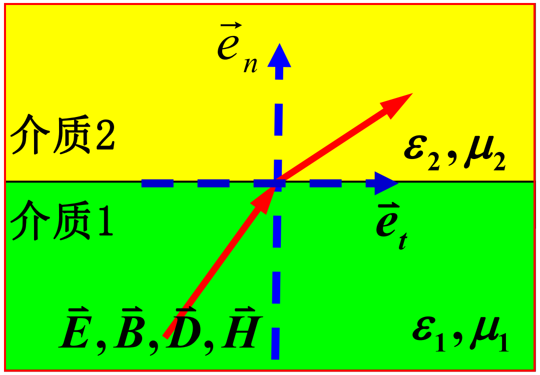
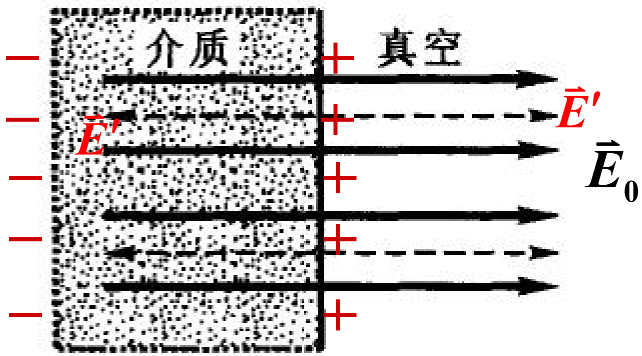
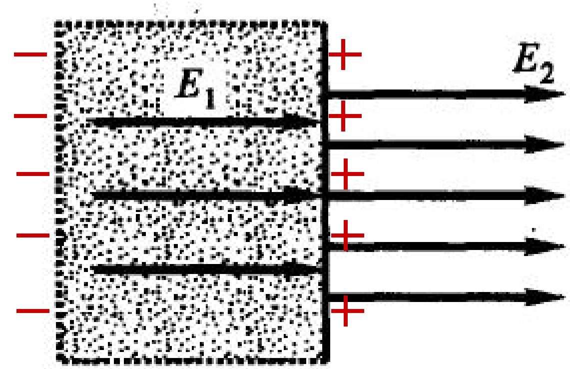
§1.5　电磁场边值关系

➢ 实际电磁场问题都是在一定的物理空间内发生的，该空间可能由多种不同介质组成。边值关系就是不同介质分界面两侧的电磁场量满足的关系，是在不同介质分界面上电磁场的基本属性。

➢ 在两种不同介质的分界面上，由于界面两侧的介电常数和磁导率不同，介质的性质有突变，因而电磁场量将发生跃变







➢ 在外电场$\vec{E}_0$的作用下，介质界面上产生面束缚电荷，束缚电荷激发附加电场 $\vec{E}'$ 叠加在原外场上，导致总电场 $\vec{E}_1$和 $\vec{E}_2$在介质与真空的分界面两侧发生跃变而不连续

➢ 由于电磁场量在分界面上不连续，因而**Maxwell**方程组的微分形式不再适用，但其积分形式可应用于包括分界面在内的整个区域

➢ 必须利用**Maxwell**方程组的积分形式来寻找介质分界面两侧的电磁场量之间的关系

Maxwell方程组的积分形式

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S}$$

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_f + \frac{d}{dt}\int_S \vec{D}\cdot d\vec{S}$$

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q_f$$

$$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$$

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\times\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

$$\nabla\cdot\vec{D} = \rho$$

$$\nabla\cdot\vec{B} = 0$$

I_f为通过曲面S的总自由电流

Q_f为闭合曲面S内的总自由电荷

➢ Faraday电磁感应定律：

$$\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} \quad \Longleftrightarrow \quad \nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

电场强度沿任意闭合曲线的环量等于穿过以该曲线为周界的任一曲面的磁通量的变化率的负值

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

➢ Maxwell-Ampere环路定理：

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$$

$$\oint_L \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = I_f + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} \quad \Longleftrightarrow \quad \nabla\times\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

