Richiami di Algebra - Sommario

Alcuni richiami di algebra propedeutici, tra cui la nozione e il significato dell'equazione, della soluzione all'equazione. Appunti di ALEG il 26.09.2023

Equazioni e soluzione

Equazioni e soluzione

Cos'è un equazione? Una soluzione? Definizioni intuitive di questi concetti.

Equazione

Una definizione intuitiva di un'equazione può essere una domanda, a cui si presuppone di avere una risposta. Si illustra il concetto mediante un esempio.
ESEMPIO 1. L'equazione $x^2 + 2x + 1 = 0$ è un modo di formalizzare la seguente domanda: *"Qual è quel numero", che indicheremo con **x**, tale che se calcolo $x^2 + 2x + 1$, esso è zero?"*
In questa domanda ci sono dei assunti che si presumono veri, per esempio ci si presuppone che c'è solo un numero che soddisfi alla risposta, oppure che la risposta sia un numero.

Soluzione ad un'equazione

Se l'equazione è una domanda a cui si può dare una risposta, allora la soluzione di un'equazione non è che altro una risposta corretta alla domanda; dunque è un numero.
ESEMPIO 2. La soluzione dell'**esempio 1** (vedi sopra) è -1, in quanto sostituendo la x nell'espressione $x^2 + 2x + 1 = 0$ con -1, si avrebbe $0 = 0$, che è corretto.

Pertanto si capisce che il metodo **non** conta, dato che la quantità che si ottiene al *membro sinistro* (ovvero a sinistra del simbolo $=$ dell'equazione) è la medesima del *membro destro* (vedi sopra).

Inoltre, la teoria delle equazioni di 2° grado ci dice che **non** ci sono altre soluzioni e che $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$.

Nel prossimo file si considereranno le Equazioni e Proprietà Lineari, ovvero le equazioni di primo grado, da cui si può osservare delle caratteristiche e delle proprietà peculiari.

Equazioni e Proprietà Lineari

Equazioni Lineari

Equazioni Lineari

Un'equazione lineare è un'equazione algebrica di primo grado.

ESEMPIO 1. Consideriamo la seguente equazione:

$$3x + y - 2z = 0$$

^ex1
Intanto osserviamo che in questa equazione sono presenti tre variabili, ossia x, y, z.
Richiamandoci alla definizione della soluzione, risolvere quest'equazione significa determinare una (o tutte) le terne di numeri (x, y, z) tali che, se sostituiamo tali numeri alle variabili nel membro sinistro, si ottiene 0.
OSSERVAZIONE 1.1. Se in un'equazione a una variabile (come nell'Esempio 1.) ci viene chiesto di determinare solo **un** numero, in questo esempio ogni soluzione dev'essere costituito da **tre numeri**; quindi ci viene chiesta una *terna* di numeri, che devono apparire insieme. Il numero che costituisce la terna si chiama *entrata*.
ESEMPIO 1.1.1. La terna $(x = 0, y = 0, z = 0)$ è una soluzione all'equazione, infatti $3 * 0 + 1 * 0 - 2 * 0 = 0 + 0 - 0 = 0$
Parimenti, anche la scelta $(x = 1, y = 1, z = 2)$ ovvero la terna $(1, 1, 2)$ è una soluzione perché $3 * 1 + 1 * 1 - 2 * 2 = 3 + 1 - 4 = 0$.
Similmente anche $(0, 2, 1)$ è soluzione.

Sistema di Equazioni Lineari

Un *sistema di equazioni lineari* è costituito da più equazioni lineari; una soluzione viene considerata tale quando soddisfa tutte le equazioni nel

sistema.
ESEMPIO Un esempio di equazione lineare che verrà preso in considerazione è la seguente.

$$\begin{cases} 3x + y - 2z = 0 \\ -2x - 2y + 2z = 0 \\ 2x - 0y - z = 0 \end{cases}$$

Proprietà lineari

C'è un motivo per studiare le equazioni lineari, in quanto emergono dei nuovi comportamenti particolari.
Ora accade che queste ultime 2 soluzioni in *esempio 1.1.1.* (vedi sopra) che abbiamo esibito possiamo costruire delle altre soluzioni, sfruttando le proprietà di base delle operazioni tra numeri, in particolare quella **associativa, commutativa e distributiva**.
Più concretamente si mostra che

$$(2, 2, 4)$$

è anch'essa soluzione all'esempio 1.
Però si può vedere questa terna nel modo seguente:

- Si parte da $(1, 1, 2)$
- Si moltiplica ogni *entrata* della terna per 2, ottenendo $(2, 2, 4)$
  In una maniera più compatta introduciamo la seguente notazione.

  $$(2, 2, 4) = 2(1, 1, 2)$$

  Riprendiamo la quantità che abbiamo considerato prima

  $$\begin{aligned} 3 * 2 + 1 * 2 - 2 * 4 &= 3(2 * 1) + 1(2 * 1) - 2(2 * 1) \\ prop.\, associativa &= (3 * 2)1 + (1 * 2)1 - (2 * 2)2 \\ prop.\, commutativa &= 2(3 * 1) + 2(1 * 1) - 2(2 * 2) \\ prop.\, distributiva &= 2(3 * 1 + 1 * 1 - 2 * 2) \\ (1, 1, 2)\ \grave{e}\ soluzione &= 0 \end{aligned}$$

  Pertanto si capisce che se moltiplichiamo la soluzione per un numero, otteniamo un'altra soluzione.
  Lo stesso ragionamento ci mostra che la terna

  $$(37, 37, 74)$$

è soluzione, perché

$$3*37+1*37-2*74=37(3*1+1*1-2*2)=37*0=0$$

PRIMA PROPRIETA'

Generalizzando, vediamo che $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ la terna $(\alpha, \alpha, 2\alpha)=\alpha(1,1,2)$ è soluzione.

OSSERVAZIONE 2. Tuttavia così non si ottiene *tutte* le soluzioni di un'equazione; ad esempio la terna $(0,2,1)$ è anche una soluzione all'*esempio 1.* (vedi all'inizio).
Si dice che queste due soluzioni sono *linearmente indipendenti*.

SECONDA PROPRIETA'

Analizziamo ora un secondo fenomeno. Si mostra che

$$(1,3,3)$$

è soluzione.
OSSERVAZIONE 3.

$$\begin{aligned} 1&=1+0 \\ 3&=1+2 \\ 3&=2+1 \end{aligned}$$

Ovvero, in una notazione più compatta,

$$(1,3,3)=(1,1,2)+(0,2,1)$$

Ora calcoliamo

$$\begin{aligned} 3*1+1*3-2*3 &= 3(1+0)+1(1+2)-2(2+1) \\ prop.\ distributiva &= (3*1+1*1-2*2)+(3*0+1*2-2 \\ entrambi\ sono\ soluzioni &= 0+0=0 \end{aligned}$$

Generalizzazioni

Condensando quanto osservato, troviamo le tre proprietà principali:

1. La terna $(0,0,0)$ è soluzione
2. Se $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ è soluzione, allora $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ anche $\alpha(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ è soluzione.

3. Se $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ sono due soluzioni, allora anche $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) + (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = ((\bar{x}+\hat{x}), (\bar{y}+\hat{y}), (\bar{z}+\hat{z}))$ è soluzione

Metodo di Gauss

Metodo di Eliminazione di Gauss

Un metodo per risolvere un sistema: il metodo di Gauss.

Preliminari

Consideriamo il seguente sistema di equazioni lineari.

$$\begin{cases} 3x+y-2z=0 \\ -2x-2y+2z=0 \\ 2x-0y-z=0 \end{cases}$$

Per calcolare le soluzioni di questo sistema, useremo una tecnica chiamata *l'eliminazione di Gauss*, che si fonda su dei principi per manipolare un sistema di equazioni in un altro sistema di equazioni *equivalente* (ovvero che ha le stesse soluzioni).

Metodo di Gauss

Il metodo si consta principalmente di manipolare il sistema al fine di trovare uno equivalente più semplice da risolvere, ovvero nella forma in cui compaiono:

$$\begin{cases} \text{dove compaiono tutte le 3 variabili} \\ \text{" " " " " 2 variabili} \\ \text{" " " " " una variabile} \end{cases}$$

ESEMPIO.

1. Partiamo notando che

$$-2x-2y+2z=0 \to^{*-0.5} x+y-z=0$$

2. Scambiando la seconda equazione con la prima, il sistema diviene

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 3x + y - 2z = 0 \\ 2x - 0y - z = 0 \end{cases}$$

3. Manipolo la seconda equazione per "eliminare la x", sottraendo 3 volte la prima equazione.

$$\begin{aligned} (3x + y - 2z) - 3(x + y - z) = 0 \\ -2y + z = 0 \end{aligned}$$

4. Stesso procedimento per la terza equazione.

$$\begin{aligned} (2x + 0y - z) - 2(x + y - z) = 0 \\ -2y + z = 0 \end{aligned}$$

   Tuttavia essa è uguale al passo 3., dunque ridondante e non verrà considerata.
5. In definitiva il sistema è equivalente al seguente.

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ -2y + z = 0 \end{cases}$$

6. Assumendo che $z = \alpha \in \mathbb{R}$, allora $y = \frac{1}{2}\alpha$ e $x = y = \frac{1}{2}\alpha$.
7. Pertanto le soluzioni sono della forma

$$(0.5\alpha, 0.5\alpha, \alpha) = \alpha(1, 1, 2)$$

Formalizzazione in matrici

Se ora, a partire dal sistema iniziale, si vuole avere una scrittura più compatta, allora si può estrarre i coefficienti e porli in una tabella. In tal caso otterremo il seguente.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Questa viene definita come una *matrice*, su cui ci si può eseguire una serie finita di operazioni per ottenere la soluzione; infatti, si dice che il procedimento è *algoritmico*.
In questo caso si può ripercorrere i passaggi appena svolti nel seguente

modo:

1. $$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. $$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrows\; = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \; \mathrm{II}^\circ - 3\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

4. $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \; \mathrm{III}^\circ - \mathrm{I}^\circ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

5. $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \; \mathrm{III}^\circ - \mathrm{II}^\circ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Pongo $z = \alpha$; $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -\alpha \\ 0 & -2 & \alpha \end{pmatrix}$

Consegue che $y = \frac{1}{2}\alpha = x$

OSS. Nel passaggio quinto (5.) si nota che la matrice è disposta a scalini; in questo caso si parla della *gradinizzazione* di una matrice.

Vettori Geometrici - Sommario

P*Sommario-appunti presi nel 27.06.2023, sui vettori applicati al passaggio di vettori liberi. Operazioni sui vettori e alcune osservazioni*

Vettori Applicati

Vettori Applicati

Definizione basilare del vettore applicato, operazioni tra essi, vettore nullo, limitazioni dei vettori applicati, alcune proprietà.

Premessa

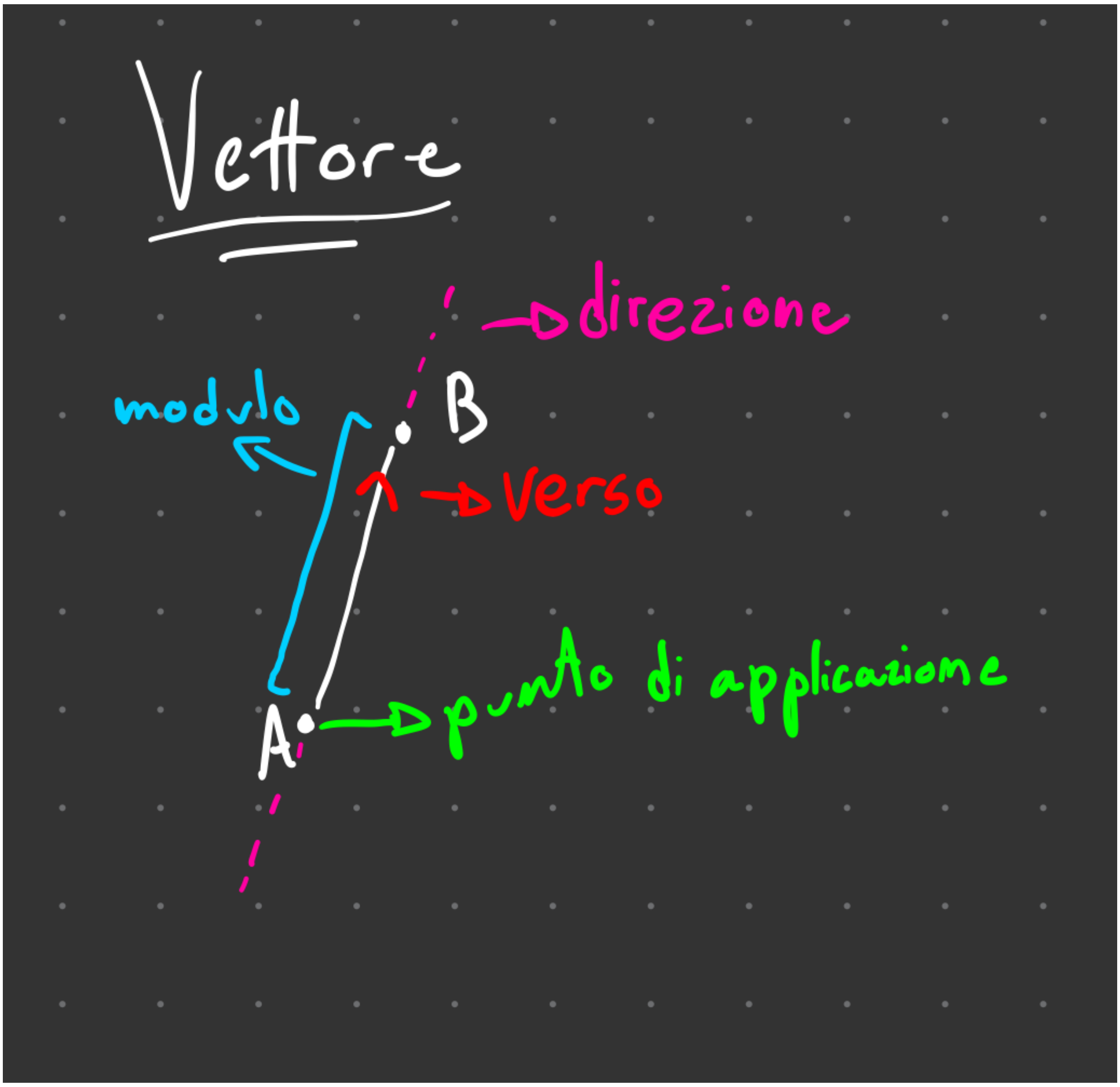
Ci mettiamo nel contesto della *geometria euclidea*, i quali postulati vengono descritti dagli *Elementi* (uno dei testi fondamentali della matematica) di Euclide (uno dei matematici greci più importanti); quindi ricorreremo a dei concetti geometrici che vengono dati come *elementi primitivi*, come il *punto*, il *piano*, la *retta*, $\ldots$

DEF 1. Vettore Applicato

Un **vettore applicato** è un segmento orientato, caratterizzato dunque da:

- **Punto di applicazione**; ovvero il *"punto di partenza"* A del vettore $\overrightarrow{AB}$.
- **Direzione**; essa è quella data dalla *retta* su cui giace il vettore
- **Verso**; esso è uno dei due *orientamenti* dalla retta
- **Modulo o lunghezza**; viene indicata con $|\overrightarrow{AB}|$

Graficamente il vettore si rappresenta così:



Dal grafico si evince che un **vettore applicato** è determinato da una coppia ordinata (A, B) di punti; in tal caso il vettore si denota $\overrightarrow{AB}$

DEF 1.2. Vettore applicato nullo

Per ogni *punto di applicazione* A, esiste il **vettore applicato nullo** $\overrightarrow{AA}$, che non ha un verso definito.

DEF 1.3. Somma dei due vettori applicati

I *vettori applicati* si possono **sommare** tra di loro, purché il punto finale del primo vettore coincida con il punto iniziale del secondo, ovvero purché siano della forma

$$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$$

DEF 1.3. Definiamo

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

OSS 1.3.1 Se i due vettori non sono della forma appena descritta sopra, ovvero

$$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD} \text{ ove } B \neq C$$

allora non è possibile sommare questi due vettori; infatti questo rappresenta la *prima limitazione* dei vettori liberi.

OSS 1.3.2. Se prendiamo

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$$

notiamo che $\overrightarrow{BB}$ e $\overrightarrow{AA}$ si comportano come il numero 0 con l'addizione; **però** notiamo che questi due sono dei vettori applicati *distinti* e non uguali, in quanto essi sono definiti dai loro rispettivi *punti di applicazione* (e ovviamente $A \neq B$). Pertanto è come se si avesse un numero 0 per ogni punto nel piano, dandoci così la *seconda limitazione* dei vettori liberi.

PROP 1.3.1: LA PROPRIETA' ASSOCIATIVA. La somma di vettori applicati, quando possibile, soddisfa la *proprietà associativa*;
DETOUR. Nei numeri reali $\mathbb{R}$ la *proprietà associativa* della somma dice il seguente.

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} \text{ vale che } (a+b)+c = a+(b+c)$$

Infatti grazie a questa proprietà è possibile scrivere la somma per un n numero di numeri senza nessuna ambiguità; ad esempio $a+b+c$.

DIM. Dobbiamo dimostrare che per ogni vettore applicato $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}$ vale che

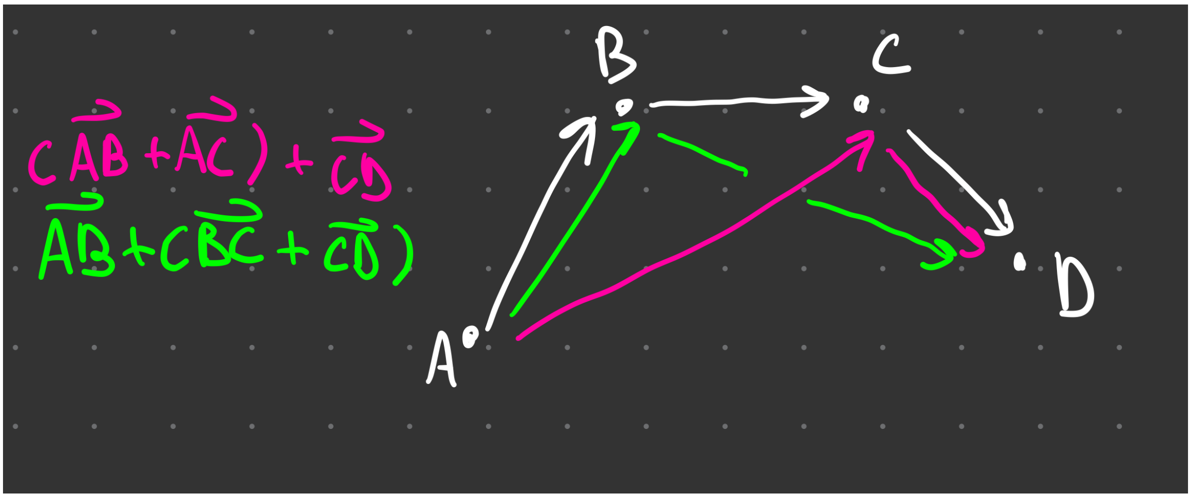
$$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD})$$

Ora, usando la definizione di *somme dei vettori* (**DEF 1.3.**), possiamo scrivere:

$$\text{membro sx. } (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$$

$$\text{membro dx. } \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} \quad \blacksquare$$

Oppure si può anche avvalere dell'interpretazione grafica:



DEF 1.4. Moltiplicazione di un vettore per uno scalare

DEF 1.4. Dato un vettore applicato $\overrightarrow{AB}$ e un numero reale $a \in \mathbb{R}$, definiamo $a \cdot \overrightarrow{AB}$ in questo modo:

$$\text{- Se } a = 0,\ a \cdot \overrightarrow{AB} := \overrightarrow{AA}$$

$$\text{- Se } a > 0,\ a \cdot \overrightarrow{AB} := \text{Un vettore applicato in } A \text{ con le proprietà A)}$$

$$\text{- Se } a < 0,\ a \cdot \overrightarrow{AB} := \text{Un vettore applicato in A con le proprietà B)}$$

- **A)** Con la *stessa* **direzione** e lo *stesso* **verso**, **ma** con **modulo** uguale a $a \cdot |\overrightarrow{AB}|$;
- **B**) Con la *stessa* **direzione**, il **verso** *opposto* dal vettore originario $\overrightarrow{AB}$ e con **modulo** uguale a $|(a)| \cdot |\overrightarrow{AB}|$, ovvero $-(a) \cdot |\overrightarrow{AB}|$ ($|a|$ rappresenta il valore assoluto)

OSS 1.1. Parallelismo tra equazioni lineari e vettori applicati

Si nota un parallelismo tra due argomenti appena affrontati, ovvero le soluzioni di un'equazione e i Vettori Applicati. Infatti, da una certa

somma di vettori si ottiene un altro vettore; da una *moltiplicazione di un vettore con uno scalare* si ottiene un altro vettore, come proprio accade con le *soluzioni di un'equazione* (osservatosi in Equazioni e Proprietà Lineari).
Infatti entrambi i *vettori applicati* e le *soluzioni lineari* compongono dei **spazi vettoriali**; come lo stesso accade con le *soluzioni alle equazioni differenziali lineari*.

Vettori Liberi

Vettori Liberi

Costruzione dei vettori liberi, brevi richiami a relazioni e classi di equivalenza (in Analisi 1), significato di equipollenza, classe di equipollenza e definizione di somma tra vettori liberi.

Premessa

Come abbiamo osservato nei Vettori Applicati, la costruzione di esse comportano delle *limitazioni* (**OSS 1.3.1** e **OSS 1.3.2**); quindi per ottenere una teoria più *"comprensiva"*, introduciamo un nuovo oggetto: i **vettori liberi**.
Tuttavia è necessario prima introdurre dei nuovi concetti, tra cui il concetto dell'*equipollenza*, della *classe di equipollenza* e i *rappresentanti di una classe di equipollenza*.

DEF 1. Equipollenza

Due vettori applicati $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ si dicono **equipollenti** ($\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD}$) *se e solo se* i due vettori hanno:

- La medesima direzione
- Il medesimo verso
- Il medesimo modulo

OSS 1.1. Si verifica che l'*equipollenza* è una relazione di equivalenza (**DEF 5.**); ovvero essa è riflessiva, simmetrica e transitiva. Questo in quanto l'equipollenza è descritta dall'essere uguali $=$.

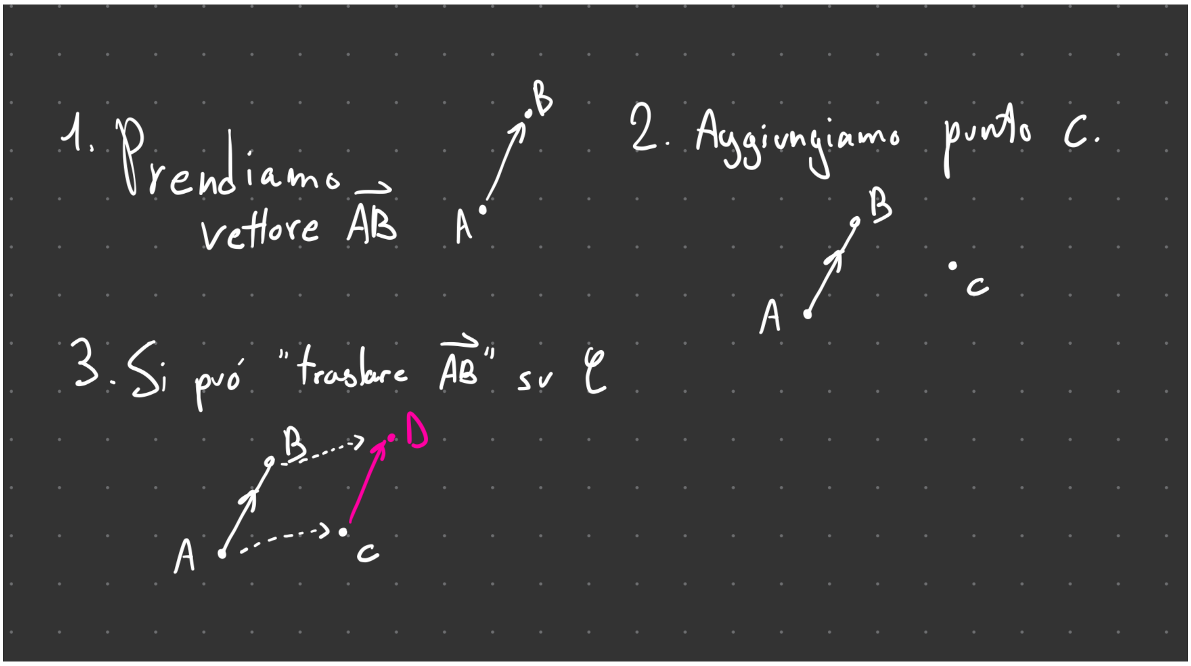
DEF 2. Classe di equipollenza

Dato un vettore applicato $\overrightarrow{AB}$, si definisce la sua **classe di equipollenza**

$$[\overrightarrow{AB}] := \{\text{tutti i vettori applicati } \overrightarrow{CD} : \overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD}\}$$

PROP 2.1. Dai risultati della *geometria euclidea* segue che dati un vettore applicato $\overrightarrow{AB}$ e un punto C, allora esiste *sempre* un **vettore applicato** $\overrightarrow{CD} \equiv \overrightarrow{AB}$; da questo segue che una classe di equipollenza denotata $\vec{v}$ e dato un punto C nel piano, esiste *sempre* un vettore applicato che appartiene a $\vec{v}$ e che ha come punto iniziale C.

INTERPRETAZIONE GRAFICA.



OSS 2.1. Si nota che

$$\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD} \iff [\overrightarrow{AB}] = [\overrightarrow{CD}]$$

Quindi si dice che i vettori $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ sono dei *rappresentanti* della medesima classe di equipollenza.

DEF 3. Vettore libero

Ora finalmente si definisce il **vettore libero**, che si dice come una classe di **equipollenza** $\vec{v}$.
Infatti è una **quantità infinita** di vettori applicati, che condividono una medesima direzione, un medesimo verso e una medesima lunghezza; sostanzialmente si *"estrania"* dal vettore applicato il *punto di applicazione* e si considerano solo le tre proprietà appena elencate sopra.

DEF 3.1. Vettore libero nullo

OSS 3.1.1. Tutti i *vettori applicati nulli* sono equipollenti e dunque formano una **sola classe di equipollenza** che si denota $\vec{0}$. Qui si vede superato la *prima limitazione* osservata nei Vettori Applicati (**OSS. 1.3.1**); quindi definiamo il *vettore libero nullo* come

$$\vec{0} := [\overrightarrow{AA}]$$

ovvero *tutti* i vettori per cui il punto di applicazione coincide con il punto di arrivo.

OSS 3.1.2. Tenendo in considerazione la definizione della somma tra due vettori liberi, si ha

$$\vec{0} + \vec{v} = [\overrightarrow{AA}] + [\overrightarrow{AB}] = [\overrightarrow{AB}]$$
$$\vec{v} + \vec{0} = [\overrightarrow{AB}] + [\overrightarrow{BB}] = [\overrightarrow{AB}]$$

Quindi il *vettore libero nullo* $\vec{0}$ si comporta come il numero 0 rispetto all'operazione di *somma*.

Operazioni sui vettori liberi

Operazioni sui vettori liberi: somma, scalamento; proprietà di queste operazioni, proprietà asssociativa.

DEF 1. Somma di due vettori liberi

Dati due Vettori Liberi $\vec{u}, \vec{v}$, definiamo la loro **somma** $\vec{u}+\vec{v}$ nella maniera seguente:

1. Si sceglie un rappresentante $\overrightarrow{AB}$ per $\vec{u}$
2. Per la **PROP. 2.1.** (Vettori Liberi), si può sempre scegliere un vettore applicato in $\vec{v}$ tale che il suo punto iniziale sia B, ovvero un vettore applicato $\overrightarrow{BC} \in \vec{v}$, ovvero $\vec{v} = [\overrightarrow{BC}]$.
3. Definiamo infine

$$\vec{u}+\vec{v} := [\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}] = [\overrightarrow{AC}]$$

PROP. 1.1. Si sceglie arbitrariamente un rappresentante per $\vec{u}$; tuttavia secondo il passaggio 3. si nota che *indipendentemente* dal vettore scelto iniziale, si raggiunge sempre allo stesso risultato finale; ovvero la classe di equipollenza $[\overrightarrow{AC}]$
DIM. Si vuole dimostrare che si raggiunge sempre allo stesso risultato finale, indipendentemente dal vettore iniziale scelto.
Ripercorriamo i passaggi definiti in **DEF 3.1.** con delle leggere variazioni;
1. Si scelgono due distinti rappresentanti per $\vec{u}$, ovvero

$$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'} \in \vec{u}; \overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{A'B'}$$

2. Si scelgono i corrispettivi rappresentanti di $\vec{v}$, tali che i loro punti iniziali coincidano con i punti finali dei vettori-rappresentanti di $\vec{u}$;

$$\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{B'C'} \in \vec{v}; \overrightarrow{BC} \neq \overrightarrow{B'C'}$$

3. Ora, per definizione in **DEF 3.1.**, la somma di $\vec{u}+\vec{v}$ viene

$$\vec{u}+\vec{v} = [\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}] = [\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{B'C'}] \iff [\overrightarrow{AC}] = [\overrightarrow{A'C'}] = \vec{w}$$

Da qui si evince che *indipendentemente* dai punti di applicazione A e A' scelti, si arriva **sempre** allo stesso risultato; ovvero il *vettore-risultante* $\vec{w}$.
La definizione quindi è *ben posta*, ovvero *non* dipende dal rappresentante scelto.

OSS 1.1. Rigorosamente parlando, la *somma* è una funzione, ovvero la si scrive come

$$\begin{aligned} + : V_2 \times V_2 &\longrightarrow V_2 \\ (\vec{u}, \vec{v}) &\mapsto \vec{u} + \vec{v} \end{aligned}$$

ove V_2 rappresenta l'insieme dei vettori liberi.

OSS 1.2. Se definiamo il *vettore libero nullo* come $\vec{0} := [\overrightarrow{AA}]$, allora notiamo che questo comporta come il numero 0 rispetto alla *somma in* $\mathbb{R}$. Infatti,

$$\vec{0} + \vec{v} = [\overrightarrow{AA}] + [\overrightarrow{AB}] = [\overrightarrow{AB}] = \vec{v}$$
$$\vec{v} + \vec{0} = [\overrightarrow{AB}] + [\overrightarrow{BB}] = [\overrightarrow{AB}] = \vec{v}$$

DEF 2. Moltiplicazione di un vettore per uno scalare

Analogamente si definisce lo *scalamento* come l'operazione della moltiplicazione di un vettore per uno *scalare* (ovvero numero reale $\mathbb{R}$);
Se $\lambda \in \mathbb{R}$, $\vec{v} \in V_2$, allora possiamo definire $\lambda \cdot \vec{v}$;

$$\vec{v} = [\overrightarrow{AB}] \implies \lambda \cdot \vec{v} := [\lambda \cdot \overrightarrow{AB}]$$

Di cui $\lambda \cdot \overrightarrow{AB}$ è stata già definita in Vettori Liberi (**DEF 3.2.**).
OSS 2.1. Anche in questo caso la *moltiplicazione di un vettore per uno scalare* è una definizione *ben posta*.

OSS 2.2. Anche in questo caso la moltiplicazione di un vettore per uno scalare è una *funzione*, allora

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R} \times V_2 &\longrightarrow V_2 \\ (\lambda, \vec{v}) &\mapsto \lambda \cdot \vec{v} \end{aligned}$$

OSS 2.3. Si nota che

$$1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$$

ATTENZIONE! La **moltiplicazione di un vettore per uno scalare** NON va confusa con il *prodotto scalare*; si trattano di due operazioni completamente diverse, in quanto con la moltiplicazione di un vettore per uno scalare si ottiene un altro vettore; invece per il *prodotto scalare* si ottiene un altro vettore.

DEF 3. Proprietà delle operazioni sui vettori liberi

OSS 3.1. Si nota entrambe le operazioni $+$, $\cdot$ sono suriettive (**DEF 3.1.**), ovvero che a partire da due vettori è possibile raggiungere qualsiasi vettore; infatti se si considerano gli *elementi neutri* di queste operazioni (ovvero 0 per $+$; 1 per $\cdot$), possiamo prendere un qualsiasi rappresentante $\overrightarrow{AB}$ di $\vec{v}$ e metterli in funzione con questi elementi neutri, riotteniamo il medesimo vettore.

3.1. Proprietà della somma $+$

1. **PROPRIETA' ASSOCIATIVA.** $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$,

$$(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$$

2. **PROPRIETA' COMMUTATIVA.** $\forall \vec{u}, \vec{v}$,

$$\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$$

3. **L'ESISTENZA DELL'ELEMENTO NEUTRO.** $\forall \vec{v}$,

$$\vec{0}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{0}=\vec{v}$$

4. **L'ESISTENZA DELL'ELEMENTO OPPOSTO** $\forall \vec{v}, \exists \vec{w}:$

$$\vec{v}+\vec{w}=\vec{w}+\vec{v}=\vec{0}$$

   OSS. 3.1.1. Tale elemento $\vec{w}$ si denota con $-\vec{v}$ e definiamo la *sottrazione*

$$\vec{v}+(-\vec{v}):=\vec{v}-\vec{v}=0$$

   Se $\vec{v}=[\overrightarrow{AB}]$, allora $-\vec{v}=[\overrightarrow{BA}]$.

3.2. Proprietà dello scalamento

1. $\forall \vec{v}$,

$$1\cdot\vec{v}=\vec{v}$$

2. $\forall \vec{v}$,

$$(-1) \cdot \vec{v} = -\vec{v}$$

3. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e $\forall \vec{v}$,

$$(\lambda\mu) \cdot \vec{v} = \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{v})$$

   OSS 3.2.1. Notare che questa proprietà non è banale, al contrario di quello che si può pensare; infatti nella prima si definisce una singola operazione tra un reale $\gamma = \lambda\mu$ e un vettore $\vec{v}$, invece nella seconda si definiscono due moltiplicazioni tra uno reale e un vettore.

4. $\forall \lambda\mu \in \mathbb{R}$ e $\forall \vec{u}, \vec{v}$,

$$\begin{aligned} &1.\ (\lambda + \mu) \cdot \vec{v} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{v} \\ &2.\ \lambda \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \vec{v} \end{aligned}$$

Spazi Vettoriali - Sommario

Spazi e sottospazi vettoriali. Formalizzazione del linguaggio a partire dalla lezione del 31.10.2023

A. LE DEFINIZIONI BASILARI

A1. Spazio vettoriale

Spazi Vettoriali

Definizione di $\mathbb{R}$-spazio vettoriale, gli 8 assiomi dei spazi vettoriali. L'utilità di spazi vettoriali; esempi di spazi vettoriali.

---

1. Definizione di spazio vettoriale e vettore

Cerchiamo di astrarre quanto visto in Vettori Liberi e Operazioni sui vettori liberi.

#Definizione

Definizione (Definizione 1.1. (spazio vettoriale sul campo K)).

Un $\mathbb{K}$-*spazio vettoriale* (o *spazio vettoriale su* $\mathbb{K}$, dove $\mathbb{K}$ è un campo (Definizione 1 (Definizione 1.1 (campo)))) è un insieme V, dotato di due operazioni definiti come:

$$\begin{gathered} + : V \times V \longrightarrow V;\ (u,v) \mapsto u+v \\ \cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V;\ (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v \end{gathered}$$

tali per cui $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e $\forall u, v, w \in V$ sono soddisfatte le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{v}_1 : (u+v)+w = u+(v+w) \\
&\mathrm{v}_2 : u+v = v+u \\
&\mathrm{v}_3 : \exists 0 \in V \mid 0+v = v+0 = v \\
&\mathrm{v}_4 : \exists -v \in V \mid v+(-v) = (-v)+v = 0 \\
&\mathrm{v}_5 : \lambda \cdot (u+v) = \lambda u + \lambda v \\
&\mathrm{v}_6 : (\lambda+\mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u \\
&\mathrm{v}_7 : (\lambda \cdot \mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v) \\
&\mathrm{v}_8 : 1 \cdot v = v
\end{aligned}$$

Inoltre uno *spazio vettoriale* può essere anche definito con la seguente *terna*:

$$(V, +, \cdot)$$

#Definizione

Definizione (Definizione 1.2. (l'elemento neutro di un spazio vettoriale)).

Chiamiamo l'elemento 0 della v_3 l'elemento *neutro*. In alternativa si può denominarla come 0_V, in riferimento al spazio vettoriale V.

#Osservazione

Osservazione 1.1. (1 non verrà chiamato come l'elemento neutro)

Notare che nella v_8 non chiameremo 1 *l'elemento neutro* per ragioni di convenzione, particolarmente per quanto riguarda l'algebra astratta. Infatti, per essere definito tale, si dovrebbe trattare di una *moltiplicazione interna in* V (ovvero del tipo $\pi : V \longrightarrow V$)

#Proposizione

Proposizione 1.1. (V_2 è un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale)

Ciò che abbiamo visto fino ad ora ci mostra che V_2 (ovvero l'insieme dei vettori liberi nel piano (Vettori Liberi)) è un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale.

#Definizione

Definizione (Definizione 1.1. (vettore)).

Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale; gli elementi $v \in V$ si dicono *vettori*.
! ATTENZIONE ! Si nota immediatamente che questa definizione del *vettore* non deve necessariamente corrispondere alla nostra idea di un *vettore libero*.

2. Conseguenze immediate delle 8 "v"

#Proposizione

Proposizione 2.1. (l'unicità di 0)

L'assioma v_3 garantisce che *esiste* almeno un vettore neutro 0 tali che certe proprietà vengono soddisfatte; però ciò che *NON* garantisce è l'unicità del vettore neutro 0. Potrebbe esistere un altro vettore *neutro* che possiamo chiamare $0'$.
Però $0'$ non esiste e lo dimostreremo.

DIMOSTRAZIONE dell'*unicità di* 0_V
Voglio dimostrare che se V è un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale, allora l'elemento neutro 0 è unico.
Supponiamo quindi che esistano due elementi neutri: 0 e $0'$; mostreremo che con questa supposizione deve necessariamente valere $0 = 0'$, quindi da questo seguirà la tesi.
Per ipotesi, $\forall v \in V$,

$$\begin{aligned} A.\, 0 + v &\overset{\mathrm{v}_3}{=} v + 0 = v \\ B.\, 0' + v &\overset{\mathrm{v}_3}{=} v + 0' = v \end{aligned}$$

In $A.$ scegliamo $v = 0'$; allora

$$0 + 0' = 0' + 0 = 0'$$

In $B.$ scegliamo invece $v = 0$; allora

$$0' + 0 = 0 + 0' = 0$$

Quindi notiamo che

$$0 = 0 + 0' = 0'$$

per la proprietà transitiva dell'uguaglianza, $0 = 0'$. ■

#Proposizione

Proposizione 2.2. ($0 \in \mathbb{K}$ è l'elemento nullo dello scalamento)

La proposizione

$$0 \cdot v = 0$$

sembra ovvia e banale, come ci suggerirebbe la notazione; però in realtà non lo è veramente, in quanto associamo due concetti *diversi*; da una parte abbiamo lo *scalamento* del vettore v per $\lambda = 0$, dall'altra abbiamo il *vettore neutro* 0.
Quindi vogliamo dimostrare che se V è un spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, allora per ogni $v \in V$ sussiste la proposizione.

DIMOSTRAZIONE della *proposizione 2.2.*
Per dimostrare la tesi, supponiamo che $v \in V$ e quindi abbiamo che:

$$\begin{aligned} 0 \cdot v &= (0+0) \cdot v \overset{\text{V}_6}{=} 0 \cdot v + 0 \cdot v \\ 0 \cdot v &= 0 \cdot v + 0 \cdot v \\ (0 \cdot v) + (-(0 \cdot v)) &= (0 \cdot v) + (-(0 \cdot v)) + (0 \cdot v) \\ 0 &= 0 \cdot v \\ 0 \cdot v &= 0 \blacksquare \end{aligned}$$

#Osservazione

Osservazione 2.1. (c'è ancora qualcosa da dimostrare)

Notare che in questi passaggi abbiamo fatto un *assunto* che non è dato per scontato; ovvero che il vettore opposto $-v$ è unico ad ogni vettore v. Infatti questo assunto è ancora da *dimostrare* (che è necessario per non invalidare questa dimostrazione).

#Proposizione

Proposizione 2.3. (l'elemento opposto è l'elemento scalato per -1)

Anche la proposizione

$$(-1) \cdot v = -v$$

sembra intuitiva, ma in realtà non è dato *per scontato* secondo gli assiomi v ; infatti da un lato abbiamo lo *scalamento* di un vettore, invece dall'altro abbiamo il *vettore opposto del vettore* v.
Quindi vogliamo dimostrare che se V è un spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, allora per ogni vettore $v \in V$ vale la proposizione appena enunciata.

DIMOSTRAZIONE della *proposizione 2.3.*
Per dimostrare la tesi, utilizziamo la proprietà v_3, ovvero

$$v + (-v) = -v + v = 0$$

e dimostriamo la seconda uguaglianza, assumendo che $-v = (-1) \cdot v$;

$$(-1) \cdot v + (1) \cdot v \overset{\mathrm{v}_6}{=} (-1+1) \cdot v = 0 \cdot v = 0$$

EXCURSUS. Il senso della definizione dei spazi vettoriali

#Osservazione

Osservazione filosofica (il senso di definire e studiare i spazi vettoriali)

Si nota che in questa pagina non abbiamo veramente imparato qualcosa di nuovo; come il filosofo *F. Nietzsche* criticherebbe l'uomo che produce la *definizione di un mammifero* poi per riconoscere un *cammello* come un *mammifero*$^{(1)}$, non abbiamo veramente scoperto nulla di nuovo: infatti abbiamo solo dato *definizioni* poi per riconoscerle, ad esempio abbiamo definito lo *spazio vettoriale* e abbiamo riconosciuto V_2 come uno spazio vettoriale.

In realtà il discorso del filosofo tedesco non varrebbe qui: abbiamo dato questa definizione di spazio vettoriale per un motivo ben preciso, ovvero quello di *astrarre, "abs-trahĕre"*. Astrarre nel senso che togliamo l'aspetto *"accidentale"* dei vettori geometrici, concentrandoci invece sull'aspetto *"sostanziale"*.

Infatti dopo potremmo vedere che esistono molti insiemi che sono dei *spazi vettoriali*; se dimostro che un certo insieme A è uno spazio vettoriale, allora le proprietà v_n saranno sicuramente vere.

$^{(1)}$*"Se io produco la definizione di un mammifero e poi dichiaro, alla vista di un cammello: guarda, un mammifero! certo con questo una verità viene portata alla luce, ma essa è di valore limitato, mi pare; in tutto e per tutto essa è antropomorfica e non contiene un solo singolo punto che sia «vero in sé», reale e universalmente valido, al di là della prospettiva dell'uomo."* (Su verità e menzogna in senso extramorale, 1896, Friedrich Nietzsche)

---

3. Esempi di spazi vettoriali

#Esempio

Esempio 3.1. ($\mathbb{R}$)

Consideriamo $V = \mathbb{R}$; con l'usuale definizione di *somma* $+$ e *moltiplicazione* $\cdot$, si verifica che anche $\mathbb{R}$ è uno $\mathbb{R}$-spazio vettoriale.

#Esempio

Esempio 3.2. (V_2)

Consideriamo $V = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, ovvero

$$V = \{(a,b) : a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$$

con le operazioni

$$\begin{aligned}&(a,b)+(c,d) := (a+c, b+d) \\ &\lambda \cdot (a,b) := (\lambda \cdot a, \lambda \cdot b)\end{aligned}$$

allora $V = \mathbb{R}^2$ è uno *spazio vettoriale*.

#Esempio

Esempio 3.3. ($\mathbb{R}^n$)

Generalizziamo l'ESEMPIO 2.1. Coppie ordinate V_2; ovvero definiamo

$$V = \mathbb{R}^n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) : a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}$$

V è l'insieme delle *n-uple ordinate dei numeri reali*, con le operazioni

$$\begin{aligned} +: V \times V &\longrightarrow V; \\ ((a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n)) &\mapsto (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n) \\ \cdot : \mathbb{R} \times V &\longrightarrow V; \\ \lambda \cdot (a_1, a_2, \dots, a_n) &\mapsto (\lambda \cdot v_1, \lambda \cdot v_2, \dots, \lambda \cdot v_n) \end{aligned}$$

$(V, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

#Esempio

Esempio 3.4. ($\mathcal{F}$, l'insieme delle funzioni reali)

Consideriamo l'insieme delle funzioni di variabile reale (Definizione 4 (Definizione 1.4. (funzione di reale variabile))), ovvero

$$V = \{\text{funzioni } f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow B \subseteq \mathbb{R}\}$$

con le operazioni

$$\begin{aligned} +: V \times V \longrightarrow V;\ (f, g) \mapsto f + g \\ \cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V;\ (\lambda, f) \mapsto \lambda \cdot f \end{aligned}$$

#Osservazione

Osservazione 3.1. (chiarimenti sul comportamento della sommo a dello scalamento)

Qui è importante chiarire il comportamento della *somma*, in quanto per noi non risulta immediatamente intuibile. Siano f, g funzioni, quindi

$$f + g = h$$

ove

$$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

data dalla seguente: se $a \in \mathbb{R}$, allora

$$h(a) = (f+g)(a) := f(a) + g(a)$$

Lo stesso discorso vale per lo *scalamento*;

$$\begin{gathered} \lambda \cdot f = F \\ F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \end{gathered}$$

ove per ogni a reale,

$$F := \lambda \cdot (f(a))$$

#Osservazione

Osservazione 3.2. (la "funzione nulla")

Vogliamo trovare la *funzione nulla*, ovvero la *funzione* che appartiene a V e gioca lo stesso ruolo di 0. La funzione la chiamiamo O e si definisce come

$$O : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto 0$$

infatti, se definiamo $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, allora

$$(f + O) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) + 0 = f(x)$$

Abbiamo visto che $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$(f+O)(x) = f(x)$$

pertanto

$$O + f = f; f + O = f$$

quindi abbiamo verificato che O è *l'elemento neutro* dello *spazio vettoriale* $(V, +, \cdot)$.

A2. Sottospazio vettoriale

Sottospazi Vettoriali

Sottospazio vettorali: definizione, esempi, interpretazione geometrica. Alcuni lemmi sui sottospazi vettoriali.

1. Sottospazio Vettoriale

#Definizione

Definizione (Definizione 1.1. (sottospazio vettoriale)).

Sia V un $\mathbb{K}$-*spazio vettoriale*; un sottoinsieme $W \subseteq V$ si dice un *sottospazio vettoriale* se valgono le seguenti:

1. Il vettore *nullo* di V appartiene a W
2. $\forall v, w \in W$; vale che $v + w \in W$ (*chiusura rispetto alla somma*)
3. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall v \in W$, vale che $\lambda \cdot v \in W$ (*chiusura rispetto allo scalamento*)

#Esempio

Esempio 1.1. (V_2)

Consideriamo ora l'$\mathbb{R}$-spazio vettoriale V_2, ovvero

$$V_2 : (\mathbb{R}^2, +, \cdot)$$

introdotto in precedenza (**ESEMPIO 2.1.**).
Ora consideriamo il seguente sottoinsieme $W \subseteq V_2$;

$$W := \{(x, y) \in V_2 : x - 3y = 0\}$$

Facciamo le seguenti *osservazioni*.

#Osservazione

Osservazione 1.1. (l'elemento nullo di V_2)

In V_2 esiste il vettore nullo $(0, 0)$; in questo caso il vettore nullo $(0, 0)$ vale anche in W.

#Osservazione

Osservazione 1.2. (somma in V_2)

In V_2 è definita una *somma* $+$. Se v, w sono due elementi di W, allora sono in particolare elementi di V_2; dunque $v+w \in V_2$. In aggiunta vale che $v+w \in W$. Infatti: se $v=(v_1,v_2)$ $w=(w_1,w_2)$ allora

$$\begin{aligned} v \in W &\implies v_1 - 3v_2 = 0 \\ w \in W &\implies w_1 - 3w_2 = 0 \end{aligned}$$

quindi

$$(v_1 - 3v_2) + (w_1 - 3w_2) = 0 = 0 + 0 = 0$$

ovvero

$$(v_1 + w_1) - 3(v_2 + w_2) = 0$$

ovvero $(v+w) \in W$

#Osservazione

Osservazione 1.3. (scalamento in V_2)

Infine consideriamo $v \in W$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Se

$$\lambda \cdot v \in V_2$$

allora vale anche

$$\lambda \cdot v \in W$$

Infatti se $v=(v_1,v_2)$, allora $\lambda \cdot v = (\lambda \cdot v_1, \lambda \cdot v_2)$;

$$\begin{aligned} v \in W &\implies v_1 - 3v_2 = 0 \\ \text{allora } \lambda \cdot (v_1 - 3v_2) &= \lambda \cdot 0 = 0 \\ \text{quindi } (\lambda \cdot v_1) - 3(\lambda \cdot v_2) &= 0 \\ \text{ovvero } \lambda \cdot v \in W & \end{aligned}$$

2. Interpretazione geometrica

#Esempio

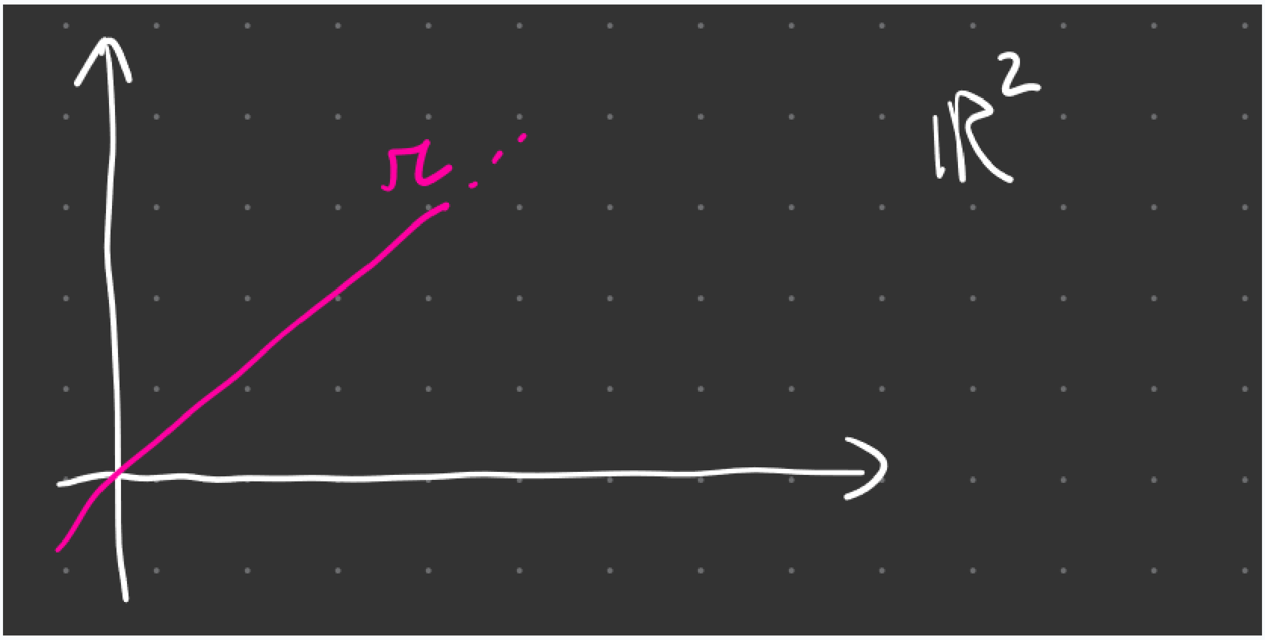
Esempio 2.1. (la retta sul piano)

Consideriamo $\mathbb{R}^2$ come l'insieme dei *punti nel piano*, ovvero il classico *piano cartesiano* π
Definiamo il sottoinsieme

$$W := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - 3y = 0\}$$

Ovviamente W è uno *sottospazio vettoriale* di $\mathbb{R}^2$; notiamo che se rappresentiamo $\mathbb{R}^2$ come l'insieme dei punti nel piano, allora si può rappresentare W come l'insieme dei *punti nella retta* r, ove
$r : x - 3y = 0 \iff y = \frac{1}{3}x$

FIGURA 2.1. (*Esempio 2.1.*)



#Esempio

Esempio 2.2. (la circonferenza sul piano)

In $\mathbb{R}^2$ consideriamo il seguente:

$$C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

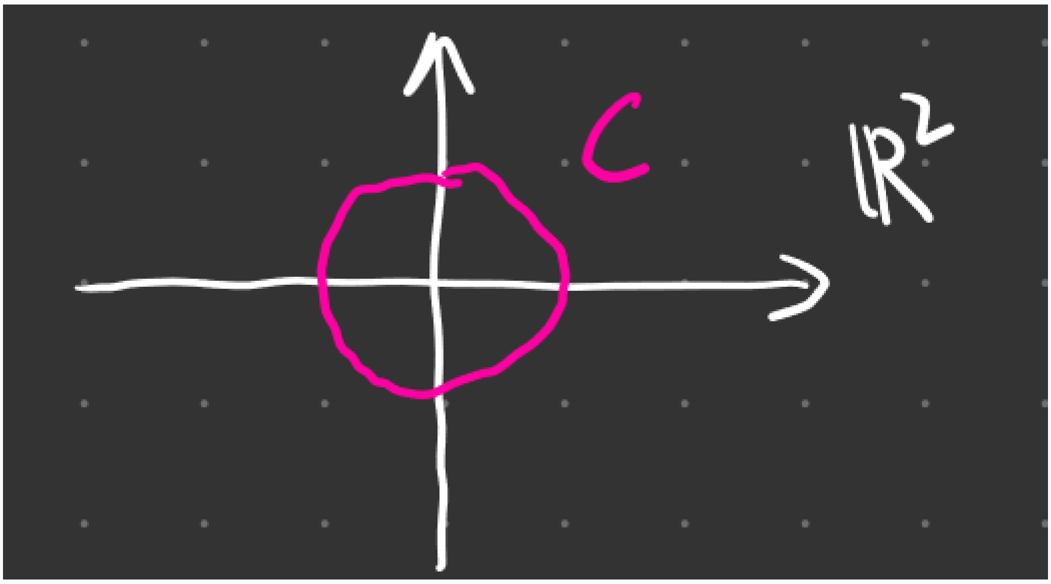
Osserviamo subito che la *proprietà caratterizzante di* C non è un'*equazione lineare*; infatti si tratta di un'equazione di secondo grado.
Precisamente nel contesto della *geometria analitica*, C rappresenterebbe la circonferenza

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \gamma^2$$

ove (α, β), quindi $(0, 0)$, rappresentano le coordinate dell'origine del cerchio

e γ, quindi 1, il raggio.
Vediamo subito che C *non* è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$, in quanto $(0, 0)$ non appartiene a C.

FIGURA 2.2. (*Esempio 2.2.*)



3. Formare sottospazi a partire da due sottospazi

#Lemma

Lemma (Lemma 3.1. (l'intersezione di due sottospazi forma un sottospazio)).

Sia V un *K-spazio vettoriale*, siano $U, W \subseteq V$ dei *sottospazi vettoriali* di V.
Se voglio avere un *nuovo* sottospazio vettoriale a partire da U, W allora posso prendere la loro *intersezione* (Operazioni con gli Insiemi). Infatti

$$U \cap W$$

è *sottospazio vettoriale* di V.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *lemma 3.1.*
Verifichiamo che $U \cap W$ sia *sottospazio vettoriale di* V, quindi che soddisfa le *tre proprietà* elencate in **DEF 1.**.

1. $0 \in (U \cap W)$ è vera perché *per ipotesi* abbiamo che 0 appartiene sia ad U che W, in quanto sono dei sottospazi vettoriali; quindi è un *elemento* comune di questi due insiemi.

2. Possiamo verificare la *chiusura della somma*: infatti

$$\begin{aligned} \forall v_1, v_2 \in (U \cap W) &\implies v_1, v_2 \in U; v_1, v_2 \in W \\ \text{per ipotesi} &\implies v_1 + v_2 \in U; v_1 + v_2 \in W \\ &\implies (v_1 + v_2) \in (U \cap W) \end{aligned}$$

3. Ora verifichiamo la *chiusura dello scalamento* con lo stesso procedimento:

$$\begin{aligned} \forall \lambda \in K, \forall v \in (U \cap W) &\implies v \in U; v \in W \\ \text{per ipotesi} &\implies \lambda v \in U; \lambda v \in W \\ &\implies \lambda v \in (U \cap W) \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Il vuoto

#Osservazione

Osservazione 3.1. (l'unione di due sottospazi NON forma un sottospazio)

Purtroppo questa *non* vale per l'unione di due sottospazi vettoriali. Infatti, avendo V uno spazio vettoriale e U, W i suoi sottospazi vettoriali, *non* è sempre garantito che

$$U \cup W$$

sia anch'esso uno sottospazio vettoriale. Qui la simmetria si spezza.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE di *osservazione 3.1.*.
Per *"dimostrare"* questa osservazione troviamo alcuni esempi specifici di sottospazi vettoriali per cui non vale *almeno* una delle tre proprietà dello sottospazio vettoriale: scopriremo che non varrà la chiusura della somma per un caso specifico.
Considero $U, W \subseteq \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} U &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x - y = 0\} \\ W &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - 2y = 0\} \end{aligned}$$

Per ora mostriamo *algebricamente* che non vale la chiusura della somma per $U \cup W$.

