Student Name: Omar ELGHAFFOULI

Major : 3A-Data Science

**Bayesian Statistics Homework Solution**

Assignment 1

---

# 1 Exercice 1

On considère un modèle à volatilité stochastique autoregressive : pour $t = 1, \ldots, T$,

$$y_t = \exp(\sigma_t/2)\,\varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim^{\text{i.i.d.}} \mathcal{N}(0,1)$$
$$\sigma_t = \beta_0 + \beta_1 \sigma_{t-1} + \tau\eta_t, \quad \eta_t \sim^{\text{i.i.d.}} \mathcal{N}(0,1)$$

où $\sigma_t = \log(v_t)$ est la log-variance. On considère la distribution à prior suivante:

$$\beta_0 \sim \mathcal{N}(\alpha_0, \gamma_0)$$
$$\beta_1 \sim \mathcal{N}(\alpha_1, \gamma_1)\,\mathbb{1}_{(-1,1)}(\beta_1)$$
$$\tau^2 \sim I\Gamma(c_0, d_0)$$

où $\alpha_0, \alpha_1, \gamma_0, \gamma_1, c_0$ et $d_0$ sont des paramètres donnés, $I\Gamma$ denote une loi inverse gamma et $\mathbb{1}_{(-1,1)}(\beta_1) = 1$ si $\beta_1 \in (-1,1)$ et zero sinon. Notez $y^{(T)} := (y_1, \ldots, y_T)$ et $\sigma^{(T)} := (\sigma_1, \ldots, \sigma_T)$

1. Dérivez la loi a posteriori $\Pi\left(\tau^2 \mid y^{(T)}, \sigma^{(T)}, \sigma_0, \beta_0, \beta_1\right)$
2. Dérivez la loi a posteriori $\Pi\left(\beta_0 \mid y^{(T)}, \sigma^{(T)}, \sigma_0, \tau^2, \beta_1\right)$.
3. Dérivez la loi a posteriori $\Pi\left(\beta_1 \mid y^{(T)}, \sigma^{(T)}, \sigma_0, \tau^2, \beta_0\right)$.

*****************************************************************************************************

## Réponses

1. Cherchons la loi à posteriori de $\tau^2 \mid y^{(T)}, \sigma^{(T)}, \sigma_0, \beta_0, \beta_1$

Nous savons par le théorème de Bayes que $\Pi\left(\tau^2 \mid y^{(T)}, \sigma^{(T)}, \sigma_0, \beta_0, \beta_1\right) \propto f\left(y^{(T)}, \sigma^{(T)}, \sigma_0, \beta_0, \beta_1 \mid \tau^2\right) \Pi\left(\tau^2\right)$

D'une part on a :

$$\Pi\left(\tau^2\right) \propto \left(\frac{1}{\tau^2}\right)^{c_0+1} \exp\left(\frac{-d_0}{\tau^2}\right)$$

D'autre part, on a $f\left(y^{(T)}, \sigma^{(T)}, \sigma_0, \beta_0, \beta_1 \mid \tau^2\right) = f\left(y^{(T)} \mid \sigma^{(T)}\right) f\left(\sigma^{(T)} \mid \tau^2, \sigma_0, \beta_0, \beta_1\right) \underbrace{f\left(\sigma_0, \beta_0, \beta_1 \mid \tau^2\right)}_{\textit{indépendante de } \tau}$

Maintenant, on cherche la distribution de $f\left(y^{(T)} \mid \sigma^{(T)}\right)$

On a :

$f\left(y^{(T)} \mid \sigma^{(T)}\right) = f\left(y_1, \ldots, y_T \mid \sigma^{(T)}\right))$

$$= f\left(y_T \mid \sigma^{(T)}, y_1, \ldots, y_{T-1}\right) \times \ldots \times f\left(y_2 \mid y_1,\ \sigma^{(T)}\right) \times f\left(y_1 \mid \sigma^{(T)}\right)$$

$$= f\left(y_T \mid \sigma_T\right) \times \ldots \times f\left(y_2 \mid \sigma_2\right) \times f\left(y_1 \mid \sigma_1\right)$$

$$= \prod_{t=1}^{T} f\left(y_t \mid \sigma_{t)}\right)$$

**Determination de la loi $y_t \mid \sigma_t$**

on a $y_t = \exp\left(\sigma_t/2\right)\varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim^{\text{i.i.d.}} \mathcal{N}(0,1)$, donc $f\left(y^{(T)} \mid \sigma^{(T)}\right) = \underbrace{\prod_{t=1}^{T} \mathcal{N}(0, \exp\left(\sigma_t\right))}_{\textit{indépendante de } \tau}$