磁场强度沿任意闭合曲线的环量等于穿过以该曲线为周界的自由电流与位移电流之和

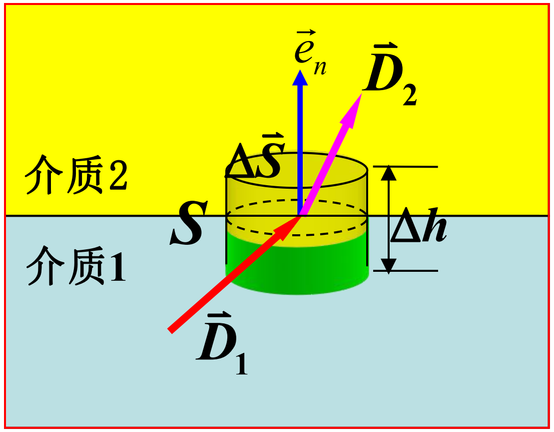
➤ 高斯定理：$\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = Q_f \iff \nabla\cdot\vec{D} = \rho$

通过任意闭合曲面的电位移通量等于该曲面所包围的自由电荷的代数和

➤ 磁通连续性方程：$\oint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0 \iff \nabla\cdot\vec{B} = 0$

通过任意闭合曲面的磁通量恒等于零

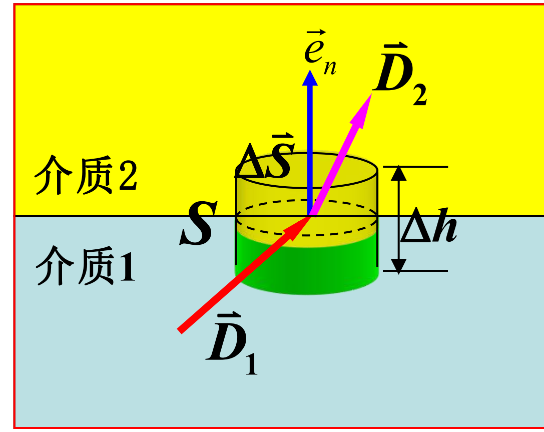
1 由面积分方程出发导出法向分量的边界关系



1） 电场 $\vec{E},\vec{D},\vec{P}$

在两介质的分界面上任取一由曲面S包围的扁平盒，令其底为ΔS，高为Δh

令$\Delta h \to 0$，则由 $\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q_f = \int_V \rho_f dV$



可得

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \int_{顶面} \vec{D}\cdot d\vec{S} + \int_{底面} \vec{D}\cdot d\vec{S} + \int_{侧面} \vec{D}\cdot d\vec{S}$$

$$= \vec{D}_2 \cdot \Delta\vec{S} - \vec{D}_1 \cdot \Delta\vec{S} + 2\pi r \Delta h \vec{D}_{侧} \approx 0$$

$$= \left(\vec{D}_2 - \vec{D}_1\right)\cdot \vec{e}_n \Delta S$$

$$\int_V \rho_f dV = \sigma_f \Delta S$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(\vec{D}_2 - \vec{D}_1\right)\cdot \vec{e}_n = \sigma_f}$$

or $\boxed{D_{2n} - D_{1n} = \sigma_f}$

电位移矢量的法向分量在分界面上是不连续的。

$\because\ \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ $\quad\therefore\ \left[\left(\varepsilon_0 \vec{E}_2 + \vec{P}_2\right) - \left(\varepsilon_0 \vec{E}_1 + \vec{P}_1\right)\right]\cdot \vec{e}_n = \sigma_f$

