Funzioni Reali - Sommario

Funzioni di variabile reale; funzioni di potenza e di radice; funzione del valore assoluto; funzioni trigonometriche.

A. Funzioni di potenza, radice e valore assoluto

Funzioni di potenza, radice e valore assoluto

Definizioni di funzione potenza p_n e radice p_n^{-1}. Definizione del valore assoluto $|\cdot|$; disuguaglianza triangolare. Alcuni esercizi generali.

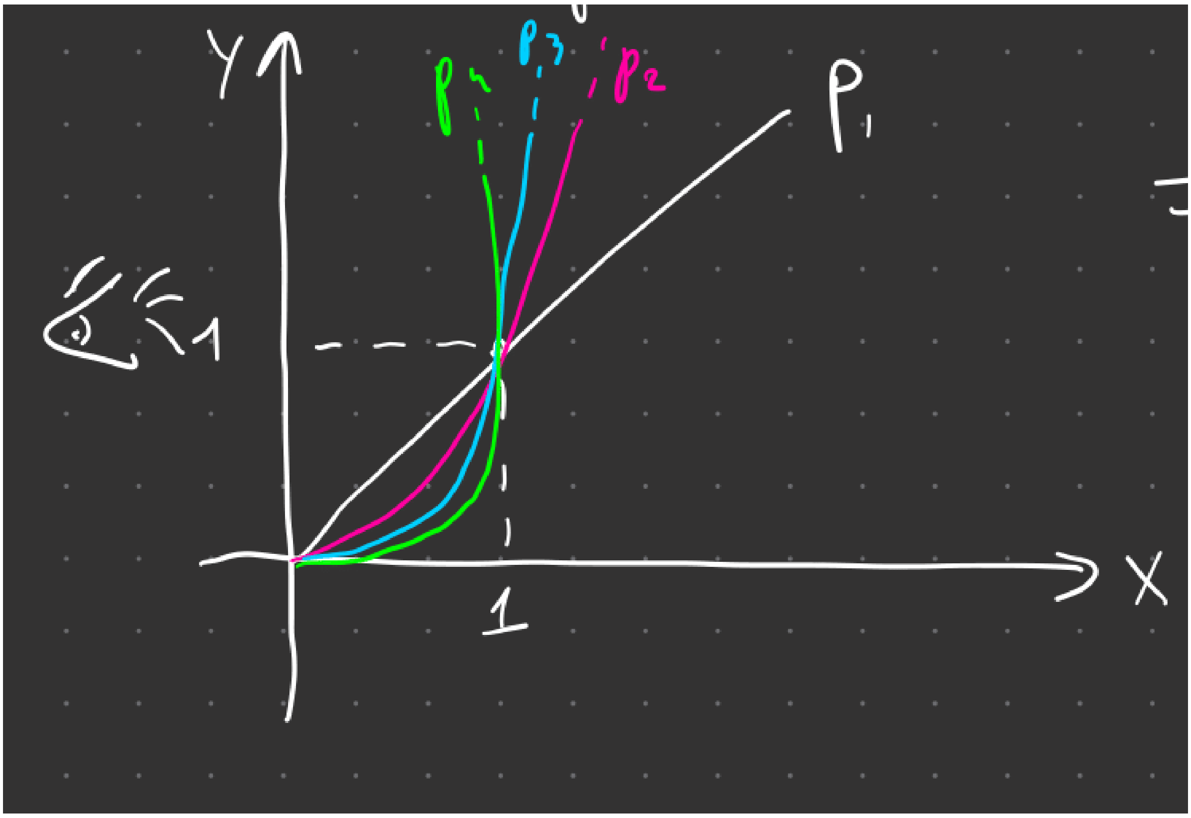
---

1. Funzione potenza

DEF 1.1. Sia $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$; definiamo quindi la **funzione potenza n-esima** come

$$p_n : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty); x \mapsto p_n(x) = x^n$$

Si riporta un grafico di alcune funzioni potenza p_n.



OSS 1.1. Si nota che

$$\forall x \in [0, 1) : p_1(x) > p_2(x) > \ldots > p_n(x)$$
$$\forall x \in (1, +\infty) : p_1(x) < p_2(x) < \ldots < p_n(x)$$

OSS 1.2. Si vede dal grafico che la funzione è *strettamente crescente*, ovvero se prendiamo $x_1, x_2 \in E$ (dominio) ove $x_2 > x_1$, allora sicuramente abbiamo

$$p_n(x_2) > p_n(x_1)$$

DIMOSTRAZIONE.
Prendiamo ad esempio p_2; abbiamo innanzitutto

$$0 \leq x_1 < x_2$$

allora li moltiplichiamo per x_1 e x_2, ottenendo

$$\begin{cases} x_1 < x_2 x_1 \\ x_1 x_2 < x_2^2 \end{cases}$$

quindi

$$0 \leq x_1^2 < x_2^2 \iff p_2(x_1) < p_2(x_2), \forall x_1, x_2$$

> **Notare che questa dimostra che è vera solo per p_2; sarebbe da dimostrare che è vera anche per p_n (forse si va per induzione? boh, vedrò o chiederò al prof qualcosa)**

OSS 1.3. Notiamo che la *funzione potenza* p_n (o x^n) è *biiettiva* (Funzioni, **DEF 3.3.**), ovvero è sia *suriettiva* che *iniettiva*.
DIMOSTRAZIONE.
Per dimostrare che è iniettiva basta riosservare quanto visto in **OSS 1.2.**; ovvero che la funzione è strettamente crescente.
Dopodiché la funzione è anche suriettiva in quanto una conseguenza dell'assioma di separazione S).

