Laboratorio di Analisi Numerica
Interpolazione polinomiale

Ángeles Martínez Calomardo
amartinez@units.it

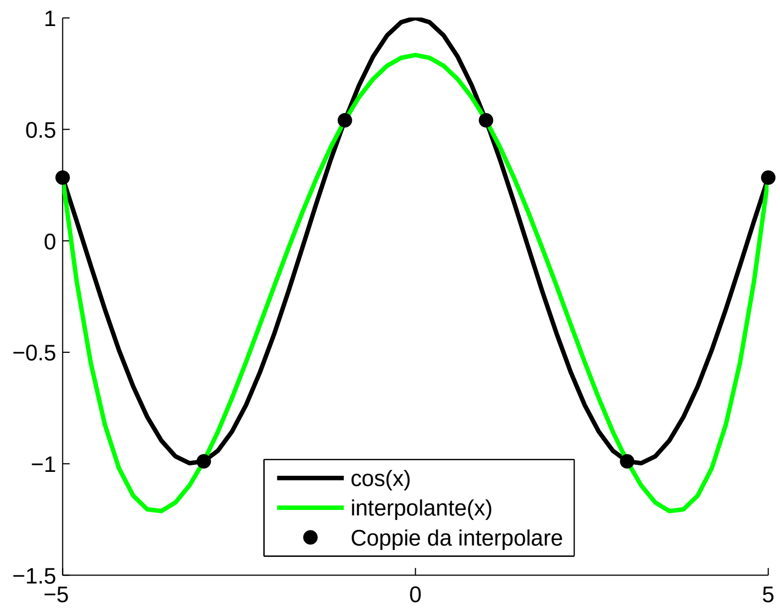
Laurea Triennale in Intelligenza Artificiale e Data Analytics
A.A. 2024–2025

Interpolazione polinomiale

Sia $\mathbb{P}_n$ lo sp. vett. dei polinomi di grado n in $\mathbb{R}$. Date $n+1$ coppie (x_0,y_0), ..., (x_n,y_n) con $x_j \neq x_k$ se $j \neq k$, si calcoli $p_n \in \mathbb{P}_n$ t.c.

$$p_n(x_k) = y_k, \quad k = 0, \ldots, n$$

Tali polinomi p_n si dicono **interpolare** $\{(x_k, y_k)\}_{k=0,\ldots,n}$ oppure interpolare i valori y_k nei nodi x_k.



Alcuni fatti fondamentali

Alcune questioni risultano di importanza fondamentale:

- Esiste tale polinomio ed è unico? Sì.
- È possibile calcolarlo? Sì, $p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x)$, dove L_k è il k-esimo polinomio di Lagrange relativo ai nodi $\{x_k\}_{k=0,\ldots,n}$.
- Per quanto riguarda l'errore:

Teorema

Sia $f \in C^{(n+1)}([a,b])$ e sia p_n il polinomio che interpola le coppie $\{(x_k, y_k)\}_{k=0,\ldots,n}$ con $x_k \in [a,b]$, $k = 0,1,\ldots,n$, $x_k \neq x_s$ se $k \neq s$. Allora per ogni $x \in [a,b]$

$$f(x) - p_n(x) = f^{(n+1)}(\xi) \frac{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)}{(n+1)!} \tag{1}$$

dove $\xi \in \mathcal{I}$ con $\mathcal{I}$ il più piccolo intervallo contenente i nodi $x_0, \ldots, x_n$ e x.

Interpolazione in Matlab/Octave

Supponiamo di dover interpolare le coppie $\{(x_k, y_k)\}_{k=0,\dots,n}$ e supponiamo sia $\mathbf{x} = [x_0, \dots, x_n]$, $\mathbf{y} = [y_0, \dots, y_n]$. I coefficienti del polinomio interpolatore sono ottenibili dal comando `polyfit`.

