全国硕士研究生招生考试

管综数学

主讲:媛媛老师

邮箱:family7662@dingtalk.com

第四章　几何

第四章 几何

- **第一节 平面几何**
  - 一、线与角
  - 二、三角形
  - 三、四边形
  - 四、圆与扇形
- **第二节 立体几何**
  - 一、长方体
  - 二、柱体
  - 三、球体
- **第三节 解析几何**
  - 一、平面直角坐标系
  - 二、直线方程与圆的方程

第一节 平面几何

第四章 第一节平面几何

师大课堂
SHI DA KE TANG

一、线与角

二、三角形

三、四边形

四、圆与扇形

一.线与角

（一）角

1.角的定义

有公共端点的两条射线组成的图形叫作角，这个公共端点叫作角的顶点，这两条射线叫作角的边.

✓ 当角的两边在一条直线上时，组成的角叫作平角.

✓ 平角的一半叫作直角

✓ 小于直角的角叫作锐角

✓ 大于直角且小于平角的角叫作钝角.

一、线与角

（一）角

1.角的定义

- 如果两个角的和是一个直角，那么这两个角互为余角，其中一个角叫作另一个角的余角.
- 如果两个角的和是一个平角，那么这两个角互为补角，其中一个角叫作另一个角的补角.

一.线与角

（一）角

2.角的表示

- ✓ 用数字表示单独的角
- ✓ 用小写的希腊字母表示单独的一个角
- ✓ 用一个大写英文字母表示一个独立(在一个顶点处只有一个角) 的角
- ✓ 用三个大写英文字母表示任一个角【一定要把顶点字母写在中间，边上的字母写在两侧】

一、线与角

（一）角

3.角的平分线

一条射线把一个角分成两个相等的角，这条射线叫作这个角的平分线.

角平分线的**性质**:

（1）角平分线上的点到这个角的两边的距离相等.

（2）到一个角的两边距离相等的点在这个角的平分线上.

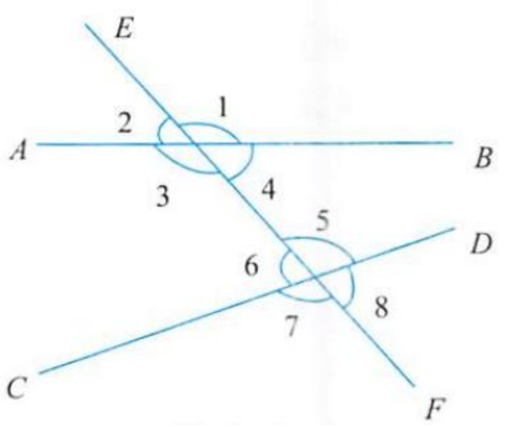
一.线与角

（二）相交线中的角

1.邻补角与对顶角

两条直线相交，可以得到四个角，其中有公共顶点但没有公共边的两个角叫作对顶角.有公共顶点且有一条公共边的两个角叫作邻补角.

邻补角互补，对顶角相等.



✓ 同位角：∠1和∠5（AB、CD上方，EF的同侧）

✓ 内错角：∠3和∠5（AB、CD之间，EF的两侧）

✓ 同旁内角：∠3和∠6（AB、CD之间，EF的同侧）

一、线与角

（二）相交线中的角

2.垂线

两条直线相交所成的四个角中，有一个角是直角时，称这两条直线互相垂直，其中一条直线叫作另一条直线的垂线，它们的交点叫作垂足.

直线AB，CD互相垂直，记作“AB⊥CD”(或“CD⊥AB”)

一.线与角

（二）相交线中的角

2.垂线

垂线的**性质**:

（1）过一点有且只有一条直线与已知直线垂直.

（2）**垂线段最短**：直线外一点与直线上各点连接的所有线段中，垂线段最短.

一.线与角

（三）平行线

1.概念

在同一个平面内，不相交的两条直线叫作平行线，平行用符号“//”表示，如“AB//CD”，读作“AB平行于CD”

同一平面内，两条直线的位置关系只有两种:相交或平行.

注意：（1）平行线是无限延伸的，无论怎样延伸也不相交

（2）当遇到线段、射线平行时，指的是线段、射线所在的直线平行

一.线与角

（三）平行线

2.平行线公理及其推论

公理：经过直线外一点，有且只有一条直线与这条直线平行.

推论：如果两条直线都和第三条直线平行，那么这两条直线也互相平行.

一.线与角

（三）平行线

3.平行线的判定

✓ 平行线的判定公理：同位角相等，两直线平行.

✓ 平行线的判定定理：（1）内错角相等，两直线平行

（2） 同旁内角互补，两直线平行

✓ 补充平行线的判定方法:（1）平行于同一条直线的两直线平行

（2）垂直于同一条直线的两直线平行

（3）平行线的定义

一.线与角

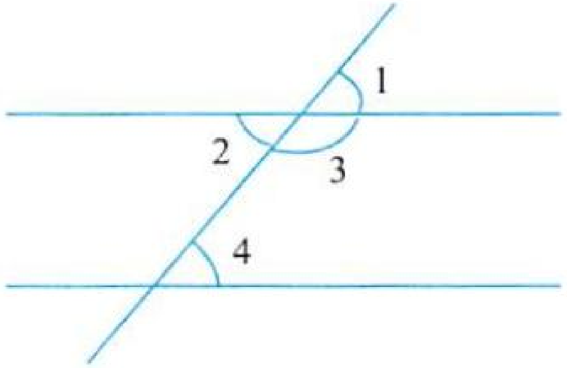
（三）平行线

4.平行线的性质

✓ 两直线平行，同位角相等

✓ 两直线平行，内错角相等

✓ 两直线平行，同旁内角互补



第一节 平面几何

二、三角形

第四章 第一节平面几何--三角形

年度	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023
考频	1	1	1	2	2	3	1	3	1

二、三角形

（一）三角形的边和角

1.任意两边之和大于第三边，即$a+b>c$；

任意两边之差小于第三边，即$a-b>c$.

2.三角形内角之和为180°，外角等于不相邻的两个内角之和.

3.三角形中等角对等边；等边对等角；大边对大角；大角对大边.

二、三角形

（一）三角形的边和角

【例1】长度分别为2，7，x的三条线段能组成一个三角形，整数x的值有（　　）种情况.

A.2　　B.3　　C.4　　D.5　　E.6

二.三角形

（一）三角形的边和角

【例1】长度分别为2，7，x的三条线段能组成一个三角形，整数x的值有（ B ）种情况.

A.2　　B.3　　C.4　　D.5　　E.6

【解析】已知三角形的两边长分别为2和7, 根据在三角形中任意两边之和大于第三边，任意两边之差小于第三边，即可求第三边长度的范围. 由三角形三边关系定理得$7-2<x<7+2$, 即$5<x<9$, 只有3种情况符合不等式，故选B.

二.三角形

（一）三角形的边和角

【例2】若一个三角形的三边长均为整数，其中两边长分别为2和4，则该三角形的周长有(　　)种取值.

A.2　　B.3　　C.4　　D.5　　E.6

二.三角形

（一）三角形的边和角

【例2】若一个三角形的三边长均为整数，其中两边长分别为2和4，则该三角形的周长有(　B　)种取值.

A.2　　B.3　　C.4　　D.5　　E.6

【解析】首先求出三角形第三边的取值范围，进而求出三角形的周长取值范围，据此求出答案. 设第三边的长为x, 周长为C, 因为三角形两边的长分别是2和4, 所以$4-2<x<2+4$, 即$2<x<6$. 则三角形的周长：$8<C<12$, 故选B.

