ESERCIZI INTRODUTTIVI
ALGEBRA LINEARE ED ELEMENTI DI GEOMETRIA
MATEMATICA PER L'ECONOMIA E LA STATISTICA 2
A.A. 2023/24

Esercizio 1

Considera l'equazione di cui ci siamo occupati a lezione, ovvero

$$3x + y - 2z = 0\,.$$

Calcola tre soluzioni di questa equazione, assegnando rispettivamente i valori

$$y = 1 \text{ e } z = 2$$

$$y = -1 \text{ e } z = -2$$

$$y = 2 \text{ e } z = 1$$

e determinando il corrispondente valore di x.

Esercizio 2

Considera il sistema

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ -x + 3y - z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$$

Utilizza la tecnica vista in classe per eliminare prima la variabile x dalla seconda e dalla terza equazione (aggiungendo o sottraendo opportuni multipli della prima equazione) e poi per eliminare la variabile y dalla terza equazione (aggiungendo o sottraendo opportuni multipli della nuova seconda equazione). A questo punto **calcola** la/le soluzioni del sistema. **Scrivi** poi la matrice dei coefficienti del sistema e **ripercorri** sulle sue righe le operazioni che hai svolto sulle equazioni.

Esercizio 3

Disegna nel piano due vettori applicati $\vec{AB}$ e $\vec{BC}$, a piacere (nota che, qualsiasi sia la scelta per i due vettori applicati, per come sono stati descritti il punto finale del primo vettore applicato deve coincidere con il punto iniziale del secondo vettore applicato).

Disegna ora i seguenti vettori applicati: $\vec{AB} + \vec{BC}$, $2 \cdot \vec{AB}$, $\vec{AB} + \big((-3) \cdot \vec{BC}\big)$.

Disegna inoltre tre vettori applicati che appartengano alla classe di equipollenza di $\vec{AB}$ e tre vettori applicati che appartengano alla classe di equipollenza di $(-1) \cdot \vec{BC}$.

Esercizio 4

Dati due vettori applicati $\vec{AB}$ e $\vec{CD}$, **quali condizioni** devono sussistere sui punti A, B, C, D affinché entrambe le somme $\vec{AB}+\vec{CD}$ e $\vec{CD}+\vec{AB}$ siano definite? Quando sono entrambe definite, qual è il **risultato** della somma in ciascuno dei casi?

Esercizio 5

Considera l'insieme V delle coppie ordinate di numeri (a, b) di numeri reali, ovvero

$$V := \left\{(a, b) : \ a \in \mathbb{R}, \, b \in \mathbb{R}\right\}.$$

Ad esempio sono elementi di V le coppie $(1, 2)$, $(-5, 3)$, $(\sqrt{3}, 0.34)$. L'insieme V è anche denotato $\mathbb{R}^2$.

Date due coppie $(a, b) \in V$ e $(c, d) \in V$, definiamo la loro somma come

$$(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)\,.$$

Notiamo quindi che anche la somma $(a, b) + (c, d)$ è un elemento di V. **Dimostra** che questa operazione di somma gode della proprietà commutativa e della proprietà associativa.

Data una coppia $(a, b) \in V$ e un numero reale $\lambda \in \mathbb{R}$, definiamo la moltiplicazione della coppia (a, b) per lo scalare[1] λ come

$$\lambda \cdot (a, b) := (\lambda\, a, \lambda\, b)\,.$$

Notiamo quindi che anche $\lambda \cdot (a, b)$ è un elemento di V. **Dimostra** che questa operazione di moltiplicazione per uno scalare gode della proprietà commutativa e della proprietà associativa.

Dimostra infine che per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e per ogni $(a, b), (c, d) \in V$ valgono le proprietà distributive

$$\lambda \cdot \big((a, b) + (c, d)\big) = \lambda \cdot (a, b) + \lambda \cdot (c, d)$$
$$(\lambda + \mu) \cdot (a, b) = \lambda \cdot (a, b) + \mu \cdot (a, b)$$

[1] Qui "scalare" è sinonimo di "numero reale".