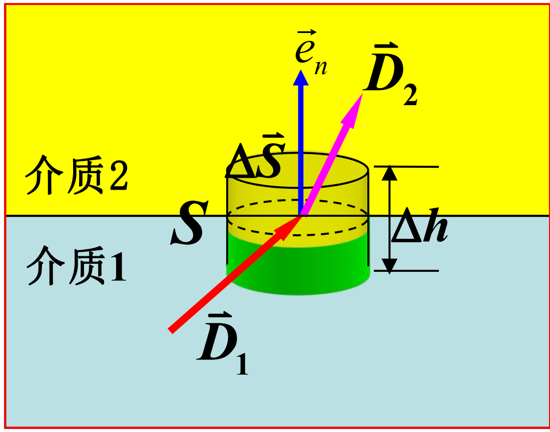
$\sigma_P = -\vec{e}_n \cdot \left(\vec{P}_2 - \vec{P}_1\right)$ $\quad \varepsilon_0\left(\vec{E}_2 - \vec{E}_1\right)\cdot \vec{e}_n = \sigma_f - \left(\vec{P}_2 - \vec{P}_1\right)\cdot \vec{e}_n = \sigma_f + \sigma_P$

or $$\boxed{E_{2n}-E_{1n}=\frac{\sigma_f+\sigma_P}{\varepsilon_0}}$$

$$\varepsilon_0\left(\vec{E}_2-\vec{E}_1\right)\cdot\vec{e}_n=\sigma_f+\sigma_P$$

$$D_{2n}-D_{1n}=\sigma_f$$

$$\boxed{P_{2n}-P_{1n}=-\sigma_P}$$



电位移矢量、电场强度、极化强度的法向分量在分界面上是不连续的，它们的法向跃变分别与自由电荷面密度、总电荷面密度、束缚电荷面密度有关

➢ 一般地，可根据自由电荷的面分布，确定分界面两侧电位移矢量的法向之间的关系

➢ 再利用介质的电磁性质方程，得到两侧电场强度法向分量之间的关系。

$$\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$$

2） 磁场 $\vec{B},\vec{H}$

$\vec{B}=\mu\vec{H}$

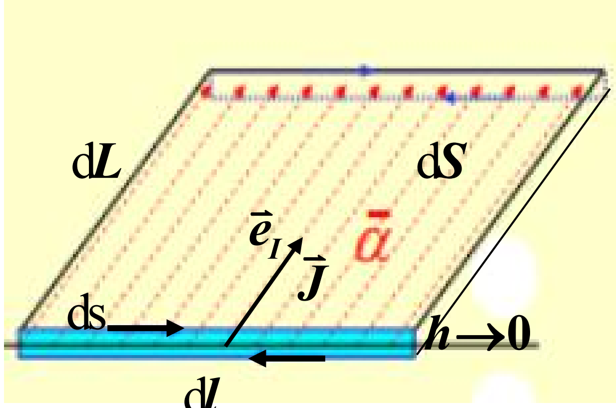
同理，在两介质的分界面上任取一由曲面S包围的扁平盒，则由 $\oint_S \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=0$ 可得 $\boxed{\vec{e}_n\cdot\left(\vec{B}_2-\vec{B}_1\right)=0}$ $\boxed{B_{2n}=B_{1n}}$

$$\mu_2 H_{2n}=\mu_1 H_{1n}$$

磁感应强度的法向分量在分界面上始终是连续的，磁场强度的法向分量不连续。

2 由线积分方程出发导出切向分量的边值关系

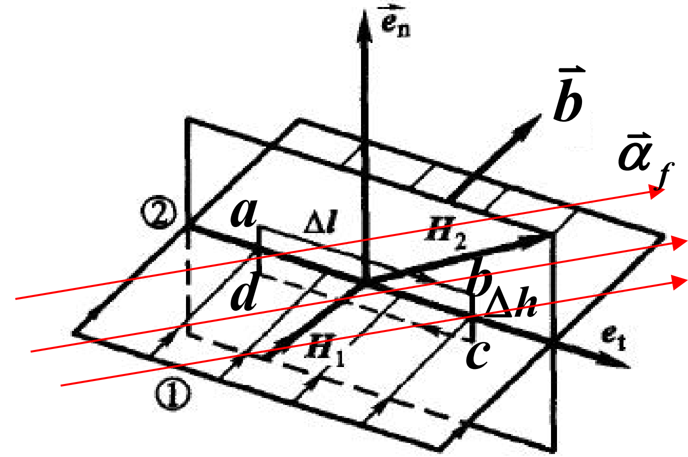
$$\vec{\alpha}=\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{d}l}\vec{e}_I$$



