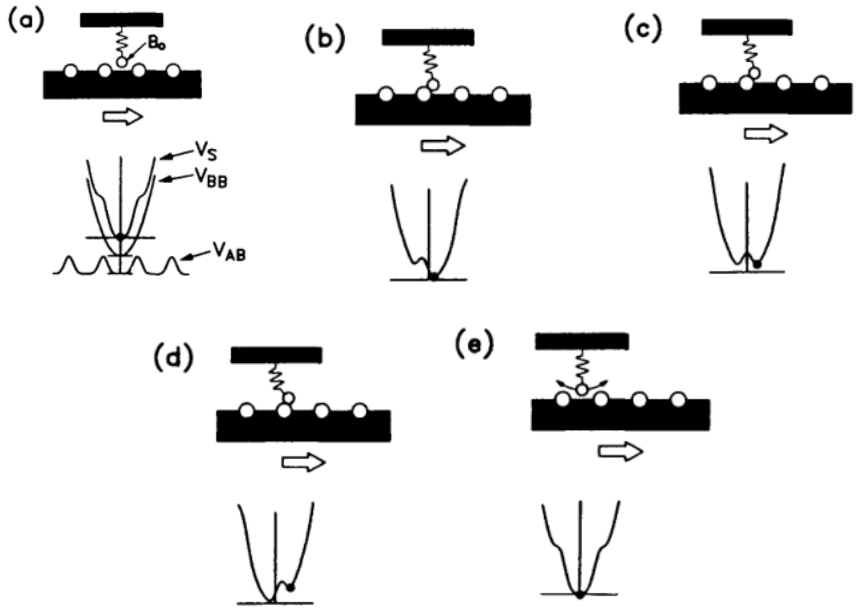

Figure 1.6: 独立振子模型

很显然，在上面的机制中，出现摩擦力的根本原因在于 V_S 出现了两个相互切换的极小，如果 V_S 始终只有一个极小，那就不会有摩擦力。特别的，从图 (1.6) 可以看得很清楚，V_S 有两个极小的这一要求等价于 (c) 图位置时 V_S 有两个极小，这也就是说，等价于在这个位置处 V_S 曲线中间要出现一个极大，即在势能曲线正中间要满足

$$0 > \frac{\partial^2 V_S}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V_{BB}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_{AB}}{\partial x^2} = k_{BB} + \frac{\partial^2 V_{AB}}{\partial x^2}. \tag{1.23}$$

这是独立振子模型中出现摩擦力的基本判据，如果这个条件被破坏，那 A、B 间的摩擦力就可能消失，出现超滑现象。

1.3 微分形式

前面我们用势能对位置的偏导给出了力的定义，这一定义抓住了自然界中基本相互作用力的本质，我们也看到，满足这一定义的力学系统自动是一个哈密顿系统，因此这样的定义对于理解自然界的基本规律来说非常有用。然而，这一定义却不能包括日常生活中的所有力，比如说，它不能包括宏观表现出来的摩擦力。实际上，这样定义出来的力常常也称之为**保守力**，而日常生活中的力有一些是非保守力，摩擦力就是非保守力，那么保守力有什么特性呢？这一节我们来回答这一问题。但本节更重要的一个目的是介绍一种重要的数学方法，称之为微分形式。

1.3.1 微分形式

微分形式是人们在研究多变量微积分的时候引入的，不妨让我们从两变量微积分开始。假设有一个二元函数 $f(x,y)$，我们要研究它的二重积分

$$A=\int\int_D f(x,y)dxdy, \tag{1.24}$$

D 表示积分区域。假设为了计算这个积分的方便，我们要做如下变量代换 (坐标变换)

$$\begin{cases} x=x(x',y') \\ y=y(x',y') \end{cases} \tag{1.25}$$

(x',y') 为另外一组变量 (另外一组坐标)。则坐标变换以后积分 A 就变成

$$A=\int\int f(x,y)|\frac{\partial(x,y)}{\partial(x',y')}|dx'dy', \tag{1.26}$$

式中 $|\frac{\partial(x,y)}{\partial(x',y')}|=\frac{\partial x}{\partial x'}\frac{\partial y}{\partial y'}-\frac{\partial x}{\partial y'}\frac{\partial y}{\partial x'}$ 为坐标变换的雅可比行列式。即是说，坐标变换以后被积函数要多乘上一个雅可比行列式。

