4.3 外微分与麦克斯韦方程

4.3.1 麦克斯韦方程的外微分形式

我们可以用外微分形式重新表达麦克斯韦方程——即方程 (4.22) 和方程 (4.23)。为此定义规范场 1 形式 A，它和规范势 A_μ 的关系是，

$$A = A_\mu dx^\mu. \tag{4.80}$$

对 A 外微分，可得到场强 2 形式 $F = dA$，容易看出

$$F = \partial_\mu A_\nu dx^\mu \wedge dx^\nu = \frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)dx^\mu \wedge dx^\nu = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu. \tag{4.81}$$

因此，2 形式 F 的分量正好是规范场强 $F_{\mu\nu}$。

由于 $F = dA$，所以显然有

$$dF = 0. \tag{4.82}$$

这个方程正是方程 (4.23) 的外微分形式写法，因为它等价于

$$\begin{aligned}
0 =& \frac{1}{2}\partial_\rho F_{\mu\nu}dx^\rho \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu \\
\Rightarrow 0 =& \frac{1}{6}\big(\partial_\rho F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu}\big)dx^\rho \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu \\
\Rightarrow 0 =& \partial_\rho F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu}.
\end{aligned} \tag{4.83}$$

另外，根据第二章中介绍的外微分知识，有

$$*d*F = \big(-\partial^\mu F_{\mu\nu}\big)dx^\nu. \tag{4.84}$$

假设我们进一步定义电流 1 形式

$$J = J_\nu dx^\nu. \tag{4.85}$$

则很容易看出，方程 (4.22) 可以重写为

$$*d*F = J \Leftrightarrow d*F = *J. \tag{4.86}$$

即有

$$d*F = *J, \quad dF = 0, \tag{4.87}$$

这正是用外微分形式表达的麦克斯韦方程组。