二.三角形

（一）三角形的边和角

【例3】已知a, b, c是△ABC的三条边，化简$|a+b-c|-|c-a-b|$的结果为(　　).

A.$2a+2b-2c$　　B.$2a+2b$　　C.$2c$　　D.0　　E.a

二.三角形

（一）三角形的边和角

【例3】已知a,b,c是△ABC的三条边，化简$|a+b-c|-|c-a-b|$的结果为(D).

A.$2a+2b-2c$　　B.$2a+2b$　　C.$2c$　　D.0　　E.a

【解析】先根据三角形的三边关系判断出a+b−c与c−a−b的符号，再去绝对值符号，合并同类项即可。因为a,b,c为△ABC的三条边长，所以a+b−c>0,c−a−b<0,得到原式=a+b−c+(c−a−b)=0.故选D.

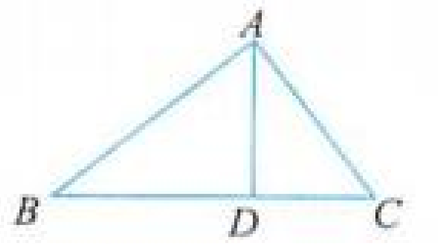
二.三角形

（二）三角形的面积公式

1.利用底、高求面积

$$S=\frac{1}{2}\cdot 底\cdot 高$$

高：从三角形的一个顶点向它的对边所在的直线作垂线，顶点和垂足之间的线段叫作三角形的高.



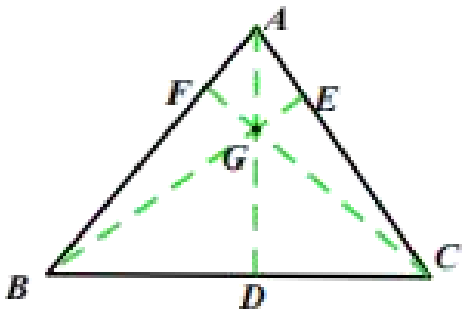
二.三角形

（二）三角形的面积公式

1.利用底、高求面积

（1）锐角三角形三条高全在三角形的内部，直角三角形有两条高是边，钝角三角形有两条高在三角形的外部.

（2）三角形三条高所在直线交于一点，这个点叫作三角形的垂心.



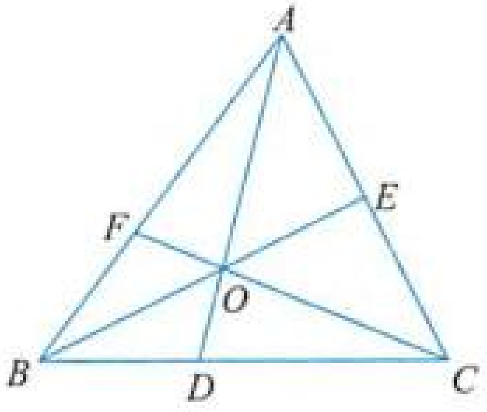
二.三角形

（二）三角形的面积公式

1.利用底、高求面积

✓ 等底等高面积相等

✓ 燕尾定理



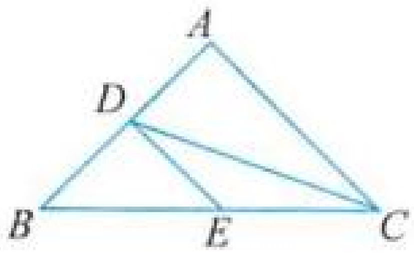
$$\because \frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta ACD}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot BD\cdot h}{\frac{1}{2}\cdot CD\cdot h}=\frac{BD}{CD},\frac{S_{\Delta BOD}}{S_{\Delta COD}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot BD\cdot h}{\frac{1}{2}\cdot CD\cdot h}=\frac{BD}{CD}$$

$$\therefore \frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta ACD}}=\frac{S_{\Delta BOD}}{S_{\Delta COD}}=\frac{BD}{CD}\Rightarrow \frac{S_{\Delta ABD}-S_{\Delta BOD}}{S_{\Delta ACD}-S_{\Delta COD}}=\frac{BD}{CD}\Rightarrow \frac{S_{\Delta ABO}}{S_{\Delta ACO}}=\frac{BD}{CD}$$

二.三角形

（二）三角形的面积公式

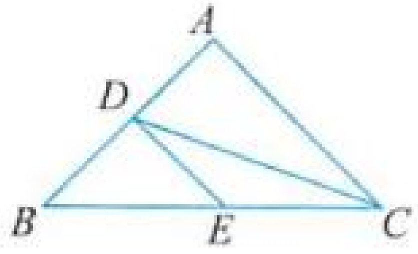
1.利用底、高求面积



【例4】如图所示，△ABC中，D,E两点分别在AB,BC上，若AD:DB=CE:EB=2:3，则△DBE与△ADC的面积比为(　).

A.3:5　　B.4:5　　C.9:10　　D.15:16　　E.4:9

二.三角形



（二）三角形的面积公式

1.利用底、高求面积

【例4】如图所示，△ABC中，D,E两点分别在AB,BC上，若AD:DB=CE:EB=2:3，则△DBE与△ADC的面积比为(C).

A.3:5　　B.4:5　　C.9:10　　D.15:16　　E.4:9

【解析】因为 $AD:DB=CE:EB=2:3$，所以 $S_{\triangle BDC}:S_{\triangle ADC}=3:2$，$S_{\triangle BDE}:S_{\triangle DCE}=3:2$，
可设 $S_{\triangle BDC}=3x$，则 $S_{\triangle ADC}=2x$，$S_{\triangle BED}=1.8x$，$S_{\triangle DCE}=1.2x$，
故△DBE与△ADC的面积比为 $1.8x:2x=9:10$. 故选 C.

二.三角形

（二）三角形的面积公式

2.利用夹角求面积（正弦定理）

$$S=\frac{1}{2}absinC$$

二.三角形

（二）三角形的面积公式

2.利用夹角求面积（正弦定理）

补充：三角函数

二.三角形

（二）三角形的面积公式

2.利用夹角求面积（正弦定理）

补充：三角函数

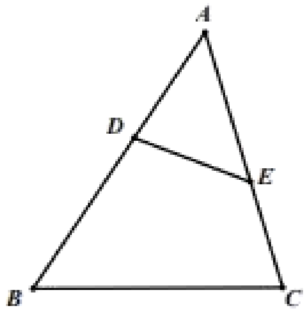
C	$30°$或$150°$	$45°$或$135°$	$60°$或$120°$	$90°$
$\sin C$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

二.三角形

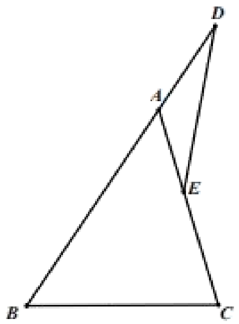
（二）三角形的面积公式

2.利用夹角求面积（正弦定理）

补充：鸟头定理（共角三角形）



$$\frac{S_{\Delta ADE}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot AD\cdot AE\cdot\sin\angle A}{\frac{1}{2}\cdot AB\cdot AC\cdot\sin\angle A}=\frac{AD\cdot AE}{AB\cdot AC}$$



$$\frac{S_{\Delta ADE}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot AD\cdot AE\cdot\sin\angle DAE}{\frac{1}{2}\cdot AB\cdot AC\cdot\sin\angle BAC}=\frac{AD\cdot AE}{AB\cdot AC}$$

二.三角形

（二）三角形的面积公式

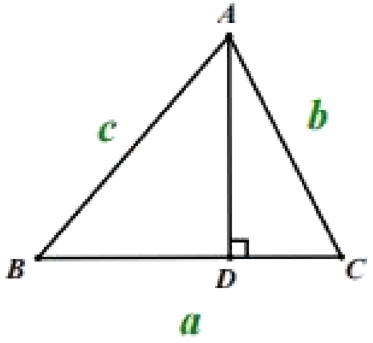
2.利用夹角求面积（正弦定理）

补充：余弦定理

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$



二.三角形

（二）三角形的面积公式

2.利用夹角求面积（正弦定理）

【例5】若三角形有两边长为4与6，三角形的面积为$6\sqrt{3}$，则这两边的夹角为(　).

