进一步，也可以考察混合型张量，比如 $(1,1)$ 张量，它即是一个上指标一个下指标，且在洛伦兹变换下按照下式变换的量，

$$B'^{\mu}{}_{\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha}(\Lambda^{-1})^{\beta}{}_{\nu}B^{\alpha}{}_{\beta}. \tag{2.49}$$

类似的概念可以很容易推广到有 $p$ 个上指标 $q$ 个下指标的 $(p,q)$ 张量。特别的，$(0,0)$ 张量就是四维标量，$(1,0)$ 张量就是四维逆变矢量，而 $(0,1)$ 张量则是四维协变矢量。

当然，完全类似于四矢量情形，我们同样可以用 $\eta_{\mu\nu}$ 来将张量的上指标降下来，也可以用 $\eta^{\mu\nu}$ 来将张量的下指标升上去。而且，对于一个 $(p,q)$ 张量，我们可以让它的某个上指标和某个下指标相同，从而默认对这个指标求和，结果就是一个 $(p-1,q-1)$ 张量，这就叫做张量的缩并。比如说，对于 $(1,1)$ 张量 $B^{\mu}{}_{\nu}$，我们可以考察 $B^{\mu}{}_{\mu} = B^{0}{}_{0} + B^{1}{}_{1} + B^{2}{}_{2} + B^{3}{}_{3}$，注意它的上指标和下指标已经求和掉了，从而人们很容易验证它是洛伦兹不变的，即是一个 $(0,0)$ 张量，或者说是一个四维标量。

另外，比如说对于 $(2,0)$ 张量 $B^{\mu\nu}$，我们可以进一步要求它的两个指标对称，即满足 $B^{\mu\nu} = B^{\nu\mu}$，这就叫二阶对称张量。而如果我们要求两个指标反对称，即满足 $B^{\mu\nu} = -B^{\nu\mu}$，那就叫二阶反对称张量。对于反对称张量 $B^{\mu\nu}$，我们有 $B^{00} = B^{11} = B^{22} = B^{33} = 0$, 这是因为比如说 $B^{00} = -B^{00}$，从而必有 $B^{00} = 0$。对于 $(0,p)$ 张量 $C_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_p}$，如果它的任意两个指标均反对称，我们就称之为 $p$ 阶反对称张量。但是在四维时空中，必定有 $p \leq 4$。这是因为，在四维时空中，任何指标都只能取 $0,1,2,3$，从而对于 $p > 4$ 的情形，$C_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_p}$ 的任意 $p$ 个下指标中必有两个取相同值，考虑到反对称这就意味着 $C_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_p} = 0$, 即高于 4 阶的反对称张量必定为零。进一步，由于 $p$ 阶反对称张量场 $p$ 个指标必须全不相同，所以在四维时空中，它的独立分量个数就是 $\frac{4!}{p!(4-p)!}$。

最后，四维张量的概念很容易推广到场，如果一个量既是一个四维张量，同时还是一个场，那就叫做张量场，比如一个 $(0,2)$ 型二阶张量场可以写成 $B_{\mu\nu}(x)$，式中 $x$ 表示时空点。

### 2.2.2 四维时空中的微分形式

在《经典力学新讲》的第一章，我们介绍过微分形式和外微分的知识，实际上，微分形式与反对称张量场有密切的联系，这一小节就让我们从这个联系开始。具体来说，对于一个 $p$-形式 $C$，我们可以写出它的分量形式，

$$C = \frac{1}{p!}C_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_p}dx^{\mu_1}\wedge dx^{\mu_2}\wedge\ldots.\wedge dx^{\mu_p}. \tag{2.50}$$

式中 $C_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_p}$ 为这个 $p$ 形式的分量，它的指标是两两反对称的。事实上，$C_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_p}$ 必定是一个 $p$ 阶反对称张量场。这是因为，$p$-形式本身不依赖于坐标系，因此洛伦兹变换到 $x'^{\mu}$ 坐标后必有

$$C'_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_p}(x')dx'^{\mu_1}\wedge\ldots.\wedge dx'^{\mu_p} = C_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_p}(x)dx^{\nu_1}\wedge\ldots.\wedge dx^{\nu_p}. \tag{2.51}$$

