Campi e sistemi lineari - Sommario

Sommario sui campi e sui sistemi lineari.

A. Campi

Campi

Definizione di un campo; le proprietà caratterizzanti dei campi; esempi di campi e non-campi.

---

0. Preambolo

Questo capitolo ci serve per riflettere sui *fondamenti* che abbiamo usato finora, in particolare quando abbiamo parlato di equazioni, sistemi lineari, matrici, spazi vettoriali, come quando parliamo delle matrici a *coefficienti reali*; oppure dei $\mathbb{R}$-*spazi vettoriali*. Tutte le proprietà di cui abbiamo visto valgono in quanto $\mathbb{R}$ è un *campo* con le sue operazioni $+, \cdot$.
Infatti avevamo implicitamente fatto una *meta-operazione* in cui usavamo le proprietà di questo campo. Ora definiamo rigorosamente un *campo*.

1. Definizione

DEF 1. Sia K un *insieme* (Teoria degli Insiemi) si cui sono definite delle operazioni (o funzioni) (Funzioni) di *somma* e *moltiplicazione*, ovvero:

$$\begin{aligned} +: \ & K \times K \longrightarrow K \\ & (a,b) \mapsto a+b \\ \cdot: \ & K \times K \longrightarrow K \\ & (a,b) \mapsto a \cdot b \end{aligned}$$

tali per cui vengono soddisfatte le seguenti proprietà K:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{K}_1 : \forall a, b \in K; a+b=b+a \mid a \cdot b = b \cdot a \\
&\mathrm{K}_2 : \forall a, b, c \in K; a+(b+c)=(a+b)+c \mid a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \\
&\mathrm{K}_3 : \exists 0 \in K : \forall a \in K, a+0=0+a=a \\
&\mathrm{K}_{3.1} : \exists 1 \in K : \forall a \in K, a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \\
&\mathrm{K}_4 : \forall a \in K, \exists(-a) \in K : a+(-a)=-a+a=0 \\
&\mathrm{K}_{4.1} : \forall a \in K \diagdown, \{0\} \exists a^{-1} : a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1 \\
&\mathrm{K}_5 : \forall a, b, c \in K, (a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c
\end{aligned}$$

Queste regole si chiamo rispettivamente nei seguenti modi:
K1: Commutatività rispetto alla somma e prodotto
K2: Associatività rispetto alla somma prodotto
K3: Esistenza degli elementi neutri $0, 1$ dove $0 \neq 1$
K4: Esistenza degli opposti (somma) e inversi (prodotto)
K5: Distributività
Allora un tale insieme si dice **campo**.

1.1. Esempi

ESEMPIO 1.1.a. Gli insiemi $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sono dei *campi infiniti*, invece $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ *non* sono *campi*.
OSS 1.1.a. Osserviamo che possono esistere anche dei *campi finiti*, che hanno una rilevanza fondamentale nella *crittografia*. L'esempio **1.1.c.** sarà l'esempio di un *campo finito*.

ESEMPIO 1.1.b. L'insieme delle *funzioni razionali* ovvero

$$\{\frac{p}{q} : p, q \text{ sono polinomi in una variabile}\}$$

può essere dotata di *somma* e *prodotto* in modo tale da rendere questa un *campo*.

ESEMPIO 1.1.c. Sia

$$\mathbb{Z}_2 := \{0, 1\}$$

su cui definiamo una operazione di *somma* e *prodotto* $(+, \cdot)$.
Definiamo queste mediante delle *tabelle di somma* e di *moltiplicazione*.

$+$	**0**	**1**
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	**0**	**1**
0	0	0
1	0	1

Allora concludo che

$$(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$$

è un *campo finito*.

2. Conclusione

Pertanto la precedente nozione di $\mathbb{R}$-*spazio vettoriale* sarà da ora in poi sostituita da quella di K-spazio vettoriale, con K un campo. Analogo il discorso per le *matrici a coefficienti in* K, ovvero $M_{m,n}(K)$.

B. Sistemi lineari

Sistemi Lineari

Definizione rigorosa di sistema lineare. Nesso tra sistemi lineari, matrici e campi. Teoremi sui sistemi lineari.

---

0. Preambolo

Avevamo accennato che cosa sono i *sistemi lineari* nel capitolo sulle Equazioni e Proprietà Lineari; però avendo definito i Campi, ora è opportuno definirli in una maniera rigorosa e formale. Inoltre rendiamo nota la seguente notazione:
NOTAZIONE 0. Andiamo a identificare i due seguenti spazi vettoriali: la matrice colonna $M_{m,1}(K)$ di tipo

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

e la m-tupla K^m di tipo

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

e questi due spazi vettoriali sono *isomorfi* (ovvero che presentano gli stessi comportamenti).

1. Definizione formale

DEF 1. Sia K un *campo* (Campi, **DEF 1.**); definiamo un **sistema di** m **equazioni in** n **incognite a coefficienti in** K come un *sistema di equazioni* nella forma seguente:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

dove $a_{ij} \in K$, $\forall i \in \{1, \ldots, m\}$ e $\forall j \in \{1, \ldots, n\}$; inoltre $\forall b_i \in K, \forall i \in \{1, \ldots, m\}$.

1.a. Incognite

SUBDEF 1.a. Gli elementi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sono dette **incognite**.

1.b. Termini noti

SUBDEF 1.b. Gli elementi $b_1, b_2, \ldots, b_m$ sono detti **termini noti**.

1.c. Coefficienti

SUBDEF 1.c. Gli elementi a_{ij} sono detti **coefficienti** del *sistema lineare*.

