  $y$  e che "*appoggiamo*" in  $(1, 0)$ .

Quindi prendo un punto qualsiasi  $\alpha \in \mathbb{R}$  dell'asse, lo "*avvolgo*" su  $\Gamma$ , poi la retta si avvicina man mano all'arco, infine il punto "*finisce*" su  $\Gamma$  e ottengo il punto  $(c(\alpha), s(\alpha))$

Graficamente questo processo rappresenta il seguente (*figura 0.A.*)



## #Osservazione

Osservazione (questa definizione è poco rigorosa).

Si osserva che in questo processo di "avvolgimento" si suppone che la lunghezza del segmento non si cambia mai, in quanto viene solo "piegato"; quindi se il segmento  $r_1$  è lungo  $\alpha$ , allora l'arco è lungo  $\alpha$ , che non è banale da misurare. Infatti si deve fare un *procedimento di approssimazione* con segmenti. Questo è il problema di questa definizione *non-rigorosa*.

## 1. Definizione di seno e coseno

## #Osservazione

Osservazione (prima considerazione).

Considerando tutto detto sopra, consideriamo la funzione

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \Gamma \\ \alpha &\mapsto (c(\alpha), s(\alpha)) \end{aligned}$$

Dove  $\Gamma$  varia nell'intervallo  $[0, 1]$ .

Così otteniamo le seguenti funzioni.

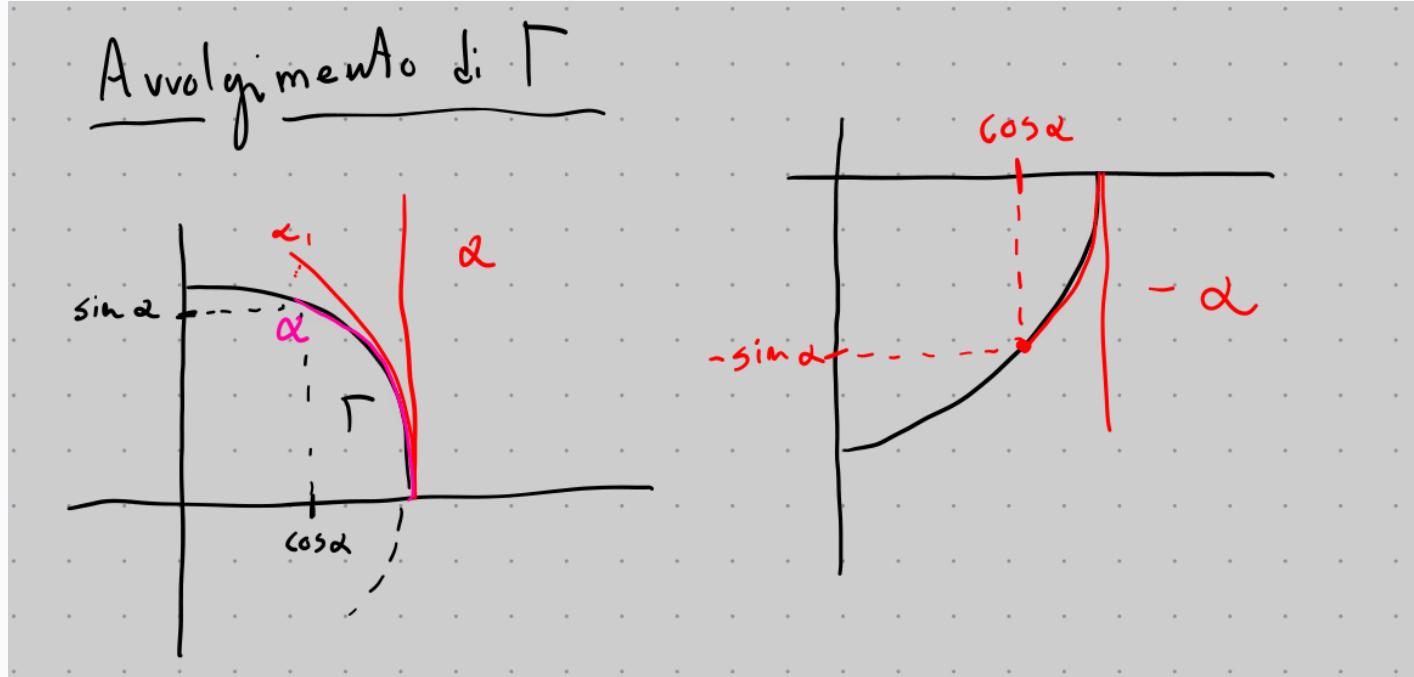
## #Definizione

Definizione (seno e coseno).

$$\begin{aligned}\cos : \mathbb{R} &\longrightarrow [-1, 1] \\ \alpha &\mapsto \cos(\alpha) \in \Gamma \\ \sin : \mathbb{R} &\longrightarrow [-1, 1] \\ \alpha &\mapsto \sin(\alpha) \in \Gamma\end{aligned}$$

Dove  $(\cos \alpha, \sin \alpha)$  rappresenta la posizione del punto dell'*arco piegato* e  $\alpha$  rappresenta la *lunghezza dell'arco*. Se  $\alpha$  è negativa, allora si orienta l'asso in basso. Graficamente si ha la *figura 1.1.*

**FIGURA 1.1.**



## 2. Proprietà

#Proposizione

Proposizione ( $\pi$ ).

Diamo un nome alla *lunghezza della semi-circonferenza unitaria*,

$$(\pi \in \mathbb{R}, \pi \sim 3.14\dots)$$

quindi la *circonferenza* è lunga  $2\pi$ .

#Proposizione

Proposizione (Proposizione 2.2. (l'identità fondamentale della trigonometria)).

Dato un  $\alpha \in \mathbb{R}$ , si verifica che

$$(\cos \alpha)^2 + (\sin \alpha)^2 = 1$$

### #Proposizione

#### Proposizione (seno e coseno sono funzioni periodiche).

Le funzioni  $\cos, \sin$  sono *periodiche*, ovvero che prendendo un  $k \in \mathbb{Z}$ ,

- i.  $\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos \alpha$
- ii.  $\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin \alpha$

Questo si verifica in quanto  $2\pi$  rappresenta un *giro intero*; quindi prendendo un punto  $\alpha$  e facendoci un giro intero, arrivo allo stesso punto.

### #Proposizione

#### Proposizione (seno e coseno sono funzioni pari e dispari).

Le funzioni  $\cos, \sin$  sono rispettivamente delle funzioni *pari* e *dispari*, ovvero che si verificano le seguenti.

$$\begin{aligned}\cos(-\alpha) &= \cos(\alpha) \\ \sin(-\alpha) &= -\sin(\alpha)\end{aligned}$$

Questo discende dal fatto che la "*lunghezza negativa*" rappresenterebbe la stessa lunghezza orientato verso il basso.

Quindi graficamente lo si può vedere chiaramente.

### #Proposizione

#### Proposizione (seno e coseno sono "shiftati" tra di loro).

Se al posto di aggiungere un *giro intero* aggiungo un *mezzo giro*, ovvero  $\pi$ , ottengo il suo opposto:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \pi) &= -\cos(\alpha) \\ \sin(\alpha + \pi) &= -\sin(\alpha)\end{aligned}$$

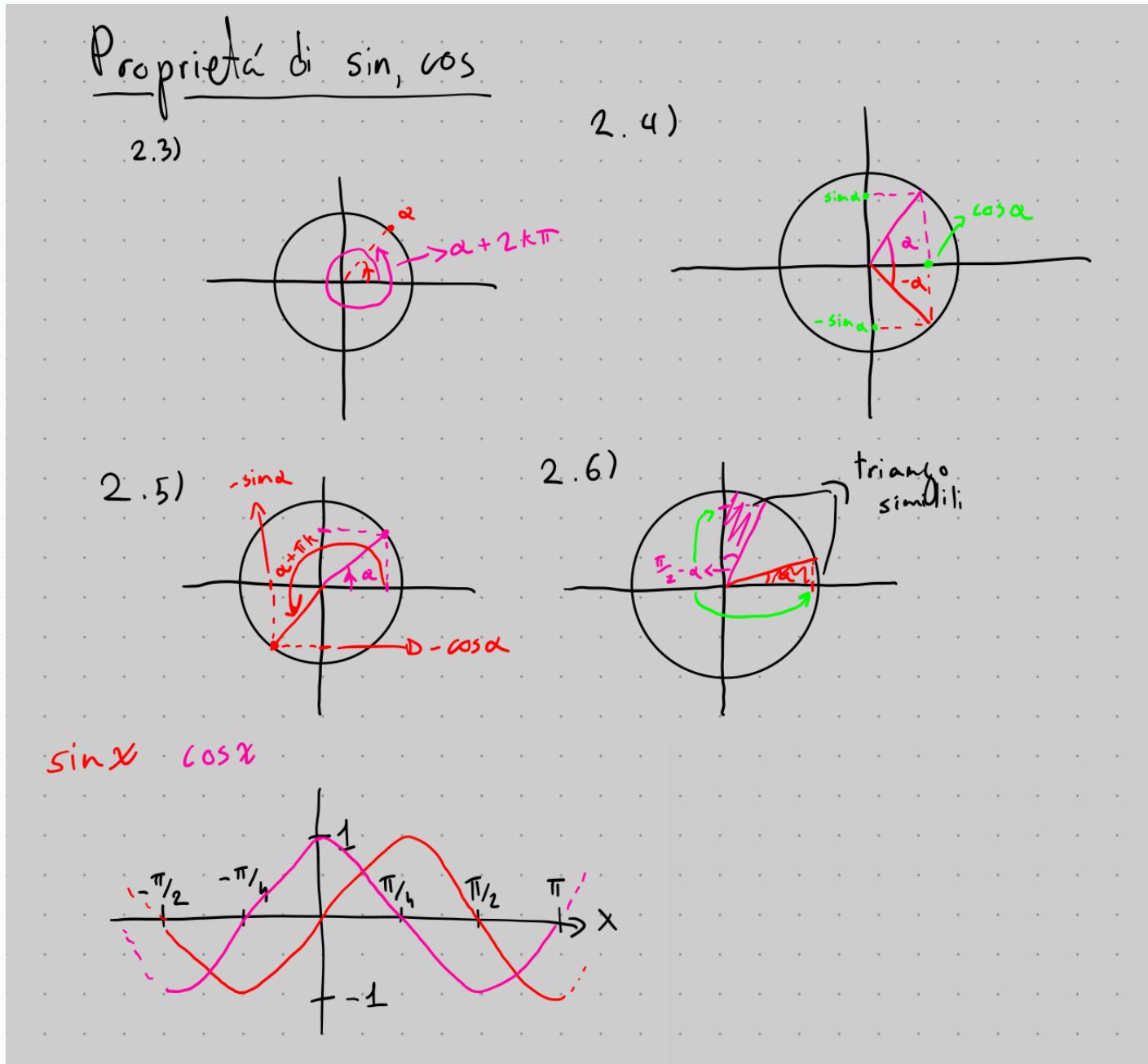
### #Proposizione

#### Proposizione (il coseno è il complemento del seno).

$$\forall \alpha, \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\alpha)$$

## Riassunto grafico

**FIGURA 2.1.** Graficamente si può riassumere (quasi) tutte le proprietà nel seguente grafico (con i grafici di cos, sin stessi).



## Alcuni valori noti

Dai risultati della *geometria elementare* sappiamo i seguenti valori noti del seno e del coseno:

$\alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$
0	1	0
$\frac{\pi}{2}$	0	1

$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha$	$\frac{1}{2} \sin \alpha$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	0	1

che verranno dati per noti.

## Forme di somma e di sottrazione

### #Osservazione

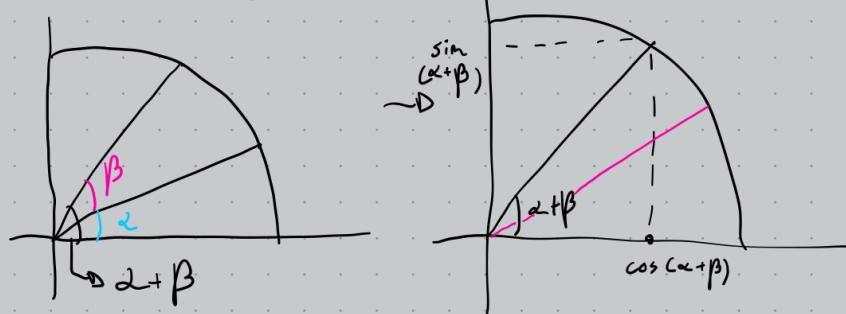
Osservazione (forme di somma e di sottrazione).

Consideriamo due angoli:  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

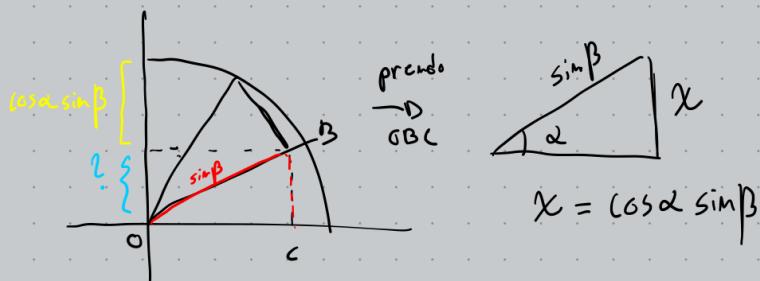
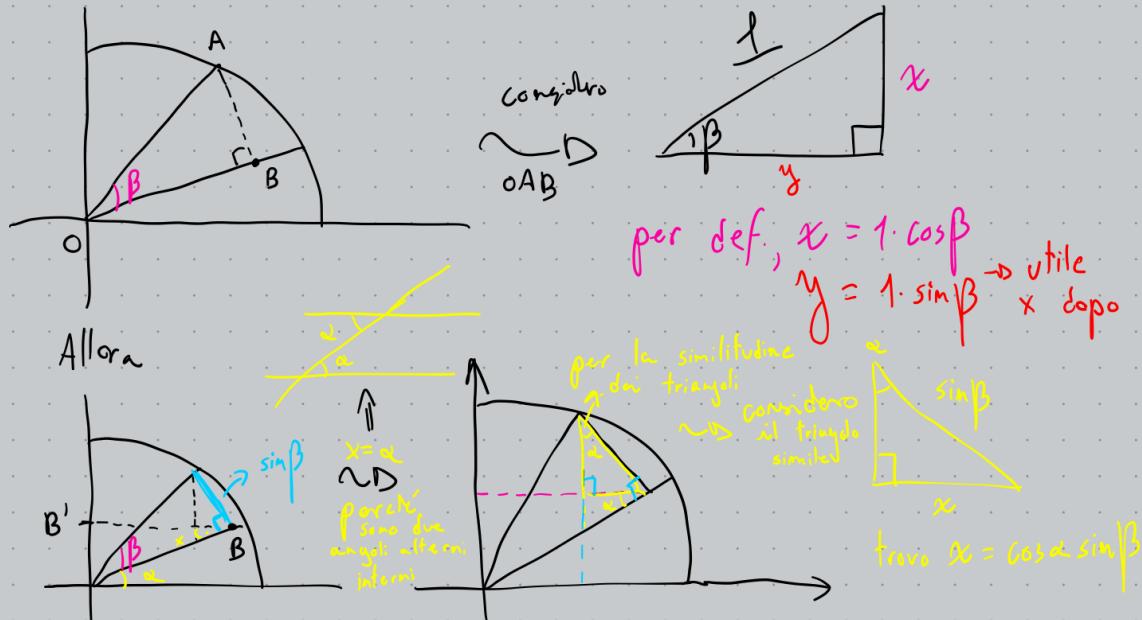
Quindi disegniamo il seguente grafico:

## Forme di somma e di sottrazione

1) Considero il seguente:



2) Proietto il segmento  $\overline{AB}$  tale da formare angolo da  $90^\circ$  ( $\perp$ )

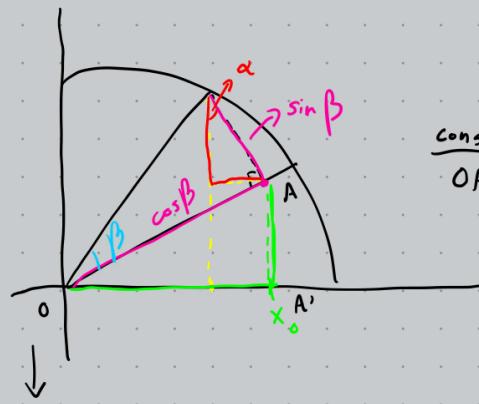


Pertanto sommo i pezzi e ottengo:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \sin\beta \cos\alpha$$

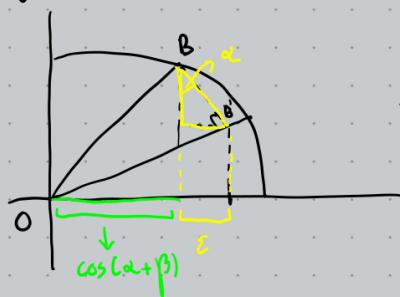
Dopodiché, analogamente

Analogamente:



considero  
OAA'

$$x_0 = \cos \alpha \cos \beta$$



considero  
OBB'

$$\varepsilon = \sin \alpha \sin \beta$$

Allora

$$\therefore x_0 = \cos(\alpha + \beta) + \varepsilon \Rightarrow \cos(\alpha + \beta) = x_0 - \varepsilon = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

Da cui si evince che

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha$
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$

Queste formule saranno molto importanti per le formule di **prostaferesi** e di **Werner**.

## Formule di prostaferesi

Recuperato dalla lezione del 26.10.2023

#Osservazione

Osservazione (formule di prostaferesi).

Voglio calcolare  $\sin a + \sin b$ . Allora riscrivo le **forme di sottrazione e di addizione**:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha - \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha \\ &= 2 \sin \beta \cos \alpha\end{aligned}$$

e ponendo  $\alpha + \beta = a$ ,  $\alpha - \beta = b$ , (dunque  $a + b = 2\alpha$  e  $a - b = 2\beta$ ) ottengo

$$\boxed{\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2}}$$

Analogo il procedimento per  $\cos \alpha + \cos \beta$ .

### 3. Definizione di arcocoseno e arcoseno

#### #Osservazione

Osservazione ( $\cos$  può diventare biiettiva).

Considero la funzione  $\cos$ , però con una restrizione al suo **dominio** e **codominio**.

$$\begin{aligned}\cos_{[0,\pi]} : [0, \pi] &\longrightarrow [-1, 1] \\ x &\mapsto \cos(x)\end{aligned}$$

Questa funzione allora è **biiettiva**; ovvero che sia **suriettiva** che **iniettiva** e **strettamente decrescente**.

1. Questa è **iniettiva** in quanto considerando tutti gli  $x \in [0, \pi]$  si tocca un **solo** punto ad ogni  $x$  considerato. Inoltre è **strettamente decrescente** in quanto il valore parte da  $\cos 0 = 1$  e finisce con  $\cos \pi = -1$ .
2. Per lo stesso motivo di prima  $\cos$  è **suriettiva**.

#### #Definizione

Definizione (arcocoseno).

Pertanto secondo il **teorema dell'esistenza della funzione inversa** la funzione  $\cos_{[0,\pi]}$  ha una sua inversa che chiameremo **l'arcocoseno**;

$$\arccos := \cos_{[0,\pi]}$$

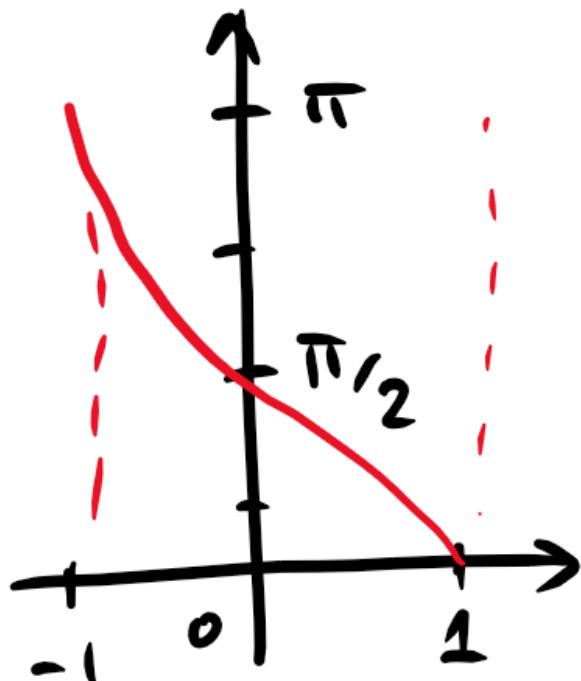
#### #Definizione

Definizione (arcoseno).

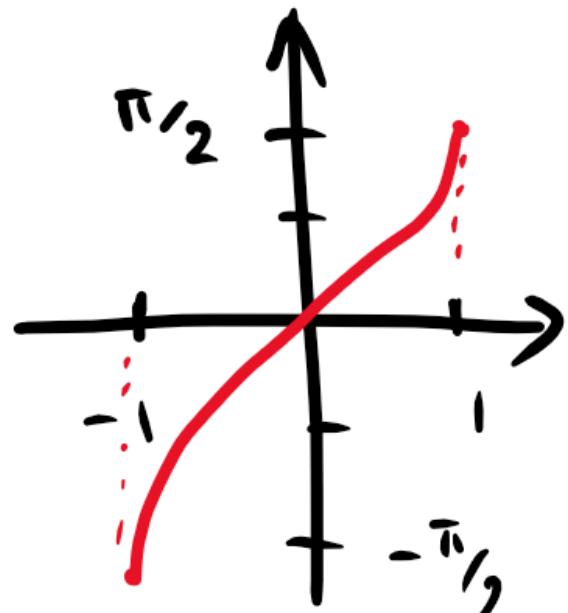
Analogamente si definisce  $\arcsin$  considerando però la restrizione di  $\sin_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$ . Quindi

**FIGURA 3.1.** (Arcoseno e arcocoseno)

# Arcsin, Arccos



(arccos)



(arcsin)

## 4. Funzione tangente e arcotangente

#Definizione

Definizione (tangente).

Definiamo la funzione **tangente**  $\tan \alpha$  periodica in come

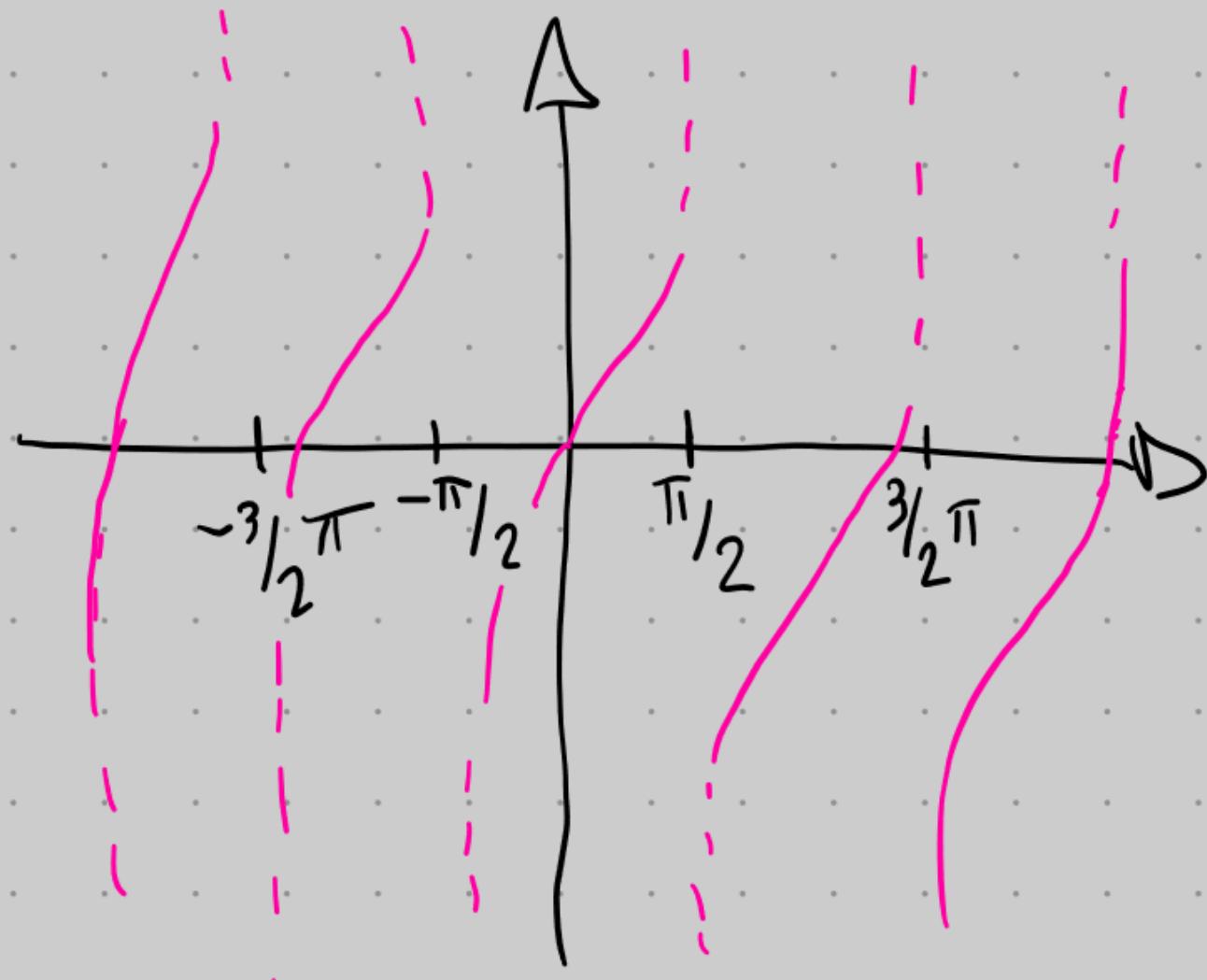
$$\tan : \mathbb{R} \setminus [\frac{\pi}{2}]_{\equiv \pi} \longrightarrow \mathbb{R}$$

come il *rapporto* tra la funzione *seno* e *coseno*, ovvero

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

Notiamo che le funzioni  $\sin, \cos$  sono periodiche di  $2\pi$ ; quindi prendendo il rapporto abbiamo che  $\tan$  è periodica di  $\pi$ .Osservando i *limiti* (Esempio 15 (funzione tangente)) di questa funzione possiamo disegnare il seguente grafico (*figura 4.1.*).

tan



#Definizione

Definizione (arcotangente).

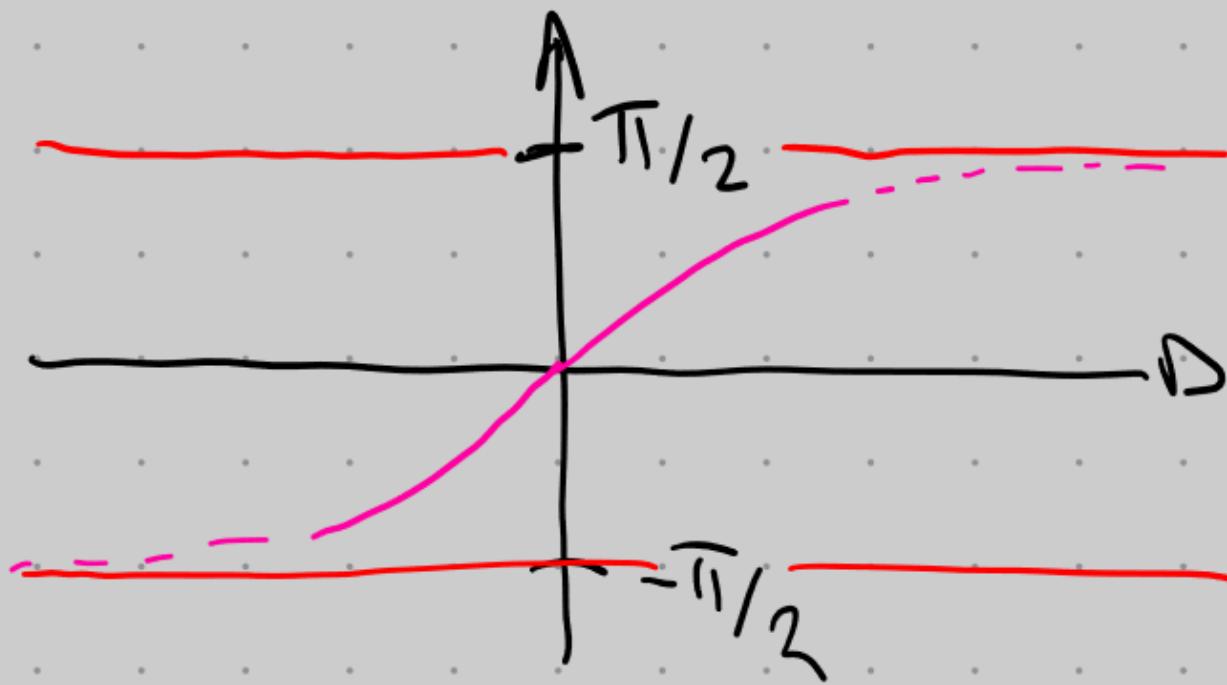
Se applico una restrizione della **tangente** in  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  allora ho:

$$\tan|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})} : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \tan x$$

e questa diventa **bijettiva**, quindi invertibile, posso definire l'**arcotangente** la sua funzione inversa:

$$\arctan := (\tan|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})})^{-1}$$

# arctan



## C3. Funzioni esponenziali e logaritmiche

### Funzione esponenziale e Logaritmica

*Definizione della funzione esponenziale su  $N$ ; prime proprietà dell'esponenziale; estensione della definizione a  $Z$ ; ulteriori proprietà; estensione a  $Q$ ; ulteriori proprietà e limiti notevoli; definizione dell'esponenziale sui reali  $R$ ; proprietà finali. Invertibilità di  $\exp$ , funzione logaritmica; proprietà di  $\log$ .*

## 1. Funzione esponenziale

In questa parte definiremo la **funzione esponenziale** partendo dalla definizione **"basilare"** su  $\mathbb{N}$ , poi espandiamo l'insieme su cui definiamo questa funzione fino a  $\mathbb{R}$ . Ovviamente per semplificare lo studio si proporrà poi la definizione **"generale"** riassunta.

### L'esponenziale sui naturali

#Definizione

Consideriamo il numero

$$a \in (1, +\infty)$$

possiamo definire *l'esponenziale* come

$$a^n := \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ volte}}$$

#Proposizione

**Proposizione** (le prime proprietà dell'esponenziale sui naturali).

Allora con questa definizione abbiamo le seguenti proprietà.

$$\begin{aligned} a^{n_1} \cdot a^{n_2} &= a^{n_1+n_2} \\ (a^{n_1})^{n_2} &= a^{n_1 \cdot n_2} \\ n_1 < n_2 \implies a^{n_1} &< a^{n_2} \\ 1 < a_1 < a_2 \implies a_1^n &< a_2^n \\ \lim_n a^n &= +\infty \end{aligned}$$

## L'esponenziale sugli interi

#Definizione

**Definizione** (l'esponenziale sui numeri interi).

Ora voglio dare un significato a

$$a^m, m \in \mathbb{Z}$$

Allora la definisco come

$$a^m := \begin{cases} a^m & \text{se } m \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{a^{-m}} & \text{se } m \in \mathbb{Z} \text{ e } m < 0 \end{cases}$$

#Proposizione

**Proposizione** (ulteriori proprietà dell'esponenziale).

Con questa definizione continuano a valere le proprietà date nella *proposizione 1.1.*, in particolare:

$$a^{m_1} \cdot a^{m_2} = a^{m_1+m_2}$$

$$(a^{m_1})^{m_2} = a^{m_1 \cdot m_2}$$

$$m_1 < m_2 \implies a^{m_1} < a^{m_2}$$

$$1 < a_1 < a_2 \implies a_1^m < a_2^m$$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} a^m = +\infty$$

Novità:  $\lim_{m \rightarrow -\infty} a^m = 0$

## L'esponenziale sui razionali

#Definizione

**Definizione** (l'esponenziale sui numeri razionali).

Ora voglio dare un significato a

$$a^p, p \in \mathbb{Q}$$

allora posso rappresentare  $p$  come frazione ([Richiami sui Numeri Razionali](#)), ovvero come

$$p = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}; n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

Ora posso definire

$$a^p := a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

#Osservazione

**Osservazione** (l'esponenziale rimane unico per un qualsiasi  $p \in \mathbb{Q}$ ).

Con questa definizione sembra che ci possa essere il seguente problema: se un numero razionale  $p$  può essere rappresentata in modi diversi, ad esempio

$$2 = \frac{2}{1} = \frac{4}{2}$$

non è possibile che  $a^p$  può avere risultati diversi; ovvero è possibile che

$$p = \frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2} \implies \sqrt[n_1]{a^{m_1}} \stackrel{?}{=} \sqrt[n_2]{a^{m_2}}$$

La risposta è "no". Ora vediamo di dimostrarla.

$$\frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2} \implies m_1 n_2 = m_2 n_1$$

Allora

$$\begin{aligned}\sqrt[n_1]{a^{m_1}} &= \sqrt[n_2]{a^{m_2}} \\ a^{m_1} &\stackrel{?}{=} (\sqrt[n_2]{a^{m_2}})^{n_1} = \sqrt[n_2]{a^{m_2 \cdot n_1}} \\ a^{m_1 n_2} &= a^{m_2 n_1} \text{ OK } \blacksquare\end{aligned}$$

### #Proposizione

**Proposizione** (ulteriori proprietà dell'esponenziale sui razionali).

Ora si potrebbe dimostrare che continuano a valere le proprietà di prima (*proposizioni 1.2, 1.3.*), ovvero

$$\begin{array}{l|l} a^{p_1} \cdot a^{p_2} = a^{p_1+p_2} & (a^{p_1})^{p_2} = a^{p_1 p_2} \\ p_1 < p_2 \implies a^{p_1} < a^{p_2} & 1 < a_1 < a_2 \implies a_1^p < a_2^p \\ \lim_{p \rightarrow +\infty} a^p = +\infty & \lim_{p \rightarrow -\infty} a^p = 0 \\ \text{Novità: } \lim_{p \rightarrow p_0} a^p = a^{p_0} & \end{array}$$

**DIMOSTRAZIONE** dell'*ultima proprietà della proposizione 1.3.* (Proposizione 7 (ulteriori proprietà dell'esponenziale sui razionali))

Dimostriamo la "*nuova*" proprietà ovvero

$$\lim_{p \rightarrow p_0} a^p = a^{p_0}$$

Ai fini di questa dimostriamo utilizziamo il limite notevole di una successione ([Esempio 3 \(limite della radice n-esima di un numero\)](#)), ovvero

$$\lim_n \sqrt[n]{a} = 1$$

Allora si potrebbe, secondo la *definizione 1.3.*, riscriverla come

$$\lim_n a^{\frac{1}{n}} = 1 \implies \lim_{p \rightarrow 0} a^p = 1$$

Adesso consideriamo

$$\lim_{p \rightarrow p_0} a^p - a^{p_0} = \underbrace{a^{p_0}}_{\substack{\text{valore fisso}}} \cdot \underbrace{(a^{p-p_0} - 1)}_{\substack{\text{tende a } a^0 - 1 = 1 - 1 = 0}} \rightarrow 0$$

$$\lim_{p \rightarrow p_0} a^p = a^{p_0} \blacksquare$$

## L'esponenziale sui reali

Finalmente definiamo l'esponenziale con l'esponente reale; in realtà sarebbe possibile definirla mediante gli assiomi dei numeri reali ([Assiomi dei Numeri Reali](#)), in particolare con i [tagli di Dedekind](#), tuttavia ai fini didattici si sceglie di usare una definizione più semplice.

#Definizione

**Definizione** (l'esponenziale sui reali).

Adesso voglio definire

$$a^x, x \in \mathbb{R}$$

Posso usare il [teorema sulle successioni monotone](#) ([Teorema 7 \(esistenza dei limiti delle successioni monotone\)](#)) che enuncia il seguente: "*Una successione monotona crescente e limitata è sempre convergente*".

Allora considero la successione a valori in  $\mathbb{Q}$

$$(p_n)_n$$

che sia [convergente](#) al valore  $x$ . Ci chiediamo se una successione del genere esiste; la risposta qui è sì. Infatti, sfruttando la densità dei razionali nei reali ([Teorema 5 \(Densità dei razionali nei reali.\)](#)) allora sappiamo che partendo da  $1, x$  esiste un valore [razionale](#) tra questi due e questo può essere il candidato ideale per  $p_0$ ; dopodiché prendiamo  $p_1, x$  dove deve starci almeno  $p_2$ .

Poi volendo si può andare all'infinito per la [densità di  \$\mathbb{Q}\$  in  \$\mathbb{R}\$](#) . Quindi  $(p_n)_n$  è definita su tutti i valori in  $\mathbb{N}$ .

Concludendo, definisco

$$a^x := \lim_n a^{p_n}, \lim_n p_n = x$$

Inoltre

$$0 < a < 1 \implies a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$$

Osserviamo poi che  $a^{p_n}$  rimane monotona in quanto è necessaria per far valere il teorema.

**Proposizione** (proprietà dell'esponenziale sui reali).

Si può mostrare che continuano a valere tutte le proprietà elencate sopra;

$$\begin{aligned} \forall x_1, x_2; a^{x_1} a^{x_2} &= a^{x_1+x_2} \mid (a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 x_2} \\ x_1 < x_2 &\implies a^{x_1} < a^{x_2} \\ 1 < a_1 < a_2 &\implies a_1^x < a_2^x \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} a^x &= a^{x_0} \end{aligned}$$

**Riassunto generale**

Dopo il nostro viaggio odisseico per definire la funzione esponenziale, possiamo finalmente definire  $a^x$  nella maniera più generale possibile.

## #Definizione

**Definizione** (funzione esponenziale).

Sia  $a > 1, a \in \mathbb{R}$ , è definita una **funzione** (**Funzioni**)

$$\exp_a : \mathbb{R} \longrightarrow (0, +\infty); x \rightarrow \exp_a(x) = a^x$$

e la chiamo **funzione esponenziale di base**  $a$ .

Da notare che se invece abbiamo  $0 < a < 1$ , allora basta definire

$$\exp_a x := \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$$

Allora

$$\exp_a(x) = \begin{cases} a^x, & x \geq 0 \\ \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}, & x < 0 \end{cases}$$

## #Teorema

**Teorema** (le proprietà della funzione esponenziale).

Valgono le seguenti:

1.  $\exp_a(0) = 1$

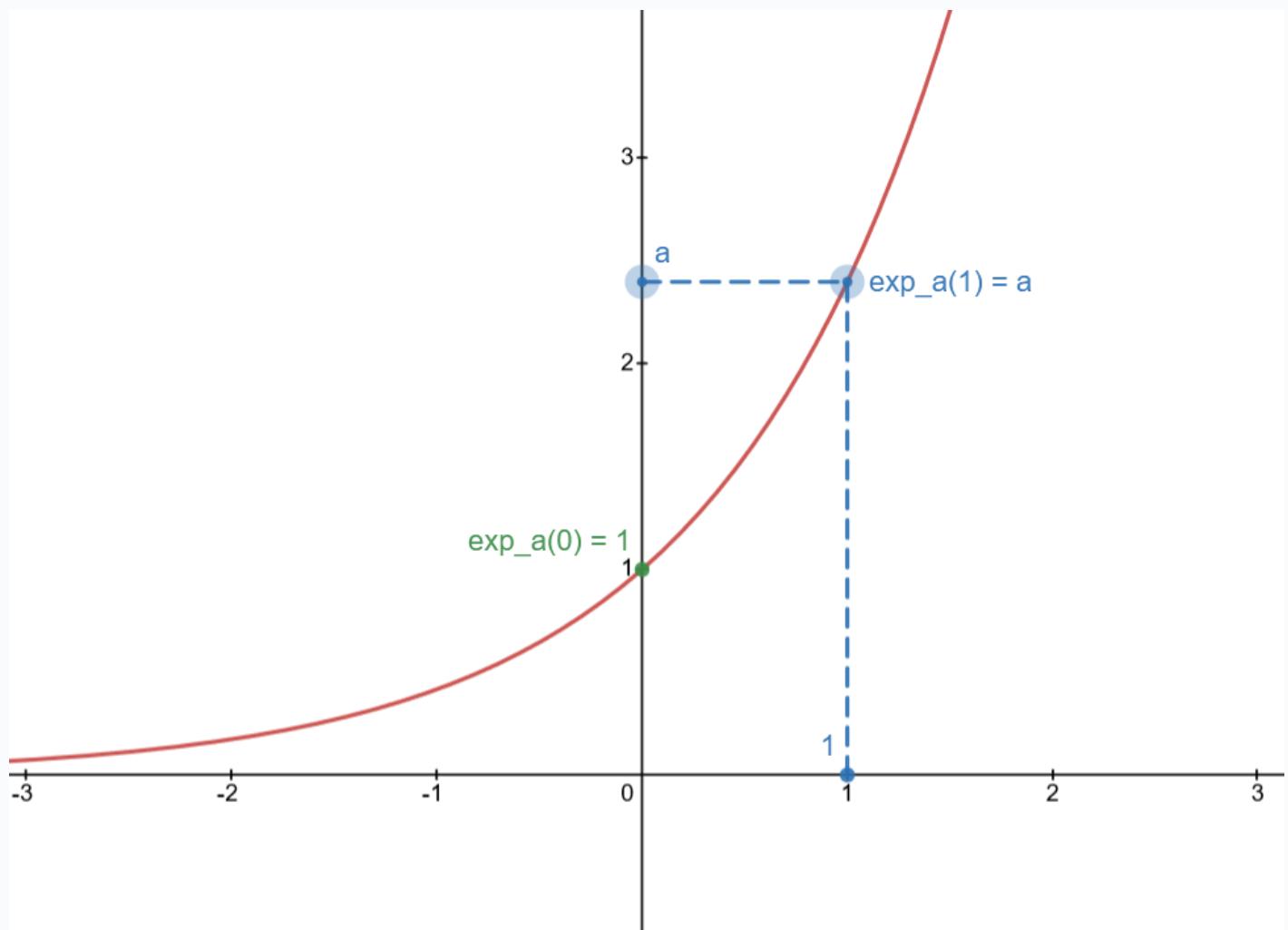
2.  $\exp_a(x_1) \cdot \exp_a(x_2) = \exp_a(x_1 + x_2)$
3.  $\exp_a(x_1)^{x_2} = \exp_{\exp_a(x_1)}(x_2) = \exp_a(x_1 x_2)$
4.  $\exp$  è *monotona crescente*
5.  $\exp$  è *suriettiva*
6. I limiti di  $\exp_a$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp_a x = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp_a x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \exp_a x = \exp_a x_0$$

**FIGURA 1.5.** (*Grafico generale di  $\exp$* )

Si propone il seguente grafico di  $\exp$  realizzato col sito [Desmos](#).



## 2. Funzione logaritmica

#Osservazione

Osservazione (l'esponenziale è biiettivo, dunque invertibile.).

Osservando dalle *proprietà dell'esponenziale*, sappiamo che se  $\exp_a$  è sia *suriettiva* che *iniettiva*, allora deve esistere la funzione inversa  $\exp_a^{-1}$ . Allora possiamo definire la seguente funzione.

#Definizione

Chiamo la **funzione logaritmica** la funzione inversa  $\exp_a^{-1}$  come  $\log_a$ :

$$\log_a : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$

e si ha

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \log_a(\exp_a x) &= x \\ \forall y \in (0, +\infty), \exp_a(\log_a y) &= y\end{aligned}$$

#Teorema

**Teorema** (le proprietà del logaritmo).

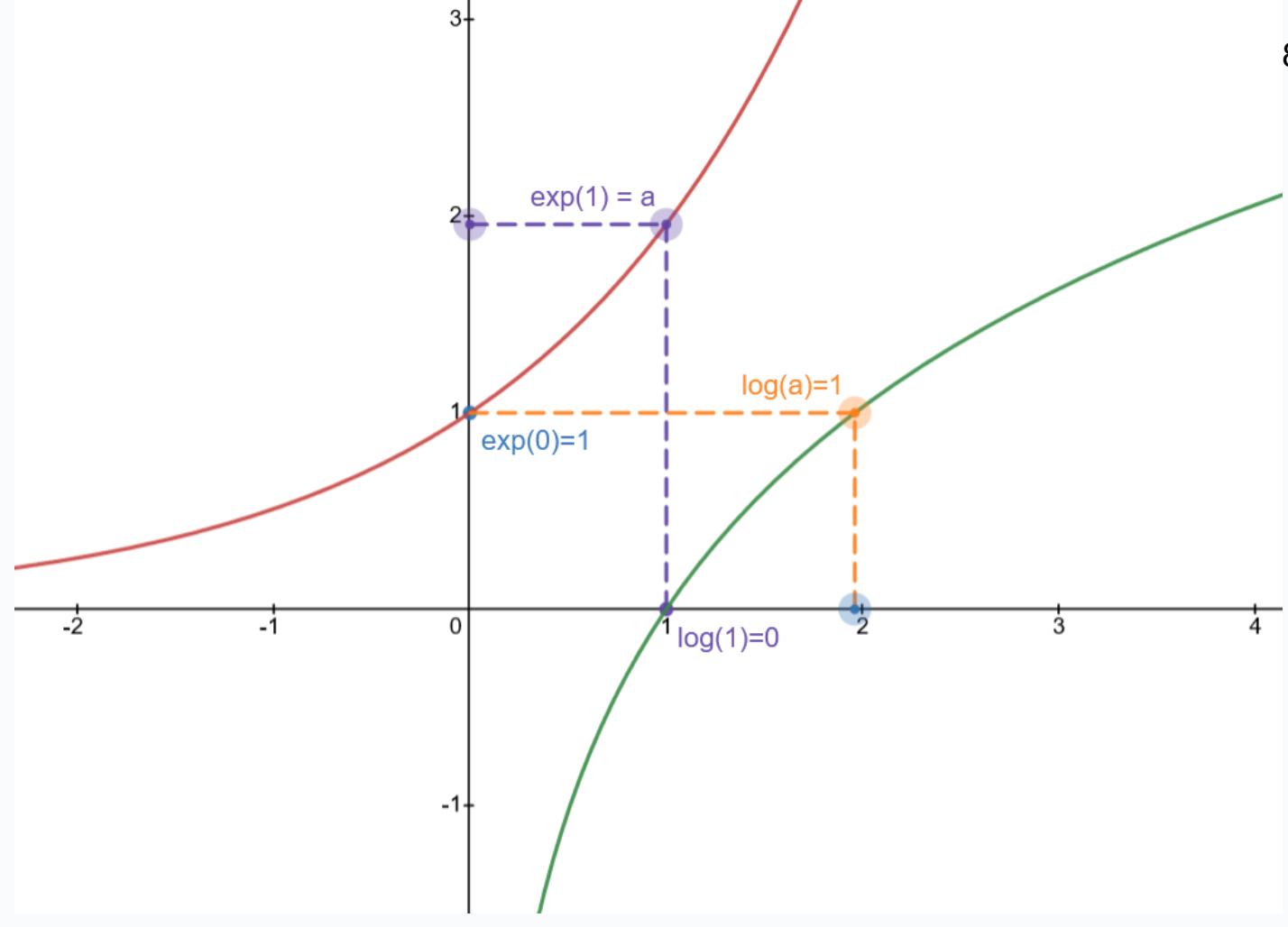
Per un  $a \in \mathbb{R}$ , valgono le seguenti:

1.  $\log_a(1) = 0$  (**per definizione**)
2.  $\log_a(x_1) + \log_a(x_2) = \log_a(x_1 x_2)$
3.  $\log_a(x^y) = y \log_a(x)$
4.  $a > 1 \wedge 0 < x_1 < x_2 \implies \log_a(x_1) < \log_a(x_2)$
5. Limiti

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x &= -\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \log_a x &= \log_a x_0\end{aligned}$$

### 3. Riassunto finale

**FIGURA 3.1.** Come riassunto finale si propongono i grafici di  $\exp_a$  e  $\log_a$  per  $a = 1.96$ . Anche questo ultimo grafico è realizzato su [Desmos](#). Inoltre con i limiti ([Esempi di Limiti di Funzione](#)) osserveremo che le funzioni  $\exp, \log$  crescono e decrescono con una "velocità" più grande delle altre funzioni, in particolare le funzioni **razionali** per qualsiasi grado.



## Abstract del Capitolo III

In questo capitolo si andrà ad approfondire le *conseguenze* della *continuità* dei *numeri reali*; in particolare si studieranno delle "*forme topologiche*" che potranno essere definite sui *reali*, come ad esempio *intorni*, *punti interni* e *punti di accumulazione*.

Questo capitolo sarà particolarmente importante per poter studiare uno degli argomenti più importanti dell'*analisi matematica*: i limiti.

## A1. Intorni

### Intorni

Definizione di distanza (con le sue proprietà), intorno centrato aperto di centro  $x_0$  e di raggio  $r$ , intorno di  $x_0$ ; la retta estesa, l'intorno di  $+\infty$  e di  $-\infty$ .

## 0. Preambolo, pagine correlate

In questo capitolo studieremo e definiremo delle nomenclature necessarie per studiare i *limiti* (Definizione di Limite di funzione).

- Punti di aderenza e di accumulazione
- Definizione di Limite di funzione

## 1. Distanza euclidea

#Definizione

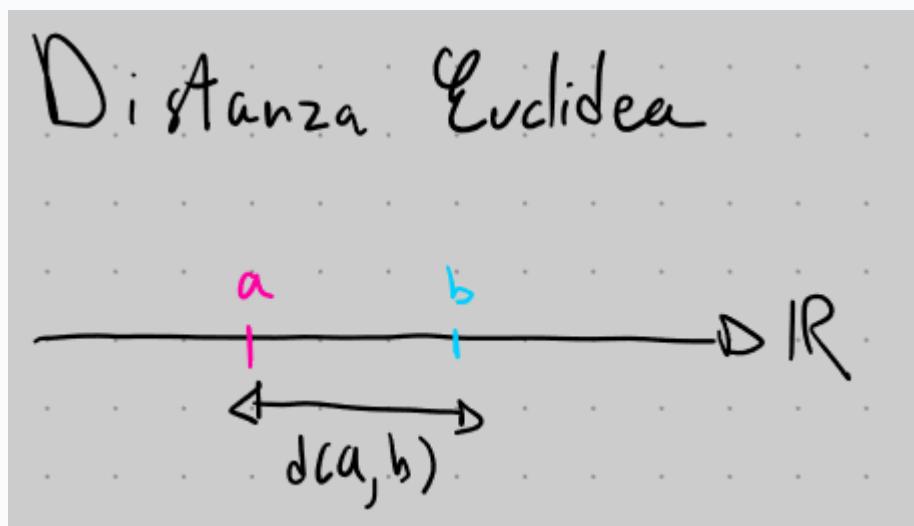
### Definizione (Distanza Euclidea.).

Siano  $x, y \in \mathbb{R}$ , allora definisco la *distanza* (oppure *distanza euclidea*) di  $x, y$  il valore

$$d(x, y) = |x - y|$$

### FIGURA 1.1. (Idea grafica della distanza)

Graficamente questo corrisponde, appunto, alla distanza tra due punti sulla retta reale.



Possiamo verificare alcune proprietà di questa applicazione ([Funzioni](#)); la prima essendo la proprietà **antiriflessiva**.

#Proposizione

Proposizione (Antiriflessività.).

$$\forall x, y \in \mathbb{R}; d(x, y) \geq 0 \wedge d(x, y) \iff x = y$$

#Proposizione

Proposizione (Proprietà simmetrica.).

$$\forall x, y \in \mathbb{R}; d(x, y) = d(y, x)$$

#Proposizione

Proposizione (Disuguaglianza Triangolare.).

Analogamente alle disuguaglianze triangolari già viste nei numeri [complessi](#) (**PROP. 4.7.**) e col [valore assoluto](#) (**OSS 3.1.1.**) si verifica che

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}; d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

#Dimostrazione

**DIMOSTRAZIONE** della [proposizione 1.3.](#) (Proposizione 4 (Disuguaglianza Triangolare.))

Infatti dall'[osservazione 3.1.1.](#) di [Funzioni di potenza, radice e valore assoluto](#) so che se

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

può essere applicato con  $a = x - y$  e  $b = y - z$ , così diventa

$$|x - z| \leq |x - y| + |y - z| \iff d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \blacksquare$$

#Osservazione

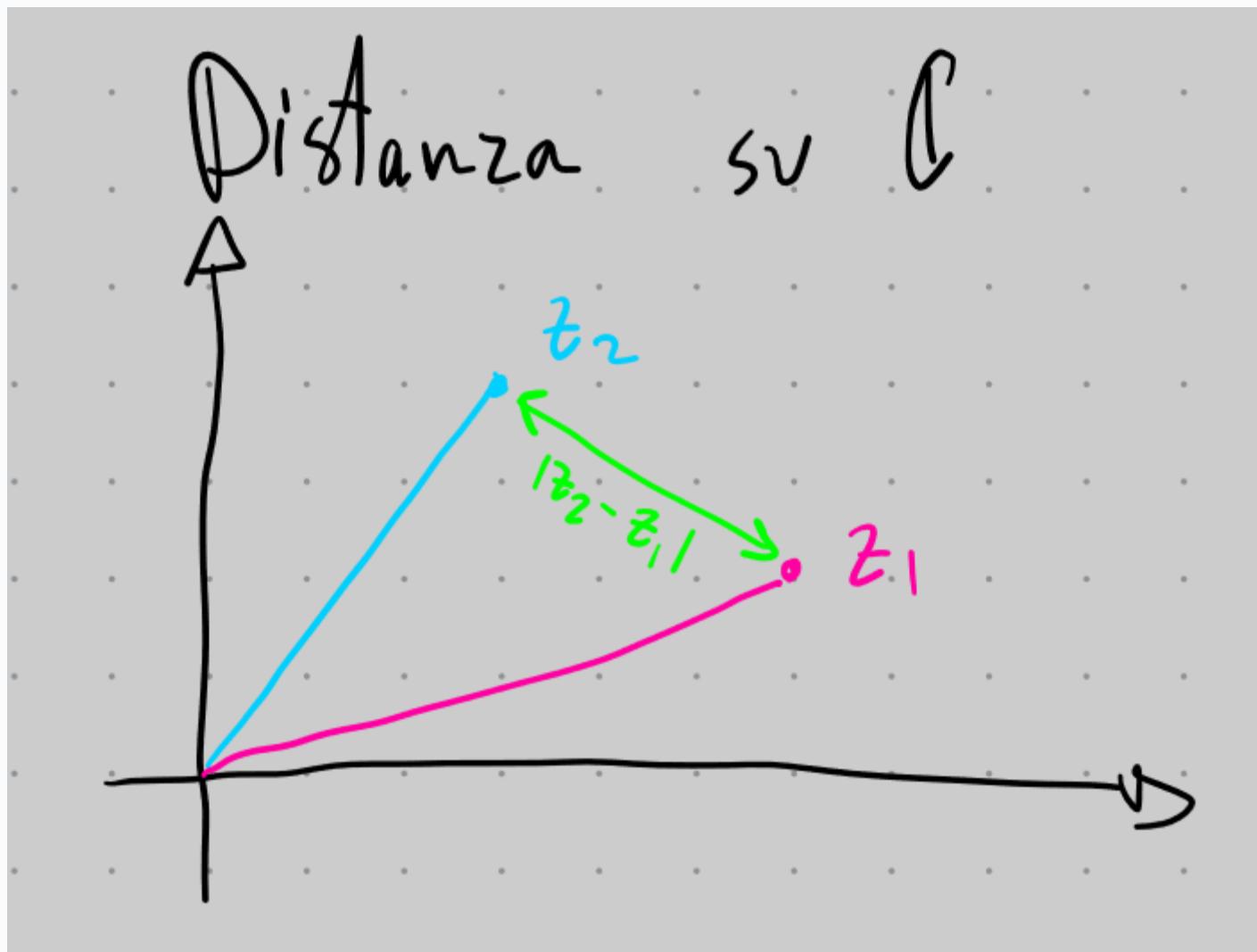
Osservazione (distanza euclidea sui complessi).

Noto che questa nozione di [distanza euclidea](#) può essere anche definita sui numeri complessi  $\mathbb{C}$ ; infatti posso porre

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$$

Inoltre scopriamo che questa definizione della distanza euclidea su  $\mathbb{C}$  conserva le tre proprietà (**PROP 1.1., 1.2., 1.3.**) appena enunciate. Pertanto è possibile "**far coincidere**" **modulo** e **distanza euclidea** in quanto vi è un **isomorfismo** tra queste due applicazioni.

**FIGURA 1.1.** (Idea della distanza euclidea su  $\mathbb{C}$ )



## 2. Intorno centratò aperto di centro $x$ e di raggio $r$

#Definizione

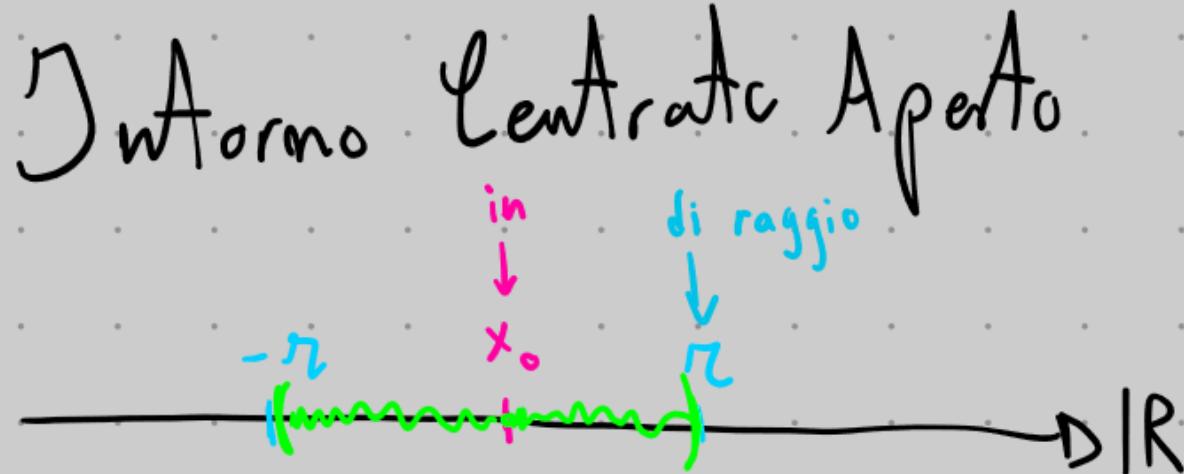
Definizione (Intorno centrato.).

Sia  $x_0 \in \mathbb{R}$  e sia  $r \in \mathbb{R}, r > 0$ ; allora chiamo "**l'intorno centrato aperto di centro  $x_0$  e di raggio  $r$** " l'intervallo aperto (Intervalli > ^6d6e94)

$$]x_0 - r, x_0 + r[ = \{x \in \mathbb{R} : d(x, x_0) < r\}$$

un altro nome può essere la **palla aperta di centro  $x_0$  e di raggio  $r$**

Quindi questo è l'insieme di **tutti i punti di  $\mathbb{R}$  che hanno distanza da  $x_0$  meno di  $r$** .



## #Osservazione

Osservazione (intorno centrato aperto nei complessi).

Come fatto nell'[osservazione 1.1.](#) ([Osservazione 5 \(distanza euclidea sui complessi\)](#)), questa nozione di *intorno centrato aperto* può essere applicato a  $\mathbb{C}$  usando la nozione di *modulo*; infatti graficamente questa corrisponde ad una *palla* in 2D di centro  $z_0$  e di raggio  $r$ . (*Figura 2.1.*)

## #Osservazione

Osservazione (intorno centrato aperto nello spazio tridimensionale).

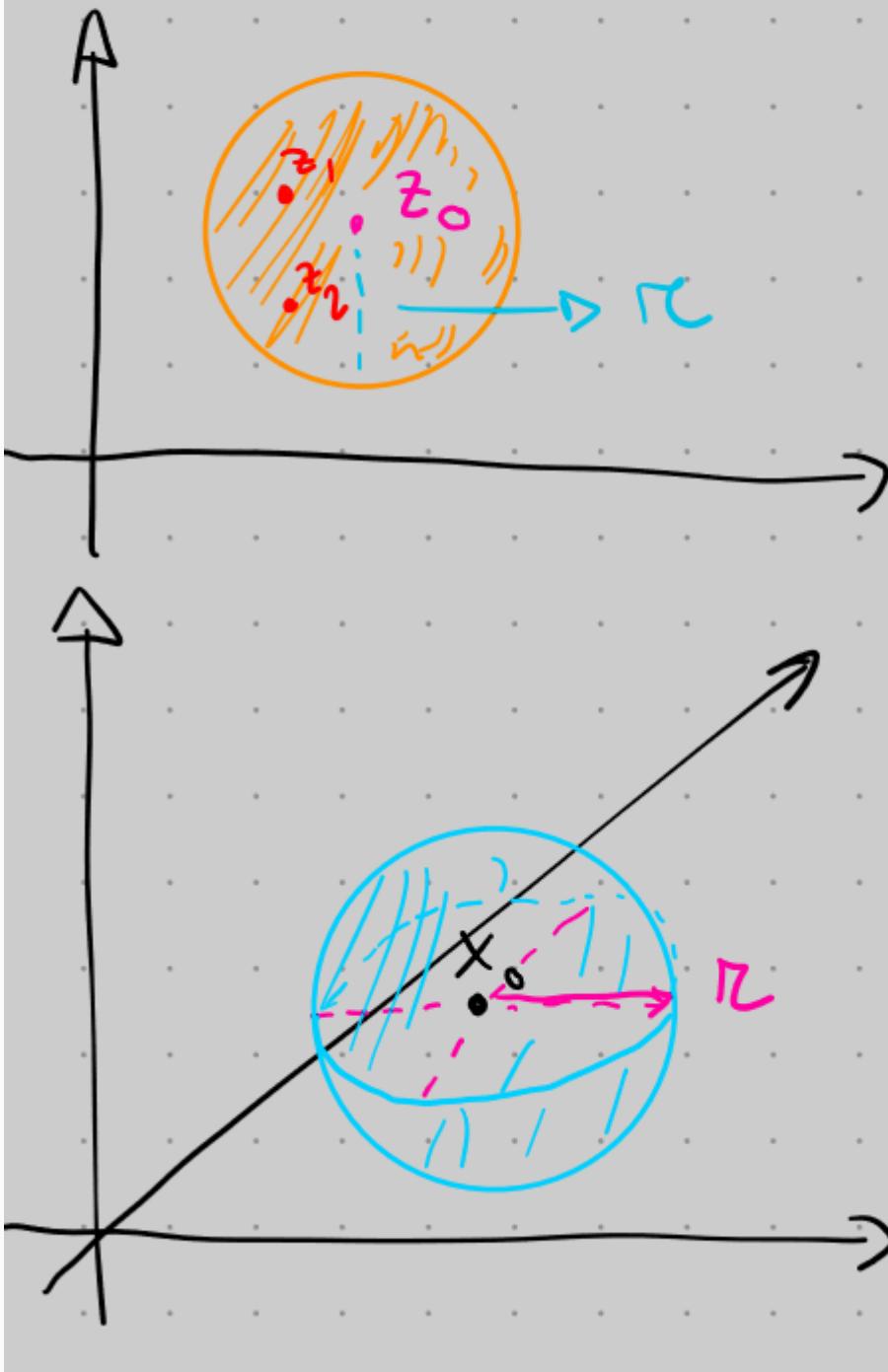
Allora si può definire l'*intorno centrato aperto* in  $\mathbb{R}^3$  dove definisco

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^3; d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$$

E graficamente questa corrisponde ad una vera *palla*. Letteralmente. (*Figura 2.1.*)

**FIGURA 2.1.** (*Intorno in  $\mathbb{C}, \mathbb{R}^3$* )

Intorno centrato aperto  
in  $\mathbb{C}$  e  $\mathbb{R}^3$



### 3. Intorno

#Definizione

Definizione (Intorno di un punto.).

Sia  $x_0 \in \mathbb{R}$ , chiamo allora l'**intorno di  $x_0$**  un *qualsiasi insieme E di  $\mathbb{R}$*  che contiene una *palla aperta di centro  $x_0$  e raggio r* (Definizione 6 (Intorno centrato.)).

**FIGURA 3.1.** (*Idea di intorno*)

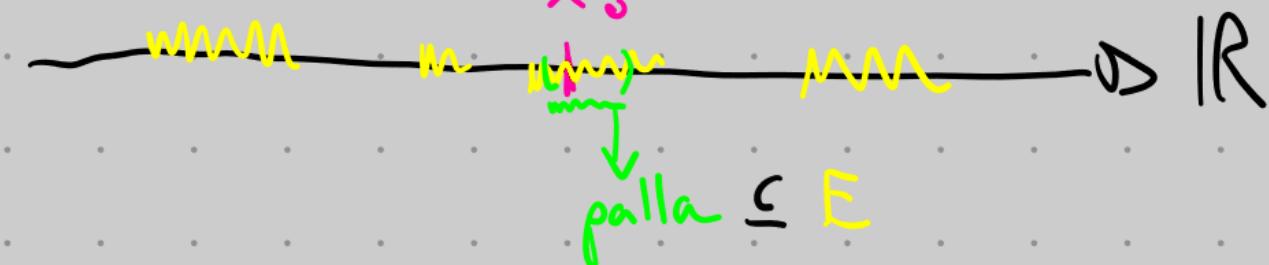
Intorno

$E$

$di$

$x$

$E$



#Definizione

Definizione (Intorno di  $\pm\infty$ ).

Prendo  $\tilde{\mathbb{R}}$  l'*insieme dei reali estesi*, ovvero

$$\tilde{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

e definisco l'*intorno di  $a$*  un *qualunque sottoinsieme*  $E \subseteq \tilde{\mathbb{R}}$  che contiene una *semiretta*  $[a, +\infty[$ ; ovvero un insieme *superiormente illimitato* (Definizione 8 (insieme superiormente illimitato)) del tipo  $[a, +\infty[$ .

**FIGURA 3.2.** (*Idea dell'intorno di  $\pm\infty$* )



## Esempi

#Esempio

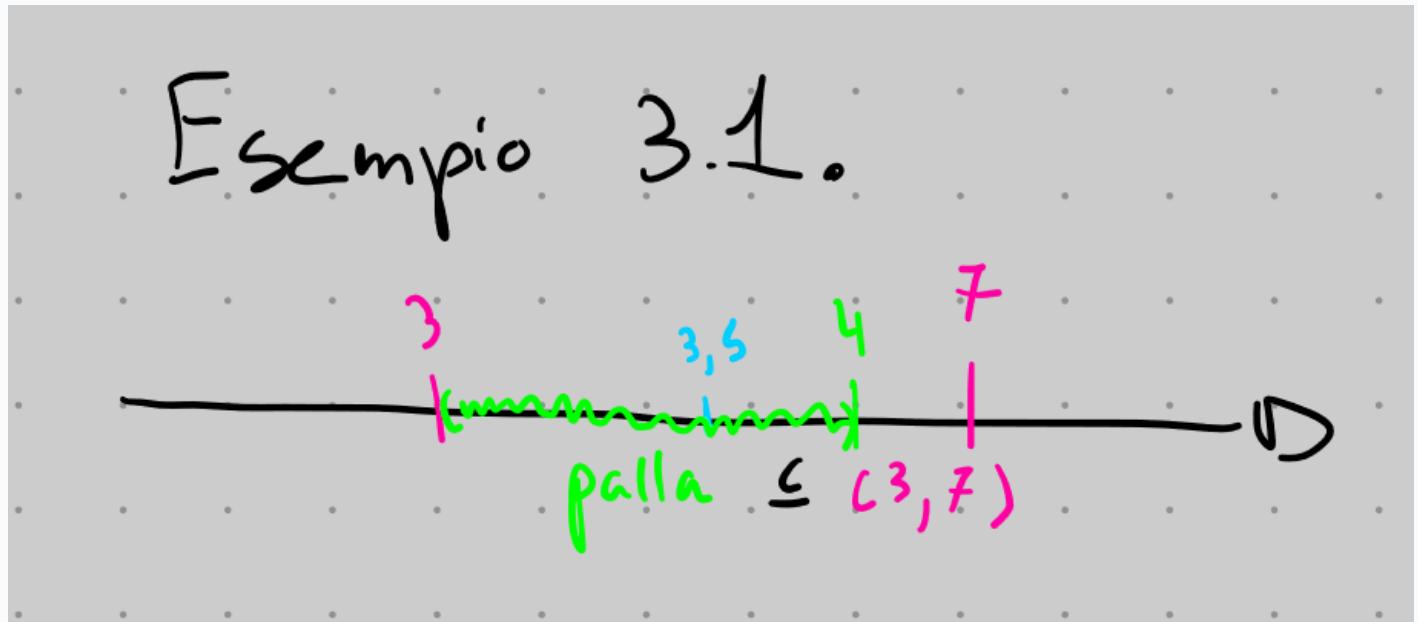
Esempio (Esempio 3.1.).

L'intervallo  $]3, 7[$  è intorno di 3,5; infatti è possibile prendere  $r = 0,5$  e ottenere la *palla aperta di centro* 3,5 e *di raggio* 0,5 che equivale a

$$]3, 4[$$

che infatti è contenuto nell'intervallo  $]3, 7[$  (*figura 3.2.*)

**FIGURA 3.2.** (*Esempio grafico*)



#Esempio

### Esempio (Esempio 3.2.).

Se prendendo l'insieme

$$S = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$$

e il punto  $x_0 = \frac{1}{2}$ , scopriamo che  $S$  *non* è intorno di  $x_0$ ; infatti prendendo per qualsiasi  $r$  non riesco a formare una palla attorno a  $x_0$ , in quanto  $S$  è definita sui numeri naturali che contiene dei "*buchi*".

#Esempio

### Esempio ( $\mathbb{R}$ è intorno di $+\infty$ ?).

Considerando i *numeri naturali* (Numeri Naturali - Sommario), ci chiediamo se questo insieme è *intorno di*  $+\infty$ ; la risposta è *no*: esistono degli elementi in  $\mathbb{R}$  che non sono contenuti in  $\mathbb{N}$ , come ad esempio i numeri razionali.

Tuttavia se consideriamo l'insieme  $\mathbb{N} \cup ]100, +\infty[$  allora la risposta è *sì* in quanto si

## A2. Punti interni, esterni e di frontiera per un insieme

### Punti interni, esterni e di frontiera

*Definizioni di punti interni, punti interni e punti di frontiera. Esempi.*

## 0. Preambolo

Questo argomento presuppone la conoscenza dell'argomento di [Intervalli](#).

## 1. Punto interno

#Definizione

**Definizione** (Punto interno ad un insieme, l'insieme dei punti interni.).

Sia  $E \subseteq \mathbb{R}$  e  $x_0 \in \mathbb{R}$ , si definisce  $x_0$  *punto interno* a  $E$  se viene verificato che

$$\exists r > 0 : ]x_0 - r, x_0 + r[ \subseteq E$$

ovvero se esiste un *intorno* di  $x_0$  che è contenuto in  $E$  ([Intorni](#), **DEF 3.1.**).

Inoltre chiamo *l'insieme dei punti interni a*  $E$  come  $E^\circ$ .

## Esempio di punto interno

#Esempio

**Esempio** (Esempio 1.1.).

Sia

$$E = \{1\} \cup [2, 3)$$

e voglio trovare *l'insieme dei punti interni*  $E^\circ$ .

Per farlo devo innanzitutto disegnare il grafico di  $E$  per poter capire come procedere ([figura 1.1.](#)).

Ora "provo" ogni numero fissando  $x_0$  il numero scelto.

Scegliendo  $x_0 = 1$  vedo chiaramente che non è *punto interno*, in quanto è

impossibile che esista un intorno centrato a raggio  $r$  ad esso.

Scegliendo  $x_0 = 2$  vedo che neanche questo è un *punto interno*; non riesco a definire un intorno centrato tale che a "sinistra" di 2 c'è un punto appartenente a  $E$ .

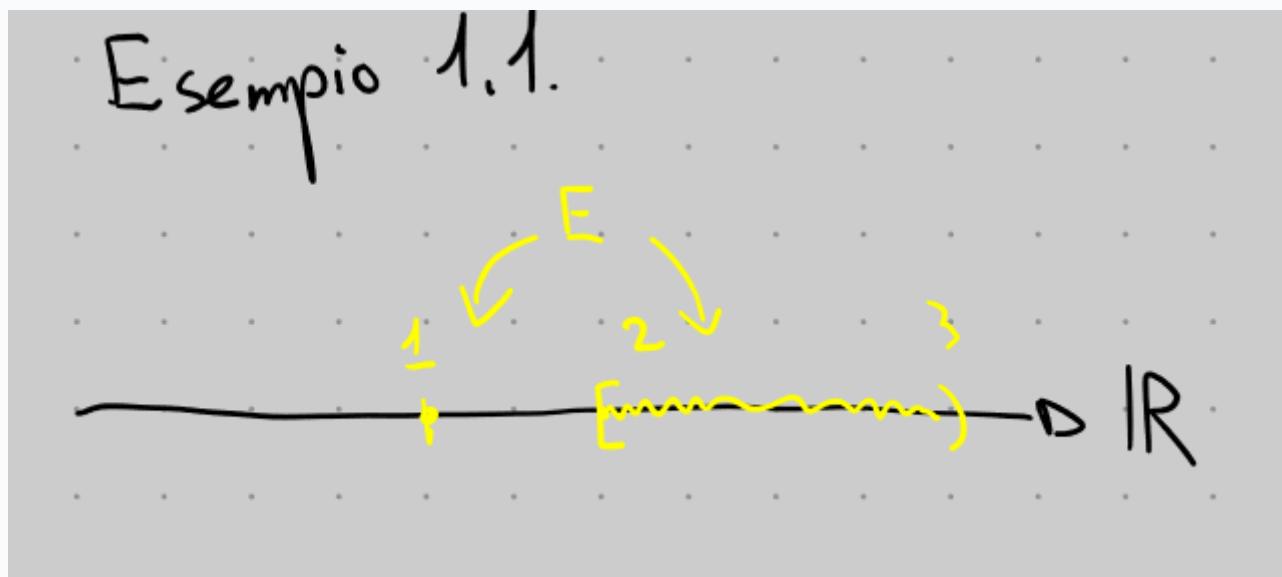
Però scegliendo  $x_0 = 2.001$  è possibile; infatti posso definire un intorno di  $x$  con  $r = 0.001$ .

Analoghi i discorsi per  $x_0 = 3$  e  $x_0 = 2.999$

Concludo allora che

$$E^\circ = (2, 3)$$

**FIGURA 1.1.** (*Esempio 1.1.*)



## 2. Punto esterno

#Definizione

**Definizione (Punto esterno ad un insieme).**

Un punto  $x_0 \in \mathbb{R}$  si dice *esterno ad un insieme*  $E \subseteq \mathbb{R}$  se è *interno* al complementare di  $E$ , ovvero  $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}E$  (Operazioni con gli Insiemi > ^080cd5). Quindi

$$x_0 \text{ è esterno} \iff \exists r > 0 : (x_0 - r, x_0 + r) \subseteq \mathcal{C}_{\mathbb{R}}E$$

## Esempio di punto esterno

**ESEMPIO 2.1.** Considerando l'esempio di prima con

$$E = \{1\} \cup [2, 3)$$

ora vogliamo trovare *l'insieme di tutti i punti esterni*. Allora usando lo stesso grafico di prima, faccio esattamente i stessi procedimenti di prima considerando però il

Usando la stessa procedura nell'[esempio 1.1.](#), troviamo che

$$\{\text{punti esterni di } E\} = (-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (3, +\infty)$$

**FIGURA 2.1.** ([Esempio 2.1.](#))



### 3. Punti di frontiera

#Definizione

**Definizione** (Punto di frontiera per un insieme, insieme dei punti di frontiera.).

Un punto  $x_0 \in \mathbb{R}$  si dice *di frontiera per  $E$*  se questo punto *non è né interno né esterno ad  $E$* .

Inoltre definiamo *l'insieme dei punti di frontiera* di  $E$  come

$$\{\text{punti di frontiera per } E\} := \partial E$$

e si legge come "*delta storto  $E$* "

#Osservazione

**Osservazione** (Osservazione 3.1. (significato logico della definizione punto di frontiera)).

Questa definizione equivale a negare la proposizione

$$[\exists r > 0 : (x_0 - r, x_0 + r) \subseteq E] \vee [\exists r' > 0 : (x_0 - r', x_0 + r') \subseteq C_E]$$

Allora secondo le *leggi di De Morgan* e delle regole della logica formale ([Logica formale - Sommario](#)) questo diventa

$$[\forall r > 0, (x_0 - r, x_0 + r) \not\subseteq E] \wedge [\forall r' > 0, (x_0 - r', x_0 + r') \not\subseteq C_E]$$

Inoltre, dato che

$$A \not\subseteq B \iff A \cap C_U B \neq \emptyset$$

ovvero che un insieme  $A$  non è sottoinsieme di  $B$  se e solo se l'intersezione tra  $A$

$$[\forall r > 0, (x_0 - r, x_0 + r) \cap CE \neq \emptyset] \wedge [\forall r' > 0, (x_0 - r', x_0 + r') \cap E \neq \emptyset]$$

In definitiva l'essere *punto di frontiera* per  $E$  equivale a soddisfare il seguente predicato:

"*Ogni* intorno di  $x_0$  deve contenere *sia* punti di  $E$  e il suo complemento  $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}E$ ".

## Esempi misti e di punti di frontiera

#Esempio

### Esempio (Esempio 3.1.).

Considerando lo stesso esempio di prima, ovvero

$$E = \{1\} \cup [2, 3)$$

vogliamo trovare  $\partial E$ .

Procedendo con lo stesso disegno, cerchiamo di "*provare*" ogni punto per trovare elementi di  $\partial E$ .

$x_0 = 0$ ; Questo non è elemento di  $\partial E$ , in quanto posso facilmente trovare un intorno che contenga *solo* elementi del complemento di  $E$ .

$x_0 = 1$ ; Provando a considerare ogni intorno di  $x_0$  trovo che deve per forza dev'esserci un punto sia in  $E$  che nel suo complemento.

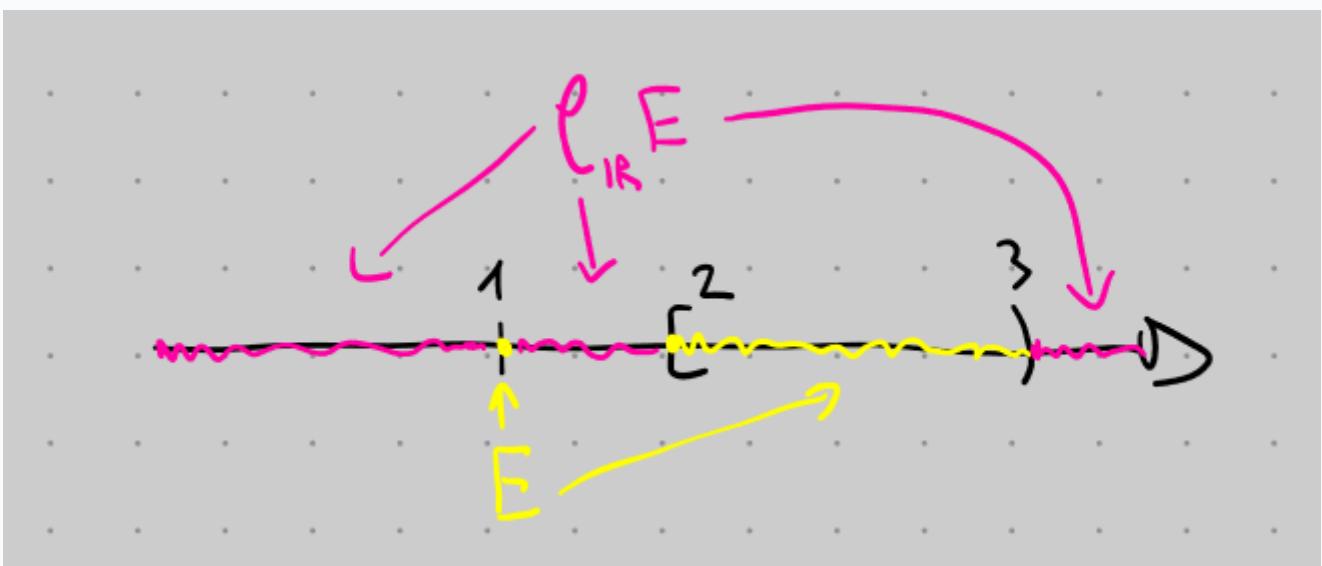
$x_0 = 2$ ; Stesso discorso analogo di prima.

$x_0 = 3$ ; Di nuovo lo stesso discorso.

$x_0 = 2, 5$ ; Qui invece è possibile trovare un intorno che contenga *solo* punti di  $E$ .

Ad esempio un intorno centratoy in 2,5 con raggio  $r = 0,1$ .

**FIGURA 3.1.** (Esempio 3.1.)



## Esempio (Esempio 3.2.).

Consideriamo finalmente dei casi diversi da quelli esaminati prima. Sia

$$E = \mathbb{Q} \cap (1, 2)$$

ovvero tutti i numeri *razionali* compresi tra 1, 2 esclusi.

Scopro le seguenti:

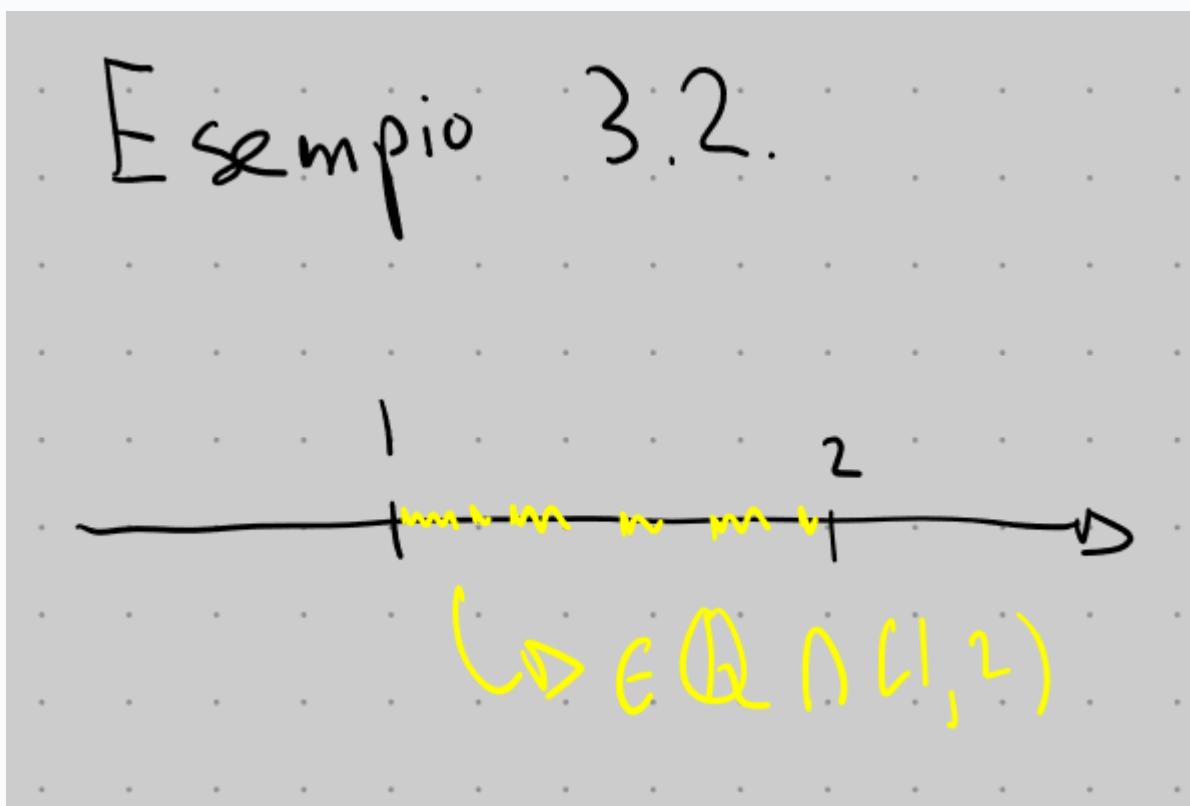
$E^\circ = \emptyset$ ; infatti in questo insieme *non* vi ci sono punti interni, in quanto l'*assioma di separazione* non vale in  $\mathbb{Q}$  (*Assiomi dei Numeri Reali*, **S**), **OSS 6.2.**); quindi ci sono sempre dei "*buchi*" tra due numeri razionali, ovvero dei numeri irrazionali. Infatti è possibile dimostrare che i numeri irrazionali sono *densi* in  $\mathbb{R}$ .

$\partial E = [1, 2]$ ; qui si verifica un fenomeno strano, ovvero che si verifica che  $\partial E$  è più "*grande*" di  $E$  stessa.

Questo si verifica perché, da un lato abbiamo la *densità di  $\mathbb{Q}$  in  $\mathbb{R}$*  (*Conseguenze dell'esistenza dell'estremo superiore*, **TEOREMA 4.1.**); infatti se considero un punto  $q_0$  in  $\mathbb{Q}$  e considero gli "*estremi*" del suo intorno  $(q_0 - r, q_0 + r)$  allora tra  $q_0 - r$  e  $q_0 + r$  dev'esserci almeno un numero razionale.

Però allo stesso tempo, come visto prima, i numeri irrazionali sono *densi* in  $\mathbb{R}$ ; di conseguenza se ci sono sia dei numeri razionali (appartenenti a  $E$ ) che dei irrazionali (appartenenti al complemento di  $E$ ) allora vediamo che tutti i punti di  $E$  (gli estremi inclusi) sono *punti di frontiera*.

**FIGURA 3.2.** (Esempio 3.2.)



## Insiemi aperti e chiusi

Definizione di insieme aperto e chiuso. Teorema sugli insiemi aperti e chiusi.

### 1. Insieme aperto

#Definizione

Definizione 1.1. (Insieme Aperto.).

Sia  $A \subseteq \mathbb{R}$ ; l'insieme  $A$  si dice **aperto** se e solo se *tutti i suoi punti sono punti interni all'insieme stesso* (Definizione 1 (Punto interno ad un insieme, l'insieme dei punti interni.)); ovvero se

$$\forall x_0 \in A, \exists r > 0 : (x_0 - r, x_0 + r) \subseteq A$$

#Osservazione

Osservazione (condizione necessaria e sufficiente per l'essere aperto di un insieme).

Osservo che l'insieme  $A$  è aperto *se e solo se*  $A = A^\circ$ .

### Esempi di insiemi aperti

#Esempio

Esempio (Esempio 1.1.).

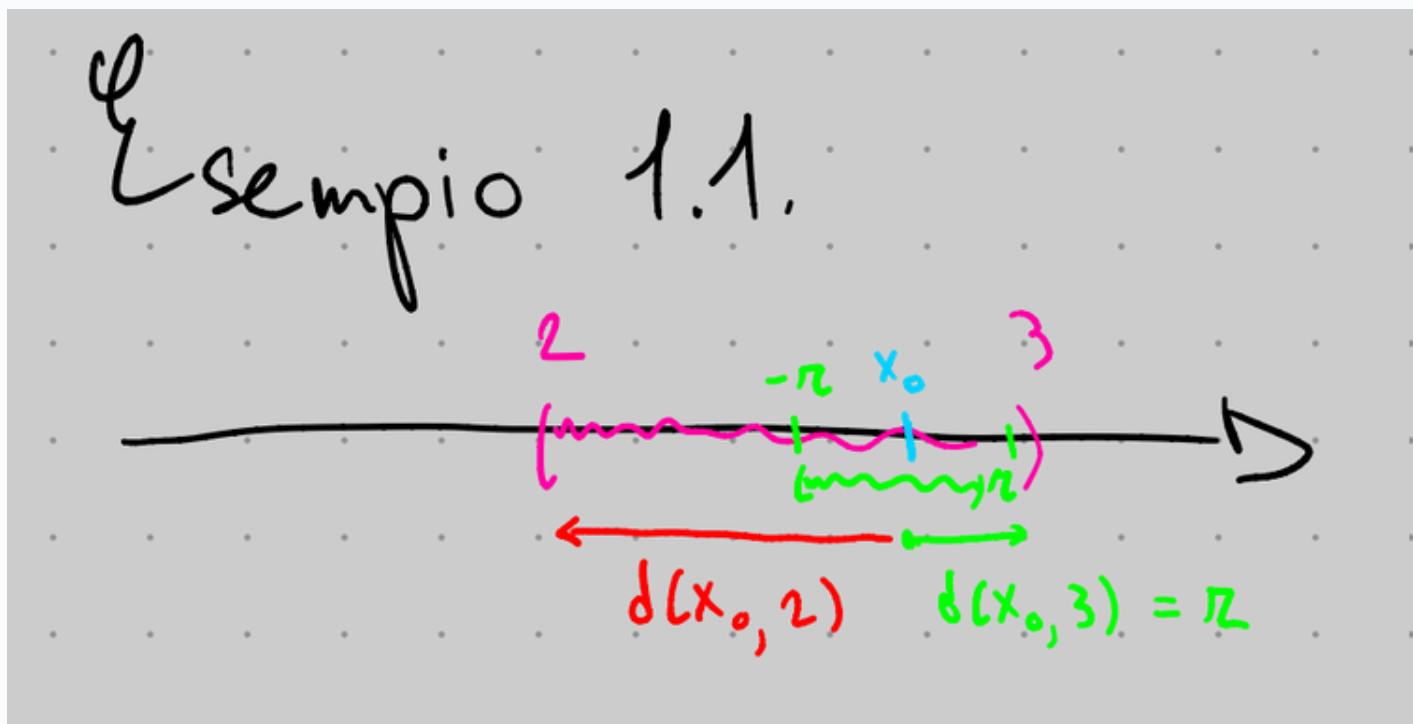
Considero *l'intervallo aperto* (Intervalli > ^6d6e94)

$$(2, 3)$$

voglio sapere se questo è *insieme aperto*; scegliendo un qualunque punto  $x$  all'interno di questo intervallo, allora posso sicuramente trovare un intorno in  $x$  tale per cui contiene *solo* elementi di  $(2, 3)$ . Infatti se scelgo  $r$  come la *distanza minima* tra  $x$  e ciascun estremo, scopro che l'*intorno centratò aperto* di questo raggio (Intorni) contiene *solo* punti di  $E$  (dunque esso è *sottoinsieme* di  $E$ ). Formalizzando questo ragionamento, ho

Graficamente questo ragionamento corrisponde alla *figura 1.1.*

**FIGURA 1.1.** (*Esempio 1.1.*)



#Esempio

Esempio (Esempio 1.2.).

Ora considero l'insieme

$$E = \{1\} \cup [2, 3)$$

che *non è aperto*, in quanto considerando  $x_0 = 1$  trovo che questo elemento (o punto) non è *interno* a  $E$ . Analogamente il discorso per  $x_0 = 2$ .

## 2. Insieme chiuso

#Definizione

Definizione 2.1. (Insieme Chiuso.).

Considerando un insieme  $C \subseteq \mathbb{R}$ , si dice che esso è *chiuso* se il suo *complemento* è *aperto*. Ovvero se  $C^c_{\mathbb{R}}$  è aperto.

## Esempi di insiemi chiusi

Esempio (Esempio 2.1.).

$$C = [2, 5]$$

Considerando il suo complemento

$$\mathcal{C}_{\mathbb{R}} C = (-\infty, 2) \cup (5, +\infty)$$

vediamo che questo insieme (il complemento) è *aperto*; infatti ad ogni punto  $x_0$  del complemento vediamo che è possibile definire un  $r$  tale che l'*intorno centrato aperto* di questo raggio sia sottoinsieme di  $\mathcal{C}_{\mathbb{R}} C$ .

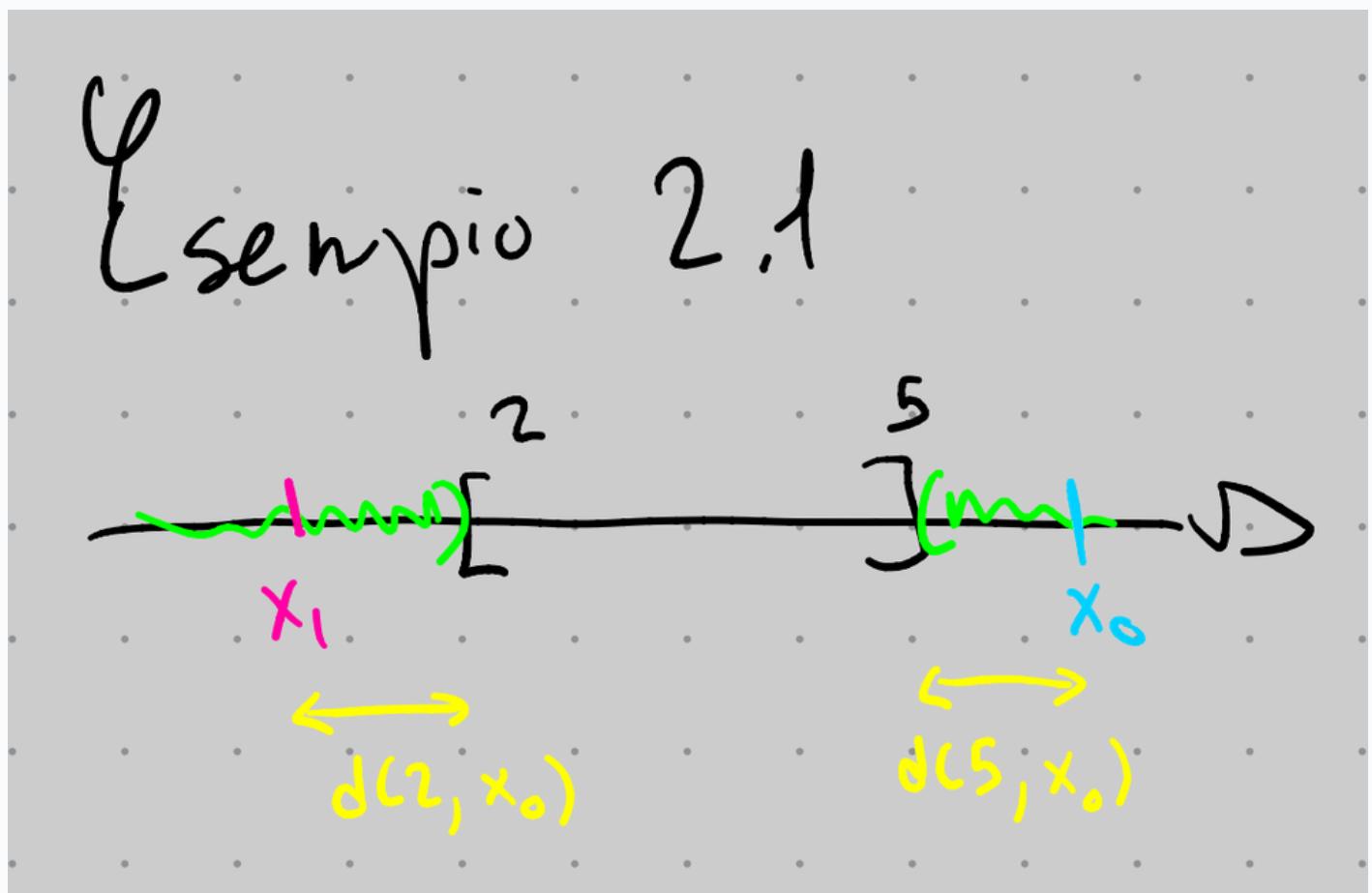
Infatti definendo  $r$  come

$$r = \begin{cases} d(2, x_0) & \text{per } x_0 < 2 \\ d(5, x_0) & \text{per } x_0 > 5 \end{cases}$$

sicuramente troviamo che tutti i punti  $x_0$  sono interni al complemento di  $C$ .

Graficamente questo ragionamento corrisponde alla *figura 2.1.*

**FIGURA 2.1.** (Esempio 2.1.)



### 3. Teoremi sugli insiemi aperti e chiusi

#Teorema

Teorema (Proprietà degli insiemi aperti.).

## 1. Gli insiemi

 $\emptyset, \mathbb{R}$ sono *insiemi aperti*

2. L'*unione* ([Operazioni con gli Insiemi](#)) di due *insiemi aperti* è sicuramente un *insieme aperto*.
3. L'*intersezione* ([Operazioni con gli Insiemi](#)) di due *insiemi aperti* è sicuramente un *insieme aperto*.

## #Teorema

**Teorema** (Proprietà degli insiemi chiusi.).

Abbiamo invece le stesse proposizioni per gli insiemi chiusi:

## 1. Gli insiemi

 $\emptyset, \mathbb{R}$ sono *insiemi chiusi*

2. L'*unione* ([Operazioni con gli Insiemi](#)) di due *insiemi chiusi* è sicuramente un *insieme chiuso*.
3. L'*intersezione* ([Operazioni con gli Insiemi](#)) di due *insiemi chiusi* è sicuramente un *insieme chiuso*.

## #Osservazione

**Osservazione** (basta dimostrare solo uno dei due teoremi).

Notiamo che se dimostriamo almeno uno di questi due teoremi, allora si ha automaticamente dimostrato l'altro teorema, in quanto la [definizione dell'insieme chiuso](#) ([Definizione 2.1. \(Insieme Chiuso\)](#)) ci suggerisce che le stesse proprietà valgono.

Infatti, la definizione dell'insieme chiuso si basa sulla definizione dell'insieme aperto, tenendo però conto del complementare dell'insieme; perciò basta tenere conto delle leggi di [De Morgan](#) ([Logica formale - Sommario](#)).

**DIMOSTRAZIONE** del [teorema 3.1. \(Teorema 5 \(Proprietà degli insiemi aperti.\)\)](#)

$\emptyset$ 

non ha *nessun elemento*; per verificare se questo insieme vuoto è *aperto*, bisognerebbe allora verificare che *tutti* gli elementi di questo insieme gode della proprietà necessaria. Pertanto si può pensare che tutti gli elementi (ovvero nessuno) di questo insieme può godere *tutte* le proprietà che si vuole. Altrimenti è possibile pensare in termini di insiemi complementari.

Per quanto riguarda l'insieme dei numeri reali

 $\mathbb{R}$ 

e prendendo un elemento  $x_0 \in \mathbb{R}$  allora si trova automaticamente che

$$\forall r > 0, (x_0 - r, x_0 + r) \subseteq \mathbb{R}$$

è verificata.

## 2. Sia

$$\{A_i, i \in I\}$$

un insieme di *insiemi aperti*. Per un insieme del genere vedere [esempio 3.2..](#)

Allora considero un

$$x_0 \in \bigcup_{i \in I} A_i$$

Allora da ciò discende che esiste un  $\bar{i}$  tale che il punto  $x_0$  appartenga all'insieme aperto  $A_{\bar{i}}$ , ovvero

$$x_0 \in A_{\bar{i}}$$

Allora è vero che esiste una *palla aperta* ([Definizione 6 \(Intorno centrato.\)](#)) che venga contenuta in quell'insieme aperto. Ovvero

$$x_0 \in A_{\bar{i}} \implies \exists r > 0 : (x_0 - r, x_0 + r) \subseteq A_{\bar{i}}$$

Ma allora ciò implica che

$$\exists r > 0 : (x_0 - r, x_0 + r) \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$$

3. Siano  $A_1$  e  $A_2$  due insiemi aperti; scelgo allora un  $x_0 \in (A_1 \cap A_2)$ . Quindi ciò vuol dire che

$$x_0 \in (A_1 \cap A_2) \implies \begin{cases} x_0 \in A_1 \implies \exists r_1 > 0 : (x_0 - r_1, x_0 + r_1) \subseteq A_1 \\ x_0 \in A_2 \implies \exists r_2 > 0 : (x_0 - r_2, x_0 + r_2) \subseteq A_2 \end{cases}$$

$$r = \min(r_1, r_2)$$

Allora ho che

$$(x_0 - r, x_0 + r) \subseteq (A_1 \cap A_2)$$

il che vuol dire l'intersezione tra  $A_1$  e  $A_2$  è aperto. ■ ■ ■

### #Osservazione

Osservazione (l'intersezione infinita tra insiemi aperti non è un aperto).

Però questo *non* vuol dire che l'*intersezione infinita* tra insiemi aperti debba essere necessariamente *aperta*: infatti si propone il seguente controesempio.

### #Esempio

Esempio (controesempio per l'osservazione 3.2.).

Considero la *successione di intorni*

$$(I_n)_n : I_n = \left(1 - \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}\right)$$

e vediamo che l'intervallo  $I_n$  è aperto per ogni  $n$ .

Inoltre gli intervalli  $(I_n)_n$  sono *inscatolati* (Definizione 7 (intervalli inscatolati)).

Disegnando il grafico (*lasciato al lettore per esercizio*) notiamo che se prendiamo l'intersezione di tutti gli intervalli

$$\bigcap_n I_n$$

i numeri compresi tra 1, 2 stanno sicuramente all'interno di questo intervallo, come si può evincere dal grafico; invece per la *proprietà di Archimede* (Teorema 3 (Archimedicità di  $\mathbb{R}$ )), per ogni numero che sta fuori da  $[1, 2]$ , esiste un intervallo  $I_n$  che non lo include; ovvero

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N} : 1 - \varepsilon &\notin I_n \\ 2 + \varepsilon &\notin I_n \end{aligned}$$

(*la dimostrazione completa è lasciata al lettore*)

Allora si può concludere che

$$\bigcap_n I_n = [1, 2]$$

che *non* è un *insieme aperto*.

#Esempio

Esempio (famiglia di insiemi aperti).

Un insieme del tipo presentato nella dimostrazione può essere

$$\left\{ \left(1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right); n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}$$

## A4. Punti di aderenza e di accumulazione

### Punti di aderenza e di accumulazione

Definizione di punto di aderenza e di accumulazione. La chiusura e il derivato di un insieme. Primo teorema di Bolzano-Weierstraß.

#### 1. Punti di aderenza (o di chiusura)

#Definizione

Definizione (Punto di aderenza o di chiusura per un insieme, chiusura di un insieme.).

Sia  $E \subseteq \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

Allora  $x_0$  si dice *punto di chiusura (o di aderenza)* per  $E$  se è vera la seguente:

$$\forall r > 0 : ((x_0 - r, x_0 + r) \cap E) \neq \emptyset$$

Ovvero in ogni *palla/intorno centrato di  $x_0$*  ([Definizione 9 \(Intorno di un punto.\)](#)) devono esserci elementi di  $E$ .

Inoltre definiamo l'insieme dei *punti di chiusura* dell'insieme  $E$  si dicono la *chiusura (o aderenza) di  $E$* , scritto come  $\overline{E}$ .

#Esempio

Esempio (Esempio 1.1.).

Consideriamo l'insieme  $E = (1, 2)$  e voglio trovare gli elementi di  $\overline{E}$ .

Per farlo è possibile disegnare il grafico di  $E$ , poi "**testare**" ogni elemento della retta  $\mathbb{R}$  per vedere quali sono i potenziali elementi di  $\overline{E}$ .

