

# Ανάλυση και σχεδιασμός σύγχρονων ακολουθιακών κυκλωμάτων

December 5, 2018

## Βασικές έννοιες

## Μεθοδολογία

Παρακάτω παρουσιάζεται η βασική μεθοδολογία ανάλυσης και σχεδιασμού, ενός τυπικού παραδείγματος σύγχρονου ακολουθιακού κυκλώματος. Στις εξετάσεις, συχνά μας δίνεται η **λεκτική περιγραφή** του προβλήματος, και απαιτείται από εμάς να ακολουθήσουμε τα βήματα της μεθοδολογίας, για να σχεδιάσουμε τελικά το **λογικό διαγράμμα** του κυκλώματος (παράλλαγές, για έρευνα και περαιτέρω εξάσκηση, δίνονται άλλες στο τέλος του κεφαλαίου της Μεθοδολογίας).

### 1 Λεκτική περιγραφή

Δίνεται η εκφώνηση:

Να σχεδιαστεί σύγχρονο ακολουθιακό κύκλωμα με JK flip-flop, το οποίο για είσοδο 0, να μεταβαίνει διαδοχικά στις καταστάσεις 5, 6, 4, 2, 0, 3, 1, 5, 6... και για είσοδο 1, στις καταστάσεις 4, 1, 3, 6, 5, 0, 2, 4, 1.... Η απλοποίηση των χαρακτηριστικών εξισώσεων να γίνει με 2 μεθόδους (χάρτης Karnaugh, άλγεβρα Boole).

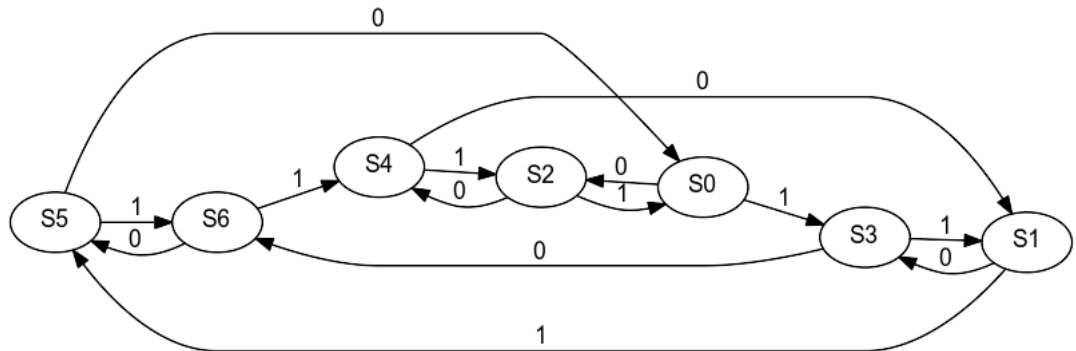
Πρώτο μας βήμα, είναι να δώσουμε όνομα στις εισόδους και στις καταστάσεις του κυκλώματος. Το κείμενο λύσης της άσκησης θα δίνεται σε διακριτές παραγράφους, σε πλάγια γραφή:

Ονομάζουμε  $x$  την είσοδο, και  $S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$  τις καταστάσεις 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 αντίστοιχα.

## 2 Σχεδιασμός διαγράμματος καταστάσεων

Στο διάγραμμα καταστάσεων, οι καταστάσεις  $S$  αναπαρίστανται ως κύκλοι, και οι μεταβάσεις, για  $x=1$  ή  $x=0$ , ως κατευθυνόμενα βέλη που συνδέουν τις διάδοχες καταστάσεις (αφήστε λίγο κενό χώρο εντός των κύκλων, για να συμπληρώσετε αργότερα τις δυαδικές αναπαραστάσεις των καταστάσεων):

Σχεδιάζουμε το διάγραμμα καταστάσεων:



## 3 Κωδικοποίηση καταστάσεων κυκλώματος σε συνδυασμούς καταστάσεων flip-flop

Σε αυτό το σημείο, επιδιώκουμε να αναπαραστήσουμε κάθε κατάσταση  $S$  ως αλληλουχία δυαδικών ψηφίων. Καθώς έχουμε 7 καταστάσεις, χρειαζόμαστε τουλάχιστον 3 bit για να τις αναπαραστήσουμε. Αυτό, προφανώς επειδή  $2^2 = 4$  δεν φτάνουν οι συνδυασμοί, ενώ  $2^3 = 8$  ένας συνδυασμός περισσεύει. Αυτό όμως δε μας πειράζει. Κάθε δυαδικό ψηφίο, στο κύκλωμα μας θα αντιπροσωπεύει ένα flip-flop. Έτσι, λέμε:

Κωδικοποιούμε τις καταστάσεις μας  $S_0$ - $S_6$  ως συνδυασμούς δυαδικών ψηφίων.

