# Limiti - Sommario

*Tutto sui limiti.*

---

## Definizione di Limite di funzione

*Idea fondamentale del limite di una funzione; definizione di limite in tutti i casi; dimostrazione dell'esistenza di un limite. Definizione di limite destro e sinistro.*

---

# 0. Argomenti propedeutici

Per affrontare uno degli argomenti più importanti dell'***analisi matematica***, ovvero i *limiti*, è necessario conoscere e ricordare alcuni argomenti:

- Intorni di $x_0 \in \tilde{\mathbb{R}}$
- Punti di aderenza e di accumulazione per un insieme $E \subseteq \mathbb{R}$

# 1. Idea fondamentale

**IDEA.** Prendiamo la una funzione di variabile reale (**DEF 1.1.**) del tipo

$$f : E \longrightarrow \mathbb{R}, E \subseteq \mathbb{R}$$

e consideriamo un punto $x_0 \in \tilde{\mathbb{R}}$ che è un *punto di accumulazione* per $E$ (Punti di aderenza e di accumulazione, **DEF 2.1.**).
Ora voglio capire come posso *rigorosamente* formulare la seguente frase:
*"Se $x \in E$ si avvicina a $x_0 \in \tilde{\mathbb{R}}$, allora $f(x)$ si avvicina a un valore $L \in \tilde{\mathbb{R}}$."*
Ovvero col seguente grafico abbiamo
[ GRAFICO DA FARE ]

Oppure un caso più particolare, con

$$\begin{gathered}f : \mathbb{R} \diagdown \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x \cdot \sin(\frac{1}{x})\end{gathered}$$

dove $0$ è un punto di accumulazione per $E$ (il dominio), ma non ne fa parte.
[ GRAFICO DA FARE ]

## 2. Definizione rigorosa

Ora diamo una *formalizzazione rigorosa* del concetto appena formulato sopra.

**DEF 2.1.** *Definizione del LIMITE*
Sia $f$ una *funzione di variabile reale* di forma

$$f : E \longrightarrow \mathbb{R}, E \subseteq \mathbb{R}$$

Siano $x_0, L \in \tilde{\mathbb{R}}$, $x_0$ un *punto di accumulazione* per $E$.
Allora definiamo il **limite di una funzione**

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

se è vera la seguente:

$$\begin{gathered}\forall V \text{ intorno di } L, \exists E \text{ intorno di } x_0 \text{ tale che:} \\ \forall x \in E, x \in U \diagdown \{x_0\} \implies f(x) \in V\end{gathered}$$

**PROP 2.1.** Questa *definizione* del limite può essere può essere interpretata in più casi.
**CASO 1.** Siano $x_0, L \in \mathbb{R}$. Quindi dei valori *fissi* sulla *retta reale*.
Abbiamo dunque il seguente disegno:
[ DISEGNO DA FARE ]
Ora interpretiamo la definizione del *limite* di $f(x)$, $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ in questo caso:

$$\begin{gathered}\forall V \text{ intorno di } L, \exists E \text{ intorno di } x_0 \text{ tale che:} \\ \forall x \in E, x \in U \diagdown \{x_0\} \implies f(x) \in V\end{gathered}$$

significa

$$\begin{gathered}\forall \varepsilon > 0, (L - \varepsilon, L + \varepsilon) \subseteq V, \exists \delta > 0 : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq U \\ \text{tale che } \forall x \in E \\ 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon\end{gathered}$$

che graficamente corrisponde a
[ DISEGNO DA FARE ]

**OSS 2.1.** Grazie a questa interpretazione è possibile creare un'analogia per il limite; infatti se immaginiamo che l'intorno di $L$ con raggio $\varepsilon$ è il *bersaglio* e se esiste il *limite*, allora deve essere sempre possibile trovare un intorno attorno $x_0$ con raggio $\delta$ tale per cui facendo l'immagine di tutti i punti in questo intorno, *"colpisco"* il *"bersaglio"* (ovvero l'intorno di $L$).
**OSS 2.2.** Alternativamente è possibile pensare all'esistenza del *limite* come una *"macchina"* che dato un valore $\varepsilon$ ti trova un valore $\delta$.
Ora passiamo al secondo caso.
**CASO 2.** Ora interpretiamo

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

ovvero dove $L \in \tilde{\mathbb{R}}$. Allora interpretando il significato del limite abbiamo:

$$\begin{gathered}\forall M > 0, (M, +\infty), \exists \delta > 0 : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq U : \\ \text{tale che } \forall x \in E, \\ 0 < |x - x_0| < \delta \implies x > M\end{gathered}$$

ovvero abbiamo graficamente che per una qualsiasi retta orizzontale $x = M$, troveremo *sempre* un intervallo tale per cui l'immagine dei suoi punti superano sempre questa retta orizzontale.
[ DISEGNO DA FARE ]

Ora al terzo caso.
**CASO 3.** Ora abbiamo

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

ovvero dove $x_0 \in \tilde{\mathbb{R}}$. Interpretando la definizione si ha:

$$\begin{gathered}\forall \varepsilon > 0, (L - \varepsilon, L + \varepsilon), \exists N > 0 : (N, +\infty) : \\ \text{tale che } \forall x \in E, \\ x > N \implies |f(x) - L| < \varepsilon\end{gathered}$$

ovvero graficamente ho un grafico di una funzione $f(x)$, dove disegnando un qualsiasi intorno di $L$ riuscirò sempre a trovare un valore $N$ tale per cui tutti i punti dell'insieme immagine dell'intervallo $(N, +\infty)$ stanno *sempre* all'interno dell'intorno di $L$, indipendentemente da quanto stretto è questo intervallo.
[ GRAFICO ]

