Geometrie

Gauß-Verfahren

Vorgehen

1. Man eliminiert mithilfe **einer Gleichung** die Variable x_1 aus allen anderen Gleichungen.
2. Mit den **restlichen Gleichungen** verfährt man für die Variable $x_2, x_3, \ldots$
3. Man löst die Gleichung der **Stufenform** schrittweise nach $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1$ auf.

Beispiel

$$\begin{aligned} 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 1{,}5x_1 + 5x_2 - 5x_3 &= -9 \end{aligned}$$

Schritt 1:

x_1 eliminieren

$$\begin{array}{r} I) \\ II) \\ III) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -2 & -4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1{,}5 & 5 & -5 & -9 \end{array}\right)$$

Schritt 2:

x_2 eliminieren

$$\begin{array}{r} I) \\ IIb) = II) - I) \\ IIIb) = 2III) - I) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -2 & -4 \\ 0 & -4 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -8 & -14 \end{array}\right)$$

Schritt 3:

Stufenform auflösen

$$\begin{array}{r} I) \\ IIb) \\ IIIc) = IIb) + IIIb) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -2 & -4 \\ 0 & -4 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & -10 \end{array}\right)$$

Lösung:

$$\boxed{\Rightarrow L = \{(-1; 0{,}5; 2)\}}$$

$$\begin{aligned} -5 \cdot x_3 &= -10 & \Rightarrow \quad x_3 &= 2 \\ -4 \cdot x_2 + 3 \cdot 2 &= -4 & \Rightarrow \quad x_2 &= 0{,}5 \\ 3 \cdot x_1 + 6 \cdot 0{,}5 - 2 \cdot 2 &= -4 & \Rightarrow \quad x_1 &= -1 \end{aligned}$$

Lösungsmenge von LGS

💡 Lineare Gleichungssysteme können...

1. ...eindeutig Lösbar sein.
2. ...unlösbar sein (z.B. mit der Zeile $0\ 0\ 0 \mid 2$).
3. ...unendlich viele Lösungen haben (Nullzeile $0\ 0\ 0 \mid 0 \Rightarrow$ Parameter einführen)

Beispiel

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 3 & 12 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\text{Wähle } x_3 = t: \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_2 + t &= 2 \\ x_2 &= 2 - t \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_1 + 4 - 2t + t &= 5 \\ x_1 &= 1 + t \end{aligned}$$

$$\boxed{\Rightarrow L_t = \{(1+t; 2-t; t:)\}}$$

Unterbestimmtes LGS

💡 Ein unterbestimmtes LGS hat weniger Gleichungen als Unbekannte.
So ein LGS ist niemals eindeutig Lösbar, sondern hat in der Regel **unendlich viele Lösungen**.

Beispiel

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}$$

$$\text{Wähle } x_3 = t: \quad \begin{aligned} &\Rightarrow x_2 = 1 + t \\ &\Rightarrow x_1 = 1 - t \end{aligned}$$

$$\boxed{\Rightarrow L_t = (1-t; 1+t; t)}$$

Überbestimmtes LGS

> Ein überbestimmtes LGS hat mehr Gleichungen als Unbekannte.
> In diesen Fällen kann das LGS eine Lösung, keine Lösung oder unendlich viele Lösungen haben.

Vorgehen

Man klammert eine Lösung aus und löst das restliche LGS

Beispiel

$$\begin{aligned} (x_1+ \; x_2+ \; x_3 &= 1) \\ x_1-2x_2+2x_3 &= 2 \\ -x_1- \; x_2+ \; x_3 &= 7 \\ x_2- \; x_3 &= -3 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

$$IIb) = I) + II) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

$$IIIb) = 3III) + IIb) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\text{Wähle } x_3 = t: \quad \begin{aligned} &\Rightarrow x_2 = -3 + t \\ &\Rightarrow x_1 = -4 \end{aligned}$$

$$\text{Probe mit ausgeklammerten Gleichungen:} \quad \begin{aligned} t + (-3 + t) - 4 &= 1 \\ 2t - 7 &= 1 \\ t &= 4 \end{aligned}$$

$$\boxed{\Rightarrow \text{Eindeutige Lösung mit } t = 4 : L = (-4; 1; 4)}$$

LGS mit Parameter auf der rechten Seite

Stehen bei einem LGS auf der rechten Seite ein oder mehrere **Parameter**, so wird das LGS auf Stufenform gebracht und schrittweise nach $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1$ aufgelöst.
Dabei ist die Lösungsmenge in der Regel von dem oder den Parametern abhängig.

Beispiel

$$\begin{array}{r} I) \\ II) \\ III) \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 2r \\ 5 & -4 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & 2r+6 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r} \\ IIb) = II) + I) \\ IIIb) = III) + 2I) \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 2r \\ 8 & -6 & 0 & 2r+2 \\ 7 & -1 & 0 & 6r+6 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ IIIc) = 6IIIb) \text{ - } IIb) \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 2r \\ 8 & -6 & 0 & 2r+2 \\ 34 & 0 & 0 & 34r+34 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow x_1 = r+1$$
$$\Rightarrow x_2 = r+1$$
$$\Rightarrow x_3 = r-1$$

$$\boxed{\Rightarrow L = \{(r+1; r+1; r-1)\}}$$

Skalarprodukt

Definition

Das Skalarprodukt zwischen $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ berechnet man mit:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

Satz

Zwei Vektoren $\vec{a} \neq \vec{0}$ und $\vec{b} \neq \vec{0}$ sind genau dann senkrecht zueinander, wenn

$$\vec{a} \circ \vec{b} = 0$$

Rechenregeln

$$\begin{aligned} \vec{a} \circ \vec{b} &= \vec{b} \circ \vec{a} \\ r \cdot \vec{a} \circ \vec{b} &= (r \cdot \vec{a}) \circ \vec{b} = \vec{a} \circ (r \cdot \vec{b}) \\ (\vec{a} + \vec{b}) \circ \vec{c} &= \vec{a} \circ \vec{c} + \vec{b} \circ \vec{c} \\ \vec{a} \circ \vec{a} &= |\vec{a}|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Beispiele

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = -2 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 2 \cdot 4 = 6$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 3 + (-2) \cdot 1 + (-1) \cdot 1 = 0$$

