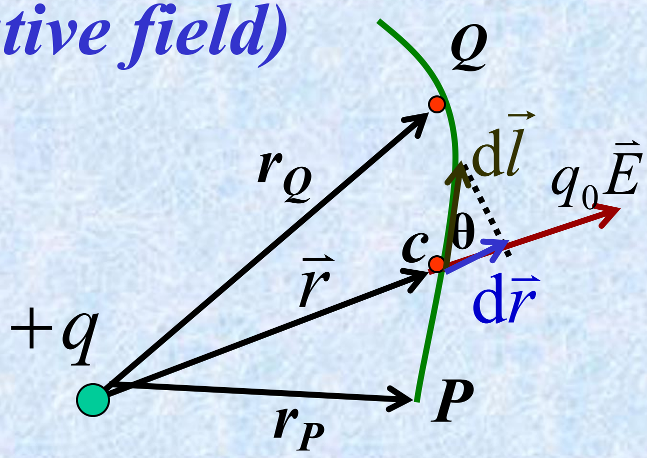
§ 1-4 电势及其与电场强度的关系

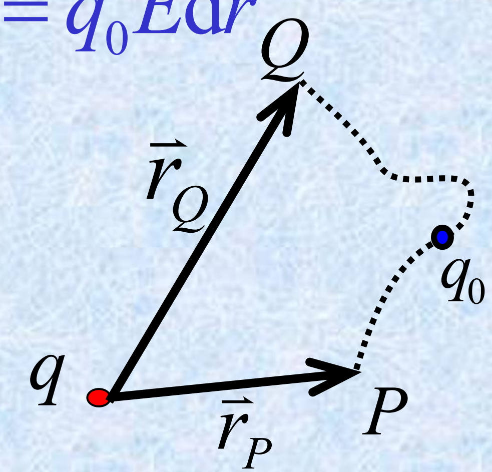
一、静电场属于保守场 *(conservative field)*



在点电荷q的场中移动试探电荷q_0，求电场力作的功：

$$\because \vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^3}\vec{r}$$

$$\mathrm{d}A=\vec{F}_\mathrm{e}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=q_0\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=q_0E\mathrm{d}l\cos\theta=q_0E\mathrm{d}r$$



点电荷 q_0从 P 经任意路径到 Q点，电场所作的功为：

$$A=\int_P^Q\mathrm{d}A=\int_{r_P}^{r_Q}\frac{q_0q}{4\pi\varepsilon_0r^2}\mathrm{d}r$$

$$=\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_P}-\frac{q}{r_Q}\right)$$

电场力所做的功只与始点和末点的位置有关

$$W=\int_P^Q \mathrm{d}W=\int_P^Q \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r=\frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{r_P}-\frac{1}{r_Q})$$

点电荷的静电场力所作的功与积分路径无关。

任何一个带电体都可看成是由无数电荷元组成， 由场强叠加原理可得到电场强度 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2+\cdots+\boldsymbol{E}_n$，试探电荷$q_0$从$P$移动到$Q$，电场力作的功为：

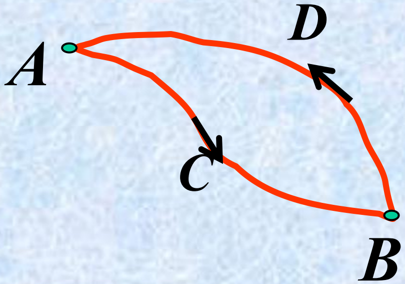
$$A=\int_P^Q \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_P^Q \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int_P^Q(\vec{E}_1+\vec{E}_2+\cdots+\vec{E}_n)\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

$$=\int_P^Q \vec{E}_1\cdot\mathrm{d}\vec{l}+\int_P^Q \vec{E}_2\cdot\mathrm{d}\vec{l}+\cdots+\int_P^Q \vec{E}_n\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

