Appunti di Analisi 1 per IADA e Chimica

Daniele Del Santo

a.a. 2023/2024

Avvertenza: questi appunti dovrebbero far sì che quanto detto dal docente a lezione sia privo di macroscopici fraintendimenti. **Questi appunti non sostituiscono la frequenza delle lezioni né l'uso dei manuali via via consigliati**.

1

1.1 I numeri naturali e il principio di induzione

I numeri naturali "sono i numeri che servono per contare". Tra questi numeri mettiamo anche lo 0 (zero).

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Le proprietà dei numeri naturali possono essere dedotte dai cosiddetti "Assiomi di Peano".

1) 0 è un numero naturale (cioè $0 \in \mathbb{N}$);

2) sui numeri naturali è definita una funzione a valori in $\mathbb{N}$ che chiamiamo funzione "successivo" e che indichiamo con σ (cioè esiste $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, dove $\sigma(n)$ si dice "successivo di n");

3) 0 non è successivo di nessun numero (cioè $0 \notin \sigma(\mathbb{N})$);

4) numeri diversi hanno successivo diverso (cioè σ è una funzione iniettiva);

5) se A è un sottoinsieme di $\mathbb{N}$ tale che A contiene 0 e ogni volta che contiene un elemento di $\mathbb{N}$ contiene anche il suo successivo, allora A è l'insieme $\mathbb{N}$.

Diamo la seguente definizione.

Definizione 1 (Sistema di Peano)**.** *Si dice* **sistema di Peano** *(o sistema di numeri naturali) una terna* (A, α, σ) *dove*

- A *è un insieme,*
- α *è un elemento dell'insieme* A*, cioè* $\alpha \in A$*,*
- σ *è una funzione da* A *a* A*, cioè* $\sigma : A \to A$*,*

con le seguenti proprietà

- *σ è iniettiva, cioè* $\forall \beta, \gamma \in A,\ \beta \neq \gamma \ \Rightarrow \sigma(\beta) \neq \sigma(\gamma)$,
- *α non è immagine, tramite σ, di nessun elemento di A, cioè* $\alpha \notin \sigma(A)$,
- *(principio di induzione) se S è un sottoinsieme di A che contiene α e tale che, per qualunque β in A, se S contiene β allora S contiene $\sigma(\beta)$, allora S è l'insieme A, cioè*

$$[S \subseteq A \ \wedge \ \alpha \in S \ \wedge \ (\forall \beta \in A,\ \beta \in S \Rightarrow \sigma(\beta) \in S)] \ \Rightarrow \ S = A.$$

Possiamo dare gli **Assiomi di Peano** anche semplicemente dicendo che: *la terna* $(\mathbb{N}, 0, \sigma)$ *è un sistema di Peano.*

Si potrebbe provare che tutti i sistemi di Peano sono tra loro isomorfi, cioè sono sostanzialmente lo stesso insieme, lo stesso elemento zero e la stessa funzione successivo, solo con nome diverso.

Osservazione 1. *Qui il nucleo del ragionamento è il seguente: per "contare" gli elementi di un insieme servono dei "bollini" da appiccicare su ciascun elemento dell'insieme. Dopo di che, per dire quanti sono gli elementi dell'insieme in questione si farà a riferimento all'ultimo bollino utilizzato (e non servirà avere sempre sotto mano l'insieme di partenza). Ora questi bollini dovranno soddisfare le seguenti proprietà*

- *i bollini sono tutti diversi,*
- *c'è un ben preciso bollino da appiccicare per primo,*
- *ogni volta che si è appiccicato un bollino c'è subito un bollino pronto da appiccicare e per bollini diversi quello pronto da appiccicare è diverso,*
- *finita la conta e arrivati all'ultimo bollino, se si staccano e si riconta l'insieme con lo stesso meccanismo, si deve arrivare sempre allo stesso ultimo bollino (quindi, nelle diverse conte, bollini non utilizzati non possono "infilarsi" tra i bollini che si stanno appiccicando).*

È chiaro che l'ultima richiesta è la più complicata (è quella che fa nascere il principio di induzione).

Vale la pena di riscrivere, in modo forse più comprensibile, il principio di induzione per i numeri naturali.

Principio di induzione. *Supponiamo che S sia un sottoinsieme di $\mathbb{N}$ con le seguenti proprietà:*

i) $0 \in S$,

ii) $\forall n \in \mathbb{N},\ n \in S \Rightarrow \ n+1 \in S$.

Allora $S = \mathbb{N}$.

Il principio di induzione può essere utilizzato per definire oggetti o verificare proprietà che dipendono da n, quando n è un numero naturale. Si parla allora di **definizioni per ricorrenza** ovvero di **dimostrazioni per induzione**.

Definizione 2. *Si dice successione a valori nell'insieme E una funzione con dominio $\mathbb{N}$ e codominio E; invece di indicarla con*

$$f : \mathbb{N} \to E, \qquad n \mapsto f(n) = e_n,$$

la si indica tradizionalmente con $(e_n)_n$

Esempio 1 (simboli di sommatoria e moltiplicatoria)**.** *Supponiamo di aver a disposizione una successione di numeri reali $(a_n)_n$, cioè i numeri a_0, a_1, a_2, $\dots a_n$, $\dots$. Definiamo, per ogni $n \in \mathbb{N}$, la quantità*

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \ldots + a_n,$$

s_n *si dice* sommatoria di a_k per k che va da 0 a n. *Per definire s_n in modo rigoroso (senza i puntini ...) si dovrebbe fare così:*

$$s_0 = a_0 \quad \wedge \quad \forall n \in \mathbb{N},\ s_{n+1} = s_n + a_{n+1}.$$

In questo modo l'insieme di definizione di s_n contiene lo 0 e ogni volta che contiene n contiene $n + 1$, perché se conosco s_n ottengo s_{n+1} sommando a s_n il valore a_{n+1}. Quindi l'insieme di definizione di s_n è tutto $\mathbb{N}$.

Similmente definiamo

$$p_n = \prod_{k=0}^{n} a_k = a_0 \cdot a_1 \cdot \ldots \cdot a_n,$$

p_n *si dice* produttoria di a_k per k che va da 0 a n. *Si ha*

$$p_0 = a_0 \quad \wedge \quad \forall n \in \mathbb{N},\ p_{n+1} = p_n \cdot a_{n+1}.$$

Un caso particolare di produttoria è il fattoriale di n. si pone

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n.$$

Osservazione 2. *Nella definizione di fattoriale l'indice k parte da 1 e non da 0. Questo fa si che la formula sopra ci dice solo chi è $n!$ solo per $n \geq 1$. Avrei comunque potuto scrivere*

$$n! = \prod_{k=0}^{n-1} (k+1),$$

e tutto era in linea con quanto detto sopra. In generale il principio di induzione può essere utilizzato per definire oggetti anche a partire da un certo n_0 in poi, con lo schema "definisco p_{n_0}" e "per tutti gli $n \geq n_0$, conoscendo p_n posso definire p_{n+1}".

Esempio 2 (disuguaglianza di Bernoulli)**.** *Sia $a \geq -1$. Si provi che per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale*

$$(1 + a)^n \geq 1 + na.$$

Svolgimento. Si prova che la diseguaglianza vale per $n = 0$. Infatti

$$(1 + a)^0 = 1 = 1 + 0 \cdot a$$

è vero.

Si prova che la disuguaglianza per n implica la disuguaglianza per $n+1$. Infatti, supponiamo vero

$$(1+a)^n \geq 1+na.$$

Allora, moltiplicando da ambo le parti per $(1+a)$ la disuguaglianza rimane vera (si osservi che $(1+a) \geq 0$), cioè

$$(1+a)^n \cdot (1+a) \geq (1+na) \cdot (1+a).$$

e svolgendo i calcoli ottengo

$$(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a+na^2.$$

Ora osservo che $na^2 \geq 0$ (infatti $a^2 \geq 0$). Quindi

$$1+(n+1)a+na^2 \geq 1+(n+1)a.$$

Mettendo tutto assieme ho

$$(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a,$$

che è proprio la disuguaglianza per $n+1$.

Esempio 3 (somme parziali della serie geometrica)**.** *Sia $a \neq 1$. Si provi che per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale*

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$$

Svolgimento. Si prova che l'eguaglianza vale per $n=0$. Infatti

$$\sum_{k=0}^{0} a^k = a^0 = 1 = \frac{a^{0+1}-1}{a-1} = \frac{a-1}{a-1}$$

è vero.

Si prova che l'eguaglianza per n implica l'eguaglianza per $n+1$. Infatti, supponiamo vero

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$$

Allora, sommando da ambo le parti a^{n+1} l'uguaglianza rimane vera, cioè

$$(\sum_{k=0}^{n} a^k) + a^{n+1} = \frac{a^{n+1}-1}{a-1} + a^{n+1}$$

e svolgendo i calcoli ottengo

$$\sum_{k=0}^{n+1} a^k = \frac{a^{n+1}-1+a^{n+1}(a-1)}{a-1} = \frac{a^{n+1}-1+a^{n+2}-a^{n+1}}{a-1}$$

cioè

$$\sum_{k=0}^{n+1} a^k = \frac{a^{(n+1)+1}-1}{a-1}$$

che è proprio l'uguaglianza a livello $n+1$.

Esempio 4 (Principio del buon ordinamento di $\mathbb{N}$)**.** *Sia $K \subseteq \mathbb{N}$. Se K è non vuoto allora K ha un elemento minimo.*

Svolgimento. Poniamo $S = \{n \in \mathbb{N} : \{0, 1, 2, \dots, n\} \cap K = \emptyset\}$. In particolare n appartiene a S se e solo se tutti i numeri 0, 1, 2, fino a n non appartengono a K.

Supponiamo che K non abbia minimo. Osserviamo che

- *$0 \in S$. Infatti se $0 \notin S$ allora $0 \in K$ e quindi 0 sarebbe il minimo di K.*
- *$\forall n \in \mathbb{N}$, $n \in S \ \Rightarrow n + 1 \in S$. Infatti se non fosse vero si avrebbe*

$$\neg(\forall n \in \mathbb{N},\ n \in S \ \Rightarrow n+1 \in S) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \bar{n} \in \mathbb{N},\ \bar{n} \in S \ \wedge \bar{n}+1 \notin S$$

  cioè esisterebbe un $\bar{n}$ tale che $\{0, 1, 2, \dots, \bar{n}\} \cap K = \emptyset$ mentre $\{0, 1, 2, \dots, \bar{n}, \bar{n}+1\} \cap K \neq \emptyset$. Ma ciò significa che $\bar{n}+1$ è il minimo di K.

Di conseguenza $S = \mathbb{N}$. Ma $S \subseteq \mathcal{C}_{\mathbb{N}}K$. Quindi $K = \emptyset$.

Esercizio 1. *Si provi che valgono le seguenti*

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}; \qquad \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}; \qquad \sum_{k=0}^{n} k^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2.$$

Esercizio 2. *Sia $a \geq 0$. Si provi che per ogni $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$, vale*

$$(1+a)^n \geq 1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2.$$

1.2 Osservazione sul corretto uso dell'induzione

Come detto a lezione, le condizioni per poter dimostrare, applicando l'induzione, che

$$\text{per ogni } n \geq n_0, \text{ vale } \ \mathcal{P}(n),$$

sono

- la verifica della validità di $\mathcal{P}(n_0)$,
- la verifica che **per ogni** $n \geq n_0$, vale $(\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1))$.

l'esempio che segue serve a evidenziare l'importanza del fatto che, se per qualche motivo, anche per un solo specifico $\bar{n} \geq n_0$, la proposizione $(\mathcal{P}(\bar{n}) \Rightarrow \mathcal{P}(\bar{n}+1))$ non è vera, allora tutto crolla.

Dimostriamo usando l'induzione che "se in un portamonete c'è almeno una moneta da 1 Euro, allora, in quel portamonete, tutte le monete sono da un Euro".

Pongo $\mathcal{P}(n)$ uguale alla seguente affermazione "se in un portamonete ci sono n monete e ce n'è una da un Euro, allora tutte le monete, in quel portamonete, sono monete da un Euro".

- verifico $\mathcal{P}(1)$.

  È di sicuro vera: infatti io so che nel portamonete c'è almeno una moneta da un Euro. Essendocene una sola, questa, necessariamente è da un Euro. Quindi tutte le monete nel portamonete sono da un Euro.

- verifico che $(\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1))$.

  Suppongo che la proprietà sia vera per n, cioè "se in un portamonete con n monete c'è almeno una moneta da un Euro, tutte le monete sono da un Euro".

  Prendo un portamonete con $n+1$ monete e suppongo che dentro ci sia almeno una moneta da un Euro. Ne estraggo una, diversa da quella che sicuramente so essere da un Euro, e la metto da parte. Ora nel portamonete sono rimaste n monete e dentro ce n'è almeno una da un Euro.

  Quindi, valendo la proprietà a livello n, tutte le n monete nel portamonete ora sono da un Euro!

  Ne tolgo un'altra, che ora sarà sicuramente da un Euro, ne rimangono $n-1$ tutte da un Euro.

  Finalmente reinserisco la moneta che avevo tolto all'inizio. Ora nel portamonete ho $n-1$ monete da un Euro, più una moneta che non so ancora se è da un Euro.

  Posso però riapplicare la proprietà a livello n. Quindi anche quella che ho reinserito deve essere da un Euro.

  Conclusione: tutte le $n+1$ monete sono da un Euro!

La realtà ci dice che la proprietà che vorrei aver dimostrato in questo modo non è vera. Quindi il nostro ragionamento deve avere una falla da qualche parte. La questione è la seguente: il ragionamento non può essere applicato se $n=1$, cioè quello che manca è il passaggio $(\mathcal{P}(1) \Rightarrow \mathcal{P}(2))$ a cui non si può applicare il sofisticato ragionamento espresso qui sopra.

Vediamo i dettagli.

$\mathcal{P}(1)$ è vera e voglio provare $\mathcal{P}(2)$.

So che ho 2 monete nel portamonete, di cui una è da un Euro. Estraggo l'altra e la metto da parte. Nel portamonate ho quindi solo una moneta da un Euro. Per seguire il ragionamento fatto sopra, estraggo dal portamonete l'unica moneta che c'è e reinserisco quella che avevo estratto all'inizio. Ora però non posso più dire che nel portamonete c'è almeno una moneta da un Euro.

Il ragionamento visto sopra, per funzionare, deve partire da $n=2$.

Quindi la situazione è questa.

- vale $\mathcal{P}(1)$,
- per ogni $n \geq 2$, vale $(\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1))$,
- non vale $(\mathcal{P}(1) \Rightarrow \mathcal{P}(2))$,

quindi **non posso applicare l'induzione** (e infatti, purtroppo, la proprietà in questione non è vera).

2

2.1 Cenni di calcolo combinatorio

Problema generale: abbiamo un numero finito di insiemi A_1, A_2, ..., A_k contenenti ciascuno un numero finito $n_1, n_2, \ldots, n_k$ di elementi, rispettivamente. Il nostro problema sarà quello di contare il numero degli elementi di altri insiemi che si possono generare in vario modo a partire dagli insiemi A_1, A_2, ..., A_k.

1. Prodotto cartesiano. Siano A e B due insiemi. Sia

$$|A| = n \quad \text{e} \quad |B| = m,$$

dove il simbolo $|X|$ indica la cardinalità, cioè il numero di elementi, dell'insieme X.

Vogliamo contare gli elementi del prodotto cartesiano $A \times B = \{(a, b) \; ; \; a \in A, \; b \in B\}$. Si ha

$$|A \times B| = nm. \tag{1}$$

Osservazione 3. *Per dimostrare la (1) in modo rigoroso bisognerebbe usare l'induzione. Vediamo come.*

- *Si verifica che (1) è vera per $n = 1$. Infatti, se $|A| = 1$ allora si ha, per esempio, $A = \{a\}$. Di conseguenza la funzione*

  $$B \to \{a\} \times B, \qquad b \mapsto (a, b),$$

  è una biiezione e di conseguenza B e $\{a\} \times B$ hanno lo stesso numero di elementi. Quindi

  $$|\{a\} \times B| = |B| = m = 1 \cdot m.$$

- *Si suppone che la (1) sia vera per $|A| = n$. Si considera quindi il caso $|A| = n + 1$. Si può pensare che*

  $$A = A' \cup \{a\}, \quad \textit{dove} \quad |A'| = n \quad (\textit{e quindi } a \notin A').$$

  Quindi $A \times B$ risulta essere l'unione disgiunta di $A' \times B$ e $\{a\} \times B$, che sono due insiemi rispettivamente di nm e n elementi. In conclusione $|A \times B| = (n + 1)m$.

Quindi, fissato arbitrariamente m, la formula (1) vale per ogni n.

2. Disposizioni con ripetizione. Siano A e B due insiemi. Sia

$$|A| = n \quad \text{e} \quad |B| = m.$$

Per fissare le idee supponiamo che $A = \{1, 2, \ldots, n\}$. Vogliamo contare le funzioni da A a B. Indichiamo questo insieme con B^A, cioè

$$B^A = \{f \; : \; f \text{ è una funzione da } A \text{ a } B\}.$$

Per ogni j in A, si hanno a disposizione m scelte per il valore $f(j)$ in B, quindi

$$|B^A| = m^n.$$

Il problema è analogo a quello di contare in quanti modi si possono disporre in ordine n oggetti scegliendoli da un insieme di m oggetti e potendoli ripetere. Si parla in questo caso di disposizioni con ripetizione.

Osservazione 4. *Anche in questo caso, per far le cose rigorosamente si dovrebbe usare l'induzione.*

3. Disposizioni. Siano A e B due insiemi. Sia

$$|A| = n \quad \text{e} \quad |B| = m.$$

Per fissare le idee supponiamo che $A = \{1, 2, \dots, n\}$ e $B = \{1, 2, \dots, m\}$. Supponiamo $m \geq n$. Vogliamo contare le funzioni iniettive da A a B. Indichiamo l'insieme delle funzioni iniettive da A a B con D_n^m e il numero dei suoi elementi con $(m)_n$. Per $f(1)$ si hanno a disposizione m scelte, per $f(2)$ si hanno a disposizione $m-1$ scelte, per $f(3)$ si hanno a disposizione $m-2$ scelte, e così via fino a $f(n)$, per cui si hanno $m-n+1$ scelte. Quindi

$$|D_n^m| = (m)_n = m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot (m-n+1).$$

Il problema è analogo a quello di contare in quanti modi si possono disporre in ordine n oggetti scegliendoli da un insieme di m oggetti, senza ripetizioni (e quindi m deve essere maggiore o uguale a n). Si parla in questo caso di disposizioni.

4. Permutazioni. Sia A e sia

$$|A| = n.$$

Vogliamo contare il numero delle funzioni biiettive di A in sé. È un caso particolare del problema precedente, comunque indichiamo con P_n l'insieme delle biiezioni e con $n!$ il numero di elementi di tale insieme. Abbiamo

$$|P_n| = |D_n^n| = n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1,$$

dove $n!$ si chiama fattoriale di n. Il problema è analogo a quello di contare in quanti modi si possono disporre in ordine n oggetti. Si parla in questo caso di permutazioni.

5. Combinazioni, coefficienti binomiali. Sia A con n elementi e sia k un numero intero compreso tra 0 e n. Vogliamo contare il numero dei sottoinsiemi di A che hanno k elementi. Il problema è analogo a quello del punto 3., ma in questo caso l'ordine non conta. Indichiamo l'insieme dei sottoinsiemi di A che hanno k elementi con il simbolo

$$C_k^n,$$

combinazioni di n oggetti a k a k e indichiamo il numero dei suoi elementi con

$$\binom{n}{k}$$

che si chiama coefficiente binomiale e si legge "n sopra k".

Si ha

$$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Per ottenere la formula precedente è sufficiente pensare che se si voglio scegliere k oggetti tenendo conto dell'ordine (sappiamo che ci sono $|D_k^n|$ possibilità) è possibile prima scegliere k oggetti senza ordine ($|C_k^n|$ possibilità) e poi ordinare i k oggetti scelti ($|P_k|$ possibilità), quindi

$$|D_k^n| = |C_k^n| \cdot |P_k|,$$

da cui

$$|C_k^n| = \frac{|D_k^n|}{|P_k|} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Valgono le seguenti proprietà

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1;$
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k};$
- $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$ (con $1 \leq k \leq n-1$, regola di Stifel) .

2.2 Teorema del binomio (o formula di Newton)

Vale il seguente risultato.

Teorema 1 (del binomio)**.** *Dati a e b numeri reali (o complessi) e dato n numero intero positivo ($n \geq 1$) vale*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k.$$

Dimostrazione. Proviamo l'enunciato utilizzando l'induzione su n. Verifichiamo l'identità per $n = 1$. Si ha

$$(a+b)^1 = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^{n-k}\, b^k = \binom{1}{0} a^1\, b^0 + \binom{1}{1} a^0\, b^1 = a + b.$$

Verifichiamo che se $n \geq 1$ e l'identità vale per n allora vale per $n+1$. Sia quindi

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k.$$

Moltiplichiamo da tutte e due le parti per $(a+b)$, e otteniamo

$$(a+b)\cdot(a+b)^n = (a+b)\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}\,b^k,$$

cioè

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}\,b^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}\,b^{k+1},$$

cioè

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{(n+1)-k}\,b^k + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}a^{(n+1)-(k+1)}\,b^{k+1} + b^{n+1}.$$

Ora cambiamo nome all'indice nella seconda sommatoria ponendo $h=k+1$ e otteniamo

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{(n+1)-k}\,b^k + \sum_{h=1}^{n}\binom{n}{h-1}a^{(n+1)-h}\,b^h + b^{n+1}.$$

Si ha

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right)a^{(n+1)-k}\,b^k + b^{n+1}.$$

Utilizzando la regola di Stifel si ottiene

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^{(n+1)-k}\,b^k + b^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^{(n+1)-k}\,b^k,$$

che è proprio l'identità per $n+1$. $\square$

I coefficienti binomiali possono essere rappresentati tramite il *triangolo di Tartaglia*:

$$\begin{array}{lcl}
\binom{0}{0} & & 1 \\
\binom{1}{0}\ \binom{1}{1} & & 1\quad 1 \\
\binom{2}{0}\ \binom{2}{1}\ \binom{2}{2} & & 1\quad 2\quad 1 \\
\binom{3}{0}\ \binom{3}{1}\ \binom{3}{2}\ \binom{3}{3} & & 1\quad 3\quad 3\quad 1 \\
\binom{4}{0}\ \binom{4}{1}\ \binom{4}{2}\ \binom{4}{3}\ \binom{4}{4} & \to & 1\quad 4\quad 6\quad 4\quad 1 \\
\binom{5}{0}\ \binom{5}{1}\ \binom{5}{2}\ \binom{5}{3}\ \binom{5}{4}\ \binom{5}{5} & & 1\quad 5\quad 10\quad 10\quad 5\quad 1 \\
\binom{6}{0}\ \binom{6}{1}\ \binom{6}{2}\ \binom{6}{3}\ \binom{6}{4}\ \binom{6}{5}\ \binom{6}{6} & & 1\quad 6\quad 15\quad 20\quad 15\quad 6\quad 1 \\
\dots & & \dots
\end{array}$$

in cui il coefficiente di posto k-esimo nelle riga n-esima è ottenuto sommando i coefficenti di posto $k-1$-esimo e k-esimo della riga $n-1$-esima (cioè sommando quello che gli sta sopra e quello che gli sta sopra al posto precedente).

Ponendo $a = b = 1$ nel teorema del binomio otteniamo

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

6. Principio di inclusione-esclusione. Siano $A_1, A_2, \ldots, A_n$ n insiemi finiti. Il problema è quello di contare quanti sono gli elementi dell'unione di tali insiemi. È chiaro che la questione dipenderà da come sono fatte le intersezioni di questi insiemi: se ad esempio le intersezioni fossero tutte vuote (insiemi disgiunti) il numero di elementi dell'unione sarebbe semplicemente la somma degli elementi di ciascun insieme. Il caso più semplice è quello relativo a 2 insiemi:

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|,$$

il numero di elementi dell'unione di due insiemi è la somma dei numeri degli elementi di ciascuno dei due, meno il numero di elementi dell'intersezione. Il caso relativo a 3 insiemi:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|.$$

La formula si può generalizzare a n insiemi usando l'induzione:

$$|\bigcup_j A_j| =$$
$$\sum_j |A_j| - \sum_{j<k} |A_j \cap A_k| + \sum_{j<k<h} |A_j \cap A_k \cap A_h| + \cdots + (-1)^{n-1} |\bigcap_j A_j|.$$

Esercizio 3. *Rispondere alle seguenti domande.*

1) *10 caselle devono essere colorate utilizzando tre colori. In quanti modi lo si può fare?*

2) *10 caselle devono essere colorate utlizzando 13 colori, ma si vuole che ogni casella abbia un colore diverso. In quanti modi lo si può fare?*

3) *Si devono scegliere i 10 colori tra i 13 possibili. In quanti modi lo si può fare?*

4) *Si estraggono 4 carte da un mazzo di 40. Quante sono le possibili estrazioni?*

5) *Si lancia 5 volte una moneta. Quante sono le possibili sequenze di testa e croce che si possono ottenere?*

6) *Si estraggono 5 palline da un'urna contenente 90 palline numerate. Quante sono le possibili estrazioni?*

7) Si estraggono 4 carte da un mazzo di 40. Quante sono le possibili estrazioni in cui non ci sono carte di danari?

8) Si estraggono 4 carte da un mazzo di 40. Quante sono le possibili estrazioni in cui è presente almeno un re?

9) Si estraggono 5 palline da un'urna contenente 90 palline numerate. Quante sono le possibili estrazioni contenenti due numeri fissati?

10) Un'urna contiene 10 palline bianche 5 rosse. Quante sono le estrazioni di 5 palline in cui 2 sono bianche e 3 sono rosse?

11) Su una scacchiera avente 5 caselle per lato vengono disposte 5 pedine uguali. In quanti modi lo si può fare? e si si vuole che ogni riga e ogni colonna abbia una sola pedina? Stesse domande nel caso in cui le pedine siano 3 rosse e 2 bianche.

12) Dati 6 punti su piano a 3 a 3 non allineati, quante sono le rette che passano per 2 di questi punti?

13) Quanti sono i numeri di 7 cifre che si scrivono utilizzando solo le cifre 1 e 2? Quanti quelli in cui compaiono esattamente quattro cifre 1 e tre cifre 2?

14) In quanti modi 8 diversi professori possono essere assegnati a 4 diverse scuole? E se ogni scuola riceve almeno un professore?

3

3.1 I numeri interi e numeri razionali

Indichiamo con $\mathbb{Z}$ l'insieme dei numeri interi

$$\mathbb{Z} = \{\ldots - 2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2, \ldots\},$$

e con $\mathbb{Q}$ l'insieme dei numeri razionali

$$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n}\ :\ m \in \mathbb{Z}\ \wedge\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}.$$

Diamo per note le proprietà elementari dei numeri interi e razionali (si veda il Cap. 2 Par. 1 di [2]).

3.2 I numeri reali

L'insieme dei numeri reali gode delle seguenti proprietà.

A) Su $\mathbb{R}$ risulta definita una operazione di addizione (detta anche somma) tale che

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad (x, y) \mapsto x + y,$$

con

A1) $\forall x,y,z \in \mathbb{R}$, $x + (y + z) = (x + y) + z$ (proprietà associativa della somma). Si può scrivere senza ambiguità $x + y + z$.

A2) $\exists\, 0 \in \mathbb{R}$: $\forall x \in \mathbb{R}$, $x + 0 = 0 + x = x$ (0 è elemento neutro per la somma).

A3) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists\, y \in \mathbb{R}$: $x + y = y + x = 0$ (ogni elemento ha un opposto).

A4) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x + y = y + x$ (proprietà commutativa della somma).

M) Su $\mathbb{R}$ risulta definita una operazione di moltiplicazione (detta anche prodotto) tale che

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad (x, y) \mapsto x \cdot y,$$

con

M1) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (proprietà associativa del prodotto). Si può scrivere senza ambiguità $x \cdot y \cdot z$.

M2) $\exists\, 1 \in \mathbb{R}$: $1 \neq 0 \ \wedge \ \forall x \in \mathbb{R}$, $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ (1 è elemento neutro per il prodotto).

M3) $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0 \Rightarrow \exists\, y \in \mathbb{R}$: $x \cdot y = y \cdot x = 1$ (ogni elemento diverso da 0 ha un reciproco).

M4) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x \cdot y = y \cdot x$ (proprietà commutativa del prodotto).

D) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$ (proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma).

O) Su $\mathbb{R}$ risulta definita una relazione d'ordine totale, indicata con $\leq$, tale che

O1) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$ (compatibilità dell'ordinamento con la somma).

O2) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, $x \leq y \ \wedge \ 0 \leq z \Rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z$ (compatibilità dell'ordinamento con il prodotto).

S) (Assioma di separazione o assioma di Dedekind) Siano A e B due sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, con $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$. Se $\forall a \in A$, $\forall b \in B$, $a \leq b$, allora $\exists\, \xi \in \mathbb{R}$: $\forall a \in A$, $\forall b \in B$, $a \leq \xi \leq b$.

Osservazione 5. *Si potrebbe provare che gli assiomi A), M), D), O), S) caratterizzano completamente i numeri reali, nel senso che un altro insieme che abbia due operazioni e una relazione d'ordine totale che soddisfino gli assiomi A), M), D), O), S) è isomorfo a* $\mathbb{R}$ *(cioè esiste una biiezione che conserva le operazioni e la relazione d'ordine).*

Osservazione 6. *Si potrebbe provare che supposti veri gli assiomi di Peano per la terna* $(\mathbb{N}, 0, \sigma)$*, esiste ed è unica, a meno di isomorfismi, una quaterna* $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ *che soddisfa gli assiomi A), M), D), O), S) (si veda il Cap. 1 Par. 7 di [1]).*

Dagli assiomi A), M), D), O), S) si possono dedurre tutte le usuali proprietà dei numeri reali. Vediamo alcuni esempi.

- L'elemento neutro per la somma (e per il prodotto) è unico.

  Supponiamo che esitano due elementi 0 e $0'$ tali che per ogni $x \in \mathbb{R}$ si abbia

$$x + 0 = 0 + x = x \qquad \text{e} \qquad x + 0' = 0' + x = x.$$

Allora usando la prima con $x = 0'$ e la seconda con $x = 0$ otteniamo

$$0 = 0 + 0' = 0'.$$

Analogo per il prodotto.

- L'elemento opposto di x è unico. Supponiamo che esitano due elementi y e y' tali che si abbia

$$x + y = y + x = 0 \qquad \text{e} \qquad x + y' = y' + x = 0.$$

Allora

$$y = y + 0 = y + (x + y') = (y + x) + y' = 0 + y' = y'.$$

Chiamo $-x$ l'opposto di x. Analogamente il reciproco di un numero diverso da 0 è unico. Lo chiamo x^{-1}.

- $x \cdot 0 = 0$. Utilizzando il fatto che $0 = 0 + 0$ e la proprietà distributiva si ha

$$x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0 + x \cdot 0.$$

Sommando da ambo le parti l'opposto di $x \cdot 0$ si ottiene

$$0 = x \cdot 0 + (-(x \cdot 0)) = x \cdot 0 + x \cdot 0 + (-(x \cdot 0)) = x \cdot 0.$$

- Legge di annullamento del prodotto. Supponiamo che $x \cdot y = 0$. Allora o $x = 0$, e abbiamo terminato, oppure $x \neq 0$. In quest'ultimo caso

$$y = 1 \cdot y = (x^{-1} \cdot x) \cdot y = x^{-1} \cdot (xy) = x^{-1} \cdot 0 = 0.$$

- Se $0 \leq a$ allora $-a \leq 0$. Infatti se $0 \leq a$ sommo da ambo le parti $-a$ e ottengo quanto voluto.

- $(-a) \cdot (-a) = a \cdot a$. Infatti

$$0 = a + (-a) \quad \text{quindi} \quad 0 = a \cdot 0 = a \cdot (a + (-a)) = a \cdot a + a \cdot (-a),$$

da cui

$$a \cdot a = -(a \cdot (-a)).$$

Analogamente

$$0 = (-a)+a \quad \text{quindi} \quad 0 = (-a)\cdot 0 = (-a)\cdot((-a)+a) = (-a)\cdot(-a)+(-a)\cdot a,$$

da cui

$$(-a) \cdot (-a) = -((-a) \cdot a).$$

- $0 \leq x^2$. Sia $0 \leq a$; allora, utilizzando la O2) e moltiplicando da ambo le parti per a ottengo

$$0 = 0 \cdot a \leq a \cdot a = a^2.$$

Quindi se $0 \leq a$ si ha $0 \leq a^2$. Se invece $a \leq 0$ allora $0 \leq (-a)$. Allora $0 \leq (-a) \cdot (-a) = a^2$.

Esercizio 4. *Si provi, usando solo gli assiomi e le proprietà qui sopra dimostrate, che se x, $y \in \mathbb{R}$ e $0 \leq x \leq y$ allora $0 \leq x^2 \leq y^2$.*

Esercizio 5. *Si provi, usando solo gli assiomi e le proprietà qui sopra dimostrate, che se x, $y \in \mathbb{R}$ e $0 \leq x \leq y$ allora $y^{-1} \leq x^{-1}$.*

4

4.1 In $\mathbb{Q}$ non vale l'assioma di separazione

Sappiamo che in $\mathbb{Q}$ non ci sono numeri tali che il loro quadrato sia 2. Vogliamo provare che in in $\mathbb{Q}$ non vale l'assioma di separazione.

Consideriamo due insiemi

$$A = \{q \in \mathbb{Q} : (q \leq 0) \vee (q \geq 0 \wedge q^2 < 2)\},$$

$$B = \{q \in \mathbb{Q} : q \geq 0 \wedge q^2 > 2\}.$$

Osserviamo che

- A è non vuoto, perché, ad esempio, $1 \in A$.
- B è non vuoto, perché, ad esempio, $2 \in B$.
- $\forall a \in A$, $\forall b \in B$, $a \leq b$, perché o $a < 0$ e $0 \leq b$, oppure $0 \leq a$ e $0 \leq b$, ma allora non è possibile che $b < a$ essendo $a^2 < 2 < b^2$.

Gli insiemi A e B soddisfano le condizioni dell'assioma di separazione, quindi in $\mathbb{R}$ c'è un elemento separatore ξ. Proviamo che tale elemento non sta in $\mathbb{Q}$ (e di conseguenza avremo che in $\mathbb{Q}$ non vale l'assioma S)). Di fatto proviamo che

- non è possibile che $\xi^2 < 2$;
- non è possibile che $\xi^2 > 2$.

Ne dedurremo che $\xi^2 = 2$ (da cui $\xi \notin \mathbb{Q}$).

Sappiamo che $\xi \leq 2$. Se fosse $\xi^2 < 2$ allora, scegliendo $\varepsilon \in \mathbb{R}$ tale che

$$0 < \varepsilon < \frac{2 - \xi^2}{5} \leq 1 \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} 0 < \varepsilon \leq 1, \\ \xi^2 + 5\varepsilon < 2, \end{cases}$$

si avrebbe

$$(\xi + \varepsilon)^2 = \xi^2 + 2\xi\varepsilon + \varepsilon^2 \leq \xi^2 + 4\varepsilon + \varepsilon^2 \leq \xi^2 + 5\varepsilon < 2.$$

Ma allora $\xi + \varepsilon$ sarebbe in A (perché $(\xi + \varepsilon)^2 < 2$) e ciò è impossibile poiché ogni elemento di A è minore o uguale a ξ.

