

Ripasso di Fisica del Liceo - Sommario

Un breve di ripasso delle nozioni di fisica del liceo.

1. Teoria

Richiami di Fisica del Liceo

Richiami a caso di fisica del liceo.

NOTA BENISSIMO: L'esposizione dei contenuti di fisica sarà ad un livello molto superficiale a quello che si farà in università, dato che stiamo parlando di fisica a livello liceale (in particolare un liceo non-scientifico).

1. Cinematica

ARGOMENTI: Definizioni di velocità, accelerazione; moto uniformemente accelerato, legge oraria; energia potenziale, cinetica.

#Definizione

Definizione 1 (velocità, accelerazione).

Si definisce la *velocità media* come quella misura ottenuta quando dividiamo lo *spazio* per il *tempo*, ovvero

$$v := \frac{s}{t} [\text{m/s}]$$

Si definisce l'*accelerazione media* in una maniera simile, ovvero come

$$a := \frac{v}{t} [\text{m/s}^2]$$

#Osservazione

Osservazione 2 (collegamento con l'analisi matematica).

Notare che è possibile creare un *parallelismo* con l'*analisi matematica*, in particolare con il concetto delle *derivate*.

Infatti, possiamo definire la *velocità istantanea* e l'*accelerazione istantanea* come le derivate dello *spazio*.

$$v := \frac{ds}{dt} = \dot{s}; a = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \ddot{s}$$

#Teorema

Teorema 3 (moto uniformemente accelerato, legge oraria).

Supponiamo che un *oggetto* si sta muovendo con un'*accelerazione costante*.

Allora possiamo dedurre le seguenti formule per calcolare la sua *velocità* e la sua *posizione* in un'istante del tempo.

$$\begin{aligned} v(t) &= v_0 + at \\ s(t) &= s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \end{aligned}$$

dove v_0 , s_0 rappresentano la *velocità* / *posizione* iniziale.

#Definizione

Definizione 4 (energia potenziale, cinetica).

Supponiamo di avere un *oggetto* con una certa massa m , che dista dalla terreno per un quantitativo h di spazio.

Allora definiamo l'*energia potenziale e cinetica* come le quantità

$$\begin{aligned} E_p &= mgh \\ E_c &= \frac{1}{2}mv^2 \end{aligned}$$

L'energia viene in ogni caso misurata in *Joule* ([J]).

#Teorema

Teorema 5 (conservazione dell'energia).

Supponiamo di avere un *oggetto* con una certa *energia potenziale* E_p ed *energia cinetica* E_c .

Allora la sua *energia totale* definita come la somma dell'*energia potenziale* e dell'*energia cinetica* è una quantità costante.

Ovvero,

$$E_t = E_p + E_c = c$$

#Corollario

Corollario 6 (oggetto in caduta libera).

Supponiamo invece che un *oggetto fermo* si trova in aria, e dista dal *terreno* per un quantitativo s_0 di spazio.

Allora ricaviamo le seguenti formule per calcolare il *tempo necessario affinché l'oggetto raggiunga la terra* e la sua *velocità dato un istante del tempo*:

$$t_f = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$
$$v(t) = \begin{cases} -gt, & t < t_f \\ 0, & t \geq t_f \end{cases}$$

2. Dinamica

ARGOMENTI: Forza, leggi di Newton; lavoro.

#Definizione

Definizione 7 (forza).

Supponiamo di avere un *oggetto* che si muove con un'accelerazione costante a .

Allora si definisce la *forza* come

$$F := ma \text{ [N]}$$

Viene misurata in *Newton* ([N]).

#Teorema

Teorema 8 (i principi della dinamica / le leggi di Newton).

Enunciamo le famose leggi di Newton.

1. *Principio di inerzia*

"Se la somma delle forze $\sum F$ agenti su un corpo è nullo, allora il corpo rimarrà in quiete o si muoverà con moto uniformemente accelerato."

2. *"Principio di proporzionalità*

Vedere [definizione della forza](#) (^8fb64a^8fb64a); la **forza** agente su un corpo è **proporzionale** alla velocità con cui si muove il corpo.

3. *"Principio di azione e di reazione"*

Supponiamo che un corpo *A* esercita una forza *F* sul corpo *B*. Allora il corpo *B* esercita una **forza contraria** $-F$ sul corpo *A*.

#Osservazione

Osservazione 9 (e l'attrito?).

Notiamo che le leggi di Newton non sono chiaramente sufficienti per **modellizzare** il nostro mondo.

Consideriamo, ad esempio una macchina che si muove a 120 km/h in autostrada; se ad un certo punto il conducente decide di lasciare l'acceleratore, allora la macchina inizierà a rallentare, anche se non ci sono delle forze agenti sull'auto!

In realtà ci sono **sempre** delle forze che agiscono sull'auto; parliamo infatti dell'**attrito**, ovvero quella **forza** che tende a "**rallentare**" un qualsiasi oggetto in moto.

Ad esempio, consideriamo che dal **contatto** tra la **strada** e le **ruote** si crea l'attrito.

Questo argomento è collegabile con i **principi della termodinamica**, da una delle quali conseguirebbe che è **impossibile** vivere in un mondo senza attrito, dato che dal **contatto** tra due superfici qualsiasi deve aumentare **sempre** l'entropia.

#Definizione

Definizione 10 (lavoro).

Supponiamo di esercitare su un'oggetto un quantitativo (scalare) di forza F ($[N]$), e che quest'ultimo oggetto di sposti di un quantitativo s ($[m]$) spazio.

Allora si definisce il lavoro come la grandezza

$$L := Fs$$

Il lavoro si misura in **Joule** ($[J]$).

3. Fluidostatica

ARGOMENTI: Pressione, il principio di Pascal, legge di Stevino, legge di Archimede.

#Definizione

Definizione 11 (pressione).

Supponiamo di avere un corpo di superficie A (o S), su cui si sta esercitando una forza F . Si assume che la direzione della forza esercitata è ortogonale (o perpendicolare, o componente normale della forza stessa, in tal caso si scrive F_{\perp}) rispetto alla superficie.

Allora si definisce la pressione come la grandezza scalare

$$P := \frac{F}{S}$$

La pressione si misura o in Pascal ($[Pa] = [N/m^2]$) nella misurazione S.I.; alternativamente ci sono altre misure più popolari per la pressione, tra cui l'atmosfera $[atm] = 10k[Pa]$; il bar $[bar] = 10^5[Pa]$; il millimetro di mercurio, $760[mmHg] = 1[atm]$.

#Teorema

Teorema 12 (il principio di Pascal).

In un contenitore di un fluido qualsiasi (gas o liquido), una variazione di pressione ΔP si trasmette a tutto il fluido e le superfici di contatto.

#Esempio

Esempio 13 (esempi del principio di Pascal).

Come esempi delle applicazioni del principio di Pascal si possono trovare il torchio idraulico, o un semplice palloncino da gonfiare.

#Teorema

Teorema 14 (legge di Stevino).

In un recipiente fluido con una certa altezza h , la pressione P all'interno di questo fluido cambia al variare della misura h , con la seguente formula;

$$P(h) = d_{\text{liq}} \cdot g \cdot h + P_0$$

dove P_0 è la pressione esercitata sulla superficie del fluido, d_{liq} la densità del liquido e g la costante dell'accelerazione gravitazionale.

#Teorema

Teorema 15 (principio di Archimede).

Supponiamo che un corpo di volume V_S entri in un contenitore di un fluido, quindi per la gravità il corpo inizia ad "affondare" nel fluido; allora essa subisce una forza che la spinge nella direzione contraria, che chiameremo la "spinta di Archimede", ed è la grandezza scalare espressa come

$$F_A := P_{\text{fs}}$$

dove P_{fs} è il peso del fluido spostato, calcolata come

$$P_{\text{fs}} = d_{\text{liq}} \cdot V_S \cdot g$$

#Corollario

Corollario 16 (determinare se un corpo galleggia o affonda).

Grazie al principio di Archimede, è possibile determinare se un corpo galleggerà o affonderà quando viene immerso in un fluido.

Basta infatti calcolare la forza peso del corpo e la densità del corpo, definite come

$$F_g := mg ; d_S = \frac{m}{V_s} \implies m = d_S V_s \implies F_g = d_S V_s \cdot g$$

Ma allora se confrontiamo la spinta di Archimede con la forza peso del corpo, abbiamo

$$d_{\text{liq}} \cdot V_s \cdot g \sim d_S \cdot V_s \cdot g \implies d_{\text{liq}} \sim d_S$$

Quindi basterà confrontare la densità del liquido con la densità del corpo: se la densità del corpo è maggiore di quella del liquido, allora il corpo affonda; al contrario se la densità del corpo è minore, allora il corpo galleggia; altrimenti se sono uguali la forza esercitata sul corpo è nulla.

4. Termodinamica

ARGOMENTI: Calore, Temperatura, Calorimetria. Leggi della termodinamica. Gas perfetti ($PV=nRT$) come riassunto delle leggi di Boyle; Macchine termiche: Trasformazioni isobare, isocore, isoterme, adiabatiche. Calcolo del lavoro di una trasformazione termodinamica.

#Definizione

Definizione 17 (calore).

Si definisce il calore come una grandezza scalare che rappresenta il trasferimento di una certa quantità di energia E tra due o più corpi.

Nel sistema internazionale questa grandezza viene misurata in Joule ([J]); alternativamente si può usare una misura più antiquata, ovvero la caloria (cal).

Si riporta che $1\text{cal} = 4.186 \text{ J}$.

#Definizione

Definizione 18 (temperatura di un corpo).

La temperatura è quella grandezza scalare che rappresenta l'energia cinetica di un corpo.

Ufficialmente si misura la temperatura in Kelvin ($[K]$), partendo dall'"assoluto zero"; tuttavia nella vita quotidiana si usano altre misure, tra cui i gradi centigradi ($[^{\circ}C]$) o i Fahrenheit ($[F]$).

Si riporta la seguente uguaglianza di conversione: $-273.15\ ^{\circ}C = 0\ K$.

#Osservazione

Osservazione 19 (interpretazione microscopica della temperatura).

Si può definire la temperatura di un corpo mediante un'interpretazione microscopica, ovvero concentrandoci sulle singole particelle che costituiscono il corpo; la temperatura, secondo quest'ultima interpretazione, non è altro che la misura dell'agitazione delle particelle, quindi l'energia cinetica.

Infatti, ricordiamoci la seguente equazione per l'energia cinetica media per una particella di un gas perfetto;

$$\bar{E}_C = \frac{3}{2}KT$$

dove K è la c.d. costante di Boltzmann, T la temperatura.

#Definizione

Definizione 20 (capacità termica, calore specifico).

Si definisce la capacità termica di un corpo C come

$$C := \frac{Q}{\Delta T}$$

Si definisce il calore specifico per un corpo con massa m come

$$c := \frac{C}{m}$$

#Definizione

Definizione 21 (calore latente).

Si definisce il calore latente Q_L come quella quantità di calore Q necessaria per il cambiamento di stato per un corpo; ovvero

$$Q_L := \lambda \cdot m$$

dove λ è una costante che varia per corpo in corpo, ed essa viene misurata in [J/kg].

#Teorema

Teorema 22 (la legge fondamentale della calorimetria).

Per calcolare la quantità di calore Q da trasferire ad un corpo e per influire la sua temperatura per un incremento ΔT , si può usare la seguente formula:

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta T$$

#Corollario

Corollario 23 (determinare l'equilibrio termico tra due corpi).

Possiamo usare il per determinare l'equilibrio termico tra due corpi.

Infatti basterà considerare che abbiamo un trasferimento di energia, quindi da un lato abbiamo un corpo che cede del calore, d'altra parte l'altro corpo assorbe quest'ultimo calore. Questi due quantitativi sono legati dall'uguaglianza

$$Q_{ass} = -Q_{ced}$$

Dopodiché basterà esplicitare le formule considerare l'incremento di temperatura come la differenza tra la temperatura finale ed iniziale $T_f - T_i$, e infine isolare l'incognita T_f .

#Definizione

Definizione 24 (macchina termica).

Definiamo una macchina termica come un qualsiasi corpo che accetta una quantità di calore "entrante", dopodiché "converte" una parte di

questo calore in lavoro meccanico e infine cede il calore restante.

#Esempio

Esempio 25 (esempi di macchine termiche).

Come esempi di macchine termiche possiamo elencare dei buoni casi: il caso più evidente è quello di un'automobile; un altro caso abbastanza chiaro è quello del nostro corpo.

#Teorema

Teorema 26 (le leggi della termodinamica).

Enunciamo le tre leggi della termodinamica.

1. *"La variazione dell'energia interna di un sistema termodinamico chiuso è uguale alla differenza tra il calore fornito al sistema e il lavoro compiuto dal sistema sull'ambiente"*: ovvero per ogni macchina termica, la quantità di energia è sempre conservata. Con un linguaggio matematico, la si esprime come

$$\Delta U = Q - L$$

2. *"è impossibile realizzare una trasformazione il cui risultato sia solamente quello di convertire in lavoro meccanico il calore prelevato da un'unica sorgente"*: in parole nostre, l'entropia totale di un sistema (ovvero la quantità che misura il "disordine" di un corpo) può solo aumentare.
3. *"è impossibile raggiungere lo [zero assoluto] con un numero finito di trasformazioni".*

#Teorema

Teorema 27 (l'equazione dei gas perfetti).

Supponendo che in un recipiente abbiamo un c.d. "gas perfetto", allora la sua pressione, il suo volume, la sua quantità di mole e la sua temperatura è legata dalla seguente equazione:

$$PV = nRT$$

#Definizione

Definizione 28 (trasformazioni termodinamiche).

Definiamo le seguenti trasformazioni termodinamiche, compiute dalle macchine termiche.

1. **Trasformazione isobara:** questa è una trasformazione dove non avviene nessun cambiamento di pressione, ed essa rimane quindi costante.
2. **Trasformazione isocora:** similmente alle trasformazioni isobare, con le trasformazioni isocore non vi è nessun cambiamento di volume.
3. **Trasformazione isoterna:** analogamente nelle trasformazioni isotermi non vi è nessun cambiamento di temperatura.
4. **Trasformazioni adiabatiche:** con le trasformazioni adiabatiche non vi è invece nessun scambio di calore con l'ambiente esterno.

#Proposizione

Proposizione 29 (calcolo del lavoro).

Per calcolare il lavoro compiuto da una certa trasformazione termodinamica, è sufficiente considerare il grafico "***p-V***", ovvero il piano cartesiano π dove l'asse delle ascisse rappresenta il volume, e l'asse delle ordinate rappresenta la pressione.

Dopodiché, rappresentando le trasformazioni come dei vettori (o delle curve) orientati, per calcolare il lavoro di una trasformazione basta considerare l'area sotto la curva (oppure l'integrale, nei casi più specifici).

Se abbiamo in particolare una trasformazione adiabatica, basta considerare che il scambio del calore è nullo, ovvero $Q = 0 \text{ J}$, ovvero $L = \Delta U$.

#Proposizione

Proposizione 30 (l'equazione per una trasformazione adiabatica).

Dato che in una *trasformazione adiabatica* nessuna delle variabili dell'equazione $PV = nRT$ rimangono costanti, allora ci servirà trovare un'equazione che lo descriva la trasformazione adiabatica di un gas da un punto A ad un punto B .

Tuttavia, per poter ricavare un'equazione bisognerà risolvere le equazioni differenziali, un argomento piuttosto complicato; pertanto ci limiteremo solo ad enunciare le seguenti equazioni

$$P_A V_A^\gamma = P_B V_B^\gamma$$
$$T_A^\gamma P_A^{1-\gamma} = T_B^\gamma P_B^{1-\gamma}$$

dove γ è il rapporto tra il calore specifico a pressione costante e quello a volume costante ($\gamma = \frac{c_p}{c_v}$), un valore che dipende dalla struttura atomica del gas (calcolabile mediante i strumenti della meccanica quantistica).

5. Le forze nella fisica

ARGOMENTI: *Forza gravitazionale, forza elettrica. Campo gravitazionale, campo elettrico. Definizione di potenziale gravitazionale.*

#Teorema

Teorema 31 (la legge di gravitazione universale di Newton).

Due corpi con massa m esercitano sempre tra di loro una forza attrattiva, detta forza gravitazionale, e la quantità di questa forza viene data dalla formula

$$F_G = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

dove G è la costante della gravitazione universale, m_1 e m_2 le masse dei corpi, r la distanza tra i corpi.

#Teorema

Teorema 32 (la forza di Coulomb).

Due particelle con carica q esercitano tra di loro una forza o attrattiva o repulsiva, detta forza elettrica (o di Coulomb), e viene calcolata come

$$F_E = K \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

dove K è la costante $(4\pi\varepsilon_0)^{-1}$.

#Definizione

Definizione 33 (campo gravitazionale (o elettrico)).

Supponiamo di avere un solo corpo con una massa m (o carica q). Ora supponiamo di avere un altro corpo, con una massa (o carica) così piccola che è trascurabile, generando quindi nessun tipo di forza: chiameremo questo corpo (o carica) "*di prova*".

D'altronde il corpo con la massa m (o carica q) genera una forza attrattiva (o anche repulsiva) sul corpo (carica) di prova.

Infatti, piazzando questo corpo in un qualsiasi punto dello spazio, possiamo ottenere un *vettore forza*.

Definiamo dunque il *campo gravitazionale* (o campo elettrico) *generato* da una massa m (o carica q) come una funzione che associa una distanza r dal corpo (o dalla carica) ad un quantitativo scalare di forza:

$$\mathcal{G}(r) = G \frac{m}{r^2} \text{ analogamente } E(r) = K \frac{q}{r^2}$$

#Osservazione

Osservazione 34 (ricavare la costante dell'accelerazione di gravità).

Considerando i principi della dinamica, possiamo ricavare la costante dell'accelerazione di gravità g .

Basterà infatti misurare la forza gravitazionale tra il *nostro corpo* e la *terra*, poi considerare la prima legge di Newton, per cui

$$F = m_1 a = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

e infine isolare l'incognita a , che diventerà la costante g .

Si nota bene che l'accelerazione della gravità diventa una funzione al variare di r ; infatti, in realtà la costante dell'accelerazione della gravità varia a seconda dell'altezza (anche se in una maniera trascurabile!)

$$g(h) = G \frac{m}{h^2}$$

dove m è la massa del corpo (attenzione! qui si assume che la massa venga mantenuta costante) e h la distanza dal centro del corpo.

Link per il grafico di $g(h)$ con le costanti in riferimento al pianeta terra e prendendo in considerazione il raggio medio della terra:

<https://www.desmos.com/calculator/o1gbg2qktt>

#Definizione

Definizione 35 (potenziale gravitazionale).

Si definisce il **potenziale gravitazionale** come quella grandezza scalare, per cui moltiplicandola con la **massa** si ottiene l'energia potenziale per il corpo.

$$E_P = mV \implies V := \frac{E_P}{m}$$

Notare bene che in questo contesto l'energia potenziale non si calcola più come il prodotto della massa per l'altezza e l'accelerazione di gravità, dato che non si assume più l'accelerazione come costante.

6. Elettricità e circuiti elettrici

ARGOMENTI: Definizione di flusso elettrico. Teorema di Gauß per le superfici in un campo elettrico. Definizione analogica di potenziale elettrico (tensione), definizione di intensità di corrente. Definizione di circuito elettrico. Leggi di Ohm per le resistenze. Composizione di resistenze in parallelo e in serie. Definizione di condensatore, composizione di condensatori in serie e in parallelo. Circuito RC, carica-scarica di un circuito elettrico. Partitore di tensione e di corrente, condensatore partitivi (**SALTATO**)

#Definizione

Definizione 36 (flusso elettrico).

Supponiamo di avere una carica q non-nulla, da cui si ha un **campo elettrico** E . Supponiamo di prendere una **superficie chiusa** S , collocata in un qualunque parte.

Allora si definisce il **flusso elettrico** come "*quella quantità del campo elettrico che passa attraverso la superficie*"; ovvero il **prodotto scalare** tra E e S .

Assumendo che questi siano ortogonali,

$$\Phi = E \cdot S$$

#Teorema

Teorema 37 (Teorema di Gauß).

Supponiamo che una **superficie** S **racchiuda** una quantità di cariche Q .

Allora il suo flusso totale è calcolabile come

$$\Phi = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

(dove ϵ_0 è una costante; la permanenza dielettrica nel vuoto)

#Definizione

Definizione 38 (potenziale elettrico).

Definiamo il **potenziale elettrico** in una maniera analoga alla definizione del potenziale gravitazionale; ovvero una **grandezza scalare** per cui si ottiene l'energia necessaria per spostare una carica q da un certo punto.

$$V := \frac{E_P}{q}$$

#Definizione

Definizione 39 (tensione, differenza di potenziale).

Supponendo che una carica q passi da un punto A ad un punto B , si dice la **tensione** o **differenza di potenziale** (d.d.p.) come la differenza del potenziale elettrico tra il punto B e A ;

$$\Delta V = V_B - V_A$$

#Definizione

Definizione 40 (intensità di corrente).

Supponiamo di sapere che in un *certo punto dello spazio* passi un quantitativo q di cariche sotto un certo arco di tempo t ; si chiama l'intensità di corrente come il rapporto

$$i := \frac{q}{t}$$

#Osservazione

Osservazione 41 (collegamento con l'analisi matematica).

Analogamente al concetto della *velocità media*, possiamo considerare l'incremento della carica $\mathrm{d}q$ e del tempo $\mathrm{d}t$ e calcolare la *derivata* della corrente, ottenendo così l'intensità.

#Definizione

Teorema 42 (calcolare la potenza conoscendo la tensione e l'intensità di corrente).

Per calcolare la *potenza* (ovvero il quantitativo di energia speso per un periodo di tempo) conoscendo solo la tensione e l'intensità di corrente, è sufficiente fare il seguente calcolo

$$P = V \cdot i$$

Si può giustificare questo risultato sotto un punto di vista dimensionale.

#Definizione

Definizione 43 (circuito elettrico).

Per *circuito elettrico* si intende un qualsiasi schema con dei *componenti elettrici* connessi tra di loro, di cui sono dotati di alcuni dati: tra cui la

tensione, l'intensità di corrente e altre misure specifiche per ogni componente.

#Definizione

Definizione 44 (resistore, resistenza).

Per **resistore** si intende un componente del circuito elettrico che "fa muovere le cariche" secondo le leggi di Ohm, ovvero imponendo una certa "**resistenza**" (una grandezza scalare). La resistenza si misura in **Ohm** ($[\Omega]$)

#Teorema

Teorema 45 (le leggi di Ohm).

1. *Rapporto tra intensità, resistenza e tensione*

$$V = Ri$$

2. *"Si calcola la resistenza di un filo elettrico secondo la seguente formula"*

$$R = \rho \frac{l}{A}$$

dove ρ è un parametro che dipende dal materiale (e in particolare dalla temperatura! infatti $\rho = \rho_0(1 + \alpha\Delta T)$), l la lunghezza del filo e A la superficie dell'area della base.

#Teorema

Teorema 46 (le resistenze in serie e in parallelo).

Per calcolare la **resistenza equivalente** per più **resistenze** poste in **serie** (ovvero una dopo l'altra) o in **parallelo** (ovvero una sopra/sotto l'altra), si usano rispettivamente le seguenti formule:

$$\begin{aligned} R_T &= R_1 + \dots + R_n \\ \frac{1}{R_T} &= \frac{1}{R_1} + \dots + \frac{1}{R_n} \end{aligned}$$

#Definizione

Definizione 47 (condensatore a facce piane, capacità).

Definiamo un *condensatore a facce piane* come un componente del circuito elettrico formato da due *piastre conduttrici* (armature), separate da un *dielettrico* (sostanza non conduttrice): il senso di questo componente elettrico è quello di "*accumulare cariche positive da un lato, negative dall'altro e mantenerle separate per generare un campo elettrico o immagazzinare dell'energia elettrica*".

Definiamo la *capacità* come quella misura per cui un condensatore è in grado di "*accumulare*" una certa quantità di carica, proporzionale alla tensione.

$$C = \frac{Q}{V}$$

Da un punto di vista macroscopico, si calcola la capacità con

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{d}$$

dove S è la superficie delle piastre, d la distanza tra queste.

#Teorema

Teorema 48 (calcolare l'energia immagazzinata in un condensatore).

Per calcolare l'energia immagazzinata in un condensatore si usa la seguente formula:

$$E = \frac{1}{2} CV^2$$

#Teorema

Teorema 49 (composizione dei condensatori in serie e in parallelo).

Per calcolare la *capacità equivalente* di più condensatori, disposti in *serie* o in *parallelo* si usano le seguenti formule:

$$\text{In serie : } \frac{1}{C_T} = \sum_{i=\min \mathbb{N}}^n \frac{1}{C_i}$$

$$\text{In parallelo : } C_T = \sum^n C$$

#Definizione

Definizione 50 (circuito RC).

Si dice un *circuito RC* un qualsiasi circuito che contiene un *resistore* e un *condensatore*.

#Proposizione

Osservazione 51 (la carica e scarica di un circuito RC).

Supponiamo di porre una leva in un circuito RC, in particolare *prima della resistenza*.

Ora immaginiamo che la batteria si carica, con un certo quantitativo di V . Adesso chiudiamo il circuito, permettendo alle cariche di muoversi: pertanto si carica il condensatore C finché questa non viene caricata completamente.

Per studiare il *comportamento* (o l'andamento) della corrente o della tensione in funzione del tempo, sarebbe necessario risolvere un'*equazione differenziale*: si limita dunque a riportare la seguente formula che descrive la tensione di un condensatore inizialmente vuoto:

$$V_C(t) = V(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

dove τ è la costante del tempo $\tau = RC$ [s]. Tradizionalmente si considera il condensatore carico quando $t = 3\tau$.

7. Elettromagnetismo

ARGOMENTI: *Definizione di campo magnetico. Convenzione di rappresentazione dei vettori 3D sul piano 2D. Forza di Lorentz sulle cariche nel campo magnetico, regola della mano destra per determinare il verso di un*

prodotto vettoriale. Legge di Biot-Savart per determinare il campo magnetico determinato dalla corrente di elettricità. Interazione magnetica tra due fili di corrente. Cenni alle equazioni di Maxwell, onde elettromagnetiche.

#Definizione

Definizione 52 (il campo magnetico).

Si definisce il *campo magnetico* come un campo vettoriale su \mathbb{R}^3 , in particolare un *campo vettoriale*, per cui le cariche q subiscono un certo quantitativo di forza.

Si denota un campo magnetico con B o \vec{B} , per delineare la sua natura vettoriale.

#Osservazione

Osservazione 53 (convenzione di rappresentazione dei 3D campi vettoriali).

Per rappresentare una freccia a tre dimensioni su un piano a due dimensioni, usiamo la seguente convenzione: supponendo di poter "vedere" solo le direzioni di "*sopra*" e "*sotto*", rappresentiamo la "*profondità*" come il seguente.

Se va verso "*fuori*", ovvero dal nostro punto di vista al piano, rappresentiamo questo verso come una croce.

Se invece va "*dentro*", ovvero dal piano al nostro punto di vista, allora la rappresentiamo come un semplice punto.

Da notare che, questa convenzione vuole "*imitare*" le frecce dei vettori in \mathbb{R}^3 .

#Teorema

Teorema 54 (forza di Lorentz).

Per calcolare la forza subita dal campo magnetico B su una qualsiasi carica q che viaggia secondo una direzione v , si usa la seguente formula:

$$F_B = q(v \times B)$$

dove \times denota il *prodotto vettoriale*.

#Osservazione

Osservazione 55 (formula per la forza di una carica completata).

Ora possiamo "*completare*" la formula per calcolare la forza subita su una carica, che è come segue.

$$F = q(E + v \times B)$$

#Proposizione

Proposizione 56 (la regola della mano destra).

Per calcolare il *verso* di un vettore risultante da un prodotto scalare, si usa la c.d. "*regola della mano destra*": ovvero si prende la mano destra, e si estende l'*indice*, che rappresenta il vettore v_1 . Dopodiché si estende il *dito medio*, che rappresenta il vettore v_2 .

Infine si estende il *pollice*, che è il verso del prodotto vettoriale $v_1 \times v_2$.

Nota bene: la regola vale lo stesso sostituendo l'*indice* col *pollice*, il *dito medio* con l'*indice* e il *pollice* col *dito medio*. Questo è dovuto alle proprietà del *prodotto vettoriale*.

#Teorema

Teorema 57 (legge di Biot-Savart).

Un filo di corrente i genera un campo magnetico B , quantificabile come il seguente.

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

Questo risultato è verificabile sperimentalmente, misurando la forza di una carica subita in prossimità di un filo percorso da corrente. Infatti, si tiene conto anche del fatto che in questo caso *le cariche elettriche* si allunano, allunando così la forza elettrica.

Il verso del campo magnetico si determina con la *regola del pollice destro*, ovvero prendendo il *pollice* come la direzione della corrente i e "*chiudendo*" la mano con un gesto di rotazione: questa rotazione è proprio il verso di B .

#Osservazione

Osservazione 58 (interazione magnetica tra due fili di corrente).

Ora prendiamo due fili attraversati dalla corrente i_1, i_2 .

Troviamo che a seconda dei *versi* delle correnti, questi fili subiscono un'*interazione magnetica*.

Per dimostrare bene questa cosa, bisogna considerare una carica all'interno di uno dei fili, poi calcolare la sua *forza di Lorentz* subita da entrambi campi magnetici.

Supponendo che le direzioni delle correnti siano *concorde*, si avrebbe una forza di *attrazione*.

Altrimenti, nel caso che le direzioni delle correnti siano *discorse*, si avrebbe una forza di *repulsione*.

Ora prendiamo più fili di corrente (con lo stesso verso) e li arrotoliamo. Dopodiché li mettiamo assieme, formando così un *solenoide*.

Supponiamo di avere due *solenoidi*: si osserva che se questi due solenoidi hanno la stessa direzione (come ad esempio da "*sinistra a destra*"), questi si attraggono. Altrimenti, si respingono.

Questo vi sembra familiare? Ebbene sì, questo funziona esattamente come una *calamita*, con un *polo nord* "N" da cui si ha la "*sorgente*" del campo vettoriale B e il *polo sud* "S" da cui si ha il "*pozzo*" di B .

#Teorema

Teorema 59 (le Equazioni di Maxwell, cenni).

Le *equazioni di Maxwell* sono le quattro equazioni riassuntive dell'*elettromagnetismo*.

Queste equazioni sono le seguenti: il *teorema di Gauß* per il campo elettrico e magnetico, la *legge di Faraday-Neumann-Lenz*, la *legge di Ampère-Maxwell*.

In un linguaggio matematico, sono le seguenti

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{\sum q}{\varepsilon_0}$$

$$\Phi(\vec{B}) = 0$$

$$\Gamma(\vec{E}) = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$$

$$\Gamma(\vec{B}) = \mu_0 i + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt}$$

Dove $\Phi(x)$, $\Gamma(x)$ rappresentano il *flusso* e la *circuitazione* per un campo vettoriale x .

Introducendo un formalismo matematico ancora più articolato (circa da livello di *Analisi Matematica II*), possiamo esprimere le medesime equazioni in *forma integrale* e *differenziale*.

$$\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}; \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\oint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0; \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\oint_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}; \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0(i_c + i_s); \nabla \times \vec{B} = \mu_0(j + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$$

In parole, queste equazioni esprimono i seguenti concetti.

Teorema di Gauß. Prendendo un campo elettrico, possiamo prendere il suo flusso per una superficie gaussiana ed è può essere un flusso del tipo *entrante* o *uscente* (pozzo o sorgente). Prendendo invece un campo elettrico ed una superficie *chiusa*, allora il flusso è nullo: in parole povere, il campo magnetico ha sempre una forma *solenoidale*, e non esistono i *monopoli magnetici* ([scientificamente ancora una questione aperta](#)).

Teorema di Faraday-Neumann-Lenz. Con un cambiamento del su un intervallo del tempo, si genera un *campo elettrico* a forma *solenoidale*. Ovvero, dal campo magnetico si *induce* una forza elettrica, di conseguenza della tensione per una carica (detta in termini tecnici "*f.e.m. indotta*").

Teorema di Maxwell-Ampere. Con la corrente o con una variazione del **campo elettrico** sul tempo, si genera in ogni caso un **campo magnetico** di forma **solenoidale**.

#Corollario

Osservazione 60 (le onde elettromagnetiche).

Da notare che da queste quattro equazioni (in particolare le ultime due) possiamo spiegare l'origine delle **onde elettromagnetiche**.

Prendiamo un qualsiasi filo di corrente: da qui nasce un campo magnetico, per **la legge di Ampère-Maxwell**. Quindi c'è una variazione del campo magnetico. Ma allora, per la legge di **Faraday-Neumann-Lenz**, si ha una forza elettromotrice indotta. Ovvero un'ulteriore variazione del campo elettrico.

Ripetendo così l'iterazione, si ha un'effetto di **propagazione** di questi campi di forze sul vuoto, comportando come un'**onda**. Infatti, quest'onda è proprio la c.d. "**onda elettromagnetica**" che viaggia nel vuoto, alla velocità della luce c .

8. Relatività

ARGOMENTI: *Velocità della luce come invariante, composizione relativistica delle velocità (trasformazioni di Lorentz), conseguenze della relatività (contrazione dello spazio e dilatazione del tempo).*

#Definizione

Definizione 61 (la velocità della luce).

Definiamo la **velocità della luce** come quella velocità che viaggia la luce, un'onda elettromagnetica particolare.

In particolare si vedrà che la velocità della luce nel vuoto è una costante.

$$c = 299\ 792\ 458 \text{ m/s} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

#Teorema

Teorema 62 (i postulati della relatività ristretta).

Riportiamo i *postulati della relatività ristretta* (o della relatività speciale), direttamente dalle parole del fisico noto *Albert Einstein*.

1. *Il principio di relatività* - "Tutte le leggi della fisica sono le stesse in tutti i sistemi di riferimento inerziali"

Qui Einstein vuole estendere la validità delle leggi in un riferimento inerziale (ovvero senza considerare l'accelerazione) in tutti gli ambiti, dalla dinamica all'elettromagnetismo; l'intenzione di questo postulato è proprio quello di voler trovare delle leggi *universalmente valide*, come voleva il scienziato *Galileo Galilei*.

2. *La costanza della velocità della luce* - "La velocità della luce nel vuoto ha lo stesso valore, $c = 3.00 \times 10^8$ m/s, in tutti i sistemi di riferimento inerziali, indipendentemente dalla velocità dell'osservatore o dalla velocità sorgente che emette la luce"

Notare che sebbene questo postulato sembri un'assurdo, in realtà questa non è altro che una conseguenza del principio di relatività: Einstein vuole estendere la *veridicità universalmente valida* della velocità della luce.

#Osservazione

Osservazione 63 (la relatività speciale è un perfezionamento alla dinamica newtoniana).

Citando ulteriori parole del fisico A. Einstein⁽¹⁾, si trova che la *teoria della relatività* è una semplice estensione della meccanica newtoniana: oppure, in un'altra ottica, la meccanica newtoniana è una *approssimazione* della teoria di Einstein, dato che in quest'ultimo modello non vengono considerati le velocità vicine alla luce c .

Come vedremo, con la teoria della relatività speciale avverranno dei fenomeni piuttosto bizzarri e apparentemente controiduitivi.

⁽¹⁾: "La teoria della relatività sorse dalla necessità di sanare serie e profonde contraddizioni nella vecchia teoria da cui sembrava non ci fosse via d'uscita. La forza della nuova teoria sta nella consistenza interna e nella semplicità con cui risolve tutte queste difficoltà, usando solo alcune ipotesi molte convincenti [...]" (A. Einstein e L. Infeld, The

Evolution of Physics, New York, Simon and Schuster, 1961, trad. it:
L'evoluzione della fisica, B. Boringhieri)

#Corollario

Corollario 64 (la composizione relativistica della velocità).

Supponiamo che un corpo A si sta muovendo ad una velocità v_1 , in *riferimento* al corpo B .

Adesso supponiamo che il corpo B si sta muovendo ad una velocità v_2 , in *riferimento* all'*osservatore esterno*.

Allora per calcolare la velocità del corpo A in riferimento all'osservatore esterno si usa la seguente formula:

$$v_1 \oplus v_2 := \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}$$

Si può considerare il numero

$$\frac{v_1 v_2}{c^2}$$

come un *coefficiente al variare in* $[-1, 1]$.

#Definizione

Definizione 65 (coefficiente gamma).

Si definisce il coefficiente gamma come la seguente funzione al variare in $[0, c]$.

$$\gamma := \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Notare che il coefficiente gamma è sempre un numero al variare in $[0, 1]$.

Grafico: <https://www.desmos.com/calculator/grjx6k0vmq>

#Corollario

Corollario 66 (la dilatazione del tempo).

Un oggetto si sta muovendo alla velocità v per l'osservatore esterno. Supponendo un incremento del tempo per l'**osservatore esterno** Δt , l'incremento del tempo per l'oggetto in moto (relativo all'osservatore esterno!) è maggiore o uguale a Δt ed si calcola come il seguente:

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma}$$

#Corollario

Corollario 67 (la contrazione delle lunghezze).

Un oggetto di lunghezza s (misurata in quiete) si muove ad una velocità v rispetto all'**osservatore esterno**.

Allora la lunghezza di quest'oggetto misurata dall'**osservatore esterno** è minore o uguale ad s e si calcola come il seguente:

$$s' = \gamma s$$

2. Alcuni esercizi

Temi di Fisica del Liceo

Raccolta di alcuni dei temi di Fisica svolti durante il V° anno del liceo.

Tema 1. Fisica Matematica

Si definisca la legge oraria per un corpo $s(t) = v_0 t - 5t^2$, con la velocità iniziale $v_0 = 10 \text{ m/s}$.

1. Calcolare l'istanza del tempo per cui la velocità del corpo è nulla; ovvero, sapendo che $v(t_0) = 0 \text{ m/s}$, trovare t_0 .
2. Trovare $v(t_1)$ con $s(t_1) = 0 \text{ m}$.
3. Supponendo che $s(0) = 0$ calcolare $v(t_1)$ dove $t_1 = 10\text{s}$.
4. Trovare l'accelerazione $a(t)$ del corpo.

Tema 2. Elettrostatica, circuiti elettrici

1. Supponiamo di avere due cariche, una di cui negativa e l'altra positiva, allineate su un asse e che distano tra di loro per un certo quantitativo di spazio L non nullo; dire se esistono o meno dei punti di equilibrio sull'asse; se esiste, dire se è un punto di equilibrio stabile o instabile. (*Figura 2.1.*)
2. Supponiamo di avere una disposizione delle cariche raffigurata come nella *figura 2.2.*; calcolare la forza di Coulomb esercitata sulla carica Q .
3. Supponiamo di avere una situazione simile alla *consegna 1.*, dove la carica positiva ha la carica q e la carica negativa ha $-3q$. Dire se c'è un punto sull'asse dove il campo elettrico è nullo.
4. Supponiamo di avere una carica di 2 C nel centro di un cubo di lato $l = 0,5 \text{ m}$. Calcolare il flusso elettrico attraverso il cubo.
5. Calcolare la superficie che deve avere un condensatore a facce piane, affinché la sua capacità sia $C = 1 \text{ F}$, con $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$, $d = 1 \text{ mm}$?
6. Supponiamo di avere un circuito elettrico con condensatori in serie e in parallelo del tipo raffigurato nella *figura 2.6.*. Calcolare la capacità equivalente C_{eq} , il campo elettrico totale E_T generato dal circuito, e il campo elettrico generato da ogni condensatore ciascuno.
7. Supponiamo di avere un circuito con due condensatori in serie, e con un interruttore aperto posizionato nel mezzo dei condensatori (*figura 2.7.*). Supponiamo di caricare il condensatore a sinistra C_1 con 4 C e di lasciare "scaricato" l'altro condensatore (a destra) $C_2 = 0 \text{ C}$. Adesso supponiamo di chiudere l'interruttore, e vediamo che in C_1 rimane la carica 1 Q e la capacità del secondo condensatore è $C_2 = 2 \text{ F}$. Calcolare la capacità del condensatore C_1 .
8. Supponiamo di avere un circuito con dei resistori sia in serie che in parallelo, posizionati come nella *figura 2.8.*, con $R_1 = 20 \Omega$, $R_2 = 20 \Omega$, $R_3 = 30 \Omega$, $R_4 = 8 \Omega$. Calcolare il quantitativo di energia speso per un intervallo del tempo $\Delta t = 1 \text{ h}$; supponendo che il nostro fornitore dell'energia elettrica ha la seguente tariffa $1 \text{ MJ} = 0.10 \text{ €}$, calcolare quanto costa mantenere il circuito attivo per un'ora.

FIGURA 2.1.

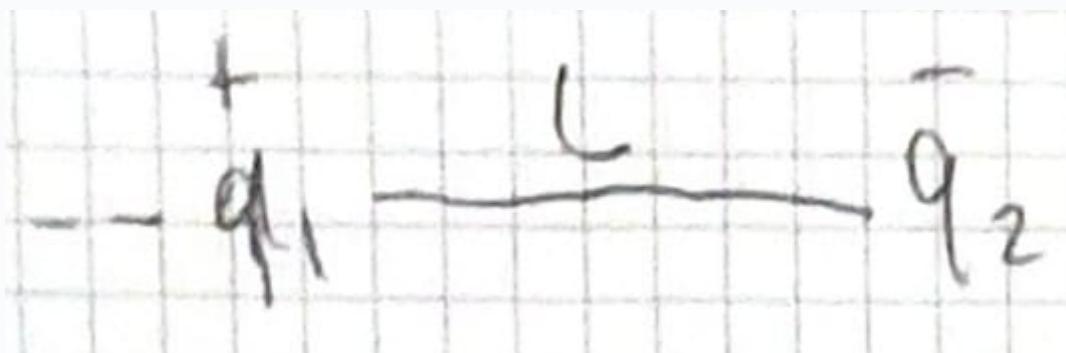


FIGURA 2.2.

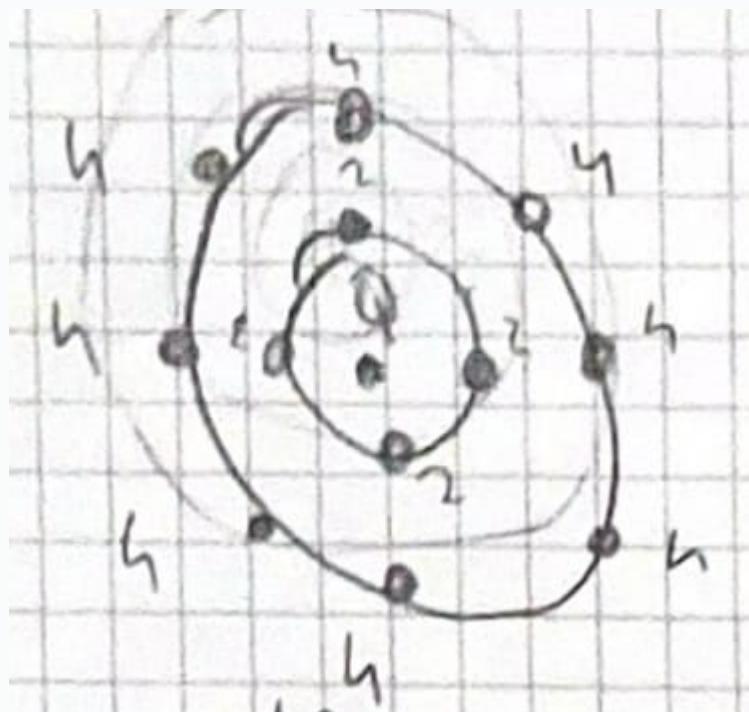


FIGURA 2.6.

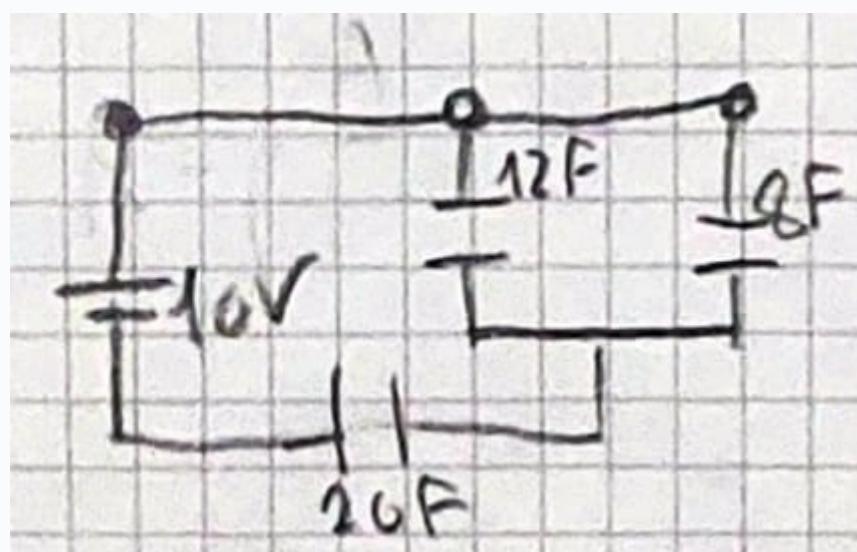


FIGURA 2.7.

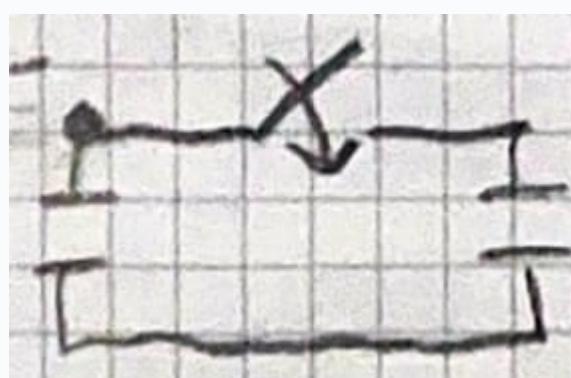
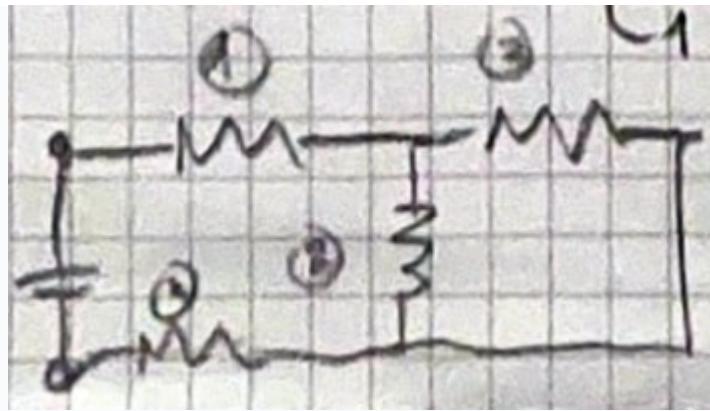


FIGURA 2.8.



Tema 3. Relatività speciale, forza gravitazionale, elettrostatica

N.B. In questa verifica è stata data la facoltà di scegliere tre soli problemi da risolvere durante la verifica, il restante è stato dato come compiti da risolvere a casa.

SEZIONE 1. RELATIVITÀ SPECIALE

1. Una navicella spaziale si muove alla velocità $v = \frac{c}{2}$. Ora supponiamo che noi, come osservatori esterni dalla navicella, vediamo un corpo di lunghezza $L = 1000$ km. Cosa vede invece l'astronauta, all'interno della navicella spaziale? Vede questo corpo con la stessa lunghezza, o è diversa? Se è diversa, calcolare la lunghezza osservata da lui L' .
2. Immaginiamo di essere degli astronauti, che viaggiano all'interno di una navicella spaziale alla velocità di $v = \frac{3}{4}c$. Supponiamo sul pianeta terra (esterno dalla navicella) trascorra un intervallo del tempo $\Delta t = 2$ h. Dire se per noi trascorre la stessa quantità del tempo; se no, calcolare l'intervallo del tempo trascorso per noi $\Delta t'$.
3. Supponiamo di avere tre vagoni che viaggiano internamente tra di loro; ovvero il primo vagone A viaggia dentro il secondo vagone B , che a sua volta viaggia dentro il vagone C e che a sua volta viaggia nel nostro spazio D . Supponiamo che all'interno del vagone B si vede che il vagone A viaggia a $v_{B/A} = \frac{3}{4}c$; analogamente il vagone B viaggia alla velocità $v_{C/B} = \frac{3}{4}c$ e il vagone C viaggia, dal punto di vista esterno, alla velocità $v_{D/C} = \frac{3}{4}c$. Calcolare la velocità del vagone A osservato dal punto di vista esterno, ovvero $v_{D/A}$.
4. Supponiamo di avere un bastone fermo di lunghezza l . Dire se è possibile che questo bastone viaggi ad una certa velocità, affinché da un punto di vista esterno si osserva che la sua lunghezza si diventi la metà della sua lunghezza l . Se sì, calcolare la velocità.

5. Un'astronave passa vicino alla terra alla velocità $v = 0.8c$ e viaggia verso la luna. Supponendo che la distanza tra la terra e la luna sia $d = 360\,000$ km, dire la durata del viaggio dell'astronave impiegata per partire dalla terra e raggiungere la luna, relativamente all'osservatore sulla terra. Dire invece la distanza tra la terra e la luna Δs per il passeggero dell'astronave. Analogamente dire l'intervallo di tempo Δt impiegato per raggiungere la luna, per il passeggero.

SEZIONE 2. FORZA GRAVITAZIONALE

- Supponiamo che un uomo abbia la massa (non peso!) $M = 70$ kg. Adesso immaginiamo che all'improvviso il raggio della terra r_T si raddoppi. Supponendo che la massa della terra rimanga costante, calcolare la variazione del peso dell'uomo. Analogamente calcolare la variazione del peso dell'uomo nel caso in cui la densità della terra rimanga costante.
N.B. Per il secondo scenario, approssimare la terra come una sfera.
- Supponiamo di avere la massa $M = 100$ kg. Abbiamo i seguenti dati: il raggio del sole è $r_S = 100 \cdot r_T$, che la massa del sole è $m_S = 330\,000 \cdot m_T$, che l'accelerazione della gravità della luna è $g_L = \frac{1}{6} \cdot g_T$. Calcolare il nostro peso sul sole e sulla luna.
- A quale altezza h dalla superficie terrena bisogna trovarsi, affinché l'accelerazione della gravità terrestre si riduca del 10%?
N.B. Usare l'approssimazione $g \approx 9.8$ m/s².

SEZIONE 3. ELETTROSTATICA

- Abbiamo le seguenti disposizioni delle cariche elettriche, raffigurate nella *figura 3.1*. Dire, se esistono, quali sono (o qual è) i casi (o il caso) in cui un elettrone (con carica negativa!) potrebbe stare in equilibrio in un certo punto dell'asse a sinistra delle cariche.
- Supponiamo di avere la disposizione delle cariche elettriche come in *figura 3.2*. Trovare, se esiste, il punto di equilibrio della carica centrale.
N.B. Per questi ultimi due esercizi è necessaria solo una semplice spiegazione grafica ed intuitiva.

FIGURA 3.1.

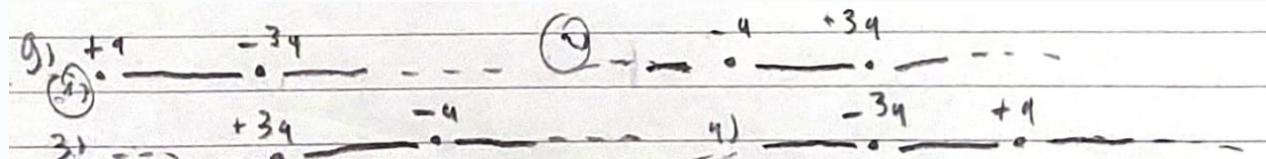
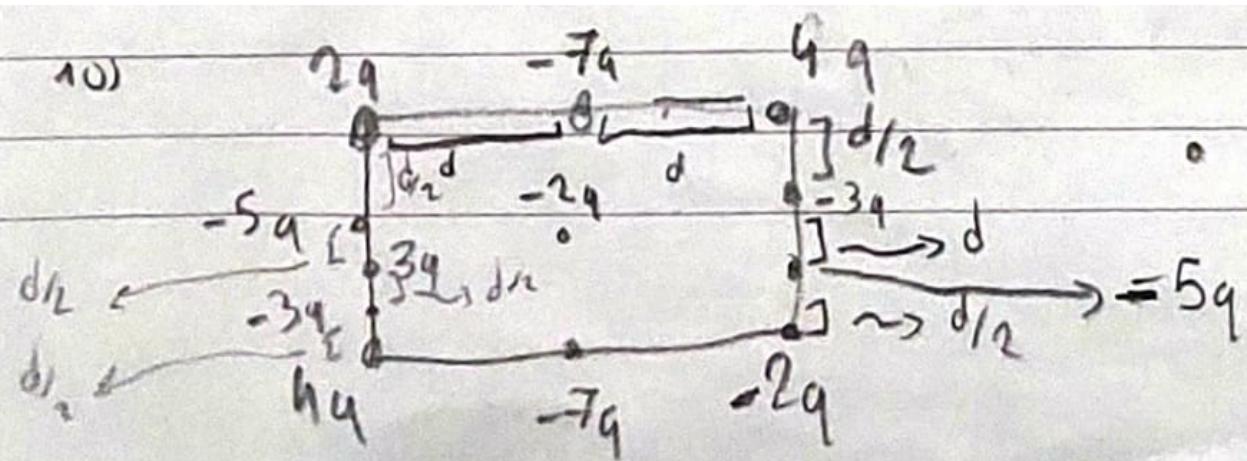


FIGURA 3.2.

10)



Nozioni Preliminari della Fisica - Sommario

Lo Zen della Fisica.

1. L'essenza della Fisica

Essenza della Fisica

Breve introduzione alla Fisica: il significato di studiare fisica, l'organizzazione dei concetti relativi alla fisica e il metodo scientifico.

1. Il significato della Fisica

La **Fisica** (dal greco φύσις, ovvero **natura**) è lo studio **fondamentale** della **materia**. In particolare la fisica **classica** (o **meccanica classica**) è quella branca della fisica che studia i **movimenti dei corpi puntiformi**, la **dinamica del corpo**, la **termodinamica** e i fenomeni dell'**elettromagnetismo**. Storicamente la fisica classica è stata riformulata molte volte negli ultimi secoli, dando una fondazione molto precisa a questa branca. Tuttavia questa precisione potrebbe trarci inganno, dal momento che nella **fisica** si tratta di un ciclo continuo tra formulazioni delle ipotesi, confutazioni, ulteriori sviluppi e altre ipotesi.

Infatti, questo avviene con la **fisica moderna**, che studia la **relatività** e la fisica **quantistica**: ancora oggi vi è un **divario** tra questi due ambiti fisici.

2. Organizzazione della Fisica

I contenuti relativi alla **Fisica** vengono organizzati secondo le seguenti categorie. **Principi**. Per "principio fisico" intendiamo una **proposizione generale** (o **universale**) che vale sempre.

Legge. Per "legge" si intende una **relazione matematica** tra due o più **grandezze fisiche**; sostanzialmente è un modo per **descrivere i principi**.

Modello. Per "modello fisico" si intende un'analogia, una rappresentazione

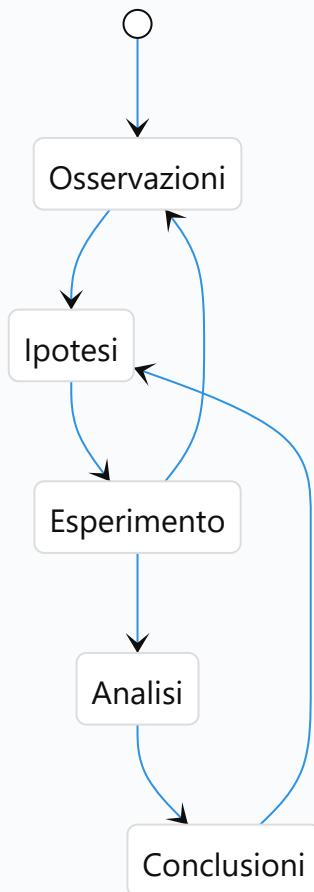
semplificata del nostro mondo complesso.

Teoria. Quando mettiamo assieme delle *leggi*, dei *principi* e un *modello* senza creare contraddizioni, si ha una *teoria*.

3. Il Metodo Scientifico

Si presenta prima un diagramma che illustra il c.d. *metodo scientifico*, poi per analizzare alcune parti.

Metodo Scientifico



Evidenziamo il passaggio più saliente di questo grafico: la *verifica delle ipotesi con degli esperimenti*.

E' fondamentale che le *ipotesi* vanno *verificate* con degli esperimenti. Una *non-definizione* del metodo scientifico è proprio quella presunzione che una *ipotesi* (o *teoria*) sia *inconfutabile*; il filosofo della scienza K. Popper (https://it.wikipedia.org/wiki/Karl_Popper) conia il termine "*falsificabile*" per esprimere il fatto che una teoria può essere sempre *confutata* con un'*esperimento*.

2. Grandezze e Misure Fisiche

Grandezze e Misure Fisiche

Definizione di grandezza fisica. Le grandezze fondamentali della fisica, definizione operative. Misura diretta e indiretta e misura derivata. Analisi e verifica dimensionale.

1. Definizione di Grandezza Fisica

Grandezza Fisica. Una grandezza fisica è una *caratteristica* di un corpo (o fenomeno naturale) a cui si può associare *uno (o più) numeri*. Come primi esempi di *grandezza fisica* vedremo le c.d. *grandezze fondamentali*.

2. Le Grandezze Fondamentali

Le grandezze Fondamentali. Nel *sistema internazionale* ci sono *sette grandezze fondamentali*, tra cui il metro, il chilogrammo, il secondo, lo Kelvin, la candela, l'Ampere e la mole; in particolare ci soffermeremo sulla *lunghezza* (il metro), sulla *massa* (il chilogrammo) e sul *tempo* (il secondo). Queste grandezze fisiche sono "*fondamentali*" dal momento che vengono definite "*operativamente*", ovvero solo mediante dalle *operazioni necessarie per misurarle*.

Dopodiché, in generale le *grandezze fisiche* si esprimono in *termini di campione* (ovvero le *unità*).

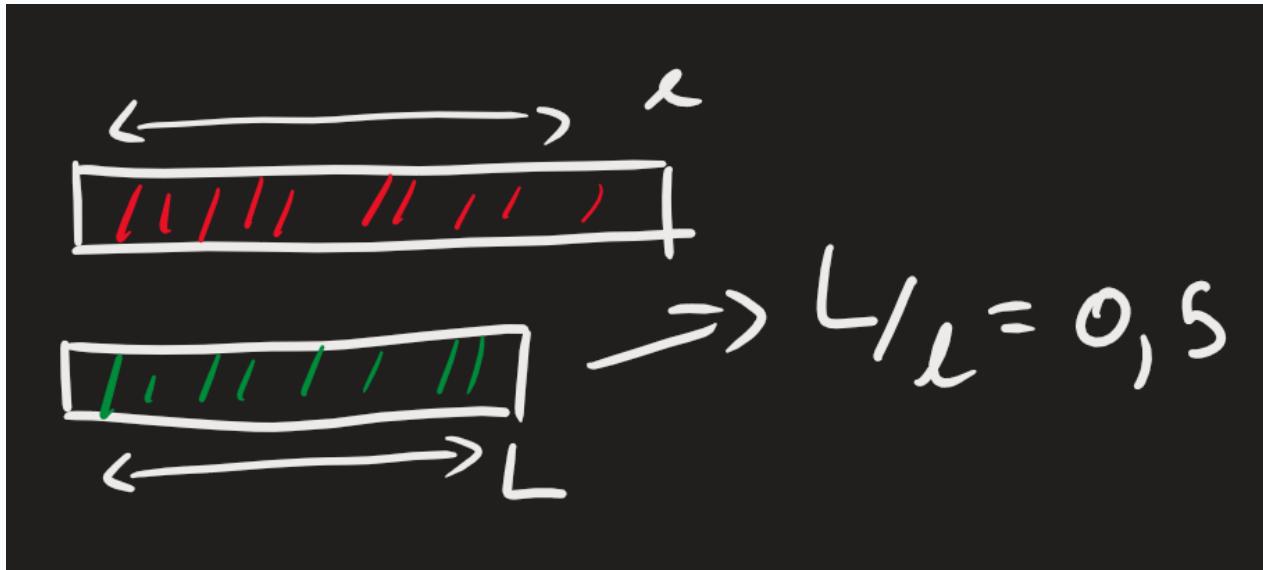
In particolare:

- Il *secondo* viene misurato dal valore numerico delle *risonanze del cesio*, 9.192.631.770 volte il periodo di oscillazione di una risonanza dell'atomo ^{233}Ce .
- Il *metro* viene misurato dalla distanza percorsa dalla luce in un secondo, diviso per 299.792.458.
- Il *chilogrammo* viene misurato secondo la *costante di Planck*
$$h = 6,62607015 \cdot 10^{-34} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$
Notare che la definizione del *metro* dipende dal *secondo* e similmente la definizione del *chilogrammo* dipende dal *metro* e dal *secondo*.

3. Misure dirette, indirette e unità derivate

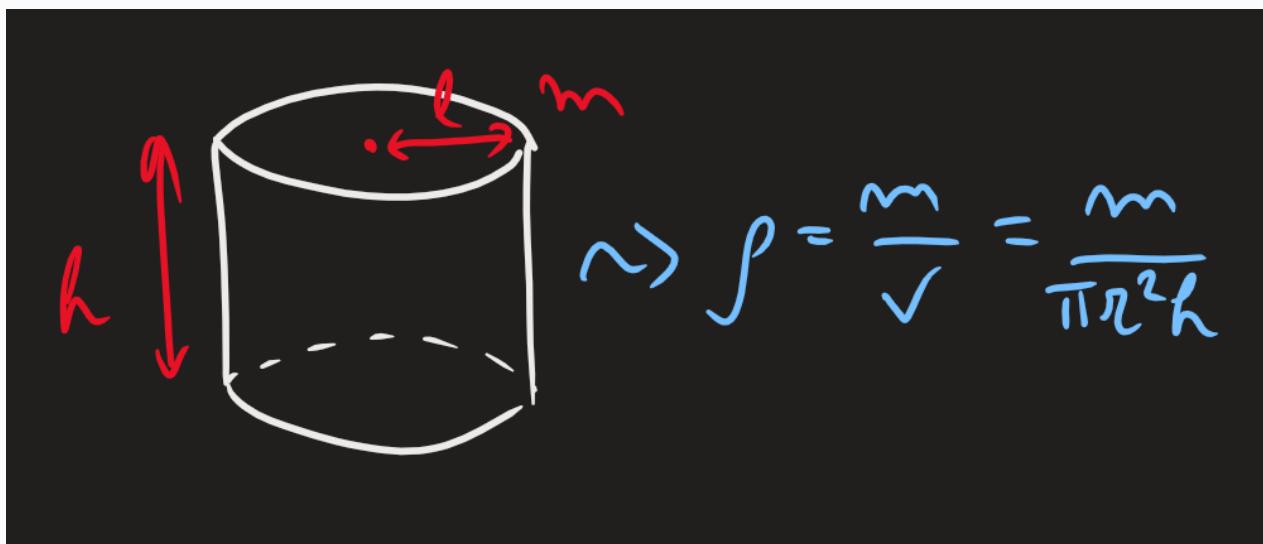
Misura diretta. La misura diretta è il *confronto* con un *campione*, detto l'*unità*. Ad esempio, supponiamo di avere un corpo lungo c , che prenderemo come campione. Adesso immaginiamo di avere un altro corpo con lunghezza L , per ottenere la misura di questo corpo basta fare il rapporto $\frac{L}{c}$ (*figura 3.1.*).

FIGURA 3.1. (Esempio di una misura diretta)



Misura indiretta. La misurazione indiretta è una relazione matematica. Ad esempio si ha la densità di un cilindro, per cui necessitiamo di **massa** e **volume** (figura 3.2.); oppure il principio di Archimede è un buon esempio.

FIGURA 3.2. (La densità di un cilindro)



Unità derivate. Le unità derivate sono le **combinazioni** di **unità fondamentali**.

Come visto prima, possiamo prendere la **densità** di un qualsiasi corpo come un'unità derivata, dal momento che è espressione di una combinazione tra il chilogrammo e metro cubo.

4. Analisi Dimensionale

Osservazione. (*l'analisi dimensionale ci fornisce una condizione sufficiente*)

Studiare e analizzare le **unità** diventa molto importante, in particolare per **verificare** i risultati di un'analisi fisica: infatti la misura (o l'unità) di un risultato ci fornisce una **condizione sufficiente**.

Ad esempio, se si sta cercando di calcolare il peso di un corpo e alla fine si ottiene

un risultato in secondi, è ovvio che c'è qualcosa di sbagliato! Se la misurazione è sbagliata, allora sicuramente il calcolo è errato. Tuttavia questa non ci fornisce una **condizione necessaria**, dal momento che la misurazione può essere giusta ma il risultato può essere comunque sbagliato.

Idea. (*l'analisi dimensionale ha delle regole precise*) Nell'analisi dimensionale poniamo delle **regole precise**:

1. La somma e la sottrazione di **grandezze fisiche** dev'essere **omogenea**, ovvero che le grandezze devono essere le stesse;
2. L'argomento di **funzioni trascendenti** (come sin, cos, exp, ...) dev'essere **adimensionale** (ovvero senza essere dotate di dimensioni: in un modo la misura viene cancellata).

Applicazioni. (*Verifica e analisi dimensionale*)

1. (*Verifica dimensionale*)

Come detto prima, possiamo **verificare** se un risultato di un calcolo (o di una formula, legge) sia giusto o errato, guardando le misure.

Ad esempio voglio verificare la legge oraria.

$$\Delta x = v\Delta t + \frac{1}{2}a\Delta t^2$$

Adesso racchiudo tutti i membri nelle parentesi quadre per dire che "**sto prendendo le loro dimensioni (o unità)**".

$$[\Delta x] = [v][\Delta t] + \left[\frac{1}{2} \right] [a][\Delta t^2]$$

Ora metto le loro dimensioni, esprimendoli con opportuni simboli o con le loro unità di riferimento.

$$m = \frac{m}{s}s + \frac{m}{s^2}s^2 \implies m = m \text{ OK!}$$

Quindi posso vedere che **è possibile** (non dev'essere **necessariamente vero!**) che la formula data sia corretta.

2. (*Analisi Dimensionale / Dipendenza Funzionale*)

L'analisi dimensionale può essere utile anche per determinare le **misure necessarie** per calcolare una certa grandezza fisica: possiamo dedurre l'**unica (o più) combinazioni** di grandezze fisiche per calcolare una grandezza derivata. Ad esempio, vogliamo calcolare **l'accelerazione di una massa che si muove su una circonferenza** (ovvero l'accelerazione centripeta).

Sappiamo che l'accelerazione si esprime in $\frac{m}{s^2}$. Vogliamo dunque una

combinazione di queste misure che dia questa combinazione di dimensioni. Facendo finta di conoscere il *raggio* R della circonferenza, la *velocità* v e la *massa* m del corpo, possiamo sapere già quali diventeranno utili per calcolare il risultato voluto (*figura 4.1.*).

Infatti, si trova che

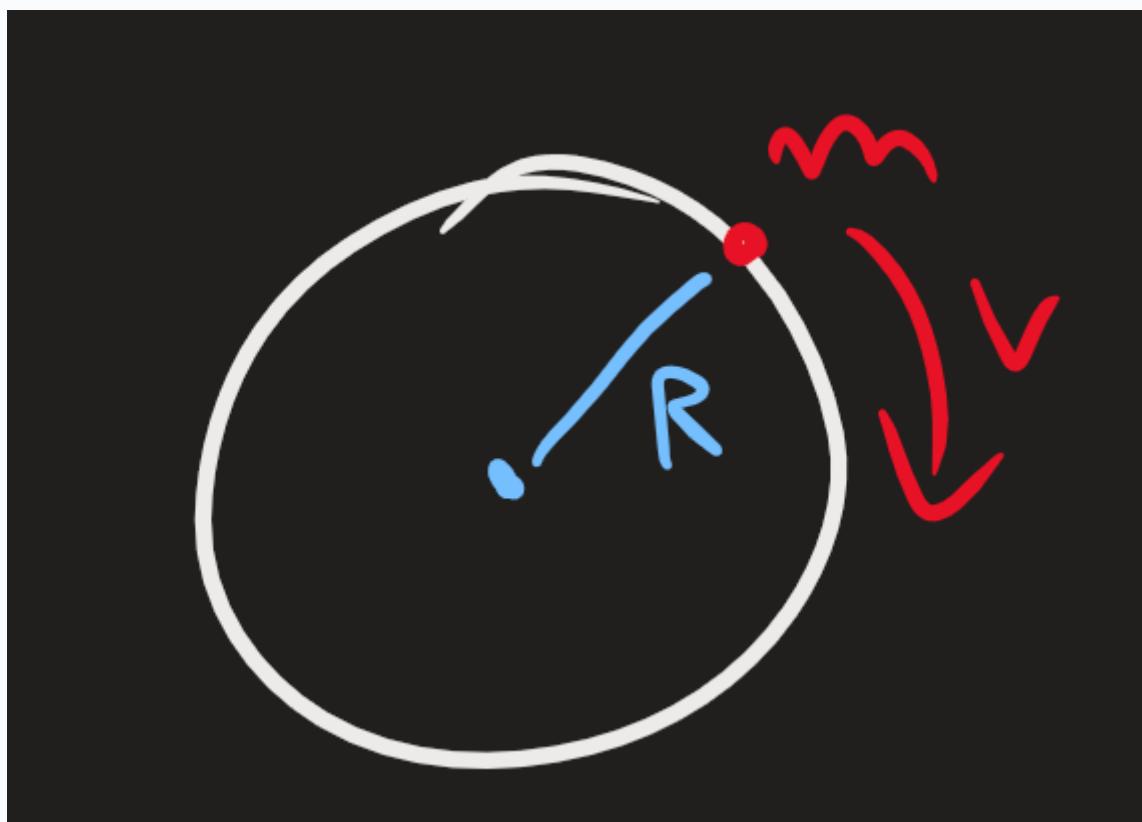
$$[R] \rightarrow m; [v] \rightarrow \frac{m}{s}; [m] \rightarrow kg$$

Allora si ha

$$\left[\frac{v^2}{R} \right] = \frac{m}{s^2}$$

che sono i dati utili per calcolare l'accelerazione. Tuttavia questa non ci fornisce una *formula esatta* per calcolare la grandezza, dal momento che con l'analisi dimensionale le *costanti* vengono trascurate.

FIGURA 4.1. (*L'analisi dimensionale di un corpo che si muove su un cerchio*)



3. Incertezza Fisica

Incertezza Fisica

Incertezza fisica: espressione dei risultati con un livello di incertezza, cifre significative. Fonti dell'incertezza fisica: precisione e accuratezza. Incertezza statistica: media, varianza e formula per calcolare l'incertezza. Propagazione delle incertezze.

1. Esprimere l'incertezza fisica

Nella fisica si sempre ha a che fare con *l'incertezza*: questa si verifica soprattutto con la *misurazione* fisica dei corpi. Per scrivere una *misurazione* con un margine di errore si usa la seguente notazione.

$$L = 1.82 \pm 0.02 \text{ m}; M = 3.5 \pm 0.1 \text{ kg}$$

Quindi separiamo ogni numero in *due parti*: la *misura* e *l'incertezza*. Come nel primo esempio, si ha

$$L = \begin{array}{c} 1.82 \\ \text{misura} \end{array} \pm \begin{array}{c} 0.01 \\ \text{incertezza} \end{array} \text{ m}$$

Cifre significative. Alternativamente possiamo usare (e lo faremo spesso) le *cifre significative* per indicare il *livello di precisione* di una misurazione. Questa funziona semplicemente prendendo le "*cifre di cui siamo confidenti*", o "*cifre di cui siamo precise*".

Ad esempio

$$L = 1.82 \text{ m}$$

ha *tre* cifre significative, ed equivale a

$$L = 1.82 \pm 0.01 \text{ m}$$

Quando si ha il *prodotto* o la *divisione* tra due cifre significative, si tiene il numero *più basso delle cifre significative*.

$$(1.1 \text{ m}) \cdot (3.45 \text{ m}) = \cancel{3.795} \ 3.8 \text{ m}^2$$

Quando si ha invece la *somma* o la *sottrazione* tra due cifre significative, si tiene il *numero più basso dei decimali*.

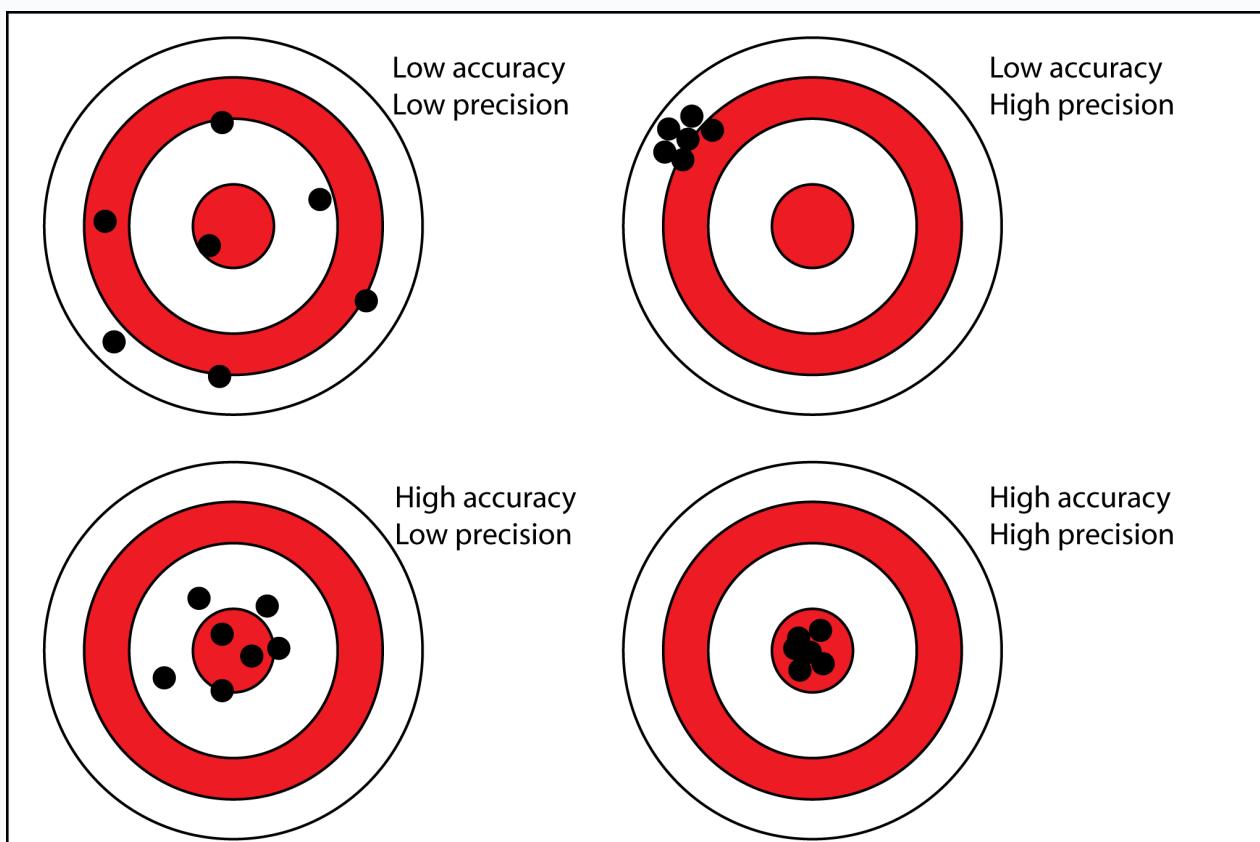
$$1.1 \text{ m} - 0.12 \text{ m} = \cancel{0.98} \ 1.0 \text{ m}$$

2. Fonti dell'incertezza fisica

Principalmente abbiamo *tre fonti di incertezza fisica*.

1. *Risoluzione strumentale*. Questa incertezza proviene dallo *strumento di misurazione*: ad esempio se misuriamo la lunghezza di un corpo con un *righello* segnato in *centimetri*, notiamo che ci sono dei spaziotti ad ogni tacca che segna il centimetro. Questo vuoto rappresenta l'errore detto "risoluzione strumentale".
2. *Errori casuali (o incertezze statistiche)*. Questi errori dipendono invece da una molteplicità di fattori di cui non si sanno bene, tuttavia sappiamo che le *variazioni* rappresentate da quest'errore si distribuiscono in un certo modo. Lo vedremo con degli approfondimenti sull'*incertezza statistica*.
3. *Errori sistematici*. Questa tipologia di errore succede costantemente con ogni misurazione.
Notare che le *prime due tipologie di errori* incidono sulla *precisione* della misurazione, ovvero "*in che modo sono distribuiti questi errori*", l'ultimo incide invece sull'*accuratezza*, ovvero "*da quanto si discostano dal valore voluto*" (*figura 2.1.*).

FIGURA 2.1. (Illustrazione grafica dei concetti di accuratezza e precisione)



3. Incertezza statistica

Ora cerchiamo di vedere in una maniera dettagliata l'*incertezza statistica*.

Quando misuriamo *molte volte* una grandezza, otteniamo spesso *diversi risultati*, che però sono in qualche modo "*vicini tra di loro*", dove spostandoci al centro abbiamo "*una densità maggiore di misure*".

Chiamiamo N il numero di misurazioni.

Definiamo la *media* $\langle x \rangle$ su N misure come il valore

$$\langle x \rangle := \frac{1}{N} \sum_{n \in N} x_n$$

Definiamo invece la *varianza* $\text{var}(x)$ o lo *scarto quadratico medio* come il numero

$$\text{var}(x) := \frac{1}{N} \left[\sum_{n \in N} (x_n - \langle x \rangle)^2 \right]$$

Graficamente si possono illustrare le ultime due misure come nella *figura 3.1.*.

Adesso si definisce il numero σ come

$$\sigma := \sqrt{\text{var}(x)}$$

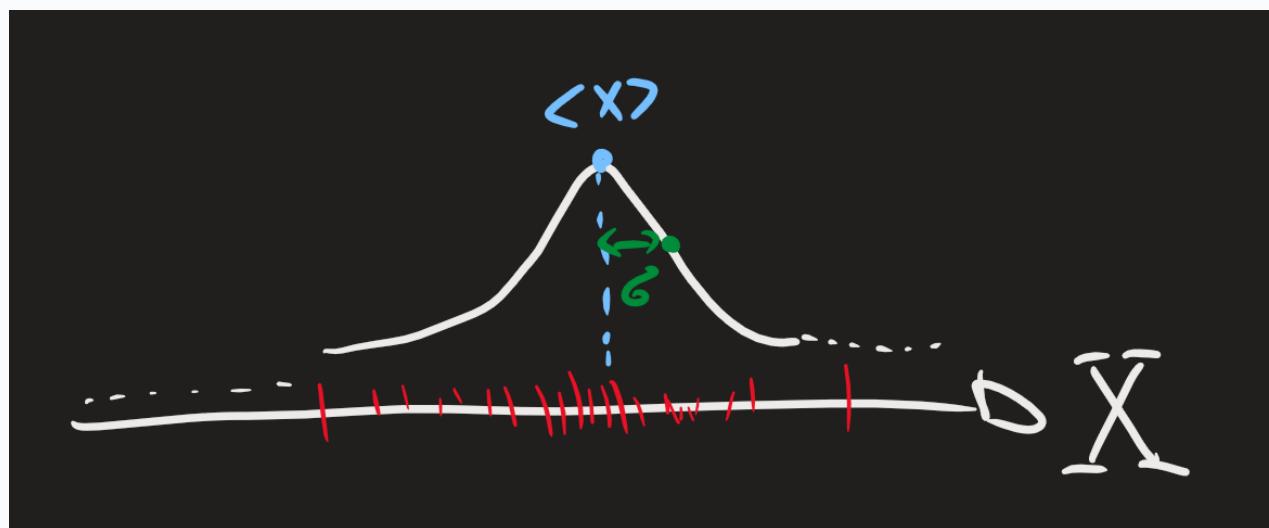
Con la *statistica* si dimostra che l'*incertezza* misurata è

$$\Delta X = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

Ovvero il risultato sarà

$$X = \bar{x} \pm \Delta x$$

FIGURA 3.1. (Media e varianza)



4. Propagazione delle incertezze

IDEA. Voglio trovare un modo per "trasferire gli errori". Ovvero, partendo da una misurazione con delle incertezze voglio ottenere una sua misurazione derivata, tenendo conto di questi errori.

ESEMPIO. (*la superficie di un quadrato*)

Prendiamo la superficie di un quadrato, ovvero $A = L^2$. Supponendo di avere $L = 3.0 \pm 0.2 \text{ cm}$, voglio trovare un modo per determinare A tenendo conto dell'*errore*.

In genere dipende dal *tipo di errore*, ma come buon riferimento prendiamo in considerazione l'*errore statistico*.

Rappresentiamo l'area della superficie come una *funzione al variare della lunghezza*, ovvero $A(L) = L^2$. Ora ne disegniamo il grafico (*figura 4.1.*). Posso dunque considerare $3.0 \pm 0.2 \text{ cm}$ come l'*intorno del numero* 3.0 con raggio $\delta = 0.2$; dunque posso calcolare $A(L - \delta)$ e $A(L + \delta)$.

Per rendere più semplici le cose, cerchiamo di *linearizzare* la funzione mediante lo sviluppo delle funzioni di Taylor ([Teorema 2.1. \(di Taylor col resto di Peano\)](#)), con $n = 1$.