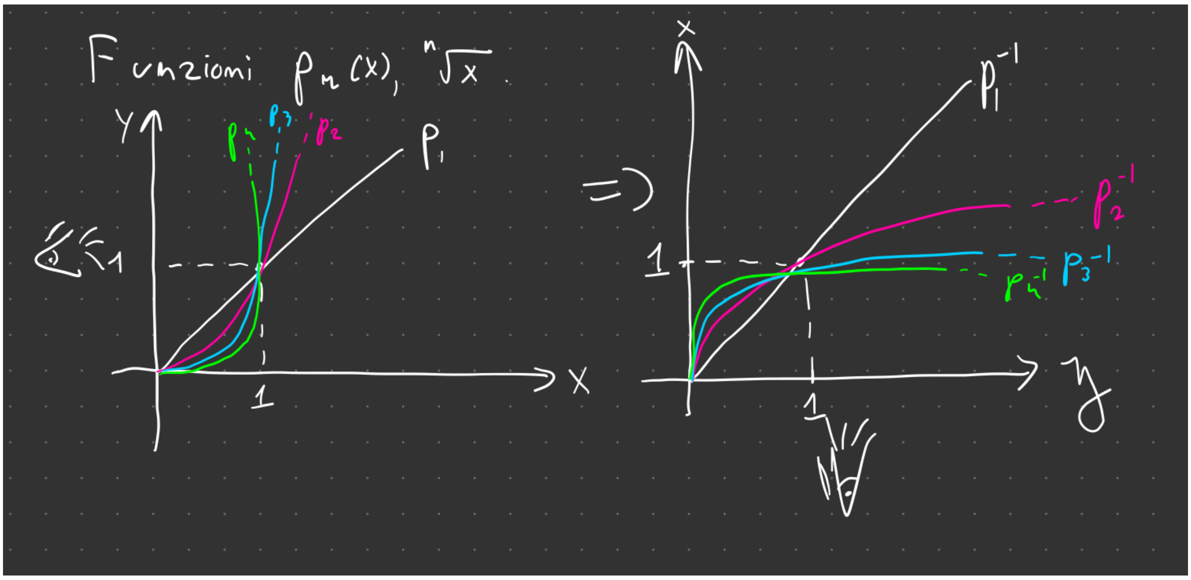
2. Funzione radice

OSS 2.1. Dall'**OSS 1.3.** abbiamo notato che la *funzione potenza* $p_n(x)$ è *biiettiva*; pertanto per il *teorema dell'esistenza della funzione inversa* (Funzioni, **TEOREMA 1.**) esiste una funzione inversa che definiremo.

DEF 2.1. Definiamo la **funzione radice n-esima** p_n^{-1}

$$p_n^{-1} : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty); x^n \mapsto x$$

Graficamente questo equivale a *"scambiare le assi"* del grafico della funzione, oppure di *"cambiare la prospettiva da cui si guarda il grafico"*, ovvero