Similmente, se fosse $\xi^2 > 2$ allora, scegliendo $\varepsilon \in \mathbb{R}$ tale che

$$0 < \varepsilon < \frac{\xi^2 - 2}{4} \leq 1 \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} 0 < \varepsilon \leq 1, \\ \xi^2 - 4\varepsilon > 2, \end{cases}$$

si avrebbe

$$(\xi - \varepsilon)^2 = \xi^2 - 2\xi\varepsilon + \varepsilon^2 \geq \xi^2 - 4\varepsilon > 2.$$

Ma allora $\xi - \varepsilon$ sarebbe in B (perché $(\xi - \varepsilon)^2 > 2$) e ciò è impossibile poiché ogni elemento di B è maggiore o uguale a ξ.

4.2 Intervalli, insiemi limitati e illimitati

Definizione 3. *Siano* a*,* $b \in \mathbb{R}$ *con* $a < b$ *(*$a < b$ *è una forma abbreviata per dire* $a \leq b \ \wedge a \neq b$*). Chiamiamo* **intervalli limitati** *gli insiemi*

$$\begin{aligned}
[a, b] \quad &= \{x \in \mathbb{R} \, : \, a \leq x \leq b\}, \\
[a, b[\quad &= \{x \in \mathbb{R} \, : \, a \leq x < b\}, \\
]a, b] \quad &= \{x \in \mathbb{R} \, : \, a < x \leq b\}, \\
]a, b[\quad &= \{x \in \mathbb{R} \, : \, a < x < b\}.
\end{aligned}$$

In particolare il primo si dirà chiuso, il secondo e il terzo semi-chiuso (o semi-aperto) e l'ultimo aperto. I valori a *e* b *si dicono estremi dell'intervallo.*

Chiamiamo **intervalli illimitati** *(o anche semirette) gli insiemi*

$$\begin{aligned}
]-\infty, a] \quad &= \{x \in \mathbb{R} \, : \, x \leq a\}, \\
]-\infty, a[\quad &= \{x \in \mathbb{R} \, : \, x < a\}, \\
]a, +\infty[\quad &= \{x \in \mathbb{R} \, : \, a < x\}, \\
[a, +\infty[\quad &= \{x \in \mathbb{R} \, : \, a \leq x\}.
\end{aligned}$$

In particolare il primo e il secondo sono inferiormente illimitati, il terzo e il quarto superiormente illimitati. il primo e l'ultimo si diranno chiusi, il secondo e il terzo aperti. I simboli $+\infty$ *e* $-\infty$ *si dicono "più infinito"e "meno infinito".*

Qualche volta indicheremo tutto $\mathbb{R}$ *con il simbolo* $]-\infty, +\infty[$*.*

Definizione 4. *Un* **insieme** A *si dice* **superiormente limitato** *se esiste* $m \in \mathbb{R}$ *tale che tutti gli elementi di* A *sono minori o uguali a* m *cioè*

$$\exists m \in \mathbb{R} \, : \, \forall x \in A, \ x \leq m.$$

Un **insieme** A *si dice* **inferiormente limitato** *se esiste* $k \in \mathbb{R}$ *tale che tutti gli elementi di* A *sono maggiori o uguali a* k *cioè*

$$\exists k \in \mathbb{R} \, : \, \forall x \in A, \ k \leq x.$$

Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ *si dice* **limitato** *se è sia superiormente sia inferiormente limitato. cioè*

$$\exists m, k \in \mathbb{R} \, : \, \forall x \in A, \ k \leq x \leq m.$$

Un insieme si dice **illimitato** *(rispettivamente inferiormente illimitato, superiormente illimitato) se non è limitato (rispettivamente non è inferiormente limitato, non è superiormente limitato).*

Esercizio 6. *Dire cosa significa per un insieme essere illimitato (rispettivamente inferiormente illimitato, superiormente illimitato) senza usare la nozione di limitato (rispettivamente non è inferiormente limitato, non è superiormente limitato).*

Esercizio 7. *Dire se i seguenti insiemi sono limitati (rispettivamente inferiormente limitati, superiormente limitati)*

$$\mathbb{N}, \quad \{\frac{1}{n+1} \, : \, n \in \mathbb{N}\}, \quad \{(1 + \frac{1}{n+1})^{n+1} \, : \, n \in \mathbb{N}\}, \quad \{n^2 - n \, : \, n \in \mathbb{N}\}.$$

4.3 Esistenza dell'estremo superiore

Definizione 5. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, siano $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$. μ si dice* **maggiorante** *(o anche limitazione superiore) di A se μ è maggiore o uguale di tutti gli elementi di A cioè*

$$\forall a \in A, \ a \leq \mu.$$

λ si dice **minorante** *(o anche limitazione inferiore) di A se λ è minore o uguale di tutti gli elementi di A cioè*

$$\forall a \in A, \ \lambda \leq a.$$

Definizione 6. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, siano $m, l \in \mathbb{R}$. m si dice* **massimo** *di A se m è elemento di A e m è maggiore o uguale di tutti gli elementi di A cioè*

$$m \in A \quad \wedge \quad \forall a \in A, \ a \leq m.$$

l si dice **minimo** *di A se l è elemento di A e l è minore o uguale di tutti gli elementi di A cioè*

$$l \in A \quad \wedge \quad \forall a \in A, \ l \leq a.$$

Esercizio 8. *Si provi che se μ è maggiorante di A e $\mu \leq \mu'$ allora anche μ' è maggiorante di A.*

Esercizio 9. *Si provi che se m e m' sono massimi per A allora $m = m'$ (cioè il massimo di A, se esiste, è unico).*

Osservazione 7. *Il massimo di A, se esiste, è un maggiorante di A. Il minimo è un minorante. Il massimo di A, se esiste, è l'unico numero che appartiene sia all'insieme A che all'insieme dei suoi maggioranti. Il minimo di A, se esiste, è l'unico numero che appartiene sia all'insieme A che all'insieme dei suoi minoranti.*

Osservazione 8. *Dato un insieme A, esso può non avere nessun maggiorante: ciò avviene se e solo se A non è superiormente limitato. Similmente A può non avere nessun minorante: ciò avviene se e solo se A non è inferiormente limitato.*

Osservazione 9. *Supponiamo che A sia superiormente limitato, quindi A ha qualche maggiorante. Ci chiediamo A* **ha massimo?** *La risposta è* **no***. Ad esempio l'insieme $[0, 1[$ ha almeno un maggiorante, ad esempio 2, ma non ha massimo (convincetevi di questo fatto). Supponiamo che A sia inferiormente limitato, quindi A ha qualche minorante. Ci chiediamo A* **ha minimo?** *La risposta è* **no***. Ad esempio l'insieme $\{\frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$ non ha minimo (provare a dimostrarlo). Invece di cercare il massimo si può cercare il miglior maggiorante, cioè il minimo dei maggioranti. Similmente, invece di cercare il minimo si può cercare il migliore dei minoranti, cioè il massimo dei minoranti.*

Definizione 7. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, A sia superiormente limitato. Si dice* **estremo superiore** *il minimo dei maggioranti di A. L'estremo superiore si indica con*

$$\sup A.$$

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, A sia inferiormente limitato. Si dice **estremo inferiore** *il massimo dei minoranti di A. L'estremo inferiore si indica con*

$$\inf A.$$

Teorema 2 (Esistenza dell'estremo superiore)**.** *Sia A un insieme di $\mathbb{R}$, A non vuoto e superiormente limitato.*

Allora esiste l'estremo superiore di A.

Dimostrazione. Indichiamo con A^* l'insieme dei maggioranti di A. Osserviamo ora che

- A è non vuoto (per ipotesi);
- A^* è non vuoto (perché A è superiormente limitato, cioè A ha qualche maggiorante).
- per ogni $a \in A$ e per ogni $b \in A^*$ si ha $a \leq b$.

Alla coppia A, A^* posso applicare l'assioma di separazione. Quindi esiste $\xi \in \mathbb{R}$ tale che per ogni $a \in A$ e per ogni $b \in A^*$ si ha

$$a \leq \xi \leq b.$$

Il numero ξ è l'estremo superiore di A. Infatti

- per ogni $a \in A$, $a \leq \xi$ quindi ξ è un maggiorante;
- per ogni $b \in A^*$, $\xi \leq b$ quindi ξ è il minimo dei maggioranti.

□

In modo analogo si prova che anche vale il seguente teorema.

Teorema 3 (Esistenza dell'estremo inferiore)**.** *Sia A un insieme di $\mathbb{R}$, A non vuoto e inferiormente limitato.*

Allora esiste l'estremo inferiore di A.

Le proprietà dell'estremo superiore sono messe in evidenza dal seguente risultato.

Teorema 4 (Proprietà dell'estremo superiore)**.** *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Sia $\xi \in \mathbb{R}$.*

$$\xi = \sup A \qquad \Longleftrightarrow \begin{cases} 1) & \forall a \in A,\ a \leq \xi; \\ 2) & \forall \varepsilon > 0,\ \exists \bar{a} \in A:\ \bar{a} > \xi - \varepsilon. \end{cases}$$

Dimostrazione. Sia ξ l'estremo superiore di A. Allora

- ξ è un maggiorante, quindi $\forall a \in A,\ a \leq \xi$;
- ξ è il minimo dei maggioranti, quindi per ogni $\varepsilon > 0$, $\xi - \varepsilon$ non è un maggiorante, quindi non vale $(\forall a \in A, a \leq \xi - \varepsilon)$, quindi vale $\neg(\forall a \in A, a \leq \xi - \varepsilon)$, cioè
$$\exists \bar{a} \in A:\ \bar{a} > \xi - \varepsilon.$$

□

Analogamente

Teorema 5 (Proprietà dell'estremo inferiore)**.** *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Sia $\xi \in \mathbb{R}$.*

$$\xi = \inf A \qquad \Longleftrightarrow \begin{cases} 1) & \forall a \in A,\ \xi \leq a; \\ 2) & \forall \varepsilon > 0,\ \exists \bar{a} \in A:\ \bar{a} < \xi + \varepsilon. \end{cases}$$

Definizione 8. *Se A è superiormente illimitato per convenzione si pone*

$$\sup A = +\infty.$$

Se A è inferiormente illimitato per convenzione si pone

$$\inf A = -\infty.$$

5

5.1 Archimedeità di $\mathbb{R}$

Osservazione 10. *Da un punto di vista intuitivo, considerando $\mathbb{R}$, abbiamo preso $\mathbb{Q}$ e abbiamo "riempito le lacune" dicendo, con l'assioma S), che tra insiemi "separati" ci sono sempre dei numeri reali (o meglio c'è almeno un elemento separatore). Potrebbe venire il sospetto che, con questo meccanismo di riempimento, tra lo 0 e i numeri positivi siano finiti dei numeri reali così piccoli che, sommandoli tra loro, rimangano piccoli.*

Vediamo che non è vero. Per quanto piccolo sia un numero reale, un suo multiplo intero diventa grande quanto vogliamo.

Teorema 6 (Proprietà di Archimede per $\mathbb{R}$)**.** *Siano ε, $M \in \mathbb{R}$, con $\varepsilon > 0$, $M > 0$.*

Allora esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $n\varepsilon > M$.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia $n\varepsilon \leq M$. Ciò significa che l'insieme

$$A = \{n\varepsilon \,:\, n \in \mathbb{N}\}$$

è superiormente limitato. Sia $\xi \in \mathbb{R}$ il suo estremo superiore. Per la seconda proprietà del sup si ha che, fissato un $\varepsilon > 0$ (e noi lo scegliamo proprio uguale quello che abbiamo nell'ipotesi), esiste un elemento dell'insieme A (quindi esiste un $n^* \in \mathbb{N}$) tale che

$$n^*\varepsilon > \xi - \varepsilon.$$

Ma allora sarebbe

$$(n^* + 1)\varepsilon > \xi$$

e ciò non è possibile, poiché $(n^* + 1)\varepsilon \in A$ e $\xi = \sup A$. □

Corollario 1. *Sia $\varepsilon \in \mathbb{R}$ con $\varepsilon > 0$. Allora esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$.*

Dimostrazione. Basta prendere $M = 1$ nel teorema precedente. □

5.2 Densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$

Osservazione 11. *Tra due numeri razionali troviamo sempre un numero razionale, basta prendere la media aritmetica tra i due. Tra due reali troviamo sempre un reale. Tra due reali troviamo anche una razionale? Se così non fosse ci sarebbero degli interi segmenti $[a, b]$ fatti tutti da reali non razionali. Proviamo che questa ultima cosa non è vera.*

Teorema 7 (Densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$)**.** *Siano $a,\ b \in \mathbb{R}$, con $a < b$.*
Allora esiste $q \in \mathbb{Q}$ tale che $a < q < b$.

Dimostrazione. Supponiamo dapprima che sia $a < 0$ e $0 < b$. In tal caso lo 0 è il numero cercato. Se invece $a < b \leq 0$ posso cercare q tale che $a < -q < b$, cioè $-b < q < -a$. Di conseguenza l'unico caso interessante rimane $0 \leq a < b$. Supponiamo quindi $0 \leq a < b$. Abbiamo

$$b - a > 0.$$

Applichiamo il Corollario del teorema sulla proprietà di Archimede e deduciamo che esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$0 < \frac{1}{\bar{n}} < b - a.$$

Se $a = 0$ abbiamo concluso, infatti $0 < \frac{1}{\bar{n}} < b$. Se invece $a > 0$, consideriamo di nuovo il teorema sulla proprietà di Archimede, con $\varepsilon = \frac{1}{\bar{n}}$ e $M = a$. Si ha che esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{k}{\bar{n}} \leq a$ e $\frac{k+1}{\bar{n}} > a$. Dal fatto che $0 < \frac{1}{\bar{n}} < b - a$ si ha che

$$a < \frac{k+1}{\bar{n}} < b.$$

□

5.3 Intervalli chiusi, limitati e inscatolati

Definizione 9. *Sia, per ogni $n \in \mathbb{N}$,*

$$I_n = [a_n,\, b_n].$$

Supponiamo che

$$[a_n,\, b_n] \supseteq [a_{n+1},\, b_{n+1}].$$

$(I_n)_n = ([a_n,\, b_n])_n$ *si dice* **successione di intervalli chiusi, limitati e inscatolati**. *Se inoltre, per ogni $n \in \mathbb{N}$,*

$$a_{n+1} = a_n \text{ e } b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{oppure} \quad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \text{ e } b_{n+1} = b_n,$$

cioè I_{n+1} è la prima o la seconda "metà" di I_n, $(I_n)_n$ si dice **successione di intervalli chiusi, limitati, inscatolati e dimezzati**.

Teorema 8 (Teorema di Cantor)**.** *Sia* $(I_n)_n$ *una successione di intervalli chiusi, limitati e inscatolati.*

Allora l'intersezione di tutti gli intervalli della successione è non vuota, cioè

$$\bigcap_{n=0}^{+\infty} [a_n,\, b_n] \neq \emptyset.$$

Dimostrazione. Osserviamo che per ogni n, $k \in \mathbb{N}$ si ha

$$a_n \leq b_k,$$

infatti

$$\begin{aligned} &\text{se } n \leq k \quad \text{si ha} \quad a_n \leq a_k \leq b_k \leq b_n, \\ &\text{se } k \leq n \quad \text{si ha} \quad a_k \leq a_n \leq b_n \leq b_k. \end{aligned}$$

Quindi b_k è un maggiorante per l'insieme $\{a_n \;:\; n \in \mathbb{N}\}$. Di conseguenza l'insieme $\{a_n \;:\; n \in \mathbb{N}\}$ ha estremo superiore che chiamiamo α. Si ha anche $\alpha \leq b_k$ e ciò vale per ogni k. Quindi α è un minorante per l'insieme $\{b_k \;:\; k \in \mathbb{N}\}$. Di conseguenza $\{b_k \;:\; k \in \mathbb{N}\}$ ha estremo inferiore, che chiamiamo β. Si ha $\alpha \leq \beta$. Infine per ogni n si ha

$$a_n \leq \alpha \leq \beta \leq b_n.$$

Quindi

$$\bigcap_{n=0}^{+\infty} [a_n,\, b_n] \supseteq [\alpha,\, \beta].$$

Anzi, se $x < \alpha$, per la seconda proprietà del sup, esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $a_n > x$, quindi $x \notin [a_n,\, b_n]$. Quindi $x \notin \bigcap_{n=0}^{+\infty}[a_n,\, b_n]$. Analogamente se $x > b_n$ allora $x \notin \bigcap_{n=0}^{+\infty}[a_n,\, b_n]$. Di conseguenza

$$\bigcap_{n=0}^{+\infty} [a_n,\, b_n] = [\alpha,\, \beta].$$

Si noti che, male che vada, $\alpha = \beta$. In questo caso l'intersezione si riduce a un solo punto. □

Corollario 2 (Forma forte del teorema di Cantor)**.** *Sia* $(I_n)_n$ *una successione di intervalli chiusi, limitati, inscatolati e dimezzati.*

Allora l'intersezione di tutti gli intervalli della successione è non vuota e si riduce a un solo punto cioè

$$\exists\, \xi \in \mathbb{R} : \quad \bigcap_{n=0}^{+\infty} [a_n,\, b_n] = \{\xi\}.$$

Dimostrazione. Osserviamo che passando da I_n a I_{n+1} la lunghezza si dimezza, quindi, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}.$$

Sappiamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$, vale $2^n \geq n$ (se non siete convinti provatelo per induzione). Quindi

$$\frac{b_0 - a_0}{2^n} \leq \frac{b_0 - a_0}{n}.$$

Dal Corollario del teorema sulla proprietà di Archimede si ha che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un n tale che

$$b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n} \leq \frac{b_0 - a_0}{n} \leq \varepsilon. \qquad (*)$$

Se fosse

$$\bigcap_{n=0}^{+\infty} [a_n,\, b_n] = [\alpha,\, \beta].$$

con $\beta - \alpha > 0$, allora, scegliendo di prendere $\varepsilon = \beta - \alpha$ nella $(*)$, per qualche n si avrebbe $b_n - a_n < \beta - \alpha \leq b_n - a_n$ e ciò è impossibile. □

6

6.1 tre esercizi sull'estremo superiore

Esercizio 10. *Trovare* inf, sup, *e, se esistono,* max *e* min *dei seguenti insiemi*

$$\{\frac{n}{n+1}\ :\ n \in \mathbb{N}\}, \qquad \mathbb{Q} \cap]1, 2[, \qquad \bigcup_{n=1}^{+\infty}]-\frac{1}{n},\, 5 + \frac{1}{n}[.$$

Esercizio 11. *Siano A, $B \subseteq \mathbb{R}$. Siano α, $\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha = \sup A$ e $\beta = \sup B$. Sia*

$$C = \{x + y\ :\ x \in A,\ y \in b\}.$$

Si provi che $\alpha + \beta = \sup C$.

Esercizio 12. *Siano A, $B \subseteq \mathbb{R}$. A e B siano non vuoti. Sia $A \cup B = \mathbb{R}$ e $\forall x \in A$ e $\forall y \in B$, $x \leq y$. Si provi che*

$$\sup A = \inf B.$$

6.2 insiemi finiti e infiniti

Definizione 10. *Indichiamo con I_n l'insieme dei primi n numeri naturali, cioè*

$$I_n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}.$$

Un insieme A si dice **finito** *se esiste una biiezione tra A e I_n, per qualche n. In tal caso si dirà che A ha* **cardinalità** *n. Quindi la cardinalità di A è il numero dei suoi elementi.*

Definizione 11. *Un insieme si dice* **infinito** *se non è finito.*

Teorema 9. *Un insieme è finito se e solo se non esiste una biiezione tra l'insieme e un suo sottoinsieme proprio (sottoinsieme proprio significa sottoinsieme e diverso). Un insieme è infinito se e solo se esiste una biiezione tra l'insieme e un suo sottoinsieme proprio.*

Non diamo la dimostrazione di questo teorema. Chi è interessato può consultare i Par. 6 e 7 del Cap. 0 di [3].

Esempio 5. $\mathbb{N}$ *è infinito. Infatti se indiciamo con* $\mathbb{P}$ *l'insieme dei numeri naturali pari, si ha che*

- $\mathbb{P}$ *è un sottoinsieme proprio di* $\mathbb{N}$.
- *la funzione* $\mathbb{N} \to \mathbb{P}$, $n \mapsto 2n$ *è una biiezione.*

Definizione 12. *Un insieme si dice* **numerabile** *se esiste una biiezione tra l'insieme e* $\mathbb{N}$.

Teorema 10. *Ogni insieme infinito contiene un sottoinsieme numerabile.*

Dimostrazione. Diamo solo un cenno della dimostrazione. Sia A un insieme infinito.
A è non vuoto. Sia a_0 un elemento di A.

- A è non vuoto, quindi esiste $a_0 \in A$.
- Se A fosse uguale a $\{a_0\}$ allora A sarebbe finito. Quindi esiste $a_1 \in A \setminus \{a_0\}$. Si noti che $a_1 \neq a_0$.
- Se A fosse uguale a $\{a_0, a_1\}$ allora A sarebbe finito. Quindi esiste $a_2 \in A \setminus \{a_0, a_1\}$. Si noti che $a_2 \neq a_0$ e $a_2 \neq a_1$.
- Se A fosse uguale a $\{a_0, a_1, a_2\}$ allora A sarebbe finito. Quindi esiste $a_3 \in A \setminus \{a_0, a_1.a_2\}$. Si noti che a_3 è diverso da a_i, per ogni $i < 3$.
- Si prosegue in questo modo e si trova l'insieme $\{a_0,\, a_1,\, \ldots, a_n, \ldots\}$ che è contenuto in A ed è in biiezione con $\mathbb{N}$.

□

Osservazione 12. *Tutti gli insiemi infiniti sono numerabili o esistono insiemi infiniti che non sono numerabili e quindi (visto che contengono sempre un numerabile) sono "più grandi" di un numerabile?*

Esempio 6. $\mathbb{Z}$ *è numerabile. Infatti*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & -3 & 3 & -4 & \ldots \end{array}$$

è una biiezione tra $\mathbb{N}$ *e* $\mathbb{Z}$. *Si tratta della funzione*

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, \qquad f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{se} \quad n \text{ è pari.} \\ -\dfrac{n+1}{2} & \text{se} \quad n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Si osservi che costruire la biiezione tra $\mathbb{N}$ *e* $\mathbb{Z}$ *significa "mettere in fila" gli elementi di* $\mathbb{Z}$.

Esempio 7. $\mathbb{Q}$ *è numerabile. Sarà sufficiente mostrare che i razionali positivi sono un insieme numerabile. Consideriamo una matrice infinita tale che al posto di indice i, j ci sia la frazione i/j, cioè*

$$\begin{array}{ccccccccc}
\frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \cdots \\
\frac{2}{1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{4} & \frac{2}{5} & \frac{2}{6} & \frac{2}{7} & \frac{2}{8} & \cdots \\
\frac{3}{1} & \frac{3}{2} & \frac{3}{3} & \frac{3}{4} & \frac{3}{5} & \frac{3}{6} & \frac{3}{7} & \frac{3}{8} & \cdots \\
\frac{4}{1} & \frac{4}{2} & \frac{4}{3} & \frac{4}{4} & \frac{4}{5} & \frac{4}{6} & \frac{4}{7} & \frac{4}{8} & \cdots \\
\dots & & & & & & & &
\end{array}$$

ora "mettiamo in fila" le frazioni considerando le diagonali "nord-est $\to$ sud-ovest", avendo cura di non tener conto della frazioni già comparse, cioè

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
\frac{1}{1} & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{5} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{7} & & \frac{1}{8} & & \cdots \\
& \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & & & & & & \\
\frac{2}{1} & & \frac{2}{2} & & \frac{2}{3} & & \frac{2}{4} & & \frac{2}{5} & & \frac{2}{6} & & \frac{2}{7} & & \frac{2}{8} & & \cdots \\
& \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & & & & & & & & \\
\frac{3}{1} & & \frac{3}{2} & & \frac{3}{3} & & \frac{3}{4} & & \frac{3}{5} & & \frac{3}{6} & & \frac{3}{7} & & \frac{3}{8} & & \cdots \\
& \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & & & & & & & & & & \\
\frac{4}{1} & & \frac{4}{2} & & \frac{4}{3} & & \frac{4}{4} & & \frac{4}{5} & & \frac{4}{6} & & \frac{4}{7} & & \frac{4}{8} & & \cdots \\
& \swarrow & & & & & & & & & & & & & & & \\
\frac{5}{1} & & \dots & & & & & & & & & & & & & & \\
\vdots & & & & & & & & & & & & & & & &
\end{array}$$

Si ottiene

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, \frac{1}{5}, \frac{5}{1}, \frac{1}{6}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{4}{3} \cdots$$

da cui la numerabilità di $\mathbb{Q} \cap]0, +\infty[$. *La conclusione segue dal fatto che l'unione di un numero finiti di insiemi numerabile è numerabile (provate a dimostrarlo per esercizio) .*

Esempio 8. $\mathbb{R}$ *non è numerabile. Usiamo il "metodo della diagonale di Cantor". Mostriamo che l'insieme dei numeri reali tra 0 compreso e 1 escluso è non numerabile. Qui diamo per scontato che ogni numero reale in* $[0, 1[$ *si possa rappresentare in modo unico come*

$$x = 0, a_0 a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 \dots$$

dove, per ogni i,

$$a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

e la successione $(a_i)_i$ non è definitivamente uguale a 9 cioè non è possibile che da un certo $\bar{n}$ in poi sia la successione costante 9 *(si tratta della familiare* *rappresentazione decimale dei numeri reali: a_i è la i-esima cifra decimale). Supponiamo per assurdo che l'insieme $[0,\,1[$ sia numerabile. Possiamo quindi metter in fila i numeri in questione. Si avrà*

$$x_0 = 0, a_{00}a_{01}a_{02}a_{03}\dots$$

$$x_1 = 0, a_{10}a_{11}a_{12}a_{13}\dots$$

$$x_2 = 0, a_{20}a_{21}a_{22}a_{23}\dots$$

$$x_3 = 0, a_{30}a_{31}a_{32}a_{33}\dots$$

$$\dots$$

Tutti i numeri di $[0, 1[$ dovrebbero trovarsi in questa lista. Consideriamo il numero

$$y = 0, b_0b_1b_2b_3b_4b_5\dots$$

dove prendiamo

$$b_i = 0 \quad se \quad a_{ii} \neq 0,$$

$$b_i = 1 \quad se \quad a_{ii} = 0.$$

Si vede facilmente che y è un numero di $[0, 1[$, ma y non è uguale a nessun numero della lista degli x_i, perché differisce da ogni x_i avendo, per ogni i, la cifra i-esima diversa.

6.3 la funzione valore assoluto

Per quanto riguarda la funzione valore assoluto facciamo riferimento a quanto riportato dal Cap. 2, Par. 9 di [1].

7

7.1 la funzione radice quadrata

Per quanto riguarda la funzione radice quadrata, consideriamo che la funzione

$$p_2 : [0, +\infty[\to [0, +\infty[, \qquad x \mapsto p_2(x) = x^2,$$

è biiettiva. Infatti è iniettiva essendo strettamente crescente:

$$0 \le x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad (x_1^2 < x_1x_2 \quad \wedge \quad x_1x_2 < x_2^2) \quad \Rightarrow \quad 0 \le x_1^2 < x_2^2.$$

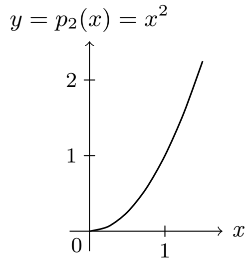
È suriettiva. Per provarlo si fissa $\bar{y} \in [0, +\infty[$ e si considerano

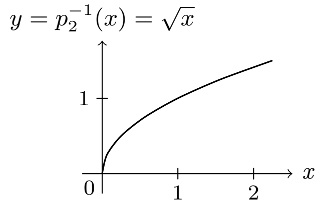
$$A = \{x \in [0, +\infty[: \, x^2 \le \bar{y}\}, \qquad B = \{z \in [0, +\infty[: \, \bar{y} \le z^2\}.$$

Ragionando come quando abbiamo provato che in $\mathbb{Q}$ non vale l'assioma di completezza, si prova che gli insiemi A e B sono separati e che l'elemento separatore è unico e tale che il suo quadrato vale $\bar{y}$.

Quindi la funzione p_2 è invertibile e l'inversa si dice radice quadrata.

$$\sqrt{} : [0, +\infty[\to [0, +\infty[, \qquad x \mapsto \sqrt{x}.$$





Si noti che per ogni $x \in \mathbb{R}$ vale

$$\sqrt{x^2} = |x|.$$

Esercizio 13. *Provare che per ogni $a \in \mathbb{R}$ e per ogni $r \geq 0$ vale*

$$|a| \leq r \qquad \Longleftrightarrow \qquad -r \leq a \leq r.$$

Esercizio 14. *Risolvere le seguenti disuguaglianze*

$$x + |x| < 2, \qquad x^2 < |x| - 2. \qquad |x+3| - |x-1| \leq 0, \qquad |x|^3 - 2x(1 + |x|) < 0.$$

7.2 I numeri complessi

Consideriamo su $\mathbb{R}^2$ le seguenti operazioni

$$\begin{aligned} \mathbin{+\!\!\!+} &: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad (x,y),(x',y') \mapsto (x + x', y + y'), \\ \circ &: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad (x,y),(x',y') \mapsto (x \cdot x' - y \cdot y', x \cdot y' + y \cdot x'). \end{aligned}$$

Si noti che $\mathbin{+\!\!\!+}$ è la somma su $\mathbb{R}^2$ (una "nuova somma") mentre $+$ è l'usuale somma su $\mathbb{R}$. Analogamente $\circ$ è il prodotto su $\mathbb{R}^2$ (un "nuovo prodotto") mentre $\cdot$ è l'usuale prodotto su $\mathbb{R}$. D'ora in poi scriveremo $+$ e $\cdot$ anche per le nuove operazioni.

Teorema 11. $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ *è un corpo commutativo con unità (campo).*

Dimostrazione. Si tratta di verificare inizialmente che su $\mathbb{R}^2$ l'operazione $+$ gode delle 4 proprietà dei gruppi abeliani (si noti in particolare che l'elemento neutro è $(0,0)$ e l'elemento opposto di (x,y) è $(-x,-y)$).

Similmente si tratta di verificare che su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, per l'operazione $\cdot$, valgono le 4 proprietà dei gruppi abeliani (si noti in particolare che l'elemento neutro è $(1,0)$.) L'elemento reciproco di $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ è

$$(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}).$$

Infatti, detto (x', y') il reciproco di (x,y), si risolve nelle incognite x', y' il sistema

$$\begin{cases} xx' - yy' = 1, \\ xy' + yx' = 0. \end{cases}$$

Moltiplicando per x la prima riga e per y la seconda si ottiene

$$\begin{cases} x^2x' - xyy' = x, \\ yxy' + y^2x' = 0. \end{cases}$$

Sommando le righe si ha

$$x^2x' + y^2x' = x.$$

Si divide per x^2+y^2 (lo si può fare perché $(x,y) \neq (0,0)$) e si trova x'. Analogo per y'. Per concludere si verifica che vale la proprietà distributiva. $\square$

Definizione 13. $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ *si dice corpo o* **campo dei numeri complessi** *e si indica con* $\mathbb{C}$.

Osservazione 13. *Si nota che*

$$(a,0) \cdot (x,y) = (ax, ay)$$

cioè la moltiplicazione per i numeri complessi del tipo $(a,0)$ *(quelli che hanno la seconda componente uguale a* 0*) dà lo stesso risultato che si ha nella moltiplicazione del vettore* (x,y) *di* $\mathbb{R}^2$ *per lo scalare* a*. Quindi si può scrivere*

$$(x,y) = (x,0)\cdot(1,0) + (y,0)\cdot(0,1) = x(1,0) + y(0,1).$$

Indichiamo ora

$$(1,0) = \mathbf{1}, \qquad (0,1) = i,$$

quindi

$$(x,y) = x\mathbf{1} + yi \quad \textit{che scriviamo} \quad x + iy.$$

In conclusione possiamo scrivere

$$\mathbb{C} = \{x + iy \,:\, x, y \in \mathbb{R}\}.$$

i *è il numero complesso* $(0,1)$ *e si chiama unità immaginaria. Si noti che vale*

$$i^2 = -1 \quad \textit{infatti} \quad i^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (0\cdot 0 - 1\cdot 1, 0\cdot 1 + 1\cdot 0) = (-1,0).$$

Dato il numero complesso $z = x + iy$ *si ha che* x *è detta parte reale di* z *e* y *parte immaginaria,*

$$z = x + iy \quad \textit{quindi} \quad x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

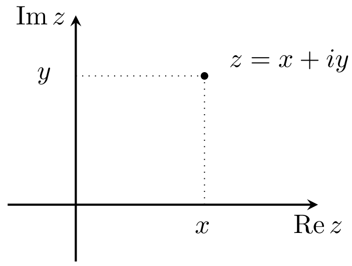
si ha

$$(x+iy) + (x'+iy') = (x+x') + i(y+y'),$$

$$(x+iy)\cdot(x'+iy') = xx' + i(xy'+yx') + i^2yy' = (xx'-yy') + i(xy'+yx'),$$

$$(x+iy)^{-1} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Osservazione 14. *Il piano cartesiano associato a $\mathbb{R}^2$, pensato come insieme dei complessi, si dice piano di Gauss, dove l'asse delle ascisse si dice asse reale e quello delle ordinate asse immaginario.*



Definizione 14. *Sia $z = x + iy$ un numero complesso. Il numero complesso $\overline{z} = x - iy$ si dice* **complesso coniugato** *di z. La funzione*

$$\mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \overline{z},$$

si dice coniugio.

Si ha

- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$;
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$;
- $\overline{z^{-1}} = (\overline{z})^{-1}$;
- $z + \overline{z} = 2 \operatorname{Re} z, \quad z - \overline{z} = 2i \operatorname{Im} z$.

Definizione 15. *Sia $z = x + iy$ un numero complesso. Il valore reale $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ si dice* **modulo** *di z. La funzione*

$$\mathbb{C} \to [0, +\infty[, \quad z \mapsto |z| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

si dice funzione modulo. Si noti che se $z \in \mathbb{R}$ (cioè $\operatorname{Im} z = 0$), allora il modulo di z coincide con il valore assoluto di z.

8

8.1 I numeri complessi (continuazione)

Si ha

- $|\operatorname{Re} z| \leq |z|, \quad |\operatorname{Im} z| \leq |z|$;
- $|\overline{z}| = |z|$;
- $z \cdot \overline{z} = |z|^2$;

- se $z \neq 0$ allora $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$ e $|z^{-1}| = \dfrac{1}{|z|}$;
- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$;
- (disuguaglianza triangolare) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

Per provare la disuguaglianza triangolare si considera

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 = & \; (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) \\ &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) \\ &= z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} \\ &= |z_1|^2 + 2\,\mathrm{Re}\, z_1\overline{z_2} + |z_2|^2 \end{aligned}$$

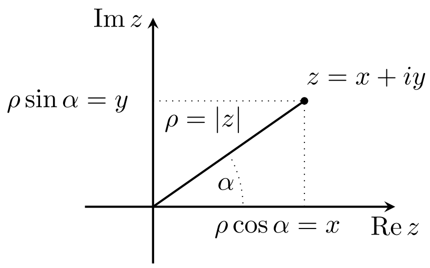
Ora

$$2\,\mathrm{Re}\, z_1\overline{z_2} \leq 2|\,\mathrm{Re}\, z_1\overline{z_2}| \leq 2|z_1\overline{z_2}| \leq 2|z_1|\,|z_2|.$$

quindi

$$|z_1 + z_2|^2 \leq |z_1|^2 + 2|z_1|\,|z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2.$$

8.2 rappresentazione trigonometrica dei numeri complessi



$$\begin{aligned} \rho = |z| \quad & \textbf{modulo} \text{ (distanza dall'origine)}, \\ \alpha \quad & \textbf{argomento} \text{ (angolo)}, \end{aligned}$$

$$z = x + iy = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

Definizione 16. *La coppia* (ρ, α) *si dice* **rappresentazione trigonometrica** *del numero complesso* z *quando* $\rho = |z|$ *è il modulo di* z *e* $z = x + iy = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$. *Si noti che* ρ *è maggiore o uguale a* 0 *mentre, se* $z \neq 0$, α *risulta univocamente determinato a meno di multipli di* 2π *(quindi sarebbe più corretto scrivere* $(\rho, [\alpha])$ *dove* $[\alpha]$ *è una classe della seguente equivalenza su* $\mathbb{R}$: $x \equiv y$ *se* $x - y$ *è un multiplo intero di* 2π*). Dato* $z = (\rho, [\alpha])$, *l'unico valore in* $[\alpha]$ *che risulta essere nell'intervallo* $[0, 2\pi[$ *si dice* **argomento principale** *di* z.

