Integrali Multipli - Sommario

Tutto sugli integrali multipli.

---

0. NOMENCLATURA PRELIMINARE

0A. Definizione di N-Rettangolo

Definizione di n-rettangolo

Generalizzazione di intervalli unidimensionali: definizione di n-rettangolo su $\mathbb{R}^N$.
Definizione di misura M_n su un n-rettangolo.

---

0. Voci correlate

- Intervalli

1. Definizione di n-rettangolo

Motivazione. Vogliamo parlare di *integrazione in* $\mathbb{R}^N$, un ambito dell'*analisi matematica* estremamente utile, in particolare per:

- calcolare *aree, superfici, curve* su domini complessi (*misura, geometria*)
- calcolare *quantità fisiche* che richiedono più variabili (*scienza*)
- risolvere alcune *equazioni differenziali a derivate parziali* (Definizione 2 (equazione differenziale alle parziale derivate)), note come *P.D.E.* (*matematica*)
  Allora, come fatto nel *caso unidimensionale*, bisogna fare delle *considerazioni preliminari* sulle *suddivisioni di intervalli*. Partiamo dalla *generalizzazione del concetto di intervallo* (Definizione 1 (intervalli limitati)) in *più variabili*.

#Definizione

Definizione (N-rettangolo).

Si dice *N-rettangolo* l'insieme dei *punti* in $\mathbb{R}^N$ formato dal *prodotto cartesiano* degli *intervalli unidimensionali*. Ovvero, dati $(a_1, b_1), \ldots, (a_N, b_N) \in \mathbb{R}^N$ possiamo definire l'N-rettangolo R come

$$R = \bigtimes_{i=1}^{N} [a_i, b_i]$$

2. Misura di n-rettangoli

Come per *intervalli unidimensionali* possiamo *misurare* la loro lunghezza effettuando la semplice sottrazione $(b-a)$, o per *quadrati* possiamo *moltiplicare base per altezza* $(b_2-a_2)(b_1-a_1)$, possiamo definire la *nozione di misura* su n-rettangoli.

#Definizione

Definizione (misura di N-rettangolo).

Si dice la *misura di un N-rettangolo* $R := \bigtimes_{i \leq N} [a_i, b_i]$ come la funzione $M_N : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$M_N(R) := \prod_{i=1}^{N} (b_i - a_i)$$

Adesso siamo pronti per *definire* la suddivisione di un n-rettangolo R.

0B. Suddivisioni di N-Rettangoli

Suddivisione di un n-rettangolo

Suddivisione di n-rettangoli: definizione di scomposizione di un n-rettangolo, somma inferiore e superiore di un campo scalare dato un n-rettangolo, proprietà della somma superiore e somma inferiore.

---

0. Voci correlate

- Suddivisione di un Intervallo
- Somma inferiore e superiore per una Funzione

1. Scomposizione di n-rettangoli

Introduciamo il *concetto di scomposizione* su n-rettangoli, come fatto per il caso unidimensionale (Definizione 1 (suddivisione di un'intervallo chiuso e limitato)).

#Definizione

Definizione (suddivisione di un n-rettangolo).

Sia R un n-rettangolo del tipo $R = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$. Fissati $n(k+1)$ punti tali che

$$\begin{cases} a_1 = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = b_1 \\ a_2 = y_0 < y_1 < \ldots < y_k = b_2 \\ \vdots \\ a_n = z_0 < z_1 < \ldots < z_k = b_n \end{cases}$$

Definiamo l'n-rettangolo $R_{ij\ldots k}$ come

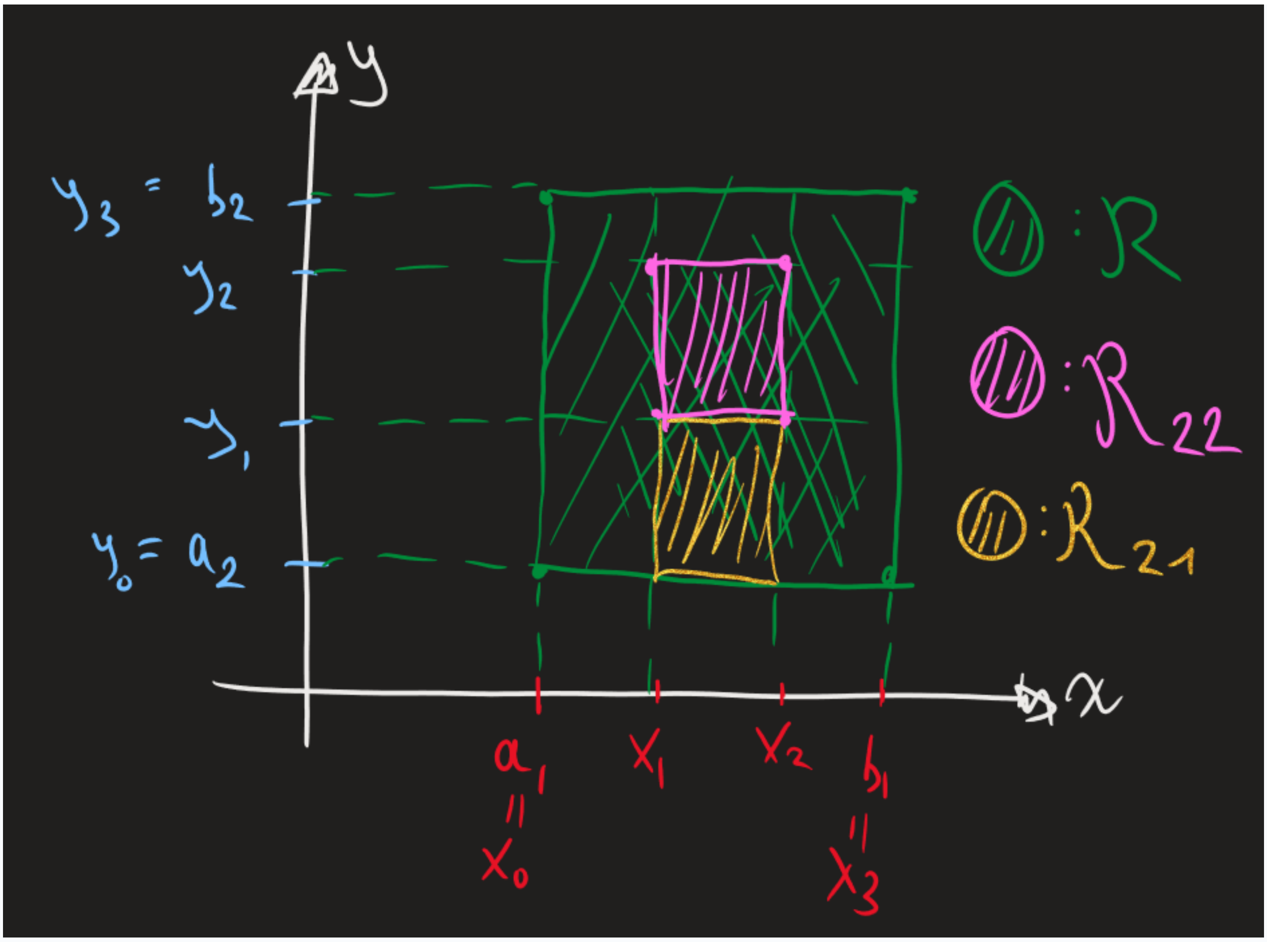
$$R_{ij\ldots k} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times \ldots \times [z_{k-1}, z_k]$$

una *suddivisione* dell'n-rettangolo R. Naturalmente si ha $R_{ij\ldots k} \supseteq R$. Indichiamo la *collezione* di questi n-rettangoli formati come δ: rigorosamente è

$$\delta = \{(i, j, \ldots, k) \in \{1, \ldots, k\}^n : R_{ij\ldots k}\}$$

Nota: non è necessario che i valori k che suddividono le singole componenti siano uguali, ma lo facciamo per semplicità

FIGURA 1.1. (*Esempio: caso bidimensionale*)



#Definizione

Definizione (l'insieme delle suddivisioni).

Dato un N-rettangolo R, l'insieme di *tutte le sue decomposizioni* possibili si indica con

$$\Delta(R) = \{\delta : \delta \text{ scompone } R\}$$

2. Somma Inferiore e Superiore relativa ad una Scomposizione

Adesso iniziamo a giostrare con queste scomposizioni $\Delta(R)$, come fatto nel caso unidimensionale (Definizione 1 (somma inferiore per una funzione relativa ad una suddivisione)).

#Definizione

Definizione (somma inferiore o superiore per una funzione relativa ad una sua scomposizione).

Sia $f : R \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ una *funzione limitata* con R un N-rettangolo. Ovvero abbiamo

$$-\infty < \inf_R f \leq \sup_R f < +\infty$$

Data $\delta \in \Delta(R)$ (ovvero una scomposizione di R), si definisce la *somma inferiore (e superiore) di f relativa a δ* con parametri $n_1, \ldots, n_N$ (ovvero il numero di rettangolini con cui lo stiamo suddividendo) come

$$s(\delta, f) := \sum_{i_1=1}^{n_1} \ldots \sum_{i_N=1}^{n_N} \inf_{R_{i_1 \ldots i_N}} f \cdot m_N(R_{i_1, \ldots, i_N})$$
$$S(\delta, f) := \sum_{i_1=1}^{n_1} \ldots \sum_{i_N=1}^{n_N} \sup_{R_{i_1 \ldots i_N}} f \cdot m_N(R_{i_1, \ldots, i_N})$$

Adesso vediamo le sue proprietà.

#Proposizione

Proposizione (proprietà delle somme inferiori e superiori).

Si ha che per una $f : R \to \mathbb{R}^N$ su cui si può definire una suddivisione $s(\cdot, f)$ e $S(\cdot, f)$ vale la seguente disuguaglianza:

$$\forall \delta, \delta' \in \Delta(R)$$

Inoltre ponendo σ come l'insieme delle *somme inferiori* e Σ delle *somme superiori*

$$\sigma = \{s(\delta, f)\}_\delta, \Sigma = \{S(\delta, f)\}_\delta$$

si ha la che σ, Σ sono separate in $\mathbb{R}$, ovvero

$$\sup \sigma \leq \inf \Sigma$$

Osservando l'ultima proprietà, siamo pronti per definire l'*integrale di Riemann* per $\mathbb{R}^N$.

0C. Integrazione di Riemann su N-Rettangoli

Integrazione di Riemann su n-rettangoli

Integrazione di Riemann su n-rettangoli: definizione di Riemann-integrabilità su $\mathbb{R}^N$, l'integrale. Osservazione: funzione limitata non implica Riemann-integrabile (Dirichlèt generalizzato). Teorema: condizione sufficiente per Riemann-integrabilità. Proprietà delle funzioni Riemann-integrabili.

---

0. Voci correlate

- Integrabilità secondo Riemann
- Proprietà delle Funzioni Integrabili Secondo Riemann

1. Definizione di Riemann-Integrabilità su $\mathbb{R}^N$

#Definizione

Definizione (Riemann-integrabilità su $\mathbb{R}^N$).

Sia $f : R \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ limitata con R un N-rettangolo. Sia σ la classe delle sue suddivisioni inferiori e Σ quelle superiori.

Allora se vale l'uguaglianza

$$\sup \sigma = \inf \Sigma$$

si dice che f è *Riemann-integrabile* su R e la quantità dell'uguaglianza si dice l'*integrale* e lo si denota con

$$\sup \sigma = \inf \Sigma = \boxed{\int_R f \iff \int \ldots \int_R f(x_1, \ldots, x_N)\, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_N}$$

Inoltre si denota la *classe delle funzioni Riemann-integrabili su R* come

$$f \in \mathcal{R}(R)$$

#Esempio

Esempio (caso bidimensionale e tridimensionale).

Nella maggior parte dei casi faremo calcoli per $N \in \{2, 3\}$. Quindi definiremo gli integrali secondo la *base canonica*, ovvero come

$$\int_R f \to \iint_R f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \ \vee \ \iiint_R f(x, y, z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$$

#Osservazione

Osservazione (la funzione di Dirichlet generalizzata).

Notiamo che *non tutte le funzioni limitate su N-rettangoli* debbono essere *Riemann-integrabili*. Infatti definiamo la *funzione di Dirichlet* (Osservazione 6 (esempio di funzione non integrabile)) sull'N-rettangolo R.

$$D(\underline{x}) := \begin{cases} 1, \underline{x} \in R \cap \mathbb{Q}^N \\ 0, \underline{x} \notin R \cap \mathbb{Q}^N \end{cases}$$

Ho che

$$\forall \delta \in \Delta(R), S(\delta, D) = m_N(R); s(\delta, D) = 0$$

Ovvero l'*estremo inferiore* è sempre raggiunto in 0, per qualsiasi suddivisione scelgo; invece l'*estremo superiore* raggiunge sempre 1. Allora $D \notin \mathcal{R}(R)$. ■

2. Condizioni sufficienti per Riemann-integrabilità

Dall'osservazione precedente, abbiamo la necessità di trovare delle *condizioni sufficienti* per la *Riemann-integrabilità* delle funzioni.

