Laboratorio di Analisi Numerica
Approssimazione ai minimi quadrati

Ángeles Martínez Calomardo
amartinez@units.it

Laurea Triennale in Intelligenza Artificiale e Data Analytics
A.A. 2024–2025

Approssimazione ai minimi quadrati

- Sia fissata una certa funzione $f : \Omega \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di cui è noto il valore nei punti $\{x_k\}_{k=1,\ldots,n} \subset \Omega$. Hp. $f \in C(\Omega)$, $\Omega = (a, b)$.
- Siano date m funzioni lin. indip. $\phi_1, \ldots, \phi_m : \Omega \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Si cerchino i coefficienti $\mathbf{a} = (a_j)_{j=1,\ldots,m}$ per cui la funzione

$$\psi^*(x) = \sum_{j=1}^{m} a_j \phi_j(x)$$

minimizza tra tutte le funzioni del tipo $\psi(x) = \sum_{j=1}^{m} c_j \phi_j(x)$,

$$\|f - \psi\|_{2,d} := \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - \psi(x_k)|^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - \sum_{j=1}^{m} c_j \phi_j(x_k)|^2}$$

La funzione ψ^* si dice approssimante ai minimi quadrati (discreti) di f nello spazio $\mathcal{S} = span(\{\phi_k\}_{k=1,\ldots,m})$.

Approssimazione ai minimi quadrati e sistemi lineari

Posto $\|\mathbf{x}\|_2 := \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}$ e definiti

- V la matrice $n \times m$ le cui componenti sono $V_{i,j} = \phi_j(x_i)$,
- $\mathbf{y}$ il vettore $n \times 1$ le cui componenti sono $y_k = f(x_k)$,
- $\mathbf{a}$ il vettore $m \times 1$ le cui componenti sono a_k,

il problema di approssimazione ai minimi quadrati consiste nel risolvere il sistema sovradeterminato $V\mathbf{a} = \mathbf{y}$ cosicchè sia minima $\|V\mathbf{a} - \mathbf{y}\|_2$ in quanto

$$\begin{aligned} \|V\mathbf{a} - \mathbf{y}\|_2 &= \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |y_k - (V\mathbf{a})_k|^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |y_k - \sum_{j=1}^{m} V_{k,j} a_j|^2} \\ &= \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - \sum_{j=1}^{m} a_j \phi_j(x_k)|^2} = \|f - \sum_{j=1}^{m} a_j \phi_j\|_{2,d} \end{aligned}$$

NB: Si osservi che V è rettangolare e il problema $V\mathbf{a} = \mathbf{y}$ potrebbe non avere sol. classica $\mathbf{a}$.

Minimi quadrati e `polyfit`

Scriviamo sulla shell di Matlab/Octave `help polyfit`. In una recente release di Matlab appare

```
POLYFIT Fit polynomial to data.
POLYFIT(X,Y,N) finds the coefficients of a polynomial
    P(X)
of degree N that fits the data, P(X(I))~=Y(I), in a
    least
-squares sense.
```

In altri termini `polyfit` calcola i coefficienti del polinomio p_N di grado N che *meglio* approssima (in norma 2 discreta) la funzione f avente nel vettore di nodi X i valori Y (cioè $Y(i) := f(X(i))$). Operativamente si cerca il polinomio p_N per cui risulta minima

$$\|f - p_N\|_{2,d} = \sqrt{\sum_i |f(x_i) - p_N(x_i)|^2}.$$

Minimi quadrati e previsioni

Problema

Si vuole trovare una funzione che modellizzi la crescita della popolazione degli Stati Uniti di America. I dati a disposizione sono le misurazioni del numero di abitanti effettuate negli anni dal 1900 al 2000.

```
% Anni in cui sono state eseguite le misurazioni
x= 1900:10:2000;
% Dati in milioni di abitanti
y=[75.995 91.972  105.711  123.203 131.669 150.697
   179.323 203.212 226.505 249.633 281.422];
yvero= 308.745; % milioni di abitanti
xestrap=2010;
```

A partire da questi dati si vuole stimare il numero di abitanti nell'anno 2010, e confrontarlo con il valore rilevato nel censimento effettuato in tale anno che era di 308.745.538 abitanti.

Lo script `census.m` risolve il problema usando minimi quadrati.