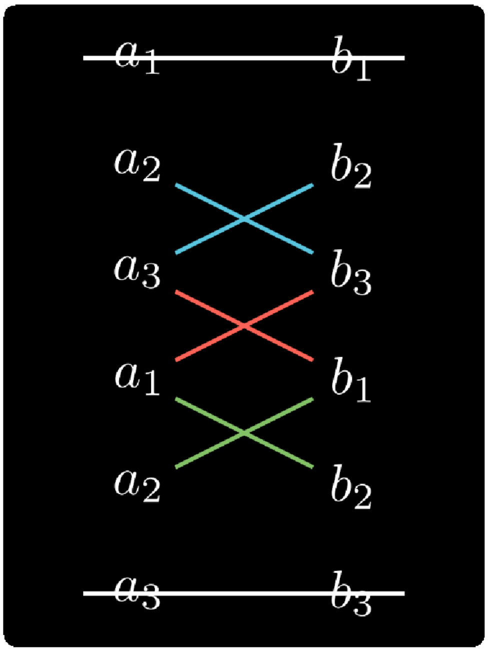
Kreuzprodukt

Das Kreuzprodukt zwischen $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ berechnet man mit:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Eselsbrücke (siehe Diagramm):

1. Man schreibt die Vektoren zweimal untereinander.
2. Streicht die erste und letzte Zeile weg.
3. Multipliziert die verbleibenden Werte über Kreuz und bilde die Differenz der Produkte.



Satz

Der resultierende Vektor aus $\vec{a} \times \vec{b}$ steht **senkrecht** auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Seine Länge entspricht der Fläche des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms.

Beispiele

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \cdot 4 - 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot (-2) - 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot 0 - (-5) \cdot -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ -14 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 2 - (-1) \cdot (-3) \\ (-1) \cdot 1 - 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot (-3) - 4 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -10 \end{pmatrix}$$

Geradengleichung

Gegeben sind ein Punkt P mit seinem Ortsvektor $\vec{p}$ und ein Vektor $\vec{u} \neq \vec{0}$. Die Gerade durch den Punkt P in Richtung $\vec{u}$ ist:

$$g: \vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{u},\ t \in \mathbb{R}$$

$\vec{x}$: Ortsvektor eines Punktes auf g

$\vec{p}$: **Stützvektor**

$\vec{u}$: **Richtungsvektor**

t: **Parameter**

Gerade durch zwei Punkte aufstellen

$$A = (1\,|\,2\,|\,1) \qquad B = (3\,|\,5\,|\,5)$$

$$g: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Punktprobe

Liegt P auf g?

$$P(3\,|\,8\,|-3) \qquad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \Big| - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} &= t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \Rightarrow t &= 1 \\ \Rightarrow t &= 2 \\ \Rightarrow t &= -1 \end{matrix} \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\Rightarrow \text{unterschiedliche } t \\ &\Rightarrow P \text{ liegt nicht auf } g \end{aligned}}$$

Ebenengleichung: Parametergleichung

💡 Gegeben ist ein Stützvektor $\vec{p}$ und zwei Spannvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$, die keine Vielfache voneinander sind.
Die **Parameterform** oder **Parametergleichung** der Ebene E ist:

$$E: \vec{x} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$$
$$r, s \in \mathbb{R}, \vec{u} \neq \vec{0} \neq \vec{v}$$

Ebene durch drei Punkte aufstellen

$$A(1\,|-1\,|\,1) \qquad B(1{,}5\,|\,1\,|\,0) \qquad C(0\,|\,1\,|\,1)$$

$$E: \vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{OA}} + r \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{AB}} + s \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{AC}}$$

Punktprobe

Liegt P auf E?

$$P(5\,|\,3\,|-5) \qquad E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Bigg| - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0{,}5 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & -6 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow s = -1 \\ \Rightarrow s = -4 \\ \Rightarrow r = 6 \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \Rightarrow \text{unterschiedliche } s \\ \Rightarrow P \text{ liegt nicht auf } E \end{array}}$$

Ebenengleichung: Normalengleichung

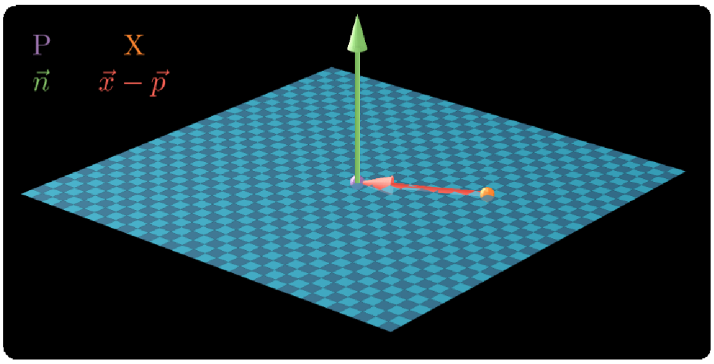
Jede Ebene E kann durch einen **Normalenvektor** $\vec{n}$ und einen **Stützvektor** $\vec{p}$ beschrieben werden:

$$E : (\vec{x} - \vec{p}) \circ \vec{n} = 0$$

Ebene aufstellen

$$P(4\,|\,1\,|\,3) \qquad \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow E : \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right] \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = 0$$



Punktprobe

Liegt Q auf E?

$$Q(2\,|\,1\,|\,4) \qquad E : \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right] \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right] \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} &\stackrel{?}{=} 0 \\ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} &= 0 \\ -2 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 5 &= 0 \\ 1 &\neq 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\Rightarrow P \text{ liegt nicht auf } E}$$

Ebenengleichung: Koordinatengleichung

Jede Ebene E kann durch eine **Koordinatengleichung** beschrieben werden:

$$E : ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$$

Dabei ist $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor der Ebene E.

