Struttura di RN - Sommario

Il capitolo "Struttura di $\mathbb{R}^N$" mira a fornire le basi sufficienti per studiare il calcolo in più variabili; si comincia dalla metrica e dalla topologia, dopodiché si passa alle funzioni in più variabili con le sue proprietà, e infine andiamo a vedere la struttura lineare di quest'insieme.

A. METRICA DI R^N

A1. Definizione di R^N

Definizione di RN

Definizione di insieme $\mathbb{R}^N$.

---

1. Definizione di $\mathbb{R}^N$

#Definizione

Definizione (Insieme R^N).

Sia $N \in \mathbb{N}$, definisco $\mathbb{R}^N$ come l'insieme delle N-uple di coefficienti reali. Ovvero,

$$\mathbb{R}^N := \underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{N \text{ volte}}$$

Inoltre denoto un elemento di $\mathbb{R}^N$ come un vettore $\underline{x} \in \mathbb{R}^N$.

A2. Definizione di Spazio Metrico

Definizione di Spazio Metrico

Definizione di distanza su R^N, proprietà di distanza. Definizione di spazio metrico euclideo. Definizione generalizzata di spazio metrico.

---

0. Voci correlate

- Definizione di RN
- Intorni

1. Distanza euclidea su R^N

#Definizione

Definizione (Distanza Euclidea su più variabili).

Siano $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^N$, con $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_N)$ e $\underline{y} = (y_1, \ldots, y_N)$. Allora definisco la *distanza euclidea* tra questi due punti come la funzione

$$d(\underline{x}, \underline{y}) := \sqrt{\sum_{n=0}^{N} (x_n - y_n)^2}$$

#Proposizione

Proposizione (le proprietà della distanza euclidea).

La distanza euclidea gode delle medesime proprietà soddisfatte con la distanza euclidea su $\mathbb{R}$ (1, 2, 3), ovvero le seguenti.
i. *(riflessività)*

$$d(\underline{x}, \underline{y}) = 0 \iff \underline{x} = \underline{y}$$

ii. *(simmetria)*

$$d(\underline{x}, \underline{y}) = d(\underline{y}, \underline{x})$$

iii. *(disuguaglianza triangolare)*

$$d(\underline{x}, \underline{y}) \leq d(\underline{x}, \underline{z}) + d(\underline{z}, \underline{y})$$

2. Spazio Metrico

#Definizione

Definizione (spazio metrico euclideo).

La coppia $(\mathbb{R}^N, d)$ si dice *"spazio metrico euclideo"*.

#Definizione

Definizione (distanza/metrica, spazio metrico).

Sia S un insieme. Un'applicazione $d : S \times S \longrightarrow \mathbb{R}$ che verifica le tre proprietà della distanza euclidea (1) si dice *distanza* (o *metrica*) in S.

In particolare la coppia (S, d) si dice *spazio metrico*.

3. Esempi di spazi metrici

#Esempio

Esempio (spazio metrico con $+\infty > p \geq 1$).

Sia $p \geq 1$ un numero finito. Sia $\mathbb{R}^N$ l'insieme degli elementi.
Allora la funzione

$$d_p(\underline{x}, \underline{y}) = \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

è una *distanza*.

#Esempio

Esempio (spazio metrico con $p = +\infty$).

Sia $p = +\infty$. Allora la funzione

$$d_\infty(\underline{x}, \underline{y}) = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |x_i - y_i|$$

è una *distanza*.

A3. Tipologia di R^N

Topologia in RN

Trasposizione teorica delle definizioni della topologia della retta reale su R^N.

---

0. Voci correlate

- Definizione di RN
- Definizione di Spazio Metrico
- Intorni
- Punti interni, esterni e di frontiera
- Insiemi aperti e chiusi
- Punti di aderenza e di accumulazione

1. Preambolo

#Osservazione

Osservazione (preambolo).

Conoscendo le *definizioni della topologia della retta reale*, possiamo espandere queste definizioni in $\mathbb{R}^N$. Parleremo quindi di *sfere aperte e chiuse*, *intorni*, *insiemi chiusi e chiusure di insiemi*, *punti interni*, *interni degli insiemi e insiemi aperti*, *punti di frontiera*, *frontiera di insiemi*, *insiemi limitati*.

2. Sfere aperte e chiuse di punti, intorni di punti

#Definizione

Definizione (sfera aperta e chiusa).

Sia $\underline{x_0} \in \mathbb{R}^N$, sia $r > 0$ un numero qualunque.
Si dice *"sfera aperta centrata* in $\underline{x_0}$ *con raggio* r*"* l'insieme

$$B(\underline{x_0}, r) = \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^N : d(\underline{x}, \underline{x_0}) < r \right\}$$

oppure *"sfera chiusa centrata in* $\underline{x_0}$ *con raggio* r*"* l'insieme

$$B[\underline{x_0}, r] = \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^N : d(\underline{x}, \underline{x_0}) \leq r \right\}$$

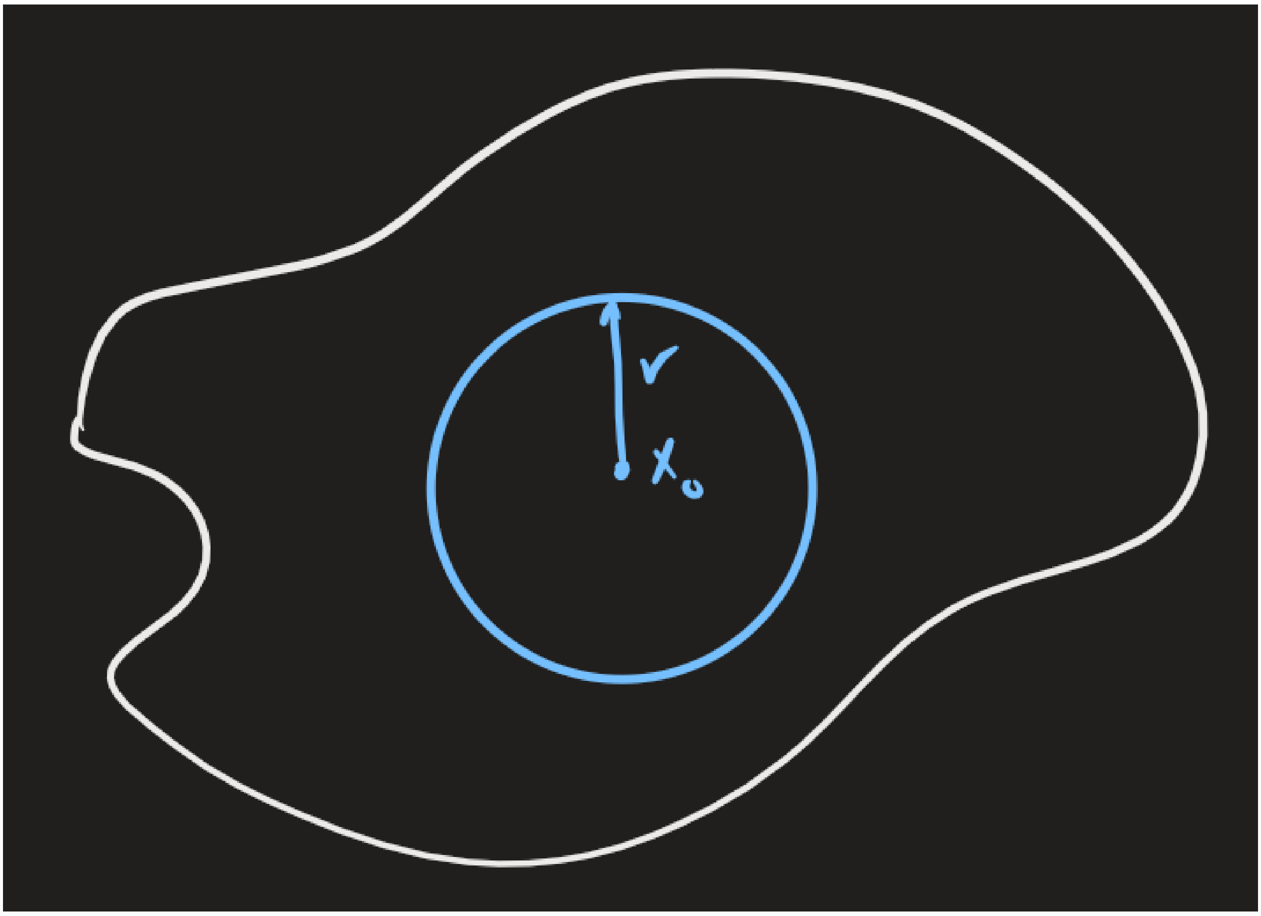
#Definizione

Definizione (intorno di un punto-vettore).

Si dice *"intorno di* $\underline{x_0} \in \mathbb{R}^N$*"* un insieme $\mathcal{U}(\underline{x_0}) \subseteq \mathbb{R}^N$ tale che contenga una *sfera qualunque* di $\underline{x_0}$. Ovvero,

$$\mathcal{U}(\underline{x_0}) \supseteq B(\underline{x_0}, r)$$

FIGURA 2.1. (*Illustrazione grafica di un intorno*)



3. Punti di accumulazione e chiusura di un insieme

#Definizione

Definizione (punto di accumulazione e derivato di un insieme).

Sia $\underline{x_0} \in \mathbb{R}^N$ e sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$.
Il punto-vettore $\underline{x_0}$ si dice *"punto di accumulazione per E"* se vale che in *ogni intorno di $\underline{x_0}$ esiste un punto di E che non sia x_0*. Ovvero,

$$\forall \mathcal{U}(\underline{x_0}), \exists \underline{\tilde{x}} \in \left(\mathcal{U}(\underline{x_0}) \cap E\right) : \underline{\tilde{x}} \neq \underline{x_0}$$

Altrimenti, se vale la negazione allora si dice che è un *punto isolato*.

L'insieme degli punti di accumulazione per E si dice *"derivato di E"* e la si denota con $\mathcal{D}E$

#Definizione

Definizione (chiusura di un insieme e insieme chiuso).

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$. Si dice *la chiusura di* E l'insieme definita come

$$\overline{E} := E \cap \mathcal{D}E$$

L'insieme E si dice *chiuso* se vale che $E = \overline{E}$.

5. Punto interno, interno e insieme aperto

#Definizione

Definizione (punto interno per un insieme).

