Limiti - Sommario

Tutto sui limiti.

A. Definizione di Limite di funzione

Definizione di Limite di funzione

Idea fondamentale del limite di una funzione; definizione di limite in tutti i casi; dimostrazione dell'esistenza di un limite. Definizione di limite destro e sinistro.

---

0. Argomenti propedeutici

Per affrontare uno degli argomenti più importanti dell'[redacted], ovvero i *limiti*, è necessario conoscere e ricordare alcuni argomenti:

- Intorni di $x_0 \in \tilde{\mathbb{R}}$
- Punti di aderenza e di accumulazione per un insieme $E \subseteq \mathbb{R}$

1. Idea fondamentale

IDEA. Prendiamo la una funzione di variabile reale (**DEF 1.1.**) del tipo

$$f : E \longrightarrow \mathbb{R}, E \subseteq \mathbb{R}$$

e consideriamo un punto $x_0 \in \tilde{\mathbb{R}}$ che è un *punto di accumulazione* per E (Punti di aderenza e di accumulazione, **DEF 2.1.**).
Ora voglio capire come posso *rigorosamente* formulare la seguente frase:
"Se $x \in E$ si avvicina a $x_0 \in \tilde{\mathbb{R}}$, allora $f(x)$ si avvicina a un valore $L \in \tilde{\mathbb{R}}$."
Ovvero col seguente grafico abbiamo
[GRAFICO DA FARE]

Oppure un caso più particolare, con

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \diagdown \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x \cdot \sin(\frac{1}{x}) \end{aligned}$$

dove 0 è un punto di accumulazione per E (il dominio), ma non ne fa parte.
[GRAFICO DA FARE]

2. Definizione rigorosa

Ora diamo una *formalizzazione rigorosa* del concetto appena formulato sopra.

DEF 2.1. *Definizione del LIMITE*
Sia f una *funzione di variabile reale* di forma

$$f : E \longrightarrow \mathbb{R}, E \subseteq \mathbb{R}$$

Siano $x_0, L \in \tilde{\mathbb{R}}$, x_0 un *punto di accumulazione* per E.
Allora definiamo il **limite di una funzione**

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

se è vera la seguente:

$$\begin{gathered} \forall V \text{ intorno di } L, \exists E \text{ intorno di } x_0 \text{ tale che:} \\ \forall x \in E, x \in U \diagdown \{x_0\} \implies f(x) \in V \end{gathered}$$

PROP 2.1. Questa *definizione* del limite può essere può essere interpretata in più casi.
CASO 1. Siano $x_0, L \in \mathbb{R}$. Quindi dei valori *fissi* sulla *retta reale*.
Abbiamo dunque il seguente disegno:
[DISEGNO DA FARE]
Ora interpretiamo la definizione del *limite* di $f(x)$, $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ in questo caso:

$$\begin{gathered} \forall V \text{ intorno di } L, \exists E \text{ intorno di } x_0 \text{ tale che:} \\ \forall x \in E, x \in U \diagdown \{x_0\} \implies f(x) \in V \end{gathered}$$

significa

$$\forall \varepsilon > 0, (L - \varepsilon, L + \varepsilon) \subseteq V, \exists \delta > 0 : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq U$$
$$\text{tale che } \forall x \in E$$
$$0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon$$

che graficamente corrisponde a
[DISEGNO DA FARE]
OSS 2.1. Grazie a questa interpretazione è possibile creare un'analogia per il limite; infatti se immaginiamo che l'intorno di L con raggio ε è il *bersaglio* e se esiste il *limite*, allora deve essere sempre possibile trovare un intorno attorno x_0 con raggio δ tale per cui facendo l'immagine di tutti i punti in questo intorno, *"colpisco"* il *"bersaglio"* (ovvero l'intorno di L).
OSS 2.2. Alternativamente è possibile pensare all'esistenza del *limite* come una *"macchina"* che dato un valore ε ti trova un valore δ.
Ora passiamo al secondo caso.
CASO 2. Ora interpretiamo

