Analysis

Ganzrationale Funktionen

Definition

💡 Eine ganzrationale Funktion f vom Grad n hat die Form:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

mit $a_n \neq 0$.

Beispiele

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 4x + 3 \\ g(x) &= 4x^3 - 3x^2 + x + 1 \\ h(x) &= 6x^9 - 4x^2 \\ i(x) &= 5 \\ j(x) &= 8x^4 - 2x^2 \end{aligned}$$

Nichtbeispiel

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x} \\ g(x) &= e^x \\ h(x) &= \sin(x) \\ i(x) &= \frac{x^2}{x-1} \end{aligned}$$

Definitions- und Wertemenge

Definitionsmenge

Die Definitionsmenge D_f einer Funktion f enthält alle Werte von x, für die $f(x)$ definiert ist.

Wertemenge

Die Wertemenge W_f einer Funktion f enthält alle Werte, die $f(x)$ mit $x \in D_f$ annehmen kann.

Beispiele

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \\ D_f &= \mathbb{R} \\ W_f &= [0; \infty[\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x) &= \ln(x) \\ D_g &= \;]0; \infty[\\ W_g &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{x} \\ D_h &= \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ W_h &= \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{aligned}$$

Potenzregel

💡

$$f(x) = a \cdot x^n \quad \Rightarrow \quad f'(x) = n \cdot a \cdot x^{n-1}$$

Beispiele

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \\ f'(x) &= 2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x) &= 3x^2 \\ g'(x) &= 6x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{x} = x^{-1} \\ h'(x) &= -\frac{1}{x^2} = -x^{-2} \end{aligned}$$

Verkettung von Funktionen

💡

$$u(v(x)) = u \circ v$$

Die äußere Funktion u wird mit der inneren Funktion v verkettet.

Beispiel

$$u(x) = 1 - x^2 \qquad v(x) = 2x + 1$$

$$u \circ v(x) = 1 - (2x+1)^2$$
$$v \circ u(x) = 2(1 - x^2) + 1$$

Kettenregel

💡

$$f(x) = u(v(x)) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$$

Beispiel

$$\begin{aligned} f(x) &= (5-3x)^4 & u(x) &= x^4 & v(x) &= 5-3x \\ f'(x) &= -12(5-3x)^3 & u'(x) &= 4x^3 & v'(x) &= -3 \end{aligned}$$

Produktregel

💡

$$f = u \cdot v \quad \Rightarrow \quad f' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

Beispiel

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x \cdot \sqrt{x^2+1} \\ f'(x) &= 2\sqrt{x^2+1} + \tfrac{2x^2}{\sqrt{x^2+1}} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} u(x) &= 2x \\ u'(x) &= 2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} v(x) &= \sqrt{x^2+1} \\ v'(x) &= \tfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} \end{aligned}$$

Monotonie

Definition

💡 Gegeben ist eine Funktion f auf dem Intervall I.
f heißt...

- ...**streng monoton wachsend** auf I, wenn für alle $x_1, x_2 \in I$ gilt:

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)$$

- ...**streng monoton fallend** auf I, wenn für alle $x_1, x_2 \in I$ gilt:

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2)$$

Satz

💡 Ist die Funktion f auf I differenzierbar, so gilt:

- $f'(x) > 0$ für alle $x \in I \quad \Rightarrow \quad f$ ist **streng monoton wachsend** auf I.
- $f'(x) < 0$ für alle $x \in I \quad \Rightarrow \quad f$ ist **streng monoton fallend** auf I.

Gilt nur $f(x_1) \leq f(x_2)$ bzw. $f(x_1) \geq f(x_2)$, so nennt man f monoton wachsend bzw. fallend.

⚠️ Der Monotoniesatz kann irreführende Ergebnisse liefern. Zum Beispiel ist $f(x) = x^3$ streng monoton wachsend, obwohl $f'(0) = 0$ ist. Der Monotoniesatz liefert allerdings weder streng monoton wachsend noch fallend.

Krümmung

Definition

Ist die Funktion f auf dem Intervall I streng monoton...

- ...steigend, so beschreibt der Graph von f auf I eine **Links**kurve.
- ...fallend, so beschreibt der Graph von f auf I eine **Rechts**kurve.

Satz

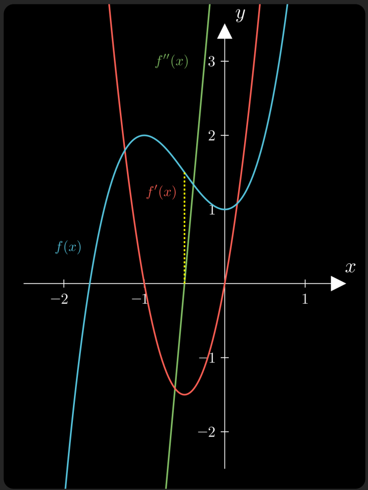
Ist die Funktion f auf i zweimal differenzierbar, so gilt:

- $f''(x) > 0$ für alle $x \in I \quad \Rightarrow \quad$ der Graph von f ist **links**gekrümmt.
- $f''(x) < 0$ für alle $x \in I \quad \Rightarrow \quad$ der Graph von f ist **rechts**gekrümmt.

