Nozioni Preliminari della Fisica - Sommario

Lo Zen della Fisica.

---

1. L'essenza della Fisica

Essenza della Fisica

Breve introduzione alla Fisica: il significato di studiare fisica, l'organizzazione dei concetti relativi alla fisica e il metodo scientifico.

---

1. Il significato della Fisica

La *Fisica* (dal greco φύσις, ovvero **natura**) è lo studio *fondamentale* della *materia*.
In particolare la fisica *classica* (o *meccanica classica*) è quella branca della fisica che studia la i *movimenti dei corpi puntiformi*, la *dinamica del corpo*, la *termodinamica* e i fenomeni dell'*elettromagnetismo*. Storicamente la fisica classica è stata riformulata molte volte negli ultimi secoli, dando una fondazione molto precisa a questa branca. Tuttavia questa precisione potrebbe trarci inganno, dal momento che nella *fisica* si tratta di un ciclo continuo tra formulazioni delle ipotesi, confutazioni, ulteriori sviluppi e altre ipotesi.
Infatti, questo avviene con la *fisica moderna*, che studia la *relatività* e la fisica *quantistica*: ancora oggi vi è un *divario* tra questi due ambiti fisici.

2. Organizzazione della Fisica

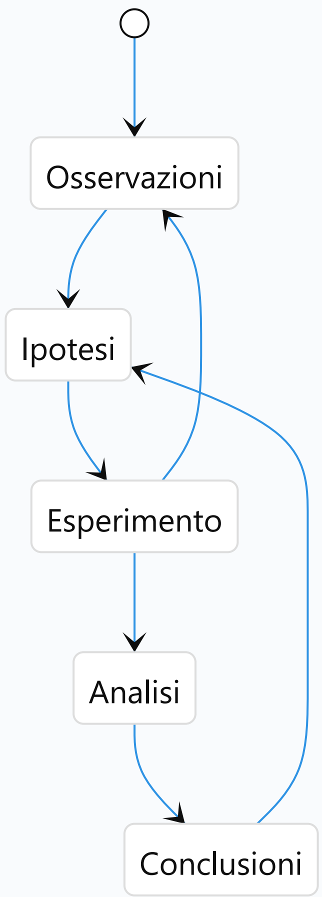
I contenuti relativi alla *Fisica* vengono organizzati secondo le seguenti categorie.
Principi. Per *"principio fisico"* intendiamo una *proposizione generale* (o *universale*) che vale sempre.
Legge. Per *"legge"* si intende una *relazione matematica* tra due o più *grandezze fisiche*; sostanzialmente è un modo per *descrivere* i *principi*.
Modello. Per *"modello fisico"* si intende un'analogia, una rappresentazione

semplificata del nostro mondo complesso.
Teoria. Quando mettiamo assieme delle *leggi*, dei *principi* e un *modello* senza creare contraddizioni, si ha una *teoria*.

3. Il Metodo Scientifico

Si presenta prima un diagramma che illustra il c.d. *metodo scientifico*, poi per analizzare alcune parti.

Metodo Scientifico



Evidenziamo il passaggio più saliente di questo grafico: la *verifica delle ipotesi con degli esperimenti*.
E' fondamentale che le *ipotesi* vanno *verificate* con degli esperimenti. Una *non-definizione* del metodo scientifico è proprio quella presunzione che una *ipotesi* (o *teoria*) sia *inconfutabile*; il filosofo della scienza K. Popper (https://it.wikipedia.org/wiki/Karl_Popper) conia il termine *"falsificabile"* per esprimere il fatto che una teoria può essere sempre *confutata* con un'*esperimento*.

2. Grandezze e Misure Fisiche

Grandezze e Misure Fisiche

Definizione di grandezza fisica. Le grandezze fondamentali della fisica, definizione operative. Misura diretta e indiretta e misura derivata. Analisi e verifica dimensionale.

1. Definizione di Grandezza Fisica

Grandezza Fisica. Una grandezza fisica è una *caratteristica* di un corpo (o fenomeno naturale) a cui si può associare *uno (o più) numeri*. Come primi esempi di *grandezza fisica* vedremo le c.d. *grandezze fondamentali*.

2. Le Grandezze Fondamentali

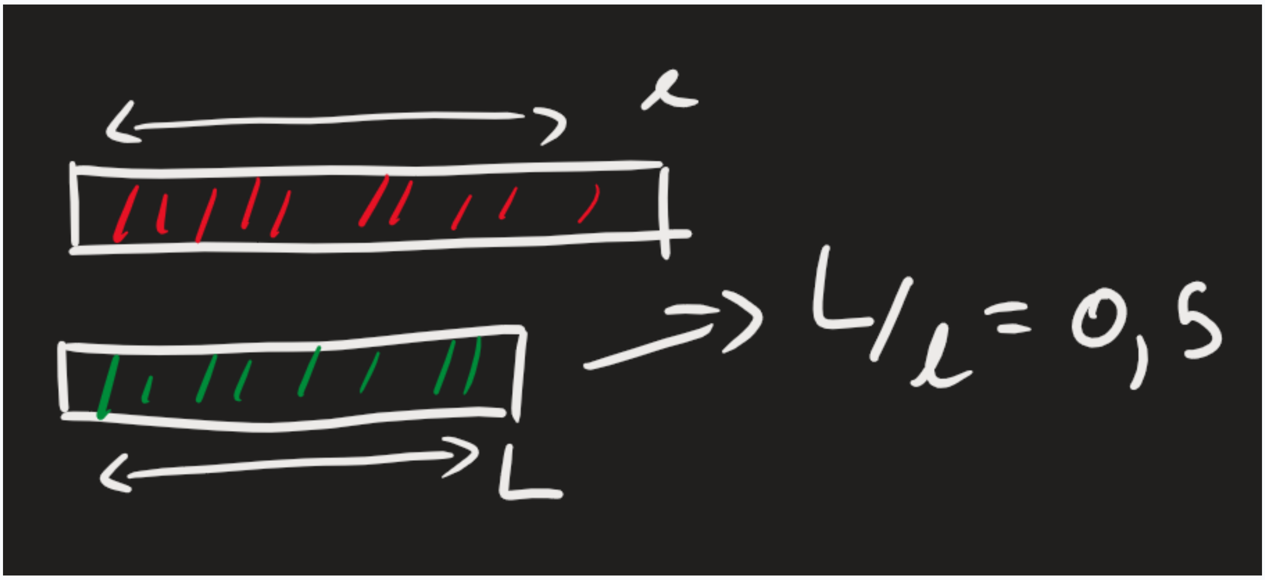
Le grandezze Fondamentali. Nel *sistema internazionale* ci sono *sette grandezze fondamentali*, tra cui il metro, il chilogrammo, il secondo, lo Kelvin, la candela, l'Ampere e la mole; in particolare ci soffermeremo sulla *lunghezza* (il metro), sulla *massa* (il chilogrammo) e sul *tempo* (il secondo). Queste grandezze fisiche sono *"fondamentali"* dal momento che vengono definite *"operativamente"*, ovvero solo mediante dalle *operazioni necessarie per misurarle*.
Dopodiché, in generale le *grandezze fisiche* si esprimono in *termini di campione* (ovvero le *unità*).
In particolare:

- Il *secondo* viene misurato dal valore numerico delle *risonanze del cesio*, 9.192.631.770 volte il periodo di oscillazione di una risonanza dell'atomo $^{233}\mathrm{Ce}$.
- Il *metro* viene misurato dalla distanza percorsa dalla luce in un secondo, diviso per 299.792.458.
- Il *chilogrammo* viene misurato secondo la *costante di Planck* $h = 6,62607015 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-1}$.
  Notare che la definizione del *metro* dipende dal *secondo* e similmente la definizione del *chilogrammo* dipende dal *metro* e dal *secondo*.

3. Misure dirette, indirette e unità derivate

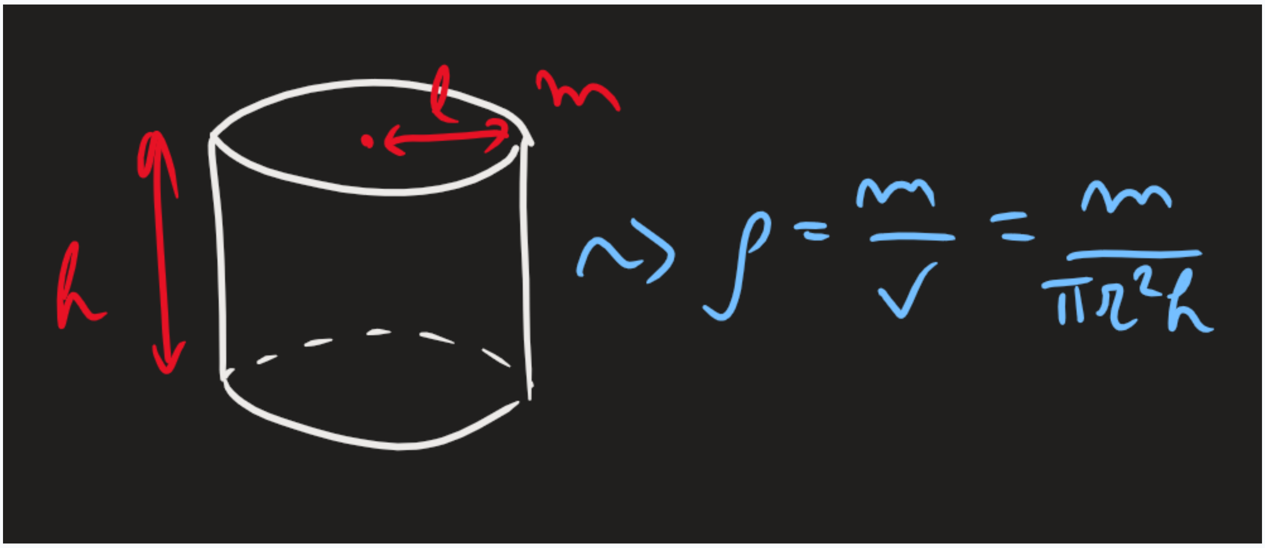
Misura diretta. La misura diretta è il *confronto* con un *campione*, detto l'*unità*. Ad esempio, supponiamo di avere un corpo lungo c, che prenderemo come campione. Adesso immaginiamo di avere un altro corpo con lunghezza L, per ottenere la misura di questo corpo basta fare il rapporto $\frac{L}{c}$ (*figura 3.1.*).

FIGURA 3.1. (*Esempio di una misura diretta*)



Misura indiretta. La misurazione indiretta è una relazione matematica. Ad esempio si ha la densità di un cilindro, per cui necessitiamo di *massa* e *volume* (*figura 3.2.*); oppure il principio di Archimede è un buon esempio.

FIGURA 3.2. (*La densità di un cilindro*)



Unità derivate. Le unità derivate sono le *combinazioni* di *unità fondamentali*. Come visto prima, possiamo prendere la *densità* di un qualsiasi corpo come un'unità derivata, dal momento che è espressione di una combinazione tra il chilogrammo e metro cubo.

4. Analisi Dimensionale

Osservazione. (*l'analisi dimensionale ci fornisce una condizione sufficiente*)
Studiare e analizzare le *unità* diventa molto importante, in particolare per *verificare* i risultati di un'analisi fisica: infatti la misura (o l'unità) di un risultato ci fornisce una *condizione sufficiente*.
Ad esempio, se si sta cercando di calcolare il peso di un corpo e alla fine si ottiene

un risultato in secondi, è ovvio che c'è qualcosa di sbagliato! Se la misurazione è sbagliata, allora sicuramente il calcolo è errato. Tuttavia questa non ci fornisce una *condizione necessaria*, dal momento che la misurazione può essere giusta ma il risultato può essere comunque sbagliato.

Idea. (*l'analisi dimensionale ha delle regole precise*) Nell'analisi dimensionale poniamo delle *regole precise*:

1. La somma e la sottrazione di *grandezze fisiche* dev'essere *omogenea*, ovvero che le grandezze devono essere le stesse;
2. L'argomento di *funzioni trascendenti* (come $\sin, \cos, \exp, \ldots$) dev'essere *adimensionale* (ovvero senza essere dotate di dimensioni: in un modo la misura viene cancellata).