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$. Un punto $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^N$ si dice *"interno a E"* se vale che E è *intorno* di $\underline{x}_0$. Ovvero, prendendo un intorno qualsiasi $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\underline{x}_0)$ si ha che $\mathcal{U} \cap E \neq \emptyset$.

#Definizione

Definizione (interno di un insieme e insieme aperto).

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$. Si dice *"interno di E"* come l'insieme dei *punti interni* ad E. Ovvero,

$$\mathring{E} := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^N : \underline{x} \text{ interno a } E\}$$

In particolare un insieme si dice aperto se vale che $E = \mathring{E}$.

6. Punti di frontiera e frontiera

#Definizione

Definizione (punti di frontiera).

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$.
Un punto $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^N$ si dice *"punto di frontiera per E"* se vale che $\underline{x}_0$ non è *né interno né esterno ad* E. Ovvero,

$$\forall \mathcal{U} = \mathcal{U}(\underline{x_0}), \begin{cases} \exists \underline{x} \in (\mathcal{U} \cap E) \\ \exists \underline{x}' \in (\mathcal{U} \cap \mathcal{C}_{\mathbb{R}^N} E) \end{cases}$$

#Definizione

Definizione (frontiera di un insieme).

Si dice *"frontiera di un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^N$"* come l'insieme dei punti di frontiera per E. Viene denotata con ∂E.

#Esempio

Esempio (esempio di frontiera di un insieme).

Sia l'insieme E definita come segue:

$$E = \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^2 : 4 \leq x_1^2 + x_2^2 < 9 \right\}$$

La frontiera di E sono le *"circonferenze che delimitano l'insieme E"*.

$$\partial E = \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 4 \vee x_1^2 + x_2^2 = 9 \right\}$$

7. Insiemi limitati

#Definizione

Definizione (insieme limitato).

Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}$ si dice *limitato* se esistono:

- Un punto $\underline{x_0} \in \mathbb{R}^N$
- Un raggio $R > 0$
  Tali che esista una *sfera* $B(\underline{x_0}, R)$ che contenga E. Ovvero,

$$\exists \underline{x_0} \in \mathbb{R}^N, R > 0 : B(\underline{x_0}, R) \supseteq E$$

8. Insiemi Connessi

#Definizione

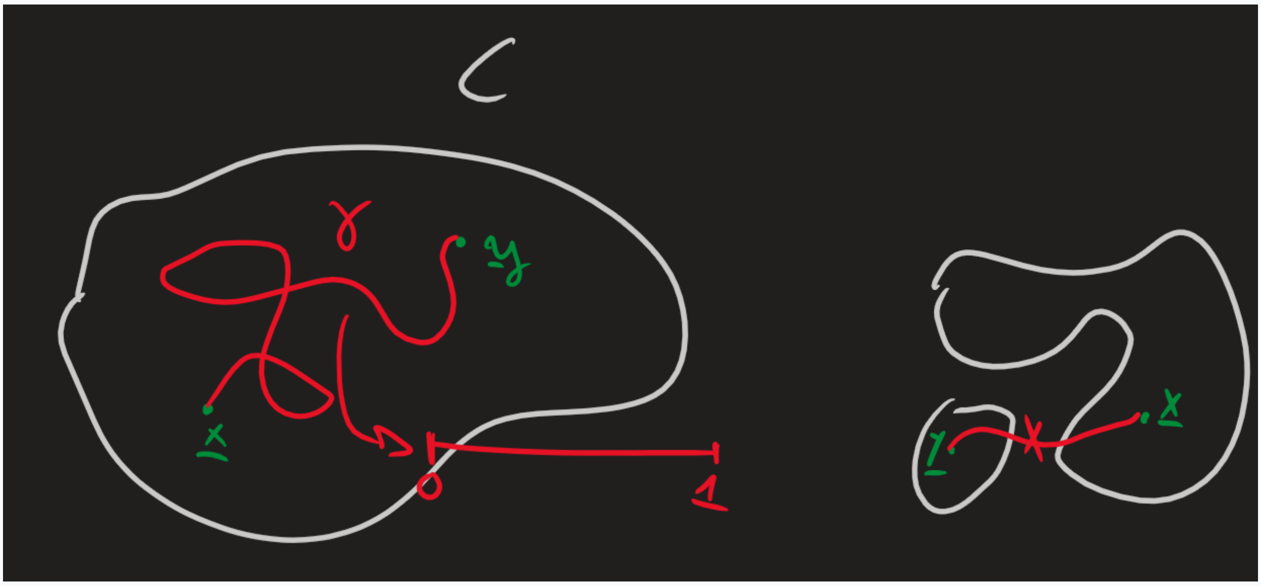
Definizione (insieme connesso per archi in $\mathbb{R}^N$).

Si dice che un insieme $C \subseteq \mathbb{R}^N$ è *"connesso per archi"* se vale la condizione

$$\forall \underline{x}, \underline{y} \in C, \exists \gamma : [0,1] \longrightarrow C \in \mathcal{C}^0 : \\ \gamma(0) = \underline{x}, \gamma(1) = \underline{y}$$

In parole, questa condizione vuol dire che *"se prendo due punti distinti dell'insieme connesso, allora deve esistere almeno un cammino (o una curva parametrica continua) che inizia col primo punto e finisce col secondo punto"*.

FIGURA 8.1. (*Insieme connesso e non connesso*)



#Osservazione

Osservazione (gli intervalli sono insiemi connessi).

Osservare che gli *intervalli* su $\mathbb{R}$ sono insiemi connessi.

9. Insiemi Compatti

#Definizione

Definizione (insieme compatto in $\mathbb{R}^N$).

Un insieme $K \subseteq \mathbb{R}^N$ si dice *compatto* se vale che *ogni successione* $(x_n)_n$ a valori in K ha una sua *sotto successione* $(x_{n_k})_k$ convergente ad un punto $\underline{x} \in K$.

#Teorema

Teorema (di Heine-Borel).

Un insieme $K \subseteq \mathbb{R}^N$ gode della seguente equivalenza.

$$K \text{ compatto} \iff K \text{ chiuso e limitato}$$

B. FUNZIONI MULTIVARIATE

Definizione di Funzione in più variabili

Definizione di funzione in più variabili; componente i-esima della funzione, rappresentazione di grafici di funzione in più variabili

---

0. Voci correlate

- Definizione di RN

1. Definizione di funzione in più variabili

#Definizione

Definizione (funzione in più variabili).

Sia $f : E \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M$, ovvero che crea un'associazione del tipo

$$f((x_1, x_2, \ldots, x_N)) = (f_1(x_1), f_2(x_2), \ldots, f_M(x_N))$$

dove le f_i sono funzioni del tipo $f_i : E \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$.

Allora f si dice *funzione in più variabili*, da $\mathbb{R}^N$ a $\mathbb{R}^M$.

#Osservazione

Osservazione (rappresentazione grafica).

Per rappresentare un *grafico* di $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M$, è necessario un ente geometrico $\pi \subseteq \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$ (ovvero in $N \times M$ dimensioni). Ovviamente, sempre nei limiti della possibilità.

B2. Campi Scalari e Insiemi di Livello

Definizione di Equazioni Cartesiane e Parametriche di uno Sottospazio Affine

---

Definizione di Equazioni Cartesiane ed Equazioni Parametriche per la codificazione per uno sottospazio affine; teorema preliminare, dimostrazione e definizioni.

---

0. Prerequisiti e/o voci correlate

- Sistemi Lineari
- Teoremi sui Sistemi Lineari (di struttura delle soluzioni per i sistemi lineari arbitrari)
- Definizione di Spazio Affine
- Spazio Affine su K
- Definizione di Sottospazio Affine

1. Teorema preliminare

#Teorema

Teorema (di codificazione dei sottospazi affini).

Sia $A \in M_{m,n}(K)$ (Osservazione 5 ($M_{m,n}(K)$ diventa un K-spazio vettoriale)), $b \in K^m$.
Supponiamo che il *sistema lineare* $Ax = b$ (Definizione 2 (sistema lineare di m equazioni in n incognite a coefficienti in K)) sia *compatibile* e sia S l'insieme delle *soluzioni* (Definizione 4 (soluzione di un sistema)).
Allora

$$S = \mathbb{S} \subseteq \mathbb{A}^n_K$$

è uno *sottospazio affine* la cui *giacitura* è il *sottospazio vettoriale* $W \subseteq K^n$ delle *soluzioni* del *sistema lineare omogeneo associato* $Ax = 0$ (Definizione 1 (sottospazio affine passante per Q e parallelo a W))
Inoltre,

$$\dim \mathbb{S} = \dim W = n - \operatorname{rg} A$$

#Dimostrazione
DIMOSTRAZIONE del *teorema 1.1.* (Teorema 1 (di codificazione dei sottospazi affini))
Questo teorema segue direttamente dal *teorema di struttura per le soluzioni dei sistemi lineari arbitrari* (Definizione 9 (sistema lineare omogeneo associato)). Infatti *tutte e sole* le soluzioni di $Ax = b$ sono della forma

$$s = \tilde{s} + s_0 \implies s - \tilde{s} = s_0$$

dove $\tilde{s}$ è una *soluzione fissata* di $Ax = b$, invece x_0 è una *soluzione qualsiasi* di $Ax = 0$.
Pertanto se *"interpretiamo"* $\tilde{s} \in K^n$ come un *punto* $Q \in \mathbb{A}^n_K$ e pensiamo ad una soluzione di $AX = b$, come un *altro punto* $P \in \mathbb{A}^n_K$, allora vediamo che i punti $\sigma(Q, P)$ sono del tipo

$$\overrightarrow{QP} = s - \tilde{s} = s_0 \in W \implies \sigma(Q, P) \in W$$

e s_0 appartiene a W, che sarebbe l'insieme delle *soluzioni* di $Ax = 0$. Questo è esattamente la *definizione* di un *sottospazio affine* passante per Q di giacitura W (Definizione 1 (sottospazio affine passante per Q e parallelo a W)).
In tal caso dal *teorema di dimensione* (Teorema di dimensione delle soluzioni di sistemi lineari) discende che

$$\dim \mathbb{S} = \dim W = n - \operatorname{rg} A \blacksquare$$

2. Definizione di Equazioni Cartesiane e Parametriche

Equazioni Cartesiane

#Definizione

Definizione (equazioni cartesiane di uno sottospazio affine).