Ob eine Funktion f auf I linksgekrümmt ist oder eine Linkskurve beschreibt, ist das gleiche.

Beispiel

$$\begin{aligned} f''(-0{,}5) &= 0 \\ f''(-1) &< 0 \\ f''(0) &> 0 \end{aligned}$$



f'' hat bei $x = -0,5$ ihre einzige Nullstelle.
Links von der Nullstelle ist $f'' < 0$ und Rechts davon ist $f'' > 0$.
f ist demnach links von $0{,}5$ rechtsgekrümmt und rechts von $0{,}5$ linksgekrümmt.

Extremstellen

Definition

Ist f eine auf dem Inteval I zweimal differenzierbare Funktion, so muss für eine **innere Extremstelle** $x_0 \in I$ von f gelten:

notwendige Bedingung

$$f'(x_0) = 0$$

hinreichend Bedingung

- x_0 ist ein **Maximum**, wenn $f''(x_0) < 0$ ist **oder** wenn f' bei x_0 das Vorzeichen von + nach - wechselt.
- x_0 ist ein **Minimum**, wenn $f''(x_0) > 0$ ist **oder** wenn f' bei x_0 das Vorzeichen von - nach + wechselt.

Ist $f''(x_0) = 0$, so muss man über das Vorzeichen von f' argumentieren.

Nur wenn die notwendige **und** die hinreichende Bedingung erfüllt sind, ist x_0 eine Extremstelle.

Wenn eine Funktion nur auf einem bestimmten Intervall definiert ist, muss man zusätzlich die Ränder des Integrals auf **äußere Extremstellen** untersuchen.

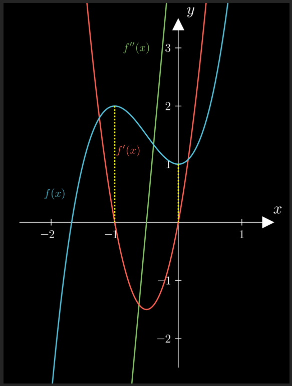
Beispiele

$$\begin{aligned} f'(-1) = 0 \quad &\Rightarrow \quad f''(-1) < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Maximum} \\ f'(0) = 0 \quad &\Rightarrow \quad f''(0) > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Minimum} \end{aligned}$$

$$g(x) = x^4 \quad g'(x) = 4x^3 \quad g''(x) = 12x^2$$

$$\begin{aligned} g'(x) = 0 \quad &\Rightarrow \quad x = 0 \\ g''(0) = 0 & \end{aligned}$$

$$\begin{gathered} \text{Vorzeichen überprüfen:} \\ g'(-1) = -4 \\ g'(1) = 4 \\ \Rightarrow \text{- zu } +\text{: Minimum} \end{gathered}$$



Wendestellen

Definition

💡 Ist f eine auf dem Intervall I dreimal differenzierbare Funktion, so ist $x_0 \in I$ eine **Wendestelle** von f falls gilt: $f''(x_0) = 0$ und $f''(x)$ hat an der Stelle x_0 einen Vorzeichenwechsel

$$f''(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f'''(x_0) \neq 0$$

oder

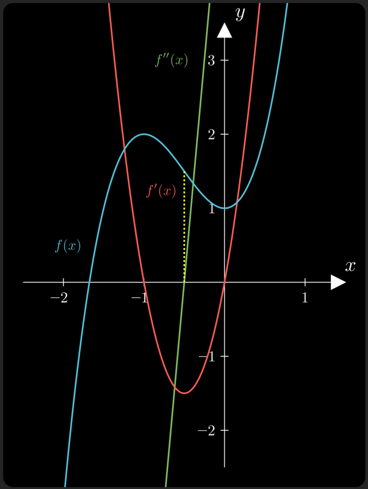
$$f''(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f''(x_0) \text{ hat an der Stelle } x_0 \text{ einen Vorzeichenwechsel}$$

⚠️ Ähnlich wie bei den Extremstellen muss man den Vorzeichenwechsel nur überprüfen, wenn $f'''(x_0) = 0$ ist.