1. Scegliamo alcuni elementi di U, W;

$$(1,2) \in U; (2,1) \in W$$

2. Ora li sommiamo

$$(1,2)+(2,1)=(3,3)$$

3. Verifichiamo che

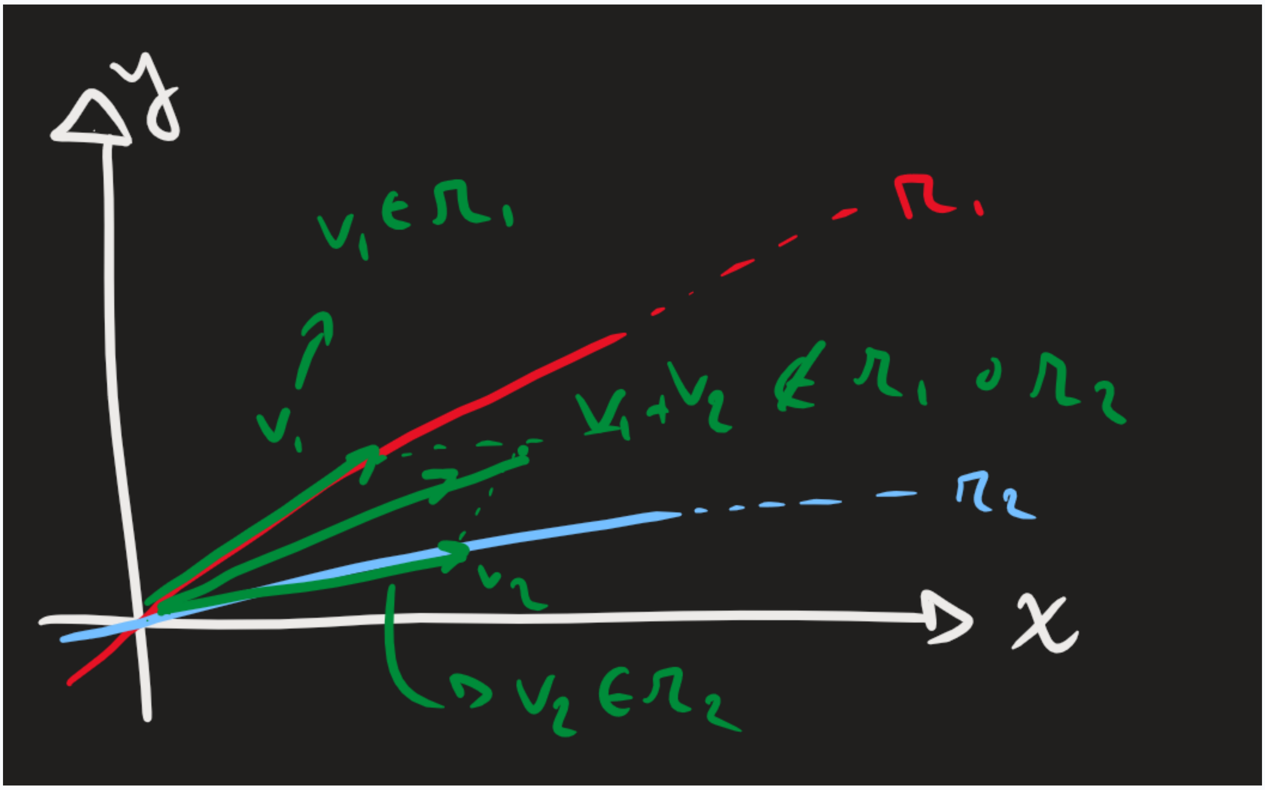
$$(3,3) \notin (U \cup W)$$

   Infatti

$$2(3)-3 \neq 0; 3-3(3) \neq 0$$

   Volendo si può vedere la situazione graficamente, osservando che U e W *corrispondono* a rette passanti per l'origine e vedendo poi che *vettore libero* $(3,3)$ dato dalla somma di *due vettori* non appartiene alla nessuna delle due rette.

FIGURA 3.1. (*Osservazione 3.1.*)



Sottospazio somma

Allora vogliamo trovare un *"surrogato"* per questo vuoto formato dal fatto che $U \cup W$ non sia uno sottospazio.

#Definizione

Definizione (Definizione 3.1. (sottospazio somma)).

Sia V un K-spazio vettoriale, siano U, W due sottospazi vettoriali di V. Definiamo dunque il *sottospazio vettoriale somma di* U, V come

$$U + W := \{u + w : u \in U, w \in W\}$$

#Lemma

Lemma (Lemma 3.2. (la somma di due sottospazio forma un sottospazio)).

$U + W$ è sottospazio vettoriale di V.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE. (*Esercizio lasciato a noi*)

1. *L'appartenenza dell'elemento neutro*
   Verifichiamo che

   $$0 \in (U + W)$$

   è vera: infatti basta scegliere $u = 0, w = 0 \implies 0 + 0 = 0$.
2. *Chiusura della somma*

   $$\begin{aligned} v_1, v_2 \in (U + W) \implies v_1 &= u_1 + w_1, v_2 = u_2 + w_2 \\ v_1 + v_2 &= v_1 + v_2 + w_1 + w_2 \\ &= (v_1 + v_2) + (w_1 + w_2) \\ &= v + w \\ v_1 + v_2 &\in (U + W) \end{aligned}$$

3. *Chiusura dello scalamento*

   $$\begin{aligned} &\lambda \in K; v \in (U + W) \\ &v \in (U + W) \implies v = u + w; u \in U, w \in W \\ &\lambda \cdot v = \lambda u + \lambda w \\ &\text{per ipotesi } \lambda u \in U, \lambda w \in W \\ &\implies \lambda \cdot v \in (U + W) \end{aligned}$$

   ■

#Lemma

Lemma (Lemma 3.3. (due sottospazi appartengono alla loro somma)).

Con la notazione precisa valgono che

$$U \subseteq (U+W) \wedge W \subseteq (U+W)$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *lemma 3.2.*.
Mostrare la prima significa mostrare che per ogni elemento u di U vale che u appartiene anche a $U+W$. Analogamente lo stesso discorso vale per w elemento di W.

$$u \in (U+W) \implies u = u + w \overset{w=0}{\implies} u = u \implies u \in U$$

#Corollario

Corollario (Corollario 3.1. (l'intersezione di due sottospazi appartiene alla loro somma)).

Vale che

$$(U \cup W) \subseteq (U+W)$$

inoltre si può dimostrare che $U+W$ è il *più piccolo* sottospazio vettoriale di V che contiene $U \cup W$.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *corollario 3.1.*.
Omessa.

B. LA COMBINAZIONE LINEARE E I SUOI FIGLI

B1. Combinazione lineare

Combinazione Lineare

Definizione di combinazione lineare di un K-spazio vettoriale; definizione di span*; definizione di sistema di generatori per uno sottospazio vettoriale.*

1. Definizione di Combinazione Lineare

#Definizione

Definizione (Definizione 1.1. (combinazione lineare)).

Sia V un *K-spazio vettoriale* (Spazi Vettoriali, **DEF 1.**), siano

$$\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n \in V$$

degli elementi di V. Alternativamente possiamo pensare questi elementi come il sottoinsieme $S \subseteq V$.
Allora definiamo *combinazione lineare* un qualsiasi *vettore* (Spazi Vettoriali, **DEF 1.1.**) della forma

$$\lambda_1 \mathrm{v}_1 + \ldots + \lambda_n \mathrm{v}_n$$

dove $\lambda_i \in K, \forall i \in \{1, \ldots, n\}$.

#Esempio

Esempio 1.1. (esempio su $\mathbb{Q}^2$)

In $\mathbb{Q}^2$ considero

$$q_1 = (1, 0); q_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}); q_3 = (1, 2)$$

Una *combinazione lineare* di $S = (q_1, q_2, q_3)$ può essere ad esempio

$$\frac{3}{4}q_1 - \frac{12}{7}q_2 + 15q_3$$

2. L'insieme delle combinazioni lineari span

Ora voglio considerare l'*insieme* delle combinazioni lineari.

#Definizione

Definizione (Definizione 2.1. (span di un insieme di vettori)).

Sia V un K-spazio vettoriale e sia $S = (\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n)$.
Allora chiamo lo *span* di S o di $\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n$ come l'*insieme di tutte le combinazioni lineari di tale sottoinsieme* S:

$$\operatorname{span}(\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n) := \{\lambda_1 \mathrm{v}_1 + \ldots + \lambda_n \mathrm{v}_n : \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K\}$$

oppure in forma compatta

$$\operatorname{span}(S) := \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathrm{v}_i : i \in \{1, \ldots, n\}, \lambda_i \in K\}$$

#Lemma

Lemma (Lemma 2.1. (lo span è sempre un sottospazio vettoriale)).

Lo span di un qualunque $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ è *sottospazio vettoriale* di V (Sottospazi Vettoriali).

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *lemma 2.1.*
Verifichiamo le tre proprietà fondamentali dello sottospazio vettoriale.

1. *L'appartenenza dell'elemento 0*
   Verifichiamo che 0 può essere espresso come una *combinazione lineare* ponendo tutti i *coefficienti* $\lambda_i = 0$.
2. *Chiusura della somma*
   Siano $u, w \in \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_n)$. Allora per ipotesi abbiamo

   $$u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \mid w = \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i$$

   Allora sommandoli abbiamo

   $$u + w = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \mu_i) v_i \implies u + w \text{ è combinazione lineare}$$

3. *Chiusura dello scalamento*
   Sia $\lambda \in K$, $w \in \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_n)$. Allora

$$\lambda \cdot w = \lambda \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i = \sum_{i=1}^{n} (\lambda \mu_i) v_i \in \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_n) \blacksquare$$

3. Sistema di generatori

#Definizione

Definizione (Definizione 3.1. (sistema di generatori per un spazio vettoriale)).

Sia V un K-spazio vettoriale, $U \subseteq V$ un qualunque sottospazio vettoriale di V.
Un *insieme di elementi* $\{u_1, \ldots, u_n\} \subseteq U$ si dice un *sistema di generatori di/per* U se *ogni vettore* $u \in U$ è una *combinazione lineare dell'insieme di elementi stesso*; equivalentemente

$$\{u_1, \ldots, u_n\} \text{ è sistema di generatori } \iff U = \operatorname{span}(\{u_1, \ldots, u_n\})$$

ovvero se *ogni* vettore di U è una combinazione lineare di quell'insieme di elementi, allora quell'insieme è un *sistema di generatori*.

#Esempio

Esempio 3.1. (su $\mathbb{R}^2$)

Consideriamo $V = \mathbb{R}^2$, $U = \mathbb{R}^2$ (ovvero $V = U$) e i vettori

$$u_1 = (1, 0) \mid u_2 = (0, 1)$$

Vale che $\{u_1, u_2\}$ è un *sistema di generatori* per U.
Infatti dato un vettore $(a, b) \in U$ abbiamo $(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1) = au_1 + bu_2$.
Notiamo inoltre che se definiamo

$$u_3 = (1, 1)$$

allora anche $\{u_1, u_2, u_3\}$ è un *sistema di generatori per* U.

#Osservazione

Osservazione 3.1. (la flessibilità dei sistemi di generatori)

Osserviamo che se $\{u_1, \dots, u_n\}$ è un *sistema di generatori per U* allora

$$\forall u \in U, \{u_1, \dots, u_n, u\}$$

anche questo è un *sistema di generatori* per U.
In parole, dato un *sistema di generatori* per un certo sottoinsieme allora possiamo aggiungerci qualsiasi elemento del sottoinsieme, dandoci comunque un altro *sistema di generatori* per lo stesso sottoinsieme.
Da questo discende che la definizione di *sistema di generatori* presenta in sé molta flessibilità e variabilità; tuttavia secondo una specie di *"legge meta-matematica"*, troppa flessibilità è un segno di un ente matematico meno forte.
Introdurremo dunque della *"rigidità"* con le *basi* (Definizione di Base), arricchendo questo concetto con ulteriori vincoli.

B2. Dipendenza, indipendenza lineare

Dipendenza e Indipendenza Lineare

Definizione di dipendenza o indipendenza lineare per degli elementi di uno spazio vettoriale.

---

1. Dipendenza lineare

#Definizione

Definizione (Definizione 1.1. (dipendenza lineare di vettori)).

Sia V un K-spazio vettoriale, siano $v_1, \dots, v_n$ elementi (o vettori) di V (Spazi Vettoriali).
Allora gli *elementi/vettori* $v_1, \dots, v_n$ si dicono *linearmente dipendenti* se possiamo scrivere il vettore nullo $0 \in V$ come la *combinazione lineare* (Combinazione Lineare) di $v_1, \dots, v_n$ in cui *non* tutti i coefficienti λ_i in K sono nulli. Ovvero

$$0 = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n : \exists \lambda_i \neq 0$$

#Proposizione

Proposizione 1.1. (definizione 'alternativa' di dipendenza lineare)

Sia V un K-spazio vettoriale, siano $v_1, \ldots, v_n \in V$. Allora questi *vettori* $v_1, \ldots, v_n$ sono *linearmente dipendenti* se e solo se *uno di essi può essere scritto come combinazione lineare di altri vettori*.
Equivalentemente, se e solo se

$$\exists j \in \{1, \ldots, n\} : v_j \in \text{span}(v_1, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_n)$$

Definizione (Notazione (esclusione di alcuni elementi da una n-upla)).

Per poter compattare la scrittura sopra si può scrivere

$$(v_1, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_n)$$

come

$$(v_1, \ldots, \hat{v}_j, \ldots, v_n)$$

e il *"cappello"* su v_j vuol dire che lo escludiamo dalla n-upla.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE della *proposizione 1.1.*
Dimostro che vale l'implicazione da ambi i lati in quanto abbiamo un enunciato del tipo "se e solo se".
" $\implies$ ": Suppongo che $v_1, \ldots, v_n$ siano *linearmente* dipendenti. Allora

$$\begin{aligned}
\exists \lambda_i \neq 0, i \in \{1, \ldots, n\} : \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0 \\
\implies & -\lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n \\
\implies & v_i = \frac{(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n)}{-\lambda_i} \\
\implies & v_i = -\frac{\lambda_1}{\lambda_i} v_1 + \ldots + (-\frac{\lambda_n}{\lambda_i} v_n) \\
\implies & v_i \in \text{span}(v_1, \ldots, \hat{v}_j, \ldots, v_n)
\end{aligned}$$

" $\impliedby$ ": Suppongo che $\exists i \in \{1, \ldots, n\} : v_i \in \text{span}(v_1, \ldots, \hat{v}_j, \ldots, v_n)$. Allora

$$\begin{aligned}
v_i &= \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_{i-1} v_{i-1} + \mu_{i+1} v_{i+1} + \ldots + \mu_n v_n \\
0 &= \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_{i-1} v_{i-1} - v_i + \mu_{i+1} v_{i+1} + \ldots + \mu_n v_n \blacksquare \\
&\implies \exists \lambda_i = -1 \neq 0 : \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_n v_n = 0
\end{aligned}$$

2. Indipendenza lineare

Ora siamo pronti per definire l'*indipendenza lineare*.

#Definizione

Definizione (Definizione 2.1. (vettori linearmente indipendenti)).

Sia V un K-spazio vettoriale, $v_1, \dots, v_n$ dei vettori di V.
Dichiamo che questi vettori $v_1, \dots, v_n$ sono *linearmente indipendenti* se *non* sono *linearmente dipendenti*.
Equivalentemente, $v_1, \dots, v_n$ sono *linearmente indipendenti* se e solo se *l'unico modo di scrivere* 0 *è quello di porre tutti i coefficienti* $\lambda_i = 0$
Alternativamente,

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$$

#Esempio

Esempio 2.1. (esempio su $\mathbb{R}^2$)

Considero in $V = \mathbb{R}^2$ i seguenti vettori:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vale che v_1, v_2, v_3 sono *linearmente dipendenti* dal momento che

$$v_3 = 1v_1 + 1v_2$$

Invece vale che v_1, v_2 sono *linearmente indipendenti* in quanto se suppongo

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

allora vale che

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

In parole l'*unico* modo di scrivere il *vettore nullo* come la *combinazione lineare di* v_1, v_2 è quello di porre $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

B3. Nesso tra i spazi vettoriali e i sistemi lineari

Generatori, Indipendenza Lineare e Sistemi Lineari

Breve osservazione sui concetti di generatori, indipendenza lineare come astrazioni di aspetti dei sistemi lineare.

Osservazione sui sistemi di generatori e indipendenza lineare

#Osservazione

Osservazione 1.1. (sistemi di generatori in termini di sistemi lineari)

In K^n, l'essere un *sistema di generatori* può essere *"parafrasato"* in termini di *sistemi lineari* (Sistemi Lineari); infatti se $\{v_1, \ldots, v_s\} \subseteq K^n$ è un *sistema di generatori* per K^n, allora abbiamo

$$\forall v \in K^n, \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_s : v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_s v_s$$

ATTENZIONE! Notiamo che usiamo l'altro valore s in quanto n è stato già fissato con K^n: infatti non abbiamo stabilito a priori che $s = n$.
Scriviamo dunque

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{pmatrix}; \ldots; v_s = \begin{pmatrix} a_{s1} \\ \vdots \\ a_{sn} \end{pmatrix}; v = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Allora *"l'essere v una combinazione lineare del sistema di generatori"* equivale ad avere il seguente *sistema lineare*:

$$\begin{cases} \lambda_1 a_{11} + \ldots + \lambda_s a_{s1} = b_1 \\ \vdots \\ \lambda_1 a_{1n} + \ldots + \lambda_s a_{sn} = b_n \end{cases}$$

Quindi si dice che v è *combinazione lineare di* $v_1, \ldots, v_s$ se e solo se il *sistema lineare* del tipo

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{s1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{sn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

è *compatibile*.

#Osservazione

Osservazione 1.2. (indipendenza lineare in termini di sistemi lineari)

Analogamente l'essere *linearmente indipendenti* può essere parafrasata in termini di *sistemi lineari* usando il *sistema lineare omogeneo associato*: infatti avendo un sistema del tipo

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{s1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{sn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

e se questa è *compatibile* e la sua *soluzione* è *unica*, allora tutti i vettori $v_1, \dots, v_s$ sono *linearmente indipendenti*.

#Osservazione

Osservazione 1.3. (a mo' di conclusione)

Concludiamo che i concetti di *sistemi di generatori* (Combinazione Lineare, **DEF 3.1.**) e di *indipendenza lineare* (Dipendenza e Indipendenza Lineare) sono modi di *astrarre* dei concetti che riguardano i *sistemi lineari* (Sistemi Lineari).

C. BASE, DIMENSIONE E RANGO

C1. Definizione di base

Definizione di Base

Definizione di base. Teorema di caratterizzazione della base. Coordinate del vettore v rispetto alla base B. Esempi di base.

---

1. Definizione di base

#Definizione

Definizione 1.1. (Definizione 1.1. (Base).).

Sia V un *K-spazio vettoriale* (Definizione 1 (Definizione 1.1. (spazio vettoriale sul campo K))) e sia $U \subseteq V$ un *sottospazio vettoriale di V* (Definizione 1 (Definizione 1.1. (sottospazio vettoriale))).
Allora una *base di* U è un *insieme* $\{u_1, \dots, u_n\}$ formato da *vettori* di U tali che:
$\{u_1, \dots, u_n\}$ è un *sistema di generatori per* U (Definizione 4 (Definizione 3.1. (sistema di generatori per un spazio vettoriale)))
e anche
$u_1, \dots, u_n$ sono *linearmente indipendenti* (Definizione 3 (Definizione 2.1. (vettori linearmente indipendenti)))

Teorema di caratterizzazione delle basi

#Teorema

Teorema 1.1. (Teorema 1.1. (Caratterizzazione delle basi).).

Sia V un *K-spazio vettoriale finitamente generato*, allora un sottoinsieme $B \subseteq V$, $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di V *se e solo se* ogni vettore $v \in V$ si può scrivere in modo *unico* come *combinazione lineare* di B.

$$B \text{ è base di } V \iff \forall v \in V, \exists! \lambda_1, \dots, \lambda_n : \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *teorema di caratterizzazione delle basi* (Teorema 1.1. (Caratterizzazione delle basi))
Questo è un teorema del tipo *se e solo se*: quindi andiamo per due passi.

" $\Longrightarrow$ ": Sia B una *base* di V, allora devo dimostrare che ogni elemento di V può essere scritta come combinazione lineare di B in un modo unico.
Dato che B è in particolare un *sistema di generatori* di V, allora dato $v \in V$ si può scrivere come combinazione lineare di B, cioè

$$v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$$

Ora ci rimane da dimostrare l'*unicità* di tale scrittura: supponiamo allora che esiste

$$v = \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_n v_n$$

Allora

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_n v_n$$

Pertanto

$$(\lambda_1 - \mu_1) v_1 + \ldots + (\lambda_n - \mu_n) v_n = 0$$

Questa è una *combinazione lineare nulla* di $v_1, \ldots, v_n$ (ovvero elementi di B): dato che questi sono anche *linearmente indipendenti*, allora l'unica possibilità di tale scrittura è solo se

$$\lambda_1 = \mu_1, \ldots, \lambda_n = \mu_n$$

che dimostra *l'unicità* della scrittura del vettore.

" $\Longleftarrow$ ": Ora supponiamo che ogni elemento $v \in V$ può essere scritta in una maniera *unica* come combinazione lineare di B.
Allora in particolare B è *sistema di generatori* per V.
Ci rimane da dimostrare che gli elementi di B sono *linearmente indipendenti*; per farlo prendiamo il vettore nullo $0 \in v$ e scriviamo la sua *combinazione lineare* di elementi di B:

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$$

D'altra parte si può scrivere

$$0 v_1 + \ldots + 0 v_n = 0$$

Per ipotesi la scrittura di combinazioni lineare di 0 come elementi di B è *unica*, allora discende che *tutti* i coefficienti λ_i sono *nulli*. Ovvero

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_i = 0, \forall_i \in \{1, \ldots, n\}$$

ovvero $v_1, \ldots v_n$ sono *linearmente indipendenti*.

Coordinate di vettori rispetto ad una base

#Definizione

Definizione 1.2. (Definizione 1.2. (Coordinate di vettore rispetto alla base).).

Sia V un *K-spazio vettoriale finitamente generato*, sia $B = (v_1, \ldots, v_n)$ una base di V, e sia v un *vettore* $v \in V$. Allora possiamo scrivere

$$v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$$

in modo unico con $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$.
Gli scalari $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sono detti le *coordinate di v rispetto alla base B*.

2. Esempi di basi

Ora consideriamo degli *esempi* di *basi di spazi vettoriali*.

#Esempio

Esempio 2.1. (Esempio 2.1. (Basi di K^n).).

In K^n possiamo considerare l'insieme

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Si può dimostrare che $\mathcal{B}$ è una base per K^n.
Infatti è chiaramente sia *sistema di generatori* per K^n e ogni vettore v di $\mathcal{B}$ sono *linearmente indipendenti*: si lascia la dimostrazione da svolgere per esercizio.
Si definisce tale base la *base standard* di K^n.

#Esempio

Esempio 2.2. (Esempio 2.2. (Basi delle matrici $M_{m,n}(K)$).).

Nell'insieme delle *matrici* $M_{m,n}(K)$ (Matrice, **DEF 1.2.**) possiamo considerare le matrici del tipo

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

dove ogni matrice $v \in \mathcal{B}$ è una matrice dove *tutte* le entrate sono 0 a parte un elemento del posto a_{ij}, che è uguale a 1.
In parole prendiamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

e la *"spacchettiamo"* in matrici con un singolo elemento. Quindi è possibile dimostrare che tutti gli elementi di $\mathcal{B}$ sono sia *sistema di generatori* per una qualsiasi matrice che *linearmente indipendenti*.

#Osservazione

Osservazione 2.1.

Notiamo che il *numero degli elementi* (ovvero la cardinalità) dell'insieme $\mathcal{B}$ è esattamente $m \cdot n$.

C2. Teoremi sulle basi

Teoremi sulle Basi

Tutti i teoremi sulle basi: teorema di estrazione di una base, teorema del completamento/estensione, lemma di Steinitz, teorema sul numero di elementi delle basi. Cenni/idee alle dimostrazioni di questi teoremi

1. Teorema di estrazione di una base

Questo primo teorema, come ci suggerisce il titolo, serve per *"estrarre"* una base da uno *spazio vettoriale* (Spazi Vettoriali), ovvero di determinarla.

#Teorema

Teorema 1.1. (Teorema 1.1. (Teorema di estrazione di una base).).

Sia V un *K-spazio vettoriale*, *finitamente generato*, sia $\{v_1, \dots, v_k\}$ un *sistemi di generatori* di V.
Allora esiste $\mathcal{B} \subseteq \{v_1, \dots, v_k\}$ tale che $\mathcal{B}$ è *base* di V.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *teorema di estrazione* (Teorema 1.1. (Teorema di estrazione di una base))
Nota: questa non è una vera e propria dimostrazione, bensì un semplice cenno. Ci si focalizza in particolare su un algoritmo per scopi informatici.
In questa dimostrazione procediamo per *costruzione*, ovvero troviamo la *base* $\mathcal{B}$ mediante il cosiddetto *algoritmo* dello scarto.
Inoltre supponiamo $V \neq \{0\}$.

ALGORITMO (*dello scarto*)

1. Inizializziamo la *"lista vuota"* $\mathcal{B} = \{\}$ (nel linguaggio C sarebbe un vettore/array, in Python una lista)
2. Iterare tutti gli elementi di $(v_1, \dots, v_k)$ (equiv. `for v in V`)
    1. Consideriamo v_1 di: se $v_1 = 0$, allora passiamo al prossimo; altrimenti aggiungo v_1 a $\mathcal{B}$.
       ATTENZIONE! Per 0 ovviamente si intende il *vettore nullo* di V.
    2. Consideriamo v_2: se $v_2 = 0$ oppure $v_2 \in \operatorname{span}(\mathcal{B})$, allora procedere al prossimo; altrimenti aggiungo questo a $\mathcal{B}$.
    3. Ripetere fino a v_k.
3. Alla fine otteniamo una lista che è sicuramente contenuto in $(v_1, \dots, v_k)$ che si può dimostrare essere base di V (*omessa, anche se semplice da dimostrare*).

PSEUDOCODICE (*quasi-Python*)

PYTHON

```python
def TrovaBase(vettore_nullo, sistema_di_generatori):
        B = []
        for v in sistema_di_generatori:
                if v == vettore_nullo or v in span(B):
                        continue
                else:
                        B.append(v)
                # Alternativamente si può solo negare la
condizione e scrivere
                if v != vettore_nullo and v not in span(B):
                        B.append(v)
        return B
```

2. Teorema del completamento

Ora consideriamo un teorema *"speculare"* a parte, ovvero a partire da un insieme di *vettori linearmente indipendenti* possiamo avere una *base* aggiungendo degli elementi (o anche nessuno).

#Teorema

Teorema 2.1. (Teorema 2.1. (Teorema del completamento/estensione).).

Sia V un *K-spazio vettoriale*, *finitamente generato*, siano $\{v_1, \dots, v_p\}$ elementi di V *linearmente indipendenti*.
Allora esiste una base $\mathcal{B}$ di V tale che

$$\{v_1, \dots, v_p\} \subseteq \mathcal{B}$$

in parole gli elementi $\{v_1, \dots, v_p\}$ possono essere *"completati"* per formare una base.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *teorema di estensione/completamento* (Teorema 2.1. (Teorema del completamento/estensione))
Nota: anche qui diamo semplicemente un'idea della dimostrazione.
Dato che V è *finitamente generato*, esiste un insieme di vettori di V $\{w_1, \dots, w_r\}$ che è *sistema di generatori* per V.
Allora se considero $\{v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_r\}$, vedo che anche questo è un

sistema di generatori per V. Infatti aggiungendo qualsiasi vettore $v \in V$ ad un sistema di generatori, questo rimane comunque un sistema di generatori.
A quest'ultimo applico *l'algoritmo dello scarto*, ottenendo una base $\mathcal{B}$ di V, in quanto per come è fatto l'algoritmo *"scarto"* i vettori *linearmente dipendenti*.

Connessione tra base e indipendenza lineare

#Osservazione

Osservazione 2.1. (enti minimali e massimali)

Da questi due teoremi osserviamo una relazione tra il concetto di *base* (Definizione di Base), *indipendenza lineare* (Dipendenza e Indipendenza Lineare) e *sistema di generatori* (Combinazione Lineare).
Da un lato abbiamo una *base* come un *sistema di generatori "minimale"*, ovvero che contiene un numero *minimo* di vettori; oppure possiamo equivalentemente caratterizzare una *base* come un *insieme di vettori linearmente dipendenti "massimale"*, ovvero che può essere *estesa*.

3. Teorema sulla cardinalità delle basi

Ora enunciamo un teorema importante che ci permetterà di definire la *dimensione* (Definizione 1 (Definizione 1.1. (dimensione di un spazio vettoriale))) di un spazio vettoriale.

Lemma di Steinitz

#Lemma

Lemma (Lemma 3.1. (di Steinitz).).

Sia V un *K-spazio vettoriale*, *finitamente generato*, sia $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una *base* di V.
Allora $\forall k > n$ e per ogni scelta di vettori $\{w_1, \ldots, w_k\} \subseteq V$ vale che $\{w_1, \ldots, w_k\}$ sono *linearmente dipendenti*.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *lemma di Steinitz* (Lemma 1 (Lemma 3.1. (di Steinitz).))
Per ipotesi vale che gli elementi $w_1, \ldots, w_k$ sono elementi di V (dunque esprimibili come combinazione lineari della base), ovvero:

$$\begin{cases} w_1 = c_{11}v_1 + \ldots + c_{n1}v_n \\ \vdots \\ w_k = c_{1k}v_1 + \ldots + c_{nk}v_n \end{cases}$$

Ora consideriamo le *coordinate* di ogni vettore w_i esprimibile come

$$\begin{pmatrix} c_{1i} \\ \vdots \\ c_{ni} \end{pmatrix}$$

Adesso consideriamo la *combinazione lineare* delle coordinate di w_i, ovvero

$$a_1 \begin{pmatrix} c_{11} \\ \vdots \\ c_{n1} \end{pmatrix} + \ldots + a_k \begin{pmatrix} c_{1k} \\ \vdots \\ c_{nk} \end{pmatrix}$$

Ora consideriamo il *sistema lineare omogeneo* del tipo

$$\begin{pmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \ldots & c_{nk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

di cui possiamo dimostrare che è *compatibile* con una *una soluzione* non (tutta) nulla. ■

#Osservazione

Osservazione 3.1. (giustificazione dell'ultimo passaggio)

Osserviamo che la matrice dei *coefficienti*

$$\begin{pmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \ldots & c_{nk} \end{pmatrix}$$

per ipotesi ha $k > n$, ovvero è più *"lunga"* orizzontalmente. Quindi per *"accuratezza"* la scriviamo come

$$\begin{pmatrix} c_{11} & \ldots & \ldots & c_{1k} \\ \vdots & & & \vdots \\ c_{n1} & \ldots & \ldots & c_{nk} \end{pmatrix}$$

quindi gradinizzandola con Gauß (Algoritmo di Gauß) abbiamo dei *"gradini"* più lunghi di un elemento. Allora ho più *"parametri liberi"* non-nulli, determinando così *soluzioni non nulle*.

Teorema principale

#Teorema

Teorema (Teorema 3.1. (sulla cardinalità delle basi)).

Sia V un *K-spazio vettoriale*, *finitamente generato*, siano $\{v_1, \dots, v_n\}$ e $\{w_1, \dots, w_m\}$ due *basi* di V.
Allora $n = m$; ovvero le due basi hanno lo stesso *numero di elementi* (alt. *"cardinalità"*).

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *teorema 3.1.* (Teorema 2 (Teorema 3.1. (sulla cardinalità delle basi)))
Per il *lemma di Steinitz* (Lemma 1 (Lemma 3.1. (di Steinitz).)), abbiamo che questi due insiemi di vettori per essere *basi* (ovvero *linearmente indipendenti* e *sistemi di generatori*), deve valere

$$m \leq n \wedge n \leq m \implies m = n$$

C3. Dimensione di un spazio vettoriale

Dimensione

Definizione di dimensione, esempi, osservazioni.

---

1. Definizione di Dimensione

#Definizione

Definizione (Definizione 1.1. (dimensione di un spazio vettoriale)).

Sia V un *K-spazio vettoriale*, *finitamente generato*; per definire la *dimensione* di V abbiamo due opzioni.
Se $V = \{0\}$, dove 0 rappresenta il *vettore nullo* allora definiamo la

dimensione di V come il numero $0 \in \mathbb{N}$.
Altrimenti la definiamo come *il numero di elementi di una sua qualsiasi base*, ovvero la cardinalità della sua base $\mathcal{B}$.
Inoltre la denotiamo con

$$\dim_K V \text{ oppure } \dim V \text{ se chiaro}$$

#Osservazione

Osservazione 1.1. (la definizione è ben posta)

Per il *teorema sulla cardinalità delle basi* (Teorema 2 (Teorema 3.1. (sulla cardinalità delle basi))), questa definizione è ben posta.

2. Esempi vari

#Esempio

Esempio 2.1. (esempi misti)

Consideriamo le *dimensioni* dei seguenti spazi vettoriali:

$$\begin{aligned}
&\text{i. } \dim \mathbb{R}^2 = 2 \\
&\text{ii. } \dim_K K^2 = 2 \\
&\text{iii. } \dim_K K^n = n \\
&\text{iv. } \dim_K M_{m,n}(K) = m \cdot n
\end{aligned}$$

#Esempio

Esempio 2.2. (numeri complessi)

Nota: questo esempio è tratto dalla dispensa e l'ho riproposta in quanto la si ritiene interessante
Ora consideriamo l'insieme dei numeri complessi $\mathbb{C}$ (Introduzione ai Numeri Complessi), che sappiamo essere un *campo*.
Se lo consideriamo come il spazio vettoriale su *se stesso*, allora questa ovviamente ha

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1 \iff \mathcal{B} = \{(1,1)\}$$

Tuttavia, possiamo considerare l'$\mathbb{R}$ spazio vettoriale $\mathbb{C}$, dando a $\mathbb{C}$ un operazione di *scalamento* su $\mathbb{R}$, secondo delle osservazioni (Operazioni sui Numeri Complessi > ^d57f49), e un operazione di *somma componente per componente*: allora in questo caso si ha

$$\mathcal{B} = \{0, i\} \implies \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$$

Questo esempio è importante per ricordarci che la nozione di $\dim$ non dipende *solo* dal spazio vettoriale in sé, ma anche la *"base d'appoggio"* della base stessa.

3. Dimensione di un sottospazio

#Osservazione

Osservazione 3.1. (osservazione sui sottospazi vettoriali)

Notiamo che il concetto di *dimensione* $\dim$ di un spazio vettoriale V si applica anche ai suoi *sottospazi vettoriali* (Definizione 1 (Definizione 1.1. (sottospazio vettoriale))) $U \subseteq V$.

#Proposizione

Proposizione 3.1. (dimensione di un sottospazio vettoriale)

Sia V un *K-spazio vettoriale*, *finitamente generato*; sia $W \subseteq V$ un *sottospazio vettoriale*. Allora valgono le seguenti:

$$\begin{gathered}1. \dim W \leq \dim V \\ 2. \dim W = \dim V \iff W = V\end{gathered}$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE della *proposizione 3.1.* (^265196)
Nota: la dimostrazione è stata lasciata per esercizio, quindi non è detto che sia corretta.
La dimostrazione segue dal *teorema di completamento della base* (Teorema 2.1. (Teorema del completamento/estensione)); supponiamo la base di W $\mathcal{B}_W = \{w_1, \dots, w_k\}$.
Allora sapendo che $W \subseteq V$ deduciamo che $\mathcal{B}_W \subseteq V$ (ovvero tutti gli *elementi della base di* W sono *elementi di* V); poiché questi sono anche *linearmente indipendenti*, per il *teorema di completamento della base* abbiamo

$\mathcal{B}_V = \mathcal{B}_W \cup \{\dots\}$, dove l'insieme a destra rappresenta gli elementi necessari per poter *"completare"* la base.
Pertanto gli elementi dell'insieme che sta a sinistra sarà sempre *maggiore* o uguale agli elementi dell'insieme a destra, in quanto a questo *"aggiungo o qualcosa o nulla"*. ■
Supponendo che non ho nessun elemento da *aggiungere* per completare la base, avrei $\mathcal{B}_V = \mathcal{B}_W$.
Quindi le basi sono le *stesse*, che vuol dire che una base di W è anche di V e viceversa: pertanto $W = V$. ■

4. Idea del concetto

#Osservazione

Conclusione.

Con il concetto della *dimensione* per i spazi vettoriali siamo riusciti ad associare ogni *K-spazio vettoriale* finitamente generato ad un numero naturale $\mathbb{N}$; infatti è possibile pensare la *dimensione* come una funzione che dato un certo spazio vettoriale ci manda un numero naturale. Infatti

$$\dim : V(K) \longrightarrow \mathbb{N}$$

Dopodiché compiremo una azione analoga con le *matrici* mediante il concetto di Rango.

C4. Rango di una matrice

Rango

Definizione di rango, osservazioni, esempi.

---

1. Definizione di rango

#Osservazione

Osservazione 1.1. (le colonne di una matrice vivono in K^m)

Sia $A \in M_{m,n}(K)$, allora le *colonne* di A sono *tutti* elementi di K^m. Dunque

$$A^{(1)}, \dots, A^{(n)} \in K^n$$

#Definizione

Definizione (Definizione 1.1. (rango)).

Sia $A \in M_{m,n}(K)$; definiamo il *rango* della *matrice* (Definizione 1 (Definizione 1.1. (matrice $m \times n$ a coefficienti in K))) A e lo denotiamo con $\text{rg}(A)$ oppure $\text{rk}(A)$ (*la seconda è la dicitura internazionale*) come la *dimensione* (Definizione 1 (Definizione 1.1. (dimensione di un spazio vettoriale))) dello *span* (Lemma 3 (Lemma 2.1. (lo span è sempre un sottospazio vettoriale))) dello *sottospazio* generato dalle *colonne* di A:

$$\text{rg}(A) := \dim(\text{span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}))$$

2. Osservazioni sul rango

#Osservazione

Osservazione 2.1. (il rango è limitato da due numeri)

Se $A \in M_{m,n}(K)$ allora

- $\text{rg}(A) \leq m$; infatti

$$A^{(1)}, \dots, A^{(n)} \in K^m \implies \text{span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}) \subseteq K^m$$

  dunque per la *proposizione 3.1.* sulla dimensione (Dimensione > ^265196)

$$\dim(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}) \leq \dim(K^m) = m$$

- $\text{rg}(A) \leq n$; infatti abbiamo n colonne, dunque $\text{span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)})$ ha n generatori; pertanto una *base* di $\text{span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)})$ ha al più n generatori (che viene verificato quando *tutti* i vettori colonna solo linearmente indipendenti); pertanto

$$\text{span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}) \leq K^n = n$$

Per concludere, traiamo che

$$A \in M_{m,n}(K) \implies \operatorname{rg} A \leq \min\{m, n\}$$

#Osservazione

Osservazione 2.2.

Noteremo che questa definizione *non* cambierebbe, se invece di considerare le *colonne* considerassimo le *righe*.

3. Esempio

#Esempio

Esempio 3.1. (matrice 2×3)

Consideriamo la matrice

$$A \in M_{2,3}(K) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Dalla definizione di *rango* e dall'*osservazione 1.2.* sappiamo che

$$\operatorname{rg}(A) = \dim(\operatorname{span}((2,1),(1,0),(3,-1))) \leq \min\{2,3\} = 2$$

Dato che tutte le *colonne* sono linearmente indipendenti.
Invece se due colonne fossero invece *linearmente dipendenti*, quindi *proporzionali* tra di loro (in quanto una di queste sono ottenibili mediante lo scalamento dell'altro), allora avremmo

$$\operatorname{rg}(A) = 1$$

#Esempio

Esempio 3.2. (matrice identità $\mathbb{1}_n$)

Sia $\mathbb{1}_n$ la *matrice identità* n x n (Definizione 8 (Definizione 2.5. (matrice identità di ordine n))), abbiamo

$$\text{rg}(\mathbb{1}_n) = \dim(\text{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}), \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}) = \dim(K^n) = n$$

4. Teoremi

Per dei teoremi vedere questa pagina: Teoremi su Rango

C5. Teoremi sul rango

Teoremi su Rango

Teoremi e/o proposizioni sul rango: metodo per computare il rango, connessione colonne-righe.

---

1. Metodo per computare il rango

Ora vedremo una proposizione che ci permetterà di calcolare il rango di una matrice usando l'algoritmo di Gauß (Algoritmo di Gauß)

#Proposizione

Proposizione 1.1. (Effetti degli O.E. sul rango)

Sia $A \in M_{m,n}(K)$ e $\tilde{A}$ una matrice ottenuta da A applicando le *operazioni elementari* OE1,2,3,. (Algoritmo di Gauß > ^8a7c5e, Algoritmo di Gauß > ^1f10d6, Definizione 2 (Definizione 2.1. (le operazioni elementari))); allora valgono le seguenti:

$$\begin{aligned} &1. \ \text{rg}(A) = \text{rg}(\tilde{A}) \\ &2. \ \tilde{A} \text{ a scala} \implies \text{rg}(\tilde{A}) = r, \ \text{ove } r \text{ è il numero di righe non nulle} \end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE della *proposizione 1.1.*.
Omessa. ■

2. Connessione colonne-righe

#Proposizione

Proposizione 2.1.

Sia $A \in M_{m,n}(K)$; allora vale che

$$\text{rg}(A) = \text{rg}({}^t A)$$

ovvero che il *rango* di una matrice è alla stessa della sua *trasposta* (Operazioni particolari con matrici > ^bf11d7); quindi considerare la *colonna* oppure la *riga* per trovare il rango non cambia.

3. Invertibilità di una matrice

#Osservazione

Osservazione 3.1. (collegamento Rouché-Capelli e Cramer)

Guardando il *corollario del teorema di Rouché-Capelli* (Corollario 2 (Corollario 3.1. (del teorema di Rouché-Capelli))), notiamo che questo ci ricorda il *teorema di Cramer* (Teorema 1 (Teorema 1.1. (di Cramer))): infatti entrambe prescrivono la *compatibilità* di un sistema lineare, sotto certe condizioni. C'è una connessione più profonda tra questi due teoremi? Ora vediamo con la seguente proposizione.

#Proposizione

Proposizione 3.1. (Invertibilità di una matrice)

Sia $A \in M_n(K)$ una *matrice quadrata* (Definizione 4 (Definizione 2.1. (matrice quadrata di ordine n))).
Allora il rango di questa matrice è *massima* (ovvero n) se e solo se questa è *invertibile*:

$$\boxed{\text{rg}(A) = n \iff \exists A^{-1} : A \cdot A^{-1} = \mathbb{1}_n}$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE della *Proposizione 3.1.*.
Questo è un teorema del tipo *"se e solo se"*: dimostriamo dunque due implicazioni.
" $\Longleftarrow$ ": Sia A *invertibile*, allora per il *teorema di Cramer*,

$$\forall b \in K^n, Ax = b \text{ compatibile}$$

Dunque per il *corollario di Rouché-Capelli* (Corollario 2 (Corollario 3.1. (del teorema di Rouché-Capelli))),

$$\forall b \in K^n, Ax = b \text{ compatibile} \implies \operatorname{rg}(A) = n$$

" $\Longrightarrow$ ": Supponendo $\operatorname{rg}(A) = n$, voglio mostrare che esiste $B \in M_n(K)$ *inversa* di A (ovvero $AB = BA = \mathbb{1}_n$).
Allora è sufficiente *costruire* la matrice B tale che $AB = \mathbb{1}_n$.
Ora, vale che

$$AB = \mathbb{1}_n \iff A \cdot B^{(i)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dove il numero 1 sta in posizione i-esimo.
Chiamo dunque e_i il vettore-colonna

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = (K^n)_j, \begin{cases} 0 \text{ se } j \neq i \\ 1 \text{ se } j = 1 \end{cases}$$

Allora $AB = \mathbb{1}_n$ se e solo se *tutti i sistemi lineari*

$$A \cdot B^{(i)} = e_i$$

sono *compatibili* per $i \in \{1, \ldots, n\}$.
Dato che $\operatorname{rg}(A) = n$, sappiamo che *tutti* questi sistemi lineari sono compatibili e dunque le loro *soluzioni* determineranno le colonne della matrice B. ■

D. CONSEGUENZE TEORICHE

D1. Teorema di dimensione di soluzione dei sistemi lineari

Teorema di dimensione delle soluzioni di sistemi lineari

Teorema di dimensione delle soluzioni di sistemi lineari: enunciato e dimostrazione

---

1. Enunciato del teorema

#Teorema

Teorema (Teorema 1.1. (teorema di dimensione delle soluzioni di sistemi lineari)).

Sia $A \in M_{m,n}(K)$;
sia W l'insieme delle *soluzioni* del *sistema lineare omogeneo associato ad* A (Definizione 5 (Definizione 1.4. (sistema omogeneo))) con $A = A$, $s \in K^n$, ovvero

$$W = \{s \in K^n : A \cdot s = 0\}$$

Allora

$$\boxed{\dim W = n - \text{rg}(A)}$$

2. Dimostrazione

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE (*Teorema 1.1.*)
Questo teorema segue *direttamente* dal *teorema di struttura della dimensione delle applicazioni lineari* (Teorema 1 (Teorema 1.1. (di dimensione per le applicazioni lineari)))

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *corollario 1.1.* (Corollario 1 (Corollario 1.1. (teorema di dimensione delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo)))
Visto che $W = \ker L_A$, allora per il *teorema di dimensione* (Teorema 1

(Teorema 1.1. (di dimensione per le applicazioni lineari))) sappiamo che

$$\begin{aligned} & \dim K^n = \dim \ker L_A + \dim \operatorname{im} L_A \\ & \implies n = \dim W + \operatorname{rg} L_A \\ \operatorname{rg} L_A = \operatorname{rg} A & \implies \boxed{\dim W = n - \operatorname{rg} A} \end{aligned}$$

D2. Teorema di Rouché-Capelli

Teorema di Rouché-Capelli

Teorema Rouché-Capelli: enunciato, dimostrazione e corollario. Esempio di applicazione

---

1. Enunciato

#Teorema

Teorema (Teorema 1.1. (di Rouché-Capelli)).

Sia $A \in M_{m,n}(K)$ una *matrice*, sia $b \in K^m$ un *"vettore-colonna"*.
Allora il *sistema lineare* composto da

$$A \cdot x = b$$

è *compatibile* se e solo se vale che il rango di A è uguale a quella della matrice completa $(A|b)$ (Definizione 1 (Definizione 1.1. (matrice completa di un sistema lineare)));

$$\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A|b)$$

In tal caso la *generica soluzione* della soluzione dipende da $n - \operatorname{rg}(A)$ parametri liberi.

2. Dimostrazione

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE (*Teorema 1.1.*)
La dimostrazione si articolerà in due parti principali: nella prima dimostriamo l'equivalenza *"se e solo se"*, nella seconda dimostriamo che la *generica*

soluzione dipende da $n - \text{rg}(A)$.
Dunque dimostriamo l'equivalenza

$$\boxed{Ax = b \text{ compatibile} \iff \text{rg}(A) = \text{rg}(A|b)}$$

" $\implies$ ": Suppongo che $Ax = b$ sia *compatibile*; allora esiste una soluzione $s \in K^n$ tale che $As = b$. Notiamo che possiamo *"esplicitare la scrittura"* applicando la definizione della *moltiplicazione righe per colonne* (Operazioni particolari con matrici > ^eecbc9); allora questo equivale a dire

$$s_1 A^{(1)} + \ldots + s_n A^{(n)} = b$$

il che significa b è *combinazione lineare* dei *vettori colonna* della matrice A.
Dunque

$$b \in \text{span}(A^{(1)}, \ldots, A^{(n)})$$

e ciò implica il seguente

$$\text{span}(A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}) = \text{span}(A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}, b)$$

(la dimostrazione è lasciata da svolgere per esercizio)
Allora

$$\dim(\text{span}(A^{(1)}, \ldots, A^{(n)})) = \dim(\text{span}(A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}, b))$$

che per definizione è proprio

$$\boxed{\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b)}$$

Ora dimostriamo il viceversa.
" $\impliedby$ ": Supponiamo che valga $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b)$.
Allora per definizione del rango (Definizione 1 (Definizione 1.1. (rango)))
ricaviamo che

$$\dim(\text{span}(A^{(1)}, \ldots, A^{(n)})) = \dim(\text{span}(A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}, b))$$

Il fatto che le *dimensioni* (Definizione 1 (Definizione 1.1. (dimensione di un spazio vettoriale))) di queste sono uguali implica che i sottospazi stessi sono uguali (Dimensione > ^265196); allora

$$\text{span}(A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}) = \text{span}(A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}, b)$$

Pertanto

$$b \in \operatorname{span}(A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}, b) \implies b \in \operatorname{span}(A^{(1)}, \ldots, A^{(n)})$$

Ma precedentemente abbiamo osservato che quest'ultima equivale a dire che il sistema

$$Ax = b$$

è *compatibile*.

⚠ Passaggio non banale

Il passaggio meno scontato di questa dimostrazione è quella di esplicitare la scrittura, applicando la nozione di prodotto righe per colonne.
Inoltre un altro passaggio non banale è quello di applicare la proposizione per cui se due vettori sono linearmente dipendenti, allora il span di entrambi è uguale a span di una dei vettori.

$$a \in \operatorname{span} b \implies \operatorname{span} b = \operatorname{span}(a, b)$$

Ora mostriamo la *seconda parte* del teorema: ovvero che se $Ax = b$ è compatibile, allora la sua generica soluzione dipende da $n - \operatorname{rg}(A)$ *parametri liberi*.
Per farlo useremo il *teorema di struttura delle soluzioni di sistemi lineari* (Definizione 4 (Definizione 1.1. (sistema lineare omogeneo associato))) e il *teorema di dimensione per le soluzioni di un sistema lineare omogeneo* (Teorema 1 (Teorema 1.1. (teorema di dimensione delle soluzioni di sistemi lineari))).
Il primo ci dice che la generica soluzione s è della forma

$$s = \tilde{s} + s_0$$

dove $\tilde{s}$ è una soluzione fissata di $Ax = b$, s_0 invece una soluzione per il *sistema lineare omogeneo associato* $Ax = 0$.
Il secondo teorema ci dice che il sottospazio vettoriale W delle soluzioni del *sistema lineare omogeneo associato* ha la dimensione $n - \operatorname{rg}(A)$.
Allora esiste una base $\mathcal{B}_W$ di W formata da $k = n - \operatorname{rg}(A)$ elementi;

$$\mathcal{B}_W = \{w_1, \ldots, w_k\}$$

e ogni $s_i \in W$ è *combinazione lineare* (unica) di $\mathcal{B}_W$.
Allora

$$s_0 = t_1 w_1 + \ldots + t_k w_k, \forall t_i \in K$$

In definitiva la generica soluzione s di $Ax = b$ è della forma

$$s = \tilde{s} + t_1 w_1 + \ldots + t_k w_k \blacksquare$$

3. Corollario

Dalla dimostrazione di questo teorema segue il seguente corollario.

#Corollario

Corollario (Corollario 3.1. (del teorema di Rouché-Capelli)).

Sia $A \in M_{m,n}(K)$.
Allora $\operatorname{rg}(A) = n$ (ovvero il rango è il *massimo* possibile) se e solo se per ogni $b \in K^n$ il sistema lineare $Ax = b$ è *compatibile*.

$$\boxed{\operatorname{rg}(A) = n \iff \forall b \in K^n, \exists s \in K^m : As = b}$$

#Dimostrazione
DIMOSTRAZIONE (*Corollario 3.1.*)
Nella dimostrazione del *teorema 1.1.* (^fe5f64) abbiamo visto che

$$Ax = b \text{ compatibile} \iff b \in \operatorname{span}(A^{(1)}, \ldots, A^{(n)})$$

Nella nostra situazione abbiamo che $\operatorname{span}(A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}) \subseteq K^n$ e $\dim K^n = n$; pertanto

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg}(A) &\iff \dim(\operatorname{span}(A^{(1)}, \ldots, A^{(n)})) = n = \dim K^n \\
&\iff \operatorname{span}(A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}) = K^n \\
&\iff \forall b \in K^n, b \in \operatorname{span}(A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}) \\
&\iff \forall b \in K^n, Ax = b \text{ è compatibile}
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

4. Esempio

Vediamo un esempio che fa uso di questo teorema.

Esempio 4.1.

Considero il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ x_2 - x_4 = 2 \end{cases}$$

Lo *"traduciamo"* in termini di matrici e vettori colonna:

$$Ax = b$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}; x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}; b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Calcolando $\operatorname{rg}(A)$ e $\operatorname{rg}(\mathrm{A|b})$, ci viene fuori

$$\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A|b)$$

dato che sono entrambi a scala e non hanno righe nulle.
Dunque per il *teorema di Rouché-Capelli* il sistema lineare $Ax = b$ ammette soluzione/i; inoltre la generica soluzione dipende da $4 - 2 = 2$ elementi.
Si lascia al lettore di completare l'esempio determinando la *generica soluzione* per esercizio.

Campi e sistemi lineari - Sommario

Sommario sui campi e sui sistemi lineari.

A. DEFINIZIONE DI CAMPO E DI SISTEMA LINEARE

A1. Campo

Campi

Definizione di un campo; le proprietà caratterizzanti dei campi; esempi di campi e non-campi.

---

0. Preambolo

Preambolo.

Questo capitolo ci serve per riflettere sui *fondamenti* che abbiamo usato finora, in particolare quando abbiamo parlato di equazioni, sistemi lineari, matrici, spazi vettoriali, come quando parliamo delle matrici a *coefficienti reali*; oppure dei $\mathbb{R}$-*spazi vettoriali*. Tutte le proprietà di cui abbiamo visto valgono in quanto $\mathbb{R}$ è un *campo* con le sue operazioni $+, \cdot$.
Infatti avevamo implicitamente fatto una *meta-operazione* in cui usavamo le proprietà di questo campo. Ora definiamo rigorosamente un *campo*.

1. Definizione

#Definizione

Definizione (Definizione 1.1 (campo)).

Sia K un *insieme* (Teoria degli Insiemi) si cui sono definite delle operazioni (o funzioni) (Funzioni) di *somma* e *moltiplicazione*, ovvero:

$$
\begin{aligned}
+: \; & K \times K \longrightarrow K \\
& (a,b) \mapsto a+b \\
\cdot: \; & K \times K \longrightarrow K \\
& (a,b) \mapsto a \cdot b
\end{aligned}
$$

tali per cui vengono soddisfatte le seguenti proprietà K:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{K}_1 : \forall a,b \in K; a+b=b+a \mid a\cdot b = b\cdot a \\
&\mathrm{K}_2 : \forall a,b,c \in K; a+(b+c)=(a+b)+c \mid a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c \\
&\mathrm{K}_3 : \exists 0 \in K : \forall a \in K, a+0=0+a=a \\
&\mathrm{K}_{3.1} : \exists 1 \in K : \forall a \in K, a\cdot 1 = 1\cdot a = a \\
&\mathrm{K}_4 : \forall a \in K, \exists(-a) \in K : a+(-a) = -a+a = 0 \\
&\mathrm{K}_{4.1} : \forall a \in K \diagdown, \{0\} \exists a^{-1} : a\cdot a^{-1} = a^{-1}\cdot a = 1 \\
&\mathrm{K}_5 : \forall a,b,c \in K, (a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c
\end{aligned}
$$

Queste regole si chiamo rispettivamente nei seguenti modi:
K1: Commutatività rispetto alla somma e prodotto
K2: Associatività rispetto alla somma prodotto
K3: Esistenza degli elementi neutri $0,1$ dove $0 \neq 1$
K4: Esistenza degli opposti (somma) e inversi (prodotto)
K5: Distributività
Allora un tale insieme si dice *campo*.

2. A mo' di esempi

#Esempio

Esempio 2.1. ($\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$)

Gli insiemi $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sono dei *campi infiniti*, invece $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ *non* sono *campi*.

#Osservazione

Osservazione 2.1. (campi finiti e infiniti)

Osserviamo che possono esistere anche dei *campi finiti*, che hanno una rilevanza fondamentale nella *crittografia*. L'esempio **1.1.c.** sarà l'esempio di un *campo finito*.

#Esempio

Esempio 2.2. (l'insieme delle funzioni razionali)

L'insieme delle *funzioni razionali* ovvero

$$\{\frac{p}{q} : p, q \text{ sono polinomi in una variabile}\}$$

può essere dotata di *somma* e *prodotto* in modo tale da rendere questa un *campo*.

#Esempio

Esempio 2.3. (un campo finito)

Sia

$$\mathbb{Z}_2 := \{0, 1\}$$

su cui definiamo una operazione di *somma* e *prodotto* $(+, \cdot)$.
Definiamo queste mediante delle *tabelle di somma* e di *moltiplicazione* (*figura 2.1.*)
Allora concludo che

$$(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$$

è un *campo finito*.

FIGURA 2.1. (*Esempio 2.3.*)

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

3. Conclusione

Conclusione.

Pertanto la precedente nozione di $\mathbb{R}$-*spazio vettoriale* sarà da ora in poi sostituita da quella di K-spazio vettoriale, con K un campo. Analogo il discorso per le *matrici a coefficienti in* K, ovvero $M_{m,n}(K)$.

A2. STRUTTURE ALGEBRICHE (optional)

Strutture Algebriche

Elementi di algebra: strutture algebriche; semigruppo, monoide, gruppo abeliano, anello commutativo e/o unitario, campo. (tratto da Algebra Lineare ed Elementi di Geometria, F. Bottacin)

---

1. Struttura algebrica

Partiamo dalla struttura di base.

#Definizione

Definizione (Definizione 1.1. (struttura algebrica)).

Sia A un *insieme numerico*, sia $*$ un'operazione interna per A, ovvero del tipo

$$*: A \times A \longrightarrow A$$

Allora la coppia $(A, *)$ si dice *struttura algebrica*.

2. Semigruppo, monoide, gruppo

Ora andiamo ad *"arricchire"* la struttura algebrica.

#Definizione

Definizione (Definizione 2.1. (semigruppo)).

Sia $(A, *)$ una *struttura algebrica*. Allora $(A, *)$ si dice *semigruppo* se l'operazione $*$ gode della *proprietà associativa*, ovvero

$$\forall a, b, c \in A, (a * b) * c = a * (b * c)$$

#Definizione

Definizione (Definizione 2.2. (monoide, gruppo)).