1.1. Soluzione di un sistema

DEF 1.1. La **soluzione** di un *sistema lineare* è una *n-upla ordinata* di elementi di K, che rappresentiamo come un *vettore-colonna*, $S \in K^n$, ovvero

$$S = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$$

ove $s_i \in K$, tali per cui se ad ogni s_i sostituiamo x_i (dove $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$), allora tutte le *uguaglianze* del *sistema lineare* diventano *vere*.

1.2. Omogeneità di un sistema

DEF 1.2. Un *sistema lineare* si dice **omogeneo** se tutti i *termini noti* sono nulli: ovvero se $b_1, b_2, \ldots, b_m = 0, 0, \ldots, 0$.
Analogamente, un *sistema lineare* si dice **non omogeneo** se questo sistema non è omogeneo. (Lo so, informazione sorprendentemente non ovvia)

1.3. Compatibilità di un sistema

DEF 1.3. Un *sistema lineare* si dice **compatibile** se ammette almeno una *soluzione* S; altrimenti si dice **incompatibile**.

OSS 1.1. Se un *sistema lineare* è *omogenea*, allora essa dev'essere anche *compatibile*. Infatti la n-upla nulla è *sempre* soluzione di un sistema *omogeneo*.

1.4. Forma compatta di un sistema

DEF 1.4. Dato un *sistema lineare* come in **DEF 1.**, definiamo la la matrice A dei *coefficienti*

$$A = (a_{ij})_{\substack{i \in \{1, \ldots, m\} \\ j \in \{1, \ldots, n\}}}; A \in M_{m,n}(K)$$

e X la n-upla delle incognite, b la n-upla dei termini noti, ovvero $X, b \in M_{m,1}(K)$ dove

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}; b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

allora posso scrivere il *sistema lineare* in **forma compatta** come

$$A \cdot X = b$$

1.5. Equivalenza di due sistemi

DEF 1.5. Dato due *sistemi lineari*, queste si dicono **equivalenti** se ammettono le *medesime soluzioni*; ovvero se i loro insiemi delle soluzioni sono uguali.

Più precisamente, dati due sistemi lineari

$$Ax = b \text{ e } A'x = b'$$

ove $A \in M_{m,n}(K)$ e $b \in K^m$; invece $A' \in M_{m'n}(K)$ e $b' = K^{m'}$, si dicono equivalenti quando hanno le medesime *soluzioni*.

OSS 1.2. Questa nozione è molto utile per risolvere dei sistemi lineari, quindi uno degli obbiettivi principali di questo corso sarà di trovare le operazioni che trasformano dei sistemi lineari in un altro mantenendoli *equivalenti*.

OSS 1.3. Osserviamo che da questa definizione *puntuale* di sistema equivalente devono avere lo *stesso* numero di incognite m ma possono avere numeri *diversi* di equazioni m, m'.

2. Esempi

Tentiamo di applicare queste nozioni mediante degli esempi.

ESEMPIO 2.1. Consideriamo il seguente sistema.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ x_1 + 2x_2 = 5 \end{cases}$$

che in *forma compatta* si scrive

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

1. Questo è un sistema *non omogeneo*, in quanto *almeno uno* termine noto è *non-nullo*.
2. Si può immediatamente stabilire che questo sistema è *incompatibile*; infatti se si suppone che esiste una soluzione $S = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$ allora varrebbe che $s_1 + 2s_2 = 3 = 5$, il che è un assurdo.

ESEMPIO 2.2. Consideriamo il seguente sistema.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$$

1. Chiaramente questo sistema è *non-omogeneo*
2. Qui non è possibile stabilire a priori se questo sistema sia *compatibile* o meno. Allora mediante delle trasformazioni tentiamo di trovare una soluzione.

Quindi

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \sim x_1 = 3 - 2x_2 \\ x_1 - x_2 = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = 3 - 2x_2 \\ 3 - 2x_2 - x_2 = 1 \sim x_2 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

allora

$$x_1 = 3 - 2x_2 \implies x_1 = 3 - 2\frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

quindi il *sistema* ha un'unica *soluzione*

$$S = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Perciò abbiamo stabilito che il sistema è anche *compatibile*.
OSS 2.1. Qui diciamo che la *soluzione* non solo esiste, ma è addirittura *unica* in quanto per ottenere il *sistema finale* abbiamo trasformato il *sistema iniziale* tramite delle operazioni che mantengono i due sistemi *equivalenti*.

ESEMPIO 2.3. Consideriamo il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 = 6 \end{cases}$$

e tentiamo di trovare una soluzione. Iniziamo dunque effettuando delle manipolazioni;

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \text{ (a)} \\ 2x_1 + 4x_2 = 6 \implies 2(x_1 + 2x_2) = 2(3) \overset{(a)}{\implies} 2(3) = 2(3) \end{cases}$$

vediamo che la seconda equazione è *sempre vera*; allora ciò significa che anche l'equazione

$$x_1 + 2x_2 = 3 \iff x_1 = 3 - 2x_2$$

è sempre vera.
Perciò posso trovare una soluzione fissando un valore di x_2 preciso per poter determinare x_1; quindi generalizzando fisso $x_2 = t \in \mathbb{R}$ ed esprimo le soluzioni così:

$$x_1 = 3 - 2t$$

Ovvero le soluzioni sono della forma

$$S = \{t \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix} 3 - 2t \\ t \end{pmatrix}\}$$

da cui discende che abbiamo *infinite* soluzioni.
OSS 2.2. Possiamo riscrivere l'insieme delle soluzioni come

$$S = \{t \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

che *geometricamente* corrisponde ai *punti* di una *retta* passante per $(3, 0)$ e $(1, 1)$.