Beispiele

f''' ist eine Konstante und außerhalb des sichtbaren Bereichs der Grafik.

$$\begin{gathered} f''(-0{,}5) = 0 \\ f'''(-0{,}5) \neq 0 \\ \Rightarrow \text{Wendestelle bei } x = 0{,}5 \end{gathered}$$



$$\begin{aligned} h(x) &= x^4 & h'(x) &= 4x^3 \\ h''(x) &= 12x^2 & h'''(x) &= 24x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h''(x) &= 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \\ h'''(0) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{gathered} \text{Vorzeichen überprüfen:} \\ h''(-1) = 12 \\ h''(1) = 12 \\ \Rightarrow + \text{ zu } +\text{: kein Wendepunkt} \end{gathered}$$

Tangenten- und Normalengleichung

Tangentengleichung

für die Tangente t and der Stelle u des Funktionsgraphen von f gilt:

$$t : y = f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$$

Normalengleichung

für die Normale n and der Stelle u des Funktionsgraphen von f gilt:

$$n : y = -\frac{1}{f'(u)} \cdot (x - u) + f(u)$$

Als kleine Erinnerung, die allgemeine Geradengleichung ist:

$$y = m \cdot x + c$$

m: Steigung

c: y-Achsenabschnitt

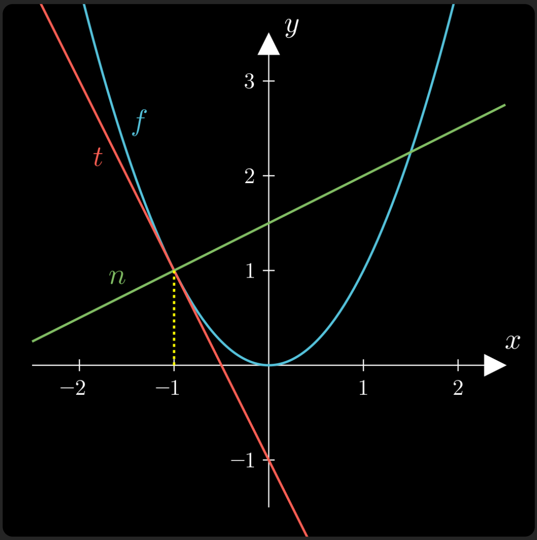
Beispiel

$$f(x) = x^2 \quad f'(x) = 2x$$
$$u = -1$$

$$f(u) = f(-1) = 1$$
$$f'(u) = f'(-1) = -2$$

$$\begin{aligned} t : y &= f'(u) \cdot (x - u) + f(u) \\ &= -2 \cdot (x - (-1)) + 1 \\ &= -2x - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n : y &= -\frac{1}{f'(u)} \cdot (x - u) + f(u) \\ &= -\frac{1}{-2} \cdot (x + 1) + 1 \\ &= \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \end{aligned}$$



Berührpunkte von Funktionsgraphen

Definition

💡 Die Graphen der Funktionen f und g berühren sich ad der Stelle u, wenn gilt:

$$f(u) = g(u) \quad \text{und} \quad f'(u) = g'(u)$$

Beispiel

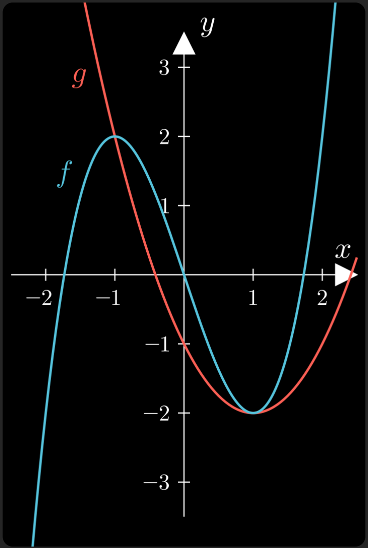
$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 3x \\ f'(x) &= 3x^2 - 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x) &= x^2 - 2x - 1 \\ g'(x) &= 2x - 2 \end{aligned}$$

$$f(x) = g(x)$$
$$\Rightarrow x_1 = 1 \quad x_2 = -1$$

$$x_1:$$
$$f(1) = -2 = g(1) = -2 \checkmark$$
$$f'(1) = 0 = g'(1) = 0 \checkmark$$
$\Rightarrow$ Die Graphen von f und g berühren sich bei $x = 1$

$$x_2:$$
$$f(-1) = 2 = g(-1) = 2 \checkmark$$
$$f'(-1) = 0 = g'(-1) = -4 \times$$
$\Rightarrow$ Die Graphen von f und g schneiden sich bei $x = -1$



Extremwertprobleme

Beispiel

Eine Sportstadion mit einer Laufbahn von 400m Länge soll so angelegt werden, dass die Fläche A für das Fußballfeld möglichst groß wird.

1. Aufstellen eines Terms der möglichst groß/klein werden soll

$$\text{Fläche Fußballfeld:}$$

$$A = x \cdot 2y$$

2. Formulieren von Nebenbedingungen

$$\text{Länge Laufbahn:}$$

$$\begin{aligned} 2x + 2\pi y &= 400 \qquad &&| -2\pi y \quad | :2 \\ x &= 200 - \pi y \end{aligned}$$

3. Aufstellen der Zielfunktion und Angeben ihrer Definitionsmenge

$$\begin{aligned} A(y) &= (200 - \pi y) \cdot 2y = 400y - 2\pi y^2 \\ D_A &= [0; 200] \\ &\text{für } y \notin D_A \text{ ist die Fläche negativ} \end{aligned}$$