关于二元函数积分坐标变换这一结果的证明可以参看任何一本多变量微积分的教材。这里我们想介绍一种巧妙的代数办法来快速导出这一结果。我们将上面二元函数积分的积分微元 $dxdy$ 重写为 $dx\wedge dy$，当这样写的时候我们实际上给 dx, dy 规定了一种巧妙的代数乘法，乘号写作 $\wedge$，通常称之为外积，称相应的代数为外代数，这种代数乘法满足

$$dx\wedge dy=-dy\wedge dx. \tag{1.27}$$

即是说，外积不满足乘法交换律，交换以后会多出一个负号，有时候称之为反交换。由于反交换，我们显然有

$$dx\wedge dx=-dx\wedge dx=0,\quad dy\wedge dy=-dy\wedge dy=0. \tag{1.28}$$

有了这个外代数以后，上面二元函数积分的积分微元在坐标变换下就会有

$$\begin{aligned} dx\wedge dy &= (\frac{\partial x}{\partial x'}dx'+\frac{\partial x}{\partial y'}dy')\wedge(\frac{\partial y}{\partial x'}dx'+\frac{\partial y}{\partial y'}dy') \\ &= \frac{\partial x}{\partial x'}\frac{\partial y}{\partial y'}dx'\wedge dy'+\frac{\partial x}{\partial y'}\frac{\partial y}{\partial x'}dy'\wedge dx' \\ &= (\frac{\partial x}{\partial x'}\frac{\partial y}{\partial y'}-\frac{\partial x}{\partial y'}\frac{\partial y}{\partial x'})dx'\wedge dy' \\ &= |\frac{\partial(x,y)}{\partial(x',y')}|dx'\wedge dy'. \end{aligned} \tag{1.29}$$

上面的推导过程利用了 $dx'\wedge dx'=dy'\wedge dy'=0$。从推导的结果很容易看到，利用外代数，二元函数积分坐标变换多出来的雅可比行列式自动出现了。

以上的结果很容易推广到 n 元函数积分，这时候同样只要将 n 重积分微元 $dx^1dx^2...dx^n$ 理解为外代数 $dx^1\wedge dx^2\wedge...\wedge dx^n$，它们满足

$$dx^i\wedge dx^j=-dx^j\wedge dx^i, \tag{1.30}$$

则坐标变换下多出来的雅可比行列式就会自动出现。我们将被积函数 $f(x^1,x^2,...,x^n)$ 和 $dx^1\wedge dx^2\wedge...\wedge dx^n$ 乘在一起称为一个 n 重微分形式，简称 n 形式，记为 ω,

$$\omega = f(x^1,x^2,...,x^n)dx^1\wedge dx^2\wedge...\wedge dx^n. \tag{1.31}$$

则 n 元函数的 n 重积分实际上就是对 n 形式 ω 的积分，记为

$$A = \int \omega. \tag{1.32}$$

这里有两点值得说明：第一，以后我们往往将多重积分的积分号简单地记为 $\int$，然后根据上下文确定它是几重积分。第二，上面我们是用上指标来区分不同的变量，下指标我们一会儿也要用到，读者需要注意上、下指标的区别。

对于 n 个变量的情形，我们可以推广 n 形式的概念，定义 k-形式 α，即 k 重微分形式 α，$0\leq k\leq n$, α 的定义是

$$\alpha = \frac{1}{k!}\alpha_{i_1 i_2...i_k}dx^{i_1}\wedge dx^{i_2}\wedge...\wedge dx^{i_k}. \tag{1.33}$$