Sia $(B, +)$ una *struttura algebrica*.
i. Se $+$ è munito di un'*elemento neutro*, ovvero se

$$\exists 0_B^+ \in B : \forall b \in B, b + 0_B^+ = b \vee 0_B^+ + b = b$$

allora $(B, +)$ si dice *monoide*.
ii. Se vale anche che *ogni elemento di B è invertibile*, ovvero

$$\forall b \in B, \exists -b \in B : b + (-b) = (-b) + b = 0_B^+$$

allora $(B, +)$ si dice *gruppo*.

#Definizione

Definizione (Definizione 2.3. (abeliano)).

Sia $(B, +)$ una *struttura algebrica* o un *semigruppo* o un *monoide* o un *gruppo*.
Allora se $+$ gode della *proprietà commutativa*, allora $(B, +)$ si dice *abeliano*.

3. Anello, campo

Diamo le ultime *"decorazioni"* a queste strutture algebriche, fornendole di un'altra operazione che gode di altre proprietà.

#Definizione

Definizione (Definizione 3.1. (anello)).

Sia $(C, \S)$ un *gruppo abeliano*; sia $(C, ^\circ)$ un *semigruppo*.
Allora si definisce $(C, \S, ^\circ)$ un *anello*
Inoltre se $^\circ$ gode della *proprietà commutativa*, allora l'anello si dice *commutativo/abeliano*; se $^\circ$ ha un'elemento neutro allora l'anello si dice *unitario*.

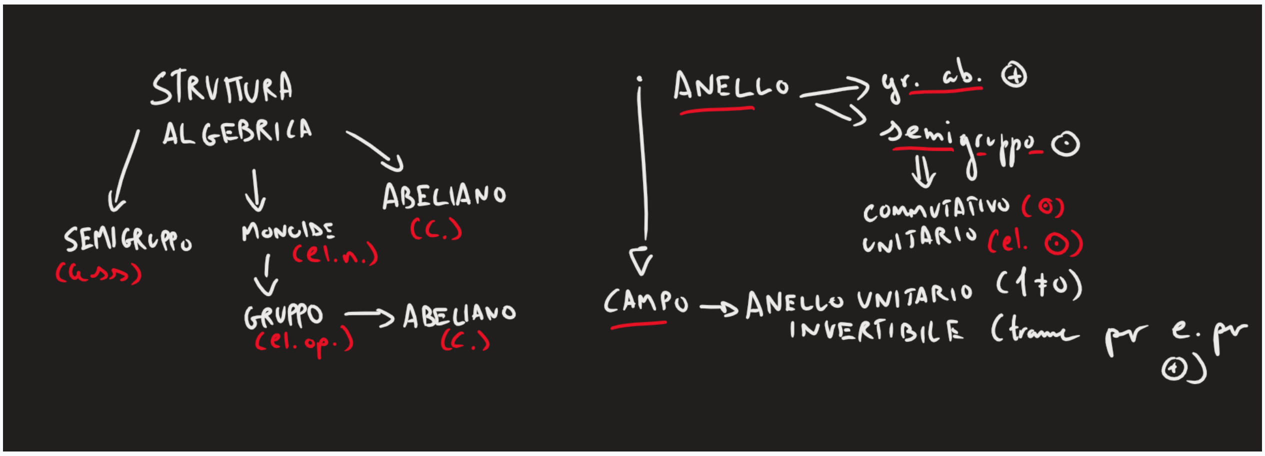
#Definizione

Definizione (Definizione 3.2. (campo)).

Sia $(D, \$, £)$ un *anello unitario*, con gli elementi di neutri delle operazioni $\$$ e $£$ distinti.
Se *ogni elemento dell'insieme* D è invertibile, a parte l'elemento neutro per $£$, allora D si dice *campo*.

4. Schema riassuntivo

FIGURA 4.1. (*Schema riassuntivo delle strutture algebriche*)



A3. SISTEMI LINEARI

Sistemi Lineari

Definizione rigorosa di sistema lineare. Nesso tra sistemi lineari, matrici e campi. Teoremi sui sistemi lineari.

---

0. Preambolo

Avevamo accennato che cosa sono i *sistemi lineari* nel capitolo sulle Equazioni e Proprietà Lineari; però avendo definito i Campi, ora è opportuno definirli in una maniera rigorosa e formale. Inoltre rendiamo nota la seguente notazione.

#Definizione

Definizione (Nozione. (n-upla e matrice colonna K^n)).

Andiamo a identificare i due seguenti spazi vettoriali: la matrice colonna $M_{m,1}(K)$ di tipo

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

e la m-tupla K^m di tipo

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

e questi due spazi vettoriali sono *isomorfi* (ovvero che presentano gli stessi comportamenti).

1. Definizione formale

#Definizione

Definizione (Definizione 1.1. (sistema lineare di m equazioni in n incognite a coefficienti in K)).

Sia K un *campo* (Campi, **DEF 1.**); definiamo un *sistema di m equazioni in n incognite a coefficienti in K* come un *sistema di equazioni* nella forma seguente:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

dove $a_{ij} \in K$, $\forall i \in \{1, \dots, m\}$ e $\forall j \in \{1, \dots, n\}$; inoltre $\forall b_i \in K, \forall i \in \{1, \dots, m\}$.

#Definizione

Definizione (Definizione 1.2. (incognite, termini noti e coefficienti)).

Gli elementi $x_1, x_2, \dots, x_n$ sono dette *incognite*.
Gli elementi $b_1, b_2, \dots, b_m$ sono detti *termini noti*.
Gli elementi a_{ij} sono detti *coefficienti* del *sistema lineare*.

Soluzione di un sistema

#Definizione

Definizione (Definizione 1.3. (soluzione di un sistema)).

La *soluzione* di un *sistema lineare* è una n*-upla ordinata* di elementi di K, che rappresentiamo come un *vettore-colonna*, $S \in K^n$, ovvero

$$S = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$$

ove $s_i \in K$, tali per cui se ad ogni s_i sostituiamo x_i (dove $i \in \{1, 2, \dots, n\}$), allora tutte le *uguaglianze* del *sistema lineare* diventano *vere*.

Omogeneità di un sistema

#Definizione

Definizione (Definizione 1.4. (sistema omogeneo)).

Un *sistema lineare* si dice *omogeneo* se tutti i *termini noti* sono nulli: ovvero se $b_1, b_2, \dots, b_m = 0, 0, \dots, 0$.
Analogamente, un *sistema lineare* si dice *non omogeneo* se questo sistema non è omogeneo. (Lo so, informazione sorprendentemente non ovvia)

Compatibilità di un sistema

#Definizione

Definizione (Definizione 1.5. (sistema compatibile)).

Un *sistema lineare* si dice *compatibile* se ammette almeno una *soluzione* S; altrimenti si dice incompatibile*.

#Osservazione

Osservazione 1.1. (sistema omogeneo implica sistema compatibile)

Se un *sistema lineare* è *omogenea*, allora essa dev'essere anche *compatibile*. Infatti la n-upla nulla è *sempre* soluzione di un sistema *omogeneo*.

Forma compatta di un sistema

Definizione (Definizione 1.6. (forma compatta di un sistema lineare)).

Dato un *sistema lineare*, definiamo la la matrice A dei *coefficienti*

$$A = (a_{ij});_{\substack{i \in \{1, \ldots, m\} \\ j \in \{1, \ldots, n\}}}; A \in M_{m,n}(K)$$

e X la n-upla delle incognite, b la n-upla dei termini noti, ovvero $X, b \in M_{m,1}(K)$ dove

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}; b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

allora posso scrivere il *sistema lineare* in *forma compatta* come

$$A \cdot X = b$$

Equivalenza di due sistemi

#Definizione

Definizione (Definizione 1.7. (sistemi lineari equivalenti)).

Dato due *sistemi lineari*, queste si dicono *equivalenti* se ammettono le *medesime soluzioni*; ovvero se i loro insiemi delle soluzioni sono uguali. Più precisamente, dati due sistemi lineari

$$Ax = b \text{ e } A'x = b'$$

ove $A \in M_{m,n}(K)$ e $b \in K^m$; invece $A' \in M_{m'n}(K)$ e $b' = K^{m'}$, si dicono equivalenti quando hanno le medesime *soluzioni*.

#Osservazione

Osservazione 1.2. (l'utilità di questa nozione)

Questa nozione è molto utile per risolvere dei sistemi lineari, quindi uno degli obbiettivi principali di questo corso sarà di trovare le operazioni che trasformano dei sistemi lineari in un altro mantenendoli *equivalenti*.

#Osservazione

Osservazione 1.4. (i sistemi equivalenti possono avere equazioni diversi)

Osserviamo che da questa definizione *puntuale* di sistema equivalente devono avere lo *stesso* numero di incognite m ma possono avere numeri *diversi* di equazioni m, m'.

2. Esempi

Tentiamo di applicare queste nozioni mediante degli esempi.

#Esempio

Esempio 2.1.

Consideriamo il seguente sistema.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ x_1 + 2x_2 = 5 \end{cases}$$

che in *forma compatta* si scrive

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

1. Questo è un sistema *non omogeneo*, in quanto *almeno uno* termine noto è *non-nullo*.
2. Si può immediatamente stabilire che questo sistema è *incompatibile*; infatti se si suppone che esiste una soluzione $S = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$ allora varrebbe che $s_1 + 2s_2 = 3 = 5$, il che è un assurdo.

#Esempio

Esempio 2.2.

Consideriamo il seguente sistema.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$$

1. Chiaramente questo sistema è *non-omogeneo*
2. Qui non è possibile stabilire a priori se questo sistema sia *compatibile* o meno. Allora mediante delle trasformazioni tentiamo di trovare una soluzione.
   Quindi

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \sim x_1 = 3 - 2x_2 \\ x_1 - x_2 = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = 3 - 2x_2 \\ 3 - 2x_2 - x_2 = 1 \sim x_2 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

   allora

$$x_1 = 3 - 2x_2 \implies x_1 = 3 - 2\frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

   quindi il *sistema* ha un'unica *soluzione*

$$S = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

   Perciò abbiamo stabilito che il sistema è anche *compatibile*.

#Osservazione

Osservazione 2.1. (l'unicità della soluzione)

Qui diciamo che la *soluzione* non solo esiste, ma è addirittura *unica* in quanto per ottenere il *sistema finale* abbiamo trasformato il *sistema iniziale* tramite delle operazioni che mantengono i due sistemi *equivalenti*.

#Esempio

Esempio 2.3.

Consideriamo il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 = 6 \end{cases}$$

e tentiamo di trovare una soluzione. Iniziamo dunque effettuando delle manipolazioni;

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \text{ (a)} \\ 2x_1 + 4x_2 = 6 \implies 2(x_1 + 2x_2) = 2(3) \overset{(a)}{\implies} 2(3) = 2(3) \end{cases}$$

vediamo che la seconda equazione è *sempre vera*; allora ciò significa che anche l'equazione

$$x_1 + 2x_2 = 3 \iff x_1 = 3 - 2x_2$$

è sempre vera.
Perciò posso trovare una soluzione fissando un valore di x_2 preciso per poter determinare x_1; quindi generalizzando fisso $x_2 = t \in \mathbb{R}$ ed esprimo le soluzioni così:

$$x_1 = 3 - 2t$$

Ovvero le soluzioni sono della forma

$$S = \{t \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix} 3-2t \\ t \end{pmatrix}\}$$

da cui discende che abbiamo *infinite* soluzioni.

#Osservazione

Osservazione 2.2. (interpretazione geometrica dei sistemi lineari)

Possiamo riscrivere l'insieme delle soluzioni come

$$S = \{t \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

che *geometricamente* corrisponde ai *punti* di una *retta* passante per $(3,0)$ e $(1,1)$.

B. CONSEGUENZE TEORICHE

B1. Teoremi sui sistemi lineari

Teoremi sui Sistemi Lineari

Teoremi sui sistemi lineari; teorema di Cramer; teoremi di strutture per i sistemi lineari; da continuare

---

1. Teoremi sui sistemi lineari

Presentiamo dei teoremi importanti sui Sistemi Lineari.

Teorema di Cramer

#Teorema

Teorema (Teorema 1.1. (di Cramer)).

Considero un sistema lineare con n equazioni ed n incognite, di forma

$$A \cdot X = b$$

Ovvero $A \in M_n(K)$.
Ora supponiamo che A sia anche *invertibile* (Matrice, **DEF 2.6.**); allora da qui discende che esiste un'*unica soluzione* S del sistema lineare ed essa è data da

$$S = A^{-1} \cdot b$$

#Osservazione

Osservazione 1.1. (l'importanza del teorema di Cramer)

Questo teorema è molto importante in quanto ci dà due dati importanti:
Da un lato ci dice quando un *sistema lineare* è *compatibile*, quindi c'è questa componente *"esistenziale"* di questo teorema; dall'altro lato ci fornisce una formula per *calcolare* la soluzione.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *teorema di Cramer* (Teorema 1 (Teorema 1.1. (di Cramer))).
La dimostrazione si struttura in due parti:

1. Una parte in cui devo dimostrare che la soluzione effettivamente *esiste* ed equivale a $A^{-1} \cdot b$

2. Un'altra parte in cui devo dimostrare che essa è effettivamente l'*unica* soluzione

3. Supponendo che $A^{-1} \cdot b$ sia *soluzione*, allora per tale definizione devo essere in grado di sostituirla ad X per poter ottenere un'uguaglianza vera; quindi faccio

$$\begin{aligned}
&A \cdot X = b \\
&A \cdot (A^{-1} \cdot b) = b \\
&(A \cdot A^{-1}) \cdot b = b \\
&\mathbb{1}_n \cdot b = b \iff b = b
\end{aligned}$$

e l'ultima uguaglianza è vera.

4. Ora supponiamo per assurdo che esiste un'altra soluzione S' sia un'altra soluzione; allora per definizione questa verifica

$$\begin{aligned}&A \cdot S' = b \\ &A^{-1} \cdot (A \cdot S') = A^{-1} \cdot b \text{ (!)} \\ &(A^{-1} \cdot A) \cdot S' = A^{-1} \cdot b \\ &S' = A^{-1} \cdot b\end{aligned}$$

che è esattamente uguale alla soluzione proposta dal teorema di *Cramer*; quindi esiste solo la soluzione $S = A^{-1} \cdot b$.

#Osservazione

Osservazione 1.2. (attenzione su (!))

Focalizziamoci sulla parte contrassegnata con *(!)*; notiamo che abbiamo moltiplicato da ambo le parti per A^{-1} a *SINISTRA*, e non a *DESTRA*; infatti nel contesto delle *matrici* la moltiplicazione a *sinistra* può comportarsi diversamente da quella a *destra*; infatti se avessimo moltiplicato a *destra*, tutta l'espressione avrebbe perso senso in quanto avremmo ottenuto $b \cdot A^{-1}$ in quanto moltiplichiamo una matrice $n \times 1$ per $n \times n$, che non è definita.

Teorema di struttura per i sistemi lineari omogenei

#Teorema

Teorema (Teorema 1.2. (di strutture per le soluzione dei sistemi lineari omogenei)).

Considero un *sistema lineare omogeneo* di m equazioni in n incognite. Ovvero

$$A \cdot X = 0$$

dove $A = M_{m,n}(K)$ e $X = K^n$, 0 è la *matrice nulla* (Definizione 5 (Definizione 2.2. (matrice nulla))).
Poi siano $s, s' \in K^n$ due soluzioni distinte e sia $\lambda \in K$, allora:

1. $s + s'$ è soluzione
2. $\lambda \cdot s$ è soluzione

Pertanto ricordandoci che il vettore (o la matrice) nullo/a è *sempre* soluzione di un sistema *omogeneo*, ottengo che l'*l'insieme delle soluzioni* di questo sistema è l'insieme

$$S = \{r \in K^n : A \cdot r = 0\}$$

allora si verifica che S è un *sottospazio vettoriale* (Definizione 1 (Definizione 1.1. (sottospazio vettoriale))) di K^n.

#Osservazione

Osservazione 1.3.

Notiamo che in questo teorema ci interessa *il sistema lineare* sé stesso, invece nel *TEOREMA 1.1.* (di Cramer) ci interessava solo la *matrice* dei coefficienti A

#Osservazione

Osservazione 1.4. (osservazione preliminare)

Dati un $A \in M_{m,n}(K)$ e un $s = K^n$ e un $\lambda \in K$ allora abbiamo

$$A \cdot (\lambda \cdot s) = \lambda \cdot (A \cdot s)$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *teorema di Cramer* (Teorema 1 (Teorema 1.1. (di Cramer)))

Dimostriamo la prima parte del teorema

1. Dato che s e s' sono soluzioni, allora devono valere che:

   $$\begin{cases} A \cdot s = 0 \\ A \cdot s' = 0 \end{cases}$$

   E supponendo che $s + s'$ sia soluzione, deve valere anche che:

   $$A \cdot (s + s') = 0$$

   e sviluppandolo, otterremo

$$
\begin{aligned}
&A \cdot (s + s') = 0 \\
&A \cdot s + A \cdot s' = 0 \\
&0 + 0 = 0 \iff 0 = 0
\end{aligned}
$$

che è vera.
Prima di dimostrare la seconda parte del teorema occorre tenere in conto l'osservazione 1.4.
Ora siamo pronti per concludere la dimostrazione.

2. Se s è soluzione, allora è vera che

$$A \cdot s = 0$$

allora supponendo che λs sia soluzione abbiamo

$$A \cdot (\lambda \cdot s) = 0$$

e sviluppandola otterremo

$$
\begin{aligned}
&A \cdot (\lambda \cdot s) = 0 \\
&\lambda \cdot (A \cdot s) = 0 \\
&\lambda \cdot 0 = 0 \iff 0 = 0
\end{aligned}
$$

il che è vera. ■

Osservazione sui teoremi precedenti

#Osservazione

Osservazione 1.5. (possiamo combinare i due teoremi appena visti)

Osserviamo che possiamo *"combinare"* questi due teoremi e verificare un fenomeno:
Sia $A \in M_n(K)$ e supponiamo che questa matrice sia anche *invertibile*; ora consideriamo il sistema lineare *omogeneo*

$$A \cdot X = 0$$

Allora da qui discende che 0 è *l'unica* soluzione di questo sistema.
Infatti $\lambda \cdot 0 = 0$ e $0 + 0 = 0$ sono anche *soluzioni* in quanto sono uguali all'*unica soluzione* 0.

Teorema di struttura per i sistemi lineari arbitrari

#Teorema

Teorema (Teorema 1.3. (di struttura per i sistemi lineari arbitrari)).

Considero un *sistema lineare*

$$A \cdot X = b$$

con $A \in M_{m,n}(K)$ e $b \in K^n$. Sia $\tilde{s}$ una soluzione; allora un elemento $s \in K^n$ è soluzione di questo sistema lineare *se e solo* se possiamo scrivere

$$s = \tilde{s} + s_0$$

dove s_0 è una soluzione del *sistema lineare omogeneo*

$$A \cdot X = 0$$

In altre parole l'insieme delle soluzione di $A \cdot X = b$ è

$$S = \{s \in K^n : s = \tilde{s} + s_0 \text{ per un qualche } s_0 \text{ sia soluzione di } Ax = 0\}$$

#Definizione

Definizione (Definizione 1.1. (sistema lineare omogeneo associato)).

Il *sistema lineare omogeneo* $A \cdot X = 0$ si dice il *sistema lineare omogeneo associato* al sistema $A \cdot X = b$.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *teorema 1.3.*.
Per pianificare la struttura di questo teorema, facciamo due considerazioni sulla logica formale, in particolare sulla *doppia implicazione* (Connettivi).
Questo teorema, da un punto di vista logico, vuole dire che

$$\text{s è soluzione} \iff s = \tilde{s} + s_0$$

allora vogliamo dimostrare che entrambe le *implicazioni* sono vere; ovvero nel senso che valgono

$$\begin{cases} s \text{ è soluzione} \implies s = \tilde{s} + s_0 \\ s = \tilde{s} + s_0 \implies s \text{ è soluzione} \end{cases}$$

1. Dimostriamo la prima.
   Supponiamo che s sia una *soluzione* del sistema lineare $Ax = b$, quindi dobbiamo mostrare che *esiste* un $s_0 \in K^n$ di $Ax = 0$ tale che possiamo

scrivere

$$s = \tilde{s} + s_0$$

Allora definiamo s_0 per costruzione, ovvero $s_0 := s - \tilde{s}$; perciò vale sicuramente che $s = \tilde{s} + s_0$. Allora ci resta da verificare che s_0 è effettivamente la soluzione del *sistema omogeneo associato*. Quindi

$$\begin{aligned} & A \cdot s_0 \stackrel{?}{=} 0 \\ \implies & A \cdot (s - \tilde{s}) = As - A\tilde{s} = b - b = 0 \\ \implies & A \cdot s_0 = 0 \blacksquare \end{aligned}$$

2. Ora dimostriamo il viceversa.
   Supponiamo dunque che esista un $s_0 \in K^n$ tale da essere soluzione del *sistema omogeneo associato*. Sia dunque $s := \tilde{s} + s_0$. Allora voglio mostrare che s sia una soluzione del sistema; allora

$$\begin{aligned} & A \cdot (s) \stackrel{?}{=} b \\ \implies & A \cdot (\tilde{s} + s_0) \\ \implies & A \cdot \tilde{s} + A \cdot s_0 \underset{\text{supp.}}{\overset{\text{per}}{\implies}} b + 0 = b \blacksquare \end{aligned}$$

   Abbiamo finalmente concluso la dimostrazione.

#Osservazione

Osservazione 1.6. (l'insieme delle soluzioni costituisce un sottospazio vettoriale)

Notiamo che l'insieme S delle soluzioni di un sistema $AX = b$ forma un *sottospazio vettoriale* (Sottospazi Vettoriali) di K^n *se e solo se* $b = 0$. Infatti: Supponendo che S sia uno sottospazio vettoriale, allora abbiamo che le proprietà caratterizzanti di uno sottospazio vengano rispettate; ad esempio il *vettore nullo* 0 è soluzione. Infatti se $b = 0$, allora sicuramente anche $s = 0$ è soluzione.

Supponendo il contrario, ovvero che se il sistema fosse *omogeneo*, allora la tesi seguirebbe il *teorema di struttura per i sistemi lineari omogenei*.

2. Esempio

Avendo sviluppato questi teoremi come dei *strumenti* per risolvere dei *sistemi lineari*, vediamo degli esempi.

#Esempio

Esempio 2.1.

Consideriamo il seguente sistema lineare a coefficienti in $\mathbb{Q}$.

$$\{x + 2y - 3z = -1$$

ovvero in forma compatta

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}$$

e possiamo, ad esempio, considerare una soluzione semplice del tipo

$$\tilde{s} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ora per *calcolare* tutte le soluzioni usiamo il *teorema di struttura per i sistemi lineari arbitrari* (**TEOREMA 1.4.**); determiniamo dunque *tutte* le soluzioni del sistema omogeneo associato, ovvero

$$Ax = 0 \implies \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

Vediamo che il sistema è equivalente a

$$x + 2y - 3z = 0$$

Quindi possiamo ad assegnare un qualsiasi valore appartenente al campo $\mathbb{Q}$ u a y e v a z. (in altre parole poniamo $y = u, z = v, u, v \in \mathbb{Q}$)

Possiamo allora determinare il corrispondente di x come

$$x = 3v - 2u$$

Ora possiamo determinare la *"ricetta"* per ottenere le soluzioni di questo sistema omogeneo, ovvero

$$s_0 = \begin{pmatrix} -2u+3v \\ u \\ v \end{pmatrix}, \forall u, v \in \mathbb{Q}$$

Notiamo che possiamo riscrivere questa 3-upla come

$$s_0 = u \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Concludendo, le soluzioni di $Ax = b$ sono gli *elementi* dell'insieme S definito come

$$S = \{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \forall u, v \in \mathbb{Q} \}$$

B2. Sistemi lineari a scala

Sistemi lineari a scala

Definizione dei sistemi lineari a scala; elementi di pivot; compatibilità dei sistemi lineari gradinizzati.

---

0. Preambolo

Preambolo.

Se in Teoremi sui Sistemi Lineari avevamo sviluppati degli *stratagemmi* per poter determinare delle caratteristiche per alcuni sistemi, ora vogliamo di essere in grado di poter *risolvere* un qualsiasi *sistema lineare arbitrario*.
La meta-tecnica che useremo consisterà nel seguente: prima di risolvere un *caso particolare*, poi di dimostrare che *tutti* i casi generali si riconducono al caso particolare risolto.
Infatti per cominciare ci focalizziamo su un sottoinsieme particolare dei *sistemi lineari*: i c.d. *sistemi lineari a scala*

1. Definizione di sistema a scala

#Definizione

Definizione (Definizione 1.1. (matrice a scala)).

Sia $A \in M_{m,n}(K)$ e sia $r \in \{0, 1, \ldots, m\}$ il *numero delle righe non nulle di* A. Allora chiamiamo A una *matrice a scala* se sussistono le seguenti.

1. $r = 0$, ovvero $A = 0$.

2. $r > 0$ e vale che $A_{(i)} \neq 0, i \in \{1, \ldots, r\}$; in parole questo vuol dire che le eventuali *righe nulle di* A devono *"stare in basso"* (ovvero dopo e non prima di r).

   Inoltre sia $\bar{j}$ *l'indice della prima colonna non-nulla* e sia

   $$j_i := \min\{j : a_{ij} \neq 0\}, \forall i \in \{1, \ldots, r\}$$

   ovvero l'indice del *primo elemento non-nullo di una riga* i, allora deve pure valere che

   $$j_1 > j_2 > \ldots > j_r$$

   e tutti questi valori j_i devono essere maggiori di $\bar{j}$; ovvero

   $$j_i \geq \bar{j}, \forall i$$

#Definizione

Definizione (Definizione 1.2. (elementi pivot di una matrice a scala)).

Definiamo gli elementi

$$j_i = a_{ij_i}$$

come gli *elementi di pivot*.

2. Esempi di sistema a scala

Ora proponiamo delle matrici e li analizziamo in riferimento alla definizione appena data.

#Esempio

Esempio 2.1.

Prendiamo le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

#Osservazione

Osservazione 2.1. (Matrice A)

Facciamo delle osservazioni sulla *matrice A*. Notiamo che:

1. Non è nulla, quindi bisogna vedere l'altra condizione
2. Non ci sono righe nulle; quindi r è il numero di righe effettive di A; in altre parole $r = m$.
3. Abbiamo i seguenti *elementi di pivot*: $j_1 = a_{12} = 1$, $j_2 = a_{23} = 3$, $j_3 = a_{34} = 4$. Allora abbiamo la seguente relazione:

$$j_3 > j_2 > j_1$$

quindi questa matrice è *a scala*, secondo la definizione appena data.

#Osservazione

Osservazione 2.2. (Matrice B)

Ora guardiamo la *matrice B*. Notiamo che anche questa è a scala, visto che:

$$j_1 = 1 > j_2 = 3$$

e j_3 non esiste in quanto la terza riga è *nulla*. Infatti $r = m - 1 = 2$.

#Osservazione

Osservazione 2.3. (Matrice C)

Osserviamo che C *non* è a scala in quanto abbiamo $r = 2$ (in parole abbiamo 2 righe non nulle), però $C_{(2)} = 0$ (ovvero la seconda riga sta nel mezzo della matrice, non in basso).

#Osservazione

Osservazione 2.4. (Matrice D)

OSS 2.D.
Neanche questa *non* è a scala in quanto gli elementi di pivot seguono la seguente relazione:

$$j_1 < j_2 = j_3$$

dove j_2 dev'essere minore di j_3, non uguale.

#Osservazione

Osservazione 2.5. (determinare sistemi non compatibili)

Se si ha una matrice del tipo B (ovvero una in cui abbiamo almeno una riga nulla), ci si chiede se è possibile fissare una n-upla dei *coefficienti* b tale da rendere $Ax = b$ *incompatibile*. (Definizione 6 (Definizione 1.5. (sistema compatibile))).
La risposta è sì; infatti fissando b_n, n essendo l'indice di una qualsiasi riga *nulla*, un numero che sia diverso da 0, allora abbiamo un sistema incompatibile. Infatti si avrebbe l'equazione

$$0 + \ldots + 0 = x, \forall x \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$$

che non è risolvibile.

3. Compatibilità di sistemi a scala

Osservazione 3.1. (compatibilità dei sistemi)

Riprendendo l'osservazione posta nell'*osservazione 2.5.*, ora ci chiediamo se vale il contrario: ovvero se fissando b_n il numero 0, allora abbiamo un *sistema lineare compatibile*.
Per poter dare una risposta prima dobbiamo capire quando $Ax = b$ ha soluzione; sicuramente se $Ax = b$ ha soluzione e le righe $A_{r+1}, \ldots, A_m$ sono nulle, allora anche i valori $b_{r+1}, \ldots, r_m$ sono nulli. Vale il viceversa?
Vediamo un esempio.

#Esempio

Esempio 3.1.

Prendiamo la *matrice B* dall'*esempio 2.1.* e un certo b. Ovvero

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; b = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

allora abbiamo il *sistema lineare*

$$Bx = b$$

Ora cerchiamo di risolverla. Questo sistema equivale a:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = -4 \\ x_3 + 4x_4 = 5 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Ora fissiamo $x_4 = t = 1$; abbiamo dunque

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = -4 \\ x_3 + 4x_4 = 5 \rightarrow x_3 = 1 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

Dunque se $x_3 = x_4 = 1$, abbiamo

$$2x_1 - x_2 + 3 + 1 = -4 \implies x_1 = \frac{-8 + x_2}{2}$$

e fissando $x_2 = 1$, abbiamo $x_1 = -\frac{7}{2}$.
Abbiamo trovato una soluzione particolare

$$s = \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

#Osservazione

Osservazione 3.2. (il passo fondamentale)

Osserviamo che il *passo fondamentale* che ci ha permesso di trovare s è quello di *esplicitare* gli *elementi di pivot*. Infatti abbiamo ottenuto x_1, x_3 (che sono gli elementi di pivot) determinando un valore arbitrario t, u per x_2, x_4.

#Proposizione

Proposizione 3.1. (compatibilità di un sistema a scala)

Vedendo che vale il viceversa enunciamo il seguente.
Tesi. Sia $Ax = b$ un *sistema lineare arbitrario* ove $A \in M_{m,n}(K)$ e supponiamo che A sia una *matrice a scala* con r righe non-nulle.
Allora vale

$$Ax = b \text{ è compatibile} \iff b_{r+1} = \ldots = b_m = 0$$

DIMOSTRAZIONE della *proposizione 3.1.*.
Dimostriamo che entrambe le implicazioni ($\implies$ e $\impliedby$) sono veri.

- " $\implies$ " : Sia $s \in K^n$ una soluzione del tipo

$$s = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_m \end{pmatrix}$$

tale che $As = b$ viene soddisfatta. Sia per ipotesi A una *matrice a scala*; dunque

$$\forall i \in \{r, r+1, \ldots, m\} : A_{(i)} = 0$$

Le corrispondenti equazioni sono quindi

$$\begin{cases} 0x_1 + \ldots + 0x_n = b_{r+1} \\ \ldots \\ 0x_1 + \ldots + 0x_n = b_m \end{cases}$$

e ciò implica il seguente seguente:

$$\begin{cases} 0s_1 + \ldots + 0s_n = b_{r+1} \\ \ldots \\ 0s_1 + \ldots + 0s_n = b_m \end{cases} \implies \begin{cases} b_{r+1} = 0 \\ \ldots \\ b_m = 0 \end{cases}$$

Dimostrando così la prima parte della tesi.
- " $\impliedby$ " : Vogliamo trovare una *soluzione*. Quindi troviamo un modo per *costruirla*.
Allora per *costruire* una *soluzione* s dobbiamo procedere a ritroso, partendo *"dal basso"* (ovvero dalla m-esima riga), quindi dalle ultime equazioni.
Infatti per *ipotesi* tutte queste equazioni (dalla $r+1$-esima alla m-esima) sono del tipi $0 = 0$ in quanto abbiamo definito A come una matrice *a scala*; quindi qui non ci poniamo il problema. Infatti sappiamo che $\forall i \in \{r+1, \ldots, m\}$ vale che $b_i = 0$.
Ora *"partiamo"* da r, che è la *prima* equazione *non identicamente nulla*, della forma

$$a_{rj_r} x_{j_r} + a_r j_{rj_r+1} x_{j_r+1} + \ldots + a_{rn} x_n = b_r$$

che *"parte"* dall'elemento di *pivot* (ovvero il *primo* elemento non-zero della riga) j_r. Infatti teniamo a mente che $a_{rj_r} \neq 0$.
Posso dunque esplicitare x_{jr};

$$x_{jr} = \frac{b_r - (a_{rj_r+1} x_{j_r+1} + \ldots + a_{rn} x_n)}{a_{rj_r}}$$

Possiamo *scegliere* tutti i valori a piacimento (ovviamente affinché queste appartengano al campo K) ai valori

$$x_{j_r+1}, \dots, x_n$$

e determinare il corrispondente valore di x_{jr}.
A questo punto scegliamo i valori

$$s_{r+1}, \dots, s_n \in K$$

a piacimento e definiamo

$$s_{jr} := \frac{b_r - (a_{rj_r+1}x_{j_r+1}, + \dots + a_{rn}x_n)}{a_{rj_r}}$$

Ora *"saliamo"* alla *penultima* equazione non nulla. Ovvero

$$a_{r-1j_{r-1}}x_{j_{r-1}} + a_{r-1,j_{r-1}+1}x_{j_{r-1}+1} + \dots + a_{r-1,n}x_n = b_{r-1}$$

dato che abbiamo una matrice a scala sappiamo che $j_r > j_{r-1}$; ovvero che l'elemento j_{r-1} deve *"stare dietro"* a j_r.
Ora possiamo scegliere, a nostro piacimento, dei valori non oltre a quelli già scelti

$$s_{j_{r-1}+1}, s_{j_{r-1}+2}, \dots, s_{j_r-1} \in K$$

e definire

$$s_{j_{r-1}} := \frac{b_{r-1} - (a_{r-1j_{r-1}+1}s_{j_{r-1}+1} + \dots + a_{r-1j_r-1}s_{j_r-1})}{a_{r-1j_{r-1}}}$$

Poiché possiamo ripetere lo stesso esatto procedimento fino a s_1, possiamo dire che in questo modo abbiamo ottenuto tutti i valori s_i della soluzione s in modo che vengono soddisfatte *tutte* le equazioni. ■

#Esempio

Esempio 3.2.

Con il procedimento appena descritto risolviamo un *sistema lineare*.
Ho dunque

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{4,6}(\mathbb{R})$$

allora dal risultato precedente sappiamo che il sistema lineare

$$Ax = b$$

è *compatibile* se e solo se $b_4 = 0$.
Scegliamo dunque un tale b,

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e troviamo una soluzione di $Ax = b$. Le equazioni sono dunque:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 = 1 \\ -x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 - x_6 = 1 \\ x_4 + 2x_5 + x_6 = 1 \end{cases}$$

Partiamo dunque dall'ultima equazione:

$$x_4 = 1 - 2x_5 + x_6$$

e scegliendo $x_5 = 1, x_6 = 0$ abbiamo

$$x_4 = -1$$

Allora passiamo alla penultima equazione: abbiamo

$$x_2 = -1 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 - x_6$$

e sappiamo che x_4, x_5, x_6 sono stati già determinati; scegliamo dunque solo $x_3 = -1$. Allora si ha

$$x_2 = -1 + 3(-1) + 2(-1) + (1) - 0 = -5$$

Ora finalmente finiamo con la prima equazione:

$$x_1 = 1 + x_2 - x_3 - x_4 - 2x_5 - x_6 = \ldots = -4$$

Ricapitolando, abbiamo determinato la soluzione

$$s = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

del sistema $Ax = b$.

#Osservazione

Osservazione 3.3. (automatizzare questo ragionamento)

Osserviamo che sapendo risolvere con questo metodo possiamo risolvere *qualunque* sistema lineare con A a scala; fortunatamente col Algoritmo di Gauß andremo a dimostrare che qualsiasi matrice A può essere trasformata in scala tramite il processo della *"gradinizzazione"*: quindi per questo ci sarà sufficiente *solo* risolvere sistemi lineari con la matrice dei coefficienti a scala, per poter risolvere *tutti* i sistemi lineari arbitrari.

B3. Algoritmo di Gauß

Algoritmo di Gauß

Definizioni preliminari per la descrizione dell'algoritmo di Gauß (Matrice completa e le operazioni elementari OE). Descrizione dell'algoritmo di Gauß per rendere un sistema lineare in un sistema lineare equivalente a scala come un programma.

---

1. Matrice completa di un sistema lineare

#Definizione

Definizione (Definizione 1.1. (matrice completa di un sistema lineare)).

Consideriamo un sistema lineare di forma

$$A \cdot x = b$$

allora definiamo la *matrice* ottenuta aggiungendo alla matrice A la colonna data dai *termini noti* b come la *matrice completa* di questo sistema lineare. La denotiamo con

$$(A|b) := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & | & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & | & b_2 \\ \vdots & & & \vdots & | & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & | & b_m \end{pmatrix}$$

N. B. Il segno sbarra | per *"differenziare"* i termini noti dai coefficienti ha uno scopo puramente grafico.

2. Operazioni elementari OE

Ora definiamo una serie di *operazioni elementari* (OE) che sono in grado di trasformare un *sistema lineare* di forma $(A|B)$ in un altro *equivalente* (Definizione 8 (Definizione 1.7. (sistemi lineari equivalenti))).

#Definizione

Definizione (Definizione 2.1. (le operazioni elementari)).

OE1. *L'operazione scambia equazioni*
Dati due indici $i, j \in \{1, \dots, m\}$ scambiamo di posto l'equazione i-esima e j-esima.
Questo corrisponde a *scambiare* la riga i-esima con la riga j-esima della matrice $(A|B)$.

OE2. *L'operazione scala equazioni*
Dato l'indice $i \in \{1, \dots, m\}$ e uno *scalare* $\lambda \in K$, moltiplichiamo l'i-esima equazione per λ. Precisamente questo corrisponde a *moltiplicare* per λ l'i-esima riga della matrice completa $(A|B)$.

OE3. *L'operazione somma equazioni*
Dati due indici $i, j \in \{1, \dots, m\}$ e uno scalare non nullo $\lambda \in K, \lambda \neq 0$, sommiamo alla i-esima equazione alla i-esima equazione la j-esima equazione dopo averla moltiplicata per λ.

Ovvero questo corrisponde a sommare alla riga i-esima della matrice completa $(A|B)$ λ volte la j-esima riga.

#Osservazione

Osservazione 2.1.

Osserviamo che queste operazioni determinano dei sistemi lineari *equivalenti* in quanto queste operazioni sono *completamente invertibili*; infatti partendo da un sistema lineare *"trasformato"* mediante le **OE.**, possiamo tornare al sistema originario.

#Proposizione

Proposizione 2.1. (le OE trasformano sistemi in sistemi equivalenti)

Se applico ad un sistema lineare qualsiasi una di queste operazione elementari, allora ottengo un sistema equivalente.

#Proposizione

Proposizione 2.2. (con le OE posso portare un sistema a scala)

Dato un *qualsiasi sistema lineare arbitrario*, posso portarlo ad un *sistema a scala* con queste operazioni elementari **OE**. Infatti mostreremo un *algoritmo* (Nozioni Fondamentali di Programmazione) che è in grado di *"gradinizzare"* (ovvero portare a scala) una matrice completa $(A|B)$ qualsiasi.

3. L'algoritmo di Gauß

Premesse storiche

Riprendendo la *proposizione 2.2.* della sezione precedente, abbiamo appena enunciato che siamo in grado di portare un sistema lineare non a scala in un sistema lineare *a scala*; dimostreremo questa proposizione descrivendo uno degli algoritmi più noti dell'*Algebra Lineare*, ovvero *l'algoritmo di Gauß*.

NOTIZIE STORICHE. (*Trascrizione appunti + approfondimenti personali*)
Questo algoritmo è stato attribuito al noto matematico C. F. Gauß *(1777-1855)* in quanto fu proprio lui a formalizzare questo procedimento in latino; tuttavia ciò non significa che il matematico Gauß inventò questo algoritmo, in quanto ci sono evidenze storiche che prima esistevano già descrizioni su questo procedimento. Infatti, esiste un antico manoscritto cinese (*I Capitoli nove arte matematica*/*九章算術*, circa 179) che descrive un principio simile a quello che andremo a descrivere.
Per ulteriori approfondimenti consultare le seguenti pagine:
https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Matrices_and_determinants/
https://it.frwiki.wiki/wiki/Les_Neuf_Chapitres_sur_l%27art_math%C3%A9matique

---

Descrizione dell'algoritmo come programma

OBIETTIVO.
Come detto prima, il nostro *obiettivo* è quello di *"gradinizzare"* un sistema lineare qualsiasi che non sia a scala.

INPUT.
Quindi il nostro input è un sistema lineare qualsiasi del tipo

$$Ax = b$$

che lo *"condenseremo"* nella *matrice completa* $(A|B)$.

OUTPUT.
Vogliamo ottenere la matrice completa $(\tilde{A}\,|\tilde{B}\,)$ tale che

$$\tilde{A} \text{ è a scala e } \tilde{A}x = \tilde{B} \overset{\text{equiv.}}{\cong} Ax = b$$

ALGORITMO.
Il nostro procedimento si articola in una serie di *"istruzioni"* da eseguire per un certo numero di volte.

---

1. Determino il valore $\bar{j}$ come *l'indice di colonna minimo* per cui abbiamo una colonna *non nulla* di A. Ovvero

$$\bar{j} := \min\{j : A^j \neq 0\}$$

2. Determino l'indice $\bar{i}$ tale per cui abbiamo l'elemento $a_{\bar{i},\bar{j}} \neq 0$ (*l'esistenza di un tale $\bar{i}$ deriva dalla scelta di $\bar{j}$*)
3. Scambio le righe 1 con la $\bar{i}$-esima; in questo modo sarà possibile supporre che $a_{1\bar{j}} \neq 0$ (*OE1*)
4. Voglio assicurarmi che *non* ho altre colonne *nulle* in $A^{(\bar{j})}$ (eccetto ovviamente $A_{(1)}$).
    1. Moltiplico la riga $A_{(1)}$ per $\frac{1}{a_{1\bar{j}}}$ (*OE2*)
    2. Sommo alle altre righe $A_i, \forall i \in \{2, \dots, m\}$ un *multiplo opportuno* di $A_{(1)}$. Ovvero $\lambda = -a_{ij}$. (*OE3*)

    $$A_{(i)} = A_{(i)} - a_{ij}A_{(1)}$$

5. Se la matrice ottenuta non è a scala, ripeto lo stesso procedimento a partire da *1.* sulla *sottomatrice* (ovvero una *"parte selezionata"* della matrice) con righe $\{2, \dots, m\}$ e colonne $\{\bar{j}+1, \dots, n\}$, del tipo

$$A' \in M_{m-1, n-\bar{j}-1}(K)$$

Queste operazioni corrispondono a:

$$0. \begin{pmatrix} 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \end{pmatrix}$$

$$1. \begin{pmatrix} 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \end{pmatrix}; \bar{j} = 3$$

$$2. \begin{pmatrix} 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \end{pmatrix}; \bar{i} = 1,2,3 \text{ (una di queste)}$$

$$3. \begin{pmatrix} 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \end{pmatrix} A_{(1)} \leftrightarrows A_{(1),(2),(3)} \text{ (una di queste)}$$

$$4.1. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \end{pmatrix}$$

$$4.2. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \end{pmatrix} A_{(i)} = A_{(i)} - a_{ij}A_{(1)} \text{ per } i = 2,3$$

$$5. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & + & + \\ 0 & 0 & 0 & + & + \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} + & + \\ + & + \end{pmatrix} \text{ ripeto}$$

#Osservazione

Osservazione 3.1. (l'algoritmo è valido e ben posto?)

Affinché questo algoritmo sia *valido* e *ben posto*, devo assicurarmi che:

1. Questo deve *eventualmente* terminare in un certo tempo *finito*; questo accade in quanto *prima o poi* le colonne e le righe delle *sottomatrici* della *5.* eventualmente si *"esauriranno"* e avremmo una matrice a scala.
2. Questo restituisce l'*output* corretto, come prescritto dalle specificazione. Anche questo si verifica in quanto ogni volta che raggiungo e svolgo il step *4.*, ho *"gradinizzato"* una scala.

Esempio di applicazione.

Come un *programmatore* fa dei *"unit tests"* su un programma o algoritmo, tentiamo di applicare questo principio appena descritto ad un sistema lineare.

#Esempio

Esempio 3.1.

Consideriamo il sistema lineare dato da

$$(A|B) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 8 & 6 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Ora ci applichiamo *l'algoritmo di Gauß*.

$$\begin{aligned}
&0. \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 8 & 6 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}; j = 0, i = 2 \\
&1. \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}; A_{(1)} \leftrightarrows A_{(2)} \\
&2. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}; A_{(1)} = 0.5A_{(1)} \\
&3. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & -7 & -6 & -2 \end{pmatrix}; A_{(2)} = A_{(2)} + 0A_{(1)}; A_{(3)} = A_{(3)} - 3A_{(1)} \\
&4. \text{ ripeto con } \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ -5 & -7 & -6 & -2 \end{pmatrix} \\
&5. \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -3 \\ -5 & -7 & -6 & -2 \end{pmatrix}; A_{(1)} = -A_{(1)} \\
&6. \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & -17 & -11 & -17 \end{pmatrix}; A_{(2)} = A_{(2)} - 5A_{(1)} \\
&7. \text{ la matrice in 6. è a scala; FINE}
\end{aligned}$$

Dunque otteniamo la seguente matrice:

$$(\overline{A}\,|\overline{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -17 & -11 & -17 \end{pmatrix}$$

che è *a scala*.

ESERCIZIO PERSONALE. Questo esercizio prevede un collegamento con *l'informatica*, in particolare con la *programmazione*.
A) Scrivere uno *pseudocodice* che *"emula"* questo principio
B) Implementare tale *pseudocodice* in *C/Python*
C) Calcolare la *"complessità"* di questo codice

Matrici - Sommario

Tutto sul capitolo delle matrici

A. LE PRIME DEFINIZIONI SULLE MATRICI

A1. Matrice

Matrice

Definizione di matrice, matrice quadrata, l'insieme delle matrici, matrice nulla. L'insieme delle matrici come $\mathbb{R}$-spazio vettoriale con le operazioni di somma interna e scalamento; Matrici triangolari superiori (e l'insieme delle matrici triangolari superiori come sottospazio vettoriale); Definizione della diagonale principale di una matrice; Matrici simmetriche ed antisimmetriche; Matrice identità; Matrice inversa e l'invertibilità delle matrici.

---

1. Definizione di Matrice

#Definizione

Definizione (Definizione 1.1. (matrice $m \times n$ a coefficienti in K)).

Siano $m, n \in \mathbb{N} \diagdown \{0\}$; allora si definisce una *matrice $m \times n$* a *coefficienti in K* come una *tabella rettangolare di $m \cdot n$ elementi* del tipo:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Dove ciascun *coefficiente* a_{ij} è un numero in K.

$$\forall i \in \{1, \dots, m\}; \forall j \in \{1, \dots, n\}; a_{ij} \in \mathbb{K}$$

Per convenzione i numeri (*indici*) i, j iniziano con 1.
Diciamo che il coefficiente a_{ij} è di posto i, j.

#Esempio

Esempio 1.1.

La seguente è una matrice 3×4.

$$\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 6 \\ 7 & -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Scegliamo qualche coefficiente:

$$a_{12} = \sqrt{2}; a_{21} = 0$$

Ovviamente si nota che *NON* è *sempre* vero che $a_{ij} = a_{ji}$; infatti qui abbiamo $a_{12} \neq a_{21}$

i-esima riga e colonna della matrice

Sia $A = (a_{ij})_{i=1,\ldots,m;j=1,\ldots,n}$ una matrice a coefficienti reali. Allora definiamo le seguenti:

#Definizione

Definizione (Definizione 1.2. (riga e colonna i-esima di una matrice)).

Per ogni $i \in \{1, \ldots, m\}$ la *i-esima riga* è la *matrice*

$$A_{(i)} := (a_{i1}, \ldots, a_{in})$$

Per ogni $j \in \{1, \ldots, n\}$ la *i-esima colonna* è la *matrice*

$$A^{(j)} := \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \ldots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

L'insieme delle matrici

#Definizione

Definizione (Definizione 1.3. (l'insieme delle matrici $M_{m,n}(\mathbb{K})$)).

Dati $m, n \in \mathbb{N}$, ove $m > 0, n > 0$, denotiamo *l'insieme delle matrici* $m \times n$ a coefficienti in K con

$$M_{m,n}(\mathbb{K})$$

#Osservazione

Osservazione 1.1. ($M_{m,n}(K)$ diventa un K-spazio vettoriale)

Notiamo che con le operazioni di *somma interna* e di *prodotto per uno scalare* definite in Operazioni basilari con matrici,

$$(M_{m,n}(\mathbb{R}), +, \cdot)$$

è uno spazio vettoriale.

2. Famiglie di matrici

Matrici quadrate

#Definizione

Definizione (Definizione 2.1. (matrice quadrata di ordine n)).

Una *matrice* si dice *quadrata* se il numero delle *righe* (n) coincide con il suo numero delle *colonne* (m), ovvero $m = n$.

Inoltre per denotare *l'insieme delle matrici quadrate* si scrive

$$M_n(\mathbb{R})$$

ove $n \in \mathbb{N}, n > 0$.

Si osserva che nel caso delle *matrici quadrate* è possibile definire la *diagonale principale* come la *parte di A data dalle entrate di posto* $A_{ii}, i \in \{1, \ldots, n\}$.

#Esempio

Esempio 2.1.

La seguente è una *matrice quadrata* 2×2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

La *diagonale principale* di A sarebbe $(1, 5)$.

Matrici nulle

#Definizione

Definizione (Definizione 2.2. (matrice nulla)).

Una *matrice $m \times n$ nulla* è è la *matrice $m \times n$* le cui *entrate* (o *coefficienti*) sono tutte nulle, 0.

$$0 := \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Matrici triangolari superiori

#Definizione

Definizione (Definizione 2.3. (le matrici triangolari superiori)).

Si definisce *l'insieme delle matrici triangolari superiori* 2×2 come

$$T_2(\mathbb{R}) := \{A \in M_2(\mathbb{R}) : a_{21} = 0\}$$

ovvero una matrice quadrata del tipo

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$$

Ovviamente è possibile generalizzare per le matrici quadrate $M_n(\mathbb{R})$.

#Osservazione

Osservazione 2.1.

Notiamo che questo insieme è un sottoinsieme di $M_2(\mathbb{R})$;

$$T_2(\mathbb{R}) \subseteq M_2(\mathbb{R})$$

Infatti se l'insieme delle matrici 2×2 $M_2(\mathbb{R})$ è un $\mathbb{R}$-*spazio vettoriale* (Spazi Vettoriali, **DEF 1.**), allora $T_2(\mathbb{R})$ è un *sottospazio vettoriale* (Sottospazi Vettoriali, **DEF 1.**).
Infatti valgono le seguenti:

1. La matrice nulla $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ appartiene anche a $T_2(\mathbb{R})$.
2. Le operazioni di *somma* e di *scalamento* sono chiuse; ovvero

$$A, B \in T_2(\mathbb{R}) \implies (A + B) \in T_2(\mathbb{R})$$

e

$$\lambda \in \mathbb{R}, A \in T_2(\mathbb{R}) \implies (\lambda \cdot A) \in T_2(\mathbb{R})$$

E' possibile verificare 2. verificando che la combinazione lineare di $A, B \in T_2(\mathbb{R})$ appartiene anch'esso a $T_2(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} \lambda_1 \cdot A + \lambda_2 \cdot B &= \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} & \lambda_1 a_{12} \\ 0 & \lambda_1 a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_2 b_{11} & \lambda_2 b_{12} \\ 0 & \lambda_2 b_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 b_{11} & \lambda_1 a_{12} + \lambda_2 b_{12} \\ 0 & \lambda_1 a_{22} + \lambda_2 b_{22} \end{pmatrix} \in T_2(\mathbb{R}) \blacksquare \end{aligned}$$

Questa osservazione è analoga per $T_n(\mathbb{R})$ e $M_n(\mathbb{R})$.

Matrici simmetriche e antisimmetriche

#Osservazione

Osservazione 2.2. (preambolo)

Considerando da quanto detto in Operazioni particolari con matrici (**OSS 1.1.**), abbiamo notato che *non* ha sempre senso chiedersi se la *trasposta* di una matrice è uguale alla matrice stessa, ovvero

$$¿\ {}^tA = A\ ?$$

tuttavia questo acquisisce significato quando consideriamo le matrici quadrate appartenenti a $M_n(\mathbb{R})$.

#Esempio

Esempio 2.2.

Prendo una matrice 3×3 che chiamo A.
Sapendo che alla prima riga $A_{(1)}$ ho fissato $A_{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, allora in questo modo ho già fissato $A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, in quanto voglio che $A^{(1)} = ({}^tA_{(1)})$. (ovvero che la trasposta della prima riga sia uguale alla prima colonna).
Il procedimento si ripete per $A_{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & ? & ? \end{pmatrix}$, dove i punti segnati con $?$ possono essere sostituiti con qualsiasi valori. Per convenienza inseriremo con dei numeri crescenti, ovvero $4, 5$ (e alla fine 6). Alla fine otteniamo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

che soddisfa ${}^tA = A$. Inoltre osserviamo che questa matrice è *simmetrica* alla diagonale.

#Definizione

Definizione (Definizione 2.4. (matrice simmetrica e antisimmetrica)).

Allora definiamo una matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$:
Simmetrica se vale che

$$A = {}^tA$$

Antisimmetrica se vale che

$$A = -{}^tA$$

#Osservazione

Osservazione 2.3.

Osservo una peculiarità delle matrici *antisimmetriche*; infatti se voglio costruirne una mi accorgo che tutte le entrate della *diagonale principale* devono essere nulle, in quanto l'unico numero che rimane uguale quando moltiplicato per -1 è 0.

#Osservazione

Osservazione 2.4.

Notiamo che le *matrici nulle* e *quadrate* sono le *uniche* matrici che sono sia *antisimmetriche* che *simmetriche*. Infatti, $0 = 0$ e $0 = -0$.

Matrice unità (o identità)

#Osservazione

Osservazione 2.5. (preambolo)

Considerando da quanto detto e notato per quanto riguarda il *prodotto tra matrici* (Operazioni particolari con matrici), possiamo definire una matrice che comporta come il numero 1 dei numeri reali $\mathbb{R}$ per questa suddetta operazione. (Operazioni particolari con matrici, **PROP 2.4.3.**)

#Definizione

Definizione (Definizione 2.5. (matrice identità di ordine n)).

Sia $n \in \mathbb{N}$ e $n > 0$, allora la *matrice unità* (o *identità*) è quella matrice quadrata appartenente a $M_n(\mathbb{R})$ le cui entrate sono tutte nulle, fuorché quelle della *diagonale principale*, che sono tutti uguali a 1. Denotiamo questa matrice con

$$\mathbb{1}_n \text{ o } I_n \text{ o } \text{Id}_n$$

ove

$$(\mathbb{1}_n)_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ se } i \neq j \\ 1 \text{ se } i = j \end{cases}$$

Matrice inversa

#Osservazione

Osservazione 2.6. (osservazione sui numeri reali)

Nei dei numeri reali $\mathbb{R}$, dato un $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ diciamo che un altro numero $b \in \mathbb{R}$ è l'inversa di a se è vera che

$$a \cdot b = b \cdot a = 1$$

e b è unica. Infatti questo è esattamente *l'assioma M3)* dei numeri reali (Assiomi dei Numeri Reali).

#Definizione

Definizione (Definizione 2.6. (matrice inversa)).

Allora, tracciando un parallelismo tra i *numeri reali* e le il *prodotto tra matrici* (Operazioni particolari con matrici), chiamiamo la *matrice quadrata* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *invertibile* se esiste una matrice $B \in M_n(\mathbb{R})$ tale che valga

$$A \cdot B = B \cdot A = \mathbb{1}_n$$

che chiamiamo

$$B = A^{-1}$$

#Proposizione

Proposizione 2.1. (le proprietà della matrice inversa)

Prendendo $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, valgono le seguenti proprietà:

1. Se A è *invertibile*, allora la sua inversa A^{-1} è *unica*.
2. Se A, B sono invertibili allora $A \cdot B$ *invertibile*, la quale inversa sarebbe $B^{-1} \cdot A^{-1}$.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE della *proposizione 2.1.*.

1. Prendiamo per assurdo B, C inverse di A.
   Allora per definizione
   $$\begin{aligned} A \cdot B = B \cdot A = \mathbb{1}_n \\ A \cdot C = C \cdot A = \mathbb{1}_n \end{aligned}$$
   allora
   $$B = B \cdot \mathbb{1}_n = B \cdot (A \cdot C) = (B \cdot A) \cdot C = \mathbb{1}_n \cdot C = C$$
   quindi per proprietà transitiva
   $$B = C$$
   che è assurdo. ■
2. Qui basta fare dei calcoli per verificare che $B^{-1} \cdot A^{-1}$ è $(A \cdot B)^{-1}$. Ovvero basta verificare che $(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = \mathbb{1}_n$ (e viceversa);
   $$\begin{aligned} (A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) &= A \cdot (B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1} \\ &= A \cdot \mathbb{1}_n \cdot A^{-1} \\ &= A \cdot A^{-1} \\ &= \mathbb{1}_n \\ \text{analogamente} \\ (B^{-1} \cdot A^{-1}) \cdot (A \cdot B) &= B^{-1} \cdot (A^{-1} \cdot A) \cdot B \\ &= B^{-1} \cdot \mathbb{1}_n \cdot B \\ &= B^{-1} \cdot B \\ &= \mathbb{1}_n \end{aligned}$$
   ■

#Osservazione

> **Osservazione 2.7.**
>
> L'analogia tra *l'invertibilità* rispetto al prodotto definito in $\mathbb{R}$ e l'invertibilità rispetto al *prodotto righe per colonne* di matrici *NON* si estende fino al punto di poter dire che *OGNI* matrice non-nulla è invertibile. Infatti si propone il seguente controesempio.

