Funzioni Reali - Sommario

Funzioni di variabile reale; funzioni di potenza e di radice; funzione del valore assoluto; funzioni trigonometriche.

A. Funzioni di potenza, radice e valore assoluto

Funzioni di potenza, radice e valore assoluto

Definizioni di funzione potenza p_n e radice p_n^{-1}. Definizione del valore assoluto $|\cdot|$; disuguaglianza triangolare. Alcuni esercizi generali.

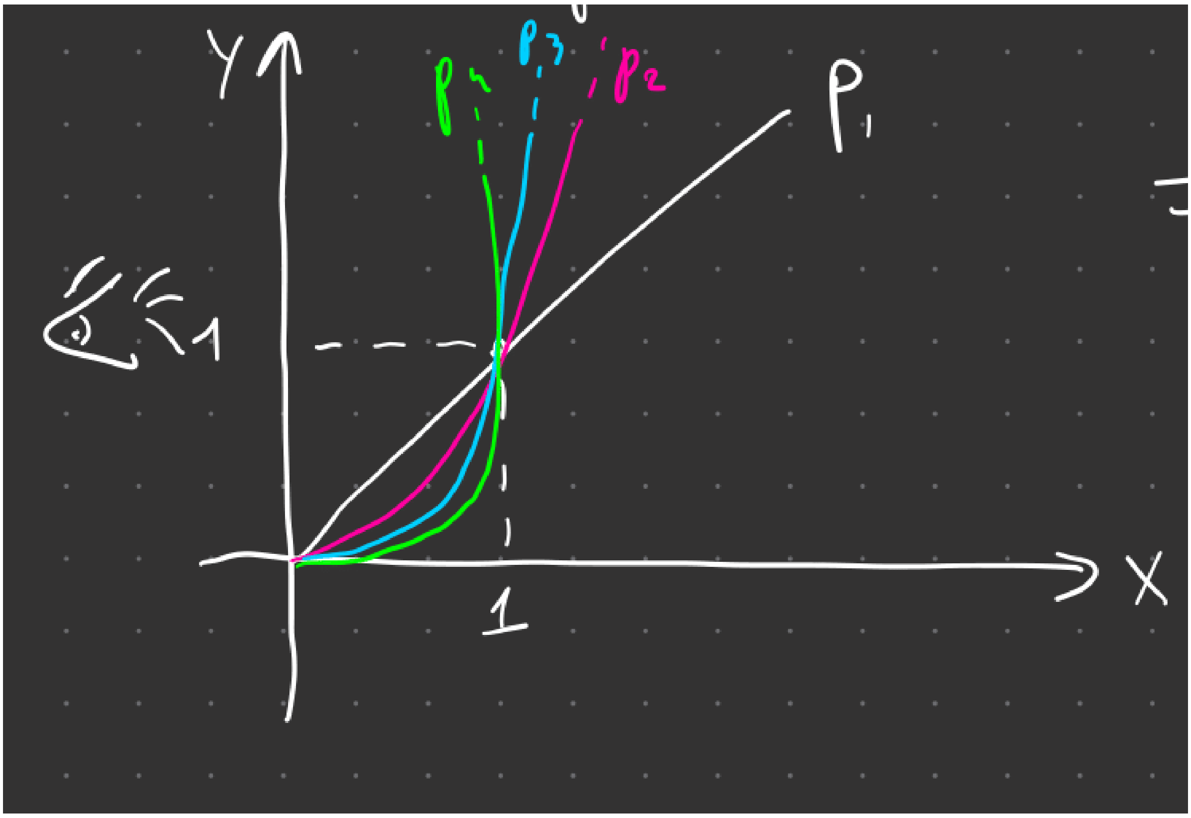
---

1. Funzione potenza

DEF 1.1. Sia $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$; definiamo quindi la **funzione potenza n-esima** come

$$p_n : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty); x \mapsto p_n(x) = x^n$$

Si riporta un grafico di alcune funzioni potenza p_n.



OSS 1.1. Si nota che

$$\forall x \in [0,1) : p_1(x) > p_2(x) > \ldots > p_n(x)$$
$$\forall x \in (1,+\infty) : p_1(x) < p_2(x) < \ldots < p_n(x)$$

OSS 1.2. Si vede dal grafico che la funzione è *strettamente crescente*, ovvero se prendiamo $x_1, x_2 \in E$ (dominio) ove $x_2 > x_1$, allora sicuramente abbiamo

$$p_n(x_2) > p_n(x_1)$$

DIMOSTRAZIONE.
Prendiamo ad esempio p_2; abbiamo innanzitutto

$$0 \leq x_1 < x_2$$

allora li moltiplichiamo per x_1 e x_2, ottenendo

$$\begin{cases} x_1 < x_2 x_1 \\ x_1 x_2 < x_2^2 \end{cases}$$

quindi

$$0 \leq x_1^2 < x_2^2 \iff p_2(x_1) < p_2(x_2), \forall x_1, x_2$$

Notare che questa dimostra che è vera solo per p_2; sarebbe da dimostrare che è vera anche per p_n (forse si va per induzione? boh, vedrò o chiederò al prof qualcosa)

OSS 1.3. Notiamo che la *funzione potenza* p_n (o x^n) è *biiettiva* (Funzioni, **DEF 3.3.**), ovvero è sia *suriettiva* che *iniettiva*.
DIMOSTRAZIONE.
Per dimostrare che è iniettiva basta riosservare quanto visto in **OSS 1.2.**; ovvero che la funzione è strettamente crescente.
Dopodiché la funzione è anche suriettiva in quanto una conseguenza dell'assioma di separazione S).

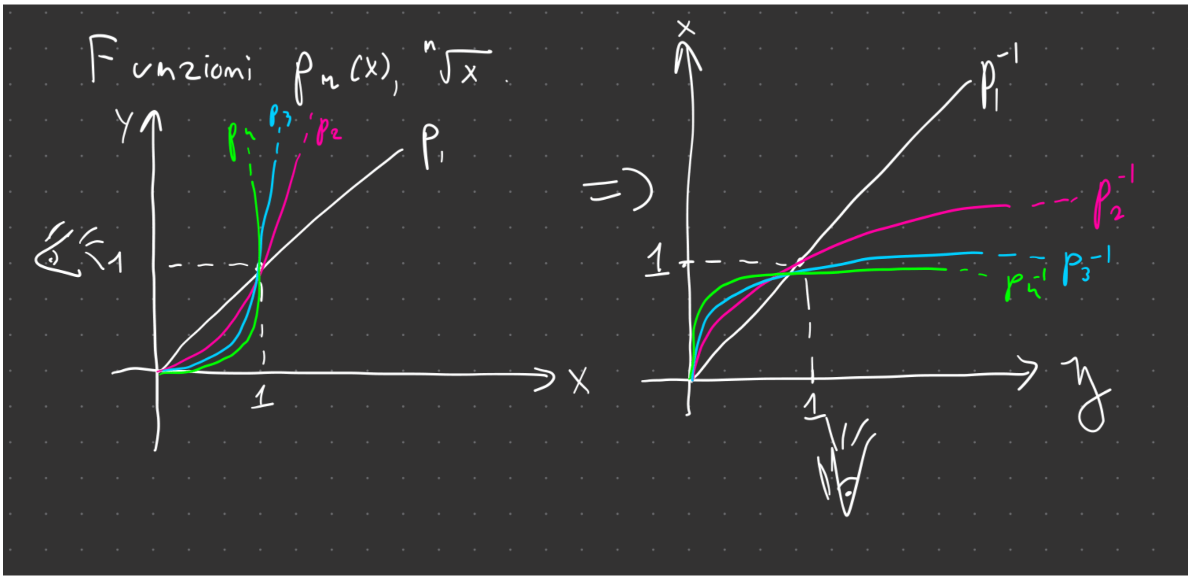
2. Funzione radice

OSS 2.1. Dall'**OSS 1.3.** abbiamo notato che la *funzione potenza* $p_n(x)$ è *biiettiva*; pertanto per il *teorema dell'esistenza della funzione inversa* (Funzioni, **TEOREMA 1.**) esiste una funzione inversa che definiremo.

