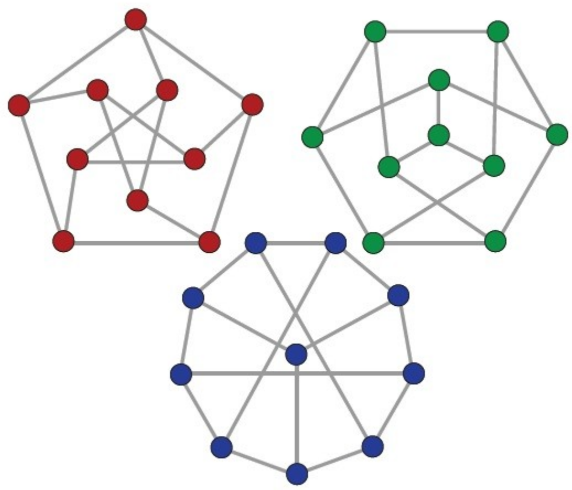
# Tarea 1

# Segunda Entrega

# Grafos



Integrantes:
Andrés Monetta
Alejandro Clara
Sebastián Daloia

## Contenido

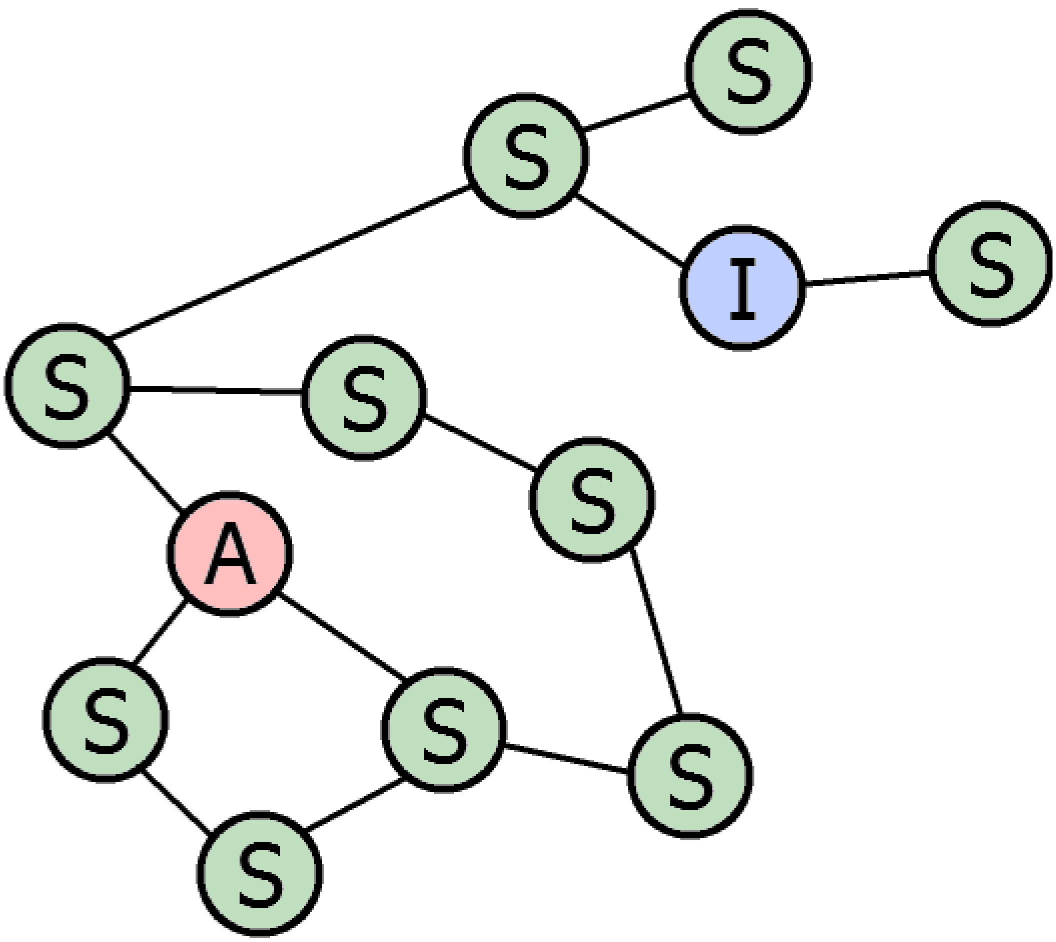
# Ejercicio 1

## Parte 1

En las siguientes imagenes se esquematiza la propagación de un virus a partir de un solo individuo infectado **A.** La propagación es tal que en cuatro días sólo queda en la población un individuo no inmnue sano.