这里每一个指标的取值都是从 1 到 n，而且我们既使用了上指标又使用了下指标，这里就有一个所谓的**求和约定**，即默认对一个表达式中同时作为上指标和下指标出现的那些指标进行求和，从 1 求到 n，而省略掉求和号。我们称 (1.33) 式中的 $\alpha_{i_1 i_2...i_k}$ 为 k 形式 α 的一个分量。由于外代数的反交换性质，很显然 (1.33) 式中的 k 个指标 $i_1,i_2,...,i_k$ 取值必须两两不同，否则对 α 的贡献将为零。特别的，这意味着，n-形式是最高重的非零形式，任何 $k>n$ 的 k 形式都必定为零，因为这时候它的 k 个指标取值必定会出现重复，不可能两两不同。

不妨以 2-形式为例进行进一步的考察。这时候 α 的表达式是 $\alpha=\frac{1}{2}\alpha_{ij}dx^i\wedge dx^j$。如果 α_{ij} 的两个指标对称，即 $\alpha_{ij}=\alpha_{ji}$，则我们就有

$$\alpha_{ij}dx^i\wedge dx^j = \alpha_{ji}dx^i\wedge dx^j = -\alpha_{ji}dx^j\wedge dx^i = -\alpha_{ij}dx^i\wedge dx^j, \tag{1.34}$$

式中第 3 个等号是将求和指标 i,j 重命名了一下 (这不影响求和结果)。即是说，这时候有 $\alpha=-\alpha$，从而 $\alpha=0$。由此可见，对于任何 α_{ij}，其关于 i,j 对称的部分对于 2 形式 α 的贡献都必定为零，有贡献的是 i,j 指标反对称的部分。所以，我们可以自然地要求 α_{ij} 关于指标 i,j 反对称，即满足 $\alpha_{ji}=-\alpha_{ij}$。推广到任意的 k 形式则有，我们可以自然地要求 k 形式的分量 $\alpha_{i_1 i_2...i_k}$ 关于 k 个下指标两两反对称，称之为全反对称。

对于 3 维空间这种只有 3 个变量的情形。仅有 0,1,2,3 四种非零的微分形式。0 形式就是一个 3 元的标量函数 $f(x,y,z)$。由于反对称性，3-形式只有一个独立的非零分量，即 $f(x,y,z)dx\wedge dy\wedge dz$，所以，去掉微元 $dx\wedge dy\wedge dz$，3-形式其实和 0-形式标量函数是等价的。

1-形式可以写成 $a_1dx+a_2dy+a_3dz$，其三个分量 (a_1,a_2,a_3) 刚好构成一个 3 维空间的矢量场，也可以记作 $\mathbf{a}(\mathbf{x})$，所以 3 维空间的 1-形式又可以写作

$$a_1dx+a_2dy+a_3dz = \mathbf{a}(\mathbf{x})\cdot d\mathbf{x}. \tag{1.35}$$

3 维空间的 2-形式可以写成

$$a=\frac{1}{2}a_{ij}(\mathbf{x})dx^i\wedge dx^j=a_{12}dx\wedge dy+a_{23}dy\wedge dz+a_{31}dz\wedge dx. \tag{1.36}$$

很显然，它也只有 3 个独立的非零分量，假设我们记 $a_{12}=b_3$，$a_{23}=b_1$，$a_{31}=b_2$，并且定义映射 $dx\wedge dy\to dz$，$dy\wedge dz\to dx$，$dz\wedge dx\to dy$(注意指标 1,2,3 以及微分 dx,dy,dz 各自的轮换)，则有

$$a_{12}dx\wedge dy+a_{23}dy\wedge dz+a_{31}dz\wedge dx\to b_1dx+b_2dy+b_3dz. \tag{1.37}$$

可见，3 维空间 2 形式和 1 形式之间能够建立 1-1 对映。因此，2-形式的 3 个独立非零分量 $(a_{23},a_{31},a_{12})=(b_1,b_2,b_3)=\mathbf{b}$ 刚好构成一个 3 维空间矢量。

同时，上面这个对映也告诉我们，$(dy\wedge dz,dz\wedge dx,dx\wedge dy)$ 也完全类似于一个 3 维空间的矢量微元，通常将之定义为面积元矢量 $d\mathbf{S}$，

$$d\mathbf{S}=(dy\wedge dz,dz\wedge dx,dx\wedge dy). \tag{1.38}$$

利用面积元矢量，我们就可以将三维空间的 2-形式写成

$$a=\frac{1}{2}a_{ij}(\mathbf{x})dx^i\wedge dx^j=\mathbf{b}\cdot d\mathbf{S}. \tag{1.39}$$