#Esempio

Esempio 2.3.

Considero la seguente matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

la matrice A *non* è *invertibile*.

Infatti, per assurdo suppongo che esista $A^{-1} = B$. Allora

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

Allora per definizione deve valere

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Prendiamo le entrate C_{11} e C_{21}. Per definizione del *prodotto righe per colonne* abbiamo:

$$C_{11} = 1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} = b_{11} + b_{21}$$
$$C_{21} = 0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} = b_{11} + b_{21}$$

Ma questo implicherebbe che

$$b_{11} + b_{21} = 1 = 0$$

che è un *assurdo*, in quanto $1 \neq 0$.

Minore ij-esimo di una matrice

#Definizione

Definizione (Definizione 2.7. (Minore ij-esimo di una matrice)).

Sia $A = M_n(K)$, siano $i, j \in \{1, \dots, n\}$ dei *valori fissati* che rappresentano gli *indici*.
Definiamo dunque il *minore ij-esimo della matrice A* $A_{n-1}(K)$ come la

sottomatrice $A_{ij} \subset A$ ottenuta *eliminando* la riga i-esima e la colonna j-esima.

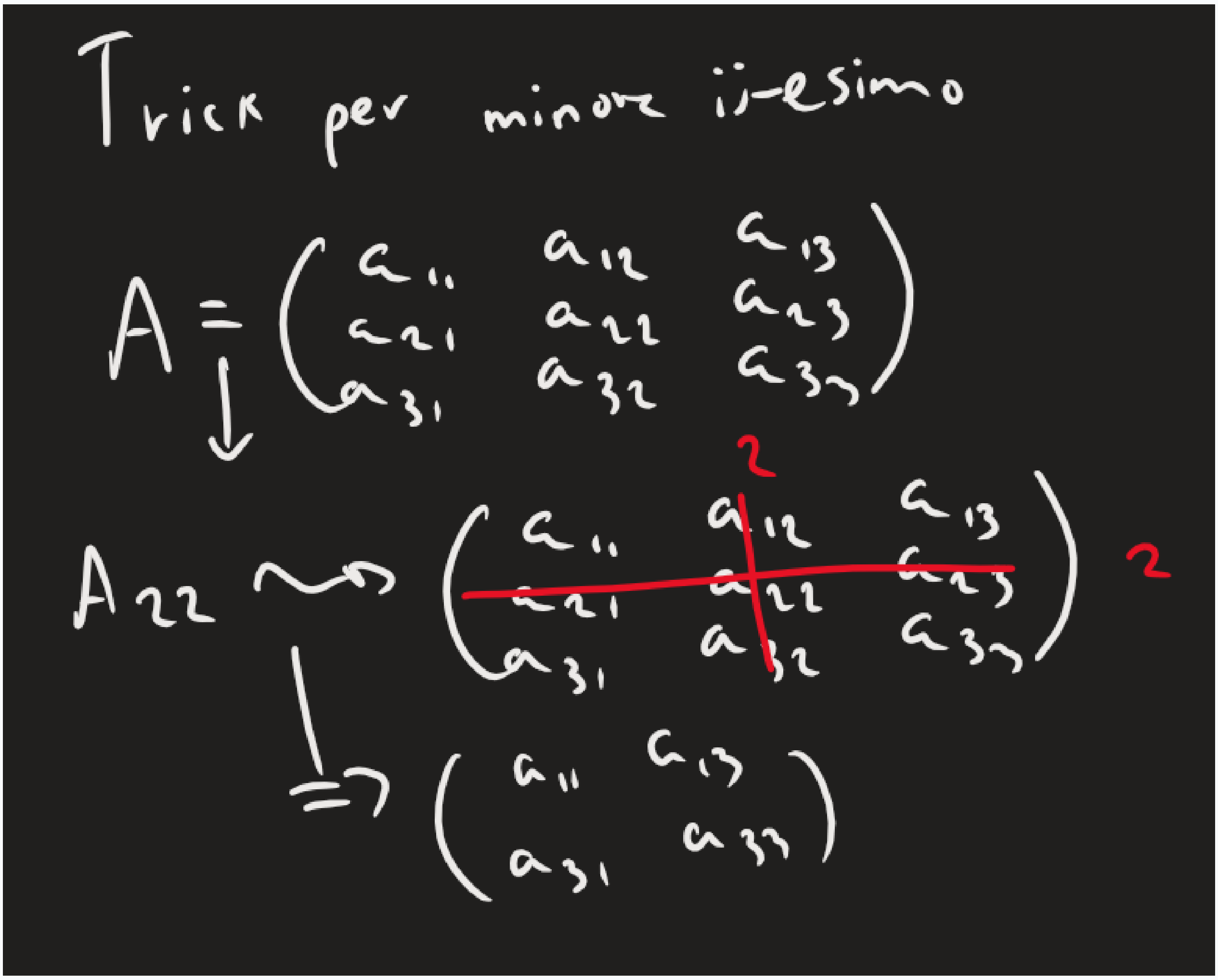
#Esempio

Esempio 2.7.1.

Sia $A \in M_3(K)$; allora il minore di A 13-esimo è

$$A_{13} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

TRUCCO. Un *"trucco"* grafico che può essere utile di determinare il *minore* è quello di prendere la matrice originale, sbarrare la riga i-esima e la colonna j-esima, poi infine di considerare solo ciò che rimane.



A2. Operazioni semplici con matrici

Operazioni basilari con matrici

Definizioni di operazioni con matrici; somma interna $+$, prodotto esterno (scalamento) $\cdot$, l'insieme delle matrici come $\mathbb{R}$-spazio vettoriale con queste operazioni.

---

0. Preambolo

Avendo definito la Matrice, andiamo a introdurre delle *operazioni* con delle *matrici* al fine di rendere *l'insieme delle matrici* $M_{m,n}(\mathbb{R})$ (Matrice, **DEF 1.2.**) un $\mathbb{R}$-*spazio vettoriale*.

1. Somma interna

DEF 1. Siano $m, n \in \mathbb{N} \diagdown \{0\}$, definiamo la **somma** delle *matrici* A e B e lo denotiamo $A + B$; per definire questa nuova matrice data dalla somma, definiamo *ogni sua entrata*. Quindi *l'entrata di posto* i, j di $A + B$ è data da:

$$(A + B)_{ij} := A_{ij} + B_{ij}$$

Qui si utilizza il fatto che per descrivere una *matrice* è sufficiente determinare come ottenere ciascuna delle sue *entrate*.

ESEMPIO 1.1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

OSS 1.1. La *matrice nulla* (Matrice, **DEF 2.2.**) è in effetti l'*elemento neutro* della somma tra matrici. Infatti questo sarà fondamentale per dimostrare che *l'insieme delle matrici* $m \times n$ $M_{m,n}(\mathbb{R})$ è uno $\mathbb{R}$-*spazio vettoriale* (Spazi Vettoriali).

2. Prodotto per scalare (scalamento)

DEF 2. Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$; definiamo allora il *prodotto (o la moltiplicazione) per uno scalare* λ per A, come la matrice $(\lambda \cdot A)$, le cui entrate sono ottenute facendo

$$(\lambda \cdot A)_{ij} := \lambda \cdot A_{ij}$$

ESEMPIO 2.1.

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ -9 & -6 & -3 \end{pmatrix}$$

A3. Cenni a concetti avanzati sui spazi vettoriali

Sistemi di generatori (cenni)

Cenno al concetto dei sistemi di generatori e combinazione lineare; Matrice come combinazione lineare di sistemi di generatori, indipendenza lineare

---

Premessa

Questo capitolo è un semplice cenno ai concetti di *combinazione lineare*, *sistemi di generatori* e *indipendenza lineare* applicato alle matrici; in seguito questi temi verranno approfonditi con Spazi Vettoriali.

0. Combinazione lineare

DEF 0. Per **combinazione lineare** si intende *l'espressione* per cui prendo una serie di *vettori* v_i dall'$\mathbb{R}$*-spazio vettoriale* V (Spazi Vettoriali, **DEF 1.**, **DEF 1.1.**), scalo ciascuna di essa per uno scalare λ_i e li sommo; quindi stiamo parlando di

$$\lambda_1 \mathrm{v}_1 + \lambda_2 \mathrm{v}_2 + \cdots + \lambda_n \mathrm{v}_n$$

1. Sistemi di generatori

Consideriamo una *matrice* 2×2 (Matrice, **DEF 1.**), A. Consideriamo

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Ora consideriamo 4 matrici 2×2 *"speciali"*, ovvero

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \ F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \ G = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

infatti queste matrici hanno *tutte* le *entrate* nulle (0), fuorché una, la quale uguale ad uno (1).

Consideriamo allora la seguente *combinazione lineare* di queste quattro matrici:

$$3E + F - 2G + 4H$$

che secondo dei calcoli diventa proprio A, ovvero

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Si può ripetere questa costruzione, qualsiasi sia matrice A; infatti se

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

allora

$$A = aE + bF + cG + dH$$

DEF 1. In questo diciamo che E, F, G, H sono un **sistema di generatori** di $M_2(\mathbb{R})$.

OSS 1.1. Notiamo che questo ragionamento può essere formulato allo stesso modo per qualsiasi insieme di *matrici* $M_{m,n}(\mathbb{R})$: abbiamo quindi "dimostrato" il seguente:
PROP 1.1. Se consideriamo l'insieme delle *matrici* $M_{m,n}(\mathbb{R})$ che sono costruite nel seguente modo: *esse hanno tutte le entrate nulle* 0 *fuorché una, la quale uguale ad* 1; allora tale insieme è **un sistema di generatori** per $M_{m,n}(\mathbb{R})$.

2. Indipendenza lineare

Considerando ancora le *matrici quadrate* 2×2, ne consideriamo la *matrice nulla*

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che può essere scritta come la combinazione lineare (considerando E, F, G, H come i *sistemi di generatori di* $M_2(\mathbb{R})$):

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0E + 0F + 0G + 0H$$

Si vede che non c'è nessun altro modo di ottenere la *matrice nulla*, se non di impostare ogni *coefficiente* 0. Infatti

$$eE + fF + gG + hH = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi affinché valga la sovrastante, $(e, f, g, h) = (0, 0, 0, 0)$.

DEF 2. In questo caso diciamo che queste quattro matrici sono **linearmente indipendenti**; ovvero che *l'unico modo di ottenere la matrice nulla mediante la combinazione lineare di queste matrici* è quella di imporre tutti i coefficienti nulli.
Questi ragionamenti possono essere formulati (e generalizzati) anche per *matrici* $m \times n$.

OSS 2.1. Se ho

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \ B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

allora la per ottenere 0 (la matrice nulla) è necessaria fare la seguente combinazione lineare:

$$-1 \cdot A + (-\frac{1}{2})B$$

e i coefficienti non sono nulli; pertanto A, B *non* sono linearmente indipendenti.

A4. Operazioni avanzate con matrici

Operazioni particolari con matrici

Trasposta di una matrice (definizione di matrice simmetrica e antisimmetrica). Definizione di prodotto tra due matrici. Esempi scelti del prodotto righe per colonne. Proprietà del prodotto tra matrici.

---

1. Matrice trasposta

---

traspórre (ant. **transpórre**) v. tr. [dal lat. *transponĕre*, comp. di *trans-* «trans-» e *ponĕre* «porre»] (coniug. come *porre*). – **1.** Porre, collocare una cosa dopo un'altra, invertendo l'ordine in cui tali cose erano inizialmente: *il copista per errore ha trasposto i versi 24-25 dopo i versi 26-30*; col senso più generico di porre in diverso ordine: *il periodo potrebbe migliorarsi notevolmente trasponendo qualche parola*; *se necessario si potrà t. qualche numero del programma*; *t. i fili di una linea telefonica*.

DEF 1. Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$; definiamo la **trasposta** di A come quella matrice, che indichiamo con ${}^tA$, che è un elemento di $M_{m,n}(\mathbb{R})$, determinato dalla seguente proprietà: *"l'entrata di posto i,j di ${}^tA$ è uguale all'entrata di posto j,i di A"*. In parole povere, scambiamo le *righe* della matrice con le *colonne* (invertendo così l'ordine).
Quindi

$$({}^tA)_{ij} := A_{ji} \; ; \; \begin{matrix} i \in \{1, \ldots, n\} \\ j \in \{1, \ldots, m\} \end{matrix}$$

ESEMPIO 1.1.
Se prendiamo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

allora si ha

$${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

OSS 1.1. Notiamo che *generalmente* non ha senso chiedersi se

$${}^tA = A$$

in quanto in una buona parte dei casi (ovvero delle *matrici non quadrate* (Matrice, **DEF 2.1.**)) il numero delle colonne m e il numero delle righe n vengono scambiate (per definizione); infatti se A è una matrice $m \times n$, allora ${}^tA$ sarà una matrice di $n \times m$.

1.1. Proprietà della trasposta

PROP 1.1. Prendendo $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ allora si verificano le due proprietà:

$$\begin{aligned}&\text{(i) } {}^t(A+B) = ({}^tA) + ({}^tB) \\ &\text{(ii) } {}^t({}^tA) = A\end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE.
Innanzitutto osserviamo che ha senso chiedersi se queste proprietà sono valide, in quanto per definizione in Operazioni basilari con matrici, sommando due matrici $m \times n$ si ottiene un altra matrice $m \times n$; infatti da un lato si sommano prima due matrici $m \times n$ poi per trasporlo in una matrice $n \times m$, dall'altro si sommano due matrici trasposte $n \times m$ (ottenendo ovviamente un altra matrice $n \times m$).

Per dimostrare la *(i)*, dimostriamo che tutte le entrate della matrice nel *membro sinistro dell'uguaglianza* e nel *membro destro* sono, infatti, effettivamente uguali.
Per farlo fissiamo le i, j e prendiamo le entrate di posto i, j. Allora

$$\begin{aligned}&(*)\ ({}^t(A+B))_{ij} \overset{\text{def.}}{=} (A+B)_{ji} \overset{\text{def.}}{=} A_{ji} + B_{ji} \\ &(\triangle)\ ({}^tA)_{ij} + ({}^tB)_{ij} \overset{\text{def.}}{=} A_{ji} + B_{ji}\end{aligned}$$

E notiamo che (*) e ($\triangle$) sono uguali, completando così la dimostrazione.

Per la dimostrazione di *(ii)* basta fissare i, j e considerare le entrate di posto i, j;

$$({}^t({}^tA))_{ij} = ({}^tA)_{ji} = A_{ij}$$

■

2. Prodotto righe per colonne

Ora andiamo a introdurre una nuova operazione tra matrici e per farlo è opportuno considerare una specie di analogia, una situazione che ci aiuti a comprendere il concetto.

2.1. Definizione analogica

Immaginiamo di trovarci in un negozio A che presenta i seguenti prezzi (tralasciando questioni economico-finanziarie):

- Costo pasta: $C_p = 1$
- Costo latte: $C_l = 2$
- Costo uova: $C_u = 3$
  Ora supponiamo di dover comprare n_p, n_l, n_u quantità di pasta, latte e uova; ora vogliamo calcolare il costo totale, che sarebbe una specie di *"combinazione lineare"* dove i *coefficienti scalari* vengono rappresentati dai quantitativi, i *vettori* invece dai *costi*. Quindi abbiamo

  $$n_p C_p + n_l C_l + n_u C_u$$

  Ora definiamo il *prodotto righe per colonne* come

  $$\begin{pmatrix} C_p & C_l & C_u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_p \\ n_l \\ n_u \end{pmatrix} := n_p C_p + n_l C_l + n_u C_u$$

  Adesso supponiamo di aver trovato un altro negozio B che offre altri prezzi ancora più competitivi; ovvero

  $$C'_p = -3\ ;\ C'_l = -2\ ; C'_u = -1$$

  quindi per tenere sotto controllo i due *totali di spesa*, potrei *"impacchettare"* le due righe dei *costi unitari* in una matrice:

  $$\begin{pmatrix} C_p & C_l & C_u \\ C'_p & C'_l & C'_u \end{pmatrix}$$

  e sarebbe ragionevole definire il prodotto di:

  $$\begin{pmatrix} C_p & C_l & C_u \\ C'_p & C'_l & C'_u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_p \\ n_l \\ n_u \end{pmatrix}$$

  come la matrice 2×1 dove la prima riga rappresenta il *costo totale del primo negozio* e la seconda riga invece il *costo totale del secondo negozio*:

  $$\begin{pmatrix} n_p C_p + n_l C_l + n_u C_u \\ n_p C'_p + n_l C'_l + n_u C'_u \end{pmatrix}$$

  Ricapitolando, abbiamo moltiplicato una *matrice 2×3* per una *matrice 3×1* e abbiamo ottenuto una *matrice 2×1*.
  In altre parole, la matrice ottenuta dalla moltiplicazione è quella matrice le cui *entrate* sono date dalla *moltiplicazione di ciascuna delle due righe*

della prima matrice con la colonna della seconda matrice.
In questo modo, se volessimo aggiungere la seconda colonna di quantitativi $\begin{pmatrix} n'_p \\ n'_l \\ n'_u \end{pmatrix}$, quello che andremmo a ottenere è una situazione del tipo:

$$\begin{pmatrix} C_p & C_l & C_u \\ C'_p & C'_l & C'_u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_p & n'_p \\ n_l & n'_l \\ n_u & n'_u \end{pmatrix}$$

che diventa

$$\begin{pmatrix} n_pC_p + n_lC_l + n_uC_u & n'_pC_p + n'_lC_l + n'_uC_u \\ n_pC'_p + n_lC'_l + n_uC'_u & n'_pC'_p + n'_lC'_l + n'_uC'_u \end{pmatrix}$$

dove a sinistra abbiamo i *quantitativi della prima colonna*, a destra *i quantitativi della seconda colonna* $'$.

2.2. Definizione generale

DEF 2.2.1. Siano $A \in M_{1,n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{n,1}(\mathbb{R})$; allora definiamo il **prodotto riga per colonna** come *"la combinazione lineare"* data da

$$A_{(1)} \cdot B^{(1)} := a_{11}b_{11} + \ldots + a_{1n}b_{n1} = \sum_{i=1}^{n} a_{1i}b_{i1}$$

DEF 2.2.2. In generale, se $A \in M_{m,p}(\mathbb{R})$ e $B \in M_{p,n}(\mathbb{R})$ allora definiamo il **prodotto** $A \cdot B$ come la *matrice* $m \times n$ la cui *entrata di posto* ij è data dalla seguente:

$$(A \cdot B)_{ij} := A_{(i)} \cdot B^{(j)} = \sum_{k=1}^{p} a_{1k}b_{k1}$$

OSS 2.2.1. Notiamo che il *prodotto tra due matrici* $A \cdot B$ è definita solo se il numero di colonne di A coincide con il numero di righe di B.
Inoltre, la *"matrice risultante"* diventa una matrice $a \times b$ (ove a è il numero delle colonne di A, b il numero di righe di B).

2.3. Esempi

Diamo alcuni esempi-esercizi.
ESEMPIO 2.3.1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

usando le definizioni otteniamo

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

poi calcolando tutti i *prodotti righe per colonne*, infine abbiamo

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

ESEMPIO 2.3.2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+0+0 & 2+0+0 \\ 0+0+0 & 0-1+0 \\ 0+0+1 & 0+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

OSS 2.3.2.a.
Notiamo di aver ottenuto la stessa matrice a destra.

ESEMPIO 2.3.3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0+0 & 0+2+0 & 0+0+3 \\ -3+0+0 & 0-2+0 & 0+0-1 \end{pmatrix}$$

facendo i conti,

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

OSS 2.3.3.a.
Come appena notato prima, la *seconda matrice* sembra di comportarsi come il numero $1.$; infatti se lo moltiplichi a destra o a sinistra, ottieni la stessa matrice moltiplicata.
Infatti questa matrice verrà definita come la matrice identità (**DEF 2.5.**) $\mathbb{1}$.

ESEMPIO 2.3.4.
Consideriamo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$
$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Posso fare sia $A \cdot B$ che $B \cdot A$ in quanto abbiamo i tali requisiti. Allora

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 * 1 + 1 * 2 & 0 * 1 + 2 * 1 \\ -1 * 3 + 4 * 1 & 3 * 0 + 1 * 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

e

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -1 * 1 + 0 * 3 & -1 * 2 + 0 * 4 \\ 1 * 1 + 1 * 3 & 1 * 2 + 1 * 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

OSS 2.3.4.a.
Notiamo che il *prodotto delle matrici* non è un'operazione *commutativa*; questo determina delle forti conseguenze, in particolare nella *meccanica quantistica* con il *principio di indeterminazione di Heisenberg*.

2.4. Proprietà

Il *prodotto righe per colonne* soddisfa alcune proprietà:

PROP 2.4.1. Siano $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ e $C, D \in M_{p,n}(\mathbb{R})$. Allora valgono le seguenti uguaglianze:

$$\begin{aligned} &1.\ (A+B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C \\ &2.\ A \cdot (C+D) = A \cdot C + A \cdot D \end{aligned}$$

la *1.* si chiama "proprietà distributiva a *destra*", la *2.* invece "proprietà distributiva a *sinistra*". Utilizziamo questa nomenclatura in quanto sappiamo che l'operazione di prodotto righe per colonna *NON* è commutativa; quindi non si è sempre certi che questa proprietà valga da entrambi i lati (in questo caso sì).

PROP 2.4.2. Sia $A \in M_{m,p}(\mathbb{R})$ e $B \in M_{p,n}(\mathbb{R})$; allora vale che

$${}^t(A \cdot B) = ({}^tB) \cdot ({}^tA)$$

ATTENZIONE! Invece bisogna stare attenti che

$$^t(A \cdot B) \neq ({}^tA) \cdot ({}^tB)$$

in quanto essa non è definita. Infatti a destra si vede che proviamo a moltiplicare una matrice p, m e n, p; a meno che $m = n$, questa moltiplicazione NON è ben posta.

DIMOSTRAZIONE. Per mostrare la forma corretta, ovvero

$$^t(A \cdot B) = ({}^tB) \cdot ({}^tA)$$

mostriamo che tutte le entrate del membro destro sono uguali a tutte le entrati del membro sinistro; siano dunque $i \in \{1, \dots, n\}$ e $j \in \{1, \dots, m\}$. Allora:

$$\begin{aligned}&\text{dx. } ({}^t(A \cdot B))_{ij} = (A \cdot B)_{ji} = A_{(j)} \cdot B^{(i)} \\ &\text{sx. } (({}^tB) \cdot ({}^tA))_{ij} = {}^tB_{(i)} \cdot {}^tA^{(j)} = \text{le quantità sono uguali} = A_{(j)} \cdot B^{(i)}\end{aligned}$$

e questo mostra che le due sono uguali.

PROP 2.4.3. Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, allora

$$\mathbb{1}_m \cdot A = A; \; A \cdot \mathbb{1}_n = A$$

Per $\mathbb{1}_m$ si intende la *matrice identità* (Matrice, **DEF 2.5.**).

OSS 2.4.3.a Nel caso delle matrici quadrate $M_n(\mathbb{R})$, la matrice unità $\mathbb{1}_n$ funge dunque da *elemento neutro* per il *prodotto righe per colonne*. Ovvero

$$\mathbb{1}_n \cdot A = A \cdot \mathbb{1}_n = A$$

e possiamo denominarlo come *elemento neutro* in quanto tutti gli elementi in questa uguaglianza sono appartenenti a $M_n(\mathbb{R})$.

PROP 2.4.4. Sia $\lambda \in K$, $A, B \in M_{m,n}(K)$ allora vale che

$$A \cdot (\lambda \cdot B) = \lambda(A \cdot B)$$

DIMOSTRAZIONE della *proposizione 2.4.4.*
La dimostrazione è lasciata da svolgere al lettore.

A5. Matrice simile

Definizione di Matrice Simile

Definizione di due matrici simili.

---

1. Definizione di Matrici Simili

#Definizione

Definizione (Definizione 1.1. (matrici simili)).

Siano $A, B \in M_n(K)$ due *matrici quadrate* (Definizione 4 (Definizione 2.1. (matrice quadrata di ordine n))).
A, B si dicono *simili* se *esiste* una matrice *invertibile* $P \in M_n(K)$ tale che valga

$$B = P^{-1} \cdot A \cdot P$$

A6. Matrice Diagonale

Definizione di Matrice Diagonale e Applicazione Diagonalizzabile

Definizione di una matrice quadrata diagonale e di un'applicazione lineare diagonalizzabile.

---

1. Matrice quadrata diagonale

#Definizione

Definizione (Definizione 1.1. (matrice quadrata diagonale)).

Sia $A \in M_n(K)$ una *matrice quadrata* (Definizione 4 (Definizione 2.1. (matrice quadrata di ordine n))).
A si dice anche *diagonale* se tutti gli elementi non-nulli appartengono solo alla *diagonale principale* della matrice (Matrice).

2. Applicazione Lineare Diagonalizzabile

#Definizione

Definizione (Definizione 2.1. (applicazione lineare diagonalizzabile)).

Sia $f : V \longrightarrow V$ un'*applicazione lineare* (Definizione 1 (Definizione 1.1. (applicazione lineare da V a V primo))) con $\dim V = n$.
f si dice *diagonalizzabile* se esiste una base $\mathcal{B}$ di V tale che la *matrice associata* $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ (Definizione 1 (Definizione 1.1. (matrice associata a f rispetto alle basi B, C))) è *diagonale*.

#Osservazione

Osservazione 2.1. (significato della diagonalizzabilità)

Dire che la *matrice associata* $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ è *diagonale* è equivalente a dire che *ogni immagine dell'elemento della base* $\mathcal{B}$ è *autovettore* per un certo autovalore λ_i.
Infatti se $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ è diagonale, allora è una matrice del tipo

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Allora, *per definizione*, ogni immagine del vettore di $\mathcal{B}$ è del tipo

$$f(v_i) = 0 \cdot \lambda_1 + \dots + \lambda_i v_i + \dots + 0 \cdot \lambda_n$$

Ovvero v_i è elemento dello spettro di λ_i.

B. OPERAZIONI CON LE MATRICI

B1. L'algoritmo di Gauß

Algoritmo di Gauß

Definizioni preliminari per la descrizione dell'algoritmo di Gauß (Matrice completa e le operazioni elementari OE). Descrizione dell'algoritmo di Gauß *per rendere un sistema lineare in un sistema lineare equivalente a scala come un programma.*

---

1. Matrice completa di un sistema lineare

#Definizione

Definizione (Definizione 1.1. (matrice completa di un sistema lineare)).

Consideriamo un sistema lineare di forma

$$A \cdot x = b$$

allora definiamo la *matrice* ottenuta aggiungendo alla matrice A la colonna data dai *termini noti* b come la *matrice completa* di questo sistema lineare. La denotiamo con

$$(A|b) := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & | & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & | & b_2 \\ \vdots & & & \vdots & | & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & | & b_m \end{pmatrix}$$

N. B. Il segno sbarra | per *"differenziare"* i termini noti dai coefficienti ha uno scopo puramente grafico.

2. Operazioni elementari OE

Ora definiamo una serie di *operazioni elementari* (OE) che sono in grado di trasformare un *sistema lineare* di forma $(A|B)$ in un altro *equivalente* (Definizione 8 (Definizione 1.7. (sistemi lineari equivalenti))).

#Definizione

Definizione (Definizione 2.1. (le operazioni elementari)).

OE1. *L'operazione scambia equazioni*
Dati due indici $i, j \in \{1, \dots, m\}$ scambiamo di posto l'equazione i-esima e j-esima.
Questo corrisponde a *scambiare* la riga i-esima con la riga j-esima della matrice $(A|B)$.

OE2. *L'operazione scala equazioni*
Dato l'indice $i \in \{1, \ldots, m\}$ e uno *scalare* $\lambda \in K$, moltiplichiamo l'i-esima equazione per λ. Precisamente questo corrisponde a *moltiplicare* per λ l'i-esima riga della matrice completa $(A|B)$.

OE3. *L'operazione somma equazioni*
Dati due indici $i, j \in \{1, \ldots, m\}$ e uno scalare non nullo $\lambda \in K, \lambda \neq 0$, sommiamo alla i-esima equazione alla i-esima equazione la j-esima equazione dopo averla moltiplicata per λ.
Ovvero questo corrisponde a sommare alla riga i-esima della matrice completa $(A|B)$ λ volte la j-esima riga.

#Osservazione

Osservazione 2.1.

Osserviamo che queste operazioni determinano dei sistemi lineari *equivalenti* in quanto queste operazioni sono *completamente invertibili*; infatti partendo da un sistema lineare *"trasformato"* mediante le **OE.**, possiamo tornare al sistema originario.

#Proposizione

Proposizione 2.1. (le OE trasformano sistemi in sistemi equivalenti)

Se applico ad un sistema lineare qualsiasi una di queste operazione elementari, allora ottengo un sistema equivalente.

#Proposizione

Proposizione 2.2. (con le OE posso portare un sistema a scala)

Dato un *qualsiasi sistema lineare arbitrario*, posso portarlo ad un *sistema a scala* con queste operazioni elementari **OE**. Infatti mostreremo un *algoritmo* (Nozioni Fondamentali di Programmazione) che è in grado di *"gradinizzare"* (ovvero portare a scala) una matrice completa $(A|B)$ qualsiasi.

3. L'algoritmo di Gauß

Premesse storiche

Riprendendo la *proposizione 2.2.* della sezione precedente, abbiamo appena enunciato che siamo in grado di portare un sistema lineare non a scala in un sistema lineare *a scala*; dimostreremo questa proposizione descrivendo uno degli algoritmi più noti dell'*Algebra Lineare*, ovvero *l'algoritmo di Gauß*.

NOTIZIE STORICHE. (*Trascrizione appunti + approfondimenti personali*)
Questo algoritmo è stato attribuito al noto matematico C. F. Gauß *(1777-1855)* in quanto fu proprio lui a formalizzare questo procedimento in latino; tuttavia ciò non significa che il matematico Gauß inventò questo algoritmo, in quanto ci sono evidenze storiche che prima esistevano già descrizioni su questo procedimento. Infatti, esiste un antico manoscritto cinese (*I Capitoli nove arte matematica*/*九章算術*, circa 179) che descrive un principio simile a quello che andremo a descrivere.
Per ulteriori approfondimenti consultare le seguenti pagine:
https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Matrices_and_determinants/
https://it.frwiki.wiki/wiki/Les_Neuf_Chapitres_sur_l%27art_math%C3%A9matique

---

Descrizione dell'algoritmo come programma

OBIETTIVO.
Come detto prima, il nostro *obiettivo* è quello di *"gradinizzare"* un sistema lineare qualsiasi che non sia a scala.

INPUT.
Quindi il nostro input è un sistema lineare qualsiasi del tipo

$$Ax = b$$

che lo *"condenseremo"* nella *matrice completa* $(A|B)$.

OUTPUT.
Vogliamo ottenere la matrice completa $(\tilde{A}\,|\tilde{B}\,)$ tale che

$$\tilde{A} \text{ è a scala e } \tilde{A}x = \tilde{B} \overset{\text{equiv.}}{\cong} Ax = b$$

ALGORITMO.
Il nostro procedimento si articola in una serie di *"istruzioni"* da eseguire per un certo numero di volte.

---

1. Determino il valore $\bar{j}$ come *l'indice di colonna minimo* per cui abbiamo una colonna *non nulla* di A. Ovvero
$$\bar{j} := \min\{j : A^j \neq 0\}$$
2. Determino l'indice $\bar{i}$ tale per cui abbiamo l'elemento $a_{\bar{i},\bar{j}} \neq 0$ (*l'esistenza di un tale $\bar{i}$ deriva dalla scelta di $\bar{j}$*)
3. Scambio le righe 1 con la $\bar{i}$-esima; in questo modo sarà possibile supporre che $a_{1\bar{j}} \neq 0$ (*OE1*)
4. Voglio assicurarmi che *non* ho altre colonne *nulle* in $A^{(\bar{j})}$ (eccetto ovviamente $A_{(1)}$).
    1. Moltiplico la riga $A_{(1)}$ per $\frac{1}{a_{1\bar{j}}}$ (*OE2*)
    2. Sommo alle altre righe $A_i, \forall i \in \{2, \dots, m\}$ un *multiplo opportuno* di $A_{(1)}$. Ovvero $\lambda = -a_{ij}$. (*OE3*)
    $$A_{(i)} = A_{(i)} - a_{ij}A_{(1)}$$
5. Se la matrice ottenuta non è a scala, ripeto lo stesso procedimento a partire da *1.* sulla *sottomatrice* (ovvero una *"parte selezionata"* della matrice) con righe $\{2, \dots, m\}$ e colonne $\{\bar{j}+1, \dots, n\}$, del tipo
$$A' \in M_{m-1, n-\bar{j}-1}(K)$$

Queste operazioni corrispondono a:

0. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \end{pmatrix}$

1. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \end{pmatrix};\bar{j} = 3$

2. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \end{pmatrix};\bar{i} = 1, 2, 3 \text{ (una di queste)}$

3. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \end{pmatrix} A_{(1)} \leftrightarrows A_{(1),(2),(3)} \text{ (una di queste)}$

4.1. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \end{pmatrix}$

4.2. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \end{pmatrix} A_{(i)} = A_{(i)} - a_{ij}A_{(1)} \text{ per } i = 2, 3$

5. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & + & + \\ 0 & 0 & 0 & + & + \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} + & + \\ + & + \end{pmatrix} \text{ ripeto}$

#Osservazione

Osservazione 3.1. (l'algoritmo è valido e ben posto?)

Affinché questo algoritmo sia *valido* e *ben posto*, devo assicurarmi che:

1. Questo deve *eventualmente* terminare in un certo tempo *finito*; questo accade in quanto *prima o poi* le colonne e le righe delle *sottomatrici* della *5.* eventualmente si *"esauriranno"* e avremmo una matrice a scala.
2. Questo restituisce l'*output* corretto, come prescritto dalle specificazione. Anche questo si verifica in quanto ogni volta che raggiungo e svolgo il step *4.*, ho *"gradinizzato"* una scala.

Esempio di applicazione.

Come un *programmatore* fa dei *"unit tests"* su un programma o algoritmo, tentiamo di applicare questo principio appena descritto ad un sistema lineare.

#Esempio

Esempio 3.1.

Consideriamo il sistema lineare dato da

$$(A|B) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 8 & 6 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Ora ci applichiamo *l'algoritmo di Gauß*.

$$\begin{aligned}
&0. \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 8 & 6 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}; j = 0, i = 2 \\
&1. \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}; A_{(1)} \leftrightarrows A_{(2)} \\
&2. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}; A_{(1)} = 0.5A_{(1)} \\
&3. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & -7 & -6 & -2 \end{pmatrix}; A_{(2)} = A_{(2)} + 0A_{(1)}; A_{(3)} = A_{(3)} - 3A_{(1)} \\
&4. \text{ ripeto con } \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ -5 & -7 & -6 & -2 \end{pmatrix} \\
&5. \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -3 \\ -5 & -7 & -6 & -2 \end{pmatrix}; A_{(1)} = -A_{(1)} \\
&6. \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & -17 & -11 & -17 \end{pmatrix}; A_{(2)} = A_{(2)} - 5A_{(1)} \\
&7. \text{ la matrice in 6. è a scala; FINE}
\end{aligned}$$

Dunque otteniamo la seguente matrice:

$$(\overline{A}\,|\overline{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -17 & -11 & -17 \end{pmatrix}$$

che è *a scala*.

ESERCIZIO PERSONALE. Questo esercizio prevede un collegamento con *l'informatica*, in particolare con la *programmazione*.
A) Scrivere uno *pseudocodice* che *"emula"* questo principio
B) Implementare tale *pseudocodice* in *C/Python*
C) Calcolare la *"complessità"* di questo codice

B2. Rango di una matrice

Rango

Definizione di rango, osservazioni, esempi.

---

1. Definizione di rango

#Osservazione

Osservazione 1.1. (le colonne di una matrice vivono in K^m)

Sia $A \in M_{m,n}(K)$, allora le *colonne* di A sono *tutti* elementi di K^m. Dunque

$$A^{(1)}, \dots, A^{(n)} \in K^n$$

#Definizione

Definizione (Definizione 1.1. (rango)).

Sia $A \in M_{m,n}(K)$; definiamo il *rango* della *matrice* (Definizione 1 (Definizione 1.1. (matrice $m \times n$ a coefficienti in K))) A e lo denotiamo con $\mathrm{rg}(A)$ oppure $\mathrm{rk}(A)$ (*la seconda è la dicitura internazionale*) come la *dimensione* (Definizione 1 (Definizione 1.1. (dimensione di un spazio vettoriale))) dello *span* (Lemma 3 (Lemma 2.1. (lo span è sempre un sottospazio vettoriale))) dello *sottospazio* generato dalle *colonne* di A:

$$\text{rg}(A) := \dim(\text{span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}))$$

2. Osservazioni sul rango

#Osservazione

Osservazione 2.1. (il rango è limitato da due numeri)

Se $A \in M_{m,n}(K)$ allora

- $\text{rg}(A) \leq m$; infatti

$$A^{(1)}, \dots, A^{(n)} \in K^m \implies \text{span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}) \subseteq K^m$$

dunque per la *proposizione 3.1.* sulla dimensione (Dimensione > ^265196)

$$\dim(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}) \leq \dim(K^m) = m$$

- $\text{rg}(A) \leq n$; infatti abbiamo n colonne, dunque $\text{span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)})$ ha n generatori; pertanto una *base* di $\text{span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)})$ ha al più n generatori (che viene verificato quando *tutti* i vettori colonna solo linearmente indipendenti); pertanto

$$\text{span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}) \leq K^n = n$$

Per concludere, traiamo che

$$A \in M_{m,n}(K) \implies \text{rg}\, A \leq \min\{m, n\}$$

#Osservazione

Osservazione 2.2.

Noteremo che questa definizione *non* cambierebbe, se invece di considerare le *colonne* considerassimo le *righe*.

3. Esempio

#Esempio

Esempio 3.1. (matrice 2×3)

Consideriamo la matrice

$$A \in M_{2,3}(K) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Dalla definizione di *rango* e dall'*osservazione 1.2.* sappiamo che

$$\operatorname{rg}(A) = \dim(\operatorname{span}((2,1),(1,0),(3,-1))) \leq \min\{2,3\} = 2$$

Dato che tutte le *colonne* sono linearmente indipendenti.
Invece se due colonne fossero invece *linearmente dipendenti*, quindi *proporzionali* tra di loro (in quanto una di queste sono ottenibili mediante lo scalamento dell'altro), allora avremmo

$$\operatorname{rg}(A) = 1$$

#Esempio

Esempio 3.2. (matrice identità $\mathbb{1}_n$)

Sia $\mathbb{1}_n$ la *matrice identità* n x n (Definizione 8 (Definizione 2.5. (matrice identità di ordine n))), abbiamo

$$\operatorname{rg}(\mathbb{1}_n) = \dim(\operatorname{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}), \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}) = \dim(K^n) = n$$

4. Teoremi

Per dei teoremi vedere questa pagina: Teoremi su Rango

B3. Teoremi sul rango

Teoremi sulle Basi

Tutti i teoremi sulle basi: teorema di estrazione di una base, teorema del completamento/estensione, lemma di Steinitz, teorema sul numero di elementi delle basi. Cenni/idee alle dimostrazioni di questi teoremi

1. Teorema di estrazione di una base

Questo primo teorema, come ci suggerisce il titolo, serve per *"estrarre"* una base da uno *spazio vettoriale* (Spazi Vettoriali), ovvero di determinarla.

#Teorema

Teorema 1.1. (Teorema 1.1. (Teorema di estrazione di una base).).

Sia V un *K-spazio vettoriale*, *finitamente generato*, sia $\{v_1, \ldots, v_k\}$ un *sistemi di generatori* di V.
Allora esiste $\mathcal{B} \subseteq \{v_1, \ldots, v_k\}$ tale che $\mathcal{B}$ è *base* di V.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *teorema di estrazione* (Teorema 1.1. (Teorema di estrazione di una base))
Nota: questa non è una vera e propria dimostrazione, bensì un semplice cenno. Ci si focalizza in particolare su un algoritmo per scopi informatici.
In questa dimostrazione procediamo per *costruzione*, ovvero troviamo la *base* $\mathcal{B}$ mediante il cosiddetto *algoritmo* dello scarto.
Inoltre supponiamo $V \neq \{0\}$.

ALGORITMO (*dello scarto*)

1. Inizializziamo la *"lista vuota"* $\mathcal{B} = \{\}$ (nel linguaggio C sarebbe un vettore/array, in Python una lista)
2. Iterare tutti gli elementi di $(v_1, \ldots, v_k)$ (equiv. `for v in V`)
    1. Consideriamo v_1 di: se $v_1 = 0$, allora passiamo al prossimo; altrimenti aggiungo v_1 a $\mathcal{B}$.
       ATTENZIONE! Per 0 ovviamente si intende il *vettore nullo* di V.
    2. Consideriamo v_2: se $v_2 = 0$ oppure $v_2 \in \operatorname{span}(\mathcal{B})$, allora procedere al prossimo; altrimenti aggiungo questo a $\mathcal{B}$.
    3. Ripetere fino a v_k.
3. Alla fine otteniamo una lista che è sicuramente contenuto in $(v_1, \ldots, v_k)$ che si può dimostrare essere base di V (*omessa, anche se semplice da dimostrare*).

PSEUDOCODICE (*quasi-Python*)

PYTHON

```python
def TrovaBase(vettore_nullo, sistema_di_generatori):
        B = []
        for v in sistema_di_generatori:
                if v == vettore_nullo or v in span(B):
                        continue
                else:
                        B.append(v)
                # Alternativamente si può solo negare la
condizione e scrivere
                if v != vettore_nullo and v not in span(B):
                        B.append(v)
        return B
```

2. Teorema del completamento

Ora consideriamo un teorema *"speculare"* a parte, ovvero a partire da un insieme di *vettori linearmente indipendenti* possiamo avere una *base* aggiungendo degli elementi (o anche nessuno).

#Teorema

Teorema 2.1. (Teorema 2.1. (Teorema del completamento/estensione).).

Sia V un *K-spazio vettoriale*, *finitamente generato*, siano $\{v_1, \dots, v_p\}$ elementi di V *linearmente indipendenti*.
Allora esiste una base $\mathcal{B}$ di V tale che

$$\{v_1, \dots, v_p\} \subseteq \mathcal{B}$$

in parole gli elementi $\{v_1, \dots, v_p\}$ possono essere *"completati"* per formare una base.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *teorema di estensione/completamento* (Teorema 2.1. (Teorema del completamento/estensione))
Nota: anche qui diamo semplicemente un'idea della dimostrazione.
Dato che V è *finitamente generato*, esiste un insieme di vettori di V $\{w_1, \dots, w_r\}$ che è *sistema di generatori* per V.
Allora se considero $\{v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_r\}$, vedo che anche questo è un

sistema di generatori per V. Infatti aggiungendo qualsiasi vettore $v \in V$ ad un sistema di generatori, questo rimane comunque un sistema di generatori.
A quest'ultimo applico *l'algoritmo dello scarto*, ottenendo una base $\mathcal{B}$ di V, in quanto per come è fatto l'algoritmo *"scarto"* i vettori *linearmente dipendenti*.

Connessione tra base e indipendenza lineare

#Osservazione

Osservazione 2.1. (enti minimali e massimali)

Da questi due teoremi osserviamo una relazione tra il concetto di *base* (Definizione di Base), *indipendenza lineare* (Dipendenza e Indipendenza Lineare) e *sistema di generatori* (Combinazione Lineare).
Da un lato abbiamo una *base* come un *sistema di generatori "minimale"*, ovvero che contiene un numero *minimo* di vettori; oppure possiamo equivalentemente caratterizzare una *base* come un *insieme di vettori linearmente dipendenti "massimale"*, ovvero che può essere *estesa*.

3. Teorema sulla cardinalità delle basi

Ora enunciamo un teorema importante che ci permetterà di definire la *dimensione* (Definizione 1 (Definizione 1.1. (dimensione di un spazio vettoriale))) di un spazio vettoriale.

Lemma di Steinitz

#Lemma

Lemma (Lemma 3.1. (di Steinitz).).

Sia V un *K-spazio vettoriale*, *finitamente generato*, sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una *base* di V.
Allora $\forall k > n$ e per ogni scelta di vettori $\{w_1, \dots, w_k\} \subseteq V$ vale che $\{w_1, \dots, w_k\}$ sono *linearmente dipendenti*.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *lemma di Steinitz* (Lemma 1 (Lemma 3.1. (di Steinitz).))
Per ipotesi vale che gli elementi $w_1, \dots, w_k$ sono elementi di V (dunque esprimibili come combinazione lineari della base), ovvero:

$$
\begin{cases}
w_1 = c_{11}v_1 + \ldots + c_{n1}v_n \\
\vdots \\
w_k = c_{1k}v_1 + \ldots + c_{nk}v_n
\end{cases}
$$

Ora consideriamo le *coordinate* di ogni vettore w_i esprimibile come

$$
\begin{pmatrix} c_{1i} \\ \vdots \\ c_{ni} \end{pmatrix}
$$

Adesso consideriamo la *combinazione lineare* delle coordinate di w_i, ovvero

$$
a_1 \begin{pmatrix} c_{11} \\ \vdots \\ c_{n1} \end{pmatrix} + \ldots + a_k \begin{pmatrix} c_{1k} \\ \vdots \\ c_{nk} \end{pmatrix}
$$

Ora consideriamo il *sistema lineare omogeneo* del tipo

$$
\begin{pmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \ldots & c_{nk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}
$$

di cui possiamo dimostrare che è *compatibile* con una *una soluzione* non (tutta) nulla. ■

#Osservazione

Osservazione 3.1. (giustificazione dell'ultimo passaggio)

Osserviamo che la matrice dei *coefficienti*

$$
\begin{pmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \ldots & c_{nk} \end{pmatrix}
$$

per ipotesi ha $k > n$, ovvero è più *"lunga"* orizzontalmente. Quindi per *"accuratezza"* la scriviamo come

$$
\begin{pmatrix} c_{11} & \ldots & \ldots & c_{1k} \\ \vdots & & & \vdots \\ c_{n1} & \ldots & \ldots & c_{nk} \end{pmatrix}
$$

quindi gradinizzandola con Gauß (Algoritmo di Gauß) abbiamo dei *"gradini"* più lunghi di un elemento. Allora ho più *"parametri liberi"* non-nulli, determinando così *soluzioni non nulle*.

Teorema principale

#Teorema

Teorema (Teorema 3.1. (sulla cardinalità delle basi)).

Sia V un *K-spazio vettoriale*, *finitamente generato*, siano $\{v_1, \dots, v_n\}$ e $\{w_1, \dots, w_m\}$ due *basi* di V.
Allora $n = m$; ovvero le due basi hanno lo stesso *numero di elementi* (alt. *"cardinalità"*).

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *teorema 3.1.* (Teorema 2 (Teorema 3.1. (sulla cardinalità delle basi)))
Per il *lemma di Steinitz* (Lemma 1 (Lemma 3.1. (di Steinitz).)), abbiamo che questi due insiemi di vettori per essere *basi* (ovvero *linearmente indipendenti* e *sistemi di generatori*), deve valere

$$m \leq n \land n \leq m \implies m = n$$

C. LA TEORIA DEL DETERMINANTE

C1. Invertire matrici

Invertire Matrici

Metodi per invertire matrici.

---

0. Preambolo

Nella *proposizione 3.1.* sul rango (Teoremi su Rango > ^4dbbdd) abbiamo semplicemente dimostrato *l'esistenza* di B (A^{-1}): ma siamo avari di conoscenza e vogliamo sapere tutto, otteniamo dunque un *algoritmo* per determinare B.

1. Manipolazione della matrice con le O.E.

Quindi *"procediamo"* con la dimostrazione *costruttiva* di *proposizione 3.1.* (Teoremi su Rango > ^4dbbdd).
Abbiamo appena visto che per calcolare A^{-1} dobbiamo risolvere *tutti* i sistemi lineari

$$A \cdot B^{(i)} = e_i$$

Quindi cerchiamo di risolverli *tutti* in un singolo colpo considerando la matrice $(A|\mathbb{1}_n)$.
Notiamo che

$$A \text{ invertibile} \implies \text{rg}(A) = n \implies \text{rg}(\tilde{A}) = n$$

dove $\tilde{A}$ rappresenta la matrice A gradinizzata mediante l'algoritmo di Gauß.
Quindi abbiamo una matrice del tipo

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & * & * & \dots & * \\ 0 & 1 & * & \dots & * \\ \vdots & & \ddots & \dots & * \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Notiamo che mediante le operazioni elementari *O.E.* possiamo *"annullare"* la colonna n-esima facendo rimanere solo l'elemento $\tilde{A}_{nn} = 1$.
Ovvero

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & * & * & \dots & * \\ 0 & 1 & * & \dots & * \\ \vdots & & \ddots & \dots & * \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * & \dots & 0 \\ 0 & 1 & * & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Ripetendo *a ritroso* da n fino al primo elemento, portiamo $\tilde{A}$ nella forma della matrice identità $\mathbb{1}_n$.
Quindi applicando queste operazioni a $(A|\mathbb{1}_n)$ otteniamo una matrice del tipo $(\mathbb{1}_n|B)$ con B una certa matrice $M_n(K)$.
Ora, la matrice di *partenza* codificava i sistemi $Ax = e_i$, le cui soluzioni sono le colonne dell'inversa A^{-1}, ricordando che le *O.E.* non cambiano le soluzioni in

quanto queste portano a sistemi lineari equivalenti.
L'ultima matrice codifica i *sistemi lineari* del tipo $\mathbb{1}_n x = B^{(i)}$, le *soluzioni* di questo ultimo sistema sono le *colonne* della matrice inversa A^{-1}, ovvero di B, il che ci mostra

$$B = A^{-1}$$

Esempio

#Esempio

Esempio 1.1. Calcolo dell'inversa di una matrice

Allora vediamo di calcolare l'inversa di una matrice; sia dunque

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

e vogliamo calcolare l'inversa A^{-1}.
Allora con l'algoritmo appena descritto consideriamo la matrice completa

$$(A|\mathbb{1}_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & | & 1 & 0 \\ 5 & 3 & | & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Effettuando delle operazioni su questa matrice, in particolare la *gradinizzazione* mediante l'Algoritmo di Gauß e dopodiché delle operazioni elementari, abbiamo la matrice

$$(\mathbb{1}_2|A^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 3 & 1 \\ 0 & 1 & | & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Allora la matrice inversa è

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Metodo dei cofattori (cenno)

OSS 2.1. Dall'*esempio 1.1.* (^a51ef6) noto che la matrice inversa di A è esattamente lo stesso con dei numeri e segni scambiati.
Quindi voglio codificare con un *singolo numero* l'invertibilità di una matrice quadrata, che definiremo come il *determinante* (Determinante).
Consideriamo ad esempio il caso per le matrici quadrate $M_2(K)$.

Siano quindi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

e

$$B = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Svolgendo la moltiplicazione righe per colonne (Operazioni particolari con matrici > ^eecbc9), otteniamo

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & -a_{11}a_{12} + a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} - a_{21}a_{22} & -a_{21}a_{12} + a_{11}a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & \\ 0 & a_{11}a_{2}$$

Notiamo che gli elementi $(AB)_{11}$ e $(AB)_{22}$ hanno lo stesso numero $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$: dunque da qui abbiamo due risultati:

1. A invertibile se e solo se $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$
2. se A invertibile, allora

$$A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

3. Metodo dei cofattori (definizione rigorosa)

Per vedere il *metodo dei cofattori*, andare alla pagina Cofattore di una matrice.

Proposizione 3.1.

Sia $A \in M_n(K)$, allora

$$A \cdot {}^t(\text{cof } A) = \det A \cdot \mathbb{1}_n$$

(questa vale *sempre*!)
In particolare set $\det A = 0$ vale che

$$A^{-1} = \frac{{}^t\text{cof}(A)}{\det A}$$

C2. Determinanti

Determinante

Definizione di determinante per matrici quadre 2×2 (cenno); cenno al metodo dei cofattori; definizione per ricorrenza del determinante di una matrice quadra di qualsiasi dimensione; calcolo del determinante di matrici triangolari superiori; regola di Sarrus (definizione di matrici quadre 3×3)

---

1. Prima definizione (per matrici 2x2)

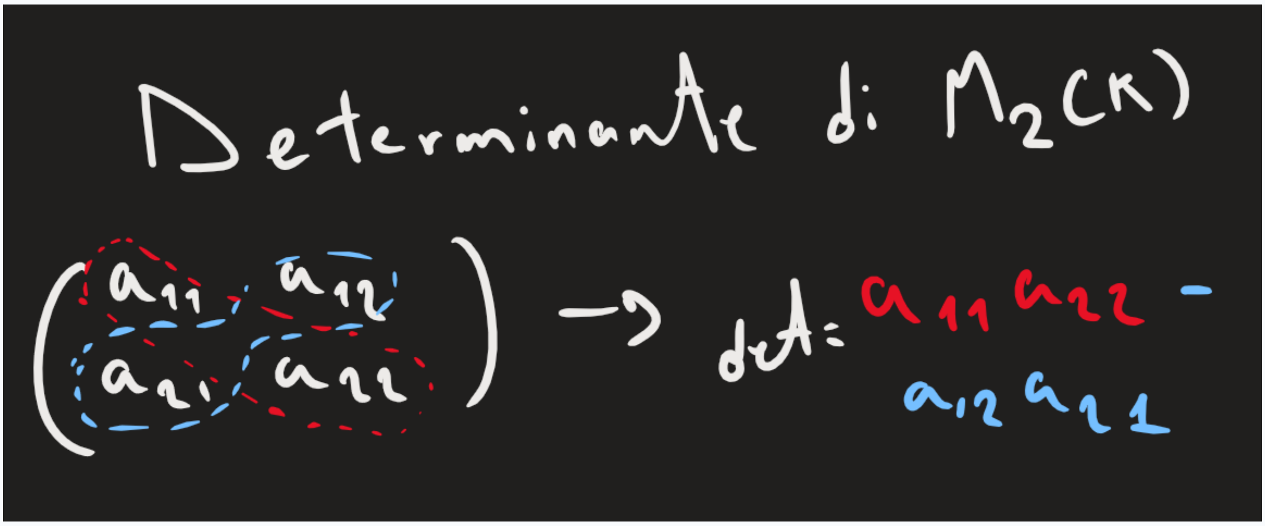
#Definizione

Definizione (Definizione 1.1. (determinante della matrice 2×2)).

Sia $A \in M_2(K)$.
Definisco il *determinante* di A come lo scalare in K determinato dalla formula

$$\det A = a_{11}a22 - a_{12}a_{21} \in K$$

TRUCCO. Per ricordare questa definizione possiamo fare una sorta di *"grafico"* per aiutarci, in cui disegniamo la matrice e segniamo la *diagonale principale* in rosso e l'*"anti diagonale"* in blu: poi sottraiamo la parte rossa con quella blu.



Primi enunciati sul determinante

Quanto abbiamo visto in Invertire Matrici > ^b56a11, questo ci permette di esporre il seguente enunciato:

#Proposizione

Proposizione 1.1.1. (invertibilità di una matrice)

Sia $M_2(K)$, allora

$$A \text{ invertibile} \iff \operatorname{rg}(A) = 2 \iff \det(A) = 2$$

In tal caso

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

#Esempio

Riprendiamo l'*esempio 1.1.* da Invertire Matrici > ^a51ef6:

Esempio 1.1.1. (esempio 1.1. da "Invertire Matrici")

Sia

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

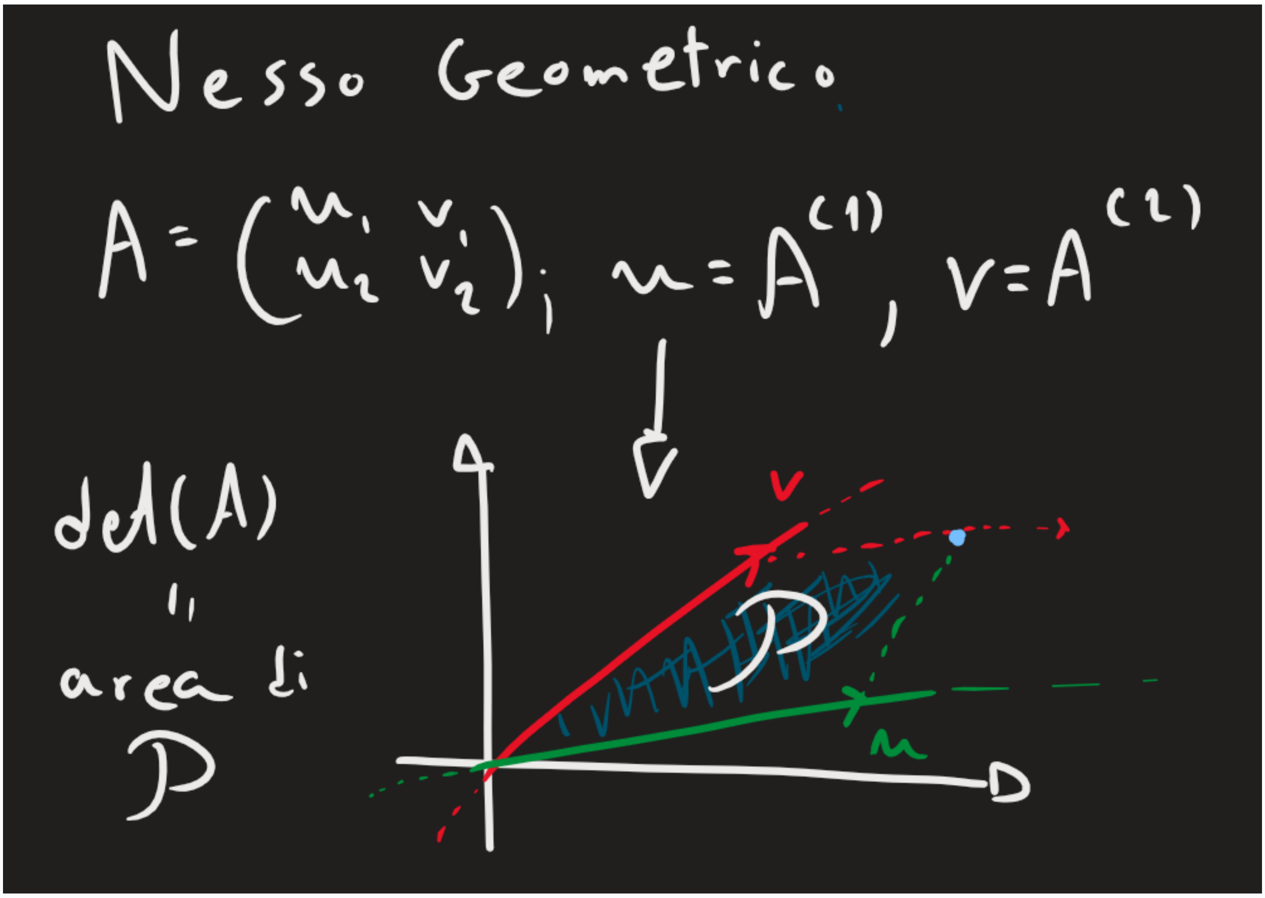
Allora

$$\det A = 6 - 5 = 1 \neq 0 \implies A^{-1} \text{ invertibile}$$

Pertanto

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

OSS 1.1.1. (*Collegamento geometrico*) Se consideriamo le colonne di $A \in M_2(K)$ come *due vettori colonna* che vivono in K^2, poi se supponiamo $a_{ij} > 0$, allora possiamo rappresentare i vettori sul piano cartesiano π. Si può verificare che se $\mathcal{P}$ è il parallelogrammo determinato da questi due vettori colonna, allora il *determinante* della matrice A è proprio l'*area* di questo parallelogrammo.



