Stochastik

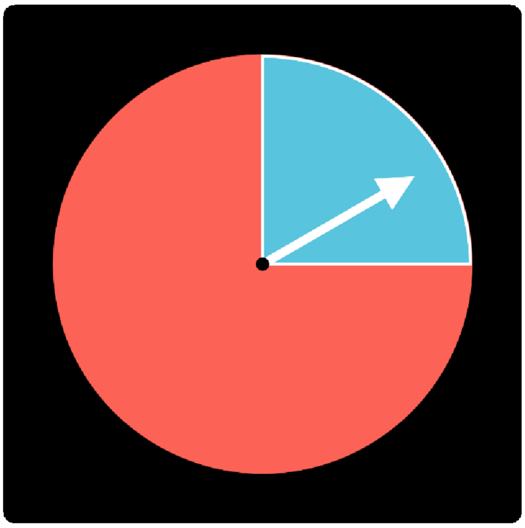
Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Zufallsexperiment

z.B.: „Das Glücksrad wird zweimal Gedreht.“

Ergebnis

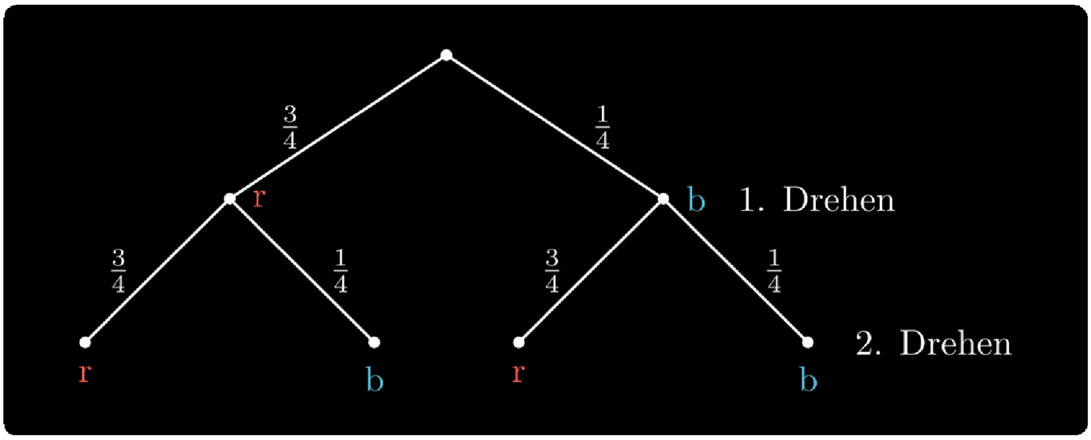
z.B.: „zuerst Rot, dann Blau“



Ergebnismenge

$S = \{rr, rb, br, bb\}$

Baumdiagramm



Ereignis

z.B.: „mindestens einmal blau drehen“

Ereignismenge

$E = \{rb, br, bb\}$

Gegenereignis

$\overline{E}$: „nie blau drehen“ $\overline{E} = \{rr\}$

$P(E) = 1 - P(\overline{E}) = 1 - P(rr) = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$

Produktregel

$P(rb) = P(r) \cdot P(b) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$

Ziehen mit Zurücklegen

Werden aus einer Urne mit n verschiedene Kugeln, k Stück herausgezogen, nach jedem Zug wieder zurückgelegt und in ihrer Reihenfolge notiert, so kann die Anzahl an verschiedenen **Reihenfolgen** berechnet werden mit:

$$n^k$$

Beispiel

Ein Würfel mit 6 Seiten wird 2 mal gewürfelt. Wie viele mögliche Zahlenpaare gibt es?

Lösung:

$$6^2 = 36$$

⇒ Es gibt insgesamt 36 verschiedene Zahlenpaare.

Ziehen ohne Zurücklegen

Werden aus einer Urne mit n verschiedenen Kugeln, k Stück nacheinander herausgezogen ohne diese zurückzulegen und in ihrer Reihenfolge notiert, so kann die Anzahl an verschiedenen **Reihenfolgen** berechnet werden mit:

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

Beispiel

Ein Wettrennen hat 8 Teilnehmer. Für die schnellsten 3 gibt es Preise. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Preise zu vergeben?

