Calcolo Differenziale - Sommario

Tutto sul calcolo differenziale.

---

0. INTRODUZIONE

Introduzione al Calcolo Differenziale

Introduzione al calcolo differenziale: cenni storici ed esempio meccanico del rapporto incrementale e derivata

---

1. Origine storico del concetto

OSS 1.1. (*Contesto storico*) Ci troviamo nella seconda metà del XVII secolo, un periodo caratterizzato dagli straordinari contributi di due giganti della matematica: Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz. Questi due luminari sono diventati figure fondamentali nello sviluppo del *calcolo differenziale*, introducendo concetti rivoluzionari come la *derivata*, che poi diventerà materia d'esame per quanto ci concerne.

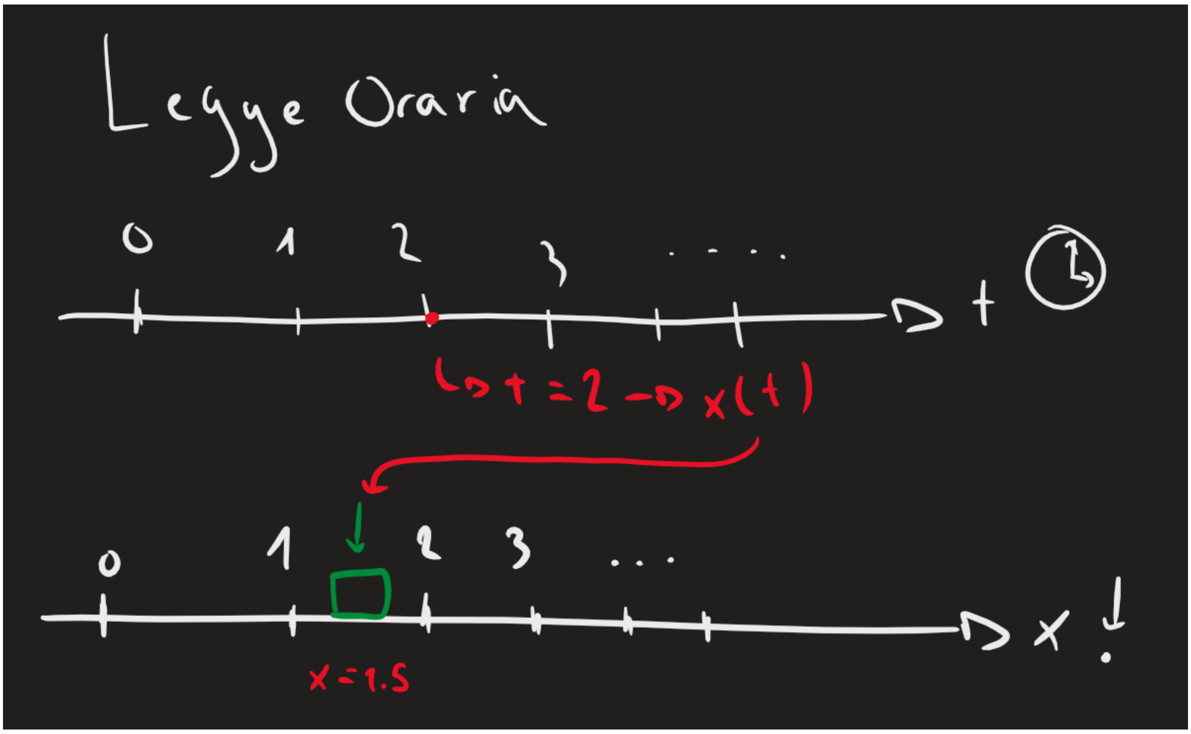
Focalizziamoci ora sul genio di Isaac Newton: autodidatta straordinario, Newton, già a soli 21 anni, ha delineato la concettualizzazione della *velocità*. È interessante notare che le seguenti definizioni, sebbene non siano direttamente oggetto d'esame, possono essere considerate come un cenno alla *fisica newtoniana* (Introduzione Alla Fisica).

Esempio meccanico del calcolo differenziale

Definizione 1.1. (legge oraria)

Sia $x \mapsto x(t)$ una funzione che associa al tempo t la *posizione* di un punto mobile su un asse x.
Allora $x(t)$ si dice legge oraria.

FIGURA 1.1. (*Legge oraria*)



Definizione 1.2. (velocità media dati due istanti di tempo)

Si definisce la *velocità*, dati due istanti di tempo t_1 e t_2 la velocità media $v(t_1, t_2)$ nel seguente modo:

$$v(t_1, t_2) = \frac{x(t_1) - x(t_2)}{t_1 - t_2}$$

Sul numeratore abbiamo *l'incremento* dello spazio, sul denominatore *incremento* del tempo.

ATTENZIONE! Per *"incremento"* si intende semplicemente la differenza tra il punto finale e iniziale; quindi non dev'esserci necessariamente un *"incremento"*: può esserci nessuna variazione o anche un *"decremento"* (ovvero una specie di incremento negativo).

Ora voglio legare questo concetto di *velocità* ad una sola variabile di tempo t; allora definisco la *velocità* istantanea mediante il concetto di *limite* (Definizione di Limite di funzione > ^0f845a).

Definizione 1.3. (velocità istantanea)

Sia $x(t)$ una legge oraria.
Allora chiamo la velocità istantanea $v(t)$

$$v(t) = \lim_{t_1 \to t_2} v(t_1, t_2)$$

Ora abbiamo il *concetto* meccanico della derivata: nei successivi capitoli ci prescindiamo dai presupposti fisici e ci dirigiamo verso all'astrazione puramente matematica.

A. TEORIA DEL CALCOLO DIFFERENZIALE

A1. Definizione di rapporto incrementale

Rapporto Incrementale

Definizione di rapporto incrementale di una funzione in un punto.

---

1. Definizione di rapporto incrementale

#Definizione

Definizione 1.1. (rapporto incrementale di una funzione relativo un punto del dominio)

Sia $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$, I un *intervallo* (Intervalli).
Sia x_0 un punto del dominio I.
Allora chiamo il *rapporto incrementale* $R^f_{x_0}(x)$ della funzione f relativamente al punto x_0 come

$$R^f_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

#Proposizione

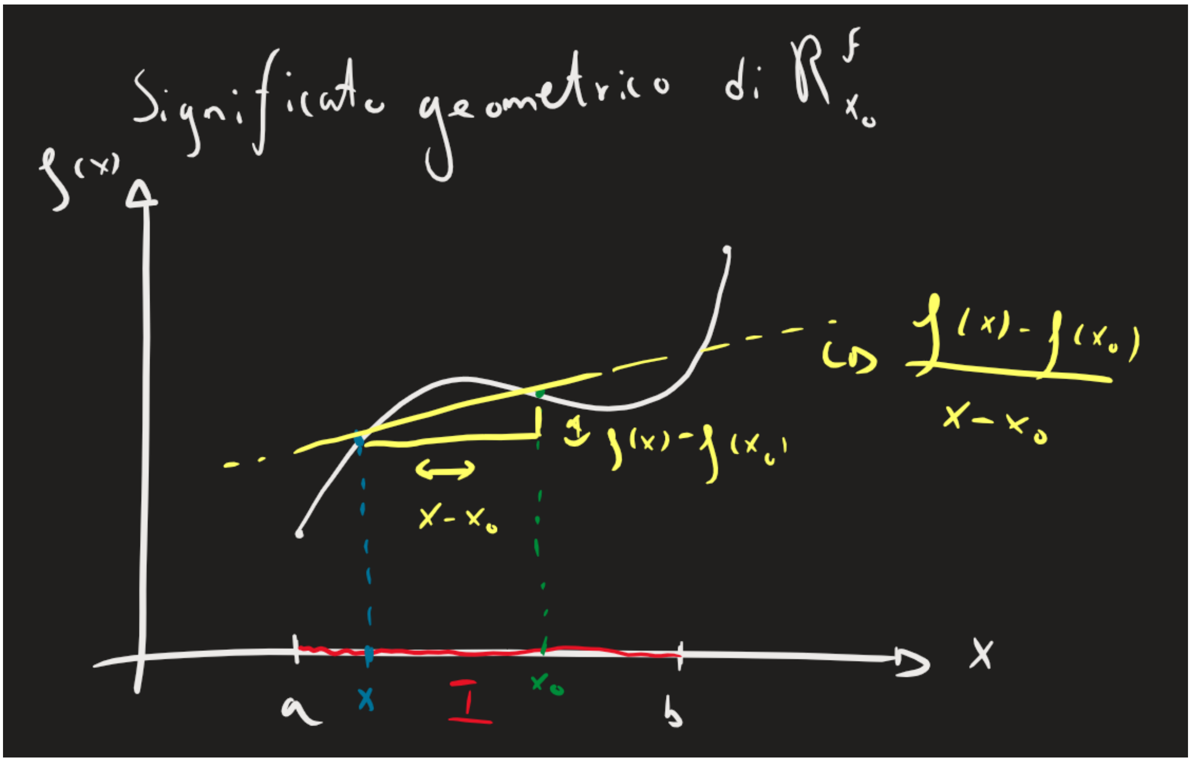
Proposizione 1.1. (rapporto incrementale come funzione)