Osservazione 15. *Se*

$$z_1 = \rho_1(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1), \qquad z_2 = \rho_2(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2).$$

allora

$$\begin{aligned} z_1\, z_2 &= \rho_1\rho_2((\cos\alpha_1\cos\alpha_2 - \sin\alpha_1\sin\alpha_2) + i(\cos\alpha_1\sin\alpha_2 + \sin\alpha_1\cos\alpha_2)) \\ &= \rho_1\rho_2(\cos(\alpha_1+\alpha_2) + i\sin(\alpha_1+\alpha_2)). \end{aligned}$$

Nella moltiplicazione i moduli si moltiplicano e gli argomenti si sommano.

Osservazione 16. *Vale la* **formula di De Moivre**. *Se*

$$z = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

allora

$$z^n = \rho^n(\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha)).$$

Osservazione 17. *Siano e il numero di Nepero (verrà introdotto in modo preciso tra poco, per il momento basta sapere che è un numero reale con valore tra* 2 *e* 3*) e* $\theta \in \mathbb{R}$, *si definisce*

$$e^{i\theta} = (\cos\theta + i\sin\theta) \qquad \textbf{formula di Eulero}.$$

Sia $z \in \mathbb{C}$, *si definisce*

$$e^z = e^{\operatorname{Re} z}(\cos(\operatorname{Im} z) + i\sin(\operatorname{Im} z)) \qquad \textbf{esponenziale complessa}.$$

Esercizio 15. *Calcolare*

$$i^{29}, \qquad \frac{3}{2-i}, \qquad \overline{(1+i)^4} \qquad |(2-i)^3| \qquad |(\frac{1+i}{1-i}+1)^2|;$$

9

9.1 radici di un numero complesso

Per questo argomento facciamo riferimento a quanto riportato dal Cap. 2, Par.œ11 di [1].

Esempio 9. *Risolviamo in modo esplicito e senza far riferimento alla forma trigonometrica, l'equazione*

$$z^2 = \bar{w}, \quad \textit{dove} \quad z = x + iy, \quad \bar{w} = a + ib.$$

Si ottiene

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$

Ora, se $b = 0$ *e* $a > 0$, *si ha* $y = 0$ *e*

$$x^2 = a \quad \textit{da cui} \quad z_{1,2} = x_{1,2} = \pm\sqrt{a}.$$

Se invece $b=0$ e $a<0$, si ha $x=0$ e

$$-y^2 = a \quad \textit{da cui} \quad z_{1,2} = iy_{1,2} = \pm i\sqrt{-a},$$

Supponendo poi $b \neq 0$, si ha

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ y = \dfrac{b}{2x} \end{cases}$$

quindi

$$x^2 - \frac{b^2}{4x^2} = a$$

da cui

$$x^4 - ax^2 - \frac{b^2}{4} = 0.$$

Ponendo $x^2 = t$ e risolvendo $t^2 - at - \dfrac{b^2}{4} = 0$, tenendo conto che x^2 non può essere negativo, si ha

$$x^2 = \frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2} \quad \textit{da cui} \quad x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}.$$

Si conclude che

$$z_{1,2} = \pm\left[\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} + i\frac{b}{\sqrt{2a+2\sqrt{a^2+b^2}}}\right].$$

Esempio 10. *Risolviamo l'equazione*

$$z^2 + vz + w = 0, \qquad \textit{dove} \quad v, w \in \mathbb{C}.$$

Si "completa il quadrato" e si ottiene

$$z^2 + vz + \frac{v^2}{4} + w - \frac{v^2}{4} = 0,$$

da cui

$$z^2 + vz + \frac{v^2}{4} = \frac{v^2}{4} - w.$$

Si ha quindi una equazione del tipo

$$Z^2 = W \qquad \textit{dove} \quad Z = z + \frac{v}{2} \quad e \quad W = \frac{v^2}{4} - w,$$

che si può risolvere come sappiamo.

Esercizio 16. *Trovare tutti i numeri complessi z tali che*

$$z^4 = -2, \qquad z^5 = -i, \qquad z^3 = \frac{i+1}{i-1} \qquad z^2 + 3iz + 4 = 0 \qquad z\overline{z} - z + \frac{i}{4} = 0.$$

Esercizio 17. *Disegnare su piano di Gauss gli insiemi*

$$E_1 = \{z \in \mathbb{C} \,:\, 2z + \overline{z} = i\}, \qquad E_2 = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z-1+i| = 2\},$$

$$E_3 = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z-1| \geq \mathrm{Re} z\}.$$

10

10.1 Lo spazio $\mathbb{R}^n$

Definizione 17. *Definiamo*

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ fattori}} = \{(x_1, \dots, x_n) \ : \ x_j \in \mathbb{R} \text{ per } j = 1, \dots, n\}.$$

L'elemento $(x_1, \dots, x_n)$ lo indicheremo con $\underline{x}$ e lo chiameremo punto o vettore di $\mathbb{R}^n$. I valori x_1, x_2, $\dots$, x_n si diranno componenti o coordinate del vettore $\underline{x}$.

In $\mathbb{R}^n$ è definita una operazione di *somma di vettori*, cioè se

$$\underline{x} = (x_1, \dots, x_n), \qquad \underline{y} = (y_1, \dots, y_n)$$

allora

$$\underline{x} + \underline{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n).$$

Con questa operazione, $\mathbb{R}^n$ risulta essere un *gruppo abeliano.*

In $\mathbb{R}^n$ risulta definito anche il *prodotto per uno scalare.* In particolare, dato $\lambda \in \mathbb{R}$, si avrà

$$\lambda\underline{x} = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n).$$

$\mathbb{R}^n$ con la somma e il prodotto per uno scalare risulta essere uno *spazio vettoriale.*

Definizione 18. *Chiamiamo prodotto scalare la funzione*

$$\begin{aligned} &\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ &(\underline{x}\,, \underline{y}) \mapsto \underline{x} \cdot \underline{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n. \end{aligned}$$

Valgono le seguenti proprietà

$$\left.\begin{aligned} &\underline{x} \cdot (\underline{y} + \underline{z}) = \underline{x} \cdot \underline{y} + \underline{x} \cdot \underline{z} \\ &(\underline{x} + \underline{y}) \cdot \underline{z} = \underline{x} \cdot \underline{z} + \underline{y} \cdot \underline{z} \\ &\underline{x} \cdot (\lambda \underline{y}) = \lambda(\underline{x} \cdot \underline{y}) \\ &(\lambda \underline{x}) \cdot \underline{y} = \lambda(\underline{x} \cdot \underline{y}) \end{aligned}\right\} \quad \textit{bilinearità},$$

$$\underline{x} \cdot \underline{y} = \underline{y} \cdot \underline{x} \qquad \textit{simmetria},$$

$$\forall \underline{x}, \quad \underline{x} \cdot \underline{x} \geq 0 \quad \text{e} \quad (\underline{x} \cdot \underline{x} = 0 \iff \underline{x} = \underline{0}) \qquad \textit{positività}.$$

Definizione 19. *Chiamiamo norma euclidea del vettore $\underline{x}$ il valore*

$$\|\underline{x}\| = \sqrt{\underline{x} \cdot \underline{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Teorema 12 (Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz)**.** *Siano $\underline{x}$, $\underline{y} \in \mathbb{R}^n$. Allora*

$$|\underline{x} \cdot \underline{y}| \leq \|\underline{x}\| \, \|\underline{y}\|.$$

Dimostrazione. Sia $\lambda \in \mathbb{R}$. Consideriamo il vettore $\underline{x} + \lambda\underline{y}$. Si ha, per qualunque valore di λ,

$$0 \leq (\underline{x} + \lambda\underline{y}) \cdot (\underline{x} + \lambda\underline{y}) = \|\underline{x}\|^2 + 2\lambda(\underline{x} \cdot \underline{y}) + \lambda^2\|\underline{y}\|^2.$$

Pensando a $\|\underline{x}\|^2 + 2\lambda(\underline{x} \cdot \underline{y}) + \lambda^2\|\underline{y}\|^2$ come a un polinomio di secondo grado in λ, si ha che il segno di tale polinomio è sempre positivo o nullo, quindi il suo discriminante (il così detto "Δ") deve essere negativo o nullo, quindi

$$4(\underline{x} \cdot \underline{y})^2 - 4\|\underline{y}\|^2\|\underline{x}\|^2 \leq 0$$

da cui

$$(\underline{x} \cdot \underline{y})^2 \leq \|\underline{y}\|^2\|\underline{x}\|^2.$$

Si conclude passando alla radice quadrata da ambo le parti. □

Corollario 3 (Disuguaglianza triangolare)**.** *Siano $\underline{x}$, $\underline{y} \in \mathbb{R}^n$. Allora*

$$\|\underline{x} + \underline{y}\| \leq \|\underline{x}\| + \|\underline{y}\|.$$

Dimostrazione. È sufficiente provare che

$$\|\underline{x} + \underline{y}\|^2 \leq (\|\underline{x}\| + \|\underline{y}\|)^2.$$

Si ha

$$\begin{aligned}
\|\underline{x} + \underline{y}\|^2 &= (\underline{x} + \underline{y}) \cdot (\underline{x} + \underline{y}) \\
&= \|\underline{x}\|^2 + 2(\underline{x} \cdot \underline{y}) + \|\underline{y}\|^2 \\
&\leq \|\underline{x}\|^2 + 2|\underline{x} \cdot \underline{y}| + \|\underline{y}\|^2 \\
&\leq \|\underline{x}\|^2 + 2\|\underline{x}\|\,\|\underline{y}\| + \|\underline{y}\|^2 = (\|\underline{x}\| + \|\underline{y}\|)^2.
\end{aligned}$$

□

10.2 Gli spazi metrici

Quali sono le caratteristiche deve avere una funzione per "misurare la distanza" tra due punti, due oggetti, due elementi di un qualche insieme? Intanto vogliamo che la distanza sia sempre un numero reale maggiore o uguale a zero, con la caratteristica che se la distanza è zero allora i due punti coincidono, poi vogliamo che sia simmetrica e infine la distanza dovrà soddisfare la cosiddetta disuguaglianza triangolare: quando si va da un punto ad un altro, passare per un punto intermedio fa sempre allungare la strada!

Definizione 20. *Sia X un insieme. Una funzione $d : X \times X \to \mathbb{R}$ si dice* **distanza** *(o, anche, metrica) se*

- $\forall x,\, y \in X$, $d(x,\, y) \geq 0$ *e* $d(x,\, y) = 0$ *se e solo se* $x = y$.
- $\forall x,\, y \in X$, $d(x,\, y) = d(y,\, x)$.
- $\forall x,\, y,\, z \in X$, $d(x,\, z) \leq d(x,\, y) + d(y,\, z)$.

La coppia (X, d) si dice **spazio metrico***.*

Gli esempi di nostro interesse sono

- $\mathbb{R}$ con la funzione $d(x,\, y) = |x - y|$ (qui $|\cdot|$ rappresenta il valore assoluto).
- $\mathbb{C}$ con la funzione $d(z,\, w) = |z - w|$ (qui $|\cdot|$ rappresenta il modulo).
- $\mathbb{R}^n$ con la funzione $d(\underline{x},\, \underline{y}) = \|\underline{x} - \underline{y}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$.

Esercizio 18 (facoltativo)**.** *Verificare che in $\mathbb{R}^2$ le funzioni*

$$d_1((x_1, x_2),\, (y_1, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|,$$

$$d_\infty((x_1, x_2),\, (y_1, y_2)) = \max\{|x_1 - x_2|,\ |y_1 - y_2|\},$$

sono distanze.

Esercizio 19 (facoltativo)**.** *Verificare che in $\mathbb{R}^2$ le funzioni*

$$d_p((x_1, x_2),\, (y_1, y_2)) = \begin{cases} |x_2 - y_2| & se \ \ x_1 = y_1, \\ |x_2| + |x_1 - y_1| + |y_2| & se \ \ x_1 \neq y_1, \end{cases}$$

$$d_M((x_1, x_2),\, (y_1, y_2)) = \begin{cases} \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} & se \ \ x_1 y_2 = y_1 x_2, \\ \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \sqrt{y_1^2 + y_2^2} & se \ \ x_1 y_2 \neq y_1 x_2, \end{cases}$$

sono distanze.

10.3 intorni di punti di $\mathbb{R}$, di $+\infty$ e $-\infty$

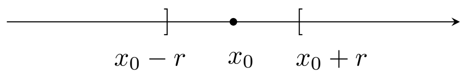
Definizione 21. *Siano $x,\, y \in \mathbb{R}$. Chiamiamo* **distanza euclidea** *(o, semplicemente, distanza) tra x e y il valore $|x - y|$. Si noti che*

- $\forall x, y \in \mathbb{R},\ |x - y| \geq 0 \ \wedge\ (|x - y| = 0 \iff x = y)$.
- $\forall x, y \in \mathbb{R},\ |x - y| = |y - x|$.
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ |x - z| \leq |x - y| + |y - z|$.

Definizione 22. *Sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Chiamiamo* **intorno centrato aperto** *di x_0, di raggio $r > 0$ (o anche* **palla aperta** *di centro x_0 e raggio r), l'insieme $]x_0 - r, x_0 + r[$. L'intorno centrato aperto di x_0, di raggio r, si indica anche con $B(x_0, r)$ o $I(x_0, r)$. Quindi*

$$\begin{aligned} B(x_0, r) &= \,]x_0 - r, x_0 + r[\\ &= \{x \in \mathbb{R} \,:\, x_0 - r < x < x_0 + r\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \,:\, |x - x_0| < r\}. \end{aligned}$$

La palla aperta di centro x_0 e raggio r è l'insieme dei punti che distano da x_0 meno di r.



Definizione 23. *Sia* $x_0 \in \mathbb{R}$. *Chiamiamo* **intorno di** x_0 *un qualunque insieme contenente una palla aperta di centro* x_0 *e raggio* $r > 0$. *Chiamiamo* **intorno di** $+\infty$ *(*$-\infty$*) un qualunque insieme contenente una semiretta aperta superiormente (inferiormente) illimitata.*

Definizione 24. *Chiamiamo* $\tilde{R}$ *l'insieme* $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. $\tilde{R}$ *si dice insieme dei numeri reali estesi, o retta estesa.*

Osservazione 18. *Si noti che per ogni elemento di* $\tilde{R}$ *abbiamo definito chi sono i suoi intorni.*

10.4 Punti interni, esterni, di frontiera

Definizione 25. *Sia* E *in sottoinsieme di* $\mathbb{R}$. *Sia* $x_0 \in \mathbb{R}$. x_0 *si dice punto* **interno** *ad* E *se esiste un intorno di* x_0 *contenuto in* E *(si noti che questo è equivalente a dire che* E *è un intorno di* x_0*).*

x_0 *si dice punto* **esterno** *ad* E *se esiste un intorno di* x_0 *contenuto nel complementare di* E *(si noti che questo è equivalente a dire che* $\mathcal{C}E$ *è un intorno di* x_0.

x_0 *si dice punto* **di frontiera** *per* E *se ogni intorno di* x_0 *contiene punti di* E *e del complementare di* E.

L'insieme dei punti interni di E *si indica con* E°. *L'insieme dei punti di frontiera per* E *si indica con* ∂E.

Osservazione 19. *Si noti che i punti esterni di* E *sono punti interni di* $\mathcal{C}E$. *Si noti anche che* $\partial E = \partial(\mathcal{C}E)$ *(è conseguenza del fatto che* $\mathcal{C}(\mathcal{C}E) = E$*).*

10.5 insiemi aperti e chiusi

Definizione 26. *Sia* A *un sottoinsieme di* $\mathbb{R}$. A *si dice insieme* **aperto** *se per ogni* $x_0 \in A$, x_0 *è interno a* A, *cioè se per ogni* $x_0 \in A$, *esiste* $r > 0$ *tale che* $]x_0 - r, x_0 + r[\subseteq A$, *cioè se* A *è intorno di ogni suo punto.*

Sia C *un sottoinsieme di* $\mathbb{R}$. C *si dice insieme* **chiuso** *se il complementare di* C *è aperto.*

Osservazione 20.

- *Una palla aperta è un insieme aperto.*
- *Un intervallo aperto è un insieme aperto.*
- *Una semiretta aperta è un insieme aperto.*

Teorema 13.

- $\mathbb{R}$ *e* $\emptyset$ *sono insiemi aperti.*
- *Unione di aperti è un insieme aperto.*

- *Intersezione di un numero finito di aperti è un insieme aperto.*

Dimostrazione. $\mathbb{R}$ è aperto (per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ e per ogni $r > 0$, $]x_0 - r, x_0 + r[$ è contenuto in $\mathbb{R}$). L'insieme vuoto è aperto (gli elementi dell'insieme vuoto godono di ogni proprietà).

Sia $\{A_i : i \in I\}$ una famiglia qualunque di aperti (i è un indice nell'insieme I). Supponiamo che $x_0 \in \bigcup_{i \in I} A_i$. Allora esiste $\bar{i} \in I$ tale che $x_0 \in A_{\bar{i}}$. Allora esiste $r > 0$ tale che $]x_0 - r, x_0 + r[\subseteq A_{\bar{i}}$. Quindi $]x_0 - r, x_0 + r[\subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$.

Per provare l'ultimo punto basta provare che l'intersezione di 2 aperti è un insieme aperto. Supponiamo A_1 e A_2 siano aperti. Sia $x_0 \in A_1 \cap A_2$. Allora esistono $r_1 > 0$ e $r_2 > 0$ tali che

$$]x_0 - r_1, x_0 + r_1[\subseteq A_1, \qquad]x_0 - r_2, x_0 + r_2[\subseteq A_2.$$

Ma allora, detto $r = \min\{r_1, r_2\}$, si ha

$$]x_0 - r, x_0 + r[\subseteq A_1 \cap A_2.$$

□

Corollario 4.

- *$\mathbb{R}$ e $\emptyset$ sono insiemi chiusi.*
- *Intersezione di chiusi è un insieme chiuso.*
- *Unione di un numero finito di chiusi è un insieme chiuso.*

Dimostrazione. È sufficiente ragionare sui complementari. Sarà utile tenere in considerazione le leggi di De Morgan. □

Teorema 14. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$.*
A è aperto se e solo se $A \cap \partial A = \emptyset$.
A è aperto se e solo se $A^\circ = A$.

Dimostrazione. Si ha che se A è aperto allora A non contiene nessun punto di frontiera. Infatti essendo A aperto, i suoi punti sono interni e quindi per ciascuno di essi esiste un intorno tutto contenuto in A: non è possibile che ogni intorno (di un punto di A) contenga punti di A e del complementare di A.

Viceversa proviamo che se $A \cap \partial A = \emptyset$ allora A è aperto. Sia $x_0 \in A$. Essendo $A \cap \partial A = \emptyset$, si ha $x_0 \notin \partial A$ cioè

$$\neg\, (\forall U \text{ intorno di } x_0, \quad U \cap A \neq \emptyset \;\wedge\; U \cap \mathcal{C}A \neq \emptyset),$$

quindi

$$\exists\, U \text{ intorno di } x_0 : \quad U \cap A = \emptyset \;\vee\; U \cap \mathcal{C}A = \emptyset.$$

Essendo $x_0 \in A$ e $x_0 \in U$, necessariamente $U \cap A \neq \emptyset$, quindi

$$\exists\, U \text{ intorno di } x_0 : \quad U \cap \mathcal{C}A = \emptyset.$$

che è equivalente ad affermare che

$$\exists\, U \text{ intorno di } x_0 : \quad U \subseteq A,$$

di conseguenza A è aperto. □

Corollario 5. *Sia $C \subseteq \mathbb{R}$, C è chiuso se e solo se $\partial C \subseteq C$.*

Dimostrazione. Sia C chiuso. Allora $\mathcal{C}C$ è aperto e quindi (ricordare l'Osservazione 19)

$$\partial(\mathcal{C}C) \cap \mathcal{C}C = \emptyset,$$

cioè $\partial(\mathcal{C}C) \subseteq C$. Ma allora $\partial C \subseteq C$.

Viceversa sia $\partial C \subseteq C$. Allora $\partial C \cap \mathcal{C}C = \emptyset$, cioè

$$\partial(\mathcal{C}C) \cap \mathcal{C}C = \emptyset$$

e quindi $\mathcal{C}C$ è aperto.

La verifica dell'altra doppia implicazione è lasciata per esercizio. □

11

11.1 Chiusura di un insieme

Definizione 27. *Sia $E \subseteq \mathbb{R}$. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$. x_0 si dice* **punto aderente** *a E (o* **punto di chiusura** *per E) se per ogni U intorno di x_0, si ha che*

$$U \cap E \neq \emptyset.$$

L'insieme dei punti aderenti a E si dice **aderenza** *o* **chiusura** *di E. La chiusura di E si indica con $\overline{E}$.*

Osservazione 21. *Per ogni $E \subseteq \mathbb{R}$ si ha che $E \subseteq \overline{E}$. Infatti se $x_0 \in E$ allora per ogni U intorno di x_0, si ha che*

$$\{x_0\} \subseteq U \cap E \neq \emptyset.$$

Teorema 15. *Sia $E \subseteq \mathbb{R}$.*

- *La chiusura di E è un chiuso.*
- *La chiusura di E è il minimo (nel senso dell'inclusione) chiuso contenete E.*
- *E è chiuso se e solo se E coincide con la sua chiusura.*

Dimostrazione. Provo che $\overline{E}$ è un chiuso. Per farlo, provo che $\mathcal{C}\overline{E}$ è aperto. Sia $y_0 \in \mathcal{C}\overline{E}$. Quindi y_0 non è aderente a E, cioè

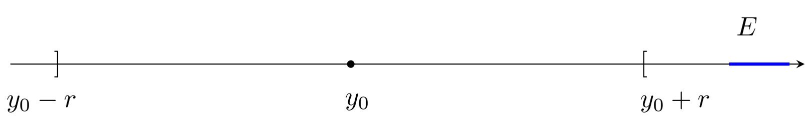
$$\neg\,(\forall U \text{ intorno di } y_0, \quad U \cap E \neq \emptyset),$$

cioè

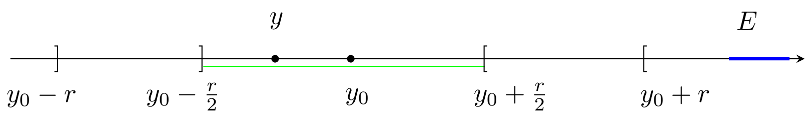
$$\exists U \text{ intorno di } y_0, \quad U \cap E = \emptyset.$$

Di conseguenza, dalla definizione di intorno, deduciamo che esiste $r > 0$ tale che

$$B(y_0, r) \cap E = \emptyset,$$

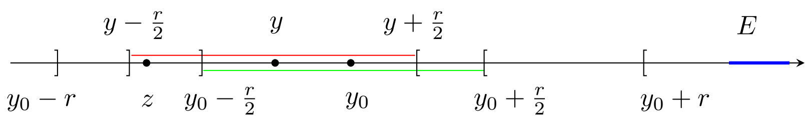


Consideriamo ora $y \in B(y_0, \frac{r}{2})$ (in verde nella figura qui sotto),



Si ha

$$B(y, \frac{r}{2}) \subseteq B(y_0, r),$$



Infatti, se $z \in B(y, \frac{r}{2})$ (in rosso nella figura qui sopra), allora

$$|z - y_0| \leq |z - y| + |y - y_0| < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r.$$

Quindi, per ogni $y \in B(y_0, \frac{r}{2})$, si ha che

$$B(y, \frac{r}{2}) \cap E = \emptyset$$

e di conseguenza, per ogni $y \in B(y_0, \frac{r}{2})$,

$$B(y, \frac{r}{2}) \subseteq \mathcal{C}E,$$

da cui $B(y_0, \frac{r}{2}) \subseteq \mathcal{C}\,\overline{E}$, quindi il complementare di $\overline{E}$ è aperto.

Provo che la chiusura di E è il minimo (nel senso dell'inclusione) chiuso contenente E. Per farlo, provo che dato un chiuso K che contiene E, questo contiene anche la chiusura di E. Sia quindi K un chiuso che contiene E. Sia $y \in \mathcal{C}K$. Essendo $\mathcal{C}K$ aperto, esiste $r > 0$ tale che $B(y, r) \subseteq \mathcal{C}K$. Quindi $B(y, r) \cap K = \emptyset$, quindi $B(y, r) \cap E = \emptyset$, quindi $y \notin \overline{E}$. Ho provato che se $y \in \mathcal{C}K$ allora $y \in \mathcal{C}\,\overline{E}$ cioè

$$\overline{E} \subseteq K$$

che è quanto volevo.

Provo infine che E è chiuso se e solo se E coincide con la sua chiusura.

Se E è chiuso allora E è il minimo chiuso che contiene E stesso. Quindi per i punti precedenti E coincide con la sua chiusura.

Viceversa se E coincide con la sua chiusura allora, essendo la chiusura un chiuso, E è chiuso. □

Esercizio 20. *Sia $E \subseteq \mathbb{R}$. Si provi che $\overline{E} = E \cup \partial E$.*

Esercizio 21. *Sia $E \subseteq \mathbb{R}$. Si provi che $\overline{E} = E^\circ \cup \partial E$ e che $E \setminus \partial E = E^\circ$.*

Esercizio 22. *Sia $E \subseteq \mathbb{R}$. Si provi che $\partial E = \overline{E} \cap \overline{\mathcal{C}E}$.*

Esercizio 23. *Sia $E \subseteq \mathbb{R}$. Si provi che ∂E è un insieme chiuso.*

12

12.1 Punti di accumulazione

Definizione 28. *Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}$. x_0 si dice* **punto di accumulazione di (o per)** *E se per ogni U intorno di x_0 si ha che U contiene punti di E diversi da x_0, cioè*

$$\forall U \text{ intorno di } x_0, \qquad (U \cap E) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset.$$

L'insieme dei punti di $\mathbb{R}$ che sono di accumulazione di E si dice **derivato di** *E e si indica con $\mathcal{D}E$.*

Definizione 29. *Sia $E \subseteq \mathbb{R}$. I punti di E che non sono di accumulazione per E si dicono* **punti isolati**.

$x_0 \in E$ è isolato se e solo se esiste un intorno U di x_0 tale che $U \cap E = \{x_0\}$.

Teorema 16. *x_0 è punto di accumulazione per E se e solo se ogni intorno di x_0 contiene infiniti punti di E.*

Dimostrazione. Se ogni intorno di x_0 contiene infiniti punti di E allora ogni intorno di x_0 contiene punti di E diversi da x_0 (basta che ogni intorno di x_0 contenga due punti di E per avere che ne contenga almeno uno diverso da x_0).

Viceversa supponiamo che esista un intorno U di x_0 che contenga un numero finito di punti di E. Quindi U contiene un numero finito di punti di E diversi da x_0. Li indichiamo con

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}.$$

Essendo $x_i \neq x_0$ per ogni $i = 1, 2, \ldots, n$, se definiamo

$$r = \min\{|x_1 - x_0|, |x_2 - x_0|, \ldots, |x_n - x_0|\},$$

si ha che $r > 0$ e $(B(x_0, r) \cap E) \setminus \{x_0\} = \emptyset$. Quindi x_0 non è di accumulazione per E. □

Teorema 17. *Sia $E \subseteq \mathbb{R}$. E è chiuso se e solo se $\mathcal{D}E \subseteq E$.*

Dimostrazione.

Sia E chiuso. Sia $x_0 \in \mathcal{D}E$. Allora

$$\forall U \text{ intorno di } x_0, \qquad (U \cap E) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset.$$

Quindi

$$\forall U \text{ intorno di } x_0, \qquad (U \cap E) \neq \emptyset,$$

da cui $x_0 \in \overline{E}$. Ma $\overline{E} = E$, essendo E chiuso. Quindi $x_0 \in E$. Abbiamo quindi provato che $\mathcal{D}E \subseteq E$.

Viceversa sia $\mathcal{D}E \subseteq E$. Proviamo che E è chiuso. Per far questo basta provare che $\overline{E} \subseteq E$. Sia $x_0 \in \overline{E}$. Sappiamo che

$$\forall U \text{ intorno di } x_0, \qquad (U \cap E) \neq \emptyset.$$

Se fosse $x_0 \notin E$, allora $E = E \setminus \{x_0\}$ e quindi

$$\forall U \text{ intorno di } x_0, \qquad (U \cap E) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset.$$

da cui $x_0 \in \mathcal{D}E$ e finalmente $x_0 \in E$, il che sarebbe assurdo. Quindi $\overline{E} \subseteq E$. □

Esercizio 24. *Trovare i punti interni, esterni, di frontiera e trovare l'interno, la chiusura e il derivato di*

$$]1,\, 3[, \qquad \{\frac{1}{n+1}\, :\, n \in \mathbb{N}\},$$

$$(\mathbb{Q} \cap]1,\, 3]) \cup ((\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [2,\, 4]), \qquad \{k + h\sqrt{2}\, :\, k, h \in \mathbb{Z}\}.$$

12.2 Primo teorema di Bolzano-Weierstrass

Osservazione 22. *Esistono insiemi che hanno, di sicuro, punti di accumulazione in $\mathbb{R}$? Poiché per avere un punto di accumulazione servono infiniti punti di E (che dovranno essere dentro ogni intorno del punto di accumulazione), gli insiemi finiti non hanno punti di accumulazione. E quelli infiniti? Non è detto che un insieme infinito abbia punti di accumulazione in $\mathbb{R}$: ad esempio $\mathbb{N}$ non ha punti di accumulazione in $\mathbb{R}$ (convincersi di questo fatto vedendo che tutti i punti di $\mathbb{N}$ sono isolati), però $\mathbb{N}$ è superiormente illimitato. Restano in discussione gli insiemi infiniti e limitati.*

Teorema 18 (primo teorema di Bolzano-Weierstrass)**.** *Ogni insieme infinito e limitato di numeri reali ha almeno un punto di accumulazione in $\mathbb{R}$.*

Dimostrazione. Sia $E \subseteq \mathbb{R}$, E infinito e limitato. Poiché è limitato, si ha $\inf E = a_0$, $\sup E = b_0$ con $a_0,\, b_0 \in \mathbb{R}$, $a_0 < b_0$ e $E \subseteq [a_0,\, b_0]$. Consideriamo

$$[a_0,\, \frac{a_0 + b_0}{2}] \quad \text{e} \quad [\frac{a_0 + b_0}{2},\, b_0].$$

Poiché E è infinito e contenuto in $[a_0,\, b_0]$, almeno uno dei due precedenti intervalli contiene infiniti punti di E. Supponiamo per esempio che sia il primo. Poniamo $a_1 = a_0$ e $b_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$. Consideriamo

$$[a_1,\, \frac{a_1 + b_1}{2}] \quad \text{e} \quad [\frac{a_1 + b_1}{2},\, b_1].$$

Poiché $[a_1,\, b_1]$ contiene infiniti punti di E, almeno uno dei due precedenti intervalli contiene infiniti punti di E. Supponiamo per esempio che sia il secondo. Poniamo $a_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$ e $b_2 = b_1$.

Proseguendo con questo procedimento si costruisce una successione $([a_n,\, b_n])_n$ di intervalli chiusi, limitati, inscatolati e dimezzati, ciascuno dei quali contiene infiniti punti di E. La forma forte del teorema di Cantor ci garantisce che esiste un unico $\xi \in \mathbb{R}$ tale che

$$\{\xi\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n,\, b_n].$$

Ora provo che ξ è di accumulazione per E. Sia $r > 0$. Sappiamo che

- per ogni n, $\xi \in [a_n,\, b_n]$;
- per ogni n, $[a_n,\, b_n]$ contiene infiniti punti di E;

- esiste un $\bar{n}$ tale che $b_{\bar{n}} - a_{\bar{n}} < r$; (è una conseguenza del fatto che, per ogni n,
$$b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n} \leq \frac{b_0 - a_0}{n}).$$

Si ha quindi
$$[a_{\bar{n}}, b_{\bar{n}}] \subseteq \,]\xi - r, \xi + r[.$$
Di conseguenza in $]\xi - r, \xi + r[$ vi sono infiniti punti di E. Ciò vale per ogni $r > 0$, quindi in ogni intorno di ξ ci sono infiniti punti di E. Quindi ξ è di accumulazione per E. □

Osservazione 23. *Si noti che se un insieme E è superiormente illimitato esso è infinito e in ogni intorno di $+\infty$ vi sono punti di E. In questo caso diremo che* $\sup E$ *è $+\infty$ e che $+\infty$ è di accumulazione per E. Analogamente per gli insiemi inferiormente illimitati.*

In conclusione, si può quindi dire che in $\tilde{\mathbb{R}}$ gli insiemi non vuoti hanno sempre sup *e* inf*, che è un numero reale se sono superiormente o, rispettivamente, inferiormente limitati e similmente in $\tilde{\mathbb{R}}$ gli insiemi infiniti hanno sempre almeno un punto di accumulazione, e, se sono limitati, hanno sempre almeno un punto di accumulazione in $\mathbb{R}$.*

13

13.1 Limiti di funzioni

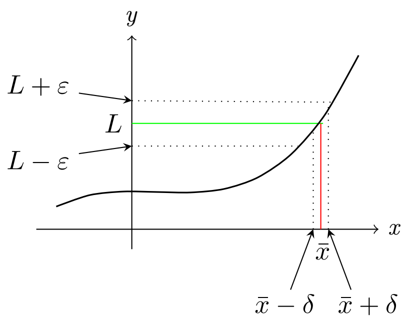
Si consiglia **fortemente** la lettura dei Cap. 4 e 5 di [1].

Osservazione 24. *Sia*
$$f : A \to \mathbb{R}, \quad A \subseteq \mathbb{R}, \quad \bar{x} \in \tilde{\mathbb{R}}, \quad \bar{x} \text{ di accumulazione per } A.$$
Voglio avere un'idea dei valori di $f(x)$, quando x viene scelta vicino a $\bar{x}$. In particolare sono interessato a sapere se c'è un valore $L \in \tilde{\mathbb{R}}$ "verso cui tendono" i valori di $f(x)$ al "tendere di x a $\bar{x}$". Il tutto è ben spiegato utilizzando gli intorni: bisognerà che, ogni qual volta si fissi un intorno di L (all'inizio, a piacimento, eventualmente piccolo), dovrà esistere un intorno di $\bar{x}$ (che sarà quello che sarà, dipende dall'intorno di L che abbiamo fissato), tale che, se scelgo $x \in A$ in quell'intorno di $\bar{x}$, allora $f(x)$ appartiene all'intorno di L fissato. Siccome sono interessato al comportamento di f vicino a $\bar{x}$ ma non specificatamente in $\bar{x}$, escludo il punto $\bar{x}$ dal vincolo sul comportamento.

