Student Name: Omar ELGHAFFOULI

Major : 3A-Data Science

Bayesian Statistics Homework Solution

Assignment 2

---

1 Exercice 1

Soit $y_1, y_2, \ldots, y_T$ un échantillon aléatoire simple d'une distribution $\mathcal{N}\left(\theta, \sigma^2\right)$ où θ est inconnu et σ^2 est connu. Testez l'hypothèse simple $H_1 : \theta = \theta_1$ contre l'hypothèse simple $H_2 : \theta = \theta_2$ avec $\theta_1 < \theta_2$ en utilisant le Facteur de Bayes en faveur de H_2, B_{21}. Pour cela utilisez la priori suivante

$$\pi(\theta) = \begin{cases} \underline{\pi_1} & \text{if} \quad \theta = \theta_1 \\ \underline{\pi_2} & \text{if} \quad \theta = \theta_2 \end{cases}$$

où $\underline{\pi_1}$ et $\underline{\pi_2}$ sont deux probabilités. Calculez le Facteur de Bayes B_{21} et simplifiez-le. Dans quel cas H_1 est rejetée?

****

Réponses

on a la loi a priori du test est définie par :

$$\pi_0\left(\theta\right) = \underline{\pi_1}\mathbb{1}_{(\theta_1)}\left(\theta\right) + \underline{\pi_2}\mathbb{1}_{(\theta_2)}\left(\theta\right)$$

on a alors le facteur de bayes en faveur de H_2 B_{21} est définie par :

$$B_{21} = \frac{\pi(\theta=\theta_2|X)\pi_0(\theta=\theta_1)}{\pi(\theta=\theta_1|X)\pi_0(\theta=\theta_2)}$$

avec :

$$\pi_0\left(\theta = \theta_1\right) = \underline{\pi_1} \text{ et } \pi_0\left(\theta = \theta_2\right) = \underline{\pi_2}$$

Maintenant, calculons $\pi\left(\theta = \theta_2 \mid X\right)$ et $\pi\left(\theta = \theta_1 \mid X\right)$. On a $\pi\left(\theta \mid X\right) = \frac{L(y|X)\pi_0(\theta)}{\int L(y|X)\pi_0(\theta)\mathrm{d}\theta}$

D'une part $L(y \mid \theta) = \prod_1^T f(y_i \mid \theta) = \prod_1^T \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp - \frac{-(y_i-\theta)^2}{2\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^T 2\pi^{T/2}} \exp \frac{-1}{2\sigma^2} \sum_1^T (y_i - \theta)^2$ D'une autre part, l'intégrale en dénominateur est égale à $\underline{\pi}_1 L(y \mid \theta_1) + \underline{\pi}_2 L(y \mid \theta_2)$. On a alors :

$$\pi\left(\theta=\theta_1 \mid X\right)=\frac{\underline{\pi}_1}{\sigma^T(2\pi)^{T/2}} \frac{\exp \frac{-1}{2\sigma^2} \sum_1^T (y_i-\theta_1)^2}{\underline{\pi}_1 L(y|\theta_1)+\underline{\pi}_2 L(y|\theta_2)}$$

De même, et de la même façon, on a :

$$\pi\left(\theta=\theta_1 \mid X\right)=\frac{\underline{\pi}_2}{\sigma^T(2\pi)^{T/2}} \frac{\exp \frac{-1}{2\sigma^2} \sum_1^T (y_i-\theta_2)^2}{\underline{\pi}_1 L(y|\theta_1)+(i_2 L(y|\theta_2)}$$

Finalement, l'expression de B_{21} est :

$$B_{21}=\exp \frac{-1}{2\sigma^2} \sum_1^T (y_i-\theta_2)^2-(y_i-\theta_1)^2$$

on a $\sum_1^T (y_i-\theta_2)^2-(y_i-\theta_1)^2=\sum_1^T -2y_i(\theta_2-\theta_1)+(\theta_2^2-\theta_1^2)=(\theta_2-\theta_1)\sum_1^T -2y_i+\theta_2-\theta_1$ D'après l'énoncé, on a $\theta_2>\theta_1$ Rejeter H1 est équivalent à $B_{21}<1$ ce qui revient à dire que $\sum_1^T (y_i-\theta_2)^2-(y_i-\theta_1)^2>0$