Allora si può pensare al *rapporto incrementale* $R^f_{x_0}(x)$ come una funzione che lega ad un qualsiasi punto x in I, escluso x_0 in quanto si avrebbe la forma indeterminata $\frac{0}{0}$, un altro punto della retta reale.

$$R^f_{x_0}: I \diagdown x_0 \longrightarrow \mathbb{R}$$

OSS 1.1. Osserviamo che questa definizione ha anche un *significato geometrico*: infatti $R^f_{x_0}$ è anche la *pendenza* (coefficiente angolare) della *retta secante* dei punti $(x_0, f(x_0)$ e $(x, f(x))$.

FIGURA 1.1. (*Significato geometrico*)



A2. Definizione di derivata e derivabilità

Derivata e derivabilità

Definizione di derivata, derivabilità in un punto, derivabilità generale, funzione derivata.

---

1. Derivata

#Definizione

Definizione 1.1. (derivata di una funzione relativa ad un punto)

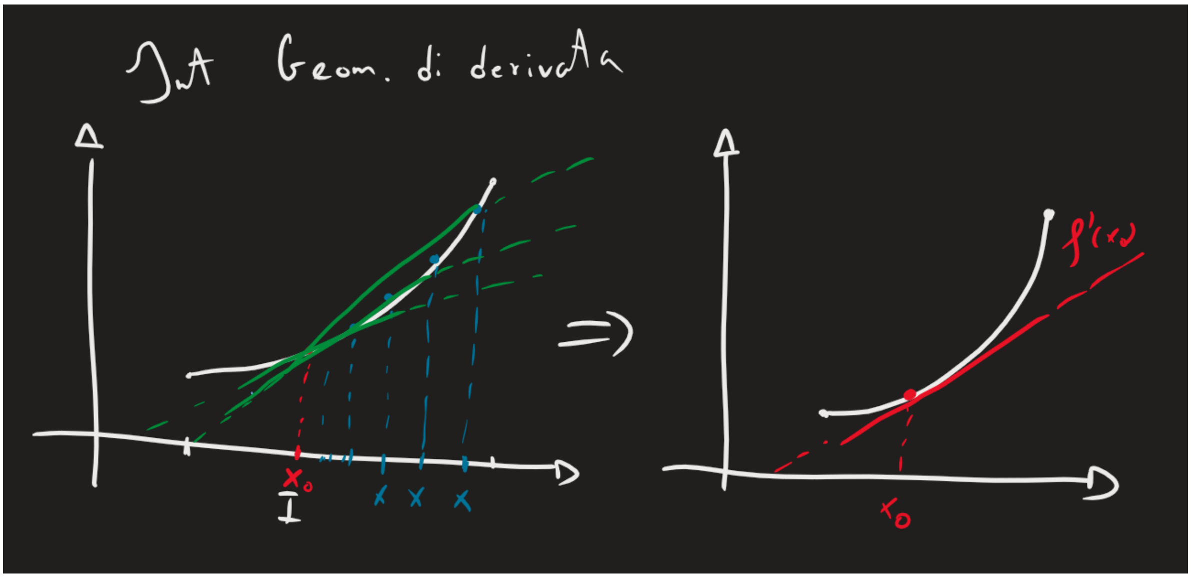
Sia $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$.
Sia $R^f_{x_0}(x)$ il *rapporto incrementale* (Rapporto Incrementale > ^ccc58b).
Allora definisco la *derivata* di f in x_0 il *limite* (Definizione di Limite di funzione > ^0f845a) del rapporto incrementale con x che tende a x_0.

$$f'(x) = \lim_{x \to x_0} R^f_{x_0}(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Naturalmente si definisce tale *se* tale limite esiste.

OSS 1.1. Come precedentemente osservato in Rapporto Incrementale > ^c7cbf0, la *derivata in un punto* ha la sua interpretazione geometrica. Ovvero questa è semplicemente la *pendenza* della *retta tangente* in un punto: infatti se prendendo due punti sulla funzione, di cui una *"mobile"* e l'altra *"fissa"*, poi facendo avvicinare il punto mobile a quello fisso, noteremo che la retta secante dei due punti si *"convergerà"* ad una retta sola (ovviamente supponendo che esista).

FIGURA 1.1. (*Interpretazione geometrica di derivata*)



2. Derivabilità

#Definizione

Definizione 2.1. (derivabilità in un punto)

Sia $f: I \longrightarrow \mathbb{R}, x_0 \in I$.
Se *esiste finito* la *derivata* (^478a87)

$$f'(x) = \lim_{x \to x_0} R^f_{x_0}(x) \in \mathbb{R}$$

Allora f si dice *derivabile nel punto* x_0.

#Definizione

Definizione 2.2. (derivabilità di una funzione)

Sia $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *derivabile* (^6e7606) in *ogni* punto del suo dominio I, allora f si dice *derivabile* (e basta).

OSS 2.1. Notiamo che queste due definizioni *"seguono"* lo schema delle definizioni di *continuità* (Definizione di continuità > ^ddf65d, Definizione di continuità > ^d2f56f)

3. Funzione derivata

#Definizione

Definizione 3.1. (funzione derivata)

Sia $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *derivabile*.
Chiamo la *funzione derivata* la funzione

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}; x \mapsto f'(x)$$

A3. Proprietà fondamentali delle derivate

Proprietà delle derivate

Proprietà fondamentali delle derivate: Continuità delle funzioni derivabili, derivata di operazione tra funzioni, derivata di funzione composta, derivata della funzione inversa.

---

1. Proprietà fondamentali

Continuità della funzione derivabile

#Teorema

Teorema 1.1. (continuità delle funzioni derivabili)

Sia $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, I intervallo, $x_0 \in I$.
Sia f *derivabile* in x_0 (Derivata e derivabilità > ^6e7606).
Allora f è *continua* in x_0 (Definizione di continuità > ^ddf65d).

$$\boxed{f \text{ derivabile} \implies f \text{ continua}}$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *teorema 1.1.* (^dac6dc)

Intanto sappiamo che I è un intervallo, quindi *tutti* i suoi punti all'interno ne sono *punti di accumulazione*: pertanto possiamo prendere $\lim x \to x_0$ per un qualsiasi $x_0 \in I$.

