Zusatz

Integralfunktion

Theoretisch Abiturrelevant

Die **Integralfunktion** $J_u(x)$ zu einer integrierbaren Funktion f ist definiert als:

$$J_u(x) = \int_u^x f(t)\,dt$$

Es gilt:
$J_u'(x) = f(x)$, d.h. J_u ist eine Stammfunktion von f.
$J_u(u) = 0$, d.h. jede Integralfunktionhat eine Nullstelle.

$f(x) = x \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 10$ hat keine Nullstelle und ist daher keine Integralfunktion (aber trotzdem eine Stammfunktion von f).

Beispiel

$f(x) = 3e^x - 2$ mit $u = 0$, J_u als integralfreien Term darstellen:

$$\begin{aligned} J_0(x) = \int_0^x 3e^t - 2\,dt &= \left[3e^t - 2t\right]_0^x \\ &= 3e^x - 2x - (3e^0 - 2 \cdot 0) \\ &= \underbrace{3e^x - 2x - 3}_{\text{integralfreier Term}} \end{aligned}$$

Differentialquotient

Theoretisch Abiturrelevant

Eine Funktion f' ist an der Stelle a definiert, wenn der Differenzquotient $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ für $h \to 0$ gegen einen Grenzwert strebt. In diesem Fall ist f an der Stelle a differenzierbar.

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

nicht alle Funktionen sind (überall) differenzierbar

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x} \\ f(0) &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ f'(0) &= \frac{1}{0} \Rightarrow \times \end{aligned}$$

Die Wurzelfunktion ist zwar für $x = 0$ definiert, jedoch nicht differenzierbar.

Beispiel

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \\ f'(a) &= \lim_{h \to 0} \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} \\ f'(a) &= \lim_{h \to 0} \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} \\ f'(a) &= \lim_{h \to 0} 2a + h \\ f'(a) &= 2a \end{aligned}$$

Dass man das im Abi machen muss, ist sehr unwahrscheinlich, aber grob zu wissen, wie es geht, kann nicht schaden.

Quotientenregel

Nicht Abiturrelevant

$$f = \frac{u}{v} \quad \Rightarrow \quad f' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

Beispiel

$$\begin{aligned} lf(x) &= \frac{x^2}{x^2 - 3} \\ f'(x) &= \frac{2x \cdot (x^2 - 3) - x^2 \cdot 2x}{(x^2 - 3)^2} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} u(x) &= x^2 \\ u'(x) &= 2x \end{aligned} \qquad \begin{aligned} v(x) &= x^2 - 3 \\ v'(x) &= 2x \end{aligned}$$