2. Definizione di determinante per ricorsione

#Definizione

Definizione (Definizione 2.1. (determinante per lo sviluppo lungo la prima colonna)).

Sia $A \in M_n(K)$.
Definisco il *determinante di* A per *ricorsione* come il seguente:

- Se $n = 1$: allora $A = a_{11} \implies \det(A) = A_{11}$
- Se $n > 1$: allora

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \cdot a_{i1} \cdot \det(A_{i1})$$

dove ci ricordiamo che A_{i1} rappresenta il *minore* della matrice A (Matrice)

OSS 2.1. Benché questa definizione di *determinante* sia completamente accettabile, percepiamo che rimane comunque *"artificiale"*: scegliamo proprio di svilupparla lungo la *prima* colonna.
Infatti con lo *sviluppo di Laplace del determinante* (Teoremi sul determinante) vedremo che è possibile definire il *determinante* con lo stesso algoritmo,

scegliendo tuttavia di svilupparla lungo un'altra colonna o anche secondo una riga.
Tuttavia dobbiamo aspettare prima di sviluppare dei teoremi sui determinanti per poter definire bene lo *sviluppo di Laplace*.

#Esempio

Esempio 2.1. (determinante di matrice 2×2)

Con questa definizione si può *"ricavare"* la definizione del determinante per una matrice che vive in $M_2(K)$; infatti

$$\det(A \in M_2(K)) = \det(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}) = (-1)^{1+1} a_{11} \det(A_{11}) + (-1)^{2+1}$$
$$= a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

#Esempio

Esempio 2.2. (esempio numerico del determinante)

Sia $A \in M_3(K)$, in particolare

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Svolgendo i calcoli necessari viene fuori

$$\det A = -6$$

La *"dimostrazione"* (che in realtà è solo un calcolo) di questo è lasciato da svolgere al lettore.

Calcolo del determinante di una matrice triangolare superiore

#Proposizione

Proposizione 2.1.1. (Determinante di una matrice triangolare superiore)

Se $A \in M_n(K)$ è una *matrice triangolare superiore* (Definizione 6 (Definizione 2.3. (le matrici triangolari superiori))) (quindi

$A \in T_n(K) \subseteq M_n(K)$), ovvero del tipo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & * & * & \dots & * \\ 0 & a_{22} & * & \dots & * \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Allora si ha

$$\det(A) = \prod_{1 \leq i \leq n} a_{ii} = a_{11} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

in parole *"il determinante di una matrice triangolare superiore è la produttoria degli elementi della diagonale principale".*

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE di *Proposizione 2.1.1.* (^0628b1)
Per induzione su $\mathbb{N}$ (Assiomi di Peano, il principio di induzione > ^76b850) dimostriamo che vale la proposizione per ogni $M_n(K)$.

- Caso $n = 1$:

$$A \in T_1(K) \implies A = (a_{11}) \implies \det A = a_{11} \text{ OK}$$

- Passo induttivo $P(n-1) \implies P(n)$:
  Supponendo che valga la proposizione per le matrici M_{n-1}, allora dimostriamo che valga anche per M_n.
  Allora per lo *sviluppo di determinante lungo la prima colonna* (Definizione 2 (Definizione 2.1. (determinante per lo sviluppo lungo la prima colonna))), abbiamo

$$\det A = a_{11} \det A_{11} + 0 \cdot \ldots + 0 \cdot \ldots + \ldots + 0$$

  Allora il gioco è fatto perché l'unico termine da *"risolvere"* è A_{11}, che è anch'essa una matrice superiore triangolare e vive in $M_{n-1}(K)$ (in quanto *"togliamo"* una riga e una colonna dalla matrice originaria). Pertanto per ipotesi induttiva $\det A_{11} = a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$.
  Allora

$$\det A = a_{11} \cdot (a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}) = \prod_{1 \leq i \leq n} a_{nn} \text{ OK. } \blacksquare$$

3. Regola di Sarrus (per matrici 3x3)

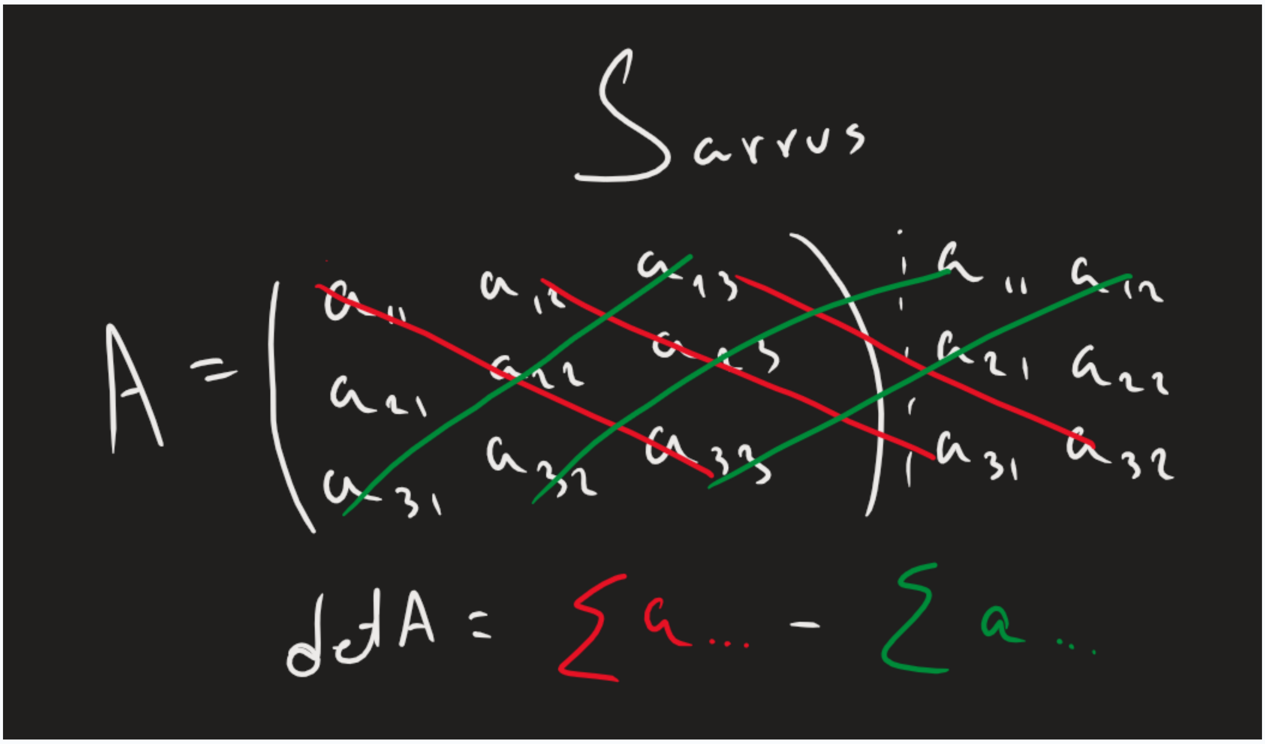
#Definizione

Teorema (Definizione 3.1. (determinante di una matrice 3×3 secondo la regola di Sarrus)).

Sia $A \in M_3(K)$,
allora vale che

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{32}a_{23}a_{11} + a$$

TRUCCO. Ovviamente questa regola è utile solo se la visualizziamo *graficamente*; ciò consiste in prendere la matrice A, poi piazzare le prime due colonne $A^{(1)}$ e $A^{(2)}$ a destra della matrice, poi di segnare le tre diagonali principali a partire da quella principali, le *anti diagonali* e infine di sommare le diagonali principali poi di sottrarre il risultato con le anti diagonali.



Esercizio 3.1.

Si lascia al lettore di determinare il $\det(A)$ per

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

mediante la *regola di Sarrus* per esercizio.

C3. Teoremi sui determinanti

Teoremi sul determinante

Teoremi sul determinante: prime proprietà (multilinearità, alternanza/antisimmetria, normalizzazione); teorema di caratterizzazione del determinante; corollari vari; teorema di caratterizzazione delle matrici quadrate di rango massimo; sviluppo di Laplace del determinante; teorema di Binet.

---

1. Le tre proprietà D1, D2, D3

#Proposizione

💬 Proposizione (Proposizione 1.1. (Le proprietà del determinante D)).

Il *determinante* (Definizione 2 (Definizione 2.1. (determinante per lo sviluppo lungo la prima colonna))) gode delle seguenti proprietà:

- D1. (*multilinearità*)
  Sia $A \in M_n(K)$, supponendo che $A_{(i)} = R_1 + R_2$ (ove $R_1, R_2 \in K^n$) allora

$$\det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ R_1 + R_2 \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ R_1 \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ R_2 \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}$$

  Inoltre supponendo invece $A_{(i)} = cR$ per un $c \in K$, $R \in K^n$ allora

$$\det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ cR \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} = c \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ R \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}$$

Analogamente la proprietà della *multilinearità* vale anche quando consideriamo le *colonne* $A^{(i)}$.

- D2. (*alternanza / antisimmetria*)
  Nota: per quanto riguarda questa proprietà bisogna distinguere certi casi per certi campi, ma è irrilevante ai fini nostri.
  Scambiando due righe o colonne di una matrice di posto il determinante cambia di segno, ovvero: siano $i, j \in \{1, \dots, n\}$, allora

$$\det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(j)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(j)} \\ \vdots \\ A_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}$$

  Da questo discende che svolgendo k scambi di righe/colonne dobbiamo moltiplicare il determinante per $(-1)^k$.
- D3. (*normalizzazione*)
  Vale che

$$\det \mathbb{1}_n = 1$$

Possiamo usare queste proprietà come dei *"trucchetti"* per calcolare certi determinanti.
#Esempio

Esempio 1.1. (esempio di applicazione "concreta")

Sia $A \in M_n(K)$, ove in particolare

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

allora

$$
\begin{aligned}
\det A &= 2\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 2\\ 3 & 3 & 1\end{pmatrix}\\
&= 4\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ 3 & 3 & 1\end{pmatrix}\\
&= 4(\dots)\\
&= -8
\end{aligned}
$$

2. Teorema di caratterizzazione del determinante

#Teorema

Teorema (Teorema 2.1. (di caratterizzazione del determinante)).

Considerando il *determinante* come funzione, $\det$ è l'unica funzione (*applicazione lineare*)

$$\det : M_n(K) \longrightarrow K$$

che soddisfa le proprietà *D1, D2, D3* appena elencate. (Proposizione 1 (Proposizione 1.1. (Le proprietà del determinante D)))

La dimostrazione è stata omessa.

3. Corollari dei paragrafi 1,2

#Corollario

Corollario (Corollario 3.1. (condizioni di determinante nullo)).

Sia $A \in M_n(K)$.
Per avere il determinante $\det A$ *nullo* (uguale a 0) si deve verificare una delle due proprietà (o entrambe):
i. *Se la matrice ha due righe uguali*

$$\det A \overset{\text{D2}}{=} -\det A \iff \det A = 0$$

ii. *Se la matrice ha almeno una riga/colonna nulla*
Infatti

$$\det A = k \det A, k \in K \iff \det A = 0$$

#Corollario

Corollario (Corollario 3.2. (effetti sul determinante degli OE)).

Sia $A \in M_n(K)$, siano *O.E.* le cosiddette *operazioni elementari* (Algoritmo di Gauß > ^8a7c5e, Algoritmo di Gauß > ^1f10d6, Definizione 2 (Definizione 2.1. (le operazioni elementari))), allora se $\tilde{A}$ è una matrice ottenuta mediante le *O.E.*, allora valgono le seguenti:
i. Se $\tilde{A}$ è ottenuta mediante una *OE1*, allora

$$\det \tilde{A} = \det A$$

ii. Se $\tilde{A}$ è ottenuta mediante una *OE2* e se $k \in K$ è lo scalare per cui si moltiplica la riga/colonna, allora

$$\det \tilde{A} = k \det A$$

iii. Se $\tilde{A}$ è ottenuta con una *OE3* allora

$$\det \tilde{A} = \det A$$

DIMOSTRAZIONE del punto iii. del *corollario 3.2.* (Corollario 4 (Corollario 3.2. (effetti sul determinante degli OE)))
Se consideriamo

$$A = \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}$$

e

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ A_{(i)} + cA_{(j)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}$$

Allora

$$\det \tilde{A} = \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i)} + cA_{(j)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ cA_{(j)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}$$

$$= \det A + c \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(j)} \\ \vdots \\ A_{(j)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}$$

$$= \det A + 0 = \det A$$

#Corollario

Corollario (Corollario 3.3. (effetti dell'algoritmo di Gauß sul determinante)).

Sia $A \in M_n(K)$, sia $\tilde{A}$ la matrice *gradinizzata* a scala mediante Gauß (Algoritmo di Gauß), allora

$$\det \tilde{A} = \lambda \det A$$

per un certo $\lambda \in K \diagdown \{0\}$.
In particolare

$$\det A = 0 \iff \det \tilde{A} = 0$$

Inoltre se gradinizzandola *non* effettuiamo la *normalizzazione* degli elementi pivot, allora

$$\det \tilde{A} = (-1)^k \det A$$

dove $k \in \mathbb{N}$ rappresenta il numero di scambi di righe effettuate.

4. Teorema di caratterizzazione di matrici invertibili

Con questi strumenti appena sviluppati siamo pronti per dimostrare il risultato, secondo il quale il determinante di una matrice è in grado di caratterizzarne l'invertibilità: ovvero il *teorema di caratterizzazione delle matrici quadrate di rango massimo*.

#Teorema

Teorema (Teorema 4.1. (di caratterizzazione delle matrici quadrate di rango massimo)).

Sia $A \in M_n(K)$; allora vale che

$$\boxed{\operatorname{rg}(A) < n \iff \det(A) = 0}$$

equivalentemente

$$\operatorname{rg}(A) = n \iff \det(A) \neq 0$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *teorema 4.1.* (Teorema 6 (Teorema 4.1. (di caratterizzazione delle matrici quadrate di rango massimo)))

Questo è un teorema del tipo *se e solo se*, quindi dimostriamo prima la prima implicazione:

" $\implies$ ": Sia $\operatorname{rg}(A) < n$, sia $\tilde{A}$ la matrice *gradinizzata* mediante Gauß; allora $\tilde{A}$ ha almeno una *riga nulla*, pertanto $\det \tilde{A} = 0 \implies \det A = 0$

" $\impliedby$ ": Sia $\det A = 0$, sia $\tilde{A}$ la matrice *gradinizzata* mediante Gauß , allora $\det \tilde{A} = 0$.

Però $\tilde{A}$ è *gradinizzata (a scala)*, dunque *triangolare superiore*: pertanto $\det \tilde{A}$ è determinata dalla produttoria degli elementi della sua diagonale principale composta da $a_{11}, \ldots, a_{nn}$; se questa produttoria è 0, allora almeno un $a_{ii} \in \tilde{A}$ per $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ è *nullo*.

Quindi dev'esserci *almeno* un gradino più *"lungo"* di 1, il che implica per la *proposizione 1.1.* (Teoremi su Rango > ^9290df)

$$\operatorname{rg}(\tilde{A}) = \boxed{\operatorname{rg}(A) < n}$$

#Corollario

Ora arriviamo al punto cruciale in cui colleghiamo *l'invertibilità di una matrice* con la sua *determinante*:

Corollario (Corollario 4.1. (di caratterizzazione delle matrici invertibili)).

Sia $A \in M_n(K)$, allora

$$\boxed{A \text{ invertibile} \iff \det A \neq 0}$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *corollario 4.1.* (Corollario 7 (Corollario 4.1. (di caratterizzazione delle matrici invertibili)))

La dimostrazione è banalissima, basta tener conto della *proposizione 3.1.* sul rango (Teoremi su Rango > ^4dbbdd). Infatti

$$A \text{ invertibile} \iff \text{rg}(A) = n \iff \det A \neq 0 \blacksquare$$

5. Sviluppo di Laplace del determinante

#Teorema

Teorema (Teorema 5.1. (sviluppo di Laplace del determinante)).

Sia $A \in M_n(K)$, e vogliamo calcolare $\det A$: possiamo farlo in due modi

- Sviluppo lungo la colonna k-esima
  Sia $1 \leq k \leq n$ l'indice di colonna, allora

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} \cdot a_{ik} \cdot \det(A_{ik})$$

- Sviluppo lungo la riga l-esima
  Sia $1 \leq l \leq n$ l'indice di riga, allora

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{l+j} \cdot a_{lj} \cdot \det(A_{lj})$$

OSS 5.1. Per capire quali *"segni"* prendere con lo *sviluppo di Laplace* è possibile disegnare una matrice dove i segni si alternano (e partendo con l'elemento $1, 1$-esimo positivo): ovvero

$$\pm_n = \begin{pmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

Infatti è possibile pensare questa matrice in $K = \{0, 1\} = \{-, +\}$, dove i caselli neri (bianchi) rappresentano il segno positivo e i caselli bianchi (neri) rappresentano il segno negativo.

#Esempio

Esempio-esercizio 5.1.

Per esercizio si chiede di calcolare $\det A$ usando lo *sviluppo di Laplace* lungo la *seconda colonna* e lungo la *terza riga*, ove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinante delle matrici trasposte

#Corollario

Corollario (Corollario 5.1. (determinante della trasposta)).

Sia $A \in M_n(K)$ allora

$$\det A = \det {}^t A$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *corollario 5.1.* (Corollario 9 (Corollario 5.1. (determinante della trasposta)))

Per definizione $\det {}^t A$ è lo *sviluppo di Laplace* lungo la *prima colonna di* ${}^t A$, che è equivalente a dire "lo *sviluppo di Laplace* lungo la *prima riga* di A", che è uguale a $\det A$.

6. Teorema di Binet

#Teorema

Teorema (Teorema 6.1. (di Binet)).

Sia $A, B \in M_n(K)$, allora

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

La dimostrazione è stata omessa.

Determinante della matrice inversa

#Corollario

Corollario (Corollario 6.1. (determinante dell'inversa)).

Sia $A \in M_n(K)$, invertibile.
Allora

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A} = (\det A)^{-1}$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *corollario 6.1.* (Corollario 11 (Corollario 6.1. (determinante dell'inversa)))
Osserviamo che per definizione vale che

$$A \cdot A^{-1} = \mathbb{1}_n$$

Per il *teorema di Binet* (Teorema 10 (Teorema 6.1. (di Binet))) e per la proprietà *D3* (Proposizione 1 (Proposizione 1.1. (Le proprietà del determinante D))) vale che

$$\begin{aligned} \det(A \cdot A^{-1}) &= \det(\mathbb{1}_n) \\ \det A \cdot \det A^{-1} &= 1 \\ \det A^{-1} &= \frac{1}{\det A} \end{aligned}$$

C4. Cofattore di una matrice

Cofattore di una matrice

Definizione di cofattore ij-esimo di una matrice; definizione della matrice dei cofattori di A; calcolo dell'inversa mediante il cofattore

---

1. Definizione di cofattore ij-esimo

#Definizione

Definizione (Definizione 1.1. (cofattore ij-esimo di una matrice)).

Sia $A \in M_n(K)$, siano $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$.
Definisco il *cofattore ij-esimo* di A come lo scalare in K

$$(-1)^{i+j} \det(A_{ij})$$

2. Definizione della matrice dei cofattori

#Definizione

Definizione (Definizione 2.1. (matrice dei cofattori di una matrice)).

Sia $A \in M_n(K)$, allora la *matrice dei cofattori di* A è la matrice che indichiamo come

$$\operatorname{cof}(A) \in M_n(K); (\operatorname{cof}(A))_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det A_{ij}$$

#Esempio

Esercizio-esempio 2.1.

Per esercizio si calcoli i cofattori della matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Calcolo dell'inversa con il cofattore

#Proposizione

Proposizione 3.1.

Sia $A \in M_n(K)$, allora

$$A \cdot {}^t(\operatorname{cof} A) = \det A \cdot \mathbb{1}_n$$

(questa vale *sempre*!)
In particolare set $\det A = 0$ vale che

$$A^{-1} = \frac{{}^t \operatorname{cof}(A)}{\det A}$$

#Dimostrazione
DIMOSTRAZIONE della *proposizione 3.1.* (^70361d)
Calcola l'entrata di posto i, j della matrice data dal *prodotto riga per colonna* (Operazioni particolari con matrici > ^eecbc9) di $A \cdot {}^t \operatorname{cof}(A)$.

$$\begin{aligned}(A \cdot {}^t \operatorname{cof}(A))_{ij} = A_{(i)} \cdot ({}^t \operatorname{cof} A)^j &= \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot ({}^t \operatorname{cof}(A))_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{j+k} \cdot a_{ik} \cdot \det A_{jk}\end{aligned}$$

Ora succede il seguente:

- Se $i = j$, allora ho esattamente la definizione del *determinante* $\det A$ (Teorema 8 (Teorema 5.1. (sviluppo di Laplace del determinante))): quindi $(A \cdot {}^t \operatorname{cof}(A))_{ij} = \det A \iff i = j$
- Se $i \neq j$, allora avrei il determinante di una matrice con *due righe uguali*, dunque $(A \cdot {}^t \operatorname{cof}(A))_{ij} = \det A = 0 \iff i \neq j$
  Allora ho una *matrice* dove le entrare ij-esime sono composte da $\det A$, e da 0 in tutti gli altri casi: allora praticamente ho la matrice identità scalata per $\det A$. Dunque alla fine ho

$$A \cdot {}^t \operatorname{cof}(A)_{ij} = \det A \cdot \mathbb{1}_n$$

Determinare la soluzione di un sistema lineare con Cramer e cofattori

RICHIAMO (*al teorema di Cramer*)

Teorema 1 (Teorema 1.1. (di Cramer)).

Considero un sistema lineare con n equazioni ed n incognite, di forma

$$A \cdot X = b$$

Ovvero $A \in M_n(K)$.
Ora supponiamo che A sia anche *invertibile* (Matrice, **DEF 2.6.**); allora da qui discende che esiste un'*unica soluzione* S del sistema lineare ed essa è data da

$$S = A^{-1} \cdot b$$

Corollario (Corollario 3.1. (determinare soluzioni di sistemi lineari con Cramer)).

Osservando il *teorema di Cramer*, notiamo che se prima non avevamo gli strumenti per calcolare l'inversa A^{-1}, ora li abbiamo.
Quindi dalla formula determinata nella *proposizione 3.1.* (^70361d), segue che che l'i-esima entrata della soluzione S, che chiameremo s_i sarà determinata da

$$i \in \{1, \dots, n\}, s_i = \frac{\det(A^{(1)}, \dots, b, A^{(i+1)}, \dots, A^{(n)})}{\det A}$$

Applicazioni Lineari - Sommario

Tutto sulle applicazioni lineari (penultimo argomento)

A. LE PRIME DEFINIZIONI

A1. Definizione basilare

Definizione di Applicazione Lineare

Definizione base di applicazione lineare. Esempi.

---

0. Preambolo

OSS 0.a. (*Aree di indagine della matematica*) La matematica è una materia che studia principalmente due temi: da un lato lo studio di certi *determinate* entità matematiche, come le *matrici*, i *vettori*, i *sistemi lineari* e i *spazi vettoriali*.
Dall'altro lato, la matematica si occupa anche di collegare questi oggetti studiati mediante le *funzioni* (Funzioni); tra poco studieremo delle funzioni che in oggetto prendono dei *spazi vettoriali* (Spazi Vettoriali), evidenziando la loro complessità e ricchezza, dovute al fatto che i *spazi vettoriali* sono sostanzialmente degli insiemi con più restrizioni.

1. Definizione di Applicazione Lineare

#Definizione

Definizione (Definizione 1.1. (applicazione lineare da V a V primo)).

Siano V, V' due *K-spazi vettoriali* (Definizione 1 (Definizione 1.1. (spazio vettoriale sul campo K))).
Chiamo una *funzione* (Definizione 2 (Definizione 1.2. (dominio, codominio e legge))) del tipo

$$(V, V', f) \sim f : V \longrightarrow V'$$

una *applicazione lineare* se valgono due condizioni:
A1. (*Additività*) *"L'immagine della somma è la somma delle immagini"*

$$\forall v_1, v_2 \in V, f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$$

A2. (*Omogeneità*) *"L'immagine dello scalamento è lo scalamento dell'immagine"*

$$\forall v \in V, f(\lambda v) = \lambda f(v)$$

#Osservazione

OSS 1.1. (*Operazioni stesse ma diverse*) Notiamo che nelle proprietà A1. e A2. (additività e omogeneità) abbiamo l'associazione tra due operazioni diverse; a sinistra abbiamo la somma (*scalamento*) definita in V, d'altro lato abbiamo una *"altra"* somma (*scalamento*) definita in V'. Per essere più precisi sarebbe preferibile scrivere

$$f(v_1 + v_2) = f(v_1) \oplus f(v_2)$$

e

$$f(\lambda \cdot v) = \lambda \odot f(v)$$

dove $+, \cdot$ sono definite in V e invece $\oplus, \odot$ in V'.

2. Esempi di Applicazione Lineari

#Esempio

Esempio 1.1. (Esempio di applicazione lineare da 2D a 1D)

Sia $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione dove

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = x + 2y$$

Allora per verificare che f sia a tutti gli effetti un'*applicazione lineare*, proviamo l'additività e l'omogeneità di f.
In un colpo solo la verifichiamo scrivendo

$$
\begin{aligned}
f\left(\lambda \cdot \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right)\right) &= f\left(\begin{pmatrix} \lambda x_1 + \lambda x_2 \\ \lambda y_1 + \lambda y_2 \end{pmatrix}\right) \\
&= (\lambda x_1 + \lambda x_2) + 2(\lambda y_1 + \lambda y_2) \\
&= \lambda(x_1 + 2y_1) + \lambda(x_2 + 2y_2) \\
&= f\left(\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right) + f\left(\lambda \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}
$$

A2. Applicazioni lineari notevoli

Applicazioni Lineari Notevoli

Prime applicazioni lineari che verranno date per noti: trasformazione lineare associata ad una matrice, funzione coordinante.

---

1. Trasformazione lineare associata ad una matrice

#Definizione

Definizione (Definizione 1.1. (trasformazione lineare associata alla matrice)).

Sia $A \in M_{m,n}(K)$ una *matrice* (Definizione 1 (Definizione 1.1. (matrice $m \times n$ a coefficienti in K))).
Allora la matrice A definisce una *funzione* del tipo

$$L_A : K^n \longrightarrow K^m; v \mapsto A \cdot v$$

La *funzione* associa un vettore K^n ad un vettore $A \cdot v$ che vive in K^n; ricordiamoci che $\cdot$ rappresenta la *moltiplicazione riga per colonna* (Operazioni particolari con matrici > ^eecbc9).

#Proposizione

Proposizione 1.1. (L_A è un'applicazione lineare)

Per ogni *matrice* $A \in M_{m,n}(K)$ la funzione precedentemente definita L_A è una *applicazione lineare* (Definizione 1 (Definizione 1.1. (applicazione lineare da V a V primo))).

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE della *proposizione 1.1.*
Siano $v_1, v_2 \in K^n$. Allora sfruttando delle *proprietà* della moltiplicazione riga per colonna (Operazioni particolari con matrici > ^5cf872), otteniamo

$$\begin{aligned} L_A(v_1+v_2) &= A \cdot (v_1+v_2) \\ &= A \cdot v_1 + A \cdot v_2 \\ &= L_A(v_1) + L_A(v_2) \end{aligned}$$

Similmente, supponendo $\lambda \in K$, dimostriamo che

$$L_A(\lambda v) = A \cdot (\lambda v) = \lambda (A \cdot v) = \lambda L_A(v) \blacksquare$$

Esempio particolare

#Esempio

Esempio 1.1. (rotazione nel piano di un angolo α in senso antiorario)

Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ un *angolo* e consideriamo la matrice *"rotazione"*

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Allora l'applicazione lineare rappresentato da

$$L_{R_\alpha} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

rappresenterebbe la rotazione di un angolo α in senso *antiorario*.
Calcoliamo ad esempio

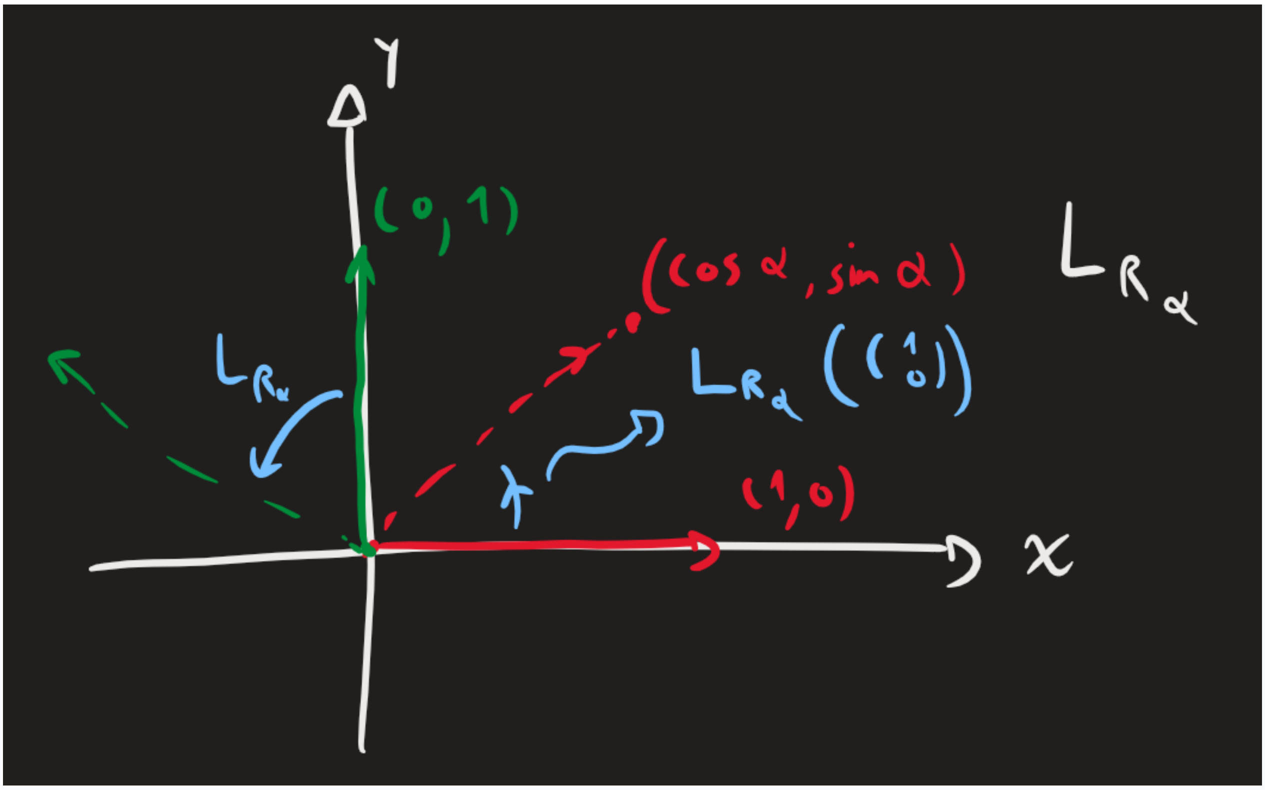
$$L_{R_\alpha}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$$

Invece per esercizio si lascia al lettore di calcolare

$$L_{R_\alpha}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})$$

(vi è dato un suggerimentino nella figura sottostante!)

GRAFICO 1.1. (*Situazione grafica*)



2. Applicazione lineare coordinante

#Definizione

Definizione (Definizione 2.1. (funzione coordinante)).

Sia V un *K-spazio vettoriale* di dimensione finita (Definizione 1 (Definizione 1.1. (dimensione di un spazio vettoriale))), suppongo $\dim V = n \in \mathbb{N}$.
Sia $\mathcal{B}$ una *base* (Definizione 1.1. (Base)).
Allora definiamo la funzione che *prende le coordinate di un vettore rispetto a* $\mathcal{B}$ in questo modo:

$$F_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow K^n$$

dove, dato un vettore $v \in V$ e applicandoci questa funzione ho il vettore K^n che contiene *tutte* le coordinate di v rispetto alla base $\mathcal{B}$ (Definizione 1.2. (Coordinate di vettore rispetto alla base)).

Infatti questa definizione è ben posta in quanto $\mathcal{B}$ è base di V, pertanto ogni vettore v è espressione *unica* dello span della *base*. Quindi

$$F_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}, v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$$

#Proposizione

Proposizione 2.1. (invertibilità della funzione coordinante)

La funzione $F_{\mathcal{B}}$ è *iniettiva* in quanto abbiamo che ogni vettore è *espressione* unica dello span della base; si può verificare che è anche suriettiva. Quindi questa applicazione lineare è biiettiva, quindi invertibile (Teorema 13 (Teorema 6.1. (condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza della funzione inversa f^{-1}))).
Allora si dice che $F_{\mathcal{B}}$ è un *isomorfismo* di *spazi vettoriali*.

3. Applicazioni lineari inverse di isomorfismi

#Esercizio

Esercizio 3.1. (inverse degli isomorfismi come spazi vettoriali)

Provare che se $f : V \longrightarrow V'$ è *biiettiva*, allora $f^{-1} : V' \longrightarrow V$ è anch'essa un'*applicazione lineare*. Quindi dimostrare che se una applicazione lineare è isomorfa, allora considerando la sua inversa si conserveranno le stesse proprietà.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE dell'*esercizio 3.1.*

1. Dimostro la *additività* di f^{-1}:
   Considero innanzitutto la composizione $f \circ f^{-1}$, che per definizione deve valere
   $$(f \circ f^{-1})(V') = V'$$
   Allora calcolo $f \circ f^{-1}$ per $v_1' + v_2'$ in due modi diversi: nella prima considerandoli *"assieme"*, nell'altra *"distinguendo"* le immagini.
   $$\begin{cases} 1.\ f(\boxed{f^{-1}(v_1' + v_2')}) = v_1' + v_2' \\ 2.\ f(f^{-1}(v_1')) + f(f^{-1}(v_2')) = v_1' + v_2' \overset{\text{AL1 di } f}{\Longrightarrow} f(\boxed{f^{-1}(v_1') + f^{-1}(v_2')} \end{cases}$$
   $$\Longrightarrow f^{-1}(v_1' + v_2') = f^{-1}(v_1') + f^{-1}(v_2')$$
2. Dimostro l'*omogeneità* di f^{-1}:
   I procedimenti sono analoghi.

$$\begin{cases} f(f^{-1}(\lambda v')) = \lambda v' \\ \lambda \cdot f(f^{-1}(v')) = f(\lambda \cdot f^{-1}(v')) = \lambda v' \end{cases}$$
$$\implies f^{-1}(\lambda v') = \lambda f^{-1}(v') \blacksquare$$

B. NUCLEO E IMMAGINE

B1. Definizione di Nucleo e Immagine

Definizione di Nucleo e immagine

Definizione di nucleo e immagine di un'applicazione lineare.

---

1. Nucleo

#Definizione

Definizione (Definizione 1.1. (nucleo di un'applicazione lineare)).

Sia $f: V \longrightarrow V'$ un'*applicazione lineare* (Definizione 1 (Definizione 1.1. (applicazione lineare da V a V primo))).
Definiamo il *nucleo* di f come il *sottoinsieme* definito da

$$\ker f = \{v \in V | f(v) = 0\}$$

Ovvero *"gli elementi del dominio tale che le loro immagini sono il vettore nullo* $0_{V'}$*"*
Quindi è immediato verificare che $\ker f \subseteq V$.

2. Immagine

#Definizione

Definizione (Definizione 2.1. (immagine di un'applicazione lineare)).

Sia $f: V \longrightarrow V'$ un'*applicazione lineare*.
Si definisce invece l'*immagine* di f come il sottoinsieme

$$\text{im } f = \{v' \in V' | \exists v \in V : f(v) = v'\}$$

Ovvero *"gli elementi del codominio che sono associati ad almeno un elemento del dominio"*.
Allora è immediato verificare che $\operatorname{im} f \subseteq V'$.

B2. Proposizioni su ker, im

Proposizioni su Nucleo e Immagine

Prime proprietà del nucleo e dell'immagine (Definizione di Nucleo e immagine) di un'applicazione lineare: ker, im sottospazi vettoriali di V e V'; f iniettiva allora ker è il più piccolo possibile, f suriettiva allora im è il codominio.

---

1. Nucleo e immagine come sottospazi vettoriali

#Proposizione

Proposizione 1.1. (nucleo e immagine sono sottospazi vettoriali)

Sia $f: V \longrightarrow V'$ un'*applicazione lineare* (Definizione 1 (Definizione 1.1. (applicazione lineare da V a V primo))).
Allora $\ker f$ è *sottospazio vettoriale* di V; $\operatorname{im} f$ è *sottospazio vettoriale* di V'.

#Dimostrazione
DIMOSTRAZIONE della *proposizione 1.1.* (^d0ed96)
Prima dimostro che $\ker f$ è *sottospazio vettoriale* di V verificando le tre proprietà dello sottospazio vettoriale (Definizione 1 (Definizione 1.1. (sottospazio vettoriale))).

1. (*elemento nullo appartiene a ker*) Considero $f(0)$ e vedo che valgono le seguenti:
$$f(0) = f(0+0) \implies f(0) = f(0) + f(0) \implies f(0) = 0$$
Allora $0 \in \ker f$.
2. (*chiusura della somma in V*) Siano per ipotesi $v_1, v_2 \in \ker f$; allora seguono che
$$f(v_1) = 0 \wedge f(v_2) = 0$$

Pertanto

$$f(v_1) + f(v_2) = 0 + 0 \implies f(v_1 + v_2) = 0 \implies v_1 + v_2 \in \ker f$$

3. (*chiusura dello scalamento in V*) Siano per ipotesi $v \in \ker f$ e $\lambda \in K$; allora segue che

$$f(v) = 0$$

Allora

$$\lambda f(v) = \lambda \cdot 0 \implies f(\lambda v) = 0 \implies \lambda v \in \ker f$$

Ora consideriamo l'immagine im.

4. (*elemento nullo appartiene all'immagine*) Abbiamo appena dimostrato che
$f(0) = 0$; pertanto $0 \in \mathrm{im}\, f$.
5. (*chiusura della somma in V'*) Siano per ipotesi $v_1', v_2' \in \mathrm{im}\, f$. Allora valgono che

$$\exists v_1, v_2 \in V : f(v_1) = v_1' \wedge f(v_2) = v_2'$$

Allora segue che

$$f(v_1) + f(v_2) = v_1' + v_2' \implies f(v_1 + v_2) = v_1' + v_2' \implies (v_1 + v_2) \in$$

6. (*chiusura dello scalamento in V'*) Sia per ipotesi $v' \in \mathrm{im}\, f$ e $\lambda \in K$. Allora vale che

$$\exists v \in V : f(v) = v'$$

Allora

$$\lambda \cdot f(v) = \lambda \cdot v' \implies f(\lambda v) = \lambda v' \implies \lambda v' \in \mathrm{im}\, f \blacksquare$$

2. Relazione tra iniettività-suriettività e nucleo-immagine

#Proposizione

Proposizione 2.1.

Sia $f : V \longrightarrow V'$ un'*applicazione lineare*. Siano $\ker f$ e $\mathrm{im}\, f$ rispettivamente il *nucleo* e l'*immagine* di f.
Allora valgono che

i. f è *iniettiva* (Definizione 8 (Definizione 3.2. (funzione iniettiva))) se e solo se $\ker f = \{0\}$ (ovvero il *nucleo* di f è il più piccolo possibile.
ii. f è *suriettiva* (Definizione 7 (Definizione 3.1. (funzione suriettiva))) se e solo se $\operatorname{im} f = V'$ (ovvero l'immagine di f coincide col codominio V').

#Dimostrazione
DIMOSTRAZIONE della *proposizione 2.1.* (^1a8f27)
Dimostriamo la i. della proposizione.

1. " $\implies$ ": Sia f *iniettiva*. Allora $f(v_1) = f(v_2) \iff v_1 = v_2$.
   Supponendo che $f(v_1) = 0$ per un v_1 qualsiasi; però $\ker$ è un *sottospazio vettoriale*, quindi $0 \in \ker f$.
   Allora $f(0) = f(v_1) \implies v_1 = 0$. Pertanto 0 è l'*unico* elemento tale che la sua immagine risulta 0.
2. " $\impliedby$ ": Sia $\ker f = \{0\}$. Allora consideriamo $v_1, v_2 \in V : f(v_1) = 0; f(v_2) = 0$. Allora

$$f(v_1) = f(v_2) \implies f(v_1) - f(v_2) = 0 \implies f(v_1 - v_2) = 0$$

   Allora $v_1 - v_2 \in \ker f$ e $0 \in \ker f$ in quanto $\ker f$ è *sottospazio vettoriale*, allora

$$f(v_1 - v_2) = f(0) \implies v_1 = v_2 \blacksquare$$

   La ii. della proposizione è quasi una *tautologia* (Tautologia), in quanto abbiamo una specie di *"parafrasi"* per il concetto della suriettività. Pertanto non è necessaria una dimostrazione formale per questa parte.

B3. Teorema di struttura per le applicazioni lineari

Teorema di struttura per Applicazioni Lineari

Enunciato, dimostrazione ed esempio del teorema di struttura per le applicazioni lineari.

---

1. Enunciato

Ora vediamo come un'*applicazione lineare* è completamente determinata da dove *"finiscono"* le basi.

#Teorema

Teorema (Teorema 1.1. (di struttura per le applicazioni lineari)).

Siano V, V' due *spazi vettoriali* di K, finitamente generati (Definizione 1 (Definizione 1.1. (dimensione di un spazio vettoriale))).
ATTENZIONE! Ciò non deve necessariamente significare che le loro dimensioni devono coincidere.
Allora prendendo $\mathcal{B}$ una base del dominio del tipo

$$\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$$

Ora siano $v_1, \ldots, v_n'$ dei vettori *qualsiasi* in V'.
Allora *esiste* ed è *unica* un'applicazione lineare (Definizione 1 (Definizione 1.1. (applicazione lineare da V a V primo))) $f : V \longrightarrow V'$ che soddisfa le seguente condizione: $f(v_i) = v_i'$

$$\boxed{\exists f : V \longrightarrow V' | \forall i \in \{1, \ldots, n\}, f(v_i) = v_i'}$$

2. Dimostrazione

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *teorema 1.1.* (Teorema 1 (Teorema 1.1. (di struttura per le applicazioni lineari)))
Per questa dimostrazione usiamo una tecnica *particolare*: questa consiste prima nel *supporre* l'esistenza di tale funzione, di dimostrarne l'*unicità*, ottenendo alla fine così degli *"indizi"* per costruire la funzione supposta.
Sia $v \in V$; per ipotesi $\mathcal{B}$ è una *base* (Definizione 1.1. (Base)) di V, quindi per definizione abbiamo che $v \in \text{span}(\mathcal{B})$. Allora si scrive in *maniera unica* (Teorema 1.1. (Caratterizzazione delle basi)) che

$$v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$$

Allora

$$f(v) = f(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n)$$

Per le proprietà di f sappiamo che

$$f(v) = \lambda_1 f(v_1) + \ldots + \lambda_n f(v_n)$$

Per ipotesi abbiamo supposto che $f(v) = v'$; pertanto

$$f(v) = \lambda_1 v_1' + \ldots \lambda_n v_n'$$

Quindi l'immagine di $v \in V$ è *univocamente* determinata dalle proprietà supposte vere per f.
Pertanto sappiamo che se questa f esiste, allora questa è *unica*.
Ora *"troviamo"* l'applicazione lineare f, che in realtà è già stata trovata: quindi usiamo l'*"indizio"* lasciato sopra definendo $f(v)$ nel modo seguente e dimostrando che questa è effettivamente un'applicazione lineare e soddisfa la condizione imposta nell'enunciato.

$$f(v) := \lambda_1 v_1' + \ldots + \lambda_n v_n'$$

1. (*l'immagine di* $f(v_i)$ *coincide con* v_i') Qui basta imporre $(\lambda_1, \ldots, \lambda_i, \ldots, \lambda_n) = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$; allora

$$f(v_i) = 0 + \ldots + v_i' + \ldots + 0 = v_i' \text{ OK}$$

2. (f *è additiva*) Siano $u, v \in V$. Allora voglio dimostrare $f(u) + f(v) = f(u+v)$
.
Dato che $\mathcal{B}$ è base di V, allora u, v sono *espressioni uniche* di elementi della base come combinazione lineare.
Allora

$$\begin{aligned} u &= \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_n v_n \\ v &= \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n \\ u + v &= (\mu_1 + \lambda_1) v_1 + \ldots + (\mu_n \lambda_n) v_n \end{aligned}$$

Ora calcoliamo $f(u)$ e $f(v)$ separatamente

$$\begin{aligned} &f(u) = \mu_1 v_1' + \ldots + \mu_n v_n'; f(v) = \lambda_1 v_1' + \ldots + \lambda_n v_n' \\ &\implies f(u) + f(v) = (\mu_1 + \lambda_1) v_1' + \ldots + (\mu_n + \lambda_n) v_n' \end{aligned}$$

Invece calcoliamo $f(u+v)$ e scopriamo che

$$\boxed{f(u+v)} = (\mu_1 + \lambda_1) v_1' + \ldots + (\mu_n + \lambda_n) v_n' = \boxed{f(u) + (v)}$$

3. (f è *omogenea*) Analogamente si dimostra che f è *omogenea*. Si lascia di dimostrare questo al lettore per esercizio. ■

3. Conseguenza

OSS 3.1. (*Le immagini di un sistema di generatore sono un sistema di generatori per l'immagine di* f) Consideriamo $f: V \longrightarrow V'$ un'applicazione lineare tra spazi vettoriali finitamente generati.
Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base di V: allora se considero le loro immagini $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ allora vedo che questi sono un *sistema di generatori* per $\operatorname{im} f$

(Definizione 2 (Definizione 2.1. (immagine di un'applicazione lineare))).
Infatti se $v' \in \operatorname{im} f$ allora $\exists v \in V : f(v) = v'$
Quindi, dato che $\mathcal{B}$ è base di V, possiamo scrivere

$$f(v) = f(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n) = \ldots = \lambda_1 f(v_1) + \ldots + \lambda_n f(v_n)$$

Per il *teorema* appena enunciato e dimostrato sappiamo che $f(v_i) = v_i'$; allora

$$v' = \lambda_1 v_1' + \ldots + \lambda_n v_n'$$

Allora

$$\forall v' \in \operatorname{im} f, v' \in \operatorname{span}(v_1', \ldots, v_n') \implies \operatorname{im} f = \operatorname{span}(v_1', \ldots, v_n')$$

Inoltre notiamo che abbiamo *solo* usato il fatto che $\mathcal{B}$ è un *sistema di generatori* per V.

#Corollario

Corollario (Corollario 3.1. (relazione tra l'immagine e lo span degli immagini di una applicazione lineare)).

Sia $f : V \longrightarrow V'$ una *applicazione lineare*.
Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base di V; siano $v_1', \ldots, v_n'$ elementi di V'.
Sia inoltre $f(v_i) = v_i', \forall i \in \{1, \ldots, n\}$.
Allora

$$\boxed{\operatorname{im} f = \operatorname{span}(v_1', \ldots, v_n')}$$

4. Esempio

#Esempio

Esempio 4.1. (esempio su $\mathbb{R}^2$ su base canonica $\mathcal{E}$)

Considero in $\mathbb{R}^2$ la sua base standard $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$, dove

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ora considero due elementi qualsiasi in $\mathbb{R}^2$

$$w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}; w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Per il *teorema di struttura di applicazioni lineare*, sappiamo che esiste ed è unica un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tale che

$$f(e_1) = w_1, f(e_2) = w_2$$

Ora ci chiediamo il seguente: chi è l'immagine attraverso f di un generico elemento $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$?
Per farlo scrivo questo generico vettore esprimendolo in termini di e_1, e_2; ovvero

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = xe_1 + ye_2$$

Per il *teorema di struttura*,

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ 3x + 4y \end{pmatrix}$$

#Esempio

Controesempio 4.1. (quando non può esistere la funzione)

Osserviamo che invece non può esistere un'applicazione lineare tale che

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 17 \end{pmatrix}$$

In quanto questi tre elementi non sono *linearmente indipendenti*, quindi non formano una *base* per $\mathbb{R}^2$.

C. TEOREMA DI DIMENSIONE

C1. Definizione di Rango per Applicazione Lineare

Definizione di Rango per Applicazione Lineare

Definizione di rango per un'applicazione lineare.

---

0. Osservazione preliminare

OSS 0.a. (*Osservazione sulla trasformazione lineare L_A*) Consideriamo una matrice $A \in M_{m,n}(K)$ e la trasformazione lineare associata alla matrice A, L_A (Definizione 1 (Definizione 1.1. (trasformazione lineare associata alla matrice))).

$$L_A : K^n \longrightarrow K^m; L_A(v) = A \cdot v$$

Se in K^n prendiamo la *base standard* $\mathcal{E}$, dove

$$\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}; e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \text{ (posizione } i\text{-esimo} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calcolando $A \cdot e_i$, per la *definizione di righe per colonne* (Operazioni particolari con matrici > ^eecbc9) notiamo che otterremo proprio la sua *colonna*. Allora

$$A \cdot e_i = A^{(1)}$$

Per l'osservazione effettuata in Teorema di struttura per Applicazioni Lineari (Corollario 2 (Corollario 3.1. (relazione tra l'immagine e lo span degli immagini di una applicazione lineare))), sappiamo che

$$\begin{aligned} \operatorname{im} L_A &= \operatorname{span}(L_A(e_1), \ldots, L_A(e_n)) \\ &= \operatorname{span}(A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}) \end{aligned}$$

Pertanto prendendo la *dimensione* (Definizione 1 (Definizione 1.1. (dimensione di un spazio vettoriale))) dell'applicazione lineare L_A si otterrebbe

$$\dim(\operatorname{span}(A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}))$$

che è esattamente la definizione del *rango* (Definizione 1 (Definizione 1.1. (rango))) della matrice A.

$$\boxed{\dim \operatorname{im} L_A = \dim \operatorname{span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}) = \operatorname{rg}(A)}$$

1. Definizione di Rango per un'applicazione lineare

#Definizione

Definizione (Definizione 1.1. (rango di un'applicazione lineare)).

Sia $f: V \longrightarrow V'$ un'*applicazione lineare* (Definizione 1 (Definizione 1.1. (applicazione lineare da V a V primo))) tra *spazi vettoriali* di *dimensione finita*.
Allora definiamo il *rango di f* come

$$\operatorname{rg} f = \dim(\operatorname{im} f)$$

OSS 1.1. Data l'osservazione precedente, il *rango* di un'applicazione lineare è una *generalizzazione* del rango di una matrice.

C2. Teorema di Dimensione per le Applicazioni Lineari

Teorema di dimensione per le Applicazioni Lineari

Teorema di dimensione per le applicazioni lineari: enunciato, dimostrazione ed esempi.

---

1. Enunciato

#Teorema

Teorema (Teorema 1.1. (di dimensione per le applicazioni lineari)).

Sia $f: V \longrightarrow V'$ un'*applicazione lineare* (Definizione 1 (Definizione 1.1. (applicazione lineare da V a V primo))) tra due *spazi vettoriali di dimensione finita*.
Allora vale che

$$\dim V = \dim \ker f + \dim \operatorname{im} f$$

Alternativamente, usando la definizione di *rango* (Definizione 1 (Definizione 1.1. (rango))) per un'applicazione lineare si può scriverla come

$$\boxed{\dim V = \dim \ker f + \operatorname{rg} f}$$

2. Dimostrazione

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *teorema di dimensione per le applicazioni lineari* (Teorema 1 (Teorema 1.1. (di dimensione per le applicazioni lineari)))
Fissiamo la *dimensione* di V $\dim V = n$.
Fissiamo ora una *base* di $\ker f$; sia dunque $\mathcal{B}_{\ker f} = \{v_1, \dots, v_k\}$.
Allora $\dim \ker f = k$. Ora per costruzione sappiamo che $v_1, \dots, v_k$ sono *linearmente* indipendenti, dunque per il *teorema di estensione* (Teorema 2.1. (Teorema del completamento/estensione)) possiamo *"estendere"* la *base* del nucleo di f ad essere una base di V. Ovvero

$$\mathcal{B}_V = \mathcal{B}_{\ker f} \cup \{v_{k+1}, \dots, v_n\} = \{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$$

Se riusciamo a dimostrare che la base di $\operatorname{im} f$ è la parte con cui abbiamo *"estesa"* la base di $\ker f$, allora abbiamo dimostrato il teorema in quanto si avrebbe

$$k + (n - k) = n$$

Allora dimostriamo che

$$\mathcal{B}_{\operatorname{im} f} = \{f(v_{k+1}), \dots, f(v_n)\}$$

Ovvero che tali elementi sono *linearmente indipendenti* e *sistemi di generatori per* $\operatorname{im} f$

- *Linearmente indipendenti*
  Supponiamo che esista una loro combinazione lineare nulla:

  $$a_{k+1} f(v_{k+1}) + \ldots + a_n f(v_n) = 0$$

  Dato che f è una *applicazione lineare*, possiamo manipolarla da formare

  $$f(a_{k+1} v_{k+1} + \ldots + a_n v_n) = 0$$

  Pertanto $a_{k+1} v_{k+1} + \ldots + a_n v_n \in \ker f$. Quindi

  $$a_{k+1} v_{k+1} + \ldots + a_n v_n = b_1 v_1 + \ldots + b_k v_k$$

  In quanto $v_1, \dots, v_k$ è *base* per $\ker f$ (ovvero un elemento qualsiasi di $\ker f$ è esprimibile in forma di combinazione lineare degli elementi della base).

Allora otteniamo la *combinazione lineare nulla* di $v_1, \ldots, v_n$

$$-b_1v_1 - \ldots - b_kv_k + a_{k+1}v_{k+1} + \ldots + a_nv_n = 0$$

che sappiamo essere *unica* in quanto $v_1, \ldots, v_n$ è *base* di V, dunque linearmente indipendente.
Quindi l'unica possibilità è che tutti i coefficienti b_i e a_i siano uguali a 0.
Dunque abbiamo dimostrato che $f(v_{k+1}), \ldots, f(n)$ sono *linearmente indipendenti*

- *Sistema di generatori per* V:
  Dall'osservazione sul *teorema di struttura delle applicazioni lineari* (Teorema di struttura per Applicazioni Lineari > ^8fd96a) abbiamo visto che le immagini di elementi di basi per V formano un *sistema di generatori* per $\operatorname{im} f$; dunque $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ è un *sistema di generatori* per $\operatorname{im} f$.
  D'altro canto abbiamo appena visto che $v_1, \ldots, v_k \in \ker f$, allora per definizione $f(v_1), \ldots, f(v_k)$ sono sicuramente tutti nulli.
  Allora *"rimangono"* solo gli elementi da $k+1$ esimo.
  Formalizzando il linguaggio, abbiamo

$$\begin{aligned} &\operatorname{im} f = \operatorname{span}(f(v_1), \ldots, f(v_n)) = \operatorname{span}(f(v_{k+1}), \ldots, f(v_n)) \\ \Longrightarrow\ &\dim \operatorname{im} f = \dim \operatorname{span}(f(v_{k+1}, \ldots, f(v_n))) = n - k \end{aligned}$$

Ricostruendo tutto da capo, abbiamo

$$\mathcal{B}_V = \mathcal{B}_{\ker f} \cup \mathcal{B}_{\operatorname{im} f} \implies n = k + (n-k) = \boxed{n = n} \blacksquare$$

3. Esempi

#Esempio

Esempio 3.1. (esempio di una trasformazione 3D a 4D)

Supponiamo $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ un'*applicazione lineare*.
Allora sicuramente sappiamo che f non potrà essere *suriettiva*: infatti per il teorema appena enunciato e dimostrato, sappiamo che

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim \ker f + \dim \operatorname{im} f$$

Quindi

$$3 = \dim \ker f + \dim \operatorname{im} f \implies \dim \operatorname{im} f = 3 - \dim \ker f \leq 3$$

Allora sappiamo che gli elementi delle immagini saranno *al massimo* di dimensione 3, mentre la dimensione di $\mathbb{R}^4 = 4$.