A.30°　　B.45°或135°　　C.60°或120°　　D.75°　　E.90°

二.三角形

（二）三角形的面积公式

2.利用夹角求面积（正弦定理）

【例5】若三角形有两边长为4与6，三角形的面积为$6\sqrt{3}$，则这两边的夹角为(C).

A.30°　　B.45°或135°　　C.60°或120°　　D.75°　　E.90°

【解析】根据 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times4\times6\sin C=6\sqrt{3}\Rightarrow\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$，故选 C.

二.三角形

（二）三角形的面积公式

3.利用边长求面积

$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$，其中$p$为三角形的半周长

例：三角形的三边长分别为5，6，7，则面积为？

二、三角形

（三）三角形的分类

按角分类：
- 直角三角形
- 斜角三角形
  - 锐角三角形
  - 钝角三角形

按边分类：
- 等腰三角形
  - 底边和腰不相等的等腰三角形
  - 等边三角形
- 不等边三角形

二.三角形

（三）三角形的分类

1.直角三角形 $Rt\triangle$

（1）直角三角形的两个锐角互余

（2）斜边上的中线等于斜边的一半

（3）30°角的对应边是斜边的一半

一个内角为45°，两直角边相等

二.三角形

（三）三角形的分类

1.直角三角形

（4）勾股定理

两直角边的平方和等于斜边的平方$a^2+b^2=c^2$

在锐角三角形中，最长边的平方<剩余两边的平方和.

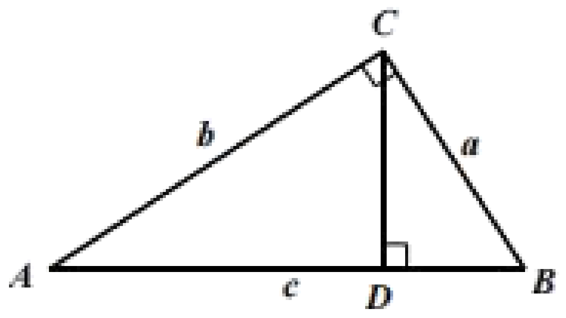
在钝角三角形中，最长边的平方>剩余两边的平方和

二.三角形

（三）三角形的分类

1.直角三角形

（4）勾股定理



常用的勾股数：3,4,5　　6，8,10　　5,12,13

7,24,25　8,15,17　9,12，15

✓ 等腰直角三角形的三边之比为1:1：$\sqrt{2}$

✓ 内角为30°，60°，90°的直角三角形1:$\sqrt{3}$：2

二.三角形

（三）三角形的分类

1.直角三角形

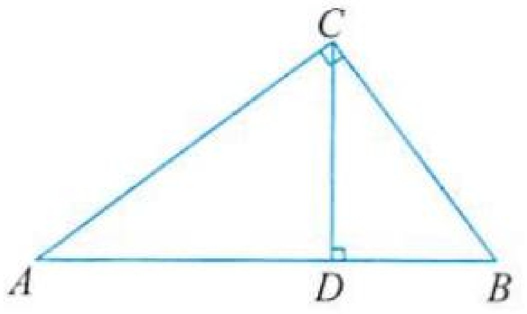
（5）射影定理

在直角三角形中，斜边上的高线是两直角边在斜边上的投影的比例中项，每条直角边是它们在斜边上的投影和斜边的比例中项.

$$CD^2 = AD \cdot BD$$

$$AC^2 = AD \cdot AB$$

$$BC^2 = BD \cdot AB$$



二.三角形

（三）三角形的分类

1.直角三角形

【例6】Rt△ABC中，∠C=90°，∠A=15°，BC=1，则△ABC的面积为(　　).

A. $\sqrt{2}+1$　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}+1$　　D. $\sqrt{3}$　　E. 1

二.三角形

（三）三角形的分类

1.直角三角形

【例6】Rt△ABC中，∠C=90°，∠A=15°，BC=1，则△ABC的面积为(C).

A. $\sqrt{2}+1$　　B.$\sqrt{2}$　　C.$\frac{\sqrt{3}}{2}+1$　　D.$\sqrt{3}$　　E.1

【解析】在 AC 上取点 D，使 $BD=AD\Rightarrow CD=\sqrt{3}$，$BD=2\Rightarrow AD=2\Rightarrow S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{2}+1$，选 C.

二.三角形

（三）三角形的分类

2.等腰三角形

（1）等腰三角形的性质定理

等腰三角形的两个底角相等.【等边对等角】

（2）等腰三角形的其他性质

✓ 等腰直角三角形的两个底角相等且等于 45°

✓ 等腰三角形的底角只能为锐角，不能为钝角 (或直角)，但顶角可为钝角 (或直角)

二.三角形

（三）三角形的分类

2.等腰三角形

（2）等腰三角形的其他性质

✓ 等腰三角形的三角关系:设顶角为∠A，底角为∠B、∠C，则

$\angle A=180°-2\angle B$，$\angle B=\angle C=\dfrac{180°-\angle A}{2}$

（3）等腰直角三角形的面积

$S=\frac{1}{2}a^2=\frac{1}{4}c^2$（$a$为直角边，$c$为斜边）

二.三角形

（三）三角形的分类

3.等边三角形

（1）等边三角形的各个角都相等，并且每个角都等于 60°

（2）等边三角形的高与边的比为$\sqrt{3}:2=\frac{\sqrt{3}}{2}:1$

（3）等边三角形的面积$S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$（a为边长）

二.三角形

（三）三角形的分类

3.等边三角形

【例7】已知等腰直角三角形ABC中BC为斜边，周长为$2\sqrt{2}+4$，△BCD为等边三角形，则△BCD的面积为(   ).

A. $2\sqrt{2}$　　B.$4\sqrt{3}$　　C.6　　D.$2\sqrt{3}$　　E.$5\sqrt{3}$

二.三角形

（三）三角形的分类

3.等边三角形

【例7】已知等腰直角三角形ABC中BC为斜边，周长为$2\sqrt{2}+4$，△BCD为等边三角形，则△BCD的面积为(D).

A. $2\sqrt{2}$　　B.$4\sqrt{3}$　　C.6　　D.$2\sqrt{3}$　　E.$5\sqrt{3}$

【解析】因为等腰直角三角形 ABC 中 BC 为斜边，周长为 $2\sqrt{2}+4$. 所以 $BC=2\sqrt{2}$，$AB=AC=2$，又因为$\triangle BCD$ 为等边三角形，故 $S_{\triangle BCD}=\frac{\sqrt{3}}{4}BC^2=2\sqrt{3}$，选 D.