由此易知 $C_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_p}$ 在洛伦兹变换下必定按照 $(0,p)$ 张量的变换规则变换。从而 $p$-形式的分量和 $p$ 阶反对称张量场一一对应。

在四维时空中，由于 $p$ 阶反对称张量场必须满足 $p \le 4$，因此在四维时空中最多考虑 4-形式，更高阶的微分形式自动为零。

有一个特殊的 4-形式值得专门讲一下，那就是所谓的四维时空的体积形式 $\Omega$，

$$\Omega = dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz. \tag{2.52}$$

但这个四形式严格来说算不上一个微分形式，而是所谓的赝形式，原因在于它在坐标变换以后会相差一个雅可比行列式，因此洛伦兹变换以后

$$\Omega' = dt' \wedge dx' \wedge dy' \wedge dz' = \det(\Lambda)\Omega. \tag{2.53}$$

因此对于 $\det(\Lambda) = 1$ 的洛伦兹变换，它和一个真正的微分形式一样不依赖于坐标系。但是，对于 $\det(\Lambda) = -1$ 的洛伦兹变换，比如空间反演变换或时间反演变换，那它就要多出一个负号，而不是真正不依赖于坐标系。像这样的在空间反演和时间反演之下多出一个负号的"微分形式" 就叫做赝形式。但是，对于物理学研究来说，由于主要考虑的是正洛伦兹变换，这时候自动有 $\det(\Lambda) = 1$, 因此我们常常将赝形式和真正的微分形式同等对待。

赝形式的分量也不是真正的反对称张量，而是所谓的赝张量，即它在空间反演或时间反演之下相比于真正张量的变换规则会多出一个负号。但是，和平等对待赝形式一样，在物理学中，我们也常常将赝张量和张量平等对待。因此，以后除非某些地方需要特别做出区分，否则我们就将赝形式同样称为微分形式，也将赝张量同样称为张量。

为了写出体积形式 $\Omega$ 所对应的反对称张量，我们引入如下定义

$$\varepsilon_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = \begin{cases} 1, & (\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4) \text{ 是 } (0123) \text{ 的偶置换} \\ -1, & (\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4) \text{ 是 } (0123) \text{ 的奇置换} \\ 0, & \text{其它情况} \end{cases}. \tag{2.54}$$

容易验证有，

$$\Omega = \frac{1}{4!}\varepsilon_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge dx^{\mu_3} \wedge dx^{\mu_4}. \tag{2.55}$$

可见 $\varepsilon_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}$ 正是体积形式所对应的四阶反对称张量 (赝张量)，不过，由于 $\varepsilon_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}$ 的定义不依赖于坐标系，所以这个反对称张量实际上在洛伦兹变换下变换的结果是**保持原值不变**。

我们注意到 $p$ 形式的独立分量个数与 $4-p$ 形式的独立分量个数相同，均为 $\frac{4!}{p!(4-p)!}$，这使得人们想到也许可以建立两者间的一一对映。的确，这样的对映是存在的，它叫做霍奇对偶 (Hodge duality)，通常用 $*$ 号来标记。具体来说，我们定义 $*$ 号为一个线性映射，它在微分形式上的作用如下

$$*(dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}) = \frac{1}{(4-p)!}\varepsilon^{\mu_1\dots\mu_p}{}_{\nu_{p+1}\dots\nu_4} dx^{\nu_{p+1}} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_4}. \tag{2.56}$$

特别的，$*1$ 将映射到体积形式 $\Omega$

$$*1 = \frac{1}{4!}\varepsilon_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge dx^{\mu_3} \wedge dx^{\mu_4} = \Omega. \tag{2.57}$$

而对于任意的 $p$ 形式 $C$,

$$C=\frac{1}{p!}C_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_p}dx^{\mu_1}\wedge dx^{\mu_2}\wedge\ldots.\wedge dx^{\mu_p}, \tag{2.58}$$

