Calcolo Differenziale - Sommario

Tutto sul Calcolo Differenziale: dalla teoria alla prassi.

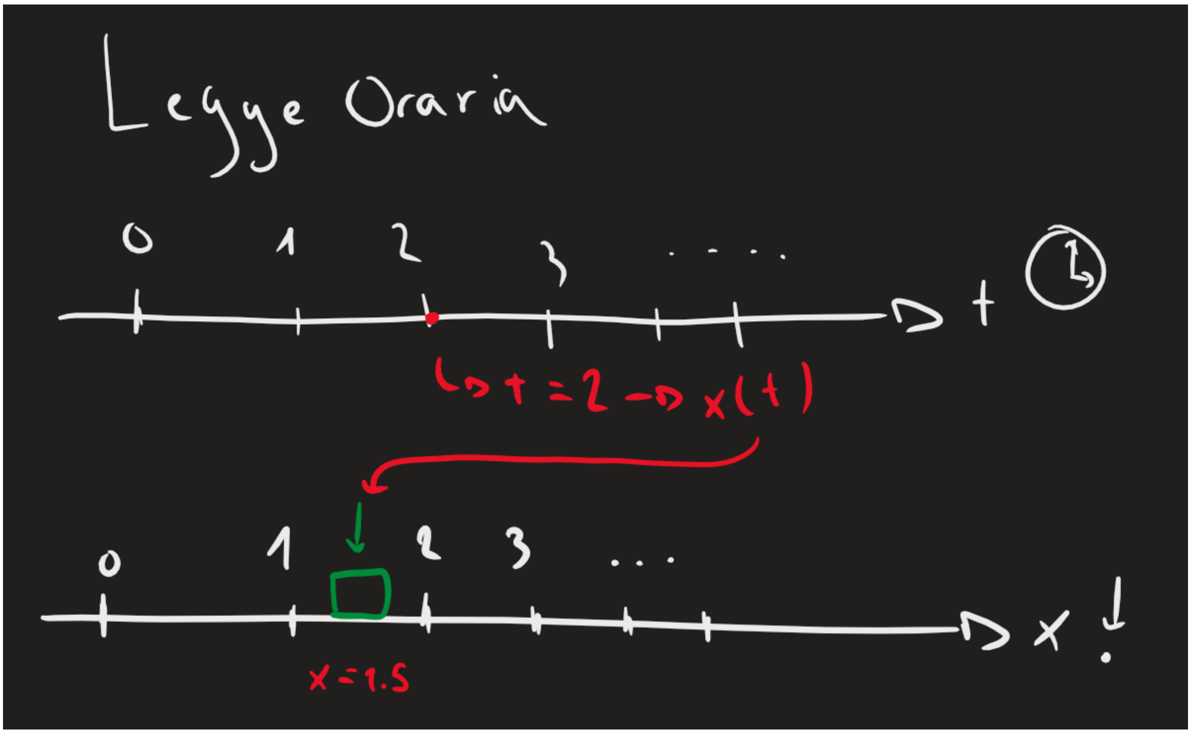
---

0. INTRODUZIONE AL CALCOLO DIFFERENZIALE

Introduzione al Calcolo Differenziale

> *Introduzione al calcolo differenziale: cenni storici ed esempio meccanico del rapporto incrementale e derivata*
>
> ---
>
> ## 1. Origine storico del concetto
>
> **OSS 1.1.** (*Contesto storico*) Ci troviamo nella seconda metà del XVII secolo, un periodo caratterizzato dagli straordinari contributi di due giganti della matematica: Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz. Questi due luminari sono diventati figure fondamentali nello sviluppo del *calcolo differenziale*, introducendo concetti rivoluzionari come la *derivata*, che poi diventerà materia d'esame per quanto ci concerne.
>
> Focalizziamoci ora sul genio di Isaac Newton: autodidatta straordinario, Newton, già a soli 21 anni, ha delineato la concettualizzazione della *velocità*. È interessante notare che le seguenti definizioni, sebbene non siano direttamente oggetto d'esame, possono essere considerate come un cenno alla *fisica newtoniana* (Introduzione Alla Fisica).
>
> ### Esempio meccanico del calcolo differenziale
>
> **Definizione 1.1. (legge oraria)**
>
> Sia $x \mapsto x(t)$ una funzione che associa al tempo t la *posizione* di un punto mobile su un asse x.
> Allora $x(t)$ si dice legge oraria.

FIGURA 1.1. (*Legge oraria*)



Definizione 1.2. (velocità media dati due istanti di tempo)

Si definisce la *velocità*, dati due istanti di tempo t_1 e t_2 la velocità media $v(t_1, t_2)$ nel seguente modo:

$$v(t_1, t_2) = \frac{x(t_1) - x(t_2)}{t_1 - t_2}$$

Sul numeratore abbiamo *l'incremento* dello spazio, sul denominatore *incremento* del tempo.

ATTENZIONE! Per *"incremento"* si intende semplicemente la differenza tra il punto finale e iniziale; quindi non dev'esserci necessariamente un *"incremento"*: può esserci nessuna variazione o anche un *"decremento"* (ovvero una specie di incremento negativo).

Ora voglio legare questo concetto di *velocità* ad una sola variabile di tempo t; allora definisco la *velocità* istantanea mediante il concetto di *limite* (Definizione di Limite di funzione > ^0f845a).

Definizione 1.3. (velocità istantanea)

Sia $x(t)$ una legge oraria.
Allora chiamo la velocità istantanea $v(t)$

$$v(t) = \lim_{t_1 \to t_2} v(t_1, t_2)$$

Ora abbiamo il *concetto* meccanico della derivata: nei successivi capitoli ci prescindiamo dai presupposti fisici e ci dirigiamo verso all'astrazione puramente matematica.

A. LE DEFINIZIONI DEL CALCOLO DIFFERENZIALE

A1. Rapporto incrementale

Rapporto Incrementale

Definizione di rapporto incrementale di una funzione in un punto.

---

1. Definizione di rapporto incrementale

#Definizione

Definizione 1.1. (rapporto incrementale di una funzione relativo un punto del dominio)

Sia $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, I un *intervallo* (Intervalli).
Sia x_0 un punto del dominio I.
Allora chiamo il *rapporto incrementale* $R^f_{x_0}(x)$ della funzione f relativamente al punto x_0 come

$$R^f_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

#Proposizione

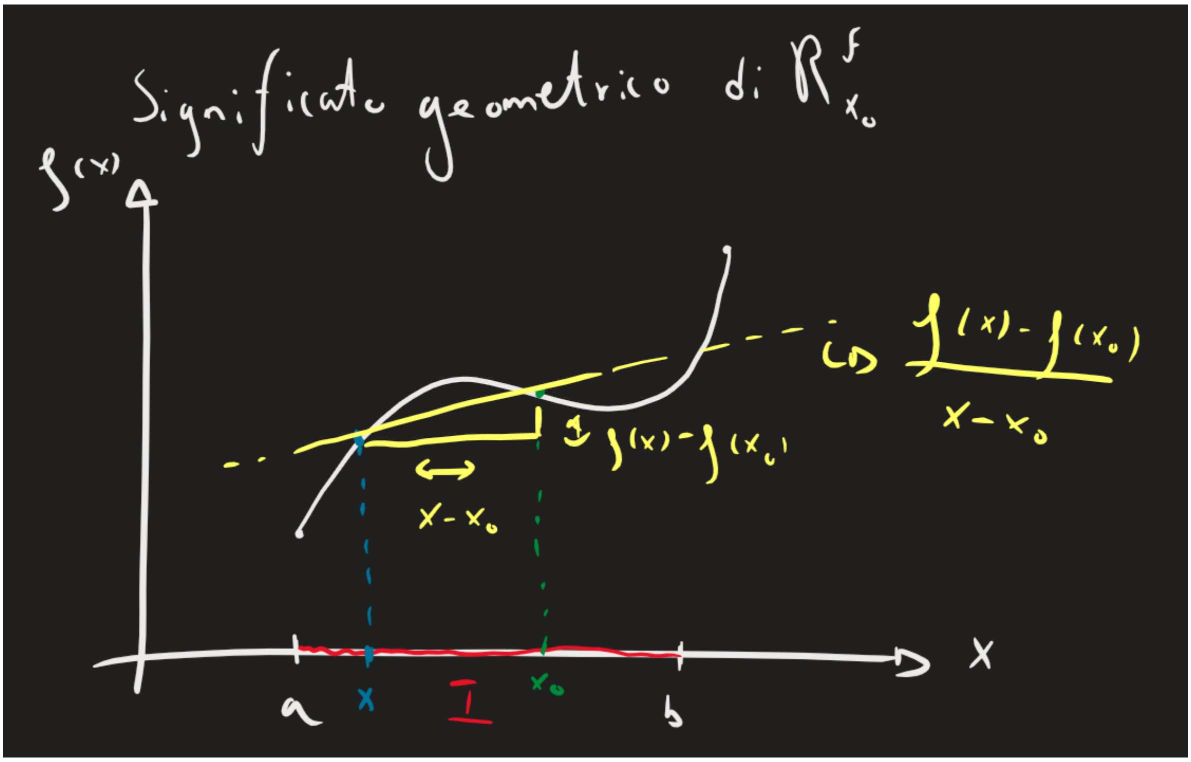
Proposizione 1.1. (rapporto incrementale come funzione)

Allora si può pensare al *rapporto incrementale* $R^f_{x_0}(x)$ come una funzione che lega ad un qualsiasi punto x in I, escluso x_0 in quanto si avrebbe la forma indeterminata $\frac{0}{0}$, un altro punto della retta reale.

$$R^f_{x_0} : I \setminus x_0 \longrightarrow \mathbb{R}$$

OSS 1.1. Osserviamo che questa definizione ha anche un *significato geometrico*: infatti $R^f_{x_0}$ è anche la *pendenza* (coefficiente angolare) della *retta secante* dei punti $(x_0, f(x_0))$ e $(x, f(x))$.

FIGURA 1.1. (*Significato geometrico*)



A2. Derivata

Derivata e derivabilità

Definizione di derivata, derivabilità in un punto, derivabilità generale, funzione derivata.*

---

1. Derivata

#Definizione

Definizione 1.1. (derivata di una funzione relativa ad un punto)

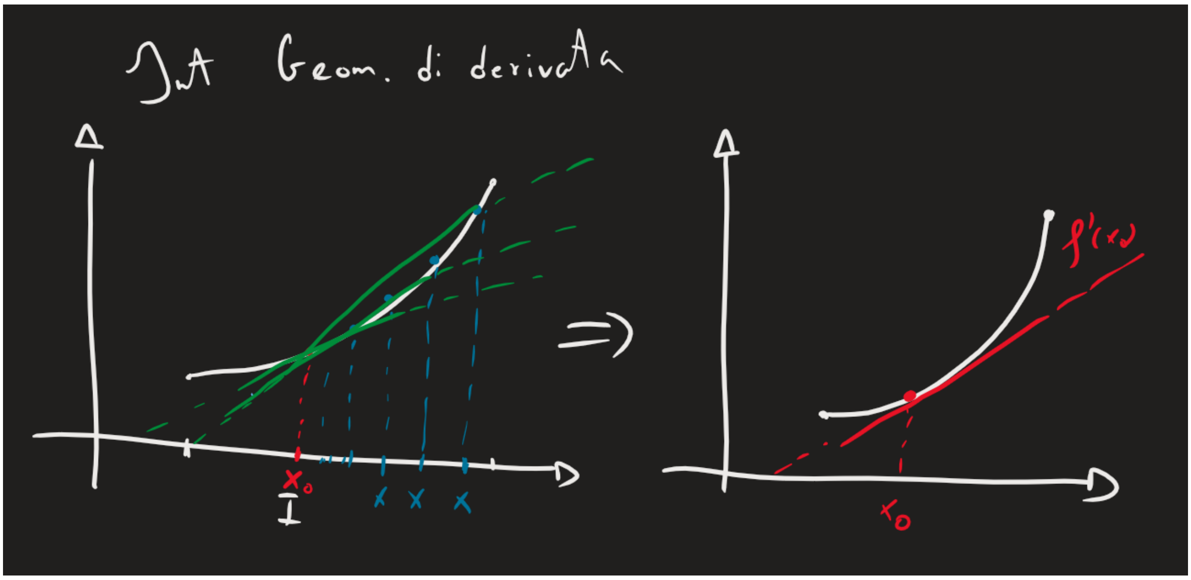
Sia $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$.
Sia $R^f_{x_0}(x)$ il *rapporto incrementale* (Rapporto Incrementale > ^ccc58b).
Allora definisco la *derivata* di f in x_0 il *limite* (Definizione di Limite di funzione > ^0f845a) del rapporto incrementale con x che tende a x_0.

$$f'(x) = \lim_{x \to x_0} R^f_{x_0}(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Naturalmente si definisce tale *se* tale limite esiste.

OSS 1.1. Come precedentemente osservato in Rapporto Incrementale > ^c7cbf0, la *derivata in un punto* ha la sua interpretazione geometrica. Ovvero questa è semplicemente la *pendenza* della *retta tangente* in un punto: infatti se prendendo due punti sulla funzione, di cui una *"mobile"* e l'altra *"fissa"*, poi facendo avvicinare il punto mobile a quello fisso, noteremo che la retta secante dei due punti si *"convergerà"* ad una retta sola (ovviamente supponendo che esista).

FIGURA 1.1. (*Interpretazione geometrica di derivata*)



2. Derivabilità

#Definizione

Definizione 2.1. (derivabilità in un punto)

Sia $f : I \longrightarrow \mathbb{R}, x_0 \in I$.
Se *esiste finito* la *derivata* (^478a87)

$$f'(x) = \lim_{x \to x_0} R^f_{x_0}(x) \in \mathbb{R}$$

Allora f si dice *derivabile nel punto* x_0.

#Definizione

Definizione 2.2. (derivabilità di una funzione)

Sia $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *derivabile* (^6e7606) in *ogni* punto del suo dominio I, allora f si dice *derivabile* (e basta).

OSS 2.1. Notiamo che queste due definizioni *"seguono"* lo schema delle definizioni di *continuità* (Definizione di continuità > ^ddf65d, Definizione di continuità > ^d2f56f)

3. Funzione derivata

#Definizione

Definizione 3.1. (funzione derivata)

Sia $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *derivabile*.
Chiamo la *funzione derivata* la funzione

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}; x \mapsto f'(x)$$

A3. Proprietà delle derivate (regole di derivazione)

Proprietà delle derivate

Proprietà fondamentali delle derivate: Continuità delle funzioni derivabili, derivata di operazione tra funzioni, derivata di funzione composta, derivata della funzione inversa.

---

1. Proprietà fondamentali

Continuità della funzione derivabile

#Teorema

Teorema 1.1. (continuità delle funzioni derivabili)

Sia $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, I intervallo, $x_0 \in I$.
Sia f *derivabile* in x_0 (Derivata e derivabilità > ^6e7606).
Allora f è *continua* in x_0 (Definizione di continuità > ^ddf65d).

$$\boxed{f \text{ derivabile} \implies f \text{ continua}}$$

#Dimostrazione
DIMOSTRAZIONE del *teorema 1.1.* (^dac6dc)
Intanto sappiamo che I è un intervallo, quindi *tutti* i suoi punti all'interno ne sono *punti di accumulazione*: pertanto possiamo prendere $\lim x \to x_0$ per un qualsiasi $x_0 \in I$.
Ora dimostriamo che f è *continua* usando il fatto che f è *derivabile*:

$$\begin{aligned}
f \text{ continua} &\iff \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \\
&\iff \lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = 0 \\
&\iff \lim_{x \to x_0} \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{= f'(x) \in \mathbb{R}} \underbrace{(x - x_0)}_{x - x_0 \to 0} \stackrel{?}{=} 0 \\
&\iff f'(x)0 \to 0 = 0 \blacksquare
\end{aligned}$$

#Proposizione

Proposizione 1.1. (la non derivabilità delle funzioni continue)

Vale il viceversa del *teorema 1.1.* (^dac6dc)? La risposta è *no*, in quanto esistono controesempi di funzioni *continue* ma non derivabili (dunque negando l'implicazione $p \implies q$)

#Dimostrazione
DIMOSTRAZIONE della *proposizione 1.1.* (^e5ee1a)
Per l'esempio di una funzione continua non derivabile rivolgersi a Esempi di derivate.

Derivata di operazioni tra funzioni

#Teorema

Teorema 1.2. (derivata di operazioni tra funzioni)

Siano $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ delle funzioni.
Sia $x_0 \in I$.
Allora $f \pm g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ sono *derivabili*.
In particolare valgono le seguenti:

$$
\begin{aligned}
&i.\ (f \pm g)' = f' \pm g' \\
&ii.\ (fg)' = f'g + fg' \text{ (regola di Leibniz)} \\
&iii.\ \frac{f}{g} = \frac{f'g - fg'}{g^2}
\end{aligned}
$$

#Dimostrazione
DIMOSTRAZIONE dei punti *i.*, *ii.*, *iii.* del *teorema 1.2.* (^fd716f)
i. Sia $R_{x_0}^{f+g}(x)$ il seguente:

$$
\begin{aligned}
R_{x_0}^{f+g}(x) &= \frac{f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\
&= R_{x_0}^{f}(x) + R_{x_0}^{g}(x) \\
&\implies f'(x) + g'(x)
\end{aligned}
$$

Questo vale analogamente per la sottrazione.
ii. Sia $R_{x_0}^{fg}(x)$ il seguente:

$$
\begin{aligned}
R_{x_0}^{fg}(x) &= \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \frac{f(x)g(x) - f(x)g(x_0) + f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \frac{f(x)(g(x) - g(x_0))}{x - x_0} + \frac{g(x_0)(f(x) - f(x_0))}{x - x_0} \\
&= f(x)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + g(x_0)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\
f \text{ continua} &\implies f(x_0)g'(x_0) + g(x_0)f'(x_0) \\
x \to x_0 &\implies f(x)g'(x) + g(x)f'(x)
\end{aligned}
$$

iii. Sia $R_{x_0}^{\frac{f}{g}}$ il seguente:

$$
\begin{aligned}
R_{x_0}^{\frac{f}{g}}(x) &= \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x - x_0} \\
&= \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)} \cdot \frac{1}{x - x_0} \\
&= \frac{f(x)g(x_0) - f(g)g(x) + f(x)g(x) - f(x_0)g(x)}{x - x_0} \cdot \frac{1}{g(x)g(x_0)} \\
&= (-f(x)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + g(x)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}) \cdot \ldots \\
&= (g(x)f'(x_0) - f(x)g'(x_0)) \cdot \frac{1}{g(x)g(x_0)} \\
f \text{ continua} \implies & \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \blacksquare
\end{aligned}
$$

(*svolto la dimostrazione del punto iii. da me stesso per esercizio*)

2. Derivate di funzioni particolari

Derivata della funzione composta

#Teorema

Teorema 2.1. (derivata di funzione composta)

Siano $f : I \longrightarrow J$, $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$; $x_0 \in I$, $f(x_0) = y_0 \in J$.
Sia f derivabile in x_0, g derivabile in $f(x_0)$.
Allora $g \circ f$ è *derivabile* in x_0 e vale che

$$
\boxed{(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)}
$$

#Dimostrazione
DIMOSTRAZIONE del *teorema 2.1.* (^250330)
Nota: la prima parte della dimostrazione sarà l'idea della dimostrazione per cui vogliamo "orientare" la dimostrazione; la seconda parte sarà la dimostrazione vera e propria, anche se leggermente artificiale e forzata.
L'idea della dimostrazione consiste nella seguente:

$$
\begin{aligned}
R_{x_0}^{g \circ f}(x) &= \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} \\
&= \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\
&= g'(f(x)) \cdot f'(x_0) \\
&\implies g'(f(x)) \cdot f'(x)
\end{aligned}
$$