On cherche maintenant $f\left(\sigma^{(T)} \mid \tau^2, \sigma_0, \beta_0, \beta_1\right)$ On a:

$$f\left(\sigma^{(T)} \mid \tau^2, \sigma_0, \beta_0, \beta_1\right) = f\left(\sigma_T \mid \sigma_1, \ldots, \sigma_{T-1}, \tau^2, \sigma_0, \beta_0, \beta_1\right) \times \ldots \times f\left(\sigma_2 \mid \sigma_1, \tau^2, \sigma_0, \beta_0, \beta_1\right) \times f\left(\sigma_1 \mid \tau^2, \sigma_0, \beta_0, \beta_1\right)$$

$$= \prod_{t=1}^{T} f\left(\sigma_t \mid \sigma_{t-1}, \tau^2, \sigma_0, \beta_0, \beta_1\right)$$

On a : $\sigma_t = \beta_0 + \beta_1\sigma_{t-1} + \tau\eta_t, \quad \eta_t \sim^{\text{i.i.d.}} \mathcal{N}(0,1)$ et $f\left(\sigma_t \mid \sigma_{t-1}, \tau^2, \sigma_0, \beta_0, \beta_1\right) = \frac{1}{\tau\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\sigma_t - \beta_0 - \beta_1\sigma_{t-1})^2}{2\tau^2}\right)$

donc $f\left(\sigma^{(T)} \mid \tau^2, \sigma_0, \beta_0, \beta_1\right) = \frac{1}{\tau^T (2\pi)^{T/2}} \exp\left(\frac{-c}{2\tau^2}\right)$, avec $c = \sum_{t=1}^{T} (\sigma_t - \beta_0 - \beta_1\sigma_{t-1})^2$ observée.

Finalement, on a :

$$\Pi\left(\tau^2 \mid y^{(T)}, \sigma^{(T)}, \sigma_0, \beta_0, \beta_1\right) \propto \tau^{-T} \exp\left(\frac{-c}{2\tau^2}\right) \left(\frac{1}{\tau^2}\right)^{c_0+1} \exp\left(\frac{-d_0}{\tau^2}\right)$$

$$\propto \left(\frac{1}{\tau^2}\right)^{T/2+c_0+1} \exp\left(\frac{-(c+2d_0)}{2\tau^2}\right)$$

$$\text{D'où} \quad \tau^2 \mid y^{(T)}, \sigma^{(T)}, \sigma_0, \beta_0, \beta_1 \sim IG(T/2 + c_0, \frac{c+2d_0}{2})$$

2. On cherche par la même méthode la loi à postériori de $\beta_0 \mid y^{(T)}, \sigma^{(T)}, \sigma_0, \tau^2, \beta_1$, on a :

$$\Pi\left(\beta_0 \mid y^{(T)}, \sigma^{(T)}, \sigma_0, \tau^2, \beta_1\right) \propto f\left(y^{(T)}, \sigma^{(T)}, \sigma_0, \tau^2, \beta_1 \mid \beta_0\right) \Pi\left(\beta_0\right)$$

Avec le même raisonnement, trouvons $f\left(\sigma^{(T)} \mid \tau^2, \sigma_0, \beta_0, \beta_1\right)$

En ne gardant que les facteurs qui dépendent de $\beta_0$, on obtient :

$$f\left(\sigma^{(T)} \mid \tau^2, \sigma_0, \beta_0, \beta_1\right) \propto \exp\left((c_1+c_3)\beta_0 + c_2\beta_0^2\right)$$

avec $c_1 = \frac{1}{\tau^2}\sum_{t=1}^{T}\sigma_t$, $c_2 = \frac{-T}{2\tau^2}$, $c_3 = \frac{-\beta_1}{\tau^2}\sum_1^T \sigma_t$ sont toutes observées.