4. Untersuchen der Zielfunktion nach Maxima/Minima unter Betrachtung der Randextrema

$$A(0) = A(200) = 0$$

$$\begin{aligned} A'(x) &= \frac{-4}{\pi}x + \frac{400}{\pi} \\ A'(x) &= 0 \\ 0 &= \frac{-4}{\pi}x + \frac{400}{\pi} \quad &&| \cdot \frac{\pi}{4} \\ 0 &= -x + 100 &&| + x \\ x &= 100 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y \approx 31,8m \quad A \approx 6366m^2$$

Eulersche Zahl und natürlicher Logarithmus

💡 Die eulersche Zahl $e \approx 2{,}72$ ist die Zahl für die gilt:

$$f(x) = e^x \qquad f'(x) = e^x$$

💡 Der natürliche Logarithmus $\ln$ ist der Logarithmus zur Basis e. Für den $\ln$ gilt:

$$\begin{aligned} e^x &= a \\ x &= \ln(a) \end{aligned} \qquad \text{und} \qquad \begin{aligned} f(x) &= \ln(x) \\ f'(x) &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Rechenregeln Potenzen und Logarithmen

💡

$$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$$
$$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$$
$$x^{a^b} = x^{a \cdot b}$$

$$\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$$
$$\ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b)$$
$$\ln(a^b) = b \cdot \ln(a)$$

Die Logarithmusgesetze gelten für alle Logarithmusfunktionen, nicht nur für den natürlichen Logarithmus.

Beispiele

$$\ln(\frac{1}{e}) = \ln(1) - \ln(e) = -1$$

$$\begin{aligned} \ln(e^4 \cdot e^2) &= \ln(e^4) + \ln(e^2) = 6 \\ &= \ln(e^6) = 6 \end{aligned}$$

$$\frac{8^{16}}{8^6} = 8^6$$

$$\begin{aligned} e^{-2 \cdot \ln(4)} &= (e^{\ln(4)})^{-2} && = 4^{-2} = \frac{1}{16} \\ &= e^{\ln(4^{-2})} && = 4^{-2} = \frac{1}{16} \end{aligned}$$

Verhalten von Exponentialfunktionen im Unendlichen

💡 Bei Funktionen der Form $f(x) = x^n \cdot e^{a \cdot x}$ $(a \neq 0)$ bestimmt $e^{a \cdot x}$ das Verhalten für $x \to \pm\infty$. Der Faktor x^n bestimmt das Vorzeichen.

Beispiele

	$f(x) = x^5 \cdot e^{-x}$	$g(x) = x^6 \cdot e^{-x}$	$h(x) = \frac{e^x}{x^4}$	$i(x) = e^x - x^3$
$x \to +\infty$	$\to 0$	$\to 0$	$\to +\infty$	$\to +\infty$
$x \to -\infty$	$\to -\infty$	$\to +\infty$	$\to 0$	$\to +\infty$

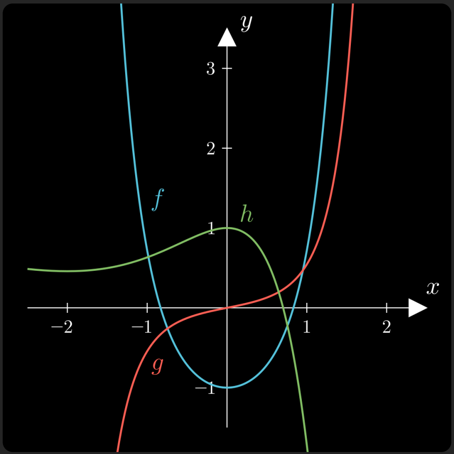
Symmetrie von Funktionsgraphen

> 💡 Der Graph von f ist **achsensymmetrisch zur y-Achse**, wenn für alle $x \in D_f : f(-x) = f(x)$
> Der Graph von f ist **punksymmetrisch um Ursprung**, wenn für alle $x \in D_f : f(-x) = -f(x)$

Beispiele

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{x^2} - 2 \\ f(-x) &= e^{(-x)^2} - 2 \\ &= e^{x^2} - 2 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Der Graph von f ist achsensymmetrisch zur y-Achse



$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{5}x \cdot e^{x^2} \\ g(-x) &= \frac{1}{5}(-x) \cdot e^{(-x)^2} \\ &= -\frac{1}{5}x \cdot e^{x^2} \\ &= -g(x) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Der Graph von f ist punktsymmetrisch zum Ursprung

$$\begin{aligned} h(x) &= -x^2 \cdot e^x + 1 \\ h(-x) &= -(-x)^2 \cdot e^{-x} + 1 \\ &= -x^2 \cdot e^{-x} + 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ keine Symmetrie erkennbar

> ⚠️ Diese Methode funktioniert nur, um die Symmetrie zur y-Achse oder zum Ursprung zu bestimmen.
> $f(x) = (x-2)^2$ hat eine Achsensymmetrie zu $x = 2$, diese kann aber durch diese Methode nicht bestimmt werden. Es wäre also keine Symmetrie bei f erkennbar.