#Teorema

Teorema (le funzioni continue sono Riemann-integrabili).

Data un campo scalare $f : R \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ limitata con R rettangolo, abbiamo l'implicazione

$$f \in \mathcal{C}^0(R) \implies f \in \mathcal{R}(R)$$

Ovvero le continue sono Riemann-integrabili.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 4 (le funzioni continue sono Riemann-integrabili)
Omessa. La dimostrazione si basa sul caso unidimensionale (Teorema 2 (di integrabilità delle funzioni continue)), per passare a $N \in \mathbb{N}$ bisogna procedere su induzione. ■

3. Proprietà delle funzioni Riemann-integrabili

Troviamo delle proprietà delle funzioni *Riemann-integrabili*.

#Proposizione

Proposizione (proprietà delle funzioni Riemann-integrabili).

Sia $f, g : R \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{R}(R)$. Allora valgono le seguenti proprietà.

i. *linearità*: per parametri reali $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vale che

$$\int_R (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_R f + \beta \int_R g$$

ii. *monotonia*

$$f > g \iff \int_R f > \int_R g$$

iii. *valore assoluto*

$$|f| \in \mathcal{R}(R), \left|\int_R f\right| \leq \int_R |f|$$

iv. *prodotto*

$$f \cdot g \in \mathcal{R}(R)$$

A. INTEGRAZIONE SU N-RETTANGOLI

A1. Teorema di Fubini

Teorema di Fubini

Teorema di Fubini (caso bidimensionale). Enunciato.

---

0. Voci correlate

- Integrazione di Riemann su n-rettangoli

1. Teorema di Fubini

IDEA. Voglio ricondurre gli integrali *multipli* al *caso unidimensionale*; in particolare voglio *"iterare"* gli iterali singoli.

#Teorema

Teorema (di Fubini).

Sia $f : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] = R \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{R}(R)$. Posta la restrizione $f_{|\bar{x}} : [a_2, b_2] \longrightarrow \mathbb{R}$ come

$$\forall \bar{x} \in [a_1, b_1] \to f_{|\bar{x}} := f(\overline{x}, y) = f(y)$$

Allora vale che integrando, l'integrale di $f_{|\bar{x}}$ al variare di y, al variare di x otteniamo lo stesso valore del doppio integrale $\iint_R f$. Ovvero

$$\boxed{\iint_R f(x,y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} f(x,y)\ \mathrm{d}y \right)\ \mathrm{d}x}$$

#Osservazione

Osservazione (scambiando le variabili di integrazione il teorema vale ugualmente).

Notiamo che scambiando gli estremi di integrazione $[a_1, b_1] \to [a_2, b_2]$ e la variabile d'integrazione $\mathrm{d}x \to \mathrm{d}y$ il teorema vale ugualmente. Ovvero non vale l'ordine con cui facciamo gli *integrali iterati*.

Quindi scegliere bene l'ordine con cui facciamo gli integrali iterati! In certi casi abbiamo degli integrali *difficili*, negli altri ci semplifichiamo le vite.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 1 (di Fubini)

Omessa, poiché geometricamente intuitiva.■

A2. Formule di Riduzione in 3D

Formule di Riduzione in 3D

Tecniche integrazione in tre variabili: formule di riduzione per corde e per sezioni.

---

0. Voci correlate

- Teorema di Fubini
- Integrazione di Riemann su n-rettangoli

1. Riduzione per Corde

IDEA. Vogliamo avere un'equivalente del *teorema di Fubini* nel caso $\mathbb{R}^{N=3}$. Dato che ho più *"gradi di liberta"* nel fissare i punti o corde, ho più metodi. Partiamo dal caso in cui iniziamo con la *corda*.

#Teorema

Teorema (formula di riduzione per corde).

Sia $R = \bigtimes_{i=1,2,3}[a_i, b_i]$ un *3-rettangolo*. Sia $f : R \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{R}(E)$.

Prendendo il *"complementare della corda"*, ovvero l'insieme $(\overline{x}, \overline{y}) \in S = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, ho che la *restrizione* di f su questa corda $f_{|(\overline{x},\overline{y})}$ è *integrabile secondo Riemann* su $[a_3, b_3]$ e vale la formula

$$\boxed{\iint_S \left(\int_{a_3}^{b_3} f(z)\ \mathrm{d}z\right) \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \iiint_R f(x, y, z)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z}$$

Ovvero l'*integrale iterato* ha lo stesso valore dell'*integrale triplo*.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 1 (formula di riduzione per corde)
Omessa. Si può facilmente convincere di questo teorema con un'approccio geometrico-visivo (vedere l'osservazione sottostante). ■

#Osservazione

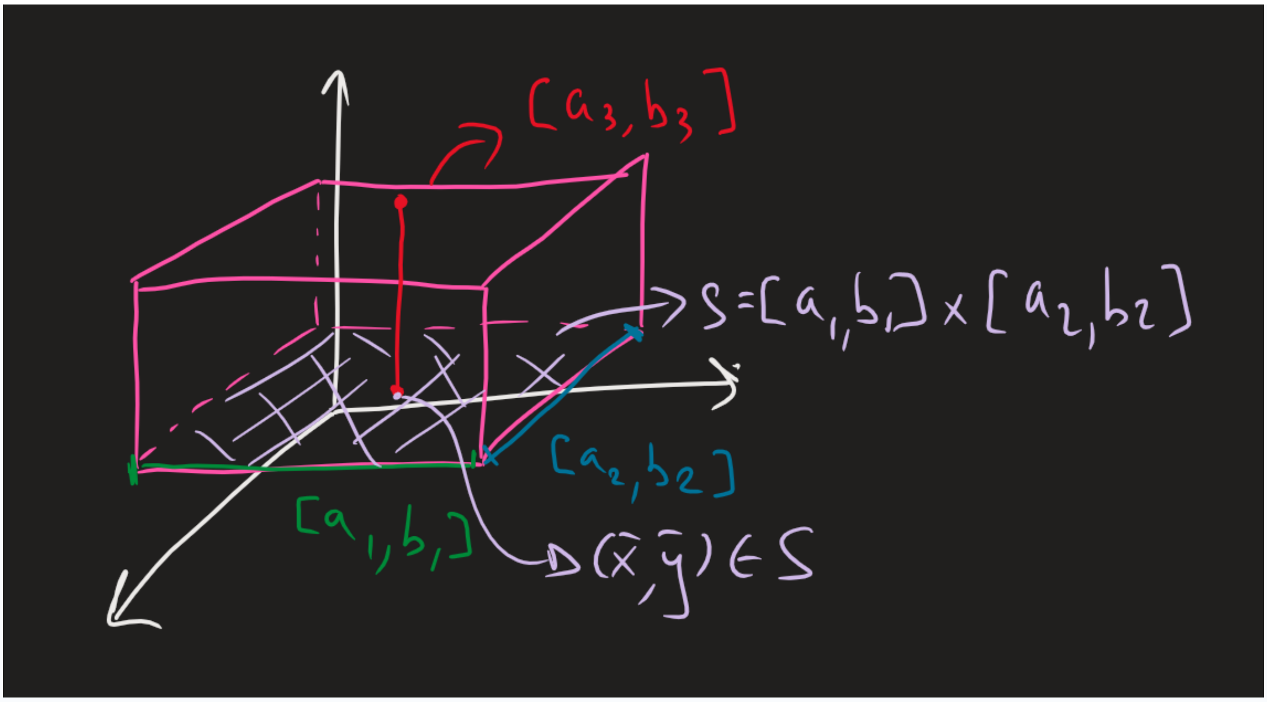
Osservazione (osservazioni geometriche).

L'idea di questo teorema è quello di *prendere* la *corda* $[a_3, b_3]$ e di calcolare la sua misura integrandolo, poi per far variare sul resto del dominio S. Quindi stiamo facendo ricondurre l'integrale triplo in un *integrale singolo* poi in un *integrale doppio*; $\iiint \to \iint \circ \int$.

Da queste considerazioni abbiamo che:

- Questo teorema è facilmente generalizzabile *per induzione* su $\mathbb{R}^N$
- Questo teorema vale ugualmente scambiando le assi (o le basi canoniche) x, y, z.

FIGURA 1.1. (*Riduzione per corde*)



2. Riduzione per Sezioni

Adesso, al posto di prendere *"corde unidimensionali"* prendiamo *"sezioni bidimensionali"*.

#Teorema

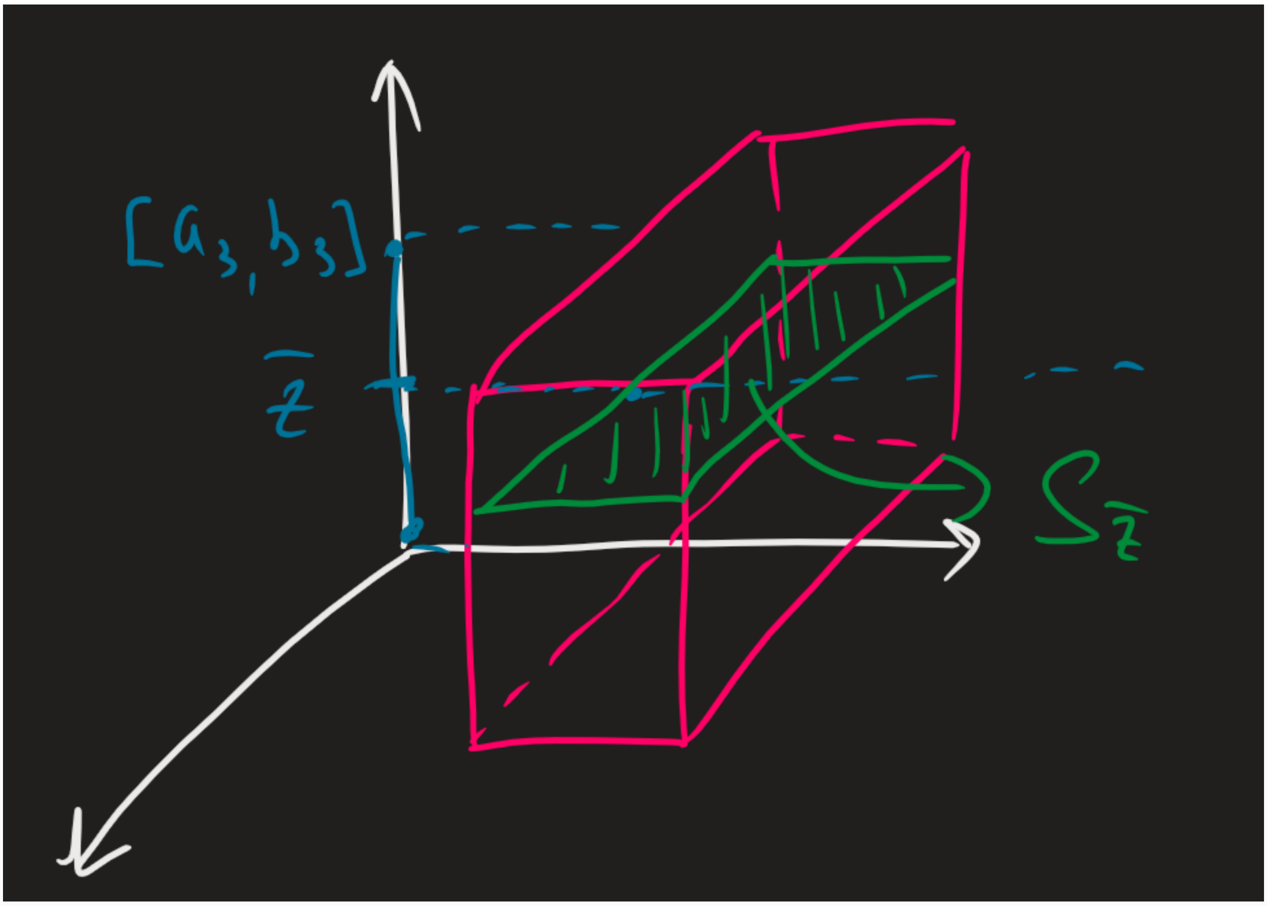
> Teorema (riduzione per sezioni).
>
> Sia $f : R = \times_{i=1,2,3}[a_i, b_i] \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{R}(R)$, con $\bar{z} \in [a_3, b_3]$ fissato.
>
> Allora considerando la restrizione $f_{|\{\bar{z}\}}$ ho che essa è *integrabile secondo Riemann* sulla *sezione* $S = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ vale la formula
>
> $$\boxed{\int_{a_3}^{b_3} \left(\iint_S f(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}z = \iiint_R f(x, y, z) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z}$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 3 (riduzione per sezioni)

Analogo al teorema precedente. Le osservazioni si applicano ugualmente. ■

FIGURA 1.1. (*Riduzione per sezioni*)



B. INTEGRAZIONE SU DOMINI ARBITRARI

B1. Estensione dei Domini Arbitrari su N-Rettangoli

Estensione dei Domini Arbitrari in n-Rettangoli

Considerazione preliminare per integrazione in più variabile su domini arbitrari: prolungamento delle funzioni con domini arbitrari.