Ora dimostriamo che f è *continua* usando il fatto che f è *derivabile*:

$$\begin{aligned} f \text{ continua} &\iff \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \\ &\iff \lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = 0 \\ &\iff \lim_{x \to x_0} \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{=f'(x) \in \mathbb{R}} \underbrace{(x - x_0)}_{x - x_0 \to 0} \overset{?}{=} 0 \\ &\iff f'(x) 0 \to 0 = 0 \blacksquare \end{aligned}$$

#Proposizione

Proposizione 1.1. (la non derivabilità delle funzioni continue)

Vale il viceversa del *teorema 1.1.* (^dac6dc)? La risposta è *no*, in quanto esistono controesempi di funzioni *continue* ma non derivabili (dunque negando l'implicazione $p \implies q$)

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE della *proposizione 1.1.* (^e5ee1a)

Per l'esempio di una funzione continua non derivabile rivolgersi a Esempi di derivate.

Derivata di operazioni tra funzioni

#Teorema

Teorema 1.2. (derivata di operazioni tra funzioni)

Siano $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ delle funzioni.

Sia $x_0 \in I$.

Allora $f \pm g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ sono *derivabili*.

In particolare valgono le seguenti:

$i. (f \pm g)' = f' \pm g'$
$ii. (fg)' = f'g + fg'$ (regola di Leibniz)
$iii. \frac{f}{g} = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

#Dimostrazione
DIMOSTRAZIONE dei punti *i.*, *ii.*, *iii.* del *teorema 1.2.* (^fd716f)
i. Sia $R_{x_0}^{f+g}(x)$ il seguente:

$$\begin{aligned} R_{x_0}^{f+g}(x) &= \frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0} \\ &= \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \\ &= R_{x_0}^{f}(x) + R_{x_0}^{g}(x) \\ &\implies f'(x)+g'(x) \end{aligned}$$

Questo vale analogamente per la sottrazione.
ii. Sia $R_{x_0}^{fg}(x)$ il seguente:

$$\begin{aligned} R_{x_0}^{fg}(x) &= \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} \\ &= \frac{f(x)g(x)-f(x)g(x_0)+f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} \\ &= \frac{f(x)(g(x)-g(x_0))}{x-x_0} + \frac{g(x_0)(f(x)-f(x_0))}{x-x_0} \\ &= f(x)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} + g(x_0)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \\ f \text{ continua} &\implies f(x_0)g'(x_0)+g(x_0)f'(x_0) \\ x \to x_0 &\implies f(x)g'(x)+g(x)f'(x) \end{aligned}$$

iii. Sia $R_{x_0}^{\frac{f}{g}}$ il seguente:

$$
\begin{aligned}
R_{x_0}^{\frac{f}{g}}(x) &= \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x-x_0} \\
&= \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)} \cdot \frac{1}{x-x_0} \\
&= \frac{f(x)g(x_0) - f(g)g(x) + f(x)g(x) - f(x_0)g(x)}{x-x_0} \cdot \frac{1}{g(x)g(x_0)} \\
&= (-f(x)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} + g(x)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}) \cdot \ldots \\
&= (g(x)f'(x_0) - f(x)g'(x_0)) \cdot \frac{1}{g(x)g(x_0)} \\
f \text{ continua} \implies & \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \blacksquare
\end{aligned}
$$

(*svolto la dimostrazione del punto iii. da me stesso per esercizio*)

2. Derivate di funzioni particolari

Derivata della funzione composta

#Teorema

Teorema 2.1. (derivata di funzione composta)

Siano $f: I \longrightarrow J$, $g: J \longrightarrow \mathbb{R}$; $x_0 \in I$, $f(x_0) = y_0 \in J$.
Sia f derivabile in x_0, g derivabile in $f(x_0)$.
Allora $g \circ f$ è *derivabile* in x_0 e vale che

$$
\boxed{(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)}
$$

#Dimostrazione
DIMOSTRAZIONE del *teorema 2.1.* (^250330)
Nota: la prima parte della dimostrazione sarà l'idea della dimostrazione per cui vogliamo "orientare" la dimostrazione; la seconda parte sarà la dimostrazione vera e propria, anche se leggermente artificiale e forzata.
L'idea della dimostrazione consiste nella seguente:

$$
\begin{aligned}
R_{x_0}^{g \circ f}(x) &= \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x-x_0} \\
&= \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)} \cdot \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \\
&= g'(f(x)) \cdot f'(x_0) \\
&\implies g'(f(x)) \cdot f'(x)
\end{aligned}
$$

Tuttavia c'è un problema: in uno dei passaggi moltiplico la frazione per $\frac{f(x)-f(x_0)}{f(x)-f(x_0)}$, che è equivalente a 1. Tuttavia se ci troviamo nel caso in cui $f(x) = f(x_0)$, avremmo un problema in quanto la frazione precedentemente definita non sarebbe più definita.
Allora per evitare questo problema creiamo, in una maniera artificiale, una funzione continua che ci permette di evitare questo problema.
Sia

$$H(y) = \begin{cases} \frac{g(y)-g(f(x_0))}{y-f(x_0)} \text{ se } y \neq f(x_0) \\ g'(f(x_0)) \text{ se } y = f(x_0) \end{cases}$$

Trovo che H è continua in $f(x_0)$, in quanto per ipotesi g è *derivabile* in $f(x_0)$.
Inoltre posso verificare che vale la seguente relazione:

$$R_{x_0}^{g \circ f}(x) = H(f(x)) \cdot R_{x_0}^f(x)$$

In particolare per $f(x) = f(x_0)$ abbiamo

$$R_{x_0}^{g \circ f}(x) = H(f(x_0)) \cdot R_{x_0}^f(x)$$
$$\iff$$
$$\frac{g(f(x_0)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = g'(f(x_0)) \frac{f(x_0) - f(x_0)}{x - x_0}$$
$$0 = 0$$

A questo punto prendendo i rispettivi limiti, ottengo

$$(g \circ f)' = \lim_{x \to x_0} H(f(x)) \cdot R_{x_0}^f(x) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) = g'(f(x)) \cdot f'(x) \blacksquare$$

Derivata della funzione inversa

#Teorema

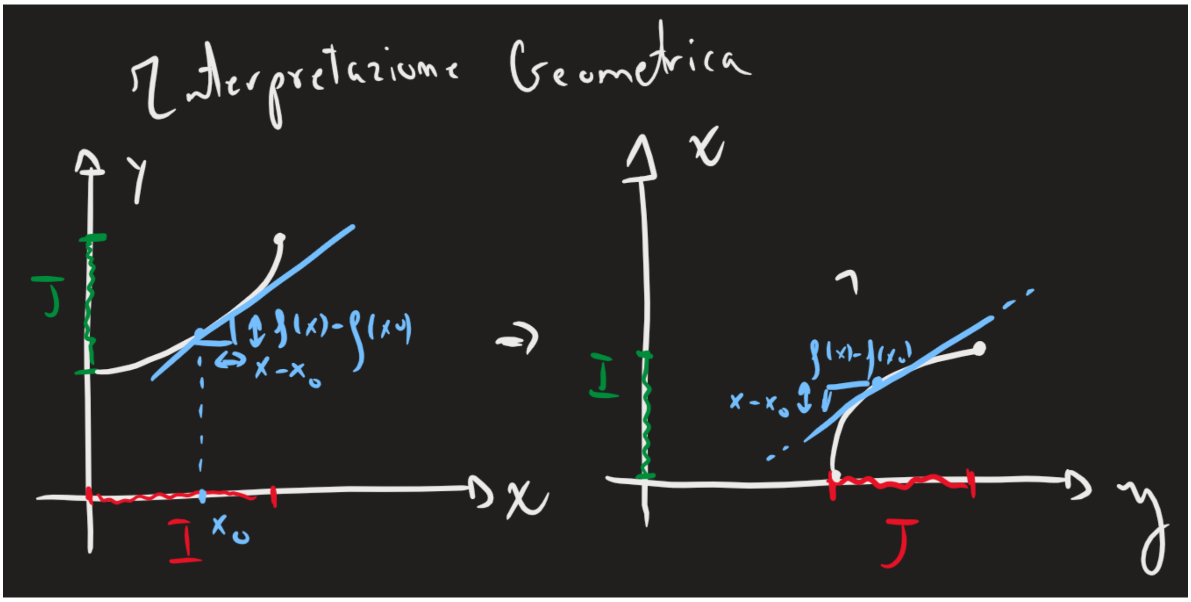
Teorema 2.2. (derivata della funzione inversa)

