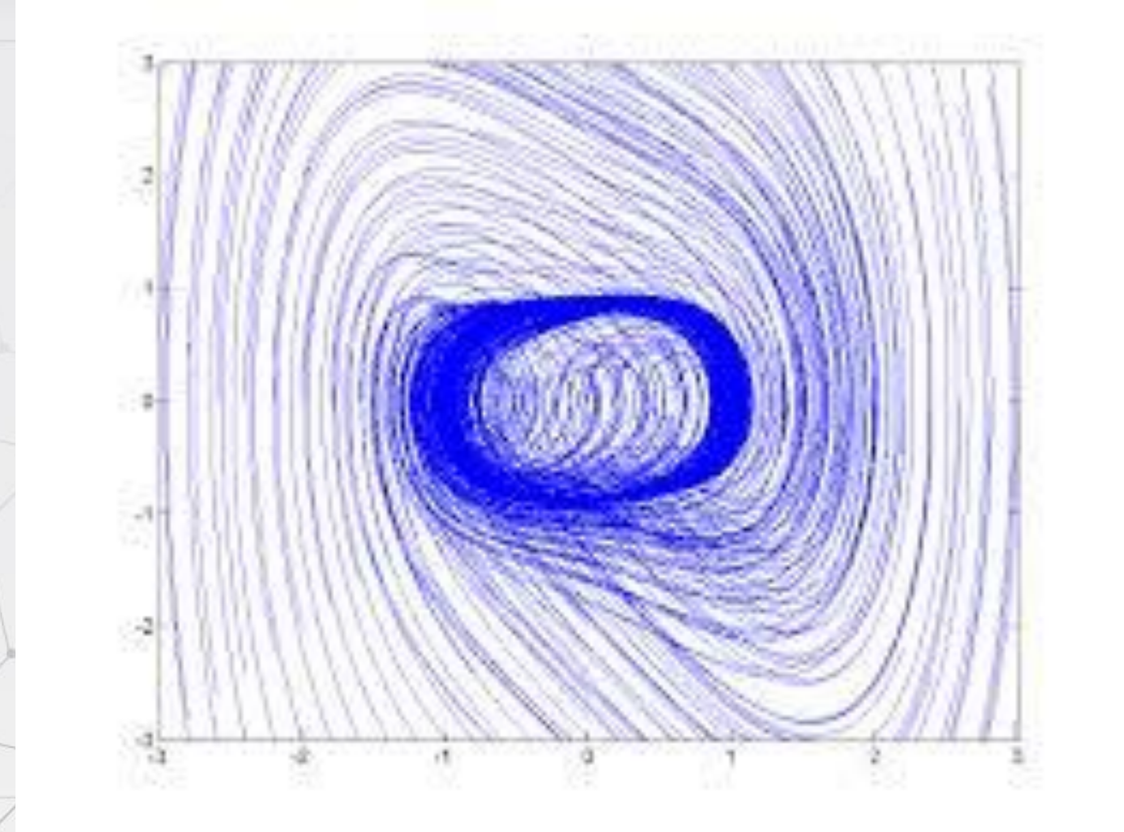
Ecuación Diferencial de primer orden



Temario

- **Tema 1:**

  Conceptos básicos de Ecuaciones Diferenciales.

- **Tema 2:**

  Resolución de una EDO de primer orden por el método de separación de variables.

TEMA 1

Conceptos básicos de ecuaciones diferenciales

Ecuación diferencial ordinaria de primer orden

Una **ecuación diferencial ordinaria** (EDO) de primer orden es una ecuación que relaciona a una función *y= y(x)* con su primera derivada y'(x).

Forma general

$$y' = f(x, y) \quad o \quad F(x; y; y') = 0$$

Ejemplos

$$(1)\; y' = y$$

$$(2)\; e^x (y')^2 + y = e^x$$

Nota

La ecuación diferencial se dice de **orden n** cuando n es el orden de la derivada más alta que aparece explícitamente en la ecuación.

Ejemplos:

$$1)\ \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} = e^{3x}$$

es una EDO de orden dos

$$2)\ y''' + y' = 2$$

es una EDO de orden tres

Conceptos de solución de una EDO

Decimos que $y = \varphi(x)$ es una **solución** de la ecuación diferencial

$$y' = f\left(x, y\right) \quad o \quad F\left(x; y; y'\right) = 0$$

en el intervalo I=<a, b> si esta se satisface cuando se

reemplaza $y = \phi(x)$ y su derivada en la EDO, es decir, cuando

$$\varphi'\left(x\right) = f\left(x; \varphi\left(x\right)\right) \quad o \quad F\left(x; \varphi\left(x\right); \varphi'\left(x\right)\right) = 0$$

Ejemplos:

Compruebe si las funciones dadas son soluciones de las EDO:

$$función: \quad y=\sqrt{9-x^2}, x \in \langle -3,3 \rangle \quad EDO: \quad y' = -\frac{x}{y}$$

$$función: \quad y(x)=\frac{x^4}{16} x \in R \quad EDO: \; y' = x\sqrt{y}$$

Ejercicio para el alumno:

$$función: \quad y(x)=2e^{senx}, x \in R, \; EDO: \; y' = y \cos x$$

NOTA

Las funciones que son soluciones de los ejemplos anteriores son comúnmente llamadas **soluciones explicitas** ya que tienen la forma

$$y = \phi(x)$$

Ocurre que hay ecuaciones diferenciales donde la solución viene dada por una relación del tipo

$$F\left(x;y\right)=0$$

donde no es posible despejar y en términos de x. En tal caso, diremos que la solución de la ecuación diferencial es una **solución implícita**

EJEMPLO

Compruebe si la relación

$$xy^2 - e^{-y} - 1 = 0$$

define una solución implícita de la EDO

$$\left(2xy + e^{-y}\right)y' + y^2 = 0$$

Ejercicio para el alumno:

Compruebe si la relación

$$x^2y^3 + y^2 = 2$$

define un solución implícita de la EDO

$$2xy^3 + (3x^2y^2 + 2y)y' = 0$$

EJEMPLO

Compruebe si la relación

$$x^3 + y^3 = xy$$

define una solución implícita de la EDO

$$y' = \frac{y - 3x^2}{3y^2 - x}$$

La **solución general** de una EDO son todas las funciones que son soluciones de la EDO.

Resolver una EDO es hallar su solución general

Ejemplo

Por inspección resuelva la EDO $y' = e^x$

La **solución general de una EDO de orden 1,** es en realidad una familia de funciones parametrizadas por una constante *c*.

Para cada valor particular de la constante *c* se obtiene una **solución particular** de la EDO. Esta familia puede ser explicita o implícita

$$a)\ \ y(x) = G(x;c) \to \text{ Solución general explícita}$$

$$b)\ \ G(x;y;c) = 0 \quad \to \text{Solución general implícita}$$

Ejemplo: Compruebe que

$$y^2 - 2y = x^2 - x + C$$

es la solución general de la EDO

$$y' = \frac{2x-1}{2y-2}$$

Determine además, tres soluciones particulares.

Ejercicio para el alumno:

Compruebe que

$$y = \frac{1}{x + C}$$

es la solución general de la EDO

$$y' = -y^2$$

Determine además, tres soluciones particulares.

¿Cómo se obtiene la solución general de una EDO?

$$F(x; y; y') = 0.$$

$$\Downarrow$$

Aplicando un método de solución apropiado (algunos de estos métodos serán estudiados en el curso) obtenemos

$$y = G(x; C) = 0$$

Solución general explicita

ó

$$G(x; y; C) = 0.$$

Solución general implícita

Problema de valor inicial (PVI)

Un problema de valor inicial (PVI, para abreviar) de primer orden, es un problema que busca determinar una solución particular de una EDO, cuya grafica, llamada curva integral, pase por un punto determinado.

El punto por donde debe pasar la curva integral se llama condición inicial.

En general, la forma de un problema de valor inicial de **orden uno** es:

$$\boxed{\begin{cases} y' = f\left(x; y\right) \\ y\left(x_0\right) = y_0 \leftarrow \textbf{condición} \quad \textbf{inicial} \end{cases}}$$

EJEMPLO

El PVI

$$\begin{cases} y' = x \\ y(0) = 1 \leftarrow \textbf{\textit{condición inicial}} \end{cases}$$

Plantea el problema de encontrar una solución particular de la EDO cuya grafica pase por el punto (0;1)

TEMA 2

Resolución de una EDO de primer orden por el método de separación de variables.

Los métodos de solución en esencia hacen una clasificación de la EDO teniendo en cuenta la estructura de f(x,y)

Teniendo en cuenta la estructura de f(x,y) lo que origina los siguientes tipos de EDO

$$
\begin{cases}
y' = f(x) & \text{EDO mas simple} \\
y' = g(x)h(y) & \text{EDO de variables separables}
\end{cases}
$$

Ejemplo

Determine la solución general de la EDO

$$\frac{dy}{dx} = e^{x} + 3$$

Ejercicio:

$$\frac{dy}{dx} = (3x + 1)(x - 1)$$

Una EDO $y' = f(x,y)$ es de variables separables si puede ser manipulada algebraicamente y colocada en la forma:

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{h(y)} = g(x)dx$$

La solución general de esta EDO se puede hallar integrando.

Integrando a ambos lados de la EDO, obtenemos:

$$\int \frac{dy}{h\left(y\right)} = \int g(x)dx + C$$

Ejemplo

Determine la solución explícita del PVI

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x+1}{y};\ y(-2) = -1$$

Ejemplo

Determine la solución general de

$$y' = y'.Sen^2x + \sqrt{y-1}$$

Ejemplo:

Determine la solución general y=y(x;C) de la EDO

$$\frac{dy}{dx} = 2 + 2y + x + xy$$

Ejercicio para el alumno:

Halle la solución general de

$$y' = e^{y}.senx$$

Cierre de la clase

- ¿Con qué tema iniciamos la clase?
- ¿Qué es una EDO ?
- ¿Qué es el orden de una EDO?
- ¿Cómo reconoce y resuelve una EDO de variables separables?

Bibliografía

- ZILL, Dennis Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones de modelado 10ª ed. México, D.F.: Cengage Learning.