Si evince che:

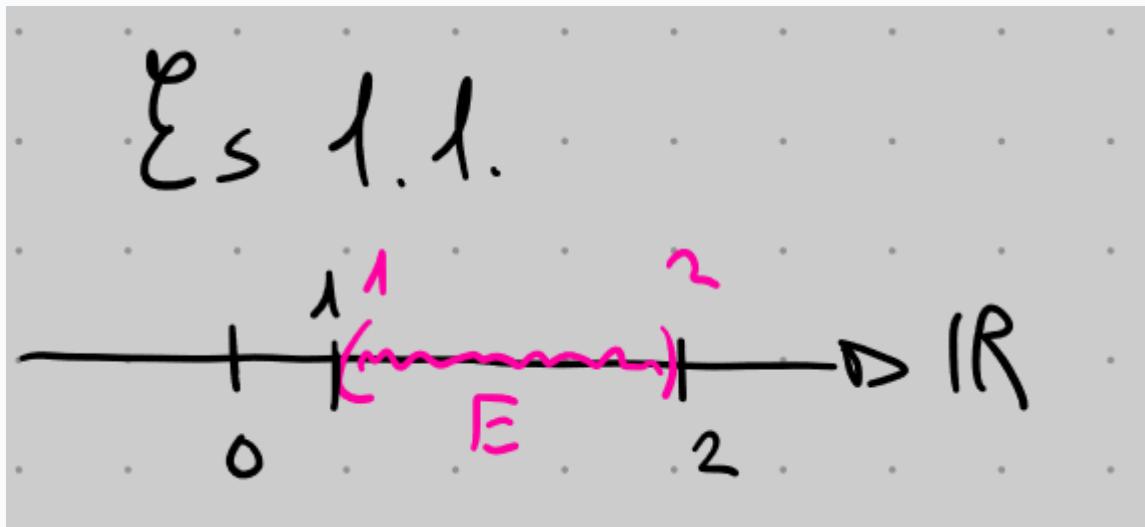
I numeri  $0, \frac{1}{2}$  **non** sono *punti di aderenza* per  $E$ , in quanto è possibile individuare **almeno** un intorno fuori da  $E$  (ovvero che non contenga elementi di  $E$ ).

$1$  è un *punto di aderenza*, in quanto per tutti gli intorni in  $x_0$  abbiamo sempre almeno un elemento di  $E$ ; infatti si deve sempre "*andare a destra*", "*entrando*" in  $E$ . Analogamente il discorso per  $2$ .

In conclusione è possibile individuare

$$\overline{E} = [1, 2]$$

**FIGURA 1.1.** (*Esempio 1.1.*)



#### #Osservazione

Osservazione (proprietà della chiusura).

Osserviamo che per ogni insieme è vera che

$$E \subseteq \overline{E}$$

(da rielaborare meglio, forse da dimostrare formalmente)

#### #Esempio

Esempio (Esempio 1.2.).

Considero l'insieme

$$E = \left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$$

poi voglio trovare le seguenti:  $\overline{E}$ ,  $E^\circ$ ,  $\partial E$ .

$\overline{E} = E \cup \{0\}$  e  $\partial E = E \cup \{0\}$ ; a questi insiemi aggiungiamo il numero 0 in quanto per l'Archimedicità di  $\mathbb{R}$  (Conseguenze dell'esistenza dell'estremo superiore,

**TEOREMA 3.1.**) è sempre possibile trovare un  $n$  tale che

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n : 0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

$E^\circ = \emptyset$ ; infatti  $E$  è definita tramite gli  $\mathbb{N}$ , che presenta dei "buchi" in  $\mathbb{R}$ .

#Esempio

Esempio (Esempio 1.3.).

Voglio studiare l'insieme dei *numeri razionali*  $\mathbb{Q}$  (Richiami sui Numeri Razionali).

Prima di tutto, sicuramente

$$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

per la *densità di  $\mathbb{Q}$  in  $\mathbb{R}$*  (Teorema 5 (Densità dei razionali nei reali.)). Ovvero da ciò consegue che prendendo un punto  $q_0 \in \mathbb{Q}$ , è possibile trovare sempre dei numeri razionali per qualsiasi *intorno* con  $r > 0$ . Infatti

$$\forall r > 0, \exists a \in \mathbb{Q} : q_0 + r > a > q$$

In secondo luogo vediamo che l'insieme dei punti di frontiera  $\partial \mathbb{Q}$  è anch'esso  $\mathbb{R}$  per motivi analoghi.

In definitiva, per *l'assioma di Dedekind* (Assiomi dei Numeri Reali > ^c29076) sappiamo che tra un numero razionale  $q_0$  e un altro numero (in questo caso prendiamo  $q_0 + r, \forall \varepsilon > 0$ ) dev'esserci un numero *irrazionale* che non appartiene a  $\mathbb{Q}$ ; allora non ci sono dei *punti interni* (Definizione 1 (Punto interno ad un insieme, l'insieme dei punti interni.)).

## Proprietà della chiusura

Possiamo enunciare le seguenti proprietà per la *chiusura* di  $E$ .

#Teorema

**Teorema** (Proprietà della chiusura  $\overline{E}$ ).

Sia  $E \subseteq \mathbb{R}$ , allora sono vere che:

1.  $\overline{E}$  è un *insieme chiuso* (Definizione 2.1. (Insieme Chiuso)). Per provare questo, bisognerebbe dimostrare che l'insieme complementare della chiusura di  $E$  è *aperto*; quindi bisogna considerare i punti che non stanno né

2.  $\overline{E}$  è *il più piccolo chiuso* che contiene  $E$ . Quindi ho in mente una *relazione d'ordine* (Relazioni, DEF 4.1.), ovvero dal punto di vista di quella d'inclusione. Ovvero

$$A > B \iff B \subseteq A$$

3. Un insieme  $E$  è *chiuso* se e solo se  $\overline{E} = E$

## 2. Punti di accumulazione

#Definizione

Definizione (Punto di accumulazione, derivato di un insieme.).

Sia  $E \subseteq \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Si dice che  $x_0$  è un **punto di accumulazione di  $E$**  se è vera che

$$\forall r > 0, (x_0 - r, x_0 + r) \cap E \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$$

ovvero un *punto di aderenza* escludendo però il punto  $x_0$  stesso; quindi un punto  $x_0$  è di accumulazione per  $E$  se in ogni intorno di  $x_0$  ci sono punti di  $E$  diversi da se stesso.

L'insieme dei *punti di accumulazione per  $E$*  si chiama *derivato* di  $E$ , demarcata col simbolo

$$\mathcal{D}E$$

e si legge come "*d corsivo maiuscolo*".

#Osservazione

Osservazione (significato di  $\pm\infty$  punto di accumulazione).

Come abbiamo definito degli *intorni di  $+\infty$  o di  $-\infty$*  (Definizione 10 (Intorno di  $\pm\infty$ )) è possibile definire anche  $+\infty$  o  $-\infty$ , in una maniera analoga, come *punti di accumulazione* di un insieme  $E$ . Un  $+\infty$  è punto di accumulazione per  $E$  vuol dire che si verifica il seguente:

$$\forall M > 0, (M, +\infty) \cap E \neq \emptyset$$

ovvero

$$\forall M > 0, \exists x_0 \in E : x > M$$

ovvero che per ogni semiretta a partire da  $M$ , dev'esserci almeno un elemento in comune tra questa semiretta e l'insieme  $E$  con  $+\infty$  come punto di accumulazione.

#Teorema

**Teorema** (di caratterizzazione degli punti di accumulazione.).

Sia  $E \subseteq \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$ .  $x_0$  è *punto di accumulazione per*  $E$  se e solo se in *ogni* intorno di  $x_0$  ci sono *infiniti* punti di  $E$ .

#Dimostrazione

**DIMOSTRAZIONE** del [teorema 2.1.](#) ([Teorema 9](#) (di caratterizzazione degli punti di accumulazione.))

Questa dimostrazione si articola in due sotto-dimostrazioni.

" $\Leftarrow$ ": Dimostriamo che *se in ogni intorno di  $x_0$  ci sono infiniti punti di  $E$ , allora  $x_0$  è di accumulazione per*  $E$ : questo è evidentemente vero, in quanto se in ogni intorno di  $x_0$  ci sono infiniti punti di  $E$ , allora dev'esserci almeno un elemento di  $E$  in questo intorno diverso da  $x_0$ .

" $\Rightarrow$ ": Ora notiamo il viceversa; ovvero che *se  $x_0$  è di accumulazione per*  $E$  *allora in ogni suo intorno ci sono infiniti punti di*  $E$ .

Per dimostrare questa proposizione, procediamo dimostrando la *contrapositiva*; ovvero che se in *ogni intorno di  $x_0$  ci sono elementi finiti di  $E$ , allora  $x_0$  non è punto di accumulazione per*  $E$  ([Logica formale - Sommario](#)); in una maniera simile si può dimostrare per assurdo.

Supponiamo quindi che  $x_0$  abbia un intorno in cui ci sono un numero finito punti di  $E$ : allora

$$(x_0 - r, x_0 + r) \cap E = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$$

(*figura 2.1.*)

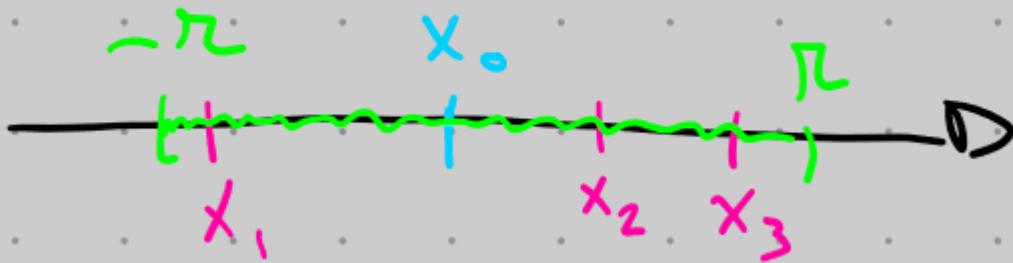
Considero dunque  $r = \min(\{d(x_0, x_j), \forall j \in \{1, 2, \dots, k\}\})$  ovvero la *minima* distanza tra  $x_0$  e un qualunque punto di  $E$ . Allora risulta che

$$((x_0 - r, x_0 + r) \cap E) \setminus \{x_0\} = \emptyset$$

il che ci dimostra che  $x_0$  *non* è di accumulazione per  $E$ . (oppure è un punto isolato).

**FIGURA 2.1.** (*Idea del passaggio finale*)

# Torema 2.1.



## Esempio di derivato di un insieme

#Esempio

Esempio (Esempio 2.1.).

Prendiamo di nuovo l'intervallo

$$E = (1, 2)$$

E voglio individuare  $\mathcal{D}E$ . Con lo stesso approccio di [esempio 1.1.](#), "testiamo" dei elementi della retta reale per vedere se possono essere dei *punti di accumulazione*.

Ovviamente 0 non può essere punto di accumulazione.

1, 2 sono *punti di accumulazione* per  $E$  in quanto disegnando un qualsiasi intorno di questi punti, si deve per forza disegnare un intervallo che contenga elementi di  $E$ . Analogico il discorso per i numeri  $1 \leq x \leq 2$ .

Allora

$$\mathcal{D}E = [1, 2]$$

#Esempio

Esempio (Esempio 2.2.).

Prendiamo l'insieme

$$E = \left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$$

Con lo stesso approccio di sempre, individuiamo gli elementi di  $\mathcal{D}E$ .

Prima di tutto, vediamo che 1 non è punto di accumulazione. Infatti è possibile individuare un intorno  $(1 - r, 1 + r)$  che non abbia elementi di  $E$ : basta porre

Analogo discorso per tutti gli elementi  $n$  ponendo  $r = \lfloor \frac{1}{n^2+n} \rfloor$ .

Finalmente vediamo che 0 è punto di accumulazione per l'**Archimedicità** dei reali ([Conseguenze dell'esistenza dell'estremo superiore](#), **TEOREMA 3.1.**). Infatti per qualsiasi  $r$  è sempre possibile trovare  $n \in \mathbb{N}$  tale che

$$0 < \frac{1}{n} < 0 + r$$

Allora  $\mathcal{D}E = \{0\}$ .

### #Esempio

**Esempio** (punti di accumulazione per  $\mathbb{N}$ ).

Prendiamo i *numeri naturali* ([Numeri Naturali - Sommario](#)).

Si scopre che  $\mathcal{D}\mathbb{N} = \emptyset$ ; non esistono i numeri naturali che siano dei *punti*  $\mathbb{R}$  di *accumulazione per*  $\mathbb{N}$ , in quanto tutti questi numeri distano tra di loro. Basta infatti prendere l'intorno in  $n \in \mathbb{N}$  di raggio 0,5. Invece è possibile dire che  $+\infty$  è punto di accumulazione per  $\mathbb{N}$ , in quanto grazie all'**Archimedicità dei reali** ([Teorema 3 \(Archimedicità di  \$\mathbb{R}\$ \)](#)) si verifica la seguente condizione:

$$\forall M > 0, \exists n \in \mathbb{N} : n > M \text{ dove } \varepsilon = 1$$

^740a07

Questo esempio si rivelerà fondamentale per la definizione di *limite di successione* ([Definizione 3 \(limite di successione\)](#)).

## A5. Primo teorema di Bolzano-Weierstraß

### Primo Teorema di Bolzano-Weierstraß

*Enunciato e dimostrazione del primo teorema di Bolzano-Weierstraß*

### 0. Prerequisiti e/o voci correlate

- Punti di aderenza e di accumulazione
- Conseguenze dell'esistenza dell'estremo superiore

# 1. Enunciato del primo teorema di Bolzano-Weierstraß

Enunciamo uno dei teoremi più noti dell'*analisi matematica*, che ci garantisce l'esistenza di un punto di accumulazione in  $\mathbb{R}$  per una categoria di insiemi.

#Teorema

**Teorema** (Primo teorema di Bolzano-Weierstraß.).

Sia  $E \subseteq \mathbb{R}$ ,  $E$  un insieme *infinito* e *limitato*. ([Esempio 5 \(Esempio 1.2.\)](#))

Allora si verifica il seguente:

$$\exists \xi \in \mathbb{R} : \xi \in \mathcal{D}E$$

ovvero che esiste un numero  $\xi$  che sia *punto di accumulazione* per  $E$ .

#Dimostrazione

**DIMOSTRAZIONE** del *primo teorema di Bolzano-Weierstraß* ([Teorema 1 \(Primo teorema di Bolzano-Weierstraß.\)](#))

Se  $E$  è un insieme *limitato* allora per il *teorema dell'esistenza dell'estremo superiore e inferiore* ([Insiemi limitati, maggioranti, massimo e teorema dell'estremo superiore > ^55bb5a](#)) esistono

$$a_0 = \inf(E); b_0 = \sup(E)$$

ovvero  $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$  e tali per cui  $E \subseteq [a_0, b_0]$ .

Allora considero  $c_0$  il *punto medio tra*  $a_0$  e  $b_0$ ; ora considero i due intervalli

$$[a_0, c_0]; [c_0, b_0]$$

([figura 2.1.](#))

Inoltre *almeno* uno di questi intervalli devono essere *infiniti*, in quanto se supponessimo per assurdo che entrambi gli intervalli fossero finiti, allora la loro unione sarebbe anch'essa finita.

Tenendo questo in considerazione, scegliamo uno di questi. Ora chiamo questo intervallo  $[a_1, b_1]$ , dove  $a_1 = c_0$  oppure  $b_1 = c_0$ , a seconda dell'intervallo scelto.

Quindi otteniamo una *successione di intervalli inscatolati, limitati, infiniti e dimezzati (Intervalli)*

$$(I_n)_n$$

La *forma forte del teorema di Cantor* ([Teorema 11 \(Teorema di Cantor, forma forte.\)](#)) ci dice che facendo l'intersezione di tutti questi intervalli otteniamo un  $\xi$ .

Ora voglio trovare un *intorno* di  $\xi$  che contenga un qualunque insieme *infinito*  $[a_n, b_n]$ .

$$\exists r > 0 : [a_n, b_n] \subseteq (\xi - r, \xi + r)$$

Allora la condizione è

$$r > d(a_n, b_n) = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$$

il che è possibile in quanto ricordandomi che

$$\frac{b_0 - a_0}{n} \geq \frac{b_0 - a_0}{2^n}$$

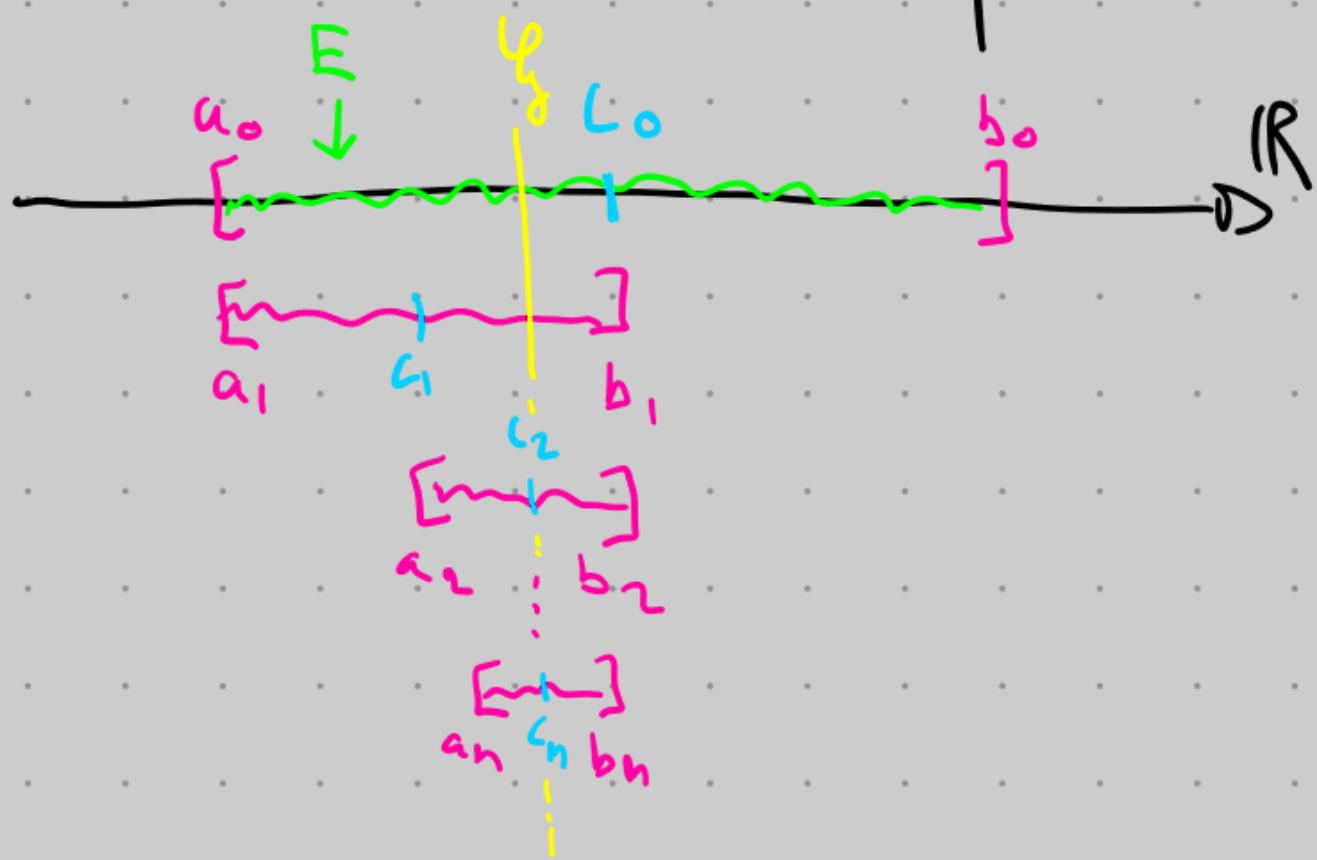
e tenendo conto *I'Archimedeteità di  $\mathbb{R}$*  ([Teorema 3 \(Archimedeteità di  \$\mathbb{R}\$ \)](#)) la condizione sopra citata è totalmente possibile visto che

$$\exists \bar{n} : 0 < \frac{b_0 - a_0}{2^{\bar{n}}} \leq \frac{b_0 - a_0}{\bar{n}} < r$$

Abbiamo quindi che l'intorno in  $\xi$  di raggio  $r$  contiene l'insieme infinito  $[a_{\bar{n}}, b_{\bar{n}}]$ , di conseguenza anche l'intorno stesso è infinito; dato che contiene infiniti punti di  $E$ , per il *teorema di caratterizzazione* dei punti di accumulazione (^622755),  $\xi$  è *punto di accumulazione* per  $E$ . ■

**FIGURA 1.1.** (*Idea grafica del primo passaggio*)

# Bolzano - Weierstraß



## Abstract del Capitolo IV

Siamo qui ad uno degli argomenti più importanti dell'*analisi matematica*: i limiti. Da un lato andremo a definire in una maniera rigorosa il concetto di *limite di funzione* (e di *successione*), usando gli strumenti della *topologia della retta reale*; dall'altro lato andremo anche a scoprire dei *teoremi*, delle *proprietà* dei limiti per poter rendere la "*prassi dei limiti*" il più fattibile possibile.

L'obiettivo di questo capitolo è quello di poter essere in grado di *valutare* un limite qualsiasi di una funzione qualsiasi, al fine di poter comprendere il comportamento di questa funzione nella sua interezza.

## A1. Definizione di limite di funzione

### Definizione di Limite di funzione

*Idea fondamentale del limite di una funzione; definizione di limite in tutti i casi; dimostrazione dell'esistenza di un limite. Definizione di limite destro e sinistro.*

## 0. Argomenti propedeutici e/o voci correlate

Per affrontare uno degli argomenti più importanti dell'*analisi matematica*, ovvero i *limiti*, è necessario conoscere e ricordare alcuni argomenti:

- [Intorni](#) di  $x_0 \in \tilde{\mathbb{R}}$
  - [Punti di aderenza e di accumulazione](#) per un insieme  $E \subseteq \mathbb{R}$
- Voci correlate:
- [Studio di Funzione](#)
  - [Derivata e derivabilità](#)

## 1. Idea fondamentale

### #Osservazione

Osservazione (idea fondamentale del limite).

Prendiamo la una [funzione](#) di variabile reale (**DEF 1.1.**) del tipo

$$f : E \longrightarrow \mathbb{R}, E \subseteq \mathbb{R}$$

e consideriamo un punto  $x_0 \in \tilde{\mathbb{R}}$  che è un [punto di accumulazione](#) per  $E$  ([Punti di aderenza e di accumulazione](#), **DEF 2.1.**).

Ora voglio capire come posso *rigorosamente* formulare la seguente frase:

*"Se  $x \in E$  si avvicina a  $x_0 \in \tilde{\mathbb{R}}$ , allora  $f(x)$  si avvicina a un valore  $L \in \tilde{\mathbb{R}}$ ."*

Ovvero col seguente grafico abbiamo la [figura 1.1](#).

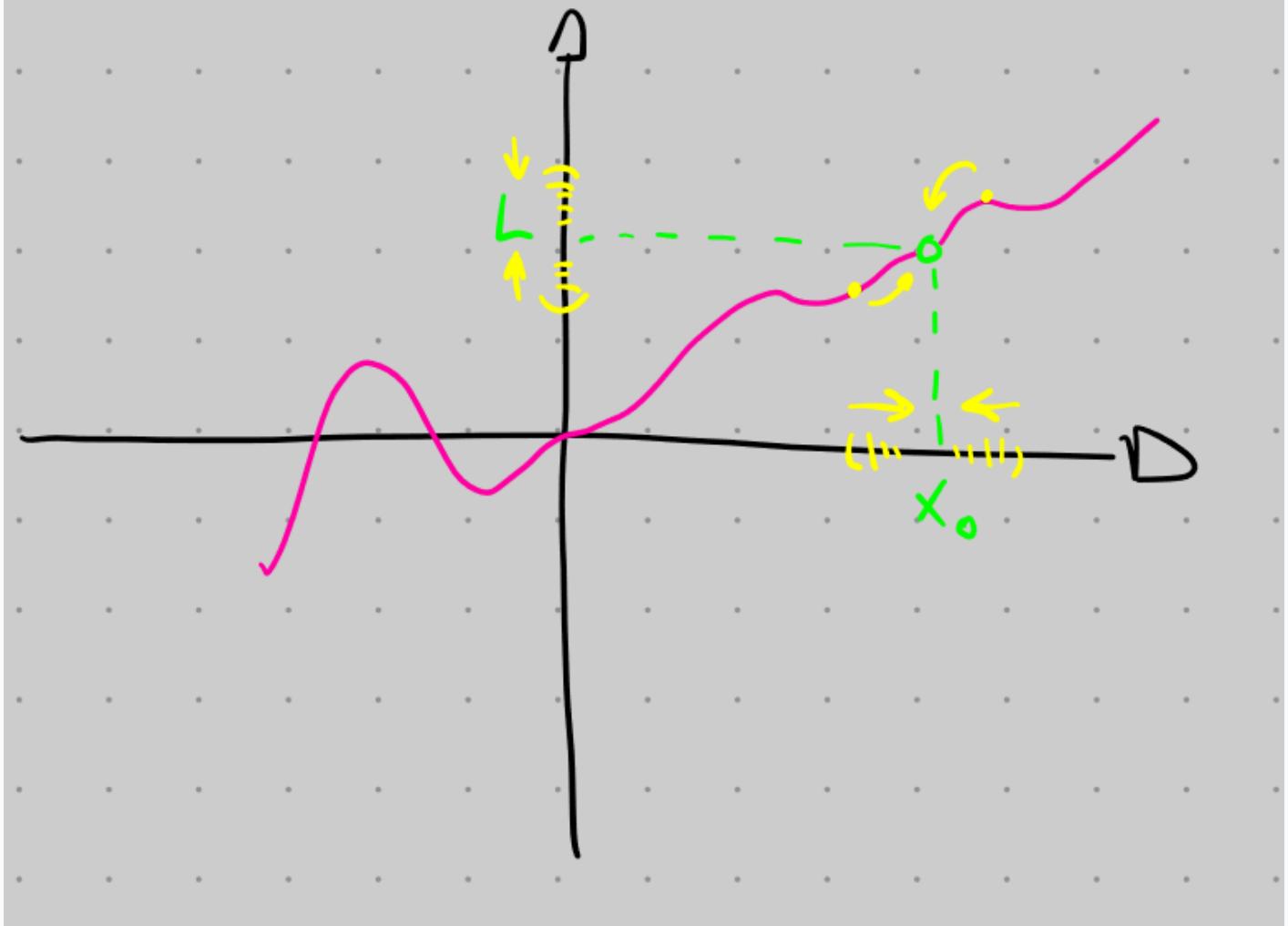
Oppure un caso più particolare, con

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

dove 0 è un punto di accumulazione per  $E$  (il dominio), ma non ne fa parte.

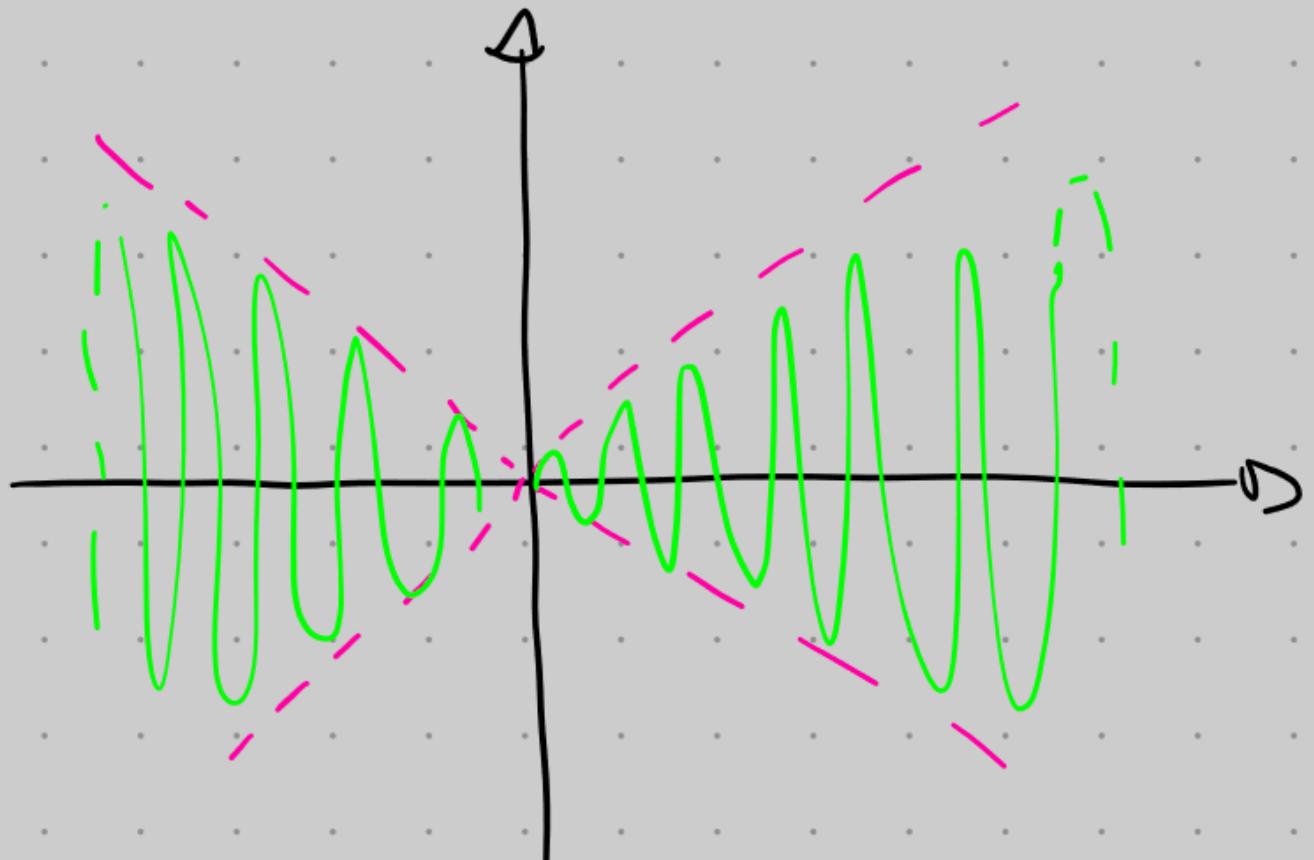
**FIGURA 1.1.** (*Idea di base*)

# Limite - idea



**FIGURA 1.2.** (Esempio particolare  $x \sin \frac{1}{x}$ )

Limite  $x \sin^1/x$



## 2. Formulazione rigorosa del concetto del limite di funzione

Ora diamo una *formalizzazione rigorosa* del concetto appena formulato sopra.

#Definizione

**Definizione** (formulazione generale e rigorosa del limite di una funzione che tende ad un punto di accumulazione).

Sia  $f$  una *funzione di variabile reale* di forma

$$f : E \rightarrow \mathbb{R}, E \subseteq \mathbb{R}$$

Siano  $x_0, L \in \tilde{\mathbb{R}}$ ,  $x_0$  un *punto di accumulazione* per  $E$ .

Allora denotiamo il *limite di funzione* per un *punto di accumulazione* come

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

e la definiamo se è vera la seguente:

$$\forall x \in E, x \in U \setminus \{x_0\} \implies f(x) \in V$$

## #Osservazione

Osservazione (la formulazione generale del limite comprende tutti i casi).

Questa **definizione** del limite può essere più interpretata in più casi.

## #Definizione

Definizione (formulazione di Cauchy del limite di una funzione).

Siano  $x_0, L \in \mathbb{R}$ . Quindi dei valori **fissi** sulla **retta reale**.

Ora "**interpretiamo**" la definizione del **limite** di  $f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$  in questo caso:

$$\begin{aligned} & \forall V \text{ intorno di } L, \exists E \text{ intorno di } x_0 \text{ tale che:} \\ & \forall x \in E, x \in U \setminus \{x_0\} \implies f(x) \in V \end{aligned}$$

significa

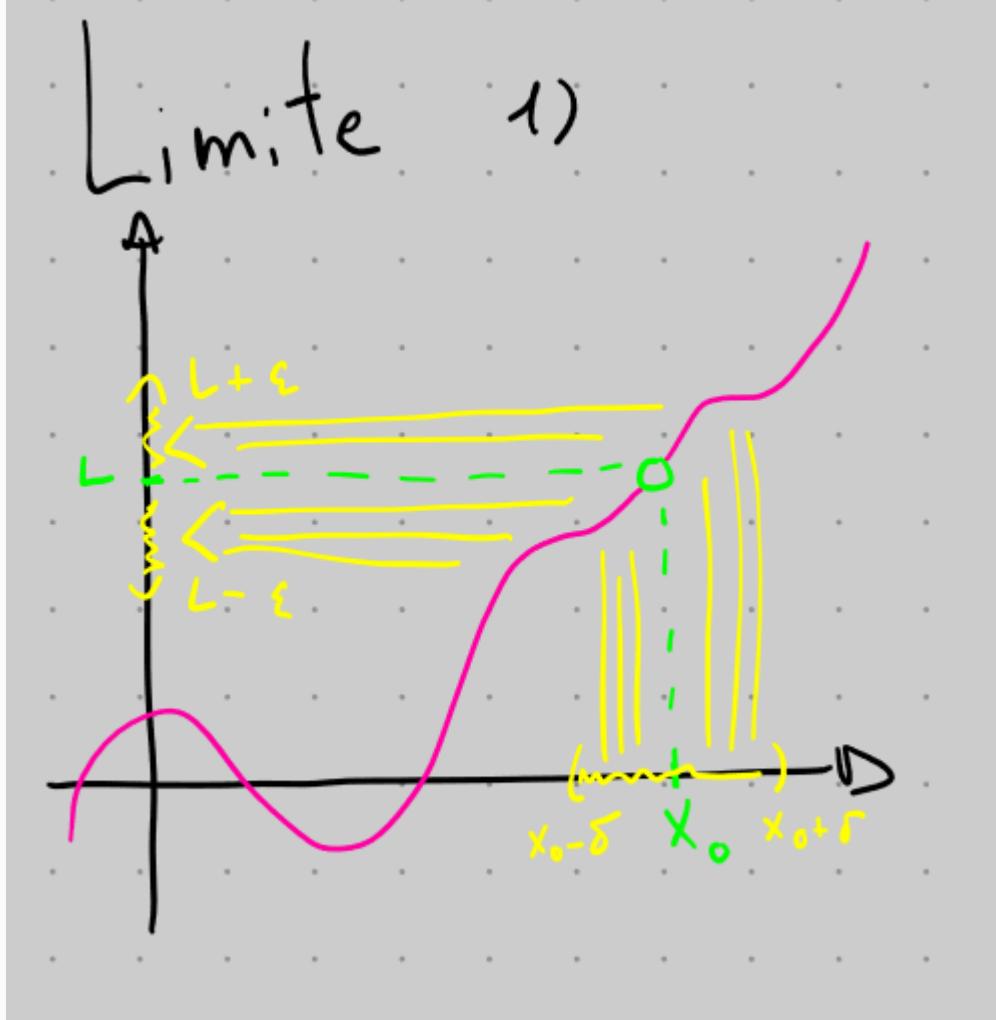
$$\begin{aligned} & \forall \varepsilon > 0, (L - \varepsilon, L + \varepsilon) \subseteq V, \exists \delta > 0 : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq U \\ & \text{tale che } \forall x \in E \\ & 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon \end{aligned}$$

e questo graficamente corrisponde alla **figura 2.2**.

In sintesi;

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \iff \begin{aligned} & \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in E, \\ & |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon \end{aligned}}$$

**FIGURA 2.2.** (*Formulazione epsilon-delta del limite*)



## #Osservazione

Osservazione (analogia "ludica" del limite).

Grazie a questa interpretazione è possibile creare un'analogia per il limite; infatti se immaginiamo l'intorno di  $L$  con raggio  $\epsilon$  come un "*bersaglio*" e vale la condizione del *limite*, allora deve essere sempre possibile trovare un intorno attorno  $x_0$  con raggio  $\delta$  tale per cui facendo l'immagine di tutti i punti in questo intorno, "*colpisco*" il "*bersaglio*" (ovvero l'intorno di  $L$ ).

## #Osservazione

Osservazione (analogia "meccanica" del limite).

Alternativamente è possibile pensare all'esistenza del *limite* come una "*macchina*" che dato un valore  $\epsilon$  ti trova un valore  $\delta$ ; dato un  $\epsilon$  qualsiasi, questa macchina ti darà sempre un  $\delta$ .

## #Definizione

Definizione (limite infinito di una funzione).

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

ovvero dove  $L \in \tilde{\mathbb{R}}$ . Allora interpretando il significato del limite abbiamo:

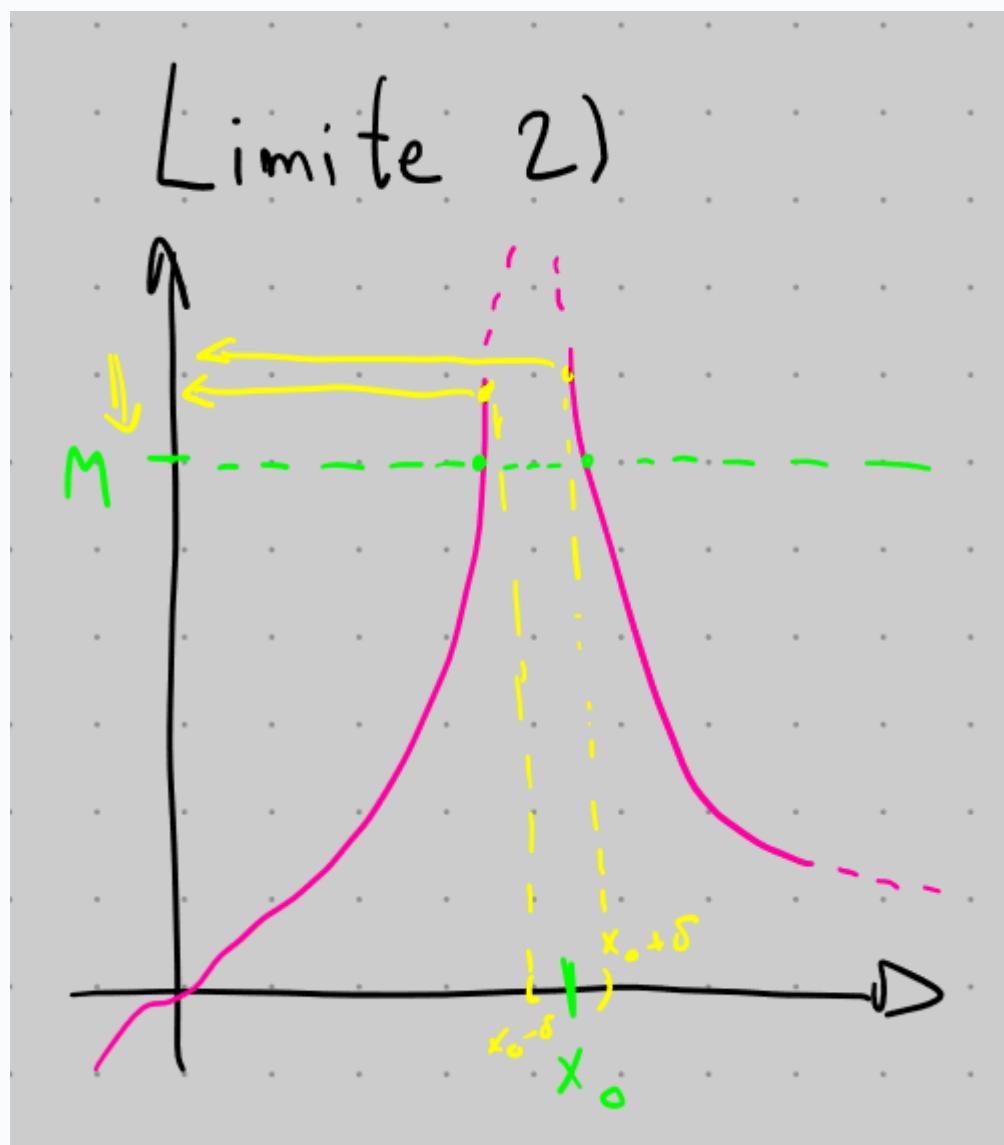
$$\begin{aligned} \forall M > 0, (M, +\infty), \exists \delta > 0 : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq U : \\ &\text{tale che } \forall x \in E, \\ &0 < |x - x_0| < \delta \implies f(x) > M \end{aligned}$$

ovvero abbiamo graficamente che per una qualsiasi retta orizzontale  $x = M$ , troveremo **sempre** un intervallo tale per cui l'immagine dei suoi punti superano sempre questa retta orizzontale.

Analogamente vale lo stesso per

$$\lim_{x \rightarrow x_0} = -\infty$$

**FIGURA 2.3.** (*Idea del limite infinito di una funzione*)



Ora abbiamo

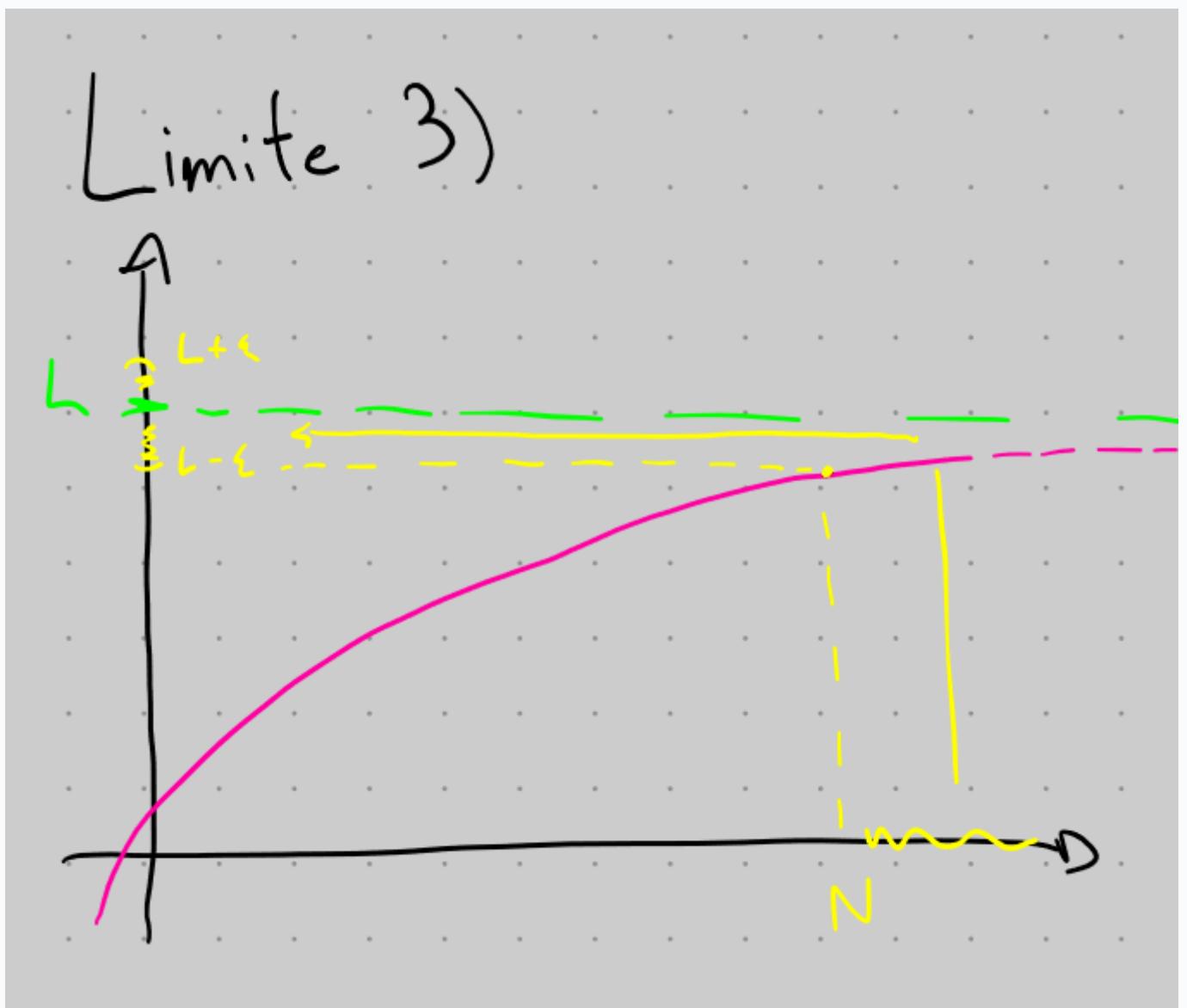
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

ovvero dove  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Interpretando la definizione si ha:

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, (L - \varepsilon, L + \varepsilon), \exists N > 0 : (N, +\infty) : \\ \text{tale che } \forall x \in E, \\ x > N \implies |f(x) - L| < \varepsilon \end{aligned}$$

graficamente ho un grafico di una funzione  $f(x)$ , dove disegnando un qualsiasi intorno di  $L$  riuscirò sempre a trovare un valore  $N$  tale per cui tutti i punti dell'insieme immagine dell'intervallo  $(N, +\infty)$  stanno *sempre* all'interno dell'intorno di  $L$ , indipendentemente da quanto stretto è questo intervallo (**figura 2.4.**)

**FIGURA 2.4.** (*Idea grafica del limite all'infinito*)



Finalmente consideriamo il caso

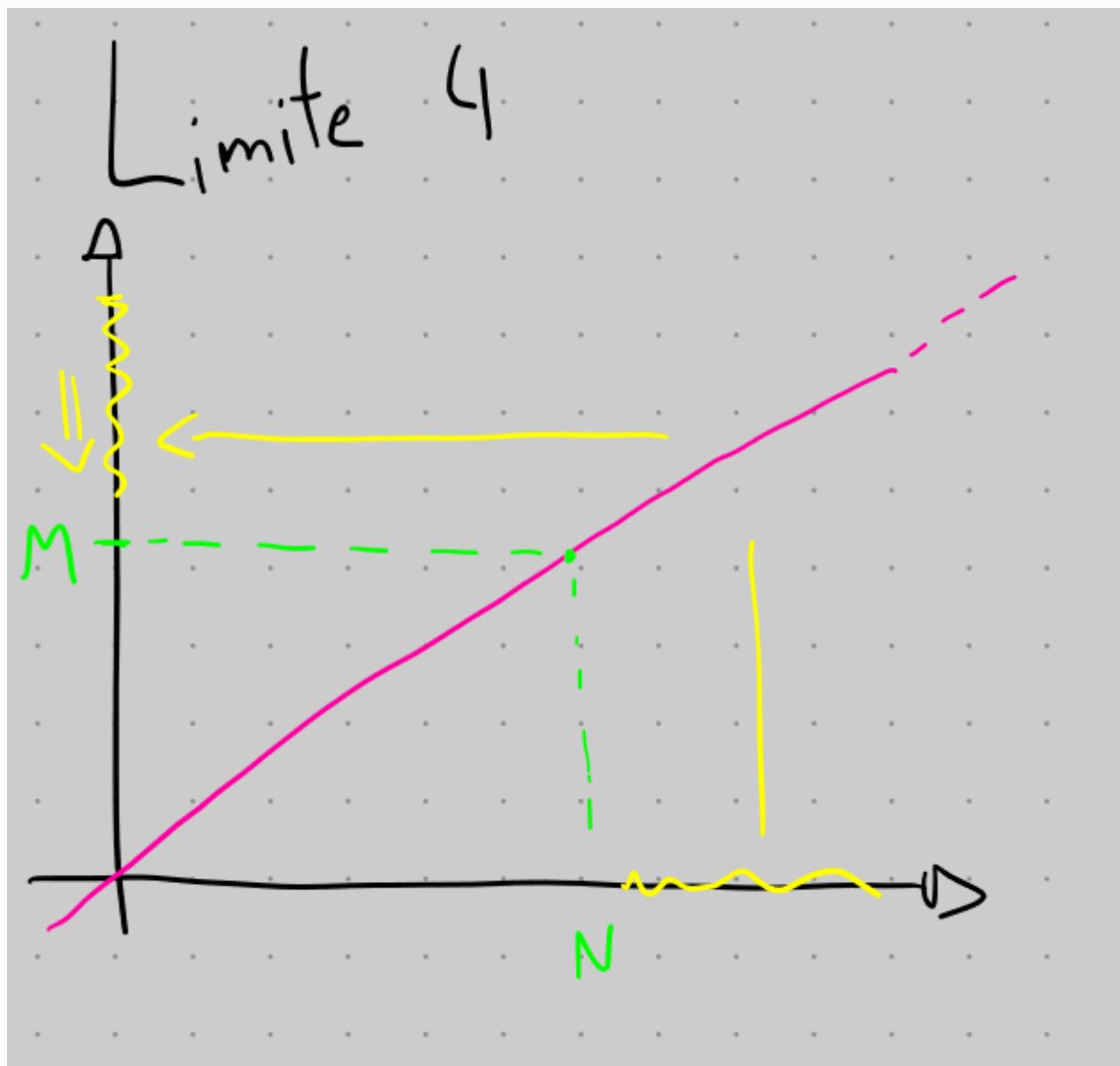
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

*Per definizione* ho

$$\begin{aligned} \forall M; (M, +\infty), \exists N; (N, +\infty) : \\ \text{tale che } \forall x \in E, \\ x > N \implies f(x) > M \end{aligned}$$

questo vuol dire che fissando un qualunque valore  $M$ , riuscirò *sempre* a trovare un valore  $N$  tale per cui prendendo un qualsiasi punto  $x > N$ , il valore immagine di questo punto supererà sempre  $M$  (*figura 2.5.*).

**FIGURA 2.5.** (*Idea grafica del limite infinito all'infinito*)



**APPROFONDIMENTO PERSONALE a.** Usando la formulazione rigorosa del limite (Definizione 2 (formulazione generale e rigorosa del limite di una funzione che tende ad un punto di accumulazione)) e ponendo  $L = 0, x = +\infty$ , otteniamo un risultato che è consistente con la definizione di *infinitesimo*<sup>(1)</sup> secondo dei noti matematici russi, tra cui uno è Kolmogorov.

#Definizione

Definizione (l'infinitesimo).

**DEF 2.a.** Si definisce un infinitesimo come una *grandezza variabile*  $\alpha_n$ , denotata come

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0 \text{ oppure } \alpha_n \rightarrow 0$$

che possiede la seguente proprietà:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 : \forall x \in E, x > N \implies |\alpha_x| < \varepsilon$$

#Osservazione

Osservazione (infinitesimo e integrale).

**OSS 2.a.** Notiamo che la definizione dell'*infinitesimo* diventerà importante per il calcolo degli *integrali*, in particolare per la *somma di Riemann* (Definizione 2 (integrale di Riemann di una funzione su un intervallo)).

<sup>(1)</sup> "[...] La quantità  $\alpha_n$  che dipende da  $n$ , benché apparentemente complicata gode di una notevole proprietà: se  $n$  cresce indefinitamente,  $\alpha_n$  tende a zero. Tale proprietà si può anche esprimere dicendo che dato un numero positivo  $\varepsilon$ , piccolo a piacere, è possibile scegliere un interno  $N$  talmente grande che per ogni  $n$  maggiore di  $N$  il numero  $\alpha_n$  è minore, in valore assoluto, del lato numero  $\varepsilon$ ."

Estratto tratto da *Le matematiche: analisi, algebra e geometria analitica* di A.D. Aleksandrov, A. N. Kolmogorov e M. A. Lavrent'ev (1974, ed. Bollati Boringhieri, trad. G. Venturini).

### 3. Limite destro e sinistro

$$f : E \longrightarrow \mathbb{R}, E \subseteq \mathbb{R}$$

$x_0 \in \mathbb{R}$  un punto di accumulazione per  $E, L \in \tilde{\mathbb{R}}$ .

#Definizione

Definizione (limite destro di una funzione).

Si denota il *limite della funzione  $f$  che tende a  $x_0$  da destra* come

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$$

In termini rigorosi lo si definisce come

$$\forall V \text{ intorno di } L, \exists U \text{ intorno di } x_0 : \forall x \in E, \\ x \in U \cap (x_0, +\infty) \implies f(x) \in V$$

Ovvero come il *limite di  $f$* , considerando però *solo* i punti che stanno a *destra* di  $x_0$ .

#Definizione

Definizione (limite sinistro di una funzione).

Analogamente il *limite della funzione  $f$  che tende a  $x_0$  da sinistra* è

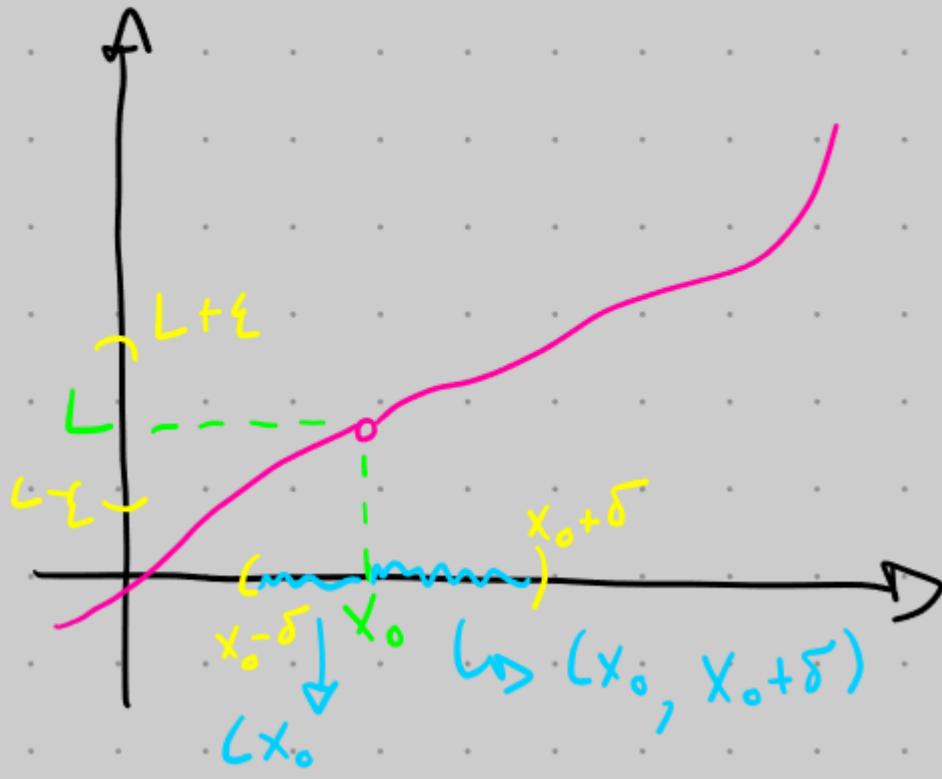
$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$$

ovvero

$$\forall V \text{ intorno di } L, \exists U \text{ intorno di } x_0 : \forall x \in E, \\ x \in U \cap (-\infty, x_0) \implies f(x) \in V$$

**FIGURA 3.1.** (*Limite destro e sinistro di una funzione*)

$\lim_{x \rightarrow x_0} s_x$



### #Osservazione

Osservazione (condizione necessaria e sufficiente dell'esistenza di limite).

Si può immediatamente verificare che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \iff \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$$

Infatti l'insieme dei  $x$  del limite **destro** e/o **sinistro** su cui verifichiamo che  $f(x) \in V$  è un **sottoinsieme** dell'insieme di cui si verifica col limite generale. Pertanto facendo l'unione tra questi due sottoinsiemi abbiamo

$$[U \cap (-\infty, x_0)] \cup [U \cap (x_0, +\infty)] = U \setminus \{x_0\}$$

### #Definizione

Definizione (restrizione del limite).

*Nota: definizione ricavata direttamente dalla dispensa di D. D. S.*

Avevamo appena osservato che coi limiti **destri** e/o **sinistri** abbiamo semplicemente fatto una **restrizione** all'insieme  $U \setminus \{x_0\}$  di cui si cerca di verificare che  $f(U \setminus \{x_0\}) \subseteq V$ .

Dunque definiamo il **limite della funzione ristretta a B**, un qualunque sottoinsieme

di  $E$  per cui  $x_0$  è di accumulazione:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f|_B(x) = L$$

ovvero

$$\forall V \text{ intorno di } L, \exists U \text{ intorno di } x_0 : \forall x \in B, \\ x \in U \setminus \{x_0\} \implies f(x) \in V$$

## 4. Strategia per verificare l'esistenza di limiti

La nostra definizione presuppone che dobbiamo *eseguire* una serie *infinita* di verifiche per dimostrare che un limite esiste; infatti si dovrebbe scegliere tutti gli  $\varepsilon > 0$  e trovare un  $\delta$  associato.

Vogliamo invece sviluppare una serie di *strategie* per verificare l'esistenza dei limiti, come i *teoremi* e le *proprietà* sui limiti come vedremo in [Teoremi sui Limiti di Funzione](#), oppure *interpretando* la definizione del limite per poter trovare una "*formula*" che associa ad ogni epsilon un delta.

#Esempio

**Esempio** (dimostrazione "analitica" di un limite).

Voglio verificare che

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^2 + 1 = 2$$

ovvero, interpretando la definizione otteniamo il seguente da verificare:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in E, 0 < |x - 1| < \delta \implies |x^2 + 1 - 2| < \varepsilon$$

Allora "*faccio finta*" di conoscere un  $\varepsilon$  fissato, sviluppiamo dunque la diseguaglianza a destra:

$$\begin{aligned} |x^2 + 1 - 2| &< \varepsilon \\ |x^2 - 1| &< \varepsilon \\ |(x+1)(x-1)| &< \varepsilon \\ |x+1||x-1| &< \varepsilon \end{aligned}$$

Osservo che se poniamo  $x \in [0, 2)$  e quindi  $\delta < 1$ , allora abbiamo  $|x+1| < 3$ . Allora da ciò discende sicuramente la diseguaglianza

$$|x+1||x-1| < 3|x-1| < 3\delta, x \in [0, 2)$$

abbiamo quindi

Infatti abbiamo implicitamente scelto ε = 3δ, verificando così il limite per ∀x ∈ [0, 2)

Invece se x ≥ 2, basta scegliere δ = 1.

"Completando" la dimostrazione ho:

$$|x - 1| < \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow 3|x - 1| < \varepsilon \Rightarrow |x + 1||x - 1| < \varepsilon, \forall x \in [0, 2)$$

## A2. Proprietà e teoremi sui limiti di funzione

### Teoremi sui Limiti di Funzione

*Teoremi sui limiti: unicità del limite, permanenza del segno, teorema del confronto, teorema dei due carabinieri, operazioni con i limiti, limiti infinitesimi e limiti infiniti, forme indeterminate.*

## 0. Preambolo

In questo capitolo si vuole creare una serie di *strategie* per poter verificare l'esistenza dei limiti senza dover ricorrere a fare dei *calcoli* infiniti in quanto richiesta dalla [Definizione di Limite di funzione](#).

Una di queste strategie consiste proprio enunciare e dimostrare una serie di *teoremi*.

## 1. Unicità del limite

#Teorema

**Teorema** (dell'unicità del limite).

Sia

$$f : E \longrightarrow \mathbb{R}$$

poi  $x_0 \in \tilde{\mathbb{R}}$  un punto di accumulazione per E.

**Tesi.** Poi siano i valori limiti  $L_1, L_2 \in \tilde{\mathbb{R}}$  tali che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_1; \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_2$$

$$L_1 = L_2$$

"Se esiste il limite di una funzione allora essa è unica"

#Dimostrazione

### DIMOSTRAZIONE del teorema 1.1. (Teorema 1 (dell'unicità del limite))

Si procede tramite una dimostrazione per *assurdo*.

Supponiamo dunque

$$L_1 \neq L_2$$

Allora ci chiediamo se è possibile trovare degli *intorni* (Intorni) di  $L_1, L_2$  che chiameremo  $V_1, V_2$  che sono *disgiunti*; ovvero se sono tali che

$$V_1 \cap V_2 = \emptyset$$

Dato che  $L_1$  e  $L_2$  sono diversi, da qui discende che la distanza tra  $L_1$  e  $L_2$  dev'essere maggiore di 0; quindi possiamo impostare il *raggio* di questi intorni come

$$r = \frac{|L_1 - L_2|}{3}$$

Allora concludiamo che possono esistere  $V_1$  e  $V_2$  tali da essere disgiunti tra di loro.

Ora li sceglieremo: applicando le definizioni di limite, ovvero

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_1 &\iff \text{per } V_1, \exists U_1 \text{ di } x_0 : \forall x \in E \\ &\quad x \in U_1 \setminus \{x_0\} \implies f(x) \in V_1 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_2 &\iff \text{per } V_2, \exists U_2 \text{ di } x_0 : \forall x \in E, \\ &\quad x \in U_2 \setminus \{x_0\} \implies f(x) \in V_2 \end{aligned}$$

Dato che  $U_1, U_2$  sono *intorni* di  $x_0$  che è di accumulazione per  $E$  (Punti di aderenza e di accumulazione) si ha che

$$(U_1 \cap U_2) \cap E \neq \emptyset \text{ escludendo } x_0$$

Posso scegliere allora un  $x$  che sta all'interno nell'intersezione di  $U_1$  e  $U_2$ ; ovvero

$$x \in ((U_1 \cap U_2) \setminus \{x_0\})$$

e per ipotesi (ovvero che esistono tali limiti) deve valere che esiste un elemento  $f(x)$  tale che

$$f(x) \in (V_1 \cap V_2)$$

il che è assurdo, in quanto  $V_1 \cap V_2$  dovrebbe essere un *insieme vuoto*.

Osservazione (l'utilità dell'unicità del limite alla rovescia).

Questo teorema è anche utile per dimostrare la ***non-esistenza*** di un limite: prendendo la ***contronominale*** di questo teorema. Ovvero se due ***restrizioni della stessa funzione f*** (Definizione di Limite di funzione, DEF 3.1.) hanno limiti diversi  $L_1 \neq L_2$ , allora il limite ***non*** esiste.

## 2. Permanenza del segno

#Teorema

**Teorema** (della permanenza del segno).

Sia

$$f : E \longrightarrow \mathbb{R}, E \subseteq \mathbb{R}$$

Siano  $x_0, L \in \tilde{\mathbb{R}}$ ,  $x_0$  punto di accumulazione per  $E$ .

Sia definito il ***limite***

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

**Tesi.** Allora supponendo che  $L \in (0, +\infty)$  oppure  $L = +\infty$ , allora è vera che

$$\exists \bar{U} \text{ intorno di } x_0 : \forall x \in (\bar{U} \cap E) \setminus \{x_0\}, f(x) > 0$$

Ovvero a parole stiamo dicendo che se il limite è ***positivo***, allora anche la ***funzione*** è positiva per un intorno opportuno di  $x_0$ ; il segno si ***"trasferisce"*** dal limite alla funzione.

#Dimostrazione

**DIMOSTRAZIONE** del ***teorema 2.1.*** (**Teorema 3 (della permanenza del segno)**)

Parto dalle definizioni del limite, ovvero

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L &\iff \forall V \text{ di } L, \exists U \text{ di } x_0 : \forall x \in E, \\ &x \in U \setminus \{x_0\} \implies f(x) \in V \end{aligned}$$

Per interpretarla nel nostro contesto (ovvero che  $L$  è positiva), abbiamo che l'intorno di  $L$  può essere  $V = (0, +\infty)$ , in quanto se è ***positiva*** allora sarà sicuramente contenuta in quell'intervallo.

Dunque viene verificato che esiste un intorno  $U$  tale che

## #Osservazione

Osservazione (utilità della permanenza del segno "alla rovescia").

Posso usare questo teorema "*alla rovescia*", prendendo la *contronomina* dell'enunciato; ovvero se  $f(x)$  è sempre *negativo o uguale a zero* ed *il limite esiste*, allora sicuramente  $L$  è sempre *negativo o uguale a zero*.

$$f(x) \leq 0 \wedge \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \implies L \leq 0$$

### 3. Teorema del confronto

## #Teorema

**Teorema** (del confronto).

Siano  $f, g$  funzioni di variabile reale del tipo

$$f, g : E \rightarrow \mathbb{R}, E \subseteq \mathbb{R}$$

e  $x_0$  un punto di accumulazione per  $E$ , e  $x_0 \in \tilde{\mathbb{R}}$ .

**Tesi.** Supponendo che siano vere le seguenti condizioni:

i. Che esista il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

ii. Che la funzione  $g$  dev'essere *sempre* (nel dominio) maggiore o uguale di  $f$ .

$$\forall x \in E \setminus \{x_0\}, g(x) \geq f(x)$$

Allora vale che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$$

## #Dimostrazione

**DIMOSTRAZIONE** del *teorema del confronto* ([Teorema 5 \(del confronto\)](#))

Sia ad esempio  $x_0 \in \mathbb{R}$ , allora abbiamo la seguente definizione di limite:

$$\begin{aligned} \forall M > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in E, \\ 0 < |x - x_0| < \delta \implies f(x) > M \end{aligned}$$

e considerando che  $g(x) \geq f(x)$ , abbiamo a maggior ragione che

$$\forall x \in E, 0 < |x - x_0| < \delta \implies g(x) \geq f(x) > M$$

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in E, \\ 0 < |x - x_0| < \delta \implies g(x) > M$$

che è esattamente la definizione di

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty \blacksquare$$

## 4. Teorema dei due carabinieri

#Teorema

**Teorema** (dei due carabinieri).

Siano  $f, g, h$  funzioni del tipo

$$f, g, h : E \longrightarrow \mathbb{R}, E \subseteq \mathbb{R}$$

e  $x_0$  un punto di accumulazione per  $E$ ,  $x_0, L \in \mathbb{R}$ .

**Tesi.** Supponendo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = L$$

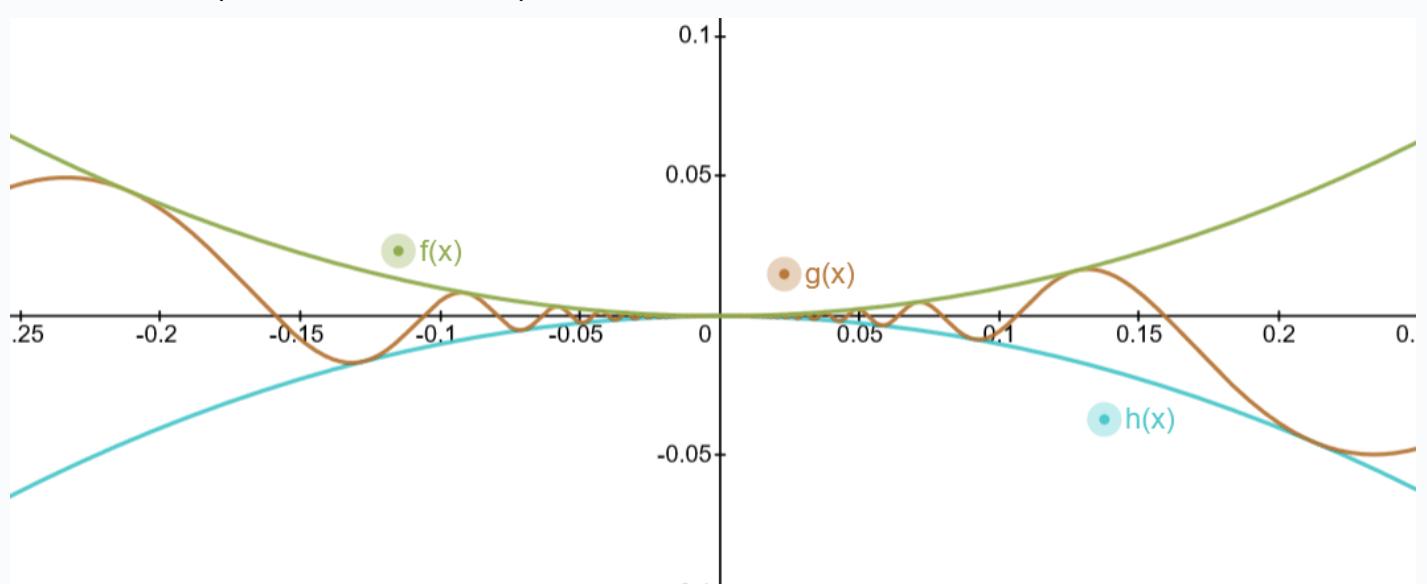
e che

$$\forall x \in E \setminus \{x_0\}, f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

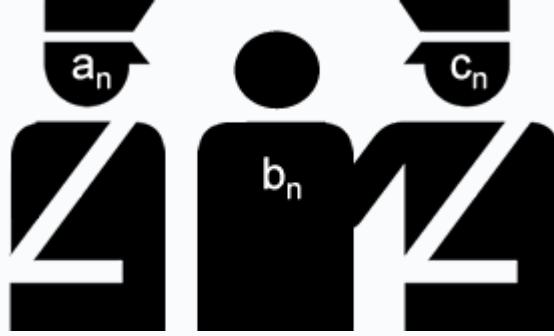
poi volendo possiamo chiamare  $f, g$  le "**funzioni carabinieri**"; abbiamo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L$$

**FIGURA 4.1.** (*L'idea del teorema*)



**FIGURA 4.2.** (*Immagine divertente-illustrativa del teorema*)



## #Dimostrazione

**DIMOSTRAZIONE** del *teorema dei due carabinieri* (Teorema 6 (dei due carabinieri))]

Consideriamo solamente il caso per  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

Per la *definizione del limite*, abbiamo

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_f > 0 : \forall x \in E, \\ 0 < |x - x_0| < \delta_f &\implies |f(x) - L| < \varepsilon \\ &\implies -\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon \\ &\implies L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon \end{aligned}$$

e analogamente

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_h > 0 : \forall x \in E, \\ 0 < |x - x_0| < \delta_h &\implies L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon \end{aligned}$$

Se vogliamo che *entrambe* le espressioni valgano contemporaneamente, dobbiamo scegliere il *minimo* tra i due delta.

Per capire l'idea di questo ragionamento prendiamo dei numeri:

$$(x < 3 \implies x < 4) \wedge (x < 6 \implies x < 7)$$

se voglio essere *sicuro* che valgano entrambe, devo prendere  $x < 3$  in quanto così abbiamo la garanzia che anche  $x < 6$  sia vera.

Dunque sia

$$\delta = \min\{\delta_f, \delta_h\}$$

e mettendole assieme, abbiamo

$$0 < |x - x_0| < \delta \implies L - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \varepsilon$$

possiamo sfruttare la *transitorietà* di  $>$  per ottenere

$$0 < |x - x_0| < \delta \implies |g(x) - L| < \varepsilon$$

Riassumendo, abbiamo il seguente:

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \min\{\delta_f, \delta_h\} : \forall x \in E, \\ 0 < |x - x_0| < \delta &\implies |g(x) - L| < \varepsilon \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L$$

come volevasi dimostrare. ■

## 5. Operazioni con i limiti

Ora presentiamo una serie di proposizioni, raccolte in un unico teorema, e queste ci permettono di fare delle operazioni *tra limiti*.

#Teorema

**Teorema** (operazioni tra limiti).

Siano  $f, g$  funzioni di variabile reale del tipo

$$f, g : E \longrightarrow \mathbb{R}, E \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in \tilde{\mathbb{R}}$$

e  $x_0$  un punto di accumulazione per  $E$ .

**Tesi.** Supponendo che

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= l \in \mathbb{R} \\ \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) &= m \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

allora abbiamo le seguenti:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) &= l + m \\ \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) &= lm\end{aligned}$$

inoltre se  $m \neq 0$ , allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{l}{m}$$

#Dimostrazione

**DIMOSTRAZIONE** dei primi due punti del *teorema 5.1*. ([Teorema 7 \(operazioni tra limiti\)](#))

1. Prendiamo la definizione dei limiti

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= l \\ \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) &= m\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_f > 0 : \forall x \in E, \\ 0 < |x - x_0| < \delta_f \implies |f(x) - l| < \varepsilon \\ \text{ovvero } l - \varepsilon < f(x) < \varepsilon + l \end{aligned}$$

e analogamente

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_g > 0 : \forall x \in E, \\ 0 < |x - x_0| < \delta_g \implies |g(x) - m| < \varepsilon \\ \text{ovvero } m - \varepsilon < g(x) < \varepsilon + m \end{aligned}$$

osserviamo che, in quanto abbiamo definito  $\varepsilon$  come un valore *arbitrariamente piccolo*, allora possiamo porre  $\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{2}$ .

Infatti  $\varepsilon > 0$  risulterà comunque vera, in quanto dividendo un qualsiasi numero infinitamente piccolo otteniamo un numero ancora più piccolo, ma mai zero. Dunque abbiamo i seguenti:

$$\begin{aligned} 0 < |x - x_0| < \delta_f \implies |f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2} \\ 0 < |x - x_0| < \delta_g \implies |g(x) - m| < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

ora scegliendo  $\delta = \min\{\delta_f, \delta_g\}$  abbiamo che valgono le seguenti proposizioni e possiamo dunque sommarle (analogo il discorso nella **DIMOSTRAZIONE 4.2.**): abbiamo allora

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta : \forall x \in E, \\ 0 < |x - x_0| < \delta \implies m - \frac{\varepsilon}{2} + l - \frac{\varepsilon}{2} < f(x) + g(x) < m + \frac{\varepsilon}{2} + l + \frac{\varepsilon}{2} \\ \implies (m + l) - \varepsilon < f(x) + g(x) < (m + l) + \varepsilon \\ \implies |f(x) + g(x)| < (m + l) + \varepsilon \end{aligned}$$

che è esattamente la definizione del limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = l + m$$

2. Qui il ragionamento per dimostrare la tesi diventa più sottile; la dimostrazione richiederà l'uso della *diseguaglianza triangolare* del *valore assoluto* (*Funzioni di potenza, radice e valore assoluto*, **OSS 3.1.1.**).

Secondo la definizione del limite, se ho  $f(x)g(x) \rightarrow lm$  per  $x \rightarrow x_0$  allora devo ragionare sulla seguente espressione:

$$|f(x)g(x) - lm|$$

e utilizzando un trucchetto in cui all'interno di questa aggiungo un'espressione equivalente a 0 (ovvero  $-f(x)m + f(x)m \iff 0$ ), questo diventa

$$|f(x)g(x) - lm| \leq |f(x)g(x) - f(x)m + f(x)m - lm|$$

$$\begin{aligned}
 |f(x)g(x) - lm| &\leq |f(x)g(x) - f(x)m + f(x)m - lm| \\
 &\leq |f(x)g(x) - f(x)m| + |f(x)m - lm| \\
 &\leq |f(x)(g(x) - m)| + |m(f(x) - l)| \\
 &\leq |f(x)||g(x) - m| + |m||f(x) - l|
 \end{aligned}$$

Ora ragioniamo su ogni termine del membro destro dell'uguaglianza.

$|f(x) - l|$  è una quantità destinata a diventare *infinitamente* piccolo, in quanto esso rappresenta la distanza tra la funzione ed il limite; analogo il discorso per  $|g(x) - m|$ .

$|m|$  è una costante che viene moltiplicata per un numero che diventa più piccolo, allora anche questa diventa piccola.

Ora l'unico apparente "*intralcio*" è  $|f(x)|$  in quanto non è una costante, *però* quando è vicino a  $x_0$  si comporta come una costante in quanto è limitata (dato che ha il limite  $l \in \mathbb{R}$ ).

Allora tutto il quantitativo al membro destro diventa piccolo a piacimento. ■

## 6. Limiti infiniti e infinitesimi

Notiamo che in **TEOREMA 5.1.** per il quoziente tra limiti abbiamo imposto che  $m \neq 0$ ; infatti se la funzione che sta al denominatore  $g(x)$  si avvicina a 0, il limite si comporterà in un'altra maniera. Enunciare quindi i seguenti teoremi per illustrare questi comportamenti.

#Teorema

**Teorema** (limiti finiti e infinitesimi).

Sia  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $E \subseteq \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \tilde{\mathbb{R}}$  punto di accumulazione per  $E$ .

**Tesi.** Allora valgono le seguenti:

Limite infinitesimo

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \implies \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$$

Limite infinito

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \wedge f(x) > 0, \forall x \neq x_0 \implies \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$$

#Dimostrazione

**DIMOSTRAZIONE** del [teorema 6.1.](#) ([Teorema 8 \(limiti finiti e infinitesimi\)](#))

Dimostriamo solo il *limite infinitesimo*, in quanto la dimostrazione del *limite infinito* è analoga.

$$\begin{aligned} \forall M > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in E \setminus \{x_0\} \\ 0 < |x - x_0| < \delta \implies f(x) > M \\ \implies \frac{1}{f(x)} < \frac{1}{M} \\ \text{sia } M = \frac{1}{\varepsilon}, \forall \varepsilon > 0 \implies -\varepsilon < 0 < \frac{1}{f(x)} < \varepsilon \\ 0 < |x - x_0| < \delta \implies \left| \frac{1}{f(x)} \right| < \varepsilon \end{aligned}$$

ovvero la definizione del limite di

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$$

## 7. Forme indeterminate

Ora definiamo delle *forme indeterminate* di alcuni limiti.

#Teorema

**Teorema** (forme indeterminate).

*Tesi 1.* Sia

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq -\infty$$

(la seconda vuol dire che  $g$  è inferiormente limitata; ovvero  $\exists M > 0 : \forall x \in E \setminus \{x_0\}, g(x) > -M$ ), allora abbiamo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + g(x) = +\infty$$

Analogo il discorso per

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq +\infty$$

Escludiamo infatti il caso  $-\infty + \infty$  in quanto essa è una *forma indeterminata*.

*Tesi 2.* Sia

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty, \exists \rho > 0 : \forall x \in E \setminus \{x_0\}, g(x) \geq \rho > 0$$

la seconda espressione vuole dire che  $g(x)$  è un'espressione *sempre* positiva di 0, allora si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = +\infty$$

e qui escludiamo il caso  $+\infty \cdot 0$ .

**Tesi 3 (dalla dispensa).** Sia

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0, \exists M > 0 : |g(x)| < M$$

ovvero la seconda vuol dire che  $g(x)$  è *limitata*, allora abbiamo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0$$

escludendo i casi  $\pm\infty \cdot 0$ .

#### #Dimostrazione

**DIMOSTRAZIONE** della tesi 1 del [teorema 7.1.](#) ([Teorema 9 \(forme indeterminate\)](#))

Partiamo dalla definizione del limite di  $f$ : ovvero

$$\begin{aligned} \forall K > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in E \setminus \{x_0\} \\ 0 < |x - x_0| < \delta \implies f(x) > K \end{aligned}$$

ma allo stesso tempo abbiamo che  $g$  è inferiormente limitata, ovvero

$$\exists M > 0 : \forall x \neq x_0, g(x) > -M$$

allora se scegliamo  $K = K + M$  e sommiamo entrambe le espressioni, abbiamo

$$0 < |x - x_0| < \delta \implies f(x) + g(x) > K$$

che è la definizione di

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + g(x) = +\infty$$

## 8. Limite della funzione composta

#### #Osservazione

Osservazione (l'idea del concetto).

Ho una funzione

$$f : E \longrightarrow \mathbb{R}$$

con  $E \subseteq \mathbb{R}$ ,  $x_0, y_0 \in \tilde{\mathbb{R}}$  e  $x_0$  di accumulazione per  $E$ .

Suppongo che esiste il limite di  $f(x) \rightarrow y_0$  per  $x \rightarrow x_0$ :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$$

$$g : F \longrightarrow \mathbb{R}$$

con  $F \subseteq \mathbb{R}$ ,  $y_0$  punto di accumulazione per  $F$  e  $L \in \tilde{\mathbb{R}}$ . Suppongo che esiste il limite di  $g(y) \rightarrow L$  per  $y \rightarrow y_0$ . Ovvero

$$\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = L$$

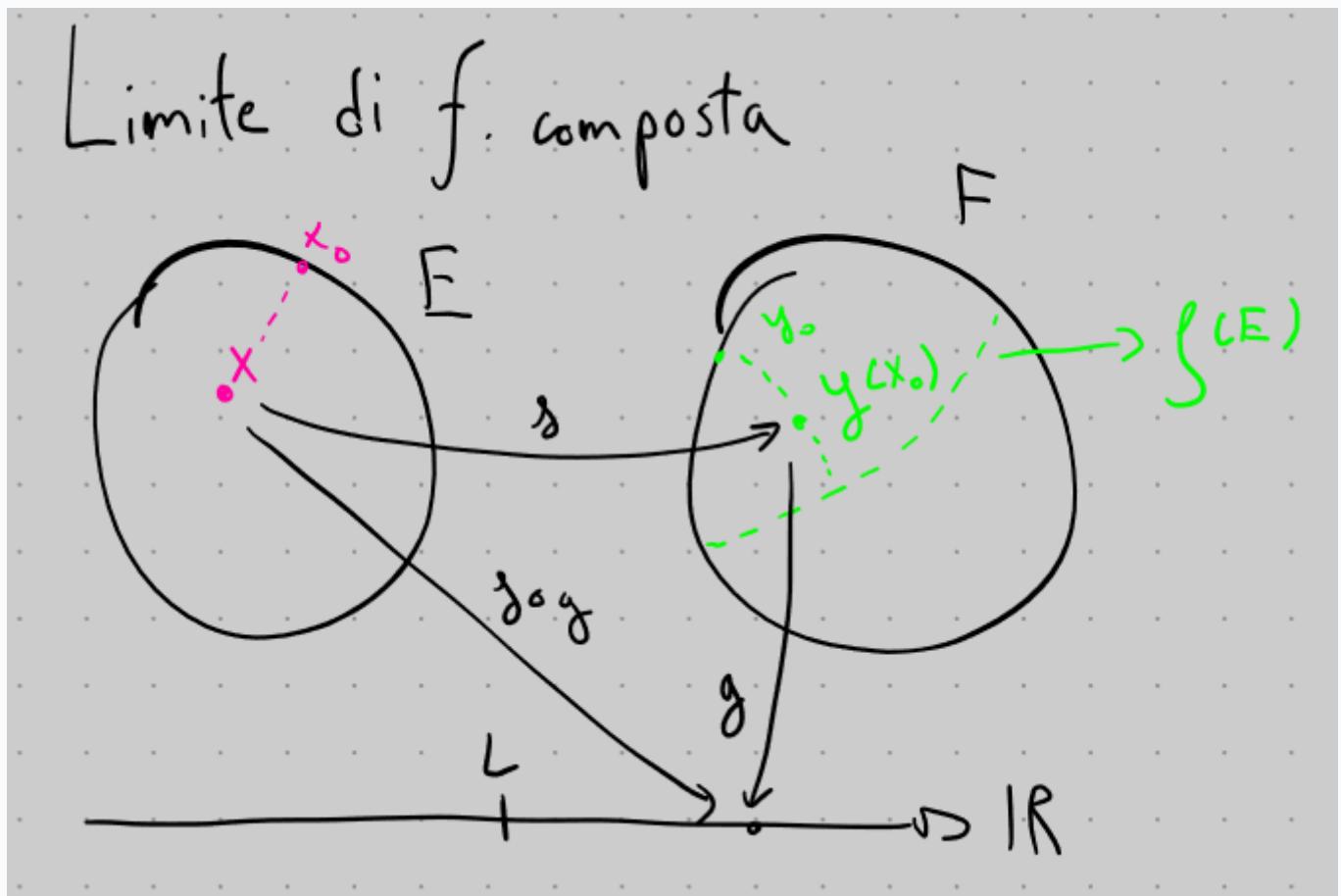
Supponendo che l'immagine funzione del dominio sia sottoinsieme del dominio dell'altra funzione, ovvero  $f(E) \subseteq F$ , e  $f(x) = y$  un punto di accumulazione per  $f(E)$ , ho la situazione nella [figura 8.1.](#).

Allora posso fare la [funzione composita](#)  $g \circ f$  ([Funzioni](#), **DEF 4.**) che mi porta ad un certo punto in  $\mathbb{R}$ .

Quindi voglio capire se posso affermare il seguente:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x_0)) = L$$

**FIGURA 8.1.** (*Idea del concetto*)



#Teorema

**Teorema** (del limite della funzione composta).

Siano

$$f : E \longrightarrow \mathbb{R}; g : F \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0 \text{ e } \lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = L$$

e se vale una delle due ipotesi supplementari;

- 1)  $\forall x \in E \setminus \{x_0\}, f(x) \neq y_0$
- 2)  $y_0 \in F, g(y_0) = L$

allora vale che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = L$$

#### #Dimostrazione

**DIMOSTRAZIONE (FACOLTATIVA)** del [teorema 8.1](#). ([Teorema 11 \(del limite della funzione composta\)](#))

Riscriviamo i limiti

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0 \text{ e } \lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = L$$

secondo la [definizione rigorosa del limite](#) ([Definizione di Limite di funzione](#), **DEF 2.1**).

Allora abbiamo:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0 \iff \begin{array}{l} \forall U \text{ di } y_0, \exists V \text{ di } x_0 : \forall x \in E \setminus \{x_0\} \\ x \in V \implies f(x) \in U \end{array}$$

e

$$\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = L \iff \begin{array}{l} \forall W \text{ di } L, \exists U \text{ di } y_0 : \forall y \in F \setminus \{y_0\} \\ y \in U \implies g(y) \in W \end{array}$$

**Concatenando** le due espressioni, otteniamo

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = L \iff \begin{array}{l} \forall W \text{ di } L, \exists V \text{ di } x_0 : \forall x \in E \setminus \{x_0\} \\ f(x) \in V \implies g(f(x)) \in W \end{array}$$

però per farlo dobbiamo assicurarci di una [condizione](#): ovvero che

$$\forall x \in E, x \neq x_0 \implies f(x) \in F \setminus \{y_0\}$$

così abbiamo un modo sicuro per garantirci che

$$\forall x, x \in V \implies f(x) \in V$$

Un modo per garantire la suddetta condizione è porre  $f(x) \neq y_0, \forall x \neq x_0$ .

$$g(f(x)) = g(y) \in W$$

Se invece ci capita che  $\exists x' : f(x') = y_0$ , allora possiamo comunque avvalerci dell'altra ipotesi supplementare ponendo  $g(y_0) = L$  e abbiamo dunque  $g(f(x')) = g(y_0) = L$ , che ovviamente appartiene a  $W$ .

## #Osservazione

Osservazione (le condizioni supplementari sono solitamente vere).

Per fortuna nostra le *condizioni supplementari* appena descritte di norma valgono quasi sempre.

## #Osservazione

Osservazione (cambio della variabile del limite).

Possiamo sfruttare questo *teorema* per poter svolgere ciò che chiameremo il meccanismo del "*cambio della variabile del limite*"; questo è un meccanismo non importante, ma importantissimo. Vediamo un esempio in cui entra in gioco questo meccanismo.

## Cambio della variabile del limite

## #Esempio

Esempio (di un cambio della variabile del limite).

Voglio calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

*Idea.* L'idea fondamentale consiste nel pensare alla funzione del limite

$$x \mapsto \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

come la *funzione composta*. Ponendo infatti

$$x \mapsto \sqrt{x} = y \mapsto \frac{\sin y}{y}$$

$$x \rightarrow 0^+ \implies \sqrt{x} = y \rightarrow 0^+$$

in quanto se  $x$  tende a 0 da destra, allora anche la sua radice tende a 0 da destra. Ora verifichiamo se vale *'l'ipotesi aggiuntiva'*, ovvero se è vera che

$$\forall x, x \neq x_0 \implies f(x) \neq 0$$

il che è vera, in quanto non c'è nessun numero di cui la radice è 0, se non 0 stesso.

Dunque possiamo scrivere il limite iniziale come la *composizione* tra due funzioni, di cui una è la originaria. Allora

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sin y}{y}$$

Ora questo limite è semplicissimo da risolvere, in quanto questo ci riconduce al limite fondamentale  $\frac{\sin x}{x} = 1, x \rightarrow 0$  ([Esempi di Limiti di Funzione](#), **ESEMPIO 6.1.**). Quindi  $L = 1$ .

## 9. Limite della funzione monotona

#Osservazione

Osservazione (carattere "speciale" di questo teorema).

Osserviamo che fino ad adesso *tutti* i nostri *teoremi* sui limiti di funzione enunciati in questa pagina avevano *'l'esistenza di qualche limite'* per ipotesi.

Il teorema che enunceremo sarà *speciale* da questo punto di vista: infatti *non* avrà l'esistenza di un qualche limite per ipotesi, ma ha comunque nella *tesi* l'esistenza del limite.

#Esercizio

**⚠ (Per esercizio verificare che se  $\sup E \notin E$  allora  $\sup E$  è di accumulazione per  $E$ .)**

#Teorema

**Teorema** (della funzione monotona).

Sia

$$f : E \longrightarrow \mathbb{R}, E \subseteq \mathbb{R}$$

e supponiamo che  $E$  sia *superiormente limitata* con  $\sup E = x_0$  e  $x_0 \notin E$ . Oppure

analogamente, se  $E$  è *inferiormente limitata* allora abbiamo  $\inf E = x_0 \notin E$ .

Inoltre è possibile supporre che  $x_0 \in \tilde{\mathbb{R}}$ , ovvero abbiamo  $x_0 = \pm\infty$ .

Inoltre sia  $f$  una funzione *monotona* crescente o decrescente ([Funzioni](#), **DEF 8.**)

**Tesi.** Allora *esiste* il limite  $l$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

e abbiamo

$$l = \begin{cases} \sup(f(E)) & \text{se crescente} \\ \inf(f(E)) & \text{se decrescente} \end{cases}$$

**DIMOSTRAZIONE** del [teorema 9.1.](#) ([Teorema 16 \(della funzione monotona\)](#))

Dimostriamo il caso per cui supponiamo che  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $f$  sia *crescente* e  $\sup(f(E)) = L \in \mathbb{R}$  (in parole il limite "*target*" è un numero reale): si tratta di provare che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

Consideriamo dunque la *proprietà dell'estremo superiore*  $\sup$  ([Teorema 16 \(le proprietà dell'estremo superiore\)](#));

$$L = \sup(f(E)) \iff \begin{cases} \forall x \in E, f(x) \leq L \\ \forall \varepsilon > 0, \exists \bar{x} : L - \varepsilon < f(\bar{x}) \end{cases}$$

Ora considero un  $x \in E : x > \bar{x}$  e applicando la *monotonìa della funzione* ho

$$x \geq \bar{x} \implies f(x) \geq f(\bar{x})$$

Infinite metto le proposizioni assieme, ottenendo

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists \bar{x} : \forall x \in E, \\ \bar{x} \leq x < x_0 \implies L - \varepsilon < f(\bar{x}) \leq f(x) \leq L < L + \varepsilon \\ \implies |f(x) - L| < \varepsilon \end{aligned}$$

che è esattamente la *definizione* del limite appena enunciato. ■

#Corollario

Corollario (Corollario 9.1.).

Sia

$$f : ]a, b[ \longrightarrow \mathbb{R}$$

$c \in ]a, b[$  e  $f$  crescente.

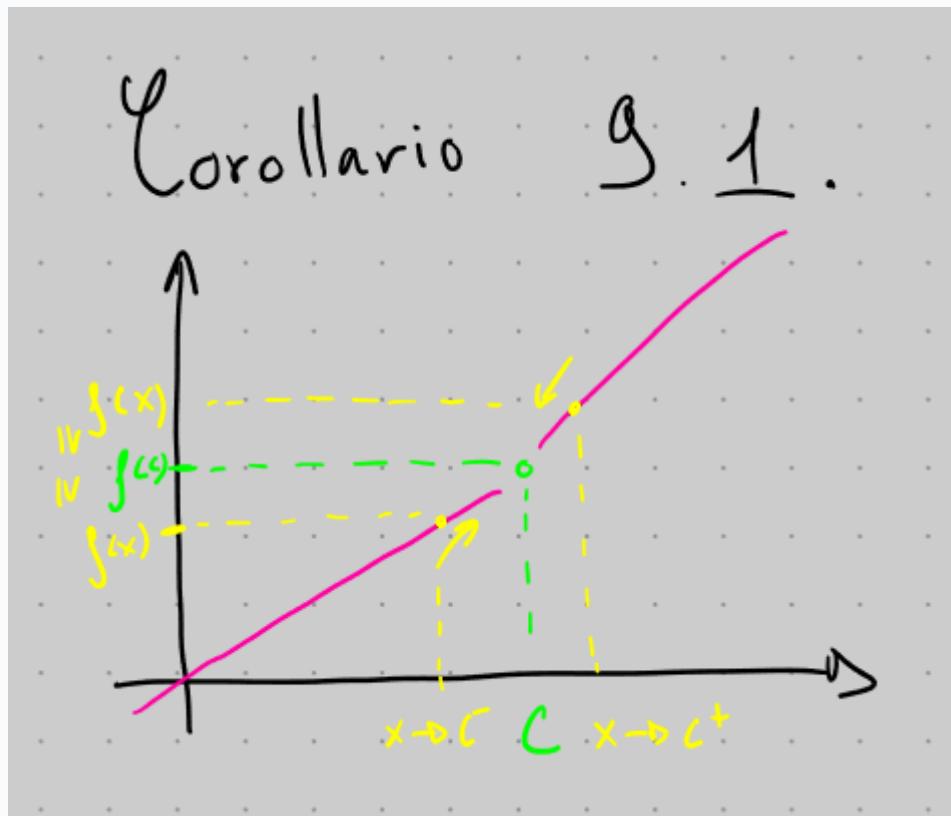
$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x); \lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$$

e inoltre

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) \leq f(c) \leq \lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$$

Abbiamo di fatto una situazione situazione del raffigurata nella **figura 9.1.**

**FIGURA 9.1.** (*Idea grafica del corollario 9.1.*)



#### #Osservazione

Osservazione (la definizione di discontinuità di prima specie).

Quindi secondo il **COROLLARIO 9.1.** possiamo avere le due seguenti situazioni; o il *limite destro* ed il *limite sinistro* si coincidono o abbiamo una specie di "*salto*". Questo sarà utile quando parleremo della *continuità* e della *discontinuità*, riferendoci in particolare ad un teorema che enuncia, data una funzione monotona crescente, in un punto discontinuo possiamo avere *solo* la discontinuità del tipo "*salto*" (Definizione 2 (discontinuità di primo ordine / di salto)).

## Esempi di Limiti di Funzione

*Esempi di limiti: funzione costante, funzione identità, polinomi, funzioni razionali, funzioni trigonometriche, ...*

### 0. Preambolo

Abbiamo appena visto che cos'è **generalmente** un limite mediante la sua definizione, poi abbiamo anche sviluppato delle strategie per calcolare o verificare l'esistenza dei limiti velocemente.

Quindi è ovvio che questo capitolo richiede la conoscenza (anche parziale) dei seguenti precedenti capitoli:

- Definizione di Limite di funzione
- Teoremi sui Limiti di Funzione (Almeno fino alla **sez. 7**)
- Limite di Successione
- Esempi di Limiti di Successione

Infatti, mediante i nostri strumenti appena sviluppati, andremo a calcolare dei limiti notevoli.

### 1. Funzione costante e identità

#Esempio

Esempio (funzione costante).

Sia  $f$  la funzione costante  $f(x) = c, c \in \mathbb{R}$

Allora il suo limite è

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} c = c$$

ed è facile dimostrarla; infatti riscrivendo la definizione di questo limite, la condizione necessaria risulta **sempre** verificata.

#Esempio

Esempio (funzione identità).

Sia  $f$  la funzione identità  $\text{id}_x = f(x) = x$ , definita  $\forall x \in E$ .

Allora il suo limite è

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$$

che risulta sempre vera ponendo  $\delta = \varepsilon$ .

#### #Osservazione

Osservazione (i limiti valgono anche in  $\tilde{\mathbb{R}}$ ).

Notiamo che per la funzione identità il limite può valere anche per  $x_0 \in \tilde{\mathbb{R}}$  (i numeri reali estesi); infatti abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x = \pm\infty$$

ed è sempre vera in quanto possiamo porre  $N = M$  o  $n = m$ .

#### #Osservazione

Osservazione (ricavare altri limiti dai questi due limiti).

Possiamo sfruttare altri teoremi per ricavare

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x^n = \lim_{x \rightarrow x_0} (x \cdot x \cdot \dots \cdot x) = \lim_{x \rightarrow x_0} x \cdot \dots \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0^n$$

tutta secondo il nostro ragionamento questa vale per  $\forall n \in \mathbb{N} > 0$  dato che stiamo ragionando in "*termini discreti*".

## 2. Funzioni quozienti

#### #Esempio

Esempio (limite della funzione quoziente all'infinito).

Dai *teoremi sui limiti* ([Teorema 8 \(limiti finiti e infinitesimi\)](#)) , possiamo conosciamo il limite di  $\frac{1}{x}$  per  $x$  che tende all'infinito. Infatti

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

è un *infinitesimo*.

#### #Esempio

Esempio (limite della funzione quoziente a zero).

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

e

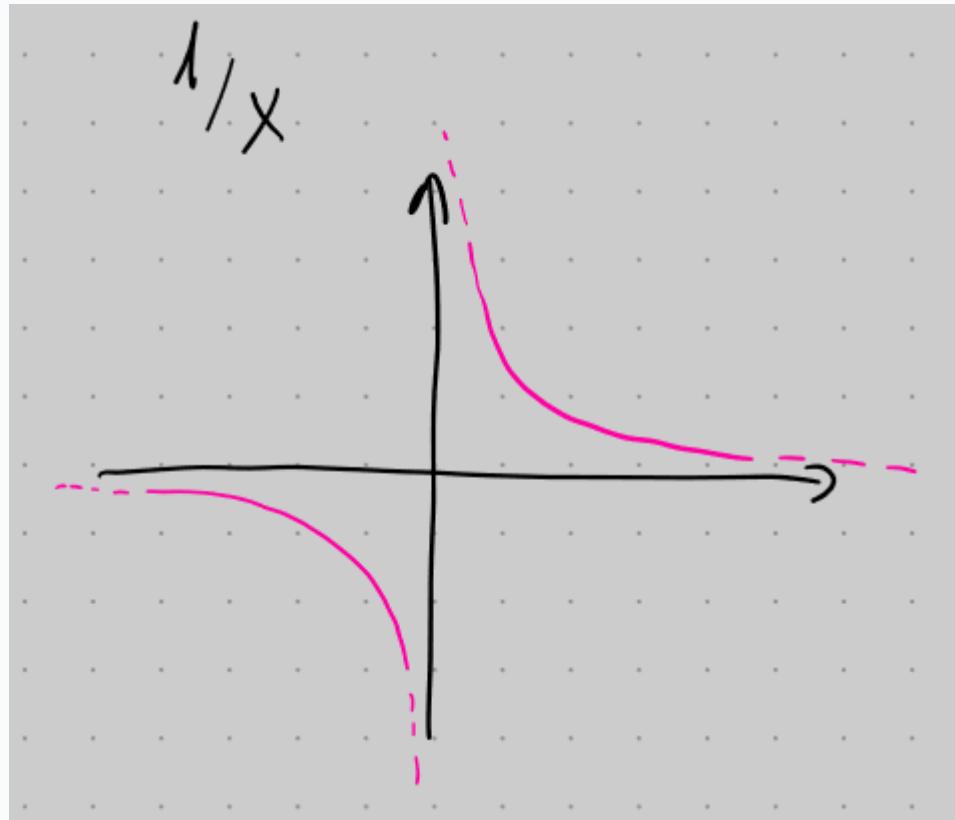
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Infatti in questo modo abbiamo il grafico della funzione  $\frac{1}{x}$  ([figura 2.1](#)). Concludiamo che *non* esiste il limite

$$\nexists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$$

in quanto il limite *destro* e *sinistro* sono diversi.

**FIGURA 2.1.** (*Grafico della funzione quoziente*)



#Esempio

Esempio (limite della funzione quoziente alla  $n$  esima potenza).

Allora sfruttando altri *teoremi sui limiti di funzione* ([Teorema 7 \(operazioni tra limiti\)](#)), dall'esempio precedente possiamo ricavare

### 3. Funzione radice

#Esempio

Esempio (funzione radice quadrata).

Sia  $f(x) = \sqrt{x}$  e abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$$

Infatti nella definizione del limite basta prendere  $\delta = \varepsilon^2$ .

Ora vediamo cosa succede se  $0 < x_0, x_0 \in \mathbb{R}$ .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$$

Per dimostrarlo possiamo fare il seguente.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x,$$

$$0 < |x - x_0| < \delta \implies |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| < \varepsilon$$

manipolo la seconda:

$$|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| \implies |\sqrt{x} - \sqrt{x_0} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}|$$

$$|\sqrt{x} - \sqrt{x_0} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}| \implies \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \leq \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}}$$

allora

$$|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| \leq \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}} < \varepsilon \implies |x - x_0| < \varepsilon \sqrt{x_0}$$

Quindi basta scegliere  $\delta = \varepsilon \sqrt{x_0}$ .

Ora vediamo che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

basta infatti scegliere  $N = M^2$ .

Analogamente tutto questo vale per  $\sqrt[n]{x}$ .

### 4. Funzioni polinomi e razionali

#Esempio

Sia  $f(x)$  un *polinomio di grado n*, ovvero del tipo

$$f(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

Allora sfruttando le *operazioni con i limiti* (Teorema 7 (operazioni tra limiti)), possiamo ricavare il suo limite quando questa funzione tende a  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} (a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} a_0 + \lim_{x \rightarrow x_0} a_1x + \dots + \lim_{x \rightarrow x_0} (a_nx^n) \\ &= a_0 + a_1x_0 + \dots + a_nx_0^n\end{aligned}$$

### #Esempio

Esempio (limite del polinomio all'infinito).

Nel caso in cui  $x_0 = +\infty \in \tilde{\mathbb{R}}$ , allora abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n)$$

e possiamo raccogliere ogni termine con  $x^n$ , ottenendo dunque

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} (a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x^n \left( a_n + a_{n-1} \frac{1}{x} + \dots + a_0 \frac{1}{x^n} \right) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n \cdot \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} (a_n) + \lim_{x \rightarrow +\infty} a_{n-1} \frac{1}{x} + \dots \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n \cdot (a_n + 0 + 0 + \dots + 0) \\ &= a_n \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n\end{aligned}$$

Allora in questo caso dobbiamo vedere quale valore assume il *coefficiente* dell'ultimo *termine*  $x^n$ . Procediamo dunque per casistica:

$$a_n \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } a_n > 0 \\ -\infty & \text{se } a_n < 0 \\ \text{forma indeterminata, altrimenti} & \end{cases}$$

abbiamo ricavato questo dai *teoremi sui limiti di funzione* (Teorema 9 (forme indeterminate)).

Analogamente c'è un discorso verosimile per il limite quando la funzione tende a

$$a_n \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} -\infty & \text{se } a_n > 0 \\ +\infty & \text{se } a_n < 0 \\ \text{forma indeterminata, altrimenti} & \end{cases}$$

## #Esempio

**Esempio** (limite finito della funzione razionale di grado  $n, m$ ).

Sia la **funzione razionale** un quoziente tra due **polinomi** di grado  $n, m$  ovvero del tipo

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, f(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m}$$

Allora sfruttando dei teoremi ([Teorema 7 \(operazioni tra limiti\)](#)) possiamo avere

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \frac{a_0 + a_1 x_0 + \dots + a_n x_0^n}{b_0 + b_1 x_0 + \dots + b_m x_0^m}$$

e bisogna avere che

$$b_0 + b_1 x_0 + \dots + b_m x_0^m \neq 0$$

Se invece la sopra non viene verificata (ovvero il polinomio al denominatore è 0) bisogna vedere se è vera la seguente.

$$a_0 + a_1 x_0 + \dots + a_n x_0^n \stackrel{?}{=} 0$$

A. Se è **vera** (ovvero che vale 0), allora dobbiamo usare il **teorema di Ruffini** per cui sappiamo che un polinomio si annulla in  $x_0$  **se e solo se**  $(x - x_0)$  è un fattore. Dunque a quel punto si può semplificare la frazione e vedere il risultato; può verificare che rimane il numeratore (e quindi il limite tende a 0) oppure che rimane il denominatore (e quindi il limite tende a  $\pm\infty$ ).