Sia $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{A}$ un *sottospazio affine "codificata"* dal sistema lineare (in parole più rigorose, $\mathbb{S}$ rappresenta le soluzioni del seguente sistema lineare)

$$Ax = b$$

Allora le *equazioni* del sistema lineare si dicono *equazioni cartesiane* per $\mathbb{S}$, ovvero le equazioni del tipo

$$\boxed{\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}}$$

#Osservazione

Osservazione (Osservazione 2.1.).

Se un sistema lineare $Ax = b$ ha come *insieme delle soluzioni* S, allora ogni *sistema lineare equivalente* (Definizione 9 (sistemi lineari equivalenti)) a $Ax = b$ avrà il *medesimo* insieme S.
Pertanto, applicando le *operazioni elementari* (Algoritmo di Gauß > ^ccc408) a $Ax = b$, otteniamo *altre* equazioni cartesiane per S.
Infatti, questa osservazione diventerà la base dell'*"algoritmo"* del passaggio dalle equazioni cartesiane a quelle parametriche (Passaggio tra Equazioni Cartesiane e Parametriche di uno Sottospazio Affine).

Equazioni Parametriche

#Osservazione

> Osservazione (osservazione preliminare per la definizione di equazioni parametriche).
>
> Sia ora $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{A}^n_K$ un *sottospazio affine* passante per $Q \in \mathbb{A}^n_K$ e di *giacitura* $W \subseteq K^n$. Supponiamo che W è generata dalla *base* (Definizione 1.1. (Base)) $w_1, \dots, w_k$; ovvero $W = \text{span}(w_1, \dots, w_k)$.
> Allora possiamo scrivere ogni *elemento* della base come *elemento* di K^n:
>
> $$w_1 = \begin{pmatrix} w_{11} \\ \vdots \\ w_{n1} \end{pmatrix}, \dots, w_k = \begin{pmatrix} w_{1n} \\ \vdots \\ v_{nk} \end{pmatrix}, \forall w_{ij} \in K$$
>
> Allora per *definizione* se $Q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{A}^n_K$, i punti $P = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{A}^n_K$ di $\mathbb{S}$ sono *tutti e soli* punti che soddisfano $\sigma(Q, P) \in W$.
> Riscriviamo quindi questa condizione utilizzando i termini che abbiamo appena introdotto.
>
> $$\begin{aligned} \overrightarrow{QP} \in W \iff & \begin{pmatrix} x_1 - q_1 \\ \vdots \\ x_n - q_n \end{pmatrix} \in W \\ \iff & \begin{pmatrix} x_1 - q_1 \\ \vdots \\ x_n - q_n \end{pmatrix} = t_1 w_1 + \ldots + t_k w_k, t_i \in K \\ \iff & \begin{pmatrix} x_1 - q_1 \\ \vdots \\ x_n - q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 w_{11} + \ldots + t_k w_{1k} \\ \vdots \\ t_1 w_{n1} + \ldots + t_k w_{nk} \end{pmatrix} \end{aligned}$$
>
> In definitiva abbiamo il *sistema di equazioni*
>
> $$\begin{cases} x_1 = q_1 + t_1 w_{11} + \ldots + t_k w_{1k} \\ \vdots \\ x_n = q_n + t_1 w_{n1} + \ldots + t_k w_{nk} \end{cases}$$

#Definizione

Definizione (equazioni parametriche per uno sottospazio affine).

Sia $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{A}$ uno *sottospazio affine* di giacitura W e passante per Q. Sia la base di W generata dai vettori $w_1, \ldots, w_k \in V$. Sia Q il punto $(q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{A}$.
Allora il seguente sistema di equazioni si dice *equazioni parametriche per uno sottospazio affine con k parametri*.

$$\boxed{\begin{cases} x_1 = q_1 + t_1 w_{11} + \ldots + t_k w_{1k} \\ \vdots \\ x_n = q_n + t_1 w_{n1} + \ldots + t_k w_{nk} \end{cases}}$$

dove t_i sono detti *parametri*.

3. Pro e Contro

#Osservazione

Osservazione (vantaggi e svantaggi delle due forme).

Vediamo che abbiamo due *forme* distinte per *"codificare"* un *sottospazio affine*; entrambi di essi hanno i suoi vantaggi e svantaggi.
Nel caso delle *equazioni parametriche* possiamo facilmente generare punti dello sottospazio, quindi possiamo mediante *gli strumenti dell'informatica* generare una *visualizzazione grafica* dello sottospazio affine inserendo valori di t a piacimento; tuttavia se invece vogliamo verificare che un *punto specifico* appartenga ad uno sottospazio affine, allora si dovrebbe *"provare"* tutti i valori t.
Però saremmo facilitati con le *equazioni cartesiane* a questo fine: basta inserire i valori numerici del punto per verificare se esso appartenga o meno al sottospazio affine.

Questa distinzione vale anche per gli oggetti algebrici!

4. Conseguenze di queste forme

#Osservazione

Osservazione (un sottospazio affine è descritto da $n-k$ equazioni cartesiane).

Da quanto visto, un *sottospazio affine* $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{A}^n_K$ di *dimensione* k (Definizione 3 (dimensione di sottospazio affine)) è *sempre* descritto da $n-k$ *equazioni cartesiane* (Definizione 2 (equazioni cartesiane di uno sottospazio affine)), data la sua definizione.
In particolare un *retta* in $\mathbb{A}^2_K$ è descritta da *una sola* equazione cartesiana; invece in $\mathbb{A}^3_K$ verrebbe descritta da *due* equazioni cartesiane.

#Osservazione

Osservazione (ogni iperpiano è descritta da una sola equazione).

Sia $\mathbb{S} in \mathbb{A}^n_K$ un *iperpiano* (Definizione 1 (iperpiano di uno spazio affine)), ovvero un *sottospazio affine* di dimensione $n-1$.
Allora come visto sopra, $\mathbb{S}$ è descritta da $n-(n-1)=1$ *equazione cartesiana*.
Viceversa, ogni volte che imponiamo un'*equazione non banale* (ovvero non del tipo $0=0$) allora determiniamo un *iperpiano* in $\mathbb{A}^n_K$; in altre parole *ogni* iperpiano di $\mathbb{A}^n_K$ è descritta da un'equazione del tipo

$$\boxed{a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = d}$$

#Osservazione

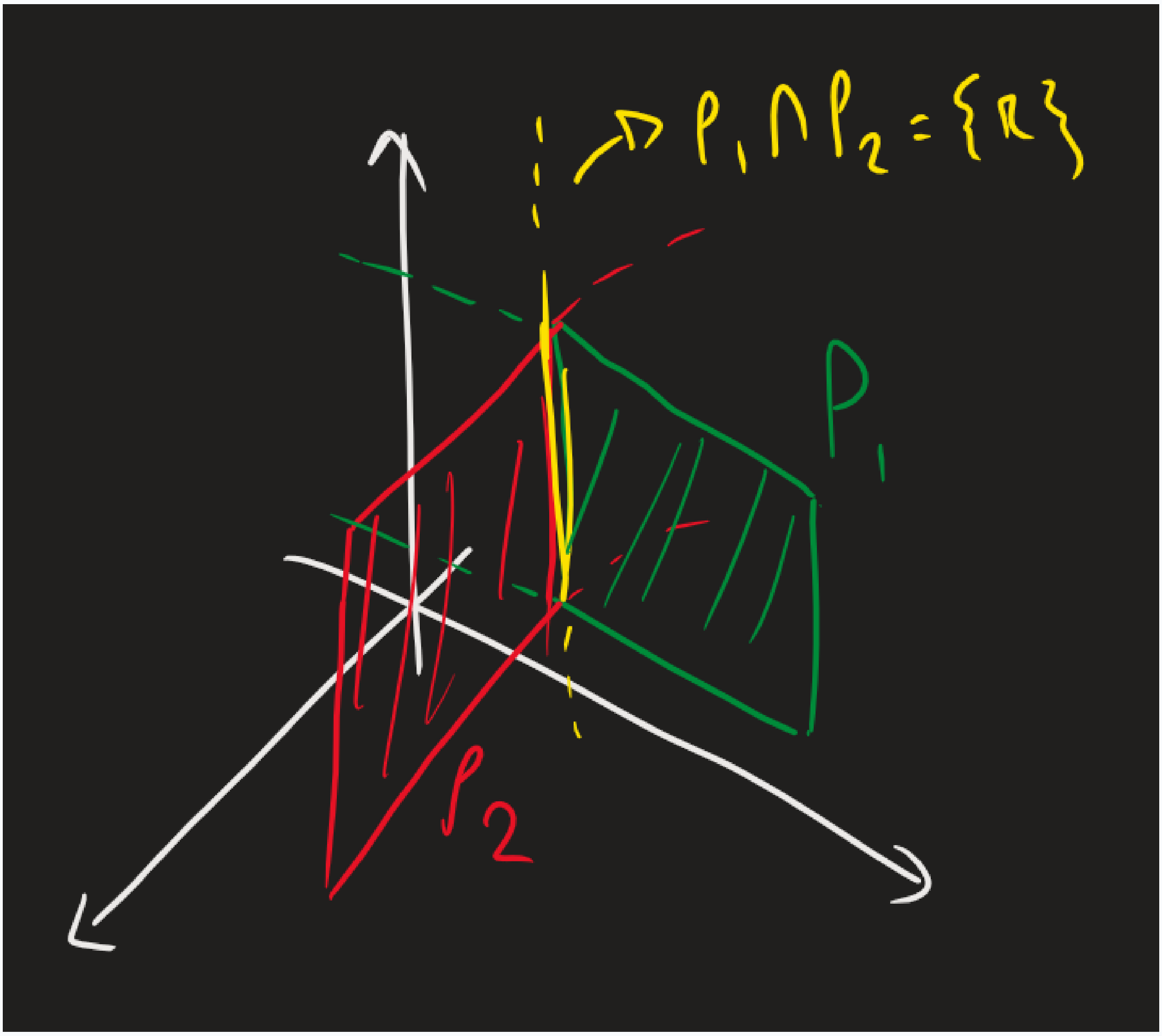
Osservazione (una retta è determinata da due equazioni nello spazio).

