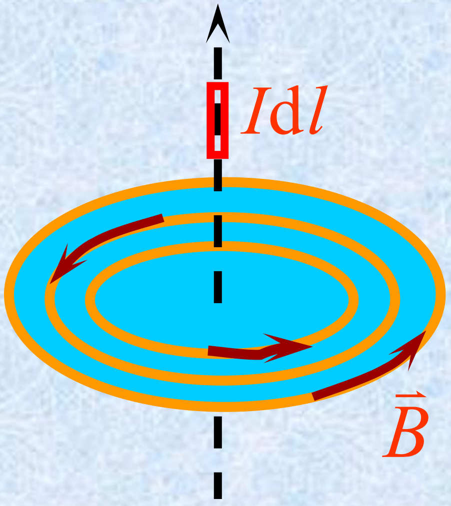
§4-3 磁场的高斯定理和安培环路定理

一、磁场的高斯定理(Gauss' theorem magnetic field)

根据毕萨定律，电流元的磁场以其为轴对称分布，电流元平面内磁感线是头尾相接的闭合同心圆。穿入或穿出闭合曲面的磁感应线的净条数必等于零，任意闭合曲面的Φ都为零。

由叠加原理，整个电流回路的磁场中任意闭合曲面的磁通量必定都等于零，磁场的高斯定理。



$$\oiint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

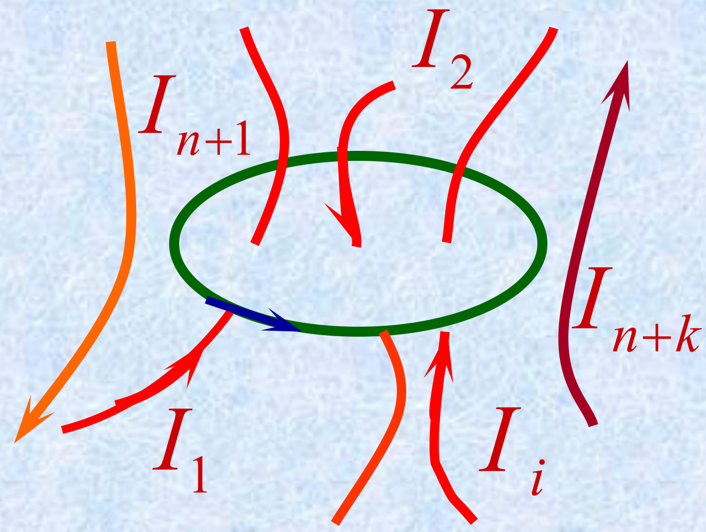
$\nabla \cdot \vec{B} = 0$ 恒定电流磁场是散度为零的场

二、安培环路定理(*Ampere's circulation theorem*)