Infine all'ultimo caso.
**CASO 4.** Finalmente abbiamo

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

quindi *per definizione* ho

$$\begin{gathered}\forall M; (M, +\infty), \exists N; (N, +\infty) : \\ \text{tale che } \forall x \in E, \\ x > N \implies f(x) > M\end{gathered}$$

ovvero ciò vuol dire che fissando un qualunque valore $M$ riuscirò *sempre* a trovare un valore $N$ tale per cui prendendo un qualsiasi punto $x > N$, il valore immagine di questo punto supererà sempre $M$.
**OSS 2.3.** Nota che questo *NON* deve necessariamente significare che la funzione è *monotona crescente*. Però vale il contrario: infatti

$$\forall x_0, x_1 \in E, x_1 > x_0 \implies f(x_1) > f(x_0)$$

possiamo fissare $f(x_0) = M$, $x_0 = N$, abbiamo allora

$$\forall M, N, \exists x_1 \in E : x_1 > N \implies f(x_1) > M$$

questa condizione è sempre vera. In questo caso basta solamente prendere un qualsiasi $x_1 > x_0$.

## 2.1. Infinitesimo

**APPROFONDIMENTO PERSONALE a.** Usando la *nostra* definizione del limite e ponendo $L = 0, x = +\infty$, otteniamo un risultato che è consistente con la definizione di *infinitesimo*$^{(1)}$ secondo dei noti matematici russi, tra cui uno è Kolmogorov.
**DEF 2.a.** Si definisce un infinitesimo come una *grandezza variabile* $\alpha_n$, denotata come

$$\lim_{x\to+\infty} \alpha_n = 0 \text{ oppure } \alpha_n \to 0$$

che possiede la seguente proprietà:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 : \forall x \in E, x > N \implies |\alpha_x| < \varepsilon$$

**OSS 2.a.** Notiamo che la definizione dell'*infinitesimo* diventerà importante per il calcolo degli *integrali*, in particolare la *somma di Riemann*.

> [1] *"[...] La quantità $\alpha_n$ che dipende da $n$, benché apparentemente complicata gode di una notevole proprietà: se $n$ cresce indefinitamente, $\alpha_n$ tende a zero. Tale proprietà si può anche esprimere dicendo che dato un numero positivo $\varepsilon$, piccolo a piacere, è possibile scegliere un interno $N$ talmente grande che per ogni $n$ maggiore di $N$ il numero $\alpha_n$ è minore, in valore assoluto, del lato numero $\varepsilon$."*
>
> Estratto tratto da *Le matematiche: analisi, algebra e geometria analitica* di *A.D. Aleksandrov*, *A. N. Kolmogorov* e *M. A. Lavrent'ev* (1974, ed. Bollati Boringhieri, trad. G. Venturini).

---

# 3. Limite destro e sinistro

**PREMESSA.** Sia una funzione $f$ di variabile reale del tipo

$$f : E \longrightarrow \mathbb{R}, E \subseteq \mathbb{R}$$

$x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione per $E$, $L \in \tilde{\mathbb{R}}$.
Allora definisco le seguenti:
**DEF 3.1.** Il **limite della funzione $f$ che tende a $x_0$ da destra** come

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$$

come

$$\begin{gathered}\forall V \text{ intorno di } L, \exists U \text{ intorno di } x_0 : \forall x \in E, \\ x \in U \cap (x_0, +\infty) \implies f(x) \in V\end{gathered}$$

ovvero come il *limite di* $f$, considerando però *solo* i punti che stanno a *destra* di $x_0$.
[ GRAFICO DA FARE ]

**DEF 3.2.** Analogamente **il limite della funzione $f$ che tende a $x_0$ da sinistra** è

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$$

ovvero

$$\forall V \text{ intorno di } L, \exists U \text{ intorno di } x_0 : \forall x \in E,\\ x \in U \cap (-\infty, x_0) \implies f(x) \in V$$

**OSS 3.1.** Si può immediatamente verificare che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \iff \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$$

Infatti l'insieme dei $x$ del limite *destro* e/o *sinistro* su cui verifichiamo che $f(x) \in V$ è un *sottoinsieme* dell'insieme di cui si verifica col limite generale. Pertanto facendo l'unione tra questi due sottoinsiemi abbiamo

$$[U \cap (-\infty, x_0)] \cup [U \cap (x_0, +\infty)] = U \diagdown \{x_0\}$$

**DEF 3.1. (DALLA DISPENSA)** Avevamo appena osservato che coi limiti *destri* e/o *sinistri* abbiamo semplicemente fatto una *restrizione* all'insieme $U \diagdown \{x_0\}$ di cui si cerca di verificare che $f(U \diagdown \{x_0\}) \subseteq V$. Dunque definiamo il **limite della funzione ristretta a** $B$, un qualunque sottoinsieme di $E$ per cui $x_0$ è di accumulazione:

$$\lim_{x \to x_0} f_{|B}(x) = L$$

ovvero

$$\forall V \text{ intorno di } L, \exists U \text{ intorno di } x_0 : \forall x \in B,\\ x \in U \diagdown \{x_0\} \implies f(x) \in V$$

# 4. Strategia per verificare l'esistenza di limiti

Vogliamo sviluppare una serie di *strategie* per verificare l'esistenza dei limiti, ...

## Teoremi sui Limiti

*Teoremi sui limiti: unicità del limite, permanenza del segno, teorema dei due carabinieri, ... (DA FINIRE)*

---