

# Vettori Geometrici - Sommario

*Sommario-appunti presi nel 27.06.2023, sui vettori applicati al passaggio di vettori liberi. Operazioni sui vettori e alcune osservazioni*

---

## Vettori Applicati

### Vettori Applicati

*Definizione basilare del vettore applicato, operazioni tra essi, vettore nullo, limitazioni dei vettori applicati, alcune proprietà.*

---

### Premessa

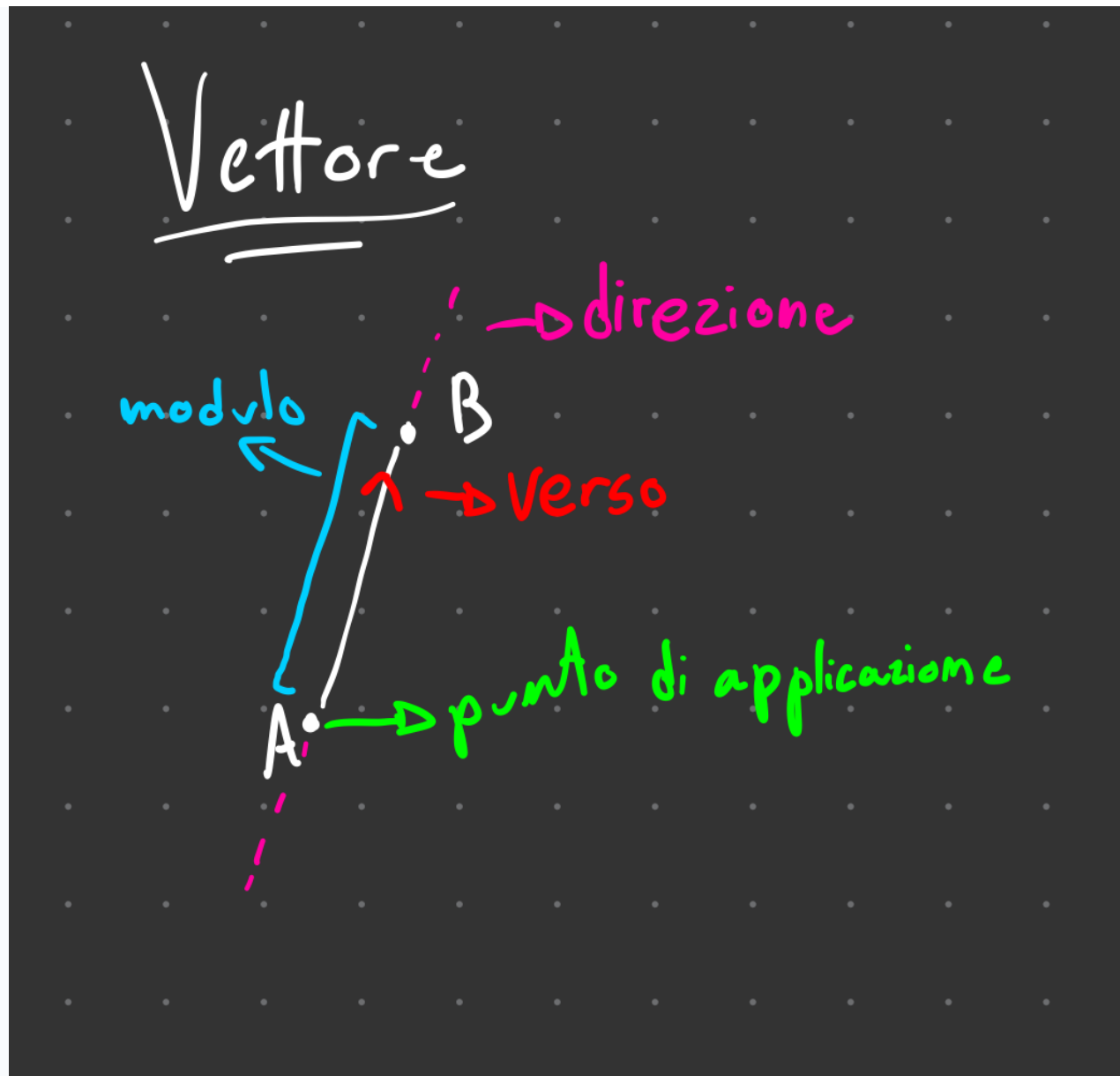
Ci mettiamo nel contesto della *geometria euclidea*, i quali postulati vengono descritti dagli *Elementi* (uno dei testi fondamentali della matematica) di Euclide (uno dei matematici greci più importanti); quindi ricorreremo a dei concetti geometrici che vengono dati come *elementi primitivi*, come il *punto*, il *piano*, la *retta*, ...