Definizione 30. *Sia $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$. Sia $\bar{x} \in \tilde{\mathbb{R}}$, $\bar{x}$ di accumulazione per A. Sia $L \in \tilde{\mathbb{R}}$.*
$$\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = L$$
significa
$$\forall V \text{ intorno di } L, \quad \exists U \text{ intorno di } \bar{x} : \quad \forall\, x \in A, \quad x \in U \setminus \{\bar{x}\} \;\Rightarrow f(x) \in V.$$
Diremo che **il limite per x che tende a $\bar{x}$ di f, esiste e vale** *L. Se $L \in \mathbb{R}$ diremo che* **il limite esiste ed è finito***.*

In particolare

- supponiamo $L, \bar{x} \in \mathbb{R}$.
$$\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = L$$
significa
$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, \delta > 0: \quad \forall\, x \in A, \quad 0 < |x - \bar{x}| < \delta \;\Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$
(qui V conterrà $]L - \varepsilon, L + \varepsilon[$ mentre U sarà $]\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta[$).



Esempio 11. *Verifichiamo che*
$$\lim_{x \to 1} (1 + x^2) = 2.$$
Fissato $\varepsilon > 0$, *si tratta di trovare* $\delta > 0$ *tale che, se* $0 < |x - 1| < \delta$ *allora* $|(1 + x^2) - 2| < \varepsilon$. *Ora*
$$|(1 + x^2) - 2| = |x^2 - 1| = |x - 1|\, |x + 1|.$$
Osserviamo che se $x \in [0, 2]$ *allora* $|x + 1| \leq 3$. *Quindi se* $0 < |x - 1| < \delta$, *con* $\delta \leq 1$, *si ha*
$$|(1 + x^2) - 2| = |x^2 - 1| = |x - 1|\, |x + 1| < 3\delta.$$
Basterà quindi scegliere $3\delta = \varepsilon$ *con* $\delta \leq 1$, *cioè* $\delta = \min\{\frac{\varepsilon}{3}, 1\}$.

- supponiamo $L = +\infty$, $\bar{x} \in \mathbb{R}$.
$$\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = +\infty$$
significa
$$\forall\, M > 0, \quad \exists\, \delta > 0: \quad \forall\, x \in A, \quad 0 < |x - \bar{x}| < \delta \;\Rightarrow f(x) > M;$$

- supponiamo $L \in \mathbb{R}$, $\bar{x} = +\infty$.
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$
significa
$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, K > 0: \quad \forall\, x \in A, \quad x > K \;\Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon;$$

Esempio 12. *Verifchiamo che*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0.$$

Fissato $\varepsilon>0$*, si tratta di trovare* $K>0$ *tale che, se* $x>K$ *allora* $|\frac{1}{x}|<\varepsilon$*. Osserviamo che se* $x>K>0$ *allora* $0<\frac{1}{x}<\frac{1}{K}$*. Quindi basta scegliere* $\frac{1}{K}=\varepsilon$*, cioè* $K=\frac{1}{\varepsilon}$*.*

- supponiamo $L=+\infty$, $\bar{x}=+\infty$.

  $$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

  significa

  $$\forall\, M>0,\quad \exists\, K>0:\quad \forall\, x\in A,\quad x>K\ \Rightarrow f(x)>M.$$

I casi con $-\infty$ al posto di $+\infty$ sono lasciati per esercizio.

13.2 Limiti destri e sinistri, restrizioni

Definizione 31. *Sia* $f:A\to\mathbb{R}$*,* $A\subseteq\mathbb{R}$*. Sia* $\bar{x}\in\tilde{\mathbb{R}}$*,* $\bar{x}$ *di accumulazione per* A*. Siano* $L,L'\in\tilde{\mathbb{R}}$*.*

$$\lim_{x\to\bar{x}^+}f(x)=L$$

significa

$$\forall\, V \textit{ intorno di } L,\quad \exists\, U \textit{ intorno di } \bar{x}:\quad \forall\, x\in A,\quad x\in U\cap]\bar{x},+\infty[\ \Rightarrow f(x)\in V,$$

e

$$\lim_{x\to\bar{x}^-}f(x)=L'$$

significa

$$\forall\, V \textit{ intorno di } L',\quad \exists\, U \textit{ intorno di } \bar{x}:\quad \forall\, x\in A,\quad x\in U\cap]-\infty,\bar{x}[\ \Rightarrow f(x)\in V.$$

$\lim_{x\to\bar{x}^+}f(x)$ *e* $\lim_{x\to\bar{x}^-}f(x)$ *si dicono rispettivamente* **limite destro** *e* **limite sinistro**.

Definizione 32. *Sia* $f:A\to\mathbb{R}$*,* $A\subseteq\mathbb{R}$*. Sia* $B\subseteq A$*, Sia* $\bar{x}\in\tilde{\mathbb{R}}$*,* $\bar{x}$ *di accumulazione per* A *e per* B*. Sia* $L\in\tilde{\mathbb{R}}$*.*

$$\lim_{x\to\bar{x}}f_{|B}(x)=L$$

significa

$$\forall\, V \textit{ intorno di } L,\quad \exists\, U \textit{ intorno di } \bar{x}:\quad \forall\, x\in B,\quad x\in U\setminus\{\bar{x}\}\ \Rightarrow f(x)\in V.$$

$\lim_{x\to\bar{x}}f_{|B}(x)$ *si dice* **limite della funzione ristretta a** B*.*

Osservazione 25. *I limiti destri e sinistri sono particolari limiti di restrizioni, le restrizioni a* $A\cap]\bar{x},+\infty[$ *e* $A\cap]-\infty,\bar{x}[$ *rispettivamente.*

Teorema 19. *Se una funzione, per* x *che tende a* $\bar{x}$*, ha limite* L*, allora tutte le sue restrizioni hanno, per* x *che tende a* $\bar{x}$*, limite* L*.*

Dimostrazione. Basta osservare che l'insieme degli x su cui verificare che $f(x)\in V$ nel caso della restrizione, è un sottoinsieme di quello del caso del limite senza restrizione. □

13.3 Prime proprietà dei limiti

Teorema 20 (unicità)**.** *Sia $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$. Sia $\bar{x} \in \tilde{\mathbb{R}}$, $\bar{x}$ di accumulazione per A. Siano L_1, $L_2 \in \tilde{\mathbb{R}}$. Se*

$$\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = L_1 \quad e \quad \lim_{x \to \bar{x}} f(x) = L_2,$$

allora

$$L_1 = L_2.$$

Dimostrazione. Supponiamo, per assurdo, che sia $L_1 \neq L_2$. È possibile allora trovare (lo si verifichi nei vari casi) V_1 intorno di L_1 e V_2 intorno di L_2 tali che

$$V_1 \cap V_2 = \emptyset.$$

Applicando le definizioni di limite si avrebbe allora che

$$\exists\, U_1 \text{ intorno di } \bar{x} : \quad \forall\, x \in A, \quad x \in U_1 \setminus \{\bar{x}\} \;\Rightarrow f(x) \in V_1$$

e

$$\exists\, U_2 \text{ intorno di } \bar{x} : \quad \forall\, x \in A, \quad x \in U_2 \setminus \{\bar{x}\} \;\Rightarrow f(x) \in V_2.$$

Si nota ora che $U = U_1 \cap U_2$ è un intorno di $\bar{x}$ e che, essendo $\bar{x}$ di accumulazione per A, si ha che $(U \cap A) \setminus \{\bar{x}\}$ è non vuoto. Sia quindi $x^* \in (U \cap A) \setminus \{\bar{x}\}$, si ha

$$f(x^*) \in V_1 \cap V_2 \neq \emptyset,$$

e ciò è assurdo. □

Corollario 6. *Se due restrizioni della stessa funzione, relativamente allo stesso punto di accumulazione, hanno limiti diversi, il limite della funzione non esiste.*

Teorema 21 (permanenza del segno)**.** *Sia $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$. Sia $\bar{x} \in \tilde{\mathbb{R}}$, $\bar{x}$ di accumulazione per A. Sia*

$$\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = L.$$

Se $L > 0$ (cioè $L = +\infty$ oppure $L \in]0, +\infty[$) allora

$$\exists\, U \text{ intorno di } \bar{x} : \quad \forall x \in U \setminus \{\bar{x}\}, \; f(x) > 0.$$

Dimostrazione. Sia

$$\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = +\infty.$$

Basta scegliere, per esempio, nella definizione di limite, l'intorno $V =]1, +\infty[$. L'intorno U che si ottiene ha le caratteristiche cercate.

Sia

$$\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = L \in]0, +\infty[.$$

Basta scegliere, per esempio, nella definizione di limite, l'intorno $V =]\frac{1}{2}L, \frac{3}{2}L[$. L'intorno U che si ottiene ha le caratteristiche cercate. □

Teorema 22 (confronto)**.** *Siano* $f,\ g : A \to \mathbb{R}$*,* $A \subseteq \mathbb{R}$*. Sia* $\bar{x} \in \tilde{\mathbb{R}}$*,* $\bar{x}$ *di accumulazione per* A*. Sia*

$$\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = +\infty.$$

Se

$$\forall x \in A \setminus \{\bar{x}\}, \quad f(x) \leq g(x),$$

allora

$$\lim_{x \to \bar{x}} g(x) = +\infty.$$

Dimostrazione. Basta scrivere la definizione di $\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = +\infty$ e osservare che, essendo $f(x) \leq g(x)$, con gli stessi U e V, vale anche $\lim_{x \to \bar{x}} g(x) = +\infty$. □

14

14.1 Prime proprietà dei limiti, continuazione

Teorema 23 (dei due Carabinieri)**.** *Siano* $f,\ g,\ h : A \to \mathbb{R}$*,* $A \subseteq \mathbb{R}$*. Sia* $\bar{x} \in \tilde{\mathbb{R}}$*,* $\bar{x}$ *di accumulazione per* A*. Sia*

$$\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = \lim_{x \to \bar{x}} h(x) = L \in \mathbb{R}.$$

Se

$$\forall x \in A \setminus \{\bar{x}\}, \quad f(x) \leq g(x) \leq h(x),$$

allora

$$\lim_{x \to \bar{x}} g(x) = L.$$

Dimostrazione. Sappiamo che

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, U_1 \text{ intorno di } \bar{x} : \quad \forall\, x \in A, \quad x \in U_1 \setminus \{\bar{x}\} \ \Rightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$

e

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, U_2 \text{ intorno di } \bar{x} : \quad \forall\, x \in A, \quad x \in U_2 \setminus \{\bar{x}\} \ \Rightarrow L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon.$$

Scegliendo $U = U_1 \cap U_2$ si avrà in particolare che

$$\forall\, x \in A, \quad x \in U \setminus \{\bar{x}\} \ \Rightarrow \quad L - \varepsilon < f(x)) \ \ \wedge \ \ h(x) < L + \varepsilon,$$

da cui, utilizzando il fatto che $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, si ottiene

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, U \text{ intorno di } \bar{x} : \quad \forall\, x \in A, \quad x \in U \setminus \{\bar{x}\} \ \Rightarrow L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon.$$

□

Teorema 24 (operazioni con i limiti)**.** *Siano* $f,\ g : A \to \mathbb{R}$*,* $A \subseteq \mathbb{R}$*. Sia* $\bar{x} \in \tilde{\mathbb{R}}$*,* $\bar{x}$ *di accumulazione per* A*. Siano* $l,\ g \in \mathbb{R}$*. Se*

$$\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = l \quad e \quad \lim_{x \to \bar{x}} g(x) = m,$$

allora

i)
$$\lim_{x\to\bar{x}} f(x)+g(x) = l+m,$$

ii)
$$\lim_{x\to\bar{x}} f(x)g(x) = l\,m,$$

ii) se $m \neq 0$,
$$\lim_{x\to\bar{x}} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}.$$

Dimostrazione. Proviamo i). Dalla definizione di limite sappiamo che

$$\forall\,\varepsilon>0,\quad \exists\,U_1 \text{ intorno di } \bar{x}: \quad \forall\,x\in A,\quad x\in U_1\setminus\{\bar{x}\}\ \Rightarrow l-\frac{\varepsilon}{2}<f(x)<l+\frac{\varepsilon}{2}$$

e

$$\forall\,\varepsilon>0,\quad \exists\,U_2 \text{ intorno di } \bar{x}: \quad \forall\,x\in A,\quad x\in U_2\setminus\{\bar{x}\}\ \Rightarrow m-\frac{\varepsilon}{2}<g(x)<m+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Scegliendo $U=U_1\cap U_2$, si ha che

$$\forall\,x\in A,\quad x\in U\setminus\{\bar{x}\}\ \Rightarrow l-\frac{\varepsilon}{2}+m-\frac{\varepsilon}{2}<f(x)+g(x)<l+\frac{\varepsilon}{2}+m+\frac{\varepsilon}{2},$$

quindi

$$\forall\,\varepsilon>0,\ \ \exists\,U \text{ di } \bar{x}:\ \ \forall\,x\in A,\ \ x\in U\setminus\{\bar{x}\}\ \Rightarrow l+m-\varepsilon<f(x)+g(x)<l+m+\varepsilon.$$

Proviamo ii). Aggiungendo e sottraendo la quantità $f(x)m$ e utilizzando la disuguaglianza triangolare si ha

$$\begin{aligned}|f(x)g(x)-lm| &\le |f(x)g(x)-f(x)m|+|f(x)m-lm|\\ &\le |f(x)||g(x)-m|+|m||f(x)-l|.\end{aligned}$$

Dalla definizione di limite si ha

$$\forall\,\varepsilon>0,\quad \exists\,U_1 \text{ di } \bar{x}: \quad \forall\,x\in A,\quad x\in U_1\setminus\{\bar{x}\}\ \Rightarrow |f(x)-l|<\frac{\varepsilon}{|l|+|m|+1},$$

similmente

$$\forall\,\varepsilon>0,\quad \exists\,U_2 \text{ di } \bar{x}: \quad \forall\,x\in A,\quad x\in U_2\setminus\{\bar{x}\}\ \Rightarrow |g(x)-m|<\frac{\varepsilon}{|l|+|m|+1},$$

e infine

$$\exists\,U_3 \text{ di } \bar{x}: \quad \forall\,x\in A,\quad x\in U_3\setminus\{\bar{x}\}\ \Rightarrow |f(x)|<|l|+1$$

(in particolare l'ultima si ottiene da $\lim_{x\to\bar{x}} f(x)=l$ ponendo $\varepsilon=1$ e utilizzando il fatto che
$$l-1<f(x)<l+1 \quad\Rightarrow\quad |f(x)|<|l|+1).$$
Quindi se $x\in A$ e $x\in(U_1\cap U_2\cap U_3)\setminus\{\bar{x}\}$, si ha

$$\begin{aligned}|f(x)g(x)-lm| &\le |f(x)g(x)-f(x)m|+|f(x)m-lm|\\ &\le |f(x)||g(x)-m|+|m||f(x)-l|\\ &\le (|l|+1)\frac{\varepsilon}{|l|+|m|+1}+|m|\frac{\varepsilon}{|l|+|m|+1}=\varepsilon.\end{aligned}$$

Proviamo iii). Sarà sufficiente provare che, se $m \neq 0$, allora

$$\lim_{x\to\bar{x}} g(x) = m \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to\bar{x}} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{m}.$$

Si ha che

$$|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{m}| = \frac{|g(x)-m|}{|g(x)|\,|m|}.$$

Si ha altresì

$$\forall\,\varepsilon > 0, \quad \exists\,U_1 \text{ di } \bar{x}: \quad \forall\,x \in A, \quad x \in U_1 \setminus \{\bar{x}\} \;\Rightarrow |g(x)-m| < \varepsilon\frac{|m|^2}{2},$$

$$\exists\,U_2 \text{ di } \bar{x}: \quad \forall\,x \in A, \quad x \in U_2 \setminus \{\bar{x}\} \;\Rightarrow |g(x)| > \frac{|m|}{2}$$

(in particolare l'ultima si ottiene da $\lim_{x\to\bar{x}} g(x) = m$ ponendo $\varepsilon = \frac{|m|}{2}$ e utilizzando il fatto che

$$m - \frac{|m|}{2} < g(x) < m + \frac{|m|}{2} \quad \Rightarrow \quad |g(x)| > \frac{|m|}{2}).$$

Quindi se $x \in A$ e $x \in (U_1 \cap U_2) \setminus \{\bar{x}\}$, si ha

$$|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{m}| = \frac{|g(x)-m|}{|g(x)|\,|m|} < \frac{\varepsilon\frac{|m|^2}{2}}{\frac{|m|}{2}|m|} = \varepsilon.$$

□

Teorema 25 (limiti infinitesimi e limiti infiniti)**.**

i) $\lim_{x\to\bar{x}} f(x) = +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to\bar{x}} \frac{1}{f(x)} = 0.$

ii) $(\forall\,x \neq \bar{x},\; f(x) > 0) \;\wedge\; \lim_{x\to\bar{x}} f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to\bar{x}} \frac{1}{f(x)} = +\infty.$

Dimostrazione. Per esercizio.

Teorema 26 (forme indeterminate)**.**

i) Se $\lim_{x\to\bar{x}} f(x) = +\infty$ *e* $\exists M > 0 :\; \forall x \in A \setminus \{\bar{x}\},\; g(x) > -M$ *(cioè g è inferiormente limitata: si osservi che ciò accade in particolare quando* $\lim_{x\to\bar{x}} g(x) = L \neq -\infty$*), allora*

$$\lim_{x\to\bar{x}} f(x) + g(x) = +\infty \qquad \textit{(resta escluso il caso } +\infty - \infty\textit{)}.$$

ii) Se $\lim_{x\to\bar{x}} f(x) = -\infty$ *e* $\exists M > 0 :\; \forall x \in A \setminus \{\bar{x}\},\; g(x) < M$ *(cioè g è superiormente limitata: si osservi che ciò accade in particolare quando* $\lim_{x\to\bar{x}} g(x) = L \neq +\infty$*), allora*

$$\lim_{x\to\bar{x}} f(x) + g(x) = -\infty \qquad \textit{(resta escluso il caso } -\infty + \infty\textit{)}.$$

iii) *Se* $\lim_{x\to\bar{x}} f(x) = 0$ *e* $\exists M > 0 : \ \forall x \in A \setminus \{\bar{x}\}, \ |g(x)| < M$ *(cioè* g *è limitata: si osservi che ciò accade in particolare quando* $\lim_{x\to\bar{x}} g(x) = L \in \mathbb{R}$*), allora*

$$\lim_{x\to\bar{x}} f(x)g(x) = 0 \qquad \textit{(resta escluso il caso } 0\cdot(+\infty)\textit{)}.$$

iv) *Se* $\lim_{x\to\bar{x}} f(x) = +\infty$ *e* $\exists \rho > 0 : \ \forall x \in A \setminus \{\bar{x}\}, \ g(x) \geq \rho > 0$*, allora*

$$\lim_{x\to\bar{x}} f(x)g(x) = +\infty \qquad \textit{(resta escluso il caso } (+\infty)\cdot 0\textit{)}.$$

Dimostrazione. Provo solo i casi i) e iii). Gli altri sono simili e si possono fare come esercizio. Sia quindi $\lim_{x\to\bar{x}} f(x) = +\infty$. Sia $M > 0$ fissato. Si ha

$$\forall K > 0, \quad \exists U \text{ intorno di } \bar{x} : \quad \forall x \in A, \quad x \in U \setminus \{\bar{x}\} \ \Rightarrow \ f(x) > K + M.$$

Essendo $g(x) > -M$, si ottiene che

$$\forall K > 0, \quad \exists U \text{ intorno di } \bar{x} : \quad \forall x \in A, \quad x \in U \setminus \{\bar{x}\} \ \Rightarrow \ f(x) + g(x) > K,$$

e si conclude. Sia invece $\lim_{x\to\bar{x}} f(x) = 0$. Sia $M > 0$ fissato. Si ha

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists U \text{ intorno di } \bar{x} : \quad \forall x \in A, \quad x \in U \setminus \{\bar{x}\} \ \Rightarrow \ |f(x)| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Essendo $|g(x)| < M$, si ottiene che

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists U \text{ intorno di } \bar{x} : \quad \forall x \in A, \quad x \in U \setminus \{\bar{x}\} \ \Rightarrow \ |f(x)\, g(x)| < \varepsilon,$$

e si conclude anche in questo caso. $\square$

14.2 Esempi

i) **funzione costante** c;

$$\lim_{x\to\bar{x}} c = c \quad \text{(nella def. di limite va bene qualunque intorno di } \bar{x}\text{)}.$$

ii) **funzione identità**;

$$\lim_{x\to\bar{x}} x = \bar{x} \quad \text{(nella def. di limite basta scegliere } U = V\text{)}.$$

iii) **polinomi**;

$$\lim_{x\to\bar{x}} a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = a_0 + a_1\bar{x} + \ldots + a_n\bar{x}^n, \quad \text{se } \bar{x} \in \mathbb{R}$$

(si usano i teoremi sulle operazioni con i limiti).

$$\lim_{x\to+\infty} a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } a_n > 0, \\ -\infty & \text{se } a_n < 0, \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } a_n > 0 \text{ e } n \text{ pari}, \\ -\infty & \text{se } a_n > 0 \text{ e } n \text{ dispari}, \\ +\infty & \text{se } a_n < 0 \text{ e } n \text{ dispari}, \\ -\infty & \text{se } a_n < 0 \text{ e } n \text{ pari} \end{cases}$$

(si usano i teoremi sulle forme indeterminate).

iv) **funzioni razionali**;

$$\lim_{x\to\bar{x}} \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m} = \frac{a_0 + a_1 \bar{x} + \ldots + a_n \bar{x}^n}{b_0 + b_1 \bar{x} + \ldots + b_m \bar{x}^m},$$

se $\bar{x} \in \mathbb{R}$ e $b_0 + b_1\bar{x} + \ldots + b_m\bar{x}^m \neq 0$.

Se $\bar{x} \in \mathbb{R}$ e $b_0 + b_1\bar{x} + \ldots + b_m\bar{x}^m = 0$ e $a_0 + a_1\bar{x} + \ldots + a_n\bar{x}^n \neq 0$ esistono infiniti i limiti destro e sinistro, ma possono essere diversi.

Infine

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m} = \lim_{x\to+\infty} x^{n-m}\frac{a_n}{b_m} = \ldots$$

v) **radice quadrata**;

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0, \qquad \lim_{x\to\bar{x}} \sqrt{x} = \sqrt{\bar{x}} \quad (\bar{x} > 0), \qquad \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

(in particolare, per il secondo limite, si è usata la disuguaglianza

$$|\sqrt{x} - \sqrt{\bar{x}}| \leq \frac{|x-\bar{x}|}{\sqrt{x}+\sqrt{\bar{x}}} \leq \frac{|x-\bar{x}|}{\sqrt{\bar{x}}}).$$

15

15.1 Esempi, continuazione

vi) **funzioni trigonometriche**;

Si sfruttano i seguenti fatti

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad |\cos\theta| \leq 1 \quad \text{e} \quad |\sin\theta| \leq |\theta|,$$

$$|\sin x - \sin\bar{x}| = 2|\sin(\frac{x-\bar{x}}{2})||\cos(\frac{x+\bar{x}}{2})| \leq |x - \bar{x}|.$$

Quindi

$$\lim_{x\to\bar{x}} \sin x = \sin\bar{x}$$

e analogamente

$$\lim_{x\to\bar{x}} \cos x = \cos\bar{x}.$$

Si ha anche

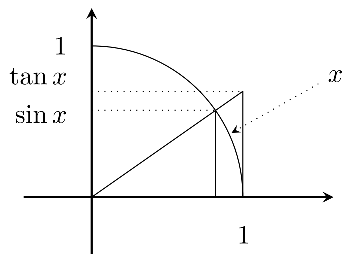
$$\lim_{x\to\bar{x}} \tan x = \tan\bar{x} \qquad \text{per } \bar{x} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,$$

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty, \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty.$$

vii) **limite fondamentale** $\frac{\sin x}{x}$ **per** x **che tende a** 0;

Si sfrutta il fatto che

$$\sin x \leq x \leq \tan x \qquad \text{per} \quad x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[,$$



da cui
$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1 \qquad \text{per} \quad x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\setminus\{0\}.$$
Usando il teorema dei due Carabinieri si ottiene
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$
Sarà utile ricordare anche che
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2},$$
infatti
$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)} = \frac{1-\cos^2 x}{x^2}\frac{1}{1+\cos x} = \frac{\sin^2 x}{x^2}\frac{1}{1+\cos x}.$$

15.2 Limite della composta

Teorema 27. *Sia $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$. Sia $\bar{x} \in \tilde{\mathbb{R}}$, $\bar{x}$ di accumulazione per A. Sia $g : B \to \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$. Sia $\bar{y} \in \tilde{\mathbb{R}}$, $\bar{y}$ di accumulazione per B. Sia $f(A) \subseteq B$. Sia $L \in \tilde{\mathbb{R}}$. Supponiamo che*
$$\lim_{x\to\bar{x}} f(x) = \bar{y} \quad e \quad \lim_{y\to\bar{y}} g(y) = L.$$
Se vale una delle due seguenti condizioni:

i) $\forall\, x \in A \setminus \{\bar{x}\}, \quad f(x) \neq \bar{y}$;

ii) $\bar{y} \in B \quad e \quad g(\bar{y}) = L$;

allora
$$\lim_{x\to\bar{x}} g(f(x)) = L.$$

Dimostrazione. Supponiamo valga i). Sappiamo che
$$\lim_{y\to\bar{y}} g(y) = L$$
significa
$$\forall W \text{ di } L, \quad \exists V \text{ di } \bar{y} : \quad \forall y \in B, \quad y \in V \setminus \{\bar{y}\}, \Rightarrow g(y) \in W.$$

Analogamente
$$\lim_{x\to\bar{x}} f(x) = \bar{y}$$
significa
$$\forall V \text{ di } \bar{y}, \quad \exists U \text{ di } \bar{x}: \quad \forall x \in A, \quad x \in U \setminus \{\bar{x}\}, \Rightarrow f(x) \in V;$$
osserviamo che la condizione i) garantisce che se $x \neq \bar{x}$ allora $f(x) \neq \bar{y}$, quindi
$$x \in U \setminus \{\bar{x}\}, \Rightarrow f(x) \in V \setminus \{\bar{y}\}$$
e di conseguenza
$$g(f(x)) \in W.$$
Riassumendo
$$\forall W \text{ di } L, \quad \exists U \text{ di } \bar{x}: \quad \forall x \in A, \quad x \in U \setminus \{\bar{x}\}, \Rightarrow g(f(x)) \in W,$$
che è quanto volevamo.

Sia invece ii). Sia $x \in U \setminus \{\bar{x}\}$. Sappiamo che $f(x) \in V$. Se $f(x) \neq \bar{y}$ si ha $g(f(x)) \in W$ grazie al fatto che $\lim_{y\to\bar{y}} g(y) = L$. Se invece $f(x) = \bar{y}$ allora $g(f(x)) = g(\bar{y}) = L$ per la ii). Ma ovviamente $L \in W$. In conclusione anche in questo caso vale
$$\forall W \text{ di } L, \quad \exists U \text{ di } \bar{x}: \quad \forall x \in A, \quad x \in U \setminus \{\bar{x}\}, \Rightarrow g(f(x)) \in W.$$
□

Osservazione 26. *Nella soluzione degli esercizi potrà essere utile tener conto della seguente applicazione del teorema del limite della composta:*
$$\lim_{x\to\bar{x}} f(x) = 0 \quad \wedge \quad (f(x) \neq 0 \textit{ per } x \neq \bar{x}) \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to\bar{x}} \frac{\sin(f(x))}{f(x)} = 1.$$
Per essere ancora più efficaci, se si definisce la funzione
$$\varphi(y) = \begin{cases} \dfrac{\sin y}{y} & \textit{se} \;\; y \neq 0, \\ 1 & \textit{se} \;\; y = 0, \end{cases}$$
si può togliere l'ipotesi $f(x) \neq 0$ per $x \neq \bar{x}$ e si ha
$$\lim_{x\to\bar{x}} f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to\bar{x}} \varphi(f(x)) = 1,$$
con $\varphi(f(x))$ che coincide con $\dfrac{\sin(f(x))}{f(x)}$ per gli x in cui $\dfrac{\sin(f(x))}{f(x)}$ è definita.

15.3 Esercizi

$$\lim_{x\to 2} \frac{2+x}{2-x^2}, \qquad \lim_{x\to -1} \frac{1+x^2}{1+x^3}, \qquad \lim_{x\to 0} \sqrt{x+1}+1,$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}, \qquad \lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x-1}}{1-x}, \qquad \lim_{x\to 0} 1-\sin^2 x,$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^3 x}{x\sin x}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x-\tan x}{x\sin^2 x},$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sin x}{x}, \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x}-x}, \qquad \lim_{x\to +\infty} x(\sqrt{x^2-1}-x).$$

16

16.1 Limite delle funzioni monotone

Osservazione 27. *Fino ad ora, in tutti i teoremi relativi ai limiti, nelle ipotesi vi era sempre l'esistenza di qualche limite: lo schema dei teoremi era "se esiste il tale limite e vale ... allora esiste il tale altro limite e vale ...". In effetti non abbiamo fino ad ora provato dei teoremi di esistenza di limiti di funzioni generiche ma abbiamo provato che esistono i limiti solo di alcune classi ristrette di funzioni "elementari", combinando poi queste funzioni per ottenere limiti più complicati.*

Viceversa i seguenti teoremi garantiscono l'esistenza del limite di una famiglia (potenzialmente ampia) di funzioni "non elementari" che però hanno la importante proprietà della monotonia.

Teorema 28. *Siano $a \in \mathbb{R}$, $b \in \tilde{\mathbb{R}}$ e sia $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ una funzione monotona. Allora esiste $\lim_{x\to b^-} f(x)$ e vale $\sup_{[a,b[} f$ se f è crescente ovvero $\inf_{[a,b[} f$ se f è decrescente.*

Dimostrazione. Sia f crescente e sia $\sup_{[a,b[} f = +\infty$, cioè $f([a,b[)$ sia superiormente illimitato. Allora

$$\forall M > 0, \quad \exists\, \bar{x} \in [a,b[: \quad f(\bar{x}) > M.$$

Essendo f crescente, se $x > \bar{x}$ si ha che $f(x) \geq f(\bar{x}) > M$.

Abbiamo quindi che

$$\forall M > 0, \quad \exists\, \bar{x} \in [a,b[: \quad \forall x \in [a,b[\,, \quad x > \bar{x} \;\Rightarrow\; f(\bar{x}) > M,$$

che è proprio la definizione di $\lim_{x\to b^-} f(x) = +\infty$ (dove l'intorno di b nella definizione di limite è $]\bar{x}, +\infty[$).

Sia invece f crescente e sia $\sup_{[a,b[} f = l \in \mathbb{R}$. Fissato $\varepsilon > 0$, dalla prima proprietà del sup abbiamo che

$$\forall x \in [a,b[\,, \quad f(x) \leq l < l + \varepsilon,$$

mentre, dalla seconda proprietà del sup, si ha che

$$\exists\, \bar{x} \in [a,b[\,, \quad f(\bar{x}) > l - \varepsilon.$$

Essendo f crescente,

$$\forall x \in [a,b[\,, \quad x > \bar{x} \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq f(\bar{x}) > l - \varepsilon.$$

Riassumendo

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists\, \bar{x} \in [a,b[\,, \quad \forall x \in [a,b[\,, \quad x > \bar{x} \ \Rightarrow \ l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon,$$

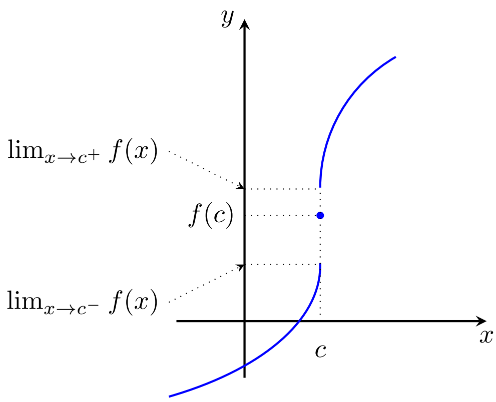
che è proprio la definizione di $\lim_{x \to b^-} f(x) = l$ (dove l'intorno di b nella definizione di limite è, anche in questo caso, $]\bar{x}, +\infty[$).

La dimostrazione nel caso di f decrescente è analoga ed è lasciata per esercizio. $\square$

Corollario 7. *sia* $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ *una funzione monotona. Sia* $c \in]a,b[$. *Allora esistono* $\lim_{x \to c^-} f(x)$ *e* $\lim_{x \to c^+} f(x)$ *e si ha*

$$\lim_{x \to c^-} f(x) \leq f(c) \leq \lim_{x \to c^+} f(x) \quad \textit{se } f \textit{ è crescente,}$$

$$\lim_{x \to c^-} f(x) \geq f(c) \geq \lim_{x \to c^+} f(x) \quad \textit{se } f \textit{ è decrescente.}$$



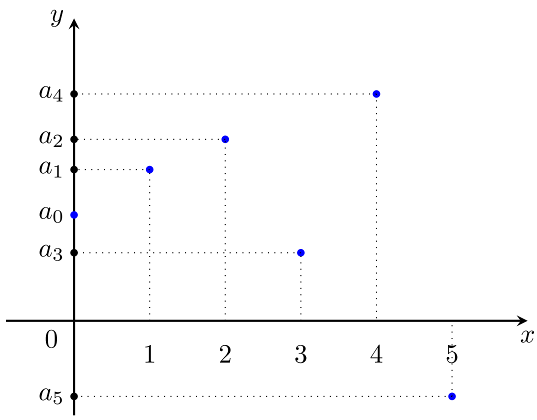
16.2 Successioni e sottosuccessioni

Definizione 33. *Sia* A *un insieme, sia*

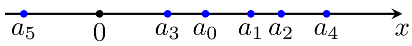
$$f : \mathbb{N} \to A, \quad n \mapsto f(n) = a_n.$$

La funzione f *si dice* **successione a valori in** A. *Si indica tradizionalmente con* $(a_n)_n$.

Osservazione 28. *Possiamo rappresentare le successioni a valori reali come grafici di funzioni di dominio $\mathbb{N}$ e codominio $\mathbb{R}$:*



oppure come punti dell'asse reale:



Definizione 34. *Sia $(a_n)_n$ una successione a valori in A. Sia $(n_k)_k$ una successione a valori in $\mathbb{N}$, strettamente crescente, cioè se $k_1 < k_2$ allora $n_{k_1} < n_{k_2}$. La composta*

$$g : \mathbb{N} \to A, \quad k \mapsto g(k) = a_{n_k}$$

si dice **sottosuccessione** *o anche* **successione estratta**. *Si indica con $(a_{n_k})_k$.*

Osservazione 29. *Dare una successione a valori in A significa individuare in A elementi corrispondenti a 0, 1, 2 e così via per ogni n.*

$$\begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & \dots & a_n & \dots \end{array}$$

Attenzione che qui non c'è nessun vincolo di iniettività: i valori di arrivo si possono ripetere.

Dare una sottosuccessione significa fissare una successione da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$ crescente, ad esempio

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & k & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ 1 & 3 & 4 & 7 & \dots & n_k & \dots \end{array}$$

e quindi considerare la nuova successione

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & k & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ a_{n_0} = a_1 & a_{n_1} = a_3 & a_{n_2} = a_4 & a_{n_3} = a_7 & \dots & a_{n_k} & \dots \end{array}$$

È come se dalla successione di partenza si estraessero alcuni termini e si ricompattasse il tutto, cioè da

$$a_0 \quad \underline{a_1} \quad a_2 \quad \underline{a_3} \quad \underline{a_4} \quad a_5 \quad a_6 \quad \underline{a_7} \quad \dots \quad \underline{a_{n_k}} \quad \dots$$

si ottiene

$$a_1 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_7 \quad \dots \quad a_{n_k} \quad \dots$$

Si osservi in particolare che si ha, per ogni k, $n_k \geq k$.