Tuttavia c'è un problema: in uno dei passaggi moltiplico la frazione per $\frac{f(x)-f(x_0)}{f(x)-f(x_0)}$, che è equivalente a 1. Tuttavia se ci troviamo nel caso in cui $f(x) = f(x_0)$, avremmo un problema in quanto la frazione precedentemente definita non sarebbe più definita.
Allora per evitare questo problema creiamo, in una maniera artificiale, una funzione continua che ci permette di evitare questo problema.
Sia

$$H(y) = \begin{cases} \frac{g(y)-g(f(x_0))}{y-f(x_0)} \text{ se } y \neq f(x_0) \\ g'(f(x_0)) \text{ se } y = f(x_0) \end{cases}$$

Trovo che H è continua in $f(x_0)$, in quanto per ipotesi g è *derivabile* in $f(x_0)$.
Inoltre posso verificare che vale la seguente relazione:

$$R_{x_0}^{g\circ f}(x) = H(f(x)) \cdot R_{x_0}^{f}(x)$$

In particolare per $f(x) = f(x_0)$ abbiamo

$$\begin{gathered} R_{x_0}^{g\circ f}(x) = H(f(x_0)) \cdot R_{x_0}^{f}(x) \\ \iff \\ \frac{g(f(x_0)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = g'(f(x_0))\frac{f(x_0) - f(x_0)}{x - x_0} \\ 0 = 0 \end{gathered}$$

A questo punto prendendo i rispettivi limiti, ottengo

$$(g \circ f)' = \lim_{x\to x_0} H(f(x)) \cdot R_{x_0}^{f}(x) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) = g'(f(x)) \cdot f'(x) \blacksquare$$

Derivata della funzione inversa

#Teorema

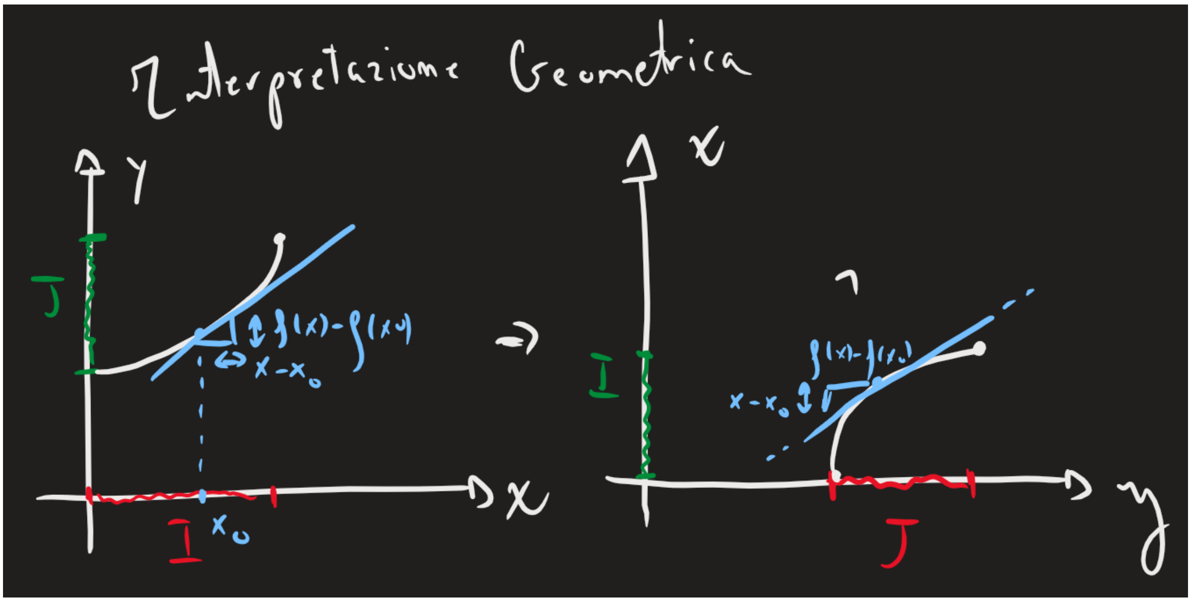
Teorema 2.2. (derivata della funzione inversa)

Sia $f : I \longrightarrow J$ una funzione *biiettiva* (Funzioni > ^d193b2), dunque *invertibile* (Funzioni > ^7b369f); sia f *derivabile* in x_0 con $f'(x) \neq 0$.
Allora $f^{-1}(x)$ è *derivabile* in x_0 e si ha

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

OSS 2.2. (*Interpretazione geometrica*) Anche questo teorema ha un suo significato geometrico: infatti se prendo la funzione originale, la inverto prendendo la sua simmetrica e scambiando le assi, allora prendendo lo stesso punto mi accorgo che la sua *tangente* esiste ed è proprio la *inversa* di quella originale.

FIGURA 2.2. (*Interpretazione geometrica della derivata della funzione inversa*)



DIMOSTRAZIONE del *teorema 2.2.* (^97198c)
Si tratta semplicemente (con dei trucchetti) di calcolare il rapporto incrementale $R^{f^{-1}}_{f(x_0)}(y)$.

$$
\begin{aligned}
R^{f^{-1}}_{f(x_0)}(y) &= \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(x_0))}{y - f(x_0)} \\
&= \frac{f^{-1}(y) - x_0}{y - f(x_0)} \\
&\implies \lim_{y \to f(x_0)} \frac{f^{-1}(y) - x_0}{y - f(x_0)} \\
\begin{cases} x = f^{-1}(y) \\ y = f(x) \\ x \to x_0 \end{cases} &\implies \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} \\
&= \frac{1}{R^f_{x_0}(x)} \blacksquare
\end{aligned}
$$

A4. Derivate successive

Derivata Successiva e Classe C

Definizione di derivata seconda, terza, ..., di ordine k; definizione di classe C.

1. Derivata di ordine k-esimo

#Definizione

Definizione 1.1. (derivata di ordine k-esimo)

Sia $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, I un *intervallo* (Intervalli).
Sia f *derivabile* (Derivata e derivabilità > ^12c1df).
Allora ha senso considerare la *funzione derivata*

$$f' : I \longrightarrow \mathbb{R}; x \mapsto f'(x)$$

Ma quindi si può chiedere se la *funzione derivata* è anch'essa *derivabile*; in tal caso chiamo la *derivata* della *funzione derivata* la *derivata seconda* e la indico con

$$f'' \text{ oppure } f^{(2)}$$

Per *induzione* (Assiomi di Peano, il principio di induzione > ^76b850) posso definire la derivata di ordine k*-esimo* come il seguente:

$$\begin{gathered} f^{(0)} = f \\ f^{(k+1)} = f^{(k)}, \forall k \in \mathbb{N} \end{gathered}$$

2. Classe C

#Definizione

Definizione 2.1. (classe C di una funzione reale)

Sia f *derivabile* e sia la sua *funzione derivata* f' anch'essa *derivabile* (Definizione di continuità > ^d2f56f), allora dico che f è di *classe* $\mathcal{C}^1$;

$$f \in \mathcal{C}^1$$

Generalizzando, se f è *derivabile* fino all'ordine $f^{(k)}$; ovvero

$$f', f'', \ldots, f^{(k)}$$

sono tutte derivabili, allora f si dice di *classe* $\mathcal{C}^k$.

$$f \in \mathcal{C}^k$$

Inoltre se f è *derivabile* per *qualunque* ordine, allora si dice che f è di classe $\mathcal{C}^\infty$;

$$f \in \mathcal{C}^\infty$$

3. Esempi

#Esempio

Esempio 3.1. (funzione esponenziale)

Consideriamo la classica funzione *esponenziale* e^x (Funzione esponenziale e Logaritmica); se consideriamo la sua *derivata* $(e^x)'$, notiamo che è la stessa.
Allora per *qualunque* ordine viene derivata, questa rimane la stessa; pertanto e^x è *sempre* derivabile.

$$e^x \in \mathcal{C}^\infty$$

#Esempio

Esempio 3.2. (funzione potenza)

Consideriamo la *funzione potenza* x^n (Funzioni di potenza, radice e valore assoluto); se consideriamo la sua derivata $(x^n)' = nx^{n-1}$, vediamo che fino ad un certo punto (precisamente all'ordine $n+1$-esimo) questa si annulla; però la funzione *costante* è sempre derivabile.
Allora anche $x^n \in \mathcal{C}^\infty$.

#Esempio

Esempio 3.3. (funzione seno)

Consideriamo adesso la *funzione seno* $\sin x$ (Funzioni trigonometriche); derivando $\sin x$ fino al quarto ordine vediamo che risulta la stessa funzione. Infatti

$$\begin{aligned}
&(\sin x)' = \cos x \\
\implies &(\cos x)' = -\sin x \\
\implies &(-\sin x)' = -\cos x \\
\implies &(-\cos x)' = \sin x \\
\implies &\ldots
\end{aligned}$$

Allora $\sin x \in \mathcal{C}^\infty$.

#Esempio

Esempio-Esercizio 3.4. (funzione valore assoluto per identità)

Consideriamo la funzione $f(x) = x \cdot |x|$.
Si può dimostrare che questa è derivabile fino al *primo ordine* $f'(x)$; però f' non è derivabile. La dimostrazione è stata lasciata al lettore per esercizio.
Allora $x \cdot |x| \in \mathcal{C}^1$.

B. LE CONSEGUENZE TEORICHE DEL CALCOLO DIFFERENZIALE

B1. Teorema di Fermat

Teorema di Fermat

Teorema di Fermat: cenno storico, enunciato e dimostrazione. Modello di applicazione (collegamento).

---

0. Cenni storici alla figura di Pierre Fermat

(Paragrafo scritto da me poi rielaborato da ChatGPT)
Pierre de Fermat (*1601-1665*) è stato un giudice francese di notevole fama. Oltre al suo ruolo di giurista nelle corti francesi, Fermat coltivava la matematica come passatempo, dimostrando però di essere molto più di un dilettante: infatti si guadagno l'appellativo *"il principe dei dilettanti"*.

Tra i suoi contributi più significativi, possiamo citare la sua corrispondenza con Blaise Pascal sul problema della suddivisione della posta, il celebre teorema di Fermat (che esporremo a breve) e l'enigmatico ultimo teorema di Fermat.

Particolarmente noto è l'ultimo teorema di Fermat, su cui il matematico francese sostenne di avere una dimostrazione. Tuttavia, non la pubblicò mai, affermando che la dimostrazione *"non stava dentro nel margine dentro nella pagina"*[(1)].

Ai giorni nostri, il teorema è stato finalmente dimostrato dal matematico Sir Andrew J. Wiles, il cui trattato estende per più di 100 pagine. Insomma, forse questa *meravigliosa dimostrazione* era un po' troppo lunghetta? Forse, comparandoci a Fermat, potremmo scrivere sul nostro esame che la nostra dimostrazione è troppo meravigliosa e lunga per poter essere contenuta, ai fini di giustificare la nostra omissione di eventuali dimostrazioni.

---

[1] *«È impossibile separare un cubo in due cubi, o una potenza quarta in due potenze quarte, o in generale, tutte le potenze maggiori di 2 come somma della stessa potenza. Dispongo di una meravigliosa dimostrazione di questo teorema, che non può essere contenuta nel margine troppo stretto della pagina»* ("Arithmetica", Diofanto di Alessandria (note di P. de Fermat))

---

1. Enunciato del teorema di Fermat

#Teorema

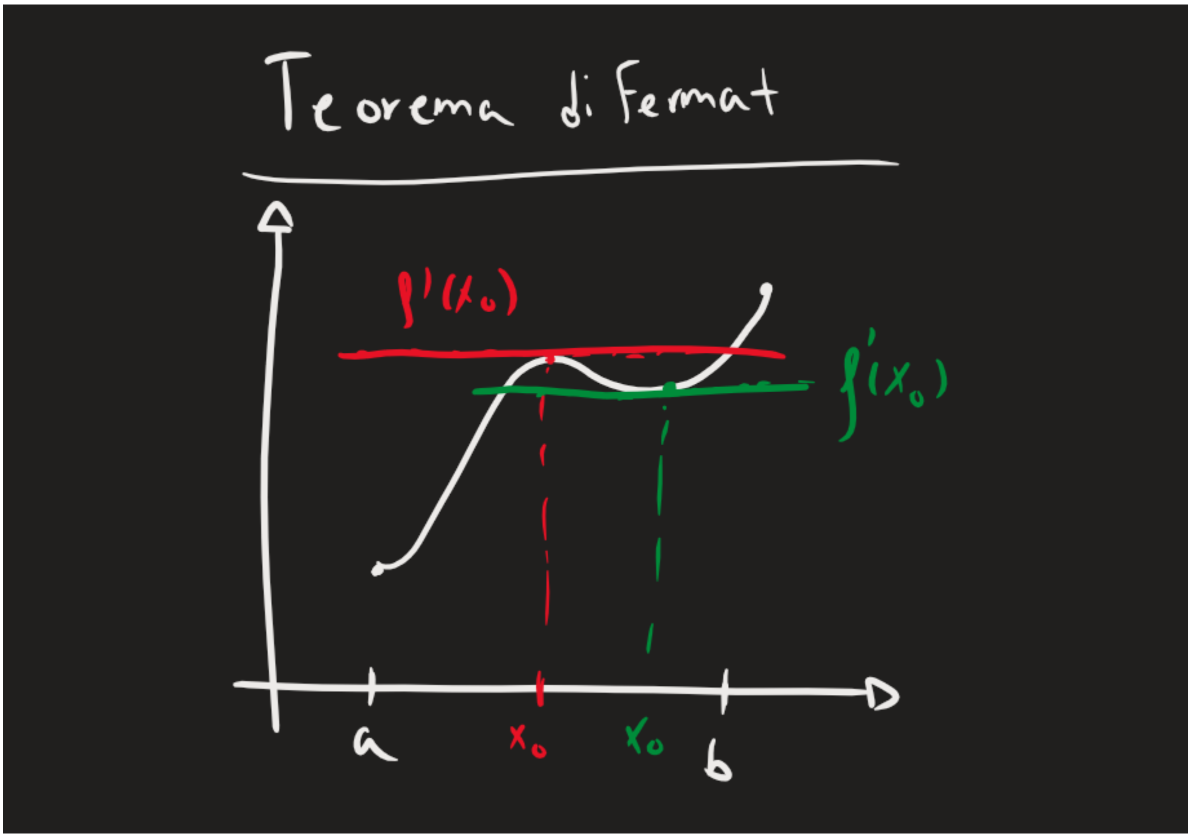
Teorema 1.1. (di Fermat)

Sia $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$.
Se valgono che:
i. x_0 è punto di *massimo* (minimo) *relativo* (Funzioni > ^f3e49c).
ii. x_0 è punto *interno* per il dominio I (Punti interni, esterni e di frontiera > ^c78831); quindi x_0 non si trova agli estremi.
iii. f è *derivabile* in x_0 (Derivata e derivabilità > ^6e7606).
Allora vale che

$$\boxed{f'(x_0) = 0}$$

ovvero x_0 è un *punto stazionario* (vedere la definizione sottostante)
A parole, questo teorema di dice che *"se f è derivabile in un punto di massimo o minimo interno al dominio, allora la sua derivata è nulla."*

FIGURA 1.1. (*Idea grafica*)



Punto stazionario

#Definizione

Definizione 1.1. (punto stazionario, cenno)

Se vale che $f'(x_0) = 0$, allora x_0 si dice *punto stazionario*

2. Dimostrazione del teorema di Fermat

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *teorema 1.1.* (^8ab68b)
Consideriamo un punto x_0 che sia *massimo relativo* per un certo intorno r, interno al dominio I e per cui f è derivabile.
Allora considero gli intervalli $I_- = [x_0 - r, x_0]$ e $I_+ = [x_0, x_0 + r]$.

- Nel primo intervallo abbiamo che $x_0 \geq x_0 - r \implies x_0 \geq x \in I_-$ e che $f(x_0) \geq f(x) \in I_-$.
  Allora considerando il rapporto incrementale $R^f_{x_0}(x)$, scopriamo che questa è sempre positiva in quanto $x - x_0 \leq 0$ e $f(x) - f(x_0) \leq 0$; allora per la *permanenza del segno* (usandone la contronominale) (Teoremi sui Limiti di Funzione > ^06a2e3)

$$\lim_{x \to x_0^-} R^f_{x_0}(x) \geq 0$$

- Nel secondo intervallo abbiamo che $x_0 + r \geq x_0 \implies x \in I_+, x \geq x_0$ ma comunque $f(x) \leq f(x_0)$ in quanto x_0 è di massimo.
  Allora riconsiderando il rapporto incrementale $R^f_{x_0}(x)$ vediamo che questa è negativa, in quanto abbiamo il prodotto tra un segno *negativo* e *positivo*. Allora

  $$\lim_{x \to x_0^+} R^f_{x_0}(x) \leq 0$$

  Ma sappiamo che, in quanto f è *derivabile* in x_0, deve esistere il limite

  $$\lim_{x \to x_0} R^f_{x_0}(x) \in \mathbb{R}$$

  Allora l'unico modo per far valere tutte le condizioni ottenute è quella di imporre

  $$f'(x_0) = 0 \blacksquare$$

3. Modello di applicazione

Questo teorema ci è utile in quanto ci permette di costruire un *modello* per risolvere un certo tipo di problemi: vedere dunque la *sezione 3* di Modelli di problemi su derivate.

B2. Teorema di Rolle

Teorema di Rolle

Teorema di Rolle: enunciato, dimostrazione e interpretazione grafica.

---

1. Enunciato del teorema di Rolle

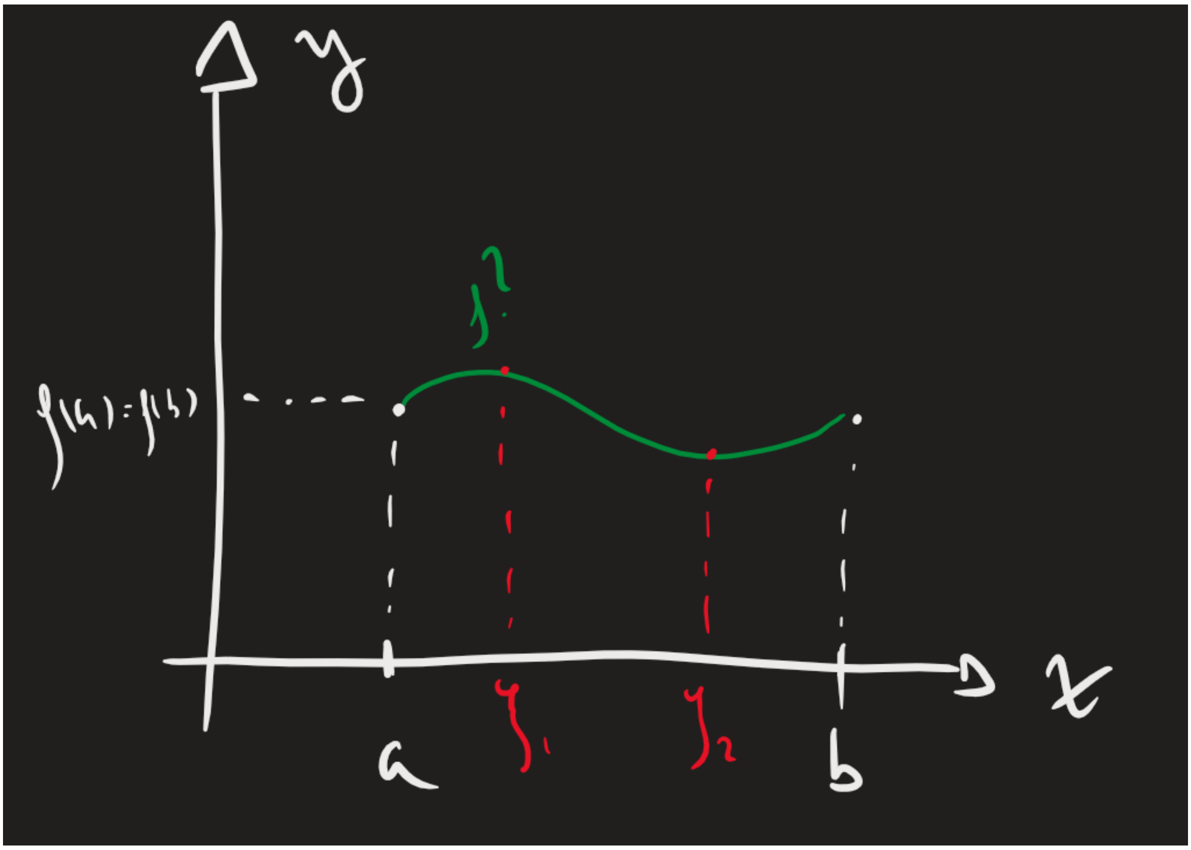
#Teorema

Teorema 1.1. (di Rolle)

Sia $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, sia f *continua* su $[a, b]$ e *derivabile* su $]a, b[$.
Sia inoltre $f(a) = f(b)$. Riassumendo ho la situazione in *figura 1.1.*.
Allora si verifica che

$$\boxed{\exists \xi \in \ ]a,b[\ : f'(\xi) = 0}$$

FIGURA 1.1. (*Situazione grafica delle supposizioni*)



2. Dimostrazione

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *teorema di Rolle* (^2d8bff)

Prima di dimostrare il teorema a tutti gli effetti, svolgo la seguente osservazione preliminare.