DEF 2.1. Definiamo la **funzione radice n-esima** p_n^{-1}

$$p_n^{-1} : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty); x^n \mapsto x$$

Graficamente questo equivale a *"scambiare le assi"* del grafico della funzione, oppure di *"cambiare la prospettiva da cui si guarda il grafico"*, ovvero

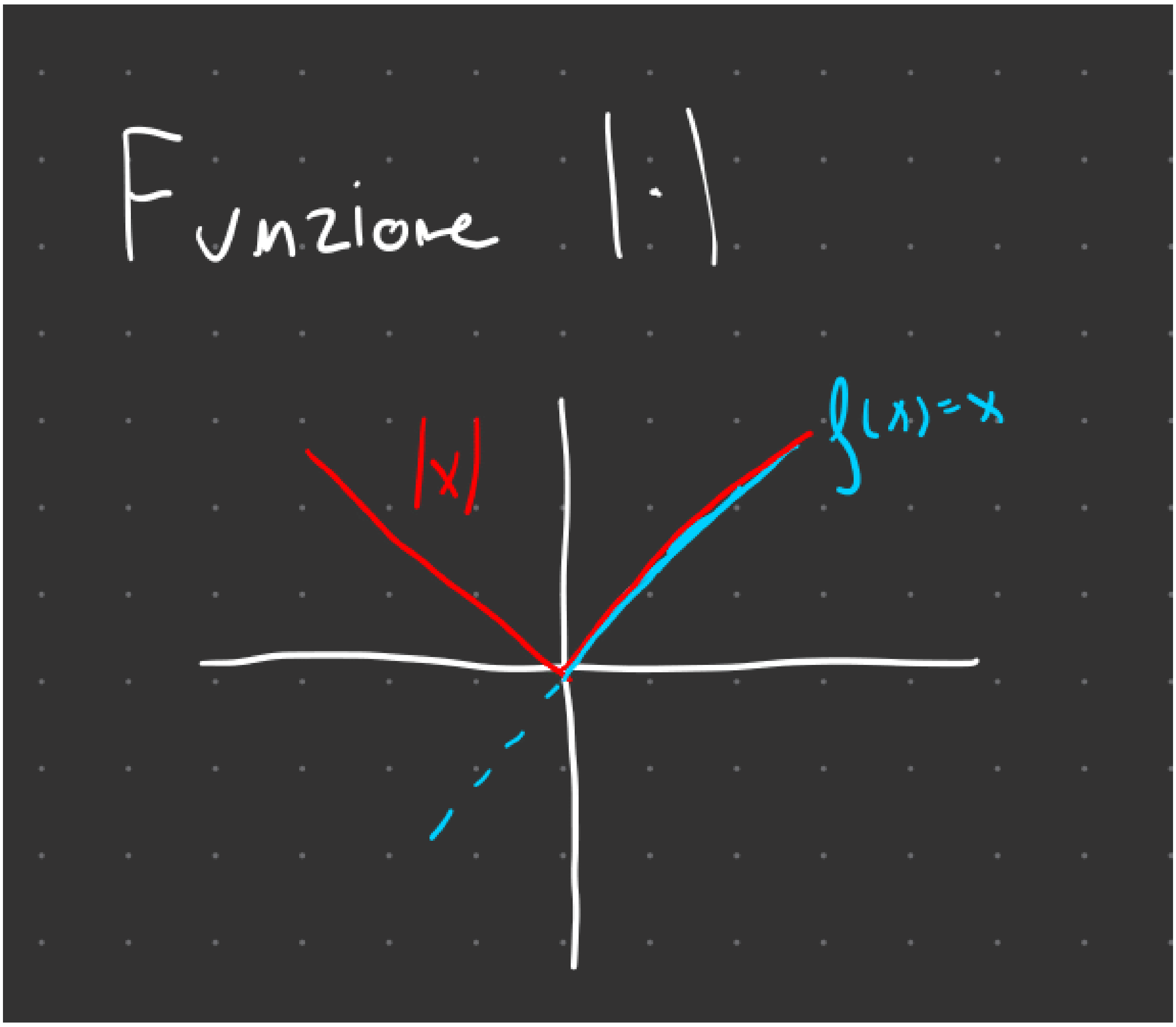


3. Valore assoluto

DEF 3.1. Sia il **valore assoluto** una *funzione*

$$|\cdot| : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; x \mapsto |x| = \begin{cases} x : x \geq 0 \\ -x : x < 0 \end{cases}$$

Ad esempio, il grafico di $|x|$ si rappresenta nel modo seguente:



OSS 3.1.1. Notare che

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

3.1. Proprietà, disuguaglianza triangolare

OSS 3.1.1. Si può osservare alcune proprietà del *valore assoluto*, ovvero:

1. Sia $a \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, allora

$$|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$$

DIMOSTRAZIONE.
Posso considerare due casi, ovvero
$x \geq 0$: abbiamo quindi $|x| = x$, pertanto

$$\begin{cases} |x| \leq a \implies x \leq a \\ x \geq 0 \implies x \geq -a \end{cases} \longrightarrow -a \leq x \leq a$$

$x \leq 0$: abbiamo quindi $|x| = -x$ e il discorso è analogo:

$$\begin{cases} |x| \leq a \implies -x \leq a \iff x \geq -a \\ x \leq 0 \implies x \leq a \end{cases} \longrightarrow -a \leq x \leq a$$

■

2. Prendendo le stesse premesse di prima, abbiamo

$$|x| \geq a \iff x \leq -a \wedge x \geq a$$

3. **LA DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE.**
Siano $x, y \in \mathbb{R}$, allora abbiamo

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

DIMOSTRAZIONE.
Se abbiamo da un lato

$$-|x| \leq x \leq |x|$$

e

$$-|y| \leq y \leq |y|$$

allora sommandoli si avrebbe

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$$

che per la prima proprietà equivale a dire

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

4. Esercizi misti

Presentiamo degli esercizi, ovvero *equazioni* (Equazioni e soluzione) o *disequazioni* contenenti queste funzioni appena presentate.

ESERCIZIO 4.1. Determinare

$$3x + 5 = 0$$

ESERCIZIO 4.2. Disegnare il grafico di

$$f(x) = 3x + 5$$

con $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

ESERCIZIO 4.3. Risolvere

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

ESERCIZIO 4.4. Disegnare

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x^2 - 2x - 3$$

ESERCIZIO 4.5. Risolvere

$$\frac{x^2 - 2x + 3}{x - 3} \geq 0$$

ESERCIZIO 4.6. Risolvere

$$\sqrt{x+1} \geq 3x + 2$$

ESERCIZIO 4.8. Risolvere

$$\frac{x-3}{2x+1} > \frac{x-1}{x+1}$$

ESERCIZIO 4.8. Risolvere

$$\sqrt{6x+1} \geq 3 - 2x$$

ESERCIZIO 4.9. Risolvere

$$|x + 4| < 8$$

ESERCIZIO 4.10. Risolvere

$$|\frac{2x+1}{x^2-4}| \geq 1$$

ESERCIZIO 4.11. Risolvere

$$|x + 1| \geq |x - 1|$$

B. Funzioni trigonometriche

Funzioni trigonometriche

Definizione delle funzioni trigonometriche $\sin$, $\cos$*; le proprietà di queste funzioni; alcuni valori noti; funzioni inverse* $\arcsin$, $\arccos$. *Forme di somma e sottrazione di* $\sin$ *e* $\cos$. *Funzioni* $\tan, \arctan$.

