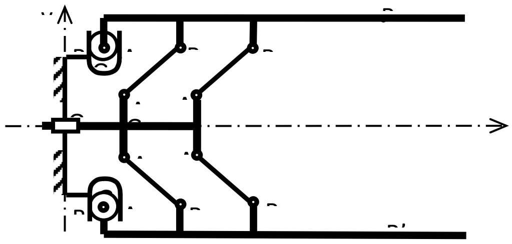
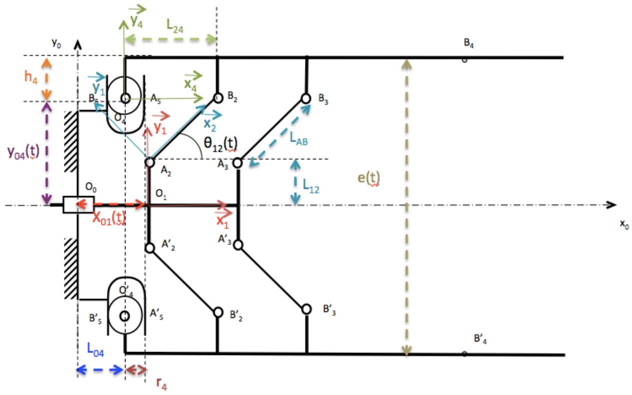
1TSI – Lycée Chaptal St Brieuc

- COURS – CI3 – Partie 2

Paramétrer le mécanisme d'un système complexe en vue d'une étude cinématique.





Je dois être capable de :

- ***Définir complètement la position et l'orientation d'un solide dans un repère donné.***
- ***Proposer le paramétrage d'un mécanisme pour être capable de réaliser par la suite une étude cinématique.***
- ***Proposer les paramètres à mettre en équation dans une loi d'entrée/sortie.***

1. Différence entre base et repère.

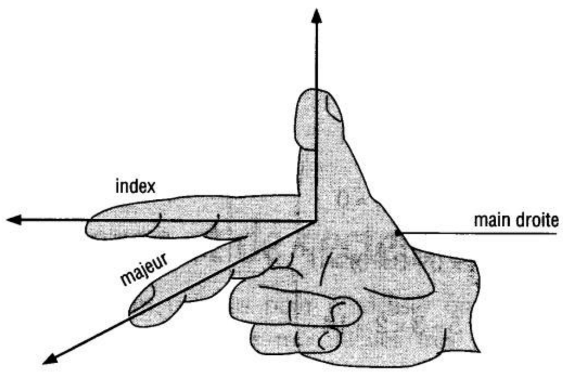
Il s'agit de deux notions indispensables pour pouvoir étudier la géométrie ou la cinématique (puis la dynamique et même la statique) d'un système.

Les explications proposées ici concernant les termes base, repère et référentiel n'ont pas l'ambition d'avoir l'exhaustivité d'une définition mathématique, mais uniquement d'apporter un éclairage nécessaire au cours de SII.

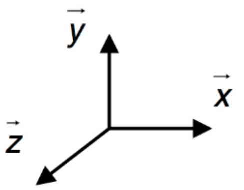
Base : système d'axes (de vecteurs) permettant l'expression d'un vecteur.

En SII, nous utiliserons des **bases orthonormées directes** à trois dimensions.

- ***Directe :*** le sens des vecteurs est déterminée par la règle des trois doigts (de la main droite).
- ***Orthonormée :*** chaque vecteur est perpendiculaire aux deux autres et de norme =1.



On note la base $B(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ représentée par :



Repère : base associée à une origine (point).

Notation : $R\left(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z}\right)$ $est\ le\ repère\ R\ avec\ pour\ origine\ O\ et\ pour\ base\ B(\vec{x},\vec{y},\vec{z}).$

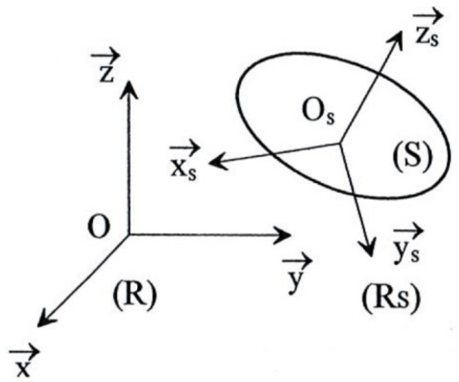
2. Définition de la position d'un solide.