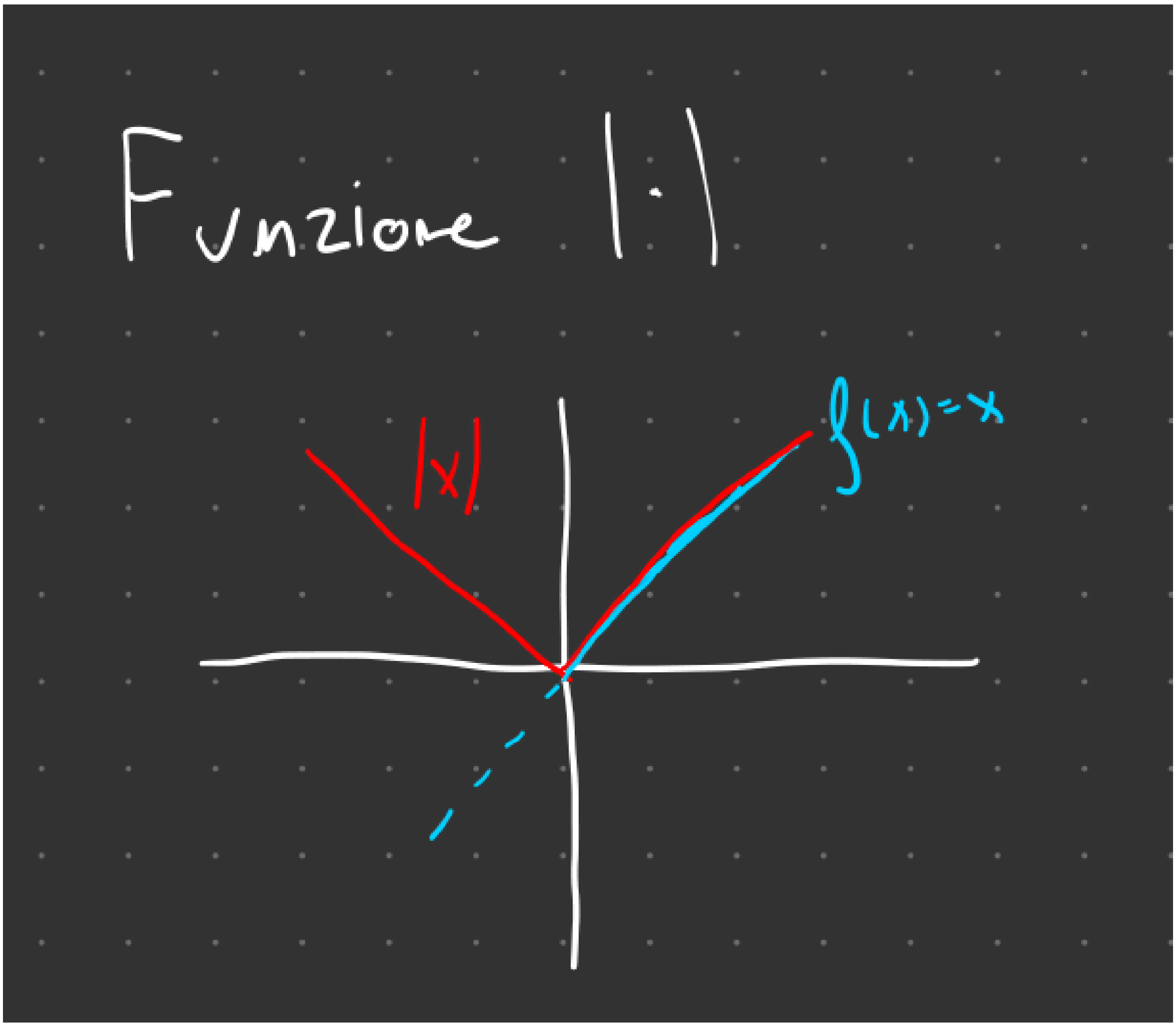


3. Valore assoluto

DEF 3.1. Sia il **valore assoluto** una *funzione*

$$|\cdot| : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; x \mapsto |x| = \begin{cases} x : x \geq 0 \\ -x : x < 0 \end{cases}$$

Ad esempio, il grafico di $|x|$ si rappresenta nel modo seguente:



OSS 3.1.1. Notare che

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

3.1. Proprietà, disuguaglianza triangolare

OSS 3.1.1. Si può osservare alcune proprietà del *valore assoluto*, ovvero:

1. Sia $a \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, allora

$$|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$$

DIMOSTRAZIONE.
Posso considerare due casi, ovvero
$x \geq 0$: abbiamo quindi $|x| = x$, pertanto

$$\begin{cases} |x| \leq a \implies x \leq a \\ x \geq 0 \implies x \geq -a \end{cases} \longrightarrow -a \leq x \leq a$$

$x \leq 0$: abbiamo quindi $|x| = -x$ e il discorso è analogo:

$$\begin{cases} |x| \leq a \implies -x \leq a \iff x \geq -a \\ x \leq 0 \implies x \leq a \end{cases} \longrightarrow -a \leq x \leq a$$

■

2. Prendendo le stesse premesse di prima, abbiamo

$$|x| \geq a \iff x \leq -a \wedge x \geq a$$

3. **LA DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE.**
Siano $x, y \in \mathbb{R}$, allora abbiamo

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

DIMOSTRAZIONE.
Se abbiamo da un lato

$$-|x| \leq x \leq |x|$$

e

$$-|y| \leq y \leq |y|$$

allora sommandoli si avrebbe

$$-(|x|+|y|) \leq x+y \leq |x|+|y|$$

che per la prima proprietà equivale a dire

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

4. Esercizi misti

Presentiamo degli esercizi, ovvero *equazioni* (Equazioni e soluzione) o *disequazioni* contenenti queste funzioni appena presentate.

ESERCIZIO 4.1. Determinare

$$3x + 5 = 0$$

ESERCIZIO 4.2. Disegnare il grafico di

$$f(x) = 3x + 5$$

con $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

ESERCIZIO 4.3. Risolvere

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

ESERCIZIO 4.4. Disegnare

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x^2 - 2x - 3$$

ESERCIZIO 4.5. Risolvere

$$\frac{x^2 - 2x + 3}{x - 3} \geq 0$$

ESERCIZIO 4.6. Risolvere

$$\sqrt{x+1} \geq 3x + 2$$

ESERCIZIO 4.8. Risolvere

$$\frac{x-3}{2x+1} > \frac{x-1}{x+1}$$

ESERCIZIO 4.8. Risolvere

$$\sqrt{6x+1} \geq 3 - 2x$$

ESERCIZIO 4.9. Risolvere

$$|x + 4| < 8$$

ESERCIZIO 4.10. Risolvere

$$|\frac{2x+1}{x^2-4}| \geq 1$$

ESERCIZIO 4.11. Risolvere

$$|x + 1| \geq |x - 1|$$

B. Funzioni trigonometriche

Funzioni trigonometriche

Definizione delle funzioni trigonometriche $\sin$, $\cos$; *le proprietà di queste funzioni; alcuni valori noti; funzioni inverse* $\arcsin$, $\arccos$. *Forme di somma e sottrazione di* $\sin$ *e* $\cos$.

