Marco Barchiesi

Probabilità

Anno accademico 2023-2024,
Corso da 6 CFU (48 ore)
Aggiornato al 21 febbraio 2024

Materiale: oltre alle note del corso, consiglio la lettura del libro di Berger, Caravenna e Dai Pra - Probabilità, un primo corso attraverso esempi, modelli e applicazioni - Springer Milan (2021). Sono parte integrante del corso gli esercizi che sono stati proposti.
In blu gli argomenti facoltativi. In arancione gli argomenti semi-facoltativi, cioè che vanno saputi se puntate dal 26 in su.

Lezione 1-2

Introduzione alla probabilità
- Esempio 1: lancio di un dado.
- Struttura matematica: spazio degli eventi elementari finito, definizione di algebra, definizione di probabilità, definizione di spazio di probabilità finito.
- Proposizione: alcune proprietà base della probabilità, in particolare subadditività e monotonia.
- Costruzione di spazi di probabilità. Esempio 2: lancio di due dadi.
- Fondamenti sulle serie numeriche. Esempio di serie non convergente o divergente. Condizione necessaria alla convergenza di una serie. Esempio che mostra come la condizione sia necessaria ma non sufficiente: la serie armonica. Serie armonica generalizzata e suo comportamento. La serie geometrica e suo comportamento. Esempio di applicazione. Criterio del confronto. La serie $\sum 1/k!$ e il numero di Nepero.

Lezione 3

- Spazi di probabilità generali: definizione di σ-algebra e di probabilità su di essa.
- La necessità di uno spazio degli eventi non finito: Esempi 3 e 4. Spazi di probabilità discreti. Problematica della scelta della σ-algebra. σ-algebra di Borel.
- Ulteriori proprietà generali della probabilità. Proposizione: continuità dal basso e dall'alto della probabilità (dimostrazione facoltativa). Corollario: subadditività della probabilità lungo successioni di eventi (dimostrazione facoltativa).

Lezione 4

- Esempio e motivazione: definizione di probabilità condizionale. Proposizione: $p(\cdot|B)$ è una misura di probabilità. Esercizio: estrazione palline da un urna. Esempio e motivazione: definizione di eventi indipendenti. Proposizione: regola della catena (dimostrazione facoltativa).
- Costruzione di un modello probabilistico a partire da probabilità condizionali: esempio estrazione pallina da due urne.
- Proposizione: formula di disintegrazione e formula delle probabilità totali. Corollario nel caso di una partizione (B, B^c). Esempio: riottenere il risultato sulle due urne.

Lezione 5

- Teorema: formula di Bayes e sue varianti (formula delle probabilità delle cause). Esempio sulle due urne. Esempio su votazione ≥ 27. Esempio attendibilità test di rilevamento per virus.
- Ancora sugli eventi indipendenti: ulteriore esempio. Generalizzazione a famiglie di eventi con $n \geq 3$ eventi. Osservazione: l'indipendenza non è transitiva. Esempio nel caso $n = 3$. Osservazione sull'indipendenza rispetto ad eventi complementari nel caso di una coppia di eventi. Proposizione: sostituendo in una famiglia di eventi indipendenti alcuni eventi con il loro complementare, la nuova famiglia è ancora indipendente (dimostrazione omessa).

Lezione 6

- Esempio di prove ripetute ed indipendenti. Schema delle prove indipendenti (o di Bernoulli), costruzione dello spazio. Osservazione sulla probabilità di ottenenre un successo su grandi numeri di prove. Ulteriore esempio: la scimmia di Borel.
- Primo quesito: qual è la probabilità che il successo avvenga al j-esimo tentativo?
- Secondo quesito: qual è la probabilità che k prove abbiano successo? Rivisitazione dell'estrazione di palline da un'urna con reimmissione.

Lezione 7

- La σ-algebra di Borel su $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$. Definizione di variabile aleatoria reale. Lemma: condizioni equivalenti affinché una funzione sia variabile aleatoria (dimostrazione facoltativa). Definizione di distribuzione associata ad una variabile aleatoria.
- Variabili aleatorie discrete. Densità di una variabile aleatoria e sue proprietà. Osservazione: la densità cattura l'essenza della distribuzione associata alla variabile aleatoria. Lemma: condizione equivalente affinché una funzione sia variabile aleatoria discreta.
- Proposizione: per ogni densità q è possibile costruire uno spazio di probabilità ed una variabile aleatoria avente q come densità (dimostrazione facoltativa).
- Densità binomiale, la v.a. "numero di successi" sullo schema delle prove ripetute e link con quesito sulla probabilità che k prove abbiano successo. Esempio.