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

ovvero dove $L \in \tilde{\mathbb{R}}$. Allora interpretando il significato del limite abbiamo:

$$\forall M > 0, (M, +\infty), \exists \delta > 0 : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq U :$$
$$\text{tale che } \forall x \in E,$$
$$0 < |x - x_0| < \delta \implies x > M$$

ovvero abbiamo graficamente che per una qualsiasi retta orizzontale $x = M$, troveremo *sempre* un intervallo tale per cui l'immagine dei suoi punti superano sempre questa retta orizzontale.
[DISEGNO DA FARE]

Ora al terzo caso.
CASO 3. Ora abbiamo

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

ovvero dove $x_0 \in \tilde{\mathbb{R}}$. Interpretando la definizione si ha:

$$\forall \varepsilon > 0, (L - \varepsilon, L + \varepsilon), \exists N > 0 : (N, +\infty) :$$
$$\text{tale che } \forall x \in E,$$
$$x > N \implies |f(x) - L| < \varepsilon$$

ovvero graficamente ho un grafico di una funzione $f(x)$, dove disegnando un qualsiasi intorno di L riuscirò sempre a trovare un valore N tale per cui tutti i punti dell'insieme immagine dell'intervallo $(N, +\infty)$ stanno *sempre* all'interno dell'intorno di L, indipendentemente da quanto stretto è questo intervallo.
[GRAFICO]

Infine all'ultimo caso.
CASO 4. Finalmente abbiamo

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

quindi *per definizione* ho

$$\begin{gathered}\forall M; (M, +\infty), \exists N; (N, +\infty) : \\ \text{tale che } \forall x \in E, \\ x > N \implies f(x) > M\end{gathered}$$

ovvero ciò vuol dire che fissando un qualunque valore M riuscirò *sempre* a trovare un valore N tale per cui prendendo un qualsiasi punto $x > N$, il valore immagine di questo punto supererà sempre M.
OSS 2.3. Nota che questo *NON* deve necessariamente significare che la funzione è *monotona crescente*. Però vale il contrario: infatti

$$\forall x_0, x_1 \in E, x_1 > x_0 \implies f(x_1) > f(x_0)$$

possiamo fissare $f(x_0) = M$, $x_0 = N$, abbiamo allora

$$\forall M, N, \exists x_1 \in E : x_1 > N \implies f(x_1) > M$$

questa condizione è sempre vera. In questo caso basta solamente prendere un qualsiasi $x_1 > x_0$.

2.1. Infinitesimo

APPROFONDIMENTO PERSONALE a. Usando la *nostra* definizione del limite e ponendo $L = 0, x = +\infty$, otteniamo un risultato che è consistente con la definizione di *infinitesimo*(1) secondo dei noti matematici russi, tra cui uno è Kolmogorov.
DEF 2.a. Si definisce un infinitesimo come una *grandezza variabile* α_n

, denotata come

$$\lim_{x \to +\infty} \alpha_n = 0 \text{ oppure } \alpha_n \to 0$$

che possiede la seguente proprietà:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 : \forall x \in E, x > N \implies |\alpha_x| < \varepsilon$$

OSS 2.a. Notiamo che la definizione dell'*infinitesimo* diventerà importante per il calcolo degli *integrali*, in particolare la *somma di Riemann*.

> [(1)] *"[...] La quantità α_n che dipende da n, benché apparentemente complicata gode di una notevole proprietà: se n cresce indefinitamente, α_n tende a zero. Tale proprietà si può anche esprimere dicendo che dato un numero positivo ε, piccolo a piacere, è possibile scegliere un interno N talmente grande che per ogni n maggiore di N il numero α_n è minore, in valore assoluto, del lato numero ε."*
>
> Estratto tratto da *Le matematiche: analisi, algebra e geometria analitica* di *A.D. Aleksandrov*, *A. N. Kolmogorov* e *M. A. Lavrent'ev* (1974, ed. Bollati Boringhieri, trad. G. Venturini).

