Variabili Aleatorie Assolutamente Continue - Sommario

X

Variabili aleatorie assolutamente continue.

X

A. L'IDEA DELLE V.A. ASSOLUTAMENTE CONTINUE

A1. Definizione di V.A. assolutamente continue

Variabile Aleatoria Assolutamente Continua

X

Definizione di v.a. assolutamente continua. Note tecniche: condizioni equivalenti per verificare se è variabile aleatoria, idea geometrica, costante di integrazione. Parallelismo tra v.a. assolutamente continue e discrete. Teorema: composizione delle variabili assolutamente continue con funzioni regolari.

X

0. Voci correlate

- Funzione Integrabile in Senso Generalizzato
- Definizione di Variabile Aleatoria

1. Definizione di Variabile Aleatoria Assolutamente Continua

#Definizione

> Definizione (variabile aleatoria assoluta continua).
>
> Sia $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ uno *spazio di probabilità*. Una variabile aleatoria $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice *assolutamente continua* se esiste una funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty) \in \mathcal{R}(\mathbb{R})$ (ovvero *integrabile su tutta la retta reale*) tale che
>
> $$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ p\{X \in B\} = \int_B f$$

e di conseguenza

$$\int_{\mathbb{R}} f = p\{\Omega\} = 1$$

Definiamo la sua distribuzione come

$$p_x(B) := p\{X \in B\}$$

e la sua *densità* è f (oppure si può dire che *"X ammette f come densità"*).

2. Note tecniche

Poniamo una serie di note tecniche.

#Lemma

Lemma (condizione equivalente per le v.a. assolutamente continue).

Similmente al caso delle *variabili aleatorie discrete*, per verificare se X è una *variabile aleatoria assolutamente continua*, basta prendere un *solo intervallo generico* $B = (a, b)$ (con $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$) e verificare che

$$p\{X \in B\} = \int_B f = \int_a^b f$$

perché tanto dopo si può passare al *complementare* (1).

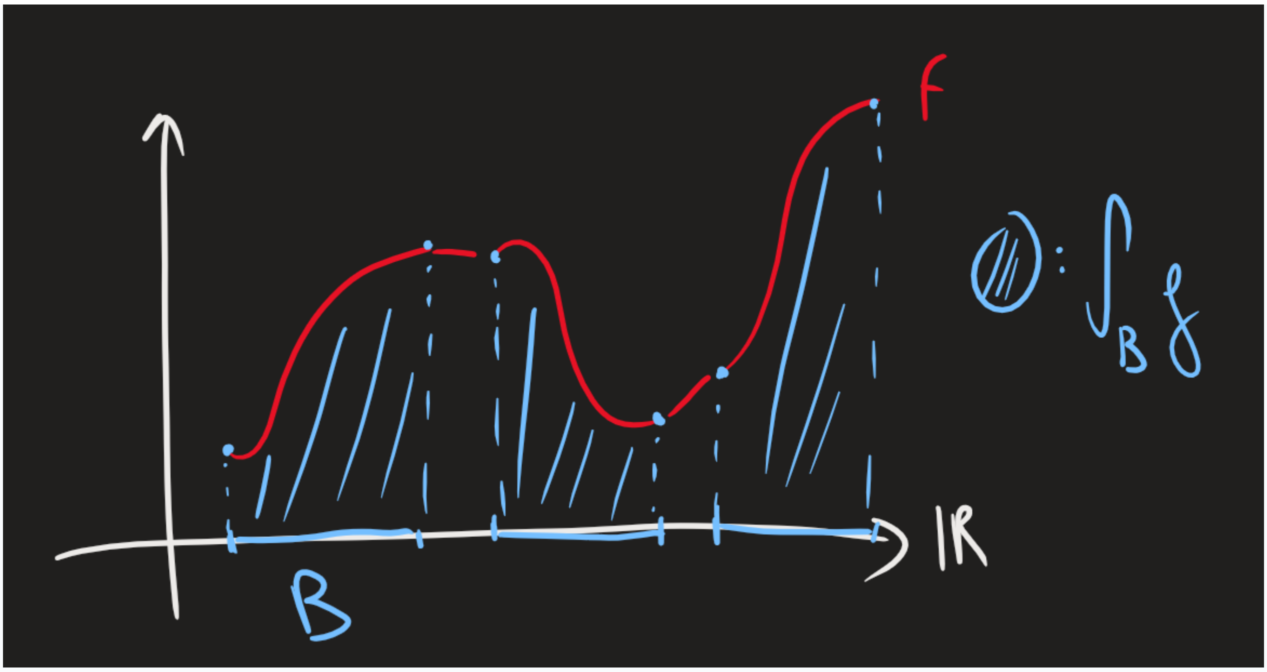
#Osservazione

Osservazione (l'idea geometrica).

L'idea delle *variabili assolutamente continue* è quello di prendere B come un intervallo (o alla peggio avremo un'*unione* di intervalli, per non rendere le cose troppo complicate da un punto di vista tecnico) e di calcolarci l'integrale.

Notiamo che qui *non c'entra in nessun modo* la *nozione di continuità*: vedremo che il termine *"assolutamente continuo"* si riferisce ad un altro comportamento di X.

FIGURA 2.1. (*Idea geometrica*)



#Osservazione

> Osservazione (ci sono più densità associabili ad una v.a. assolutamente continua).
>
> Notiamo che cambiando il valore di f su un *insieme finito di punti*, abbiamo che l'integrale
>
> $$\int_B f$$
>
> rimane lo stesso. Infatti cambiando gli *"estremi"* abbiamo che l'integrale rimane lo stesso: per essere più precisi, due densità f_1, f_2 associate ad una medesima v.a. X possono differire al più su *un insieme di misura nulla* (ovvero puntini).
>
> Quindi diciamo comunque che la *densità è unica a meno di cambiamenti irrilevanti* (su insiemi di misura nulla).

3. Differenze tra v.a. discrete e assolutamente continue

#Osservazione

> Osservazione (differenze tra v.a. discrete e assolutamente continue).
>
> Notiamo che se per le *variabili aleatorie discrete* abbiamo
>
> $$\sum_{x \in \mathbb{R}} q(x) = 1$$

allora deve necessariamente seguire che $q(x) \in [0,1]$. Vale lo stesso per le *v.a. assolutamente continue*? Considerando che abbiamo *aree*, la risposta è no. Infatti, considerando un rettangolo con base $\frac{1}{2}$ e di altezza 2, abbiamo comunque che la sua area (rappresentando l'integrale $\int_B f$) è 1 lo stesso.

Dopodiché se abbiamo che $p\{X=x\} = q(x)$, nel caso assolutamente continuo abbiamo

$$p\{X=x\} = \int_{\{x\}} f = 0$$

poiché l'integrale su un singolo punto è zero.

Conclusione: abbiamo che le *variabili aleatorie discrete* sono *"concentrate"* su singoli punti, invece con le *assolutamente continue* abbiamo che sono *"distribuite"* sulla *retta reale*.

4. Composizione di Variabili Aleatorie Assolutamente Continue

#Osservazione

Osservazione (osservazione preliminare).

Prima di considerare la *composizione di variabili aleatorie assolutamente continue* nel senso generalizzato, consideriamo un esempio.

Supponiamo di avere X v.a. assolutamente continua, e ψ una funzione costante che manda $\mathbb{R}$ in $\{1\}$. Allora componendo $\psi \circ X$ si avrebbe una *variabile aleatoria discreta*, in quanto è tutta *"spiaccicata"* su 7. Infatti si avrebbe che

$$\{\psi \circ X = 7\} = \Omega$$

Quindi $\psi \circ X$ non è più assolutamente continua.

Allora, per far sì che $\psi \circ X$ rimanga *assolutamente continua*, dobbiamo imporre delle restrizioni su ψ: ovvero che deve *assumere valori infiniti*, per evitare di concentrare troppo la nostra variabile aleatoria.

#Proposizione

Proposizione (composizione di variabili aleatorie assolutamente continue).

Sia f una densità per X assolutamente continua. Supponiamo ψ *strettamente monotona* e *regolare* (in particolare di classe $\mathcal{C}^1$)

Allora $Y := \psi \circ X$ è *assolutamente continua* con densità $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ data da

$$g(x) = f\left(\psi^{-1}(x)\right)\left|\psi'(\psi^{-1}(x))\right|^{-1}$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE della Proposizione 7 (composizione di variabili aleatorie assolutamente continue)

Omessa. Basta tener conto che ψ è *invertibile* dunque utilizzabile per un *cambio di variabile*. ■

#Esempio

Esempio (caso lineare).

Se ψ è lineare, ovvero del tipo $\psi(x) := \alpha x + \beta$, allora si ha che la composizione $Y := \psi \circ X$ ha densità

$$\boxed{g(x) = f\left(\frac{x-\beta}{\alpha}\right)\frac{1}{|\alpha|}}$$

5. Media delle v.a. assolutamente continue

Vediamo come si comporta la *somma* tra le *variabili aleatorie assolutamente continue*.

#Lemma

Lemma (la somma di variabili aleatorie).

Siano X_1, X_2 due *variabili aleatorie assolutamente continue* con densità f_1, f_2. Supponiamo X_1, X_2 *indipendenti*.

Allora abbiamo che la somma $Y := X_1 + X_2$ è una *variabile aleatoria assolutamente continua* con densità

$$f_Y(x) = \int_{\mathbb{R}} f_1(y) f_2(x-y)\, \mathrm{d}y$$

NOTA! Non è *detto* che la somma rimanga dello stesso tipo.

DIMOSTRAZIONE del Lemma 9 (la somma di variabili aleatorie)

Omessa. Per vedere dei controesempi è necessario sapere gli *integrali doppi* . ■

A2. Funzione di ripartizione

Funzione di Ripartizione per Variabili Aleatorie Assolutamente Continue

X

Definizione di funzione di ripartizione. Proprietà della funzione di ripartizione: comportamento asintotico, dalla funzione di ripartizione si ricava la densità.

X

0. Voci correlate

- Variabile Aleatoria Assolutamente Continua

1. Definizione di Funzione di Ripartizione

Come abbiamo visto in Variabile Aleatoria Assolutamente Continua, abbiamo che

$$p\{X = x\} = 0$$

Dunque definendo $q(x)$ nello stesso modo per il caso discreto, avremo sempre 0 (che è inutile). Conviene dunque introdurre il concetto di *funzione di ripartizione*, che va a *"sostituire"* $q(x)$.

#Definizione

Definizione (funzione di ripartizione di una v.a. assolutamente continua).

Data una variabile aleatoria X avente densità f, chiameremo la sua *funzione di ripartizione* (di X) la funzione $F : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$ definita come l'integral-funzione

$$F(t) := p\{X \leq t\} = \int_{]-\infty, t]} f$$

Ricaviamo immediatamente il suo *comportamento asintotico*.

#Proposizione

Proposizione (comportamento asintotico della funzione di ripartizione).

