§1-8 静电场的能量

一个带电体系所具有的静电能就是该体系所具有的电势能，它等于把各电荷元从无限远离的状态聚集成该带电体系的过程中，外界所作的功。

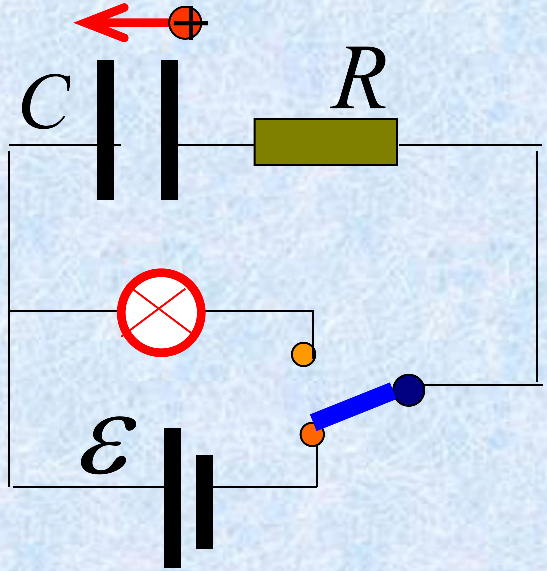
带电体系所具有的静电能是由电荷所携带呢，还是由电荷激发的电场所携带？能量定域于电荷还是定域于电场？在静电场中没有充分的理由，但在电磁波的传播中能充分说明场才是能量的携带者。

能量是定域于场的，静电能是定域于静电场的。

在电容器充电过程中,设某时刻两极板间的电压为U_{AB}，在外力作用下持续地将 dq 电量从负极板移到正极板时，外力因克服静电场力作的功为:

$$\mathrm{d}A = U_{AB}\mathrm{d}q = \frac{1}{C}q\mathrm{d}q$$

$$A = \int_0^Q \frac{q}{C}\mathrm{d}q = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CU^2$$



所以在电容器中储存的能量为:

$$W_\mathrm{e} = A = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}QU$$

因为电容器中的电量、场强和电压分别为

$Q=\sigma S=\varepsilon E S$， $E=\sigma/\varepsilon$， $U_{AB}=Ed$

由此可以求得电容器中静电能量

$$W_e=\frac{1}{2}\varepsilon E^2(Sd)$$

电容器中静电能的能量密度

$$w_e=\frac{W_e}{Sd}=\frac{1}{2}\varepsilon E^2=\frac{1}{2}DE$$

对于非匀强电场，在体元$\mathrm{d}\tau$内的电场能量为

$$\mathrm{d}W_e=w_e\mathrm{d}\tau=\frac{1}{2}\varepsilon E^2\mathrm{d}\tau$$

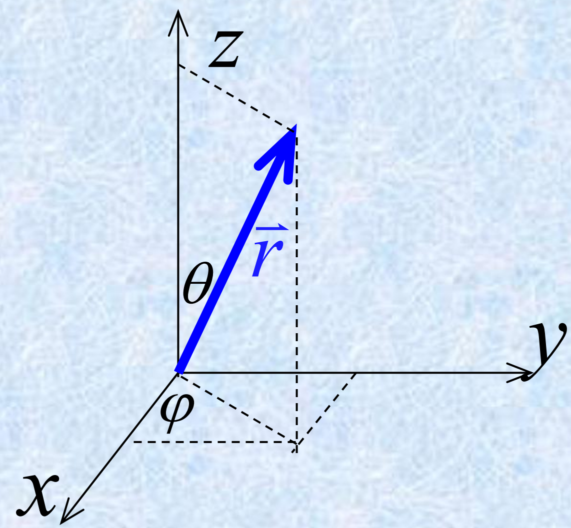
整个电场的能量可以表示为

$$W_e=\int\mathrm{d}W_e=\iiint_\tau\frac{1}{2}\varepsilon E^2\mathrm{d}\tau=\iiint_\tau\frac{1}{2}DE\,\mathrm{d}\tau$$

在各向异性电介质中，一般说来**D**与**E**的方向不同，这时电场能量密度应表示为

$$\boldsymbol{w}_{\mathrm{e}}=\frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E} \qquad W_{\mathrm{e}}=\iiint_{\tau}\frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}\,\mathrm{d}\tau$$

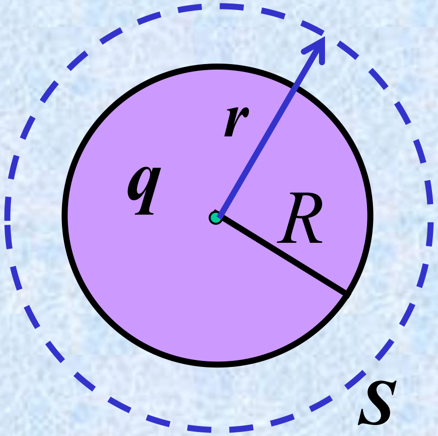
球坐标的体元



$$\because\ \mathrm{d}\tau=\mathrm{d}r\cdot r\sin\theta\mathrm{d}\varphi\cdot r\mathrm{d}\theta$$

$$\therefore\ \iiint\mathrm{d}\tau=\int_0^R r^2\mathrm{d}r\int_0^{\pi}\sin\theta\cdot\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi$$