Lösung:

$$\frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$$

⇒ Es gibt 336 verschieden Möglichkeiten die Preise zu vergeben

Ziehen mit einem Griff

Werden aus einer Urne mit n verschiedenen Kugeln, k Stück mit einem Griff (gleichzeitig) herausgezogen, so kann man die Anzahl verschiedener **Möglichkeiten** berechnet werden mit:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

Taschenrechner: $n \text{ nCr } k$

Spezialfälle

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \qquad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

Beispiel

Ein Verein hat 10 Mitglieder. Eine Mannschaft besteht aus 4 Spielern. Wie viele mögliche Mannschaften hat der Verein?

Lösung:

$$\binom{10}{4} = \frac{10!}{(10-4)! \cdot 4!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cancel{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}}{\cancel{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$$

⇒ Der Verein hat 210 mögliche Mannschaften

Ein Trick zum berechnen per Hand ist es, die k größten Zahlen aus $n!$ miteinander zu multiplizieren und durch $k!$ zu teilen. In dem Beispiel oben kommt man dadurch schnell auf den letzten Term mit je 4 Faktoren im Zähler und Nenner. Diese kann man dann oft noch weiter kürzen.

Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung

Für eine Zufallsvariable X, die die Werte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ annehmen kann, definiert man den **Erwartungswert** μ von X als:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_1)$$

$E(X)$ gibt an, welcher Wert für X im Durchschnitt auf lange Sicht zu erwarten ist.

Ein Spiel heißt **fair**, wenn der Gewinn = 0 ist.

Die **Varianz**

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 \cdot P(X = x_i)$$

und die **Standardabweichung**

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$$

sind Maße für die durchschnittliche Abweichung von X zum Erwartungswert.

Beispiel

Siehe Beispiele **Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung**.

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Für zwei Ereignisse A und B mit $P(A) \neq 0$ ist die **bedingte Wahrscheinlichkeit**, die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von B unter der Bedingung, dass A schon eingetreten ist.

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Beispiel

U: „Einkauf ist unter 10€." K: „Einkauf wird mit Karte bezahlt."

$$P(U) = 0{,}4 \quad P(U \cap K) = 0{,}3$$

$$P_U(K) = \frac{P(U \cap K)}{P(U)} = \frac{0{,}3}{0{,}4} = 0{,}75$$

$\Rightarrow$ Es werden 75% der Einkäufe unter 10€ mit Karte bezahlt.

Stochastische Unabhängigkeit

Definition

> 💡 Zwei Ereignisse A und B heißen **stochastisch unabhängig**, wenn:
>
> $$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Satz

> 💡 Zwei Ereignisse A und B sind genau dann stochastisch unabhängig, wenn:
>
> $$P_A(B) = P(B)$$
>
> Denn:
>
> $$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\cancel{P(A)} \cdot P(B)}{\cancel{P(A)}} = P(B)$$

Beispiel

In einem Betrieb hat 570 Mitarbeiter. Davon fahren $\frac{2}{3}$ mit einem Pkw zur Arbeit. Von den 190 auswärtigen Mitarbeitern kommen 177 mit einem Pkw. Untersuche F: „Fährt mit einem Pkw" und A: „Kommt von Auswärts" auf stochastische Unabhängigkeit.

$$\begin{aligned} P(F) &= \frac{2}{3} \\ P(A) &= \frac{190}{570} = \frac{1}{3} \\ P(F \cap A) &= \frac{177}{570} \approx 0{,}311 \end{aligned}$$

$$P(F) \cdot P(A) = \tfrac{2}{9} \neq P(F \cap A)$$
$$\Rightarrow F \text{ und } A \text{ sind stochastisch abhänigig}$$

Bernoulli-Experiment und Bernoulli-Kette

> 💡 Ein Zufallsversuch mit genau zwei möglichen Ergebnissen heißt **Bernoulli-Experiment**.
> Wenn man ein Bernoulli-Experiment n-mal wiederholt, sodass die Durchführungen voneinander unabhängig sind, so spricht man von einer **Bernoulli-Kette** der Länge n.

Beispiel

5-mal eine Münze werfen ist eine Bernoulli-Kette der Länge 5, da es genau zwei Ergebnisse gibt (Kopf oder Zahl) und ein einzelner Münzwurf keinen Einfluss auf die anderen Münzwürfe hat.

Die Formel von Bernoulli

Für eine Bernoulli-Kette der Länge n und Trefferwahrscheinlichkeit p gilt für die Anzahl an Treffern k:

$$P_p^k(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Man schreibt auch $B_{n;p}(k)$ und sagt X ist **binomialverteilt**.