Έχουμε 7 καταστάσεις, επομένως θα χρειαστούμε 3 bit για να έχουμε διακριτούς συνδυασμούς για όλες τις καταστάσεις, Αυτό επειδή  $2^3 = 8 \geq 7$ . Αντιστοιχίζουμε:

$S_0$	000
$S_1$	001
$S_2$	010
$S_3$	011
$S_4$	100
$S_5$	101
$S_6$	110
-	111

## 4 Σχεδιασμός πίνακα καταστάσεων

Τώρα που έχουμε κωδικοποιήσει δυαδικά τις καταστάσεις μας, αναθέτουμε την αποθήκευση κάθε δυαδικού ψηφίου (bit) σε ένα flip-flop. Έτσι, για το παράδειγμα μας, θα χρειαστούμε 3 flip-flop, που θα τα ονομάσουμε A, B, C:

*Επιλέγουμε 3 JK flip-flops για την αποθήκευση των bit καταστάσεων μας, και τα ονομάζουμε A, B και C.*

Στη συνέχεια, σχεδιάζουμε τον πίνακα καταστάσεων. Ο πίνακας αυτός αποτελείται από τις πιθανές καταστάσεις σε μια δεδομένη χρονική στιγμή  $t$ , και από τις δυνατές καταστάσεις τους στον επόμενο χτύπο του ρολογιού,  $t+1$ . **Συμβολίζουμε με  $Q$  την έξοδο των flip-flop.**

Προφανώς, κάθε παρούσα κατάσταση μπορεί να μεταβεί μόνο σε 2 διάδοχες, ανάλογα με το αν η είσοδος  $x$  είναι ένα ή μηδέν, όταν το flip-flop ενεργοποιείται στο χτύπο του ρολογιού.

*Σχεδιάζουμε τον πίνακα καταστάσεων του κυκλώματος:*

Παρούσα Κατάσταση (t)					-	Επόμενη Κατάσταση (t+1)			
$S_n$	$Q_A$	$Q_B$	$Q_C$	$x$		$S_n$	$Q_A$	$Q_B$	$Q_C$
0	0	0	0	0		3	0	1	1
	0	0	0	1		2	0	1	0
1	0	0	1	0		5	1	0	1
	0	0	1	1		3	0	1	1
2	0	1	0	0		0	0	0	0
	0	1	0	1		4	1	0	0
3	0	1	1	0		1	0	0	1
	0	1	1	1		6	1	1	0
4	1	0	0	0		2	0	1	0
	1	0	0	1		1	0	0	1
5	1	0	1	0		6	1	1	0
	1	0	1	1		0	0	0	0
6	1	1	0	0		4	1	0	0
	1	1	0	1		1	0	0	1

Σημείωση: Μπορεί να βρείτε τις εξόδους των flip-flop,  $Q_A$ ,  $Q_B$ ,  $Q_C$  να συμβολίζονται απλούστερα και ως  $A$ ,  $B$ ,  $C$ .

## 5 Εξαγωγή εξισώσεων εισόδων

Επειδή το κύκλωμα μας υλοποιείται με JK flip-flop θα χρειαστεί, προτού φτιάξουμε τις εξισώσεις εισόδων των flip-flop, να εντοπίσουμε τις περιπτώσεις όπου η τιμή κάποιας εκ των  $J$ ,  $K$  ενός flip-flop, δεν έχει αντίκτυπο στον καθορισμό της μελλοντικής εξόδου του. Αυτές οι περιπτώσεις δε θα χρειαστεί να εκφραστούν στις εξισώσεις εισόδων του κάθε flip-flop, και έτσι οι εξισώσεις θα είναι κατά πολύ απλούστερες.