B. Se è invece **falsa** (ovvero che **non** vale 0), allora il limite può essere  $+\infty$  o  $-\infty$ , oppure può non esistere se il limite **destro** è diverso dal limite **sinistro**. C'è infatti un problema del segno: bisogna vedere il segno del numeratore.

## #Esempio

**Esempio** (limite all'infinito della funzione razionale).

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m}$$

Allora con un ragionamento simile all'esempio precedente ([Esempio 10 \(limite del polinomio all'infinito\)](#)) possiamo raccogliere in entrambi i polinomi per  $x^n$  o  $x^m$  e avere

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n(a_n + a_{n-1} \frac{1}{x} + \dots + a_0 \frac{1}{x^n})}{x^m(b_m + b_{m-1} \frac{1}{x} + \dots + b_0 \frac{1}{x^m})} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^{n-m} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_m} + 0 + \dots + 0 \\ &= \frac{a_n}{b_m} \lim_{x \rightarrow \infty} x^{n-m} \end{aligned}$$

Raggiunto qui dobbiamo procedere per casistica per  $x^{n-m}$ :

- A. Se  $n - m = 0$  (ovvero i polinomi sono dello stesso grado) allora il limite tende a  $\frac{a_n}{b_m}$
- B. Se  $n - m > 0$  allora il limite tende a  $\pm\infty$ , il segno del limite varia a seconda del segno della costante  $\frac{a_n}{b_m}$
- C. Se  $n - m < 0$  allora il limite tende a 0.

## 5. Funzioni trigonometriche

Questa sezione ovviamente richiede la conoscenza di [Funzioni trigonometriche](#)

#Esempio

Esempio (funzione seno).

Ricordiamoci delle *funzioni di prostaferesi* ([Osservazione 12 \(formule di prostaferesi\)](#)).

Voglio dimostrare che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$$

Allora parto dalla distanza euclidea

$$|f(x) - L| \implies |\sin x - \sin x_0|$$

e conoscendo le *formule di prostaferesi* ottengo

$$2 \left| \sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right) \cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right) \right| = 2 \left| \sin \frac{x - x_0}{2} \right| \left| \cos \frac{x - x_0}{2} \right|$$

$$2 \left| \cos \frac{x - x_0}{2} \right| \cdot 1$$

allora

$$\begin{aligned} |\sin x - \sin x_0| &= 2 \left| \sin \frac{x - x_0}{2} \right| \left| \cos \frac{x - x_0}{2} \right| \\ &\leq 2 \left| \sin \frac{x - x_0}{2} \right| \end{aligned}$$

Ora ci ricordiamo che  $|\sin \alpha| \leq |\alpha|$  (infatti basta pensare che  $\alpha$  è la lunghezza della retta e  $\sin \alpha$  è invece la coordinata  $y$  del punto su cui cadiamo quando facciamo il processo di "*avvolgimento*" di questa retta; oppure per convincerci di questo basta disegnare i grafici di queste due funzioni, *figura 5.1.*).

Dunque otteniamo

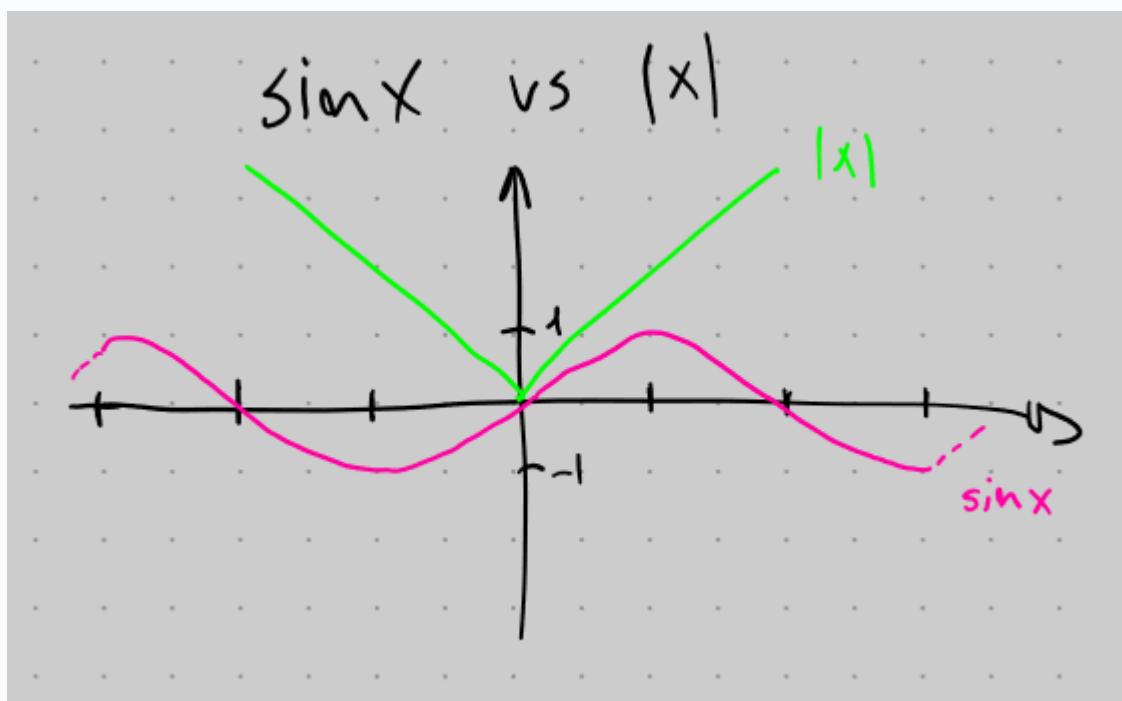
$$|\sin x - \sin x_0| \leq 2 \left| \sin \frac{x - x_0}{2} \right| \leq 2 \left| \frac{x - x_0}{2} \right| = |x - x_0|$$

ovvero

$$|\sin x - \sin x_0| \leq |x - x_0|$$

allora nella *definizione del limite* (*Definizione di Limite di funzione*) basta scegliere  $\delta = \varepsilon$  in quanto abbiamo appena verificato che sicuramente quest'ultima espressione è sicuramente vera.

**FIGURA 5.1.** ( $|x| \geq \sin x$ )



Esercizio lasciato al lettore: provare che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0$$

## #Esempio

## Esempio (funzione tangente).

Invece per la **funzione tangente** tan si ha che:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \tan x = \begin{cases} \tan x_0 & \text{se } x_0 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \forall k \in \mathbb{Z} \\ \text{non def.,} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

il limite di tan per  $x \rightarrow \alpha$ ,  $\forall \alpha \in [\frac{\pi}{2}]_{\equiv \pi}$  **non** è definita in quanto il limite destro e sinistro di questa non sono uguali; infatti

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^-} \tan x = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow \alpha^+} \tan x = -\infty$$

e questi valgono per la **permanenza del segno**; infatti se da **sinistra**  $\lim_{x \rightarrow \alpha^-} \frac{1}{\cos x} = +\infty$  allora sicuramente vale ciò che abbiamo detto prima. Analogamente per l'altro limite.

Quindi

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^+} \tan x \neq \lim_{x \rightarrow \alpha^-} \tan x$$

## #Esempio

## Esempio (funzione arcotangente).

Riprendiamo invece la **funzione arcotangente** arctan  $x$ .

Osserviamo dal grafico di tale funzione (**figura 5.4.**) che valgono le seguenti:

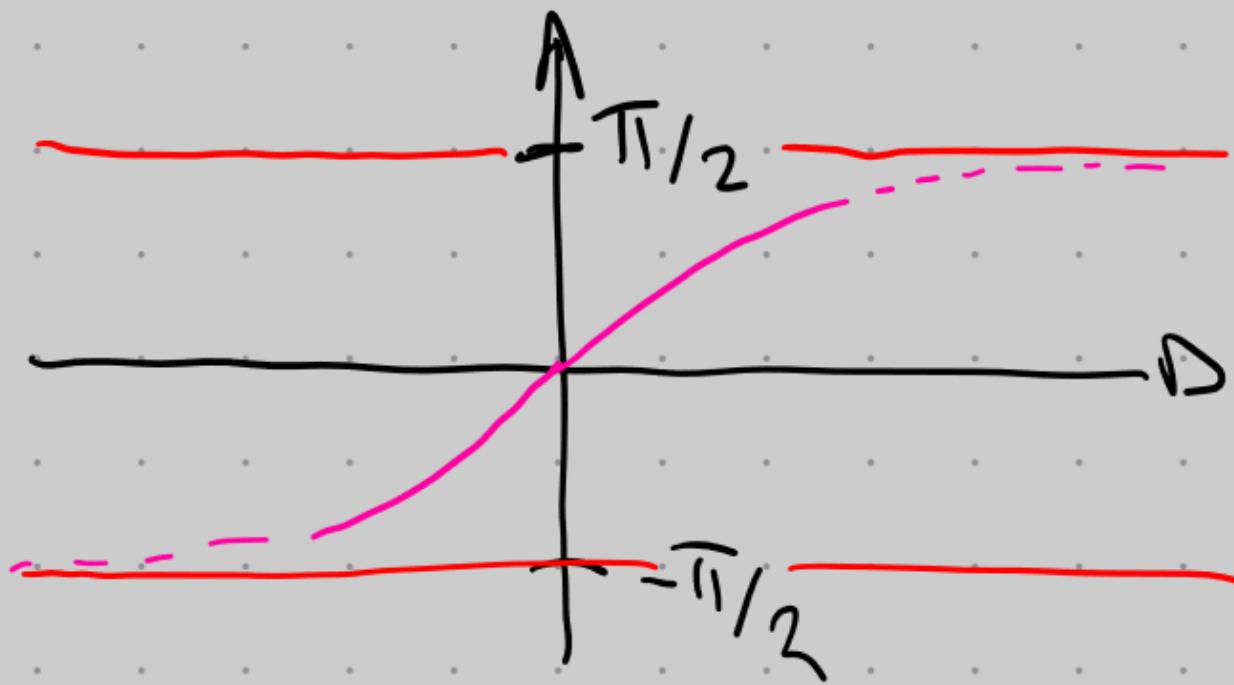
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \arctan x = \arctan x_0$$

**FIGURA 5.4.** (Funzione arctan)

# arctan



#Esempio

Esempio (funzione arcoseno e arcocoseno).

Riprendiamo ora le funzioni arcsin e arccos.

Dai grafici di queste (*figura 5.5.*) osserviamo che

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \arcsin x = -\frac{\pi}{2}; \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} \arccos x = \pi$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \arcsin x = \frac{\pi}{2}; \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \arccos x = \pi$$

**FIGURA 5.5.** (*Grafici di*  $\arcsin$ ,  $\arccos$ )

"Pasted image 20231017172546.png" could not be found.

## 6. Funzione esponenziale e logaritmica

Per la funzione esponenziale e logaritmica si tengono in conto i risultati delle definizioni delle *funzioni esponenziali e logaritmiche* (Proposizione 2 (le prime proprietà dell'esponenziale sui naturali), Teorema 14 (le proprietà del logaritmo)).

## #Teorema

**Teorema** (l'esponenziale confrontato con l'identità).

In alcuni esempi dei limiti di successione ([Esempio 2 \(limite dell'esponenziale contro potenza\)](#)) abbiamo visto che

$$\lim_n \frac{a^n}{n} = +\infty$$

Allora si può provare che

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x} = +\infty}$$

## #Dimostrazione

**DIMOSTRAZIONE** del [teorema 6.1.](#) ([Teorema 18 \(l'esponenziale confrontato con l'identità\)](#))

Partiamo dal fatto che

$$n \leq x < n+1 \iff [x] \leq x < [x]+1$$

e chiamo  $n = [x]$  la *parte intera di*  $x$ . Allora si vede che

$$a^{[x]} \leq a^x < a^{[x]+1}$$

Naturalmente

$$\frac{1}{[x]+1} < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{[x]}$$

Allora li combino, ottenendo

$$\frac{a^{[x]}}{[x]+1} < \frac{a^x}{x} < \frac{a^{[x]+1}}{[x]}$$

e osservando che

$$\lim_n \frac{a^n}{n+1} = +\infty, \lim_n \frac{a^{n+1}}{n} = +\infty$$

allora per il [teorema dei due carabinieri](#) ([Osservazione 5 \(i teoremi per i limiti di funzioni\)](#)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x} = +\infty \blacksquare$$

## Esponenziale vs quoziente k

#Teorema

**Teorema** (l'esponenziale è l'infinito "più grande").

Voglio calcolare

$$a > 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^k}, k \in \mathbb{N}$$

In questo esempio ho una *forma indeterminata* del tipo  $\frac{+\infty}{+\infty}$  (Teorema 9 (forme indeterminate)); la domanda che ci poniamo è il seguente: *"chi vince tra l'esponenziale  $a^x$  e il quoziente  $x^k$ ? Ovvero avremmo  $+\infty$  o  $0$ ?"* Spoiler: vincerà l'esponenziale e di conseguenza il limite è  $+\infty$ .

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^k} = +\infty}$$

#Dimostrazione

**DIMOSTRAZIONE** del **teorema 6.2.** (Teorema 19 (l'esponenziale è l'infinito "più grande"))

Qui uso le proprietà degli esponenti (Funzione esponenziale e Logaritmica, **TEOREMA 1.5.**).

$$\frac{a^x}{x^k} = \left( \frac{(a^{\frac{1}{k}})^x}{x} \right)^k$$

Ora considero il limite di

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(a^{\frac{1}{k}})^x}{x} = +\infty$$

e facendo la sostituzione con  $y = \frac{x}{k}$  ho

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{a^y}{y} \cdot \frac{1}{k} = +\infty$$

che è infatti una situazione del tipo **ESEMPIO 6.1..**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^k} \rightarrow (+\infty)^k \rightarrow +\infty$$

Pertanto il risultato finale è

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^k} = +\infty}$$

## Esponenziale vs potenza

#Corollario

**Corollario** (l'esponenziale decresce il più velocemente).

Ora facciamo lo stesso scontro, solo che al posto del quoziente abbiamo la potenza  $p_n(x) = x^n$ . Allora

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k a^x = \underbrace{\pm\infty \cdot 0}_{\text{forma ind.}}$$

Allora qui ci chiediamo quale "**decresce**" la più velocemente;  $x^k$  oppure  $a^x$ ? Ora vediamo.

Poniamo, mediante la **sostituzione di variabile**,  $y = -x$ ; allora

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} -y^k a^{-y} = (-1)^k y^k a^{-y} = (-1)^k \frac{y^k}{a^y}$$

Notiamo che

$$\frac{y^k}{a^y} = \left(\frac{a^y}{y^k}\right)^{-1}$$

quindi abbiamo una situazione del tipo

$$(-1)^k \cdot \left(\frac{1}{+\infty}\right) \rightarrow (-1)^k \cdot 0 \rightarrow 0$$

Allora il limite è

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k a^x = 0}$$

aggiudicandoci un'altra vittoria per l'esponenziale.

#Esempio

**Esempio** (la decrescita del logaritmo viene annullata dall'identità).

Voglio calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log_a x, a > 1$$

notiamo che questa è una situazione del tipo  $0 \cdot (+\infty)$ , ovvero una **forma indeterminata**. Allora procediamo per **sostituzione di variabile**, ponendo  $y = \log_a x \implies x = a^y$ ;

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} ya^y = 0$$

che è una situazione del tipo presentato in un altro limite ([Corollario 20](#) (l'esponenziale decresce il più velocemente)) con  $k = 1$ .

Generalizzando si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \log x = 0, \alpha > 0$$

#Esempio

**Esempio** (logaritmo vs radice quadrata).**ESEMPIO 6.5.** (*Logaritmo vs radice quadrata*)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \log_a x, a > 1$$

Analogamente procediamo per sostituzione;  $y = \log_a x \implies \sqrt{x} = a^{\frac{y}{2}}$  allora

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} a^{\frac{y}{2}} y \implies \lim_{z \rightarrow -\infty} a^z (2z) = 0$$

## Logaritmo vs quoziente

#Esempio

**Esempio** (il logaritmo cresce più lentamente).

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a x}{x}$$

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{a^y} = ya^{-y}$$

Sostituisco di nuovo le variabili,  $z = -y \implies y = -z$  e ho

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} (-z)a^z = -\lim_{z \rightarrow -\infty} za^z = -0 = 0$$

## 7. Limiti fondamentali

Ora illustriamo ciò che chiameremo come i *limiti fondamentali*.

Prima di considerare il primo esempio facciamo le seguenti osservazioni.

### #Osservazione

Osservazione (calcolare l'area del settore circolare).

**OSS 7.1.** Voglio calcolare l'area del *settore circolare* con raggio  $r$  e angolo  $\alpha$  e la lunghezza dell'arco  $l = r\alpha$  (*figura 7.1.*)

*Idea.* Che vuol dire calcolare l'area di una figura? Questo significa prendere una "misura" standard per misurare l'area, poi per contare. Infatti ad esempio, per calcolare l'area di un *triangolo* partiamo dall'area di due *rettangoli* "distorti" che formano un triangolo.

Analogamente facciamo la stessa cosa col settore circolare: la dividiamo in "*triangolini*" piccolissimi, poi li "*apro*" disponendoli fila per fila.

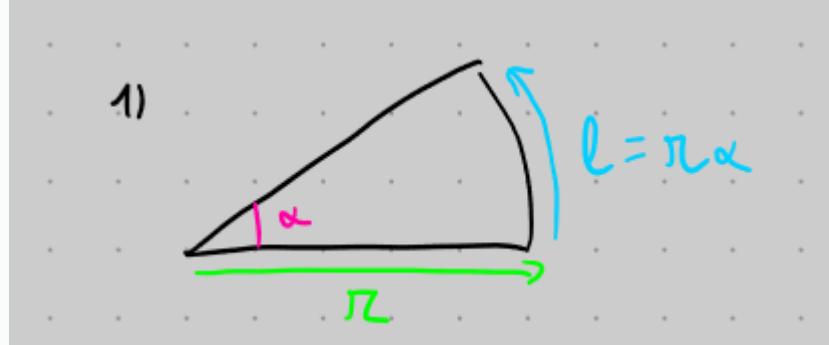
Ora arriviamo al punto cruciale: "*faccio finta*" (oppure approssimo) la lunghezza dell'*arco* con quello della *coda*. Graficamente il ragionamento consiste nella *figura 7.2.*

Dove la "*base*" di questi triangoli è  $\alpha r$  in quanto questa è proprio la "*base*" della figura originaria e l"*altezza*" è il raggio  $r$ .

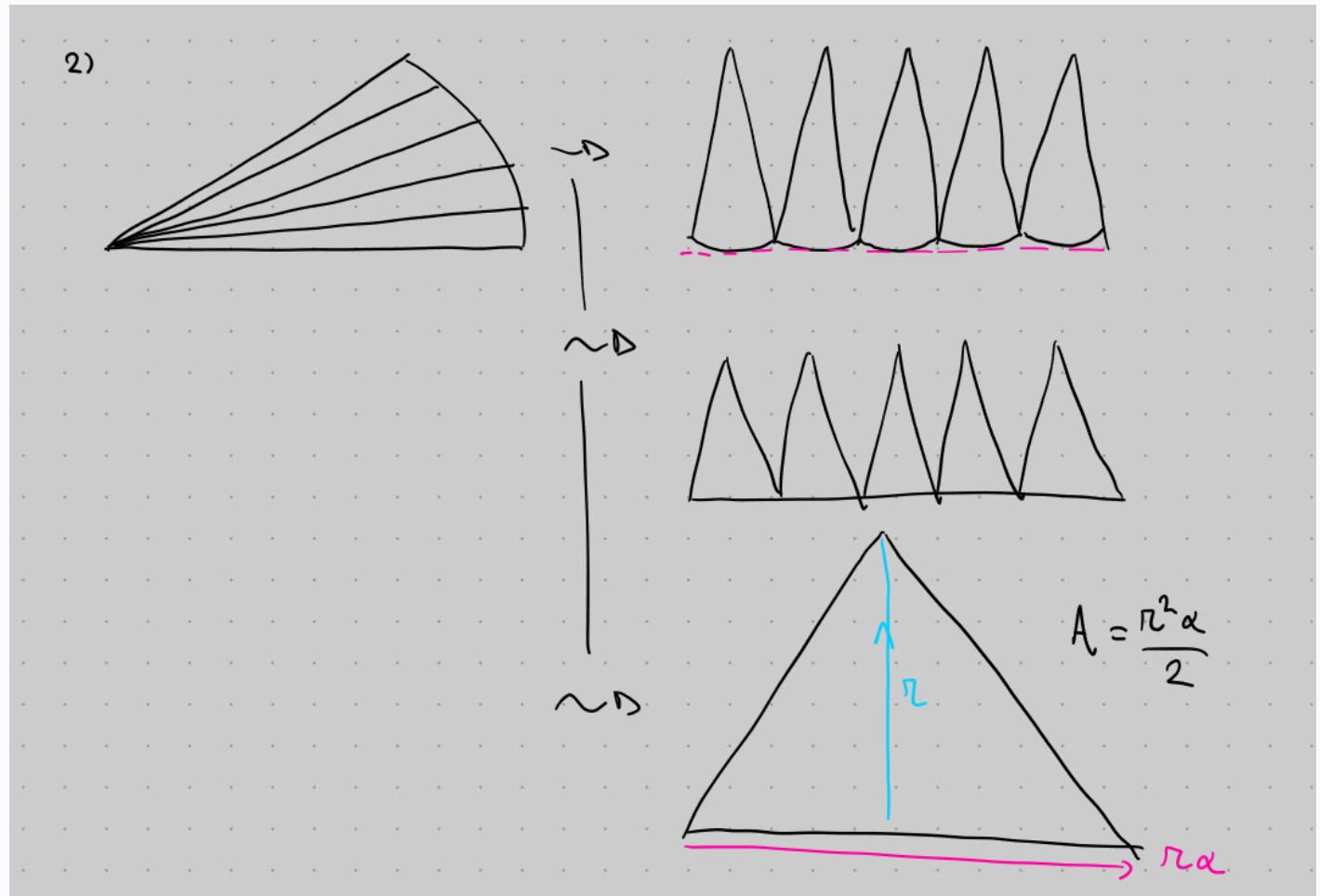
Quindi possiamo unire tutti questi triangoli in uno singolo triangolo con le stesse misure e avere dunque un singolo triangolo con base  $\alpha r$  e altezza  $r$ . Usiamo dunque la formula per calcolare l'area di questo triangolo.

$$A = \frac{\alpha r^2}{2}$$

### FIGURA 7.1. (*Il problema*)



**FIGURA 7.2.** (*Il fulcro del ragionamento*)



### #Osservazione

Osservazione (relazione tra i triangoli formatosi col settore circolare).

Ora, riprendendo il cerchio unitario  $\Gamma$ , traccio **tre figure geometriche** di cui due sono triangoli ed uno è il settore circolare. Segniamo i tre triangoli  $A_{1,2,3}$  nella **figura 7.3..**

Chiaramente si vede che

$$A_1 \leq A_2 \leq A_3$$

L'area del triangolo delineato dalla **coda** è

$$A_1 = \frac{\sin \alpha}{2}$$

$$A_2 = \frac{a}{2}$$

Ora l'area del triangolo ottenuto "estendendo" la retta orizzontale in  $x = 1$  e la "diagonale" che taglia il cerchio è

$$A_3 = \frac{\tan \alpha}{2}$$

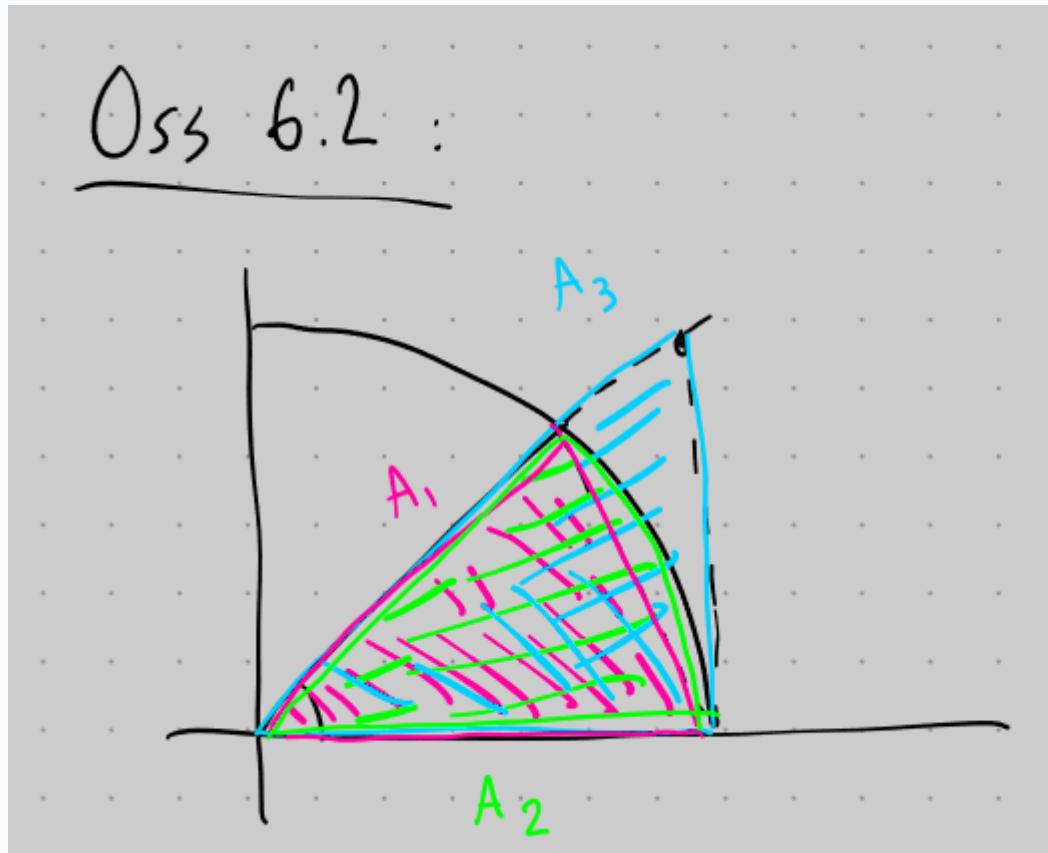
ed è ottenuta facendo le proporzioni tra il triangolo  $A_1$  e questo triangolo dove la base è 1(ed è possibile farlo in quanto i due triangoli in merito sono simili). Infatti

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{x} \implies x = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$$

Allora possiamo concludere che in questa figura sussiste la seguente relazione per  $\alpha \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ :

$$\frac{\sin \alpha}{2} \leq \frac{\alpha}{2} \leq \frac{\tan \alpha}{2}$$

**FIGURA 7.3.** (*Le aree segnate*)



## Limite fondamentale $\sin x / x$

#Teorema

**Teorema** (Teorema 7.1. (primo limite fondamentale  $\sin x/x$ )).

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

**DIMOSTRAZIONE** del [teorema 7.1.](#) ([Teorema 26 \(Teorema 7.1. \(primo limite fondamentale sin x/x\)\)](#))

Voglio calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

e usando alcuni dei [Teoremi sui Limiti di Funzione](#) per trattare i limiti separatamente le  $x$  con 0, otteniamo la frazione  $\frac{0}{0}$ , ovvero una **forma indeterminata**. Dobbiamo allora trovare un modo alternativo di calcolare questo limite; questo è possibile grazie alle osservazioni precedenti già fatte, in particolare l'[osservazione 7.2.](#) ([Osservazione 25 \(relazione tra i triangoli formatosi col settore circolare\)](#)).

Infatti possiamo manipolare l'espressione finale per ottenere il seguente:

$$\begin{aligned} \frac{\sin \alpha}{2} &\leq \frac{\alpha}{2} \leq \frac{\tan \alpha}{2} \\ \sin \alpha &\leq \alpha \leq \tan \alpha \\ 1 &\leq \frac{\alpha}{\sin \alpha} \leq \frac{\tan \alpha}{\sin \alpha} = \cos \alpha \\ \cos \alpha &\leq \frac{\sin \alpha}{\alpha} \leq 1 \end{aligned}$$

Per il teorema dei [due carabinieri](#) ([Teoremi sui Limiti di Funzione](#), **TEOREMA 4.1.**), abbiamo i seguenti:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \cos \alpha &\leq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \alpha}{\alpha} \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 \\ \implies 1 &\leq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \alpha}{\alpha} \leq 1 \\ \implies \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \alpha}{\alpha} &= 1 \end{aligned}$$

Però ricordiamoci che  $\frac{\sin x}{x}$  è una funzione **pari** ([Funzioni](#), **DEF 9.**), in quanto abbiamo due funzioni dispari; quindi questo limite può valere anche per il **limite destro**  $0^-$ . Concludiamo dunque

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

Ci sarà utile anche ricordare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = ?$$

Per calcolarlo dobbiamo avvalerci di un *trucco*, ovvero quello di moltiplicare per un'espressione equivalente a  $\frac{1}{1}$ . In questo caso prendiamo

$$\frac{1 + \cos x}{1 + \cos x}$$

Dunque il nostro limite diventa

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)} \\ \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \implies &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos x} \\ &= 1^2 \cdot \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Concludiamo allora

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}}$$

## Limiti esponenziali e logaritmici

Dai risultati del *capitolo 6* (^96da3e). *è opportuno ricordarsi i seguenti* limiti notevoli\*:

#Corollario

**Corollario** (limiti esponenziali e logaritmici).

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^k} = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k a^x = 0$
$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\varepsilon \log_a x = 0, \varepsilon > 0$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a x}{x^\varepsilon} = 0, \varepsilon > 0$

## Limite fondamentale $(1+1/n)^n$

Dai risultati di [Esempi di Limiti di Successione](#), in particolare l'**ESEMPIO 1.4.**, abbiamo visto che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

**DETOUR.** Si nota che da adesso in poi, quando si scrive  $\log$ ,  $\exp$  senza specificare le loro basi si implicitamente intende  $\log_e = \ln$  e  $\exp_e = e^{\cdot\cdot\cdot}$ . Facciamo questo in quanto vedremo che usando questa nomenclatura diventerà tutto più semplice.

#Teorema

**Teorema** (limite fondamentale  $e$ ).

Si nota il seguente limite fondamentale

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

#Dimostrazione

**DIMOSTRAZIONE** del [teorema 7.2.](#) ([Teorema 29 \(limite fondamentale  \$e\$ \)](#))

Voglio calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

**Idea.** Il ragionamento è analogo a quello presentato nel [teorema 6.1.](#) (^7c9b77), ovvero quella di usare la *parte intera*  $n = [x]$ . Allora sappiamo già che

$$[x] \leq x < [x] + 1 \implies \frac{1}{[x] + 1} < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{[x]}$$

Ora ci aggiungiamo  $+1$  da tutte le parti, poi li eleviamo alle loro rispettive potenze di partenza:

$$\begin{aligned} \frac{1}{[x] + 1} + 1 &< \frac{1}{x} + 1 \leq \frac{1}{[x]} + 1 \\ \left(\frac{1}{[x] + 1} + 1\right)^{[x]} &< \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(\frac{1}{[x]} + 1\right)^{[x]+1} \end{aligned}$$

Adesso analizziamo il membro sinistro e destro.

## 1. Membro sinistro

160

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{[x]+1} + 1\right)^{[x]} &= \lim_n \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \\ &= \lim_n \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)} \\ &= e \cdot 1 = e \end{aligned}$$

## 2. Membro destro

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{[x]} + 1\right)^{[x]+1} &= \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} \\ &= \lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= e \cdot 1 = e \end{aligned}$$

Vediamo che ambo i lati convergono a  $e$ ; di conseguenza per il [teorema dei due carabinieri](#) ([Teorema 6 \(dei due carabinieri\)](#)) abbiamo

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e}$$

#Corollario

**Corollario** (forma "negativa" del limite fondamentale di  $e$ ).

Si nota che vale anche il limite

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e}$$

**DIMOSTRAZIONE** del [corollario 7.3.](#) ([Corollario 30 \(forma "negativa" del limite fondamentale di  \$e\$ \)](#))

Ora voglio calcolare

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{y}\right)^{-y} &= \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{y}\right)^y} \\
 &= \frac{1}{\left(\frac{y-1}{y}\right)^y} \\
 &= \left(\frac{y}{y-1}\right)^y \\
 &= \left(\frac{y-1+1}{y-1}\right)^y \\
 &= \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^y \\
 &= \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^{y-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{y-1}\right) \\
 &= e \cdot 1 = e \blacksquare
 \end{aligned}$$

## Limite fondamentale $(1+n)^{(1/n)}$

#Corollario

**Corollario** (seconda forma del limite fondamentale di  $e$ ).

Si nota la *seconda forma* del limite fondamentale per  $e$ :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e}$$

#Dimostrazione

**DIMOSTRAZIONE** del *corollario 7.4.* (*Corollario 31 (seconda forma del limite fondamentale di  $e$ )*)

Voglio calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

Se voglio usare la sostituzione di variabile ponendo  $y = \frac{1}{x}$  è necessario procedere per casistica, in quanto  $x \rightarrow 0 \implies \frac{1}{x} \rightarrow \pm\infty$ . Allora

1. Limite destro

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} \stackrel{y=\frac{1}{x}}{\implies} \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (1+x)^{\frac{1}{x}} \implies \lim_{y \rightarrow -\infty} (1+y)^y = e$$

Pertanto è definito il limite

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e} \quad \square$$

## Limite fondamentale $\log(1+x)/x$

#Teorema

**Teorema** (limite fondamentale  $\log(1+x)/x$ ).

Si nota un altro importante limite fondamentale che sfrutta il logaritmo:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1}$$

**DIMOSTRAZIONE** del **teorema 7.3.** (**Teorema 32 (limite fondamentale  $\log(1+x)/x$ )**)

**Idea.** Uso le proprietà del logaritmo (**Funzione esponenziale e Logaritmica, TEOREMA 2.1.**). Dunque

$$\frac{\log(1+x)}{x} = \log(1+x) \cdot x^{-1} = \log(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log((1+x)^{\frac{1}{x}})$$

Osservo che

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} \rightarrow e \text{ per } x \rightarrow 0$$

Allora ho

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \log(e) = 1} \quad \blacksquare$$

## Limite fondamentale $(e^x - 1)/x$

#Corollario

**Corollario** (limite fondamentale  $e^x - 1/x$ ).

Alla base di quanto visto prima, voglio calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

Allora

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\log(y + 1)} = \left( \frac{\log(1 + y)}{y} \right)^{-1} = 1^{-1} = 1$$

Dunque

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1}$$

### #Osservazione

Osservazione (generalizzazione del corollario 7.5.).

Se invece ho

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}, a > 1$$

Idea. Qui invece l'idea principale è di cambiare le basi, riconducendoci così al corollario 7.5.. Allora per cambiare la base di un'esponenziale possiamo considerare il seguente:

$$g(x)^{f(x)} = e^{\ln(g(x))^{f(x)}} = e^{f(x) \ln(g(x))}, f(x) > 0$$

Dunque considerando  $g(x) = a$ ,  $f(x) = x$ , abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln a} - 1}{x} \stackrel{y=x \ln a}{\implies} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{\frac{y}{\ln a}} = \frac{e^y - 1}{y} \cdot \ln a = e \cdot \ln a$$

Dunque

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \cdot e}$$

Infatti il corollario 7.5. (Corollario 33 (limite fondamentale  $e^x - 1/x$ )) è un caso specifico di questo con  $a = e \implies \ln a = 1$ .

## L'utilità dei limiti fondamentali

### #Osservazione

Osservazione (generalizzazione dei limiti fondamentali con sostituzione di variabile).

**TEOREMA 7.1.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

**COROLLARIO 7.5.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

**TEOREMA 7.3.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$

Se ho  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$  oppure  $f(x) \neq 0, \forall x \neq 0$ , allora possiamo considerare il limite delle *funzioni composte* ([Teorema 11 \(del limite della funzione composta\)](#))

$$\begin{aligned}\lim_{f(x) \rightarrow 0} \frac{\sin(f(x))}{f(x)} &= 1 \\ \lim_{f(x) \rightarrow 0} \frac{e^{f(x)} - 1}{f(x)} &= 1 \\ \lim_{f(x) \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + f(x))}{f(x)} &= 1\end{aligned}$$

Questo strumento è *utilissimo* per risolvere degli esercizi sui limiti; infatti questo potrebbe essere addirittura più potente del *Teorema de l'Hopital* ([Teorema 1 \(di De l'Hôpital\)](#)).

## B1. Definizione di limite di successione

### Limite di Successione

*Definizione di limite di successione.*

## 0. Argomenti ed osservazioni preliminari

Questo argomento richiede la conoscenza degli argomenti seguenti.

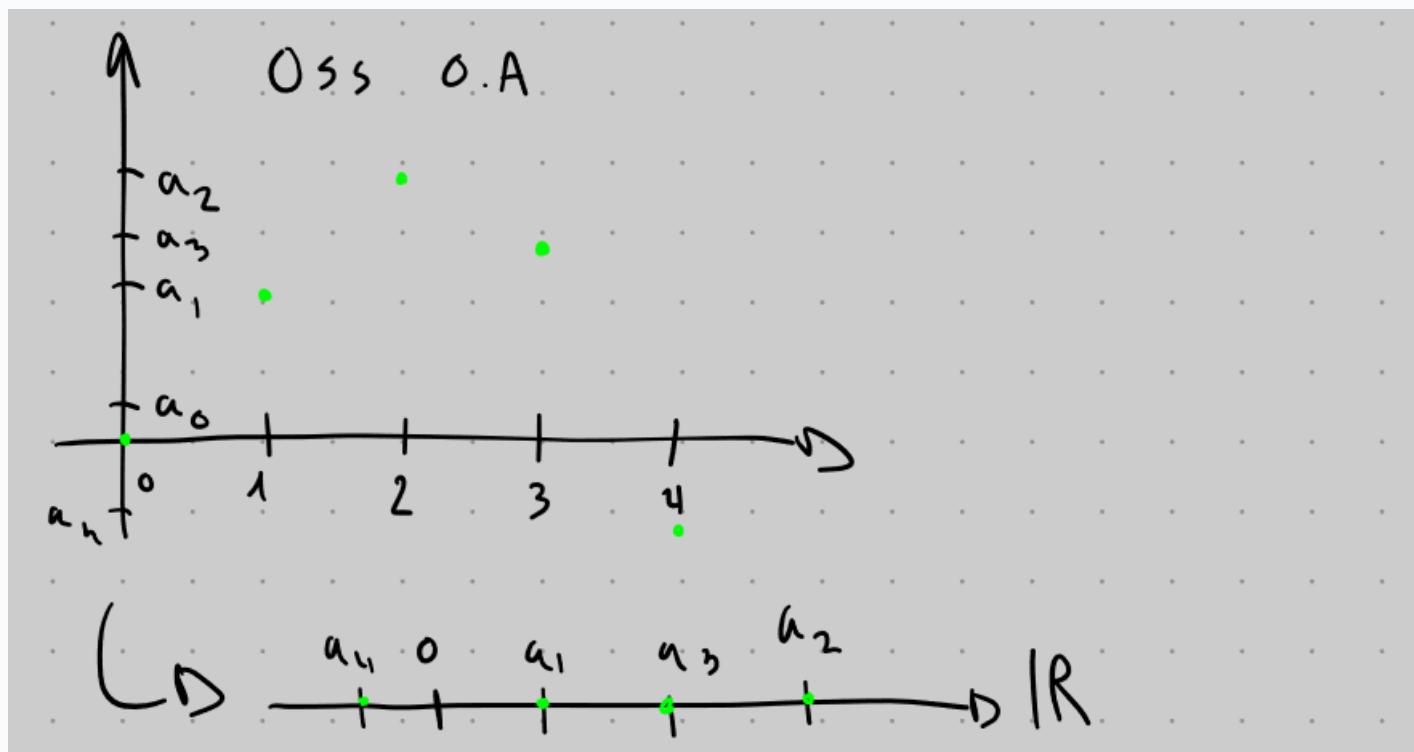
- Assiomi di Peano, il principio di induzione
- Successione e Sottosuccessione

Inoltre facciamo alcune osservazioni preliminari che ci possono aiutare a comprendere il contenuto di questa pagina.

Osservazione (rappresentazione delle successioni sul piano cartesiano  $\pi$ ).

Posso rappresentare una *successione* sul piano cartesiano mediante la maniera rappresentata nella *figura 0.A.*; alternativamente si può rappresentare una successione anche come dei punti sulla *retta reale*.

**FIGURA 0.A.** (*Osservazione 0.A.*)



## #Osservazione

Osservazione (origine del concetto).

Voglio introdurre il concetto di *limite* (Definizione 2 (formulazione generale e rigorosa del limite di una funzione che tende ad un punto di accumulazione)) per una *successione* (Definizione 2 (successione a variabile reale)).

Innanzitutto mi chiedo quale sia il *dominio* di una qualsiasi *successione*: la risposta è l'insieme dei numeri naturali  $\mathbb{N}$ .

Se posso definire il limite di una funzione che si avvicina ad un *punto di accumulazione del dominio*, allora posso certamente definire il limite di una successione che si avvicina ad un punto di accumulazione per  $\mathbb{N}$ .

Tuttavia come osservato (Punti di aderenza e di accumulazione > ^740a07), non ci sono punti di accumulazione in  $\mathbb{R}$ ; quindi bisogna "*ampliare*" i nostri orizzonti e considerare invece  $\tilde{\mathbb{R}}$ , in particolare il simbolo  $+\infty$ . Per definizione possiamo definire il punto di accumulazione di  $+\infty$  come una semiretta qualsiasi  $(a, +\infty)$ .

In questo caso possiamo prendere  $+\infty$  come punto di accumulazione per  $\mathbb{N}$ .

Allora *l'unico valore* di cui ha senso calcolare il limite di una successione è  $+\infty$ ; di conseguenza possiamo scrivere

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_n a_n$$

in una e sola maniera univoca.

## #Definizione

Definizione (limite di successione).

Allora definiamo

$$\lim_n a_n = L$$

come

$$\boxed{\forall V \text{ di } L, \exists U \text{ di } +\infty : \forall n, \\ n \in U \implies a_n \in V}$$

ovvero, supponendo  $L \in \mathbb{R}$ ,

167

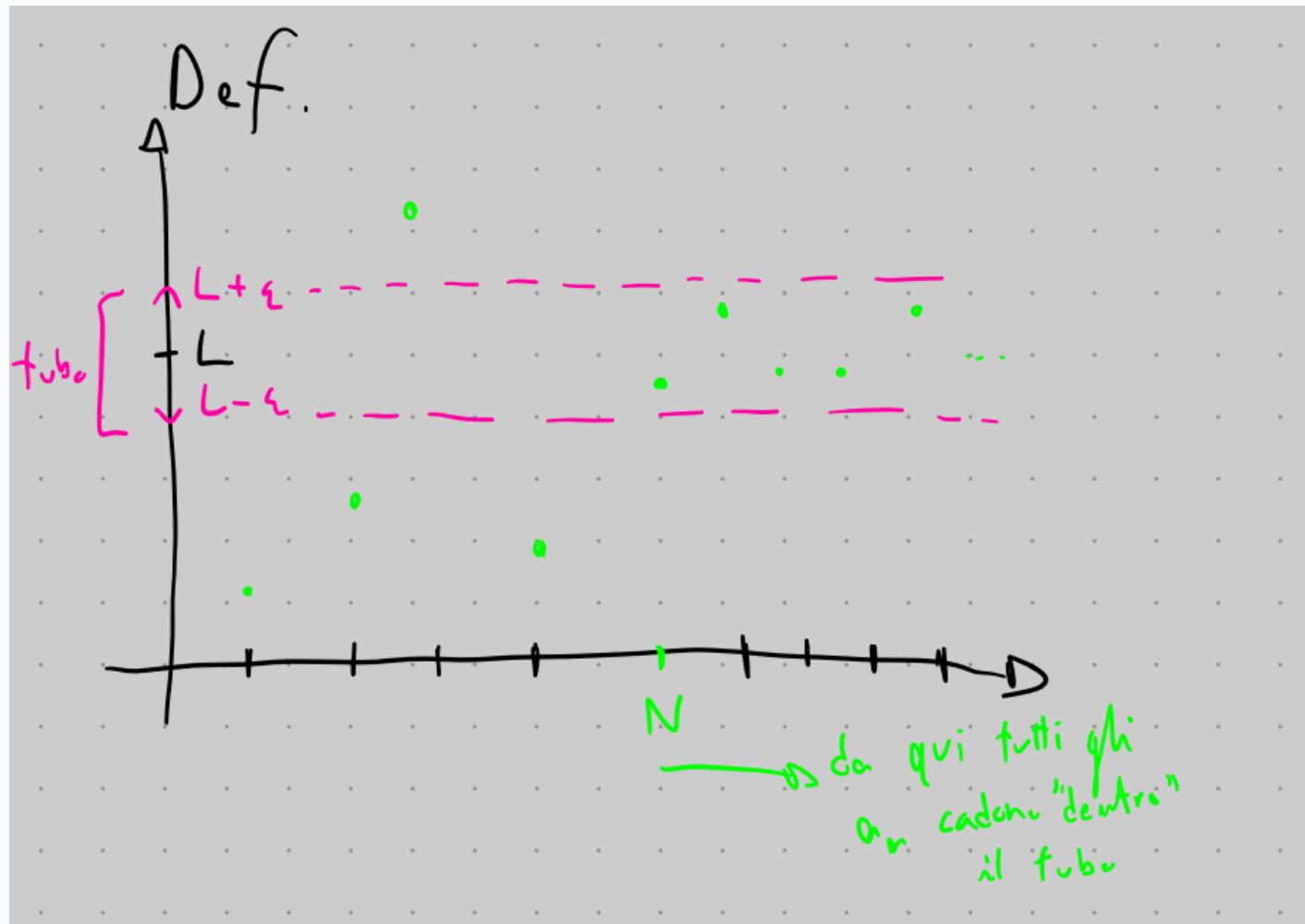
$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 : \forall n,$$
$$n > N \implies |a_n - L| < \varepsilon$$

oppure se  $L \in \tilde{\mathbb{R}}$ ,

$$\forall M > 0, \exists N > 0 : \forall n,$$
$$n > N \implies a_n > M \text{ } (a_n < -M \text{ per } -\infty)$$

Graficamente ho la *figura 1.1..*

**FIGURA 1.1.** (*definizione di limite di successione*)



#Definizione

Definizione (convergenza e divergenza di una successione).

Se

$$\lim_n a_n = L$$

esiste e il limite è un *numero*  $L \in \mathbb{N}$ , allora si dice che  $a_n$  è *convergente*.

Altrimenti se esiste ma ho

allora si dice che  $a_n$  è *divergente a  $\pm\infty$* .

## 2. Proprietà di limiti di successione

### #Osservazione

Osservazione (i teoremi per i limiti di funzioni valgono anche per i limiti di successioni).

Osserviamo che per il *limite di successione* valgono *tutte* le *proprietà dei limiti di funzione* (Teoremi sui Limiti di Funzione), in quanto stiamo considerando un *caso particolare* di un *caso generale*.

Quindi valgono le seguenti:

- L'unicità del limite
- Permanenza del segno
- Teorema del confronto
- Teorema dei due carabinieri
- Operazioni sui limiti
- Limite zero e infinitesimo
- Forme indeterminate

Inoltre abbiamo altri *due altri teoremi*, specifici per le successioni.

### #Teorema

**Teorema** (le sottosuccessioni convergono allo stesso valore delle loro successioni padre).

Sia  $(a_n)_n$  una successione a valori in  $A$ , e  $(a_{n_k})_k$  una *successione estratta* di  $a_n$  (Successione e Sottosuccessione).

*Tesi.* Supponendo che

$$\lim_n a_n = l$$

allora vale la seguente implicazione

$$\boxed{\lim_n a_n = l \implies \lim_k a_{n_k} = l}$$

### #Dimostrazione

**DIMOSTRAZIONE** del *teorema 1.1*. (Teorema 6 (le sottosuccessioni convergono allo stesso valore delle loro successioni padre))

Il punto cruciale consiste nel seguente.

$$\lim_n a_n = l \in \mathbb{R}$$

vuol dire

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} > 0 : \forall n, \\ n > \bar{n} \implies |a_n - l| < \varepsilon \end{aligned}$$

adesso considero la *sotto successione*  $(a_{n_k})_k$ , quale numero deve essere superata da  $k$ ?

Ovvero mi chiedo se vale che

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists \stackrel{?}{\bar{k}} : \forall n, \\ k > \bar{k} \implies |a_{n_k} - l| < \varepsilon \end{aligned}$$

Scopriamo che basta scegliere  $\bar{k} \geq \bar{n}$  in quanto se i valori  $k$  di  $n_k$  è *strettamente crescente*, allora sicuramente ho

$$n_k \geq k \geq \bar{n}$$

In parole, l'idea consiste nel pensare che il "*peggior*" caso di *successione estratta* di una *successione* può essere la *successione stessa* (infatti estraggo dalla successione la stessa successione); quindi se considero la stessa successione posso avere  $\bar{k} = \bar{n}$ . In altri casi devo scegliere  $\bar{k}$  in un punto più "*lontano*", in particolare se

$$a_{\bar{n}} \notin (a_{n_k})_k$$

#Teorema

**Teorema** (esistenza dei limiti delle successioni monotone).

Se la successione  $(a_n)_n$  è *monotona*, allora esiste *sempre* il limite

$$\lim_n a_n$$

#Corollario

**Corollario** (convergenza delle successioni monotone e limitate).

Se  $(a_n)_n$  è *monotona* e *limitata* (Definizione 3 (successione limitata)), allora sicuramente il limite

è **convergente**.

### #Osservazione

Osservazione (nesso tra limiti di funzione e di successione).

Se consideriamo la successione  $(a_n)_n$  come la **restrizione** del dominio da  $A \subseteq \mathbb{R}$  a  $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$  di una qualsiasi **funzione di variabile reale**, ovvero se considero

$$f : A \subseteq [0, +\infty) \longrightarrow B$$

e

$$(a_n)_n : A \cap \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$

allora posso fare la seguente osservazione.

Se conosco il **limite della funzione**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$$

allora in automatico conosco pure il **limite della successione**

$$\lim_n a_n = l$$

Notiamo che vale anche il **viceversa** (inversa); se conosco il **limite di una successione**, allora conosco anche il **limite di una funzione** per  $x \rightarrow +\infty$ .

**ATTENZIONE!** Da qui non bisogna dedurre vale anche la **contraria** (tesi negata); se il limite della funzione per  $x \rightarrow +\infty$  **non** è definita, allora ciò **non** significa che  $\lim_n a_n$  **non** è neanche definita. Infatti  $\lim_n a_n$  può esistere quando non esiste  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

### #Esempio

Esempio (osservazione 2.2.).

Vediamo alcuni esempi di quest'ultima osservazione.

1.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \implies \lim_n \frac{1}{n} = 0$$

2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty \implies \lim_n \sqrt{n} = +\infty$

3.  $\nexists \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(n\pi) \cancel{\lim_n} \sin(n\pi) = 0$

## 2. Voci correlate

- Esempi di Limiti di Successione

### B2. Esempi, limiti notevoli

#### Esempi di Limiti di Successione

*Alcuni esempi di limiti di successione, in particolare quelle notevoli*

#### 0. Prerequisiti

Ovviamente questo capitolo serve la conoscenza di [Limite di Successione](#).

Inoltre è opportuno tenere a mente alcuni risultati di [Assiomi di Peano](#), il principio di [induzione](#), in particolare [Esempi di Induzione](#)

#### 1. Limiti notevoli (per successioni)

##### Esponenziale a alla n

#Esempio

Esempio (limite dell'esponenziale).

Sia  $a > 1$ ; considero il limite della successione

$$\lim_n a^n; \text{ ovvero } a_n = a^n$$

Procediamo prima per [casistica](#):

Se  $a = 2$ , il limite [diverge](#) per  $+\infty$ :

$$\lim_n 2^n = +\infty$$

$$\lim_n 2^n \geq \lim_n n = +\infty$$

Allora per il *teorema del confronto* ([Teorema 5 \(del confronto\)](#)), ho

$$\lim_n 2^n = +\infty$$

Stesso discorso per tutti i numeri  $1 < a \leq 2$ .

Allora *generalizzo* scrivendo

$$\lim_n a^n = +\infty, \forall a > 0$$

Usando la *disuguaglianza di Bernoulli* ([Esempi di Induzione > ^66c5ee](#)) che enuncia il seguente:

$$(1 + \rho)^n \geq 1 + \rho n$$

Allora ponendo  $a = 1 + \rho$ , ho

$$\lim_n a^n \geq \lim_n (1 + \rho n)$$

E calcolando la seconda, ottengo

$$\lim_n (1 + \rho n) = 1 + \rho \lim_n n = +\infty$$

Pertanto, per il *teorema del confronto*

$$\boxed{\lim_n a^n = +\infty}$$

## Esponenziale a alla n diviso per n

#Esempio

**Esempio** (limite dell'esponenziale contro potenza).

Considero un caso analogo a quello precedente.

$$\lim_n \frac{a^n}{n}$$

Qui basta usare la *disuguaglianza di Bernoulli incrementata* ([Esempi di Induzione > ^815bb7](#)): ovvero

$$(1 + \rho)^n \geq 1 + \rho n + \frac{n(n-1)}{2} \rho^2$$

$$\frac{(1+\rho)^n}{n} \geq \frac{1}{n} + \rho + \frac{n-1}{2}\rho^2$$

e considerando che la seconda espressione tende a  $+\infty$ , visto che

$$\frac{1}{n} \rightarrow 0; \rho \rightarrow n; \frac{n-1}{2}\rho^2 \rightarrow +\infty$$

allora ho

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n} = +\infty$$

## Radice n di a

**Esempio** (limite della radice n-esima di un numero).

Ora considero una nuova funzione:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a}, \forall a > 1$$

Qui basta osservare il grafico della funzione *radice* ([Funzioni di potenza, radice e valore assoluto](#)), che è la *funzione potenza "capovolta"* ([figura 1.3.](#)).

Possiamo quindi congetturare che  $l = 1$  (ovvero che la successione è [convergente a 1](#)).

Quindi lo dimostriamo:

Supponendo  $\varepsilon > 0$  e considerando  $(1 + \varepsilon)^n$ , sappiamo che

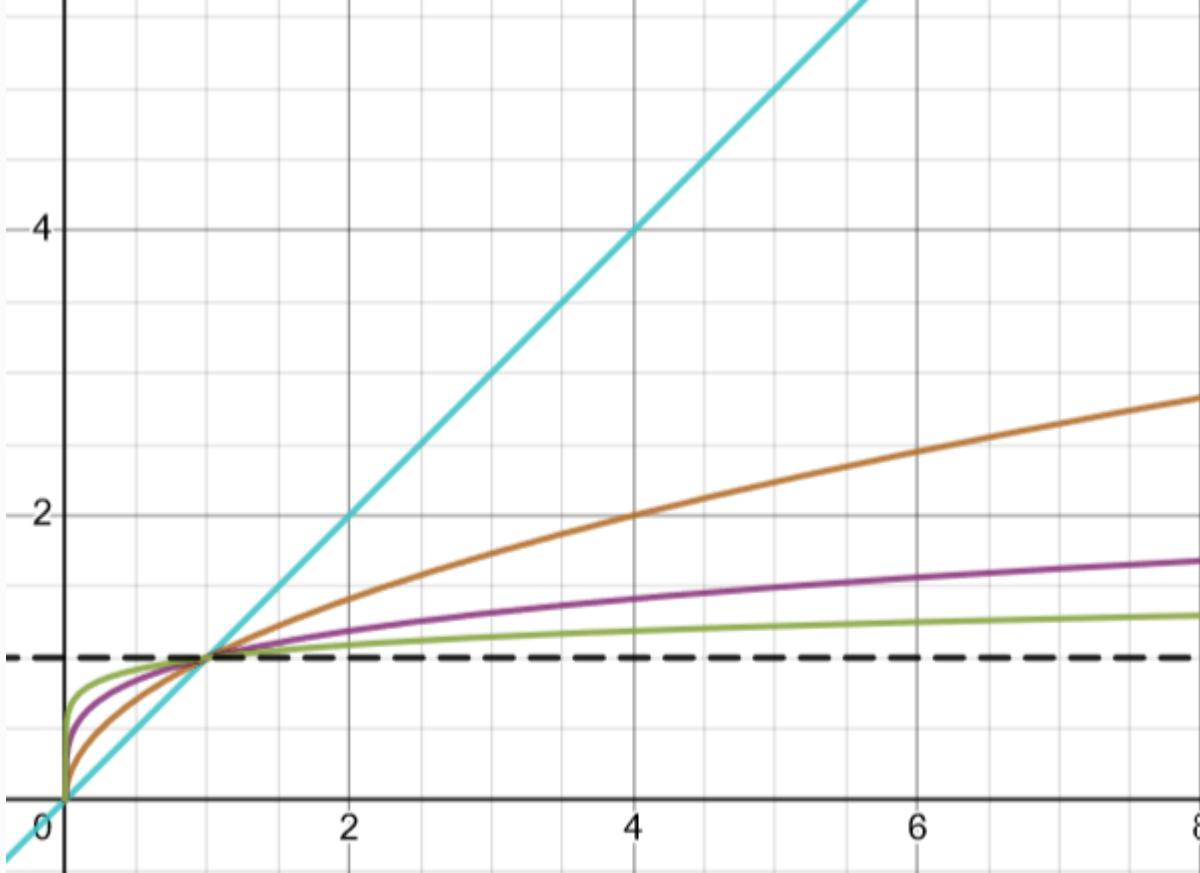
$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \varepsilon)^n = +\infty$$

Allora se  $a > 1$  avrò che

$$\exists \bar{n} : n > \bar{n} \implies (1 + \varepsilon)^n > a \iff (1 + \varepsilon) > \sqrt[n]{a}$$

Ora rileggiamo l'[espressione iniziale](#)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a}$ ,

$$\begin{aligned} & \forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} > 0 : \forall n, \\ & n > \bar{n} \implies 1 < \sqrt[n]{a} < 1 + \varepsilon \quad \blacksquare \\ & \implies 1 - \varepsilon < \sqrt[n]{a} < 1 + \varepsilon \\ & \implies |\sqrt[n]{a} - 1| < \varepsilon \end{aligned}$$



#Esercizio

**Esercizio** (radice n-esima di n).

Con un conto analogo posso dimostrare che

$$\lim_n \sqrt[n]{n} = 1$$

(Per esercizio)

**Limite fondamentale**  $(1 + \frac{1}{n})^n$ 

#Teorema

**Teorema**  $(1+1/n)^n$ .

Consideriamo uno dei *limiti* più importanti dell'*analisi matematica*;

$$\lim_n (1 + \frac{1}{n})^n$$

Non è immediato capire se questo limite *converge* o *diverge*, in quanto da un lato sappiamo che  $\forall \varepsilon > 0, (1 + \varepsilon)^n \rightarrow +\infty$ ; ma dall'altro sappiamo che  $(1)^n \rightarrow 1$ . Enunciamo che questo limite *esiste* e *converge* ad un numero reale che chiameremo  $e$ , e si trova tra 2 e 3;

$$2 < e < 3$$

$$\lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

### DIMOSTRAZIONE del [teorema 1.1.](#) (Teorema 5 ( $1+1/n$ )<sup>n</sup>))

Uso il teorema sulle [successioni monotone e limitate](#) per dimostrare che innanzitutto il limite [converge](#): si tratta di provare che  $(1 + \frac{1}{n})^n$  è sia monotona che limitata.

1. Suppongo che

$$\forall n, 2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 3$$

Ora uso il [teorema del binomio](#) (Coefficiente Binomiale > ^66fdbf) per sviluppare  $(1 + \frac{1}{n})^n$ .

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} 1^{n-j} \left(\frac{1}{n}\right)^j \\ &= \binom{n}{0} \frac{1}{n^0} + \binom{n}{1} \frac{1}{n^1} + \binom{n}{2} \frac{1}{n^2} + \dots + \binom{n}{n} \frac{1}{n^n} \\ &= 1 + n \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-(n-1))}{n!} \frac{1}{n^n} \\ &= 2 + \frac{1}{2!} \frac{n-1}{n} + \frac{1}{3!} \frac{n-1}{n} \frac{n-2}{n} + \dots + \frac{1}{n!} \frac{n-1}{n} \dots \frac{n-(n-1)}{n} \end{aligned}$$

Ora considerando l'ultima espressione, abbiamo che ogni "[secondo membro](#)" (ovvero dove stanno tutti i quozienti divisi per  $n$ ) è minore o uguale a 1; infatti

$$\forall j \geq 0, \frac{n-j}{n} \leq 1$$

allora posso "[maggiorare](#)" questa con la somma dei "[primi membri](#)" (ovvero dove stanno tutti i fattoriali)

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

Ora se ricordo che  $n! \geq 2^{n-1}$ , posso "[minorare](#)" quest'ultima con

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 1 + \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

Ora se prendo in considerazione tutti i valori da  $\frac{1}{2^0}$  in poi, mi accorgo che ho una serie geometrica, che converge esattamente a questo valore ([Esempi di Induzione](#) > ^7a9cd3):

$$\frac{1 - q^n}{1 - q} \implies \sum_{i=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2$$

$$2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 1 + 2, \forall n$$

Inoltre abbiamo aggiunto che il valore è maggiore di 2 in quanto ho comunque il numero 2 aggiunto a dei numeri piccoli (vedere lo sviluppo binomiale all'inizio).

2. Ora voglio dimostrare che

$$\forall n, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

Uso lo stesso sviluppo binomiale di 1.;

$$\text{i. } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$$

e

$$\text{ii. } \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \dots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\dots\left(1 - \frac{n}{n+1}\right)$$

e confrontando *ogni* termine della secondo sviluppo, scopriamo che ogni termine della *ii.* è maggiore o uguale ad ogni termine della *i..* Pertanto è vera la tesi, ovvero che  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  è monotona crescente. ■

### #Definizione

**Definizione** (costante di Eulero / Nepero).

Indico il valore per cui il limite converge con

$$\lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

e si chiama *costante di Eulero*, oppure *costante di Nepero*.

## C1. Trucchetti per valutare i limiti

### Trucchetti per Limiti

*Lista di "trucchetti" utili per valutare limiti: modi di manipolare espressioni algebriche, proprietà, ..., etc.*

#### Trucco 1. Divide et impera

##### #Osservazione

Osservazione (divide et impera).

Dai *teoremi sui limiti* (Teorema 7 (operazioni tra limiti)) sappiamo che se vale che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m$$

allora valgono che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + g(x) = l + m; \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = lm; \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}$$

Allora possiamo sfruttare questo teorema per "*scomporre*" dei limiti piuttosto complessi in limiti più semplici da valutare. Infatti non stiamo facendo altro che applicare questo esatto teorema.

##### #Osservazione

Osservazione (attenzione!).

Bisogna stare attenti che in certi casi non si può applicare questa tecnica! In particolare non lo si applica quando abbiamo certi casi.

1. Uno dei limiti non esistono (allora in questo caso il limite in generale potrebbe non esistere)
2. Uno dei limiti sono infiniti (bisogna vedere la "gerarchia degli infiniti")
3. Li separo ma non li valuto "contemporaneamente" (si otterranno dei risultati sbagliati!)

## #Osservazione

Osservazione (elementi neutri delle operazioni).

Notiamo che possiamo sfruttare i c.d. *elementi neutri* delle operazioni, ovvero dei *numeri* che "non vanno ad influire" sul risultato di un'espressione algebrica.

Per la somma + l'elemento neutro è 0; infatti  $\forall x \in \mathbb{R}, x + 0 = x$ .

Invece per il prodotto · l'elemento neutro è 1; infatti  $\forall x \in \mathbb{R}, x \cdot 1 = x$ .

Possiamo sfruttarli in particolare per "*trasformare*" delle espressioni algebriche in limiti notevoli, oppure per "*sbarazzarci*" delle situazioni "*scomode*".

## #Osservazione

Osservazione (razionalizzare espressioni con le radici).

Questo primo trucchetto può essere già declinato nella tecnica della "*razionalizzazione*"; ovvero se abbiamo in una frazione (o senza) delle espressioni in cui compaiono delle *radici*

$\sqrt{\cdot}$ , allora potrebbe essere una buona idea quella di sfruttare la seguente tecnica. Sapendo che  $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ , allora possiamo avere

$$\sqrt{a} - b = \frac{a - b^2}{\sqrt{a} + b}$$

# Trucco 3. Sfruttare i limiti notevoli

## #Osservazione

Osservazione (sfruttare limiti notevoli).

Come accennato prima, possiamo sfruttare il trucchetto appena citato per "*trasformare*" limiti complessi in dei limiti che assomigliano a dei limiti notevoli. Teniamo in mente che i limiti notevoli sono i seguenti.

$$\lim_{f(x) \rightarrow 0} \frac{\sin f(x)}{f(x)} = 1$$

$$\lim_{f(x) \rightarrow 0} \frac{\cos(1 + f(x))}{f(x)} = 1$$

$$\lim_{f(x) \rightarrow 0} \frac{e^{f(x)} - 1}{f(x)} = 1$$

#Esempio

**Esempio** (esempio specifico).

Come esempio specifico sfruttiamo il **secondo limite notevole** presentato prima. Supponiamo di avere un limite del tipo

$$\lim_{f(x) \rightarrow 1} \frac{\cos(f(x))}{g(x)}$$

Allora posso sfruttare il **trucco 2.** aggiungendo  $+1 - 1$  all'espressione all'interno del **coseno** per farlo "**assomigliare**" al secondo limite notevole, poi moltiplichiamo per  $1 = \frac{f(x)-1}{f(x)-1}$ .

Riepilogando,

$$\lim_{f(x) \rightarrow 1} \frac{\cos(f(x))}{g(x)} \rightarrow \frac{\cos(1 + f(x) - 1)}{g(x)} \rightarrow \underbrace{\frac{\cos(1 + (f(x) - 1))}{f(x) - 1}}_{\rightarrow 1} \cdot \frac{f(x) - 1}{g(x)}$$

Ovvero

$$\lim_{f(x) \rightarrow 1} \frac{\cos(f(x))}{g(x)} = \lim_{f(x) \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{g(x)}$$

**Trucco 4. Gerarchizzare gli infiniti**

#Osservazione

Osservazione (la "gerarchia" degli infiniti).

Osservando i **limiti notevoli** possiamo costruire la seguente "gerarchia degli infiniti", dove certi infiniti sono più "grandi" degli altri.

**LA GERARCHIA DEGLI INFINITI**

- **1. l'esponenziale**

L'infinito più "grande" è quello **esponenziale**; infatti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{f(x)} = +\infty$$

se  $f(x)$  non è esponenziale (in tal caso bisogna confrontare le basi delle esponenziali, e "**vince**" la base più grande).

- **2. potenza**

L'infinito che appare più comunemente ma è più "**debole**" dell'esponenziale è la **potenza**; la potenza più "**forte**" è quella a partire dal grado più alto.

Se abbiamo "**scontri**" tra potenze di gradi diversi, è conveniente raccogliere tutte le potenze per il **grado massimo** e poi di effettuare delle eventuali cancellazioni.

- **3. logaritmo**

L'infinito più "**debole**" è quella **logaritmica**; infatti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{f(x)} = 0$$

Se  $f(x)$  non è **logaritmica** o una **costante** o è **limitata**. In tali casi il logaritmo "**vince**" e abbiamo  $L = +\infty$ .

- **4. costanti, funzioni limitate**

Se abbiamo **costanti** o in particolare delle **funzioni limitate**, allora questi non vanno neanche considerati per la gerarchia degli infiniti. Infatti questi vengono "**assorbiti**" dagli eventuali 0 o  $\pm\infty$ , se ci sono nel limite.

## Trucco 5. Sfruttare l'esponenziale

### #Osservazione

Osservazione (l'esponenziale).

Possiamo sfruttare la seguente identità per l'esponenziale:

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$$

Dopodiché si andrà a studiare il limite per

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \ln f(x) = L$$

Infine per valutarla in

$$e^L$$

## Trucco 6. Sfruttare identità algebriche e/o trigonometriche

Osservazione (identità algebriche).

Rendiamo note le seguenti identità algebriche.

$$(a^2 - b^2) = (a + b)(a - b)$$

$$(a^n - b^n) = (a - b)\left(\sum_{i=0}^{n-1} a^i b^{n-1-i}\right)$$

Osservazione (identità trigonometriche).

Rendiamo note le seguenti identità trigonometriche.

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

## C2. Asintoti di una funzione

### Asintoto di una funzione

*Definizione di asintoto di una funzione.*

## 0. Argomenti propedeutici

Per capire il *concetto* di *asintoto* di una funzione è necessario aver presente prima i seguenti argomenti:

- Funzione a variabile reale: [Definizione 5 \(funzione di reale variabile\)](#)
- Limite di funzione: [Definizione di Limite di funzione](#)

## 1. Definizione di asintoto

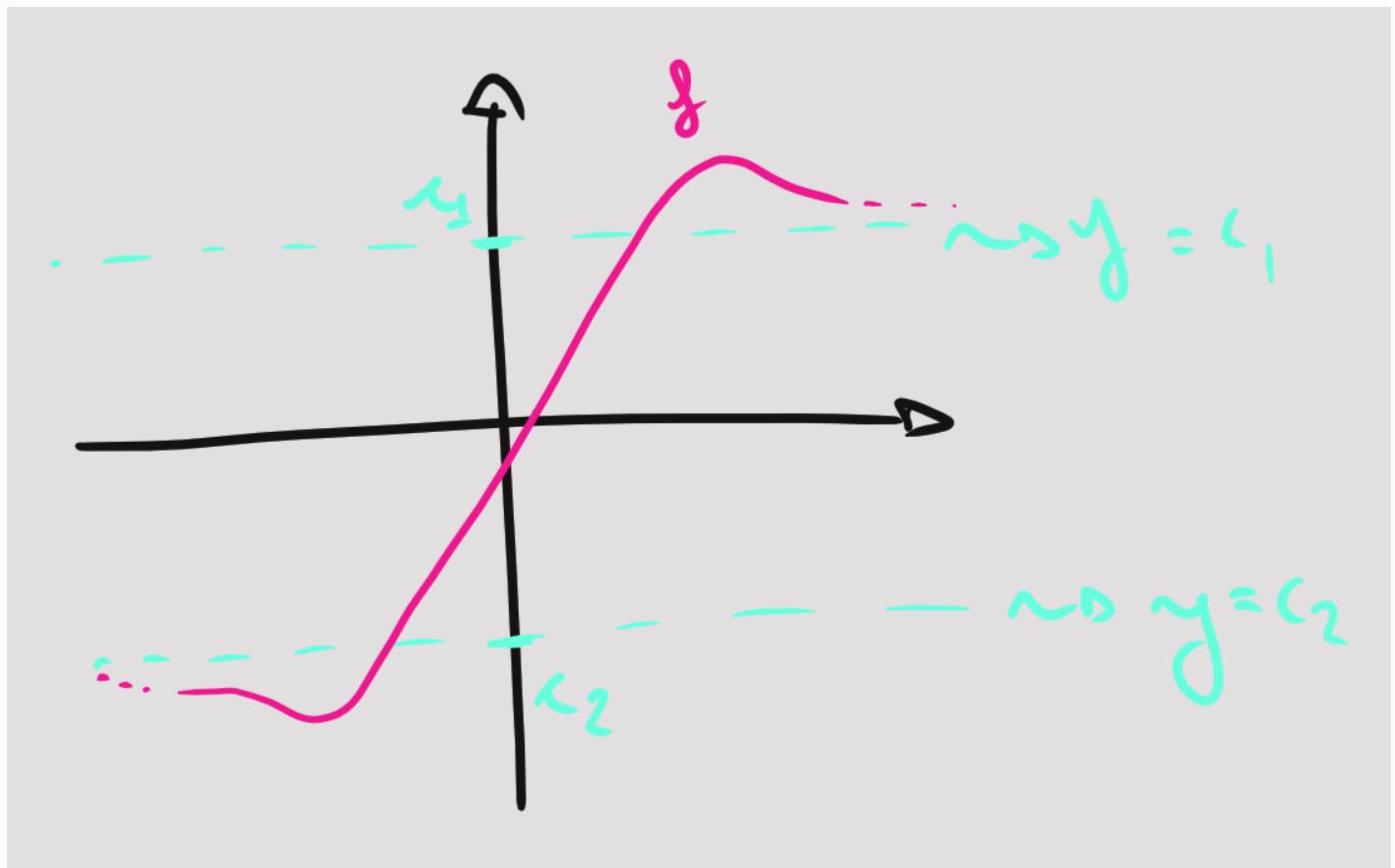
Sia  $f$  una **funzione a variabile reale**.

Se esiste il **limite**

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = c \in \mathbb{R}$$

Allora  $y = c \in \mathbb{R}$  è un **asintoto orizzontale** a  $\pm\infty$ .

**FIGURA 1.1.** (*Idea grafica*)



#Definizione

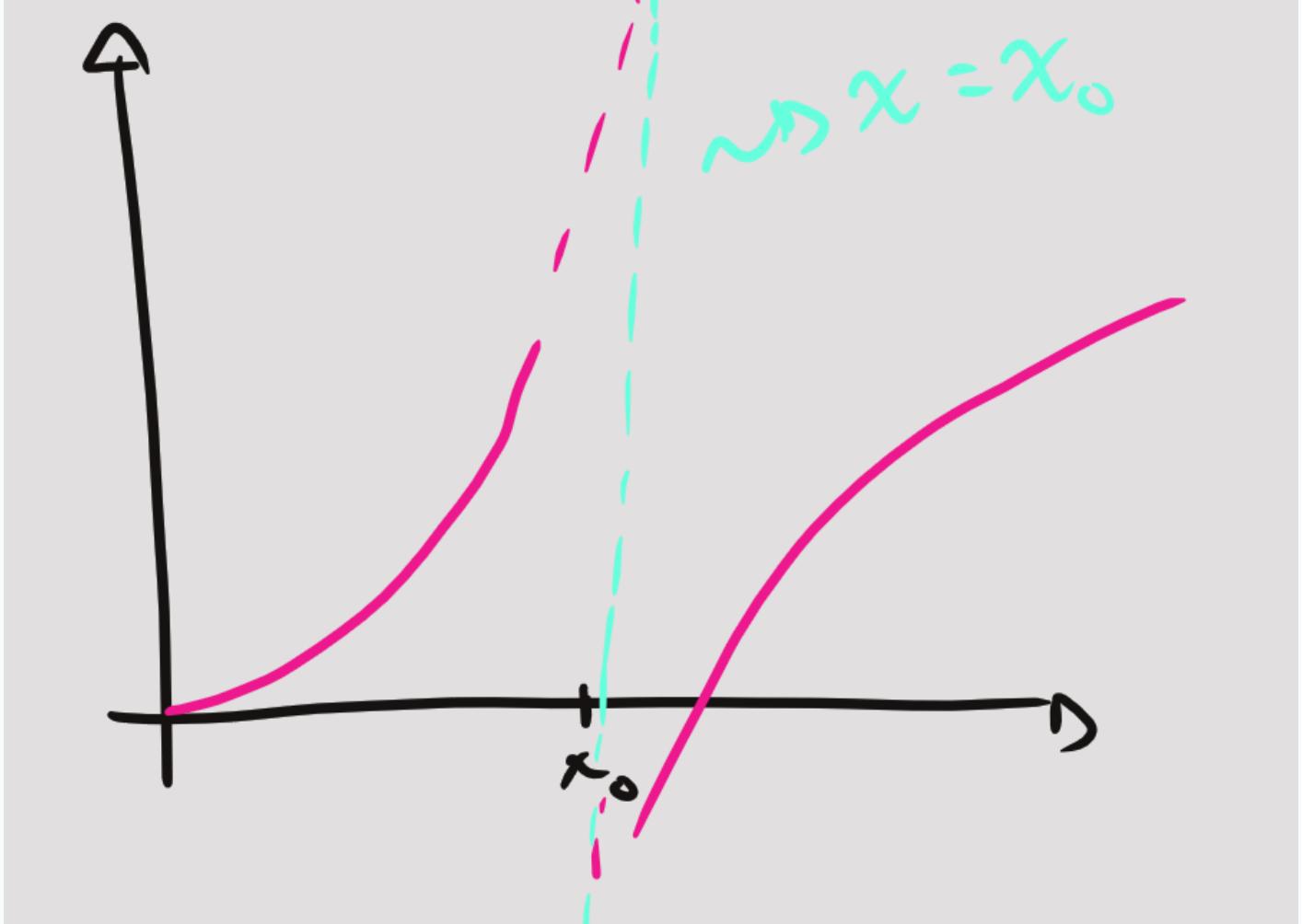
### Definizione (asintoto verticale).

Se invece esiste il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) = \pm\infty$$

allora  $x = x_0$  è un **asintoto verticale**.

**FIGURA 1.2.** (*Idea grafica*)



#Definizione

**Definizione (asintoto obliquo).**

Se invece  $\exists m, q \in \mathbb{R}$  tali che

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - (mx + q) = 0$$

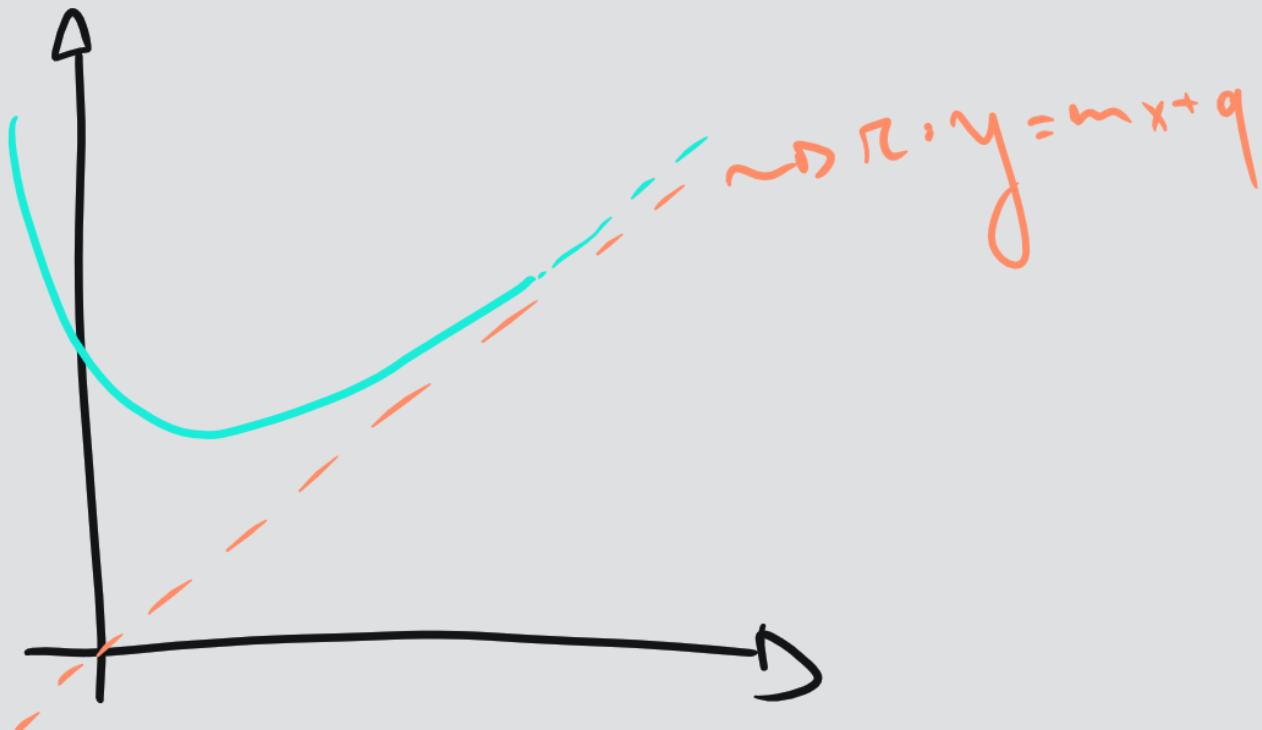
Allora la retta

$$r : y = mx + q$$

è **asintoto obliquo** a  $\pm\infty$ .

Ovvero graficamente si vedrà che "*a lungo andare verso l'infinito la funzione segue la traiettoria della retta*".

**FIGURA 1.3. (Idea grafica)**



## 2. Tecnica per "testare" asintoti obliqui

#Proposizione

**Proposizione** (tecnica per "trovare" asintoti obliqui).

Se abbiamo una funzione che presenta limite della forma

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Allora sarà opportuno provare a vedere se questa presenta un **asintoto obliquo**. **"L'algoritmo"** per trovare questo consiste in due passi:

1. Vedere se esiste il seguente limite; in tal caso calcolarlo e chiamare il tale limite  $m$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m \in \mathbb{R}$$

2. Se il primo step è andato a buon fine, allora vedere se esiste finito il seguente limite; in tal caso calcolarlo e chiamarlo  $q$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - mx = q \in \mathbb{R}$$

Se è tutto andato a buon fine, allora abbiamo l'**asintoto obliquo**

$$y = mx + q$$

## Abstract del Capitolo IV 1/2

In questo capitolo si andrà a toccare di nuovo la *topologia della retta reale*, avendo sviluppato però delle *nuove consapevolezze* sulle successioni; andremo quindi a studiare e definire altri oggetti matematici, tra cui *teoremi sulle sottosuccessioni*, *successioni di Cauchy* e infine *insiemi compatti*.

## A1. Secondo Teorema di Bolzano-Weierstraß

### Secondo teorema di Bolzano-Weierstraß

Richiami al primo teorema di Bolzano-Weierstraß; interpretazione del medesimo teorema in termini di successioni; enunciato del teorema; dimostrazione del teorema.

## 0. Richiamo al primo teorema di B.W.

Richiamiamo il *primo teorema di Bolzano-Weierstraß* in Punti di aderenza e di accumulazione.

#Richiamo

Teorema (richiamo).).

Sia  $E \subseteq \mathbb{R}$ ,  $E$  un insieme *infinito* e *limitato*. (*Insiemi limitati, maggioranti, massimo e teorema dell'estremo superiore, DEF 1.3.*)

Allora si verifica il seguente:

$$\exists \xi \in \mathbb{R} : \xi \in \mathcal{D}E$$

ovvero che esista un numero  $\xi$  che sia *punto di accumulazione* per  $E$ .

## 1. Enunciato del teorema

*Idea.* Abbiamo appena letto l'enunciato del *primo teorema di Bolzano-Weierstraß*, che viene anche detta come la "*forma insiemistica*" di tale teorema: ora la vogliamo interpretare con le nozioni di *successione*, *successione convergente*, e di *sotto-successione*. (*Successione e Sottosuccessione*)

#Teorema

Teorema (Secondo teorema di Bolzano-Weierstraß.).

Sia  $(a_n)_n$  una *successione reale* e *limitata* (*Successione e Sottosuccessione, DEF 1.2., DEF 1.3.*)

Allora deve esistere una *sotto-successione convergente*  $(a_{n_k})_k$  (*Successione e Sottosuccessione, DEF 2.1.*), ovvero deve esistere

$$\lim_k a_{n_k} = L \in \mathbb{R}$$

#Dimostrazione

**DIMOSTRAZIONE** del *secondo teorema di Bolzano-Weierstraß* (**Teorema 2 (Secondo teorema di Bolzano-Weierstraß.)**)

Chiamo  $E = \{a_n, n \in \mathbb{N}\}$  l'insieme dei *valori di*  $a_n$ , ovvero l'insieme immagine della successione  $(a_n)_n$ .

Ora ci sono due possibilità: che  $E$  sia o *finito* o *infinito*.

1.  $E$  è finito: esempi di questo caso può essere la successione costante  $a_n = c, c \in \mathbb{R}$  oppure la successione pari-dispari  $a_n = (-1)^n$ .

Allora *almeno* un elemento in  $E$  è immagine di *infiniti* indici  $n$ ; scelgo allora una sotto successione *opportuna* tale da risultare una successione costante, che è ovviamente convergente.

**ESEMPIO 2.1.** Ad esempio per  $a_n = (-1)^n$  basta scegliere  $(a_{2n})_n$  o  $(a_{2n+1})_n$ . L'idea è che abbiamo

$$1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$$

e scegliamo solo i termini pari o dispari: così abbiamo la *successione estratta*

$$1, 1, 1, \dots, 1 \text{ o } -1, -1, -1, \dots, -1$$

2.  $E$  è infinito: ma comunque la *successione*  $(a_n)_n$ , per ipotesi, è limitata. Allora  $E$  è un insieme *limitato* e *infinito*; qui applico il *primo teorema di Bolzano-Weierstraß* richiamatasi all'inizio. Chiamo dunque il *punto di accumulazione* (**Definizione 7 (Punto di accumulazione, derivato di un insieme.)**) per  $E$ :  $\xi \in \mathbb{R}$ .

Allora per definizione in *ogni intorno* di  $\xi$  ci sono *infiniti punti* di  $E$ .

Ovvero in *ogni intorno* di  $\xi$  ci sono *infiniti punti-valori*  $a_n$ .

Ora ci chiediamo se è possibile costruire una sottosuccessione tale che

$$\lim_k a_{n_k} = \xi$$

Allora per avere una risposta (che sarà ovviamente positiva) riflettiamo un attimo.

0. Considero l'intorno  $]\xi - 1, \xi + 1[$  e scelgo  $a_{n_0}$  in questo intorno.

1. Stesso discorso per l'intorno  $]\xi - \frac{1}{2}, \xi + \frac{1}{2}[$ , con  $a_{n_1}$ , ma anche tale che  $n_1 > n_0$  per conservare l'ordine. Posso farlo in quanto ci sono *infiniti* punti (ovvero valori  $a_n$ ) attorno  $\xi$ .
2. Vado avanti così fino all'infinito; ho allora

$$a_{n_k} \in (\xi - \frac{1}{2^k}, \xi + \frac{1}{2^k})$$

Allora

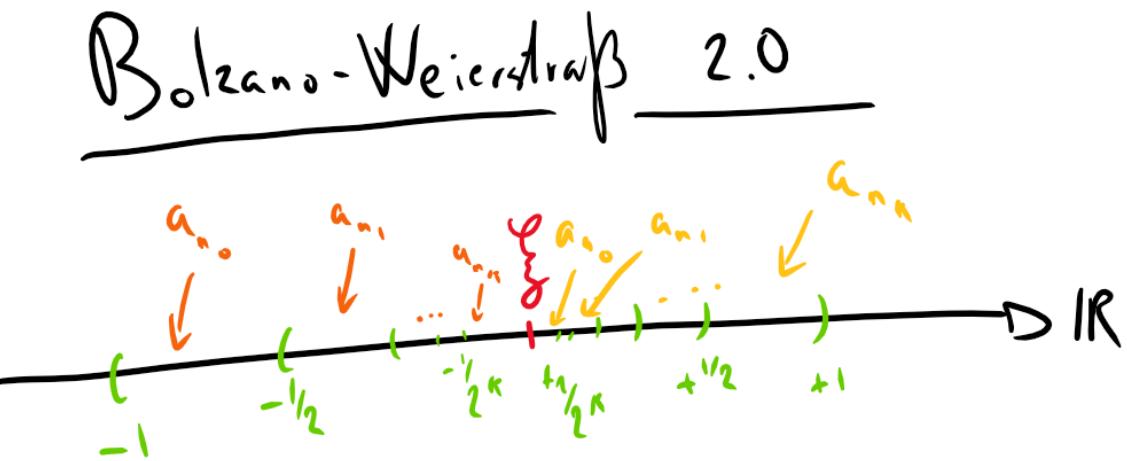
$$|a_{n_k} - \xi| < \frac{1}{2^k} \implies 0 < |a_{n_k} - \xi| < \frac{1}{2^k}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

Allora per il **teorema dei due carabinieri** (Osservazione 5 (i teoremi per i limiti di funzioni valgono anche per i limiti di successioni)) ho

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} - \xi = 0 \implies \boxed{\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = \xi} \blacksquare$$

**FIGURA 2.1.** (L'idea dell'ultimo passaggio)



## A2. Insiemi Compatti

### Insiemi compatti in R

Definizione di insiemi compatti in  $R$ ;  $R$  come spazio metrico; teorema di caratterizzazione dei compatti in  $R$ ; lemma di caratterizzazione della chiusura tramite la successione; dimostrazione del teorema.

## 0. Preambolo - Spazi metrici e topologici

#Osservazione

Osservazione (spazi metrici e topologici).

Osserviamo che dal titolo leggiamo che stiamo *in specifica* prendendo l'insieme  $\mathbb{R}$ , in quanto questo è un insieme su cui possiamo definire una *distanza* (Definizione 1 (Distanza Euclidea.)). Infatti si dice che  $\mathbb{R}$  è uno *spazio metrico*, come lo è pure  $\mathbb{R}^2, \dots, \mathbb{R}^n$ . Altrimenti un insieme su cui non può essere definita una *distanza* si dice *spazio topologico*.

## 1. Definizione di insieme compatto in R

#Definizione

Definizione (Insieme compatto in R per successioni.).

Sia  $E \subseteq \mathbb{R}$ .  $E$  si dice *compatto per successione* (*d'ora in poi diremo compatto e basta*) se vale la seguente proprietà: se da *ogni successione* a valori in  $E$  posso estrarre *una sottosuccessione convergente ad un punto*  $x \in E$ .

#Osservazione

Osservazione (la necessità di un teorema di caratterizzazione dei compatti).

Con questa definizione, un insieme compatto sembra un ente di cui è quasi impossibile da verificare: infatti diventa interessante trovare una *caratterizzazione alternativa* con un teorema.

## 2. Teorema di caratterizzazione dei compatti

#Teorema

Teorema (Teorema di caratterizzazione dei compatti in R.).

Sia  $E \subseteq \mathbb{R}$ .

*Tesi.* Allora  $E$  è compatto *se e solo se*  $E$  è chiuso e limitato.

### Lemma di caratterizzazione della chiusura

Prima di poter procedere alla dimostrazione, ci serve il seguente lemma.

#Lemma

Lemma (Caratterizzazione della chiusura tramite le successioni.).

Sia  $E \subseteq \mathbb{R}$ .

Allora  $E$  è *chiuso* (Definizione 2.1. (Insieme Chiuso)) se e solo se vale la seguente proprietà:

(\*) Se una qualsiasi successione a valori in  $E$  è convergente, allora il limite appartiene all'insieme  $E$ .

**DIMOSTRAZIONE** del lemma 2.1. (Lemma 5 (Caratterizzazione della chiusura tramite le successioni.))

Questo è un teorema del tipo  $\iff$ , dimostriamo quindi entrambi i versi delle implicazioni.

1. " $\implies$ ": Sia  $E$  chiuso; ora supponiamo (per assurdo) che sia falsa la proprietà (\*).

Ovvero supponiamo che esiste una successione a valori in  $E$  tale che il suo punto di convergenza  $\bar{a}$  appartiene ad un punto fuori da  $E$  (ovvero al suo complementare  $C_{\mathbb{R}}E$ ).

Però  $E$  è chiuso, quindi per definizione  $C_{\mathbb{R}}E$  è aperto: quindi abbiamo i seguenti.

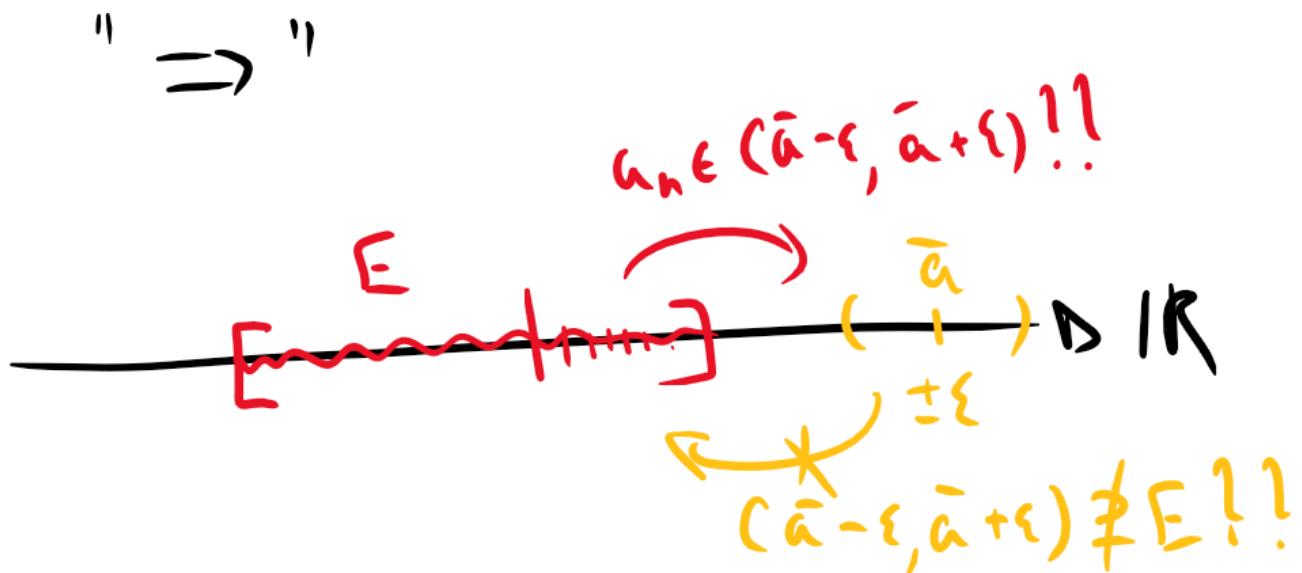
$$\bar{a} \in C_{\mathbb{R}}E \implies \exists \varepsilon > 0, ]\bar{a} - \varepsilon, \bar{a} + \varepsilon[ \subseteq C_{\mathbb{R}}E$$

Però allo stesso tempo abbiamo, per definizione

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \bar{a} \implies n > \bar{n} \implies a_n \in ]\bar{a} - \varepsilon, \bar{a} + \varepsilon[ \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} : \forall n \in E$$

Tuttavia questo è un **assurdo** in quanto sappiamo che  $a_n$  appartiene a  $E$ , ma invece l'intorno  $]\bar{a} - \varepsilon, \bar{a} + \varepsilon[$  contiene **solo** elementi di  $C_{\mathbb{R}}E$ . Pertanto questo è impossibile! Allora la proprietà (\*) è e dev'essere vera.

**FIGURA 2.1.a.** (*La prima contraddizione*)



1. " $\iff$ ": Sia vera la proprietà (\*), allora dimostro che  $C_{\mathbb{R}}E$  sia aperto (oppure  $E$  chiuso).

Per assurdo suppongo che  $C_{\mathbb{R}}E$  non sia aperto: facciamo la negazione della proprietà,

$$\neg(\forall x \in C_{\mathbb{R}}E, \exists \varepsilon > 0 : ]x - \varepsilon, x + \varepsilon[ \subseteq C_{\mathbb{R}}E)$$

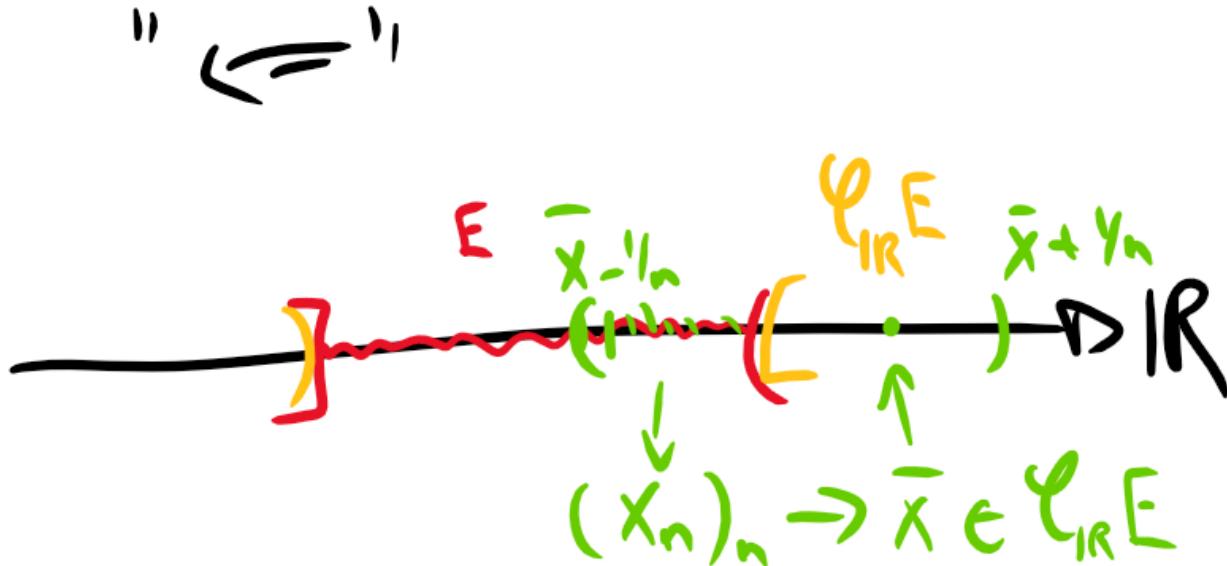
$$\exists x \in C_{\mathbb{R}}E : \forall \varepsilon > 0, ]x - \varepsilon, x + \varepsilon[ \cap E \neq \emptyset$$

$$\varepsilon = \frac{1}{n} \implies \exists \bar{x} \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}} E : \forall n, [\bar{x} - \frac{1}{n}, \bar{x} + \frac{1}{n}] \cap E \neq \emptyset$$

$$\forall n, \exists x_n \in E : |x_n - \bar{x}| < \frac{1}{n} \implies \lim_n x_n = \bar{x} \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}} E$$

Quindi ho trovato una successione  $(x_n)_n$  a valori in  $E$  che converge ad un punto *fuori di*  $E$ , che è impossibile in quanto violerebbe la l'ipotesi iniziale.

**FIGURA 2.1.b.** (*La seconda contraddizione*)



## Dimostrazione del teorema

Ora siamo pronti per dimostrare il *teorema di caratterizzazione dei compatti*.

#Dimostrazione

**DIMOSTRAZIONE** del *teorema di caratterizzazione dei compatti* (Teorema 4 (Teorema di caratterizzazione dei compatti in R.))

Questo è un teorema del tipo *se e solo se*, quindi dimostriamo entrambi i lati delle implicazioni.

1. " $\implies$ ": Suppongo che  $E$  sia *compatto*, allora devo dimostrare che  $E$  è chiuso e limitato.

*Per assurdo* suppongo che  $E$  non sia limitato: ora se considero una successione a valori in  $E$  divergente, allora per ipotesi questa deve avere una sottosuccessione *convergente*. Per esempio se  $E$  è *superiormente illimitato* (Insiemi limitati, maggioranti, massimo e teorema dell'estremo superiore) ho la seguente implicazione

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in E : x_n > n \implies \lim_n x_n = +\infty$$

allora  $(x_n)_n$  non avrebbe sottosuccessioni convergenti ad un punto in  $E$ .

*Per assurdo* suppongo che  $E$  sia non chiuso; allora non vale la proprietà (\*) del Lemma 5 (Caratterizzazione della chiusura tramite le successioni.) ovvero

$$\neg[\forall(a_n)_n \text{ è convergente in } E, \lim_n a_n \in E]$$
$$\exists(a_n)_n \text{ convergente in } E : \lim_n a_n \notin E$$

Perciò *tutte* le sottosuccessioni di  $(a_n)_n$  convergono ad un punto  $\bar{a} \notin E$ .

Però essendo  $E$  per ipotesi *compatto*, la successione  $(a_n)_n$  dovrebbe avere almeno una successione che converge ad un punto in  $E$ , dandoci un assurdo.

Come si può vedere  $E$  deve essere necessariamente sia *limitato* che *chiuso*.

2. " $\Leftarrow$ ": Sia  $E$  *chiuso* e *limitato*, proviamo che  $E$  è compatto.

Prendo una successione  $(a_n)_n$  in  $E$ .

Se  $E$  è *limitato* allora per il [Secondo teorema di Bolzano-Weierstraß](#) deve esistere una *sottosuccessione convergente* e la indichiamo con

$$(a_{n_k})_k : \lim_k a_{n_k} = \bar{a}$$

però  $E$  è anche *chiuso*, e per la proprietà (\*) del [Lemma 2.1](#). ([Lemma 5](#)

(Caratterizzazione della chiusura tramite le successioni.)) deve valere che il valore per cui converge il limite della sottosuccessione appartiene a  $E$ ; ovvero

$$(a_{n_k})_k : \lim_k a_{n_k} = \bar{a} \in E$$

Pertanto  $E$  è compatto in quanto abbiamo individuato una sottosuccessione convergente ad un punto in  $E$ .

## A3. Successioni di Cauchy

### Successioni di Cauchy

*Definizione di successione di Cauchy; teorema sulla successione di Cauchy; teorema di completezza di  $R$ ; esiti della dimostrazione del teorema di completezza di  $R$ .*

## 1. Definizione di Successione di Cauchy

#Definizione

Definizione (Successione di Cauchy.).

Sia  $(a_n)_n$  una *successione reale* (Successione e Sottosuccessione, **DEF 1.2.**), allora definiamo  $(a_n)_n$  come *successione di Cauchy* se vale la seguente:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} : n, m > \bar{n} \implies |a_n - a_m| < \varepsilon$$

#### #Osservazione

Osservazione (Osservazione 1.1. (convergenza e Cauchy)).

Osserviamo che questa definizione è ben *diversa* dalla nozione di *convergenza*: con la *convergenza* abbiamo *un punto* che si avvicina ad un certo valore, invece qui abbiamo *due punti*  $a_n$  e  $a_m$  che si "*avvicinano*" tra di loro.

Tuttavia in  $\mathbb{R}$  è possibile dire che questi sono *equivalenti* in quanto ci troviamo in uno *spazio metrico*. Dimostreremo questa affermazione con due teoremi.

#### #Teorema

**Teorema** (di caratterizzazione delle successioni convergenti).

Se una successione in  $\mathbb{R}$  è convergente, allora è di *Cauchy*.

#### #Dimostrazione

**DIMOSTRAZIONE** del *teorema 1.2.* (*Teorema 3* (di caratterizzazione delle successioni convergenti))

Sia  $(a_n)_n$  convergente, allora

$$\lim_n a_n = \bar{a} \in \mathbb{N}$$

Cioè

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} : \forall n \\ n > \bar{n} \implies |a_n - \bar{a}| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \end{aligned}$$

Allora se  $m, n > \bar{n}$  abbiamo i seguenti:

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} : \forall n, m \\ n > \bar{n} \implies |a_n - \bar{a}| < \frac{\varepsilon}{2} \\ m > \bar{n} \implies |a_m - \bar{a}| < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Allora sommandoli abbiamo

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - \bar{a} + a_m - \bar{a}| \leq |a_n - \bar{a}| + |a_m - \bar{a}| < 2 \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} : n, m > \bar{n} \implies |a_n - a_m| < \varepsilon$$

che è la definizione della *successione di Cauchy*.

## Completezza di R

#Teorema

**Teorema** (Completezza di R.).

In  $\mathbb{R}$  le *successioni di Cauchy* sono *convergenti*.

#Dimostrazione

**DIMOSTRAZIONE** del *teorema di completezza di R* (Teorema 4 (Completezza di R.))

La dimostrazione si articola in tre parti, ad ognuna con un suo esito.