Applicazioni. (*Verifica e analisi dimensionale*)

1. (*Verifica dimensionale*)
   Come detto prima, possiamo *verificare* se un risultato di un calcolo (o di una formula, legge) sia giusto o errato, guardando le misure.
   Ad esempio voglio verificare la legge oraria.

   $$\Delta x = v\Delta t + \frac{1}{2}a\Delta t^2$$

   Adesso racchiudo tutti i membri nelle parentesi quadre per dire che *"sto prendendo le loro dimensioni (o unità)"*.

   $$[\Delta x] = [v][\Delta t] + \left[\frac{1}{2}\right][a][\Delta t^2]$$

   Ora metto le loro dimensioni, esprimendoli con opportuni simboli o con le loro unità di riferimento.

   $$m = \frac{m}{s}s + \frac{m}{s^2}s^2 \implies m = m \text{ OK!}$$

   Quindi posso vedere che *è possibile* (non dev'essere *necessariamente vero*!) che la formula data sia corretta.
2. (*Analisi Dimensionale / Dipendenza Funzionale*)
   L'analisi dimensionale può essere utile anche per determinare le *misure necessarie* per calcolare una certa grandezza fisica: possiamo dedurre l'*unica (o più) combinazioni* di grandezze fisiche per calcolare una grandezza derivata.
   Ad esempio, vogliamo calcolare *l'accelerazione di una massa che si muove su una circonferenza* (ovvero l'accelerazione centripeta).
   Sappiamo che l'accelerazione si esprime in $\frac{m}{s^2}$. Vogliamo dunque una

combinazione di queste misure che dia questa combinazione di dimensioni.
Facendo finta di conoscere il *raggio* R della circonferenza, la *velocità* v e la *massa* m del corpo, possiamo sapere già quali diventeranno utili per calcolare il risultato voluto (*figura 4.1.*).
Infatti, si trova che

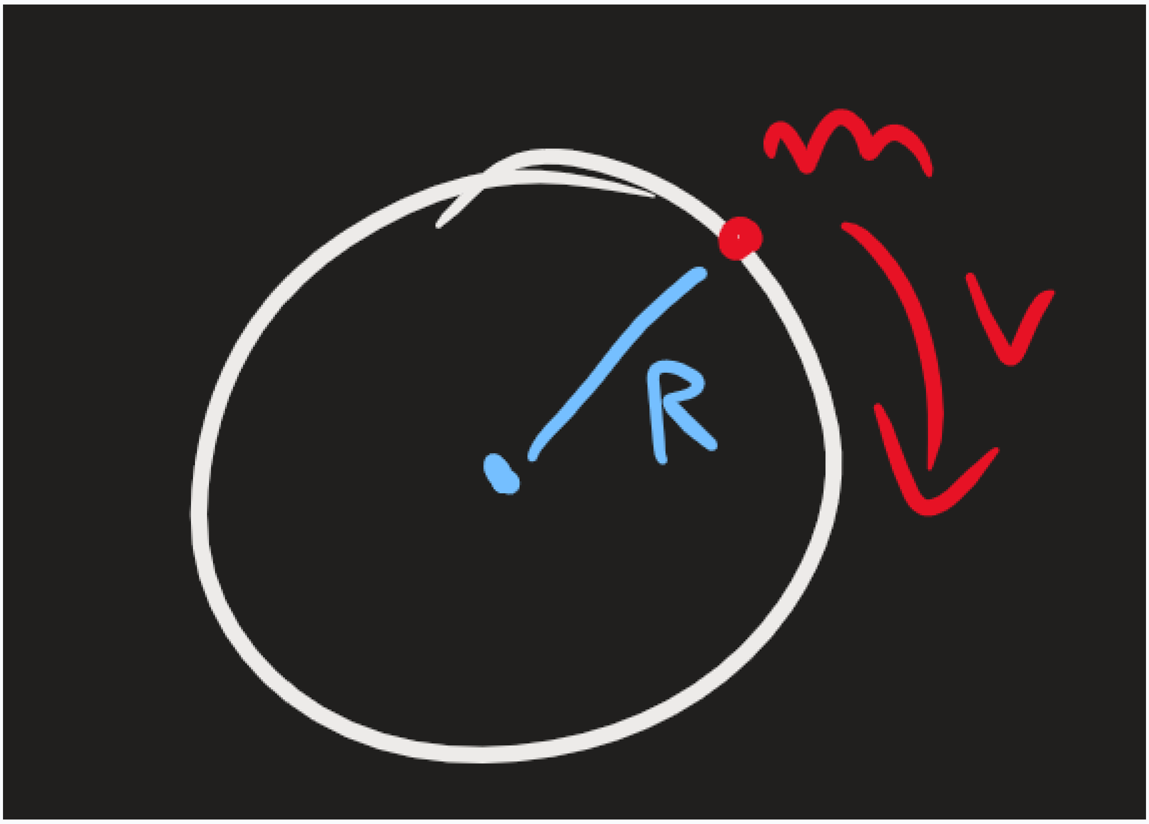
$$[R] \to m; [v] \to \frac{m}{s}; [m] \to kg$$

Allora si ha

$$\left[\frac{v^2}{R}\right] = \frac{m}{s^2}$$

che sono i dati utili per calcolare l'accelerazione. Tuttavia questa non ci fornisce una *formula esatta* per calcolare la grandezza, dal momento che con l'analisi dimensionale le *costanti* vengono trascurate.

FIGURA 4.1. (*L'analisi dimensionale di un corpo che si muove su un cerchio*)



3. Incertezza Fisica

Incertezza Fisica

Incertezza fisica: espressione dei risultati con un livello di incertezza, cifre significative. Fonti dell'incertezza fisica: precisione e accuratezza. Incertezza statistica: media, varianza e formula per calcolare l'incertezza. Propagazione delle incertezze.

---

1. Esprimere l'incertezza fisica

Nella fisica si sempre ha a che fare con *l'incertezza*: questa si verifica soprattutto con la *misurazione* fisica dei corpi. Per scrivere una *misurazione* con un margine di errore si usa la seguente notazione.

$$L = 1.82 \pm 0.02\ m; M = 3.5 \pm 0.1\ kg$$

Quindi separiamo ogni numero in *due parti*: la *misura* e l'*incertezza*. Come nel primo esempio, si ha

$$L = \underbrace{1.82}_{\text{misura}} \pm \underbrace{0.01}_{\text{incertezza}}\ m$$

Cifre significative. Alternativamente possiamo usare (e lo faremo spesso) le *cifre significative* per indicare il *livello di precisione* di una misurazione. Questa funziona semplicemente prendendo le *"cifre di cui siamo confidenti"*, o *"cifre di cui siamo precise"*.
Ad esempio

$$L = 1.82\ m$$

ha *tre* cifre significative, ed equivale a

$$L = 1.82 \pm 0.01\ m$$

Quando si ha il *prodotto* o la *divisione* tra due cifre significative, si tiene il numero *più basso delle cifre significative*.

$$(1.1\ m) \cdot (3.45\ m) = \cancel{3.795}\ 3.8\ m^2$$

Quando si ha invece la *somma* o la *sottrazione* tra due cifre significative, si tiene il *numero più basso dei decimali*.