Pour définir la position d'un solide indéformable (S) par rapport à un référentiel, on associe à celui-ci un repère orthonormé direct (solide indéformable = repère sans déformation). D'où :

POSITION DU SOLIDE = POSITION DU REPERE

La position d'un repère $R_s(O_S, \overrightarrow{x_s}, \overrightarrow{y_s}, \overrightarrow{z_s})$ attaché à (S) par rapport à un repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, z)$ dépend de six paramètres :

- 3 coordonnées de l'origine du repère R_S dans le repère R,
- 3 angles qui définissent la position de la base du repère R_S dans celle du repère R.

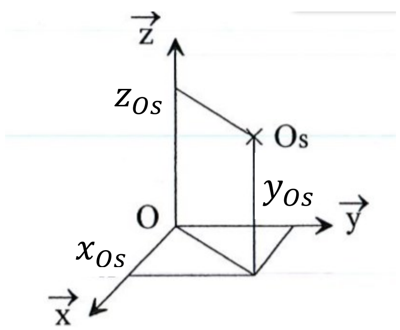


POSITION D'UN REPERE//AUTRE REPERE = 6 INFORMATIONS

3. Paramétrage de la position de l'origine O_S du repère associé au solide.

On pourra rencontrer **trois types** de coordonnées :

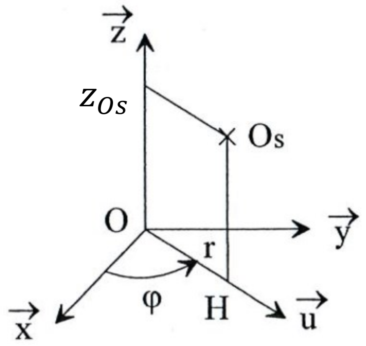
3.1. Coordonnées cartésiennes (à maitriser).



Les coordonnées cartésiennes x_{OS}, y_{OS} et z_{OS} du point O_S sont les projections orthogonales du vecteur $\overrightarrow{OO_s}$ sur la base du repère R.

$$\overrightarrow{OO_s} = x_{Os}.\vec{x} + y_{Os}.\vec{y} + z_{Os}.\vec{z}$$

3.2. Coordonnées cylindriques (à maitriser).



Soient :

- H la projection orthogonale du point O_S sur le plan $(O, \vec{x}, \vec{y})$,
- $\vec{u}$ le vecteur unitaire de direction $\overrightarrow{OH}$.

Les coordonnées cylindriques du point O_S dans le repère R sont :

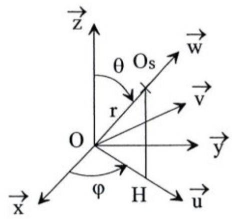
$$r = \|\overrightarrow{OH}\|, \qquad \varphi = (\vec{x}, \vec{u}), \qquad z_{Os}$$

On a donc : $\overrightarrow{OO_S} = r\vec{u} + z_{Os}\vec{z}$ d'où les relations suivantes (entre coordonnées cartésiennes et cylindriques) :

$$x_{Os} = r\cos(\varphi)$$
$$y_{Os} = r\sin(\varphi)$$
$$z_{Os} = z_{Os}$$

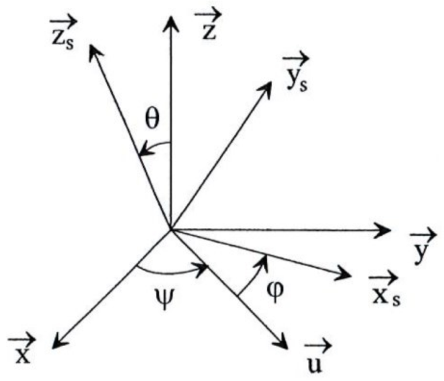
3.3. Coordonnées sphériques (pour information).

On peut également paramétrer la position de l'origine O_S à l'aide de coordonnées sphériques (Cf. figure ci-contre) : 2 paramètres angulaires et 1 paramètre de distance.



4. Paramétrage de l'orientation de la base du repère associé au solide.

4.1. Les angles d'Euler.



Pour comprendre ce paramétrage, il faut rechercher les rotations élémentaires permettant de faire coïncider la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ avec la base $(\vec{x_s},\vec{y_s},\vec{z_s})$.