### DEF 1. Vettore Applicato

Un **vettore applicato** è un segmento orientato, caratterizzato dunque da:

- **Punto di applicazione**; ovvero il "*punto di partenza*"  $A$  del vettore  $\overrightarrow{AB}$ .
- **Direzione**; essa è quella data dalla *retta* su cui giace il vettore
- **Verso**; esso è uno dei due *orientamenti* dalla retta
- **Modulo o lunghezza**; viene indicata con  $|\overrightarrow{AB}|$

Graficamente il vettore si rappresenta così:



Dal grafico si evince che un **vettore applicato** è determinato da una **coppia ordinata**  $(A, B)$  di punti; in tal caso il vettore si denota  $\overrightarrow{AB}$

## DEF 1.2. Vettore applicato nullo

Per ogni **punto di applicazione**  $A$ , esiste il **vettore applicato nullo**  $\overrightarrow{AA}$ , che non ha un verso definito.

## DEF 1.3. Somma dei due vettori applicati

I **vettori applicati** si possono **sommare** tra di loro, purché il punto finale del primo vettore coincida con il punto iniziale del secondo, ovvero purché siano della forma

$$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$$

**DEF 1.3.** Definiamo

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

**OSS 1.3.1** Se i due vettori non sono della forma appena descritta sopra, ovvero

$$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD} \text{ ove } B \neq C$$

allora non è possibile sommare questi due vettori; infatti questo rappresenta la *prima limitazione* dei vettori liberi.

**OSS 1.3.2.** Se prendiamo

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$$

notiamo che  $\overrightarrow{BB}$  e  $\overrightarrow{AA}$  si comportano come il numero 0 con l'addizione; **però** notiamo che questi due sono dei vettori applicati *distinti* e non uguali, in quanto essi sono definiti dai loro rispettivi *punti di applicazione* (e ovviamente  $A \neq B$ ). Pertanto è come se si avesse un numero 0 per ogni punto nel piano, dandoci così la *seconda limitazione* dei vettori liberi.

**PROP 1.3.1: LA PROPRIETA' ASSOCIATIVA.** La somma di vettori applicati, quando possibile, soddisfa la *proprietà associativa*;

**DETOUR.** Nei numeri reali  $\mathbb{R}$  la *proprietà associativa* della somma dice il seguente.

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} \text{ vale che } (a + b) + c = a + (b + c)$$

Infatti grazie a questa proprietà è possibile scrivere la somma per un  $n$  numero di numeri senza nessuna ambiguità; ad esempio  $a + b + c$ .