电流线密度$\vec{\alpha}$，其大小表示垂直通过单位横截线的电流

➢ 垂直通过dl的电流为 $I=\vec{\alpha}\,\mathrm{d}l$

在介质分界面两侧，选取一狭长形小回路，令$\Delta h \to 0$，则由



$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_f + \frac{d}{dt}\int_S \vec{D}\cdot d\vec{S}$$

可得

$$\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int_a^b \vec{H}\cdot d\vec{l} + \int_b^c \vec{H}\cdot d\vec{l} + \int_c^d \vec{H}\cdot d\vec{l} + \int_d^a \vec{H}\cdot d\vec{l}$$

$$= \vec{H}_2\cdot\Delta\vec{l} - \vec{H}_1\cdot\Delta\vec{l}$$

$$= \left(\vec{H}_2 - \vec{H}_1\right)\cdot\vec{e}_t\Delta l$$

$I = \vec{\alpha}\,dl$

$I_f = \vec{\alpha}_f\cdot\vec{b}\Delta l$

$\because \Delta h \to 0 \therefore S \to 0$

$\vec{D}$为有限值

$$I_f + \frac{d}{dt}\int_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \left(\vec{e}_n\times\vec{e}_t\right)\cdot\vec{\alpha}_f\Delta l + \underbrace{\frac{d}{dt}\int_S \vec{D}\cdot d\vec{S}}_{\approx 0} = \left(\vec{\alpha}_f\times\vec{e}_n\right)\cdot\vec{e}_t\Delta l$$

$$\left(\vec{H}_2 - \vec{H}_1\right)\cdot\vec{e}_t = \left(\vec{\alpha}_f\times\vec{e}_n\right)\cdot\vec{e}_t$$

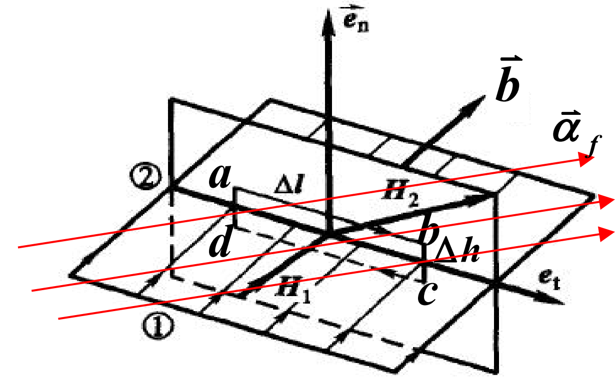
$\Delta\vec{l}$为分界面上任一矢量，因此

$$\vec{H}_2 - \vec{H}_1 = \vec{\alpha}_f\times\vec{e}_n$$

$$\vec{H}_2-\vec{H}_1=\vec{\alpha}_f\times\vec{e}_n$$

$$\therefore \vec{e}_n\times\left(\vec{H}_2-\vec{H}_1\right)=\vec{e}_n\times\left(\vec{\alpha}_f\times\vec{e}_n\right)$$

$$=\left(\vec{e}_n\cdot\vec{e}_n\right)\vec{\alpha}_f-\overbrace{\left(\vec{e}_n\cdot\vec{\alpha}_f\right)}^{0}\vec{e}_n=\vec{\alpha}_f \quad \text{or} \quad \boxed{H_{2t}-H_{1t}=\alpha_f}$$



磁场强度的切向分量是不连续的。

- 由 $\vec{B}=\mu\vec{H}$，可得 $\vec{e}_n\times\left(\dfrac{\vec{B}_2}{\mu_2}-\dfrac{\vec{B}_1}{\mu_1}\right)=\vec{\alpha}_f$
- 同理，由 $\oint_L\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$ 可得

$$\boxed{\vec{e}_t\cdot\left(\vec{E}_2-\vec{E}_1\right)=0} \qquad \boxed{\vec{e}_n\times\left(\vec{E}_2-\vec{E}_1\right)=0}$$