Ebene durch drei Punkte aufstellen

$$A(5 \,|\, -2 \,|\, 4) \quad B(-3 \,|\, 0 \,|\, 1) \quad C(3 \,|\, 4 \,|\, 2)$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -10 \\ -28 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -14 \end{pmatrix}$$

Probe machen: $\vec{n} \circ \overrightarrow{AB} = 0$ und $\vec{n} \circ \overrightarrow{AC} = 0$.

$$E : 4x_1 - 5x_2 - 14x_3 = \underbrace{-26}$$

$$\text{NR (B eingesetzt): } 4 \cdot (-3) - 5 \cdot 0 - 14 \cdot 1 = -26$$

Punktprobe

Liegt P auf E?

$$P(3 \,|\, 2 \,|\, 2) \quad E : 4x_1 - 5x_2 - 14x_3 = -26$$

$$\begin{aligned} 4 \cdot 3 - 5 \cdot 2 - 14 \cdot 2 &\overset{?}{=} -26 \\ -26 &= -26 \end{aligned}$$

$$\boxed{\Rightarrow P \text{ liegt auf } E}$$

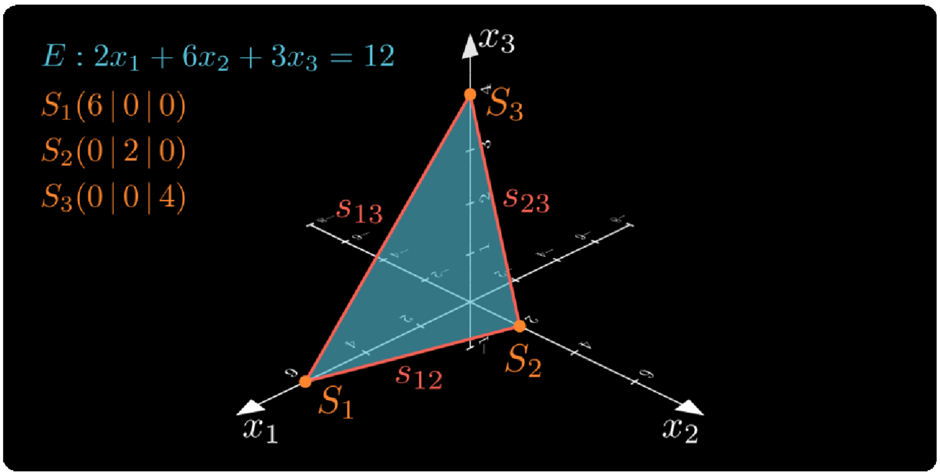
Spurpunkte und Spurgeraden

> 💡 Um eine Ebene in einem Koordinatensystem zu veranschaulichen, zeichnet man einen Ausschnitt der Ebene. Dabei orientiert man sich an den jeweiligen Schnittpunkten der Ebene mit den Koordinatenachsen. Diese Punkte heißen **Spurpunkte**.

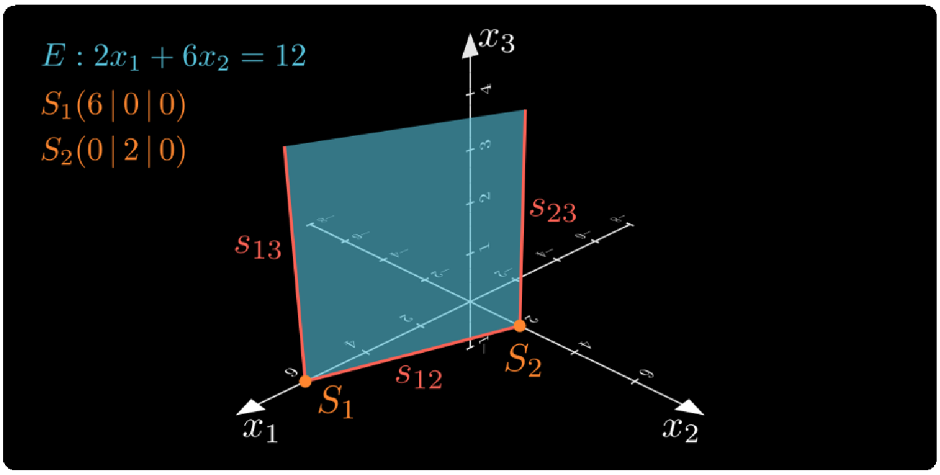
> 💡 Die Gesamtheit aller Schnittpunkte einer Ebene mit einer Koordinatenebene heißen **Spurgerade**.

In den folgenden Beispielen sind stets alle Spurpunkte und Spurgeraden eingezeichnet. Allerdings wird nur ein Teil der unendlichen Spurgeraden gezeigt.

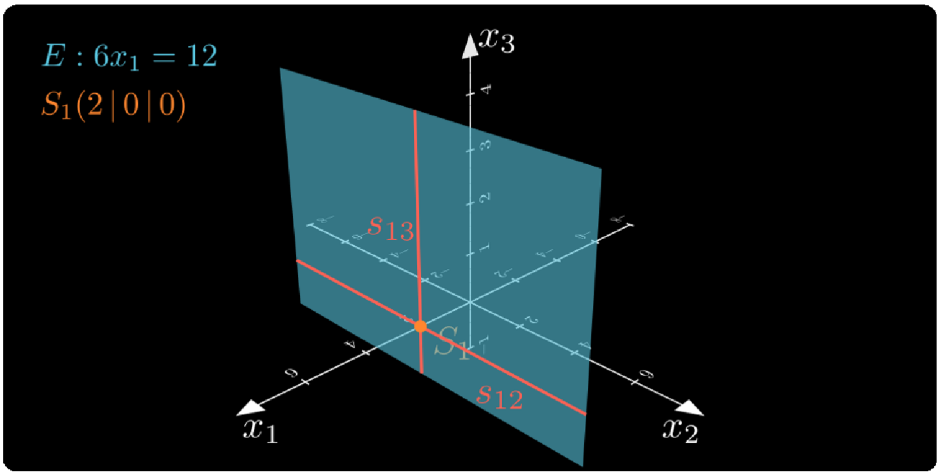
Drei Spurpunkte



Zwei Spurpunkte



Ein Spurpunkte



Achsenabschnittsform

💡 Wenn man alle Spurpunkte einer Ebene kennt, die nicht durch den Ursprung verläuft, so kann man direkt deren **Achsenabschnittsform** (eine spezielle Koordinatengleichung) anlegen.

Beispiel

$$S_1(5\,|\,0\,|\,0) \quad S_2(0\,|\,-2\,|\,0) \quad S_3(0\,|\,0\,|\,0{,}5)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow E: \frac{1}{5}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + 2x_3 = 1 \quad |\cdot 10 \\ E: 2x_1 - 5x_2 + 20x_3 = 10 \end{aligned}$$

Gegenseitige Lage von Ebenen und Geraden

💡

1. Wenn der Normalenvektor der Ebene ein Vielfaches des Richtungsvektors ist, so schneidet die Gerade die Ebene orthogonal.
2. Wenn das Skalarprodukt von Normalenvektor der Ebene und Richtungsvektor der Geraden 0 ist, so ist die Gerade in der Ebene enthalten, wenn der Stützvektor in der Ebene enthalten ist. Ist der Stützvektor nicht in der Ebene enthalten, so ist die Gerade parallel zur Ebene.
3. Ansonsten und in Fall 1 gibt es genau einen Schnittpunkt (**Durchstoßpunkt**).