**DIM.** Dobbiamo dimostrare che per ogni vettore applicato  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}$  vale che

$$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD})$$

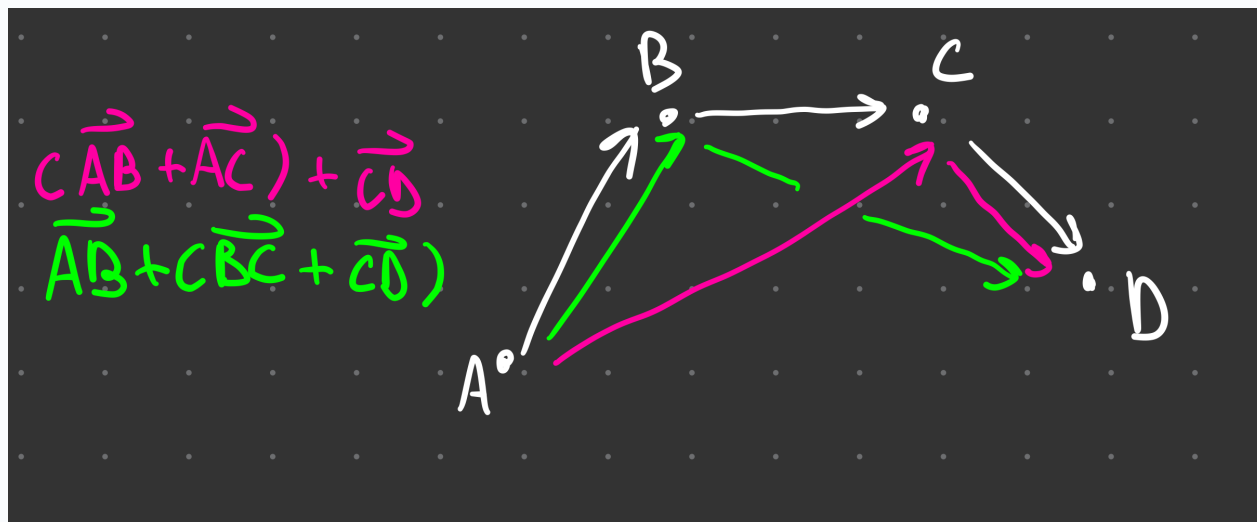
Ora, usando la definizione di *somme dei vettori* (**DEF 1.3.**), possiamo

scrivere:

$$\text{membro sx. } (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$$

$$\text{membro dx. } \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} \blacksquare$$

Oppure si può anche avvalere dell'interpretazione grafica:



## DEF 1.4. Moltiplicazione di un vettore per uno scalare

**DEF 1.4.** Dato un vettore applicato  $\overrightarrow{AB}$  e un numero reale  $a \in \mathbb{R}$ , definiamo  $a \cdot \overrightarrow{AB}$  in questo modo:

- Se  $a = 0$ ,  $a \cdot \overrightarrow{AB} := \overrightarrow{AA}$
  - Se  $a > 0$ ,  $a \cdot \overrightarrow{AB} :=$  Un vettore applicato in  $A$  con le proprietà A)
  - Se  $a < 0$ ,  $a \cdot \overrightarrow{AB} :=$  Un vettore applicato in  $A$  con le proprietà B)
- **A)** Con la **stessa direzione** e lo **stesso verso**, ma con **modulo** uguale a  $a \cdot |\overrightarrow{AB}|$ ;
  - **B)** Con la **stessa direzione**, il **verso opposto** dal vettore originario  $\overrightarrow{AB}$  e con **modulo** uguale a  $|(a)| \cdot |\overrightarrow{AB}|$ , ovvero  $-(a) \cdot |\overrightarrow{AB}|$  ( $|a|$  rappresenta il valore assoluto)

## OSS 1.1. Parallelismo tra equazioni lineari e vettori applicati

Si nota un parallelismo tra due argomenti appena affrontati, ovvero le **soluzioni di un'equazione** e i **Vettori Applicati**. Infatti, da una certa **somma**

di *vettori* si ottiene un altro vettore; da una *moltiplicazione di un vettore con uno scalare* si ottiene un altro vettore, come proprio accade con le *soluzioni di un'equazione* (osservatosi in [Equazioni e Proprietà Lineari](#)). Infatti entrambi i *vettori applicati* e le *soluzioni lineari* compongono dei **spazi vettoriali**; come lo stesso accade con le *soluzioni alle equazioni differenziali lineari*.