---

3. Limite destro e sinistro

PREMESSA. Sia una funzione f di variabile reale del tipo

$$f : E \longrightarrow \mathbb{R}, E \subseteq \mathbb{R}$$

$x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione per E, $L \in \tilde{\mathbb{R}}$.
Allora definisco le seguenti:
DEF 3.1. Il **limite della funzione f che tende a x_0 da destra** come

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$$

come

$$\forall V \text{ intorno di } L, \exists U \text{ intorno di } x_0 : \forall x \in E,$$
$$x \in U \cap (x_0, +\infty) \implies f(x) \in V$$

ovvero come il *limite di* f, considerando però *solo* i punti che stanno a *destra* di x_0.
[GRAFICO DA FARE]

DEF 3.2. Analogamente **il limite della funzione f che tende a x_0 da sinistra** è

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$$

ovvero

$$\forall V \text{ intorno di } L, \exists U \text{ intorno di } x_0 : \forall x \in E,$$
$$x \in U \cap (-\infty, x_0) \implies f(x) \in V$$

OSS 3.1. Si può immediatamente verificare che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \iff \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$$

Infatti l'insieme dei x del limite *destro* e/o *sinistro* su cui verifichiamo che $f(x) \in V$ è un *sottoinsieme* dell'insieme di cui si verifica col limite generale. Pertanto facendo l'unione tra questi due sottoinsiemi abbiamo

$$[U \cap (-\infty, x_0)] \cup [U \cap (x_0, +\infty)] = U \diagdown \{x_0\}$$

DEF 3.1. (DALLA DISPENSA) Avevamo appena osservato che coi limiti *destri* e/o *sinistri* abbiamo semplicemente fatto una *restrizione* all'insieme $U \diagdown \{x_0\}$ di cui si cerca di verificare che $f(U \diagdown \{x_0\}) \subseteq V$. Dunque definiamo il **limite della funzione ristretta a** B, un qualunque sottoinsieme di E per cui x_0 è di accumulazione:

$$\lim_{x \to x_0} f_{|B}(x) = L$$

ovvero

$$\forall V \text{ intorno di } L, \exists U \text{ intorno di } x_0 : \forall x \in B,$$
$$x \in U \diagdown \{x_0\} \implies f(x) \in V$$

4. Strategia per verificare l'esistenza di limiti

La nostra definizione presuppone che dobbiamo *eseguire* una serie *infinita* di verifiche per dimostrare che un limite esiste; infatti si dovrebbe scegliere tutti gli $\varepsilon > 0$ e trovare un δ associato.
Vogliamo invece sviluppare una serie di *strategie* per verificare l'esistenza dei limiti, come i *teoremi* e le *proprietà* sui limiti come vedremo in Teoremi sui Limiti, oppure *interpretando* la definizione del limite per poter trovare una *"formula"* che associa ad ogni epsilon un delta.

ESEMPIO 4.1.
Voglio verificare che

$$\lim_{x \to 1} x^2 + 1 = 2$$

ovvero, interpretando la definizione otteniamo il seguente da verificare:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in E, 0 < |x - 1| < \delta \implies |x^2 + 1 - 2| < \varepsilon$$

Allora *"faccio finta"* di conoscere un ε fissato, sviluppiamo dunque l'equazione a destra:

$$\begin{aligned} |x^2 + 1 - 2| &< \varepsilon \\ |x^2 - 1| &< \varepsilon \\ |(x+1)(x-1)| &< \varepsilon \\ |x+1||x-1| &< \varepsilon \end{aligned}$$

Osservo che se poniamo $x \in [0, 2)$ e quindi $\delta < 1$, allora abbiamo $|x + 1| < 3$. Allora da ciò discende che

$$|x+1||x-1| < 3|x-1| < 3\delta$$

abbiamo quindi

$$0 < |x - 1| < \delta \implies |x+1||x-1| < 3\delta, \forall x \in [0, 2)$$

Infatti abbiamo implicitamente scelto $\varepsilon = 3\delta$, verificando così il limite

per $\forall x \in [0, 2)$.
Invece se $x \geq 2$, basta scegliere $\delta = 1$ [Non ho ancora capito perchè]

B. Teoremi sui limiti

Teoremi sui Limiti

Teoremi sui limiti: unicità del limite, permanenza del segno, teorema del confronto, teorema dei due carabinieri, operazioni con i limiti, limiti infinitesimi e limiti infiniti, forme indeterminate.