1. Una *successione di Cauchy* è *limitata*. Infatti  $(a_n)_n$  di Cauchy significa

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} : n, m > \bar{n} \implies |a_m - a_n| < \varepsilon$$

Fissando  $\varepsilon = 1$  ottengo

$$\exists \bar{n} : n, m > \bar{n} \implies |a_n - a_m| < 1$$

Quindi

$$m > \bar{n} \implies |a_{\bar{n}+1} - a_m| < 1$$

Analogamente

$$n > \bar{n} \implies |a_n - a_{\bar{n}+1}| < 1$$

Quindi

$$a_n \in (a_{\bar{n}+1} - 1, a_{\bar{n}+1} + 1)$$

Allora  $(a_n)_n$ :

1. Fino a  $\bar{n}$  si comporta come vuole;
2. Da  $\bar{n} + 1$  in poi tutti i suoi valori immagine  $a_n, n > \bar{n}$  sono *tutti* dentro un intervallo fissato. Ovvero è questa successione è limitata.
2. Per il *Secondo teorema di Bolzano-Weierstraß*, se  $(a_n)_n$  è di *Cauchy* ed è *limitata* (ed è reale per ipotesi) allora esiste una successione estratta convergente.
3. "Se una *successione di Cauchy* ha una sottosuccessione convergente, allora la successione originaria è convergente": infatti teniamo in conto i seguenti:

- (\*)  $(a_n)_n$  è di Cauchy vuol dire

195

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} : \forall n, m \\ n, m > \bar{n} \implies |a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

- (\*\*\*)  $(a_{n_k})_k$  è convergente a  $\bar{a}$  vuol dire

$$\lim_k a_{n_k} = \bar{a} \iff k > \bar{k} \implies |a_{n_k} - \bar{a}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Ora per far valere  $m > \bar{n} \wedge k > m \implies k > \bar{n}$  prendiamo e  $k > \max\{\bar{n}, \bar{k}\}$ . Ora li "combiniamo" e valuto  $|a_n - \bar{a}|$ . Ora vale  $a_{n_k} > a_m$ ; allora  $\forall n > \bar{n}, k > \max\{\bar{n}, \bar{k}\}$

$$|a_n - \bar{a}| \leq |a_n - a_m + a_m - a_{n_k} + a_{n_k} - \bar{a}| < |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - \bar{a}| < 2 \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

e abbiamo esattamente la definizione di

$$\lim_n a_n = \bar{a} \blacksquare$$

## Abstract del Capitolo V

Al liceo ci è stato insegnato che una funzione è "*continua*" se questa può essere rappresentata sul piano cartesiano con un "*unico tratto di penna, senza dover staccarlo*"; vedremo che invece non è così.

Studieremo la *definizione rigorosa di una funzione continua* e le sue *proprietà fondamentali*; inoltre classificheremo delle *funzioni* per cui possiamo dire che sono sicuramente *continue*. Alternativamente possiamo "*dedurre*" delle caratteristiche delle funzioni a partire dal fatto che queste sono continue.

Lo studio della *continuità delle funzioni* si rivelerà fondamentale per lo *studio del calcolo differenziale*.

## A1. Definizione di continuità di funzioni

### Definizione di Continuità

*Definizione puntuale e "globale" della continuità di una funzione. Esempi di funzioni continue*

## 0. Osservazione preliminare

#Osservazione

Osservazione (osservazione preliminare).

Sia  $E \subseteq \mathbb{R}$  e  $x_0 \in E$ . Da notare che ciò implica che  $x_0 \in \mathbb{R}$ ; quindi  $x_0$  in questo caso è un numero.

Allora abbiamo due possibilità:

1.  $x_0$  è di accumulazione per  $E$  ([Punti di aderenza e di accumulazione](#), **DEF 2.1.**)
2.  $x_0$  non è di accumulazione per  $E$  (ovvero un punto isolato)

## 1. Definizione puntuale e globale

#Definizione

Definizione (Funzione continua per un punto).

Siano  $E \subseteq \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in E$  e  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ : ovvero  $f$  è una funzione che ha per dominio  $E$ ,  $x_0$  un punto del dominio.

Allora  $f$  si dice *funzione continua nel punto*  $x_0$  se si verifica uno dei due casi:

**CASO 1.**  $x_0$  è un punto isolato per  $E$  (la possiamo considerare una specie di "*caso speciale*")

**CASO 2.**  $x_0$  è un punto di accumulazione e si verifica il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0 \in \mathbb{R}} f(x) = f(x_0) \in \mathbb{R}$$

Usando la nozione  $\varepsilon - \delta$  del limite, avremmo

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in E \\ |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \end{aligned}$$

Osservazione (il secondo caso è interessante).

Il **CASO 2.** è la parte interessante della definizione della continuità: stiamo sostanzialmente dicendo che  $f$  è continua in  $x_0$  se esiste il limite per  $x \rightarrow x_0$  e il limite è proprio il valore della funzione.

#### #Osservazione

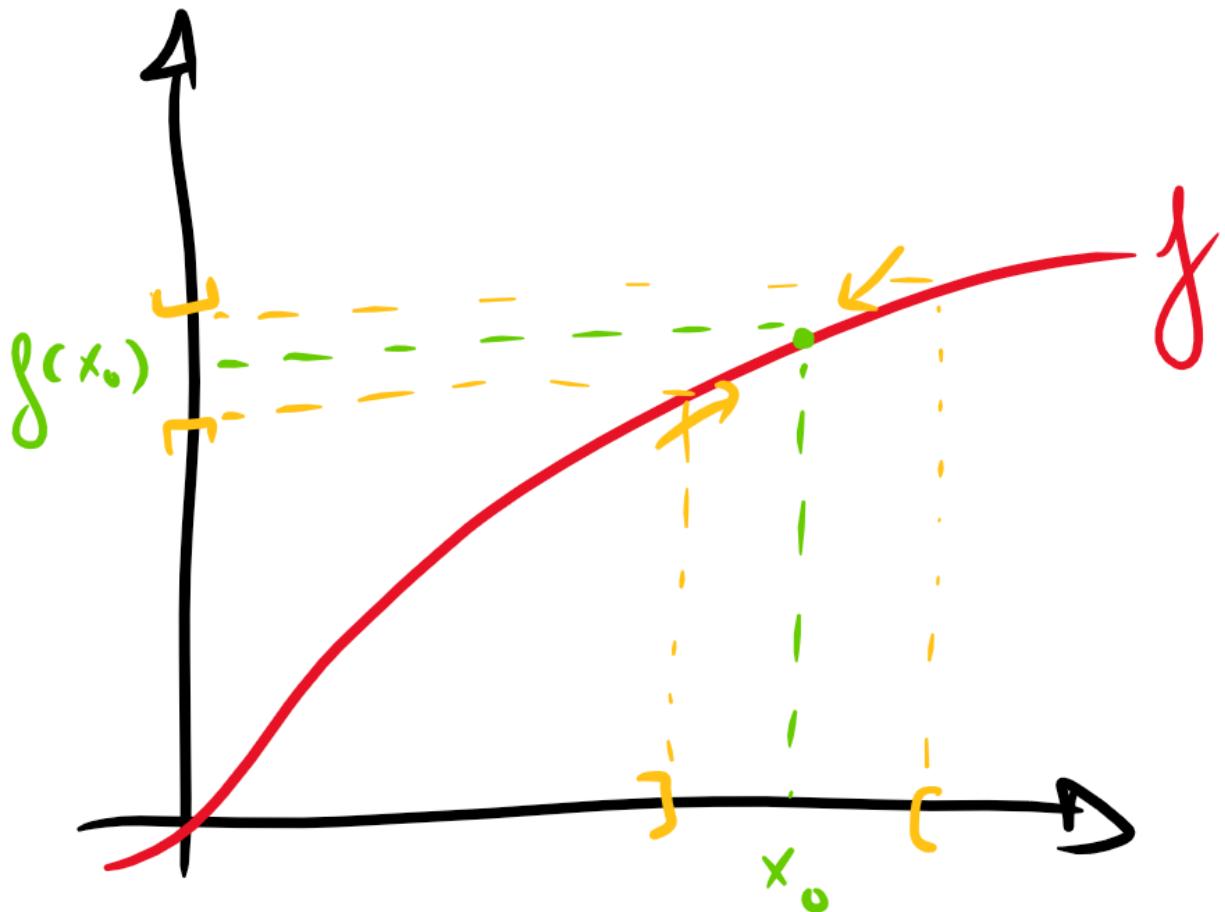
Osservazione (differenza tra continuità e limite).

Notiamo che in questa definizione c'è una differenza dalla definizione originaria del limite: infatti la prima parte che rappresenta l'intorno  $\delta$  di  $x_0$  sarebbe

$$0 < |x - x_0| < \delta$$

però in questa definizione l'abbiamo tolta, perché  $x_0$  appartiene al dominio, quindi è possibile avere  $x = x_0 \implies f(x) = f(x_0)$ , di conseguenza  $|f(x) - f(x_0)| = 0$ ; quindi in questo caso non escludiamo più che  $x - x_0 = 0$ ,  $f(x) - f(x_0) = 0$ . Inoltre questa "eccezione" è utile in quanto possiamo comprendere il **CASO 1.**, ovvero quando  $x_0$  è un punto isolato: infatti questo significa che esiste un intorno di  $x_0$  che contiene solo se stesso.

**FIGURA 1.1.** (*L'idea grafica della continuità*)



Ora presentiamo la definizione "*globale*" della funzione, che è una semplice estensione della definizione di prima: al posto del singolo punto ci mettiamo un insieme di punti.

#### #Definizione

**Definizione (Funzione continua su un insieme).**

Sia  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$

Se  $f$  è *continua* in tutti i punti di  $E$ , allora  $f$  si dice *continua* (e basta).

## 2. Esempi di funzioni continue e discontinue

#### #Esempio

**Esempio (Funzione Costante.).**

Sia

$$\begin{aligned}f &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\x &\mapsto c\end{aligned}$$

Allora  $f$  è continua, in quanto

Infatti basta scegliere un qualsiasi valore  $\delta$  per qualsiasi  $\varepsilon$ .

## #Esempio

## Esempio (Funzione identità.).

$$\text{id} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x$$

La funzione id è *continua*: basta scegliere  $\varepsilon = \delta$ .

## #Esempio

## Esempio (Funzione Potenza.).

$$p_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x^n$$

La funzione  $x^n$  è *continua*, infatti è possibile dimostrare che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x^n = x_0^n$$

mediante gli [Esempi di Limiti di Funzione](#).

## #Esempio

## Esempio (Funzione Radice.).

$$\sqrt[n]{\phantom{x}} : [0, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \sqrt[n]{x}$$

Anche questa funzione è *continua*, anche se per adesso facciamo finta di conoscere

$$\forall x_0 \in (0, +\infty), \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}$$

mediante dei teoremi sulle funzioni inverse che definiremo in seguito.

## #Esempio

## Esempio (Funzione Seno.).

$$\sin : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]; x \mapsto \sin x$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$$

quindi la funzione seno  $\sin$  è *continua*.

## #Esempio

## Esempio (Funzione Esponenziale.).

$$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow ]0, +\infty[; x \mapsto e^x$$

Questa è *continua* in quanto

$$\lim_{x \rightarrow x_0} e^x = e^{x_0}$$

ed è il figlio del fatto che

$$\lim_n \sqrt[n]{x} = 1$$

## #Esempio

## Esempio (Funzione di Heaviside.).

Definiamo

$$H : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

dove

$$H(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Allora la funzione  $H$  *non* è *continua*: infatti il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} H(x)$$

non esiste, visto che da destra tende a 1 e da sinistra a 0.

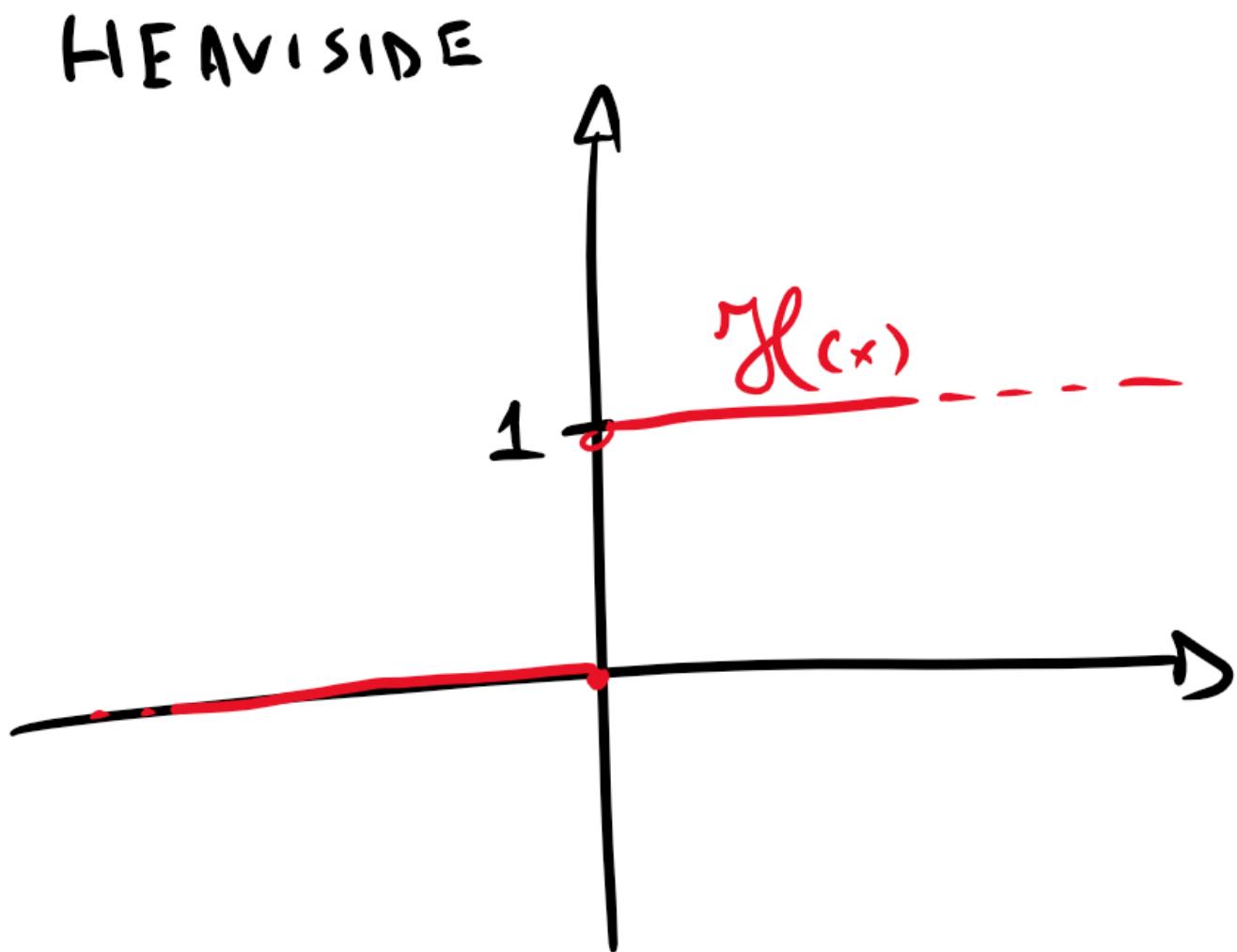
Infatti questa è una funzione *discontinua* e definiamo questo tipo di *discontinuità* come la discontinuità "*salto*" oppure "*di prima specie*".

## #Osservazione

Osservazione (la funzione di Heaviside è continua altrove).

**NOTIZIE STORICHE.** Oliver Heaviside (1850-1925) è stato una figura significativa nella storia della matematica. La sua carriera era inizialmente legata a una compagnia che gestiva le allora innovative linee telegrafiche. Allora, il giovane Heaviside, dotato di una mente autodidatta e una passione per la matematica, utilizzò le sue competenze per sviluppare concetti che avrebbero avuto un impatto duraturo nel suo campo, in particolare nell'ambito dell'elettricità. Una delle sue pietre miliari fu lo studio delle equazioni differenziali con coefficienti discontinui, tra cui la funzione appena menzionata, che avrebbe dimostrato grande rilevanza nella teoria elettrica.  
*(Paragrafo rielaborato da ChatGPT)*

**FIGURA 2.7.** (funzione di Heaviside)



Esempio (Funzione di Dirichlet.).

$$D : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]; x \mapsto D(x) : \begin{cases} 1 \text{ se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$$

Questa è una funzione *discontinua* in quanto non esiste il limite

per nessun valore di  $x_0$  per la densità di  $\mathbb{Q}$  in  $\mathbb{R}$  ([Teorema 5 \(Densità dei razionali nei reali.\)](#)); vale anche il viceversa con la densità degli irrazionali nei razionali. Allora  $D$  è **discontinua** in ogni punto del suo dominio.

## A2. Classificazioni di discontinuità

### Classificazioni di Discontinuità

*Classificazioni di punti discontinue: discontinuità eliminabile; discontinuità di primo, secondo e terzo ordine.*

## 0. Prerequisiti e/o voci correlate

- Definizione di Continuità
- Continuità delle funzioni varie

*Nota: questa pagina è stata scritta riprendendo il testo di E. Giusti di Analisi Matematica (volume 1)*

## 1. Discontinuità eliminabile

#Definizione

Definizione (punto di discontinuità eliminabile).

Sia  $f$  una **funzione discontinua per un punto**  $x_0$  ([Definizione 2 \(Funzione continua per un punto\)](#)).

Il **punto di discontinuità** in  $x_0$  si dice "**discontinuità eliminabile**" se il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

esiste ed è finito (appartenente a  $\mathbb{R}$ ) ma non corrisponde al valore  $f(x_0)$ ; ovvero

$$f(x_0) \neq \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = k \in \mathbb{R}$$

Si dice "**eliminabile**" in quanto è possibile "**ripristinare**" la continuità imponendo il

## 2. Discontinuità di primo, secondo e terzo ordine

#Definizione

Definizione (discontinuità di primo ordine / di salto).

Sia  $f$  una *funzione discontinua nel punto  $x_0$* .

Il *punto di discontinuità  $x_0$*  si classifica "di primo ordine" o "di salto" se esistono entrambi i limiti *destri e sinistri* (Definizione 12 (limite destro di una funzione)) ma non sono uguali.

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)}$$

In altre parole, abbiamo una specie di "*salto*" tra i due "*punti*".

#Definizione

Definizione (discontinuità di secondo ordine).

Sia  $f$  una *funzione discontinua nel punto  $x_0$* .

Si classifica  $x_0$  come un "*punto di discontinuità del secondo ordine*" se esistono entrambi il *limite destro* che il *limite sinistro*, ma una di essi non è finita ed è  $+\infty$  o  $-\infty$ .

Ovvero

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \in \tilde{\mathbb{R}} \vee \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \in \tilde{\mathbb{R}}}$$

In altre parole, abbiamo una specie di "*salto infinito*" tra i due "*punti*".

#Definizione

Definizione (discontinuità di terzo ordine).

Sia  $f$  una *funzione discontinua nel punto  $x_0$* .

Classifichiamo  $x_0$  come un "*punto di discontinuità del terzo ordine*" se non esiste il *limite destro* e/o *limite sinistro*.

$$\boxed{\nexists \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x)}$$

## A3. Teoremi sulle funzioni continue

### Teoremi sulle funzioni continue

*Teoremi sulle funzioni continue: prime proprietà delle funzioni continue; permanenza del segno adattato, operazioni con le funzioni continue, composta di funzioni continue.*  
*Teoremi fondamentali delle funzioni continue: teorema degli zeri, dei valori intermedi, di compattezza e di Weierstraß*

## 1. Prime proprietà delle funzioni continue

Consideriamo delle *proprietà* delle funzioni continue, di cui alcuni discendono direttamente dai teoremi sui limiti ([Teoremi sui Limiti di Funzione](#)).

### Permanenza del segno adattato

#Teorema

**Teorema** (Permanenza del segno versione continua.).

Sia  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ , sia  $x_0 \in \mathbb{R}$  e  $f$  continua in  $x_0$ .

Se  $f(x_0) > 0 (< 0)$  allora esiste intorno di  $x_0$  in cui  $f$  ha segno *positivo* (*negativo*)

### Operazioni con funzioni continue

#Teorema

**Teorema** (Operazioni con funzioni continue.).

Siano  $f, g$  funzioni *continue* in  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

Allora

$$f \pm g, f \cdot g, \frac{f}{g}$$

sono *continue* (a patto che nel terzo caso sia  $g(x_0) \neq 0$ )

Osservazione (la funzione razionale è continua).

Da questo teorema si può dedurre che tutti i *polinomi* e *funzioni razionali* sono funzioni *continue*: infatti

$$p = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

non è altro che una somma tra funzioni potenza, che sono *continue* ([Esempio 8 \(Funzione Potenza.\)](#)).

## Composta di funzioni continue

#Teorema

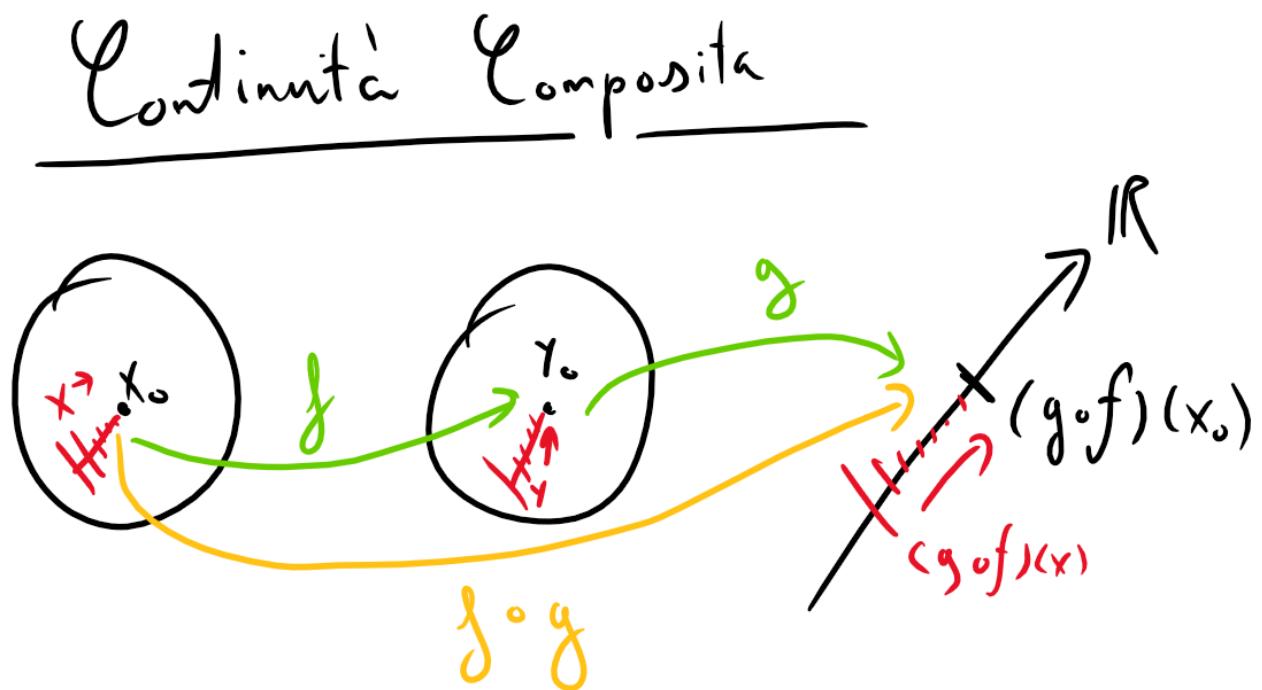
**Teorema** (Composta di funzioni continue.).

Siano

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow \mathbb{R}, x_0 \in E \\ g : F &\longrightarrow \mathbb{R}, f(x_0) \in F, f(E) \subseteq F \end{aligned}$$

Supponendo che  $f$  sia *continua* in  $x_0$  e  $g$  sia *continua* in  $f(x_0) = y_0$ , allora  $g \circ f$  è *continua* in  $x_0$ .

**FIGURA 1.3.** (*Idea del teorema*)



Per ipotesi  $g$  è continua in  $f(x_0)$ , ovvero

$$\lim_{y \rightarrow f(x_0)} g(y) = g(f(x_0)) \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall y \in F, |y - f(x_0)| < \delta \implies |g(y) - g(f(x_0))| < \varepsilon$$

Ma anche  $f$  è continua in  $x_0$ , ovvero

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \iff \forall \delta > 0, \exists \rho > 0 : \forall x \in E, |x - x_0| < \rho \implies |f(x) - f(x_0)| < \delta$$

Allora combinandoli ottengo

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists \rho > 0 : \forall x \in E, f(x) \in F \\ |x - x_0| < \rho \implies |\underbrace{f(x)}_{f(x)=y} - f(x_0)| < \delta \implies |g(y) - g(f(x_0))| < \varepsilon \end{aligned}$$

che è esattamente la definizione di

$$\lim_{y \rightarrow f(x_0)} g(y) = g(f(x_0))$$

## Caratterizzazione della continuità tramite le successioni

#Teorema

**Teorema** (di caratterizzazione della continuità tramite le funzioni).

Sia  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\bar{x} \in E$ ,  
allora  $f$  è continua in  $\bar{x}$  se e solo se vale la proprietà (\*).  
(\*) per ogni **successione a valori in  $E$** ,  $(x_n)_n$ , tale che

$$\lim_n x_n = \bar{x}$$

si ha

$$\lim_n f(x_n) = f(\bar{x})$$

#Dimostrazione

### DIMOSTRAZIONE (Teorema 1.4.)

Questo è un teorema del tipo "**se e solo se**", quindi procediamo per due sotto dimostrazioni.

" $\Downarrow$ ": Sia  $f$  continua in  $\bar{x}$ , sia  $(x_n)_n$  una successione in  $E$  tale che

$$\lim_n x_n = \bar{x}$$

Allora ne traiamo le seguenti definizioni:

$$1. f \text{ continua in } \bar{x} \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in E, |x - \bar{x}| < \delta \implies |f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon$$

e

$$2. \lim_n x_n = \bar{x} \iff \forall \delta > 0, \exists \bar{n} : \forall n, n > \bar{n} \implies |x_n - \bar{x}| < \delta$$

Osserviamo che abbiamo una situazione del tipo

$$\varepsilon \rightarrow \delta, \delta \rightarrow \bar{n}$$

quindi possiamo "**combinarli**" avendo dunque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} : \forall n, n > \bar{n} \implies |x_n - \bar{x}| < \delta \implies |f(x_n) - f(\bar{x})| < \varepsilon$$

che è proprio la definizione di

$$\lim_n f(x_n) = f(\bar{x})$$

" $\uparrow$ ": Sia  $f(x_n)$  convergente a  $f(\bar{x})$ . Per assurdo suppongo di negare la proprietà iniziale, ovvero che  $f$  non è continua in  $\bar{x}$ . Allora segue che

$$\neg \left( \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in E, |x - \bar{x}| < \delta \implies |f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon \right)$$

diventa

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \delta > 0, \exists x_\delta \in E : |x_\delta - \bar{x}| < \delta \wedge |f(x_\delta) - f(\bar{x})| \geq \varepsilon_0$$

Ora per trovare l'assurdo devo cercare una successione  $(x_n)_n$  tale che

$$\lim_n x_n = \bar{x} \wedge \lim_n f(x_n) \neq f(\bar{x})$$

Prendo dunque  $\delta = \frac{1}{n}$ , allora

$$\dots, \exists x_n : |x_n - \bar{x}| < \frac{1}{n} \wedge |f(x_n) - f(\bar{x})| \geq \varepsilon > 0$$

Allora per la prima proposizione ho

$$0 \leq |x_n - \bar{x}| \leq \frac{1}{n}$$

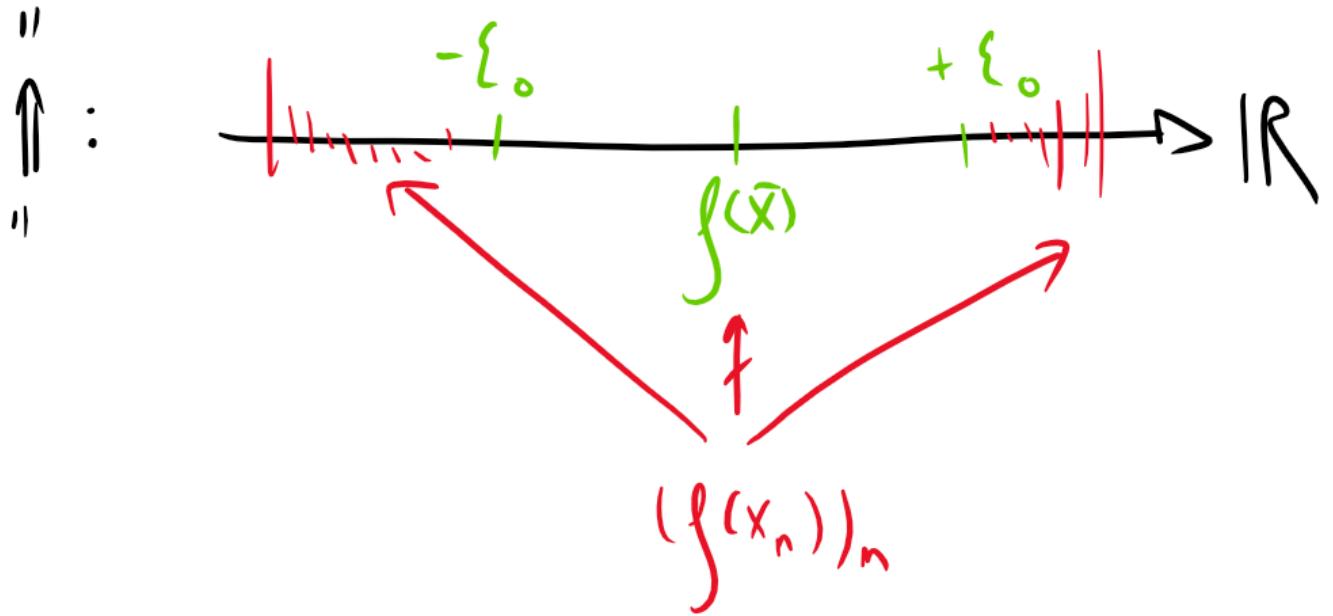
$$\lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} x_n - \bar{x} = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$$

Ricapitolando ho

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}, \exists (f(x_n))_n : |f(x_n) - f(\bar{x})| \geq \varepsilon_0 > 0$$

che è assurdo (quindi falso), dato che contraddice la supposizione iniziale. ■

**FIGURA 1.4.** (*Idea del passaggio* ↑)



## 2. Proprietà fondamentali delle funzioni continue

### Teorema degli zeri

#Teorema

Teorema (degli zeri).

Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  continua nel suo dominio. Sia  $f(a) < 0, f(b) > 0$  oppure  $f(a) > 0 \wedge f(b) < 0$ , cioè sono di segni discordi (ovvero  $f(a)f(b) < 0$ ).

Allora

$$\exists \xi \in ]a, b[ : f(\xi) = 0$$

In parole deve esistere un valore  $\xi$  che "taglia" attraverso la linea orizzontale delle ascisse.

#Esempio

Sia  $f(x) = x^5 + 7x + 1$ .  $f(x)$  ha soluzioni? (ovvero se esistono zeri)

Sì, sapendo che  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

### #Dimostrazione

#### DIMOSTRAZIONE. (Teorema 2.1.)

Supponiamo  $f(a) < 0$ ,  $f(b) > 0$ .

Se graficamente ho la situazione nella *figura 2.1.*, allora posso intuitivamente disegnare una linea *continua* che "*taglia*" l'asse delle ascisse: tuttavia ciò non costituisce una dimostrazione rigorosa.

Allora chiamo  $a = a_0, b = b_0$ .

Ora considero il punto medio tra  $a, b$  e la chiamo  $c_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$ .

Adesso ho tre possibilità:

1.  $f(c_0) = 0$ : non serve più procedere e ho risolto il problema
2.  $f(c_0) > 0$ : considero la funzione  $f$  in  $[a_0, c_0]$  e ripeto la stessa procedura, con  $a_1 = a_0, b_1 = c_0, c_1 = \dots$
3.  $f(c_0) < 0$ : analogamente guardo la funzione  $f$  in  $[c_0, b_0]$   
Se mi capitano i casi 2, 3 ripeto: facendo questa procedura ho due possibilità:
4. Eventualmente riuscirò a trovare  $\xi$  tale che  $f(\xi) = 0$ .
5. Altrimenti costruisco una *successione di intervalli chiusi, dimezzati e inscatolati* del tipo

$$(I_n)_n = ([a_n, b_n])_n$$

dove  $f(a_n) < 0$  e  $f(b_n) > 0$ . Allora per la *forma forte del teorema di Cantor* (*Conseguenze dell'esistenza dell'estremo superiore, TEOREMA 4.2.*) ho

$$\bigcap_n I_n = \{\xi\}, \xi \in [a, b] \implies a \leq \xi \leq b$$

Per concludere basta mostrare che

$$f(\xi) = 0$$

Prima osservo che

$$0 \leq |a_n - \xi| \leq |b_n - a_n| = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$$

e poi

$$\lim_n 0 = 0; \lim_n \frac{b_0 - a_0}{2^n} = 0$$

$$\lim_n a_n = \xi$$

Analogamente vale lo stesso per  $b_n$ .

Adesso uso la nozione di **continuità** (Definizione di Continuità), usando in particolare il **teorema 1.4.** (Teorema 5 (di caratterizzazione della continuità tramite le funzioni)). Allora

$$f \text{ continua} \implies \begin{cases} \lim_n f(a_n) = f(\xi) \\ \lim_n f(b_n) = f(\xi) \end{cases}$$

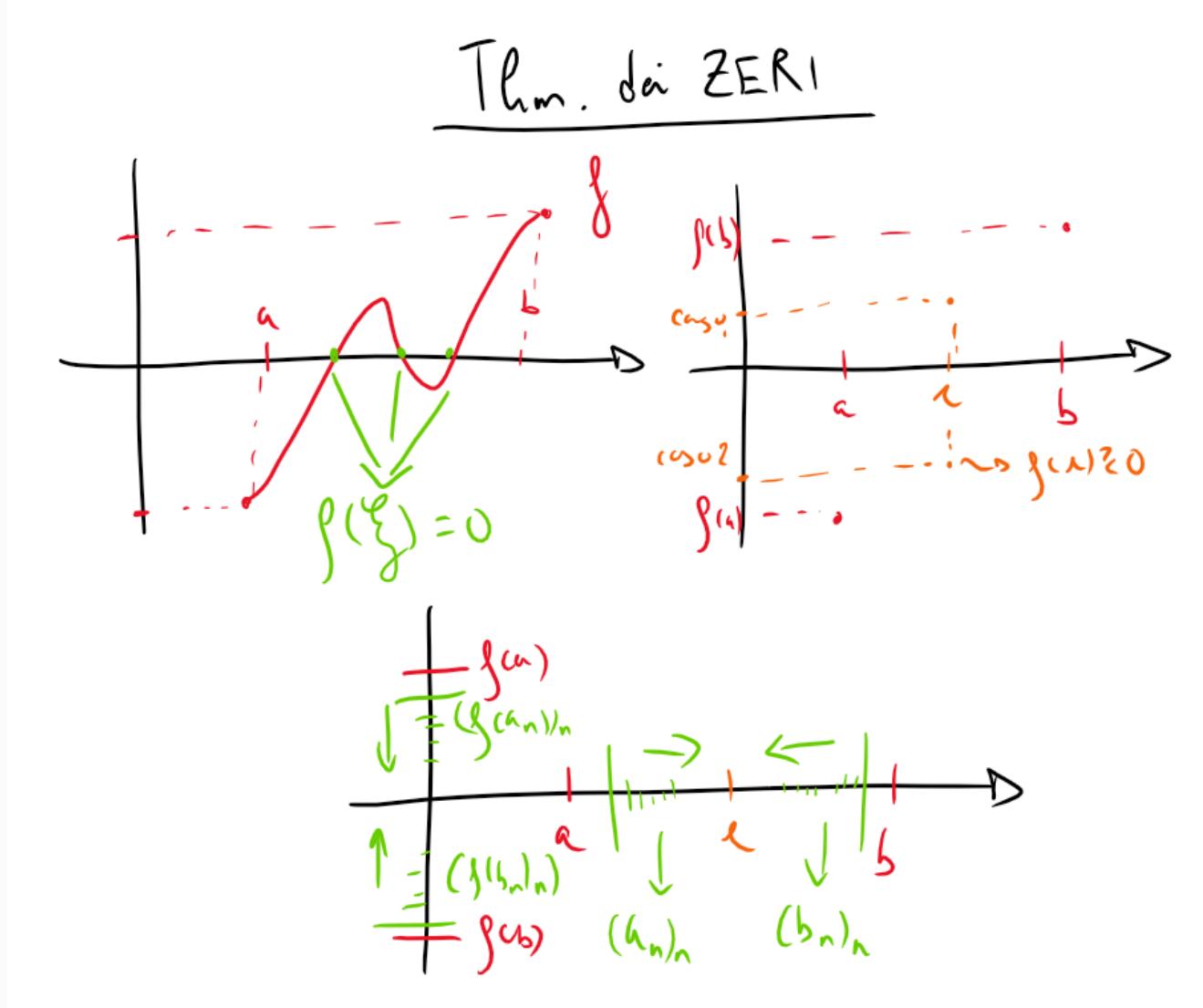
Però ricordandoci della **permanenza del segno** (**TEOREMA 1.1.**, Teorema 1 (Permanenza del segno versione continua.)), abbiamo che

$$\begin{aligned} f(a_n) < 0, \forall n &\implies \lim_n f(a_n) \leq 0 \implies f(\xi) \leq 0 \\ f(b_n) > 0, \forall n &\implies \lim_n f(b_n) \geq 0 \implies f(\xi) \geq 0 \end{aligned}$$

Ma per la proprietà **antiriflessiva** di  $\leq, \geq$  ho

$$f(\xi) = 0 \blacksquare$$

**FIGURA 2.1.** (Idea intuitiva iniziale e della dimostrazione)



## Osservazione (algoritmizzazione della dimostrazione del teorema).

Questo teorema è **costruttivo**: la dimostrazione del teorema dei zeri ci fornisce un **modo** di trovare il valore  $\xi$ . Infatti, mediante gli strumenti dell'**informatica**, si può implementare un algoritmo per poter calcolare e approssimare un zero di una funzione.

### ALGORITMO. (*Quasi-Python*)

PYTHON

```
def f(x):
    # Inserisci qui la funzione, ad esempio
    return x**3 - 2

a = ... # Un valore tale che f(a) < 0
b = ... # Un valore tale che f(b) > 0
c = (a+b)/2

while (d(f(c), 0)>= epsilon):
    # d(a,b) è la funzione distanza, epsilon un valore piccolo
    # a piacere
    if f(c) == 0:
        break

    if f(c) > 0:
        a = a
        b = c
        c = (a+b)/2
    else if f(c) < 0:
        a = c
        b = b
        c = (a+b)/2
```

### ALGORITMO ALTERNATIVO (*Python, ausilio degli iteratori*)

```
class Intervallo:
    def __init__(self, a, b, f, epsilon):
        self.a=a
        self.b=b
        self.f=f
        self.epsilon=epsilon

    def __iter__(self):
        return TrovaZeri(self.a, self.b, self.f,
self.epsilon)

class TrovaZeri:
    def __init__(self, a, b, f, e):
        self.a = a
        self.b = b
        self.f = f
        self.c = (a+b)/2
        self.e = e

    def __next__(self):
        if self.f(self.c) == 0 or (self.f(self.c)<self.e
and self.f(self.c) > -1*self.e):
            raise StopIteration

        if self.f(self.c) > 0:
            self.a = self.a
            self.b = self.c
            self.c = (self.a+self.b)/2
            return self.b

        if self.f(self.c) < 0:
            self.a = self.c
            self.b = self.b
            self.c = (self.a+self.b)/2
            return self.a
```

#Esempio

Esempio (Trovare una soluzione di  $x^3 - 2$ ).

Supponiamo di voler trovare la soluzione per

in  $[0, 3]$ .

Allora secondo la "ricetta" prescritta in questo algoritmo opero nel seguente modo:

$$1. \quad a_0 = f(0) = -2; b_0 = f(3) = 25; c_0 = f(1.5) = \frac{11}{8}$$

$$2. \quad a_1 = -2, b_1 = \frac{11}{8}, c_1 = \frac{3}{4} = \dots = -\frac{99}{64}$$

$$3. \quad a_2 = -\frac{99}{64}, b_2 = \frac{11}{8}, \dots$$

e operativamente mi fermo quando il valore desiderato è abbastanza "vicino" a quello cercato.

## Teorema dei valori intermedi

#Corollario

**Corollario** (teorema degli valori intermedi).

Sia  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Supponiamo  $g(a) = \alpha, g(b) = \beta$ , con  $\alpha < \beta$ . Sia  $\gamma \in ]\alpha, \beta[$ .

Allora

$$\exists \xi \in ]a, b[ : g(\xi) = \gamma$$

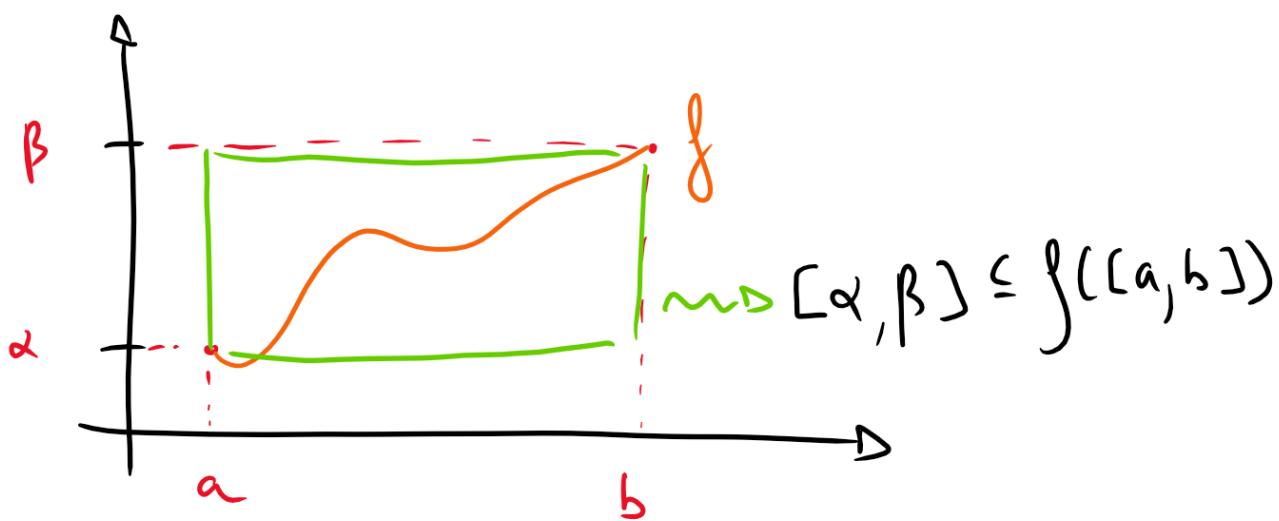
in parole una *funzione continua su un certo intervallo* se assume due valori negli *estremi* allora questa assume *tutti* i valori *intermedi* in questo intervallo.

Alternativamente si può riformulare questo teorema come

$$[g(a), g(b)] = [\alpha, \beta] \subseteq f([a, b])$$

**FIGURA 2.2.** (*Idea grafica del teorema*)

# Teorema dei valori INTERMEDI



#Dimostrazione

## DIMOSTRAZIONE (Corollario 2.2.)

Consideriamo la *composizione* delle funzioni.

Siano  $\gamma \in (\alpha, \beta) \implies \alpha < \gamma < \beta$ ,

$$f(x) = g(x) - \gamma$$

e sfruttando il *teorema sulle operazioni con funzioni continue* (Teorema 2 (Operazioni con funzioni continue.)), supponendo che  $g$  sia continua, sappiamo che  $f$  è sicuramente continua.

Inoltre

$$\begin{aligned} f(a) &= g(a) - \gamma = \alpha - \gamma < 0 \\ f(b) &= g(b) - \gamma = \beta - \gamma > 0 \end{aligned}$$

Allora per il *teorema dei zeri* (Teorema 6 (degli zeri)) sappiamo che

$$\exists \xi \in (a, b) : f(\xi) = 0 \implies g(\xi) - \gamma = 0 \implies g(\xi) = \gamma \blacksquare$$

**OSS 2.2.** Notiamo che tutte e tre le condizioni sono *importanti*: infatti deve valere che ci sia un intervallo singolo. Infatti supponendo

$$g : [1, 2] \cup [3, 4] \longrightarrow \mathbb{R}$$

allora possiamo supporre  $g$  continua ma non ha zeri, in quanto potrebbero esserci dei "salti" tra  $[2, 3]$ . Infatti questo è il caso se

$$g(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \in [1, 2] \\ 1 & \text{se } x \in [3, 4] \end{cases}$$

Lo stesso discorso vale per la funzione

Infatti il "buco" qui è proprio il numero 0.

## #Osservazione

**Osservazione** (una funzione continua su un intervallo manda sempre in un intervallo).

Sia  $E \subseteq \mathbb{R}$ , con la seguente proprietà:  $x_1, x_2 \in E \implies [x_1, x_2] \subseteq E$ , chi è  $E$ ?

$E$  è **sempre** un intervallo: per dimostrarlo uso il teorema dell'esistenza di  $\sup E, \inf E$  ([Insiemi limitati, maggioranti, massimo e teorema dell'estremo superiore](#)), le sue proprietà e di seguito il [teorema dei zeri](#). Da questo discende il seguente corollario:

## #Corollario

**Corollario** (Corollario 2.3.).

Sia  $I$  intervallo,  $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  continua.

Allora  $f(I)$  è intervallo.

## Teorema di compattezza

Ora vediamo di collegare la nozione delle [funzioni continue](#) con gli [insiemi compatti](#) ([Definizione 2 \(Insieme compatto in R per successioni.\)](#)).

## #Teorema

**Teorema** (di compattezza).

Sia  $K \subseteq \mathbb{R}$ ,  $K$  compatto; sia  $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  continua.

Allora  $f(K)$  è compatto.

## #Dimostrazione

### DIMOSTRAZIONE (Teorema 2.4.)

Provo che dalle supposizioni iniziali ho  $f(K)$  compatto.

Allora prendo  $(y_n)_n$  una [successione](#) a valori in  $f(K)$  ([Definizione 2 \(successione a variabile reale\)](#)). Allora devo dimostrare di essere in grado di estrarre una [sotto successione](#)  $(y_{n_k})_k$  tale che

$$\lim_k y_{n_k} = \bar{y} \in f(K)$$

Però prima partiamo considerando ciò che [conosciamo](#), ovvero  $K$  compatto: quindi per ogni [successione](#)  $(x_n)_n$  a valori in  $K$ , allora possiamo estrarre una [sotto successione](#)

$$\lim_k x_{n_k} = \bar{x} \in K$$

però mi ricordo che  $f$  è continua, quindi per la [caratterizzazione della continuità tramite le successioni](#) ([Teorema 5 \(di caratterizzazione della continuità tramite le funzioni\)](#)) ho che anche la sua [immagine](#) converge. Allora

$$\lim_k f(x_{n_k}) = f(\bar{x}) \in f(K)$$

Ricordandoci che  $y_{n_k} = f(x_{n_k})$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$ , abbiamo proprio

$$\lim_k y_{n_k} = \bar{y} \in f(K) \blacksquare$$

#Corollario

### Corollario (Corollario 2.5.).

Una funzione  $f$  [continua](#) che ha per dominio [insiemi chiusi e limitati](#), ovvero per la [caratterizzazione dei compatti](#) ([Teorema 4 \(Teorema di caratterizzazione dei compatti in R.\)](#)) insiemi [compatti](#), allora il suo [insieme immagine](#) è un [insieme chiuso e limitato](#).

## Teorema di Weierstraß

#Teorema

### Teorema (di Weierstraß).

Sia  $K$  un insieme [compatto non vuoto](#) (pertanto [chiuso e limitato](#)), sia  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  [continua](#).

Allora  $f(E)$  ha max e inf; ovvero riprendendo le definizioni di [massimo e minimo assoluto di una funzione](#) ([Funzioni](#), **DEF 11.1; DEF 11.2.**) esistono il massimo e minimo assoluto della funzione.

#Osservazione

Osservazione (insiemi compatti hanno sempre minimo e massimo).

Un insieme [chiuso e limitato](#) ha sempre min, max? Sì, in quanto per definizione un insieme limitato deve avere per forza  $\inf, \sup \in \mathbb{R}$  e in quanto chiuso questi appartengono anche all'insieme stesso.

**DIMOSTRAZIONE (Teorema 2.6.)**

In questa dimostrazione usiamo la nozione dei *insiemi compatti* (Definizione 2 (Insieme compatto in  $\mathbb{R}$  per successioni.)).

Sia  $K$  *chiuso* e *limitato*, dunque *compatto*, poiché  $f$  è *continua*, sia  $f(K)$  *compatto*, allora sia  $f(K)$  *chiuso* e *limitato*.

Pertanto per **OSS 2.4.** (Osservazione 16 (insiemi compatti hanno sempre minimo e massimo)),

$$\begin{cases} f(K) \text{ limitato} \implies \exists \sup(f(K)), \inf(f(K)) \in \mathbb{R} \\ f(K) \text{ chiuso} \implies \sup f(K), \inf f(K) \in f(K) \end{cases} \implies \begin{cases} \sup f(K) = \max f(K) \\ \inf f(K) = \min f(K) \end{cases}$$

Concludendo così la dimostrazione. Inoltre è possibile anche dimostrare questo teorema *senza* usare la nozione dei *insiemi compatti* e la sua *caratterizzazione*.

## #Dimostrazione

**DIMOSTRAZIONE ALTERNATIVA (Teorema 2.6.)**

In questa dimostrazione alternativa *non* useremo la nozione della compattezza (in particolare senza la sua caratterizzazione con insiemi chiusi e limitati).

Dimostrando che esiste  $\max$ , avrei già analogamente dimostrato l'esistenza di  $\min$ . Allora considero  $f(K) \subseteq \mathbb{R}$ : ho dunque due *possibilità*:

1.  $f(K)$  è *superiormente illimitato*
2.  $\sup f(K) < +\infty$  (ovvero non è *superiormente illimitato*)

In entrambi i casi esiste in  $f(K)$  una *successione*  $(y_n)_n$  tale che

$$\lim_n y_n = \begin{cases} +\infty & \text{se caso 1.} \\ \sup f(K) & \text{se caso 2.} \end{cases}$$

Adesso guardo la successione  $(x_n)_n$  in  $K$ . Sappiamo che  $K$  è *compatto*, dunque possiamo trovare una *sotto successione*  $(x_{n_k})_k$  tale che

$$\lim_k x_{n_k} = \bar{x} \in K$$

Sapendo che  $f$  è *continua*, abbiamo che

$$\lim_k x_{n_k} = \bar{x} \in K \implies \lim_k f(x_{n_k}) = f(\bar{x}) = \bar{y} = \begin{cases} +\infty & \text{se caso 1.} \\ \sup f(K) & \text{se caso 2.} \end{cases}$$

Ora ci chiediamo se è possibile avere il *primo* caso: la risposta è *no*, in quanto sappiamo che  $f(\bar{x}) \in f(K) \subseteq \mathbb{R} \implies f(\bar{x}) \in \mathbb{R}$  (ovvero questo caso è un *assurdo*). Di conseguenza l'unico caso di cui ha senso considerare è il *secondo*, ovvero

$$\lim_k y_{n_k} = \bar{y} = \sup f(K) \in f(K) \implies \sup f(K) = \max f(K)$$

ovvero  $f(\bar{x})$  è di *massimo*.

## A4. Continuità di alcune funzioni

### Continuità delle funzioni varie

Vari teoremi sulla continuità di certi tipi di funzioni: funzioni monotone, iniettive, surgettive, bigettive (dunque invertibili).

## 1. Funzione monotona e suriettiva

#Teorema

**Teorema** (continuità della funzione strettamente monotona e suriettiva).

Sia  $f : I \rightarrow J$ ,  $I, J$  degli intervalli,  $f$  **strettamente monotona** e **suriettiva** ([Definizione 12 \(funzione suriettiva\)](#), [Definizione 26 \(monotonia di una funzione\)](#)). Allora  $f$  è **continua**.

#Dimostrazione

#### DIMOSTRAZIONE (Teorema 1.1.)

*Nota: questa è solo una idea della dimostrazione*

Prendo un punto  $x_0 \in I$ , inoltre supponiamo che  $x_0$  sia un **punto interno** per  $I$  ([Definizione 1 \(Punto interno ad un insieme, l'insieme dei punti interni.\)](#)).

Allora abbiamo la situazione in [figura 1.1.](#): da qui posso evincere che esistono i **limiti destri e sinistri** di  $x \rightarrow x_0^\pm$  ([Definizione 12 \(limite destro di una funzione\)](#)) e che

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

(inoltre questa proposizione è direttamente ricavata da [Corollario 17 \(Corollario 9.1.\)](#))

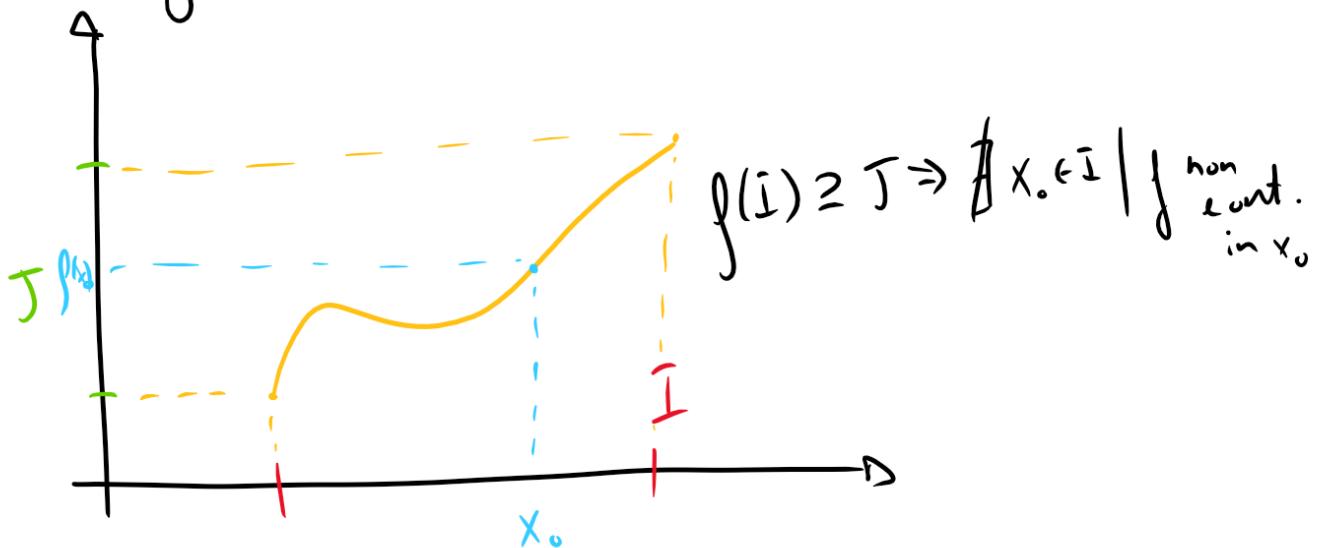
Supponendo **per assurdo** che il limite destro e sinistro sono diversi (dandoci così una discontinuità del primo ordine), avremmo una specie di "**bucco**" nella funzione immagine  $J$ ; tuttavia è assurdo in quanto contraddirebbe con la supposizione iniziale di  $f$  **suriettiva**.

Di conseguenza abbiamo l'unica possibilità

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \implies f \text{ continua} \blacksquare$$

**FIGURA 1.1.** (*Idea della situazione*)

$f$  monotona, suriettiva  $\Rightarrow f$  continua



## Funzione strettamente crescente e suriettiva

#Corollario

**Corollario** (continuità della funzione strettamente crescente e suriettiva).

Sia  $f : I \rightarrow J$ ,  $I, J$  intervalli,  $f$  strettamente crescente e suriettiva.

Allora  $f, f^{-1}$  sono continue.

#Esempio

**Esempio** (Funzione esponenziale e logaritmica).

Questo teorema è utile per poter dimostrare la continuità di certe funzioni: infatti ad esempio sappiamo che  $\exp$  è continua, strettamente crescente e suriettiva per  $]0, +\infty[$ : di conseguenza  $\exp^{-1} = \log$  è anch'essa continua.

## 2. Funzione iniettiva e continua

#Teorema

**Teorema** (monotonia della funzione iniettiva e continua).

Sia  $f : I \rightarrow J$  una funzione continua e iniettiva.

Allora  $f$  è strettamente crescente.

#Dimostrazione

**DIMOSTRAZIONE** del teorema 2.1.

Nota: questa è solo una idea della dimostrazione

Dimostriamo la *contronomina* della tesi; ovvero supponendo che  $f$  sia *non* strettamente crescente dobbiamo dimostrare che  $f$  non è *iniettiva*.

221

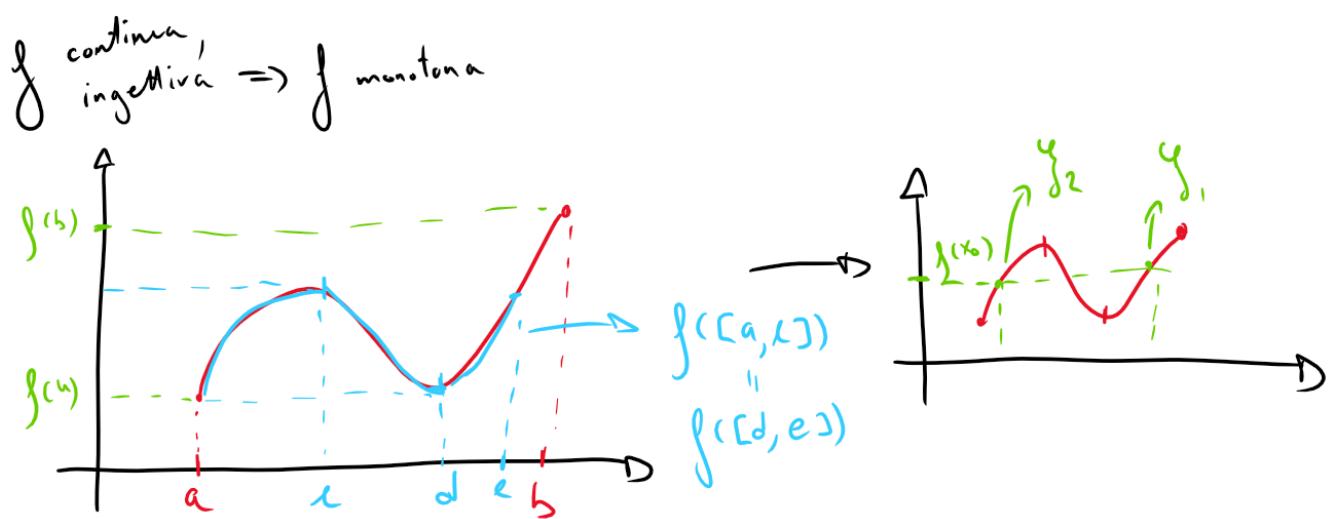
Allora abbiamo la situazione in *figura 2.1.*: ci possono essere tre (o più) punti in cui la funzione inizia a "*cambiare direzione*", cambiando dalla tendenza di crescere a quella di decrescere (e viceversa).

Per il *teorema dei valori intermedi* (Corollario 10 (teorema degli valori intermedi)), sappiamo che ci sono almeno *due* soluzioni  $\xi_1, \xi_2$  tali che per un valore fissato  $f(x_0) \in J$  si ha  $f(x) = f(x_0)$ .

Infatti possiamo prendere un "*ramo*" crescente e un ramo "*decrescente*" e applicare il *teorema dei valori intermedi* a ciascuno.

Se esistono allora due numeri che, per una funzione, ci danno lo stesso numero, allora  $f$  non è *iniettiva*. ■

**FIGURA 2.1.** (*Idea della situazione*)



## Funzione continua e invertibile

#Corollario

**Corollario** (continuità dell'inversa della funzione continua e invertibile).

Sia  $f : I \rightarrow J$  continua e invertibile.

Allora  $f^{-1}$  è continua.

## A5. Continuità uniforme

### Continuità Uniforme

Osservazioni preliminari, definizione di continuità uniforme, esempi. Teorema di Heine.

La seguente osservazione si baserà sul concetto della *continuità* ([Definizione di Continuità](#)).

## #Osservazione

Osservazione (osservazione preliminare).

Supponiamo di avere una funzione continua  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in E$ .

Per definizione sappiamo "*tradurre*" il concetto della *continuità* di una funzione per un punto  $x_0$  "*alla Cauchy*", ovvero:

$$f \text{ continua in } x_0 \iff \begin{aligned} & \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in E, \\ & |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \end{aligned}$$

Quindi abbiamo sostanzialmente una "*macchina*" limite per cui dato un  $\varepsilon$  fissato ottengo un  $\delta$  (ulteriori chiarimenti sull'analogia della macchina in [Definizione 9 \(limite infinito di una funzione all'infinito\)](#)).

Ora se cambio il punto  $x_0$  e prendo  $x_1$  tale che  $f$  sia continua, allora ho

$$f \text{ continua in } x_1 \iff \begin{aligned} & \forall \varepsilon > 0, \exists \delta' > 0 : \forall x \in E, \\ & |x - x_1| < \delta' \implies |f(x) - f(x_1)| < \varepsilon \end{aligned}$$

Se tengo fisso lo stesso  $\varepsilon$  sia per  $x_0$  che per  $x_1$ , allora i valori  $\delta, \delta'$  potrebbero essere diversi.

Infatti se trovo un  $\delta$  che va bene per *tutti* i punti del dominio, allora non solo  $f$  è continua ma ha anche una proprietà in più, che definiremo a seguire.

## 1. Definizione di continuità uniforme

### #Definizione

Definizione (funzione uniformemente continua).

Data una funzione  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ , diciamo che  $f$  è *uniformemente continua* se vale la seguente proprietà.

$$\begin{aligned} & \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in E, \\ & |x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \end{aligned}$$

**OSS 1.1.** Notiamo quindi che se una funzione è *uniformemente continua* è anche (ovviamente) *continua*. Attenzione però che non vale necessariamente il *viceversa*.

### #Esempio

Sia  $f(x) = 1$  con  $E = [0, 1]$ ;  
 sia  $g(x) = x$  con  $E = [0, 1]$ ;  
 sia  $h(x) = \frac{1}{x}$  con  $E = ]0, +\infty[$ .

Le funzioni  $f, g, h$  sono tutte *continue*; tuttavia solo  $f, g$  sono anche *uniformemente continue*.

Infatti  $h$  non è *uniformemente continua*: infatti supponendo per assurdo che  $h$  sia *uniformemente continua* e fissando  $\varepsilon = 1$ , si avrebbe

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in E : \\ |x_1 - x_2| < \delta \implies \left| \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right| < 1$$

Ora considero la *successioni a valori in E*

$$(x_{1,n})_n = \frac{1}{n}, (x_{2,n})_n = \frac{1}{n+1}$$

avremmo quindi

$$|x_{1,n} - x_{2,n}| = \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right| = \left| \frac{1}{n(n+1)} \right|$$

ma dato che  $f$  è continua possiamo considerare

$$|f(x_{1,n}) - f(x_{2,n})| = 1 \iff \left| f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n+1}\right) \right| = 1$$

Però

$$\lim_n \frac{1}{n(n+1)} = 0$$

Quindi da un lato abbiamo i due numeri che man mano si avvicinano, però la loro distanza delle immagini rimane *sempre* costante.

## 2. Teorema di Heine (dell'uniforme continuità)

#Teorema

**Teorema** (di Heine).

Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  *continua* e sia  $[a, b]$  *compatta* (Definizione 2 (Insieme compatto in R per successioni.)).

Allora  $f$  è *uniformemente continua*.

Osservazione (Osservazione 2.1.).

Quindi in generale si può dire che una funzione  $f$  è uniformemente continua **se e solo** se continua, se vale la ipotesi iniziale del teorema: ovvero se  $[a, b]$  **chiusa e limitata**, ovvero **compatta**.

#Dimostrazione

**DIMOSTRAZIONE** (*Teorema 2.1.*)

*Omessa, facoltativa sulla dispensa di D.D.S.*

## Abstract del Capitolo VI

Il *calcolo differenziale* è uno dei traguardi dell'*analisi matematica*: questo capitolo ci fornirà uno degli strumenti più potenti per *studiare funzioni*.

A livello teorico questo capitolo ci introduce al *calcolo differenziale* mediante un cenno *storico e fisico*: la meccanica newtoniana.

Dopodiché astraiamo questi concetti dal loro contesto meccanico e definiamo la nozione di *derivata* in una maniera rigorosa, con i strumenti forniti dai *limiti*.

Infine studieremo questi concetti nella maniera più approfondita possibile, in particolare dei *teoremi teorici* (come quello di *Rolle, Cauchy e Lagrange*) e le loro conseguenze.

## 0. Cenni storici e fisici

### Introduzione al Calcolo Differenziale

*Introduzione al calcolo differenziale: cenni storici ed esempio meccanico del rapporto incrementale e derivata*

## 1. Origine storico del concetto

#Osservazione

Osservazione (contestualizzazione storica-matematica del XVII secolo).

Ci troviamo nella seconda metà del XVII secolo, un periodo caratterizzato dagli straordinari contributi di due giganti della matematica: Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz. Questi due luminari sono diventati figure fondamentali nello sviluppo del *calcolo differenziale*, introducendo concetti rivoluzionari come la *derivata*, che poi diventerà materia d'esame per quanto ci concerne.

Focalizziamoci ora sul genio di Isaac Newton: autodidatta straordinario, Newton, già a soli 21 anni, ha delineato la concettualizzazione della *velocità*. È interessante notare che le seguenti definizioni, sebbene non siano direttamente oggetto d'esame, possono essere considerate come un buon cenno alla *fisica newtoniana* ([Introduzione Alla Fisica](#)).

### Esempio meccanico del calcolo differenziale

#Definizione

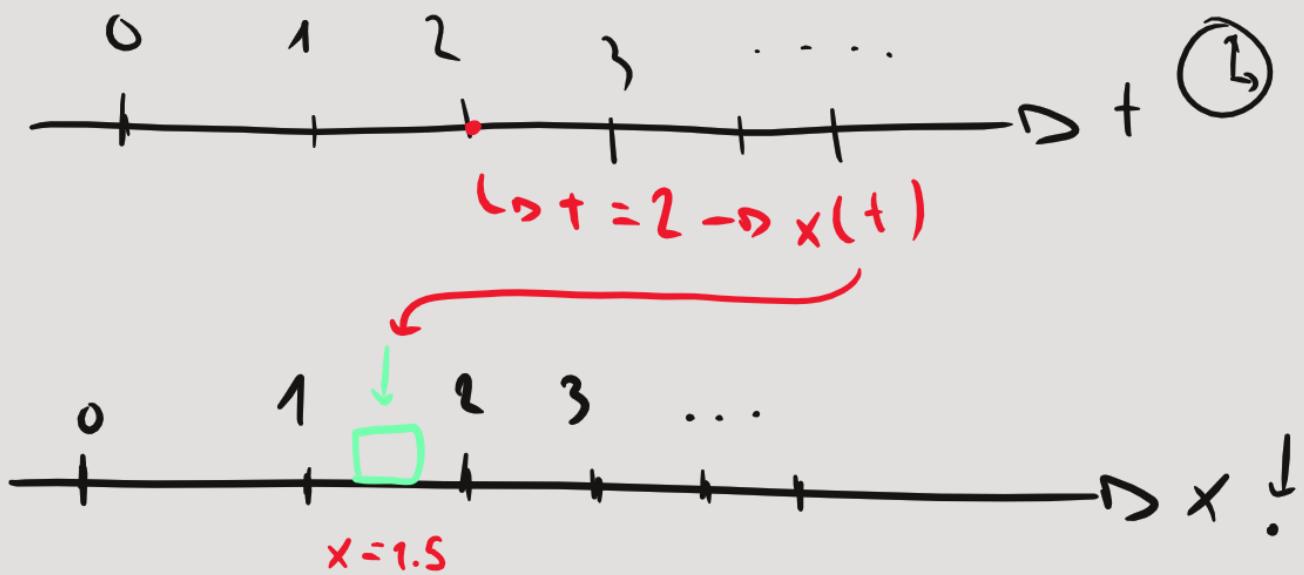
Definizione (legge oraria).

Sia  $x \mapsto x(t)$  una funzione che associa al tempo  $t$  la *posizione* di un punto mobile su un asse  $x$ .

Allora  $x(t)$  si dice legge oraria.

**FIGURA 1.1.** (*Legge oraria*)

# Legge Oraria



#Definizione

Definizione (velocità media dati due istanti di tempo).

Si definisce la **velocità**, dati due istanti di tempo  $t_1$  e  $t_2$  la velocità media  $v(t_1, t_2)$  nel seguente modo:

$$v(t_1, t_2) = \frac{x(t_1) - x(t_2)}{t_1 - t_2}$$

Sul numeratore abbiamo *l'incremento* dello spazio, sul denominatore *incremento* del tempo.

**ATTENZIONE!** Per *"incremento"* si intende semplicemente la differenza tra il punto finale e iniziale; quindi non dev'esserci necessariamente un *"incremento"*: può esserci nessuna variazione o anche un *"decremento"* (ovvero una specie di incremento negativo).

Ora voglio legare questo concetto di **velocità** ad una sola variabile di tempo  $t$ ; allora definisco la **velocità** istantanea mediante il concetto di **limite** (Definizione 9 (limite infinito di una funzione all'infinito)).

#Definizione

Definizione (velocità istantanea).

Sia  $x(t)$  una legge oraria.

Allora chiamo la velocità istantanea  $v(t)$

$$v(t) = \lim_{t_1 \rightarrow t_2} v(t_1, t_2)$$

Ora abbiamo il **concetto** meccanico della derivata: nei successivi capitoli ci prescindiamo dai presupposti fisici e ci dirigiamo verso all'astrazione puramente matematica.

## A1. Rapporto Incrementale

### Rapporto Incrementale

*Definizione di rapporto incrementale di una funzione in un punto.*

## 1. Definizione di rapporto incrementale

#Definizione

**Definizione** (rapporto incrementale di una funzione relativo un punto del dominio).

Sia  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I$  un *intervallo* (*Intervalli*).

Sia  $x_0$  un punto del dominio  $I$ .

Allora chiamo il *rapporto incrementale*  $R_{x_0}^f(x)$  della funzione  $f$  relativamente al punto  $x_0$  come

$$R_{x_0}^f(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

#Proposizione

**Proposizione** (rapporto incrementale come funzione).

Allora si può pensare al *rapporto incrementale*  $R_{x_0}^f(x)$  come una funzione che lega ad un qualsiasi punto  $x$  in  $I$ , escluso  $x_0$  in quanto si avrebbe la forma indeterminata  $\frac{0}{0}$ , un altro punto della retta reale.

$$R_{x_0}^f : I \setminus x_0 \rightarrow \mathbb{R}$$

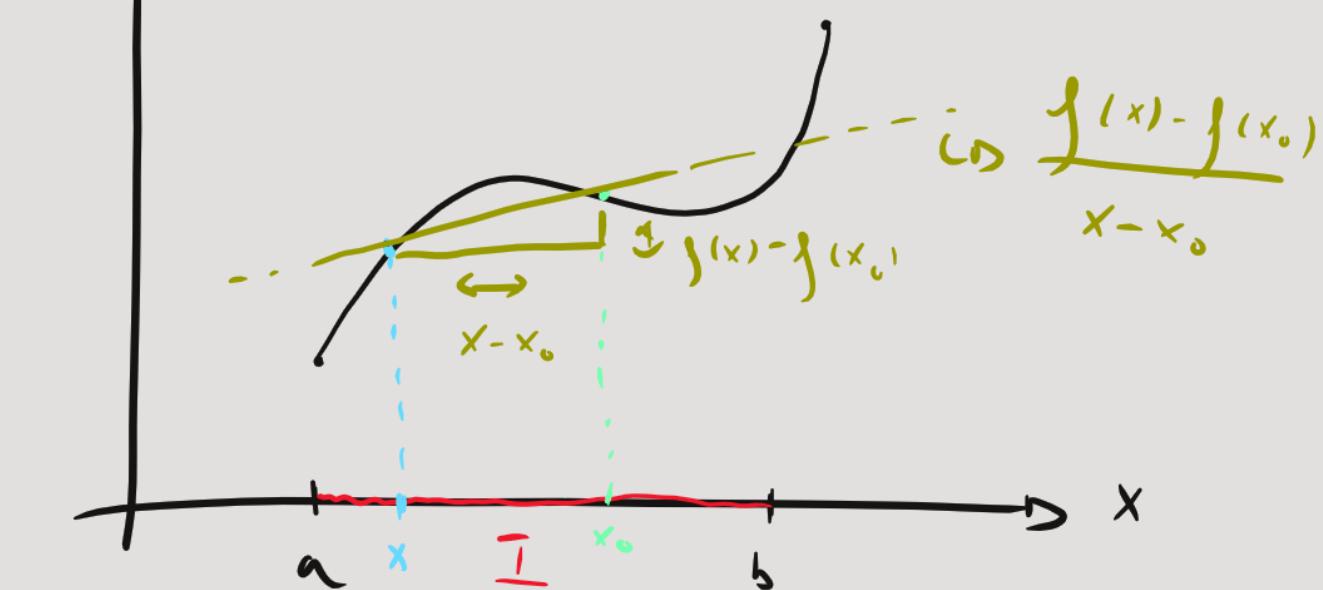
#Osservazione

**Osservazione** (interpretazione geometrica della derivata).

Osserviamo che questa definizione ha anche un *significato geometrico*: infatti  $R_{x_0}^f$  è anche la *pendenza* (coefficiente angolare) della *retta secante* dei punti  $(x_0, f(x_0))$  e  $(x, f(x))$ .

**FIGURA 1.1.** (*Significato geometrico*)

# Significato geometrico di $R_{x_0}^f$



## A2. Derivabilità e derivata

### Derivata e derivabilità

*Definizione di derivata, derivabilità in un punto, derivabilità generale, funzione derivata.*

## 1. Derivata

#Definizione

Definizione (derivata di una funzione relativa ad un punto).

Sia  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in I$ .

Sia  $R_{x_0}^f(x)$  il rapporto incrementale (Definizione 1 (rapporto incrementale di una funzione relativo un punto del dominio)).

Allora definisco la *derivata* di  $f$  in  $x_0$  il *limite* (Definizione 9 (limite infinito di una funzione all'infinito)) del rapporto incrementale con  $x$  che tende a  $x_0$ .

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} R_{x_0}^f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

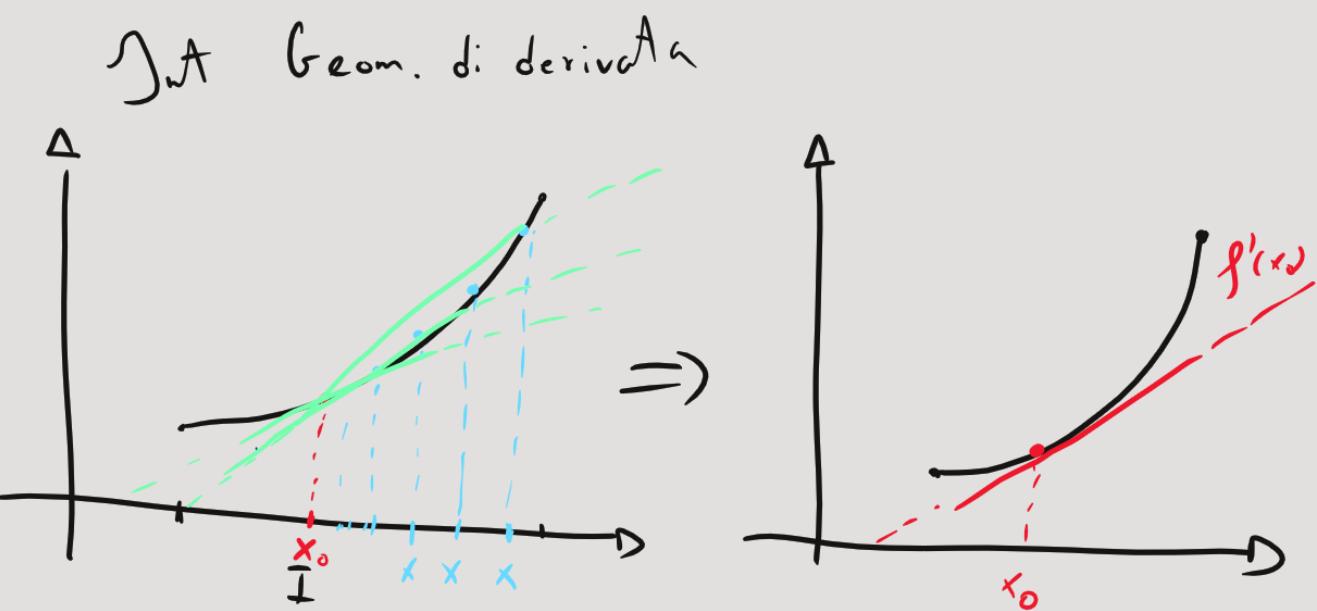
Naturalmente si definisce tale *se* tale limite esiste.

Osservazione (interpretazione geometrica della derivata).

Come precedentemente osservato in [Osservazione 3 \(interpretazione geometrica della derivata\)](#), la *derivata in un punto* ha la sua interpretazione geometrica.

Ovvero questa è semplicemente la *pendenza* della *retta tangente* in un punto: infatti se prendendo due punti sulla funzione, di cui una "mobile" e l'altra "fissa", poi facendo avvicinare il punto mobile a quello fisso, noteremo che la retta secante dei due punti si "convergerà" ad una retta sola (ovviamente supponendo che esista).

**FIGURA 1.1.** (*Interpretazione geometrica di derivata*)



## 2. Derivabilità

#Definizione

Definizione (derivabilità in un punto).

Sia  $f : I \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in I$ .

Se *esiste finito* la *derivata* ([Definizione 1 \(derivata di una funzione relativa ad un punto\)](#))

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} R_{x_0}^f(x) \in \mathbb{R}$$

Allora  $f$  si dice *derivabile nel punto*  $x_0$ .

#Definizione

Sia  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  **derivabile** (Definizione 3 (derivabilità in un punto)) in *ogni* punto del suo dominio  $I$ , allora  $f$  si dice **derivabile** (e basta).

## #Osservazione

Osservazione (collegamento derivata-derivabilità e continuità).

Notiamo che queste due definizioni **"seguono"** lo schema delle definizioni di **continuità** (Definizione 2 (Funzione continua per un punto), Definizione 5 (Funzione continua su un insieme))

### 3. Funzione derivata

## #Definizione

Definizione (funzione derivata).

Sia  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  **derivabile**.

Chiamo la **funzione derivata** la funzione

$$f : I \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto f'(x)$$

## A3. Proprietà fondamentali delle derivate

### Proprietà delle derivate

*Proprietà fondamentali delle derivate: Continuità delle funzioni derivabili, derivata di operazione tra funzioni, derivata di funzione composta, derivata della funzione inversa.*

## 1. Proprietà fondamentali

### Continuità della funzione derivabile

## #Teorema

Teorema (continuità delle funzioni derivabili).

Sia  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I$  intervallo,  $x_0 \in I$ .

Sia  $f$  derivabile in  $x_0$  (Definizione 3 (derivabilità in un punto)).

Allora  $f$  è continua in  $x_0$  (Definizione 2 (Funzione continua per un punto)).

$$f \text{ derivabile} \implies f \text{ continua}$$

#### #Dimostrazione

**DIMOSTRAZIONE** del teorema 1.1. (Teorema 1 (continuità delle funzioni derivabili))

Intanto sappiamo che  $I$  è un intervallo, quindi tutti i suoi punti all'interno ne sono punti di accumulazione: pertanto possiamo prendere  $\lim x \rightarrow x_0$  per un qualsiasi  $x_0 \in I$ .

Ora dimostriamo che  $f$  è continua usando il fatto che  $f$  è derivabile:

$$\begin{aligned} f \text{ continua} &\iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \\ &\iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - f(x_0) = 0 \\ &\iff \lim_{x \rightarrow x_0} \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{=f'(x) \in \mathbb{R}} \underbrace{(x - x_0)}_{x - x_0 \rightarrow 0} ? = 0 \\ &\iff f'(x)0 \rightarrow 0 = 0 \blacksquare \end{aligned}$$

#### #Proposizione

**Proposizione** (la non derivabilità delle funzioni continue).

Vale il viceversa del teorema 1.1. (Teorema 1 (continuità delle funzioni derivabili))?

La risposta è no, in quanto esistono controesempi di funzioni continue ma non derivabili (dunque negando l'implicazione  $p \implies q$ )

#### #Dimostrazione

**DIMOSTRAZIONE** della proposizione 1.1. (Proposizione 2 (la non derivabilità delle funzioni continue))

Per l'esempio di una funzione continua non derivabile rivolgersi a Esempi di derivate.

## Derivata di operazioni tra funzioni

#### #Teorema

**Teorema** (derivata di operazioni tra funzioni).

Siano  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  delle funzioni.

Sia  $x_0 \in I$ .

Allora  $f \pm g, f \cdot g, \frac{f}{g}$  sono derivabili.

In particolare valgono le seguenti:

- i.  $(f \pm g)' = f' \pm g'$
- ii.  $(fg)' = f'g + fg'$  (regola di Leibniz)
- iii.  $\frac{f}{g} = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

## #Dimostrazione

**DIMOSTRAZIONE** dei punti i., ii., iii. del [teorema 1.2.](#) ([Teorema 3 \(derivata di operazioni tra funzioni\)](#))

i. Sia  $R_{x_0}^{f+g}(x)$  il seguente:

$$\begin{aligned} R_{x_0}^{f+g}(x) &= \frac{f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= R_{x_0}^f(x) + R_{x_0}^g(x) \\ &\implies f'(x) + g'(x) \end{aligned}$$

Questo vale analogamente per la sottrazione.

ii. Sia  $R_{x_0}^{fg}(x)$  il seguente:

$$\begin{aligned} R_{x_0}^{fg}(x) &= \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{f(x)g(x) - f(x)g(x_0) + f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{f(x)(g(x) - g(x_0))}{x - x_0} + \frac{g(x_0)(f(x) - f(x_0))}{x - x_0} \\ &= f(x) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + g(x_0) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \end{aligned}$$

$f$  continua  $\implies f(x_0)g'(x_0) + g(x_0)f'(x_0)$

$x \rightarrow x_0 \implies f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$

iii. Sia  $R_{x_0}^{\frac{f}{g}}$  il seguente:

$$\begin{aligned}
R_{x_0}^{\frac{f}{g}}(x) &= \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x - x_0} \\
&= \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)} \cdot \frac{1}{x - x_0} \\
&= \frac{f(x)g(x_0) - f(g)g(x) + f(x)g(x) - f(x_0)g(x)}{x - x_0} \cdot \frac{1}{g(x)g(x_0)} \\
&= \left( -f(x) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + g(x) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) \cdots \\
&= (g(x)f'(x_0) - f(x)g'(x_0)) \cdot \frac{1}{g(x)g(x_0)} \\
f \text{ continua} &\implies \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \blacksquare
\end{aligned}$$

(svolto la dimostrazione del punto iii. da me stesso per esercizio)

## 2. Derivate di funzioni particolari

### Derivata della funzione composta

#Teorema

**Teorema** (derivata di funzione composta).

Siano  $f : I \rightarrow J$ ,  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ ;  $x_0 \in I$ ,  $f(x_0) = y_0 \in J$ .

Sia  $f$  derivabile in  $x_0$ ,  $g$  derivabile in  $f(x_0)$ .

Allora  $g \circ f$  è **derivabile** in  $x_0$  e vale che

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

#Dimostrazione

**DIMOSTRAZIONE** del **teorema 2.1.** (**Teorema 4 (derivata di funzione composta)**)

*Nota: la prima parte della dimostrazione sarà l'idea della dimostrazione per cui vogliamo "orientare" la dimostrazione; la seconda parte sarà la dimostrazione vera e propria, anche se leggermente artificiale e forzata.*

L'idea della dimostrazione consiste nella seguente:

$$\begin{aligned}
R_{x_0}^{g \circ f}(x) &= \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} \\
&= \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\
&= g'(f(x)) \cdot f'(x_0) \\
&\implies g'(f(x)) \cdot f'(x)
\end{aligned}$$

Tuttavia c'è un problema: in uno dei passaggi moltiplico la frazione per  $\frac{f(x)-f(x_0)}{f(x)-f(x_0)}$ , che è equivalente a 1. Tuttavia se ci troviamo nel caso in cui  $f(x) = f(x_0)$ , avremmo un problema in quanto la frazione precedentemente definita non sarebbe più definita. Allora per evitare questo problema creiamo, in una maniera "*artificiale*", una funzione continua che ci permette di evitare questo problema.

236

Sia

$$H(y) = \begin{cases} \frac{g(y)-g(f(x_0))}{y-f(x_0)} & \text{se } y \neq f(x_0) \\ g'(f(x_0)) & \text{se } y = f(x_0) \end{cases}$$

Trovo che  $H$  è continua in  $f(x_0)$ , in quanto per ipotesi  $g$  è *derivabile* in  $f(x_0)$ .

Inoltre posso verificare che vale la seguente relazione:

$$R_{x_0}^{g \circ f}(x) = H(f(x)) \cdot R_{x_0}^f(x)$$

In particolare per  $f(x) = f(x_0)$  abbiamo

$$\begin{aligned} R_{x_0}^{g \circ f}(x) &= H(f(x_0)) \cdot R_{x_0}^f(x) \\ &\iff \\ \frac{g(f(x_0)) - g(f(x_0))}{x - x_0} &= g'(f(x_0)) \frac{f(x_0) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

A questo punto prendendo i rispettivi limiti, ottengo

$$(g \circ f)' = \lim_{x \rightarrow x_0} H(f(x)) \cdot R_{x_0}^f(x) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) = g'(f(x)) \cdot f'(x) \blacksquare$$

## Derivata della funzione inversa

#Teorema

**Teorema** (derivata della funzione inversa).

Sia  $f : I \rightarrow J$  una funzione *bijettiva* (Definizione 17 (funzione bijettiva)), dunque *invertibile* (Teorema 24 (condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza della funzione inversa  $f^{-1}$ )); sia  $f$  *derivabile* in  $x_0$  con  $f'(x) \neq 0$ .

Allora  $f^{-1}(x)$  è *derivabile* in  $x_0$  e si ha

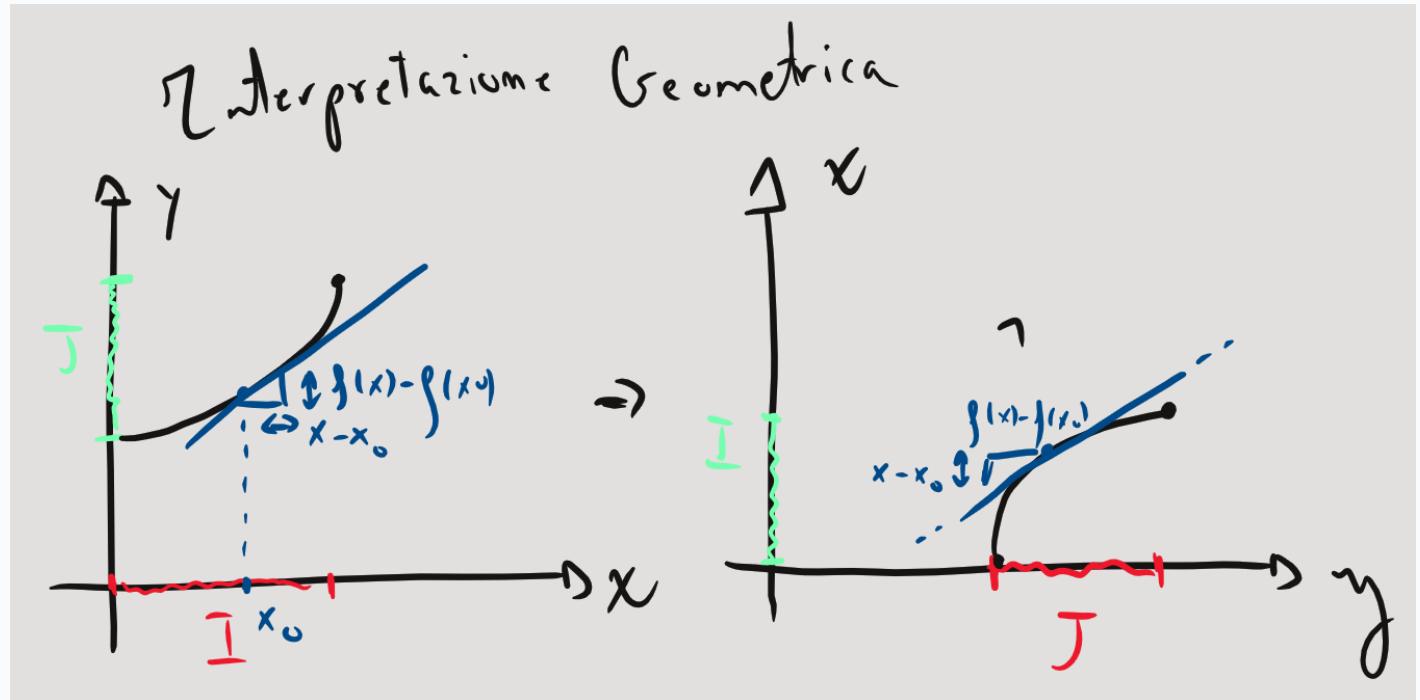
$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

#Osservazione

**Osservazione** (interpretazione geometrica del teorema 2.2.).

Anche questo teorema ha un suo significato geometrico: infatti se prendo la funzione originale, la inverto prendendo la sua simmetrica e scambiando le assi, allora prendendo lo stesso punto mi accorgo che la sua **tangente** esiste ed è proprio la **inversa** di quella originale.

**FIGURA 2.2.** (Interpretazione geometrica della derivata della funzione inversa)



### DIMOSTRAZIONE del **teorema 2.2.** (Teorema 5 (derivata della funzione inversa))

Si tratta semplicemente (con dei trucchetti) di calcolare il rapporto incrementale  $R_{f(x_0)}^{f^{-1}}(y)$ .

$$\begin{aligned} R_{f(x_0)}^{f^{-1}}(y) &= \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(x_0))}{y - f(x_0)} \\ &= \frac{f^{-1}(y) - x_0}{y - f(x_0)} \\ &\implies \lim_{y \rightarrow f(x_0)} \frac{f^{-1}(y) - x_0}{y - f(x_0)} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x = f^{-1}(y) \\ y = f(x) \\ x \rightarrow x_0 \end{cases} \implies \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{R_{x_0}^f(x)} \blacksquare$$

## A4. Derivate successive e classi C delle funzioni

### Derivata Successiva e Classe C

## 1. Derivata di ordine $k$ -esimo

#Definizione

Definizione (derivata di ordine  $k$ -esimo).Sia  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I$  un **intervallo** (Intervalli).Sia  $f$  **derivabile** (Definizione 4 (derivabilità di una funzione)).Allora ha senso considerare la **funzione derivata**

$$f' : I \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto f'(x)$$

Ma quindi si può chiedere se la **funzione derivata** è anch'essa **derivabile**; in tal caso chiamo la **derivata** della **funzione derivata** la **derivata seconda** e la indico con

$$f'' \text{ oppure } f^{(2)}$$

Per **induzione** (Assiomi di Peano, il principio di induzione > ^76b850) posso definire la derivata di ordine  $k$ -esimo come il seguente:

$$\begin{aligned} f^{(0)} &= f \\ f^{(k+1)} &= (f^{(k)})', \forall k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

## 2. La classe C di una funzione

#Definizione

Definizione (classe C di una funzione reale).

Sia  $f$  **derivabile** e sia la sua **funzione derivata**  $f'$  anch'essa **derivabile** (Definizione 5 (Funzione continua su un insieme)), allora dico che  $f$  è di **classe**  $\mathcal{C}^1$ ;

$$f \in \mathcal{C}^1$$

Generalizzando, se  $f$  è **derivabile** fino all'ordine  $f^{(k)}$ ; ovvero

$$f', f'', \dots, f^{(k)}$$

sono tutte derivabili, allora  $f$  si dice di **classe**  $\mathcal{C}^k$ .

$$f \in \mathcal{C}^k$$

$$f \in \mathcal{C}^\infty$$

### 3. Esempi

#Esempio

Esempio (funzione esponenziale).

Consideriamo la classica funzione **esponenziale**  $e^x$  ([Funzione esponenziale e Logaritmica](#)); se consideriamo la sua **derivata**  $(e^x)'$ , notiamo che è la stessa. Allora per **qualunque** ordine viene derivata, questa rimane la stessa; pertanto  $e^x$  è **sempre** derivabile.

$$e^x \in \mathcal{C}^\infty$$

#Esempio

Esempio (funzione potenza).

Consideriamo la **funzione potenza**  $x^n$  ([Funzioni di potenza, radice e valore assoluto](#)); se consideriamo la sua derivata  $(x^n)' = nx^{n-1}$ , vediamo che fino ad un certo punto (precisamente all'ordine  $n+1$ -esimo) questa si annulla; però la funzione **costante** è sempre derivabile.

Allora anche  $x^n \in \mathcal{C}^\infty$ .

#Esempio

Esempio (funzione seno).

Consideriamo adesso la **funzione seno**  $\sin x$  ([Funzioni trigonometriche](#)); derivando  $\sin x$  fino al quarto ordine vediamo che risulta la stessa funzione. Infatti

$$\begin{aligned} (\sin x)' &= \cos x \\ \implies (\cos x)' &= -\sin x \\ \implies (-\sin x)' &= -\cos x \\ \implies (-\cos x)' &= \sin x \\ \implies \dots & \end{aligned}$$

Allora  $\sin x \in \mathcal{C}^\infty$ .

#Esempio

Consideriamo la funzione  $f(x) = x \cdot |x|$ .

Si può dimostrare che questa è derivabile fino al *primo ordine*  $f'(x)$ ; però  $f'$  non è derivabile. La dimostrazione è stata lasciata al lettore per esercizio.

Allora  $x \cdot |x| \in \mathcal{C}^1$ .

## B1. Teorema di Fermat

### Teorema di Fermat

*Teorema di Fermat: cenno storico, enunciato e dimostrazione. Modello di applicazione (collegamento).*

---

## 0. Cenni storici alla figura di Pierre Fermat

*(Paragrafo scritto da me poi rielaborato da ChatGPT)*

Pierre de Fermat (1601-1665) è stato un giudice francese di notevole fama. Oltre al suo ruolo di giurista nelle corti francesi, Fermat coltivava la matematica come passatempo, dimostrando però di essere molto più di un dilettante: infatti si guadagnò l'appellativo "*il principe dei dilettanti*".

Tra i suoi contributi più significativi, possiamo citare la sua corrispondenza con Blaise Pascal sul problema della suddivisione della posta, il celebre teorema di Fermat (che esporremo a breve) e l'enigmatico ultimo teorema di Fermat.

Particolarmente noto è l'ultimo teorema di Fermat, su cui il matematico francese sostenne di avere una dimostrazione. Tuttavia, non la pubblicò mai, affermando che la dimostrazione "*non stava dentro nel margine dentro nella pagina*"<sup>(1)</sup>.

Ai giorni nostri, il teorema è stato finalmente dimostrato dal matematico Sir Andrew J. Wiles, il cui trattato estende per più di 100 pagine. Insomma, forse questa *meravigliosa dimostrazione* era un po' troppo lunghetta? Forse, comparandoci a Fermat, potremmo scrivere sul nostro esame che la nostra dimostrazione è troppo meravigliosa e lunga per poter essere contenuta, ai fini di giustificare la nostra omissione di eventuali dimostrazioni.

---

<sup>(1)</sup> «È impossibile separare un cubo in due cubi, o una potenza quarta in due potenze quarte, o in generale, tutte le potenze maggiori di 2 come somma della stessa potenza. Dispongo di una meravigliosa dimostrazione di questo teorema, che non può essere contenuta nel margine troppo stretto della pagina» ("Arithmetica", Diofanto di Alessandria (note di P. de Fermat))

---

## 1. Enunciato del teorema di Fermat

## Teorema (di Fermat).

Sia  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in I$ .

Se valgono che:

- $x_0$  è punto di **massimo** (minimo) **relativo** (Definizione 39 (max, min relativo)).
- $x_0$  è punto **interno** per il dominio  $I$  (Definizione 1 (Punto interno ad un insieme, l'insieme dei punti interni.)); quindi  $x_0$  non si trova agli estremi.
- $f$  è **derivabile** in  $x_0$  (Definizione 3 (derivabilità in un punto)).

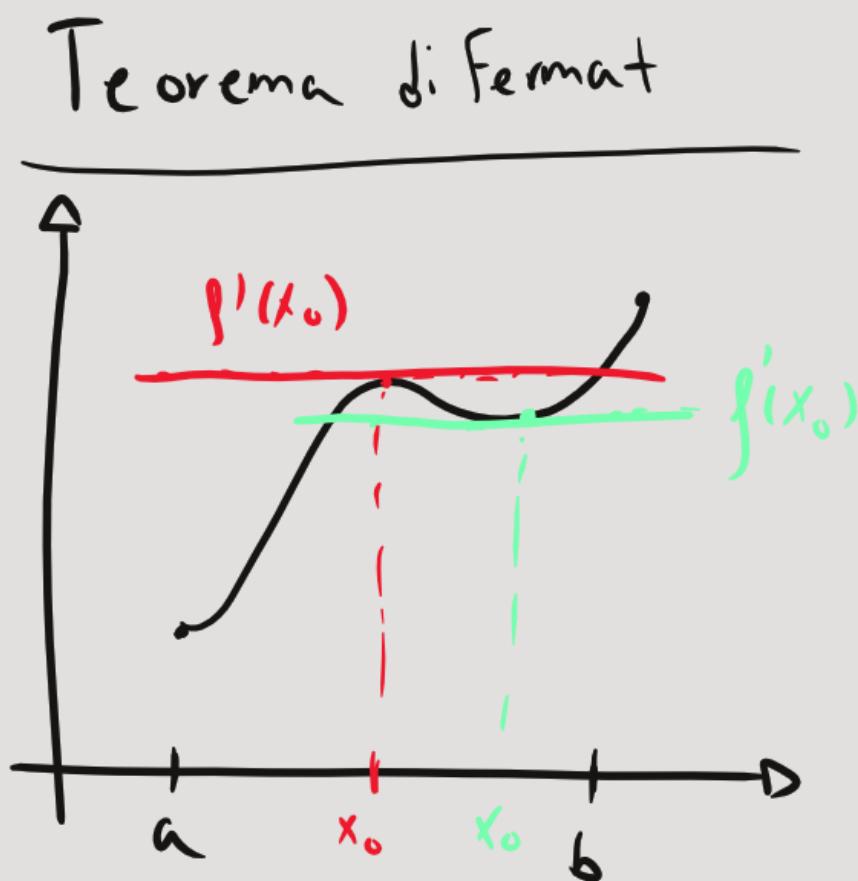
Allora vale che

$$f'(x_0) = 0$$

ovvero  $x_0$  è un **punto stazionario** (vedere la definizione sottostante)

A parole, questo teorema di dice che "**se  $f$  è derivabile in un punto di massimo o minimo interno al dominio, allora la sua derivata è nulla.**"

**FIGURA 1.1.** (Idea grafica)



## Punto stazionario

Definizione (punto stazionario, cenno).

## 2. Dimostrazione del teorema di Fermat

#Dimostrazione

### DIMOSTRAZIONE del [teorema 1.1](#). (Teorema 1 (di Fermat))

Consideriamo un punto  $x_0$  che sia *massimo relativo* per un certo intorno  $r$ , interno al dominio  $I$  e per cui  $f$  è derivabile.

Allora considero gli intervalli  $I_- = [x_0 - r, x_0]$  e  $I_+ = [x_0, x_0 + r]$ .

- Nel primo intervallo abbiamo che  $x_0 \geq x_0 - r \implies x_0 \geq x \in I_-$  e che  $f(x_0) \geq f(x) \in I_-$ .

Allora considerando il rapporto incrementale  $R_{x_0}^f(x)$ , scopriamo che questa è sempre positiva in quanto  $x - x_0 \leq 0$  e  $f(x) - f(x_0) \leq 0$ ; allora per la *permanenza del segno* (usandone la contronomina) ([Teorema 3 \(della permanenza del segno\)](#))

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} R_{x_0}^f(x) \geq 0$$

- Nel secondo intervallo abbiamo che  $x_0 + r \geq x_0 \implies x \in I_+, x \geq x_0$  ma comunque  $f(x) \leq f(x_0)$  in quanto  $x_0$  è di massimo.

Allora riconsiderando il rapporto incrementale  $R_{x_0}^f(x)$  vediamo che questa è negativa, in quanto abbiamo il prodotto tra un segno *negativo* e *positivo*. Allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} R_{x_0}^f(x) \leq 0$$

Ma sappiamo che, in quanto  $f$  è *derivabile* in  $x_0$ , deve esistere il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} R_{x_0}^f(x) \in \mathbb{R}$$

Allora l'unico modo per far valere tutte le condizioni ottenute è quella di imporre

$$f'(x_0) = 0 \blacksquare$$

## 3. Modello di applicazione

Questo teorema ci è utile in quanto ci permette di costruire un *modello* per risolvere un certo tipo di problemi: vedere dunque la [sezione 3](#) di [Modelli di problemi su derivate](#).

## Teorema di Rolle

*Teorema di Rolle: enunciato, dimostrazione e interpretazione grafica.*

### 1. Enunciato del teorema di Rolle

#Teorema

Teorema (di Rolle).

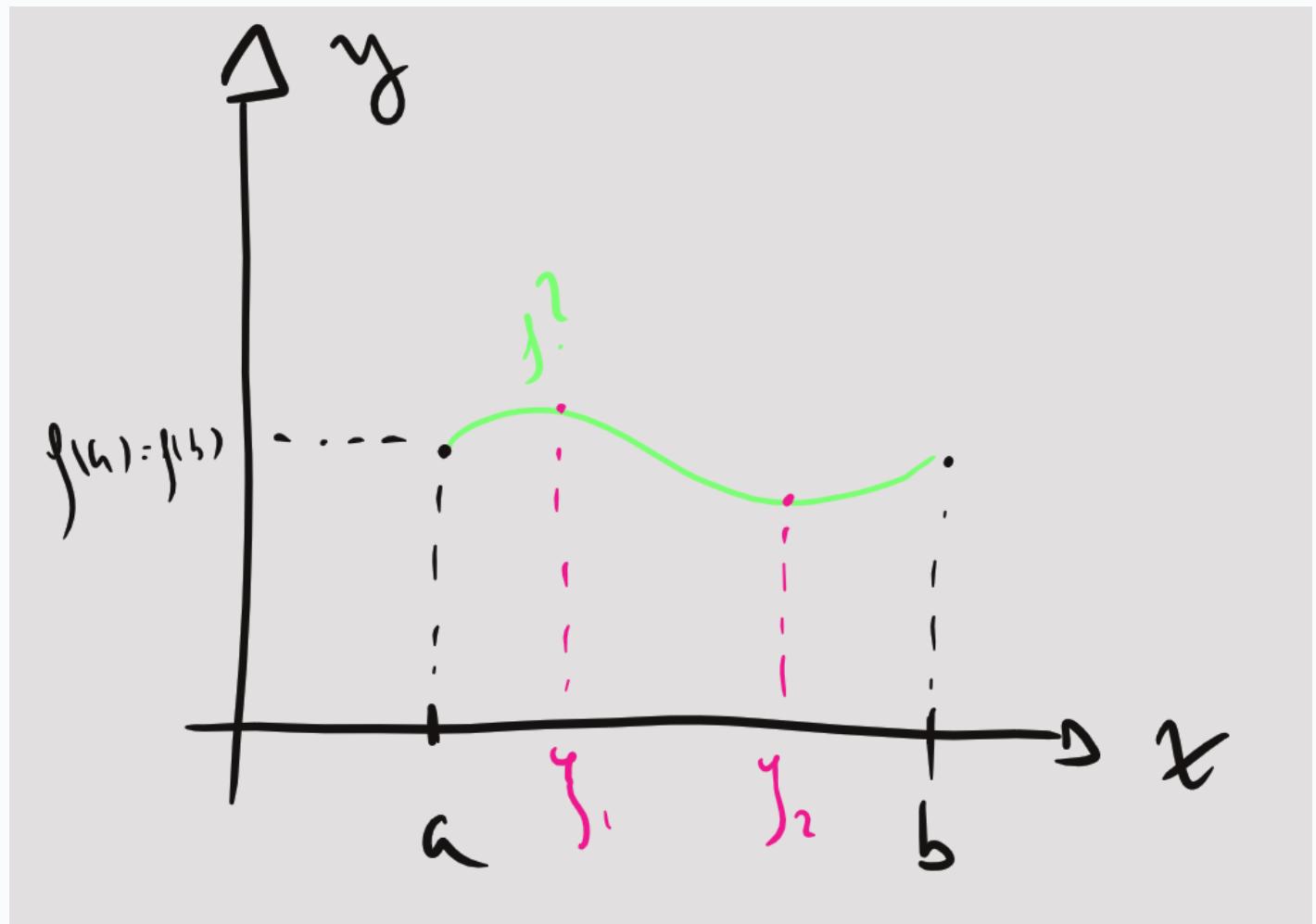
Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , sia  $f$  continua su  $[a, b]$  e derivabile su  $]a, b[$ .