Si ha che la funzione di ripartizione F gode dei seguenti limiti.

$$\lim_{t \to -\infty} F(t) = 0 \wedge \lim_{t \to +\infty} F(t) = 1$$

Poiché si avrebbe gli intervalli di definizione $(-\infty, -\infty) = \emptyset$ e $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

2. Proprietà della Funzione di Ripartizione

#Teorema

Teorema (ricavare la funzione di ripartizione dalla densità e viceversa).

Sia f continua definita su un intervallo limitato. Allora per il *teorema fondamentale del calcolo* (1) si ha che la sua integral-funzione (in particolare la *funzione di ripartizione*) F è *derivabile* con

$$F' = f$$

scegliendo $C = 0$, per evitare traslazioni in verticale e per mantenere la *monotonia*.

Il teorema vale lo steso per f continua *ad eccezione di un numero finito di punti* $x_1 < \ldots < x_n$: in questo caso F è derivabile negli intervalli per cui f è continua.

Inoltre vale il viceversa: se F associata a X è *derivabile con derivata continua* a tratti, allora la densità di X è $f = F'$.

A3. Statistica delle V.A. assolutamente continue

Statistica delle Variabili Aleatorie Assolutamente Continue

X

Applicazione delle nozioni statistiche alle variabili aleatorie assolutamente continue: valor medio, varianza. Valor medio della composta. Proprietà del valor medio e della varianza.

X

0. Voci correlate

- Definizione del Valore Medio
- Proprietà del Valore Medio
- Definizione di Varianza e Deviazione Standard
- Proprietà della Varianza
- Definizione di Covarianza
- Variabile Aleatoria Assolutamente Continua

1. Valor medio delle v.a. assolutamente continue

Adesso iniziamo ad applicare un po' di nozioni apprese sulla *statistica* (ovvero valor medio, varianza, covarianza) alle *variabili aleatorie assolutamente continue*.

#Definizione

Definizione (valor medio delle v.a. assolutamente continue).

Sia X una v.a. *assolutamente continua* avente densità f. Si dice che *ammette valor medio* se vale che

$$\int_{\mathbb{R}} |x| f(x) \, \mathrm{d}x < +\infty$$

(si pone il valor assoluto $|x|$ per evitare casi indeterminati; voglio casi *divergenti* o *convergenti*).

In tal caso si definisce il *valor medio* la quantità

$$E[X] := \int_{\mathbb{R}} x f(x) \, \mathrm{d}x$$

#Osservazione

Osservazione (similitudine al caso discreto).

Notiamo che la definizione *assomiglia tantissimo* al caso discreto. Infatti abbiamo

$$\int_{\mathbb{R}} x f(x) \, \mathrm{d}x \sim \sum_{x \in \mathbb{R}} x f(x)$$

Questo non è un caso. Vedremo come mai

2. Legame tra caso discreto e caso continuo

#Osservazione

Osservazione (similitudine al caso discreto).

Come osservato prima, abbiamo che le definizione di *valor medio* sono molto simili. Infatti la definizione generale del valor medio (1) include sia il *caso discreto* che il *caso continuo*.

Per convincerci di questo (in particolare l'ultima affermazione) vediamo il seguente esempio: sia X una variabile aleatoria avente f densità, che a sua volta è limitata su

$[0,1]$ (nel senso che al di fuori il suo valore è nullo).

Allora possiamo considerare i suoi *approssimanti dal basso e dall'alto*, definiti come

$$\underline{Y}(\omega) := \begin{cases} \dfrac{k}{n}, \omega \in \left\{\dfrac{k}{n} \leq X \leq \dfrac{k+1}{n}\right\}, k \in \{0, \ldots, n-1\} \\ 0, \text{ alt.} \end{cases}$$

e

$$\overline{Y}(\omega) := \begin{cases} \dfrac{k+1}{n}, \omega \in \left\{\dfrac{k}{n} \leq X \leq \dfrac{k+1}{n}\right\}, k \in \{0, \ldots, n-1\} \\ 0, \text{ alt.} \end{cases}$$

con le densità

$$\underline{q}(x) = \begin{cases} p\left\{\dfrac{k}{n} \leq X \leq \dfrac{k+1}{n}\right\}, x = \dfrac{k}{n}, k \in \{0, \ldots, n-1\} \\ 0, \text{ alt.} \end{cases}$$

poi

$$\overline{q}(x) = \begin{cases} p\left\{\dfrac{k}{n} \leq X \leq \dfrac{k+1}{n}\right\}, x = \dfrac{k+1}{n}, k \in \{0, \ldots, n-1\} \\ 0, \text{ alt.} \end{cases}$$

Abbiamo dunque che

$$\underline{Y} \leq X \leq \overline{Y}$$

Per *come abbiamo costruito* le densità $\underline{q}, \overline{q}$ si ha

$$E[\underline{Y}] \leq E[X] \leq E[\overline{Y}]$$

che sono equivalenti a

$$E[\underline{Y}] = \sum x\underline{q}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} p\{\ldots\} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\, \mathrm{d}x$$

$$E[\underline{Y}] = \ldots = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{n} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\, \mathrm{d}x$$

In entrambi i lati possiamo portare dentro le frazioni $\frac{k}{n}$, $\frac{k+1}{n}$ dentro l'integrale, dandoci

$$E[Y] \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} xf(x)\ \mathrm{d}x \leq \int_0^1 xf(x)\ \mathrm{d}x \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{n} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\ \mathrm{d}x = E$$

Per $n \to +\infty$ questi valori si avvicinano.

3. Proprietà del valor medio

Abbiamo che il *valor medio* per le *v.a. assolutamente continue* godono le medesime proprietà nel caso discreto (Proprietà del Valore Medio).

Siamo interessati in vedere la *composizione* delle *variabili assolutamente continue* e la loro media.

#Teorema

Teorema (valor medio della composta).

Sia X una *v.a. assolutamente continua* avente densità f e $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una *applicazione continua* (o basta che sia misurabile). Sia definita $Y := \psi \circ X$ la composizione.

Allora Y ha *valor finito medio* se e solo se

$$\int_{\mathbb{R}} |\psi(x)| f(x)\ \mathrm{d}x < +\infty$$

in tal caso si ha

$$E[Y] = \int_{\mathbb{R}} \psi(x) f(x)\ \mathrm{d}x$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 4 (valor medio della composta)
Omessa. Si tratta di un semplice cambio di variabile: infatti si ha

$$\int_{\Omega} \psi(X)\ \mathrm{d}p = \int_{\mathbb{R}} \psi(x)\ \mathrm{d}p_x = \int_{\mathbb{R}} \psi(x) f(x)\ \mathrm{d}x$$

La sostituzione in questione è $\mathrm{d}p_x = f(x)\mathrm{d}x$. ■

#Osservazione

Osservazione (ipotesi alternative).

Possiamo cambiare le ipotesi per avere che comunque valga il teorema.

- La condizione su ψ può essere indebolita, basta che sia *continua a tratti* (ovvero tranne su al più un numero finito di punti).
- Però in tal caso non è assicurato che Y rimanga *assolutamente continua*. Infatti si consideri $\psi(x) = c$ costante.

4. Definizione di Varianza e Covarianza

#Definizione

Definizione (varianza per v.a. assolutamente continue).

Sia X una *v.a. assolutamente continua* avente densità f.

Si dice che X ha *momento secondo finito* se la sua composta X^2 ha *valor medio finito*, cioè se vale

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 f(x) \, \mathrm{d}x < +\infty$$

In tal caso chiamiamo la *varianza* di X la quantità

$$\operatorname{var} X := E[X^2] - E[X]^2$$

#Definizione

Definizione (covarianza per due v.a. assolutamente continue).

Siano X, Y due *v.a. assolutamente continue aventi momento secondo finito*. Chiamiamo la loro *covarianza* come la quantità

$$\operatorname{cov}(X, Y) := E[XY] - E[X]E[Y]$$

Sono scorrelate se la covarianza è nulla.

Le medesime proprietà per la *varianza, covarianza* nel caso discreto si applicano ugualmente (Proprietà della Varianza, Proprietà della Covarianza).

X

B. DENSITA' ASSOCIATE A V.A. ASSOLUTAMENTE CONTINUE

B1. Densità Uniforme

Densità Uniforme

X

Definizione di densità uniforme.

X

0. Voci correlate

- Variabile Aleatoria Assolutamente Continua

1. Definizione di Densità Uniforme

#Definizione

Definizione (densità uniforme).

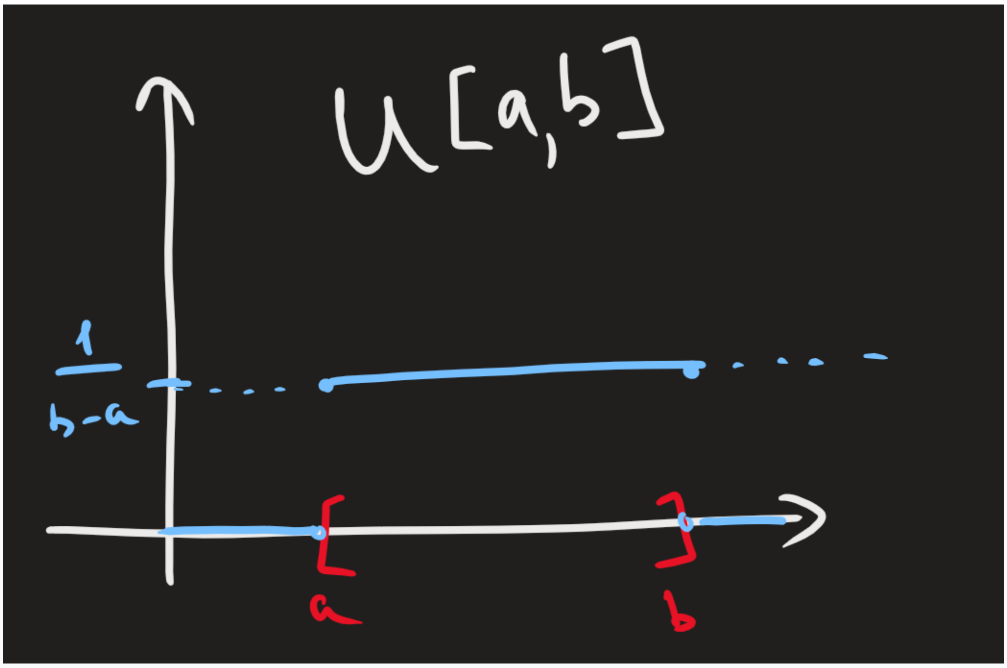
Diciamo che una *variabile aleatoria* X ha *densità uniforme* nell'intervallo $[a,b]$ compatto se la sua *densità* è la funzione

$$f(x) = \frac{1}{b-a}\chi_{[a,b]}(x)$$

Ovvero letteralmente una linea retta su $[a,b]$ di altezza $\frac{1}{b-a}$. Indichiamo questa densità col simbolo

$$U([a,b])$$

FIGURA 1.1. (*Densità uniforme*)



#Teorema

Teorema (funzione di ripartizione, media e varianza di una densità uniforme).