---

0. Preambolo

In questo capitolo si vuole creare una serie di *strategie* per poter verificare l'esistenza dei limiti senza dover ricorrere a fare dei *calcoli* infiniti in quanto richiesta dalla Definizione di Limite di funzione.
Una di queste strategie consiste proprio enunciare e dimostrare una serie di *teoremi.*

1. Unicità del limite

TEOREMA 1.1. (*L'unicità del limite*)
Sia

$$f : E \longrightarrow \mathbb{R}$$

poi $x_0 \in \tilde{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione per E.
Tesi. Poi siano i valori limiti $L_1, L_2 \in \tilde{\mathbb{R}}$ tali che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L_1; \lim_{x \to x_0} f(x) = L_2$$

allora

$$L_1 = L_2$$

DIMOSTRAZIONE 1.1. Si procede tramite una dimostrazione per *assurdo*.

Supponiamo dunque

$$L_1 \neq L_2$$

Allora ci chiediamo se è possibile trovare degli *intorni* (Intorni) di L_1, L_2 che chiameremo V_1, V_2 che sono *disgiunti*; ovvero se sono tali che

$$V_1 \cap V_2 = \emptyset$$

Dato che L_1 e L_2 sono diversi, da qui discende che la distanza tra L_1 e L_2 dev'essere maggiore di 0; quindi possiamo impostare il *raggio* di questi intorni come

$$r = \frac{|L_1 - L_2|}{3}$$

Allora concludiamo che possono esistere V_1 e V_2 tali da essere disgiunti tra di loro.
Ora li scegliamo: applicando le definizioni di limite, ovvero

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} f(x) = L_1 &\iff \text{per } V_1, \exists U_1 \text{ di } x_0 : \forall x \in E \\ &\qquad x \in U_1 \diagdown \{x_0\} \implies f(x) \in V_1 \\ \lim_{x \to x_0} f(x) = L_2 &\iff \text{per } V_2, \exists U_2 \text{ di } x_0 : \forall x \in E, \\ &\qquad x \in U_2 \diagdown \{x_0\} \implies f(x) \in V_2 \end{aligned}$$

Dato che U_1, U_2 sono *intorni* di x_0 che è di accumulazione per E (Punti di aderenza e di accumulazione) si ha che

$$(U_1 \cap U_2) \cap E \neq \emptyset \text{ escludendo } x_0$$

Posso scegliere allora un x che sta all'interno nell'intersezione di U_1 e U_2; ovvero

$$x \in ((U_1 \cap U_2) \diagdown \{x_0\})$$

e per ipotesi (ovvero che esistono tali limiti) deve valere che esiste un elemento $f(x)$ tale che

$$f(x) \in (V_1 \cap V_2)$$

il che è assurdo, in quanto $V_1 \cap V_2$ dovrebbe essere un *insieme vuoto*.

OSS 1.1. (*Tratto dalla dispensa di D.D.S.*) Questo teorema è anche utile per dimostrare la *non-esistenza* di un limite: prendendo la *contronominale* di questo teorema. Ovvero se due *restrizioni della stessa funzione* f (Definizione di Limite di funzione, **DEF 3.1.**) hanno limiti diversi $L_1 \neq L_2$, allora il limite *non* esiste.

2. Permanenza del segno

TEOREMA 2.1. (*Permanenza del segno*)
Sia

$$f : E \longrightarrow \mathbb{R}, E \subseteq \mathbb{R}$$

Siano $x_0, L \in \tilde{\mathbb{R}}$, x_0 punto di accumulazione per E.
Sia definito il *limite*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

Tesi. Allora supponendo che $L \in (0, +\infty)$ oppure $L = +\infty$, allora è vera che

$$\exists \bar{U} \text{ intorno di } x_0 : \forall x \in (\bar{U} \cap E) \diagdown \{x_0\}, f(x) > 0$$

Ovvero a parole stiamo dicendo che se il limite è *positivo*, allora anche la *funzione* è positiva per un intorno opportuno di x_0; il segno si *"trasferisce"* dal limite alla funzione.