二.三角形

（四）三角形的特殊线段

1.中线

在三角形中，连结一个顶点和它对边中点的线段叫中线.

（1）三角形三条中线全在三角形的内部.

（2）中线把三角形分成两个面积相等的三角形.

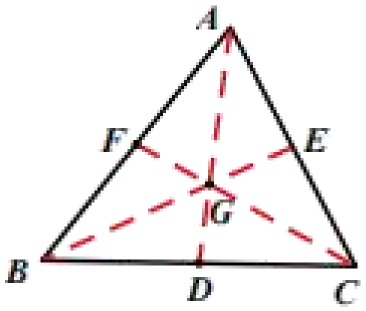
（3）直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半.

二.三角形

（四）三角形的特殊线段

1.中线

（4）三角形三条中线交于三角形内部一点，这个点叫作三角形的重心，重心将中线分成2:1的两段.

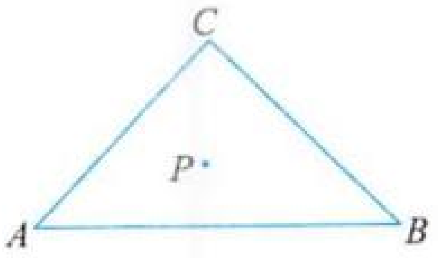


$$\frac{AG}{GD}=\frac{BG}{GE}=\frac{CG}{GF}=\frac{2}{1}$$

二.三角形

（四）三角形的特殊线段

1.中线



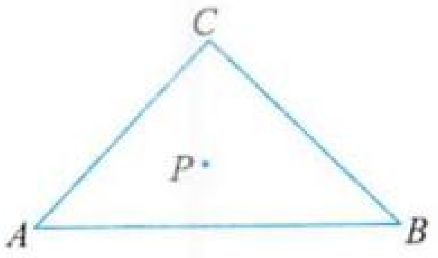
【例8】如图，已知在Rt△ABC中，∠C=90°，AC=BC，AB=6，点P是Rt△ABC的重心，则点P到AB所在直线的距离等于(　　).

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\frac{3}{2}$　　D. 2　　E. 3

二.三角形

（四）三角形的特殊线段

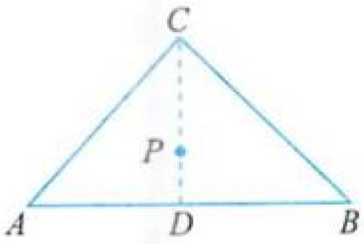
1.中线



【例8】如图，已知在Rt△ABC中，∠C=90°，AC=BC，AB=6，点P是Rt△ABC的重心，则点P到AB所在直线的距离等于(A).

A. 1　　B.$\sqrt{2}$　　C.$\frac{3}{2}$　　D. 2　　E.3

【解析】连接CP并延长，交AB于D，因为P是Rt△ABC的重心，得到CD是△ABC的中线，$PD=\frac{1}{3}CD$，因为$\angle C=90°$，所以$CD=\frac{1}{2}AB=3$，故$PD=1$，因为$AC=BC$，CD是△ABC的中线，故$CD\perp AB$，即点P到AB所在直线的距离等于1，故选A.



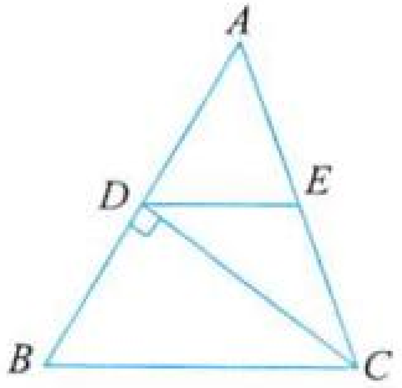
二.三角形

（四）三角形的特殊线段

1.中线

【例9】如图，△ABC中，CD⊥AB于D，E是AC的中点.若AD=6，DE=5，则CD的长等于(　　).

A. 4　　B.6　　C.8　　D. 10　　E.12



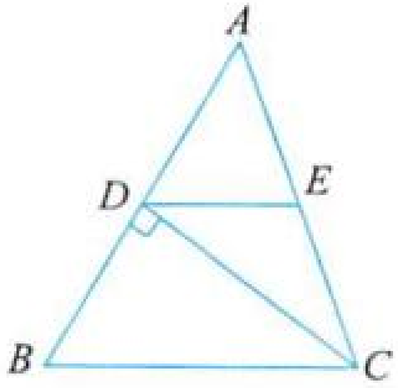
二.三角形

（四）三角形的特殊线段

1.中线

【例9】如图，△ABC中，CD⊥AB于D，E是AC的中点.

若AD=6，DE=5，则CD的长等于(C).

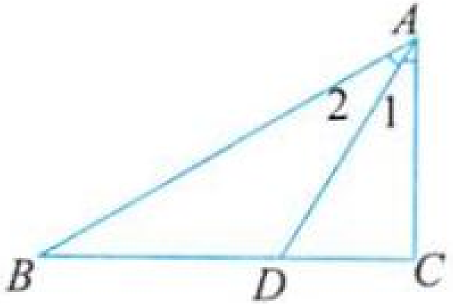


A. 4　　B.6　　C.8　　D. 10　　E.12

【解析】由“直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半”求得 $AC=2DE=10$，然后在直角△ACD中，利用勾股定理来求线段 CD，$CD=\sqrt{AC^2-AD^2}=8$．选 C.

二.三角形

（四）三角形的特殊线段



2.角平分线

三角形一个内角的平分线与它的对边相交，这个角顶点与交点之间的线段.

（1）三角形三条角平分线全在三角形的内部.

（2）三角形三条角平分线交于三角形内部一点，这个点叫作三角形的内心，内心到三边的距离相等.

（3）等腰三角形顶角平分线平分底边并且垂直于底边，即等腰三角形的顶角平分线、底边上的中线、底边上的高重合.【三线合一】

二、三角形

（四）三角形的特殊线段

3.线段的垂直平分线

经过某一条线段的中点，并且垂直于这条线段的直线，叫作这条线段的垂直平分线，又称“中垂线”．

（1）垂直平分线垂直且平分其所在线段.

（2）垂直平分线上任意一点到线段两端点的距离相等.

（3）三角形三条边的垂直平分线相交于一点，该点叫作三角形的外心，并且这一点到三个顶点的距离相等.

二、三角形

（四）三角形的特殊线段

三角形的“四心”

✓ 垂心：高的交点

✓ 重心：中线的交点

✓ 内心：角平分线的交点

✓ 外心：垂直平分线的交点

【等边三角形中四心合一】

二.三角形

（四）三角形的特殊线段

4.三角形的中位线

连接三角形两边中点的线段叫作三角形的中位线.

（1）三角形共有三条中位线.

✓ 三条中位线组成一个三角形，其周长为原三角形周长的一半.

✓ 三角形的一条中线和与它相交的中位线互相平分.

✓ 三角形中任意两条中位线的夹角与这夹角所对的三角形的顶角相等.

（2）中位线定理：三角形的中位线平行于第三边，并且等于它的一半.

二、三角形

（四）三角形的特殊线段

4.三角形的中位线

【例10】在△ABC中，已知BD和CE分别是边AC，AB上的中线，且BD⊥CE，垂足为O.若OD=2，OE=4，则线段AO的长度为(　).