---

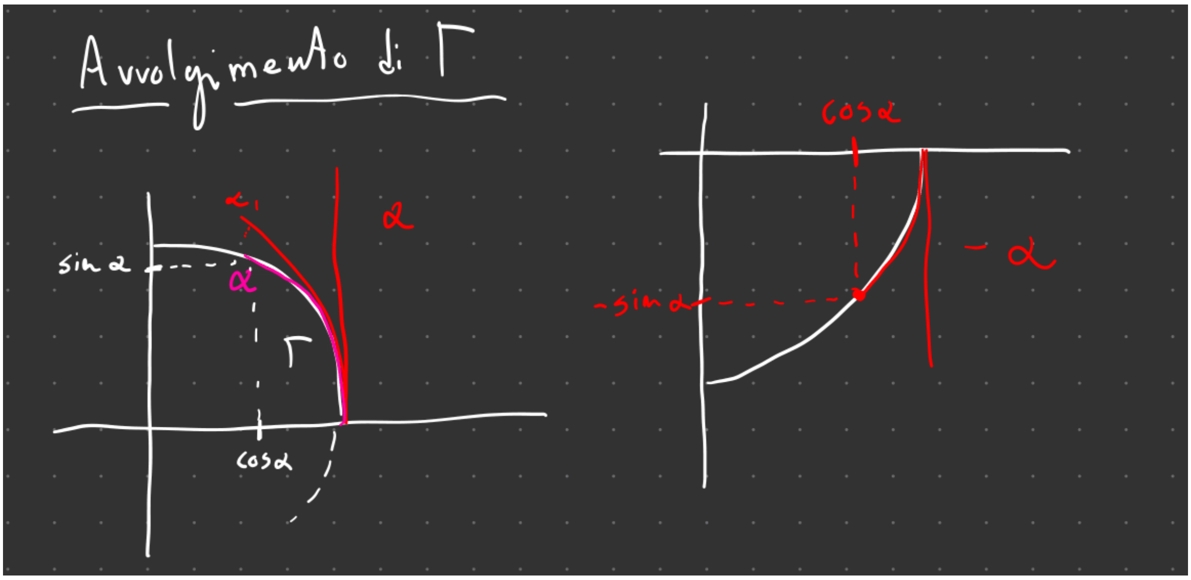
0. Preambolo

Per ora non abbiamo ancora gli strumenti per poter *rigorosamente* definire le funzioni di *seno* e *coseno*, tuttavia possiamo definirle per ora in questo modo.
Però prima di tutto bisogna fare delle considerazioni.
Ovvero prendo il piano cartesiano (**ESEMPIO 2.1.**) e considero la *circonferenza unitaria* Γ:

$$\Gamma := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

e considero l'asse r_1 concorde con l'asse y e che *"appoggiamo"* in $(1, 0)$.
Quindi prendo un punto qualsiasi $\alpha \in \mathbb{R}$ dell'asse, lo *"avvolgo"* su Γ, poi la retta si avvicina man mano all'arco, infine il punto *"finisce"* su Γ e ottengo il punto $(c(\alpha), s(\alpha))$

Graficamente questo processo rappresenta il seguente.



OSS 0.1.
Si osserva che in questo processo di *"avvolgimento"* si suppone che la lunghezza del segmento non si cambia mai, in quanto viene solo *"piegato"*; quindi se il segmento r_1 è lungo α, allora *l'arco* è lungo α, che non è banale da misurare. Infatti si deve fare un *procedimento di approssimazione* con segmenti. Questo è il problema di questa definizione *non-rigorosa*.

1. Definizione di seno e coseno

Considerando tutto detto sopra, consideriamo la funzione

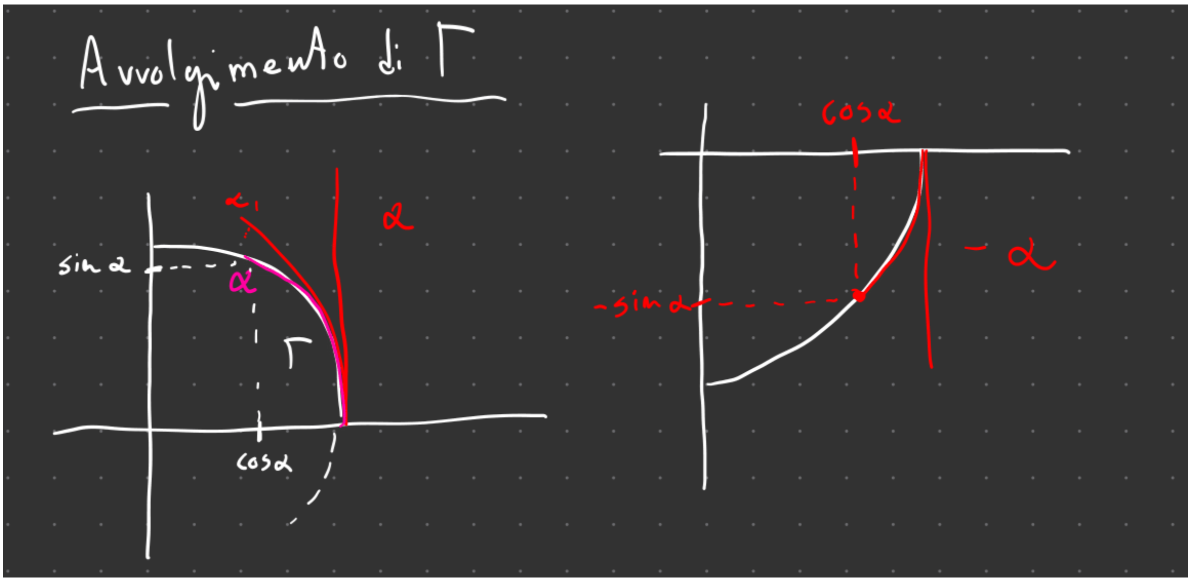
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \Gamma \\ \alpha &\mapsto (c(\alpha), s(\alpha)) \end{aligned}$$

Dove Γ varia nell'intervallo $[0, 1]$.