Abbiamo dunque

$$A(L \pm \delta) \approx A(L) \pm \frac{dA}{dL} \delta$$

(*nota che per fare bene le cose si dovrebbe distinguere il caso in cui consideriamo l'intorno destro e sinistro*)

Ora voglio calcolare l'errore ΔA considerando la relazione

$$A \pm \Delta A = A(L \pm \delta)$$

Quindi per trovare ΔA faccio la somma $A + \Delta A - (A - \Delta A) = 2\Delta A$.

$$2\Delta A = 2 \frac{dA}{dL} \delta \implies \Delta A = \frac{dA}{dL} \delta$$

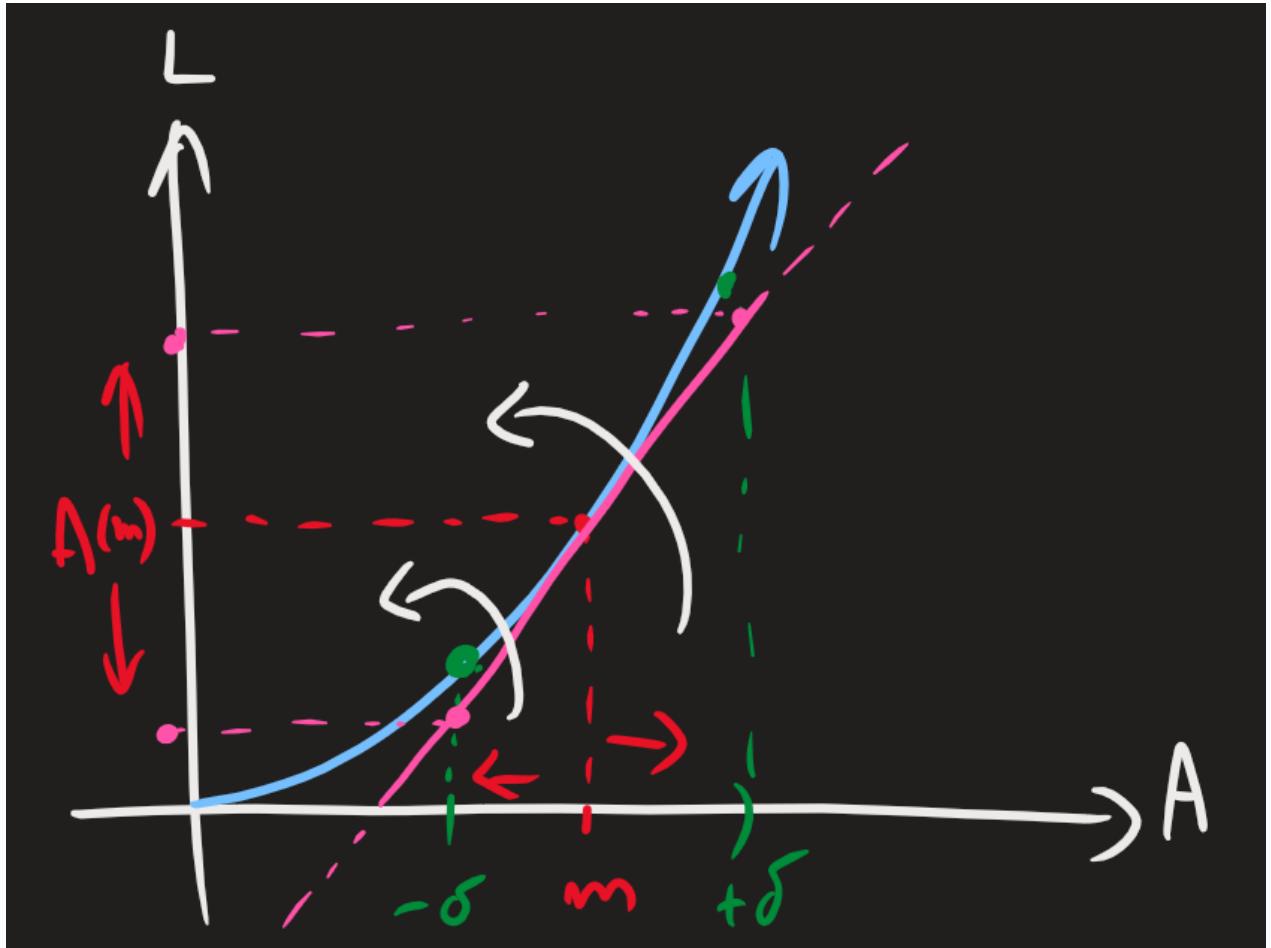
Ovvero abbiamo

$$\Delta A = 2L \cdot \delta = 6 \cdot 0.2 = 1.2$$

Quindi possiamo scrivere

$$A = 9 \pm 1 \text{ cm}^2$$

FIGURA 4.1. (*"L'idea è questa"*)



CASO GENERALIZZATO. Ora vediamo alcune formule generali per calcolare la *propagazione delle incertezze*.

Per una funzione ad una variabile $f(x)$, dove abbiamo una *misura* e una *grandezza derivata* si calcola l'incertezza Δf come

$$f(x) \rightarrow \Delta f = \left| \frac{df}{dx} \right| \Delta x$$

Per una funzione a due variabili $f(x, y)$ si ha

$$f(x, y) \rightarrow \Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 \Delta x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \Delta y^2}$$

oppure in certi casi rari si può usare anche

$$\Delta f = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \Delta y$$

ESEMPI DEL CASO GENERALIZZATO. Supponiamo di avere una misurazione del tipo

$$f = ax + by; g = x^m y^n$$

Allora le loro incertezze sono

$$\Delta f = \sqrt{a^2 \Delta x^2 + b^2 \Delta y^2}$$
$$\Delta g = \sqrt{(mx^{m-1}y^n \Delta x)^2 + (ny^{n-1}x^m \Delta y)^2}$$

L'INCERTEZZA RELATIVA. Notare che per Δg sia $mx^{m-1}y^n$ che $ny^{n-1}x^m$ sono espressioni del tipo $\frac{\cdot}{\cdot}^f$. Allora si può prendere la loro *incertezza relativa* definita come

$$\frac{\Delta f}{f}$$

e in questo caso ho

$$\frac{\Delta g}{g} = \sqrt{\left(m \frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(n \frac{\Delta y}{y}\right)^2}$$

4. Ordini di Grandezza e Problemi alla Fermi

Ordine di Grandezza

Definizione, scopo e notazione degli ordini di grandezza. Problemi alla Fermi.

1. Definizione e scopo degli Ordini di Grandezza

#Definizione

Definizione (ordine di grandezza).

Prendiamo un *numero n*. L'*ordine di grandezza* di *n* è la potenza di 10 più vicina.

#Esempio

Esempio (notazione scientifica).

Prendiamo ad esempio il numero 6 317 000 km. Con la definizione appena enunciata, l'ordine di grandezza di questo numero è 10^6 e possiamo quindi riscriverla come

$$6,317 \times 10^6 \text{ km}$$

Questo modo generale di scrivere i numeri si dice *notazione scientifica*

#Osservazione

Osservazione (lo scopo degli ordini di grandezza).

Lo scopo degli ordini di grandezza è quella di poter fare *calcoli veloci approssimativi*; basta infatti prendere un numero, il suo numero di grandezza e da lì sarà sufficiente fare moltiplicazioni tra potenze di 10.

Un caso particolare di queste applicazioni sono i c.d. *problemi "alla Fermi"* (Fermi fu un fisico noto), dove si vuole calcolare *velocemente* una quantità approssimativa usando questi principi; altrimenti bisognerebbe avere molti dati.

Molto stranamente, questo metodo è in grado di poter darci una *buona approssimazione* per la quantità desiderata: infatti, il fisico E. Fermi (da cui traiamo il titolo della tipologia del problema) calcolò l'energia rilasciata da un'esplosione nucleare con una buona approssimazione, lasciando dei pezzetti di carta e considerando la forza della spinta subiti da questi straccetti di carta!

2. Esempi di Problemi alla Fermi

#Esempio

Esempio (il pacemaker).

Un ingegnere deve fabbricare un pacemaker. Quanti battiti deve poter fare questo pacemaker, assumendo che non malfunzioni?

Prendiamo il seguente approccio: una prima osservazione è quella che mediamente si fa un *battito al secondo*.

Dopodiché prendiamo la durata della vita media come 100 anni.

Infine consideriamo che in un anno ci sono *circa* $\pi \cdot 10^7$ secondi.

Quindi, facendo le somme abbiamo

$$1 \cdot 100 \cdot \pi \cdot 10^7 \approx 3 \cdot 10^9 \text{ battiti}$$

#Esempio

Esempio (i capelli).

Quanti capelli si ha sulla testa?

Nota: questo è un mio svolgimento di questo esercizio

Prendiamo preliminarmente in considerazione la superficie di una semisfera, ovvero

$$S_c = 2\pi r^2$$

Prendiamo $\bar{r} = 10 \text{ cm}$ (ovvero il raggio medio di una testa sarebbe di dieci centimetri).

Adesso consideriamo la densità media dei capelli in un centimetro quadrato; prendiamo $\bar{\rho} = 100 \text{ capelli/cm}^2$

Facendo i conti, abbiamo

$$2 \cdot \pi \cdot 10^2 \cdot 100 \approx 6 \cdot 10^4 \text{ capelli}$$

5. Fondamenta sui Scalari e sui Vettori

Scalari e Vettori nella Fisica

Fondamenta del calcolo vettoriale per la fisica: nozione di scalare, vettore, versore. Definizione di prodotto scalare, proprietà del prodotto scalare.

1. Definizione di scalare e di vettore

SCALARE. Si definisce uno *scalare* come una *grandezza* specificata da un *numero* e da un'*unità*. Come esempi di *scalari* si hanno la *lunghezza* e la *massa*.

VETTORE. Si definisce un *vettore* come una *quantità* definita da *più valori* e *più medesime unità*. Alternativamente un *vettore* può essere caratterizzato da *un valore, una direzione e un verso*.

2. Vettori

LA RAPPRESENTAZIONE DEI VETTORI. Geometricamente si può rappresentare un *vettore sul piano* come una semplice "freccia", che parte dall'origine e va verso ad un punto (v_x, v_y, v_z) (*figura 2.1.*). Scriveremo dunque

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$$

LE DIFFERENZE DAI PUNTI. Anche questa definizione dei vettori fa *assomigliare* i vettori ai *punti* sullo spazio, notiamo che comunque ci sono delle differenze: i vettori hanno più proprietà.

Ad esempio non si può definire una nozione di *lunghezza* per un punto; oppure non si può definire la *somma* per *due punti*.

LE OPERAZIONI CON I VETTORI. Possiamo definire le due operazioni per i vettori: scalamento e somma.

Scalamento. Si ha uno "*scalamento*" quando si tenta di moltiplicare uno scalare per un vettore. Quindi viene definita come

$$a \cdot \vec{v} = (av_x, av_y, av_z)$$

Notiamo che se lo scalare a è *adimensionale* (ovvero, se non munita di dimensioni) allora si ha una *compressione* o *allungamento* di \vec{v} . Particolamente, se $a < 0$ allora si ha un cambiamento nel *verso* del vettore.

Somma tra i vettori. Possiamo definire la somma tra due vettori con la *regola del parallelogrammo* oppure con la *regola punta-coda*. Matematicamente, la somma tra vettori viene definita come

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_x + v_x, u_y + v_y, u_z + v_z)$$

FIGURA 2.1. (*Vettore in 3D*)

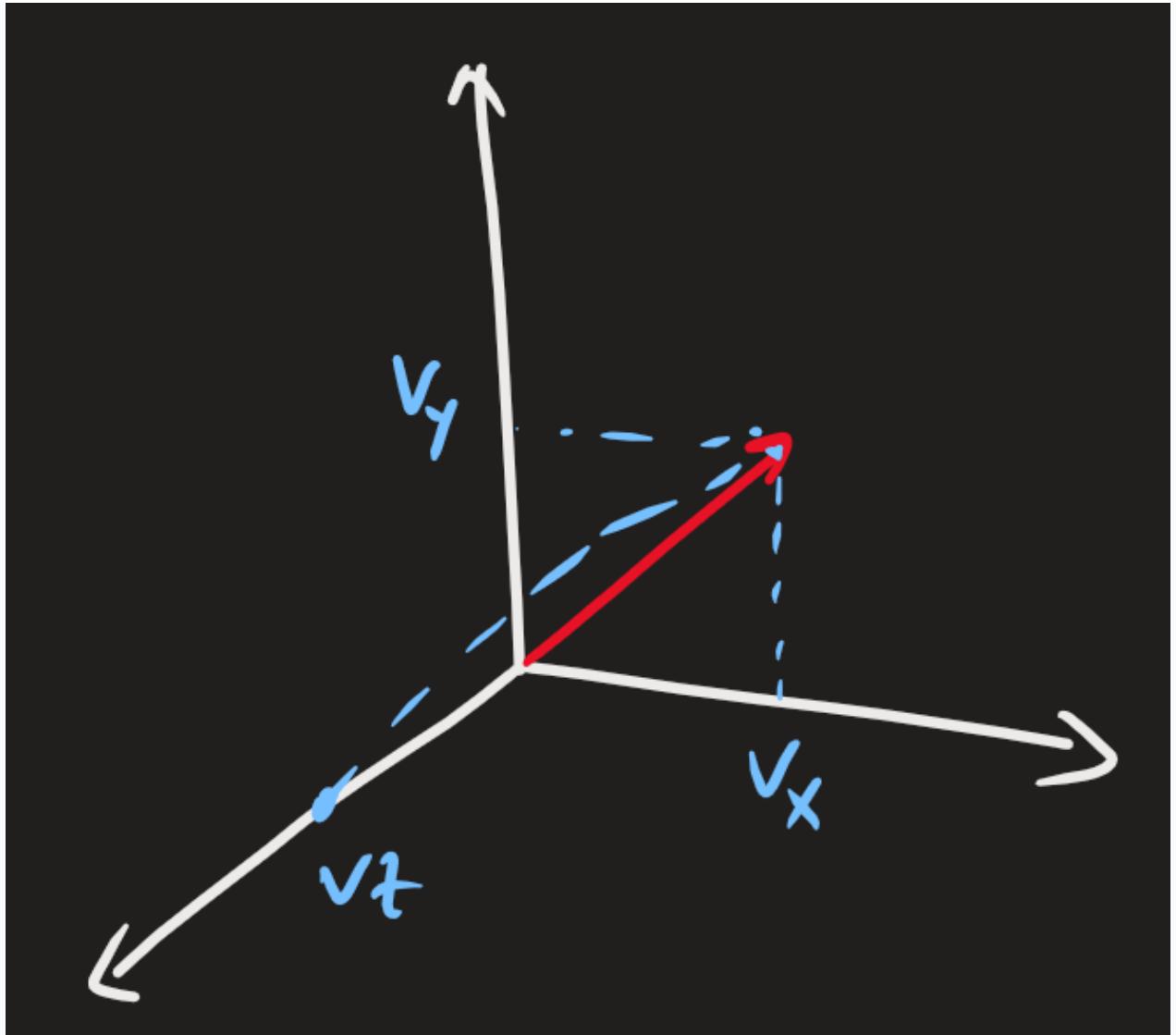
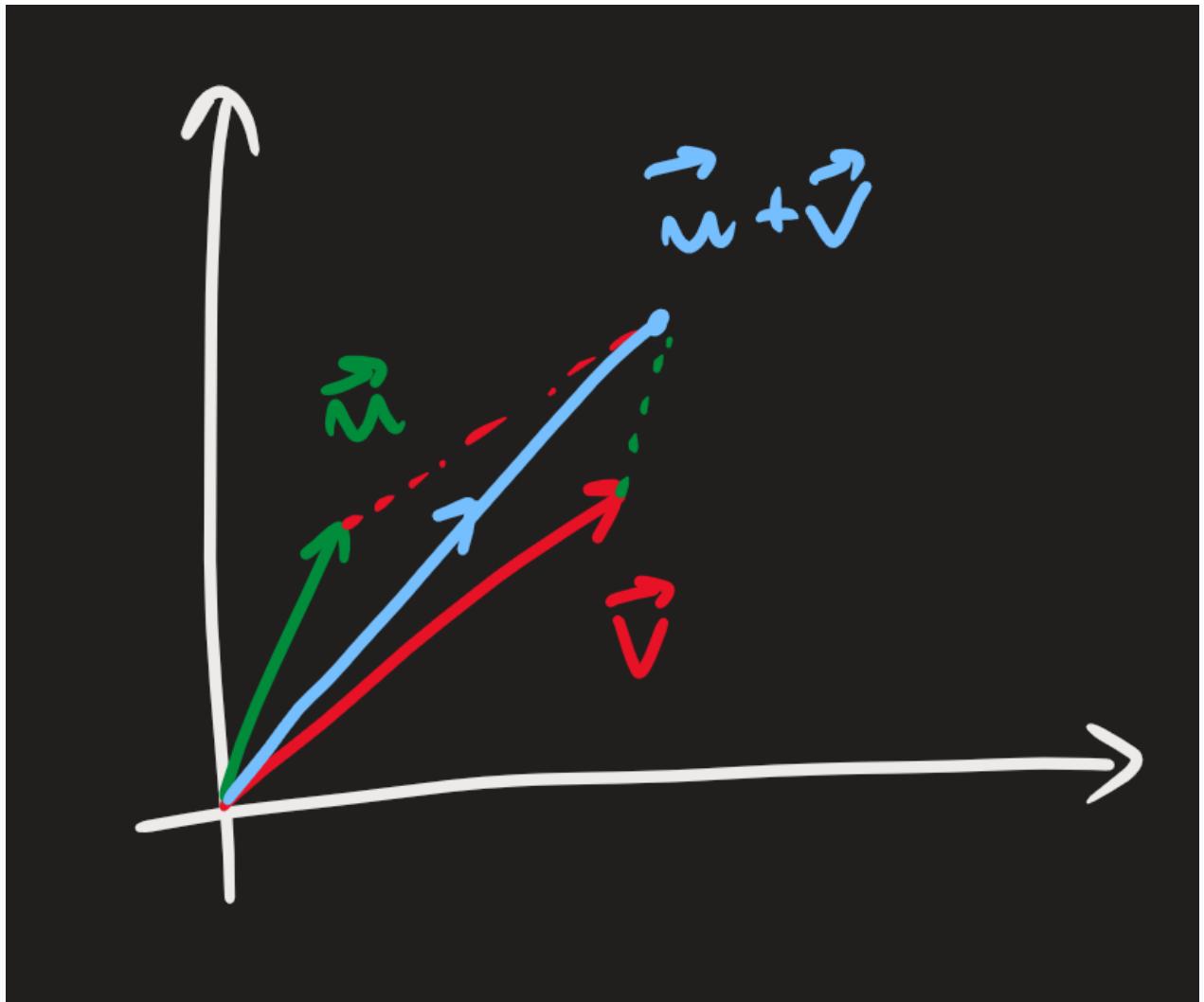


FIGURA 2.2. (*La regola del parallelogramma*)



MODULO E DIREZIONE. Si definisce il *modulo* di un vettore come la sua *lunghezza geometrica*; la indichiamo come

$$|\vec{v}| = v$$

In termini delle componenti, si ha

$$|\vec{v}| = \sqrt{\sum_i^N (v_i)^2}$$

3. Versori

VERSORE. Definiamo un *versore* come un *vettore* che ha *modulo unitario*, ovvero tale che

$$|\vec{n}| = 1 \implies \frac{\vec{v}}{|v|} = \vec{n}, \forall \vec{v}$$

I versori possono essere denotati anche come

$$\vec{n} \rightarrow \hat{n}$$

Ora vediamo che ci sono dei *versori particolarmente utili*.

VERSORI STANDARD. Definiamo i "*versori standard*" come

$$\begin{cases} \hat{i} = (1, 0, 0) \\ \hat{j} = (0, 1, 0) \\ \hat{k} = (0, 0, 1) \end{cases}$$

Vediamo che un *qualsiasi vettore* è espressione unica del tipo

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}$$

(questo risultato discende dallo studio dell'*Algebra Lineare*) ([Teorema 1.1. \(Caratterizzazione delle basi\)](#)).

4. Prodotto Scalare

PRODOTTO SCALARE. Definiamo il *prodotto scalare* come un'operazione che associa *due vettori* con *uno scalare*. Ovvero,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} := \sum_{i=0}^N u_i v_i$$

OSSERVAZIONI. Poniamo una serie di osservazioni su quest'operazione.

Definizione del modulo. Con questa operazione si può definire il *modulo* di un vettore in un altro modo. Infatti,

$$|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$$

Ortonormalità dei versori. Notiamo che i versori $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ sono *ortonormali*; ovvero che valgono

$$\begin{cases} \hat{i}^2 = \hat{j}^2 = \hat{k}^2 = 1 \\ \hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{i} \cdot \hat{k} = \dots = \hat{k} \cdot \hat{j} = 0 \end{cases}$$

([Definizione 4 \(base ortonormale\)](#))

Estrazione delle singole componenti. Dato un vettore \vec{v} , possiamo estrarre un suo *singolo componente* moltiplicando per un versore. Ad esempio,

$$v_x = \vec{v} \cdot \hat{i}; v_y = \vec{v} \cdot \hat{j}; v_z = \vec{v} \cdot \hat{k}$$

Questo sarà utile per effettuare il *cambiamento delle basi*.

Legame con l'angolo. Notiamo che se definiamo θ come l'angolo compreso tra \vec{u}, \vec{v} allora il prodotto scalare diventa

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \theta$$

(per una dimostrazione vedere [Definizione 7 \(angolo tra due vettori\)](#))

Cinematica - Sommario

Tutto sulla Cinematica.

0. L'idea della Cinematica

Introduzione alla Cinematica

Introduzione alla cinematica: l'idea cardine

1. Significato di cinematica

IDEA. L'idea cardine della *cinematica* è della *descrizione del moto*. Si tratta solo di quello: se si vuole invece studiare la *causa del moto*, allora si va a studiare la *dinamica*; per quanto riguarda invece *lequilibrio meccanico*, si studia la *statica*.

2. La modellizzazione della cinematica

MODELLO. Come *modello*, ovvero *analogia semplificata della realtà*, consideriamo *ogni corpo* come un *punto materiale*: ovvero considereremo sempre i *corpi puntiformi*. Più piccolo un oggetto, meglio funziona questa "approssimazione".

FIGURA 2.1. (*L'idea della modello*)



1. Grandezze Fondamentali per la Cinematica

Posizione e Spostamento di un Corpo Puntiforme

Prime grandezze per un corpo puntiforme: posizione e spostamento.

1. Definizione di Posizione e Spostamento

#Definizione

Definizione (posizione).

Si associa ad un *corpo puntiforme* la *posizione*, un "vettore" che indica, appunto, la sua posizione nello spazio. Viene indicata come \vec{r} .

Notare che questo in realtà si "*comporta quasi come un punto*", dato che il suo modulo $|\vec{r}|$ ha significato diverso a seconda del *sistema di riferimento* (o dall'*origine*).

#Definizione

Definizione (spostamento).

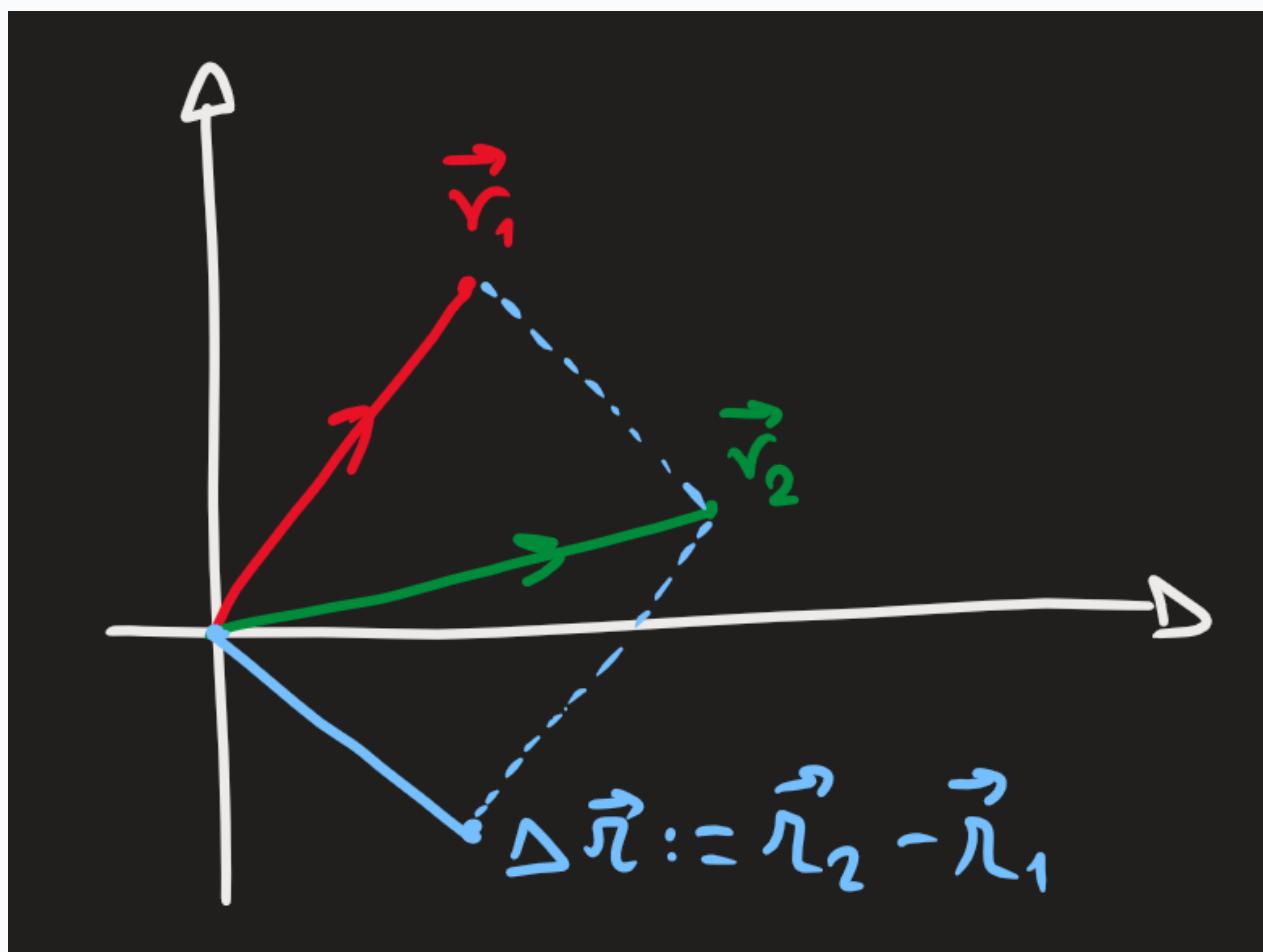
Supponiamo di avere *due posizioni* \vec{r}_1, \vec{r}_2 per un corpo. Allora lo *spostamento* di un corpo è la differenza tra queste ultime posizioni, ovvero

$$\Delta\vec{r} := \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \Delta x \cdot \hat{i} + \Delta y \cdot \hat{j} + \Delta z \cdot \hat{k}$$

Il suo modulo è

$$|\Delta\vec{r}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

FIGURA 1.1. (*Idea grafica di posizione e spostamento*)



2. Posizione in funzione del tempo (Legge Oraria)

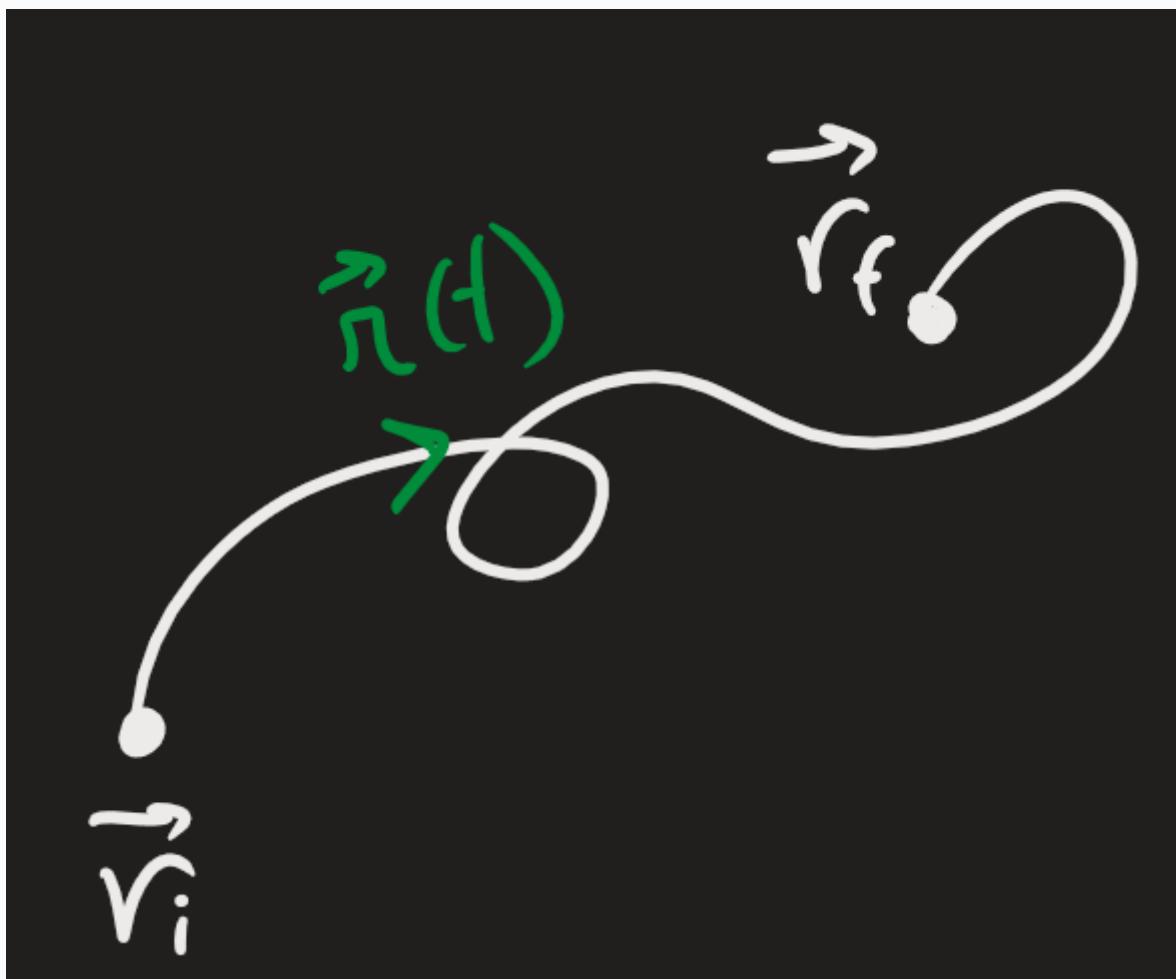
#Osservazione

Osservazione (descrivere analiticamente la posizione di un corpo).

Supponiamo di avere una situazione come nella [figura 2.1](#): un corpo parte da un punto \vec{r}_i iniziale, e arriva al punto \vec{r}_f finale. Supponendo che i due punti siano diversi, vogliamo trovare un modo per *descrivere* questo moto, soprattutto in funzione del *tempo*.

Definiremo dunque una *legge oraria* come una funzione $\vec{r}(t)$ che associa all'*istante del tempo* alla *posizione del corpo in quell'istante del tempo*. La parte difficile è proprio di trovare tale funzione che descriva *fedelmente* il movimento di un corpo di una data situazione.

FIGURA 2.1. (*Situazione del problema*)



#Definizione

Definizione (legge oraria).

Sia $\vec{r} : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^3$, dove $[t_0, t_1]$ è l'*intervallo del tempo misurato* e \mathbb{R}^3 lo spazio in cui ci muoviamo (può essere anche \mathbb{R}^2). Sia \vec{r}_i la posizione iniziale del corpo e \vec{r}_f la posizione finale. Se valgono che

$$\begin{cases} \vec{r}(t_0) = \vec{r}_i \\ \vec{r}(t_1) = \vec{r}_f \end{cases}$$

allora $\vec{r}(t)$ si dice *legge oraria*.

Genericamente la funzione viene definita come

$$\vec{r}(t) := x(t) \cdot \hat{i} + y(t) \cdot \hat{j} + z(t) \cdot \hat{k}$$

con $x(t), y(t), z(t)$ delle *leggi orarie* su \mathbb{R}^1 .

#Esempio

Esempio (esempio su 2D).

Supponiamo di avere

$$\vec{r}(t) = [2 \text{ m} + 2 \text{ m/s} \cdot t] \cdot \hat{i} + [0 \text{ m} + 4 \text{ m/s} \cdot t] \cdot \hat{j}$$

Allora, per avere una *rappresentazione grafica* di \vec{r} si deve prima disegnare i grafici di $x(t)$ e $y(t)$ (*figura 2.2.*), poi per creare un "*nuovo grafico*" dove come assi abbiamo $x(t)$ in funzione di $y(t)$ (*figura 2.3.*).

Si osserva che con la *rappresentazione finale* di $\vec{r}(t)$ non si ha nessuna indicazione *chiara del tempo*: infatti occasionalmente si può trovare una *curva*, che potrebbe sembrare una *non-funzione* (dal momento che associa ad un elemento di $x(t)$ elementi diversi di $y(t)$), ma in realtà stiamo solo trascurando il tempo. Sfruttando l'asse libero $z(t)$ e usandolo come "*indicatore del tempo*", si vede che quella diventa una funzione.

Analogia del cubo.

FIGURA 2.2. (*Leggi orarie su parti separate*)

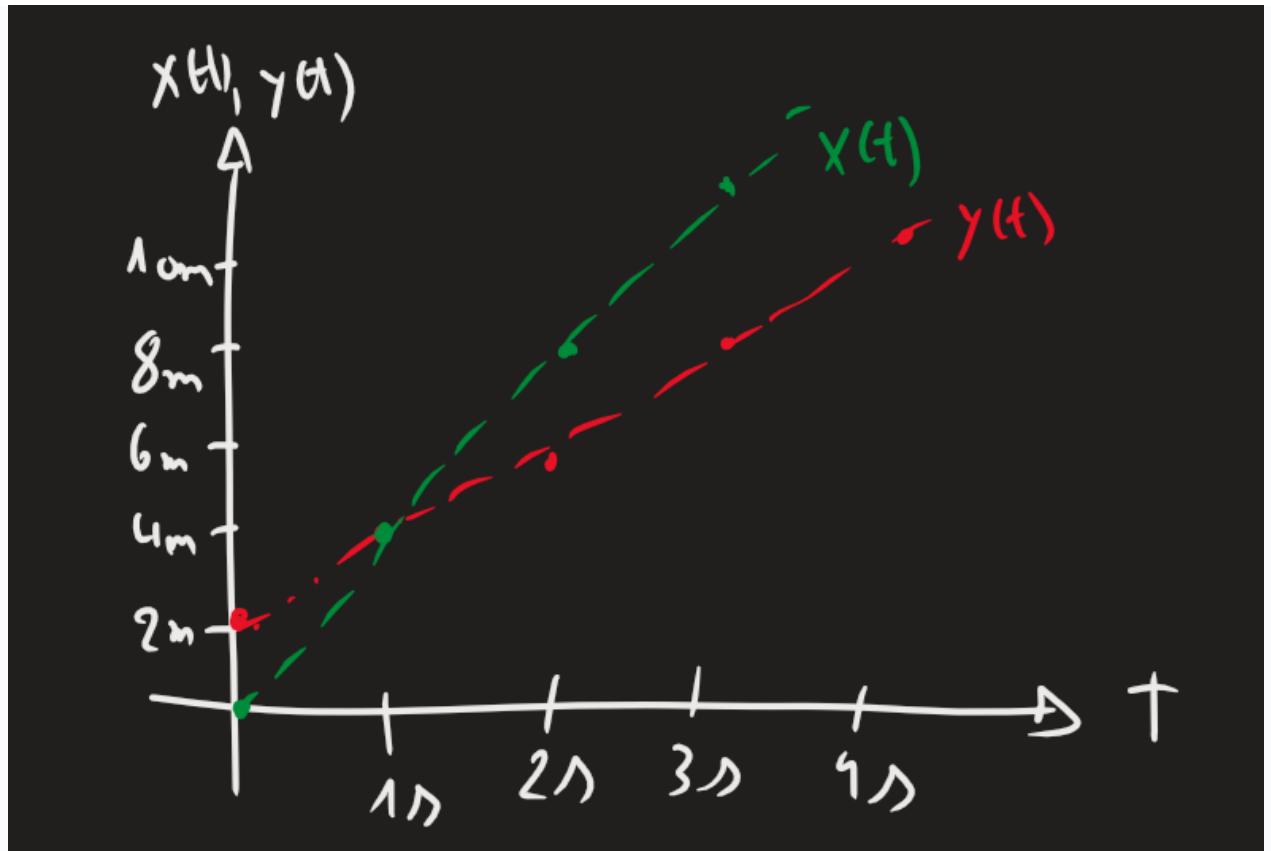
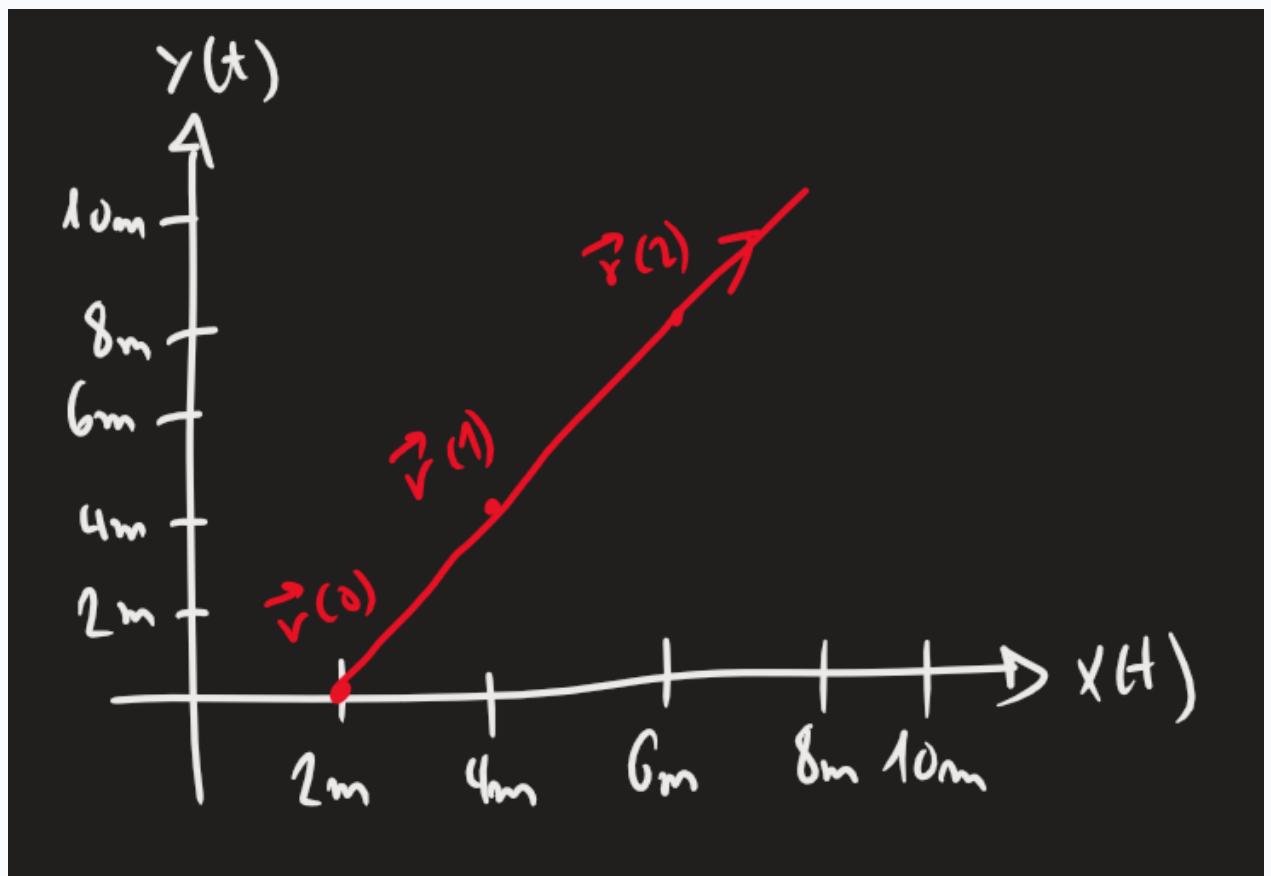


FIGURA 2.3. (Legge oraria generale)



2. Grandezze Derivate per la Cinematica

Velocità e Accelerazione di un Corpo Puntiforme

Definizione di velocità e accelerazione di un corpo puntiforme. Esempio del calcolo dell'accelerazione di un corpo (moto armonico).

1. Velocità media e velocità istantanea di un corpo

#Definizione

Definizione (velocità media).

Siano t_2, t_1 due *istanti del tempo* e x_2, x_1 posizioni del corpo associati alle istanti del tempo nella maniera seguente:

$$x_1 \leftrightarrow t_1; x_2 \leftrightarrow t_2$$

Allora definiamo la *velocità media* del corpo come

$$\langle v_x \rangle = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

#Definizione

Definizione (velocità istantanea).

Si definisce invece la *velocità istantanea* per un corpo quando portiamo il limite Δt a zero. Ovvero, la derivata

$$v_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

In particolare è la *derivata* della *legge oraria del corpo* sul *tempo*.

$$\vec{v} = \frac{d}{dt} [\vec{r}(t)] := \frac{dx}{dt} \cdot \hat{i} + \frac{dy}{dt} \cdot \hat{j} + \frac{dz}{dt} \cdot \hat{k}$$

2. Accelerazione

#Definizione

Definizione (accelerazione).

In una maniera del tutto analoga, definiamo l'**accelerazione media** come la **derivata della velocità**:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2}{dt^2} [\vec{r}(t)]$$

3. Esempio generale

#Esempio

Esempio (l'accelerazione del moto armonico).

Supponiamo che un **corpo** si muova secondo la seguente legge oraria:

$$x(t) = A \cos(\omega \cdot t)$$

Prima di tutto vogliamo capire quali sono le **grandezze** associate alle misure A, ω . Per questo usiamo l'**analisi dimensionale** ([Grandezze e Misure Fisiche > ^e43c58](#)).

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cos(\omega t) \\ [x(t)] &= [A] \underbrace{[\cos(\omega t)]}_{\text{adimensionale}} \\ L &= L \end{aligned}$$

Inoltre si osserva che

$$[\omega] = T^{-1}$$

dal momento che l'**argomento della funzione** cos dev'essere adimensionale. Infatti questa grandezza è una frequenza e si misura in hertz.

Adesso calcoliamo $v_x(t)$ e $a_x(t)$.

$$\begin{aligned} v_x(t) &= -L\omega \sin(\omega t) \\ a_x(t) &= -L\omega^2 \cos(\omega t) \end{aligned}$$

Come ultima osservazione possiamo dedurre la relazione

$$a_x(t) = -\omega \cdot x(t)$$

che è proprio un'*equazione differenziale* del tipo

$$f''(x) + \omega f(x) = 0$$

risolvibile con l'approccio "*Ansatz*".

3. Moto Uniformemente Accelerato

Moto Uniformemente Accelerato

Il moto uniformemente accelerato: legge oraria per moto con accelerazione costante, derivazione della formula

1. Legge oraria per il moto uniformemente accelerato

#Teorema

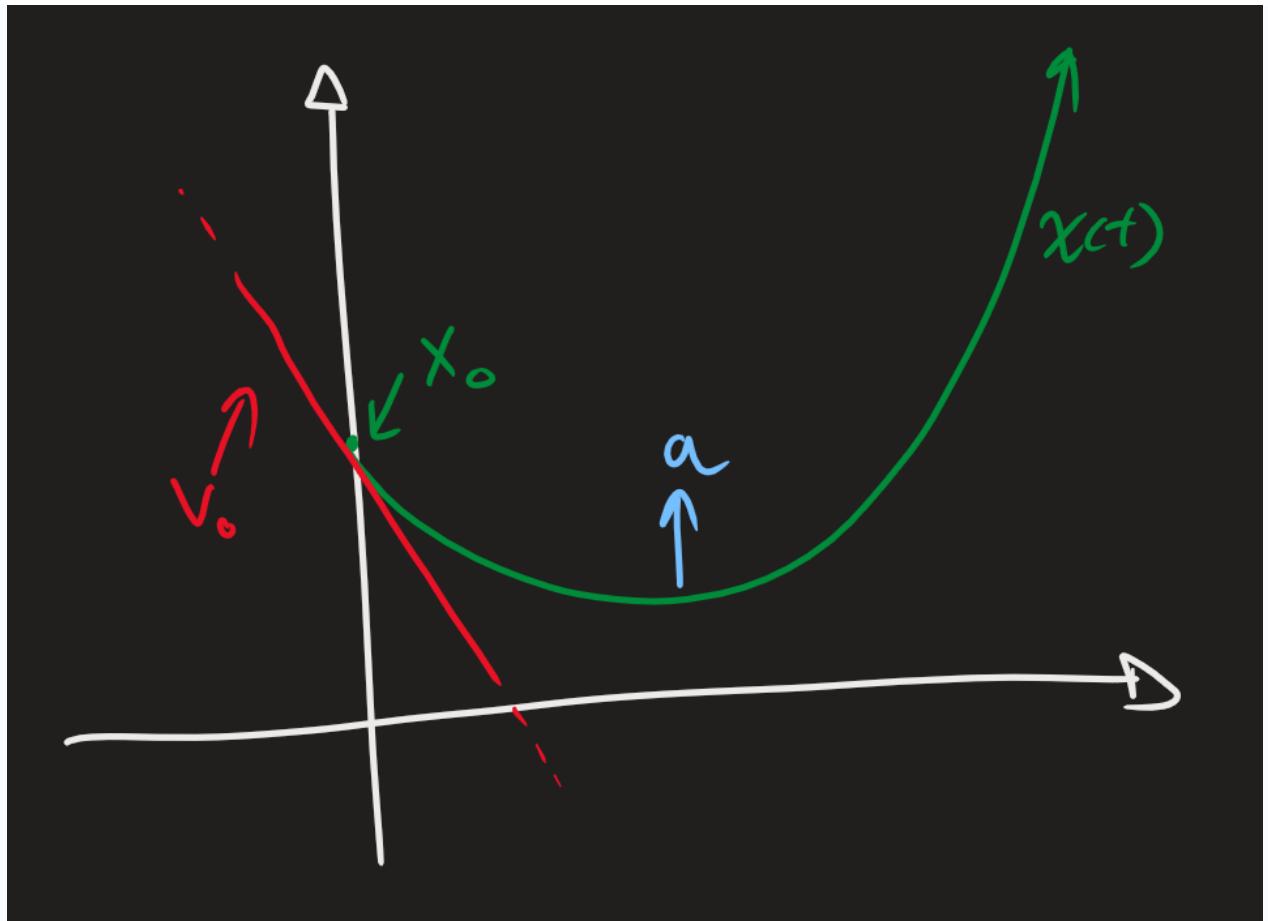
Teorema (legge oraria per il moto uniformemente accelerato).

Supponiamo che l'accelerazione a in cui si muove un corpo sia *costante*. Allora si trova che la sua legge oraria è

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

dove x_0, v_0 sono (rispettivamente) la *posizione* e la *velocità* iniziale. Qualitativamente la legge oraria viene raffigurata come nella *figura 1.1.*

FIGURA 1.1. (*Il grafico della legge oraria*)



#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 1 (legge oraria per il moto uniformemente accelerato)

Partiamo da

$$a(t) = a$$

Vogliamo trovare la velocità di tale corpo. Per farlo, dobbiamo risolvere l'*equazione differenziale*

$$\dot{v} = a(t) = a$$

Con un *procedimento metodico*, ovvero con l'*integrazione* si ottiene

$$\frac{dv}{dt} = a \implies dv = a \cdot dt \implies \int dv = a \int dt \implies v(t) = at + C$$

dove C è la *costante dell'integrazione indefinita*. Per trovare tale costante si può fare certe scelte, come ad esempio supporre che $v(t_0) = v_0$ per cui si ha

$$v(t_0) = v_0 = at_0 + C \implies C = v_0 - at_0$$

Allora si ha

$$v(t) = a(t - t_0) + v_0$$

Per il prossimo passaggio, poniamo $t_0 = 0$ per semplicità.

Ora vogliamo risolvere l'equazione differenziale

$$\frac{dx}{dt} = v(t) \implies x(t) = \int v(t) dt = \int (v_0 + at) dt$$

Compiendo l'opportuna scelta di porre $x(0) = x_0$, si ha

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

che è la legge voluta. ■

2. L'incremento dello spazio in funzione della velocità iniziale

#Corollario

Corollario (l'incremento dello spostamento in funzione della velocità).

Supponiamo che un corpo uniformemente accelerato stia movendo ad un'accelerazione *fissata* a . Se il corpo parte dal punto x_0 con una velocità iniziale v_0 , allora *l'incremento della posizione del corpo* è *proporzionale* all'*incremento del quadrato della velocità*. Ovvero,

$$x - x_0 = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$$

Qui si ha infatti una descrizione del *moto uniformemente accelerato*, con il "*tempo rimosso*" (ovvero indipendentemente dal tempo trascorso).

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Corollario 2 (l'incremento dello spostamento in funzione della velocità)

Abbiamo le leggi orarie

$$v(t) = at + v_0; x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

Vogliamo cercare di "*rimuovere il tempo*" da queste equazioni. Poniamo dunque

$$t = \frac{v - v_0}{a}$$

e vale per la prima equazione. Adesso lo sostituiamo per la seconda equazione e abbiamo

$$\begin{aligned}x &= x_0 + v_0 \left(\frac{v - v_0}{a} \right) - \frac{1}{2} a \left(\frac{v - v_0}{a} \right)^2 \\&= x_0 + \frac{v \cdot v_0}{a} - \frac{v_0^2}{a} + \frac{1}{2a} (v^2 - 2v \cdot v_0 + v_0^2) \\&= x_0 + \frac{v^2 + v_0^2}{2a} - \frac{v_0^2}{a} \\&= x_0 + \frac{v^2 - v_0^2}{2a} \\x - x_0 &= \frac{v^2 - v_0^2}{2a}\end{aligned}$$

che è la tesi. ■

#Osservazione

Osservazione (la distanza di frenata).

Questa formula è particolarmente utile per calcolare la "*distanza di frenata*" di un'oggetto, con un'accelerazione (**costante!!!**) negativa.

Ponendo infatti la "*velocità finale*" $v^2 = 0$, si ha $-v_0^2 = 2ad$ (dove $d = x - x_0$) e quindi

$$d = -\frac{v_0^2}{2a}$$

Dato che a è **negativa**, la quantità d sarà sicuramente **positiva**.

4. Caduta Libera e Moto del Proiettile

Caduta Libera e Moto del Proiettile

Casi particolari della Cinematica Puntiforme: la caduta libera di un corpo e il moto di un proiettile.

1. Caduta Libera

#Osservazione

Osservazione (la legge dei gravi).

Si osserva che *tutti i corpi* cadono con la *medesima accelerazione*, con

$$\vec{a} = -g\hat{j}, g \approx 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Questo vale *indipendentemente* dalla loro *massa*.

Questo fenomeno è noto come la "*caduta dei gravi*", osservata dal padre del metodo scientifico Galileo Galilei nella seconda metà del sedicesimo secolo.

#Teorema

Teorema (la caduta libera di un corpo).

Dall'osservazione della *caduta dei gravi*, possiamo applicare la *modellizzazione della cinematica* in questa situazione.

In questo caso abbiamo quindi un corpo che si muove alla velocità

$$\vec{v}(t) = -gt \cdot \vec{j} + \vec{v}_0$$

In particolare, prendendo la *sola componente verticale*,

$$v_y(t) = -gt + v_{0y}$$

Per quanto riguarda la sua *legge oraria*, si ha

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

Quindi l'andamento della sua **posizione** è esattamente una **parabola** direzionata verso il basso (**figura 1.1.**).

DIMOSTRAZIONE del Teorema 2 (la caduta libera di un corpo)

Segue direttamente dalla **legge oraria per il moto uniformemente accelerato** (Teorema 1 (legge oraria per il moto uniformemente accelerato)). ■

#Corollario

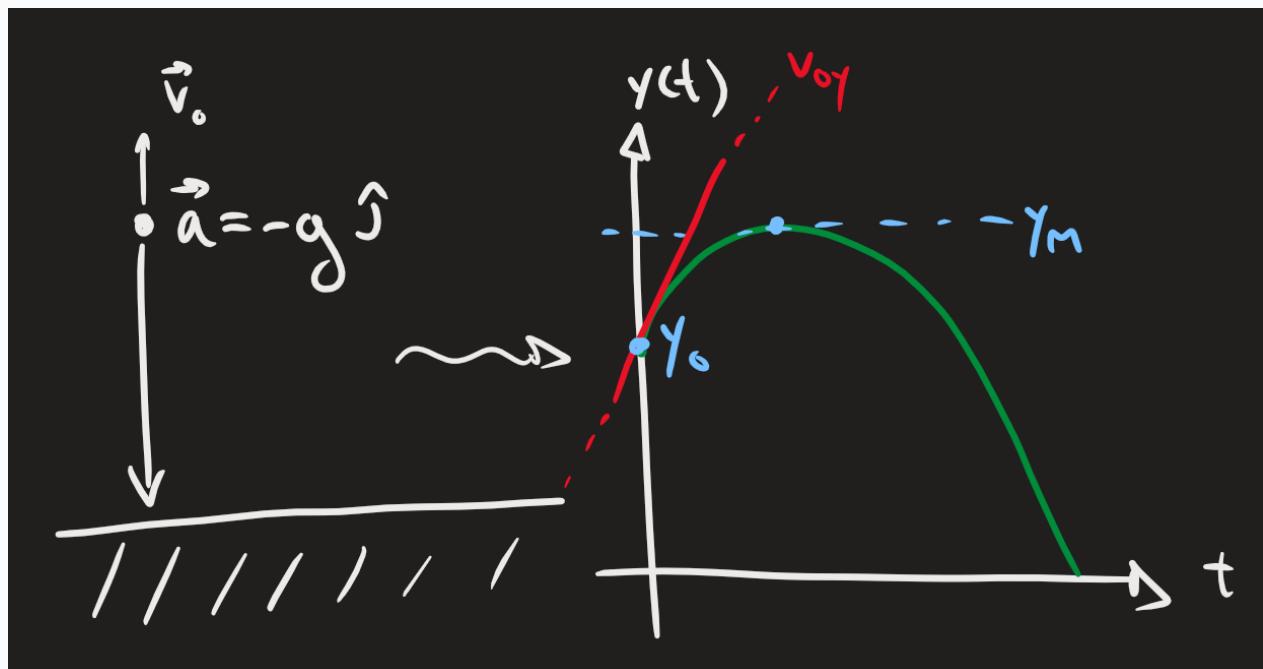
Corollario (l'altezza massima raggiunta dal corpo).

Se vogliamo studiare il **massimo** della sua posizione (ovvero la sua altezza massima raggiunta), basta considerare la **legge oraria per il moto uniformemente accelerato generalizzato dal tempo** (Corollario 2 (l'incremento dello spostamento in funzione della velocità)). Ovvero,

$$y_M = y_0 + \frac{v_{0y}^2}{2g}$$

Ovviamente questa vale **solo se** v_0 è **positiva**; se invece è negativa, il punto massimale coincide con il punto di partenza.

FIGURA 1.1. (L'andamento di un corpo in caduta libera)



2. Moto di un proiettile

#Osservazione

Osservazione (notizie storiche sul moto del proiettile).

Lo studio del *moto del proiettile* ritiene una buona *importanza storica*, in particolare per le *guerre* e le *battaglie*: si vuole spiegare e descrivere accuratamente la *traiettoria* dei proiettili.

In particolare, viene studiato inizialmente nel 340 A.C. dal filosofo greco *Artistotele*, che parla di un "*moto naturale*" e di un "*moto forzato*": il moto naturale consisterebbe nella *caduta*, e il moto forzato nella *spinta orizzontale*. La domanda che si pone *Aristotele* è quella del perché i proiettili vengano effettivamente forzati.

Dopodiché, il filosofo greco Filopono (https://it.wikipedia.org/wiki/Giovanni_Filopono) (490-570 A.C.) parla di un "*impeto*", che è importante in quanto costituisce le fondamenta del concetto di *quantità di moto*.

Infine la risposta venne "*data*" dallo scienziato *Galileo Galiei*, che al posto di dare *subito spiegazioni*, si è impiegato ad *osservare e misurare*.

#Teorema

Teorema (il moto di un proiettolo).

Supponiamo che un corpo si sta muovendo ad un'accelerazione

$$\vec{a} = -g \cdot \hat{j}$$

Con una velocità iniziale

$$\vec{v}_0 = v_{0x} \cdot \hat{i} + v_{0y} \cdot \hat{j}$$

Allora segue che

$$\vec{v}(t) = v_{0x} \cdot \hat{i} + (v_{0y} - gt) \cdot \hat{j}$$

$$\vec{r}(t) = (x_0 + v_{0x}t) \cdot \hat{i} + (y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2) \cdot \hat{j}$$

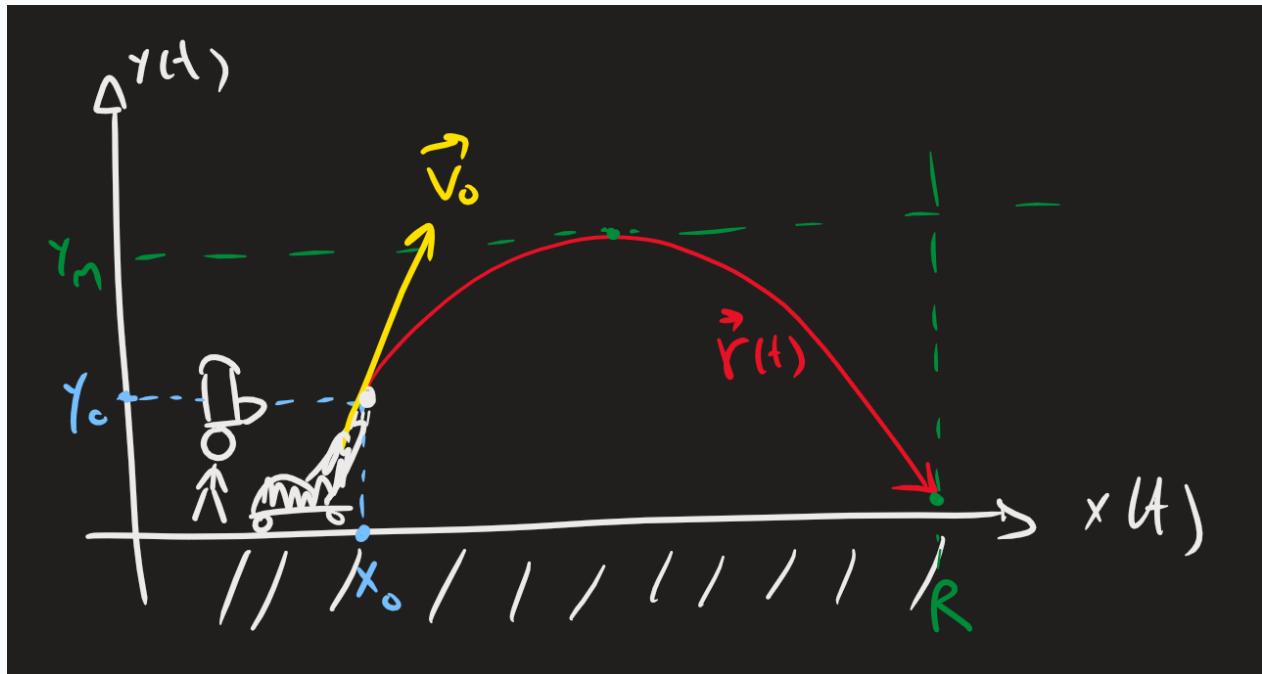
Allora il *moto del proiettile* non è altro che una *parabola orientata verso il basso*.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 5 (il moto di un proiettolo)

Segue direttamente dalla *formula di un corpo in caduta libera* (Teorema 2 (la caduta libera di un corpo)) e dal *moto uniformemente accelerato* (Teorema 1 (legge oraria per il moto uniformemente accelerato)). ■

FIGURA 2.1. (*Descrizione quantitativa di un moto del proiettile*)



#Osservazione

Osservazione (i dati disponibili a noi).

Prima di procedere con ulteriori calcoli, osserviamo che *tradizionalmente* con un problema del genere (ovvero il calcolo della traiettoria di un proiettile) ci vengono dati solo *due dati*: il modulo della velocità iniziale $|v_0|$ e l'angolo della "sparata" θ .

Sarà quindi importante ricordarci le seguenti formule per "*scomporre*" il *modulo della velocità iniziale* nelle sue singole componenti v_{0y}, v_{0x} .

$$\begin{cases} v_{0x} = |v_0| \cos \theta \\ v_{0y} = |v_0| \sin \theta \end{cases}$$

Questo discende dai *risultati della trigonometria* ([Definizione 4 \(seno e coseno\)](#)).

#Corollario

Corollario (altezza massima e gitatta di un proiettile).

Adesso vogliamo calcolare l'**altezza massima** raggiunto da un proiettile, sparato con una velocità di v_0 ad angolo θ .

$$y_M = y_0 + \frac{|v_0|^2}{2g} \sin^2 \theta$$

Per quanto riguarda invece la **gitatta del proiettile** (ovvero la distanza orizzontale percorsa da un corpo), si ha, supponendo che non c'è nessun dislivello tra l'altezza iniziale e finale,

$$R = \frac{|v_0|^2 \sin(2\theta)}{g}$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Corollario 7 (altezza massima e gitatta di un proiettile)

N.B. La dimostrazione di questo risultato (o il ragionamento che sta dietro) è più importante dell'enunciato!

Per calcolare l'**altezza massima**, basta pensare che si tratta di una situazione di "**frenatura**" in cui il corpo sta "**frenando verticalmente**" con una decelerazione di g : allora si ha la tesi.

Per quanto riguarda invece la **gitatta**, vogliamo fare un ragionamento completo. Prendiamo innanzitutto i valori conosciuti: $|\vec{v}_0|, \theta, y_f = 0, |\vec{v}_y(t_f)| = -v_y(t_0)$. L'ultimo "**valore conosciuto**" deriva dal fatto che la "**velocità finale è opposta della velocità iniziale**": per convincerci di questo è sufficiente disegnare il grafico della parabola e "**immaginare**" le tangenti nei zeri ([figura 2.2.](#)). Abbiamo dunque abbastanza dati per calcolare l'**istanza del tempo in cui il proiettile ricade a terra**, che è sufficiente per calcolare il dato voluto R .

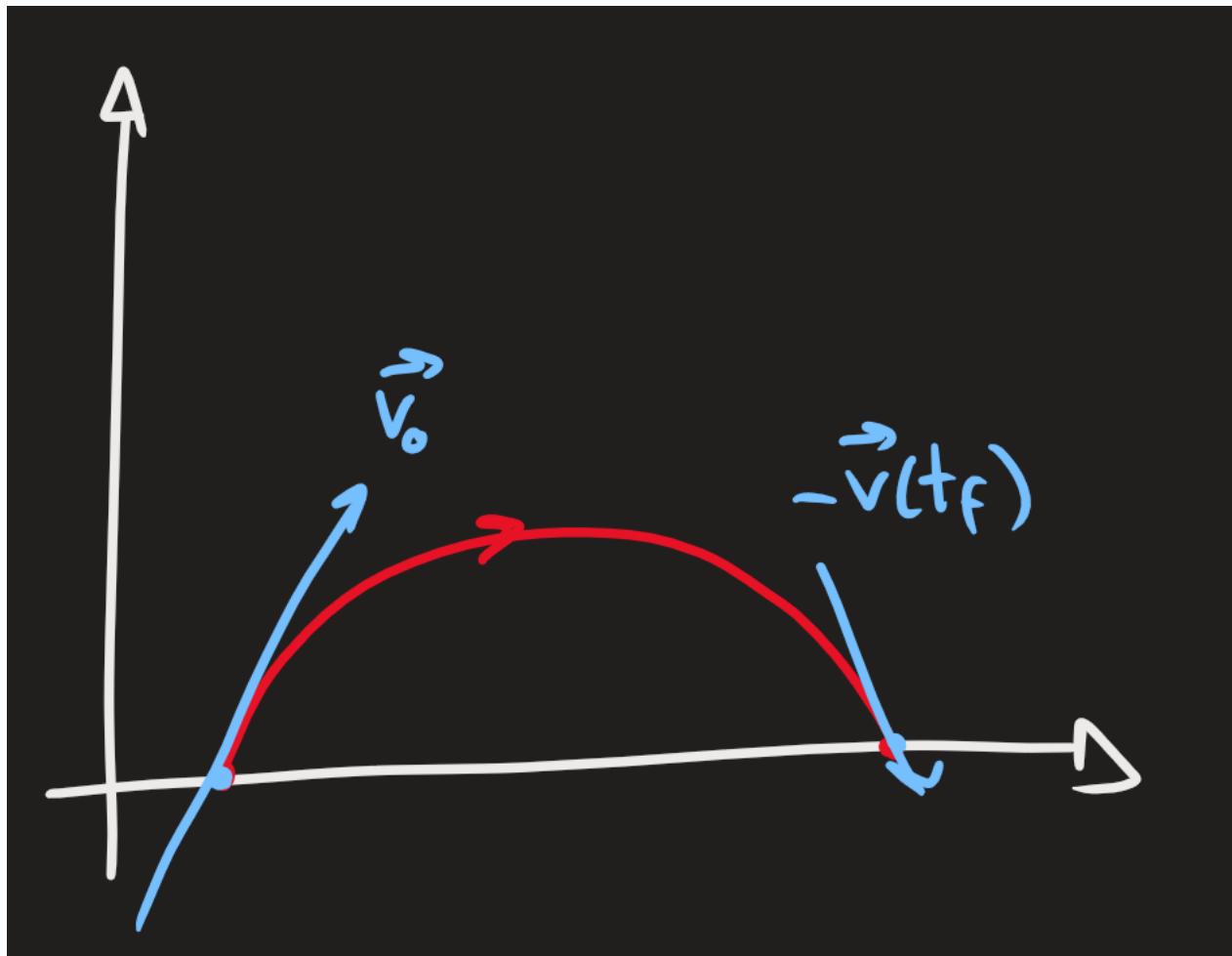
$$\begin{cases} v_y(t_f) = v_{y0} - gt_f = -v_{y0} \\ \implies t_f = \frac{2v_{y0}}{g} \end{cases}$$

da cui discende il risultato finale

$$R = v_x(t_f) = 2 \frac{v_{0x} v_{0y}}{g} = \dots = \boxed{\frac{|v_0|^2 \sin(2\theta)}{g}}$$

che è la tesi. ■

FIGURA 2.2. (*L'esperimento mentale*)



5. Moto Circolare Uniforme

Moto Circolare Uniforme

Moto circolare uniforme. Approccio geometrico e analitico alla questione quantitativa per l'accelerazione del punto in moto.

1. Il moto circolare uniforme

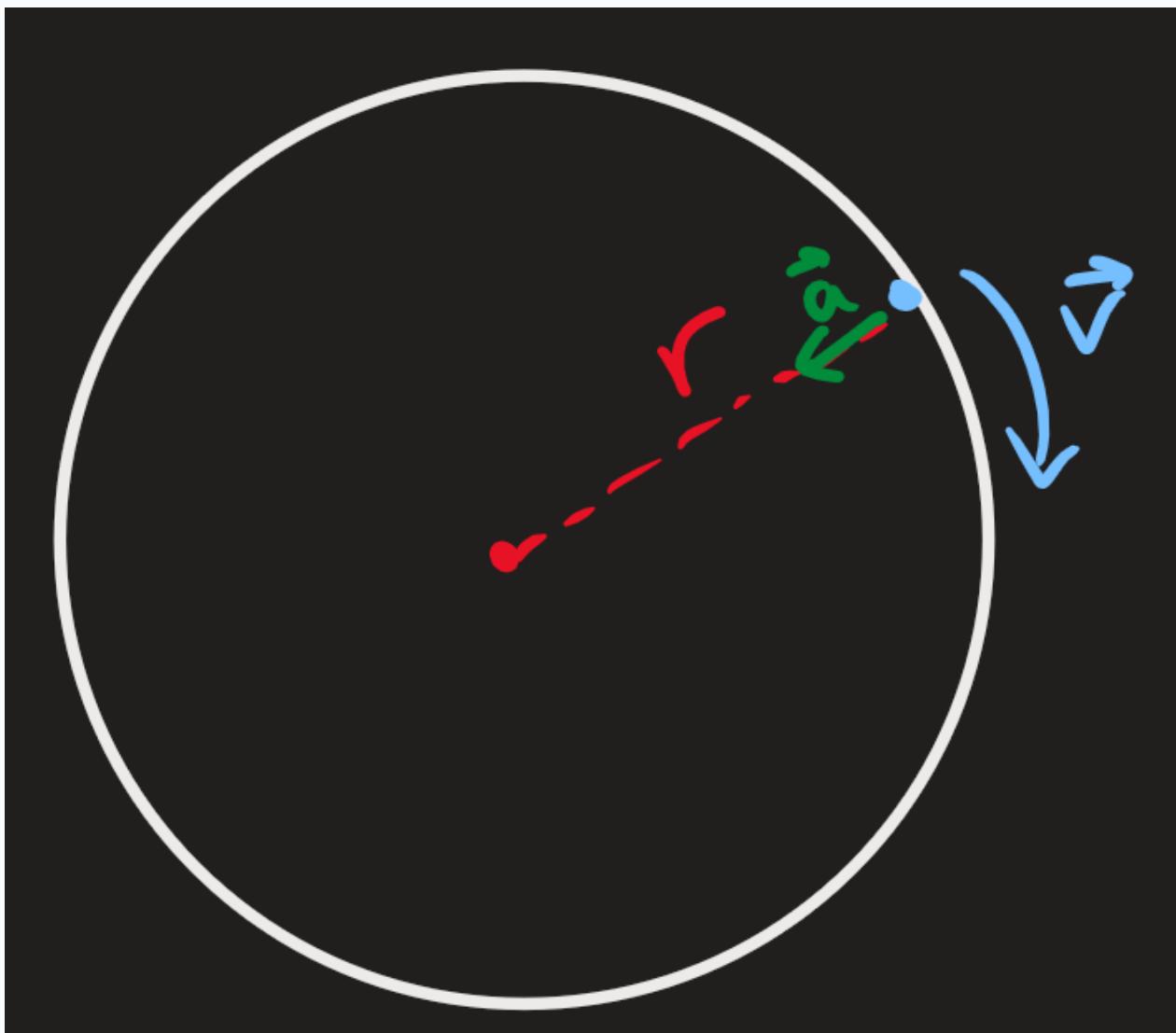
#Definizione

Definizione (moto circolare uniforme).

Supponiamo che un *oggetto* si sta muovendo ad una *velocità costante* $|v|$ (*costante in modulo!*), con la *traiettoria di una circonferenza con raggio r* (*figura 1.1.*).

Questo moto si dice "*moto circolare uniforme*".

FIGURA 1.1. (*Moto circolare uniforme*)



2. Studio geometrico del moto circolare uniforme

#Osservazione

Osservazione (e l'accelerazione?).

Vogliamo sapere la *quantità* (nel senso del *modulo*) dell'accelerazione $|\vec{a}|$. Possiamo approcciarci a questo problema nel seguente modo.

Prendo *due vettori velocità* $\vec{v}(t)$ e $\vec{v}(t + \Delta t)$. Possiamo dunque definire l'incremento della velocità come $\Delta\vec{v} := \vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)$. Di conseguenza, l'accelerazione media diventa $\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$; geometricamente si ha la *figura 2.1.*.

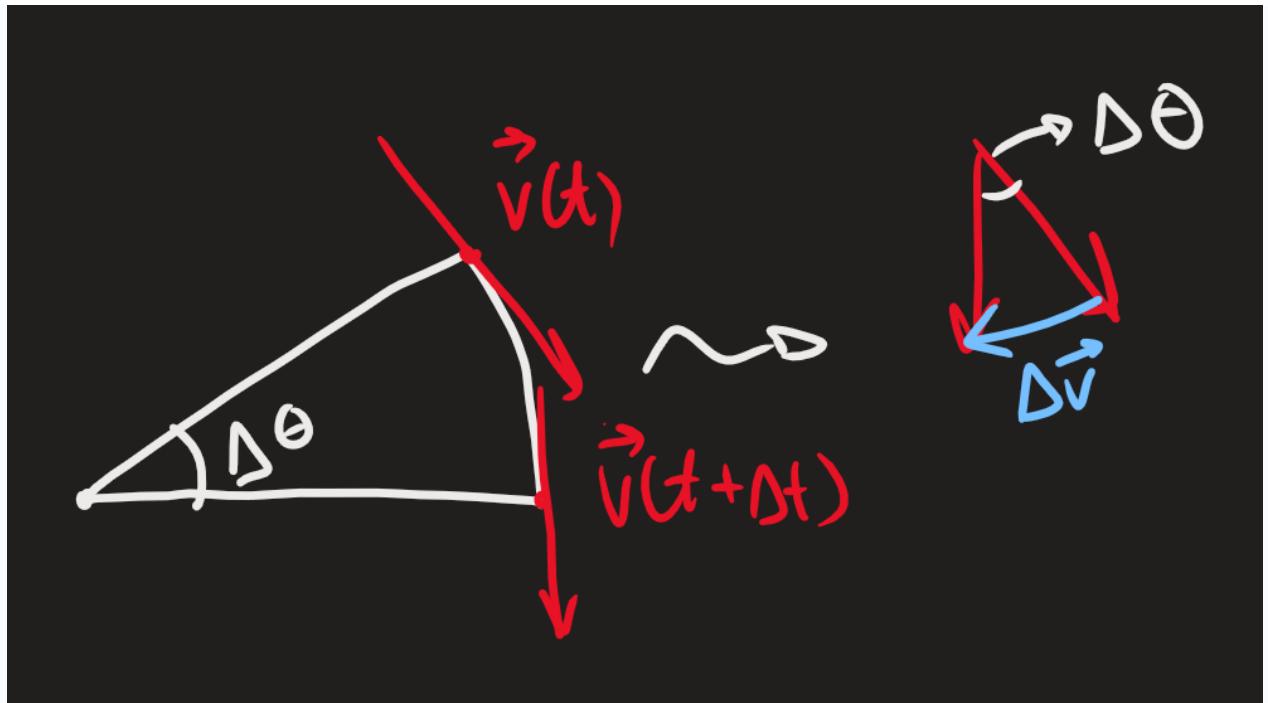
Adesso osservo che l'angolo $\Delta\theta$ tra i vettori velocità è il medesimo angolo $\Delta\theta$ tra i due segmenti: di conseguenza abbiamo *due triangoli simili*, da cui discende $\Delta\vec{r} = \Delta\vec{v}$.

Allora, svolgendo i passaggi matematici otteniamo il risultato finale

$$\begin{aligned}\frac{|\Delta\vec{r}|}{R} &= \frac{|\Delta\vec{v}|}{v} \\ \Rightarrow \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t} \cdot \frac{1}{R} &= \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} \cdot \frac{1}{v} \\ \Rightarrow |\vec{a}| &= \frac{|\vec{v}|}{R} \cdot v \\ \Rightarrow |\vec{a}| &= \boxed{\frac{|\vec{v}|^2}{R}}\end{aligned}$$

con l'analisi dimensionale è possibile verificare la correttezza della formula.

FIGURA 2.1. (*L'incremento della velocità*)



3. Studio analitico del moto circolare uniforme

#Osservazione

Osservazione (studio analitico del moto circolare uniforme).

Alternativamente possiamo compiere uno *studio analitico del moto circolare uniforme*, con gli *strumenti della trigonometria*.

Innanzitutto, dato che stiamo parlando di un *moto uniforme*, è ragionevole descrivere l'angolo come una *funzione lineare in variazione del tempo*, come

$$\theta(t) = \omega t$$

dove ω è un *fattore di proporzionalità* arbitraria, misurata in Hertz. Può essere infatti definita come "*velocità angolare*".

Dopodiché possiamo descrivere il *vettore-posizione* $\vec{r}(t)$ come

$$\vec{r}(t) = x(t) \cdot \hat{i} + y(t) \cdot \hat{j}$$

con

$$\begin{cases} x(t) = r \cos(\omega t) \\ y(t) = r \sin(\omega t) \end{cases}$$

Allora questo posso trovare la **velocità** e l'**accelerazione** nella forma vettoriale.

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \omega r(-\sin(\omega t) \cdot \hat{i} + \cos(\omega t) \cdot \hat{j})$$
$$\vec{a}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = -\omega r^2(\cos(\omega t) \cdot \hat{i} + \sin(\omega t) \cdot \hat{j}) = -\omega^2 \cdot \vec{r}(t)$$

Notare che questo risultato è coerente con l'**approccio geometrico** al moto circolare. Infatti, ponendo $\omega = \frac{|\vec{v}|}{r}$, da cui si ha

$$\vec{a} = \frac{|\vec{v}|}{r^2}$$

#Definizione

Definizione (velocità angolare).

Si definisce la **velocità angolare** come il **rapporto incrementale tra la differenza dell'angolo e la differenza del tempo**

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

In particolare si può istanziare questo risultato per $\theta = 2\pi$ e $t = T$; ovvero possiamo prendere la **quantità del tempo necessario per compiere un giro intero**

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Si osserva che per un **moto circolare uniforme** la quantità ω è **sempre** costante.

#Teorema

Teorema (moto circolare uniforme).

Dato un oggetto che si muovo secondo un **moto circolare uniforme**, le informazioni sulla sua **posizione, velocità e accelerazione** sono date dalle seguenti.

$$\vec{r}(t) = r(\cos(\omega t)\hat{i} + \sin(\omega t)\hat{j})$$

$$\vec{v}(t) = \omega r(-\sin(\omega t)\hat{i} + \cos(\omega t)\hat{j})$$

$$\vec{a}(t) = -\omega^2 \cdot \vec{r}(t)$$

DIMOSTRAZIONE del Teorema 5 (moto circolare uniforme)

Basta vedere lo studio analitico del moto circolare uniforme ([Osservazione 3 \(studio analitico del moto circolare uniforme\)](#)). ■

#Osservazione

Osservazione (equazione differenziale).

Si nota che

$$\vec{a}(t) = -\omega^2 \cdot \vec{r}(t)$$

è un'*equazione differenziale del secondo ordine*, del tipo

$$f''(x) + \omega^2 f(x) = 0$$

Infatti, una soluzione per questa *equazione differenziale ordinaria* è proprio un'equazione con delle funzioni trigonometriche sin, cos.

6. Moto Generalizzato in 2D

Moto Generalizzato in 2D

Descrizione del moto a due dimensioni. Caso generalizzato del moto, analisi geometrico-vettoriale del vettore velocità e del vettore accelerazione.

1. Caso generalizzato del moto

#Osservazione

Osservazione (generalizzazione del moto a due dimensioni).

Adesso consideriamo un [caso più generale](#) di una [traiettoria](#), ovvero qualcosa del tipo raffigurato nella [figura 1.1.](#): vogliamo capire se ci sono delle "[regole](#)" che stanno sotto i vettori velocità $\vec{v}(t)$ e accelerazione $\vec{a}(t)$, data un'istanza del tempo.

Notiamo che il [vettore velocità](#) dev'essere [sempre](#) parallela alla [tangente](#) della curva $\vec{r}(t)$. Questo ha senso e coincide perfettamente con l'[interpretazione geometrica](#) della [derivata](#) ([Osservazione 2](#) ([interpretazione geometrica della derivata](#))).

Per quanto riguarda l'[accelerazione](#), bisogna fare uno studio più approfondito e ingrandito della traiettoria, in particolare nella parte più "[curvate](#)". Prendendo due [istanze dei vettori velocità sufficientemente vicini](#) $\vec{v}(t)$ e $\vec{v}(t + \Delta t)$ e prendendo il loro incremento $\Delta \vec{v} = \vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)$, abbiamo una freccia che punta [ortogonalmente](#) rispetto ai vettori velocità. Scalandolo in particolare l'incremento del tempo Δt , si ottiene il vettore velocità $\vec{a}(t_i)$, $t_i \in [t, t + \Delta t]$ ([figura 1.2.](#)). Dunque si ha un "[grado di libertà](#)" per il vettore accelerazione, e di solito varia al [curvare della traiettoria](#).

Si dimostrerà che \vec{a} può essere scomposta in [due componenti](#):
Una componente è [parallela](#) a \vec{v} , e la chiamiamo \vec{a}_{\parallel} : questa componente determina il cambiamento del modulo di $|\vec{v}|$.
La seconda componente è quella [ortogonale](#) a \vec{v} , e la chiamiamo \vec{a}_{\perp} : questa componente determina il [cambiamento della direzione](#) di \vec{v} .

FIGURA 1.1. ([La prima situazione](#))

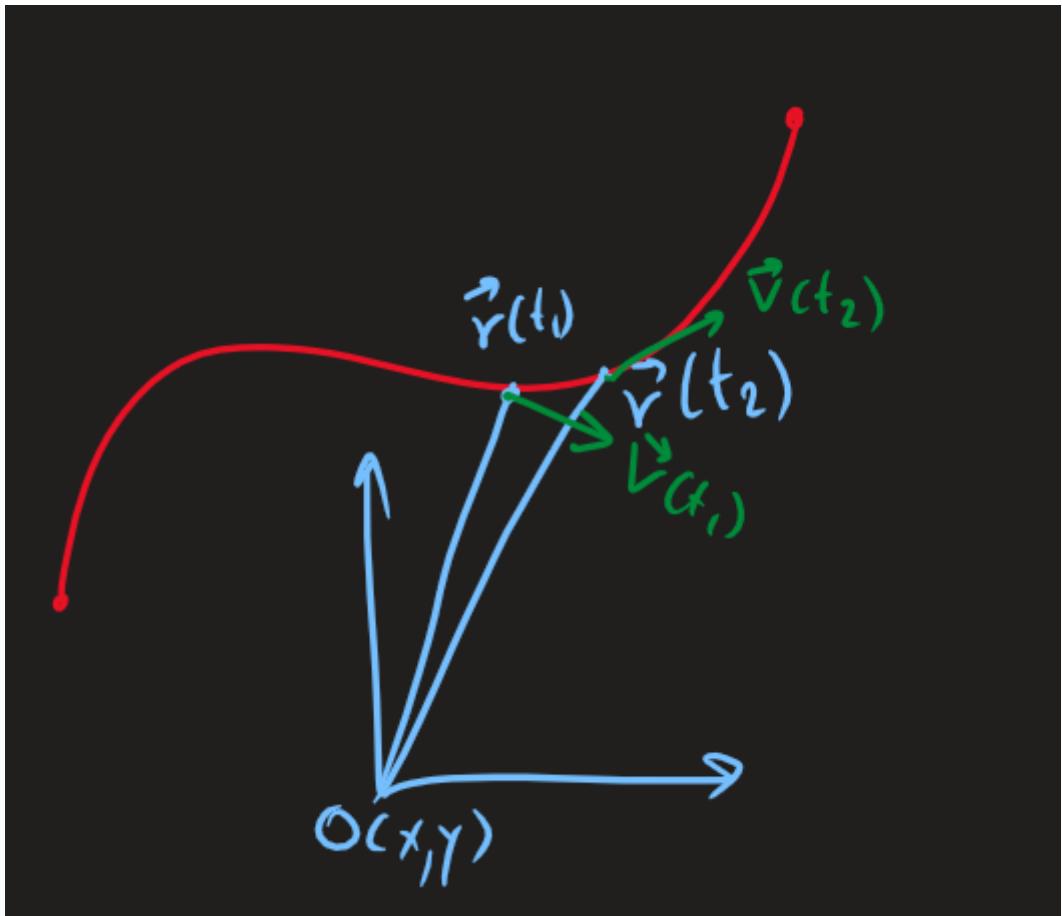
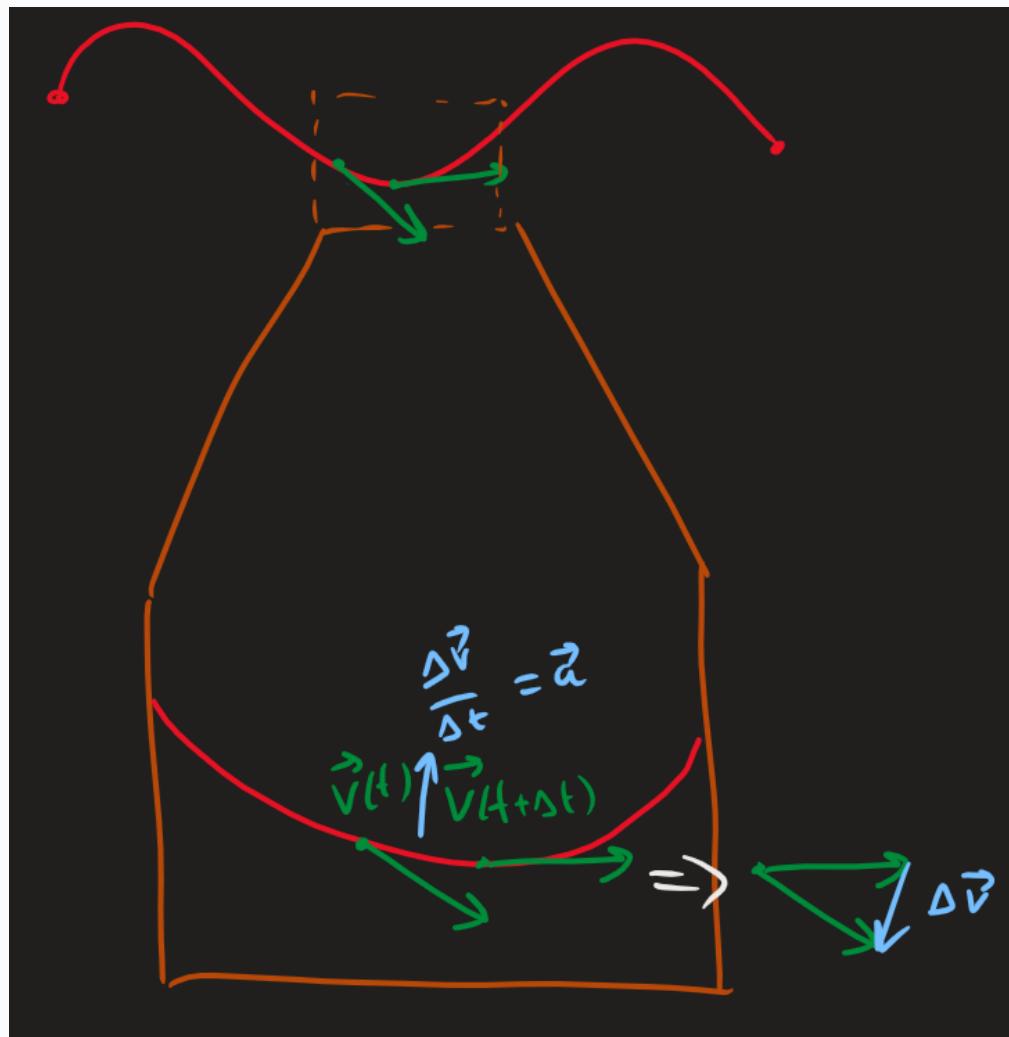


FIGURA 1.2. (La situazione zoomata)



#Osservazione

Osservazione (il modulo dell'accelerazione nullo non implica l'assenza del cambiamento di velocità).