C3. Conseguenze del teorema di dimensione delle Applicazioni Lineari

Conseguenze del teorema di dimensione delle Applicazioni Lineari

Conseguenze (in formi di corollari) del teorema di dimensione (Teorema di dimensione per le Applicazioni Lineari)

---

1. Teorema della dimensione delle soluzioni per i sistemi lineari omogenei

OSS 1.1. (*Il vuoto colmato*) Ora possiamo finalmente *"colmare"* un vuoto che avevamo lasciato nel capitolo sui *sistemi lineari*, in particolare sul *teorema di dimensione delle soluzioni per i sistemi lineari omogenei*. (Teorema di dimensione delle soluzioni di sistemi lineari).

RICHIAMO al *teorema di dimensione delle soluzioni di sistemi lineari*

Teorema 1 (Teorema 1.1. (teorema di dimensione delle soluzioni di sistemi lineari)).

Sia $A \in M_{m,n}(K)$;
sia W l'insieme delle *soluzioni* del *sistema lineare omogeneo associato ad A* (Definizione 5 (Definizione 1.4. (sistema omogeneo))) con $A = A$, $s \in K^n$, ovvero

$$W = \{s \in K^n : A \cdot s = 0\}$$

Allora

$$\boxed{\dim W = n - \text{rg}(A)}$$

Sia dunque $A \in M_n(K)$ e consideriamo il *sistema lineare omogeneo*

$$Ax = 0$$

Allora possiamo interpretare l'insieme delle sue *soluzioni* in termini di *applicazioni lineari*, prendendo la *trasformazione lineare associata alla matrice* A (Definizione 1 (Definizione 1.1. (trasformazione lineare associata alla matrice))).
Ovvero

$$W = \{s \in K^n : A \cdot s = 0\} = \{s \in K^n : L_A(s) = 0\} = \ker L_A$$

#Corollario

Corollario (Corollario 1.1. (teorema di dimensione delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo)).

Sia $A \in M_n(K)$, allora la dimensione dello sottospazio vettoriale $W \subseteq K^n$ delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato è uguale a $n - \operatorname{rg} A$

$$\boxed{\dim W = n - \operatorname{rg} A}$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *corollario 1.1.* (Corollario 1 (Corollario 1.1. (teorema di dimensione delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo)))
Visto che $W = \ker L_A$, allora per il *teorema di dimensione* (Teorema 1 (Teorema 1.1. (di dimensione per le applicazioni lineari))) sappiamo che

$$\begin{aligned} & \dim K^n = \dim \ker L_A + \dim \operatorname{im} L_A \\ & \implies n = \dim W + \operatorname{rg} L_A \\ \operatorname{rg} L_A = \operatorname{rg} A \; & \implies \boxed{\dim W = n - \operatorname{rg} A} \end{aligned}$$

2. Suriettività e iniettività in termini di dimensioni

#Corollario

Corollario (Corollario 2.1. (di caratterizzazione per applicazioni lineari iniettive e suriettive)).

Sia $f : V \longrightarrow V'$ un'applicazione lineare ta *spazi vettoriali* di *dimensione finita*.

Supponiamo che essi hanno la stessa dimensione; $\dim V = \dim V'$
Allora f è *iniettiva* se e solo se f è *suriettiva*, ovvero, compattando la scrittura, si ha

$$\boxed{\dim V = \dim V' \implies f \text{ iniettiva} \iff f \text{ suriettiva}}$$

#Dimostrazione
DIMOSTRAZIONE del *corollario 2.1.* (Corollario 2 (Corollario 2.1. (di caratterizzazione per applicazioni lineari iniettive e suriettive)))
" $\implies$ ": Sia f iniettiva; allora per il *la proposizione 2.1. sul nucleo e l'immagine di un'applicazione lineare* (Proposizioni su Nucleo e Immagine > ^1a8f27), si ha $\ker f = \{0\}$.
Allora, per il *teorema di dimensione* (Teorema 1 (Teorema 1.1. (di dimensione per le applicazioni lineari))) si ha

$$\dim V = \dim \operatorname{im} f + \dim \ker f \implies \dim V = \dim \operatorname{im} f$$

Pertanto $\operatorname{im} f = V$; dato che $\operatorname{im} f \subseteq V'$, ma V e V' hanno la *stessa dimensione*, si ha che $\operatorname{im} f = V'$ e dunque f è *suriettiva*.
" $\impliedby$ ": Sia f suriettiva, allora $\operatorname{im} f = V'$; ovvero $\dim \operatorname{im} f = \dim V' = \dim V$ allora per il *teorema di dimensione*,

$$\begin{aligned}\dim V &= \dim \ker f + \dim \operatorname{im} f \\ &= \dim \ker f + \dim V \\ \dim \ker f = 0 &\implies \ker f = \{0\}\end{aligned}$$

Ovvero f è *iniettiva*. ■

#Corollario

Corollario (Corollario 2.2. (invertibilità di un'applicazione lineare iniettiva o suriettiva)).

Sia $f : V \longrightarrow V'$, con $\dim V = \dim V'$. Allora

$$\boxed{f \text{ iniettiva} \iff f \text{ suriettiva} \iff f \text{ biiettiva} \iff f \text{ invertibile}}$$

#Dimostrazione
DIMOSTRAZIONE del *corollario 2.2.* (Corollario 3 (Corollario 2.2. (invertibilità di un'applicazione lineare iniettiva o suriettiva)))
Dimostrazione omessa in quanto basta conoscere il *teorema di invertibilità di*

una funzione (Teorema 13 (Teorema 6.1. (condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza della funzione inversa f^-1)))

D. MATRICI ASSOCIATE ALLE APPLICAZIONI LINEARI

D1. Definizione di matrice associata

Definizione della Matrice associata a un'Applicazione Lineare

Definizione della matrice associata ad un'applicazione lineare rispetto alle basi del dominio e del codominio, esempi.

---

1. Definizione

#Definizione

Definizione (Definizione 1.1. (matrice associata a f rispetto alle basi B, C)).

Sia $f : V \longrightarrow V'$ un'*applicazione lineare* (Definizione 1 (Definizione 1.1. (applicazione lineare da V a V primo))) tra *spazi vettoriali* (Definizione 1 (Definizione 1.1. (spazio vettoriale sul campo K))) di *dimensione finita* (Definizione 1 (Definizione 1.1. (dimensione di un spazio vettoriale))).
Siano $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ rispettivamente le *basi* (Definizione 1.1. (Base)) di V, V'

$$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}; \mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_m\}$$

Definiamo quindi la *matrice associata ad f rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$*, come la *matrice* (Definizione 1 (Definizione 1.1. (matrice $m \times n$ a coefficienti in K))) in $M_{m,n}(K)$ denotata con

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f)$$

e ottenuta nella maniera seguente.
Per ogni vettore v_i di $\mathcal{B}$ scriviamo $f(v_i)$ come la *combinazione lineare* di $w_1, \dots, w_m$; le *coordinate* (Definizione 1.2. (Coordinate di vettore rispetto alla base)) rispetto agli elementi di $\mathcal{C}$ formeranno la *colonna* i-esima della

matrice
In altre parole,

$$(M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f))^{(i)} = \text{coordinate di } f(v_i) \text{ a } \mathcal{C}; \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

2. Esempi

#Esempio

Esempio 2.1. (su $\mathbb{R}^2$)

Considero la trasformazione lineare

$$f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2x - y \\ x + 2y \end{pmatrix}$$

Considero la *base standard* $\mathcal{E}$ formata dagli elementi $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ come le basi del *dominio* e del *codominio*.
Allora vogliamo costruire la *matrice associata all'applicazione lineare* f

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$$

Per farlo calcoliamo $f(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix})$ e $f(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})$, li esprimiamo come *combinazioni lineari* di $mathcalE$ per prendere le loro coordinate, al fine calcolare le colonne della matrice associata.
Si lascia di svolgere il procedimento meccanico al lettore per esercizio.

#Esempio

Esempio 2.2. (applicazione nulla)

Considero f l'applicazione nulla, ovvero del tipo

$$f(v) = 0_V$$

Allora per *qualsiasi* scelta delle basi del dominio $\mathcal{B}$ e del codominio $\mathcal{C}$, la *matrice associata* ad f sarà *sempre nulla*, in quanto i vettori di $\mathcal{C}$ sono *linearmente indipendenti* (Definizione 3 (Definizione 2.1. (vettori linearmente indipendenti))) in quanto *basi*.

#Esempio

Esempio 2.3. (applicazione identità)

Consideriamo f l'applicazione *identità*, ovvero del tipo

$$f(V) = V$$

Sia quindi $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ basi sia del *dominio* che del *codominio*; pertanto $(f(v_i))_i = (v_i)_i$.
Per l'osservazione precedente si nota che

$$f(v_i) \in \operatorname{span} \mathcal{B} \implies v_i = 0v_1 + \ldots + 0v_{i-1} + v_i + 0v_{i+1} + \ldots + 0v_n$$

Allora, svolgendo i calcoli necessari, la *associata all'applicazione identità* rispetto alle *stesse* basi del dominio e del codominio è la *matrice identità* $\mathbb{1}_n$
.

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \mathbb{1}_n$$

D2. Prime proprietà sulle matrici associate

Prime Proprietà sulle Matrici associate a un'Applicazione Lineare

Prime proprietà sulle matrici associate ad un'applicazione lineare.

---

1. Prime proprietà sulle matrici associate

#Proposizione

Proposizione 1.1. (prime proprietà sulle matrici associate)

Siano $f, h : V \longrightarrow V'$ due *applicazioni lineari* (Definizione 1 (Definizione 1.1. (applicazione lineare da V a V primo))) con $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ rispettivamente le basi di V, V'.
Supponiamo inoltre che ci sia anche $g : V' \longrightarrow V''$, con $\mathcal{C}$ base di V''. Sia poi $\lambda \in K$ uno *scalare*.
Sia $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f) \in M_{m,n}(K)$ una *matrice associata all'applicazione lineare* f

(Definizione 1 (Definizione 1.1. (matrice associata a f rispetto alle basi B, C))).
Allora valgono le seguenti sei proprietà:

$$
\begin{aligned}
i.\ & M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V) = \mathbb{1}_n \\
ii.\ & M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(0_V) = 0 \in M_{m,n}(K) \\
iii.\ & M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{D}}(g \circ f) = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{D}}(g) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f) \\
iv.\ & M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\mathrm{id}_V) = (M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V))^{-1} \\
v.\ & M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f+h) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f) + M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(h) \\
vi.\ & M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\lambda \cdot f) = \lambda \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f)
\end{aligned}
$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE delle *prime proprietà sulle matrici associate* (^0af01d)
Dimostrazioni omesse in quanto per verificarle basta usare *definizioni* delle *applicazioni lineari*, *matrici associate* ed eventualmente usare delle loro proprietà. Alternativamente, si può avvalere dei diagrammi commutativi.

D3. Teoremi sulle matrici associate

Teoremi sulle Matrici associate a un'Applicazione Lineare

Due risultati importanti derivanti dalla definizione della matrice associata ad un'applicazione lineare.

---

1. Primo risultato relativo alle coordinate

#Teorema

Teorema (Teorema 1.1. (relazione tra le coordinate rispetto alle basi)).

Sia $f : V \longrightarrow V'$ un'*applicazione lineare* tra *spazi vettoriali* di *dimensione finita* (Definizione 1 (Definizione 1.1. (applicazione lineare da V a V primo)), Definizione 3 (Definizione 1.1. (vettore)), Definizione 1 (Definizione 1.1. (dimensione di un spazio vettoriale))).
Siano $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ rispettivamente *basi* di V, V' (Definizione 1.1. (Base)). In particolare sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$
Fissiamo v un vettore di V; $v \in V$
Supponiamo che ci sia il *vettore-colonna* A in K^n sia il *vettore* che

rappresenta le coordinate di v rispetto a $\mathcal{B}$;

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \cdot v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$$

Allora le *coordinate* di $f(v)$ rispetto a $\mathcal{C}$ sono date da

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot A = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *teorema 1.1.*
La dimostrazione è omessa in quanto è *"semplice"* visto che basta scrivere le definizioni e compiere dei calcoli. Quindi la dimostrazione è lasciata da svolgere al lettore.
Consiglio: definire $f(v_i)$ in un certo modo e usare un *"trick"* in cui si sfrutta il fatto che f soddisfa le proprietà delle applicazioni lineari.

#Osservazione

Osservazione 1.1. (interpretazione grafica)

Come *"interpretazione grafica"* di questo teorema possiamo avvalerci dell'*esempio 2.2.* sui *diagrammi commutativi* (Diagramma Commutativo > ^d97de6).

2. Secondo risultato relativo alla composizione

#Teorema

Teorema (Teorema 2.1. (matrice associata della composizione delle applicazioni lineari)).

Siano $f : V \longrightarrow V'$, $g : V' \longrightarrow V''$ due *applicazioni lineari* tra *spazi vettoriali* di *dimensione finita*.
Siano $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ rispettivamente le *basi* di V, V', V''.
Allora possiamo considerare la *composizione* $g \circ f : V \longrightarrow V''$ e vale che

$$M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{B}}(g \circ f) = M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}}(g) \cdot M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f)$$

TRUCCHETTO MNEMONICO. Come trucchetto mnemonico si potrebbe visualizzare che le lettere $\mathcal{C}$ si *"cancellano"*.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *teorema 2.1.*
Anche qui la dimostrazione è stata omessa in quanto bisogna solo usare le definizioni.

Caso applicazioni identità

#Corollario

Corollario (Corollario 2.1.).

Sia V un *K-spazio vettoriale* di *dimensione finita*, siano $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ basi di V. Sia id_V l'applicazione lineare *identità*.
Allora

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\text{id}_V) \cdot M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\text{id}_V) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\text{id}_V) = \mathbb{1}_n$$

Quindi vediamo che la matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\text{id}_V)$ è l'*inversa* di $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\text{id}_V)$.

D4. Matrice simile

Definizione di Matrice Simile

Definizione di due matrici simili.

---

1. Definizione di Matrici Simili

#Definizione

Definizione (Definizione 1.1. (matrici simili)).

Siano $A, B \in M_n(K)$ due *matrici quadrate* (Definizione 4 (Definizione 2.1. (matrice quadrata di ordine n))).
A, B si dicono *simili* se *esiste* una matrice *invertibile* $P \in M_n(K)$ tale che

valga

$$B = P^{-1} \cdot A \cdot P$$

D5. Matrice del cambiamento di base

Matrice del cambiamento di Base

Matrice del cambiamento di Base: osservazioni preliminari, l'utilità e riassunto (definizione generale)

---

1. Prima Osservazione: sulle prime proprietà delle matrici associate

#Osservazione

Osservazione 1.1. (sulle prime proprietà delle matrici associate)

Facciamo delle considerazioni sulle Prime Proprietà sulle Matrici associate a un'Applicazione Lineare e sui Teoremi sulle Matrici associate a un'Applicazione Lineare.
Consideriamo $f : V \longrightarrow V$ con $\dim V = n$. Per il *corollario 2.2. sulle applicazioni lineari* si ha che f è un *isomorfismo* (ovvero biettiva, pertanto invertibile) (Corollario 3 (Corollario 2.2. (invertibilità di un'applicazione lineare iniettiva o suriettiva))).
Allora $f^{-1} : V \longrightarrow V$ è *anch'essa applicazione lineare* e supponendo che $\mathcal{B}$ sia una *base* di V, abbiamo il seguente:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f^{-1}) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f \circ f^{-1}) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V) = \mathbb{1}_n$$

Da ciò ricaviamo in particolare che la matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ è *invertibile* e la sua inversa è *esattamente* $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f^{-1})$.

$$\boxed{(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f))^{-1} = (M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f^{-1}))}$$

Ovviamente questo presuppone che in primis la matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ sia *invertibile*.
Ricordiamo inoltre il *teorema 1.1. sulle matrici associate* (Teorema 1 (Teorema 1.1. (relazione tra le coordinate rispetto alle basi))): ovvero che

prendendo un'altra base $\mathcal{C}$ di V, possiamo trovare le *coordinate* di $f(v)$ rispetto a $\mathcal{C}$ col seguente calcolo:

$$\begin{pmatrix}\beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m\end{pmatrix} = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot \begin{pmatrix}\alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n\end{pmatrix}$$

Istanziamo dunque questo risultato per $f = \text{id}_V$.

$$\text{id}_V : V \longrightarrow V$$

con $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ basi di V.
Allora prendendo un qualunque vettore $v \in V$ con le coordinate rispetto a $\mathcal{B}$ come $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, allora le coordinate dello stesso vettore $f(v) = v$ rispetto a $\mathcal{C}$ verranno calcolate nel modo sopra indicato.
Pertanto possiamo considerare la matrice

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\text{id}_V)$$

come la *matrice del cambiamento di base*.

2. Detour: l'utilità di questa idea

DETOUR. Ora è naturale chiedersi a cosa serva quest'osservazione: naturalmente, come ci suggerisce la denominazione, una *matrice del cambiamento di base* serve per *cambiare* la *base* di un spazio vettoriale e trovare le *coordinate* dell'immagine della *"base cambiata"* in funzione della *"base cambiata"* stessa.
Infatti, codifichiamo certi problemi con *applicazioni lineari*: dunque scegliendo una base qualsiasi per lo *spazio vettoriale* abbiamo *coordinate diverse*.
Vogliamo svolgere certi calcoli con queste coordinate, però avvolte questi calcoli possono diventare complicati: dunque, avendo coordinate diverse (ovvero cambiando basi) possiamo *"semplificare"* il problema.
Questo sarà infatti il problema della *diagonalizzazione* (Considerazioni Preliminari sulla Diagonalizzazione).

3. Proposizione: Risultato finale

Allora da tutti questi risultati appena derivati, possiamo enunciare la seguente proposizione.

#Proposizione

Proposizione 3.1. (calcolo di una nuova matrice associata con basi cambiate)

Sia $f : V \longrightarrow V'$ un'*applicazione lineare* tra *spazi vettoriali* di *dimensione finita*.
Siano $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ le basi *"originarie"* di V, V'.
Siano poi $\tilde{\mathcal{B}}, \tilde{\mathcal{C}}$ le *"nuove basi"* di V, V'.
Allora abbiamo il seguente:

$$M^{\tilde{\mathcal{B}}}_{\tilde{\mathcal{C}}}(f) = M^{\tilde{\mathcal{B}}}_{\tilde{\mathcal{C}}}(\mathrm{id}_{V'} \circ f \circ \mathrm{id}_V)$$

$$\boxed{M^{\tilde{\mathcal{B}}}_{\tilde{\mathcal{C}}}(f) = M^{\mathcal{C}}_{\tilde{\mathcal{C}}}(\mathrm{id}_{V'}) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f) \cdot M^{\tilde{\mathcal{B}}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V)}$$

Pertanto, se conosciamo la matrice $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f)$ allora possiamo ottenere la *"nuova matrice"* $M^{\tilde{\mathcal{B}}}_{\tilde{\mathcal{C}}}(f)$ moltiplicando a destra e a sinistra la *"matrice conosciuta"* per le *due matrici di cambiamento di base*.

#Osservazione

Osservazione 3.1. (idea grafica)

Graficamente abbiamo una specie di *"semplificazione"* delle basi:

$$M^{\cancel{\mathcal{C}}}_{\tilde{\mathcal{C}}}(\mathrm{id}_V) \cdot M^{\cancel{\mathcal{B}}}_{\cancel{\mathcal{C}}}(f) \cdot M^{\tilde{\mathcal{B}}}_{\cancel{\mathcal{B}}} = M^{\tilde{\mathcal{B}}}_{\tilde{\mathcal{C}}}(f)$$

Ovviamente questo serve *solamente* come un trucco mnemonico, non una dimostrazione rigorosa.

#Corollario

Corollario (Corollario 3.1. (caso particolare del calcolo della nuova matrice associata)).

In particolare se prendiamo $f : V \longrightarrow V$, con $\mathcal{B}$ la *"base originaria"* e $\mathcal{C}$ la *"nuova base"* con cui facciamo il cambiamento di base, allora vale che

$$\boxed{M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\mathrm{id}_V) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\mathrm{id}_V)}$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE della *proposizione 3.1.*.
Omessa in quanto basta considerare che $f = \mathrm{id}_{V'} \circ f \circ \mathrm{id}_V$ e il *teorema 2.1.* sulle *matrici associate* (Teorema 2 (Teorema 2.1. (matrice associata della composizione delle applicazioni lineari))).

#Osservazione

Osservazione 3.2. (origine della nozione di matrice simile)

Notiamo che la nozione di *matrice* simile discende proprio da queste considerazioni: infatti considerando P come la *matrice del cambiamento di base*

$$P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\mathrm{id}_V)$$

Pertanto la sua *inversa* è

$$P^{-1} = (M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\mathrm{id}_V))^{-1} = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V)$$

Allora l'uguaglianza del *corollario 3.1.* può essere scritta come

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f) = P^{-1} \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot P$$

che è proprio la nozione di *matrice simile* (Definizione 1 (Definizione 1.1. (matrici simili))).
Infatti $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)$ e $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ sono *simili*.

E. LO SPAZIO DELLE APPLICAZIONI LINEARI

E1. L'insieme delle applicazioni lineari

L'insieme delle Applicazioni Lineari

Cenno all'insieme delle applicazioni lineari: definizione e teorema della funzione matrice associata ad un'applicazione lineare.

---

1. Definizione dell'insieme $\mathcal{L}$

#Definizione

Definizione (Definizione 1.1. (l'insieme delle applicazioni lineari dal dominio al codominio $\mathcal{L}$)).

Siano V, V' dei *K-spazi vettoriali* (Definizione 1 (Definizione 1.1. (spazio vettoriale sul campo K))) di *dimensione finita* (Definizione 1 (Definizione 1.1. (dimensione di un spazio vettoriale))); $\dim V = n; \dim V' = m$
Allora definiamo *l'insieme delle applicazioni lineari da V in V'* come l'insieme $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L}(V, V') = \{\mathrm{id}_V, 0_V, f, \ldots\}$$

#Proposizione

Proposizione 1.1. ($\mathcal{L}$ diventa un spazio vettoriale)

Abbiamo che definendo la *somma* tra applicazioni lineari in maniera *"puntuale"* e analogamente lo *scalamento* di un'applicazione lineare, ovvero

$$(f+g)(v) = f(v) + g(v); (\lambda \cdot v)(v) = \lambda \cdot f(v)$$

Abbiamo che *l'insieme delle applicazioni lineari* $\mathcal{L}(V, V')$ diventa un *spazio vettoriale* su K.

2. Teorema della funzione matrice associata ad applicazione lineare

#Teorema

Teorema (Teorema 2.1. (della funzione matrice associata ad un'applicazione lineare)).

Nelle ipotesi della *definizione 1.1.* (Definizione 1 (Definizione 1.1. (l'insieme delle applicazioni lineari dal dominio al codominio $\mathcal{L}$))), fissata $\mathcal{B}$ base di V e $\mathcal{C}$ base di V', possiamo definire una funzione del tipo

$$\mathcal{L}(V, V') \longrightarrow M_{m,n}(K); f \mapsto M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f)$$

Allora questa funzione è un'*applicazione lineare* ed un *isomorfismo*.

Diagonalizzazione - Sommario

Tutto sulla diagonalizzazione di applicazioni lineari.

A. CONSIDERAZIONI PRELIMINARI PER LA DIAGONALIZZAZIONE

Considerazioni Preliminari sulla Diagonalizzazione

Introduzione alla Diagonalizzazione: problema della riflessione all'asse delle ordinate in R2, osservazioni.

---

1. Considerazioni preliminari per la diagonalizzazione

Problema della riflessione rispetto all'asse x

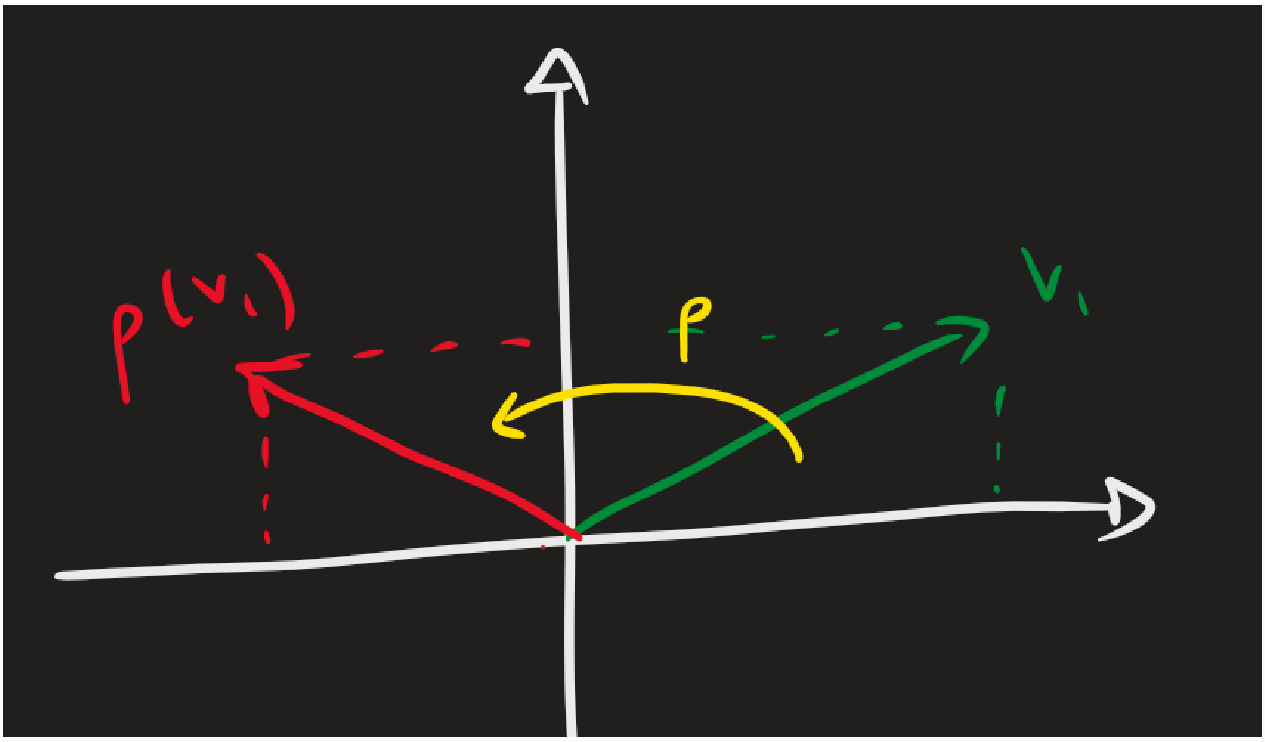
#Esempio

Esempio 1.1. (riflessione rispetto all'asse delle ordinate)

Consideriamo in $\mathbb{R}^2$ la *riflessione* rispetto all'asse delle ordinate, e chiamiamo questa applicazione ρ.
Il *"funzionamento"* dell'applicazione ρ viene illustrata nella *figura 1.1.*.
Considerando $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$ la *base canonica*, allora possiamo con un po' di intuizione geometrica si può calcolare la matrice associata a ρ (Definizione 1 (Definizione 1.1. (matrice associata a f rispetto alle basi B, C))).

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(\rho) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

FIGURA 1.1. (*Idea grafica*)



Problema della riflessione rispetto alla retta l

#Esempio

Esempio 1.2. (riflessione rispetto alla retta l)

Ora consideriamo una retta l che passa per l'origine $(0,0)$; chiamiamo la *riflessione rispetto alla retta l* ρ_l. In *figura 1.2.* si illustra la *"trasformazione"* di un qualsiasi vettore mediante ρ_l.
Dal disegno non è chiaro *"calcolare"* la matrice

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(\rho_l)$$

Bisognerebbe considerare eventuali angoli, seni, coseni e altre complicazioni.
Questa difficolta proviene dal fatto che abbiamo scelto delle *"basi difficili"* su cui calcolare questa matrice: se scegliessimo una *"base adeguata"* all'applicazione lineare ρ_l, tutto divneterebbe più semplice!
Consideriamo allora una *"base personalizzata"* per ρ_l, ovvero una è un vettore che *"giace sulla retta l"* è l'altra è un vettore ortogonale alla retta l: chiamiamo l'insieme di questi vettori come $\mathcal{B}$. Questa idea viene raffigurata nella *figura 1.3.*.
Allora in questo caso diventa semplicissimo calcolare la *matrice associata* a ρ_l per la base $\mathcal{B}$: infatti il *"calcolo"* diventa analogo a quello presentato nell'*esempio 1.1.* (^e251c3).

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\rho_l) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

FIGURA 1.2. (*Idea grafica parte 1*)

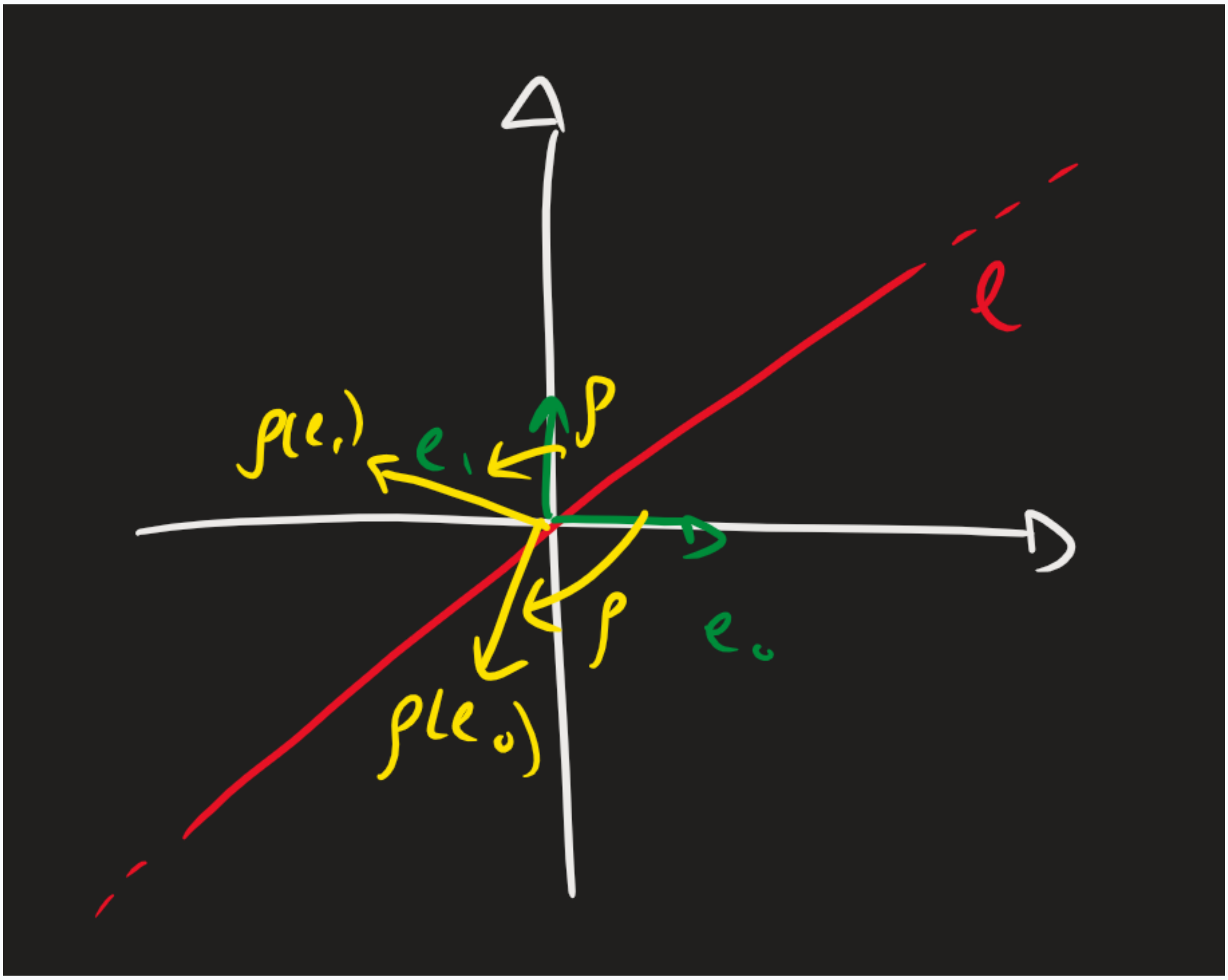
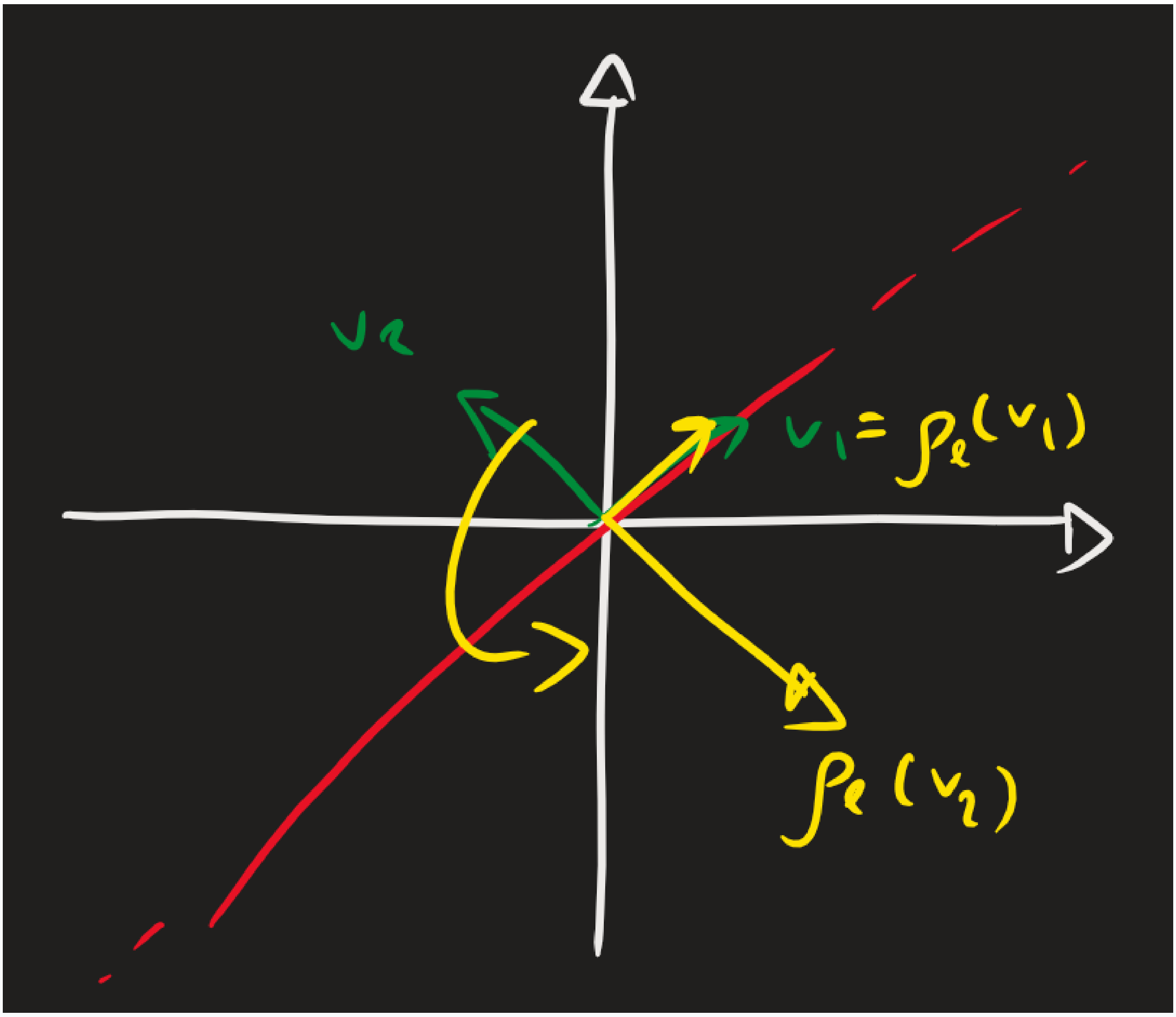


FIGURA 1.3. (*Idea grafica parte 2*)



2. Conclusione

#Osservazione

Osservazione 2.1. (conclusione delle considerazioni)

Alla fine notiamo che in entrambi gli esempi, gli *elementi della base* vengono mandati in *multipli* di sé stessi: infatti, nel primo esempio abbiamo

$$\rho(e_1) = -1 \cdot e_1; \rho(e_2) = e_2$$

Allora si può dire che quando abbiamo un comportamento del genere, la nostra scelta delle basi *"ha funzionato"* in quanto ci semplifica il calcolo delle matrici associate.
Vedremo che questa diventerà l'idea chiave della *diagonalizzazione*: la procedura per determinare *"basi efficienti"* per certe *applicazioni lineari* sarà proprio il problema della *diagonalizzazione*.

B. NOMENCLATURA PRELIMINARE

B1. Autovalore, autovettore, autospazio

Definizione di Autovalore, Autovettore, Autospazio

Definizione di autovalore, spettro di un'applicazione lineare; definizione di autovetture; definizione di autospazio.

---

1. Autovalore di un'applicazione

#Definizione

Definizione (Definizione 1.1. (autovalore di un'applicazione lineare)).

Sia $f : V \longrightarrow V$ un'*applicazione lineare* (Definizione 1 (Definizione 1.1. (applicazione lineare da V a V primo))), con $\dim V = n$.
Uno *scalare* $\lambda \in K$ si dice *autovalore* (in inglese *"Eigenvalue"* o in tedesco *"der Eigenwert"*) per l'applicazione f se si verifica il seguente

$$\boxed{\exists v \in V \diagdown \{0_V\} : f(v) = \lambda \cdot v}$$

A parole, *"un scalare λ è autovalore di f se esiste un vettore di V (escluso il vettore nullo in quanto creerebbe dei problemi) tale che l'immagine di tale vettore è uguale al vettore scalato per il scalare scelto"*.

#Osservazione

Osservazione 1.1. (l'esempio della riflessione rispetto alla retta l)

Riprendiamo l'*esempio 1.2.* relativo alle considerazioni preliminari (Considerazioni Preliminari sulla Diagonalizzazione > ^0ce141): notiamo che $1, -1$ sono *autovalori* di ρ_l.
Infatti,

$$\rho_l(v_1) = 1 \cdot v_1; \rho_l(v_2) = -1 \cdot v_2; v_1, v_2 \neq 0_V$$

Spettro di un'applicazione lineare

#Definizione

Definizione (Definizione 1.2. (spettro di un'applicazione lineare)).

Data $f : V \longrightarrow V$, definiamo l'*insieme dei autovalori di* f come lo *spettro di* f e lo indichiamo con

$$\operatorname{Sp} f$$

2. Autovettore di un'applicazione relativo ad un'autovalore

#Definizione

Definizione (Definizione 2.1. (autovettore di un'applicazione lineare relativo ad un'autovalore)).

Sia $f : V \longrightarrow V$ un'*applicazione lineare*; sia $\lambda \in K$ un *autovalore* di f.
Diciamo che il vettore $v \in V$ è *autovettore* (in inglese *"Eigenvector"* o in tedesco *"der Eigenvektor"*) se vale che

$$f(v) = \lambda \cdot v$$

3. Autospazio di un'autovalore

#Definizione

Definizione (Definizione 3.1. (autospazio di un autovalore)).

Sia $\lambda \in K$ un *autovalore* per f.
Definiamo *l'autospazio* (in inglese *"Eigenspace"* o in tedesco *"der Eigenraum"*) di λ come *l'insieme di autovettori* di λ e lo denotiamo con

$$\operatorname{Aut} \lambda$$

#Osservazione

Osservazione 3.1. (l'elemento nullo è elemento di qualsiasi autospazio)

Affinché lo scalare λ sia *autovalore*, per definizione, deve valore che

$$v \in V \diagdown \{0_V\} : f(v) = \lambda \cdot v$$

Allora se λ è *autovalore*, consideriamo l'autovettore $w \in V$ relativa a λ:

$$f(w) = \lambda \cdot w$$

In particolare se $w = 0_V$, varrebbe che

$$f(0_V) = \lambda \cdot 0_V = 0_V$$

Dunque vale che il *vettore nullo* 0_V appartiene *sempre* all'autospazio di un qualunque autovalore.

$$\forall \lambda \text{ autovalore di } f, 0_V \in \operatorname{Aut} \lambda$$

B2. Proposizioni su autospazi

Proposizioni su Autospazi

Proposizioni (teoremini) autospazi. L'autospazio di un autovalore è spazio vettoriale; vettori appartenenti ad autospazi diversi sono linearmente indipendenti.

---

1. Autospazio di un qualsiasi autovalore è sottospazio vettoriale

#Proposizione

Proposizione 1.1. (l'autospazio di un qualsiasi autovalore è sottospazio vettoriale del dominio/codominio)

Sia $f : V \longrightarrow V$ un'*applicazione lineare* (Definizione 1 (Definizione 1.1. (applicazione lineare da V a V primo))) con $\dim V = n$.
Sia $\lambda \in K$ un *autovalore* di f (Definizione 1 (Definizione 1.1. (autovalore di un'applicazione lineare))).
Allora $\operatorname{Aut} \lambda$ è *sottospazio vettoriale di V* (Definizione 1 (Definizione 1.1. (sottospazio vettoriale))).

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE della *proposizione 1.1.*
Verifichiamo le *tre proprietà caratterizzanti* di sottospazi vettoriali.

1. $0 \in \operatorname{Aut} \lambda$: per *l'osservazione 3.1. relativa agli autospazi* (Definizione di Autovalore, Autovettore, Autospazio > ^4d3c9b), il vettore nullo 0 è elemento di qualsiasi autospazio.
2. Sia $v \in V$, $\mu \in K$; $v \in \operatorname{Aut} \lambda$. Allora per ipotesi $f(v) = \lambda \cdot v$. Considero $\mu \cdot v$;
$$f(\mu \cdot v) = \mu \cdot f(v) = \mu \cdot \lambda \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v) \implies \mu \cdot v \in \operatorname{Aut} \lambda$$
3. Siano $v_1, v_2 \in V$. Siano $v_1, v_2 \in \operatorname{Aut} \lambda$. Allora, per ipotesi sono vere che
$$f(v_1) = \lambda v_1; f(v_2) = \lambda v_2$$
Ma allora
$$f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2 = \lambda(v_1 + v_2)$$
Il che implica
$$v_1 + v_2 \in \operatorname{Aut} \lambda$$

2. Due vettori appartenenti a due autospazi distinti sono linearmente indipendenti

#Proposizione

Proposizione 2.1. (due elementi di autospazi distinti sono linearmente indipendenti)

Sia $f : V \longrightarrow V$ un'*applicazione lineare* con $\dim V = n$.
Siano λ, μ *autovalori distinti* di f.
Siano $v_1 \in \operatorname{Aut} \lambda$ e $v_2 \in \operatorname{Aut} \mu$.
Supponendo che $v_1 \neq v_2 \neq 0_V$, allora v_1 e v_2 sono vettori *linearmente indipendenti* (Definizione 3 (Definizione 2.1. (vettori linearmente indipendenti))).

C. DIAGONALIZZABILITA' DI UN'APPLICAZIONE LINEARE

C1. Definizione di applicazione lineare diagonalizzabile

Definizione di Matrice Diagonale e Applicazione Diagonalizzabile

Definizione di una matrice quadrata diagonale e di un'applicazione lineare diagonalizzabile.

---

1. Matrice quadrata diagonale

#Definizione

Definizione (Definizione 1.1. (matrice quadrata diagonale)).

Sia $A \in M_n(K)$ una *matrice quadrata* (Definizione 4 (Definizione 2.1. (matrice quadrata di ordine n))).
A si dice anche *diagonale* se tutti gli elementi non-nulli appartengono solo alla *diagonale principale* della matrice (Matrice).

2. Applicazione Lineare Diagonalizzabile

#Definizione

Definizione (Definizione 2.1. (applicazione lineare diagonalizzabile)).

Sia $f : V \longrightarrow V$ un'*applicazione lineare* (Definizione 1 (Definizione 1.1. (applicazione lineare da V a V primo))) con $\dim V = n$.
f si dice *diagonalizzabile* se esiste una base $\mathcal{B}$ di V tale che la *matrice associata* $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ (Definizione 1 (Definizione 1.1. (matrice associata a f rispetto alle basi B, C))) è *diagonale*.

#Osservazione

Osservazione 2.1. (significato della diagonalizzabilità)

Dire che la *matrice associata* $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ è *diagonale* è equivalente a dire che *ogni immagine dell'elemento della base* $\mathcal{B}$ è *autovettore* per un certo autovalore λ_i.

Infatti se $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ è diagonale, allora è una matrice del tipo

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Allora, *per definizione*, ogni immagine del vettore di $\mathcal{B}$ è del tipo

$$f(v_i) = 0 \cdot \lambda_1 + \ldots + \lambda_i v_i + \ldots + 0 \cdot \lambda_n$$

Ovvero v_i è elemento dello spettro di λ_i.

C2. Caratterizzazione delle applicazioni lineari diagonalizzabili

Proposizioni sulle Applicazioni Lineari Diagonalizzabili

Proposizioni di caratterizzazione sulle applicazioni lineari diagonalizzabili.

---

1. Osservazione sulle matrici

#Osservazione

Osservazione 1.1. (condizione necessaria e sufficiente per la diagonalizzabilità di un'applicazione lineare)

Ricordiamo che se $f: V \longrightarrow V$ è un'*applicazione lineare* di *dimensione finita* (Definizione 1 (Definizione 1.1. (applicazione lineare da V a V primo))), e N, N' sono le *matrici associate di* f alle basi $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ di V, ovvero

$$N = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f); N' = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)$$

Supponiamo inoltre che N' sia diagonale.
Allora dato che N, N' sono simili sicuramente vale che

$$N' = P^{-1} \cdot N \cdot P$$

dove P è una *matrice quadrata* invertibile.

Pertanto si può dire che un'applicazione lineare f è *diagonalizzabile* se e solo se *presa una sua matrice associata N, questa è simile ad una matrice diagonale; ovvero esiste una matrice P tale che la matrice risultante del calcolo $P^{-1} \cdot N \cdot P$ sia diagonale.*

2. Proposizione di caratterizzazione delle applicazioni diagonalizzabili

#Proposizione

Proposizione 2.1. (proprietà fondamentale della diagonalizzabilità)

Sia $f : V \longrightarrow V$ un'*applicazione lineare* di *dimensione finita*.
Allora f è diagonalizzabile *se e solo se* esiste una base $\mathcal{B}$ di V costituita tutta da *autovettori*.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE della *proposizione 2.1.* (^b86a9d)
" $\Longrightarrow$ ": Basta considerare la definizione di *applicazione lineare diagonalizzabile* (Definizione 2 (Definizione 2.1. (applicazione lineare diagonalizzabile))).
" $\Longleftarrow$: Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una *base* costituita da *autovettori* (Definizione 3 (Definizione 2.1. (autovettore di un'applicazione lineare relativo ad un'autovalore))), allora ad ogni v_i è associato un *autovalore* λ_i (Definizione 1 (Definizione 1.1. (autovalore di un'applicazione lineare))) tale che valga l'uguaglianza $f(v_i) = \lambda_i v_i$.
Ma allora ciò vuol dire che la sua *matrice associata* (Definizione 1 (Definizione 1.1. (matrice associata a f rispetto alle basi B, C))) è

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Allora chiaramente questa matrice è *diagonale*, il che significa f è *diagonalizzabile*. ■

Gli autovalori possono essere uguali (osservazione fondamentale)

Osservazione 2.1.

Però notiamo che non abbiamo supposto che tutti gli *autovalori* λ_i sono tutti distinti: infatti, alcuni *autovettori* possono avere lo stesso autovalore!
Per comprendere che una tale base possa esistere, andiamo a ripensare gli *autospazi* (Definizione 4 (Definizione 3.1. (autospazio di un autovalore))) in una nuova maniera.
In particolare, ridimostriamo che gli *autospazi* sono *sottospazi vettoriali* in una maniera alternativa.
Sia $f : V \longrightarrow V$ un'applicazione lineare di dimensione finita; sia $\lambda \in K$ un *autovalore*.
Allora per definizione deve esistere un *autovettore* per l'autovalore λ; ovvero

$$\begin{aligned} f(v) = \lambda \cdot v \iff & f(v) - \lambda \cdot v = 0 \\ \iff & f(v) - \lambda \cdot \mathrm{id}_V(v) = 0 \\ \iff & (f - \lambda \, \mathrm{id}_V)(v) = 0 \\ f_\lambda := f - \lambda \, \mathrm{id}_V \iff & f_\lambda(v) = 0 \end{aligned}$$

Consideriamo dunque la *"nuova applicazione"*

$$f_\lambda : V \longrightarrow V$$

Notiamo innanzitutto che $v \neq 0_V \in \ker f_\lambda$.
Pertanto $\ker f_\lambda \neq \{0\}$; allora f_λ *non* è *iniettiva*.
Allora f_λ *non* è neanche *invertibile*;
dunque per qualsiasi base $\mathcal{B}$ di V vale che

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \text{ non invertibile} \iff & \det(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f_\lambda)) = 0 \\ \iff & \det(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)) = 0 \\ \iff & \det(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) - \lambda M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V)) = 0 \\ \iff & \det(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) - \lambda \cdot \mathbb{1}_n) = 0 \end{aligned}$$

Pertanto gli *autovalori* di f sono *tutti e soli* gli *autovalori* $\lambda \in K$ tali per cui si ha

$$\boxed{\det(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) - \lambda \cdot \mathbb{1}_n) = 0}$$

Per una qualsiasi base $\mathcal{B}$ di V.
Il nostro problema principale sarà quello di trovare quei valori λ che soddisfano tale uguaglianza; ovvero dobbiamo trovare gli *autovalori* λ: lo risolveremo mediante la definizione del *polinomio caratteristico* (Definizione 1 (Definizione 1.1. (polinomio caratteristico di un'applicazione lineare))).

Infine, osserviamo che l'autospazio di λ è sottospazio vettoriale di V (come volevasi dimostrare all'inizio).

$$\begin{aligned}\operatorname{Aut}\lambda &= \{v \in V : f(v) = \lambda v\} \\ &= \{v \in V : f_\lambda(v) = 0\} \\ &= \ker f_\lambda\end{aligned}$$

Infatti, essendo $\ker f_\lambda$ uno *sottospazio vettoriale* di V, allora $\operatorname{Aut}\lambda$ è anch'esso uno *sottospazio vettoriale*.

C3. Polinomio caratteristico di un'applicazione lineare

Polinomio Caratteristico di una Applicazione Lineare

Definizione di polinomio caratteristico di una applicazione lineare; esempi.

---

1. Definizione del polinomio caratteristico di f

#Definizione

Definizione (Definizione 1.1. (polinomio caratteristico di un'applicazione lineare)).

Sia $f : V \longrightarrow V$ un'*applicazione lineare* con $\dim V = n$ (Definizione 1 (Definizione 1.1. (applicazione lineare da V a V primo))).
Consideriamo ora l'autovalore λ come un *parametro/incognita/variabile*; formiamo quindi il determinante

$$\det(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)$$

dove $\mathcal{B}$ è una qualsiasi *base* di V.
Per la *definizione del determinante* (Definizione 2 (Definizione 2.1. (determinante per lo sviluppo lungo la prima colonna)); si possono usare

altre definizioni alternative), il determinante della matrice $\det(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)$ forma un *polinomio* in λ a *coefficienti* in K e questo polinomio è detto il *polinomio caratteristico* di f, ed e denotato come

$$P_f(\lambda)$$

#Osservazione

Osservazione 1.1. (utilità del polinomio caratteristico)

Tenendo in conto le considerazioni fatte sulle *applicazioni lineari diagonalizzabili*, in particolare sui suoi *autovalori* (Proposizioni sulle Applicazioni Lineari Diagonalizzabili > ^b8112c), questa definizione del *polinomio caratteristico* $P_f(\lambda)$ serve per *trovare* gli autovalori di f: basta porre infatti

$$\boxed{P_f(\lambda) = 0}$$

e risolvere tale equazione.

2. Esempio

#Esempio

Esempio 2.1. (esempio)

Considerare $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, ove

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ 2x+2y \end{pmatrix}$$

Con la sua *base canonica*

$$\mathcal{E} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

Allora la sua *matrice associata* è

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Pertanto il *polinomio caratteristico* è

$$
\begin{aligned}
P_f(\lambda) &= \det(M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) - \lambda \cdot \mathbb{1}_n) \\
&= \det(\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 2 & 2-\lambda \end{pmatrix}) \\
&= (1-\lambda)(2-\lambda) - 2 \\
&= \lambda^2 - 3\lambda
\end{aligned}
$$

Allora ponendo $P_f(\lambda) = 0$ si ha che *gli autovalori di* f sono

$$P_f(\lambda) = \implies \lambda \in \{0, 3\}$$

Di conseguenza

$$\exists v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2 \diagdown \{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} : f(v_1) = \lambda_1 v_1; f(v_2) = \lambda_2 v_2$$

Notiamo che v_1, v_2 possono formare una *base* di V in quanto sono *linearmente indipendenti*.
Allora calcoliamo v_1, v_2 determinando

$$\ker f_0 = \ker f$$

e

$$\ker f_3 = \ker(f - 3\,\mathrm{id}_V)$$

che sono rispettivamente gli *autospazi* di $0, 3$.

C4. Molteplicità algebrica e geometrica di un autovalore

Molteplicità Geometrica e Algebrica di uno Autovalore

Definizione di molteplicità geometrica e algebrica di un autovalore. Esempi. Proposizioni e osservazioni.

---

1. Definizione di molteplicità geometrica

#Definizione

Definizione (Definizione 1.1. (molteplicità geometrica di un autovalore)).

Sia $f : V \longrightarrow V$ un'*applicazione lineare* con $\dim V$ finita (Definizione 1 (Definizione 1.1. (applicazione lineare da V a V primo))). Sia $\bar{\lambda} \in K$ un *autovalore* per f (Definizione 1 (Definizione 1.1. (autovalore di un'applicazione lineare)));
allora si definisce il numero

$$\dim_K \operatorname{Aut} \bar{\lambda}$$

come la *molteplicità geometrica* dell'autovalore $\bar{\lambda}$.
A parole questo vuol dire *"il numero di autovettori associati a $\bar{\lambda}$"*.
Inoltre lo denotiamo con

$$m_g(\bar{\lambda})$$

2. Definizione di molteplicità algebrica

#Definizione

Definizione (Definizione 2.1. (molteplicità algebrica di un autovalore)).

Sia $f : V \longrightarrow V$ un'*applicazione lineare* con $\dim V$ finita.
Sia $P_f(\lambda)$ il *polinomio caratteristico* (Polinomio Caratteristico di una Applicazione Lineare > ^3daf01).
Allora, supponendo che $\bar{\lambda}$ sia *autovalore* per f (ovvero $P_f(lam\bar{b}da) = 0$), per il teorema di Ruffini (Teorema 1 (Teorema 1.1. (di Ruffini))) vale che

$$P_f(\lambda) = (\lambda - \bar{\lambda}) \cdot g(\lambda)$$

Definiamo la *molteplicità algebrica* di $\bar{\lambda}$ come il *numero naturale* m per cui si ha

$$P_f(\lambda) = (\lambda - \bar{\lambda})^m \cdot \tilde{g}(\lambda)$$

ove $\lambda - \bar{\lambda}$ *non* divide $\tilde{g}(\lambda)$.
Ovvero a parole la *molteplicità algebrica* di $\bar{\lambda}$ è *"l'esponente più alto associato al valore $\bar{\lambda}$ del polinomio caratteristico linearizzato"*.
Inoltre denotiamo questo con

$$m_a(\bar{\lambda})$$

#Esempio

Esempio 2.1. (esempio)

Sia $P_f(\lambda) = (\lambda - 5)^2 \cdot (\lambda + 1)^3$
Allora $5, -1$ sono *autovalori* per f e la molteplicità algebrica per questi sono rispettivamente $2, 3$.

3. Relazione tra la molteplicità algebrica e geometrica

#Proposizione

Proposizione 3.1. (relazione tra molteplicità algebrica e geometrica)

Sia $f : V \longrightarrow V$ un'*applicazione lineare* con $\dim V$ finita e con λ autovalore per f.
Allora vale che

$$m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$$

#Dimostrazione
DIMOSTRAZIONE della *proposizione 3.1.* (^f9542a)
Omessa.

4. Osservazione finale

#Osservazione

Osservazione 4.1. (osservazione sulla molteplicità algebrica)

Se $f : V \longrightarrow V$ è un'*applicazione lineare* con dimensione finita e chiamo tale dimensione n, allora $P_f(\lambda)$ è un polinomio di grado *esattamente* n.
Pertanto la *somma* delle *molteplicità algebrica* di tutti gli autovalori è *al più* n.

D. TEOREMA DEL CRITERIO DI DIAGONALIZZAZIONE

Teorema del Criterio di Diagonalizzazione

Teorema del Criterio di Diagonalizzazione: osservazione preliminare, enunciato ed esempio.

---

0. Osservazione preliminare

#Osservazione

Osservazione 0.a. (osservazione preliminare)

Supponiamo che $f : V \longrightarrow V$ sia un'*applicazione lineare* con $\dim V = n$ (Definizione 1 (Definizione 1.1. (applicazione lineare da V a V primo))), tale per cui il *polinomio caratteristico* (Polinomio Caratteristico di una Applicazione Lineare > ^3daf01) $P_f(\lambda)$ si scompone nel prodotto di n *fattori lineari* che sono tutti *distinti*; ovvero un polinomio del tipo

$$P_f(\lambda = (\lambda - \alpha_1) \cdot \ldots \cdot (\lambda - \alpha_n); \alpha_1 \neq \ldots \neq \alpha_n$$

Allora $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sono *autovalori* (Definizione 1 (Definizione 1.1. (autovalore di un'applicazione lineare))) in quanto radici del *polinomio caratteristico*.
Per definizione, si verifica che

$$\forall \alpha_i, \exists v_i \neq 0_V : f(v_i) = \alpha_i v_i$$

In questo modo determiniamo tutti gli *autovettori* v_i relativi ad ogni autovalore α_i diverso.
Quindi si evince che $v_1, \ldots, v_n$ sono *linearmente indipendenti* in quanto appartengono ad *autospazi diversi* (Definizione 4 (Definizione 3.1. (autospazio di un autovalore)), Proposizioni su Autospazi > ^529f85).
Pertanto, gli *autovettori* $v_1, \ldots, v_n$ per il *teorema di estensione* (Teorema 2.1. (Teorema del completamento/estensione)) e per il *teorema dello scarto* (Teorema 1.1. (Teorema di estrazione di una base)) saranno in grado di formare una base $\mathcal{B}$ per V.
Pertanto ho una *base di autovettori* per V; ciò significa che f è *diagonalizzabile*.