---

0. Voci correlate

- Integrazione di Riemann su n-rettangoli

1. Integrazione su Domini Arbitrari

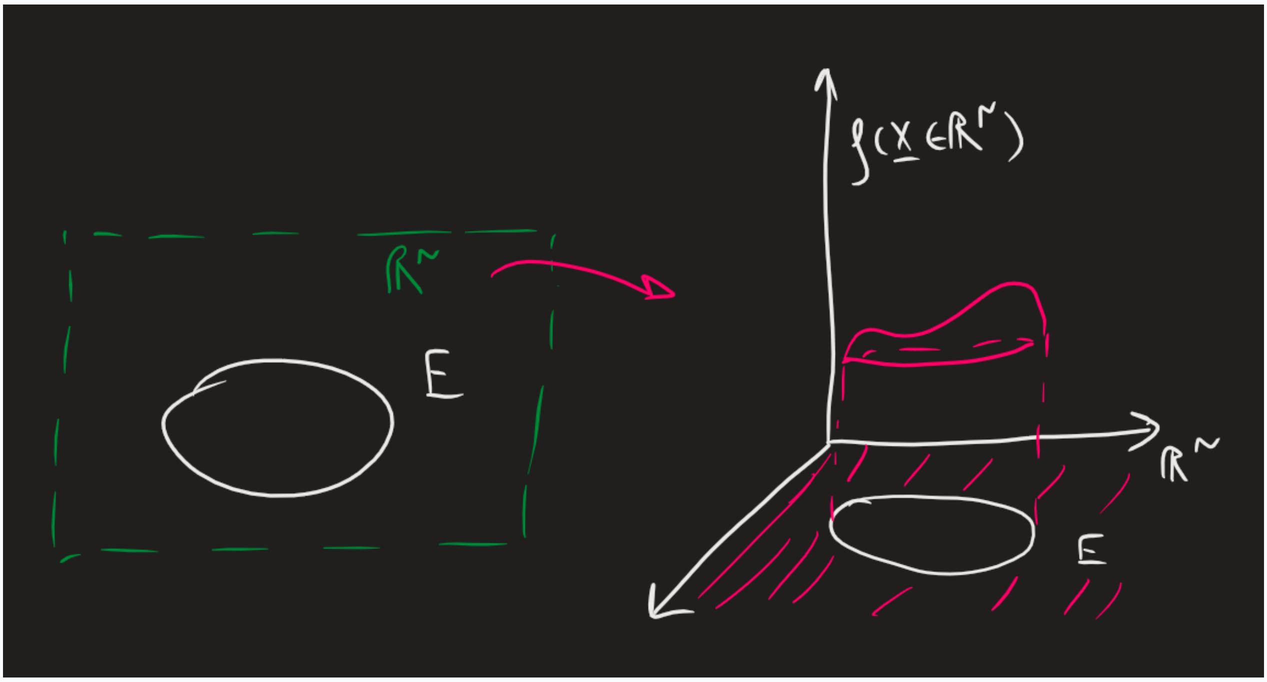
#Definizione

> Definizione (prolungamento della funzione).

Sia $f : E \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ una *funzione limitata*. Definiamo $f_\circ : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ come il suo *prolungamento del suo dominio* come

$$f_\circ(\underline{x}) = \begin{cases} f(\underline{x}), \underline{x} \in E \\ 0, \underline{x} \notin E \iff \underline{x} \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}^N}(E) \end{cases}$$

FIGURA 1.1. (*L'idea del prolungamento della funzione*)



#Definizione

Definizione (integrabilità su domini arbitrari).

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$ tale che esista un *n-rettangolo* R che contenga E. Ovvero, $\exists R \sim \times_{i=1}^N [a_i, b_i] : E \subseteq R$.

Se vale che $f_\circ \in \mathcal{R}(R)$ (ovvero la funzione prolungata $f_\circ$ è *integrabile* sul rettangolo R), allora si dice che f è *integrabile su* E e si pone

$$\int_E f := \int_R f_\circ$$

Per poter parlare bene dell'integrale $\int_R f_\circ$, ci servirà prima parlare un po' di *misura* (Cenni alla Misura di Peano-Jordan).

B2. Cenni alla Teorema della Misura

Cenni alla Misura di Peano-Jordan

Cenni alla teoria della misura di Peano-Jordan: definizione di misurabilità, proprietà della misura, caratterizzazione degli misurabili. Insiemi misurabili compatti e insiemi compatti misurabili trascurabili. Applicazioni alla teoria di integrazione in più variabili.

---

1. Misurabilità di Peano-Jordan

#Definizione

Definizione (misurabilità secondo Peano-Jordan e misura).

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$ *limitata*. Si dice che E è *misurabile secondo Peano-Jordan* se la *funzione caratteristica* χ_E è integrabile su E, ovvero $\chi_E \in \mathcal{R}(E)$.

In tal caso si dice $m_N(E)$ la *misura* di E e la si pone come

$$m_N(E) := \int_E \chi_E = \int_E 1$$

Inoltre la *classe delle funzioni misurabili secondo Peano-Jordan* in un sottoinsieme di X si denota con $\mathcal{M}(X)$

#Osservazione

Osservazione (casi di insiemi non misurabili).

Abbiamo casi di *insiemi non misurabili*. Come esempio si può prendere

$$E := \left(\mathbb{Q}^N \cap \bigtimes_{i=1}^{N}[0,1]\right)$$

Ovvero l'insieme dei razionali in un n-rettangolo del tipo $[0,1] \times \ldots \times [0,1]$: questa è una specie di *"insieme di Dirichlet"* generalizzata su $\mathbb{R}^N$.

#Teorema

Teorema (di caratterizzazione degli misurabili).

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$ un insieme limitato. Allora vale l'equivalenza

$$E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N) \iff m_N(\partial E) = 0$$

2. Proprietà della Misura di Peano-Jordan

#Proposizione

Proposizione (proprietà della misura di Peano-Jordan).

Sia m_N la *misura di Peano-Jordan* su sottoinsiemi di $\mathbb{R}^N$. Allora vale che:

i. Se R è un *n-rettangolo* (Definizione 1 (N-rettangolo)), allora vale che essa è misurabile secondo Peano-Jordan e che

$$m_N(R) = \prod_{i=1}^{N} (b_i - a_i)$$

(stiamo facendo *"base per altezza"*, in sostanza).
ii. $\emptyset$ è *misurabile secondo Peano-Jordan* e vale che la sua misura è nulla: $m_N(\emptyset) = 0$
.
iii. *Chiusura della misurabilità rispetto all'unione, intersezione e sottrazione*

$$A, B \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N) \implies \begin{cases} A \cap B, A \cup B, A \diagdown B \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N) \\ m_N(A \cup B) = m_N(A) + m_N(B) - m_N(A \cap B) \\ m_N(A \diagdown B) = m_N(A) - m_N(A \cap B) \end{cases}$$

iv. *Chiusura della misurabilità rispetto all'ordinamento*

$$A, B \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N), A \subseteq B \implies m_N(A) \leq m_N(B)$$

3. Insiemi Compatti Misurabili

#Definizione

Definizione (insieme compatto misurabile).

Un insieme E *compatto* in X e *misurabile in* X si dice *compatto-misurabile* in X. Ovvero se

$$\mathcal{M}(X) \ni E \Subset X$$

#Teorema

Teorema (condizione sufficiente per l'integrabilità di un insieme).

Si ha che per un $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N) \ni E \Subset \mathbb{R}^N$ *compatto misurabile* e per una *funzione continua* $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, questa è *integrabile* su R. Ovvero

$$f : \mathcal{M}(\mathbb{R}^N) \ni E \Subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^0(E) \implies f \in \mathcal{R}(E)$$

#Osservazione

Osservazione (gli insiemi compatti non sono sempre misurabili).

Non è garantita l'implicazione $K \Subset X \implies K \in \mathcal{M}(X)$. Infatti, proponiamo il seguente caso *unidimensionale* su $X = \mathbb{R}$.

Sia $\mathbb{Q} := \{q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots\}$. Definendo l'aperto

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} B\left(q_i, \frac{1}{2^{i+2}}\right)$$

ho il suo *complementare* $C = \mathbb{R} \diagdown A$ chiuso. Adesso, prendendo il compatto $K = C \cap [0,1] \Subset \mathbb{R}$, si può dimostrare che K è *compatto* ma *non* misurabile secondo *Peano-Jordan*. Infatti abbiamo che la misura della sua frontiera è non-nulla:

$$m_1(\partial K) \neq 0 \implies K \notin \mathcal{M}(\mathbb{R})$$

4. Insiemi Compatti Trascurabili

#Definizione

Definizione (insieme trascurabile secondo Peano-Jordan).

Un insieme si dice *trascurabile secondo Peano-Jordan* (o semplicemente *trascurabile*) se ha misura nulla, ovvero $m_N(T) = 0$.

#Teorema

Teorema (integrabilità degli insiemi con parti trascurabili).

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$ un insieme limitato con $T \subset E : m_N(T) = 0$ (ovvero T trascurabile), poi siano definite le funzioni $f : E \longrightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{R}(E)$, $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ con f, g limitate tali che

$$\forall x \in E \diagdown T, f(x) = g(x)$$

(ovvero le funzioni sono *uguali* sulle parti non trascurabili).

Allora $g \in \mathcal{R}(E)$ e vale che gli integrali sono gli stessi:

$$\int_E f = \int_E g$$

L'idea del teorema appena osservato è di poter *estendere* l'integrazione su più insiemi (tra cui, ad esempio $f_\circ$). Ad esempio voglio integrare f sul disco D; se ho g definita sull'aperto D° tale che $g = f$ e $m_2(\partial D) = 0$, allora posso trattare gli integrali ugualmente $\int_D f = \int_{D^\circ} g$.

B3. Formula di Riduzione su Insiemi Normali in 2D

Formula di Riduzione su Insiemi Normali in 2D

Definizione di insieme normale rispetto all'asse x (o y). Proposizione fondamentale: gli insiemi normali sono misurabili. Teorema: formula di riduzione su insiemi normali.

---

0. Voci correlate

- Integrazione di Riemann su n-rettangoli
- Cenni alla Misura di Peano-Jordan

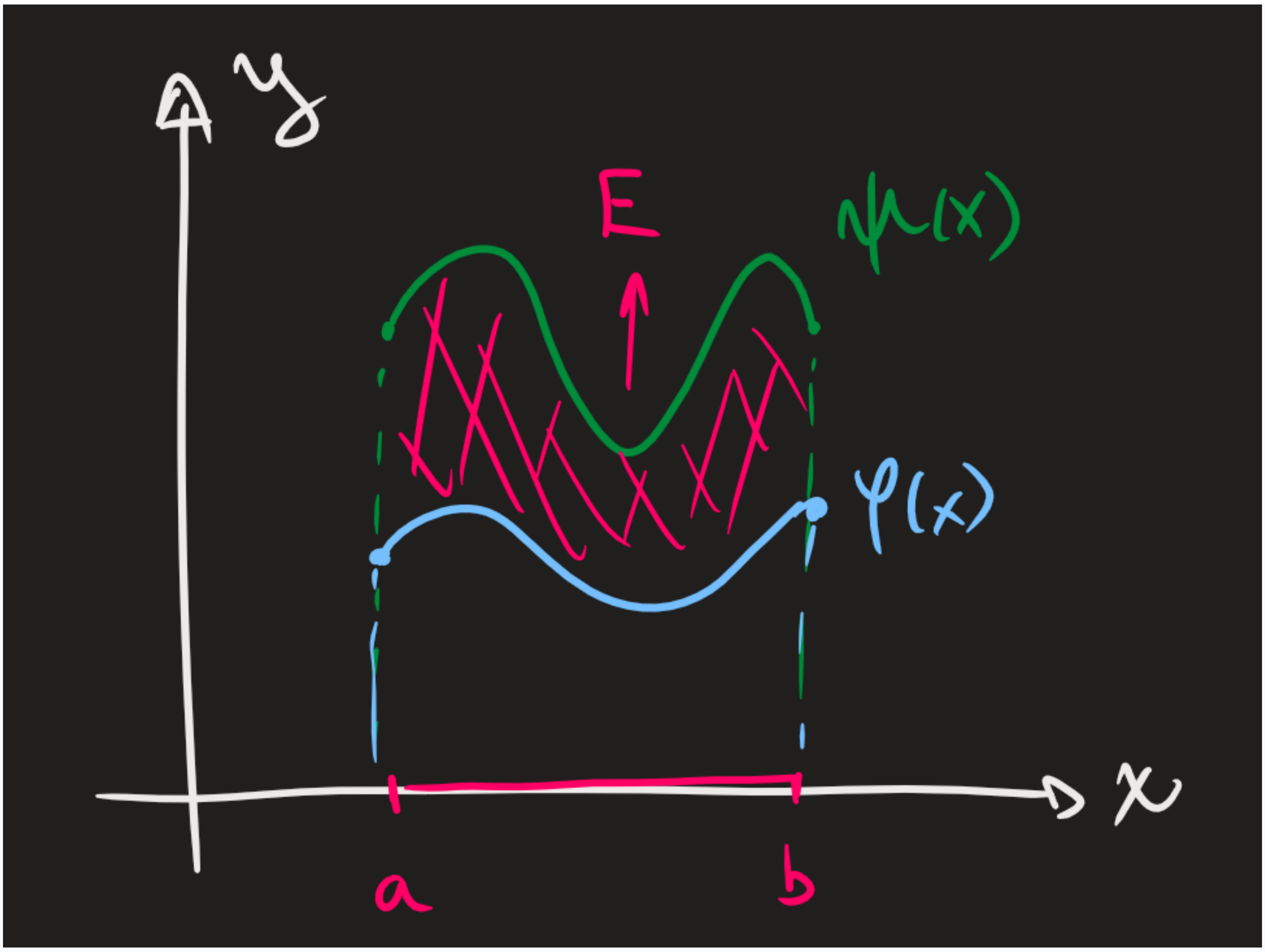
1. Insiemi Normali Rispetto alle Assi

IDEA. Come *"primo passo"* verso l'integrazione su insiemi arbitrari, possiamo generalizzare la nozione del *rettangolo* e passare al *"rettangolo distorto"* in una maniera arbitraria: così posso usarci il *teorema di Fubini* (Teorema di Fubini).