1. 安培环路定理的表述

恒电流磁场中，磁感应强度沿任意闭合环路的积分等于此环路所包围的电流代数和的μ_0倍。

表达式 $\oint_L \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_i$



符号规定：穿过回路 L 的电流方向与 L 的环绕方向服从右手关系的，I 为正，否则为负。

不穿过回路边界所围面积的电流不计在内。

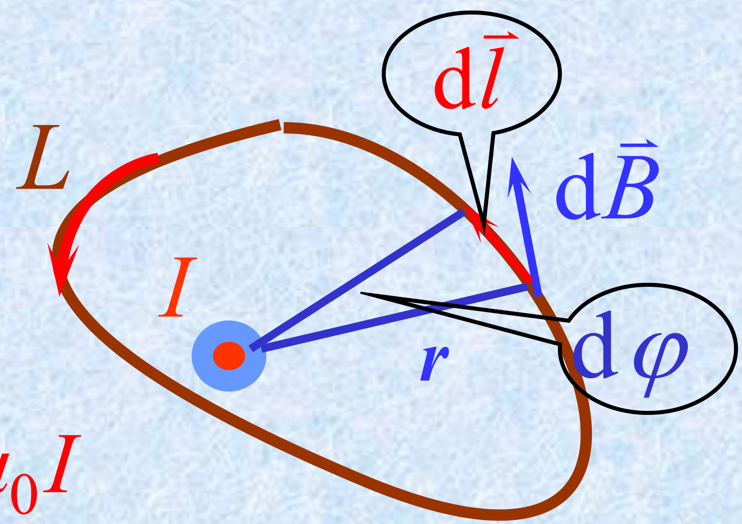
2. 安培环路定理的证明：无限长直电流的磁场

在围绕单根载流导线的垂直平面内的圆回路。

$$\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=Br\mathrm{d}\varphi$$

$$\oint_L \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\oint_L \frac{\mu_0 I}{2\pi r}r\mathrm{d}\varphi=\mu_0 I$$

在围绕单根载流导线的垂直平面内的任一回路。



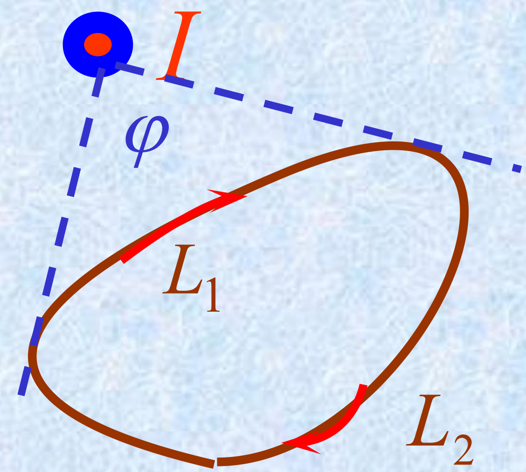
$$\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=Br\mathrm{d}\varphi$$

$$\oint_L \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\oint_L \frac{\mu_0 I}{2\pi r}r\mathrm{d}\varphi=\mu_0 I$$

闭合路径*L*不包围电流，在垂直平面内的任一回路

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{L_1} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{L_2} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi}[\varphi + (-\varphi)] = 0$$



围绕单根载流导线的任一回路 *L*

对*L*每个线元 $\mathrm{d}\vec{l}$ 以过垂直导线平面作参考分解为分量 $\mathrm{d}\vec{l}_{//}$和垂直于该平面的分量 $\mathrm{d}\vec{l}_{\perp}$

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_{L_{//}} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}_{//} + \oint_{L_\perp} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}_{\perp} \Leftarrow \mathrm{d}\vec{l}_{\perp}\cdot \vec{B} = 0$$

$$\therefore \oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_{L_{//}} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}_{//} = \mu_0 I$$

证明步骤同上

围绕多根载流导线的任一回路 L

设$I_1, I_2, \cdots, I_n$电流过回路，$I_{n+1}, I_{n+2} \cdots, I_{n+k}$根电流不穿过回路$L$。令 $\vec{B}_1, \vec{B}_2 \cdots, \vec{B}_{n+k}$ 分别为单根导线产生的磁场

$$\oint_L \vec{B}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I_1 \qquad \oint_L \vec{B}_{n+1} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\oint_L \vec{B}_n \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I_n \qquad \oint_L \vec{B}_{n+k} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

所有电流的总场

$$\oint_L \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_i$$

任意回路

穿过回路的电流

根据矢量分析 $\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \iint_S (\nabla\times\vec{B})\cdot \mathrm{d}\,\vec{S}$

闭合路径包围的电流为电流密度沿所包围的曲面的积分 $\sum_i I_i = \iint_S \vec{j}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$