类似于前面 0,3 形式以及 1,2 形式之间的对映关系可以推广到 n 维空间，在 k-形式和 $n-k$ 形式之间建立 1-1 对映关系，这种对映数学家常常称之为霍奇 (Hodge) 对偶。

1.3.2 外微分与斯托克斯公式

对于微分形式，我们可以定义一种很巧妙的微分运算，称作外微分。为了看清楚外微分如何定义，我们不妨先考察 2 维空间 (以 x,y 为坐标) 中的 1 形式 $a=a_xdx+a_ydy$，我们定义 a 的外微分 da 为

$$da=da_x\wedge dx+da_y\wedge dy, \tag{1.40}$$

很显然这样定义的外微分是微分运算和外代数运算的结合体。我们来看一下 da 等于什么

$$\begin{aligned}da&=da_x\wedge dx+da_y\wedge dy\\&=(\partial_xa_xdx+\partial_ya_xdy)\wedge dx+(\partial_xa_ydx+\partial_ya_ydy)\wedge dy\\&=\partial_ya_xdy\wedge dx+\partial_xa_ydx\wedge dy\\&=(\partial_xa_y-\partial_ya_x)dx\wedge dy,\end{aligned} \tag{1.41}$$

式中 $\partial_i=\frac{\partial}{\partial x^i}$。从计算结果很容易看出来，$da$ 只有一个分量，即 $(\partial_xa_y-\partial_ya_x)$，而它刚好是两维矢量 $\mathbf{a}$ 的旋度。

另一方面，我们知道 2 维空间有所谓的格林公式，即

$$\oint_{\partial D}(a_xdx+a_ydy)=\int_D(\partial_xa_y-\partial_ya_x)dxdy, \tag{1.42}$$

式中 ∂D 为 2 维空间中的一条闭合回路，D 是这条回路所包围的区域。现在，利用上面的外微分运算，显然可以将格林公式用微分形式重写成

$$\int_{\partial D} a = \int_D da. \tag{1.43}$$

这里 ∂D 前面的 ∂ 符号不是表示偏导，而是表示取 D 的边界。

下面我们来考察 3 维空间 1 形式 $a = \mathbf{a} \cdot d\mathbf{x} = a_x dx + a_y dy + a_z dz$ 的外微分 da，其定义同样是

$$da = da_x \wedge dx + da_y \wedge dy + da_z \wedge dz. \tag{1.44}$$

经过与两维情形完全类似的计算，我们可以得到

$$da = (\partial_x a_y - \partial_y a_x) dx \wedge dy + (\partial_y a_z - \partial_z a_y) dy \wedge dz + (\partial_z a_x - \partial_x a_z) dz \wedge dx.$$

这当然是一个 3 维空间中的 2 形式，这个计算结果清楚地告诉我们，da 的 3 个独立分量刚好够成矢量 $\mathbf{a}$ 的旋度 $\nabla \times \mathbf{a}$。从而我们就能把刚才对 da 的计算结果重写成

$$da = (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot d\mathbf{S}. \tag{1.45}$$

再一次，我们看到，外微分自动给出了 3 维空间的旋度运算。

另一方面，我们知道，3 维空间有斯托克斯公式，

$$\oint_{\partial D} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{x} = \int_D (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot d\mathbf{S} \tag{1.46}$$

式中 ∂D 表示 3 维空间的一条闭合回路，D 是以这条回路为边界的一张曲面。现在，利用刚才从外微分运算中得到的结果，我们就能将这个公式用微分形式写成

$$\int_{\partial D} a = \int_D da. \tag{1.47}$$

看，形式上这个式子和 2 维格林公式的微分形式完全一样！

下面考察 3 维空间中 2 形式 $a = a_{12} dx \wedge dy + a_{23} dy \wedge dz + a_{31} dz \wedge dx$ 的外微分 da，其定义同样是，

$$da = da_{12} \wedge dx \wedge dy + da_{23} \wedge dy \wedge dz + da_{31} \wedge dz \wedge dx. \tag{1.48}$$