Come vedremo nella *geometria dello spazio affine* (Geometria dello Spazio Affine), una *retta* in $\mathbb{A}^3_\mathbb{R}$ è descritta da un *sistema di equazioni* del tipo

$$\boxed{\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = d_1 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = d_3 \end{cases}}$$

Graficamente questo significa *"l'intersezione di due piani distinti forma una retta nello spazio"*.

FIGURA 4.2. (*OSS 4.2.*)



B3. Curve e Superfici

Curve e Superfici Parametriche

Definizione di curva parametrica, esempio del spirale. Superfici parametriche: definizione. Esempi: parametrizzazione di un cilindro e di una sfera.

---

0. Voci correlate

- Definizione di RN
- Definizione di Funzione in più variabili

1. Curve Parametriche

#Definizione

Definizione (curva parametrica).

Si definisce *curva parametrica* come una *funzione in più variabili* f con $N=1$ e $M=2$ (1); ovvero una funzione del tipo

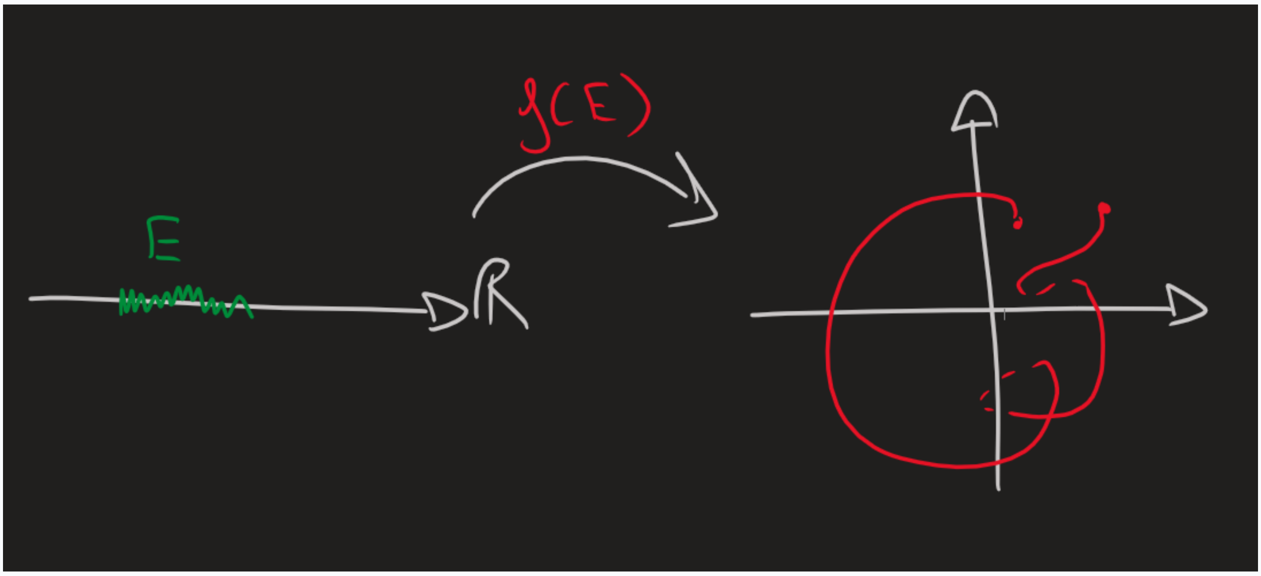
$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

#Osservazione

Osservazione (convenzione di rappresentazione delle curve parametriche).

Per rappresentare una *curva parametrica*, si potrebbe usare lo *spazio in tre dimensioni*. Tuttavia, per convenzione usiamo un *piano in due dimensioni*, dove le coordinate x_1, x_2 rappresentano le *"posizioni"* della funzione $f(x)$.

FIGURA 1.1. (*Esempio qualitativo di una curva parametrica*)



#Esempio

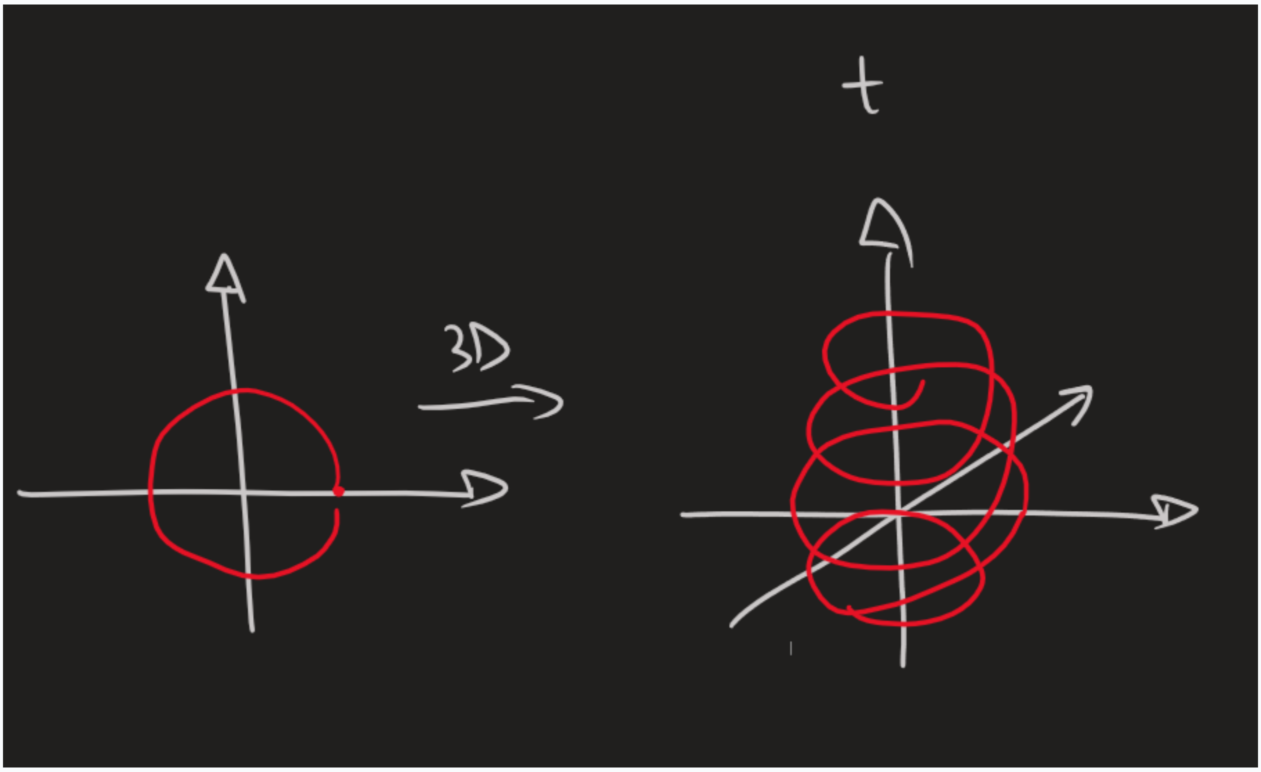
Esempio (la circonferenza-spirale).

Sia $f:[0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una *curva* definita come

$$f(t) = (\cos t, \sin t), 0 \leq t \leq 2\pi$$

allora $f(E)$ è una *circonferenza* con la convenzione di rappresentazione appena enunciata (1); tuttavia, estendendolo con una dimensione aggiuntiva t e il dominio alla retta reale $E = \mathbb{R}$ si vede che è una spirale (*figura 1.2.*).

FIGURA 1.2.



2. Superfici parametriche

#Definizione

Definizione (superficie parametrica).

Si dice *superficie parametrica* una funzione f in più variabili da $N = 2$ a $M = 3$, ovvero del tipo

$$f : E \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

#Esempio

Esempio (il cilindro).

Prendiamo

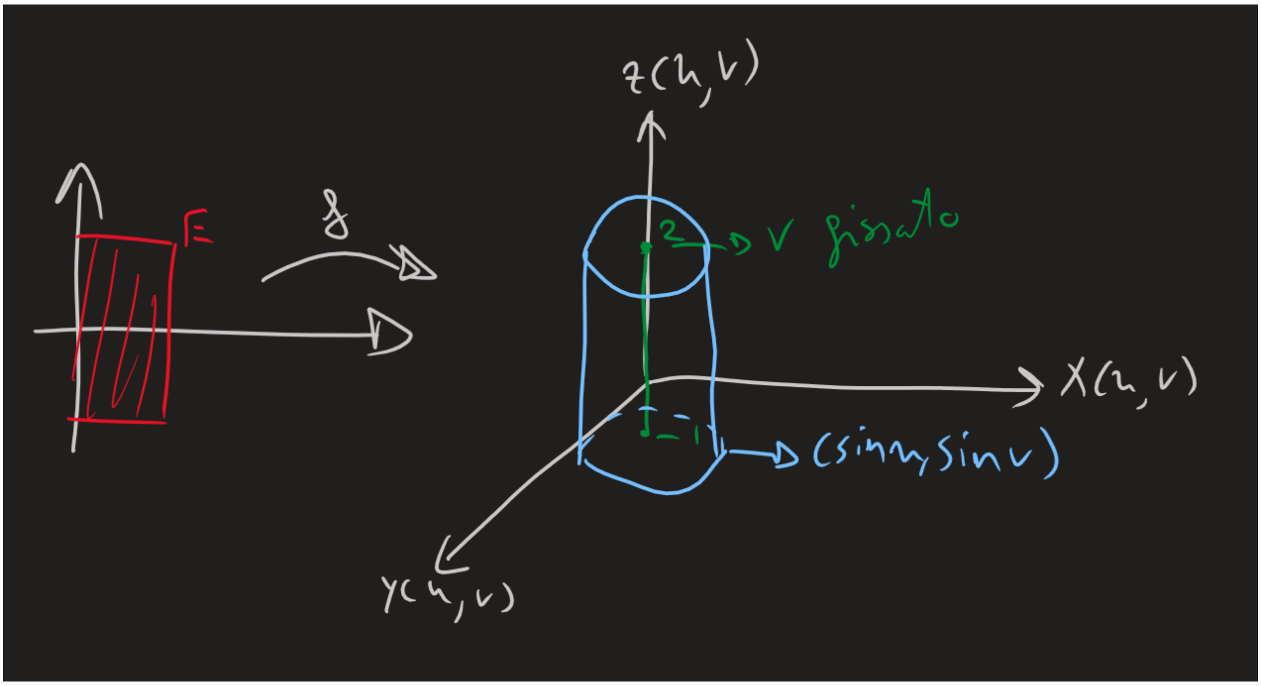
$$f : [0, 2\pi] \times [-1, 2] \longrightarrow (\cos u, \sin u, v)$$

ovvero

$$f(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$$

Per rappresentare questa funzione è utile prendere un valore v *fissato*. e vedere come si comporta f. Vediamo, come nell'esempio della circonferenza (1), che la funzione si comporta come una *circonferenza* estesa per il valore v. Di conseguenza, ho un *cilindro* (*figura 2.1.*).