---

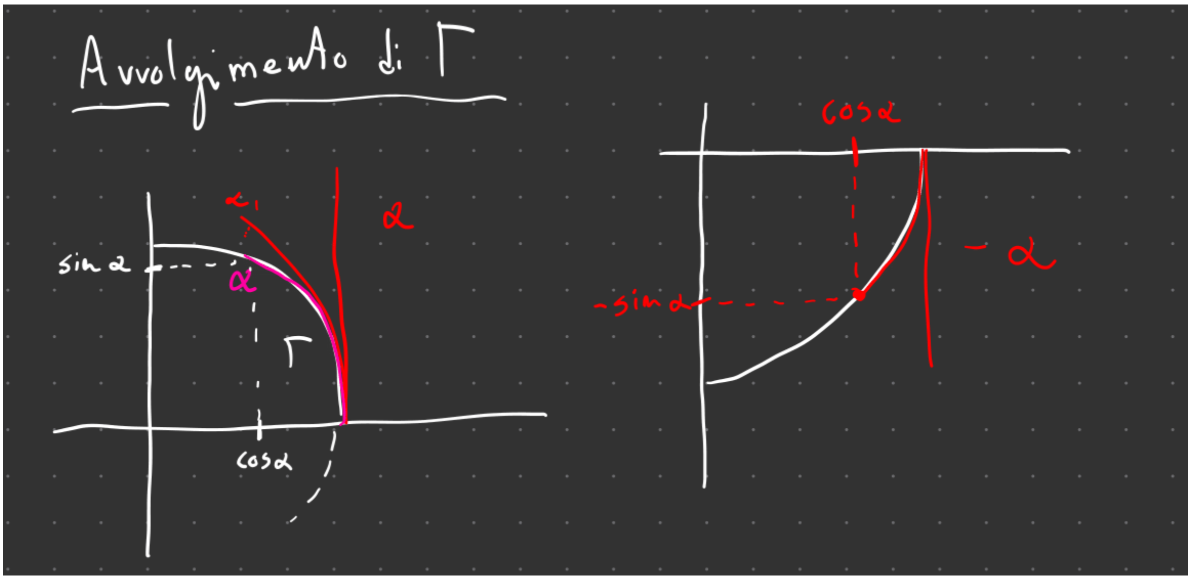
0. Preambolo

Per ora non abbiamo ancora gli strumenti per poter *rigorosamente* definire le funzioni di *seno* e *coseno*, tuttavia possiamo definirle per ora in questo modo.
Però prima di tutto bisogna fare delle considerazioni.
Ovvero prendo il piano cartesiano (**ESEMPIO 2.1.**) e considero la *circonferenza unitaria* Γ:

$$\Gamma := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

e considero l'asse r_1 concorde con l'asse y e che *"appoggiamo"* in $(1, 0)$.
Quindi prendo un punto qualsiasi $\alpha \in \mathbb{R}$ dell'asse, lo *"avvolgo"* su Γ, poi la retta si avvicina man mano all'arco, infine il punto *"finisce"* su Γ e ottengo il punto $(c(\alpha), s(\alpha))$

Graficamente questo processo rappresenta il seguente.



OSS 0.1.
Si osserva che in questo processo di *"avvolgimento"* si suppone che la lunghezza del segmento non si cambia mai, in quanto viene solo *"piegato"*; quindi se il segmento r_1 è lungo α, allora *l'arco* è lungo α, che non è banale da misurare. Infatti si deve fare un *procedimento di approssimazione* con segmenti. Questo è il problema di questa definizione *non-rigorosa*.

1. Definizione di seno e coseno

Considerando tutto detto sopra, consideriamo la funzione

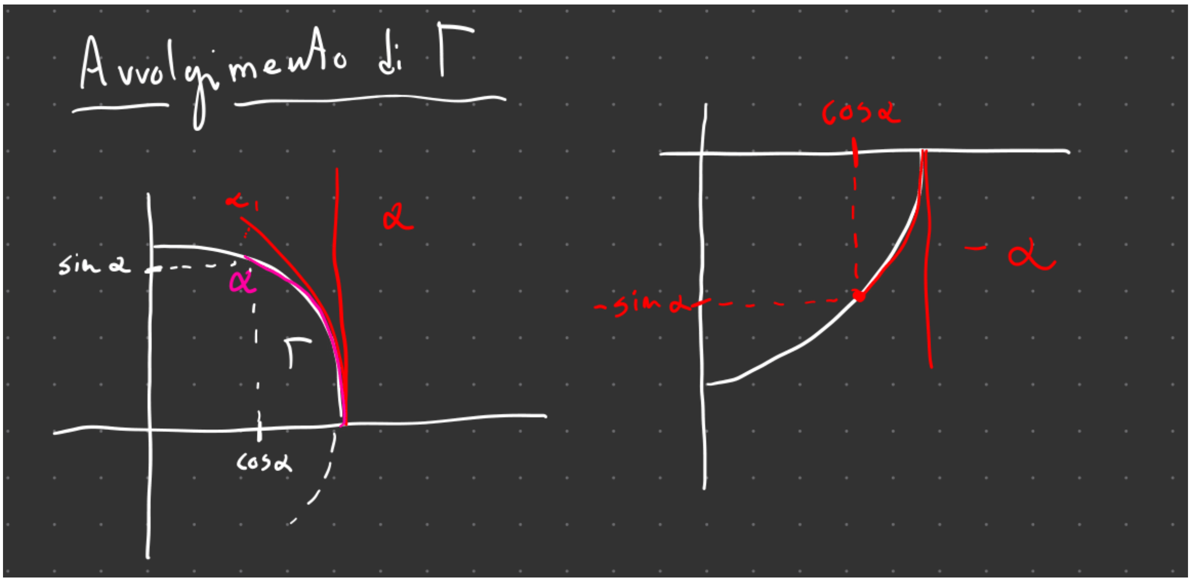
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \Gamma \\ \alpha &\mapsto (c(\alpha), s(\alpha)) \end{aligned}$$

Dove Γ varia nell'intervallo $[0, 1]$.

Così otteniamo le seguenti funzioni:
DEF 1.

$$\begin{aligned} \cos : \ \mathbb{R} &\longrightarrow [-1, 1] \\ \alpha &\mapsto \cos(\alpha) \in \Gamma \\ \sin : \ \mathbb{R} &\longrightarrow [-1, 1] \\ \alpha &\mapsto \sin(\alpha) \in \Gamma \end{aligned}$$

Dove $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ rappresenta la posizione del punto dell'*arco piegato* e α rappresenta la *lunghezza dell'arco*. Se α è negativa, allora si orienta l'asso in basso. Graficamente,



2. Proprietà

PROP 2.1. Diamo un nome alla *lunghezza della semi-circonferenza unitaria*,

$$(\pi \in \mathbb{R}, \pi \sim 3.14\dots)$$

quindi la *circonferenza* è lunga 2π.

PROP 2.2. Dato un $\alpha \in \mathbb{R}$, si verifica che

$$(\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 = 1$$

in quanto entrambi i punti $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ appartengono alla circonferenza Γ; infatti $x^2 + y^2 = 1$ è la proprietà caratterizzante di Γ.

PROP 2.3. Le funzioni $\cos$, $\sin$ sono *periodiche*, ovvero che prendendo un $k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} \text{i. } \cos(\alpha + 2k\pi) &= \cos \alpha \\ \text{ii. } \sin(\alpha + 2k\pi) &= \sin \alpha \end{aligned}$$

Questo si verificai n quanto 2π rappresenta un giro intero; quindi prendendo un punto α e facendoci un giro intero, arrivo allo stesso punto.

PROP 2.4. Le funzioni $\cos$, $\sin$ sono rispettivamente delle funzioni *pari* e *dispari*, ovvero che si verificano le seguenti.

$$\begin{aligned} \cos(-\alpha) &= \cos(\alpha) \\ \sin(-\alpha) &= -\sin(\alpha) \end{aligned}$$

Questo in quanto, come detto prima in **DEF 1.**, la *"lunghezza negativa"* rappresenterebbe la stessa lunghezza orientato verso il basso. Quindi graficamente lo si può evincere chiaramente.