Lezione 8

- Densità ipergeometrica. Esempio: ancora sull'estrazione di palline da un'urna senza reimmissione.
- Esempio introduttivo sullo schema delle prove ripetute: la v.a. "quando avviene il primo successo". Definizione di densità geometrica. Esempio applicativo (in cui la determinazione dello spazio di probabilità sottostante e la definizione esplicita della v.a. non sono rilevanti). Proposizione: mancanza di memoria delle v.a. con densità geometrica. Significato. Due semplici esercizi.
- Densità di Poisson. La densità può essere ottenuta come limite di densità binomiali per $n \to \infty$ e usata quindi come approssimazione. Esempio.

Lezione 9

- Vettori aleatori. Esempio introduttivo. Definizione. Densità e sue proprietà. Densità congiunta e densità marginali. Osservazione: le densità marginali si ricavano da quella congiunta. Due ulteriori esempi. Osservazione: la densità congiunta non si può in genere ottenere dalle densità marginali.

- La densità multinomiale, costruzione.

Lezione 10

- Indipendenza di variabili aleatorie. Condizione equivalente letta sulle densità marginali. Proposizione: Indipendenza e composizione di funzioni. Corollario: la somma a blocchi commuta con l'indipendenza.
- Il valore medio. Esempi introduttivi. Discussione sulla condizione di valore medio finito. Definizione di variabile aleatoria centrata. Teorema: valore medio e composizione di funzione (dimostrazione omessa). Proposizione: valore medio su spazi di probabilità discreti (dimostrazione semi-facoltativa). Proposizione: linearità del valore medio (dimostrazione semi-facoltativa). Esempio: valore medio della funzione caratteristica di un evento, e della somma di funzioni caratteristiche. Proposizione: monotonia del valore medio (dimostrazione semi-facoltativa). Valore medio e modulo. Lemma: valore medio finito per variabili aleatorie positive controllate dall'alto (dimostrazione facoltativa). Proposizione: valore medio e prodotto di variabili aleatorie indipendenti (dimostrazione semi-facoltativa).

Lezione 11

- Indice di dispersione rispetto al valore medio: varianza e scarto quadratico medio. Momento secondo finito come condizione per avere che la varianza è ben posta. Proposizione: principali proprietà della varianza (in particolare $VarX = 0$ se e solo se $X = E[X]$) (dimostrazione semi-facoltativa). Proposizione: la stima quantitativa di Chebyshev.
- Lemma: somma di variabili aleatorie con momento scendo finito ha ancora momento secondo finito (dimostrazione semi-facoltativa). La varianza del prodotto di variabili aleatorie. Definizione di covarianza. Variabili indipendenti non sono correlate, ma non viceversa. Esempio: variabili non correlate ma dipendenti. Proposizione: principali proprietà della covarianza (dimostrazione semi-facoltativa). Esercizio. Tavola del valore medio e della varianza per variabili aleatorie con densità ben note.

Lezione 12

- Variabili aleatorie assolutamente continue, unicità della densità a meno di insiemi trascurabili. Differenze rispetto le variabili aleatorie discrete. La funzione di ripartizione. Condizione sufficiente sulla funzione di ripartizione affinché la v.a. sia assolutamente continua. Composizione di una v.a. X con una trasformazione ψ. Proposizione: se ψ è regolare e strettamente monotona, allora la composizione $\psi \circ X$ è una v.a. assolutamente continua (dimostrazione omessa). Esempio della trasformazione lineare.
- Definizione di valore medio di una v.a. assolutamente continua. Definizione di valore medio per una generica v.a. Proprietà del valore medio: linearità, monotonia e comportamento rispetto al prodotto nel caso di v.a. indipendenti. La definizione generale di valore medio generalizza quella data per v.a. assolutamente continue. Teorema: valore medio della composizione di una v.a. X assolutamente continua con una trasformazione ψ continua (dimostrazione omessa). Osservazioni.
- V.a. con momento secondo finito e definizione di varianza. Proprietà della varianza. Definizione di covarianza. Proprietà della covarianza.