C. Teoremi sui sistemi lineari

Teoremi sui Sistemi Lineari

Teoremi sui sistemi lineari; teorema di Cramer; teoremi di strutture per i sistemi lineari; da continuare

---

1. Teoremi sui sistemi lineari

Presentiamo dei teoremi importanti sui Sistemi Lineari.

1.1. Teorema di Cramer

TEOREMA 1.1. (*di Cramer*) Considero un sistema lineare con n equazioni ed n incognite, di forma

$$A \cdot X = b$$

Ovvero $A \in M_n(K)$.
Ora supponiamo che A sia anche *invertibile* (Matrice, **DEF 2.6.**); allora da qui discende che esiste un'*unica soluzione* S del sistema lineare ed essa è data da

$$S = A^{-1} \cdot b$$

OSS 1.1.1. Questo teorema è molto importante in quanto ci dà due dati importanti:

1. Da un lato ci dice quando un *sistema lineare* è *compatibile*, quindi c'è questa componente *"esistenziale"* di questo teorema.
2. Dall'altro lato ci fornisce una formula per *calcolare* la soluzione.
   L'unico problema di questo teorema è che **per ora** non abbiamo gli strumenti per *invertire una matrice* o *determinare se una matrice sia invertibile o meno*.

DIMOSTRAZIONE 1.1. La dimostrazione si struttura in due parti:

1. Una parte in cui devo dimostrare che la soluzione effettivamente *esiste* ed equivale a $A^{-1} \cdot b$

2. Un'altra parte in cui devo dimostrare che essa è effettivamente l'*unica* soluzione

3. Supponendo che $A^{-1} \cdot b$ sia *soluzione*, allora per tale definizione devo essere in grado di sostituirla ad X per poter ottenere un'uguaglianza vera; quindi faccio

   $$\begin{aligned}
   &A \cdot X = b \\
   &A \cdot (A^{-1} \cdot b) = b \\
   &(A \cdot A^{-1}) \cdot b = b \\
   &\mathbb{1}_n \cdot b = b \iff b = b
   \end{aligned}$$

   e l'ultima uguaglianza è vera.

4. Ora supponiamo per assurdo che esiste un'altra soluzione S' sia un'altra soluzione; allora per definizione questa verifica

   $$\begin{aligned}
   &A \cdot S' = b \\
   &A^{-1} \cdot (A \cdot S') = A^{-1} \cdot b \;(!) \\
   &(A^{-1} \cdot A) \cdot S' = A^{-1} \cdot b \\
   &S' = A^{-1} \cdot b
   \end{aligned}$$

   che è esattamente uguale alla soluzione proposta dal teorema di *Cramer*; quindi esiste solo la soluzione $S = A^{-1} \cdot b$.

OSS 1.1.2. Focalizziamoci sulla parte contrassegnata con *(!)*; notiamo che abbiamo moltiplicato da ambo le parti per A^{-1} a *SINISTRA*, e non a *DESTRA*; infatti nel contesto delle *matrici* la moltiplicazione a *sinistra* può comportarsi diversamente da quella a *destra*; infatti se avessimo moltiplicato a *destra*, tutta l'espressione avrebbe perso senso in quanto avremmo ottenuto $b \cdot A^{-1}$ in quanto moltiplichiamo una matrice $n \times 1$ per $n \times n$, che non è definita.

1.2. Teorema di struttura per i sistemi lineari omogenei

TEOREMA 1.2. (*di struttura per le soluzioni dei sistemi lineari omogenei*)
Considero un *sistema lineare omogeneo* di m equazioni in n incognite. Ovvero

$$A \cdot X = 0$$

dove $A = M_{m,n}(K)$ e $X = K^n$, 0 è la *matrice nulla* (Matrice, **DEF. 2.2.**).
Poi siano $s, s' \in K^n$ due soluzioni distinte e sia $\lambda \in K$, allora:

1. $s + s'$ è soluzione
2. $\lambda \cdot s$ è soluzione
   Pertanto ricordandoci che il vettore (o la matrice) nullo/a è *sempre* soluzione di un sistema *omogeneo*, ottengo che l'*l'insieme delle soluzioni* di questo sistema è l'insieme

   $$S = \{r \in K^n : A \cdot r = 0\}$$

   allora si verifica che S è un *sottospazio vettoriale* (Sottospazi Vettoriali, **DEF 1.**) di K^n.

OSS 1.2.1. Notiamo che in questo teorema ci interessa *il sistema lineare* sé stesso, invece nel **TEOREMA 1.1.** (di Cramer) ci interessava solo la *matrice* dei coefficienti A

DIMOSTRAZIONE 1.2.
Dimostriamo la prima parte del teorema

1. Dato che s e s' sono soluzioni, allora devono valere che:

   $$\begin{cases} A \cdot s = 0 \\ A \cdot s' = 0 \end{cases}$$

   E supponendo che $s + s'$ sia soluzione, deve valere anche che:

   $$A \cdot (s + s') = 0$$

   e sviluppandolo, otterremo

$$
\begin{aligned}
&A \cdot (s + s') = 0 \\
&A \cdot s + A \cdot s' = 0 \\
&0 + 0 = 0 \iff 0 = 0
\end{aligned}
$$

che è vera.