16.3 Limiti di successioni

Osservazione 30. *Le successioni a valori in $\mathbb{R}$ sono delle funzioni con dominio $\mathbb{N}$ e codominio $\mathbb{R}$. L'unico punto di accumulazione del dominio è $+\infty$. Quindi data una successione in $\mathbb{R}$ avrà senso soltanto chiedersi se esiste il limite per n che tende a $+\infty$.*

Definizione 35. *Sia $(a_n)_n$ una successione a valori in $\mathbb{R}$. Sia $L \in \tilde{\mathbb{R}}$. Diciamo che*

$$\lim_n a_n = \lim_{n\to+\infty} a_n = L$$

se

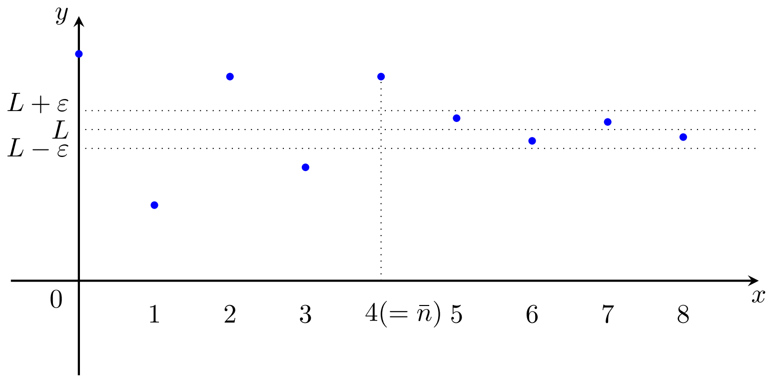
$$\forall\, V \textit{intorno di } L, \quad \exists\, \bar{n} \in \mathbb{N}: \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > \bar{n} \ \Rightarrow\ a_n \in V.$$

In particolare se $L \in \mathbb{R}$ diremo che $(a_n)_n$ è **convergente** *a L, quindi*

$$\lim_n a_n = \lim_{n\to+\infty} a_n = L \in \mathbb{R}$$

significa

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists\, \bar{n} \in \mathbb{N}: \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > \bar{n} \ \Rightarrow\ |a_n - L| < \varepsilon.$$



Se invece $L = +\infty$ (oppure $-\infty$) diremo che $(a_n)_n$ è **divergente***, quindi*

$$\lim_n a_n = \lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \ (\textit{oppure } -\infty)$$

significa

$$\forall M > 0, \quad \exists\, \bar{n} \in \mathbb{N}: \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > \bar{n} \ \Rightarrow\ a_n > M \ (\textit{oppure } a_n < -M).$$

Osservazione 31. *Per i limiti di successioni valgono i teoremi generali sui limiti di funzioni.*

- **Sottosuccessioni**. *Se un successione ha limite $L \in \tilde{\mathbb{R}}$, tutte le sue sottosuccessioni hanno limite L.*

- **Unicità**. *Se una successione ha limite, il limite è unico.*
- **Permanenza del segno**. *Se una successione ha limite maggiore di* 0 *allora da un certo* $\bar{n}$ *in poi i termini della successione sono maggiori di* 0.
- **Confronto**. *Se* $\lim_n a_n = +\infty$ *e, per ogni* n *(basta da un certo* $\bar{n}$ *in poi),* $a_n \le b_n$*, allora* $\lim_n b_n = +\infty$.
- **Due Carabinieri**. *Se* $\lim_n a_n = \lim_n c_n = L \in \mathbb{R}$ *e, per ogni* n *(basta da un certo* $\bar{n}$ *in poi),* $a_n \le b_n \le c_n$*, allora* $\lim_n b_n = L$.
- **Operazioni**. *Se* $\lim_n a_n = l$ *e* $\lim_n b_n = m$*, con* $l,\ m \in \mathbb{R}$*, allora* $\lim_n a_n + b_n = l + m$*,* $\lim_n a_n b_n = lm$ *e, se* $m \neq 0$*,* $\lim_n a_n/b_n = l/m$.
- **Successioni infinite e infinitesime**. *Se* $\lim_n a_n = +\infty$ *allora* $\lim_n 1/a_n = 0$. *Se* $\lim_n a_n = 0$ *e, per ogni* n *(basta da un certo* $\bar{n}$ *in poi),* $a_n > 0$ *allora* $\lim_n 1/a_n = +\infty$.
- **Forme indeterminate**. *Se* $\lim_n a_n = +\infty$ *e* $(b_n)_n$ *limitata inferiormente, allora* $\lim_n a_n + b_n = +\infty$. *Se* $\lim_n a_n = -\infty$ *e* $(b_n)_n$ *limitata superiormente, allora* $\lim_n a_n + b_n = -\infty$.

  Se $\lim_n a_n = 0$ *e* $(b_n)_n$ *limitata, allora* $\lim_n a_n b_n = 0$. *Se* $\lim_n a_n = +\infty$ *e, per ogni* n*,* $b_n \ge \rho > 0$ *allora* $\lim_n a_n b_n = +\infty$.
- **Successioni monotone**. *Una successione monotona ha limite. Una successione monotona e limitata ha limite finito (cioè ogni successione monotona e limitata è convergente).*

16.4 Esempi importanti

Esempio 13. *Sia* $a > 1$. *Vogliamo calcolare*

$$\lim_n\ a^n.$$

Scriviamo $a = 1 + \rho$*, con* $\rho > 0$. *Dalla disuguaglianza di Bernoulli abbiamo che*

$$a^n = (1+\rho)^n \ge 1 + n\rho,$$

da cui, per il confronto, abbiamo

$$\lim_n\ a^n = +\infty.$$

Ricaviamo anche che, se $0 < a < 1$*, allora* $\lim_n\ a^n = 0$.

Esempio 14. *Sia* $a > 1$. *Vogliamo calcolare*

$$\lim_n\ \frac{a^n}{n}.$$

Scriviamo $a = 1 + \rho$*, con* $\rho > 0$. *Dalla disuguaglianza di Bernoulli generalizzata (ovvero dal teorema del binomio) abbiamo che, per* $n \ge 2$,

$$a^n = (1+\rho)^n \ge 1 + n\rho + \frac{n^2 - n}{2}\rho^2,$$

da cui
$$\frac{a^n}{n} \geq \frac{1}{n} + \rho + \frac{n-1}{2}\rho^2,$$
e, per il confronto,
$$\lim_n \frac{a^n}{n} = +\infty.$$

Esempio 15. *Sia $a > 1$. Vogliamo calcolare*
$$\lim_n \sqrt[n]{a} = \lim_n a^{\frac{1}{n}}.$$

Sappiamo che, per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $\sqrt[n]{a} > 1$ (se fosse $\sqrt[n]{a} \leq 1$ allora $(\sqrt[n]{a})^n = a$ sarebbe minore o uguale a 1).

Fissiamo $\varepsilon > 0$ e consideriamo $1 + \varepsilon$. Sappiamo che
$$\lim_n (1+\varepsilon)^n = +\infty,$$
quindi dalla definizione di limite abbiamo in particolare che esiste $\bar{n}$ tale che, per ogni $n > \bar{n}$, si ha
$$(1+\varepsilon)^n \geq a \quad \textit{cioè} \quad 1+\varepsilon \geq \sqrt[n]{a}.$$
Riassumendo
$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, \bar{n} \in \mathbb{N}: \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad n \geq \bar{n} \;\Rightarrow\; 1-\varepsilon < 1 < \sqrt[n]{a} < 1+\varepsilon,$$
quindi
$$\lim_n \sqrt[n]{a} = \lim_n a^{\frac{1}{n}} = 1.$$
Ricaviamo anche che, se $0 < a < 1$, allora $\lim_n \sqrt[n]{a} = \lim_n a^{\frac{1}{n}} = 1$.

Esempio 16. *Sia $a > 1$. Vogliamo calcolare*
$$\lim_n \sqrt[n]{n} = \lim_n n^{\frac{1}{n}}.$$

Sappiamo che, per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $\sqrt[n]{n} > 1$.

Fissiamo $\varepsilon > 0$ e consideriamo $1 + \varepsilon$. Sappiamo che
$$\lim_n \frac{(1+\varepsilon)^n}{n} = +\infty,$$
quindi dalla definizione di limite abbiamo in particolare che esiste $\bar{n}$ tale che, per ogni $n > \bar{n}$ si ha
$$\frac{(1+\varepsilon)^n}{n} \geq 1 \quad \textit{cioè} \quad 1+\varepsilon \geq \sqrt[n]{n}.$$
Riassumendo
$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, \bar{n} \in \mathbb{N}: \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad n \geq \bar{n} \;\Rightarrow\; 1-\varepsilon < 1 < \sqrt[n]{n} < 1+\varepsilon,$$
quindi
$$\lim_n \sqrt[n]{n} = \lim_n n^{\frac{1}{n}} = 1.$$

16.5 Limite fondamentale $\lim_n (1+1/n)^n$

Sappiamo che se una successione $(a_n)_n$ è monotona e limitata allora è convergente (cioè esiste il limite ed è finito). Applichiamo questo teorema alla successione

$$a_n = (1+\frac{1}{n})^n, \qquad n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}.$$

Applichiamo il teorema del binomio e otteniamo in particolare che

$$\begin{aligned}
&(1+\frac{1}{n})^n \\
&= 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \binom{n}{3}\frac{1}{n^3} + \ldots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n} \\
&= 1 + \frac{n!}{1!(n-1)!}\frac{1}{n} + \frac{n!}{2!(n-2)!}\frac{1}{n^2} + \frac{n!}{3!(n-3)!}\frac{1}{n^3} + \ldots + \frac{n!}{n!0!}\frac{1}{n^n} \\
&= 1 + \frac{n}{n} + \frac{1}{2!}\frac{n}{n}\frac{n-1}{n} + \frac{1}{3!}\frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n} + \ldots + \frac{1}{n!}\frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n}\cdots\frac{1}{n} \\
&\le 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} \\
&\le 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} \le 3,
\end{aligned}$$

di conseguenza, per ogni $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ si ha

$$2 \le (1+\frac{1}{n})^n \le 3.$$

Inoltre

$$(1+\frac{1}{n})^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\frac{n-1}{n} + \frac{1}{3!}\frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n} + \ldots + \frac{1}{n!}\frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n}\cdots\frac{1}{n}$$

mentre

$$(1+\frac{1}{n+1})^{n+1} = 1+1+\frac{1}{2!}\frac{n}{n+1}+\frac{1}{3!}\frac{n}{n+1}\frac{n-1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{(n+1)!}\frac{n}{n+1}\frac{n-1}{n+1}\cdots\frac{1}{n+1}.$$

Confrontando due termini allo stesso posto nelle due somme si ha

$$\frac{1}{k!}\frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n} \;\le\; \frac{1}{k!}\frac{n}{n+1}\frac{n-1}{n+1}\cdots\frac{n-k+2}{n+1}$$

(essendo

$$\frac{n-1}{n} \le \frac{n}{n+1}, \qquad \frac{n-2}{n} \le \frac{n-1}{n+1}, \qquad \ldots \qquad \frac{n-k+1}{n} \le \frac{n-k+2}{n+1} \;)$$

Quindi, per ogni $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$,

$$2 \le (1+\frac{1}{n})^n \le (1+\frac{1}{n+1})^{n+1} \le 3.$$

Definizione 36. *Il valore*

$$\lim_n (1+\frac{1}{n})^n = e \in [2,3]$$

si dice **numero di Nepero***.*

17

17.1 Funzione esponenziale e funzione logaritmo

Sia $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$. Poniamo

$$\text{se} \;\; n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \qquad a^n = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fattori}};$$

$$\text{se} \;\; m \in \mathbb{Z}, \qquad a^m = \begin{cases} a^m & \text{se } m > 0, \\ 1 & \text{se } m = 0, \\ \dfrac{1}{a^{-m}} & \text{se } m < 0, \end{cases}$$

$$\text{se} \;\; q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}, \qquad a^q = \sqrt[n]{a^m}.$$

Con queste definizioni si ha che, per ogni p, $q \in \mathbb{Q}$,

- $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$,
- $(a^p)^q = a^{pq}$,
- se $p < q$ allora $a^p < a^q$.

Inoltre vale il seguente risultato.

Teorema 29. *Sia $a > 1$. Se $(p_k)_k$ è una successione in $\mathbb{Q}$ che converge a 0 allora la successione $(a^{p_k})_k$ converge a 1, cioè*

$$(\forall k \in \mathbb{N}, \; p_k \in \mathbb{Q} \quad \wedge \quad \lim_k p_k = 0) \qquad \Rightarrow \qquad \lim_k a^{p_k} = 1.$$

Dimostrazione. Abbiamo visto che

$$\lim_n a^{\frac{1}{n}} = 1.$$

Di conseguenza

$$\lim_n a^{-\frac{1}{n}} = \lim_n \frac{1}{a^{\frac{1}{n}}} = 1.$$

Quindi

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n^* \in \mathbb{N}: \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > n^* \quad \Rightarrow \quad 1 - \varepsilon < a^{-\frac{1}{n}} < a^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon.$$

In particolare

$$1 - \varepsilon < a^{-\frac{1}{n^*+1}} < a^{\frac{1}{n^*+1}} < 1 + \varepsilon.$$

Sia quindi $\lim_k p^k = 0$, allora

$$\exists \bar{k} \in \mathbb{N}, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad k > \bar{k} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{n^* + 1} < p_k < \frac{1}{n^* + 1}.$$

Mettendo assieme le due condizioni si ottiene

$$\forall\,\varepsilon > 0, \quad \exists\,\bar{k} \in \mathbb{N}, \quad \forall\,k \in \mathbb{N}, \quad k > \bar{k} \quad \Rightarrow \quad 1 - \varepsilon < a^{p_k} < 1 + \varepsilon,$$

cioè

$$\lim_k a^{p_k} = 1.$$

□

Definizione 37. *Sia $a > 1$. Sia $x \in \mathbb{R}$. Sia $(p_n)_n$ una successione monotona crescente a valori in $\mathbb{Q}$ tale che*

$$\lim_n p_n = x.$$

Si pone

$$a^x = \exp_a(x) = \lim_n a^{p_n}.$$

Se $0 < a < 1$, si pone

$$a^x = (\frac{1}{a})^{-x}.$$

Osservazione 32. *Per avere una definizione corretta si devono verificare due condizioni.*

- *La successione $(a^{p_n})_n$ è convergente (cioè ha limite finito).*

  Per ottenere questo basta osservare che la successione $(a^{p_n})_n$ è crescente, infatti

  $$p_n \le p_{n+1} \quad \Rightarrow \quad a^{p_n} \le a^{p_{n+1}},$$

  e inoltre la successione $(a^{p_n})_n$ è limitata, infatti

  $$\lim_n p_n = x \quad \Rightarrow \quad (\exists\,q \in \mathbb{Q} : \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n \le q) \quad \Rightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a^{p_n} \le a^q.$$

- *Il valore del limite della successione $(a^{p_n})_n$ dipende solo da x e non dalla successione $(p_n)_n$.*

  Se infatti ho due successioni in $\mathbb{Q}$, $(p_n)_n$ e $(q_n)_n$, monotone crescenti e tali che

  $$\lim_n p_n = \lim_n q_n = x,$$

  allora

  $$\lim_n p_n - q_n = 0$$

  da cui

  $$\lim_n a^{p_n - q_n} = 1$$

  e finalmente

  $$\lim_n a^{p_n} - a^{q_n} = \lim_n a^{q_n}(a^{p_n - q_n} - 1) = 0.$$

Vale la pena di metter in evidenza che a questo punto si può provare il seguente risultato.

Teorema 30. *Sia $(p_n)_n$ una successione in $\mathbb{Q}$, convergente con limite $\bar{x} \in \mathbb{R}$. Allora*

$$\lim_n a^{p_n} = a^{\bar{x}}.$$

Si noti che la condizione che $(p_n)_n$ sia monotona non serve.

Alla fine una definizione equivalente sarebbe: dato $x \in \mathbb{R}$ e data una successione $(p_n)_n$ in $\mathbb{Q}$ c tale che sia $lim_n p^n = x$, si pone

$$a^x = \lim_n a^{p_n}.$$

Teorema 31. *Sia $a > 1$.*

- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad a^x > 0.$
- $\forall x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}, \quad x_1 < x_2 \ \Rightarrow\ a^{x_1} < a^{x_2}.$
- $\forall\, y \in]0, +\infty[, \quad \exists x \in \mathbb{R} : \quad a^x = y.$
- $\forall x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}, \quad a^{x_1} a^{x_2} = a^{x_1+x_2}.$
- $\forall x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}, \quad (a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 x_2}.$
- $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0,$ *for all* $\bar{x} \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to\bar{x}} a^x = a^{\bar{x}},$ $\quad \lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty.$

Analoghe proprietà nel caso $0 < a < 1$.

Dimostrazione (cenno). Il primo, il secondo e il quarto punto si ottengono utilizzando le corrispondenti proprietà su $\mathbb{Q}$ e passando al limite. Ad esempio per provare che

$$\forall x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}, \quad a^{x_1} a^{x_2} = a^{x_1+x_2},$$

si considera il fatto che

$$a^{x_1} = \lim_n a^{p_n} \quad \wedge \quad a^{x_2} = \lim_n a^{q_n} \quad \Rightarrow \quad a^{x_1} a^{x_2} = \lim_n a^{p_n} a^{q_n},$$

e

$$\lim_n a^{p_n} a^{q_n} = \lim_n a^{p_n+q_n} = a^{x_1+x_2}, \quad \text{essendo} \quad \lim_n p_n + q_n = x_1 + x_2.$$

Il terzo punto , cioè la suriettività di $\exp_a$ si prova in modo simile a quanto fatto per la funzione $\sqrt{\ }$, mentre il quinto punto risulta sempre dall'approssimazione, ma è un po' più noioso.

Proviamo che $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$. Sappiamo che $\lim_n a^n = +\infty$, quindi $\lim_n a^{-n} = 0$. Dalla definizione di quest'ultimo limite si ha

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists\, \bar{n} \in \mathbb{N}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad n > \bar{n} \ \Rightarrow\ 0 < a^{-n} < \varepsilon,$$

ma allora, sfruttando la monotonia della funzione $x \mapsto a^x$, si ha

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists\, \bar{n} \in \mathbb{N}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad x < -\bar{n} - 1 \ \Rightarrow\ 0 < a^x < a^{-\bar{n}-1} < \varepsilon.$$

In modo simile, sfruttando il fatto che $\lim_n a^{\frac{1}{n}} = 1$ si prova che $\lim_{x\to 0} a^x = 1$ e da ciò segue che $\lim_{x\to\bar{x}} a^x = a^{\bar{x}}$.

$\square$

Definizione 38. *La funzione*

$$\exp_a : \mathbb{R} \to]0, +\infty[, \qquad x \mapsto a^x = \exp_a(x)$$

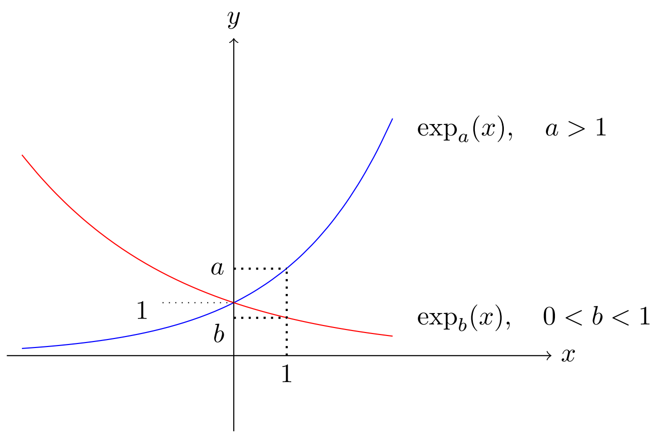
si dice **funzione esponenziale di base** a. *La funzione*

$$\exp_a^{-1} = \log_a :]0, +\infty[\to \mathbb{R},$$

si dice funzione **logaritmo in base** a. *Si ha*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \log_a(a^x) = x,$$

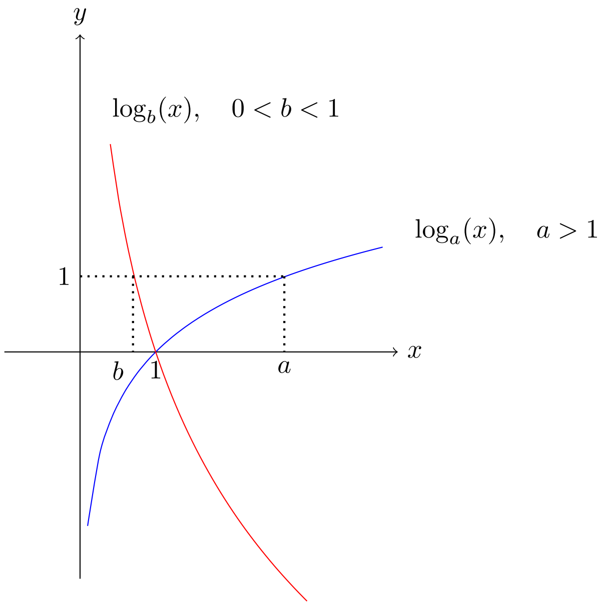
$$\forall y \in]0, +\infty[, \quad a^{\log_a y} = y.$$



Teorema 32. *Sia* $a > 1$.

- $\forall y_1,\ y_2 \in]0, +\infty[, \quad \log_a(y_1) + \log_a(y_2) = \log_a(y_1 y_2)$.
- $\forall y \in]0, +\infty[\ ,\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad \log_a(y^x) = x \log_a y$.
- $\lim_{y \to 0^+} \log_a y = -\infty$, *for all* $\bar{y} \in]0, +\infty[\ $, $\lim_{y \to \bar{y}} \log_a y = \log_a \bar{y}$, $\lim_{y \to +\infty} \log_a y = +\infty$.

Analoghe proprietà nel caso $0 < a < 1$.



Vale la pena di ricordare anche la formula di cambio di base dei logaritmi. Siano a, $b > 0$, $a \neq 1$,$b \neq 1$, sia $x \in]0, +\infty[$,

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}.$$

18

18.1 Altri limiti fondamentali

Abbiamo visto che

$$\lim_{n \to +\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e.$$

1) Calcoliamo

$$\lim_{x \to +\infty} (1 + \frac{1}{x})^x.$$

Indichiamo con $[x]$ la **parte intera** di x, cioè

$$[x] = \text{ il massimo intero minore o uguale a } x.$$

Si ha

$$[x] \leq x < [x] + 1.$$

Allora

$$(1 + \frac{1}{[x]+1})^{[x]} < (1 + \frac{1}{x})^x < (1 + \frac{1}{[x]})^{[x]+1}.$$

Si ha

$$\lim_{x \to +\infty} (1 + \frac{1}{[x]+1})^{[x]} = \lim_n (1 + \frac{1}{n+1})^n = \lim_n \underbrace{(1 + \frac{1}{n+1})^{n+1}}_{\to e} \underbrace{\frac{1}{1 + \frac{1}{n+1}}}_{\to 1} = e,$$

$$\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{[x]})^{[x]+1} = \lim_n (1+\frac{1}{n})^{n+1} = \lim_n \underbrace{(1+\frac{1}{n})^n}_{\to e}\ \underbrace{1+\frac{1}{n}}_{\to 1} = e.$$

Applicando il teorema dei due Carabinieri si ottiene

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e.}$$

2) Calcoliamo

$$\lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x.$$

Ponendo $y=-x$, si ha

$$\begin{aligned}\lim_{y\to+\infty}(1-\frac{1}{y})^{-y} &= \lim_{y\to+\infty}\frac{1}{(1-\frac{1}{y})^y} = \lim_{y\to+\infty}(\frac{y}{y-1})^y \\ &= \lim_{y\to+\infty}\underbrace{(1+\frac{1}{y-1})^{y-1}}_{\to e}\ \underbrace{(1+\frac{1}{y-1})}_{\to 1} = e,\end{aligned}$$

quindi

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e.}$$

3) Calcoliamo

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}.$$

Calcoliamo innanzi tutto

$$\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}}.$$

Ponendo $y=\frac{1}{x}$, si ha

$$\lim_{y\to+\infty}(1+\frac{1}{y})^y = e.$$

In modo analogo si ottiene

$$\lim_{x\to 0^-}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Quindi

$$\boxed{\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.}$$

4) Calcoliamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}.$$

Abbiamo

$$\frac{\log(1+x)}{x} = \frac{1}{x}\ \log(1+x) = \log((1+x)^{\frac{1}{x}}).$$

Poiché $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ e $\lim_{y\to\bar{y}}\log y = \log\bar{y}$, otteniamo

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1.}$$

5) Calcoliamo
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}.$$
Ponendo $e^x-1=y$, i.e. $x=\log(1+y)$. Si ottiene
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\log(1+y)}=e.$$
Quindi
$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.}$$

Osservazione 33. *Se*
$$\lim_{x\to\bar{x}}f(x)=0 \quad e \quad f(x)\neq 0 \quad per \quad x\neq\bar{x},$$
allora
$$\lim_{x\to\bar{x}}\frac{\log(1+f(x))}{f(x)}=1 \qquad \lim_{x\to\bar{x}}\frac{e^{f(x)}-1}{f(x)}=1.$$

6) Calcoliamo, quando $a>1$,
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x}.$$
Si ha, per $x\geq 1$,
$$\frac{a^{[x]}}{[x]+1}<\frac{a^x}{x}<\frac{a^{[x]+1}}{[x]}.$$
Sappiamo che
$$\lim_n\frac{a^n}{n+1}=\lim_n\underbrace{\frac{a^n}{n}}_{\to+\infty}\underbrace{\frac{n}{n+1}}_{\to 1}.$$
Per confronto, otteniamo
$$\boxed{a>1, \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x}=+\infty.}$$

7) Calcoliamo, quando $a>1$ e $\beta>0$,
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^\beta}.$$
Si ha
$$\frac{a^x}{x^\beta}=\left(\frac{(a^{\frac{1}{\beta}})^x}{x}\right)^\beta.$$
Ora $a^{\frac{1}{\beta}}>1$ e $\lim_{y\to+\infty}y^\beta=\lim_{y\to+\infty}e^{\beta\log y}=+\infty$. Allora, dal teorema sul limite della composta, otteniamo

$$\boxed{a > 1, \quad \beta > 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^\beta} = +\infty.}$$

8) Calcoliamo, quando $a > 1$ e $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

$$\lim_{x\to-\infty} x^k\, a^x.$$

Poniamo $x = -y$ e otteniamo

$$\lim_{y\to+\infty} (-y)^k a^{-y} = \lim_{y\to+\infty} (-1)^k \frac{y^k}{a^y} = 0.$$

Quindi

$$\boxed{a > 1, \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \qquad \lim_{x\to-\infty} x^k\, a^x = 0.}$$

9) Calcoliamo, per $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{x\to0^+} x^\varepsilon\, \log x.$$

Poniamo $\log x = \frac{y}{\varepsilon}$, da cui $x = e^{\frac{y}{\varepsilon}}$. Si ottiene

$$\lim_{y\to-\infty} \frac{e^y y}{\varepsilon} = 0.$$

Quindi

$$\boxed{\varepsilon > 0, \qquad \lim_{x\to0^+} x^\varepsilon\, \log x = 0.}$$

10) Calcoliamo, per $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^\varepsilon}.$$

Poniamo $\log x = \frac{y}{\varepsilon}$, da cui $x = e^{\frac{y}{\varepsilon}}$. Si ottiene

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{y}{\varepsilon e^y} = 0.$$

Quindi

$$\boxed{\varepsilon > 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^\varepsilon} = 0.}$$

18.2 Esercizi

$$\lim_{x\to\pi^-} \frac{1-\cos^3 x}{\pi - x}, \qquad \lim_{x\to0} \frac{e^x - \cos x}{\log(1+x)}, \qquad \lim_{x\to0^+} (\cos x)^{\frac{1}{x}}.$$

$$\lim_n \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}, \qquad \lim_n \frac{\sin n}{\sqrt{n}}, \qquad \lim_n n^{\sqrt{n}} - 2^n.$$

19

19.1 Ulteriori limiti importanti

Vale la pena di metter in evidenza anche questo limite:

$$a \in \mathbb{R}, \qquad \lim_{x \to +\infty} (1 + \frac{a}{x})^x.$$

Se $a = 0$ il limite è 1. Se $a \neq 0$ si pone $y = \frac{x}{a}$. Allora

$$(1 + \frac{a}{x})^x = (1 + \frac{1}{y})^{ya} = ((1 + \frac{1}{y})^y)^a$$

Ora $y \to +\infty$ ovvero $y \to -\infty$ a seconda che $a > 0$ ovvero $a < 0$: in entrambi i casi $(1 + \frac{1}{y})^y \to e$. Quindi

$$\boxed{a \in \mathbb{R}, \qquad \lim_{x \to +\infty} (1 + \frac{a}{x})^x = e^a.}$$

Infine

$$\boxed{a > 0,\ a \neq 1, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a, \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\log_a(1 + x)}{x} = \log_a(e) = \frac{1}{\log a}.}$$

19.2 Teorema di Cesàro (*questa parte non è in programma)*

In questo paragrafo presentiamo un risultato abbastanza raffinato relativo al calcolo di una famiglia di limiti: quelli del tipo $\lim_n \sqrt[n]{a_n}$. L'argomento va pensato come un esempio di applicazione (non facile) delle varie definizioni di limite per una successione.

Teorema 33. *Sia* $(a_n)_n$ *una successione in* $]0, +\infty[$. *Se*

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \in [0, +\infty[\cup \{+\infty\},$$

allora

$$\lim_n \sqrt[n]{a_n} = L.$$

Dimostrazione. Supponiamo

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty.$$

Si ha che

$$\forall M >, \quad \exists \bar{n} \in \mathbb{N},: \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > \bar{n} \quad \Rightarrow \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} > M.$$

In particolare

$$\frac{a_{\bar{n}+2}}{a_{\bar{n}+1}} > M, \quad \frac{a_{\bar{n}+3}}{a_{\bar{n}+2}} > M, \quad \ldots \quad \frac{a_{\bar{n}+k}}{a_{\bar{n}+k-1}} > M,$$

Moltiplicando termine a termine otteniamo che, per ogni $k \geq 2$, vale

$$a_{\bar{n}+k} > a_{\bar{n}+1} M^{k-1},$$

da cui, estraendo la radice $\bar{n}+k$-esima,

$$\sqrt[\bar{n}+k]{a_{\bar{n}+k}} > M \sqrt[\bar{n}+k]{\frac{a_{\bar{n}+1}}{M^{\bar{n}+1}}}.$$

Ora ricordiamo che

$$\lim_k \sqrt[\bar{n}+k]{\frac{a_{\bar{n}+1}}{M^{\bar{n}+1}}} = 1,$$

il che implica

$$\lim_k M \sqrt[\bar{n}+k]{\frac{a_{\bar{n}+1}}{M^{\bar{n}+1}}} = M.$$

Deduciamo che, da un certo $\bar{k}$ in poi, si ha

$$\sqrt[\bar{n}+k]{a_{\bar{n}+k}} > M \sqrt[\bar{n}+k]{\frac{a_{\bar{n}+1}}{M^{\bar{n}+1}}} > M-1.$$

Mettendo tutto assieme

$$\forall\, M >, \quad \exists\, \bar{n},\ \bar{k} \in \mathbb{N},: \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > \bar{n}+\bar{k} \quad \Rightarrow \quad \sqrt[n]{a_n} > M-1,$$

cioè

$$\lim_n \sqrt[n]{a_n} = +\infty.$$

Supponiamo invece che

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \in \mathbb{R}, \quad \text{con} \quad L > 0.$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$. Allora

$$\exists\, \bar{n} \in \mathbb{N},: \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > \bar{n} \quad \Rightarrow \quad L-\varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < L+\varepsilon.$$

In particolare

$$L-\varepsilon < \frac{a_{\bar{n}+2}}{a_{\bar{n}+1}} < L+\varepsilon, \quad L-\varepsilon < \frac{a_{\bar{n}+3}}{a_{\bar{n}+2}} < L+\varepsilon \quad \ldots \quad L-\varepsilon < \frac{a_{\bar{n}+k+1}}{a_{\bar{n}+k}} < L+\varepsilon.$$

Moltiplicando termine a termine otteniamo che, per ogni $k \geq 1$, vale

$$(L-\varepsilon)^k < \frac{a_{\bar{n}+k+1}}{a_{\bar{n}+1}} < (L+\varepsilon)^k.$$

Quindi

$$a_{\bar{n}+1}(L-\varepsilon)^k < a_{\bar{n}+k+1} < a_{\bar{n}+1}(L+\varepsilon)^k,$$

da cui

$$\sqrt[\bar{n}+k+1]{a_{\bar{n}+1}} \sqrt[\bar{n}+k+1]{(L-\varepsilon)^k} < \sqrt[\bar{n}+k+1]{a_{\bar{n}+k+1}} < \sqrt[\bar{n}+k+1]{a_{\bar{n}+1}} \sqrt[\bar{n}+k+1]{(L+\varepsilon)^k}.$$

Ora, sappiamo che

$$\lim_k \sqrt[\bar{n}+k+1]{a_{\bar{n}+1}} \sqrt[\bar{n}+k+1]{(L-\varepsilon)^k} = \lim_k \sqrt[\bar{n}+k+1]{\frac{a_{\bar{n}+1}}{(L-\varepsilon)^{\bar{n}+1}}}\ L-\varepsilon = L-\varepsilon,$$

$$\lim_k \sqrt[\bar{n}+k+1]{a_{\bar{n}+1}} \sqrt[\bar{n}+k+1]{(L+\varepsilon)^k} = \lim_k \sqrt[\bar{n}+k+1]{\frac{a_{\bar{n}+1}}{(L+\varepsilon)^{\bar{n}+1}}}\, L+\varepsilon = L+\varepsilon,$$

per cui, da un certo $\bar{k}$ in poi,

$$L - 2\varepsilon < \sqrt[\bar{n}+k+1]{a_{\bar{n}+k+1}} < L + 2\varepsilon.$$

Riassumendo

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists\, \bar{n},\ \bar{k} \in \mathbb{N}, : \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > \bar{n} + \bar{k} \quad \Rightarrow \quad L - 2\varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < L + 2\varepsilon,$$

che è quanto volevamo.

Supponiamo infine che

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$. Allora

$$\exists\, \bar{n} \in \mathbb{N}, : \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > \bar{n} \quad \Rightarrow \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} < \varepsilon.$$

In particolare

$$\frac{a_{\bar{n}+2}}{a_{\bar{n}+1}} < \varepsilon, \quad \frac{a_{\bar{n}+3}}{a_{\bar{n}+2}} < \varepsilon \quad \ldots \quad \frac{a_{\bar{n}+k+1}}{a_{\bar{n}+k}} < \varepsilon.$$

Moltiplicando termine a termine otteniamo che, per ogni $k \geq 1$, vale

$$\frac{a_{\bar{n}+k+1}}{a_{\bar{n}+1}} < \varepsilon^k.$$

Quindi

$$a_{\bar{n}+k+1} < a_{\bar{n}+1}\varepsilon^k,$$

da cui

$$\sqrt[\bar{n}+k+1]{a_{\bar{n}+k+1}} < \sqrt[\bar{n}+k+1]{a_{\bar{n}+1}} \sqrt[\bar{n}+k+1]{\varepsilon^k}.$$

Ora, sappiamo che

$$\lim_k \sqrt[\bar{n}+k+1]{a_{\bar{n}+1}} \sqrt[\bar{n}+k+1]{\varepsilon^k} = \lim_k \sqrt[\bar{n}+k+1]{\frac{a_{\bar{n}+1}}{\varepsilon^{\bar{n}+1}}}\, \varepsilon = \varepsilon,$$

per cui, da un certo $\bar{k}$ in poi,

$$\sqrt[\bar{n}+k+1]{a_{\bar{n}+k+1}} < 2\varepsilon.$$

Riassumendo

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists\, \bar{n},\ \bar{k} \in \mathbb{N}, : \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > \bar{n} + \bar{k} \quad \Rightarrow \quad \sqrt[n]{a_n} < 2\varepsilon.$$

La dimostrazione è conclusa.