Lezione 13

- Densità notevoli. (1) Densità uniforme, sua funzione di ripartizione, valore medio e varianza. (2) Densità esponenziale, sua funzione di ripartizione, valore medio e varianza. Proposizione: mancanza di memoria delle v.a. con densità esponenziale. (3) Definizione della funzione Gamma di Eulero. Proprietà base. Densità Gamma. Formula per il valore medio di X^k. Valore medio e varianza di v.a. aleatorie con densità Gamma. Lemma: la somma di v.a. assolutamente continue e indipendenti è una v.a. assolutamente continua, forma della sua densità (dimostrazione omessa). Proposizione: la somma di v.a. indipendenti con densità di tipo Gamma è ancora una v.a. con densità di tipo Gamma (dimostrazione semi-facoltativa). (4) Densità Gaussiana (standard e generica), sua funzione di ripartizione, valore medio e varianza. Proposizione: la somma di v.a. indipendenti con densità Gaussiana è ancora una v.a. con densità Gaussiana (dimostrazione omessa).
- Metodo per trovare la densità di una v.a. del tipo $\psi \circ X$, conoscendo la densità di X. Esempio.

Lezione 14

- Definizione di media campionaria (variabile aleatoria). La legge dei grandi numeri. Teorema: condizioni sufficienti affinché una successione di v.a. soddisfi la legge dei grandi numeri. Osservazioni sulle ipotesi. Esempio nel caso di prove ripetute (v.a. binomiali), significato intuitivo della probabilità sulla singola prova.
- Decadimento della successione di v.a. $Z_n = \bar{X}_n - \mu$, esempio del caso Gaussiano per determinare come rinormalizzare. Teorema del limite centrale (dimostrazione omessa). Approfondimento: la convergenza in probabilità e la convergenza in legge.
- Uso del teorema per approssimazione di v.a. di tipo binomiale, Poisson e Gamma. Correzione di continuità. Informazione (euristica) su quanto grandi vanno presi i parametri.

Lezione 15

- Approfondimento sulle v.a. con densità esponenziale. Modellizzazione dei tempi di attesa. Esempio. Apparecchi soggetti o meno ad usura, differenti modellizzazioni attraverso tre esempi. Esercizio.
- Relazioni tra variabili aleatorie geometriche ed esponenziali. Esercizio sulle v.a. esponenziali e geometriche.

Lezione 16

- Elementi di statistica descrittiva: motivazioni e metodi. Gli ingredienti principali: unità statistica, popolazione, campione, caratteri qualitativi e quantitativi. Esempi. Tabella delle frequenze (assoluta, relativa, percentuale, cumulativa). Esempi. Istogramma ed ogiva. Indici di posizione: moda e mediana. Esempi. Mediana per dati raggruppati e come calcolarla.

Lezione 17

- Indici di posizione: media campionaria (dei dati). Media nel caso di dati raggruppati. Esempi. Invarianza per trasformazione lineare. Osservazioni sulla relazione tra mediana e media.
- Indici di dispersione: varianza (dei dati) e scarto quadratico medio. Varianza nel caso di dati raggruppati. Esempio.

- V.a. con densità χ^2 ad n gradi di libertà: definizione e relazione con le densità di tipo Gamma. Principali proprietà: valore medio, varianza e somma. Approssimazione tramite v.a. con densità Gaussiana. Varianza campionaria (variabile aleatoria). Proposizione: relazioni tra media campionaria, varianza campionaria e densità χ^2 (dimostrazione omessa). Esempio applicativo. V.a. con densità di Student ad n gradi di libertà. Forma (semi)esplicita della densità e convergenza alla densità Gaussiana. Proposizione: relazione tra media campionaria, varianza campionaria e densità di Student.

Lezione 18

- Introduzione alla statistica inferenziale. Definizione di modello statistico. Variabili aleatorie nell'ambito dei modelli statistici e definizione di campione. Definizione di statistica campionaria e di stimatore corretto. Sommario. Esempio di stimatore corretto.
- Media e varianza campionarie sono stimatori corretti.
- Errore quadratico medio.
- Proprietà asintotica degli stimatori puntuali: consistenza. Media e varianza campionarie sono stimatori consistenti.