## Vettori Liberi

### Vettori Liberi

*Costruzione dei vettori liberi, brevi richiami a relazioni e classi di equivalenza (in Analisi 1), significato di equipollenza, classe di equipollenza e definizione di somma tra vettori liberi.*

### Premessa

Come abbiamo osservato nei [Vettori Applicati](#), la costruzione di esse comportano delle *limitazioni* (**OSS 1.3.1** e **OSS 1.3.2**); quindi per ottenere una teoria più "*comprensiva*", introduciamo un nuovo oggetto: i **vettori liberi**.

Tuttavia è necessario prima introdurre dei nuovi concetti, tra cui il concetto dell'*equipollenza*, della *classe di equipollenza* e i *rappresentanti di una classe di equipollenza*.

### DEF 1. Equipollenza

Due vettori applicati  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$  si dicono **equipollenti** ( $\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD}$ ) *se e solo se* i due vettori hanno:

- La medesima direzione
- Il medesimo verso
- Il medesimo modulo

**OSS 1.1.** Si verifica che l'*equipollenza* è una *relazione di equivalenza* (**DEF 5.**); ovvero essa è riflessiva, simmetrica e transitiva. Questo in quanto l'equipollenza è descritta dall'essere uguali  $=$ .

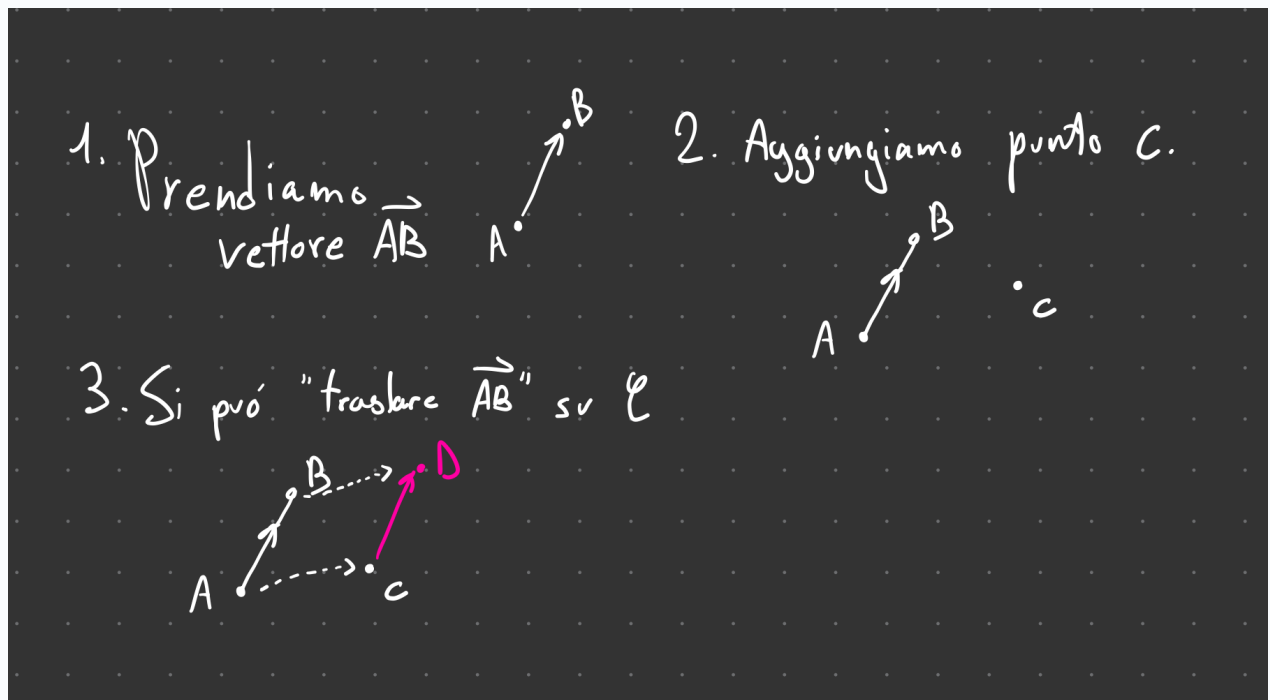
### DEF 2. Classe di equipollenza

Dato un vettore applicato  $\overrightarrow{AB}$ , si definisce la sua **classe di equipollenza**

$$[\overrightarrow{AB}] := \{\text{tutti i vettori applicati } \overrightarrow{CD} : \overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD}\}$$