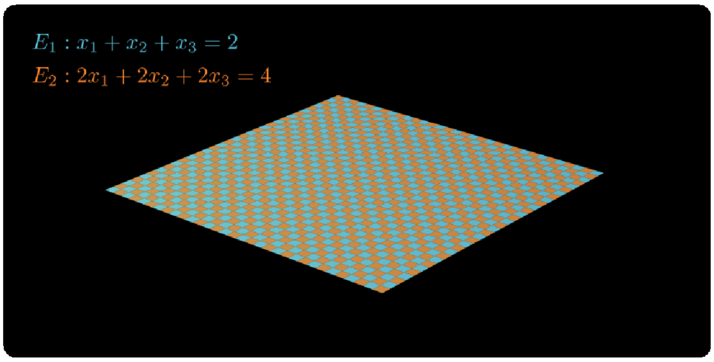
$$E: x_1 - x_2 + 2x_3 = 9 \qquad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &\text{Schneide } E\&g \text{ (} g \text{ in } E \text{ einsetzen):} \\ (3-2t) - (2+2t) + 2\cdot(0+3t) &= 9 \\ 1 + 2t &= 9 \quad |-1 \quad |:2 \\ t &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{gathered} t = 4 \text{ in } g \text{ einsetzen:} \\ \boxed{S(-5\,|\,10\,|12)} \end{gathered}$$

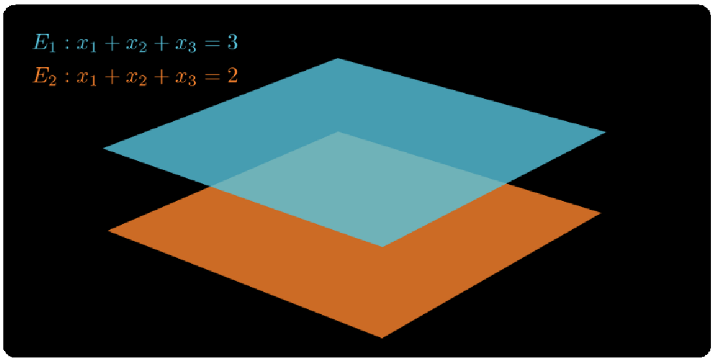
Gegenseitige Lage von Ebenen

Identisch



Normalenvektoren und Koordinatengleichungen sind Vielfache voneinander.

Parallel

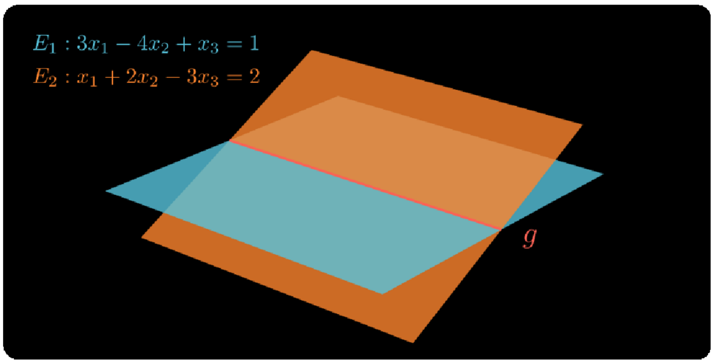


Normalenvektoren sind Vielfache voneinander, aber Koordinatengleichungen sind keine vielfache voneinander.

Schneidend

Schnittgerade bestimmen

$$E_1 : 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 1 E_2 : x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2$$