Οι περιπτώσεις αυτές, ονομαζόμενες **συνθήκες αδιαφορίας**, μπορούν να εντοπιστούν εύκολα, εάν σχεδιάσουμε τον **πίνακα διέγερσης** για κάθε flip-flop του κυκλώματος μας. Ο πίνακας διέγερσης για οποιοδήποτε JK flip-flop, έχει την παρακάτω μορφή, η οποία προκύπτει λογικά από τη συμπεριφορά του στοιχείου (Μπορείτε να βρείτε την περιγραφή της συμπεριφοράς του JK flip-flop, στο κεφάλαιο “Βασικές έννοιες”):

$Q(t)$	$Q(t+1)$	$J$	$K$
0	0	0	X
0	1	1	X
1	0	X	1
1	1	X	0

Οι συνθήκες αδιαφορίας σημειώνονται με X. Παρατηρήστε ότι, για παράδειγμα, στη δεύτερη γραμμή του πίνακα, ανεξαρτήτως της τιμής του  $K$ , η τιμή της εξόδου θα μεταβεί από το 0 στο 1. Αυτό επειδή, για  $K=0$  έχουμε εντολή θέσης (Set:  $J=1$ ,  $K=0$ ), δηλαδή  $Q(t+1)=1$ , ενώ για  $K=1$  έχουμε εντολή συμπλήρωσης του  $Q(t)=0$  ( $Q'$ :  $J=1$ ,  $K=1$ ), δηλαδή  $Q(t+1)=Q'(t)=1$ . Γι'αυτό, η  $K$  μαρκάρεται με X ως συνθήκη αδιαφορίας.

*Επεκτείνουμε τον πίνακα καταστάσεων με τον πίνακα διέγερσης των JK flip-flop  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , προς εξεύρεση των συνθηκών αδιαφορίας:*

Παρούσα Κατάσταση (t)					-	Επόμενη Κατάσταση (t+1)										
$S_n$	$Q_A$	$Q_B$	$Q_C$	$x$		$S_n$	$Q_A$	$Q_B$	$Q_C$		$J_A$	$K_A$	$J_B$	$K_B$	$J_C$	$K_C$
0	0	0	0	0		3	0	1	1		0	X	1	X	1	X
	0	0	0	1		2	0	1	0		0	X	1	X	0	X
1	0	0	1	0		5	1	0	1		1	X	0	X	X	0
	0	0	1	1		3	0	1	1		0	X	1	X	X	0
2	0	1	0	0		0	0	0	0		0	X	X	1	0	X
	0	1	0	1		4	1	0	0		1	X	X	1	0	X
3	0	1	1	0		1	0	0	1		0	X	X	1	X	0
	0	1	1	1		6	1	1	0		1	X	X	0	X	1
4	1	0	0	0		2	0	1	0		X	1	1	X	0	X
	1	0	0	1		1	0	0	1		X	1	0	X	1	X
5	1	0	1	0		6	1	1	0		X	0	1	X	X	1
	1	0	1	1		0	0	0	0		X	1	0	X	X	1
6	1	1	0	0		4	1	0	0		X	0	X	1	0	X
	1	1	0	1		1	0	0	1		X	1	X	1	1	X

Σε αυτό το σημείο ήμαστε έτοιμοι να εξάγουμε τις εξισώσεις των εισόδων  $J_A, K_A, J_B, K_B, J_C, K_C$  των flip-flop του κυκλώματος μας.

## 5.1 Με πίνακα Karnaugh

Ένας πίνακας Karnaugh μας επιτρέπει να εκμεταλλευτούμε την ικανότητα αναγνώρισης μοτίβων που διαθέτει η ανθρώπινη όραση, για να εξάγουμε εύκολα μια όσο το δυνατόν απλούστερη εξίσωση, για μια είσοδο ενός flip-flop. Για το παράδειγμα μας θα χρειαστεί να καταστρώσουμε 6 πίνακες Karnaugh, έναν για κάθε είσοδο flip-flop. Οι εν λόγω πίνακες παρουσιάζονται παρακάτω. Για την κατασκευή τους:

1. Μοιράζουμε διαδοχικά, στον οριζόντιο και τον κατακόρυφο άξονα, τις καταστάσεις εξόδου των flip-flop  $Q(t)$ , και την είσοδο  $x$ . Συνηθίζεται, όταν έχουμε μόνο 2 flip-flops, το  $x$  να μπαίνει μόνο του στον κατακόρυφο άξονα.

Χωρίζουμε τον πίνακα σε κελιά, κάθε ένα εκ των οποίων αντιπροσωπεύει έναν πιθανό συνδυασμό τιμών των παραγόντων που μοιράσαμε στους άξονες. **Προσοχή:** Η αρίθμηση κάθε κελιού είναι αυστηρή και γίνεται, όχι σε δυαδικό σύστημα, αλλά σε **κώδικα Gray**. Ο τρόπος αρίθμησης για μέχρι τέσσερεις παράγοντες, φαίνεται στο παράδειγμα μας (είναι απίθανο να σας ζητηθεί να εφαρμόσετε τη μέθοδο Karnaugh για περισσότερους από 4 παράγοντες).