**PROP 2.1.** Dai risultati della *geometria euclidea* segue che dati un vettore applicato  $\overrightarrow{AB}$  e un punto  $C$ , allora esiste *sempre* un **vettore applicato**  $\overrightarrow{CD} \equiv \overrightarrow{AB}$ ; da questo segue che una classe di equipollenza denotata  $\vec{v}$  e dato un punto  $C$  nel piano, esiste *sempre* un vettore applicato che appartiene a  $\vec{v}$  e che ha come punto iniziale  $C$ .

#### INTERPRETAZIONE GRAFICA.



**OSS 2.1.** Si nota che

$$\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD} \iff [\overrightarrow{AB}] = [\overrightarrow{CD}]$$

Quindi si dice che i vettori  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$  sono dei *rappresentanti* della medesima classe di equipollenza.

### DEF 3. Vettore libero

Ora finalmente si definisce il **vettore libero**, che si dice come una classe di **equipollenza**  $\vec{v}$ .

Infatti è una **quantità infinita** di vettori applicati, che condividono una medesima direzione, un medesimo verso e una medesima lunghezza; sostanzialmente si "*estrania*" dal vettore applicato il *punto di*

*applicazione* e si considerano solo le tre proprietà appena elencate sopra.

## DEF 3.1. Vettore libero nullo

**OSS 3.1.1.** Tutti i *vettori applicati nulli* sono equipollenti e dunque formano una **sola classe di equipollenza** che si denota  $\vec{0}$ . Qui si vede superato la *prima limitazione* osservata nei **Vettori Applicati (OSS. 1.3.1)**; quindi definiamo il *vettore libero nullo* come

$$\vec{0} := [\overrightarrow{AA}]$$

ovvero *tutti* i vettori per cui il punto di applicazione coincide con il punto di arrivo.

**OSS 3.1.2.** Tenendo in considerazione la definizione della **somma tra due vettori liberi**, si ha

$$\vec{0} + \vec{v} = [\overrightarrow{AA}] + [\overrightarrow{AB}] = [\overrightarrow{AB}]$$

$$\vec{v} + \vec{0} = [\overrightarrow{AB}] + [\overrightarrow{BB}] = [\overrightarrow{AB}]$$

Quindi il *vettore libero nullo*  $\vec{0}$  si comporta come il numero 0 rispetto all'operazione di *somma*.

## Operazioni sui vettori liberi

*Breve descrizione qui*

## DEF 1. Somma di due vettori liberi

Dati due vettori liberi  $\vec{u}, \vec{v}$ , definiamo la loro **somma**  $\vec{u} + \vec{v}$  nella maniera seguente:

1. Si sceglie un rappresentante  $\overrightarrow{AB}$  per  $\vec{u}$
2. Per la **PROP. 2.1. (Vettori Liberi)**, si può sempre scegliere un vettore applicato in  $\vec{v}$  tale che il suo punto iniziale sia  $B$ , ovvero un vettore applicato  $\overrightarrow{BC} \in \vec{v}$ , ovvero  $\vec{v} = [\overrightarrow{BC}]$ .