OSS 2.1. (*Osservazione preliminare*) Notiamo che f è *continua* per tutto il suo dominio, quindi per il *teorema di Weierstraß* (Teoremi sulle funzioni continue > ^918fc1) sappiamo che *esistono* almeno un *massimo* e *minimo* di f (Funzioni > ^e1ab12).

Ora distinguo due casi, dove *"posiziono"* questi punti di $\max$ e $\min$ precedentemente osservati:

1. Tutti i punti di *massimo* e *minimo* assoluto sono agli estremi, dunque gli stessi: allora in questo caso se il massimo assoluto è lo stesso del minimo assoluto di una funzione allora si tratta di una *funzione costante* del tipo $f(x) = c \in \mathbb{R}$.

Però calcolandone la derivata $(c)' = 0$ troviamo che la proposizione

$$f'(x) = 0$$

è *sempre* vera nel suo dominio.

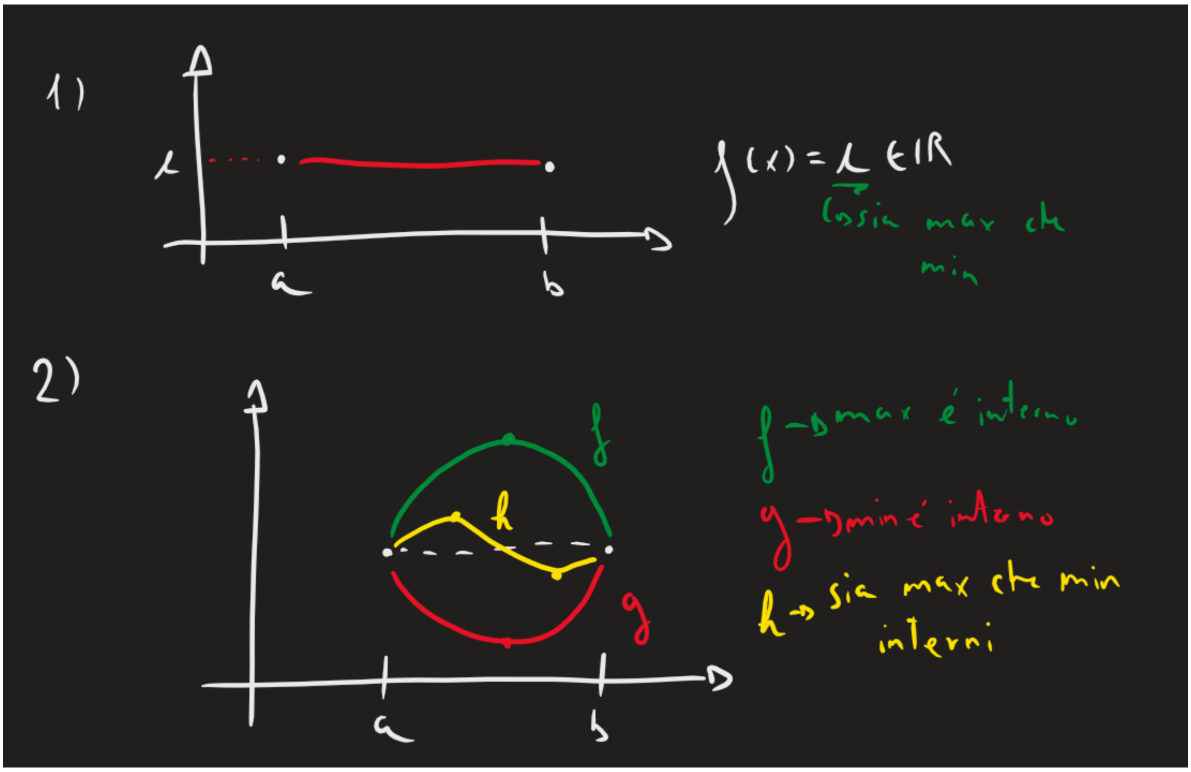
2. Almeno uno fra *massimo* e/o *minimo* assoluto della funzione è *punto interno* a $[a, b]$ (Punti interni, esterni e di frontiera > ^c78831). Dunque chiamo quel punto ξ.
   Però sapendo che f è *non-costante*, *derivabile*, *continua* e il punto scelto è *interno*, allora per il *teorema di Fermat* (Teorema di Fermat > ^8ab68b) trovo che

$$f'(\xi) = 0 \blacksquare$$

3. Interpretazione geometrica (dimostrazione grafica)

OSS 3.1. (*Interpretazione-dimostrazione grafica del teorema*) Si nota che è possibile dare una buona interpretazione grafica a questo teorema; anzi è addirittura possibile dare una dimostrazione *grafica* considerando i casi disegnati nella dimostrazione.

FIGURA 3.1. (*Disegno*)



B3. Teorema di Cauchy

Teorema di Cauchy: enunciato e dimostrazione. Osservazione grafica (da vedere dopo aver visto quella di Lagrange)

---

1. Enunciato del teorema di Cauchy

#Teorema

Teorema 1.1. (di Cauchy)

Siano $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continue* in $[a, b]$ (Definizione di continuità > ^ddf65d), *derivabili* in $]a, b[$ (Derivata e derivabilità > ^6e7606).
Sia inoltre $\forall x \in \;]a, b[\;, g'(x) \neq 0$. (*ipotesi supplementare*)
Allora vale che

$$\boxed{\exists \xi \in \;]a, b[\; : \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}}$$

2. Dimostrazione

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *teorema di Cauchy* (^0c9255)
Prima di tutto *"do un senso"* all'ipotesi supplementare: provo dunque $g(b) - g(a) \neq 0$.
Infatti supponendo che, per assurdo, se fosse tale allora per il *teorema di Rolle* (Teorema di Rolle > ^2d8bff) avrei un ξ per cui si annullerebbe $g'(\xi)$. Infatti si avrebbe la divisione per una quantità che è uguale a 0.
Pertanto è necessario che $g'(x) \neq 0 \implies g(b) \neq g(a)$.
Ora considero una funzione che chiameremo *"phi grande"* Φ:

$$\Phi(x) = f(x)(g(b) - g(a)) - g(x)(f(b) - f(a))$$

Quindi considerandola scopro le seguenti.

- Il dominio di Φ è lo stesso di f, g.
- Φ è *continua* in $[a, b]$ in quanto si tratta di una *sottrazione* tra funzioni continue (Teoremi sulle funzioni continue > ^41a8ec).
- Φ è *derivabile* in $]a, b[$ per motivo analogo di prima (Proprietà delle derivate > ^fd716f).
  Dato che Φ è continua, posso calcolare $\Phi(a)$ e $\Phi(b)$.

1. $\Phi(a)$ diventa

$$\begin{aligned}\Phi(a) &= f(a)(\dots) - g(a)(\dots) \\ &= f(a)g(b) - f(a)g(a) - f(b)g(a) + f(a)g(a) \\ &= f(a)g(b) - f(b)g(a)\end{aligned}$$

2. $\Phi(b)$ diventa invece

$$\begin{aligned}\Phi(b) &= f(b)(\dots) - g(b)(\dots) \\ &= f(b)g(b) - f(b)g(a) - f(b)g(b) + f(a)g(b) \\ &= f(a)g(b) - f(b)g(a)\end{aligned}$$

Ora scopro che

$$\Phi(b) = \Phi(a)$$

Quindi per il *teorema di Rolle* (Teorema di Rolle > ^2d8bff) ho

$$\exists \xi \in \ ]a, b[\ : \Phi(\xi) = 0$$

Ora considero la sua derivata Φ' e la *"calcoliamo"* in ξ. Svolgendo i conti ottengo

$$\begin{aligned}\Phi'(x) &= (f(x)(g(b) - g(a)))' - (g(x)(f(b) - f(a))' \\ &= f'(x)(g(b) - g(a)) - g'(x)(f(b) - f(a)) \\ \implies \Phi'(\xi) &= f'(\xi)(g(b) - g(a)) - g'(\xi)(f(b) - f(a)) = 0 \\ &= \boxed{\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}} \blacksquare\end{aligned}$$

OSS 2.1. Se nel *teorema di Cauchy* (^0c9255) supponessimo di *non* far valere l'ipotesi aggiuntiva $g'(x) \neq 0$, allora si potrebbe comunque dire che

$$\boxed{\exists \xi \in \ ]a, b[\ : f'(\xi)(g(b) - g(a)) = g'(\xi)(f(b) - f(a))}$$

3. Interpretazione grafica

Nota: qui si consiglia fortemente prima di leggere l'interpretazione grafica del teorema di Lagrange (Teorema di Lagrange) per poter capire bene questa osservazione.

OSS 3.1. (*Interpretazione grafica*) Con il *teorema di Lagrange* abbiamo visto che la sua interpretazione grafica consiste nell'intravedere che esiste un punto per il quale la sua tangente è parallela alla retta secante di a, b (Teorema di Lagrange > ^a12a1e).
Ora ci chiediamo come sarebbe possibile interpretare il *teorema di Cauchy* da un punto di vista grafico.

Immaginiamo innanzitutto che f, g siano delle *leggi orarie* (Introduzione al Calcolo Differenziale > ^56240d) che vivono in $[a, b]$.
Ora immaginiamo di *"appiattire"* la funzione f, *"distorcendo"* la funzione g: quindi disegniamo una specie di piano cartesiano in cui la retta delle ascisse viene rappresentata da $f(x)$, la retta della ordinate invece da $g(x)$.

Immaginandoci questo piano, posizioniamo il punto $A : (f(a), g(a))$ e l'altro punto $B : (f(b), g(b))$.
Possiamo disegnare una specie di *funzione* che parte da A e finisce in B: però in realtà non si tratta di una vera funzione in quanto non vi è nessun nesso tra f e g, quindi questa linea può comportarsi come vuole.

Ora immagino il vettore $\overrightarrow{AB}$ (Vettori Applicati > ^8447d6) come il *"vettore di spostamento"* e il *"vettore velocità"* rappresentato da

$$\overrightarrow{P} : (f'(\xi), g'(\xi))$$

ovvero prendendo un qualsiasi punto della *linea* disegnata prendo la sua tangente.
Allora per il *teorema di Cauchy* sappiamo che

$$f'(\xi)(g(b) - g(a)) = g'(\xi)(f(b) - f(a))$$

Allora considerando la matrice quadrata 2×2 $M_2(\mathbb{R})$ (Matrice > ^a95650)

$$A = \begin{pmatrix} f(b) - f(a) & g(b) - g(a) \\ f'(\xi) & g'(\xi) \end{pmatrix}$$

Ora prendendo il *determinante* (Determinante > ^2bb1d4) sappiamo che per *Cauchy* abbiamo

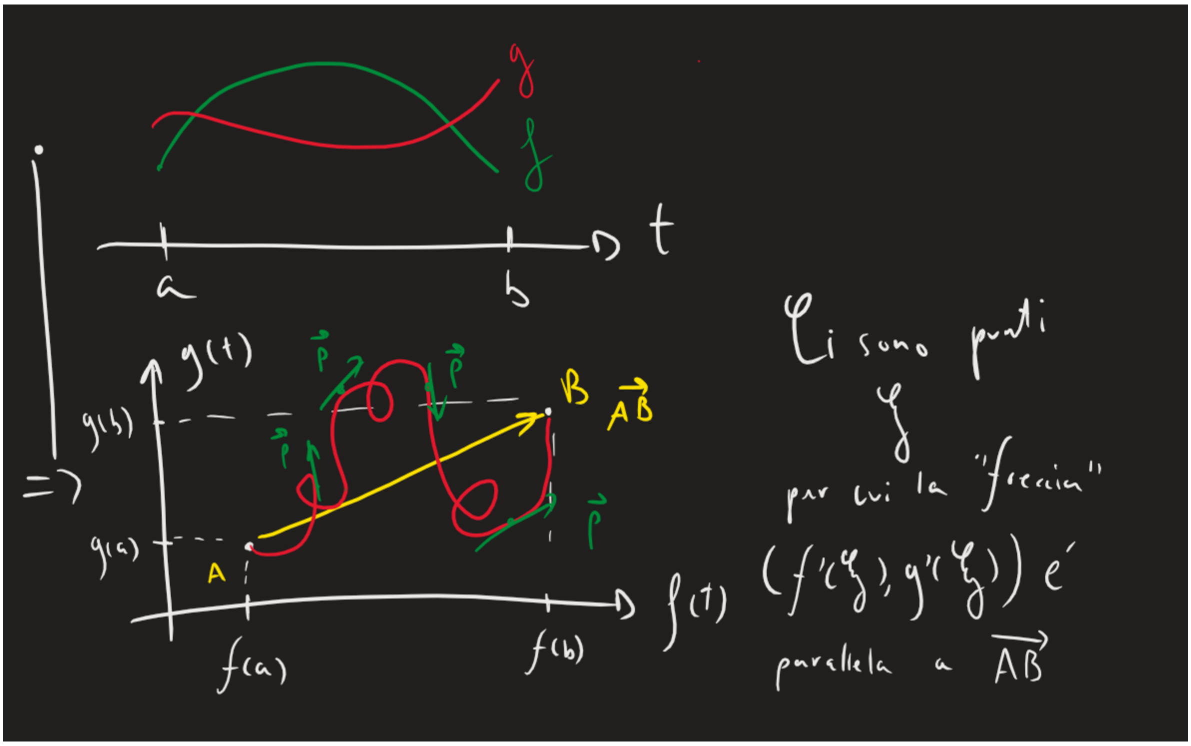
$$\det A = 0$$

Di conseguenza i vettori

$$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{P}$$

sono *paralleli*.

FIGURA 3.1. (*Idea dell'interpretazione geometrica*)



OSS 3.2. (*Cosa succede in uno spazio a tre dimensioni*) Vedere Conseguenze del teorema di Cauchy e di Lagrange in quanto la ritengo una pagina più appropriata per contenere tale informazione. Vedere l'*osservazione 1.2.*.

B4. Teorema di Lagrange

Teorema di Lagrange

Teorema di Lagrange: enunciato, dimostrazione e interpretazione grafica.

---

1. Enunciato del teorema di Lagrange

#Teorema

Teorema 1.1. (di Lagrange)

Sia $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, f *continua* in $[a,b]$ e *derivabile* in $]a,b[$ (Definizione di continuità > ^ddf65d, Derivata e derivabilità > ^6e7606).
Allora si verifica il seguente:

$$\exists \xi \in \;]a, b[\; : f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

2. Dimostrazione del teorema di Lagrange

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *teorema di Lagrange* (^ef03c2)
Per dimostrare il *teorema di Lagrange* basta considerare il *teorema di Cauchy* (Teorema di Cauchy > ^0c9255) per $g(x) = x$; possiamo verificare che $(x)'$ non sarà *mai* 0, in quanto la derivata della funzione identità è 1; infatti $1 \neq 0$.
Infatti per questo motivo si potrebbe considerare il *teorema di Lagrange* come un *corollario* del *teorema di Cauchy*. ■

3. Interpretazione grafica

OSS 3.1. (*Interpretazione grafica*) Osserviamo che l'espressione

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

è *equivalente* al *rapporto incrementale* $R_a^f(b)$ (Rapporto Incrementale > ^ccc58b).
Quindi il *teorema di Lagrange* ci sta semplicemente dicendo che se considerando la *retta secante* (che chiamiamo r_{ab}) tra il punto $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ allora dev'esserci *almeno* un punto per cui la sua tangente è *parallela* a r_{ab}.