Abbiamo la funzione di ripartizione, la media, e la varianza per una densità uniforme $U[a, b]$ sono le seguenti.

i. *Funzione di ripartizione*

$$F(t) = \begin{cases} 0, t \leq a \\ \dfrac{t-a}{b-a}, t \in [a, b] \\ 1, t \geq b \end{cases}$$

ii. *Media e varianza*

$$E[X] = \int_a^b \frac{x}{b-a} \, \mathrm{d}x = \frac{b+a}{2}$$
$$\operatorname{var} X = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 2 (funzione di ripartizione, media e varianza di una densità uniforme)

Omessa, poiché sono solo calcoli. Per la prima teniamo conto che

$$p\{X \in (t_1, t_2)\} = \int_{t_1}^{t_2} f(x) \, \mathrm{d}x = \frac{|[a, b] \cap [t_1, t_2]|}{b-a}$$

e poi basta fare i calcoli in una maniera logica. ■

B2. Densità Esponenziale

Densità Esponenziale

X

Densità esponenziale (cose più utili). Definizione, funzione di ripartizione, media e varianza. Proprietà fondamentale: l'assenza di memoria.

X

0. Voci correlate

- Densità Geometrica
- Variabile Aleatoria Assolutamente Continua
- Funzione di Ripartizione per Variabili Aleatorie Assolutamente Continue

1. Definizione di Densità Esponenziale

#Definizione

Definizione (densità esponenziale).

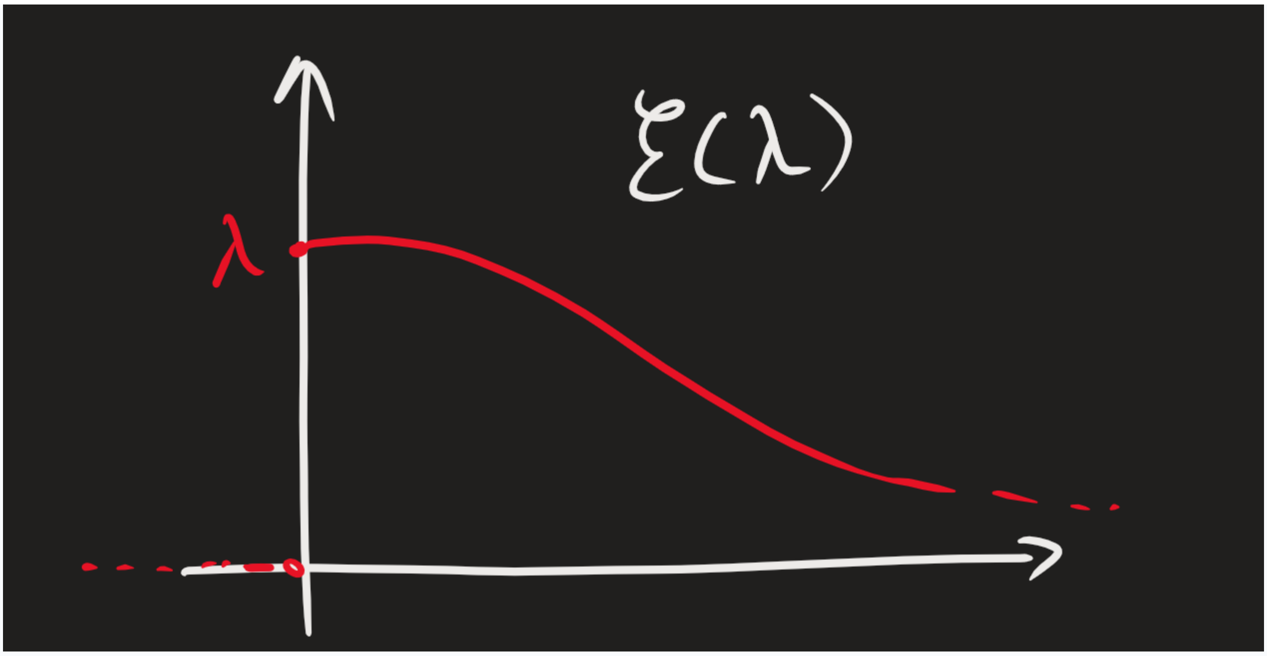
Diciamo che X ha *densità esponenziale di parametro* $\lambda > 0$ se ammette come densità la funzione

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \chi_{\mathbb{R}^+}(x)$$

Ovvero abbiamo una *"esponenziale inversa"* sulla semiretta positiva. La si indica con $\mathcal{E}(\lambda)$.

Si verifica facilmente che $\int_{\mathbb{R}} \mathcal{E}(\lambda) = 1$, per indipendentemente dal parametro non-negativo λ.

FIGURA 1.1. (*Densità esponenziale*)



#Teorema

Teorema (funzione di ripartizione, media e covarianza).

La funzione di ripartizione di una densità $\mathcal{E}(\lambda)$ è

$$F(t)=\begin{cases}1-e^{-\lambda t}, t\geq 0\\ 0, t<0\end{cases}$$

La sua media e covarianza è

$$\begin{aligned}E[X]&=\frac{1}{\lambda}\\ \operatorname{var}X&=\frac{1}{\lambda^2}\end{aligned}$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 2 (funzione di ripartizione, media e covarianza)

Per calcolare la funzione di ripartizione si tratta banalmente di valutare l'integrale

$$\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$$

da cui seguono i calcoli (si mette 0 perché tanto è definita 0 sulla semiretta negativa). Per quanto concerne invece la media si tratta di valutare l'integrale indefinito

$$\int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$$

(sicuramente integrabile dato che c'è l'esponenziale che ammazza sempre le potenze). Lo stesso vale per la media di $E[X^2]$, poi mettendo tutto assieme si ottiene

$$\text{var}\, X = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

che prova le tesi. ■

2. Assenza di Memoria dell'esponenziale

#Proposizione

> Proposizione (l'assenza di memoria dell'esponenziale).
>
> Le *variabili aleatorie* di tipo *esponenziale* godono l'*assenza di memoria*. Ovvero
>
> $$p\{X > T + t | X > T\} = p\{X > t\}$$
>
> *"sotto il condizionamento per cui non ho avuto successo prima di T, la probabilità di avere success dopo l'istante t rimane ugualmente"*.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE della Proposizione 3 (l'assenza di memoria dell'esponenziale)
Calcoliamoci prima $p\{X > \tau\}$: abbiamo

$$p\{X > \tau\} = 1 - p\{X \leq \tau\} = 1 - \underbrace{p\{X = \tau\}}_{0} - p\{X < \tau\} = 1 - F(\tau) = e^{-\lambda\tau}$$

Per la definizione di *probabilità condizionale* (1) si ha

$$\begin{aligned} p\{X > T + t | X > T\} = \frac{p\{X > T + t \wedge X > T\}}{p\{X > T\}} &= \frac{p\{X > T + t\}}{p\{X > T\}} \\ &= \frac{e^{-\lambda(T+t)}}{e^{-\lambda T}} = e^{-\lambda T} = p\{X \end{aligned}$$

che dimostra la tesi. ■

#Osservazione

> Osservazione (proprietà fondamentale).
>
> Notiamo che è la stessa proprietà di cui gode la *variabile aleatoria geometrica* (1). Inoltre si dimostra che l'*unica* variabile aleatoria assolutamente continua che *gode tale proprietà* è proprio l'*esponenziale*.
>
> Vedremo un nesso tra queste due *densità* con l'avanzare del corso.

B3. Densità Gamma

Densità Gamma

X

Densità gamma. Definizione preliminare: funzione gamma di Eulero. Definizione di densità gamma avente parametri α, λ positivi. Valor medio della densità gamma elevata ad una potenza qualsiasi. La somma di densità gamma è una densità gamma. Corollario: somma di densità esponenziale.

X

0. Voci correlate

- Funzione Integrabile in Senso Generalizzato
- Variabile Aleatoria Assolutamente Continua
- Densità Esponenziale

1. Fondamenta sulla Gamma di Eulero

Prima di parlare della *densità gamma*, parliamo della *funzione gamma di Eulero*.

#Definizione

> Definizione (funzione gamma di Eulero).
>
> Si chiama la *funzione gamma di Eulero* come l'integrale
>
> $$\Gamma(\alpha) := \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x} \, \mathrm{d}x$$

#Proposizione

> Proposizione (le proprietà della funzione gamma).
>
> La funzione gamme di Eulero soddisfa le seguenti proprietà.
>
> i.
>
> $$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$$
>
> ii.
>
> $$\Gamma(n) = (n-1)!, \forall n \in \mathbb{N}$$

iii. *Formula di riflessione*

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}, \forall \alpha \notin \mathbb{Z}$$

iv. *Formula sui semi-interi*

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\prod_{k=0}^{n-1}\left(k+\frac{1}{2}\right)$$

Non dimostreremo nulla.

2. Densità Gamma

#Definizione

Definizione (densità gamma).

Diciamo che una *v.a.* ha *densità gamma di parametri* $\alpha, \lambda > 0$ se ammette come densità la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, x > 0 \\ 0, x \leq 0 \end{cases}$$

Denotiamo tale densità col simbolo $\Gamma(\alpha, \lambda)$.

Osservare che per $\alpha = 1$ ho esattamente l'esponenziale $\mathcal{E}(\lambda)$. Ovvero vale che $\Gamma(1, \lambda) = \mathcal{E}(\lambda)$.

Per dimostrare che questa è una densità si procede per cambio di variabile $y = \lambda x$ e di valutare l'integrale, ottenendo così

$$\int_{\mathbb{R}} f = \ldots = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \underbrace{\int_0^{+\infty} y^{\alpha-1}e^{-y}\ \mathrm{d}y}_{\Gamma(\alpha)} = 1$$

Per valutare la sua media e varianza consideriamo il seguente lemma.

#Lemma

Lemma (lemma preliminare per la media).