Sia inoltre  $f(a) = f(b)$ . Riassumendo ho la situazione in *figura 1.1..*

Allora si verifica che

$$\exists \xi \in ]a, b[ : f'(\xi) = 0$$

**FIGURA 1.1.** (*Situazione grafica delle supposizioni*)



### 2. Dimostrazione

**DIMOSTRAZIONE** del [teorema di Rolle](#) ([Teorema 1 \(di Rolle\)](#))

Prima di dimostrare il teorema a tutti gli effetti, svolgo la seguente osservazione preliminare.

---

## #Osservazione

Osservazione (osservazione preliminare alla dimostrazione del teorema di Rolle).

Notiamo che  $f$  è *continua* per tutto il suo dominio, quindi per il [teorema di Weierstraß](#) ([Teorema 15 \(di Weierstraß\)](#)) sappiamo che *esistono* almeno un *massimo* e *minimo* di  $f$  ([Definizione 33 \(Punto di massimo e minimo assoluto\)](#)).

---

Ora distinguo due casi, dove "*posiziono*" questi punti di *max* e *min* precedentemente osservati:

1. Tutti i punti di *massimo* e *minimo* assoluto sono agli estremi, dunque gli stessi: allora in questo caso se il massimo assoluto è lo stesso del minimo assoluto di una funzione allora si tratta di una *funzione costante* del tipo  $f(x) = c \in \mathbb{R}$ . Però calcolandone la derivata  $(c)' = 0$  troviamo che la proposizione

$$f'(x) = 0$$

è *sempre* vera nel suo dominio.

2. Almeno uno fra *massimo* e/o *minimo* assoluto della funzione è *punto interno* a  $[a, b]$  ([Definizione 1 \(Punto interno ad un insieme, l'insieme dei punti interni.\)](#)). Dunque chiamiamo quel punto  $\xi$ .

Però sapendo che  $f$  è *non-costante*, *derivabile*, *continua* e il punto scelto è *interno*, allora per il [teorema di Fermat](#) ([Teorema 1 \(di Fermat\)](#)) trovo che

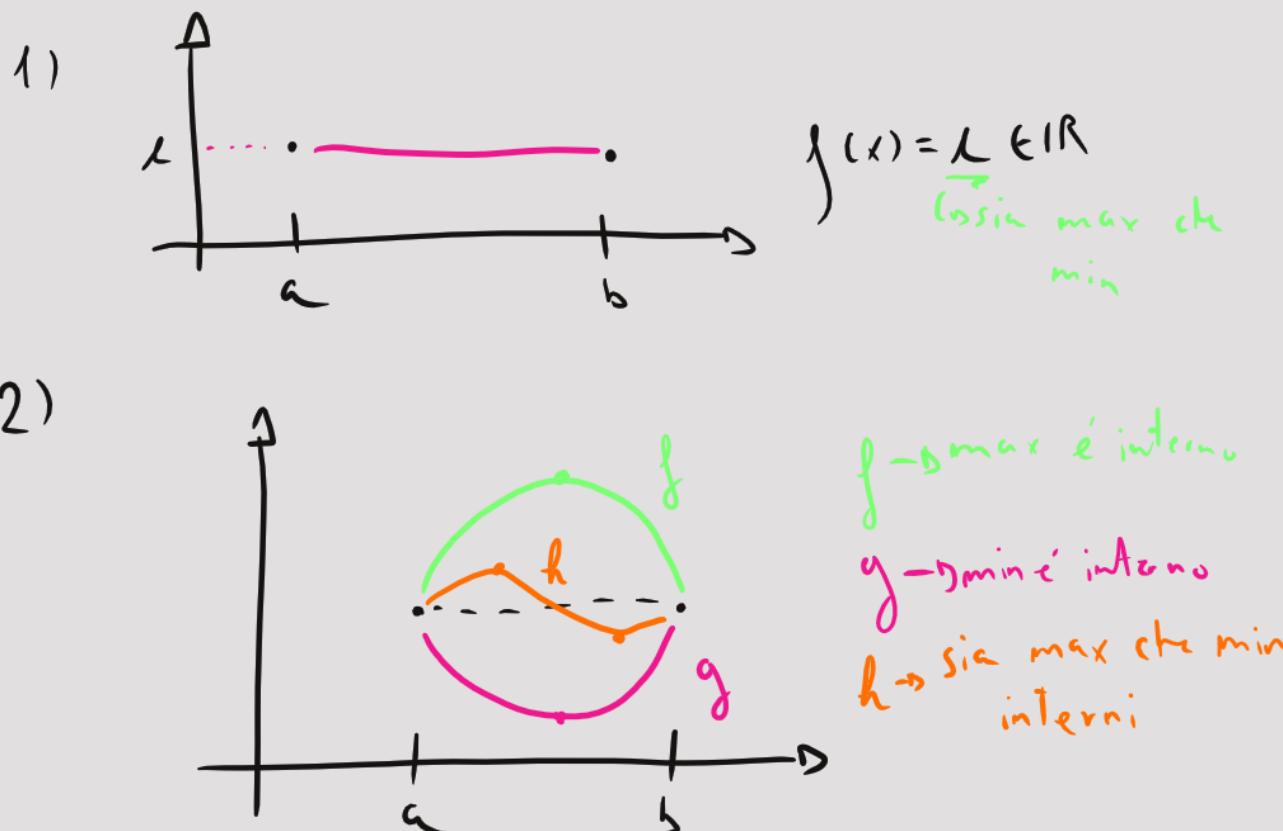
$$f'(\xi) = 0 \blacksquare$$

### 3. Interpretazione geometrica (dimostrazione grafica)

## #Osservazione

Osservazione (interpretazione grafica della dimostrazione del teorema di Rolle).

Si nota che è possibile dare una buona interpretazione grafica a questo teorema; anzi è addirittura possibile dare una dimostrazione *grafica* considerando i casi disegnati nella dimostrazione.



## B3. Teorema di Cauchy

### Teorema di Cauchy

Teorema di Cauchy: enunciato e dimostrazione. Osservazione grafica (da vedere dopo aver visto quella di Lagrange)

## 1. Enunciato del teorema di Cauchy

#Teorema

Teorema (di Cauchy).

Siano  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue in  $[a, b]$  (Definizione 2 (Funzione continua per un punto)), derivabili in  $]a, b[$  (Definizione 3 (derivabilità in un punto)).

Sia inoltre  $\forall x \in ]a, b[, g'(x) \neq 0$ . (ipotesi supplementare)

Allora vale che

$$\exists \xi \in ]a, b[ : \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

## 2. Dimostrazione

#Dimostrazione

**DIMOSTRAZIONE** del *teorema di Cauchy* (*Teorema 1 (di Cauchy)*)

Prima di tutto "*do un senso*" all'ipotesi supplementare: provo dunque  $g(b) - g(a) \neq 0$ . Infatti supponendo che, per assurdo, se fosse tale allora per il *teorema di Rolle* (*Teorema 1 (di Rolle)*) avrei un  $\xi$  per cui si annullerebbe  $g'(\xi)$ . Infatti si avrebbe la divisione per una quantità che è uguale a 0.

Pertanto è necessario che  $g'(x) \neq 0 \implies g(b) \neq g(a)$ .

Ora considero una funzione che chiameremo "*phi grande*"  $\Phi$ :

$$\Phi(x) = f(x)(g(b) - g(a)) - g(x)(f(b) - f(a))$$

Quindi considerandola scopro le seguenti.

- Il dominio di  $\Phi$  è lo stesso di  $f, g$ .
- $\Phi$  è *continua* in  $[a, b]$  in quanto si tratta di una *sottrazione* tra funzioni continue (*Teorema 2 (Operazioni con funzioni continue.)*).
- $\Phi$  è *derivabile* in  $]a, b[$  per motivo analogo di prima (*Teorema 3 (derivata di operazioni tra funzioni)*).

Dato che  $\Phi$  è continua, posso calcolare  $\Phi(a)$  e  $\Phi(b)$ .

1.  $\Phi(a)$  diventa

$$\begin{aligned} \Phi(a) &= f(a)(\dots) - g(a)(\dots) \\ &= f(a)g(b) - f(a)g(a) - f(b)g(a) + f(a)g(a) \\ &= f(a)g(b) - f(b)g(a) \end{aligned}$$

2.  $\Phi(b)$  diventa invece

$$\begin{aligned} \Phi(b) &= f(b)(\dots) - g(b)(\dots) \\ &= f(b)g(b) - f(b)g(a) - f(b)g(b) + f(a)g(b) \\ &= f(a)g(b) - f(b)g(a) \end{aligned}$$

Ora scopro che

$$\Phi(b) = \Phi(a)$$

Quindi per il *teorema di Rolle* (*Teorema 1 (di Rolle)*) ho

$$\exists \xi \in ]a, b[ : \Phi(\xi) = 0$$

Ora considero la sua derivata  $\Phi'$  e la "*calcoliamo*" in  $\xi$ . Svolgendo i conti ottengo

$$\begin{aligned}
 \Phi'(x) &= (f(x)(g(b) - g(a)))' - (g(x)(f(b) - f(a))' \\
 &= f'(x)(g(b) - g(a)) - g'(x)(f(b) - f(a)) \\
 \implies \Phi'(\xi) &= f'(\xi)(g(b) - g(a)) - g'(\xi)(f(b) - f(a)) = 0 \\
 &= \boxed{\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}} \blacksquare
 \end{aligned}$$

#Osservazione

**Osservazione** (anche se non vale l'ipotesi aggiuntiva il teorema di Cauchy vale fino ad un certo punto).

Se nel **teorema di Cauchy** (**Teorema 1 (di Cauchy)**) supponessimo di **non** far valere l'ipotesi aggiuntiva  $g'(x) \neq 0$ , allora si potrebbe comunque dire che

$$\exists \xi \in ]a, b[ : f'(\xi)(g(b) - g(a)) = g'(\xi)(f(b) - f(a))$$

### 3. Interpretazione grafica

*Nota: qui si consiglia fortemente prima di leggere l'interpretazione grafica del teorema di Lagrange (**Teorema di Lagrange**) per poter capire bene questa osservazione.*

#Osservazione

Osservazione (interpretazione grafica del teorema di Cauchy).

**OSS 3.1. (*Interpretazione grafica*)** Con il **teorema di Lagrange** abbiamo visto che la sua interpretazione grafica consiste nell'intravedere che esiste un punto per il quale la sua tangente è parallela alla retta secante di  $a, b$  (**Osservazione 2 (interpretazione grafica del teorema di Lagrange)**).

Ora ci chiediamo come sarebbe possibile interpretare il **teorema di Cauchy** da un punto di vista grafico.

Immaginiamo innanzitutto che  $f, g$  siano delle **leggi orarie** (**Definizione 2 (legge oraria)**) che vivono in  $[a, b]$ .

Ora immaginiamo di "**appiattire**" la funzione  $f$ , "**distorcendo**" la funzione  $g$ : quindi disegniamo una specie di piano cartesiano in cui la retta delle ascisse viene rappresentata da  $f(x)$ , la retta delle ordinate invece da  $g(x)$ .

Immaginandoci questo piano, posizioniamo il punto  $A : (f(a), g(a))$  e l'altro punto  $B : (f(b), g(b))$ .

Possiamo disegnare una specie di **funzione** che parte da  $A$  e finisce in  $B$ : però in realtà non si tratta di una vera funzione in quanto non vi è nessun nesso tra  $f$  e  $g$ , quindi questa linea può comportarsi come vuole.

Ora immagino il vettore  $\overrightarrow{AB}$  ([Vettori Applicati > ^8447d6](#)) come il "vettore di spostamento" e il "vettore velocità" rappresentato da

$$\overrightarrow{P} : (f'(\xi), g'(\xi))$$

249

ovvero prendendo un qualsiasi punto della *linea* disegnata prendo la sua tangente.

Allora per il *teorema di Cauchy* sappiamo che

$$f'(\xi)(g(b) - g(a)) = g'(\xi)(f(b) - f(a))$$

Allora considerando la matrice quadrata  $2 \times 2 M_2(\mathbb{R})$  ([Definizione 6 \(matrice quadrata di ordine n\)](#))

$$A = \begin{pmatrix} f(b) - f(a) & g(b) - g(a) \\ f'(\xi) & g'(\xi) \end{pmatrix}$$

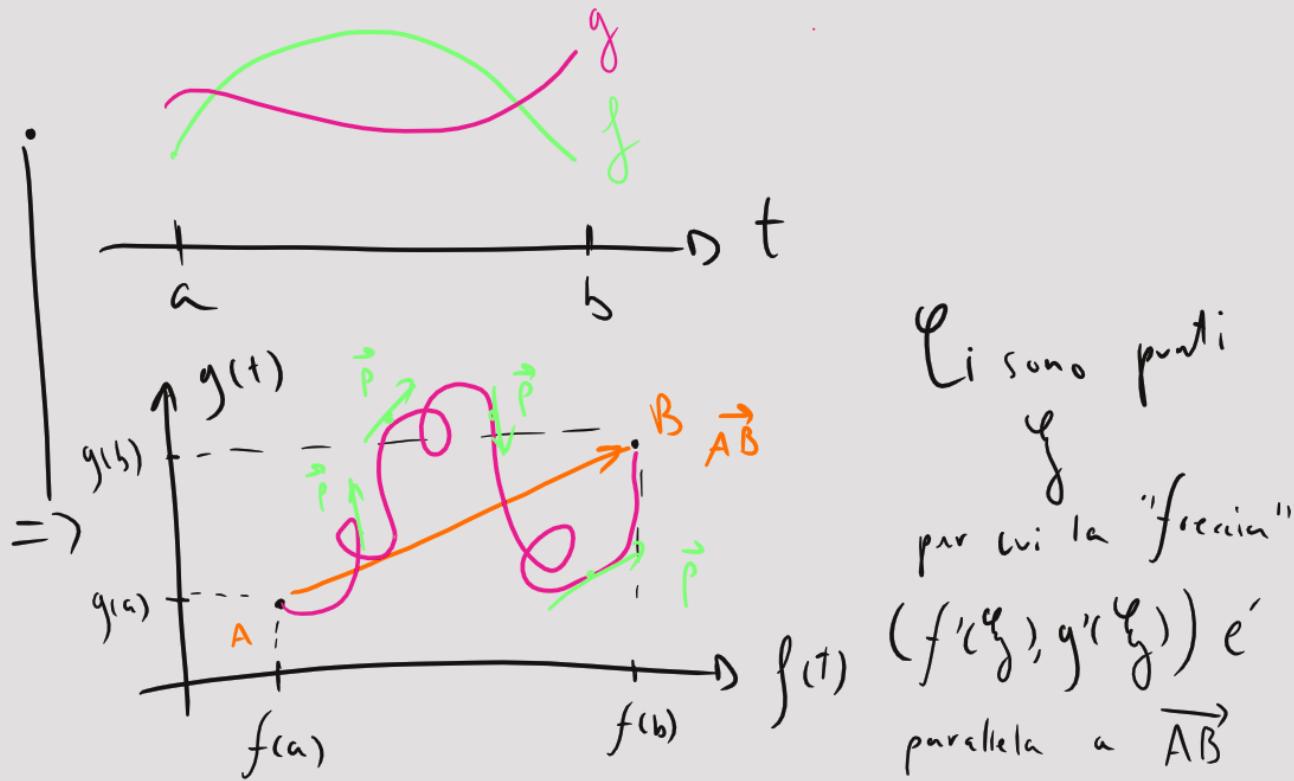
Ora prendendo il *determinante* ([Definizione 1 \(determinante della matrice 2x2\)](#)) sappiamo che per *Cauchy* abbiamo

$$\det A = 0$$

Di conseguenza abbiamo la *condizione di parallelismo* ([Teorema 7 \(condizioni di parallelismo e di incidenza per due rette\)](#)) per i vettori

$$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{P}$$

**FIGURA 3.1.** (*Idea dell'interpretazione geometrica*)



## #Osservazione

Osservazione (Cauchy vale in  $\mathbb{R}^3$ ?).

Vedere [Conseguenze del teorema di Cauchy e di Lagrange](#) in quanto la ritengo una pagina più appropriata per contenere tale informazione. Vedere [l'osservazione 1.2..](#)

## B4. Teorema di Lagrange

### Teorema di Lagrange

*Teorema di Lagrange: enunciato, dimostrazione e interpretazione grafica.*

## 1. Enunciato del teorema di Lagrange

## #Teorema

Teorema (di Lagrange).

Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  continua in  $[a, b]$  e derivabile in  $]a, b[$  ([Definizione 2 \(Funzione continua per un punto\)](#), [Definizione 3 \(derivabilità in un punto\)](#)).

$$\exists \xi \in ]a, b[ : f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

## 2. Dimostrazione del teorema di Lagrange

#Dimostrazione

**DIMOSTRAZIONE** del *teorema di Lagrange* (*Teorema 1 (di Lagrange)*)

Per dimostrare il *teorema di Lagrange* basta considerare il *teorema di Cauchy* (*Teorema 1 (di Cauchy)*) per  $g(x) = x$ ; possiamo verificare che  $(x)'$  non sarà *mai* 0, in quanto la derivata della funzione identità è 1; infatti  $1 \neq 0$ .

Infatti per questo motivo si potrebbe considerare il *teorema di Lagrange* come un *corollario* del *teorema di Cauchy*. ■

## 3. Interpretazione grafica

#Osservazione

Osservazione (interpretazione grafica del teorema di Lagrange).

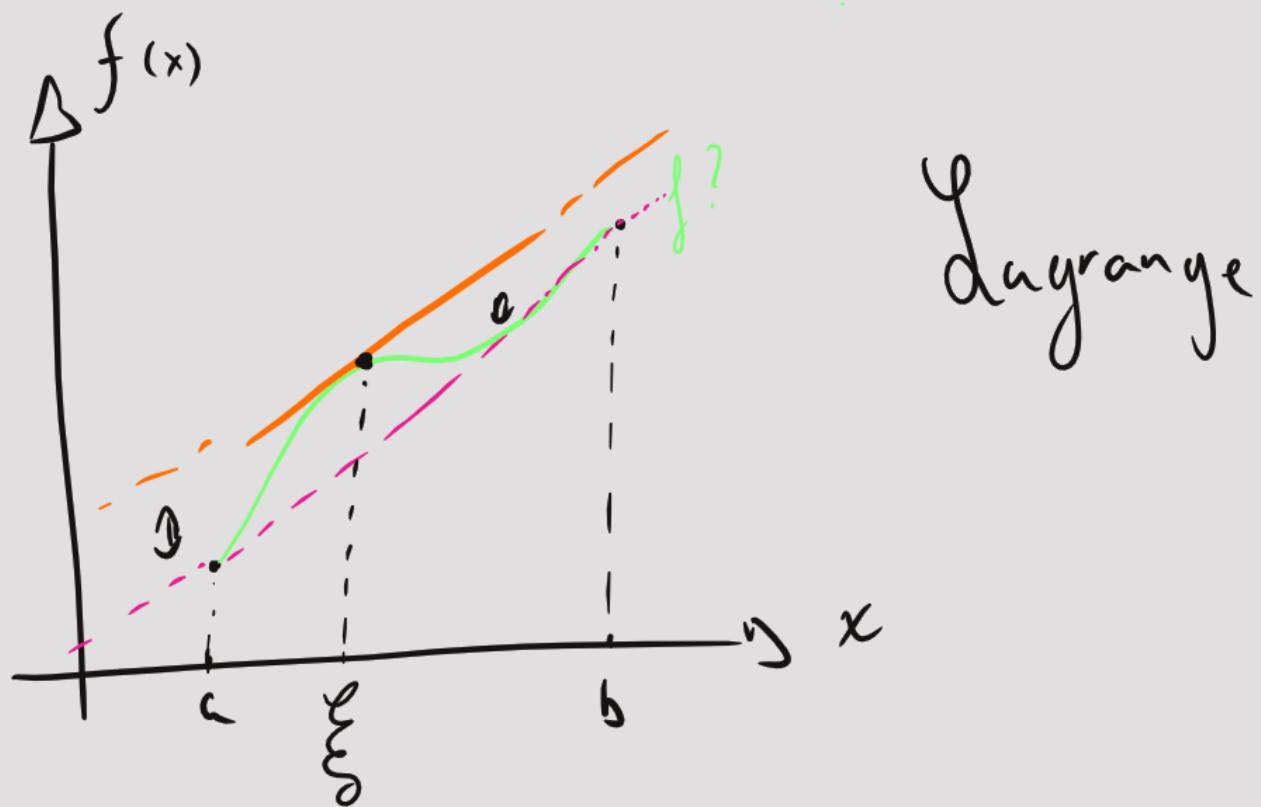
Osserviamo che l'espressione

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

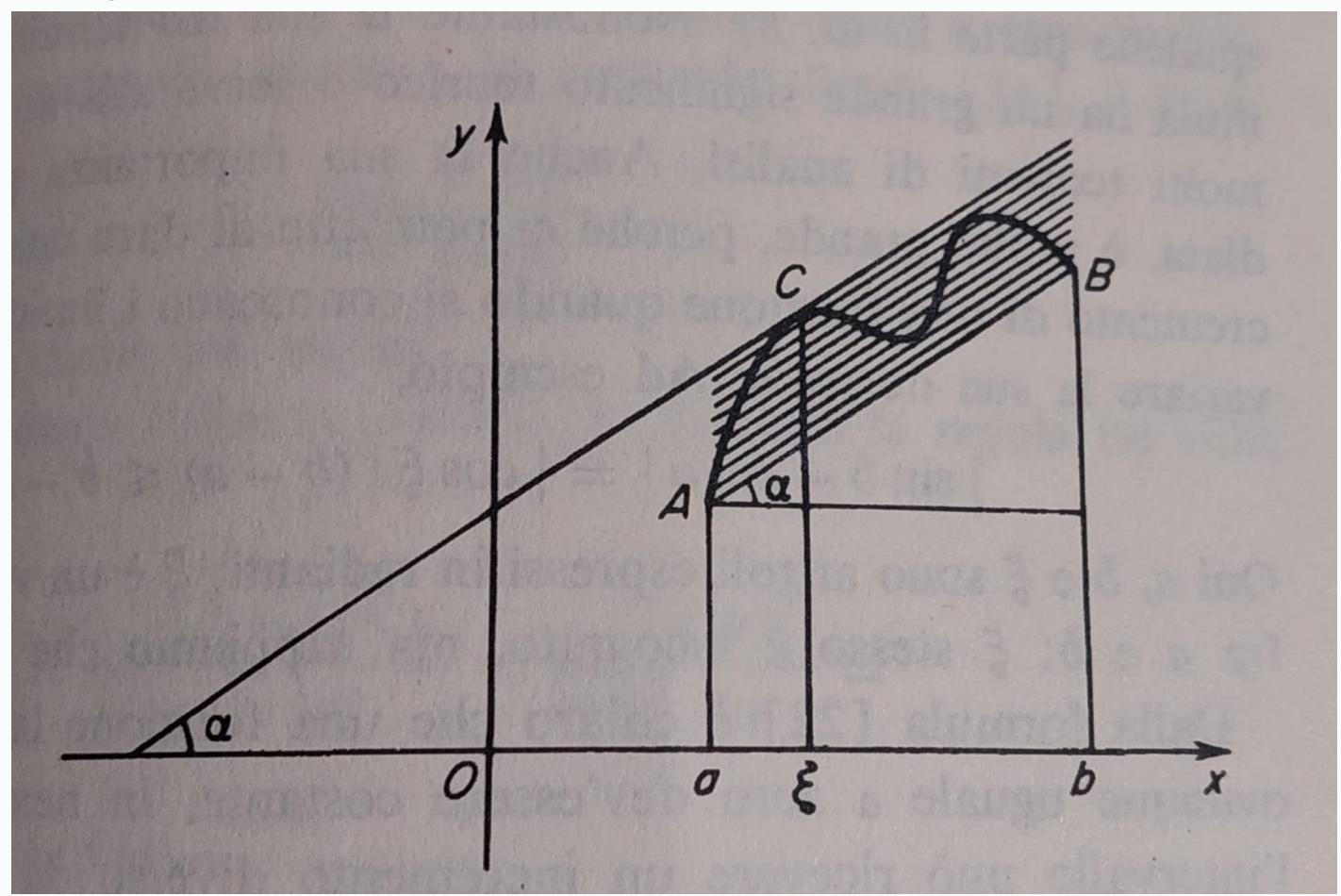
è *equivalente* al *rapporto incrementale*  $R_a^f(b)$  (*Definizione 1 (rapporto incrementale di una funzione relativo un punto del dominio)*).

Quindi il *teorema di Lagrange* ci sta semplicemente dicendo che se considerando la *retta secante* (che chiamiamo  $r_{ab}$ ) tra il punto  $(a, f(a))$  e  $(b, f(b))$  allora dev'esserci *almeno* un punto per cui la sua tangente è *parallela* a  $r_{ab}$ .

**FIGURA 3.1.** (*Idea grafica*)



**FIGURA 3.2.** (Idea grafica 2, tratto da "Le Matematiche" di A. D. Aleksandrov, A. N. Kolmogorov, M. A. Lavrent'ev)



## Teorema di De l'Hôpital

Uno dei strumenti più potenti e versatili dell'analisi matematica: il teorema del marchese De l'Hôpital

---

## 0. Curiosità storiche

### TRATTO DAL SITO

<http://scienzaemusica.blogspot.com/2012/06/de-lhopital-e-il-quesito-dellesame-di.html>

---

L'Hôpital nacque in una ricca famiglia.

Il padre, Anne-Alexandre, era un "pezzo grosso" dell'epoca; infatti, tra le altre cose, fu generale dell'esercito del Re.

Se, da piccolo, il piccolo Guillaume intraprese una *carriera militare*, in seguito dovette abbandonarla a causa di rilevanti *problemi alla vista*.

Ergo, il suo interesse si spostò verso la Matematica.

Nei primi anni '90 del XVII secolo, de l'Hôpital ingaggiò Johann Bernoulli affinché gli insegnasse il calcolo infinitesimale.

Il marchese si mostrò così interessato all'argomento che lo imparò in breve tempo e che riassunse in un manuale intitolato "*Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*", datato 1696.

Il suddetto rappresenta il *primo manuale di calcolo infinitesimale d'Europa!*

*Rouse Bell* scrive a proposito del libro di de l'Hôpital:

*"Il merito di aver redatto il primo trattato che spiega i principi e l'uso del metodo va tutto a de l'Hôpital... Questo lavoro ebbe ampia circolazione; rese la notazione differenziale di uso comune in Francia e contribuì a diffonderla in Europa."*

Sappiamo che de l'Hôpital, dal 1694, pagò Bernoulli ben 300 franchi all'anno per raccontargli delle sue scoperte, descritte poi nel suo testo.

Nel 1704, a seguito del decesso di de l'Hôpital, Bernoulli raccontò dell'accordo, asserendo che molti dei risultati nell'*Analyse des infiniment petits* erano opera sua!

---

## 1. Enunciato del teorema

## Teorema (di De l'Hôpital).

Siano  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

Supponiamo che  $f, g$  siano *derivabili* (Definizione 4 (derivabilità di una funzione)).

Supponiamo inoltre che per ogni punto ( $a$  escluso) nel dominio la derivata  $g'$  non si annulla mai;

$$\forall x \in ]a, b[, g'(x) \neq 0$$

Supponiamo infine che il *limite destro* di  $b$  per  $f, g$  sono nulli.

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = 0$$

Se esiste il limite

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \tilde{\mathbb{R}}$$

Allora esiste il limite

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

$$\boxed{\exists L \in \tilde{\mathbb{R}} : \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \implies \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L}$$

## 2. Dimostrazione del teorema

Osservazione (osservazione preliminare;  $g$  non si annulla mai).

**OSS 2.1. (Osservazione preliminare)** Supponendo  $g(b) = 0$  e  $g'(x) \neq 0$  per  $]a, b[$ , potrà esserci mai un  $x_0 \in ]a, b$  tale che  $g(x_0)$  si annulla? No, in quanto sennò avremmo  $g(x_0) = g(b) = 0$  e per il *teorema di Rolle* (Teorema 1 (di Rolle)) avremmo un  $\xi$  in  $]a, b[$  tale che la derivata  $g'$  si annullerebbe; il che è *assurdo*, in quanto contraddice con le supposizioni iniziali.

### #Dimostrazione

#### DIMOSTRAZIONE del *teorema di De l'Hôpital* (Teorema 1 (di De l'Hôpital))

Prima di tutto per comodità "prolungo" le funzioni  $f, g$  in  $b$  ponendo  $f(b) = g(b) = 0$ ; ciò è consentito e non sarebbe restrittivo in quanto le funzioni rimarrebbero comunque *continue* e *derivabili* in  $]a, b[$ .

Ora tenendo in conto l'osservazione preliminare (OSS 2.1., Osservazione 2

$$\frac{f(x)}{g(x)}, \forall x \in ]a, b[$$

Allora "facendo finta di conoscere" il limite

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}$$

Che tradotto "*alla Cauchy*" (Definizione 9 (limite infinito di una funzione all'infinito)) vorrebbe dire

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in ]a, b[ \\ b - \delta < x < b \implies \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - L \right| < \varepsilon \end{aligned}$$

Ora considero un punto nell'intervallo  $x \in ]b - \delta, b[$  e applico il *teorema di Cauchy* (Teorema 1 (di Cauchy)) alle funzioni  $f, g$  in  $[x, b]$ .

Ovvero

$$\exists \xi \in ]x, b[ : \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(x)}{g(b) - g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$$

e sappiamo che  $x < \xi < b$ .

Pertanto considerando che  $x$  non è altro che un punto tra  $b - \delta$  e  $b$ , si potrebbe "maggiorare"  $\xi$  come  $b - \delta < \xi < b$ .

Allora questa uguaglianza vale per l'intorno considerato per  $x$ : mettendo tutto assieme e riconsiderando la definizione "*alla Cauchy*" del limite precedentemente scritto, abbiamo

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in ]a, b[ \\ b - \delta < x < b \implies \left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| < \varepsilon \end{aligned}$$

che è proprio la *definizione* del limite

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L \blacksquare$$

### #Osservazione

Osservazione (De l'Hôpital vale anche per limiti all'infinito).

Se al posto di  $b$  un numero *finito* pongo  $b = +\infty$ ; allora il teorema varrebbe lo stesso. Basta ragionare con la definizione  $\varepsilon-N$  al posto di  $\varepsilon-\delta$ .

Osservazione (De l'Hôpital vale anche per la forma indeterminata  $\infty/\infty$ ).

Questo teorema vale anche se si verificano entrambi i limiti:

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = +\infty = \lim_{x \rightarrow b^-} g(x)$$

#Osservazione

Osservazione (De l'Hôpital vale anche quando il limite diverge a  $+\infty$ ).

Questo teorema vale anche se il limite  $L$  vale  $+\infty$ .

### 3. Utilità pratica

**Proposizione** (utilità pratica del teorema di De l'Hôpital).

Se in un limite ho un *caso indeterminato* del tipo

$$\frac{0}{0} \text{ oppure } \frac{\infty}{\infty}$$

e se ho

$$g'(x) \neq 0$$

Allora posso calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

il quale risultato sarà lo stesso del limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

A parole, se ho un *caso indeterminato* e ho la funzione sul denominatore che non si annulla mai, allora posso derivare entrambe le frazioni per avere un limite *"equivalente"*.

**ATTENZIONE!** Questo non è un teorema del tipo *"se e solo se"*; l'implicazione qui è univoca, pertanto non deve *necessariamente* valere il viceversa.

Infatti quando si usa il *teorema di De l'Hôpital*, lo si rende noto usando il simbolo

## B6. Formula di Taylor

### Formula di Taylor

*Formula di Taylor: osservazione preliminare, lemma di Peano, teorema di Taylor col resto di Peano e dimostrazione. Esempi.*

## 0. L'idea della formula di Taylor

#### #Osservazione

Osservazione 0.a (idea del concetto).

Se  $f$  è **derivabile** ([Definizione 3 \(derivabilità in un punto\)](#)) in  $x_0$ , allora esiste la **tangente** al grafico nel punto  $x_0$ ; infatti questa viene descritta come

$$r : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Se ora **"ingrandisco"** questo grafico della funzione vicino al punto  $(x_0, f(x_0))$ , si troverebbe che stiamo **"linearizzando"** la funzione  $f$  come la **tangente**  $r$ : una curva qualsiasi si **"trasforma"** in una linea, una retta lineare; l'idea viene raffigurata nella [figura 0.a](#).

Ora ci chiediamo il seguente: se  $f$  fosse **derivabile** fino al grado  $n$ , possiamo costruire un **polinomio** che **"trasforma"**  $f$  in un polinomio? La risposta è sì, con la **formula di Taylor**.

Si svolgono operazioni simili anche nel **campo della fisica**, ad esempio con lo **studio del movimento** del pendolo: per studiarlo bisognerebbe studiare l'equazione differenziale

$$\sin x = \ddot{x}$$

(dove  $\ddot{x}$  indica la **seconda derivata** della legge oraria  $x(t)$ ; notazione di Newton) Però è difficile esprimere la soluzione di quest'equazione differenziale in **termini di funzioni elementari**: pertanto è necessario trovare una buona **"approssimazione"**, in particolare per **"angoli piccoli"** (ovvero vicini a 0). Trasformando  $\sin$  nella retta tangente nel punto  $x_0 = 0$ , si avrebbe

Ovvero, ponendo

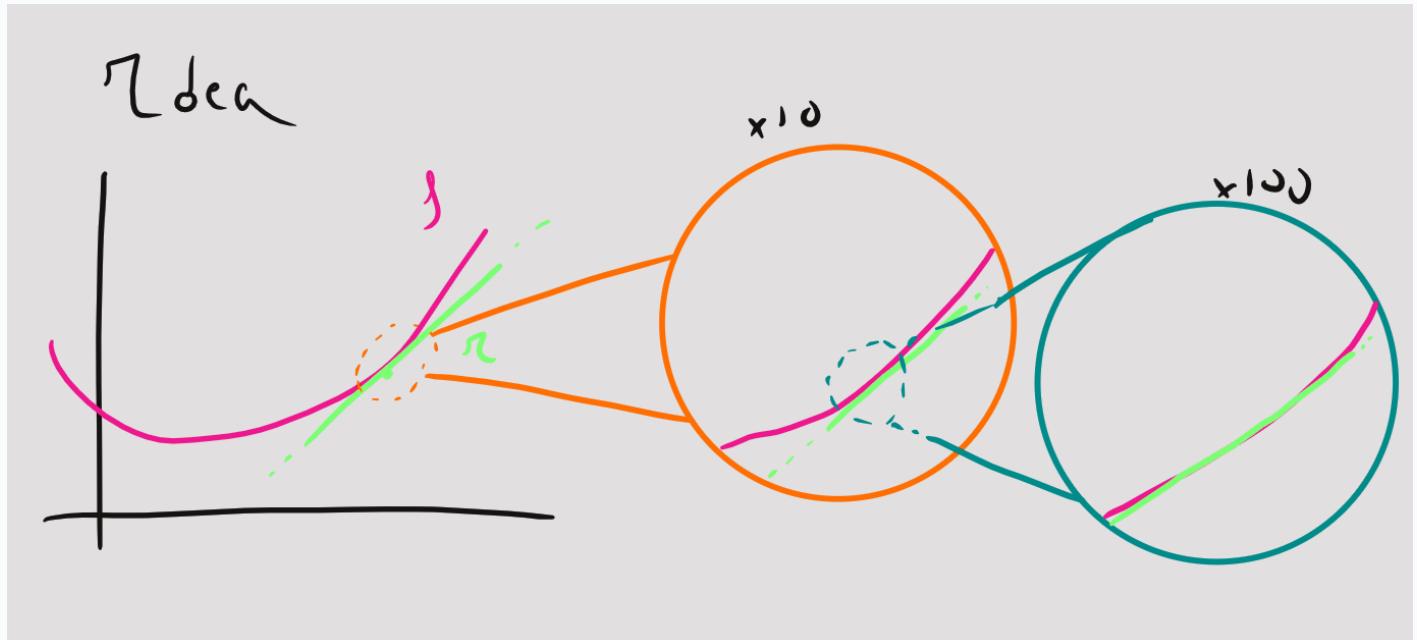
$$\sin x = x$$

Si avrebbe la nuova equazione differenziale

$$x = \ddot{x}$$

che è più "*semplice*" da risolvere.

**FIGURA 0.a.** (*La linearizzazione della funzione*)



## 1. Lemmi di Peano e di Lagrange

### Lemma di Peano

#Lemma

**Lemma 1.1** (di Peano).

Sia  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  e  $x_0 \in I$ .

Sia inoltre  $f$  **derivabile** (Definizione 4 (derivabilità di una funzione)) fino all'ordine  $n$  nell'intervallo  $I$ .

Supponiamo che la **derivata di ogni ordine in**  $x_0$  sia nullo;

$$f(x_0) = 0; f'(x_0) = 0, \dots, f^{(n)}(x_0) = 0$$

Allora si verifica il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

**DIMOSTRAZIONE** del *lemma di Peano* (Lemma 1.1 (di Peano))

Per verificare il *lemma di Peano* basta calcolare il *limite della tesi*, ovvero

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{(x - x_0)^n}$$

Allora, dato che sia  $f(x)$  che  $(x - x_0)^n$  sono *continue*, possiamo semplicemente procedere a sostituire con  $x = x_0$ . Però questo ci porta ad una *forma indeterminata* del tipo  $\frac{0}{0}$ .

A questo punto uso il *teorema di de L'Hôpital* (Teorema 1 (di De l'Hôpital)):

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{(x - x_0)^n} \stackrel{H}{\iff} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{n(x - x_0)^{n-1}}$$

Quindi calcoliamo il "*nuovo limite*"; però abbiamo di nuovo una situazione  $\frac{0}{0}$ ! Allora applico *de L'Hôpital* una seconda volta! Però anche questa è indeterminata; allora la applico  $n - 1$  volte, ovvero fino a quando ottengo il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{(x - x_0)^n} \stackrel{H}{\iff} \dots \stackrel{H}{\iff} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x)}{n \cdot \dots \cdot 2(x - x_0)^1}$$

Adesso considero quest'ultimo limite come

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x)}{n \cdot \dots \cdot 2(x - x_0)^1} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{n!} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{n} \lim_{x \rightarrow x_0} R_{x_0}^{f^{(n-1)}}(x)$$

Notiamo che il *limite* del rapporto incrementale è semplicemente la *derivata* della funzione (per definizione): allora, considerando che  $f$  è *derivabile* fino all' $n$ -esimo ordine, infine abbiamo

$$\frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) = \boxed{0} \blacksquare$$

## Lemma di Lagrange

## #Lemma

**Lemma 1.2** (di Lagrange).

Sia  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , *derivabile* fino all'ordine  $n + 1$  (ovvero  $f \in \mathcal{C}^{n+1}$ ).

Sia  $x_0 \in I$  e la sua immagine nulla per tutte le sue derivate; ovvero

$$f(x_0) = f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n)}(x_0) = 0$$

Allora, si verifica il seguente:

$$\frac{f(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

## #Dimostrazione

**DIMOSTRAZIONE** del *lemma di Lagrange* ([Lemma 1.2 \(di Lagrange\)](#))Posso partire "*riscrivendo*" l'equazione

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^{n+1} - (x_0 - x_0)^{n+1}}$$

Questa è lecita in quanto sto semplicemente aggiungendo 0 ad entrambi i termini: infatti per ipotesi  $f(x_0) = 0$  e ovviamente  $(x_0 - x_0) = 0$ .

Allora considerando la funzione

$$g(x) = (x - x_0)^{n+1}$$

Osservandola noto che questa *non* si annulla mai fuori dall'intervallo (escludendo infatti  $x_0$ ), ed è pure *derivabile* fino al grado  $n+1$ .

Ma allora posso usare il *teorema di Cauchy* ([Teorema 1 \(di Cauchy\)](#)) su questa espressione: allora ho

$$\exists \xi_1 \in (x, x_0) : \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^{n+1} - (x_0 - x_0)^{n+1}} = \frac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_1)} = \frac{f'(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1 - x_0)^n}$$

Ma allora posso ripetere questa procedura con quest'ultima espressione, ripetendo lo stesso "*trucchetto*": allora alla seconda iterazione ho

$$\frac{f'(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1 - x_0)^n} = \frac{f''(\xi_2)}{(n+1)(n)(\xi_2 - x_0)^{n-1}}, \xi_2 \in (x, \xi_1)$$

Ripetendo questa procedura e fermandomi fino al punto per cui ho applicato Cauchy  $n$  volte:

$$\frac{f^{(n)}(\xi_n)}{(n+1)!(\xi_n - x_0)}, x < \xi_n < \xi_{n-1} < \dots < \xi_1 < x_0$$

Ma mi accorgo che ho un'espressione del tipo

$$\dots \cdot \frac{f^{(n)}(\xi_n)}{\xi_n - x_0}$$

Quindi posso usare ora il *teorema di Lagrange* ([Teorema 1 \(di Lagrange\)](#)), ottenendo così alla fine

$$\exists \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+1} : \frac{f(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{(n+1)!}$$

Che è la tesi del teorema. ■

## 2. Formula di Taylor col resto di Peano/Lagrange

#Definizione

**Definizione 2.1.** (polinomio di Taylor).

Per **compattare** la nostra scrittura nei seguenti enunciati, chiamiamo il **polinomio di Taylor** come il "**polinomio principale**" che compariranno nelle tesi dei teoremi.

Ovvero

$$T_n(f, x_0, x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)^1 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

### Formula di Taylor col resto di Peano

#Teorema

**Teorema 2.1.** (di Taylor col resto di Peano).

Sia  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I$  **intervallo**,  $x_0 \in I$ .

Supponiamo  $g$  **derivabile** fino all'ordine  $n$ ; ovvero  $g \in C^n$

Allora, per ogni punto dell'intervallo **escluso** il punto  $x_0$ , vale il seguente:

$$\forall x \in I \setminus \{x_0\}$$

$$g(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0)^1 + \dots + \frac{g^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + r_n(x_0, x)$$

dove  $r_n(x_0, x)$  è il **resto di Peano**; ovvero  $r(x_0, x) = g(x) - (\dots)$  e ha la speciale proprietà per cui

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r_n(x_0, x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

ovvero avvicinandosi al punto  $x_0$  il **resto** crolla a 0.

#Dimostrazione

**DIMOSTRAZIONE** del **teorema di Taylor col resto di Peano** (Teorema 2.1. (di Taylor col resto di Peano))

Voglio dimostrare che il **limite** della tesi effettivamente vale; ovvero

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r_n(x_0, x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

allora definisco  $f$  come il **resto**

$$f(x) = r_n(x_0, x) = g(x) - T_n(g, x_0, x)$$

ovvero

$$f(x) = r_n(x_0, x) = g(x) - (g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + \dots + g^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n)$$

Inoltre sappiamo che  $f$  è **derivabile** fino all'ordine  $n$ , dato che si tratta di due **funzioni derivabili fino all'ordine**  $n$ . Infatti  $g$  lo è **per ipotesi** e un polinomio qualsiasi è **derivabile** per qualsiasi ordine.

Allora iniziamo a derivare  $f$ .

$$\begin{aligned} f'(x) &= g'(x) - 0 - g'(x_0) - 2 \frac{g''(x_0)}{2!}(x - x_0) - \dots - n \frac{g^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^{n-1} \\ f'(x_0) &= g'(x_0) - 0 - g'(x_0) - 0 - \dots - 0 = 0 \end{aligned}$$

Ora prendiamo la sua **seconda derivata**:

$$\begin{aligned} f''(x) &= g''(x) - 0 - 0 - g''(x_0) - 0 - \dots - (n)(n-1) \frac{g^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^{n-2} \\ f''(x_0) &= g''(x_0) - g''(x_0) - 0 - \dots - 0 = 0 \end{aligned}$$

Mi accorgo che per ogni  $n \in \mathbb{N}$  vale che

$$f^{(n)}(x_0) = 0$$

(che è dimostrabile **per induzione** ([Assiomi di Peano, il principio di induzione > 76b850](#)))

Allora per il **lemma di Peano** ([Lemma 1.1 \(di Peano\)](#)) vale che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{(x - x_0)^n} = \boxed{\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r_n(x, x_0)}{(x - x_0)^n} = 0} \blacksquare$$

## Formula di Taylor col resto di Lagrange

#Teorema

**Teorema 2.2.** (di Taylor col resto di Lagrange).

Sia  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I$  intervallo e  $x_0 \in I$ .

Sia  $f$  **derivabile fino all'ordine**  $n+1$ .

Allora vale che

$\forall x \in I\{x_0\}, \exists \xi \in ]x_0, x[$  oppure  $]x, x_0[$  t.c.

$$f(x) = T_n(f, x_0, x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

Dove il secondo membro della somma si chiama *resto nella forma di Lagrange*.

### #Dimostrazione

**DIMOSTRAZIONE** del *teorema 2.2.* (*Teorema 2.2. (di Taylor col resto di Lagrange)*)

Vediamo che  $f$  è *derivabile* fino all'ordine  $n+1$ .

Allora, scrivendo  $g$  come la funzione

$$g(x) = f(x) - T_n(f, x_0, x)$$

questa è anche *derivabile* fino all'ordine  $n+1$ -esimo.

Allora prima di tutto "*calcoliamo*"  $g(x_0)$ ;

$$g(x_0) = f(x_0) - T_n(f, x_0, x_0) = 0$$

Ora calcoliamo la *derivata*  $g'(x)$ ;

$$g'(x) = f'(x) - [0 + f'(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} 2(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (n)(x - x_0)^{(n-1)}]$$

Allora calcolandola in  $x_0$  si ha

$$g'(x_0) = f'(x_0) - 0 - f'(x_0) - \dots - 0 - \dots - 0 = 0$$

Infatti per ogni "*termine*" che presenta il "*binomio*"  $x - x_0$  vengono annullate.

Facendo il conto si nota che

$$g(x_0) = g'(x_0) = \dots = g^{(n)}(x_0) = 0$$

Ma allora per il *lemma di Lagrange* (*Lemma 1.2 (di Lagrange)*),

$$g(x) = \frac{g^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

Però osserviamo che la *derivata*  $n+1$ -esima di  $g$  annulla la "*seconda componente*" (ovvero il polinomio di Taylor), in quanto la  $n+1$ -esima derivata di un polinomio di grado  $n$  è sempre nulla.

Pertanto questa è equivalente a

$$g(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

Allora si ottiene alla fine

$$g(x) = f(x) - T_n(f, x_0, x) \implies f(x) = T_n(f, x_0, x) + g(x)$$

$$= T_n(f, x_0, x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

264

che è la tesi. ■

### 3. Esempio dell'esponenziale

Consideriamo un esempio celebre della *formula di Taylor col resto di Peano* di una funzione.

#Esempio

Esempio 3.1. (La funzione esponenziale).

Sia  $\exp x = e^x$ . Pongo  $x_0 = 0$ . Voglio trovare la *formula di Taylor* per  $\exp$  e  $x_0 = 0$ . Prima di tutto considero che

$$(e^x)^{(n)} = e^x, \forall n \in \mathbb{N}$$

Pertanto

$$(e^x)^{(n)}(x_0) = 1, \forall n$$

Allora per *Taylor*, si ha

$$e^x = 1 + 1(x - 0) + \frac{1}{2!}(x - 0)^2 + \dots + \frac{1}{n!}(x - 0)^n + r_n$$

Ponendo il limite  $x \rightarrow x_0$ , si avrebbe

$$e^{x_0} = 1 + x_0 + \frac{1}{2}x_0^2 + \dots + \frac{1}{n!}(x_0)^n + 0$$

#Osservazione

Osservazione 3.1. (una dimostrazione dell'identità di Eulero).

Sia nota la *cosiddetta identità di Eulero*, oppure come è nota per certi matematici, "*la formula matematica più bella*":

$$\boxed{e^{i\pi} = -1}$$

In realtà questa è una generalizzazione di

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

Se vogliamo considerarla da un *punto di vista puramente analitico*, ovvero senza effettuare delle *considerazioni geometriche* dei numeri complessi, possiamo comunque "*dimostrare*" questa forma mediante le formule di Taylor.

Infatti, considerando:

$$e^x = 1 + x + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

$$\sin x = 1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Ora "*calcolo*"  $e^{ix}$  mediante *Taylor*:

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - \frac{ix^7}{7!} + \dots$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\right)$$

$$= \boxed{\cos x + i \sin x}$$

## 4. Esempio di applicazione della formula di Taylor col resto di Lagrange

#Esempio

Esempio 4.1. (calcolare la costante di Eulero).

Supponiamo di voler calcolare il numero  $e$  con un errore *inferiore* a  $10^{-3}$ .

Prima di tutto ricapitoliamo *ricordando* cos'è la costante di Eulero: per definizione questa costante è il limite fondamentale

$$\lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Ricordando inoltre dei calcoli effettuati (Esempi di Limiti di Successione > ^bb767b), sappiamo che il numero  $e$  è *limitato*:

$$2 \leq e \leq 3$$

Ora scrivo la *formula di Taylor col resto di Lagrange* per  $e^x$ , con  $n$  generico (da determinare in seguito) e  $x_0 = 0$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad 0 < \xi < 1$$

Adesso poniamo  $x = 1$  e prendiamo la "distanza" tra  $e^1$  e il polinomio di Taylor  $T_n(f, 0, 1)$ , e come visto prima questa dev'essere minore o uguale al resto di Lagrange.

266

$$|e - (1 + 1 + \dots + \frac{1}{n!})| \leq \frac{e^\xi}{(n+1)!}$$

Ricordiamo che se  $\xi$  "vive" tra 0, 1, allora  $e^\xi$  vive tra 1,  $e$ ; pertanto possiamo maggiorare  $e^\xi$  con 3, in quanto  $e$  è limitata da 3. Poniamo pertanto

$$|e - 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3!} - \dots - \frac{1}{n!}| \leq \frac{3}{(n+1)!}$$

Ora "proviamo" ad inserire degli  $n$  a partire da  $n = 4$ , per vedere se innanzitutto il resto (ovvero l'"errore") che ci viene fuori è effettivamente minore di  $10^{-3}$ ; in tal caso procediamo a calcolare la somma/sottrazione del polinomio.

L'idea è quello di "stimare il resto".

$$\begin{aligned} n = 4 &\implies r_4 = \frac{3}{120} > 10^3 \text{ NO} \\ n = 5 &\implies r_5 = \frac{3}{720} = \frac{1}{240} > 10^{-3} \text{ NO} \\ n = 6 &\implies r_6 = \frac{3}{5040} < 10^{-3} \text{ OK.} \end{aligned}$$

Quindi il "candidato perfetto" è  $n = 6$ .

Procedendo ad inserire  $n = 6$  nel polinomio di Taylor  $T_6(e^x, 0, 1)$  abbiamo

$$2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} = 2.718$$

che è proprio il numero  $e$  fino alla  $10^{-3}$ -esima cifra.

## C1. Esempi di funzioni derivabili e non derivabili

### Esempi di derivate

*Esempi di funzioni derivabili e il calcolo delle loro derivate: tutte (più o meno) le funzioni elementari. Esempi di funzioni non derivabili.*

## 1. Derivate delle funzioni elementari

### Funzione costante

#Esempio

Esempio (funzione costante).

Sia  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  la **funzione costante**, ovvero del tipo

$$f(x) = c \in \mathbb{R}$$

Allora calcolando il **rapporto incrementale** ([Definizione 1 \(rapporto incrementale di una funzione relativo un punto del dominio\)](#))  $R_{x_0}^f(x)$ , otteniamo

$$R_{x_0}^f(x) = \frac{c - c}{x - x_0} = \frac{0}{x - x_0} = 0$$

Pertanto

$$(c)' = 0, \forall x \in I$$

### Funzione identità

#Esempio

Esempio (funzione identità).

Sia  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  la **funzione identità**, ovvero del tipo

$$f(x) = x$$

Allora calcolando il suo **rapporto incrementale** si otterrebbe

$$R_{x_0}^f(x) = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$$

$$(x)' = 1, \forall x \in I$$

## Funzione potenza (in $\mathbb{N}$ )

#Esempio

Esempio (funzione potenza naturale).

Sia  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  la **funzione potenza** (Funzioni di potenza, radice e valore assoluto > ^2b25ba), ovvero del tipo

$$x^n, n \in \mathbb{N}$$

Allora calcolando il **rapporto incrementale** si ottiene

$$R_{x_0}^f(x) = \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0}$$

Ricordandoci che abbiamo una **differenza di potenze  $n$ -esime** e quindi vale la seguente relazione:

$$(A^n - B^n) = (A - B)(A^{n-1} + A^{n-2}B^1 + \dots + A^1B^{n-2} + B^{n-1})$$

Allora si avrebbe

$$\begin{aligned} R_{x_0}^f(x) &= \frac{(x - x_0)(x^{n-1} + x^{n-2}x_0^1 + \dots + x^1x_0^{n-2} + x_0^{n-1})}{x - x_0} \\ &= x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \dots + x \cdot x_0^{n-2} + x_0^{n-1} \end{aligned}$$

Passando il limite per  $x \rightarrow x_0$  si avrebbe il limite di un **polinomio**, quindi

$$\lim_{x \rightarrow x_0} R_{x_0}^f(x) = x_0^{n-1} + \dots + x_0^{n-1} = n(x_0^{n-1})$$

Pertanto

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}, x \in I$$

**ATTENZIONE!** Con questa "**dimostrazione**" abbiamo dimostrato che questa vale **solo** in  $\mathbb{N}$ ; per dimostrare che vale anche in  $\mathbb{R}$ , che verrà fatta successivamente, bisogna usare un altro trucchetto. Però per ora diamo questa buona anche per  $n$  reale.

## #Esempio

## Esempio (funzione exp).

Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$  la **funzione esponenziale** a base  $e$  ([Definizione 10 \(funzione esponenziale\)](#)), ovvero del tipo

$$f(x) = e^x$$

Allora calcolando il suo rapporto incrementale si avrebbe

$$\begin{aligned} R_{x_0}^f &= \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} \\ &= \frac{e^{x_0}(e^{x-x_0} - 1)}{x - x_0} \end{aligned}$$

Ora, passando al limite per  $x \rightarrow x_0$ , si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} R_{x_0}^f(x) = e^{x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{e^{x-x_0} - 1}{x - x_0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = e^{x_0} \cdot 1 = e^{x_0}$$

Pertanto

$$(e^x)' = e^x$$

## #Osservazione

## Osservazione (la peculiarità di exp).

Da qui notiamo che se  $f(x) = e^x$  allora vale che

$$f'(x) = f(x)$$

ed è l'**unica** funzione per cui vale questa.

Infatti "**l'esponenziale risolve l'equazione differenziale**"

$$f = f'$$

## Funzione logaritmica

## #Esempio

## Esempio (funzione log).

$$f(x) = \ln x$$

Allora prendendo il suo rapporto incrementale si ottiene

$$\begin{aligned} R_{x_0}^f(x) &= \frac{\ln x - \ln x_0}{x - x_0} \\ &= \frac{\ln(\frac{x}{x_0})}{x - x_0} \\ &= \frac{\ln(\frac{x-x_0+x_0}{x_0})}{x - x_0} \\ &= \frac{\ln(1 + \frac{x-x_0}{x_0})}{x - x_0} \\ &= \frac{\ln(1 + \frac{x-x_0}{x_0})}{\frac{x-x_0}{x_0}} \cdot \frac{1}{x_0} \end{aligned}$$

Notiamo che, passando al limite  $x \rightarrow x_0$  si ha uno dei **limiti fondamentali** (Esempi di Limiti di Funzione > ^35600e), ovvero

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + y)}{y} = 1$$

Allora si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} R_{x_0}^f(x) = 1 \cdot \frac{1}{x_0} = \frac{1}{x_0}$$

Pertanto

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

#### #Osservazione

Osservazione (dimostrazione alternativa di  $\exp'(x)$ , approfondimento personale).

*Approfondimento personale tratto da: Le Matematiche di A. D. Aleksandrov, A. N. Kolmogorov, M. A. Lavrent'ev (1974)*

Notiamo che è possibile "*dimostrare*" la derivata  $(e^x)' = e^x$ , usando il *teorema sulla derivata della funzione inversa* (Teorema 5 (derivata della funzione inversa)) e conoscendo la derivata del logaritmo naturale.

271

Infatti, supponiamo di avere la funzione  $y = e^x$  e la sua inversa  $x = \ln y$ .

Ora, usando il teorema sulla derivata della funzione inversa, si ha

$$(a^x)'_x = \frac{1}{\log_a(y)'_y} = \frac{1}{\frac{1}{y}} = y = e^x$$

---

riferimento bibliografico: pagina 123

#### #Osservazione

Osservazione (dimostrazione della derivata della funzione potenza in R).

Finalmente abbiamo abbastanza strumenti per poter calcolare la derivata di

$$x^\gamma, \gamma \in \mathbb{R}$$

Prima di tutto consideriamo questa *potenza* in termini di *esponenziali* e *logaritmi*:

$$x^\gamma = e^{\gamma \ln x}$$

Quindi le derivate di entrambe sono le stesse; deriviamo dunque la funzione del membro destro.

$$(e^{\gamma \ln x})' = \frac{\gamma}{x} e^{\gamma \ln x} = \gamma \frac{x^\gamma}{x} = \gamma x^{\gamma-1}$$

Pertanto

$$(e^{\gamma \ln x})' = \boxed{(x^\gamma)' = \gamma x^{\gamma-1}}$$

## Funzioni trigonometriche seno, coseno e tangente

#### #Esempio

Esempio (funzione seno).

Sia  $f(x) = \sin(x)$  la *funzione seno* (Definizione 4 (seno e coseno)) e vogliamo calcolare la sua *derivata*. Ricordandoci le *formule di prostaferesi* (Osservazione 12 (formule di prostaferesi)), svolgiamo i calcoli.

$$\begin{aligned}
 R_{x_0}^f(x) &= \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} \\
 &= \frac{2 \sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \cos\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{x - x_0} \\
 &= \frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{\frac{x-x_0}{2}} \cdot \cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)
 \end{aligned}$$

Passando al *limite* di  $x \rightarrow x_0$ , ricordiamoci dei *limiti notevoli* (in particolare quella di  $\frac{\sin(f(x))}{f(x)}$ ), abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow x_0} R_{x_0}^f(x) = 1 \cdot \cos x_0$$

Pertanto

$$(\sin x)' = \cos x$$

### #Esempio

**Esempio** (funzione coseno).

Analogamente al ragionamento svolto sopra, avendo  $f(x) = \cos x$  si avrebbe

$$(\cos x)' = -\sin x$$

### #Esempio

**Esempio** (funzione tangente).

Applicando la *proprietà sulla derivata di quozienti* si potrebbe derivare  $\tan x$  (ove derivabile) e ottenere

$$(\tan x)' = \frac{(\cos x)^2 + (\sin x)^2}{(\cos x)^2} = \frac{1}{(\cos x)^2} = 1 + (\tan x)^2$$

## Funzioni trigonometriche arcoseno, arcocoseno, arcotangente

### #Esempio

**Esempio** (funzione arcoseno).

Voglio calcolare la derivata di  $\arcsin x$ .

Allora, usando la *proprietà sulla derivata delle inverse* ho

$$(\arcsin)'(\sin x) = \frac{1}{\cos x}$$

Ora, sostituendo  $y = \sin x \iff x = \arcsin y$ , ho

$$(\arcsin')(y) = \frac{1}{\cos(\arcsin y)}$$

Ma considerando gli *intervalli di definizione* della funzione  $\arcsin$ , ovvero  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , notiamo che la funzione  $\cos$  è *sempre positiva*. Pertanto, facendo valere la relazione fondamentale  $\cos^2 + \sin^2 = 1$ , ho

$$(\cos u)^2 + (\sin u)^2 = 1 \implies \cos = \sqrt{1 - (\sin u)^2}$$

Quindi sostituendo  $u$  con  $\arcsin y$ , alla fine ho

$$(\arcsin')(y) = \frac{1}{\cos(\arcsin y)} = \frac{1}{\sqrt{1 - (\sin(\arcsin(y)))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

Pertanto infine abbiamo

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

### #Esempio

#### Esempio (funzione arcocoseno).

Analogamente si dimostra che la derivata della funzione *arcocoseno* è

$$-(\arcsin x)' = (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

### #Esempio

#### Esempio (funzione arctangente).

Ora vogliamo calcolare la derivata di  $\arctan x$  (funzione *arcotangente*).

$$(\arctan(x))'(\tan x) = \frac{1}{(\tan x)'} = \frac{1}{1 + (\tan x)^2}$$

Pertanto

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

## 2. Funzioni non derivabili

### Valore assoluto

#Esempio

Esempio (funzione valore assoluto).

Vediamo un esempio basilare del fatto che *non è vera* l'implicazione

$$f \text{ continua} \implies f \text{ derivabile}$$

Infatti consideriamo  $f(x) = |x|$ .

Notiamo che questa funzione è *continua* in  $x_0$ ; in particolare per 0, dato che  $f(0) = 0$ .

Tuttavia la storia è diversa per il *limite* del *rappporto incrementale*: considerando prima  $R_{x_0}^f(x)$ , abbiamo

$$R_{x_0}^f(x) = \frac{|x| - |x_0|}{x - x_0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

A occhio si vede immediatamente che il *limite* di questa funzione non esiste più per  $x \rightarrow 0$ ; infatti prendendo il limite *destro* e *sinistro*, abbiamo

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0^-} R_{x_0}^f(x) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow x_0^+} R_{x_0}^f(x) = 1 \end{cases} \implies \not\exists \lim_{x \rightarrow x_0} R_{x_0}^f(x)$$

Pertanto  $f'(0)$  *non è definita*.

#Osservazione

Osservazione (però la funzione è derivabile altrove).

Però usando al *definizione locale* di derivabilità notiamo che  $f(x)$  è comunque *derivabile* per  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Infatti  $f'(x) = 1$  se  $x > 0$ ,  $f'(x) = -1$  se invece  $x < 0$ .

### Funzione di Weierstraß

#Esempio

Abbiamo trovato una funzione continua ma *non derivabile* per un punto. Ma allora esistono comunque funzioni *continue* ma *non derivabili* dappertutto? Ovvero *derivabili* da nessuna parte.

Questo problema è stato risolto dal celebre matematico K. Weierstraß nel 1872 riuscendo a definire una funzione *continua* ma *derivabile da nessuna parte*.

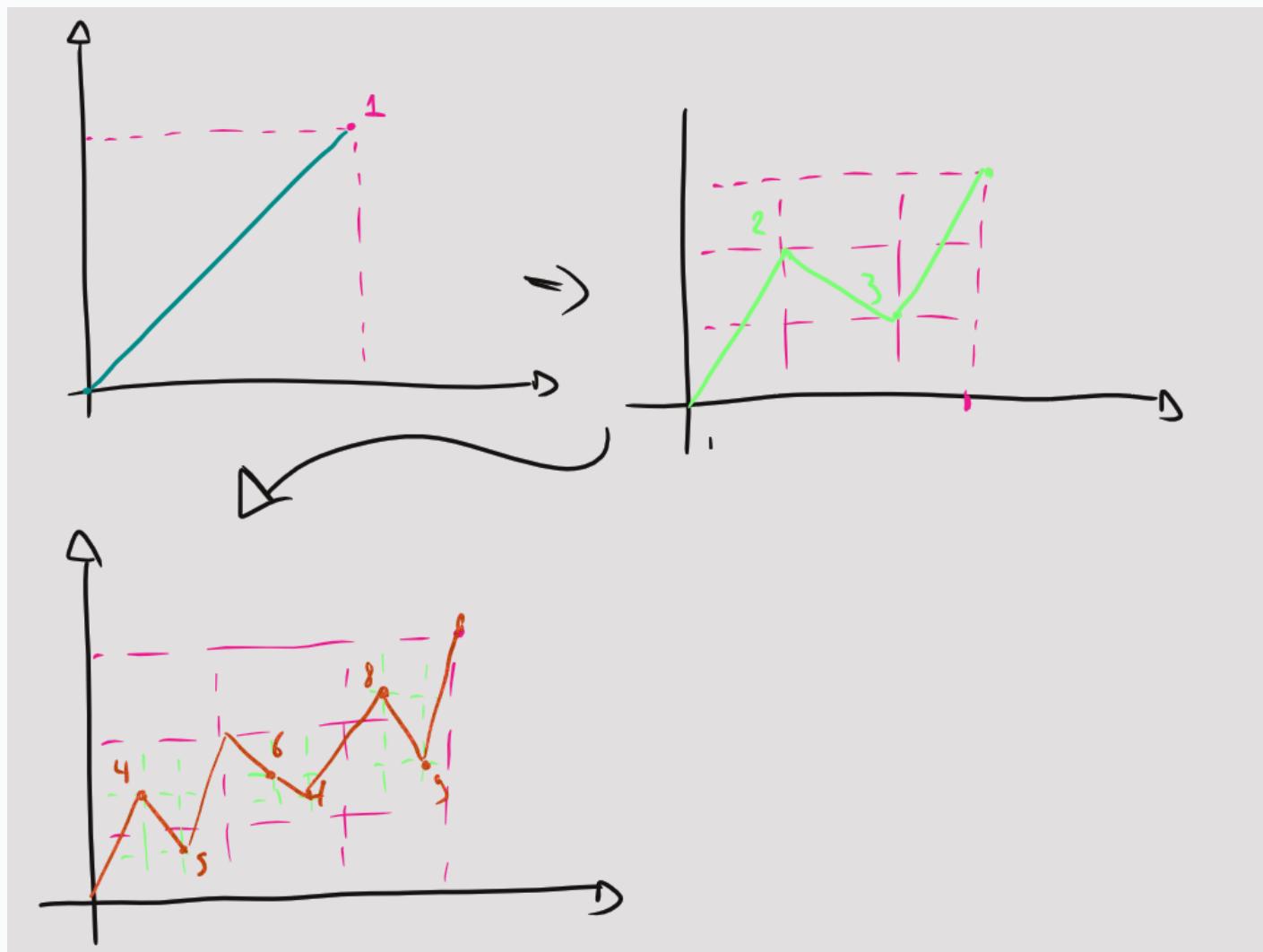
L'idea di questa funzione consiste nella seguente: immaginiamo, sul piano cartesiano, di avere un'elastico immaginario fissato da *due punti*. Ora, suddividiamo l'area formata da due punti in *tre sotto-aree quadrate*.

Ora, prendendo il punto *sinistro alto* e *destro basso* del quadrato centrale, fissiamo altri *due punti* e ricreiamo l'elastico.

Poi ricorsivamente ripeto questa procedura per le sotto aree dove passa il nuovo elastico, dandoci così un elastico "*spigoloso dappertutto*" (quindi derivabile da nessuna parte).

L'idea grafica viene raffigurata nella *figura 2.2..*

**FIGURA 2.2. (Funzione di Weierstraß)**



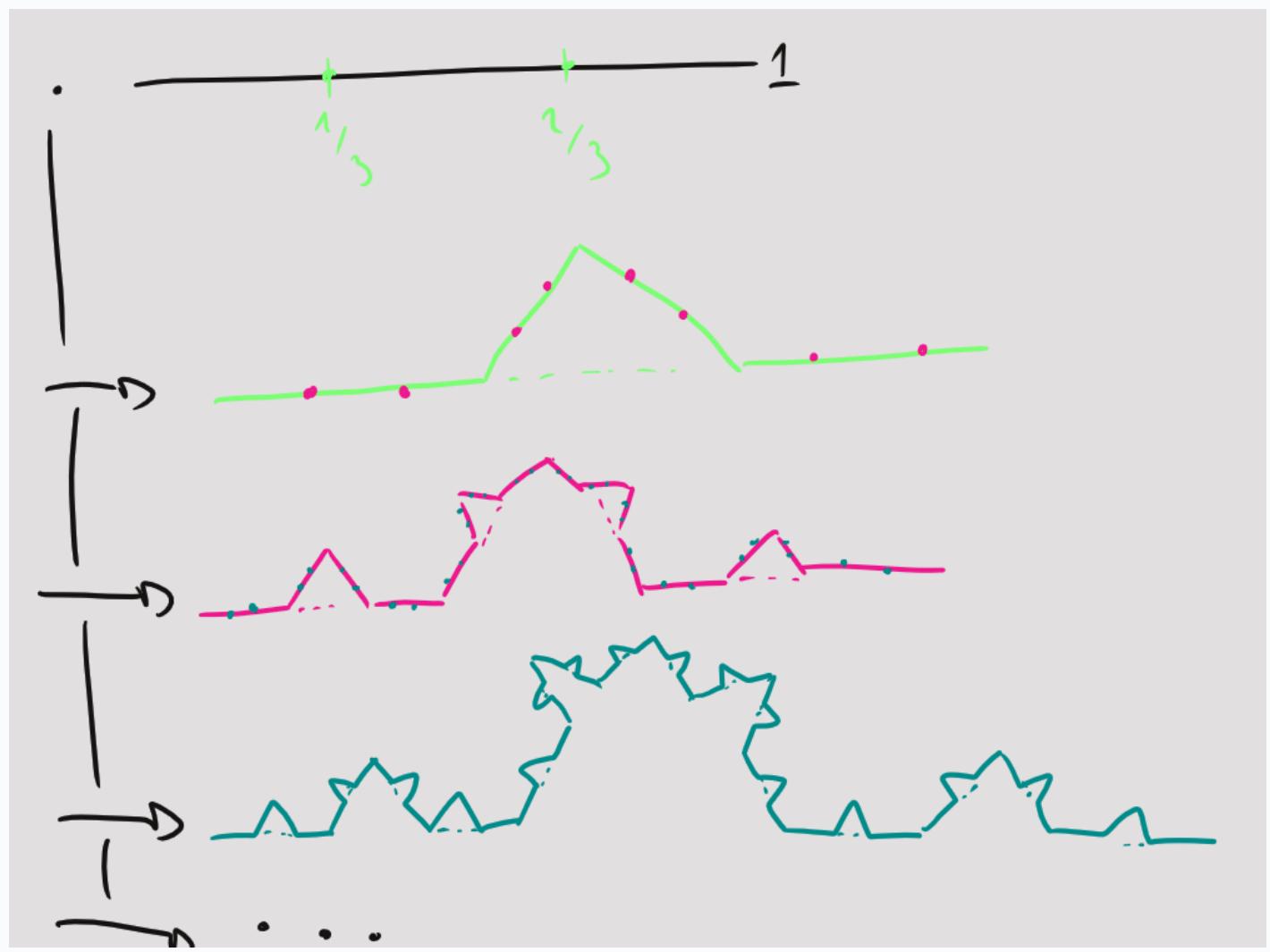
## Osservazione (frattale).

Notiamo che con la generazione della funzione di Weierstraß, come risultato otteniamo un **frattale**, che è una forma geometrica speciale: infatti il frattale acquisisce rilevanza particolare nell'arte contemporanea, come ad esempio con la "body art" di J. Pollock

La proprietà "**speciale**" dei frattali è quella dell'"**auto similarità**", ovvero che "**zoomando**" all'interno di questi frattali vediamo certi schemi geometrici ripetere.

Come esempi di frattali abbiamo la **curva di Koch** (figura 2.2.b.) e l'**insieme di Mandelbrot** (Forma Trigonometrica dei Numeri Complessi > ^1a7f5c).

**FIGURA 2.2.b.** (*Curva di Koch*)



## C2. Conseguenze dei teoremi di Cauchy e di Lagrange

### Conseguenze del teorema di Cauchy e di Lagrange

## 1. Considerazioni Pratiche e Quotidiane

### Lagrange e il sistema "Tutor"

#Osservazione

Osservazione (Lagrange e il sistema "Tutor").

Dal 2004 è stato introdotto il cosiddetto sistema "*Tutor*" sulle autostrade italiane, al fine di determinare se stiamo rispettando le limitazioni di velocità o meno.

Il sistema *Tutor* consiste nel seguente: lungo l'autostrada si fissano piazzano due telecamere, tra le quali c'è una distanza  $s$ . Allora queste fotocamere fotografano le nostre automobili e registrano i seguenti dati: la targa del veicolo e l'istante del tempo in cui siamo stati ripresi. L'idea di questo sistema viene raffigurato nella [figura 1.1.](#).

Quindi una volta passate entrambe le telecamere, le autorità hanno dei dati per determinare una misura importante: la nostra *velocità media* ([Definizione 3 \(velocità media dati due istanti di tempo\)](#)).

Infatti loro hanno

$$v_m = \frac{s}{t_2 - t_1} = R_{t_2}^x(t_1)$$

Ipotizziamo di aver infranto la legge e di aver superato ad un certo punto la velocità massima 130 km/h, ricevendo così una multa. Tuttavia, notiamo qualcosa: una parte del testo afferma che secondo il *codice della strada* (CdS) la *velocità istantanea* non può essere superata di 130 km/h: quindi c'è un errore! Loro hanno semplicemente misurato la nostra *velocità media*, non quella *istantanea*!

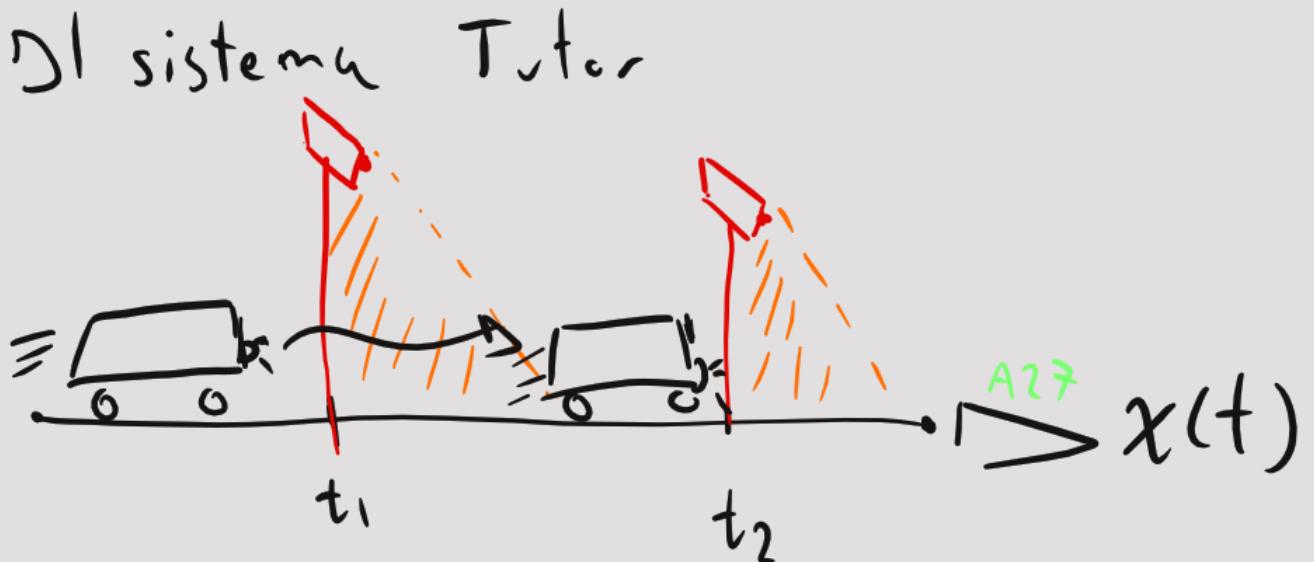
Allora presentiamo un ricorso al giudice per farci annullare la multa; inaspettatamente il giudice si rivela di essere un esperto di matematica e richiama il *teorema di Lagrange* ([Teorema 1 \(di Lagrange\)](#)), affermando che se la nostra velocità media  $v_m$  ha ad un certo punto superato il limite, allora c'è almeno un istante di tempo  $t_\xi$  tale che la velocità istantanea misurata è maggiore del limite previsto.

Ovvero

$$v_m = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} > 130 \implies \exists t_\xi \in ]t_2, t_1[ : x'(t_\xi) = v(t_\xi) > 130$$

Quindi, alla fine niente ricorso per noi.

**FIGURA 1.1.** (*Idea grafica del sistema Tutor*)



## Cauchy nel nostro spazio tridimensionale

#Osservazione

Osservazione (Cauchy in 3D).

Dall'interpretazione geometrica di Cauchy in  $\mathbb{R}^2$  ([Osservazione 3 \(interpretazione grafica del teorema di Cauchy\)](#)) vediamo due *punti* nello spazio, la retta secante di questi due punti e per *Cauchy* vediamo che almeno c'è almeno un punto per cui il suo "*vettore velocità*" è parallela a questa retta secante.

Ora ci chiediamo il seguente: "*come funzionerebbe in  $\mathbb{R}^3$ ?*"

Allora in questo caso immaginiamo una situazione simile, solo che ci immaginiamo una mosca che gironzola da un punto iniziale *a* fino ad un punto finale *b*, e la retta secante tra *a* e *b* sarebbe la "*pendenza*". La situazione verrà raffigurata nella [FIGURA 1.2..](#)

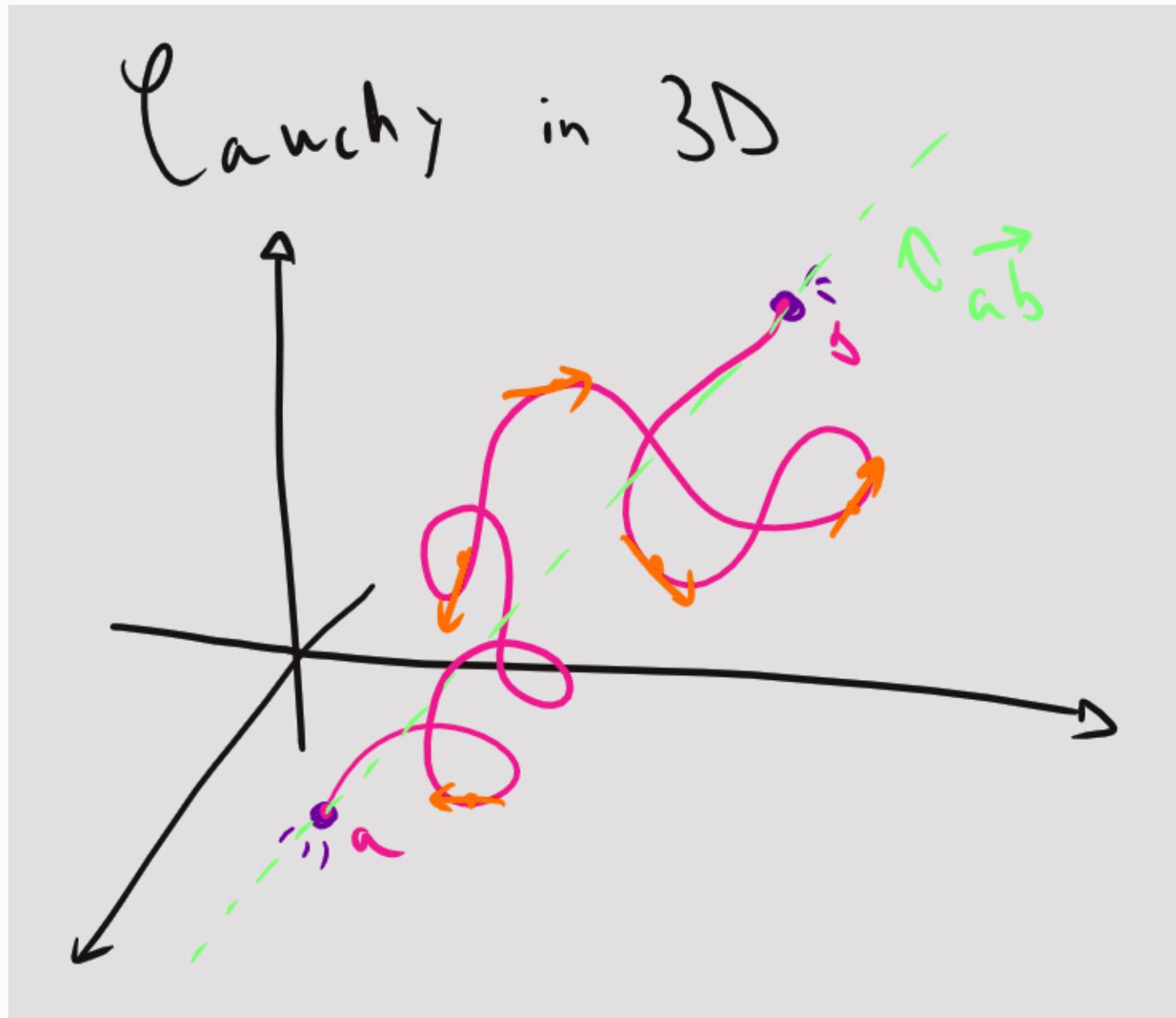
Varrebbe comunque il *teorema di Cauchy* qua? La risposta è *no*.

Infatti se ragioniamo sulle *strade*, vediamo che spesso le strade di montagne tendono ad avere molte curve e tornanti; queste servono infatti a "*diminuire*" la pendenza dal punto di partenza fino alla montagna! Infatti, se *Cauchy* valesse anche qui, saremmo tutti costretti ad un certo punto di salire il passo con la

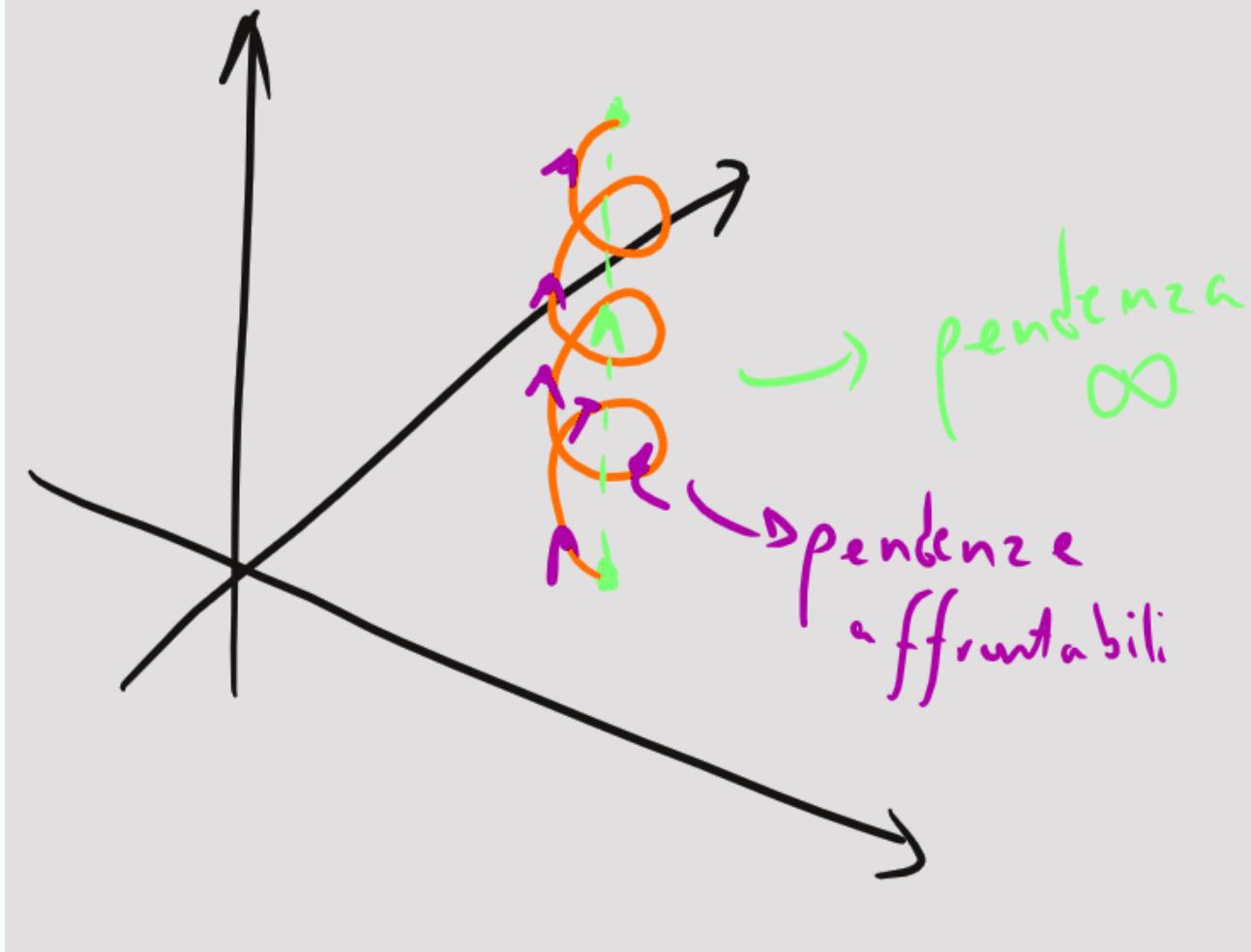
Un caso più eclatante è quello delle *scale a chiocciola*; infatti queste rendono possibile per noi di salire verticalmente da un punto all'altro senza dover affrontare pendenze incamminabili.

I gradini di queste scale servono ad "*appiattire*" la pendenza; l'idea di questo concetto viene raffigurato in *figura 1.3..*

**FIGURA 1.2.** (*Idea della situazione*)



**FIGURA 1.3.** (*Scale a chiocciola*)



## 2. Considerazioni "Astratte"

### Derivate nulle e funzioni costanti

#Teorema

**Teorema** (derivata nulla è sempre una costante).

Suppongo  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  **derivabile** in  $I$  (Definizione 1 (derivata di una funzione relativa ad un punto)).

Supponendo che  $\forall x \in I, f'(x) = 0$  allora si ha che  $f(x) = c \in \mathbb{R}$ .

$$f'(x) = 0 \implies f(x) = c \in \mathbb{R}$$

#Dimostrazione

**DIMOSTRAZIONE** del **teorema 2.1.** (Teorema 3 (derivata nulla è sempre una costante))

Dimostriamo questo teorema con **Lagrange** (Teorema 1 (di Lagrange)) e usando il ragionamento **per assurdo**.

Partiamo supponendo  $f'(x) = 0$ .

Ora supponiamo, per assurdo, che  $f$  sia una funzione **non costante**; ovvero ci sono due punti  $x_1, x_2 \in I$  tali che le loro immagini sono diverse.

Ora posso applicare il **teorema di Lagrange** sull'intervallo  $[x_1, x_2]$ ; questo è ammissibile in quanto abbiamo  $f$  **derivabile** su  $I$ , pertanto  $f$  è anche **continua** su  $I$  (**Teorema 1 (continuità delle funzioni derivabili)**). Inoltre  $[x_1, x_2] \subseteq I$ .

Allora per il **teorema di Lagrange**,

$$\exists \xi \in ]x_1, x_2[ : f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Tuttavia notiamo che il numeratore non può essere mai 0 in quanto per ipotesi  $f(x_1), f(x_2)$  sono diverse e analogamente neanche il denominatore può essere mai 0. Allora si avrebbe  $f'(\xi) \neq 0$ ; però questo è impossibile in quanto questo contraddirrebbe con la tesi  $f'(\xi) = 0$ . ■

**Osservazione** (questo teorema non vale se abbiamo dei buchi).

Notiamo che per essere vero questo teorema,  $I$  deve essere definita su un **intervallo**, perché senno avrei dei "**buchi**" su cui la funzione può compiere dei "**salti**".

## Crescenza e derivate

#Teorema

**Teorema** (la derivata positiva significa funzione crescente).

Sia  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  **derivabile**.

Allora  $f$  è **crescente** su  $I$  se e solo se la sua derivata è positiva;

$$f \text{ crescente su } I \iff \forall x \in I, f'(x) \geq 0$$

#Dimostrazione

**DIMOSTRAZIONE** del **teorema 2.2.** (**Teorema 5 (la derivata positiva significa funzione crescente)**)

" $\implies$ ": Supponiamo  $f$  **crescente** su  $I$ . Allora fissando  $x_0 \in I$ , posso considerare il **rapporto incrementale**  $R_{x_0}^f(x)$ ;

$$R_{x_0}^f(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Però visto che  $f$  crescente sappiamo che se  $x > x_0$ , allora  $f(x) \geq f(x_0)$ ; invece se  $x < x_0$  allora  $f(x) \leq f(x_0)$ . Pertanto in entrambi i casi abbiamo la divisione di due **segni concordi**, quindi il rapporto incrementale sarà sempre positivo per  $x \neq x_0$ .

Quindi  $R_{x_0}^f(x) \geq 0$ .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} R_{x_0}^f(x)$$

possiamo usare la **permanenza del segno** ([Teorema 3 \(della permanenza del segno\)](#)) "alla rovescia" per dire che anche il **limite** del rapporto incrementale, che non è altro che la **derivata**  $f'(x_0)$ , è sempre **positiva**.

Pertanto abbiamo verificato che

$$f \text{ crescente} \implies R_{x_0}^f(x) \geq 0 \implies f'(x) \geq 0$$

" $\Leftarrow$ ": Sia la derivata  $f'(x)$  **sempre** positiva, per  $\forall x \in I$ .

Allora per assurdo suppongo che  $f$  **non** sia crescente: ovvero abbiamo una situazione in cui almeno due punti non sono "**più alti dell'altro**".

$$\exists x_1, x_2 \in I : x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$$

Allora posso applicare il **teorema di Lagrange** ([Teorema 1 \(di Lagrange\)](#)) sull'intervallo  $[x_1, x_2]$  per trovare l'assurdo come priva: infatti

$$\exists \xi \in ]x_1, x_2[ : \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

e per ipotesi questa frazione è **negativa**, in quanto abbiamo la moltiplicazione di due segni **discordi**. Però questo è assurdo in quanto all'inizio abbiamo supposto  $f'(x)$  sempre positiva.

## C3. Derivata seconda per determinare la convessità di una funzione

### Caratterizzazione delle Funzioni Convesse

*Teoremi di caratterizzazione per funzioni convesse; una mediante rette, l'altra mediante la derivata seconda*

## 1. Primo teorema di caratterizzazione mediante le rette

#Teorema

**Teorema** (di caratterizzazione mediante le rette).

Sia  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I$  **intervallo**.

Allora sono equivalenti i seguenti:

1).  $f$  convessa $\Updownarrow$ 2).  $\forall x_1, x_2, x_3 \in I, x_1 < x_2 < x_3$ 

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

 $\Updownarrow$ 3).  $\forall x_1, x_2, x_3 \in I, x_1 < x_2 < x_3$ 

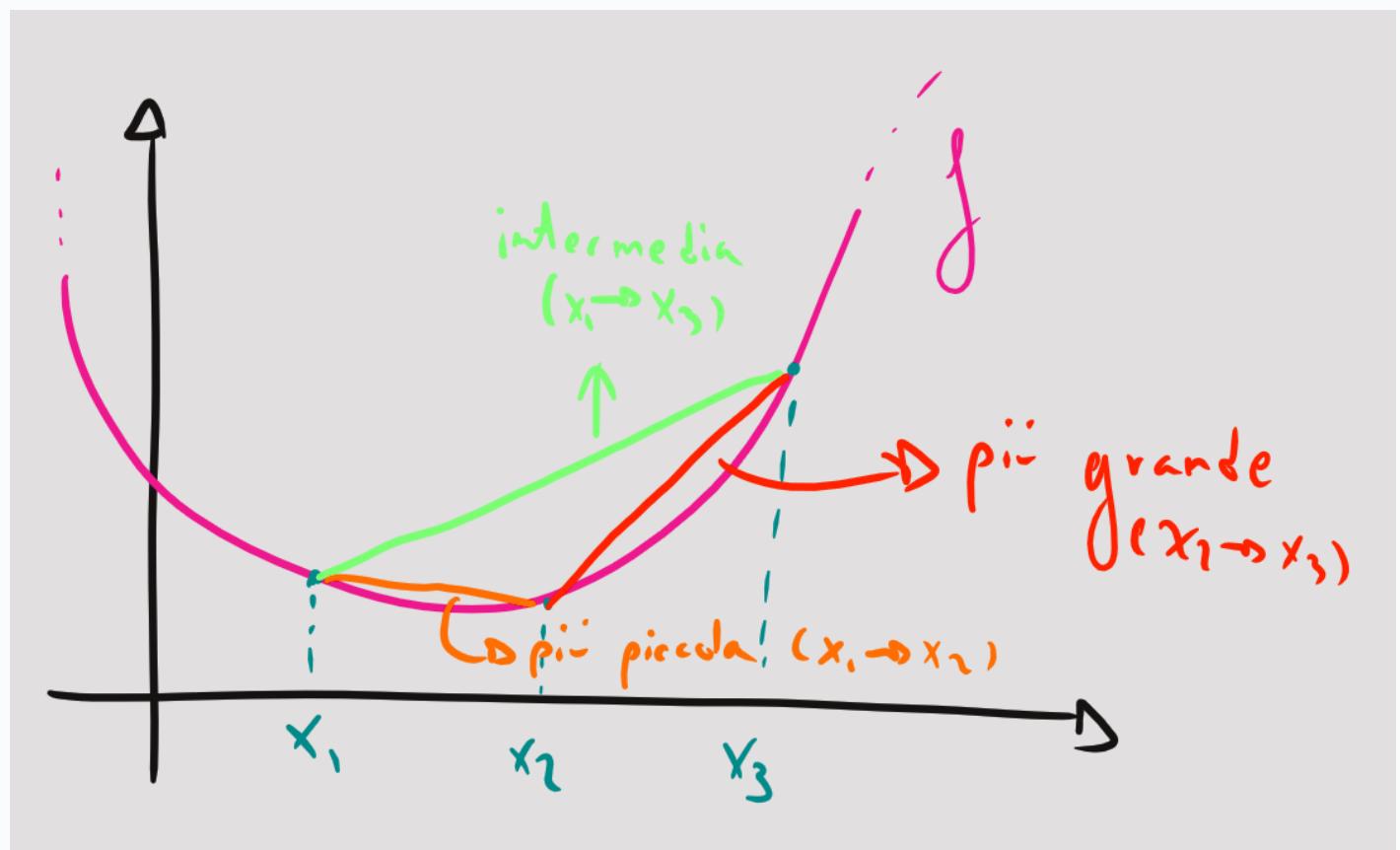
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

## #Osservazione

Osservazione (interpretazione grafica).

Il significato geometrico di questo teorema vuol semplicemente dire che, quando prendiamo tre punti di una funzione concava e prendiamo le loro *rette secanti passanti tra di loro*, abbiamo sempre una retta con la "*pendenza più grande*", con la "*pendenza intermedia*" e con la "*pendenza più piccola*".

Nel caso della 2) prendiamo *tre* pendenze, invece nel caso della tre "*dimentichiamo*" una di queste pendenze per prendere in considerazione solo due.

**FIGURA 1.1.** (*Significato geometrico*)

## #Osservazione

Al fine della dimostrazione osserviamo che

$$1 \iff 2 \iff 3$$

è equivalente a dire che

$$1 \implies 2 \implies 3 \implies 1$$

in quanto così si *"completa il giro delle implicazioni"*.

### #Dimostrazione

**DIMOSTRAZIONE** del [teorema 1.1.](#) ([Teorema 1 \(di caratterizzazione mediante le rette\)](#))

Da quanto visto nell'[osservazione 1.2.](#) ([Osservazione 3 \(sulle implicazioni\)](#)) dobbiamo semplicemente dimostrare *tre* implicazioni;  $1 \implies 2$ ,  $2 \implies 3$  e infine  $3 \implies 1$ .

$1 \implies 2$ . Prendendo i punti  $x_1 < x_2 < x_3$  e un qualsiasi "scalare"  $\lambda \in [0, 1]$ , notiamo che  $x_2$  sta tra  $x_1, x_3$ ; quindi  $x_2$  può essere scritta in [termini di combinazione lineare di](#)  $x_1, x_3$  ([Definizione 1 \(Definizione 1.1. \(combinazione lineare\)\)](#)). Ovvero

$$x_2 = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_3$$

Ora, risolvendo l'equazione in  $\lambda$ , ottengo

$$\lambda = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} \iff 1 - \lambda = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}$$

(i calcoli sono lasciati da svolgere per esercizio)

Ora applico la [condizione di convessità](#) ([Definizione 2 \(funzione convessa o concava\)](#)) a  $x_1, x_3$  con  $\lambda$  appena calcolato.

$$\begin{aligned} f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_3) &\leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_3) \\ f(x_2) &\leq \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3) \\ (*) \implies & (x_3 - x_1)f(x_2) \leq (x_3 - x_2)f(x_1) + (x_2 - x_1)f(x_3) \end{aligned}$$

(anche qui i conti sono lasciati da svolgere per esercizio)

Teniamo la parte segnata come (\*) fissata.

Per dimostrare il *primo pezzo* della tesi di 2) usiamo (\*) sommando ambo i lati con  $(x_3 - x_1)f(x_1)$ ;

$$\begin{aligned}
 (*) (x_3 - x_1)f(x_2) &\leq (x_3 - x_2)f(x_1) + (x_2 - x_1)f(x_3) \\
 (x_3 - x_1)f(x_2) - (x_3 - x_1)f(x_1) &\leq (x_3 - x_2)f(x_1) + (x_3 - x_1)f(x_1) + (x_2 - x_1) \\
 (x_3 - x_1)(f(x_2) - f(x_1)) &\leq (-x_2 + x_1)f(x_1) + (x_2 - x_1)f(x_3) \\
 &\leq (f(x_3) - f(x_1))(x_2 - x_1) \\
 \implies \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} &\leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}
 \end{aligned}$$

Analogamente si dimostra il *secondo pezzo* della tesi di 2). (da svolgere al lettore per esercizio)

Infine ho completato la dimostrazione di  $1 \implies 2$ .

$2 \implies 3$ . Questa è banale da dimostrare ed è immediata da dimostrare.

$3 \implies 1$ . Per ipotesi ho il seguente:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

Allora scrivo la *combinazione lineare*  $x_1 < \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 < x_2$  (ovvero  $x_1 = x_1; x_2 = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2; x_3 = x_2$ ) per  $\lambda \in [0, 1]$ ; ora riapplico il *punto 3*, ottenendo così la tesi di 1). ■

## 2. Secondo teorema di caratterizzazione mediante la derivata seconda

#Teorema

**Teorema** (di caratterizzazione mediante la derivata seconda).

Sia  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  *derivabile* ([Definizione 4 \(derivabilità di una funzione\)](#)).

Allora

$$f \text{ convessa} \iff f' \text{ crescente} \iff \forall x_0 \in I, f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \leq f(x)$$

#Corollario

**Corollario** (di caratterizzazione mediante il segno della derivata seconda).

Sia  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in C^2$  ([Definizione 2 \(classe C di una funzione reale\)](#)); ovvero  $f$  derivabile fino al *secondo ordine*  $f''$ .

Allora

$$f \text{ convessa} \iff f' \text{ crescente} \iff f''(x) > 0, \forall x \in I$$

Questo è un teorema "se e solo se" (per le prime due condizioni), quindi si mira a mostrare [entrambi](#) i versi della doppia implicazione.

" $\Leftarrow$ ". Sia  $f'$  [crescente](#).

Allora prendo  $x_1, x_2, x_3 \in I : x_1 < x_2 < x_3$ .

Uso il [teorema di Lagrange](#) ([Teorema 1](#) (di Lagrange)) sull'intervallo  $[x_1, x_2]$  e  $[x_2, x_3]$ ; allora esistono  $\xi_1, \xi_2$  tali che

$$\begin{cases} \exists \xi_1 \in (x_1, x_2) : \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi_1) \\ \exists \xi_2 \in (x_2, x_3) : \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = f'(\xi_2) \end{cases}$$

Però le condizioni di  $\xi_{1,2}$  prescrivono che dev'essere vera

$$x_1 < \xi_1 < x_2 < \xi_2 < x_3 \implies \xi_1 < \xi_2$$

Allora dato che  $f'$  è [crescente](#), si ha

$$\xi_1 < \xi_2 \implies f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$$

Pertanto

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}, \forall x_1 < x_2 < x_3 \in I$$

che è esattamente la [condizione di convessità](#).

" $\implies$ ". Sia  $f$  [convessa](#).

Prendendo un [qualsiasi](#) punto  $x_\xi$  tra  $x_1, x_2$  notiamo che per la [condizione di convessità](#) la [pendenza](#) tra  $x_\xi, x_2$  sarà [sempre](#) più piccola della pendenza di  $x_2$ .

Allora graficamente ([figura 2.1.](#)) si evince che

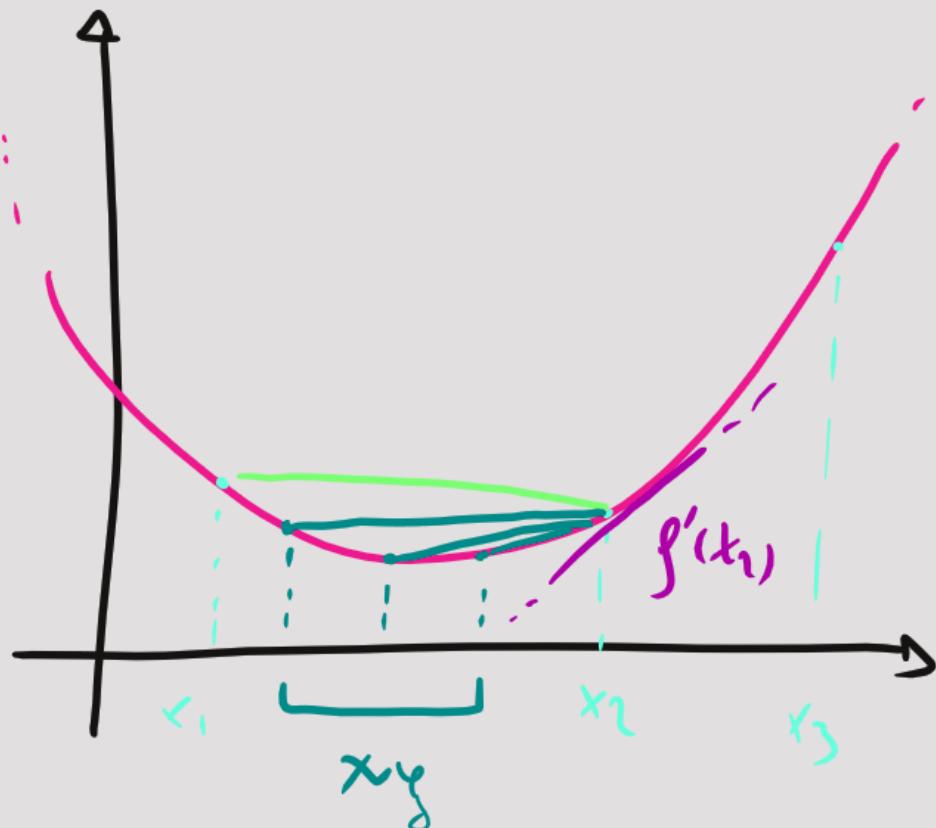
$$x_1 < x_2 \implies f'(x_1) \leq f'(x_2)$$

Analogamente si dimostra che

$$x_2 < x_3 \implies f'(x_2) \leq f'(x_3) \blacksquare$$

Invece la terza implicazione, ovvero che per ogni [tangente](#) del punto  $x_0$  sta sempre sotto il grafico, deriva dalla [condizione sulle pendenze](#) ([Teorema 1](#) (di caratterizzazione mediante le rette)) e dal [teorema di Lagrange](#) ([Teorema 1](#) (di Lagrange)).