DIMOSTRAZIONE 2.1.
Parto dalle definizione del limite, ovvero

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} f(x) = L \iff & \forall V \text{ di } L, \exists U \text{ di } x_0 : \forall x \in E, \\ & x \in U \diagdown \{x_0\} \implies f(x) \in V \end{aligned}$$

Per interpretarla nel nostro contesto (ovvero che L è positiva), abbiamo che l'intorno di L può essere $V = (0, +\infty)$, in quanto se è *positiva* allora sarà sicuramente contenuta in quell'intervallo.
Dunque viene verificato che esiste un intorno U tale che

$$\forall x \in E, x \in U \diagdown \{x_0\} \implies f(x) > 0$$

OSS 2.1. Posso usare questo teorema *"alla rovescia"*, prendendo la *contronominale* dell'enunciato; ovvero se $f(x)$ è sempre *negativo o uguale a zero* ed *il limite esiste*, allora sicuramente L è sempre *negativo o uguale a zero*.

$$f(x) \leq 0 \wedge \exists \lim_{x \to x_0} f(x) \implies L \leq 0$$

3. Teorema del confronto

TEOREMA 3.1. (*Teorema del confronto*)
Siano f, g funzioni di variabile reale del tipo

$$f, g : E \longrightarrow \mathbb{R}, E \subseteq \mathbb{R}$$

e x_0 un punto di accumulazione per E, e $x_0 \in \tilde{\mathbb{R}}$.
Tesi. Supponendo che siano vere le seguenti condizioni:
i. Che esista il limite

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

ii. Che la funzione g dev'essere *sempre* (nel dominio) maggiore o uguale di f.

$$\forall x \in E \diagdown \{x_0\}, g(x) \geq f(x)$$

Allora vale che

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$$

DIMOSTRAZIONE 3.1. Sia ad esempio $x_0 \in \mathbb{R}$, allora abbiamo la seguente definizione di limite:

$$\begin{gathered} \forall M > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in E, \\ 0 < |x - x_0| < \delta \implies f(x) > M \end{gathered}$$

e considerando che $g(x) \geq f(x)$, abbiamo a maggior ragione che

$$\forall x \in E, 0 < |x - x_0| < \delta \implies g(x) \geq f(x) > M$$

e considerando la *transitività* della relazione d'ordine $>$ (Relazioni, **DEF 4.**), abbiamo

$$\begin{gathered} \forall M > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in E, \\ 0 < |x - x_0| < \delta \implies g(x) > M \end{gathered}$$

che è esattamente la definizione di

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty \blacksquare$$

4. Teorema dei due carabinieri

TEOREMA 4.1. (*Dei due carabinieri*)
Siano f, g, h funzioni del tipo

$$f, g, h : E \longrightarrow \mathbb{R}, E \subseteq \mathbb{R}$$

e x_0 un punto di accumulazione per E, $x_0, L \in \tilde{\mathbb{R}}$.
Tesi. Supponendo che