任何静电场中，电荷运动时电场力所作的功只与起始和终了的位置有关,而与路径无关。

这一特性说明： 静电场是保守场 。

因为保守力的数学形式为 $\oint_L \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=0$



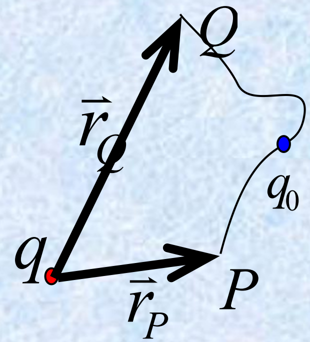
可以证明在静电场中有 $q_0\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=0$

$$\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\int_{ACB}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}+\int_{BDA}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\int_{ACB}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}-\int_{ADB}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=0$$

在静电场中，场强沿任意闭合路径的环路积分等于零。称为静电场的环路定理。

二、电势能、电势差和电势

静电场是保守场，可引入仅与位置有关的电势能概念。用W_P和W_Q分别表示 试探电荷q_0在电场中P点和Q点的电势能。电场力对试探电荷q_0所作的功可以表示为



$$A_{PQ}=q_0\int_{PQ}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=-\left(W_Q-W_P\right)$$

实际中为了确定q_0在电场中一点的电势能，必须选择一个电势能为零的参考点。

由于电势能的减小与试探电荷之比，完全由电场在P、Q两点的状况所决定。可把$(W_P/q_0)-(W_Q/q_0)$称为电场中P、Q两点的电势差，并用V_P-V_Q来表示，于是有

$$\frac{W_P-W_Q}{q_0}=\int_P^Q \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=V_P-V_Q$$

电场中P、Q两点间的电势差就是单位正电荷在这两点的电势能之差，等于单位正电荷从点P移到点Q电场力所作的功。电势差也称电压。

我们把V_P和V_Q称为点P和点Q的电势，显然它们分别等于单位正电荷在点P和点Q的电势能。

$$V_P = V_P - V_\infty = \int_{\mathrm{P}}^{\infty} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

为了确定某点的电势，应选择一个电势为零的参考点。当电荷分布在有限空间时，可选择无限远处的电势为零。在实际问题中，常选择大地的电势为零。电势能零点的选择与电势零点的选择是一致的

电场中某点P的电势，等于把单位正电荷从P点经任意路径移动到无限远处时，静电场力所作的功。

$$V_P = \int_P^{\infty} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

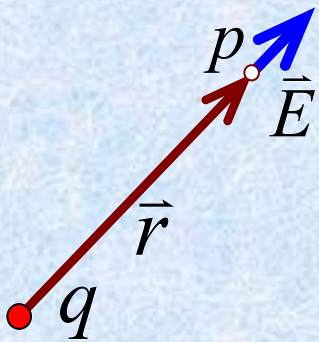
电势(*electric potential*)是标量，单位为伏特（V）也称为焦耳/库仑，即1V= 1 J /C

三、电势的计算 *(electric potential)*

1. 点电荷产生的电场中的电势分布

可用场强分布和电势的定义直接积分。

$$\because \vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$$



$$V_p = \int_p^\infty \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_p^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r$$

$$\therefore V_p = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_p}$$

正点电荷周围的场电势为正

离电荷越远，电势越低。

负点电荷周围的场电势为负

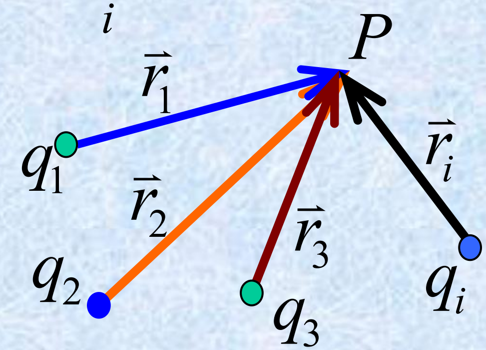
离电荷越远，电势越高。

2. 在多个点电荷产生的电场中任意一点的电势：

空间有n个点电荷$q_1, q_2, \cdots, q_n$， 求任意一点P的电势。由于点P的电场强度E等于各个点电荷单独在点P产生的电场强度的矢量之和。所以点P的电势可以用电势的叠加原理表示。

$$V(P) = \int_P^\infty \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_P^\infty (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \cdots) \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \sum_i V_i(P)$$