**FIGURA 2.1.** ([Idea grafica della dimostrazione dell'implicazione  \$\implies\$](#) )



### #Osservazione

Osservazione (interpretazione grafica alternativa, approfondimento personale).

Approfondimento personale tratto da: *Le Matematiche di A. D. Aleksandrov, A. N. Kolmogorov, M. A. Lavrent'ev (1974)*

Volendo si può dare una interpretazione grafica al fatto che la *il segno della derivata prima* attribuisce la *concavità* o la *convessità* di una funzione; però prima consideriamo il fatto che *il segno della derivata prima* determina la *crescenza* o la *decrescenza* della funzione.

Per esempio prendiamo una funzione con derivata *sempre* positiva: pertanto è crescente e può avere due possibili curve (escludendo la rettilinea) raffigurate in *figura 2.2..*

Se vogliamo capire come si comporta la curva, basta pensare che la *derivata della derivata* non è altro che il *"verso"* per cui cresce (o scende) la derivata stessa!

A sinistra del disegno, muovendoci lungo la curva vediamo che la *derivata della funzione continua a man mano incrementare*; si muove quindi verso l'*alto*. Pertanto si dice che la funzione è *"convessa verso il basso"* o *"concava verso l'alto"*.

A destra, invece, si avrebbe che la *derivata* continua a decrescere fino a (quasi) appiattirsi completamente; si muove quindi verso il "basso", suggerendoci così la nozione di "*convessa verso l'alto*" o "*concava verso il basso*".

288

Analogamente questo ragionamento vale lo stesso per le funzioni decrescenti con derivata di segno negativo.

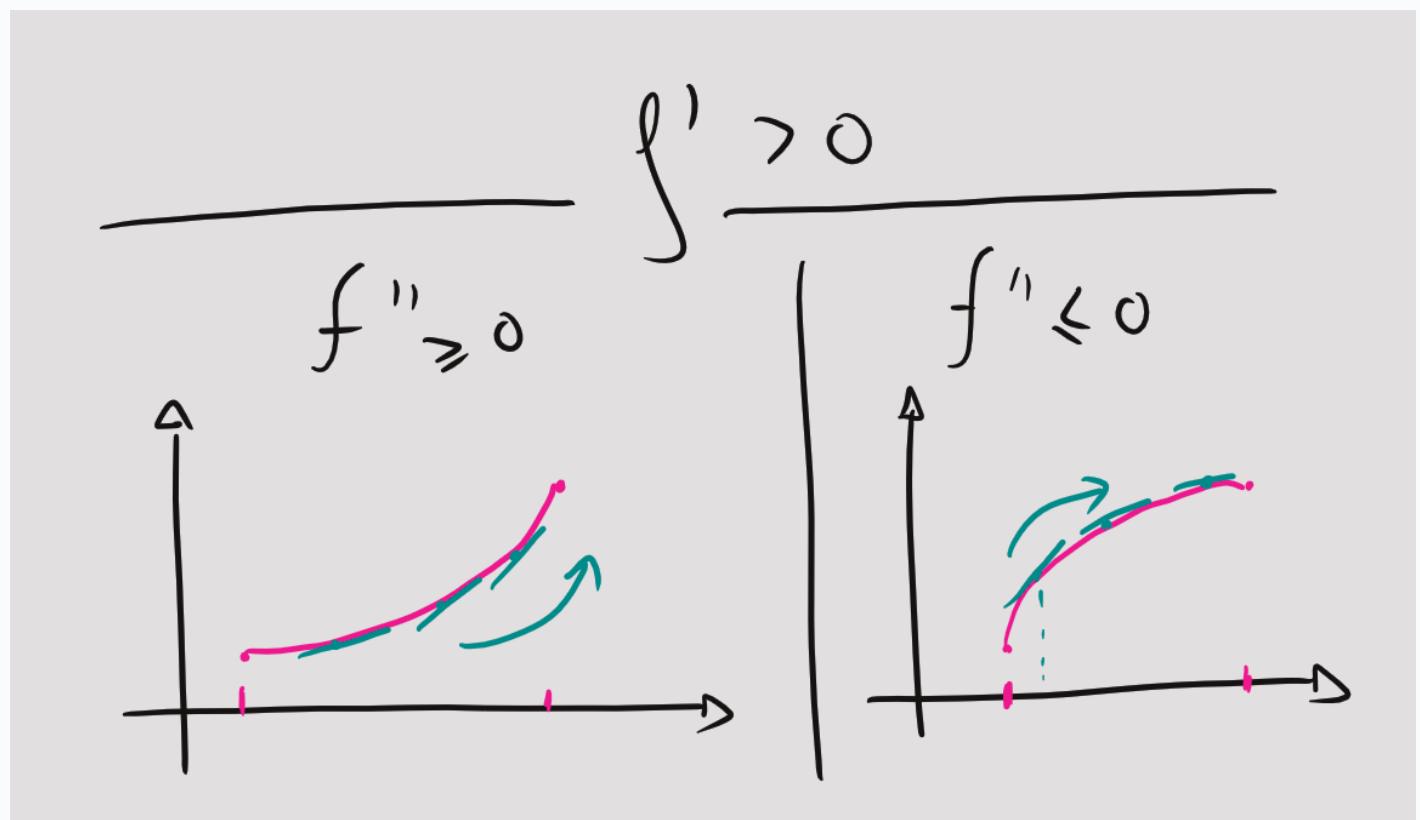
Pertanto, il segno della derivata seconda *determina* il modo in cui si sviluppa la curva della funzione.

'La derivata seconda ha anche un semplice significato geometrico.

[...], così dal segno si può giudicare da quale parte si incurva il grafico della funzione.

Supponiamo, per esempio, che in un dato intervallo la derivata seconda sia ovunque positiva; [...]. Pertanto, muovendoci lungo la curva questa si incurva costantemente dalla stessa parte, precisamente verso l'alto, ed è pertanto, come si dice, "*convessa verso il basso*". Viceversa, in una parte della curva dove la derivata seconda sia negativa [...] il grafico della funzione è "*convesso verso l'alto*"' - riferimento bibliografico all'inizio, pp. 134-136

**FIGURA 2.1.** (*Interpretazione grafica alternativa*)



## Punto di flesso

#Definizione

Definizione (punto di flesso).

Sia  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ .

Sia  $x_0 \in I$ ; supponiamo che  $f$  sia continua in  $x_0$ .

Allora  $x_0$  si dice **punto di flesso** se si verificano entrambe le condizioni:

$$\begin{cases} x_0 \in I \cap (-\infty, x_0), f \text{ è convessa (concava)} \\ x_0 \in I \cap (x_0, +\infty), f \text{ è concava (convessa)} \end{cases}$$

### #Osservazione

Osservazione (Osservazione 2.1.).

Se  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  derivabile fino al **secondo ordine**, e supponendo che **prima di**  $x_0$  si ha  $f''(x_0) \leq 0$  e **dopo di**  $x_0$  si ha  $f''(x_0) \geq 0$ , allora  $x_0$  è di **flesso**. Vale lo stesso se si ha il viceversa.

## C4. Modelli scelti di problemi sulle derivate

### Modelli di problemi su derivate

*Esempi di problemi con le derivate.*

## 1. Problema delle tangenti di un punto

### trovare la tangente di un punto di una funzione

Sia  $f$  una **funzione derivabile** (Definizione 3 (derivabilità in un punto)) in un punto  $x_0$ . Dato che è **derivabile** nel punto  $x_0$ , allora dev'esserci una tangente su quel punto. Quindi, supponiamo che il nostro problema è di quello **trovare** la retta  $r$  che definisce la **tangente** sul punto  $x_0$ .

1. Impostiamo la retta come

$$r : y = mx + q$$

2. Naturalmente il valore  $m$  è la derivata di  $f$  nel punto  $x_0$ ; pertanto  $m = f'(x_0)$ .
3. Poi per definizione la retta tangente  $r$  passa per il punto  $(x_0, f(x_0))$ ; facendo i conti ottengo

$$q = f(x_0) - f'(x_0)x_0$$

$$r : y = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)(x_0)$$

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

## 2. Ortogonalità della retta tangente di un cerchio e raggio del cerchio

*Omessa.*

## 3. Problemi di massimo e/o minimo

### ❖ problema di massimo e/o minimo

Suppongo di avere  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , che sia *continua* (Definizione 2 (Funzione continua per un punto)), che sia derivabile (*almeno*) su  $]a, b[$ .

1.  $f$  ha minimo e/o assoluto? Sì, per il *teorema di Weierstraß* (Teorema 15 (di Weierstraß))
2. Dove si trovano questi punti di massimo e/o minimo assoluto? Usiamo il *teorema di Fermat* (Teorema 1 (di Fermat)) per costruire *l'insieme dei punti stazionari* unito agli "*estremi*"  $P$  dove

$$P = \{x \in ]a, b[ \mid f'(x) = 0\} \cup \{a, b\}$$

3. Come faccio ad individuare gli effettivi  $\max, \min$  di  $f$ ? Basta prendere  $\max(f(P))$  e  $\min(f(P))$ .

## 4. Approssimazione delle funzioni in certi valori

### ❖ approssimazione delle funzioni

Suppongo di avere una funzione  $f$  derivabile (*almeno*)  $n + 1$  volte, e di voler trovare il valore di una sua immagine. Ad esempio  $f(k)$ : ora non voglio trovare il suo valore *esatto*, ma solo una sua *approssimazione* con un errore inferiore a  $10^{-n}$ .

1. Considerare il *polinomio di Taylor* (Definizione 2.1. (polinomio di Taylor))  $T_n(f, x_0, x)$  per un  $n$  *generico* (ovvero incognita) e  $x_0$  opportuno.
2. Considerare la "*distanza*" tra la funzione  $f$  stessa (inserita col valore voluto  $k$ ) e il polinomio di Taylor calcolato in  $k$   $T_n(f, x_0, k)$ .
3. Maggiorare il *resto di Lagrange* per un certo valore; ovvero trovare un valore che "*limita*" il resto; l'idea di base sarebbe quello di "*stimare il resto (l'errore)*",

$$\frac{f(\xi)}{k!} (k - x_0)^k$$

4. Tentare di inserire  $n$  finché si ottiene che il resto è *minore* di  $10^n$ .
5. Quando ho trovato  $\bar{n}$  che soddisfa le mie esigenze, calcolo il polinomio di Taylor

$$T_{\bar{n}}(f, x_0, x)$$

Che è il risultato voluto dalla consegna.

## Abstract del Capitolo VII

Il *calcolo integrale* è il *traguardo finale* dell'analisi matematica: studieremo i cosiddetti *integrali*, che potrebbero essere stati accennati al liceo.

Questi argomenti faranno certamente paura, in quanto sia a livello *teorico* che *pratico* saranno molto complessi da maneggiare. Tuttavia tenteremo di avere un approccio "*semplice*" al concetto dell'integrale, partendo dall'*integrazione di Riemann*.

## 0A. La suddivisione di un intervallo

### Suddivisione di un Intervallo

Breve descrizione qui

## 0. Prerequisiti e/o concetti correlati

- Nozione di intervallo: [Intervalli](#)
- Operazioni tra insiemi: [Operazioni con gli Insiemi](#)

## 1. Definizione di Suddivisione di un Intervallo

#Definizione

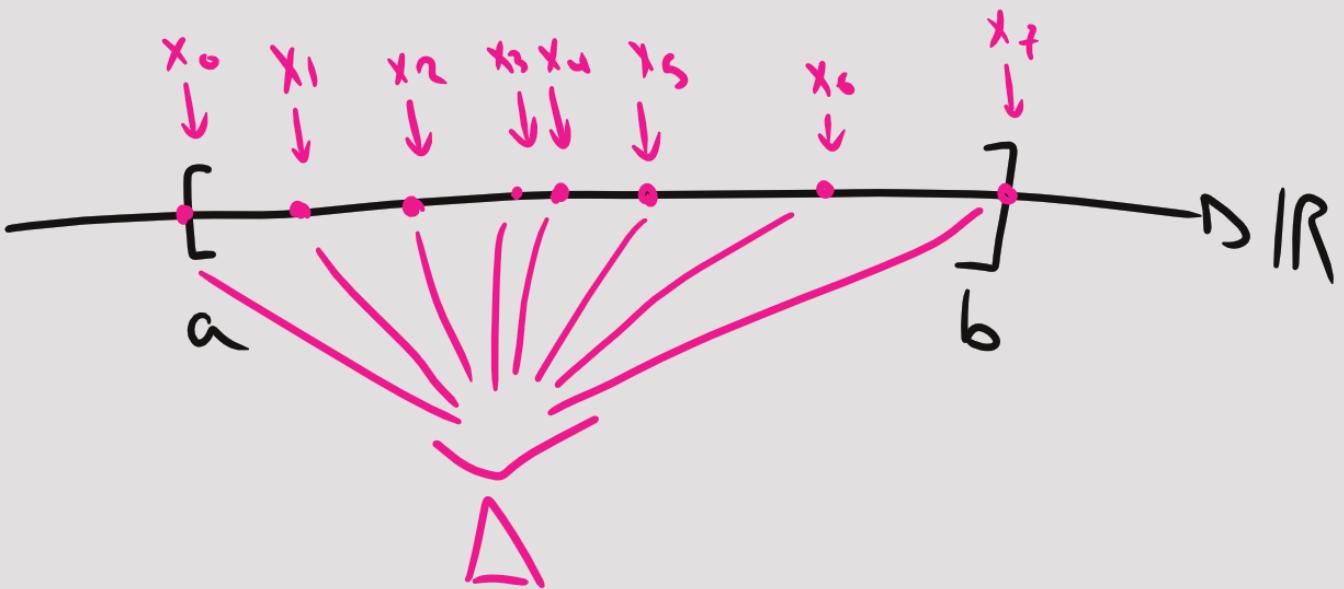
Definizione (suddivisione di un'intervallo chiuso e limitato).

Sia  $[a, b]$  un *intervallo chiuso e limitato* ([Definizione 1 \(intervalli limitati\)](#)), chiamo la *suddivisione* di  $[a, b]$  un *insieme finito di punti* dentro  $]a, b[$  che contiene sia  $a$  che  $b$ . Lo denotiamo con il simbolo  $\Delta$  e lo definiamo formalmente come

$$\Delta = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$$

L'idea grafica viene raffigurata nella [figura 1.1..](#)

**FIGURA 1.1.** (*Concetto grafico di suddivisione*)



#Definizione

Indico l'insieme di *tutte le suddivisioni* di  $[a, b]$  con

 $\mathcal{D}$ 

## 2. Relazioni tra le suddivisioni

#Definizione

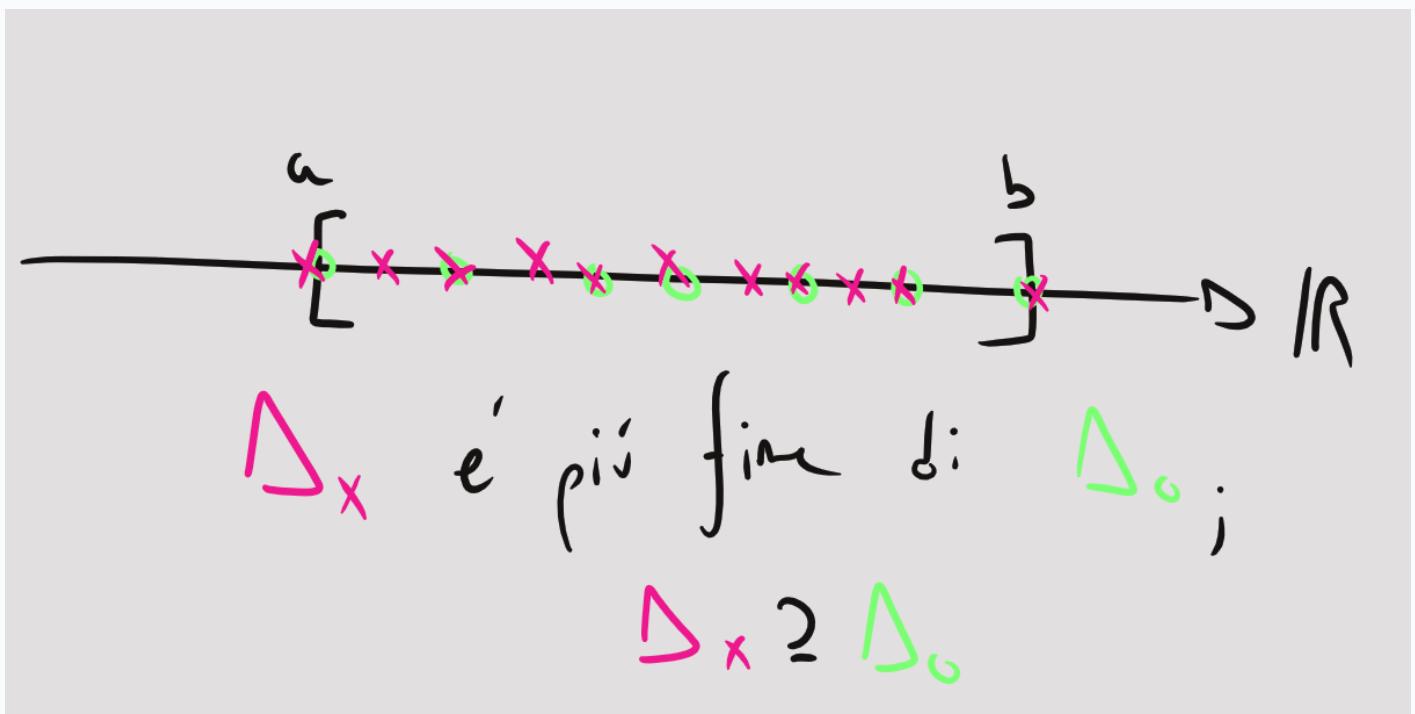
Definizione (finezza della suddivisione).

Siano  $\Delta_1, \Delta_2$  delle *suddivisioni*, dico che la suddivisione  $\Delta_1$  è *più fine* di  $\Delta_2$  se vale la seguente relazione:

$$\Delta_1 \supseteq \Delta_2$$

L'idea grafica viene raffigurata nella *figura 2.1.*

**FIGURA 2.1.** (Concetto grafico della finezza)



**TRUCCO MNEMONICO.** Come "trucchetto mnemonico" si può "trasformare" il simbolo di *essere contenuto in* a *essere minore* di; ovvero  $\Delta_1$  è più fine di  $\Delta_2$  se  $\Delta_1 \supseteq \Delta_2$ , ovvero  $\Delta_1 \supseteq \Delta_2$ . Infatti l'idea di base della *finezza* consiste nel fatto che una suddivisione ha "*più elementi*" (anche se non necessariamente) dell'altra. Inoltre si vede che i simboli  $\supseteq, \supseteq$  sono *graficamente* "simili".

#Osservazione

Osservazione (l'insieme delle suddivisioni è un reticolo).

Supponiamo di avere *due suddivisioni*  $\Delta_A$  e  $\Delta_B$ ; nessuna di queste due dev'essere più fine dell'altra (ad esempio potrebbe avere elementi diversi). Possiamo comunque prendere una *suddivisione più fine* tra le due? Invece la *suddivisione meno fine*?

La risposta è sì, se consideriamo l'*unione* e l'*intersezione* tra queste due suddivisioni: prendendo "*l'unione*" comprendi tutti gli elementi sia di  $\Delta_A$  che di  $\Delta_B$ ; quindi  $\Delta_{A \cup B}$  è necessariamente *più fine* di entrambe.

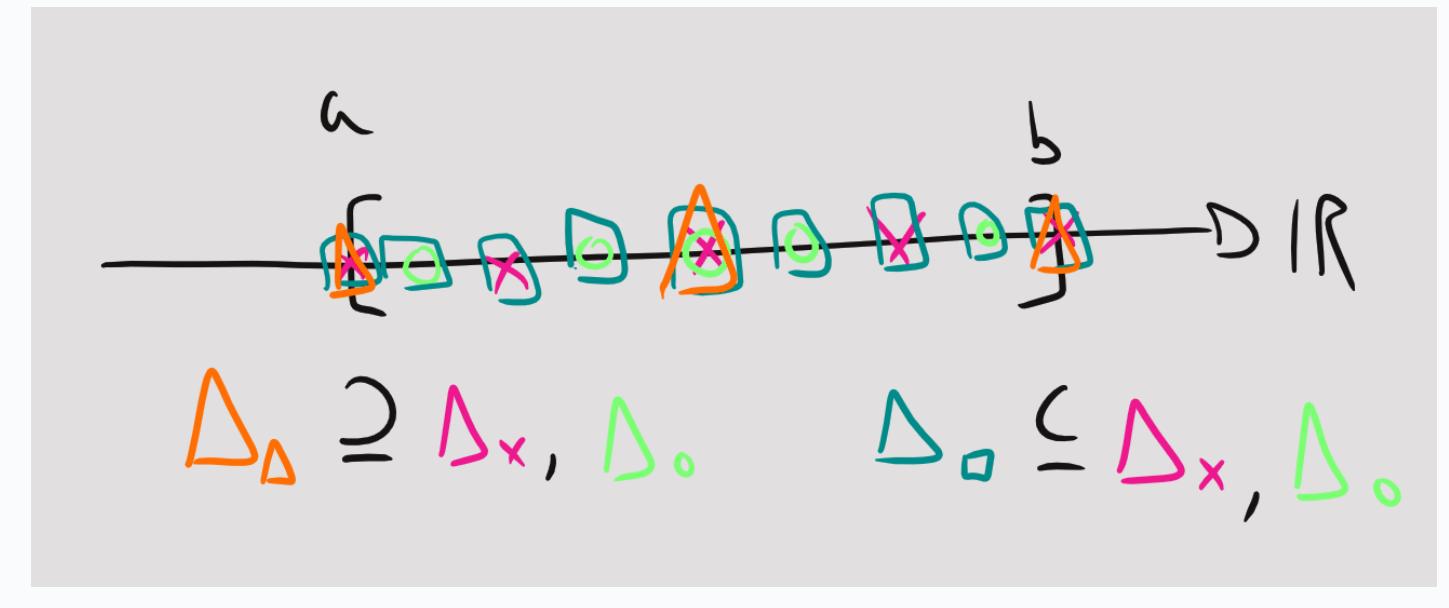
Per quanto riguarda invece *l'intersezione*, questa prende *solo* gli elementi in comuni: ovvero, nel "*caso peggiore*" si prenderebbero solo gli estremi  $a, b$ . Allora in questo caso *entrambe* le suddivisioni  $\Delta_A, \Delta_B$  sono più fine di  $\Delta_{A \cap B}$ .

Riassumendo, abbiamo

$$\boxed{\Delta_{A \cup B} \supseteq \Delta_A, \Delta_B \quad \Delta_A, \Delta_B \supseteq \Delta_{A \cap B}}$$

Infatti si può dire che le *relazioni tra le suddivisioni*  $\Delta$  determina il fatto che *l'insieme delle suddivisioni*  $\mathcal{D}$  forma un *reticolo* (da approfondire, [Reticolo](#)). L'idea di questa osservazione viene raffigurata nella *figura 2.2..*

**FIGURA 2.2.** (*L'idea delle relazioni tra suddivisioni*)



## 0B. La somma inferiore e superiore

### Somma inferiore e superiore per una Funzione

*Definizione di somma inferiore e superiore per una funzione relativa ad una suddivisione; osservazioni preliminari per l'integrazione secondo Riemann.*

- Suddivisione di un Intervallo
- Integrabilità secondo Riemann

## 1. Definizione di somma inferiore e superiore

#Definizione

Definizione (somma inferiore per una funzione relativa ad una suddivisione).

Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  limitata (ovvero l'immagine  $f([a, b])$  è limitata).

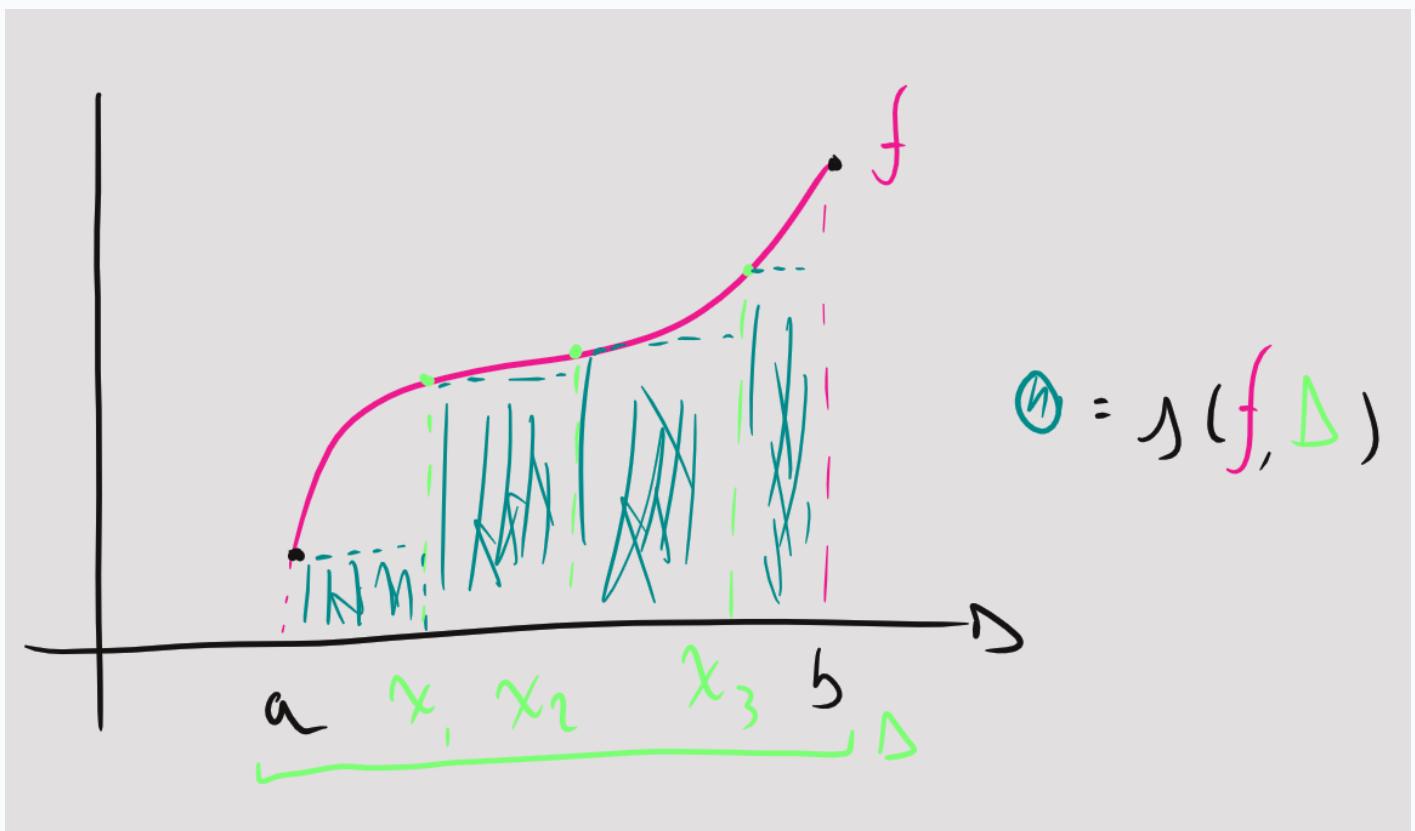
Prendo una suddivisione (Definizione 2 (l'insieme di tutte le suddivisione)) qualsiasi  $\Delta$ .

Chiamo la somma inferiore per  $f$  relativa a  $\Delta$  come il seguente:

$$s(f, \Delta) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

Ovvero graficamente (figura 1.1.) questa significa la somma delle aree di tutti i rettangolini composti dai punti della suddivisione; ovvero la prima parte  $x_i - x_{i-1}$  vuol semplicemente dire la base del rettangolino; invece  $\inf f(x)$  è l'altezza "approssimata per difetto".

**FIGURA 1.1.** (Concetto grafico di somma inferiore)



#Definizione

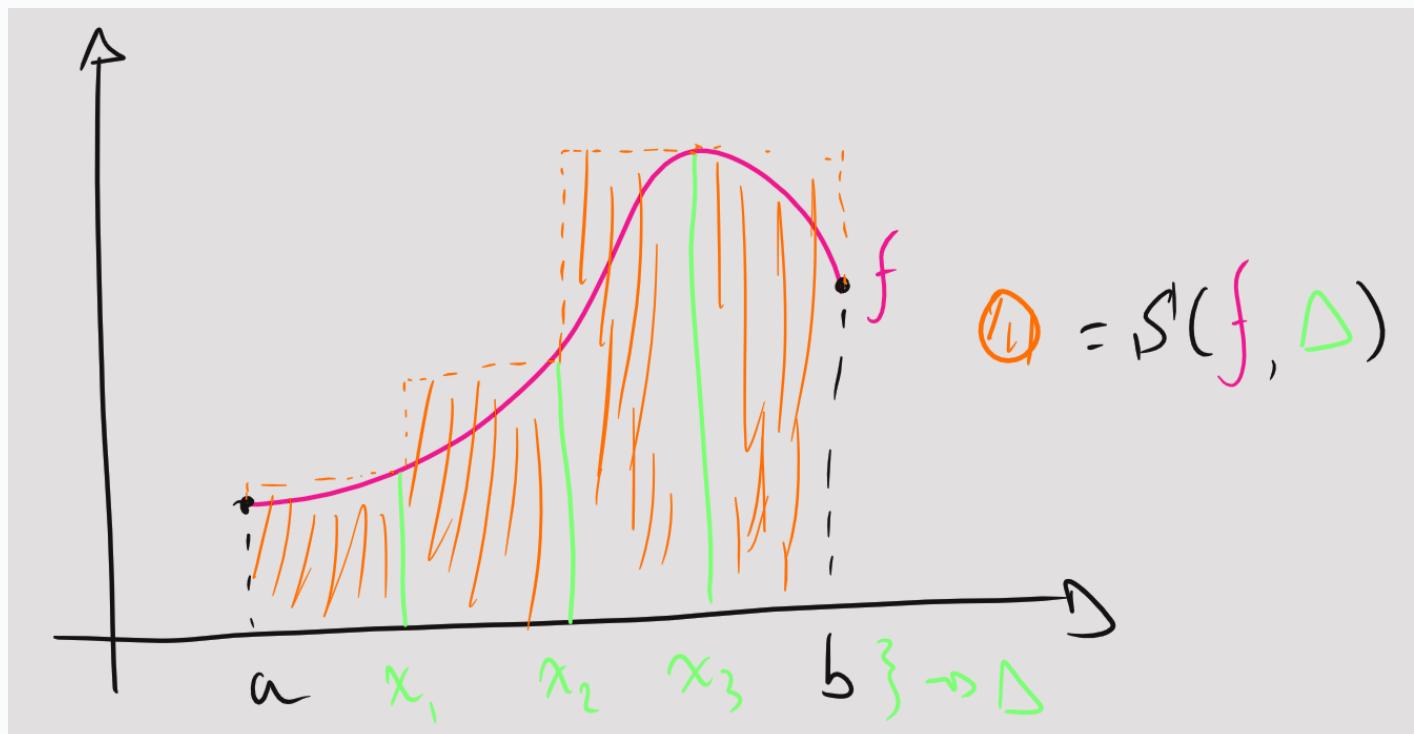
Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  limitata, sia  $\Delta$  una suddivisione del dominio.

Analogamente alla definizione della somma inferiore per  $f$  relativa a  $\Delta$

(Definizione 1 (somma inferiore per una funzione relativa ad una suddivisione)), definisco la somma superiore per  $f$  relativa a  $\Delta$  come la stessa, solo che al posto di "approssimare" per difetto prendendo inf, approssimo per eccesso prendendo sup;

$$S(f, \Delta) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

**FIGURA 1.2.** (Idea grafica della somma superiore)



## 2. Osservazioni sulle somme superiori e inferiore

Queste osservazioni vengono effettuate al fine di comprendere meglio il concetto di integrabilità secondo Riemann (Integrabilità secondo Riemann).

Come "presupposto" di queste osservazioni facciamo la seguente:

#Osservazione

Osservazione (prima osservazione).

Ogni volta che prendo una suddivisione  $\Delta \in \mathcal{D}$ , posso calcolare sia la somma superiore  $S(f, \Delta)$  ed inferiore  $s(f, \Delta)$  relativa ad essa; ci poniamo le seguenti domande. (osservazioni 2.2., 2.3., 2.4.)

#Osservazione

Qual è la relazione tra  $s(f, \Delta)$  e  $S(f, \Delta)$ ?

Dato che sia la *somma inferiore* e *superiore* sono definiti dalla stessa "base"  $x_i - x_{i-1}$ , allora l'unica parte per cui differiscono è "*l'altezza*"; da un lato abbiamo  $\inf f$  e dall'altro abbiamo  $\sup f$ .

Ma allora, per definizione un *estremo inferiore* di  $f$  è sempre più piccolo di qualsiasi valore di  $f$ , incluso l'*estremo superiore* di  $f$  che a sua volta è più grande di qualsiasi valore di  $f$ .

Allora si evince che

$$s(f, \Delta) \leq S(f, \Delta)$$

Lo stesso vale anche se abbiamo funzioni che hanno *valori negativi*, in quanto le aree "*contano negativamente*".

#### #Osservazione

Osservazione (la somma inferiore e superiore di suddivisioni più fini).

Osserviamo che aggiungendo ad una qualsiasi suddivisione  $\Delta$  un elemento questa diventa più *fine* ([Definizione 3 \(finezza della suddivisione\)](#)), in quanto stiamo sostanzialmente facendo una unione di un elemento con un insieme.

Allora supponendo  $\Delta_1 \supseteq \Delta_2$ , ci chiediamo quale sia la relazione tra le loro *somme inferiori*.

Possiamo ragionare *graficamente* (figura 2.3.): aggiungendo un "*pezzo di suddivisione*" in più, abbiamo una specie di nuovo "*contributo*" da parte di questo elemento aggiunto.

Allora si evince che

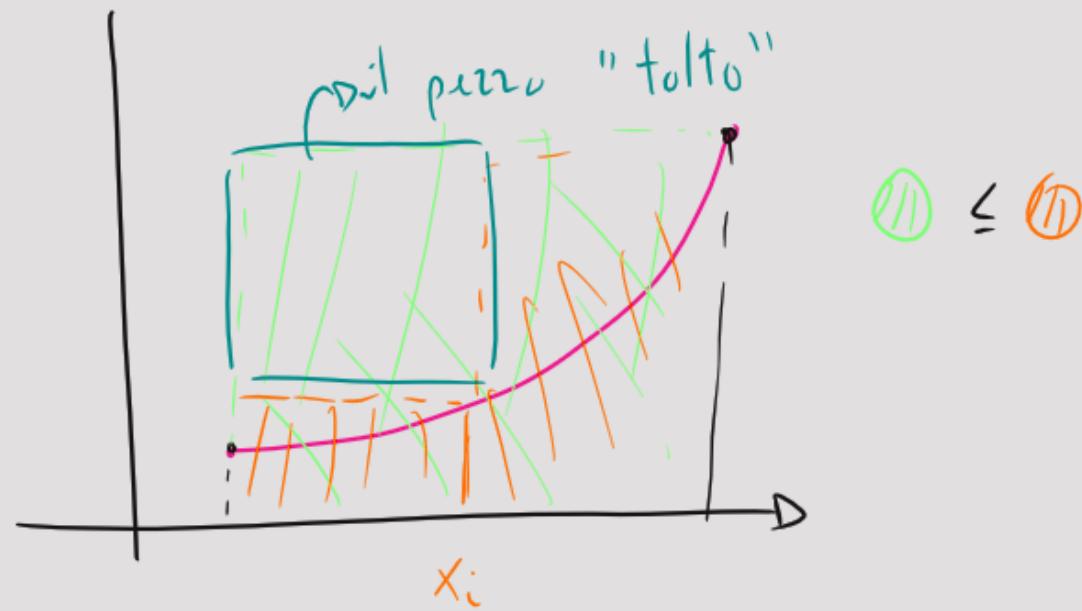
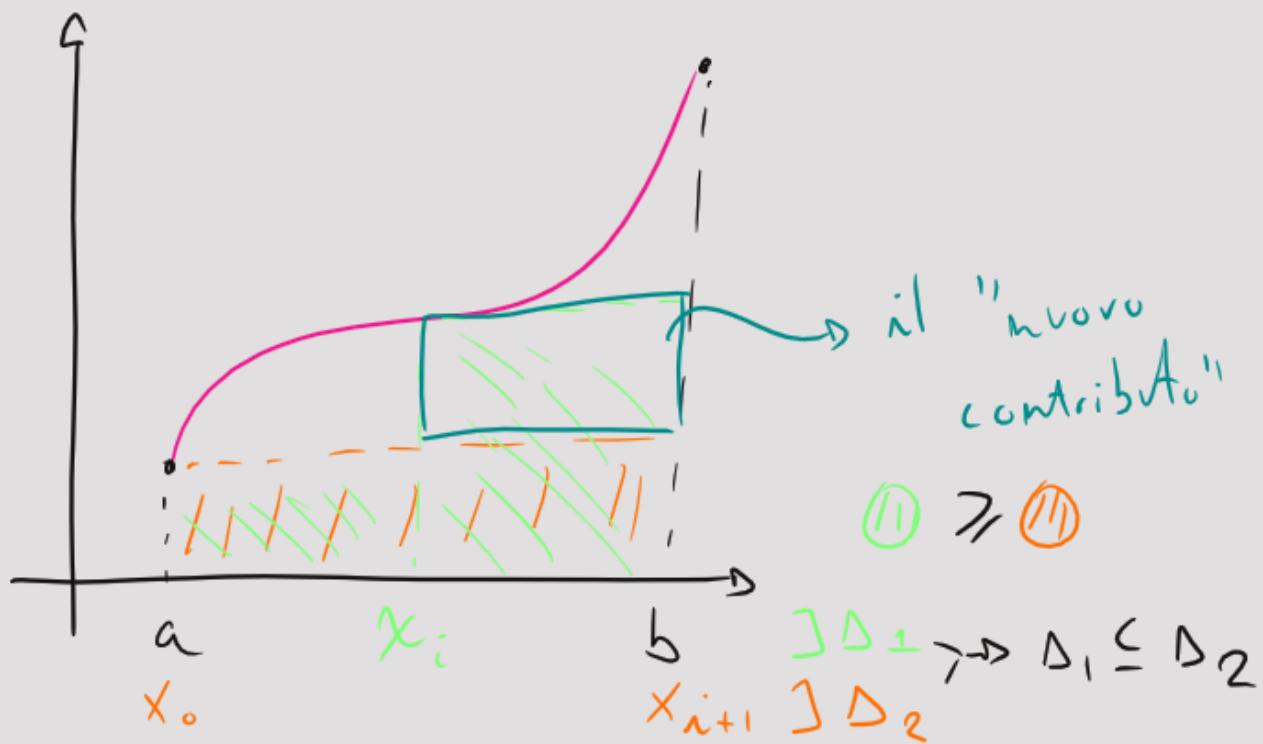
$$s(f, \Delta_1) \geq s(f, \Delta_2)$$

Analogamente si evince pure che

$$S(f, \Delta_1) \leq S(f, \Delta_2)$$

in quanto abbiamo dei "*pezzettini*" tolti (figura 2.3.).

**FIGURA 2.3.** (*Idea grafica delle somme superiori inferiori di suddivisioni più fini delle altre*)



### #Osservazione

Osservazione (la relazione tra somma inferiore e superiore di suddivisioni qualsiasi).

Siano  $\Delta_1, \Delta_2$  delle *suddivisioni* qualsiasi.

Quale sarà mai la relazione tra la *somma inferiore* per  $\Delta_1$  e la *somma superiore* per  $\Delta_2$ ;

$$s(f, \Delta_1) ? S(f, \Delta_2)$$

Intuitivamente si può pensare che la *somma inferiore* sarà sempre piccola di una *somma superiore* per suddivisioni qualsiasi; infatti la somma superiore *"contiene"* sempre la *somma inferiore* (figura 2.4.).

Infatti questa sembra una sorta di "*panino*", dove le linee delineate dalla somma superiore è la fetta di pane superiore; la parte in mezzo la carne; la parte sotto

Infatti, ricordandoci delle osservazioni fatte sulle *suddivisioni* (Osservazione 4 (l'insieme delle suddivisioni è un reticolo)) possiamo prendere *l'unione* delle suddivisioni, maggiorarlo per la *suddivisione inferiore* di  $\Delta_1$ , poi maggioriamo a sua volta l'unione con la *somma superiore* dell'unione (per osservazione 2.2). Osservazione 4 (la somma inferiore è sempre più piccolo della somma superiore), che a sua volta la maggioriamo con la *somma superiore* di  $\Delta_2$  (osservazione 2.3., Osservazione 5 (la somma inferiore e superiore di suddivisioni più fini)).

Ovvero, in termini matematici questo equivale a

$$s(f, \Delta_1) \leq s(f, \Delta_1 \cup \Delta_2) \leq S(f, \Delta_1 \cup \Delta_2) \leq S(f, \Delta_2)$$

Quindi, alla fine possiamo affermare che la *somma inferiore* di una qualsiasi suddivisione è *sempre minore o uguale* di una *somma superiore* di un'altra qualsiasi suddivisione. Ovvero la seguente proposizione.

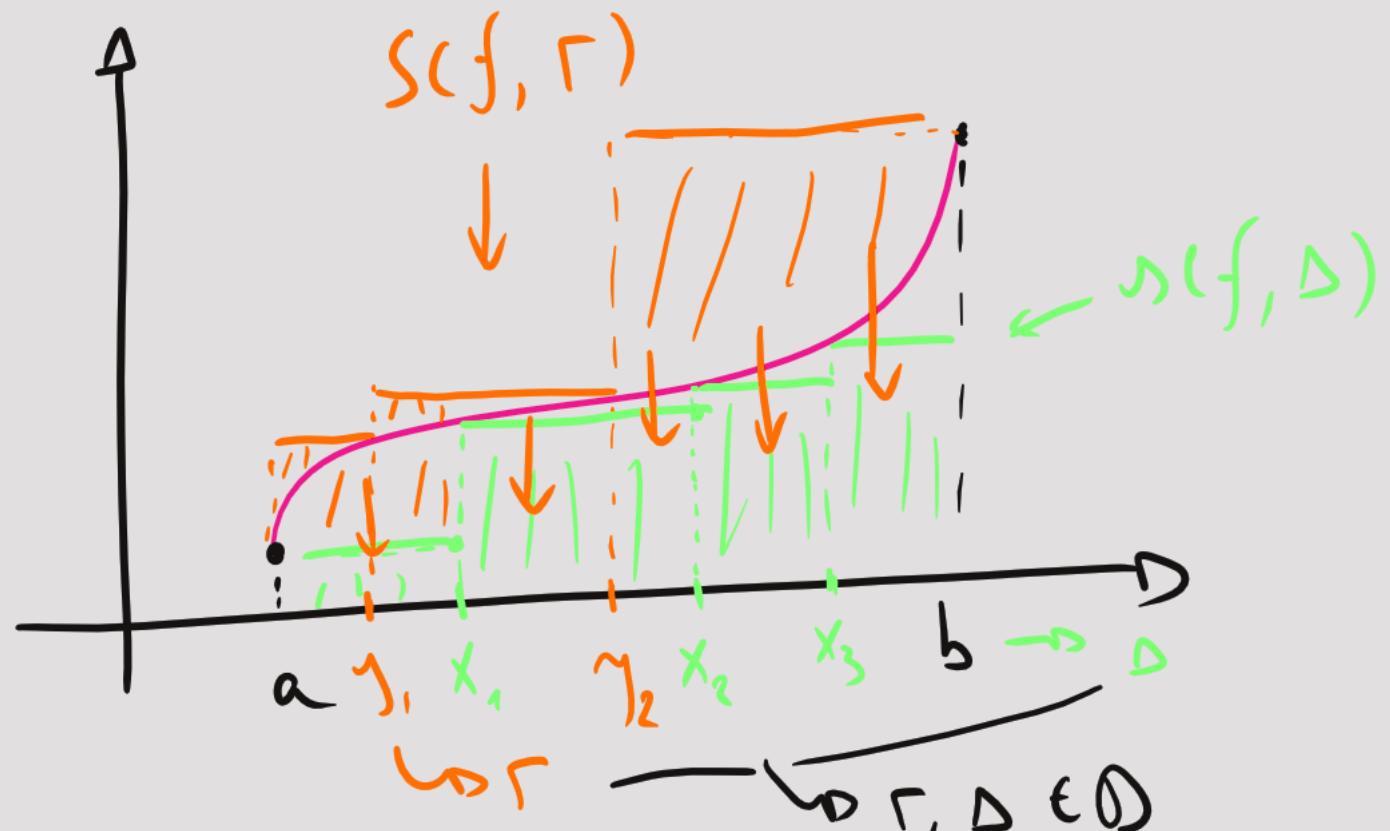
#### #Proposizione

**Proposizione** (relazione tra somma inferiore e superiore).

Se  $f$  è *limitata*, allora le *somme inferiore* sono sempre *minori o uguali* alla somma *superiore*.

$$\sup_{\Delta \in \mathcal{D}} s(f, \Delta) \leq \inf_{\Gamma \in \mathcal{D}} S(f, \Gamma)$$

**FIGURA 2.4.** (*Intuizione grafica della proposizione 2.1.*)



## A1. L'integrabilità secondo Riemann

### Integrabilità secondo Riemann

*Definizione di funzione integrabile secondo Riemann; teorema di caratterizzazione di funzione integrabile: enunciato e dimostrazione.*

## 0. Prerequisiti e/o voci correlate

- Somma inferiore e superiore per una Funzione
- Esempi di Funzioni Integrabili
- Tipologie di Funzioni Integrabili

## 1. Definizione di Integrabilità secondo Riemann

#Definizione

Definizione (integrabilità di una funzione secondo Riemann).

Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  *limitata*.

Si dice che  $f$  è "*integrabile secondo Riemann*" se vale che

$$\sup_{\Delta \in \mathcal{D}} s(f, \Delta) = \inf_{\Gamma \in \mathcal{D}} S(f, \Gamma)$$

#Definizione

Definizione (integrale di Riemann di una funzione su un intervallo).

!Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  *integrabile secondo Riemann*.

Allora il valore per cui vale la relazione di definizione

$$\sup_{\Delta \in \mathcal{D}} s(f, \Delta) = \inf_{\Gamma \in \mathcal{D}} S(f, \Gamma)$$

Io chiamo *integrale di Riemann di f sull'intervallo*  $[a, b]$  e lo denoto come

$$\sup_{\Delta \in \mathcal{D}} s(f, \Delta) = \inf_{\Gamma \in \mathcal{D}} S(f, \Gamma) = \int_{[a,b]} f = \int_a^b f(x) dx$$

#Definizione

Indico l'*insieme delle funzioni integrabili secondo Riemann sull'intervallo*  $[a, b]$  con la seguente notazione

$$\mathcal{R}([a, b])$$

## 2. Teorema di caratterizzazione delle funzioni integrabili

#Osservazione

Osservazione (la necessità di una strategia per verificare l'integrabilità).

Notiamo che secondo la nostra *definizione* dell'integrabilità di una funzione, diventa molto difficile verificare se delle funzioni  $f$  siano effettivamente *integrabili* o meno; infatti bisogna fare delle *verifiche infinite* per vedere se l'estremo superiore delle somme inferiori coincide effettivamente con l'estremo inferiore delle somme superiori.

Allora si propone il seguente teorema per "semplificarsi" la vita trovando un modo per raggiungere questi "*calcoli infiniti*".

#Teorema

**Teorema** (condizione necessaria e sufficiente per l'integrabilità secondo Riemann).

Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  *limitata*.

Allora  $f$  è *integrabile secondo Riemann* se e solo se vale che

$$\boxed{\begin{aligned} &\forall \varepsilon > 0, \exists \Delta \in \mathcal{D} : \\ &S(f, \Delta) - s(f, \Delta) < \varepsilon \end{aligned}}$$

Ovvero, per ogni  $\varepsilon$  piccolo a piacere possiamo trovare una *suddivisione*  $\Delta$  tale che la differenza tra la *somma superiore* e la *somma inferiore* di  $f$  relativa a  $\Delta$  è minore di  $\varepsilon$ ; ovvero la somma delle "*aree intermedie*" diventa piccolo a piacere. Questo ci ricorda infatti la nozione di *limite* secondo *Cauchy* (**Definizione 9 (limite infinito di una funzione all'infinito)**): abbiamo un valore *piccolo a piacere* a cui dobbiamo associare un *valore*.

#Dimostrazione

**DIMOSTRAZIONE** del **teorema 2.1.** (Teorema 5 (condizione necessaria e sufficiente per l'integrabilità secondo Riemann))

" $\Rightarrow$ ": Supponiamo  $f$  *integrabile secondo Riemann*.

Allora esiste un valore reale

$$\sup s(f, \Delta) = \inf S(f, \Delta) = \int_{[a,b]} f = \int f \text{ (scrivo per compattezza)}$$

304

Allora, per la *seconda proprietà* dell'estremo superiore e inferiore ([Teorema 16 \(le proprietà dell'estremo superiore\)](#)), valgono che

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \exists \bar{\Delta} : \int f - \frac{\varepsilon}{2} < s(f, \bar{\Delta}) \\ \forall \varepsilon > 0, \exists \tilde{\Delta} : \int f + \frac{\varepsilon}{2} > S(f, \tilde{\Delta}) \end{cases}$$

Ma allora prendendo *l'unione delle due suddivisioni*  $\Gamma = \bar{\Delta} \cup \tilde{\Delta}$  vale che

$$\begin{cases} s(f, \Gamma) > s(f, \bar{\Delta}) > \int f - \frac{\varepsilon}{2} \\ S(f, \Gamma) < S(f, \tilde{\Delta}) < \int f + \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

Ora manipolo la prima espressione, moltiplicando per  $-1$ , per ottenere

$$-s(f, \Gamma) \cancel{< S(f, \bar{\Delta})} < -\int f + \frac{\varepsilon}{2}$$

Allora sommo  $-s(f, \Gamma) < -\int f + \frac{\varepsilon}{2}$  con  $S(f, \tilde{\Delta}) < \int f + \frac{\varepsilon}{2}$  per ottenere

$$S(f, \Gamma) - s(f, \Gamma) < \varepsilon$$

che è esattamente la *tesi*.

" $\Leftarrow$ ": (*Idea*) Supponiamo per assurdo che vale la *condizione di caratterizzazione* e che non valga la *tesi*; ovvero supponiamo che la *somma superiore* è sempre lontana dalla *somma inferiore*. Ovvero

$$\sup s(f, \Delta) < \inf S(f, \Gamma)$$

Ma allora basta fissare

$$\varepsilon = \frac{1}{4} (\inf s - \sup S)$$

Si vede che non ci sarà *mai* un  $\Delta \in \mathcal{D}$  che renda vera la *condizione di caratterizzazione*, che è un assurdo. ■

## A2. Esempi di funzioni integrabili secondo Riemann

### Esempi di Funzioni Integrabili

*Esempi di funzioni integrabili e non integrabili, corredato da calcoli.*

## 0. Prerequisiti e/o voci correlate

- Integrabilità secondo Riemann
- Tipologie di Funzioni Integrabili
- Esempi di Induzione / Assiomi di Peano, il principio di induzione
- Somma inferiore e superiore per una Funzione
- Limite di Successione / Esempi di Limiti di Successione
- Conseguenze dell'esistenza dell'estremo superiore

## 1. Integrabilità di alcune funzioni elementari

### Funzione costante

#Esempio

Esempio (funzione costante).

Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  la **funzione costante**  $x \mapsto c \in \mathbb{R}$ .

Allora, intuitivamente si può vedere la sua **area** sotto la "curva" (o linea retta) è semplicemente **base per altezza**, ovvero  $c \cdot (b - a)$  (**figura 1.1.**).

Però usiamo l'**integrazione di Riemann** (Definizione 2 (integrale di Riemann di una funzione su un intervallo)) per calcolare il suo **integrale**, ovvero l'**area**.

Calcolo dunque la sua **somma inferiore** (Definizione 1 (somma inferiore per una funzione relativa ad una suddivisione)) per una sua qualsiasi suddivisione:

$$s(f, \Delta) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot \inf f(x)$$

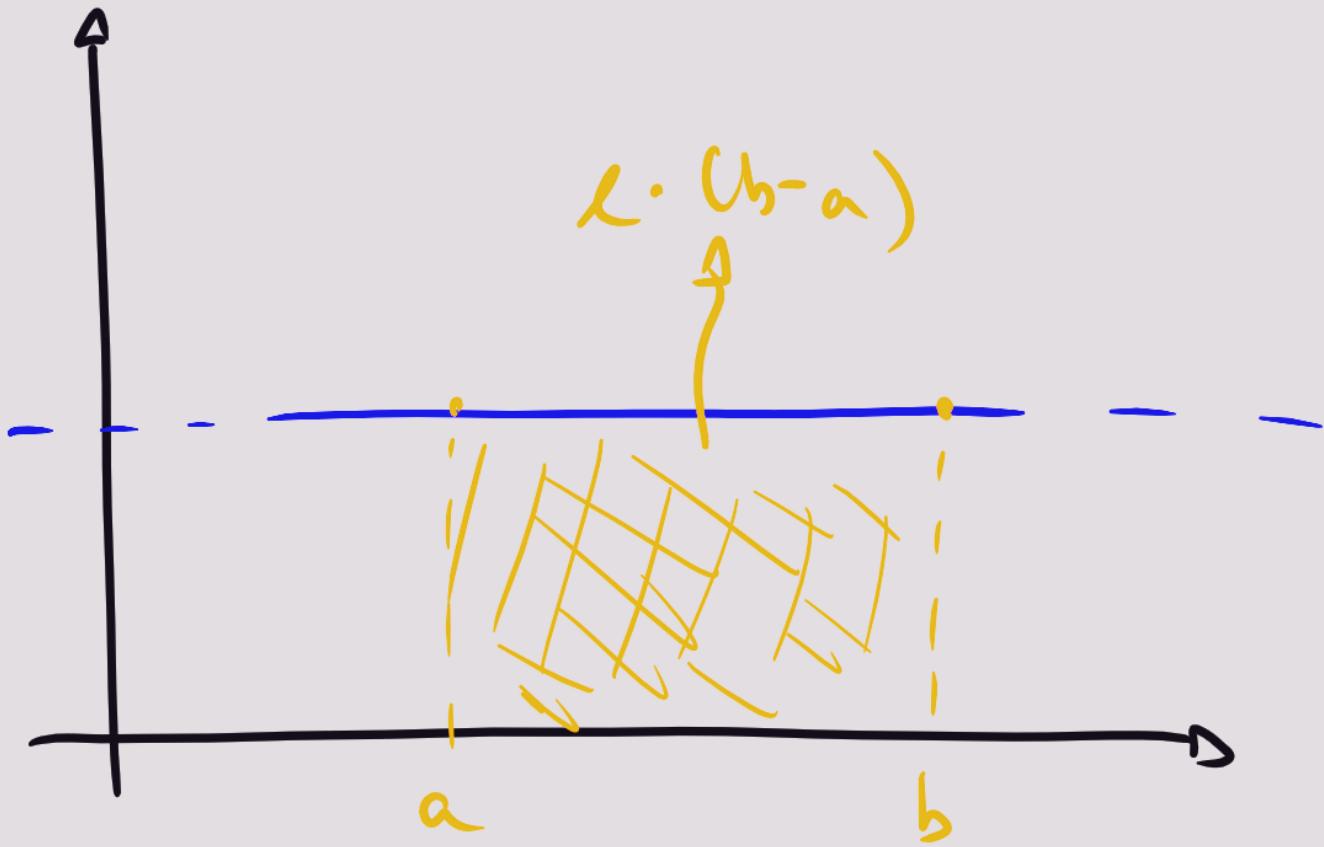
Però  $f(x)$  è limitata **solo** su  $c$ ; infatti  $f(x) = c$ . Allora ciò segue che

$$\begin{aligned} s(f, \Delta) &= \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot c = c \sum_{i=1}^n x_i - x_{i-1} \\ &= c \cdot [(x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \dots + (x_n - x_{n-1})] \\ &= c \cdot (x_n - x_0) = \boxed{c \cdot (b - a)} \end{aligned}$$

Facendo la stessa procedura, che è letteralmente la stessa, per la **somma superiore**  $S(f, \Delta)$  otteniamo lo stesso risultato.

Dunque,

$$\boxed{\int_a^b c \, dx = c(b - a)}$$



## Funzione identità

#Esempio

Esempio (funzione identità).

Sia  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  la **funzione identità**  $\text{id}(x) = x$ .

Allora anche qui si può intuire che l'**area sotto la retta** è l'**area di un triangolo**, ovvero **base per altezza diviso due**. Pertanto  $A = f(1)(1 - 0) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ .

Ora verifichiamo quest'affermazione secondo l'**integrazione di Riemann**.

Prendiamo una **suddivisione particolare**  $\Delta = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n} = 1\}$ .

Con tale suddivisione calcoliamo la **somma inferiore** e la **somma superiore**.

1. Somma inferiore

$$\begin{aligned}
 s(f, \Delta) &= \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \\
 &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n}\right) \cdot \left(\frac{i-1}{n}\right) \\
 &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n (i-1)
 \end{aligned}$$

2. Somma superiore (passi analoghi)

$$S(f, \Delta) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n i$$

Ma noi conosciamo una *proprietà della somma dei primi  $n$  numeri naturali*, ovvero

$$\sum_{x=1}^n x = \frac{n(n+1)}{2}$$

Naturalmente questa è dimostrabile per *induzione* ([Esempi di Induzione > ^d8e983](#)).

Allora prendiamo per buone le seguenti:

$$s(f, \Delta) = \frac{(n-1)(n)}{2n^2}; S(f, \Delta) = \frac{(n+1)(n)}{2n^2}$$

Sottraendo la somma superiore per la somma inferiore vediamo che questa risulta in

$$S - s = \frac{1}{n}$$

Ma per l'*archimedicità dei reali* ([Teorema 3 \(Archimedicità di  \$\mathbb{R}\$ \)](#)) sappiamo che è vera la seguente:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n : 0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

Quindi sicuramente la funzione identità è *integrabile secondo Riemann*.

Ora procediamo a calcolare l'integrale: consideriamo innanzitutto che per definizione l'integrale *deve* stare tra la *somma inferiore* e la *somma superiore* della funzione, ovvero

$$s(f, \Delta) \leq \int_{[0,1]} f(x) \leq S(f, \Delta)$$

Però prendendo i *limiti di successione* ([Definizione 3 \(limite di successione\)](#)) di  $s(f, \Delta)$  e  $S(f, \Delta)$  vediamo che entrambe *convergono* a  $\frac{1}{2}$ ; infatti

$$\lim_n \frac{(n-1)(n)}{2n^2} = \lim_n \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$$

Allora per il *teorema dei due carabinieri versione successione* ([Osservazione 5 \(i teoremi per i limiti di funzioni valgono anche per i limiti di successioni\)](#)), vale che anche *l'integrale* converge a  $\frac{1}{2}$ ; pertanto

$$\int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2}$$

## Funzione potenza quadrata

#Esempio

Esempio (funzione quadrato).

Sia  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$ .

Vogliamo calcolare l'integrale  $\int_0^1 f(x) \, dx$ .

Analogamente all'[esempio 1.3.](#), prendiamo la suddivisione

$$\Delta = \left\{ 0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n} = 1 \right\}$$

Ora calcoliamo la *somma inferiore* e *superiore*.

$$s(f, \Delta) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \cdot \left( \frac{i-1}{n} \right)^2 = \frac{1}{n^3} \cdot \sum_{i=1}^n (i-1)^2$$

$$S(f, \Delta) = \frac{1}{n^3} \cdot \sum_{i=1}^n i^2$$

Allora calcolando le loro *differenze* otteniamo il medesimo risultato  $\frac{1}{n}$ ; pertanto  $f(x) = x^2$  è *integrabile secondo Riemann*.

Adesso consideriamo la proprietà della *somma dei quadrati* per cui si ha

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Anche questa è *dimostrabile per induzione*.

Ora vogliamo calcolare il valore dell'integrale; come prima consideriamo che l'integrale è "*compresso*" tra la sua somma inferiore e superiore, ovvero

$$\frac{1}{n^3} \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \leq \int_0^1 f(x) \, dx \leq \frac{1}{n^3} \cdot \frac{(n)(n+1)(2n+1)}{6}$$

Però considerando i *limiti di successione* per gli "*estremi*" abbiamo che entrambi *convergono* per il valore  $\frac{1}{3}$ ; pertanto l'integrale è

$$\int_0^1 x^2 \, dx = \frac{1}{3}$$

## #Osservazione

Osservazione (la necessità di una tecnica alternativa dell'integrazione).

Vediamo che calcolare l'*integrale* di una funzione secondo la *tecnica di Riemann* risulta spesso "*faticoso*" e "*difficile*" (anche se discutibile!): perciò sorge la necessità di trovare un altro modo più "*semplice*" per calcolare gli *integrali*, raggiirando ad esempio il calcolo delle *somme inferiore e/o superiore*.

A proposito di ciò argomenterebbero a favore i noti matematici russi *A. N. Kolmogorov, A. D. Aleksandrov e M. A. Lavrent'ev*<sup>(1)</sup>: loro affermerebbero che ci serve un metodo più "*generale*" per calcolare gli integrali, in quanto fino ad ora abbiamo adoperato "*tecniche specialissime*".

---

<sup>(1)</sup>: "[...] Per di più, anche quando sia possibile eseguire tale somma, ciò non si può fare con un metodo generale, ma con tecniche specialissime, dipendenti dal singolo problema.

Sorge quindi il problema di trovare un metodo generale per i calcolo dell'integrale definito. Il problema generale del calcolo delle aree e dei volumi, così ricco di conseguenze pratiche, interessò i matematici per lungo tempo" - tratto da "Le Matematiche - Analisi, Algebra, Geometria Analitica" (1974) di A. N. Kolmogorov, A. D. Aleksandrov e M. A. Lavrent'ev

---

## Funzione esponenziale

## #Esercizio

Esercizio (Esercizio 1.1.).

Per esercizio calcolare l'integrale

$$\int_0^1 e^x \, dx$$

## 2. Funzioni non integrabili

## #Osservazione

Osservazione (esempio di funzione non integrabile).

La risposta è sì, in quanto se consideriamo la *funzione di Dirichlet* scopriamo che questa non sia derivabile.

La funzione di Dirichlet è definita nel seguente modo:

$$f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}; f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Allora se prendo la sua *somma superiore* vedo che questa è sempre 1, in quanto prendendo un qualsiasi intervallo  $[x_{i-1}, x_i]$  ci dev'essere *almeno* un numero razionale tra questi ([Teorema 5 \(Densità dei razionali nei reali.\)](#)). Pertanto il sup della funzione diventa 1.

Analogamente la *somma inferiore* è sempre 0.

Pertanto, vedo che

$$s(f, \Delta) \neq S(f, \Delta) \implies f \notin \mathcal{R}$$

## A3. Tipologie di funzioni integrabili

### Tipologie di Funzioni Integrabili

*Teoremi che prescrivono l'integrabilità di certe famiglie di funzioni.*

## 0. Prerequisiti e/o voci correlate

- [Funzioni](#) (monotonia)
- [Teoremi sulle funzioni continue](#) (thm. di Weierstraß)
- [Definizione di Continuità](#)
- [Continuità Uniforme](#)
- [Conseguenze dell'esistenza dell'estremo superiore](#)
- [Suddivisione di un Intervallo](#)
- [Somma inferiore e superiore per una Funzione](#)
- [Integrabilità secondo Riemann](#)
- [Esempi di Funzioni Integrabili](#)

## 1. L'integrabilità delle funzioni monotone

#Teorema

**Teorema** (di integrabilità della funzioni monotone).

Allora  $f$  è integrabile secondo Riemann (Definizione 1 (integrabilità di una funzione secondo Riemann)).

$$f \text{ monotona} \implies f \in \mathcal{R}([a, b])$$

#Dimostrazione

### DIMOSTRAZIONE del teorema 1.1. (Teorema 1 (di integrabilità delle funzioni monotone))

Dimostriamo il caso in cui  $f$  è monotona crescente; la dimostrazione è analoga anche nel caso in cui  $f$  è monotona decrescente.

Osserviamo che  $f$  è anche limitata in  $[f(a), f(b)]$  in quanto monotona crescente.

Allora considero la seguente suddivisione (Definizione 1 (suddivisione di un intervallo chiuso e limitato)).

$$\Delta = \left\{ a, a + \frac{b-a}{n}, a + 2\left(\frac{b-a}{n}\right), \dots, a + (n-1)\frac{b-a}{n}, b \right\}$$

Adesso calcolo la differenza tra la somma superiore e la somma inferiore relativa a questa suddivisione, poi per minorarla con una certa quantità;

$$\begin{aligned} S(f, \Delta) - s(f, \Delta) &= \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})(f(a + i(b-a)) - f(a + (i-1)(b-a))) \\ &\leq \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) - f(x_{i-1}) \\ &= \frac{b-a}{n} (f(x_1) - f(x_0)) + (f(x_2) - f(x_1)) + \dots + (f(x_n) - f(x_{n-1})) \\ &= \frac{b-a}{n} (f(x_n) - f(x_0)) \\ &= (b-a)(f(b) - f(a)) \cdot \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Ma per Archimede (Teorema 3 (Archimedicità di  $\mathbb{R}$ )) questa quantità diventa piccola a piacere; pertanto per il teorema di caratterizzazione delle funzioni integrabili (Teorema 5 (condizione necessaria e sufficiente per l'integrabilità secondo Riemann)), la funzione  $f$  è integrabile secondo Riemann. ■

## 2. Integrabilità delle funzioni continue

#Teorema

**Teorema** (di integrabilità delle funzioni continue).

Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua (Definizione 5 (Funzione continua su un insieme)) sul suo dominio.

$$f \text{ continua} \implies f \in \mathcal{R}([a, b])$$

## #Dimostrazione

**DIMOSTRAZIONE** del [teorema 2.1](#). ([Teorema 2 \(di integrabilità delle funzioni continue\)](#)) Richiamiamoci ad una delle [proprietà delle funzioni continue](#), ovvero il [teorema di Heine \(Teorema 4 \(di Heine\)\)](#).

Teorema 4 (di Heine).

Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua e sia  $[a, b]$  compatta ([Definizione 2 \(Insieme compatto in R per successioni.\)](#)).

Allora  $f$  è uniformemente continua.

Ovvero "alla Cauchy" sappiamo che è vero il seguente:

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in [a, b] \\ |x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \end{aligned}$$

Allora fissiamo un qualunque  $\varepsilon > 0$  e grazie alla continuità uniforme possiamo garantirci che esiste un  $\delta$  tale che

$$\forall x_1, x_2 \in [a, b], |x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{b - a}$$

In tal caso considero una [suddivisione](#) ([Definizione 1 \(suddivisione di un'intervallo chiuso e limitato\)](#)) dove ogni "distanza" tra due punti della suddivisione è minore di tale  $\delta$  trovato. Ovvero, considero un

$$\Delta \in \mathcal{D} : \forall i, x_i - x_{i-1} < \delta$$

Graficamente questo ragionamento corrisponde alla [figura 2.1](#).

Ora calcolo la [differenza tra la somma superiore e la somma inferiore](#) (Somma inferiore e superiore per una Funzione)

$$S(f, \Delta) - s(f, \Delta) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \left( \sup_{[x_i, x_{i-1}]} f(x) - \inf_{[x_i, x_{i-1}]} f(x) \right)$$

Ora considero il fatto che la funzione  $f$  è continua e che "agiamo" su un intervallo chiuso e limitato: vediamo che così vale il [teorema di Weierstraß](#) ([Teorema 15 \(di Weierstraß\)](#)). Di conseguenza, possiamo considerare l'estremo superiore e inferiore come il minimo e massimo della funzione.

$$\sup_{[x_i, x_{i-1}]} f(x) = \max_{[x_i, x_{i-1}]} f(x) = f(x_{\max,i})$$

e analogamente

$$\inf_{[x_i, x_{i-1}]} f(x) = \min_{[x_i, x_{i-1}]} f(x) = f(x_{\min,i})$$

Pertanto

$$\sup_{[x_i, x_{i-1}]} f(x) - \inf_{[x_i, x_{i-1}]} f(x) = f(x_{\max,i}) - f(x_{\min,i})$$

Ma sapendo che sia i *punti di massimo e minimo*  $x_{\max,i}$  e  $x_{\min,i}$  devono necessariamente vivere in  $[x_i, x_{i-1}]$ , anche la loro distanza è minore di  $\delta$ .

Graficamente quest'idea viene raffigurata nella *figura 2.2..*

Pertanto, per l'ipotesi della continuità uniforme vale che

$$|x_{\max,i} - x_{\min,i}| < \delta \implies |f(x_{\min,i}) - f(x_{\max,i})| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

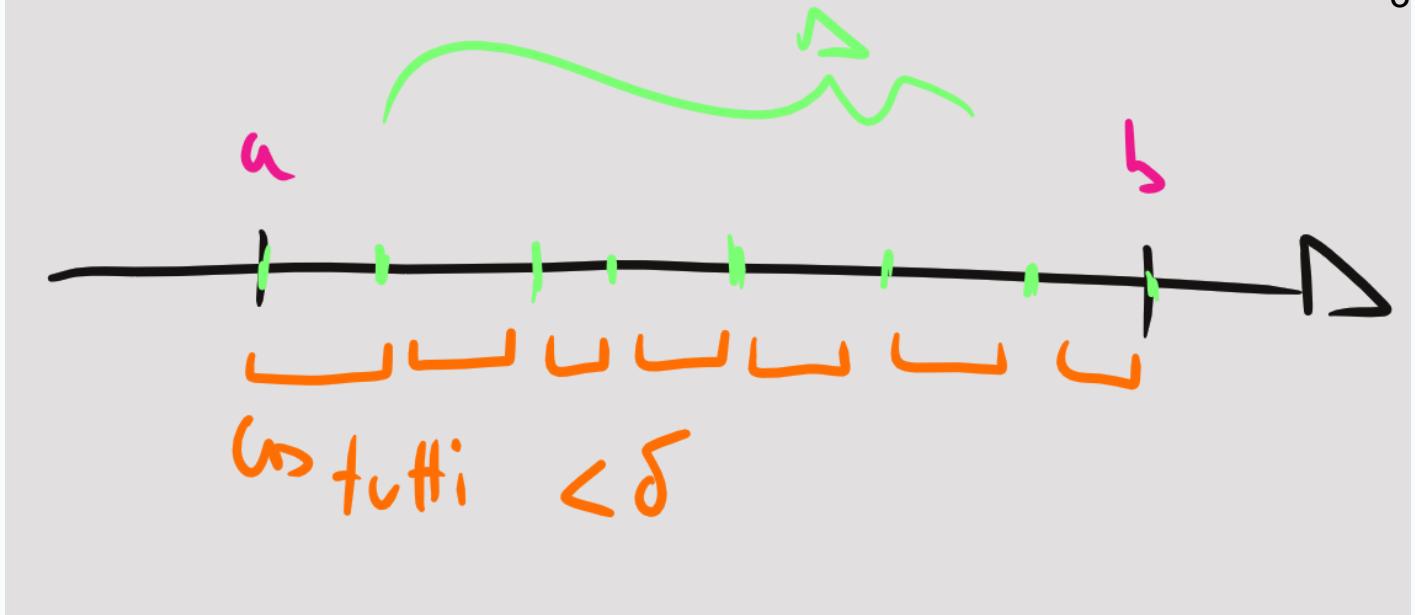
In definitiva, tutto assieme possiamo concludere la dimostrazione.

$$\begin{aligned} S(f, \Delta) - s(f, \Delta) &= \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) (\sup_{[x_i, x_{i-1}]} f(x) - \inf_{[x_i, x_{i-1}]} f(x)) \\ &< \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \frac{\varepsilon}{b-a} \\ &\leq \cancel{(b-a)} \frac{\varepsilon}{\cancel{b-a}} = \varepsilon \end{aligned}$$

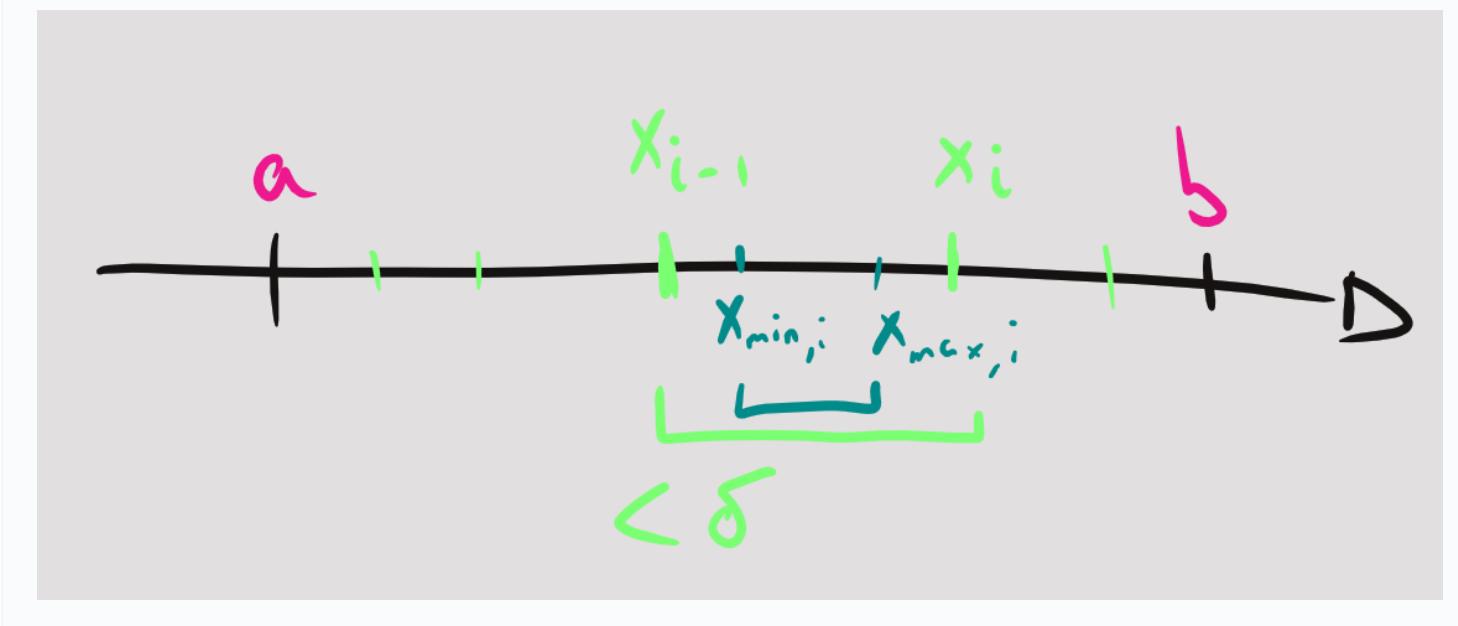
$S(f, \Delta) - s(f, \Delta) < \varepsilon$

Che corrisponde alla *condizione necessaria e sufficiente dell'integrabilità* ([Teorema 5](#) (*condizione necessaria e sufficiente per l'integrabilità secondo Riemann*)), pertanto  $f$  è *integrabile secondo Riemann*. ■

**FIGURA 2.1.** (*La suddivisione 'delta'*)



**FIGURA 2.2.** (*I punti di max e min vivono in delta*)



## A4. Proprietà delle funzioni integrabili

### Proprietà delle Funzioni Integrabili

Tutte le proprietà elementari delle funzioni integrabili: operazioni tra funzioni integrabili, confronto tra funzioni integrabili, pezzo di un integrale, convenzione di notazione degli integrali.

## 0. Prerequisiti e/o voci correlate

- Integrabilità secondo Riemann
- Suddivisione di un Intervallo

- Somma inferiore e superiore per una Funzione
- Funzioni di potenza, radice e valore assoluto (valore assoluto)
- Spazi Vettoriali
- Definizione di Applicazione Lineare

## 1. Integrali delle operazioni con funzioni

#Proposizione

**Proposizione** (l'integrale di due funzioni sullo stesso intervallo).

Siano  $f, g$  delle *funzioni integrabili secondo Riemann* sull'intervallo  $[a, b]$  ([Definizione 1 \(integrabilità di una funzione secondo Riemann\)](#)). Allora

$$f + g \in \mathcal{R}([a, b]); \int_a^b (f + g)(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt$$

#Dimostrazione

**DIMOSTRAZIONE** della [proposizione 1.1.](#) (Proposizione 1 (l'integrale di due funzioni sullo stesso intervallo))

Una *dimostrazione* che costituirà come la "*base di ragionamento*" delle proposizioni a venire è la seguente (infatti non dimostreremo le altre proposizioni, daremo una semplice idea grafica).

Consideriamo innanzitutto la *condizione necessaria e sufficiente per l'integrabilità* delle funzioni  $f, g$  ([Teorema 5 \(condizione necessaria e sufficiente per l'integrabilità secondo Riemann\)](#)).

Ovvero, fissando un  $\varepsilon > 0$  ho

1.  $\exists \Delta \in \mathcal{D} : S(f, \Delta) - s(f, \Delta) < \frac{\varepsilon}{2}$
2.  $\exists \Gamma \in \mathcal{D} : S(f, \Gamma) - s(f, \Gamma) < \frac{\varepsilon}{2}$

Ora considero l'*unione delle suddivisioni*  $\Delta \cup \Gamma$ , che comporta una *suddivisione più fine* sia di  $\Gamma$  che di  $\Delta$  ([Definizione 3 \(finezza della suddivisione\)](#)).

Però in ogni caso vale che la differenza tra la *somma superiore e inferiore* è comunque "*contenuta*" in  $\frac{\varepsilon}{2}$ ; questo vale sia per  $f$  che  $g$  relativa alla suddivisione  $\Delta \cup \Gamma$ .

Infatti quando prendiamo una suddivisione più fine, la *somma inferiore* tende ad "*alzarsi*", invece la *somma superiore* tende ad "*abbassarsi*" ([Osservazione 4 \(l'insieme delle suddivisioni è un reticolo\)](#)).

$$S(f, \Delta \cup \Gamma) - s(f, \Delta \cup \Gamma) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$S(g, \Delta \cup \Gamma) - s(g, \Delta \cup \Gamma) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Inoltre chiamo l'unione delle suddivisioni come  $\Delta \cup \Gamma = \Phi$  per comodità; adesso sommo le due precedenti disequazioni termine per termine e abbiamo il seguente:

$$S(f, \Phi) + S(g, \Phi) - (s(f, \Phi) + s(g, \Phi)) < \varepsilon$$

Ora osservo che la *somma superiore* della *somma delle due funzioni* è sempre *minore o uguale* alla *somma delle somme superiori delle funzioni* considerate separatamente, ovvero

$$S(f + g, \Phi) \leq S(f, \Phi) + S(g, \Phi)$$

Infatti, da un lato abbiamo un "*solo*" estremo superiore da cui prendere, dall'altro ne abbiamo due.

Inoltre l'osservazione appena effettuata vale lo stesso anche per *la somma inferiore*:

$$s(f + g, \Phi) \leq s(f, \Phi) + s(g, \Phi)$$

Allora, combinandoli insieme ottengo

$$S(f + g, \Phi) - s(f + g, \Phi) < \varepsilon$$

che è proprio la *condizione necessaria e sufficiente di integrabilità* per la funzione  $f + g$  relativo all'intervallo  $\Phi$ . ■

#### #Proposizione

**Proposizione** (l'integrale dello scalamento di una funzione).

Sia  $f$  una funzione *integrabile secondo Riemann* su  $[a, b]$  e sia  $\lambda$  uno "*scalare*" (ovvero numero) in  $\mathbb{R}$ .

Allora vale che  $\lambda \cdot f$  è *integrabile* e che il suo *integrale* è il seguente.

$$\lambda \cdot f \in \mathcal{R}([a, b]); \int_a^b (\lambda \cdot f)(t) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt$$

## L'integrabilità delle funzioni in termini di algebra lineare

#### #Osservazione

**Osservazione** (le funzioni integrabili costituiscono uno sottospazio vettoriale).

Notiamo che le proprietà appena enunciate sono molto *simili* a delle medesime proprietà per cui si definiscono enti certi matematici.

Parliamo infatti dei **spazi vettoriali** (in particolare dei **sottospazi vettoriali**): infatti, se consideriamo  $\mathcal{F}$  come l'**insieme delle funzioni** e la dotiamo delle operazioni di **somma interna** e dello **scalamento esterno su  $\mathbb{R}$** , allora  $\mathcal{F}$  è un  $\mathbb{R}$ -**spazio vettoriale**. (Definizione 1 (spazio vettoriale sul campo K))

317

Per le proprietà appena viste, vediamo che chiaramente l'**insieme delle funzioni integrabili**  $\mathcal{R}$  non è solo un **sottoinsieme** di  $\mathcal{F}$ , ma è pure **sottospazio vettoriale**: vale infatti che la "**funzione nulla**"  $0 : \mathbb{R} \rightarrow 0$  è **integrabile** e le **proposizioni 1.1., 1.2.** sono esattamente la **chiusura della somma e dello scalamento**. (Definizione 1 (sottospazio vettoriale))

Inoltre, la **dimensione** (Definizione 1 (dimensione di un spazio vettoriale)) dell'insieme  $\mathcal{R}$  è **infinita** in quanto l'insieme  $\mathcal{F}$  è **infinitamente generata**.

#### #Osservazione

Osservazione (l'applicazione lineare integrale).

Inoltre, definendo l"**"applicazione integrale"** (*non è il miglior termine che possiamo usare, ma ahimè*) come quella funzione in cui inseriamo una funzione integrabile e otteniamo il suo integrale, vediamo che questa costituisce un'**applicazione lineare**. Vale infatti l'additività e l'omogeneità. (Definizione 1 (applicazione lineare da  $V$  a  $V$  primo))

$$\int_a^b : \mathcal{R}([a, b]) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f \mapsto \int_{[a, b]} f$$

## 2. Confronto tra gli integrali delle funzioni integrabili

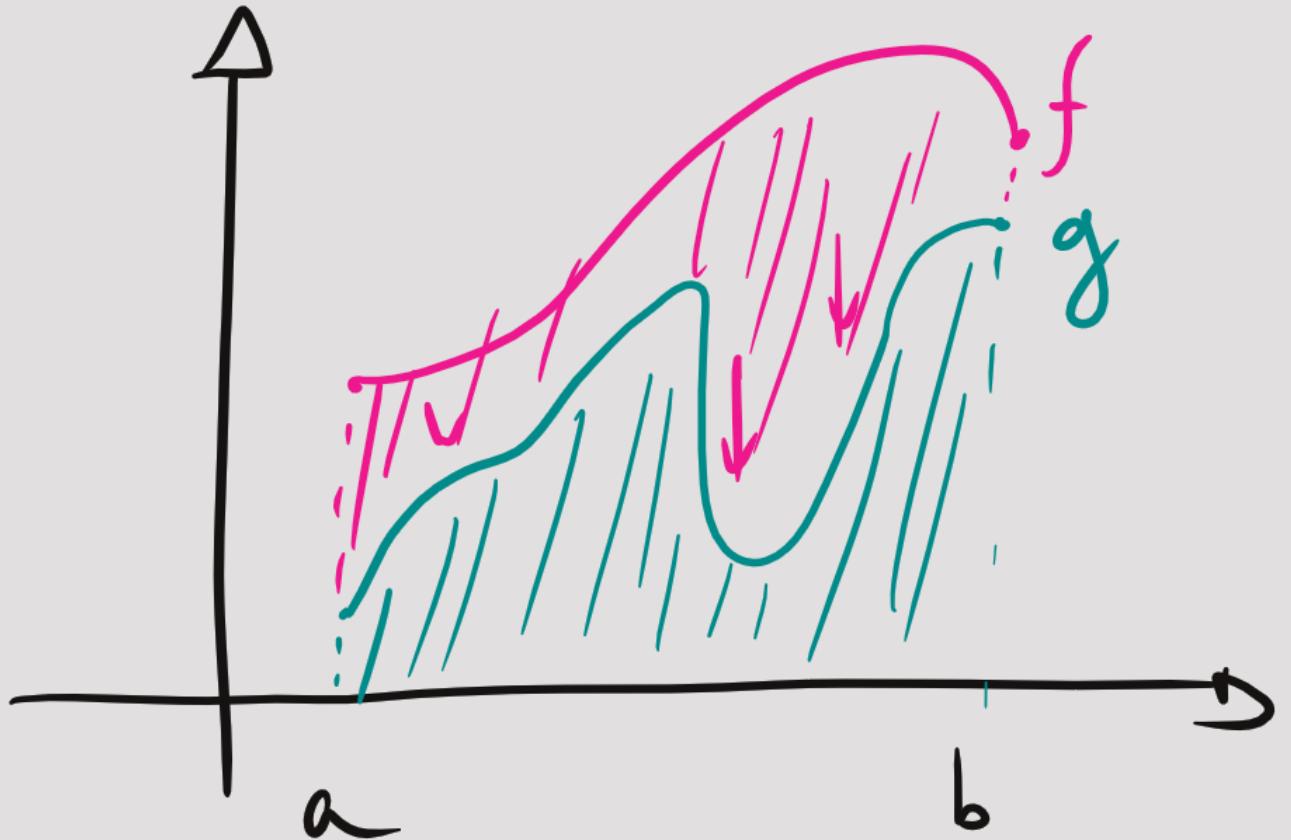
#### #Proposizione

Proposizione (l'integrale di una funzione grande è più grande dell'integrale di una funzione piccola).

Siano  $f, g$  delle **funzioni** definite su  $[a, b]$ . Siano inoltre  $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ . Valga che  $\forall x \in [a, b], f(x) \geq g(x)$ . (ovvero una funzione sta sempre in "**alto**" dell'altro)

Allora vale che

$$\int_{[a, b]} f \geq \int_{[a, b]} g$$



#Proposizione

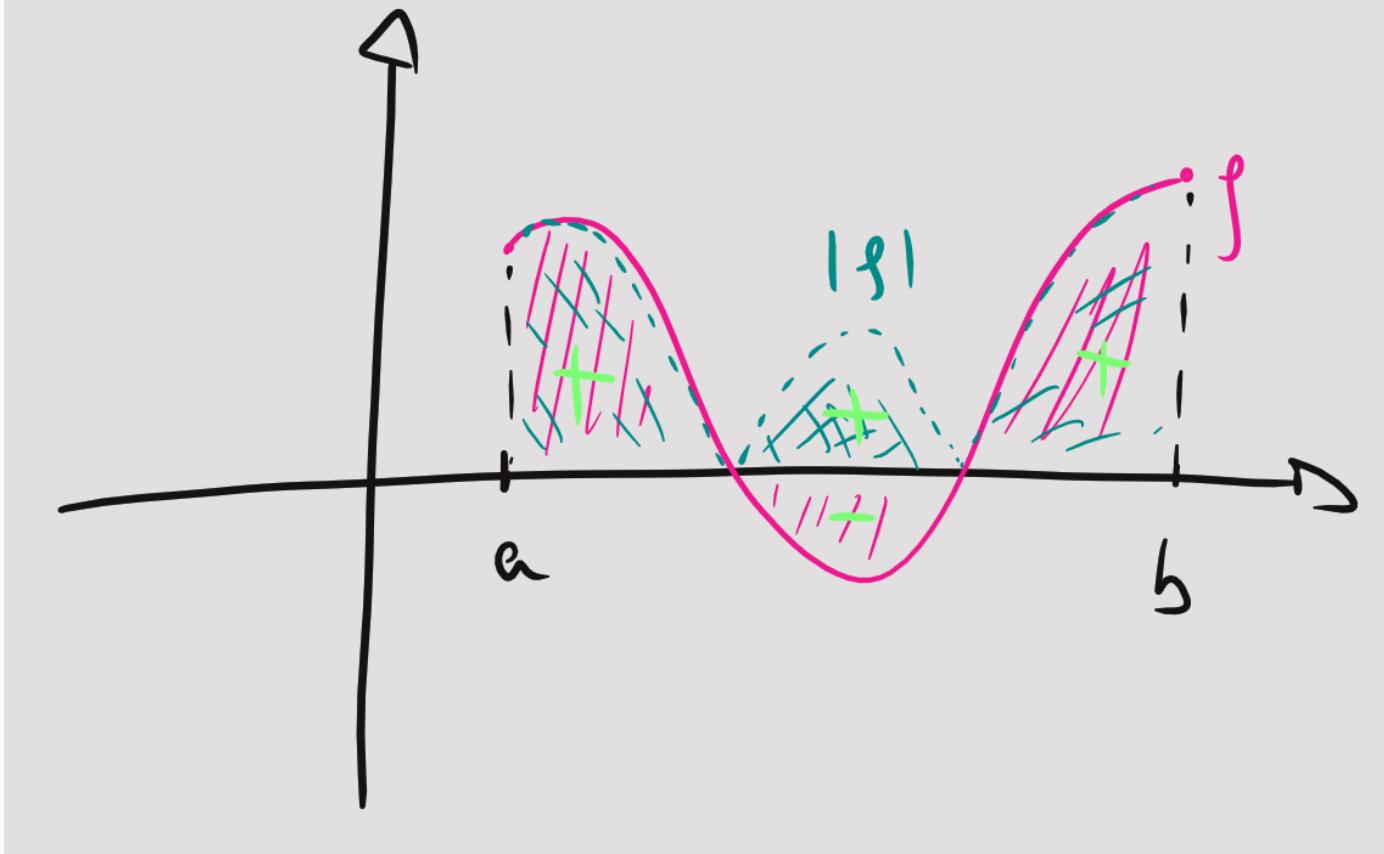
**Proposizione** (l'integrale del valore assoluto di una funzione è più grande dell'integrale della funzione).

Sia  $f$  una funzione definita su  $[a, b]$ . Sia  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ .

Allora  $|f| \in \mathcal{R}([a, b])$  e vale che

$$\left| \int_b^a f(t) dt \right| \leq \int_b^a |f(t)| dt$$

Idealmente a sinistra abbiamo che *consideriamo l'area totale*, dove comunque le "*parti negative*" vengono sottratte alle "*parte positive*". Invece a destra abbiamo che le "*parti negative*" diventano "*positive*", dunque abbiamo la somma delle solo "*parti positive*".



### 3. Partizione di un'integrale

#Proposizione

**Proposizione** (la partizione di un'integrale).

Sia  $f \in \mathcal{R}([a, b])$  e sia  $c \in ]a, b[$  (punto **interno**).

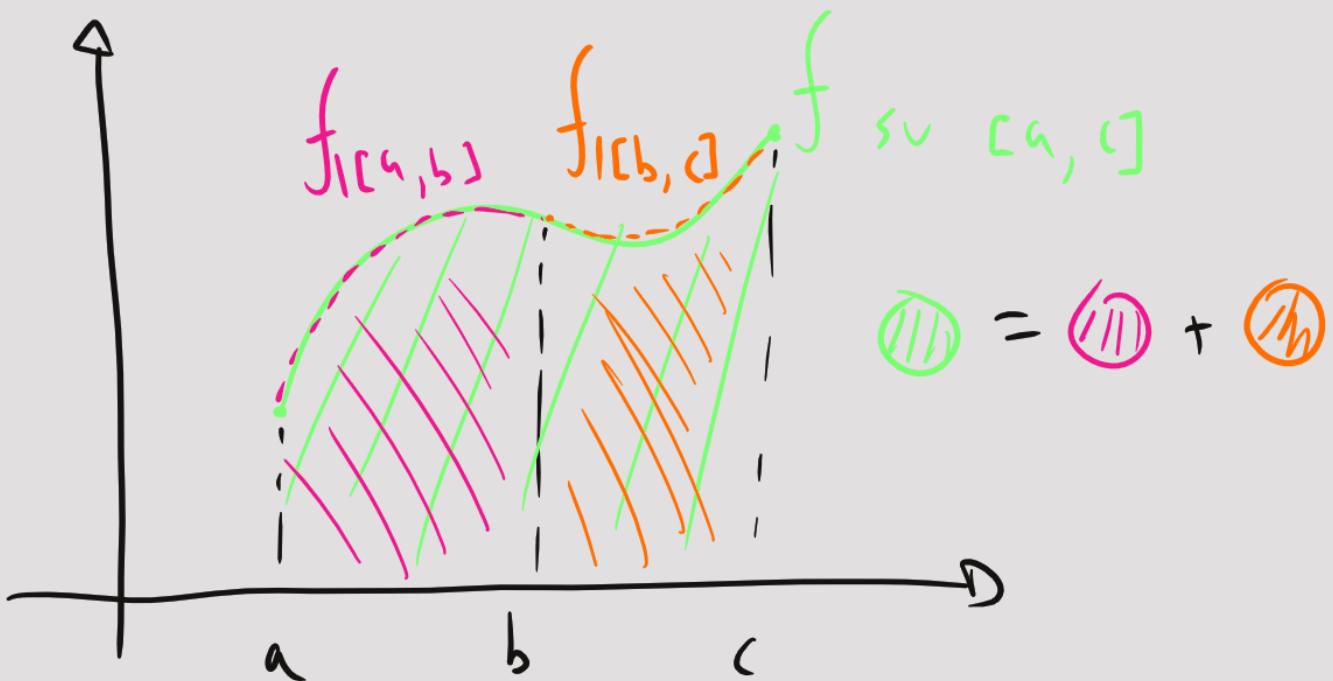
Allora considerando la **restrizione** di  $f$  in  $[a, c]$  e  $[c, b]$  abbiamo che

$$f|_{[a,c]} \in \mathcal{R}([a, c]); f|_{[c,b]} \in \mathcal{R}([c, b])$$

$$\int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f = \int_{a,b} f$$

Graficamente quest'idea corrisponde a prendere **l'area** sotto la curva, prendere un punto  $c$  per lui la **dividiamo** e vediamo che la somma delle due aree tagliate è l'area intera totale.

**FIGURA 3.1.** (**Idea grafica della proposizione 3.1.**)



## 4. Convenzione di scrittura degli integrali

**Proposizione** (Convenzione di scrittura per gli integrali).

Si propone la seguente convenzione per scrivere gli integrali, in particolare per quanto riguarda gli *intervalli* di definizione.

Siano  $a, b, c \in \mathbb{R}$  dei numeri disposti in *qualsiasi modo*; possiamo avere  $a < b < c$ ,  $a < c < b$ , e così via...

Allora se abbiamo l'integrale

$$\int_a^b f(t) dt$$

Possiamo "*scambiare*" il pedice e l'apice cambiando il segno; ovvero

$$\int_a^b f(t) dt = - \int_b^a f(t) dt$$

Notiamo inoltre che con questa convenzione valgono comunque tutte le *proprietà* enunciate, in particolare la *proposizione 3.1*. Infatti possiamo "*giocare con i segni*" per ottenere ciò che vogliamo.

## A5. Teorema della media integrale

### Teorema della Media Integrale

Breve descrizione qui

---

## 0. Prerequisiti e/o voci correlate

- Suddivisione di un Intervallo
- Insiemi limitati, maggioranti, massimo e teorema dell'estremo superiore
- Funzioni (minimo, massimo)
- Teoremi sulle funzioni continue (di Weierstraß e dei valori medi)
- Teorema di Torricelli-Barrow (ai fini della dimostrazione)

## 1. Enunciato del teorema

#Teorema

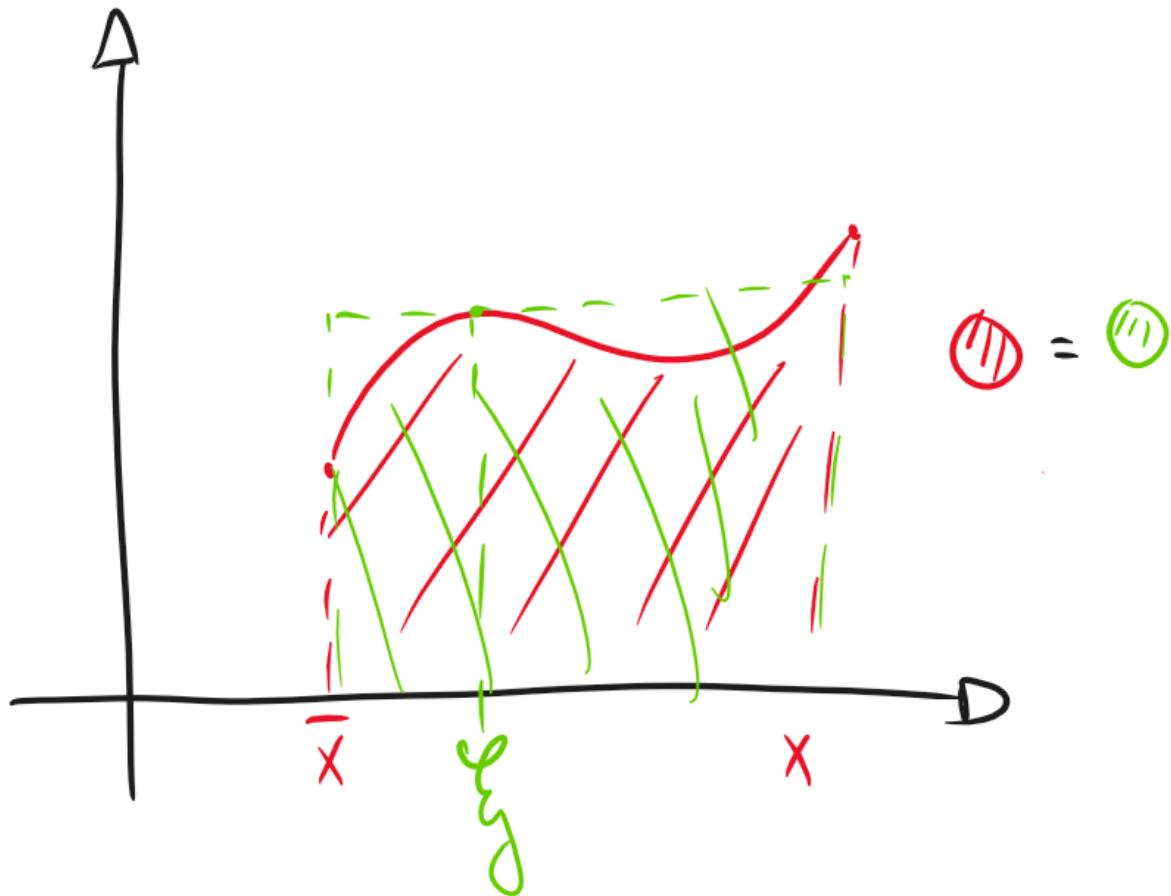
**Teorema** (della media integrale).

Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua (Definizione 5 (Funzione continua su un insieme)), pertanto integrabile secondo Riemann (Definizione 1 (integrabilità di una funzione secondo Riemann)).

Allora per esiste un valore nell'intervallo per cui l'immagine del valore sia uguale all'integrale della funzione diviso per la base

$$\exists \xi \in [a, b] : f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$$

**FIGURA 1.1.** (*Idea*)



## 2. Dimostrazione

#Dimostrazione

**DIMOSTRAZIONE** del *teorema della media integrale* (Teorema 1 (della media integrale))

Innanzitutto tengo conto di una *proprietà di definizione* dell'integrale:

$$\forall \Delta \in \mathcal{D}, s(f, \Delta) \leq \int_a^b f(t) dt \leq S(f, \Delta)$$

Questo vale in particolare se scelgo la *suddivisione* più banale, ovvero

$$\Delta = \{a, b\}$$

che è la *meno fine* (Definizione 3 (finezza della suddivisione)) di tutte le suddivisioni possibili.

Cosa succede in questo caso? Vediamo che abbiamo

$$\inf_{[a,b]} f \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(t) dt \leq \sup_{[a,b]} f \cdot (b-a)$$

Graficamente se disegno il *rettangolo "più basso" possibile* e quello *"più alto" possibile*, ho che l'*area della funzione* viene *"incastrata"* tra di essi (*figura 2.1.*).

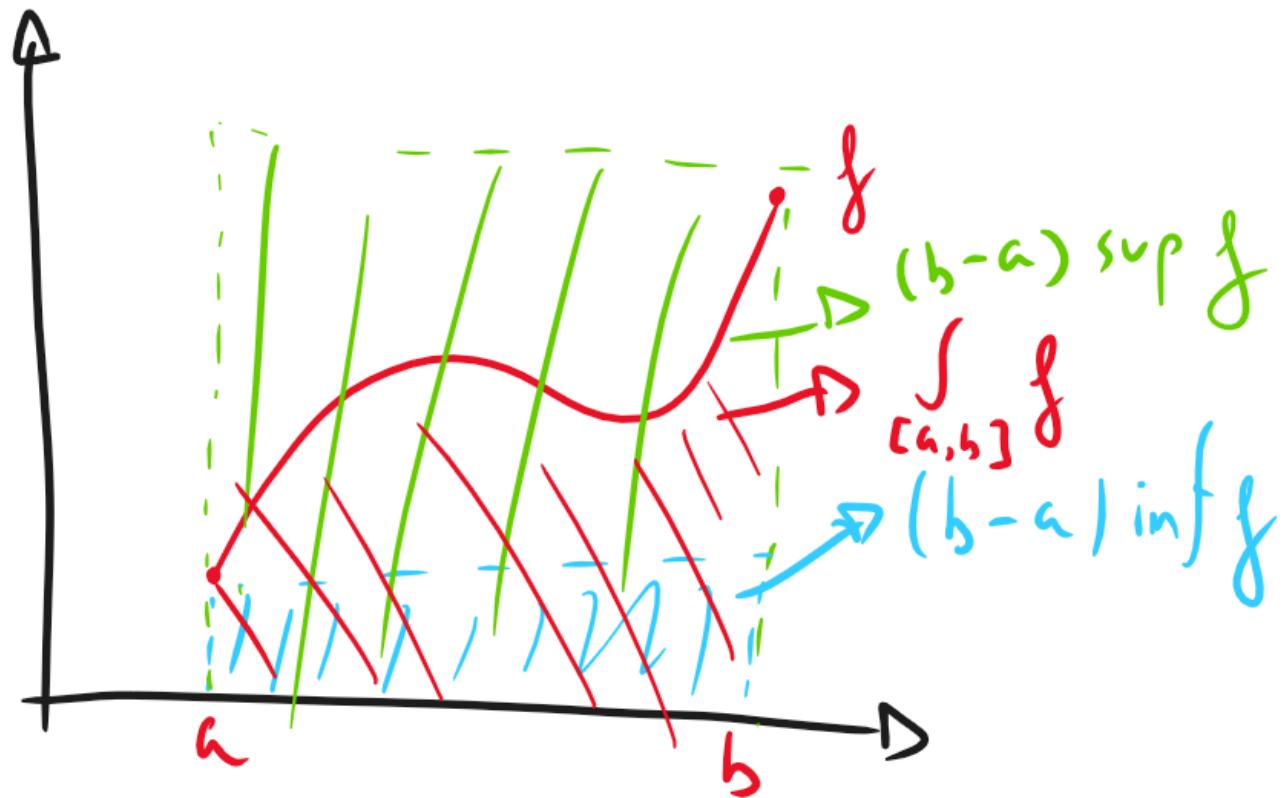
Ma per il *teorema di Weierstraß* (Teorema 15 (di Weierstraß))  $f$  ha sia min che max dato che essa è *continua* e viene definita su un *insieme chiuso e limitato*; allora inf, min e sup, max coincidono. Ovvero, definendo  $x_m$  il punto di *minimo* e  $x_M$  il punto di *massimo*,

$$f(x_m) \leq \frac{\int_a^b f(t)dt}{b-a} \leq f(x_M)$$

Infine applico il **teorema dei valori intermedi** (Corollario 10 (teorema degli valori intermedi)) su  $[a, b]$  e dunque ho

$$\exists \xi \in [a, b] : f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt$$

**FIGURA 2.1.**



## B1. La definizione di primitiva di funzione

### Primitiva di una Funzione

*La primitiva di una funzione: definizione, osservazioni.*

## 1. Definizione di Primitiva di una Funzione

#Definizione

Definizione (la primitiva di una funzione).