Esempio:

```
>> x=[-2 1 3];
>> y=[-2 11 17];
>> a=polyfit(x,y,2)
a =
   -0.2667    4.0667    7.2000
>>
```

In effetti, calcolando manualmente il polinomio interpolatore si ha, semplificando quanto ottenuto coi polinomi di Lagrange che è

$$p_2(x) = (-4/15) \cdot x^2 + (61/15) \cdot x + (36/5) \approx -0.2\bar{6}x^2 + 4.0\bar{6}x + 7.2.$$

Quindi, se $a = (a_k)_{k=1,\dots,3}$, abbiamo $p_2(x) = a_1\, x^2 + a_2\, x + a_3$.
In generale, se p_n è il polinomio interpolatore di grado n, e $a = (a_k)$ è il vettore ottenuto utilizzando `polyfit`, allora

$$p_n(x) = a_1\, x^n + a_2\, x^{n-1} + \ldots + a_{n+1}.$$

Interpolazione in Matlab/Octave

Per valutare in un vettore di ascisse $\mathbf{X} = [X_k]_{k=1,\ldots,m}$ un polinomio

$$p_n(x) = a_1\, x^n + a_2\, x^{n-1} + \ldots + a_{n+1}$$

i cui coefficienti sono memorizzati nel vettore $\mathbf{P} = [a_k]_{k=1,\ldots,n+1}$ usiamo il comando `polyval`.

Dall'help:

```
>> help polyval
To get started, select "MATLAB Help" from the
Help menu.
POLYVAL Evaluate polynomial.
Y = POLYVAL(P,X), when P is a vector of length
N+1 whose elements are the coefficients of a
polynomial, is the value of the polynomial
evaluated at X.
...
Y=P(1)*X^N+P(2)*X^(N-1)+...+P(N)*X+P(N+1)
>>
```

Interpolazione in Matlab/Octave

Scriviamo una function MATLAB che:

- Date le n coppie di punti da interpolare, le cui ascisse e ordinate sono, rispettivamente, nei vettori $\mathbf{x} = [x_k]_{k=1,\dots,n}$ e $\mathbf{y} = [y_k]_{k=1,\dots,n}$,
- calcoli i coefficienti del polinomio di interpolazione di grado $n-1$ $p_{n-1}(x_k) = y_k$, per $k = 1, \dots, n$ (vettore coeff)
- e lo valuti sui punti $\mathbf{s} = [s_k]_{k=1,\dots,m}$, cioè, restituisca come parametro di output il vettore $\mathbf{t} = [t_k]_{k=1,\dots,m}$ per cui $t_k = p_{n-1}(s_k)$, per ogni k.

```
function t=interpol(x,y,s)
grado=length(x)-1;
coeff=polyfit(x,y,grado);
t=polyval(coeff,s);
```

Alcune scelte dei nodi

Consideriamo l'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Vediamo alcuni sets di nodi.

- **Equispaziati**: $x_k = a + k\,\frac{(b-a)}{n},\ \ k = 0, \ldots, n.$
- **Chebyshev-Gauss (scalati)**: fissato n, i nodi sono

$$x_k = \frac{(a+b)}{2} + \frac{(b-a)}{2}\,t_k,\ \ k = 0, \ldots, n$$

  con

$$t_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\,\pi\right),\ k = 0, \ldots, n;$$

- **Chebyshev-Gauss-Lobatto (scalati)**: fissato n, i nodi sono

$$x_k = \frac{(a+b)}{2} + \frac{(b-a)}{2}\,t_k,\ \ k = 0, \ldots, n$$

  con

$$t_k = -\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right),\ k = 0, \ldots, n.$$

Interpretazione geometrica Chebyshev-Gauss-Lobatto

I nodi di Chebyshev-Gauss-Lobatto si possono interpretare geometricamente.

- Si considerano $n+1$ punti equispaziati sulla semicirconferenza di raggio 1, $\{(\cos(\theta_k), \sin(\theta_k))\}_{k=0,\ldots,n}$ con $\theta_k = (k \cdot \pi)/n$
- Si proiettano $\{(\cos(\theta_k), \sin(\theta_k))\}_{k=0,\ldots,n}$ sull'asse delle ascisse. Le coordinate x di tali punti corrispondono ai punti di Chebyshev-Gauss-Lobatto.