De ce fait, et compte tenu de la priori de $\beta_0$, on a :

$$\begin{aligned}\Pi\left(\beta_0 \mid y^{(T)}, \sigma^{(T)}, \sigma_0, \tau^2, \beta_1\right) &\propto \exp\left((c_1+c_3)\beta_0 + c_2\beta_0^2\right)\exp\left(-\frac{(\beta_0-\alpha_0)^2}{2\gamma_0}\right)\\ &\propto \exp\left(\frac{2\gamma_0[(c_1+c_3)\beta_0+c_2\beta_0^2]-\beta_0^2+2\beta_0\alpha_0-\alpha_0^2}{2\gamma_0}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2\gamma_0[(c_1+c_3)\beta_0+c_2\beta_0^2]-\beta_0^2+2\beta_0\alpha_0-\alpha_0^2 &= -(1-2\gamma_0c_2)[\beta_0^2 - 2\beta_0\underbrace{\frac{\alpha_0+\gamma_0(c_1+c_3)}{1-2\gamma_0c_2}}_{=M} + \frac{\alpha_0^2}{1-2\gamma_0c_2}]\\ &= -(1-2\gamma_0c_2)[\beta_0^2 - 2M\beta_0 + M^2 + \underbrace{\frac{\alpha_0^2}{1-2\gamma_0c_2} - M^2}_{\textit{indépendant de } \beta_0}]\end{aligned}$$

Donc, $\Pi\left(\beta_0 \mid y^{(T)}, \sigma^{(T)}, \sigma_0, \tau^2, \beta_1\right) \propto \exp\left(\frac{-(\beta_0-M)^2}{2\sigma^2}\right)$, avec $\sigma^2 = \frac{2\gamma_0}{1-2\gamma_0c_2}$ et $1-2\gamma_0c_2 > 0$ vérifiée

Finalement, on a

$$\beta_0 \mid y^{(T)}, \sigma^{(T)}, \sigma_0, \tau^2, \beta_1 \sim \mathcal{N}(M, \sigma^2)$$

3. Excatement avec le même raisonnement que $\beta_0$, On trouve que :

$$\beta_1 \mid y^{(T)}, \sigma^{(T)}, \sigma_0, \tau^2, \beta_0 \sim \mathcal{N}(W, \zeta^2)\mathbb{1}_{(-1,1)}(\beta_1)$$

avec $q_1 = \frac{1}{\tau^2}\sum_{t=1}^{T}\sigma_t\sigma_{t-1}$, $q_2 = \frac{-\beta_0}{\tau^2}\sum_{t=1}^{T}\sigma_{t-1}$, $q_3 = \frac{-1}{2\tau^2}\sum_{t=1}^{T}\sigma_{t-1}^2$, $W = \frac{\alpha_1+\gamma_1(q_1+q_2)}{1-2\gamma_1q_3}$,
$\zeta = \frac{\gamma_1}{1-2\gamma_1q_3}$

## 2 Excerice 2

Soit $y_1, y_2, \ldots, y_T$ une série chronologique de réponses de comptage indépendentes, générées de la façon suivante :

$$y_t \mid \gamma, \delta, \lambda \sim \begin{cases} P_O(\gamma) & \text{if } t \leq \lambda \\ P_O(\delta) & \text{if } t > \lambda, \end{cases}$$

où $\mathrm{Po}_o(\mu)$ dénote la distribution de Poisson avec moyenne $\mu$ et fonction de densité de probabilité $f(y_t \mid \lambda) = \lambda^y \exp(-\lambda)/y\,!$ si $y_t = 0, 1, 2, \ldots$ et $f(y_t \mid \lambda) = 0$ sinon. $\lambda$ est le point de changement. Supposez que les distributions a priori sont de la forme :

$$\begin{aligned}&\gamma \sim \text{Gamma}(a_1, a_2)\\ &\delta \sim \text{Gamma}(d_1, d_2),\\ &\lambda \sim \text{ Uniform }\{1, 2, \ldots, T-1\}.\end{aligned}$$

1. Dérivez la fonction de vraisemblance pour ce modèle.

2. Décrivez comment l'algorithme de Gibbs peut être utilisé pour estimer les paramètres de ce modèle.

3. Considérez les données acc_usines . txt sur les accidents dans les usines sur la période 1851-1962 en France. En regardant les données, on a l'impression que le nombre d'accidents a diminué avec le temps. Sur la base de ceci, utilisez ces données pour estimer le modèle de Poisson (0.1) avec un point de changement inconnu (en appliquant l'algorithme de Gibbs dévelopé au point precedent). Quand se produit le point de changement? (Pour répondre à cette question vous devez trouver la moyenne et l'écart-type a postériori de $\lambda$ ). Quel est le nombre prévu d'accidents avant et après ce changement?