Siano  $f, F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  due *funzioni di variabile reale*.

Allora se sussiste il seguente:

$$\forall x \in [a, b], F'(x) = f(x)$$

allora  $F$  si dice *primitiva* di  $f$ .

#Definizione

Definizione (funzione primitivabile).

Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Se questa funzione ammette una funzione  $F$  primitiva (Definizione 1 (la primitiva di una funzione)) per cui  $F' = f$ , allora  $f$  si dice *primitivabile*.

#Definizione

Definizione (integrale indefinito di una funzione).

*Tradizionalmente* si chiama l'insieme delle *primitive* di una funzione  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  come "*l'integrale indefinito di f*" e lo si denota con

$$\int f(x) dx$$

**NOTA.** Al primo impatto questa definizione *tradizionale* è chiaramente confusionaria in quanto sembra di collegare due argomenti totalmente distaccati tra di loro: da un lato stiamo semplicemente considerando le *primitive* di una funzione, dall'altro degli *integrali* (Definizione 2 (integrale di Riemann di una

## 2. Esempi di primitive funzioni e di funzioni non primitivabili

#Esempio

Esempio (la primitiva della funzione identità).

Voglio calcolare la *primitiva* della funzione identità  $f(x) = x$ .

Un possibile approccio è quello di fare delle "*ipotesi ragionate*" su ciò che possono essere dei "*buoni candidati*": prendiamo ad esempio  $x^2$ . Prendendo la sua derivata  $(x^2)' = 2x$ , vedo che sono vicino (*fuocherello*).

Allora basta dividere tutto per due e alla fine ottengo

$$\left(\frac{x^2}{2}\right)' = x$$

Pertanto  $\frac{x^2}{2}$  per definizione è *primitiva* di  $x$ .

#Esempio

Esempio (funzioni non primitivabili).

Vediamo che possono *non* esistere delle funzioni non primitivabili; ovvero delle funzioni delle quali primitive *non* possono essere espresse in *termini di funzioni elementari* (ovvero quelle che conosciamo). Bisognerebbe infatti proprio "*inventare*" nuove funzioni ad-hoc che definiscono delle primitive di funzioni non primitivabili.

Ad esempio la funzione

$$f(x) = \frac{1}{\ln x}$$

non è *primitivabile*.

## 3. Generare altre primitive da una primitiva

#Osservazione

Osservazione (possiamo trovare altre primitive a partire da una).

Osservo che a partire da una primitiva  $F$  di una funzione  $f$  (che ovviamente sia **primitivabile**), posso trovare le sue altre primitive: basterebbe aggiungere una costante  $c \in \mathbb{R}$ , in quanto la **derivata** della costante è 0.

326

Infatti

$$(F + c)' = F' + 0 = F = f \implies (F + c)' = f$$

#Teorema

**Teorema** (di struttura delle primitive di una funzione).

Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  **primitivabile** ([Definizione 2 \(funzione primitivabile\)](#)).

Sia  $F$  una sua **qualsiasi** primitiva.

Allora le **tutte e sole** primitive di  $f$  sono del tipo  $F + c, c \in \mathbb{R}$ .

(riformulazione). Ovvero una funzione  $G$  è **primitiva** di  $f$  se e solo se è di forma  $F + c$ .

#Dimostrazione

**DIMOSTRAZIONE** del [teorema 3.1](#). ([Teorema 7 \(di struttura delle primitive di una funzione\)](#))

" $\Leftarrow$ ". Questa è banalmente immediata: infatti  $(F + c)' = F' = f$ .

" $\Rightarrow$ ". Considero  $G - F$  per calcolarne la derivata:

$$(G - F)' = G' - F' = f - f = 0$$

Per il [teorema di Lagrange](#) ([Teorema 1 \(di Lagrange\)](#)) sappiamo che se  $(G - F)' = 0$  su  $[a, b]$ , allora la funzione  $G - F$  è necessariamente una **funzione costante** ([Teorema 3 \(derivata nulla è sempre una costante\)](#)). Ma allora

$$G - F = c \implies G = F + c \blacksquare$$

## C1. Definizione di Funzione Integrale (die Integralfunktion)

### Funzione Integrale

*Funzione Integrale: definizione di Funzione Integrale (Integralfunktion); prime proprietà della funzione integrale (lipschitziana e continua).*

## 0. Prerequisiti e/o voci correlate

- Funzioni
- Integrabilità secondo Riemann
- Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale
- Esempi di Calcolo delle Primitive
- Primitive delle Funzioni Elementari
- Integrazione per Parti
- Integrazione per Sostituzione

## 1. Definizione di Integralfunktion (Funzione Integrale)

#Definizione

Definizione (la funzione integrale / die Integralfunktion).

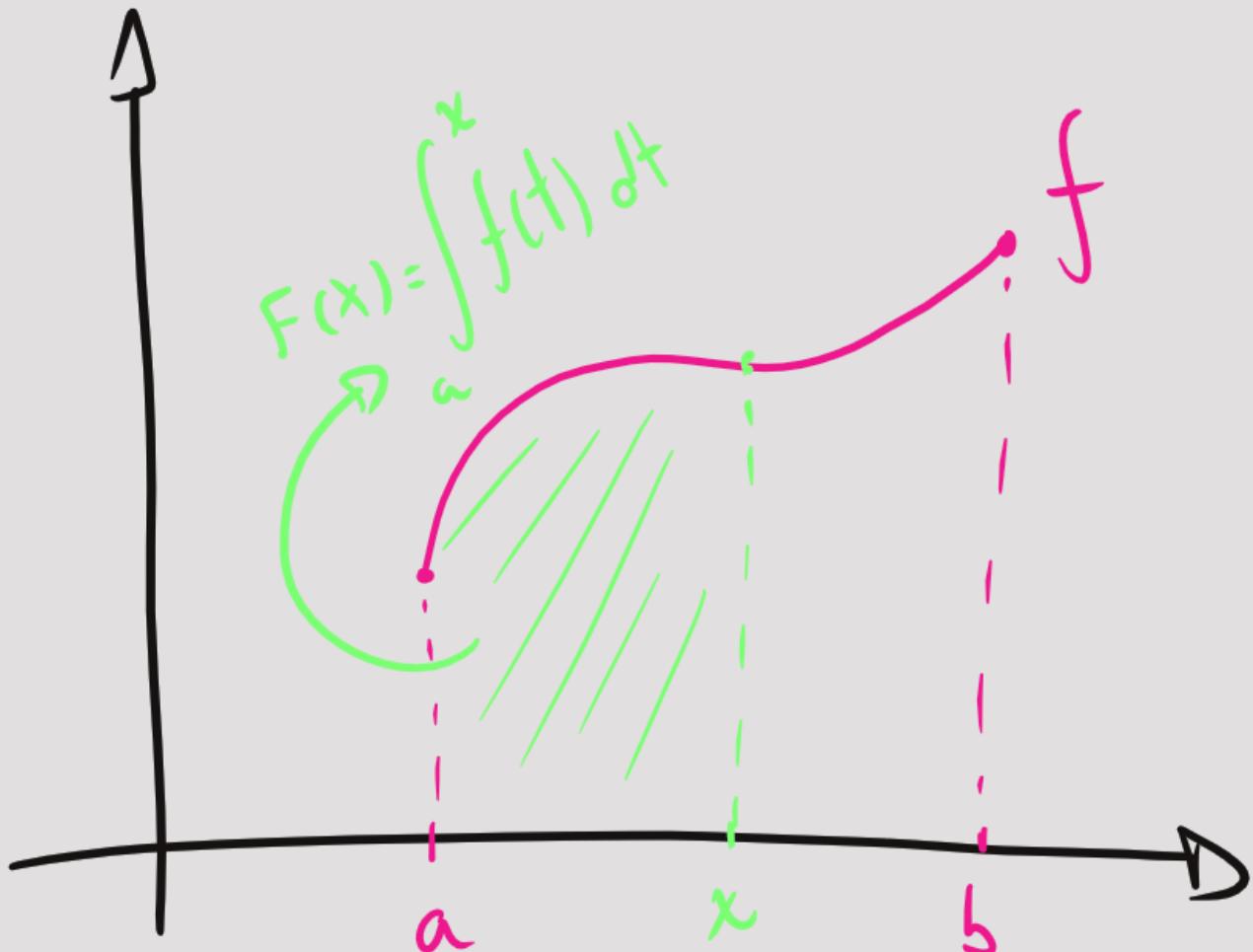
Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione *integrabile secondo Riemann sull'intervallo*  $[a, b]$  ([Definizione 1 \(integrabilità di una funzione secondo Riemann\)](#)).

Allora definisco la *funzione integrale di f* su  $[a, b]$  (oppure in tedesco *die Integralfunktion*) come il seguente:

$$F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} ; F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

Geometricamente questo corrisponde a *prendere la singola area partizionata tra il punto*  $a, x$  ([Proposizione 7 \(la partizione di un'integrale\)](#)) ([figura 1.1.](#)).

**FIGURA 1.1.** (*Idea grafica dell'Integralfunktion*)



## 2. Proprietà dell'Integralfunktion

### Integralfunktion Lipschitziana

#Definizione

**Definizione** (funzione lipschitziana).

Sia una  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una **funzione**, se vale la seguente condizione, ovvero

$$\exists M > 0 : \forall x_1, x_2 \in [a, b], \\ |g(x_1) - g(x_2)| \leq M|x_1 - x_2|$$

allora  $g$  si dice **lipschitziana** (o in tedesco *lipschitzstetig*).

#Proposizione

**Proposizione** (funzione lipschitziana è continua).

In particolare, una funzione **lipschitziana** è anche **continua**: dalla condizione di **Lipschitz** deve discendere

## #Dimostrazione

**DIMOSTRAZIONE** della *proposizione 2.1.* (Proposizione 3 (funzione lipschitziana è continua))

Dimostrazione lasciata al lettore per esercizio ([Esercizio 12 \(Esercizio C7.\)](#)) ■

*Consiglio: usare la definizione "alla Cauchy" della continuità.*

## #Teorema

**Teorema** (die Integralfunktion ist lipschitzstetig).

Sia  $f$  una *funzione integrabile secondo Riemann sull'intervallo*  $[a, b]$  (*Integrabilità secondo Riemann*) (ovvero  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ ).

Sia  $F$  l'*Integralfunktion* di  $f$ , ovvero  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

Allora la *funzione integrale*  $F$  è *lipschitziana* (Proposizione 3 (funzione lipschitziana è continua))

$$\begin{aligned} \exists M > 0 : \forall x_1, x_2 \in [a, b] \\ |F(x_1) - F(x_2)| &\leq M|x_1 - x_2| \end{aligned}$$

## #Dimostrazione

**DIMOSTRAZIONE** del *teorema 2.1.* (Teorema 4 (die Integralfunktion ist lipschitzstetig))

Sia  $f$  *integrabile secondo Riemann*. Allora  $f$  è *limitata*, ovvero:

$$\exists M > 0 : \forall x \in [a, b], |f(x)| < M$$

dove, per due qualsiasi punti  $x_1, x_2$  nell'intervallo di definizione abbiamo

$$\begin{aligned} F(x_1) - F(x_2) &= \int_a^{x_1} f(t) dt - \int_a^{x_2} f(t) dt \\ &= \int_a^{x_1} f(t) dt + \int_{x_2}^a f(t) dt \\ &= \int_{x_2}^a f(t) dt + \int_a^{x_1} f(t) dt \\ &= \int_{x_2}^{x_1} f(t) dt \end{aligned}$$

Allora

$$|F(x_1) - F(x_2)| = \left| \int_{x_2}^{x_1} f(t) dt \right| \leq \int_{x_2}^{x_1} |f(t)| dt$$

Posso piazzare il *valore assoluto* dell'integrale in quanto non è *garantito* che  $x_1 < x_2$ ; infatti potremmo avere delle "aree negative" (Proposizione 6 (l'integrale del valore assoluto di una funzione è più grande dell'integrale della funzione)).

Ma allora posso "*rimpiazzare*"  $|f(t)|$  col valore per cui è limitato, ovvero  $M$ .

$$|f(t)| \leq M \implies |F(x_1) - F(x_2)| \leq \left| \int_{x_2}^{x_1} M dt \right| = M|x_1 - x_2|$$

Ovvero, in definitiva,

$$\boxed{|F(x_1) - F(x_2)| \leq M|x_1 - x_2|} \blacksquare$$

## Integralfunktion Continua

#Corollario

**Corollario** (die Integralfunktion ist kontinuierlich).

Sia  $f$  una *funzione integrabile secondo Riemann sull'intervallo*  $[a, b]$  (*Integrabilità secondo Riemann*) (ovvero  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ ).

Sia  $F$  l'*Integralfunktion* di  $f$ , ovvero  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$F(x) = \int_a^x f(x) dx$$

Allora la *funzione integrale*  $F$  è *continua*, in quanto lipschitziana.

#Dimostrazione

**DIMOSTRAZIONE** del *corollario 2.1.* (Corollario 5 (die Integralfunktion ist kontinuierlich))

Questo teorema segue direttamente dal *teorema 2.1.* (Teorema 4 (die Integralfunktion ist lipschitzstetig)) e dalla *proposizione 2.1.* (Proposizione 3 (funzione lipschitziana è continua)). Infatti la dimostrazione è già stata "*inclusa*" nell'enunciato. ■

## C2. Il teorema fondamentale del calcolo integrale

### Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale

*Teorema fondamentale del Calcolo Integrale: enunciato, dimostrazione e corollari.*

## 0. Prerequisiti e/o voci correlate

- Funzioni
- Definizione di Continuità
- Integrabilità secondo Riemann
- Funzione Integrale
- Derivata e derivabilità
- Rapporto Incrementale

## 1. Enunciato del Teorema F.C.I.

#Teorema

**Teorema** (fondamentale del calcolo integrale).

Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione *integrabile secondo Riemann* (*Definizione 1 (integrabilità di una funzione secondo Riemann)*), ovvero  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ .

Sia  $\bar{x} \in [a, b]$ . Sia  $f$  continua in  $\bar{x}$  (*Definizione 2 (Funzione continua per un punto)*).

Sia  $F(x)$  l'*Integralfunktion* di  $f$  (*Definizione 1 (la funzione integrale / die Integralfunktion)*), ovvero

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

Allora  $F$  è *derivabile* in  $\bar{x}$  e vale che

$$F'(\bar{x}) = f(\bar{x})$$

#Dimostrazione

**DIMOSTRAZIONE** del *teorema fondamentale del calcolo integrale* (*Teorema 1 (fondamentale del calcolo integrale)*).

Per dimostrare il *teorema fondamentale del calcolo integrale* mi basta provare che la funzione integrale  $F$  è *derivabile* in  $\bar{x}$  e che  $F'(\bar{x}) = \bar{x}$ , ovvero *per definizione* della derivata (*Definizione 1 (derivata di una funzione relativa ad un punto)*) devo provare il limite

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} R_{\bar{x}}^F(x) = f(\bar{x}) \implies \lim_{x \rightarrow \bar{x}} R_{\bar{x}}^F - f(\bar{x}) = 0$$

dove  $R_{\bar{x}}^F$  è il *rapporto incrementale* (*Definizione 1 (rapporto incrementale di una funzione relativo un punto del dominio)*)

$$\frac{F(x) - F(\bar{x})}{x - \bar{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{\int_a^x f(t)dt - \int_a^{\bar{x}} f(t)dt}{x - \bar{x}} - f(\bar{x}) = 0$$

Però ricordandoci una delle proprietà per cui possiamo "*invertire*" il pedice con l'apice scambiando i segni ed effettuando delle manipolazioni posso avere

$$\int_a^x f(t)dt + \int_{\bar{x}}^a f(t)dt = \int_{\bar{x}}^a f(t)dt + \int_a^x f(t)dt = \int_{\bar{x}}^x f(t)dt$$

Inoltre mi ricordo che

$$f(\bar{x}) = \frac{\int_{\bar{x}}^x f(t)dt}{x - \bar{x}}$$

infatti sto "*calcolando*" l'altezza partendo dall'*area*  $\int f(\bar{x})dt$  e dalla *base*  $x - \bar{x}$  (ovvero faccio  $h = A/b$ )

Allora in definitiva ho

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{\int_{\bar{x}}^x f(t) - f(\bar{x})dt}{x - \bar{x}}$$

Ma so che  $f$  è *continua* in  $\bar{x}$ , ovvero che vale il limite

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = f(\bar{x}) \implies \lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) - f(\bar{x}) = 0$$

Ovvero, "*alla Cauchy*" ciò equivale al seguente:

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x, \\ |x - \bar{x}| < \delta \implies |f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon \end{aligned}$$

Allora, considerando un qualsiasi  $t \in [\bar{x}, x]$  (ovvero tra gli "*estremi*" dell'integrale), ho

$$|t - \bar{x}| < \delta \implies |f(t) - f(\bar{x})| < \varepsilon$$

Allora con tutte le considerazioni appena effettuate e ricordandoci un'altra *proprietà* dell'*integrale* (*Proposizione 6 (l'integrale del valore assoluto di una funzione è più grande dell'integrale della funzione)*) ho

$$|R_{\bar{x}}^F(x) - f(\bar{x})| = \frac{1}{x - \bar{x}} \left| \int_{\bar{x}}^x f(t) - f(\bar{x})dt \right| \leq \frac{1}{x - \bar{x}} \int_{\bar{x}}^x |f(t) - f(\bar{x})|dt < \frac{\int_{\bar{x}}^x \varepsilon}{x - \bar{x}}$$

In definitiva, rimettendo tutto apposto ho il seguente:

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x, \\ |x - \bar{x}| < \delta \implies |R_{\bar{x}}^F(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} R_{\bar{x}}^F(x) = f(\bar{x}) \implies [F'(\bar{x}) = f(\bar{x})] \blacksquare$$

## 2. Conseguenze del teorema

#Corollario

**Corollario** (primitività delle funzioni continue).

Se  $f$  è *continua*, allora  $f$  è *primitivabile* (Definizione 2 (funzione primitivabile)) e la sua funzione integrale è *una* sua primitiva.

**DIMOSTRAZIONE** del *corollario 2.1*. (Corollario 2 (primitività delle funzioni continue))

Questo corollario segue *direttamente* dal *teorema fondamentale del calcolo integrale*: infatti se una funzione è *continua nel suo dominio*, allora per il teorema sopracitato questa l'*Integralfunktion* di questa funzione è la *primitiva* per ogni punto nel dominio. ■ Inoltre nella dispensa si trova una *dimostrazione alternativa*.

#Corollario

**Corollario** (teorema di Torricelli-Barrow).

Vedere la pagina *Teorema di Torricelli-Barrow* dato che è possibile dimostrarla senza l'ausilio del "*teorema padre*", ovvero il *teorema fondamentale del calcolo integrale*.

## C3. Il teorema di Torricelli-Barrow

### Teorema di Torricelli-Barrow

*Teorema di Torricelli-Barrow: enunciato, dimostrazione alternativa e conseguenza principale.*

## 0. Prerequisiti e/o voci correlate

- Integrabilità secondo Riemann

- Primitiva di una Funzione
- Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale
- Teoremi sulle funzioni continue (Weierstraß e dei valori medi)
- Primitiva di una Funzione
- Suddivisione di un Intervallo
- Teorema della Media Integrale

## 1. Enunciato del teorema di Torricelli-Barrow

#Teorema

**Teorema** (di Torricelli-Barrow).

Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua nel dominio (Definizione 2 (Funzione continua per un punto)).

Allora  $f$  è integrabile (Teorema 2 (di integrabilità delle funzioni continue)).

Ha senso dunque considerare la sua funzione integrale (Definizione 1 (la funzione integrale / die Integralfunktion)),

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Allora  $F$  è derivabile nel dominio e vale che

$$\forall x \in [a, b], F'(x) = f(x)$$

#Dimostrazione

Naturalmente questo teorema non è altro che il figlio del teorema fondamentale del calcolo integrale (Teorema 1 (fondamentale del calcolo integrale)), solo che al posto di concentrarci su un singolo punto la generalizziamo su tutto il dominio  $[a, b]$ .

Alternativamente è possibile dare la seguente dimostrazione "bypassando" il teorema fondamentale del calcolo integrale.

Innanzitutto tengo conto del teorema della media integrale (Teorema 1 (della media integrale)).

Sia  $f$  continua su  $[a, b]$  e considero il rapporto incrementale  $R_{\bar{x}}^F(x)$ .

$$\begin{aligned} R_{\bar{x}}^F(x) &= \frac{F(x) - F(\bar{x})}{x - \bar{x}} \\ &= \int_a^x f(t)dt - \int_a^{\bar{x}} f(t)dt \cdot \frac{1}{x - \bar{x}} \\ &= \frac{1}{x - \bar{x}} \int_{\bar{x}}^x f(t)dt \end{aligned}$$

Possiamo illustrare in una maniera grafica il fatto che

$$\int_{[a,x]} f - \int_{[a,\bar{x}]} f = \int_{[\bar{x},x]} f$$

(figura 1.1.)

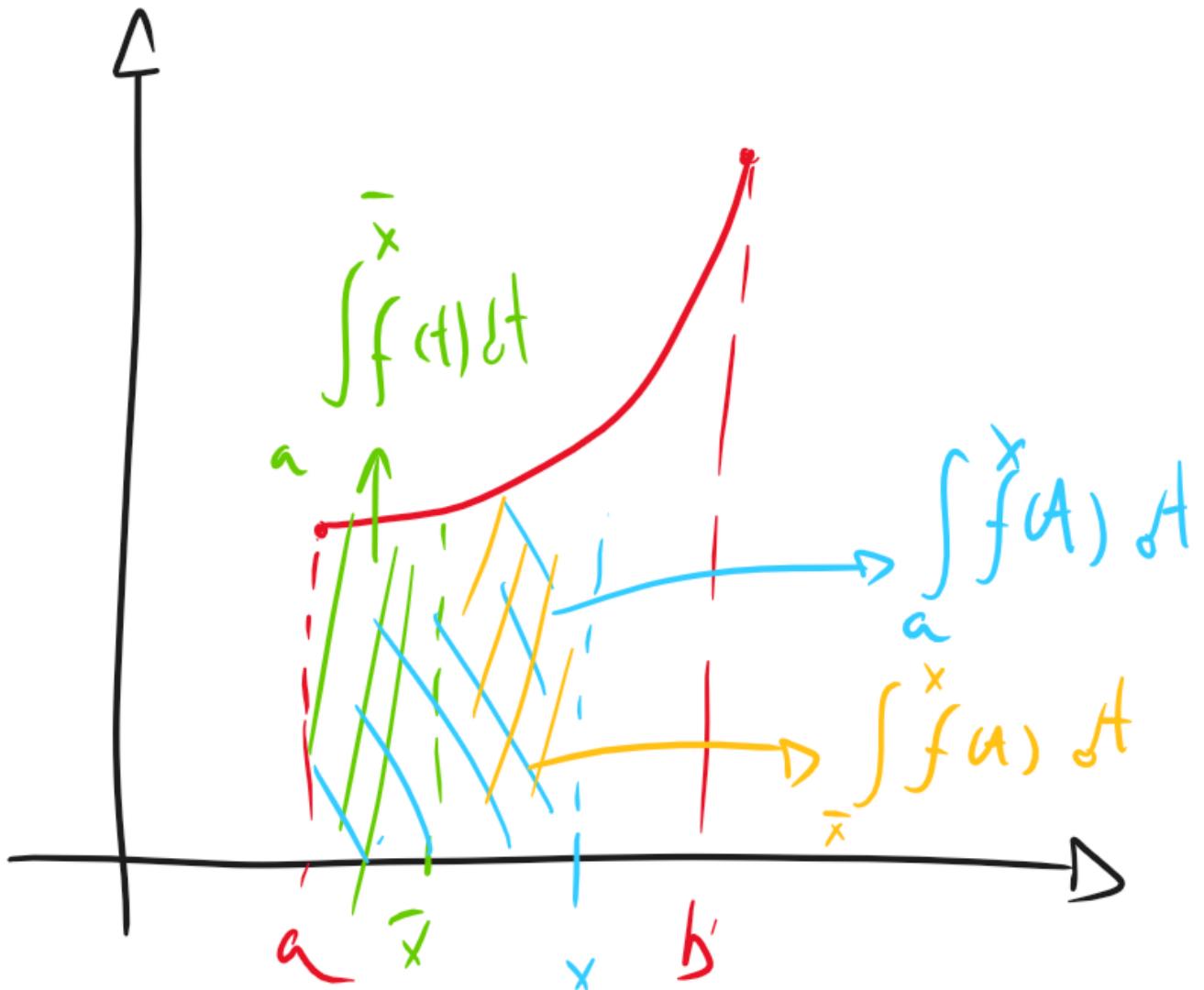
Ma allora possiamo considerare il *teorema delle media integrale* per cui ho un dato  $\xi \in (\bar{x}, x)$  vale che

$$f(\xi) = \frac{1}{x - \bar{x}} \int_{\bar{x}}^x f(t) dt$$

Pertanto passando al *limite*  $x \rightarrow \bar{x}$  ho

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} R_{\bar{x}}^F(x) = \lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(\xi) \underset{\substack{\xi \rightarrow \bar{x} \\ \bar{x} < \xi < x}}{\longrightarrow} f(\bar{x}) \blacksquare$$

**FIGURA 1.1.**



## 2. Conseguenze del teorema di Torricelli-Barrow

#Corollario

Sia  $G$  una **primitiva** di  $f$ , che è **continua** in  $[a, b]$ , allora si ha

$$\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a)$$

#Dimostrazione

**DIMOSTRAZIONE** del *corollario 2.1.* (Corollario 2 (l'integrale è la differenza tra le primitive calcolate negli estremi))

Dal teorema di *Torricelli-Barrow* (Teorema 1 (di Torricelli-Barrow)) so che la **funzione integrale**

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

è una **primitiva** di  $F$ .

Allora, essendo  $G$  una **primitiva qualsiasi**, so che la **differenza puntuale** tra  $F, G$  è **necessariamente una costante**, dato che  $G$  è di forma  $F + c$ . Ovvero

$$F - G = c \in \mathbb{R}$$

Poi so che  $F(a) = 0$ , dato che  $\int_a^a f(t)dt = 0$ : quindi

$$F(a) - G(a) = c \implies 0 - G(a) = c \implies c = -G(a)$$

Infine scrivo

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) = G(b) + c = G(b) - G(a) \blacksquare$$

#Osservazione

Osservazione (lo spostamento del problema del calcolo integrale).

Questo corollario è importante, dato che da questo momento il problema del **calcolo integrale** diventa quello di **trovare le primitive** di una funzione.

## D1. Gli integrali delle funzioni elementari

**Primitive delle Funzioni Elementari**

*Tabella delle primitive delle funzioni elementari.*

**0. Prerequisiti e/o voci correlate**

- Primitiva di una Funzione
- Tabella delle derivate

**1. Tabella delle Primitive delle Funzioni Elementari**

Prendiamo la *tabella delle derivate delle funzioni* e la "*leggiamo al contrario*":

$f$	$G \in \int f$
0	$C \in \mathbb{R}$
1	$x$
$x^n$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}, n \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln x , x \neq 0$
$e^x$	$e^x$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \arctan x$$

## #Osservazione

Osservazione (l'arcoseno e l'arcocoseno sono la stessa cosa in questo contesto).

Notiamo che per la frazione  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  abbiamo **due primitive** ammissibili: questo al primo impatto può sembrare strano, ma in una seconda analisi (matematica) vedremo che questa situazione ha perfettamente senso!

Consideriamo infatti la funzione

$$f(x) = \arcsin x + \arccos x$$

Che è definita in  $[-1, 1]$  dato che entrambe sono definite in tale intervallo.

La calcoliamo in 0 (ricordandoci delle definizioni! [Funzioni trigonometriche > ^07affd](#)):

$$f(0) = \arcsin 0 + \arccos 0 = 0 + \frac{\pi}{2}$$

Calcoliamo la **derivata** di  $f$ :

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

Ma per una **conseguenza del teorema di Lagrange** ([Teorema 3 \(derivata nulla è sempre una costante\)](#)),  $f$  dev'essere una funzione **costante**, di conseguenza deve valere

$$\frac{\pi}{2} = \arcsin x + \arccos x \implies -\arccos x = \arcsin x + \frac{\pi}{2}$$

Quindi vediamo che queste funzioni **sono** effettivamente le stesse, solo che una è traslata dell'altra. Poi, come osserveremo nel contesto del **calcolo integrale**, questo li rende effettivamente uguali.

## #Osservazione

Osservazione (Osservazione 1.2.).

## D2. L'integrazione per parti

### Integrazione per Parti

*Teorema dell'integrazione per parti: enunciato, dimostrazione e applicazione.*

## 0. Prerequisiti e/o voci correlate

- Derivata e derivabilità
- Proprietà delle derivate (regola di Leibniz)
- Primitiva di una Funzione

## 1. Enunciato della regola

#Teorema

**Teorema** (integrazione per parti).

Siano  $f, g \in \mathcal{C}^1$  (ovvero *derivabili* almeno una volta con la loro derivata continua) ([Definizione 2 \(classe C di una funzione reale\)](#)).

Allora vale che

$$\boxed{\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx}$$

Da cui

$$\boxed{\int_a^b f(x)g(x) dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x) dx}$$

## 2. Dimostrazione

**DIMOSTRAZIONE** del [teorema 1.1.](#) (Teorema 1 (integrazione per parti))

Ricordiamoci la [regola di Leibniz](#) per le derivate ([Teorema 3 \(derivata di operazioni tra funzioni\)](#)):

$$(fg)' = f'g + fg'$$

So che sia  $f'g$  che  $fg'$  sono [continue](#). Allora possiamo considerare la [funzione integrale](#) di  $f'g + fg'$ :

$$\int_a^x f(t)g'(t) dt + \int_a^x f'(t)g(t) dt = f(x)g(x) - f(a)g(a)$$

da cui, calcolandola in  $b$ , deriva

$$\int_a^b f(t)g'(t) dt = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(t)g(t) dt \blacksquare$$

## #Osservazione

Osservazione (truccetto mnemonico).

*Approfondimento tratto da "Le Matematiche" di A. D. Aleksandrov, A. N. Kolmogorov e M. A. Lavrent'ev (pp. 169-170)*

Si può alternativamente imparare una "[dimostrazione](#)" meno formale ma più "[facile](#)" da imparare a memoria di questo teorema: consideriamo l'integrazione come un "[operazione](#)" che prende in argomento funzioni.

Allora, ricordandoci la regola di Leibniz possiamo derivare

$$\begin{aligned} (uv)' &= uv' + u'v \\ uv' &= (uv)' - u'v \\ \int(uv)' dx &= uv - \int(u'v) dx \end{aligned}$$

### 3. Regola pratica

## #Osservazione

Osservazione (regola pratica).

Come "[regoletta pratica](#)" possiamo considerare la  $f$  come la funzione "[derivanda](#)" chiamandola  $D$ , e invece possiamo considerare  $g'$  come la funzione "[integrandra](#)" chiamandola  $I$ .

Riformulando il teorema iniziale abbiamo

$$\int DI = D \int I - \int D' \int I$$

Dove  $D, I$  sono le *funzioni originali*,  $D'$  la funzione derivata e  $\int I$  la funzione integrata.

## Metodo D-I (approfondimento personale)

#Osservazione

Osservazione (metodo D-I).

Inoltre è possibile impararsi un "*trucchetto pratico*" per questa tecnica di integrazione, spiegato nel seguente video dal professore universitario cinese-statunitense *Steve Chow*

[https://www.youtube.com/watch?v=2I-\\_SV8cwsW](https://www.youtube.com/watch?v=2I-_SV8cwsW)

## D3. L'integrazione per sostituzione

### Integrazione per Sostituzione

*Integrazione per sostituzione: teorema, dimostrazione e utilità pratica.*

### 0. Prerequisiti e/o voci correlate

- Funzione Integrale
- Primitiva di una Funzione
- Derivata e derivabilità
- Funzioni

### 1. Enunciato del teorema

#Teorema

**Teorema** (integrazione per sostituzione).

Sia  $g \in \mathcal{C}^1$  (ovvero *derivabile fino ad almeno*  $f'$  con  $f'$  continua),

$$g : [\alpha, \beta] \longrightarrow [a, b]$$

Sia  $F$  l'*Integralfunktion* di  $f$  (Definizione 1 (la funzione integrale / die Integralfunktion)).

Allora vale che

$$(F(g(x)))' = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x))g'(x)$$

Di conseguenza vale anche

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))g'(t) dt = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x) dx$$

In particolare se  $g$  è *invertibile* e vale che  $g(\alpha) = a, g(\beta) = b$ , allora vale anche

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{g^{-1}(a)=\alpha}^{g^{-1}(b)=\beta} f(g(t))g'(t) dt$$

## 2. Dimostrazione

#Dimostrazione

**DIMOSTRAZIONE** del *teorema 1.1*. (Teorema 1 (integrazione per sostituzione))

La dimostrazione è immediata: questa segue dalle *regole di derivazione* (Proprietà delle derivate) e dal *teorema fondamentale del calcolo integrale* (Teorema 1 (fondamentale del calcolo integrale)): infatti vale che

$$F(g(\beta)) - F(g(\alpha)) = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x) dx$$

## 3. Regola pratica

#Osservazione

Osservazione (regoletta pratica).

Anche se l'enunciato del teorema in sé potrebbe sembrare complicato, in realtà è più facile di quello che si pensa. Infatti possiamo usare la seguente regoletta pratica:

- Poniamo una nuova "*variabile*" e la chiamiamo  $u$  in funzione di  $x$ ; ovvero abbiamo qualcosa del tipo  $u = f(x)$ .
- Prendendo la derivata di  $u$  ottengo  $du = f'(x)dx$ .
- Se nell'integrale riesco a trovare  $f'(x)dx$ , posso "*sostituirla*" con  $du$  e posso sostituire altrettanto  $f(x)$  con  $u$ . Inoltre dobbiamo ricordarci pure di sostituire

Si illustra questa regoletta nel seguente esempio.

#Esempio

Esempio (sostituzione per  $u$ ).

Voglio calcolare

$$\int_1^2 2x \cdot x^2 \, dx$$

Anche se questo integrale sarebbe troppo banalmente facile da calcolare con le altre *tecniche* di integrazione (come ad esempio mediante la tabella delle primitive), supponiamo però di esser pagati una modica cifra di denaro per ogni volta che usiamo l'*integrazione per sostituzione*.

Siamo avari di denaro, quindi tentiamo di usare questa tecnica.

Poniamo dunque  $u = x^2$ , da cui implica  $du = 2x \, dx$ .

Inoltre, "trasformiamo" gli estremi calcolando

$$u_1 = 1^2 = 1; u_2 = 2^2 = 4$$

Ho tutte le condizioni per svolgere l'integrale? Sì! Ho proprio  $2x \, dx$  nell'integrale stesso.

$$\int_1^2 x^2 \cdot 2x \, dx$$

Allora lo effettuo la *sostituzione per  $u$* :

$$\int_1^2 x^2 \cdot 2x \, dx = \int_1^4 u \, du$$

Alla fine calcolo l'integrale

$$\int_1^4 u \, du = \frac{u^2}{2} \Big|_1^4 = \frac{15}{2}$$

che è ciò che volevamo.

## Abstract del Capitolo VIII

Dopo aver *ottenuto* tutte le "*armi*" dell'*analisi matematica*, possiamo finalmente effettuare lo "*studio della funzione*".

## Studio di Funzione

Schema "generale" e "riassuntivo" di quello che potrebbe essere lo svolgimento di uno studio di funzione

---

### 0. Preambolo

In questo articolo si elencheranno dei "*step*" principali, che sono da svolgere generalmente in uno studio di funzione; ovviamente al variare di esercizio potranno sorgere delle necessità diverse.

Quindi anche lo schema che presenterò dovrebbe essere generalmente valido, però bisogna comunque stare attenti ad eventuali "*sorprese*" da parte del testo.

### 1. Procedimento generale

Questo procedimento riguarderà la consegna "*principale*" di uno studio di funzione: ovvero quella di realizzare un *disegno* (approssimativo) della funzione richiesta

#### I. Dominio della funzione

Trovare il dominio per cui è *definita* la funzione.

Questo problema è elementare in quanto considerare il *dominio* delle *funzioni elementari* (Funzioni di potenza, radice e valore assoluto, Funzioni trigonometriche, Funzione esponenziale e Logaritmica), farci un sistema e prendere l'insieme più "*restrittivo*".

#### II. Incrocio con le assi

Trovare i *punti* in cui la funzione incrocia con l'asse dell'ascissa e delle ordinate.

Per trovare i punti per cui  $f$  incrocia con la retta delle ordinate basta sostituire  $f(x)$  con  $x = 0$ . Ovviamente questo è possibile *solo se* 0 appartiene al *dominio* di  $f$ .

Nel secondo caso si tratterebbe di trovare una *soluzione* all'*equazione*  $f(x) = 0$ ; però non è sempre scontato che sia *sempre* possibile trovare punti in cui la funzione  $f$  incontra l'asse  $x$ ; infatti, ad esempio  $f(x) = x^2 + 1$  non incrocia con  $x$  da nessuna parte.

#### III. Segno della funzione e parità

Anche qui il problema è elementare, in quanto di solito basta far "*ricondurre*" il segno delle funzioni complicate a quelle elementari.

Dopodiché è anche utile controllare se la funzione è *pari* o *dispari* calcolando  $f(-x)$ ; in questo modo abbiamo un'*automatismo* utile per vedere se ciò che stiamo svolgendo

## IV. Limiti agli estremi e punti particolari

Qui bisogna sapere come calcolare i *limiti* ([Definizione di Limite di funzione](#)); allora questa parte richiederà un po' di tecnica con i limiti.

In particolare è utile calcolare i limiti per  $x$  che tende a  $\pm\infty$ , e ad alcuni punti per cui *non* è *definita*. Ovviamente qui serve la discrezione personale, in quanto in alcuni casi non ci sarebbe neanche il senso di farlo.

A questo punto sarebbe già opportuno fare una "*bozza*" del disegno della funzione, giusto per avere un'idea generale.

## V. Trovare gli eventuali asintoti

In realtà questa parte è più una "*conseguenza*" di quella di calcolare i limiti; in particolare si vuole, se opportuno, trovare eventuali *asintoti obliqui* ([Definizione 3 \(asintoto obliquo\)](#)) mediante la tecnica descritta ([Proposizione 4 \(tecnica per "trovare" asintoti obliqui\)](#)).

## VI. Funzione derivata (prima)

Qui basta sapere come calcolare la *derivata* ([Definizione 6 \(funzione derivata\)](#)) di una qualsiasi funzione.

## VII. Segno della derivata prima (crescenza e decrescenza)

Analogamente qui bisogna trovare il *segno* della *derivata prima* per determinare la (*de)crescenza* della funzione  $f$ ; questa è determinabile in questo modo in quanto conseguenza del *teorema di Lagrange* ([Teorema 5 \(la derivata positiva significa funzione crescente\)](#)).

## VIII. Funzione derivata (seconda)

Stessa cosa della *funzione derivata* (ovvero lo step [VI](#)), solo che si considera la *derivata* della *derivata*. Ovvero la *derivata seconda* di  $f$ .

## IX. Segno della derivata seconda (concavità e convessità)

Secondo i risultati dell'analisi matematica ([Caratterizzazione delle Funzioni Convesse](#)), il *segno della seconda derivata della funzione* può determinare il "*modo*" in cui curva il grafico; se  $f''$  è positiva, allora è "*concava in alto*", altrimenti è "*concava in basso*".

## 2. Esercizio particolare

Ogni tanto negli appelli si potrebbe trovare di fronte ad un quesito del tipo: al variare di una grandezza  $\alpha$  reale, trovare quante soluzioni ci sono per la seguente equazione...

Solitamente l'equazione si presenta in una maniera analoga della funzione studiata nello stesso esercizio, quindi basta riportare l'equazione in "forma" della funzione. Di solito conviene fare questo esercizio *alla fine* dello studio di funzione, quando si ha già un buon disegno della funzione; in questo modo si può "tracciare" la linea orizzontale  $\alpha$  e vedere quante volte questa "incrocia" la funzione.

# I COMPLEMENTI DELL'ANALISI MATEMATICA

## Abstract dei Complementi

Nei *Complementi* verranno trattati gli argomenti sui numeri naturali e sui numeri complessi: si parte dunque da una profonda riflessione sul significato di "*contare*", poi per arrivare a ragionare sull'insieme più "*completo*" dell'analisi matematica.

Attenzione: queste parti sono le parti che *non* sono state ricontrolate in fase di ripasso pre-esame, quindi la probabilità di trovare refusi ed errori è alta.

Inoltre, per l'edizione 3.0. della dispensa ufficializzata è possibile trovare il capitolo dedicato alle *serie numeriche*, parte del programma svolto per il C.d.L. di Chimica dal prof. Daniele del Santo. Si può considerare quest'ultima parte come un *cenno* alle serie numeriche, che saranno viste col corso di *Analisi Matematica II*, svolta dalla prof. Eva Sincich.

## N1. La struttura dei numeri naturali

### Struttura dell'insieme dei numeri naturali

*Definizione intuitiva dell'insieme dei numeri naturali  $\mathbb{N}$ , le proprietà strutturali su di esso, definizioni delle operazioni su esso, proprietà delle operazioni. Relazione d'ordine totale  $\geq$  su  $\mathbb{N}$ , struttura algebrica  $(\mathbb{N}, +, \cdot, \geq)$ .*

---

### DEF 1. Insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$

**DEF 1.** Si definisce **l'insieme dei numeri naturali** come *l'insieme dei numeri che servono per contare*, aggiungendoci il numero 0 per motivi di comodità che si vedranno dopo. Viene denotata come

$$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots\}$$

### DEF 2. Proprietà strutturali e operazioni di $\mathbb{N}$

#### DEF 2.1. Operazione di somma/addizione

**DEF 2.1.** Si definisce su  $\mathbb{N}$  l'operazione di **somma** o **addizione** come la seguente funzione

$$\begin{aligned} + : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (n, m) &\mapsto k := n + m \end{aligned}$$

#### 2.1. Proprietà dell'operazione $+$

L'operazione *somma/addizione* gode delle seguenti tre proprietà.

**PROPRIETA' 2.1.1.** La proprietà **associativa** dice che

$$\forall n, m, k \in \mathbb{N}; n + (m + k) = (n + m) + k$$

**PROPRIETA' 2.1.3.** La proprietà **commutativa** dice invece che

$$\forall m, n \in \mathbb{N}; m + n = n + m$$

**PROPRIETA' 2.1.2.** Con l'operazione  $+$  esiste l'elemento neutro  $e$  (in questo caso 0), tale che

$$\exists e \in \mathbb{N} : 0 + m = m + 0 = m$$

**DEF 2.2.** Si definisce su  $\mathbb{N}$  l'operazione di **prodotto** o **moltiplicazione** come la funzione

$$\begin{aligned}\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (n, m) &\mapsto k := (n \cdot m)\end{aligned}$$

## 2.2. Proprietà dell'operazione .

L'operazione **prodotto/moltiplicazione** gode delle seguenti tre proprietà.

**PROPRIETA' 2.1.1.** La proprietà **associativa** dice che

$$\forall n, m, k \in \mathbb{N}; n \cdot (m \cdot k) = (n \cdot m) \cdot k$$

**PROPRIETA' 2.1.3.** La proprietà **commutativa** dice invece che

$$\forall m, n \in \mathbb{N}; m \cdot n = n \cdot m$$

**PROPRIETA' 2.1.2.** Con l'operazione  $+$  esiste l'elemento neutro  $e$  (in questo caso 1), tale che

$$\exists e \in \mathbb{N} : 1 \cdot m = m \cdot 1 = m$$

## 2.3. Proprietà distributiva

**DEF 2.3.** Esiste una proprietà che lega le **operazioni**  $+$  e  $\cdot$  tra di loro; ovvero la **proprietà distributiva**, che dice

$$\forall m, n, k \in \mathbb{N}; n \cdot (m + k) = n \cdot m + n \cdot k$$

## DEF 2.4. Relazione d'ordine totale $\geq$

**DEF 2.4.** Su  $\mathbb{N}$  è definita una **relazione d'ordine totale** (**DEF. 4.1.**) che si chiama  $\geq$ .

**OSS 2.4.1.** Essa è **compatibile** con le altre operazioni, ovvero

$$\begin{aligned}\forall n, m, k \in \mathbb{N}; n \geq m &\implies n + k \geq m + k \\ n \geq m &\implies n \cdot k \geq m \cdot k\end{aligned}$$

## DEF 3. Struttura algebrica $(\mathbb{N}, +, \cdot, \geq)$

**DEF 3.** Avendo appena visto le operazioni  $+$ ,  $\cdot$  e la relazione  $\geq$  che vengono tutte definite su  $\mathbb{N}$ , possiamo definire la seguente **struttura algebrica**:

$$(\mathbb{N}, +, \cdot, \geq)$$

Pertanto d'ora in poi diamo per scontato che quando si parla di  $\mathbb{N}$  vengono già definite le operazioni collegate ad esso.

## N2. Gli assiomi di Peano e il principio di induzione

### Assiomi di Peano, il principio di induzione

*Assiomi di G. Peano; significato nella matematica, quali sono. Il principio di induzione; le applicazioni del principio di induzione: dimostrazione per induzione e definizioni. Successioni.*

---

## 1. Riflessioni sui fondamenti dei numeri $\mathbb{N}$

**OSS 1.** Mi pongo il seguente *problema*: è possibile trovare degli *assiomi* (ovvero delle prime proprietà che non vengono dimostrate ma sapute a priori) su  $\mathbb{N}$  in modo che tutte le *proprietà* (descritte in *Struttura dell'insieme dei numeri naturali*) siano deducibili da questi?

Quindi sto riflettendo sui *fondamenti* della matematica, in particolare sui numeri *naturali*  $\mathbb{N}$ , poi per trovare una sistemazione particolarmente conveniente per noi.

## 2. Assiomi di Peano

Gli **assiomi di Peano** soddisfano tutte le seguenti regole enunciate:

(0.) Esiste un insieme  $\mathbb{N}$  che denominiamo come l'insieme dei *numeri naturali*

1. Esiste un elemento di questo insieme, che chiamo 0;  $0 \in \mathbb{N}$
2. Esiste una funzione *successivo*  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  che soddisfa le seguenti proprietà:
  1.  $\sigma$  è iniettiva, ovvero  $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{N}; x_1 \neq x_2 \implies \sigma(x_1) \neq \sigma(x_2)$
  2.  $0 \notin \sigma(\mathbb{N})$ ; ovvero lo 0 non è successivo di nessun numero in  $\mathbb{N}$ .
3. (*principio di induzione*) Sia l'insieme  $S \subseteq \mathbb{N}$  e si suppone che:  $0 \in S$  e  $\forall n, n \in S \implies \sigma(n) \in S$ ; allora  $S = \mathbb{N}$ .

**OSS 2.1.** Dagli assiomi **2.1.** e **2.2.** appena enunciate è possibile dedurre che l'insieme  $\mathbb{N}$  dev'essere necessariamente *infinito*: se il codominio della funzione  $\mathbb{N}$  ha più elementi del dominio della funzione  $\mathbb{N}$  (visto che  $\sigma$  è iniettiva ed il numero 0 non fa parte dell'immagine), **ma** si tratta del medesimo insieme  $\mathbb{N} = A = B$ , pertanto  $\mathbb{N}$  dev'essere infinita in quanto è l'unico modo per soddisfare le condizioni dedotte.

### DEF 2.1. Il sistema di Peano

Secondo gli seguenti assiomi appena enunciati, si può definire un **sistema di Peano** come la terna  $(\mathbb{N}, 0, \sigma)$ .

**OSS 2.2.** Si nota che la scelta dell'"*elemento iniziale*" (ovvero in questo caso 0) è una scelta arbitraria che può essere cambiata; infatti si può "*spostare*" questo "*punto di partenza*" e si avrebbe comunque un *sistema di Peano* in cui valgono le stesse regole enunciate; infatti si può dimostrare che tutti i sistemi di Peano sono *isomorfi*, cioè che

**APPROFONDIMENTO. (tratto da Analisi Matematica Vol. 1, E. Giusti).** Se si vuole essere bibliograficamente accurati, allora bisognerebbe specificare che ci sono altri quattro *assiomi di Peano*, che sono piuttosto assiomi logici e abbastanza intuitivi, ovvero:

1.  $\forall a \in \mathbb{N}, a = a;$
2.  $\forall a, b \in \mathbb{N}, a = b \iff b = a$
3.  $\forall a, b, c \in \mathbb{N}, (a = b) \wedge (b = c) \implies a = c$
4.  $(a = b) \vee b \in \mathbb{N} \implies a \in \mathbb{N}$

### 3. Il principio di induzione

Uno degli *assiomi* più importanti appena enunciati è *l'assioma 4.*, che viene definito anche come il **principio di induzione**, che enuncia il seguente:

$$[(S \subseteq \mathbb{N}) \wedge (0 \in S) \wedge (\forall n \in \mathbb{N}, n \in S \implies (n + 1) \in S)] \implies S = \mathbb{N}$$

Ora, riscrivendolo in un modo più comprensibile, questo principio enuncia che:

1. Supponendo che esista un insieme  $S \subseteq \mathbb{N}$  (verificando così la prima condizione)
2. Poi supponendo che un numero 0 appartenga a  $S$ , quindi il "*punto di partenza*"
3. E infine se è vero che se un qualsiasi elemento  $n$  appartiene a  $S$ , allora il suo successivo  $\sigma(n)$  appartiene anch'esso a  $S$ ,
4. Allora  $S = \mathbb{N}$ .

#### 3.1. L'idea fondamentale

Per capire fino a fondo l'idea del *principio d'induzione* si può riflettere sulla funzione *successivo*  $\sigma$ , ovvero: cos'è?

Se  $\sigma(0) = 1$  e  $\sigma(n) = n + 1$ , allora si può pensare che a partire da 0 posso raggiungere tutti i numeri in  $\mathbb{N}$ . Ad esempio,

$$5 = \sigma(4) = \sigma(\sigma(3)) = \sigma(\sigma(\sigma(2))) = \sigma(\sigma(\sigma(\sigma(1)))) = \sigma(\sigma(\sigma(\sigma(\sigma(0))))))$$

Si può utilizzare la seguente analogia: se voglio salire di un piano, devo percorrere un numero di gradini; se posso salire sul primo gradino, che lo chiamo gradino 0, allora posso salire sul prossimo (analogia con la funzione successiva  $\sigma$ ), poi sul prossimo e sul prossimo, finché raggiungo il prossimo piano.

### 4. Applicazioni del principio di induzione

Il **principio di induzione** può essere utilizzato principalmente per due scopi: o definire *oggetti* o verificare/dimostrare delle *proprietà* (ovvero dei *predicati unari*); nel primo

## 4.1. Dimostrazione per induzione

In questa pagina si parlerà principalmente di *dimostrazione per induzione*, corredata da vari esempi.

L'*idea* per la **dimostrazione per induzione** consiste nel seguente:

1. Ho una *proprietà* (ovvero un *predicato unario*)  $\mathcal{P}(n)$  e voglio dimostrare che essa è *verificata* per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ;
2. Si crea quindi *l'insieme dei numeri che verificano*  $\mathcal{P}(n)$  e la chiamiamo  $S$ .
3. Ora per dimostrare  $\mathcal{P}(n)$  basta verificare le due condizioni:
  1.  $0 \in S$ , ovvero  $\mathcal{P}(0)$  è vera;
  2.  $\forall n \in S \implies \sigma(n) \in S$ ; ovvero se  $\mathcal{P}(n)$  è vera, allora  $\mathcal{P}(n+1)$ . Da notare che si tratta **solo** di dimostrare *l'implicazione materiale*.
  3. Allora  $S = \mathbb{N}$ , ovvero tutti i valori che rendono  $\mathcal{P}(n)$  vera sono tutti i numeri in  $\mathbb{N}$ .

Si vedono alcuni esempi sulla *dimostrazione* per induzione in [Esempi di Induzione](#)

## 4.2. Definizioni per ricorrenza

### DEF. 4.2.1. Successione a valori in $A$ .

Sia  $A$  un insieme qualunque e  $f$  una funzione

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow A; n \mapsto f(n) = a_n$$

Quindi saranno determinati

$$f(0) = a_0, f(1) = a_1, \dots, f(n) = a_n$$

Questa funzione  $f$  si chiama, *tradizionalmente*, una **successione a valori in  $A$**  (cioè nell'insieme  $A$ ).

Lo rappresentiamo con

$$(a_n)_n : (a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$$

### DEF 4.2.2. La sommatoria

Si può definire la *sommatoria*

$$\sum_{j=0}^n a_i = a_0 + \dots + a_n$$

in una maniera rigorosa usando il *principio di induzione* e la definizione di *successione*:

$$\sum_{j=0}^n a_n = s_n$$

poi, ponendo il caso base

$$s_0 = a_0$$

e in seguito

$$\forall n, s_{n+1} = s_n + a_{n+1}$$

definendo così la sommatoria, in quanto sono partito dall'elemento **base**  $a_0$ , e potendo generare la sommatoria di  $n + 1$  a partire da  $n$ ; pertanto la **successione**  $(s_n)_n$  viene definita su  $\mathbb{N}$  a partire da 0.

### DEF 4.2.3. Produttoria

Similmente si definisce la **produttoria**

$$\prod_{i=0}^n a_i = a_0 \cdot \dots \cdot a_n$$

come

$$\prod_{i=0}^n a_i = p_n$$

$$p_0 = a_0$$

$$\forall n, p_{n+1} = p_n \cdot a_{n+1}$$

**ESEMPIO 4.2.3.1. Fattoriale.** Un caso particolare della **produttoria** è il cosiddetto **fattoriale**; la si definisce come

$$\prod_{i=0}^n i = n!$$

Quindi

$$0! = 1$$

$$\forall n; (n+1)! = n!(n+1)$$

## Esempi di Induzione

*Esempi sulle prove per induzione. Articolo creato ad-hoc per la quantità presente degli esempi, rendendo il file originario troppo pesante.*

### 1. Esempi di dimostrazione per induzione

#### ESEMPIO 1.1. Aneddoto di Gauss.

Si racconta che quando il matematico *C. F. Gauss* frequentava le scuole elementari, il suo professore di matematica aveva dato un esercizio da fare in quanto punizione: ovvero quello di sommare tutti i numeri da 0 a 100; quindi tutti i numeri  $0 + 1 + 2 + \dots + 100$ .

Alla sorpresa del professore e dei suoi compagni, Gauss riuscì, non solo a risolvere il problema quasi immediatamente consegnando la sua lavagna sulla cattedra, ma anche essere l'unico alunno ad aver dato la risposta corretta: 5050.

Grazie alla sua intuizione, Gauss riuscì a ingegnare un metodo per calcolare quel numero con una velocità strabiliante: ovvero quella di determinare la somma da 0 a 100 come  $A$ , che è uguale alla somma da 100 a 1 (proprietà commutativa); Quindi sommando  $A$  con sé stesso ma disposti in una maniera diversa (ovvero la prima con un criterio crescente, la seconda decrescente), ottiene  $2A = 100(101) \iff A = \frac{100(101)}{2}$

Generalizzando da questo aneddoto abbiamo la seguente proprietà:

$$\mathcal{P}(n) = 0 + 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Ora vogliamo dimostrarla rigorosamente *per induzione*.

**DIM.**

1. Caso base: verificare  $\mathcal{P}(0)$ ;

$$\mathcal{P}(0) : 0 = \frac{0(1)}{2} = 0 \text{ OK}$$

2. Ipotesi induttiva; supponendo che  $\forall n, \mathcal{P}(n)$  è vera, allora anche  $\mathcal{P}(n+1)$  è vera.

$$\mathcal{P}(n) : 0 + 1 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Avvolte è utile anche già "*prevedere*" dove vogliamo arrivare a partire da  $\mathcal{P}(n)$ , ovvero

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(n+1) : 0 + 1 + \dots + n + (n+1) &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\ \mathcal{P}(n) + (n+1) &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\ \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) &= \dots \\ (n+1)\left(\frac{n}{2} + 1\right) &= \dots \\ (n+1)\left(\frac{n+2}{2}\right) &= \dots \\ \frac{(n+1)(n+2)}{2} &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \text{ OK}\end{aligned}$$

3. Pertanto si verifica che i numeri che rendono  $\mathcal{P}(n)$  vera sono tutti i numeri naturali  $\mathbb{N}$  a partire da 0.

## ESEMPIO 1.2. Somma dei quadrati

Provare che per ogni  $n \in \mathbb{N}$  vale

$$P(n) : 0 + 1 + 4 + \dots + n^2 = \frac{(n)(n+1)(2n+1)}{6}$$

Anche qui possiamo usare l'induzione, dato che anche qui si tratta di una *proprietà* sui numeri naturali  $\mathbb{N}$ .

1. Caso base:

$$\begin{aligned}P(0) : 0 &\stackrel{?}{=} \frac{0(0+1)(2(0)+1)}{6} \\ 0 &= 0 \text{ OK}\end{aligned}$$

2. Ipotesi induttiva:

$$\begin{aligned}P(n) : 0 + 1 + 4 + \dots + n^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ P(n+1) : 0 + 1 + 4 + \dots + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(n+1) : 0 + 1 + 4 + \dots + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6} \\
 P(n) + (n+1)^2 &= \dots \\
 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 &= \dots \\
 (n+1)\left(\frac{n(2n+1)}{6} + (n+1)\right) &= \dots \\
 \frac{(n+1)(n)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \\
 \frac{(n+1)((n)(2n+1) + 6n+6)}{6} &= \frac{(n+1)(n^2 + 7n + 6)}{6} \\
 (n+1)(2n^2 + n + 6n + 6) &= (n+1)(n^2 + n + 6n + 6) \\
 \text{OK } \blacksquare
 \end{aligned}$$

### ESEMPIO 1.3. Disuguaglianza di Bernoulli.

Sia  $a > -1$ ,  $a \in \mathbb{R}$ . Allora  $\forall n \in \mathbb{N}$  vale la seguente:

$$(1+a)^n \geq 1 + na$$

**DIM.** Sia  $P(n) : (1+a)^n \geq 1 + na$ .

1. Verificare  $P(0)$ ;

$$P(0) : (1+a)^1 \geq 1 \iff 1 \geq 1 \text{ OK } \blacksquare$$

2. Supponendo che  $P(n)$  sia vera, verificare  $P(n) \implies P(n+1)$ .

$$\begin{aligned}
 P(n) : (1+a)^n &\geq 1 + na \\
 (1+a)^n(1+a) &\geq (1+na)(1+a) \\
 (1+a)^{n+1} &\geq 1 + (n+1)a + na^2
 \end{aligned}$$

Sapendo che  $1 + (n+1)a$  è sicuramente maggiore o uguale a  $P(n+1)$  ovvero  $1 + (n+1)a$ , in quanto  $na^2$  è necessariamente positivo, allora consegue che

$$P(n+1) : (1+a)^{n+1} \geq 1 + (n+1)a$$

è vera, verificando  $P(n) \implies P(n+1)$ .  $\blacksquare$

### ESEMPIO-ESERCIZIO 1.4. Disuguaglianza di Bernoulli incrementata.

**PROVARE CHE VALE LA PROPRIETÀ**  $P(n) : (1+a)^n \geq 1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2$ , \*\*OVE  $a > 0$  e  $\forall n \geq 1$ .

$$P(0) : 1 + a \geq 1 + a + 0 \text{ OK}$$

2. Supponendo che  $P(n)$  sia vera, provare che  $P(n) \implies P(n+1)$

$$P(n) : (1+a)^n \geq 1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2$$

ed è utile "prevedere"  $P(n+1)$ , quindi

$$P(n+1) : (1+a)^{n+1} \geq 1 + (n+1)a + \frac{(n+1)(n)}{2}a^2$$

3. Ora prendiamo  $P(n)$  e moltiplichiamo per  $(1+a)$  da ambo le parti (che è possibile in quanto la relazione d'ordine  $\geq$  è compatibile con  $(1+a)$ )

$$\begin{aligned} P(n) : (1+a)^n(1+a) &\geq (1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2)(1+a) \\ (1+a)^{n+1} &\geq (1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2) + (a + na^2 + \frac{n(n+1)}{2}a^3) \\ (1+a)^{n+1} &\geq 1 + (n+1)a + (\frac{n(n-1)}{2} + n)a^2 + \dots a^3 \end{aligned}$$

4. Ora vogliamo dimostrare che il membro destro della diseguaglianza è necessariamente maggiore di  $1 + (n+1)a + \frac{(n+1)(n)}{2}a^2$ , rendendo per la *proprietà transitiva*  $(1+a)^{n+1}$  anch'esso maggiore di  $1 + (n+1)a + \frac{(n+1)(n)}{2}a^2$ , verificando così l'implicazione.

$$\begin{aligned} 1 + (n+1)a + (\frac{n(n-1)}{2} + n)a^2 + \dots a^3 &\geq 1 + (n+1)a + \frac{(n+1)(n)}{2}a^2 \\ (\frac{n(n-1) + 2n}{2})a^2 + \dots a^3 &\geq \frac{(n+1)(n)}{2}a^2 \end{aligned}$$

Dato che  $\dots a^3$  (parte omessa in quanto non è rilevante, dato che  $n$  è sempre un numero positivo) è anch'essa sempre positiva in quanto  $a > 0$ , ora basta dimostrare che

$$\begin{aligned} n(n-1) + 2n &\geq (n+1)(n) \\ n(n-1+2) &\geq (n+1)(n) \\ n(n+1) &\geq n(n+1) \text{ OK } \blacksquare \end{aligned}$$

5. Verificando così  $P(n) \implies P(n+1)$ , dato che da  $P(n)$  si verifica  $P(n+1)$ .

Sia  $a \neq 1$ ; allora con  $\forall n \in \mathbb{N}$  si ha

$$P(n) : a^0 + a^1 + \dots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

### DIM.

1. Dato che  $n \in \mathbb{N}$ , si può usare l'induzione; allora partiamo verificando  $P(0)$ ;

$$P(0) : a^0 = \frac{a^1 - 1}{a - 1} \iff 1 = 1 \text{ OK}$$

2. Ora supponendo  $P(n)$ , verifichiamo  $P(n) \implies P(n+1)$ .

$$\begin{aligned} P(n) &: a^0 + a^1 + \dots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} \\ a^0 + a^1 + \dots + a^n + a^{n+1} &= \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} + a^{n+1} \\ P(n+1) &: a^0 + a^1 + \dots + a^{n+1} = \frac{a^{n+1} - 1 + a^{n+1}(a - 1)}{a - 1} \\ &\dots = \frac{a^{n+1} - 1 + a^{(n+1)+1} - a^{n+1}}{a - 1} \\ P(n+1) &: \dots = \frac{a^{(n+1)+1} - 1}{a - 1} \end{aligned}$$

Da qui si vede che  $P(n) \implies P(n+1)$  è vera.

### ESEMPIO 1.6.

**PROVARE CHE PER OGNI**  $n \geq 1$  **VALE CHE IL NUMERO**  $n^3 + 5n$  **E' DIVISIBILE PER 6.**

1. Provare  $P(1)$ ;

$$P(1) : \exists k \in \mathbb{Z} \mid 1^3 + 5 = 6k \iff 6 = 6k; k = 1 \text{ OK}$$

$$\begin{aligned}
 P(n) &: \exists k_1 \mid n^3 + 5n = 6k_1 \\
 P(n+1) &: \exists k_2 \mid (n+1)^3 + 5(n+1) = 6k_2 \\
 &\dots \mid n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 5n + 5 = 6k_2 \\
 &\dots \mid (n^3 + 5n) + (3n^2 + 3n + 6) = 6k_2 \\
 &\dots \mid 6k_1 + 3(n^2 + n + 2) = 6k_2 \\
 &\dots \mid 3(n^2 + n + 2) = 6(k_1 - k_2) \\
 &\dots \mid n^2 + n + 2 = 2(k_1 - k_2) \\
 &\dots \mid (n)(n+1) = 2(k_1 - k_2 - 1)
 \end{aligned}$$

3. Vediamo che il problema si riduce a dimostrare che  $(n+1)(n)$  è *pari* (ovvero divisibile per 2), il che è facile da dimostrare se consideriamo due casi per  $(n+1)(n)$ :

1. Se  $n$  è pari, ovvero della forma  $2m$ , allora

$$(n+1)(n) \iff (2m+1)(2m) \iff 4m^2 + 2m \iff 2(2m^2 + m)$$

è pari in quanto l'espressione finale è comunque moltiplicata per due.

2. Se  $n$  è dispari, ovvero della forma  $2m+1$ , allora

$$(n+1)(n) \iff (2m+2)(2m+1) = 2(m+1)(2m+1)$$

anche qui è pari per lo stesso ragionamento di prima. ■

## ESEMPIO 1.7.

**PROVARE CHE PER OGNI**  $n \geq 1$  **VALE CHE**  $n! \geq 2^{n-1}$

1. Provare  $P(1)$ ;

$$P(1) : 1! \geq 2^0 \iff 1 \geq 1 \text{ OK}$$

2. Supponendo  $P(n)$ , provare  $P(n) \implies P(n+1)$ :

$$\begin{aligned}
 P(n) &: n! \geq 2^{n-1} \\
 &n!(n+1) \geq 2^{n-1}(n+1) \\
 &(n+1)! \geq 2^{n-1}(n+1)
 \end{aligned}$$

3. Dato che  $n \geq 1$ , ne segue che  $n+1 \geq 2$ ; quindi possiamo scrivere

$$2^{n-1}(n+1) \geq 2(2^{n-1}) = 2^n$$

4. Quindi per la proprietà transitiva della relazione  $\geq$ , si verifica che

$$P(n+1) : (n+1)! \geq 2^n$$

## PROBLEMA 1.1.

**PROBLEMA.** *Disegniamo nel piano una retta e notiamo subito che questa retta suddivide il piano in 2 "regioni"; ora disegniamo 2 rette e vediamo che ora abbiamo 4 regioni; ora 3 rette e notiamo che possiamo avere al massimo 7 regioni.*

Se si desidera, si può visualizzare il problema con il grafico sottostante. Ora ci poniamo i seguenti problemi.

[GRAFICO DA FARE]

### TRACCIA 1. (DA COMPLETARE)

Trovare una formula (o funzione, successione) che individui il numero delle regioni per  $n$  rette.

**SOLUZIONE 1.** L'idea è la seguente.

Individuiamo una *retta* orizzontale,

Ora, avendo definito la *successione* della funzione delle regioni in  $n$   $f_n$ , possiamo usare un metodo simile a quello chiamato "*Ansatz*", usato per risolvere le equazioni differenziali; ovvero congetturando una *soluzione generale*, poi per inserirla nella definizione di  $f_n$ , allora otteniamo la soluzione specifica  $f(n)$ .

Congetturiamo che

$$f(n) = an^2 + bn + c$$

[ Questa parte è molto complicata da fare, quindi lo farò un weekend in chill; tanto in teoria non è proprio 100% del programma, eh ]

### TRACCIA 2.

Provare che le regioni individuate con  $n$  rette sono al massimo  $\frac{n^2+n}{2} + 1$ .

**OSS 1.1.1.** Si nota, a posteriori (o anche dimostrata sopra), che indicando  $f_n$  il numero di regioni con  $n$  rette, si ha

$$f_{n+1} = f_n + (n + 1)$$

dove  $f_1 = 2$ .

**SOLUZIONE.** Si può dimostrare la formula  $f(n) = \frac{n^2+n}{2} + 1$  con il principio di induzione e anche grazie al suggerimento indicato sopra.

1. Provare  $f(1)$ ;

$$f(1) : f_1 = \frac{1+1}{2} + 1 \iff 2 = 2 \text{ OK}$$

$$\begin{aligned}
 f(n) : f_n &= \frac{n^2 + n}{2} + 1 \\
 f_n + (n+1) &= \frac{n^2 + n}{2} + 1 + (n+1) \\
 f_{n+1} &= \frac{n^2 + n + 2n + 2}{2} + 1 \\
 \dots &= \frac{n^2 + n + 2n + 2}{2} + 1 \\
 \dots &= \frac{n^2 + 3n + 2}{2} + 1 \\
 \dots &= \frac{(n+1)^2 + (n+1)}{2} + 1
 \end{aligned}$$

3. Quindi da  $f(n)$  si ottiene  $f(n+1)$ , terminando così la dimostrazione. ■

## PROBLEMA 1.2.

(Tratto dalla traccia di esame di Analisi Matematica I, data 01.02.2019, fila D)

Sia  $f(x) = \log(1 - 2x)$ . Dimostrare *per induzione* che per  $n \geq 1$ , si ha

$$f^{(n)}(x) = -2^n (n-1)! (1-2x)^{-n}$$

## N4. I problemi del calcolo combinatorio (cenni)

### Problemi del Calcolo Combinatorio

*Significato del calcolo combinatorio; quali problemi esso mira di risolvere. Alcuni problemi: disposizioni con ripetizioni, disposizione di oggetti a m a m, permutazioni di n oggetti e combinazioni. Alcuni problemi misti del calcolo combinatorio*

### 1. Cosa vuol dire "calcolo combinatorio"

Se si definisce l'insieme dei numeri **naturali** come l'insieme dei numeri che servono *per contare*, allora il **calcolo combinatorio** si basa sul problema di *contare* certi insiemi/oggetti/...

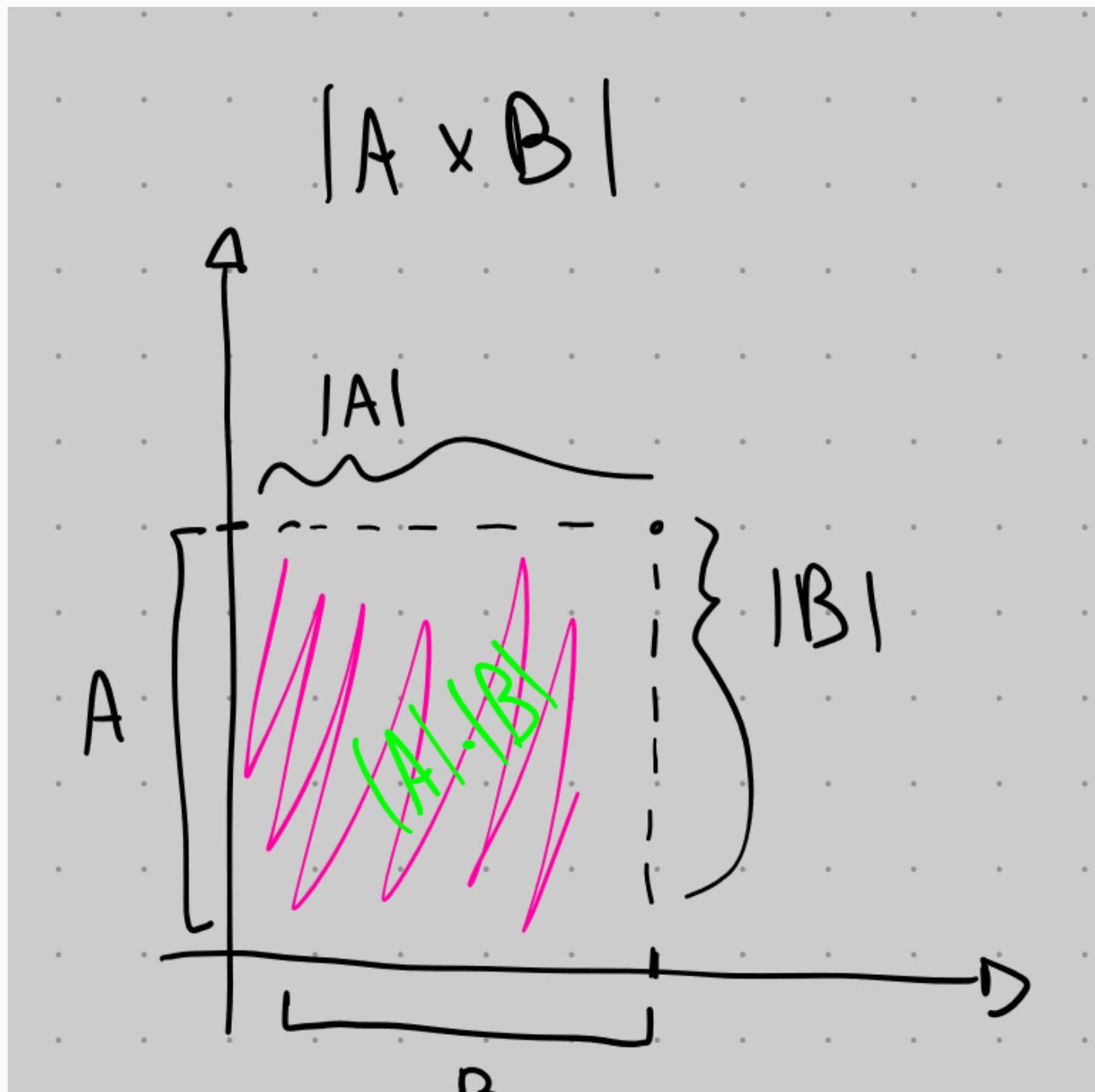
**DEF 1. Cardinalità** Si definisce la **cardinalità** di un *insieme*  $A$  come il numero  $n$  degli elementi contenuti nell'insieme  $A$ . Lo si denota come  $|A|$ .

### 2. I problemi del calcolo combinatorio

## PROBLEMA 2.1. Cardinalità del prodotto cartesiano

**PROBLEMA 2.1.** Supponiamo che  $|A| = n$ ,  $|B| = m$ , ove  $A, B$  sono *insiemi* e  $n, m \in \mathbb{N}$ . Allora ci poniamo il problema di trovare  $|A \times B|$ .

Se disegniamo il grafico di un qualsiasi prodotto cartesiano  $A \times B$ , si evince che per ogni riga  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  ci sono  $m$  colonne; quindi  $|A \times B| = n \times m$



## PROBLEMA 2.2. Disposizioni con ripetizione

**PROBLEMA 2.2.** Siano  $A, B$  insiemi con  $|A| = n$ ;  $|B| = m$ ; voglio contare il numero degli elementi di

$$B^A := \{\text{funzioni da } A \text{ a } B\}$$

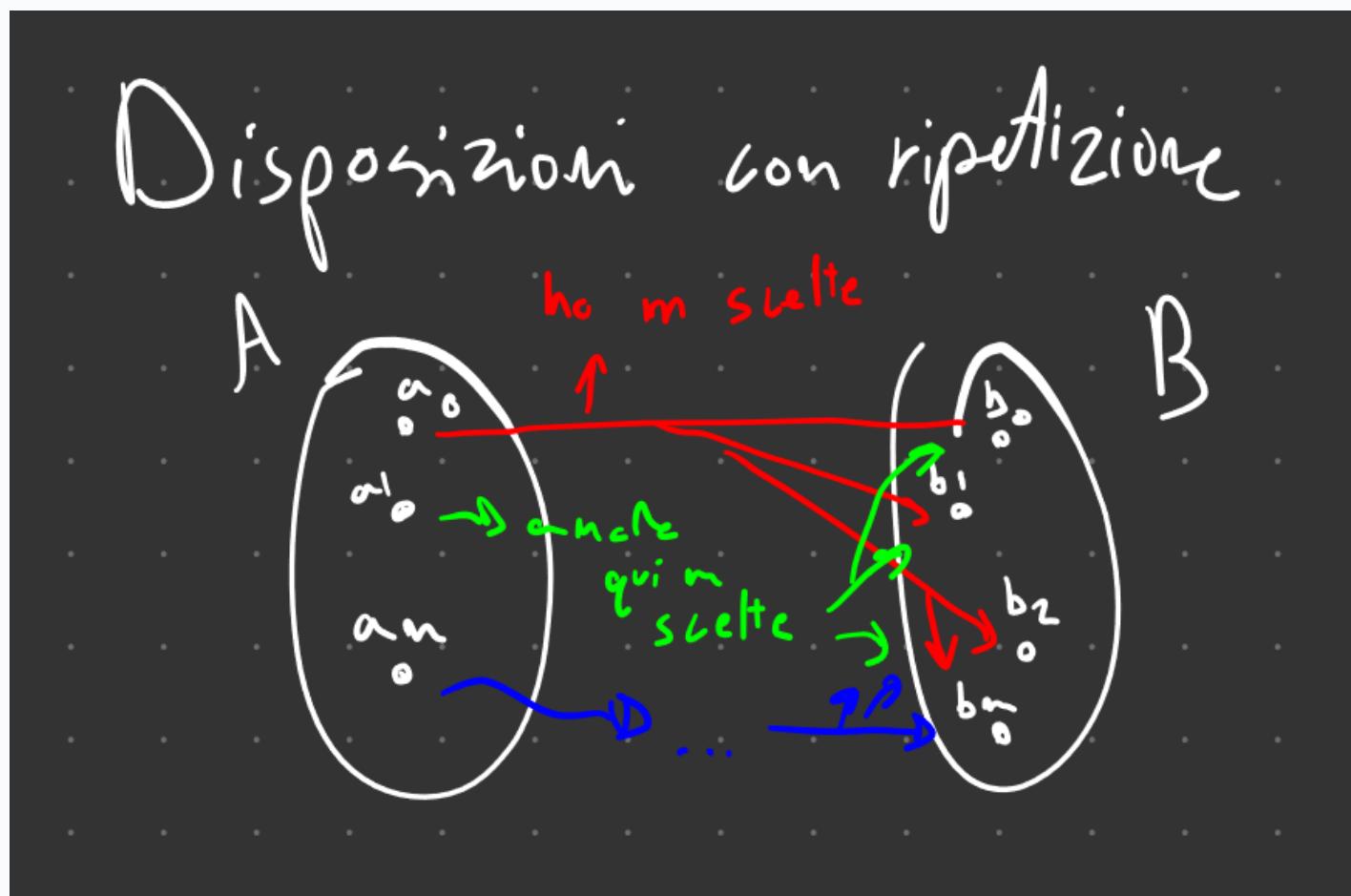
Per risolvere questo problema si può avvalere del diagramma in cui rappresentiamo gli

due insiemi  $A, B$ . Ora, prendendo il primo elemento  $a_0$ , vediamo che possiamo definire  $m$  funzioni, collegando l'elemento  $a_0$  a  $b_m$ .

364

Stesso discorso vale per  $a_1, a_2, \dots, a_n$ ; quindi generalizzando possiamo vedere che il risultato viene  $m^n = |B|^{|A|} = |B^A|$

**DEF 2.2.** Questo problema, nel calcolo combinatorio, si chiama **disposizioni con ripetizioni**, ovvero senza *vincoli* particolari.



### ESEMPIO 2.2.1.

Se voglio costruire tutte le *bandiere tricolori* possibili (ove sono ammessi i anche colori ripetuti) con *4 colori* a disposizione, quante posso costruirne?

**SOLUZIONE.** Questo è un caso applicato di *disposizioni con ripetizione*; infatti se si definisce le caselle delle bandiere come un insieme a tre variabili,  $A = 1, 2, 3$ , allora vogliamo trovare tutte le *funzioni* associate da  $A$  a  $B = \{\text{rosso, verde, giallo, bianco}\}$ . Pertanto la soluzione è  $3^4$ .

### PROBLEMA 2.3. Disposizioni di oggetti da $m$ a $n$

**PROBLEMA 2.3.** Prendiamo lo stesso problema di prima; tuttavia vogliamo ora considerare un vincolo particolare: vogliamo cercare solo le *funzioni iniettive* (**DEF 3.2.**) da  $A$  a  $B$ . Ricapitolando, per *iniettiva* si intende che ad ogni  $a_x, a_y$  vengono associati immagini diversi. Pertanto, è necessario che  $m \geq n$ .

**DEF 2.3.1.** Inoltre indichiamo l'*insieme delle funzioni iniettive* come  $D_n^m$ .

**SOLUZIONE.** Si può avvalere dello stesso grafico di prima; se prendo il primo elemento  $a_0$ , allora ho  $m$  scelte per lo stesso ragionamento di prima; ora, se prendo il secondo

elemento  $a_1$ , allora per rispettare il vincolo, ho una scelta in meno (ovvero l'elemento  $b_m$  associato ad  $a_0$ ): quindi ora ho  $m - 1$  scelte. Procedendo avanti così, arrivo fino all'elemento  $a_n$  per cui ho  $m - n + 1$  scelte.

365

Pertanto

$$|D_n^m| = m(m-1)(m-2)\dots(m-(n-1))$$

### ESEMPIO 2.3.1.

Prendiamo in esame lo stesso problema di prima, ovvero quella avendo a disposizione una *bandiera tricolore da colorare* e *quattro colori*.

Ora non vogliamo più i stessi colori; infatti, se la funzione dev'essere iniettiva, allora in un senso applicato ciò vuol dire che ad ogni area della bandiera dev'esserci un colore diverso.

Quindi si tratta di calcolare  $|D_3^4| = 4(3)(2)$

### PROBLEMA 2.4. Permutazioni

**PROBLEMA 2.4.** Prendiamo il problema appena preso in esame (ovvero la *disposizione di oggetti da  $n$  a  $m$* ) e ora vogliamo ci aggiungiamo un ulteriore vincolo: cerchiamo le *funzioni biettive*, ovvero quelle sia *iniettive* che *suriettive*. Da qui consegue necessariamente che  $|A| = |B| = n$ .

**DEF 2.4.1.** Definiamo *l'insieme delle permutazioni (ovvero delle funzioni biettive)* come  $P^n$ .

**SOLUZIONE.** Questo non è altro che un caso speciale di  $|D_n^m|$  ove  $m = n$ , quindi

$$|P^n| = |D_n^n| = n(n-1)(n-2)\dots(1) = n!$$

### ESEMPIO 2.4.1.

Consideriamo un problema totalmente diverso; se ho la *stringa* "CIAO", quante volte posso cambiarlo in modo tale che le lettere presenti nella stringa ci siano comunque? Questo si tratta ovviamente di una *permutazione*, quindi calcoliamo  $|P^4| = 4!$ .

### PROBLEMA 2.5. Combinazioni, coefficienti binomiali

**PROBLEMA 2.5.** Se considero un insieme  $A$  con  $|A| = n$ , e un numero  $k \in \mathbb{N}$  tale che  $0 \leq k \leq n$ , allora voglio calcolare il *numero di sottoinsiemi di  $A$  con  $k$  elementi*.

**DEF. 2.5.1.** Definiamo *l'insieme dei sottoinsiemi di  $A$  con  $k$  elementi* come

$$C_k^n \text{ oppure } \binom{n}{k}$$

e si legge come " $n$  su  $k$ ". Inoltre lo si chiama anche come il *coefficiente binomiale* oppure le *combinazioni di  $n$  oggetti a  $k$  a  $k$* .

**SOLUZIONE.** Qui usiamo un esperimento mentale che presenta una situazione analoga a quella presentata.

Suppongo di aver  $n$  numero di palline, da cui voglio scegliere  $k$ ; per la prima pallina 0 posso sceglierne  $n$ , poi per la pallina 1 posso sceglierne  $n - 1$ , poi andando così finché si raggiunge l'ultima pallina  $k$  da cui posso sceglierne  $n - k + 1$ . Si osserva che questo è esattamente le *disposizioni* da  $n$  a  $k$ ,  $D_k^n$ .<sup>366</sup>

Tuttavia in questo modo tengo conto dell'ordine in cui scelgo le palline; invece le *combinazioni* non tengo conto dell'ordine. Quindi se vogliamo considerare l'ordine, dobbiamo attribuire ad ogni *combinazione* una *permutazione*; ciò vuol dire che bisogna moltiplicare le *combinazioni di n oggetti a k a k* per le *permutazioni di k oggetti*; pertanto si scrive

$$D_k^n = P^k C_k^n$$

da cui deriva

$$C_k^n = \frac{D_k^n}{P^k} = \frac{(n)(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Nella pagina [Coefficiente Binomiale](#) ci soffermeremo particolare (appunto) sul *coefficiente binomiale*, in quanto essa porta con sé delle proprietà particolari che ci permetteranno di costruire certi oggetti matematici, tra cui il *triangolo di Tartaglia*.

## ESEMPIO 2.5.1.

Se ho un sacco con 10 palline da cui ne estraggo 3, quante *combinazioni* possibili ho? Semplicemente,  $C^1 0_3 = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3!(7!)}$ .

## 3. Esempi misti del Calcolo Combinatorio

Ora presentiamo alcuni esempi misti del calcolo combinatorio, che può comprendere l'ausilio di alcune delle definizioni date sopra e un buon approccio critico ai problemi.

**PROBLEMA 3.1.** Ho un mazzo da 40 carte e ne pesco 3; quanti sono i possibili risultati  $t$ ?

Questo è un caso quasi-banale di *combinazioni*, quindi

$$t = C_3^{40} = \frac{40!}{3!(37!)} = \frac{40 \cdot 39 \cdot 38}{3 \cdot 2} = 9880$$

**PROBLEMA 3.1.A** Ora considerando che ci sono 4 semi (quindi 10 carte per seme), quanti sono i risultati  $r$  che NON contengono le carte di *denari*?

Anche qui si tratta di un problema di *combinazioni*, che però va affrontato più criticamente: infatti vogliamo estrarre le 40 carte escludendone 10, in quanto essi rappresentano dei semi; quindi sostanzialmente il "corpo" delle carte sono solo 30.

$$r = \binom{40 - 10}{3} = \binom{30}{3} = 4060$$

Un approccio particolarmente furbo è quello semplicemente di prendere  $t$  (ovvero tutte le combinazioni possibili) e sottrarli per il numero dei risultati senza i denari; infatti l'insieme dei risultati *con* i denari è complemento dell'insieme dei risultati *senza* i denari.

Quindi,

$$\tilde{r} = 9880 - 4060 = 5820$$

Oppure un altro approccio comunque accettabile è di considerare tutte le combinazioni dei risultati con esattamente *un* seme, poi *due* semi e infine *tre* semi e infine sommarli. Infatti,

$$\tilde{r} = \binom{10}{1} \binom{30}{2} + \binom{10}{2} \binom{30}{1} + \binom{10}{3} \binom{30}{0} = 5820$$

**PROBLEMA 3.2. Il Lotto.** Ho 90 bussolotti, ovvero dei numeri; ne estraggo 5. Quali sono le possibili estrazioni?

Anche qui si tratta di un caso di *combinazioni* in quanto non tiene conto dell'ordine dei numeri estratti (in quanto essi vengono già ordinati in un'ordine crescente).

$$n_{\text{estrazioni}} = \binom{90}{5} \approx 44 \cdot 10^6$$

**PROBLEMA 3.3.** Ho una scacchiera  $5 \times 5$  e 6 pedine uguali.

*In quanti modi posso mettere le pedine sulla scacchiera, se voglio che tutte le righe e tutte le colonne abbiano almeno una pedina?*

**⚠ Soluzione controllata con D.D.S.: Parzialmente corretta ma manca un pezzo.**

**PROPOSTA DELLA SOLUZIONE.** Ragioniamo nel seguente modo:

1. Voglio porre le prime 5 pedine in modo tale che il vincolo venga rispettato (quindi tutte le righe e le colonne hanno almeno una pedina piazzata), poi per porre la 6-esima pedina liberamente.
2. Per le 5 pedine ragiono così:
  1. Voglio porre la prima pedina sulla prima riga e su qualsiasi colonna. Ho quindi 5 possibilità.
  2. Ora voglio porre la seconda pedina sulla seconda riga; però non posso porla sulla stessa colonna scelta dalla prima pedina, dandomi una scelta in meno. Ho quindi 4 possibilità.
  3. Mi accorgo che qui si tratta di un semplice problema di *permutazioni (o disposizioni di oggetti a 5 a 5)*, ovvero che per calcolare tutte le possibilità devo fare  $5! = 5 * 4 * 3 * 2 * 1$ .

4. Quindi ottengo il risultato

$$x = 20(5!) = 2400$$

## N5. Il coefficiente binomiale e il triangolo di Tartaglia

### Coefficiente Binomiale

*Coefficiente binomiale come strumento per risolvere un problema del calcolo combinatorio; regole e teoremi sul coefficiente binomiale; costruzione del triangolo di Tartaglia; teorema di Newton (o del binomio) con dimostrazione. Applicazioni del teorema.*

## 1. Coefficiente Binomiale

**DEF 1.** Dai risultati del Problemi del Calcolo Combinatorio, sappiamo che

$$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

## 2. Proprietà del coefficiente binomiale

Enunciamo le seguenti proprietà del *coefficiente binomiale*  $C_k^n$ :

1.

$$\binom{0}{0} = 1$$

2.

$$\forall n, \binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{n}{n} = 1$$

3. **REGOLA DI STIFEL.** Sia  $1 \leq k \leq (n-1)$ ,

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

**DIMOSTRAZIONE FORMALE.**

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{m}$$

$$\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k)!(n-k-1)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$(n-1)! \left( \frac{1}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{1}{k!(n-k-1)!} \right) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Osservare la proprietà che consegue dalla *definizione ricorrente del fattoriale* (*Assiomi di Peano, il principio di induzione*):

$$\forall n, (n+1)! = n!(n+1)$$

da ciò implica che

$$n! = \frac{(n+1)!}{(n+1)}$$

Quindi secondo questa logica, si può dire le seguenti:

$$(k-1)! = \frac{k!}{k}; (n-k-1)! = \frac{(n-k)!}{(n-k)}; n! = (n-1)!n$$

Allora

$$(n-1)! \left( \frac{1}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{1}{k!(n-k-1)!} \right) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$(n-1)! \left( \frac{k}{k!(n-k)!} + \frac{n-k}{k!(n-k)!} \right) = (n-1) \frac{n}{k!(n-k)!}$$

$$\frac{k+n-k}{k!(n-k)!} = \frac{n}{k!(n-k)!}$$

$$\frac{n}{k!(n-k)!} = \frac{n}{k!(n-k)!} \text{ OK } \blacksquare$$

### DIMOSTRAZIONE SENZA CALCOLI/TEORICA.

Alternativamente, si potrebbe pensare la *regola di Stifel* nel seguente modo:

"Voglio contare le contare i sottoinsiemi con  $k$  elementi dell'insieme  $A$  (ove  $|A| = n$ ); quindi voglio  $C_k^n$ .

Ora distinguiamo uno degli elementi di  $A$  con un *contrassegno particolare*, come il colore *rosso*; adesso gli insiemi di  $k$  elementi si dividono in due.

Ovvero, l'insieme dei sottoinsiemi che *contengono l'elemento rosso* e l'insieme dei sottoinsiemi che *non contengono l'elemento rosso*.

Consideriamo l'insieme di *tutti i sottoinsiemi che contengono l'elemento speciale*: devo quindi obbligatoriamente considerare *l'elemento* rosso, tirandolo fuori. Ho quindi da  $n$  elementi ne posso scegliere solo  $n-1$ , in quanto una è stata già scelta, e posso scegliere solo  $k-1$  elementi visto che il primo elemento (ovvero il

*rosso*) è stato già obbligatoriamente scelto.

370

Consideriamo invece l'altro insieme di *tutti i sottoinsiemi che NON contengono l'elemento contrassegnato*: in questo caso si tratta semplicemente di *escludere* l'elemento rosso dalle scelte possibili, dandoci solo  $n - 1$  scelte su  $k$ .

Pertanto

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

### 3. Costruzione del triangolo di Tartaglia

Enunciamo di nuovo le 3 regole sopra:

1.  $\binom{0}{0}$
2.  $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
3.  $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$

Da queste tre proprietà possiamo rappresentare i *coefficienti binomiali* tramite il c.d. *triangolo di Tartaglia*

#### 3.1. Triangolo di Tartaglia

Disponiamo tutti i *coefficienti binomiali*  $\binom{x}{y}$ , dove la "*colonna*" (a partire dall'alto) rappresenta il numero  $x$  e dove la "*riga*" (a partire da sx.) rappresenta il numero  $y$ . Ad ogni riga rappresentiamo tutti i *coefficienti binomiali*  $\binom{x}{y}$  finché  $x$  raggiunge  $y$  (ovvero  $x = y$ )

$$\begin{aligned} & \binom{0}{0} \\ & \binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\ & \binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\ & \binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \\ & \dots \\ & \binom{x}{0} \quad \binom{x}{1} \quad \dots \quad \binom{x}{x-1} \quad \binom{x}{x} \end{aligned}$$

Ora, calcolando tutti i binomi (ricorrendo all'ausilio delle **proprietà del coefficiente**

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \ 1 \\ 1 \ 2 \ 1 \\ 1 \ 3 \ 3 \ 1 \end{array}$$

Facciamo le seguenti osservazioni:

**OSS 3.1.1.** Alle "estremità" del triangolo risulta sempre il numero 1, in quanto seconda la **proprietà 2.**,  $\forall x, \binom{x}{x} = \binom{x}{0} = 1$

**OSS 3.1.2.** Se sono arrivato alla riga  $x$ , posso ottenere facilmente tutti gli elementi della prossima riga  $x + 1$ ; infatti  $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$ . Facendo un'interpretazione "geometrica" si può dire che se sono alla riga  $x + 1$ , allora ottengo l'elemento di questa riga sulla colonna  $k$  sommando degli elementi che già conosciamo prima; ovvero  $\binom{n-1}{k-1}, \binom{n-1}{k}$ . Questi sono gli elementi che stanno al di "sopra" e "sopra e sinistra" dell'elemento che vogliamo conoscere.

**ESEMPIO 3.1.2.1.** Per esempio ho

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \ 1 \\ 1 \ 2 \ 1 \\ 1 \ 3 \ 3 \ 1 \end{array}$$

e voglio ottenere gli elementi della riga 4; in questo caso metto alle "estremità" i numeri 1 (**OSS 3.1.1.**), poi per calcolare  $\binom{4}{x}$  (ovviamente  $x \leq 4$ ) sommo l'elemento che sta sopra con quello che sta sopra e a sinistra. Quindi otteniamo

$$1 \ 4 \ 6 \ 4 \ 1$$

**OSS. 3.1.3.** Il matematico *B. Pascal* nota il seguente nel suo trattato "Traité du triangle arithmétique": che se prendiamo una riga pari  $2n$ , allora il numero "centrale" della riga è uguale alla sommatoria di tutti i quadrati degli elementi della riga  $n$ .

Ovvero

$$\forall n \in \mathbb{N}, \binom{2n}{n} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j}^2$$

**ESEMPIO 3.1.3.1.** Prendiamo la riga 8,

$$1 \ 8 \ 28 \ 56 \ 70 \ 56 \ 28 \ 8 \ 1$$

ove l'elemento "centrale" è individuato con  $70 = \binom{8}{4}$  e la riga 4,

$$1 \ 4 \ 6 \ 4 \ 1$$

$$1^2 + 4^2 + 6^2 + 4^2 + 1^2 = 1 + 16 + 36 + 16 + 1 = 70$$

## 4. TEOREMA DEL BINOMIO (o di Newton)

Il *triangolo di Tartaglia* è una costruzione matematica molto importante, in quanto essa può essere sfruttata per sviluppare la potenza di un binomio in  $n$  grazie al *teorema del Binomio (o di Newton)*

**TEOREMA 1.** Siano  $a, b \in \mathbb{R}$  (volendo anche in  $\mathbb{C}$ ), sia  $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ , allora

$$(a + b)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^{n-j} b^j$$

**DIM.** Si dimostra questo teorema per [induzione](#).

1. Verificare che è vera per  $P(1)$ :

$$(a + b)^1 = \sum_{j=0}^1 \binom{n}{j} a^{n-j} b^j \iff a + b = \binom{1}{0} a^1 b^0 + \binom{1}{1} a^0 b^1 \text{ OK}$$

2. Verificare che, supponendo  $P(n)$  allora  $P(n) \implies P(n+1)$  è vera.

$$\begin{aligned} (a + b)^n &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^{n-j} b^j \\ (a + b)^n (a + b) &= (a + b) \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^{n-j} b^j \\ (a + b)^{n+1} &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^{n+1-j} b^j + \sum_{j=0}^n a^{n-j} b^{j+1} \end{aligned}$$

3. Adesso "estraiamo" il primo elemento dalla prima sommatoria e l'ultimo elemento dall'altra sommatoria.

$$\begin{aligned} (a + b)^{n+1} &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^{n+1-j} b^j + \sum_{j=0}^n a^{n-j} b^{j+1} \\ &= (a^{n+1}) + (b^{n+1}) + \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} a^{n+1-j} b^j + \sum_{j=0}^{n-1} a^{n-j} b^{j+1} \end{aligned}$$

4. Effettuiamo un "trucco" alla seconda sommatoria, ovvero quella di porre  $k = j + 1$  (e pertanto  $j = 0 \implies k = 1$ ) e poi di porre  $k = j$ , che è possibile in quanto  $k$  è una

$$\begin{aligned}
(a^{n+1}) + (b^{n+1}) + \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} a^{n+1-j} b^j + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} a^{(n+1)-(j+1)} b^{j+1} \\
= \dots + \sum_{j=1}^n \dots + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k \\
= \dots + \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} a^{n+1-j} + b^j + \sum_{j=1}^n \binom{n}{j-1} a^{n+1-j} + b^j \\
= \dots + \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} \binom{n}{j-1} a^{n+1-j} + b^j
\end{aligned}$$

Per la regola di Stiefe,  $\binom{n}{j} \binom{n}{j-1} = \binom{n+1}{j}$

$$= (a^{n+1}) + (b^{n+1}) + \sum_{j=1}^n \binom{n+1}{j} a^{n+1-j} + b^j$$

5. E riferendosi alla sommatoria presente nell'uguaglianza, se prendiamo  $j = 0$  e  $j = n + 1$ , allora

$$\begin{aligned}
1. \quad \binom{n+1}{0} a^{n+1} + b^0 &= 1 \cdot a^{n+1} = a^{n+1} \\
2. \quad \binom{n+1}{n+1} a^{n+1-n-1} b^{n+1} &= b^{n+1}
\end{aligned}$$

e quindi possiamo "rintegrarli" nella sommatoria come l'elemento 0-esimo e  $n + 1$ -esimo, ottenendo

$$\sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} a^{n+1-j} + b^j$$

$$P(n+1) : (a+b)^n = \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} a^{(n+1)-j} + b^j$$

che è ciò che volevamo ottenere. Quindi il teorema è stato così dimostrato. ■

## 4.1. ESEMPI SUL TEOREMA DEL BINOMIO

**ESEMPIO 4.1.1.** Vogliamo calcolare  $(a+b)^6$ .

Otteniamo innanzitutto lo sviluppo di  $(a+b)^6$  secondo il teorema binomiale:

$$\begin{aligned}
(a+b)^6 &= \\
\binom{6}{0} a^6 + \binom{6}{1} a^5 b^1 + \binom{6}{2} a^4 b^2 + \binom{6}{3} a^3 b^3 + \binom{6}{4} a^2 b^4 + \binom{6}{5} a^1 b^5 + \binom{6}{6} b^6
\end{aligned}$$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6

Ora sfruttiamo questo triangolo per poter sostituire tutti i coefficienti binomiali nella forma sviluppata appena scritta.

$$\binom{6}{0}a^6 + \binom{6}{1}a^5b^1 + \binom{6}{2}a^4b^2 + \binom{6}{3}a^3b^3 + \binom{6}{4}a^2b^4 + \binom{6}{5}a^1b^5 + \binom{6}{6}b^6$$

diventa

$$a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

**ESEMPIO 4.1.2.** Calcolare  $\sum_{j=0}^n \binom{n}{j}$ .

Si può risolvere questo problema in due modi:

1. Se (per definizione) consideriamo il coefficiente binomiale  $\binom{n}{j}$  come la cardinalità delle *combinazioni* di un insieme  $A$  (ove  $|A| = n$ )  $C_j^n$ , ovvero il numero degli sottoinsiemi di  $A$  con  $j$  elementi, allora possiamo considerare questo problema come il seguente: "*qual è la cardinalità di tutti gli sottoinsiemi di A (quindi da 0 a n elementi)?*"; dai risultati della [Teoria degli Insiemi](#), sappiamo immediatamente che la risposta è  $2^n$ .
2. Oppure possiamo semplicemente usare il *teorema del binomio*; ovvero ponendo  $a = b = 1$ , abbiamo

$$(1+1)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^{n-j} b^j \iff 2^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j}$$

dandoci così immediatamente la risposta.

**ESEMPIO 4.1.3.** Calcolare

$$\sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j}$$

Se consideriamo il [3.1. Triangolo di Tartaglia](#), viene che la risposta intuitiva è 0, in quanto le righe dispari sono simmetriche; quindi "dividendo" quella riga, abbiamo un "lato" positivo e negativo, che sommandoli otteniamo 0.

Tuttavia questa risposta non è abbastanza rigorosa per essere considerata; infatti per

avere una giustificazione più sicura, si deve usare il *teorema del binomio* nel seguente modo.

375

Siano  $a = -b = 1$ , ovvero

$$\begin{aligned}(1 - 1)^n &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} 1^{n-j} (-1)^j \\ 0^n &= \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \\ 0 &= \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \blacksquare\end{aligned}$$

## C1. Introduzione ai numeri complessi

### Introduzione ai Numeri Complessi

*Introduzione ai numeri complessi: cenni storici, definizione basilare di  $\mathbb{C}$  come  $\mathbb{R}^2$ .*

#### 0. Scopo storico

Lo *scopo storico* dei numeri complessi  $\mathbb{C}$  è quello di risolvere le equazioni del tipo

$$\begin{cases} a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = 0 \\ a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

di cui alcune non ne hanno soluzione; ad esempio si prende

$$x^2 = -1$$

che *non* ha soluzione definita in  $\mathbb{R}$ , in quanto tutti i numeri moltiplicati per se stessi *due volte* sono sempre positivi.