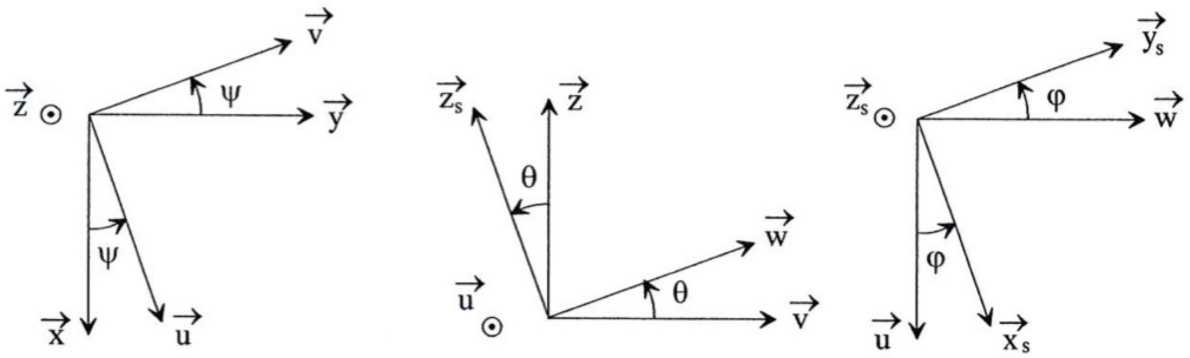
- Pour placer le vecteur $\vec{z}$ sur le vecteur $\vec{z_s}$, il faut effectuer une rotation d'angle ψ autour de $\vec{z}$, P**UIS** une rotation d'angle θ autour de $\vec{u}$.
- Pour faire coïncider $\vec{x}$ et $\vec{y}$ avec $\vec{x_s}$ et $\vec{y_s}$, il faut effectuer une rotation d'angle φ autour de $\vec{z_s}$.

Ces trois angles, globalement appelés **angles d'Euler**, portent les noms suivants :

- **Angle de précession** : ψ
- **Angle de nutation** : θ
- **Angle de rotation propre** : φ

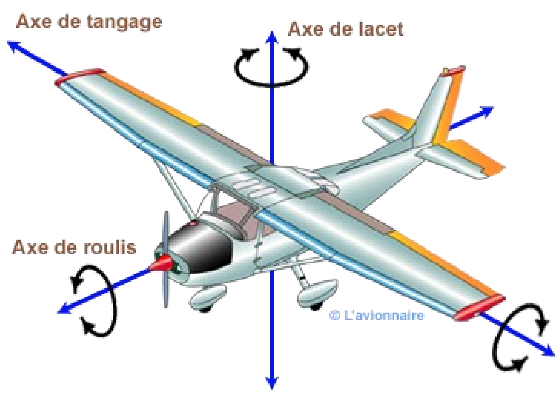
Schémas et projection des bases intermédiaires :

$(\vec{x},\vec{y},\vec{z}) \xrightarrow{\psi} (\vec{u},\vec{v},\vec{z})$ $\quad$ $(\vec{u},\vec{v},\vec{z}) \xrightarrow{\theta} (\vec{u},\vec{w},\vec{z_s})$ $\quad$ $(\vec{u},\vec{w},\vec{z_s}) \xrightarrow{\varphi} (\vec{x_s},\vec{y_s},\vec{z_s})$



4.2. Les angles de roulis, de tangage et de lacet.

Une autre manière de paramétrer l'orientation d'un repère est d'utiliser les angles de roulis, de tangage et de lacet comme illustrés ci-contre.



5. Méthodologie pour paramétrer un schéma cinématique.

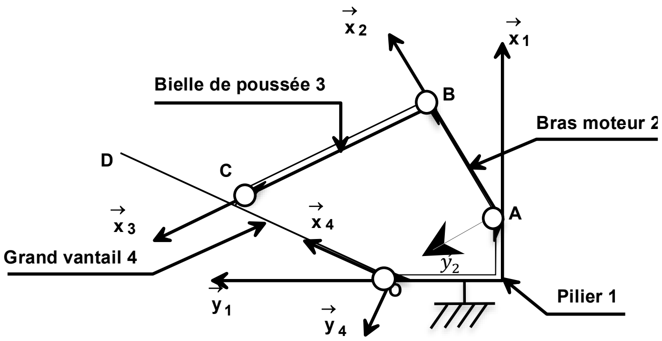
Voici quelques conseils méthodologiques pour mettre en place un paramétrage pertinent sur un schéma cinématique.