#Definizione

> Definizione (insieme normale rispetto all'asse x).
>
> Siano $\varphi, \psi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^0$ tale che $\phi \leq \psi$ in $[a, b]$. L'insieme $E \subseteq \mathbb{R}^2$ definito come
>
> $$E := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\right\}$$
>
> si dice *"normale rispetto all'asse x"* (la definizione vale analogamente scambiando x con y, in questo caso è normale rispetto all'asse y).

FIGURA 1.1. (*Insiemi Normali*)



#Proposizione

Proposizione (proprietà fondamentale dei normali).

Si ha che se E è *un insieme normale rispetto all'asse x o y*, allora essa è *misurabile secondo Peano-Jordan*.

2. Integrazione su Insiemi Normali

Adesso si tratta di *"applicare Fubini"* su E, dato che possiamo *"estenderlo"* ad un rettangolo con alcuni punti di trascurabilità.

#Teorema

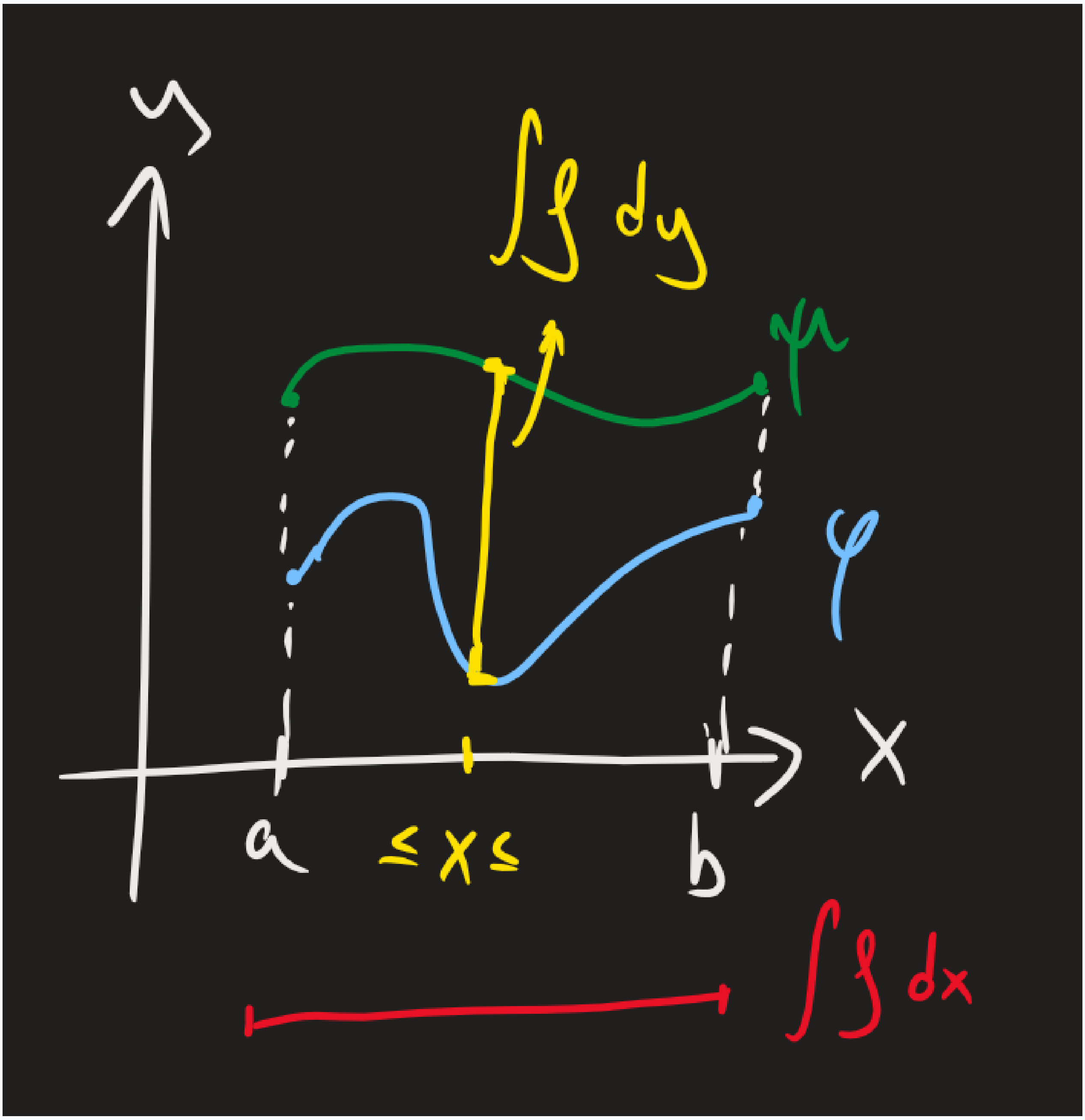
Teorema (formula di riduzione su insiemi normali).

Sia $f : E \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ con E un *insieme normale* rispetto all'asse x (o y), definita dalle funzioni $\varphi, \psi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$.

Allora $f \in \mathcal{R}(E)$ e vale la formula

$$\boxed{\begin{aligned}\iint_E f(x,y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y &= \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(y)\ \mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x \\ {\color{red}{''}} &{\color{red}= \int_a^b \left(\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x)\ \mathrm{d}x\right) \mathrm{d}x}\end{aligned}}$$

FIGURA 2.1. (*Fubini su normali*)



B4. Formula di Riduzione su Insiemi Normali in 3D

Formula di Riduzione su Insiemi Normali in 3D

Formule di riduzione su insiemi normali in $\mathbb{R}^3$: definizione di insieme normale rispetto ad un piano, formule di riduzione per corde e per sezioni.

---

0. Voci correlate

- Formule di Riduzione in 3D

1. Riduzione per Corde

Adesso vediamo una serie di formule per il *caso* $\mathbb{R}^{N=3}$: al posto di curve che definiscono *insiemi normali* abbiamo *superfici*. Vediamo il caso *analogo* alla *riduzione per corde* (Teorema 1 (formula di riduzione per corde)).

#Definizione

Definizione (insieme normale rispetto ad un piano).

Sia K un *insieme compatto-misurabile secondo Peano-Jordan* in $\mathbb{R}^2$ (1), su cui definiamo le funzioni $\varphi, \psi : K \longrightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^0(K)$, tali che $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2, \varphi(x,y) \leq \psi(x,y)$.

Allora l'insieme

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in K, \varphi(x,y) \leq z \leq \psi(x,y)\right\}$$

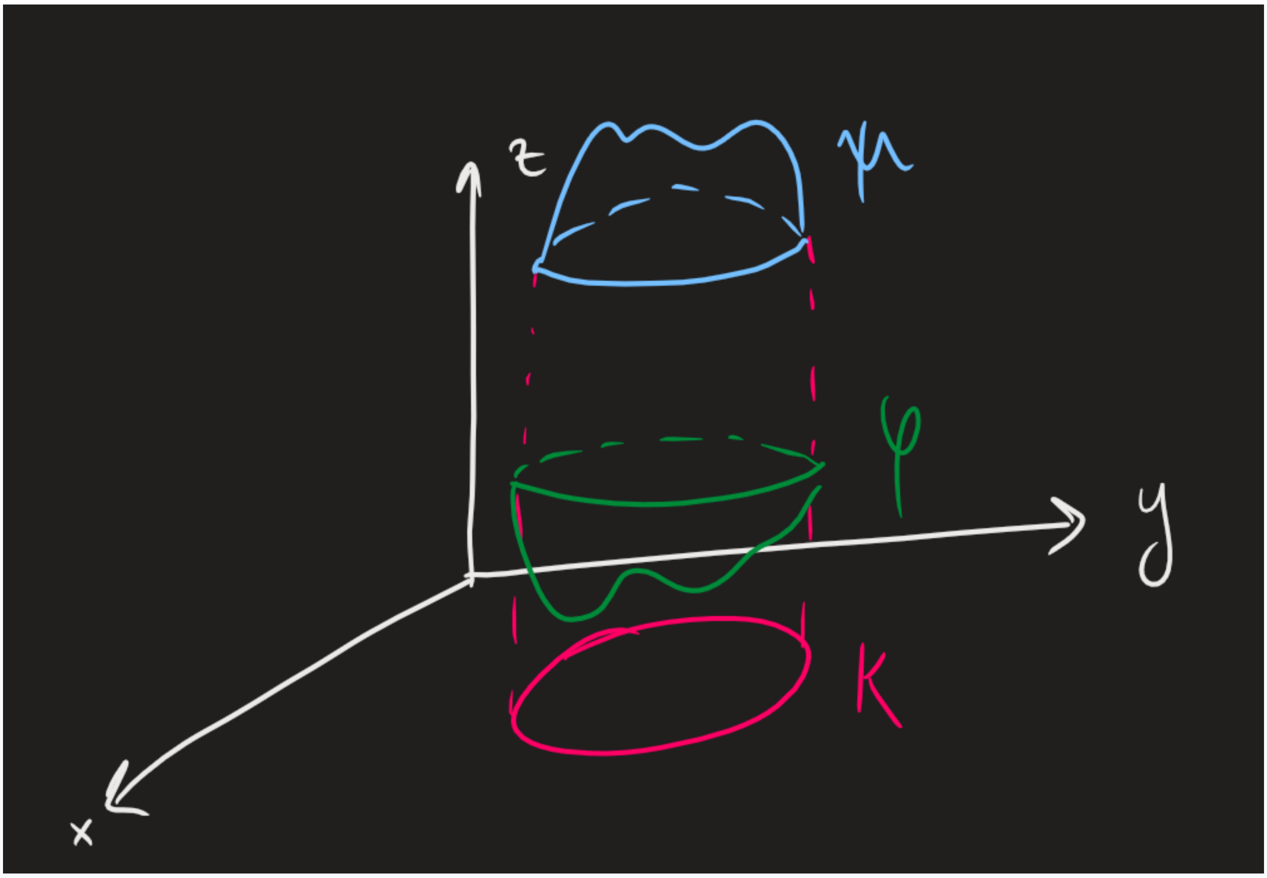
Si dice *normale rispetto al piano* xy. Scambiando eventuali variabili, possiamo definire insiemi normali rispetto al piano xz, yz.

#Proposizione

Proposizione.

Gli insiemi normali in $\mathbb{R}^3$ sono *compatti-misurabili in* $\mathbb{R}^3$.

FIGURA 1.1. (*Insiemi normali rispetto al piano xy*)



#Teorema

Teorema (formula di riduzione per corde).