电场强度的切向分量是连续的。

$$\vec{E}_2-\vec{E}_1=\left(\vec{E}_2-\vec{E}_1\right)_{\vec{e}_t}\vec{e}_t+\left(\vec{E}_2-\vec{E}_1\right)_{\vec{e}_n}\vec{e}_n=\left(\vec{E}_2-\vec{E}_1\right)_{\vec{e}_n}\vec{e}_n$$

$$\therefore \vec{e}_n\times\left(\vec{E}_2-\vec{E}_1\right)=\vec{e}_n\times\vec{e}_n\left(\vec{E}_2-\vec{E}_1\right)_{\vec{e}_n}=0$$

3 电磁场边值关系

边值关系

$$\vec{e}_n \times \left(\vec{E}_2 - \vec{E}_1\right) = 0$$

$$\vec{e}_n \times \left(\vec{H}_2 - \vec{H}_1\right) = \vec{\alpha}$$

$$\vec{e}_n \cdot \left(\vec{D}_2 - \vec{D}_1\right) = \sigma$$

$$\vec{e}_n \cdot \left(\vec{B}_2 - \vec{B}_1\right) = 0$$

Maxwell方程组

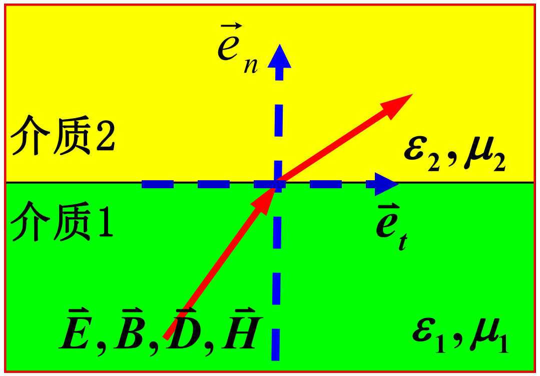
$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

➢ 算符∇用$\vec{e}_n$代替，电磁场量用分界面两侧的差值代替，时间导数用零代替，而$\vec{J}$和ρ分别用面电流密度$\vec{\alpha}$和面电荷密度σ代替



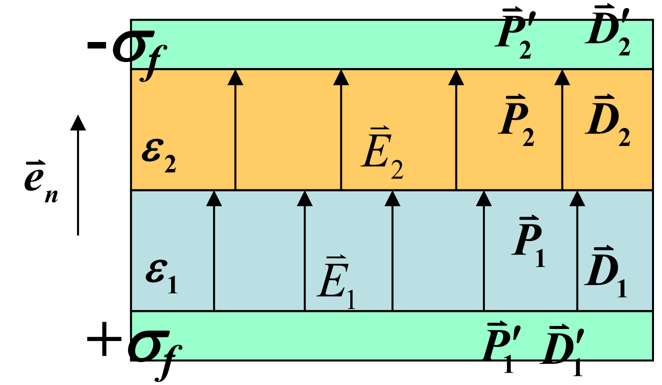
- 电磁场边值关系表明了边界面两侧的场与界面上的自由电荷、电流之间的制约关系
- 电磁场边值关系把边界面两侧的场量联系起来，本质上是Maxwell方程在边界上的体现

$$\vec{e}_n\times\left(\vec{E}_2-\vec{E}_1\right)=0$$
$$\vec{e}_n\times\left(\vec{H}_2-\vec{H}_1\right)=\vec{\alpha}$$
$$\vec{e}_n\cdot\left(\vec{D}_2-\vec{D}_1\right)=\sigma$$
$$\vec{e}_n\cdot\left(\vec{B}_2-\vec{B}_1\right)=0$$

- 磁感应强度的法向和电场强度的切向在边界上始终是连续的
- 电场法向和磁场切向在边界上一般会有跃变

例 无穷大平行板电容器内有两层介质，极板上面电荷密度$\pm\sigma_f$，求电场和束缚电荷分布。

解：由对称性可知电场沿垂直于平板的方向，把边值关系应用于下板与介质1界面上，因导体内场强为零，$\vec{D}_1'=0$，故得



$$\vec{e}_n\cdot\left(\vec{D}_1-\vec{D}_1'\right)=\sigma_f \Longrightarrow D_1=\sigma_f$$