安培环路定理微分形式 $\nabla\times\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

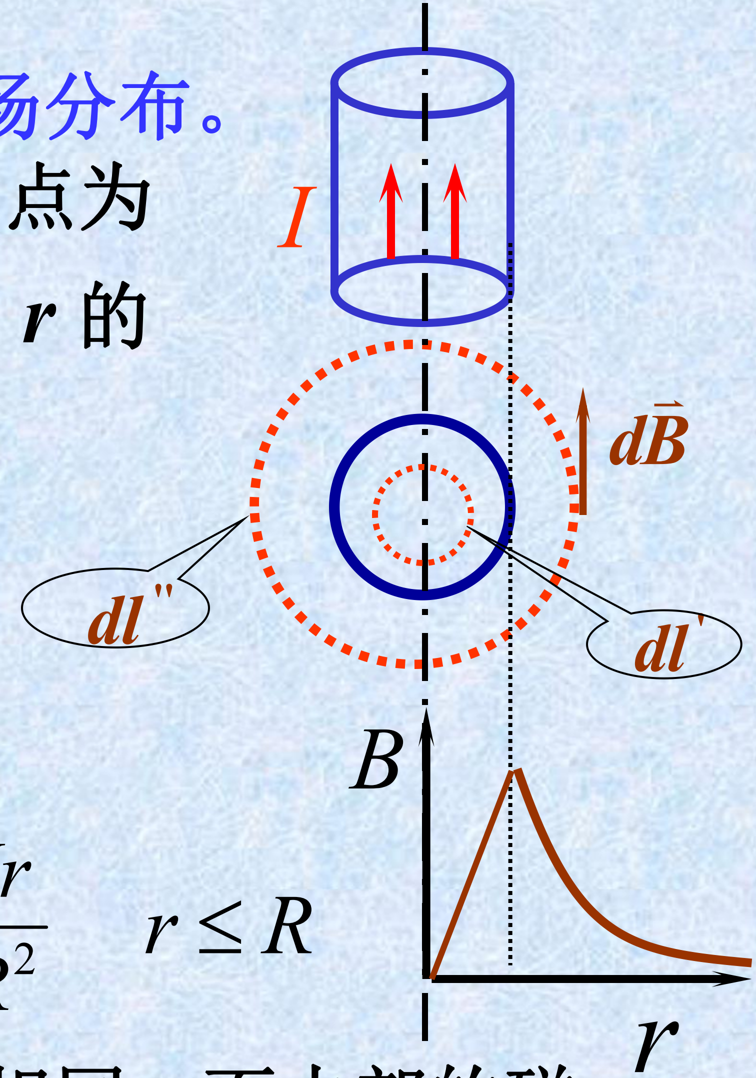
安培环路定理的存在说明磁场不是保守场，不存在标量势函数。这是恒磁场不同于静电场的一个十分重要的性质。

安培环路定理可以用来处理电流分布具有一定对称性的恒磁场问题，就像用高斯定理来处理电荷分布具有一定对称性的静电场问题一样。

3. 安培环路定理的应用

例1：求无限长载流圆柱体磁场分布。

解：圆柱体轴对称，以轴上一点为圆心取垂直轴的平面内半径为 r 的圆为安培环路



$$\because \oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 2\pi r B = \mu_0 \sum I$$

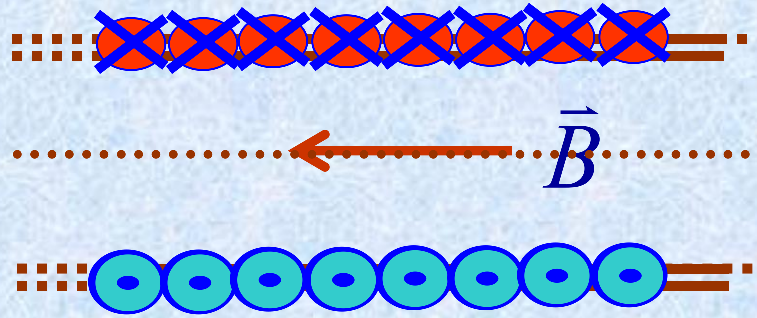
$$\therefore \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \qquad r \geq R$$

$$\therefore \quad \oint_r \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \frac{Ir^2}{R^2} \qquad B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} \qquad r \leq R$$