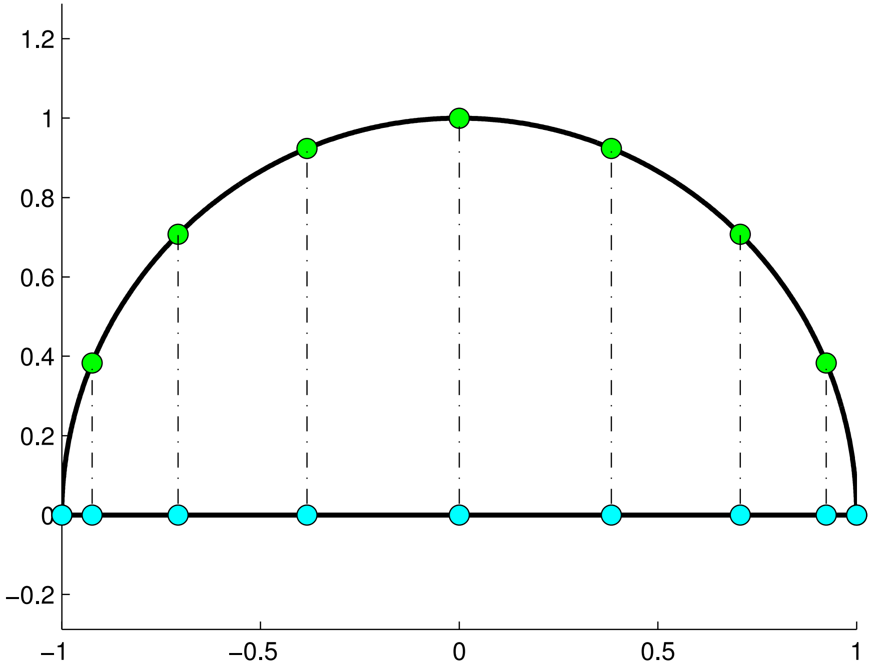


Figura: Interpretazione geometrica dei nodi di Chebyshev-Gauss-Lobatto.

Esercizio

Si scriva la funzione chebgauss.m che calcola il vettore dei nodi di Chebyshev-Gauss in un intervallo $[a, b]$.

```
function xc = chebgauss(a,b,m)
for k = 1:m
    xc(k) = (a+b)/2 - ((b-a)/2)*cos((2*k-1)/(2*m)*pi)
end
```

Si rappresentino sull'asse reale $m = 10$ (oppure $m = 20$) nodi di Chebyshev nell'intervallo $[-1, 1]$. Cosa si osserva? Sono più addensati agli estremi dell'intervallo di interpolazione?

Esercizio

Si ripeta l'esercizio per i nodi di Chebyshev-Gauss-Lobatto. Qual è la principale differenza tra i due insiemi di nodi? Si scriva la function che genera m nodi di Chebyshev-Gauss-Lobatto nell'intervallo $[a, b]$:

```
function xc=chebgausslob(a,b,m)
for k=1:m
    xc(k)=(a+b)/2+((b-a)/2)*cos(pi*(k-1)/(m-1));
end
```

Hint: Lo script `confronto.m` calcola e disegna i nodi di Chebyshev e quelli di Chebyshev-Lobatto. Si esegua con $n = 15$ e $n = 55$.

Convergenza ed esempio di Runge

La successione degli interpolanti polinomiali calcolati su una sequenza di nodi prefissati non converge sempre, nemmeno puntualmente, alla funzione da approssimare.

Infatti, per la **funzione di Runge**

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2},\ x \in [-5,5] \tag{2}$$

si ha che la successione $\{p_n\}$ calcolata su nodi equispaziati non converge a f.

Fortunatamente ciò non succede per i nodi di Chebyshev(-Lobatto).