Da questo notiamo che $|\vec{a}|$ non *deve necessariamente implicare* che non c'è nessun *cambiamento di velocità* $\Delta\vec{v}$; invece può solo necessariamente implicare che non c'è nessun cambiamento nell'*"intensità"* della velocità.

7. Moti Relativi

Moti Relativi

Moti relativi. Il grande navilio di Galilei. Regole per determinare rapporti tra due sistemi di riferimento diversi. Definizione di sistema inerziale.

1. L'osservazione del gran navilio di Galilei

#Osservazione

Osservazione (l'osservazione di Galilei).

Nella prima metà del diciassettesimo secolo, il noto scienziato Galileo Galilei fece una notevole osservazione⁽¹⁾.

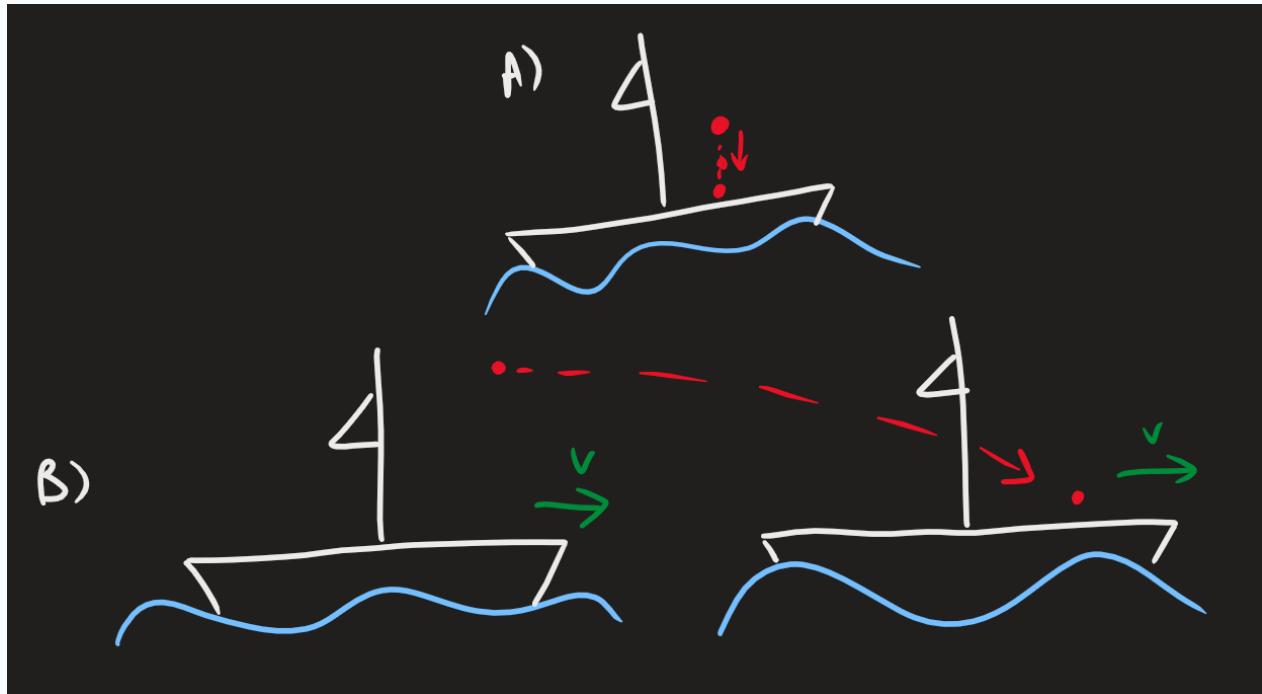
Supponiamo che una barca stia muovendo ad una velocità v . Su questa barca stiamo facendo cadere una palla, che si muove come un *oggetto in caduta libera* ([Teorema 2 \(la caduta libera di un corpo\)](#)). Quindi, da un osservatore *all'interno della barca* vede che la palla cade normalmente.

Tuttavia, per un *osservatore esterna dalla barca*, è tutto diverso. Infatti, la palla *"acquisisce"* il movimento della barca, conferendogli un *moto parabolico* ([figura 1.1](#)).

Questa osservazione è importante, dal momento che pone le *fondamenta* per i *moti relativi*. Vedremo come si potrà *formalizzare* le nozioni di

sistema di riferimento e come poter porre in rapporto **due sistemi di riferimento** diversi.

FIGURA 1.1. (*L'osservazione galileiana*)



⁽¹⁾ In realtà si tratta di un'osservazione ancora più ampia e complessa, per approfondire vedere il testo sul 'Gran Navilio' ([Il Gran Navilio](#))

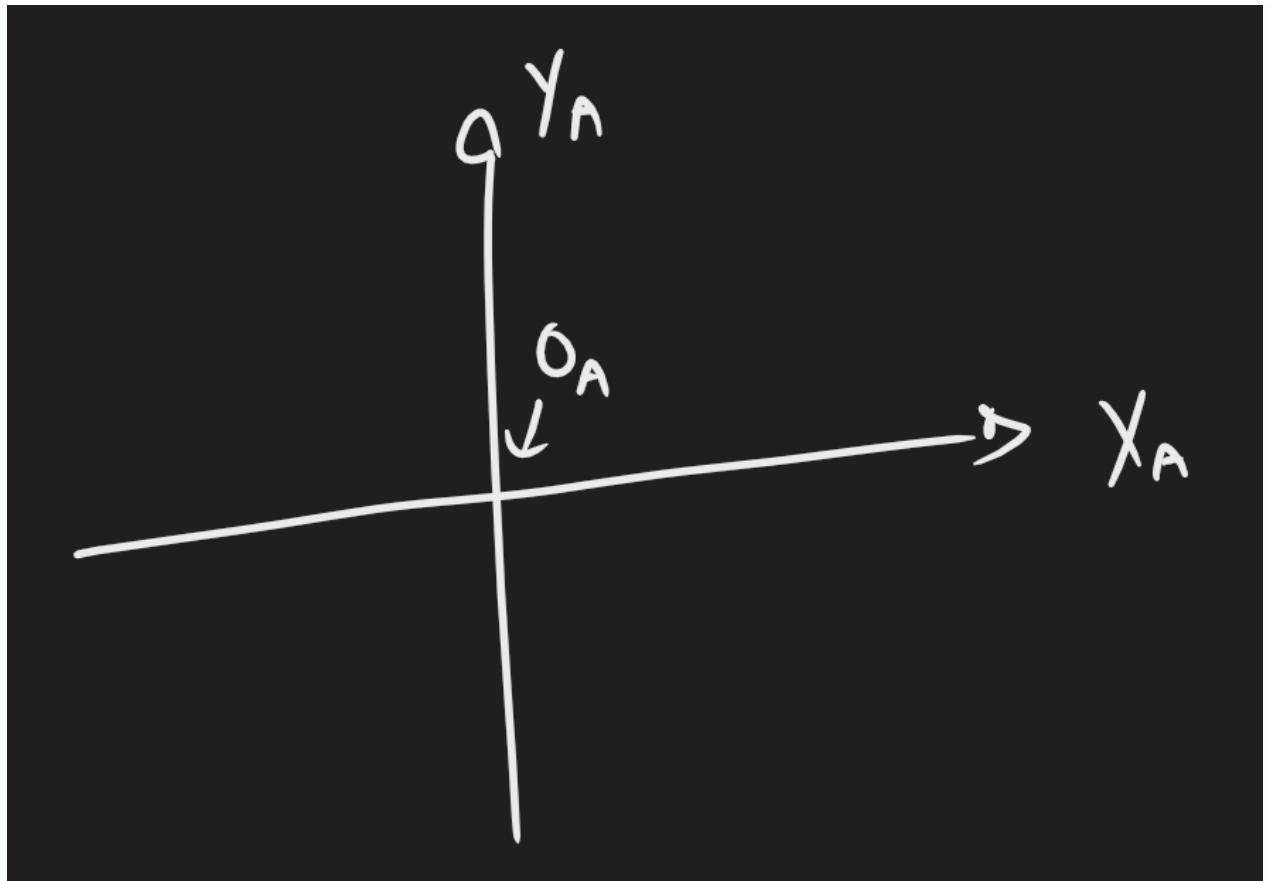
2. Leggi per i sistemi di riferimento

#Definizione

Definizione (sistema di riferimento).

Sia O_A un **punto sul piano \mathbb{R}^2** . Allora si dice "**Sistema di riferimento A**" come il **piano cartesiano** formato dall'asse X_A e dall'ascissa Y_A .

FIGURA 2.1. (*Illustrazione grafica dei sistemi di riferimento*)



#Proposizione

Proposizione (relazione tra i sistemi di riferimento).

Sia P un punto fissato, \vec{r}_{PA} (e \vec{r}_{PB}) il segmento tra l'origine del sistema di riferimento A (e B), sia \vec{r}_{BA} il segmento tra l'origine di B e A . Allora vale che

$$\vec{r}_{PA} = \vec{r}_{PB} + \vec{r}_{BA}$$

ovvero " P secondo $A = P$ secondo $B + B$ secondo A "

Prendendo le derivate, valgono pure

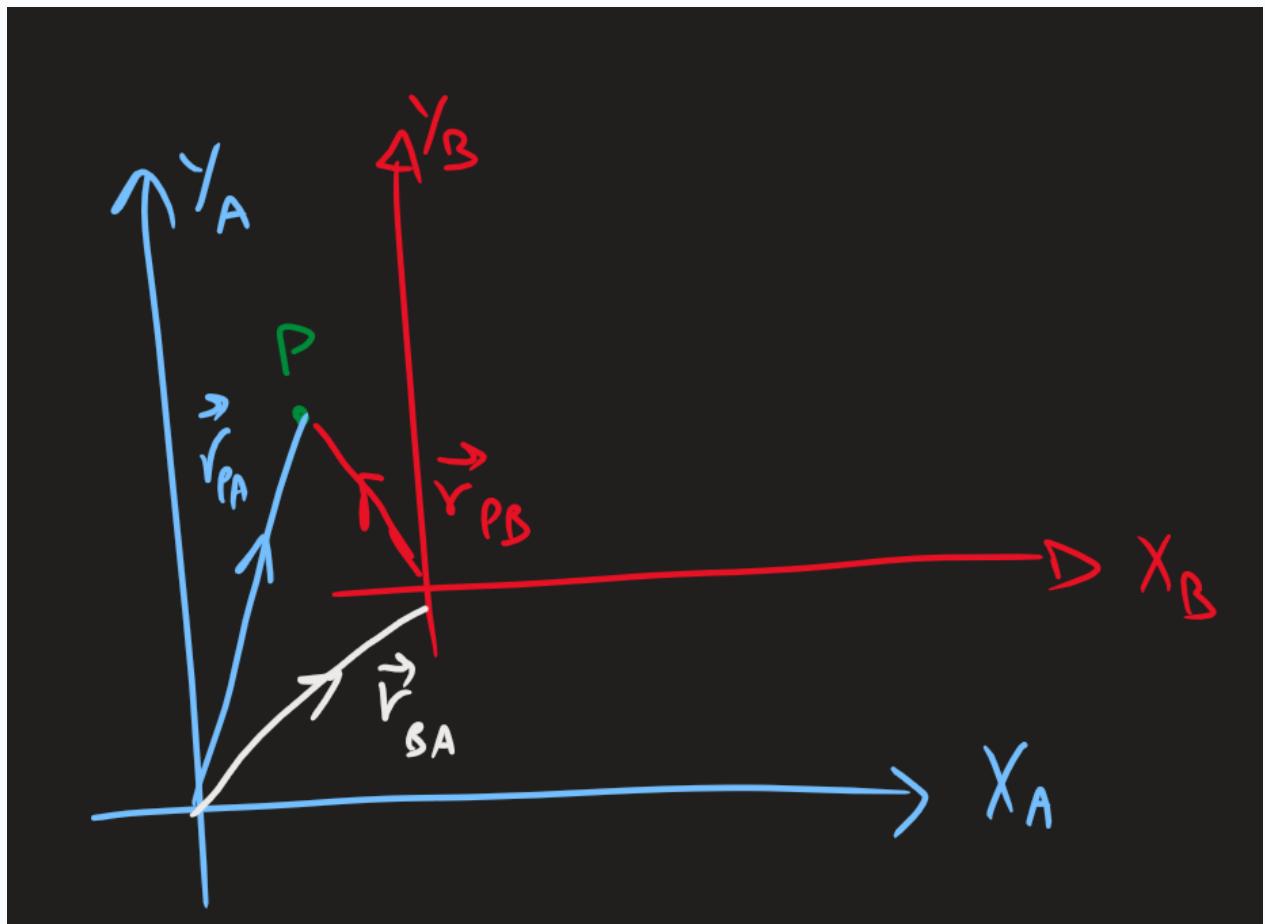
$$\begin{aligned}\vec{v}_{PA} &= \vec{v}_{PB} + \vec{v}_{BA} \\ \vec{a}_{PA} &= \vec{a}_{PB} + \vec{a}_{BA}\end{aligned}$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE della [Proposizione 3 \(relazione tra i sistemi di riferimento\)](#)

Basta osservare che \vec{r}_{PA} non è altro che la somma dei vettori \vec{r}_{BA} e \vec{r}_{PB} . ([figura 2.2.](#)) ■

FIGURA 2.2. (Illustrazione grafica della Proposizione 3 (relazione tra i sistemi di riferimento))



3. Sistemi di riferimento inerziali

#Definizione

Definizione (sistema di riferimento inerziale).

Siano A, B due *sistemi di riferimento*. Questi si dicono *sistemi di riferimento inerziali* se vale che

$$\vec{a}_{BA} = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

8. Esercizi sulla Cinematica 1D

Esercizi sulla Cinematica 1D

Esercizi sulla cinematica puntiforme in una dimensione.

1. Esercizi

#Esercizio

Esercizio (la fuga del panico).

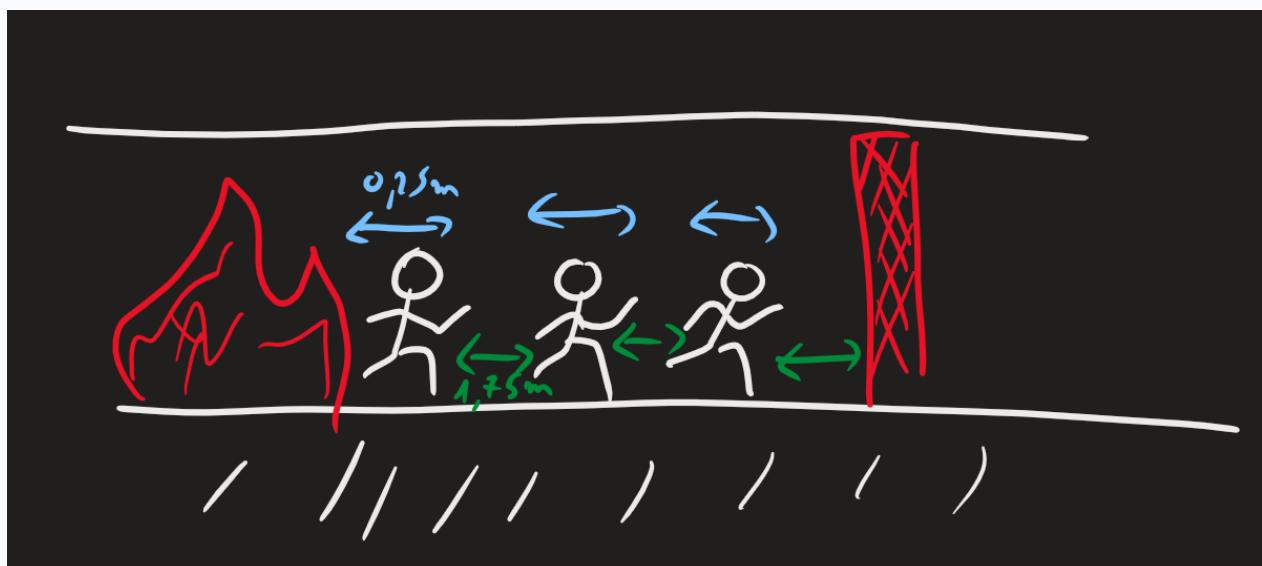
Supponiamo che, in una fuga da un incendio, una fila di persone si stanno muovendo verso una porta d'uscita. Tuttavia, la porta è chiusa e non può essere aperta.

Supponendo che ogni uomo *occupi uno spazio* di 0.25 m e che tra ogni uomo ci sia una *distanza* di 1.75 m e che ogni uomo viaggia alla *velocità* di $3.5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$:

- Calcolare l'aumentare dello "*cumulo delle persone davanti alla porta*" in funzione del tempo
- Calcolare quanto tempo ci serve per raggiungere uno *cumulo totale* (davanti alla porta) di 5 m (la risposta dovrebbe darci un'idea di quanto pericolosa sia questa situazione).

L'idea viene raffigurata nella *figura 1.1..*

FIGURA 1.1. (*La fuga del panico*)



#Esercizio

Esercizio (la frenata improvvisa).

Supponiamo di viaggiare in un'automobile ad una velocità v_0 . Quando siamo a 100 m dal semaforo rosso, ci mettiamo un *mezzo secondo* per

accorgercene del problema e *iniziamo ad applicare i freni*. Supponendo che i freni siano in grado di dare una decelerazione costante del $5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, calcolare la *velocità massima con cui possiamo viaggiare* per non superare il semaforo.

9. Esercizi sulla Cinematica 2D (o 3D)

Esercizi sulla Cinematica 2D (o 3D)

Esercizi sulla cinematica multidimensionale.

1. Moto del proiettile

#Esercizio

Esercizio (l'esperimento dell'uomo-proiettile di Zacchini).

Nel 1922 un italo-americano fece un noto esperimento, in cui si introduceva *in un cannone* e lo faceva *sparare*, facendo diventare il suo *corpo* un vero e proprio *proiettile*.

Supponendo di che l'uomo è stato sparato a con un'angolazione di $\theta = 53.0^\circ$ gradi, con una velocità iniziale di $|\vec{v}_0| = 26.5 \text{ m/s}$, calcolare i seguenti dati:

- Se la una torre di altezza 18 m dista dal cannone di 23 m, dire la distanza tra l'*uomo in volo* e la *torre* quando l'uomo raggiunge la posizione orizzontale della torre.
- Calcolare la differenza delle altezze tra l'altezza massima raggiunta dall'uomo e dalla torre
- Supponendo di posizionare una rete a 3 m di altezza, calcolare la posizione in cui posizionare la rete affinché l'uomo non cada a terra.

#Esercizio

Esercizio (la bomba vulcanica).

Un vulcano sta eruttando e ha appena espulso una roccia dall'altezza di 3.30 km, con un angolo di 35° . La roccia vulcanica raggiunge il terreno a 9.40 km dal lancio.

- a) Calcolare la velocità iniziale affinché sia verificata questa situazione
- b) Calcolare l'istanza del tempo in cui la roccia raggiunse il terreno
- c) Dire se ad aumentare della distanza finale sia necessaria o meno un'aumento nella velocità iniziale.

2. Moto circolare uniforme

#Esercizio

Esercizio (il satellite).

Un satellite terrestre, a distanza dalla terra di 640 km, sta orbitando attorno il pianeta terra. Questo satellite compie un giro attorno la terra ogni 5880 s

- a) Calcolare la velocità del satellite in modulo
- b) Calcolare l'accelerazione centripeta del satellite

Dati: raggio terrestre $R_T = 6378$ km

3. Moti relativi

#Esercizio

Esercizio (il velista).

Un velista sta viaggiando a 10 nodi verso l'est, e sta viaggiando in una zona dove il vento ha una velocità di 5 nodi verso il nord. Calcolare la velocità del vento osservato dal velista.

#Esercizio

Esercizio (il fiocco di neve e l'auto).

Adesso sta nevicando, e i fiocchi di neve cadono a $8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Dire l'angolo rispetto alla componente verticale misurabile da un conducente di

un'automobile che sta viaggiando a $50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

4. Esercizi misti

#Esercizio

Esercizio (il ragazzo con la pietra sul filo).

Un ragazzo sta facendo girare un sasso legato ad un filo; la corda è lunga 1.5 m. Ad un certo punto, la corda si spezza e il sasso viene lanciato dal terreno con un'altezza di 2 m e con un'angolazione di $\theta_0 = 0^\circ$. Il sasso cade dopo 10 m dal lancio.

Calcolare la velocità necessaria affinché sia verificata questa situazione.

Dinamica - Sommario

Dinamica.

A. LA TEORIA DELLA DINAMICA

A1. Grandezze della Dinamica

Definizione di Massa e di Forza

Definizioni preliminari per la dinamica: la grandezza fondamentale massa, grandezza derivata forza.

1. Definizioni di massa

#Definizione

Definizione (le tre definizioni di massa).

Possiamo dare *tre definizioni* di *massa*.

- i. Può essere definita come la *quantità di materia di un corpo*
- ii. Può essere una *misura della resistenza alla variazione della velocità* (massa inerziale)
- iii. Può essere una *misura proporzionale al peso* (massa gravitazionale)
In ogni caso la massa si misura in *kilogrammi* ([kg])

#Osservazione

Osservazione (la massa inerziale e gravitazionale non erano uguali).

Fino alla teoria della *relatività di Einstein*, non c'era nessun motivo teorico per far *coincidere* la *massa inerziale* con la *massa gravitazionale*; solo gli esperimenti erano in grado di giustificare tale rapporto.

2. Definizione di Forza

#Definizione

Definizione (la forza).

Si definisce la *forza* come una *spinta che produce un cambiamento di moto*. Questa spinta è misurabile con un *dinamometro*.

La forza si misura in *Newton* ([N]), in particolare si ha

$$1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Per una giustificazione di tale relazione, vedere le *leggi di Newton* (1)

A2. I principi della Dinamica

Principi della Dinamica

Le leggi di Newton o i principi della dinamica.

1. Le Leggi di Newton (o i principi della dinamica)

#Teorema

Teorema (i principi della dinamica o le leggi di Newton).

Enunciamo le leggi di Newton.

I. "Se la forza risultante $\sum \vec{F}$ che agisce su un corpo è nulla, allora l'accelerazione di questo corpo è anche nulla." Ovvero,

$$\sum \vec{F} = 0 \implies \vec{a} = 0$$

II. "L'accelerazione di un corpo è proporzionale alla forza risultante su questo corpo" Ovvero,

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

III. "La forza esercitata da un corpo A su un corpo B è uguale in modulo e direzione e in verso opposto alla forza esercitata da B su A." (legge di azione-reazione); ovvero,

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

#Osservazione

Osservazione (le prime due leggi sono apparentemente ridondanti).

Osserviamo che la prima legge sembra una *diretta conseguenza* della seconda legge di Newton. Infatti, se la risultante è nulla, allora anche l'accelerazione è nulla.

Tuttavia, è comunque utile tenerci conto della *prima legge*, in quanto sarà utile per *definire moti rettilinei uniformi* (oppure *sistemi di riferimento inerziali*); ovvero i moti dei corpi su cui non agiscono *forze*.

A3. Diagramma di Corpo Libero

Diagramma di Corpo Libero

Metodo convenzionale per la rappresentazione delle forze: *diagramma di corpo libero*. Regole per disegnare un *diagramma di corpo libero*.

0. Voci Correlate

- Definizione di Massa e di Forza

1. Diagramma di Corpo Libero

#Osservazione

Osservazione (l'obiettivo di questa convenzione).

Vogliamo trovare delle *regole precise* per rappresentare un *problema di fisica* che coinvolge tante *forze*. Uno dei modi è il *diagramma del corpo libero*, e le regole sono come seguono.

#Proposizione

Proposizione (regole del diagramma di corpo libero).

Enunciamo le seguenti regole per disegnare un *diagramma di corpo libero*.

- A. Ogni corpo viene *rappresentato come un punto* (anche se sarebbe un corpo esteso).
- B. Disegnare *tutte*, ma *solo*, le *forze* che sono *applicate* sul *corpo*, come dei *vettori*.

Quindi, non vanno disegnate: la velocità del corpo; la forza applicata dal corpo su un altro corpo (invece va disegnata la contraria)

2. Esempio di Diagramma di Corpo Libero

#Esempio

Esempio (esempio).

Vedere esempio di forza peso e forza normale ([1](#)).

B. LE FORZE A CONTATTO DELLA DINAMICA

B1. Forza Peso e Forza Normale

Forza Peso e Forza Normale

Definizione di forza peso e forza normale ad una superficie. Esempio di forza peso e forza normale di un corpo.

0. Voci correlate

- Principi della Dinamica
- Definizione di Massa e di Forza

1. Forza Peso

#Definizione

Definizione (forza peso).

Supponiamo di avere un corpo con massa m . Come ci è noto, in caduta libera il corpo cade con un'accelerazione g .

Quindi per le leggi di Newton, possiamo definire la **forza peso** come la quantità

$$\vec{F}_g = m\vec{g} = -mg \cdot \hat{j}$$

#Osservazione

Osservazione (la forza peso non è necessariamente una forza inerziale).

Anche se la formula $F_g = mg$ assomiglia a $F = ma$, ricordiamo che queste sono **molto diverse**. Infatti, non è detto che le masse m siano necessariamente uguali (1).

Inoltre, si nota che

$$\vec{F} = m\vec{g}$$

è un *caso particolare* della *legge gravitazionale universale*; infatti, se si vuole essere più precisi, \vec{g} è un valore al variare in *altezza dal centro della terra e massa della terra*; $\vec{g} = \vec{g}(r_T, m_T)$.

2. Forza Normale

#Definizione

Definizione (forza normale).

Adesso supponiamo di avere un *corpo* su una *superficie* (figura 2.1.).

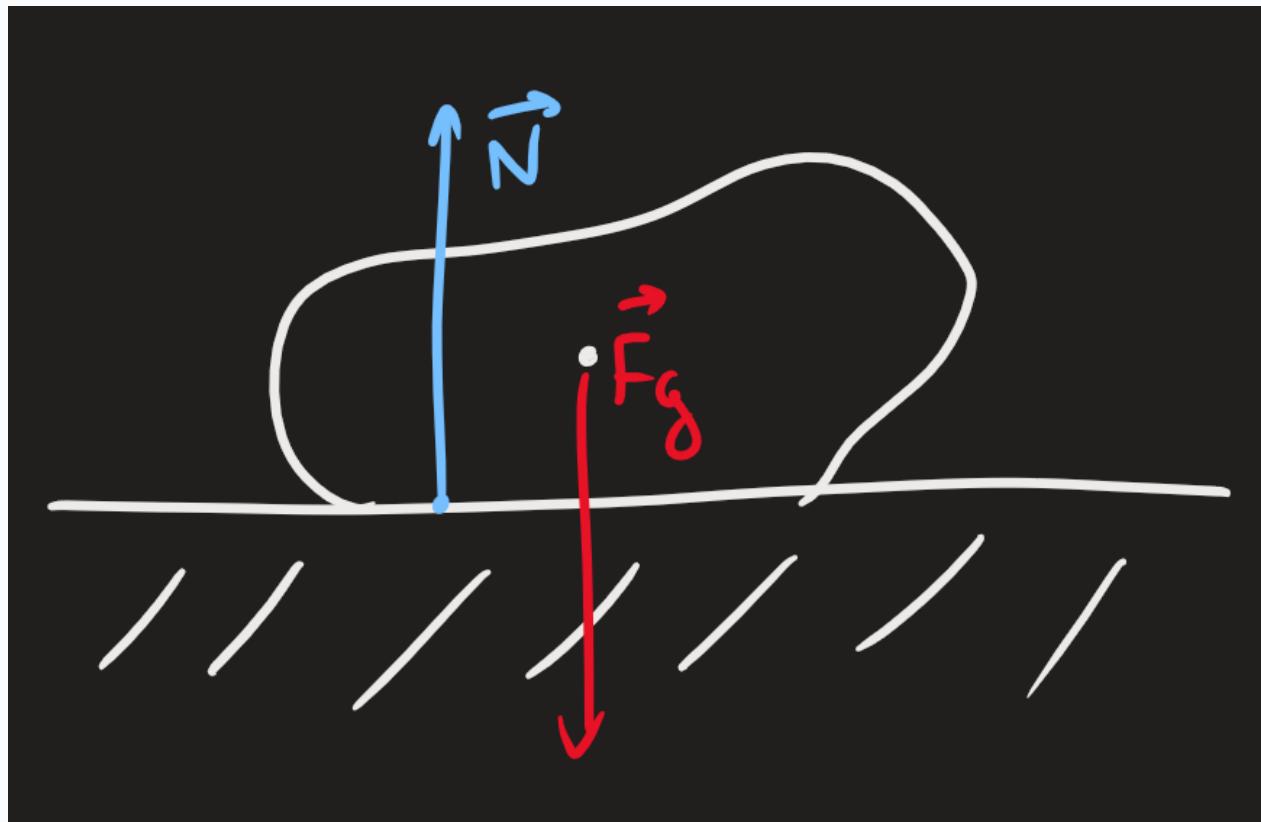
Come si potrebbe osservare, questo corpo subisce la *forza peso* (1), tuttavia non è in movimento.

Allora, per la legge di Newton dev'esserci una forza che si oppone alla forza peso \vec{F}_g .

Si ha infatti la *forza normale*, che è un *caso particolare* di *forza di contatto*; è la *spinta* della superficie. In particolare, il verso di questa forza è *perpendicolare* (ovvero normale) alla superficie.

La forza normale si denota con \vec{N} .

FIGURA 2.1. (Corpo su una superficie)



3. Esempio Combinato

#Esempio

Esempio (esempio dei due blocchi).

Supponiamo di avere due blocchi, uno posto sopra l'altro (ovvero la [figura 3.1.](#)). Conoscendo le sole forze pesi dei corpi, vogliamo trovare la forza normale esercitata su entrambi i corpi.

Innanzitutto rappresentiamo le forze secondo il [diagramma di corpo libero \(1\)](#); ovvero abbiamo al [figura 3.2.](#). Adesso, sfruttiamo le [leggi di Newton \(2\)](#).

Innanzitutto posso dire che la forza risultante sul [primo corpo](#) è

$$\sum \vec{F}_1 = \vec{N} + \vec{N}_{12} + \vec{F}_{g1} = m\vec{a}_1 = 0$$

Parimenti, sul secondo corpo abbiamo

$$\sum \vec{F}_2 = \vec{N}_{21} + \vec{F}_{g2} = m\vec{a}_2 = 0$$

L'obiettivo è di [isolare](#) la \vec{N} .

Allora usiamo la terza legge di Newton, per cui $\vec{N}_{12} = -\vec{N}_{21}$. Inoltre, per definizione di forza peso abbiamo $\vec{F}_{g1} = m_1\vec{g}$; $\vec{F}_{g2} = m_2\vec{g}$.

Infine, combinando tutto ho

$$\begin{aligned}\vec{N} &= -\vec{N}_{12} - \vec{F}_{g1} \\ &= \vec{N}_{21} - \vec{F}_{g1} \\ &= -\vec{F}_{g2} - \vec{F}_{g1} \\ &= -m_2\vec{g} - m_1\vec{g} = -(m_1 + m_2)\vec{g}\end{aligned}$$

che è la risposta voluta.

FIGURA 3.1. ([Situazione iniziale](#))

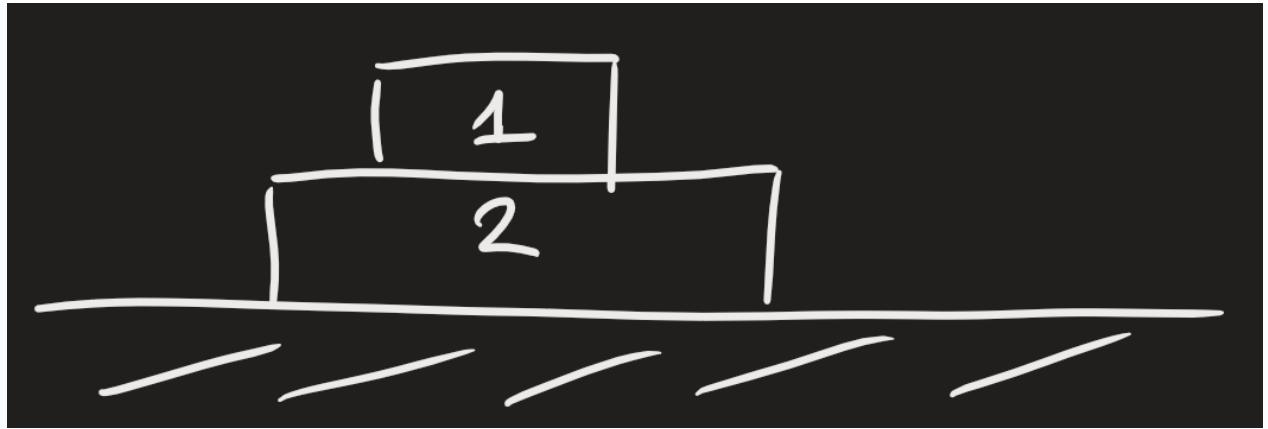
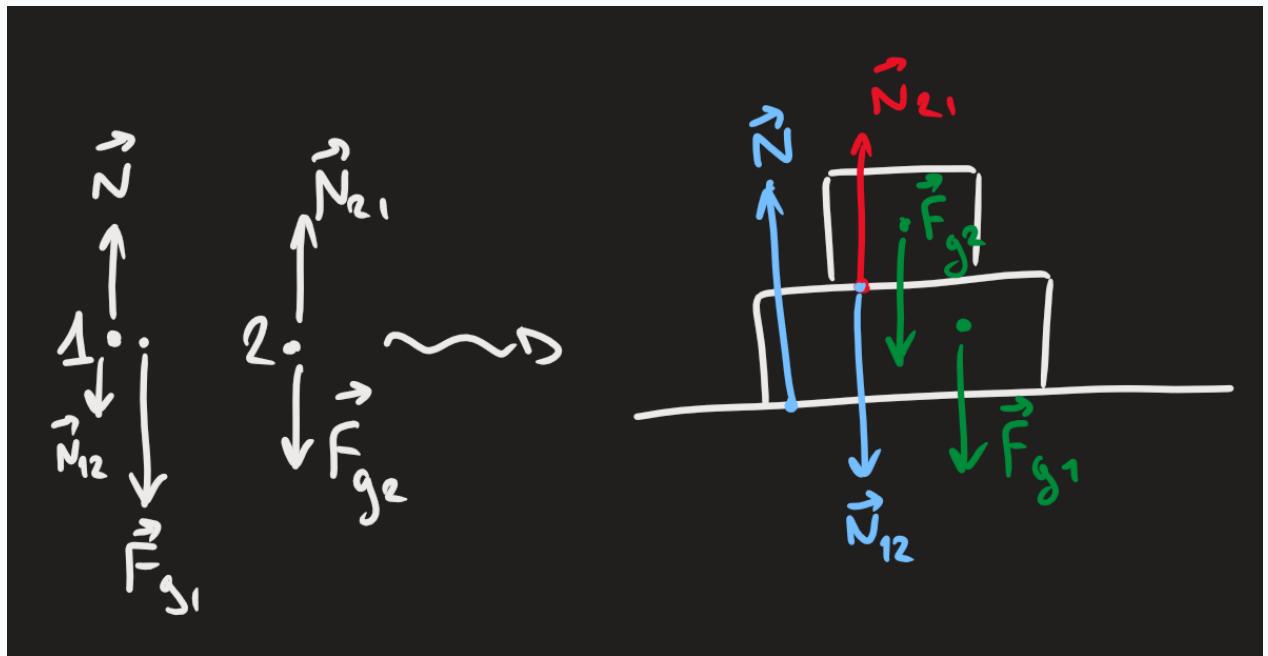


FIGURA 3.2. (Diagramma dei corpi liberi)



B2. Corde

Forza Tensione

Forza tensione generata da una corda ideale

0. Voci correlate

- Forza Peso e Forza Normale
- Definizione di Massa e di Forza

1. Forza Tensione

#Definizione

Definizione (tensione meccanica).

Prendiamo un **corpo sospeso** su una **corda idealizzata** (ovvero senza massa). Intuiamo che c'è una **forza** esercitata da questa **corda idealizzata**, che si oppone alla **forza peso**.

Chiamiamo questa forza come "**tensione meccanica**" e la indiamo con \vec{T}

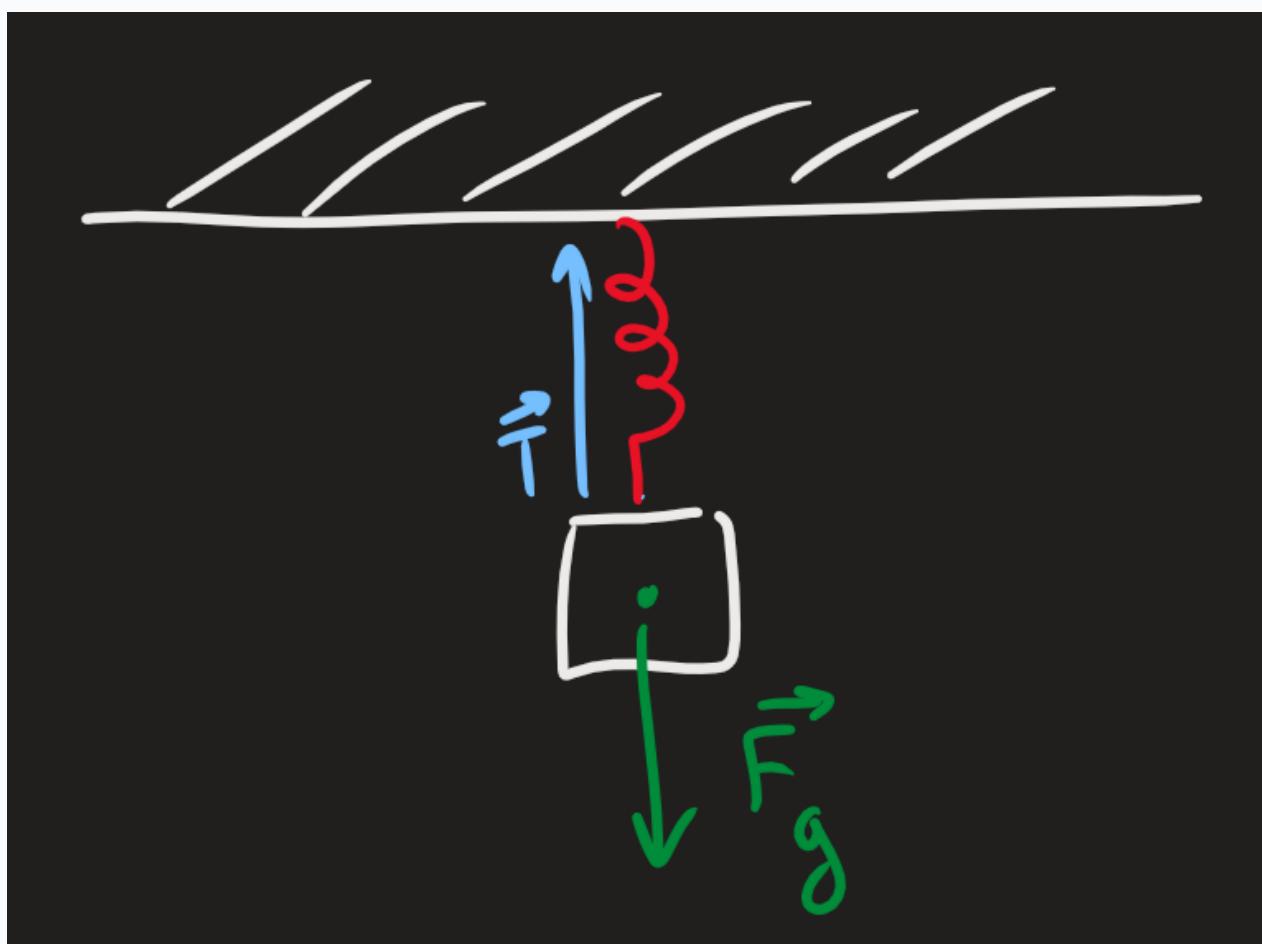
#Proposizione

Proposizione (le proprietà della tensione).

Notiamo le seguenti proprietà della tensione.

- I. La tensione \vec{T} è **sempre** parallela alla corda esercitante della forza.
- II. Il modulo $|\vec{T}|$ è **uguale lungo tutto la corda**; ovvero $|\vec{T}|$ si tramette lungo la corda.

FIGURA 1.1. (*Situazione ipotetica*)



B3. Attrito Statico e Dinamico

Attrito Statico e Dinamico

(c) Qual è la velocità di Mario quando la molla passa attraverso la sua posizione di equilibrio?

Attrito statico e dinamico. Definizioni, giustificazione microscopica e formule.

0. Voci correlate

- Forza Peso e Forza Normale
- Definizione di Massa e di Forza

1. Considerazione Preliminare

#Osservazione

Osservazione (gli oggetti in moto si fermano).

Prendiamo un oggetto in moto, con un'accelerazione \vec{a} (quindi abbiamo dato una spinga). Dopo un certo intervallo di tempo, questo oggetto si ferma.

Questo significa che **esiste** una forza che si opponga alla "**forza motrice**" F_m (ovvero quello che dà l'accelerazione \vec{a}). Per poter descrivere questa forza, facciamo un breve richiamo alla **forza normale** (1).

La forza normale è **ortogonale** alla superficie, e ha il modulo tale che il moto è **vincolato**, permettendo solo un **movimento parallelo** alla superficie.

2. Definizione di Attrito

Definizione (attrito statico e dinamico).

L'attrito è la "**versione ortogonale**" della **forza normale** (1); ovvero è solo **parallela** alla superficie e il suo modulo **varia** a seconda della tipologia dell'attrito: statico e dinamico.

A. **Attrito statico**: L'attrito statico agisce quando abbiamo un **corpo fermo**, e ha il modulo tale che il moto sia vincolato. Questa forza viene indicata con F_s e vale che $F_s = -F_m$

Ad un certo punto la forza motrice diventa sufficientemente grande per far muovere il corpo, e a questo punto entra in gioco l'**attrito dinamico**.

B. **Attrito dinamico**: L'attrito dinamico agisce quando abbiamo un **corpo in movimento**, e ha il modulo **proporzionale** alla **forza normale** (quindi l'oggetto si sta muovendo). Questa forza viene indicata con F_d

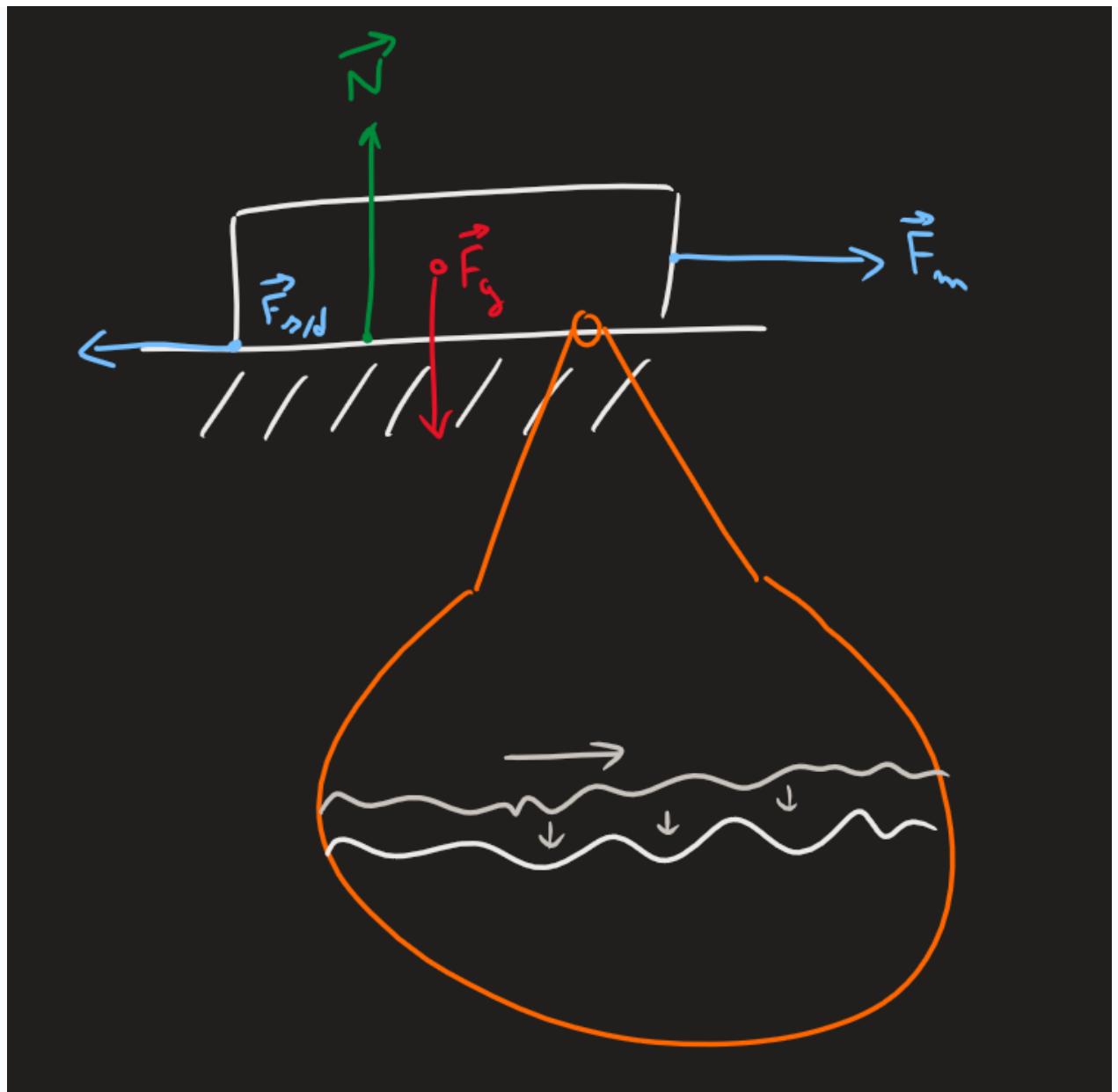
#Osservazione

Osservazione (giustificazione microscopica per l'attrito).

Come mai esiste l'attrito? Se prendiamo un microscopio e analizziamo le **superfici** del corpo e della superficie stessa, si potrà vedere che questi non saranno **mai** completamente regolari.

Quindi, quando facciamo muovere il corpo, abbiamo che le due superfici irregolari si oppongono, finché questi si "**incastrano tra di loro perfettamente**", per tenere il corpo fermo.

FIGURA 2.1. (*Giustificazione microscopica dell'attrito*)



#Teorema

Definizione (coefficienti di attrito).

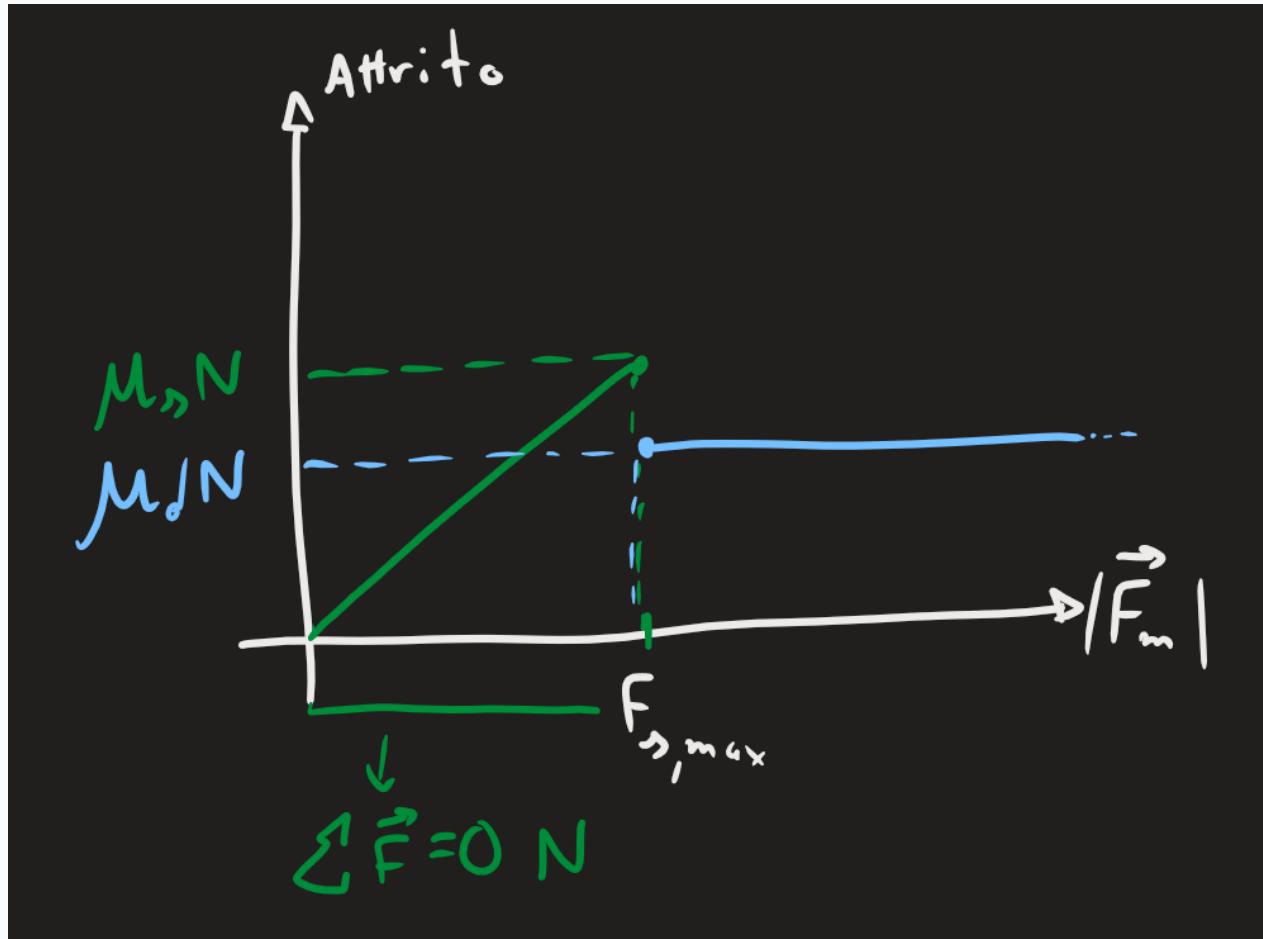
Definiamo i **coefficienti di attrito statico e dinamico** come i **numeri adimensionali** che descrivono la **quantità dell'attrito dinamico**.

In particolare abbiamo che valgono

$$\boxed{\begin{aligned} F_d &= \mu_d N \\ F_d &\leq \mu_s N \end{aligned}}$$

Quindi sicuramente possiamo dire che la **forza dinamica** è limitata dal valore $\mu_s N$.

FIGURA 2.2. (Grafico generale dell'attrito al variare dell'intensità della forza motrice)



#Osservazione

Osservazione (situazioni generali).

Osserviamo che generalmente vale che $\mu_s \mu_d < 1$ (ma non *sempre!*); inoltre in moltissimi casi, vale anche $\mu_s > \mu_d$.

B4. Resistenza dei Fluidi

Resistenza dei Fluidi

La forza dovuta alla resistenza dei fluidi. Flusso laminare e flusso turbolente.

0. Voci correlate

- Attrito Statico e Dinamico
- Definizione di Massa e di Forza

1. Flusso laminare

#Definizione

Definizione (flusso laminare, legge di Stoke).

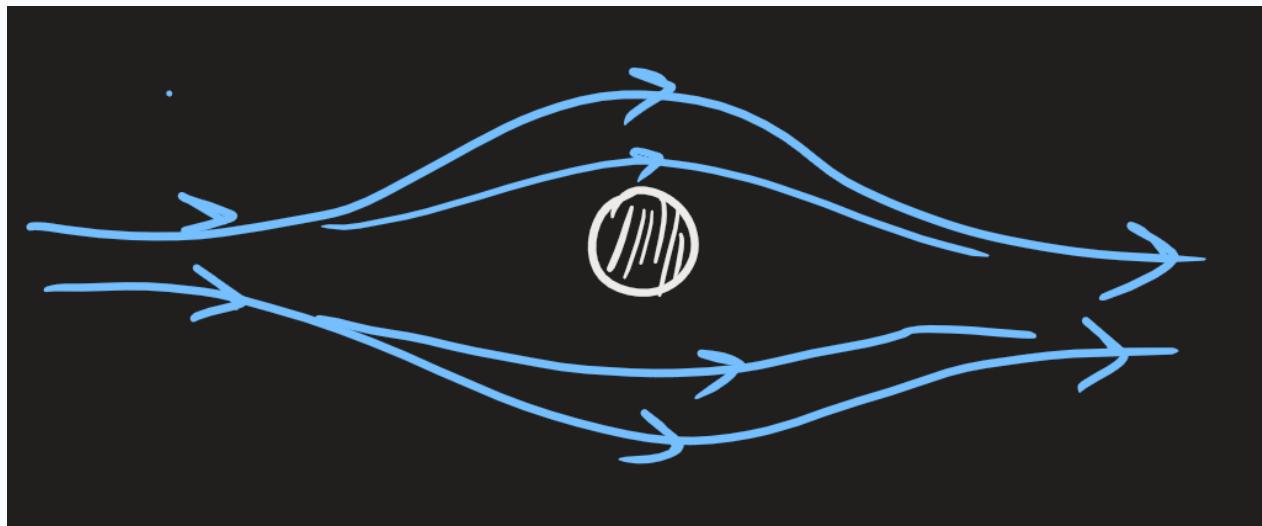
Supponendo che un *corpo* stia muovendo ad una "velocità bassa" con una *densità del fluido "bassa"*, possiamo modellizzare la resistenza con la *figura 1.1.* Ovvero, il fluido si "*devia*" attorno l'oggetto.

Quantitativamente la forza di resistenza si misura con la *legge di Stoke*.

$$\vec{F} = -b\vec{v}$$

dove b è un *coefficiente* in $\frac{\text{kg}}{\text{s}}$.

FIGURA 1.1. (*Flusso laminare*)



#Osservazione

Osservazione (l'utilità di questo modello).

La *legge di Stoke* è utile dato che il modello dato è facilmente integrabile con la *seconda legge di Newton* (1), anche se nella realtà è raramente applicabile.

Infatti, si mette "velocità bassa" e "densità bassa" tra le virgolette, dal momento che applichiamo questo modello anche con **velocità alte** e **densità alte**.

2. Flusso turbolente

#Definizione

Definizione (flusso turbolente).

In casi più realistici, si applica il **flusso turbolente**, dove il modulo della forza di resistenza viene descritta come segue.

$$|\vec{F}_v| = \frac{1}{2} \rho A C_D v^2$$

dove ρ è la **densità del fluido**; A è l'**area di proiezione dell'oggetto** secondo il fluido; C_D è un **coefficiente di resistenza** (drag), che dipende dalla forma dell'oggetto.

B5. Forza Elastica

Forza Elastica

Definizione di forza elastica. Formula matematica per descrivere la forza elastica al variare della posizione x (legge di Hooke).

0. Voci correlate

- Diagramma di Corpo Libero
- Formula di Taylor
- Definizione di Massa e di Forza

1. Definizione di Forza Elastica

#Definizione

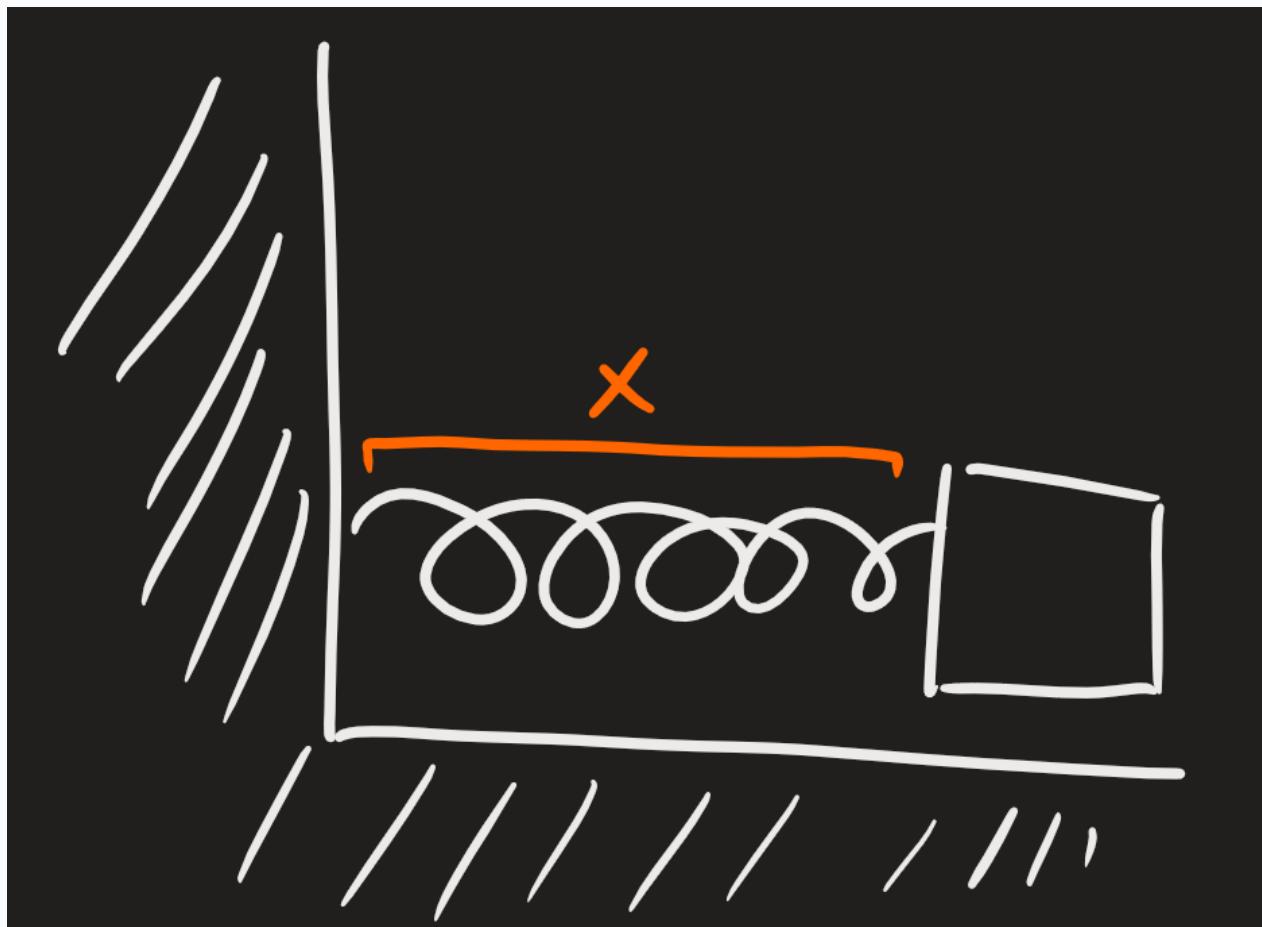
Definizione (forza elastica).

Supponiamo di avere un'oggetto fermo (o in quiete) attaccato ad una molla, con una distanza x dall'origine della molla ([figura 1.1.](#)).

Allora è naturale pensare che, esercitando un ulteriore spostamento Δx , abbiamo una forza che spinge l'oggetto [indietro](#) o [avanti](#), a seconda del valore Δx .

Questa forza si dice [forza elastica](#).

FIGURA 1.1. (*Situazione iniziale*)



2. Legge di Hooke

#Teorema

Teorema (legge di Hooke).

La [forza elastica](#) esercitata da una molla si calcola come il seguente

$$F_x = -k \cdot \Delta x$$

dove k è una **costante di proporzionalità** (detta **rigidità**), misurata in $\frac{\text{kg}}{\text{s}^2}$.

#Osservazione

Osservazione (la legge di Hooke è un'approssimazione delle funzioni trigonometriche).

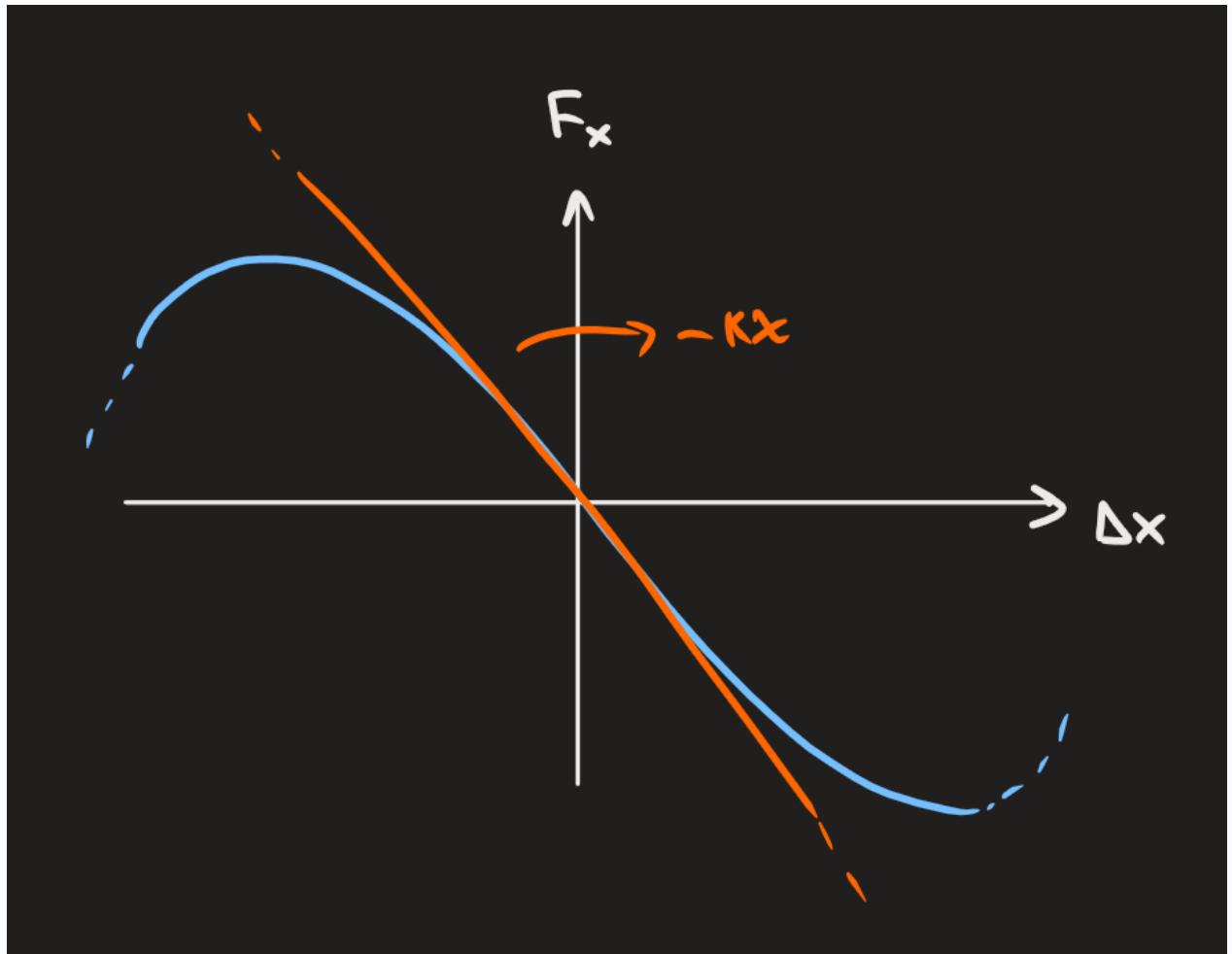
Notiamo che la **legge di Hooke** non è altro che la **prima espansione di Taylor**. Infatti, per la **formula di Taylor** (1 o 2) abbiamo che

$$\sin x \simeq x, \Delta x \rightarrow 0$$

Quindi, possiamo rappresentare la forza elastica con questa funzione? Sì, questo avrebbe senso con la nostra realtà; infatti, se tirassimo l'oggetto attaccato alla molla "troppo" in avanti o indietro, la **molla si spezzerebbe** (**figura 2.1.**).

Tuttavia, questo renderebbe tutto più complicato da un punto di vista matematico, rendendo preferibile la rappresentazione della forza elastica secondo la **legge di Hooke**.

FIGURA 2.1. (*Grafico più realistico dell'andamento della forza elastica*)



C. LE FORZE PARTICOLARI DELLA DINAMICA

C1. Forza Centripeta

Forza Centripeta

*La dinamica del moto circolare: forza centripeta come forza qualificativa.
Esempi di forza centripeta.*

0. Voci correlate

- Moto Circolare Uniforme
- Definizione di Massa e di Forza

1. Dinamica del moto circolare

#Definizione

Definizione (forza centripeta).

Supponiamo che un oggetto stia muovendo con un *moto circolare uniforme* (1), con una *velocità* $|\vec{v}|$ *costante* e un'accelerazione \vec{a} verso il centro.

Definiamo la *forza centripeta* come la *quantità di forza necessaria per mantenere questo moto circolare*. La formula per il modulo della forza centripeta è come segue (per il verso si sa che è sempre verso il centro).

$$|\vec{F}_c| = m|\vec{a}| = \frac{mv^2}{R}$$

#Osservazione

Osservazione (la forza centripeta è un qualificativo).

Osserviamo che, al contrario delle altre forze, la *forza centripeta* non spiega l'origine del *moto circolare*: descrive piuttosto il *moto*.

2. Esempi di Forza Centripeta

#Esempio

Esempio (lista di esempi).

Esempi di forza centripeta sono come seguono.

- Gravitazione Universale
- L'attrito statico di un'auto che va in cerchi
- Tensione
- Forza normale di un'oggetto che si gira (come il tagadà)
- Auto su una curva rialzata

Ci sono altri esempi, di cui non occupiamo.

C2. Forza Apparente

Forza Apparente

Dinamica dei sistemi di riferimento non inerziali: caso lineare. Definizione di forza apparente. Esempio di forza apparente: il treno che accelera.

0. Voci correlate

- Moti Relativi
- Definizione di Massa e di Forza

1. Sistemi di riferimento non inerziali

#Osservazione

Osservazione (richiami preliminari).

Facciamo dei brevi *richiami* ai *sistemi di riferimento* (1). Ci ricordiamo la seguente legge fondamentale per i sistemi di riferimento A e B :

$$\vec{r}_{PA} = \vec{r}_{PB} + \vec{r}_{BA}$$

da cui segue

$$\vec{v}_{PA} = \vec{v}_{BA} + \vec{v}_{PB} + \text{rot}_1$$

dove rot_1 è una *variabile* per tenere conto delle *rotazioni*. Inoltre, da qui segue anche

$$\vec{a}_{PA} = \vec{a}_{BA} + \vec{a}_{PB} + \text{rot}_2$$

dove rot_2 è una *variabile analoga* a rot_1 . Esempi di casi in cui bisogna tenere conto di queste variabili sono le seguenti: forza centrifuga e forza di Coriolis.

Adesso definiamo formalmente un *sistema di riferimento lineare non-inerziale*.

#Definizione

Definizione (sistema di riferimento lineare non-inerziale).

Siano A e B dei sistemi di riferimento. Se vale che

$$\vec{a}_{PB} = \vec{a}_{PA} + \vec{a}_{BA}$$

con $\vec{a}_{BA} \neq 0$, allora si dice che A è un *sistema di riferimento inerziale* e B è un *sistema di riferimento non-inerziale*. In questo caso particolare diciamo che i sistemi di riferimento sono *lineari*, dato che $\text{rot}_2 = 0$.

2. Forza Apparente di un Sistema non- inerziale

#Osservazione

Osservazione (osservazione per la forza apparente).

Notiamo che dall'equazione

$$\vec{a}_{PB} = \vec{a}_{PA} + \vec{a}_{BA}$$

segue, per la *seconda legge di Newton* (1), che

$$\vec{F}_A = m\vec{a}_{PA} = m\vec{a}_{PB} + m\vec{a}_{BA}$$

ovvero

$$\vec{F}_B = m\vec{a}_{PB} = \vec{F} - m\vec{a}_{BA}$$

#Definizione

Definizione (forza apparente).

Siano A e B dei *sistemi di riferimento lineari*, rispettivamente uno inerziale e l'altro non-inerziale. Allora la quantità

$$\vec{F} = m\vec{a}_{BA}$$

si dice "**forza apparente**". Questo nome ci suggerisce infatti che si tratta di una forza "**apparente**" che rappresenta solamente un moto, ma non si tratta di una vera e propria forza.

3. Esempio del treno

#Esempio

Esempio (il pendolo nel treno).

Supponiamo che in un **treno**, che si sta accelerando con un'accelerazione \vec{a} , c'è un **oggetto** attaccato al **soffitto** con una **corda ideale** (**figura 3.1.**).

Notiamo che quando il treno si accelera, l'oggetto si **muove indietro**. Come mai? Per scoprirlo, usiamo le nozioni appena apprese sulle **forze apparenti**.

Prima di tutto notiamo che dal **sistema di riferimento inerziale** (ovvero quello esterno), abbiamo che vale l'equazione

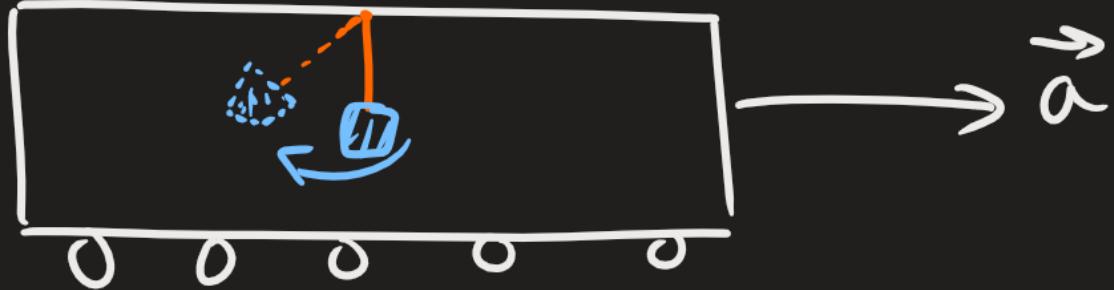
$$\sum \vec{F} = \vec{T} + \vec{F}_g = m\vec{a}$$

Poi per il **sistema di riferimento non-inerziale** (ovvero per il personaggio dentro il treno) abbiamo che l'oggetto è in **quiete**, ovvero

$$\sum \vec{F} = 0 \implies \vec{F} + \vec{T} + \vec{F}_g = 0 \implies \vec{F} = -m\vec{a}$$

allora vediamo che la **forza apparente** \vec{F} è **negativa**, ovvero che spinge l'oggetto **indietro**.

FIGURA 3.1. (**Situazione iniziale**)



C3. Forza Gravitazionale

Forza Gravitazionale

La legge di gravitazione universale: enunciato e giustificazione pratica. Campo gravitazionale.

0. Voci correlate

- Forza Centripeta

1. La Legge di Gravitazione Universale

#Teorema

Teorema (legge di gravitazione universale).

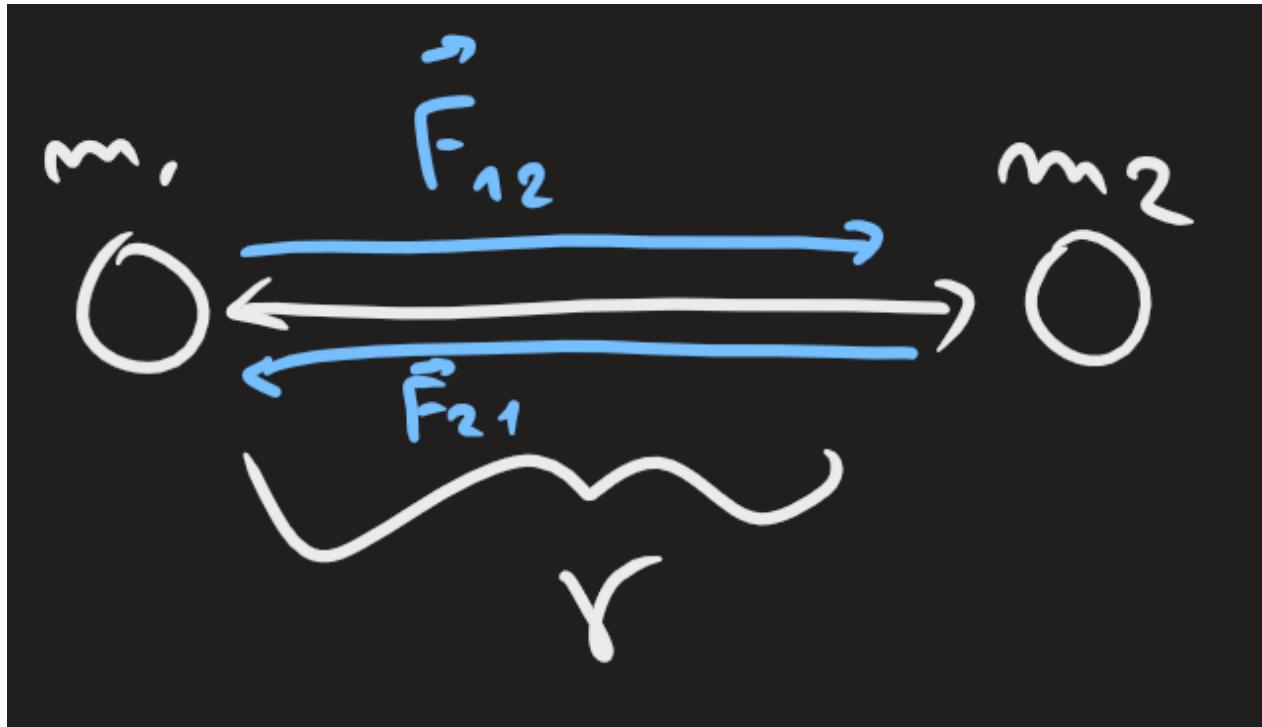
Due corpi, distanziati con una distanza r e aventi **massa** m_1 e m_2 si **attraggono sempre** con la **forza gravitazionale**, del cui modulo è data dalla formula

$$|\vec{F}_{12}| = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

dove G è una **costante di conversione** per calcolare la forza in **Newton [N]**

.

FIGURA 1.1. (Diagramma esplicativo)



#Osservazione

Osservazione (la giustificazione pratica di Newton).

Newton enunciò questa legge per *scrivere* una **teorica unica** per descrivere sia la **caduta degli oggetti** che il **movimento degli astri**. Infatti, lui ha ragionato come segue.

Possiamo calcolare l'accelerazione centripeta della luna \vec{a}_c :

$$a_c = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R \simeq 2.66 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

considerando che la distanza tra la luna e la terra è $R = 385\,000$ km e il tempo per girare la terra è 27,3 giorni.

Adesso osservo che alla superficie della terra ho l'accelerazione $g \simeq 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Quindi, se le **causa della gravità terrestre** e l'**accelerazione centripeta della luna** sono le medesime, posso misurare le proporzioni

$$\frac{a_c}{g} \simeq 3600, \frac{R_L}{R_T} \simeq 60.43$$

Allora così noto che

$$\left(\frac{1}{\frac{R_T}{R_L}} \right)^2 \simeq \frac{a_c}{g} \longrightarrow F \propto \frac{1}{d^2}$$

ovvero la **forza è inversamente proporzionale** alla **distanza quadrata delle masse**.

2. Campo Gravitazionale

#Definizione

Definizione (campo gravitazionale).

Si definisce il **campo gravitazionale** di un'oggetto avente massa m come il **campo scalare** dato da

$$G(r) = G \frac{m}{r^2}$$

C4. Forza Elettromagnetica

Forza Elettromagnetica

Interazione elettrostatica delle cariche, forza di Coulomb. Confronto numerico tra forza di Coulomb e forza gravitazionale. Campo elettrico. Interazione magnetica delle cariche data dal prodotto vettoriale di velocità e campo magnetico. Forza di Lorentz per l'interazione elettromagnetica.

0. Voci correlate

- Forza Gravitazionale

1. Forza di Coulomb

#Teorema

Teorema (forza di Coulomb).

Due *oggetti* con distanza r e aventi cariche q_1 e q_2 provano una *forza repulsiva o attrattiva* tra q_1 e q_2 , detta come *forza di Coulomb*, e viene calcolata come segue

$$\vec{F}_{12} = -k_e \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_{12}|^2} \cdot \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|}$$

dove k_e è la costante data da

$$k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \simeq 8.99 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}$$

#Definizione

Definizione (campo magnetico).

Si definisce il *campo magnetico* similmente al *campo gravitazionale* (1), ovvero come il *campo vettoriale* dato da

$$\vec{E}_q(\vec{r}) = -k_e \frac{q}{|\vec{r}|^2} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

2. Confronto Numerico tra Forza Elettrica e Gravitazionale

#Osservazione

Osservazione (confronto numerico tra forza di Coulomb e di Newton).

Notiamo che la *forza gravitazionale di Newton* (1) e la *forza di Coulomb* condividono la *medesima struttura matematica* per calcolare il *modulo delle forze*; tuttavia si trattano di forze completamente diverse.

Infatti, in certi contesti la *forza elettrica* è più *forte* della *forza gravitazionale*. Prendiamo le seguenti *particelle elementari*: un protone

ed un **elettrone**, coi valori

$$\begin{pmatrix} m_p & q_p \\ m_e & q_e \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1.672 \cdot 10^{-27} & 1.602 \cdot 10^{-19} \\ \frac{9.109 \cdot 10^{-31}}{\text{kg}} & \frac{-1.602 \cdot 10^{-19}}{\text{C}} \end{pmatrix}$$

Allora abbiamo che il **rapporto tra la forza elettrica** F_e e la **forza gravitazionale** F_g è data da

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{k_e q_e^2}{G m_e m_p} \cdot \frac{d^{-2}}{d^{-2}} \simeq 2 \cdot 10^{39}$$

Ovvero che la **forza elettrica** è più forte della **forza gravitazionale** $2 \cdot 10^{39}$ volte; in questo caso la forza gravitazionale F_g diventa **trascurabile**.

3. Interazione Magnetica

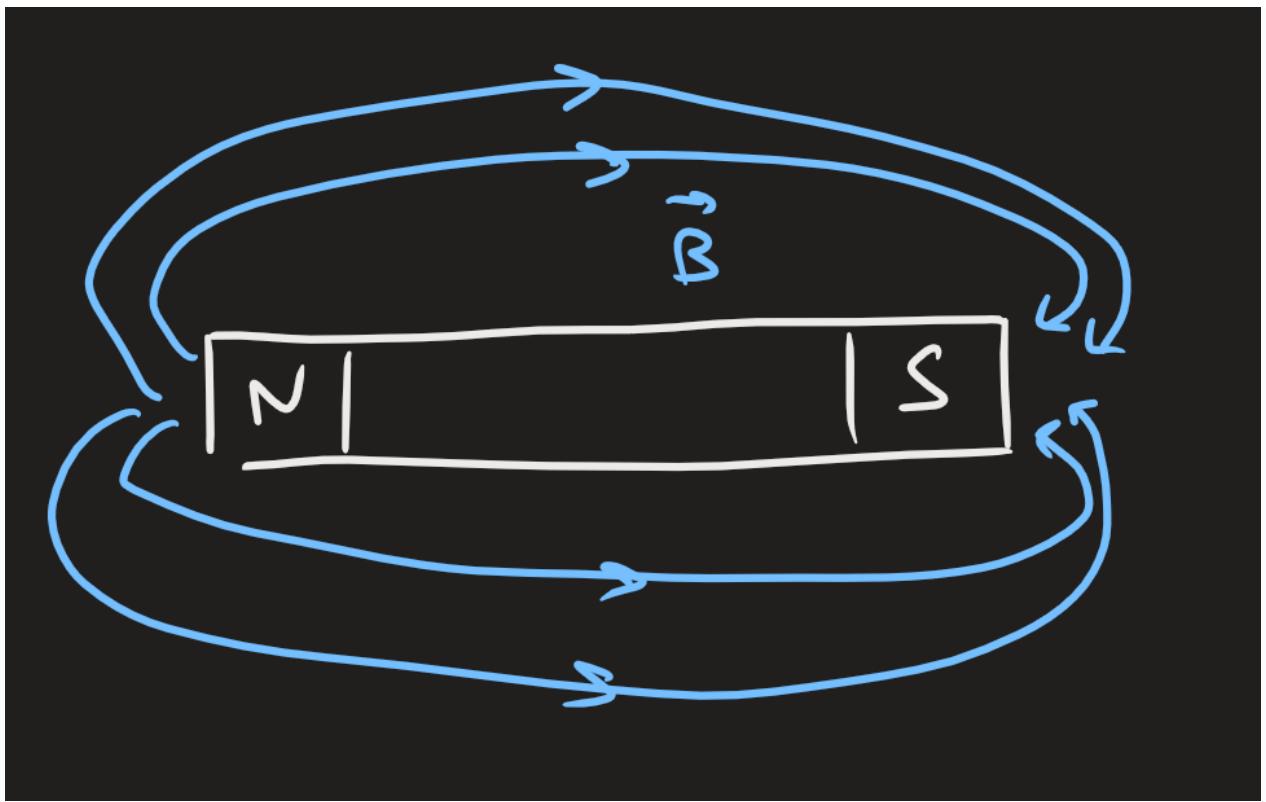
#Osservazione

Osservazione (osservazioni storiche del campo magnetico).