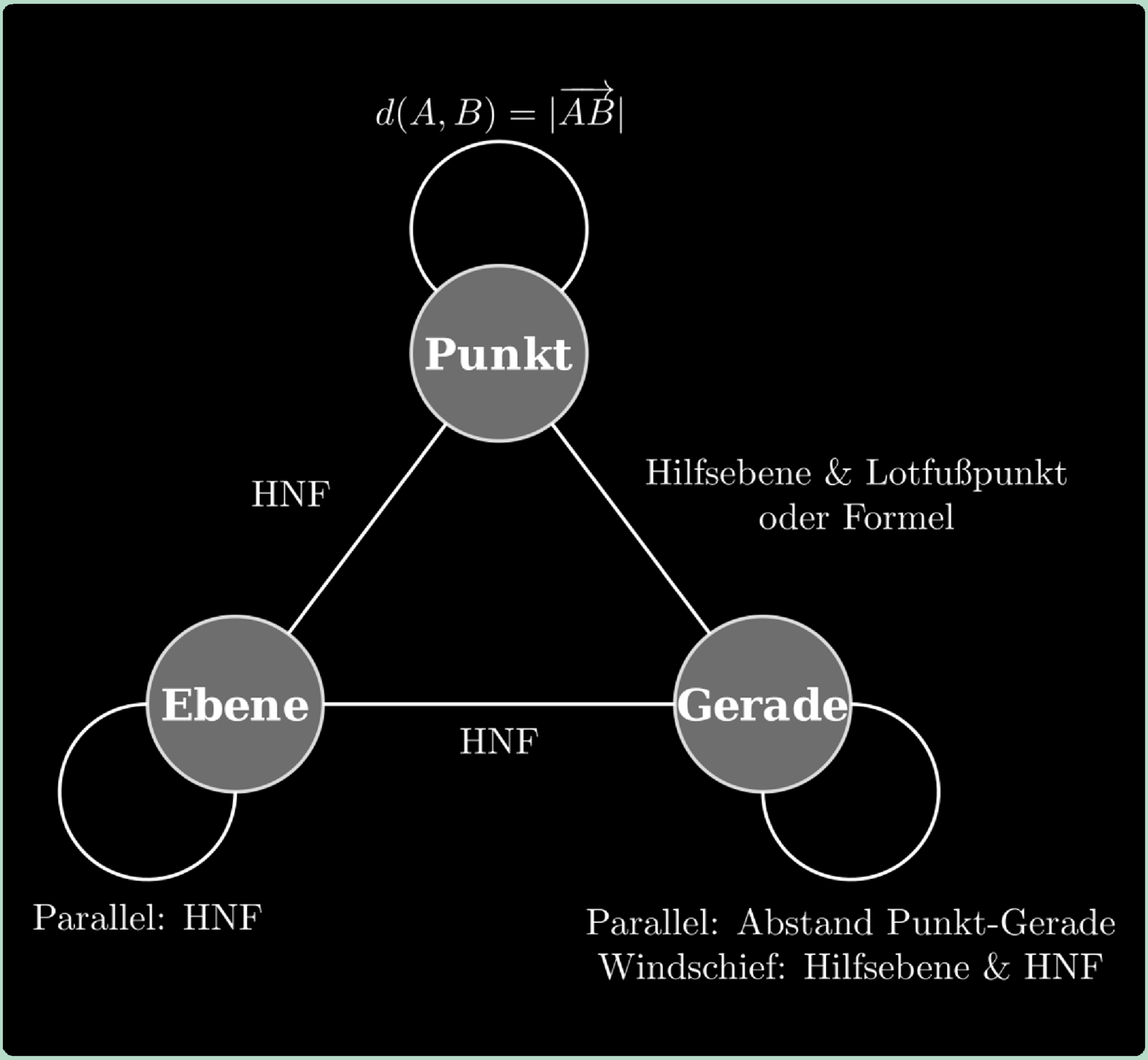


$$\begin{array}{rrrrl} & \multicolumn{4}{l}{\text{Unterbestimmtes LGS:}} \\ I) & 3x_1- & 4x_2+ & x_3 & = 1 \\ II) & x_1+ & 2x_2- & 3x_3 & = 2 \\ I\ -3II) & & -10x_2+ & 10x_3 & = 5 \end{array}$$

$$\text{Wähle } x_3 = t: \quad \begin{array}{l} \Rightarrow x_2 = -\dfrac{1}{2} + t \\ \Rightarrow x_1 = 3 + t \end{array}$$

$$\boxed{\Rightarrow g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Abstandsberechnungen (Übersicht)



Hesse’sche Normal(en)form (HNF)

Eine Ebenengleichung $E: (\vec{x} - \vec{p}) \circ \vec{n}_0 = 0$ heißt **Hesse’sche Normal(en)form** (HNF) von E. $\vec{n}_0$ heißt dabei **Einheitsnormalenvektor**.
Der Abstand $d(E, Q)$ zwischen E und einem Punkt Q bestimmt man mit der Formel

$$d(E, Q) = |(\vec{q} - \vec{p}) \circ \vec{n}_0|$$

Für die Koordinatengleichung von $E: a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$ gilt:

$$d(E, Q) = \frac{|a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x3 - b|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

Beispiele

Normalenform

$$E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 9 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \qquad P(1\,|\,-1\,|\,0)$$

$$d(E, P) = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix} \circ \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right| \cdot \frac{1}{3}}_{\vec{n}_0} = \left| \begin{pmatrix} -9 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right| \cdot \frac{1}{3} = 9 \cdot \frac{1}{3} = 3$$

Koordinatenform

$$F: 2x_1 - 4x_2 + 4x_3 = 2 \qquad Q(4\,|\,2\,|\,5)$$

$$d(F, Q) = \frac{|2 \cdot 4 - 4 \cdot 2 + 4 \cdot 5 - 2|}{\sqrt{2^2 + 4^2 + 4^2}} = \frac{|18|}{\sqrt{36}} = 3$$

Abstand Punkt-Ebene

💡 Unter dem Abstand d eines Punktes P von der Ebene E versteht man die kleinste Entfernung von P zu E.

Beispiel

$$E : x_1 + 8x_2 - 4x_3 = 25 \qquad P(2\,|\,0\,|\,1)$$

Variante 1: HNF

$$d(E,P) = \frac{|2-4-25|}{\sqrt{1^2+8^2+4^2}} = \frac{|-27|}{\sqrt{81}} = \frac{27}{9} = 3$$

Variante 2: Durchstoßpunkt

$$\begin{gathered}\text{Hilfsgerade } g \text{ durch } P \text{ in Richtung des Normalenvektors}\\ g : \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\8\\-4\end{pmatrix}\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}E\&g \text{ schneiden um Lotfußpunkt zu bestimmen}\\ 2 + r + 8 \cdot 8r - 4 \cdot (1-4r) = 25\\ \Rightarrow r = \frac{1}{3}\\ \Rightarrow F\left(\tfrac{7}{3}\,\middle|\,\tfrac{8}{3}\,\middle|\,-\tfrac{1}{3}\right)\end{gathered}$$

$$\begin{aligned}d(E,P) = d(F,P) = |\overrightarrow{FR}| &= \left|\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\frac{7}{3}\\\frac{8}{3}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}\right|\\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2} = \sqrt{9} = 3\end{aligned}$$

Abstand Punkt-Gerade

Formel

Für den Abstand eines Punktes R zu einer Geraden $g: \vec{x} = \vec{p} + s \cdot \vec{u}$, gilt:

$$d(R, g) = |\overrightarrow{PR} \times \vec{u}_0|$$

Algorithmus

1. Stelle Hilfsebene H auf, die den Punkt P enthält und den Richtungsvektor von g als Normalenvektor hat.
2. Erhalte Punkt F als Schnittpunkt von g und H.
3. $d(R, g) = |\overrightarrow{FR}|$

Beispiel

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad R(2 \,|\, -3 \,|\, 5)$$

Variante 1: Formel

$$\overrightarrow{RP} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad |\vec{u}| = 3 \;\Rightarrow\; \vec{u}_0 = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} d(R, g) = |\overrightarrow{RP} \times \vec{u}_0| &= \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Bigg| \cdot \frac{1}{3}}_{\vec{u}_0} \\ &= \left| \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ -10 \end{pmatrix} \right| \cdot \frac{1}{3} = \sqrt{180} \cdot \sqrt{\frac{1}{9}} = \sqrt{20} \end{aligned}$$

Variante 2: Algorithmus

$$\text{1. Hilfsebene aufstellen}$$

$$\Rightarrow H: 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -9 \qquad \text{NR: } 2 \cdot 2 + (-3) - 2 \cdot 5 = -9$$

$$\text{2. Schnittpunkt bestimmen}$$

$$\begin{aligned} 2 \cdot (4 + 2s) + 3 + s - 2 \cdot (1 - 2s) &= -9 \\ 9 + 9s &= -9 \qquad | -9 \,|\, : 9 \\ s &= -2 \\ \Rightarrow F(0 \,|\, 1 \,|\, 5) \end{aligned}$$