### 3. Definiamo infine

$$\vec{u} + \vec{v} := [\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}] = [\overrightarrow{AC}]$$

**PROP. 1.1.** Si sceglie arbitrariamente un rappresentante per  $\vec{u}$ ; tuttavia secondo il passaggio 3. si nota che *indipendentemente* dal vettore scelto iniziale, si raggiunge sempre allo stesso risultato finale; ovvero la classe di equipollenza  $[\overrightarrow{AC}]$

**DIM.** Si vuole dimostrare che si raggiunge sempre allo stesso risultato finale, indipendentemente dal vettore iniziale scelto. Riper corriamo i passaggi definiti in **DEF 3.1.** con delle leggere variazioni;

1. Si scelgono due distinti rappresentanti per  $\vec{u}$ , ovvero

$$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'} \in \vec{u}; \overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{A'B'}$$

2. Si scelgono i corrispettivi rappresentanti di  $\vec{v}$ , tali che i loro punti iniziali coincidano con i punti finali dei vettori-rappresentanti di  $\vec{u}$ ;

$$\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{B'C'} \in \vec{v}; \overrightarrow{BC} \neq \overrightarrow{B'C'}$$

3. Ora, per definizione in **DEF 3.1.**, la somma di  $\vec{u} + \vec{v}$  viene

$$\vec{u} + \vec{v} = [\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}] = [\overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'}] \iff [\overrightarrow{AC}] = [\overrightarrow{A'C'}] = \vec{w}$$

Da qui si evince che *indipendentemente* dai punti di applicazione  $A$  e  $A'$  scelti, si arriva **sempre** allo stesso risultato; ovvero il *vettore-risultante*  $\vec{w}$ .

La definizione quindi è *ben posta*, ovvero *non* dipende dal rappresentante scelto.

**OSS 1.1.** Rigorosamente parlando, la *somma* è una *funzione*, ovvero la si scrive come

$$\begin{aligned} + : V_2 \times V_2 &\longrightarrow V_2 \\ (\vec{u}, \vec{v}) &\mapsto \vec{u} + \vec{v} \end{aligned}$$

ove  $V_2$  rappresenta l'insieme dei vettori liberi.

## DEF 2. Moltiplicazione di un vettore per uno scalare



Analogamente si definisce l'operazione della moltiplicazione di un vettore per uno *scalare* (ovvero numero reale  $\mathbb{R}$ );

Se  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\vec{v} \in V_2$ , allora possiamo definire  $\lambda \cdot \vec{v}$ ;

$$\vec{v} = [\overrightarrow{AB}] \implies \lambda \cdot \vec{v} := [\lambda \cdot \overrightarrow{AB}]$$

Di cui  $\lambda \cdot \overrightarrow{AB}$  è stata già definita in **Vettori Liberi (DEF 3.2.)**.

**OSS 2.1.** Anche in questo caso la *moltiplicazione di un vettore per uno scalare* è una definizione *ben posta*.

**OSS 2.2.** Anche in questo caso la moltiplicazione di un vettore per uno scalare è una *funzione*, allora

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R} \times V_2 &\longrightarrow V_2 \\ (\lambda, \vec{v}) &\mapsto \lambda \cdot \vec{v} \end{aligned}$$

**OSS 2.3.** Si nota che

$$1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$$

**ATTENZIONE!** La **moltiplicazione di un vettore per uno scalare** NON va confusa con il *prodotto scalare*; si trattano di due operazioni completamente diverse, in quanto con la moltiplicazione di un vettore per uno scalare si ottiene un altro vettore; invece per il *prodotto scalare* si ottiene un altro vettore.

## DEF 3. Proprietà delle operazioni sui vettori liberi

**OSS 3.1.** Si nota entrambe le operazioni  $+$ ,  $\cdot$  sono *suriettive* (**DEF 3.1.**), ovvero che a partire da due vettori è possibile raggiungere qualsiasi vettore; infatti se si considerano gli *elementi neutri* di queste operazioni (ovvero 0 per  $+$ ; 1 per  $\cdot$ ), possiamo prendere un qualsiasi rappresentante  $\overrightarrow{AB}$  di  $\vec{v}$  e metterli in funzione con questi elementi neutri, riotteniamo il medesimo vettore.