L'objectif du paramétrage :

- Mettre en évidence les paramètres géométriques (distances, angles) qui permettent de repérer les positions des différentes pièces, les unes par rapport aux autres.
- Déterminer parmi ces paramètres, ceux qui sont constants, variables, et les relations éventuelles entre ces paramètres.
- Etablir les figures planes, qui correspondent au paramétrage.
- Préparer les analyses géométriques et/ou cinématiques.

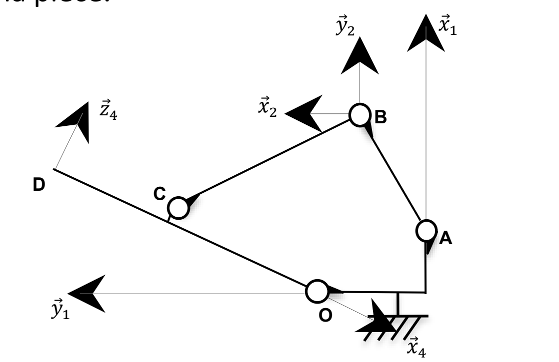
Méthode proposée :

- **Lier un repère** $R_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z_i})$ (orthonormé direct !) à chaque classe d'équivalence cinématique S_i.
  - On mettra en général l'origine du repère au centre d'une liaison, en partant du bâti puis en allant de proche en proche.
  - Dans le cas d'une liaison pivot, les bases associées à chacun des solides doivent avoir un vecteur en commun. Par exemple on choisira $\overrightarrow{z_1}$=$\overrightarrow{z_2}$.
  - On essayera de positionner un des axes de manières judicieuse : par exemple, on fera en sorte que l'axe $\vec{x}_1$ soit porté par la droite définit par deux centres de liaisons ou deux points importants de la pièce.



- Tous les axes « z_i » sont confondus.
- Les axes « xi » sont définis par des centres de liaisons.

BIEN…

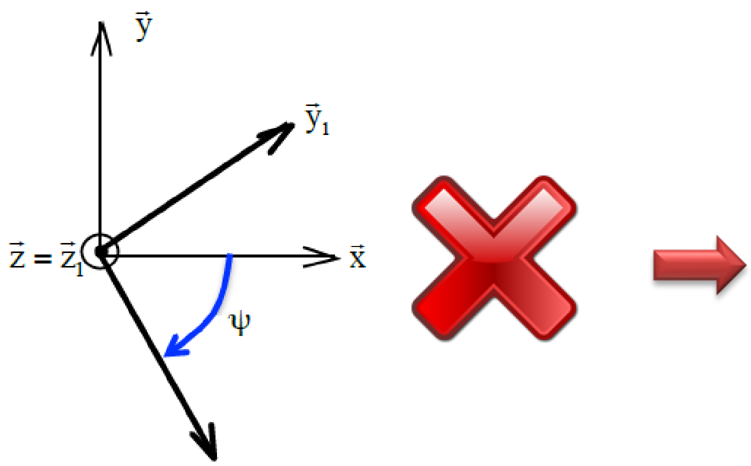


- Les bases n'ont pas d'axe commun.
- Les axes sont définis sans lien avec les points géométriques caractérisant les solides.
- Certains solides n'ont pas de repère associé.