根据线性性，我们有

$$\begin{aligned}*C&=\frac{1}{p!}C_{\mu_1\ldots\mu_p}*(dx^{\mu_1}\wedge\ldots.\wedge dx^{\mu_p})\\&=\frac{1}{(4-p)!p!}C_{\mu_1\ldots\mu_p}\varepsilon^{\mu_1\ldots\mu_p}{}_{\nu_{p+1}\ldots\nu_4}dx^{\nu_{p+1}}\wedge\ldots\wedge dx^{\nu_4},\end{aligned} \tag{2.59}$$

结果显然为 $(4-p)$ 形式。

特别的，2 形式的霍奇对偶依然为 2 形式！对于 2 形式，我们也常常可以等价地认为霍奇对偶是作用在它的分量上，这是通过定义 $*C_{\mu_1\mu_2}=(*C)_{\mu_1\mu_2}$。则根据 (2.59) 式，易有

$$*C_{\mu_1\mu_2}=\frac{1}{2}C_{\nu_3\nu_4}\varepsilon^{\nu_3\nu_4}{}_{\mu_1\mu_2}. \tag{2.60}$$

**定理**：对于 $p$ 形式 $C$,

$$**C=(-)(-)^{p(4-p)}C. \tag{2.61}$$

即，对于 $p=1,3$ 形式，有 $**C=C$; 对于 $p=0,2,4$ 形式，有 $**C=-C$; 特别的，对于 $p=2$ 形式，有 $**C=-C$。

证明如下。重复应用 $*$ 映射的作用，有

$$\begin{aligned}**C&=\frac{1}{(4-p)!p!}C_{\mu_1\ldots\mu_p}\varepsilon^{\mu_1\ldots\mu_p}{}_{\nu_{p+1}\ldots\nu_4}*(dx^{\nu_{p+1}}\wedge\ldots\wedge dx^{\nu_4})\\&=\frac{1}{(4-p)!p!p!}C_{\mu_1\ldots\mu_p}\varepsilon^{\mu_1\ldots\mu_p}{}_{\nu_{p+1}\ldots\nu_4}\varepsilon^{\nu_{p+1}\ldots\nu_4}{}_{\rho_1\ldots\rho_p}dx^{\rho_1}\wedge\ldots\wedge dx^{\rho_p}\\&=\frac{(-)^{p(4-p)}}{(4-p)!p!p!}C_{\mu_1\ldots\mu_p}\varepsilon^{\mu_1\ldots\mu_p}{}_{\nu_{p+1}\ldots\nu_4}\varepsilon_{\rho_1\ldots\rho_p}{}^{\nu_{p+1}\ldots\nu_4}dx^{\rho_1}\wedge\ldots\wedge dx^{\rho_p}\\&=\frac{(-)^{p(4-p)}}{(4-p)!p!p!}C_{\mu_1\ldots\mu_p}\varepsilon^{\mu_1\ldots\mu_p\nu_{p+1}\ldots\nu_4}\varepsilon_{\rho_1\ldots\rho_p\nu_{p+1}\ldots\nu_4}dx^{\rho_1}\wedge\ldots\wedge dx^{\rho_p}\\&=(-)(-)^{p(4-p)}\frac{1}{p!}C_{\mu_1\ldots\mu_p}dx^{\mu_1}\wedge\ldots\wedge dx^{\mu_p}=(-)(-)^{p(4-p)}C.\end{aligned} \tag{2.62}$$

式中我们利用了恒等式

$$\begin{aligned}&\frac{1}{p!(4-p)!}\varepsilon^{\mu_1\ldots\mu_p\nu_{p+1}\ldots\nu_4}\varepsilon_{\rho_1\ldots\rho_p\nu_{p+1}\ldots\nu_4}dx^{\rho_1}\wedge\ldots\wedge dx^{\rho_p}\\=&(-)dx^{\mu_1}\wedge\ldots\wedge dx^{\mu_p},\end{aligned} \tag{2.63}$$

这里的负号来自于 $\varepsilon^{0123}=-\varepsilon_{0123}\Rightarrow\varepsilon^{\mu_1\ldots\mu_4}=(-)\varepsilon_{\mu_1\ldots\mu_4}$。