FIGURA 2.1. (*Il cilindro*)



#Esempio

Esempio (la parametrizzazione di una sfera).

Nell'esempio precedente abbiamo dedotto la superficie da una funzione. Adesso facciamo il contrario; da una superficie deduciamo la funzione.

Prendiamo una sfera centrata nell'origine $O = (0, 0, 0)$ e con raggio R. Sia fissato un punto $P(x, y, z)$ sulla sfera; si vede immediatamente nel il segmento OP (con lunghezza R) c'è un angolo φ. Di conseguenza, possiamo parametrizzare la coordinata z del punto con $z = R \cos \varphi$.

Adesso prendiamo la *proiezione* di questo punto sul piano (x, y), che chiameremo $Q(x, y, z)$. Allora abbiamo che il segmento $OQ = R \sin \varphi$, dato che abbiamo un *triangolo rettangolo*.

Dopodiché osserviamo che tra il segmento OQ e l'asse x c'è un angolo θ.

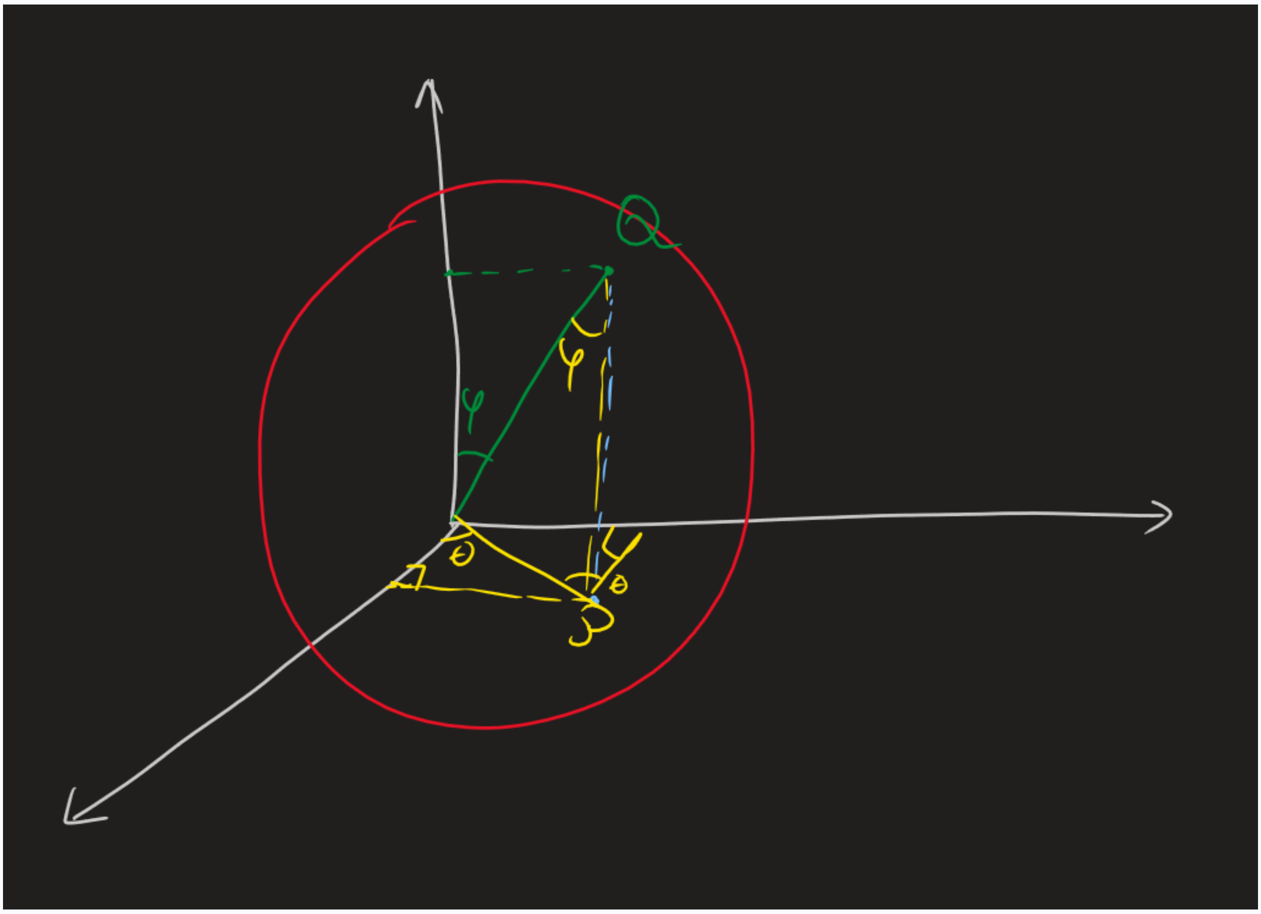
Infine, effettuando ulteriori proiezioni, basta prendere le coordinate x, y in funzione del punto Q; per le regole della trigonometria abbiamo semplicemente

$$x = R\sin\varphi\cos\theta, y = R\sin\varphi\sin\theta$$

Infine otteniamo la funzione definita su $[0, \pi] \times [0, 2\pi[$

$$f(\varphi, \theta) = (R\sin\varphi\cos\theta, R\sin\varphi\sin\theta, R\cos\varphi)$$

FIGURA 2.2. (*La sfera*)



B4. Campo Vettoriale

Campo Vettoriale

Definizione di campo vettoriale. Convenzione di rappresentazioni dei campi vettoriali (caso bidimensionale). Esempio di campo vettoriale.

---

0. Voci correlate

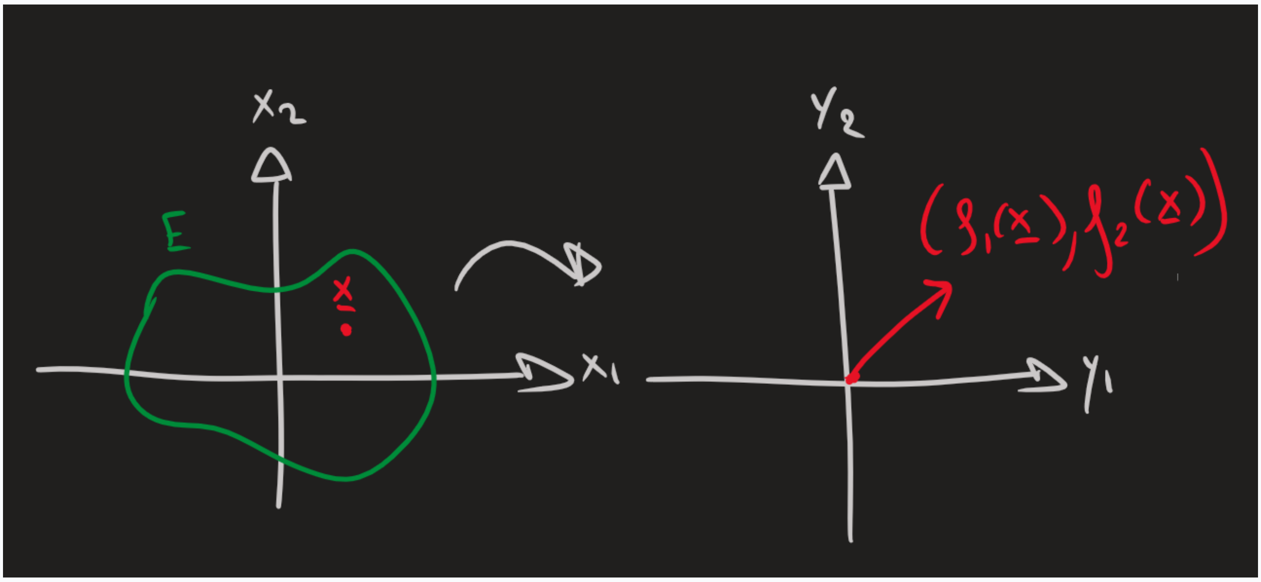
- Definizione di RN
- Definizione di Funzione in più variabili

1. Definizione generalizzata di campo vettoriale

#Definizione

> Definizione (campo vettoriale).
>
> Si dice *"campo vettoriale"* una *funzione in più variabili* con $M = N \geq 2$, ovvero una funzione del tipo
>
> $$f : E \subseteq \mathbb{R}^{N \geq 2} \longrightarrow \mathbb{R}^{N \geq 2}$$

FIGURA 1.1. (*Rappresentazione qualitativa di un campo vettoriale in 2D*)