Il **campo magnetico** è stato **osservato** da tanto tempo, soprattutto assieme all'**interazione elettrica** della particella; ad esempio si ha il noto caso della **calamita**, col polo **nord** e **sud**.

Denomineremo il **campo magnetico** come \vec{B} .

FIGURA 3.1. (*La calamita*)



#Teorema

Teorema (forza magnetica).

Supponiamo di avere una **carica** q , **in movimento** con una velocità \vec{v} all'interno di un **campo magnetico** \vec{B} .

Allora la **forza magnetica** è data dal **prodotto vettoriale**

$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

in particolare si ha che il suo modulo è

$$F = |\vec{v}| |\vec{B}| \sin \theta$$

(dove θ è l'angolo creato dai due vettori)

Inoltre la direzione del vettore risultante del prodotto scalare \vec{F} è data dalla **regola della mano destra**.

#Proposizione

Proposizione (regola della mano destra).

Siano v_1 e v_2 dei *vettori* in \mathbb{R}^2 . Allora la *direzione* del vettore risultante dato dal prodotto vettoriale $v = v_1 \times v_2$ è *ortogonale* a entrambi i vettori v_1 e v_2 ed è data con la seguente procedura.

1. Estendere e aprire la mano destra
2. Estendere l'*indice* (o il *pollice*) come il *primo vettore* v_1
3. Estendere il *dito medio* (o l'*indice*) come il *secondo vettore* v_2
4. Il vettore risultante v è il *pollice* (o il *dito medio*)

Notare che abbiamo *due procedure possibili*; il risultato finale è *indifferent* dalle dita usate, quindi si può usare la maniera più *conveniente*.

4. Forza di Lorentz

#Teorema

Teorema (forza di Lorentz).

Sia q una *carica puntiforme* con velocità \vec{v} , immerso in un \vec{B} e \vec{E} .

Allora si dice *la forza di Lorentz* come la *forza elettrica* e la *forza magnetica* esercitata su questa carica ed è data dalla formula seguente.

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right)$$

D. LE APPLICAZIONI DELLA DINAMICA

D1. Il piano inclinato

Il Piano Inclinato

Caso specifico della dinamica: *il piano inclinato*.

0. Voci Correlate

- Definizione di Massa e di Forza
- Forza Peso e Forza Normale
- Attrito Statico e Dinamico
- Diagramma di Corpo Libero
- Funzioni trigonometriche

1. Il Piano Inclinato senza Attrito

#Osservazione

Osservazione (il piano inclinato, osservazione preliminare).

Vogliamo studiare il *piano inclinato*. Ovvero, abbiamo un *blocco* con massa m su un *piano inclinato* (*figura 1.1.*). Prima di modellizzare questa situazione, facciamo delle considerazioni preliminari.

Innanzitutto ci chiediamo *cosa vogliamo sapere*: supponiamo di conoscere l'angolo θ dell'angolo, la massa m e l'accelerazione gravitazionale \vec{g} . Allora, è naturale chiederci *come calcolare* l'*accelerazione* parallela al piano $|\vec{a}|$ della forza risultante (che non è nulla) e la *forza normale* $|\vec{N}|$.

Adesso pensiamo ai casi limiti. Se $\theta = 0$, abbiamo un *piano perfettamente normale*; quindi l'accelerazione è nulla, invece la forza normale è massimale. Al contrario abbiamo $\theta = \frac{\pi}{2}$; poiché in questo caso si ha una *caduta libera*, la *forza normale* è non-esistente (se si assume di ignorare forze di attrito).

Pertanto, possiamo concludere di avere qualcosa a che fare con le *funzioni trigonometriche* sin e/o cos (1).

Disegniamo adesso il *diagramma del corpo libero* (*figura 1.2.*) (2). Per procedere, bisognerà effettuare delle *scelte nel sistema di riferimento*.

FIGURA 1.1. (*Situazione preliminare*)

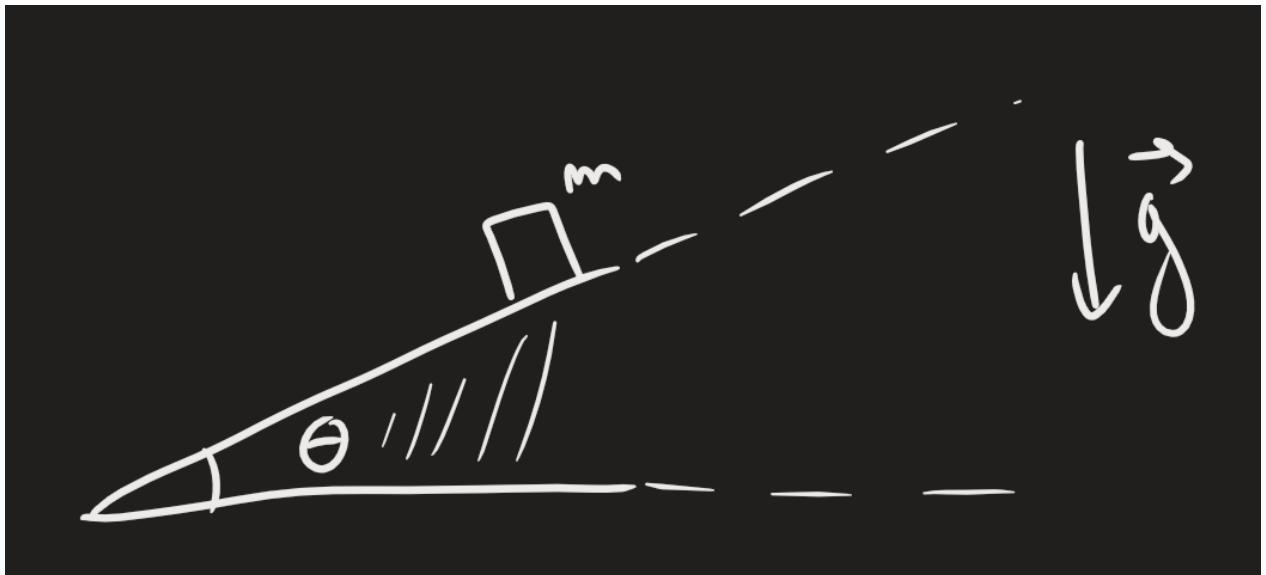
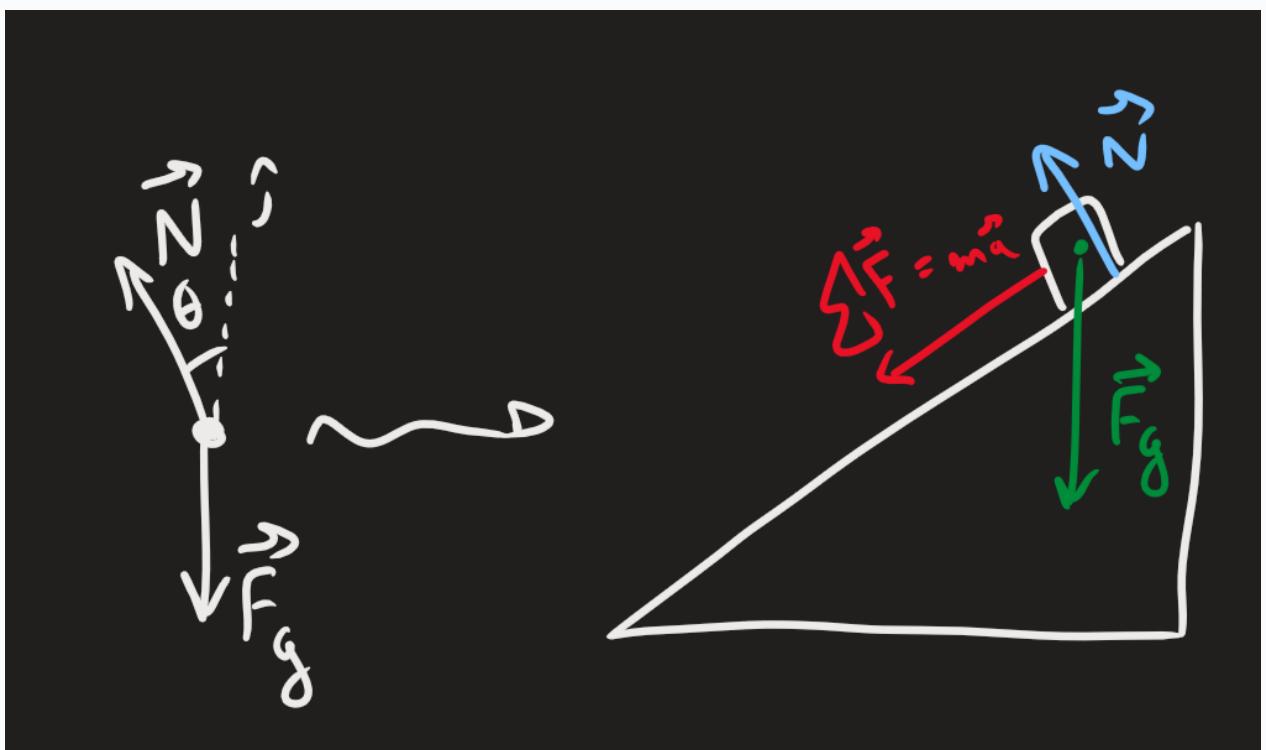


FIGURA 1.2. (Diagramma di corpo libero)



#Proposizione

Proposizione (ver. 1).

Osserviamo che \vec{a} è ortogonale a \vec{N} .

Scegliamo il seguente sistema di riferimento: invece di scegliere la base standard $\mathcal{E}^2 = (\hat{i}, \hat{j})$, facciamo la seguente scelta. Prendiamo \hat{i}' come l'asse **parallela** al vettore \vec{a} e prendiamo \hat{j}' come l'asse **parallela** alla normale \vec{N} . Ovviamente questi devono essere versori quindi devono avere norma unitaria e avere il prodotto scalare nullo.

Inoltre, richiamando la definizione di prodotto scalare ho

$$\hat{j} \cdot \hat{j}' = \cos \theta$$

e

$$\hat{j} \cdot \hat{i}' = \sin \theta$$

Adesso procediamo con la nostra modellizzazione; le leggi della fisica valgono lo stesso.

Scomponiamo le forze in vettori; ovvero con

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} = \vec{a} \hat{i}'$$

e

$$\vec{N} = N_x \hat{i} + N_y \hat{j} = \vec{N} \hat{j}'$$

Usando la **seconda legge di Newton** ho

$$\vec{F}_g + \vec{N} = m\vec{a}$$

Ricordandomi che posso effettuare il **cambiamento di base** moltiplicando una qualsiasi forza con i versori \hat{i}' o \hat{j}' , ho le coordinate della forza risultante $\sum \vec{F}$

$$\sum F \rightarrow \begin{cases} \hat{i}' : \vec{F}_g \cdot \hat{i}' = -mg \sin \theta = m\vec{a} \\ \hat{j}' : \vec{F}_g \cdot \hat{j}' + N = -mg \cos \theta + N = 0 \end{cases}$$

(la componente \hat{j}' è nulla per vincolo geometrico; infatti il corpo non può "cadere o salire sotto o sopra il piano")

Infine, ottengo i valori

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{a} &= -g \sin \theta \cdot \hat{i}' \\ \vec{N} &= mg \cos \theta \cdot \hat{j}' \end{aligned}}$$

che sono sufficienti per fornire il **modulo delle forze**.

#Proposizione

Proposizione (ver 2.).

Omessa (materiale disponibile su Moodle)

D2. Esempi Notevoli della Dinamica

Esempi Notevoli di Forze della Dinamica

Applicazioni della dinamica a situazioni realistiche: distanza di frenatura; angolo critico su una superficie angolata; ...

0. Voci correlate

- Definizione di Massa e di Forza
- Principi della Dinamica
- Attrito Statico e Dinamico
- Resistenza dei Fluidi
- Forza Elastica
- Forza Gravitazionale
- Forza Elettromagnetica

1. Distanza di Frenatura (attrito dinamico)

#Osservazione

Osservazione (la distanza di frenatura dato l'attrito).

Precedentemente siamo riusciti a calcolare la *distanza di frenatura* di un'automobile, data una velocità iniziale v_0 e un'accelerazione negativa (1).

Adesso generalizziamo questa situazione con l'attrito.

Prendiamo le componenti della forza di un'automobile in movimento:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \implies \vec{F}_g + \vec{N} + \vec{F}_d = m\vec{a}$$

Separando le forze per componenti, abbiamo che

$$\begin{cases} \hat{j} : -mg = N \\ \hat{i} : \vec{F}_d = \mu_d N = -m\mu_d g = ma_x \implies -\mu_d g = a_x \end{cases}$$

abbiamo ottenuto che $a_x = -\mu_d g$. Adesso, richiamo la formula per lo scarto dei quadrati delle velocità (2):

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$$

Allora, dato che $v = 0$ (la velocità finale è nulla) segue che abbiamo

$$a_x = -\frac{v_0^2}{2d}$$

Pertanto ottenere il risultato finale

$$\frac{v_0^2}{2d} = \mu_d g \implies d = \boxed{\frac{v_0^2}{2g\mu_d}}$$

Da notare che anche con l'attrito la *distanza* aumenta con un'andamento quadratico in funzione della velocità; questo è uno dei tanti motivi per imporre i *limiti di velocità*.

2. Angolo critico di un oggetto sul piano inclinato (attrito statico)

#Osservazione

Osservazione (l'angolo critico).

Prendiamo un oggetto su un piano inclinato (1). Considerandoci l'attrito, la forza attrito cambia al variare dell'angolazione θ ; esiste un certo "*angolo critico*" θ_c tale che l'accelerazione $|\vec{a}|$ diventa sufficientemente grande per far spostare l'oggetto, facendo attivare l'*attrito dinamico*.

Vogliamo determinare tale θ_c al variare del coefficiente μ_s (2). Innanzitutto prendiamo la prima legge di Newton, per cui quando l'oggetto è fermo abbiamo che la somma di forze è

$$\vec{F}_s + \vec{N} + m\vec{g} = 0$$

Adesso prendiamo il modulo di $|\vec{F}_s|$:

$$|\vec{F}_s| = mg \sin \theta \leq \mu_s N = \mu_s mg \cos \theta$$

Allora otteniamo immediatamente il risultato

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} \leq \mu_s \implies \tan \theta \leq \mu_s$$

(Nota bene: il coefficiente μ_s NON rientra nella definizione dell'attrito, bensì è semplicemente un "valore limite")

Quindi sappiamo che l'angolo massimale θ_c che soddisfi l'equazione sopra è

$$\theta_c = \arctan \mu_s$$

#Osservazione

Osservazione (metodo sperimentale per misurare l'attrito statico).

Possiamo usare l'equazione sopra "*al contrario*", ovvero sapendo l'angolo determiniamo il coefficiente μ_s .

3. Angolo stabile del drone (flusso laminare)

#Osservazione

Osservazione (l'angolo stabile di un drone).

Supponiamo di avere un *drone* come nella *figura 3.1.*. Supponiamo di avere il *flusso laminare* (1). Allora vogliamo conoscere l'angolo θ tale che questo drone possa muoversi con una *velocità costante* v .

Disegniamo prima di tutto il *diagramma di corpo libero*, che è come nella *figura 3.2.*. Adesso, usando la seconda e la prima legge di Newton, ricaviamo che la forza risultante è *nulla*. Ovvero,

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_s + \vec{F}_g + \vec{F}_R = 0$$

Prendendo le singole componenti, abbiamo

$$\begin{cases} \hat{i} : -bv + \sin \theta |\vec{F}_s| = 0 \\ \hat{j} : -mg + \cos \theta |\vec{F}_s| = 0 \end{cases}$$

Allora abbiamo

$$\tan \theta = \frac{bv}{mg}$$

dandoci il risultato finale

$$\theta = \arctan \left(\frac{bv}{mg} \right)$$

FIGURA 3.1. (*Situazione iniziale*)

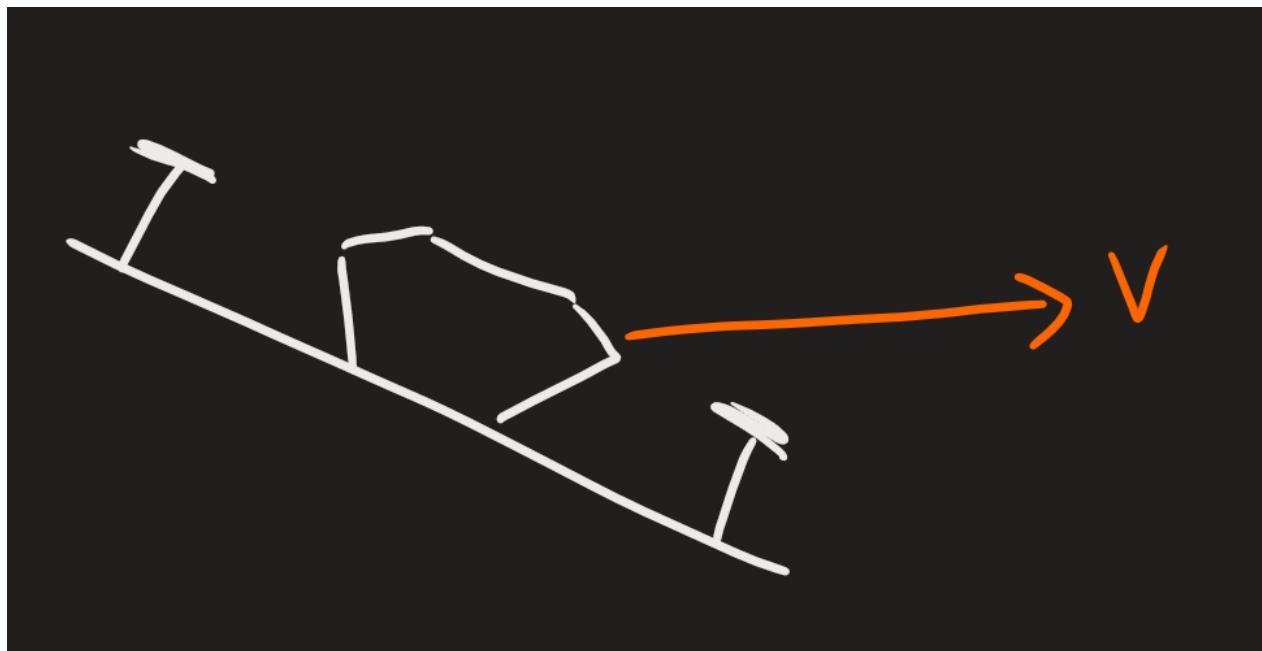
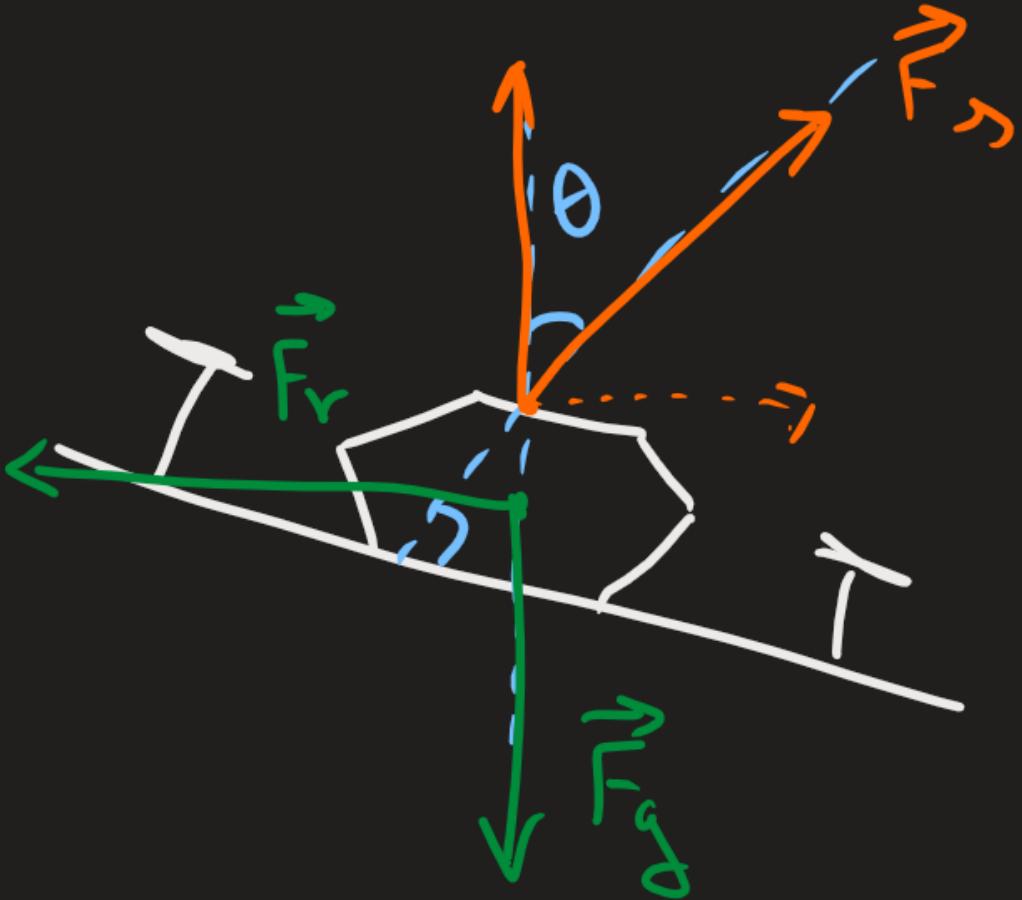


FIGURA 3.2. (*Diagramma di corpo libero*)



4. Velocità terminale di un paracadutista (flusso turbolente)

#Osservazione

Osservazione (la velocità terminale di un oggetto in caduta libera).

Riprendiamo il problema dell'oggetto in *caduta libera* (1). Adesso consideriamo la *resistenza dell'aria*, in particolare con un *flusso turbolento* (2).

Allora, sapendo che ad un certo punto l'oggetto si muove con una *velocità costante* (detta *velocità terminale*), abbiamo dunque accelerazione \vec{a} nulla. Possiamo usare i principi della dinamica, per cui

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_g + \vec{F}_R = 0 \implies \vec{F}_R = -\vec{F}_g$$

Allora da questo segue che

$$\frac{1}{2} \rho A C_d v^2 = mg$$

che ci dà il risultato finale

$$v = \sqrt{\frac{2mg}{\rho A C_D}}$$

#Osservazione

Osservazione (la dipendenza dalla massa).

Qui osserviamo che, a differenza dall'attrito statico e dinamico, abbiamo un fattore che *dipende* dalla massa m .

5. Strada inclinata in curva (forza centripeta)

#Osservazione

Osservazione (strada inclinata in curva).

Supponiamo che una *strada* sia *inclinata in curva*, con un raggio R e un'angolazione θ (*figura 5.1.*). Conoscendo il raggio R e la velocità v dell'auto, vogliamo conoscere l'angolo θ .

Prendendo un pezzo della curva e disegnandoci il diagramma di corpo libero dell'auto sulla curva (*figura 5.2.*), otteniamo che

$$\begin{cases} \hat{i} : N \sin \theta = \frac{mv^2}{R} \\ \hat{j} : N \cos \theta = mg \end{cases}$$

Allora abbiamo

$$\tan \theta = \frac{v^2}{Rg}$$

che è il risultato desiderato.

FIGURA 5.1. (*Situazione iniziale*)

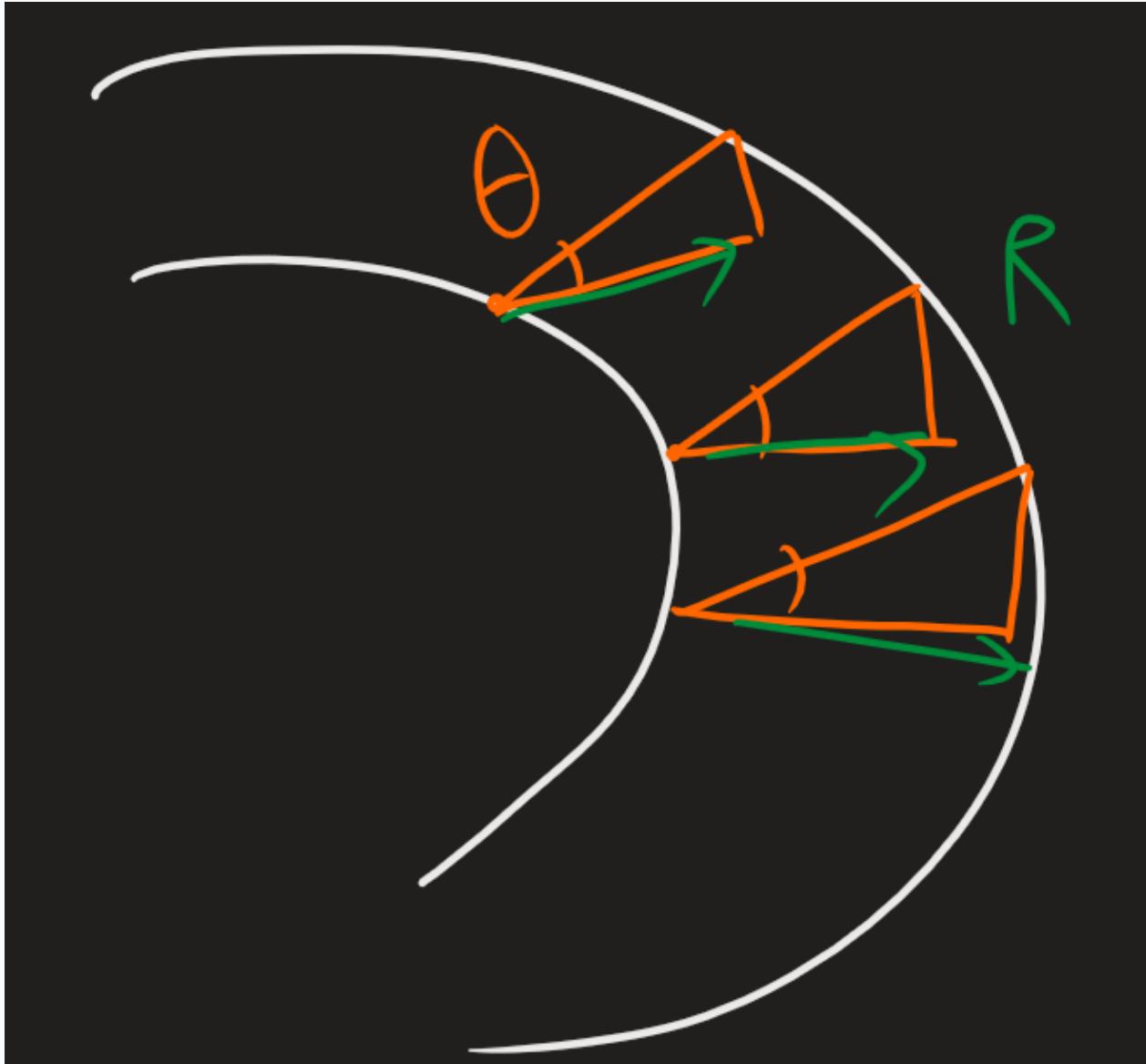
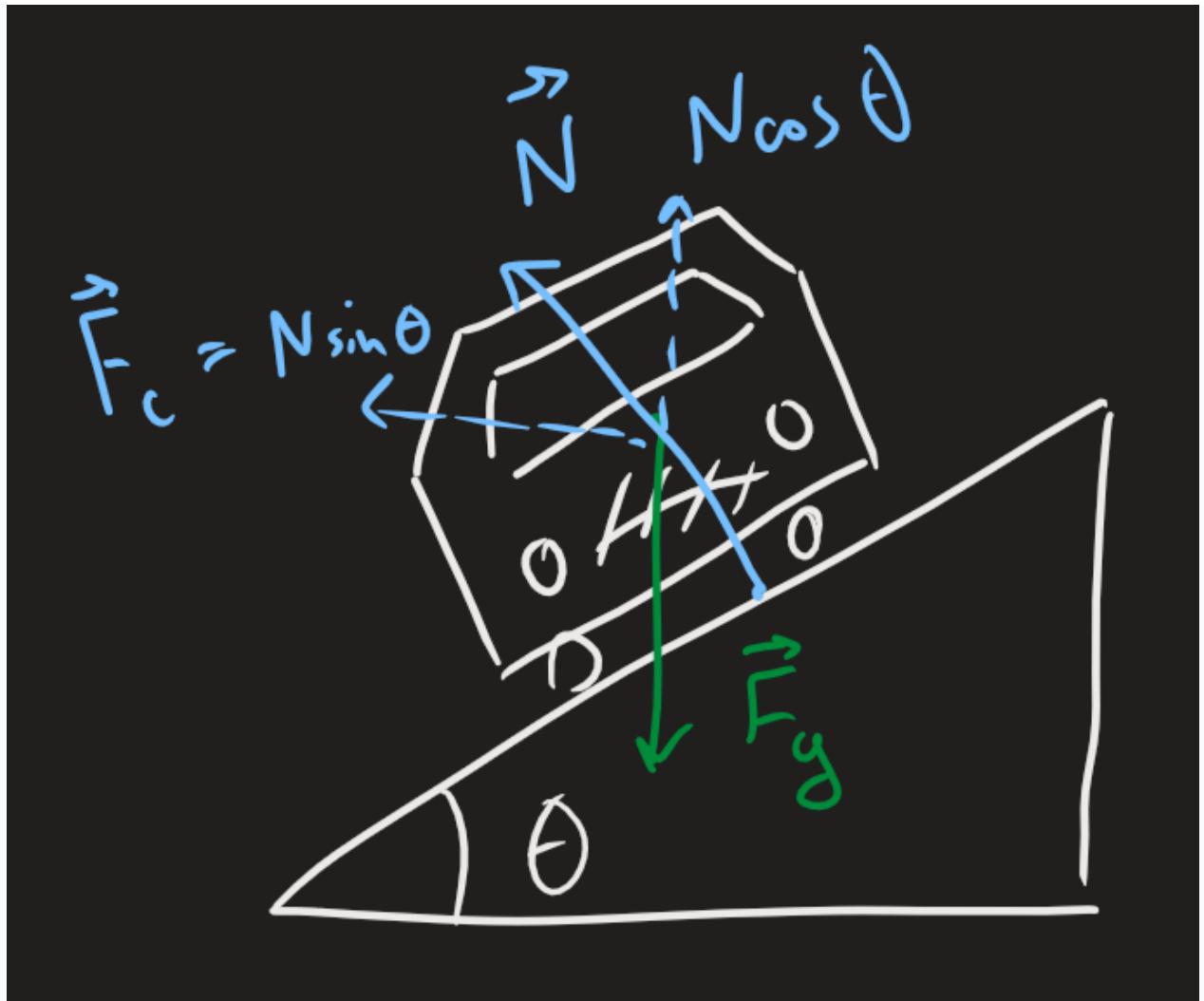


FIGURA 5.2. (*Diagramma di corpo libero*)



6. Spostamento di un oggetto su una molla al variare della massa (forza elastica)

#Osservazione

Osservazione (spostamento di un oggetto su una molla).

Supponiamo di avere una **molla**, su cui attacchiamo un'oggetto di **massa** m con **estensione** x . Adesso attacco all'oggetto con un **altro oggetto** con massa M (**figura 6.1.**).

L'estensione x cambia o no? Se sì, qual è lo scarto Δx tra la nuova posizione x' e la posizione originaria x ?

Usiamo le nozioni sulla **forza elastica** per scoprire le risposte.

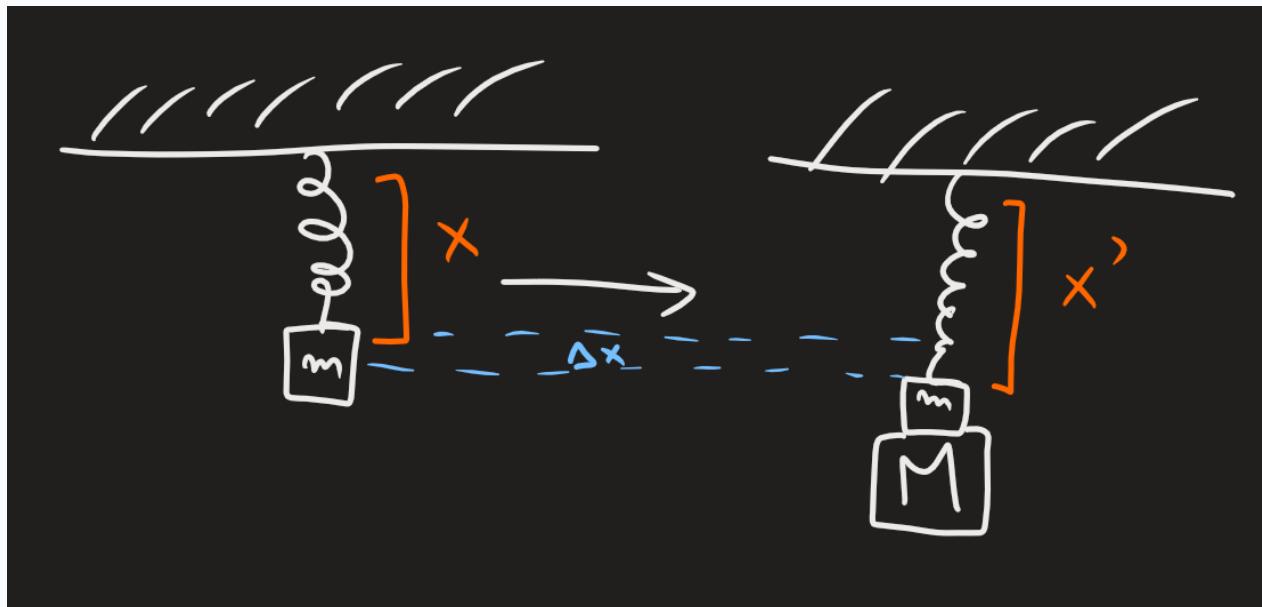
Prima di tutto disegno il **diagramma del corpo libero** di entrambi i corpi, rappresentando il primo corpo come 1 e il secondo come 2; così scopriamo che

$$\begin{cases} \vec{F}_{x1} + \vec{F}_{g1} = 0 \\ \vec{F}_{x2} + \vec{F}_{g2} = 0 \end{cases} \implies kx = mg \wedge k(x + \Delta x) = (m + M)g$$

Allora segue che

$$\Delta x = \frac{Mg}{k}$$

FIGURA 6.1. (Problema)



7. Velocità necessaria per orbitare la terra (forza gravitazionale)

#Osservazione

Osservazione (superman che corre sulla terra).

Il supereroe *Superman* sta correndo attorno la terra con una velocità piuttosto alta (trascurando eventuali attriti). Vogliamo sapere la *velocità necessaria* per il supereroe per poter *orbitare la terra*, alzandosi un po' (quantità di spazio trascurabile a 0).

L'unica forza di cui conosciamo è la *forza gravitazionale* data da

$$F_g = G \frac{m \cdot m_T}{r_T^2}$$

vogliamo far *coincidere* la *forza gravitazionale* con la *forza centripeta*.

Sappiamo che quest'ultima è data da

$$F_c = m \frac{v^2}{R}$$

allora otteniamo la formula finale

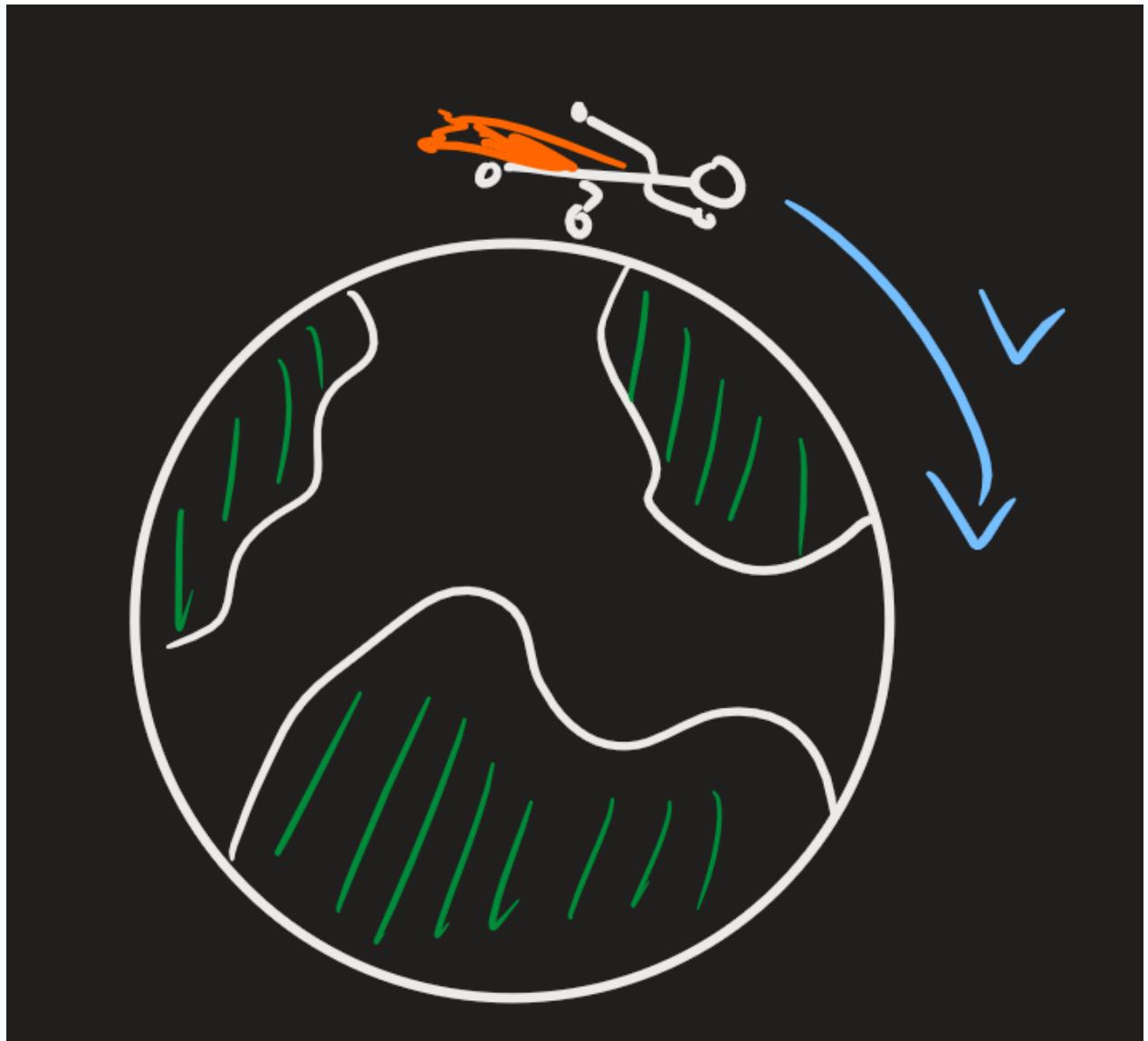
$$v = \sqrt{\frac{Gm_T}{r_T}} = \sqrt{gr_T}$$

in questo caso abbiamo $v \simeq 28\,000 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Per calcolare il periodo dell'orbita basta considerare che $\omega = \frac{r_T}{v}$ e quindi

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{r_T}{g}} \simeq 84 \cdot 60 \text{ s}$$

FIGURA 7.1. (*Problema*)



8. Elettrone sparato in un condensatore (forza elettrica)

#Osservazione

Osservazione (carica sparata verso un condensatore).

Supponiamo di **sparare** una **carica qualsiasi** q ad una velocità \vec{v} , verso un **circuito elettrico** collegato ad un **condensatore a facce piane**, che a sua volta genera il campo elettrico \vec{E} (in particolare dalla sua differenza di potenziale d.d.p.).

Vogliamo determinare la sua **accelerazione** al variare di q .

Prima di tutto prendiamo il **campo elettrico** in riferimento al solo versore \hat{j} (dato che il campo elettrico prodotto da un condensatore punta solo ad un verso).

$$\vec{E} = E \cdot \hat{j}$$

Adesso prendiamo la **forza elettrica** della particella

$$\vec{F} = q\vec{E} = m\vec{a}$$

Allora abbiamo

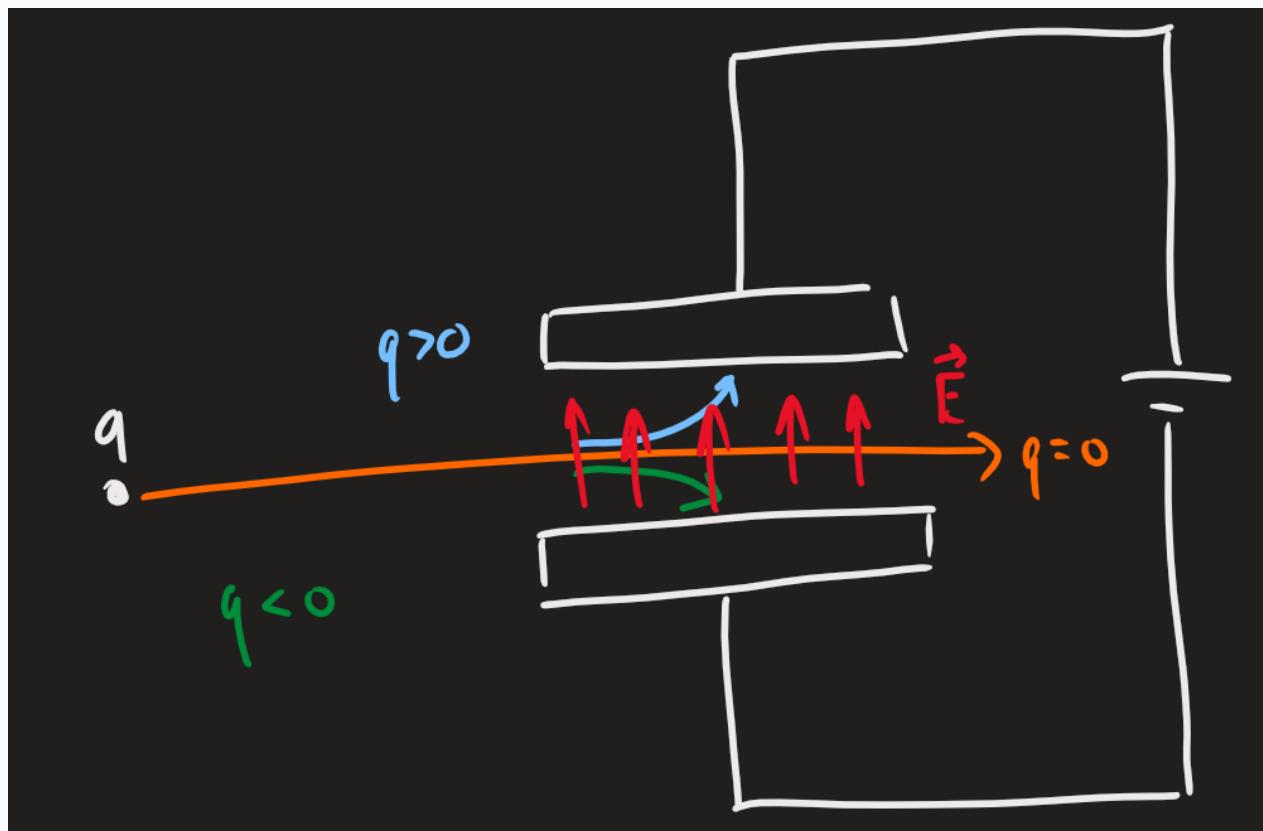
$$\boxed{\vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E}}$$

Ovvero

$$a \cdot \hat{j} = \frac{qE}{m} \cdot \hat{j}$$

Notiamo che la particella si comporta come il **moto di un proiettile** (1).

FIGURA 8.1. (*La carica-proiettile*)



Energia e Quantità di Moto - Sommario

Vis Viva

Notizie storiche sul dibattito di "Vis viva": Leibniz e Cartesio. Introduzione al concetto di energia potenziale e quantità di moto.

1. Notizie Storiche

VIS VIVA. Storicamente c'è stato un dibattito *scientifico-filosofico* sul concetto di "*Vis viva*", ovvero "*forza viva*". I protagonisti di questo dibattito saranno i noti filosofi del *ramo razionalista*, ovvero *Leibniz* e *Cartesio*.

LEIBNIZ. Da un lato abbiamo l'idea di *Leibniz*, che affermò che la grandezza fisica che si conserva è la mv^2 ; in seguito questa verrà rielaborata in concetto di "*energia cinetica*", prima da *Thomas Young* con concetto di "*energy*", poi da *Coriolis* col concetto di "*énergie cinétique* ($\frac{1}{2}mv^2$)".

CARTESIO. Dall'altro lato abbiamo *Cartesio*, che affermò la quantità che si conserva sarebbe stata in realtà $m|v|$. In realtà non si tratta di *energia* in nessun modo, bensì *quantità di moto*.

CONCLUSIONE. In un modo o l'altro, entrambi i filosofi ebbero ragione.

Sistema e Ambiente

Nozioni preliminari per l'energia: Sistema e Ambiente. Forza interna ed esterna.

0. Voci correlate

- Definizione di Massa e di Forza

1. Nozioni Preliminari per l'Energia

In questa pagina andremo a *definire delle nozioni preliminari* per parlare di **energia**: vedremo in particolare l'idea di *sistema e ambiente*, da cui discendono la definizione di *forza esterna ed interna*.

#Definizione

Definizione (Sistema e Ambiente).

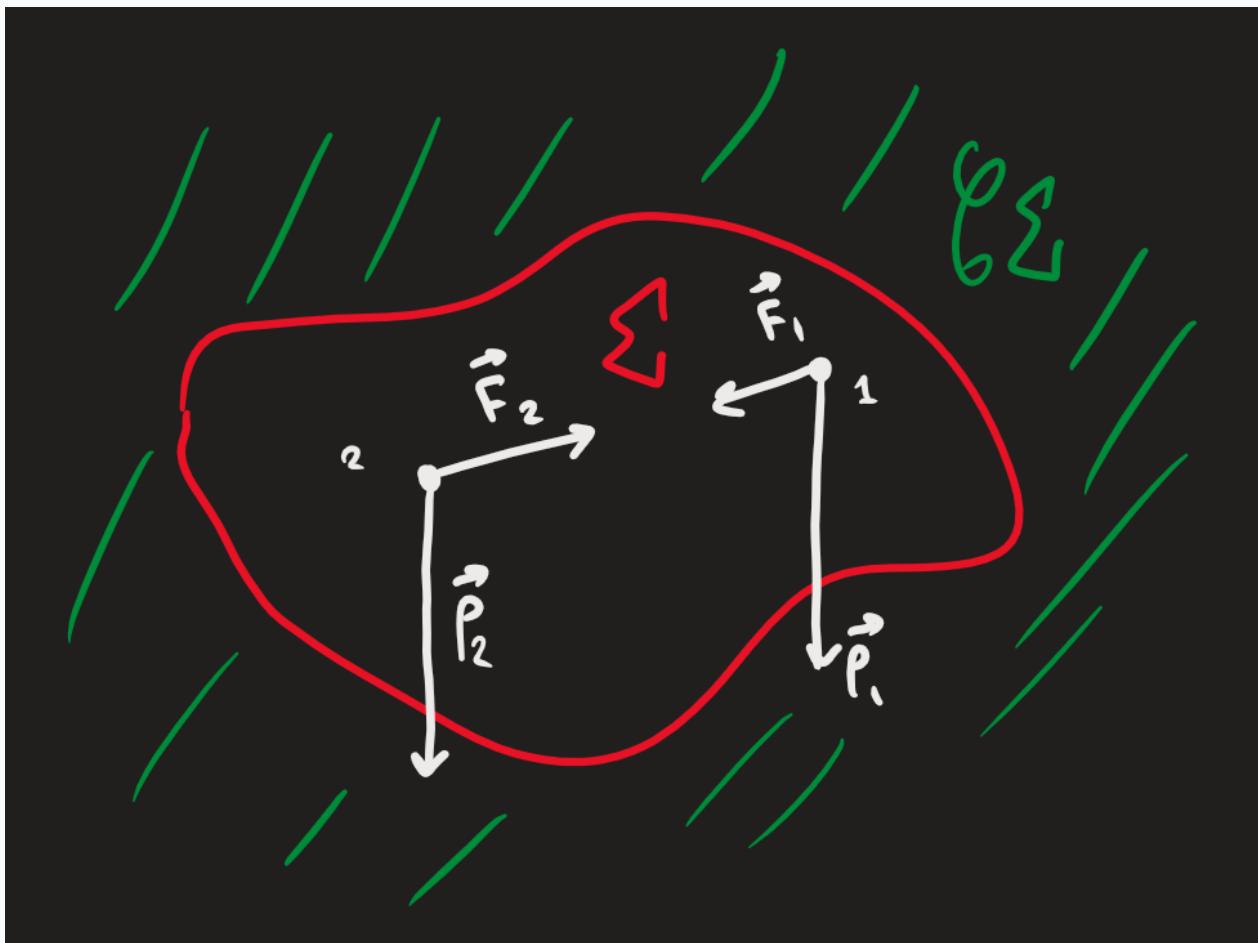
Supponiamo di avere *due (o più) materiali* che si interagiscono.

Stabilendo un "*confine*" (ovvero una *curva* oppure una *superficie*) per i *punti materiali*.

Ciò che sta dentro questo confine è *sistema*, il resto è *ambiente* (*figura 1.1.*).

In altre parole, possiamo definire un *sistema* come *l'insieme di corpi delineato da una superficie immaginaria (o anche reale)* Σ , e l'*ambiente* come il *complementare del sistema*, ovvero Σ^C .

FIGURA 1.1. (*Idea di Sistema e Ambiente*)



Come si vede in [figura 1.1](#), possiamo classificare le **forze** a seconda della "direzione" in cui vanno, ovvero se "*attraversano il sistema*" o "*rimangono dentro*". In ogni caso, le **leggi della fisica** valgono ugualmente.

#Definizione

Definizione (forza interna ed esterna).

Sia Σ un sistema di uno o più corpi.

Le forze che hanno *direzione interna nel sistema* si dicono "**forze interne**", le forze che *attraversano il sistema* (quindi o sollecitano i corpi o viene sollecitata dai corpi) si dicono "**forze esterne**".

Nella [figura 1.1](#), le forze esterne sono le forze *a distanza* \vec{F}_1, \vec{F}_2 ; invece le forze esterne sono la **forza-peso** delle masse.

Energia Cinetica

Definizione di energia cinetica.

0. Voci correlate

- Vis Viva

1. Definizione di Energia Cinetica

Andiamo a **definire** una quantità fisica **fondamentale**, ovvero quella dell'**energia cinetica**.

#Definizione

Definizione (energia icnetica).

Un punto materiale di massa m a velocità v (in modulo) ha l'**energia cinetica**, una **grandezza scalare** (anche se definita da quantità vettoriali),

calcolabile come

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

Oppure, se ho *un insieme di punti materiali* in un sistema Σ , la sua energia cinetica associata è

$$K = \sum_{i \in \Sigma} \frac{1}{2}m_i v_i^2$$

L'energia si misura in *Joule*.

2. Esempi di Energia Cinetica

Vediamo degli *esempi* di *punti materiali* con *energia cinetica*.

#Esempio

Esempio (la macchina).

Una macchina di 1000 kg che si muove alla velocità di 50 km/h ha l'energia cinetica

$$K = \frac{1}{2}1000\left(\frac{50}{3.6}\right)^2 = 97 \text{ kJ}$$

Da nota che con 60 km/h avrei $K' = 140 \text{ kJ}$. Abbiamo un incremento del 50%!

Definizione di Lavoro

Definizione di base di Lavoro compiuto da una Forza. Osservazioni, esempi.

0. Voci correlate

- Integrabilità secondo Riemann
- Prodotto Scalare

1. Definizione di Lavoro

Andiamo a definire l'altra *misura essenziale*, ovvero il *lavoro*.

#Definizione

Definizione (lavoro compiuto da una forza rispetto ad uno spostamento).

Ho un oggetto con *punto di applicazione* di *forza* \vec{F} e con uno *spostamento* $\Delta\vec{r}$ (non dev'essere *necessariamente* causata dalla forza!).

Si definisce il *lavoro compiuto dalla forza rispetto al suo spostamento* come il *prodotto scalare*

$$W := \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$$

In generale, conoscendo le *istanze iniziali* i, f abbiamo

$$W := \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

(in questo caso *considero tutti i spostamenti come degli spostamenti infinitesimi*)

Il lavoro viene misurato in *Joule* (da dimostrare per conto proprio).

#Osservazione

Osservazione (il lavoro e l'energia cinetica hanno la stessa misura).

Da osservare che il *lavoro* W e l'*energia cinetica* K hanno la stessa misurazione. Infatti, andremo a vedere che sotto certe condizioni potremmo "*convertire*" il lavoro W in energia cinetica K con un teorema.

#Proposizione

Proposizione (le proprietà del prodotto scalare).

Ricordiamoci le seguenti proprietà del prodotto scalare.

i. Se la *forza applicata* e la *distanza* sono *parallele*, allora si può calcolare il prodotto scalare come un semplice prodotto

$$F \parallel \Delta r \implies W = F\Delta r$$

ii. Se sono invece *ortogonal*, il lavoro è nullo

$$F \perp \Delta r \implies W = 0 \text{ J}$$

iii. Se sono invece *opposti*, il lavoro è di segno negativo

$$F \text{ opposto a } \Delta r \implies W = -F \cdot \Delta \vec{r}$$

2. Esempi

Applichiamo questa definizione con qualche esempio noto della *dinamica*.

#Esempio

Esempio (il piano inclinato con la corda).

Supponiamo di avere un *blocco su un piano inclinato trascinato da un cavo su una distanza d*. Supponiamo inoltre di conoscere l'angolo di inclinazione θ , la tensione T e la costante di gravità g (*figura 2.1*).

Vogliamo calcolare i *lavori totali* di tutte le forze agenti sul corpo.

Prima di tutto troviamo che le uniche e sole forze agenti sul corpo sono la *forza normale*, *forza tensione* e la *forza peso*. Li chiameremo N, T, P .

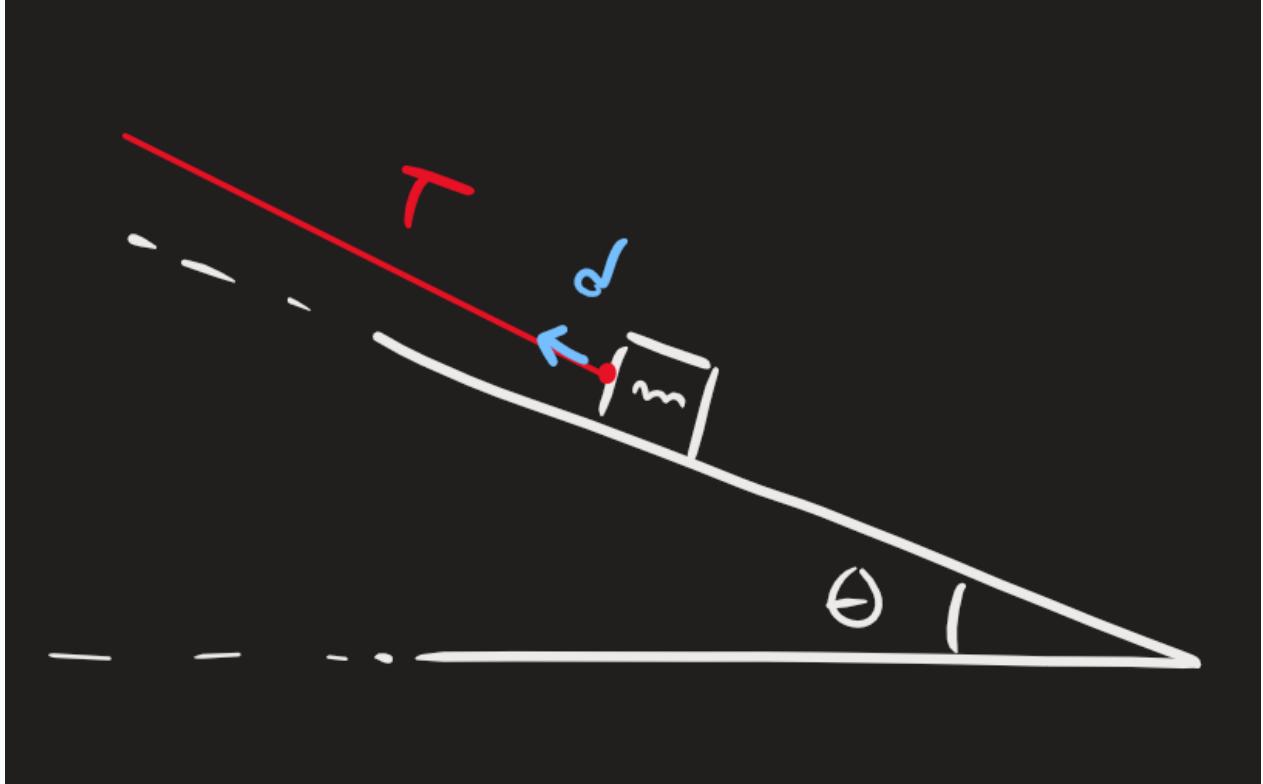
Adesso calcoliamo i lavori compiuti da queste forze

$$\begin{cases} W_T = T \cdot d = Td \\ W_P = \vec{F}_g \cdot \Delta \vec{r} = (F_g) \cdot \hat{i}' \cdot d = -mg \sin(\theta)d \\ W_N = 0 \text{ (vincolo geometrico, dato che } N \parallel d) \end{cases}$$

Allora ho

$$\sum W = (T - mg \sin \theta)d$$

FIGURA 2.1.



Teorema Lavoro-Energia Cinetica

Teorema Lavoro-Energia Cinetica: enunciato, dimostrazione matematica. Osservazioni ed esempi di applicazione.

0. Voci correlate

- Principi della Dinamica
- Energia Cinetica
- Definizione di Lavoro

1. Teorema Lavoro-Energia Cinetica

#Teorema

Teorema (teorema lavoro-energia cinetica (teorema L-K)).

Supponiamo che un corpo si stia muovendo ad istanti i, f con le rispettive velocità v_i, v_f . Allora vale la seguente:

$$\sum W = \Delta K$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 1 (teorema lavoro-energia cinetica (teorema L-K))

N.B. La dimostrazione è importantissima

Consideriamo la *seconda legge di Newton*, che ci dice

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

Allora, considerando uno *spostamento infinitesimale* $d\vec{r}$, posso calcolare dW come segue.

$$\begin{aligned} dW &= \sum \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= m\vec{a} \cdot d\vec{r} \\ &= m\vec{a} \cdot \vec{v} \cdot dt \\ &= m \left(\frac{1}{2} \frac{1}{dt} v^2 \right) dt \end{aligned}$$

Poiché $\sum W = \int dW$, ho

$$\sum W = \int_i^f m \left(\frac{1}{2} \underline{\frac{1}{dt}} v^2 \right) \underline{dt} = \frac{1}{2} m \int_i^f \underline{v^2} \underline{\Delta(v^2)} = \frac{1}{2} m \Delta(v^2)$$

che ci dà il risultato finale

$$\sum W = \Delta K$$

che è la tesi. ■

OSSERVAZIONI. Adesso poniamo delle *osservazioni* su questo teorema.

#Osservazione

Osservazione (osservazioni sul teorema L-K).

Osserviamo questo teorema.

- i. Questo teorema è una *conseguenza diretta* della *seconda legge di Newton*: infatti stiamo considerando sempre dei *punti materiali*.
- ii. Questa non è la *conservazione dell'energia*, anche se in casi importanti avremmo comunque dei *risultati uguali*.
- iii. Per il lavoro $\sum W$ non si intende assolutamente il *lavoro* nel *senso termodinamico*!

2. Esempi

Andiamo a vedere degli esempi in cui applichiamo questo teorema.

#Esempio

Esempio (la distanza di arresto).

Prendiamo un caso noto della cinematica: abbiamo una macchina che sta frenando, con l'*attrito dinamico* e con la velocità iniziale v_i .

Per calcolare la *distanza di arresto*, possiamo sfruttare questo *teorema*: l'idea è quella di *calcolare il lavoro totale*, porlo uguale alla *differenza dell'energia cinetica* e ricavare la distanza d . Possiamo fare questo dato che l'*unica forza agente sul corpo* che sia parallela alla frenata è la forza d'attrito $F_d = \mu_d g$.

Allora ho

$$\sum W = W_D = 0 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

Ricordandoci che il lavoro è di *segno negativo*, dal momento che ho *versi opposti*, procedo con i calcoli.

$$W_D = -\mu_d g \cdot d = -\frac{1}{2}mv_i^2$$

che ci dà il risultato finale

$$d = \frac{mv_i^2}{2\mu_d g}$$

Lavoro di Forze Notevoli

Lavoro di Forze Notevoli (in particolare variabili). Lavoro della molla. Lavoro della forza peso. Osservazione: il lavoro di queste forze dipendono solo dal punto finale e iniziale.

0. Voci correlate

- [Lavoro di Forze Notevoli](#)
- [Forza Elastica](#)
- [Forza Peso e Forza Normale](#)

1. Lavoro della Forza Elastica

Adesso vogliamo calcolare il lavoro di *alcune forze notevoli*, tra cui la **forza elastica** e la **forza peso**.

#Teorema

Teorema (lavoro della forza elastica).

Dati i punti x_f, x_i lavoro compiuto solamente dalla **forza elastica** è quantificabile come

$$W = -\frac{k}{2}(x_f^2 - x_i^2)$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 1 (lavoro della forza elastica)

Basta usare la **legge di Hooke** e calcolare direttamente l'integrale

$$\begin{aligned}
W &= \int_i^f \underbrace{\vec{F}_x \cdot d\vec{r}}_{F_x \| dr} = \int_{x_i}^{x_f} F_x \, dx = \int_{x_i}^{x_f} -kx \, dx \\
&= \frac{kx^2}{2} \Big|_{x_i}^{x_f} \\
&= -\frac{k}{2}(x_f^2 - x_i^2)
\end{aligned}$$

che è il risultato voluto. ■

2. Lavoro della Forza Peso

#Teorema

Teorema (lavoro della forza peso).

Dato un dislivello $h := y_f - y_i$, il lavoro della forza peso è

$$W = mgh$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 2 (lavoro della forza peso)

Basta calcolare l'integrale

$$W = \int_i^f \vec{P} \cdot d\vec{r} = \int_{y_i}^{y_f} mg \, dy = mg(y_f - y_i) = mgh$$

che è il risultato voluto. ■

#Osservazione

Osservazione (le peculiarità del lavoro della forza elastica e della forza peso).

Notiamo che il *lavoro associato* alla *forza elastica* e alla *forza peso* non dipendono in nessun modo dal percorso $\Delta\vec{r}$ effettuato, bensì solo dalle ultime posizioni f, i .

Vedremo che non è sempre il caso, come col *lavoro compiuto dall'attrito*.

Formalizzeremo questo concetto con la **nozione** di **forza conservativa e dissipativa**.

3. Lavoro dell'Attrito

#Teorema

Teorema (il lavoro dell'attrito dinamico).

Dato uno spostamento s , il lavoro dato dall'attrito è

$$W = \mu N \cdot s$$

dove N è la **forza normale** e μ è il **coefficiente di attrito** (dinamico o statico, stessa robaccia).

4. Esempi di Applicazione

#Esempio

Esempio (la rigidità al variare dell'accelerazione massima).

Supponiamo di avere un carrello di massa m che si **sposta verso** una **molla a riposo** con una velocità v . Determinare il **coefficiente** k della molla tale che il moto del carrello non sia troppo brusco, con un'accelerazione limite a_* (**figura 4.1.**).

i. L'idea è quella di considerare il **momento** in cui il carrello causa uno spostamento x alla **molla**, avendo quindi una forza elastica

$$F = -kx$$

da cui, per la **seconda legge di Newton** implica

$$a = -\frac{kx}{m}$$

Dato che voglio avere $|a| \leq a_*$, mi basta imporre

$$x_* = \frac{m}{k} a_*$$

ii. Adesso mi basta usare il *teorema del lavoro-energia cinetica*, da cui ricavo

$$W = \Delta K \implies -\frac{k}{2}(x_f^2 - x_i^2) = -\frac{1}{2}mv^2$$

Tratto la x_f come un incognita e con svariati calcoli ottengo

$$x_f = \sqrt{\frac{m}{k}}v$$

iii. Infine impongo

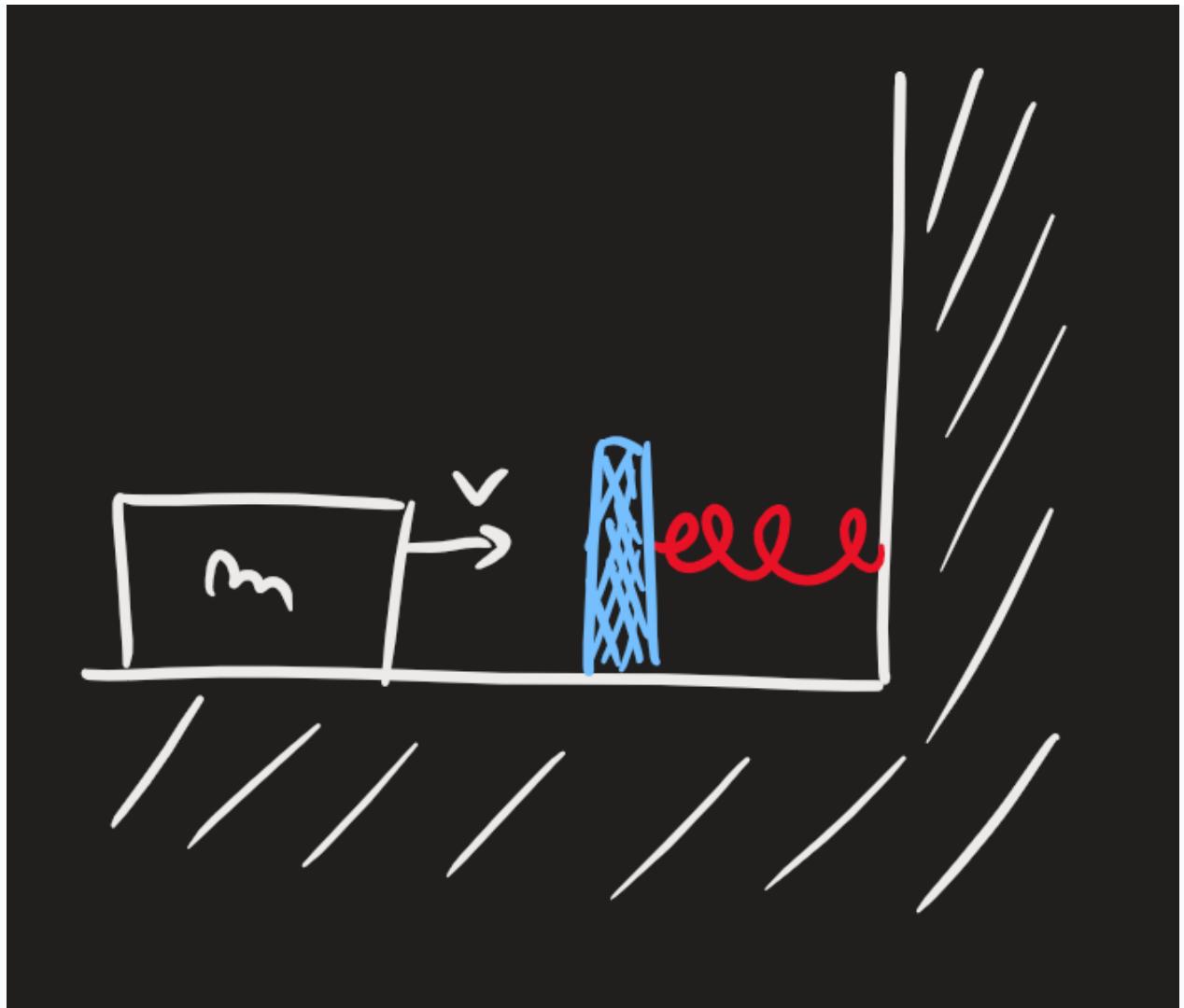
$$x_f \leq x_* \implies \sqrt{\frac{m}{k}}v \leq \frac{m}{k}a_*$$

poi con svariati calcoli ottengo il coefficiente k

$$k \leq \frac{m}{v^2}a_*^2 = m\left(\frac{a_*}{v}\right)^2$$

che è il *risultato desiderato*.

FIGURA 4.1.



#Esempio

Esempio (la montagna russa).

Un carrello, su una *montagna russa* (o americana) percorre un percorso tale da avere un dislivello h dall'altezza iniziale. Determinare la velocità finale.

i. Bisogna banalmente usare il *teorema L-K* (1). Infatti,

$$\begin{aligned} \bullet \quad & W = \Delta K \\ \implies & mgh = \frac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2) \\ \implies & \dots \\ \implies & v_f = \sqrt{2g(y_f - y_i)} = \sqrt{2gh} \end{aligned}$$

che è il risultato voluto.

Forza Conservative e Dissipative

Definizione di forza conservativa. Esempi di forze non-conservative (dissipative), esempi di forze conservative. Osservazione: in realtà tutte le forze sono conservative, da un punto di vista microscopico.

0. Voci correlate

- Lavoro di Forze Notevoli

1. Definizione di Forza Conservativa

Consolidiamo l'osservazione posta quando abbiamo calcolato le *il lavoro* delle **forze** (1).

#Definizione

Definizione (forza conservativa).

Una forza si dice **conservativa** se valgono una delle condizioni equivalenti:

$$\begin{aligned} & \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} \text{ indipendente dal percorso } d\vec{r} \\ \Updownarrow & \\ & \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_f^i \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \\ \Updownarrow & \\ & \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \\ \Updownarrow & \\ & \exists U : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \mid \vec{F} = \nabla U(x, y, z) \end{aligned}$$

Note sulle ultime due condizioni:

- Il simbolo \oint è l'**integrale del percorso chiuso**

- Il simbolo ∇ è il *gradiente* (1), ovvero il vettore che punta ad un *punto critico* della funzione U . Inoltre, la funzione U sarà nota come l'*energia potenziale*.

In caso contrario, la forza si dice "*forza dissipativa*". Ne faremo un commento in seguito

2. Esempi di Forze Conservative

#Esempio

Esempio (forze dissipative).

Le forze dissipative sono le seguenti:

- Attrito (infatti $W = \mu N s$)
- Resistenza dei fluidi
- Forza compiuta da una persona (infatti siamo tecnicamente delle "*macchine termiche*")

Poi ci sono altre forze dissipative...

#Esempio

Esempio (forza conservative).

Le forze conservative possono essere le seguenti.

- Elastica
- Peso
- Le forze fondamentali (elettrica, gravitazionale e magnetica)

Eccetera...

3. Le forze dissipative esistono?

#Osservazione

Osservazione (le forze dissipative sono una mera illusione).

Osserviamo che una *condizione necessaria* per l'esistenza di *forze non conservative* è quella di essere in un *punto di vista macroscopico*: questo perché in realtà, dal punto di vista microscopiche, le forze dissipative non esistono. Le energie sono *sempre* conservate, solo in una maniera più disordinata.

Citiamo il fisico R. Feynman, che ci dice le seguenti parole ([brano integrale](#))

"We have spent a considerable time discussing conservative forces; what about nonconservative forces? We shall take a deeper view of this than is usual, and state that there are no nonconservative forces! As a matter of fact, all the fundamental forces in nature appear to be conservative. This is not a consequence of Newton's laws. In fact, so far as Newton himself knew, the forces could be nonconservative, as friction apparently is. When we say friction apparently is, we are taking a modern view, in which it has been discovered that all the deep forces, the forces between the particles at the most fundamental level, are conservative."

Come esempio a sostegno di questa argomentazione possiamo citare un'esempio dello stesso autore.

"As another example, when friction is present it is not true that kinetic energy is lost, even though a sliding object stops and the kinetic energy seems to be lost. The kinetic energy is not lost because, of course, the atoms inside are jiggling with a greater amount of kinetic energy than before, and although we cannot see that, we can measure it by determining the temperature. Of course if we disregard the heat energy, then the conservation of energy theorem will appear to be false."

!

Energia Potenziale

Definizione di energia potenziale. Osservazione: l'utilità della definizione di energia potenziale per valutare sistemi. Relazione tra energia potenziale e

0. Voci correlate

- Definizione di Massa e di Forza
- Definizione di Lavoro
- Forza Conservative e Dissipative
- Forza Peso e Forza Normale
- Forza Elastica
- Forza Gravitazionale

1. Definizione di Energia Potenziale

#Definizione

Definizione (energia potenziale di una forza conservativa).

Per una *forza conservativa* \vec{F} possiamo definire la sua *energia potenziale* il suo integrale indefinito, invertito di segno.

$$U(\vec{r}) := - \int \vec{F} \cdot d\vec{r} + C$$

dove C è una costante arbitraria.

Da questo discende che

$$\frac{dU}{dt}(\vec{r}) = -\vec{F}$$

ovvero "*la forza è la derivata dell'energia potenziale*" (in realtà questa vale per il caso unidimensionale, per il caso 3D bisognerebbe considerare il *gradiente* ∇U).

#Osservazione

Osservazione (la definizione è ben posta).

Verifichiamo che questa definizione sia *matematicamente ben posta*. Dato che la forza è conservativa, possiamo scrivere il suo lavoro come

$$W = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} = -[U(\vec{r}_f)] - [-U(\vec{r}_i)] = 0$$

(1) dove la funzione $U : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ è "*qualcosa finale*" o "*qualcosa iniziale*".

Quindi possiamo scrivere

$$W = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\Delta U(\vec{r})$$

Che è una riformulazione della definizione dell'energia potenziale.

Possiamo aggiungere anche il valore C , dal momento che stiamo considerando gli *integrali indefiniti*.

2. Osservazioni sull'Energia Potenziale

Adesso poniamo una *serie di osservazioni* utili per l'*energia potenziale*.

#Osservazione

Osservazione (il segno negativo).

Come mai poniamo il *segno negativo* per considerare l'energia potenziale? Questo perché vogliamo dare il senso di avere un "*potenziale di compiere lavoro*", ovvero un *accumulo di energia*.

Infatti, se *non ci fosse* quel segno negativo, l'*energia potenziale* sarebbe completamente *proporzionale* al lavoro.

Quindi, per invertire la *monotonia dell'energia potenziale*, ci metto il segno negativo.

#Osservazione

Osservazione (l'utilità dell'energia potenziale).

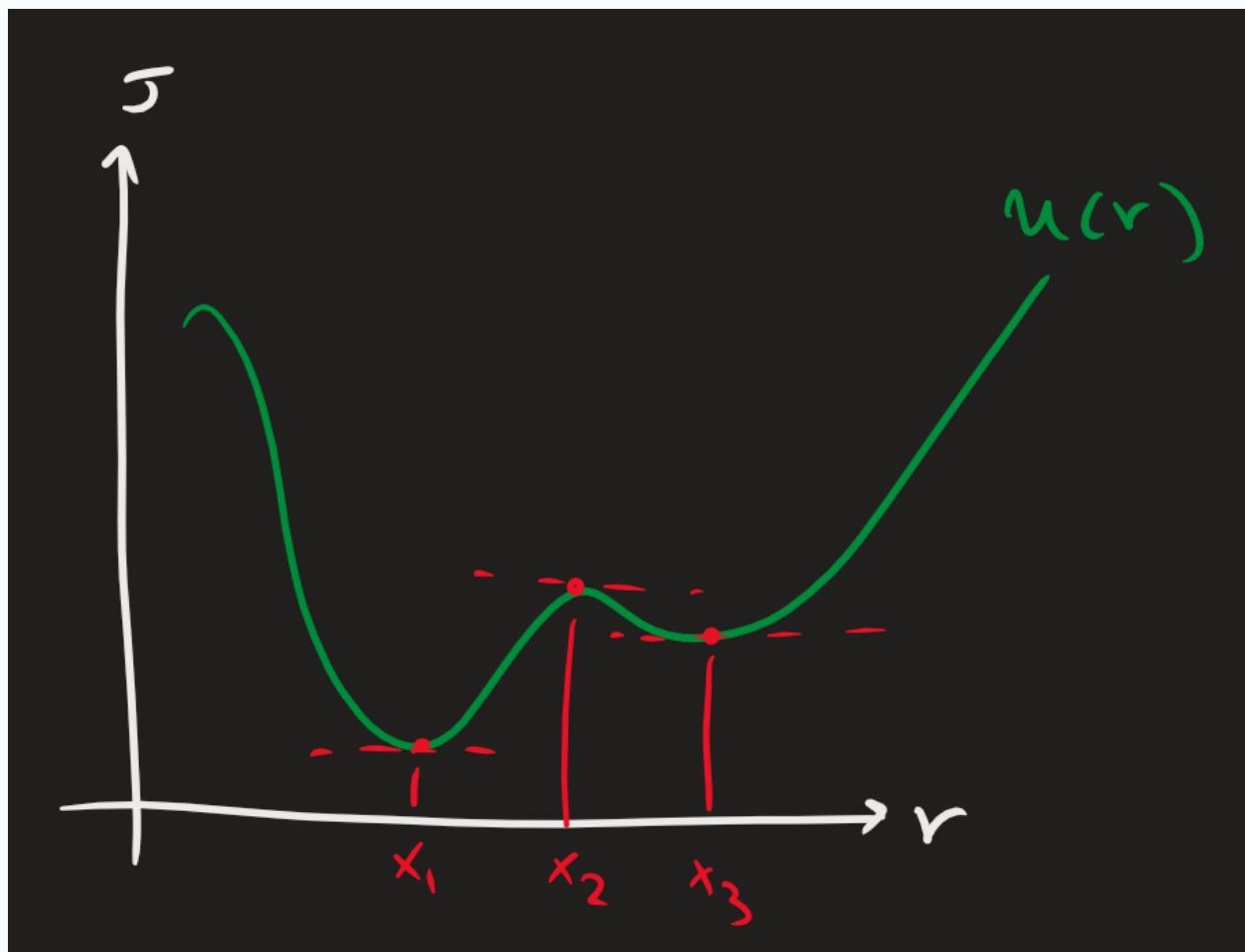
L'energia potenziale è *uno dei concetti più importanti della fisica*. Infatti, così diventa più facile *descrivere sistemi con energia*: basta prendere *derivate e integrali!*

Per studiare *forze in equilibrio* e *non*, basta prendere la derivata dell'energia potenziale e studiarne i punti stazionali. Per vedere invece il *tipo d'equilibrio*, si passa alla *derivata seconda* e si ha:

- equilibrio stabile solo se $\ddot{U} > 0$.
- equilibrio instabile solo se $\ddot{U} < 0$
- altrimenti non si dice niente

Per avere l'idea, vedere la *figura 2.1..*

FIGURA 2.1. (*Grafico di energia potenziale*)



3. Esempi di Energia Potenziale

Facciamo qualche calcolo di *energia potenziale*, di cui d'ora in poi saranno *note*.

#Proposizione

Proposizione (energia potenziale di alcune forze conservative).

Sia P la **forza peso**, F_x la **forza elastica**, F_g la **forza gravitazionale**. Allora segue che:

i. L'energia potenziale della forza peso è

$$U_P(y) = mgy + C$$

ii. L'energia potenziale della forza elastica è

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 + C$$

iii. L'energia potenziale della forza gravitazionale è

$$U_G(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r} + C$$

Notare che quando **calcoliamo** ΔU (che è la parte importante!), la costante C si annulla.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE della Proposizione 5 (energia potenziale di alcune forze conservative)

Basta farsi due calcoli. Infatti

$$\begin{aligned} P = mg &\implies - \int P \cdot dy = mgy + C \\ F_x = -kx &\implies - \int F_x \cdot dx = \frac{1}{2}kx^2 + C \end{aligned}$$

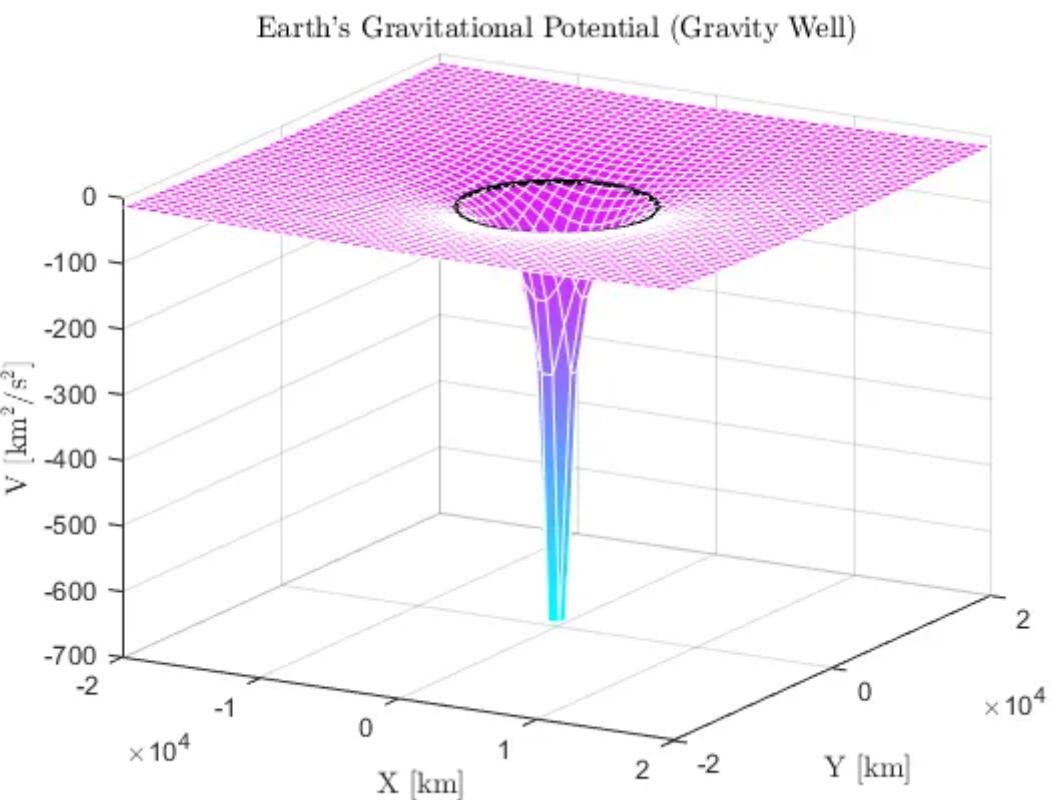
Per l'ultima i calcoli sarebbero leggermente ostici, ma possiamo considerare la **componente parallela dello spostamento infinitesimale, rispetto allo spostamento totale** $r_f - r_i$. Ho quindi

$$-\int \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int F \cdot dr_{\parallel} = \dots = -Gm_1m_2 \left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i} \right)$$

che è la tesi. ■

FIGURA 3.1. (Il cono gravitazionale)

Notiamo che la funzione $U_G(\vec{r})$ con $\vec{r} \in \mathbb{R}^2$ presenta un grafico del tipo nella figura; inoltre si dimostra che le curve di livello sono ellissi.