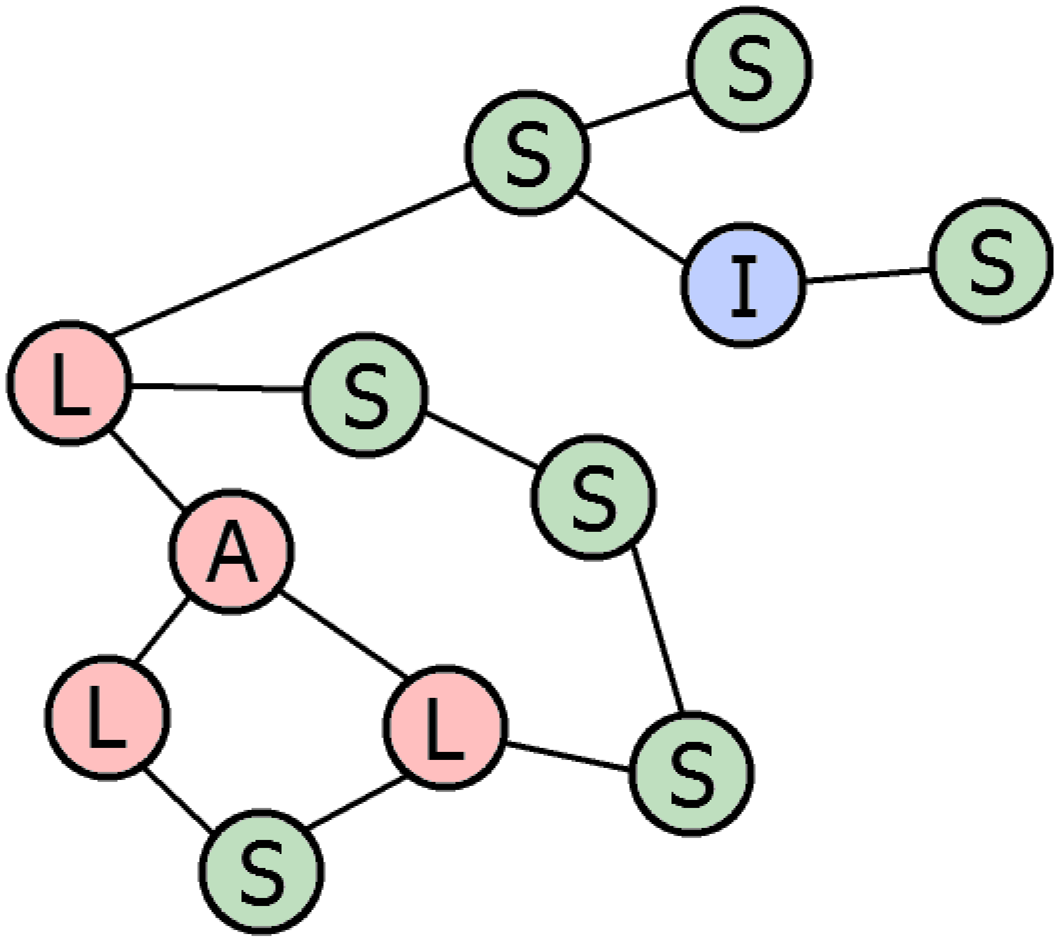
Nomenclatura: **A** – Contagiado Activo **L**- Contagiado latente **S**- Individuo sano **I**- Individuo inmune