Sia $f : I \longrightarrow J$ una funzione *biiettiva* (Funzioni > ^d193b2), dunque *invertibile* (Funzioni > ^7b369f); sia f *derivabile* in x_0 con $f'(x) \neq 0$.
Allora $f^{-1}(x)$ è *derivabile* in x_0 e si ha

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

OSS 2.2. (*Interpretazione geometrica*) Anche questo teorema ha un suo significato geometrico: infatti se prendo la funzione originale, la inverto prendendo la sua simmetrica e scambiando le assi, allora prendendo lo stesso punto mi accorgo che la sua *tangente* esiste ed è proprio la *inversa* di quella originale.

FIGURA 2.2. (*Interpretazione geometrica della derivata della funzione inversa*)



DIMOSTRAZIONE del *teorema 2.2.* (^97198c)
Si tratta semplicemente (con dei trucchetti) di calcolare il rapporto incrementale $R^{f^{-1}}_{f(x_0)}(y)$.

$$
\begin{aligned}
R^{f^{-1}}_{f(x_0)}(y) &= \frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(f(x_0))}{y-f(x_0)} \\
&= \frac{f^{-1}(y)-x_0}{y-f(x_0)} \\
&\implies \lim_{y\to f(x_0)} \frac{f^{-1}(y)-x_0}{y-f(x_0)} \\
\begin{cases} x=f^{-1}(y) \\ y=f(x) \\ x\to x_0 \end{cases} &\implies \lim_{x\to x_0} \frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)} \\
&= \frac{1}{R^f_{x_0}(x)} \blacksquare
\end{aligned}
$$

A4. Teorema di Fermat, di Rolle, di Cauchy e di Lagrange

Teorema di Fermat

Teorema di Fermat: cenno storico, enunciato e dimostrazione. Modello di applicazione (collegamento).

0. Cenni storici alla figura di Pierre Fermat

(Paragrafo scritto da me poi rielaborato da ChatGPT)
Pierre de Fermat (*1601-1665*) è stato un giudice francese di notevole fama. Oltre al suo ruolo di giurista nelle corti francesi, Fermat coltivava la matematica come passatempo, dimostrando però di essere molto più di un dilettante: infatti si guadagno l'appellativo *"il principe dei dilettanti"*.

Tra i suoi contributi più significativi, possiamo citare la sua corrispondenza con Blaise Pascal sul problema della suddivisione della posta, il celebre teorema di Fermat (che esporremo a breve) e l'enigmatico ultimo teorema di Fermat.

Particolarmente noto è l'ultimo teorema di Fermat, su cui il matematico francese sostenne di avere una dimostrazione. Tuttavia, non la pubblicò mai, affermando che la dimostrazione *"non stava dentro nel margine dentro nella pagina"*[(1)].

Ai giorni nostri, il teorema è stato finalmente dimostrato dal matematico Sir Andrew J. Wiles, il cui trattato estende per più di 100 pagine. Insomma, forse questa *meravigliosa dimostrazione* era un po' troppo lunghetta? Forse, comparandoci a Fermat, potremmo scrivere sul nostro esame che la nostra dimostrazione è troppo meravigliosa e lunga per poter essere contenuta, ai fini di giustificare la nostra omissione di eventuali dimostrazioni.

[(1)] *«È impossibile separare un cubo in due cubi, o una potenza quarta in due potenze quarte, o in generale, tutte le potenze maggiori di 2 come somma della stessa potenza. Dispongo di una meravigliosa dimostrazione di questo teorema, che non può essere contenuta nel margine troppo stretto della pagina»* ("Arithmetica", Diofanto di Alessandria (note di P. de Fermat))

---

1. Enunciato del teorema di Fermat

#Teorema

Teorema 1.1. (di Fermat)

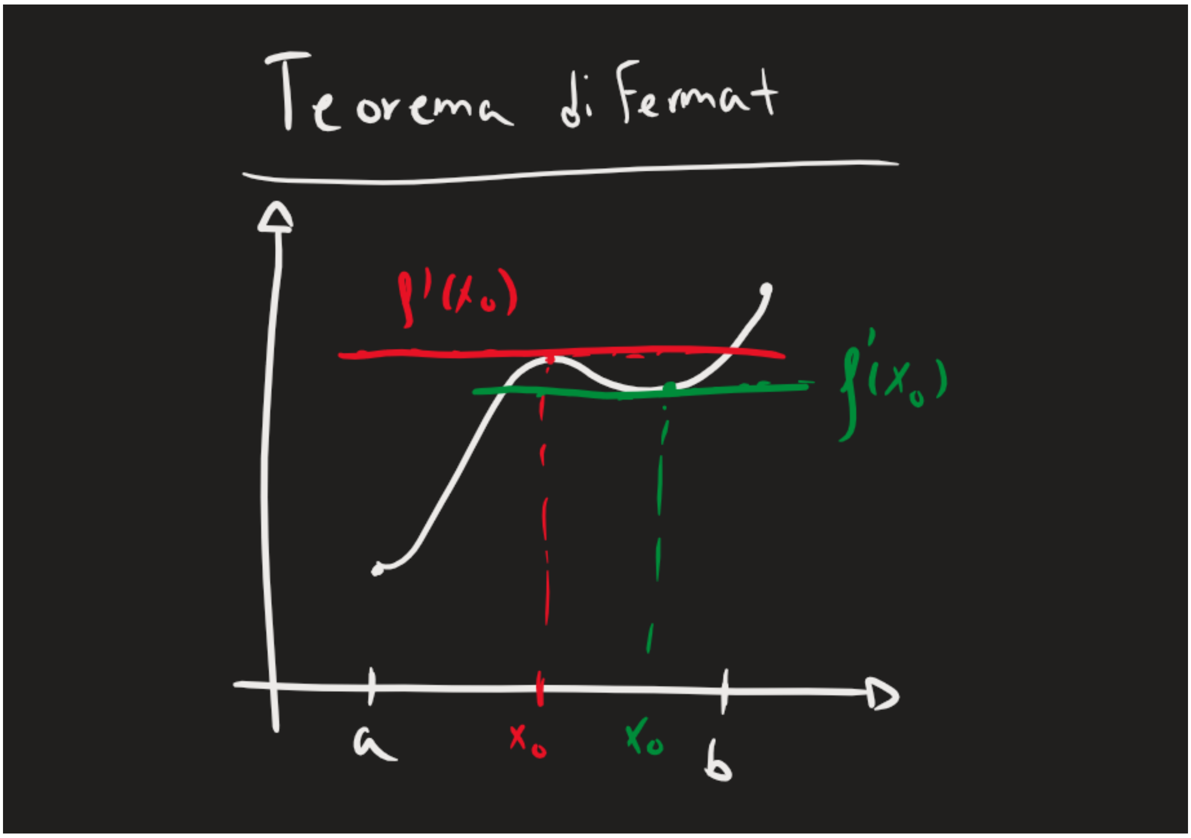
Sia $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$.
Se valgono che:
i. x_0 è punto di *massimo* (minimo) *relativo* (Funzioni > ^f3e49c).

ii. x_0 è punto *interno* per il dominio I (Punti interni, esterni e di frontiera > ^c78831); quindi x_0 non si trova agli estremi.
iii. f è *derivabile* in x_0 (Derivata e derivabilità > ^6e7606).
Allora vale che

$$\boxed{f'(x_0) = 0}$$

ovvero x_0 è un *punto stazionario* (vedere la definizione sottostante)
A parole, questo teorema di dice che *"se f è derivabile in un punto di massimo o minimo interno al dominio, allora la sua derivata è nulla."*

FIGURA 1.1. (*Idea grafica*)



Punto stazionario

#Definizione

Definizione 1.1. (punto stazionario, cenno)

Se vale che $f'(x_0) = 0$, allora x_0 si dice *punto stazionario*

2. Dimostrazione del teorema di Fermat

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *teorema 1.1.* (^8ab68b)
Consideriamo un punto x_0 che sia *massimo relativo* per un certo intorno r,

interno al dominio I e per cui f è derivabile.
Allora considero gli intervalli $I_- = [x_0 - r, x_0]$ e $I_+ = [x_0, x_0 + r]$.