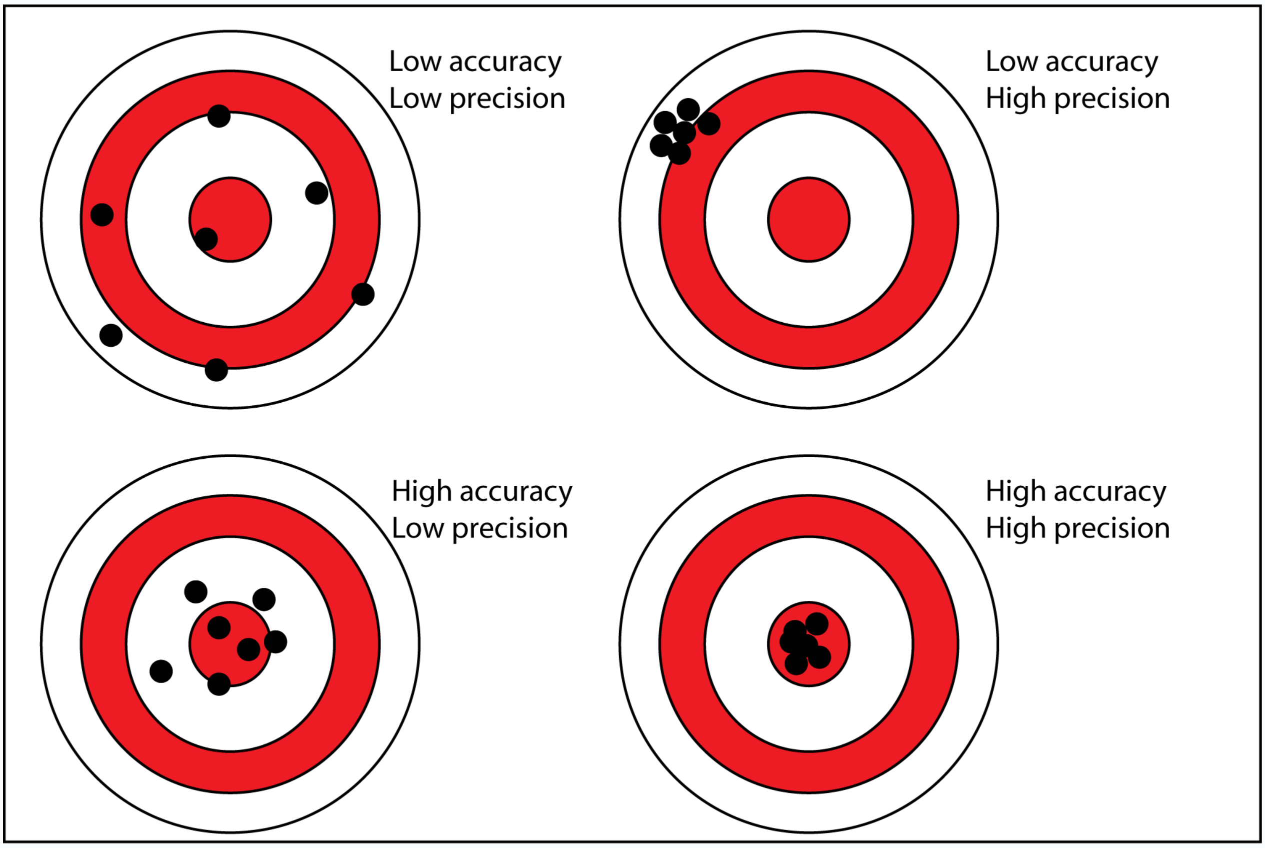
$$1.1\ m - 0.12\ m = \cancel{0.98}\ 1.0\ m$$

2. Fonti dell'incertezza fisica

Principalmente abbiamo *tre fonti* di *incertezza fisica*.

1. *Risoluzione strumentale.* Questa incertezza proviene dallo *strumento di misurazione*: ad esempio se misuriamo la lunghezza di un corpo con un *righello* segnato in *centimetri*, notiamo che ci sono dei spazietti ad ogni tacca che segna il centimetro. Questo vuoto rappresenta l'errore detto "risoluzione strumentale".
2. *Errori casuali (o incertezze statistiche).* Questi errori dipendono invece da una molteplicità di fattori di cui non si sanno bene, tuttavia sappiamo che le *variazioni* rappresentate da quest'errore si distribuiscono in un certo modo. Lo vedremo con degli approfondimenti sull'*incertezza statistica*.
3. *Errori sistematici.* Questa tipologia di errore succede costantemente con ogni misurazione.
   Notare che le *prime due tipologie di errori* incidono sulla *precisione* della misurazione, ovvero *"in che modo sono distribuiti questi errori"*, l'ultimo incide invece sull'*accuratezza*, ovvero *"da quanto si discostano dal valore voluto"* (*figura 2.1.*).

FIGURA 2.1. (*Illustrazione grafica dei concetti di accuratezza e precisione*)



3. Incertezza statistica

Ora cerchiamo di vedere in una maniera dettagliata l'*incertezza statistica*.
Quando misuriamo *molte volte* una grandezza, otteniamo spesso *diversi risultati*, che però sono in qualche modo *"vicini tra di loro"*, dove spostandoci al centro abbiamo *"una densità maggiore di misure"*.