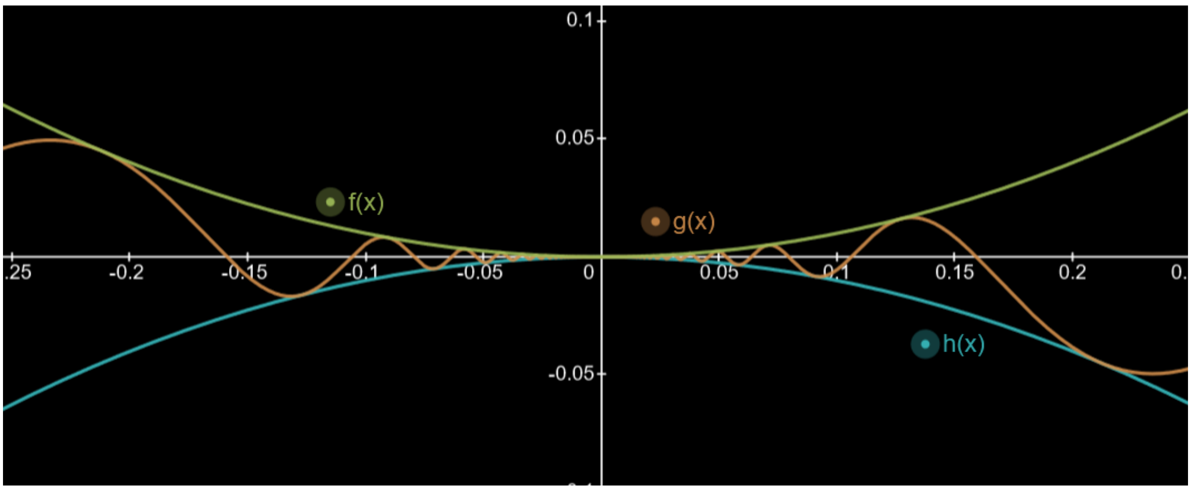
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = L$$

e che

$$\forall x \in E \diagdown \{x_0\}, f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

poi volendo possiamo chiamare f, g le *"funzioni carabinieri"*; abbiamo che

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = L$$



DIMOSTRAZIONE 4.2. Consideriamo $x_0 \in \mathbb{R}$.
Per la *definizione del limite*, abbiamo

$$\begin{aligned} & \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_f > 0 : \forall x \in E, \\ 0 < |x - x_0| < \delta_f & \implies |f(x) - L| < \varepsilon \\ & \implies -\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon \\ & \implies L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon \end{aligned}$$

e analogamente

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_h > 0 : \forall x \in E,$$
$$0 < |x - x_0| < \delta_h \implies L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon$$

Se vogliamo che *entrambe* le espressioni valgano contemporaneamente, dobbiamo scegliere il *minimo* tra i due delta.
Per capire l'idea di questo ragionamento prendiamo dei numeri:

$$(x < 3 \implies x < 4) \wedge (x < 6 \implies x < 7)$$

se voglio essere *sicuro* che valgano entrambe, devo prendere $x < 3$ in quanto così abbiamo la garanzia che anche $x < 6$ sia vera.
Dunque sia

$$\delta = \min\{\delta_f, \delta_h\}$$

e mettendole assieme, abbiamo

$$0 < |x - x_0| < \delta \implies L - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \varepsilon$$

possiamo sfruttare la *transitorietà* di $>$ per ottenere

$$0 < |x - x_0| < \delta \implies |g(x) - L| < \varepsilon$$

Riassumendo, abbiamo il seguente:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \min\{\delta_f, \delta_h\} : \forall x \in E,$$
$$0 < |x - x_0| < \delta \implies |g(x) - L| < \varepsilon$$

che è esattamente la *definizione* di

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = L$$

come volevasi dimostrare. ■

5. Operazioni con i limiti

Ora presentiamo una serie di proposizioni, raccolte in un unico teorema, e queste ci permettono di fare delle operazioni *tra limiti*.
TEOREMA 5.1.
Siano f, g funzioni di variabile reale del tipo

$$f, g : E \longrightarrow \mathbb{R}, E \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in \tilde{\mathbb{R}}$$

e x_0 un punto di accumulazione per E.
Tesi. Supponendo che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$$
$$\lim_{x \to x_0} g(x) = m \in \mathbb{R}$$

allora abbiamo le seguenti:

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = l + m$$
$$\lim_{x \to x_0} (f(x)g(x)) = lm$$

inoltre se $m \neq 0$, allora

$$\lim_{x \to x_0} (\frac{f(x)}{g(x)}) = \frac{l}{m}$$

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo solo le prime due.

1.
2.

6. Limiti infiniti e infinitesimi

7. Forme indeterminate

C. Esempi di limiti

Esempi di Limiti di Funzioni

Esempi di limiti: funzione costante, funzione identità, polinomi, funzioni razionali, funzioni trigonometriche, ...