FIGURA 3.1. (*Idea grafica*)

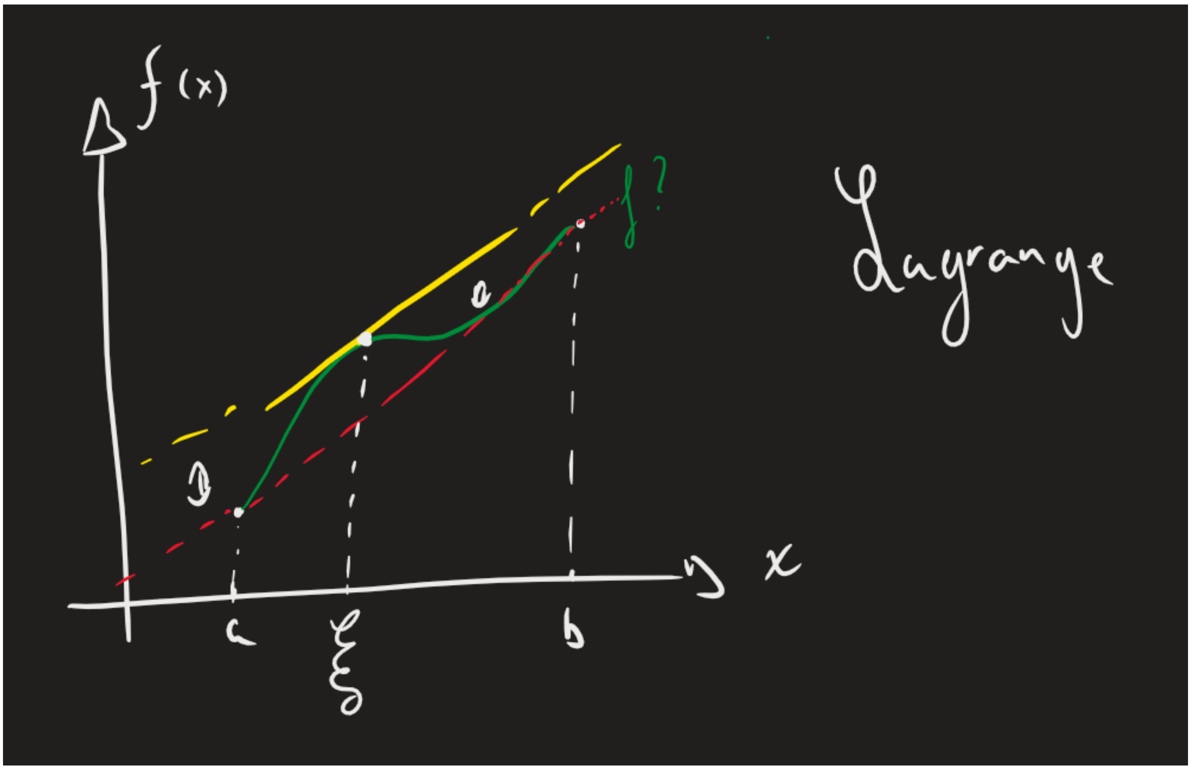
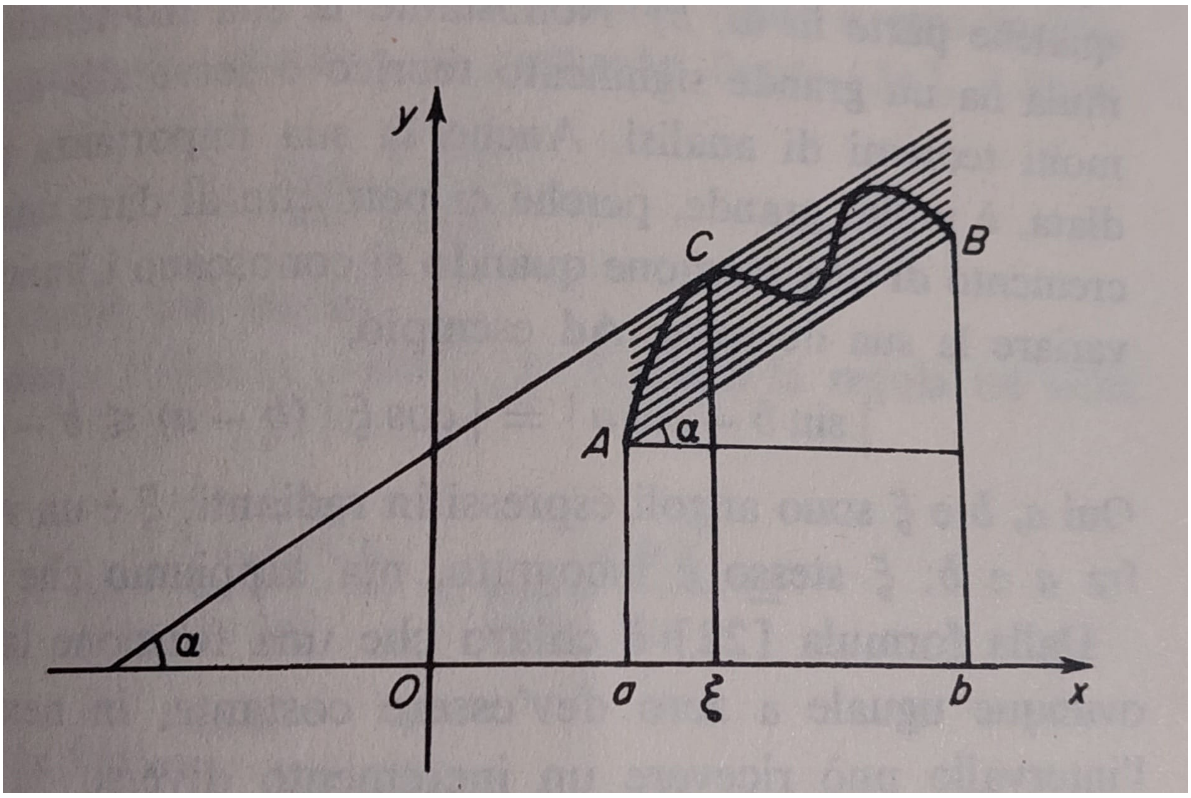


FIGURA 3.2. (*Idea grafica 2, tratto da "Le Matematiche" di A. D. Aleksandrov, A. N. Kolmogorov, M. A. Lavrent'ev*)



B5. Teorema di de L'Hôpital

Teorema di De l'Hôpital

Uno dei strumenti più potenti e versatili dell'analisi matematica: il teorema del marchese De l'Hôpital

---

0. Curiosità storiche

TRATTO DAL SITO
http://scienzaemusica.blogspot.com/2012/06/de-lhopital-e-il-quesito-dellesame-di.html

---

L'Hôpital nacque in una ricca famiglia.
Il padre, Anne-Alexandre, era un *"pezzo grosso"* dell'epoca; infatti, tra le altre cose, fu generale dell'esercito del Re.

Se, da piccolo, il piccolo Guillaume intraprese una *carriera militare*, in seguito dovette abbandonarla a causa di rilevanti *problemi alla vista*.

Ergo, il suo interesse si spostò verso la Matematica.
Nei primi anni '90 del XVII secolo, de l'Hôpital ingaggiò Johann Bernoulli affinché gli insegnasse il calcolo infinitesimale.

Il marchese si mostrò così interessato all'argomento che lo imparò in breve tempo e che riassunse in un manuale intitolato *"Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes"*, datato *1696*.
Il suddetto rappresenta il *primo manuale di calcolo infinitesimale d'Europa!*

Rouse Bell scrive a proposito del libro di de l'Hôpital:
"Il merito di aver redatto il primo trattato che spiega i principi e l'uso del metodo va tutto a de l'Hôpital...Questo lavoro ebbe ampia circolazione; rese la notazione differenziale di uso comune in Francia e contribuì a diffonderla in Europa."

Sappiamo che de l'Hôpital, dal 1694, pagò Bernoulli ben 300 franchi all'anno per raccontargli delle sue scoperte, descritte poi nel suo testo.
Nel 1704, a seguito del decesso di de l'Hôpital, Bernoulli raccontò dell'accordo, asserendo che molti dei risultati nell'*Analyse des infiniment petits* erano opera sua!

---

1. Enunciato del teorema

#Teorema

Teorema 1.1. (di De l'Hôpital)

Siano $f, g : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$.
Supponiamo che f, g siano *derivabili* (Derivata e derivabilità > ^12c1df).
Supponiamo inoltre che per ogni punto (a *escluso*) nel dominio la derivata g' *non* si annulla mai;

$$\forall x \in]a, b[, g'(x) \neq 0$$

Supponiamo infine che il *limite destro* di b per f, g sono nulli.

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = \lim_{x \to b^-} g(x) = 0$$

Se esiste il limite

$$\lim_{x\to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \tilde{\mathbb{R}}$$

Allora esiste il limite

$$\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

$$\boxed{\exists L \in \tilde{\mathbb{R}} : \lim_{x\to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \implies \lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L}$$

2. Dimostrazione del teorema

OSS 2.1. (*Osservazione preliminare*) Supponendo $g(b) = 0$ e $g'(x) \neq 0$ per $]a, b[$, potrà esserci mai un $x_0 \in]a, b$ tale che $g(x_0)$ si annulla? No, in quanto sennò avremmo $g(x_0) = g(b) = 0$ e per il *teorema di Rolle* (Teorema di Rolle > ^2d8bff) avremmo un ξ in $]a, b[$ tale che la derivata g' si annullerebbe; il che è *assurdo*, in quanto contraddice con le supposizioni iniziali.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *teorema di De l'Hôpital* (^67a7cd)
Prima di tutto per comodità *"prolungo"* le funzioni f, g in b ponendo $f(b) = g(b) = 0$; ciò è consentito e non sarebbe restrittivo in quanto le funzioni rimarrebbero comunque *continue* e *derivabili* in $]a, b[$.
Ora tenendo in conto l'osservazione preliminare (**OSS 2.1.**, ^ce8190), ha senso considerare la frazione

$$\frac{f(x)}{g(x)}, \forall x \in]a, b[$$

Allora *"facendo finta di conoscere"* il limite

$$\lim_{x\to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}$$

Che tradotto *"alla Cauchy"* (Definizione di Limite di funzione > ^0f845a) vorrebbe dire

$$\begin{gathered}\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in]a, b[\\ b - \delta < x < b \implies \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - L \right| < \varepsilon\end{gathered}$$

Ora considero un punto nell'intervallo $x \in]b - \delta, b[$ e applico il *teorema di Cauchy* (Teorema di Cauchy > ^0c9255) alle funzioni f, g in $[x, b]$.
Ovvero

$$\exists \xi \in]x, b[: \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(x)}{g(b) - f(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$$

e sappiamo che $x < \xi < b$.
Pertanto considerando che x non è altro che un punto tra $b - \delta$ e b, si potrebbe *"maggiorare"* ξ come $b - d < \xi < b$.
Allora questa uguaglianza vale per l'intorno considerato per x: mettendo tutto assieme e riconsiderando la definizione *"alla Cauchy"* del limite precedentemente scritto, abbiamo

$$\begin{gathered}\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in]a, b[\\ b - \delta < x < b \implies \left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| < \varepsilon\end{gathered}$$

che è proprio la *definizione* del limite

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L \blacksquare$$

OSS 2.2. (*Il teorema vale anche per il limite verso l'infinito*) Se al posto di b un numero *finito* pongo $b = +\infty$; allora il teorema varrebbe lo stesso. Basta ragionare con la definizione ε-N al posto di ε-δ.

OSS 2.3. (*Il teorema vale anche per il caso* $\frac{\infty}{\infty}$) Questo teorema vale anche se si verificano entrambi i limiti:

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = +\infty = \lim_{x \to b^-} g(x)$$

OSS 2.4. (*Il teorema vale anche per* $L = +\infty$) Questo teorema vale anche se il limite L vale $+\infty$.

3. Utilità pratica

Proposizione 3.1. (utilità pratica del teorema di De l'Hôpital)

Se in un limite ho un *caso indeterminato* del tipo

$$\frac{0}{0} \text{ oppure } \frac{\infty}{\infty}$$

e se ho

$$g'(x) \neq 0$$

Allora posso calcolare il limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

il quale risultato sarà lo stesso del limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

A parole, se ho un *caso indeterminato* e ho la funzione sul denominatore che non si annulla mai, allora posso derivare entrambe le frazioni per avere un limite *"equivalente"*.
ATTENZIONE! Questo non è un teorema del tipo *"se e solo se"*; l'implicazione qui è univoca, pertanto non deve *necessariamente* valere il viceversa.

B6. Formula di Taylor

Formula di Taylor

Formula di Taylor: osservazione preliminare, lemma di Peano, teorema di Taylor col resto di Peano e dimostrazione. Esempi.

---

0. L'idea della formula di Taylor

#Osservazione

Osservazione 0.a. (idea del concetto)

Se f è *derivabile* (Derivata e derivabilità > ^6e7606) in x_0, allora esiste la *tangente* al grafico nel punto x_0; infatti questa viene descritta come

$$r : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Se ora *"ingrandisco"* questo grafico della funzione vicino al punto $(x_0, f(x_0))$, si troverebbe che stiamo *"linearizzando"* la funzione f come la *tangente* r: una curva qualsiasi si *"trasforma"* in una linea, una retta lineare; l'idea viene raffigurata nella *figura 0.a.*
Ora ci chiediamo il seguente: se f fosse *derivabile* fino al grado n,

possiamo costruire un *polinomio* che *"trasforma"* f in un polinomio? La risposta è sì, con la *formula di Taylor*.

Si svolgono operazioni simili anche nel *campo della fisica*, ad esempio con lo *studio del movimento* del pendolo: per studiarlo bisognerebbe studiare l'equazione differenziale

$$\sin x = \ddot{x}$$

(dove $\ddot{x}$ indica la *seconda derivata* della legge oraria $x(t)$; notazione di Newton)
Però è difficile esprimere la soluzione di quest'equazione differenziale in *termini di funzioni elementari*: pertanto è necessario trovare una buona *"approssimazione"*, in particolare per *"angoli piccoli"* (ovvero vicini a 0). Trasformando $\sin$ nella retta tangente nel punto $x_0 = 0$, si avrebbe

$$\sin x \sim \cos x_0(x - x_0) + \sin x_0 = \cos(0)(x) + \sin(0) = x$$

Ovvero, ponendo

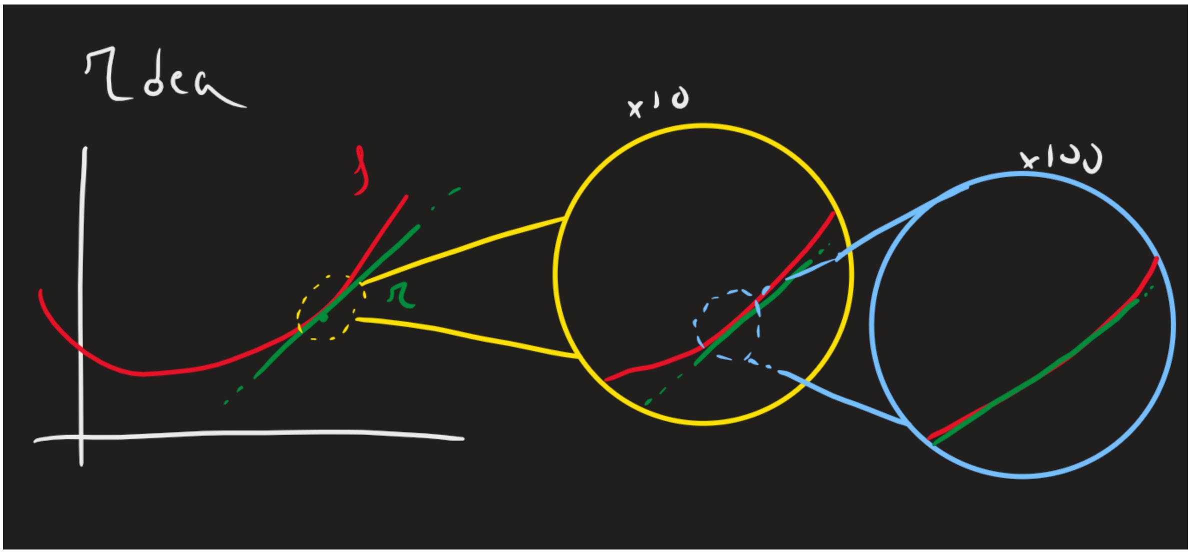
$$\sin x = x$$

Si avrebbe la nuova equazione differenziale

$$x = \ddot{x}$$

che è più *"semplice"* da risolvere.

FIGURA 0.a. (*La linearizzazione della funzione*)



1. Lemma di Peano e di Lagrange

Lemma di Peano

#Lemma

Lemma 1.1. (di Peano)

Sia $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$.
Sia inoltre f *derivabile* (Derivata e derivabilità > ^12c1df) fino all'ordine n nell'intervallo I.
Supponiamo che la *derivata di ogni ordine in* x_0 sia nullo;

$$f(x_0) = 0; f'(x_0) = 0, \dots, f^{(n)}(x_0) = 0$$

Allora si verifica il seguente limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

#Dimostrazione
DIMOSTRAZIONE del *lemma di Peano* (^0fe338)
Per verificare il *lemma di Peano* basta calcolare il *limite della tesi*, ovvero

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{(x - x_0)^n}$$

Allora, dato che sia $f(x)$ che $(x - x_0)^n$ sono *continue*, possiamo semplicemente procedere a sostituire con $x = x_0$. Però questo ci porta ad una *forma indeterminata* del tipo $\frac{0}{0}$.
A questo punto uso il *teorema di de L'Hôpital* (Teorema di De l'Hôpital > ^67a7cd):

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{(x - x_0)^n} \overset{H}{\Longleftarrow} \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{n(x - x_0)^{n-1}}$$

Quindi calcoliamo il *"nuovo limite"*; però abbiamo di nuovo una situazione $\frac{0}{0}$! Allora applico *de L'Hôpital* una seconda volta! Però anche questa è indeterminata; allora la applico $n - 1$ volte, ovvero fino a quando ottengo il limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{(x - x_0)^n} \overset{H}{\Longleftarrow} \dots \overset{H}{\Longleftarrow} \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x)}{n \cdot \ldots \cdot 2(x - x_0)^1}$$

Adesso considero quest'ultimo limite come

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x)}{n \cdot \ldots \cdot 2(x - x_0)^1} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{n!} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{n} \lim_{x \to x_0} R_{x_0}^{f^{(n-1)}}($$

Notiamo che il *limite* del rapporto incrementale è semplicemente la *derivata* della funzione (per definizione): allora, considerando che f è *derivabile* fino all' n-esimo ordine, infine abbiamo

$$\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0) = \boxed{0} \blacksquare$$

Lemma di Lagrange

#Lemma

Lemma 1.2. (di Lagrange)

Sia $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, *derivabile* fino all'ordine $n+1$ (ovvero $f \in \mathcal{C}^{n+1}$).
Sia $x_0 \in I$ e la sua immagine nulla per tutte le sue derivate; ovvero

$$f(x_0) = f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n)}(x_0) = 0$$

Allora, si verifica il seguente:

$$\forall x \in I\{x_0\}, \exists \xi \in (x_0, x) \text{ oppure } (x, x_0) : \\ \frac{f(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

#Dimostrazione
DIMOSTRAZIONE del *lemma di Lagrange* (^39ee3b)
Posso partire *"riscrivendo"* l'equazione

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^{n+1}-(x_0-x_0)^{n+1}}$$

Questa è lecita in quanto sto semplicemente aggiungendo 0 ad entrambi i termini: infatti per ipotesi $f(x_0) = 0$ e ovviamente $(x_0 - x_0) = 0$.
Allora considerando la funzione

$$g(x) = (x-x_0)^{n+1}$$

Osservandola noto che questa *non* si annulla mai fuori dall'intervallo (escludendo infatti x_0), ed è pure *derivabile* fino al grado $n+1$.
Ma allora posso usare il *teorema di Cauchy* (Teorema di Cauchy > ^0c9255) su questa espressione: allora ho

$$\exists \xi_1 \in (x, x_0) : \frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^{n+1}-(x_0-x_0)^{n+1}} = \frac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_1)} = \frac{f'(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n}$$

Ma allora posso ripetere questa procedura con quest'ultima espressione, ripetendo lo stesso *"trucchetto"*: allora alla seconda iterazione ho

$$\frac{f'(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n} = \frac{f''(\xi_2)}{(n+1)(n)(\xi_2-x_0)^{n-1}}, \xi_2 \in (x, \xi_1)$$

Ripetendo questa procedura e fermandomi fino al punto per cui ho applicato Cauchy n volte:

$$\frac{f^{(n)}(\xi_n)}{(n+1)!(\xi_n-x_0)}, x < \xi_n < \xi_{n-1} < \ldots < \xi_1 < x_0$$

Ma mi accorgo che ho un'espressione del tipo

$$\ldots \cdot \frac{f^{(n)}(\xi_n)}{\xi_n - x_0}$$

Quindi posso usare ora il *teorema di Lagrange* (Teorema di Lagrange > ^ef03c2), ottenendo così alla fine

$$\exists \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+1} : \frac{f(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{(n+1)!}$$

Che è la tesi del teorema. ■

2. Formula di Taylor col resto di Peano/Lagrange

#Definizione

Definizione 2.1.