Vale che, per una densità $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$

$$\forall k \in \mathbb{N}, E[X^k] = \frac{(\alpha+k-1)(\alpha+k-2)\dots(\alpha)}{\lambda^k}$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Lemma 4 (lemma preliminare per la media)

Si tratta di calcolare l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\lambda^a}{\Gamma(\alpha)} a^{k+1-1} e^{-\lambda x} \, \mathrm{d}x$$

L'idea è quella di sfruttare il fatto che

$$\int_0^{+\infty} \frac{\lambda^{a+k}}{\Gamma(a+k)} x^{\alpha+k-1} e^{-\lambda x} \, \mathrm{d}x = 1$$

dato che avrei la funzione $\Gamma(\alpha+k, \lambda)$. Usiamo il trucco di dividere e moltiplicare per λ^k e di usare il fatto che $\Gamma(\alpha+k) = (\alpha+k-1)\dots(\alpha)\Gamma(\alpha)$ (questo vale su $\mathbb{N}$). Allora in definitiva otteniamo

$$\int_0^{+\infty} \frac{\lambda^a}{\Gamma(\alpha)} a^{k+1-1} e^{-\lambda x} \, \mathrm{d}x = \frac{(\alpha+k-1)\dots(\alpha)}{\lambda^k} \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{\lambda^{\alpha+k}}{\Gamma(\alpha+k)} x^{\alpha+k-1} e^{-\lambda k} \, \mathrm{d}}_{1}$$

che è la tesi. ■

#Teorema

> Teorema (media e varianza della gamma).
>
> Vale che la *media* e la *varianza* di una $\Gamma(\alpha, \lambda)$ è
>
> $$E[X] = \frac{\alpha}{\lambda}; E[X^2] = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2}$$
> $$\operatorname{var} X = \frac{\alpha}{\lambda^2}$$

3. Somma di Variabili Aleatori Gamma Indipendenti

Vediamo una *proprietà fondamentale* della *densità gamma*.

#Proposizione

> Proposizione (somma di variabili aleatori gamma).
>
> Siano $X_1, \dots, X_n$ delle *variabili aleatorie indipendenti*, ognuna con densità $\Gamma(\alpha_k, \lambda)$
> .

> Allora posto $X := \sum_k X_k$ si ha che X è una *variabile aleatoria assolutamente continua di tipo gamma* con densità
>
> $$X \sim \Gamma\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k, \lambda\right)$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE della Proposizione 6 (somma di variabili aleatori gamma)
Si dimostra il caso $N = 2$, per la generalizzazione su $\mathbb{N}$ si procede per induzione. Per il lemma sulla somma di *variabili aleatorie assolutamente continue* (Lemma 9 (la somma di variabili aleatorie)) si ha

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} f_1(y) f_2(x-y) \, \mathrm{d}y$$

Dato che abbiamo $X_1 \sim \Gamma(\alpha_1, \lambda)$ e $X_2 \sim \Gamma(\alpha_2, \lambda)$ dobbiamo calcolare

$$f(x) = \frac{\lambda^{\alpha_1} \lambda^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} e^{-\lambda x} \int_0^x y^{\alpha_1 - 1}(x-y)^{\alpha_2 - 1} \, \mathrm{d}y$$

Effettuiamo un cambio di variabile, con $y = xt$. Dunque in questo momento si ha che l'integrale diventa

$$\int_0^x y^{\alpha_1 - 1}(x-y)^{\alpha_2 - 1} \, \mathrm{d}y \to \int_0^1 (xt)^{\alpha_1 - 1} x^{\alpha_2 - 1}(1-t)^{\alpha_2 - 1} x \, \mathrm{d}t$$

Noto che posso portare fuori i termini $x^{\alpha_1 - 1}$ e $x^{\alpha_2 - 1}$, portandoci

$$f(x) = x^{\alpha_1 + \alpha_2 - 1} e^{-\lambda x} \frac{\lambda^{\alpha_1} \lambda^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \int_0^1 t^{\alpha_1 - 1}(1-t)^{\alpha_2 - 1} \, \mathrm{d}t$$

Adesso considero la parte colorata in rosso come una *costante*, chiamandola c. A questo punto abbiamo

$$f(x) = \begin{cases} cx^{\alpha_1 + \alpha_2 - 1} e^{-\lambda x}, x > 0 \\ 0, x \leq 0 \end{cases}$$

Essendo f una *densità* (condizione necessaria per il lemma), ricaviamo che la costante c è proprio

$$c = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}$$

che prova f essere una densità associata a $\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2, \lambda)$. ■

#Corollario

Corollario (somma tra esponenziali).

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono *variabili aleatorie indipendenti* con densità esponenziale $\mathcal{E}(\lambda)$, allora la sua somma $X = \sum_k X_k$ ha densità $\Gamma(n, \lambda)$.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Corollario 7 (somma tra esponenziali)
Omessa, basta considerare che $\mathcal{E}(\lambda) = \Gamma(1, \lambda)$. ■

B4. Densità Gaussiana

Densità Gaussiana

X

Densità gaussiana (o normale). Definizione di densità standard, densità di parametri μ e σ. Esempi qualitativi di gaussiane con parametri. Proposizione: la somma di gaussiane indipendenti forma una gaussiana.

X

0. Voci correlate

- Variabile Aleatoria Assolutamente Continua

1. Densità Gaussiana Standard

#Definizione

Definizione (densità gaussiana standard).

Diciamo che una *variabile aleatoria* X ha *densità gaussiana standard* se la sua densità è

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

e lo indichiamo come $\mathcal{N}(0,1)$ (vedremo perché lo parametrizziamo con $0, 1$).

Si dimostra che $\mathcal{N}(0,1)$ è integrabile con $\int_{\mathbb{R}} f = 1$, ma i nostri strumenti non sono sufficienti per dimostrarlo (infatti l'integrale $\int e^{-x^2} \, dx$ non è esprimibile in termini di funzioni elementari; si usa l'integrazione in più variabili per dimostrare che effettivamente il suo integrale è $\sqrt{\pi}$).

#Teorema

Teorema (funzione di ripartizione, media e varianza della gaussiana standard).

Abbiamo che per la *gaussiana standard* $\mathcal{N}(0,1)$ valgono le seguenti.

i. *Funzione di ripartizione*

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x$$

ii. *Media*

$$E[X] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} xe^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x}_{\text{dispari}} = 0$$

$$E[X^2] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = \underbrace{-\frac{xe^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty}}_{0} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x}_{1} = 1$$

iii. *Varianza*

$$\operatorname{var} X = E[X^2] - E[X]^2 = 1^2$$

2. Densità Gaussiana Generale

#Definizione

Definizione (densità gaussiana con parametri).

Diciamo che una *variabile aleatoria* X ha *densità gaussiana di parametri* $\mu \in \mathbb{R}$ *e* $\sigma > 0$, se la sua densità è

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}}$$

e la indichiamo con $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Adesso vediamo un trucchetto utile per i calcoli con la *gaussiana generale*.

#Osservazione

Osservazione (relazione tra la gaussiana standard e generale).

Notiamo che con le notazioni appena applicate, ci dev'essere qualcosa in comune tra la *gaussiana standard* e la *gaussiana generale*. In questo caso vogliamo trovare un modo per far *ricondurre* la gaussiana generale alla gaussiana standard.

Ricordo preliminarmente che per *trasformazioni lineari* di *variabili aleatorie assolutamente continue* rimangono *variabili aleatorie assolutamente continue*, con densità

$$g(x) = f\left(\frac{x-\beta}{\alpha}\right)\frac{1}{|\alpha|}$$

(1).

Allora prendendo $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ e $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ posso scrivere

$$Y = \sigma X + \mu$$

Per convincerti di questo scrivere la legge g.

#Teorema

Teorema (funzione di ripartizione, media e varianza della gaussiana generale).

Siano $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ e $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$ e $F(t)$ la sua funzione di ripartizione. Allora valgono le seguenti formule.

i. *Funzione di ripartizione*

$$G(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\mathrm{d}x = F\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$$

ii. *Media*

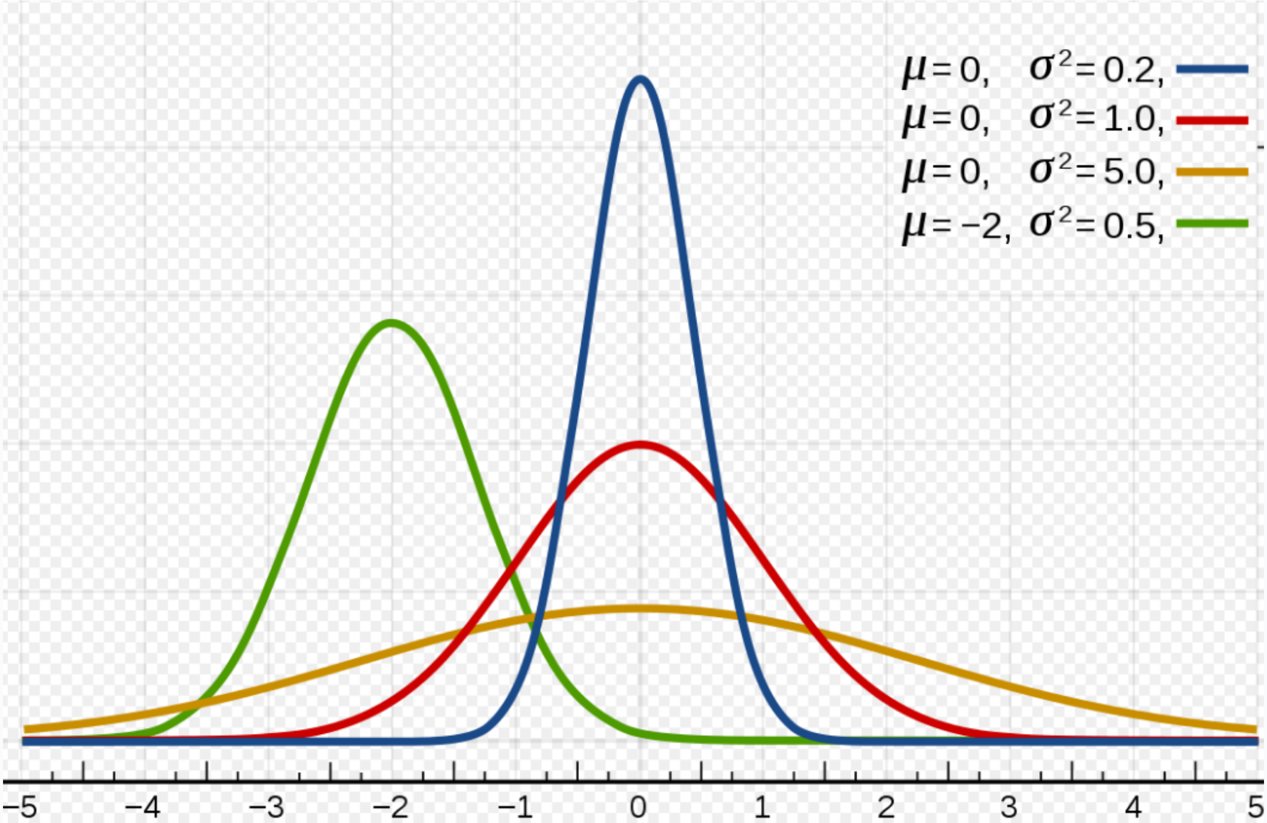
$$E[X] = E[\sigma X + \mu] = \sigma E[X] + \mu = \mu$$

iii. *Varianza*

$$\operatorname{var} Y = \operatorname{var}(\sigma X + \mu) = \sigma^2 \operatorname{var} X = \sigma^2$$

3. Studio Qualitativo di Gaussiane Generali

Prendiamo il seguente grafico, che rappresenta le *densità gaussiane* aventi parametri diversi.