Für den Erwartungswert $E(X)$ gilt:

$$E(X) = \mu = n \cdot p$$

Beispiel

10-facher Münzwurf

$$n = 10 \quad p = \frac{1}{2} \quad X\text{: „Anzahl Zahl (binomialverteilt)“}$$

genau 5 mal Zahl

$$\underbrace{P_{\frac{1}{2}}^{10}(X=5)}_{\text{WTR: binomialpdf}} = \binom{10}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10-5} \approx 0{,}246$$

höchstens 5 mal Zahl

$$\begin{aligned}\overbrace{P_{\frac{1}{2}}^{10}(X \leq 5)}^{\text{WTR: binomialcdf}} &= P_{\frac{1}{2}}^{10}(X=0) + P_{\frac{1}{2}}^{10}(X=1) + P_{\frac{1}{2}}^{10}(X=2) \\ &+ P_{\frac{1}{2}}^{10}(X=3) + P_{\frac{1}{2}}^{10}(X=4) + P_{\frac{1}{2}}^{10}(X=5) \\ &= \sum_{k=0}^{5} P_{\frac{1}{2}}^{10}(X=k) \approx 0{,}623\end{aligned}$$

Umformungen

$$P_p^n(X \geq a) = 1 - P_p^n(X \leq a-1)$$
$$P_p^n(b \leq X \leq c) = P_p^n(X \leq c) - P_p^n(X \leq b-1)$$

Standardabweichung einer Binomialverteilung

X ist eine binomialverteilte Zufallsgröße.

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$$
$$\operatorname{Var}(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$$

Beispiel

$$n = 10 \quad p = 0{,}4$$
$$\sigma = \sqrt{10 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6} \approx 1{,}55$$

Zweiseitiger Hypothesentest

Beispiel

💡 Es soll eine Münze überprüft werden:
Nullhypothese $H_0 : p = \frac{1}{2}$ (Münze ist in Ordnung)
Gegenhypothese (Alternative) $H_1 : p \neq \frac{1}{2}$ (Münze ist verbogen)
Signifikanzniveau (maximale Irrtumswahrscheinlichkeit) $\hat{\alpha} = 5\%$
Gesuchte Grenzen g_1 und g_2:

$$P(x \leq g_1) \leq \frac{\hat{\alpha}}{2} = 2{,}5\% P(x \geq g_2) \geq \frac{\hat{\alpha}}{2} = 2{,}5\%$$

g_1 soll dabei möglichst groß und g_2 möglichst klein sein.

$n = 50$; X: Anzahl Kopf (binomialverteilt)

Tabellenkalkulation

Linksseitiger Test:
g_1 ist die größtmögliche Zahl mit $P(X \leq g_1) \leq 2{,}5\%$.

g_1	$P_{\frac{1}{2}}^{50}(X \leq g_1)$	
17	**0,016**	**kleiner als 2,5%**
18	0,032	größer als 2,5%

$\Rightarrow g_1 = 17$

Rechtsseitiger Test:
g_2 ist die kleinstmöglichste Zahl mit $P(X \geq g_2) \leq 2{,}5\%$
bzw. die kleinstmöglichste Zahl mit $P(X \leq g_2 - 1) \geq 97{,}5\%$

$g_2 - 1$	$P_{\frac{1}{2}}^{50}(X \leq g_2 - 1)$	
31	0,968	kleiner als 97,5%
32	**0,984**	**größer als 97,5%**

$\Rightarrow g_2 = 32 + 1 = 33$

💡 **Ablehnungsbereich der Nullhypothese**: {0; 1; ...; 17} und {33; ...; 50} Die Nullhypothese wird verworfen, wenn maximal 17 oder mindestens 33 mal Kopf geworfen wird (Münze ist verbogen).
Annahmebereich der Nullhypothese: {18; ...; 32} Die Nullhypothese wird angenommen, wenn mindestens 18 und höchstens 32 mal Kopf geworfen wird (Münze ist in Ordnung).
Irrtumswahrscheinlichkeit:Die Wahrscheinlichkeit, dass die man denkt, dass die Münze verbogen ist, obwohl sie in Ordnung ist. Sie beträgt:

$$\alpha = P_{\frac{1}{2}}^{50}(X \leq \underbrace{17}_{g_1}) + P_{\frac{1}{2}}^{50}(X \geq \underbrace{33}_{g_2}) \approx 3{,}3\% \leq \hat{\alpha}$$

Einseitiger Hypothesentest

Stichprobenumfang n und Signifikanzniveau $\hat{\alpha}$ werden festgelegt.