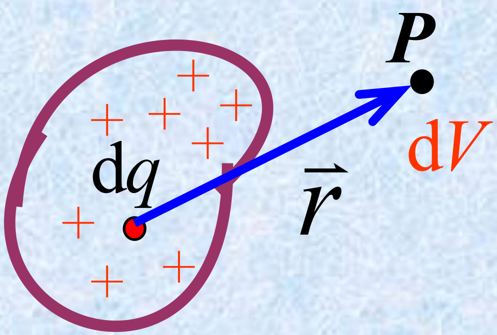
$$V_P = \sum_{i=1}^{n} V_i = \int_P^\infty \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{r_i}$$



在多个点电荷产生的电场中, 任一点的电势等于各个点电荷单在该点所产生的电势的代数和。

3. 在任意带电体产生的电场中任意一点的电势

可以把带电体看为很多很小电荷元的集合体。它在空间某点产生的电势，等于各个电荷元在同一点产生电势的代数和。



$$V_P = \iiint_V \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

体密度为ρ的带电体
$$V(r) = \iiint_V \frac{\rho \mathrm{d}V}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

面密度为σ的带电体
$$V(r) = \iint_S \frac{\sigma \mathrm{d}S}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

线密度为λ的带电体
$$V(r) = \int_L \frac{\lambda \mathrm{d}l}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

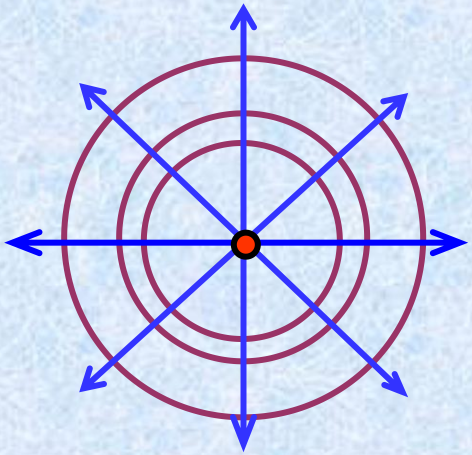
四、 等势面 *(equipotential surface)*

将电场中电势相等的点连接起来所形成的一系列曲面叫做等势面。等势面上的任一曲线叫做等势线。

等势面的性质：

电荷沿等势面移动，电场力不作功。

$\because \mathrm{d}V = 0 \quad \therefore \mathrm{d}A = -q_0 \mathrm{d}V = 0$



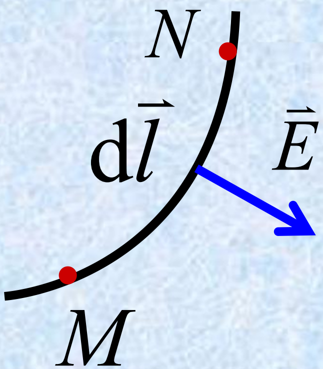
正电荷等势面

等势面处处与电场线正交。

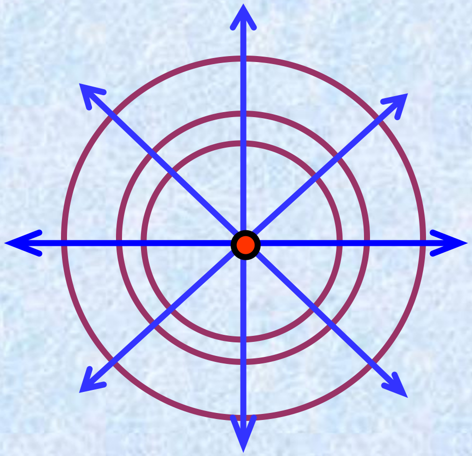
因为将单位正电荷从等势面上M点移到N点，电场力作功为零，而路径不为零 $\mathrm{d}l \neq 0$

$$\because \mathrm{d}A = q_0 \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = q_0 E \mathrm{d}l \cos\theta = 0$$