Chiamiamo N il numero di misurazioni.
Definiamo la *media* $\langle x \rangle$ *su* N *misure* come il valore

$$\langle x \rangle := \frac{1}{N} \sum_{n \in N} x_n$$

Definiamo invece la *varianza* $\operatorname{var}(x)$ o lo *scarto quadratico medio* come il numero

$$\operatorname{var}(x) := \frac{1}{N} \left[\sum_{n \in N} (x_n - \langle x \rangle)^2 \right]$$

Graficamente si possono illustrare le ultime due misure come nella *figura 3.1.*.
Adesso si definisce il numero σ come

$$\sigma := \sqrt{\operatorname{var}(x)}$$

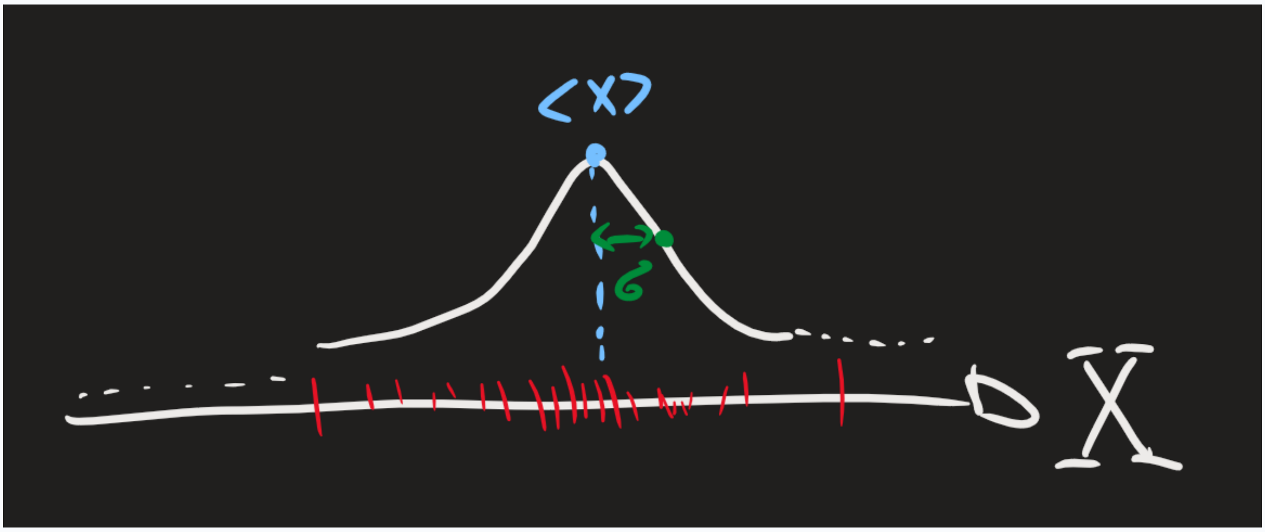
Con la *statistica* si dimostra che l'*incertezza* misurata è

$$\Delta X = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

Ovvero il risultato sarà

$$X = X \pm \Delta X$$

FIGURA 3.1. (*Media e varianza*)



4. Propagazione delle incertezze

IDEA. Voglio trovare un modo per *"trasferire gli errori"*. Ovvero, partendo da una misurazione con delle incertezze voglio ottenere una sua misurazione derivata, tenendo conto di questi errori.

ESEMPIO. (*la superficie di un quadrato*)
Prendiamo la superficie di un quadrato, ovvero $A = L^2$. Supponendo di avere $L = 3.0 \pm 0.2\ cm$, voglio trovare un modo per determinare A tenendo conto dell'*errore*.
In genere dipende dal *tipo di errore*, ma come buon riferimento prendiamo in considerazione l'*errore statistico*.
Rappresentiamo l'area della superficie come una *funzione al variare della lunghezza*, ovvero $A(L) = L^2$. Ora ne disegniamo il grafico (*figura 4.1.*). Posso dunque considerare $3.0 \pm 0.2\ cm$ come l'*intorno del numero* 3.0 con raggio $\delta = 0.2$; dunque posso calcolare $A(L - \delta)$ e $A(L + \delta)$.
Per rendere più semplici le cose, cerchiamo di *linearizzare* la funzione mediante lo sviluppo delle funzioni di Taylor (Teorema 2.1. (di Taylor col resto di Peano)), con $n = 1$.
Abbiamo dunque

$$A(L \pm \delta) \approx A(L) \pm \frac{dA}{dL}\delta$$

(*nota che per fare bene le cose si dovrebbe distinguere il caso in cui consideriamo l'intorno destro e sinistro*)
Ora voglio calcolare l'errore ΔA considerando la relazione

$$A \pm \Delta A = A(L \pm \delta)$$

Quindi per trovare ΔA faccio la somma $A + \Delta A - (A - \Delta A) = 2\Delta A$.