Esempio di Runge

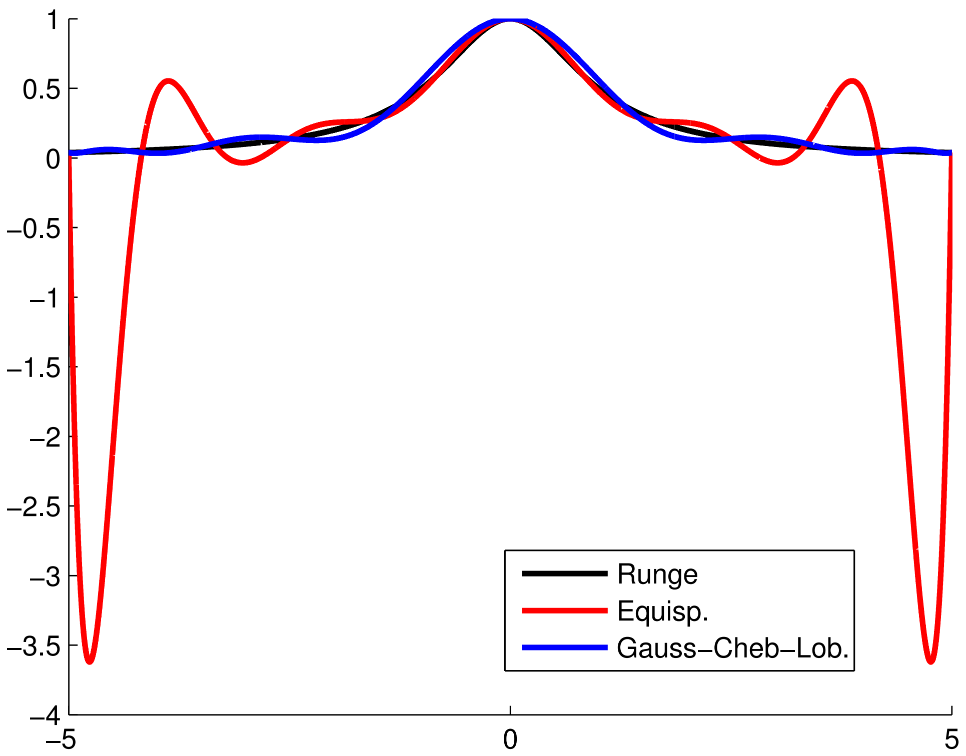


Figura: Grafico della funzione di Runge $1/(1+x^2)$ nell'intervallo $[-5,5]$ e delle sue interpolanti di grado 12 nei nodi equispaziati e di Chebyshev-Gauss-Lobatto.

