Spazi Vettoriali - Sommario

Spazi e sottospazi vettoriali.

Spazi Vettoriali

Definizione di $\mathbb{R}$-spazio vettoriale, gli 8 assiomi dei spazi vettoriali. L'utilità di spazi vettoriali; esempi di spazi vettoriali.

---

1. Definizione di spazio vettoriale

Cerchiamo di astrarre quanto visto in Vettori Liberi e Operazioni sui vettori liberi.

DEF 1. Un **$\mathbb{R}$-spazio vettoriale** (o **spazio vettoriale su** $\mathbb{R}$) è un insieme V con 2 operazioni definiti come:

$$\begin{gathered}+: V \times V \longrightarrow V;\ (u, v) \mapsto u+v \\ \cdot: \mathbb{R} \times V \longrightarrow V;\ (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v\end{gathered}$$

tali per cui $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e $\forall u, v, w \in V$ sono soddisfatte le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned}
& \mathrm{v}_1: (u+v)+w=u+(v+w) \\
& \mathrm{v}_2: u+v=v+u \\
& \mathrm{v}_3: \exists 0 \in V \mid 0+v=v+0=v \\
& \mathrm{v}_4: \exists -v \in V \mid v+(-v)=(-v)+v=0 \\
& \mathrm{v}_5: \lambda \cdot(u+v)=\lambda u+\lambda v \\
& \mathrm{v}_6: (\lambda+\mu) \cdot u=\lambda \cdot u+\mu \cdot u \\
& \mathrm{v}_7: (\lambda \cdot \mu) \cdot v=\lambda \cdot(\mu \cdot v) \\
& \mathrm{v}_8: 1 \cdot v=v
\end{aligned}$$

Inoltre uno **spazio vettoriale** può essere anche definito con la seguente *terna*:

$$(V,+, \cdot)$$

DEF 1.1. Chiamiamo l'elemento 0 della v_3 l'elemento *neutro*.

OSS 1.1. Notare che nella v_8 non chiameremo 1 *l'elemento neutro* per ragioni di convenzione, particolarmente per quanto riguarda l'algebra astratta.

PROP 1.1. Ciò che abbiamo visto fino ad ora ci mostra che V_2 (ovvero l'insieme dei vettori liberi nel piano) è un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale.

DEF 1.1. Vettore

DEF 1.1. Sia V uno $\mathbb{R}$-spazio vettoriale; gli elementi $v \in V$ si dicono **vettore**
! ATTENZIONE ! Si nota immediatamente che questa definizione del *vettore* non deve necessariamente corrispondere alla nostra idea di un *vettore libero*.

PROP 1.1. L'unicità del vettore neutro 0

L'assioma v_3 garantisce che *esiste* almeno un vettore neutro 0 tali che certe proprietà vengono soddisfatte; però ciò che *NON* garantisce è l'unicità del vettore neutro 0. Potrebbe esistere un altro vettore *neutro* che possiamo chiamare $0'$.
Però $0'$ non esiste e lo dimostreremo.
DIMOSTRAZIONE. Voglio dimostrare che se V è un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale, allora l'elemento neutro 0 è unico.
Supponiamo quindi che esistano due elementi neutri: 0 e $0'$; mostreremo che con questa supposizione deve necessariamente valere $0 = 0'$, quindi da questo seguirà la tesi.
Per ipotesi, $\forall v \in V$,

$$
\begin{gathered}
A.\, 0 + v \overset{\mathrm{v}_3}{=} v + 0 = v \\
B.\, 0' + v \overset{\mathrm{v}_3}{=} v + 0' = v
\end{gathered}
$$

In $A.$ scegliamo $v = 0'$; allora

$$0 + 0' = 0' + 0 = 0'$$

In $B.$ scegliamo invece $v = 0$; allora

$$0' + 0 = 0 + 0' = 0$$

Quindi notiamo che

$$0 = 0 + 0' = 0'$$

per la proprietà transitiva dell'uguaglianza, $0 = 0'$. ■

PROP 1.2. $0 \cdot v = 0$

La proposizione

$$0 \cdot v = 0$$

sembra ovvia e banale, come ci suggerirebbe la notazione; però in realtà non lo è veramente, in quanto associamo due concetti *diversi*; da una parte abbiamo lo *scalamento* del vettore v per $\lambda = 0$, dall'altra abbiamo il *vettore neutro* 0.
Quindi vogliamo dimostrare che se V è un spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, allora per ogni $v \in V$ sussiste la proposizione.
DIMOSTRAZIONE. Per dimostrare la tesi, supponiamo che $v \in V$ e quindi abbiamo che:

$$\begin{aligned} 0 \cdot v = (0+0) \cdot v &\overset{\mathrm{v}_6}{=} 0 \cdot v + 0 \cdot v \\ 0 \cdot v &= 0 \cdot v + 0 \cdot v \\ (0 \cdot v) + (-(0 \cdot v)) &= (0 \cdot v) + (-(0 \cdot v)) + (0 \cdot v) \\ 0 &= 0 \cdot v \\ 0 \cdot v &= 0 \blacksquare \end{aligned}$$