Lezione 19

- Intervalli di confidenza e stima per intervalli. Campionamento dalla distribuzione normale: intervalli di confidenza per la media e la varianza, casistiche varie con esempi.
- Stimatori di massima verosimiglianza. Esempi vari.

Lezione 20

- Vettori aleatori assolutamente continui. Note tecniche. Proposizione: forma della densità nel caso di componenti indipendenti (dimostrazione omessa). Proposizione: densità della composizione tra un vettore aleatorio assolutamente continuo e un diffeomorfismo (dimostrazione omessa). Nota. Corollario: caso di una trasformazione affine. Teorema: media della composizione tra un vettore assolutamente continuo e una trasformazione lineare da $\mathbb{R}^m$ in $\mathbb{R}$ (dimostrazione omessa). Nota. Corollario: densità della somma delle componenti di un vettore bidimensionale assolutamente continuo. Definizione di funzione di ripartizione per un vettore aleatorio. Forma nel caso assolutamente continuo.

Lezione 21

- Variabili aleatorie complesse. La funzione caratteristica di un vettore aleatorio. Forma nel caso discreto e assolutamente continuo. Teorema: due vettori aleatori hanno stessa legge se e solo se hanno stessa funzione caratteristica (dimostrazione omessa). Proposizione: un vettore aleatorio ha componenti indipendenti se e solo se la sua funzione caratteristica si esprime come prodotto delle funzioni caratteristiche delle componenti (dimostrazione parziale). Proposizione: forma della funzione caratteristica della somma di v.a. indipendenti. Osservazione: se il vettore aleatorio è simmetrico allora la funzione caratteristica è simmetrica. Osservazione: forma della funzione caratteristica della trasformazione affine di un vettore aleatorio. Proposizione: derivate della funzione caratteristica e momenti della variabile aleatoria.
- Forma esplicita della funzione caratteristica di una variabile aleatoria di tipo gaussiano. Estensione della definizione di una v.a. gaussiana al caso $\sigma = 0$. Definizione di vettore aleatorio gaussiano. Esempio: un vettore aleatorio può avere componenti gaussiane senza essere gaussiano.

Lezione 22

- Proprietà basilari dei vettori gaussiani: comportamento attraverso trasformazioni lineari e comportamento rispetto alla somma.
- Teorema di struttura (dimostrazione facoltativa): forma della funzione caratteristica di un vettore gaussiano. Il vettore è assolutamente continuo se e solo se la matrice di covarianza è non degenere. Forma esplicita della densità.
- Un vettore aleatorio è gaussiano se e solo se si scrive come trasformazione affine di un vettore aleatorio gaussiano standard. Le componenti di un vettore gaussiano sono indipendenti se e solo se sono scorrelate. Alcuni casi espliciti di vettori gaussiani nel caso di matrice della covarianza diagonale.

Lezione 23

- Introduzione ai processi stocastici reali. Processi discreti e continui. Leggi finito dimensionali.
- Processi gaussiani. Esempio: il white noise. Utilizzo nel descrivere i movimenti casuali per tempi discreti di una particella vincolata su una retta (passeggiata aleatoria).
- Processi di Levy. Esempio: il moto browniano e suo uso nel descrivere i movimenti casuali per tempi continui di una particella (prendendo spunto dal caso discreto).
- Costruzione del modello per fenomeni imprevedibili. Il processo stocastico "quando il fenomeno accade l'n-esima volta", modellizzazione degli incrementi temporali attraverso v.a. di tipo esponenziale (parallelo con il white noise nella passeggiata aleatoria). Il processo di Poisson "il fenomeno accade X_t volte nell'intervallo $[0, t]$". Lemma: il processo trovato è costituito da v.a. di tipo Poisson. Teorema: il processo trovato è di Levy (dimostrazione omessa).

Lezione 24

- Definizione di catena di Markov. Matrice di transizione P e sue proprietà. Esempi vari: modello meteo e dei due giocatori. Rappresentazione di una catena di Markov attraverso un diagramma.
- Matrice di transizione ad m passi $P^{(m)}$. Dimostrazione dell'uguaglianza $P^{(m)} = P^m$. Uso di $P^{(m)}$ per calcolare la densità di X_m a partire da quella di X_0. Esempio. Leggi congiunte di una catena di Markov: dipendono unicamente dalla legge di X_0 e da P.