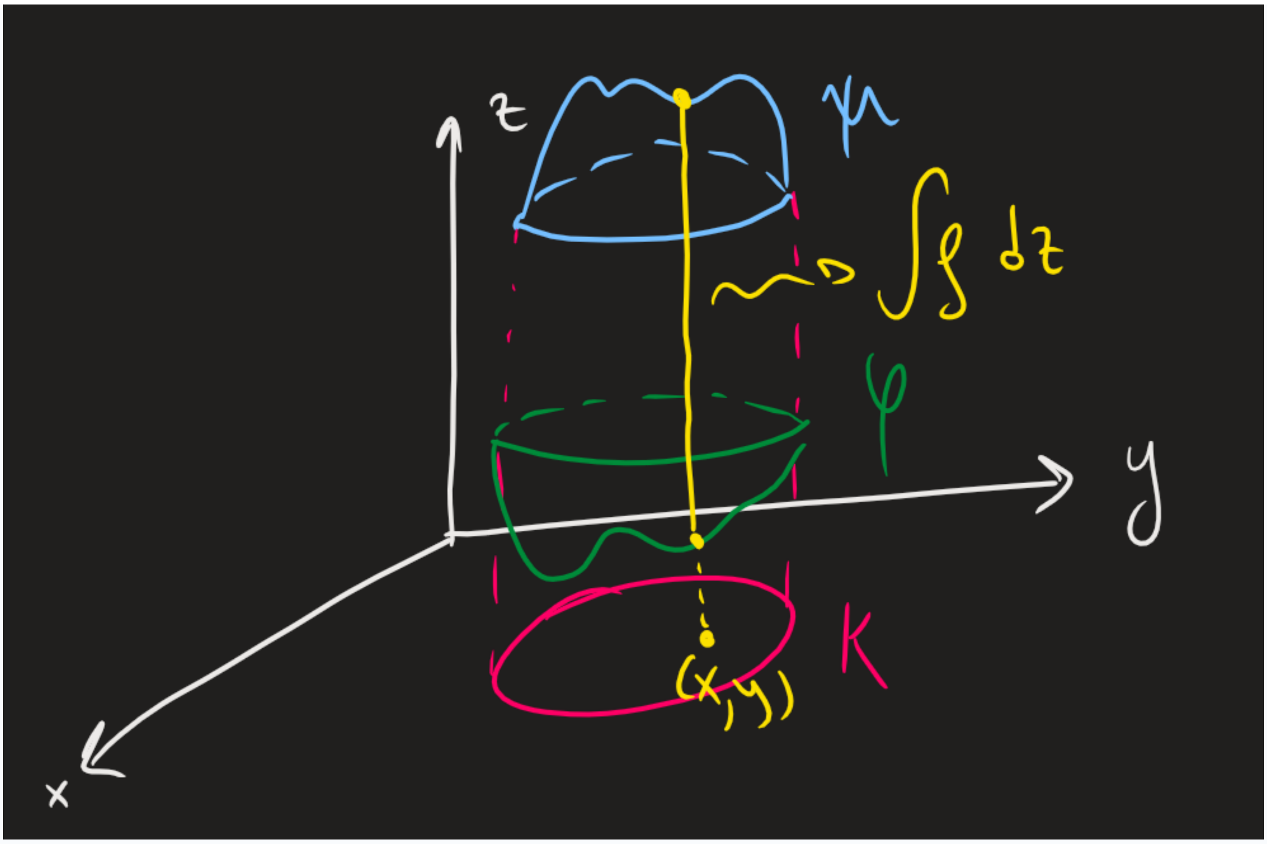
Sia $f : E \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^0$ con E un *insieme normale* rispetto al piano xy, definito da ψ, φ su K.

Allora $f \in \mathcal{R}(E)$ e vale la formula

$$\boxed{\iiint_E f(x,y,z)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z = \iint_K \left(\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(z)\ \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y}$$

L'idea del teorema è quello di *fissare un punto* (x,y) in K e integrare la restrizione $f_{|(x,y)}$ sulla retta z.

FIGURA 1.2. (*Integrazione per corde*)



2. Riduzione per Sezioni

#Definizione

Definizione (insieme sezionabile in 3D).

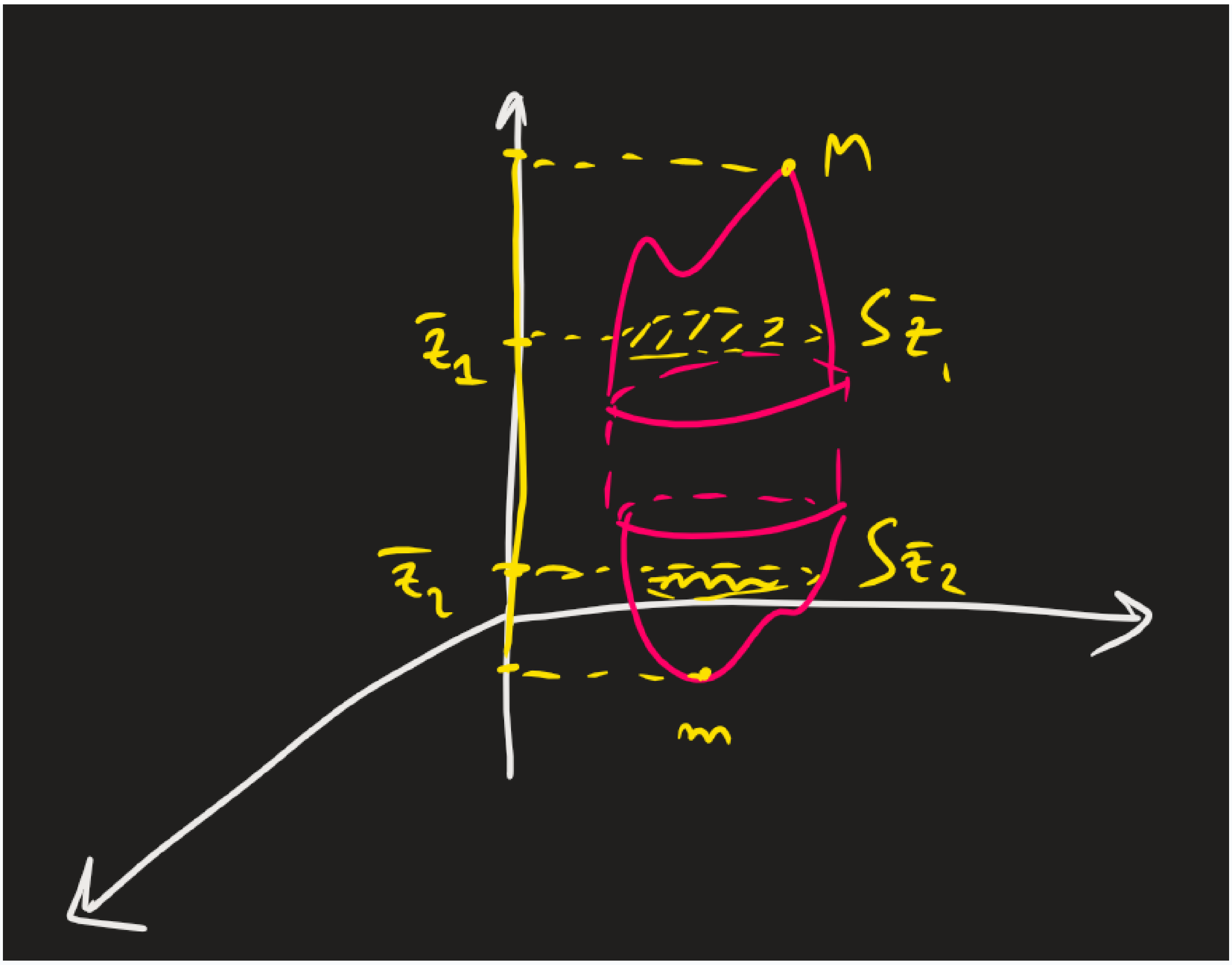
Sia E un *insieme compatto-misurabile* in $\mathbb{R}^3$. Si dice che E è *sezionabile rispetto all'asse* z se ponendo

$$\begin{cases} m_z := \min\{z \in \mathbb{R} : (x, y, z) \in E\} \\ M_z := \max\{z \in \mathbb{R} : (x, y, z) \in E\} \end{cases}$$

si ha che $m_z < M_z$ e vale che prendendo un valore arbitrario $\bar{z} \in [m_z, M_z]$ da cui si la sua sezione associata $S_{\bar{z}} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, \bar{z}) \in E\}$ essa è misurabile (ovvero $S_{\bar{z}} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$).

$$\forall \bar{z}, S_{\bar{z}} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$$

FIGURA 2.1. (*Insieme sezionabile*)



#Teorema

> **Teorema (formula di riduzione per sezioni).**
>
> Sia $f : E \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^0(E)$ con E *sezionabile rispetto all'asse* z, sia posta $S_{\bar{z}}(E)$ una sezione arbitraria del dominio, con $m_z \leq \bar{z} \leq M_z$.
>
> Allora vale che $f \in \mathcal{R}(E)$ (ovvero *Riemann-integrabile* su E) e vale la formula
>
> $$\boxed{\iiint_E f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_{m_z}^{M_z}\left(\iint_{S_{\bar{z}}(E)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z}$$
>
> L'idea è quella di prendere una *sezione*, integrarla poi per farla variare in z.

B5. Solidi di Rotazione

Solidi di Rotazione

Formalizzazione delle nozioni di geometria elementare: solidi di rotazione. Definizione e formula di Pappo-Guldino.

0. Voci correlate

- Integrazione di Riemann su n-rettangoli

1. Definizione di Solido di Rotazione

IDEA. Con la *geometria elementare* sappiamo che possiamo far *"ruotare"* degli oggetti bidimensionali lungo un'asse, per ottenere un *solido*. Vediamo come formalizzare tale nozione.

#Definizione

Definizione (solido di rotazione).

Siano $\varphi, \psi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^0[a, b]$ tali che

$$\forall x \in [a, b], 0 \leq \varphi(x) \leq \psi(x)$$

Allora posso definire l'*insieme normale* rispetto al piano π_{xz}

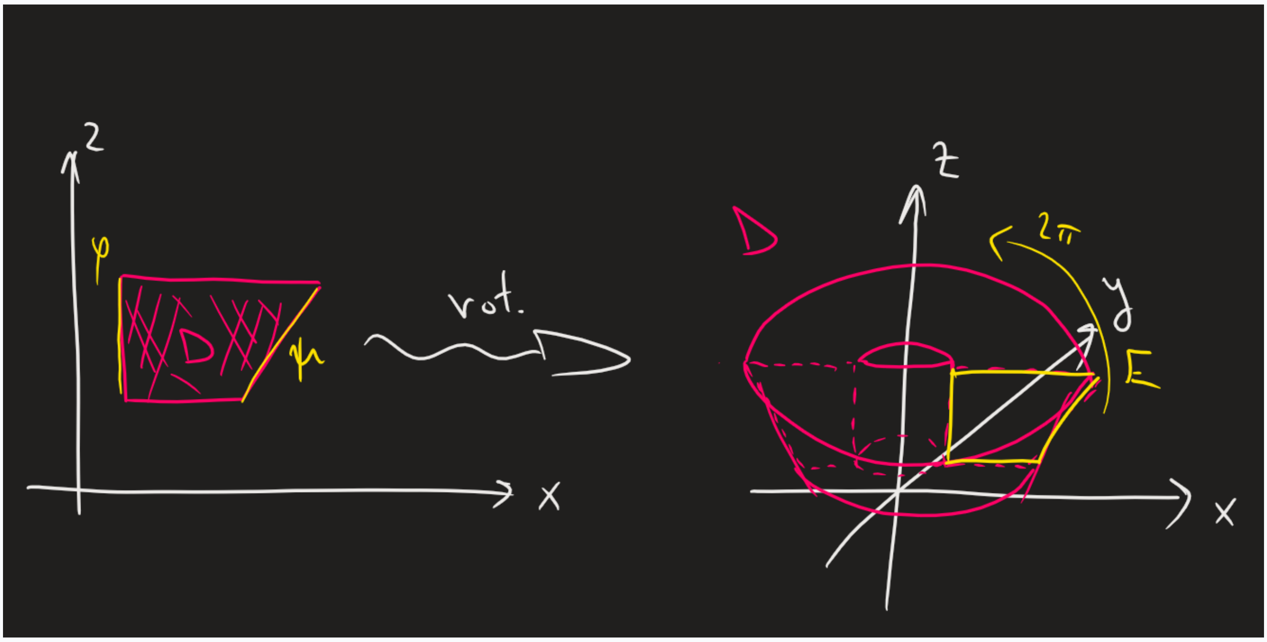
$$D = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : a \leq z \leq b \wedge \varphi(z) \leq x \leq \psi(z)\}$$

Adesso prendo questo insieme normale (che è una forma bidimensionale sul piano π_{xz}) e posso *"ruotarlo"* di 2π sull'asse z, dandoci l'insieme

$$\boxed{E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq z \leq b \wedge \varphi(z) \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq \psi(z)\right\}}$$

che si dice *"solido di rotazione in $\mathbb{R}^3$"*, ottenuto ruotando D attorno all'asse z di 2π.

FIGURA 1.1. (*Esempio: tronco bucato e tagliato generato da un trapezio*)



2. Formula di Pappo-Guldino

#Teorema

> Teorema (formula di Pappo-Guldino).
>
> Sia E un *solido di rotazione* in $\mathbb{R}^3$, ottenuto ruotando D nell'asse z di 2π.
>
> Allora E è *misurabile secondo Peano-Jordan* (1) con la sua *misura* il suo volume V_E, e vale la formula
>
> $$\boxed{m_3(E) = V_E = 2\pi \iint_D x \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}z}$$

C. INTEGRAZIONE SU CURVE E SUPERFICI

C1. Misura e integrazione su Curve

Misura e Integrazione su Curve

Misura e integrazione su curve regolari: definizione della lunghezza per una poligonale, definizione di lunghezza. Teorema di caratterizzazione per la lunghezza delle curve. Integrale di linea su campi scalari.