Definizione di Potenza

Definizione di potenza. Esempio del pompaggio idroelettrico.

0. Voci correlate

- Definizione di Lavoro

1. Definizione di Potenza

Andiamo a definire un'altra grandezza importante per la fisica classica.

#Definizione

Definizione (potenza).

Si definisce operativamente la **potenza** come la **quantità di energia (o lavoro) trasferita nel tempo**. In matematiche, ho la **derivata del lavoro** rispetto al **tempo**.

$$P := \frac{dW}{dt}$$

La potenza si misura in **Watt** ([W]) dove

$$[W] = [J/S]$$

Inoltre si nota che da questa definizione possiamo definire un'altra **unità** per l'**energia**, comunemente usata per l'**energia elettrica**: il **kilowattora** [kWh], dove

$$[\text{kWh}] = 1000[\text{W}] \cdot 3600[\text{s}] = 3.6M[\text{J}]$$

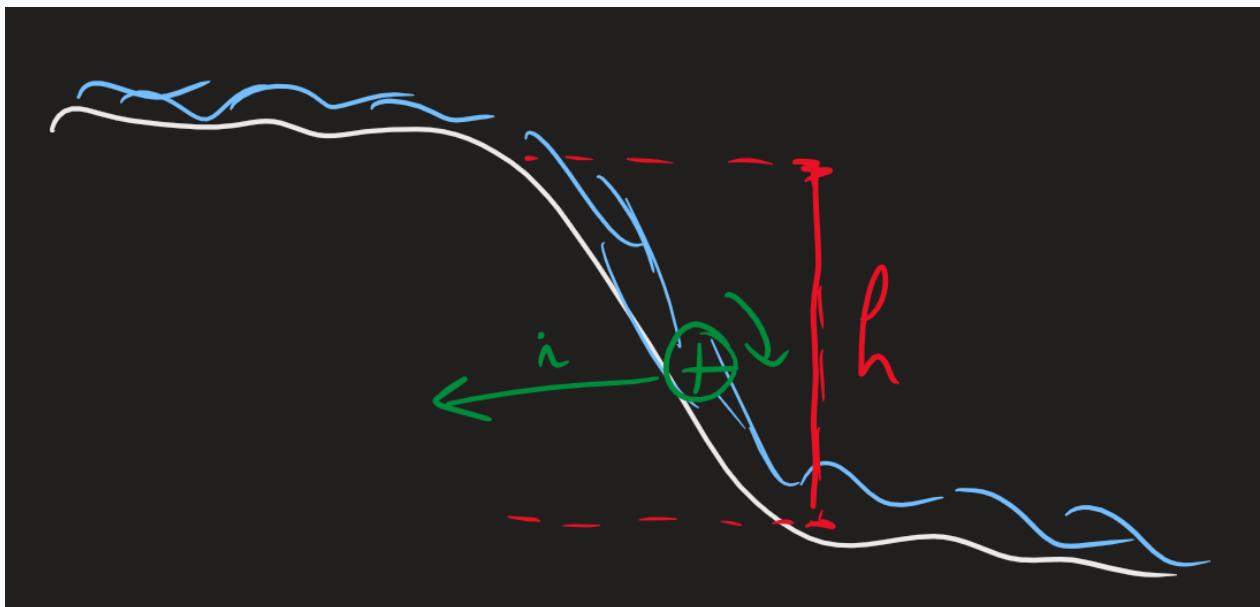
Ovvero un **kilowattora** sono **3.6 millioni di Joule**.

2. Esempi

#Esempio

Il pompaggio idroelettrico.

Illustriamo questo concetto mediante un **esempio concreto**. Supponiamo di avere un fiume, dove ad un certo punto si casca di un'altezza h . Ovvero abbiamo una situazione del tipo



Nella fontana abbiamo messo *un alternatore*, che converte il *lavoro dell'acqua in caduta in energia elettrica*.

Supponiamo i seguenti dati: la densità dell'acqua è di $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, il volume della bacinella è $V = 9\,000\,000 \text{ m}^3$, l'altezza è $h = 100 \text{ m}$. Allora abbiamo che l'*energia potenziale* dell'acqua è

$$U = \rho V g h = 90 T \text{ J} = 90 \cdot 10^{12} \text{ J}$$

ovvero *novanta tera-joule*! Wow, questo è proprio un sacco di energia convertibile! Ma possiamo convertire tutta questa energia subito? No, sennò saremmo già in grado di illuminare tutte le città possibili.

Infatti, supponendo il *flusso del fiume massimo* del

$$\Phi_* = 130 \text{ m}^3/\text{s}$$

Allora abbiamo

$$P_* = \left| \frac{dW}{dt} \right| = \left| \frac{dU}{dt} \right| = \frac{d}{dt}(mgh)$$

Dal momento che l'unica *variabile in tempo* è la *massa* (infatti abbiamo un flusso massimo), poniamo

$$\frac{d}{dt}(mgh) = \frac{dm}{dt}(gh) = \rho \frac{dV}{dt} gh = \rho \cdot \Phi_* \cdot h \approx 1.4 \text{ MW}$$

ovvero possiamo convertire *al più* 1.4 *megawatt*, ovvero 1.4 *mega joule* al secondo.

#Esempio

Esempio (il motorino elettrico).

Supponiamo che la *potenza massima di un motorino in salita del 30%* sia

$$P_{\nearrow} = 3 \text{ KW}$$

Determinare la *velocità massima* v_* del motorino elettrico .

Possiamo considerare la *potenza* come il *cambiamento del potenziale del peso sul tempo*, che a sua volta è il *cambiamento dell'altezza sul tempo*.

Ovvero

$$P = \frac{dU}{dt} = \frac{dy}{dt} mg = v_y mg$$

Allora abbiamo

$$v_y = \frac{P}{mg} \implies \boxed{v_* = \frac{P}{mg \sin \theta}} \approx 5.32 \text{ m/s} \rightarrow 19 \text{ km/h}$$

Conservazione dell'Energia

Conservazione dell'energia: legge. Osservazione: caso meccanica. Esempi: la palla che cade sulla molla e la velocità di fuga.

0. Voci correlate

- Energia Cinetica
- Energia Potenziale
- Sistema e Ambiente

1. Legge di Conservazione dell'Energia

Enunciamo una *legge (quasi) fondamentale* della fisica.

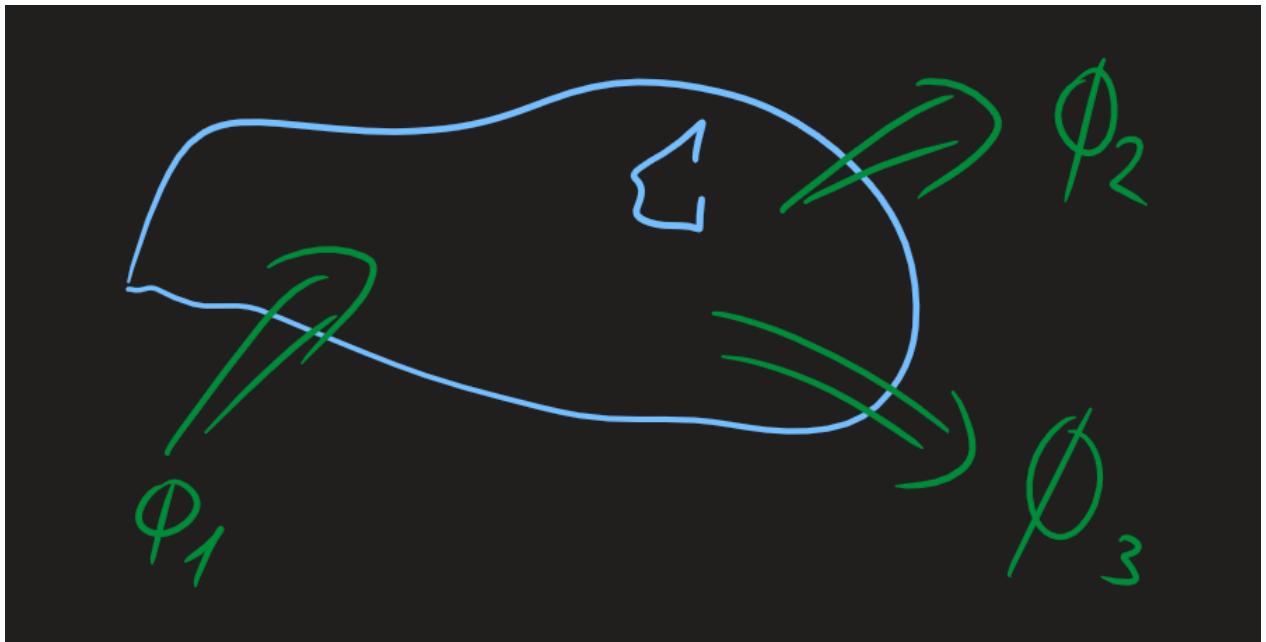
#Teorema

Teorema (la conservazione dell'energia).

Supponiamo di avere il sistema Σ e ambiente Σ^C . Immaginando dei *flussi (ovvero trasferimenti) di energia* esterni ed interni Φ (*figura 1.1.*), posso scrivere la *variazione dell'energia del sistema* come la somma dei flussi:

$$\Delta E_\Sigma = \sum_{i \in \Sigma} \Phi_i$$

FIGURA 1.1.



#Corollario

Corollario (casi particolare della conservazione dell'energia).

- i. Si ha che *di solito* si pone la *conservazione dell'energia* nel seguente modo:

$$\Delta E_{\Sigma} = \underbrace{K + U}_{\text{energia meccanica}} + \underbrace{U}_{\text{energia interna}}$$

L'*energia interna* U ci interesserà per la *termodinamica*, in particolare quando inizieremo a considerare le *forze dissipative*, col *calore*.

- ii. Altrimenti si considera la *conservazione della sola energia meccanica*, ignorando l'energia interna U .

$$\Delta E_{\Sigma} = \Delta K + \Delta U = W$$

2. Esempi di Conservazione dell'Energia

Data l'*importanza di questa legge*, vediamo dei casi particolari in cui si applica questa legge.

#Esempio

Esempio (la pallina che cade sulla molla).

Immaginiamo di avere una *pallina* che cade su una molla.

Possiamo immaginare le *quattro fasi* di questo moto:

1. La pallina ha *solo* energia potenziale
2. La pallina acquisisce *energia cinetica* e manca solo *poca energia potenziale*, per poter "*sprofondarsi sulla molla*".
3. Stessa cosa di prima, ma c'è anche il *potenziale elastico*
4. Abbiamo raggiunto il *punto di compressione massimo*, quindi abbiamo *massimo potenziale elastico*

Adesso per scoprire il *punto massimo di compressione*, basta usare la *conservazione di energia meccanica* (dato che non abbiamo attriti) per imporre

$$\Delta E = 0 \implies mgh = \frac{1}{2}kx_*^2$$

Da cui discende il risultato

$$x_* = \sqrt{2 \frac{mgh}{k}}$$

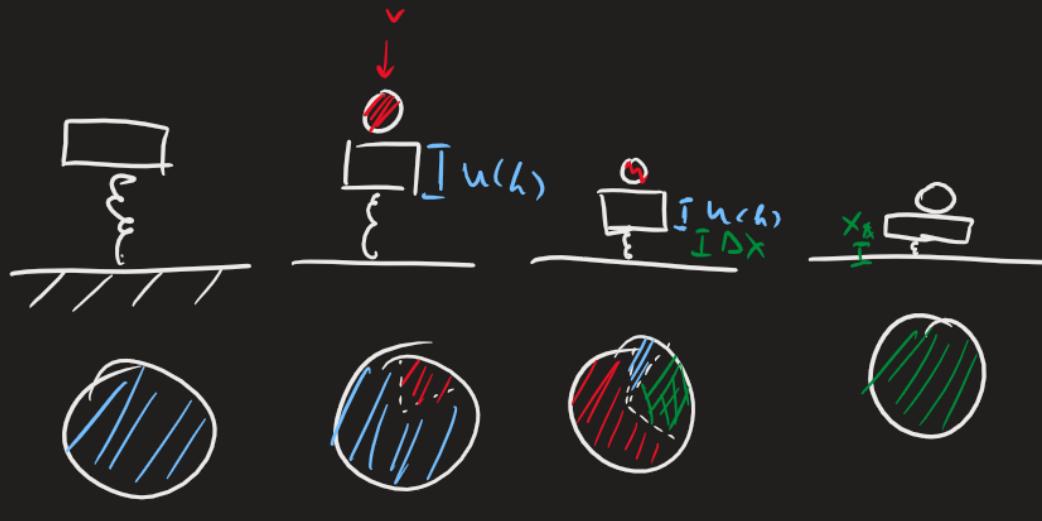
FIGURA 2.1. (*La pallina*)

1)

2)

3)

4)



#Esempio

Esempio (la velocità di fuga).

Supponiamo di lanciare un'oggetto alla velocità iniziale di v . Determinare questa velocità affinché l'oggetto non venga più attratto dalla forza della terra: ovvero l'altezza finale tende a $+\infty$.

Per poter usare la *conservazione dell'energia* supponiamo di trascurare *forze esterne* ed eventuali *dissipazioni*. Abbiamo dunque

$$\Delta E \implies E = K + U \in \mathbb{R}$$

questa vale in tutti gli istanti. Abbiamo dunque

$$\begin{cases} E_i = K_i + U_i = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{Gm_T m}{r_T} \\ E_f = K_f + U_f = -\frac{Gm_T m}{r_T + h} \end{cases}$$

adesso pongo $E_i = E_f$, da cui risulta

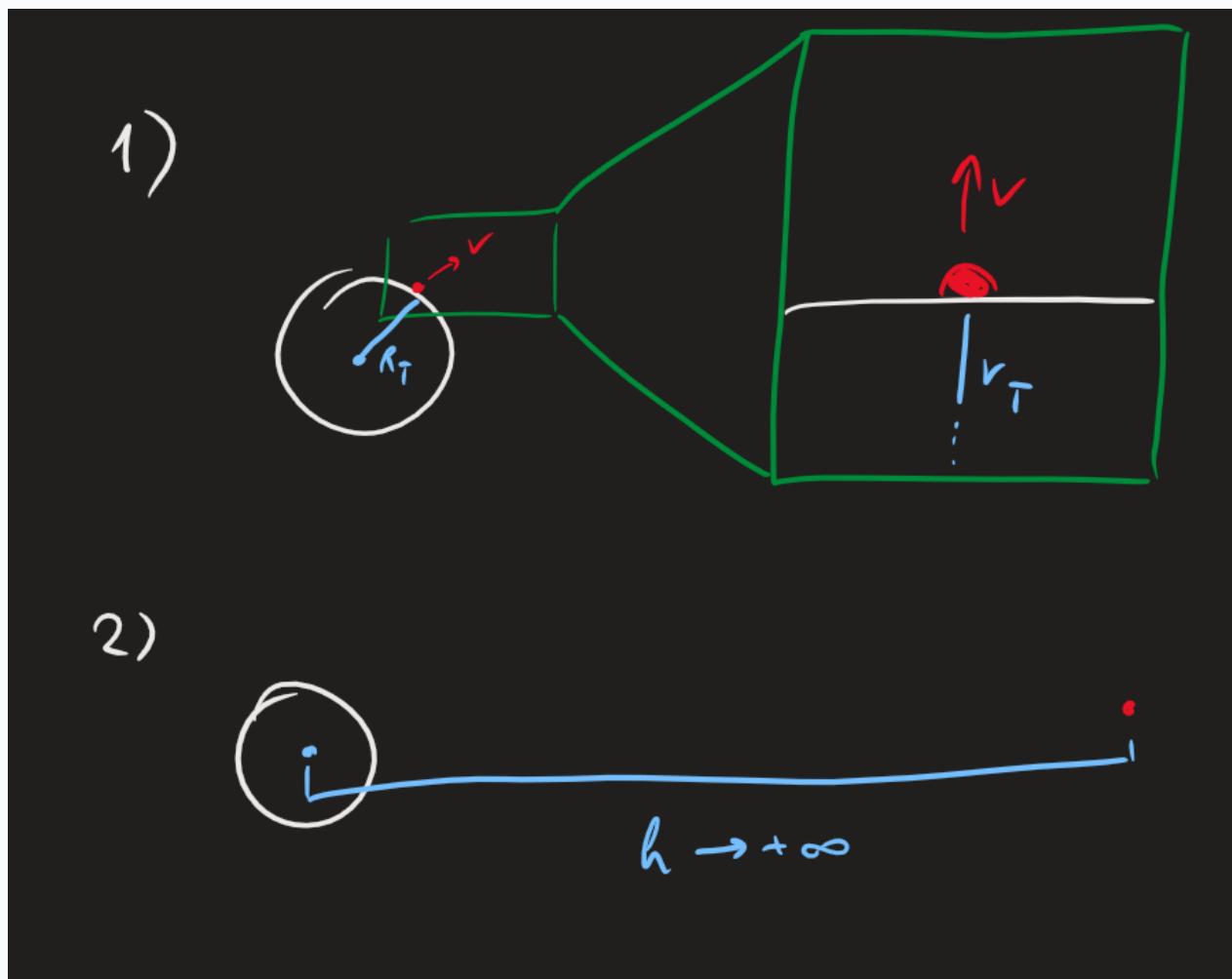
$$v = \sqrt{\frac{2Gm_T}{r_T + \frac{r_T^2}{h}}}$$

Studiando il limite asintotico di v in funzione di $h \rightarrow +\infty$ abbiamo

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} v = \sqrt{\frac{2Gm_T}{r_T}} = \sqrt{2gr_T} \approx 40 \cdot 10^3 \text{ km/h}$$

che è il risultato voluto.

FIGURA 2.2. (*La velocità di fuga*)



Quantità di Moto

Richiamo alla seconda legge di Newton, preliminare. Definizione di quantità di moto per un punto materiale, per 2 punti materiali e per un sistema di punti

0. Voci correlate

- Principi della Dinamica
- Sistema e Ambiente

1. Richiamo Preliminare alla Dinamica

RICHIAMO A NEWTON. Richiamiamo la *seconda legge di Newton* (1), che ci dice il seguente:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

Trattando la *massa* come un *quantità costante*, possiamo scrivere che la forza non è altro che la derivata

$$\sum \vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

Quindi possiamo definire la quantità a destra in una *maniera ben posta*.

2. Definizioni di Quantità di Moto

#Definizione

Definizione (quantità di moto per un punto puntiforme).

Si definisce la *quantità di moto* (o in inglese "*momentum*") per un *punto materiale* avente massa m con velocità \vec{v} come la grandezza vettoriale

$$\vec{p} := m\vec{v}$$

quindi abbiamo che

$$\sum \vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{p}$$

e in particolare

$$K = \frac{1}{2} \frac{p^2}{m}$$

#Teorema

Teorema (quantità di moto per due o più punti).

Supponiamo di avere due punti o al più numerabile punti, m_1, m_2, \dots all'interno del sistema Σ .

Chiamando $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \dots$ le forze esterne agenti sui corpi e $\vec{F}_{12}, \vec{F}_{21}, \dots$ le forze interne, abbiamo che vale

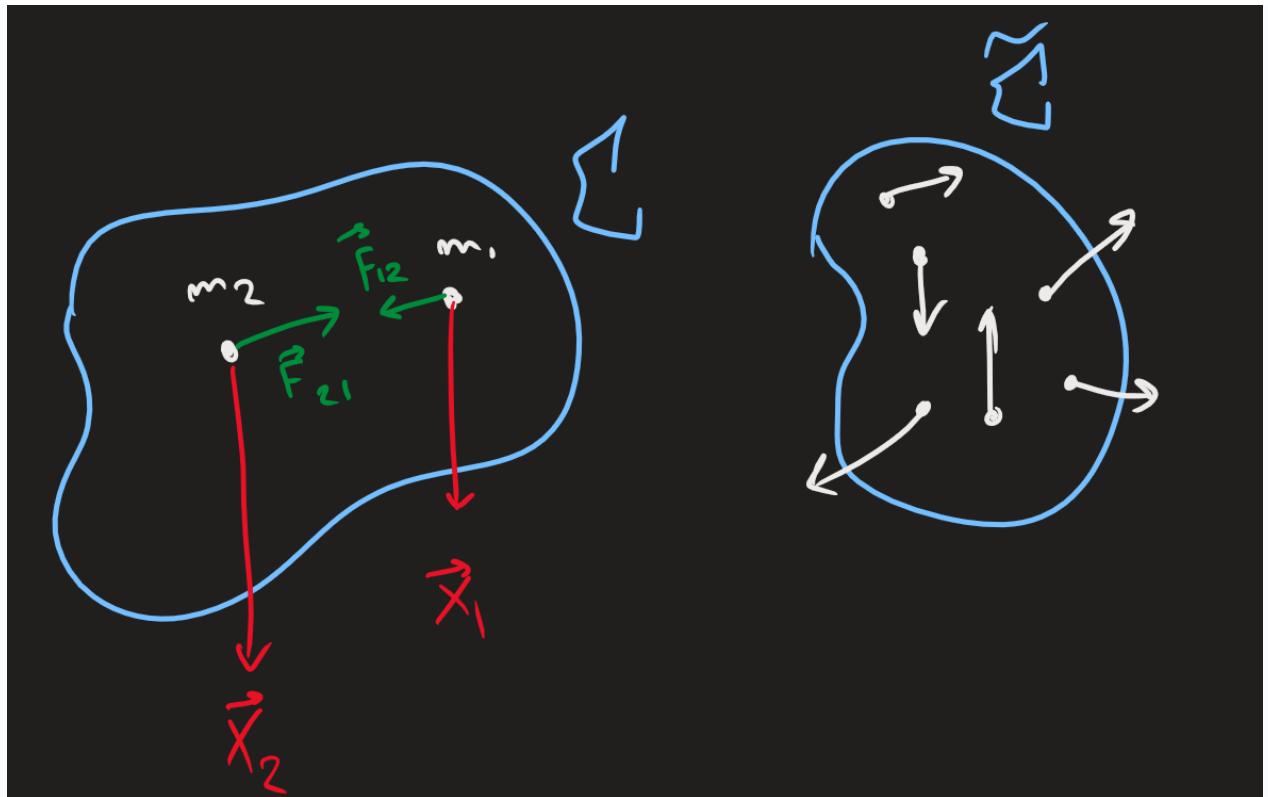
$$\begin{cases} \vec{X}_1 + \vec{F}_{12} + \dots + \vec{F}_{1n} = \frac{d}{dt} \vec{p}_1 \\ \vec{X}_2 + \vec{F}_{21} + \dots + \vec{F}_{2n} = \frac{d}{dt} \vec{p}_2 \\ \vdots \end{cases}$$

Prendo la forza del sistema, abbiamo che le forze interne si cancellano e quindi abbiamo

$$\sum_{i \in \Sigma} \vec{X}_i = \frac{d}{dt} \vec{p}_\Sigma$$

ovvero "la derivata della quantità di moto è determinata dalle forze esterne sul sistema".

FIGURA 2.1. (L'idea per caso di due o più punti)



#Corollario

Corollario (conservazione di quantità del moto).

Sia Σ un sistema di punti puntiformi. Se la risultante delle **forze esterne** è nulla, ovvero

$$\sum_{i \in \Sigma} \vec{F}_{\text{ext},i} = 0$$

Allora **non ho nessun cambiamento nel moto**. Ovvero, la quantità del moto p è **costante**.

Urti

Gli urti: introduzione, proprietà fondamentale degli urti. Le categorie degli urti: elastico, anelastico e parzialmente elastico. Esempio di urto: il pendolo ballistico

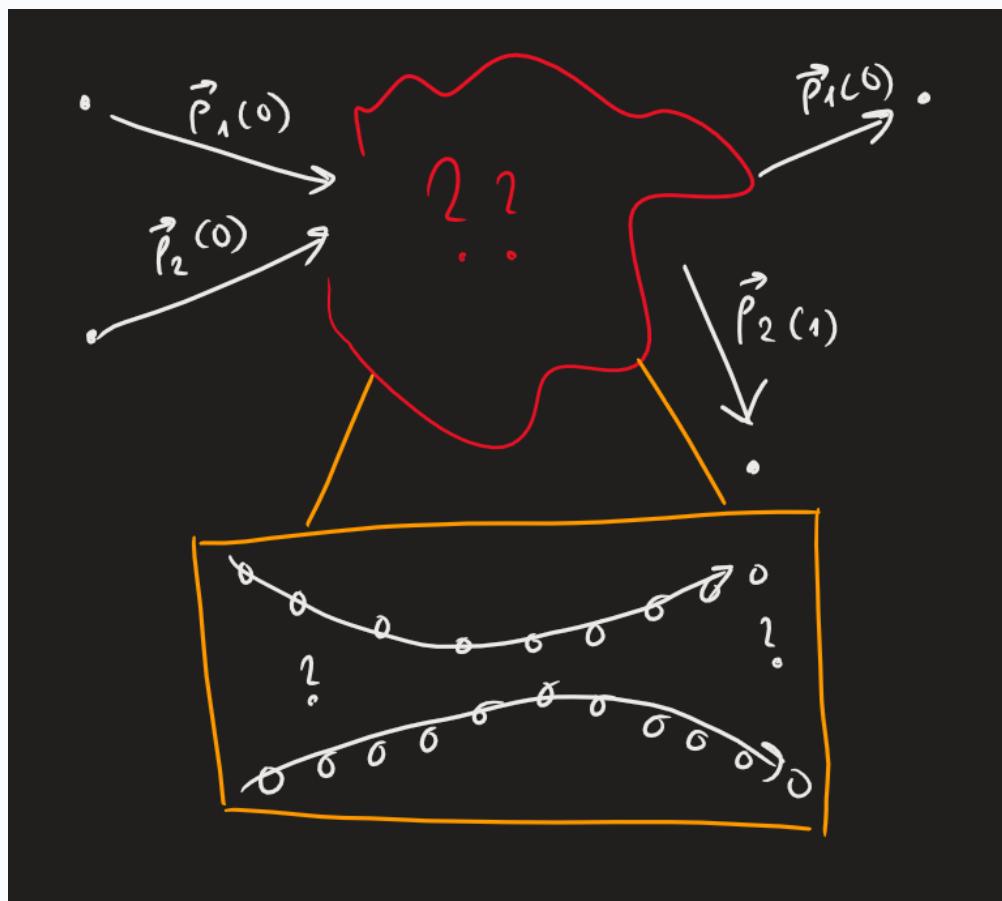
0. Voci correlate

- Quantità di Moto
- Energia Cinetica

1. Introduzione agli Urti

GLI URTI. Gli urti sono dei *fenomeni* fondamentali per la *fisica moderna*: spaziamo da *oggetti a particelle*. Ad esempio, abbiamo degli *interi laboratori di fisica* che sono fatti per *studiare gli scontri tra particelle!* (Per chi non ne fosse a corrente, so parlando della *CERN*).

Adesso che abbiamo *definito* la *quantità di moto*, abbiamo un modo per studiarle. Infatti, dato che *non ci interessa* cosa succede durante l'urto, bensì solo l'*input* (la situazione iniziale) e l'*output* (il risultato), possiamo usare perfettamente queste nozioni.



2. Proprietà fondamentale degli Urti

Per studiare gli *urti*, enunciamo la seguente proprietà.

#Proposizione

Proposizione (la proprietà fondamentale degli urti).

Prima e dopo un *urto*, la *quantità di moto* dei corpi coinvolti viene *sempre conservata*.

Infatti, (quasi) *mai* ho delle *forze esterne* durante gli urti; questo perché i *tempi di interazione* sono molto brevi rispetto all'effetto delle forze esterne. Quindi, se esistono, sono *al più* trascurabili.

3. Classificazione degli Urti

Adesso *classifichiamo* alcune tipologie di urti.

#Definizione

Definizione (urto elastico).

Supponiamo di avere un urto tra j oggetti puntiformi in un sistema Σ .

Allora definiamo le seguenti.

i. L'urto si dice *elastico* se vengono conservate *entrambe* la *quantità di moto* e l'*energia cinetica*. Ovvero, se vale

$$\sum_{j \in \Sigma} K_{j,i} = \sum_{j \in \Sigma} K_{j,f} \wedge \sum_{j \in \Sigma} \vec{p}_{j,i} = \sum_{j \in \Sigma} \vec{p}_{j,f}$$

- Come esempi di *urti elastici* possiamo parlare delle *palle da biliardo*, oppure il *pendolo di Newton*.

#Definizione

Definizione (urto anelastico).

i. L'urto si dice *anelastico* se i *corpi "si incollano"*, ovvero se *viene conservata la quantità del moto* ma non *l'energia cinetica*, con la condizione che la *velocità finale* di ambi i corpi siano lo stesso.

$$\sum_{j \in \Sigma} \vec{p}_{j,i} = \sum_{j \in \Sigma} \vec{p}_{j,f} \wedge \begin{cases} \vec{p}_{1,f} = m_1 \vec{v}_f \\ \vec{p}_{2,f} = m_2 \vec{v}_f \text{ con } \vec{v}_f \in \mathbb{R}^2 \\ \vdots \end{cases}$$

- Esempi: *scontro tra automobili, come tamponamento*
- L'energia è dissipata nel "*fondere il nuovo corpo*"

ii. L'urto si dice *parzialmente elastico* se una parte dell'energia viene dispersa, la velocità finale non è la stessa.

4. Il pendolo ballistico

Adesso forniamo un *esempio pratico* di urto (in particolare *anelastico*).

#Esempio

Esempio (il pendolo balistico).

Un *proiettile* di massa m a velocità v si sta dirigendo verso un *corpo* M appeso al soffitto con due fili ideali. Con l'urto il corpo si sposta in altezza di misura h (*figura 4.1*). Determinare la velocità del proiettile.

Notiamo che:

1. L'urto è *anelastico*, dato che il proiettile entra nel corpo e si "*fondono*"
2. Ci sono due passi: una in cui il *proiettile entra nel corpo grande* e l'altra in cui la massa si sposta come un tutt'uno

Sul primo momento posso *usare la conservazione della quantità del moto*, dato che non ho ancora forze esterne in azione (come la *tensione*).

$$\vec{p}_{m,i} + \underbrace{\vec{p}_{M,i}}_0 = \vec{p}_{m,f} + \vec{p}_{M,f}$$

Troviamo che

$$\vec{p}_{m,i} = \vec{p}_{\Sigma} = m \vec{v}$$

Possiamo far corrispondere questa quantità di moto all'*energia cinetica* in qualsiasi momento, visto che la quantità di moto si conserva sempre.

$$K_{\Sigma} = \frac{p_{\Sigma}^2}{2(m + M)}$$

Sul secondo momento posso ancora usare la *conservazione dell'energia*, dato che sono appena *uscito* dall'urto (quindi tutte le dissipazioni dovute sono finite). Quindi ho

$$K_i = \frac{p_{\Sigma}^2}{2(m + M)} = U_{P,f} = (M + m)gh$$

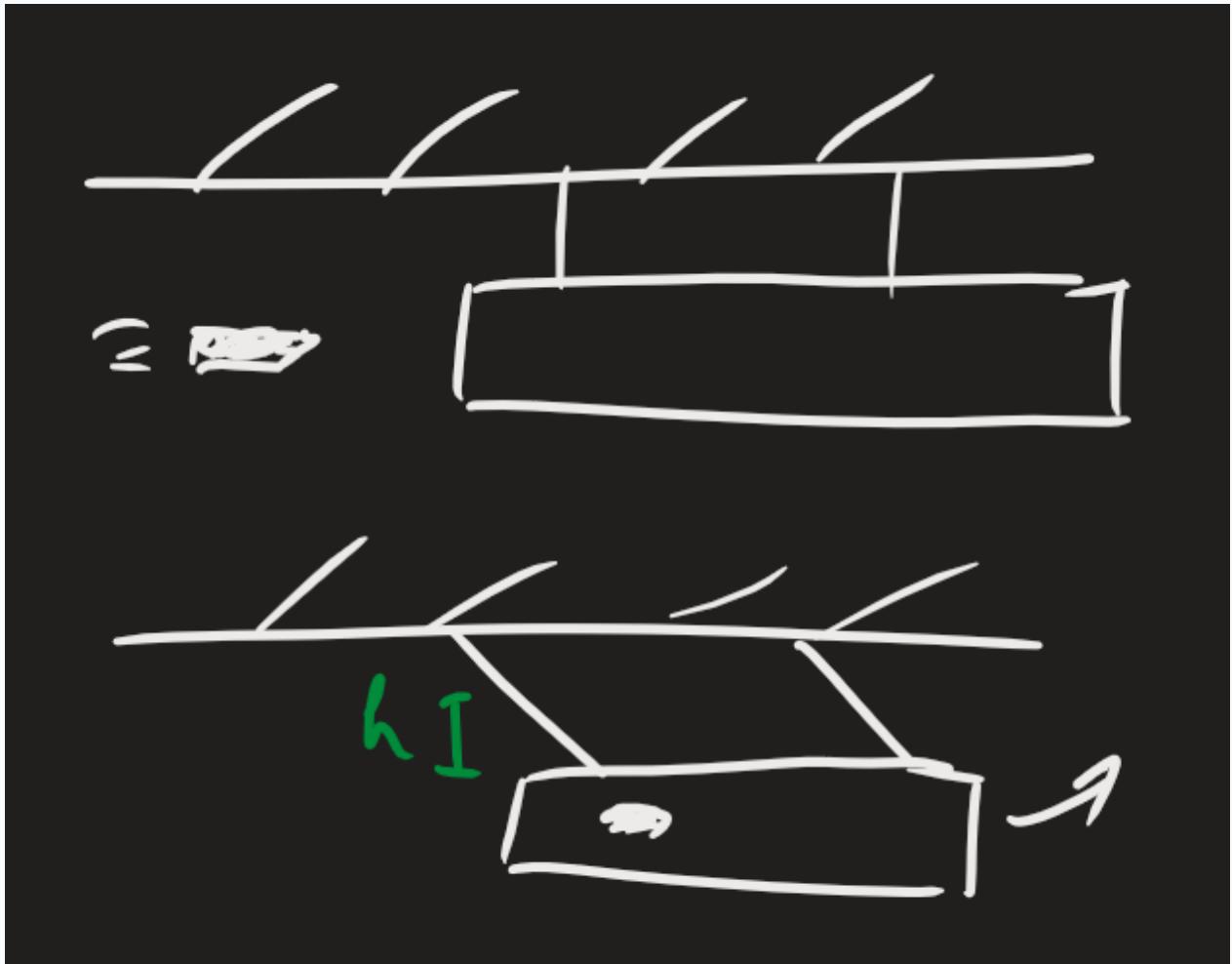
Allora abbiamo

$$m^2v^2 = 2(m + M)^2gh$$

che ci dà il risultato

$$v = \frac{M + m}{m} \sqrt{2gh}$$

FIGURA 4.1. (*Il pendolo ballistico*)



Centro di Massa

Definizione matematica di centro di massa di un sistema di punti. Cinematica e dinamica del centro di massa.

0. Voci correlate

- Sistema e Ambiente
- ... (media ponderata DA INSERIRE; collegamento con probabilità)
#TODO
- Velocità e Accelerazione di un Corpo Puntiforme
- Principi della Dinamica

1. Definizione di Centro di Massa

Tappiamo uno dei buchi lasciati da noi sulla fisica.

#Definizione

Definizione (centro di massa di un sistema di punti).

Sia Σ un sistema di punti con le distanze dall'origine \vec{r}_i associate ad ogni punto. Sia M la *massa totale del sistema* (ovvero la sommatoria delle masse).

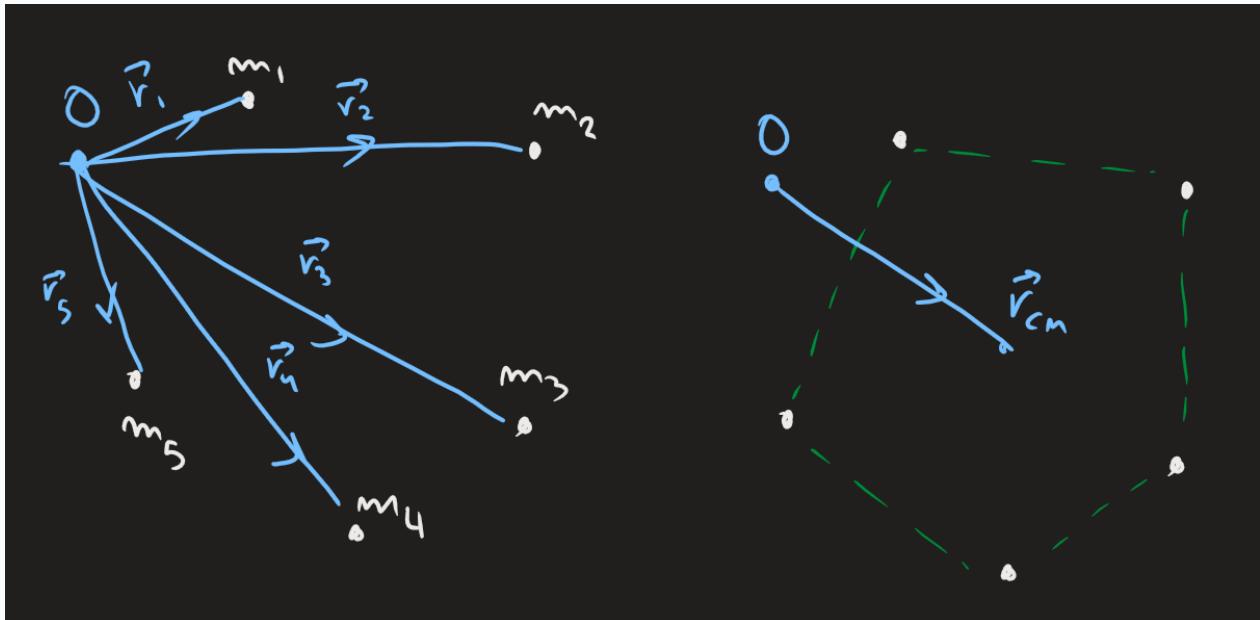
Si definisce il *centro di massa* come quel *punto dall'origine* definito come

$$\vec{r}_{CM} := \sum_{i \in \Sigma} \frac{m_i}{M} \vec{r}_i$$

Statisticamente questo coincide col concetto della "*media ponderata delle masse*".

Geometricamente si ha che il *centro di massa* \vec{r}_{CM} si trova *sempre* nel *poligono* delineato dai punti del sistema.

FIGURA 1.1. (*Intuizione geometrica*)



2. Cinematica e Dinamica del Centro di Massa

Avendo definito il *centro di massa* come una distanza \vec{r} , possiamo giostrarlo a piacimento prendendone le derivate e simile.

#Teorema

Teorema (la cinematica e la quantità di moto del centro di massa).

Segue che la *velocità del centro di massa* coincide con

$$\vec{v}_{CM} = \sum_{i \in \Sigma} \frac{\vec{p}_i}{M}$$

ovvero abbiamo

$$\vec{p}_{\Sigma} = M \vec{v}_{CM}$$

#Teorema

Teorema (la dinamica del centro di massa).

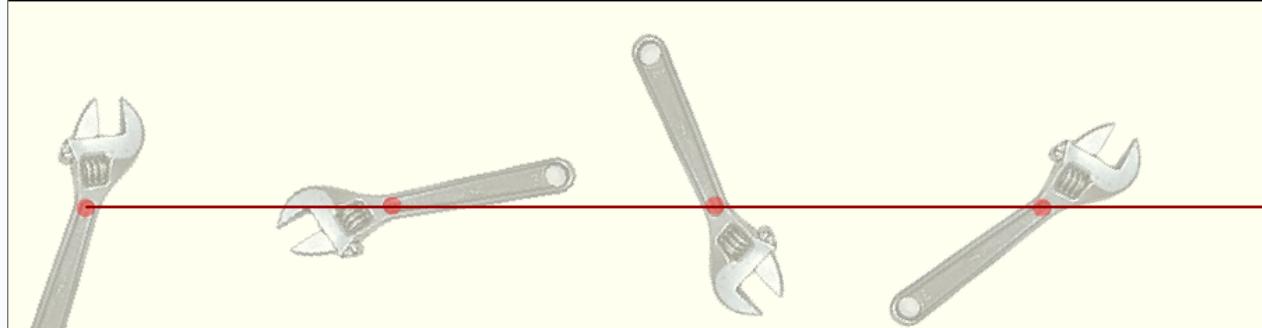
Considerando invece la sua *accelerazione* abbiamo la forza

$$\vec{a}_{CM} = \sum_{i \in \Sigma} \frac{m_i \vec{a}_i}{M} = \frac{1}{M} \sum_{i \in \Sigma} \vec{F}_i$$

ovvero ho che la *sommatoria delle forze esterne* coincide con

$$M\vec{a}_{CM} = \sum_{i \in \Sigma} \vec{F}_{ext.,i} = \sum_{i \in \Sigma} \frac{d}{dt} m \vec{v}_i$$

CONSEGUENZE. Come conseguenza della *dinamica e cinematica del centro di massa* (1, 2) noto che prendendo un *oggetto complesso* (come ad esempio una chiave inglese) e considerandolo come un *sistema di punti*, ho che il suo *centro di massa* segue perfettamente la *traiettoria* di un punto.



Questo ci è utile per *trattare* oggetti come dei *materiali puntiformi*!

Oscillazioni - Sommario

Moto Armonico

Definizione di moto armonico. Corollari: la cinematica, la dinamica e l'energia del moto armonico.

0. Voci correlate

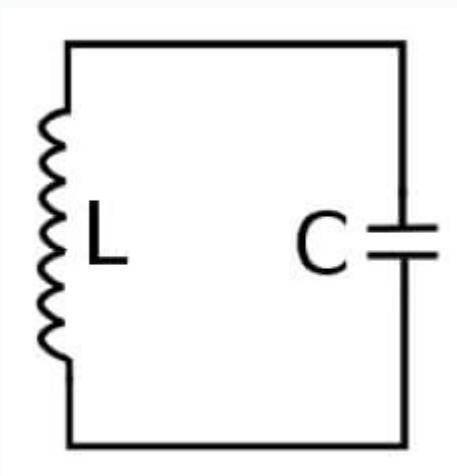
- Velocità e Accelerazione di un Corpo Puntiforme
- Forza Elastica
- Energia Cinetica
- Energia Potenziale
- Conservazione dell'Energia

1. Definizione di Moto Armonico

Preambolo. Nella natura abbiamo molte "*cose che oscillano*": parliamo di musica (infatti abbiamo le *onde d'aria* che *vibrano*), di casi classici come il *pendolo*, fino persino alla *elettronica*, col c.d. *circuito LC*.

Per studiare la natura di questi moti, partiamo dalla "*soluzione*": ovvero la *definizione matematica* del moto armonico.

Figura 1.1. (*Circuito LC*)



#Definizione

Definizione (moto armonico).

Una **quantità fisica** che presenta un'equazione del tipo

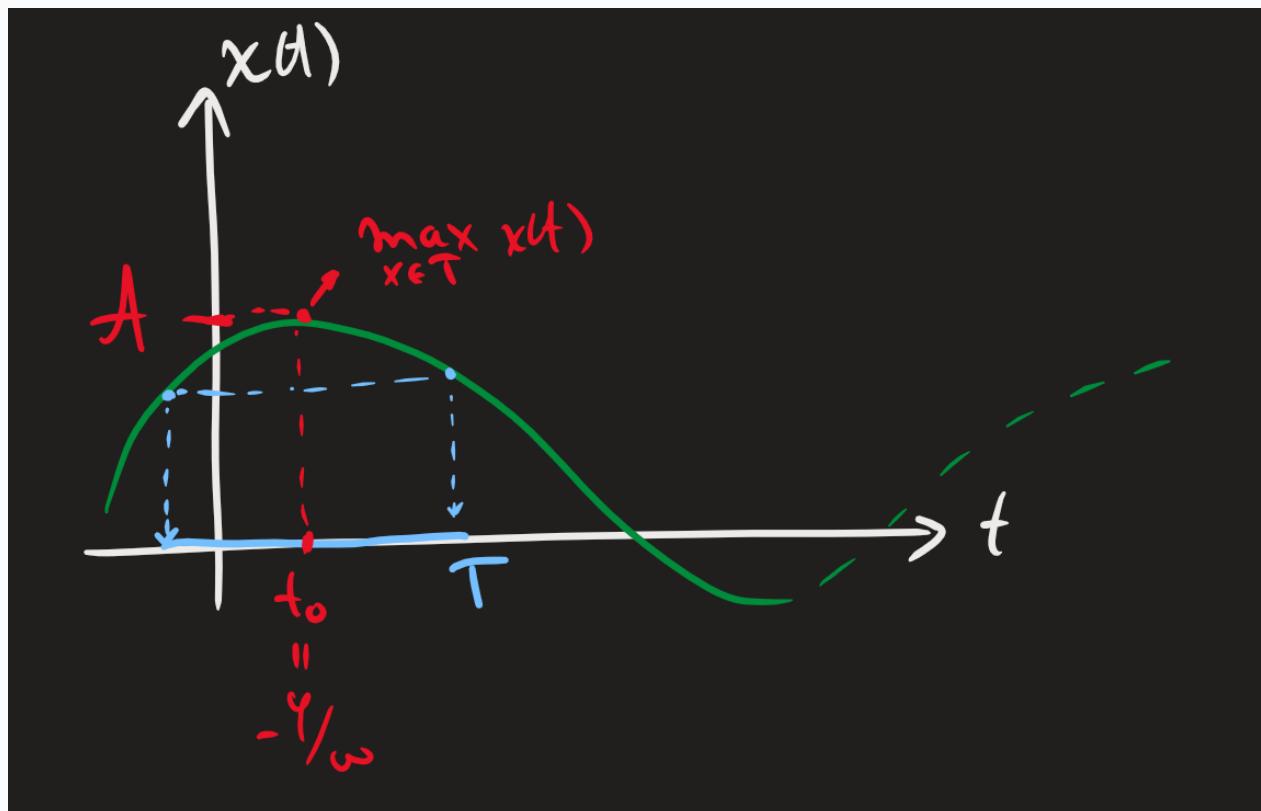
$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

(si può anche sostituire il coseno cos col seno sin) si dice "**moto armonico**". Componiamo le componenti di quest'equazione in ogni sua parte:

- A si dice "**ampiezza**"; questo determina la "**estensione massima**" del moto armonico.
- ω si dice "**pulsazione**"; attenzione a non confonderlo con la **frequenza**! Con la pulsazione si considera il **periodo** 2π . Infatti vale che $\omega = 2\pi f$
- φ si dice "**fase**", che determina la "**posizione iniziale**" e rappresenta lo **spostamento** del moto ondulatorio nel tempo. Infatti vale che $\cos(\omega t + \phi) = \cos(\omega(t - t_0))$.
- La quantità di tempo per cui partiamo da un punto $x(t_0)$ e arriviamo allo stesso punto $x(t_1)$ si dice "**periodo**" T .

Graficamente ho la **figura 1.2..**

FIGURA 1.2. (Il moto oscillatorio)



Adesso iniziamo ad applicare le **nozioni di fisica classica** su questo tipo di moto.

2. La Cinematica del Moto Armonico

Iniziamo dalla *cinematica*, derivando la *velocità* e l'*accelerazione* del moto oscillatorio. Inoltre faremo una nota sulla "*equazione differenziale caratteristica*" del moto oscillatorio.

#Corollario

Corollario (la cinematica del moto armonico).

Se $x(t)$ è un *moto oscillatorio* con i suoi dovuti coefficienti, allora vale che:

i. La velocità del moto armonico è

$$v(t) = -\omega A \sin(\omega t + \varphi)$$

ii. L'accelerazione del moto armonico è

$$a(t) = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x(t)$$

#Osservazione

Osservazione (osservazione sull'accelerazione).

Notiamo che

$$a(t) = -\omega^2 x(t)$$

è un'equazione differenziale.

Infatti *un modello fisico qualsiasi* che presenta un'equazione differenziale del tipo

$$f'' + \omega^2 f = 0$$

si dice che presenta un "*moto armonico*".

3. La Dinamica del Moto Armonico

Adesso proseguiamo con le forze. Che la forza sia con te!

#Corollario

Corollario (la dinamica del moto armonico).

Si può rappresentare il *moto oscillatorio* nella dinamica col seguente "modello tipico": la *forza elastica* rappresentata con la *legge di Hooke* (1).

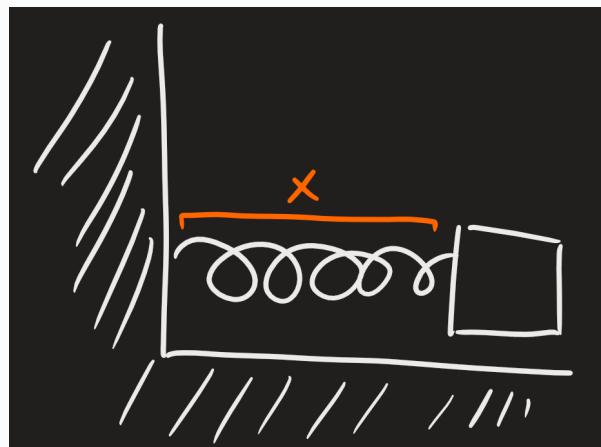
Infatti qui abbiamo l'equazione differenziale

$$\sum F \longrightarrow ma = -kx$$

Da cui abbiamo i seguenti risultati.

$$a = -\frac{kx}{m}$$
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

FIGURA 3.1. (*Modello tipico del moto armonico*)



#Osservazione

Osservazione (la pulsazione è indipendente dall'ampiezza).

Notiamo che la formula

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

ci fa capire che la *pulsazione* ω è completamente indipendente dall'*ampiezza*. Questo è dovuto al fatto che abbiamo *modelli idealizzati*.

Ad esempio, vedremo che per *modellizzare* pendoli prendiamo sempre piccoli angoli $\theta \rightarrow 0$.

4. L'Energia del Moto Armonico

Per ultimo consideriamo l'*energia* del moto armonico.

#Corollario

Corollario (energia cinetica, potenziale e totale del moto armonico).

Supponiamo di avere un *moto armonico*, in assenza di *forze esterne* o *forze interne dissipative*. Allora vale che:

i. L'energia potenziale associata U è

$$U = \frac{1}{2}k\mathbf{x}^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

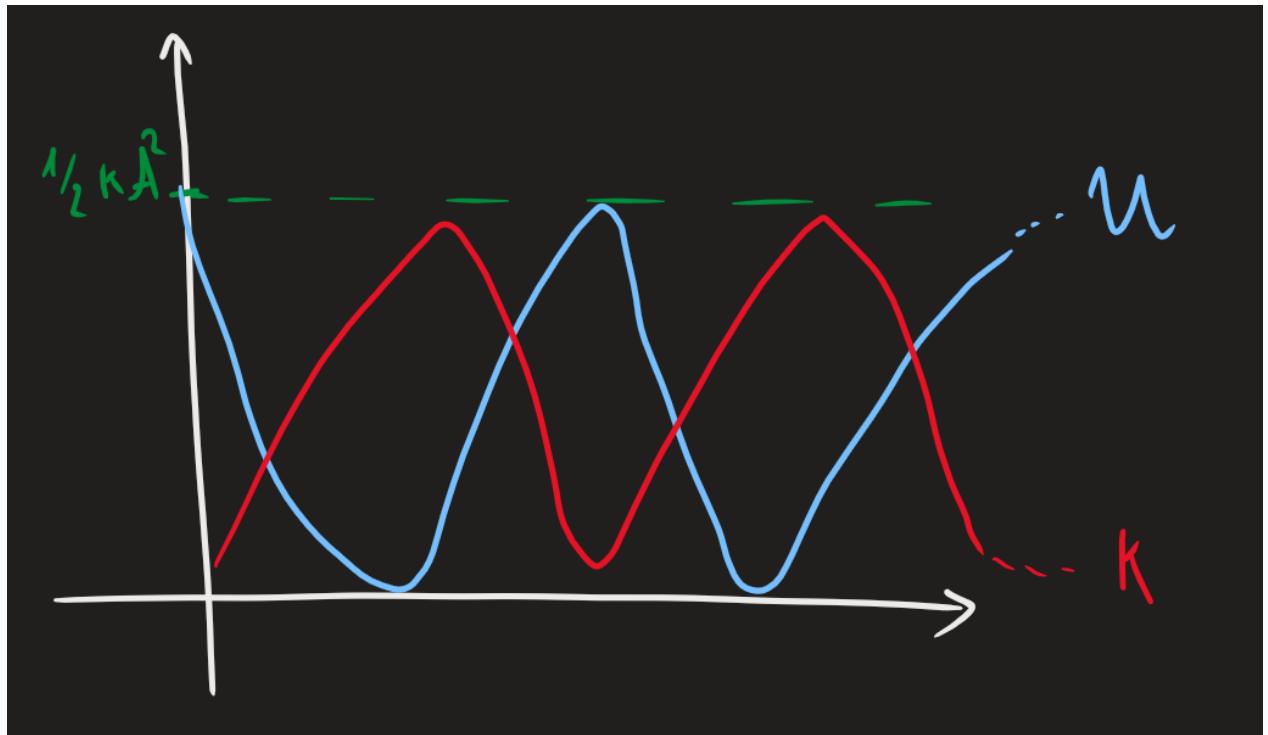
ii. L'energia cinetica associata K è

$$K = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

Pertanto da questi risultati segue che abbiamo la *conservazione* dell'energia: infatti abbiamo la costante

$$E = U + K \implies \underbrace{\dots}_{k=m\omega^2} \implies E = \frac{1}{2}kA^2$$

FIGURA 4.1. (*L'andamento dell'energia del moto armonico*)



Moto Armonico Smorzato

Modello tipico del moto armonico smorzato. Definizione di Moto Armonico Smorzato mediante la sua equazione differenziale. Classificazione delle oscillazioni smorzate al variare dei parametri: sottosmorzamento, sovrasmorzamento e smorzamento critico.

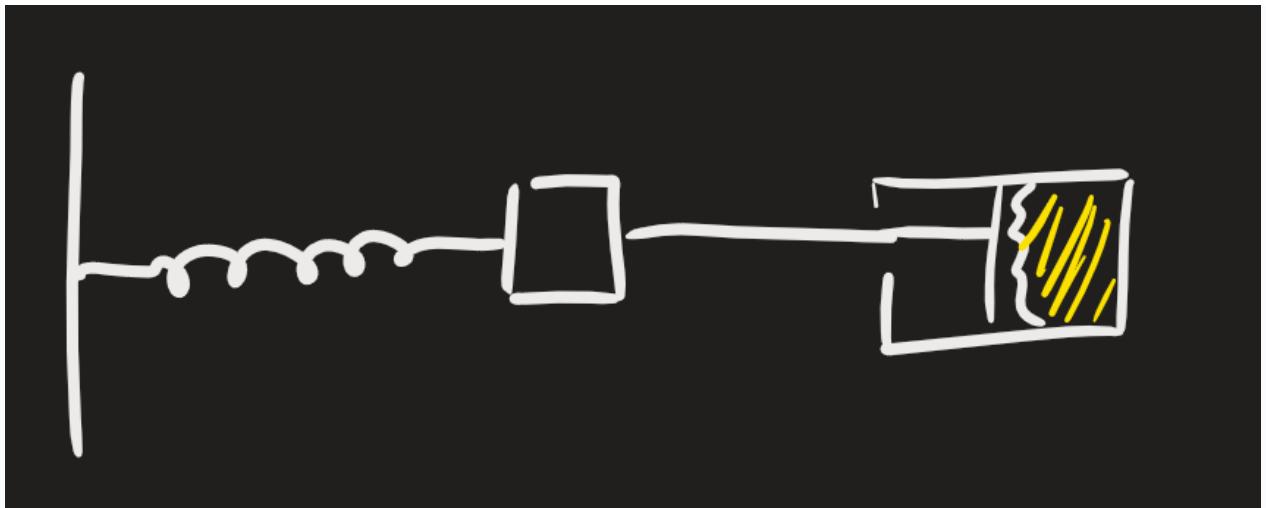
0. Voci correlate

- Resistenza dei Fluidi
- Forza Peso e Forza Normale

1. Modello Tipico delle Oscillazioni Smorzate

MODELLO TIPICO. Per parlare del *moto armonico smorzato*, presentiamo il suo "*modello tipico*": ovvero un modello che presenta un'*equazione differenziale* che "*caratterizza*" le oscillazioni smorzate.

Come modello prendiamo il seguente. Supponiamo di attaccare un oggetto ad una molla da un lato, poi ad un pistone con olio dall'altro. Inoltre supponiamo di avere una compressione (o estensione) della molla con $\Delta x \neq 0$.



Quindi le **forze in gioco** sono le seguenti: la tensione \vec{T} , la forza elastica \vec{F}_x e l'attrito vistoso \vec{F}_a .

Quindi prendendo le **sole componenti orizzontali** (o verticali, tanto l'andazzo è lo stesso) abbiamo

$$\left(\sum \vec{F} \right) \cdot \hat{i} \rightarrow k\Delta x - \xi v_x = ma_x$$

Notiamo che valgono le seguenti uguaglianze:

$$\omega^2 = \frac{k}{m}; \gamma = -\frac{b}{m^2}$$

(dove ω è la **pulsazione** e γ una **costante definita ad hoc**)

Abbiamo dunque un'equazione differenziale del tipo

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0$$

che è proprio l'**equazione** del **moto armonico smorzato**. Procediamo dunque con la definizione formale.

#Definizione

Definizione (moto armonico smorzato).

Se un **modello fisico** fornisce una **grandezza fisica** x che presenta la seguente equazione differenziale:

$$x'' + 2\gamma x' + \omega^2 x = 0$$

allora si dice che abbiamo un "*moto armonico smorzato*".

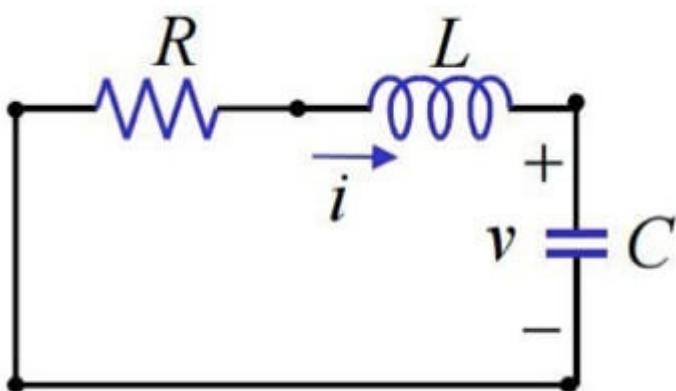
#Esempio

Esempio (esempi di moti armonici smorzati non correlati al modello tipico).

Ci sono altri *modelli fisici* che presentano il *moto armonico smorzato*, che non abbiamo tanto da fare col nostro modello appena presentato.

Si può parlare ad esempio del *circuito RLC*, in cui vi è una *resistenza*, un *induttore* e un *condensatore*. Vedere la figura sottostante.

FIGURA 1.1. (*Circuito RLC*)



2. Classificazione di Moti Armonici Smorzati

Notiamo che le *soluzioni dell'equazione differenziale* date nella *definizione (1)* presentano *soluzioni diverse* a seconda dei *parametri* ω^2 e γ . In particolare prendiamo nota dei parametri ω^2, γ^2 . Adesso andiamo a vedere quali sono i casi.

2.1. Sotto Smorzamento

#Definizione

Definizione (sotto smorzamento).

Se lo "*smorzamento*" è piccolo, allora ho *oscillazioni con piccole diminuzioni*: ovvero abbiamo che vale

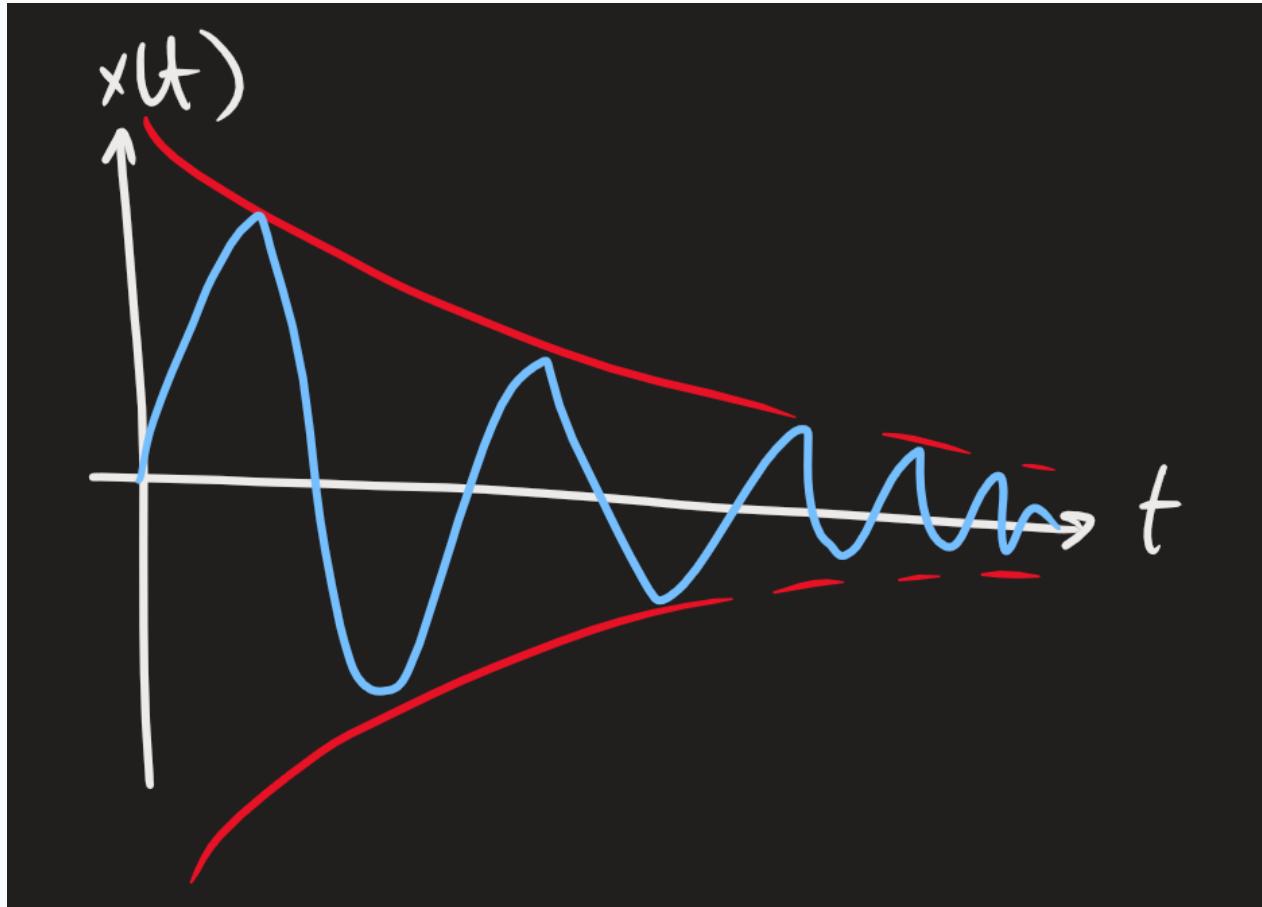
$$\omega^2 > \gamma^2 \implies \omega > \gamma$$

Allora abbiamo la *soluzione dell'equazione differenziale* data da

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega_s t + \varphi)$$

con $\omega_s := \sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$, che è una costante che "*sparisce col tempo*". Inoltre le *curve* $\pm Ae^{-\gamma t}$ si dicono *inviluppo*.

FIGURA 2.1. (*Sotto smorzamento*)



2.2. Sovra Smorzamento

#Definizione

Definizione (sovra smorzamento).

Se invece abbiamo che lo "*smorzamento*" è troppo forte, allora non abbiamo più *oscillazioni*, bensì una curva esponenziale negativa. Ovvero, avendo

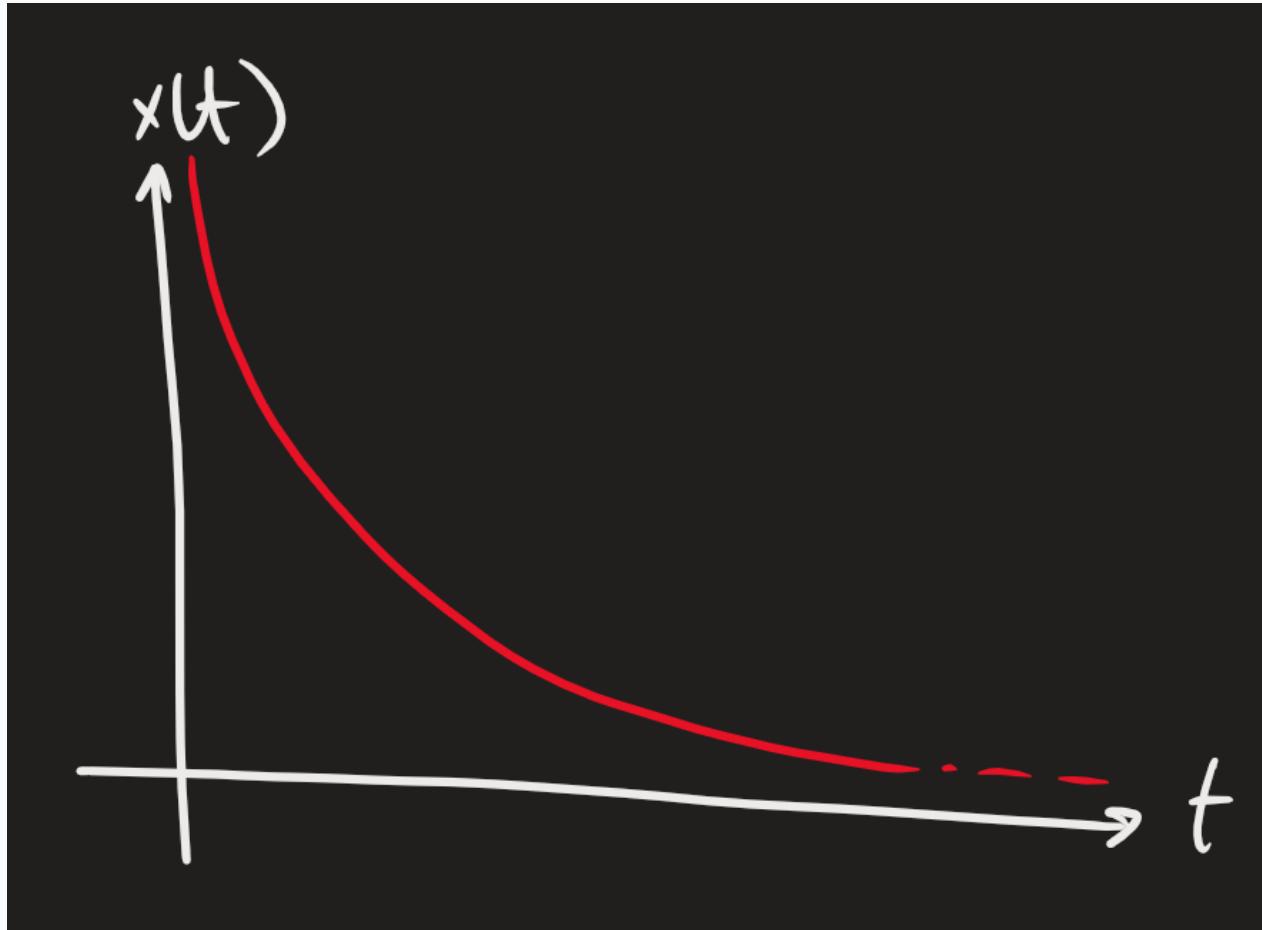
$$\omega < \gamma$$

allora abbiamo la soluzione

$$x(t) = e^{-\gamma t} (Ae^{-ct} + Be^{ct})$$

con $c := \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$.

FIGURA 2.2. (*Sovra smorzamento*)



2.3. Smorzamento Critico

#Definizione

Definizione (smorzamento critico).

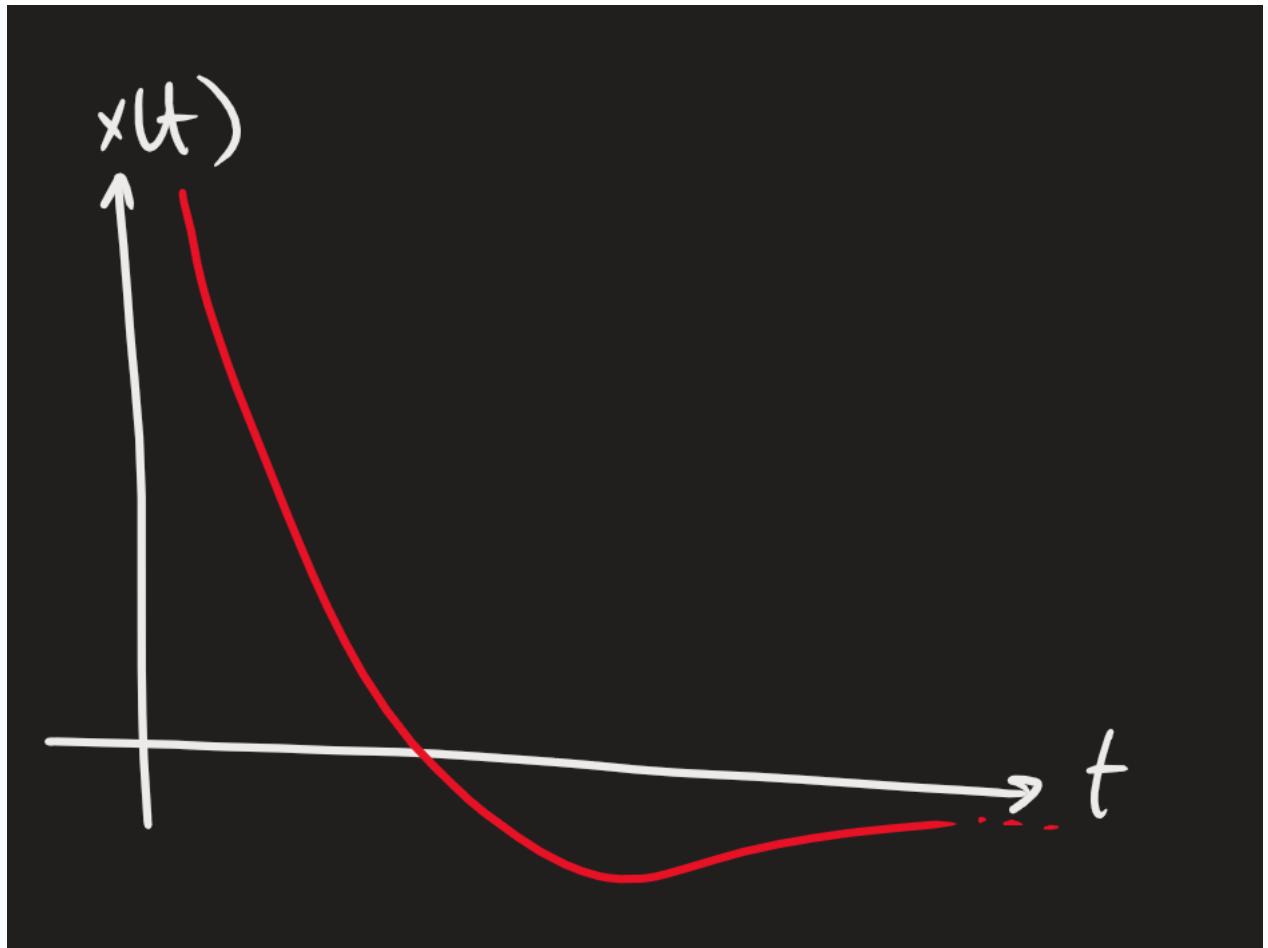
Se invece si ha

$$\omega = \gamma$$

ovvero abbiamo uno "*smorzamento equilibrato*", allora si ha la soluzione

$$x(t) = e^{-\gamma t} (A + Bt)$$

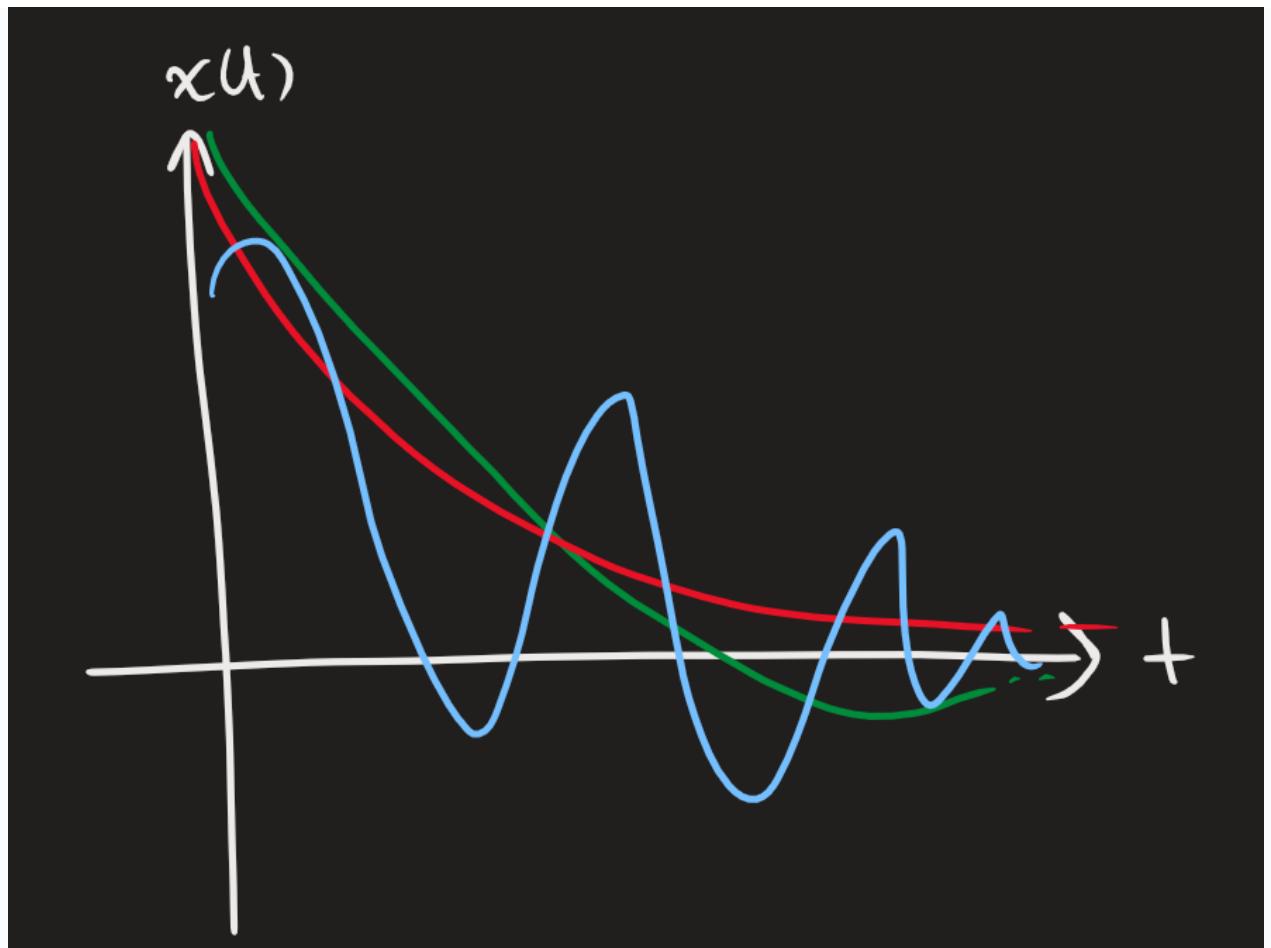
FIGURA 2.3. (*Smorzamento critico*)



3. Conclusione

Per dare un'idea qualitativa di questi *smorzamenti*, diamo il grafico di tutte e tre le funzioni.

FIGURA 2.4. (*Riassunto dei smorzamenti*)



Moto Armonico Forzato

Moto armonico forzato: modello tipico, definizione e soluzione all'equazione differenziale. Definizione di risonanza.

0. Voci correlate

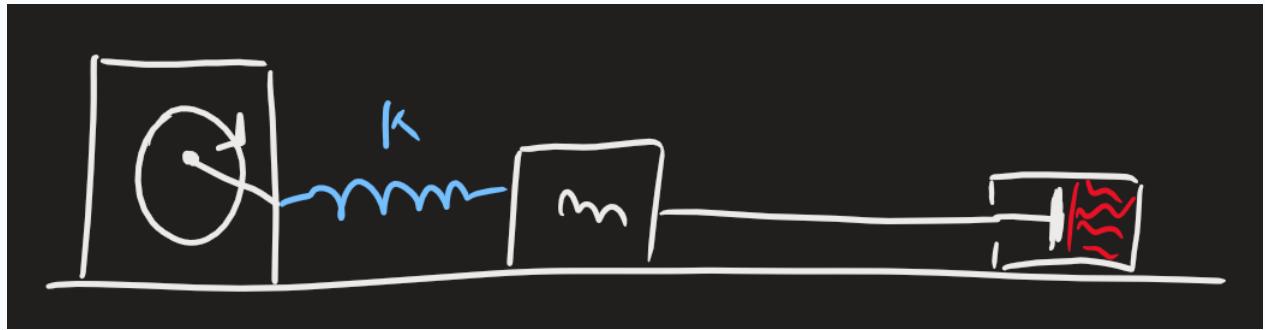
- Forza Elastica
- Resistenza dei Fluidi

1. Modello Tipico del Moto Armonico Forzato

Modello Tipico. Come *modello tipico* del moto armonico forzato presentiamo il seguente.

Un blocco avente massa m è attaccato ad una *molla* con costante elastica k , che a sua volta è attaccato ad un *motore* che genera una forza: per farci capire, questo motore genera un'*oscillazione forzata*.

Dopodiché dall'altro lato lo stesso blocco m è attaccato ad un **pistone** in un cilindro d'olio (o qualsiasi sostanza viscosa).



Quindi le forze in gioco sono tre: la forza elastica, l'attrito viscoso e la forza periodica causata dal motore. Quindi prendendo la sommatoria delle forze, abbiamo

$$\left(\sum \vec{F} \right) \hat{i} \rightarrow ma = -kx - bv + F_0 \cos(\omega_E t)$$

quindi abbiamo l'equazione differenziale

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x - b\frac{dx}{dt} + F_0 \cos(\omega_E t)$$

Ovvero abbiamo l'equazione del **moto armonico smorzato** con un **termine noto non-lineare**.

2. Definizione di Moto Armonico Forzato e Risonanza

#Definizione

Definizione (moto armonico forzato).

Un modello fisico che presenta **una grandezza** $x(t)$ con l'equazione differenziale

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega^2x = F_0 \cos(\omega_E t)$$

si dice "**moto armonico forzato**".

#Teorema

Teorema (soluzione al moto armonico forzato).

Una quantità $x(t)$ che determina un *moto armonico forzato* presenta la soluzione

$$x(t) = A_0 \cos(\omega_E t + \varphi_E)$$

dove le seguenti costanti sono definite come:

$$A_0 = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_E^2 - \omega^2) + 4\gamma^2\omega_E^2}}$$

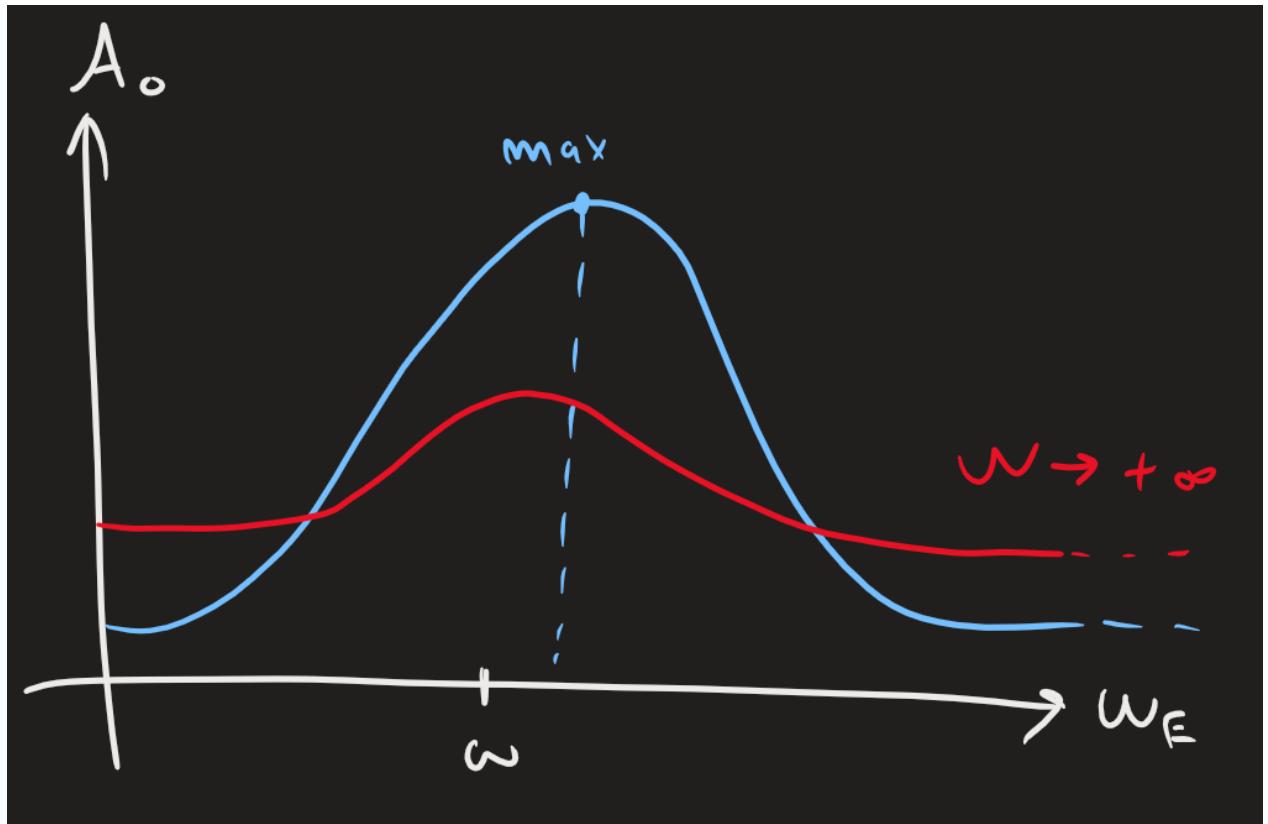
e

$$\tan(\varphi_E) = \frac{2\gamma\omega_E}{\omega^2 - \omega_E^2}$$

Osserviamo che per $\omega \rightarrow \omega_E$ (in realtà ci sarebbero altri costanti d'intralcio, quindi non è una perfetta corrispondenza uno ad uno, quindi indicherò questo comportamento con ' \rightsquigarrow '), raggiungo $\max A_0(\omega_E)$

Inoltre, notiamo che per $\omega \rightarrow +\infty$ (a parole, la pulsazione naturale diventa più grande) ho che gli effetti di $\omega \rightsquigarrow \omega_E$ diventano sempre più piccoli.