□

Esempio 17. *Calcoliamo*

$$\lim_n \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}.$$

Osserviamo che

$$\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}.$$

Usando il teorema di Cesàro si ha

$$\lim_n \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_n \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} = \lim_n (\frac{n}{n+1})^n = \lim_n (1 - \frac{1}{n+1})^n = e^{-1}.$$

Quindi

$$\lim_n \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = e^{-1}.$$

19.3 Successioni definite per ricorrenza

Questo argomento è facoltativo ai fini dell'esame; si rinvia al Par. 6.3 del capitolo 6 di [1], pagina 183 e seguenti.

19.4 Successioni e topologia di $\mathbb{R}$

Torniamo ora a questioni relative alla topologia di $\mathbb{R}$ e dimostriamo alcune risultati che mettono assieme quanto già conosciamo sulla topologia di $\mathbb{R}$, in particolare il primo teorema di Bolzano-Weierstrass, con quanto si può invece ricavare dalla nozione di convergenza di una successione.

La prima domanda è

"può una successione essere talmente "sparsa" dentro a $\mathbb{R}$, tanto da non avere sottosuccessioni convergenti?"

Risponderemo a questa domanda utilizzando ciò che sappiamo sull'analogo argomento relativo all'esistenza di punti di accumulazione (in fondo la domanda è simile a "può un insieme essere talmente "sparso" dentro a $\mathbb{R}$, tanto da non avere punti di accumulazione?")

Un secondo punto sarà invece legato al concetto di chiusura per un insieme. Vedremo che per un insieme essere chiuso avrà delle conseguenze sulle successioni a valori in quell'insieme.

Infine introdurremo il concetto di "insieme compatto", nozione che ha importantissime conseguenze in analisi matematica.

Teorema 34 (secondo teorema di Bolzano-Weierstrass)**.** *Sia $(a_n)_n$ una successione in $\mathbb{R}$, limitata. Allora esiste una sottosuccessione convergente (cioè, in $\mathbb{R}$, da ogni successione limitata si può estrarre una sottosuccessione convergente a un punto di $\mathbb{R}$).*

Dimostrazione. Consideriamo $E = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, l'insieme delle immagini della successione. Vi sono due possibilità.

i) E è un insieme finito. Allora almeno un elemento di E è immagine di infiniti elementi di $\mathbb{N}$, di conseguenza esiste una sottosuccessione costante, che è quindi convergente.

ii) E è un insieme infinito. Allora E è infinito e limitato (è limitato perché la successione è limitata). Posso applicare il primo teorema di Bolzano-Weierstrass. Esiste un elemento $\bar{x} \in \mathbb{R}$ di accumulazione per E, cioè ogni introno di $\bar{x}$ contiene infiniti punti di E. Ora costruisco una sottosuccessione di $(a_n)_n$ che converge a $\bar{x}$.

Fisso $\varepsilon = 1$. So che

$$]\bar{x} - 1, \bar{x} + 1[\quad \text{contiene infiniti punti di } E.$$

Scelgo quindi n_0 tale che $a_{n_0} \in]\bar{x} - 1, \bar{x} + 1[$.
Fisso $\varepsilon = \frac{1}{2}$. So che

$$]\bar{x} - \frac{1}{2}, \bar{x} + \frac{1}{2}[\quad \text{contiene infiniti punti di } E.$$

Scelgo quindi n_1 tale che $n_1 > n_0$ e $a_{n_1} \in]\bar{x} - \frac{1}{2}, \bar{x} + \frac{1}{2}[$ (si osservi che siccome $]\bar{x} - \frac{1}{2}, \bar{x} + \frac{1}{2}[$ contiene infiniti punti di E questo n_1 esiste).
Fisso $\varepsilon = \frac{1}{4}$. So che

$$]\bar{x} - \frac{1}{4}, \bar{x} + \frac{1}{4}[\quad \text{contiene infiniti punti di } E.$$

Scelgo quindi n_2 tale che $n_2 > n_1$ e $a_{n_2} \in]\bar{x} - \frac{1}{4}, \bar{x} + \frac{1}{4}[$.
Proseguo in questo modo. Al passo k-esimo fisso $\varepsilon = \frac{1}{2^k}$. So che

$$]\bar{x} - \frac{1}{2^k}, \bar{x} + \frac{1}{2^k}[\quad \text{contiene infiniti punti di } E.$$

Scelgo quindi n_k tale che $n_k > n_{k-1}$ e $a_{n_k} \in]\bar{x} - \frac{1}{2^k}, \bar{x} + \frac{1}{2^k}[$.
La sottosuccessione $(a_{n_k})_k$ converge a $\bar{x}$ essendo, per ogni $k \in \mathbb{N}$,

$$|a_{n_k} - \bar{x}| < \frac{1}{2^k}.$$

□

20

20.1 Caratterizzazione dei chiusi tramite le successioni e insiemi compatti

Teorema 35 (caratterizzazione dei chiusi tramite le successioni)**.** *Sia E sottoinsieme di $\mathbb{R}$. Sono equivalenti*

i) E è chiuso.

ii) Per ogni successione a valori in E, se essa è convergente allora è convergente ad un elemento di E.

Dimostrazione.
i) $\Rightarrow$ ii).
Sia E chiuso. Sia $(a_n)_n$ una successione a valori in E. Sia $\lim_n a_n = \bar{x} \in \mathbb{R}$. Devo provare che $\bar{x} \in E$. Dalla definizione di limite so che

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists\, \bar{n} \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > \bar{n} \quad \Rightarrow \quad a_n \in]\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon[,$$

poiché gli a_n sono elementi di E questo significa che in ogni intorno di $\bar{x}$ ci sono punti di E, quindi $\bar{x} \in \bar{E}$. Ma E è chiuso, quindi $\bar{E} = E$, quindi $\bar{x} \in E$.

ii) $\Rightarrow$ i).

Supponiamo che valga la proprietà: per ogni successione a valori in E che sia convergente, il suo limite è un elemento di E. Sia $\bar{x} \in \bar{E}$. Se provo che $\bar{x} \in E$ ho concluso (perché ho provato che E è chiuso). Essendo $\bar{x}$ nella chiusura di E, so che

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad]\bar{x} - \frac{1}{2^n}, \bar{x} + \frac{1}{2^n}[\cap E \neq \emptyset.$$

Posso quindi scegliere, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$x_n \in]\bar{x} - \frac{1}{2^n}, \bar{x} + \frac{1}{2^n}[\cap E.$$

Ho che $(x_n)_n$ è una successione in E e $\lim_n x_n = \bar{x}$. Di conseguenza, per ipotesi, ho $\bar{x} \in E$ e la dimostrazione è conclusa. □

Osservazione 34. *Il teorema precedente è del tipo "se e solo se" quindi si potrebbe scrivere "se E è chiuso allora vele la proprietà ii), mentre se E non è chiuso allora esiste una successione a valori in E che converge ad un punto $\bar{x}$ che non è in E".*

Definizione 39. *Sia K un sottoinsieme di $\mathbb{R}$. K si dice* **compatto per successioni** *se da ogni successione a valori in K si può estrarre una sottosuccessione convergente ad un punto di K. D'ora in poi, per noi, compatto per successioni verrà abbreviato con il solo termine di* **compatto**.

Teorema 36 (caratterizzazione dei compatti)**.** *Sia K un sottoinsieme di $\mathbb{R}$. Sono equivalenti*

i) E è compatto.

ii) E è chiuso e limitato.

Dimostrazione.

i) $\Rightarrow$ ii).

Sia K compatto. Se K non fosse chiuso, applicando il teorema precedente, ci sarebbe una successione di K convergente con punto limite $\bar{x} \notin K$. Essendo K compatto questa successione ha una sottosuccessione convergente ad un valore $\bar{y}$ appartenente a K. Ma essendo la successione convergente a $\bar{x}$, tutte le sottosuccessioni devono essere convergenti a $\bar{x}$, quindi $\bar{x} = \bar{y}$. Di conseguenza $\bar{x} \in K$. Abbiamo così un assurdo.

Se K non fosse limitato, per esempio non fosse superiormente limitato, allora sia avrebbe in particolare che

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists\, x_n \in K : \quad x_n > n.$$

Ma allora

$$\lim_n x_n = +\infty$$

e la successione $(x_n)_n$ che è a valori in K no avrebbe sottosuccessioni convergenti ad un punto di K.

ii) $\Rightarrow$ i).

Sia K chiuso e limitato. Sia $(x_n)_n$ successione a valori in K. Tale successione àllora limitata. Per il secondo teorema di Bolzano-Weierstrass essa ha una sottosuccessione convergente. Tale sottosuccessione è una successione convergente a valori in K che è chiuso, quindi, per la caratterizzazione dei chiusi tramite le successioni, converge ad un punto di K. Di conseguenza ogni successione a valori in K ha una sottosuccessione convergente ad un punto di K. La dimostrazione è conclusa. $\square$

20.2 Successioni di Cauchy

Qui introduciamo una nuova famiglia di successioni, che hanno la caratteristica di "avere i valori che, al tendere di n all'infinito, si avvicinano tra loro". Vedremo che questo, in $\mathbb{R}$, sarà equivalente a essere convergenti.

Definizione 40. *Sia $(x_n)_n$ una successione in $\mathbb{R}$. Tale successione si dice* **successione di Cauchy** *se*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \quad \forall n, m \in \mathbb{N}, \quad n, m > \bar{n} \quad \Rightarrow \quad |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Teorema 37. *Ogni successione convergente è una successione di Cauchy.*

Dimostrazione. Sia $(x_n)_n$ una successione convergente. Ciò significa in particolare che esiste $\bar{x} \in \mathbb{R}$ tale che $\lim_n x_n = \bar{x}$, e quindi

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists\, \bar{n} \in \mathbb{N} : \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > \bar{n} \quad \Rightarrow \quad |x_n - \bar{x}| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Di conseguenza

$$n,\ m > \bar{n} \quad \Rightarrow \quad |x_n - x_m| \leq |x_n - \bar{x}| + |x_m - \bar{x}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Riassumendo

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists\, \bar{n} \in \mathbb{N} : \quad \forall n,\ m \in \mathbb{N}, \quad n,\ m > \bar{n} \quad \Rightarrow \quad |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

$\square$

Vale anche il viceversa.

Teorema 38 (completezza di $\mathbb{R}$)**.** *In $\mathbb{R}$ ogni successione di Cauchy è una successione convergente.*

Dimostrazione. La dimostrazione si compone di tre passi distinti.

i) <u>Ogni successione di Cauchy è limitata.</u>

Infatti applicando la definizione di successione di Cauchy con $\varepsilon = 1$ si ha

$$\exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \quad \forall n,\ m \in \mathbb{N}, \quad n,\ m > \bar{n} \quad \Rightarrow \quad |x_n - x_m| < 1.$$

In particolare

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n > \bar{n} \quad \Rightarrow \quad |x_n - x_{\bar{n}+1}| < 1.$$

Considero ora

$$\rho = \max\{|x_0 - x_{\bar{n}+1}|, |x_1 - x_{\bar{n}+1}|, \ldots, |x_{\bar{n}} - x_{\bar{n}+1}|, 1\}.$$

Si ha che

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n \in [x_{\bar{n}+1} - \rho,\ x_{\bar{n}+1} + \rho]$$

ii) Da ogni successione limitata si può estrarre una sottosuccessione convergente.

È il secondo teorema di Bolzano-Weierstrass.

iii) Se una successione di Cauchy ha una sottosuccessione convergente a $\bar{x}$, allora la successione è convergente a $\bar{x}$.

Infatti sia $(x_n)_n$ di Cauchy e sia $(x_{n_k})_k$ sottosuccessione convergente a $\bar{x}$. Si ha

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \, \bar{n} \in \mathbb{N} : \quad \forall n, m \in \mathbb{N}, \quad n, m > \bar{n} \quad \Rightarrow \quad |x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2},$$

e

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \, \bar{k} \in \mathbb{N} : \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad k > \bar{k} \quad \Rightarrow \quad |x_{n_k} - \bar{x}| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Siano quindi $n > \bar{n}$ e $k^* > \max\{\bar{k},\ \bar{n}\}$.

Si ha che

i) $n > \bar{n}$ e $n_{k^*} \geq k^* > \bar{n}$. Quindi $|x_n - x_{n_{k^*}}| < \frac{\varepsilon}{2}$;
ii) $k^* > \bar{k}$. Quindi $|x_{n_{k^*}} - \bar{x}| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Di conseguenza

$$|x_n - \bar{x}| \leq |x_n - x_{n_{k^*}}| + |x_{n_{k^*}} - \bar{x}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Riassumendo

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \, \bar{n} \in \mathbb{N} : \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > \bar{n} \quad \Rightarrow \quad |x_n - \bar{x}| < \varepsilon.$$

□

Osservazione 35. *Mentre le successioni convergenti sono di Cauchy qualunque sia lo spazio metrico (si ricordi questa definizione e si verifichi che in uno spazio metrico è possibile definire le successioni convergenti e le successioni di Cauchy in modo analogo a quanto fatto in $\mathbb{R}$) su cui la successione viene considerata, il viceversa vale a causa di una specifica proprietà di $\mathbb{R}$ (nella dimostrazione si usa il secondo teorema di Bolzano-Weierstrass in modo essenziale).*

21

21.1 Funzioni continue: definizioni e prime proprietà

Per gli argomenti seguenti si veda il Capitolo 7, Paragrafi 1 e 3 di [1].

Definizione di funzione continua in un punto, in un sottoinsieme del dominio, su tutto il dominio. Prime proprietà della funzioni continue: permanenza del segno, operazioni tra funzioni continue, composizione di funzioni continue. Esempi di funzioni continue: le costanti, l'identità, le funzioni polinomiali, le funzioni razionali, le funzioni radice, le funzioni trigonometriche, la funzione esponenziale, la funzione valore assoluto.

21.2 Funzioni continue: punti di discontinuità e caratterizzazione della continuà tramite le successioni

Per gli argomenti seguenti si veda il Capitolo 7, Paragrafi 2 e 3 di [1].

Classificazione dei punti di discontinuità. I punti di discontinuità di una funzione monotona. Esempi di funzioni discontinue: la funzione di Heaviside e la funzione di Dirichlet. Caratterizzazione della continuità tramite le successioni.

22

22.1 Teorema degli zeri

Cominciamo col dimostrare una prima proprietà fondamentale delle funzioni continue definite su un intervallo: mandano intervalli in intervalli. Vediamo un primo risultato importante.

Teorema 39 (Teorema degli zeri)**.** *Sia* $[a, b]$ *un intervallo chiuso e limitato di* $\mathbb{R}$*. Sia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una funzione continua. Supponiamo che* $f(a) < 0$ *e* $f(b) > 0$*.*

Allora esiste $\xi \in]a, b[$ *tale che* $f(\xi) = 0$*.*

Osservazione 36. *Il teorema dice che se una funzione continua su un intervallo assume un valore negativo e un valore positivo allora essa si annulla almeno in un punto dell'intervallo.*

Dimostrazione. Poniamo $a_0 = a$ e $b_0 = b$ e definiamo $c_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$.
Consideriamo il valore di $f(c_0)$.

- Se $f(c_0) = 0$, abbiamo finito, avendo trovato un punto in cui f si annulla.
- Se $f(c_0) > 0$, poniamo $a_1 = a_0$, $b_1 = c_0$ e definiamo $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$.
- Se $f(c_0) < 0$, poniamo $a_1 = c_0$ e $b_1 = b_0$ e definiamo $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$.

Consideriamo il valore di $f(c_1)$.

- Se $f(c_1) = 0$, abbiamo finito, avendo trovato un punto in cui f si annulla.
- Se $f(c_1) > 0$, poniamo $a_2 = a_1$, $b_2 = c_1$ e definiamo $c_2 = \frac{a_2+b_2}{2}$.
- Se $f(c_1) < 0$, poniamo $a_2 = c_1$ e $b_2 = b_1$ e definiamo $c_2 = \frac{a_2+b_2}{2}$.

Proseguiamo iterativamente con questa procedura. O per un certo k si trova che $f(c_k) = 0$, e quindi il teorema è dimostrato, oppure la procedura continua all'infinito. In questo secondo caso si viene a determinare una successione $([a_n, b_n])_n$ con le seguenti proprietà

- $([a_n, b_n])_n$ è una successione di intervalli chiusi, limitati, inscatolati e dimezzati;
- per ogni n, $f(a_n) < 0$ e $f(b_n) > 0$.

Applicando il teorema di Cantor (forma forte), si ha che esiste $\xi \in \mathbb{R}$ tale che $\xi = \bigcap_n [a_n,\, b_n]$. In particolare, per ogni n, $\xi \in [a_n,\, b_n]$ e, di conseguenza,

$$0 \leq |\xi - a_n| \leq b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \qquad \text{e} \qquad 0 \leq |\xi - b_n| \leq b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}.$$

Ne deduciamo che

$$\lim_n a_n = \xi \qquad \text{e} \qquad \lim_n b_n = \xi.$$

Usiamo ora il fatto che f è continua. Quindi

$$\lim_n f(a_n) = f(\xi) \qquad \text{e} \qquad \lim_n f(b_n) = f(\xi).$$

Ora usiamo il teorema della permanenza del segno. Sappiamo che, per tutti gli n, $f(a_n) < 0$. Quindi non può essere $f(\xi) > 0$ (perché, se così fosse, sarebbe $f(a_n) > 0$, almeno da un certo $\bar{n}$ in poi). Analogamente, poiché sappiamo che per tutti gli n, $f(b_n) > 0$, non può essere $f(\xi) < 0$. Di conseguenza $f(\xi) = 0$.

□

Corollario 8 (Teorema dei valori intermedi)**.** *Sia $[a,\, b]$ un intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$. Sia $g : [a,\, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Supponiamo che $g(a)$ sia diverso da $g(b)$ e che $\gamma \in \mathbb{R}$ sia un numero reale tra i valori di $g(a)$ e $g(b)$.*

Allora esiste $\xi \in]a,\, b[$ tale che $g(\xi) = \gamma$.

Dimostrazione. Per fissare le idee supponiamo che

$$g(b) < \gamma < g(a).$$

È sufficiente applicare il teorema degli zeri alla funzione

$$f : [a,\, b] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \gamma - g(x).$$

□

Osservazione 37. *Se A è un intervallo, si verifica direttamente che*

$$\forall x_1,\, x_2 \in A, \qquad x_1 < x_2 \qquad \Rightarrow \qquad [x_1,\, x_2] \subseteq A.$$

Viceversa, supponendo che in A ci siano almeno due punti distinti e supponendo vera la proprietà

$$\forall x_1,\, x_2 \in A, \qquad x_1 < x_2 \qquad \Rightarrow \qquad [x_1,\, x_2] \subseteq A,$$

se si chiamano α e β rispettivamente l'$\inf$ *e il* $\sup$ *di A, utilizzando le proprietà dell'*$\inf$ *e del* $\sup$ *si prova che*

$$]\alpha,\, \beta[\subseteq A \subseteq [\alpha,\, \beta].$$

Quindi possiamo dire che

$$A \text{ è un intervallo} \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\forall x_1,\, x_2 \in A, \qquad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad [x_1,\, x_2] \subseteq A).$$

Corollario 9. *Sia I un intervallo e sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua.*

Allora $f(I)$ è un intervallo.

22.2 Teorema di compattezza, teorema di Weierstrass

Per gli argomenti di questo paragrafo si veda il Capitolo 7, Paragrafo 5 di [1]

Teorema 40 (di compattezza)**.** *Sia K un compatto e sia $f : K \to \mathbb{R}$ una funzione continua.*

Allora $f(K)$ è compatto.

Dimostrazione. Sia $(y_n)_n$ una qualunque successione in $f(K)$. Per provare che $f(K)$ è compatto, devo provare che $(y_n)_n$ ha una sottosuccessione convergente ad un punto di $f(K)$.

Ragiono in questo modo: poiché $(y_n)_n$ è una successione in $f(K)$ (si ricordi che i punti di $f(K)$ sono immagini di punti di K), esiste una successione $(x_n)_n$ in K tale che

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad f(x_n) = y_n.$$

$(x_n)_n$ è una successione in K, che è compatto. Allora esiste una sottosuccessione $(x_{n_k})_k$ ed esiste un $\bar{x} \in K$ tali che

$$\lim_k x_{n_k} = \bar{x}.$$

Essendo f continua, si ha

$$\lim_k f(x_{n_k}) = f(\bar{x}) \in f(K).$$

Per concludere basta osservare che

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad f(x_{n_k}) = y_{n_k}$$

e quindi

$$\lim_k y_{n_k} = f(\bar{x}) \in f(K).$$

□

Definizione 41. *Sia $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione e siano x_M, $x_m \in E$. Se per ogni $x \in E$ si ha*

$$f(x_m) \le f(x) \le f(x_M)$$

i punti x_M e x_m si dicono rispettivamente **punti di massimo assoluto** *e di* **punti di minimo assoluto** *per f. I numeri reali $f(x_M)$ e $f(x_m)$ si dicono* **(valori) massimo e minimo assoluto** *per f.*

Teorema 41 (di Weierstrass)**.** *Sia K un compatto e sia $f : K \to \mathbb{R}$ una funzione continua.*

Allora $f(K)$ ha massimo e minimo assoluti.

Dimostrazione. La dimostrazione è molto simile alla precedente. Mostriamo che esiste un punto di massimo assoluto e conseguentemente esiste in $\mathbb{R}$ un valore massimo assoluto per f.

Sia $L \in \tilde{\mathbb{R}}$ il $\sup f(K)$. Attenzione che non sappiamo, per il momento, se $L \in \mathbb{R}$ o se $L = +\infty$. Comunque, in entrambi i casi, esiste una successione $(y_n)_n$ in $f(K)$ tale che

$$\lim_n y_n = L$$

(tale successione si chiama *successione massimizzante*).

Poiché $(y_n)_n$ è una successione in $f(K)$ (si ricordi che i punti di $f(K)$ sono immagini di punti di K), esiste una successione $(x_n)_n$ in K tale che

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad f(x_n) = y_n.$$

$(x_n)_n$ è una successione in K, che è compatto. Allora esiste una sottosuccessione $(x_{n_k})_k$ ed esiste un $\bar{x} \in K$ tali che

$$\lim_k x_{n_k} = \bar{x}.$$

Essendo f continua, si ha

$$\lim_k f(x_{n_k}) = f(\bar{x}) \in f(K) \subseteq \mathbb{R}.$$

Osserviamo ora che

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad f(x_{n_k}) = y_{n_k}$$

e quindi

$$\lim_k y_{n_k} = f(\bar{x}) \in f(K) \subseteq \mathbb{R}.$$

Ma la successione $(y_n)_n$ aveva per limite L quindi anche $(y_{n_k})_k$ ha per limite L, quindi deve essere

$$\sup f(K) = L = f(\bar{x}).$$

Di conseguenza $\bar{x}$ è punto di massimo e $L = f(\bar{x}) \in \mathbb{R}$ è valore massimo per f. $\square$

Osservazione 38. *Si osservi che il teorema di Weierstrass può essere ottenuto anche come corollario del teorema di compattezza e del teorema di caratterizzazione dei compatti. Si ragiona così:*

- *f continua su K compatto $\Rightarrow$ $f(K)$ compatto $\Rightarrow$ $f(K)$ chiuso e limitato.*
- *$f(K)$ limitato $\Rightarrow$ $\sup f(K)$, $\inf f(K) \in \mathbb{R}$.*
- *$f(K)$ chiuso e $\sup f(K)$, $\inf f(K) \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\sup f(K) = \max f(K)$, $\inf f(K) = \min f(K)$.*

22.3 Continuità della funzione inversa, continuità uniforme

Per gli argomenti di questo paragrafo si veda il Capitolo 7, Paragrafi 4 e 6 di [1] Si noti in particolare che il teorema che a lezione è stato indicato come "teorema di Heine" sul testo del Giusti compare con la dicitura "teorema dell'uniforme continuità" (Teorema 7.11).

Teorema 42 (Continuità dell'inversa)**.** *Siano I e J intervalli di $\mathbb{R}$ e sia $f : I \to J$ una funzione continua. Supponiamo che f sia biiettiva e di conseguenza invertibile.*

Allora $f^{-1} : J \to I$ è continua.

Per la dimostrazione di questo teorema (che è comunque facoltativa) si veda il Capitolo 7, Paragrafo 4 di [1]. Un punto cruciale nella dimostrazione risulterà il fatto che se I è un intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$ è una funzione continua e iniettiva allora f è strettamente monotona.

Definizione 42. *Sia $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione. f si dice* **uniformemente continua** *se*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall x_1, x_2 \in E, \quad |x_2 - x_1| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x_2) - f(x_1| \leq \varepsilon.$$

Si vede immediatamente che una funzione uniformemente continua è continua: infatti continua significa che in ogni punto del dominio, per ogni scelta di $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che eccetera, quindi δ dipende dal punto e da ε, mentre uniformemente continua significa che per ogni scelta di $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ che fa andar bene la condizione di continuità per ogni punto del dominio, quindi δ dipende solo da ε e non dal punto. Di conseguenza la uniforme continutà è una proprietà più forte della continutà. Il fatto che esistano funzioni continue ma non uniformemente continue evidenzia infine che la uniforme continutà è una proprietà strettamente più forte della continutà.

Esempio 18. *La funzione*

$$f :]0, +\infty[\to]0, +\infty[, \qquad f(x) = \frac{1}{x}$$

è continua ma non uniformemente continua.

Teorema 43 (di Heine)**.** *Sia K un insieme compatto e $f : K \to \mathbb{R}$ una funzione continua.*

Allora f è uniformemente continua.

Dimostrazione (facoltativa). Supponiamo per assurdo che f non sia uniformemente continua. Quindi

$$\neg(\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall x, y \in K, \quad |y - x| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(y) - f(x)| < \varepsilon).$$

Di conseguenza

$$\exists \varepsilon > 0 : \ \forall \delta > 0, \ \exists\, x_\delta, y_\delta \in K : \quad |y_\delta - x_\delta| < \delta \quad \wedge \quad |f(y_\delta) - f(x_\delta)| \geq \varepsilon.$$

Se si sceglie $\delta = 1/n$, si ottegono allora due successioni (x_n) e (y_n) in K tali che, per ogni n

$$|y_n - x_n| < \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad |f(y_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon.$$

Dalla compattezza di K si deduce che esiste una sottosuccessione $(x_{n_k})_k$ ed un punto $\bar{x} \in K$ tali che

$$\lim_k x_{n_k} = \bar{x}.$$

Di conseguenza, essendo $|y_n - x_n| < 1/n$,

$$\lim_k y_{n_k} = \bar{x}.$$

Infine, dalla continuità di f,

$$\lim_k f(x_{n_k}) = f(\bar{x}) \quad \text{e} \quad \lim_k f(y_{n_k}) = f(\bar{x})$$

e quindi

$$\lim_k f(y_{n_k}) - f(x_{n_k}) = 0.$$

Ma ciò è in contrasto con la condizione $|f(y_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon > 0$ per ogni n. $\square$

23

23.1 Rapporto incrementale, derivata, funzione derivabile

Per questi argomenti si veda il Capitolo 8, Paragrafo 1 di [1].

Definizione 43. *Sia $f : I \to \mathbb{R}$, con I intervallo, e sia $\bar{x} \in I$.*

La funzione

$$R^f_{\bar{x}} : I \setminus \{\bar{x}\} \to \mathbb{R},$$
$$R^f_{\bar{x}}(x) = \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}},$$

si dice funzione **rapporto incrementale di f relativamente al punto** *$\bar{x}$.*

Definizione 44. *Sia $f : I \to \mathbb{R}$, con I intervallo, e sia $\bar{x} \in I$.*

Se esiste il

$$\lim_{x \to \bar{x}} R^f_{\bar{x}}(x) = \lim_{x \to \bar{x}} \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}},$$

si dice che f **ammette derivata in** *$\bar{x}$. Il valore di tale limite si dice* **derivata di f in** *$\bar{x}$ e si indica con $f'(\bar{x})$.*

Definizione 45. *Sia $f : I \to \mathbb{R}$, con I intervallo, e sia $\bar{x} \in I$.*

Se **esiste finito** *il*

$$\lim_{x \to \bar{x}} R^f_{\bar{x}}(x) = \lim_{x \to \bar{x}} \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} = f'(\bar{x}) \in \mathbb{R},$$

si dice che f **è derivabile in** *$\bar{x}$.*

Definizione 46. *Sia $f : I \to \mathbb{R}$, con I intervallo, e sia f derivabile in ogni punto di I.*

La funzione

$$f' : I \to \mathbb{R},$$

$$f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x},$$

si dice funzione **derivata di** f*.*

23.2 Calcolo delle derivate delle funzioni elementari, regole di derivazione

Per questi argomenti si veda il Capitolo 8, Paragrafi 2 e 3 di [1].

Derivata della funzione costante, dell'identità , della potenza n esima. Derivata delle funzioni seno e coseno. Derivata di esponenziale e logaritmo. Rapporto tra funzioni continue e funzioni derivabili. Derivata di somma, differenza, prodotto e quoziente di funzioni derivabili. Derivabilità della funzione composta. Derivabilità della funzione inversa.

24

24.1 approssimante lineare

Definizione 47. *Sia $f : I \to \mathbb{R}$, con I intervallo, e sia $\bar{x} \in I$. Sia $\bar{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. $\bar{f}$ si dice* **approssimante lineare di f in** $\bar{x}$ *se*

i) $\bar{f}$ è una funzione affine, cioè esistono m, $q \in \mathbb{R}$ tali che

$$\bar{f}(x) = mx + q.$$

ii) il grafico di $\bar{f}$ passa per il punto $(\bar{x}, f(\bar{x}))$, cioè

$$\bar{f}(\bar{x}) = f(\bar{x}).$$

iii) $\bar{f}$ è "la migliore approssimazione di f in un intorno del punto $\bar{x}$", cioè

$$\lim_{x \to \bar{x}} \frac{\bar{f}(x) - f(x)}{x - \bar{x}} = 0.$$

Teorema 44. *Sia $f : I \to \mathbb{R}$, con I intervallo, e sia $\bar{x} \in I$. Sono equivalenti*

a) Esiste l'approssimante lineare di f in $\bar{x}$.

b) f è derivabile in $\bar{x}$.

Se vale i) oppure ii) e $\bar{f}$ indica l'approssimante lineare di f in $\bar{x}$ si ha

$$\bar{f}(x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x}).$$

Dimostrazione.
a) $\Rightarrow$ *b).*
Sia $\bar{f}(x) = mx + q$ l'approssimante lineare di f in $\bar{x}$. Dalla proprietà *ii)* della definizione di approssimante lineare ricaviamo che

$$f(\bar{x}) = \bar{f}(\bar{x}) = m\bar{x} + q,$$

quindi

$$q = f(\bar{x}) - m\bar{x}.$$

Di conseguenza $\bar{f}(x)$ diventa

$$\bar{f}(x) = m(x - \bar{x}) + f(\bar{x}).$$

La proprietà *iii)* della definizione di approssimante lineare quindi implica che

$$0 = \lim_{x\to\bar{x}} \frac{\bar{f}(x) - f(x)}{x - \bar{x}} = \lim_{x\to\bar{x}} \frac{m(x - \bar{x}) + f(\bar{x}) - f(x)}{x - \bar{x}} = m - \lim_{x\to\bar{x}} \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}}$$

e quindi

$$\lim_{x\to\bar{x}} \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} = m = f'(\bar{x}).$$

b) $\Rightarrow$ *a).*
È sufficiente porre

$$\bar{f}(x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x})$$

e verificare che valgono le tre proprietà dell'approssimante lineare.

□

Osservazione 39. *Si noti che, da un punto di vista geometrico, ammettere approssimante lineare in $\bar{x}$ significa che il grafico, nel punto $(\bar{x}, f(\bar{x}))$, ha una retta tangente non verticale e l'equazione della tangente è proprio*

$$y = f(\bar{x})(x - \bar{x}) + f(\bar{x}).$$

24.2 Massimi e minimi, teorema di Fermat

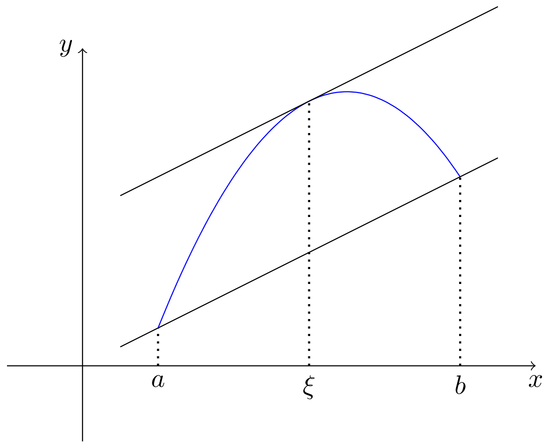
Per questo argomento si veda il Capitolo 8, Paragrafo 4 di [1]. Si noti in particolare che il teorema che a lezione è stato indicato come "teorema di Fermat" sul testo del Giusti compare con la sola numerazione: si tratta del Teorema 8.4.

25

25.1 I teoremi di Rolle, Lagrange e Cauchy

Per questo argomento si veda il Capitolo 8, Paragrafo 5 di [1].

Osservazione 40. *Una interpretazione del teorema di Lagrange può essere la seguente: data una funzione definita su* $[a, b]$*, continua in* a *e in* b *e derivabile in* $]a, b[$*, vi è almeno un punto di* $]a, b[$ *in cui la retta tangente al grafico è parallela alla retta secante passante per i punti* $(a, f(a))$ *e* $(b, f(b))$*.*



Anche il teorema di Cauchy ha una interpretazione simile: data una funzione

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2, \qquad \gamma(t) = (x(t), y(t)),$$

(tale funzione, se $x(t)$ *e* $y(t)$ *sono continue, la chiamiamo* **curva***) in cui le componenti* $x(t)$ *e* $y(t)$ *siano funzioni continue in* a *e in* b *e derivabili in* $]a, b[$*, supposto che per ogni* $t \in]a, b[$ *si abbia* $y'(t) \neq 0$*, allora esiste un punto della curva in cui la retta tangente è parallela alla retta passante per i punti* $(x(a), y(a))$ *e* $(x(b), y(b))$*. Infatti la condizione di parallelismo tra il segmento di estremi*

$$(x(a), y(a)), \qquad (x(b), y(b)),$$

e una retta che sia parallela al vettore

$$(x'(\xi), y'(\xi)),$$

è

$$\det \begin{pmatrix} x(b) - x(a) & y(b) - y(a) \\ x'(\xi) & y'(\xi) \end{pmatrix} = y'(\xi)(x(b) - x(a)) - x'(\xi)(y(b) - y(a)) = 0.$$

Si osservi che tale proprietà non si ha nel caso di una curva in $\mathbb{R}^n$*, con* $n \geq 3$*.*

26

26.1 Crescenza e derivate

Per questo argomento si veda il Capitolo 8, Paragrafo 5 di [1].

27

27.1 I teoremi di de l'Hôpital

Per questi argomenti si veda il Capitolo 8, Paragrafo 7 di [1].