A. $2\sqrt{5}$　　B. $4\sqrt{5}$　　C. $2\sqrt{3}$　　D. $4\sqrt{3}$　　E. $5\sqrt{3}$

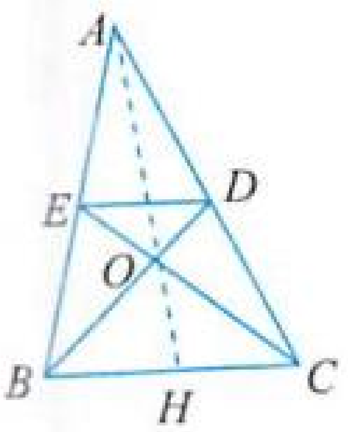
二.三角形

（四）三角形的特殊线段

4.三角形的中位线

【例10】在△ABC中，已知BD和CE分别是边AC，AB上的中线，且BD⊥CE，垂足为O.若OD=2，OE=4，则线段AO的长度为(B).

A. $2\sqrt{5}$　　B.$4\sqrt{5}$　　C.$2\sqrt{3}$　　D. $4\sqrt{3}$



【解析】 连接 AO 并延长，交 BC 于 H，由勾股定理得，

$DE=\sqrt{OE^2+OD^2}=2\sqrt{5}$，

因为 BD 和 CE 分别是边 AC，AB 上的中线，

所以 $BC=2DE=4\sqrt{5}$，O 是△ABC 的重心，

根据 AH 是中线，又 $BD\perp CE$，所以 OH 是 Rt△BOC 斜边 BC 上的中线，故 $OH=\frac{1}{2}BC=2\sqrt{5}$，

因为 O 是△ABC 的重心，所以 $AO=2OH=4\sqrt{5}$，故选 B.

二.三角形

（五）三角形的全等

1.定义

能够完全重合的两个三角形叫作全等三角形.这样的两个三角形具有相同的边长、角、面积等.

2.三角形全等的判定

（1）边角边定理SAS

有两边和它们的夹角对应相等的两个三角形全等.

（2）角边角定理ASA

有两角和它们的夹边对应相等的两个三角形全等

二、三角形

（五）三角形的全等

2.三角形全等的判定

（3）角角边定理AAS

有两角和其中一个角的对边对应相等的两个三角形全等..

（4）边边边定理SSS

有三边对应相等的两个三角形全等.

二.三角形

（五）三角形的全等

3.直角三角形全等的判定

斜边、直角边定理HL：有斜边和一条直角边对应相等的两个直角三角形全等.

二.三角形

（五）三角形的全等

4.全等变换

只改变图形的位置，不改变其形状大小的图形变换叫作全等变换.

包括以下三种:

（1）平移变换：把图形沿某条直线平行移动的变换

（2）对称变换：将图形沿某直线翻折180°

（3）旋转变换：将图形绕某点旋转一定的角度到另一个位置

二、三角形

（六）三角形的相似

1.概念

对应角相等，对应边成比例的三角形叫作相似三角形.【判定方法1】

相似三角形对应边的比叫作相似比（或相似系数）.

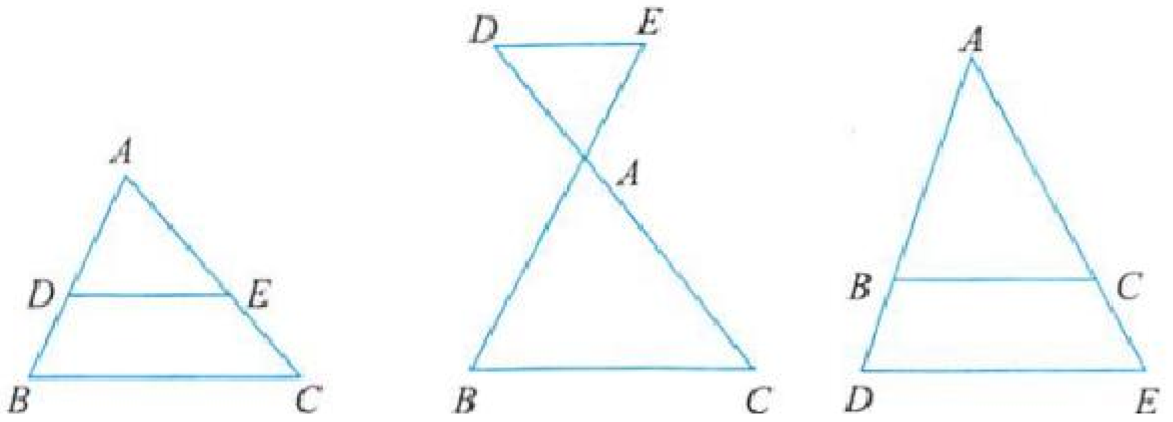
二.三角形

（六）三角形的相似

2.基本定理

平行于三角形一边的直线和其他两边(或两边的延长线)相交，所构成的三角形与原三角形相似.【判定方法2】

∵DE∥BC∴△ADE∽△ABC



二.三角形

（六）三角形的相似

3.三角形相似的判定

（1）定理1：两角对应相等，两三角形相似.

（2）定理2：两边对应成比例且夹角相等，两三角形相似.

（3）定理3：三边对应成比例，两三角形相似.

二、三角形

（六）三角形的相似

3.三角形相似的判定

➢ 直角三角形相似的判定

（1）定理：如果一个直角三角形的斜边和一条直角边与另一个直角三角形的斜边和一条直角边对应成比例，那么这两个直角三角形相似.

（2）垂直法：直角三角形被斜边上的高分成的两个直角三角形与原三角形相似.

二.三角形

（六）三角形的相似

3.三角形相似的判定

	全等的判定	相似的判定
SSS（边边边）	三边对应相等的三角形全等	三边对应成比例
SAS（边角边）	两边及其夹角对应相等的三角形全等	两边对应成比例且夹角相等
ASA（角边角）	两角及其夹边对应相等的三角形全等	两对应角相等
AAS（角角边）	两角及其一角的对边对应相等的三角形全等	
HL（斜边、直角边）	斜边及一条直角边相等的直角三角形全等	一锐角相等

二.三角形

（六）三角形的相似

4.相似三角形的性质

（1）相似三角形的对应角相等，对应边成比例.

（2）相似三角形对应高的比、对应中线的比与对应角平分线的比都等于相似比.

（3）相似三角形周长的比等于相似比.

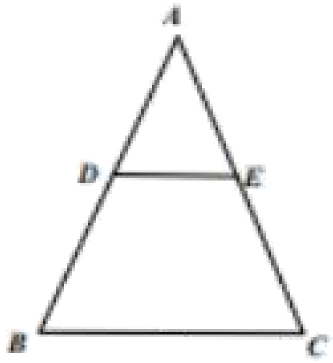
（4）相似三角形面积的比等于相似比的平方.