Diamo un una breve e veloce *analisi qualitativa*.

BLU, ROSSO E GIALLO. Qui tutti i parametri μ sono settati in 0. Infatti, notiamo che sono tutti *"centrati"* proprio nel punto 0.

BLUE E GIALLO. Nelle due curve notiamo una grandissima differenza tra i loro picchi. Infatti, differiscono del parametro σ di *molto!* Più grande è la σ, più si appiattisce (quindi si distribuisce lungo la retta); invece più piccola è, più si concentra sul punto di concentrazione (ovvero il valor medio μ). Notiamo che per $\sigma \to 0$ ottengo una *variabile aleatoria discreta*, con $p\{X=\mu\}=1$ e $p\{X \neq \mu\}=0$. Questa è infatti il *delta di Dirac*.

4. Somma di Gaussiane

#Proposizione

> Proposizione (la somma di gaussiane).
>
> Siano $X_1, \dots, X_n$ delle *variabili aleatorie indipendenti* con densità gaussiana $\mathcal{N}(\omega_k, \sigma_k^2)$.
>
> Sia $X := \sum_k X_k$. Allora vale che X è una *v.a. gaussiana* con densità
>
> $$X \sim \mathcal{N}\left(\sum_{k=1}^n \mu_k, \sum_{k=1}^n \sigma_k^2\right)$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE della Proposizione 6 (la somma di gaussiane)
Segue dal calcolo *diretto della densità* (si risparmiano i conti dettagliati, per fare tutto bene bisogna andare per induzione) (Lemma 9 (la somma di variabili aleatorie)). Facciamo comunque una breve nota sui parametri: dato che stiamo supponendo l'indipendenza, abbiamo che

$$E[X] = \sum_k E[X_k], \operatorname{var} X = \sum_k \operatorname{var} X_k$$

Questo ci conferma che i parametri sono proprio le loro *rispettive somme*. ■

B5. Ricavare Trasformazioni di V.A. assolutamente continue

Trasformazione delle Variabili Aleatorie Assolutamente Continue

X

Tecnica pratica per valutare le trasformazioni delle v.a. assolutamente continue.

X

0. Voci correlate

- Variabile Aleatoria Assolutamente Continua

1. Tecnica

#Proposizione

TECNICA. (*Valutazione della trasformazione delle v.a. assolutamente continue*)
Abbiamo appena visto un teorema per cui se $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ è una *trasformazione regolare*, allora $Y = \psi \circ X$ rimane una *v.a. assolutamente continua* (Proposizione 7 (composizione di variabili aleatorie assolutamente continue)). Vediamo il caso *non-regolare*.

1. Prima di tutto poniamo $A_t = \{x \in \mathbb{R} : \psi(x) \leq t\}$: da questo si ha che la funzione di ripartizione è

$$G(t) := p\{Y \leq t\} = p\{X \in A_t\} = \int_{A_t} f(x) \, \mathrm{d}x$$

La chiave sta nel *"sperare"* che l'insieme A_t non sia *troppo irregolare*.

2. Supponendo che Y rimanga *assolutamente continua*, avremmo per il *teorema fondamentale del calcolo* che la derivata G' è la densità g. Però spesso abbiamo che le densità *non* sono continue! Allora in tal caso si deriva G *solo* dove è possibile. Il

caso fortunato sarebbe quello in qui abbiamo la *derivabilità a tratti* (ovvero derivabile ad eccezione dei punti $x_1, \ldots, x_n$). Definiamo dunque

$$g(x) = \begin{cases} G'(x), \exists G' \\ 0, \text{ alt.} \end{cases}$$

3. Andrebbe verificata che risulti effettivamente

$$G(t) = \int_{-\infty}^{t} g(y) \, \mathrm{d}y$$

ma di solito ci *"fidiamo"*.

2. Esempio e Controesempio

Prendiamo degli esempi in cui questa tecnica *funziona*, e un'altra in cui *non funziona*. Partiamo da quella che funziona.

#Esempio

Esempio (il quadrato di una guassiana standard).

Sia $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Vogliamo calcolare $Y = X^2$.

Come prima cosa, essendo $Y \geq 0$, abbiamo che $p\{Y \leq t\} = 0$ per $t < 0$. Invece per $t \geq 0$ abbiamo $A_t = [-\sqrt{t}, \sqrt{t}]$. Calcoliamo dunque

$$p\{X \in A_t\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{2}} \, \mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x$$

Di conseguenza si definisce la funzione di partizione

$$G(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x \cdot \chi_{\mathbb{R}^+}(t)$$

Ne segue che derivandola abbiamo

$$G'(t) = g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{t}{2}} \chi_{\mathbb{R}^+}(t)$$

Da notare che purtroppo $g(0)$ non è definito. Fa niente! Poniamo $g(0) = 0$ (o una qualsiasi costante arbitraria).

Notiamo che questa è proprio la densità gamma $\Gamma(0.5, 0.5)$ (1).

#Esempio

Esempio (la scala del diavolo).

Definiamo una funzione *ricorsivamente*.

Ovvero per $N = 1$ splittiamo *tre intervalli di definizione*, poi assegniamo $0, \frac{1}{2}, 1$ la funzione di ogni intervallo.
Dopodiché per $N = 2$ facciamo la stessa identica cosa per ogni intervallo splittato, cambiamo gli estremi (ad esempio nel primo intervallino abbiamo $0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$).
Iteriamo all'infinito.

Per $N \to +\infty$ questa *costruisce* una funzione *continua e derivabile* dappertutto.
Per costruzione, abbiamo una *"infinità di scalini"* costanti, quindi la derivata è nulla ovunque.

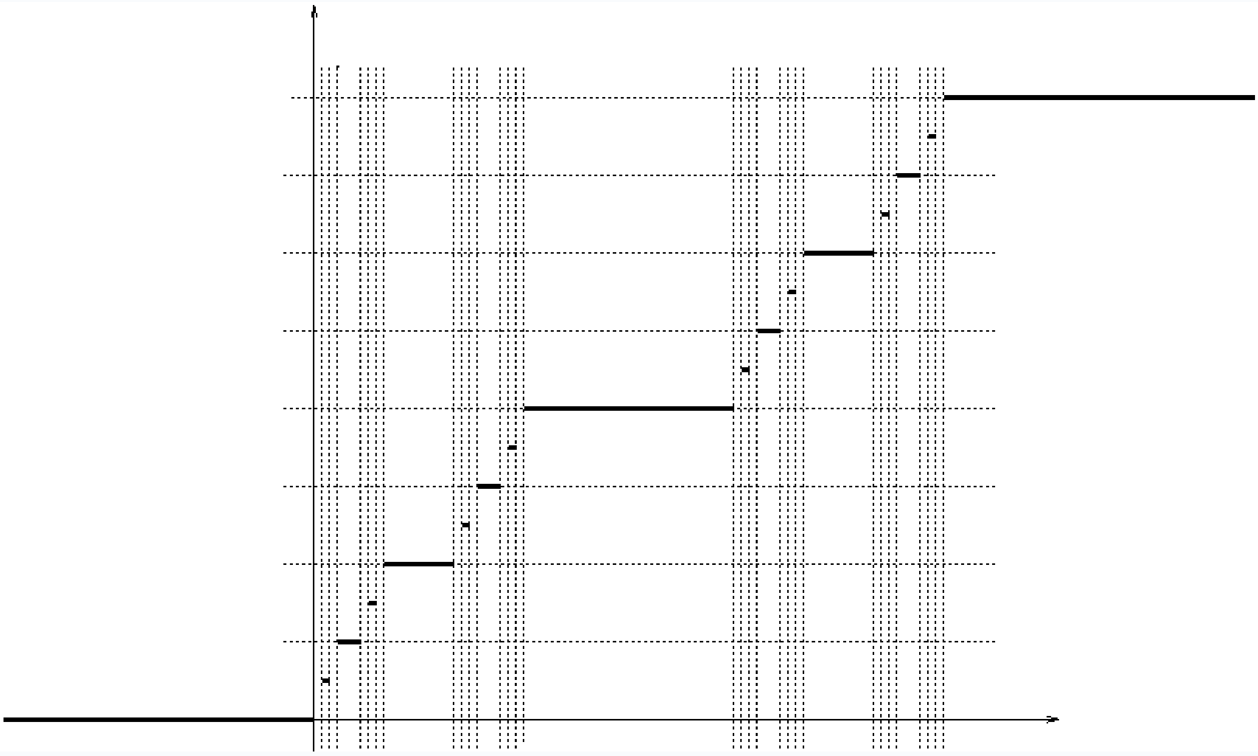
Adesso ricaviamo la *funzione di partizione* dalla derivata (che dovrebbe rappresentare la densità):

$$\int 0 = C \in \mathbb{R}$$

accipicchia? Ma cos'è successo? Non ho più degli scalini, bensì una sola costante.

Questo è dovuto principalmente all'*effetto di diffusione*, ovvero i *salti* spariscono ma *esistono ancora*. Questa è la *contraria* della *concentrazione*, dove abbiamo $\sigma \to 0$).

FIGURA 2.1. (*La scala del diavolo*)



B6. Densità Chi Quadro

Densità Chi Quadro

X

Densità chi quadro χ^2: definizione operativa, proprietà. Legame con la varianza campionaria.

X

0. Voci correlate

- Definizione di Varianza e Deviazione Standard
- Densità Gamma

1. Definizione di Densità χ^2

#Definizione

Definizione (densità chi quadro χ^2).

Siano $X_1, \ldots, X_N$ delle *variabili aleatori indipendenti* con *densità gaussiana standard*, ovvero $X_i \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Ponendo $Y = \sum_k^N X_k^2$, si definisce la sua densità come la *densità del χ quadrato ad N gradi di libertà*, e lo si indica con $\chi^2(N)$.

#Osservazione

Osservazione (buona posizione della sua definizione).

Abbiamo che χ^2 è *sempre una densità di una variabile aleatoria assolutamente continua*. Infatti, come calcolato precedentemente (Esempio 1 (il quadrato di una guassiana standard)), abbiamo che il quadrato della gaussiana standard è

$$g(t) = \Gamma(0.5, 0.5)$$

Questo significa che $\chi^2(1) = \Gamma(0.5, 0.5)$.

Dopodiché possiamo generalizzare su $N \in \mathbb{N}$, dal momento che conosciamo le regole per *calcolare la somma di densità gamma* (Proposizione 6 (somma di variabili aleatori gamma)), ovvero $\sum_k^N \Gamma(0.5, 0.5) = \Gamma\left(\sum_n^K 0.5, 0.5\right)$ ovvero abbiamo

$$\boxed{\chi^2(N) = \Gamma\left(\frac{N}{2}, \frac{1}{2}\right)}$$

2. Proprietà della Chi Quadro

Dato che la chi quadro non è altro che una *gamma* con dei parametri speciali, possiamo calcolare tranquillamente la sua media e varianza (oppure possiamo farlo anche tenendo conto del fatto che abbiamo gaussiane standard).