### Día 1



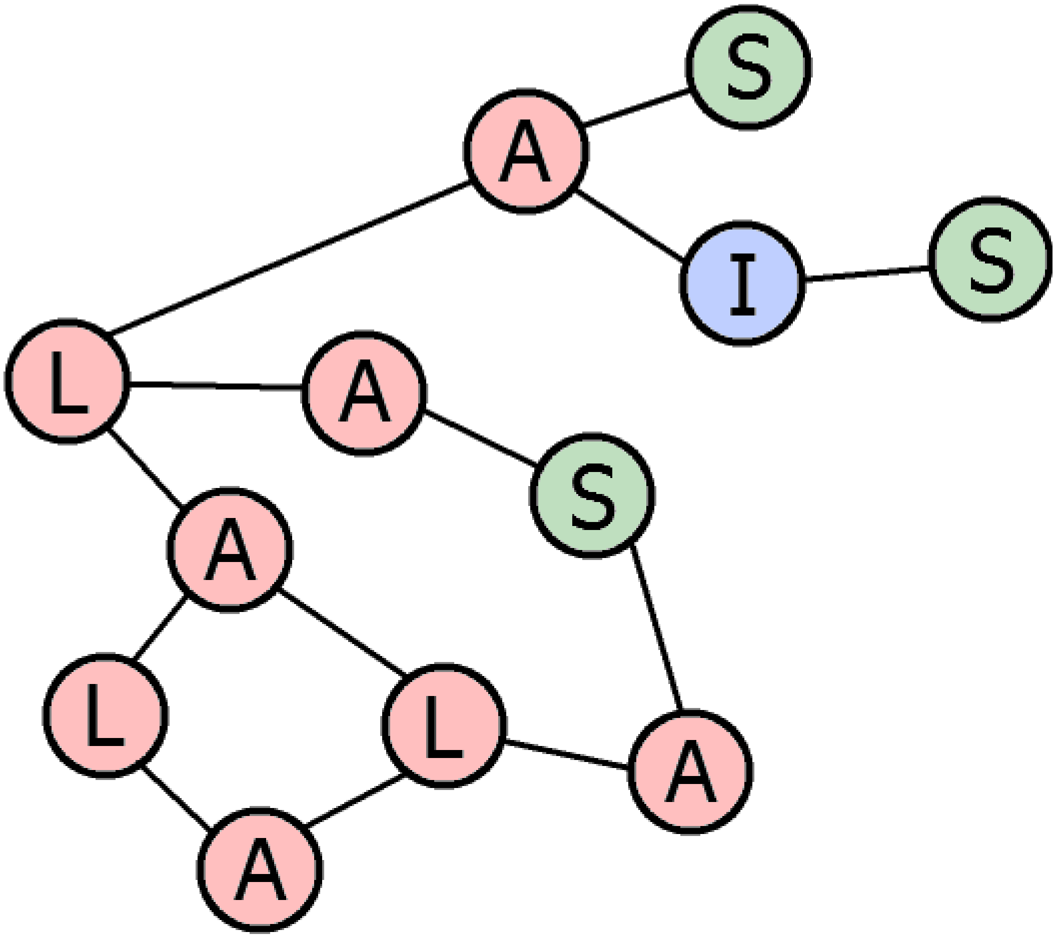

Día 1

**Día 2**



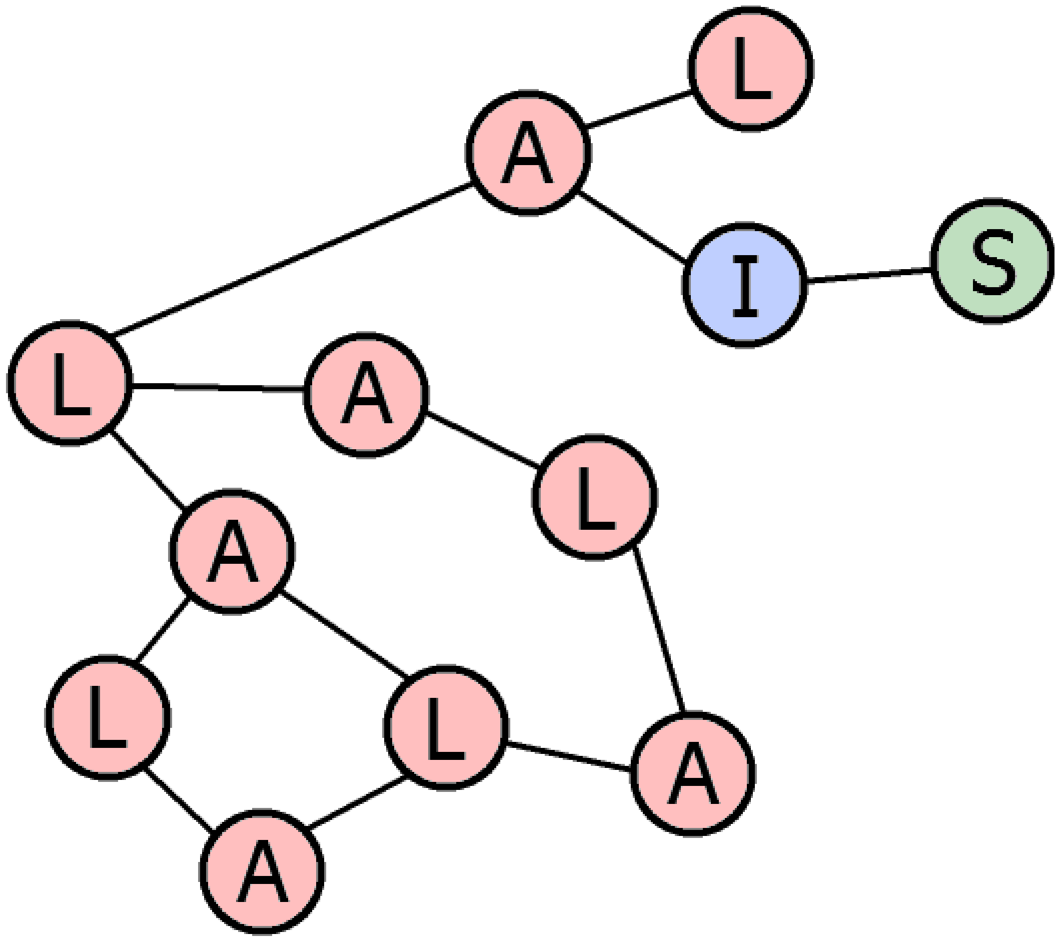

Día 2

**Día 3**




Día 3

**Día 4**




Día 4

## Parte 2

```
Comenzar_Propagacion ()
    Var v, a: Vertice
Comienzo
     a = DevolverPrimerActivo(v)  /* Devuelve el vértice
                                   activo del comienzo */
    Propagacion_BFS(a)
Fin


Procedimiento Propagacion_BFS ( a: Vertice )
Comienzo
    BFS(a)
    Para cada hijo u de a
    Propagacion_BFS(u)
    Fin para
Fin


BFS ( v: Vertice )
    Var q: ColaDeVertices
       u,w: Vértice
Comienzo
    CrearCola(q)
    Marcar(v)
    InsBack(q,v)

    Mientras NoVacia(q)
        u = Primero(a)
        Si esActivo(v) y NoInfectado(v)
            Infectar(u,"Latente")
        Sino si esLatente(v)
            Infectar(u,"Activo")
        q = resto(q)
    Fin Mientras
Fin
```

## Parte 3

Caso todos los individuos activos.
Habría que implementar en el algoritmo una función que pregunte antes del inicio de la propagación de la enfermedad si todos los individuos están contagiados, si lo están entonces no se inicia la propagación, pues no hay personas sanas a quienes infectar.