Linksseitiger Test

Nullhypothese: $H_0 : p \geq p_0$

Gegenhypothese: $H_1 : p < p_0$

Ablehnungsbereich: $A = \{0, 1, .., g\}$, wobei g die größte Natürliche Zahl mit $P^n_{p_0}(X \leq g) \leq \hat{\alpha}$
ist.

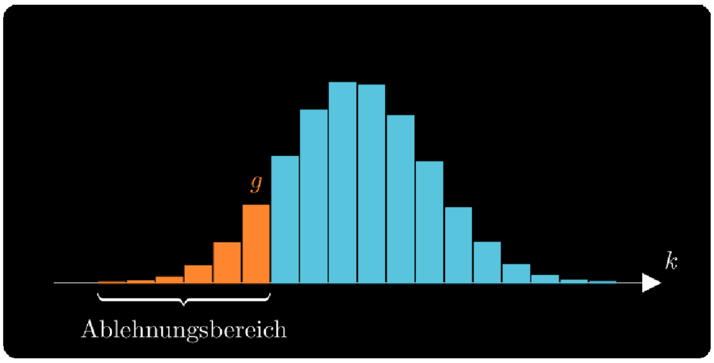
Rechtsseitiger Test

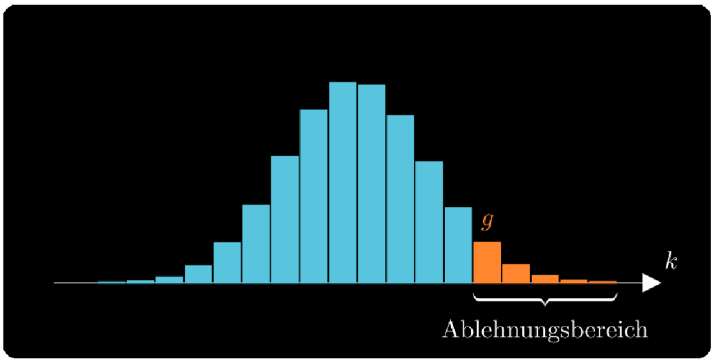
Nullhypothese: $H_0 : p \leq p_0$

Gegenhypothese: $H_1 : p > p_0$

Ablehnungsbereich: $A = \{g, g+1, \dots, n\}$, wobei g die kleinste natürliche Zahl mit $P^n_{p_0}(X \geq g) = 1 - P^n_{p_0}(X \leq g-1) \leq \hat{\alpha}$
ist.

Man führt eine Stichprobe vom Umfang n durch.
Entscheidungsregel:
Wenn das Stichprobenergebnis im Ablehnungsbereich liegt, wird H_0 verworfen. Ansonsten wird H_0 angenommen.





Fehler 1. und 2. Art

	H_0 **ist wahr**	H_0 **ist falsch**
H_0 **wird verworfen**	Fehler 1. Art	✓
H_0 **wird nicht verworfen**	Fehler 1. Art	✓
	✓	Fehler 2. Art

- Die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art ist die Irrtumswahrscheinlichkeit α.
- Die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art ist β und lässt sich nur berechnen, wenn die echte Trefferwahrscheinlichkeit gegeben ist.
  - Wenn man n vergrößert und $\hat{\alpha}$ beibehält, dann wird β kleiner
  - Wenn man n beibehält und $\hat{\alpha}$ verkleinert, dann wird β größer
    - α kann verkleinert werden, indem man $\hat{\alpha}$ verkleinert
    - β kann verkleinert werden, indem man n vergrößert

In anderen Worten: Der Fehler 1. Art ist, wenn man im Ablehnungsbereich landet, obwohl die Nullhypothese wahr ist. Der Fehler 2. Art ist, wenn man nicht im Ablehnungsbereich landet, obwohl die Nullhypothese falsch ist.

Beispiel

Angenommen, eine Firma testet, ob eine neue Batterie eine durchschnittliche Laufzeit von **mindestens 10 Stunden** hat.

H_0: Die Batterie hält **weniger** als 10 Stunden.
H_1: Die Batterie hält **mindestens** 10 Stunden.