Per *compattare* la nostra scrittura nei seguenti enunciati, chiamiamo il *polinomio di Taylor* come il *"polinomio principale"* che compariranno nelle tesi dei teoremi. Ovvero

$$T_n(f, x_0, x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Formula di Taylor col resto di Peano

#Teorema

Teorema 2.1. (di Taylor col resto di Peano)

Sia $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$, I *intervallo*, $x_0 \in I$.
Supponiamo g *derivabile* fino all'ordine n; ovvero $g \in \mathcal{C}^n$
Allora, per ogni punto dell'intervallo *escluso* il punto x_0, vale il seguente:

$$\forall x \in I \setminus \{x_0\}$$

$$\boxed{g(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0)^1 + \ldots + \frac{g^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + r(x_0, x)}$$

dove $r_n(x_0, x)$ è il *resto di Peano*; ovvero $r(x_0, x) = g(x) - (\ldots)$ e ha la speciale proprietà per cui

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r_n(x_0, x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

ovvero avvicinandosi al punto x_0 il *resto* crolla a 0.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *teorema di Taylor col resto di Peano* (^947c8a)
Voglio dimostrare che il *limite* della tesi effettivamente vale; ovvero

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r_n(x_0, x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

allora definisco f come il *resto*

$$f(x) = r_n(x_0, x) = g(x) - T_n(g, x_0, x)$$

ovvero

$$f(x) = r_n(x_0, x) = g(x) - (g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + \ldots + g^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n)$$

Inoltre sappiamo che f è *derivabile* fino all'ordine n, dato che si tratta di due *funzioni derivabili fino all'ordine* n. Infatti g lo è *per ipotesi* e un polinomio qualsiasi è *derivabile* per qualsiasi ordine.
Allora iniziamo a derivare f.

$$\begin{aligned} f'(x) &= g'(x) - 0 - g'(x_0) - 2\frac{g''(x_0)}{2!}(x - x_0) - \ldots - n\frac{g^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^{n-1} \\ f'(x_0) &= g'(x_0) - 0 - g'(x_0) - 0 - \ldots - 0 = 0 \end{aligned}$$

Ora prendiamo la sua *seconda derivata*:

$$\begin{aligned} f''(x) &= g''(x) - 0 - 0 - g''(x_0) - 0 - \ldots - (n)(n-1)\frac{g^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^{n-2} \\ f''(x_0) &= g''(x_0) - g''(x_0) - 0 - \ldots - 0 = 0 \end{aligned}$$

Mi accorgo che per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale che

$$f^{(n)}(x_0) = 0$$

(che è dimostrabile *per induzione* (Assiomi di Peano, il principio di induzione > ^76b850))
Allora per il *lemma di Peano* (^0fe338) vale che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^n} = \boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{r_n(x,x_0)}{(x-x_0)^n} = 0} \blacksquare$$

Formula di Taylor col resto di Lagrange

#Teorema

Teorema 2.2. (di Taylor col resto di Lagrange)

Sia $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, I intervallo e $x_0 \in I$.
Sia f *derivabile fino all'ordine* $n+1$.
Allora vale che

$$\forall x \in I\{x_0\}, \exists \xi \in]x_0, x[\text{ oppure }]x, x_0[\text{ t.c.}$$
$$\boxed{f(x) = T_n(f, x_0, x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}$$

Dove il secondo membro della soma si chiama *resto nella forma di Lagrange*.

#Dimostrazione
DIMOSTRAZIONE del *teorema 2.2.* (^9b9be7)
Vediamo che f è *derivabile* fino all'ordine $n+1$.
Allora, scrivendo g come la funzione

$$g(x) = f(x) - T_n(f, x_0, x)$$

questa è anche *derivabile* fino all'ordine $n+1$-esimo.
Allora prima di tutto *"calcoliamo"* $g(x_0)$;

$$g(x_0) = f(x_0) - f(x_0) = 0$$

Ora calcoliamo la *derivata* $g'(x)$;

$$g'(x) = f'(x) - [0 + f'(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} 2(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{x}(n)(x-x_0)$$

Allora calcolandola in x_0 si ha

$$g'(x_0) = f'(x_0) - 0 - f'(x_0) - \ldots \cdot 0 - \ldots - \ldots \cdot 0 = 0$$

Infatti per ogni *"termine"* che presenta il *"binomio"* $x - x_0$ vengono annullate.

Facendo il conto si nota che

$$g(x_0) = g'(x_0) = \ldots = g^{(n)}(x_0) = 0$$

Ma allora per il *lemma di Lagrange* (^39ee3b),

$$g(x) = \frac{g^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Però osserviamo che la *derivata* $n+1$-esima di g annulla la *"seconda componente"* (ovvero il polinomio di Taylor), in quanto la $n+1$-esima derivata di un polinomio di grado n è sempre nulla.
Pertanto questa è equivalente a

$$g(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Allora si ottiene alla fine

$$\begin{aligned} g(x) = f(x) - T_n(f, x_0, x) \implies f(x) &= T_n(f, x_0, x) + g(x) \\ &= T_n(f, x_0, x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \end{aligned}$$

che è la tesi. ■

3. Esempio dell'esponenziale

Consideriamo un esempio celebre della *formula di Taylor col resto di Peano* di una funzione.

#Esempio

Esempio 3.1. (funzione esponenziale in termini di Taylor)

Sia $\exp x = e^x$. Pongo $x_0 = 0$. Voglio trovare la *formula di Taylor* per $\exp$ e $x_0 = 0$.
Prima di tutto considero che

$$(e^x)^{(n)} = e^x, \forall n \in \mathbb{N}$$

Pertanto

$$(e^x)^{(n)}(x_0) = 1, \forall n$$

Allora per *Taylor*, si ha

$$e^x = 1 + 1(x-0) + \frac{1}{2!}(x-0)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}(x-0)^n + r_n$$

Ponendo il limite $x \to x_0$, si avrebbe

$$e^{x_0} = 1 + x_0 + \frac{1}{2}x_0^2 + \ldots + \frac{1}{n!}(x_0)^n + 0$$

#Osservazione

Osservazione 3.1. (dimostrare l'identità di Eulero)

Sia nota la *cosiddetta identità di Eulero*, oppure come è nota per certi matematici, *"la formula matematica più bella"*:

$$\boxed{e^{i\pi} = -1}$$

In realtà questa è una generalizzazione di

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

ovvero la *forma trigonometrica di un numero complesso* $\mathbb{C}$ con modulo $\rho = 1$ (Forma Trigonometrica dei Numeri Complessi > ^5bb422).
Se vogliamo considerarla da un *punto di vista puramente analitico*, ovvero senza effettuare delle *considerazioni geometriche* dei numeri complessi, possiamo comunque *"dimostrare"* questa forma mediante le formule di Taylor.
Infatti, considerando:

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \ldots + \frac{x^n}{n!} \\ \sin x &= 1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \\ \cos x &= x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots \end{aligned}$$

Ora *"calcolo"* e^{ix} mediante *Taylor*;

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - \frac{ix^7}{7!} + \ldots \\ &= (1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots) + i(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots) \\ &= \boxed{\cos x + i \sin x} \end{aligned}$$

4. Esempio di applicazione della formula di Taylor col resto di Lagrange

#Esempio

Esempio 4.1. (calcolare la costante di Eulero)

Supponiamo di voler calcolare il numero e con un errore *inferiore* a 10^{-3}.
Prima di tutto ricapitoliamo *ricordando* cos'è la costante di Eulero: per definizione questa costante è il limite fondamentale

$$\lim_n (1+\frac{1}{n})^n$$

Ricordando inoltre dei calcoli effettuati (Esempi di Limiti di Successione > ^bb767b), sappiamo che il numero e è *limitato*:

$$2 \leq e \leq 3$$

Ora scrivo la *formula di Taylor col resto di Lagrange* per e^x, con n generico (da determinare in seguito) e $x_0 = 0$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1}, 0 < \xi < 1$$

Adesso poniamo $x = 1$ e prendiamo la *"distanza"* tra e^1 e il polinomio di Taylor $T_n(f, 0, 1)$, e come visto prima questa dev'essere *minore o uguale* al resto di Lagrange.

$$|e - (1 + 1 + \ldots + \frac{1}{n!}| \leq \frac{e^\xi}{(n+1)!}$$

Ricordiamo che se ξ *"vive"* tra $0, 1$, allora e^ξ vive tra $1, e$; pertanto possiamo maggiorare e^ξ con 3, in quanto e è *limitata* da 3. Poniamo pertanto

$$|e - 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3!} - \ldots - \frac{1}{n!}| \leq \frac{3}{(n+1)!}$$

Ora *"proviamo"* ad inserire degli n a partire da $n = 4$, per vedere se innanzitutto il resto (ovvero l'*"errore"*) che ci viene fuori è effettivamente minore di 10^{-3}; in tal caso procediamo a calcolare la somma/sottrazione del polinomio.
L'idea è quello di *"stimare il resto"*.

$$n = 4 \implies r_4 = \frac{3}{120} > 10^3 \text{ NO}$$
$$n = 5 \implies r_5 = \frac{3}{720} = \frac{1}{240} > 10^{-3} \text{ NO}$$
$$n = 6 \implies r_6 = \frac{3}{5040} < 10^{-3} \text{ OK.}$$

Quindi il *"candidato perfetto"* è $n = 6$.
Procedendo ad inserire $n = 6$ nel *polinomio di Taylor* $T_6(e^x, 0, 1)$ abbiamo

$$2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} = 2.718$$

che è proprio il numero e fino alla 10^{-3}-esima cifra.

C. DALLA TEORIA ALLA PRASSI

C1. Esempi di derivate (derivate notevoli)

Esempi di derivate

Esempi di funzioni derivabili e il calcolo delle loro derivate: tutte (più o meno) le funzioni elementari. Esempi di funzioni non derivabili.

---

1. Derivate delle funzioni elementari

Funzione costante

#Esempio

Esempio 1.1. (funzione costante)

Sia $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ la *funzione costante*, ovvero del tipo

$$f(x) = c \in \mathbb{R}$$

Allora calcolando il *rapporto incrementale* (Rapporto Incrementale > ^ccc58b) $R^f_{x_0}(x)$, otteniamo

$$R^f_{x_0}(x) = \frac{c-c}{x-x_0} = \frac{0}{x-x_0} = 0$$

Pertanto

$$\boxed{(c)' = 0, \forall x \in I}$$

Funzione identità

#Esempio

Esempio 1.2. (funzione identità)

Sia $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ la *funzione identità*, ovvero del tipo

$$f(x) = x$$

Allora calcolando il suo *rapporto incrementale* si otterrebbe

$$R^f_{x_0}(x) = \frac{x-x_0}{x-x_0} = 1$$

Pertanto

$$\boxed{(x)' = 1, \forall x \in I}$$

Funzione potenza (in N)

#Esempio

Esempio 1.3. (funzione potenza naturale)

Sia $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ la *funzione potenza* (Funzioni di potenza, radice e valore assoluto > ^2b25ba), ovvero del tipo

$$x^n, n \in \mathbb{N}$$

Allora calcolando il *rapporto incrementale* si ottiene

$$R^f_{x_0}(x) = \frac{x^n - x_0^n}{x-x_0}$$

Ricordandoci che abbiamo una *differenza di potenze n-esime* e quindi vale la seguente relazione:

$$(A^n - B^n) = (A-B)(A^{n-1} + A^{n-2}B^1 + \ldots + A^1B^{n-2} + B^{n-1})$$

Allora si avrebbe

$$
\begin{aligned}
R_{x_0}^f(x) &= \frac{(x-x_0)(x^{n-1}+x^{n-2}x_0^1+\ldots+x^1x_0^{n-2}+x_0^{n-1})}{x-x_0} \\
&= x^{n-1}+x^{n-2}x_0+\ldots+x\cdot x_0^{n-2}+x_0^{n-1}
\end{aligned}
$$

Passando il limite per $x \to x_0$ si avrebbe il limite di un *polinomio*, quindi

$$
\lim_{x\to x_0} R_{x_0}^f(x) = x_0^{n-1}+\ldots+x_0^{n-1} = n(x^{n-1})
$$

Pertanto

$$
\boxed{(x^n)' = nx^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}, x \in I}
$$

ATTENZIONE! Con questa *"dimostrazione"* abbiamo dimostrato che questa vale *solo* in $\mathbb{N}$; per dimostrare che vale anche in $\mathbb{R}$, che verrà fatta successivamente, bisogna usare un altro trucchetto. Però per ora diamo questa buona anche per n reale.

Funzione esponenziale

#Esempio

Esempio 1.4. (funzione exp)

Sia $f:\mathbb{R} \longrightarrow (0,+\infty)$ la *funzione esponenziale* a base e (Funzione esponenziale e Logaritmica > ^8c9812), ovvero del tipo

$$
f(x) = e^x
$$

Allora calcolando il suo rapporto incrementale si avrebbe

$$
\begin{aligned}
R_{x_0}^f &= \frac{e^x-e^{x_0}}{x-x_0} \\
&= \frac{e^{x_0}(e^{x-x_0}-1)}{x-x_0}
\end{aligned}
$$

Ora, passando al limite per $x \to x_0$, si ha

$$
\lim_{x\to x_0} R_{x_0}^f(x) = e^{x_0} \lim_{x\to x_0} \frac{e^{x-x_0}-1}{x-x_0} = \lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y} = e^{x_0}\cdot 1 = e^{x_0}
$$

Pertanto

$$\boxed{(e^x)' = e^x}$$

#Osservazione

Osservazione 1.4. (la peculiarità di exp)

Da qui notiamo che se $f(x) = e^x$ allora vale che

$$f'(x) = f(x)$$

ed è l'*unica* funzione per cui vale questa.
Infatti *"l'esponenziale risolve l'equazione differenziale"*

$$f = f'$$

Funzione logaritmica

#Esempio

Esempio 1.5. (funzione log)

Sia $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ la *funzione logaritmica* a base e (Funzione esponenziale e Logaritmica > ^16fe54), ovvero del tipo

$$f(x) = \ln x$$

Allora prendendo il suo rapporto incrementale si ottiene

$$\begin{aligned} R^f_{x_0}(x) &= \frac{\ln x - \ln x_0}{x - x_0} \\ &= \frac{\ln(\frac{x}{x_0})}{x - x_0} \\ &= \frac{\ln(\frac{x - x_0 + x_0}{x_0})}{x - x_0} \\ &= \frac{\ln(1 + \frac{x - x_0}{x_0})}{x - x_0} \\ &= \frac{\ln(1 + \frac{x - x_0}{x_0})}{\frac{x - x_0}{x_0}} \cdot \frac{1}{x_0} \end{aligned}$$

Notiamo che, passando al limite $x \to x_0$ si ha uno dei *limiti fondamentali* (Esempi di Limiti di Funzione > ^35600e), ovvero

$$\lim_{y \to 0} \frac{\ln(1 + y)}{y} = 1$$

Allora si ha

$$\lim_{x \to x_0} R^f_{x_0}(x) = 1 \cdot \frac{1}{x_0} = \frac{1}{x_0}$$

Pertanto

$$\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}}$$

#Osservazione

Osservazione 1.5. (dimostrazione alternativa di exp'(x), approfondimento personale)

Approfondimento personale tratto da: Le Matematiche di A. D. Aleksandrov, A. N. Kolmogorov, M. A. Lavrent'ev (1974)

Notiamo che è possibile *"dimostrare"* la derivata $(e^x)' = e^x$, usando il *teorema sulla derivata della funzione inversa* (Proprietà delle derivate > ^97198c) e conoscendo la derivata del logaritmo naturale.
Infatti, supponiamo di avere la funzione $y = e^x$ e la sua inversa $x = \ln y$.
Ora, usando il teorema sulla derivata della funzione inversa, si ha

$$(a^x)'_x = \frac{1}{\log_a(y)'_y} = \frac{1}{\frac{1}{y}} = y = e^x$$

---

riferimento bibliografico: pagina 123

#Osservazione

Osservazione 1.5.b. (dimostrazione della derivata della funzione potenza in R)

Finalmente abbiamo abbastanza strumenti per poter calcolare la derivata di

$$x^\gamma, \gamma \in \mathbb{R}$$

Prima di tutto consideriamo questa *potenza* in termini di *esponenziali* e *logaritmi*;

$$x^\gamma = e^{\gamma \ln x}$$

Quindi le derivate di entrambe sono le stesse; deriviamo dunque la funzione del membro destro.

$$(e^{\gamma \ln x})' = \frac{\gamma}{x} e^{\gamma \ln x} = \gamma \frac{x^\gamma}{x} = \gamma x^{\gamma - 1}$$

Pertanto

$$(e^{\gamma \ln x})' = \boxed{(x^\gamma)' = \gamma x^{\gamma-1}}$$

Funzioni trigonometriche seno, coseno e tangente

#Esempio

Esempio 1.6. (funzione seno)

Sia $f(x) = \sin(x)$ la *funzione seno* (Funzioni trigonometriche > ^dd4b35) e vogliamo calcolare la sua *derivata*. Ricordandoci le *formule di prostaferesi* (Funzioni trigonometriche > ^5d221c), svolgiamo i calcoli.

$$\begin{aligned} R^f_{x_0}(x) &= \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} \\ &= \frac{2 \sin(\frac{x-x_0}{2}) \cos(\frac{x-x_0}{2})}{x - x_0} \\ &= \frac{\sin(\frac{x-x_0}{2})}{\frac{x-x_0}{2}} \cdot \cos(\frac{x + x_0}{2}) \end{aligned}$$

Passando al *limite* di $x \to x_0$, ricordiamoci dei *limiti notevoli* (in particolare quella di $\frac{\sin(f(x))}{f(x)}$, abbiamo

$$\lim_{x \to x_0} R^f_{x_0}(x) = 1 \cdot \cos x_0$$

Pertanto

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x}$$

#Esempio

Esempio 1.7. (funzione coseno)

Analogamente al ragionamento svolto sopra, avendo $f(x) = \cos x$ si avrebbe

$$\boxed{(\cos x)' = -\sin x}$$

#Esempio

Esempio 1.8. (funzione tangente)

Applicando la *proprietà sulla derivata di quozienti* si potrebbe derivare $\tan x$ (ove derivabile) e ottenere

$$\boxed{(\tan x)'} = \frac{(\cos x)^2 + (\sin x)^2}{(\cos x)^2} = \boxed{\frac{1}{(\cos x)^2} = 1 + (\tan x)^2}$$

Funzioni trigonometriche arcoseno, arcocoseno, arcotangente

#Esempio

Esempio 1.9. (funzione arcoseno)

Voglio calcolare la derivata di $\arcsin x$.
Allora, usando la *proprietà sulla derivata delle inverse* ho

$$(\arcsin)'(\sin x) = \frac{1}{\cos x}$$

Ora, sostituendo $y = \sin x \iff x = \arcsin y$, ho

$$(\arcsin')(y) = \frac{1}{\cos(\arcsin y)}$$

Ma considerando gli *intervalli di definizione* della funzione $\arcsin$, ovvero $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, notiamo che la funzione $\cos$ è *sempre positiva*. Pertanto, facendo valere la relazione fondamentale $\cos^2 + \sin^2 = 1$, ho

$$(\cos u)^2 + (\sin u)^2 = 1 \implies \cos = \sqrt{1 - (\sin u)^2}$$

Quindi sostituendo u con $\arcsin y$, alla fine ho

$$(\arcsin')(y) = \frac{1}{\cos(\arcsin y)} = \frac{1}{\sqrt{1 - (\sin(\arcsin(y)))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

Pertanto infine abbiamo

$$\boxed{(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

#Esempio

Esempio 1.10. (funzione arcocoseno)

Analogamente si dimostra che la derivata della funzione *arcocoseno* è

$$-(\arcsin x)' = \boxed{(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

#Esempio

Esempio 1.11. (funzione arcotangente)

Ora vogliamo calcolare la derivata di $\arctan x$ (funzione *arcotangente*).

$$(\arctan(x))'(\tan x) = \frac{1}{(\tan x)'} = \frac{1}{1+(\tan x)^2}$$

Pertanto

$$\boxed{(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}}$$

2. Funzioni non derivabili

Valore assoluto

#Esempio

Esempio 2.1. (funzione valore assoluto)

Vediamo un esempio basilare del fatto che *non è vera* l'implicazione

$$f \text{ continua} \implies f \text{ derivabile}$$

Infatti consideriamo $f(x) = |x|$.
Notiamo che questa funzione è *continua* in x_0; in particolare per 0, dato che $f(0) = 0$.
Tuttavia la storia è diversa per il *limite* del *rapporto incrementale*: considerando prima $R^f_{x_0}(x)$, abbiamo

$$R^f_{x_0}(x) = \frac{|x| - |x_0|}{x - x_0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 \text{ se } x > 0 \\ -1 \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

A occhio si vede immediatamente che il *limite* di questa funzione non esiste più per $x \to 0$; infatti prendendo il limite *destro* e *sinistro*, abbiamo

$$\begin{cases} \lim_{x \to x_0^-} R^f_{x_0}(x) = -1 \\ \lim_{x \to x_0^+} R^f_{x_0}(x) = 1 \end{cases} \implies \nexists \lim_{x \to x_0} R^f_{x_0}(x)$$

Pertanto $f'(0)$ *non è definita*.