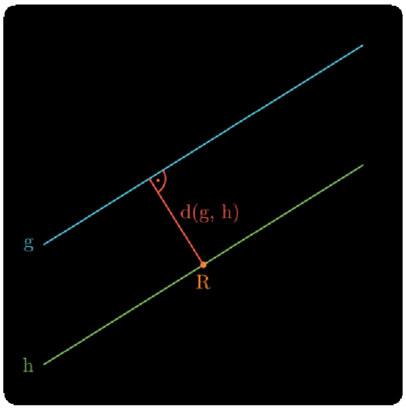
$$\text{3. Abstand berechnen}$$

$$d(R, g) = d(R, F) = |\overrightarrow{RF}| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 0^2} = \sqrt{20}$$

Abstand Gerade-Gerade (Parallel)

💡 Um den Abstand zwei paralleler Geraden g und h zu berechnen, berechnet man den Abstand des Stützpunktes R von h zur Geraden g.

$$d(g, h) = d(g, R)$$



Beispiel

Siehe Beispiel **Abstand Punkt-Gerade**.

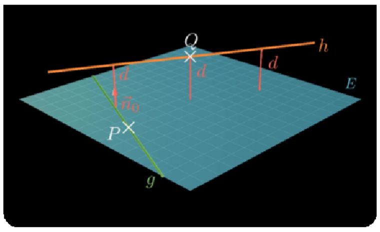
Abstand Gerade-Gerade (Windschief)

Gegeben sind die Geraden $g: \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u}$ und $h: \vec{x} = \vec{q} + s \cdot \vec{v}$

1. Stelle eine Hilfsebene E mit Normalenvektor $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$ auf, die P enthält. Dadurch ist E parallel zu h und enthält g.
2. $d(g,h) = d(E,h) = \underbrace{d(E,Q)}_{\text{HNF}}$

ODER

$d(g,h) = |(\vec{q} - \vec{p}) \circ \vec{n}_0|$



Beispiel

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad |\vec{n}| = 3$$

$$d(E,Q) = \underbrace{\left| \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right| \cdot \frac{1}{3}}_{\vec{n}_0} = \left| \begin{pmatrix} -3 \\ 13 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right| \cdot \frac{1}{3} = 18 \cdot \frac{1}{3} = 6$$

ODER

$$d(g,h) = \left| \left(\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix} \right) \circ \underbrace{\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{n}_0} \right| = \left| \begin{pmatrix} -3 \\ 13 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \right| = 6$$

Abstand Gerade-Ebene (Parallel)

💡 Um den Abstand der Ebene E und der parallelen Gerade g zu berechnen, nimmt man den Stützpunkt Q von g. Dann gilt:

$$d(E,g) = \underbrace{d(E,Q)}_{\text{HNF}}$$

Beispiel

$$E: x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 4 \qquad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$d(E,g) = d(E,(4\,|\,2\,|\,1)) = \frac{|4+4-2-4|}{3} = \frac{2}{3}$$

Abstand Ebene-Ebene (Parallel)

💡 Um den Abstand der parallelen Ebenen E und F zu berechnen, bestimmt man einen Punkt P, der auf F liegt. Dann gilt:

$$d(E,F) = \underbrace{d(E,P)}_{\text{HNF}}$$

Beispiel

$$E: x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 4 \qquad F: 3x_1 + 6x_2 - 6x_3 = 21$$
$$\Rightarrow P(7\,|\,0\,|\,0)$$

$$d(E,F) = d(E,P) = \frac{|7-4|}{3} = 1$$

Gemeinsames Lot windschiefer Geraden bestimmen

💡 Um das gemeinsame Lot zweier windschiefer Geraden g und h zu bestimmen, findet man Punkte P auf g und Q auf h, sodass der Verbindungsvektor $\overrightarrow{PQ}$ sowohl senkrecht zu g als auch senkrecht zu h ist.

Beispiel

$$g:\vec{x}=\begin{pmatrix}7\\7\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}4\\-5\\2\end{pmatrix}\qquad h:\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$P_r(7+4r\,|\,7-5r\,|\,2r)\qquad Q_s(0\,|\,1+s\,|\,2+s)$$

$$\text{Suche } t \,\&\, s\text{, sodass } \overrightarrow{P_rQ_s}\perp g \,\&\, \overrightarrow{P_rQ_s}\perp h$$

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}7+4r\\7-5r-(1+s)\\2s-(2+s)\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}4\\-5\\2\end{pmatrix}&=0\\ 28+16r-35+25r+5+5s+4r-4+2s&=0\\ -6+45r+3s&=0\\ \Rightarrow s&=2-15r\end{aligned}$$

$$\xrightarrow{\text{In ander gleichung einsetzen}}$$

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}7+4r\\7-5r-(1+s)\\2r-(2+s)\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}&=0\\ 7-5r-1-s+2r-2-s&=0\\ 4-3r-2s&=0\quad |\ s=2-15r\\ 4-3r-4+30r&=0\\ r&=0\\ \Rightarrow s&=2\end{aligned}$$

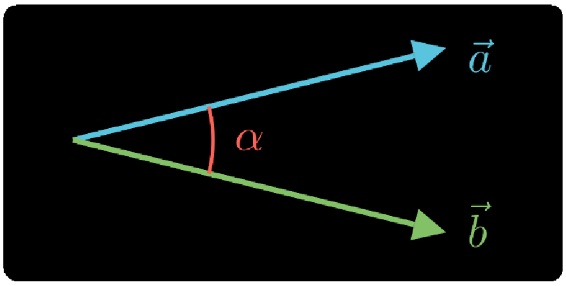
$$\boxed{\Rightarrow G(7\,|\,7\,|\,0)\quad H(0\,|\,3\,|\,4)}$$

💬 Wenn die Fragestellung nach den Lotfußpunkten fragt, reicht es die Punkte G und H zu bestimmen. Wenn nach einer Geraden gefragt ist, muss man zusätzlich die Gerade durch G und H bestimmen.