2. Βάζουμε παύλα (-) μέσα στα κελιά που δεν αντιστοιχούν σε εφικτή κατάσταση του κυκλώματος.
3. Το περιεχόμενο των κελιών του πίνακα αντιπροσωπεύει την τιμή της εισόδου flip-flop, την εξίσωση της οποίας αναζητάμε, για τον συνδυασμό των παραγόντων που αντιστοιχούν στο κελί. Αντιγράφουμε από τον πίνακα καταστάσεων.
4. Πλαισιώνουμε, σε τετράγωνο ή παραλληλόγραμμο σχήμα, όσα κελιά είναι γειτονικά μεταξύ τους και περιέχουν τη μονάδα. Τα κελιά που αγγίζουν κάποια άκρη του πίνακα, θεωρούνται γειτονικά με τα κελιά που αγγίζουν την απέναντι άκρη. Πλαισιώνουμε σε δυάδες, τετράδες και οκτάδες (γενικά,  $2^n$  άδες). Στοχεύουμε στην ένταξη όσο το δυνατόν περισσότερων κελιών σε ένα πλαίσιο. Επιτρέπεται η επικάλυψη κελιών από πολλαπλά πλαίσια.
5. Κάθε πλαίσιο αντιστοιχεί σε ένα μονώνυμο (γινόμενο παραγόντων) της αντίστοιχης εξίσωσης εισόδου. Το μονώνυμο αυτό αποτελείται από τους παράγοντες που δε μεταβάλλονται μεταξύ των κελιών του πλαισίου. Έτσι, αν ένας παράγοντας είναι ίσος με τη μονάδα σε όλα τα κελιά του πλαισίου, ο παράγοντας εισάγεται ως έχει (π.χ.  $Q_A$ ). Εάν ο παράγοντας είναι ίσος με το μηδέν σε όλα τα κελιά του πλαισίου, εισάγουμε το συμπλήρωμα του (π.χ.  $Q'_A$ ). Το άθροισμα των μονονύμων αποτελεί το δεξί μέρος της εξίσωσης εισόδου του flip-flop.

Εμπειρικά, βλέπουμε ότι για έναν πίνακα Karnaugh τεσσάρων παραγόντων, ένα πλαίσιο 2 κελιών θα αντιστοιχεί σε ένα μονώνυμο τριών παραγόντων, ένα πλαίσιο 4 κελιών σε ένα μονώνυμο 2 παραγόντων, ενώ ένα πλαίσιο 8 κελιών θα αντιστοιχεί σε μονώνυμο του ενός παράγοντα.

---

*Καταstrώνουμε πίνακες Karnaugh για εξαγωγή απλοποιημένων εξισώσεων εισόδου των flip-flops A, B, C:*

		$Q_C x$			
		00	01	11	10
$Q_A Q_B$	00	0	0	0	1
	01	0	1	1	0
	11	X	X	-	-
	10	X	X	X	X

$$J_A = Q'_A Q_B x + Q'_B Q_C x'$$

		$Q_C x$			
		00	01	11	10
$Q_A Q_B$	00	X	X	X	X
	01	X	X	X	X
	11	0	1	-	-
	10	1	1	1	0

$$K_A = Q'_B x + Q_A Q'_B Q'_C + Q'_C x$$

		$Q_C x$			
		00	01	11	10
$Q_A Q_B$	00	1	1	1	0
	01	X	X	X	X
	11	X	X	-	-
	10	1	0	0	1

$$J_B = Q'_C x + Q'_A x + Q_A Q'_B x'$$

		$Q_C x$			
		00	01	11	10
$Q_A Q_B$	00	X	X	X	X
	01	1	1	0	1
	11	1	1	-	-
	10	X	X	X	X

$$K_B = Q'_C + Q'_A Q_B x'$$

		$Q_C x$			
		00	01	11	10
$Q_A Q_B$	00	1	0	X	X
	01	0	0	X	X
	11	0	1	-	-
	10	0	1	X	X

		$Q_C x$			
		00	01	11	10
$Q_A Q_B$	00	X	X	0	0
	01	X	X	1	0
	11	X	X	-	-
	10	X	X	1	1

$$J_C = Q'_A Q'_B x' + Q_A Q'_C x$$

$$K_C = Q'_A Q_B x + Q_A Q'_B$$

## 5.2 Με άλγεβρα Boole

Η ακόλουθη μέθοδος είναι προαιρετική. Εάν δεν έχετε χρόνο, προσπεράστε την.