圆柱外磁场与长直电流磁场相同，而内部的磁场与r成正比；若是柱面电流则内部磁场为零。

例2： 求载流无限长直螺线管内任一点的磁场。

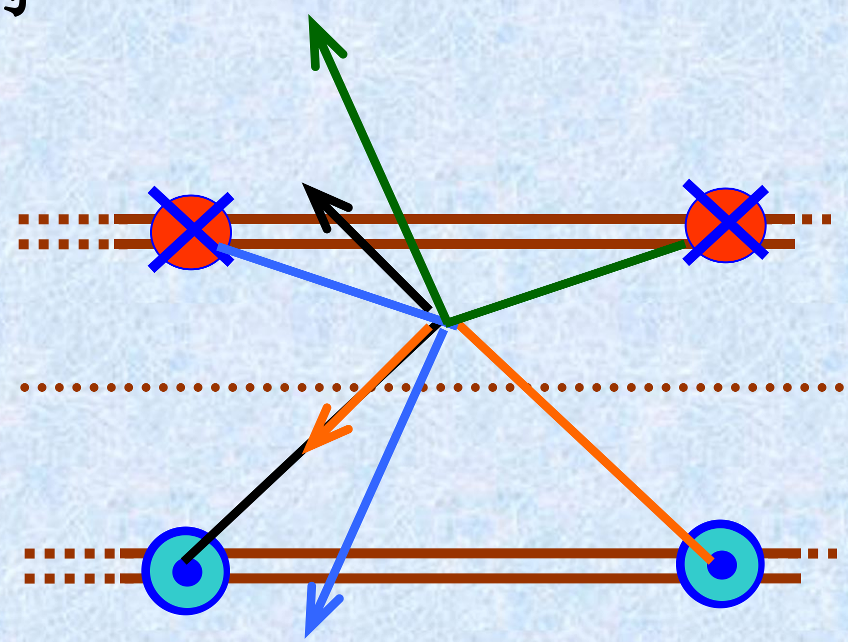
解：一个单位长度上有n匝的无限长直螺线管由于是密绕，每匝视为圆线圈。



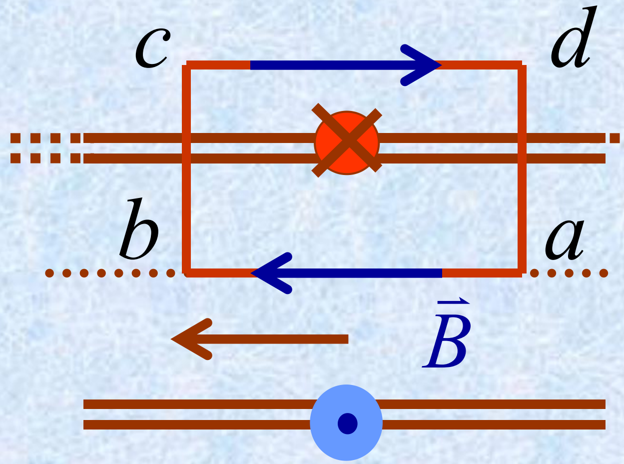
由对称性分析场结构

1. 磁场只有与轴平行的水平分量；

2.因为是无限长，在与轴等距离的平行线上磁感应强度相等。



取 ***L*** 矩形回路, ***ab*** 边在轴上，***cd*** 边与轴平行，另两个边***bc***、***da*** 垂直于轴。



根据安培环路定理：

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_{ab}\vec{B}\cdot d\vec{l} + \int_{bc}\vec{B}\cdot d\vec{l} + \int_{cd}\vec{B}\cdot d\vec{l} + \int_{da}\vec{B}\cdot d\vec{l}$$