- Nel primo intervallo abbiamo che $x_0 \geq x_0 - r \implies x_0 \geq x \in I_-$ e che $f(x_0) \geq f(x) \in I_-$.
  Allora considerando il rapporto incrementale $R_{x_0}^f(x)$, scopriamo che questa è sempre positiva in quanto $x - x_0 \leq 0$ e $f(x) - f(x_0) \leq 0$; allora per la *permanenza del segno* (usandone la contronominale) (Teoremi sui Limiti di Funzione > ^06a2e3)

$$\lim_{x \to x_0^-} R_{x_0}^f(x) \geq 0$$

- Nel secondo intervallo abbiamo che $x_0 + r \geq x_0 \implies x \in I_+, x \geq x_0$ ma comunque $f(x) \leq f(x_0)$ in quanto x_0 è di massimo.
  Allora riconsiderando il rapporto incrementale $R_{x_0}^f(x)$ vediamo che questa è negativa, in quanto abbiamo il prodotto tra un segno *negativo* e *positivo*. Allora

$$\lim_{x \to x_0^+} R_{x_0}^f(x) \leq 0$$

  Ma sappiamo che, in quanto f è *derivabile* in x_0, deve esistere il limite

$$\lim_{x \to x_0} R_{x_0}^f(x) \in \mathbb{R}$$

  Allora l'unico modo per far valere tutte le condizioni ottenute è quella di imporre

$$f'(x_0) = 0 \blacksquare$$

3. Modello di applicazione

Questo teorema ci è utile in quanto ci permette di costruire un *modello* per risolvere un certo tipo di problemi: vedere dunque la *sezione 3* di Modelli di problemi su derivate.

Teorema di Rolle

Teorema di Rolle: enunciato, dimostrazione e interpretazione grafica.

---

1. Enunciato del teorema di Rolle

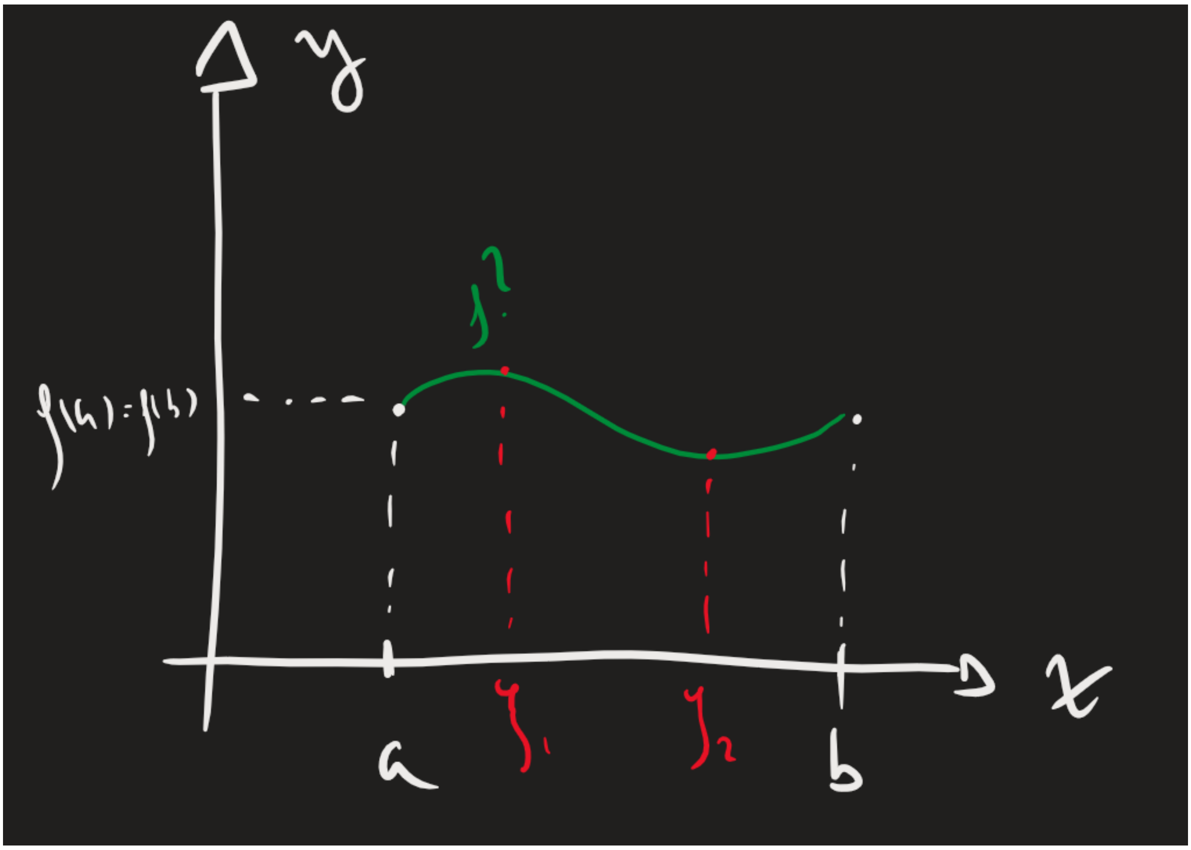
#Teorema

Teorema 1.1. (di Rolle)

Sia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, sia f *continua* su $[a, b]$ e *derivabile* su $]a, b[$.
Sia inoltre $f(a) = f(b)$. Riassumendo ho la situazione in *figura 1.1.*.
Allora si verifica che

$$\boxed{\exists \xi \in \;]a, b[\; : f'(\xi) = 0}$$

FIGURA 1.1. (*Situazione grafica delle supposizioni*)



2. Dimostrazione

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *teorema di Rolle* (^2d8bff)
Prima di dimostrare il teorema a tutti gli effetti, svolgo la seguente osservazione preliminare.

OSS 2.1. (*Osservazione preliminare*) Notiamo che f è *continua* per tutto il suo dominio, quindi per il *teorema di Weierstraß* (Teoremi sulle funzioni continue > ^918fc1) sappiamo che *esistono* almeno un *massimo* e *minimo* di f (Funzioni > ^e1ab12).