> 💬 Es ist eine gute Idee, mit $f(-x)$ zu beginnen und diesen Ausdruck zu vereinfachen. Dadurch kommt man oft relativ schnell zu einer Lösung.

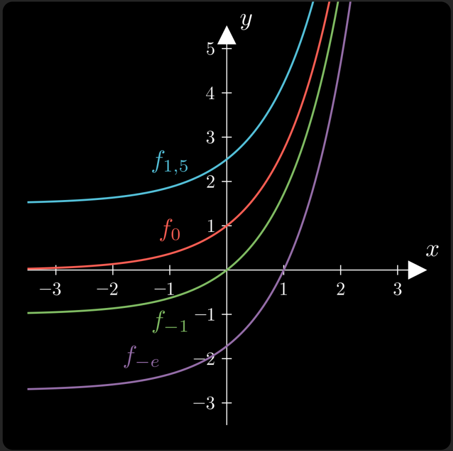
Funktionsschar

💡 Enthält eine Funktion f neben der Variable x noch einen **Parameter** k (oder a, b, t usw.), so gehört zu jedem k eine Funktion f_k - Alle Funktionen f_k bilden eine **Funktionsschar**.

Beispiel

$$f_k(x) = e^x + k \qquad f_k'(x) = e^x$$

$$f_0(x) = e^x \qquad f_1(x) = e^x + 1 \quad \text{usw.}$$



Nullstellen in Abhängigkeit von k:

$$\begin{aligned} f_k(x) &= 0 \\ 0 &= e^x + k \quad &&| -k \\ -k &= e^x &&| \ln, k < 0 \\ x &= \ln(-k), \quad &&k < 0 \end{aligned}$$

Umkehrfunktion

Definition

> 💡 Eine Funktion f mit der Definitionsmenge D_f und der Wertemenge W_f heißt **umkehrbar**, wenn es für jedes $y \in W_f$ **genau ein** $x \in D_f$ gibt, mit $f(x) = y$. Bei einer umkehrbaren Funktion f heißt die Funktion $\bar{f}$ mit $\bar{f}(y) = x$ die **Umkehrfunktion** von f.
> Es gilt:
>
> $$\begin{array}{ll} D_{\bar{f}} = W_f & f(\bar{f}(x)) = x, \text{ für alle } x \in D_{\bar{f}} \\ W_{\bar{f}} = D_f & \bar{f}(f(x)) = x, \text{ für alle } x \in D_f \end{array}$$
>
> Die Graphen von f und $\bar{f}$ sind achsensymmetrisch zur ersten Winkelhalbierenden ($y = x$).

> 💬 Das Wichtige, was man aus dieser Definition mitnehmen sollte, ist: Wenn $f(x) = y$, dann ist $\bar{f}(y) = x$. Sowie, dass Definitions- und Wertemenge vertauscht sind.

Satz

> 💡 Ist eine Funktion f streng monoton steigend oder fallend, so ist f umkehrbar.

Beispiel

$$f(x) = \sqrt{4x - 2} + 1$$

$$\begin{aligned} y &= f(x) \\ y &= \sqrt{4x-2} + 1 && |-1 \quad |^2 \\ (y-1)^2 &= 4x - 2 && |+2 \quad | \cdot \frac{1}{4} \\ x &= \frac{1}{4}(y-1)^2 + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \bar{f}(x) = \frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{1}{2}$$

$$D_f = W_{\bar{f}} = [1; \infty[\quad W_f = D_{\bar{f}} = [\frac{1}{2}; \infty[$$

Obwohl man bei $\bar{f}$ jedes x einsetzen könnte, wird $\bar{f}$ nur auf den Wertebereich von f definiert.

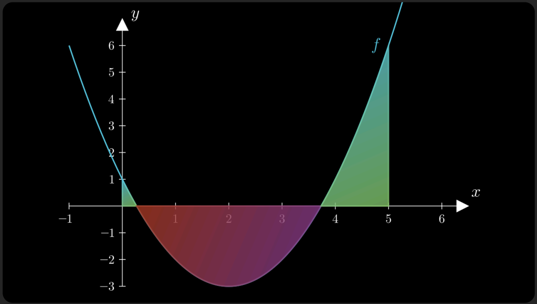
Das Integral

Sei f eine auf dem Intervall $[a;b]$ integrierbare Funktion.
Das **Integral** $\int_a^b f(x)\,dx$ von f über Intervall $[a;b]$ ist der **orientierte Flächeninhalt** den der Graphen von f mit der x-Achse zwischen der **unteren Grenze** a und der **oberen Grenze** b einschließt.

Beispiel

$$\int_0^5 f(x)\,dx$$

Der rote Bereich stellt den negativen orientierten Flächeninhalt dar, während die grüne Fläche den positiven orientierten Flächeninhalt repräsentiert.