例1：一个半径为R，带电荷为q的金属球浸没在电容率为ε的无限大均匀电介质中，求空间的电场能量。



解：因为球内没有电场，电场能为零，由高斯定理求得球外的电场强度为

$$\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = q$$

即

$$4\pi r^2 D = q$$

解得电感应强度为

$$D = \frac{q}{4\pi r^2} \qquad \therefore \quad E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}$$

该处的能量密度为

$$w_e = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 = \frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon r^4}$$

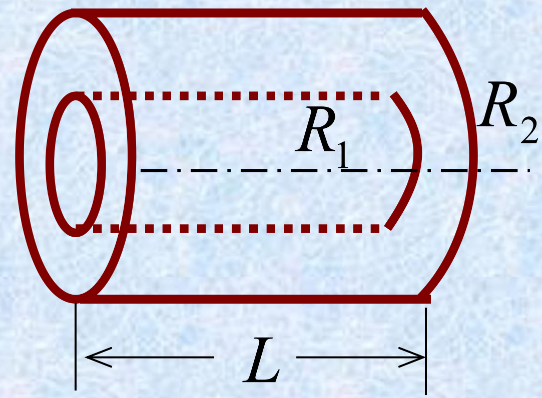
在半径为 r 与 $r+\mathrm{d}r$ 之间的球壳的能量为

$$\mathrm{d}W_{\mathrm{e}} = w_{\mathrm{e}} 4\pi r^2 \mathrm{d}r = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon r^2}\mathrm{d}r$$

空间的总能量为

$$W_{\mathrm{e}} = \int \mathrm{d}W_{\mathrm{e}} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon}\int_R^{\infty}\frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon R}$$

例2：圆柱形电容器（同轴电缆），中间是空气，其击穿电场 $E = 3\times10^{6}\,\mathrm{V/m}$，外半径$\boldsymbol{R_2}$= **0.01 m**。求空气不被击穿时内半径 $\boldsymbol{R_1}$ 取多大值可使电容器存储的能量最多。



解：　由高斯定理知

$$\therefore\ E = \frac{\lambda_e}{2\pi\varepsilon_0 r} \qquad R_1 < r < R_2$$

不击穿时：　$$\therefore\ E_b = \frac{\lambda_{max}}{2\pi\varepsilon_0 R_1}$$

$$\therefore\ U = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\lambda_e}{2\pi\varepsilon_0 r}\mathrm{d}r = \frac{\lambda_e}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

$$W_e = \frac{1}{2}\lambda_e U = \frac{\lambda_e^2}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

电场能量也可写成： $W_e = \pi\varepsilon_0 E^2 R_1^2 \ln\frac{R_2}{R_1}$

要使电容器储能最多，可对上式求导：

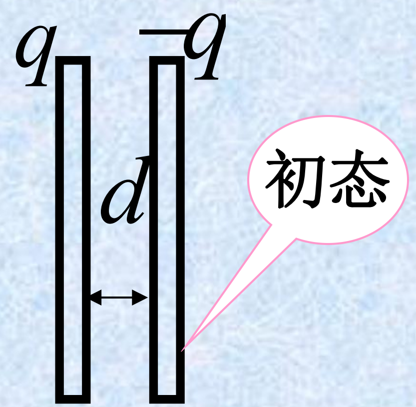
$$\frac{\mathrm{d}W_e}{\mathrm{d}R_1} = \pi\varepsilon_0 E^2 R_1^2 (2\ln\frac{R_2}{R_1} - 1) = 0$$

电容器的内半径： $R_1 = \frac{R_2}{\sqrt{e}} = 6.07\times10^{-3}\,\mathrm{m}$

电容器不被击穿时的最大电势差：

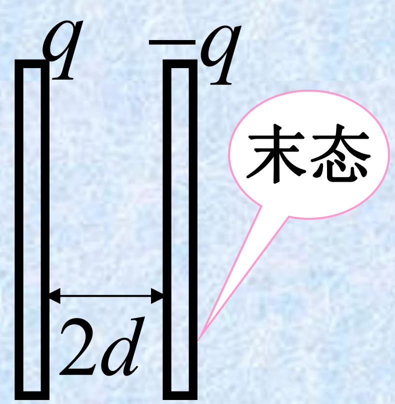
$$U_{max} = ER_1\ln\frac{R_2}{R_1} = \frac{ER_2}{2\sqrt{e}} = 9.10\times10^3\,\mathrm{V}$$

例3：一平板电容器面积为S，间距d，用电源充电后两极板分别带电为$+q$和$-q$，断开电源，再把两极板拉至$2d$，试求：1.外力克服电力所作的功；2.两极板间的相互作用力？



解：1. 根据功能原理可知，外力的功等于系统能量的增量；

电容器两个状态下所存贮的能量差等于外力的功：



$$\Delta E = \Delta W = \frac{q^2}{2C_2} - \frac{q^2}{2C_1}$$

$$= \frac{q^2}{2}\frac{C_1 - C_2}{C_1 C_2} = \frac{q^2}{2}\frac{d}{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}$$

$$W=\frac{q^2}{2}\frac{C_1-C_2}{C_1C_2}=\frac{q^2}{2}\frac{d}{\varepsilon_0\varepsilon_r S}$$

$$\therefore W=\frac{q^2}{2C_1}$$

若把电容器极板拉开一倍的距离，所需外力的功等于电容器原来具有的能量。

2. 外力反抗极板间的电场力作功

$$W=F\cdot d$$

$$\therefore F=\frac{W}{d}=\frac{q^2 d}{2\varepsilon_0\varepsilon_r Sd}=\frac{q^2}{2\varepsilon_0\varepsilon_r S}$$

极板间的力