Così otteniamo le seguenti funzioni:
DEF 1.

$$\begin{aligned} \cos : \ &\mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1] \\ &\alpha \mapsto \cos(\alpha) \in \Gamma \\ \sin : \ &\mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1] \\ &\alpha \mapsto \sin(\alpha) \in \Gamma \end{aligned}$$

Dove $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ rappresenta la posizione del punto dell'*arco piegato* e α rappresenta la *lunghezza dell'arco*. Se α è negativa, allora si orienta l'asso in basso. Graficamente,



2. Proprietà

PROP 2.1. Diamo un nome alla *lunghezza della semi-circonferenza unitaria*,

$$(\pi \in \mathbb{R}, \pi \sim 3.14\ldots)$$

quindi la *circonferenza* è lunga 2π.

PROP 2.2. Dato un $\alpha \in \mathbb{R}$, si verifica che

$$(\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 = 1$$

in quanto entrambi i punti $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ appartengono alla circonferenza Γ; infatti $x^2 + y^2 = 1$ è la proprietà caratterizzante di Γ.

PROP 2.3. Le funzioni $\cos$, $\sin$ sono *periodiche*, ovvero che prendendo un $k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} \text{i. } & \cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha \\ \text{ii. } & \sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha \end{aligned}$$

Questo si verificai n quanto 2π rappresenta un giro intero; quindi prendendo un punto α e facendoci un giro intero, arrivo allo stesso punto.

PROP 2.4. Le funzioni $\cos$, $\sin$ sono rispettivamente delle funzioni *pari* e *dispari*, ovvero che si verificano le seguenti.

$$\begin{aligned} & \cos(-\alpha) = \cos(\alpha) \\ & \sin(-\alpha) = -\sin(\alpha) \end{aligned}$$

Questo in quanto, come detto prima in **DEF 1.**, la *"lunghezza negativa"* rappresenterebbe la stessa lunghezza orientato verso il basso. Quindi graficamente lo si può evincere chiaramente.

PROP 2.5. Se al posto di aggiungere un *giro intero* aggiungo un *mezzo giro*, ovvero π, ottengo il suo opposto:

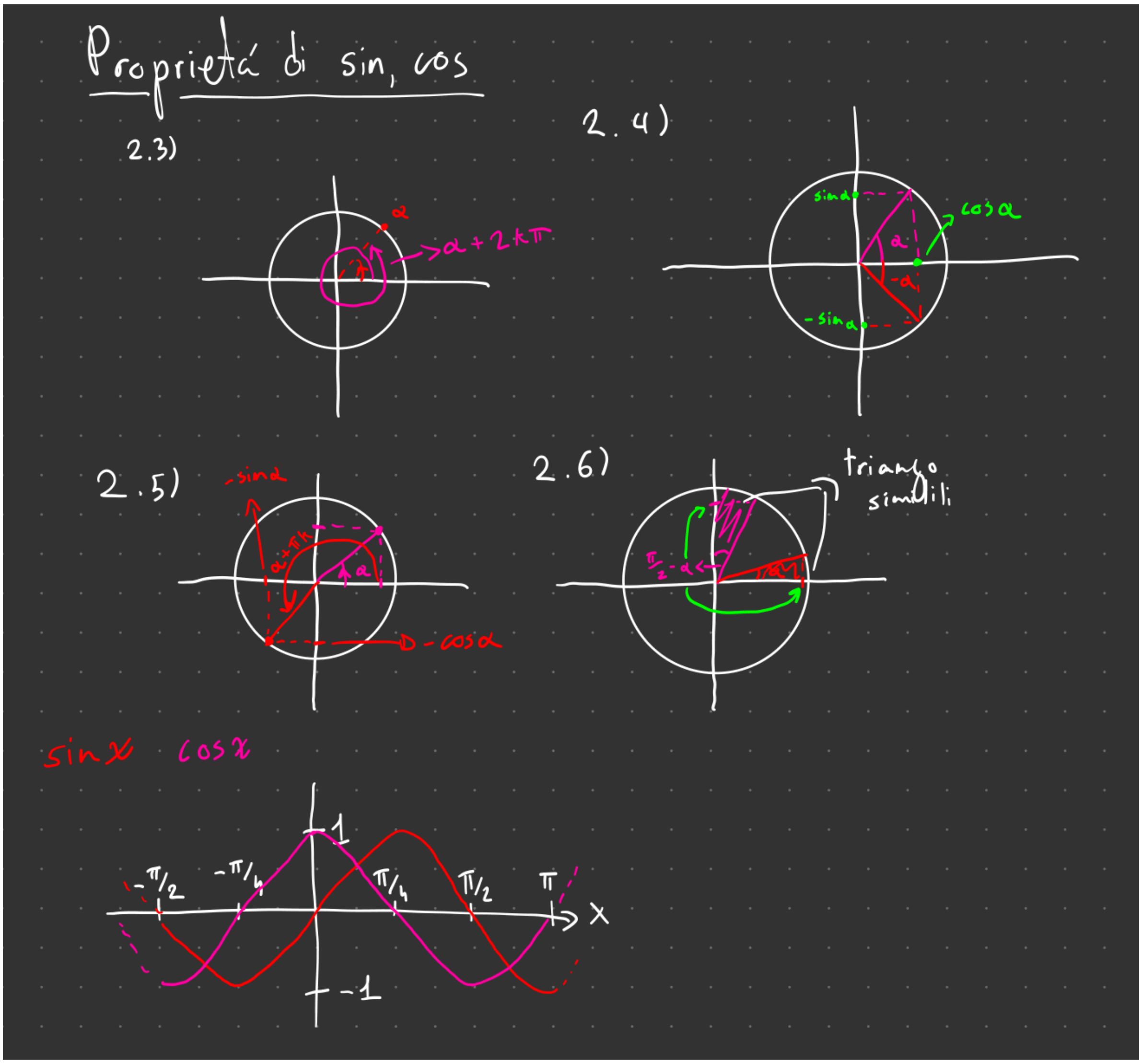
$$\begin{aligned} & \cos(\alpha + \pi) = -\cos(\alpha) \\ & \sin(\alpha + \pi) = -\sin(\alpha) \end{aligned}$$