---

0. Voci correlate

- Curve Regolari

1. La Poligonale di una Curva

MOTIVAZIONE. Voglio esprimere la *lunghezza* di *segmenti parametrizzati* (ovvero curve). Siano $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^2$ dei vettori distinti: consideriamo la secante dei due punti (ovvero il segmento con estremi $\underline{x}, \underline{y}$). Una sua possibile rappresentazione parametrica è $\gamma(t) = (\underline{x} + t(\underline{y} - \underline{x}))$, con $t \in [0,1]$: naturalmente ho che la sua lunghezza è la misura $\|\underline{x} - \underline{y}\|$. Posso *"formalizzare"* questo scrivendo $l(\gamma) = \int_{[0,1]} \|\underline{x} - \underline{y}\| \, \mathrm{d}t$: vediamo un modo per generalizzare questo concetto. Partiamo considerando delle *"approssimazioni segmentate"* di una curva.

#Definizione

Definizione (la poligonale di una curva).

Sia $\gamma : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^N$ una *curva regolare in forma parametrica*. Consideriamo una *partizione* δ di I data dai punti $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$.

Definisco la *poligonale* $\pi(\delta_I)$ come la *curva* individuata dai punti della *composizione*

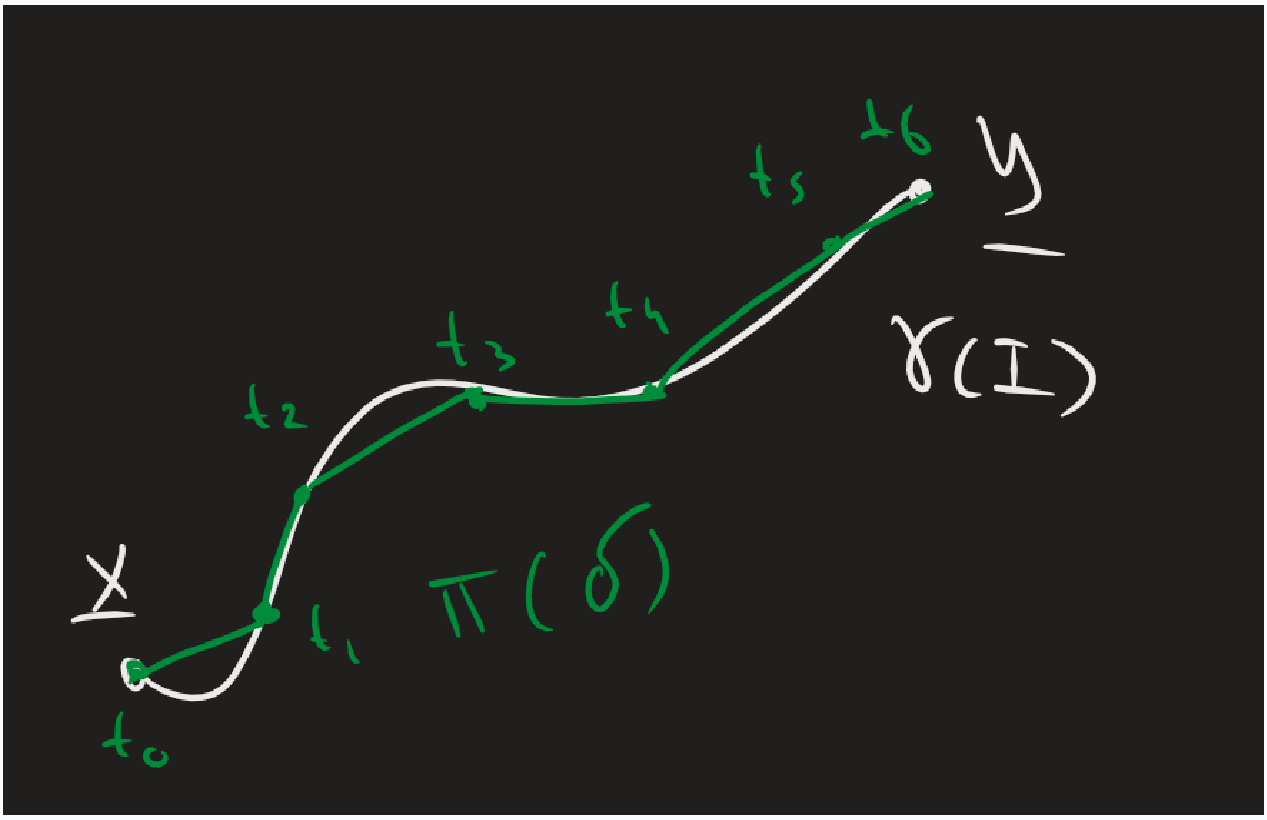
$$\pi(\delta_I) := (\gamma(t_0), \ldots, \gamma(t_n))$$

Abbiamo banalmente che la sua *lunghezza* è la sommatoria

$$l(\pi(\delta_I)) = \sum_{i=1}^{n} \|\gamma(t_i - 1) - \gamma(t_i)\|$$

Inoltre denotiamo l'insieme delle composizioni δ_I con $\delta_I \in \Delta$.

FIGURA 1.1. (*L'idea della poligonale*)



2. Misura di una Curva

Come fatto con gli *integrali unidimensionali*, possiamo passare all'*estremo superiore* per ottenere la lunghezza (ovvero la *"miglior approssimazione"* per una curva rappresenta la lunghezza della curva stessa).

#Definizione

Definizione (lunghezza di una curva).

Sia $\gamma : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^N$ una *curva regolare in forma parametrica*. Si definisce la sua *lunghezza* come

$$l(\gamma) := \sup_{\delta \in \Delta} l(\pi(\delta))$$

Ciò serve così possiamo enunciare un *teorema di caratterizzazione*, per misurare la lunghezza delle curve. La dimostrazione sarà omessa.

#Teorema

Teorema (di caratterizzazione delle curve).

Sia $\gamma : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^N$ una *curva regolare in forma parametrica*. Si ha che la sua lunghezza $l(\gamma)$ è calcolabile con l'integrale

$$\boxed{l(\gamma) = \int_I \|\gamma'\| = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, \mathrm{d}t}$$

3. Integrale di Linea

Generalizziamo quanto detto sulla *lunghezza delle curve*: immaginiamo che vengano pure *"distorte"* da un campo scalare in più variabili.

#Definizione

Definizione (integrale di linea di una funzione su una curva).

Sia $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^N$ una *curva regolare in forma parametrica* e $f : E \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^0(E)$ un *campo scalare*, tali che $\gamma([a, b]) \subseteq E$ (naturalmente il sostegno della curva deve stare nel dominio, altrimenti è tutta fuffa).

Allora si definisce l'*integrale di linea di f su γ* come l'integrale

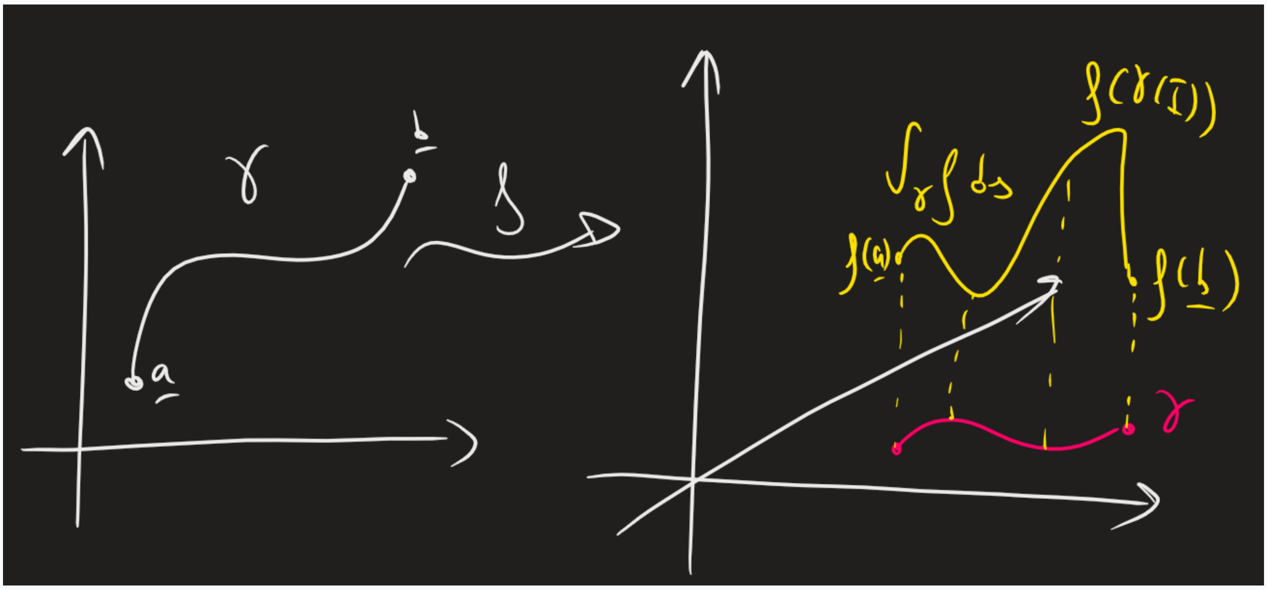
$$\int_\gamma f \, \mathrm{d}s$$

che è equivalente a

$$\boxed{\int_\gamma f \, \mathrm{d}s = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| \, \mathrm{d}t}$$

Ovvero prendiamo la misura della *curva* e la moltiplichiamo per la sua *"distorsione"*.

FIGURA 3.1. (*Integrale curvilineo*)



#Osservazione

Osservazione (casi particolari).

Per $f(\cdot) \equiv 1$ ho semplicemente la *lunghezza di una curva*; invece per $\gamma(t) \equiv 1$ ho l'*integrale di un solido*.

C2. Misura e integrazione su Superfici

Misura e Integrazione su Superfici

Misura e integrazione su superfici: aree di superfici regolari, integrali di superfici su campi scalari.

---

0. Voci correlate

- Superficie Regolare in Forma Parametrica
- Cenni sul Prodotto Vettoriale

1. Area di Superficie

MOTIVAZIONE. Vogliamo misurare le *superfici*, come fatto con la *lunghezza delle curve*. Partiamo dal seguente esempio: siano $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^2$ che formino una *base* per $\mathbb{R}^2$ (ovvero sia linearmente indipendenti che un sistema di generatori). Da qui si ha un *parallelogramma* generato da questi due vettori avente parametrizzazione $\sigma : K = [0,1]^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definito come $\sigma(u,v) := u\underline{a} + u\underline{b}$ (1), da cui si ha il sostegno $\Sigma := \sigma([0,1]^2)$ Per calcolare l'area $A(\Sigma)$ si calcola banalmente il valore assoluto del determinante della *matrice dei vettori* (2) definita come

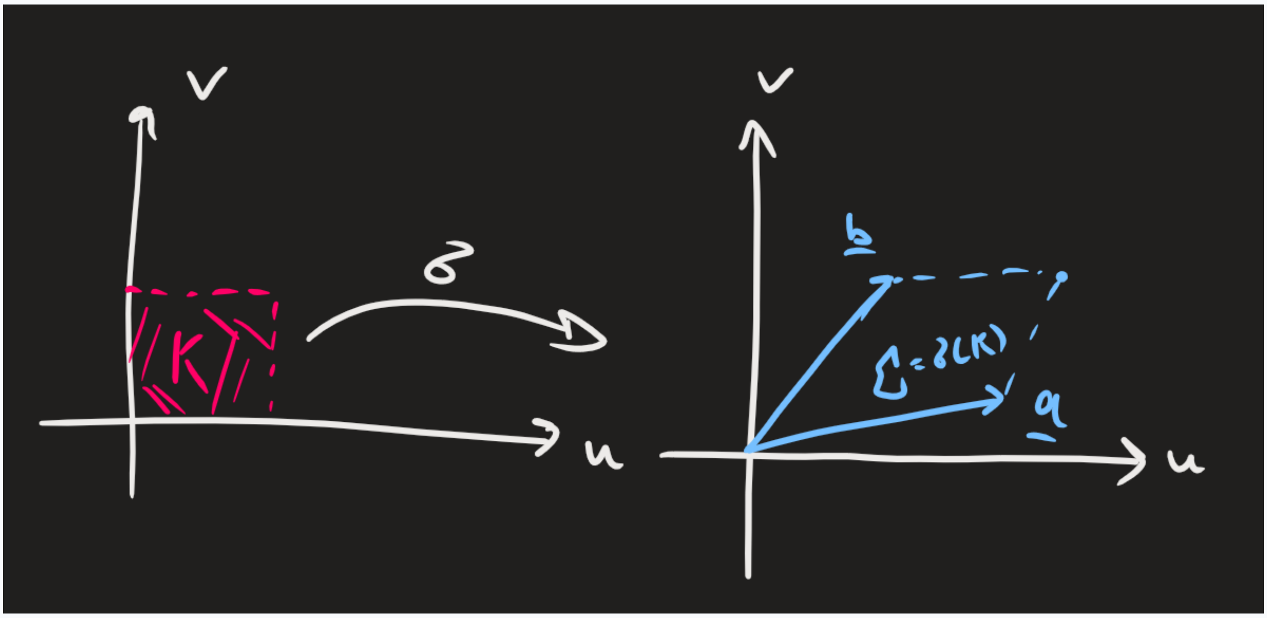
$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

Dopodiché possiamo *"generalizzare"* la seguente notazione come

$$A(\Sigma) = \left| \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \right| = \|\underline{a} \times \underline{b}\| = \iint_K \|\sigma_u \times \sigma_v\| \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v$$

Adesso vediamo di generalizzare il discorso sulle *superfici regolari*.