霍奇对偶运算可以和外微分运算结合起来，为了本书后面章节的应用，让我们考察一个重要的例子。假设我们考察一个 2 形式 $F$,

$$F=\frac{1}{2}F_{\mu_1\mu_2}dx^{\mu_1}\wedge dx^{\mu_2}, \tag{2.64}$$

让我们来计算一下 $*d*F$ 的结果是什么。

$$
\begin{aligned}
*d*F &= \frac{1}{2}\frac{1}{2}*d\Big(F_{\mu_1\mu_2}\varepsilon^{\mu_1\mu_2}{}_{\nu_3\nu_4}dx^{\nu_3}\wedge dx^{\nu_4}\Big)\\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{2}\partial_\rho F_{\mu_1\mu_2}\varepsilon^{\mu_1\mu_2}{}_{\nu_3\nu_4}*(dx^\rho\wedge dx^{\nu_3}\wedge dx^{\nu_4})\\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{2}\partial_\rho F_{\mu_1\mu_2}\varepsilon^{\mu_1\mu_2}{}_{\nu_3\nu_4}\varepsilon^{\rho\nu_3\nu_4}{}_\sigma dx^\sigma\\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{2}\partial^\rho F_{\mu_1\mu_2}\varepsilon^{\mu_1\mu_2\nu_3\nu_4}\varepsilon_{\rho\sigma\nu_3\nu_4}dx^\sigma\\
&= -\partial^\rho F_{\rho\sigma}dx^\sigma.
\end{aligned}
\tag{2.65}
$$

式中我们再次应用了前面用过的恒等式

$$
\frac{1}{2}\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu_1\mu_2\nu_3\nu_4}\varepsilon_{\rho\sigma\nu_3\nu_4}F_{\mu_1\mu_2} = -F_{\rho\sigma}. \tag{2.66}
$$

不妨小结一下推导的结果，即是

$$
*d*F = \big(-\partial^\mu F_{\mu\nu}\big)dx^\nu, \tag{2.67}
$$

是一个 1 形式。

完全类似的推导可以得到，对于 1 形式 $A = A_\mu dx^\mu$ 有

$$
*d*A = -\partial^\mu A_\mu, \tag{2.68}
$$

结果为 0 形式。而对于 3 形式 $C = \frac{1}{3!}C_{\mu_1\mu_2\mu_3}dx^{\mu_1}\wedge dx^{\mu_2}\wedge dx^{\mu_3}$,

$$
*d*C = \frac{1}{2!}\big(-\partial^\mu C_{\mu\rho\sigma}\big)dx^\rho\wedge dx^\sigma. \tag{2.69}
$$

结果为 2 形式。

实际上，无需计算即可知，对于任何 $p$ 形式 $C$, $*d*C$ 必定为一个 $p-1$ 形式，原因其实很简单，我们留给读者自己思索。即是说，$*d*$ 运算的效果刚好与外微分运算相反，外微分运算会将微分形式升高 1 次，而 $*d*$ 运算则会将微分形式降低 1 次。

另外，也可以把霍奇对偶与外微分最漂亮的结论，即广义斯托克斯定理，结合起来。为此我们先回顾一下广义斯托克斯定理，它说的是，对于时空中任何一个 $p+1$ 维超曲面 $D$，其 $p$ 维边界我们记为 $\partial D$，有

$$
\int_{\partial D} C_p = \int_D dC_p, \tag{2.70}
$$

式中 $C_p$ 表示一个任意 $p$ 形式。

下面取 $D$ 为四维时空中的一个区域，$\partial D$ 为它的三维边界，则对于任意 1 形式 $A = A_\mu dx^\mu$ 我们有

$$
\int_{\partial D}*A = \int_D d*A = -\int_D **d*A = \int_D \partial^\mu A_\mu *1 = \int_D(\partial^\mu A_\mu)\Omega. \tag{2.71}
$$

式中第 2 个等号利用了对于 4 形式 $C_4$ 有 $**C_4 = -C_4$(而 $d*A$ 正是一个 4 形式)，另外，式中第 3 个等号是代入了 (2.68) 式，最后一个等号是利用了 $*1 = \Omega$。不妨将最终的结果写清楚一点，即

$$
\int_{\partial D}*A = \int_D(\partial^\mu A_\mu)\Omega. \tag{2.72}
$$

这正是四维时空中的高斯定理。