Winkel zwischen Vektoren

Für den Winkel α zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gilt:

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$



Beispiel

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{14} \qquad |\vec{b}| = 5$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}}{\sqrt{14} \cdot 5}$$

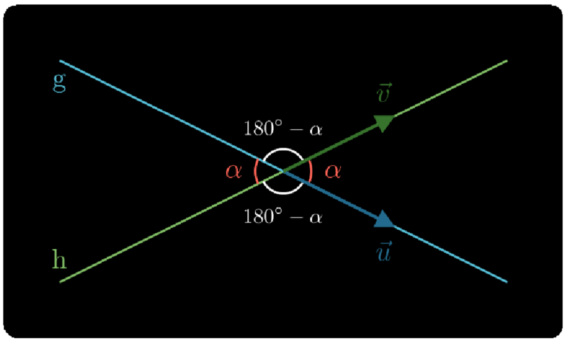
$$\cos(\alpha) = \frac{-5}{\sqrt{14} \cdot 5}$$

$$\alpha = \underbrace{\cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{14}}\right)}_{\text{DEGREE!}} \boxed{\approx 105{,}5^\circ}$$

Schnittwinkel Gerade-Gerade

💡 Für den Schnittwinkel zwischen zwei Geraden g und h mit Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ gilt:

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{u} \circ \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$



Beispiel

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{14} \qquad |\vec{v}| = 5$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\left| \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{14} \cdot 5}$$

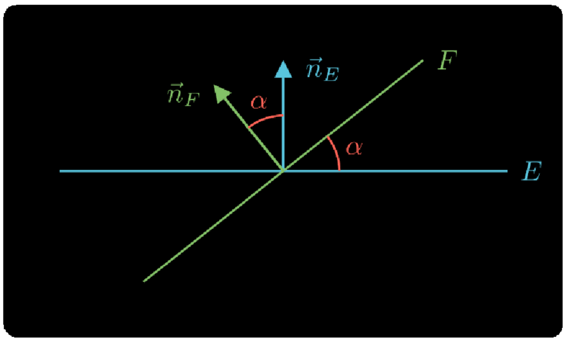
$$\cos(\alpha) = \frac{|-5|}{\sqrt{14} \cdot 5}$$

$$\alpha = \underbrace{\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right)}_{\text{DEGREE!}} \boxed{\approx 74{,}5^\circ}$$

Schnittwinkel Ebene-Ebene

💡 Für den Schnittwinkel zwischen zwei Ebenen E und F mit Normalenvektoren $\vec{n}_E$ und $\vec{n}_f$ gilt:

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{n}_E \circ \vec{n}_F|}{|\vec{n}_E| \cdot |\vec{n}_F|}$$



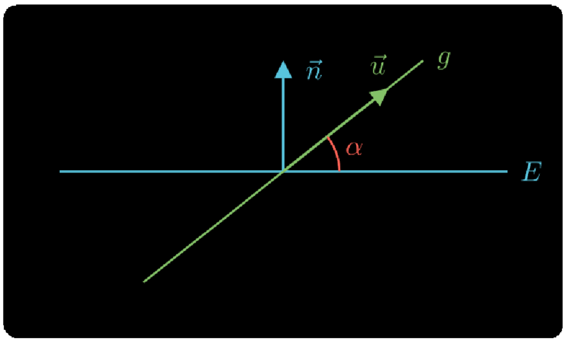
Beispiel

Siehe Beispiel Schnittwinkel Gerade-Gerade.

Schnittwinkel Gerade-Ebene

Für den Schnittwinkel zwischen einer Geraden mit Richtungsvektoren $\vec{u}$ und einer Ebene mit Normalenvektor $\vec{n}$ gilt:

$$\sin(\alpha) = \frac{|\vec{u} \circ \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|}$$



Beispiel

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

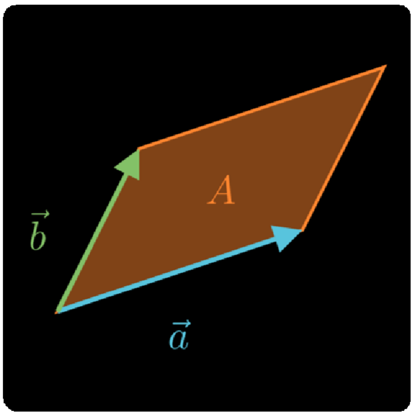
$$|\vec{u}| = 5 \qquad |\vec{n}| = \sqrt{21}$$

$$\begin{aligned} \sin(\alpha) &= \frac{\left| \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{5 \cdot \sqrt{21}} \\ \sin(\alpha) &= \frac{|-4|}{5 \cdot \sqrt{21}} \\ \alpha &= \underbrace{\sin^{-1}\left(\frac{4}{5 \cdot \sqrt{21}}\right)}_{\text{DEGREE!}} \boxed{\approx 10{,}1^\circ} \end{aligned}$$

Flächeninhalt Parallelogramm

Für den Flächeninhalt A eines Parallelogramms, dass von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird, gilt:

$$A = |\vec{a} \times \vec{b}|$$



Beispiel

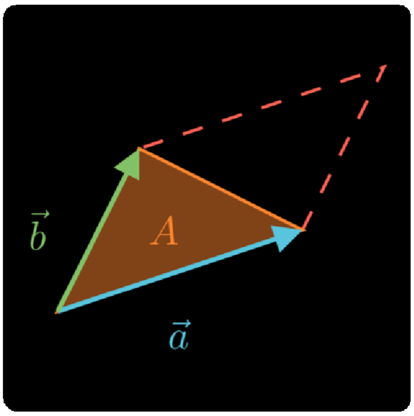
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \left| \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -35 \\ 7 \\ 22 \end{pmatrix} \right| \approx \boxed{41{,}93\ (FE)}$$

Flächeninhalt Dreieck

Für den Flächeninhalt A eines Dreiecks, dass von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird, gilt:

$$A = \frac{1}{2} \cdot |\vec{a} \times \vec{b}|$$



Beispiel

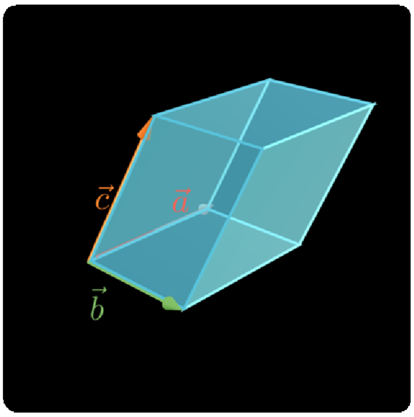
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} -35 \\ 7 \\ 22 \end{pmatrix} \right| \approx \frac{1}{2} \cdot 41{,}93 = \boxed{20{,}965\ (FE)}$$