Rechenregeln Integrale

💡

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx \tag{1}$$

$$\int_a^b c \cdot f(x)\,dx = c \cdot \int_a^b f(x)\,dx \tag{2}$$

$$\int_a^b f(x) + g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \tag{3}$$

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx \tag{4}$$

Stammfunktion

💡 Für eine Funktion f mit einer Stammfunktion F gilt: $f = F'$
Zwei Stammfunktionen F und G unterscheiden sich nur um eine Konstante c: $F(X) = G(X) + c$, $c \in \mathbb{R}$

Beispiele

$$f(x) = 3x^2 \qquad \Rightarrow \qquad F(X) = x^3 \quad \text{oder} \quad G(X) = x^3 + 2$$

$f(x)$	x^2	x	1	$x^{-1} = \frac{1}{x}$	$x^{-2} = \frac{1}{x^2}$
$F(x)$	$\frac{1}{3}x^3$	$\frac{1}{2}x^2$	x	$\ln(\lvert x \rvert)$	$-x^{-1}$

$f(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	e^x	$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$
$F(x)$	$-\cos(x)$	$\sin(x)$	e^x	$\frac{2}{3}\sqrt{x^3} = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}}$

⚠️ Stammfunktionen können durch Ableiten überprüft werden.

Stammfunktionen bestimmen

💡 Sind G und H Stammfunktionen von g und h, so gilt:

$f(x)$	x^v	$c \cdot g(x)$	$g(x) + h(x)$	$f(x) = g(ax+b)$
$F(x)$	$\frac{1}{v+1} \cdot x^{v+1}$	$c \cdot G(X)$	$G(x) + H(x)$	$F(x) = \frac{1}{a} \cdot G(ax+b)$

Beispiel

$$f(x) = 4 \cdot \sin(3x+2) + 4x$$
$$F(X) = -\frac{4}{3}\cos(3x+2) + 2x^2$$

Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

💡 Sei f eine im Intervall $[a;b]$ integrierbare und F eine Stammfunktion von f. Dann gilt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Beispiele

$$\int_0^2 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^2 = \frac{1}{3}\cdot 2^3 - \frac{1}{3}\cdot 0^3 = \frac{8}{3}$$

$$\int_2^5 x + 2\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_2^5 = \frac{1}{2}\cdot 5^2 + 2\cdot 5 - \left(\frac{1}{2}\cdot 2^2 + 2\cdot 2\right) = 22{,}5 - 6 = 16,5$$

Flächen zwischen Graphen

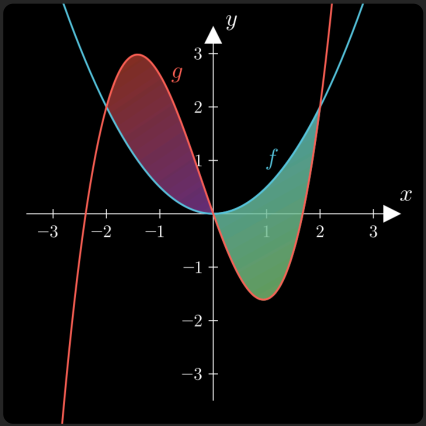
Gegeben sind zwei differenzierbare und auf dem Intervall I definierte Funktionen f und g, sowie zwei Zahlen $a, b \in I$.
Gilt $f(x) \geq g(x)$ für alle $x \in\ ]a;b[$, so bestimmt man den Inhalt A der Fläche zwischen den Graphen der beiden Funktionen auf dem Intervall $]a;b[$ mit

$$A = \int_a^b f(x) - g(x)\, dx$$

Andernfalls betrachtet man die Teilintervalle zwischen den Schnittpunkten von f und g separat.

Beispiel

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{0} g(x) - f(x)\, dx \\ &\quad + \int_0^2 f(x) - g(x)\, dx \\ &= \dots \end{aligned}$$



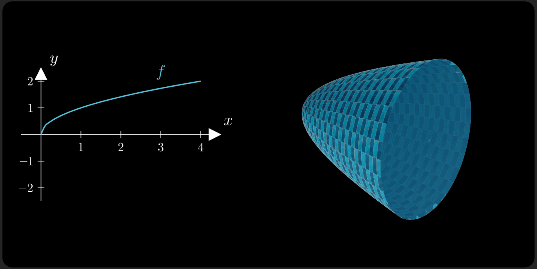
Rotationskörper

💡 Gegeben ist ein über dem Intervall $[a;b]$ integrierbare Funktion f. Rotiert die Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse über dem Intervall $[a;b]$ um die x-Achse, so entsteht ein **Rotationskörper**. Sein Volumen V berechnet man mit

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx$$

Beispiel

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^4 (\sqrt{x})^2 \, dx \\ &= \pi \int_0^4 x \, dx \\ &= \pi \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^4 \\ &= \pi\left(\frac{1}{2} \cdot 4^2 - \frac{1}{2} \cdot 0^2\right) \\ &= 8\pi \end{aligned}$$



links der Graph, rechts der Rotationskörper

Verschieben, Strecken und Spiegeln

💡 Der Graph der Funktion g mit $g(x) = a \cdot f(x-c) + d,\ a, c, d \in \R, a \neq 0$. entsteht aus dem Graphen von f durch:

1. Verschiebung entlang der x-Achse um c
2. Streckung entlang der y-Achse um den Faktor a
3. Verschiebung entlang der y-Achse um d

⚠️ Reihenfolge beachten: „Von innen nach außen denken": Welche Variablen wirken zuerst auf x ein?