Caso varios individuos **Activos** o **Latentes**
En lugar de propagar la enfermedad con un solo vértice deberíase iniciar una propagación para una lista de vértices infectados.
Podemos suponer que existe una intensidad de contagio diferente entre los infectados, es decir algunos pueden estar en una etapa de alta capacidad de contagiar y otros en una etapa más leve.
Esto puede traducirse a que de la lista de contagiados los primeros que podrían empezar a contagiar serían los primeros de la lista.
Entonces el primer vértice que empiece a infectar sería el que está posicionado en el primer lugar de la lista, éste infectará solo a sus vecinos sanos, luego el segundo en la lista hará lo mismo con sus vecinos sanos y así hasta que el último vértice de la lista infecte a sus vecinos.
Luego se repetiría la misma historia para la lista de hijos infectados en la primera propagación de aquellos infectados, y así sucesivamente hasta que no haya más vértices sanos para infectar.

# Ejercicio 2

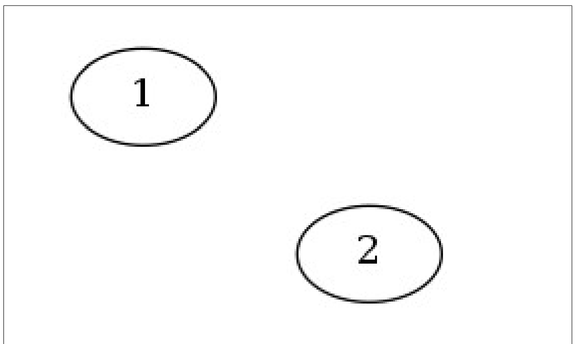
## Parte 1

### Proposición (a)

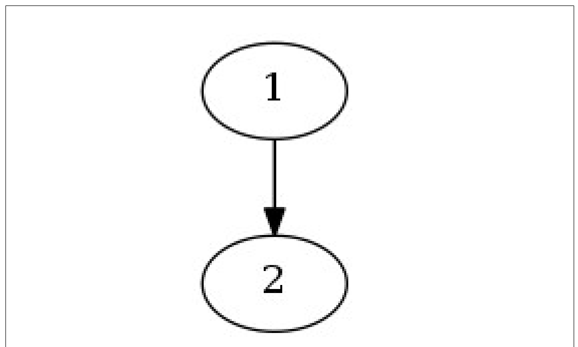
En un grafo dirigido y acíclico existen vértices que no tienen aristas salientes, llamados vértices sumideros.

Demostración:

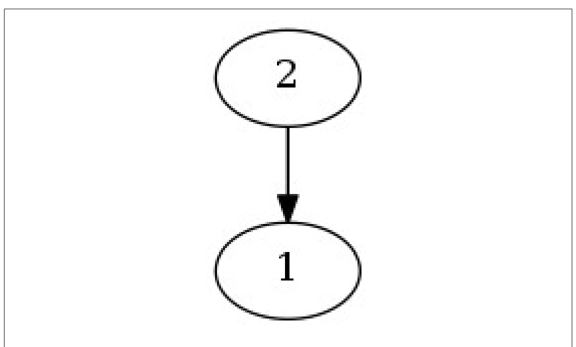
G=(V,A) es dirigido y acíclico
Que G=(V,A) sea acíclico significa que $\nexists\, camino\{v_{0,} \ldots , v_k\} \therefore v_o = v_k$
Veamos si esto es cierto para #V=2



Caso 1



Caso 2



Caso 3

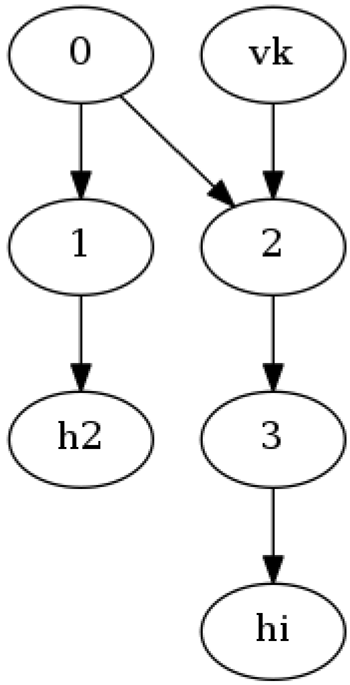
Queda visto que existen vértices que no tienen aristas salientes.

Suponemos que para #V=k-1 esta afirmación es cierta
Queremos ver si se cumple para #V=k

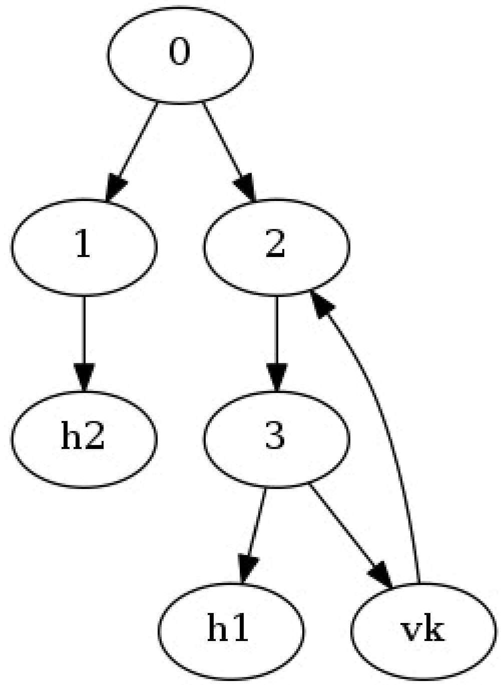
Sea G'=(V',A') el conjunto formado por los k-1 vértices.
Sabemos que existen $\{h_{1,\ldots},h_k\}$ vértices que no tienen aristas, o al menos algún h

Sea $G''=(V\cup\{v_k\},A\cup A')$ en donde A' son aristas de la forma $(v_k,v_i)$ ó $\{v_i,v_k\}$
Queremos ver si para el nuevó vértice y las nuevas aristas aún siguen existiendo vértices sumideros.