OSS 1.2.1. Notare che in questi passaggi abbiamo fatto un *assunto* che non è dato per scontato; ovvero che il vettore opposto $-v$ è unico ad ogni vettore v. Infatti questo assunto è ancora da *dimostrare* (che è necessario per non invalidare questa dimostrazione).

PROP 1.3. $(-1) \cdot v = -v$

Anche la proposizione

$$(-1) \cdot v = -v$$

sembra intuitiva, ma in realtà non è dato *per scontato* secondo gli assiomi v; infatti da un lato abbiamo lo *scalamento* di un vettore, invece dall'altro abbiamo il *vettore opposto del vettore* v.
Quindi vogliamo dimostrare che se V è un spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, allora per ogni vettore $v \in V$ vale la proposizione appena enunciata.
DIMOSTRAZIONE. Per dimostrare la tesi, utilizziamo la proprietà v_3,

ovvero

$$v+(-v)=-v+v=0$$

e dimostriamo la seconda uguaglianza, assumendo che $-v=(-1)\cdot v$;

$$(-1)\cdot v+(1)\cdot v \overset{\mathrm{v}_6}{=} (-1+1)\cdot v=0\cdot v=0$$

OSS 1.2. Il senso di studiare i campi vettoriali

Si nota che in questa pagina non abbiamo veramente imparato qualcosa di nuovo; come il filosofo *F. Nietzsche* criticherebbe l'uomo che produce la *definizione di un mammifero* poi per riconoscere un *cammello* come un *mammifero*$^{(1)}$, non abbiamo veramente scoperto nulla di nuovo: infatti abbiamo solo dato *definizioni* poi per riconoscerle, ad esempio abbiamo definito lo *spazio vettoriale* e abbiamo riconosciuto V_2 come uno spazio vettoriale.
In realtà il discorso del filosofo tedesco non varrebbe qui: abbiamo dato questa definizione di spazio vettoriale per un motivo ben preciso, ovvero quello di *astrarre, abs-trahĕre*. Astrarre nel senso che togliamo l'aspetto *"accidentale"* dei vettori geometrici, concentrandoci invece sull'aspetto *"sostanziale"*.
Infatti dopo potremmo vedere che esistono molti insiemi che sono dei *spazi vettoriali*; se dimostro che un certo insieme A è uno spazio vettoriale, allora le proprietà v_n saranno sicuramente vere.

$^{(1)}$*"Se io produco la definizione di un mammifero e poi dichiaro, alla vista di un cammello: guarda, un mammifero! certo con questo una verità viene portata alla luce, ma essa è di valore limitato, mi pare; in tutto e per tutto essa è antropomorfica e non contiene un solo singolo punto che sia «vero in sé», reale e universalmente valido, al di là della prospettiva dell'uomo."* (Su verità e menzogna in senso extramorale, 1896, Friedrich Nietzsche)

---

2. Esempi di spazi vettoriali

Dopo il lungo preambolo enunciato in **OSS 1.2.**, andiamo a vedere qualche esempio di spazio vettoriale.

ESEMPIO 2.1. Numeri reali

Consideriamo $V = \mathbb{R}$; con l'usuale definizione di *somma* $+$ e *moltiplicazione* $\cdot$, si verifica che anche $\mathbb{R}$ è uno $\mathbb{R}$-spazio vettoriale.

ESEMPIO 2.1. Coppie ordinate V_2

Consideriamo $V = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, ovvero

$$V = \{(a,b) : a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$$

con le operazioni

$$\begin{aligned} &(a,b)+(c,d) := (a+c, b+d) \\ &\lambda \cdot (a,b) := (\lambda \cdot a, \lambda \cdot b) \end{aligned}$$

allora $V = \mathbb{R}^2$ è uno *spazio vettoriale*.