Der Graph der Funktion g entsteht aus dem Graphen von f...

- ...für $g(x) = -f(x)$ durch Spiegelung an der x-Achse.
- ...für $g(x) = f(-x)$ durch Spiegelung an der y-Achse.
- ...für $g(x) = -f(-x)$ durch Spiegelung am Ursprung.

Beispiel

$$f(x) = x^2$$
$$g(x) = 2(x-1)^2 - 3$$

Der Graph von g geht aus dem Graphen von f hervor durch:

1. Verschiebung um 1 in x-Richtung
2. Streckung um 2 in y-Richtung
3. Verschiebung um -3 in y-Richtung

Trigonometrische Funktionen

💡 Der Graph der Funktion g mit $g(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x - c)) + d$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0, b > 0$ geht aus dem Graphen der Funktion f mit $f(x) = \sin(x)$ hervor durch:

1. Verschiebung um c in x-Richtung
2. Stauchung um b in x-Richtung (mit Streckzentrum $(c \mid 0)$)
3. Streckung um a in y-Richtung
4. Verschiebung um d in y-Richtung

Die Funktion g hat die Amplitude $|a|$ und die Periode $\frac{2\pi}{b}$.

Beispiel

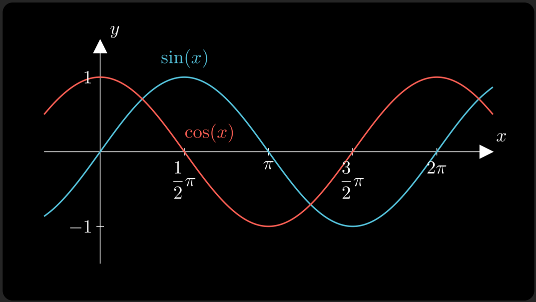
$$f(x) = \sin(x)$$
$$g(x) = 3 \cdot \sin(2 \cdot (x - 1)) + 4$$

Der Graph von g geht aus dem Graphen von f hervor durch:

1. Verschiebung um 1 in x-Richtung
2. Stauchung um 2 in x-Richtung
3. Streckung um 3 in y-Richtung
4. Verschiebung um 4 in y-Richtung

Amplitude: 3

Periode: $\frac{2\pi}{2} = \pi$



Nullstellen ganzrationaler Funktionen

Satz 1

Sei f eine ganzrationale Funktion vom Grad n und c eine Nullstelle von f. Dann gibt es eine ganzrationale Funktion g vom Grad $n-1$ mit:

$$f(x) = \underbrace{(x-c)}_{\text{Linearfaktor}} \cdot g(x)$$

Satz 2

Eine ganzrationale Funktion vom Grad n hat höchstens n Nullstellen.

Satz 3

Eine ganzrationale Funktion f, deren Grad ungerade ist, hat mindestens eine Nullstelle

Satz 4

Gegeben sein eine ganzrationale Funktion f mit $f(x) = (x-a)^k \cdot g(x),\ g(a) \neq 0, k \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

Definition

$$f(x) = (x-1) \cdot \underbrace{(x-3)^k}_{\substack{\text{k-fache} \\ \text{Nullstelle}}}$$

Nicht jede ganzrationale Funktion lässt sich vollständig in Linearfaktoren zerlegen.
Bsp.: $f(x) = x^2 + 1$, da f keine Nullstellen hat.

Beispiele

$f(x) = (x+2)(x-1)$

f hat bei $x = -2$ und $x = 1$ einfache Nullstellen.

$g(x) = x(x-3)^2$

g hat bei $x = 0$ eine einfache Nullstelle und bei $x = 3$ eine Extremstelle

$h(x) = (x+1)^3(x-1)^2$

h hat bei $x = -1$ einen Sattelpunkt und bei $x = 1$ eine Extremstelle.

Gebrochenrationale Funktionen, Polstellen und senkrechte Asymptoten

💡 Eine Funktion h mit ganzrationalen Funktionen g und h

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

heißt **gebrochenrationale** Funktion.

💡 Wenn $g(x_0) \neq 0$ und $h(x_0) = 0$, dann ist x_0 eine **Polstelle** von f und die Gerade mit der Gleichung $x = x_0$ eine senkrechte Asymptote des Graphen von f.

Beispiele

Siehe Beispiel Waagerechte Asymptote.