Inoltre notiamo che la *molteplicità geometrica* (Definizione 1 (Definizione 1.1. (molteplicità geometrica di un autovalore))) di *ogni autovalore* α_i è uguale alla sua *molteplicità algebrica* (Definizione 2 (Definizione 2.1. (molteplicità algebrica di un autovalore))), per la *proposizione 3.1.*

(Molteplicità Geometrica e Algebrica di uno Autovalore > ^f9542a).
Ciò implica che

$$\dim \operatorname{Aut} \alpha_i = 1$$

Inoltre, dato che

$$v_i \in \operatorname{Aut} \alpha_i, v_i \neq 0_V \implies \operatorname{Aut} \alpha_i = \operatorname{span} v_i$$

Questa è *una* situazione della diagonalizzabilità: però ce ne sono altre, e li presentiamo col seguente teorema.

1. Enunciato

#Teorema

Teorema (Teorema 1.1. (del criterio della diagonalizzabilità di un'applicazione lineare)).

Sia $f : V \longrightarrow V$ un'*applicazione lineare* di *dimensione finita*.
Allora f è *diagonalizzabile* se e solo se valgono le seguenti proprietà:

1. Il *polinomio caratteristico* $P_f(\lambda)$ si scompone *completamente* in fattori di *primo grado* (non necessariamente distinti).
2. Per ogni autovalore $\bar{\lambda}$ (ovvero radice del polinomio caratteristico $P_f(\lambda)$), vale la seguente relazione:

$$m_g(\bar{\lambda}) = m_a(\bar{\lambda})$$

Alternativamente si può *"parafrasare"* le due condizioni come il seguente:

1. $$P_f(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \alpha_k)^{m_k}, k \leq n$$
2. $$m_i = \dim \operatorname{Aut} \alpha_i$$

2. Dimostrazione

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *teorema del criterio di diagonalizzazione*
Omessa.

3. Esempio (prototipo di un'esercizio dell'esame)

#Esempio

Esempio 3.1.

Consideriamo il seguente esempio, che sarà un possibile *modello-base* dell'esercizio dell'esame.
Consideriamo la *seguente applicazione lineare* $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con la sua *base canonica* $\mathcal{E}_3$.

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 0y - 3z \\ 0x - y + 0z \\ -3x + 0y + 2z \end{pmatrix}$$

1. Calcolo la matrice associata $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)$

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Considero il polinomio associato $P_f(\lambda)$ e lo pongo a 0

$$\begin{aligned} P_f(\lambda) = 0 \iff \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & -3 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ -3 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} &= 0 \\ (2-\lambda)(-1-\lambda)(2-\lambda) + (-3)(-3)(1-\lambda) &= 0 \\ \ldots &= 0 \\ (\lambda+1)^2(\lambda-5) = 0 \end{aligned}$$

3. Considero lo spettro di f

$$\operatorname{Sp} f = \{-1, 5\}$$

4. Considero la molteplicità algebrica di ogni autovalore

$$m_a(-1) = 2; m_a(5) = 1$$

5. Per determinare se f è diagonalizzabile dobbiamo verificare che

$$\begin{cases} m_a(-1) = 2 \implies m_g(-1) = 2 \\ m_a(5) = 1 \implies m_g(5) = 1 \end{cases}$$

Notiamo che la seconda si verifica da sola gratuitamente: quindi ci resta da determinare se la molteplicità geometrica di -1 è effettivamente 2.

6. Per calcolare $\text{Aut}\,(-1)$ consideriamo

$$(M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) - (-1)\mathbb{1}_3) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Ma, dato che *seconda colonna* di questa matrice è l'*immagine* della *seconda colonna* della base standard (in quanto è la matrice associata a f_{-1}); allora l'immagine di del vettore e_2 è *sempre* base del nucleo di questa matrice.

$$\ker \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \text{span}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$$

Che dimostra

$$\dim \ker(f_{-1}) = 2 \implies m_g(-1) = 2$$

Pertanto per il *teorema del criterio di diagonalizzabilità*, f è *diagonalizzabile*.

Cenni alla Geometria Euclidea - Sommario

Cenni alla Geometria Euclidea.

A. CENNI ALLA GEOMETRIA EUCLIDEA

A1. Prodotto scalare

Prodotto Scalare

Definizione di prodotto scalare e le proprietà del prodotto scalare.

---

0. Voci correlate

- Norma, versore e angolo
- Ortogonalità e ortonormalità

1. Definizione di Prodotto Scalare

#Definizione

Definizione (Definizione 1.1. (prodotto scalare di due vettori)).

Sia V un *spazio vettoriale su* $\mathbb{R}$ (Definizione 1 (Definizione 1.1. (spazio vettoriale sul campo K))) di *dimensione finita*.
In particolare si sceglie $V = \mathbb{R}^n$.
Dati due vettori $v, w \in V$, definiamo il *prodotto scalare* tra v, w come la quantità

$$v \cdot w \text{ oppure } < v, w > := v_1w_1 + v_2w_2 + \ldots + v_nw_n = \sum_{i=0}^{n} v_iw_i$$

#Definizione

Definizione (Definizione 1.2. (funzione prodotto scalare)).

Definiamo in tal modo la *funzione* prodotto scalare, ovvero una del tipo

$$\cdot : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

dove

$$v \cdot w = \sum_{n \leq i \leq 0} v_i w_i$$

2. Proprietà del prodotto scalare

#Proposizione

Proposizione 2.1. (la bilinearità del prodotto scalare)

Il prodotto scalare è *bilineare*, ovvero che valgono le seguenti proprietà:

- $\forall v_1, v_2 \in V, \forall w \in V,$

$$(v_1 + v_2) \cdot w = v_1 \cdot w + v_2 \cdot w$$

- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall v, w \in V,$

$$(\lambda \cdot v) \cdot w = \lambda \cdot (v \cdot w)$$

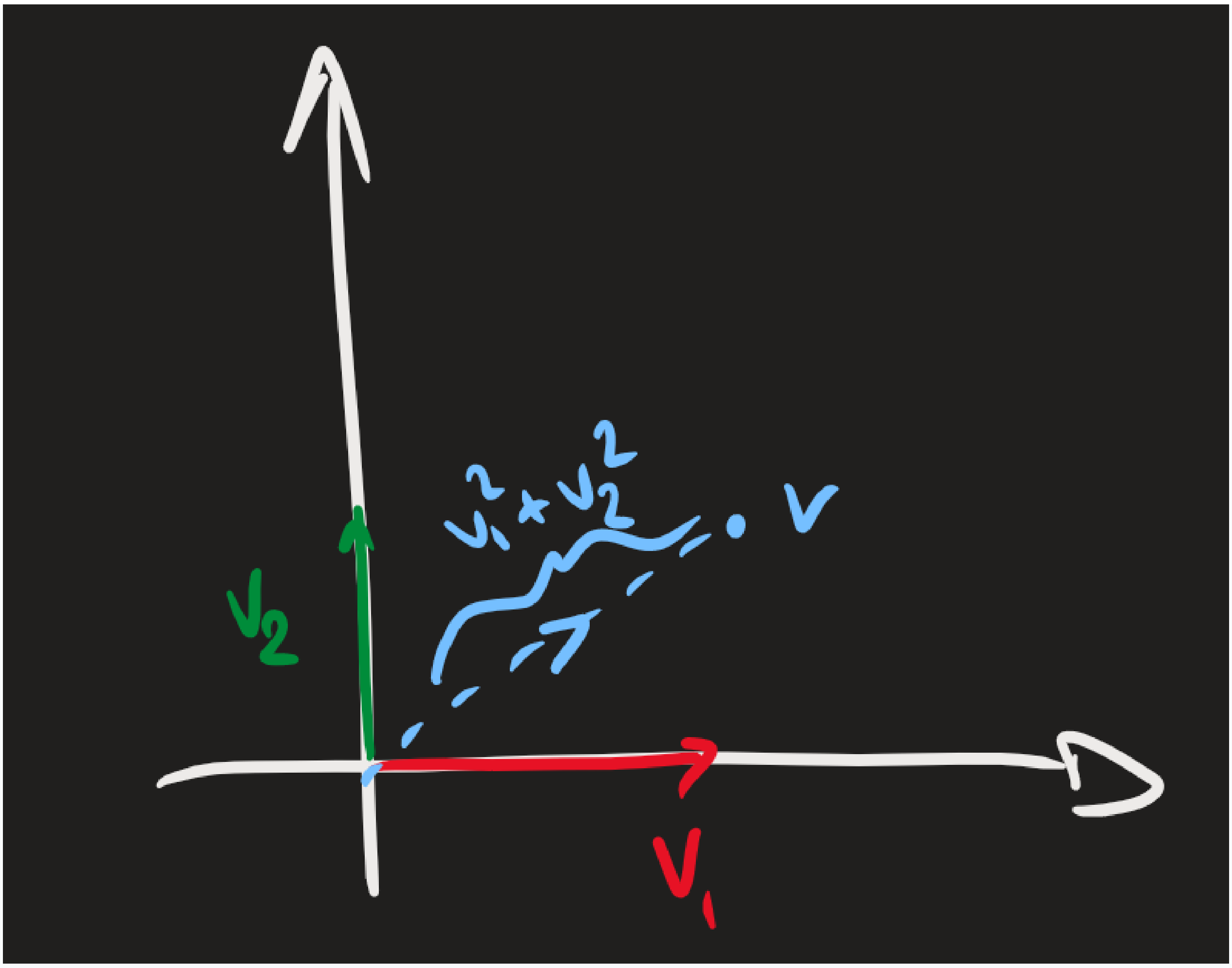
Valgono anche delle analoghe proprietà scambiando v, w.

#Osservazione

Osservazione 2.1. (il prodotto scalare tra due vettori uguali)

Sia un $v \in \mathbb{R}^2, v = (v_1, v_2)$ un vettore.
Allora il prodotto scalare $v \cdot v$ è $v_1^2 + v_2^2$.
Osserviamo che per il *teorema di Pitagora*, questa quantità è proprio la *lunghezza* del vettore v dall'origine $(0, 0)$ (*figura 2.1.*)

FIGURA 2.1. (*Osservazione 2.1.*)



A2. La norma, il versore e l'angolo di due vettori

Norma, versore e angolo

Conseguenze della definizione di prodotto scalare: definizione di norma di un vettore, definizione di versore e definizione di angolo tra due vettori. Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

---

0. Voci correlate

- Prodotto Scalare
- Ortogonalità e ortonormalità
- Teorema spettrale

1. Definizione della norma e del versore

#Definizione

Definizione (Definizione 1.1. (norma di un vettore)).

Sia $v \in \mathbb{R}^n$ un *vettore*.
Definiamo la *norma di* v la quantità

$$||v|| := \sqrt{(v \cdot v)}$$

dove $\cdot$ rappresenta il *prodotto scalare* (Definizione 1 (Definizione 1.1. (prodotto scalare di due vettori))).

#Osservazione

Osservazione 1.1. (la norma è sempre positiva)

Notiamo che per il *dominio della radice quadrata*, la norma di un vettore qualsiasi è *sempre positiva*.

$$||v|| \geq 0, \forall v \in \mathbb{R}^n$$

#Definizione

Definizione (Definizione 1.2. (versore)).

Si definisce un *versore* un vettore $v \in \mathbb{R}^n$ tale che la sua norma sia 1.

$$||v|| = 1$$

2. Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

#Teorema

Teorema (Teorema 2.1. (disuguaglianza di Cauchy-Schwarz)).

Siano v, w dei vettori in $\mathbb{R}^n$. Allora deve necessariamente valere la seguente disuguaglianza:

$$|v \cdot w| \leq ||v|| \cdot ||w||$$

#Corollario

Corollario (Corollario 2.1. (disuguaglianza di Cauchy-Schwarz 2.0)).

Siano $v, w \in \mathbb{R}^n$ diversi dal *vettore nullo* (pertanto la loro norma sarà strettamente positiva).
Allora vale che il *prodotto scalare dei vettori diviso per il prodotto scalare delle norme* è limitato tra $-1, 1$.

$$-1 \leq \frac{v \cdot w}{||v|| \cdot ||w||} \leq 1$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *corollario 2.1.* (Corollario 4 (Corollario 2.1. (disuguaglianza di Cauchy-Schwarz 2.0)))
La dimostrazione del corollario è immediato. Basta considerare la *disuguaglianza triangolare* (Teorema 6 (Teorema 3.3. (la disuguaglianza triangolare))), applicarla sulla *disuguaglianza di Cauchy-Schwarz* (Teorema 3 (Teorema 2.1. (disuguaglianza di Cauchy-Schwarz))) e infine dividere da ambo i lati per $||v|| \cdot ||w||$.

$$\begin{aligned} & |v \cdot w| \leq ||v|| \cdot ||w|| \\ \implies & -(||v|| \cdot ||w||) \leq |v \cdot w| \leq ||v|| \cdot ||w|| \\ \implies & \boxed{-1 \leq \frac{|v \cdot w|}{||v|| \cdot ||w||} \leq 1} \end{aligned}$$

3. Definizione di angolo

#Osservazione

Osservazione 3.1. (la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz e la trigonometria)

Possiamo, in una maniera interessante, collegare la *disuguaglianza di Cauchy Schwarz* (Corollario 4 (Corollario 2.1. (disuguaglianza di Cauchy-Schwarz 2.0))) alle *funzioni trigonometriche* (Definizione 1 (Definizione 1.1. (seno e coseno))), in particolare il *coseno*; infatti sono entrambe *limitate* in $[-1, 1]$.

#Definizione

Definizione (Definizione 3.1. (angolo tra due vettori)).

Siano v, w due vettori *non nulli* in $\mathbb{R}^n$.
Si definisce l'*angolo* di v, w come la quantità $\alpha \in [0, \pi]$

$$\cos \alpha = \frac{v \cdot w}{||v|| \cdot ||w||}$$

#Osservazione

Osservazione 3.2. (condizione necessaria e sufficiente per la perpendicolarità di due vettori)

Si osserva che l'angolo tra due vettori non nulli v, w è $\frac{\pi}{2}$ se e solo se vale il seguente:

$$\frac{v \cdot w}{||v|| \cdot ||w||} = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0 \implies v \cdot w = 0$$

Questa osservazione diventa importante per la definizione di *ortogonalità* (Ortogonalità e ortonormalità).

A3. Ortogonalità di vettori e basi

Ortogonalità e ortonormalità

Definizione di ortogonalità tra due vettori e di una base, ortonormalità di una base di un R-spazio vettoriale. Esempi di basi ortonormali.

---

0. Voci correlate

- Norma, versore e angolo
- Teorema spettrale

1. Condizioni di ortogonalità e di ortonormalità

#Definizione

Definizione (Definizione 1.1. (vettori ortogonali)).

Due vettori $v, w \in \mathbb{R}^n$ si dicono *ortogonali* se si verifica che il loro *prodotto scalare è nullo*.

$$v \cdot w = 0$$

#Osservazione

Osservazione 1.1. (conseguenza geometrica)

Come osservato nell'*osservazione 3.2* sugli angoli (Norma, versore e angolo > ^013add), l'ortogonalità di due vettori è sostanzialmente la codificazione *"algebrica"* della perpendicolarità di due rette.
Infatti due vettori sono ortogonali se e solo se perpendicolari.

#Definizione

Definizione (Definizione 1.2. (base ortogonale)).

Sia $\mathcal{B}$ una *base* di $\mathbb{R}^n$ (Definizione 1.1. (Base)).
Allora $\mathcal{B}$ si dice *ortogonale* se tutti gli *elementi* di tale insieme sono *a due a due* ortogonali tra di loro.

#Definizione

Definizione (Definizione 1.3. (base ortonormale)).

Sia $\mathcal{B}$ una *base* di $\mathbb{R}^n$.
Allora $\mathcal{B}$ si dice *ortonormale* se questa base è *ortogonale* e tutti gli elementi della base $b \in \mathcal{B}$ sono dei *versori* (Definizione 2 (Definizione 1.2. (versore))).

2. Ortogonale di un sottospazio vettoriale

#Definizione

Definizione (Definizione 2.1. (ortogonale di un sottospazio)).

Sia $W \subseteq \mathbb{R}^n$ un *sottospazio vettoriale*.
Si definisce *l'ortogonale di* W come l'insieme formato dai vettori in $\mathbb{R}^n$ tali che questi vettori e ogni vettore di W sia *ortogonale*.

$$W^{\perp} = \{v \in \mathbb{R}^n : \forall w \in W, v \cdot w = 0\}$$

3. Esempi/esercizi misti

#Esempio

Esempio 3.1.

Sia $\mathcal{B}$ il seguente insieme di vettori in $\mathbb{R}^3$.

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\mathcal{B}$ è una base *ortogonale* per $\mathbb{R}^3$.
Infatti i *prodotti scalari* tra il terzo e primo, terzo e secondo elemento sono ovviamente nulli; facendo dei calcoli, lasciati da svolgere al lettore, si verifica che i primi due vettori sono ortogonali.

#Esercizio

Esercizio 3.1.

Dimostrare che la *base canonica* per $\mathbb{R}^n$ per un qualsiasi $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{E}_n = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

è *ortonormale*.

#Esercizio

Esercizio 3.2.

Sia $\mathcal{B}$ una *base ortonormale* per $\mathbb{R}^n$.
Sia definito la *matrice di cambiamento*

$$B = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})$$

Calcolare ${}^tB \cdot B$.

#Esercizio

Esercizio 3.3.

Mostrare che $W^\perp$ è un *sottospazio vettoriale* per $\mathbb{R}^n$.

A4. Il teorema spettrale per le matrici simmetriche

Teorema spettrale

Il teorema spettrale per le matrici simmetriche: enunciato, conseguenze immediate ed esempi.

---

0. Voci correlate

- Definizione di Matrice Diagonale e Applicazione Diagonalizzabile
- Definizione di Autovalore, Autovettore, Autospazio
- Matrice
- Definizione della Matrice associata a un'Applicazione Lineare

1. Enunciato del teorema

#Teorema

Teorema (Teorema 1.1. (spettrale per le matrici simmetriche)).

Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matrice *quadrata simmetrica* (Definizione 7 (Definizione 2.4. (matrice simmetrica e antisimmetrica))).
Allora *esiste sempre* una *base ortonormale di autovettori* per l'applicazione lineare associata alla matrice (Definizione 1 (Definizione 1.1. (trasformazione lineare associata alla matrice))), $L_A(v) = A \cdot v$.

#Corollario

Corollario (Corollario 1.1. (ulteriore criterio di diagonalizzabilità)).

Sia $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ una *matrice associata alla trasformazione lineare* f per il *dominio*.
Se questa matrice è *simmetrica*, allora f è *diagonalizzabile* con una base *ortonormale* $\mathcal{B}$; dunque

$$P = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(\text{id}_{\mathbb{R}}^3) \implies P^{-1} \cdot A \cdot P \text{ diagonale}$$

2. Esempio

#Esempio

Esempio 2.1.

Consideriamo la *matrice simmetrica*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

di cui sappiamo che la sua trasformazione lineare associata L_A è *diagonalizzabile*.

Calcoliamo lo *spettro* di f considerando le *radici del polinomio caratteristico* $p_f(\lambda)$.
... *parte lasciata da svolgere al lettore per esercizio* ...
Dunque abbiamo $\text{sp}\, f = \{-1, 5\}$

Verifichiamo che $m_g(-1) = m_a(-1)$, calcolandone l'autospazio
... *parte lasciata da svolgere al lettore per esercizio* ...
Ora calcoliamo l'autospazio per $\lambda = 5$.
... *parte lasciata da svolgere al lettore per esercizio* ...
Infine abbiamo ottenuto i tre vettori

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

che forma una *base ortonormale* per $\mathbb{R}^3$.

Geometria Affine - Sommario

Tutto sulla Geometria Affine, in particolare la Geometria Affine del piano e dello spazio.

---

0. INTRODUZIONE ALLA GEOMETRIA AFFINE

Introduzione alla Geometria Affine

Breve discorso di introduzione alla Geometria affine

---

0. Voci Correlate

- Spazi Vettoriali
- Vettori Liberi
- Vettori Applicati

1. Breve discordo introduttorio

DI COSA TRATTA LA GEOMETRIA AFFINE? La geometria affine è quel ramo affascinante che si occupa degli oggetti *"dritti"* - *piani* e *rette* - esplorandoli in modo intrigante. In questa esplorazione, attribuiremo a questi oggetti la caratteristica distintiva di essere *"spazi di punti"* e useremo i *"spazi vettoriali"* come dei *spazi di direzioni* (Spazi Vettoriali).

LA DIFFERENZA TRA SPAZI VETTORIALI E SPAZI AFFINI. Come mai non utilizziamo i *spazi vettoriali* direttamente come dei *spazi affini*? In altre parole, come mai non facciamo coincidere questi due concetti?
Questo perché un spazio vettoriale, ad esempio $\mathbb{R}^2$, ha delle proprietà *"extra"* rispetto dello *spazio euclideo*: ovvero l'elemento nullo 0_V, o nel caso di $\mathbb{R}^2$ il *vettore-colonna* $(0,0)$.
Invece in uno spazio euclideo la nozione di *"punto nullo"* non avrebbe senso.

IL PUNTO CRUCIALE. Uno dei punti cruciali di questo studio della geometria affine è lo studio dei *sottospazi affini* e in particolare troveremo due metodi interessanti per *codificarli*: da un lato abbiamo le *equazioni cartesiane*, dall'altro le *equazioni parametriche*.
Vedremo che sono particolarmente interessanti in quanto essi possono presentare collegamenti interessanti con la *statistica* e con l'*informatica*.

A. LO SPAZIO AFFINE

A1. Definizione di Spazio Affine

Definizione di Spazio Affine

Definizione di Spazio Affine: le proprietà caratterizzanti, l'origine del concetto di spazio affine.

---

0. Voci correlate

- Vettori Applicati
- Vettori Liberi
- Spazi Vettoriali

1. Definizione di Spazio Affine

#Definizione

Definizione (Definizione 1.1. (spazio affine)).

Sia V un K-*spazio vettoriale* (Definizione 1 (Definizione 1.1. (spazio vettoriale sul campo K))).
Definiamo un insieme $\mathbb{A}$ come uno *spazio affine su* V nel caso in cui esiste l'*applicazione* σ

$$\sigma : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \longrightarrow V$$

(Inoltre denotiamo l'applicazione σ degli elementi $P, Q \in \mathbb{A}$ come)

$$\sigma(P, Q) = \overrightarrow{PQ}$$

Poi questa applicazione σ deve rispettare i seguenti *criteri* (SA1., SA2.).

- SA1. (l'unicità del vettore di due punti)

$$\forall P \in \mathbb{A}, \forall v \in V, \exists! Q \in \mathbb{A} : v = \overrightarrow{PQ}$$

- SA2. (la somma di due punti è la risultante)

$$\forall P, Q, R \in \mathbb{A}, \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$$

#Definizione

Definizione (Definizione 1.2. (punto di spazio affine)).

Sia $\mathbb{A}$ uno *spazio affine* su V (Definizione 1 (Definizione 1.1. (spazio affine))), allora un qualunque elemento di $\mathbb{A}$ si dice *punto*.

2. Origine del concetto

#Osservazione

Osservazione 2.1. (spazio affine come generalizzazione dei vettori liberi)

Questa definizione di *spazio affine* emerge come *generalizzazione* delle proprietà dei *vettori liberi* (Vettori Liberi > ^d09c32).
Infatti abbiamo visto che questi *vettori liberi* formano uno *spazio vettoriale* (Definizione 1 (Definizione 1.1. (spazio vettoriale sul campo K))), e che per ogni *punto* P e per ogni *vettore libero* v esiste un *vettore applicato* (Vettori Applicati > ^cc8a3c) con punto di applicazione P e *classe di equipollenza* v (Vettori Liberi > ^dc78a7). Geometricamente questo ragionamento viene illustrato nella *figura 2.1.*.
Dopodiché il punto Q che abbiamo determinato è *unico* e vale che le classe di equipollenza del vettore PQ è uguale a v, che è una classe di equipollenza.

$$\overrightarrow{PQ} = v$$

In particolare vale anche la proprietà *SA2.* della definizione di *spazio affine*: se ho *tre punti*, allora posso *"collegare"* solo il punto iniziale e finale, *"saltando"* il punto intermedio (*figura 2.2.*).

FIGURA 2.1. (*Vettore applicato come elemento particolare di un vettore libero*)

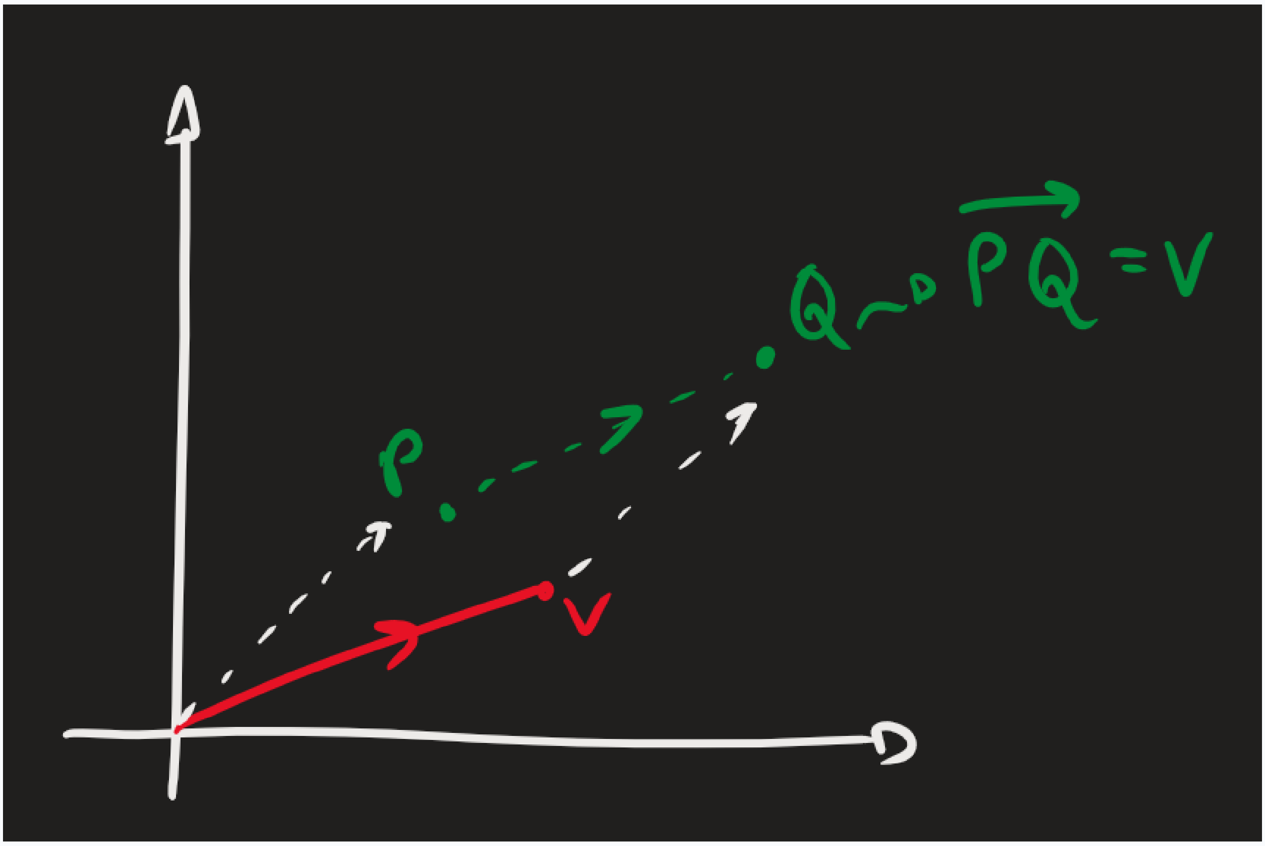
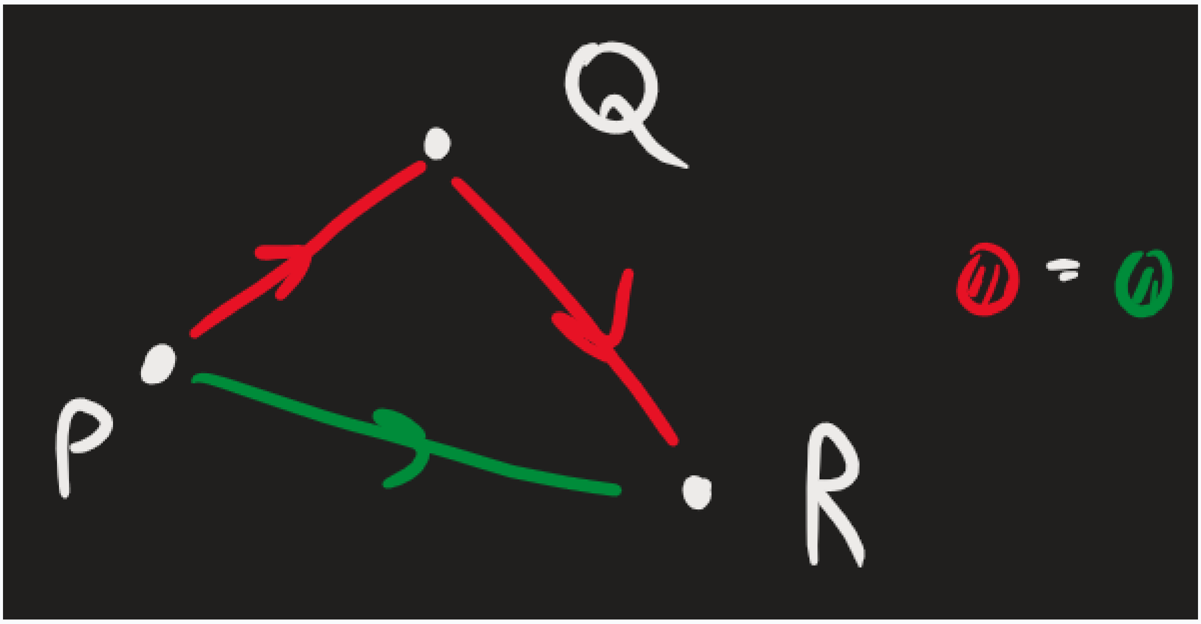


FIGURA 2.2. (*Regola SA2. in termini di vettori applicati*)



A2. Spazio Affine $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$

Spazio Affine su K

Esempio particolare di spazio affine: definizione di spazio affine su K^n, $\mathbb{A}^n_K$

---

0. Prerequisiti e/o voci correlate

- Introduzione alla Geometria Affine
- Definizione di Spazio Affine

1. Definizione particolare di spazio affine su K^n

#Esempio

Definizione (Definizione 1.1. (Esempio particolare $\mathbb{A}^n_K$)).

Si può prendere lo *spazio affine* $\mathbb{A} = K^n$ e scegliere il suo *spazio vettoriale "d'appoggio"* il medesimo (ovvero $V = K^n$): dal discorso introduttorio (Introduzione alla Geometria Affine) ricordiamoci che comunque K^n svolge due ruoli *diversi*! Da un lato abbiamo K^n in quanto *spazio affine*, dall'altro lato abbiamo K^n in quanto *spazio vettoriale*.

Allora quando pensiamo K^n in quanto *spazio affine*, denotiamo i suoi elementi come dei *vettori-riga*; invece quando la pensiamo in quanto *spazio vettoriale*, denotiamo i suoi elementi come dei *vettori-colonna*.

In questo caso la funzione σ di *definizione* che rende K^n uno spazio affine è il seguente.

$$
\begin{aligned}
\sigma : K^n \times K^n &\longrightarrow K^n \\
(P, Q) &\mapsto \overrightarrow{PQ} \\
[(p_1, \ldots, p_n), (q_1, \ldots, q_n)] &\mapsto \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ \vdots \\ q_n - p_n \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Teniamo questa definizione in mente, in quanto questo ci servirà per studiare lo spazio $\mathbb{A}^2_\mathbb{R}$.
Infatti, indicheremo questo tipo di spazio affine con

$$\boxed{\mathbb{A}^n_K}$$

2. Esempio

#Esempio

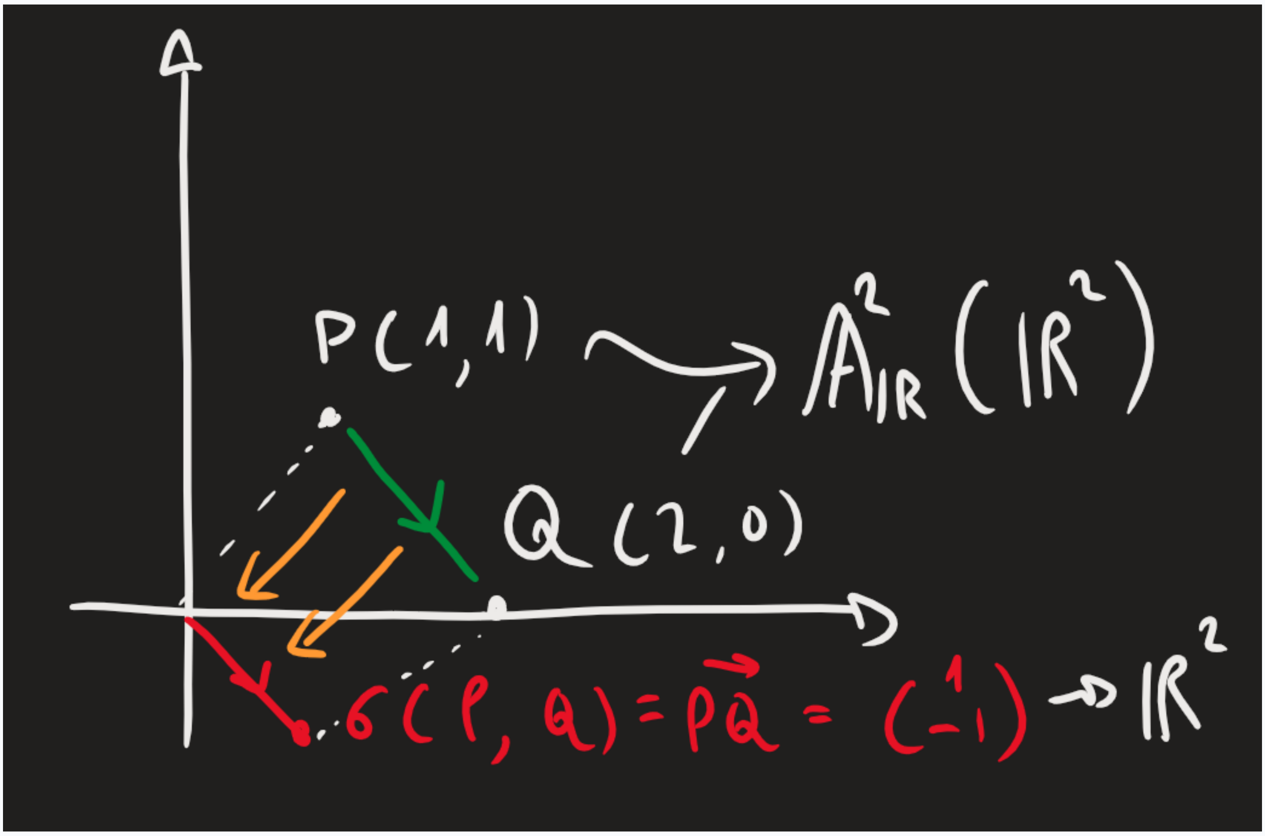
Esempio 1.1. (dello spazio affine $\mathbb{A}^2_\mathbb{R}$)

Consideriamo lo spazio affine $\mathbb{A}^2_\mathbb{R}$.
Prendiamo i punti $P, Q = (1,1), (2,0)$.
Allora in questo caso

$$\sigma(P,Q) = \overrightarrow{(PQ)} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(*figura 3.1.*)

FIGURA 3.1. (esempio dello spazio affine 2D sui reali)



A3. Proprietà dello spazio affine

Proprietà dello Spazio Affine

Lemma di proprietà dello spazio affine, scaturite dalle proprietà di definizione.

---

0. Prerequisiti e/o voci correlate

- Spazi Vettoriali
- Definizione di Spazio Affine

1. Proprietà dello Spazio Affine

#Lemma

Lemma (Lemma 1.1. (di proprietà dello spazio affine)).

Sia $\mathbb{A}$ uno *spazio affine* su V (Definizione 1 (Definizione 1.1. (spazio affine)), Definizione 1 (Definizione 1.1. (spazio vettoriale sul campo K))).
Allora valgono le seguenti proprietà.

$$
\begin{aligned}
&1.\ \forall P \in \mathbb{A}, \sigma(P,P) = \overrightarrow{PP} = 0_V \\
&2.\ \forall P, Q \in \mathbb{A}, \sigma(P,Q) = -\sigma(Q,P) \iff \overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}
\end{aligned}
$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *lemma 1.1.*
Le due proprietà seguono dalle *proprietà di definizione* SA1., SA2. dello *spazio affine* (Definizione 1 (Definizione 1.1. (spazio affine))).

1. Devo mostrare che per ogni *vettore* $v \in V$ vale

$$v + \overrightarrow{PP} = v$$

in quanto il vettore $\sigma(P,P) = 0_V$.
Allora per la *SA1.* della proprietà di definizione, vale che

$$\exists! Q \in \mathbb{A} : v = \overrightarrow{PQ}$$

Ma allora si ha

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PP} = \overrightarrow{PP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PQ} = v$$

2. Devo mostrare la somma

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} = 0_V$$

Ma allora

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} \overset{\text{SA1}}{=} \overrightarrow{PP} = 0_V \blacksquare$$

A4. Dimensione di uno spazio affine

Dimensione di uno Spazio Affine

Definizione di dimensione per uno spazio affine: casi particolari

---

0. Prerequisiti e/o voci correlate

- Dimensione
- Spazi Vettoriali
- Definizione di Spazio Affine

1. Definizione di Dimensione per uno Spazio Affine

#Definizione

Definizione (Definizione 1.1. (dimensione di uno spazio affine)).

Sia $\mathbb{A}$ uno *spazio affine* su V (Definizione 1 (Definizione 1.1. (spazio affine))), sia V un K-*spazio vettoriale* di *dimensione finita* (Definizione 1 (Definizione 1.1. (spazio vettoriale sul campo K)), Definizione 1 (Definizione 1.1. (dimensione di un spazio vettoriale))).
Allora definisco la *dimensione dello spazio affine* $\mathbb{A}$ come la *dimensione del suo spazio vettoriale "di appoggio"* V;

$$\boxed{\dim \mathbb{A} = \dim V}$$

2. Casi particolari

#Definizione

Definizione (Definizione 2.1. (punto, retta, piano e spazio affine)).

Voglio dividere *"casistiche"* in cui ho il numero $\dim \mathbb{A}$ diverse.

1. Se $\dim \mathbb{A} = 0$, parliamo di *punto affine*.
2. Se $\dim \mathbb{A} = 1$, parliamo di *retta affine*.
3. Se $\dim \mathbb{A} = 2$, parliamo di *piano affine*.
4. Se $\dim \mathbb{A} \geq 3$, parliamo di *spazio affine*.

Quindi abbiamo in totale *quattro casi*.

A5. Riferimento affine su uno spazio affine

Riferimento affine su uno Spazio Affine

Definizione di riferimento affine su uno spazio affine; esempio.

---

0. Prerequisiti e/o voci correlate

- Definizione di Spazio Affine
- Definizione di Base
- Spazio Affine su K

1. Definizione di riferimento affine

#Definizione

Definizione (Definizione 1.1. (riferimento affine su uno spazio affine relativo ad una base)).

Sia $\mathbb{A}$ uno *spazio affine* su V (Definizione 1 (Definizione 1.1. (spazio affine))), sia V di *dimensione finita* con $\dim V = n$ (Definizione 1 (Definizione 1.1. (dimensione di un spazio vettoriale))).
Definiamo un *riferimento affine su* $\mathbb{A}$ come la *coppia* $(O, \mathcal{B})$, dove

- $O \in \mathbb{A}$ è un punto che definiamo essere *"l'origine del riferimento affine"*.
- $\mathcal{B}$ è una *base* di V (Definizione 1.1. (Base)).

Allora dato un *riferimento affine* $(O, \mathcal{B})$ e dato un *punto* $P \in \mathbb{A}$, le *coordinate* di P rispetto a $(O, \mathcal{B})$ sono la n-upla (ovvero il *vettore-riga*) $(p_1, \dots, p_n)$ data dalle *coordinate* rispetto alla base $\mathcal{B}$ del vettore $\sigma(O, P)$ (Definizione 1.2. (Coordinate di vettore rispetto alla base)).

2. Esempio con spazio affine su K

#Definizione

Definizione (Definizione 2.1. (riferimento standard / canonico)).

Se consideriamo lo spazio affine $\mathbb{A}^n_{\mathbb{R}}$ (Spazio Affine su K) e il riferimento affine $(O, \mathcal{E})$ dove:

- $O = (0, 0)$
- $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$ è la *base canonica* dove

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Allora il riferimento $(O, \mathcal{E})$ viene definito come il *"riferimento standard/canonico"* di $A^n_{\mathbb{R}}$ e le *coordinate* di un qualsiasi punto rispetto a $(O, \mathcal{E})$ sono dette le *"coordinate standard"*.

#Esempio

Esempio 2.1. (esempio con riferimento canonico)

Considero lo spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ e il *riferimento standard* $(O, \mathcal{E})$.
Allora fissando il punto $P = (3, 1, 2)$ voglio ottenere le sue *coordinate standard* rispetto al *riferimento standard*.
Considero dunque il vettore $\sigma(O, P)$:

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 3 - 0 \\ 1 - 0 \\ 2 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Consideriamo dunque le sue *coordinate* rispetto alla *base standard* $\mathcal{E}$;

$$\overrightarrow{OP} = 3\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Pertanto le *coordinate* di $\sigma(O,P)$, ovvero le coordinate del punto P rispetto al riferimento standard, sono $3,1,2$.

#Esempio

Esempio 2.2. (esempio con riferimento non canonico)

Se avessimo considerato sempre lo stesso punto $P=(3,1,2)\in\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ ma avessimo preso un altro *riferimento affine* $(O',\mathcal{B})$, dove:

- $O'=(1,0,0)$
- La base non standard è

$$\mathcal{B}=\left\{\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}$$

Allora per calcolare le *coordinate* del punto P rispetto al *"nuovo"* riferimento affine si deve comunque prendere in considerazione il vettore $\sigma(O',P)$:

$$\overrightarrow{O'P}=\begin{pmatrix}3-1\\1-0\\2-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$$

Allora in questo caso le *coordinate* di $\sigma(O',P)$ rispetto a $\mathcal{B}$ sono $(1,1,-2)$.

B. LO SOTTOSPAZIO AFFINE

B1. Definizione di sottospazio affine

Definizione di Sottospazio Affine

Definizione di Sottospazio Affine, esempio e definizione di dimensione per sottospazio affine.

---

0. Prerequisiti e/o voci correlate

- Spazi Vettoriali
- Dimensione
- Definizione di Spazio Affine
- Spazio Affine su K

1. Definizione di Sottospazio Affine

#Definizione

Definizione (Definizione 1.1. (sottospazio affine passante per Q e parallelo a W)).

Sia $\mathbb{A}$ uno *spazio affine* su V (Definizione 1 (Definizione 1.1. (spazio affine))) e consideriamo un *punto* $Q \in \mathbb{A}$ e un *sottospazio vettoriale* $W \subseteq V$ (Definizione 1 (Definizione 1.1. (sottospazio vettoriale))).
Definiamo allora il *sottospazio affine passante per Q e parallelo a W* il seguente insieme:

$$\mathbb{S} := \{P \in \mathbb{A} \mid \overrightarrow{QP} \in W\} \subseteq \mathbb{A}$$

Ovvero *"l'insieme di tutti i punti di uno spazio affine tali che l'applicazione σ di un punto qualsiasi e Q stia in W"*.
Inoltre, diciamo che il *sottospazio vettoriale* W è la *giacitura* di $\mathbb{S}$.

2. Esempio su R2

#Esempio

Esempio 2.1. (esempio di sottospazio affine su $\mathbb{A}^2_\mathbb{R}$)

Consideriamo lo *spazio affine* $\mathbb{A}^2_\mathbb{R}$ con $V = \mathbb{R}^2$ (Definizione 1 (Definizione 1.1. (Esempio particolare $\mathbb{A}^n_K$))).
Prendiamo il punto $Q = (2,1)$ e $W = \operatorname{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$.
Allora vogliamo sapere *"chi è lo sottospazio affine $\mathbb{S}$"*.

Scriviamo innanzitutto la definizione dello sottospazio affine e vediamo di *"analizzarlo"*:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{S} &= \{P \in \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} : \overrightarrow{QP} \in W\} \\
&= \left\{(x_1, x_2) : \begin{pmatrix} x_1 - 2 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{span}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \\
&= \left\{(x_1, x_2) : \begin{pmatrix} x_1 - 2 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}\right\} \\
&= \left\{(x_1, x_2) : \begin{pmatrix} x_1 - 2 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}\right\} \\
&= \left\{(x_1, x_2) : \begin{cases} x_1 = 2 + t \\ x_2 = 1 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}\right\}
\end{aligned}
$$

Vedremo in seguito che questa è la *forma parametrica* della descrizione di un *sottospazio vettoriale* e questa ci permette di *"generare"* tutti i possibili punti di $\mathbb{S}$ che vogliamo, ponendo t per un qualsiasi numero.

3. Dimensione di Sottospazio Affine

#Definizione

Definizione (Definizione 3.1. (dimensione di sottospazio affine)).

Sia $\mathbb{A}$ uno *sottospazio affine* su V e sia $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{A}$ un *sottospazio affine* di *giacitura* W.
Diciamo che la *dimensione* (Definizione 1 (Definizione 1.1. (dimensione di un spazio vettoriale))) di $\mathbb{S}$ è la medesima della sua *giacitura* W.

$$\boxed{\dim \mathbb{S} := \dim W}$$

B2. Proprietà dello sottospazio affine

Proprietà dello Sottospazio Affine

Tre proprietà dello sottospazio affine.

---

0. Prerequisiti e/o voci correlate

- Definizione di Sottospazio Affine

1. Le proprietà dello Sottospazio Affine

#Proposizione

Proposizione 1.1. (le tre proprietà dello sottospazio affine)

Sia $\mathbb{A}$ uno *spazio affine* su V (Definizione 1 (Definizione 1.1. (spazio affine))) e sia $\mathbb{S} \subseteq A$ uno *sottospazio affine* di giacitura W passante per Q (Definizione 1 (Definizione 1.1. (sottospazio affine passante per Q e parallelo a W))).
Allora valgono le seguenti proprietà:

1. Il punto Q per cui passa $\mathbb{S}$ appartiene a $\mathbb{S}$ stesso.

$$Q \in \mathbb{S}$$

2. Chiusura (?) di σ in W.

$$\forall P_1, P_2 \in \mathbb{S}, \sigma(P_1, P_2) = \overrightarrow{P_1 P_2} \in W$$

3. Lo sottospazio affine passante per un altro punto di $\mathbb{S}$ è lo stesso.

$$\forall R \in \mathbb{S}, \mathbb{S} = \{P \in \mathbb{A} : \sigma(R, P) \in W\}$$

#Dimostrazione
DIMOSTRAZIONE della *proposizione 1.1.* (^7668d6)

1. Questo è evidentemente vero e sembra addirittura quasi una tautologia;

$$Q \in \mathbb{S} \implies \overrightarrow{QQ} \in W \iff 0_W \in W$$

e questo è palesemente vero in quanto W è *sottospazio vettoriale*.
2. Vogliamo verificare l'implicazione $P_1, P_2 \in \mathbb{S} \implies \sigma(P_1, P_2) \in W$.
Per definizione vale che

$$\overrightarrow{QP_1}, \overrightarrow{QP_2} \in W$$

Allora possiamo riscriverli come

$$\overrightarrow{P_1P_2} \overset{\text{SA2}}{=} \overrightarrow{P_1Q} + \overrightarrow{QP_2} = -\overrightarrow{QP_1} + \overrightarrow{QP_2} \in W$$

3. Devo mostrare la *doppia inclusione*

$$\mathbb{S} = \{P \in \mathbb{A} : \sigma(R,P) \in W\}$$

"$\subseteq$": Sia P un qualsiasi elemento di $\mathbb{S}$; allora per definizione vale che $\sigma(Q,P) \in W$.
D'altro canto abbiamo che $R \in \mathbb{S}$, allora vale pure $\sigma(R,P) \in W$. Pertanto

$$\overrightarrow{RP} \overset{\text{SA2}}{=} \overrightarrow{RQ} + \overrightarrow{QP} = -\underbrace{\overrightarrow{QR}}_{\in W} + \underbrace{\overrightarrow{QP}}_{\in W} \implies \sigma(R,P) \in W$$

"$\supseteq$": Sia $P \in \mathbb{A}$ un punto qualsiasi tale che $\sigma(R,P) \in W$. Dato che $R \in \mathbb{S}$, allora deve valere che $\sigma(Q,R) \in W$. Però possiamo scrivere $\sigma(Q,P)$ come

$$\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RP} \in W$$

ed entrambi appartengono a W, di conseguenza $\sigma(Q,P) \in W$, ovvero $P \in \mathbb{S}$. $\blacksquare$

#Osservazione

Osservazione 1.1. (lo sottospazio affine con giacitura W è spazio affine su W)

Notiamo che se $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{A}$ è *sottospazio affine* con *giacitura* W, allora si può mostrare che $\mathbb{S}$ è *spazio affine* su W.

B3. Definizione di Iperpiano

Iperpiano

Definizione di Iperpiano.

---

0. Prerequisiti e/o voci correlate

- Spazi Vettoriali
- Definizione di Spazio Affine
- Definizione di Sottospazio Affine
- Dimensione di uno Spazio Affine

1. Definizione di Iperpiano

#Definizione

Definizione (Definizione 1.1. (iperpiano di uno spazio affine)).

Sia $\mathbb{A}$ un *spazio affine* su V (Definizione 1 (Definizione 1.1. (spazio affine))), sia $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{A}$ un *sottospazio affine* (Definizione 1 (Definizione 1.1. (sottospazio affine passante per Q e parallelo a W))).
Se vale che

$$\boxed{\dim \mathbb{A} = n \implies \dim \mathbb{S} = n - 1}$$

allora $\mathbb{S}$ si dice *iperpiano*.

#Osservazione

Osservazione 1.1. (iperpiani di spazi affini su K)

Possiamo *"ridefinire"* i punti, le rette e i piani (Definizione 2 (Definizione 2.1. (punto, retta, piano e spazio affine))) in termini di *iperpiani*:

- Un punto è un *iperpiano* di $\mathbb{A}^1_K$;
- Una retta è un *iperpiano* di $\mathbb{A}^2_K$;
- Un piano è un *iperpiano* di $\mathbb{A}^3_K$ in poi.

Le definizioni sono quindi simili.

B4. Posizione reciproca tra sottospazi affini

Posizione Reciproca di Sottospazi Affini

Posizione reciproca tra sottospazi affini: definizione di sottospazi affini incidenti, coincidenti, paralleli e sghembi.

0. Prerequisiti e/o voci correlate

- Definizione di Sottospazio Affine
- Geometria del Piano Affine
- Geometria dello Spazio Affine

1. Sottospazi affini incidenti, coincidenti, paralleli e sghembi

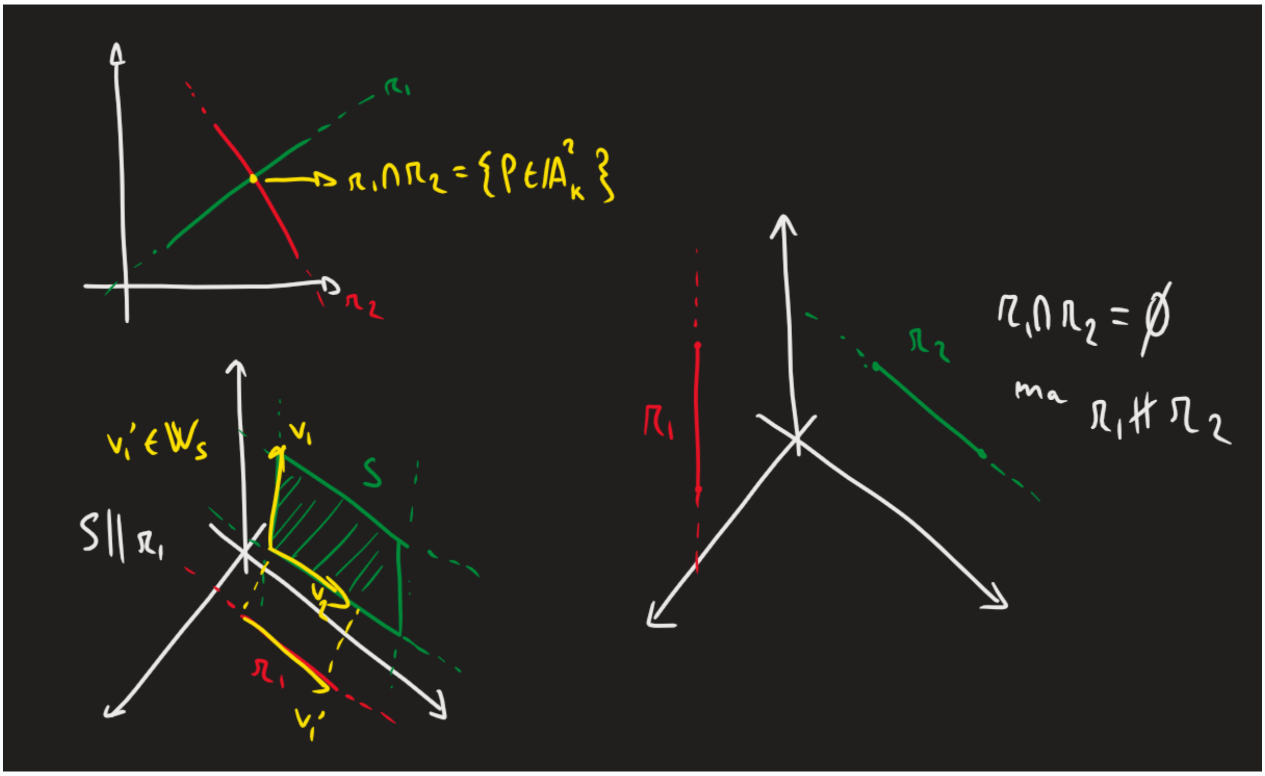
#Definizione

Definizione (Definizione 1.1. (sottospazi affini incidenti, coincidenti, paralleli e sghembi)).

Siano $\mathbb{S}$, $\mathbb{S}'$ dei *sottospazi affini* (Definizione 1 (Definizione 1.1. (sottospazio affine passante per Q e parallelo a W))) di *giacitura* rispettivamente W, W'. Allora $\mathbb{S}, \mathbb{S}'$ si dicono:

- *incidenti* se $\mathbb{S} \cap \mathbb{S}' \neq \emptyset$
  - in particolare *coincidenti* se si verifica che $\mathbb{S} = \mathbb{S}'$
- *paralleli* (e scriviamo $\mathbb{S} \parallel \mathbb{S}'$) se $W \subseteq W'$ o viceversa; in particolare si deve *considerare* la giacitura più *"debole"*, ovvero il sottospazio vettoriale di *dimensione minore*.
  In particolare se hanno la stessa dimensione, dev'essere $W = W'$
- *sghembi* se non sono né *incidenti* né *paralleli*; questo può succedere ad esempio con *due rette* in $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$.

FIGURA 1.1. (*Situazioni grafiche in 2D e 3D*)



C. LA CODIFICAZIONE DI UNO SOTTOSPAZIO AFFINE

C1. Equazioni cartesiane e parametriche di uno sottospazio affine

Definizione di Equazioni Cartesiane e Parametriche di uno Sottospazio Affine

---

Definizione di Equazioni Cartesiane ed Equazioni Parametriche per la codificazione per uno sottospazio affine; teorema preliminare, dimostrazione e definizioni.

---

0. Prerequisiti e/o voci correlate

- Sistemi Lineari
- Teoremi sui Sistemi Lineari (di struttura delle soluzioni per i sistemi lineari arbitrari)
- Definizione di Spazio Affine
- Spazio Affine su K

- Definizione di Sottospazio Affine

1. Teorema preliminare

#Teorema

Teorema (Teorema 1.1. (di codificazione dei sottospazi affini)).

Sia $A \in M_{m,n}(K)$ (Matrice > ^c6b210), $b \in K^m$.
Supponiamo che il *sistema lineare* $Ax = b$ (Definizione 2 (Definizione 1.1. (sistema lineare di m equazioni in n incognite a coefficienti in K))) sia *compatibile* e sia S l'insieme delle *soluzioni* (Definizione 4 (Definizione 1.3. (soluzione di un sistema))).
Allora

$$S = \mathbb{S} \subseteq \mathbb{A}^n_K$$

è uno *sottospazio affine* la cui *giacitura* è il *sottospazio vettoriale* $W \subseteq K^n$ delle *soluzioni* del *sistema lineare omogeneo associato* $Ax = 0$ (Definizione 1 (Definizione 1.1. (sottospazio affine passante per Q e parallelo a W)))
Inoltre,

$$\dim \mathbb{S} = \dim W = n - \operatorname{rg} A$$

#Dimostrazione
DIMOSTRAZIONE del *teorema 1.1.* (Teorema 1 (Teorema 1.1. (di codificazione dei sottospazi affini)))
Questo teorema segue direttamente dal *teorema di struttura per le soluzioni dei sistemi lineari arbitrari* (Definizione 4 (Definizione 1.1. (sistema lineare omogeneo associato))). Infatti *tutte e sole* le soluzioni di $Ax = b$ sono della forma

$$s = \tilde{s} + s_0 \implies s - \tilde{s} = s_0$$

dove $\tilde{s}$ è una *soluzione fissata* di $Ax = b$, invece x_0 è una *soluzione qualsiasi* di $Ax = 0$.
Pertanto se *"interpretiamo"* $\tilde{s} \in K^n$ come un *punto* $Q \in \mathbb{A}^n_K$ e pensiamo ad una soluzione di $AX = b$, come un *altro punto* $P \in \mathbb{A}^n_K$, allora vediamo che i punti $\sigma(Q, P)$ sono del tipo

$$\overrightarrow{QP} = s - \tilde{s} = s_0 \in W \implies \sigma(Q, P) \in W$$

e s_0 appartiene a W, che sarebbe l'insieme delle *soluzioni* di $Ax = 0$. Questo è esattamente la *definizione* di un *sottospazio affine* passante per Q di giacitura W (Definizione 1 (Definizione 1.1. (sottospazio affine passante per Q e parallelo a W))).
In tal caso dal *teorema di dimensione* (Teorema di dimensione delle soluzioni di sistemi lineari) discende che

$$\dim \mathbb{S} = \dim W = n - \operatorname{rg} A \blacksquare$$

2. Definizione di Equazioni Cartesiane e Parametriche

Equazioni Cartesiane

#Definizione

Definizione (Definizione 2.1. (equazioni cartesiane di uno sottospazio affine)).