FIGURA 1.1. (*Discorso preliminare*)



#Definizione

Definizione (area di superficie).

Sia $\sigma : K \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una *superficie regolare in forma parametrizzata* (1) (dunque ammettono un *piano tangente*, 2) con K un *insieme compatto-misurabile secondo Peano-Jordan* (3).

Allora si definisce l'area del *sostegno* $A(\Sigma = \sigma(K))$ come l'integrale

$$\boxed{A(\Sigma) = \iint_K \|\sigma_u(u,v) \times \sigma_v(u,v)\| \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v}$$

#Osservazione

> Osservazione (differenza dal parallelogrammo).
>
> Notiamo che il *parallelogrammo* $\sigma : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ presentato all'inizio in realtà sarebbe una funzione del tipo $\sigma : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, solo che la *terza variabile* è bloccata, in quanto *costante* (quindi stavamo guardando la restrizione del codominio).

2. Integrale di Superficie

Generalizziamo quanto detto sulle *aree di superficie*, "mettendo in mezzo" i campi scalari.

#Definizione

> Definizione (integrale di superficie su campo scalare).
>
> Sia $\sigma : K \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una *superficie regolare* con K *compatto-misurabile* e sia $f : E \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^0(E)$ tali che $\Sigma = \sigma(K) \subseteq E$ (ovvero i domini devono essere *"compatibili"* tra di loro).
>
> Allora si definisce l'*integrale di superficie* di f in σ come
>
> $$\boxed{\iint_\Sigma f \, \mathrm{d}\sigma = \iint_K f(\sigma(u, v)) \cdot \|\sigma_u \times \sigma_v\| \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v}$$

D. TECNICHE DI INTEGRAZIONE

D1. Cambiamento di Variabile

Formula di Cambiamento delle Variabili per gli Integrali

Formula di cambiamento delle variabili: caso unidimensionale (motivazione). Casi particolari: trasformazioni lineari, trasformazione in coordinare polari e formula generale per trasformazioni regolari.

---

0. Voci correlate

- Integrazione per Sostituzione
- Definizione di Applicazione Lineare

1. Caso Unidimensionale

MOTIVAZIONE. Dal *caso unidimensionale* è nota la tecnica di integrazione *per sostituzione* (1): ovvero prendendo una funzione $f : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^0(I)$ e una *trasformazione* $\varphi : K = [\alpha, \beta] \longrightarrow I \in \mathcal{C}^1$, tale che sia *sia biiettiva* (dunque se e solo se invertibile) e che la sua derivata $\varphi' \neq 0$ sia *a segno costante* su K (ovvero a *monotonia costante*), allora possiamo riscrivere l'integrale $\int_I f$ come

$$\int_I f = \int_K f \circ \varphi \cdot |\varphi'|$$

(la derivata $|\varphi'|$ è per tenere conto della monotonia; se è positiva o negativa...)
L'idea è quella di estendere la formula (1) su $\mathbb{R}^{N>1}$. Notare che in più dimensioni non avrò più semplici derivate: passerò a matrici (in particolare le jacobiane $J\cdot$) e determinanti.

2. Formula di Cambiamento delle Variabili

Prima di enunciare la *formula di cambiamento delle variabili*, facciamo un po' di nomenclatura.

#Definizione

Definizione (insieme localmente misurabile).

Si dice che un insieme $J \subset X$ è *localmente misurabile in* X se vale che

$$\forall E \in \mathcal{M}(X), J \cap E \in \mathcal{M}(X)$$

#Definizione

Definizione (trasformazione regolare di coordinate).

Siano $A, B \in \mathbb{R}^N$ degli *aperti*. Si dice che la funzione $\varphi : A \longrightarrow B \in \mathcal{C}^1$ è *una trasformazione regolare di coordinate* se vale che:
i. *Esiste l'inversa, ovvero è biiettiva*: $\exists \varphi^{-1}$
ii. *Il determinante della sua Jacobiana dato un punto del dominio non è nulla*:

$$\forall \underline{u} \in A, \det J\varphi(\underline{u}) \neq 0$$

Adesso enunciamo tutto.

#Teorema

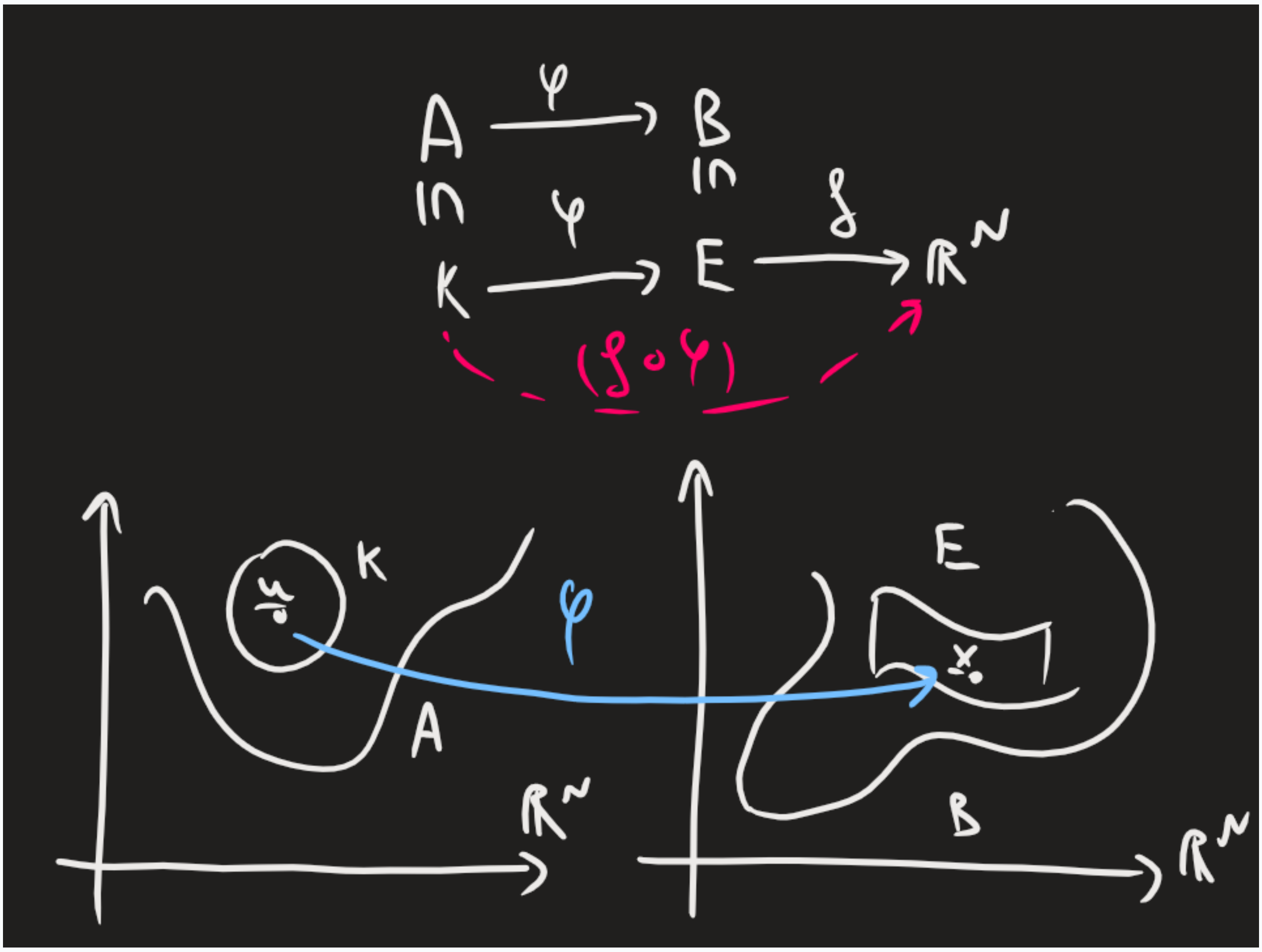
Teorema (cambio di variabile in $\mathbb{R}^N$).

Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}^N$ degli *insiemi aperti e localmente misurabili*. Sia $\varphi : A \longrightarrow B$ una *trasformazione regolare di coordinate*.

Se una funzione $f : B \supseteq E \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{R}(E)$ tale che esista un $K \subseteq A$ *compatto-misurabile* di $\mathbb{R}^3$ per cui si ha $\varphi(K) = E$, e se si ha il *determinante* $\det J\varphi$ limitato su K, allora E è *misurabile*, la composizione $(f \circ \varphi) \cdot |\det J\varphi|$ è *Riemann-Integrabile* su K e vale la formula

$$\boxed{\int_E f = \int_K (f \circ \varphi) \cdot |\det J\varphi|}$$

FIGURA 2.1. (*Diagrammi*)



3. Trasformazioni Affini

IDEA. Facciamo un passo indietro, passando al *caso più semplice*. Vogliamo considerare il caso in cui abbiamo una *trasformazione affine* $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$, che può essere rappresentata con una *matrice* (1), di cui chiameremo M, composta dai vettori $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in \mathbb{R}^3$ che formano una base. In tal caso abbiamo

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}, \det M \neq 0$$

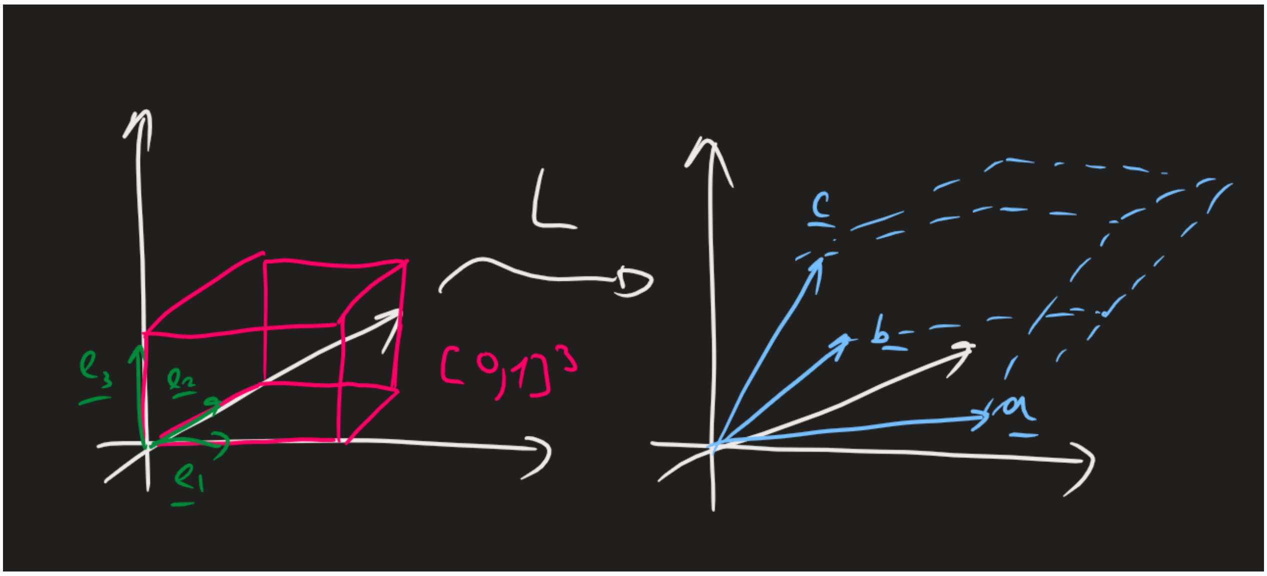
Adesso consideriamo il *parallelepipedo* formato come

$$E = \{(u,v,w) \in [0,1]^3 : u\underline{a} + v\underline{b} + w\underline{c}\}$$

Si ha che la sua misura è proprio il *determinante* di M:

$$m_3(E) = |\det M|$$

Quindi l'idea geometrica è questa: partiamo un parallelepipedo regolare formato dalla base canonica $\mathcal{E}^3$, poi per *distorcerla* con la trasformazione L nel parallelepipedo E.