$$2\Delta A = 2\frac{dA}{dL}\delta \implies \Delta A = \frac{dA}{dL}\delta$$

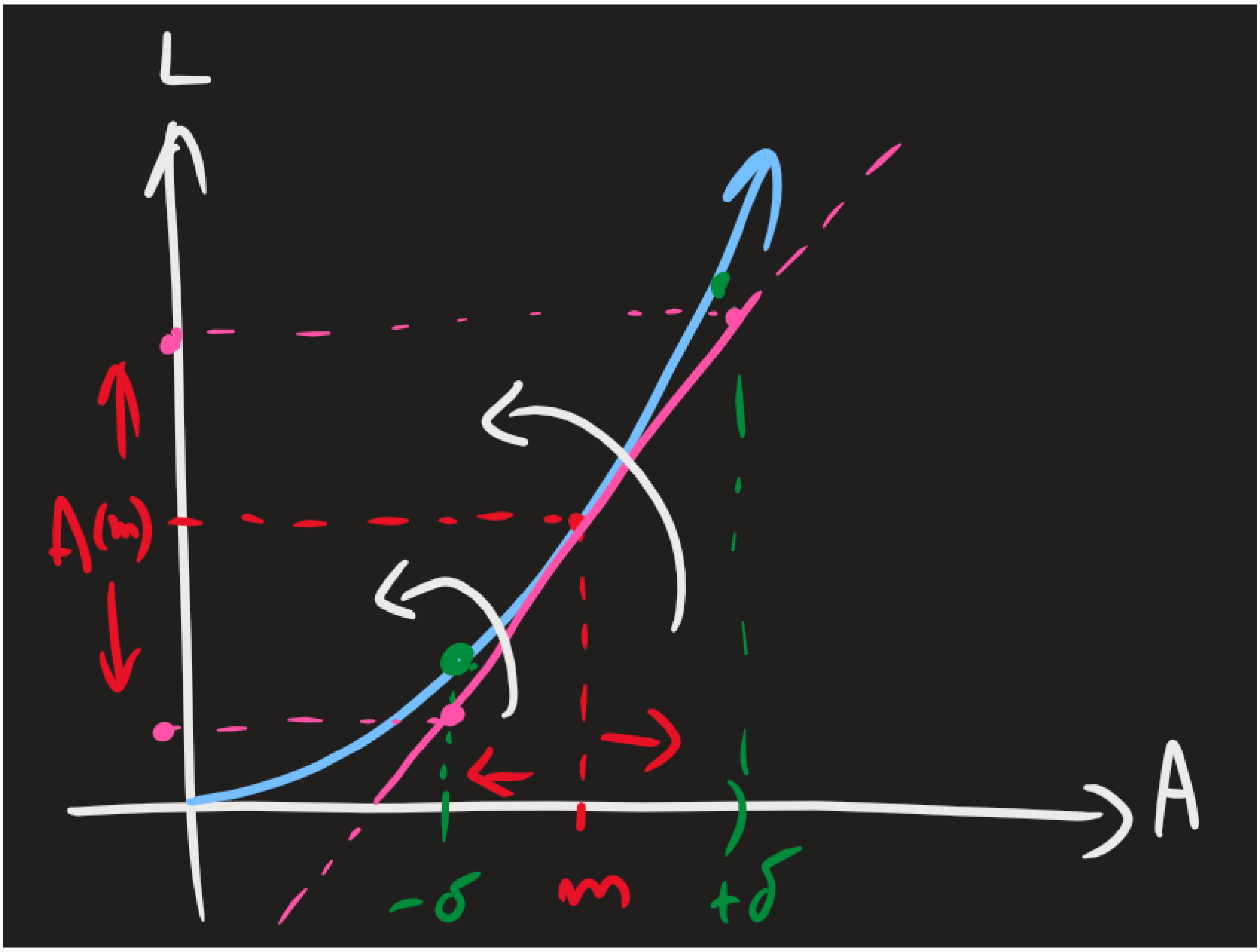
Ovvero abbiamo

$$\Delta A = 2L \cdot \delta = 6 \cdot 0.2 = 1.2$$

Quindi possiamo scrivere

$$A = 9 \pm 1\ cm^2$$

FIGURA 4.1. (*"L'idea è questa"*)



CASO GENERALIZZATO. Ora vediamo alcune formule generali per calcolare la *propagazione delle incertezze*.
Per una funzione ad una variabile $f(x)$, dove abbiamo una *misura* e una *grandezza derivata* si calcola l'incertezza Δf come

$$f(x) \longrightarrow \Delta f = \left|\frac{df}{dx}\right| \Delta x$$

Per una funzione a due variabili $f(x, y)$ si ha

$$f(x, y) \longrightarrow \Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \Delta x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \Delta y^2}$$

oppure in certi casi rari si può usare anche

$$\Delta f = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \Delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \Delta y$$

ESEMPI DEL CASO GENERALIZZATO. Supponiamo di avere una misurazione del tipo

$$f = ax + by; g = x^m y^n$$

Allora le loro incertezze sono

$$\Delta f = \sqrt{a^2 \Delta x^2 + b^2 \Delta y^2}$$
$$\Delta g = \sqrt{(m x^{m-1} y^n \Delta x)^2 + (n y^{n-1} x^m \Delta y)^2}$$

L'INCERTEZZA RELATIVA. Notare che per Δg sia $mx^{m-1}y^n$ che $ny^{n-1}x^m$ sono espressioni del tipo $\frac{\cdot f}{\cdot}$. Allora si può prendere la loro *incertezza relativa* definita come

$$\frac{\Delta f}{f}$$

e in questo caso ho

$$\frac{\Delta g}{g} = \sqrt{\left(m \frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(n \frac{\Delta y}{y}\right)^2}$$

4. Ordini di Grandezza e Problemi alla Fermi

Ordine di Grandezza

Definizione, scopo e notazione degli ordini di grandezza. Problemi alla Fermi.

---

1. Definizione e scopo degli Ordini di Grandezza

#Definizione

Definizione (ordine di grandezza).

Prendiamo un *numero* n. L'*ordine di grandezza* di n è la potenza di 10 più vicina.

#Esempio

Esempio (notazione scientifica).

Prendiamo ad esempio il numero $6\ 317\ 000 \text{ km}$. Con la definizione appena enunciata, l'ordine di grandezza di questo numero è 10^6 e possiamo quindi riscriverla come

$$6,317 \times 10^6 \text{ km}$$

Questo modo generale di scrivere i numeri si dice *notazione scientifica*

#Osservazione

Osservazione (lo scopo degli ordini di grandezza).

Lo scopo degli ordini di grandezza è quella di poter fare *calcoli veloci approssimativi*; basta infatti prendere un numero, il suo numero di grandezza e da lì sarà sufficiente fare moltiplicazioni tra potenze di 10.

Un caso particolare di queste applicazioni sono i c.d. *problemi "alla Fermi"* (Fermi fu un fisico noto), dove si vuole calcolare *velocemente* una quantità approssimativa usando questi principi; altrimenti bisognerebbe avere molti dati.
Molto stranamente, questo metodo è in grado di poter darci una *buona* approssimazione per la quantità desiderata: infatti, il fisico E. Fermi (da cui traiamo il titolo della tipologia del problema) calcolò l'energia rilasciata da un'esplosione nucleare con una buona approssimazione, lasciando dei pezzetti di carta e considerando la forza della spinta subiti da questi straccetti di carta!

2. Esempi di Problemi alla Fermi

#Esempio

Esempio (il pacemaker).

Un ingegnere deve fabbricare un pacemaker. Quanti battiti deve poter poter fare questo pacemaker, assumendo che non malfunzioni?

Prendiamo il seguente approccio: una prima osservazione è quella che mediamente si fa un *battito al secondo*.
Dopodiché prendiamo la durata della vita media come 100 anni.
Infine consideriamo che in un anno ci sono *circa* $\pi \cdot 10^7$ secondi.
Quindi, facendo le somme abbiamo

$$1 \cdot 100 \cdot \pi \cdot 10^7 \approx 3 \cdot 10^9 \text{ battiti}$$

#Esempio

Esempio (i capelli).

Quanti capelli si ha sulla testa?

Nota: questo è un mio svolgimento di questo esercizio
Prendiamo preliminarmente in considerazione la superficie di una semisfera, ovvero

$$S_c = 2\pi r^2$$

Prendiamo $\bar{r} = 10 \text{ cm}$ (ovvero il raggio medio di una testa sarebbe di dieci centimetri).
Adesso consideriamo la densità media dei capelli in un centimetro quadrato; prendiamo $\bar{\rho} = 100 \text{ capelli}/\text{cm}^2$
Facendo i conti, abbiamo

$$2 \cdot \pi \cdot 10^2 \cdot 100 \approx 6 \cdot 10^4 \text{ capelli}$$

5. Fondamenta sui Scalari e sui Vettori

Scalari e Vettori nella Fisica

Fondamenta del calcolo vettoriale per la fisica: nozione di scalare, vettore, versore. Definizione di prodotto scalare, proprietà del prodotto scalare.