Οι εξισώσεις εισόδου μπορούν να εξαχθούν απευθείας από τον πίνακα καταστάσεων. Αυτό γίνεται ως εξής:

1. Επιλέγουμε την είσοδο flip-flop, την εξίσωση της οποίας αναζητάμε.
2. Βρίσκουμε τις γραμμές του πίνακα καταστάσεων, στις οποίες η επιλεγμένη είσοδος είναι ίση με 1.
3. Κάθε γραμμή αντιστοιχεί σε ένα μονώνυμο (γινόμενο παραγόντων) της εξίσωσης εισόδου του flip-flop. Οι παράγοντες που στη γραμμή ισούνται με ένα, εισάγονται ως έχουν στο αντίστοιχο μονώνυμο (π.χ.  $Q_A$ ). Οι παράγοντες που στη γραμμή ισούνται με μηδέν, εισάγονται στο μονώνυμο ως το συμπλήρωμα τους (π.χ.  $Q'_A$ ).

Εξάγουμε τις εξισώσεις εισόδου των flip-flop  $J_A$ ,  $K_A$ ,  $J_B$ ,  $K_B$ ,  $J_C$ ,  $K_C$  απευθείας από τον πίνακα καταστάσεων:

$$J_A = Q'_A Q'_B Q_C x' + Q'_A Q_B Q'_C x + Q'_A Q_B Q_C x$$

$$K_A = Q_A Q'_B Q'_C x' + Q_A Q'_B Q'_C x + Q_A Q'_B Q_C x + Q_A Q_B Q'_C x$$



---


$$J_B = Q'_A Q'_B Q'_C X' + Q'_A Q'_B Q'_C X + Q'_A Q'_B Q_C X + Q_A Q'_B Q'_C X' + Q_A Q'_B Q_C X'$$


---

$$K_B = Q'_A Q_B Q'_C X' + Q'_A Q_B Q'_C X + Q'_A Q_B Q_C X' + Q_A Q_B Q'_C X' + Q_A Q_B Q'_C X$$


---

$$J_C = Q'_A Q'_B Q'_C X' + Q_A Q'_B Q'_C X + Q_A Q_B Q'_C X$$


---

$$K_C = Q'_A Q_B Q_C X + Q_A Q'_B Q_C X' + Q_A Q'_B Q_C X$$

Στη συνέχεια, θα χρησιμοποιήσουμε τους κανόνες της άλγεβρας Boole για να απλοποιήσουμε τις παραπάνω εξισώσεις. Έτσι θα μπορέσουμε, στο επόμενο βήμα, να σχεδιάσουμε ένα πολύ απλούστερο κύκλωμα. Η άλγεβρα Boole διέπεται από τους εξής κανόνες:

1. $A + 0 = A$	7. $A * A = A$
2. $A + 1 = 1$	8. $A * A' = 0$
3. $A * 0 = 0$	9. $(A')' = A$
4. $A * 1 = A$	10. $A + AB = A$
5. $A + A = A$	11. $A + A'B = A + B$
6. $A + A' = 1$	12. $(A + B)(A + C) = A + BC$

Θεώρημα DeMorgan

$$(AB)' = (A' + B')$$

$$(A + B)' = (A'B')$$

**Προσοχή:** Είναι συχνό λάθος των φοιτητών, να εφαρμόζουν κανόνες της συμβατικής άλγεβρας στην προσπάθεια απλοποίησης των εξισώσεων. Ένα παράδειγμα: στην άλγεβρα Boole, **δεν** ισχύει  $(A'B)' = AB'$ , αλλά  $(A'B)' = (A')' + B' = A + B'$  (θεώρημα DeMorgan).

## 6 Σχεδιασμός λογικού διαγράμματος

### i. ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΚΥΚΛΩΜΑΤΟΣ ΜΕ ΕΞΟΔΟ

Σημαντικές επεκτάσεις αυτής της μεθοδολογίας, οι οποίες δεν αναφέρονται εδώ, αφορούν προβλήματα με πολλαπλές εισόδους ( $X_1, X_2, X_n$ ), και προβλήματα όπου το output  $y(t)$  επηρεάζει τις καταστάσεις των flip-flop σε χρόνο  $(t+1)$ . Κυκλώματα με τέτοια χαρακτηριστικά, συνήθως, σχεδιάζονται με τη βοήθεια υπολογιστή, με τη χρήση της γλώσσας HDL. Δεν αποκλείεται ωστόσο σε μια βατή εξέταση να συναντήσετε, ως δευτερεύον θέμα, κύκλωμα πολλαπλών εισόδων.

TODO: Mention state minimisation

TODO: Introduce logic gates in “basic concepts”.