Minimi quadrati e smoothing

Digitiamo sulla shell di Matlab

```
>> x=0:0.01:2*pi;
>> y=sin(2*x)+(10^(-1))*randn(size(x));
>> plot(x,y,'r-');
```

- Interpretazione: perturbazione della funzione $\sin(2x)$ nell'intervallo $[0, 2\pi]$.
- Necessità: ricostruire $\sin(2x)$ (e non funz. perturbata).
- Nota: non ha senso utilizzare un interpolante polinomiale p di grado n nè una spline interpolante visto che ricostruirebbero la funzione perturbata.

Ricostruzione di $sin(2x)$ mediante minimi quadrati

```
x=linspace(0,2*pi,1000);
y=sin(2*x);  % y valori della funzione sin(2x) in [0,2pi]
yy=y+(10^(-1))*randn(size(x));% yy valori della funzione perturbata
% polinomi di approssimazione ai minimi quadrati di grado 1 a 9
for n=1:2:9
    coeff=polyfit(x,yy,n); % COEFFS. BEST APPROX (B.A.)
    z=polyval(coeff,x);    % VALORE B.A. NEI NODI "x".
    plot(x,yy,'r.',x,z,'k-');
    err2=norm(z-y,2); err2p=norm(z-yy,2); % ERRS. IN NORMA 2
    errinf=norm(z-y,inf); errinfp=norm(z-yy,inf); % ERRS. IN NORMA INF
    fprintf('\n\t[DEG]:%2.0f',n);
    fprintf(' [2]:%2.2e %2.2e',err2,err2p);
    fprintf(' [INF]:%2.2e %2.2e',errinf,errinfp);
    pause(4);
end
fprintf('\n \n');
```