Fehler 1. Art
Der Test ergibt, dass die Laufzeit **mindestens** 10 Stunden beträgt (H_0 wird verworfen), obwohl sie in Wirklichkeit **weniger als** 10 Stunden beträgt (H_0 ist wahr).
→ Die Firma akzeptiert schlechte Batterien.

Fehler 2.Art
Der Test ergibt, dass die Laufzeit **weniger als** 10 Stunden beträgt (H_0 wird angenommen), obwohl sie in Wirklichkeit **mindestens** 10 Stunden beträgt (H_0 ist falsch).
→ Die Firma wirft gute Batterien weg.

Berechnen von α und β

$$n = 50 \quad \hat{\alpha} = 5\%$$
$$H_0 = p \geq 0{,}6 \quad H_1 = p < 0{,}6$$

$$P^{50}_{0,6}(X \leq g) \leq 5\%$$
$$\Rightarrow g = 23$$

Um β zu berechnen brauchen wir die tatsächliche
Wahrscheinlichkeit. Ich gebe sie hier als $p = 0{,}55$ vor.

$$\alpha = P^{50}_{0,6}(X \leq 23) \approx 0{,}0314$$
$$\beta = P^{50}_{\color{red}{0,55}}(X \color{red}{>} 23) = 1 - P^{50}_{0,55}(X \leq 23) \approx 0{,}872$$

Wahl der Nullhypothese

Bei einem Hypothesentest wird der Fehler, dass die Nullhypothese H_0 aufgrund des Stichprobenergebnisses fälschlicherweise verworfen wird, kontrolliert
Seine Wahrscheinlichkeit ist stets **höchstens** so groß wie das Signifikanzniveau $\hat{\alpha}$.

1. Faustregel

Man wählt die Nullhypothese so, dass der Fehler 1. Art derjenige ist, den man vermeiden möchte.

2. Faustregel

Man wählt die Behauptung, die statistisch gestützt werden soll, als Alternative.

Beispiel

Eine Zeitung behauptet, dass sich maximal 85% der Autofahrer angurten. Ein Autoclub bezweifelt dies.

Aus der 2. Faustregel folgt:
Der Autoclub möchte zeigen, dass sich mehr als 85% angurten. Daher wählt man $H_1 : p > 0{,}85$. Daraus folgt $H_0 : p \leq 0{,}85$.

Dadurch ist die 1. Faustregel auch erfüllt:
Der schlimmere Fehler ist der 1. Art, da der Autoclub der Zeitung vorwirft falsche Informationen zu verbreiten. Beim Fehler 2. Art würde im schlimmsten Fall unnötigerweise eine Kampagne zur Förderung des Anschnallens gestartet werden.

Die 1. Faustregel folgt meist aus der 2. Faustregel. Daher ist es oft am einfachsten, nach der 2. Faustregel zu handeln, da diese auch einfacher ist und man nicht argumentieren muss, welcher Fehler schlimmer ist.

Normalverteilung und Gaußsche Glockenfunktion

Eine Zufallsgröße X heißt **normalverteilt** mit den Parametern μ (Erwartungswert) und σ (Standardabweichung), wenn für zwei reellen Zahlen a und b mit $a \leq b$ gilt: Die Wahrscheinlichkeit, dass X Werte zwischen a und b annimmt, ist

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \varphi_{\mu;\sigma}(x)\,dx$$

Man sagt kurz: X ist $N_{\mu;\sigma}$-verteilt. Die Normalverteilung ist eine **stetige** Verteilung.

Man nennt die Funktion $\varphi_{\mu;\sigma}$ mit

$$\varphi_{\mu;\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Gaußsche Glockenfunktion und ihren Graphen **Gaußsche Glockenkurve**.

$\varphi_{\mu;\sigma}$ hat die Extremstelle μ und die Wendestellen $\mu \pm \sigma$ und ist die **Dichtefunktion** einer $N_{\mu;\sigma}$-verteilten Zufallsgröße.