PROP 2.6. Ricorrendoci alla definizione etimologica del *coseno*, ovvero *"complementi sinus"*, notiamo che sottraendo *l'angolo complementare* $\frac{\pi}{2}$ da α ottengo $\sin$. Ovvero

$$\forall\alpha, \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin(\alpha)$$

2.1. Riassunto grafico

Graficamente si può riassumere (quasi) tutte le proprietà nel seguente grafico (con i grafici di $\cos$, $\sin$ stessi).



2.2. Alcuni valori noti

Dai risultati della *geometria elementare* sappiamo i seguenti valori noti del seno e del coseno:

α	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$
0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	0	1

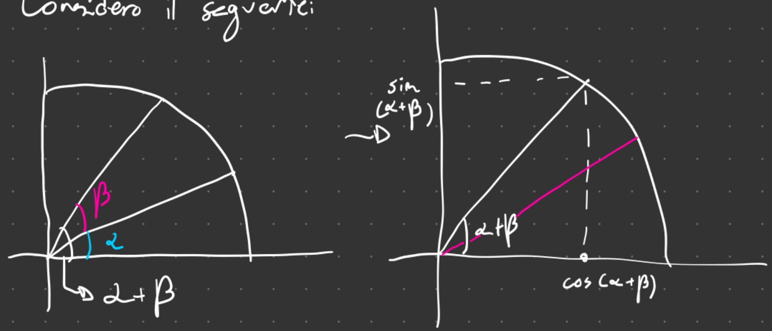
che verranno dati per noti.

2.3. Forme di somma e di sottrazione

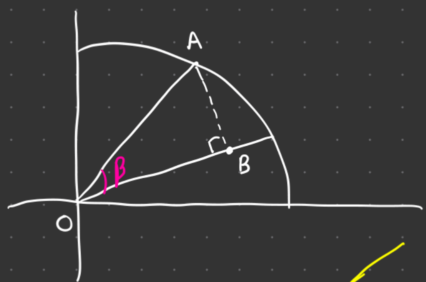
Consideriamo due angoli: $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Quindi disegniamo il seguente grafico:

Forme di somma e di sottrazione

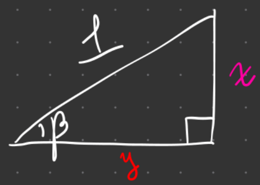
1) Considero il seguente:



2) Proietto il segmento $\overline{AB}$ tale da formare angolo da 90° (⊥)



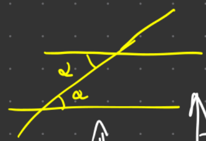
considero ⇝ OAB



per def., $x = 1 \cdot \cos\beta$

$y = 1 \cdot \sin\beta$ → utile x dopo

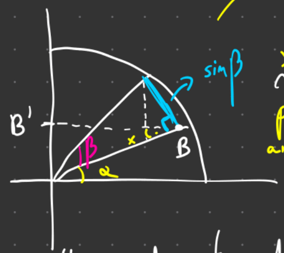
Allora

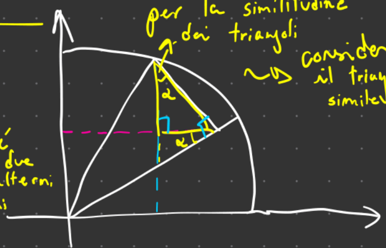


⇑

$x = \alpha$

⇝ perché sono due angoli alterni interni

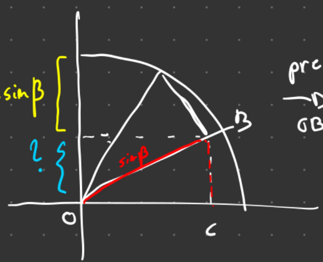




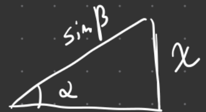
per la similitudine dei triangoli ⇝ considero il triangolo simile