**************************************************************************************************

## Réponse

1. On a $L\left(y_1, \ldots, y_T \mid \gamma, \delta, \lambda\right)=\prod_{t=1}^T f\left(y_t \mid \gamma, \delta, \lambda\right)$

$$=\prod_{t=1}^\lambda f\left(y_t \mid \gamma\right) \times \prod_{t=\lambda+1}^T f\left(y_t \mid \delta\right)$$
$$=\frac{\exp (-\lambda \gamma) \exp (-\delta(T-\lambda))}{\prod_{t=1}^T y_t!} \prod_{t=1}^\lambda \gamma^{y_t} \times \prod_{t=(\lambda+1)}^T \delta^{y_t}$$

Finalement, on a :

$$L\left(y_1, \ldots, y_T \mid \gamma, \delta, \lambda\right)=\frac{\exp (-\lambda(\gamma-\delta)-\delta T)}{\prod_{t=1}^T y_t!} \gamma^{S_\lambda} \times \delta^{\bar{S_\lambda}}$$

Avec $S_\lambda=\sum_{t=1}^\lambda y_t$ et $\bar{S_\lambda}=\sum_{t=(\lambda+1)}^T y_t$

2. Algorithme de Gibbs pour l'estimation du paramàtre du Modèle

L'objectif c'est de trouver les loi postériori marginales de $\Pi(\gamma \mid y)$, $\Pi(\delta \mid y)$ et $\Pi(\lambda \mid y)$

L'algorithme de Gibss est alors utilisé pour la simulation de la loi du triplet $(\gamma, \delta, \lambda)$, Pour ce faire, on doit chercher $\Pi(\gamma \mid \delta, \lambda y)$, $\Pi(\delta \mid \gamma, \delta, y)$ et $\Pi(\lambda \mid \gamma, \delta, y)$.

$$\Pi(\gamma \mid \delta, \lambda, y)=L(y \mid \delta, \lambda, \gamma) \times \Pi(\gamma)$$
$$\propto \exp \left(-\gamma\left(\lambda+a_2\right)\right) \gamma^{a_1+S_\lambda-1} \mathbb{1}_{\gamma>0}$$

Finalement, on :

$$\gamma \mid \delta, \lambda, y \sim G(a_1+S_\lambda, \lambda+a_2)$$

De la même façon, on dérive la postériori conditionelle $\Pi(\delta \mid \gamma, \delta, y)$ On obtient :

$$\delta \mid \gamma, \delta, y \sim G(d_1+\bar{S_\lambda}, T-\lambda+d_2)$$

Il nous reste que la loi posteriori $\Pi\left(\lambda \mid \gamma, \delta, y\right)$ de la variable aléatoire discrète $\lambda$.

Soit $k \in \{1, 2, \ldots, T-1\}$. On a :

$$\mathbb{P}\left(\lambda = k \mid \gamma, \delta, y\right) = \frac{L(y|\delta,\gamma,\lambda=k)\mathbb{P}(\lambda=k)}{\sum_{k=1}^{T-1} L(y|\delta,\gamma,\lambda=k)\mathbb{P}(\lambda=k)}$$

Finalement on aboutit à :

$$\mathbb{P}\left(\lambda = k \mid \gamma, \delta, y\right) = \frac{\exp(-k(\gamma-\delta)\gamma^{S_k}\delta^{\bar{S}_k}}{\sum_{k=1}^{T-1} \exp(-k(\gamma-\delta)\gamma^{S_k}\delta^{\bar{S}_k}}$$

****************************************************************************************************

END

Please Refer to the Notebook for The Rest