ESEMPIO 2.2. $\mathbb{R}^n$

Generalizziamo ESEMPIO 2.1. Coppie ordinate V_2; ovvero definiamo

$$V = \mathbb{R}^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}$$

V è l'insieme delle n*-uple ordinate dei numeri reali*, con le operazioni

$$\begin{aligned} +: &V \times V \longrightarrow V; \\ &((a_1, a_2, \ldots, a_n), (b_1, b_2, \ldots, b_n)) \mapsto (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n) \\ \cdot: &\mathbb{R} \times V \longrightarrow V; \\ &\lambda \cdot (a_1, a_2, \ldots, a_n) \mapsto (\lambda \cdot v_1, \lambda \cdot v_2, \ldots, \lambda \cdot v_n) \end{aligned}$$

$(V, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

ESEMPIO 2.3. Insieme delle funzioni in variabile reale.

Consideriamo l'insieme delle funzioni di variabile reale (**DEF 1.1.**), ovvero

$$V = \{\text{funzioni } f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\}$$

con le operazioni

$$\begin{aligned} +: V \times V \longrightarrow V;\ (f,g) \mapsto f+g \\ \cdot: \mathbb{R} \times V \longrightarrow V;\ (\lambda, f) \mapsto \lambda \cdot f \end{aligned}$$

OSS 2.3.1. Qui è importante chiarire il comportamento della *somma*, in quanto per noi non risulta immediatamente intuibile. Siano f, g funzioni, quindi

$$f + g = h$$

ove

$$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

data dalla seguente: se $a \in \mathbb{R}$, allora

$$h(a) = (f + g)(a) := f(a) + g(a)$$

OSS 2.3.2. Stesso discorso vale per lo *scalamento*;

$$\lambda \cdot f = F$$
$$F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

ove per ogni a reale,

$$F := \lambda \cdot (f(a))$$

OSS 2.3.3. Vogliamo trovare la *funzione nulla*, ovvero la *funzione* che appartiene a V e gioca lo stesso ruolo di 0. La funzione la chiamiamo O e si definisce come

$$O : \mathbb{R} \longrightarrow \ \mathbb{R}, \ x \mapsto 0$$

infatti, se definiamo $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, allora

$$(f + O) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \ x \mapsto f(x) + 0 = f(x)$$

Abbiamo visto che $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$(f + O)(x) = f(x)$$

pertanto

$$O + f = f; f + O = f$$

quindi abbiamo verificato che O è *l'elemento neutro* dello *spazio vettoriale* $(V, +, \cdot)$.

Sottospazi Vettoriali

Sottospazio vettorali: definizione, esempi, interpretazione geometrica.

---

1. Sottospazio Vettoriale

DEF 1. Sia V un $\mathbb{R}$-*spazio vettoriale*; un sottoinsieme $W \subseteq V$ si dice un *sottospazio vettoriale* se valgono le seguenti:

1. Il vettore *nullo* di V appartiene a W
2. $\forall v, w \in W$; vale che $v + w \in W$ (*chiusura rispetto alla somma*)
3. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall v \in W$, vale che $\lambda \cdot v \in W$ (*chiusura rispetto allo scalamento*)

Consideriamo ora l'$\mathbb{R}$-spazio vettoriale V_2, ovvero

$$V_2 : (\mathbb{R}^2, +, \cdot)$$

introdotto in precedenza (**ESEMPIO 2.1.**).
Ora consideriamo il seguente sottoinsieme $W \subseteq V_2$;

$$W := \{(x, y) \in V_2 : x - 3y = 0\}$$

Facciamo le seguenti *osservazioni*.
OSS 1.1. In V_2 esiste il vettore nullo $(0, 0)$; in questo caso il vettore nullo $(0, 0)$ vale anche in W.
OSS 1.2. In V_2 è definita una *somma* $+$. Se v, w sono due elementi di W, allora sono in particolare elementi di V_2; dunque $v + w \in V_2$. In aggiunta vale che $v + w \in W$. Infatti: se $v = (v_1, v_2)$ $w = (w_1, w_2)$ allora

$$\begin{aligned} v \in W &\implies v_1 - 3v_2 = 0 \\ w \in W &\implies w_1 - 3w_2 = 0 \end{aligned}$$

quindi

$$(v_1 - 3v_2) + (w_1 - 3w_2) = 0 = 0 + 0 = 0$$

ovvero

$$(v_1 + w_1) - 3(v_2 + w_2) = 0$$

ovvero $(v + w) \in W$
OSS 1.3. Infine consideriamo $v \in W$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Se

$$\lambda \cdot v \in V_2$$

allora vale anche

$$\lambda \cdot v \in W$$

Infatti se $v = (v_1, v_2)$, allora $\lambda \cdot v = (\lambda \cdot v_1, \lambda \cdot v_2)$;

