

Ejercicio 3

Sea G un grafo dirigido y G_c su grafo de componentes

1- Considere una DFS de G en la cual los vértices son apilados en una Pila P al terminar de ser procesados. Para cada CFC C_i sea f_i , $1 \leq i \leq k$ el primer vértice visitado, y sea f_k, \dots, f_1 el orden en que esos vértices son apilados en P .

Observación 1:

Una recorrida DFS va marcando los vértices visitados en pre - procesamiento y los apila en pos procesamiento.

Observación 2

Si en un recorrido DFS hay un camino entre f_i y f_j , y f_i es visitado antes que f_j , siendo f_i y f_j como en 1, entonces f_i no será procesado en pos procesamiento hasta recorrer todos los vértices para los cuales haya un camino y aún no hayan sido visitados, por lo que f_j será pos procesado antes que f_i .

Proposición a:

Si en una recorrida DFS el vértice f_i es visitado antes que el vértice f_j y hay un camino desde f_i hacia f_j , entonces f_i será apilado después de f_j .

Demostración:

Como f_i y f_j son tales que se relacionan como se indica en la Observación 2, y la pila va agregando elementos en pos procesamiento, entonces es cierta la proposición.

Proposición b:

Para cada CFC C_i , f_i es el último de sus vértices que se apila en P .

Demostración:

Como f_i pertenece a CFC C_i hay un camino entre este vértice y todos los vértices que pertenecen a C_i .

Luego como f_i es visitado antes que todos los demás por la observación previa es el último en ser apilado para esa CFC.

Proposición c:

Si hay algún camino desde la CFC C_i a la CFC C_j , entonces f_i se apila en P después que f_j .

Demostración:

Si f_i es visitado antes que f_j entonces por Proposición a esto es cierto.

Es decir sea (u_i, u_j) tal que $u_i \in CFC C_i$ y $u_j \in CFC C_j$

Como C_i es CFC podemos armar un camino $\{u_i, \dots, f_i, u_j, \dots, f_j\}$

Es decir existe un camino $\{f_i, u_j, \dots, f_j\}$ con f_j aún no visitado.

Si f_i es visitado después que f_j entonces la arista que va de un vértice v_i de CFC C_i a un vértice v_j de CFC C_j no forma parte del árbol de recubrimiento generado por DFS. Entonces CFC C_j y CFC C_i pertenecen a distintas ramas del árbol y la rama que contiene a CFC C_j ha pasado ya por el pre y pos procesamiento, por lo que en este caso también f_i se apila después que f_j .

Proposición d:

Al terminar la DFS el vértice que queda en el tope de P pertenece a una CFC fuente.

Demostración:

f_1 es el último vértice en ser apilado entonces por Proposición c no hay camino alguno de C_i a C_1 para $2 \leq i \leq k$.

Entonces por definición de CFC fuente C_1 es fuente.

Proposición e:

En el proceso de desapilar P , la secuencia (f_1, \dots, f_k) determina una secuencia $v = (v_1, \dots, v_k)$ que es un ordenamiento topológico de G_C , donde v_i representa la componente C_i .

Demostración:

(f_1, \dots, f_k) por Proposición c son tales que no existen caminos que vayan de un C_j a un C_i con $j > i, i \neq i, i \leq k, j \leq k$.

Entonces en el grafo de componentes no existen caminos que vayan de v_j a v_i con $j > i, i \neq i, i \leq k, j \leq k$.

Entonces $v = (v_1, \dots, v_k)$ es ordenamiento topológico.