#Proposizione

Proposizione (media e varianza del chi quadro).

Abbiamo che

$$\begin{gathered} E\left[\chi^2(N)\right] = N \\ \operatorname{var}\chi^2(N) = 2N \end{gathered}$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE della Proposizione 3 (media e varianza del chi quadro)

Ci sono due modi per dimostrarlo. La prima è quella di conoscere il *comportamento* della media e varianza di una Γ, ovvero $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda) \to E[X] = \frac{\alpha}{\lambda}, \operatorname{var} X = \frac{\alpha}{\lambda^2}$ (Teorema 5 (media e varianza della gamma)). Oppure per la media $E[\chi^2]$ è sufficiente considerare che $X_k \sim \mathcal{N}(0,1)$, dunque $E[X_k] = 0$ e $\operatorname{var} X_k = 1$, da cui abbiamo $E[\chi^2(N)] = \sum_k^N E[X_k^2] = N$. ■

Adesso vediamo come si comporta questa densità rispetto alla somma.

#Proposizione

Proposizione (comportamento del chi quadro rispetto alla somma).

Se $Y_1 \sim \chi^2(N_1)$ e $Y_2 \sim \chi^2(N_2)$ sono indipendenti, allora si ha che

$$Y_1 + Y_2 = \chi^2(N_1 + N_2)$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE della Proposizione 4 (comportamento del chi quadro rispetto alla somma)

Questo è dovuto al fatto che $\chi^2(N) = \Gamma(0.5N, 0.5)$, e sfruttando il *comportamento della somma delle v.a. gamma indipendenti* (Proposizione 6 (somma di variabili aleatori gamma)), si ha

$$\chi^2(N_1) + \chi^2(N_2) = \Gamma(0.5(N_1 + N_2), 0.5) = \chi^2(N_1 + N_2)$$

che è la tesi. ■

Vediamo un approccio pratico per approssimare questa densità con la normale.

#Proposizione

> Proposizione (approssimazione di una chi quadro con una normale).
>
> Per $\boxed{n > 30}$ si ha che $\chi^2(N)$ è approssimabile con una *di tipo gaussiano*.
>
> Infatti, se $(X_n)_n$ è una successione di *v.a. del tipo* $\chi^2(1)$, allora si avrebbe $Y_n = \sum_k^N X_k \sim \chi^2(N)$, da cui ricavo
>
> $$Y_n \simeq Y \sim \mathcal{N}(N, 2N)$$
>
> Di conseguenza possiamo approssimare la sua funzione di ripartizione con ϕ come
>
> $$p\{Y_n \leq x\} \simeq \phi\left(\frac{x-n}{\sqrt{2n}}\right)$$

3. Legame con la Varianza Campionaria

Va bene, tutto apposto. Però, perché abbiamo definito una densità del genere? Adesso vediamo.

#Definizione

> Definizione (varianza campionaria).
>
> Data una successione $(X_n)_n$ di *variabili aleatorie* su uno medesimo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{A}, p)$, si definisce la *varianza campionaria* come la variabile aleatoria
>
> $$\boxed{s_n^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^n (X_k - \overline{X_n})^2}$$
>
> con $\overline{X_n}$ la *media campionaria* di $(X_n)_n$ (Definizione 1 (media campionaria di una sequenza di variabili aleatorie)).

Adesso vediamo il *legame* che collega χ^2 con s^2.

#Proposizione

> Proposizione (proprietà fondamentale del chi quadro).

Sia $(X_n)_n$ una *successione di variabili aleatorie indipendenti* tutte con la medesima *distribuzione gaussiana* $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Allora valgono che:
i. la somma della successione normalizzata diventa un chi quadro

$$\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{X_k-\mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(N)$$

ii. la somma della successione normalizzata con la media campionaria diventa la varianza campionaria, che diventa il qui quadro

$$\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{X_k-\overline{X_N}}{\sigma}\right)^2 = (N-1)\frac{s_N^2}{\sigma^2} = \chi^2(N-1)$$

iii. s_n^2 e $\overline{X}_n$ sono tra loro indipendenti

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE della Proposizione 7 (proprietà fondamentale del chi quadro)
Nota: dimostrazione parziale
i. Segue dal fatto che l'argomento della sommatoria $\frac{X_k-\mu}{\sigma}$ non è altro che la densità gaussiana rinormalizzata, dunque la tesi segue dalla definizione di χ^2.
ii. Omessa, però si osserva che differisce dal punti i., in quanto compiendo la sottrazione $X_n - \overline{X_n}$ mi sbarazzo di un grado di libertà, in particolare dove ho $X_N - \overline{X_N} = 0$ (infatti queste due variabili aleatorie *non* sono indipendenti tra di loro). Dopodiché la tesi segue similmente.
iii. Omessa. ■

4. Esempio Pratico

#Esercizio

Esercizio (esercizio sulla densità chi quadro).

Una ditta confeziona kiwi. Dallo storico è noto che la *varianza delle dimensioni del frutto* è $\sigma^2 = 1.26 \text{ cm}^2$. Dovendo fornire frutti con simili dimensioni, la ditta scarta una partita di frutti se la *varianza campionaria* di 40 pezzi scelti *supera* 2 (ovvero $s_{40}^2 \geq 2$).

Assumendo che la *dimensione* segua una *legge normale* con σ^2 appena riportata sopra, qual è la probabilità che *una partita venga scartata*?

SVOLGIMENTO. (Esercizio 8 (esercizio sulla densità chi quadro))
Modellizziamo $X_1, \ldots, X_{40}$ le *dimensioni dei pezzi misurati*. Per ipotesi possiamo

modellizzarli con $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Ne conosciamo solo il σ^2, ma va comunque bene. Per il punto *ii.* sulla densità, possiamo calcolare la *varianza campionaria rinormalizzata* come

$$\frac{(40-1)s_{40}^2}{(1.26)^2} \sim \chi^2(40-1) = \chi^2(39)$$

Inoltre, dato che $n = 40 > 30$, possiamo approssimare $\chi^2(39) \simeq \mathcal{N}(39, 78)$.
Allora abbiamo

$$p\{s_{40}^2 > 2\} = p\left\{\frac{39 s_{40}^2}{1.26^2} > 61.9\right\} = 1 - p\left\{\chi^2(39) \leq 61.9\right\} \simeq 0.011$$

■

B7. Densità T-Student

Densità di Student

X

Densità di Student ad n gradi di libertà: definizione operativa, proprietà: comportamento asintotico, convergenza in legge.

X

0. Voci correlate

- Densità Chi Quadro
- Densità Gaussiana

1. Definizione di Densità di Studentt

#Definizione

Definizione (densità di Student).

Siano $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ e $Y \sim \chi^2(n)$ due *variabili aleatorie indipendenti*. Sia posta la variabile aleatoria

$$T = \sqrt{n}\frac{X}{\sqrt{Y}}$$

Allora la densità associata a T si dice *"densità di Student ad n gradi di libertà"*, e lo si indica con $\boxed{t(n)}$.

La si può scrivere (semi)esplicitamente come

$$t(n)(s)=c_n\left(1+\frac{s^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

con c_n un coefficiente reale e $s\in\mathbb{R}$ un parametro.

#Osservazione

Osservazione (la buona posizione della definizione).

La definizione è ben posta. Infatti essendo Y definita solamente sulla *semiretta positiva* (altrimenti ho misura nulla), ho $p\{T\leq 0\}=0$.

2. Proprietà della Student

#Proposizione

Proposizione (comportamento asintotico della Student).

Sia $X\sim t(n)$. Allora per n grande ho la *convergenza in legge*

$$\lim_n X=\mathcal{N}(0,1)$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE della Proposizione 3 (comportamento asintotico della Student)
Prendiamo la definizione esplicita della T-student.

$$t(n)(s)=c_n\left(1+\frac{s^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

Passando al limite ho:

$$\lim_n\left(1+\frac{s^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}=e^{-\frac{s^2}{2}}$$
$$\lim_n c_n=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

così ho

$$\lim_n t(n)(s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{s^2}{2}}$$

che è proprio la definizione della densità gaussiana per $\mu = 0$ e $\sigma^2 = 1$ (Definizione 1 (densità gaussiana standard)).

Da dove salta fuori questa densità? Cosa ne facciamo? Vedremo che questa ha legami particolari con la chi quadro χ^2.

#Proposizione

> Proposizione (rappresentazione della varianza e media campionaria con la t-Student).
>
> Siano date $X_1, \dots, X_n$ variabili aleatorie *indipendenti* e con *densità gaussiana* $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Allora abbiamo che
>
> $$\boxed{\sqrt{n}\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sqrt{s_n^2}} \sim t(n-1)}$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE della Proposizione 4 (rappresentazione della varianza e media campionaria con la t-Student)
Prima di tutto *normalizziamo* la media campionaria $\overline{X}_n \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$, da cui ho

$$\frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Per quanto visto sulla *varianza campionaria* e sulla *densità Chi quadro*, ho

$$\frac{(n-1)s_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

poiché s_n e $\overline{X}_n$ sono indipendenti, posso moltiplicare e dividere per ottenere l'espressione finale

$$\sqrt{n}\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sqrt{s_n^2}} = \sqrt{n-1}\frac{\frac{\overline{X}_n-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim \mathcal{N}(0,1)}{\sqrt{\frac{(n-1)s_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)}} \sim t(n-1)$$

e la tesi segue per la definizione di $t(n)$. ■

X

C. IL TEOREMA DEL LIMITE CENTRALE

C1. Legge dei Grandi Numeri

Legge dei Grandi Numeri

X

Definizione preliminare: media campionaria su un esperimento. Definizione: successione di variabili aleatorie che soddisfa la legge (debole) dei grandi numeri. Teorema: condizione sufficiente per la legge dei grandi numeri.

X

0. Voci correlate

- Proprietà della Varianza
- Definizione di Variabile Aleatoria

1. Definizione di Media Campionaria

#Definizione

Definizione (media campionaria di una sequenza di variabili aleatorie).

Siano $X_1, \ldots, X_N$ delle *variabili aleatorie* su uno medesimo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{A}, p)$.

Si dice la sua *media campionaria* come la variabile aleatoria

$$\overline{X} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} X_k$$

#Osservazione

Osservazione (proprietà immediate).

Notiamo che $\overline{X}$ rimane una *variabile aleatoria*, dato che una *somma di variabili aleatorie* rimane una *variabile aleatoria* (Lemma 9 (la somma di variabili aleatorie)).

#Osservazione

Osservazione (l'idea).

L'idea di questa definizione è di dare una definizione ben posta di *"set di esperimenti"*: intuitivamente abbiamo che con l'aumentare di $N \to +\infty$, ci sono

> *meno fluttuazioni* di $\overline{X}$. Ovvero più esperimenti facciamo, meno errori abbiamo. Formalizziamo ciò detto con la *legge di grandi numeri*.