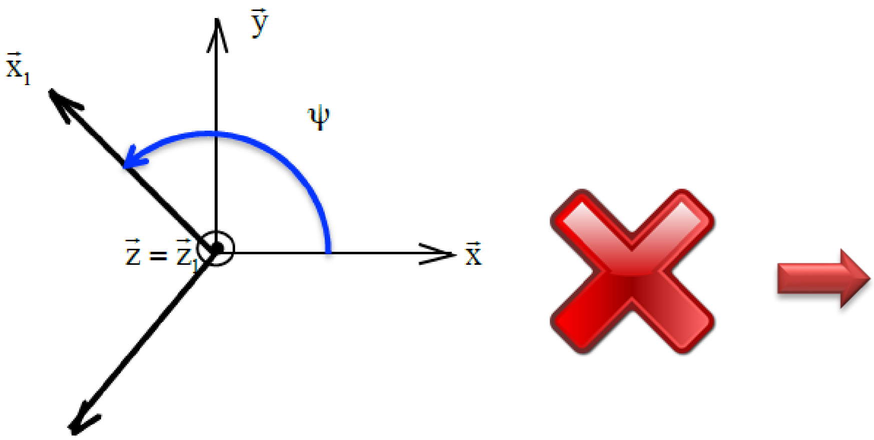
PAS BIEN…

- **Représenter les figures planes** de changement de base. Ces figures, très simples, **permettent d'éviter les erreurs de projection des vecteurs d'une base à l'autre** (Cf. annexe mathématique).
    - On représentera l'angle de changement de base pour une **valeur comprise entre 0 et $\frac{\pi}{4}$ quelque soit sa valeur sur le schéma cinématique !** Ce choix permet de garder en tête que la « petite projection » correspond au sinus de l'angle et que la « grande » projection correspond au cosinus. Ce n'est pas une obligation formelle, mais une astuce pour éviter les erreurs et gagner du temps.

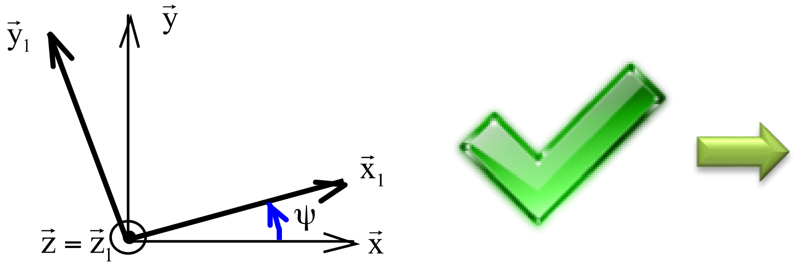
Exemples (bon ou mauvais) du passage de la base B à la base B_1.



Déconseillé car l'angle est négatif et cela introduit un risque dans les projections !



Déconseillé car l'angle est trop grand et cela introduit un risque dans les projections !



Parfait ! On voit tout de suite les projections pour exprimer B_1 dans B.

6. Loi d'entrée/sortie d'un mécanisme.

6.1. Définition.

La loi « d'entrée/Sortie » d'un mécanisme est la relation existant entre les paramètres de position de la (ou les) pièce(s) d'entrée du mécanisme et les paramètres de la (ou les) pièce(s) de sortie du même mécanisme.

On rencontrera deux types de loi d'entrée/sortie :

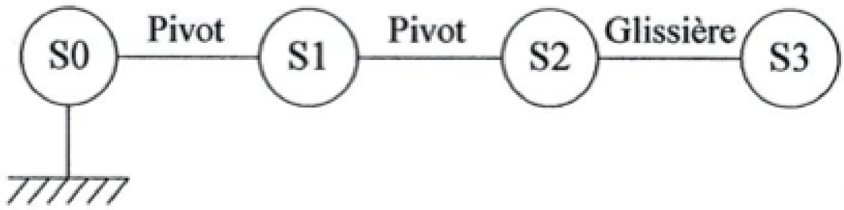
- Loi E/S en **position ou géométrique** : on cherche à exprimer la **position** (angulaire ou linéaire) de la pièce de sortie en fonction de celle d'entrée.
- Loi E/S en **vitesse ou cinématique** : on cherche à exprimer la **vitesse** (angulaire ou linéaire) de la pièce de sortie en fonction de celle d'entrée.

Pour commencer, nous ne nous intéresserons qu'à la loi E/S en position. Les lois E/S cinématiques seront abordées plus tard cette année.

6.2. Méthode.

Nous distinguerons deux principales méthodes (très proches) en fonction du type de mécanisme que nous rencontrerons.

- ***Mécanismes dits « à chaine ouverte »*** : le graphe de liaison ne présente pas de cycle, mais simplement une succession de liaisons en série. Il y a alors indépendance des paramètres.
  - On utilise une simple relation de Chasles : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \cdots + \overrightarrow{NM}$
  - L'expression des vecteurs fera apparaître les paramètres désirés, il faudra alors faire disparaître les autres en travaillant sur les équations obtenues.