**Caso 1**
Consideremos las aristas $(v_k,v_i)$ en donde $v_i$ es un nodo para el cual existe un camino simple hasta algún $h_i$ sea $\{v_i,v_{i+1},\ldots,h_i\}$ este camino, entonces no puede haber una arista $(v_j,v_k)$ ya que sino se formaría un ciclo $\{v_k,v_i,\ldots,v_j,v_k\}$ → $h_i$ no puede tener una arista saliente → para este tipo de arista se cumple la condición.




Caso válido

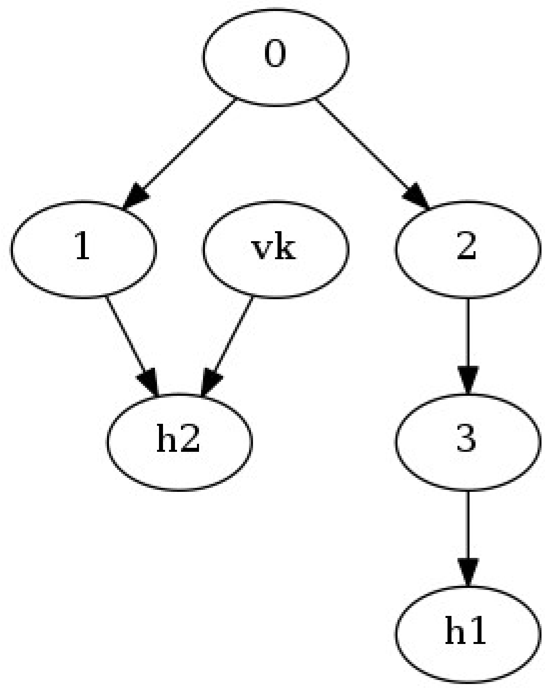



Caso no válido

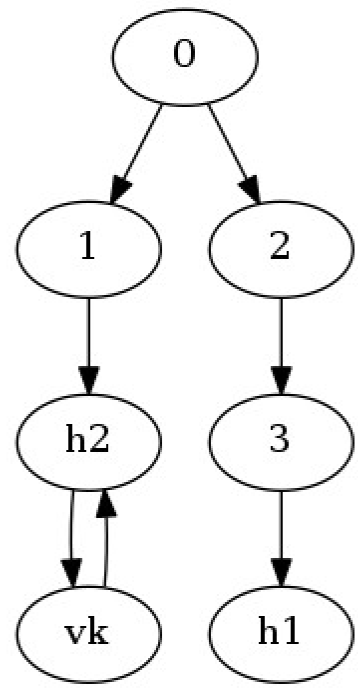
**Caso 2**

$(v_k, h_i)\ h_i\, sumidero$

El mismo $h_1$ no puede tener una arista saliente, pues sino se formaría un ciclo. Este mismo sumidero asegura que para este caso existe alguna arista sin vértices salientes.




Caso válido



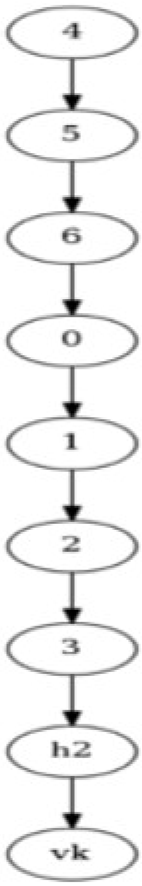

Caso no válido

**Caso 3**
Caso aristas del tipo $(v_i, v_k)$

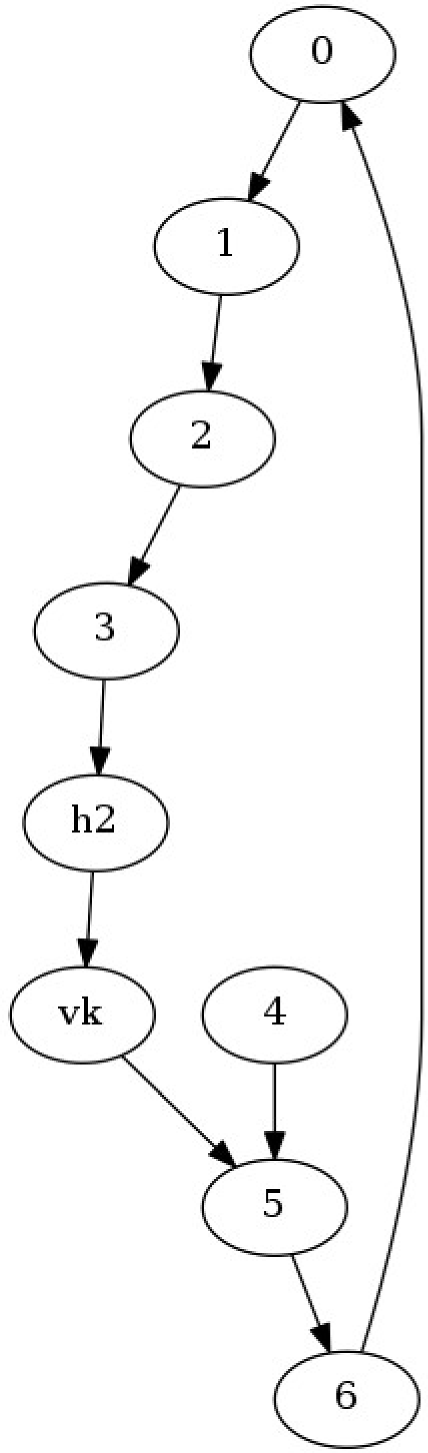
$Sí\ \nexists (h_i, v_k) \rightarrow h_i$ sigue siendo arista sumidero