Prima di dimostrare la seconda parte del teorema ci occorre fare un'osservazione:
OSS 1.2.2. Dati un $A \in M_{m,n}(K)$ e un $s = K^n$ e un $\lambda \in K$ allora abbiamo

$$A \cdot (\lambda \cdot s) = \lambda \cdot (A \cdot s)$$

Ora siamo pronti per concludere la dimostrazione.
2. Se s è soluzione, allora è vera che

$$A \cdot s = 0$$

allora supponendo che λs sia soluzione abbiamo

$$A \cdot (\lambda \cdot s) = 0$$

e sviluppandola otterremo

$$
\begin{aligned}
&A \cdot (\lambda \cdot s) = 0 \\
&\lambda \cdot (A \cdot s) = 0 \\
&\lambda \cdot 0 = 0 \iff 0 = 0
\end{aligned}
$$

il che è vera. ■

1.3. Osservazione

OSS 1.3. Osserviamo che possiamo *"combinare"* questi due teoremi e verificare un fenomeno:
Sia $A \in M_n(K)$ e supponiamo che questa matrice sia anche *invertibile*; ora consideriamo il sistema lineare *omogeneo*

$$A \cdot X = 0$$

Allora da qui discende che 0 è *l'unica* soluzione di questo sistema (per il **TEOREMA 1.1.** (di Cramer)).
Infatti $\lambda \cdot 0 = 0$ e $0 + 0 = 0$ sono anche *soluzioni* in quanto sono uguali all'*unica soluzione* 0.

1.4. Teorema di struttura per i sistemi lineari

TEOREMA 1.4. (*di struttura per le soluzioni dei sistemi lineari*)
Considero un *sistema lineare*

$$A \cdot X = b$$

con $A \in M_{m,n}(K)$ e $b \in K^n$. Sia $\tilde{s}$ una soluzione; allora un elemento $s \in K^n$ è soluzione di questo sistema lineare *se e solo* se possiamo scrivere

$$s = \tilde{s} + s_0$$

dove s_0 è una soluzione del *sistema lineare omogeneo*

$$A \cdot X = 0$$

In altre parole l'insieme delle soluzione di $A \cdot X = b$ è

$$S = \{s \in K^n : s = \tilde{s} + s_0 \text{ per un qualche } s_0 \text{ sia soluzione di } Ax = 0\}$$

DEF 1.4.1. Il *sistema lineare omogeneo* $A \cdot X = 0$ si dice il **sistema lineare omogeneo associato** al sistema $A \cdot X = b$.

DIMOSTRAZIONE 1.4. Per pianificare la struttura di questo teorema, facciamo due considerazioni sulla logica formale, in particolare sulla *doppia implicazione* (Connettivi).
Questo teorema, da un punto di vista logico, vuole dire che

$$\text{s è soluzione} \iff s = \tilde{s} + s_0$$

allora vogliamo dimostrare che entrambe le *implicazioni* sono vere; ovvero nel senso che valgono

$$\begin{cases} s \text{ è soluzione} \implies s = \tilde{s} + s_0 \\ s = \tilde{s} + s_0 \implies s \text{ è soluzione} \end{cases}$$

1. Dimostriamo la prima.
   Supponiamo che s sia una *soluzione* del sistema lineare $Ax = b$, quindi dobbiamo mostrare che *esiste* un $s_0 \in K^n$ di $Ax = 0$ tale che possiamo scrivere

   $$s = \tilde{s} + s_0$$

   Allora definiamo s_0 per costruzione, ovvero $s_0 := s - \tilde{s}$; perciò vale sicuramente che $s = \tilde{s} + s_0$. Allora ci resta da verificare che s_0 è effettivamente la soluzione del *sistema omogeneo associato*. Quindi

   $$\begin{aligned} & A \cdot s_0 \overset{?}{=} 0 \\ \implies & A \cdot (s - \tilde{s}) = As - A\tilde{s} = b - b = 0 \\ \implies & A \cdot s_0 = 0 \blacksquare \end{aligned}$$

2. Ora dimostriamo il viceversa.
   Supponiamo dunque che esista un $s_0 \in K^n$ tale da essere soluzione del *sistema omogeneo associato*. Sia dunque $s := \tilde{s} + s_0$. Allora voglio mostrare che s sia una soluzione del sistema; allora

$$\begin{aligned} & A \cdot (s) \stackrel{?}{=} b \\ \implies & A \cdot (\tilde{s} + s_0) \\ \implies & A \cdot \tilde{s} + A \cdot s_0 \underset{\text{supp.}}{\overset{\text{per}}{\implies}} b + 0 = b \blacksquare \end{aligned}$$

   Abbiamo finalmente concluso la dimostrazione.

OSS 1.4.1. Notiamo che l'insieme S delle soluzioni di un sistema $AX = b$ forma un *sottospazio vettoriale* (Sottospazi Vettoriali) di K^n *se e solo se* $b = 0$. Infatti:

- Supponendo che S sia uno sottospazio vettoriale, allora abbiamo che le proprietà caratterizzanti di uno sottospazio vengano rispettate; ad esempio il *vettore nullo* 0 è soluzione. Infatti se $b = 0$, allora sicuramente anche $s = 0$ è soluzione.
- Supponendo il contrario, ovvero che se il sistema fosse *omogeneo*, allora la tesi segue il *teorema di struttura per i sistemi lineari omogenei* (**TEOREMA 1.2.**).

2. Esempio

Avendo sviluppato questi teoremi come dei *strumenti* per risolvere dei *sistemi lineari*, vediamo degli esempi.
ESEMPIO 2.1. Consideriamo il seguente sistema lineare a coefficienti in $\mathbb{Q}$.

$$\{x + 2y - 3z = -1$$

ovvero in forma compatta

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}$$

e possiamo, ad esempio, considerare una soluzione semplice del tipo

$$\tilde{s} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ora per *calcolare* tutte le soluzioni usiamo il *teorema di struttura per i sistemi lineari arbitrari* (**TEOREMA 1.4.**); determiniamo dunque *tutte* le soluzioni del sistema omogeneo associato, ovvero

$$Ax = 0 \implies \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (0)$$

Vediamo che il sistema è equivalente a

$$x + 2y - 3z = 0$$

Quindi possiamo ad assegnare un qualsiasi valore appartenente al campo $\mathbb{Q}$ u a y e v a z. (in altre parole poniamo $y = u, z = v, u, v \in \mathbb{Q}$)
Possiamo allora determinare il corrispondente di x come

$$x = 3v - 2u$$

Ora possiamo determinare la *"ricetta"* per ottenere le soluzioni di questo sistema omogeneo, ovvero

$$s_0 = \begin{pmatrix} -2u + 3v \\ u \\ v \end{pmatrix}, \forall u, v \in \mathbb{Q}$$