#Osservazione

Osservazione 2.1. (però la funzione è derivabile altrove)

Però usando al *definizione locale* di derivabilità notiamo che $f(x)$ è comunque *derivabile* per $\mathbb{R} \diagdown \{0\}$.
Infatti $f'(x) = 1$ se $x > 0$, $f'(x) = -1$ se invece $x < 0$.

Funzione di Weierstraß

#Esempio

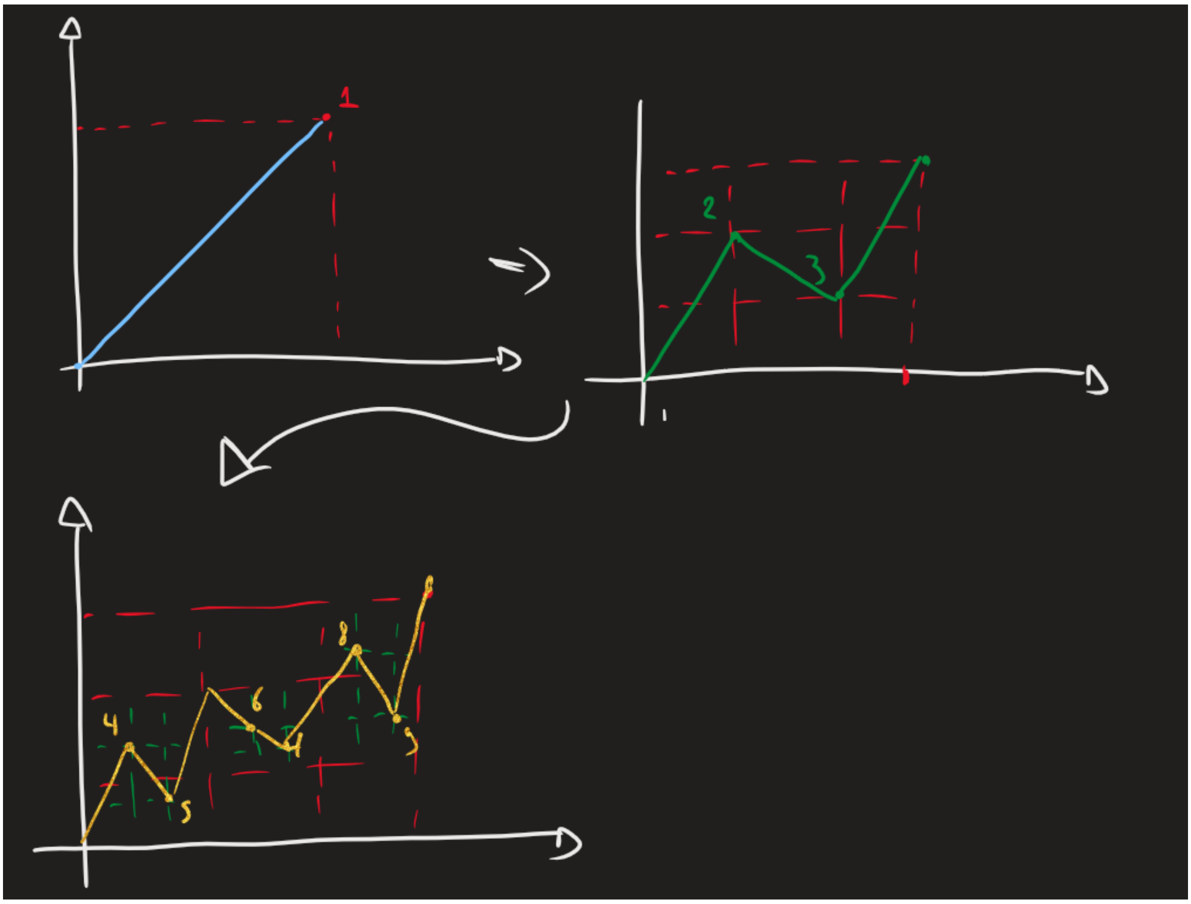
Esempio 2.2. (funzione di Weierstraß)

Abbiamo trovato una funzione continua ma *non derivabile* per un punto. Ma allora esistono comunque funzioni *continue* ma *non derivabili* dappertutto? Ovvero *derivabili* da nessuna parte.
Questo problema è stato risolto dal celebre matematico K. Weierstraß nel 1872 riuscendo a definire una funzione *continua* ma *derivabile da nessuna parte*.

L'idea di questa funzione consiste nella seguente: immaginiamo, sul piano cartesiano, di avere un'elastico immaginario fissato da *due punti*. Ora, suddividiamo l'area formata da due punti in *tre sotto-aree quadrate*.

Ora, prendendo il punto *sinistro alto* e *destro basso* del quadrato centrale, fissiamo altri *due punti* e ricreiamo l'elastico.
Poi ricorsivamente ripeto questa procedura per le sotto aree dove passa il nuovo elastico, dandoci così un elastico *"spigoloso dappertutto"* (quindi derivabile da nessuna parte).
L'idea grafica viene raffigurata nella *figura 2.2.*.

FIGURA 2.2. (*Funzione di Weierstraß*)



Frattali

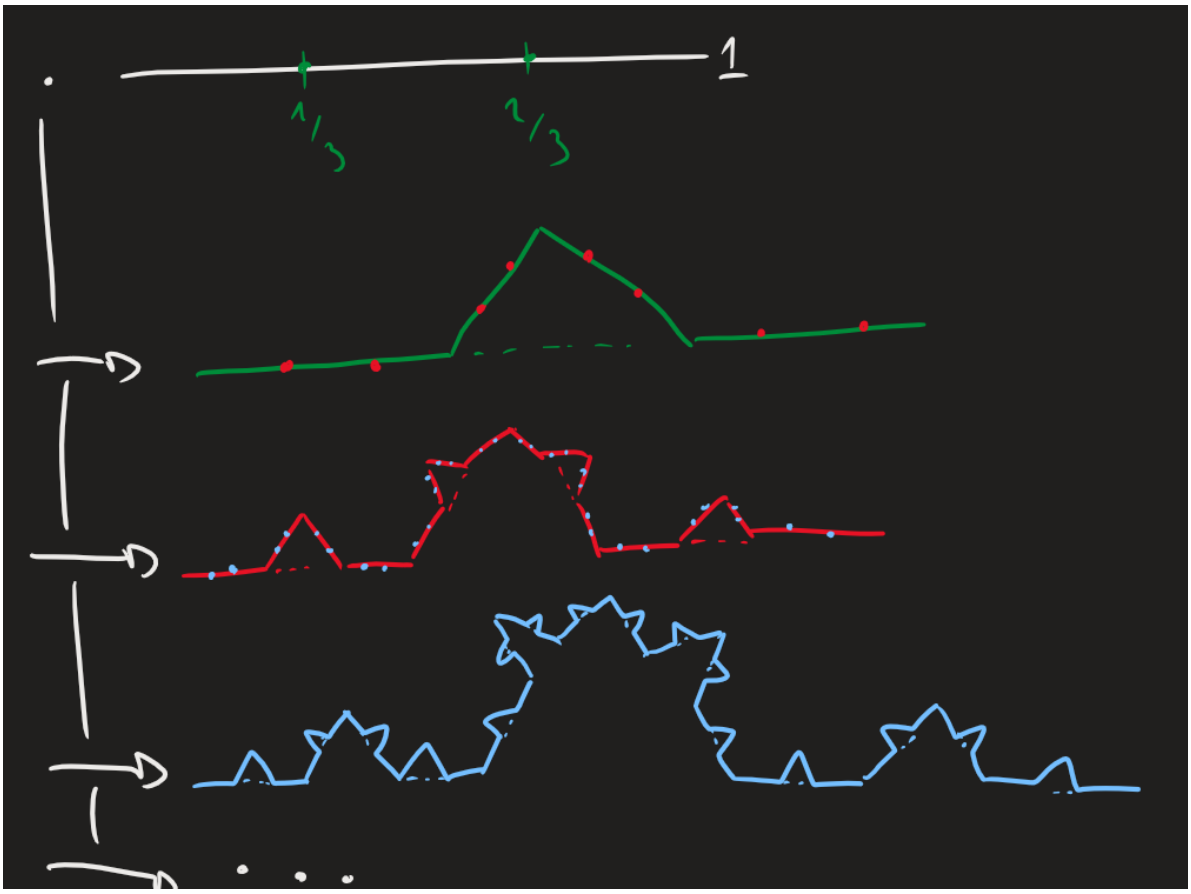
Osservazione 2.2. (frattale)

Notiamo che con la generazione della funzione di Weierstraß, come risultato otteniamo un *frattale*, che è una forma geometrica speciale: infatti il frattale acquisisce rilevanza particolare nell'arte contemporanea, come ad esempio con la "body art" di J. Pollock

La proprietà *"speciale"* dei frattali è quella dell'*"auto similarità"*, ovvero che *"zoomando"* all'interno di questi frattali vediamo certi schemi geometrici ripetere.

Come esempi di frattali abbiamo la *curva di Koch* (*figura 2.2.b.*) e l'*insieme di Mandelbrot* (Forma Trigonometrica dei Numeri Complessi > ^1a7f5c).

FIGURA 2.2.b. (*Curva di Koch*)



C2. Conseguenze dei teoremi di Lagrange e di Cauchy

Conseguenze del teorema di Cauchy e di Lagrange

Conseguenze che discendono dai teoremi di Cauchy e Lagrange: conseguenze pratiche e conseguenze di natura "matematica".

---

1. Considerazioni Pratiche e Quotidiane

Lagrange e il sistema "Tutor"

OSS 1.1. (*Il sistema Tutor*) Dal 2004 è stato introdotto il cosiddetto sistema *"Tutor"* sulle autostrade italiane, al fine di determinare se stiamo rispettando le limitazioni di velocità o meno.
Il sistema *Tutor* consiste nel seguente: lungo l'autostrada si fissano piazzano due telecamere, tra le quali c'è una distanza s. Allora queste fotocamere fotografano le nostre automobili e registrano i seguenti dati: la targa del veicolo e l'istante del tempo in cui siamo stati ripresi. L'idea di questo sistema viene raffigurato nella *figura 1.1.*

Quindi una volta passate entrambe le telecamere, le autorità hanno dei dati per determinare una misura importante: la nostra *velocità media* (Introduzione al Calcolo Differenziale > ^190e60).
Infatti loro hanno

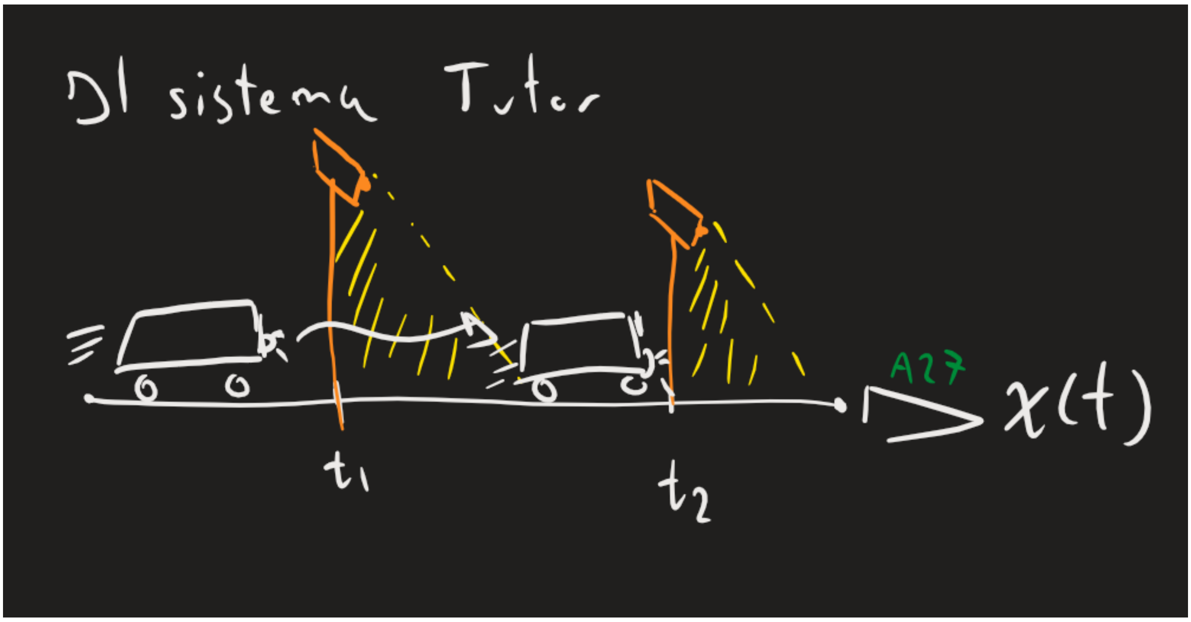
$$v_m = \frac{s}{t_2 - t_1} = R^x_{t_2}(t_1)$$

Ipotizziamo di aver infranto la legge e di aver superato ad un certo punto la velocità massima $130\,\mathrm{km/h}$, ricevendo così una multa. Tuttavia, notiamo qualcosa: una parte del testo afferma che secondo il *codice della strada* (CdS) la *velocità istantanea* non può essere superata di $130\,\mathrm{km/h}$: quindi c'è un errore! Loro hanno semplicemente misurato la nostra *velocità media*, non quella *istantanea*!
Allora presentiamo un ricorso al giudice per farci annullare la muta; inaspettatamente il giudice si rivela di essere un esperto di matematica e richiama il *teorema di Lagrange* (Teorema di Lagrange > ^ef03c2), affermando che se la nostra velocità media v_m ha ad un certo punto superato il limite, allora c'è almeno un istante di tempo t_ξ tale che la velocità istantanea misurata è maggiore del limite previsto.
Ovvero

$$v_m = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} > 130 \implies \exists t_\xi \in]t_2, t_1[: x'(t_\xi) = v(t_\xi) > 130$$

Quindi, alla fine niente ricorso per noi.

FIGURA 1.1. (*Idea grafica del sistema Tutor*)



Cauchy nel nostro spazio tridimensionale

OSS 1.2. (*Interpretazione geometrica di Cauchy in R^3*)
Dall'interpretazione geometrica di Cauchy in $\mathbb{R}^2$ (Teorema di Cauchy >

^30644e) vediamo due *punti* nello spazio, la retta secante di questi due punti e per *Cauchy* vediamo che almeno c'è almeno un punto per cui il suo *"vettore velocità"* è parallela a questa retta secante.
Ora ci chiediamo il seguente: *"come funzionerebbe in* $\mathbb{R}^3$*?"*
Allora in questo caso immaginiamo una situazione simile, solo che ci immaginiamo una mosca che gironzola da un punto iniziale a fino ad un punto finale b, e la retta secante tra a e b sarebbe la *"pendenza"*. La situazione verrà raffigurata nella *FIGURA 1.2.*.
Varrebbe comunque il *teorema di Cauchy* qua? La risposta è *no*.
Infatti se ragioniamo sulle *strade*, vediamo che spesso le strade di montagne tendono ad avere molte curve e tornanti; queste servono infatti a *"diminuire"* la pendenza dal punto di partenza fino alla montagna! Infatti, se *Cauchy* valesse anche qui, saremmo tutti costretti ad un certo punto di salire il passo con la stessa *"pendenza"* della *"retta"* che collegherebbe il punto di partenza fino alla destinazione.
Un caso più eclatante è quello delle *scale a chiocciola*; infatti queste rendono possibile per noi di salire verticalmente da un punto all'altro senza dover affrontare pendenze incamminabili.
I gradini di queste scale servono ad *"appiattire"* la pendenza; l'idea di questo concetto viene raffigurato in *figura 1.3.*.

FIGURA 1.2. (*Idea della situazione*)

