§ 7-3 交流电路的复数解法

一、交流电简谐量与复数的对应关系

$$\tilde{x} = A\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi)} = A\cos(\omega t+\varphi) + \mathrm{j}A\sin(\omega t+\varphi)$$

简谐量x与这个复数的实部相对应。

若用一个复数代表一个简谐量，该复数实部就是这个量本身，或者复数的模与简谐量的峰值相对应，辐角与相位相对应。复数的实部是这些简谐量进行运算的结果。

复数运算比余弦函数的运算简便，所以交流电路的复数解法是求解交流电路常用的一种重要的方法。

代表$u(t)=U_0\cos(\omega t+\varphi_u)$的复数称为复电压

$$\tilde{U}=U_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi_u)}=U_0\cos(\omega t+\varphi_u)+\mathrm{j}U_0\sin(\omega t+\varphi_u)$$

代表$(t)=I_0\cos(\omega t+\varphi_i)$的复数称为复电流

$$\tilde{I}=I_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi_i)}=I_0\cos(\omega t+\varphi_i)+\mathrm{j}I_0\sin(\omega t+\varphi_i)$$

复电压复电流之比为复阻抗

$$\tilde{Z}=\frac{\tilde{U}}{\tilde{I}}=\frac{U_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi_u)}}{I_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi_i)}}=\frac{U_0}{I_0}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi_u-\varphi_i)}=Z\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$$

两个结论：(1) 复电压、复电流和复阻抗之间出现类似于欧姆定律的形式，运算方便；(2)复阻抗同时反映了电压与电流的量值关系和相位关系两方面的信息。

二、元件和电路的复阻抗 (complex impedance)

电阻R：$Z_R=R$，$\varphi=0$， $\tilde{Z}_R = Z_R e^{j\varphi} = Re^{j0}$

电感L：$Z_L=\omega L$，$\varphi=\pi/2$，

$$\tilde{Z}_L = Z_L e^{j\varphi} = \omega L e^{j\frac{\pi}{2}} = j\omega L$$

电容C：$Z_C=1/\omega C$，$\varphi=-\pi/2$，

$$\tilde{Z}_C = Z_C e^{j\varphi} = \frac{1}{\omega C} e^{-j\frac{\pi}{2}} = -\frac{j}{\omega C} = \frac{1}{j\omega C}$$

纯电阻提供复阻抗的实部，纯电感和纯电容提供阻抗的虚部。复阻抗的虚部称为电抗，由电感提供的电抗称为感抗，由电容提供的电抗称为容抗。

串联电路中电流瞬时值相同，用一共同复电流代表。

总电压瞬时值等于各元件上电压瞬时值之和，

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{u}_2(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{u}_3(\boldsymbol{t}) + \cdots = \sum_i u_i(t)$$

写成复数形式 $\tilde{U} = \tilde{U}_1 + \tilde{U}_2 + \tilde{U}_3 + \cdots = \sum_i \tilde{U}_i$

将 $\tilde{U} = \tilde{I}\tilde{Z}$，$\tilde{U}_i = \tilde{I}\tilde{Z}_i$ ($\boldsymbol{i}$ =1,2,3,···)，代入可得

$$\tilde{\boldsymbol{Z}} = \tilde{\boldsymbol{Z}}_1 + \tilde{\boldsymbol{Z}}_2 + \tilde{\boldsymbol{Z}}_3 + \cdots = \sum_{\boldsymbol{i}} \tilde{\boldsymbol{Z}}_{\boldsymbol{i}}$$

串联电路的总复阻抗等于各元件的复阻抗之和。

并联电路中电压相同可用一个共同复电压来代表。

总电流瞬时值等于各支路上电流瞬时值之和

$$\boldsymbol{i(t)} = \boldsymbol{i_1(t)} + \boldsymbol{i_2(t)} + \boldsymbol{i_3(t)} + \cdots = \sum_i i_i(t)$$

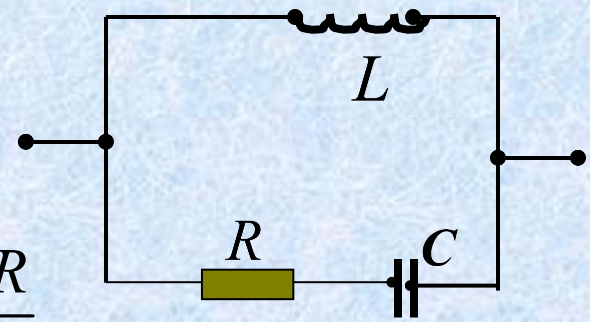
写成复数形式 $\tilde{I} = \tilde{I}_1 + \tilde{I}_2 + \tilde{I}_3 + \cdots = \sum_i \tilde{I}_i$

将 $\tilde{I} = \dfrac{\tilde{U}}{\tilde{Z}}$ ，$\tilde{I}_i = \dfrac{\tilde{U}_i}{\tilde{Z}_i}$ $(\boldsymbol{i} = 1,2,3,\cdots)$，代入可得

$$\frac{1}{\tilde{\boldsymbol{Z}}} = \frac{1}{\tilde{\boldsymbol{Z}}_1} + \frac{1}{\tilde{\boldsymbol{Z}}_2} + \frac{1}{\tilde{\boldsymbol{Z}}_3} + \cdots = \sum_{\boldsymbol{i}} \frac{1}{\tilde{\boldsymbol{Z}}_{\boldsymbol{i}}}$$