FIGURA 2.1. (*Moto armonico forzato*)



#Definizione

Definizione (risonanza di un moto armonico forzato).

Supponiamo che una quantità $x(t)$ sia un *moto armonico forzato*.

Se vale che

$$\omega_E = \omega$$

allora ho la "*risonanza*", da cui ho l'ampiezza del moto A_0 massimale.

Esempi di Oscillazioni

Esempi di oscillazioni: il pendolo, ...

0. Voci correlate

- Moto Armonico
- Moto Armonico Forzato

- Moto Armonico Smorzato

1. Il Pendolo di Galileo

Il pendolo (notizie storiche). Un giorno nella chiesa di Pisa, il scienziato Galileo Galilei si interrogo sulla natura del pendolo: supponendo che la corda che lega il pendolo sia lunga di un metro, qual è il suo periodo? Dipende in alcun modo dalla lunghezza? Adesso vediamo con le nozioni apprese.

#Esempio

Esempio (il pendolo).

Supponiamo di avere un *corpo* legato ad un *filo* avente lunghezza L , con un angolo θ rispetto al verticale: ovvero abbiamo la *figura 2.1..*

Disegnando il *diagramma del corpo libero* (1), abbiamo

$$\left(\sum \vec{F} \right) \cdot \hat{i}' \rightarrow \vec{P}_{\parallel} = ma_y = mg \sin \theta$$

da cui discende l'*accelerazione parallela al suo moto* (ovvero *lungo l'arco*) è

$$a_y = g \sin \theta$$

Consideriamo l'*accelerazione parallela* come un *caso particolare del cambiamento di angolazione rispetto al tempo*. Infatti per uno spostamento ds abbiamo uno spostamento di $Ld\theta$.

$$\ddot{s} = L\ddot{\theta} \implies \boxed{L\ddot{\theta} = -g \sin \theta}$$

ovvero l'*equazione differenziale* associato a questo modello.

Adesso, per semplificare i conti usiamo l'*approssimazione degli angoli piccoli*, per cui abbiamo

$$\sin \theta = \theta$$

che diventa più "*accurata*" per $\theta \rightarrow 0$ (ovvero angoli piccoli).

Quindi si approssima l'equazione differenziale come

$$L\ddot{\theta} = -g \sin \theta \sim L\ddot{\theta} = -g\theta$$

Adesso prendendo $L = 1$ m, abbiamo

$$\omega = \sqrt{g}$$

o generalmente

$$\omega = \frac{\sqrt{g}}{L}$$

con

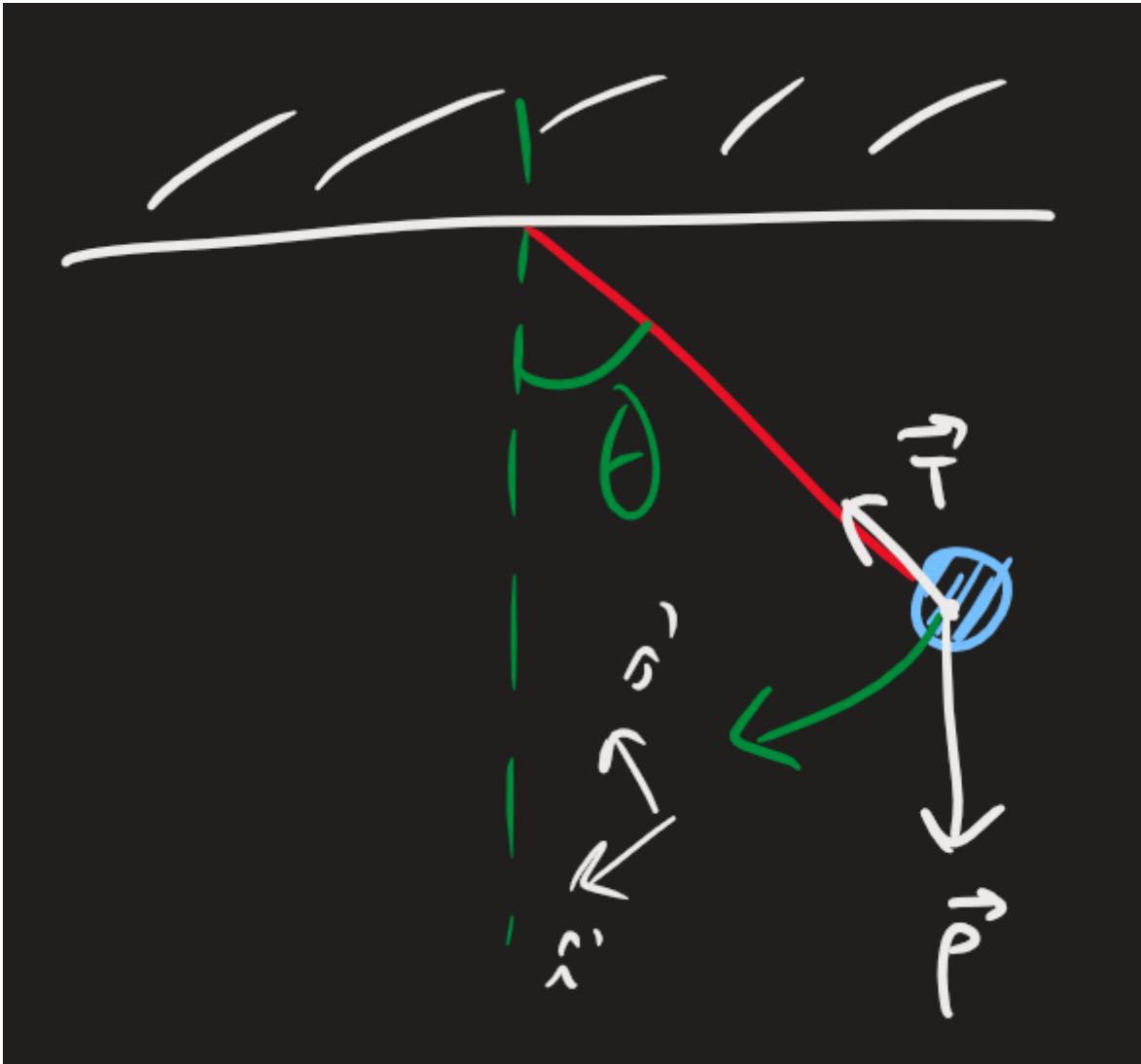
$$T = \frac{2\pi}{\omega} \approx 2 \text{ s}$$

Infatti, notiamo di avere l'approssimazione

$$\pi^2 = g$$

Storicamente, questo è stato una delle *proposte* della *misurazione del metro*: ciò è avvenuto con la *rivoluzione francese*.

FIGURA 1.1. (*Il pendolo*)

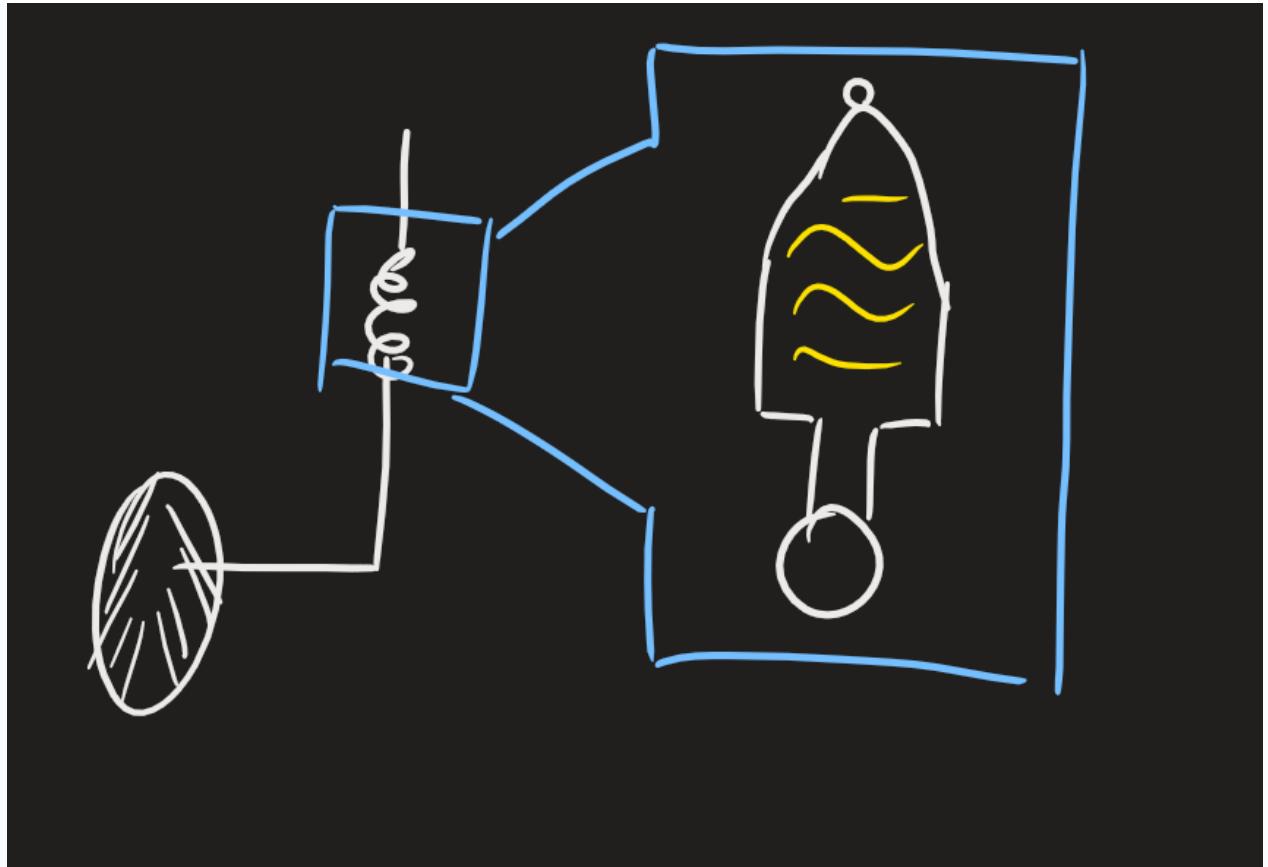


2. Gli ammortizzatori di un'automobile

#Esempio

L'Automobile. Come si sa, gli *automobili* sono dotati di componenti per *assorbire* eventuali dislivelli in altezza (come *dossi*). Per gestirli, abbiamo l'*ammortizzatore* e le *sospensioni*: per spiegarli senza dover scendere in dettaglio, essi sono delle *molle* con dei contenitori di *liquidi viscosi* collegati alla ruota.

L'obiettivo delle sospensioni è quello di *raggiungere il smorzamento critico*, per assorbire eventuali salti al meglio.



3. I ponti

#Esempio

I ponti. Un esempio del *moto armonico forzato* sono *i ponti*. Ci sono certe situazioni in cui ci sono delle *forze esterne* che causano al ponte di *oscillare*. Di solito va tutto bene e non c'è nessuna *risonanza*; tuttavia, ci sono stati dei storici in cui ci sono state delle *risonanze*, con delle conseguenze disastrose. Si pensa ad esempio al ponte di *Tacoma Narrows*: il vento è stato abbastanza forte da poter causare un'aumento alla loro *ampiezza*, determinando la sua distruzione.



Oppure come una conseguenza, si pensa al fatto che i soldati devono *spezzare il passo* sui ponti, per evitare di creare risonanze.

Solidi e Fluidi - Sommario

Tutto sui solidi e fluidi.

SEZIONE A. SOLIDI

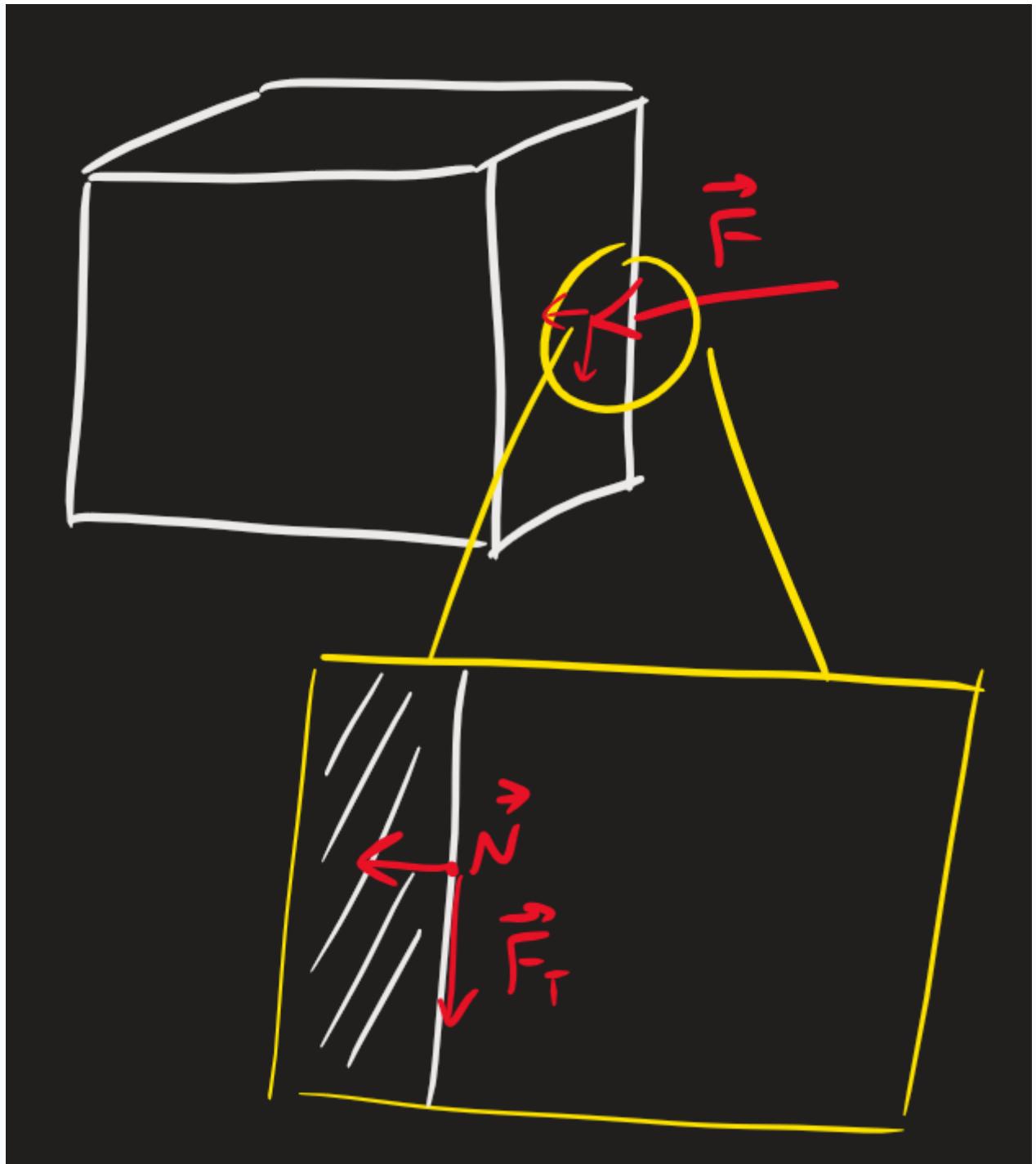
A1. Forze sui Solidi

Forze sui Corpi Solidi

Forze sui corpi solidi: **forza normale** e **tangenziale**. Tensione, compressione e **forza di taglio**. Definizione di sforzo.

1. Forze sui Solidi

FORZE SUI SOLIDI. Prendiamo un *solido* (ad esempio un *cubo*) e ci applichiamo una forza. Cosa succede? Se facciamo un "zoom" nel punto di applicazione, succede che la forza si scomponga in due parti: forza **normale** \vec{N} e **forza tangenziale** \vec{F}_T .



Da qui definisco le nozioni di **tensione**, **compressione** e **forza di taglio**.

#Definizione

Definizione 1 (tensione, compressione e forza di taglio).

Sia $\vec{F} \sim (\vec{N}, \vec{F}_T)$ la forza applicata su un **solido**. Si definiscono le seguenti:

- i. \vec{F}_T si dice **forza di taglio** ("shear force")
- ii. \vec{N} si dice "**tensione**" se è rivolta verso "fuori", altrimenti si dice "**compressione**".

2. Definizione di Sforzo

Tuttavia è da considerare che ho *forze estese sui corpi*; quindi non è più come nel *caso unidimensionale*, dove *non ho superfici*. Infatti, se fosse così la situazione avrei comportamenti molto strani. Da qui nasce la *nozione di sforzo*.

#Definizione

Definizione 2 (sforzo).

Definisco lo *sforzo ("stress")* come la quantità

$$\sigma := \frac{F}{A}$$

In particolare si ha che *tutte le forze normali applicati su tutte le facce* sono

$$\rho = \frac{\sum F_n}{\sum A}$$

Questo vale sia per i *fluidi* (vedremo che definiremo questa nozione con "*pressione*") che per i *corpi deformabili*.

A2. Deformazioni dei Solidi

Deformazione dei Corpi

Deformazione dei corpi. Classificazione delle deformazioni: deformazione di trazione, deformazione da taglio. Deformazione in regime elastico e plastico. Modulo di Young e "Sheer modulus". Coefficiente di Poisson. Bulle modulus.

0. Voci correlate

- [Forze sui Corpi Solidi](#)
[Forze sui Corpi Solidi](#)

1. Deformazione di trazione e da taglio

#Definizione

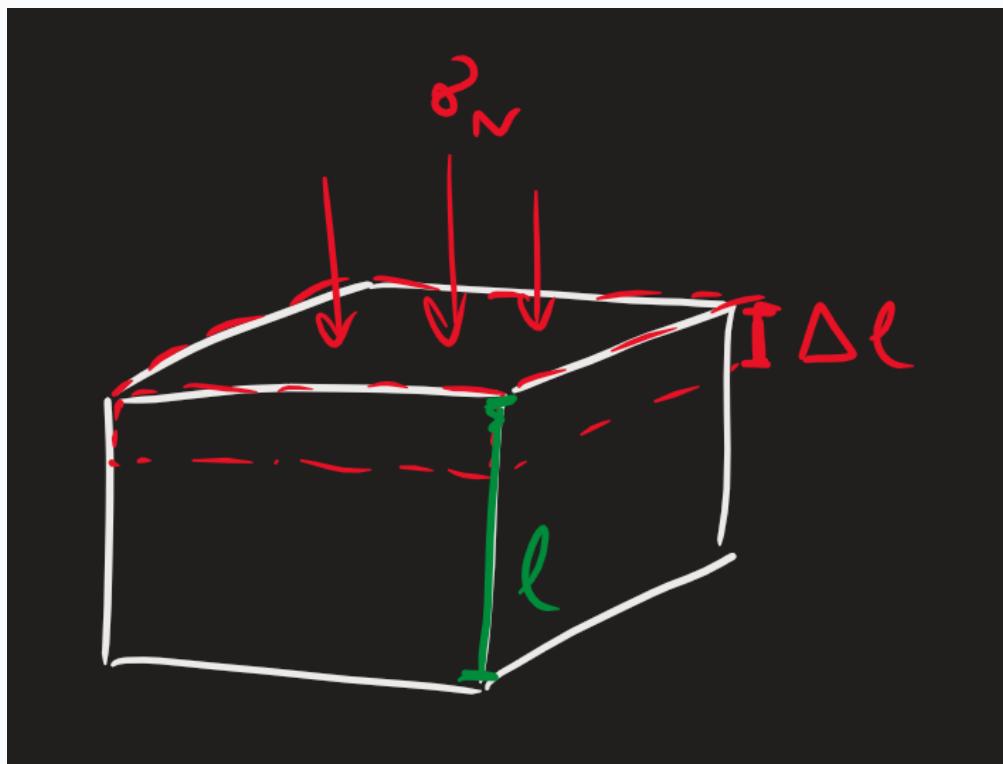
Definizione 3 (deformazione di trazione).

Supponiamo di avere un cubo di **altezza** (o lunghezza) l . Esercitando uno **sforzo di tensione** σ_N causo un cambiamento di questa **altezza** con una differenza di Δl (quindi viene schiacciato da una direzione).

Si definisce la **deformazione di trazione** ("normal strain") come la quantità

$$\varepsilon_t = \frac{\Delta l}{l}$$

FIGURA 1.1. (*Deformazione di trazione*)



#Definizione

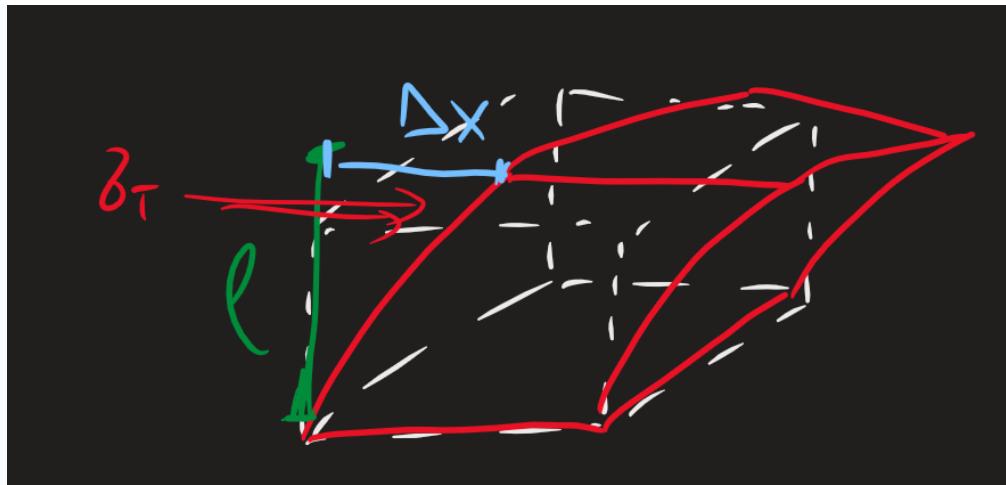
Definizione 4 (sforzo da taglio).

Supponiamo di avere un cubo di **altezza** (o lunghezza) l . Esercitando uno **sforzo di taglio** σ_T causo uno spostamento Δx nella direzione spinta.

Si definisce la **deformazione di taglio** ("sheer strain") come la quantità

$$\varepsilon_s = \frac{\Delta x}{l}$$

FIGURA 1.2. (*Deformazione da taglio*)

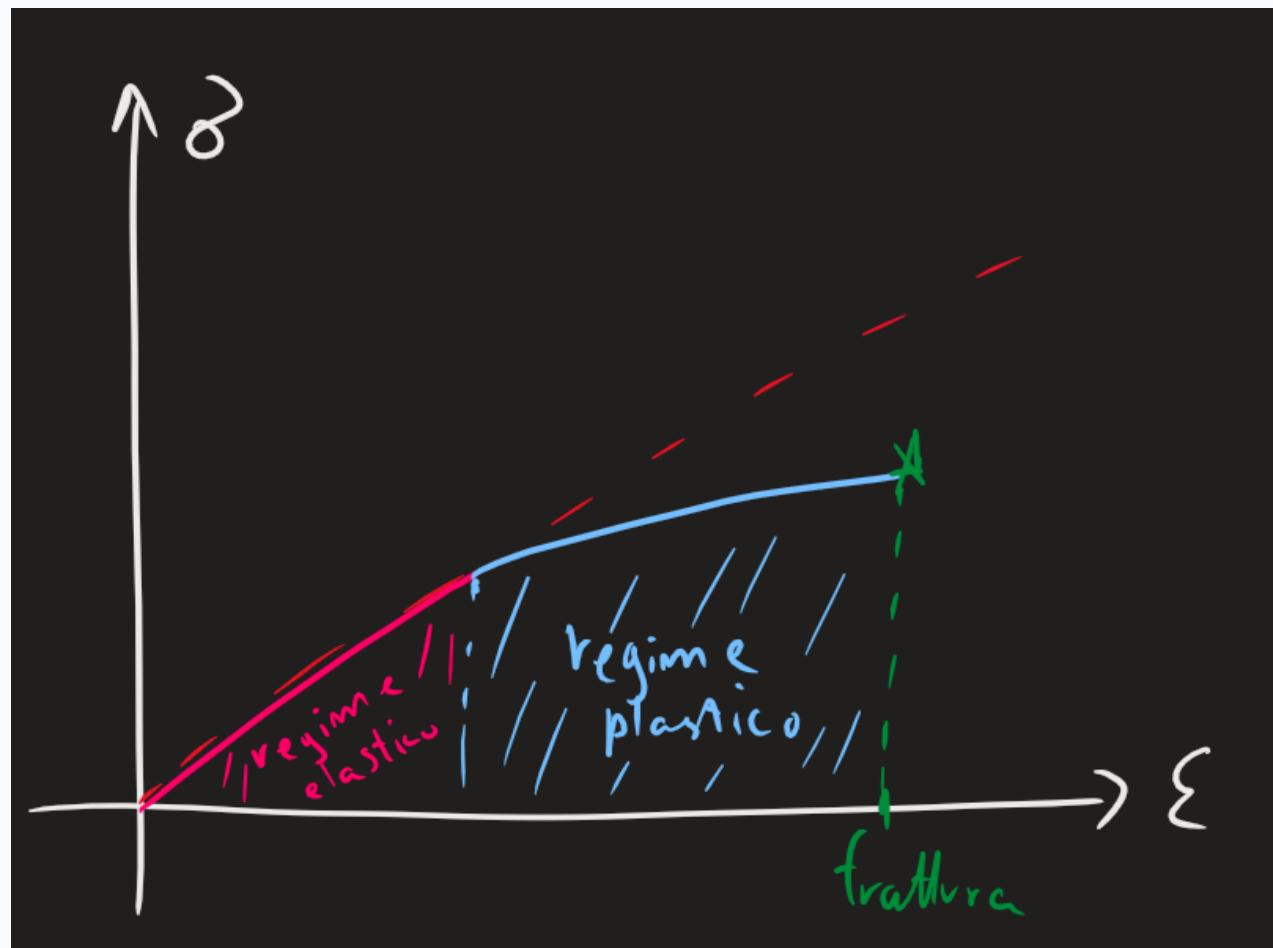


2. Regime elastico e plastico

Quando deformiamo un oggetto, abbiamo *due comportamenti*. Un caso è quando il *corpo torna alla sua forma originaria*, una volta che lo sforzo non si è più applicato.

Oppure quello che succede è che ho causato così tanta *deformazione* che il corpo non torna più alla sua forma originale.

Come prima cosa deduciamo che lo *sforzo* σ è proporzionale alla deformazione ε ; infatti avrei una specie di "*legge di Hooke*".



#Definizione

Definizione 5 (regime plastico ed elastico di una deformazione).

Sia $\varepsilon(\sigma)$ la deformazione causata da uno sforzo. Si dice che è in *regime elastico* se è una retta (quindi il corpo poi torna alla forma originaria), se no si dice che è in *regime plastico* (il corpo conserva la sua forma deformata), fino quando non si ha la *frattura*.

#Definizione

Definizione 6 (modulo di Young e Sheer modulus).

Ho dei valori per cui posso dire *fino a quanto posso comprimere* un corpo.

Abbiamo:

$$\frac{\sigma_t}{\varepsilon_t} = Y$$

la "costante di Young" e poi

$$\frac{\sigma_s}{\varepsilon_s} = S$$

il *modulo di taglio ("Sheer modulus")*. Poi il *coefficiente di Poisson* descrive il rapporto tra la *deformazione di taglio* e di *trazione*.

$$\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_t} = \nu$$

Infine se voglio considerare pure il volume ho il "*Bulle modulus*", definito come

$$B = \frac{\Delta\rho}{\Delta V}$$

Per vedere questi valori ho le tavole.



#Definizione

Definizione 7 (densità).

Si definisce la densità come

$$\rho := \frac{m}{V}$$

SEZIONE B. FLUIDI

B1. Archimede

Principio di Archimede

Principio di Archimede.

1. Principio di Archimede

#Teorema

Teorema 8 (principio di Archimede).

Supponiamo che un cubo avente volume ΔV e massa m . Sia ρ la densità del fluido.

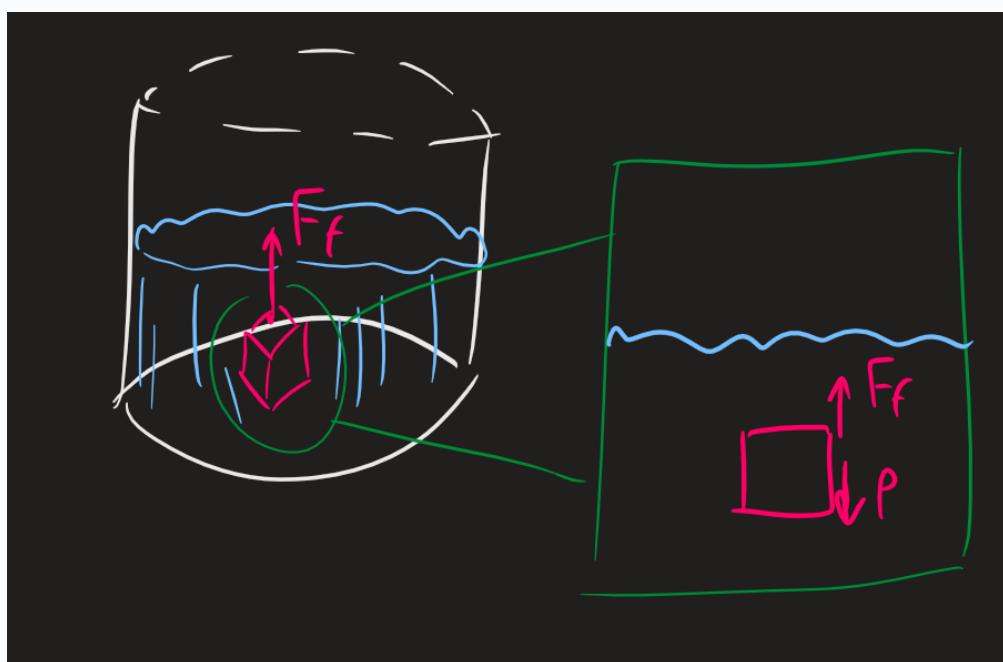
Allora sul corpo si esercita una **forza esterna**, detta la "**spinta di Archimede**" che è calcolata come segue

$$F_f = -\Delta V \cdot \rho g$$

Più generalmente, se non ho un cubo ho

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m_{\text{cubo}} \vec{g} - \Delta V \cdot \rho \vec{g}$$

FIGURA 1.1. (*Principio di Archimede*)



#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del

Supponiamo di avere l'**equilibrio meccanico**, ovvero la **risultante delle forze esterne** è nulla. Da cui ho

$$\sum \vec{F} = \vec{P} = 0$$

Per far "**sparire**" la forza peso, suppongo una nuova forza \vec{F}_f e la pongo uguale a $-\vec{P}$. Così soddisfo l'equilibrio meccanico. In particolare ho

$$\vec{F}_f = -mg = -\Delta V \rho g$$

A questo punto posso decidere che \vec{F}_f è **sempre uguale**, indipendentemente da cosa è contenuto nel cubo (in altre parole posso far variare ρ). Posso pure generalizzare per il **caso non ho l'equilibrio meccanico**.

#Corollario

Corollario 9 (determinare se un corpo galleggia o meno).

Per determinare se un corpo galleggia o meno, è sufficiente **confrontare la densità del fluido** con la **densità del corpo**. Chiamiamo la densità del fluido ρ_{\sim} e la densità del corpo ρ .

- i. **Galleggia** solo se $\rho_{\sim} > \rho$
- ii. **Affonda** solo se $\rho > \rho_{\sim}$
- iii. **Non succede niente** solo se $\rho = \rho_{\sim}$

B2. Pressione Macroscopica

Definizione di Pressione Macroscopica

Definizione di pressione per fluidi.

1. Definizione di Pressione

#Definizione

Definizione 10 (pressione).

Si definisce pressione come

$$P = \frac{F}{A}$$

Viene misurata nelle seguenti misure:

- *Pascal* $\frac{N}{m^2}$.
- *Bar* $10^5 k$ [Pa]
- *Atmosfera* $101.325 k$ [Pa]

Notiamo che ho una *quantità scalare*, dato che in un senso sto facendo "*divisione tra vettori*": consideriamo A come una specie di vettore (in particolare prendiamo la sua *normale*).

B3. Pascal

Principio di Pascal

Principio di Pascal. Esempio: torchio idraulico.

0. Voci correlate

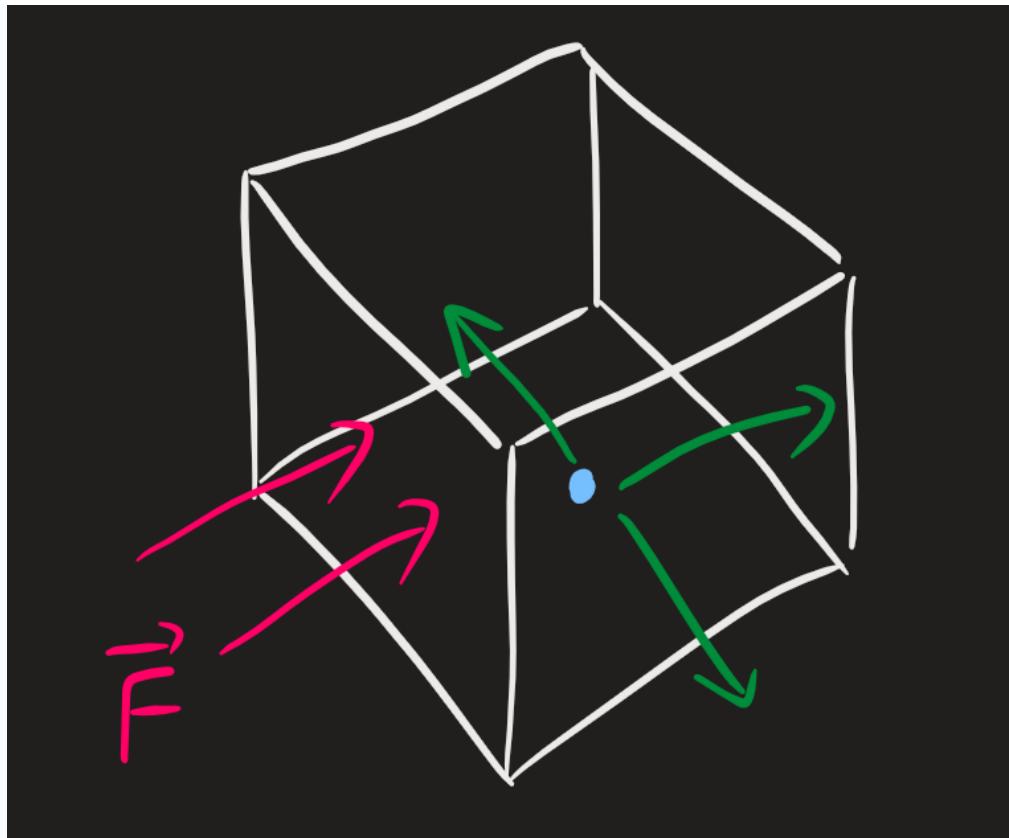
1. Principio di Pascal

#Teorema

Teorema 11 (principio di Pascal).

La pressione esercitata su fluidi si trasmette *inalterata* in ogni punto del fluido e alla *superficie* del contenitore.

FIGURA 1.1. (*Il principio di Pascal*)



#Esempio

Esempio 12 (il torchio idraulico).

Illustriamo questo principio con un noto esempio: il *torchio idraulico*.

Abbiamo due *piattaforme* collegate da un fluido, con aree diverse A_1, A_2 . Applicando una forza F_1 sulla superficie A_1 , si ha la pressione

$$P = \frac{F_1}{A_1}$$

Per il *principio di Pascal*, questa pressione si trasmette in ogni *superficie* del contenitore: ovvero la seconda piattaforma. Dunque si ha

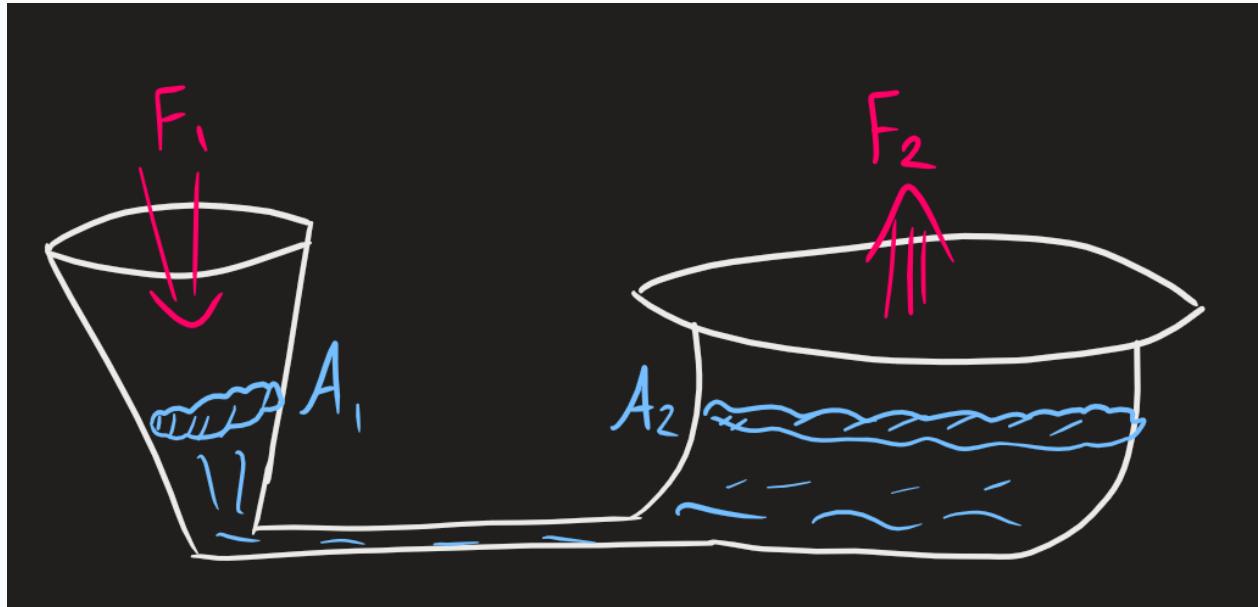
$$P = \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$$

Adesso per calcolare la *forza* esercitata sulla seconda piattaforma si fa i calcoli e si ottiene

$$F_2 = F_1 \frac{A_2}{A_1} \implies \boxed{F_2 = F_1 \lambda}$$

con λ un numero che rappresenta il rapporto tra le due superfici. Per $\lambda \rightarrow +\infty$ ho che la forza esercitata sulla seconda piattaforma diventa infinitamente più grande: o rimpicciolendo A_1 o ingrandendo A_2 si ha questo effetto.

FIGURA 1.2. (Torchio idraulico)



B4. Equilibrio Idrostatico

Equilibrio Idrostatico

Equilibrio idrostatico di un oggetto immerso in un fluido. L'equazione dell'equilibrio idrostatico. Corollario: legge di Stevino. Addendum sul vuoto: l'esperimento di Magdeburg.

0. Voci correlate

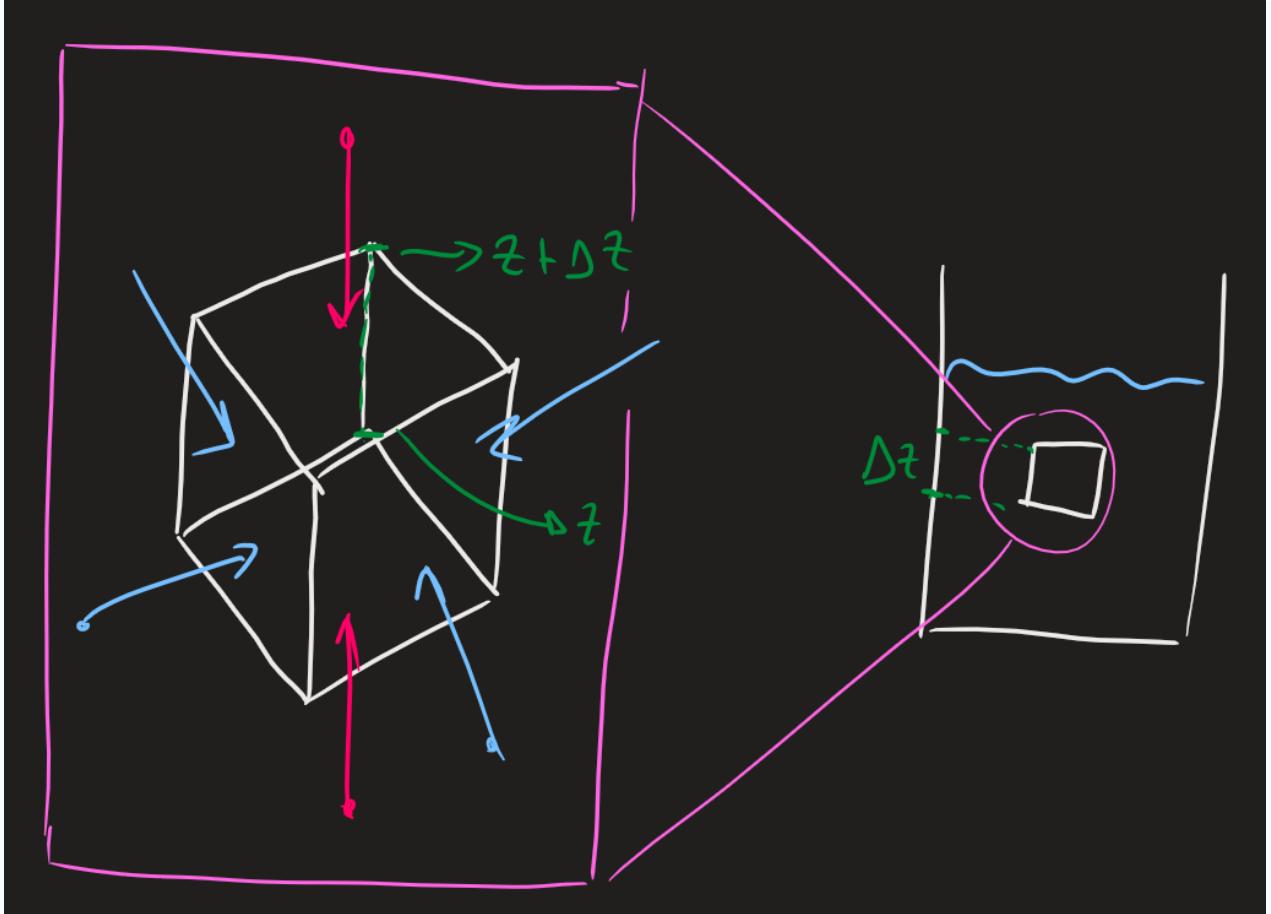
-

1. Equilibrio Idrostatico

PROBLEMA. Considero un **cubo** immerso in un fluido. Cosa succede? Quali sono le forze? Qual è la pressione agente sul cubo?

Facendo uno zoom "**tridimensionale**" sul cubo, vediamo che abbiamo due "**set**" di forze: ci sono delle forze che vanno **verso dentro il cubo**, lungo **l'orizzontale** (o una qualsiasi direzione che non sia verticale). Vedremo che queste si annulleranno, dato che sono simmetriche.

D'altro canto abbiamo le **forze lungo la verticale**, che invece non si annullano.



Disegnando il *diagramma delle forze*, abbiamo che la forza $\vec{F}(z)$ va *in alto*, invece $\vec{F}(z + \Delta z)$ in *basso*. La sua risultante coincide con la *spinta di Archimede* (), di cui ricordiamo è

$$F_s = \Delta V \rho g$$

In particolare posso considerare ΔV una quantità al variare in z : $\Delta V = A \Delta z$.

Allora ponendo l'uguaglianza $F_s = \vec{F}(z) + \vec{F}(z + \Delta z)$ e passando alla sua forma vettoriale si ha

$$F_s = A \Delta z \rho g = F(z) - F(z + \Delta z)$$

Ricordandomi della *definizione di pressione* () posso dividere a destra per $A \Delta z$ e ottenere

$$\rho g = \frac{P(z) - P(z + \Delta z)}{\Delta z}$$

Cos'è questa, facendo tendere $\Delta z \sim dz \rightarrow 0$? Questa è proprio la *definizione di derivata*, che ci dà

$$\rho g = - \frac{dP}{dz}$$

che ci dà l'equazione differenziale

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g$$

che è detta *l'equazione differenziale dell'equilibrio idrostatico*. Questo risultato vale per un *fluido qualsiasi*: sia fluidi comprimibili che non comprimibili. ■

2. Legge di Stevino

Assumendo *fluidi incomprimibili* (quindi a *densità costante*) abbiamo la *legge di Stevino*.

#Corollario

Corollario 13 (legge di Stevino).

La pressione esercitata su un *oggetto* in un *fluido incomprimibile* ad altezza h è

$$P(z) = P_0 - \rho g z$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del

Si tratta banalmente di integrare l'equazione dell'*equilibrio idrostatico*, da cui si ha la tesi.

■

Adesso vediamo qualche esempio.

#Esempio

Esempio 14 (fluido in acqua).

Un'oggetto *sommerso* in acqua (con la superficie non coperta, quindi subisce la pressione atmosferica) subisce la pressione di *due atmosfere* ad altezza L (in realtà $-L$ ma sono dettagli). Allora si ha che

$$P(-L) = 2P_{\text{atm.}} = P_{\text{atm.}} + \rho g L$$

da cui si ricava

$$L = \frac{P_{\text{atm.}}}{\rho g} \simeq 10.3 \text{ m}$$

Sostanzialmente abbiamo un *andamento lineare*. Notiamo che vale anche la *direzione contraria*? Ovvero ad altezze positive abbiamo una "*pressione negativa*", che spinge l'oggetto in sù.

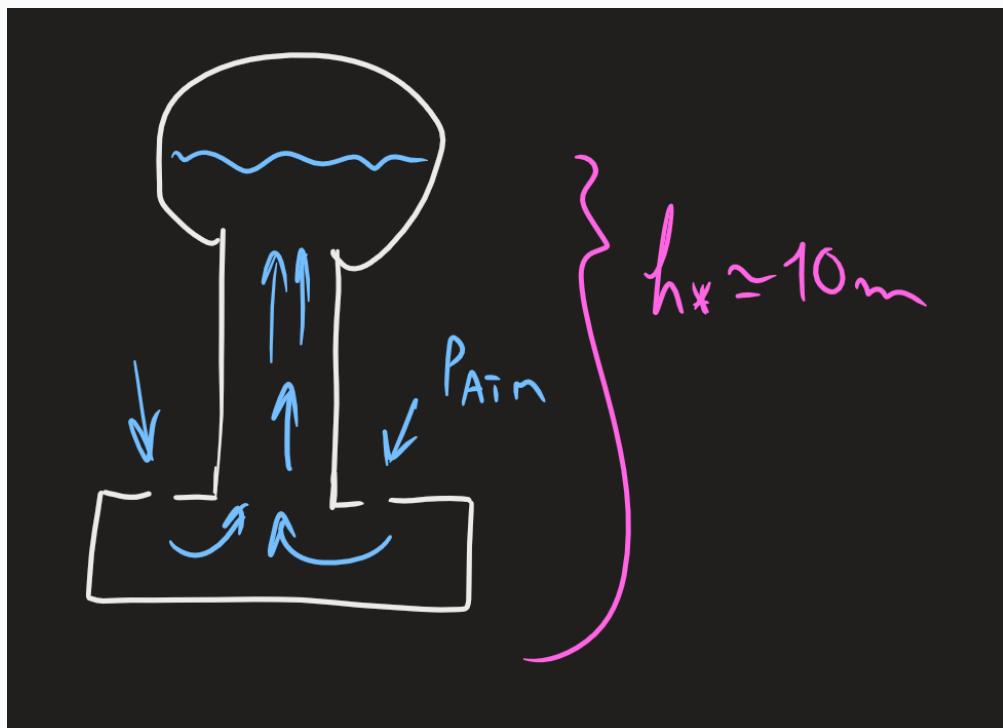
#Esempio

Esempio 15 (colonna d'acqua).

Una colonna d'acqua è dotato di **fori** in basso e di un **contenitore vuoto** in alto. Assumendo che sui fori si eserciti la **pressione atmosferica**, notiamo che l'acqua tende a **salire** fino a circa 10 m.

Questo è dovuto al fatto che nel **vuoto** non c'è nessuna forza, se non quella esercitata dalla **pressione atmosferica** (che poi si trasmette verso il vuoto, per Pascal).

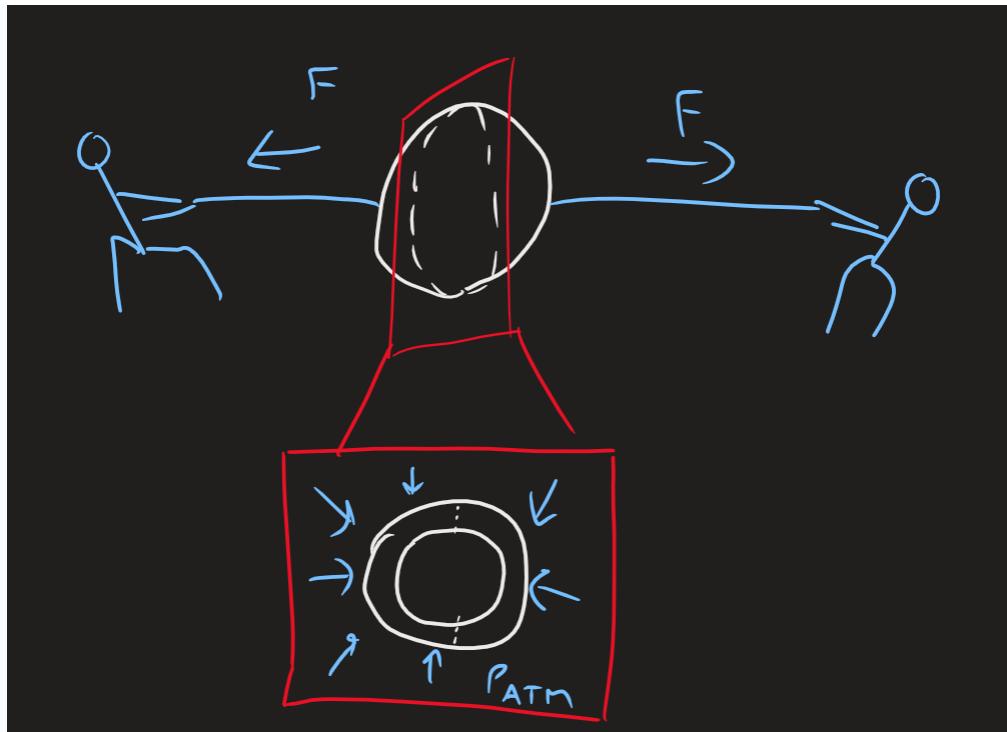
FIGURA 2.1. (Colonna d'acqua)



3. Nota sul Vuoto

Facciamo un breve addendum sul vuoto, che può portare a **conseguenze controintuitive**. Vediamo ad esempio l'**esperimento di Magdeburg**

Esperimento di Magdeburg. Supponiamo di avere **due emisferi** che compongono una **sfera**. In questa sfera c'è il **vuoto** (ovvero non ci sono forze esterne). Adesso tentiamo di **aprire** questa sfera, esercitando delle **forze**. Tuttavia, applicando anche **tantissima forza** (usando tipo degli **elefanti**), non si riesce a separare questi emisferi! Accipicchia, ma cosa c'è? Il fatto è che la **pressione atmosferica** spinge i due **emisferi** ad unirsi il quanto possibile, dal momento che non c'è nessuna **forza che si oppone**.



SEZIONE C. ESERCIZI

Esercizi sui Solidi e Fluidi

Esercizi sui solidi e fluidi (in realtà solo fluidi).

1. Fluidi

#Esercizio

Esercizio 16.

Sia $\rho = 1.24 \text{ kg/L}$ la densità dell'acqua del mar morto. Supponiamo che una persona di altezza h sia in una posizione distesa-inclinata sull'acqua. Qual è la frazione del suo volume?

#Esercizio

Esercizio 17.

Un palloncino pieno d'elio (almeno tale che la sua densità sia maggiore dell'aria) si trova in un treno in moto. Ad un certo si frena, causando una forza apparente.

Come si muove il palloncino?

#Esercizio

Esercizio 18.

Un oggetto pesa 20 N nell'aria e 15 N quando immerso in acqua. Qual è il suo volume?

Termodinamica - Sommario

Tutto sulla termodinamica: dalla teoria cinetica del gas alla trasmissione del calore.

A. TEORIA CINETICA DEI GAS

A1. Modello Preliminare

Modello della Teoria Cinetica dei Gas

Modello della teoria cinetica dei gas: notizie storiche, ipotesi fondamentali e proprietà.

1. Notizie Storiche

Riportiamo qualche notizia storica sulla [termodinamica](#) (in particolare sulla [teoria cinetica dei gas](#))

Bernoulli. Riuscì a "inventare" i risultati principali della [termodinamica](#), purtroppo non venne ricordato dai suoi coetanei.

J. J. Waterson. Riscoprì gli scritti di [Bernoulli](#), tentò di [pubblicarli](#) ma venne rifiutato. Dopodiché venne riscoperto di nuovo e ripubblicato.

R. Clausius. Espone la sua teoria nel suo articolo "Über die Art der Bewegung die wir Wärme nennen" ("[Sul modo del muovere, di cui noi chiamiamo calore](#)")

2. Ipotesi della Teoria Cinetica dei Gas

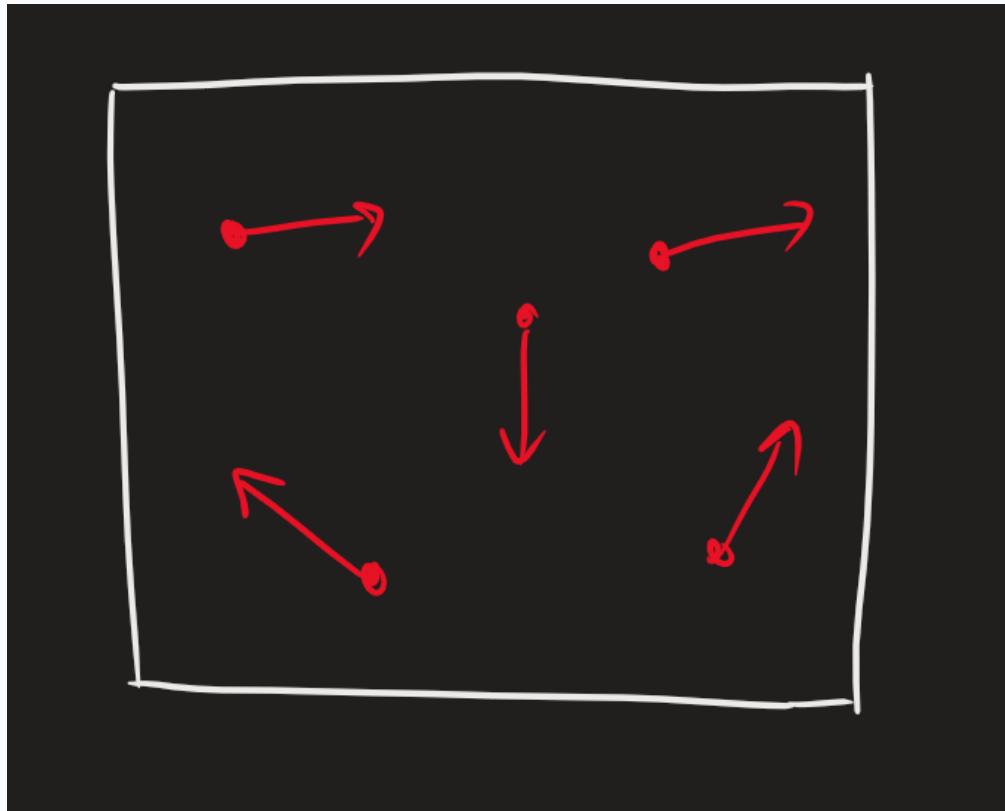
MODELLO. ([Teoria cinetica dei gas](#))

Come modello per la [teoria cinetica dei gas](#) prendiamo una [scatola](#) con delle [piccole particelle dentro](#). Conosciamo i seguenti dati:

- Il numero N di particelle
- La massa m di ogni particella
- Le posizioni \vec{r}_i
- Le velocità \vec{v}_i

- Il volume della scatola V

L'esempio di un modello che rispetta queste ipotesi è la seguente figura.



3. Proprietà della Teoria Cinetica dei Gas

#Proposizione

Proposizione (proprietà della teoria cinetica dei gas).

Supponiamo di avere un modello che rispetta la teoria cinetica dei gas. Allora possiamo calcolare:

i. *Centro di massa*

$$\vec{r}_{\text{CM}} = \sum_i \frac{m\vec{r}_i}{mN} = \sum_i \frac{\vec{r}_i}{N} = \frac{1}{N} \sum_i \vec{r}_i$$

ii. *La quantità di moto del sistema*

$$\vec{p}_{\Sigma} = \sum_i m\vec{v}_i = 0 \iff \frac{d}{dt} \vec{r}_{\text{CM}} = 0$$

iii. *L'energia interna del sistema per gas monoatomici*

$$K_{\Sigma} = \sum_i \frac{1}{2} m\vec{v}_i^2 =: U$$

con U l'*energia del sistema*. Stiamo trascurando l'*energia potenziale* delle particelle. Inoltre l'ultimo vale *soltamente* per i *gas monoatomici*! Altrimenti si

dovrebbe considerare anche l'**energia di rotazione** e di **vibrazione**.

#Osservazione

Osservazione (gas neutro).

Notiamo che se **non abbiamo** forze interne, allora abbiamo un **gas neutro**.

Tra poco vedremo come **definire** la **pressione** per questo sistema.

A2. Definizione Microscopica di Pressione

Definizione Microscopica di Pressione

Definizione microscopica di pressione, basata sulla teoria cinetica dei gas. Corollario: caso monoatomico per l'energia interna.

0. Voci correlate

- Modello della Teoria Cinetica dei Gas

1. Calcoli per Definizione Microscopica della Pressione

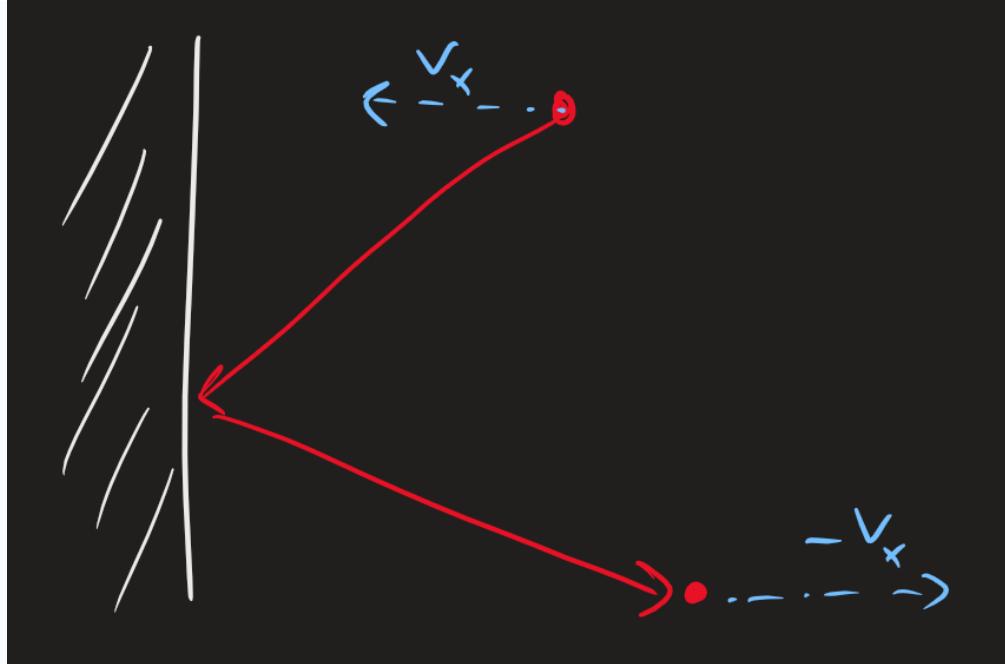
Conoscendo il **modello della teoria cinetica dei gas**, vogliamo capire come si definisce la pressione. Deriviamo questa definizione con delle considerazioni e con dei calcoli.

MODELLO. (*Pressione microscopica*)

Poniamoci una serie di domande.

1. **Cosa succede quando una particella colpisce una parete?**

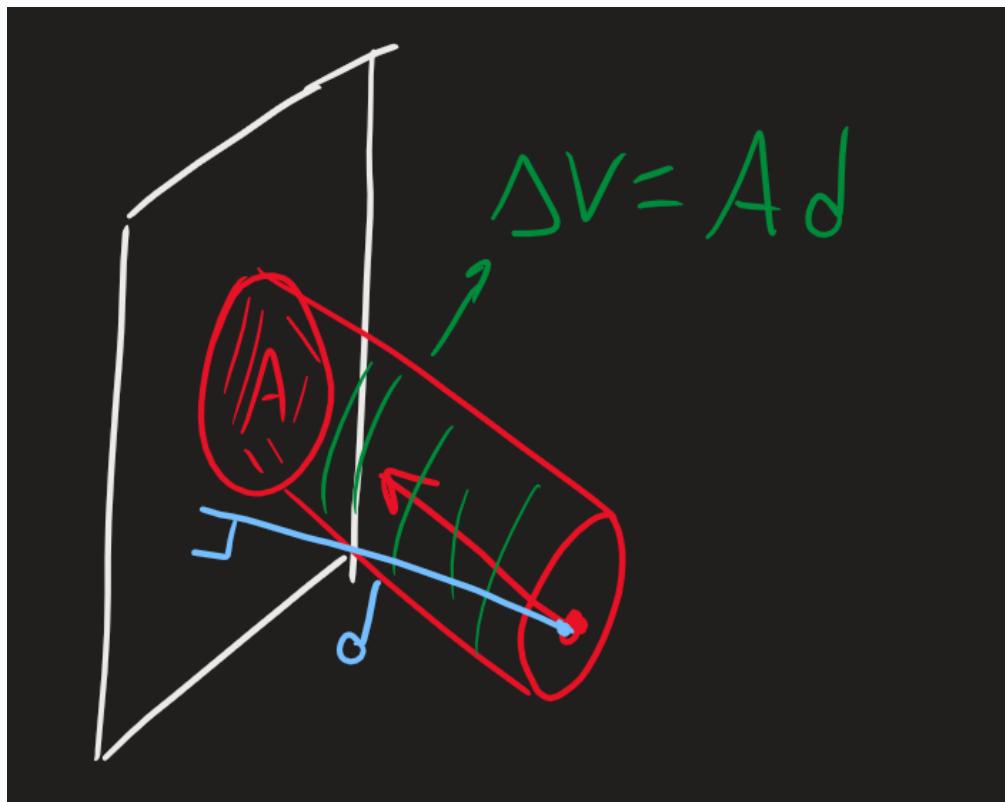
Ci immaginiamo che la particella è un corpo avente massa m e la parete un corpo con una "**massa infinita**" $M \rightarrow +\infty$ (questo è dovuto al fatto che con l'urto la **parete non si muove**). Allora quello che succede è che la pallina cambia **solo la direzione orizzontale**.



Dunque abbiamo la *variazione della quantità di moto* come

$$\Delta p = -2mv_x$$

Adesso vogliamo capire la *quantità di tempo* impiegato per raggiungere la parte. Considerando la *superficie* A proiettata sulla parte, e la distanza d normale alla parete.



Così si ha la variazione di volume $\Delta V = Ad$. Per rispondere alla nostra domanda, basta considerare le *componenti orizzontali*:abbiamo dunque

$$\Delta t = \frac{d}{v_x}$$

2. Quante molecole di particelle abbiamo in questo volume?

Semplice, basta considerare la variazione di volume appena ottenuta, dandoci

$$N \frac{\Delta V}{V} = N \frac{Ad}{V}$$

3. Quanti urti al secondo si ha con la parete?

Per semplicità consideriamo **solo** le particelle con la stessa velocità v . Dunque abbiamo

$$N \frac{Ad}{V} \frac{1}{\Delta t} = N \frac{A}{V} v_x = \xi$$

4. Calcolo finale

Adesso siamo pronti per il calcolo finale. In totale considero la **forza media esercitata dalla parete** come la **quantità di moto** per la **quantità di urti al secondo effettuati**, che è

$$F = \Delta p \cdot \xi = -2mv_x N \frac{A}{V} v_x = -\frac{2mNA}{V} v_x^2$$

Però ci secca dover conoscere la **velocità di tutte le particelle**, scegliamo dunque $v_x = \bar{v}_x$ (ovvero la sua media), che ci dà

$$\bar{F} = -\frac{2mNA}{V} \bar{v}_x^2$$

Considerando che **circa** solo il 50% delle particelle hanno una componente v_x positiva, possiamo dividere per due;

$$\boxed{\bar{F} = -\frac{mNA}{V} \bar{v}_x^2}$$

Dopodiché si generalizza tutto, generalizzando prima la componente x del vettore-velocità, ponendo

$$\bar{v}^2 = \bar{v}_x^2 + \bar{v}_y^2 + \bar{v}_z^2 = 3\bar{v}_x^2$$

Adesso dividendo per l'area si ottiene la pressione

$$\bar{P} = -\frac{mN}{3V} \bar{v}^2$$

Notando che la frazione $\frac{mN}{V}$ ci dà la **densità** (infatti è massa totale su volume), abbiamo

$$\bar{P} = \frac{1}{3} \rho \bar{v}^2$$

che finisce il problema. ■

#Definizione

Definizione (pressione microscopica).

Si definisce la *pressione microscopica* di un gas come

$$\bar{P} = \frac{1}{3} \rho \bar{v}^2$$

#Osservazione

Osservazione (la velocità quadratica media).

Facciamo un breve addendum sulle medie. Come "sostituti" per la velocità media è utile utilizzare la *radice della velocità quadratica media* ("root mean square"), ovvero

$$v_{\text{rms}} := \sqrt{\bar{v}^2} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_i v_i^2}$$

Questo è utile, dato che in questo modo possiamo ricavare la velocità

$$P = \frac{1}{3} \rho \bar{v}^2 \rightarrow v_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{3P}{\rho}}$$

2. Caso Monoatomico

Ricordando l'*energia* per i *gas monoatomici* (Proposizione 1 (proprietà della teoria cinetica dei gas)), abbiamo i seguenti risultati

#Corollario

Corollario (caso monoatomico).

Per *gas monoatomici* valgono i seguenti.

i. *Energia interna*

$$U = \sum_i \frac{1}{2} m v_i^2 = \frac{1}{2} N m \bar{v}^2$$

ii. Energia interna, altra equazione

$$PV = \frac{2}{3}U$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Corollario 3 (caso monoatomico)

Si dimostra la seconda equazione. Si tratta di fare dei semplici calcoli, usando la definizione di pressione e il punto *i*:

$$PV = \frac{mNV}{3V} \bar{v}^2 = \frac{2}{3} \underbrace{\frac{1}{2} N m \bar{v}^2}_{U} = \frac{2}{3} U$$

che dimostra la tesi. ■

A3. Legge dei Gas Perfetti

Legge dei Gas Perfetti

Leggi dei Gas: legge di Boyles, di Charles e di Avogadro. Legge dei gas perfetti: forma moderna e forma storica. Definizione di costante di Avogadro

0. Voci correlate

- Definizione di Temperatura
- Modello della Teoria Cinetica dei Gas

1. Leggi dei Gas

Esponiamo prima una serie di *leggi dei Gas*.

Nota: ci servirebbe sapere cos'è la temperatura, ma per ora è sufficiente pensare all'idea intuitiva di temperatura

#Teorema

Teorema (leggi dei gas).

Le leggi dei *gas* sono delle leggi che ci dicono il *rapporto* tra la *temperatura*, la *pressione* e il *volume* di un gas.

i. Legge di Boyles

Se la temperatura è fissa, allora il **volume** è **inversamente proporzionale** alla **pressione**

$$dT = 0 \implies V \propto \frac{1}{P}$$

ii. Legge di Charles

Se la pressione è fissa, allora il **volume** è **direttamente proporzionale** alla **temperatura**

$$dP = 0 \implies V \propto T$$

iii. Legge di Avogadro

Se la temperatura e la pressione sono fissate, allora il **volume** è **direttamente proporzionale** al **numero di particelle**

$$dT, dP = 0 \implies V \propto N$$

2. Legge dei Gas Perfetti

Le **leggi dei gas** possono essere riassunte con la **legge dei gas perfetti**.

2.1. Forma Moderna

#Definizione

Teorema (legge dei gas perfetti, forma moderna).

Per un **gas perfetto** vale la formula

$$PV = Nk_B T$$

dove k_B è la **costante di Boltzmann**,

$$k_B = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$$

2.2. Forma Storica

#Osservazione

Osservazione (osservazione preliminare).

Notiamo che la **forma moderna** presuppone la conoscenza del **numero di particelle** N e la costante di Boltzmann k_B .

Tuttavia ai tempi, questi valori non erano noti. Quindi quello che facevano era quello di prendere una **quantità di riferimento** (che definiremo come la **costante di Avogadro**) e misurare la materia secondo quella quantità di riferimento. In particolare si ha

$$Nk_B = \frac{N}{N_A} k_B N_A \quad k_B N_A = R$$

Si definisce R come la **costante dei gas perfetti**, con $R = 8.31 \text{ J/(kg mol)}$. In particolare ricaviamo una nuova misura, ovvero le **mole**: si definisce

$$\frac{N}{N_A} = n \text{ mol}$$

#Definizione

Definizione (costante di Avogadro).

Si definisce la **costante di Avogadro** come il **numero di atomi** presente in **dodici grammi** dell'atomo ^{12}C (carbonio). In particolare questa scelta è comoda, dato che avrei la "*Unified Atomic Mass Unit*" definita come

$$1 \text{ g/mol} = u = 1.66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

Ovvero un protone pesa esattamente **una u** .

#Teorema

Teorema (legge dei gas perfetti, forma storica).

Per i **gas perfetti** vale la seguente relazione

$$PV = nRT$$

A4. Energia Cinetica Media di una Molecola

Energia Cinetica Media di una Molecola

*Esito finale della teoria cinetica dei gas. L'energia cinetica media di una molecola.
Definizione di temperatura come funzione dell'energia.*

0. Voci correlate

- Legge dei Gas Perfetti
- Definizione Microscopica di Pressione
- Modello della Teoria Cinetica dei Gas

1. Energia Cinetica Media di una Molecola in un Gas Monoatomico

Ricordiamo i risultati appena ricavati.

i. *Legge dei gas perfetti*

$$PV = Nk_B T$$

ii. *Energia interna per un gas monoatomico*

$$PV = \frac{2}{3}U$$

Possiamo combinare queste leggi con la seguente.

#Teorema

Teorema (energia cinetica media di una molecola in un gas monoatomico).

Vale che l'*energia cinetica* di una *molecola* in un gas monoatomico è

$$\overline{K} = \frac{3}{2}k_B T$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 1 (energia cinetica media di una molecola in un gas monoatomico)

Si tratta di fare due calcoli. In particolare si sfrutta il fatto che stiamo *ignorando* l'energia potenziale delle particelle:

$$\frac{2}{3}U = Nk_B T \iff U = \overline{K} = \frac{3}{2}k_B T$$

che è la tesi. ■

#Osservazione

Osservazione (definizione termodinamica della temperatura).

Grazie al risultato appena enunciato, possiamo definire la *temperatura* nel senso *termodinamico*: non è altro che la *misura dell'agitazione media di una particella*.

Infatti l'**energia interna** è solamente in **funzione del tempo**, da cui si ha che **la temperatura** è **direttamente proporzionale** all'**energia cinetica**.

B. CALORIMETRIA

B1. Temperatura

Definizione di Temperatura

Definizione intuitiva di temperatura. Definizione termodinamica di temperatura. Le scale della temperatura: Fahrenheit, Celsius e Kelvin. Legge di Gay-Lussac.

0. Voci correlate

- Energia Cinetica Media di una Molecola

1. Le scale della temperatura

Prima di definire la **temperatura**, parliamo prima del modo in cui **la misuriamo** (scelta strana!)

- **Fahrenheit**
 - 0 °F corrisponde al **congelamento dell'acqua salata**; circa –18 °C.
 - 321 °F corrisponde al **punto di ebollizione dell'acqua**
- **Celsius**
 - 0 °C corrisponde al **congelamento dell'acqua**
 - 100 °C corrisponde al **punto di ebollizione dell'acqua**
- **Kelvin** - Fare attenzione a questo
 - 0 K è il "**zero assoluto**", ovvero la minima temperatura raggiungibile
 - Per convertire si usa $T(\text{°C}) = T(K) = -273.15$
 - Si sceglie 273.15 K perché questa rappresenta il **punto triplo dell'acqua** (ovvero lo stato in cui possono coesistere il **gas**, il **liquido** e il **solido**).

Notiamo che c'è un legame tra queste tre scale.

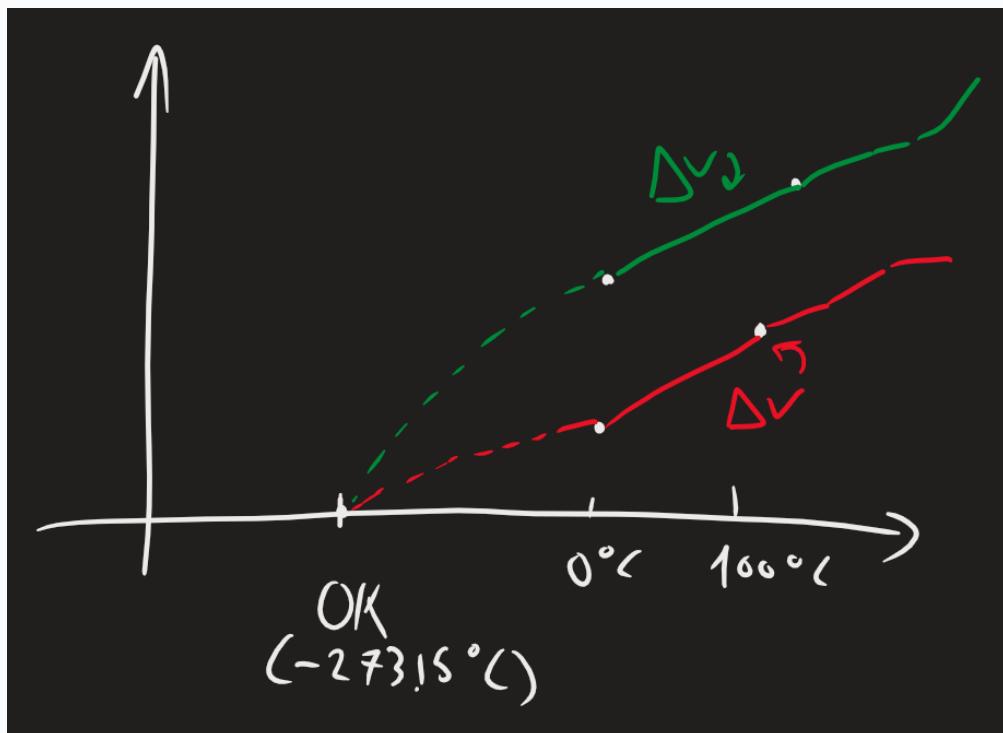
#Teorema

Teorema (legge di Gay-Lussac).

Si osserva che con una variazione di temperatura $0^\circ\text{C} \rightarrow 100^\circ\text{C}$ c'è un'**espansione del gas** ΔV che sia proporzionale alla temperatura.

In particolare si ha che **tutte le espansioni** crollano inevitabilmente su $V = 0 \text{ m}^3$, con $T = 0 \text{ K}$.

FIGURA 1.1. (Legge di Gay-Lussac)



2. Definizione di Temperatura

#Definizione

Definizione (temperatura termodinamica).

Per **temperatura termodinamica** si intende il "**grado di agitazione medio**" delle molecole in un gas dato (1).

B2. Capacità Termica e Calore Specifico

Capacità Termica e Calore Specifico

Definizione di capacità termica (quantità estensiva), calore specifico per mole e per massa (quantità intensiva). Tabella di valori. Teorema dell'equipartizione dell'energia. Esempio: caso $N = 2$.

0. Voci correlate

- Definizione di Temperatura
- Energia Cinetica Media di una Molecola

1. Capacità Termica

Definiamo delle *quantità* della *calorimetria*.

#Definizione

Definizione (capacità termica).

Si definisce la *capacità termica* come la *variazione dell'energia interna* dovuta alla *variazione di temperatura*. A *volumen costante*, si definisce come

$$C_V = \left(\frac{\Delta U}{\Delta T} \right)_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V$$

Si definisce in una maniera analoga a *pressione costante*, C_P .

Inoltre si definisce la *capacità termica* come una "*quantità intensiva*", ovvero che *dipende dalla quantità di materia*. Infatti ne vediamo un caso specifico

#Corollario

Corollario (capacità termica di un gas monoatmico).

Secondo la *teoria cinetica dei gas*, si ha la *capacità termica a volume costante* C_V viene calcolata come

$$[C_V] = \frac{3}{2} N k_B = \boxed{\frac{3}{2} n R}$$

2. Calore Specifico

Adesso proviamo a "*togliere la quantità di materia*" dalla definizione di capacità termica

#Definizione

Definizione (calore specifico per mole e per massa).

Si definisce il *calore specifico per mole* come la *capacità termica* divisa per il numero di *mole*. Ovvero

$$c_V = \frac{C_V}{n} \wedge c_P = \frac{C_P}{n}$$

analogamente si definisce il *calore specifico per massa* come

$$c = \frac{C_V}{m}$$

Tuttavia questa non è importante, si considera spesso il *calore specifico per mole*.

#Corollario

Corollario (caso monoatomico).

Si ha per *gas monoatomici* che

$$c_V = \frac{3}{2}R$$

Adesso vediamo una *relazione* per *calore specifico*. Per ora la lasciamo così, la giustificheremo con le *trasformazioni termodinamiche* (e col *primo principio della termodinamica*): *Trasformazione Isobara*

#Teorema

Teorema (relazione di Mayer).

Per i gas vale che

$$c_V - c_P = R$$

3. Tabelle

Vediamo un caso pratico

#Esempio

Esempio (tabelle di valori per alcuni elementi).

Si riporta la seguente *tabella di valori* per il *calore specifico a volume costante*, la *massa molare* e la *costante dei gas* calcolata (*tabella 1.1.*).

Da notare che per i *primi quattro elementi* il valore calcolato a destra è proprio $\frac{3}{2}R$, che è proprio il suo *calore specifico*!

TABELLA 1.1.

Elemento	C_V	g/mol	J/(K mol)
Elio	3115	4.003	12.47
Neon	617.9	20.18	12.46
Argon	312.2	39.99	12.46
Xeno	94.97	131.29	12.46

4. Teorema dell'equipartizione dell'energia

Vediamo un modo per stimare il suo *calore specifico a volume costante*, a seconda della quantità delle mole che ha.

#Teorema

Teorema (equipartizione dell'energia).

Dato un sistema termodinamico in equilibrio, si ha che ciascun grado di libertà contribuisce, *in media*, della seguente quantità di *energia*

$$\frac{1}{2}Nk_B T \iff \frac{1}{2}RT$$

Ovvero

$$c_V = \frac{\lambda}{2}R$$

con λ i *gradi di libertà*.

#Corollario

Corollario (caso $N = 2$).

Consideriamo un *gas biatomico*. Allora abbiamo che:

- i. Abbiamo tre *tipi di traslazioni*, che ci danno *tre* gradi di libertà. Quindi abbiamo $\frac{3}{2}R$
 - ii. Abbiamo *due assi di rotazione* (non consideriamo lungo la *retta tangente in verticale*, dato che non avrebbe senso). Abbiamo potenzialmente $\frac{2}{2}R$
 - iii. Abbiamo una *vibrazione* possibile. Ovvero *potenzialmente due gradi di libertà*, dato che abbiamo sia il *potenziale elastico* che l'*energia cinetica* associata alla vibrazione. Ovvero $\frac{2}{2}R$
- In totale si ha

$$\frac{3}{2}R \leq c_V \leq \frac{7}{2}R$$

Per dire se ci sono effettivamente gli *effetti di rotazione, vibrazione, eccetera...* o meno, bisogna usare la *meccanica quantistica*.

B3. Equilibrio Termico

Equilibrio Termico

Osservazione: equilibrio termodinamico. Legge fondamentale della calorimetria, conservazione dell'energia termica per calore specifico uguale e diverso.

0. Voci correlate

- Capacità Termica e Calore Specifico
- Definizione di Temperatura

1. Legge fondamentale della calorimetria

Vediamo un risultato pratico della *calorimetria*.

#Teorema

Teorema (legge fondamentale della calorimetria).

Si calcola la *variazione dell'energia interna* in funzione della *variazione della temperatura* come

$$\Delta U = mc\Delta T$$

con m la massa, c il *calore specifico per massa* (1).

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 1 (legge fondamentale della calorimetria)

Abbiamo per definizione

$$\Delta U = C_V\Delta T$$

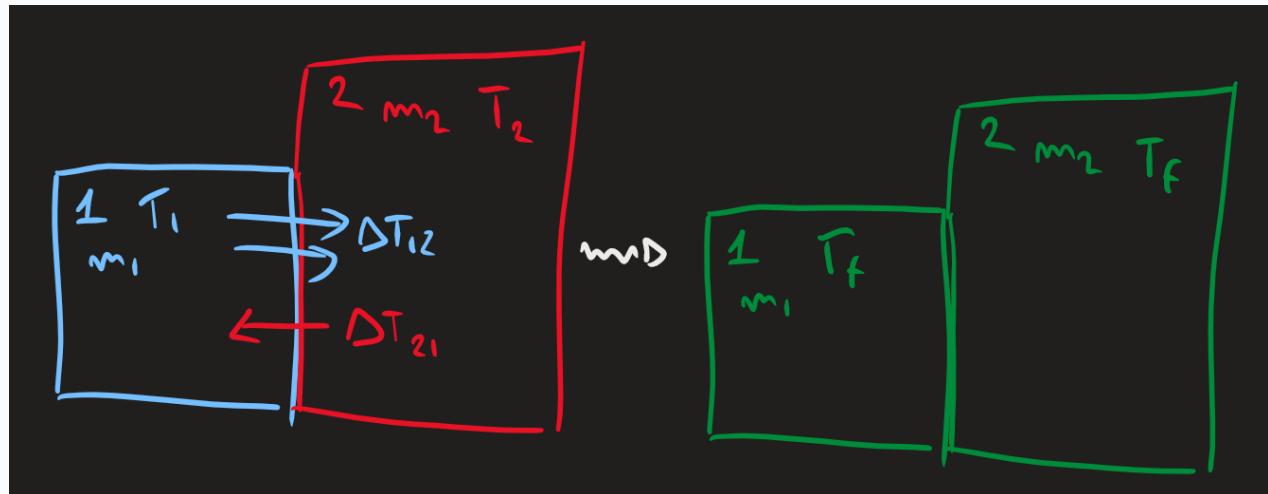
Usando la *definizione di calore specifico per massa si ha* $C = mc$, che ci dà la tesi finale

$$\Delta U = mc\Delta T$$

2. Equilibrio Termico

Per considerare l'**equilibrio termico**, vediamo il seguente problema.