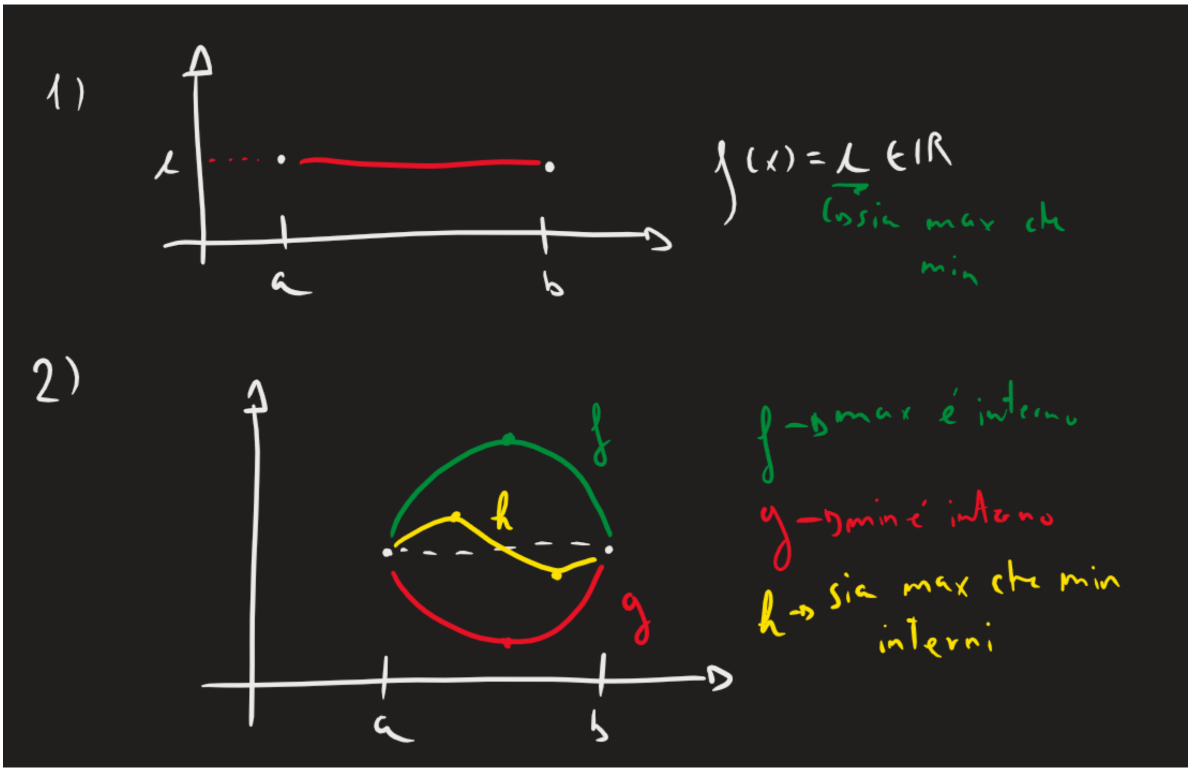
Ora distinguo due casi, dove *"posiziono"* questi punti di $\max$ e $\min$ precedentemente osservati:

1. Tutti i punti di *massimo* e *minimo* assoluto sono agli estremi, dunque gli stessi: allora in questo caso se il massimo assoluto è lo stesso del minimo assoluto di una funzione allora si tratta di una *funzione costante* del tipo $f(x) = c \in \mathbb{R}$.
   Però calcolandone la derivata $(c)' = 0$ troviamo che la proposizione
   $$f'(x) = 0$$
   è *sempre* vera nel suo dominio.
2. Almeno uno fra *massimo* e/o *minimo* assoluto della funzione è *punto interno* a $[a, b]$ (Punti interni, esterni e di frontiera > ^c78831). Dunque chiamo quel punto ξ.
   Però sapendo che f è *non-costante*, *derivabile*, *continua* e il punto scelto è *interno*, allora per il *teorema di Fermat* (Teorema di Fermat > ^8ab68b) trovo che
   $$f'(\xi) = 0 \blacksquare$$

3. Interpretazione geometrica (dimostrazione grafica)

OSS 3.1. (*Interpretazione-dimostrazione grafica del teorema*) Si nota che è possibile dare una buona interpretazione grafica a questo teorema; anzi è addirittura possibile dare una dimostrazione *grafica* considerando i casi disegnati nella dimostrazione.

FIGURA 3.1. (*Disegno*)



Teorema di Cauchy

Teorema di Cauchy: enunciato e dimostrazione. Osservazione grafica (da vedere dopo aver visto quella di Lagrange)

---

1. Enunciato del teorema di Cauchy

#Teorema

Teorema 1.1. (di Cauchy)

Siano $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continue* in $[a, b]$ (Definizione di continuità > ^ddf65d), *derivabili* in $]a, b[$ (Derivata e derivabilità > ^6e7606).
Sia inoltre $\forall x \in \ ]a, b[\ , g'(x) \neq 0$. (*ipotesi supplementare*)
Allora vale che

$$\boxed{\exists \xi \in \ ]a, b[\ : \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}}$$

2. Dimostrazione

#Dimostrazione
DIMOSTRAZIONE del *teorema di Cauchy* (^0c9255)
Prima di tutto *"do un senso"* all'ipotesi supplementari: provo dunque $g(b) - g(a)$
(
Infatti supponendo che, per assurdo, se fosse tale allora per il *teorema di Rolle* (Teorema di Rolle > ^2d8bff) avrei un ξ per cui si annullerebbe $g'(\xi)$. Infatti si avrebbe la divisione per una quantità che è uguale a 0.
Pertanto è necessario che $g'(x) \neq 0 \implies g(b) \neq g(a)$.
Ora considero una funzione che chiameremo *"phi grande"* Φ:

$$\Phi(x) = f(x)(g(b) - g(a)) - g(x)(f(b) - f(a))$$

Quindi considerandola scopro le seguenti.

- Il dominio di Φ è lo stesso di f, g.
- Φ è *continua* in $[a, b]$ in quanto si tratta di una *sottrazione* tra funzioni continue (Teoremi sulle funzioni continue > ^41a8ec).
- Φ è *derivabile* in $]a, b[$ per motivo analogo di prima (Proprietà delle derivate > ^fd716f).
  Dato che Φ è continua, posso calcolare $\Phi(a)$ e $\Phi(b)$.

1. $\Phi(a)$ diventa

$$\begin{aligned}\Phi(a) &= f(a)(\dots) - g(a)(\dots) \\ &= f(a)g(b) - f(a)g(a) - f(b)g(a) + f(a)g(a) \\ &= f(a)g(b) - f(b)g(a)\end{aligned}$$

2. $\Phi(b)$ diventa invece

$$\begin{aligned}\Phi(b) &= f(b)(\dots) - g(b)(\dots) \\ &= f(b)g(b) - f(b)g(a) - f(b)g(b) + f(a)g(b) \\ &= f(a)g(b) - f(b)g(a)\end{aligned}$$

   Ora scopro che

$$\Phi(b) = \Phi(a)$$

   Quindi per il *teorema di Rolle* (Teorema di Rolle > ^2d8bff) ho

$$\exists \xi \in \ ]a, b[\ : \Phi(\xi) = 0$$

Ora considero la sua derivata Φ' e la *"calcoliamo"* in ξ. Svolgendo i conti ottengo

$$\begin{aligned}\Phi'(x) &= (f(x)(g(b)-g(a)))' - (g(x)(f(b)-f(a))' \\ &= f'(x)(g(b)-g(a)) - g'(x)(f(b)-f(a)) \\ \implies \Phi'(\xi) &= f'(\xi)(g(b)-g(a)) - g'(\xi)(f(b)-f(a)) = 0 \\ &= \boxed{\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}} \blacksquare\end{aligned}$$

OSS 2.1. Se nel *teorema di Cauchy* (^0c9255) supponessimo di *non* far valere l'ipotesi aggiuntiva $g'(x) \neq 0$, allora si potrebbe comunque dire che

$$\boxed{\exists \xi \in \ ]a,b[\ : f'(\xi)(g(b)-g(a)) = g'(\xi)(f(b)-f(a))}$$

3. Interpretazione grafica

Nota: qui si consiglia fortemente prima di leggere l'interpretazione grafica del teorema di Lagrange (Teorema di Lagrange) per poter capire bene questa osservazione.