PROP 2.5. Se al posto di aggiungere un *giro intero* aggiungo un *mezzo giro*, ovvero π, ottengo il suo opposto:

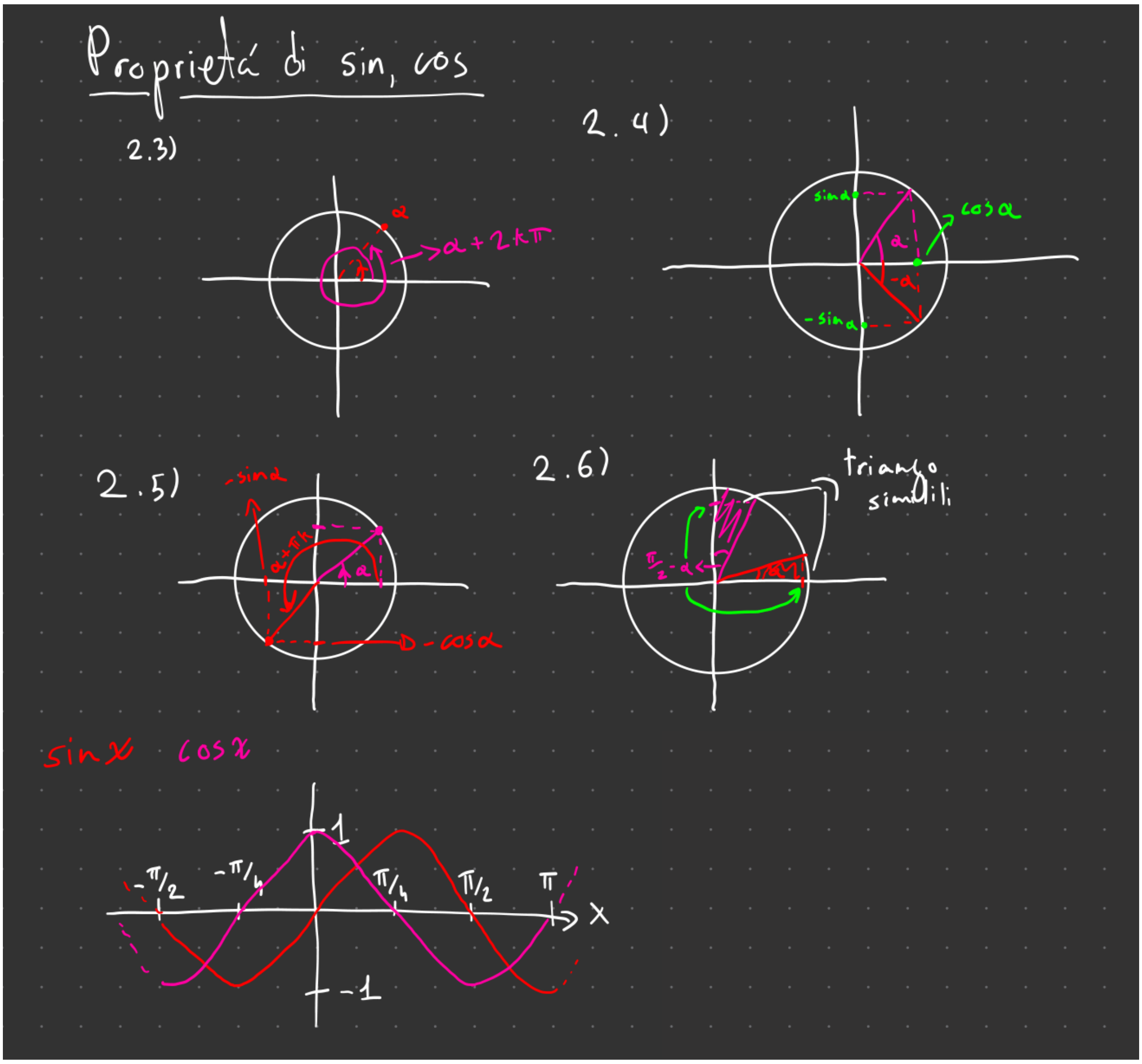
$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \pi) &= -\cos(\alpha) \\ \sin(\alpha + \pi) &= -\sin(\alpha) \end{aligned}$$

PROP 2.6. Ricorrendoci alla definizione etimologica del *coseno*, ovvero *"complementi sinus"*, notiamo che sottraendo *l'angolo complementare* $\frac{\pi}{2}$ da α ottengo $\sin$. Ovvero

$$\forall \alpha, \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin(\alpha)$$

2.1. Riassunto grafico

Graficamente si può riassumere (quasi) tutte le proprietà nel seguente grafico (con i grafici di $\cos$, $\sin$ stessi).



2.2. Alcuni valori noti

Dai risultati della *geometria elementare* sappiamo i seguenti valori noti del seno e del coseno:

α	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$
0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	0	1

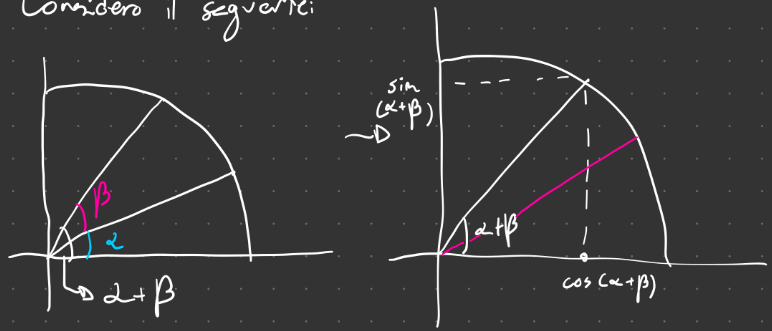
che verranno dati per noti.

2.3. Forme di somma e di sottrazione

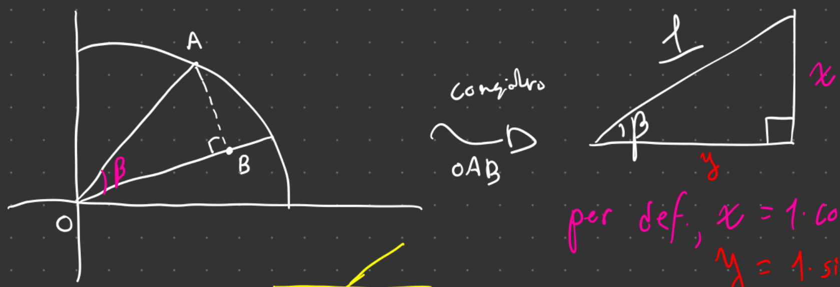
Consideriamo due angoli: $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Quindi disegniamo il seguente grafico:

Forme di somma e di sottrazione

1) Considero il seguente:



2) Proietto il segmento $\overline{AB}$ tale da formare angolo da $90°$ ($\perp$)

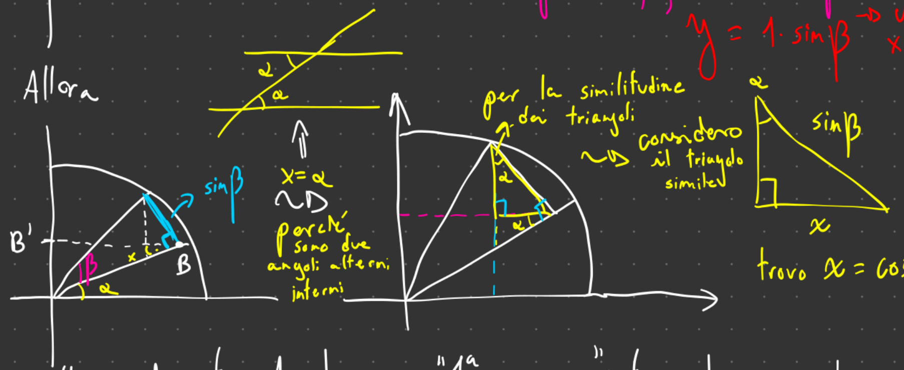


considero $\leadsto$ OAB

per def. $x = 1 \cdot \cos\beta$

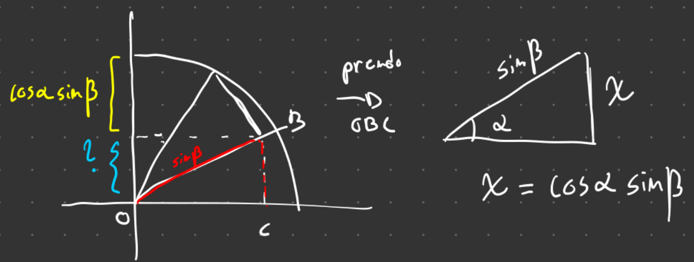
$y = 1 \cdot \sin\beta \to$ utile x dopo