Teorema 45 (del limite della derivata)**.** *Sia $f : I \to \mathbb{R}$, con I intervallo. Sia $\bar{x} \in I$. Sia f continua in $\bar{x}$ e derivabile in $I \setminus \{\bar{x}\}$.*

Se esiste finito il

$$\lim_{x \to \bar{x}} f'(x) = a \in \mathbb{R},$$

allora f è derivabile in $\bar{x}$ e $f'(\bar{x}) = a$.

Dimostrazione. Sappiamo che $\lim_{x \to \bar{x}} f'(x) = a \in \mathbb{R}$, cioè

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall \xi \in I \setminus \{\bar{x}\}, \quad 0 < |\xi - \bar{x}| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f'(\xi) - a| < \varepsilon.$$

Consideriamo $x \in I \setminus \{\bar{x}\}$ tale che $0 < |x - \bar{x}| < \delta$ e applichiamo alla funzione $f_{|[x,\bar{x}]}$ il teorema di Lagrange. Otteniamo che esiste $\xi \in]x, \bar{x}[$ tale che

$$\frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} = f'(\xi),$$

e si noti che si ha $0 < |\xi - \bar{x}| < |x - \bar{x}|$, quindi $0 < |\xi - \bar{x}| < \delta$. Mettendo tutto assieme si ottiene

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall x \in I \setminus \{\bar{x}\}, \quad 0 < |x - \bar{x}| < \delta \ \Rightarrow \ |\frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} - a| < \varepsilon,$$

cioè

$$\lim_{x \to \bar{x}} \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} = a,$$

che è quanto si voleva. □

Osservazione 41. *Il teorema del limite della derivata fornisce soltanto una condizione sufficiente alla derivabilità, nel senso che una funzione può essere derivabile senza che esista il limite della derivata. Un esempio è la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \textit{per} \quad x \neq 0, \\ 0 & \textit{per} \quad x = 0, \end{cases}$$

Teorema 46 (di de l'Hôpital, caso $\frac{0}{0}$)**.** *Siano $f, g : I \setminus \{\bar{x}\} \to \mathbb{R}$, con I intervallo e $\bar{x} \in I$. Siano f, g derivabili in $I \setminus \{\bar{x}\}$. Sia $\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = \lim_{x \to \bar{x}} g(x) = 0$. Supponiamo infine che, per ogni $x \in I \setminus \{\bar{x}\}$, si abbia $g'(x) \neq 0$.*

Se esiste

$$\lim_{x \to \bar{x}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \tilde{\mathbb{R}},$$

allora esiste

$$\lim_{x \to \bar{x}} \frac{f(x)}{g(x)}$$

e vale L.

Dimostrazione. Come prima cosa estendiamo il dominio delle funzioni f e g a tutto I, ponendo $f(\bar{x}) = g(\bar{x}) = 0$. in questo modo f e g diventano continue su tutto I e derivabili su $I \setminus \{\bar{x}\}$. Poi osserviamo che, per ogni $x \in I \setminus \{\bar{x}\}$, si ha $g(x) \neq 0$. Infatti se fosse $g(x) = 0$ per qualche $x \in I \setminus \{\bar{x}\}$, potrei applicare il teorema di Rolle alla funzione $f_{|[x,\bar{x}]}$ e troverei un punto in cui g' si annulla, cosa che non avviene per ipotesi. Ha quindi perfettamente senso considerare la funzione $\frac{f(x)}{g(x)}$ su $I \setminus \{\bar{x}\}$. Passiamo quindi alla parte principale della dimostrazione.

Sappiamo che

$$\lim_{x \to \bar{x}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \tilde{\mathbb{R}},$$

cioè

$$\forall\, V \text{ intorno di } L, \quad \exists \delta > 0: \quad \forall \xi \in I \setminus \{\bar{x}\}, \quad 0 < |\xi - \bar{x}| < \delta \quad \Rightarrow \quad \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \in V.$$

Consideriamo $x \in I \setminus \{\bar{x}\}$ tale che $0 < |x - \bar{x}| < \delta$ e applichiamo alle funzioni $f_{|[x,\bar{x}]}$, $g_{|[x,\bar{x}]}$ il teorema di Cauchy. Ricordando anche che $f(\bar{x}) = g(\bar{x}) = 0$, otteniamo che esiste $\xi \in]x, \bar{x}[$ tale che

$$\frac{f(x) - f(\bar{x})}{g(x) - g(\bar{x})} = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

e si noti che si ha $0 < |\xi - \bar{x}| < |x - \bar{x}|$, quindi $0 < |\xi - \bar{x}| < \delta$. Mettendo tutto assieme si ottiene

$$\forall\, V \text{ intorno di } L, \quad \exists \delta > 0: \quad \forall x \in I \setminus \{\bar{x}\}, \quad 0 < |x - \bar{x}| < \delta \quad \Rightarrow \quad \frac{f(x)}{g(x)} \in V,$$

cioè

$$\lim_{x \to \bar{x}} \frac{f(x)}{g(x)} = L,$$

che è quanto si voleva. □

Valgono anche i seguenti teoremi, di cui non si richiedono le dimostrazioni (che sono per altro reperibili sul testo del Giusti o sugli altri testi consigliati).

Teorema 47 (di de l'Hôpital, caso $\frac{0}{0}$ per limiti all'infinito)**.** *Siano le funzioni $f, g :]a, +\infty[\to \mathbb{R}$. Siano f, g derivabili in $]a, +\infty[$. Sia $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$. Supponiamo infine che per ogni $x \in]a, +\infty[$ si abbia $g'(x) \neq 0$.*

Se esiste

$$\lim_{x \to \bar{x}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \tilde{\mathbb{R}},$$

allora esiste

$$\lim_{x \to \bar{x}} \frac{f(x)}{g(x)}$$

e vale L.

Teorema 48 (di de l'Hôpital, caso $\frac{\infty}{\infty}$)**.** *Siano f, $g : I\backslash\{\bar{x}\} \to \mathbb{R}$, con I intervallo e $\bar{x} \in I$. Siano f, g derivabili in $I \setminus \{\bar{x}\}$. Sia $\lim_{x\to\bar{x}} f(x) = +\infty$ $(-\infty)$ e $\lim_{x\to\bar{x}} g(x) = +\infty$ $(-\infty)$. Supponiamo infine che per ogni $x \in I \setminus \{\bar{x}\}$ si abbia $g'(x) \neq 0$.*

Se esiste

$$\lim_{x\to\bar{x}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \tilde{\mathbb{R}},$$

allora esiste

$$\lim_{x\to\bar{x}} \frac{f(x)}{g(x)}$$

e vale L.

Teorema 49 (di de l'Hôpital, caso $\frac{\infty}{\infty}$ per limiti all'infinito)**.** *Siano f, g : $]a, +\infty[\to \mathbb{R}$. Siano f, g derivabili in $]a, +\infty[$. Sia $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ $(-\infty)$ e $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ $(-\infty)$. Supponiamo infine che per ogni $x \in]a, +\infty[$ si abbia $g'(x) \neq 0$.*

Se esiste

$$\lim_{x\to\bar{x}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \tilde{\mathbb{R}},$$

allora esiste

$$\lim_{x\to\bar{x}} \frac{f(x)}{g(x)}$$

e vale L.

Osservazione 42. *I teoremi di de l'Hôpital forniscono condizioni solo sufficienti all'esistenza del limite di $\frac{f(x)}{g(x)}$: ciò significa che è possibile che nei casi $\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\infty}{\infty}$ esista il $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ senza che esista il $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Un esempio è il seguente*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+\sin x}{2x+\cos x} = 1 \quad \textit{mentre} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{2+\cos x}{2-\sin x} \quad \textit{non esiste.}$$

28

28.1 Derivate successive

Definizione 48. *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Si consideri la funzione derivata $f' : I \to \mathbb{R}$. Se f' ammette derivata nel punto $\bar{x}$, la derivata di f' in $\bar{x}$ si dice* **derivata seconda** *di f in $\bar{x}$. Se f' è derivabile su I, la funzione derivata della f' si dice funzione* **derivata seconda** *di f e si dice che f è* **derivabile fino al secondo ordine***. La derivata seconda si indica con f''. In modo analogo si definiscono la derivata* **terza** *(derivata della derivata seconda) e le* **derivate successive***.*

Definizione 49. *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Se la funzione derivata (prima) è continua allora la funzione f si dice* **funzione di classe** C^1.

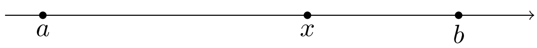
Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile fino al secondo ordine. Se la derivata seconda è continua, allora la funzione f si dice **funzione di classe** C^2. *Si osservi che se una funzione è di classe C^2 allora la derivata prima è derivabile e quindi continua: le funzioni di classe C^2 sono anche di classe C^1.*

Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile fino all'ordine m. Se la derivata di ordina m è continua, allora la funzione f si dice **funzione di classe** C^m. *Le funzioni di classe C^m sono di classe C^k per ogni k minore di m.*

Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile fino all'ordine m per qualunque m. Si dice in questo caso che f è **di classe** C^∞.

28.2 Funzioni convesse

Osservazione 43. *Siano a, $b \in \mathbb{R}$, con $a < b$. Sia $x \in [a, b]$.*



Posso scrivere

$$x = \lambda a + (1 - \lambda)b,$$

scegliendo

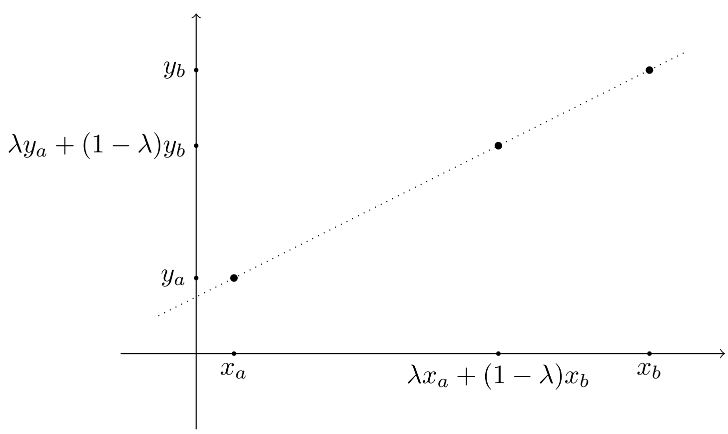
$$\lambda = \frac{b - x}{b - a}, \qquad 1 - \lambda = \frac{x - a}{b - a}.$$

Quindi

$$x = \lambda a + (1 - \lambda)b = \frac{b - x}{b - a}a + \frac{x - a}{b - a}b.$$

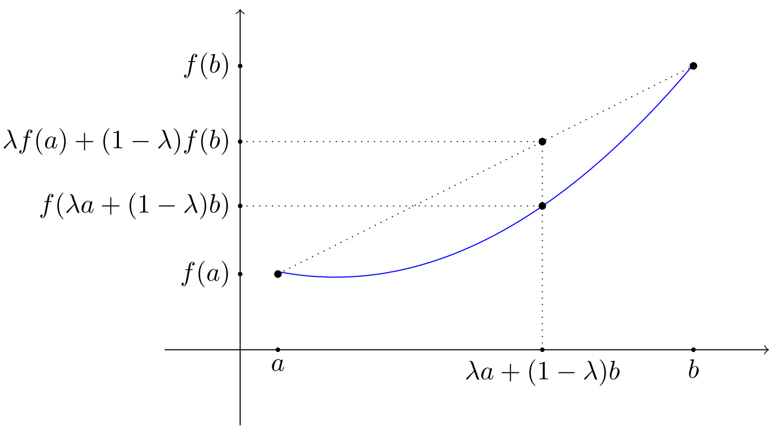
Consideriamo ora la situazione sul piano. Siano i punti (x_a, y_a) e (x_b, y_b). la retta per questi punti ha equazione

$$y = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}(x - x_a) + y_a.$$



Se
$$x = \lambda x_a + (1-\lambda)x_b,$$
si ha
$$y = \lambda y_a + (1-\lambda)y_b.$$

Definizione 50. *Sia $f : I \to \mathbb{R}$, con I intervallo. f si dice* **convessa** *se per ogni $a, b \in I$, con $a < b$, e per ogni $\lambda \in [0, 1]$, si ha*
$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b).$$



Definizione 51. *Sia $f : I \to \mathbb{R}$, con I intervallo. f si dice* **concava** *se $-f$ è convessa.*

Definizione 52. *Sia $f : I \to \mathbb{R}$, con I intervallo. Sia $\bar{x} \in I$ e sia f continua in $\bar{x}$. Se f è convessa in $I \cap\,]-\infty, \bar{x}[$ ed è concava in $I \cap\,]\bar{x}, +\infty[$ o viceversa, allora $\bar{x}$ si dice* **punto di flesso**.

Teorema 50 (caratterizzazione delle funzioni convesse)**.** *Sia $f : I \to \mathbb{R}$, con I intervallo. Sono equivalenti*

i) *f è convessa.*

ii) *Per ogni $x_1, x_2, x_3 \in I$, con $x_1 < x_2 < x_3$, si ha*
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

iii) *Per ogni $x_1, x_2, x_3 \in I$, con $x_1 < x_2 < x_3$, si ha*
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Dimostrazione.
Proviamo che *i)* $\Rightarrow$ *iii)*.

Siano x_1, x_2, $x_3 \in I$, con $x_1 < x_2 < x_3$. Scriviamo x_2 nella forma $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_3$. Si ha

$$x_2 = \underbrace{\frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}}_{\lambda} x_1 + (1 - \underbrace{\frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}}_{1-\lambda}) x_3 = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} x_1 + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} x_3.$$

Applichiamo la definizione di funzione convessa e otteniamo

$$f(x_2) \leq \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3),$$

da cui, moltiplicando per $x_3 - x_1$,

$$\boxed{(x_3 - x_1) f(x_2) \leq (x_3 - x_2) f(x_1) + (x_2 - x_1) f(x_3).} \qquad (*)$$

Da $(*)$ otteniamo

$$(x_3 - x_1)(f(x_2) - f(x_1) + f(x_1)) \leq (x_3 - x_2) f(x_1) + (x_2 - x_1) f(x_3),$$

da cui

$$(x_3 - x_1)(f(x_2) - f(x_1)) \leq (x_3 - x_2) f(x_1) + (x_2 - x_1) f(x_3) - (x_3 - x_1) f(x_1),$$

e quindi

$$(x_3 - x_1)(f(x_2) - f(x_1)) \leq (x_2 - x_1)(f(x_3) - f(x_1)).$$

Dividendo per $(x_3 - x_1)(x_2 - x_1)$ otteniamo

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}. \qquad (1)$$

Similmente, sempre da $(*)$, otteniamo

$$(x_3 - x_1)(f(x_2) - f(x_3) + f(x_3)) \leq (x_3 - x_2) f(x_1) + (x_2 - x_1) f(x_3),$$

da cui

$$(x_3 - x_1)(f(x_2) - f(x_3)) \leq (x_3 - x_2) f(x_1) + (x_2 - x_1) f(x_3) - (x_3 - x_1) f(x_3),$$

e quindi

$$(x_3 - x_1)(f(x_2) - f(x_3)) \leq (x_3 - x_2)(f(x_1) - f(x_3)).$$

Moltiplicando per -1 otteniamo

$$(x_3 - x_1)(f(x_3) - f(x_2)) \geq (x_3 - x_2)(f(x_3) - f(x_1)),$$

e infine, dividendo per $(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$,

$$\frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}. \qquad (2)$$

Da (1) e (2) si ottiene *iii)*.

L'implicazione *iii)* $\Rightarrow$ *ii)* è ovvia. Proviamo *ii)* $\Rightarrow$ *i)*.

Considero

$$\underbrace{a}_{x_1} < \underbrace{\lambda a + (1-\lambda)b}_{x_2} < \underbrace{b}_{x_3}, \quad \text{con} \quad \lambda \in]0,1[.$$

Applico la condizione *ii)* con queste scelte. Ottengo

$$\frac{f(\lambda a + (1-\lambda)b) - f(a)}{(1-\lambda)(b-a)} \leq \frac{f(b) - f(\lambda a + (1-\lambda)b)}{\lambda(b-a)}.$$

Svolgendo i calcoli ottengo

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b),$$

cioè f è convessa. Il teorema è dimostrato. □

Corollario 10. *Sia $f : I \to \mathbb{R}$, con I intervallo. Sono equivalenti*

a) f è convessa.

b) Per ogni $\bar{x} \in I$, la funzione

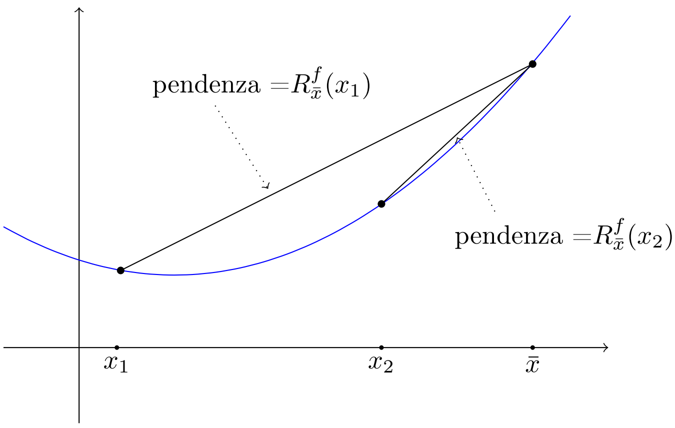
$$R_{\bar{x}}^f : I \setminus \{\bar{x}\} \to \mathbb{R}, \qquad R_{\bar{x}}^f(x) = \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}},$$

è crescente.

Dimostrazione. È sufficiente osservare che la crescenza della funzione $R_{\bar{x}}^f$, per qualunque punto $\bar{x}$, coincide con la condizione *iii)* del teorema di caratterizzazione delle convesse.

Infatti, se $x_1 < x_2 < \bar{x}$, si ha

$$R_{\bar{x}}^f(x_1) = \frac{f(x_1) - f(\bar{x})}{x_1 - \bar{x}} \leq \frac{f(x_2) - f(\bar{x})}{x_2 - \bar{x}} = R_{\bar{x}}^f(x_2).$$



Analogamente negli altri casi. □

Corollario 11. *Sia $f : I \to \mathbb{R}$, con I intervallo. Sia f convessa. Se $\bar{x} \in I^\circ$ (cioè $\bar{x}$ è punto interno di I), allora esistono finiti*

$$\lim_{x \to \bar{x}^-} \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} = f'_-(\bar{x}) \qquad \textit{derivata sinistra},$$

$$\lim_{x \to \bar{x}^+} \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} = f'_+(\bar{x}) \qquad \textit{derivata destra,}$$

e si ha

$$f'_-(\bar{x}) \leq f'_+(\bar{x})$$

Dimostrazione. È sufficiente applicare il teorema delle funzioni monotone alla funzione $R^f_{\bar{x}}$. □

Corollario 12. *Sia $f : I \to \mathbb{R}$, con I intervallo. Sia f convessa.*
Allora f è continua in I°.

Dimostrazione. Basta ripetere la dimostrazione del teorema sul rapporto tra derivabilità e continuità. □

Teorema 51 (caratterizzazione delle funzioni derivabili e convesse)**.** *Sia $f : I \to \mathbb{R}$, con I intervallo. Sia f derivabile. Sono equivalenti*

i) f è convessa.

ii) f' è crescente.

Dimostrazione.
Proviamo che *i) ⇒ ii)*.
Sia f convessa. Siano x_1 e x_2 in I, con $x_1 < x_2$. La funzione

$$]x_1,\, x_2[\; \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1},$$

è crescente (è conseguenza del Corollario 10). Quindi, dal fatto che f è derivabile e dal teorema delle funzioni monotone si ha

$$f'(x_1) = \lim_{x \to x_1^+} \frac{f(x) - f(x_1}{x - x_1} = \inf_{x \in]x_1,\, x_2[} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1}{x_2 - x_1}.$$

e similmente

$$f'(x_2) = \lim_{x \to x_2^-} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = \sup_{x \in]x_1,\, x_2[} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Quindi

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2).$$

Viceversa, proviamo che *ii) ⇒ i)*.
Sia f derivabile e sia f' crescente. Siano $x_1,\, x_2,\, x_3 \in I$, con $x_1 < x_2 < x_3$. Si applica il teorema di Lagrange a $f_{|[x_1,\, x_2]}$ e $f_{|[x_2,\, x_3]}$. Allora esistono $\xi_1 \in \,]x_1,\, x_2[$ e $\xi_2 \in \,]x_2,\, x_3[$ tali che $\xi_1 < \xi_2$ e

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \qquad f'(\xi_2) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Dalla crescenza di f' si deduce

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

ottenendo la condizione *ii)* del teorema di caratterizzazione delle funzioni convesse. □

Teorema 52 (caratterizzazione delle funzioni derivabili fino al secondo ordine e convesse)**.** *Sia $f : I \to \mathbb{R}$, con I intervallo. Sia f derivabile fino al secondo ordine. Sono equivalenti*

i) f è convessa.

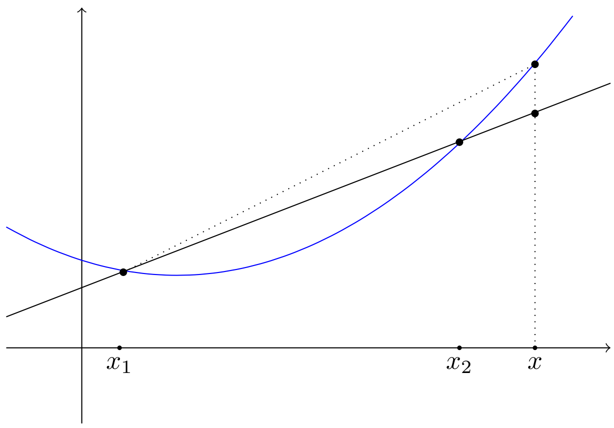
ii) Per ogni $x \in I$, $f''(x) \geq 0$.

Dimostrazione. f è derivabile fino al secondo ordine. Quindi

$$f \text{ convessa } \Leftrightarrow f' \text{ crescente } \Leftrightarrow \text{ per ogni } x \in I,\ f''(x) \geq 0.$$

□

Osservazione 44. *Una* **proprietà importante** *delle funzioni convesse è la seguente: dati $x_1, x_2 \in I$, con $x_1 < x_2$, il grafico di f sta sotto la secante per i punti $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ per la variabile x che sta tra x_1 e x_2, mentre sta sopra la secante per x prima di x_1 e per x dopo x_2.*

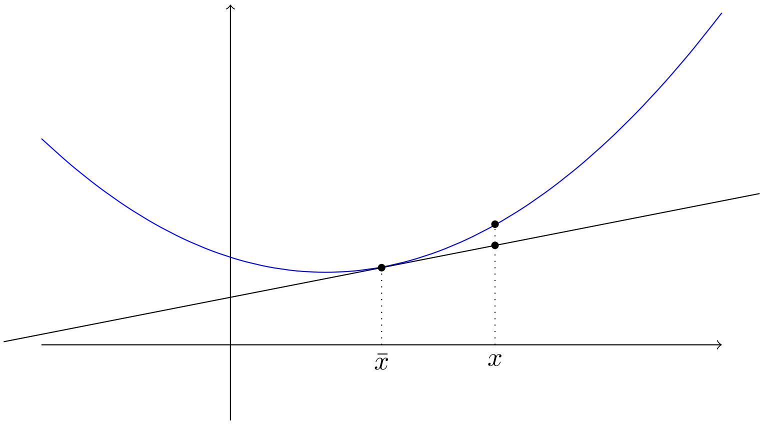


In modo simile si può provare che se f è convessa e derivabile se e solo se, fissato un qualunque punto $\bar{x}$, la tangente per $\bar{x}$ sta sotto il grafico della funzione. In particolare so che

$$\bar{x} < x \quad \Rightarrow \quad f'(\bar{x}) \leq \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq f'(\bar{x})(x - \bar{x}) + f(\bar{x}),$$

e analogamente

$$\bar{x} > x \quad \Rightarrow \quad f'(\bar{x}) \geq \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq f'(\bar{x})(x - \bar{x}) + f(\bar{x}).$$



29

29.1 La formula di Taylor

Lemma 1 (Lemma di Peano)**.** *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ con $\bar{x} \in I$. Sia f derivabile fino all'ordine k. Supponiamo che*

$$f(\bar{x}) = f'(\bar{x}) = f''(\bar{x}) = \cdots = f^{(k)}(\bar{x}) = 0.$$

Allora

$$\lim_{x \to \bar{x}} \frac{f(x)}{(x - \bar{x})^k} = 0.$$

Dimostrazione. Calcoliamo

$$\lim_{x \to \bar{x}} \frac{f(x)}{(x - \bar{x})^k}.$$

Applichiamo la regola di de l'Hôpital alla coppia di funzioni $f(x)$ e $(x - \bar{x})^k$. Si noti che sono derivabili, tendono a 0 al tendere di x a $\bar{x}$ e la derivata di $(x - \bar{x})^k$ non si annulla per $x \neq \bar{x}$. Quindi è sufficiente calcolare

$$\lim_{x \to \bar{x}} \frac{f'(x)}{k(x - \bar{x})^{k-1}}.$$

È di nuovo un caso $\frac{0}{0}$ e applichiamo nuovamente la regola di de l'Hôpital. È sufficiente calcolare

$$\lim_{x \to \bar{x}} \frac{f''(x)}{k(k-1)(x - \bar{x})^{k-2}}.$$

Proseguendo in modo analogo si ha

$$\lim_{x \to \bar{x}} \frac{f(x)}{(x - \bar{x})^k} = \lim_{x \to \bar{x}} \frac{f'(x)}{k(x - \bar{x})^{k-1}} = \cdots = \lim_{x \to \bar{x}} \frac{f^{(k-1)}(x)}{k!(x - \bar{x})}.$$

Se applicassimo ancora una volta la regola di de l'Hôpital, otterremmo

$$\lim_{x \to \bar{x}} \frac{f^{(k-1)}(x)}{k!(x - \bar{x})} = \lim_{x \to \bar{x}} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}.$$

Quest'ultimo limite però non sapremmo calcolarlo a meno di non sapere qualcosa in più, per esempio che $f^{(k)}$ sia continua. Invece ragioniamo così

$$\lim_{x\to\bar{x}} \frac{f^{(k-1)}(x)}{k!(x-\bar{x})} = \lim_{x\to\bar{x}} \frac{f^{(k-1)}(x) - f^{(k-1)}(\bar{x})}{k!(x-\bar{x})}$$

è proprio la condizione di derivabilità di $f^{(k-1)}$, e cioè l'esistenza in $\bar{x}$ della derivata k-esima in $\bar{x}$. Tale limite vale il valore di $f^{(k)}(\bar{x})$, cioè 0. □

Osservazione 45. *Si noti che nel Lemma di Peano sarebbe sufficiente richiedere che f sia derivabile fino all'ordine $k-1$ su I e che esista la derivata k-esima in $\bar{x}$.*

Lemma 2 (Lemma di Lagrange)**.** *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ con $\bar{x} \in I$. Sia f derivabile fino all'ordine $k+1$. Supponiamo che*

$$f(\bar{x}) = f'(\bar{x}) = f''(\bar{x}) = \cdots = f^{(k)}(\bar{x}) = 0.$$

Allora, per ogni $x \in I \setminus \{\bar{x}\}$, esiste $\xi \in \,]\bar{x}, x[$ (questo nel caso $x > \bar{x}$, mentre, se $x < \bar{x}$, $\xi \in \,]x, \bar{x}[$) tale che

$$f(x) = \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}(x-\bar{x})^{k+1}.$$

Dimostrazione. Supponiamo che $x \in I \setminus \{\bar{x}\}$ e che $x > \bar{x}$. Ponendo $g(x) = (x-\bar{x})^{k+1}$, applico il Teorema di Cauchy alla coppia di funzioni $f_{|[\bar{x},\,x]}$ e $g_{|[\bar{x},\,x]}$ (si osservi che $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in I \setminus \{\bar{x}\}$). Si ha allora che esiste $\xi_1 \in \,]\bar{x}, x[$ tale che

$$\frac{f(x)}{(x-\bar{x})^{k+1}} = \frac{f(x) - f(\bar{x})}{(x-\bar{x})^{k+1} - (\bar{x}-\bar{x})^{k+1}} = \frac{f'(\xi_1)}{(k+1)(\xi_1-\bar{x})^k}.$$

Applico nuovamente il Teorema di Cauchy alla coppia di funzioni $f_{|[\bar{x},\,\xi_1]}$ e $g_{|[\bar{x},\,\xi_1]}$, dove stavolta $g(x) = (k+1)(x-\bar{x})^k$. Allora esiste $\xi_2 \in \,]\bar{x}, \xi_1[$ tale che

$$\frac{f'(\xi_1)}{(k+1)(\xi_1-\bar{x})^k} = \frac{f'(\xi_1) - f'(\bar{x})}{(k+1)(\xi_1-\bar{x})^k - (k+1)(\bar{x}-\bar{x})^k} = \frac{f''(\xi_2)}{(k+1)k(\xi_2-\bar{x})^{k-1}}.$$

Proseguendo in questo modo si ha che esistono $\bar{x} < \xi_k < \xi_{k-1} < \cdots < \xi_1 < x$ tali che

$$\frac{f(x)}{(x-\bar{x})^{k+1}} = \frac{f'(\xi_1)}{(k+1)(\xi_1-\bar{x})^k} = \cdots = \frac{f^{(k)}(\xi_k)}{(k+1)!(\xi_k-\bar{x})}.$$

Per concludere applico il Teorema di Lagrange alla funzione $f^{(k)}$ sull'intervallo $[\bar{x}, \xi_k]$ e ottengo che esiste $\xi \in \,]\bar{x}, \xi_k[\, \subseteq \,]\bar{x}, x[$ tale che

$$\frac{f^{(k)}(\xi_k)}{(k+1)!(\xi_k-\bar{x})} = \frac{1}{(k+1)!}\frac{f^{(k)}(\xi_k) - f^{(k)}(\bar{x})}{\xi_k-\bar{x}} = \frac{1}{(k+1)!}f^{(k+1)}(\xi).$$

Quindi

$$f(x) = \frac{1}{(k+1)!}f^{(k+1)}(\xi)(x-\bar{x})^{k+1},$$

e la dimostrazione è conclusa. □

Osservazione 46. *Si noti che nel Lemma di Lagrange sarebbe sufficiente richiedere che* f *sia derivabile fino all'ordine* $k+1$ *su* $I \setminus \{\bar{x}\}$ *e che la derivata* k*-esima sia continua in* $\bar{x}$.

Teorema 53 (formula di Taylor con il resto di Peano)**.** *Sia* $f : I \to \mathbb{R}$ *con* $\bar{x} \in I$*. Sia* f *derivabile fino all'ordine* k *(sarebbe sufficiente richiedere che* f *sia derivabile fino all'ordine* $k-1$ *su* I *e che esista finita la derivata* k*-esima in* $\bar{x}$*). Allora*

$$f(x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x-\bar{x}) + \frac{f''(\bar{x})}{2!}(x-\bar{x})^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(\bar{x})}{k!}(x-\bar{x})^k + r_k(x),$$

con

$$\lim_{x\to\bar{x}} \frac{r_k(x)}{(x-\bar{x})^k} = 0.$$

Dimostrazione. Basta applicare il Lemma di Peano alla funzione

$$f(x) - (f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x-\bar{x}) + \frac{f''(\bar{x})}{2!}(x-\bar{x})^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(\bar{x})}{k!}(x-\bar{x})^k).$$

□

Teorema 54 (formula di Taylor con il resto di Lagrange)**.** *Sia* $f : I \to \mathbb{R}$ *con* $\bar{x} \in I$*. Sia* f *derivabile fino all'ordine* $k+1$ *(sarebbe sufficiente richiedere che* f *sia derivabile fino all'ordine* $k+1$ *su* $I \setminus \{\bar{x}\}$ *e che la derivata* k*-esima sia continua in* $\bar{x}$*). Allora, per ogni* $x \in I \setminus \{\bar{x}\}$ *esiste* $\xi \in \,]\bar{x}, x[$ *(questo nel caso* $x > \bar{x}$*, mentre, se* $x < \bar{x}$*,* $\xi \in \,]x, \bar{x}[$*) tale che*

$$f(x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x-\bar{x}) + \cdots + \frac{f^{(k)}(\bar{x})}{k!}(x-\bar{x})^k + \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}(x-\bar{x})^{k+1}.$$

Dimostrazione. Basta applicare il Lemma di Lagrange alla funzione

$$f(x) - (f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x-\bar{x}) + \frac{f''(\bar{x})}{2!}(x-\bar{x})^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(\bar{x})}{k!}(x-\bar{x})^k).$$

□

Osservazione 47. *Il polinomio (nella indeterminata* x*)*

$$f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x-\bar{x}) + \frac{f''(\bar{x})}{2!}(x-\bar{x})^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(\bar{x})}{k!}(x-\bar{x})^k$$

si dice **polinomio di Taylor** *della funzione* f*, di grado* k *e relativo al punto* $\bar{x}$*. La quantità*

$$r_k(x)$$

nella formula

$$f(x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x-\bar{x}) + \cdots + \frac{f^{(k)}(\bar{x})}{k!}(x-\bar{x})^k + r_k(x),$$

si dice **resto nella forma di Peano***. Si ha*

$$\lim_{x\to\bar{x}} \frac{r_k(x)}{(x-\bar{x})^k} = 0.$$

La quantità

$$\frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}(x-\bar{x})^{k+1}$$

nella formula

$$f(x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x-\bar{x}) + \cdots + \frac{f^{(k)}(\bar{x})}{k!}(x-\bar{x})^k + \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}(x-\bar{x})^{k+1}.$$

si dice **resto nella forma di Lagrange***.*

Esempio 19. *Sia* $f(x) = e^x$*. Abbiamo, per ogni* n*,* $f^{(n)}(x) = e^x$*. Quindi, per ogni* n*,* $f^{(n)}(0) = 1$*. Si ottiene, per ogni* $x \in R$*,*

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots + \frac{1}{k!}x^k + r_k(x) \quad \textit{con} \quad \lim_{x\to 0}\frac{r_k(x)}{x^k} = 0,$$

e anche che esiste $\xi \in]0, x[$ *(oppure* $\xi \in]x, 0[$*) tale che*

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots + \frac{1}{k!}x^k + \frac{e^\xi}{(k+1)!}x^{k+1}.$$

Esempio 20. *Sia* $f(x) = \sin x$*. Abbiamo, per ogni* n*,* $f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$ *e* $f^{(2n)}(0) = 0$*. Quindi si ottiene, per ogni* $x \in R$*,*

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2k+1)!}x^{2k+1} + r_{2k+2}(x) \ \textit{con} \ \lim_{x\to 0}\frac{r_{2k+2}(x)}{x^{2k+2}} = 0,$$

e anche che esiste $\xi \in]0, x[$ *(oppure* $\xi \in]x, 0[$*) tale che*

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2k+1)!}x^{2k+1} + \frac{(-1)^{n-1}\cos\xi}{(2k+3)!}x^{2k+3}.$$

Per le formule di Taylor delle funzioni elementari si veda il Capitolo 10, Paragrafo 7 di [1].