---

1. Definizione di scalare e di vettore

SCALARE. Si definisce uno *scalare* come una *grandezza* specificata da un *numero* e da un'*unità*. Come esempi di *scalari* si hanno la *lunghezza* e la *massa*.
VETTORE. Si definisce un *vettore* come una *quantità* definita da *più valori* e *più medesime unità*. Alternativamente un *vettore* può essere caratterizzato da *un valore*, *una direzione* e *un verso*.

2. Vettori

LA RAPPRESENTAZIONE DEI VETTORI. Geometricamente si può rappresentare un *vettore sul piano* come una semplice *"freccia"*, che parte dall'origine e va verso ad un punto (v_x, v_y, v_z) (*figura 2.1.*). Scriveremo dunque

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$$

LE DIFFERENZE DAI PUNTI. Anche questa definizione dei vettori fa *assomigliare* i vettori ai *punti* sullo spazio, notiamo che comunque ci sono delle differenze: i vettori hanno più proprietà.
Ad esempio non si può definire una nozione di *lunghezza* per un punto; oppure non si può definire la *somma* per *due punti*.
LE OPERAZIONI CON I VETTORI. Possiamo definire le due operazioni per i vettori: scalamento e somma.
Scalamento. Si ha uno *"scalamento"* quando si tenta di moltiplicare uno scalare per un vettore. Quindi viene definita come

$$a \cdot \vec{v} = (av_x, av_y, av_z)$$

Notiamo che se lo scalare a è *adimensionale* (ovvero, se non munita di dimensioni) allora si ha una *compressione* o *allungamento* di $\vec{v}$. Particolarmente, se $a < 0$ allora si ha un cambiamento nel *verso* del vettore.
Somma tra i vettori. Possiamo definire la somma tra due vettori con la *regola del parallelogrammo* oppure con la *regola punta-coda*. Matematicamente, la somma tra vettori viene definita come

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_x + v_x, u_y + v_y, u_z + v_z)$$

FIGURA 2.1. (*Vettore in 3D*)

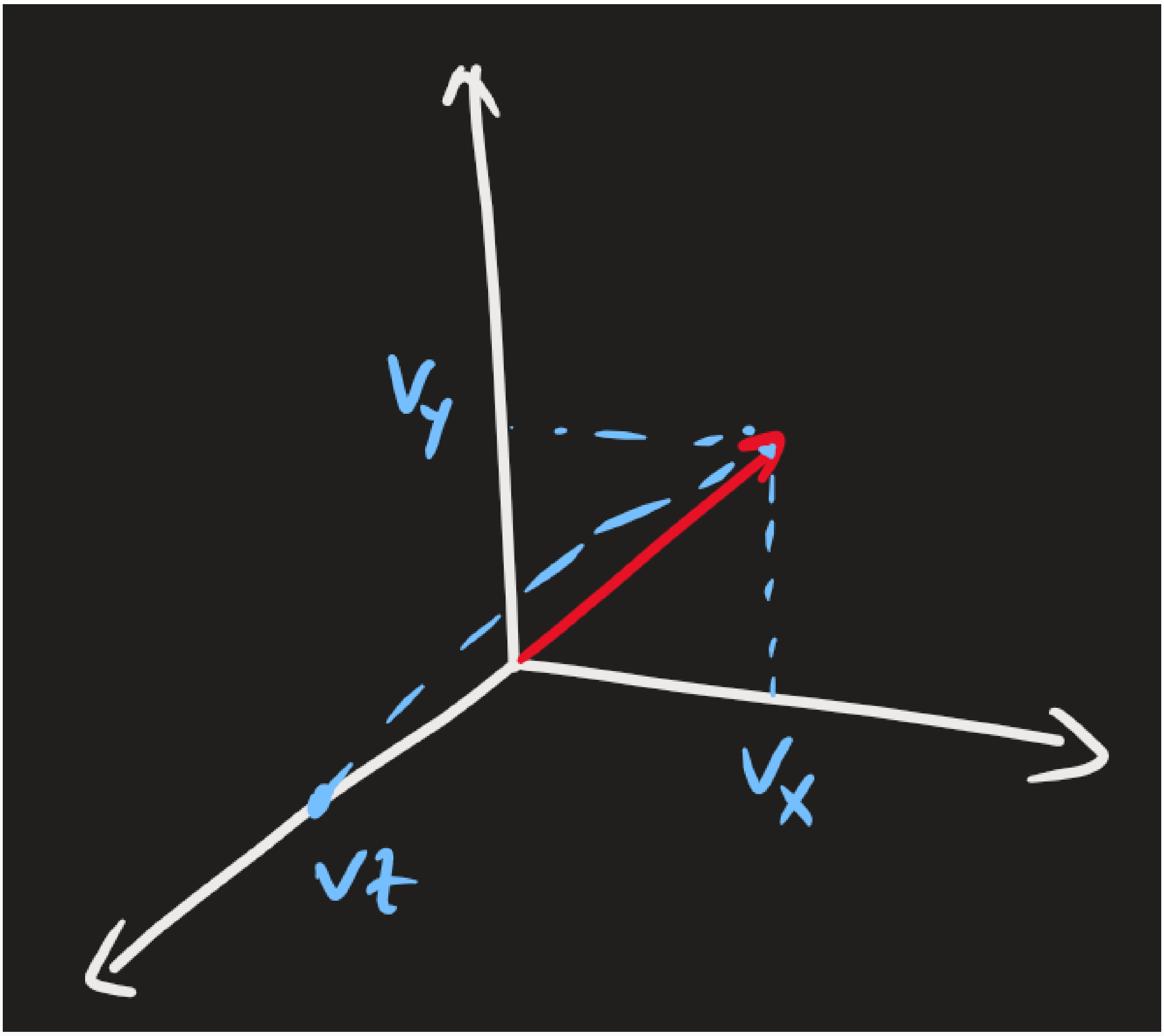
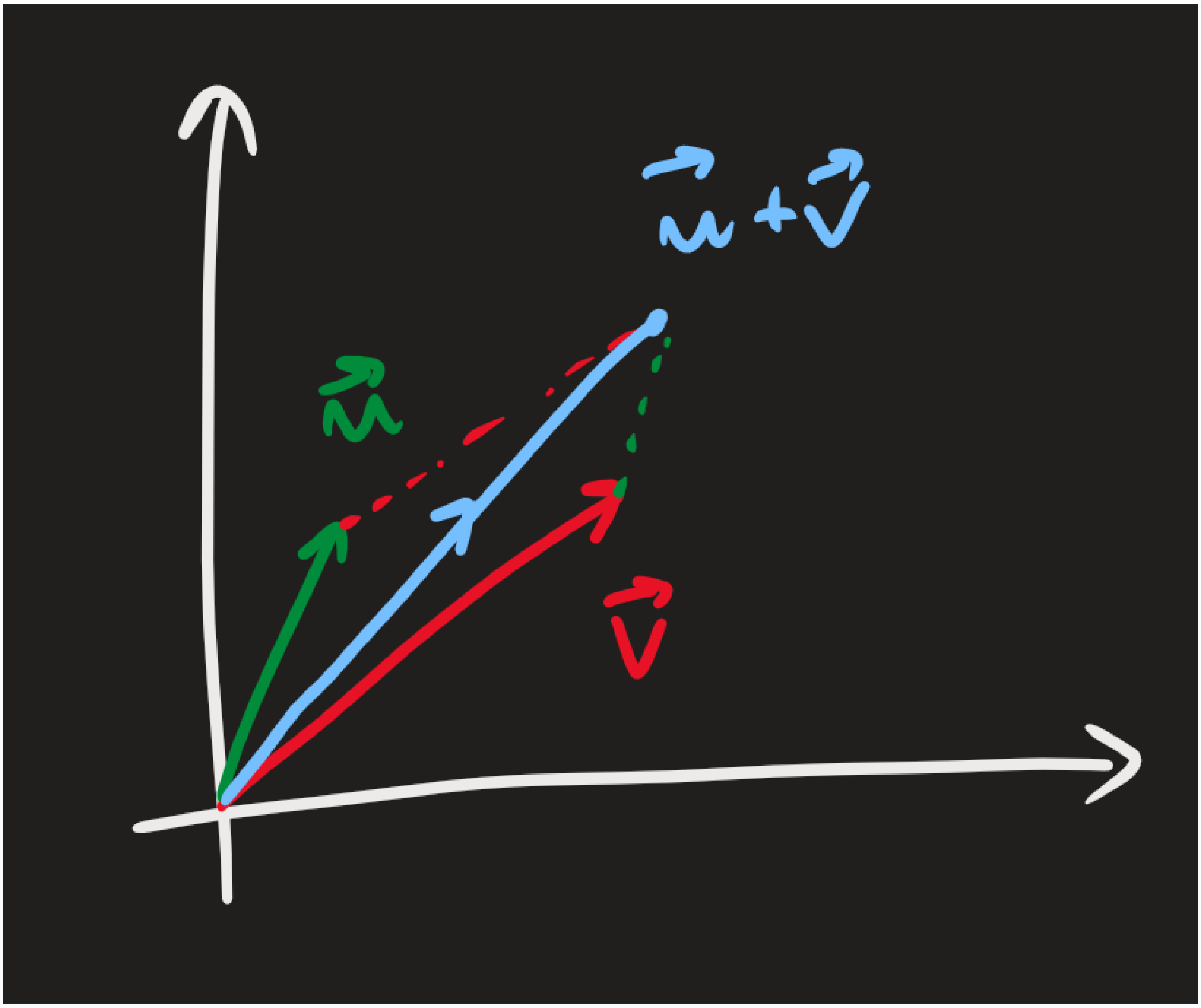