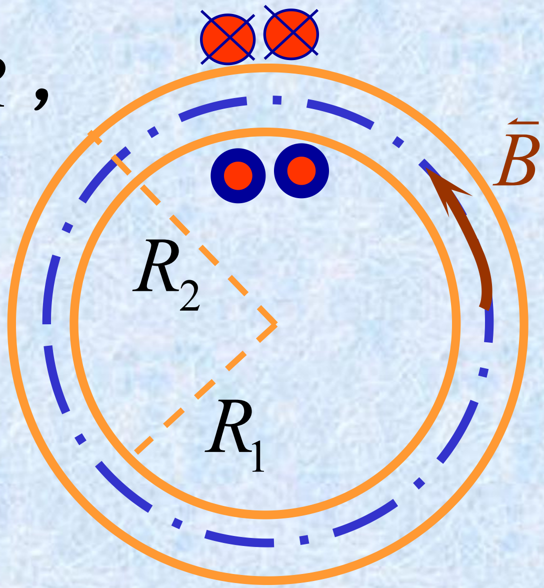
无垂直于轴的磁场分量，管外部磁场趋于零，因此管内为均匀磁场，任一点的磁感应强度为：

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = B\overline{ab} \Rightarrow B\overline{ab} = \mu_0 n\overline{ab}\,I \quad \therefore B = \mu_0 n I$$

其方向与电流满足右手螺旋法则。

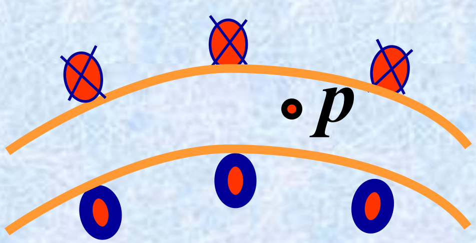
例3： 求载流螺绕环内的磁场。

解：设环很细，环的平均半径为R，总匝数为N，通有电流强度为 I。



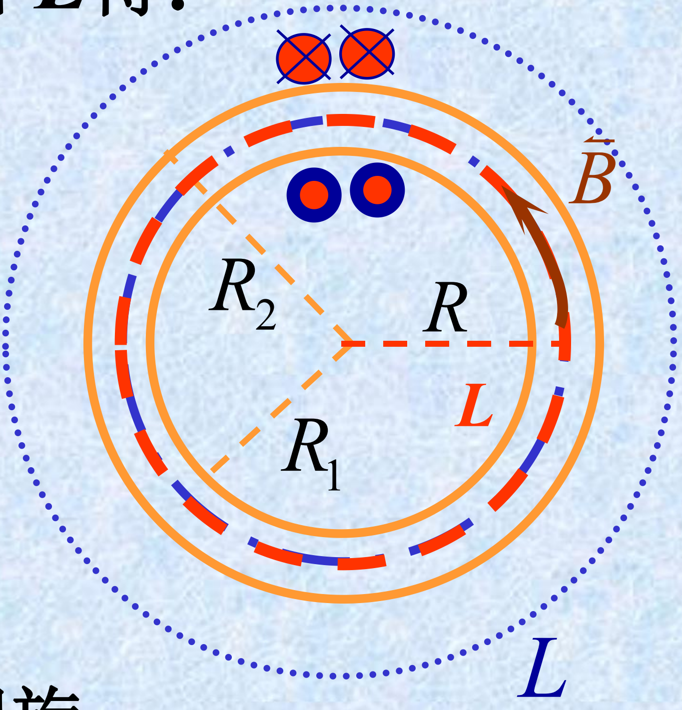
磁场的结构与长直螺旋管类似，环内磁场只能平行于线圈的轴线(即每一个圆线圈过圆心的垂线)