Notiamo che possiamo riscrivere questa 3-upla come

$$s_0 = u \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Concludendo, le soluzioni di $Ax = b$ sono gli *elementi* dell'insieme S definito come

$$S = \{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \forall u, v \in \mathbb{Q} \}$$

D. Sistemi lineari a scala

Sistemi lineari a scala

Definizione dei sistemi lineari a scala; elementi di pivot; compatibilità dei sistemi lineari gradinizzati.

---

0. Preambolo

Se in Teoremi sui Sistemi Lineari avevamo sviluppati degli *stratagemmi* per poter determinare delle caratteristiche per alcuni sistemi, ora vogliamo di essere in grado di poter *risolvere* un qualsiasi *sistema lineare arbitrario*.
La meta-tecnica che useremo consisterà nel seguente: prima di risolvere un *caso particolare*, poi di dimostrare che *tutti* i casi generali si riconducono al caso particolare risolto.
Infatti per cominciare ci focalizziamo su un sottoinsieme particolare dei *sistemi lineari*: i c.d. *sistemi lineari a scala*

1. Definizione di sistema a scala

DEF 1. *Matrice a scala*
Sia $A \in M_{m,n}(K)$ e sia $r \in \{0, 1, \ldots, m\}$ il *numero delle righe non nulle di* A.
Allora chiamiamo A una **matrice a scala** se sussistono le seguenti.

1. $r = 0$, ovvero $A = 0$.
2. $r > 0$ e vale che $A_{(i)} \neq 0, i \in \{1, \ldots, r\}$; in parole questo vuol dire che le eventuali *righe nulle di* A devono *"stare in basso"* (ovvero dopo e non prima di r).
   Inoltre sia $\bar{j}$ *l'indice della prima colonna non-nulla* e sia

   $$j_i := \min\{j : a_{ij} \neq 0\}, \forall i \in \{1, \ldots, r\}$$

   ovvero l'indice del *primo elemento non-nullo di una riga* i, allora deve pure valere che

   $$j_1 > j_2 > \ldots > j_r$$

   e tutti questi valori j_i devono essere maggiori di $\bar{j}$; ovvero

   $$j_i \geq \bar{j}\,, \forall i$$

   SUBDEF 1.1. Definiamo gli elementi

   $$j_i = a_{ij_i}$$

   come gli **elementi di pivot**.

2. Esempi di sistema a scala

Ora proponiamo delle matrici e li analizziamo in riferimento alla definizione appena enunciata.

ESEMPIO 2.1. Siano le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

OSS 2.A.

Facciamo delle osservazioni sulla *matrice A*. Notiamo che:

1. Non è nulla, quindi bisogna vedere l'altra condizione
2. Non ci sono righe nulle; quindi r è il numero di righe effettive di A; in altre parole $r = m$.
3. Abbiamo i seguenti *elementi di pivot*: $j_1 = a_{12} = 1$, $j_2 = a_{23} = 3$, $j_3 = a_{34} = 4$. Allora abbiamo la seguente relazione:

$$j_3 > j_2 > j_1$$

quindi questa matrice è *a scala*, secondo la definizione appena data.

OSS 2.B.

Ora guardiamo la *matrice B*. Notiamo che anche questa è a scala, visto che:

$$j_1 = 1 > j_2 = 3$$

e j_3 non esiste in quanto la terza riga è *nulla*. Infatti $r = m - 1 = 2$.

OSS 2.C.
Osserviamo che C *non* è a scala in quanto abbiamo $r = 2$ (in parole abbiamo 2 righe non nulle), però $C_{(2)} = 0$ (ovvero la seconda riga sta nel mezzo della matrice, non in basso).

OSS 2.D.
Neanche questa *non* è a scala in quanto gli elementi di pivot seguono la seguente relazione:

$$j_1 < j_2 = j_3$$

dove j_2 dev'essere minore di j_3, non uguale.

OSS 2.1.
Se si ha una matrice del tipo B (ovvero una in cui abbiamo almeno una riga nulla), ci si chiede se è possibile fissare una n-upla dei *coefficienti* b tale da rendere $Ax = b$ *incompatibile*. (Sistemi Lineari, **DEF 1.b.** e **DEF 1.3.**).
La risposta è sì; infatti fissando b_n, n essendo l'indice di una qualsiasi riga *nulla*, un numero che sia diverso da 0, allora abbiamo un sistema incompatibile. Infatti si avrebbe l'equazione

$$0 + \ldots + 0 = x, \forall x \in \mathbb{K} \diagdown \{0\}$$

che non è risolvibile.

3. Compatibilità di sistemi a scala

OSS 3.1.
Riprendendo l'osservazione posta in **OSS 2.1.**, ora ci chiediamo se vale il contrario: ovvero se fissando b_n il numero 0, allora abbiamo un *sistema lineare compatibile*.
Per poter dare una risposta prima dobbiamo capire quando $Ax = b$ ha soluzione; sicuramente se $Ax = b$ ha soluzione e le righe $A_{r+1}, \ldots, A_m$ sono nulle, allora anche i valori $b_{r+1}, \ldots, r_m$ sono nulli. Vale il viceversa? Vediamo un esempio.