FIGURA 2.2. (*La regola del parallelogrammo*)



MODULO E DIREZIONE. Si definisce il *modulo* di un vettore come la sua *lunghezza geometrica*; la indichiamo come

$$|\vec{v}| = v$$

In termini delle componenti, si ha

$$|\vec{v}| = \sqrt{\sum_i^N (v_i)^2}$$

3. Versori

VERSORE. Definiamo un *versore* come un *vettore* che ha *modulo unitario*, ovvero tale che

$$|\vec{n}| = 1 \implies \frac{\vec{v}}{|v|} = \vec{n}, \forall \vec{v}$$

I versori possono essere denotati anche come

$$\vec{n} \to \hat{n}$$

Ora vediamo che ci sono dei *versori particolarmente utili*.
VERSORI STANDARD. Definiamo i *"versori standard"* come

$$\begin{cases} \hat{i} = (1,0,0) \\ \hat{j} = (0,1,0) \\ \hat{k} = (0,0,1) \end{cases}$$

Vediamo che un *qualsiasi vettore* è espressione unica del tipo

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}$$

(questo risultato discende dallo studio dell'*Algebra Lineare*) (Teorema 1.1. (Caratterizzazione delle basi)).

4. Prodotto Scalare

PRODOTTO SCALARE. Definiamo il *prodotto scalare* come un'operazione che associa *due vettori* con *uno scalare*. Ovvero,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} := \sum_{i=0}^{N} u_i v_i$$

OSSERVAZIONI. Poniamo una serie di osservazioni su quest'operazione.
Definizione del modulo. Con questa operazione si può definire il *modulo* di un vettore in un altro modo. Infatti,

$$|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$$

Ortonormalità dei versori. Notiamo che i versori $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ sono *ortonormali*; ovvero che valgono

$$\begin{cases} \hat{i}^2 = \hat{j}^2 = \hat{k}^2 = 1 \\ \hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{i} \cdot \hat{k} = \ldots = \hat{k} \cdot \hat{j} = 0 \end{cases}$$

(Definizione 4 (base ortonormale))
Estrazione delle singole componenti. Dato un vettore $\vec{v}$, possiamo estrarre un suo *singolo componente* moltiplicando per un versore. Ad esempio,

$$v_x = \vec{v} \cdot \hat{i}; v_y = \vec{v} \cdot \hat{j}; v_z = \vec{v} \cdot \hat{k}$$

Questo sarà utile per effettuare il *cambiamento delle basi*.

Legame con l'angolo. Notiamo che se definiamo θ come l'angolo compreso tra $\vec{u}, \vec{v}$ allora il prodotto scalare diventa

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \theta$$

(per una dimostrazione vedere Definizione 7 (angolo tra due vettori))