Sia $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{A}$ un *sottospazio affine "codificata"* dal sistema lineare (in parole più rigorose, $\mathbb{S}$ rappresenta le soluzioni del seguente sistema lineare)

$$Ax = b$$

Allora le *equazioni* del sistema lineare si dicono *equazioni cartesiane* per $\mathbb{S}$, ovvero le equazioni del tipo

$$\boxed{\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}}$$

#Osservazione

Osservazione 2.1.

Se un sistema lineare $Ax = b$ ha come *insieme delle soluzioni* S, allora ogni *sistema lineare equivalente* (Definizione 8 (Definizione 1.7. (sistemi lineari equivalenti))) a $Ax = b$ avrà il *medesimo* insieme S.
Pertanto, applicando le *operazioni elementari* (Algoritmo di Gauß > ^ccc408) a $Ax = b$, otteniamo *altre* equazioni cartesiane per S.
Infatti, questa osservazione diventerà la base dell'*"algoritmo"* del

passaggio dalle equazioni cartesiane a quelle parametriche (Passaggio tra Equazioni Cartesiane e Parametriche di uno Sottospazio Affine).

Equazioni Parametriche

#Osservazione

Osservazione 2.2. (osservazione preliminare per la definizione di equazioni parametriche)

Sia ora $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{A}_K^n$ un *sottospazio affine* passante per $Q \in \mathbb{A}_K^n$ e di *giacitura* $W \subseteq K^n$. Supponiamo che W è generata dalla *base* (Definizione 1.1. (Base)) $w_1, \ldots, w_k$; ovvero $W = \operatorname{span}(w_1, \ldots, w_k)$.
Allora possiamo scrivere ogni *elemento* della base come *elemento* di K^n:

$$w_1 = \begin{pmatrix} w_{11} \\ \vdots \\ w_{n1} \end{pmatrix}, \ldots, w_k = \begin{pmatrix} w_{1n} \\ \vdots \\ v_{nk} \end{pmatrix}, \forall w_{ij} \in K$$

Allora per *definizione* se $Q = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{A}_K^n$, i punti $P = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{A}_K^n$ di $\mathbb{S}$ sono *tutti e soli* punti che soddisfano $\sigma(Q, P) \in W$.
Riscriviamo quindi questa condizione utilizzando i termini che abbiamo appena introdotto.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{QP} \in W \iff & \begin{pmatrix} x_1 - q_1 \\ \vdots \\ x_n - q_n \end{pmatrix} \in W \\ \iff & \begin{pmatrix} x_1 - q_1 \\ \vdots \\ x_n - q_n \end{pmatrix} = t_1 w_1 + \ldots + t_k w_k, t_i \in K \\ \iff & \begin{pmatrix} x_1 - q_1 \\ \vdots \\ x_n - q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 w_{11} + \ldots + t_k w_{1k} \\ \vdots \\ t_1 w_{n1} + \ldots + t_k w_{nk} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

In definitiva abbiamo il *sistema di equazioni*

$$\begin{cases} x_1 = q_1 + t_1 w_{11} + \ldots + t_k w_{1k} \\ \vdots \\ x_n = q_n + t_1 w_{n1} + \ldots + t_k w_{nk} \end{cases}$$

#Definizione

Definizione (Definizione 2.2. (equazioni parametriche per uno sottospazio affine)).

Sia $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{A}$ uno *sottospazio affine* di giacitura W e passante per Q. Sia la base di W generata dai vettori $w_1, \ldots, w_k \in V$. Sia Q il punto $(q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{A}$. Allora il seguente sistema di equazioni si dice *equazioni parametriche per uno sottospazio affine con k parametri*.

$$\boxed{\begin{cases} x_1 = q_1 + t_1 w_{11} + \ldots + t_k w_{1k} \\ \vdots \\ x_n = q_n + t_1 w_{n1} + \ldots + t_k w_{nk} \end{cases}}$$

dove t_i sono detti *parametri*.

3. Pro e Contro

#Osservazione

Osservazione 3.1. (vantaggi e svantaggi delle due forme)

Vediamo che abbiamo due *forme* distinte per *"codificare"* un *sottospazio affine*; entrambi di essi hanno i suoi vantaggi e svantaggi.
Nel caso delle *equazioni parametriche* possiamo facilmente generare punti dello sottospazio, quindi possiamo mediante *gli strumenti dell'informatica* generare una *visualizzazione grafica* dello sottospazio affine inserendo valori di t a piacimento; tuttavia se invece vogliamo verificare che un *punto specifico* appartenga ad uno sottospazio affine, allora si dovrebbe *"provare"* tutti i valori t.
Però saremmo facilitati con le *equazioni cartesiane* a questo fine: basta inserire i valori numerici del punto per verificare se esso appartenga o meno al sottospazio affine.

Questa distinzione vale anche per gli oggetti algebrici!

4. Conseguenze di queste forme

#Osservazione

Osservazione 4.1. (un sottospazio affine è descritto da $n-k$ equazioni cartesiane)

Da quanto visto, un *sottospazio affine* $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{A}_K^n$ di *dimensione* k (Definizione 2 (Definizione 3.1. (dimensione di sottospazio affine))) è *sempre* descritto da $n-k$ *equazioni cartesiane* (Definizione 2 (Definizione 2.1. (equazioni cartesiane di uno sottospazio affine))), data la sua definizione.
In particolare un *retta* in $\mathbb{A}_K^2$ è descritta da *una sola* equazione cartesiana; invece in $\mathbb{A}_K^3$ verrebbe descritta da *due* equazioni cartesiane.

#Osservazione

Osservazione 4.2. (ogni iperpiano è descritta da una sola equazione)

Sia $\mathbb{S} in \mathbb{A}_K^n$ un *iperpiano* (Definizione 1 (Definizione 1.1. (iperpiano di uno spazio affine))), ovvero un *sottospazio affine* di dimensione $n-1$.
Allora come visto sopra, $\mathbb{S}$ è descritta da $n-(n-1)=1$ *equazione cartesiana*.
Viceversa, ogni volte che imponiamo un'*equazione non banale* (ovvero non del tipo $0=0$) allora determiniamo un *iperpiano* in $\mathbb{A}_K^n$; in altre parole *ogni* iperpiano di $\mathbb{A}_K^n$ è descritta da un'equazione del tipo

$$\boxed{a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n=d}$$

#Osservazione

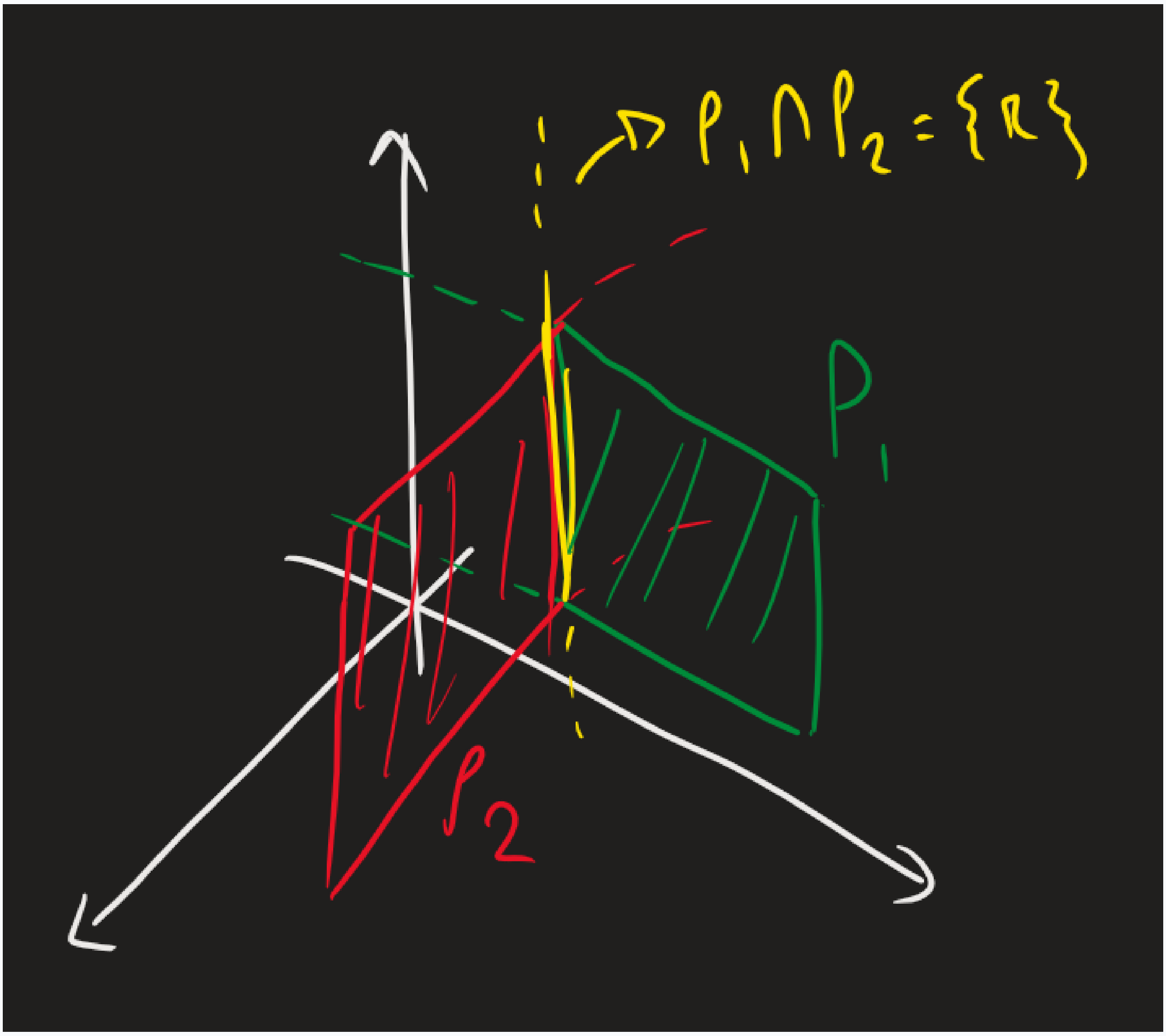
Osservazione 4.2. (una retta è determinata da due equazioni nello spazio)

Come vedremo nella *geometria dello spazio affine* (Geometria dello Spazio Affine), una *retta* in $\mathbb{A}_\mathbb{R}^3$ è descritta da un *sistema di equazioni* del tipo

$$\boxed{\begin{cases} a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=d_1 \\ b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3=d_3 \end{cases}}$$

Graficamente questo significa *"l'intersezione di due piani distinti forma una retta nello spazio"*.

FIGURA 4.2. (*OSS 4.2.*)



C2. Passaggio tra equazioni cartesiane e parametriche

Passaggio tra Equazioni Cartesiane e Parametriche di uno Sottospazio Affine

---

Passaggio tra equazione cartesiana a parametrica (e viceversa) di uno sottospazio affine.

---

0. Prerequisiti e/o voci correlate

1. Da cartesiana a parametrica

#Proposizione

Proposizione 1.1. (algoritmo di passaggio da equazione cartesiane a parametriche)

Sia $Ax = b$ un *sistema lineare* (Definizione 2 (Definizione 1.1. (sistema lineare di m equazioni in n incognite a coefficienti in K))) che *esprime* le *equazioni cartesiane* (Definizione 2 (Definizione 2.1. (equazioni cartesiane di uno sottospazio affine))) di un *sottospazio affine* (Definizione 1 (Definizione 1.1. (sottospazio affine passante per Q e parallelo a W))).

Allora per trovare le *equazioni parametriche* di questo *sottospazio affine* è sufficiente considerare il *teorema di struttura delle soluzioni per i sistemi lineari* (Definizione 4 (Definizione 1.1. (sistema lineare omogeneo associato))): ovvero si tratta prima di determinare una *soluzione particolare* $\tilde{s}$ risolvendo $Ax = b$, e poi determinando l'insieme delle soluzioni W di $Ax = 0$; essendo W lo *span* (Combinazione Lineare) di alcuni vettori, allora avremo dei parametri liberi che chiameremo $t_1, \ldots, t_n$.

Infine un *qualunque elemento* della soluzione di $Ax = b$ è un *elemento* dello *sottospazio affine* (Teorema 1 (Teorema 1.1. (di codificazione dei sottospazi affini))): pertanto si avrà un *sistema di equazioni* con delle variabili libere arbitrarie, che è esattamente la nozione di *equazioni parametriche*.

#Esempio

Esempio 1.1.

Si consideri il seguente esempio.

$$S : \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 1 \\ 6x_1 - 4x_2 = 2 \end{cases}$$

Per il *teorema di Rouché-Capelli* (Teorema di Rouché-Capelli), questo *sistema lineare* è compatibile. Calcoliamo dunque la sua generica soluzione s.

In primo luogo determiniamo il *numero di equazioni* necessarie per descrivere il sottospazio, calcolando $\dim S = \dim W = 2 - rg(A) = 1$
Allora S è una *retta* e la sua sola equazione cartesiana è

$$\{3x_1 - 2x_2 = 1$$

Ora, considerando il *teorema di struttura delle soluzioni di un sistema lineare qualsiasi*, sappiamo che $s = s_0 + \tilde{s}$.
Teniamo la *soluzione particolare*

$$\tilde{s} \overset{x_1=0}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Ora calcoliamo il sottospazio delle soluzioni s_0;

$$3x_1 - 2x_2 = 0 \implies 3x_1 = 2x_2 \implies \{s_0\} = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}\right)$$

Pertanto le equazioni parametriche di S sono

$$S : \begin{cases} x_1 = 2t \\ x_2 = 3t - \frac{1}{2} \end{cases}$$

2. Da parametrica a cartesiana

#Proposizione

Proposizione 2.1. (algoritmo di passaggio da equazioni parametriche a cartesiane)

Supponiamo di avere le seguenti *equazioni parametriche* (Definizione 3 (Definizione 2.2. (equazioni parametriche per uno sottospazio affine))) per un *sottospazio affine* $S \subseteq \mathbb{A}^n_K$, ovvero un sistema del tipo

$$\begin{cases} x_1 - q_1 = t_1 w_{11} + \ldots + t_k w_{1k} \\ \vdots \\ x_n - q_n = t_1 w_{n1} + \ldots + t_k w_{nk} \end{cases}$$

Queste valgono *se e solo se* i vettori $x_i - q_i$ sono *combinazioni lineari* della *base* di W, ovvero $w_1, \ldots, w_k$; allora questo vale se e solo se i vettori

$$\left\{ w_1, \ldots, w_k, \begin{pmatrix} x_1 - q_1 \\ \vdots \\ x_n - q_n \end{pmatrix} \right\}$$

sono *linearmente dipendenti* (Definizione 1 (Definizione 1.1. (dipendenza lineare di vettori))): questo vale *se e solo se* la matrice completa del sistema ha rango k; infatti il *rango minimo* dev'essere k in quanto $w_1, \ldots, w_k$ sono *linearmente indipendenti* in quanto elementi della base, ma il *rango massimo* dev'essere anche k dato che abbiamo *un vettore linearmente dipendente*.

In altre parole, bisogna imporre la condizione

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} w_{11} & \ldots & w_{1k} & x_1 - q_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ w_{n1} & \ldots & w_{nk} & x_n - q_n \end{pmatrix} = k$$

Allora usiamo il *teorema di caratterizzazione del rango* (Teoremi su Rango > ^9290df): prima gradinizziamo la matrice $(A|b)$ mediante *l'algoritmo di Gauß* (Algoritmo di Gauß), dopodiché imponiamo le ultime $n-k$ righe nulle. Ovvero, avremmo una matrice del tipo

$$\begin{pmatrix} * & | & * \\ 0 & | & \boxed{*} \end{pmatrix}$$

Infatti imponiamo le equazioni che troviamo nella parte segnata uguale a 0. Così troviamo le *equazioni cartesiane* per S.

#Esempio

Esempio 2.1.

Si consideri il seguente esempio.
Abbiamo in $\mathbb{A}^2_\mathbb{R}$ il *sottospazio affine* S dei punti $P : (x, y)$ con le *equazioni parametriche*

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2 + t \end{cases} \equiv \begin{pmatrix} x \\ y - 2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Allora per ottenere le equazioni cartesiano e considero la *matrice completa* e lo gradinizzo mediante *l'algoritmo di Gauß*

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 1 & y-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y-2-x \end{pmatrix}$$

Ora dobbiamo imporre che $rg(A|b) = 1$, ovvero $y-2-x=0$.
In definitiva, l'equazione cartesiana ottenuta è l'unica equazione

$$y = x + 2$$

che ha senso, dato che $\dim S = \dim \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 1$.

D. LA GEOMETRIA DEL PIANO E DELLO SPAZIO AFFINE

D1. La geometria del piano affine 2D

Geometria del Piano Affine

Cenni alla geometria del piano affine: tutti i sottospazi affini possibili; le rette nel piano, equazioni cartesiane e parametriche; generare retta da due punti; condizioni di coincidenza e parallelismo per due rette.

---

0. Prerequisiti e/o voci correlate

- Definizione di Sottospazio Affine
- Definizione di Equazioni Cartesiane e Parametriche di uno Sottospazio Affine
- Passaggio tra Equazioni Cartesiane e Parametriche di uno Sottospazio Affine
- Posizione Reciproca di Sottospazi Affini

1. I sottospazi del Piano

#Definizione

Definizione (Definizione 1.1. (punto, retta e piano)).

Sia $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ un *spazio affine* (Definizione 1 (Definizione 1.1. (Esempio particolare $\mathbb{A}^n_K$))).
Allora, prendendo un *sottospazio affine* S tale che $\dim S \leq 2$, ho *tre* possibilità:

1. $\dim S = 0$; allora S rappresenta un *punto* del piano.
2. $\dim S = 1$; allora S è una *retta*.
3. $\dim S = 2$; allora S *coincide* con il suo spazio affine $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$.

In questa pagina ci concentreremo particolarmente sulle *rette*.

2. Equazioni parametriche e cartesiane per le rette

#Teorema

Teorema (Teorema 2.1. (equazioni parametriche e cartesiane per le rette sul piano)).

Sia S una *retta* su $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$, passante per $Q = (q_1, q_2)$ e di giacitura $W = \text{span}(\begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix})$.
Allora S può essere rappresentate mediante le seguenti forme:

1. *Equazione parametrica* (Definizione 3 (Definizione 2.2. (equazioni parametriche per uno sottospazio affine)))

$$\boxed{S : \begin{cases} x = q_1 + tl \\ y = q_2 + tm \end{cases}}, t \in \mathbb{R}$$

2. *Equazione cartesiana*

$$\boxed{S : m(x - q_1) = l(y - q_2)}$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *teorema 2.1.* (Teorema 2 (Teorema 2.1. (equazioni parametriche e cartesiane per le rette sul piano)))

1. *Equazione parametrica*
   Per generare l'equazione parametrica è sufficiente considerare il *teorema di struttura delle soluzioni di un sistema lineare arbitrario* (Definizione 4 (Definizione 1.1. (sistema lineare omogeneo associato))). Infatti, consideriamo S come l'insieme dei punti $P=(x,y)$ che rappresentano una soluzione del tipo $s=\tilde{s}+s_0$, dove $\tilde{s}$ viene *"rappresentata"* dai punti di Q e s_0 da W.
2. *Equazione cartesiana*
   Se un punto generico $P=(x,y)$ appartiene a S, allora (x,y) è *soluzione* all'equazione parametrica

$$S:\begin{cases} x=q_1+tl \\ y=q_2+tm \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Ovvero, svolgendo delle manipolazioni abbiamo

$$S:\begin{cases} x-q_1=tl \\ y-q_2=tm \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Allora il punto $(x-q_1, y-q_2)$ è soluzione del sistema, quindi *linearmente dipendente* dal vettore $\begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix}$.
Ora consideriamo la matrice completa

$$A=\begin{pmatrix} l & x-q_1 \\ m & y-q_2 \end{pmatrix}$$

Per definizione il *rango* dev'essere necessariamente $\operatorname{rk} A=1$. Ma allora, per il *teorema di Rouché-Capelli* e delle considerazioni ulteriori sul nesso tra rango e determinante di una matrice (Teoremi su Rango > ^4dbbdd), il *determinante* $\det A$ dev'essere nullo.
Ovvero, per *definizione* del *determinante* di una matrice $M_2(\mathbb{R})$, abbiamo l'equazione

$$m(x-q_1)-l(y-q_2)=0 \implies m(x-q_1)=l(y-q_2) \blacksquare$$

3. Determinare equazioni per le rette dati due punti

#Osservazione

Osservazione 3.1. (richiamo dalla geometria elementare)

Dalla *geometria elementare euclidea* sappiamo che per due *punti distinti* nel *piano* passa *una ed una sola* retta. Graficamente, questo enunciato è

banale; infatti, possiamo collegare due punti distinti con una *"riga dritta"* in un unico modo.
Però ora vediamo di procedere con un *enunciato rigoroso*, seguito da una *dimostrazione rigorosa*.

#Teorema

Teorema (Teorema 3.1. (equazione parametrica e cartesiana della retta tra due punti distinti)).

Siano Q, R *punti distinti* nel *piano* $\mathbb{A}^2_\mathbb{R}$.
Ovvero, siano $Q = (q_1, q_2)$ e $R = (r_1, r_2)$, con $q_1 \neq r_1 \wedge q_2 \neq r_2$.
Allora la *retta* $S \subset \mathbb{A}^2_\mathbb{R}$ è determinata dalla seguente equazione parametrica:

$$\boxed{S : \begin{cases} x = q_1 + (r_1 - q_1)t \\ y = q_2 + (r_2 - q_2)t \end{cases}}$$

In particolare, S è determinata anche dalla seguente equazione cartesiana:

$$\boxed{S : (x - q_1)(r_2 - q_2) = (r_1 - q_1)(y - q_2)}$$

Inoltre se sussiste che $r_1 - q_1 \neq 0$, allora l'equazione cartesiana è equivalente a

$$\boxed{S : y = q_2 + \frac{r_2 - q_2}{r_1 - q_1}(x - q_1)}$$

#Osservazione

Osservazione 3.1. (il significato della condizione supplementare per l'equazione cartesiana)

Notiamo che possiamo ottenere l'equazione cartesiana più *"elegante"* se è vera la condizione per cui $r_1 - q_1 \neq 0$.
Questa condizione, in termini geometrici, vuol dire che la *retta* passante per i due punti non è *verticale*; infatti, $r_1 - q_1 \neq 0 \implies r_1 \neq q_1$.
Allora, ciò significa che Q, R *non* sono verticalmente allineati.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *teorema 3.1.* (Teorema 3 (Teorema 3.1. (equazione

parametrica e cartesiana della retta tra due punti distinti)))
Partiamo considerando che se S è la retta che contiene sia Q, R, allora per definizione vale che $Q \in S \wedge R \in S$.
Ora calcoliamo il *vettore* $\sigma(Q, R)$. Sicuramente questo vettore soddisfa la seguente proprietà:

$$\sigma(Q, R) = \overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix} r_1 - q_1 \\ r_2 - q_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Infatti questo vale per le *ipotesi iniziali*.
Quindi $\sigma(Q, R)$ è il *"vettore di direzione"* che *"collega"* i punti Q, R, ovvero la giacitura di S.
Così abbiamo abbastanza informazioni per ottenere le equazioni *cartesiane* e *parametriche* con le formule date nel *teorema 2.1.* (Teorema 2 (Teorema 2.1. (equazioni parametriche e cartesiane per le rette sul piano))). ■

4. Condizioni di incidenza e di parallelismo per due rette

#Osservazione

Osservazione 4.1. (richiamo dalla geometria euclidea)

Dalla *geometria elementare* ci ricordiamo che, se ho due rette allora ho le seguenti possibilità: che siano *parallele*, *coincidenti* o *incidenti*.
In particolare, sono *parallele* se e solo se le rette sono *identiche* o *non hanno punti in comune*; sono *incidenti* se hanno un solo punto in comune.
Però, ora vediamo di *"tradurre"* questo postulato in termini nostri.
Effettuiamo questa transizione dalla *geometria elementare* alla formulazione *affine* della geometria.

#Teorema

Teorema (Teorema 4.1. (condizioni di parallelismo e di incidenza per due rette)).

Siano $r, s \subset \mathbb{A}^2_\mathbb{R}$ due *rette*, rispettivamente passanti per (q_1, q_2) e (q'_1, q'_2) e di giacitura $W = \operatorname{span} \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix}$, $W' = \operatorname{span} \begin{pmatrix} l' \\ m' \end{pmatrix}$.
Allora r, s sono *parallele* se e solo se hanno la *stessa giacitura*, in particolare *non* sono coincidenti se il sistema lineare

$$\begin{cases} lt - l'\tau = q_1' - q_1 \\ mt - m'\tau = q_2' - q_2 \end{cases}$$

è *incompatibile*.

$$\boxed{\operatorname{rg}\begin{pmatrix} l & -l' \\ m & -m' \end{pmatrix} \neq \operatorname{rg}\begin{pmatrix} l & -l' & q_1' - q_1 \\ m & -m' & q_2' - q_2 \end{pmatrix}}$$

Inoltre r, s sono *incidenti* (ma *non coincidenti*) se e solo se il sistema lineare

$$\begin{pmatrix} l & -l' \\ m & -m' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1' - q_1 \\ q_2' - q_2 \end{pmatrix}$$

ha la sua *matrice dei coefficienti* rango massimo (2), ovvero *compatibile con un'unica soluzione*.

$$\boxed{\operatorname{rg}\begin{pmatrix} l & -l' \\ m & -m' \end{pmatrix} = 2}$$

#Osservazione

Osservazione 4.2. (la generalizzazione del concetto di parallelismo e di incidenza)

Notiamo che queste condizioni di *parallelismo* e di *incidenza* non sono altro che una *generalizzazione* del concetto delle *posizioni reciproche tra sottospazi* (Posizione Reciproca di Sottospazi Affini), in questo caso abbiamo applicato queste definizioni allo spazio affine $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$.

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *teorema 4.2.* (Teorema 4 (Teorema 4.1. (condizioni di parallelismo e di incidenza per due rette)))

- *Condizioni di parallelismo*
  Partiamo dal presupposto che $r \neq s$ (infatti altrimenti la dimostrazione sarebbe banale; se le rette sono le stesse, allora sono coincidenti, ergo paralleli) e che *non* abbiamo punti in comune.
  Allora r, s hanno *equazioni parametriche* del tipo

$$r : \begin{cases} x = q_1 + lt \\ y = q_2 + mt \end{cases} ; s : \begin{cases} x = q_1' + l'\tau \\ y = q_2' + m'\tau \end{cases}$$

Osserviamo che dire r, s *non hanno punti in comune* equivale a dire che *non esistono* $\bar{t}, \bar{\tau}$ tali che

$$\begin{cases} q_1 + l\bar{t} = q_1' + l'\bar{\tau} \\ q_2 + m\bar{t} = q_2' + m'\bar{\tau} \end{cases} \implies \begin{cases} l\bar{t} - l'\bar{\tau} = q_1' - q_1 \\ m\bar{t} - m'\bar{\tau} = q_2' - q_2 \end{cases}$$

Ma allora se *non esistono* tali coefficienti, allora ciò equivale a dire che il sistema lineare appena costruito è *incompatibile*.
Ma allora per il *teorema di Rouché-Capelli* (Teorema 1 (Teorema 1.1. (di Rouché-Capelli))), il rango della *matrice dei coefficienti* e della *matrice completa* devono essere diversi.
Dato che nessuna di queste matrici è la matrice nulla, il rango dev'essere di minimo 1. Ma al massimo il rango può essere 2 per A, o 2 per $A|b$; pertanto l'unica possibilità è che

$$\operatorname{rg} A = 1; \operatorname{rg}(A|b) = 2$$

Ma allora se la matrice dei coefficienti

$$A = \begin{pmatrix} l, -l' \\ m, -m' \end{pmatrix}$$

ha *rango* 1, allora i due *vettori-colonna* devono essere linearmente dipendenti. Ma allora se sono linearmente dipendenti, il loro span devono essere gli stessi.
Pertanto,

$$\operatorname{span} \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} = \operatorname{span} \begin{pmatrix} l' \\ m' \end{pmatrix} \implies W = W'$$

- *Condizioni di incidenza*
  Ora consideriamo il caso in cui r, s sono *distinte tra di loro* e *non parallele*.
  Ovvero, supponendo che $W \neq W'$, ovvero i vettori

  $$\begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} l' \\ m' \end{pmatrix}$$

  sono *linearmente indipendenti*. Inoltre notiamo che ovviamente da ciò discende che

  $$\begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -l' \\ -m' \end{pmatrix}$$

  sono *linearmente indipendenti*.
  Ora, come fatto prima, consideriamo il sistema lineare nelle variabili t, τ e

capiamo se questa è *compatibile* o meno.

$$\begin{pmatrix} l & -l' \\ m & -m' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1' - q_1 \\ q_2' - q_2 \end{pmatrix}$$

Dato che i vettori-colonna della matrice dei coefficienti sono *linearmente indipendenti*, abbiamo che il suo rango è *massimo*: pertanto, per il *teorema di caratterizzazione del rango* (Teoremi su Rango > ^4dbbdd) questa è *invertibile*; pertanto per il *teorema di Cramer* (Teorema 1 (Teorema 1.1. (di Cramer))) questo sistema ammette un'*unica soluzione*, che è data dalla sua *inversa* moltiplicata per i coefficienti b.

5. Esercizi misti

#Esercizio

Esercizio 5.1.

Siano Q, P i punti $(1,0)$ e $(3,4)$. Trovare la retta S passante per Q, R, sia in forma parametrica che cartesiana.

D2. La geometria dello spazio affine 3D

Geometria dello Spazio Affine

Geometria dello Spazio Affine: tutti i sottospazi possibili; equazioni per la retta nello spazio; determinare una retta nello spazio da due punti; equazioni del piano; determinare un piano da tre punti non allineati; determinare se tre punti sono allineati o meno; condizioni di coincidenza e di parallelismo per le rette e gli spazi; condizioni di complanarità tra due rette

---

0. Prerequisiti e/o voci correlate

- Definizione di Sottospazio Affine
- Definizione di Equazioni Cartesiane e Parametriche di uno Sottospazio Affine
- Passaggio tra Equazioni Cartesiane e Parametriche di uno Sottospazio Affine

- Posizione Reciproca di Sottospazi Affini

1. I sottospazi dello Spazio

#Definizione

Definizione (Definizione 1.1. (punto, retta, piano)).

Sia $S \subseteq \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ un *sottospazio affine* (Definizione 2 (Definizione 3.1. (dimensione di sottospazio affine))), allora S può essere identificata con una delle seguenti:

- $\dim S = 0$; S si dice *punto*;
- $\dim S = 1$; S si dice *retta*;
- $\dim S = 2$; S si dice *piano*;
- $\dim S = 3$; allora S è il spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ stesso.

2. Equazioni della retta nello spazio

#Teorema

Teorema (Teorema 2.1. (equazioni parametriche e cartesiane della retta nello spazio)).

Sia $S \subseteq \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ una *retta* (ovvero con $\dim S = 2$), passante per il punto $Q = (q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ e di giacitura $W = \operatorname{span}\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$.

Allora abbiamo le seguenti equazioni parametriche e cartesiane per descrivere S;

- *Equazioni parametriche*

$$\boxed{\begin{cases} x = q_1 + lt \\ y = q_2 + mt \\ z = q_3 + nt \end{cases}}$$

- *Equazioni cartesiane*

$$\boxed{\begin{cases} y - q_2 = \frac{m}{l}(x - q_1) \\ z - q_3 = \frac{n}{l}(x - q_1) \end{cases}}$$

(vale solo se $l \neq 0$; altrimenti si deve considerare un altro parametro $m, n \neq 0$)

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *teorema 2.1.*
La dimostrazione è stata omessa, in quanto il ragionamento è completamente analogo a quello presentato nella derivazione delle equazioni parametriche e cartesiane per una retta in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ (Geometria del Piano Affine > ^ff21d0). ■

3. Determinare rette nello spazio da due punti

#Teorema

Teorema (Teorema 3.1. (equazioni della retta passante per due punti)).

Siano $Q, R \in \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ due *punti distinti nello spazio*, con $P = (q_1, q_2, q_3)$ e $R = (r_1, r_2, r_3)$.
Allora per questi due punti pasa *una ed una sola* retta e le sue equazioni sono le seguenti.

- *Equazioni parametriche*

$$\boxed{\begin{cases} x = q_1 + (r_1 - q_1)t \\ y = q_2 + (r_2 - q_2)t \\ z = q_3 + (r_3 - q_3)t \end{cases}}$$

- *Equazioni cartesiane*

$$\boxed{\begin{cases} y - q_2 = \frac{r_2 - q_2}{r_1 - q_1}(x - q_1) \\ z - q_3 = \frac{r_3 - q_3}{r_1 - q_1}(x - q_1) \end{cases}}$$

(questo vale solo se $r_1 \neq q_1$; altrimenti bisogna considerare casi diversi)

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *teorema 3.1.*
Omessa per le stesse ragioni della *dimostrazione del teorema 3.2.*. ■

4. Equazioni del piano nello spazio

#Teorema

Teorema (Teorema 4.1. (equazioni del piano nello spazio)).

Siano $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ dei *"vettori di direzione"* linearmente indipendenti, dove

$$v_1 = \begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix}; v_2 = \begin{pmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{pmatrix}$$

sia $Q = (q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{A}^3_\mathbb{R}$ un *punto nello spazio*.
Allora un *piano* S passante per Q e di giacitura $W = \operatorname{span}(v_1, v_2)$ ha le seguenti equazioni:

- *Equazioni parametriche*

$$\boxed{\begin{cases} x = q_1 + t_1 l_1 + t_2 l_2 \\ y = q_2 + t_1 m_1 + t_2 m_2 \\ z = q_3 + t_1 n_1 + t_2 n_2 \end{cases}}$$

- *Equazione cartesiana*

$$\boxed{(m_1 n_2 - n_1 m_2)(x - q_1) + (m_1 l_2 - l_1 m_2)(y - q_2) + (l_1 m_2 - m_1 l_2)}$$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *teorema 4.1.*
La derivazione delle equazioni parametriche è stata omessa; invece sarà utile riflettere sulla derivazione dell'equazione cartesiana.
Pigliamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & x - q_1 \\ m_1 & m_2 & y - q_2 \\ n_1 & n_2 & z - q_3 \end{pmatrix}$$

Per ipotesi iniziali sappiamo che $\operatorname{rg}(A)$ dev'essere *almeno* 2, dato che le prime due colonne sono linearmente indipendenti. Tuttavia sappiamo che il range può essere *al massimo* 2, dato che la terza colonna è linearmente dipendente dalle prime due.
Di conseguenza, da questi fatti discerne che $\operatorname{rg}(A) = 2$; di conseguenza per le *condizioni di invertibilità del determinante* (Corollario 3 (Corollario 3.1. (condizioni di determinante nullo))), A non è invertibile, ergo $\det A = 0$. Di conseguenza possiamo usare la *definizione di Sarrus* del determinante

(Teorema 3 (Definizione 3.1. (determinante di una matrice 3×3 secondo la regola di Sarrus))) e ottenere l'equazione finale. ■

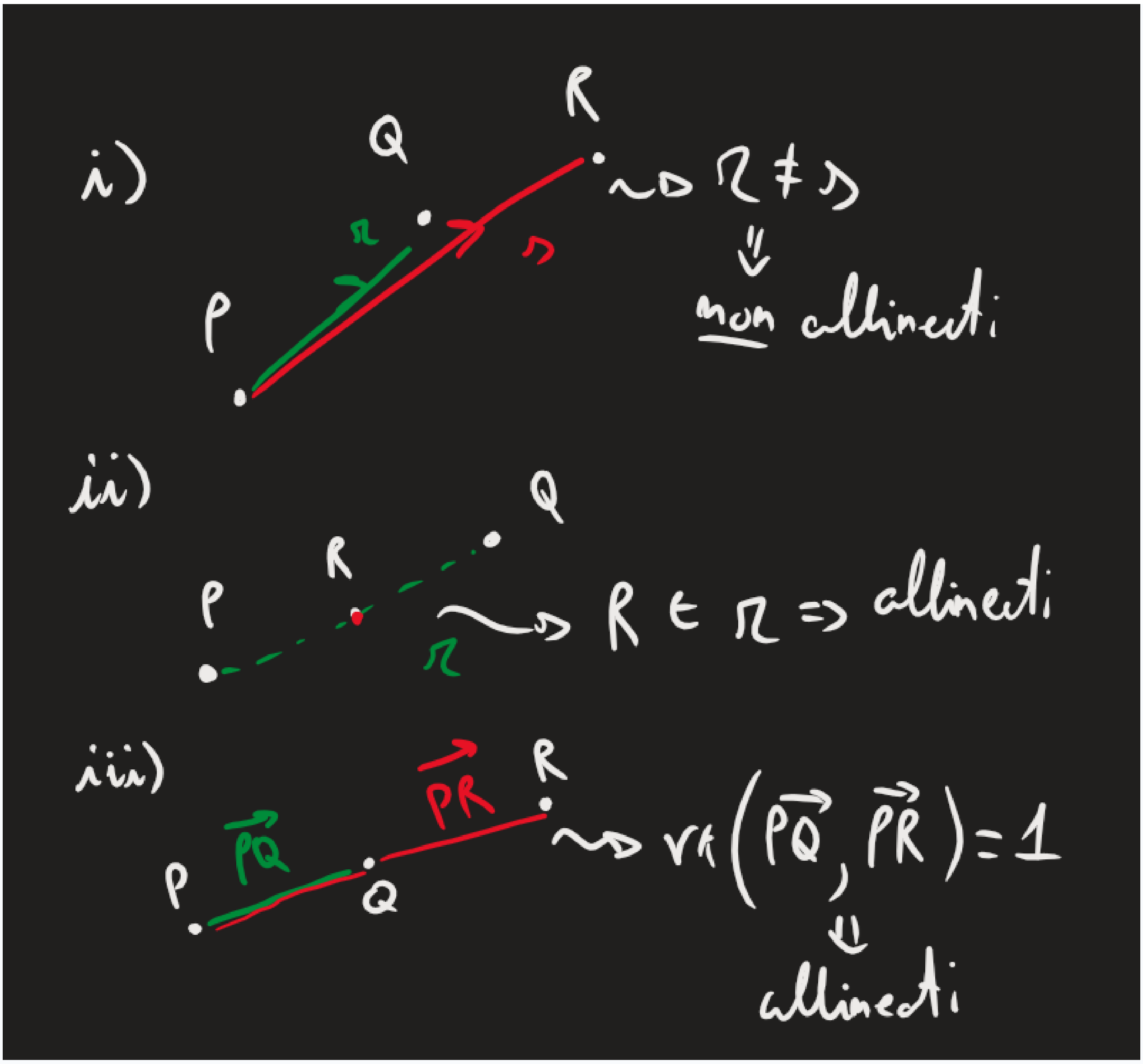
5. Determinare l'allineamento di tre punti

#Teorema

Teorema (Teorema 5.1. (criteri di allineamento di tre punti nello spazio)).

Siano $P, Q, R \in \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ tre *punti nello spazio*.
Allora, per determinare se questi siano *"allineati"* o meno possiamo adoperare uno dei criteri:
i. Determinare le rette passanti per P, Q e P, R e vedere se siano *coincidenti* o meno;
ii. Determinare la retta P, Q e vedere se il punto R ci appartenga o meno;
iii. Verificare la *dipendenza lineare* tra i vettori $\sigma(P, Q)$ e $\sigma(P, R)$.
(*Figura 5.1.*)

FIGURA 5.1. (*L'idea grafica dei criteri*)



6. Determinare un piano da tre punti nello spazio

#Osservazione

Osservazione 6.1. (per tre punti passa un solo piano)

Come osservato con la *geometria del piano affine* (Geometria del Piano Affine > ^9a91b2), per due punti distinti passa una e sola retta.
Parimenti, per *tre punti* passa *un solo piano*, se questi punti *non sono allineati*.
Ora vediamo di derivare l'equazione di questo piano.

#Teorema

Teorema (Teorema 6.1. (l'equazione del piano passante per tre punti)).

Siano $P, Q, R \in \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ dei *punti distinti e non allineati* del tipo $P = (p_1, p_2, p_3), Q = (q_1, q_2, q_3), R = (r_1, r_2, r_3)$.
Allora esiste *uno e solo piano* S passante per P, Q, R ed è descritto dalle seguenti equazioni:

- *Equazioni parametriche*

$$\boxed{S: \begin{cases} x = q_1 + (r_1 - p_1)t_1 + (q_1 - p_1)t_2 \\ y = q_2 + (r_2 - p_2)t_1 + (q_2 - p_2)t_2 \\ z = q_3 + (r_3 - p_3)t_1 + (q_3 - p_3)t_2 \end{cases}}$$

- *Equazioni cartesiane*

$$S: (z - q_3) - \frac{\alpha_3}{\alpha_1}(x - q_1) - \frac{\beta_3 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1}\beta_1}{\beta_2 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\beta_1}(y - q_2) + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}(x - q_1) =$$

con $\alpha_n = r_n - p_n, \beta_n = q_n - p_n$

#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *teorema 6.1.*
Per questa derivazione scegliamo a piacere due applicazioni lineari σ tra *due punti*; nel caso dell'enunciato abbiamo scelto $v_1 = \sigma(P, Q)$ e $v_2 = \sigma(P, R)$. Dato che i tre punti *non* sono allineati, allora sicuramente v_1, v_2 saranno *linearmente indipendenti*; di conseguenza, definendo il sottospazio vettoriale $W = \text{span}(v_1, v_2)$, abbiamo proprio la *giacitura* del piano.
Da qui in poi sarà semplice determinare le equazioni parametriche e cartesiane per S. ■

7. Condizioni di parallelismo e di incidenza tra retta e spazio

#Teorema

Teorema (Teorema 7.1. (condizioni di parallelismo e di incidenza tra una retta e un spazio)).

Sia $S \subseteq \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ di giacitura W un *piano* e sia $S' \subseteq \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ di giacitura W una *retta*.
Allora $S \parallel S'$ (sono paralleli) *se e solo se* $W' \subset W$ (infatti è impossibile che si verifichi $W \subseteq W'$).
Infatti, se $W = \text{span}(w_1, w_2)$ e $W' = \text{span}(w')$, allora la condizione di parallelismo è

$$\mathrm{rg}(w_1, w_2, w') = 2$$

Invece sono *incidenti* e si incontrano in un *solo punto* se e solo se il sistema lineare

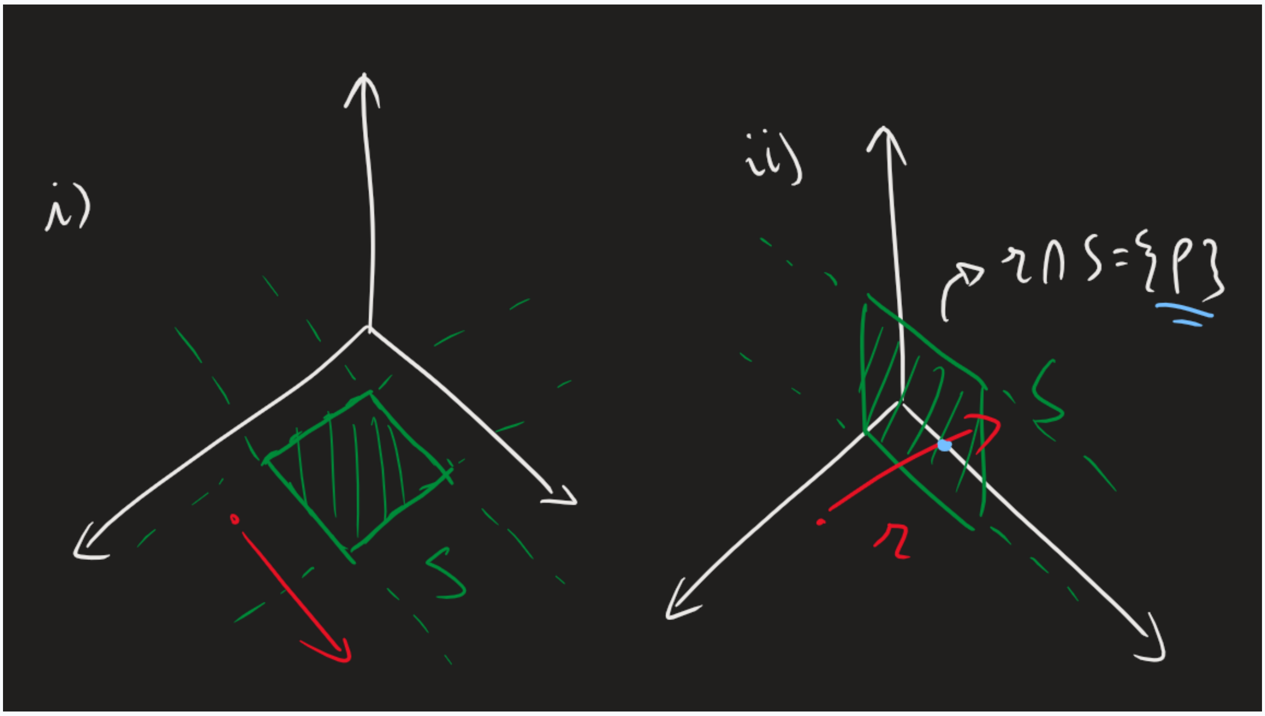
$$(w_1 \quad w_2)t = (w')$$

è *compatibile* con un'unica soluzione; ovvero

$$\mathrm{rg}\left(w_1 \quad w_2 \quad w'\right) = 3$$

Per calcolare tale punto bisogna risolvere il *sistema lineare* costituito dalle *equazioni cartesiane* per S, S'.

FIGURA 7.1. (*Teorema 7.1.*)



#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE del *teorema 7.1.*

Omessa (è già stata fornita una dimostrazione parziale nell'enunciato).

8. Condizioni di parallelismo e di incidenza tra due spazi

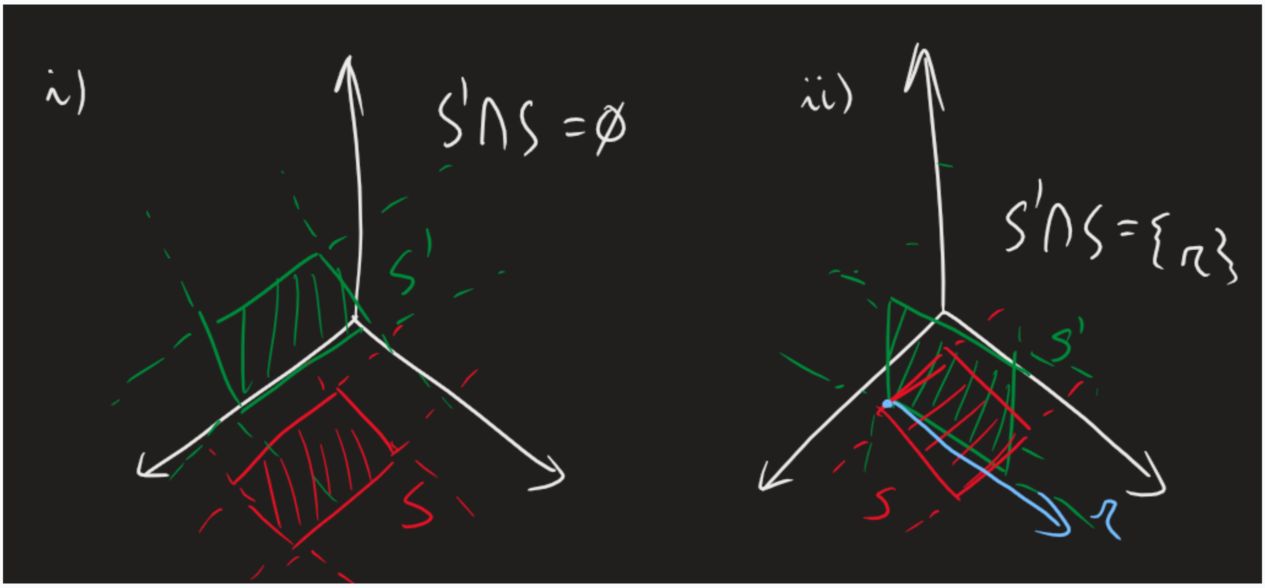
#Teorema

Teorema (Teorema 8.1. (condizioni di parallelismo e di incidenza per due spazi)).

Siano $S, S' \subseteq \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ due *piani*, rispettivamente di giacitura W, W'.
Allora $S \parallel S'$ se e solo se $W = W'$ $(W \subseteq W' \wedge W' \subseteq W)$

Oppure *non* sono paralleli se $S' \cap S$ si *intersecano* lungo una retta; per determinare tale retta bisogna determinare la soluzione generica al sistema lineare formata dalle equazioni cartesiane per S, S'.

FIGURA 8.1. (*Teorema 8.1.*)



9. Condizioni di complanarità tra due rette

#Definizione

Definizione (Definizione 9.1. (rette complanari)).

Due *rette* $r, s \subseteq \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ si dicono *complanari* se esiste un *piano* $\pi \subseteq \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ tale che $r, s \subseteq \pi$.

#Teorema

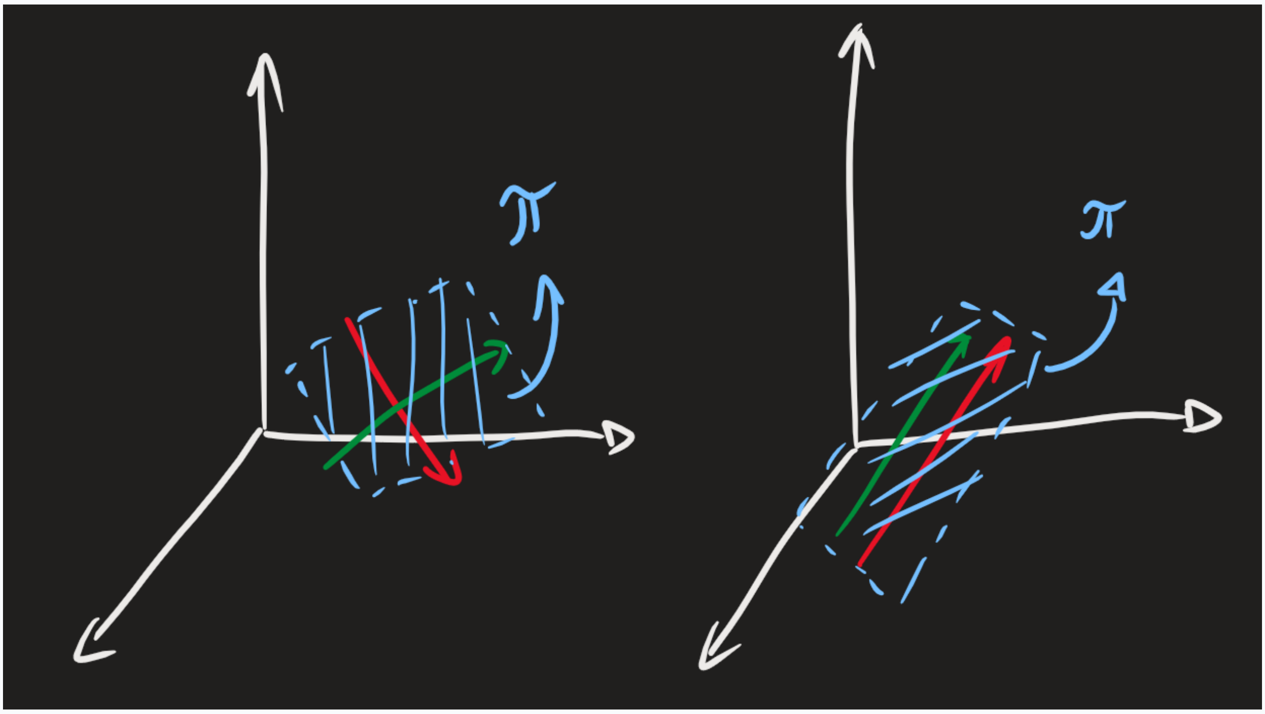
Teorema (Teorema 9.1. (condizione necessaria e sufficiente di complanarità)).

Due rette $r, s \subseteq \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ sono *complanari* se e solo se accade una delle due condizioni:

- le rette sono *incidenti*
- le rette sono *paralleli* o *coincidenti*

> In particolare, r, s sono *complanari* e *distinte* allora esiste un *unico* piano π che contenga r, s.

FIGURA 9.1. (*Definizione 9.1., teorema 9.1.*)



#Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE (*parziale*) del *teorema 9.1.* (Teorema 10 (Teorema 9.1. (condizione necessaria e sufficiente di complanarità)))

Questa dimostrazione si articolerà solo nella dimostrazione del *solo* verso $\Uparrow$, ovvero "se le rette sono *incidenti* o *paralleli* (ovvero *non sghembi*), allora le rette sono complanari".
Supponiamo dunque che r, s siano dei *sottospazi affini* rispettivamente passanti per Q, Q' e di giacitura $\operatorname{span}(v), \operatorname{span}(v')$.
In primo luogo vediamo il caso in cui r, s sono *incidenti*.
Allora per le *condizioni di incidenza* per due rette (???), v, v' sono *linearmente indipendenti*; quindi possiamo scegliere la *giacitura* di π come $\operatorname{span}(v, v')$ e questo sottospazio affine sarà passante per Q, Q'.
In secondo luogo supponiamo che r, s siano *parallele*.
Ma $r \parallel s \implies \operatorname{span}(v) = \operatorname{span}(v')$; allora se imponiamo un'ulteriore condizione, ovvero $r \neq s$, allora esiste un *unico* piano π tale che $r, s \subseteq \pi$. Per ottenere la *giacitura* di π, possiamo scegliere v o v', ma non entrambe dal momento che questi due vettori sono *linearmente dipendenti*.
Scegliamo pertanto il vettore $\sigma(Q, Q')$ che è *non-nullo* in quanto $r \neq s$ e *linearmente indipendente* dai vettori v, v' (*altrimenti ci sarebbe un assurdo!*).
In definitiva, il piano π è il piano passante per Q, Q' e di giacitura $\operatorname{span}(v, \sigma(Q, Q'))$.

#Osservazione

Osservazione 9.1. (ottenere descrizioni di π)

Vediamo che la *dimostrazione* al *teorema 9.1.* (^a1282f) è una dimostrazione *"costruttiva"*, dato che ci dà proprio le formule per descrivere π.
Si illustra questa osservazione col seguente esempio.

#Esempio

Esempio 9.1.

Consideriamo le *rette* nello *spazio*

$$r:\begin{cases}x=1+t\\ y=2-t\\ z=t\end{cases};s:\begin{cases}x=2\tau\\ y=3-2\tau\\ z=1+2\tau\end{cases}$$

Prima di tutto osserviamo che per definizione r, s sono rispettivamente di giacitura

$$\operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right), \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix}\right)$$

Inoltre i due vettori *"di direzione"* (ovvero della giacitura) sono *linearmente dipendenti*. Da ciò discende, per le condizioni di parallelismo, le che le rette sono *parallele*.

Ora verifichiamo se è possibile che $r=s$; prendiamo il punto $Q=(0,3,1)\overset{\tau=0}{\in} s$. Allora supponendo $r=s$, da ciò si verificherebbe $(0,3,1)\in r$. Tuttavia facendo dei conti veloci vediamo immediatamente che il sistema

$$\begin{cases}1+t=0\\ 2-t=3\\ t=1\end{cases}$$

è *incompatibile*, dunque qui si ottiene un *assurdo*. Pertanto $r\neq s$.

Allora l'unico piano è quello passante per $(0,3,1)$ e di giacitura

$$\text{span}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0-1\\3-2\\1-0\end{pmatrix}\right)=\text{span}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$$

Si ottiene immediatamente l'equazione parametrica

$$\pi:\begin{cases}x=u-v\\y=3-u+v\\z=1+u+v\end{cases}$$

Dopodiché, se la si ritiene opportuna, possiamo convertirla in un'equazione cartesiana, che è data da

$$\det\begin{pmatrix}1 & -1 & x\\-1 & 1 & y-3\\1 & 1 & z-1\end{pmatrix}=0$$

#Osservazione

Osservazione 9.2. (e se le rette sono sghembe?)

Come visto nel *teorema 9.1.* (Teorema 10 (Teorema 9.1. (condizione necessaria e sufficiente di complanarità))), se due *rette sono sghembe*, allora sicuramente *non* sono *complanari*. Tuttavia possiamo osservare che vale invece un'altra implicazione: esistono due *piani* π_r, π_s che sono *paralleli tra di loro*, uno di cui passante per r e l'altro per s.
La giacitura di tali piani è $\text{span}(v, v')$.

#Osservazione

Osservazione 9.3. (parametrica o cartesiana?)

Osserviamo infine che nella *generalità* dei casi, conviene usare le *equazioni parametriche* quando trattiamo di *rette paralleli*, se invece trattiamo di *rette incidenti* allora conviene usare le *equazioni cartesiane*.