Es gilt

$$P(X = a) = \int_a^a \varphi_{\mu;\sigma}(x)\,dx = 0$$

somit gilt auch

$$P(X \leq a) = P(X < a)$$

Zusätzlich gilt:

$$\varphi_{\mu;\sigma}(x) > 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{\mu;\sigma}(x)\,dx = 1$$

Beispiele

$$\mu = 100 \quad \sigma = 15$$

$$P(70 \leq X < 110) = \int_{70}^{110} \varphi_{100;15}\,dx \approx 0{,}725$$

$$P(X < 85) = \int_{-\infty}^{85} \varphi_{100;15}\,dx \approx 0{,}159$$

μ und σ aus gegebenen Daten ermitteln

Gemessene Daten können häufig durch eine Normalverteilung mit Mittelwert μ und Standardabweichung σ modelliert werden. Für die Messwerte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gilt:

$$\mu = \tfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2}$$

Beispiel

Punkte in der nächsten Mathe Klausur:

Messwerte	11	13	15	12	14	12

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{6} \cdot (11 + 13 + \ldots + 12) \\ &= \frac{1}{6} \cdot 77 \\ &\approx 12{,}83 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma &= \sqrt{\frac{1}{6} \cdot ((11 - 12{,}83)^2 + (13 - 12{,}83)^2 \ldots + (12 - 12{,}83)^2)} \\ &= \sqrt{\frac{1}{6} \cdot 10{,}83} \\ &\approx 1{,}34 \end{aligned}$$

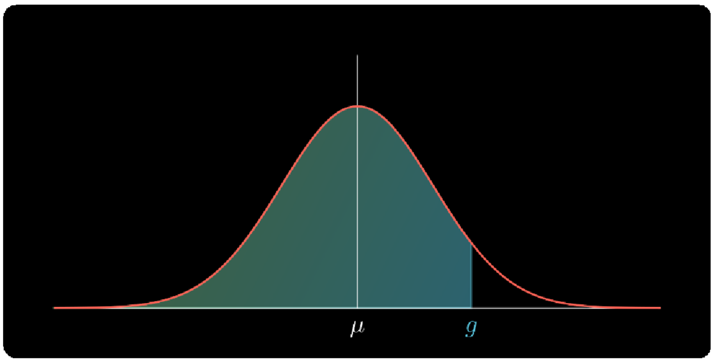
⇒ Die Messwerte können durch eine $N_{12{,}83;1{,}34}$-verteilte Zufallsgröße modelliert werden.

Umkehrung der Normalverteilung

Für eine $N_{\mu;\sigma}$-verteilte Zufallsgröße X lässt sich für eine vorgegebene Wahrscheinlichkeit p durch den WTR-Befehl **invNormal** die Zahl g mit $P(X \leq g) = p$ bestimmen.

Beispiel

$$\mu = 250 \quad \sigma = 20 \quad p = 0.7$$
$$\text{invNormal} \;\Rightarrow g \approx 260{,}49$$



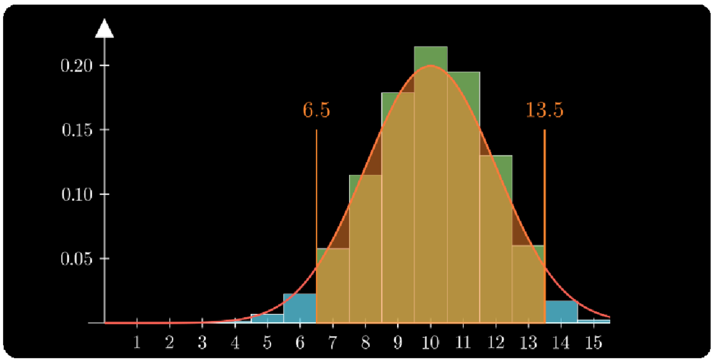
Normalverteilung zur Annäherung einer diskreten Zufallsgröße

💡 Nutzt man die Normalverteilung um die Wahrscheinlichkeit für eine diskrete Zufallsgröße näherungsweise zu bestimmen, muss man die Integralgrenzen entsprechend anpassen.

Beispiel

Notenpunkte $0..15$ sind $N_{10;2}$-verteilt.

$$\underbrace{P(7 \le X \le 13)}_{\underbrace{7,8,9,10,11,12,13}_{\text{7 diskrete Werte}}} = \underbrace{\int_{6,5}^{13,5}}_{\substack{\text{Intervall-} \\ \text{länge 7}}} \varphi_{10;2}(x)\,dx \approx 0{,}92$$



Sigma-Regeln

💡 Für eine $N_{\mu;\sigma}$-verteilte Zufallsgröße gelten folgende Sigma-Regeln

Intervall I	$P(X \in I)$
$[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$	$\approx 0{,}683$
$[\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma]$	$\approx 0{,}954$
$[\mu - 3\sigma; \mu + 3\sigma]$	$\approx 0{,}997$

Diese Regeln gelten auch näherungsweise für eine Binomialverteilung.