ESEMPIO 3.1.
Prendiamo la *matrice B* dall'**ESEMPIO 2.1.** e un certo b. Ovvero

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; b = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

allora abbiamo il *sistema lineare*

$$Bx = b$$

Ora cerchiamo di risolverla. Questo sistema equivale a:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = -4 \\ x_3 + 4x_4 = 5 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Ora fissiamo $x_4 = t = 1$; abbiamo dunque

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = -4 \\ x_3 + 4x_4 = 5 \to x_3 = 1 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

Dunque se $x_3 = x_4 = 1$, abbiamo

$$2x_1 - x_2 + 3 + 1 = -4 \implies x_1 = \frac{-8 + x_2}{2}$$

e fissando $x_2 = 1$, abbiamo $x_1 = -\frac{7}{2}$.
Abbiamo trovato una soluzione particolare

$$s = \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

OSS 3.2. Osserviamo che il *passo fondamentale* che ci ha permesso di trovare s è quello di *esplicitare* gli *elementi di pivot*. Infatti abbiamo ottenuto x_1, x_3 (che sono gli elementi di pivot) determinando un valore arbitrario t, u per x_2, x_4.

PROP 3.1. (*Compatibilità di un sistema a scala*)
Vedendo che vale il viceversa enunciamo il seguente.
Tesi. Sia $Ax = b$ un *sistema lineare arbitrario* ove $A \in M_{m,n}(K)$ e supponiamo che A sia una *matrice a scala* con r righe non-nulle.
Allora vale

$$Ax = b \text{ è compatibile} \iff b_{r+1} = \ldots = b_m = 0$$

DIMOSTRAZIONE 3.1.
Dimostriamo che entrambe le implicazioni ($\implies$ e $\impliedby$) sono veri.

- " $\implies$ " : Sia $s \in K^n$ una soluzione del tipo

$$s = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_m \end{pmatrix}$$

tale che $As = b$ viene soddisfatta. Sia per ipotesi A una *matrice a scala*; dunque

$$\forall i \in \{r, r+1, \ldots, m\} : A_{(i)} = 0$$

Le corrispondenti equazioni sono quindi

$$\begin{cases} 0x_1 + \ldots + 0x_n = b_{r+1} \\ \ldots \\ 0x_1 + \ldots + 0x_n = b_m \end{cases}$$

e ciò implica il seguente seguente:

$$\begin{cases} 0s_1 + \ldots + 0s_n = b_{r+1} \\ \ldots \\ 0s_1 + \ldots + 0s_n = b_m \end{cases} \implies \begin{cases} b_{r+1} = 0 \\ \ldots \\ b_m = 0 \end{cases}$$

Dimostrando così la prima parte della tesi.
- " $\impliedby$ " : Vogliamo trovare una *soluzione*. Quindi troviamo un modo per *costruirla*.
Allora per *costruire* una *soluzione* s dobbiamo procedere a ritroso, partendo *"dal basso"* (ovvero dalla m-esima riga), quindi dalle ultime equazioni.
Infatti per *ipotesi* tutte queste equazioni (dalla $r+1$-esima alla m-esima) sono del tipi $0 = 0$ in quanto abbiamo definito A come una matrice *a scala*; quindi qui non ci poniamo il problema. Infatti sappiamo che $\forall i \in \{r+1, \ldots, m\}$ vale che $b_i = 0$.
Ora *"partiamo"* da r, che è la *prima* equazione *non identicamente nulla*, della forma

$$a_{rj_r}x_{j_r} + a_rj_{rj_r+1}x_{j_r+1} + \ldots + a_{rn}x_n = b_r$$

che *"parte"* dall'elemento di *pivot* (ovvero il *primo* elemento non-zero della riga) j_r. Infatti teniamo a mente che $a_{rj_r} \neq 0$.
Posso dunque esplicitare x_{jr}:

$$x_{jr} = \frac{b_r - (a_{rj_r+1}x_{j_r+1} + \ldots + a_{rn}x_n)}{a_{rj_r}}$$

Possiamo *scegliere* tutti i valori a piacimento (ovviamente affinché queste appartengano al campo K) ai valori

$$x_{j_r+1}, \dots, x_n$$

e determinare il corrispondente valore di x_{jr}.
A questo punto scegliamo i valori

$$s_{r+1}, \dots, s_n \in K$$

a piacimento e definiamo

$$s_{jr} := \frac{b_r - (a_{rj_r+1} x_{j_r+1}, + \dots + a_{rn} x_n)}{a_{rj_r}}$$

Ora *"saliamo"* alla *penultima* equazione non nulla. Ovvero

$$a_{r-1 j_{r-1}} x_{j_{r-1}} + a_{r-1, j_{r-1}+1} x_{j_{r-1}+1} + \dots + a_{r-1,n} x_n = b_{r-1}$$

dato che abbiamo una matrice a scala sappiamo che $j_r > j_{r-1}$; ovvero che l'elemento j_{r-1} deve *"stare dietro"* a j_r.
Ora possiamo scegliere, a nostro piacimento, dei valori non oltre a quelli già scelti

$$s_{j_{r-1}+1}, s_{j_{r-1}+2}, \dots, s_{j_r - 1} \in K$$

e definire

$$s_{j_{r-1}} := \frac{b_{r-1} - (a_{r-1 j_{r-1}+1} s_{j_{r-1}+1} + \dots + a_{r-1 j_r - 1} s_{j_r - 1})}{a_{r-1 j_{r-1}}}$$

Poiché possiamo ripetere lo stesso esatto procedimento fino a s_1, possiamo dire che in questo modo abbiamo ottenuto tutti i valori s_i della soluzione s in modo che vengono soddisfatte *tutte* le equazioni.
■

ESEMPIO 3.2. Con il procedimento appena descritto risolviamo un *sistema lineare*.
Ho dunque

