Gleichungen

Lösungsmenge

> 💡 Die Lösungsmenge L einer (Un-)Gleichung enthält alle Werte der Variablen, welche die (Un-)Gleichung erfüllen.

Beispiele

$$
\begin{aligned}
x+4=7 &\quad\Rightarrow\quad L=\{3\} \\
x^2=4 &\quad\Rightarrow\quad L=\{-2;2\} \\
x+3>8 &\quad\Rightarrow\quad L=\;]5;\infty[\\
\sin(x)=1 &\quad\Rightarrow\quad L=\{x\in\mathbb{R}\mid x=\frac{1}{2}\pi+k\cdot 2\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}
\end{aligned}
$$

Satz vom Nullprodukt

> 💡 Ein Produkt ist 0, wenn mindestens einer der Faktoren 0 ist.

Beispiel

$$
(x-5)\cdot(x^2-x+4)=0 \quad\Rightarrow\quad \begin{array}{l} x-5=0 \\ x^2-x+4=0 \end{array} \quad\Rightarrow\quad \begin{array}{l} x_1=5 \\ \text{keine Lösung} \end{array}
$$

(spezielle) kubische Gleichungen

Beispiele

$$
\begin{aligned}
x^3+27&=0 \\
x^3&=-27 \\
x&=-\sqrt[3]{27} \\
x&=-3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
4x^3-12x^2-40x&=0 \\
4x\cdot(x^2-3x-10)&=0 \\
\Rightarrow x_1=0 \quad x_2=5 \quad x_3&=-2
\end{aligned}
$$

Nicht (analytisch) Lösbar

$$
x^3-7x^2+5=0
$$

Biquadratische Gleichungen

Substitution

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$
Substitution: $x^2 = z$
$$\Rightarrow z^2 - 13z + 36 = 0$$
$$\Rightarrow z_1 = 9 \quad z_2 = 4$$

Rücksubstitution

$$\begin{aligned} x^2 &= z_1 \\ x^2 &= 9 \quad |\sqrt{} \\ \Rightarrow x_1 &= 3 \\ x_2 &= -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 &= z_2 \\ x^2 &= 4 \quad |\sqrt{} \\ \Rightarrow x_3 &= 2 \\ x_4 &= -2 \end{aligned}$$

Bruchgleichungen

Beispiele

$$\begin{aligned} \frac{x+5}{x-3} - 3 &= 0 \quad |\cdot(x-3) \\ 5 + x - 3\cdot(x-3) &= 0 \\ &\dots \\ x &= 7 \checkmark \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2} + + \frac{5}{x} &= 0 \qquad |\cdot x^2 \\ 1 + 5x &= 0 \qquad |-1 \quad |:5 \\ x &= -\frac{1}{5} \checkmark \end{aligned}$$

! Probe machen

Wurzelgleichungen

Beispiel

$$\begin{aligned} \sqrt{3x-5} + 4 &= 2x \qquad\qquad |-4 \quad |^2 \\ 3x - 5 &= (2x-4)^2 \\ &\dots \\ x_1 = 3 \checkmark \quad x_2 &= \frac{7}{4} \times \end{aligned}$$

! Probe machen

Exponentialgleichungen

Allgemein

$$a^x = c$$
$$x = \log_a(c)$$

$$b^0 = 1, \quad b \neq 0$$

$$\log_e(x) = \ln(x)$$

Beispiele

$$2^x = 64$$
$$x = \log_2(64)$$
$$x = 6$$

$$4^x = 42$$
$$x = \log_4(42)$$
$$x \approx 2.696$$

$$e^{2x} - 3e^x = 0$$
$$(e^x)^2 - 3e^x = 0$$
$$e^x \cdot (e^x - 3) = 0$$
$$\Rightarrow x = \ln(3)$$

Betragsgleichungen

Beispiele

$$|2x - 5| = 3 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2x - 5 = 3 \\ -(2x - 5) = 3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

$$|x - 4| = 2x - 11 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x - 4 = 2x - 11 \\ x - 4 = -(2x - 11) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 7 \checkmark \\ x_2 = 5 \times \end{cases}$$

! Bei Betragsgleichungen mit einer Variablen außerhalb der Betragsstriche: Probe machen.