$Sí\ \exists (h_i, v_k)$
Entonces
$Sí\ \nexists$ *arista del tipo* $(v_k, v_i)$ *entonces* $v_k$ *es nuevo sumidero*
$Sí\ \exists$ *arista del tipo* $(v_k, v_i)$ entonces
$v_i$ *no puede estar en algún camino* $\{v_{0,} v_{1,\ldots}, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots, h_i\}$ pues sino se formaría un bucle*, entonces debe estar contenido en algún camino simple hacia otro sumidero de la forma $v_s, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots, h_j$ pues el grafo es acíclico y el camino debe terminar en un sumidero, sino se quedaría de manera indefinida recorriendo un ciclo**. Ahora este $h_j$ no puede tener una arista saliente a $v_k$ pues sino se generaría un bucle. Entonces ese hj es sumidero para la nueva conformación.

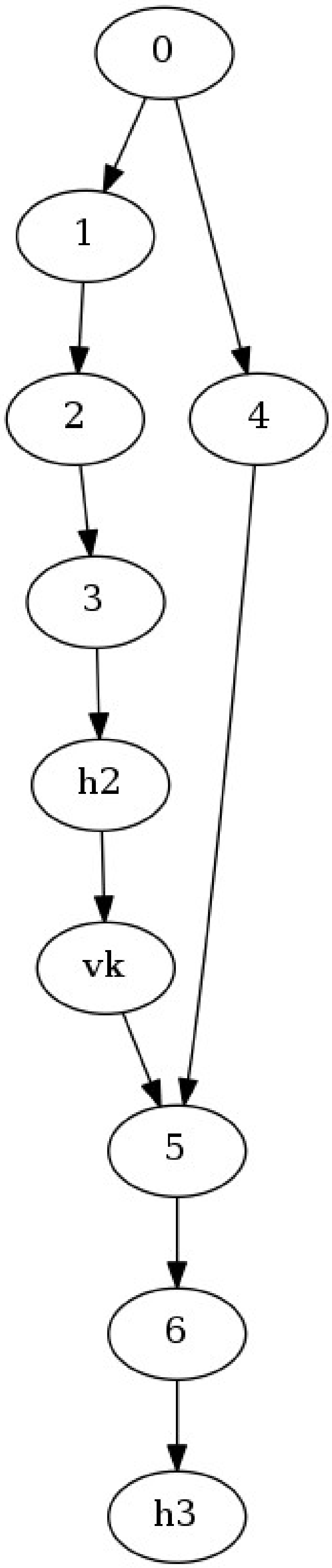
Caso válido para *



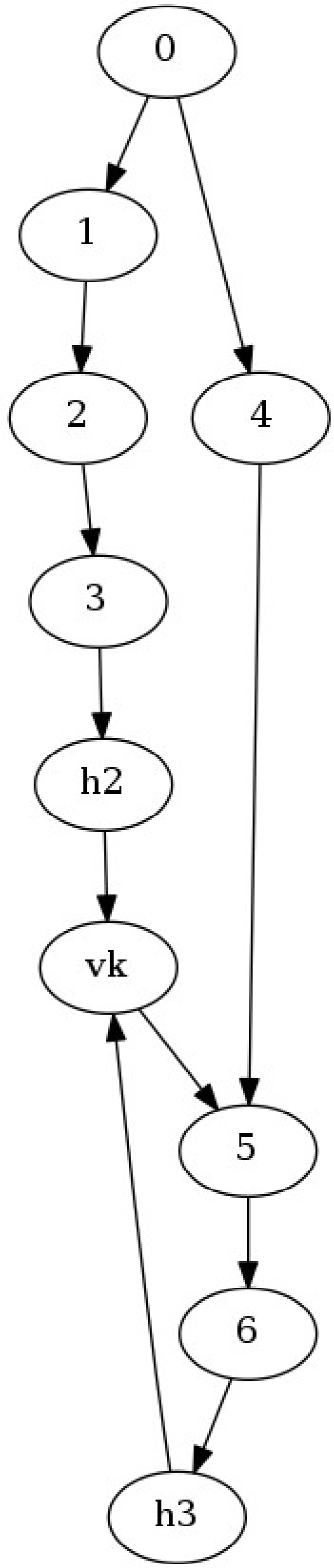

Caso no válido para *



Caso válido para **




Caso no válido para **



De esta manera la afirmación es correcta también para #V=k