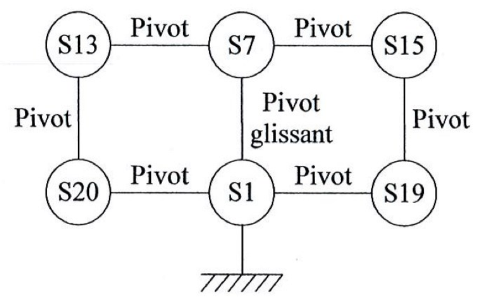
- ***Mécanismes dits « à chaine fermée simple »*** : le graphe de liaison présente un cycle. Les paramètres sont alors dépendants et le bouclage entraine des relations entre ces paramètres.
    - On peut réaliser une « **fermeture angulaire** » : il s'agit d'une « relation de Chasles » sur les vecteurs de base dans un même plan, obtenue en parcourant les solides de la chaine :

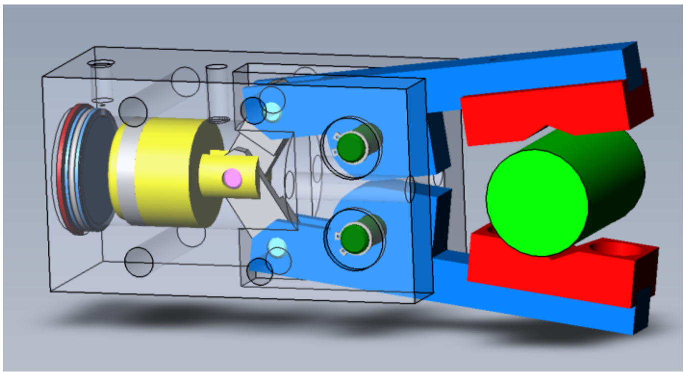
$$(\vec{x}_0, \vec{x}_0) = 0 = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) + (\vec{x}_1, \vec{x}_2) + \cdots + (\vec{x}_n, \vec{x}_0)$$

    - On peut réaliser une « **fermeture sur les vecteurs positions** » : il s'agit d'une relation de Chasles sur les vecteurs positions en passant par les points caractéristiques des différents solides et en parcourant la chaine fermée :

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \cdots + \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MO} = \vec{0}$$

On projette alors la relation vectorielle obtenue dans une base judicieusement choisie pour éliminer autant que possible les paramètres de liaisons non recherchés.





Remarques :

- Pour trouver une relation impliquant une longueur, les sinus et cosinus du ou des angles que l'on veut faire « disparaître » sont isolés puis la relation élémentaire de trigonométrie « cos2 + sin2 =1 » est alors utilisée après avoir élevé chacun des termes au carré (Cf. exemple suivant).

- Pour trouver une relation impliquant uniquement des angles, le rapport des équations permet de faire apparaître des tangentes.

L'exemple suivant vous permettra de mieux appréhender les notions abordées précédemment.

7. Exemple d'application.

On s'intéresse à la mise en position angulaire d'une antenne réceptrice.

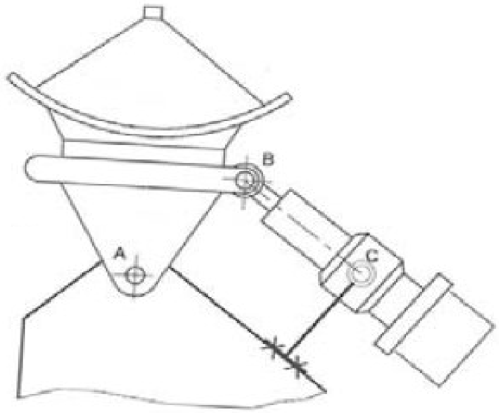
Le système représenté ci-contre comprend :

- Un support 0 que l'on considère comme fixe par rapport au sol.
- Une antenne 1 que l'on cherche à orienter.
- Un vérin électrique composé d'un corps 2 et d'une tige 3. Ce vérin est actionné par un moteur électrique à courant continu.