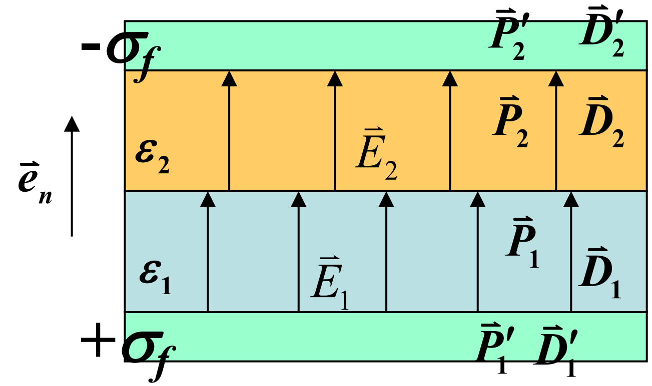
$\vec{e}_n\cdot\left(\vec{D}_2-\vec{D}_1\right)=\sigma$

同样，把边值关系应用到上板与介质2界面上得

$$\vec{e}_n\cdot\left(\vec{D}_2'-\vec{D}_2\right)=-\sigma_f \Longrightarrow D_2=\sigma_f$$

$$\therefore\quad E_1=\frac{\sigma_f}{\varepsilon_1},\quad E_2=\frac{\sigma_f}{\varepsilon_2}$$

束缚电荷分布于介质表面上。在两介质界面处，



$$\because\ \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\therefore\ \vec{P}_1 = \vec{D}_1 - \varepsilon_0 \vec{E}_1,\quad \vec{P}_2 = \vec{D}_2 - \varepsilon_0 \vec{E}_2$$

$$D_1 = \sigma_f$$

$$D_2 = \sigma_f$$

$$E_1 = \frac{\sigma_f}{\varepsilon_1},\quad E_2 = \frac{\sigma_f}{\varepsilon_2}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \sigma_P &= -\vec{e}_n \cdot \left(\vec{P}_2 - \vec{P}_1\right) \\ &= -\vec{e}_n \cdot \left(\vec{D}_2 - \varepsilon_0 \vec{E}_2 - \vec{D}_1 + \varepsilon_0 \vec{E}_1\right) \\ &= \varepsilon_0 \sigma_f \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right)\end{aligned}$$

因导体内场强为零，因此在介质1与下板分界处，

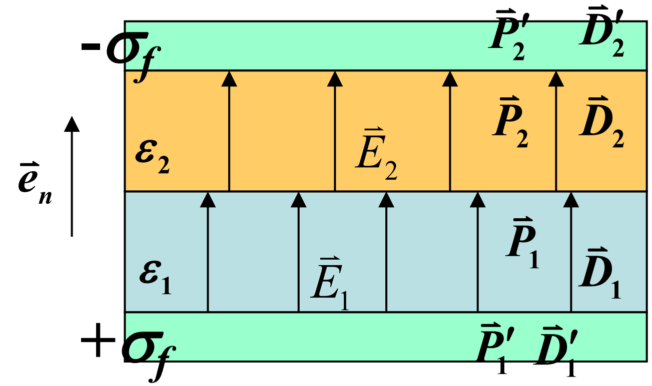
$$\sigma_P' = -\vec{e}_n \cdot \left(\vec{P}_1 - \vec{P}_1'\right) = -P_1 = -\sigma_f + \varepsilon_0 \frac{\sigma_f}{\varepsilon_1} = -\sigma_f \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}\right)$$

$\vec{P}_2 = \vec{D}_2 - \varepsilon_0 \vec{E}_2$

同理，在介质2与上板分界处，

$$\sigma_P'' = -\vec{e}_n \cdot \left(\vec{P}_2' - \vec{P}_2 \right) = P_2 = \sigma_f - \varepsilon_0 \frac{\sigma_f}{\varepsilon_2} = \sigma_f \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2} \right)$$

显然有



$$\sigma_P + \sigma_P' + \sigma_P'' = 0$$

即介质整体是电中性的