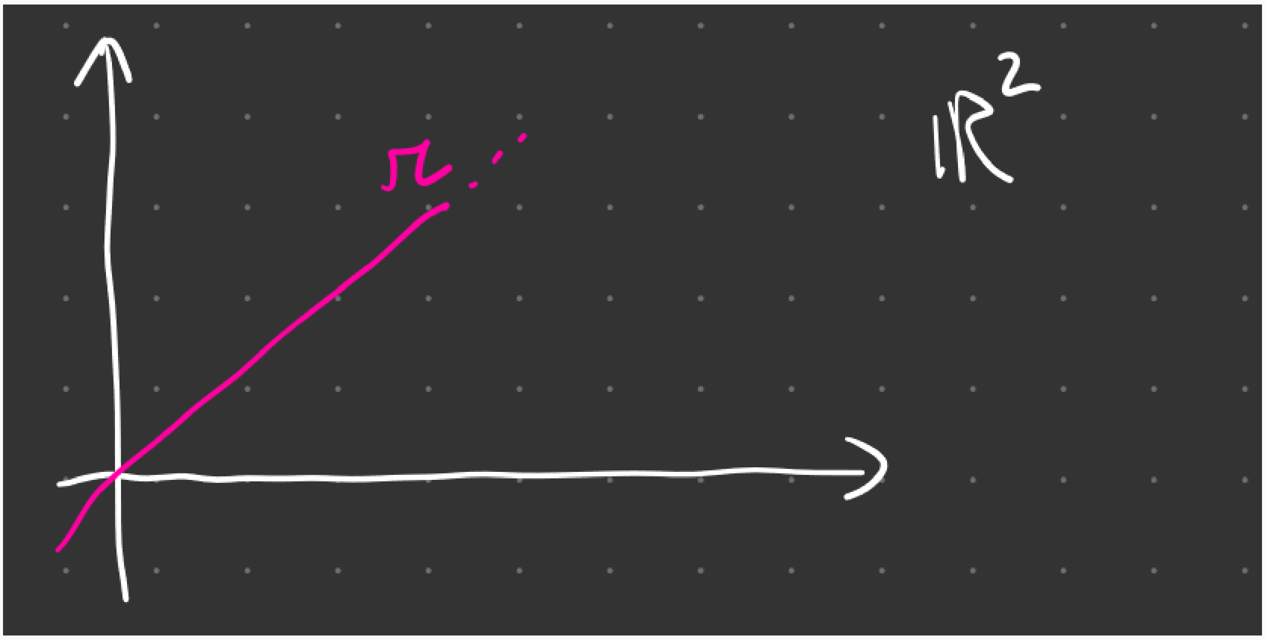
$$\begin{aligned} v \in W &\implies v_1 - 3v_2 = 0 \\ \text{allora } \lambda \cdot (v_1 - 3v_2) &= \lambda \cdot 0 = 0 \\ \text{quindi } (\lambda \cdot v_1) - 3(\lambda \cdot v_2) &= 0 \\ \text{ovvero } \lambda \cdot v \in W & \end{aligned}$$

2. Interpretazione geometrica

ESEMPIO 2.1. Consideriamo $\mathbb{R}^2$ come l'insieme dei *punti nel piano*, ovvero il classico *piano cartesiano* π
Definiamo il sottoinsieme

$$W := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - 3y = 0\}$$

Ovviamente W è uno *sottospazio vettoriale* di $\mathbb{R}^2$; notiamo che se rappresentiamo $\mathbb{R}^2$ come l'insieme dei punti nel piano, allora si può rappresentare W come l'insieme dei *punti nella retta* r, ove $r : x - 3y = 0 \iff y = \frac{1}{3}x$



ESEMPIO 2.2. In $\mathbb{R}^2$ consideriamo il seguente:

$$C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

Osserviamo subito che la *proprietà caratterizzante di* C non è un'*equazione lineare*; infatti si tratta di un'equazione di secondo grado.

Precisamente nel contesto della *geometria analitica*, C rappresenterebbe la circonferenza

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\gamma^2$$

ove (α,β), quindi $(0,0)$, rappresentano le coordinate dell'origine del cerchio e γ, quindi 1, il raggio.
Vediamo subito che C *non* è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$, in quanto $(0,0)$ non appartiene a C.