Esempio di Runge

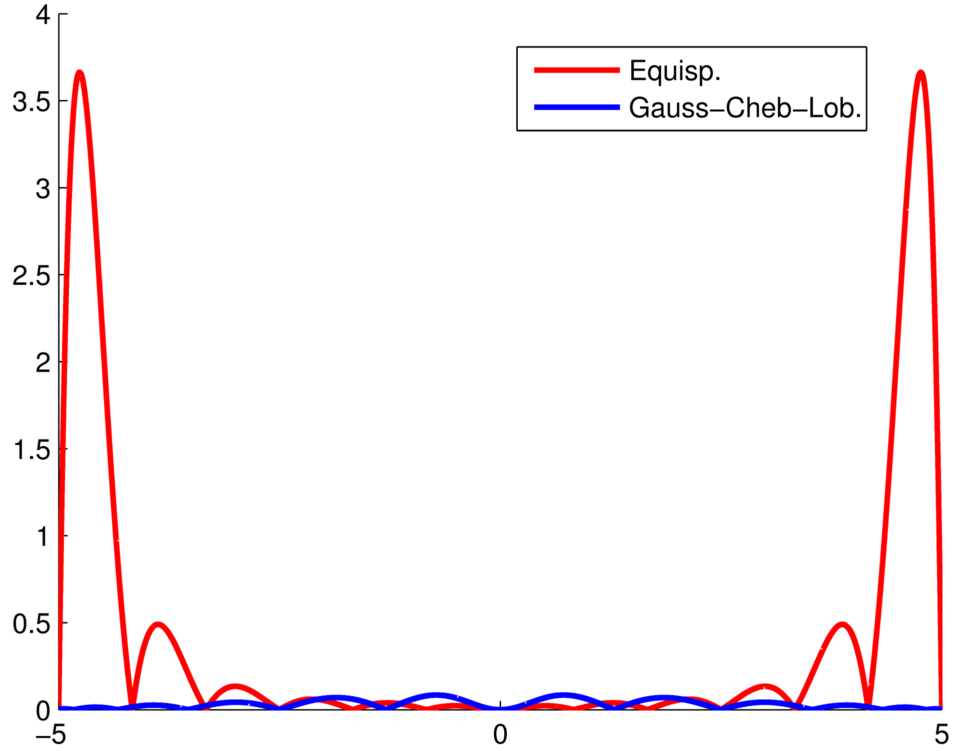


Figura: Grafico errore della funzione di Runge $1/(1+x^2)$ nell'intervallo $[-5,5]$ con le sue interpolanti di grado 12 nei nodi equispaziati e di Chebyshev-Gauss-Lobatto.

Esempio di Runge

Se $p_n \in \mathbb{P}_n$ è polinomio intp. nei nodi eqsp. o di C.-G.-L., vediamo al variare del grado quali sono gli errori $\|1/(1+x^2) - p_n(x)\|_\infty$:

Deg	Err. Eqs.	Err. GCL
2	$6.46e-01$	$6.46e-01$
3	$7.07e-01$	$8.29e-01$
4	$4.38e-01$	$4.60e-01$
5	$4.33e-01$	$6.39e-01$
6	$6.09e-01$	$3.11e-01$
7	$2.47e-01$	$4.60e-01$
8	$1.04e+00$	$2.04e-01$
9	$2.99e-01$	$3.19e-01$
10	$1.92e+00$	$1.32e-01$
11	$5.57e-01$	$2.18e-01$
12	$3.66e+00$	$8.41e-02$
13	$1.07e+00$	$1.47e-01$
14	$7.15e+00$	$5.35e-02$

Esempio di Runge

Importante: l'esempio di Runge mostra che esiste una funzione $C^\infty([-5,5])$ tale che al crescere del numero di nodi equispaziati n non è garantita nemmeno la convergenza puntuale!

D'altra parte sussiste il seguente teorema dovuto a Bernstein:

Teorema

Se $f \in C^1([a,b])$ con $[a,b]$ intervallo limitato e chiuso della retta reale, la successione di interpolanti $\{p_n\}$ della funzione f calcolati sui nodi di Chebyshev converge uniformemente a f su $[a,b]$, per $n \to \infty$.

Se inoltre $f \in C^2([a,b])$ si ha la seguente stima dell'errore

$$\|f - p_n\|_\infty = O(n^{-1/2}).$$

Esercizio proposto

Esercizio

Si confronti l'errore commesso nell'interpolare la funzione di Runge $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ in $[-5, 5]$ su nodi equispaziati e su nodi di Chebyshev-Gauss–Lobatto (o Chebyshev–Gauss), con polinomi di grado k, con $k = 1, 3, 5, \ldots, 31$. Si risolva l'esercizio creando uno script MATLAB che produca una tabella **su file** contenente gli errori (in norma) ottenuti per ogni polinomio considerato.

Suggerimento: si modifichi lo script `esperimento.m` fornito dal docente.

Alla luce dei risultati si dica se **c'è** *convergenza uniforme di* $\{p_n\}$ *a* $1/(1+x^2)$*, al crescere di* n*, qualora si utilizzino nodi* **equispaziati** *e qualora si utilizzino nodi di* **Chebyshev-Gauss-Lobatto**.