2. Legge debole dei Grandi Numeri

#Definizione

> Definizione (legge debole dei grandi numeri).
>
> Una *successione di variabili aleatorie* $(X_n)_n$ su uno stesso spazio di probabilità, tutte con lo *stesso valore medio* $E[X_n] = \mu$, si dice che *soddisfa le legge (debole) dei grandi numeri* se vale che
>
> $$\forall \varepsilon > 0, \lim_n p\left\{|\overline{X}_n - \mu| > \varepsilon\right\} = 0$$
>
> Ovvero con l'aumentare di n, l'errore sulla *media campionaria* tende a 0 e tende a concentrarsi sulla media μ.
>
> Alternativamente, ponendo $Z_n = \overline{X}_n - \mu$ la *"variabile aleatorie errore"*, si ha
>
> $$\forall \varepsilon > 0, \lim_n p\left\{|\overline{Z}_n| > \varepsilon\right\} = 0$$

3. Condizione Sufficiente per la Legge dei Grandi Numeri

Vogliamo trovare delle ipotesi su $(X_n)_n$ affinché la *legge dei grandi numeri* sia soddisfatta. Vediamo un esempio

#Teorema

> Teorema (condizione sufficiente per la legge dei grandi numeri).
>
> Sia $(X_n)_n$ una successione di variabili aleatorie, tali che:
>
> - Hanno *momento secondo finito*
> - Sono *scorrelate*
> - Hanno lo *stesso valor medio* e la *stessa varianza*
>
> $$\forall n \neq k \in \mathbb{N}: \quad \begin{aligned} E[X_n] &= \mu \\ \operatorname{var} X_n &= \sigma^2 \\ \operatorname{cov}(X_n, X_k) &= 0 \end{aligned}$$
>
> Allora $(X_n)_n$ soddisfa la legge dei grandi numeri.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 5 (condizione sufficiente per la legge dei grandi numeri)
Si dimostra tramite la disuguaglianza di *Čebyšëv* (Proposizione 4 (disuguaglianza di Čebyšëv)). Per usarla, calcoliamo prima la varianza di $\overline{X}_n$.

$$\operatorname{var} \overline{X}_n = \operatorname{var} \left(\frac{1}{n} \sum_n X_n \right) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \operatorname{var} X_k = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

Inoltre la sua media $E[\overline{X}_n] = \mu$ (per la linearità). Adesso possiamo finalmente usare *Čebyšëv*, dandoci

$$0 \leq p \left\{ |\overline{X}_n + \mu| > \varepsilon \right\} \leq \frac{\operatorname{var} \overline{X}_n}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

Per $n \to +\infty$, abbiamo $\varepsilon \to 0$, da cui si ha la tesi (per il teorema dei due carabinieri). ■

#Osservazione

> Osservazione (ipotesi alternative).
>
> Notiamo che potevamo *"modificare"* delle ipotesi per rendere comunque valido il teorema.
>
> - Invece di richiedere che si ha la *stessa varianza*, bastava richiedere che sono *tutte equilimiatate*; ovvero
>
> $$\sup_k \sigma_k^2 < +\infty$$
>
> - Si può richiedere che *abbiano solo valor medio finito* se X_k hanno la *stessa distribuzione* e sono *indipendenti* (dunque scorrelate).
>
> Si può fare questo dato che il punto della dimostrazione consiste nel fatto che la *media campionaria* ha la stessa media, ma la sua varianza è più piccola delle X_k ed è *infinitesima* per n.

C2. Teorema del Limite Centrale

Teorema del Limite Centrale

X

Teorema del limite centrale. Osservazione preliminare, enunciato teorema, osservazione. Approfondimento tecnico: convergenza in legge e in probabilità.

0. Voci correlate

- Legge dei Grandi Numeri

1. Valutazione Asintotica dell'Errore

IDEA. Per la definizione appena messa sulla *legge dei grandi numeri* (Definizione 4 (legge debole dei grandi numeri)) abbiamo il limite di una successione che va a 0. La domanda che ci poniamo è la seguente: *con quale "velocità" converge?*
Ovvero, se è possibile confrontare la successione convergente $a_n \to 0$ con una delle seguente *"successioni misuratori"*:

$$
|\ \log_a n \mid n^\alpha \mid x^n \mid n! \mid n^n \ |
$$

da sinistra abbiamo i più *"lenti"*, a destra i più *"veloci"*. Queste sono tutte *successioni divergenti*, con velocità crescenti.

IL LIMITE. Adesso posso valutare le *velocità* calcolando il seguente limite. Sia Z_n la successione convergente a 0, b_n la successione misuratore, allora considero

$$
\lim_n Z_n b_n = c \in \tilde{\mathbb{R}}
$$

Se ho $c \neq 0$, allora ciò significa che la successione a_n si comporta come $\frac{c}{b_n}$. Altrimenti, se ho $c = 0$, allora a_n è troppo veloce.

L'OBBIETTIVO. Adesso vogliamo trovare una successione $(b_n)_n$ divergente tale che possiamo moltiplicarci Z_n così che converga ad una *variabile aleatoria non nulla*. Ovvero voglio ottenere il limite

$$
\lim_n Z_n b_n \neq 0
$$

indipendentemente dalla natura di Z_n.
Facciamoci l'idea per un *caso specifico*: prendiamo una successione di *gaussiane* $(X_n)_n : X_k \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Supponendo l'indipendenza, abbiamo

$$
\sum_{k=1}^n X_k \sim \mathcal{N}(n\mu + n\sigma^2)
$$

(Proposizione 6 (la somma di gaussiane)). Adesso normalizzo tutto per n, ottenendo la *media campionaria*

$$
\overline{X}_k \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)
$$

Adesso riscalo tutto verso la *gaussiana normale*, prendendo

$$\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Allora abbiamo

$$\lim_n |\overline{X}_n - \mu| \sqrt{\frac{n}{\sigma^2}} = \lim_n |Z_n| \sqrt{\frac{n}{\sigma^2}} \to 0$$

Allora la nostra successione candidata è $b_n = \sqrt{\frac{n}{\sigma^2}}$. Si dimostra che questo è il comportamento delle *variabili aleatoria indipendenza con la stessa distribuzione*. Vedremo questo col *teorema del limite centrale*.

#Definizione

Definizione (variabili aleatorie indipendenti con la stessa distribuzione).

Si dice che una *successione* di variabili aleatorie $(X_n)_n$ è di *variabili aleatorie indipendenti con la stessa distribuzione* (i.i.d.) se hanno la stessa distribuzione, o la stessa funzione di ripartizione.

2. Teorema del Limite Centrale

#Teorema

Teorema (del limite centrale).

Sia $(X_n)_n$ una *successione di variabile aleatorie i.i.d.* che ammettono *momento secondo finito*. Sia μ il loro valore medio e σ^2 la loro varianza. Allora ponendo Z_n la *"media campionata riscalata"*, ovvero

$$Z_n := \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}$$

Si ha che

$$\lim_n p\{Z_n \leq x\} = \phi(x)$$

con $\phi(x)$ la *funzione di ripartizione* di $\mathcal{N}(0,1)$. In altre parole,

$$\boxed{\lim_n Z_n \sim \mathcal{N}(0,1)}$$

> Ovvero Z_n tende alla *gaussiana normale*.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del Teorema 2 (del limite centrale)

Omessa. Osserviamo solo che le medie e le varianze sono

$$E[\overline{X}_n] = \mu, \operatorname{var} X_n = \frac{\sigma^2}{n}$$

e poi

$$E[Z_n] = 0, \operatorname{var} Z_n = 1$$

che di dà l'idea generale. ■

3. Convergenza in legge e in probabilità

#Definizione

> Definizione (convergenza in legge e in probabilità).
>
> Si dice che una successione di v.a. $(X_n)_n$ converge *in legge* a X se vale che
>
> $$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_n F_n(x) = F(x)$$
>
> Se sono definite su uno stesso *spazio di probabilità*, allora si dice che converge in probabilità a X se
>
> $$\lim_n p\underbrace{\{|X_n - X| > \varepsilon\}}_{\in \Omega} = 0, \forall \varepsilon > 0$$
>
> Notiamo che hanno la stessa gerarchia tra *convergenza puntuale e uniforme* per *successioni di funzioni*.

C3. Approssimazione delle Densità con la Gaussiana

Approssimazione delle Densità con la Gaussiana

X

Conseguenze del teorema del limite centrale: approssimazione di alcune densità con la gaussiana. Binomiale, Poisson e Gamma.

X

0. Voci correlate

- Teorema del Limite Centrale
- Densità Binomiale
- Densità di Poisson
- Densità Gamma

1. Approssimazione Normale della Binomiale

#Teorema

Teorema (approssimazione normale della binomiale).

Sia $X_k \sim B(1, q)$ (ovvero ha la *densità binomiale*, 1). Allora dai calcoli su tale densità ricordiamo che $E[X_k] = q$ e $\operatorname{var} X_k = q(1-q)$. Sia $Y_n \sim B(n, q)$.

Allora valgono per $n \to +\infty$, che questi sono approssimabili con la *gaussiana*.

$$
\begin{gathered}
Y_n \simeq Y \sim \mathcal{N}(nq, nq(1-q)) \\
\overline{X}_n \simeq X \sim \mathcal{N}\left(q, \frac{q(1-q)}{n}\right)
\end{gathered}
$$

Con la *funzione di ripartizione* per Y_n definita come

$$
p\{Y_n \leq x\} \simeq p\{Y \leq x\} = \phi\left(\frac{x - nq}{\sqrt{nq(1-q)}}\right)
$$

#Osservazione

Osservazione (correzione di continuità).

Notiamo che abbiamo *variabili aleatorie discrete* (1), dunque abbiamo il problema per cui

$$
p\{Y_n \leq x\} = p\{Y_n \leq x + \delta\}, \forall \delta \in [0, 1]
$$

Quindi con tale approssimazione abbiamo *valori diversi* di $p\{Y_n \leq x\}$, dato che la gaussiana è *continua*. Per convenzione scegliamo $\delta = 0.5$ e calcoliamo $p\{Y_n \leq x\}$ come

$$
\phi\left(\frac{x + 0.5 - nq}{\sqrt{nq(1-q)}}\right)
$$

questa procedura si chiama *correzione di continuità*.

#Osservazione

Osservazione (due approssimazioni per la binomiale).

Notiamo che abbiamo *due approssimazioni possibili* per la binomiale $B(n, q)$.

Di solito si usa l'*approssimazione normale* quando abbiamo

$$nq > 5 \wedge n(1-q) > 5$$

Invece quando non abbiamo tale condizione possiamo *provare* ad usare l'*approssimazione di Poisson*, se abbiamo

$$n > 50 \wedge q < \frac{10}{n}$$

Se la seconda condizione non viene rispettata, si potrebbe contare il numero di insuccessi $\tilde{q} = 1 - q$.

2. Approssimazione Normale della Poisson

#Teorema

Teorema (l'approssimazione normale della Poisson).