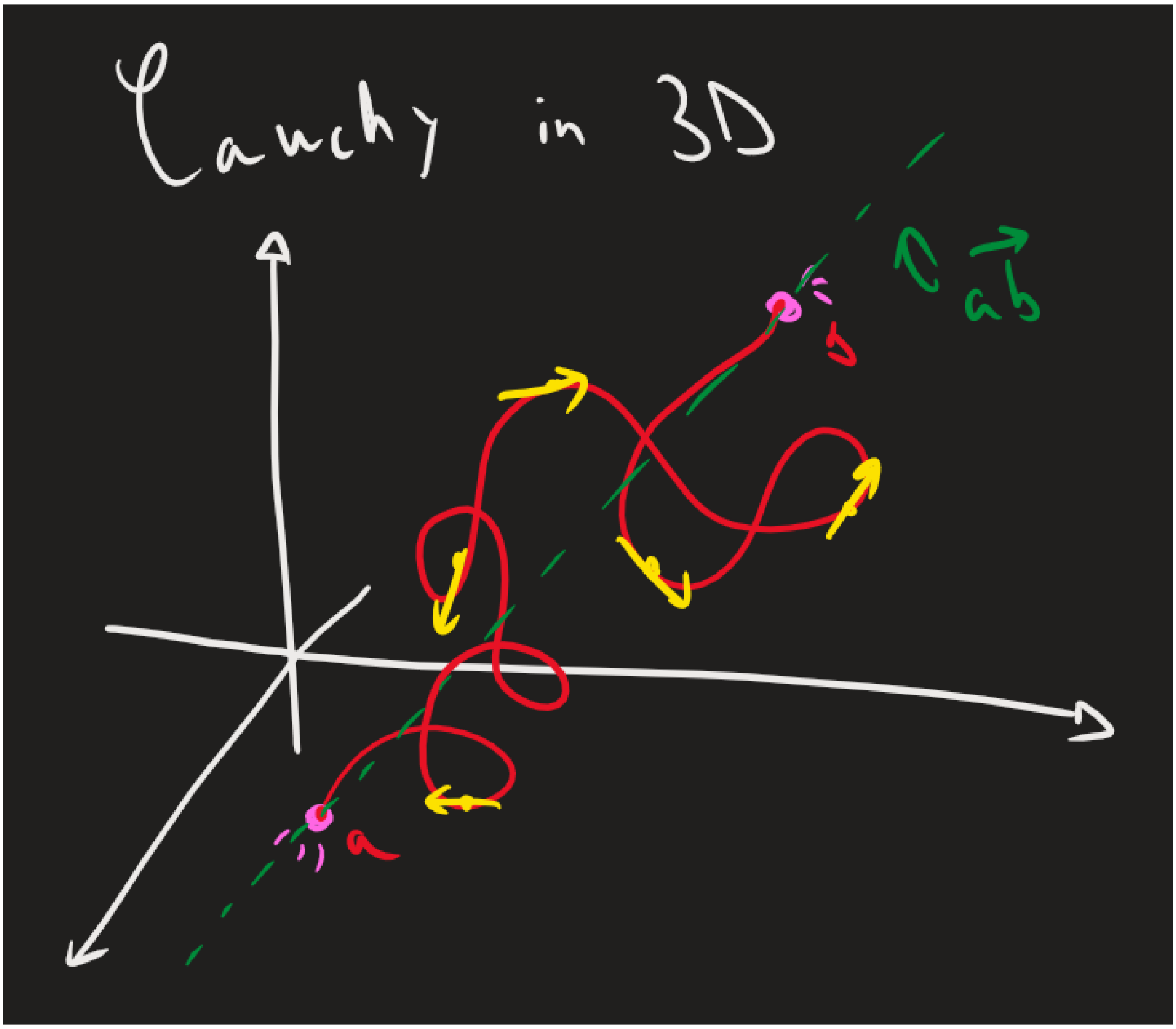
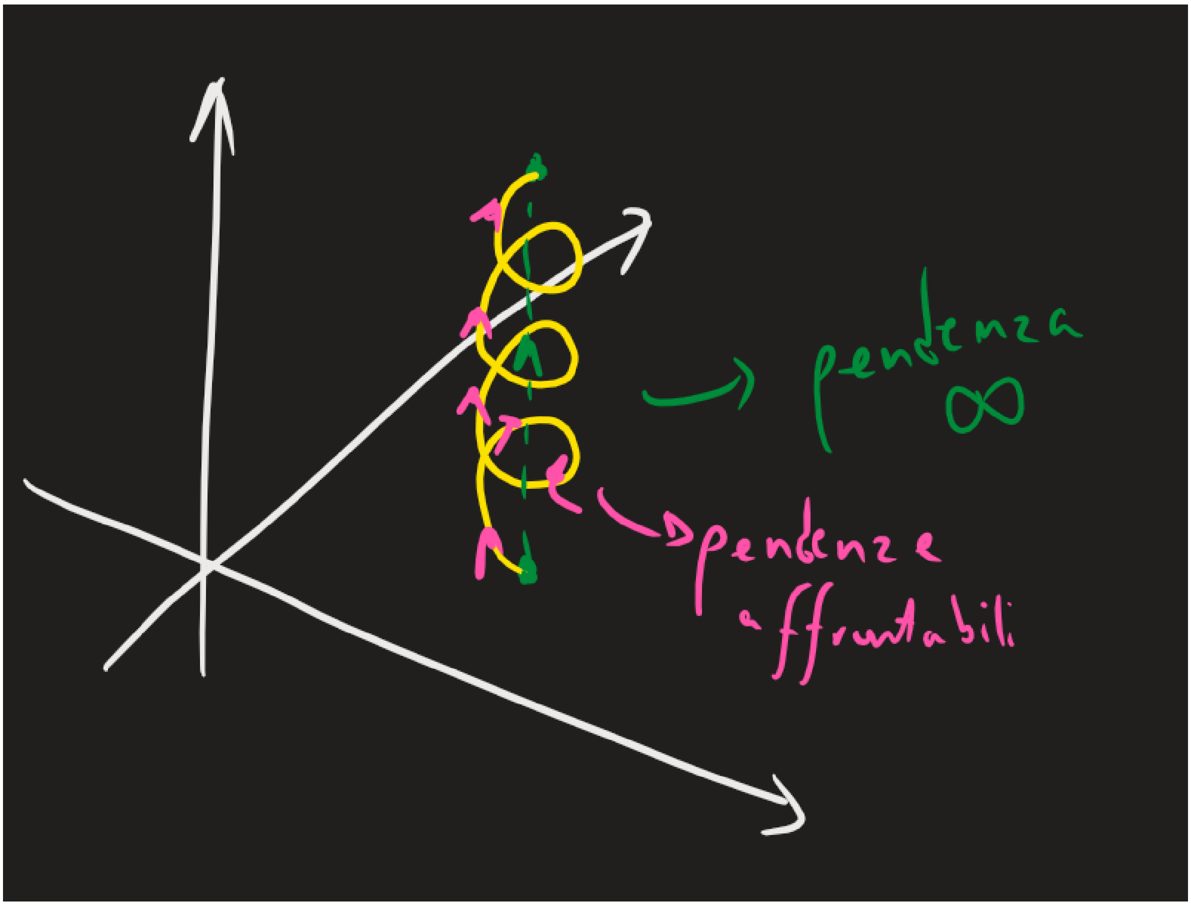


FIGURA 1.3. (*Scale a chiocciola*)



2. Considerazioni "Astratte"

Derivate nulle e funzioni costanti

#Teorema

> **Teorema 2.1. (derivata nulla è sempre una costante)**
>
> Suppongo $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, f *derivabile* in I (Derivata e derivabilità > ^478a87).
> Supponendo che $\forall x \in I, f'(x) = 0$ allora si ha che $f(x) = c \in \mathbb{R}$.
>
> $$\boxed{f'(x) = 0 \implies f(x) = c \in \mathbb{R}}$$

#Dimostrazione
DIMOSTRAZIONE del *teorema 2.1.* (^19eb72)
Dimostriamo questo teorema con *Lagrange* (Teorema di Lagrange > ^ef03c2) e usando il ragionamento *per assurdo*.
Partiamo supponendo $f'(x) = 0$.
Ora supponiamo, per assurdo, che f sia una funzione *non costante*; ovvero ci sono due punti $x_1, x_2 \in I$ tali che le loro immagini sono diverse.

$$\exists x_1, x_2 \in I : f(x_1) \neq f(x_2)$$

Ora posso applicare il *teorema di Lagrange* sull'intervallo $[x_1, x_2]$; questo è

ammissibile in quanto abbiamo f *derivabile* su I, pertanto f è anche *continua* su I (Proprietà delle derivate > ^dac6dc). Inoltre $[x_1, x_2] \subseteq I$.
Allora per il *teorema di Lagrange*,

$$\exists \xi \in \ ]x_1, x_2[\ : f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Tuttavia notiamo che il numeratore non può essere mai 0 in quanto per ipotesi $f(x_1), f(x_2)$ sono diverse e analogamente neanche il denominatore può essere mai 0.
Allora si avrebbe $f'(\xi) \neq 0$; però questo è impossibile in quanto questo contraddirebbe con la tesi $f'(\xi) = 0$.

OSS 2.1. (*Intervallo come condizione*) Notiamo che per essere vero questo teorema, I deve essere definita su un *intervallo*, perché senno avrei dei *"buchi"* su cui la funzione può compiere dei *"salti"*.

Crescenza e derivate

#Teorema

Teorema 2.2. (la derivata positiva significa funzione crescente)

Sia $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *derivabile*.
Allora f è *crescente* su I se e solo se la sua derivata è positiva;

$$\boxed{f \text{ crescente su } I \iff \forall x \in I, f'(x) \geq 0}$$

#Dimostrazione
DIMOSTRAZIONE del *teorema 2.2.* (^45aa1e)
" $\implies$ ": Supponiamo f *crescente* su I. Allora fissando $x_0 \in I$, posso considerare il *rapporto incrementale* $R^f_{x_0}(x)$;

$$R^f_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Però visto che f crescente sappiamo che se $x > x_0$, allora $f(x) \geq f(x_0)$; invece se $x < x_0$ allora $f(x) \leq f(x_0)$. Pertanto in entrambi i casi abbiamo la divisione di due *segni concordi*, quindi il rapport incrementale sarà sempre positivo per $x \neq x_0$.
Quindi $R^f_{x_0}(x) \geq 0$.
Prendendo il limite

$$\lim_{x \to x_0} R^f_{x_0}(x)$$

possiamo usare la *permanenza del segno* (Teoremi sui Limiti di Funzione > ^06a2e3) *"alla rovescia"* per dire che anche il *limite* del rapporto incrementale, che non è altro che la *derivata* $f'(x_0)$, è sempre *positiva*.
Pertanto abbiamo verificato che

$$f \text{ crescente } \implies R^f_{x_0}(x) \geq 0 \implies f'(x) \geq 0$$

" $\Longleftarrow$ ": Sia la derivata $f'(x)$ *sempre* positiva, per $\forall x \in I$.
Allora per assurdo suppongo che f *non* sia crescente: ovvero abbiamo una situazione in cui almeno due punti non sono *"più alti dell'altro"*.

$$\exists x_1, x_2 \in I : x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$$

Allora posso applicare il *teorema di Lagrange* (Teorema di Lagrange > ^ef03c2) sull'intervallo $[x_1, x_2]$ per trovare l'assurdo come priva: infatti

$$\exists \xi \in \ ]x_1, x_2[\ : \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

e per ipotesi questa frazione è *negativa*, in quanto abbiamo la moltiplicazione di due segni *discordi*. Però questo è assurdo in quanto all'inizio abbiamo supposto $f'(x)$ sempre positiva.

C3. Caratterizzazione delle funzioni convesse mediante le derivate

Caratterizzazione delle Funzioni Convesse

Teoremi di caratterizzazione per funzioni convesse; una mediante rette, l'altra mediante la derivata seconda

---

1. Primo teorema di caratterizzazione mediante le rette

#Teorema

Teorema 1.1. (di caratterizzazione mediante le rette)

Sia $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, I *intervallo*.
Allora sono equivalenti i seguenti:

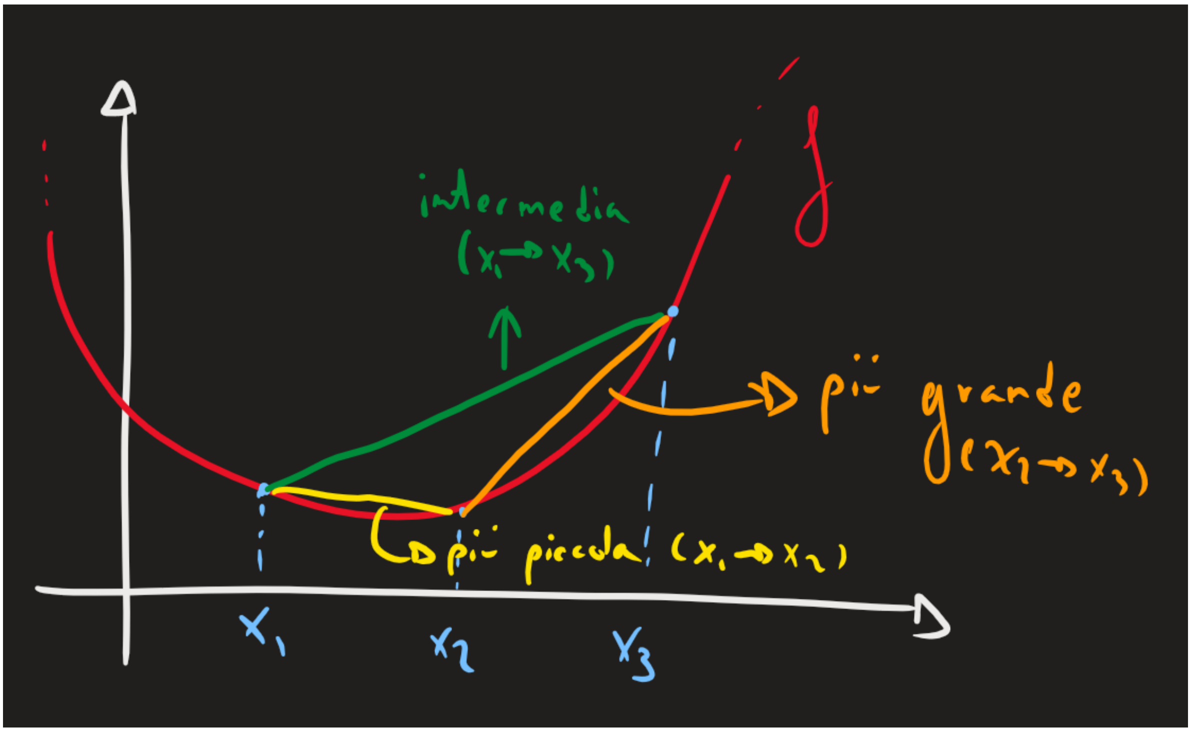
$$1).\ f \text{ convessa}$$
$$\Updownarrow$$
$$2).\ \forall x_1, x_2, x_3 \in I, x_1 < x_2 < x_3$$
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$
$$\Updownarrow$$
$$3).\ \forall x_1, x_2, x_3 \in I, x_1 < x_2 < x_3$$
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

#Osservazione

Osservazione 1.1. (interpretazione grafica)

Il significato geometrico di questo teorema vuol semplicemente dire che, quando prendiamo tre punti di una funzione concava e prendiamo le loro *rette secanti passanti tra di loro*, abbiamo sempre una retta con la *"pendenza più grande"*, con la *"pendenza intermedia"* e con la *"pendenza più piccola"*.
Nel caso della *2)* prendiamo *tre* pendenze, invece nel caso della tre *"dimentichiamo"* una di queste pendenze per prendere in considerazione solo due.

FIGURA 1.1. (*Significato geometrico*)



#Osservazione

Osservazione 1.2. (sulle implicazioni)

Al fine della dimostrazione osserviamo che

$$1 \iff 2 \iff 3$$

è equivalente a dire che

$$1 \implies 2 \implies 3 \implies 1$$

in quanto così si *"completa il giro delle implicazioni"*.

#Dimostrazione
DIMOSTRAZIONE del *teorema 1.1.* (^742cae)
Da quanto visto nell'*osservazione 1.2.* (^b50a27) dobbiamo semplicemente dimostrare *tre* implicazioni; $1 \implies 2$, $2 \implies 3$ e infine $3 \implies 1$.
$1 \implies 2$. Prendendo i punti $x_1 < x_2 < x_3$ e un qualsiasi *"scalare"* $\lambda \in [0,1]$, notiamo che x_2 sta tra x_1, x_2; quindi x_2 può essere scritta in *termini di combinazione lineare di* x_1, x_3 (Combinazione Lineare > ^8113de). Ovvero

$$x_2 = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_3$$

Ora, risolvendo l'equazione in λ, ottengo

$$\lambda = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} \iff 1 - \lambda = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}$$

(*i calcoli sono lasciati da svolgere per esercizio*)
Ora applico la *condizione di convessità* (Funzione Convessa > ^f4cbdd) a x_1, x_3 con λ appena calcolato.

$$\begin{aligned}
f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_3) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_3) \\
f(x_2) &\leq \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3) \\
(*) \implies &\boxed{(x_3 - x_1)f(x_2) \leq (x_3 - x_2)f(x_1) + (x_2 - x_1)f(x_3)}
\end{aligned}$$

(*anche qui i conti sono lasciati da svolgere per esercizio*)
Teniamo la parte segnata come $(*)$ fissata.
Per dimostrare il *primo pezzo* della tesi di *2)* usiamo $(*)$ sommando ambo i lati con $(x_3 - x_1)f(x_1)$;

$$\begin{aligned}
(*)\ (x_3 - x_1)f(x_2) &\leq (x_3 - x_2)f(x_1) + (x_2 - x_1)f(x_3) \\
(x_3 - x_1)f(x_2) - (x_3 - x_1)f(x_1) &\leq (x_3 - x_2)f(x_1) + (x_3 - x_1)f(x_1) + (x_2 - \\
(x_3 - x_1)(f(x_2) - f(x_1)) &\leq (-x_2 + x_1)f(x_1) + (x_2 - x_1)f(x_3) \\
&\leq (f(x_3) - f(x_1))(x_2 - x_1) \\
&\implies \boxed{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}}
\end{aligned}$$

Analogamente si dimostra il *secondo pezzo* della tesi di *2)*. (da svolgere al lettore per esercizio)
Infine ho completato la dimostrazione di $1 \implies 2$.
$2 \implies 3$. Questa è banale da dimostrare ed è immediata da dimostrare.
$3 \implies 1$. Per ipotesi ho il seguente:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

Allora scrivo la *combinazione lineare* $x_1 < \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 < x_2$ (ovvero $x_1 = x_1; x_2 = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2; x_3 = x_2$) per $\lambda \in [0,1]$; ora riapplico il *punto 3)*, ottenendo così la tesi di *1)*. ■

2. Secondo teorema di caratterizzazione mediante la derivata seconda

#Teorema

Teorema 2.1. (di caratterizzazione mediante la derivata seconda)

Sia $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, f *derivabile* (Derivata e derivabilità > ^12c1df).
Allora

$$\boxed{f \text{ convessa } \iff f' \text{ crescente } \iff \forall x_0 \in I, f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) \leq}$$

#Corollario

Corollario 2.1. (di caratterizzazione mediante il segno della derivata seconda)

Sia $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2$ (Derivata Successiva e Classe C > ^dbae48); ovvero f derivabile fino al *secondo ordine* f''.
Allora

$$\boxed{f \text{ convessa } \iff f' \text{ crescente } \iff f''(x) > 0, \forall x \in I}$$

DIMOSTRAZIONE del *teorema 2.1.* (^318646)
Questo è un teorema *"se e solo se"* (per le prime due condizioni), quindi si mira a mostrare *entrambi* i versi della doppia implicazione.
" $\impliedby$ ". Sia f' *crescente*.
Allora prendo $x_1, x_2, x_3 \in I : x_1 < x_2 < x_3$.
Uso il *teorema di Lagrange* (Teorema di Lagrange > ^ef03c2) sull'intervallo $[x_1, x_2]$ e $[x_2, x_3]$; allora esistono ξ_1, ξ_2 tali che

$$\begin{cases} \exists \xi_1 \in (x_1, x_2) : \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(\xi_1) \\ \exists \xi_2 \in (x_2, x_3) : \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} = f'(\xi_2) \end{cases}$$

Però le condizioni di $\xi_{1,2}$ prescrivono che dev'essere vera

$$x_1 < \xi_1 < x_2 < \xi_2 < x_3 \implies \xi_1 < \xi_2$$

Allora dato che f' è *crescente*, si ha

$$\xi_1 < \xi_2 \implies f'(\xi_1) < f'(x_2)$$

Pertanto

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}, \forall x_1 < x_2 < x_3 \in I$$

che è esattamente la *condizione di convessità*.
" $\implies$ ". Sia f *convessa*.
Prendendo un *qualsiasi* punto x_ξ tra x_1, x_2 notiamo che per la *condizione di convessità* la *pendenza* tra x_ξ, x_2 sarà *sempre* più piccola della pendenza di x_2
.
Allora graficamente (*figura 2.1.*) si evince che

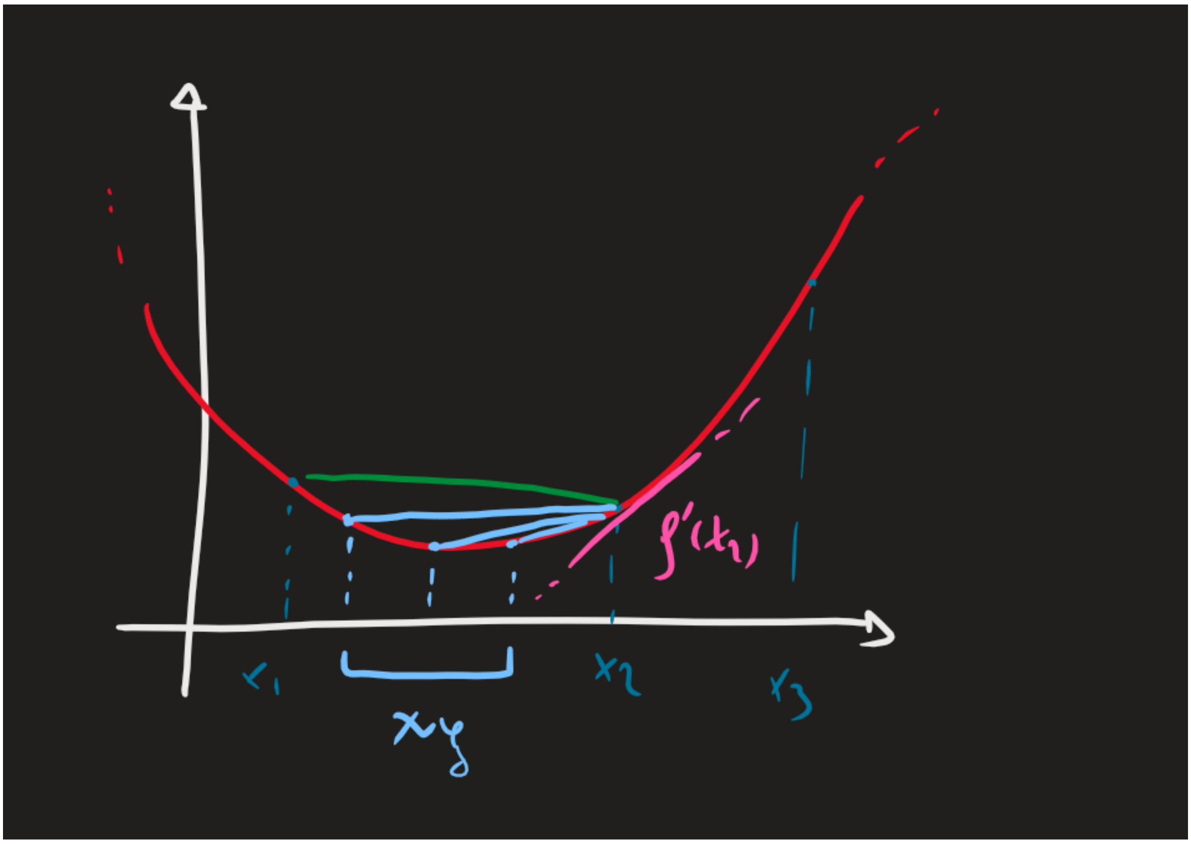
$$x_1 < x_2 \implies f'(x_1) \leq f'(x_2)$$

Analogamente si dimostra che

$$x_2 < x_3 \implies f'(x_2) \leq f(x_3) \blacksquare$$

Invece la terza implicazione, ovvero che per ogni *tangente* del punto x_0 sta sempre sotto il grafico, deriva dalla *condizione sulle pendenze* (^742cae) e dal *teorema di Lagrange* (Teorema di Lagrange > ^ef03c2).