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{4,6}(\mathbb{R})$$

allora dal risultato precedente sappiamo che il sistema lineare

$$Ax = b$$

è *compatibile* se e solo se $b_4 = 0$.
Scegliamo dunque un tale b,

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e troviamo una soluzione di $Ax = b$. Le equazioni sono dunque:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 = 1 \\ -x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 - x_6 = 1 \\ x_4 + 2x_5 + x_6 = 1 \end{cases}$$

Partiamo dunque dall'ultima equazione:

$$x_4 = 1 - 2x_5 + x_6$$

e scegliendo $x_5 = 1, x_6 = 0$ abbiamo

$$x_4 = -1$$

Allora passiamo alla penultima equazione: abbiamo

$$x_2 = -1 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 - x_6$$

e sappiamo che x_4, x_5, x_6 sono stati già determinati; scegliamo dunque solo $x_3 = -1$. Allora si ha

$$x_2 = -1 + 3(-1) + 2(-1) + (1) - 0 = -5$$

Ora finalmente finiamo con la prima equazione:

$$x_1 = 1 + x_2 - x_3 - x_4 - 2x_5 - x_6 = \ldots = -4$$

Ricapitolando, abbiamo determinato la soluzione

$$s = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

del sistema $Ax = b$.

OSS 3.3. Osserviamo che sapendo risolvere con questo metodo possiamo risolvere *qualunque* sistema lineare con A a scala; fortunatamente in Algoritmo di Gauß andremo a dimostrare che qualsiasi matrice A può essere trasformata in scala tramite il processo della *"gradinizzazione"*: quindi per questo ci sarà sufficiente *solo* risolvere sistemi lineari con la matrice dei coefficienti a scala, per poter risolvere *tutti* i sistemi lineari arbitrari.

E. Algoritmo di Gauß

Algoritmo di Gauß

Definizioni preliminari per la descrizione dell'algoritmo di Gauß (Matrice completa e le operazioni elementari OE). Descrizione dell'algoritmo di Gauß per rendere un sistema lineare in un sistema lineare equivalente a scala come un programma.

---

1. Matrice completa di un sistema lineare

DEF 1.1. Consideriamo un sistema lineare di forma

$$A \cdot x = b$$

allora definiamo la *matrice* ottenuta aggiungendo alla matrice A la colonna data dai *termini noti* b come la **matrice completa** di questo sistema lineare. La denotiamo con

$$(A|b) := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & | & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & | & b_2 \\ \vdots & & & \vdots & | & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & | & b_m \end{pmatrix}$$

NOTA. Il segno sbarra $|$ per *"differenziare"* i termini noti dai coefficienti è opzionale ed ha uno scopo puramente grafico.

2. Operazioni elementari OE

Ora definiamo una serie di *operazioni elementari* (OE) che sono in grado di trasformare un *sistema lineare* di forma $(A|B)$ in un altro *equivalente* (Sistemi Lineari, **DEF 1.5.**).

OE1. *L'operazione scambia equazioni*
Dati due indici $i, j \in \{1, \dots, m\}$ scambiamo di posto l'equazione i-esima e j-esima.
Questo corrisponde a *scambiare* la riga i-esima con la riga j-esima della matrice $(A|B)$.

OE2. *L'operazione scala equazioni*
Dato l'indice $i \in \{1, \dots, m\}$ e uno *scalare* $\lambda \in K$, moltiplichiamo l'i-esima equazione per λ. Precisamente questo corrisponde a *moltiplicare* per λ l'i-esima riga della matrice completa $(A|B)$.

OE3. *L'operazione somma equazioni*
Dati due indici $i, j \in \{1, \dots, m\}$ e uno scalare non nullo $\lambda \in K, \lambda \neq 0$, sommiamo alla i-esima equazione alla i-esima equazione la j-esima equazione dopo averla moltiplicata per λ.
Ovvero questo corrisponde a sommare alla riga i-esima della matrice completa $(A|B)$ λ volte la j-esima riga.

OSS 2.1. Osserviamo che queste operazioni determinano dei sistemi lineari *equivalenti* in quanto queste operazioni sono *completamente invertibili*; infatti partendo da un sistema lineare *"trasformato"* mediante le **OE.**, possiamo tornare al sistema originario.

PROP 2.1. Se applico ad un sistema lineare qualsiasi una di queste operazione elementari, allora ottengo un sistema equivalente.
PROP 2.2. Dato un *qualsiasi sistema lineare arbitrario*, posso portarlo ad un *sistema a scala* con queste operazioni elementari **OE**. Infatti mostreremo un *algoritmo* (Nozioni Fondamentali di Programmazione) che è in grado di *"gradinizzare"* (ovvero portare a scala) una matrice completa $(A|B)$ qualsiasi.

3. L'algoritmo di Gauß

Premesse storiche

Riprendendo la **PROP 2.2.** della sezione precedente, abbiamo appena enunciato che siamo in grado di portare un sistema lineare non a scala in un sistema lineare *a scala*; dimostreremo questa proposizione descrivendo uno degli algoritmi più noti dell'*Algebra Lineare*, ovvero **l'algoritmo di Gauß**.

NOTIZIA STORICA. (*Trascrizione appunti + approfondimenti personali*)
Questo algoritmo è stato attribuito al noto matematico C. F. Gauß *(1777-1855)* in quanto fu proprio lui a formalizzare questo procedimento in latino; tuttavia ciò non significa che il matematico Gauß inventò questo algoritmo, in quanto ci sono evidenze storiche che prima esistevano già descrizioni su questo procedimento. Infatti, esiste un antico manoscritto cinese (*I Capitoli nove arte matematica*/*九章算術*, circa 179) che descrive un principio simile a quello che andremo a descrivere.
Per ulteriori approfondimenti consultare le seguenti pagine:
https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Matrices_and_determinants/
https://it.frwiki.wiki/wiki/Les_Neuf_Chapitres_sur_l%27art_math%C3%A9matique

---

Descrizione dell'algoritmo come programma

OBIETTIVO.
Come detto prima, il nostro *obiettivo* è quello di *"gradinizzare* un sistema lineare qualsiasi che non sia a scala.