2. Rappresentazione dei campi vettoriali bidimensionali

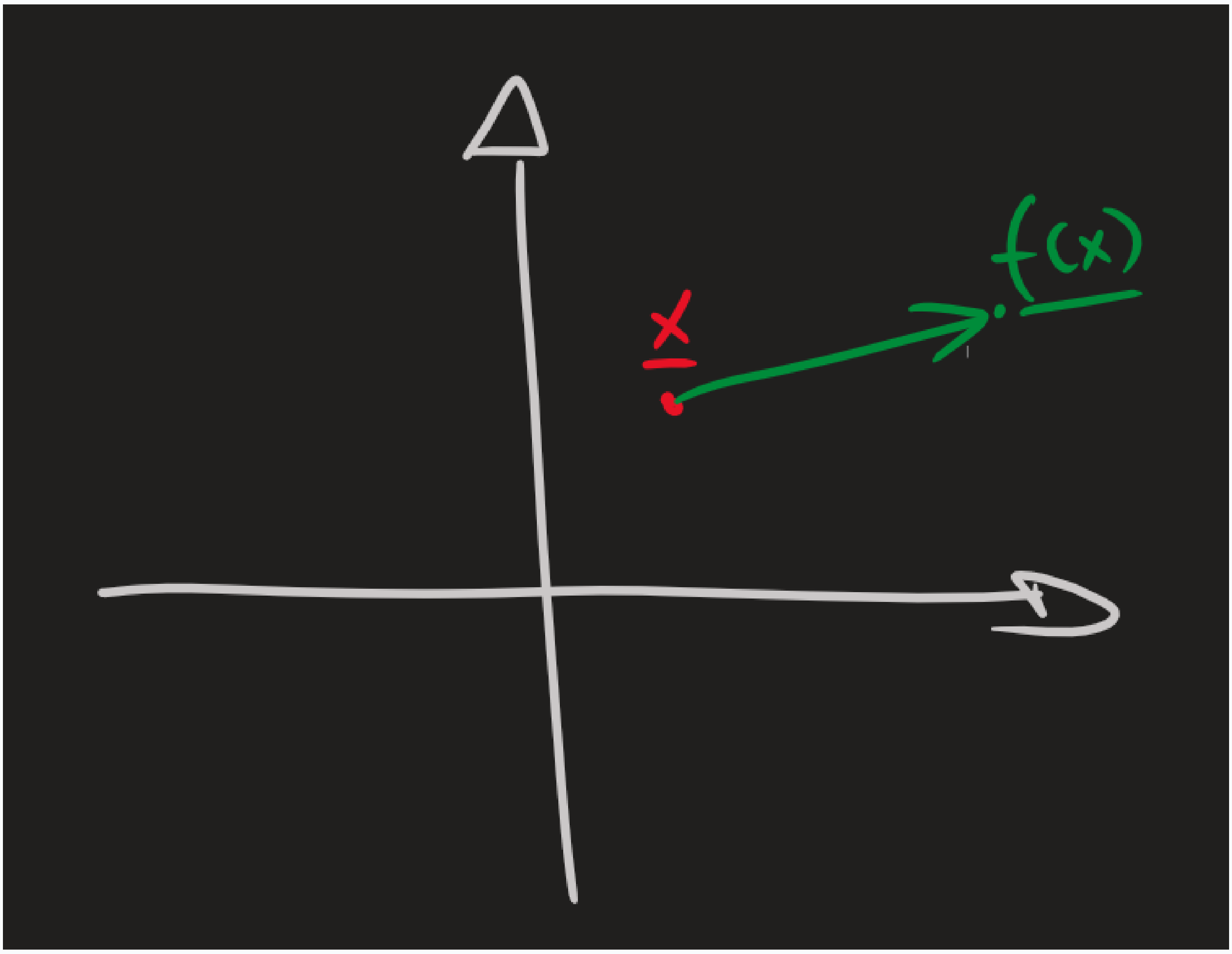
#Osservazione

> Osservazione (convenzione di rappresentazione dei campi vettoriali in $N = 2$).
>
> Per rappresentare un *campo vettoriale* in *due dimensioni* su un *unico piano*, è possibile seguire la seguente convenzione.

Prendiamo un punto del dominio $\underline{x}$ e consideriamo il suo vettore-funzione $\underline{f(x)}$. In questa convenzione consideriamo il vettore $\underline{f(x)}$ come un vettore del piano del dominio e colloco il suo *punto di applicazione* in $\underline{x}$. Graficamente, si tratta di *"spostare"* l'origine del vettore $\underline{f(x)}$ in $\underline{x}$.

Ovviamente, il *limite* di questa convenzione è che è possibile solo per *alcuni punti*; quindi di solito bisogna *"individuare"* dei *"punti critici"* dove si ha un comportamento notevole del punto.

FIGURA 2.1. (*Convenzione*)



3. Esempio

#Esempio

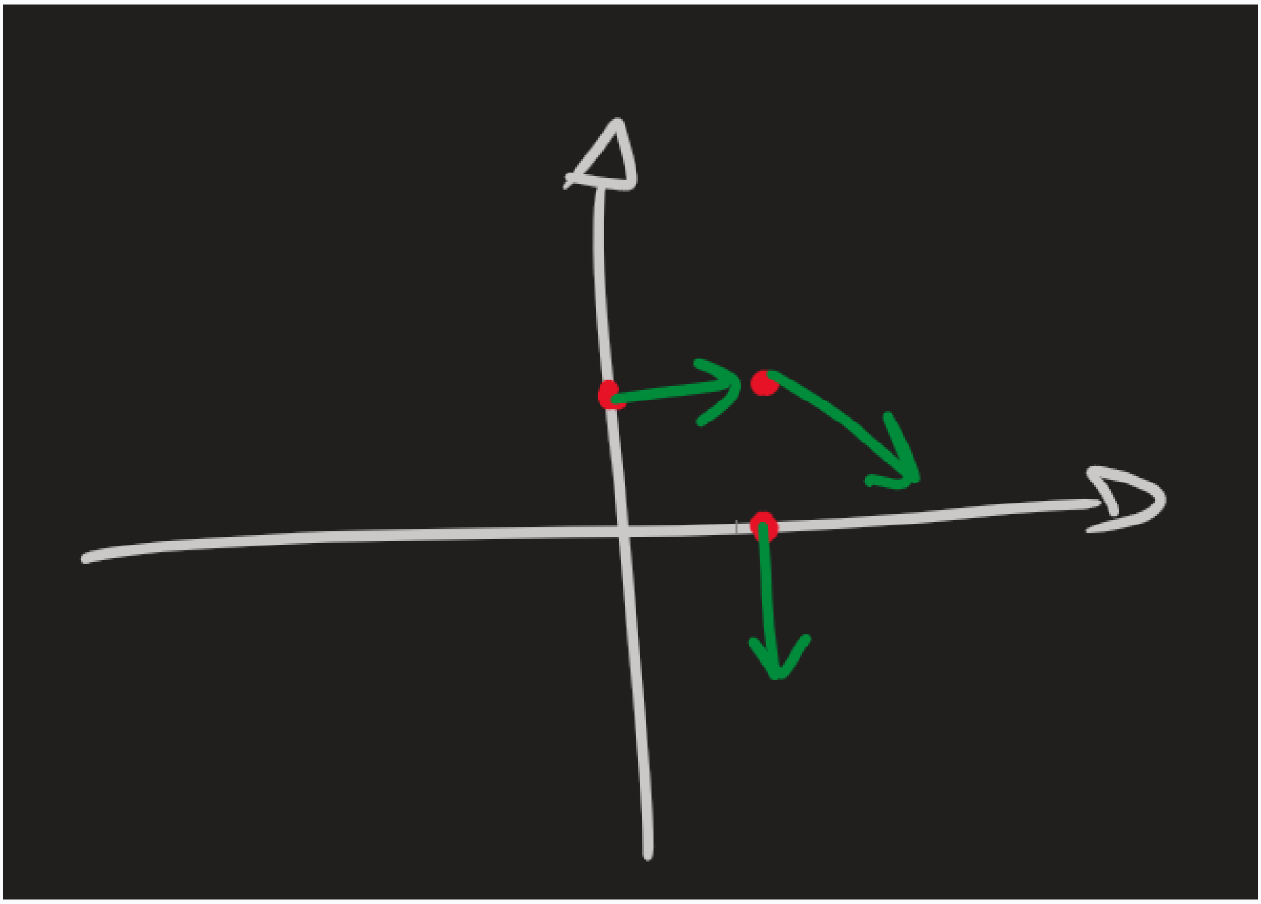
Esempio (esempio di un campo vettoriale).

Prendiamo $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definita come

$$f(x, y) = (y, -x)$$

> Prendendo i punti $(1,0), (0,1), (1,1)$ abbiamo il grafico in *figura 3.1.*.

FIGURA 3.1.



C. LIMITI MULTIVARIATI

C1. Limite in più variabili

Limite di Funzione in più variabili

Definizione di limite finito per funzioni in più variabile. Definizione di limite infinito per campi scalari. Condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di un limite in più variabili.

---

0. Voci correlate

- Definizione di RN
- Topologia in RN

- Definizione di Spazio Metrico
- Definizione di Funzione in più variabili
- Definizione di Limite di funzione

1. Definizione di limite finito per funzioni in più variabili

#Definizione

Definizione (limite finito per funzioni in più variabili).

Sia $f: E \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M$, sia $\underline{x_0} \in \mathbb{R}^N$ e $\underline{x_0} \in \mathcal{D}E$.
Si dice che *esiste finito il limite*

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{x_0}} f(\underline{x}) = \underline{l} \in \mathbb{R}^M$$

se vale la condizione

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall \underline{x} \in E,$$
$$0 < d(\underline{x}, \underline{x_0}) < \delta \implies d(f(\underline{x}), \underline{l}) < \varepsilon$$

dove d è la *distanza euclidea* su $\mathbb{R}^N$ e $\mathbb{R}^M$ (1).

2. Definizione di limite infinito per campi scalari

#Definizione

Definizione (limite infinito per campi scalari).

Sia f un campo scalare, ovvero del tipo $f: E \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$. Sia $\underline{x_0} \in \mathcal{D}E$.
Si dice che *il limite esiste infinito*

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{x_0}} f(\underline{x}) = +\infty \text{ o } -\infty$$

se vale la condizione

$$\forall k > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in E,$$
$$0 < d(\underline{x}, \underline{x_0}) < \delta \implies f(x) > k \text{ o } f(x) < -k$$

3. Condizione necessaria e sufficiente

#Osservazione

Osservazione (preambolo).

Possiamo legare questo concetto di limite in ciascuna delle sue componenti f_i.

#Teorema

Teorema (condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di un limite in più variabili).

Si ha che

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{x_0}} f(\underline{x}) = \underline{l}$$

esiste finito se e solo se *esiste finito ciascuno dei limiti*

$$\forall i \in \{1, \ldots, M\}, \lim_{\underline{x} \to \underline{x_0}} f_i(\underline{x}) = l_i$$

4. Condizione sufficiente per la non-esistenza di un limite

#Osservazione

Osservazione (una condizione per la non esistenza dei limiti).

Possiamo vedere la *condizione per la definizione di limite* in un altro modo; prendiamo una condizione che conferma la *non-esistenza* di un limite in più variabili.