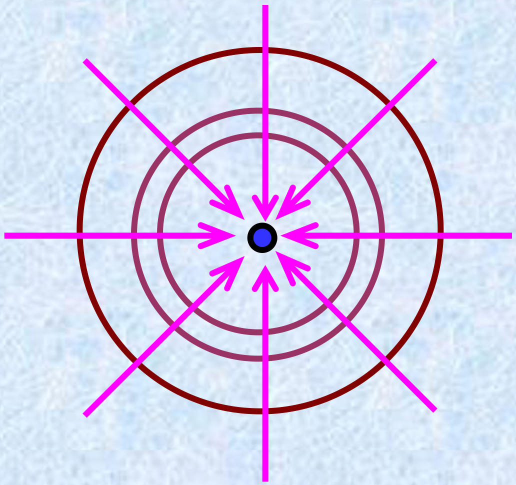
$$\therefore \theta = \pi/2$$



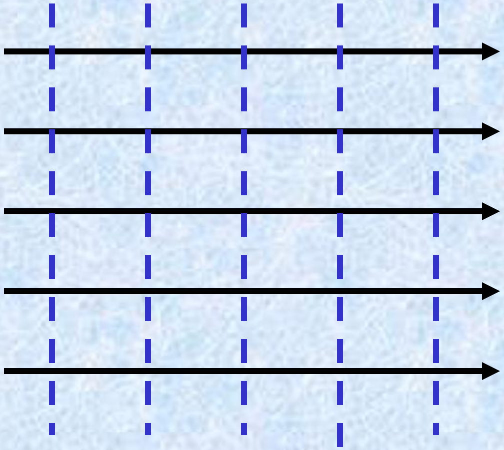
规定两个相邻等势面的电势差相等，所以等势面较密集的地方，场强较大。等势面较稀疏的地方，场强较小。



正电荷的场



负电荷的场



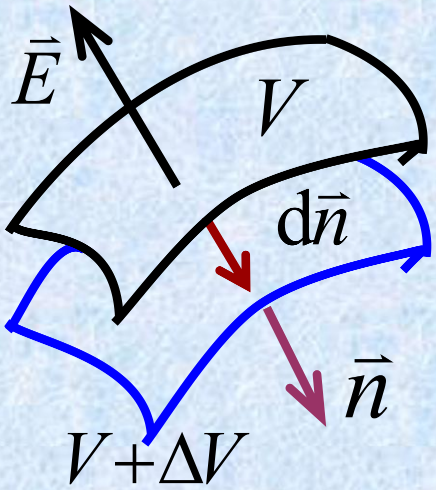
均匀电场

五、 电势与电场强度的关系

设电荷q_0在场强为E的电场中作位移dl，在dl的范围内电场是匀强的。若q_0完成位移dl 后，电势增高了dV，则其电势能的增量为q_0 dV， 这时电场力必定作负功，

$$q_0 \mathrm{d}V = -q_0 \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} \qquad \mathrm{d}V = -E\,\mathrm{d}l\cos\theta$$

式中θ是电场强度E与位移dl之间的夹角。等号左边$E\cos\theta$就是E在位移dl方向的分量，用E_l表示；等号右边是V沿dl方向的方向微商，负号表示E指向电势降低的方向。于是可以写为



$$\therefore \; E_l = -\frac{\partial V}{\partial l}$$

电场强度在任意方向的分量，等于电势沿该方向的变化率的负值。

在直角坐标系中

定义： $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$

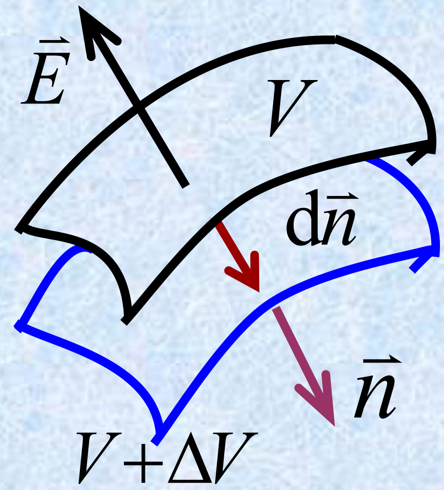
称 ∇V 为 V 沿 $\vec{n}$ 方向的梯度(*gradient*)

$$\therefore \vec{E} = -\nabla V = -\{\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}\}$$

$$\therefore E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}; \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}; \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