二.三角形

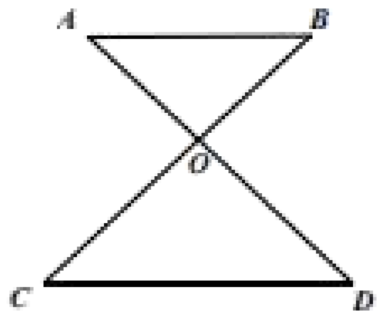
（六）三角形的相似

5.常见相似模型

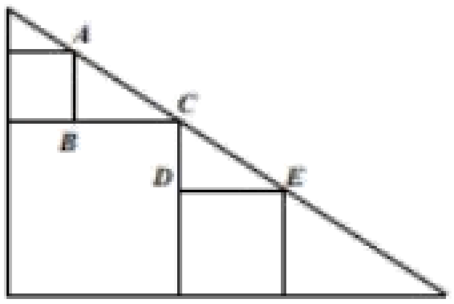
A字型



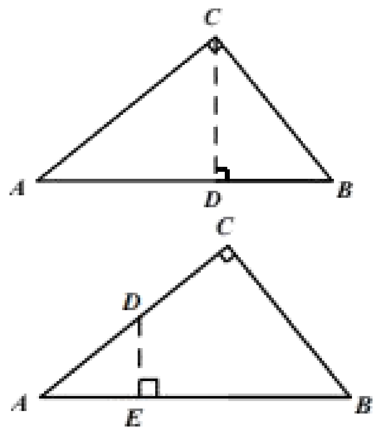
8字型



楼梯图形



双垂直图形



$\Delta ACD \sim \Delta CBD \sim \Delta ABC$

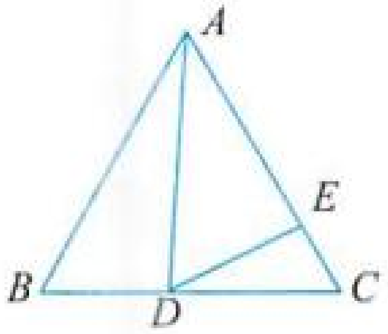
$\Delta ADE \sim \Delta ABC$

二.三角形

（六）三角形的相似

【例11】如图，在等边△ABC中，D为BC边上一点，E为AC边上一点，且∠ADE=60°，BD=3，CE=2，则△ABC的边长为(　　).

A .9　　B.12　　C.15　　D.18　　E.20

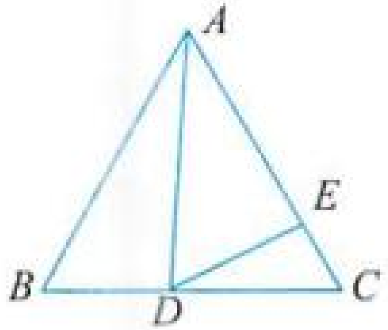


二、三角形

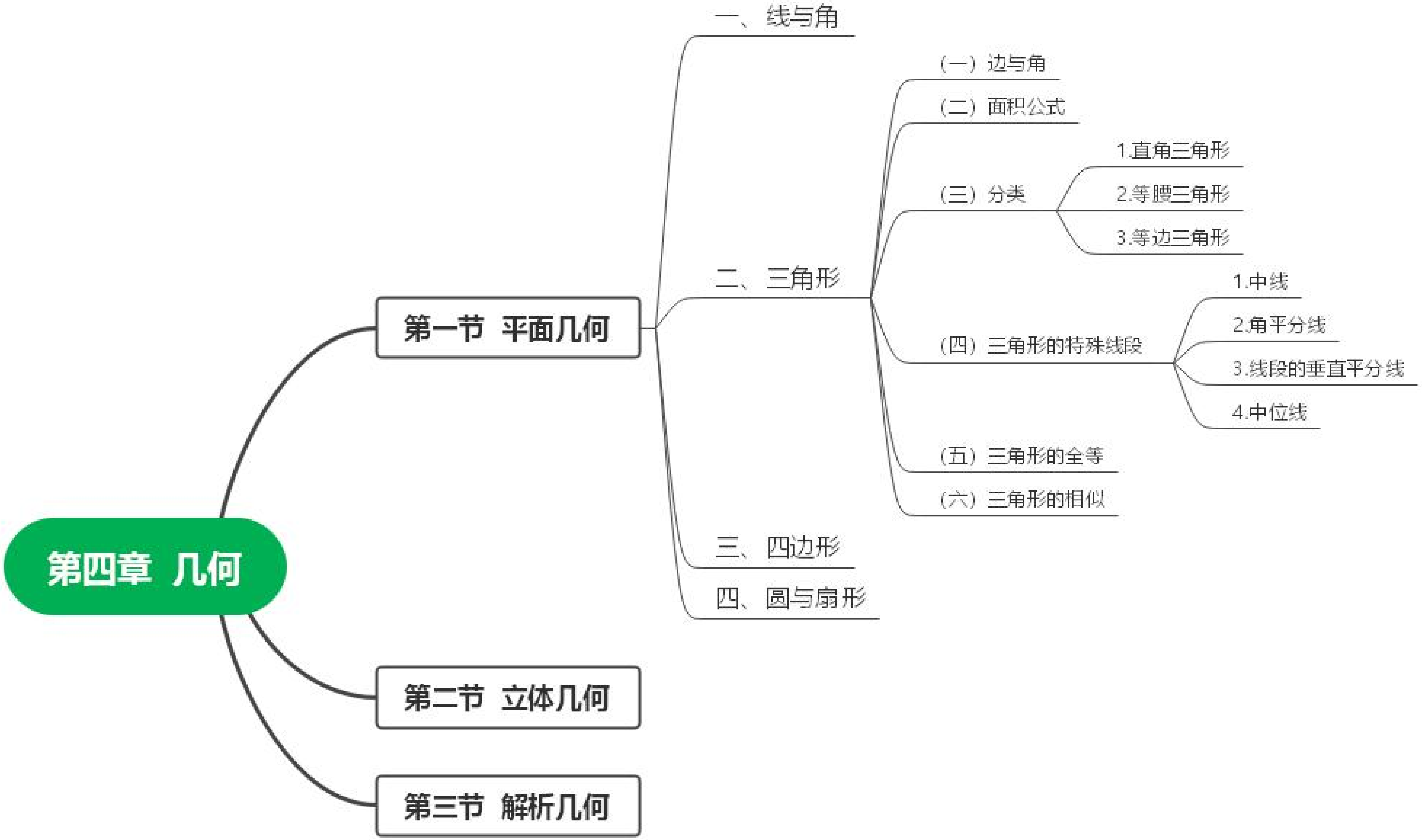
（六）三角形的相似

【例11】如图，在等边△ABC中，D为BC边上一点，E为AC边上一点，且∠ADE=60°，BD=3，CE=2，则△ABC的边长为(　A　)

A.9　　B.12　　C.15　　D.18　　E.20



【解析】设 $CD=x$，因为 $\angle ADE=60^{\circ}$，$\angle ADE+\angle CDE=\angle B+\angle BAD$，$\angle B=60^{\circ}$，所以 $\angle BAD=\angle CDE$，因为 $\angle B=\angle C$，得到 $\triangle BAD\backsim\triangle CDE$，所以 $\frac{AB}{CD}=\frac{BD}{CE}$，即 $\frac{x+3}{x}=\frac{3}{2}$，解得 $x=6$，所以 $AB=3+x=3+6=9$，即等边三角形的边长为 9，故选 A.