PROBLEMA. Due corpi a contatto, *in un sistema isolato*, con *temperature e masse diverse* m_1, T_1 e m_2, T_2 causano a vicenda una variazione della temperatura. Come si determina la *temperatura finale comune* T_f ?



#Teorema

Teorema (equilibrio termico, conservazione dell'energia termica).

La soluzione al problema appena data è

$$T_f = \frac{m_1 c_1 T_1 + m_2 c_2 T_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2}$$

In particolare per *calore specifico uguale* si ha

$$c_1 = c_2 = c \implies T_f = \frac{m_1 T_1 + m_2 T_2}{m_1 + m_2}$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 2 (equilibrio termico, conservazione dell'energia termica)
Consideriamo che *siamo in un sistema isolato*, ovvero siamo privi di dissipazioni. Ovvero $\Delta E = 0$. Adesso considerando i *cambiamenti di energia interna* dei corpi, abbiamo che sono uguali e opposte (infatti devono rendere la variazione dell'energia totale nulla)

$$\Delta U_1 = -\Delta U_2$$

Adesso esplicitiamo tutto usando la [legge fondamentale della calorimetria](#) ([Teorema 1](#) ([legge fondamentale della calorimetria](#))), in particolare le differenze di temperatura ΔT_1 e ΔT_2

$$m_1c_1(T_f - T_1) = m_2c_2(T_f - T_2)$$

Adesso si tratta di isolare T_f , e facendo due calcoli semplici e banali si ottiene la tesi

$$T_f = \frac{m_1c_1T_1 + m_2c_2T_2}{m_1c_1 + m_2c_2}$$

Per vedere il caso $c_1 = c_2 = c$, provate a raccogliere tutto per c e vedere cosa succede. ■

C. PRIMO PRINCIPIO

C1. Calore e Lavoro Termodinamico

Definizione di Calore e Lavoro Termodinamico

Definizione di calore e lavoro dal punto di vista termodinamico. Definizione analogico.

Definizione precisa del lavoro termodinamico.

0. Voci correlate

- [Definizione di Lavoro](#)

1. Definizione Analogica tra Calore e Lavoro

#Definizione

Definizione (calore e lavoro).

Si definiscono il **calore** e il **lavoro** come la quantità di **energia trasferita** tra sistemi.
In particolare:

- Il **calore** è la **quantità di energia trasferita** tra **sistema e ambiente** (o tra **due sistemi**) a causa di una variazione nella **temperatura**
- Il **lavoro** è la **quantità di energia trasferita** tra **sistema e ambiente**, dovuto a **cambiamenti di parametri esterni** (come il volume, la pressione, eccetera...).

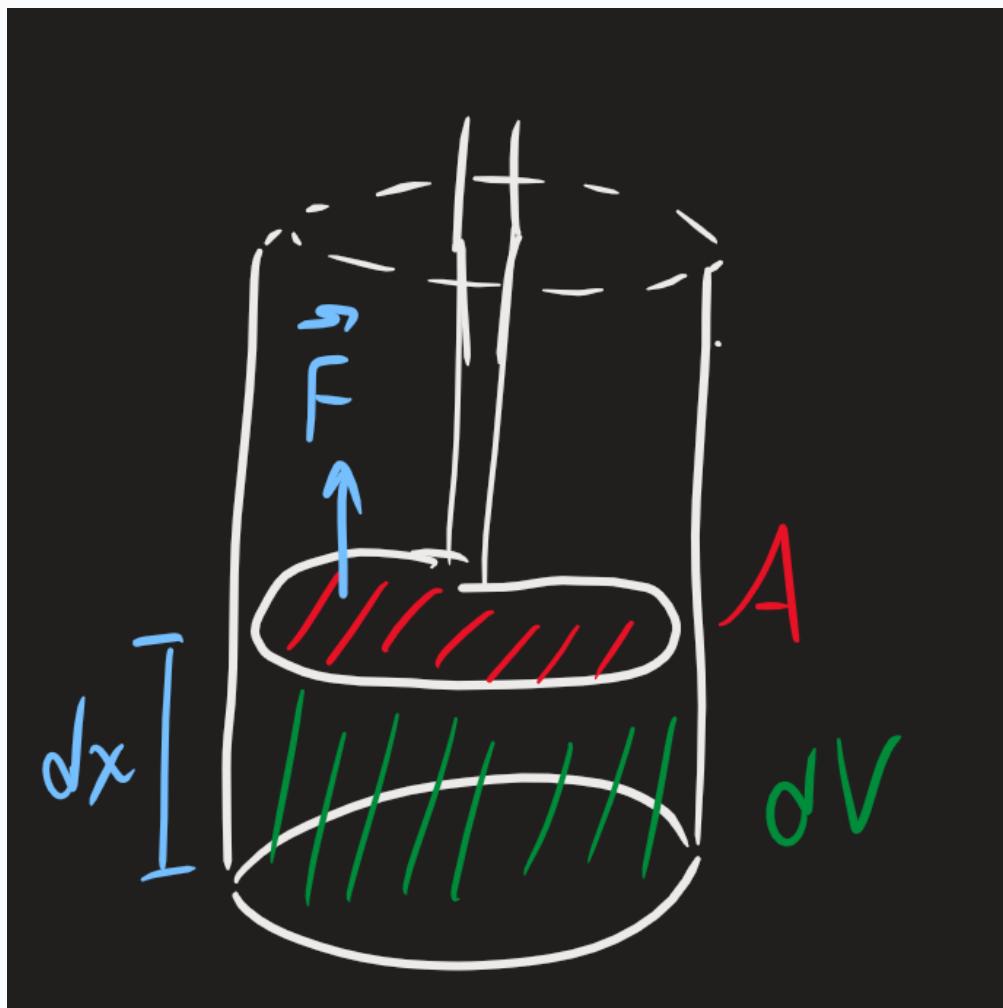
A livello fondamentale, vedremo che il **calore** è la *"energia inutile e inutilizzabile"*, d'altro canto il **lavoro** è quella *"utile e trasferibile"*.

2. Definizione di Lavoro Termodinamico

Vediamo di derivare il **lavoro** dal punto di vista termodinamico, richiamandoci alla definizione classica del lavoro ([Definizione 1 \(lavoro compiuto da una forza rispetto ad uno spostamento\)](#))

$$W := \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

ovvero l'integrale della forza usata per compiere uno spostamento. Adesso, nel [contesto della termodinamica](#) consideriamo un pistone che si muove in alto, dovuto alla pressione del gas.



Osservo che abbiamo: la forza \vec{F} che spinge verso l'**alto**, uno spostamento $d\vec{x}$, e una variazione di volume dV . Inoltre c'è anche la pressione nel gas, che è invariata. Poiché gli spostamenti sono tutti concordi, possiamo considerare tutto come dei scalari positivi.

Allora per definizione di **pressione** ([Definizione 1 \(pressione\)](#)) si ha

$$F = PA$$

Adesso, per avere qualcosa che ci "ricordi dell'integrale", consideriamo che lo spostamento dx è proporzionale al cambiamento di volume dV . Per rendere tutto giusto, lo dividiamo per l'area.

$$dx = \frac{dV}{A}$$

Adesso moltiplico da ambo i lati per dx

$$F \cdot dx = PA \cdot \frac{dV}{A} = P \cdot dV$$

Infine integro da ambo i lati, ottenendo

$$W = \int P \, dV$$

Abbiamo due scelte per il *segno dell'integrale*: se consideriamo il *lavoro compiuto sul gas*, è *negativo*. Se invece è compiuto sull'*ambiente*, è *positivo*. Adesso siamo pronti per definire tutto

#Definizione

Definizione (lavoro termodinamico).

Si definisce il *lavoro compiuto sul gas in un sistema termodinamico* come l'integrale

$$W := - \int P \, dV$$

C2. Definizioni Miste

Definizioni Relative alla Termodinamica

Nozioni relative alla termo dinamica: variabile di stato, equazione di stato, equilibrio termico-meccanico-termodinamico, trasformazioni, trasformazioni quasi-statiche, ciclo termodinamico, reversibilità dei processi.

1. Definizioni Relative alla Termodinamica

Diamo una breve carrellata di *definizioni relative alla termodinamica*.

#Definizione

DEFINIZIONE. (*Variabile, equazione di stato*)

Vogliamo un modo per *descrivere* un *sistema termodinamico*.

Allora usiamo le *variabili di stato*, che sono delle variabili che descrivono questo sistema.

- Esempi di variabili di stato: P, T, V, n, U, S (vedremo l'ultima a dopo).
- Esempi di non-variabili di stato: Q, W (queste descrivono un *processo!*)
Unendo le *variabili di stato* per formare un'*equazione* otteniamo un'*equazione di stato*.
- Esempio: la legge dei gas perfetti $PV = nRT$.

#Osservazione

OSSERVAZIONE. (*Variazione infinitesimale di calore e di lavoro*)

Dato che il *calore e il lavoro* non descrivono lo stato di un sistema, quando prendiamo le loro variazioni infinitesimali scriviamo

$$\delta Q, \delta W$$

proprio per enfatizzare questo aspetto.

#Definizione

DEFINIZIONE. (*Equilibrio termico, meccanico e termodinamico*)

Vogliamo capire cosa intendiamo quando parliamo di *equilibrio di un sistema termodinamico*.

- *Termico*: Stato in cui le temperature dei sistemi è la stessa
- *Meccanico*: Stato in cui la risultante delle forze è nulla. Ovvero $W = 0$
- *Termodinamico*: Stato in cui si ha sia *equilibrio termico che meccanico*. Ovvero tutte le variabili di stato sono delle costanti

#Osservazione

OSSERVAZIONE. (*L'equilibrio esiste?*)

Notiamo che non è banale trovare *equilibri perfetti*. Di solito faremo accettare degli stati in cui le variabili di stato cambiano con un andamento *infinitesimamente lento*, quindi possiamo "*tralasciare*" questa leggera variazione. Diremo che queste sono delle *trasformazioni quasi-statiche*.

#Definizione

DEFINIZIONE. (*Trasformazione termodinamica, trasformazione quasi-statica e ciclo termodinamico*)

Una *trasformazione termodinamica* è un *cambiamento di stato*. In particolare si dice che è:

- **Quasi-statica** se lo idealizziamo come un processo per cui un *sistema* rima in equilibrio
- **Ciclica** se parte e finisce allo stesso stato
- **Reversibile** se si può "invertire" la trasformazione senza problemi
- **Spontanea** se serve una quantità di lavoro da esterno per invertire il processo

C3. Primo Principio della Termodinamica

Primo Principio della Termodinamica

Primo principio della termodinamica (la conservazione dell'energia). L'esperimento di Joule. Enunciato del primo principio della termodinamica (forma discreta e forma infinitesimale)

0. Voci correlate

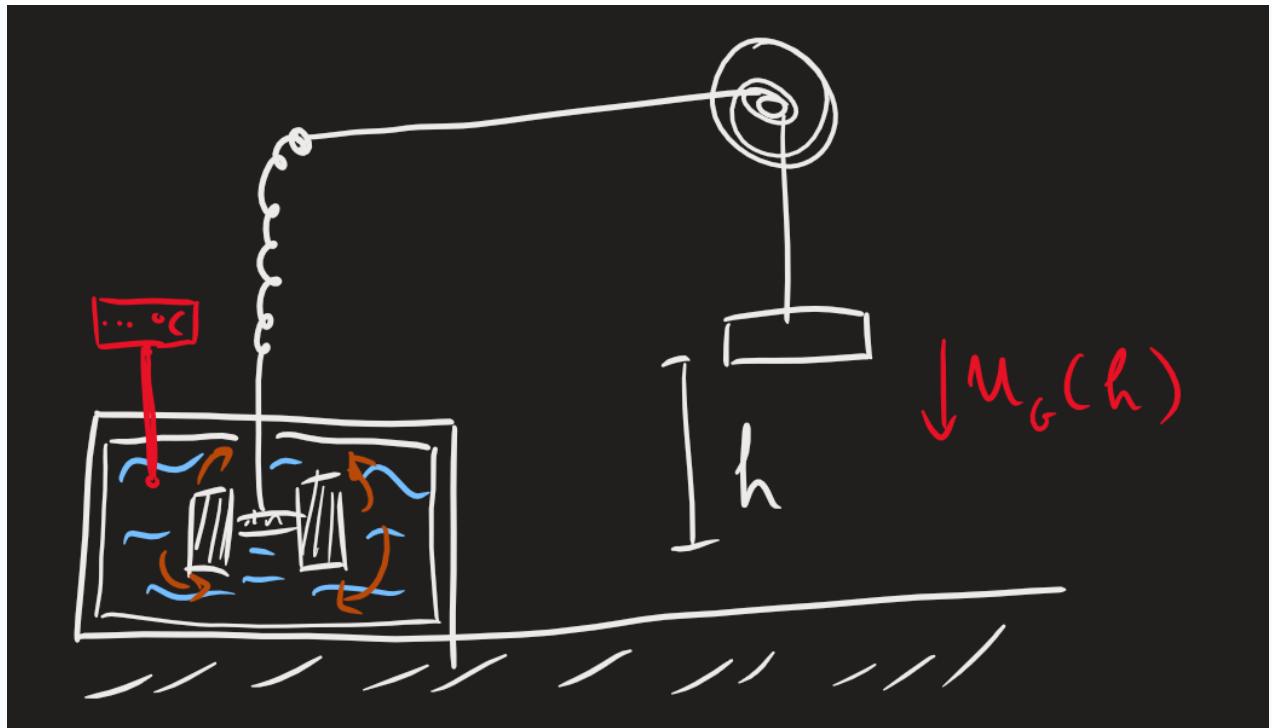
- Definizione di Calore e Lavoro Termodinamico

1. Esperimento di Joule

Prima di enunciare uno dei teoremi, leggi, principi più importanti della fisica (così tanto talmente da far sembrare una cosa non-scientifica), si riporta l'*esperimento di Joule* per dare una motivazione e giustificazione del principio.

ESPERIMENTO. (*Di Joule*)

Supponiamo di avere un *contenitore d'acqua termicamente isolato*, con delle *pale* dentro che sono collegate ad un sistema di *funi* che sua volta collegano il sistema ad un blocco (*peso*).



Adesso facciamo *abbassare il peso*, compiendo del *lavoro sul sistema* e facendo causare un moto di rotazione alle *pale*. Ad un certo punto le pale si fermano: dove è finito lavoro? Cosa succede?

Misurando la temperatura con un termometro, notiamo che si alza la *temperatura* dell'acqua, che corrisponde all'*aumento* dell'*energia interna* del sistema.

Conclusione: abbiamo $\Delta U = mgh = C\Delta T$ energia *conservata* ma *convertita* da *lavoro* in *calore*.

2. Primo Principio della Termodinamica

#Teorema

Teorema (primo principio della termodinamica).

Si ha che la *variazione dell'energia in un sistema termodinamico* è sempre *conservato*, con

$$\boxed{\Delta U_{\Sigma} = Q + W}$$

In particolare $Q > 0$ è *calore entrante*, $Q < 0$ *calore uscente*, W il *lavoro compiuto sul sistema*.

#Teorema

Teorema (primo principio della termodinamica, forma infinitesimale).

Alternativamente, considerando una *quantità infinitesimale* dU , si ha

$$dU = \delta Q + \delta W$$

Il motivo per cui si usa la lettera δ e non d per rappresentare la quantità infinitesimale, consiste nel fatto che il calore e il lavoro *non* rappresentano lo stato di un sistema termodinamico. Quindi si usa δ per enfatizzare tale proprietà.

#Osservazione

Osservazione (questo vale anche per l'universo).

Dato che l'*universo* deve essere un *sistema isolato* (altrimenti ciò che sarebbe il "*non universo*" verrebbe comunque accorpato nell'universo), questo principio vale anche per l'*universo*: ovvero che *tutta* l'energia dell'universo viene sempre conservata.

C4. Trasformazione Isobara

Trasformazione Isobara

Trasformazione isobara: modelli tipico, caratteristiche. Definizione specifica.

0. Voci correlate

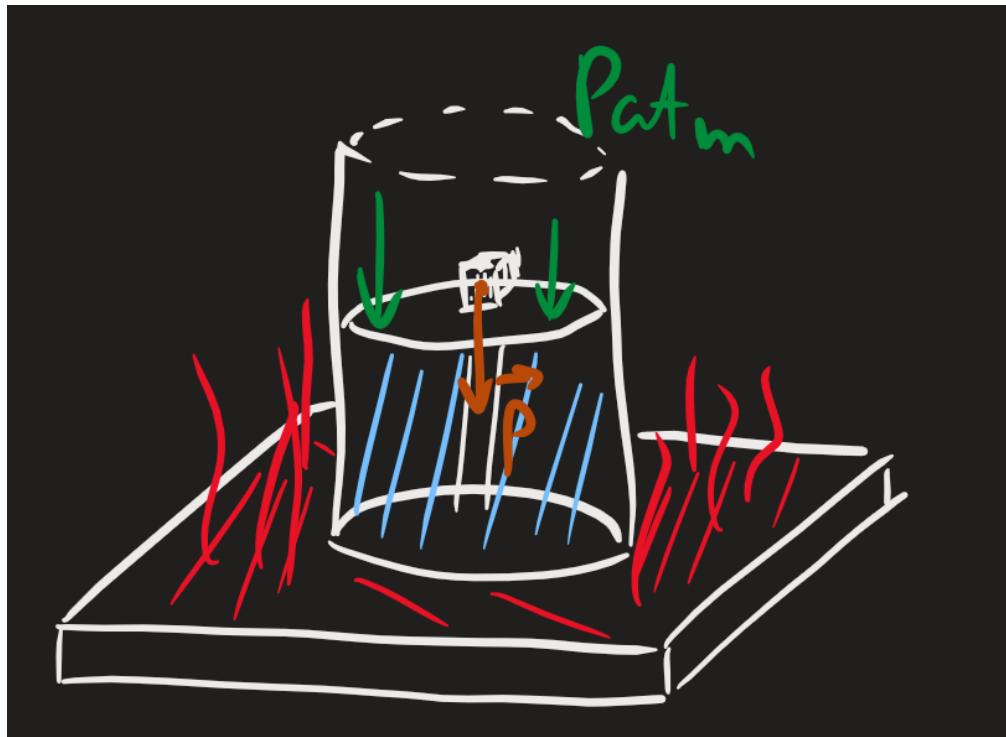
- Legge dei Gas Perfetti
- Primo Principio della Termodinamica
- Definizione di Calore e Lavoro Termodinamico
- Equilibrio Termico

1. Modello Tipico della Trasformazione Isobara

Consideriamo una *trasformazione* dove non c'è nessuna *variazione di pressione*. In particolare consideriamo il seguente "*modello tipico*" per ricavare le caratteristiche

MODELLO. (*Trasformazione isobara*)

Prendiamo un *pistone libero*, su cui poggiamo un cubetto, tutto poggiato su una *piastra calda*. Il sistema è in *equilibrio meccanico*.



Ho che la pressione del gas è la *pressione atmosferica* e *la pressione esercitata dalla forza peso del cubo*, ovvero

$$P = P_{\text{atm}} + \frac{F_P}{A}$$

(in realtà non c'importa tanto, basta che sia costante). Adesso aumentiamo la *temperatura* con una variazione ΔT . Da qui abbiamo una cascata di effetti.

i. *Variazione di volume*

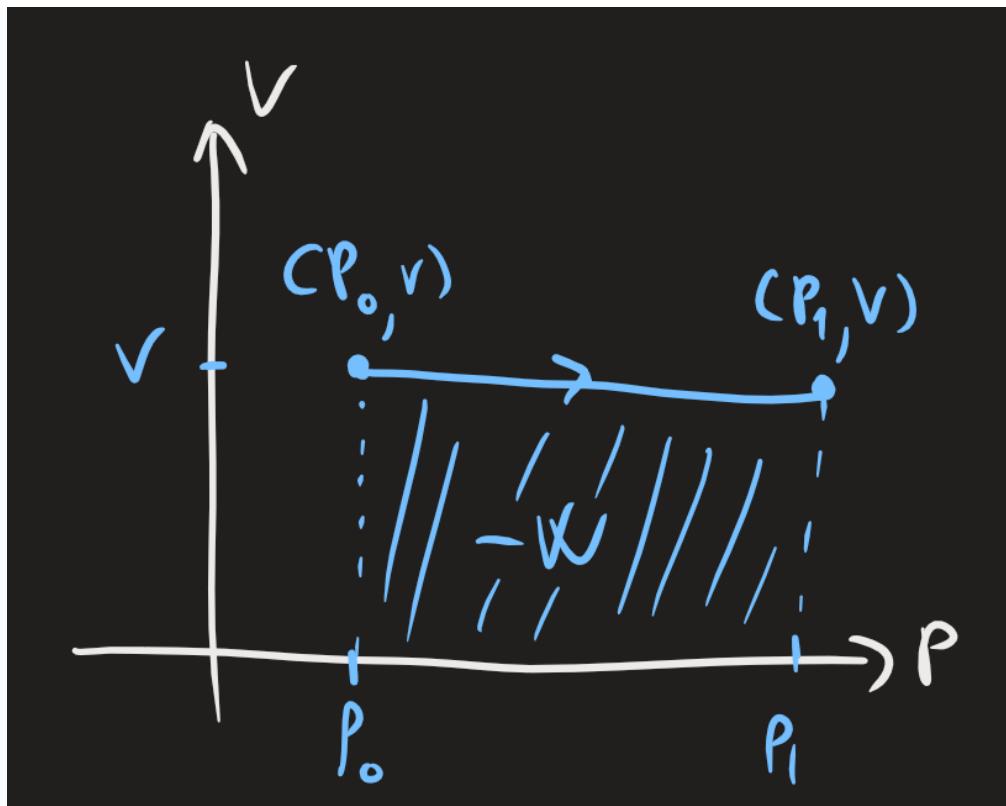
Dato che sto supponendo la *pressione costante*, il gas deve *espandersi* dal momento che ho maggior *movimento delle particelle*. Per determinare tale variazione di volume ΔV usiamo la *legge dei gas perfetti*, che ci dice

$$PV = nRT$$

Dato che P è *costante*, possiamo isolare la V ottenendo

$$V = \frac{nRT}{P}$$

ovvero abbiamo la funzione costante



e passando all'incremento si ha

$$\Delta V = \frac{nR}{P} \Delta T$$

ii. *Lavoro compiuto sul gas*

Adesso calcolare il lavoro è semplice, si tratta di fare base per altezza.

$$W = -P\Delta V = -nR\Delta T$$

iii. *Energia interna e calore scambiato*

Infine vogliamo considerare la *variazione totale dell'energia interna*. Considerando di aver a che fare con uno *scambio di calore*, si ha

$$\Delta U = n c_v \Delta T$$

Per il *primo principio della termodinamica* si ha anche

$$\Delta U = Q + W$$

Quindi il calore scambiato è

$$Q = n(R + C_v)\Delta T$$

Ricordiamoci che abbiamo pure di avere *per definizione*

$$Q = n c_P \Delta T$$

quindi combinando tutto si ha

$$c_P = R + c_V$$

che è proprio la *relazione di Mayer* (Teorema 5 (relazione di Mayer)).

2. Definizione di Trasformazione Isobara

#Definizione

Definizione (trasformazione isobara).

Si dice *trasformazione isobara* una *trasformazione termodinamica* che mantiene una *pressione costante*. Ovvero, la *funzione* volume dipende solo dalla temperatura

$$V(T) = V = \frac{nR}{P}T$$

ovvero sul *diagramma PV* è costante.

#Proposizione

Proposizione (caratteristiche della trasformazione isobara).

Si ha che per una trasformazione isobara valgono che:

i. *Il lavoro* si calcola come

$$W = -P\Delta V = -nR\Delta T$$

ii. *Il calore* si calcola come

$$Q = n(R + c_V)\Delta T = nc_P\Delta T$$

C5. Trasformazione Isoterma

Trasformazione Isoterma

Trasformazione isoterma. Modello tipico, definizione sistematica.

0. Voci correlate

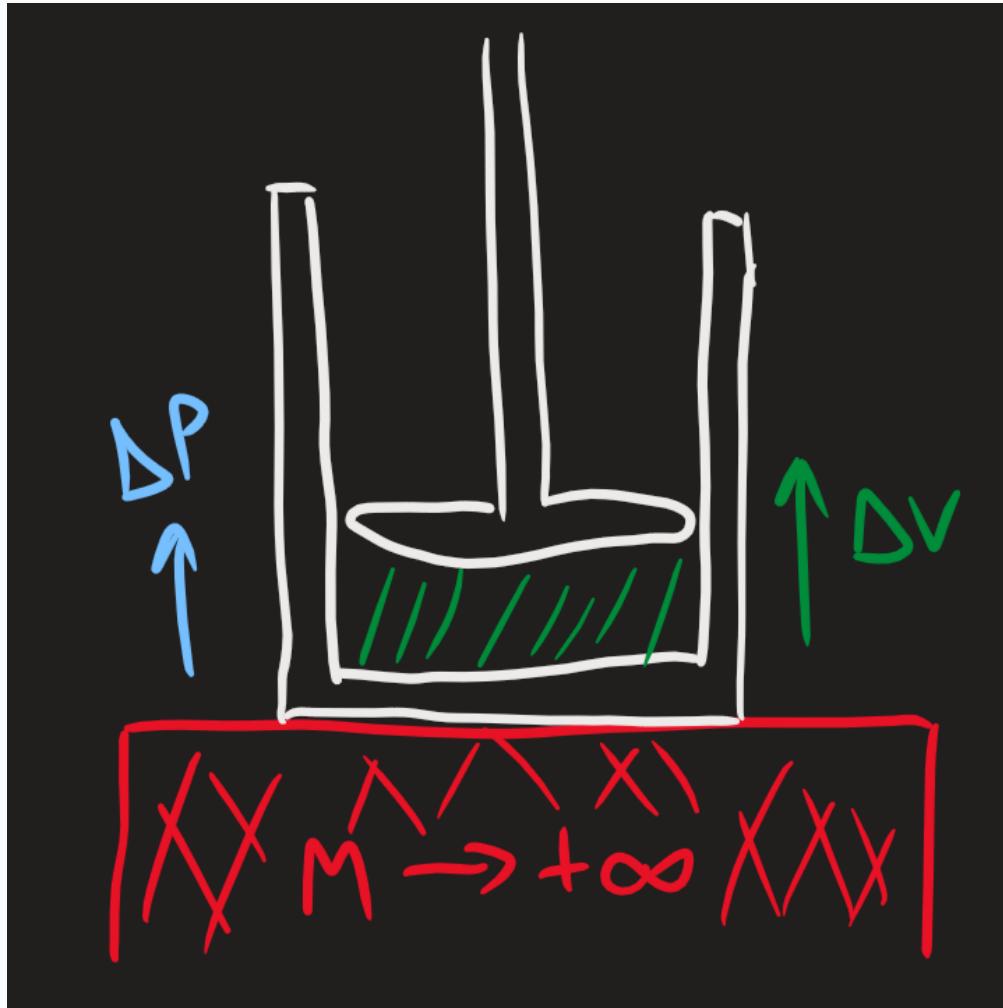
- Primo Principio della Termodinamica

- Definizione di Calore e Lavoro Termodinamico
- Legge dei Gas Perfetti

1. Modello Tipico della Trasformazione Isoterma

MODELLO. (*Trasformazione isoterma*)

Supponiamo di avere un *pistone libero* posto su una *fonte di calore*, così grande da rendere la *temperatura di equilibrio* T fissa (infatti si dice che abbiamo un "*serbatoio termico infinito*").



Quindi aggiungo *calore*, senza far *variare la temperatura* T . Da qui abbiamo un cambiamento sia nella *pressione* che nel *volume*. Da qui ci sono una serie di conseguenze

i. *Energia interna*

Dato che l'energia interna si definisce tramite la *variazione della temperatura* ΔT (Teorema 1 (legge fondamentale della calorimetria)), si ha che essa è nulla. Infatti

$$\Delta U = nc_v\Delta T = 0$$

ii. *Lavoro e Calore*

Allora, per il *primo principio della termodinamica* (Teorema 1 (primo principio della termodinamica)), qui si ha che il *lavoro* e il *calore* sono la stessa quantità, solo che sono opposte.

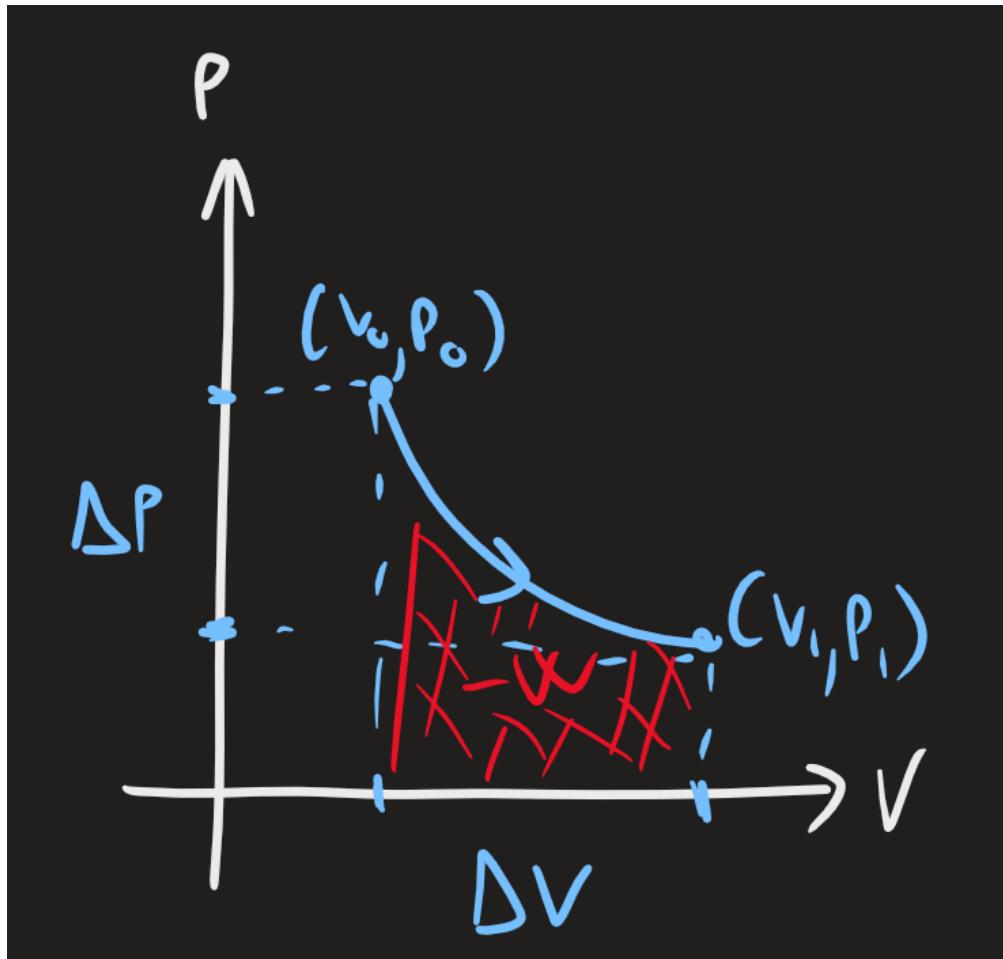
$$Q = -W$$

iii. Cambiamento della pressione al variare del volume

Per la [legge dei gas perfetti](#) ([Teorema 1 \(leggi dei gas\)](#)), abbiamo che vale

$$PV = nRT \implies P = \frac{nRT}{V}$$

ovvero un pezzo di *iperbola*.



iv. Lavoro

Adesso integriamo $P(V)$ rispetto alla variazione infinitesimale del volume dV , dandoci

$$W := - \int_i^f P \, dV = - \int_{V_i}^{V_f} \frac{nRT}{V} \, dV = -nRT \ln V \Big|_{V_i}^{V_f} = \boxed{-nRT \ln \frac{V_f}{V_i}}$$

In definitiva abbiamo anche

$$Q = -W \implies Q = nRT \ln \frac{V_f}{V_i}$$

2. Definizione di Trasformazione Isotermica

#Definizione

Definizione (trasformazione isotermica).

Si dice **trasformazione isotermica** una **trasformazione termodinamica** tale che la variazione della temperatura ΔT sia nulla. Ovvero, la **pressione** dipende solamente dal volume.

$$P(V) = \frac{nRT}{V}$$

#Proposizione

Proposizione (proprietà della trasformazione isotermica).

Abbiamo che la trasformazione isotermica gode delle seguenti proprietà.

i. *Energia interna*

$$\Delta U = 0$$

ii. *Lavoro e calore*

$$W = -nRT \ln \frac{V_f}{V_i}, Q = -W$$

D. SECONDO PRINCIPIO

D1. Espansione Libera di Joule

Espansione Libera di Joule

Considerazione preliminare per l'entropia. *Espansione libera di Joule: modello, caratteristiche.*

0. Voci correlate

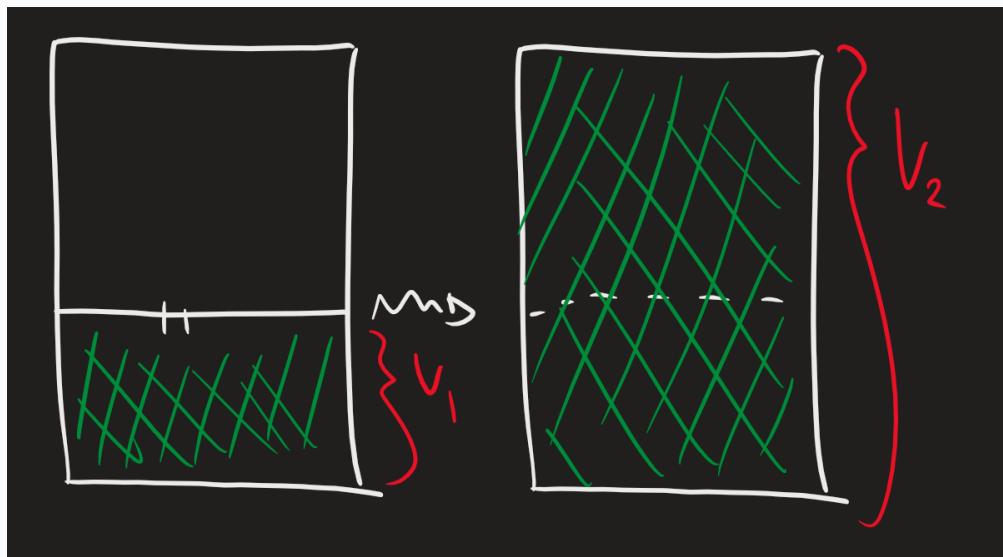
- Primo Principio della Termodinamica
- Trasformazione Isoterna
- Definizioni Relative alla Termodinamica

1. Espansione Libera di Joule

Vediamo una **trasformazione termodinamica** particolare, che da un punto di vista qualitativo sembra simile alla **trasformazione isoterna**.

MODELLO. (*Espansione Libera di Joule*)

Supponiamo di avere un *gas*, in un *sistema isolato*, inizialmente confinato nel primo pezzo di volume V_1 . Ad un certo punto si allarga il volume a V_2 . Cosa succede?



i. *Energia, calore e lavoro*

Dato che siamo un in *sistema isolato*, la sua variazione dell'energia interna è nulla. Poiché non esercitiamo nessuna forza o trasferimento di calore, abbiamo che anche il *lavoro* e il *calore* trasferito al sistema è nullo.

$$\Delta U = 0 \wedge Q = W = 0$$

ii. *Variazione di pressione e di volume*

Qualitativamente si ha una *variazione del volume* inversamente proporzionale alla *variazione della pressione*. Inoltre la temperatura rimane la stessa dato che non abbiamo nessun calore trasferito. In conclusione, abbiamo

$$\Delta V = V_2 - V_1 \wedge \Delta P \neq 0 \wedge \Delta T = 0$$

Ovvero questo ha un *comportamento simile* alle *trasformazioni isotermiche* (Proposizione 2 (proprietà della trasformazione isotermica)).

iii. *Non-reversibilità del processo*

Tuttavia c'è una netta differenza tra la *trasformazione isoterna*. Se la trasformazione isoterna è *invertibile* (o *reversibile*), questo non lo è. Si dice che l'*espansione libera* è *spontanea*. Vedremo di chiarire bene questa proprietà col concetto di *entropia*.

D2. Microstati

Microstati di un Sistema Termodinamico

*Considerazione preliminare per l'entropia: microstati di un sistema termodinamico.
Visione probabilistica dei microstati. Definizione di molteplicità di un sistema. Corollario:
microstati dell'espansione libera di Joule.*

0. Voci correlate

- Espansione Libera di Joule
- Eventi Indipendenti

1. Problema Fondamentale

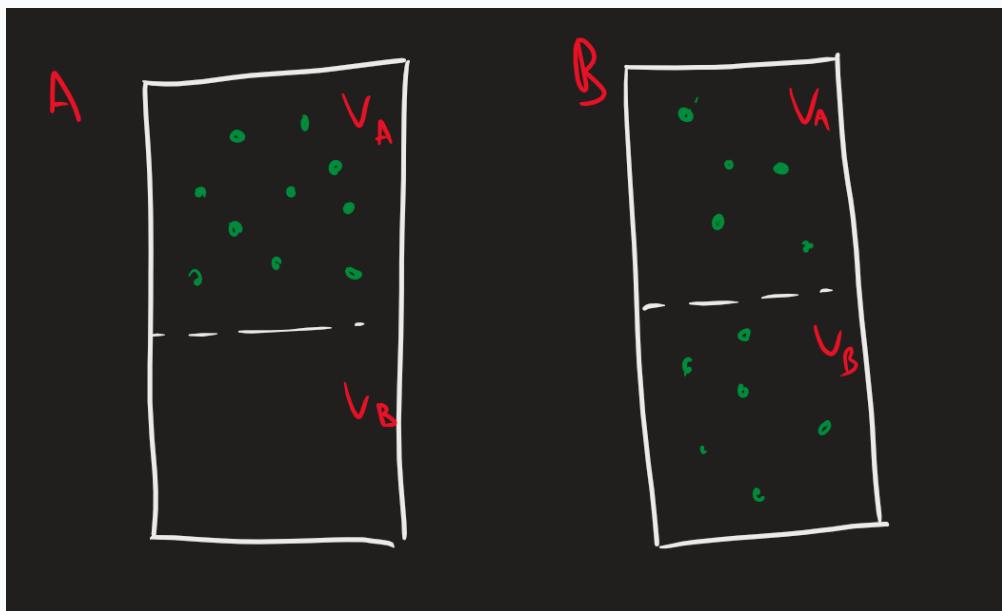
Per le considerazioni di questa pagina, poniamo il seguente problema.

PROBLEMA. (*Il demone di Maxwell*)

Supponiamo di avere una scatola con delle particelle dentro, e dividerla in due parti uguali, V_1 e V_2 . Definiamo le seguenti configurazioni.

Configurazione A. Tutte le particelle si trovano nel volume V_1

Configurazione B. Tutte le particelle si trovano nel volume V_2



Qual è la probabilità di trovarsi la *configurazione A* e la *configurazione B*?

Prima di dare le risposte, definiamo le seguenti quantità

#Definizione

DEFINIZIONE. (*Microstato, molteplicità*)

Si dice *microstato* l'insieme delle *posizioni* e delle *velocità* di un *sistema termodinamico*.

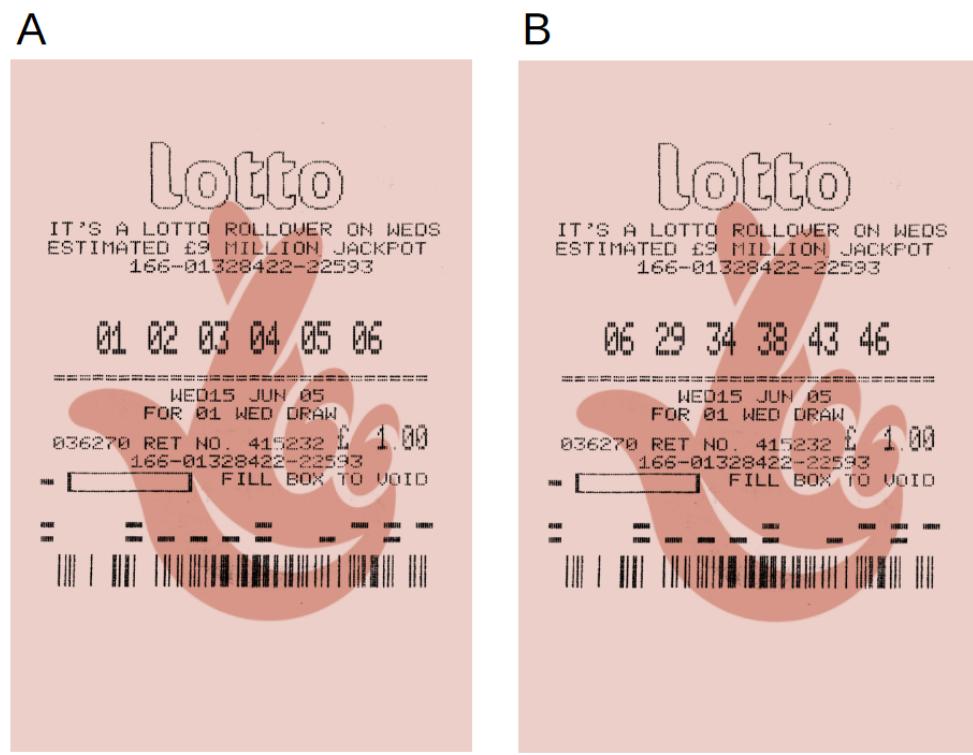
Si dice *molteplicità* la somma di tutti i *microstati possibili* per un *sistema termodinamico*, e la si indica con Ω .

2. Risposta Probabilistica

Una prima risposta è quella di dire che la collocazione delle *posizioni* e delle *velocità* sono tutte indipendenti. Allora si ha che sono esattamente uguali, dandoci

$$p(A) = p(B)$$

Tuttavia c'è un problema con questa risposta: sembra estremamente controiduitiva. Infatti ci sembra più naturale che la *seconda configurazione* sia più naturale della prima! Questa risposta è quasi equivalente a dire che "*la probabilità di trovarsi* 1, 2, 3, 4, 5, 6 *al lotto è uguale a quella di trovarsi dei numeri qualsiasi*".



C'è qualcosa che non stiamo considerando. Ovvero la *molteplicità*, la quantità degli microstati.

3. Risposta Termodinamico

Consideriamo questo problema da un *punto di vista termodinamico*. Prima di tutto formuliamo la *probabilità di una configurazione* A_* come la quantità

$$p(A_*) = \frac{1}{\Omega}$$

Adesso prendiamo l'*espansione libera di Joule*. Partiamo da $V = V_1$ e la espandiamo a $V_1 \rightarrow V_2$.

Consideriamo il caso in cui abbiamo *una sola particella*: chiamiamo $\Omega(1)$ la molteplicità iniziale in funzione del numero delle particelle, Ω_0 la molteplicità per una particella in V_1 e $\Omega'_0(N)$ la molteplicità finale.



In questo caso abbiamo $\Omega_1 = \Omega_0$. Quando effettuiamo la trasformazione, abbiamo che la **molteplicità aumenta** proporzionalmente al rapporto di volume aumentato. Ovvero $\Omega_0 \rightarrow \frac{V_2}{V_1} \Omega_0$, dandoci

$$\Omega'_0 = \frac{V_2}{V_1} \Omega_0$$

Adesso generalizzando su $N \in \mathbb{N}$, ho

$$\Omega_N = \Omega_0^N \implies \Omega'_{0,N} = \left(\frac{V_2}{V_1} \Omega_0 \right)^N$$

Quindi infine abbiamo

$$p(A) = \frac{1}{\Omega_N}, p(B) = \frac{1}{\Omega'_0}$$

che ci dà il risultato finale

$$p(A) = \frac{1}{\Omega_0^N} \leq \underbrace{\left(\frac{V_2}{V_1} \right)^N}_{>1} \frac{1}{\Omega_0^N} = p(B)$$

Quindi con l'aumentare di ΔV (lo scarto tra i volumi), la possibilità di trovare B diventa sempre più grande.

Adesso siamo pronti per dare l'idea dell'**entropia**

D3. Entropia

Definizione di Entropia

Entropia di Boltzmann: definizione, calcolo della variazione d'entropia. Esempio: espansione libera. Note: interpretazione dell'entropia. Corollario: entropia di Clausius per trasformazioni quasi-statiche e reversibili.

0. Voci correlate

- Microstati di un Sistema Termodinamico

1. Entropia secondo Boltzmann

#Definizione

Definizione (entropia secondo Boltzmann).

Si definisce l'entropia S , di un *sistema termodinamico*, come la seguente quantità

$$S = k_B \ln(\Omega)$$

#Osservazione

Osservazione (non ci interessa il valore effettivo).

Nota: per quanto ci riguarda, non ci interessa il "*valore effettivo*" di S di un dato sistema termodinamico. Infatti ho quella quantità Ω in mezzo che rende tutto difficile; servirà la *meccanica quantistica* per dare una risposta precisa.

Noi considereremo in particolare la *variazione d'entropia*, definita come

$$\Delta S = k_B \ln \Omega' - k_B \ln \Omega = k_B \ln \frac{\Omega'}{\Omega}$$

In particolare per l'*espansione libera di Joule* si ha

$$\Delta S = k_B \ln \frac{V_2}{V_1}$$

#Osservazione

Osservazione (interpretazione dell'entropia).

Si interpreta l'**entropia** come una *"misura del disordine"* di un sistema termodinamico. Infatti le condizioni che consentono maggiori **microstati** limitano **maggiormente** il *"ordine"* del sistema.

Inoltre sia chiaro che l'**entropia** è una variabile di stato a tutti gli effetti!

2. Entropia secondo Clausius

Vogliamo trovare una versione più *"utile"* dell'entropia di Boltzmann, che ci consente di fare più calcoli.

#Corollario

Corollario (entropia secondo Clausius).

Si ha che in un *processo quasi-statico e reversibile* la variazione infinitesimale dell'entropia dS è data da

$$dS = \frac{\delta Q}{T}$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Corollario 4 (entropia secondo Clausius)

Deriviamo questa definizione. In questo caso consideriamo l'*espansione isoterna*, che è una specie di *"espansione libera reversibile"*. Allora per quantità infinitesimali dell'incremento dV ho

$$dS = k_B N \ln \frac{V + dV}{V} = k_B N \ln \left(1 + \frac{dV}{V} \right)$$

Adesso considero il *polinomio di Taylor* per l'equazione $\ln(1 + x)$: ho $\ln(1 + x) \sim x$ per $x \rightarrow 0$ (ovvero il rapporto tra l'incremento e volume totale diminuisce). Questo va bene, quindi ho

$$dS = k_B N \frac{dV}{V} = nR \frac{dV}{V}$$

Assumendo di avere *gas ideali*, posso imporre $PV = nRT \implies \frac{nR}{V} = \frac{P}{T}$. Ovvero

$$dS = \frac{P dV}{T}$$

Considerando che $P dV$ non è altro che la quantità infinitesimale $-\delta W = \delta Q$, ottengo la tesi finale

$$dS = \frac{\delta Q}{T}$$

Enunciamo il **caso generale** (ovvero dove non ho trasformazioni *reversibili*)

#Corollario

Corollario (caso generale).

Si ha che per *processi quasi-statici* vale

$$dS \geq \frac{\delta Q}{T}$$

3. Rivisitazione del Primo Principio della Termodinamica

Conoscendo le *formule esatte* per calcolare δQ e δW , possiamo dare una "*definizione rivisitata*" del primo principio della termodinamica (in particolare la forma infinitesimale).

#Teorema

Teorema (primo principio della termodinamica, forma rivisitata-entropica).

Dato un *sistema termodinamico* sottoposto ad una *trasformazione reversibile*, si ha

$$dU = T dS - P dV$$

D4. Secondo principio della Termodinamica

Secondo Principio della Termodinamica

Secondo principio della termodinamica. Interpretazione secondo Boltzmann. Enunciati equivalenti. Corollario: il flusso di calore spontaneo.

0. Voci correlate

- Definizione di Entropia

1. Secondo Principio di Termodinamica

#Teorema

Teorema (secondo principio di termodinamica).

Dato un *sistema chiuso* (isolato) ho la *variazione d'entropia sempre positiva*

$$\Delta S \geq 0$$

Ovvero l'entropia può solo *spontaneamente aumentare* vero il positivo.

#Osservazione

Osservazione (interpretazione secondo Boltzmann).

Qui non è richiesta neanche una giustificazione, dal momento che per *Boltzmann* questo è sembrato ovvio. Infatti, perché un sistema non esplorerebbe tutti i microstati a cui ha accesso?

Come disse con una frase tedesca,

"*Die Energie der Welt ist constant; die Entropie der Welt strebt einem Maximum zu*"

Ovvero l'energia dell'universo è costante (*primo principio*), l'entropia dell'universo tende ad un massimo (*secondo principio*)

#Osservazione

Osservazione (formulazioni equivalenti).

Vedremo che questo principio comporta delle *formulazioni equivalenti*.

Ovvero:

i. *calorimetria, frigoriferi*

Non posso realizzare un trasferimento di calore da un corpo freddo ad un corpo caldo senza lavoro

ii. *macchine termiche*

Non posso completamente convertire il calore in lavoro

2. Il flusso di calore spontaneo

Adesso andiamo a rivisitare un problema tipico.

PROBLEMA. Dato un sistema isolato con due blocchi in *contatto termico*, ho lo scambio di calore δQ .

OSSERVAZIONE. Ho un *sistema chiuso*, dunque per il *primo principio della termodinamica* ho che lo scambio del calore con l'esterno $\delta Q_T = 0$. Dunque $\delta Q_A = -\delta Q_B$. Allora ho lo scambio di entropia totale

$$dS = dS_A + dS_B = \frac{\delta Q_A}{T_A} + \frac{\delta Q_B}{T_B} = \delta Q_A \left(\frac{1}{T_A} - \frac{1}{T_B} \right)$$

Per il secondo principio della termodinamica ho che $dS \geq 0$. Dunque ho

$$\delta Q_A \left(\frac{1}{T_A} - \frac{1}{T_B} \right) \geq 0$$

allora ho due possibilità: se lo *scambio di calore* δQ_A è *positiva* (quindi è *assorbita*), ho $T_B > T_A$.

Se invece ho $\delta Q_A < 0$, allora ho $T_A > T_B$.

CONCLUSIONE. Il calore è un *tipo di flusso di energia* che dev'essere necessariamente accompagnato da un *flusso di entropia*.

Inoltre l'entropia di un sistema può solo *decrescere* tramite un espulsione di flusso "verso l'esterno" del calore. Tutti gli organismi vitali mantengono uno stato di entropia bassa, scaricando entropia nell'ambiente.

D5. Diagramma TS

Diagramma TS

Osservazione: diagramma TS

0. Voci correlate

- Definizione di Entropia
- Definizione di Calore e Lavoro Termodinamico

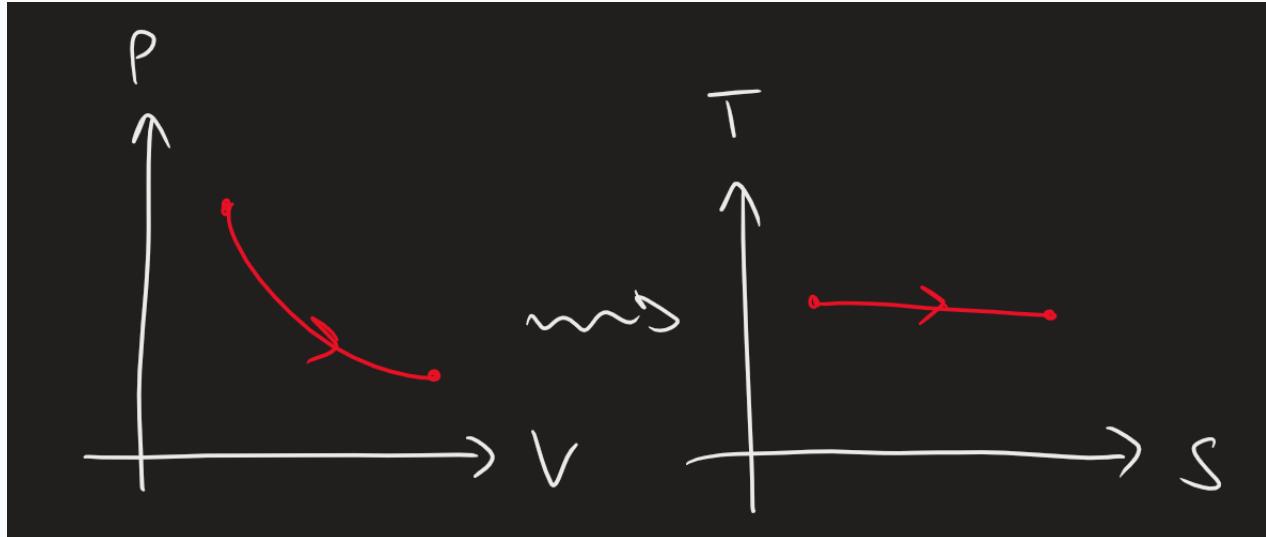
1. Diagramma TS

Osserviamo dalla *definizione di Claus* per l'entropia che abbiamo

$$\delta Q = T dS$$

Quindi possiamo creare dei *diagrammi*, per cui calcolando l'area sotto la curva (che rappresenta una trasformazione termodinamica), otteniamo il *calore* Q entrante nel sistema.

Ad esempio posso *prendere la trasformazione isoterna*, che è una parabola nel piano PV , che poi diventa una retta nel piano TS



Adesso vedremo delle *trasformazioni* che "funzionano bene" sul piano TS .

D6. Entropia di un Gas Perfetto

Calcolo di Entropia per un Gas Perfetto

Calcolo di entropia per un gas perfetto.

0. Voci correlate

- Definizione di Entropia
- Primo Principio della Termodinamica

1. Calcolo di Entropia per un Gas Perfetto

#Lemma

Lemma (entropia di un gas perfetto).

Dato un *sistema termodinamico* che rispetta le *leggi del gas perfetto*, abbiamo che la sua entropia viene calcolata come

$$S = nc_V \ln T + nR \ln V + S_0$$

con S_0 una *costante di integrazione*, che è difficile da calcolare.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Lemma 1 (entropia di un gas perfetto)

Usiamo il *primo principio della termodinamica*, versione rivisitata.

$$dU = T dS + P dV$$

Adesso isolo la variazione d'entropia, dandoci

$$dS = \frac{dU + P dV}{T} = nc_V \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V}$$

considerando che $PV = nRT$ e $dU = nc_V dT$. Integrando tutto (ciò è consentito dato che abbiamo *due derivate parziali per l'entropia*), otteniamo la tesi. ■

D7. Trasformazione adiabatica o isentropica

Trasformazione Adiabatica

Trasformazione adiabatica (o isentropica): definizione, calcolo dell'entropia, derivazione dell'equazione caratteristica sul piano PV. Proprietà qualitativa delle trasformazioni adiabatiche sul piano PV.

0. Voci correlate

- Calcolo di Entropia per un Gas Perfetto
- Definizione di Entropia
- Capacità Termica e Calore Specifico

1. Trasformazione Adiabatica (o Isentropica)

#Definizione

Definizione (trasformazione adiabatica).

Una *trasformazione termodinamica* si dice "*adiabatica*" o "*isentropica*" se il calore scambiato è nullo.

$$\delta Q = 0 \implies T \, dS = 0 \implies dS = 0$$

#Proposizione

Proposizione (proprietà della trasformazione adiabatica).

Abbiamo le seguenti *equazioni di stato* per una trasformazione adiabatica.

i. *Piano TS*

$$S \in \mathbb{R}, S = nc_V \ln T + nR \ln V + S_0$$

ii. *Piano PV*

$$P(V) = \mathcal{C}V^{-\gamma}, \gamma := \frac{c_P}{c_V}, \mathcal{C} \in \mathbb{R}$$

oppure

$$PV^\gamma = \mathcal{C}$$

iii. *Equazioni miste*

$$\begin{aligned} TV^{\gamma-1} &= \mathcal{C} \\ P^{1-\gamma}T^\gamma &= \mathcal{C} \end{aligned}$$

con S_0, \mathcal{C} delle *costanti* determinate dal sistema termodinamico.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE della Proposizione 2 (proprietà della trasformazione adiabatica)

Per il lemma sull'entropia dei gas perfetti si ha già la prima tesi. Adesso facciamo i calcoli con questa espressione: in particolare tentiamo di manipolare quest'ultima espressione, in modo tale da ottenere una relazione che leggi il *volume* e la *temperatura*.

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \ni S &= nc_V \ln T + nR \ln V + S_0 \\ &= \frac{n}{R} \left(\ln T^{\frac{c_V}{R}} + \ln V \right) + S_0 \\ \mathbb{R} \ni \tilde{S} &= VT^{\frac{c_V}{R}} \quad (*) \end{aligned}$$

Adesso per vedere il valore $\frac{c_V}{R}$, consideriamo la *legge di Mayer*, che ci dice

$$R = c_P - c_V \implies \frac{c_V}{R} = \frac{c_V}{c_P - c_V} = \frac{1}{\frac{c_P}{c_V} - 1} = \frac{1}{\gamma - 1}$$

chiamando $\gamma = \frac{c_P}{c_V}$. Adesso proseguiamo con i nostri calcoli, usando la *legge dei gas perfetti*, trasformando (*) in un'espressione del tipo $F(P, V)$.

$$\begin{aligned}
 \tilde{S} &= VT^{\frac{1}{\gamma-1}} \\
 &= V \left(\frac{PV}{nR} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \\
 &= V(PV)^{\frac{1}{\gamma-1}} = V^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} P^{\frac{1}{\gamma-1}} \\
 \mathbb{R} \ni \bar{S} &= PV^\gamma
 \end{aligned}$$

che è la tesi finale. Per ottenere *iii.* bisogna "giocare" con queste equazioni ulteriormente.

■

E. LE MACCHINE TERMICHE

E1. Generalità sulle macchine termiche

Introduzione alle Macchine Termiche

Generalità sulle macchine termiche: idea principale, macchina di Papin. Definizione di macchina termica. Convenzioni di rappresentazione grafica delle macchine termiche. Diagramma PV/TS delle macchine termiche. Definizione di rendimento η per le macchine termiche.

0. Voci correlate

- Definizioni Relative alla Termodinamica
- Diagramma TS
- Diagramma PV
- Definizione di Calore e Lavoro Termodinamico

1. Idea delle Macchine Termiche

Conoscendo le *trasformazioni termodinamiche*, possiamo "combinarle" in un modo tale da formare i *cicli termodinamici*. Prima di darne la definizione vediamo un esempio, che potrebbe darci l'*idea intuitiva* delle macchine termiche.

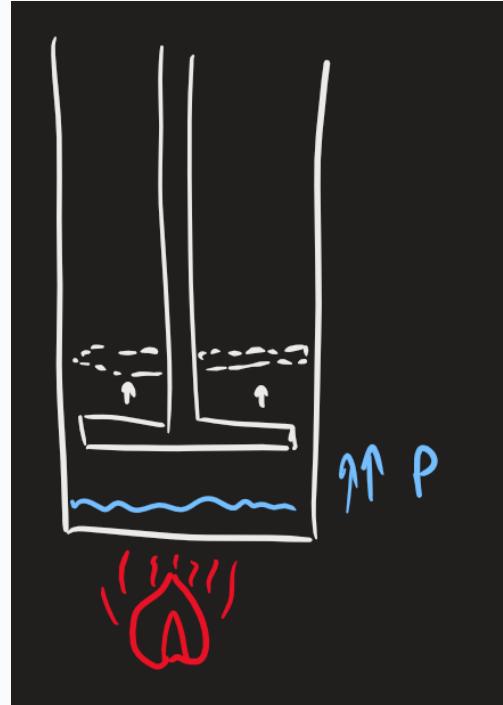
#Esempio

ESEMPIO. (*Macchina a vapore di Papin*)

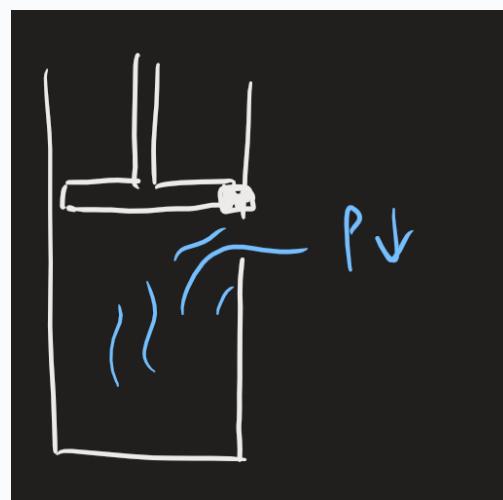
Supponiamo di avere un *contenitore* con dell'*acqua* e un *pistone*, collegato mediante carrucole ad un blocco. Allora effettuiamo la seguente procedura.

1. *Riscaldare il sistema, con una fiamma posto sotto il contenitore*: così la aumenta la *pressione*, causando uno *spostamento* del pistone finché viene bloccato ad un certo

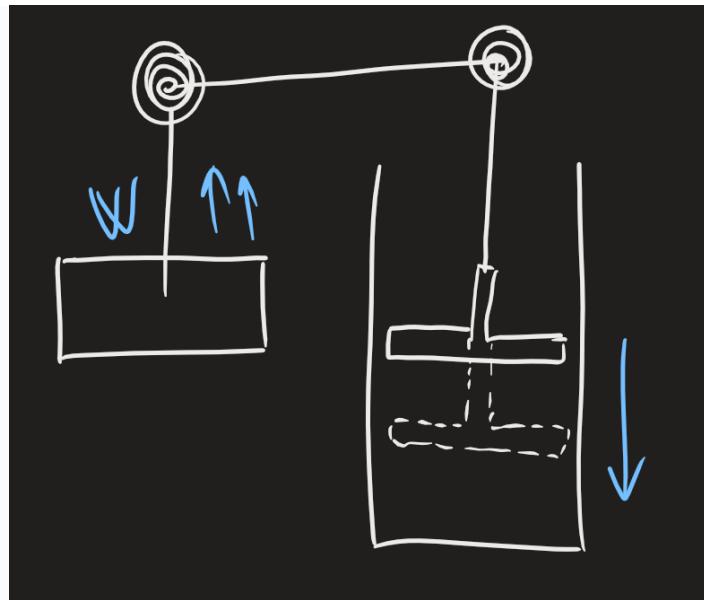
punto.



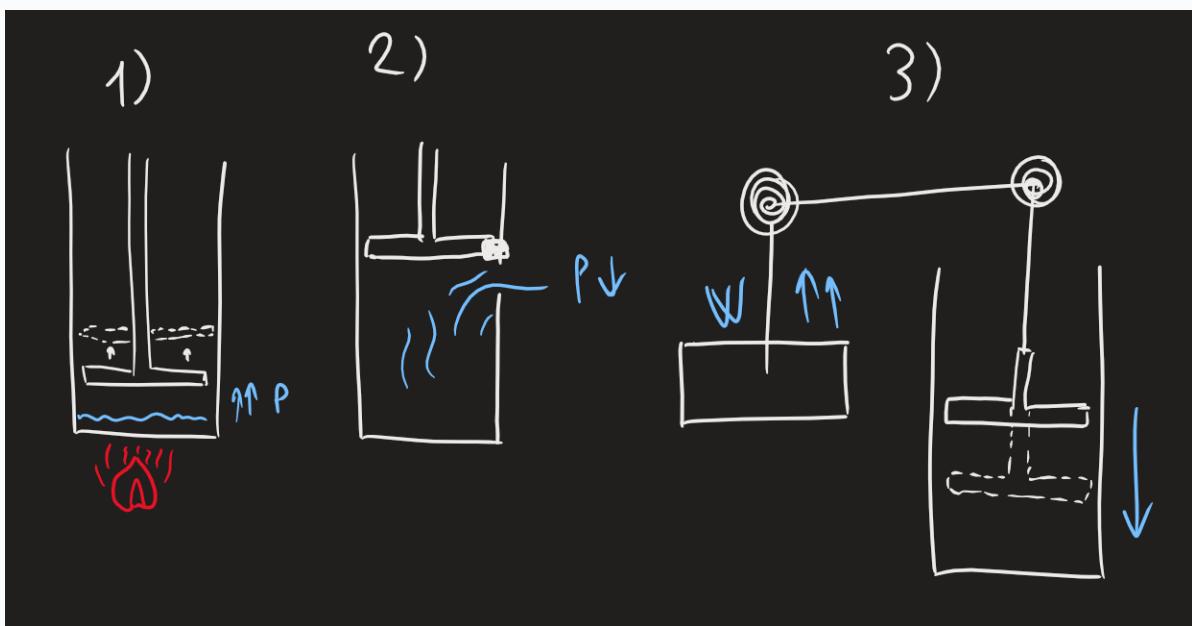
2. *Bloccare il pistone, e lasciare il vapore a raffreddare*: con delle fessure posto in alto, faccio scappare l'aria calda, diminuendo così la *pressione*.



3. *Togliere il blocco e far cadere il pistone*: passaggio autoesplativo: il pistone cade dato che abbiamo la forza di gravità è una pressione atmosferica maggiore di quella interna. In questo caso, dato che abbiamo la *forza di tensione* (**Definizione 1 (tensione meccanica)**), il lavoro effettuato da questa caduta viene *trasmessa* al corpo collegato; compiendo così un *lavoro W*



4. Ripetere



2. Definizione di Macchina Termica

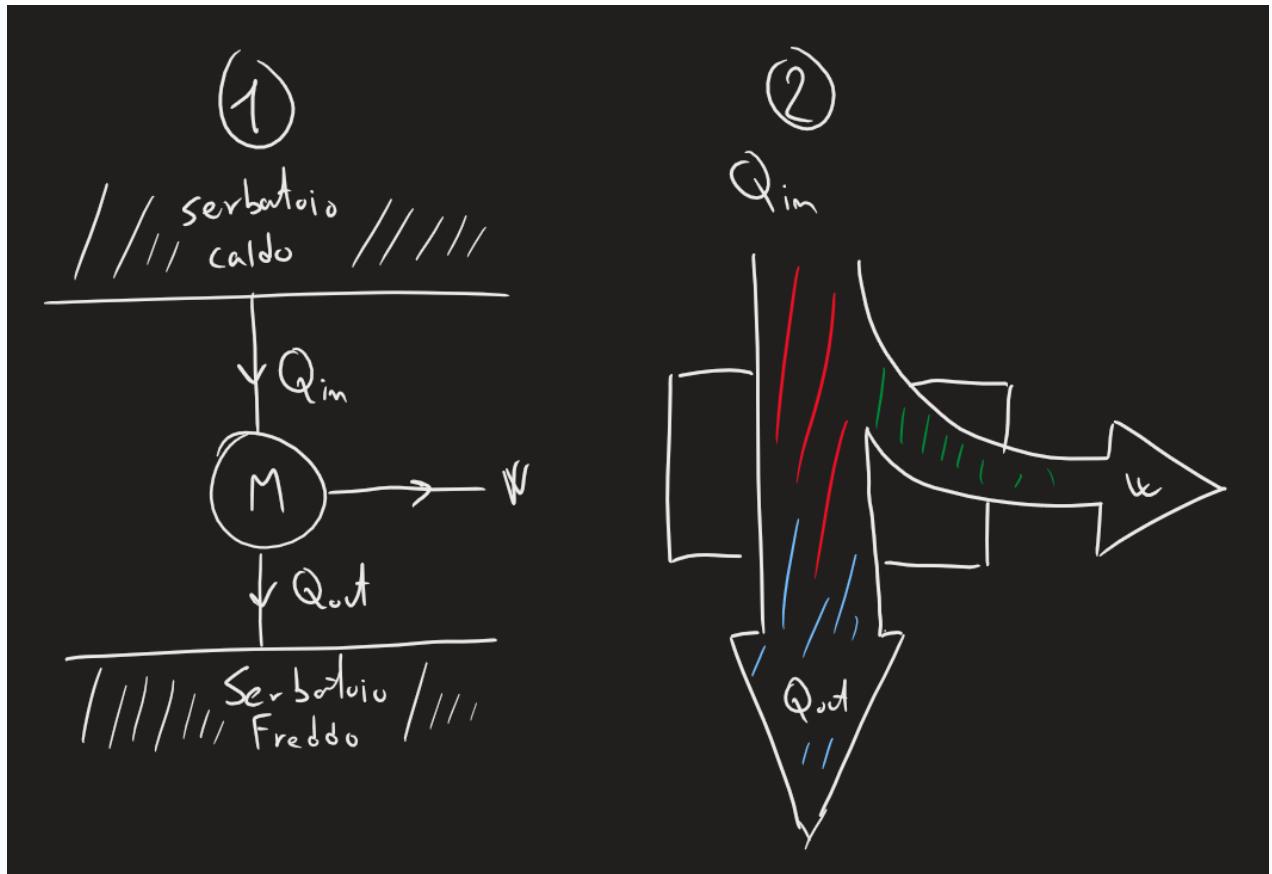
#Definizione

DEFINIZIONE (*Macchina termica*)

Si dice *macchina termica* un *sistema* che trasforma del *calore entrante* Q_{in} in lavoro W . Inoltre è *ciclico* (ovvero lo stato iniziale e finale del sistema lo stesso).

CONVENZIONE. (*Rappresentazione delle macchine termiche*)

Abbiamo due modi per rappresentare una *macchina termica*. Vediamone entrambi



Si preferisce la **seconda convenzione**, dato che **rende meglio** la conservazione dell'energia (**Teorema 1 (primo principio della termodinamica)**). Inoltre per convenzione abbiamo **sempre** $Q_{\text{in}}, Q_{\text{out}}, W \geq 0$ (in particolare scegliamo il **lavoro** come quello **compiuto dal gas**).

#Osservazione

OSSERVAZIONE. (*Si può anche rappresentare il flusso d'entropia*)

In questo caso si può anche rappresentare il **flusso di entropia**, che è una "freccia parallela".

Vedremo col **ciclo di Carnot** (**Ciclo di Carnot**) come gestire questa rappresentazione.

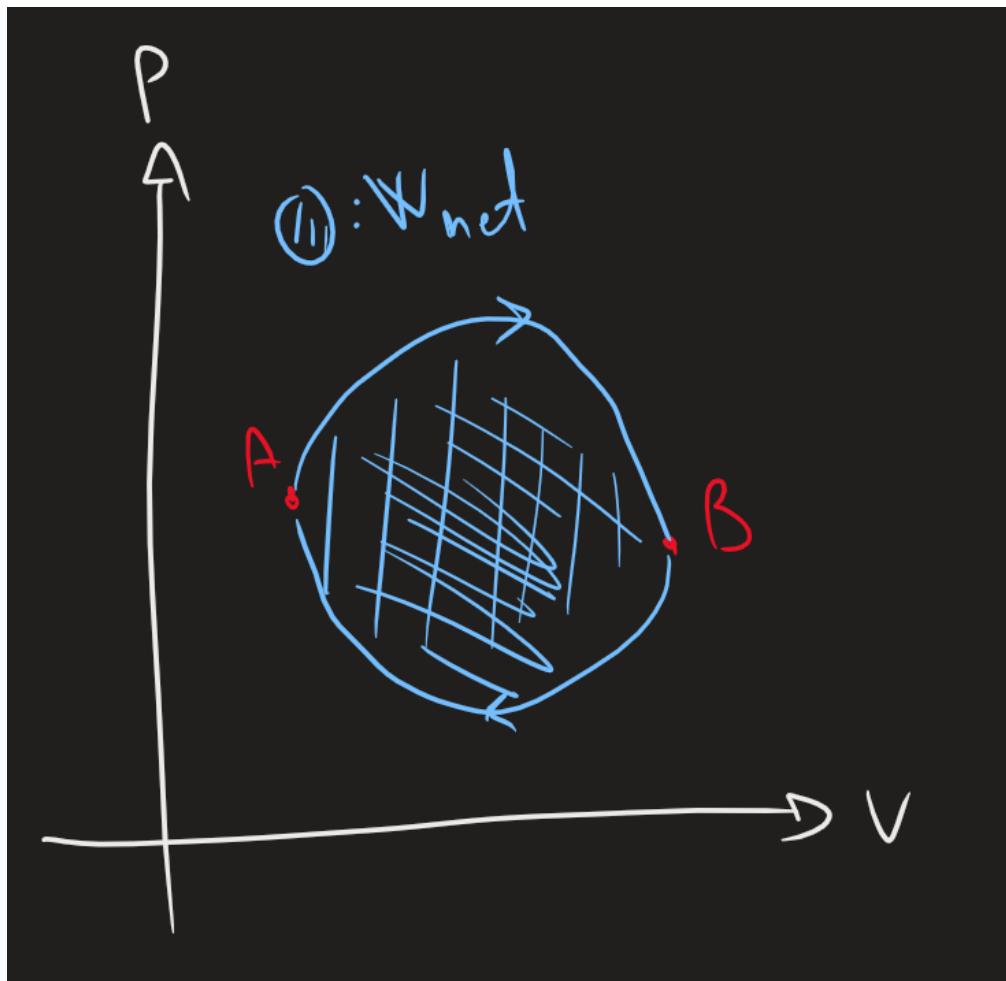
3. Grafico di una Macchina Termica

Adesso vogliamo **qualitativamente** rappresentare una macchina termica (ovvero i suoi processi). Come primo approccio possiamo usare il **diagramma PV** (**Diagramma PV**).

#Esempio

ESEMPIO. (*Diagramma PV di una macchina termica*)

Prendiamo il seguente **diagramma PV**, che potrebbe rappresentare una macchina termica.



Abbiamo che il **suo lavoro netto** (ovvero compiuto dal gas) è la somma degli integrali (in realtà si tratterebbe di una sottrazione, dato che ho lavoro positivo e negativo)
 (Diagramma PV > ^760d9c)

$$W_{\text{net}} = \int_1^2 P \, dV + \int_2^1 P \, dV$$

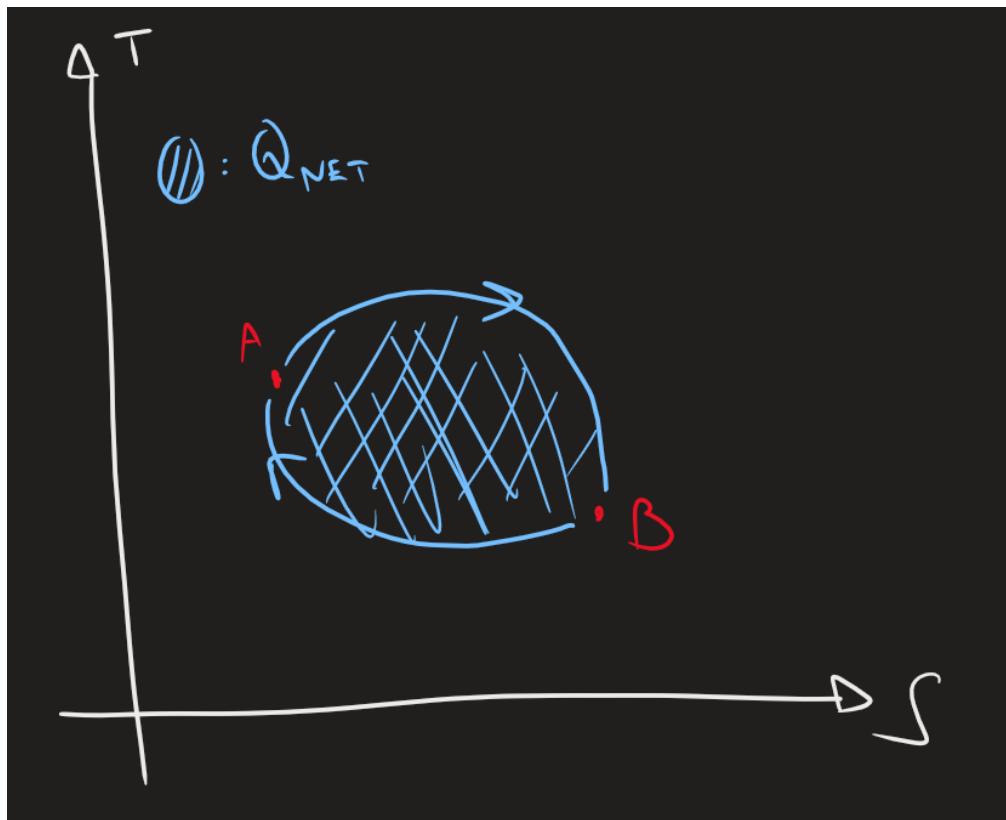
Rappresentiamo quest'integrale come l'**integrale curvilineo**

$$W_{\text{net}} = \oint P \, dV$$

#Esempio

ESEMPIO. (*Diagramma TS di una macchina termica*)

In questo caso abbiamo il seguente *diagramma TS*.



Abbiamo che il **calore entrante** è rappresentato dall'integrale

$$Q_{\text{in}} = Q_{AB} = \int_A^B T \, dS$$

analogamente il **calore uscente** è

$$Q_{\text{out}} = Q_{BA} = \int_B^A T \, dS$$

Allora il **calore netto** (Diagramma TS > (1)) è

$$Q_{\text{net}} = \oint T \, dS$$

#Osservazione

OSSERVAZIONE. (*Il lavoro ricavato da un diagramma PV è lo stesso del diagramma TS*)

Notiamo di avere una **struttura ciclica**, che implica l'**energia interna** rimane sempre la stessa durante il cammino. Ovvero ho

$$\oint dU = 0$$

Per il **primo principio della termodinamica** ho

$$\oint dU = \oint T \, dS - \oint P \, dV = 0$$

Allora ho

$$\oint T \, dS = \oint P \, dV = W_{\text{net}}$$

Ovvero che $W_{\text{net}} = Q_{\text{net}}$. Questo vale per i *cicli termodinamici*, e si rivelerà utile per l'*ottimizzazione* delle macchine termiche. Per parlare di questo tema, introduciamo il *concetto di rendimento*.

4. Rendimento di una Macchina Termica

Voglio definire una *quantità fisica* che renda l'idea del rapporto "*benefit/cost*".

#Definizione

Definizione (rendimento termico di una macchina termica).

Data una *macchina termica* con Q_{in} , Q_{out} e W , si definisce il *rendimento* come la seguente quantità

$$\eta = \frac{W}{Q_{\text{in}}} = \frac{Q_{\text{in}} - Q_{\text{out}}}{Q_{\text{in}}} = 1 - \frac{Q_{\text{out}}}{Q_{\text{in}}}$$

Noto che per il *secondo principio della termodinamica* ho

$$\sup \eta = 1, \min \eta = 0$$

In particolare $\eta \ll 1$ (ovvero è *molto lontana* da 1).

E2. Ciclo di Carnot

Ciclo di Carnot

Ciclo di Carnot (approccio moderno): obiettivo di minimizzazione, primi approcci e soluzione finale. Approccio classico: calcolo delle curve e del lavoro. Teorema del ciclo di Carnot: formula per il rendimento. Caratteristiche del ciclo di Carnot: la più efficiente e la reversibilità.

0. Voci correlate

- Introduzione alle Macchine Termiche

- Trasformazione Adiabatica
- Trasformazione Isotermica

1. Problema Preliminare

Impostiamo il seguente problema.

PROBLEMA. (*Ottimizzazione delle macchine termiche*)

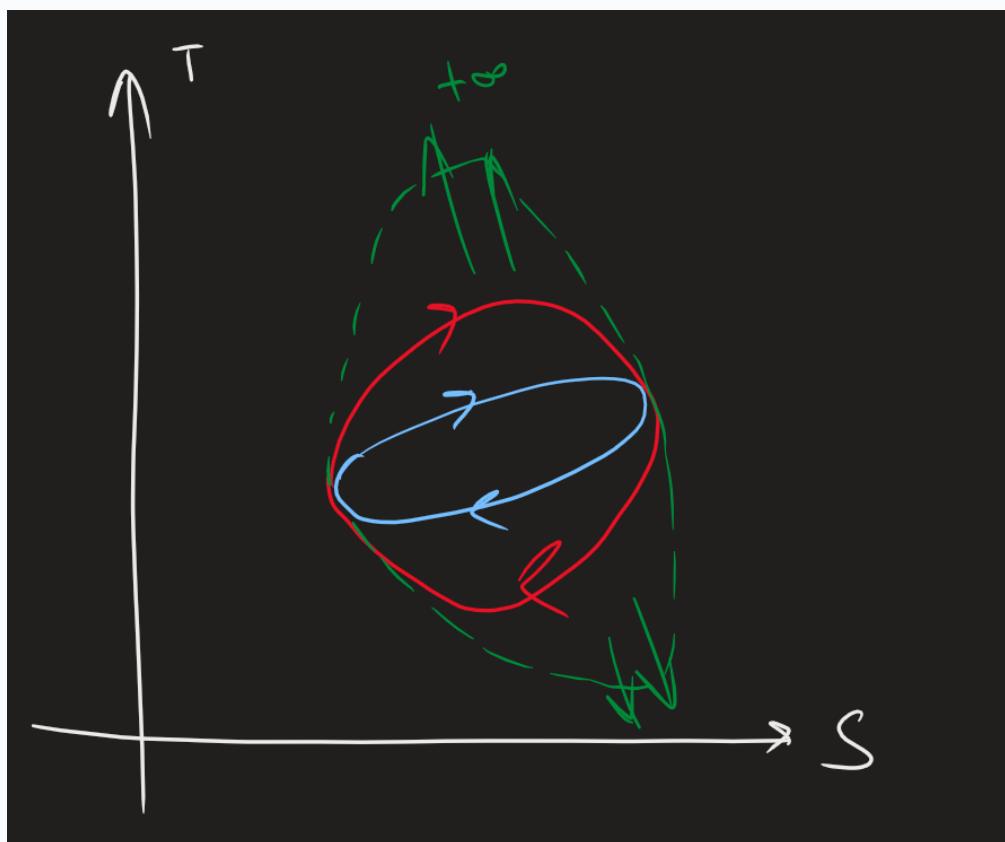
Conosciamo che ad una macchina termica è associato il *rendimento* η ([Definizione 1](#) (*rendimento termico di una macchina termica*)). Il nostro obiettivo è quello di trovare modi per *ottimizzare* questo valore, portandolo a $\eta = 1$.