INPUT.
Quindi il nostro input è un sistema lineare qualsiasi del tipo

$$Ax = b$$

che lo *"condenseremo"* nella *matrice completa* $(A|B)$.

OUTPUT.
Vogliamo ottenere la matrice completa $(\tilde{A}\,|\tilde{B}\,)$ tale che

$$\tilde{A} \text{ è a scala e } \tilde{A}x = \tilde{B} \overset{\text{equiv.}}{\cong} Ax = b$$

ALGORITMO.
Il nostro procedimento si articola in una serie di *"istruzioni"* da eseguire per un certo numero di volte.

---

1. Determino il valore $\bar{j}$ come *l'indice di colonna minimo* per cui abbiamo una colonna *non nulla* di A. Ovvero

$$\bar{j} := \min\{j : A^j \neq 0\}$$

2. Determino l'indice $\bar{i}$ tale per cui abbiamo l'elemento $a_{\bar{i},\bar{j}} \neq 0$ (*l'esistenza di un tale $\bar{i}$ deriva dalla scelta di $\bar{j}$*)
3. Scambio le righe 1 con la $\bar{i}$-esima; in questo modo sarà possibile supporre che $a_{1\bar{j}} \neq 0$ (*OE1*)
4. Voglio assicurarmi che *non* ho altre colonne *nulle* in $A^{(\bar{j})}$ (eccetto ovviamente $A_{(1)}$).
    1. Moltiplico la riga $A_{(1)}$ per $\frac{1}{a_{1\bar{j}}}$ (*OE2*)
    2. Sommo alle altre righe $A_i, \forall i \in \{2, \dots, m\}$ un *multiplo opportuno* di $A_{(1)}$. Ovvero $\lambda = -a_{ij}$. (*OE3*)

    $$A_{(i)} = A_{(i)} - a_{ij}A_{(1)}$$

5. Se la matrice ottenuta non è a scala, ripeto lo stesso procedimento a partire da *1.* sulla *sottomatrice* (ovvero una *"parte selezionata"* della matrice) con righe $\{2, \dots, m\}$ e colonne $\{\bar{j}+1, \dots, n\}$, del tipo

$$A' \in M_{m-1, n-\bar{j}-1}(K)$$

Queste operazioni corrispondono a:

$$0. \begin{pmatrix} 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \end{pmatrix}$$

$$1. \begin{pmatrix} 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \end{pmatrix}; \bar{j} = 3$$

$$2. \begin{pmatrix} 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \end{pmatrix}; \bar{i} = 1, 2, 3 \text{ (una di queste)}$$

$$3. \begin{pmatrix} 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \end{pmatrix} A_{(1)} \leftrightarrows A_{(1),(2),(3)} \text{ (una di queste)}$$

$$4.1. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \end{pmatrix}$$

$$4.2. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \end{pmatrix} A_{(i)} = A_{(i)} - a_{ij}A_{(1)} \text{ per } i = 2, 3$$

$$5. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & + & + \\ 0 & 0 & 0 & + & + \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} + & + \\ + & + \end{pmatrix} \text{ ripeto}$$

OSS 3.1. Affinché questo algoritmo sia *valido* e *ben posto*, devo assicurarmi che:

1. Questo deve *eventualmente* terminare in un certo tempo *finito*; questo accade in quanto *prima o poi* le colonne e le righe delle *sottomatrici* della 5. eventualmente si *"esauriranno"* e avremmo una matrice a scala.
2. Questo restituisce l'*output* corretto, come prescritto dalle specificazione. Anche questo si verifica in quanto ogni volta che raggiungo e svolgo il step 4., ho *"gradinizzato"* una scala.

Esempio di applicazione.

Come un *programmatore* fa dei *"unit tests"* su un programma o algoritmo, tentiamo di applicare questo principio appena descritto ad un sistema lineare.

ESEMPIO 3.1. Consideriamo il sistema lineare dato da

$$(A|B) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 8 & 6 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Ora ci applichiamo *l'algoritmo di Gauß*.

0. $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 8 & 6 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}; j = 0, i = 2$
1. $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}; A_{(1)} \leftrightarrows A_{(2)}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}; A_{(1)} = 0.5A_{(1)}$
3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & -7 & -6 & -2 \end{pmatrix}; A_{(2)} = A_{(2)} + 0A_{(1)}; A_{(3)} = A_{(3)} - 3A_{(1)}$
4. ripeto con $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ -5 & -7 & -6 & -2 \end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -3 \\ -5 & -7 & -6 & -2 \end{pmatrix}; A_{(1)} = -A_{(1)}$
6. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & -17 & -11 & -17 \end{pmatrix}; A_{(2)} = A_{(2)} - 5A_{(1)}$
7. la matrice in 6. è a scala; FINE

Dunque otteniamo la seguente matrice:

$$(\overline{A}\,|\bar{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -17 & -11 & -17 \end{pmatrix}$$

che è *a scala*.

ESERCIZIO PERSONALE. Questo esercizio prevede un collegamento con *l'informatica*, in particolare con la *programmazione*.
A) Scrivere uno *pseudocodice* che *"emula"* questo principio

B) Implementare tale *pseudocodice* in *C/Python*

C) Calcolare la *"complessità"* di questo codice