Allora



trovo $x = \cos\alpha \sin\beta$

Allora ho trovato la mia "1ª porzione"; trovo la seconda



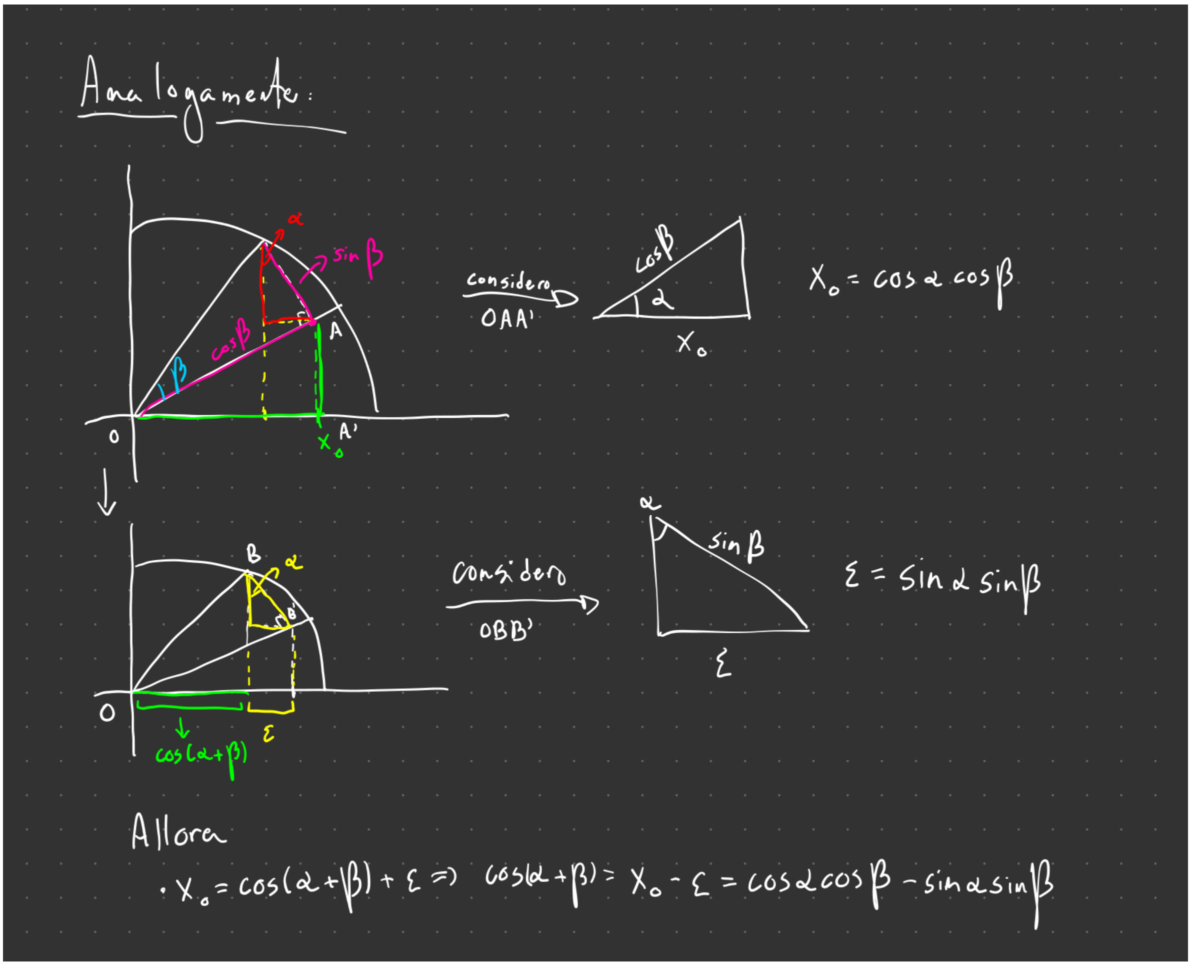
prendo $\leadsto$ OBC

$\sin\beta$ x α

$x = \cos\alpha \sin\beta$

Pertanto sommo i pezzi e ottengo:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$$



Da cui si evince che

$$\begin{aligned}\sin(\alpha \pm \beta) &= \sin\alpha\cos\beta \pm sin\beta\cos\alpha \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

Queste formule saranno molto importanti per le formule di *prostaferesi* e di *Werner*.

2.4. Formule di prostaferesi

Recuperato dalla lezione del 26.10.2023
Voglio calcolare $\sin a + \sin b$. Allora riscrivo le *forme di sottrazione e di addizione*;

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha\end{aligned}$$

e li sommo:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha - \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos \\ &= 2\sin\beta\cos\alpha\end{aligned}$$

e ponendo $\alpha+\beta=a$, $\alpha-\beta=b$, (dunque $a+b=2\alpha$ e $a-b=2\beta$) ottengo

$$\sin a+\sin b=2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}$$

Analogo il procedimento per $\cos\alpha+\cos\beta$.

3. Definizione di arcocoseno e arcoseno

OSS 3.1. Considero la funzione $\cos$, però con una restrizione al suo *dominio* e *codominio*.

$$\begin{aligned}\cos_{[0,\pi]}:[0,\pi]&\longrightarrow[-1,1]\\ x&\mapsto\cos(x)\end{aligned}$$

Questa funzione allora è *biiettiva* (Funzioni, **DEF 3.3.**); ovvero p sia *suriettiva* che *iniettiva* e *strettamente decrescente*.

1. Questa è *iniettiva* in quanto considerando tutti gli $x\in[0,\pi]$ si tocca un *solo* punto ad ogni x considerato. Inoltre è *strettamente decrescente* in quanto il valore parte da $\cos 0=1$ e finisce con $\cos\pi=-1$.
2. Per lo stesso motivo di prima $\cos$ è *suriettiva*.

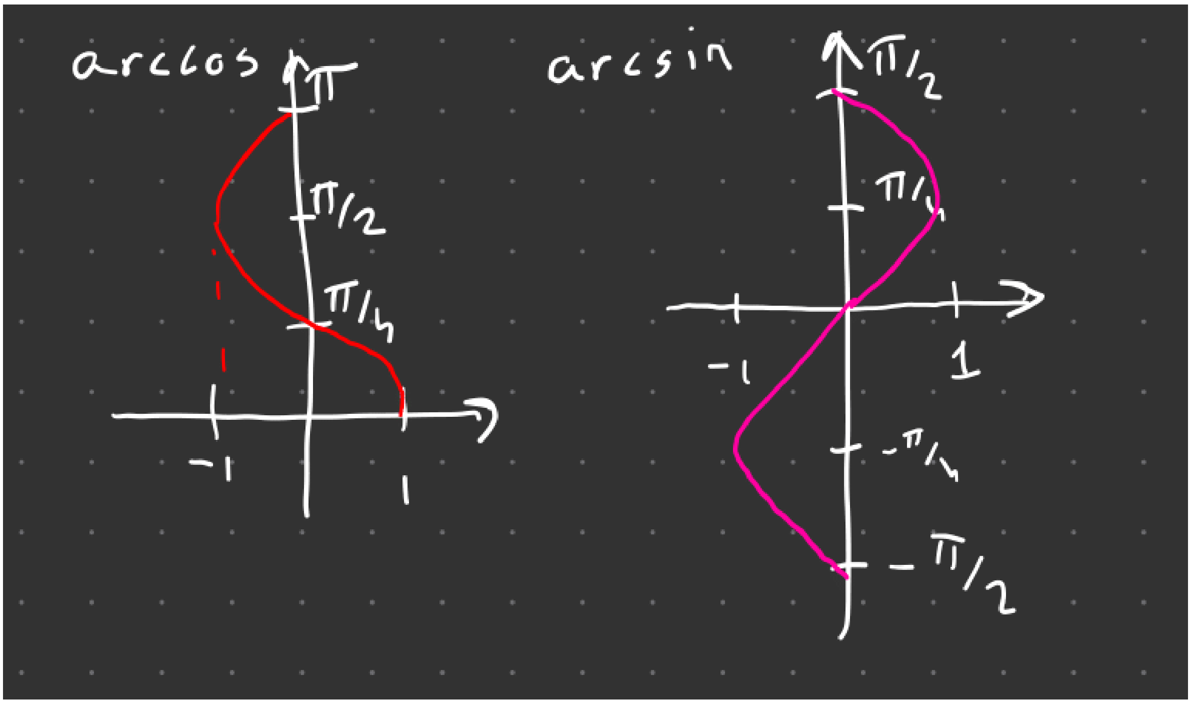
DEF 3.1.
Pertanto secondo il *teorema dell'esistenza della funzione inversa* (Funzioni, **TEOREMA 1.**) la funzione $\cos_{[0,\pi]}$ ha una sua inversa che chiameremo **l'arcocoseno**;