FIGURA 2.1. (*Idea grafica della dimostrazione dell'implicazione* $\implies$)



#Osservazione

Osservazione 2.1. (interpretazione grafica alternativa, approfondimento personale)

Approfondimento personale tratto da: Le Matematiche di A. D. Aleksandrov, A. N. Kolmogorov, M. A. Lavrent'ev (1974)

Volendo si può dare una interpretazione grafica al fatto che la *il segno della derivata prima* attribuisce la *concavità* o la *convessità* di una funzione; però prima consideriamo il fatto che *il segno della derivata prima* determina la *crescenza* o la *decrescenza* della funzione.

Per esempio prendiamo una funzione con derivata *sempre* positiva: pertanto è crescente e può avere due possibili curve (escludendo la rettilinea) raffigurate in *figura 2.2.*.
Se vogliamo capire come si comporta la curva, basta pensare che la *derivata* della *derivata* non è altro che il *"verso"* per cui cresce (o scende) la derivata stessa!

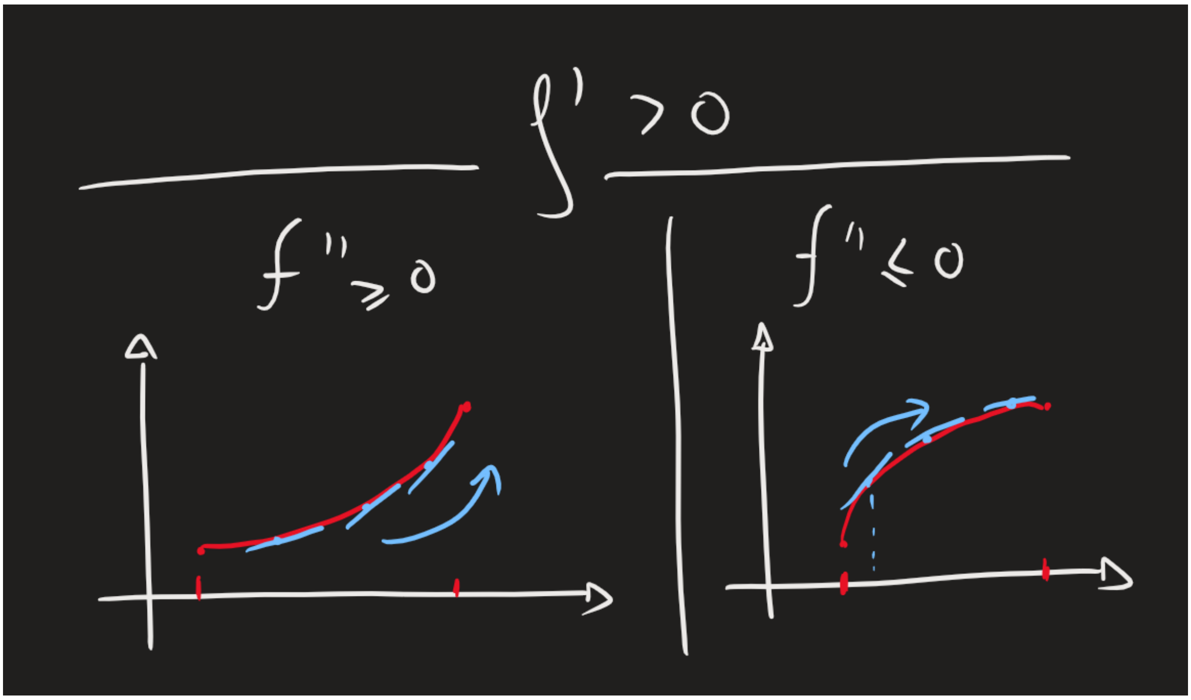
A sinistra del disegno, muovendoci lungo la curva vediamo che la *derivata* della funzione continua a man mano incrementare; si muove quindi verso l'*alto*. Pertanto si dice che la funzione è *"convessa verso il basso"* o *"concava verso l'alto"*.
A destra, invece, si avrebbe che la *derivata* continua a decrescere fino a

(quasi) appiattirsi completamente; si muove quindi verso il *"basso"*, suggerendoci così la nozione di *"convessa verso l'alto"* o *"concava verso il basso"*.
Analogamente questo ragionamento vale lo stesso per le funzioni decrescenti con derivata di segno negativo.

Pertanto, il segno della derivata seconda *determina* il modo in cui si sviluppa la curva della funzione.

'La derivata seconda ha anche un semplice significato geometrico.
[...], così dal segno si può giudicare da quale parte si incurva il grafico della funzione.
Supponiamo, per esempio, che in un dato intervallo la derivata seconda sia ovunque positiva; [...]. Pertanto, muovendoci lungo la curva questa si incurva costantemente dalla stessa parte, precisamente verso l'alto, ed è pertanto, come si dice, "convessa verso il basso". Viceversa, in una parte della curva dove la derivata seconda sia negativa ([...]) il grafico della funzione è "convesso verso l'alto" ' - riferimento bibliografico all'inizio, pp. 134-136

FIGURA 2.1. (*Interpretazione grafica alternativa*)



Punto di flesso

#Definizione

Definizione 2.1. (punto di flesso)

Sia $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.
Sia $x_0 \in I$; supponiamo che f sia *continua* in x_0.
Allora x_0 si dice *punto di flesso* se si verificano entrambe le condizioni:

$$\begin{cases} x_0 \in I \cap (-\infty, x_0), f \text{ è convessa (concava)} \\ x_0 \in I \cap (x_0, +\infty), f \text{ è concava (convessa)} \end{cases}$$

#Osservazione

Osservazione 2.1.

Se $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, f derivabile fino al *secondo ordine*, e supponendo che *prima di* x_0 si ha $f''(x_0) \leq 0$ e *dopo di* x_0 si ha $f''(x_0) \geq 0$, allora x_0 è di *flesso*. Vale lo stesso se si ha il viceversa.

C4. Tabella delle derivate

Tabella delle derivate

Tabella delle derivate.

---

1. Tabella delle derivate delle funzioni elementari

Vedere Esempi di derivate per eventuali *"dimostrazioni"* di alcune derivate.

f	f'
$c \in \mathbb{R}$	0
id_x	1
x^n	nx^{n-1}
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

f	f'
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

D. ESERCIZI SULLE DERIVATE

Esercizi sulle derivate

Tutti gli esercizi sulle derivate proposte da D. D. S. in lezione.

TIPOLOGIA A. CALCOLO DELLE DERIVATE

Modello A.

Qui banalmente si tratta di *calcolare derivate* di funzioni composte da *funzioni elementari* mediante le *proprietà delle derivate* (Proprietà delle derivate).

Lezione 23
#Esercizio

Esercizio A1.

Calcolare (1+2x+3x^2)'

#Esercizio

Esercizio A2.

Calcolare $(x \cos x)'$

#Esercizio

Esercizio A3.

Calcolare $(\sin(\cos x))'$

#Esercizio

Esercizio A4.

Calcolare $((\sin x)^3)'$

#Esercizio

Esercizio A5.

Calcolare $\frac{1}{\tan x} \cdot (\tan x)'$.

#Esercizio

Esercizio A6.

Calcolare $(3x^2 + 7x + 1)'$

#Esercizio

Esercizio A7.

Calcolare

$$(\frac{3x^2+1}{x^2-1})'$$

#Esercizio

Esercizio A8.

Calcolare

$$(\cos(\sqrt{x^2+1}))'$$

#Esercizio

Esercizio A9.

Calcolare

$$((x+1)^{x-1})'$$

Lezione 26
#Esercizio

Esercizio A10.

Sia f la seguente funzione a variabili reali:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ se } x \geq 0 \\ -x^2 \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

Determinare se f è *derivabile*, in tal caso calcolarne la derivata. Successivamente determinare se f' è *derivabile*, in tal caso calcolarne la derivata (ovvero f'')

TIPOLOGIA B. PROBLEMA DELLE TANGENTI

Modello B.

Qui si tratta di *trovare* delle *tangenti* su un punto preciso di una funzione.

Lezione 23
#Esercizio

Esercizio B1.

Sia $c : y = x^2$ una *curva* sul piano.
Trovare la *tangente alla curva* c nel punto $(1, 1)$.

#Esercizio

Esercizio B2.

Sia $c : y = \sqrt{1 - x^2}$ la *semicirconferenza* sul piano.
Dato un generico $x_0 \in [-1, 1]$, trovare la formula della *retta tangente* alla semicirconferenza r.

TIPOLOGIA C. PROBLEMI DI MIN, MAX

Modello C.

In questa tipologia si tratta di trovare di trovare un *modello matematico* che descrive al meglio un problema, poi di eseguire delle operazioni di *"minimizzazione"* (o *"massimizzazione"*) su questo modello.

Lezione 24
#Esercizio

Esercizio C1. (scatola di cartone senza superficie superiore)

Suppongo di aver un foglio quadrato di cartone, con lato lungo un metro ($1m$).
Suppongo di tagliare quattro quadrati più piccoli in corrispondenza degli angoli e voglio costruire una scatola a base quadrata, senza il coperchio.
Trovare il *miglior modo* per costruire questa scatola; ovvero col *volume massimo*.

#Esercizio

Esercizio C2. (triangolo inscritto in una circonferenza di area massima)

Suppongo di creare un triangolo a partire da una circonferenza fissata, prendendo un *triangolo* inscritto.
Trovare il *triangolo di massima area*.

#Esercizio

Esercizio C3. (lattina)

Supponiamo che l'azienda *Pepsi* ci offra il seguente progetto lavorativo:
"Progettare una lattina cilindrica che risparmi il più alluminio possibile, con un volume fissato."
Eseguire la richiesta dell'azienda nota.

#Esercizio

Esercizio C4. (il recinto del pastore)

Un pastore devastato ed in lacrime ci sta disperatamente chiedendo di aiutarlo: vuole costruire un recinto a partire da un certo quantitativo di materiali (ovvero con un *perimetro fissato*) costituito da un *rettangolo* e da un *semicerchio* col raggio di uno dei lati del rettangolo. Però vuole anche ottimizzare questa forma, cercando la *"proporzione perfetta"* tra i due lati

per avere l'*area massima*.
Aiutare il pastore disperato.

#Esercizio

Esercizio C5. (le due torri)

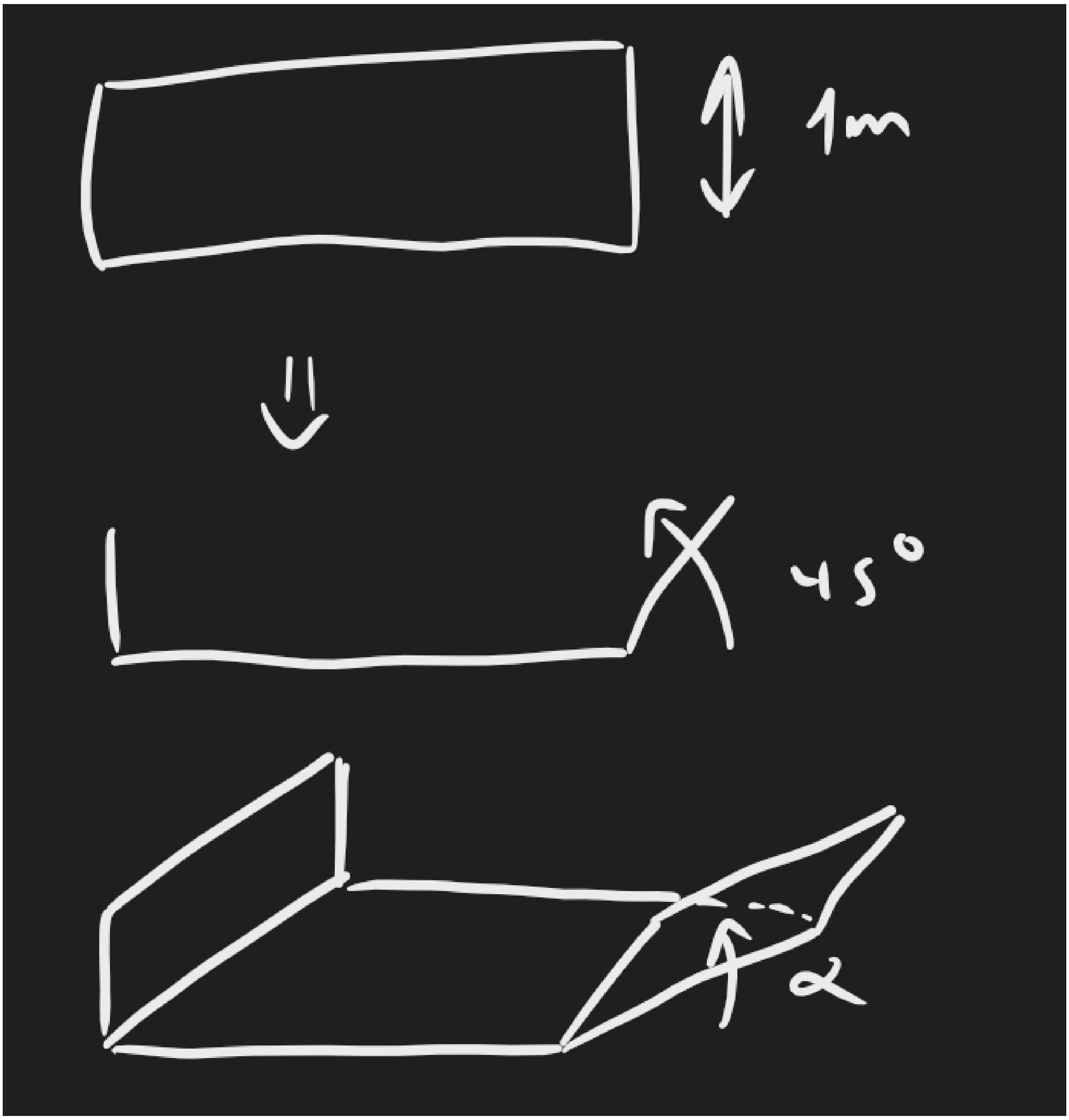
Supponiamo di avere due torri con una piazza un mezzo; la torre A alta h, la torre B alta g. Inoltre c'è una distanza orizzontale d tra le torri A, B.
Trovare il *"miglior punto"* tra le due torri tale che, partendo dal punto A, scendendo al punto selezionato poi risalendo al punto C, abbiamo il *percorso di lunghezza minimo*.

Lezione 25
#Esercizio

Esercizio C6. (lamiera grondaia)

Supponiamo di aver una *lamiera* largo 1 metro ($1m$) (la lunghezza è irrilevante) e lo vogliamo *"piegare"* in modo da formare un profilo di grondaia rettangolare; ovvero del tipo raffigurato in *figura C6.*.
Progettare il *"modo"* di piegare questa lamiera per cui si ha la massima capienza (volume).

FIGURA C6.

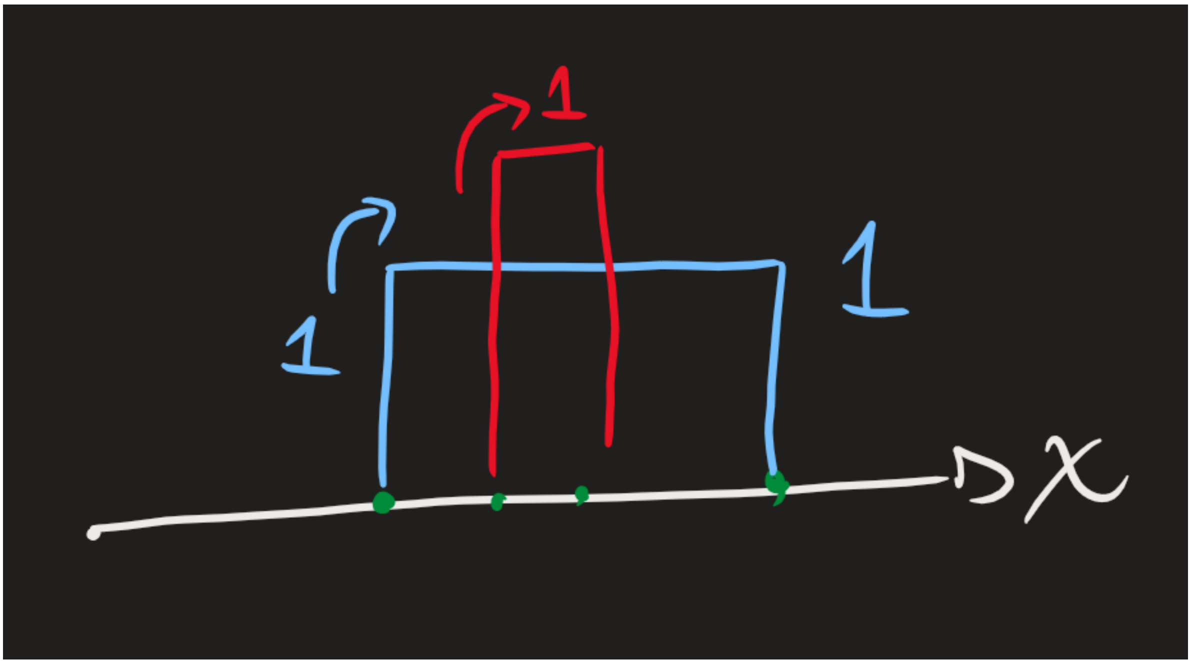


#Esercizio

Esercizio C7. (curva con massima area)

Si ha una curva con lunghezza 1, con i suoi vertici sull'*asse delle ascisse*. Trovare la *"curva"* che racchiuda la *massima area* col profilo raffigurato in *figura C7.*.

FIGURA C7.


1
1
1
x