完全类似上面我们进行过了的计算，可以得到

$$da = (\partial_3 a_{12} + \partial_1 a_{23} + \partial_2 a_{31}) dx \wedge dy \wedge dz. \tag{1.49}$$

利用上一小节的定义 $(a_{23}, a_{31}, a_{12}) = (b_1, b_2, b_3) = \mathbf{b}$, 我们可以把这个结果重写成

$$da = (\partial_1 b_1 + \partial_2 b_2 + \partial_3 b_3) dx \wedge dy \wedge dz = (\nabla \cdot \mathbf{b}) dx \wedge dy \wedge dz. \tag{1.50}$$

很显然这是一个 3-形式。从这里我们也看到，外微分也能给出 3 维矢量的散度。

另一方面，我们知道 3 维空间有所谓的高斯定理，它告诉我们

$$\oint_{\partial V} \mathbf{b}\cdot d\mathbf{S} = \int_V (\nabla\cdot\mathbf{b})dV, \tag{1.51}$$

式中 3 维体积元 $dV = dxdydz$，∂V 为 3 维空间中的一个闭合曲面，V 为其包围的 3 维区域。很明显，利用上面关于 2 形式的外微分，以及上一小节的 (1.39) 式，我们可以用 2-形式 a 将高斯定理重写为

$$\int_{\partial V} a = \int_V da. \tag{1.52}$$

又一次，我们得到了与 (1.47) 式形式完全类似的公式。

实际上，我们完全可以将 (1.47) 式和 (1.52) 式综合写成

$$\int_{\partial D} \alpha = \int_D d\alpha, \tag{1.53}$$

式中 α 表示 3 维空间中的一个 $k-1$ 形式，D 表示 3 维空间中一个以 ∂D 为边界的 k 维曲面 (因此 ∂D 是 $k-1$ 维的，而 $d\alpha$ 则是一个 k-形式)。$k=2$ 时，它就是斯托克斯公式，$k=3$ 时它就是高斯定理。可见，利用外微分运算，我们可以将矢量分析中那些著名的公式和定理统一起来。

不仅如此，我们还可以将上面的结果推广到 n 维空间，对于 n 维空间的一个 $k-1$ 形式 $\alpha = \frac{1}{(k-1)!}\alpha_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}} dx^{i_1}\wedge dx^{i_2}\wedge\ldots\wedge dx^{i_{k-1}}$，我们可以一般性地定义其外微分 $d\alpha$ 为

$$d\alpha = \frac{1}{(k-1)!}(\partial_j \alpha_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}})dx^j\wedge dx^{i_1}\wedge dx^{i_2}\wedge\ldots\wedge dx^{i_{k-1}}. \tag{1.54}$$

显然，$d\alpha$ 是一个 k 形式。可以证明 (请参考相关数学书)，我们将依然有 (1.53) 式！和前面的唯一区别是，现在，它不再限于 3 维空间中了，因此 k 也不限于小于等于 3 了，而是 $k\leq n$。正因为如此，人们通常称 (1.53) 式为广义的斯托克斯公式，或者有时候就简称为斯托克斯公式。

外微分有一个非常优雅而重要的性质，即对任何微分形式进行两次外微分，结果恒等于零，通常将这个结果简写成

$$d^2 = 0. \tag{1.55}$$

它的含义就是对于任何 $k-1$ 形式 α, 必有

$$d^2\alpha = d(d\alpha) = 0. \tag{1.56}$$

这个结果的证明非常简单，按照外微分的定义

$$d^2\alpha = \frac{1}{(k-1)!}(\partial_i\partial_j \alpha_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}})dx^i\wedge dx^j\wedge dx^{i_1}\wedge dx^{i_2}\wedge\ldots\wedge dx^{i_{k-1}}. \tag{1.57}$$