$$\arccos:=\cos_{[0,\pi]}$$

DEF 3.2.
Analogamente si definisce $\arcsin$ considerando però la restrizione di $\sin_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$.
Quindi

$$\arcsin:=\sin_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$$

Ecco alcuni grafici delle funzioni $\arccos$, $\arcsin$.



4. Funzione tangente e arcotangente

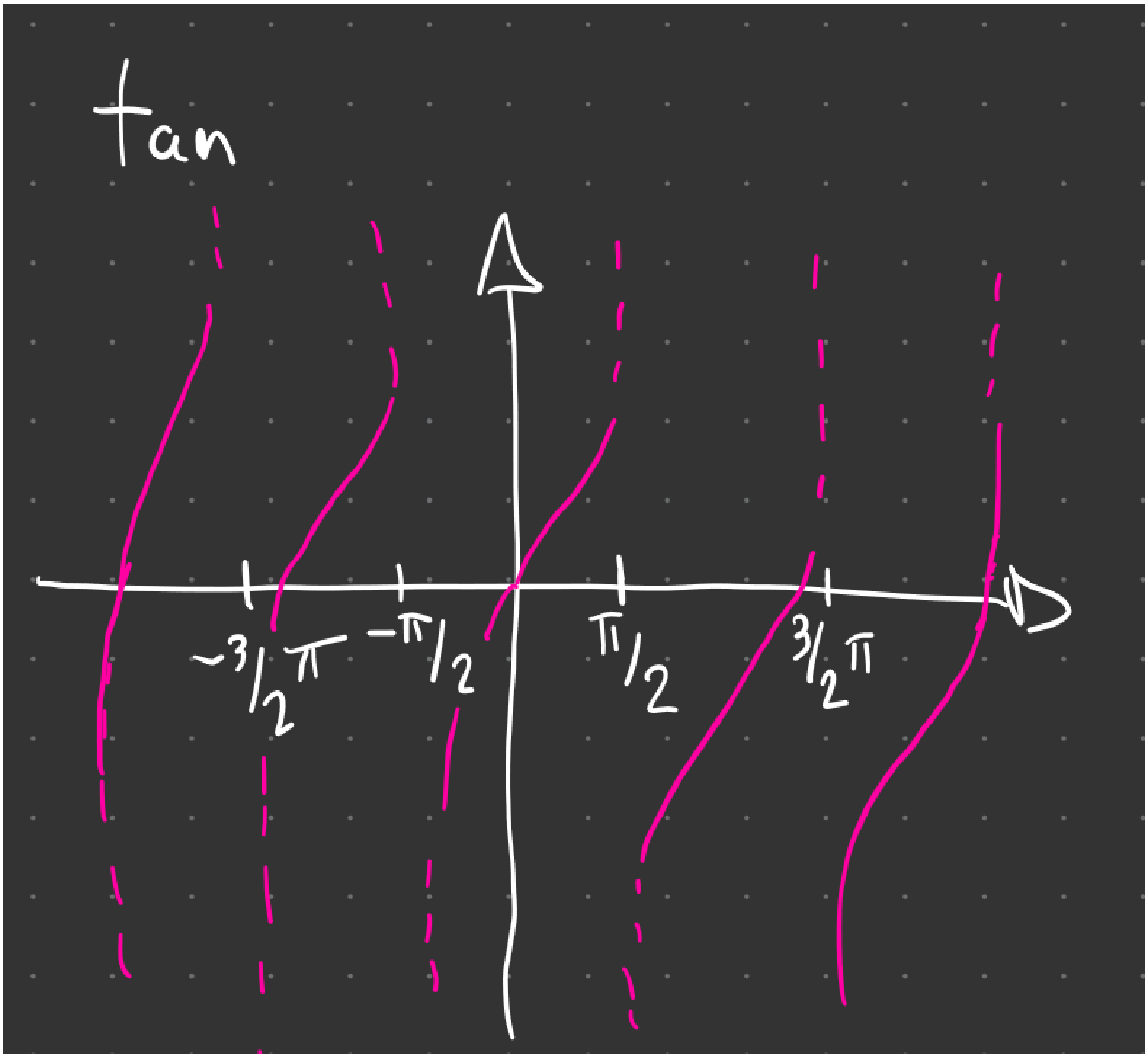
DEF 4.1. Definiamo la funzione **tangente** $\tan \alpha$ periodica in come

$$\tan : \mathbb{R} \diagdown [\frac{\pi}{2}]_{\equiv \pi} \longrightarrow \mathbb{R}$$

come il *rapporto* tra la funzione *seno* e *coseno*, ovvero

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

Notiamo che le funzioni $\sin, \cos$ sono periodiche di 2π; quindi prendendo il rapporto abbiamo che $\tan$ è periodica di π.
Osservando i *limiti* (Esempi di Limiti di Funzione, **ESEMPIO 5.3.**) di questa funzione possiamo disegnare il seguente grafico:

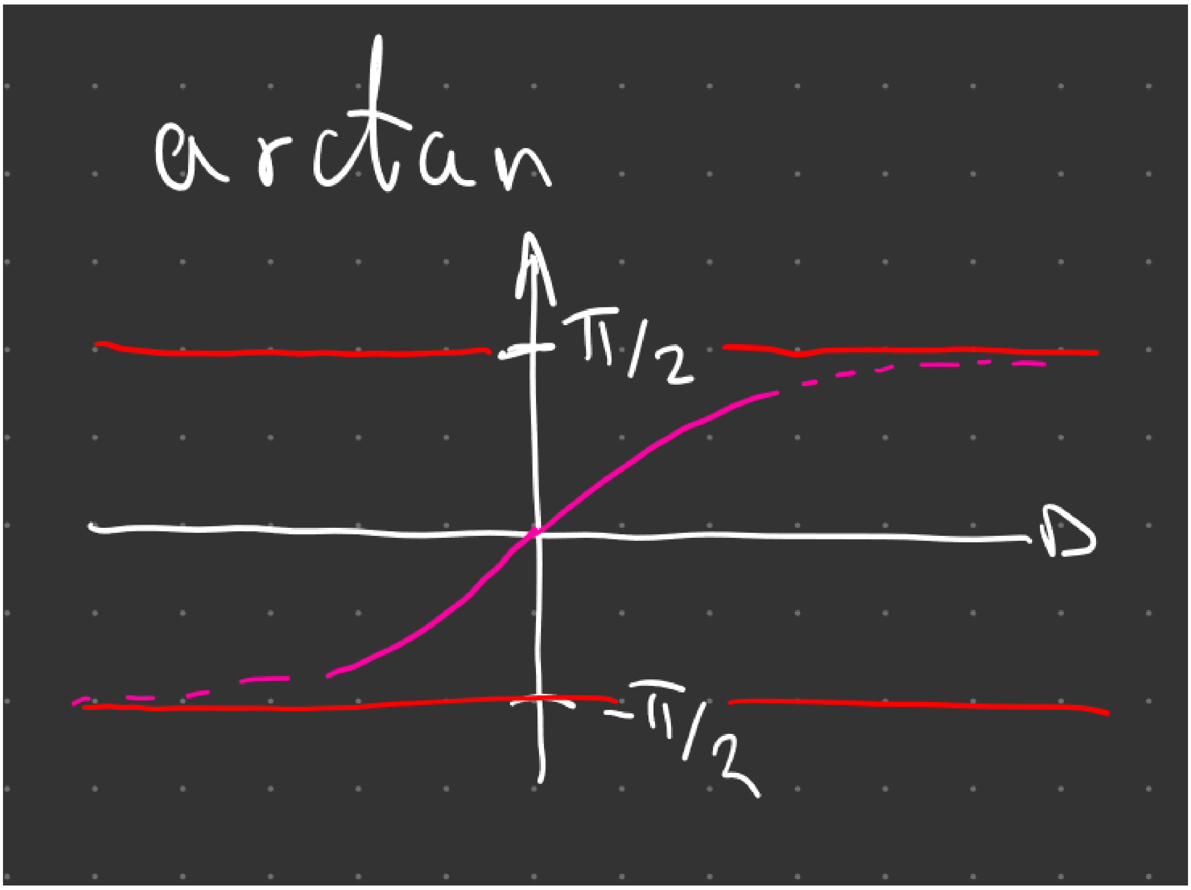


DEF 4.2. Se ho la restrizione della *tangente* in $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ allora ho:

$$\tan_{|(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})} : (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \longrightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \tan x$$

e questa diventa *biiettiva*, quindi invertibile, posso definire l'**arcotangente** la sua funzione inversa:

$$\arctan := \left(\tan_{|(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}\right)^{-1}$$



C. Funzione esponenziale e logaritmica

Funzione esponenziale e Logaritmica

> *Definizione della funzione esponenziale su N; prime proprietà dell'esponenziale; estensione della definizione a Z; ulteriori proprietà; estensione a Q; ulteriori proprietà e limiti notevoli; definizione dell'esponenziale sui reali R; proprietà finali. Invertibilità di* $\exp$*, funzione logaritmica; proprietà di* $\log$.

---

1. Funzione esponenziale

In questa parte definiremo la *funzione esponenziale* partendo dalla definizione *"basilare"* su $\mathbb{N}$, poi espandiamo l'insieme su cui definiamo questa funzione fino a $\mathbb{R}$. Ovviamente per semplificare lo studio si proporrà poi la definizione *"generale"* riassunta.

L'esponenziale sui naturali

DEF 1.1. Consideriamo il numero

$$a \in (1, +\infty)$$

possiamo definire **l'esponenziale** come

$$a^n := \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ volte}}$$

PROP 1.1. Allora con questa definizione abbiamo le seguenti proprietà.

$$\begin{aligned}
&a^{n_1} \cdot a^{n_2} = a^{n_1+n_2} \\
&(a^{n_1})^{n_2} = a^{n_1 \cdot n_2} \\
&n_1 < n_2 \implies a^{n_1} < a^{n_2} \\
&1 < a_1 < a_2 \implies a_1^n < a_2^n \\
&\lim_n a^n = +\infty
\end{aligned}$$

L'esponenziale sugli interi

DEF 1.2. Ora voglio dare un significato a

$$a^m, m \in \mathbb{Z}$$

Allora la definisco come

$$a^m := \begin{cases} a^m \text{ se } m \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{a^{-m}} \text{ se } m \in \mathbb{Z} \text{ e } m < 0 \end{cases}$$

PROP 1.2. Con questa definizione continuano a valere le proprietà date in **PROP 1.1.**, in particolare:

$$\begin{aligned}
&a^{m_1} \cdot a^{m_2} = a^{m_1+m_2} \\
&(a^{m_1})^{m_2} = a^{m_1 \cdot m_2} \\
&m_1 < m_2 \implies a^{m_1} < a^{m_2} \\
&1 < a_1 < a_2 \implies a_1^m < a_2^m \\
&\lim_{m \to +\infty} a^m = +\infty \\
\text{Novità: } &\lim_{m \to -\infty} a^m = 0
\end{aligned}$$

L'esponenziale sui razionali

DEF 1.3. Ora voglio dare un significato a

$$a^p, p \in \mathbb{Q}$$

allora posso rappresentare p come frazione (Richiami sui Numeri Razionali), ovvero come

$$p = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}; n \in \mathbb{N} \diagdown \{0\}$$

Ora posso definire

$$a^p := a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

OSS 1.3.1. Con questa definizione sembra che ci possa essere il seguente problema: se un numero razionale p può essere rappresentata in modi diversi, ad esempio

$$2 = \frac{2}{1} = \frac{4}{2}$$

non è possibile che a^p può avere risultati diversi; ovvero è possibile che

$$p = \frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2} \implies \sqrt[n_1]{a^{m_1}} \overset{?}{\neq} \sqrt[n_2]{m_2}$$

La risposta è no. Ora vediamo di dimostrarla.
DIMOSTRAZIONE. Partiamo dal presupposto che

$$\frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2} \implies m_1 n_2 = m_2 n_1$$

Allora

$$\begin{aligned} \sqrt[n_1]{a^{m_1}} &\overset{?}{=} \sqrt[n_2]{a^{m_2}} \\ a^{m_1} &\overset{?}{=} (\sqrt[n_2]{a^{m_2}})^{n_1} = \sqrt[n_2]{a^{m_2 \cdot n_1}} \\ a^{m_1 n_2} &= a^{m_2 n_1} \text{ OK } \blacksquare \end{aligned}$$

PROP 1.3. Ora si potrebbe dimostrare che continuano a valere le proprietà di prima (**PROP 1.2.**, **PROP 1.1.**), ovvero

$$\begin{gathered} a^{p_1} \cdot a^{p_2} = a^{p_1 + p_2} \mid (a^{p_1})^{p_2} = a^{p_1 p_2} \\ p_1 < p_2 \implies a^{p_1} < a^{p_2} \mid 1 < a_1 < a_2 \implies a_1^p < a_2^p \\ \lim_{p \to +\infty} a^p = +\infty \mid \lim_{p \to -\infty} a^p = 0 \\ \text{Novità} : \lim_{p \to p_0} a^p = a^{p_0} \end{gathered}$$

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo la *"nuova"* proprietà ovvero

$$\lim_{p \to p_0} a^p = a^{p_0}$$

Ai fini di questa dimostriamo utilizziamo il limite notevole di una successione (Esempi di Limiti di Successione, **ESEMPIO 1.3.**), ovvero

$$\lim_{n} \sqrt[n]{a} = 1$$

Allora si potrebbe, secondo la **DEF 1.3.**, riscriverla come

$$\lim_{n} a^{\frac{1}{n}} = 1 \implies \lim_{p \to 0} a^p = 1$$

Adesso consideriamo

$$\lim_{p \to p_0} a^p - a^{p_0} = \underbrace{a^{p_0}}_{\text{valore fisso}} \cdot \underbrace{(a^{p-p_0} - 1)}_{\text{tende a } a^0 - 1 = 1 - 1 = 0} \to 0$$

Pertanto

$$\lim_{p \to p_0} a^p = a^{p_0}$$

L'esponenziale sui reali

Finalmente definiamo l'esponenziale con l'esponente reale; in realtà sarebbe possibile definirla mediante gli assiomi dei numeri reali (Assiomi dei Numeri Reali), in particolare con i *tagli di Dedekind*, tuttavia ai fini didattici si sceglie di usare una definizione più semplice.
DEF 1.4. Adesso voglio definire

$$a^x, x \in \mathbb{R}$$

Posso usare il *teorema sulle successioni monotone* (Limite di Successione, **TEOREMA 1.2./COROLLARIO 1.2.a.**) che enuncia il seguente: *"Una successione monotona crescente e limitata è sempre convergente"*.
Allora considero la successione a valori in $\mathbb{Q}$

$$(p_n)_n$$

che sia *convergente* al valore x. Ci chiediamo se una successione del genere esiste; la risposta qui è sì. Infatti, sfruttando la densità dei razionali nei reali (Conseguenze dell'esistenza dell'estremo superiore, **TEOREMA 4.1.**) allora sappiamo che partendo da $1, x$ esiste un valore *razionale* tra questi due e questo può essere il candidato ideale per p_0; dopodiché prendiamo p_1, x dove deve starci almeno p_2; poi volendo si può andare all'infinito per la *densità di Q in R*. Quindi $(p_n)_n$ è definita su tutti i valori in $\mathbb{N}$.