Après le développement des calculs, Rejeter H_1 est équivalent à :

$$\frac{1}{T}\sum_1^T y_i < \frac{\theta_2+\theta_1}{2}$$

2 Excerice 2

On considère R modèles M_r indexés par r :

$$M_r: \quad y=\alpha \iota_N+X_r \beta_r+\varepsilon$$

où ι_N est un vecteur $N \times 1$ de 1 et X_r est une matrice $N \times k_r$ contenant certains des colonnes des X (où X est une matrice $N \times K$ qui ne contient pas la constante). Les observations sont contenues dans le vecteur y de dimension $N \times 1$. Le vecteur des erreurs, ε, a dimension N et il est supposé être $\mathcal{N}\left(0_N, h^{-1} I_N\right)$. Considerez la priori suivante :

$$\pi(h) \propto \frac{1}{h}$$
$$\pi(\alpha) \propto 1$$
$$\pi\left(\beta_r \mid h\right) \sim \mathcal{N}\left(\underline{\beta}_r, \frac{1}{h} \underline{V}_r\right)$$

avec $\underline{\beta}_r=0_{k_r}, \underline{V}_r=\left[g_r X_r^{\prime} X_r\right]^{-1}$ et $g_r>0$. Derivez la posteriori $\pi\left(\beta_r \mid y, M_r\right)$

****

Réponses

On cherche la loi a posteriori $\pi\left(\beta_r \mid y, M_r\right)$. Le modèle M_r est définie par : α_N, X_r $\pi\left(\beta_r \mid y, M_r\right)$ est équivalent à chercher $\pi\left(\beta_r \mid y, X_r, \alpha, h\right)=\frac{\pi(\beta_r, h|y, \alpha, X_r)}{\pi(h|y, X_r, \alpha)}$

Donc on a : $\pi\left(\beta_r \mid y, M_r\right) \propto \pi\left(\beta_r, h \mid y, \alpha, X_r\right)$

$$\propto f(y, \alpha, X_r \mid \beta_r, h) \pi_0\left(\beta_r, h\right)$$

$$\propto f(y \mid X_r, \beta_r, h, \alpha)\pi_0\left(\beta_r \mid h\right)\pi_0\left(h\right)$$

On a pour tout i dans $1, \ldots, N$, $y_i \mid X_r, \beta_r, h, \alpha$ suit une loi $\sim \mathcal{N}\left(\alpha_N + X_r\beta_r, h^{-1}I_N\right)$

donc $f(y \mid X_r, \beta_r, h, \alpha) = \frac{h^{N/2}}{(2\pi)^{N/2}} \exp\left\{-\frac{h}{2}\,{}^t(y - \alpha_N - X_r\beta_r)(y - \alpha_N - X_r\beta_r)\right\}$

Ainsi, on a : $\pi_0\left(\beta_r \mid h\right) = \frac{hg_r^{k_r/2}det(X_r)}{(2\pi)^{k_r/2}} \exp\left\{\frac{-hg_r}{2}\,{}^t\beta_r{}^tX_rX_r\beta_r\right\}$ Finalement, on a :

$$\pi\left(\beta_r \mid y, M_r\right) \propto$$
$$\frac{h}{2\pi}^{\frac{k_r+N}{2}} g_r^{\frac{k_r}{2}} det(X_r) \exp\left\{\frac{-h}{2}[g_r{}^t(X_r\beta_r)(X_r\beta_r) + {}^t(y - \alpha_N - X_r\beta_r)(y - \alpha_N - X_r\beta_r)]\right\}$$

****

FIN