Waagerechte Asymptote

💡 Sei $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ eine gebrochenrationale Funktion mit a und b als Koeffizienten der höchsten Potenzen von g und h, d.h.: $g(x) = a \cdot \ldots,\ h(x) = b \cdot \ldots$. Dann gilt:

1. Grad(g) < Grad(h): $y = 0$ ist die waagerechte Asymptote der Graphen von f
2. Grad(g) = Grad(h): $y = \frac{a}{b}$ ist die waagerechte Asymptote der Graphen von f
3. Grad(g) > Grad(h): keine waagerechte Asymptote

Zählergrad: Grad(g)

Nennergrad: Grad(h)

Beispiele

gebrochenrationale Funktion	$f(x) = \frac{4x-1}{3x+3}$	$g(x) = \frac{x^2-1}{x^3-8} + 4$	$h(x) = \frac{x^2-2}{x-1}$	$i(x) = \frac{-x^2+2x-3}{x^2-x-2}$
Polstellen	$x = -1$	$x = 2$	$x = 1$	$x_1 = -1, x_2 = 2$
senkrechte Asymptote	$x = -1$	$x = 2$	$x = 1$	$x_1 = -1 \;\&\; x_2 = 2$
waagerechte Asymptote	$y = \frac{4}{3}$	$y = 4$ nicht y=0 wegen der +4	keine, da Zählergrad > Nennergrad	$y = -1$

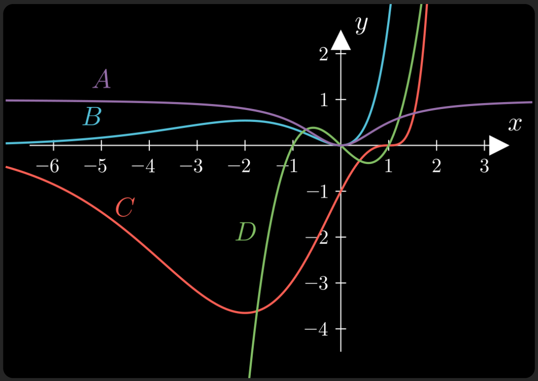
Graph eines Funktionsterms

💡 Beim Zusammenhang zwischen Graph und Funktionsterm können folgende Punkte helfen:

1. Nullstellen und Vielfachheit
2. Senkrechte Asymptoten und Polstellen
3. Verhalten für $x \to \pm\infty$, ggf. waagerechte Asymptoten
4. Symmetrie
5. Extrem- und Wendepunkte
6. Punktprobe

Beispiele

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^2 \cdot e^x \\
g(x) &= (x-1)^3 \cdot e^x \\
h(x) &= x^3 - x \\
i(x) &= \frac{x^2}{x^2+1}
\end{aligned}
$$



Zuordnung:

$f : B, \; g : C, \; h : D, \; i : A$

Argumente:

$f : B$

- einfache Nullstelle bei $x = 0$
- Verhalten im Unendlichen:
  - $x \to +\infty : f \to +\infty$
  - $x \to -\infty : f \to 0$
- $f \geq 0$

$g : C$

- Sattelpunkt bei $x = 1$
- Verhalten im Unendlichen:
  - $x \to +\infty : f \to +\infty$
  - $x \to -\infty : f \to 0$
    - nähert siich 0 von unten wegen Vorzeichen durch x^3

$h : D$

- einfache Nullstellen bei $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1$
- Verhalten im Unendlichen:
  - $x \to +\infty : f \to +\infty$
  - $x \to -\infty : f \to -\infty\$$
- Symmetrisch zum Ursprung

$i : A$

- doppelte Nullstelle bei $x = 0$
- waagerechte Asymptote: $y = 1$
- Symmetrisch zur y-Achse

⚠️ Es genügen die Argumente, die den Graphen eindeutig von den anderen unterscheiden.

Gemeinsame Punkte einer Funktionsschar

💡 Sei f_k eine Funktionsschar. Um gemeinsame Punkte aller Graphen der Funktionsschar zu bestimmen, genügt es, die Schnittpunkte zweier beliebiger Funktionen der Schar zu finden, da diese Schnittpunkte für alle Graphen gelten müssen.
Meist ist die einfachste Gleichung.

$$f_0(x) = f_1(x)$$

Beispiel

$$f_k(x) = (x-1) \cdot e^{-k \cdot x} \qquad \begin{gathered} f_0(x) = f_1(x) \\ (x-1) \cdot e^0 = (x-1) \cdot e^{-x} \\ \Rightarrow x_1 = 1 \;\; x_2 = 0 \end{gathered}$$

Probe:

$$\begin{aligned} f_k(0) &= (0-1) \cdot e^0 = -1 && \checkmark \text{ unanbähngig von k} \\ f_k(1) &= (1-1) \cdot e^{-k} = 0 && \checkmark \text{ unanbähngig von k} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P(0|-1) \text{ und } Q(1|0) \text{ liegen auf allen Graphen der Funktionsschar}$$

❗ Probe machen! Es könnte sein, dass f_0 und f_1 einen zusätzlichen „zufälligen" Schnittpunkt haben.