第四章 几何
第一节 平面几何
一、线与角
二、三角形
（一）边与角
（二）面积公式
（三）分类
1.直角三角形
2.等腰三角形
3.等边三角形
（四）三角形的特殊线段
1.中线
2.角平分线
3.线段的垂直平分线
4.中位线
（五）三角形的全等
（六）三角形的相似
三、四边形
四、圆与扇形
第二节 立体几何
第三节 解析几何

第一节 平面几何

三、四边形

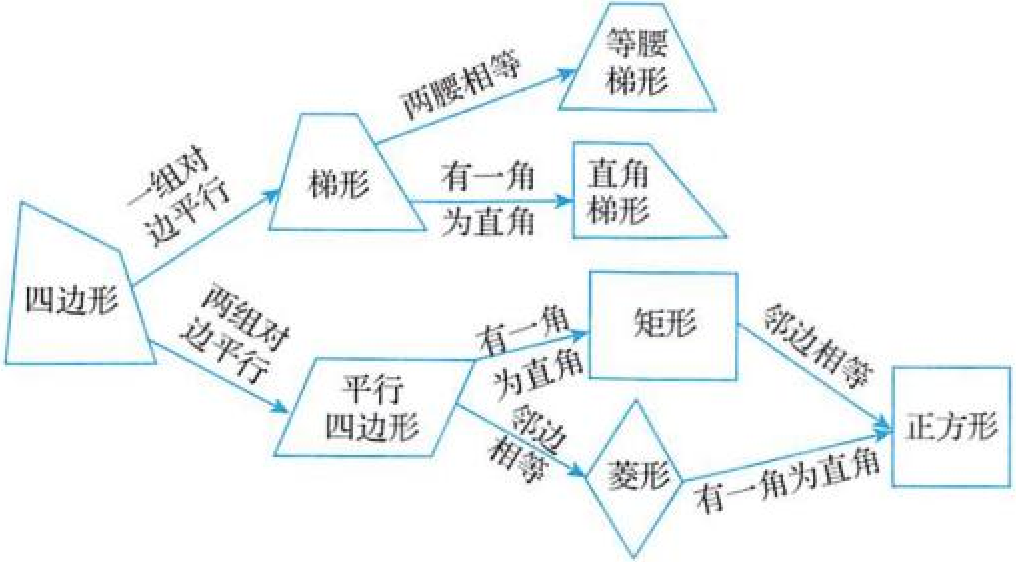
三.四边形

（一）概述

1.定义

在同一平面内，由不在同一直线上的四条线段首尾顺次相接组成的图形叫作四边形.

2.分类



三、四边形

（一）概述

3.四边形的内角和和外角和均等于 360°

n边形的内角和等于$(n\text{-}2)\cdot 180°$

任意多边形的外角和等于360°

4.对角线

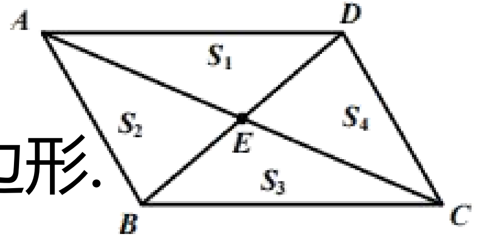
在四边形中，连接不相邻两个顶点的线段叫作四边形的对角线.

设多边形的边数为n，则多边形的对角线条数为$\frac{n(n-3)}{2}$

三.四边形

（二）平行四边形

1.定义：两组对边分别平行的四边形叫作平行四边形.



2.性质

（1）平行四边形的邻角互补，对角相等.

（2）平行四边形的对边平行且相等.

推论：夹在两条平行线间的平行线段相等.

（3）平行四边形的对角线互相平分.

（4）两条对角线将整个平行四边形面积四等分

三.四边形

（二）平行四边形

3.判定

（1）定义

（2）定理1：两组对角分别相等的四边形是平行四边形.

（3）定理2：两组对边分别相等的四边形是平行四边形.

（4）定理3：对角线互相平分的四边形是平行四边形.

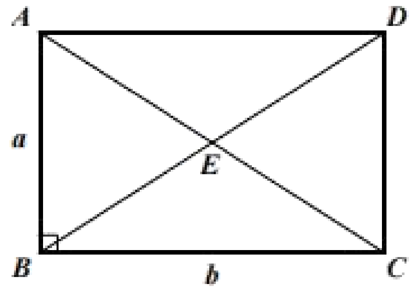
（5）定理4：一组对边平行且相等的四边形是平行四边形.

4.面积：$S_{平行四边形}=底\times高$

三.四边形

（三）矩形

1.定义：有一个角是直角的平行四边形叫作矩形.



2.性质

（1）具有平行四边形的一切性质.

（2）矩形的四个角都是直角.

（3）矩形的对角线相等.

（4）矩形是轴对称图形.

三.四边形

（三）矩形

3.判定

（1）定义：有一个角是直角的平行四边形是矩形.

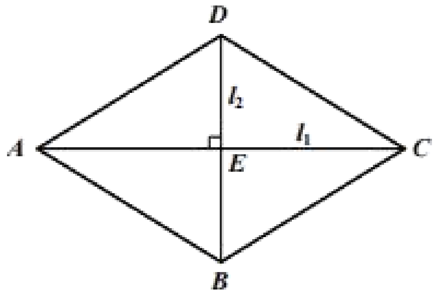
（2）定理1：有三个角是直角的四边形是矩形.

（3）定理2：对角线相等的平行四边形是矩形.

4.面积：$S_{矩形}$ = 长 × 宽

三.四边形

（四）菱形



1.定义：有一组邻边相等的平行四边形叫作菱形.

2.性质

（1）具有平行四边形的一切性质.

（2）菱形的四条边相等.

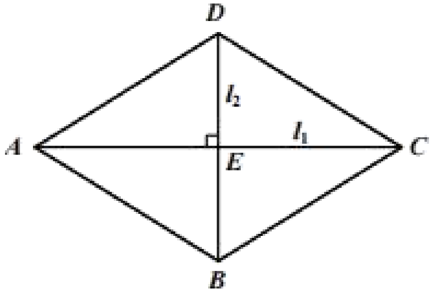
（3）菱形的对角线互相垂直，并且每一条对角线平分一组对角.

（4）菱形是轴对称图形.

三.四边形

（四）菱形

3.判定



（1）定义

（2）定理1：四边都相等的四边形是菱形.

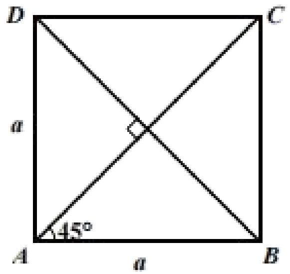
（3）定理2：对角线互相垂直的平行四边形是菱形.

4.面积：$S_{菱形}$ = 底边长 ×高=两条对角线乘积的一半

三.四边形

（五）正方形

1.定义：四条边都相等、四个角都是直角的四边形是正方形.



2.性质

（1）具有平行四边形、菱形、矩形的一切性质.

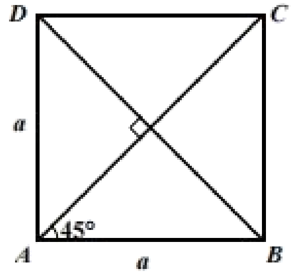
（2）正方形的四个角都是直角，四条边都相等.

（3）正方形的两条对角线相等，并且互相垂直平分，每一条对角线平分一组对角.

（4）正方形是轴对称图形，有4条对称轴.

三.四边形

（五）正方形



2.性质

（5）正方形的一条对角线把正方形分成两个全等的等腰直角三角形，两条对角线把正方形分成四个全等的小等腰直角三角形.

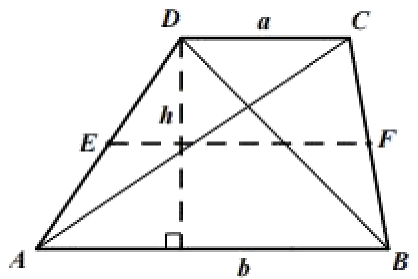
（6）正方形的一条对角线上的一点到另一条对角线的两端点的距离相等.