Données :

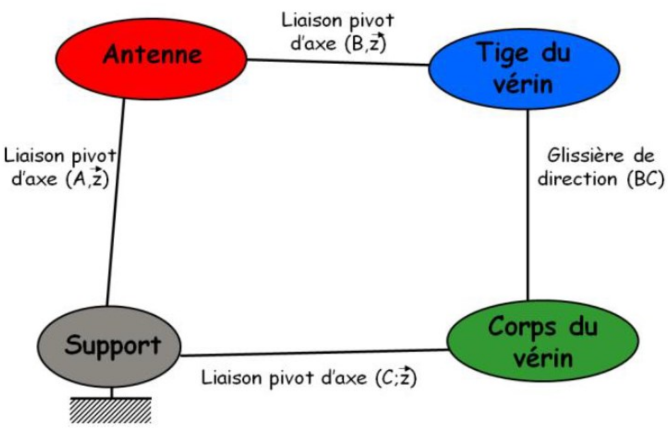
$\|\overrightarrow{AC}\| = L_0$ avec $L_0 = 63$cm

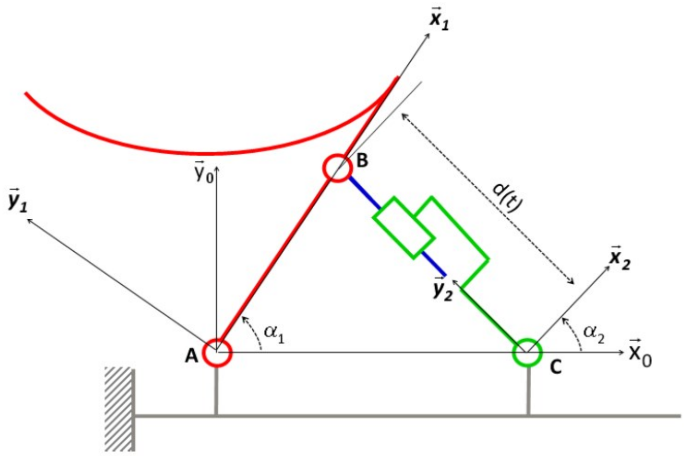
$\|\overrightarrow{AB}\| = L_1$ avec $L_1 = 45{,}5$cm



On cherche ainsi à déterminer l'orientation de l'antenne par rapport au sol en fonction de la position du

Graphe des liaisons et schéma cinématique :





Résolution de la loi entrée-sortie :

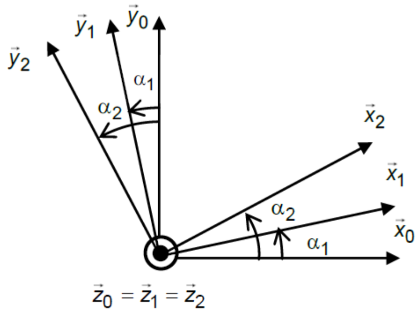
Paramètre de mouvement d'entrée : d
Paramètre de mouvement de sortie : α_1
Paramètres de mouvement intermédiaires : α_2
Paramètres caractéristiques : L_0, L_1

On souhaite une loi entrée-sortie de type $\alpha_1 = f(d)$.

Fermeture géométrique : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$

Donc : $L_1\vec{x}_1 - d\vec{y}_2 - L_0\vec{x}_0 = \vec{0}$

$L_1(\cos\alpha_1\vec{x}_0 + \sin\alpha_1\vec{y}_0) - d(-\sin\alpha_2\vec{x}_0 + \cos\alpha_2\vec{y}_0) - L_0\vec{x}_0 = \vec{0}$



En projetant : $\begin{cases} /\vec{x}_0 : & L_1\cos\alpha_1 + d\sin\alpha_2 - L_0 = 0 \\ /\vec{y}_0 : & L_1\sin\alpha_1 - d\cos\alpha_2 = 0 \end{cases}$

En isolant $\cos\alpha_2$ et $\sin\alpha_2$: $\begin{cases} /\vec{x}_0 : & d\sin\alpha_2 = L_0 - L_1\cos\alpha_1 \\ /\vec{y}_0 : & d\cos\alpha_2 = L_1\sin\alpha_1 \end{cases}$

En élevant au carré et en sommant :

$$d^2 = (L_0 - L_1\cos\alpha_1)^2 + (L_1\sin\alpha_1)^2$$

$$d^2 = L_0{}^2 - 2L_0L_1\cos\alpha_1 + L_1{}^2$$

$$\cos\alpha_1 = \frac{L_0{}^2 + L_1{}^2 - d^2}{2L_0L_1}$$

Ainsi : $\boxed{\alpha_1 = +\arccos\left(\frac{L_0{}^2 + L_1{}^2 - d^2}{2L_0L_1}\right)}$