1. *Primo approccio*

Un primo approccio è quello di *cambiare* i valori Q_{in} e Q_{out} , dato che ho la formula

$$\eta = 1 - \frac{Q_{\text{out}}}{Q_{\text{in}}}$$

Allora posso portare $Q_{\text{out}} \rightarrow 0$ e/o $Q_{\text{in}} \rightarrow +\infty$, massimizzando così η . Prendendo il *grafico TS*, il modo per farlo è quello di *cambiare i valori di temperatura massima e minima*, a $\max T = +\infty$ e $\min T = 0$ K. Ovvero ho il grafico



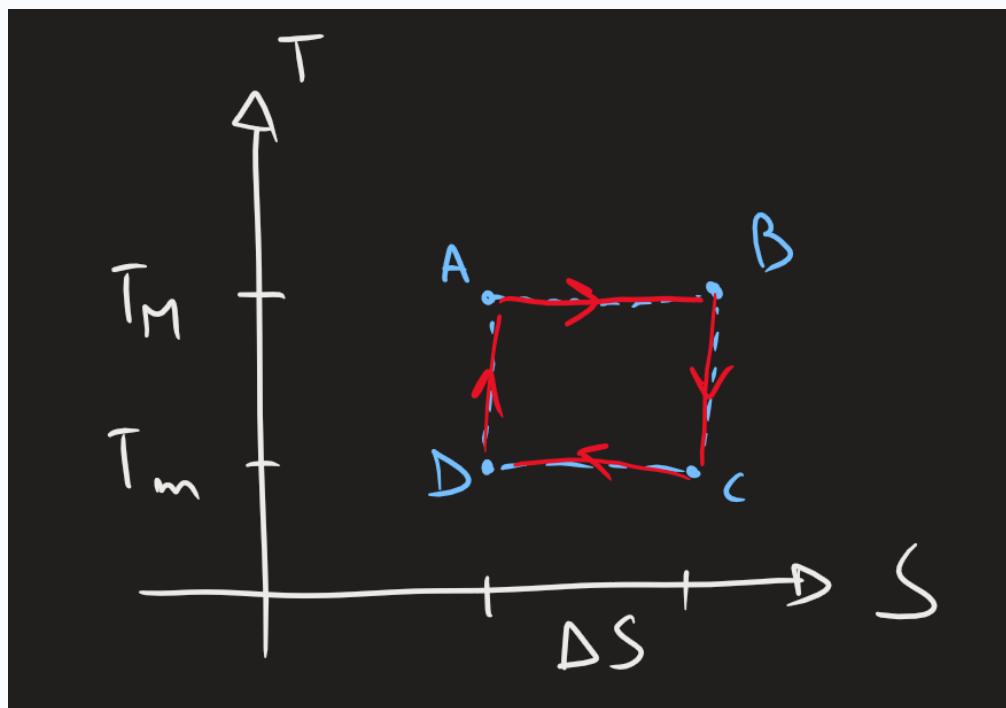
Risolvendo così il problema. Ma così è realizzabile? Non penso.

2. *Secondo approccio*

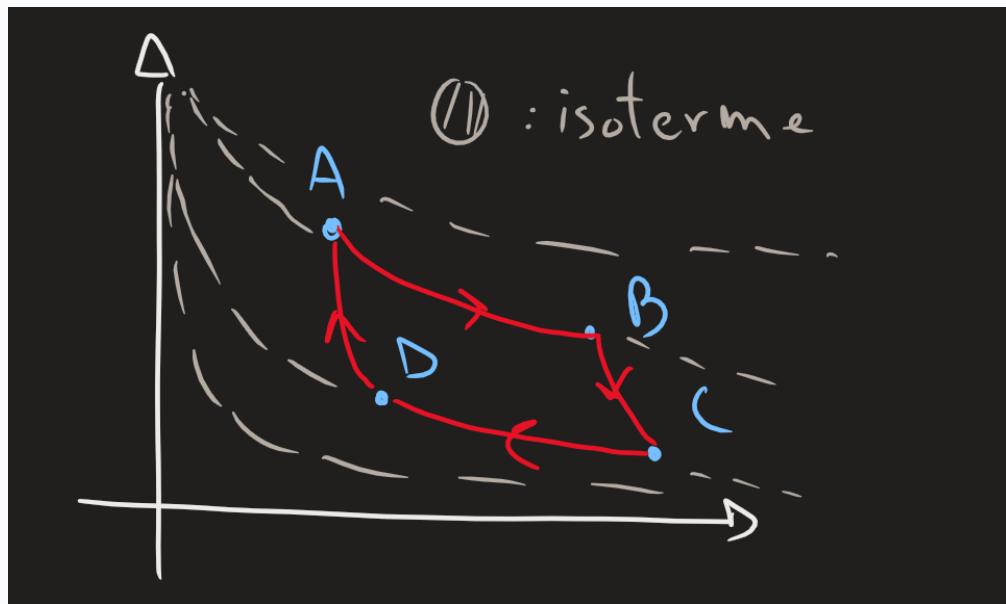
Il primo approccio non è realizzabile dal punto di vista pratico, dato che ciò richiederebbe di raggiungere il *zero assoluto* o l'*infinito*. Facciamo dunque considerazioni più pratiche, fissando la *temperatura massima* T_M e la *temperatura minima* T_m , associate ai scambi di calore Q_{in} e Q_{out} . Supponiamo inoltre una

variazione d'entropia ΔS fissata.

In questo caso posso tracciare un *rettangolo* limitato in ΔT e ΔS . Qual è la forma che posso disegnare in questo rettangolo, che abbia la massima area? Certo, il rettangolo stesso!



Allora ho sul *grafico TS* un rettangolo, che corrisponde in *grafico PV* il seguente grafico



che è formato da *due trasformazioni adiabatiche* e *due trasformazioni isoterme*.

2. Definizione di Ciclo di Carnot

Chiameremo il *ciclo appena costruito* come il *ciclo di Carnot*.

#Definizione

Definizione (ciclo di Carnot).

Si definisce il *ciclo di Carnot* come il ciclo composto da *quattro trasformazioni*:

- i. $A \rightarrow B \sim (P_0, V_0) \leftrightarrow (P_1, V_1)$: trasformazione *isoterma*
- ii. $B \rightarrow C \sim (P_1, V_1) \leftrightarrow (P_2, V_2)$: trasformazione *adiabatica*
- iii. $C \rightarrow D \sim (P_2, V_2) \leftrightarrow (P_3, V_3)$: trasformazione *isoterma*
- iv. $D \rightarrow A \sim (P_3, V_3) \leftrightarrow (P_0, V_0)$: trasformazione *adiabatica*

3. Approccio Classico al Ciclo di Carnot

L'approccio per costruire il *ciclo di Carnot* è considerato quello moderno. Per invece quello tradizionale (ovvero quello fatto da Carnot), bisogna fare dei calcoli *a mano*, senza considerare il diagramma TS. In particolare *dimostreremo* che questo ciclo è l'*ottimale*.

DIMOSTRAZIONE.

Consideriamo la *definizione del ciclo di Carnot* ([Definizione 1 \(ciclo di Carnot\)](#)). Per ogni trasformazione calcoliamo la sua *variazione di energia, scambio di calore e lavoro compiuto* associato.

- i. $A \rightarrow B$: dato che abbiamo a che fare con una *trasformazione isoterma*, abbiamo $\Delta U = 0$ ([Trasformazione Isoterma > \(1\)](#)). Inoltre si ha noto che $Q = \Delta S \cdot T_M$ ([Corollario 4 \(entropia secondo Clausius\)](#)) e poi $W = -Q = -\Delta S \cdot T_M$ ([Proposizione 2 \(proprietà della trasformazione isoterma\)](#)). Riassumendo, si ha

$$A \rightarrow B : \Delta U = 0, Q = \Delta S \cdot T_M, W = -\Delta S \cdot T_M$$

Nota: qui per il lavoro usiamo la convenzione per cui W è il lavoro esercitato sul gas

- ii. $B \rightarrow C$: qui invece si ha una *trasformazione adiabatica*. Allora $Q = 0$, da cui segue $\Delta U = -C_V \Delta T = W$. Riassumendo

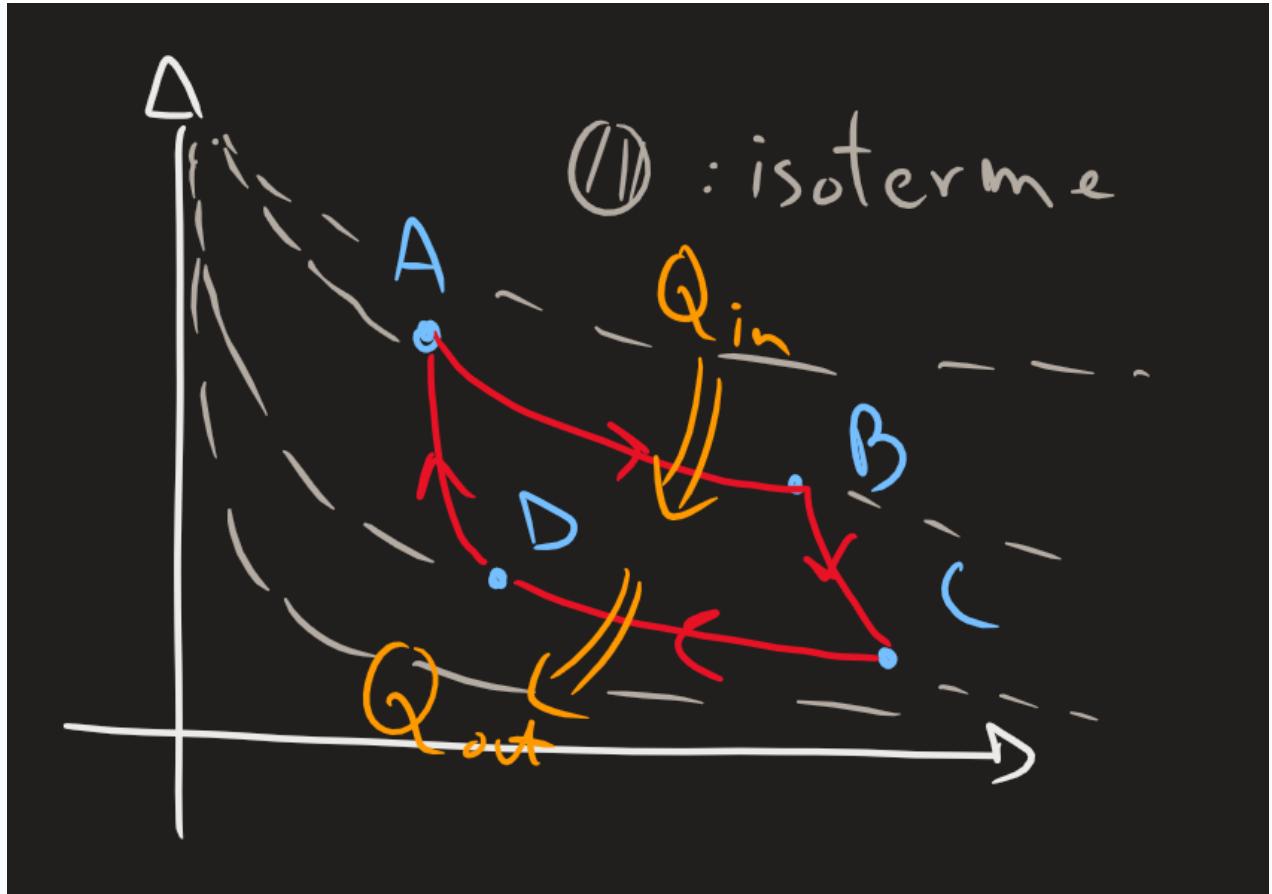
$$B \rightarrow C : \Delta U = -C_V \cdot \Delta T, Q = 0, W = -C_V \cdot \Delta T$$

- iii. & iv. ($C \rightarrow D, D \rightarrow A$): i calcoli sono completamente analoghi, solo al "contrario" e considerando T_m invece di T_M .

Riassumendo tutto abbiamo la tabella

$(\cdot) \rightarrow (\cdot)$	ΔU	Q	W
$A \rightarrow B$	0	$\Delta S \cdot T_M$	$-\Delta S \cdot T_M$
$B \rightarrow C$	$C_V \cdot (-\Delta T)$	0	$C_V \cdot (-\Delta T)$
$C \rightarrow D$	0	$-\Delta S \cdot T_m$	$\Delta S \cdot T_m$
$D \rightarrow A$	$C_V \cdot \Delta T$	0	$C_V \cdot \Delta T$

Adesso sommando la colonna del *calore* ho $Q = 0$ e $W = -\Delta S \Delta T$, ovvero $W = \Delta S \Delta T$ se consideriamo il *lavoro compiuto dal gas sull'ambiente*. In questo caso ho il *lavoro massimale* con nessun lavoro sprecato. ■



4. Proprietà del Ciclo di Carnot

Vediamo delle proprietà di questo ciclo

#Teorema

Teorema (del Carnot).

Si ha che, dato un *ciclo termodinamico del tipo Carnot* \mathcal{C} , ha il *rendimento* calcolato come

$$\eta_c = 1 - \frac{T_m}{T_M} \ll 1$$

Inoltre *non* esiste nessun *ciclo termodinamico* che sia *più efficiente del ciclo di Carnot*. Ovvero,

$$\forall \Sigma : \text{ciclo termodinamico}, \quad \eta_\Sigma < \eta_c \ll 1$$

Inoltre, il *ciclo di Carnot* è solamente una macchina idealizzata che non può essere realizzata.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 2 (del Carnot)

Giustifichiamo il primo enunciato (il secondo viene dal fatto che questo ciclo *massimizza* il

lavoro). Si tratta di *considerare i calcoli appena fatto* con l'approccio classico ((1)).

Prendiamo la definizione di efficienza,

$$\eta = 1 - \frac{Q_{\text{in}}}{Q_{\text{out}}}$$

Adesso, sapendo che $Q_{\text{in}} = Q_{AB} = \Delta S \cdot T_M$ e analogamente $Q_{\text{out}} = Q_{CD} = \Delta S \cdot T_m$ (consideriamo *solo* l'aspetto scalare! ovvero non consideriamo se è *entrante* o meno).

Allora

$$\eta = 1 - \frac{Q_{\text{in}}}{Q_{\text{out}}} = 1 - \frac{T_m}{T_M}$$

$\frac{T_m \Delta S}{T_M \Delta S}$

che è la tesi. Per quanto riguarda la minorazione significativa $\ll 1$, calcolare η con ciò che possono considerati "*valori estremi*" $T_m = -50^\circ\text{C}$ e $T_M = 350^\circ\text{C}$. ■

#Osservazione

Osservazione (il ciclo di Carnot è l'unica macchina reversibile).

Osserviamo che *una macchina termica è reversibile* se e solo se è *un ciclo di Carnot*.

Consideriamo un *ciclo termodinamico* qualsiasi, che *non sia di Carnot* (figura 4.1.)

i. Reversibile per il *gas*? Sì, può essere percorso al contrario.

ii. Reversibile per il *gas e ambiente*? No, perché con una variazione infinitesimale dT ho un *flusso spontaneo di calore* δQ che *non è reversibile*. Diventa reversibile *solo se* gli scambi sono a *temperatura costante*, dato che avrei $\Delta S = 0$. Infatti,

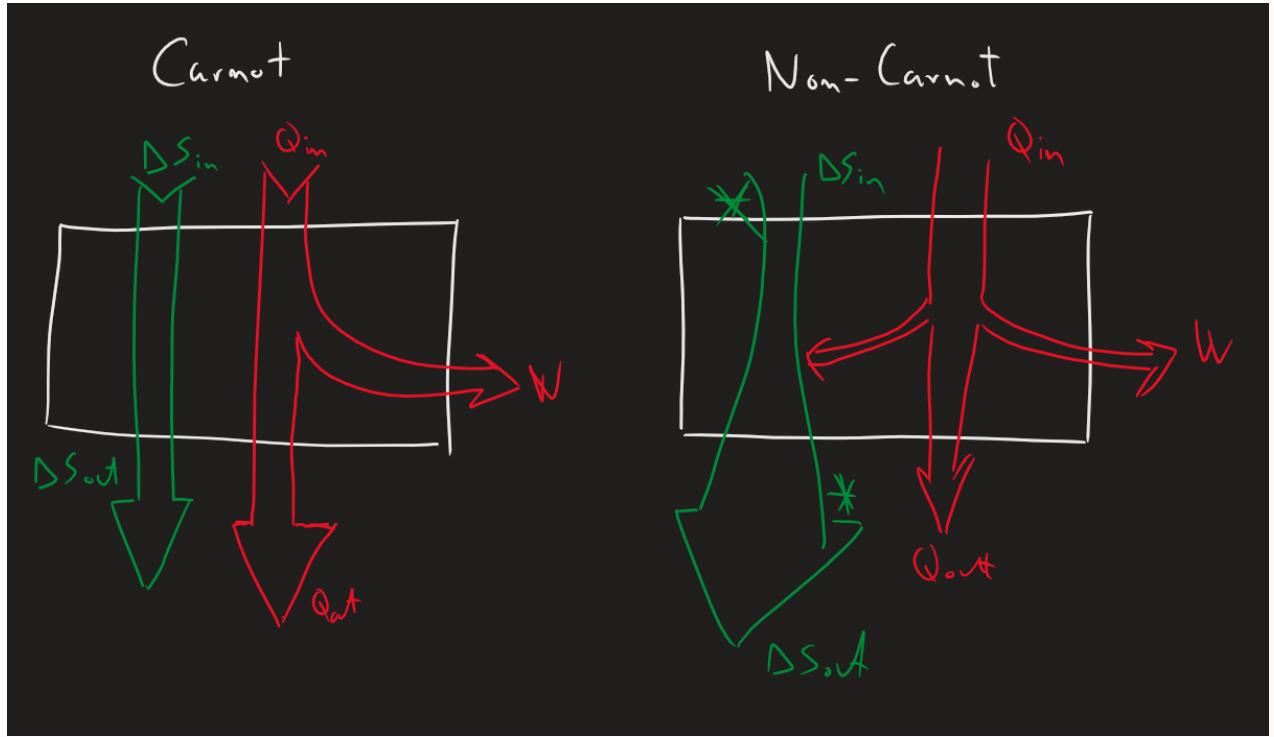
$$\Delta S = \int \frac{\delta Q}{T} - \frac{Q}{T_0} > 0$$

Conseguenza: la macchina di Carnot è completamente reversibile, dunque irrealizzabile.

#Osservazione

OSSERVAZIONE. (*Rappresenta grafica del ciclo di Carnot e non*)

Possiamo *rappresentare* il ciclo di Carnot col *diagramma del flusso*. In particolare abbiamo che ΔS *rimane costante* col ciclo di Carnot. Invece nelle *macchine reali* abbiamo che il flusso di entropia ΔS aumenta, e il *lavoro* W interviene per *gestire* questo aumento.



E3. Frigo e Pompa di Calore

Frigo e Pompa di Calore

Macchine termiche particolari: frigo e pompe di calore. Caratterizzazione. Rendimento per il frigo e per la pompa di calore. Rendimento massimo.

0. Voci correlate

- Ciclo di Carnot
- Introduzione alle Macchine Termiche

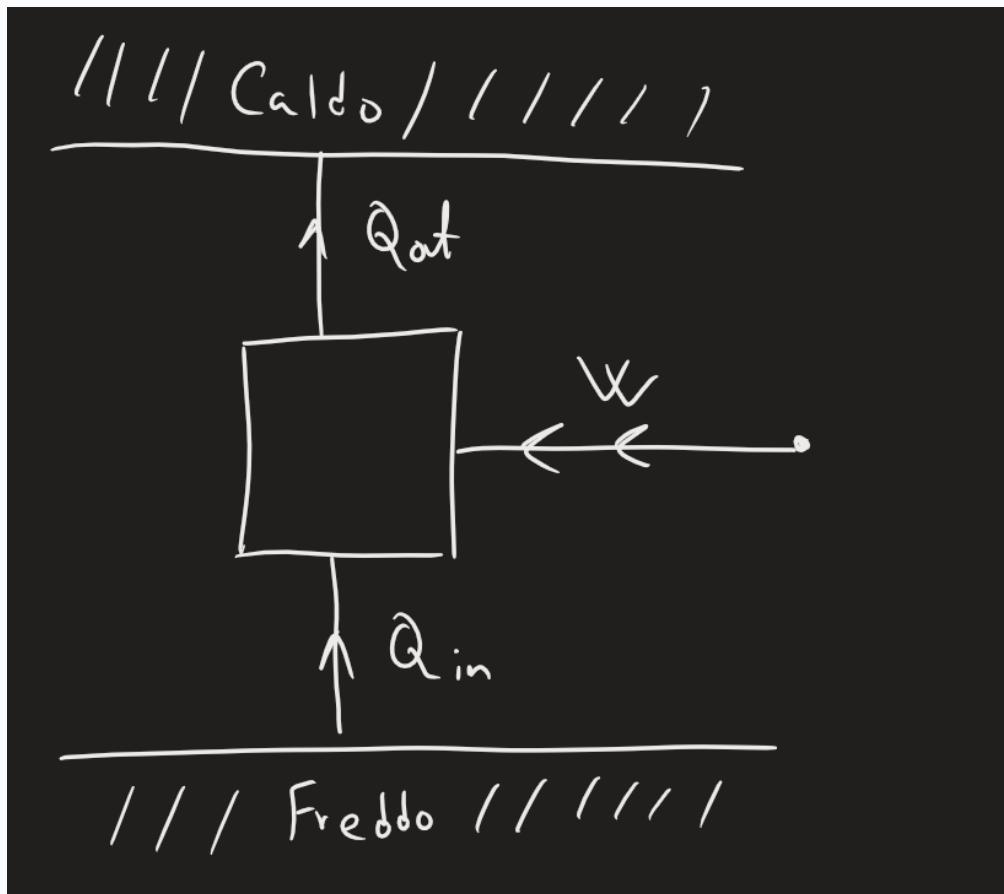
1. Definizione di Frigo e Pompa di Calore

#Definizione

Definizione (frigo e pompa di calore).

Si definisce un **frigo** o **pompa di calore** come **sistema termodinamica** che ha un **flusso di calore non-spontaneo**, ovvero del tipo $\delta Q < 0$ (corpo freddo a corpo caldo) e con **lavoro agente sul sistema** (ovvero **usa** il lavoro per spostare calore).

In particolare i **frigoriferi** hanno l'obiettivo di abbassare T_m , le **pompe di calore** di alzare T_M .



Di solito le **pompe di calore** sono più efficienti. Inoltre, per il secondo principio della termodinamica, è necessario che $W > 0$ per far avvenire il **flusso di calore non-spontaneo**.

2. Rendimento dei Frighi o Pompe di Calore

Come per il **rendimento delle macchine termiche**, vogliamo dare una definizione per quantificare il rapporto "**cost/benefit**".

#Definizione

Definizione (rendimento per frighi o pompe di calore).

Si definisce il **rendimento per il frigo** come

$$K_F = \frac{Q_{\text{in}}}{W}$$

Invece per la **pompa di calore** è

$$K_{PC} = \frac{Q_{\text{out}}}{W}$$

Un buon valore per K_{PC} è 3.

#Teorema

Teorema (massimo rendimento per frighi o pompe di calore).

Supponendo T_M e T_m i picchi di temperatura massima e minima, si ha che

$$K_F = \frac{T_m}{T_M - T_m}$$

e

$$T_{PC} = \frac{T_M}{T_M - T_m}$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 3 (massimo rendimento per frighi o pompe di calore)

Si tratta di usare [cicli di Carnot](#) (Teorema 2 (del Carnot)). ■

E4. Altre Macchine Termiche

Macchine Termiche Miste

Alcune macchine termodinamiche pratiche. Motore di Otto, di Stirling, di Diesel e di Rankine. (pagina [rushata](#))

0. Voci correlate

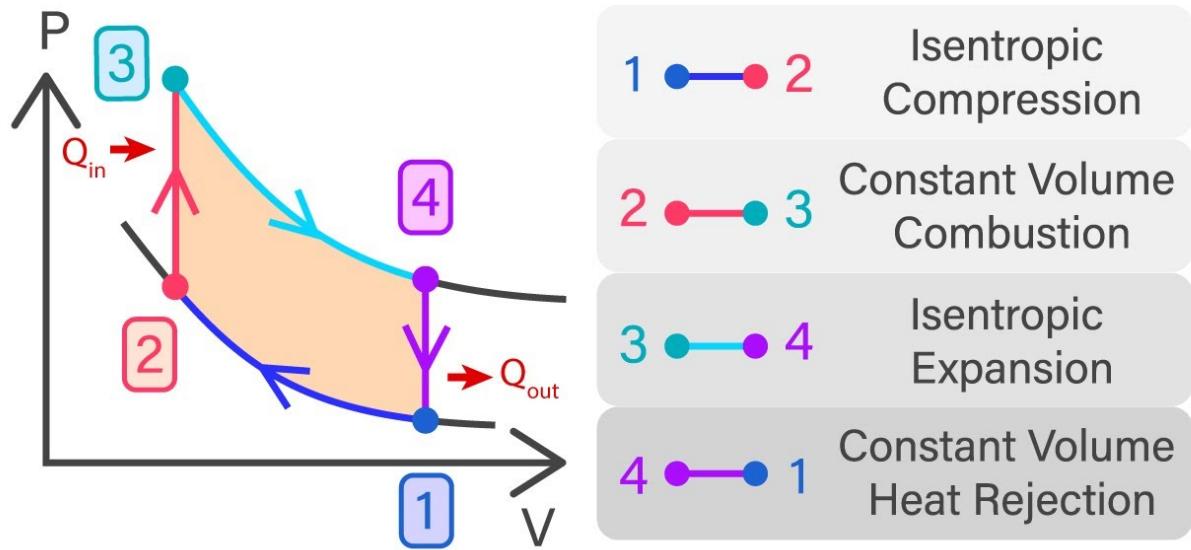
- [Macchine Termiche Miste](#)
-

⚠ Nota - Pagina abbozzata

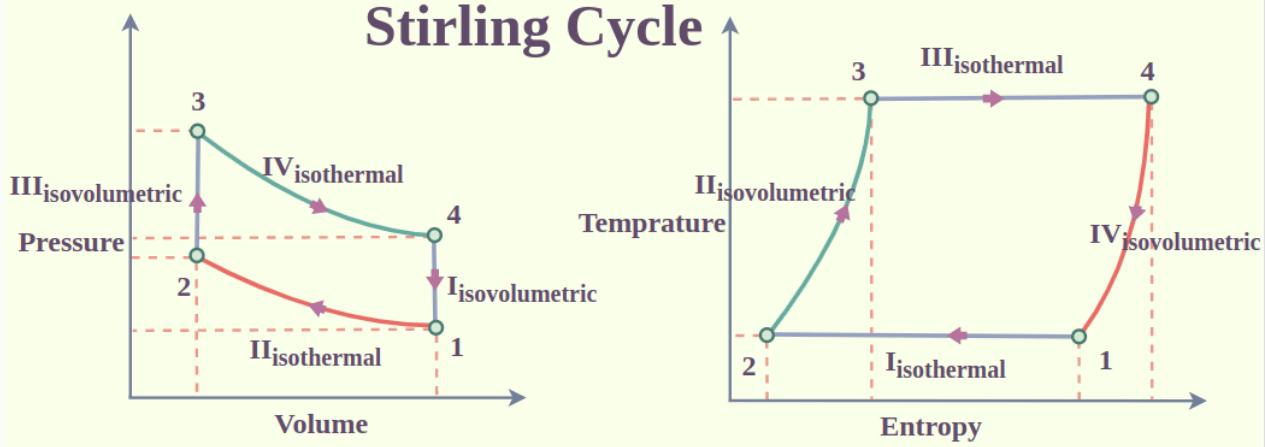
Questa pagina è stata scritta con fretta, dato che questo è un argomento accessorio, ed è utile giusto per farci un'idea generale dei motori / cicli termodinamici.

1. Elenco

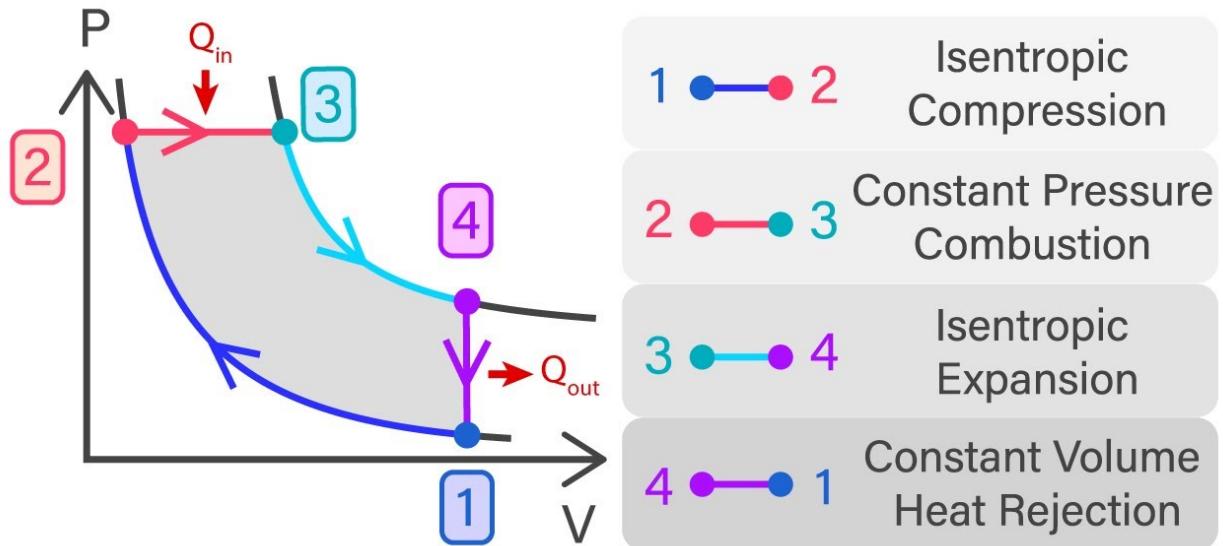
IDEAL OTTO CYCLE



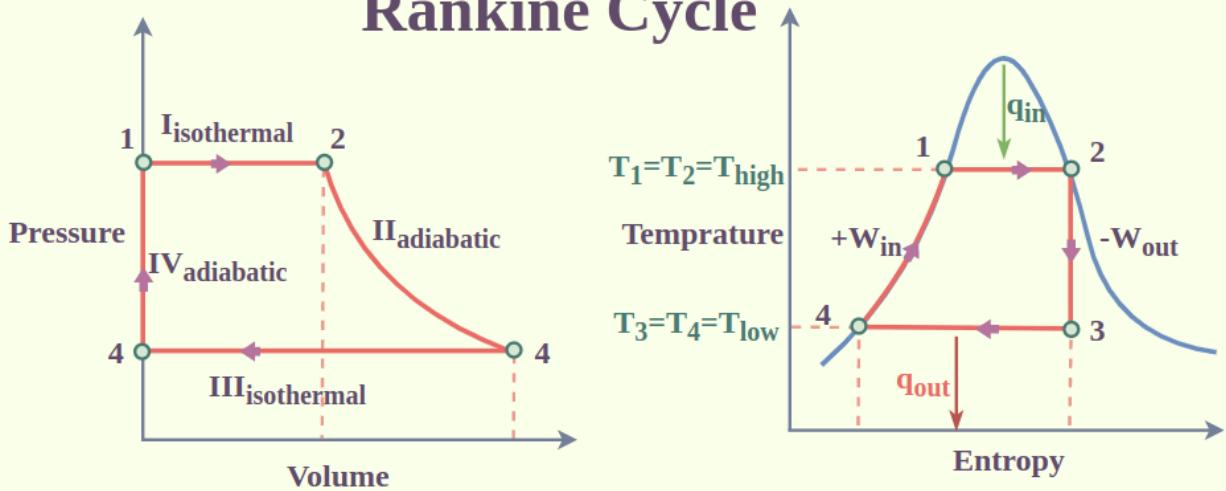
P-V and T-S Diagram of
Stirling Cycle



IDEAL DIESEL CYCLE



P-V and T-S Diagram of Rankine Cycle



Errore: 1→2, 4→4 sono isobare, non isotermi.

F. FASI DELLA MATERIA

F1. Generalità sulle fasi della materia

Fasi della Materia

Generalità sulle fasi di materia: gas, liquido e solido.

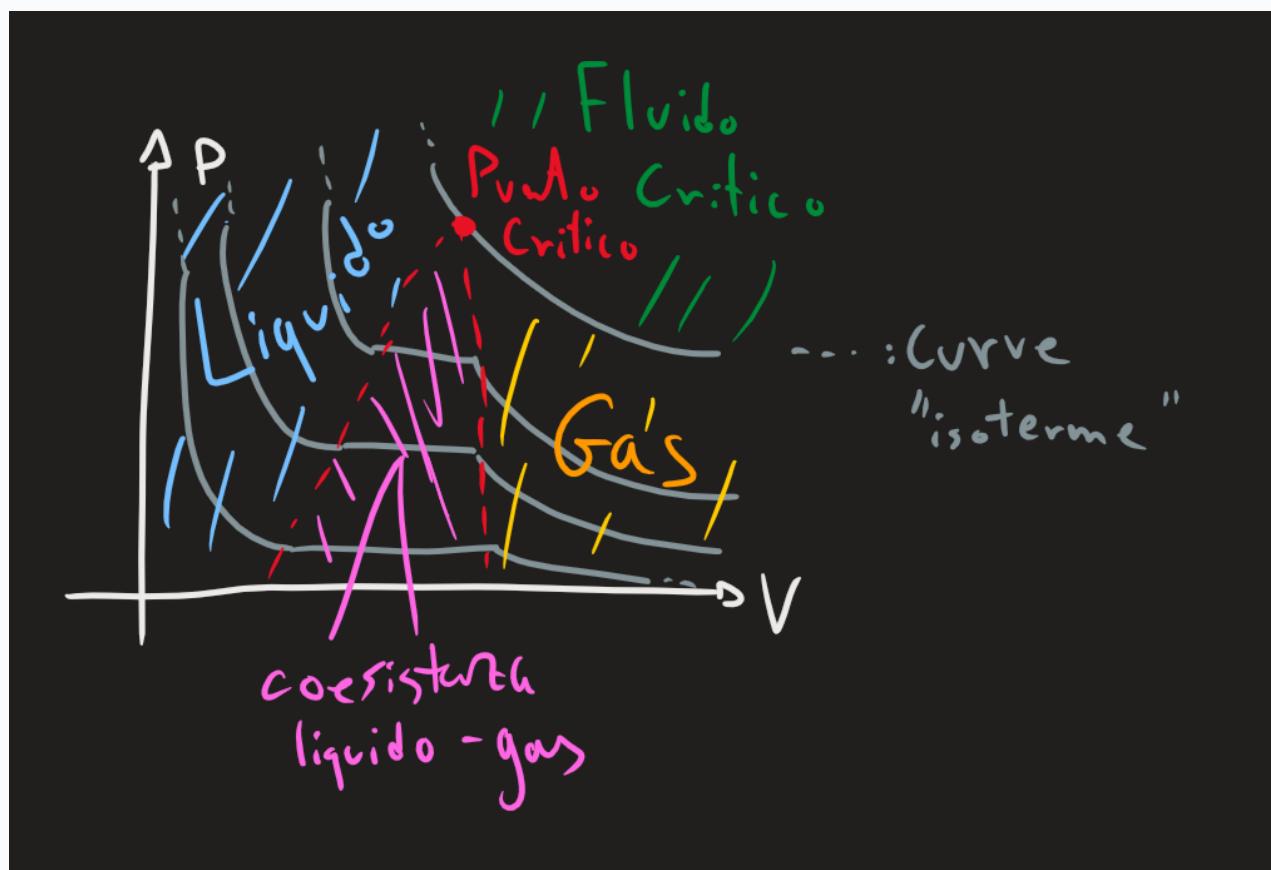
1. Generalità sulle Fasi della Materia

Vediamo delle nozioni elementari sulle *fasi della materia*, ovvero sulla *descrizione dell'interazione tra le molecole*. In particolare le vedremo in *termini della termodinamica*.

1. **GAS.** La fase dove vi è un "massimo grado di libertà" per le molecole, abbiamo lo *stato gassoso*, dove le molecole sono libere di muoversi come pare a loro. In particolare abbiamo che la *distanza tra le molecole* è *significativamente più grande* della *dimensione delle molecole*.
2. **LIQUIDO.** Qui invece abbiamo le *molecole* sono legate tra di loro (in particolare da forze attrattive e repulsive: abbiamo delle specie di oscillazioni), ma non hanno nessun *vincolo di forma*. Ovvero, ponendo un liquido in un contenitore, abbiamo che il liquido assumerà la forma del contenitore stesso. In questo caso la *distanza tra le molecole* sono all'incirca quanto grandi come la *dimensione delle molecole*.
3. **SOLIDO.** Come ultima fase si ha che le *molecole* sono *completamente vincolate*, bloccate. Come nei liquidi, la *distanza intramolecolare* è all'incirca quello delle *molecole*.

ENTROPIA. Notiamo che l'*entropia* ΔS (Definizione 1 (entropia secondo Boltzmann)) parte dal *minimo* con i *solidi*, poi aumenta per avere la *massima libertà* con i *gas*. Per compiere un salto tra le fasi, si ha un *grande salto di entropia*, che viene effettuata col *calore latente*.

CONSEGUENZE. Quindi, al contrario dei *gas ideali*, abbiamo il seguente *diagramma PV* per un "*gas reale*" che può trasformarsi con le fasi.



In particolare abbiamo un *punto critico* che delinea la curva che separa lo stato

supercritico dal *gassoso o fluido*. Vedremo bene il significato di questo col *diagramma di fase*.

F2. Diagramma di Fase

Diagramma di Fase

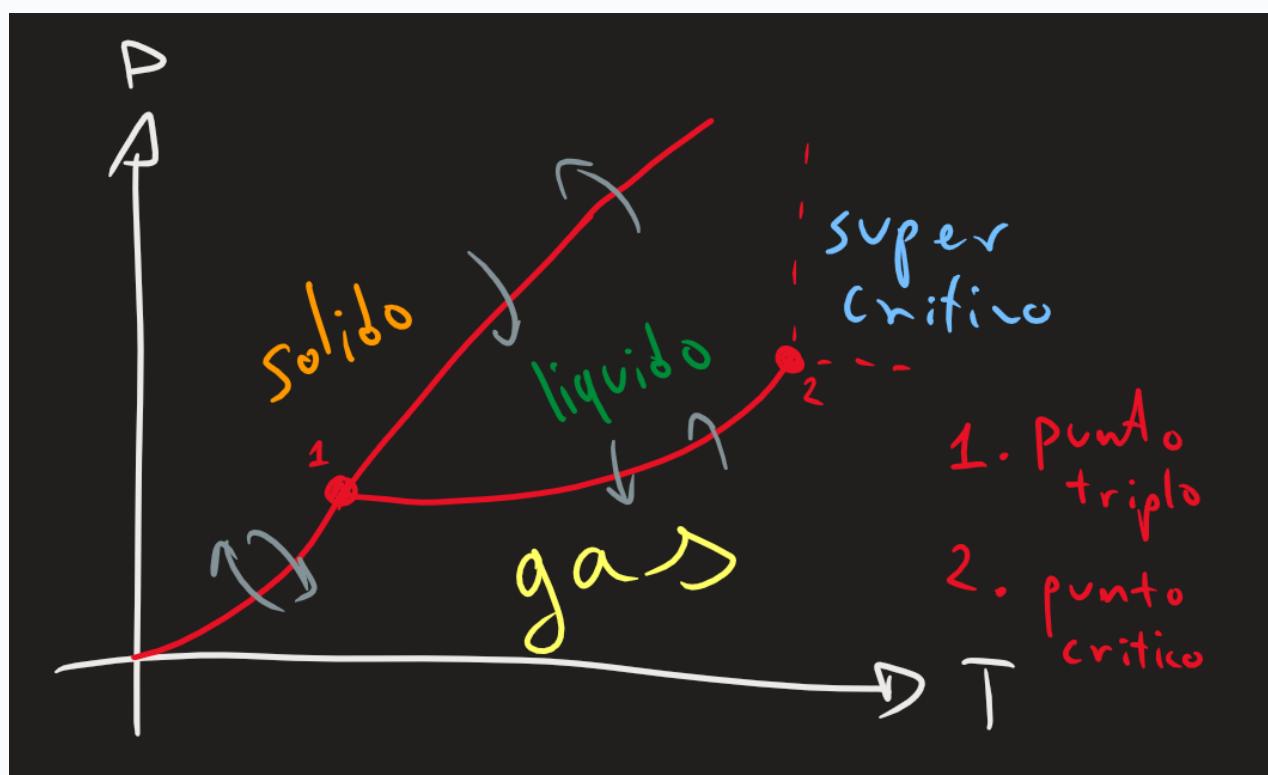
Diagramma di fase: generalità ed esempio dell'acqua

0. Voci correlate

- Fasi della Materia

1. Struttura Generale di Diagramma di Fase

Con le *fasi della materia* (Fasi della Materia) abbiamo visto che un "gas reale" presenta delle curve più particolari. Adesso prendiamo questo diagramma *PV* e lo immaginiamo come un *grafico tridimensionale PV-T*, e cambiamo la direzione con cui guardiamo questo grafico, focalizzandoci sul piano *PT*. Ciò che otteniamo è proprio il *diagramma di fase*, che descrive le *condizioni di pressione e temperatura* per ottenere certe fasi della materia.

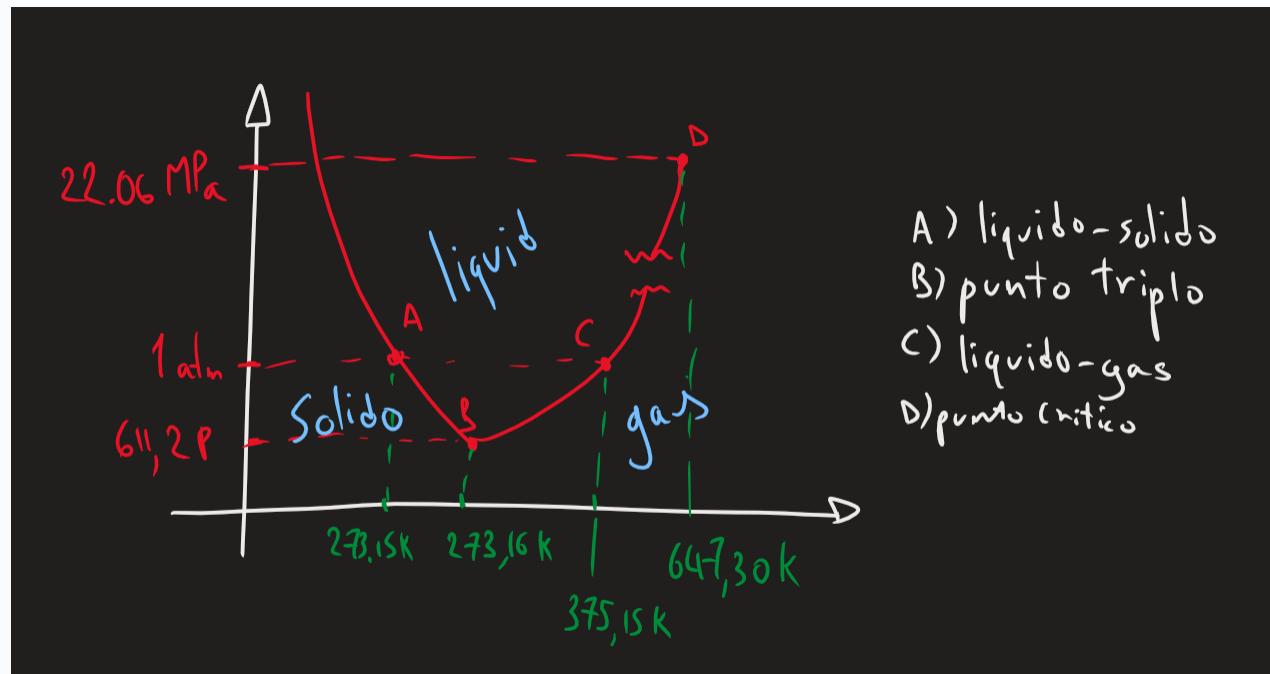


In particolare abbiamo:

- *Punto triplo*: coesistenza di tutte e tre le fasi della materia
- *Punto critico*: quando abbiamo un *fluido critico*
- *Brinamento/sublimazione*: passaggio di stato a *gas→solido* (viceversa)
- *Condensazione/evaporazione*: *gas→liquido* (viceversa)
- *Solidificazione/fisione*: *liquido→solido* (viceversa)

2. Esempio Particolare di Diagramma PT

Prendiamo il *diagramma di fase dell'acqua*, che presenta una *disposizione particolare*.



Notiamo che questa sostanza presenta un *comportamento particolare*: nel passaggio da *liquido a solido* ho una *pendenza negativa*. Infatti, abbiamo che la *densità del ghiaccio* è minore della *densità dell'acqua*: comprimendo il ghiaccio, ho una fusione.

F3. Calore Latente

Calore Latente

Definizione di Calore Latente relativo ad un passaggio di stato.

0. Voci correlate

- Fasi della Materia

1. Calore Latente

#Osservazione

Osservazione (preliminare).

Come visto in [Fasi della Materia](#), abbiamo la seguente catena delle diseguaglianze per l'entropia degli stati di un materiale:

$$S_{\text{solido}} < S_{\text{liquido}} < S_{\text{gas}}$$

Allora per effettuare un [passaggio di transizione della fase di materia](#) vi è necessaria un [salto di entropia](#) dS , che viene espressa in [calore](#) come

$$\delta Q = T dS$$

Passando al [discreto](#), abbiamo la definizione di calore latente.

#Definizione

Definizione (calore latente).

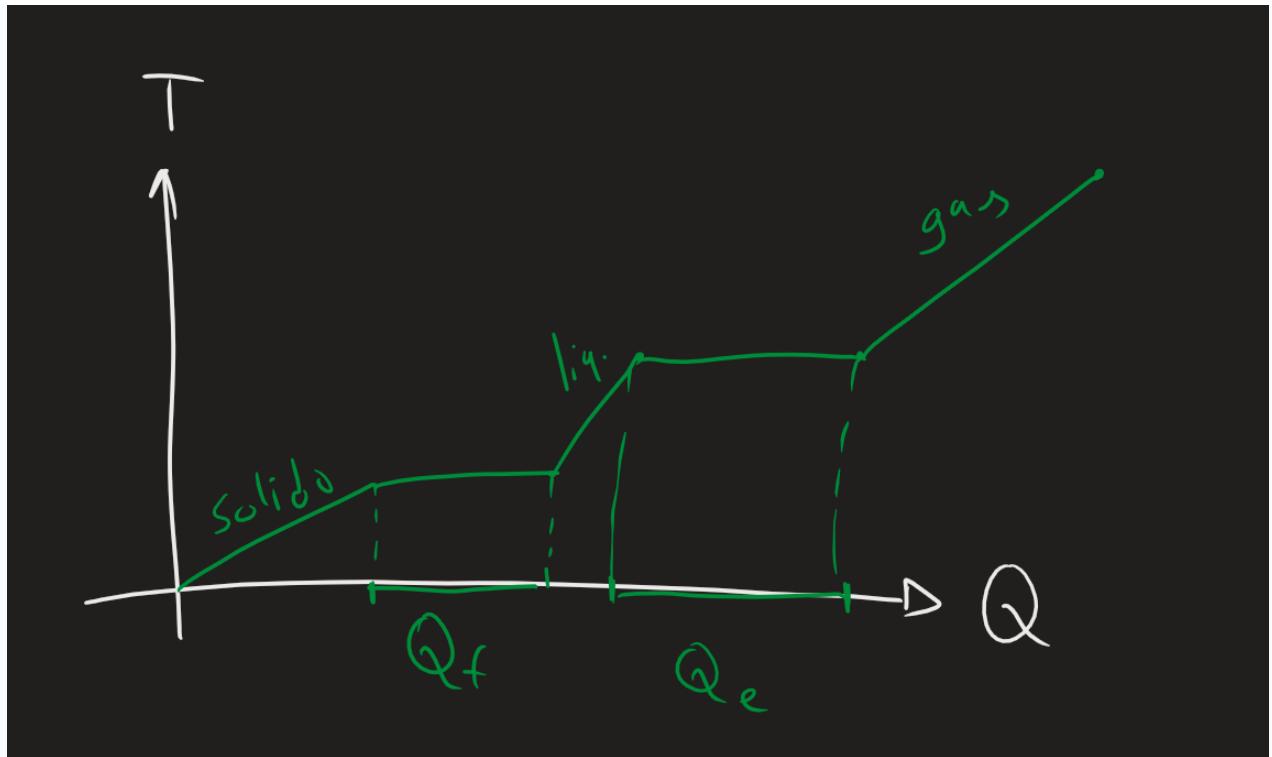
Si definisce il [calore latente](#) come il [scambio di calore, necessario per effettuare il necessario salto di entropia](#) per [cambiare fase di materia](#).

$$Q_{\text{latente}} = T \Delta S_{\text{salto}}$$

Ad esempio, per la [fusione](#) ho

$$Q_{\text{latente, fusione}} = T_{\text{fusione}} \Delta S_{\text{solido} \rightarrow \text{liquido}}$$

L'idea è quella di [prendere il grafico TQ](#) (fissando la pressione P) e di considerare il calore latente Q come la misura del segmento in cui la [temperatura rimane costante](#).



Normalizzando tutto per la *massa molare*, ottengo il *calore latente specifico*

#Definizione

Definizione (calore latente specifico).

Si definisce il *calore latente specifico* come il *calore latente* normalizzato per la *quantità di materia*, espressa in moli.

$$L = T_{\text{transizione}} \cdot \frac{\Delta S}{n} = \frac{Q_{\text{latente}}}{n}$$

Sostituendo $n \rightarrow m$ si ha il *calore specifico per massa*.

F4. Legge di Clausius-Clapeyron

Legge di Clausius-Clapeyron

Formula per calcolare la pendenza della pressione al variare della temperatura per una materia in uno stato di coesistenza.

0. Voci correlate

- Fasi della Materia
- Diagramma di Fase

1. Legge di Clausius Clapeyron

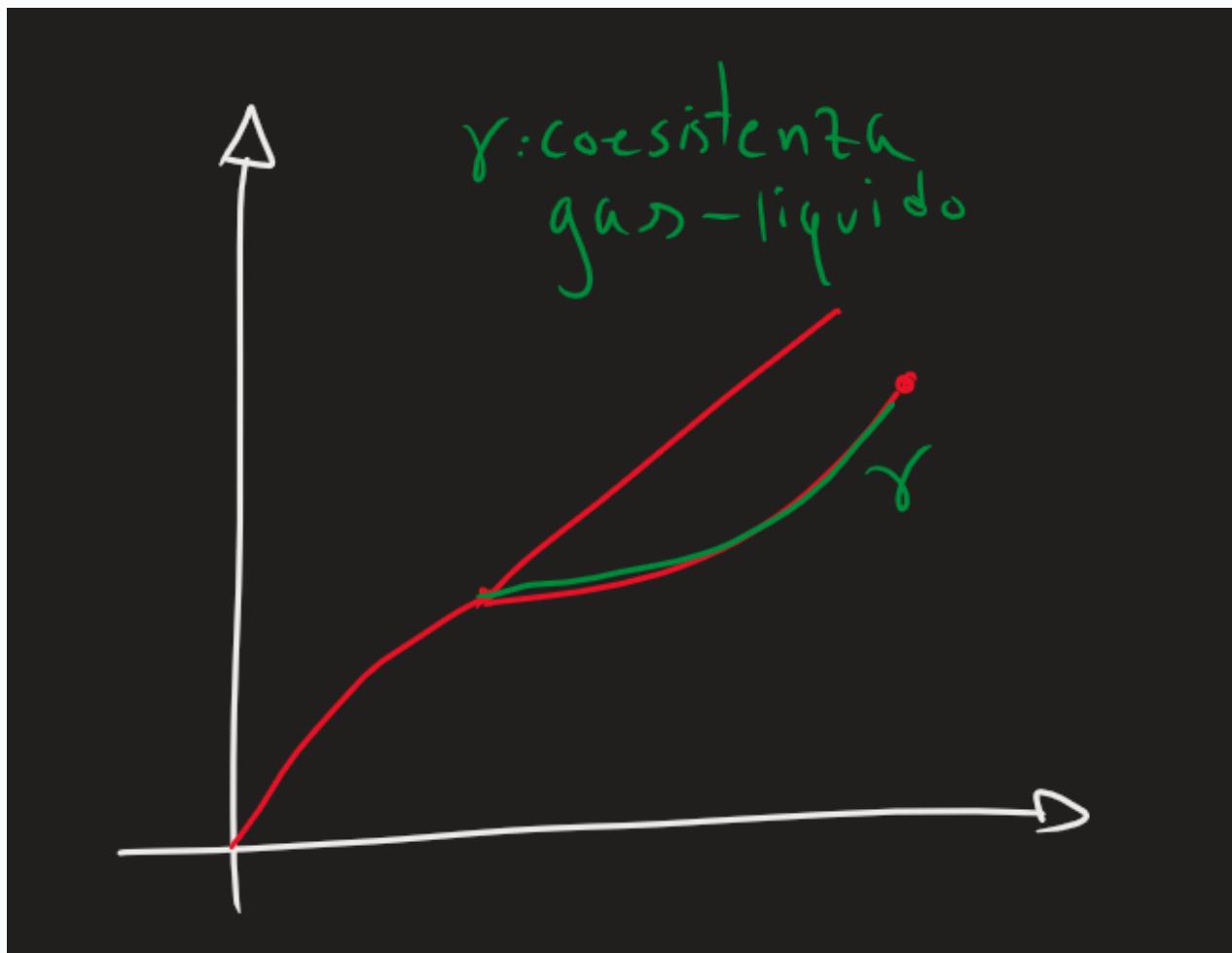
#Teorema

Teorema (legge di Clausius-Clapeyron).

Supponiamo che una *sostanza* si trovi lungo la *retta di equilibrio*, di *coesistenza*, per due fasi della materia (*figura 1.1.*). Allora si ha che la sua variazione (pendenza) dP/dT è uguale a

$$\frac{dP}{dT} = \frac{\Delta S}{\Delta V} = \frac{Q_{\text{latente}}}{T\Delta V}$$

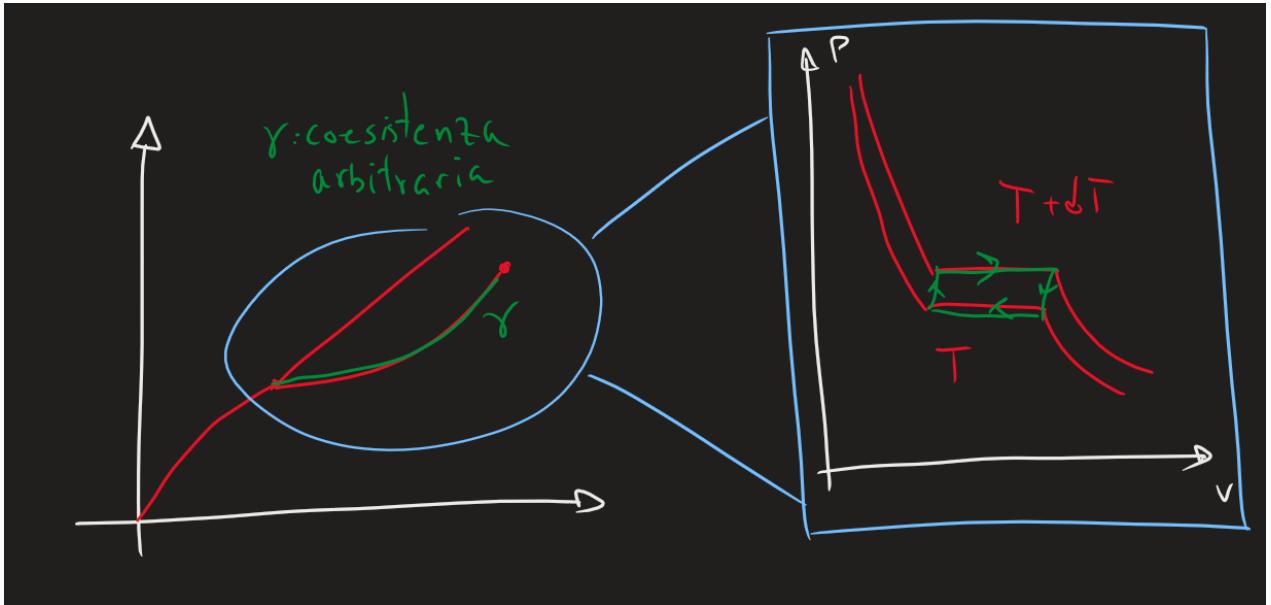
FIGURA 1.1. (*Situazione*)



#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 1 (legge di Clausius-Clapeyron)

Concentriamoci sul *piano PV* del diagramma di fase. Ovvero mi trovo in un *ciclo termodinamico*, intrappolato tra *due curve isotermi*, un'*espansione e compressione isobara*, con un'alzamento infinitesimo della temperatura dT .



Dunque per il *primo principio della termodinamica* ho

$$dU = T dS - P dV$$

Dato che sono in un ciclo termodinamico, l'integrale curvilineo $\oint dU = 0$ è nullo. Allora segue l'uguaglianza

$$Q = \oint T dS = \oint P dV = W$$

Dato che ho solo *due trasformazioni isotermi e isobare*, il calcolo del calore Q e W diventano facili da svolgere. Segue l'uguaglianza

$$\begin{aligned} T\Delta S - (T + dT)\Delta S &= P\Delta V - (P + dP)\Delta V \\ dT\Delta S &= dP\Delta V \\ \frac{dP}{dT} &= \frac{\Delta S}{\Delta V} \blacksquare \end{aligned}$$

G. TRASMISSIONE DEL CALORE

G1. Generalità sulla trasmissione del calore

Mezzi di Trasmissione del Calore

Generalità sui mezzi di trasmissione del calore: convezione, conduzione termica e irraggiamento.

0. Voci correlate

- Definizione di Calore e Lavoro Termodinamico

1. Generalità sulla convezione, conduzione e irraggiamento

Sappiamo che nella termodinamica c'è un **flusso spontaneo** di calore tra due corpi. Ma **come** viene trasmesso questo calore? A seconda della **fase di materia**, abbiamo casi diversi.

1. **CONVEZIONE.** Accade con i **fluidi e gas**, quando il **gas caldo** tende a salire (dato che di solito hanno una densità più bassa), fino a raggiungere il "**tetto**", poi per condensarsi in liquido e scendere. Non vedremo
2. **CONDUZIONE.** Accade in particolare con i **corpi**, dove ho **gradienti di temperatura**.
3. **IRRAGGIAMENTO.** Tra **gas**, una conseguenza particolare di **campi elettromagnetici** (ovvero il calore viene "**trasmesso a distanza con i raggi**").

G2. Conduzione termica

Conduzione Termica

Conduzione termica. Modello tipico: definizione di tasso d'incremento del calore sul tempo, flusso di calore.

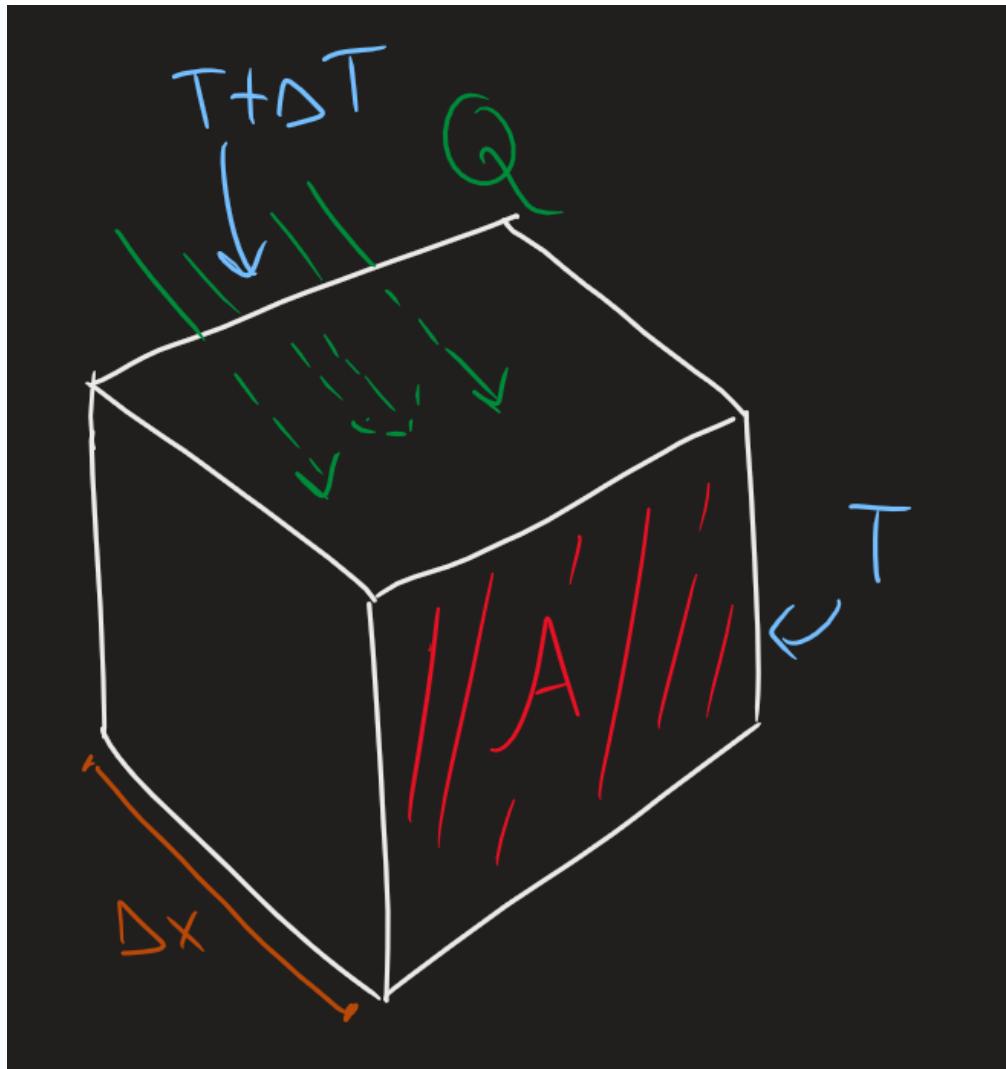
0. Voci correlate

- Mezzi di Trasmissione del Calore

1. Modello Tipico

MODELLO. (*Conduzione termica*)

Supponiamo che un **pezzo di materia** (in particolare un blocco con area comune A e "spessore" Δx), da un lato avente temperatura T e dall'altro il gradiente di temperatura $T + \Delta T$.



i. Rapporto incrementare del calore sul tempo

Vogliamo quantificare la quantità del "rate" calore/tempo (ovvero, "quanto calore esce da A all'unità del tempo?"). Per dare una risposta ci basiamo su un ragionamento qualitativo-intuitivo.

Sicuramente sappiamo che questa quantità è *proporzionale* all'area A : infatti, più grande è la superficie, più il calore si distribuisce.

Dopodiché è *inversamente proporzionale* allo spessore Δx : così il calore ha "più percorso" da svolgere con l'aumentare di Δx .

Infine, è *proporzionale* al gradiente di temperatura ΔT : più è grande lo scarto di temperatura, più velocemente si propaga. Introducendo un *coefficiente di proporzionalità*, ho la formula finale

$$\dot{Q} = \frac{dQ}{dT} = -kA \frac{\partial T}{\partial x}$$

Si ha che k si misura in $[W]/([m \cdot K])$ o in $[W]/([m] \cdot [{}^\circ C])$.

ii. Flusso di calore

Normalizzando la quantità appena data sull'area, ottengo il *flusso di calore*

$$J = \frac{\dot{Q}}{A}$$

In particolare, questo è un vettore

$$\vec{J} = -k\nabla T$$

e prendendo la sua componente x , otteniamo

$$J_x = -k \frac{\partial T}{\partial x}$$

iii. Resistenza termica

Definiamo la **resistenza termica** come il **coefficiente** che forma il rapporto

$$R = \frac{\Delta x}{k}$$

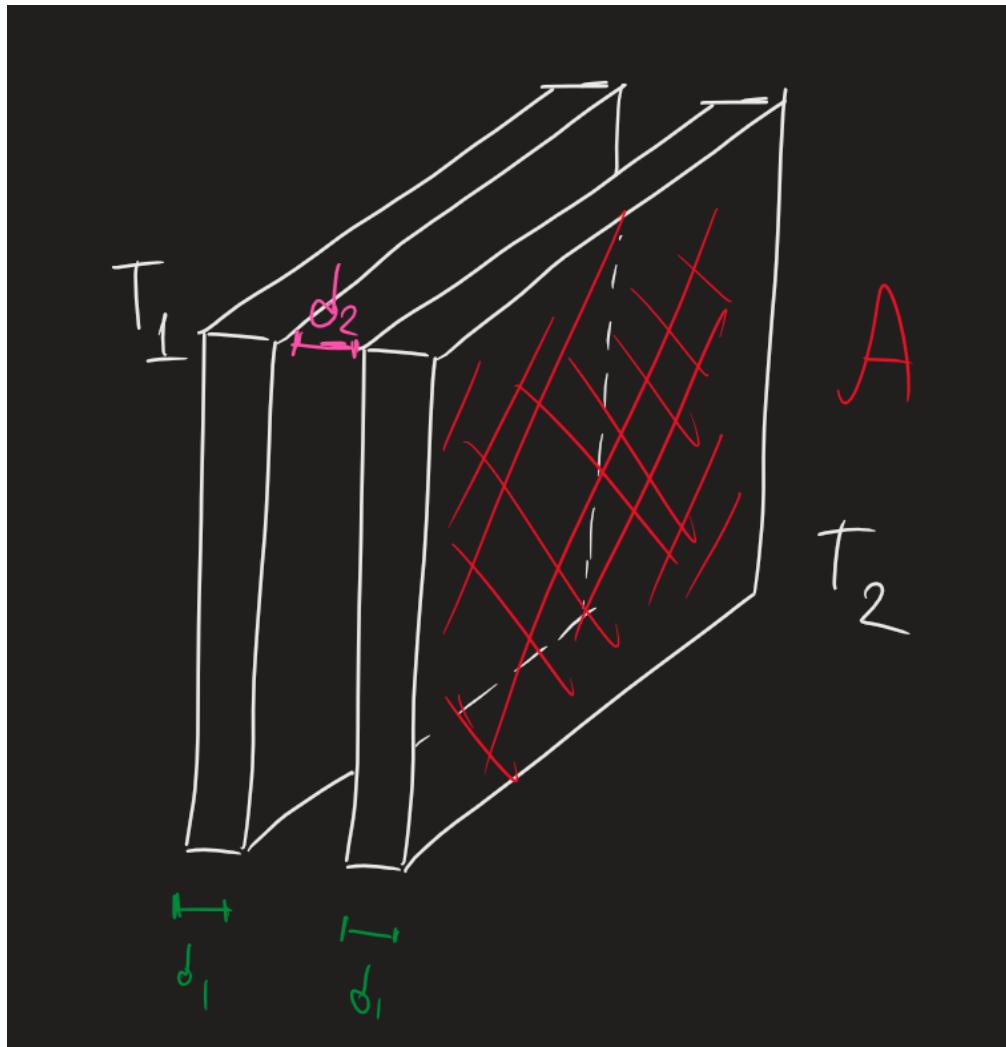
questo sarà utile per gli esercizi.

2. Esempi Specifici

#Esempio

ESEMPIO. (Vetro a doppia lastra)

Supponiamo di avere una **finestra** a doppia lastra, di area A e con spessori d_1 . Vi è uno spazio di d_2 tra le lastre. Inoltre sia k_1 il coefficiente delle lastre e k_2 quello del materiale tra le lastre (tipo aria). Supponendo nota la variazione delle temperature $\Delta T_{1,2} = T_2 - T_1$, calcolare la variazione \dot{Q} .



Notiamo prima di tutto che non *conosciamo* la temperatura tra le *lastre* (che chiameremo T_A, T_B) e \dot{Q} . Nessun problema! Supponiamo che il *sistema* sia in equilibrio *termico*, ovvero tutte le variazioni istantanee \dot{Q} sono le stesse. Allora abbiamo il sistema

$$\dot{Q} = \begin{cases} k_1 A \frac{\Delta T_{1,A}}{d_1} \\ k_2 A \frac{\Delta T_{A,B}}{d_2} \\ k_1 A \frac{\Delta T_{B,2}}{d_1} \end{cases}$$

Isolando per le ΔT ottengo il sistema di equazioni

$$\begin{cases} T_A - T_1 = \frac{\dot{Q}}{A} \frac{d_1}{k_1} \\ T_B - T_A = \frac{\dot{Q}}{A} \frac{d_2}{k_2} \\ T_2 - T_B = \frac{\dot{Q}}{A} \frac{d_1}{k_1} \end{cases}$$

Sommendo tutte le equazioni del sistema, ottengo qualcosa di noto:

$$T_2 - T_1 = \frac{\dot{Q}}{A} \left(\frac{d_1}{k_1} + \frac{d_2}{k_2} + \frac{d_1}{k_1} \right)$$

Posso definire la *resistenza termica* come $R = \Delta x/k$, ottenendo

$$T_2 - T_1 = \frac{\dot{Q}}{A} (R_1 + R_2 + R_1)$$

Ovvero abbiamo la risposta finale

$$\dot{Q} = \frac{A(T_2 - T_1)}{R_1 + R_2 + R_1}$$

Generalizzando su resistenze arbitrarie (quindi le lastre possono essere di materiale diversi) ho

$$\boxed{\dot{Q} = \frac{A\Delta T}{\sum_i R_i}}$$

#Osservazione

Osservazione (analogia con l'elettrotecnica).

Prendendo il *flusso di calore* J (ovvero dividendo per A), otteniamo la formula

$$J = \frac{\Delta T}{R_{\Sigma}}$$

Questa formula è *molto simile* alla *legge di Ohm* per le resistenze, ovvero

$$I = \frac{V}{R}$$

Dove V è il *potenziale* (o meglio, *differenza di potenziale*), R la resistenza elettrica e I l'intensità.

G3. Irraggiamento

Irraggiamento

L'irraggiamento: modello tipico (il corpo nero). Distribuzione di Planck: legge di Wien, legge di Stefan-Boltzmann. Esempio tipico: bilancio energetico tra corpi. Esempi: corpo

umano, irraggiamento solare, temperatura media della terra dovuta all'irraggiamento solare.

0. Voci correlate

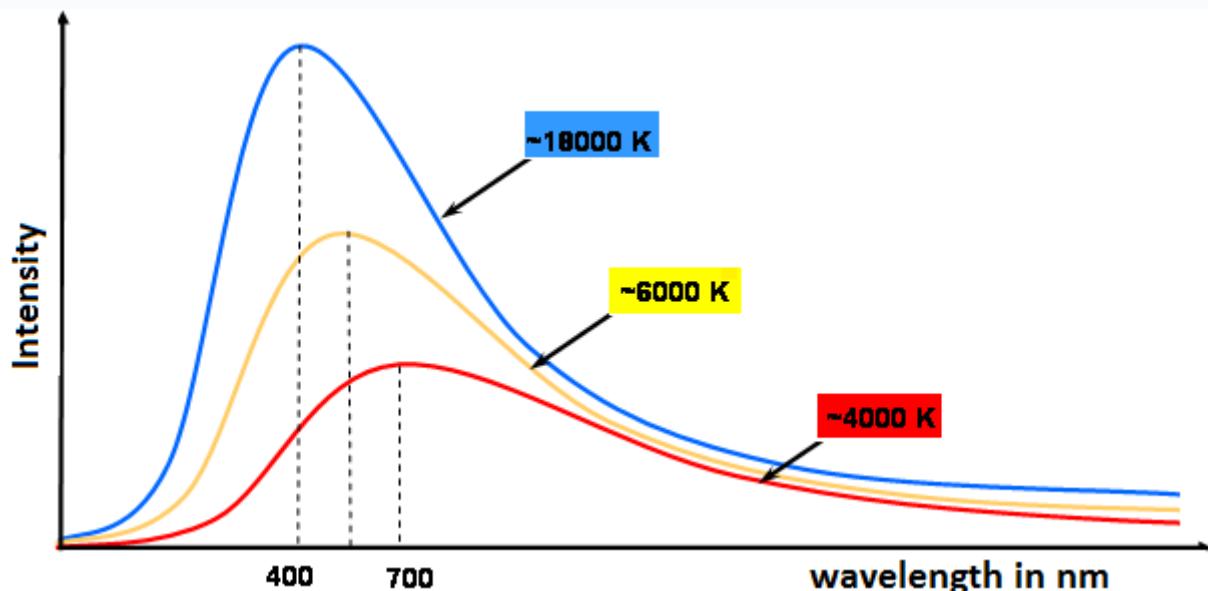
- Mezzi di Trasmissione del Calore

1. Fisica del Corpo Nero

MODELLO. (*Il corpo nero*)

Per parlare di *irraggiamento*, supponiamo di avere un *corpo* che è in grado di *assorbire ed emettere* tutte le frequenze della luce. Questa caratteristica è *quantitativamente* descritta dalla *distribuzione di Planck*, che associa la *frequenza dell'onda* con l'*energia eletromagnetica*.

$$\phi(\nu) = \frac{2\pi h\nu^3}{c^3} \left(e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1 \right)^{-1}$$



Enunciamo una serie di *caratteristiche qualitative della distribuzione di Planck*.

#Teorema

Teorema (di Wien, di Stefan-Boltzmann).

Sia data $\phi(\nu)$ la *distribuzione di Planck*. Allora:

i. *Legge di Wien*

Il massimo ν_{\max} è raggiunto in

$$\boxed{\nu_{\max}} \simeq 2.82 \cdot \frac{k_B T}{h} = \boxed{5.87 \cdot 10^{10} \cdot T}$$

ii. Legge di Stefan-Boltzmann

Il flusso del raggiamento è calcolato come

$$\Phi = \sigma T^4$$

con $\sigma \simeq 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K}^4)$ la **costante di Stefan**.

In particolare, per ottenere \dot{Q} , si moltiplica il flusso per la superficie:

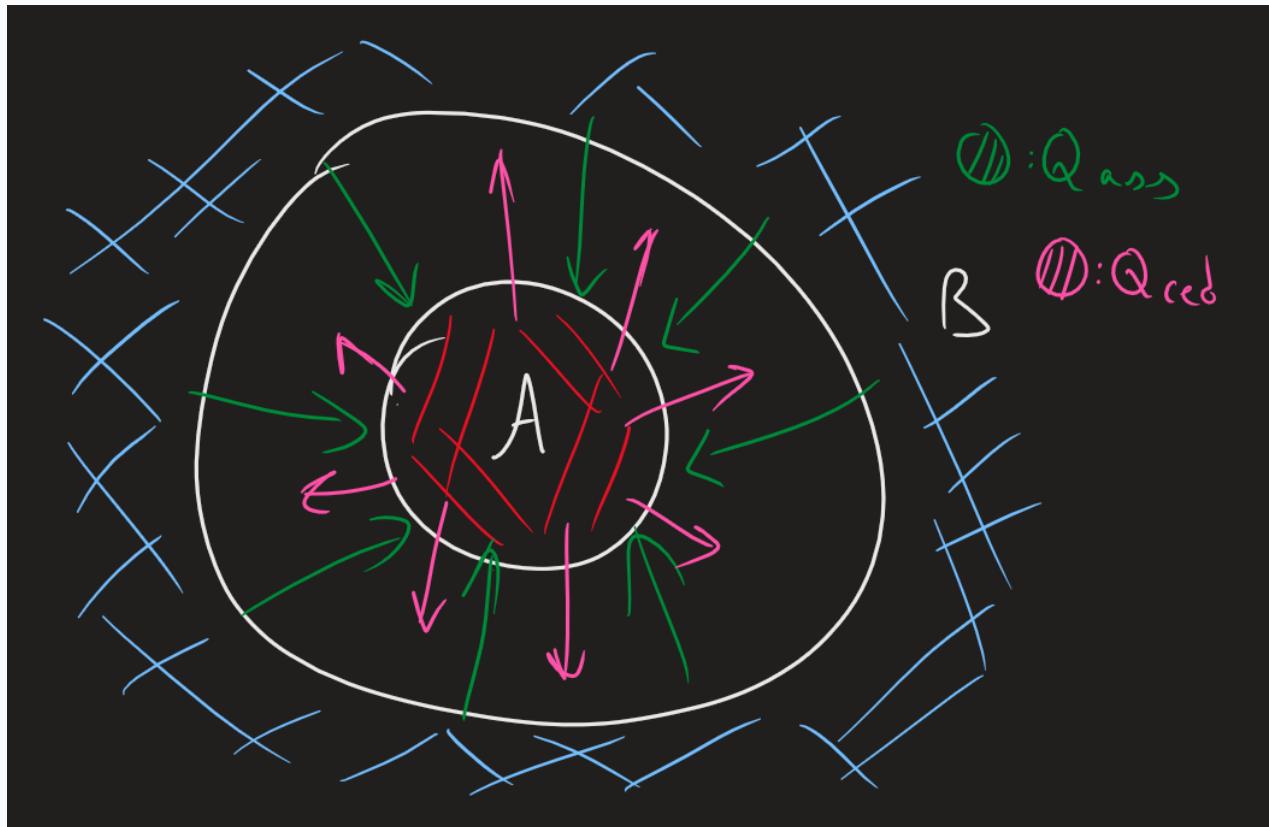
$$\dot{Q} = \Phi \cdot S = \sigma T^4 S$$

2. Bilancio Energetico

#Esempio

ESEMPIO. (Bilancio Energetico)

Supponiamo di avere due **corpi**, A e B tali che il **corpo A** sia "incluso" nel **corpo B** (ovvero $A \subset B$), con temperature T_A, T_B .



Vogliamo calcolare il **calore netto trasmesso al corpo A sul tempo \dot{Q}_{NET}** . Partendo da ciò che conosciamo, abbiamo:

$$\begin{aligned}\dot{Q}_{\text{ass}} &= S_A \sigma T_A^4 \\ \dot{Q}_{\text{ced}} &= -S_A \sigma T_B^4\end{aligned}$$

Allora il **calore netto** è la loro semplice somma (o sottrazione), che è

$$\dot{Q}_{A, \text{NET}} = S_A \sigma (T_A^4 - T_B^4)$$

H. ESERCIZI

Esercizi sulla Termodinamica

Esercizi sulla termodinamica.

1. Trasformazioni Termodinamiche

#Esercizio

Esercizio.

Una bolla d'acqua di volume $V = 20 \text{ cm}^3$ si trova nel fondo di un lago, a temperatura $T = 4.0 \text{ }^\circ\text{C}$. Quando la bolla d'acqua sale in superficie a $T \rightarrow T = 20 \text{ }^\circ\text{C}$.

Dire la variazione del volume della bolla d'acqua

#Esercizio

Esercizio.

Supponiamo che in una bottiglia di Champagne si ha la pressione sul tappo di $P_0 = 5 \text{ atm}$ con temperatura $T_0 = 5.00 \text{ }^\circ\text{C}$. Appena apro il tappo, ho un'espansione adiabatica. La pressione finale è $P_1 = 1.00 \text{ atm}$. Calcolare la temperatura finale T_1 .

2. Entropia

#Esercizio

Esercizio.

Una pietra calda con capacità termica C , temperatura T_C viene gettato in un lago freddo a temperatura fredda T_F . Assumere che il lago è infinitamente grande, tale da far raffreddare il sasso a $T_C \rightarrow T_C = T_F$.

Dire:

- i. La variazione di entropia del lago e del sasso
- ii. Dire i segni della variazione d'entropia
- iii. Calcolare la variazione d'entropia totale. Commentare sul segno del valore appena calcolato.

#Esercizio

Esercizio.

Un cubo di ghiaccio con alla temperatura di fusione dell'acqua si fonde in un secchio. Calcolare la variazione d'entropia necessaria per far fondere il ghiaccio, sapendo che il calore latente specifico per la fusione è $L_f = 3.33 \cdot 10^5 \text{ J/kg}$ e il calore specifico dell'acqua a volume costante è $c_V = 4186 \text{ J/(K kg)}$. Calcolare la variazione d'entropia del secchio.

#Esercizio

Esercizio.

Un cucchiaio d'acqua di massa $m = 5.00 \text{ g}$ evapora su un piatto caldo, trovandosi sul punto di ebollizione. Calcola l'entropia necessaria per l'evaporazione (trovare L_e, T_e su Google).

3. Macchine Termiche

#Esercizio

Esercizio.

Un motore di Carnot ha $\eta = 0.25$. Se la temperatura fredda (minima) T_F ha valore $T_F = 27^\circ\text{C}$, qual è la temperatura calda (massima) T_C ?

#Esercizio

Esercizio.

Un motore genera lavoro con potenza $P_W = 5 \text{ kW}$ e introduce calore con potenza $P_{Q_{in}} = 10 \text{ kW}$. Si può calcolare il suo rendimento? Se sì, dire il valore del rendimento η .

4. Trasmissione del Calore

#Esercizio

Esercizio.

Supponiamo di avere due prototipi per le finestre.

Modello A: La finestra è dotata di una singola lastra

Modello B: La finestra è dotata di doppia lastra, con l'aria nel mezzo delle lastre.

Supponendo che l'area è $A = 1 \text{ m}^2$, il coefficiente della lastra è $k_v = 0.8 \text{ W}/(\text{mK})$, dell'aria invece $k_a = 0.024 \text{ W}/(\text{mK})$, poi che abbiamo lo spessore della lastra $d_1 = 5 \text{ m}$, la distanza tra le lastre (nel caso B) $d_2 = 1 \text{ cm}$, calcolare \dot{Q} di entrambi i sistemi.

#Esercizio

Esercizio.

Supponiamo che la superficie di un corpo umano è $S = 2 \text{ m}^2$. La temperatura interna nel corpo dev'essere $T_\Sigma = 36^\circ\text{C}$ (o altrimenti muore). Calcolare \dot{Q} se l'uomo si trova nel vuoto; calcolare \dot{Q}' se invece la temperatura ambiente è $T_{C\Sigma} = 20^\circ\text{C}$.

#Esercizio

Esercizio.

Il sole mantiene la temperatura di $T = 5777 \text{ K}$ e ha il raggio $R_S = 6.96 \cdot 10^8 \text{ m}$. Calcolare la quantità del calore emesso dal sole sull'unità del tempo \dot{Q} .

#Esercizio

Esercizio.

Conoscendo che il sole emette un flusso di calore $\Phi_S = 6.33 \cdot 10^7 \text{ W/m}^2$, calcolare la temperatura media della terra $E[T]$ (assumendo che la terra sia un corpo nero, e che l'effetto serra non esista), sapendo che la distanza Terra-Sole è $d = 150 \cdot 10^9 \text{ m}$.