Concludendo, definisco

$$a^x := \lim_n a^{p_n}, \lim_n p_n = x$$

Inoltre

$$0 < a < 1 \implies a^x = (\frac{1}{a})^{-x}$$

Osserviamo poi che a^{p_n} rimane monotona in quanto è necessaria per far valere il teorema.

PROP 1.4. Si può mostrare che continuano a valere tutte le proprietà elencate sopra;

$$\begin{aligned}
\forall x_1, x_2; a^{x_1}a^{x_2} = a^{x_1+x_2} \mid (a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1x_2} \\
x_1 < x_2 \implies a^{x_1} < a^{x_2} \\
1 < a_1 < a_2 \implies a_1^x < a_2^x \\
\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty \\
\lim_{x \to -\infty} a^x = 0 \\
\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}
\end{aligned}$$

Riassunto generale

Dopo il nostro viaggio quasi odisseico per definire la funzione esponenziale, possiamo definire a^x nella maniera seguente.
DEF 1.5. (*Funzione esponenziale*)
Sia $a > 1, a \in \mathbb{R}$, è definita una *funzione* (Funzioni)

$$\exp_a : \mathbb{R} \longrightarrow (0, +\infty); x \to \exp_a(x) = a^x$$

e la chiamo **funzione esponenziale di base** a.
Da notare che se invece abbiamo $0 < a < 1$, allora basta definire

$$\exp_a x = (\frac{1}{a})^{-x}$$

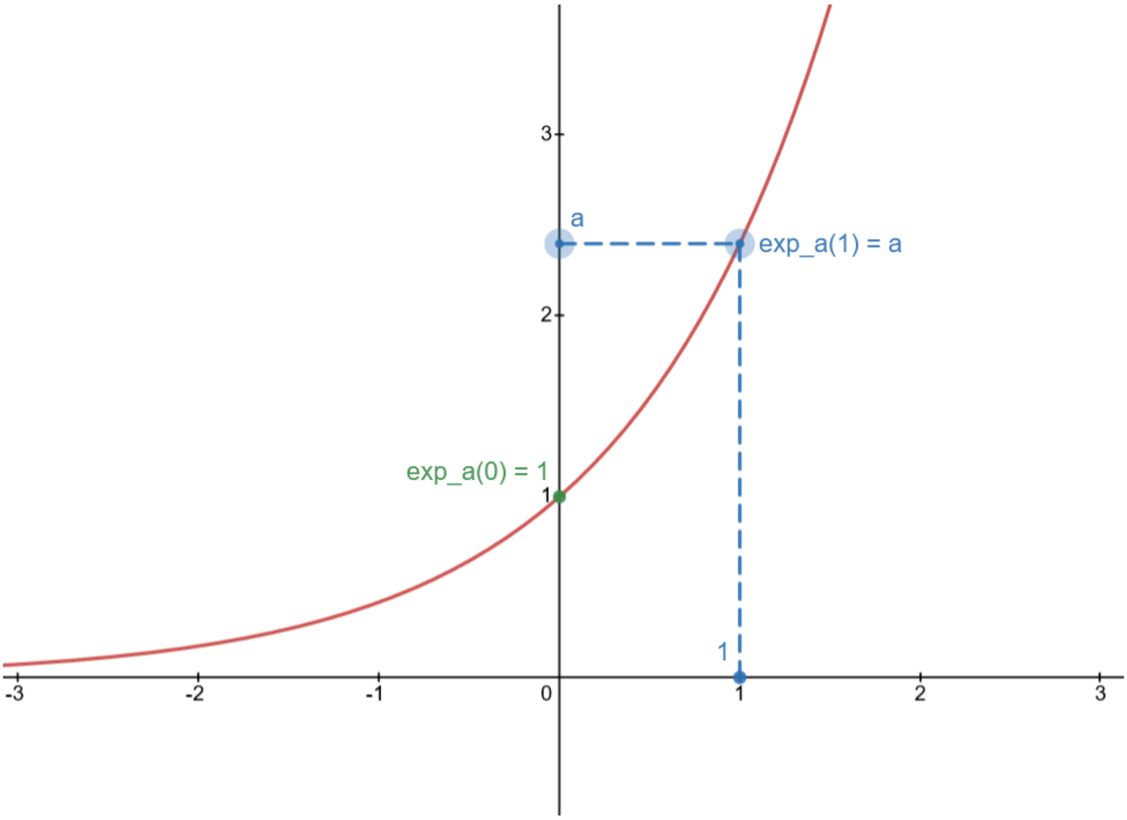
TEOREMA 1.5. (*Proprietà della funzione esponenziale*)
Valgono le seguenti:

1. $\exp_a(0) = 1$
2. $\exp_a(x_1) \cdot \exp_a(x_2) = \exp_a(x_1 + x_2)$
3. $\exp_a(x_1)^{x_2} = \exp_{\exp_a(x_1)}(x_2) = \exp(x_1x_2)$
4. $\exp$ è *monotona crescente*

5. $\exp$ è *suriettiva*; la prendiamo per buono, anche se va dimostrata
6. I limiti di $\exp_a$

$$\lim_{x \to -\infty} \exp_a x = 0\,; \quad \lim_{x \to +\infty} \exp_a x = +\infty$$
$$\lim_{x \to x_0} \exp_a x = \exp_a x_0$$

FIGURA 1.5. (*Grafico generale di* $\exp$)
Si propone il seguente grafico di $\exp$ realizzato sul computer col sito Desmos.



2. Funzione logaritmica

OSS 2.1. Osservando dal **TEOREMA 1.5.**, sappiamo che se $\exp_a$ è sia *suriettiva* che *iniettiva*, allora deve esistere la funzione inversa $\exp_a^{-1}$ (Funzioni, **TEOREMA 1.**). Allora possiamo definire il seguente.

DEF 2.1. (*Funzione logaritmica*)
Chiamo la **funzione logaritmica** la funzione inversa $\exp_a^{-1}$ come $\log_a$:

$$\log_a : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$

e si ha

$$\forall x \in \mathbb{R}, \log_a(\exp_a x) = x$$
$$\forall y \in (0, +\infty), \exp_a(\log_a y) = y$$

TEOREMA 2.1. (*Proprietà di* $\log$)
Valgono le seguenti:

1. $\log_a(1) = 0$ (*per definizione*)
2. $\log_a(x_1) + \log_a(x_2) = \log_a(x_1 x_2)$
3. $\log_a(x^y) = y \log_a(x)$
4. $a > 1 \land 0 < x_1 < x_2 \implies \log_a(x_1) < \log_a(x_2)$
5. Limiti

$$\lim_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty \ ; \quad \lim_{x \to +\infty}$$
$$\lim_{x \to x_0} \log_a x = \log_a x_0$$

3. Riassunto finale

FIGURA 3.1. Come riassunto finale si propongono i grafici di $\exp_a$ e $\log_a$ per $a = 1.96$. Anche questo ultimo grafico è realizzato su Desmos. Inoltre con i limiti (Esempi di Limiti di Funzione) osserveremo che le funzioni $\exp, \log$ crescono e decrescono con una *"velocità"* più grande delle altre funzioni, in particolare le funzioni *razionali* per qualsiasi grado.