OSS 3.1. (*Interpretazione grafica*) Con il *teorema di Lagrange* abbiamo visto che la sua interpretazione grafica consiste nell'intravedere che esiste un punto per il quale la sua tangente è parallela alla retta secante di a, b (Teorema di Lagrange > ^a12a1e).
Ora ci chiediamo come sarebbe possibile interpretare il *teorema di Cauchy* da un punto di vista grafico.

Immaginiamo innanzitutto che f, g siano delle *leggi orarie* (Introduzione al Calcolo Differenziale > ^56240d) che vivono in $[a, b]$.
Ora immaginiamo di *"appiattire"* la funzione f, *"distorcendo"* la funzione g: quindi disegniamo una specie di piano cartesiano in cui la retta delle ascisse viene rappresentata da $f(x)$, la retta della ordinate invece da $g(x)$.

Immaginandoci questo piano, posizioniamo il punto $A : (f(a), g(a))$ e l'altro punto $B : (f(b), g(b))$.
Possiamo disegnare una specie di *funzione* che parte da A e finisce in B: però in realtà non si tratta di una vera funzione in quanto non vi è nessun nesso tra f e g, quindi questa linea può comportarsi come vuole.

Ora immagino il vettore $\overrightarrow{AB}$ (Vettori Applicati > ^8447d6) come il *"vettore di spostamento"* e il *"vettore velocità"* rappresentato da

$$\overrightarrow{P} : (f'(\xi), g'(\xi))$$

ovvero prendendo un qualsiasi punto della *linea* disegnata prendo la sua tangente.
Allora per il *teorema di Cauchy* sappiamo che

$$f'(\xi)(g(b)-g(a)) = g'(\xi)(f(b)-f(a))$$

Allora considerando la matrice quadrata 2×2 $M_2(\mathbb{R})$ (Matrice > ^a95650)

$$A = \begin{pmatrix} f(b)-f(a) & g(b)-g(a) \\ f'(\xi) & g'(\xi) \end{pmatrix}$$

Ora prendendo il *determinante* (Determinante > ^2bb1d4) sappiamo che per *Cauchy* abbiamo

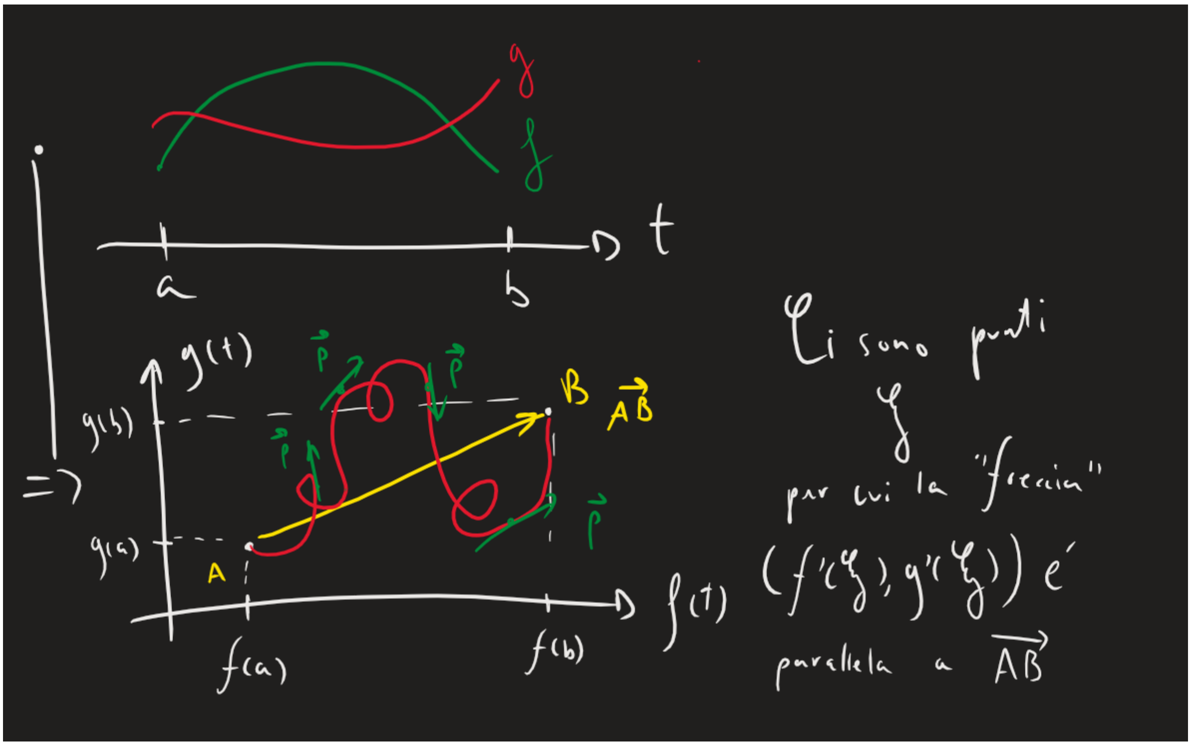
$$\det A = 0$$

Di conseguenza i vettori

$$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{P}$$

sono *paralleli*.

FIGURA 3.1. (*Idea dell'interpretazione geometrica*)



OSS 3.2. (*Cosa succede in uno spazio a tre dimensioni*) Vedere Conseguenze del teorema di Cauchy e di Lagrange in quanto la ritengo una pagina più appropriata per contenere tale informazione.

Conseguenze del teorema di Cauchy e di Lagrange

> *Conseguenze che discendono dai teoremi di Cauchy e Lagrange: conseguenze pratiche e conseguenze di natura "matematica".*

(da selezionare la parte pertinente)

Teorema di Lagrange

Teorema di Lagrange: enunciato, dimostrazione e interpretazione grafica.

---

1. Enunciato del teorema di Lagrange

#Teorema

Teorema 1.1. (di Lagrange)

Sia $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$, f *continua* in $[a,b]$ e *derivabile* in $]a,b[$ (Definizione di continuità > ^ddf65d, Derivata e derivabilità > ^6e7606).
Allora si verifica il seguente:

$$\boxed{\exists \xi \in \ ]a,b[\ : f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$$

2. Dimostrazione del teorema di Lagrange

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *teorema di Lagrange* (^ef03c2)
Per dimostrare il *teorema di Lagrange* basta considerare il *teorema di Cauchy* (Teorema di Cauchy > ^0c9255) per $g(x)=x$; possiamo verificare che $(x)'$ non sarà *mai* 0, in quanto la derivata della funzione identità è 1; infatti $1\neq 0$.

Infatti per questo motivo si potrebbe considerare il *teorema di Lagrange* come un *corollario* del *teorema di Cauchy*. ■

3. Interpretazione grafica

OSS 3.1. (*Interpretazione grafica*) Osserviamo che l'espressione

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

è *equivalente* al *rapporto incrementale* $R_a^f(b)$ (Rapporto Incrementale > ^ccc58b).
Quindi il *teorema di Lagrange* ci sta semplicemente dicendo che se considerando la *retta secante* (che chiamiamo r_{ab}) tra il punto $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ allora dev'esserci *almeno* un punto per cui la sua tangente è *parallela* a r_{ab}.