Il fatto che esiste il limite

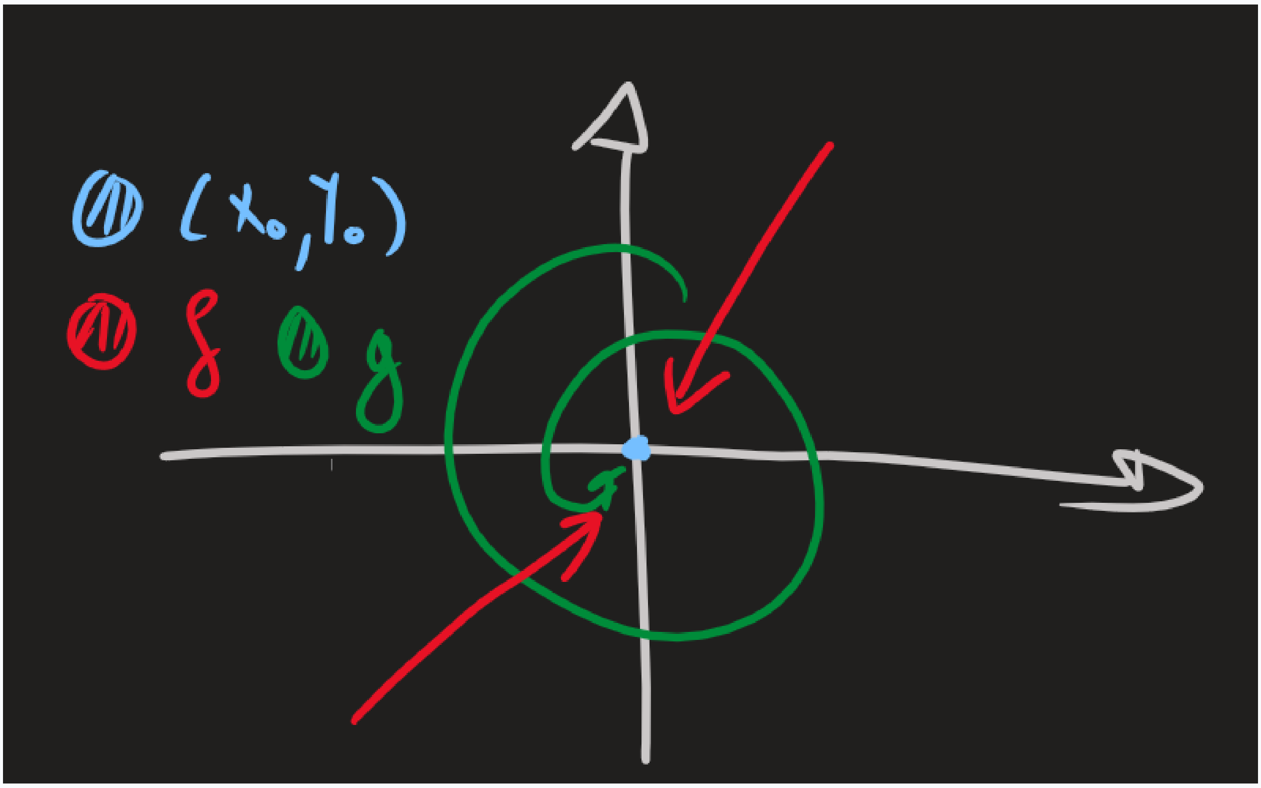
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

vuol dire che, a prescindere dal tipo di *"avvicinamento"* al punto (x_0, y_0), risulta nella convergenza di $f(x,y)$ allo stesso valore L.

Allora, se fossimo in grado di prendere *"due avvicinamenti diversi"* (ovvero delle funzioni che legano x, y tali che entrambi vadano al punto di limite) con corrispondenti *valori limite diversi*, si potrebbe provare la non-esistenza di un limite. Infatti si violerebbe l'*unicità del limite*.

Di solito, una prima scelta di *"traiettorie"* è il fascio delle rette $y = mx$.

FIGURA 4.1. (*Le traiettorie di avvicinamento*)



#Teorema

Teorema (condizione sufficiente per la non-esistenza di un limite, caso bidimensionale).

Sia $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^M$.
Se esistono *almeno due funzioni* $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ tali che

$$\lim_{x\to x_0} f(x, \varphi(x)) \neq \lim_{x\to x_0} f(x, \psi(x))$$

allora il *limite*

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f(\underline{x})$$

non esiste.

C2. Continuità in più variabili

Definizione di Continuità di Funzione in più variabili

Definizione di continuità per funzioni in più variabili.

---

0. Voci correlate

- Definizione di Continuità
- Limite di Funzione in più variabili

1. Definizione di continuità

#Definizione

Definizione (continuità in più variabili).

Sia $f : E \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M$ con $\underline{x}_0 \in E$.
Si dice che *"f è continua in $\underline{x}_0$"* se *esiste il limite*

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0)$$

ovvero se vale

$$\begin{gathered}\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in E, \\ 0 \leq d(\underline{x}, \underline{x}_0) < \delta \implies d(f(\underline{x}), f(\underline{x}_0)) < \varepsilon\end{gathered}$$

2. Condizione equivalente

#Teorema

Teorema (condizione equivalente per la continuità di funzioni).

Sia $f : E \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M$ con $\underline{x}_0 \in E$. Sono equivalenti:

$$f \text{ continua in } \underline{x}_0 \iff \forall i \in \{1, \dots, M\} \lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f_i(\underline{x}) = f_i(\underline{x}_0)$$

3. Osservazione

#Osservazione

Osservazione (la definizione di continuità per una funzione multivariabile varia a seconda del dominio).

Osserviamo che la *definizione di continuità* per un punto $\underline{x}_0$ per una funzione $f : E \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M$ varia a seconda del dominio E scelto.

Usiamo il seguente esempio.
Sia

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{x}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$$

Vogliamo stabilire la continuità di f in $(0, 0)$ su $E = \mathbb{R}^2$. Chiaramente, questa *non* è continua, dato che

$$x = y^2 \implies \lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y) = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x} = 1 \neq 0$$

Adesso prendiamo il dominio E come

$$E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq x < 1\right\}$$

Il ragionamento fatto per $E = \mathbb{R}^2$ non vale più, dato che la *"traiettoria esce dal dominio"*. Infatti, qui la funzione è continua dato che

$$\left|\frac{y^2}{x}\right| \leq \frac{|y^2|}{x} \leq \frac{x^2}{x}$$

e quindi ho

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = 0$$

C3. Proprietà delle funzioni continue

Proprietà delle Funzioni Continue

Proprietà delle funzioni continue in più variabili: funzioni continue mandano insiemi connessi in insiemi connessi; teorema dei zeri per i campi scalari; permanenza del segno per i campi scalari; teorema della compattezza; teorema di Weierstraß su più variabili.

---

0. Voci correlate

- Teoremi sulle funzioni continue
- Insiemi compatti in R
- Topologia in RN

1. Funzioni mandano insiemi connessi in insiemi connessi

#Teorema

> Teorema (funzioni continue mandano connessi in connessi).
>
> Se $f: C \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ è *continua*, allora vale l'implicazione
>
> $$C \text{ connesso} \implies f(C) \text{ connesso}$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 1 (funzioni continue mandano connessi in connessi)

Siano $y_1, y_2 \in f(C)$. Per ipotesi devono esistere $\underline{x_1}, \underline{x_2}$ tali che $f(\underline{x_1}) = y_1$ e $f(\underline{x_2}) = y_2$.

Ma allora, dato che C è connesso, dev'esistere un percorso γ tale che $\gamma(0) = \underline{x}_0$ e $\gamma(1) = \underline{x}_1$. Adesso basta considerare la funzione composta

$$\boxed{\tilde{\gamma} = f \circ \gamma}$$

e si ha infatti

$$\tilde{\gamma}(0) = f(\gamma(0)) = f(\underline{x}_0) = y_1$$

e analogamente

$$\tilde{\gamma}(1) = y_1$$

che prova $f(C)$ connesso. ■

2. Teorema dei zeri per campi scalari

#Teorema

> **Teorema (dei zeri, per campi scalari).**
>
> Sia $f : E \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ *continua* con E *connessa*.
> Allora, se esistono due punti $\underline{x}, \underline{y} \in E$ tali che $f(\underline{x})f(\underline{y}) < 0$ (ovvero sono di *segni discordi*), allora esiste un punto $\underline{\xi} \in E$ tale che $f(\underline{\xi}) = 0$.
>
> $$\exists \underline{x}, \underline{y} \in E : f(\underline{x})f(\underline{y}) < 0 \implies \exists \underline{\xi} \in E : f(\underline{\xi}) = 0$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 2 (dei zeri, per campi scalari)
Idea: basta prendere il percorso $\gamma_{\underline{\frac{x}{y}}}$ e applicare il *teorema dei zeri* per le funzioni di variabile reale (Teorema 6 (degli zeri)).
La dimostrazione completa è stata omessa. ■

3. Permanenza del segno per campi scalari

#Corollario

> **Corollario (permanenza del segno, per campi scalari continui).**

Sia $f: E \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ *continua* con E *connessa*.
Se f *non si annulla mai*, allora f dev'essere a segno permanente.
Ovvero,

$$\forall \underline{x} \in E, f(\underline{x}) \neq 0 \implies \forall \underline{x_1}, \underline{x_2} \in E, f(\underline{x_1})f(\underline{x_2}) > 0$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Corollario 3 (permanenza del segno, per campi scalari continui)
La tesi di questo corollario è semplicemente la contronominale del *teorema dei zeri per i campi scalari* (Teorema 2 (dei zeri, per campi scalari)). ■

4. Teorema della compattezza

#Teorema

Teorema (della compattezza).

Sia $f: K \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M$ *continua*.
Vale che se K è *compatto*, allora $f(K)$ è *compatto*.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 4 (della compattezza)
Omessa. Per vedere la dimostrazione del caso $N = M = 1$, leggere la pagina Teorema 13 (di compattezza). ■

5. Teorema di Weierstraß

#Teorema

Teorema (di Weierstraß).

Se $f: K \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M$ è *continua* e K è *compatto*, allora vale che f ammette un *minimo* e un *massimo*;

$$\exists \min_{\underline{x} \in K} f(\underline{x}) \land \exists \max_{\underline{x} \in K} f(\underline{x})$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 5 (di Weierstraß)

Omessa. Per la dimostrazione del caso $N = M = 1$, vedere la pagina Teorema 15 (di Weierstraß). ■

D. STRUTTURA LINEARE DI R^N

D1. Prodotto Scalare

Prodotto Scalare in RN

Osservazione: $\mathbb{R}^N$ è un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale. Definizione di prodotto scalare in $\mathbb{R}^N$, proprietà del prodotto scalare. Definizione di spazio dotato di prodotto scalare.