trovo $x = \cos\alpha \sin\beta$

Allora ho trovato la mia "1ª porzione"; trovo la seconda



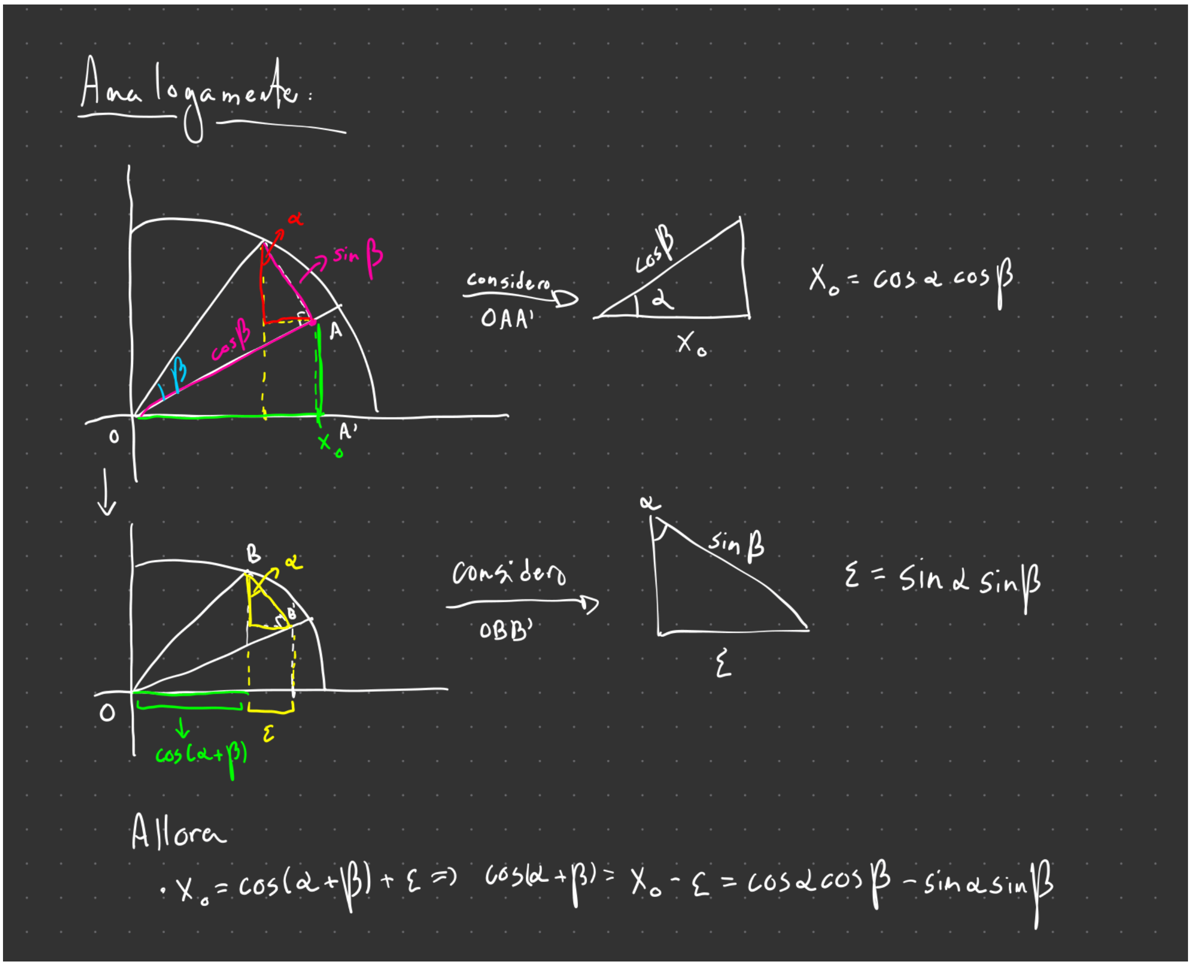
prendo ⇝ OBC



$x = \cos\alpha \sin\beta$

Pertanto sommo i pezzi e ottengo:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$$



Da cui si evince che

$$
\begin{aligned}
\sin(\alpha \pm \beta) &= \sin\alpha\cos\beta \pm sin\beta\cos\alpha \\
\cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta
\end{aligned}
$$

Queste formule saranno molto importanti per le formule di *prostaferesi* e di *Werner*.

2.4. Formule di prostaferesi

Recuperato dalla lezione del 26.10.2023
Voglio calcolare $\sin a + \sin b$. Allora riscrivo le *forme di sottrazione e di addizione*;

$$
\begin{aligned}
\sin(\alpha + \beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha \\
\sin(\alpha - \beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha
\end{aligned}
$$

e li sommo:

$$
\begin{aligned}
\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha - \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos \\
&= 2\sin\beta\cos\alpha
\end{aligned}
$$

e ponendo $\alpha+\beta=a$, $\alpha-\beta=b$, (dunque $a+b=2\alpha$ e $a-b=2\beta$) ottengo

$$\sin a+\sin b=2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}$$

Analogo il procedimento per $\cos\alpha+\cos\beta$.