## Teorema (b)

G tiene algún orden topológico sí y solo sí es acíclico

Demostración

→

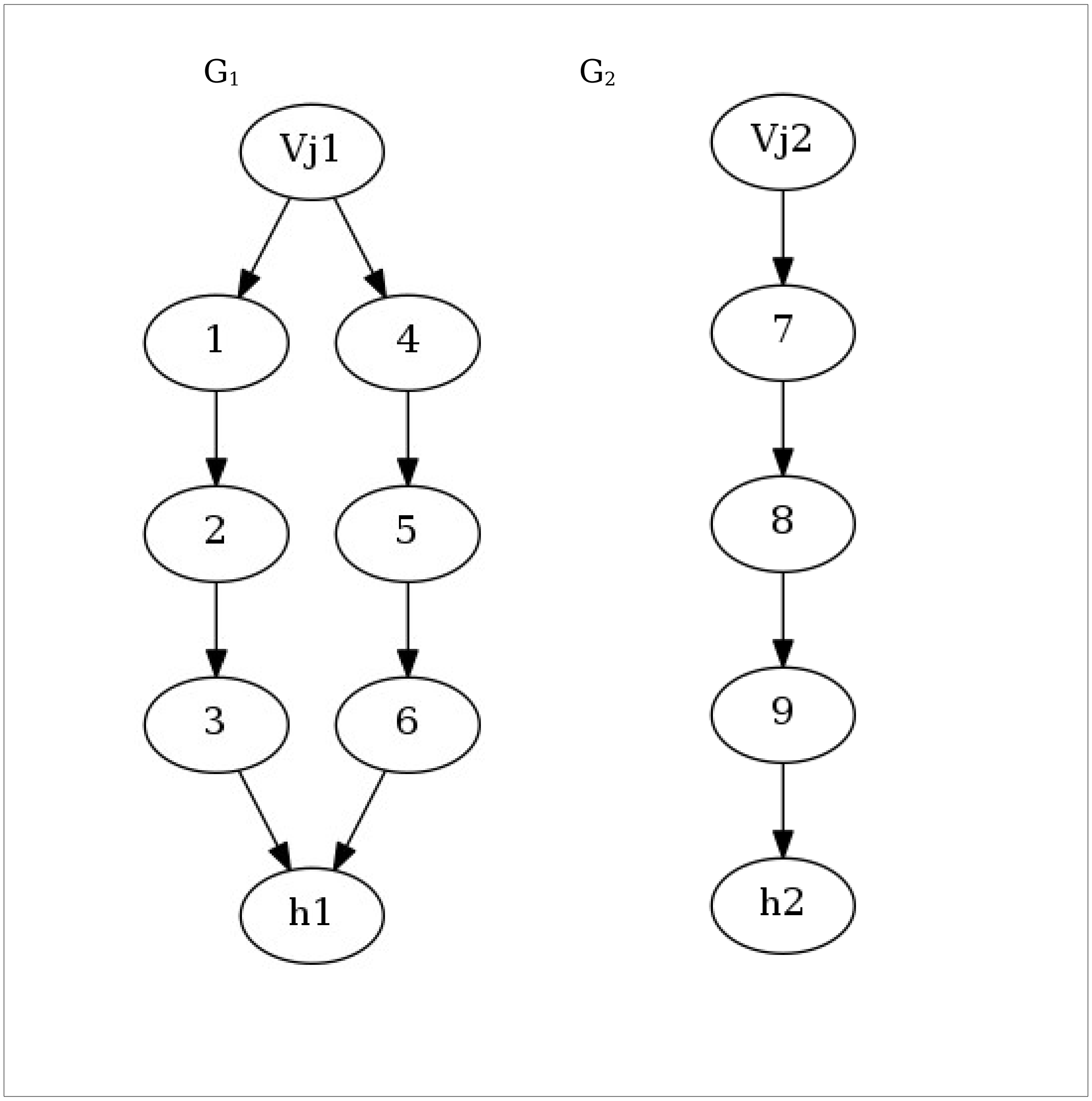
Razonando por absurdo sea G grafo dirigido, G=(V,A), supongamos que G tiene un órden topológico.
Supongamos que además G tiene un ciclo entonces existe un camino $\{v_s, v_{s+1}, \ldots, v_k = v_s\}$
Pero entonces $v_{s+1}, \ldots, v_{k-1}$ deberían estar a la misma vez antes y despues de $v_s$ entonces no se puede armar orden toplógico alguno, luego es absurdo que G tenga un ciclo.

En el caso especial de que exista un lazo el elemento debería estar antes y después de si mismo, no puede haber luego orden topológico, absurdo.

←

Por la proposición (a) existen $\{h_{1,\ldots}, h_k\}$ vértices que no tienen aristas salientes, o al menos alguno.

El grafo puede tener una o varias componentes, tomamos una componente conexa del grafo que tiene $\{h_{1,\ldots}, h_l\}\, l \leq k$ sumideros.
Existen entonces vértices $v_j$ tales que desde ellos hasta uno y solo uno de los vértices sumideros se puede construir algun camino simple.