显然这是一个 $k+1$ 形式，但是这个 $k+1$ 形式的分量 $\partial_i\partial_j\alpha_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}}$ 关于 i,j 指标恒对称，而不是反对称，按照我们前面的分析，这就意味着这个 $k+1$ 形式等于零，从而就完成了证明。

下面介绍两个常用概念。首先，一个微分形式 α，如果它的外微分等于零，即 $d\alpha=0$，我们就称它为闭形式。其次，一个微分形式 α，如果它是另一个微分形式 β 的外微分，即有 $\alpha=d\beta$，我们就称这样的 α 为一个恰当形式。根据性质 (1.55)，很显然，任何恰当形式都必定是闭形式！反过来，闭形式却不一定是恰当形式，闭形式什么时候是恰当形式什么时候不是，这往往和空间的拓扑有关系，是所谓的 de Rahm 上同调研究的内容，不过，这超出本书的范围了。

1.3.3 保守力的特性

微分形式的语言在我们后面的章节中还有重要的应用，不过现在还是让我们用它来研究一下保守力的特性吧。

让我们先回顾一下前面给出的保守力的定义

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{x}_i = -dV. \tag{1.58}$$

为了将这个定义写得更漂亮一点，我们引入指标 $\mu=1,2,3,...,3N$，令它的前 3 个分量表示第 1 个粒子的三个直角坐标分量，次 3 个分量表示第 2 个粒子的三个直角坐标分量，依次类推，直到最后 3 个分量代表第 N 个粒子的三个直角坐标分量。从而我们可以将上面这个保守力的定义式重写成

$$F_\mu dx^\mu = -dV(x^1,...,x^{3N}). \tag{1.59}$$

当然，在这个式子中我们用了求和约定。我们可以称这样定义出来的 $F_\mu dx^\mu$ 为力 1 形式，简记为 F, 即 $F=F_\mu dx^\mu$, 则上面这个保守力的定义式告诉了我们，保守力 1 形式是一个恰当形式，满足

$$F=-dV, \tag{1.60}$$

势能 V 是一个标量函数，也就是 0 形式，也称作势能 0 形式。则由恰当形式必定是闭形式的数学定理，我们立马知道

$$dF=0. \tag{1.61}$$

根据外微分的定义，我们很容易计算 dF(下面的 $\partial_\mu=\frac{\partial}{\partial x^\mu}$)，

$$dF=(\partial_\mu F_\nu)dx^\mu\wedge dx^\nu=\Big[\frac{1}{2}(\partial_\mu F_\nu-\partial_\nu F_\mu)+\frac{1}{2}(\partial_\mu F_\nu+\partial_\nu F_\mu)\Big]dx^\mu\wedge dx^\nu. \tag{1.62}$$

根据微分形式分量表达的指标对称部分没有贡献，我们立马有

$$dF=\frac{1}{2}(\partial_\mu F_\nu-\partial_\nu F_\mu)dx^\mu\wedge dx^\nu. \tag{1.63}$$

因此 $dF=0$ 就等价于

$$\partial_\mu F_\nu-\partial_\nu F_\mu=0. \tag{1.64}$$

特别的，对于单个质点的情形 (指标只能取 1,2,3)，读者容易知道，上面这个结果其实就是力矢量 $\mathbf{F}$ 的旋度等于零，即

$$\nabla\times\mathbf{F}=0. \tag{1.65}$$

另一方面，注意到力 1 形式 F 是 $3N$ 维坐标空间的 1 形式，我们可以在 $3N$ 维坐标空间取一条闭合回路 ∂D, ∂D 是 $3N$ 维坐标空间中某个 2 维曲面 D 的边界，则由斯托克斯公式，我们有

$$\int_{\partial D}F=\int_D dF=0. \tag{1.66}$$

即是说，保守力 1 形式在坐标空间任何闭合回路上的积分都等于零。人们通常称力 1 形式在某条路径上的积分为**功**，因此这个结果就相当于说，保守力在任何闭合回路上所做的功恒为零!

由此我们容易知道，摩擦力必定不是保守力，因为在摩擦力的作用下将粒子沿着闭合回路运动一圈，摩擦力是要做非零的负功的，正是这个负功将机械能耗散为了热量。