3. Definizione di arcocoseno e arcoseno

OSS 3.1. Considero la funzione $\cos$, però con una restrizione al suo *dominio* e *codominio*.

$$\begin{aligned}\cos_{[0,\pi]}:[0,\pi]&\longrightarrow[-1,1]\\ x&\mapsto\cos(x)\end{aligned}$$

Questa funzione allora è *biiettiva* (Funzioni, **DEF 3.3.**); ovvero p sia *suriettiva* che *iniettiva* e *strettamente decrescente*.

1. Questa è *iniettiva* in quanto considerando tutti gli $x\in[0,\pi]$ si tocca un *solo* punto ad ogni x considerato. Inoltre è *strettamente decrescente* in quanto il valore parte da $\cos 0=1$ e finisce con $\cos\pi=-1$.
2. Per lo stesso motivo di prima $\cos$ è *suriettiva*.

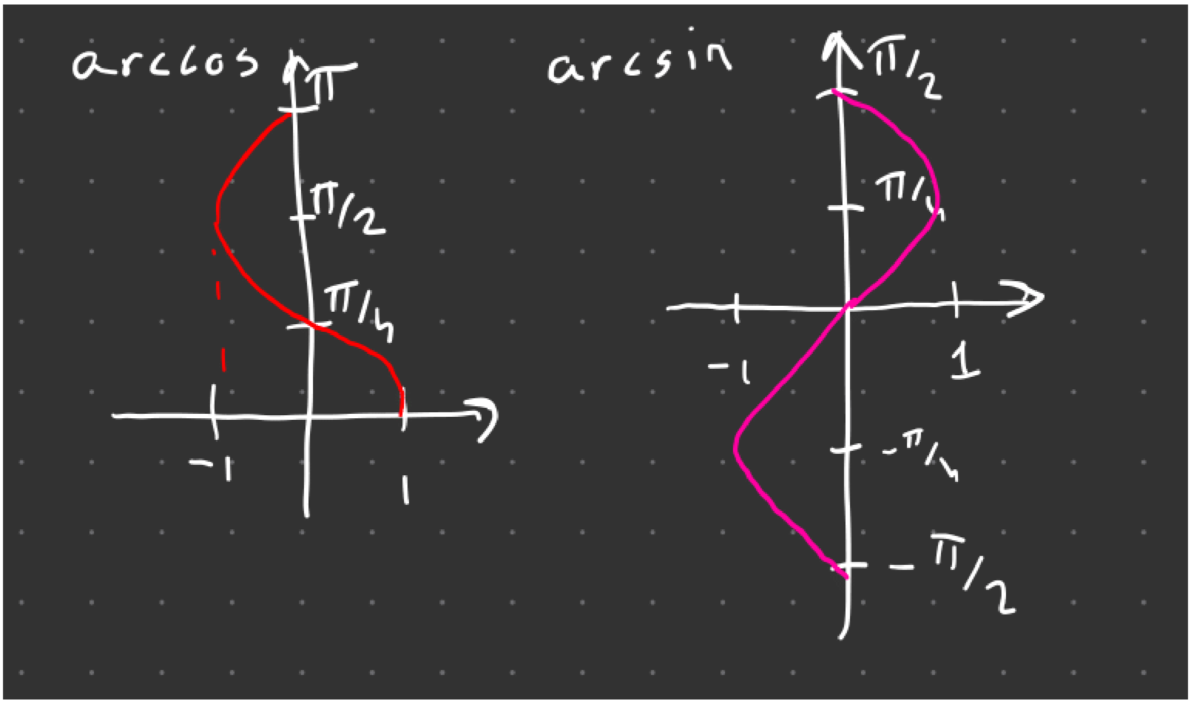
DEF 3.1.
Pertanto secondo il *teorema dell'esistenza della funzione inversa* (Funzioni, **TEOREMA 1.**) la funzione $\cos_{[0,\pi]}$ ha una sua inversa che chiameremo **l'arcocoseno**;

$$\arccos:=\cos_{[0,\pi]}$$

DEF 3.2.
Analogamente si definisce $\arcsin$ considerando però la restrizione di $\sin_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$.
Quindi

$$\arcsin:=\sin_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$$

Ecco alcuni grafici delle funzioni $\arccos$, $\arcsin$.



4. Funzione tangente e arcotangente

DEF 4.1. Definiamo la funzione **tangente** $\tan\alpha$ periodica in come

$$\tan : \mathbb{R}\diagdown[\frac{\pi}{2}]_{\equiv\pi} \longrightarrow \mathbb{R}$$

come il *rapporto* tra la funzione *seno* e *coseno*, ovvero

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Notiamo che le funzioni $\sin, \cos$ sono periodiche di 2π; quindi prendendo il rapporto abbiamo che $\tan$ è periodica di π.
Osservando i *limiti* (Esempi di Limiti di Funzione, **ESEMPIO 5.3.**) di questa funzione possiamo disegnare il seguente grafico:
[GRAFICO DA FARE]

DEF 4.2. Se ho la restrizione della *tangente* in $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ allora ho:

$$\tan_{|(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})} : (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \longrightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \tan x$$

e questa diventa *biiettiva*, quindi invertibile, posso definire l'**arcotangente** la sua funzione inversa:

$$\arctan := (\tan_{|(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})})^{-1}$$

[GRAFICO DA FARE]