Ungleichungen

💡 Lässt sich wie eine normale Gleichung lösen, mit der Ausnahme, dass beim Multiplizieren/Dividieren mit einer negativen Zahl oder bei Logarithmen mit einer Basis kleiner als 1 das Ungleichheitszeichen umgedreht wird.

Beispiele

$$\begin{aligned} 2x+5 &> 1 \quad |-5 \\ 2x &> -4 \quad |:2 \\ x &> -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4-x &\leq 8 \quad |-4 \\ -x &\leq 4 \quad |\cdot(-1) \\ x &\geq -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1-\left(\frac{5}{6}\right)^x &> 0{,}9 && |-1 \\ -\left(\frac{5}{6}\right)^x &> -0{,}1 && |\cdot(-1) \\ \left(\frac{5}{6}\right)^x &< 0{,}1 && |\log_{\frac{5}{6}} \\ x &> \log_{\frac{5}{6}}(0{,}1) \\ x &\approx 12{,}63 \end{aligned}$$

$\frac{5}{6} < 1$, deshalb '<' umdrehen

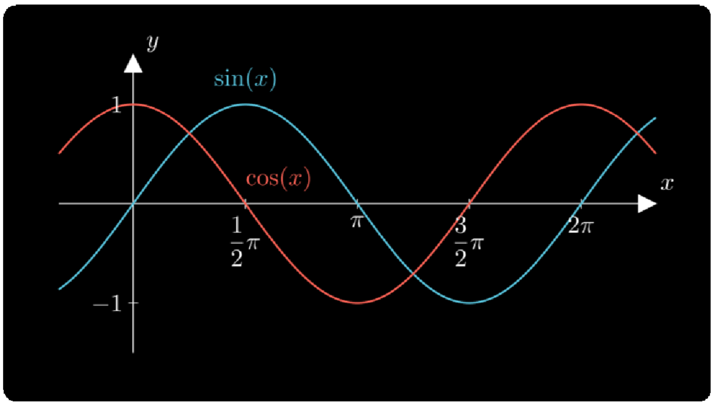
$$\begin{aligned} x^2+x-6 &< 0 \\ \Rightarrow x^2+x-6 &= 0 \\ \Rightarrow x_1 = -3 &\quad x_2 = 2 \end{aligned}$$

Parabel nach oben geöffnet
mit Nullstellen -3 und 2:
$\Rightarrow L =]-3;2[$

Trigonometrische Gleichungen

Beispiele

$$\begin{aligned} \sin(x) + 2 &= 1\,, \quad x \in [0; 4\pi] \\ \sin(x) &= -1 \\ x &= \sin^{-1}(-1) \\ x &= \frac{3}{2}\pi \\ \Rightarrow L &= \{\frac{3}{2}\pi; \frac{7}{2}\pi\} \end{aligned}$$



$$\sin(\pi x) = -1\,, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{gathered} \text{Substitution} \\ u = \pi x \\ \Rightarrow \sin(u) = -1 \\ \Rightarrow u = \frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi, \quad k\, in \mathbb{Z} \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} \text{Rücksubstitution} \\ \pi x = \frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi \quad |: \pi \\ x = \frac{3}{2} + 2k \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} \Rightarrow L = \{x\, in \mathbb{R} \mid x = \frac{3}{2} + 2k, \; k\, in \mathbb{Z}\} \\ \Rightarrow \text{unendlich viele Lösungen } (\frac{3}{2}; \frac{7}{2}; -\frac{1}{2}, \ldots) \end{gathered}$$

⚠️ Bei Trigonometrischen Funktionen auf den Definitionsbereich achten.

Ich weiß, das zweite Beispiel kann erstmal überwältigend sein, aber versucht, es zu verstehen. Es kann sein, dass im Abi eine Aufgabe mit einer "komplizierten" Lösungsmenge vorkommt.