---

0. Voci correlate

- Spazi Vettoriali
- Prodotto Scalare
- Definizione di RN

1. Il Prodotto Scalare su $\mathbb{R}^N$

#Osservazione

Osservazione ($\mathbb{R}^N$ è un spazio vettoriale).

Osserviamo che $\mathbb{R}^N$ è un *spazio vettoriale* su $\mathbb{R}$ con le operazioni di *somma* $+$ e *scalamento* $\cdot$.
Possiamo quindi *applicare le definizioni relative ai spazi vettoriali*, partendo dalla nozione di *prodotto scalare euclideo* (Definizione 1 (prodotto scalare di due vettori)).

#Definizione

Definizione (prodotto scalare euclideo).

Siano $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^N$ dei vettori, con $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_N)$ e $\underline{y} = (y_1, \ldots, y_N)$.
Si definisce il *prodotto scalare euclideo* come l'operazione

$$\langle x, y\rangle := x_1 y_1 + \ldots + x_N y_N = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i$$

#Proposizione

Proposizione (le proprietà del prodotto scalare).

Come visto (1), il prodotto scalare soddisfa le seguenti proprietà. Come ipotesi iniziali prendiamo

$$forall \underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in \mathbb{R}^N, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

i. *bilinearità*

$$\langle \lambda \underline{x} + \mu \underline{y}, \underline{z}\rangle = \lambda \langle \underline{x}, \underline{z}\rangle + \mu \langle \underline{y}, \underline{z}\rangle$$

ii. *simmetria*

$$\langle \underline{x}, \underline{y}\rangle = \langle \underline{y}, \underline{x}\rangle$$

iii. *forma positiva*

$$\langle \underline{x}, \underline{x}\rangle \geq 0 \wedge \langle \underline{x}, \underline{x}\rangle = 0 \iff \underline{x} = \underline{0} = (0, \ldots, 0)$$

2. Definizione Generalizzata di Prodotto Scalare

#Definizione

Definizione (prodotto scalare e spazio dotato di prodotto scalare).

Sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale.
Un'applicazione del tipo

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

che verifica le proprietà *i.*, *ii.*, *iii.* della *proposizione 3* (1) si dice *"prodotto scalare"*.

La coppia $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ si dice *"spazio dotato di prodotto scalare"*.

D2. Norma Euclidea

Norma Euclidea in RN

Definizione di norma euclidea in $\mathbb{R}^N$. Legame tra norma e distanza. Proprietà della norma. Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.

---

0. Voci correlate

- Norma, versore e angolo
- Prodotto Scalare in RN
- Definizione di RN
- Topologia in RN

1. Definizione di Norma Euclidea in $\mathbb{R}^N$

#Definizione

Definizione (norma euclidea in $\mathbb{R}^N$).

Definiamo per un qualsiasi vettore $\underline{x} \in \mathbb{R}^N$ la sua *norma* come

$$\|\underline{x}\| := \sqrt{\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}$$

#Osservazione

Osservazione (legame tra norma e distanza).

Osserviamo che vale la seguente *relazione* tra *norma* $\|\cdot\|$ e la distanza $d(\cdot, \cdot)$.

$$\|\underline{x}\| = d(\underline{x}, 0) \wedge d(\underline{x}, \underline{y}) = \|\underline{x} - \underline{y}\|$$

2. Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

#Teorema

Teorema (disuguaglianza di Cauchy-Schwarz).

Osserviamo che vale la seguente disuguaglianza per $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^N$.

$$|\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle| \leq \|\underline{x}\| \cdot \|\underline{y}\|$$

Inoltre vale l'*uguaglianza* se e solo se $\underline{x}, \underline{y}$ sono *linearmente indipendenti*.

3. Proprietà della norma

#Proposizione

Proposizione (proprietà della norma).

Sia $\|\cdot\|$ la *norma* su $\mathbb{R}^N$. Allora valgono le seguenti.
i.

$$\|\underline{x}\| = 0 \iff \underline{x} = \underline{0}$$

ii.

$$\|\lambda \underline{x}\| = |\lambda| \|\underline{x}\|$$

iii.

$$\|\underline{x} + \underline{y}\| \leq \|\underline{x}\| + \|\underline{y}\|$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE della Proposizione 4 (proprietà della norma)

Omessa. Il punto iii. può essere dimostrato con la *disuguaglianza di Cauchy-Schwarz* (Teorema 3 (disuguaglianza di Cauchy-Schwarz)). ■

#Osservazione

> Osservazione (possiamo dimostrare la disuguaglianza triangolare).
>
> Con gli strumenti appena appresi, possiamo *dimostrare formalmente* la *disuguaglianza triangolare* (Proposizione 2 (le proprietà della distanza euclidea)). Infatti, ho che
>
> $$\|\underline{x}+\underline{y}\| = \|\underline{x}-(-\underline{y})\| = d(\underline{x},\underline{y}) \leq \|\underline{x}\|+\|\underline{y}\| = d(\underline{x},\underline{0})+d(\underline{y},\underline{0})$$
>
> che è la tesi per $\underline{z}=\underline{0}$.

D3. Teorema di Riesz

Teorema di Riesz

Applicazioni lineari $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^M)$: teorema di rappresentazioni delle applicazioni lineari, teorema di Riesz finito dimensionale.

---

0. Voci correlate

- Definizione di Applicazione Lineare
- Matrice
- L'insieme delle Applicazioni Lineari
- Limite di Funzione in più variabili
- Campo Scalare e Insieme di Livello

1. Teorema di Rappresentazioni delle Applicazioni Lineari

#Osservazione

Osservazione (le funzioni in più variabili possono essere delle applicazioni lineari).

Notiamo che una certa classe di *funzioni in più variabili* del tipo $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M$ possono essere delle *applicazioni lineari*. Quindi possiamo applicare delle regole particolari per queste funzioni.

#Teorema

Teorema (di rappresentazione delle applicazioni lineari).

Sia $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$ lo *spazio delle applicazioni lineari* $L : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M$. Sia $M_{m,n}(\mathbb{R})$ lo *spazio delle matrici* $m \times n$ a coefficienti in $\mathbb{R}$.

Fissata una base $\mathcal{B}$ per il dominio $\mathbb{R}^N$ e un'altra base $\mathcal{C}$ per il codominio $\mathbb{R}^M$, deve *esistere una biiezione* tra $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$ e $M_{m,n}(\mathbb{R})$.

2. Teorema di Riesz, finito dimensionale

#Teorema

Teorema (di Riesz finito dimensionale).

Sia L un *campo scalare*. Ovvero del tipo $L : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$.

Allora *esiste uno ed uno solo* $\underline{a} \in \mathbb{R}^N$ tale che

$$L(\underline{x}) = \langle \underline{a}, \underline{x} \rangle, \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^N$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 3 (di Riesz finito dimensionale)
La dimostrazione si articola in *due parti*; una dimostra l'esistenza del vettore $\underline{a}$ e l'altra ne dimostra l'unicità
"$\exists$": Sia $\mathcal{B}$ una base per il dominio, con $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_N\}$. Ho inoltre le coordinate del vettore $\underline{x}$ rispetto alla base, scritto come $\pi = (x_1, \dots, x_N)$. Allora basta calcolare $L(\underline{x})$;

$$
\begin{aligned}
L(\underline{x}) &= L(x_1\underline{e_1} + \ldots + x_N\underline{e_N}) \\
&= x_1 L(\underline{e_1}) + \ldots + x_N L(\underline{e_N}) \\
a_i := L(\underline{e_i}) \implies '' &= x_1\underline{a_1} + \ldots + x_N\underline{a_N} = \langle \underline{x}, \underline{a} \rangle
\end{aligned}
$$

che è la prima parte.
"!": Supponiamo che esista un vettore $\underline{b} \neq \underline{a} \in \mathbb{R}^N$ tale che

$$
L(\underline{x}) = \langle \underline{x}, \underline{b} \rangle
$$

Poiché, come precedentemente dimostrato, abbiamo

$$
L(\underline{x}) = \langle \underline{x}, \underline{a} \rangle
$$

ho

$$
\begin{aligned}
\langle \underline{x}, \underline{a} \rangle = \langle \underline{x}, \underline{b} \rangle &\implies \langle \underline{x}, \underline{a} - \underline{b} \rangle = 0 \\
\underline{x} = \underline{a} - \underline{b} &\implies '' = \langle \underline{a} - \underline{b}, \underline{a} - \underline{b} \rangle = 0 \iff \underline{a} = \underline{b}
\end{aligned}
$$

che contraddice la supposizione iniziale, dandoci un *assurdo*. ■

E. ESERCIZI

E1. Funzioni

Esercizi sulle Funzioni in più variabili

Breve descrizione qui

---

1. Esercizi base

#Esercizio

Esercizio (determinare il dominio).

Sia $f : E \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.
Determinare l'insieme di dominio E affinché la funzione f definita come

$$f(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y} - \ln(4x - x^2 - y)$$

abbia senso.

2. Campi scalari

#Esercizio

Esercizio (determinare le curve di livello).

Determinare le curve di livello della funzione $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$f(x, y) = x^2y^2 - 4xy$$

3. Superfici parametriche

#Esercizio

Esercizio (parametrizzare).

Parametrizzare la superficie di una curva in due variabili.

4. Studio di funzione

#Esercizio

Esercizio (studio del segno).

Studiare il segno della funzione

$$f(x, y) = x^3 + xy^2 - x$$

al variare di $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

E2. Limiti

Esercizi sui Limiti in più variabili

Esercizi sui limiti in più variabili.

---

1. Limiti

#Esercizio

Esercizio.

Provare che vale il limite, per $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y+2}{1+\sqrt{x^2+y^2}} = 2$$

#Esercizio

Esercizio.

Studiare i limiti

$$\begin{aligned} i. \quad & \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^4+y^4} \\ ii. \quad & \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2} \end{aligned}$$

#Esercizio

Esercizio.

Dire se esiste il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{4x^2+y^4}$$

2. Continuità

#Esercizio

Esercizio.

Valutare la continuità della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

#Esercizio

Esercizio.

Valutare la continuità della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4}{x^2 + y^2}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Esercizio.

Valutare la continuità della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0) \end{cases}$$