Plot risultati

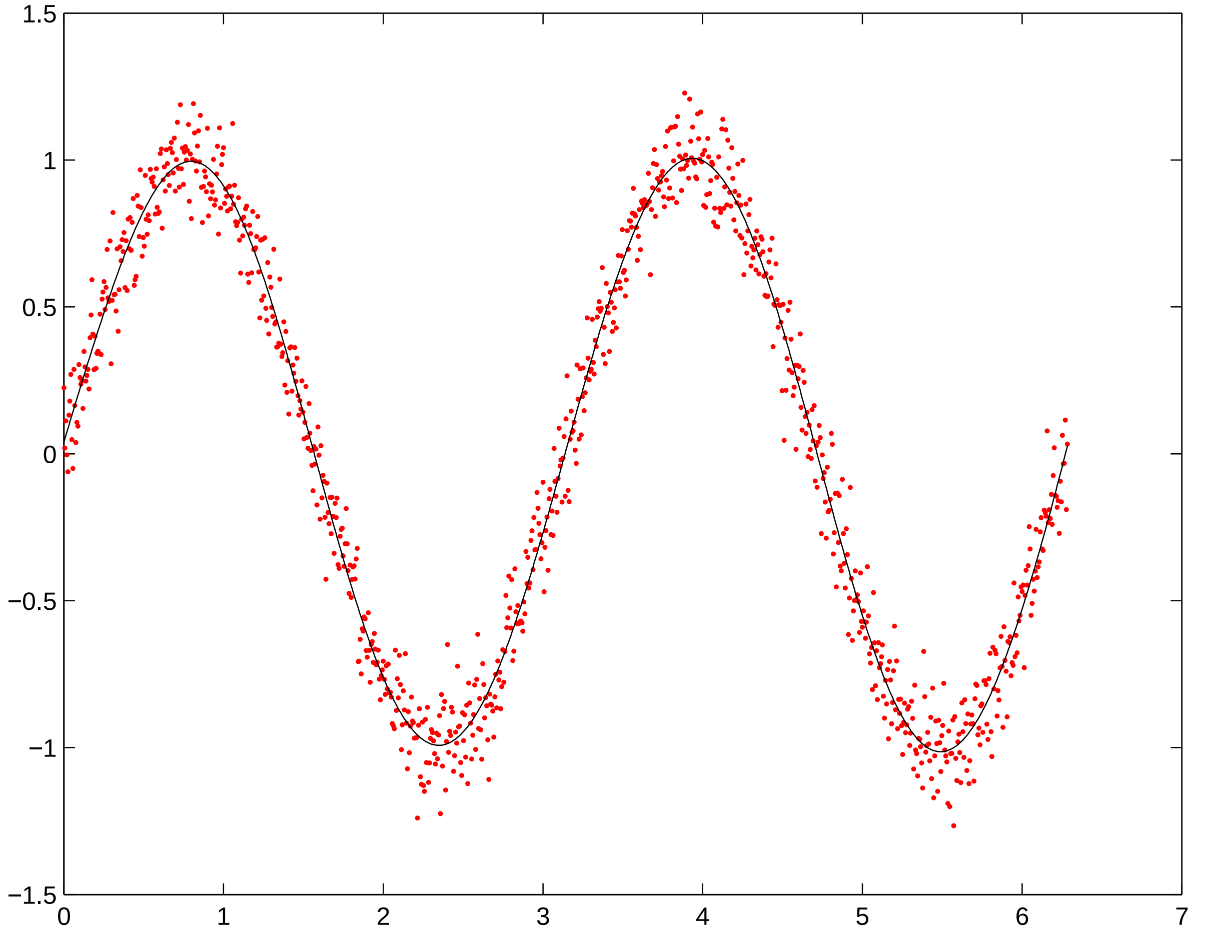

Figura: Grafico che illustra l'approssimazione ai minimi quadrati di grado 9 su una *perturbazione* della funzione $\sin(2x)$ (campionamento in nodi equispaziati)).

Nota: `polyfit` e interpolazione

Supponiamo fissati i punti $\{x_k\}_{k=1,\dots,n}$ (a due a due distinti) e sia p_{n-1} il polinomio che interpola le coppie $(x_k, f(x_k))$ per $k = 1, \dots, n$. Evidentemente da $f(x_i) = p_{n-1}(x_i)$ per $i = 1, \dots, n$ abbiamo

$$\|f - p_{n-1}\|_{2,d} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - p_{n-1}(x_i)|^2} = 0,$$

e quindi il polinomio interpolatore risulta la approssimante ai minimi quadrati di f (relativa alla norma 2 discreta basata sui punti $\{x_k\}_{k=1,\dots,n}$).

Di conseguenza, il comando `coeffs=polyfit(x,y,n-1)` darà i coefficienti del polinomio interpolatore qualora i vettori x, y abbiano dimensione n.

Biomeccanica (Esercizio proposto)

Nella tabella seguente vengono riportati i risultati di un esperimento eseguito per individuare il legame tra lo sforzo e la relativa deformazione di un tessuto biologico (un disco intervertebrale). Partendo dai dati riportati in tabella si vuole stimare la deformazione ε corrispondente ad uno sforzo $\sigma = 0.7$ MPa[1]

σ	0	0.06	0.14	0.25	0.31	0.47	0.60
ε	0	0.08	0.14	0.20	0.23	0.25	0.28

1. Si approssimino i dati sperimentali mediante la retta di approssimazione ai minimi quadrati. Utilizzando tale retta stimare $\varepsilon(0.7)$.
2. Si approssimino i dati sperimentali mediante la parabola di approssimazione ai minimi quadrati. Utilizzando tale parabola stimare $\varepsilon(0.7)$.
3. Si rappresenti in un unico grafico i punti sperimentali, i due polinomi e il punto $(0.7, 0.29)$, dove 0.29 corrisponde alla deformazione osservata dopo una sollecitazione di 0.7 MPa. Per entrambi i pol. di approssimazione, si calcoli la radice quadrata della somma dei quadrati

$$\sum_{i=1}^{7} (p_m(\sigma_i) - \varepsilon_i)^2$$

   Quale dei due polinomi di approssimazione descrive meglio i dati sperimentali? Si giustifichi bene la risposta.

[1] Il pascal (simbolo: Pa) è un'unità di misura della sollecitazione e come caso particolare della pressione. È equivalente a un newton su metro quadrato. L'unità di misura prende il nome da Blaise Pascal, matematico, fisico e filosofo francese.

Biomeccanica (Esercizio proposto)

1. Si modifichi lo script usato per risolvere l'esercizio precedente in modo che includa il calcolo del polinomio di interpolazione che passa per i punti della tabella.
2. Si stimi il valore della deformazione $\varepsilon(0.7)$ usando il polinomio interpolante.
3. Si includa nel grafico precedente anche il polinomio di interpolazione. È accettabile il valore previsto usando l'interpolante?

Plot dei risultati da ottenere