Ejercicio 3

Parte 1:

Proposición a:
Una recorrida en G que empieza en un vértice de una CFC sumidero, visita todos los vértices de esa CFC y ningún otro.

Demostración:
Que la recorrida visita todos los vértices de la CFC sumidero es cierto por definición de CFC (existe un camino entre todo par de vértices).
Luego no visita ningún otro vértice de V por definición de CFC sumidero (las únicas aristas $(u,v) \in A \text{ con } u \in C \text{ son tales que } v \in C$).

Proposición b:
Una CFC fuente en G es sumidero en G^T.

Demostración:
Observación previa: Una componente CFC C en G con vértices $v_{1,} \dots, v_n$ es tal que existe un camino entre todo par de vértices.
Para estos vértices en G^T va a seguir existiendo un camino para todo par de vértices, pues los caminos de G en G^T se recorren en sentido inverso.
Con lo que G y G^T tienen los mismos vértices para cada CFC en cada uno de ellos.

Luego observando el grafo transpuesto del grafo de componentes G_C^T es tal que $(u_i, u_j) \in A_C^T \text{ si } (u_j, u_i) \in A_C$
Por lo que si una CFC era fuente en G_C entonces es sumidero en G_C^T .

Proposición c-1:
El grafo G_C se puede ordenar topológicamente como una secuencia $o = \{o_{1,} o_{2,} \dots, o_k\}$

Demostración:
Observación: Sabemos que existe orden topológico en G $\leftrightarrow$ G es acíclico.

Supongamos que G_C tuviera un ciclo, digamos entre

$$v_i, v_j \rightarrow \exists (u_i, u_j) \text{ con } u_i \in CFC(v_i) \text{ y } u_j \in CFC(v_j)$$
$$\text{y } \exists (w_i, w_j) \text{ con } w_i \in CFC(v_i) \text{ y } w_j \in CFC(v_j)$$
$$\rightarrow CFC(u_i) \cup CFC(v_j) \text{ es } CFC$$

absurdo pues existen k componentes CFC y esto concluye que existe k-1.
Entonces G es acíclico, entonces existe al menos un orden topológico en G.

Proposición c-2:
$CFC(o_1)$ es sumidero en G^T

Demostración:
o_1 es tal que solo existen aristas $(o_{1,} o_j)\ j=2,\ldots,k$
Luego $CFC(o_1)$ es una fuente para G entonces usando la proposición b
$CFC(o_1)$ es sumidero en G^T .

Proposición c-3:
Sea G' el grafo que se obtiene al excluir de G la componente $CFC(o_1)$ entonces
$o'=\{o_{1,}\ldots,o_k\}$ es un ordenamiento topológico de G'_C .

Demostración:
$o=\{o_{1,}\ldots,o_k\}$ es ordenamiento topológico $\rightarrow\nexists\ aristas\ (o_j,o_i) \because j>i\ j,i=1,\ldots,k$
Luego $o'=\{o_{2,}\ldots,o_k\}$ es ordenamiento topológico pues $o'=o\setminus\{o_1\}$ es decir
solo estan siendo removidas aristas del tipo $\{o_{1,} o_j\}$.

Parte 2:
Dada una secuencia u1, ..., uk de vértices de G, con ui ∈ CFC(oi), 1 ≤ i ≤ k,
siendo o = (o1, ..., ok)
un ordenamiento topológico de G_C , describa y justifique un algoritmo que
permita encontrar cada
una de las CFCs de G.

```
encontrar_CFC(G: Grafo)
        Dado G expreso su grafo traspuesto G^T
        Para cada u de {u_1,...,u_k}   /* con  u_i∈CFC(o_i)  */
                o[j]: DFS(u) en G^T /*Devuelve secuencia que visita todos los
                                        vértices de CFC(o_i)*/
                remover vértices marcados en G
        retornar o
```

El algoritmo encuentra las CFC de G debido a que el primer elemento $u1$
pertenece a la primera componente del ordenamiento topológico de G_C este
primer ordenamiento es fuente en G y sumidero en G^T (proposición b y
proposición c-2), entonces en el grafo transpuesto puedo recorrer todos los
vértices de esa componente y solo de esa (proposición a). Luego removiendo los
vértices del ordenamiento primero, repito el mismo procedimiento para el nuevo
ordenamiento $o'=\{o_{2,}\ldots,o_k\}$ (proposición c-3).