并联电路总复阻抗倒数等于各支路复阻抗倒数之和。

例1: 求图中电路的阻抗Z和位相差φ。



解: 先求电路的复阻抗，再由复阻抗求出电路的阻抗Z和相位差φ。

$$\frac{1}{\tilde{Z}}=\frac{1}{\mathrm{j}\omega L}+\frac{1}{R+\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}}=\frac{(1-\omega^2CL)+\mathrm{j}\omega CR}{-\omega^2CLR+\mathrm{j}\omega L}$$

$$\tilde{Z}=\frac{-\omega^2CLR+\mathrm{j}\omega L}{(1-\omega^2CL)+\mathrm{j}\omega CR}$$

求得

$$Z=\left|\tilde{Z}\right|=\omega L\sqrt{\frac{(\omega CR)^2+1}{(1-\omega^2CL)^2+(\omega CR)^2}}$$

$$\varphi=\arctan\frac{-1}{\omega CR}-\arctan\frac{\omega CR}{1-\omega^2CL}=\arctan\frac{(\omega CR)^2+(1-\omega^2CL)}{\omega^3C^2LR}$$

$$\arctan x\pm\arctan y=\arctan\frac{x\pm y}{1\mp xy}$$

三、交流电路的基尔霍夫方程组及其复数形式

基尔霍夫定律只适用于似恒电流下的交流电路。似恒电流就是频率不太高的交变电流，在每一瞬间电路各处电压和电流在足够好的程度上与恒定电流一样满足基尔霍夫定律。

交流电路基尔霍夫第一方程组为 $\sum i(t)=0$

基尔霍夫第二方程组为 $\sum u(t)=\sum e(t)$

写成复数形式 $\sum(\pm\tilde{I})=0$

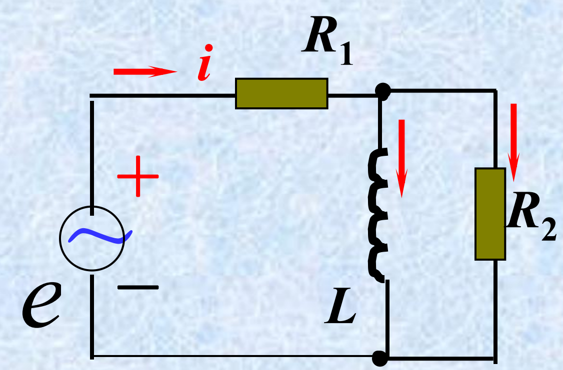
$$\sum(\pm\tilde{I}\tilde{Z})=\sum(\pm\tilde{\varepsilon})$$

列方程组前须先设定各简谐量方向，作为t时刻该量的标定方向。在交流电路中被设定的标定方向应有三套，即电流的标定方向、电势降落的标定方向(即绕行方向)和电动势的标定方向。

列方程的约定：

1. 由节点流出的电流，其复量前写加号，流向节点的电流，其复量前写减号；
2. 若绕行方向与某支路上电流的标定方向一致，该支路的复阻抗前写加号，否则写减号；
3. 若绕行方向与某电源电动势的标定方向一致，该电动势的复量前写加号，否则写减号。

例2： 如右图，R_1、R_2和L已知，且电源电动势为$e(t)=\varepsilon_0\cos\omega t$，求各元件上的电流。



解： 假设电流、电动势和电势降落三套标定方向如图，列出基尔霍夫方程组。列出一个节点电流方程式和两个回路电压方程式的复数形式

$$\left.\begin{aligned}\tilde{I}_1+\tilde{I}_2-\tilde{I}&=0\\ \tilde{I}R_1+\tilde{I}_1\mathrm{j}\omega L&=\tilde{\mathcal{E}}\\ \tilde{I}_2R_2-\tilde{I}_1\mathrm{j}\omega L&=0\end{aligned}\right\}$$

联立方程式整理成标准形式，并解出

$$\tilde{I}_1=\frac{\tilde{\mathcal{E}}R_2}{R_1R_2+\mathrm{j}\omega L(R_1+R_2)}\qquad \tilde{I}_2=\frac{\tilde{\mathcal{E}}\,\mathrm{j}\omega L}{R_1R_2+\mathrm{j}\omega L(R_1+R_2)}$$

$$\tilde{I}=\tilde{I}_1+\tilde{I}_2=\frac{\tilde{\mathcal{E}}(R_2+\mathrm{j}\omega L)}{R_1R_2+\mathrm{j}\omega L(R_1+R_2)}$$

由复电流得电流峰值和相位及电流的瞬时值

$i_1=I_{01}\cos(\omega t-\varphi_1)$,

其中 $$I_{01}=\frac{\varepsilon_0R_2}{\sqrt{R_1{}^2R_2{}^2+\omega^2L^2(R_1+R_2)^2}}$$

$$\varphi_1=\arctan\frac{\omega L(R_1+R_2)}{R_1R_2}$$

$$i_2 = I_{02}\cos(\omega t + \pi/2 - \varphi_1),$$

其中 $$I_{02} = \frac{\varepsilon_0 \omega L}{\sqrt{R_1^2 R_2^2 + \omega^2 L^2 (R_1 + R_2)^2}}$$

$$i = I_0 \cos(\omega t + \varphi_2 - \varphi_1),$$

其中 $$I_0 = \frac{\varepsilon_0 \sqrt{R_2^2 + \omega^2 L^2}}{\sqrt{R_1^2 R_2^2 + \omega^2 L^2 (R_1 + R_2)^2}}$$

$$\varphi_2 = \arctan\frac{\omega L}{R_2}$$