L'idea pratica è quella di partire da K, poi trasformarla in E che è un n-rettangolo, poi per usare il *teorema di Fubini*.
In tal caso ho l'integrale

$$\iiint_E 1 = m_3(E) = \det M = \iiint_K \det |J\varphi| = \det M \iiint_K 1$$

Ovvero ho che i *volumi sono equivalenti*, con un fattore $\det M$ che tiene conto della *"distorsione del dominio"*. Si può generalizzare quanto detto su *campi scalari*.

4. Trasformazioni in Coordinate Polari

Vediamo un caso particolare, dove trasformiamo *rettangoli* in *sezioni di corone circolari* (per praticità
considieriamo il viceversa).

#Teorema

> Teorema (trasformazioni in coordinate polari).
>
> Sia $f(x,y)$ una funzione in due variabili, integrabili. Introducendo le variabili

$$\theta \in [-\pi, \pi]; x = \rho \cos\theta \wedge y = \rho \sin\theta$$
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}^+$$

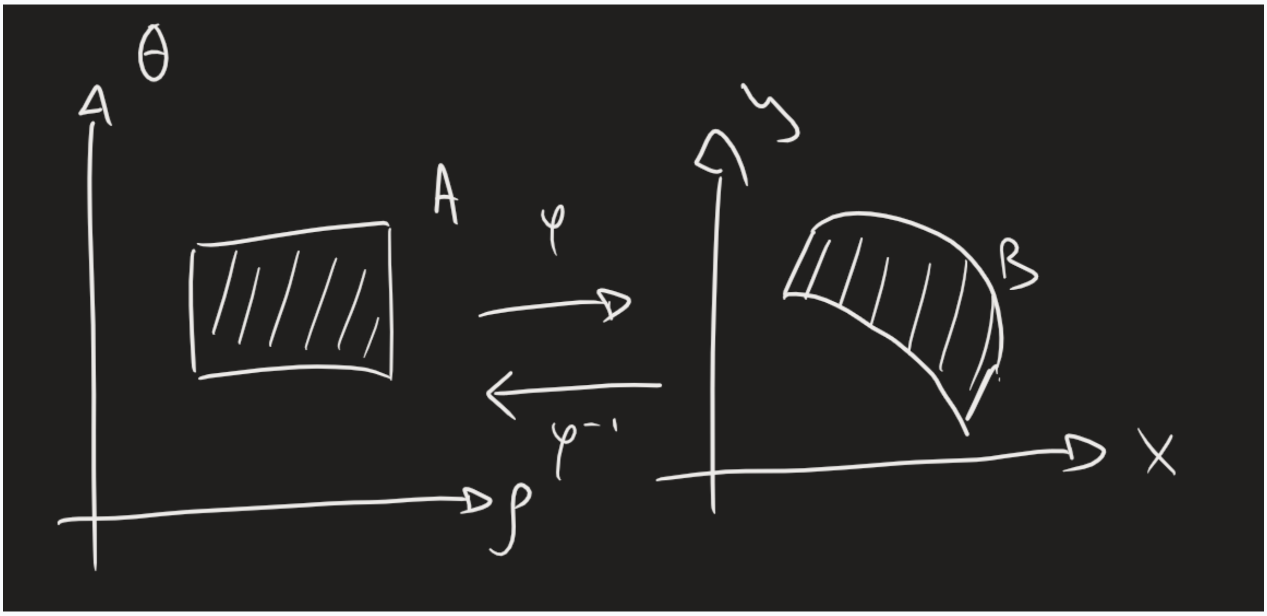
con gli insiemi di definizione

$$A = \{(\rho, \theta) : \rho > 0, \theta \in [-\pi, \pi]\}$$
$$B = \mathbb{R}^2 \diagdown \underbrace{\{(x, 0) | x < 0\}}_{|\theta| \leq \pi}$$

Allora introduco la *trasformazione regolare di coordinate* $\varphi : A \longrightarrow B$ definita come $\varphi(\rho, \theta) := (\rho \cos\theta, \rho \sin\theta)$
da cui ho

$$\int_B f = \int_A (f \circ \varphi) \cdot \underbrace{\det J\varphi}_{\rho}$$

FIGURA 4.1. (*L'idea*)



D2. Integrazione nel senso generale

Integrali Multipli Generalizzati

Integrali multipli nel senso generalizzato: definizione di una funzione localmente integrabile su un insieme localmente misurabile. Definizione di successione di insiemi invadente un insieme e adatta ad una funzione. Definizione di funzione integrabile nel senso generalizzato.

---

0. Voci correlate

- Funzione Integrabile in Senso Generalizzato
- Funzioni Localmente Integrabili

1. Nomenclatura preliminare

#Definizione

Definizione (funzione localmente integrabile, successione di insiemi invadente e adatta).

Una funzione f si dice *localmente integrabile* su J, che a sua volta è *localmente misurabile* in $\mathbb{R}^N$ se *esiste* una *successione di insiemi* $(A_n)_n$ tale che:
i. *Misurabilità:* $A_n \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$
ii. *Crescenza limitata:* $A_n \subseteq A_{n+1} \subseteq J$
iii. *Il limite della misura dello scarto è nullo:*

$$\forall \mathcal{M}(\mathbb{R}^2) \ni E \subseteq J, \lim_n m_N(E \diagdown A_n) = 0$$

iv. *La funzione è Riemann-integrabile su un termine della successione:*

$$f_{|A_n} \in \mathcal{R}(A_n)$$

Inoltre una *successione di insiemi* $(A_n)_n$ che rispetta le condizioni sopra, si dice *"invadente J"* e *"adatta a f"*.

2. Integrale generalizzato

#Definizione

Definizione (funzione integrabile nel senso generalizzato).

Sia $f : J \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ *localmente integrabile* su J *localmente misurabile*. Sia inoltre $f(x \in J) \geq 0$. Sia $(A_n)_n$ una *successione di insiemi* invadente J e adatta ad f.

Allora si dice che f è *integrabile nel senso generalizzato su J* se esiste ed è *finito* il limite

$$\lim_n \int_{A_n} f$$

In tal caso, si pone

$$\int_J f := \lim_n \int_{A_n} f$$

E. ESERCIZI

Esercizi sugli Integrali Multipli

Esercizi su $\iint \iint$, fino a quando si vuole.

Sezione A. Prime tecniche di integrazione

#Esercizio

Esercizio.

Calcolare l'integrale

$$\iint_R y e^{xy} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

su $R = [1,2]^2 := [1,2] \times [1,2]$.

Sezione B. Integrazione su insiemi arbitrari

#Esercizio

Esercizio.

Calcolare l'integrale

$$\iint_E \frac{x}{x^2+y^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

con

$$E = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2 \wedge \frac{x^2}{2} \leq y \leq x^2 \right\}$$

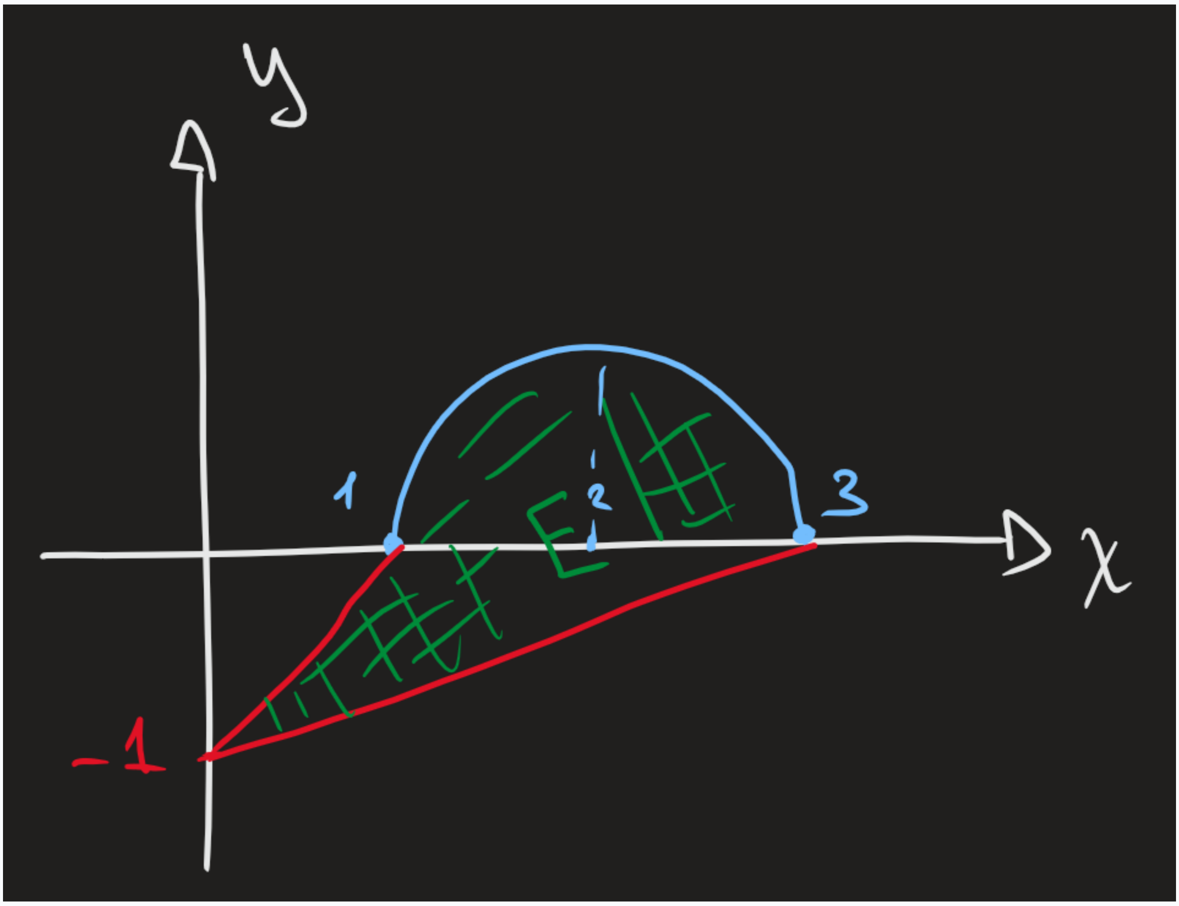
#Esercizio

Esercizio.

Calcolare l'integrale

$$\iint_E |xy| \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

con E come riportata nella figura sottostante:



#Esercizio

Esercizio.

Calcolare l'integrale

$$\iiint_E 1 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$$

con E definita come

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1 \wedge 0 \leq z \leq 1 - x\right\}$$

#Esercizio

Esercizio.

Calcolare l'integrale

$$\iiint_E 1 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$$

con E posta come

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1 - z^2\right\}$$

#Esercizio

Esercizio.

Calcolare il volume del solido di rotazione definito come

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq z \leq 2 \wedge 0 \leq x^2 + y^2 \leq z^2\right\}$$

Sezione C. Misura e integrazione su curve e superfici

#Esercizio

Esercizio.

Calcolare la lunghezza della curva

$$\gamma\left(t \in [0, 2\pi[\right) = \begin{pmatrix} R \sin t \\ R \cos t \end{pmatrix}$$

con $R \in \mathbb{R}$ un parametro reale.

#Esercizio

Esercizio.

Calcolare la massa di un filo appoggiamo sul sostegno della curva

$$\gamma(t \in [0, 2\pi]) = \begin{pmatrix} 2t \cos t \\ 2t \sin t \\ 3t \end{pmatrix}$$

avente densità $\rho(x, y, z) = z$.

#Esercizio

Esercizio.

Calcolare la superficie della sfera, data dalla parametrizzazione definita come

$$\sigma((u,v) \in ([0,\pi] \times [-\pi,\pi])) = \begin{pmatrix} R\sin u \cos v \\ R\sin u \sin v \\ R\cos u \end{pmatrix}$$

con R un parametro reale fissato.

#Esercizio

Esercizio.

Calcolare la massa di una lamina, appoggiata sul sostegno della curva

$$\sigma(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2+v^2 \end{pmatrix}$$

sul dominio $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$ e supponendo la densità $\mu(x,y,z) = z$.

Sezione D. Tecniche di Integrazione in Più Variabili

#Esercizio

Esercizio.

Calcolare l'integrale

$$\iint_E (x-y)\ln(x+y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

con E definito come il parallelepipedo racchiuso nelle rette di equazione

$$E: \begin{cases} r_1 : y = x-1 \\ r_2 : y = x \\ r_3 : y = 1-x \\ r_4 : y = 3-x \end{cases}$$

#Esercizio

Esercizio.

Calcolare l'integrale

$$\iint_E x^2 + y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

su E definita come la porzione della corona circolare nel semispazio $x \geq 0$ delimitata dalle circonferenze Γ_1, Γ_2 e delimitate dalle bisettrici r_1, r_2:

$$E \sim \begin{cases} \Gamma_1 : x^2 + y^2 = 1 \\ \Gamma_2 : x^2 + y^2 = 4 \\ r_1 : y = x \\ r_2 : y = -x \end{cases}$$

#Esercizio

Esercizio.

Calcolare l'integrale gaussiana

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \, \mathrm{d}x$$