FIGURA 3.1. (*Idea grafica*)

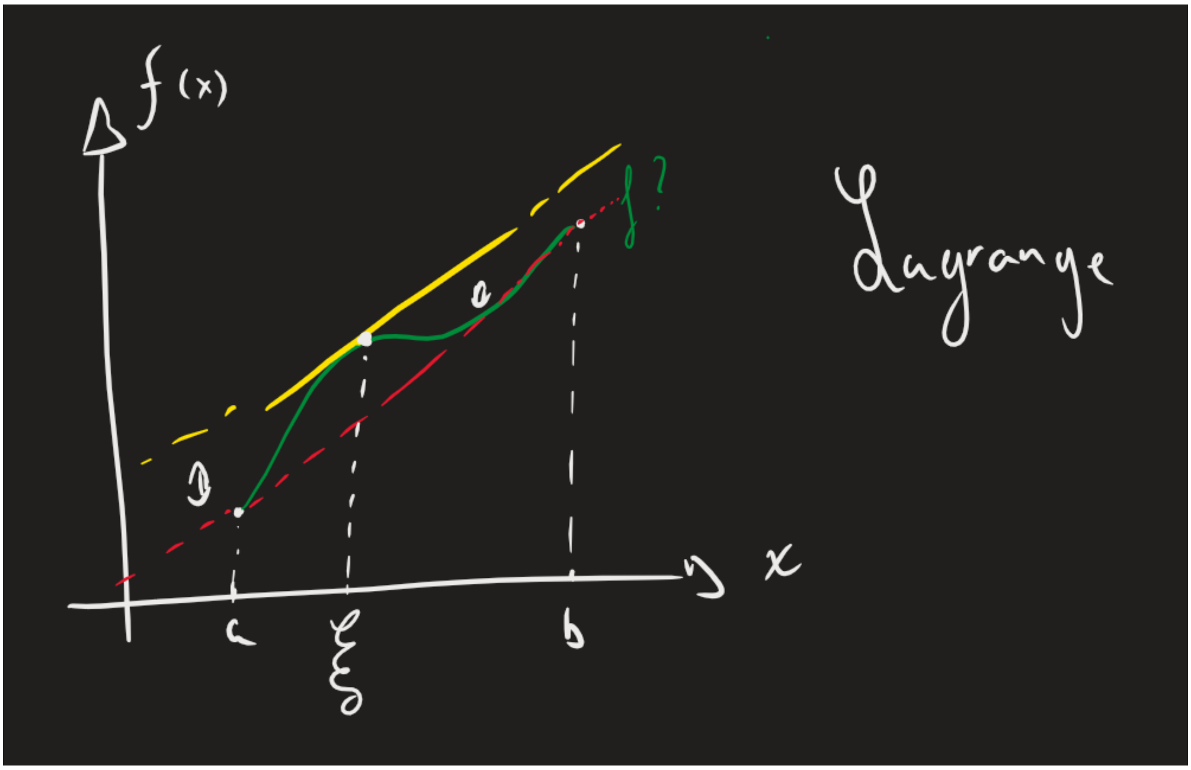
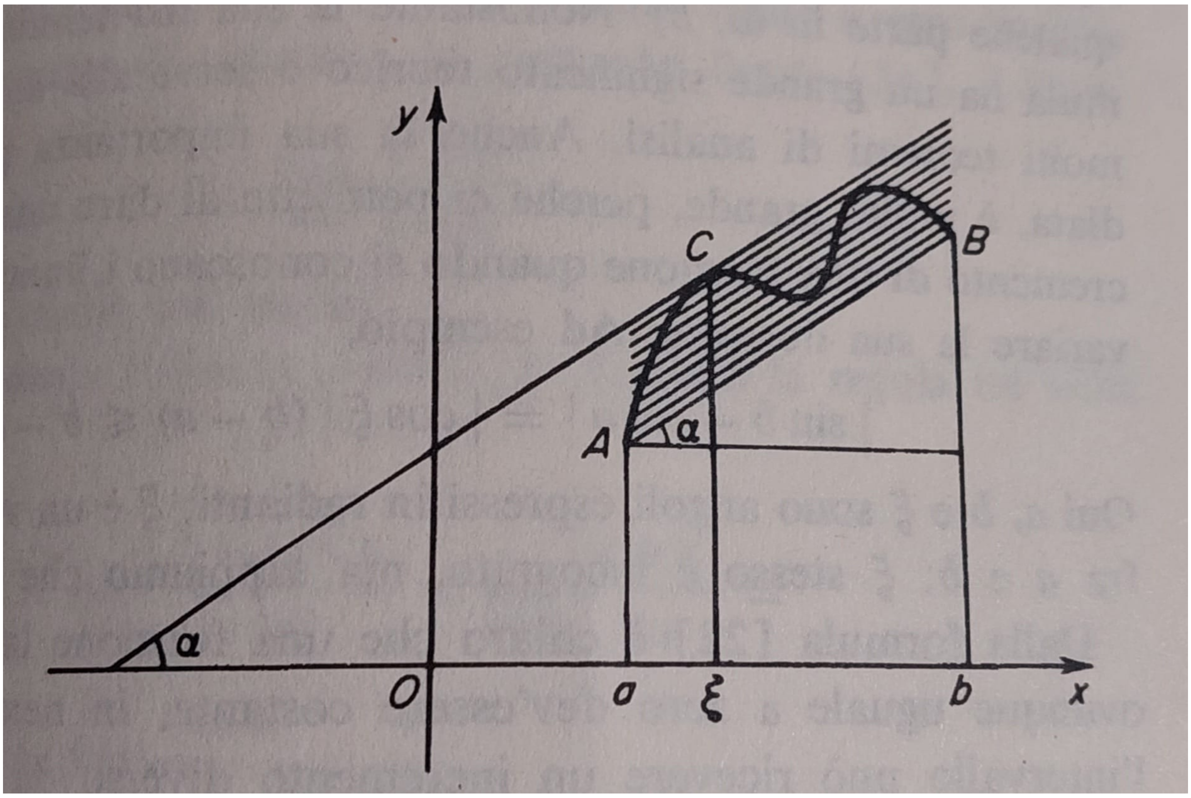


FIGURA 3.2. (*Idea grafica 2, tratto da "Le Matematiche" di A. D. Aleksandrov, A. N. Kolmogorov, M. A. Lavrent'ev*)



B. DALLA TEORIA ALLA PRASSI

B1. Esempi di derivate, funzioni derivabili/non

Esempi di derivate

Esempi di funzioni derivabili e il calcolo delle loro derivate: tutte (più o meno) le funzioni elementari. Esempi di funzioni non derivabili.

B2. Figli di Cauchy e Lagrange

Conseguenze del teorema di Cauchy e di Lagrange

Conseguenze che discendono dai teoremi di Cauchy e Lagrange: conseguenze pratiche e conseguenze di natura "matematica".

---

1. Considerazioni Pratiche

Lagrange e il sistema "Tutor"

Cauchy nel nostro spazio tridimensionale

2. Considerazioni "Astratte"

Derivate nulle e funzioni costanti

Crescenza e derivate

B3. Esempi di problemi sulle derivate

Modelli di problemi su derivate

> *Esempi di problemi sulle derivate: trovare la retta tangente di un punto nella funzione, dimostrazione dell'ortogonalità della retta tangente di un cerchio e raggio del cerchio.*

---

1. Problema delle tangenti di un punto

2. Ortogonalità della retta tangente di un cerchio e raggio del cerchio

3. Problemi di massimo e/o minimo

Modello 3.1. (problema di massimo e/o minimo)

Suppongo di avere $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, che sia *continua* (Definizione di continuità > ^ddf65d), che sia derivabile (*almeno*) su $]a,b[$.

1. f ha minimo e/o assoluto? Sì, per il *teorema di Weierstraß* (Teoremi sulle funzioni continue > ^918fc1)
2. Dove si trovano questi punti di massimo e/o minimo assoluto? Usiamo il *teorema di Fermat* (Teorema di Fermat > ^8ab68b) per costruire *l'insieme dei punti stazionari* unito agli *"estremi"* P dove

$$P = \{x \in \ ]a, b[\mid f'(x) = 0\} \cup \{a, b\}$$

3. Come faccio ad individuare gli effettivi $\max$, $\min$ di f? Basta prendere $\max(f(P))$ e $\min(f(P))$.

B4. Tabella delle derivate

Tabella delle derivate

Tabella delle derivate.