根据对称性知，在与环共轴的圆周上磁感应强度的大小相等，方向沿圆周的切线方向。磁感线是与环共轴的一系列同心圆。



设螺绕环的半径为 R_1, R_2，共有N 匝线圈。

以平均半径 R 作圆为安培回路 L得：



$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = B2\pi R = \mu_0 N\cdot I$$

$$\therefore B = \mu_0 nI \qquad R_1 \le r \le R_2$$

$$N = 2\pi Rn$$

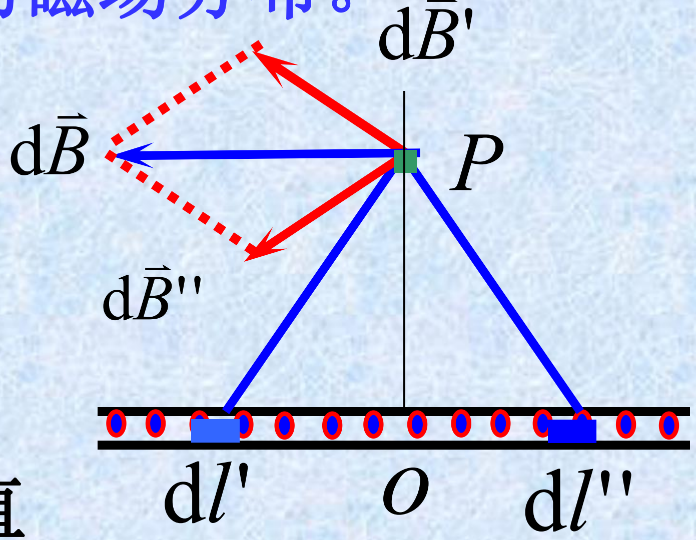
n 为单位长度上的匝数。

其磁场方向与电流满足右手螺旋。

同理可求得在螺绕管外部的磁场为零：

$$\therefore B = 0 \qquad r \le R_1$$

例4：设一无限大导体薄平板垂直于纸面放置，其上有方向垂直于纸面朝外的电流通过，面电流密度为j,求无限大平板电流的磁场分布。



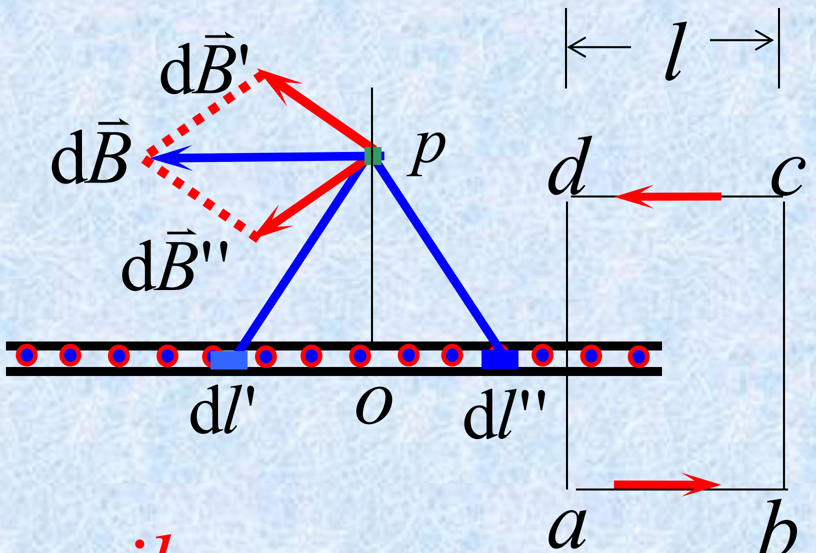
解：可视为无限多平行长直电流的场。因此 P 点的场具有对称性。

做 PO 垂线，取对称的长直电流元，其合磁场方向平行于电流平面。无数对称元在 P点的总磁场方向平行于电流平面。

电流平面无限大，故与电流平面等距离的各点 B 的大小相等。在该平面两侧的磁场方向相反。

作一安培回路如图：

bc和 ***da***两边被电流平面等分。***ab***和***cd*** 与电流平面平行，则有



$$\oint_L \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = B\,2l = \mu_0 jl$$

$$\therefore B = \frac{\mu_0 j}{2}$$ 方向如图所示。

结果：在无限大均匀平面电流的两侧的磁场都为均匀磁场，并且大小相等，但方向相反。