Siano $X_k \sim P_1, Y_n \sim P_n$. Ricordiamoci che la *somma di Poisson* è ancora una *Poisson*.

Allora, dato che $\mu = \sigma^2 = 1$ per X_k, abbiamo

$$\begin{gathered} Y_n \simeq Y \sim \mathcal{N}(n, n) \\ p\{Y_n \leq x\} \simeq \phi\left(\frac{x-n}{\sqrt{n}}\right) \\ \overline{X}_n \simeq X \sim \mathcal{N}\left(1, \frac{1}{n}\right) \end{gathered}$$

#Osservazione

Osservazione (caso d'uso).

Si usa quest'approssimazione per $n \geq 5$ e anche quando $\lambda \notin \mathbb{Z}$.

3. Approssimazione Normale della Gamma

#Teorema

Teorema (approssimazione normale della gamma).

Sia $X_k \sim \Gamma(1, \lambda)$. Poiché la somma di gamma rimane una gamma (1), si ha che $Y_n \sim \Gamma(n, \lambda)$.

Abbiamo $\mu = \frac{1}{\lambda}$ e $\sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$. Allora per $n \geq 30 \to +\infty$ si ha

$$Y_n \simeq Y \sim \mathcal{N}\left(\frac{n}{\lambda}, \frac{n}{\lambda^2}\right)$$
$$\overline{X}_n \simeq X \sim \mathcal{N}\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{n\lambda^2}\right)$$
$$p\{Y_n \leq x\} \simeq \phi\left(\frac{x - \frac{n}{\lambda}}{\sqrt{\frac{n}{\lambda^2}}}\right) = \phi\left(\frac{\lambda x - n}{\sqrt{n}}\right)$$

X

D. MODELLIZZAZIONE CON V.A. ASSOLUTAMENTE CONTINUE

D1. Il tempo d'attesa, sistemi in parallelo o in serie, sistemi a scorta

Modellizzazione del Tempo d'Attesa

X

Modellizzazione dei fenomeni che coinvolgono il tempo d'attesa, senza usura. Esempio del meteorite. Sistemi senza usura: sistema in serie. Sistema in parallelo. Sistema a scorta (con usura).

X

0. Voci correlate

- Densità Esponenziale
- Densità Gamma

1. Esempio Preliminare

Adesso vogliamo *modellizzare* i fenomeni che coinvolgono dei *tempi d'attesa fino all'arrivo del primo "successo"*. Questo ci vagamente ricorda della densità *geometrica* (Definizione 1 (densità geometrica)), solo che siamo nel *caso continuo*. Come vedremo, la *"controparte continua"* della densità geometrica è la densità *esponenziale*.

#Esempio

ESEMPIO. (*Il meteorite*)
La quantità di tempo che passa prima che un piccolo meteorite precipiti nel deserto del Sahara è modellizzata con una v.a. $X \sim \mathcal{E}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ con media λ giorni.
Per calcolare la probabilità che il meteorite caschi nell'intervallo di tempo $p\{t_1 \leq X \leq t_2\}$ si calcola l'integrale

$$p\{t_1 \leq X \leq t_2\} = \int_{t_1}^{t_2} \lambda e^{-\lambda x} \, \mathrm{d}x = e^{\lambda t}\Big|_{t_1}^{t_2}$$

Notiamo la *densità esponenziale* gode l'assenza di memoria. Ovvero scegliendo un opportuno incremento del tempo T, sapendo che in tale incremento non è successo nulla, si ha

$$p\{t_1 + T \leq X \leq t_2 + T | X \geq T\} = p\{t_1 \leq X \leq t_2\}$$

#Osservazione

> Osservazione (l'usura è un aspetto significativo).
>
> Quindi osserviamo che *non tutti i fenomeni* che coinvolgono dei *tempi d'attesa* possono essere modellizzate con l'esponenziale $\mathcal{E}$. Infatti, se questo fenomeno coinvolge anche l'*usura*, non ha più senso questo modello.
>
> Nei casi dell'*usura*, di solito la probabilità che qualcosa si *"guasti"* (o accade) diventa più alta col passare del tempo. Ovvero
>
> $$p\{X > T + t | X > T\} < p\{X > t\}$$

2. Sistemi Senza Usura

Vediamo dei modelli particolari *senza usura*.

MODELLO. (*Sistema in serie*)
Vogliamo calcolare il tempo di vita X di un sistema costituito da N *elementi* posti in *serie*. Supponiamo ogni elemento X_k sia indipendente dagli altri e che è rappresentata dalla legge $X_k \sim \mathcal{E}(\lambda_k)$. Poiché i *componenti sono posti in serie*, prendiamo la vita dell'elemento *più breve* (perché se se ne guasta uno, il sistema non va più). Allora

$$X = \min\{X_1, \ldots, X_N\}$$

Da cui si ha

$$p\{X \geq t\} = p\{X_1, \ldots, X_N \geq t\} = \prod_{1 \leq i \leq N} p\{X_i \geq t\} = e^{-(\sum_{1 \leq i \leq N} \lambda_i)t}$$

Deduciamo che la sua *funzione di ripartizione* è

$$F(t) = p\{X \le t\} = 1 - e^{-(\sum_i \lambda_i)t}$$

Derivando questa funzione otteniamo

$$F'(t) = \sum_{1 \le i \le N} \lambda_i e^{-(\sum_i \lambda_i)t} \sim \mathcal{E}(\lambda = \Sigma_i \lambda_i)$$

Ovvero X è una *esponenziale* con $\lambda = \sum_i \lambda_i$. Da questo segue che la sua media è

$$E[X] = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\sum_i \lambda_i} < E[X_k], \forall k$$

Quindi aggiungendo più componenti accorciamo la sua vita. In particolare, assumendo che tutte le X_k abbiano la stessa vita media $E[X_k] = \eta$, abbiamo

$$E[X] = \frac{\eta}{N}$$

MODELLO. (*Sistema in parallelo*)
Prendiamo il *"contrario"* del sistema in *serie*: al posto di porre i componenti X_k in serie, li poniamo in *parallelo*. Allora abbiamo

$$X = \max\{X_1, \dots, X_N\}$$

In questo caso si ha

$$p\{X \le t\} = p\{X_1, \dots, X_N \le t\} = \prod_{1 \le i \le N} p\{X_i \le t\} = \prod_{1 \le i \le N} (1 - e^{-\lambda_i t})$$

Per trovarci la *densità* di X basta derivare quest'espressione, dato che abbiamo che fare con la *funzione di ripartizione* $F(t) := p\{X \le t\}$. Comunque non si ha a che fare con una *densità esponenziale*, quindi il *sistema ha memoria*.

Supponendo per semplicità che tutti i parametri $\lambda_1 = \ldots = \lambda_3 = \lambda$ sono le stesse, abbiamo che la densità vale (inoltre siamo nel caso $N = 3$, altrimenti i calcoli diventano troppo contosi)

$$f(x) = 3\lambda(1 - e^{-\lambda t})^2 e^{-\lambda t}$$

Posto $\eta := E[X_k]$, abbiamo $E[X] = \frac{11}{6}\eta$.

3. Sistemi Con Usura

Vediamo un caso particolare per *l'usura*.

MODELLO. (*Sistema a scorta*)
Supponiamo di avere un *sistema* costituito da N elementi identici, che vanno fatto

funzionare *uno alla volta*. Ovvero quando si guasta uno, viene sostituto da un altro, e così via finché tutte sono guaste.
Prendendo $X_k \sim \mathcal{E}(\lambda)$, e i componenti sono tutti indipendenti, allora il tempo di vita X del sistema è la sua somma

$$X := \sum_{k=1}^{n} X_k$$

Ovvero abbiamo una *variabile aleatoria del tipo gamma* (Corollario 7 (somma tra esponenziali)), precisamente $X \sim \Gamma(n, \lambda)$. Qui non si tratta più di una *densità esponenziale*, bensì una *densità gamma* che non gode più dell'assenza di memoria. In questo caso l'usura viene rappresentata dal *numero di componenti già guastati*.

D2. Legame tra Esponenziale e Geometrica

Legame tra Densità Esponenziale e Geometrica

X

Breve osservazione sulla variabile aleatoria esponenziale: legame con la geometrica.

X

0. Voci correlate

- Densità Esponenziale
- Densità Geometrica

1. Esponenziale alla Geometrica

Ricordiamo che entrambe le *densità esponenziale* e *geometrica* godono dell'*assenza di memoria* (Proposizione 3 (l'assenza di memoria dell'esponenziale), Proposizione 3 (l'assenza di memoria)). Come mai? C'è un legame tra queste due? Veramente, non riesco a dormire la notte per questa domanda...

A parte gli scherzi, esiste un legame matematico tra queste due. Partiamo dal legame che *lega* l'esponenziale *alla* geometrica.

#Osservazione

> Osservazione (la geometrica è una discretizzazione dell'esponenziale).
>
> Partiamo dalla densità geometrica $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$. Si ha che questa non è altro che una *versione continua* della densità geometrica $\operatorname{Geo}(q)$.

Infatti, prendendo la composizione $Y := \lfloor X \rfloor$, abbiamo che per $k \in \mathbb{N}$ la sua densità è

$$p\{Y = k\} = p\{k \leq X < k+1\} = F(k+1) - F(k) = \ldots = e^{-\lambda k}(1 - e^{\lambda})$$

Ovvero abbiamo $\operatorname{Geo}(1 - e^{-\lambda})$.

2. Geometrica alla Esponenziale

Si può fare anche un ragionamento all'inverso.

#Osservazione

Osservazione (l'esponenziale è una fit della geometrica).

Inversamente si ha che *l'esponenziale* è una specie di *"fit"* per la *geometrica*: ovvero abbiamo un grafico con dati *discreti*, che diventano *continue* con una funzione che li *"fitta"*.

Data una *successione di variabili aleatorie geometriche* $(Y_n)_n$ con $Y_i \sim \operatorname{Geo}(q_i)$, con $\lim_n q_n \to 0$, si prende $\lim_n s_n \to 0$ una successione tale che $\lim_n \frac{q_n}{s_n} \to \lambda \in (0, +\infty)$.

Ponendo $X_n := s_n Y_n$ si ha che X_n *converge in legge* ad un'esponenziale $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$. Infatti la sua densità è

$$\begin{aligned} p\{X_n \leq x\} = p\left\{Y_n \leq \frac{x}{s_n}\right\} &= p\left\{Y_n \leq \left\lfloor \frac{x}{s_n} \right\rfloor\right\} \\ &= 1 - p\left\{Y_n > \left\lfloor \frac{x}{s_n} \right\rfloor\right\} \\ &= 1 - (1 - q_n)^{\left\lfloor \frac{x}{s_n} \right\rfloor} \\ \lim_n \implies {}'' &= 1 - (1 - \lambda s_n)^{\frac{x}{s_n}} \to 1 - e^{-\lambda x} \end{aligned}$$

che prova $X_n \to X$.