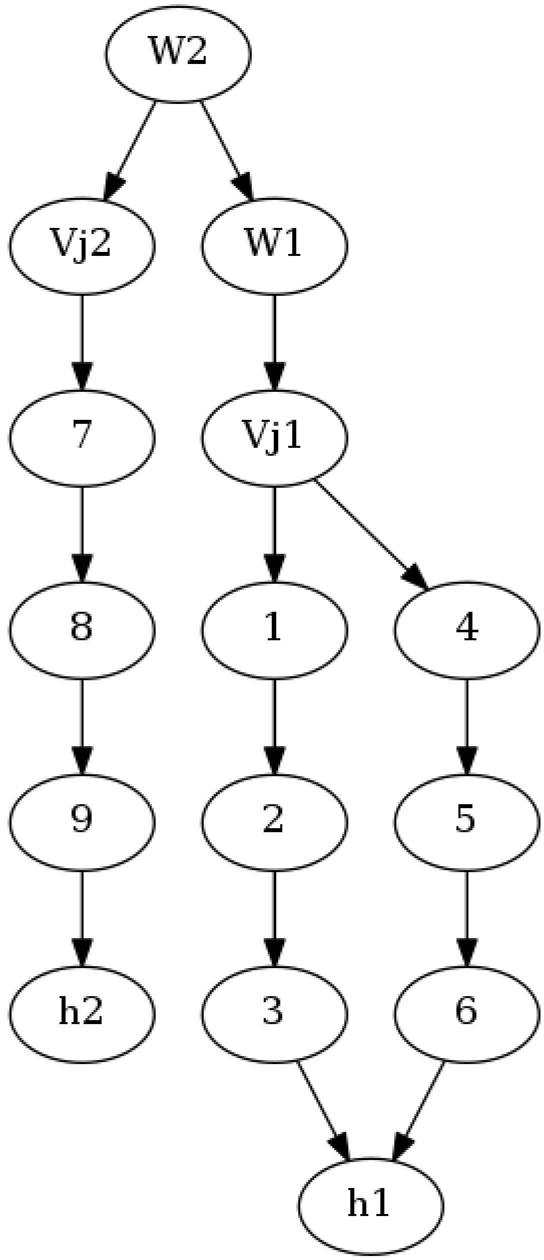

Los subgrafos generados por los vértices que conforman estos caminos son tienen algún orden topológico, Para el caso del gráfico

$G_1=(V_{1,} A_1)\ v_{j1} \to 1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6 \to h_1$

$G_2=(V_{2,} A_2)\ v_{j2} \to 7 \to 8 \to 9 \to h_2$

Luego, por la forma de construir los primeros caminos simples, existen vértices $w_s$ que conectan con los vértices $v_j$ nuevamente podemos crear un orden topológico si agregamos al grafos estos $w_s$.
Si no existen vertices adyacentes entre estos $w_s$ entonces los podemos ordenar de cualquier manera, siempre que los antepongamos en la construcción del orden a los vértices existentes. En caso de que si existan vertices adyacentes entre estos $w_s$ debemos hacer el ordenamiento de estos anteponiéndolos en la construcción del orden a los vértices existentes, como en el caso anterior, pero ahora debemos ordenarlos de acuerdo el ordenamiento lineal que exista entre

ellos.




Orden toplógico para este caso:
$\{w_2 \rightarrow w_1 \rightarrow v_{j2} \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow 9 \rightarrow h_2 \rightarrow v_{j1} \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow h_1\}$

Procedemos de esta manera hasta completar todos los vértices de la componente conexa del grafo no dirigido inducido por esta componente dirigida, tenemos con esta construcción un orden topológico para dicha componente.

Luego si el grafo tiene más componentes procedemos de la misma manera y agregamos el orden topológico al orden de la primera, así con todos los demás. Queda de esta manera construido al menos un orden topológico.
Por lo que se completa la demostración.

## Parte 2

```
Procedimiento DFS(v: vertice, vertices : Lista de vertices)
Comienzo
    marcar v
    Para cada w adyacente a v
        si w no marcado entonces DFS(w, vertices)
    Fin Para
    Si existe arista back de w a vertice ya marcado
        marcarbucle(w) /*Marca que el vértice tiene una
arista saliente que genera un bucle en el grafo*/
        agregarALista(w, vertices)
Fin

Procedimiento Recorrido (G : grafo) : Lista de vertices
    Var v: vertice
    Var vertices: Lista de vertices
Comienzo
    crearLista(vertices)
    Para cada v∈V : inicializar v como no-marcado
    Para cada v∈V :
        Si v no-marcado entonces DFS(v, vertices)
    Fin Para
    Para cada v∈V :
        Si v bucle-marcado entonces retornar lista vacia
    Fin Para
    retornar vertices
Fin
```

## Parte 3

El grafo dirigido y acíclico debe tener una sola componente, pues en caso contrario los ordenamientos que surjan  de todas las componentes podrán ser intercalados entre sí generando más de un ordenamiento lineal.

Debe haber un solo vértice sumidero, pues si hubiese más, se podría generar un ordenamiento lineal que tenga al final del mismo a estos vértices sumideros, y es indiferente el orden relativo entre ellos ya que no existen aristas entre ellos y por lo tanto el ordenamiento no se ve afectado por estas combinaciones.

Debe existir un camino hamiltoniano para evitar casos como el siguiente:

En donde 7  y 8 pueden estar cualquiera de los dos al principio de cualquier ordenamiento toplógico.