Volumen Spat

Für das Volumen V eines Spats, der von den Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannt wird, gilt:

$$V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}\,|$$



Beispiel

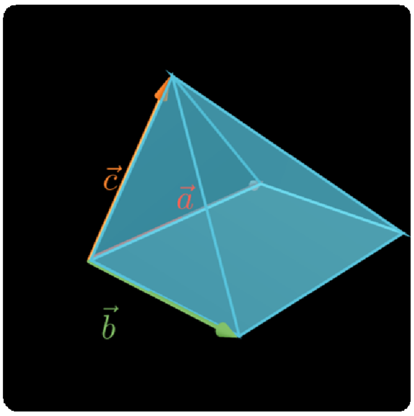
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} V &= \left| \left[\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \right] \circ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} \right| \\ &= |-20 + 200| \\ &= \boxed{180\ (VE)} \end{aligned}$$

Volumen Pyramide mit viereckiger Grundfläche

Für das Volumen V einer Pyramide mit viereckiger Grundfläche, die von den Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannt wird, gilt:

$$V = \frac{1}{3} \cdot |(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}\,|$$



Beispiel

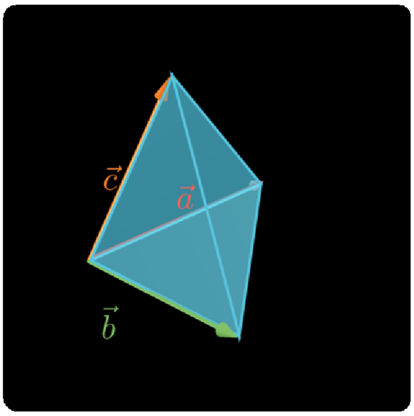
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot \left| \left[\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \right] \circ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} \right| \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left| \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} \right| \\ &= \frac{1}{3} \cdot |-20 + 200| \\ &= \frac{1}{3} \cdot 180 \\ &= \boxed{60\ (VE)} \end{aligned}$$

Volumen Pyramide mit dreieckiger Grundfläche

Für das Volumen V einer Pyramide mit dreieckiger Grundfläche, die von den Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannt wird, gilt:

$$V = \frac{1}{6} \cdot |(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}\,|$$



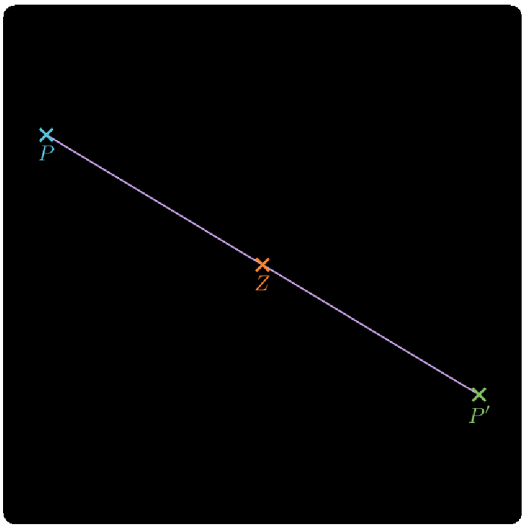
Beispiel

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{6} \cdot \left| \left[\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \right] \circ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} \right| \\ &= \frac{1}{6} \cdot \left| \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} \right| \\ &= \frac{1}{6} \cdot |-20 + 200| \\ &= \frac{1}{6} \cdot 180 \\ &= \boxed{30\ (VE)} \end{aligned}$$

Spiegelung an einem Punkt

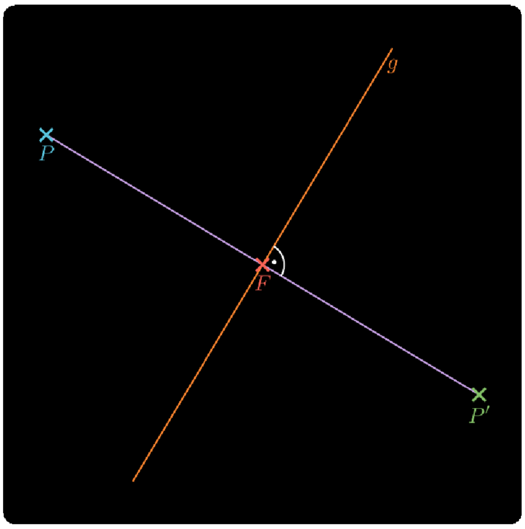
$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP'} &= \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PZ} \\ &= \overrightarrow{OZ} + \overrightarrow{PZ} \end{aligned}$$



Spiegelung an einer Geraden

💡

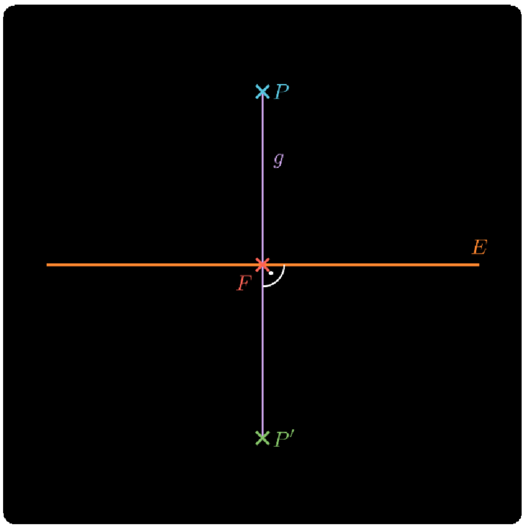
1. Stelle eine Hilfsebene H auf, die durch P verläuft und als Normalenvektor den Richtungsvektor von g hat.
2. Erhalte den Punkt F als Schnittpunkt von g und H.
3. Punktspiegelung an F: $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{PF}$



Spiegelung an einer Ebene

💡

1. Stelle eine Gerade g auf, deren Richtungsvektor dem Normalenvektor von E entspricht und P enthält.
2. Erhalte den Punkt F als Schnittpunkt von g und E.
3. Punktspiegelung an F: $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{PF}$



Symmetrieebene bestimmen

1. Berechne den Mittelpunkt M von P und P'.
2. Stelle eine Gleichung für E auf, sodass M in E liegt und $\overrightarrow{PP'}$ der Normalenvektor von E ist.