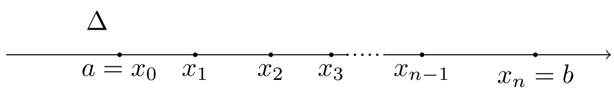
30

30.1 L'integrale di Riemann

Definizione 53. *Sia* $[a, b]$ *un intervallo in* $\mathbb{R}$*. Chiamiamo* **suddivisione di** $[a, b]$ *un insieme finito* $\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ *di punti distinti di* $[a, b]$ *tali che*

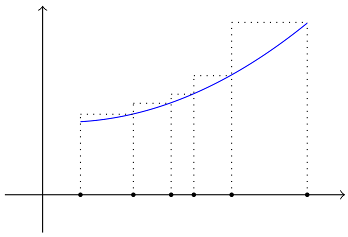
$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b.$$

Indico una suddivisione di $[a, b]$ *con* Δ *e l'insieme delle suddivisioni di* $[a, b]$ *con* $\mathcal{D}$*.*



Definizione 54. *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione* **limitata**. *Sia Δ una suddivisione di $[a, b]$. Chiamiamo* **somma superiore** *di f relativamente a Δ la quantità*

$$S(f, \Delta) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x).$$

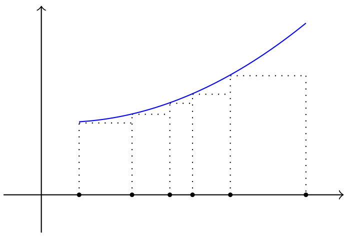


somma aree rettangoli $= S(f, \Delta)$

Similmente la quantità

$$s(f, \Delta) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

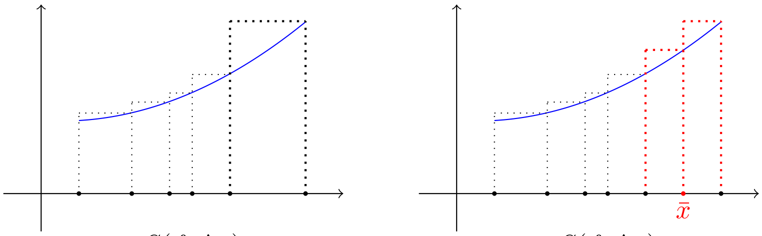
si dirà **somma inferiore** *di f relativamente a Δ.*



somma aree rettangoli $= s(f, \Delta)$

Osservazione 48. *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Valgono le seguenti proprietà.*

- $\forall \Delta \in \mathcal{D}, \quad s(f, \Delta) \leq S(f, \Delta)$.
  Questo è dovuto al fatto che, per ogni i,
  $$\inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \;\leq\; \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x).$$
- $\forall \Delta_1, \Delta_2 \in \mathcal{D}, \quad \Delta_1 \subseteq \Delta_2 \quad \Rightarrow \quad S(f, \Delta_1) \geq S(f, \Delta_2) \wedge s(f, \Delta_1) \leq s(f, \Delta_2)$
  (quando $\Delta_1 \subseteq \Delta_2$ diremo che Δ_2 **è più fine di** *Δ_1). Mostriamo che, aumentando di un punto una suddivisione, il valore delle somme superiori diminuisce. In modo analogo si prova che, aumentando di un punto una suddivisione, il valore delle somme inferiori aumenta. Per passare alla proprietà generale basterà aumentare di un punto alla volta le suddivisioni. Quindi supponiamo che $\Delta_2 = \Delta_1 \cup \{\bar{x}\}$, con $x_{j-1} < \bar{x} < x_j$. Si ha*
  $$\sup_{x \in [x_{j-1}, x_j]} f(x) \geq \sup_{x \in [x_{j-1}, \bar{x}]} f(x) \quad e \quad \sup_{x \in [x_{j-1}, x_j]} f(x) \geq \sup_{x \in [\bar{x}, x_j]} f(x).$$
  Da ciò
  $$(x_j - x_{j-1}) \sup_{x \in [x_{j-1}, x_j]} f(x) \geq (\bar{x} - x_{j-1}) \sup_{x \in [x_{j-1}, \bar{x}]} f(x) + (x_j - \bar{x}) \sup_{x \in [\bar{x}, x_j]} f(x).$$



$S(f, \Delta_1)$ $S(f, \Delta_2)$

Quindi

$$S(f, \Delta_1) \geq S(f, \Delta_2)$$

- $\forall \Delta_1,\, \Delta_2 \in \mathcal{D},\;\; s(f, \Delta_1) \leq S(f, \Delta_2)$.
  Per provarlo, basta osservare che, date $\Delta_1,\, \Delta_2 \in \mathcal{D}$*, si ha*
  $$s(f,\, \Delta_1) \leq s(f,\, \Delta_1 \cup \Delta_2) \leq S(f,\, \Delta_1 \cup \Delta_2) \leq S(f,\, \Delta_2).$$
- $\sup\limits_{\Delta \in \mathcal{D}} s(f,\, \Delta) \leq \inf\limits_{\Delta \in \mathcal{D}} S(f,\, \Delta)$.
  È conseguenza del punto precedente.

Definizione 55. *Sia* $f : [a,\, b] \to \mathbb{R}$ *una funzione limitata.* f *si dice* **integrabile secondo Riemann** *se*

$$\sup_{\Delta \in \mathcal{D}} s(f,\, \Delta) = \inf_{\Delta \in \mathcal{D}} S(f,\, \Delta).$$

Se f *è integrabile secondo Riemann su* $[a,\, b]$*, la quantità*

$$\sup_{\Delta \in \mathcal{D}} s(f,\, \Delta) = \inf_{\Delta \in \mathcal{D}} S(f,\, \Delta)$$

si dice **integrale di** f *su* $[a,\, b]$ *e si indica con* $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ *ovvero con* $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$*. L'insieme delle funzioni integrabili secondo Riemann su* $[a,\, b]$ *si indica con* $\mathcal{R}([a.b])$*.*

Osservazione 49. *Un primo esempio di funzione integrabile secondo Riemann è dato dalle funzioni costanti. Se per ogni* $x \in [a,\, b]$*,* $f(x) = c$*, allora per ogni* $\Delta \in \mathcal{D}$*,* $s(f\, \Delta) = S(f, \Delta) = (b - a)c$*. Quindi*

$$\sup_{\Delta \in \mathcal{D}} s(f,\, \Delta) = \inf_{\Delta \in \mathcal{D}} S(f,\, \Delta) = \int_a^b c\, dx = (b - a)c$$

Osservazione 50. *Da un punto di vista intuitivo, sarà integrabile secondo Riemann una funzione, definita su un intervallo, per la quale sia possibile "calcolare l'area" della regione di piano compresa tra il grafico della funzione e l'asse delle* x*. Questo è facile nel caso delle funzioni costanti: l'area sarà l'usuale area dei rettangoli, ottenuta come prodotto di base per altezza. Per una funzione non costante si cercherà di far stare il grafico della funzione tra quello di una costante a tratti sopra la funzione, per cui l'area tra il grafico della costante a tratti e l'asse delle* x *sarà la somma superiore e il grafico di una funzione costante a* *tratti sotto la funzione, che avrá come area tra il suo grafico e l'asse delle x la somma inferiore. Se, all'infittirsi dei punti delle suddivisioni che le generano, queste approssimazioni da sopra e da sotto convergono verso un valore, tale valore sarà il valore dell'area cercata.*

Osservazione 51. *Un esempio di funzione non integrabile secondo Riemann è dato dalla funzione di Dirichlet:*

$$\chi_{\mathbb{Q}} : [0,\, 1] \to \mathbb{R}, \qquad \chi_{\mathbb{Q}}(x) = 1 \text{ se } x \in \mathbb{Q}, \quad \chi_{\mathbb{Q}}(x) = 0 \text{ se } x \notin \mathbb{Q}.$$

Poiché, per ogni intervallo $[x_{j-1},\, x_j]$, si ha

$$\inf_{x\in[x_{j-1},\, x_j]} \chi_{\mathbb{Q}}(x) = 0 \qquad e \qquad \sup_{x\in[x_{j-1},\, x_j]} \chi_{\mathbb{Q}}(x) = 1,$$

si ottiene che, per ogni suddivisione Δ, si avrà

$$s(\chi_{\mathbb{Q}},\, \Delta) = 0 \qquad e \qquad S(\chi_{\mathbb{Q}},\, \Delta) = 1.$$

Quindi

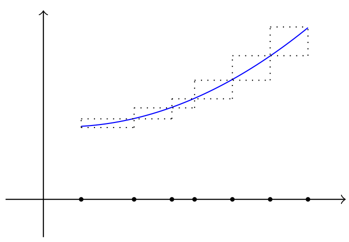
$$\sup_{\Delta\in\mathcal{D}} s(\chi_{\mathbb{Q}},\, \Delta) = 0 < 1 = \inf_{\Delta\in\mathcal{D}} S(\chi_{\mathbb{Q}},\, \Delta).$$

Teorema 55 (condizione necessaria e sufficiente per l'integrabilità)**.** *Sia $f : [a,\, b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Sono equivalenti*

i) f è integrabile secondo Riemann.

ii) Per ogni $\varepsilon > 0$, esiste una suddivisione $\Delta \in \mathcal{D}$ tale che

$$S(f,\, \Delta) - s(f,\, \Delta) \le \varepsilon.$$



somma aree rettangoli $= S(f, \Delta) - s(f, \Delta)$

Dimostrazione.

Proviamo che *i)* $\Rightarrow$ *ii)*. Sia quindi f integrabile su $[a,\, b]$. Sia $\varepsilon > 0$. Dalla seconda proprietà del sup e dell'inf, abbiamo che esistono $\Delta_1,\, \Delta_2 \in \mathcal{D}$ tali che

$$s(f,\, \Delta_1) > \underbrace{\int_{[a,b]} f}_{\sup_\Delta s(f,\Delta)} - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad S(f,\, \Delta_2) < \underbrace{\int_{[a,b]} f}_{\inf_\Delta S(f,\Delta)} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ora

$$\underbrace{\int_{[a,b]} f}_{\sup_\Delta s(f,\Delta)} \ge s(f,\, \Delta_1 \cup \Delta_2) \ge s(f,\, \Delta_1) > \underbrace{\int_{[a,b]} f}_{\sup_\Delta s(f,\Delta)} - \frac{\varepsilon}{2}$$

e

$$\underbrace{\int_{[a,b]} f}_{\inf_\Delta S(f,\Delta)} \leq S(f,\,\Delta_1\cup\Delta_2)\leq S(f,\,\Delta_1) < \underbrace{\int_{[a,b]} f}_{\inf_\Delta S(f,\Delta)} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Quindi

$$S(f,\,\Delta_1\cup\Delta_2) - s(f,\,\Delta_1\cup\Delta_2) < \varepsilon.$$

Proviamo che *ii)* $\Rightarrow$ *i)*. Se fosse $f\notin\mathcal{R}([a,b])$ allora si avrebbe

$$\sup_{\Delta\in\mathcal{D}} s(f,\,\Delta) < \inf_{\Delta\in\mathcal{D}} S(f,\,\Delta).$$

Scegliendo

$$\varepsilon = \frac{\inf_{\Delta\in\mathcal{D}} S(f,\,\Delta) - \sup_{\Delta\in\mathcal{D}} s(f,\,\Delta)}{2} > 0,$$

si avrebbe che, per ogni $\Delta\in\mathcal{D}$,

$$S(f,\,\Delta) - s(f,\,\Delta) > \varepsilon$$

in contraddizione con la *ii)*. $\square$

Esempio 21. *(Ricordiamo che abbiamo dimostrato per via induttiva che, per ogni n, si ha*

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+3)}{6}.)$$

Consideriamo la funzione

$$f:[0,\,1]\to\mathbb{R},\qquad f(x)=x^2.$$

Consideriamo la suddivisione

$$\Delta_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\}.$$

Si ha

$$s(f,\Delta_n) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n}\,\frac{(i-1)^2}{n^2}$$

e

$$S(f,\Delta_n) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n}\,\frac{i^2}{n^2}.$$

Ne risulta

$$S(f,\Delta_n) - s(f,\Delta_n) = \frac{1}{n^3}(\sum_{i=1}^n i^2 - \sum_{i=1}^n (i-1)^2) = \frac{1}{n^3}\,n^2 = \frac{1}{n}.$$

Quindi, fissato $\varepsilon>0$, possiamo rendere $S(f,\Delta)-s(f,\Delta)$ minore di ε, scegliendo un opportuno n. La funzione f è integrabile. Per calcolare il valore dell'integrale sarà sufficiente calcolare il

$$\lim_n s(f,\Delta_n) = \lim_n S(f,\Delta_n) = \lim_n \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{i^2}{n^2} = \lim_n \frac{n(n+1)(2n+3)}{6n^3} = \frac{1}{3},$$

da cui

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}.$$

30.2 Integrabilità delle funzioni continue e delle funzioni monotone

Teorema 56. *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua.*
Allora f è integrabile secondo Riemann.

Dimostrazione. Sia f continua su $[a,b]$. Sia $\varepsilon > 0$. Proviamo che esiste una suddivisione Δ di $[a,b]$ tale che

$$S(f, \Delta) - s(f, \Delta) \leq \varepsilon.$$

Essendo f continua su $[a,b]$, per il Teorema di Heine, f è uniformemente continua. Quindi esiste un $\delta > 0$ tale che, per ogni x, $\bar{x} \in [a,b]$, se $|\bar{x} - \bar{\bar{x}}| < \delta$ allora $|f(\bar{x}) - f(\bar{\bar{x}})| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$.

Scegliamo ora una suddivisione Δ tale che, per ogni i, si abbia $x_i - x_{i-1} < \delta$. Consideriamo, per $i = 1, \ldots, n$, la funzione

$$f_{|[x_{i-1},x_i]}.$$

Si avrà, per il Teorema di Weierstrass,

$$\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) = \max_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) = f(x_{\max})$$

e

$$\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) = \min_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) = f(x_{\min})$$

con $x_{\max}$, $x_{\min} \in [x_{i-1}, x_i]$. Ora $|x_{\max} - x_{\min}| \leq x_i - x_{i-1} < \delta$, per cui

$$\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) - \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) = f(x_{\max}) - f(x_{\min}) < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Si deduce che

$$\begin{aligned} S(f, \Delta) - s(f, \Delta) &= \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) (\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) - \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)) \\ &< \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon, \end{aligned}$$

e la dimostrazione è conclusa. □

Teorema 57. *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione monotona.*
Allora f è integrabile secondo Riemann.

Dimostrazione. Se f è costante, sappiamo già che è integrabile secondo Riemann. Supponiamo che f non sia costante e sia, per esempio, crescente; prendiamo $\varepsilon > 0$ e scegliamo una suddivisione in cui, per ogni $i = 1, \ldots, n$ si abbia

$$x_{j-1} - x_j < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}.$$

Dalla crescenza della funzione deduciamo che

$$\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) = f(x_i) \qquad \text{e} \qquad \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) = f(x_{i-1}).$$

Quindi

$$
\begin{aligned}
S(f,\,\Delta) - s(f,\,\Delta) \quad &= \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\Big(\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) - \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)\Big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})(f(x_i) - (x_{i-1})) \\
&\le \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - (x_{i-1})) = \varepsilon.
\end{aligned}
$$

$\square$

31

31.1 Altre proprietà dell'integrale

Teorema 58. *Siano $f,\, g \in \mathcal{R}([a,\, b])$.*
Allora $f + g \in \mathcal{R}([a,\, b])$ e

$$\int_{[a,b]} f + g = \int_{[a,b]} f + \int_{[a,b]} g.$$

Dimostrazione. Sia $\varepsilon > 0$. Sappiamo che esistono due suddivisioni Δ_1 e Δ_2 tali che

$$S(f,\,\Delta_1) - s(f,\,\Delta_1) \le \frac{\varepsilon}{2}, \quad S(g,\,\Delta_2) - s(g,\,\Delta_2) \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Scegliendo $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ si avrà

$$S(f,\,\Delta) - s(f,\,\Delta) \le \frac{\varepsilon}{2}, \quad S(g,\,\Delta) - s(g,\,\Delta) \le \frac{\varepsilon}{2},$$

da cui

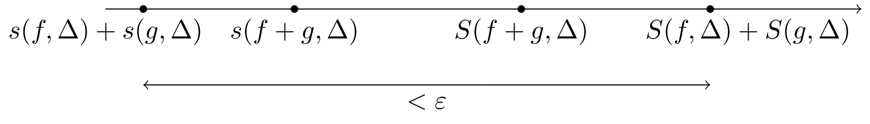
$$(S(f,\,\Delta) + S(g,\,\Delta)) - (s(f,\,\Delta) + s(g,\,\Delta)) < \varepsilon.$$

Osservando ora che, qualunque sia l'intervallo I,

$$\inf_I (f+g) \ge \inf_I f + \inf_I g, \qquad \sup_I (f+g) \le \sup_I f + \sup_I g,$$

si ottiene

$$s(f,\,\Delta) + s(g,\,\Delta) \le s(f+g,\,\Delta) \le S(f+g,\,\Delta) \le S(f,\,\Delta) + S(g,\,\Delta),$$



Quindi
$$S(f+g,\,\Delta)-s(f+g,\,\Delta)<\varepsilon,$$
da cui $f+g\in\mathcal{R}([a,b])$. Per provare che
$$\int_{[a,b]} f+g=\int_{[a,b]} f+\int_{[a,b]} g.$$
si usano i seguenti fatti: per ogni suddivisione Δ, vale

- $s(f,\,\Delta)+s(g,\,\Delta)\le\displaystyle\int_{[a,b]} f+\int_{[a,b]} g\le S(f,\,\Delta)+S(g,\,\Delta),$
- $s(f+g,\,\Delta)\le\displaystyle\int_{[a,b]} f+g\le S(f+g,\,\Delta),$
- $s(f,\,\Delta)+s(g,\,\Delta)\le s(f+g,\,\Delta)\le S(f+g,\,\Delta)\le S(f,\,\Delta)+S(g,\,\Delta),$

e per ogni $\varepsilon>0$ esiste una suddivisione Δ tale che
$$(S(f,\,\Delta)+S(g,\,\Delta))-(s(f,\,\Delta)+s(g,\,\Delta))<\varepsilon.$$
□

Vale il seguente risultato, la cui dimostrazione, molto simile al quella del teorema appena dimostrato, viene lasciata per esercizio.

Teorema 59. *Sia $f\in\mathcal{R}([a,\,b])$ e sia $\lambda\in\mathbb{R}$.*
Allora $\lambda f\in\mathcal{R}([a,\,b])$ e
$$\int_{[a,b]}\lambda f=\lambda\int_{[a,b]} f.$$

Osservazione 52. *L'insieme delle funzioni integrabili secondo Riemann sull'intervallo $[a,\,b]$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e la funzione $\int_{[a,b]}:\mathcal{R}([a,b])\to\mathbb{R}$, $f\mapsto\int_{[a,b]} f$ è una funzione lineare. $C^0([a,b])$, l'insieme delle funzioni continue su $[a,\,b]$, è un sottospazio. Che dimensione hanno questi due spazi vettoriali? Chi è il nucleo della funzione $\int_{[a,b]}$ e che intersezione ha il nucleo di $\int_{[a,b]}$ con l'insieme delle funzioni $C^0([a,b])$ tale che, per ogni x in $[a,\,b]$, $f(x)\ge 0$?*

Teorema 60. *Sia $f\in\mathcal{R}([a,\,b])$ e, per ogni $\in[a,\,b]$, sia $f(x)\ge 0$.*
Allora
$$\int_{[a,b]} f\ge 0.$$

Dimostrazione. Basta osservare che, essendo, per ogni intervallo $I\subseteq[a,\,,b]$, $inf_I f\ge 0$, si ha che, per ogni suddivisione Δ, vale $s(f,\Delta)\ge 0$. Quindi
$$\int_{[a,b]} f=\sup_{\mathcal{D}} s(f,\Delta)\ge 0.$$
□

Corollario 13. *Siano $f,\,g\in\mathcal{R}([a,\,b])$ e, per ogni $\in[a,\,b]$, sia $f(x)\ge g(x)$.*
Allora
$$\int_{[a,b]} f\ge\int_{[a,b]} g.$$

Dimostrazione. Basta applicare il teorema precedente a $f - g$. $\square$

Teorema 61. *Sia $f \in \mathcal{R}([a,\, b])$.*
Allora $|f| \in \mathcal{R}([a,\, b])$ e

$$|\int_{[a,b]} f| \leq \int_{[a,b]} |f|.$$

Dimostrazione. Sia I un intervallo di $[a,\, b]$. Osserviamo che se $\inf_I f \geq 0$, allora

$$\sup_I |f| = \sup_I f \quad \text{e} \quad \inf_I |f| = \inf_I f,$$

quindi

$$\sup_I |f| - \inf_I |f| = \sup_I f - \inf_I f.$$

Se invece $\sup_I f \leq 0$, allora

$$\sup_I |f| = -\inf_I f \quad \text{e} \quad \inf_I |f| = -\sup_I f,$$

quindi, di nuovo,

$$\sup_I |f| - \inf_I |f| = \sup_I f - \inf_I f.$$

Infine, se $\inf_I f \leq 0$ e $\sup_I f \geq 0$, si ha

$$\sup_I |f| = \max\{\sup_I f,\, -\inf_I f\} \quad \text{e} \quad \inf_I |f| \geq 0,$$

da cui

$$\sup_I |f| - \inf_I |f| \leq \sup_I f - \inf_I f.$$

Se ne deduce che, per ogni suddivisione Δ vale

$$S(|f|,\, \Delta) - s(|f|,\, \Delta) \leq S(f,\, \Delta) - s(f,\, \Delta),$$

e quindi $|f| \in \mathcal{R}([a,\, b])$.

Dal fatto che $-|f| \leq f \leq |f|$, usando il corollario precedente, si ottiene che

$$-\int_{[a,b]} |f| \leq \int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} |f|.$$

$\square$

31.2 Primitive

Definizione 56. *Sia $f : [a,\, b] \to \mathbb{R}$ una funzione. f si dice* **primitivabile** *se esiste una funzione $G : [a,\, b] \to \mathbb{R}$ derivabile tale che, per ogni $x \in [a,\, b]$ si abbia $G'(x) = f(x)$. La funzione G si dice primitiva di f. Per un motivo che vedremo tra poco l'insieme delle primitive di f si dice* **integrale indefinito** *di f e si indica con*

$$\int f(x)dx.$$

Teorema 62. *$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione primitivabile e sia $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ una sua primitiva. Sia $H : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione.*

H è primitiva di f se e solo se esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che, per ogni $x \in [a, b]$ si ha $H(x) = G(x) + c$.

Scriveremo

$$\int f(x)dx = G(x) + c.$$

Dimostrazione. Se H e G sono primitive di f allora, per ogni x in $[a, b]$ si ha $H'(x) = f(x) = G'(x)$. Quindi, x in $[a, b]$, $(H - G)'(x) = 0$ quindi $H - G$ è una funzione costante. Viceversa, se $H - G$ è una funzione costante, allora $(H - G)'(x) = 0$ per ogni x e quindi $H' = G' = f$. □

31.3 Il teorema fondamentale del calcolo integrale

Teorema 63. *Sia $f \in \mathcal{R}([a, b])$. Sia $c \in]a, b[$.*

Allora $f_{|[a,c]} \in \mathcal{R}([a, c])$, $f_{|[c,b]} \in \mathcal{R}([c, b])$ e

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f_{|[a,c]}(x)\,dx + \int_c^b f_{|[c,b]}(x)\,dx.$$

Dimostrazione (cenno). Basta osservare che da una suddivisione di $[a, b]$, chiamiamola Δ, eventualmente aggiungendo alla suddivisione il punto c, si ottiene una suddivisione di $[a, c]$, Δ' e una suddivisione di $[c, b]$, Δ''. Si avrà

$$s(f, \Delta) = s(f_{|[a,c]}, \Delta') + s(f_{|[c,b]}, \Delta'') \quad \text{e} \quad S(f, \Delta) = S(f_{|[a,c]}, \Delta') + S(f_{|[c,b]}, \Delta'').$$

Si ricava che

$$S(f_{|[a,c]}, \Delta') - s(f_{|[a,c]}, \Delta') \leq S(f, \Delta) - s(f, \Delta)$$

e

$$S(f_{|[c,b]}, \Delta'') - s(f_{|[c,b]}, \Delta'') \leq S(f, \Delta) - s(f, \Delta).$$

Da queste disuguaglianze, sapendo che $f \in \mathcal{R}([a, b])$, si ricava subito che $f_{|[a,c]} \in \mathcal{R}([a, c])$ e $f_{|[c,b]} \in \mathcal{R}([c, b])$. Ragionando in modo simile si ottiene anche l'uguaglianza

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f_{|[a,c]}(x)\,dx + \int_c^b f_{|[c,b]}(x)\,dx.$$

□

Definizione 57. *Sia $f \in \mathcal{R}([a, b])$. Siano $x_1, x_2 \in [a, b]$. Se $x_1 > x_2$, si pone*

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = -\int_{x_2}^{x_1} f(x)\,dx,$$

Se $x_1 = x_2$, si pone

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = 0.$$

Si noti che, con questa notazione, qualunque sia posizione di x_1, $x_2\, x_3 \in [a,\, b]$, si ha

$$\int_{x_1}^{x_3} f(x)\, dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x)\, dx$$

e

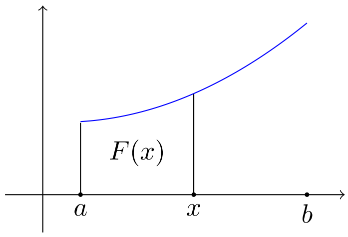
$$\int_{x_1}^{x_3} f(x)\, dx - \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx = \int_{x_2}^{x_3} f(x)\, dx.$$

Definizione 58. *Sia $f \in \mathcal{R}([a,\, b])$. Sia $x \in [a,\, b]$. La funzione*

$$F : [a,\, b] \to \mathbb{R}, \qquad F(x) = \int_a^x f(x)\, dx,$$

si dice **funzione integrale** *(o anche* **integral-funzione***) di f.*

Osservazione 53. *Sia $f \in \mathcal{R}([a,\, b])$. La sua funzione integrale è la funzione che ad ogni x di $[a,\, b]$ fa corrispondere l'area della parte di piano racchiusa dal grafico della funzione e l'asse delle x che corrisponde al segmento $[a,\, x]$.*



Teorema 64. *Sia $f \in \mathcal{R}([a,\, b])$. Sia $F : [a,\, b] \to \mathbb{R}$ la sua funzione integrale.*

Allora esite $M > 0$ tale che, per ogni x_1, $x_2 \in [a,\, b]$, si ha

$$|F(x_2) - F(x_1)| \leq M|x_2 - x_1|,$$

cioè F è lipschitziana, e, quindi, continua.

Dimostrazione. Sappiamo che f è limitata. Quindi esiste $M > 0$ tale che, per ogni $x \in [a,\, b]$,

$$-M \leq f(x) \leq M.$$

Di conseguenza, per ogni x_1, $x_2 \in [a,\, b]$, con $x_1 \leq x_2$ si ha

$$-\int_{x_1}^{x_2} M\, dx \leq \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx \leq \int_{x_1}^{x_2} M\, dx.$$

Da cui

$$|F(x_2) - F(x_1)| = |\int_a^{x_2} f(x)\, dx - \int_a^{x_1} f(x)\, dx| = |\int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx| \leq M(x_2 - x_1).$$

□

Teorema 65 (della media integrale)**.** *Sia $f \in \mathcal{R}([a,\, b])$. Siano x_1, $x_2 \in [a,\, b]$, con $x_1 < x_2$.*

Allora

$$\inf_{x \in [x_1,\, x_2]} f(x) \leq \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx \leq \sup_{x \in [x_1,\, x_2]} f(x).$$

In particolare, se f è continua, si ha che esiste $\xi \in [x_1, x_2]$ tale che

$$f(\xi) = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx.$$

Dimostrazione. Basta osservare che, se $x \in [x_1, x_2]$, allora

$$\inf_{x \in [x_1, x_2]} f(x) \leq f(x) \leq \sup_{x \in [x_1, x_2]} f(x).$$

Integrando su $[x_1, x_2]$ e dividendo per $x_2 - x_1$ si ottiene quanto voluto.

Se f è continua, si applica il teorema dei valori intermedi, osservando che f è definita su un intervallo e il numero reale $\frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx$ è un valore intermedio tra due valori assunti dalla funzione, in particolare

$$\inf_{x \in [x_1, x_2]} f(x) = \min_{x \in [x_1, x_2]} f(x) = f(x_{\min})$$

e

$$\sup_{x \in [x_1, x_2]} f(x) = \max_{x \in [x_1, x_2]} f(x) = f(x_{\max}).$$

$\square$

Teorema 66 (teorema fondamentale del calcolo integrale)**.** *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, integrabile secondo Riemann. Sia*

$$F : [a, b] \to \mathbb{R}, \qquad F(x) = \int_a^x f(t)\, dt,$$

la sua funzione integrale. Sia $\bar{x} \in [a, b]$. Sia f continua in $\bar{x}$.

Allora F è derivabile in $\bar{x}$ e si ha $F'(\bar{x}) = f(\bar{x})$.

Dimostrazione. Sappiamo che

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists\, \delta > 0 : \quad \forall \xi \in [a, b], \quad |\xi - \bar{x}| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(\xi) - f(\bar{x})| < \varepsilon.$$

Consideriamo, per $x \in [a, b] \setminus \{\bar{x}\}$, la quantità $|R^F_{\bar{x}}(x) - f(\bar{x})|$, dove $R^F_{\bar{x}}$ è la funzione rapporto incrementale della funzione integrale F relativamente al punto $\bar{x}$. Si ha

$$\begin{aligned}
|R^F_{\bar{x}}(x) - f(\bar{x})| \quad &= |\frac{F(x) - F(\bar{x})}{x - \bar{x}} - f(\bar{x})| \\
&= |\frac{\int_a^x f(\xi)\, d\xi - \int_a^{\bar{x}} f(\xi)\, d\xi}{x - \bar{x}} - f(\bar{x})| \\
&= |\frac{\int_{\bar{x}}^x f(\xi)\, d\xi}{x - \bar{x}} - f(\bar{x})| \\
&= |\frac{\int_{\bar{x}}^x (f(\xi) - f(\bar{x}))\, d\xi}{x - \bar{x}}| \\
&\leq \frac{|\int_{\bar{x}}^x |f(\xi) - f(\bar{x})|\, d\xi|}{|x - \bar{x}|}
\end{aligned}$$

Se $|x-\bar{x}|<\delta$, allora $|\xi-\bar{x}|<\delta$ per ogni $\xi \in]\bar{x}, x[$ (nel caso $\bar{x}<x$, oppure per ogni $\xi \in]x, \bar{x}[$ nel caso $x<\bar{x}$) e quindi $|f(\xi)-f(\bar{x})| \leq \varepsilon$. Si deduce

$$|R^F_{\bar{x}}(x)-f(\bar{x})| \leq \frac{|\int_{\bar{x}}^x |f(\xi)-f(\bar{x})|\,d\xi|}{|x-\bar{x}|} \leq \frac{|\int_{\bar{x}}^x \varepsilon\,d\xi|}{|x-\bar{x}|} = \varepsilon.$$

Riassumendo

$$\forall \varepsilon>0, \quad \exists\,\delta>0: \quad \forall x \in [a,\,b], \quad 0<|x-\bar{x}|<\delta \quad \Rightarrow \quad |R^F_{\bar{x}}(x)-R^F_{\bar{x}}(x)|<\varepsilon,$$

cioè

$$\lim_{x\to\bar{x}} R^F_{\bar{x}}(x)=f(\bar{x}).$$

□

Corollario 14. *Sia $f:[a,\,b]\to\mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f è primitivabile e la funzione integrale di f è una primitiva di f.*

Dimostrazione. È una conseguenza immediata del teorema precedente. Diamo una breve dimostrazione alternativa. Si ha

$$R^F_{\bar{x}}(x)=\frac{F(x)-F(\bar{x})}{x-\bar{x}}=\frac{\displaystyle\int_{\bar{x}}^x f(t)\,dt}{x-\bar{x}}=f(\xi_x)$$

dove l'ultima uguaglianza è conseguenza del teorema della media e ξ_x è un punto che sta nell'intervallo di estremi x e $\bar{x}$. Di conseguenza, se x tende a $\bar{x}$ anche ξ_x tende a $\bar{x}$, quindi

$$\lim_{x\to\bar{x}} R^F_{\bar{x}}(x)=\lim_{x\to\bar{x}} f(\xi_x)=f(\bar{x}).$$

□

Corollario 15 (teorema di Torricelli)**.** *Sia $f:[a,\,b]\to\mathbb{R}$ una funzione continua. Sia G una primitiva di f. Allora*

$$\int_a^b f(x)\,dx=G(b)-G(a).$$

Dimostrazione. Sappiamo che la funzione integrale di f, $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$, è una primitiva di f. Quindi la differenza tra F e G è una costante. Di conseguenza

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)=F(b)-F(a)=(F(b)+c)-(F(a)+c)=G(b)-G(a).$$

□

Osservazione 54. *Il teorema di Torricelli (ovvero il teorema fondamentale del calcolo integrale) ha una importante conseguenza: per calcolare l'integrale di una funzione continua non è necessario passare attraverso il calcolo di somme inferiori e superiori, basta invece riuscire a calcolare una primitiva della funzione in questione. Il valore dell'integrale sarà la differenza dei valori di una primitiva valutata negli estremi dell'intervallo.*

32

32.1 Calcolo di primitive

Leggendo alla rovescia la tabella delle derivate, si hanno le primitive delle funzioni elementari. Va fatta attenzione al dominio, che deve essere un intervallo. Ad esempio

funzione	una primitiva
0	1
1	x
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$x^{-n},\ x>0\ (n \neq 1)$	$\frac{1}{-n+1}x^{-n+1}$
$x^{-n},\ x<0\ (n \neq 1)$	$\frac{1}{-n+1}x^{-n+1}$
$x^{-1},\ x>0$	$\log x$
$x^{-1},\ x<0$	$\log(-x)$

funzione	una primitiva
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$1+\tan^2 x,\ -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$	$\tan x$
e^x	e^x
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ -1<x<1$	$\arcsin x$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$

32.2 Integrazione per parti e per sostituzione

Per questi argomenti si veda il Capitolo 9, Paragrafi 6 e 7 di [1].

Osservazione 55 (integrazione per parti)**.** *siano f, g due funzioni di classe C^1 sull'intervallo I.*

Sappiamo che

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$

quindi $f(x)g(x)$ è una primitiva di $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$. Applicando il teorema di Torricelli, dato un qualunque intervallo $[a, b]$ contenuto in I, si ha

$$\int_a^b (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a),$$

da cui

$$\boxed{\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx.}$$

A livello di integrali indefiniti si ha

$$\boxed{\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx.}$$

Osservazione 56 (integrazione per sostituzione)**.** *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua, sia $a \in I$ e sia F la sua funzione integrale, $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Sia $\phi : J \to I$ una funzione di classe C^1. Allora*

$$(F \circ \phi)'(t) = F'(\phi(t))\phi'(t) = f(\phi(t))\phi'(t).$$

Applicando il teorema di Torricelli, dato un qualunque intervallo $[\alpha, \beta]$ contenuto in J, si ha

$$\int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)\,dt = F(\phi(\beta)) - F(\phi(\alpha)),$$

da cui, ricordando che F è la funzione integrale di f si ottiene

$$\boxed{\int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)\,dt = \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(x)\,dx.}$$

Ora, se ϕ è invertibile e si ha $\phi(\beta) = b$, $\phi(\alpha) = a$, si deduce che

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\phi(t))\phi'(t)\,dt.}$$

A livello di integrali indefiniti si ha

$$\boxed{\int f(x)\,dx = \int f(\phi(t))\phi'(t)\,dt, \quad \text{dove si dovrà porre} \quad t = \phi^{-1}(x).}$$

Riferimenti bibliografici

[1] E. Giusti, *Analisi Matematica 1*, terza edizione, Bollati Boringhieri, Torino, 2002.

[2] C. D. Pagani, S. Salsa, *Analisi Matematica 1*, seconda edizione, Zanichelli, Bologna, 2015.

[3] G. Prodi, *Analisi Matematica*, Boringhieri, Torino, 1970.