电势梯度 ∇V 是一个矢量，它的方向是该点附近电势升高最快的方向。

电势梯度的物理意义:图中所画曲面是等势面，其法线方向单位矢量用***n***表示，指向电势增大的方向。电场强度***E***的方向沿着***n***的反方向。根据前式，电场强度的大小可以表示为



$$E=-\frac{\partial V}{\partial n}$$

电场强度矢量必定可以表示为

$$\vec{E}=-\frac{\partial V}{\partial n}\vec{n}$$

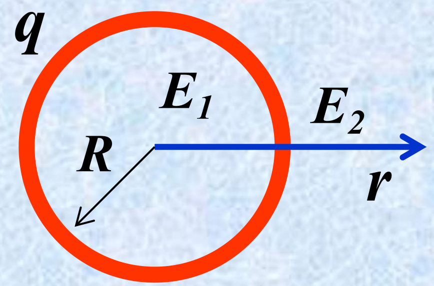
结论：电势梯度是一个矢量，它的大小等于电势沿等势面法线方向的变化率，它的方向沿着电势增大的方向。

例1：求半径为R均匀带电球面的电势分布。
已知球面总带电量为Q。

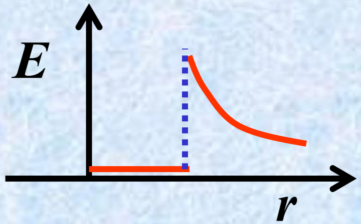
解：设无限远处为零电势，由高斯定理知,

在$r < R$ 的球内空间 $E_1 = 0$

在 $r > R$ 的球外空间电场分布为：



$$E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

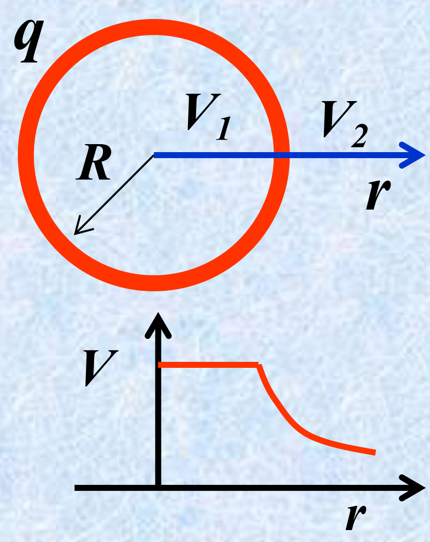


1.球内任一点的电势为：

$$V_1 = \int_r^\infty \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_r^R \vec{E}_1\cdot dl + \int_R^\infty \vec{E}_2\cdot dl$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_R^\infty \frac{q}{r^2}dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} \qquad r \le R$$

2.球外任意点的电势：

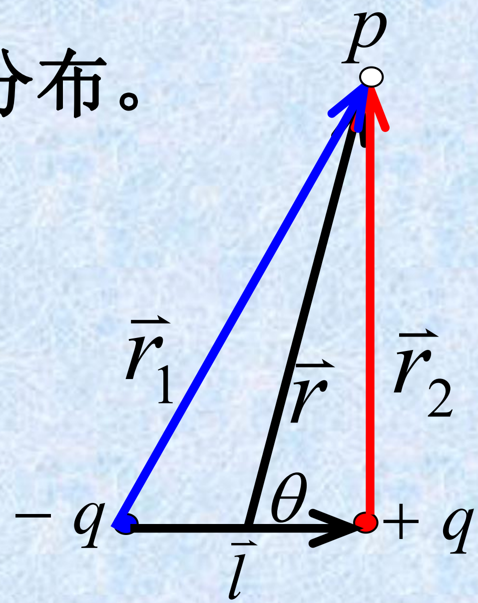


$$V_2 = \int_r^{\infty} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_r^{\infty} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \mathrm{d}r$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r} \qquad r \geq R$$