Quindi vi è una necessità di "*ampliare*" i numeri reali in un modo tale da poter ottenere delle *soluzioni* di queste equazioni.

#### 1. Costruzione a partire da $\mathbb{R}^2$

Pertanto si parte considerando la *l'insieme delle coppie ordinate* ([Coppie Ordinate e Prodotto Cartesiano](#))

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$$

Quindi nel *contesto geometrico* stiamo attualmente considerando dei *vettori liberi con punto di applicazione 0*. ([Vettori Liberi](#))

In [Operazioni sui Numeri Complessi](#) definiremo delle operazioni su questo insieme,, che quando li considereremo con  $\mathbb{R}^2$  si andrà a formare il campo  $\mathbb{C} = (\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ .

## C2. Le operazioni tra i numeri complessi

### Operazioni sui Numeri Complessi

## 1. Somma componente per componente

**DEF 1.** Definisco su  $\mathbb{R}^2$  l'operazione di **somma componente per componente**:

$$(a, b) \dagger (a', b') = (a + a', b + b')$$

che da ora in poi lo chiamiamo semplicemente  $+$ .

**PROP 1.1.** La *somma componente per componente* gode delle seguenti proprietà:

1. La proprietà associativa;

$$(a + b) + ((a', b') + (a'', b'')) = ((a, b) + (a', b')) + (a'', b'')$$

2. L'esistenza dell'elemento neutro  $0$

$$0 : (0, 0);$$

3. L'esistenza dell'elemento opposto  $(-a, -b)$ ;

$$(a, b) + (-a, -b) = (0, 0)$$

4. La proprietà commutativa

$$(a, b) + (a', b') = (a', b') + (a, b)$$

**OSS 1.1.** Allora in questo caso si definisce  $(\mathbb{R}^2, +)$  come un *gruppo abeliano*.

## 2. Moltiplicazione

Ora l'operazione più "peculiare" sarebbe quella di moltiplicazione, in quanto grazie a questa riusciamo a formare il campo dei numeri complessi  $\mathbb{C}$ .

**DEF 2.** Sia  $\circ$  l'operazione della **moltiplicazione**, che viene definita come

$$\begin{aligned} \circ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\langle a, b \rangle, \langle a', b' \rangle) &\mapsto (a, b) \circ (a', b') \end{aligned}$$

dove

e d'ora in poi chiameremo  $\circ$  come  $\cdot$ .

**NOTA.** Come visto sopra, personalmente (avvolte) userò la notazione  $\langle a, b \rangle$  per rappresentare la coppia dei numeri  $(a, b)$ ; lo faccio per evitare confusione con le parentesi. *Fidatevi, (forse) sarà meglio così (?)*.

**OSS 2.1.** Notiamo che questa definizione di moltiplicazione non è quella che ci si aspetta, di solito; infatti volendo si poteva anche definire la moltiplicazione nel seguente modo:

$$(a, b) \circ (a', b') := ? (aa', bb')$$

Matematicamente questo avrebbe senso, però si vorrebbe che questa moltiplicazione avesse delle *proprietà* che ritroviamo anche in  $\mathbb{R}$ , in quanto lo scopo di questa costruzione è proprio quella di "*espandere*" la famiglia dei numeri.

Ad esempio, qui non varrebbe la proprietà per cui  $(0, 0)$  è *l'elemento nullo*. Infatti

$$(1, 0) \circ (0, 1) = (1 * 0, 0 * 1) = (0, 0)$$

Quindi per questo bisognava trovare un'altra definizione.

**TRUCCO PERSONALE.** Visto che potrebbe essere difficile imparare *questa* definizione di moltiplicazione, possiamo "*anticipare*" un argomento (ovvero *Rappresentazione dei Numeri Complessi*) rappresentando la coppia  $(a, b) = a + ib$  dove  $i^2 = -1$ . Per "*scoprire*" la nostra definizione facciamo il seguente.

$$\begin{aligned} (a, b) \cdot (a', b') &= (a + ib)(a' + ib') \\ &= aa' + iab' + ia'b - bb' \\ &= (aa' - bb') + i(ab' + a'b) \\ &= (aa' - bb', ab' + a'b) \end{aligned}$$

**PROP 2.1.** Si può verificare che questa operazione gode delle proprietà, ovvero:

1. La proprietà associativa;

$$\langle a, b \rangle \cdot (\langle a', b' \rangle \cdot \langle a'', b'' \rangle) = (\langle a, b \rangle \cdot \langle a', b' \rangle) \cdot \langle a'', b'' \rangle$$

2. L'esistenza dell'elemento neutro  $(1, 0)$ ;

$$\begin{aligned} (a, b) \cdot (1, 0) &= \langle (a * 1 - b * 0), (a * 0) + (b * 1) \rangle \\ &= \langle a, b \rangle = (a, b) \end{aligned}$$

3. L'esistenza dell'elemento reciproco ad ogni elemento non-zero;

Se ad ogni  $c = (a, b) \neq (0, 0)$  considero

$$c^{-1} = \left( \frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2} \right)$$

Infatti moltiplicandoli ottengo

$$\begin{aligned} c \cdot c^{-1} &= \left( \frac{a^2}{a^2 + b^2} - \frac{-b^2}{a^2 + b^2}, \frac{-ab}{a^2 + b^2} + \frac{ab}{a^2 + b^2} \right) \\ &= \left( \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2}, 0 \right) = (1, 0) \end{aligned}$$

4. La proprietà commutativa:

$$(a, b) \cdot (a', b') = (a', b') \cdot (a, b)$$

5. La proprietà distributiva:

$$\langle a, b \rangle \cdot (\langle a', b' \rangle + \langle a'', b'' \rangle) = (a, b) \cdot (a', b') + (a, b) \cdot (a'', b'')$$

### DIMOSTRAZIONI.

6. Per verificare che questa operazione è *associativa*, dobbiamo dimostrare che il *membro destro* dell'uguaglianza è uguale al *membro sinistro*. Ovvero

$$\begin{aligned} \text{sx. } \langle a, b \rangle \cdot (\langle a', b' \rangle \cdot \langle a'', b'' \rangle) &= \\ \langle a, b \rangle \cdot (\langle a'a'' - b'b'', a'b'' + a''b' \rangle) &= \\ \langle a(a'a'' - b'b''), a(a'b'' + a''b') + b(a'a'' - b'b'') \rangle &= \\ \langle aa'a'' - ab'b'' - a'bb'' - a''bb', aa'b'' + aa''b' + a'a''b - bb'b'' \rangle \end{aligned}$$

e poi

$$\begin{aligned} \text{dx. } (\langle a, b \rangle \cdot \langle a', b' \rangle) \cdot \langle a'', b'' \rangle &= \\ \langle aa' - bb', ab' + a'b \rangle \cdot \langle a'', b'' \rangle &= \\ \langle (aa' - bb')a'' - (ab' + a'b)b'', (aa' - bb')b'' + (ab' + a'b)a'' \rangle &= \\ \langle aa'a'' - a''bb' - ab'b'' - a'bb'', aa'b'' - bb'b'' + aa''b' + a'a''b \rangle &= \\ \langle aa'a'' - ab'b'' - a'bb'', aa'b'' + aa''b' + a'a''b - bb'b'' \rangle \end{aligned}$$

E vediamo che i membri sono esattamente uguali. ■

7. *La proprietà 2. è già stata dimostrata sopra.*

8. *Stesso valesi per la proprietà 3.*

9. Occorre solo sfruttare le proprietà dei numeri reali  $\mathbb{R}$ , ovvero

$$\begin{aligned} (a', b') \cdot (a, b) &= (a'a - b'b, a'b + b'a) \\ &= (aa' - bb', ab' + a'b) \\ &= (a, b) \cdot (a', b') \blacksquare \end{aligned}$$

10. Consideriamo entrambi i membri dell'uguaglianza

$$\langle a, b \rangle \cdot (\langle a', b' \rangle + \langle a'', b'' \rangle) = \langle a, b \rangle \cdot \langle a', b' \rangle + \langle a, b \rangle \cdot \langle a'', b'' \rangle$$

$$\begin{aligned}\langle a, b \rangle \cdot (\langle a', b' \rangle + \langle a'', b'' \rangle) &= \langle a, b \rangle \cdot \langle a' + a'', b' + b'' \rangle \\ &= \langle a(a' + a'') - b(b' + b''), a(b' + b'') + b(a' + a'') \rangle \\ &= \langle aa' + aa'' - bb' - bb'', ab' + ab'' + a'b + a''b \rangle\end{aligned}$$

Ora il membro sinistro:

$$\begin{aligned}\langle a, b \rangle \langle a', b' \rangle + \langle a, b \rangle \langle a'', b'' \rangle &= \langle aa' - bb', ab' + a'b \rangle + \langle aa'' - bb'', ab'' + a''b \rangle \\ &= \langle aa' + aa'' - bb' - bb'', ab' + ab'' + a'b + a''b \rangle\end{aligned}$$

E vediamo che entrambi i membri, quando sviluppati, sono uguali; dimostriamo così la tesi. ■

## CONCLUSIONE.

Alla luce di queste proprietà riusciamo proprio a verificare che

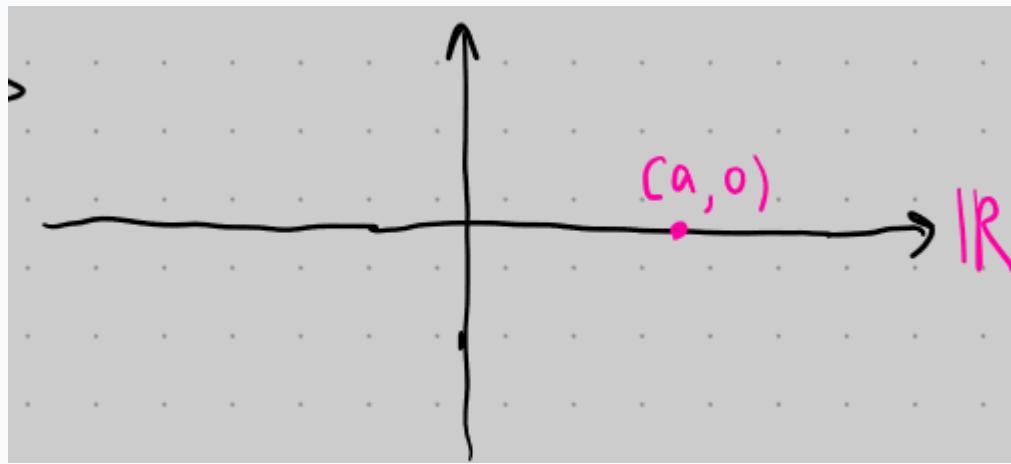
$$(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$$

è un campo, che chiameremo il campo dei numeri complessi  $\mathbb{C}$ .

**OSS 2.2.** Nel campo  $\mathbb{C}$  considero i numeri della seguente forma:

$$(a, 0) \in \mathbb{C}$$

ovvero quelli con la seconda componente nulla. Graficamente, questi punti giacciono sull'asse orizzontale, che chiameremo l'asse reale.



Allora notiamo che valgono le seguenti:

- a.  $(a, 0) \cdot (b, 0) = (ab - 00, a0 + 0b) = (ab, 0)$
- b.  $(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0)$

nel senso che questi numeri si comportano come i numeri reali  $\mathbb{R}$ .

**OSS 2.3.** Inoltre, considerando

$$(a, 0) \cdot (c, d) = (ac - 0d, ad + 0c) = (ac, ad)$$

### 3. Coniugio

**DEF 3.** Sia  $z$  un numero  $\mathbb{C}$  e lo rappresentiamo come  $z = a + ib$  ([Rappresentazione dei Numeri Complessi](#)). Allora definisco il numero **complesso coniugato**  $\bar{z}$  come

$$\bar{z} = a - ib$$

**DEF 3.1.** Chiamo **coniugio** la funzione

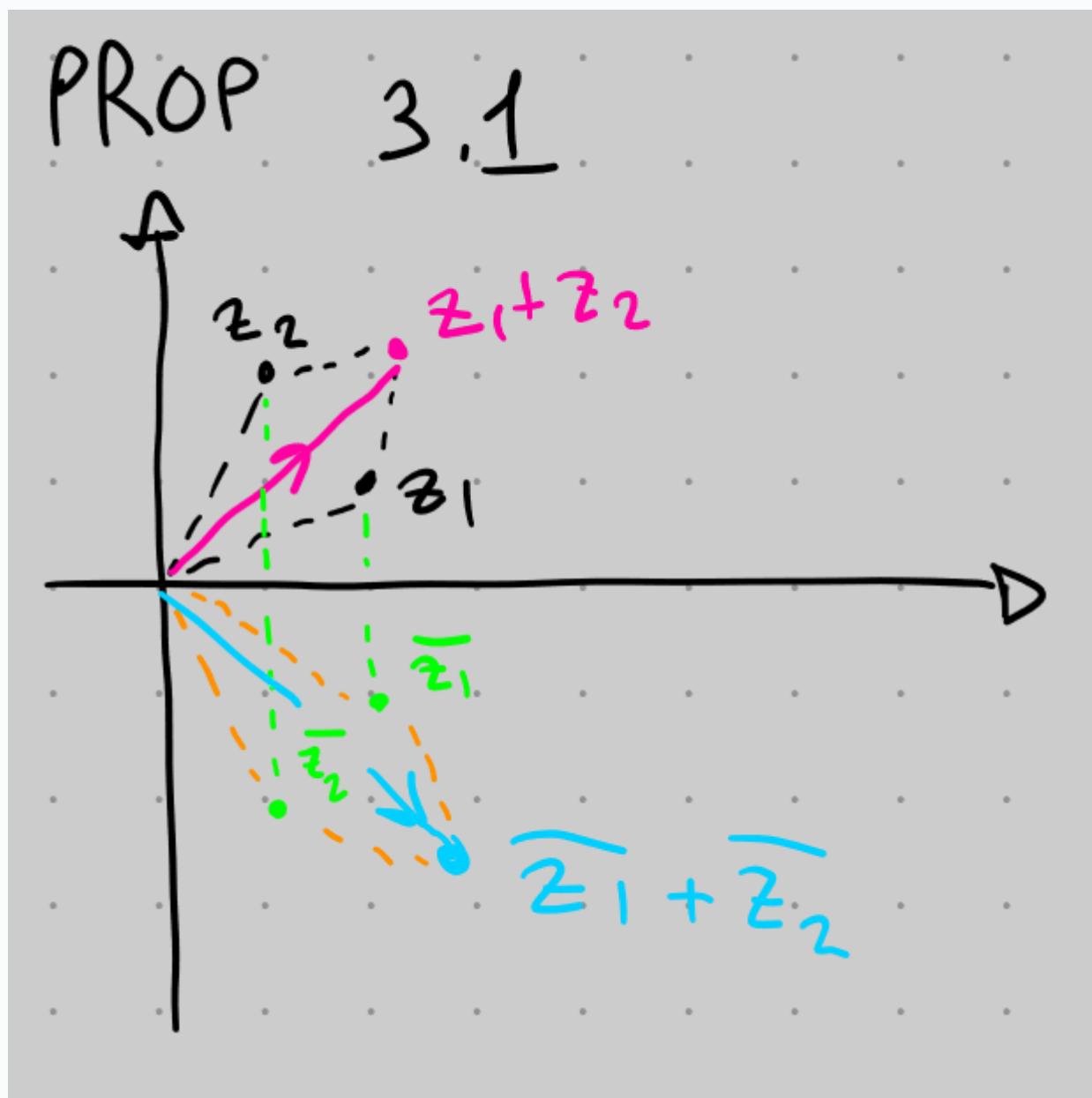
$$- : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}; z \mapsto \bar{z}$$

dove  $\bar{i} = -i$

**PROP 3.1.** Questa funzione ha delle proprietà; presentiamo la prima.

$$\forall z_1, z_2; \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

Graficamente,



$$\begin{aligned}
 \overline{z_1 + z_2} &= \overline{(a + ib) + (a' + ib')} \\
 &= \overline{(a + a') + i(b + b')} \\
 &= (a + a') - i(b + b') \\
 &= (a - ib) + (a' - ib') \\
 &= \overline{z_1} + \overline{z_2} \blacksquare
 \end{aligned}$$

**PROP 3.2.**

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

**DIMOSTRAZIONE.** Analogamente,

$$\begin{aligned}
 \overline{z_1 \cdot z_2} &= \overline{(a + ib)(a' + ib')} \\
 &= \overline{(aa' - bb') + i(ab' + a'b)} \\
 &= aa' - bb' - i(ab' + a'b)
 \end{aligned}$$

e sviluppando  $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$  otteniamo l'identità

$$\begin{aligned}
 \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} &= \overline{(a + ib)} \cdot \overline{(a' + ib')} \\
 &= (a - ib) \cdot (a' - ib') \\
 &= aa' - iab' - ia'b + (i^2)bb' \\
 &= aa' - bb' - i(ab' + a'b)
 \end{aligned}$$

che è esattamente uguale all'espressione ottenuta prima; pertanto si considera la tesi vera. ■

**PROP 3.3.**

$$\begin{aligned}
 \bar{z} = z &\iff \operatorname{Im}(z) = 0 \\
 &\iff z = \operatorname{Re}(z) \\
 &\iff z \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

**PROP 3.4.** Sia  $z = a + ib$ , allora

$$z + \bar{z} = (a + ib) + (a - ib) = 2a = 2\operatorname{Re}(z)$$

## 4. Modulo

Se prendiamo il piano di *Argand-Gauss* (Rappresentazione dei Numeri Complessi) possiamo vedere dei *punti nel piano*, allora si potrebbe *"misurare"* la distanza di questo punto dall'origine  $(0, 0)$ .

**DEF 4.** Allora definiamo la il **modulo di**  $\bar{z}$  come la *distanza dall'origine*; ovvero se  $z = a + ib$ , allora usando il *teorema di Pitagora* il modulo diventa  $\sqrt{a^2 + b^2}$ .

$$|\cdot| : \mathbb{C} \longrightarrow [0, +\infty)$$

$$z \mapsto |z| := \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2}$$

**OSS 4.1.** Notiamo che se  $z \in \mathbb{R}$ , ovvero se  $\operatorname{Im}(z) = 0$ , allora

$$|z| = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2} = |\operatorname{Re}(z)|$$

Da nota che a sinistra si ha il *modulo* di  $z$ , invece a destra si ha il *valore assoluto* (Funzioni di potenza, radice e valore assoluto, DEF 3.1.) della parte reale di  $z$ .

Ora presentiamo alcune proprietà del modulo.

**PROP 4.1.** Per definizione,

$$\forall z \in \mathbb{C}, |z| \geq 0; |z| = 0 \iff z = 0$$

**PROP 4.2.**

$$|z| \geq |\operatorname{Re}(z)| \wedge |z| \geq |\operatorname{Im}(z)|$$

*Geometricamente*, questo corrisponde al fatto che *l'ipotenusa* di un triangolo rettangolo è *sempre* più lungo o uguale ad uno dei cateti.

**PROP 4.3.**

$$|\bar{z}| = |z|$$

in quanto  $-b^2 = b^2, \forall b \in \mathbb{R}$

**PROP 4.4.**

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| |z_2|$$

**DIMOSTRAZIONE.** Supponendo che  $z_1 = a_1 + ib_1, z_2 = a_2 + ib'_2$ , allora

$$\begin{aligned} |z_1| \cdot |z_2| &= \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2} \\ &= \sqrt{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)} \\ &= \sqrt{(a_1^2 a_2^2 + a_1^2 b_2^2) + (a_2^2 b_1^2 + b_1^2 b_2^2)} \\ &= \sqrt{(a_1^2 a_2^2 + b_1^2 b_2^2) + (a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2)} \end{aligned}$$

e sviluppando

$$z_1 \cdot z_2 = a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

$$\begin{aligned}
 |z_1 \cdot z_2| &= |(a_1 a_2 - b_1 b_2)^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)^2| \\
 &= |(a_1^2 a_2^2 - 2a_1 a_2 b_1 b_2 + b_1^2 b_2^2) + (a_1^2 b_2^2 + 2a_1 a_2 b_1 b_2 + a_2^2 b_1^2)| \\
 &= |(a_1^2 a_2^2 + b_1^2 b_2^2) + (a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2)|
 \end{aligned}$$

dimostrando così che

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \blacksquare$$

### PROP 4.5.

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2$$

**DIMOSTRAZIONE.** Supponendo che  $z = a + ib$ , allora

$$z \cdot \bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2$$

**OSS 4.5.a.** Questa proprietà è utile per trovare l'inversa di  $z$ ; infatti

$$z \cdot \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{|z|^2}{|z|^2} = 1$$

allora concludo che

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} + i \frac{-b}{a^2 + b^2}$$

### PROP 4.7. *La diseguaglianza triangolare.*

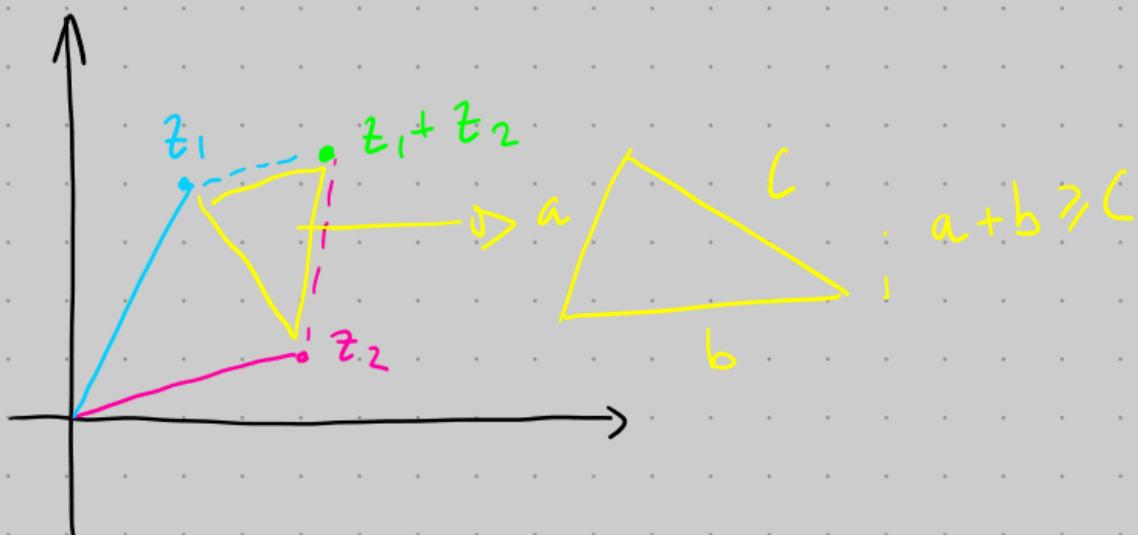
Infine presentiamo la *proprietà fondamentale del modulo*.

$$\begin{aligned}
 \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \\
 |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|
 \end{aligned}$$

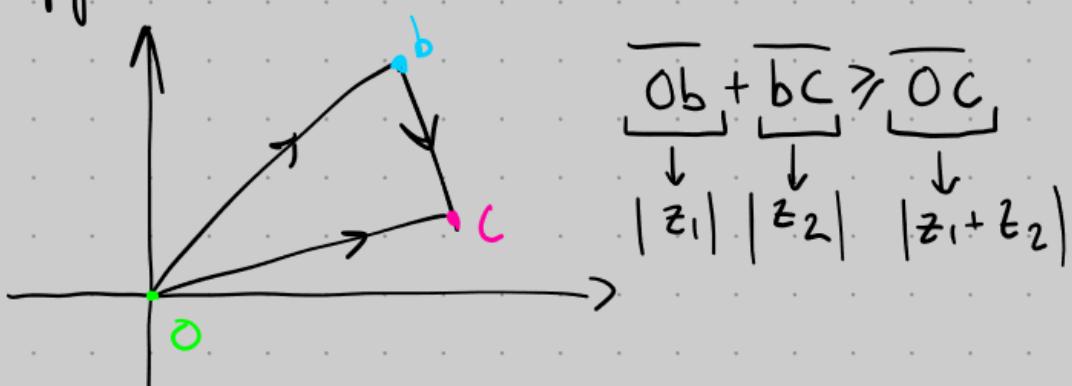
Che è *simbolicamente* simile alla *diseguaglianza triangolare* del valore assoluto (**OSS 3.1.1.**)

Però in questo contesto (ovvero del campo  $\mathbb{C}$ ) la proprietà è ancora più *geometricamente suggestiva*; infatti usando il *Piano di Argand-Gauss* (Rappresentazione dei Numeri Complessi), si ha:

OSS 3.1.1)



oppure



Ovvero che la somma della lunghezza due cateti di un triangolo rettangolo è *sempre* più lunga della lunghezza dell'ipotenusa.

### DIMOSTRAZIONE.

Considero i seguenti: siano  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ; allora

$$\begin{aligned}|z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) \\&= (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) \\&= z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 + z_2\overline{z_2} \\&= |z_1|^2 + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 + |z_2|^2 \\|z_1 + z_2|^2 &= |z_1|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2\end{aligned}$$

A questo punto mi ricordo che

$$|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$$

$$\begin{aligned}
 |z_1|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}) + |z|^2 &\leq |z_1|^2 + 2|z_1\overline{z_2}| + |z_2|^2 \\
 &\leq |z_1|^2 + 2|z_1||\overline{z_2}| + |z_2|^2 \\
 &\leq |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 \\
 |z_1 + z_2|^2 &\leq (|z_1| + |z_2|)^2 \\
 |z_1 + z_2| &\leq |z_1| + |z_2| \blacksquare
 \end{aligned}$$

## C3. La rappresentazione algebrica dei numeri complessi

### Rappresentazione dei Numeri Complessi

*Rappresentazione dei numeri complessi come somma di parte reale e parte immaginaria; il piano di Argand-Gauss.*

## 1. Rappresentazione

Dalle considerazioni prese in [Operazioni sui Numeri Complessi](#) possiamo fare le seguenti considerazioni per poter rappresentare un numero complesso in un modo alternativo.

**DEF 1.1.** Prendendo un numero complesso di forma  $(a, b) \in \mathbb{C}$ , definiamo le seguenti.

1.  $\mathbf{1}$  il numero complesso di forma  $(1, 0)$
2.  $i$  il numero complesso di forma  $(0, 1)$

Se li moltiplichiamo per se stessi otteniamo:

1.  $\mathbf{1} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{1} = (1, 0)$
2.  $i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 * 0 - 1 * 1, 0 * 1 + 1 * 0) = (-1, 0) = -\mathbf{1}$

Allora si può affermare che  $i^2 = -1$  è la soluzione dell'equazione  $x^2 + 1 = 0$ .

### CONCLUSIONE.

Allora posso scrivere il numero complesso  $(a, b)$  come il seguente:

$$\begin{aligned}
 (a, b) &= (a, 0) \cdot (1, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1) \\
 &= a(1, 0) + b(0, 1) \\
 (a, b) &= a + ib
 \end{aligned}$$

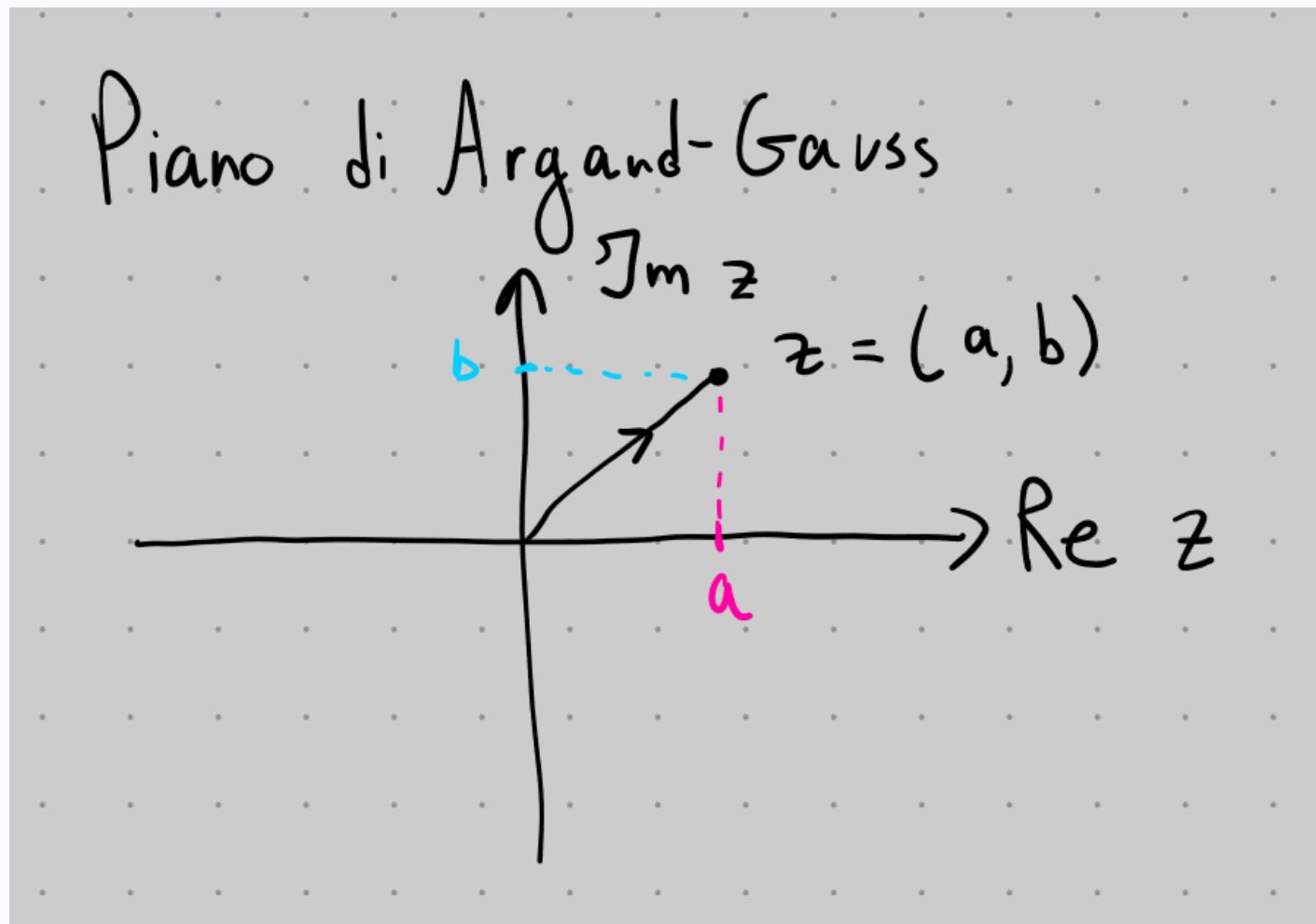
**DEF 2.2.** Il numero  $a$  si dice la **parte reale** e viene definita come  $\operatorname{Re}(z)$ , il numero  $b$  ( $\operatorname{Im}(z)$ ) si dice la **parte immaginaria**.

## 2. Piano di Argand-Gauss

387

Se prendiamo il *piano cartesiano*  $\pi$  applicando le regole definite per  $\mathbb{C}$ , allora otterremo il piano di *Gauss* (oppure di *Argand-Gauss*), dove ogni punto del piano è un *numero complesso*.

Eccovi un esempio grafico:



Infatti, *geometricamente* un punto  $z$  può rappresentare un *vettore geometrico* (*Vettori Liberi*) con punto di applicazione  $(0, 0)$ .

Chiamiamo un punto del piano come  $z$ , che può essere scritto come

$$z = \operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z)$$

## 3. Esercizi

Considerando le *Operazioni sui Numeri Complessi* e questa rappresentazione di un numero complesso  $z$ , si propongono alcuni esercizi:

**ESERCIZIO 3.1.** Calcola

$$(2 + 3i) + (4 + i)$$

**ESERCIZIO 3.2.** Calcola

$$(2 - 3i)(2 + 3i)$$

$$(1+i)(2-i)(7i)$$

$$\frac{i+1}{i-1}$$

## C4. La rappresentazione trigonometrica dei numeri complessi

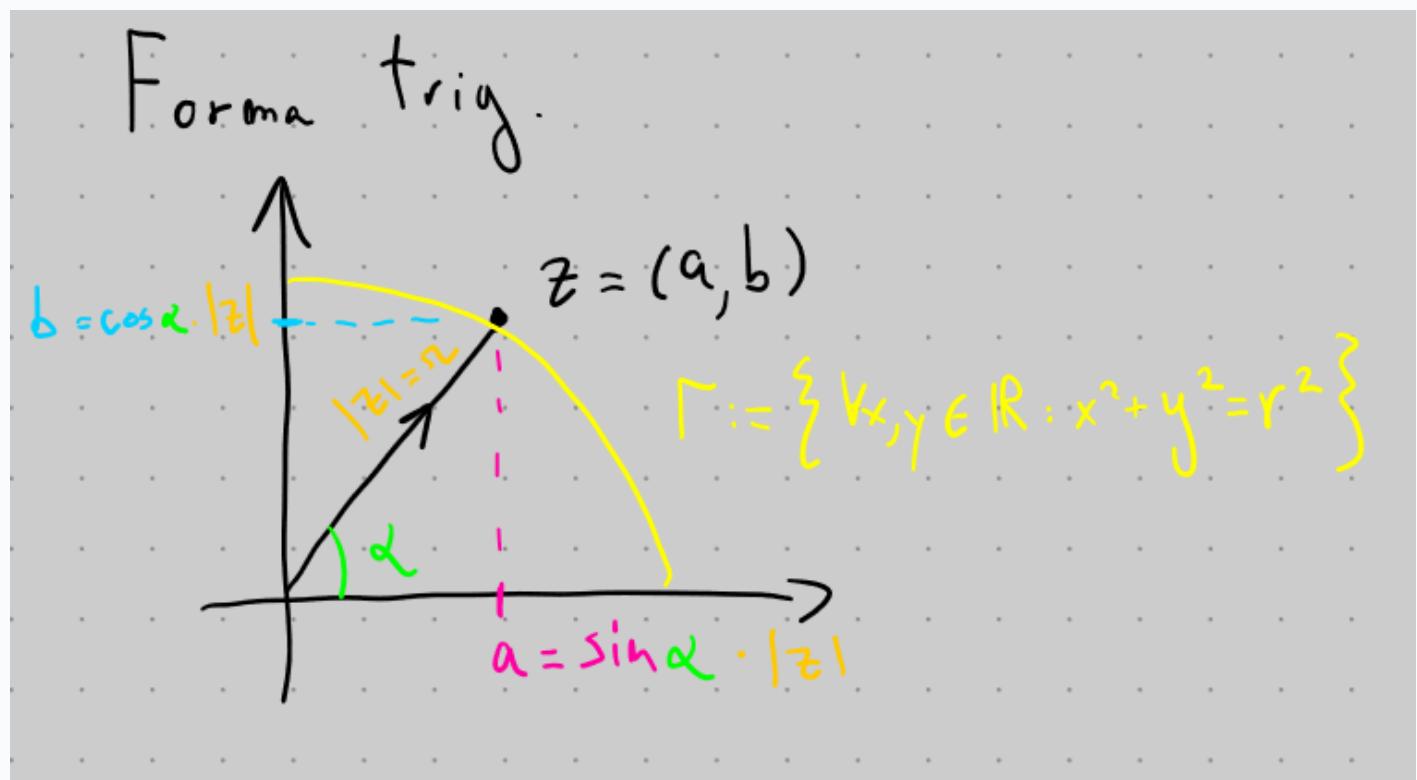
### Forma Trigonometrica dei Numeri Complessi

Rappresentazione dei numeri complessi come un  $z$  associato a modulo e argomento; argomento come la classe di equivalenza dell'argomento principale; nuova interpretazione della moltiplicazione; esempi; Formula di De Moivre.

## 1. Rappresentazione trigonometrica

Oltre alla rappresentazione "algebrica" dei numeri complessi  $\mathbb{C}$  (Rappresentazione dei Numeri Complessi), è possibile anche considerare un'altra rappresentazione che fa uso delle Funzioni trigonometriche.

**NOZIONE.** Prendiamo un  $z \in \mathbb{C}$ , che geometricamente vuol dire



$$\begin{aligned} a &= \cos \alpha \cdot |z| \\ b &= \sin \alpha \cdot |z| \end{aligned}$$

dove  $|z|$  rappresenta il *modulo* di  $z$ . ([Operazioni sui Numeri Complessi](#), **DEF 4.**)  
Dunque

$$z = a + ib = |z|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

e lo si può scrivere come

$$z \sim (|z|, [\alpha])$$

che si legge come " $z$  *lo rappresento come*  $(|z|, [\alpha])$ ".

**DEF 1.** Quindi definisco le due *componenti* che sono associate a  $z$ :

- **Modulo** come  $|z|$ , che d'ora in poi verrà genericamente chiamato come  $\rho$ . Ovviamente può essere solo maggiore o uguale a 0.
- **Argomento** come l'angolo  $\alpha$ ;
  - Dai risultati della *trigonometria*, sarebbe meglio considerare **l'argomento principale** come la classe di equivalenza  $[\alpha]_{\equiv 2\pi}$  dove  $\alpha \in [0, 2\pi)$ . Qui si parla della *congruenza modulo*  $2\pi$  ([Relazioni](#), **ESEMPIO 3.2**); questo in quanto  $2\pi$  rappresenterebbe un giro intero, quindi  $\alpha = \alpha + 2\pi$ . Allora

$$[\alpha] = \{\forall k \in \mathbb{Z}, \alpha + 2k\pi\}$$

**OSS 1.1.** Inoltre possiamo definire l'applicazione

$$\mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow (0, +\infty) \times \{[\alpha]_{\equiv 2\pi}, \alpha \in \mathbb{R}\}; z \mapsto (\rho, [\alpha])$$

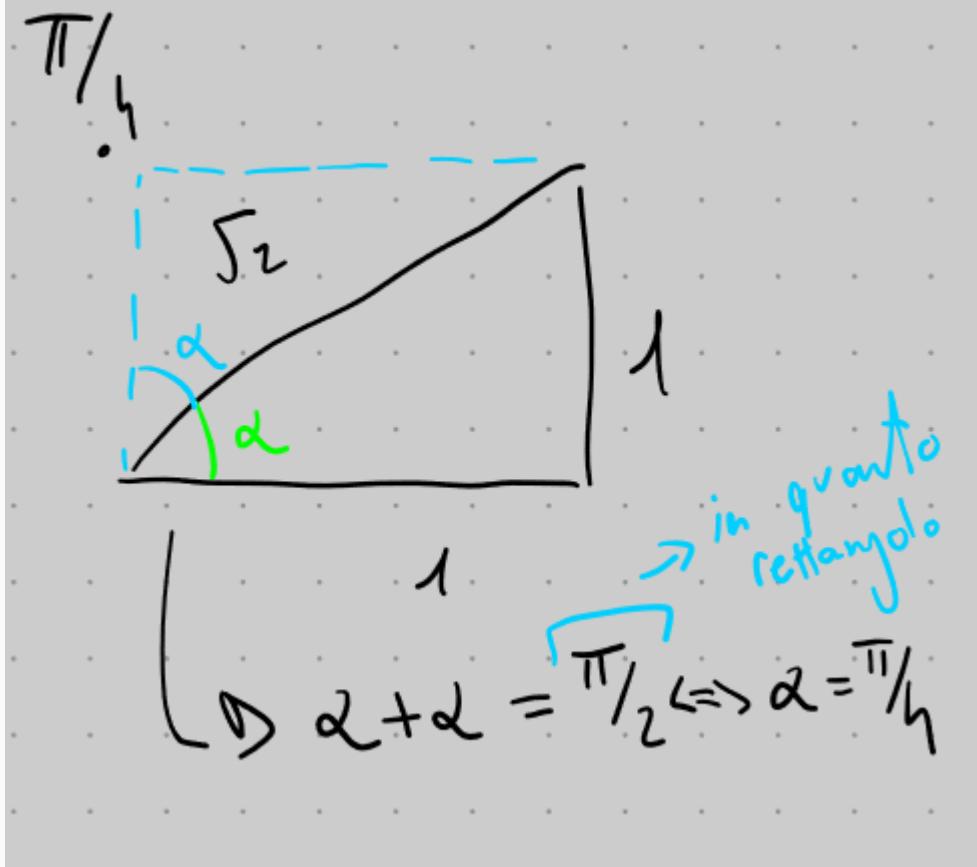
ed è *biettiva*. Non si considera lo 0 in quanto questo può creare dei problemi; infatti a  $z = 0 + i0$  può essere associato qualsiasi angolo, rendendo questa applicazione una *non funzione*.

## 1.1. Esempi

**ESEMPIO 1.1.a.** Prendendo  $z = 1 + i$ , voglio trovare la sua rappresentazione trigonometrica.

Innanzitutto trovo il suo *modulo*  $|z|$  che per definizione è  $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ .

Dopodiché trovo il suo *argomento*. Per farlo bisogna considerare la *geometria elementare*, nel senso che se abbiamo un triangolo del tipo



allora chiaramente si evince che l'angolo  $\alpha$  è  $\frac{\pi}{4}$ .

**ESEMPIO 1.1.b.**  $z = 1 + i0$ ; allora chiaramente

$$z \sim (1, 0)$$

**ESEMPIO 1.1.c.**

$$z = 0 + i \sim \left(1, \frac{\pi}{2}\right)$$

## 1.2. Interpretazione della moltiplicazione

**OSS 1.2.** Si osserva che secondo la *forma trigonometrica* possiamo interpretare la *moltiplicazione tra due numeri complessi* nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \\ z_1 \sim (\rho_1, \alpha_1) \\ z_2 \sim (\rho_2, \alpha_2) \end{aligned}$$

Allora

$$z_1 \cdot z_2$$

è uguale a

$$\begin{aligned} \rho_1(\cos \alpha_1 + i \sin \alpha_1) \cdot \rho_2(\cos \alpha_2 + i \sin \alpha_2) &= \\ (\rho_1 \cos \alpha_1 + \rho_1 i \sin \alpha_1)(\rho_2 \cos \alpha_2 + \rho_2 i \sin \alpha_2) &= \\ \rho_1 \rho_2 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \rho_1 \rho_2 i \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 + \rho_1 \rho_2 i \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 - \rho_1 \rho_2 \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 & \end{aligned}$$

$$\rho_1 \rho_2 (\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 + i(\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 + \sin \alpha_1 \cos \alpha_2))$$

e qui identifichiamo le *forme di addizione e sottrazione del seno e del coseno* ([Funzioni trigonometriche](#), **SEZIONE 2.3.**). Allora abbiamo infine

$$z = \rho_1 \rho_2 (\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i \sin(\alpha_1 + \alpha_2))$$

Quindi secondo questa *interpretazione* abbiamo che i *moduli* si moltiplicano e gli *angoli* si sommano. Ovvero:

$$z_1 z_2 \sim (\rho_1 \rho_2, \alpha_1 + \alpha_2)$$

## 2. Formula di de Moivre

**TEOREMA 2.** Sia  $z = a + ib \sim (\rho, [\alpha])$ ; quindi  $z = \rho(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ .

Allora

$$z^n \sim (\rho^n, n[\alpha]) = \rho^n (\cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha))$$

### 2.1. Esempi

Alcuni esempi in cui si applica la *formula di de Moivre*.

## 3. Le radici di un numero complesso

Consideriamo un caso fondamentale del *teorema fondamentale dell'algebra*, ovvero le *radici dell'unità*.

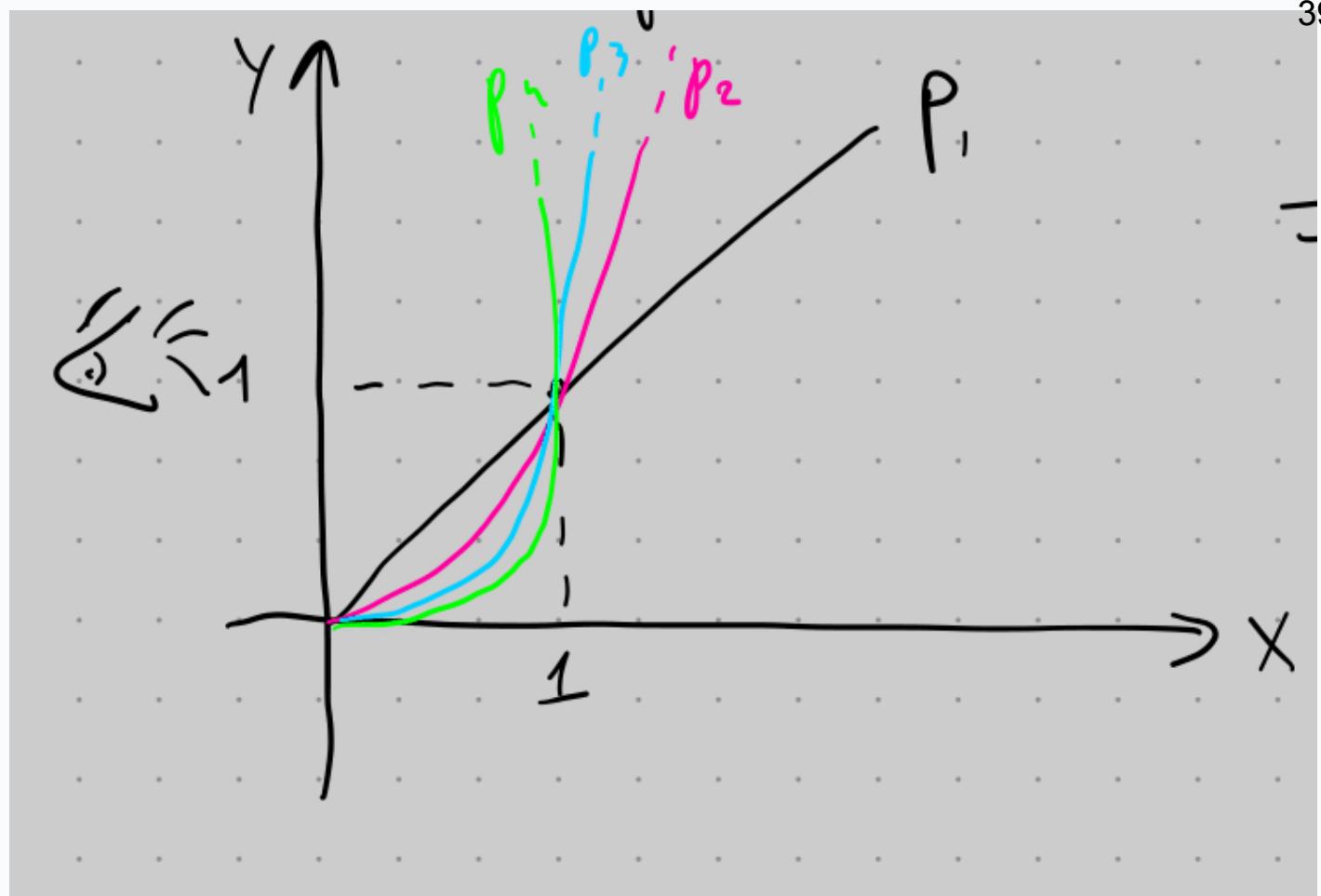
**PROBLEMA 3.** Dato un numero  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , voglio trovare tutti i numeri  $z \in \mathbb{C}$  tali che

$$z^n = 1$$

**OSS 3.1.** Vediamo cosa succede in  $\mathbb{R}$ , ovvero se  $\operatorname{Im}(z) = 0$ . Allora devo trovare tutti i numeri  $x \in \mathbb{R}$  tali che

$$x^n = 1$$

Se restringo ulteriormente il nostro insieme di considerazione a  $[0, +\infty)$ , allora posso considerare la funzione *potenza  $n$ -esima* ([Funzioni di potenza, radice e valore assoluto](#), **DEF 1.1.**).



Si nota subito che  $x^n = 1$  ha un'unica soluzione in  $[0, +\infty)$ ; ovvero  $x_1 = 1$ .

Ora se consideriamo pure i numeri negativi, allora:

- per  $n$  pari,  $x^n = 1$  ha anche una soluzione secondaria  $x_2 = -1$ .
- per  $n$  dispari,  $x^n = 1$  ha come soluzione solo  $x_1 = 1$ .

### OSS 3.2.

Invece su  $\mathbb{C}$  ci sono esattamente  $n$  soluzioni.

$$z^n = 1$$

**DIM.** Consideriamo la forma trigonometrica di  $z$  e  $1$ , ovvero

$$z \sim (\rho, [\alpha]); 1 \sim (1, [0])$$

e secondo l'equazione voglio che

$$z^n \sim (\rho^n, n[\alpha]) = (1, [0])$$

quindi deve essere vera la seguente:

$$\rho^n = 1 \iff \rho = 1$$

Da un punto di vista *geometrico*, questo vuol dire che non voglio avere né spirali che vanno fuori ( $\rho > 1$ ) né quelli che vanno all'interno ( $\rho < 1$ ).

$$[n\alpha] = [0]$$

cioè

$$n\alpha = 0 + 2k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}$$

allora

$$\alpha = \frac{2k\pi}{n}, \forall k \in \mathbb{Z}$$

ora iniziamo a fissare dei valori di  $k$ , a partire da 0. Allora

$$k = 0 \implies \alpha_1 = 0$$

$$k = 1 \implies \alpha_2 = \frac{2\pi}{n}$$

$$k = 2 \implies \alpha_3 = \frac{4\pi}{n}$$

...

$$k = n - 1 \implies \alpha_n = \frac{2(n-1)\pi}{n}$$

$$k = n \implies \alpha_{n+1} = \frac{2n\pi}{n} = 2\pi \in [0]_{\equiv 2\pi}$$

$$k = n + 1 \implies \alpha_{n+2} = \frac{2(n+1)\pi}{n} = \frac{2n\pi + 2\pi}{n} = 2\pi + \frac{2\pi}{n} \in [\frac{2\pi}{n}]_{\equiv 2\pi}$$

Notiamo che da  $k = n$  (ovvero dalla  $n + 1$ -esima soluzione) in poi otteniamo elementi che appartengono alle classi equivalenza di soluzioni già trovate: ovvero non vanno considerate, in quanto le loro classi di equivalenza sono uguali. Quindi le radici dell'unità sono:

$$z_0 \sim (1, [0]) = \cos(0) + i \sin(0) = 1$$

$$z_1 \sim (1, [\frac{2\pi}{n}]) = \cos(\frac{2\pi}{n}) + i \sin(\frac{2\pi}{n})$$

...

$$z_n \sim (1, [\frac{2(n-1)\pi}{n}]) = \cos(\frac{2(n-1)\pi}{n}) + i \sin(\frac{2(n-1)\pi}{n})$$

Allora vediamo che ci sono  $n$  soluzioni; generalizzando da qui discende il **teorema fondamentale dell'algebra**.

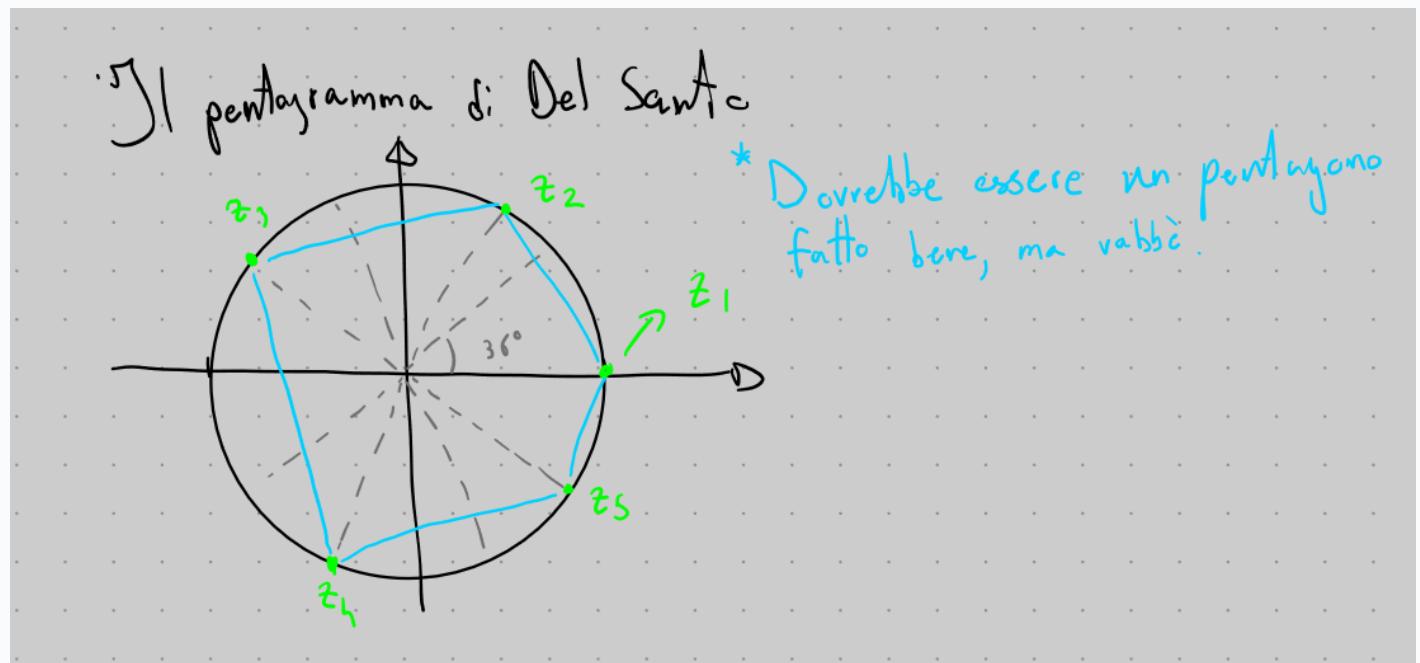
### 3.1. Esempio

**ESEMPIO 3.1.** Trovare tutte le soluzioni  $z \in \mathbb{C}$  tali che

$$z^5 = 1$$

$$\begin{aligned}
 z_1 &\sim (1, [0]) = 1 \\
 z_2 &\sim (1, [\frac{2\pi}{5}]) = \cos(\frac{2\pi}{5}) + i \sin(\frac{2\pi}{5}) \\
 z_3 &\sim (1, [\frac{2(2)\pi}{5}]) = (1, [\frac{4\pi}{5}]) \\
 z_4 &\sim (1, [\frac{2(3)\pi}{5}]) = (1, [\frac{6\pi}{5}]) \\
 z_5 &\sim (1, [\frac{2(4)\pi}{5}]) = (1, [\frac{8\pi}{5}])
 \end{aligned}$$

Graficamente posso prendere il *piano di Argand-Gauss* (Rappresentazione dei Numeri Complessi), prendere un cerchio con  $r = 1$ , dividere i due *semicerchi* in 5 parti, poi prendere il secondo, quarto, sesto e ottavo punto della sezione; infine se li collego ottengo un *pentagono*.



## 3.2. Teorema fondamentale dell'algebra

### TEOREMA 3.2.

Siano  $a_n$  dei numeri tali che:

$$a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}; a_n \neq 0$$

e considerando l'*equazione*

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n = 0$$

allora questa ha esattamente  $n$  *soluzioni* in  $\mathbb{C}$ .

**OSS 3.2.1.** Allora possiamo riscrivere l'*equazione* come

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n = a_n(z - z_1) \dots (z - z_n)$$

## 4. (EXTRA) L'insieme di Mandelbrot

**PROBLEMA 4.** Considero il **piano di Argand-Gauss** e  $z = c \in \mathbb{C}$ ; adesso considero una **successione** (Assiomi di Peano, il principio di induzione, **DEF 4.2.1.**) di **punti su**  $\mathbb{C}$ , ovvero

$$z_0 = c; z_1 = c^2 + c; \forall n, z_{n+1} = (z_n)^2 + c$$

Quindi scelgo un punto  $c$ , a cui applico la successione  $z_n$ .

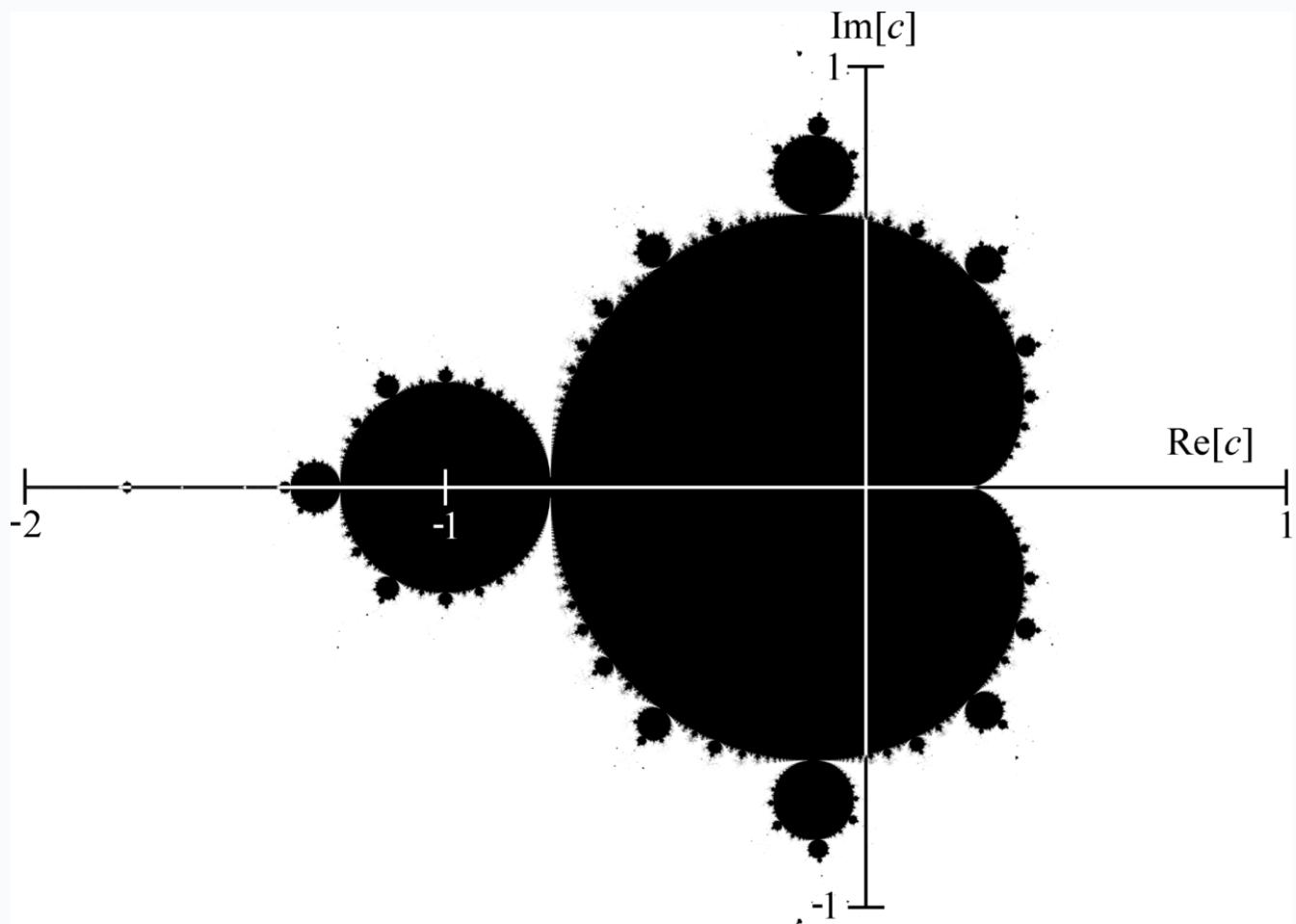
Adesso distinguo i **punti di partenza**  $c$  in due famiglie principali:

1. I punti di partenza che rimangono in un **insieme limitato** (ovvero un raggio di palla) dopo un numero di iterazioni
2. I punti di partenza dei quali moduli vanno all'infinito

Graficamente posso colorare i punti della prima famiglia di colore nero, i secondi di colore bianco.

Tramite gli strumenti dell'**informatica** posso usare un **pixel** per rappresentare un punto  $c$ , poi di eseguire un numero preciso di iterazioni (come 500) e infine di colorare i pixel a seconda del suo comportamento.

Così otteniamo il cosiddetto **frattale di Mandelbrot**.



## S1. Definizione di Serie

### Definizione di Serie

*Problema preliminare per le serie; definizione di serie; definizione di successione dei termini, di somme parziali, di parziale n-esima per una serie. Esempi notevoli di serie.*

## 0. Osservazione preliminare

#Osservazione

Osservazione (problema preliminare).

Supponiamo di avere una *successione*  $(a_n)_n$  in  $\mathbb{R}$  (o  $\mathbb{C}$ ) ([Definizione 1 \(successione\)](#)).

Voglio trovare un *modo rigoroso* per considerare la *somma* di tutti i termini  $(a_n)_n$ ; si tratta tuttavia di *operazioni infinite*, dunque non posso effettivamente fare la somma.

Infatti, procedendo in questo modo si avrebbero dei risultati che *sembrano* degli assurdi, tra cui la c.d. *serie di Ramanujan* ([ulteriori approfondimenti su Wikipedia](#)).

$$1 + 2 + 3 + \dots = -\frac{1}{12} \quad (\Re)$$

Vogliamo dunque trovare un altro modo per fare le somme dei termini  $a_n$ , senza dover ricorrere a teorie più speciali. Useremo dunque la *teoria dei limiti*, creando effettivamente un nesso tra la *teoria dei limiti* (per le successioni) con le *serie*.

## 1. Definizioni basilari

#Definizione

Definizione (Serie).

Sia  $(a_n)_n$  una *successione a valori reali* (o complessi).

Per ogni  $n \in \mathbb{N}$  definiamo la "*somma parziale*"

$$s_n = \sum_{i=0}^n a_i$$

$$s_0 = a_0; s_1 = a_0 + a_1; \dots; s_n = a_n + s_{n-1} = a_0 + \dots + a_n$$

Allora definisco la coppia

$$((a_n)_n, (s_n)_n)$$

come **serie** e la indico come

$$((a_n)_n, (s_n)_n) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

### #Definizione

**Definizione** (Successione dei termini, somme parziali, parziale  $n$ -esima per una serie).

Data una **serie**

$$((a_n)_n, (s_n)_n) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

Definisco le seguenti:

- $(a_n)_n$  si dice la **successione dei termini** o il **termine generale** della serie.
- $(s_n)_n$  si dice la successione **delle somme parziali** o delle **ridotte  $n$ -esime** della serie
- $s_n$  si dice successione **parziale** o **ridotta**  $n$ -esima della serie.

### #Definizione

**Definizione** (Resto  $k$ -esimo della serie).

Data una **serie**

$$((a_n)_n, (s_n)_n) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

posso considerare un qualsiasi numero  $k \in \mathbb{N}$  e definire la seguente sotto successione ([Successione e Sottosuccessione > ^502a75](#)).

$$(b_k)_k := (a_{n+k})_n$$

ovvero, scegliendo ad esempio  $k = 3$

La serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = \sum_{n=k}^{+\infty} a_n$$

si dice il *resto k-esimo della serie*  $((a_n)_n, (s_n)_n)$ .

## 2. Esempi notevoli di Serie

#Esempio

Esempio (Successione costante).

Sia  $a_n = 1, \forall n$ ; allora abbiamo

$$\begin{aligned} a_0 &= a_1 = \dots = a_n = 1 \\ s_0 &= 1; s_1 = 1 + 1; \dots; s_n = 1 + 1 + \dots + 1 = n + 1 \end{aligned}$$

Allora abbiamo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} 1$$

#Esempio

Esempio (Successione identità).

Sia definita la successione  $a_n = n, \forall n$ ; allora abbiamo la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \sim \left( (n)_n, \left( \frac{n(n+1)}{2} \right)_n \right)$$

Per una derivazione della nomenclatura a destra si provi per *induzione* che

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

#Esempio

Esempio (Successione binaria).

Sia definita la successione  $a_n = (-1)^n$ , ovvero del tipo

Allora troviamo che

$$s_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ pari} \\ 0 & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases} = \frac{(-1)^n + 1}{2}$$

Allora

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \sim ((a_n)_n, (s_n)_n) = \dots$$

### #Esempio

#### Esempio (Serie geometrica di ragione $\rho$ ).

Sia  $\rho \in \mathbb{R}$  (denominata come *ragione*) e definiamo la successione  $a_n = \rho^n$ .

Conoscendo la *ridotta della serie geometrica* (Esempi di Induzione > ^98ba76), sappiamo che

$$\rho^0 + \rho^1 + \dots + \rho^n = \frac{1 - \rho^{n+1}}{1 - \rho} = s_n$$

Allora abbiamo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \rho^n \sim \left( (\rho^n)_n, \left( \frac{1 - \rho^{n+1}}{1 - \rho} \right)_n \right)$$

### #Osservazione

#### Osservazione (Casi $n = 0$ e $n = 1$ ).

Osserviamo che data una qualunque successione  $(a_n)_n$ , tratteremo in modi simili le situazioni in cui  $n$  parte da 0 o da 1.

### #Esempio

#### Esempio (Serie armonica).

Sia  $a_n = \frac{1}{n}$ .

Allora abbiamo la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sim \left( \left( \frac{1}{n} \right)_n, \left( 1 + \dots + \frac{1}{n} \right)_n \right)$$

#Esempio

Esempio (Serie armonica generalizzata).

Sia  $\alpha \in [0, +\infty)$ . Prendendo la *serie armonica*, indico la *serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

come la *serie armonica generalizzata*.

## S2. Carattere di una Serie

### Carattere di una Serie

---

*Carattere di una serie: definizione di serie convergente, divergente, indeterminata; esempi; osservazioni sulle serie convergenti.*

---

### 0. Osservazione preliminare

#Osservazione

Osservazione (Problema preliminare).

Ora vogliamo capire come si *comporta* la ridotta  $(s_n)_n$  a partire dal termine generale della serie  $(a_n)_n$  ([Definizione di Serie](#)).

### 1. Definizione di serie convergente, divergente e indeterminata

#Definizione

Definizione (Serie convergente, divergente, indeterminata).

Data la serie

$$\sum_{n \in \{0,1\}}^{+\infty} a_n \sim ((a_n)_n, (s_n)_n)$$

questa si dice:

- **convergente** se esiste finito il limite

$$\lim_n s_n = s \in \mathbb{R} (\mathbb{C})$$

in tal caso  $s$  si dice la **somma della serie**.

- **divergente** se invece esiste ma non è finito il limite

$$\lim_n s_n = \pm\infty \in \tilde{\mathbb{R}}$$

- **indeterminata** se non esiste il limite

$$\nexists \lim_n s_n$$

La "caratteristica" di essere convergente, divergente o indeterminata si dice il **carattere della serie**.

## 2. Osservazioni sulle serie convergenti

Notiamo che le **serie convergenti** hanno certe proprietà interessanti.

#Osservazione

Osservazione (Le ridotte di una serie condivide il carattere della serie padre).

Consideriamo una qualsiasi **serie convergente** e un suo qualsiasi **resto  $k$ -esimo**

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n; \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+k}$$

Ho che entrambe le serie hanno **lo stesso carattere**.

Considerando  $s_n$  come la ridotta di  $\sum a_n$ ,  $\sigma_n$  la ridotta di  $\sum a_{n+k}$ , troviamo una relazione tra le due ridotte, ovvero

$$\sigma_n = s_{n+k} - s_{k-1}$$

Infatti, guardando il membro destro dell'uguaglianza, il **primo termine** rappresenta la somma di tutti i termini della successione  $(a_n)_n$  fino a  $n + k$ ; invece il **secondo termine "toglie"** gli elementi che non appartengono al resto  $k$ -esimo, ovvero i

## #Osservazione

**Osservazione** (Le serie convergenti formano un spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$ ).

Considero una qualsiasi serie e un scalare  $\lambda \in \mathbb{R}$ :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n; \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda \cdot a_n$$

Troviamo che entrambe le serie hanno lo **stesso carattere**. In particolare, se la serie è convergente allora "**scalandolo**" per un qualsiasi numero rimane comunque convergente.

Adesso consideriamo due serie convergenti del tipo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n; \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$$

Se sono entrambi **convergenti**, allora sicuramente sarà convergente pure la **somma** tra le due serie definita come

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n := \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n)$$

allora la serie ottenutosi a destra sarà pure **convergente**.

Infatti, da questa breve osservazione si evince che le **serie convergenti** formano un  $\mathbb{R}$ -**spazio vettoriale** ([Definizione 1 \(spazio vettoriale sul campo K\)](#)).

### 3. Esempi di studio delle serie

*Nota: la maggior parte degli esempi verranno tratti dalla pagina [Definizione di Serie](#)*

## #Esempio

**Esempio** (Serie costante).

Prendiamo la serie

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} 1$$

Ma allora da ciò segue che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (n + 1) = +\infty$$

Allora la serie è *divergente*.

#Esempio

### Esempio (Serie identità).

Prendiamo adesso la serie

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} n = 1 + 2 + \dots$$

Vediamo che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n)(n+1)}{2} = +\infty$$

Allora anche questa serie è divergente.

#Esempio

### Esempio (Serie binaria).

Ora prendiamo la serie

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$$

Vediamo che

$$s_n = \begin{cases} -1, & n \in \mathbb{P} \\ 1, & n \in \mathbb{D} \end{cases}$$

Ma allora in questo caso il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$$

*non esiste*, dal momento che scegliendo opportune sotto successioni otteniamo valori diversi.

#Esempio

Prendiamo la serie geometrica per  $\rho = \frac{1}{2}$ .

Ovvero,

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

Allora abbiamo

$$s_n = 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \implies \lim_n s_n = 2(1 - 0) = 2$$

Allora la serie  $S$  è "convergente con somma 2.

#Esempio

### Esempio (Serie geometrica generalizzata).

Ora generalizziamo l'esempio precedente per un  $\rho \in \mathbb{R}$ .

Ovvero,

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \rho^n$$

Ora distinguiamo casi diversi.

Per  $\rho = 1$ , osserviamo che la serie si comporterà come la *serie costante* (ovvero  $\sum_{0 \leq n < +\infty} 1$ ), dunque  $S$  diventa *divergente*.

Invece per  $\rho \neq 1$ , abbiamo che la *successione delle ridotte parziali* è

$$s_n = \frac{1 - \rho^{n+1}}{1 - \rho} \implies \lim_n s_n = \lim_n \frac{1 - \rho^{n+1}}{1 - \rho}$$

Notiamo che "*l'unica parte che si muove*" è  $\rho^{n+1}$ ; studiamo dunque solo il limite

$$\lim_n \rho^n = \begin{cases} +\infty, & \rho > 1 \\ 0, & -1 < \rho < 1 \\ \text{non esiste}, & \rho \leq -1 \end{cases}$$

Dunque deduciamo che

$$\lim_n s_n = \begin{cases} +\infty, & \rho \geq 1 \\ \frac{1}{1-\rho}, & -1 < \rho < 1 \\ \text{non esiste}, & \rho \leq -1 \end{cases}$$

#Esempio

Esempio (Serie armonica).

Ora vogliamo studiare il carattere della serie

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

Consideriamo la successione  $(s_n)_n$ .

$$s_1 = 1$$

$$s_2 = 1 + \frac{1}{2}$$

$$s_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

$$s_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \geq 1 + 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \geq 1 + 2\frac{1}{2}$$

⋮

$$s_8 = 1 + \dots + \frac{1}{8} \geq 1 + \frac{1}{2} + 2\frac{1}{4} + 4\frac{1}{8} = 1 + 3\frac{1}{2}$$

$$s_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \underbrace{\frac{1}{2^{n-1}} + \dots + \frac{1}{2^n}}_{2^{n-1} \text{ termini}}$$

Ma allora svolgendo un'operazione simile per  $s_4, s_8$ , possiamo minorare  $s_{2^n}$  come

$$s_{2^n} \geq 1 + \frac{1}{2} + 2\frac{1}{4} + 4\frac{1}{8} + \dots + 2^{n-1}\frac{1}{2^n} = 1 + \frac{n}{2}$$

Pertanto, per il teorema del confronto ([Osservazione 5 \(i teoremi per i limiti di funzioni valgono anche per i limiti di successioni\)](#)), il limite è

$$\lim_n s_{2^n} = +\infty$$

Allora dato che stiamo considerando una **sottosuccessione su**  $s_n$ , anche il limite  $s_n$  è

$$\lim_n s_n = +\infty$$

([N. B.](#) dimostreremo questo risultato nelle pagine successive, considerando le **successioni a termini positivi**).

## #Esempio

## Esempio (Serie di Mengoli).

Consideriamo la serie

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{(1)(2)} + \frac{1}{(2)(3)} + \dots + \frac{1}{(n)(n+1)} + \dots$$

Vogliamo determinare il carattere della serie  $S$  (di Mengoli).

Innanzitutto osserviamo che

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Allora, considerando la successione delle ridotte di  $S$  abbiamo una *serie telescopica*:

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{1(2)} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Di conseguenza il suo limite è

$$s_n = 1 - \frac{1}{n+1} \implies \lim_n s_n = 1$$

Allora la *serie di Mengoli* è "convergente con somma 1".

## #Esempio

## Esempio (Problema di Basilea).

Consideriamo la serie

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Notiamo che questa è "*approssimabile*" con la *serie di Mengoli*; allora si deduce che  $S$  è *convergente*. Ma con quale somma?

Questa domanda venne posta per la prima volta nel 1644 come il *problema di*

$$\frac{\pi}{6}$$

**FIGURA 1.** (*Foto di Pietro Mengoli e Leonhard Euler*)

## S3. Primi teoremi sulle Serie

### Teoremi Generali sulle Serie

Primi teoremi sulle serie: condizione necessaria per una serie convergente, criterio di Cauchy per le serie.

## 0. Voci correlate

- Definizione di Serie
- Carattere di una Serie

## 1. Condizione necessaria per serie convergenti

Sia

$$\sum_{n \in \mathbb{N}}^{+\infty} a_n$$

una serie **convergente**.

Allora la **successione dei termini generali**  $(a_n)_n$  presenta il limite nullo, ovvero

$$\lim_n a_n = 0$$

#### #Osservazione

Osservazione (attenzione!).

Osservare attentamente che questo teorema ci fornisce **soltanto** una condizione necessaria per una serie convergente, ma **non** una condizione sufficiente; infatti, prendendo la **serie armonica**, abbiamo che il limite della successione  $\lim_n a_n$  si annulla; ma la sua serie è **divergente** ([Esempio 10 \(Serie armonica\)](#)).

#### #Dimostrazione

**DIMOSTRAZIONE** del [Teorema 1 \(condizione necessaria per la convergenza di una serie\)](#).

Supponiamo, per ipotesi che la serie

$$\sum_{n \in \mathbb{N}}^{+\infty} a_n$$

sia **convergente**.

Allora per ipotesi segue che il **limite della successione delle ridotte** è convergente per tale serie:

$$\lim_n s_n = s \in \mathbb{R}$$

Allora vale anche

$$\lim_n s_{n-1} = \lim_n s_n = s$$

Ma allora possiamo sottrarli e ottenere

$$\lim_n (s_n - s_{n-1}) = s - s = 0$$

Però ci ricordiamo che  $s_{n-1} - s_n$  non è altro che un modo per esprimere  $a_n$ , dal momento che **sottraiamo** tutti i termini  $a_0, \dots, a_{n-1}$  da  $a_0, \dots, a_n$ .

409

Di conseguente

$$\lim_n (s_n - s_{n-1}) = \boxed{\lim_n a_n = 0} \blacksquare$$

#### #Osservazione

Osservazione (l'utilità di questo teorema).

Come osservato prima, non si può sfruttare questo teorema come una **condizione sufficiente**; tuttavia è possibile comunque sfruttare la **contronominale** di questo teorema, ovvero

$$((a_n)_n, (s_n)_n) \text{ convergente} \implies \lim_n a_n = 0$$

diventa

$$\lim_n a_n \neq 0 \vee \nexists \lim_n a_n \implies ((a_n)_n, (s_n)_n) \text{ divergente o indeterminata}$$

Allora guardando semplicemente il **comportamento** del limite per  $a_n$ , possiamo già escludere se la sua serie è **convergente** o meno.

Ad esempio, voglio studiare la **serie costante** del tipo  $1 + 1 + \dots + 1 + \dots$ ; osservo che il limite della successione dei suoi termini generali è divergente, dunque è impossibile che sia **convergente**. Infatti, la serie costante è **divergente** per  $+\infty$ .

## 2. Criterio di Cauchy

#### #Teorema

**Teorema** (Criterio di Cauchy per le serie).

Sia

$$\sum_{n \in \mathbb{N}}^{+\infty} a_n$$

una **serie a valori in  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$** .

Allora sono equivalenti:

$$\sum_{n \in \mathbb{N}}^{+\infty} a_n \text{ convergente} \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} : \forall n > \bar{n} \wedge \forall k \in \mathbb{N} \quad |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+k}| < \varepsilon$$

**DIMOSTRAZIONE** del Teorema 4 (Criterio di Cauchy per le serie).

Ricordo il *teorema di completezza di  $\mathbb{R}$*  (Teorema 4 (Completezza di R.)) e il *teorema di caratterizzazione delle successioni convergenti* (Teorema 3 (di caratterizzazione delle successioni convergenti)), per i quali una *successione qualsiasi*  $(\alpha_n)_n$  è *convergente* se e solo se è di *Cauchy* (in  $\mathbb{R}$ ).

Per definizione, la serie è convergente se la sua successione delle ridotte  $(s_n)_n$  è *convergente*. Allora la serie è convergente *se e solo se*  $(s_n)_n$  è di *Cauchy*.

Ora richiamo la definizione di successione di Cauchy: una successione si dice di Cauchy quando vale

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} : \\ n, k > \bar{n} \implies |s_n - s_k| < \varepsilon \end{aligned}$$

Adesso supponendo che  $n > k$  (non è restrittiva dal momento che se è vero il contrario, posso "scambiare i nomi" di  $n, k$ ), posso ottenere la relazione

$$n > \bar{n}; \exists m \in \mathbb{N} : k = n + m$$

Allora riprendendo la definizione di successione di Cauchy ho

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} : \\ n, k > \bar{n} \implies |s_n - s_{n+m}| < \varepsilon \end{aligned}$$

Osserviamo che il membro sinistro della diseguaglianza a destra può essere riformulata come

$$|s_n - s_{n+m}| = |s_{n+m} - s_n| = |a_{n+1} + \dots + a_{n+k}|$$

che è la tesi. ■

## S4. Teorema del Confronto per le Serie non negative

### Teorema del Confronto per le Serie a Termini non negativi

*Teoremi sulle serie a termini non negativi: teorema del confronto (+ due corollari), tecnica di valutazione delle serie con Taylor.*

## 0. Voci correlate

- Serie a Termini non negativi
- Definizione di Serie

- Carattere di una Serie
- Formula di Taylor
- Insiemi limitati, maggioranti, massimo e teorema dell'estremo superiore

## 1. Teorema del confronto per le serie a t. n. n.

#Teorema

**Teorema** (del confronto per le serie a termini non negativi).

Siano  $\sum_n a_n$ ,  $\sum_n b_n$  due **serie a termini non negativi**.

Supponiamo che valga  $a_n \leq b_n, \forall n$  (ovvero che tutti i termini di  $(b_n)_n$  "stanno sopra" tutti quelli di  $(a_n)_n$ )

Allora:

- i. Se  $\sum_n a_n$  è divergente, allora anche  $\sum_n b_n$  è divergente.
- ii. Se  $\sum_n b_n$  è convergente con somma  $s_b$ , allora anche  $\sum_n a_n$  è convergente con somma  $s_a$ , con  $s_a \leq s_b$ .

#Dimostrazione

**DIMOSTRAZIONE** del **Teorema 1** (del confronto per le serie a termini non negativi).

i. Supponiamo che  $\sum_n a_n$  sia **divergente**. Ora consideriamo le **ridotte**  $n$ -esime per le serie  $\sum_n a_n$ ,  $\sum_n b_n$  e le denotiamo rispettivamente con  $s_n^a$ ,  $s_n^b$ .

Per ipotesi so che per una qualsiasi  $n \in \mathbb{N}$  ho  $a_n \leq b_n$ , di conseguenza  $a_0 + a_1 \leq b_0 + b_1$ ;  $a_0 + a_1 + a_2 \leq b_0 + b_1 + b_2$ ; e procedendo per induzione ottengo

$$a_0 + \dots + a_n \leq b_0 + \dots + b_n$$

I membri della diseguaglianza sono esattamente  $s_n^a$ ,  $s_n^b$ .

Ma allora

$$s_n^a \leq s_n^b$$

Dato che  $\sum_n a_n$  è **divergente**, per definizione deve seguire il limite

$$\lim_n s_n^a = \pm\infty$$

Ma allora per il **teorema del cfr. per i limiti di successione** (Osservazione 5 (i teoremi per i limiti di funzioni valgono anche per i limiti di successioni)) ho il limite

$$\lim_n s_n^a = \pm\infty \wedge s_n^a \leq s_n^b \implies \lim_n s_n^b = \pm\infty$$

Allora per definizione la serie  $\sum_n b_n$  è **divergente**.

ii. Ora supponiamo invece che  $\sum_n b_n$  sia **convergente** con somma  $s_b$ .

Per definizione ho il limite finito

$$\lim_n s_n^b = s_b$$

Però, considerando che trattiamo di **serie a termini non negativi**, abbiamo che la **successione delle ridotte** è monotona crescente; allora vale anche

$$s_b = \sup_{n \in \mathbb{N}} s_n^b$$

Ovvero " $s_b$  è il maggiorante di tutti i termini di  $(s_n^b)_n$ ", dunque  $s_n^b \leq s_b$ .

Ora possiamo concatenare l'ipotesi iniziale col risultato appena ottenuto:

$$s_n^a \leq s_n^b \leq s_b$$

Ma allora  $s_n^a$  è una **successione strettamente crescente e limitata da  $s_b$** ; allora per il teorema sulle successioni monotone e limitate ([Corollario 8 \(convergenza delle successioni monotone e limitate\)](#)),  $s_n^a$  dev'essere convergente, ovvero

$$\lim_n s_n^a = s_a \leq s_b$$

che è la tesi. ■

## 2. Conseguenze del teorema del cfr.

#Corollario

**Corollario** (caso resto  $k$ -esimo).

Siano  $\sum_n a_n$ ,  $\sum_n b_n$  due **serie a termini non negativi**.

Supponendo che valga

$$\exists k \in \mathbb{N} : \forall n, n > k \implies a_n \leq b_n$$

(ovvero "**da un certo punto  $a_n$  sta sotto  $b_n$** ")

allora:

- i. Se  $\sum_n b_n$  è **convergente**, allora anche  $\sum_n a_n$  è **convergente**.
- ii. Se  $\sum_n a_n$  è **divergente**, allora anche  $\sum_n b_n$  è **divergente**.

#Osservazione

**Osservazione** (pezzo mancante).

Notare attentamente che questo corollario **non coincide completamente** col teorema del confronto, dal momento che nel caso delle serie **convergenti** non vale più la tesi  $s_a \leq s_b$ , dato che stiamo **solo** considerando il resto  $k$ -esimo delle serie.

**DIMOSTRAZIONE** del Corollario 2 (caso resto  $k$ -esimo).

Basta applicare il **teorema del confronto** ai **resti**  $k$ -esimo delle serie  $\sum_n a_n$ ,  $\sum_n b_n$ , ovvero  $\sum_{n=k} a_n$ ,  $\sum_{n=k} b_n$ . ■

## #Corollario

**Corollario** (seconda conseguenza).

Siano  $\sum_n a_n$ ,  $\sum_n b_n$  serie a **termini positivi**.

Supponendo che **esista finito e strettamente positivo il limite**

$$\lim_n \frac{a_n}{b_n} = \lambda \in (0, +\infty)$$

Allora le due serie hanno lo **stesso carattere**.

## #Dimostrazione

**DIMOSTRAZIONE** del Corollario 4 (seconda conseguenza).

Supponiamo il limite

$$\lim_n \frac{a_n}{b_n} = \lambda \in (0, +\infty)$$

Allora per definizione del limite ho

$$\forall \varepsilon > 0, \exists k \in \mathbb{N} : \forall n, \\ n > k \implies \left| \frac{a_n}{b_n} - \lambda \right| < \varepsilon \iff \lambda - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < \lambda + \varepsilon$$

Scegliamo  $\varepsilon = \frac{\lambda}{2}$ . Allora ho

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\lambda &< \frac{a_n}{b_n} < \frac{3}{2}\lambda \\ \frac{1}{2}\lambda \cdot b_n &< a_n < \frac{3}{2}\lambda \cdot b_n \end{aligned}$$

Il secondo passaggio è giustificato dal momento che  $b_n$  è sempre **strettamente positivo**.

Allora, supponendo che  $\sum_n a_n$  sia **convergente**, allora segue che  $\sum_n \frac{\lambda}{2} b_n$  è **convergente**, ovvero  $\sum_n b_n$  è anche **convergente**.

Il ragionamento è analogo per il caso in cui  $\sum_n a_n$  è **divergente**. ■

### 3. Tecnica di valutazione delle serie con Taylor

## #Osservazione

Sarà utile utilizzare il [Corollario 4 \(seconda conseguenza\)](#) per valutare il carattere di certe serie, in specie se lo si usa accompagnandolo ai [sviluppi di Taylor per le funzioni](#) ([Teorema 2.1. \(di Taylor col resto di Peano\)](#))

Supponiamo di dover studiare il carattere di una serie del tipo

$$\sum_n^{+\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$$

Prendiamo lo sviluppo di Taylor per  $f(x)$  con  $x_0 = 0$  e  $n = 2$ . Ovvero la  $f$  diventa una funzione del tipo

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + r_2(0, x)$$

con il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{r_2(0, x)}{x^2}$$

Ora supponiamo di avere i seguenti casi:

- Se  $f(0) \neq 0$ , allora la [funzione vicino a](#) 0 non si annulla mai; dunque per qualsiasi valori di  $x$ , abbiamo la somma di un numero più grande di  $f(0)$ . Allora la serie è [divergente](#).
- Se  $f(0) = 0$  e  $f'(0) \neq 0$ , allora sarà utile valutare  $f$  in  $\frac{1}{n}$  e prendere il suo limite. Infatti si avrebbe una situazione del tipo

$$\lim_n \frac{f\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_n f'(0) + \frac{r_2(0, \frac{1}{n})}{\frac{1}{n^2}} \cdot \frac{1}{n} \neq 0$$

dunque la serie sarà [sicuramente divergente](#), dato che si comporta come  $\frac{1}{n}$ .

- Se  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 0$  e  $f''(0) \in \mathbb{R}$ , ripetiamo lo stesso procedimento di prima e si avrebbe la situazione del tipo

$$\lim_n \frac{f\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}} = \lim_n \frac{f''(0)}{2} + \frac{r_2(0, \frac{1}{n})}{\frac{1}{n^2}}$$

Infatti, se il limite fosse 0, allora  $f\left(\frac{1}{n}\right)$  sarebbe più piccola di  $\frac{1}{n^2}$ , dunque convergente in ogni caso.

## Teoremi sulle Serie a Termini positivi

Tre criteri di convergenza sulle serie a termini positivi: criterio del rapporto, della radice, della serie condensata.

### 0. Voci correlate

- Definizione di Serie
- Serie a Termini non negativi
- Limite di Successione

### 1. Criterio del rapporto

#Teorema

**Teorema** (criterio del rapporto).

Sia  $\sum_n a_n$  una *serie a termini positivi*. Supponendo che esiste e valga  $l$  il limite

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$$

Allora:

- Se  $l < 1$ , allora la serie è *convergente*.
- Se  $l > 1$ , allora la serie è *divergente*.
- Se invece  $l = 1$  o il limite non esiste, allora *non si può dire niente*.

#Dimostrazione

**DIMOSTRAZIONE** del Teorema 1 (criterio del rapporto).

i. Supponiamo che valga il limite  $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = l < 1$ .

Allora prendiamo un valore qualsiasi  $\rho$  tale che  $l < \rho < 1$ ; ovvero " $\rho$  sta in mezzo tra  $l, 1$ ". Quindi per definizione del limite vale che esiste un  $\bar{n} \in \mathbb{N}$  tale che

$$n \geq \bar{n} \implies \frac{a_{n+1}}{a_n} < \rho$$

Allora di conseguenza deve seguire

$$\frac{a_{\bar{n}+1}}{a_{\bar{n}}} < \rho \implies a_{\bar{n}+1} < \rho \cdot a_{\bar{n}}$$

Ma allora vale anche per

$$\frac{a_{\bar{n}+2}}{a_{\bar{n}+1}} < \rho \implies a_{\bar{n}+2} < \rho^2 \cdot a_{\bar{n}+1} \leq \rho \cdot a_{\bar{n}+1}$$

Notiamo che questo vale anche prendendo  $\bar{n} + 3, \bar{n} + 4$  e così via...

Dunque *per induzione* vale che

$$\forall k \in \mathbb{N}, a_{\bar{n}+k} < \rho^k \cdot a_{\bar{n}}$$

Allora da  $\bar{n}$  in poi, il termine  $a_n$  è *maggiorata* dal numero  $\rho^{n-\bar{n}} \cdot a_{\bar{n}}$ ; ovvero

$$a_n \leq \rho^n \cdot \frac{a_{\bar{n}}}{\rho^{\bar{n}}}$$

Ora utilizzo il *teorema del confronto per le serie a termini positivi* ([Teorema 1 \(del confronto per le serie a termini non negativi\)](#)), confrontando  $\sum_n a_n$  con  $\sum_n \rho^n \cdot \frac{a_{\bar{n}}}{\rho^{\bar{n}}}$ . Sicuramente la serie

$$\frac{a_{\bar{n}}}{\rho^{\bar{n}}} \sum_n \rho^n$$

è *convergente* per  $\rho \in (0, 1)$ . Allora  $\sum_n a_n$  è *convergente*.

ii. Supponiamo invece il limite  $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = l > 1$ .

Allora per definizione del limite

$$\exists \bar{n} : n > \bar{n} \implies \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$$

Ovvero  $a_{n+1} > a_n$ . Allora da un certo  $\bar{n}$  in poi, la successione  $(a_n)_n$  sarà sempre *crescente*; dunque il resto  $\bar{n}$ -esimo della serie è *divergente*, dunque la serie  $\sum_n a_n$  è divergente. ■

## 2. Criterio della radice

#Teorema

**Teorema** (criterio della radice).

Sia  $\sum_n a_n$  una *serie a termini positivi*.

Supponendo che esista e sia finita il limite

$$\lim_n \sqrt[n]{a_n} = l$$

Allora:

- Se  $l < 1$ , allora la serie è **convergente**.
- Se  $l > 1$ , allora la serie è **divergente**.
- Altrimenti non posso dire nulla

#Dimostrazione

**DIMOSTRAZIONE** del Teorema 2 (criterio della radice).

La dimostrazione è analoga a quella vista per il Teorema 1 (criterio del rapporto), dunque omessa. ■

### 3. Criterio della serie condensata

#Teorema

**Teorema** (criterio della serie condensata).

Sia  $\sum_n a_n$  una **serie a termini positivi**.

Supponendo che  $(a_n)_n$  sia **decrecente**, ovvero che  $\forall n, a_{n+1} \leq a_n$ .

Allora la serie  $\sum_n a_n$  ha lo stesso carattere della serie  $\sum_n b_n := \sum_n (2^n a_{2^n})$ .

#Definizione

**Definizione** (serie condensata di una serie).

Sia  $\sum_n a_n$  una serie. Allora la serie

$$\sum_{n \in \mathbb{N}}^{+\infty} 2^n a_{2^n}$$

si dice la "**serie condensata**" di  $a_n$ .

#Dimostrazione

**DIMOSTRAZIONE** del Teorema 3 (criterio della serie condensata).

Omessa (anche a lezione). ■

## S6. Serie a termini di segno qualunque

### Assoluta e Semplice Convergenza di una Serie

**Serie a termini di segno qualunque:** serie assolutamente, semplicemente convergente; teorema dell'assoluta convergenza; criterio di Leibniz per le serie di segno alternato.

## 0. Voci correlate

- Definizione di Serie
- Serie a Termini non negativi
- Teoremi Generali sulle Serie
- Conseguenze dell'esistenza dell'estremo superiore

## 1. Definizione di assoluta e semplice convergenza

#Definizione

**Definizione** (serie assolutamente convergente).

Sia  $\sum_n a_n$  una **serie** con termini in  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ .

La serie  $\sum_n a_n$  si dice **assolutamente convergente** se è convergente la serie  $\sum_n |a_n|$ .

#Definizione

**Definizione** (serie semplicemente convergente).

Sia  $\sum_n a_n$  una **serie** con termini in  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ .

Se  $\sum_n a_n$  è **convergente** ma  $\sum_n |a_n|$  è **divergente**, allora  $\sum_n a_n$  si dice **semplicemente convergente**.

## 2. Rapporto tra le serie e le serie assolute

#Osservazione

Osservazione (preambolo).

Ora ci chiediamo se esiste un rapporto che lega  $\sum_n a_n$  con  $\sum_n |a_n|$ ; ovvero vogliamo trovare dei teoremi che sono in grado di garantire (o meno) il rapporto dei caratteri delle serie  $\sum_n a_n$  e  $\sum_n |a_n|$ .

Se una serie è assolutamente convergente, allora è convergente? Oppure vale il viceversa? Se è convergente, allora dev'essere assolutamente convergente?

Ora lo vediamo.

#Teorema

**Teorema** (dell'assoluta convergenza).

Sia  $\sum_n a_n$  una serie qualunque.

Se  $\sum_n |a_n|$  è convergente, allora  $\sum_n a_n$  è sicuramente convergente.

Ovvero "se una serie è assolutamente convergente, allora è convergente".

#### #Dimostrazione

**DIMOSTRAZIONE** del Teorema 4 (dell'assoluta convergenza).

Supponiamo che  $\sum_n a_n$  sia assolutamente convergente, ovvero  $\sum_n |a_n|$  è convergente.

Allora applico il criterio di Cauchy sulla serie  $\sum_n |a_n|$  (Teorema 4 (Criterio di Cauchy per le serie)).

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} : \forall n, k \\ n > \bar{n} \wedge k \in \mathbb{N} \implies ||a_n| + |a_{n+1}| + \dots + |a_{n+k}|| < \varepsilon$$

Applico la diseguaglianza triangolare al membro sinistro della diseguaglianza (Teorema 11 (la diseguaglianza triangolare)).

Allora ho una situazione del tipo

$$|a_n + \dots + a_{n+k}| \leq |a_n| + \dots + |a_{n+k}| = ||a_n| + \dots + |a_{n+k}|| < \varepsilon$$

Ma allora ho

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} : \forall n, k \\ n > \bar{n} \wedge k \in \mathbb{N} \implies |a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+k}| < \varepsilon$$

che è il criterio di Cauchy per la serie  $\sum_n a_n$ . ■

#### #Osservazione

Osservazione (non vale il viceversa).

Abbiamo solo dimostrare che vale l'implicazione " $\implies$ ", ma non " $\impliedby$ "; ovvero non abbiamo dimostrato che le successioni convergenti sono assolutamente convergenti.

Non sarebbe infatti possibile "replicare" la stessa dimostrazione al contrario, dal momento che in questo caso la diseguaglianza triangolare non vale più.

Infatti si proporrà il criterio di Leibniz come "controesempio" per sfatare l'inversa della tesi, ovvero che esistono delle serie semplicemente convergenti.

## 3. Criterio di Leibniz

#### #Teorema

Teorema (criterio di Leibniz per le serie a termini di segno alternato).

Sia  $(a_n)_n$  una successione in  $\mathbb{R}$  tale che:

i. la successione è decrescente e a termini non negativi, ovvero

$$\forall n, 0 \leq a_{n+1} \leq a_n$$

ii. il suo limite è nullo;

$$\lim_n a_n = 0$$

Allora la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot a_n$$

è **convergente**.

#### #Dimostrazione

**DIMOSTRAZIONE** del [Teorema 6](#) (criterio di Leibniz per le serie a termini di segno alternato).

Si tratta di dimostrare che il limite della *successione delle ridotte della serie* esiste finito, ovvero il limite  $\lim_n s_n$ .

Osservo preliminarmente che si costruisce  $(s_n)_n$ , per ipotesi iniziali, nel seguente modo:

$$s_0 = a_0; s_1 = a_0 - a_1; s_2 = a_0 - a_1 + a_2; \dots$$

Inoltre tengo conto del fatto che i termini sono "*più piccoli di quello precedente*", dal momento che la successione è **decrescente**.

Allora ho una situazione del tipo raffigurato nella [figura 1.](#)

In parole costruisco la *successione di intervalli* definita come la seguente:

$$(I_n)_n : [\alpha_n, \beta_n] := \begin{cases} [s_{n-1}, s_n], & \exists k \in \mathbb{N} : n = 2k \\ [s_n, s_{n-1}] & \text{alt.} \end{cases}$$

Inoltre noto che la distanza di due "*estremi*" di un qualunque intorno è proprio  $|a_n|$ .

Vedo che posso usare il teorema di [Cantor](#); per dimostrarlo bene devo solo dimostrare bene la seguente catena di diseguaglianze

$$s_{2n+1} \leq s_{2n+3} \leq s_{2n+2} \leq s_{2n}$$

ovvero che "*le ridotte pari sono decrescenti e stanno sopra le ridotte dispari che sono a loro volta crescenti*".

Per dimostrare un pezzo faccio dei calcoli relativi a  $s_{2n+1}, s_{2n+2}$ :

$$\begin{cases} s_{2n+1} = s_{2n} + (-1)^{2n+1} a_{2n+1} = s_{2n} - a_{2n+1} \implies s_{2n} \geq s_{2n+1} \\ s_{2n+2} = s_{2n+1} + (-1)^{2n+2} a_{2n+2} = s_{2n+1} + a_{2n+2} \implies s_{2n+2} \geq s_{2n+1} \\ s_{2n+2} = s_{2n} - \underbrace{(a_{2n+1} - a_{2n+2})}_{\geq 0} \implies s_{2n} \geq s_{2n+2} \end{cases}$$

Ultimamente ho  $s_{2n+1} \leq s_{2n+2} \leq s_{2n}$ .

Per "completare la catena di diseguaglianza" segnata sopra, faccio un calcolo analogo per  $s_{2n+3}$ :

$$\begin{cases} s_{2n+3} = s_{2n+2} - a_{2n+3} \implies s_{2n+3} \leq s_{2n+2} \\ s_{2n+3} = s_{2n+1} + \underbrace{(a_{2n+2} - a_{2n+3})}_{\geq 0} \implies s_{2n+3} \geq s_{2n+1} \end{cases}$$

Finalmente ho ottenuto ciò che volevo dimostrare all'inizio.

Pertanto adesso posso essere sicuro di dire che la successione  $(s_{2n+1})_n$  è crescente, invece la successione  $(s_{2n})_n$  è decrescente ma vale che  $\forall n, s_{2n+1} \leq s_{2n}$ . Ora posso finalmente applicare il **teorema di Cantor** in una maniera rigorosa.

Ora definisco il limite di queste due successioni come

$$\lim_n s_{2n+1} = \sigma, \lim_n s_{2n} = \eta$$

ovvero " $\sigma$  è l'estremo sinistro,  $\eta$  è l'estremo destro".

Per concludere mi basta solo dimostrare che  $\sigma = \eta$ , ovvero che due **successioni estratte** di  $(s_n)_n$  convergono allo stesso valore, di conseguenza il limite della successione  $\lim_n s_n$  esiste.

Considero dunque il fatto che "**il limite delle ridotte pari stanno sopra a quelle dispari**", e che i limiti delle successioni monotone sono gli **estremi** delle successioni.

Ovvero,

$$\forall n, s_{2n+1} \leq \sigma \leq \eta \leq s_{2n}$$

Ora, manipolando l'espressione ottengo

$$\forall n, 0 \leq |\sigma - \eta| \leq s_{2n} - s_{2n+1} = a_{2n+1}$$

Per ipotesi iniziale il limite della **successione dei termini generali** è nulla; ovvero

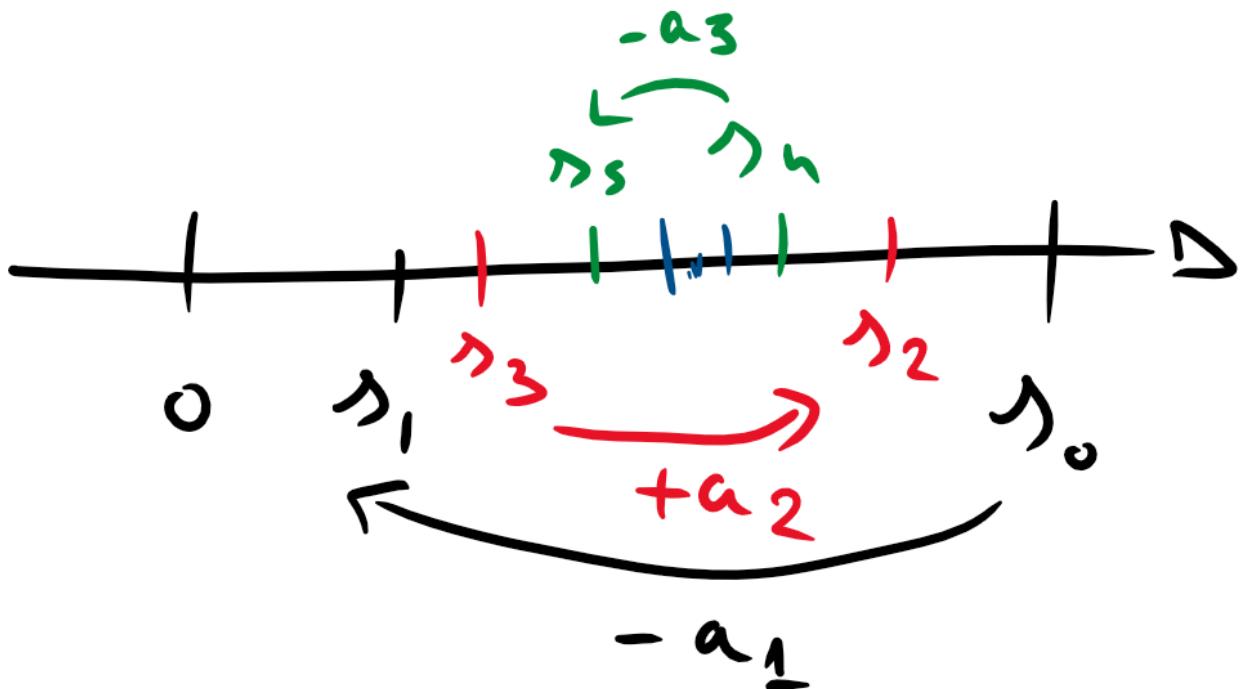
$$\lim_n a_n = 0 \implies \lim_n a_{2n+1} = 0$$

Allora per il **teorema dei due Carabinieri** (Osservazione 5 (i teoremi per i limiti di funzioni valgono anche per i limiti di successioni)) ho il limite

$$\lim_n |\eta - \sigma| = 0 \implies \eta = \sigma$$

Che dimostra  $\sigma = \eta$ , come volevasi dimostrare. ■

**FIGURA 1. (Situazione iniziale)**



## 4. Teorema di Riemann

#Teorema

**Teorema** (di Riemann).

Sia  $\sum_n a_n$  assolutamente convergente.

Allora tutte le serie  $\sum_n b_n$  del tipo  $b_n := a_{\varphi(n)}$ , dove  $\varphi$  è una biiezione del tipo  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , saranno sicuramente convergenti con la stessa somma.

Ovvero "se una serie è assolutamente convergente, allora una qualsiasi altra serie con i stessi termini ma rimescolati sarà convergente con la stessa somma".

Notare che vale anche il viceversa.

#Dimostrazione

**DIMOSTRAZIONE** del Teorema 7 (di Riemann).

Omessa. ■