带电球壳是个等势体。在球面处场强不连续，而电势是连续的。

例2：计算电偶极子的电势和电场的分布。



解：因为电偶极子的电势可写为

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_2}$$

在一般情况下，r_1、r_2和r都比 l 大得多，
可近似地认为　$r_1 r_2 = r^2$，　$r_2 - r_1 = l\cos\theta$，

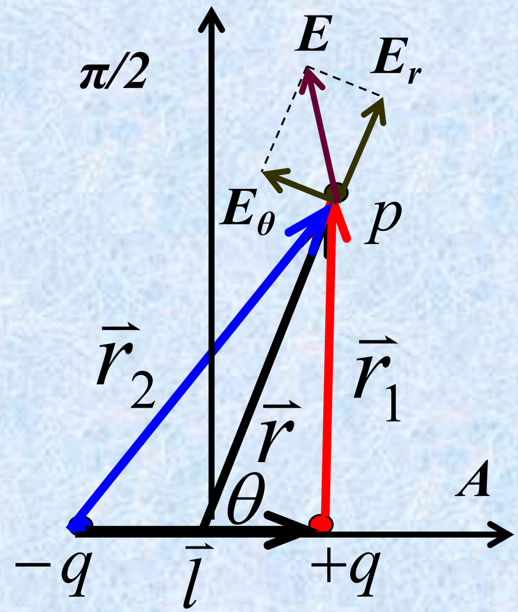
$$V = \frac{q(r_2 - r_1)}{4\pi\varepsilon_0 r_1 r_2} = \frac{ql\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

式中 $p = ql$ 是电偶极子的电矩。

若取极坐标：

$$\because E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2ql\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$$E_\theta = -\frac{\partial V}{r\partial\theta} = \frac{ql\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$



当$\theta=\pi/2$时

$$E_r = 0, \quad E_\theta = \frac{P_e}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

这就是在电偶极子中垂线上一点的场强。

当 $\theta = 0$ 时

$$E_r = \frac{2P_e}{4\pi\varepsilon_0 r^3}, \qquad E_\theta = 0$$

这就是在电偶极子联线上一点的场强。

例3：求无限长均匀带电直线的电场中的电势分布。

解：由高斯定理知场强为：方向垂直于带电直线。

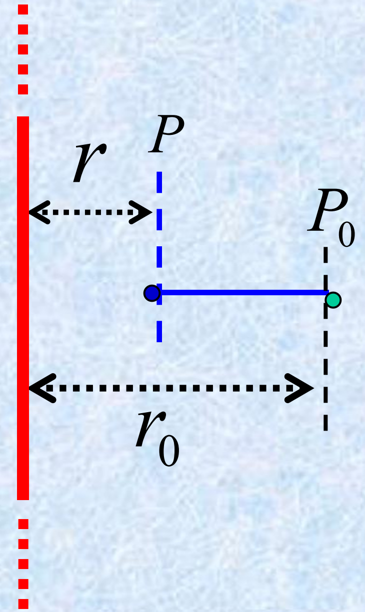
$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

电荷线密度

若仍然选取无穷远为电势零点，则由积分可知各点电势将为无限大而失去意义。因此可以选取某一距带电直导线为r_0的p_0点为电势零点，则距带电直线为r 的p点的电势：

$$V_P=\int_{r_P}^{r_0}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int_{r_P}^{r_0}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\mathrm{d}r$$

$$=\frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln r_P+\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln r_0=\frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_P}{r_0}$$



由此例看出，当电荷分布扩展到无穷远时，电势零点不能再选在无穷远处。