3.面积：$S_{正方形} = a^2$　　对角线长$\sqrt{2}a$

三、四边形

（六）梯形

1.定义：只有一组对边平行的四边形叫梯形.



$$\text{梯形}\begin{cases}\text{一般梯形}\\ \text{特殊梯形}\begin{cases}\text{直角梯形：一腰垂直于底}\\ \text{等腰梯形：两腰相等}\end{cases}\end{cases}$$

2.性质：

两腰中点连线平行于上底和下底.　中位线$EF=\frac{1}{2}(a+b)$

3.面积：$S_{梯形}=\frac{上底+下底}{2}\cdot 高=中位线\cdot 高$

三.四边形

（六）梯形

4.等腰梯形

（1）性质

✓ 等腰梯形的两腰相等，两底平行.

✓ 等腰梯形的对角线相等.

✓ 等腰梯形是轴对称图形，它只有一条对称轴，即两底的垂直平分线.

三.四边形

（六）梯形

4.等腰梯形

（2）判定

✓ 定义：两腰相等的梯形是等腰梯形.

✓ 定理：在同一底上的两个角相等的梯形是等腰梯形.

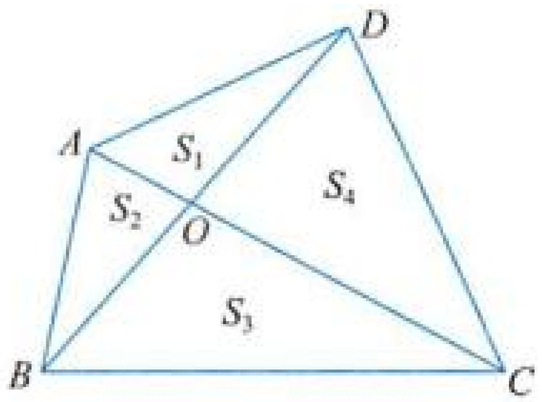
✓ 对角线相等的梯形是等腰梯形.

三、四边形

（六）梯形

5.蝶形定理

（1）任意四边形中的比例关系



$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{S_4}{S_3}=\frac{OD}{OB}$$

$$S_1\times S_3=S_2\times S_4$$

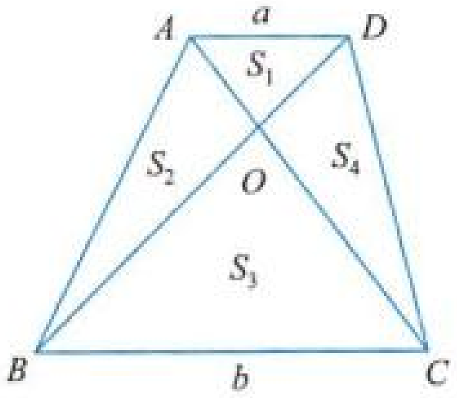
$$\frac{S_1+S_4}{S_2+S_3}=\frac{OD}{OB}$$ 同理可得：$$\frac{S_1+S_2}{S_4+S_3}=\frac{AO}{OC}$$

三、四边形

（六）梯形

5.蝶形定理

（2）梯形的蝶形定理及相似比例



$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{S_4}{S_3}=\frac{OD}{OB}=\frac{a}{b}\Rightarrow S_1\times S_3=S_2\times S_4$$

$$\frac{S_1}{S_3}=\frac{a^2}{b^2}$$

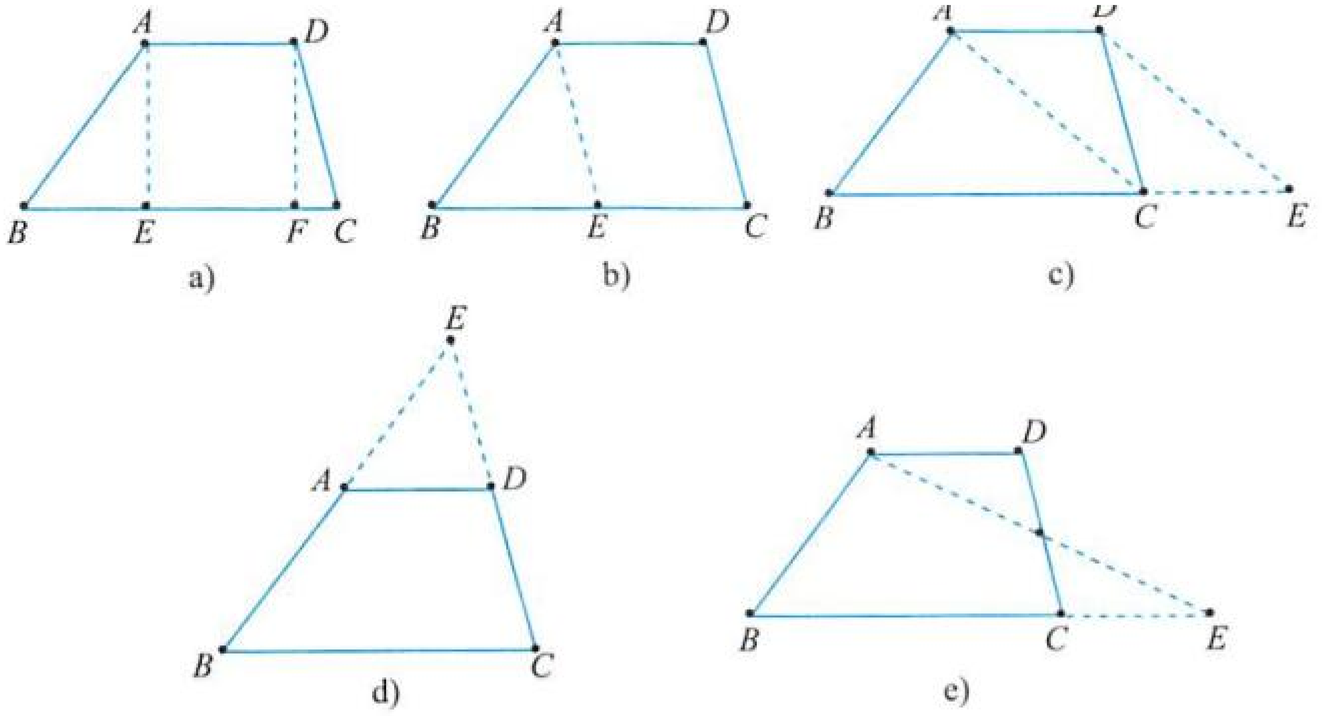
$$S_2+S_3=S_4+S_3\Rightarrow S_2=S_4$$

综上：$S_1:S_3:S_2:S_4=a^2:b^2:ab:ab$

三.四边形

（六）梯形

6.常用的辅助线

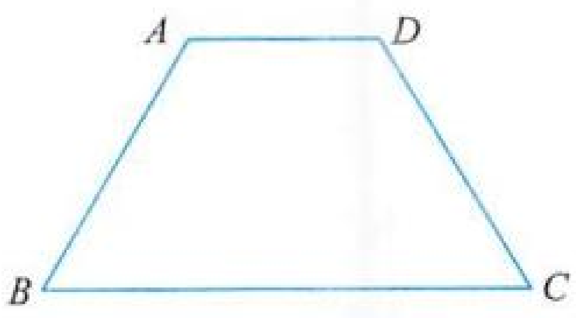


三.四边形

（六）梯形

【例1】如图，已知等腰梯形ABCD中，AB=CD，∠B=60°，AD=15，BC=49，则它的腰长为(　　).

A.32　　B.34　　C.36　　D.38　　E.40



三、四边形

（六）梯形

【例1】如图，已知等腰梯形ABCD中，AB=CD，∠B=60°，AD=15，BC=49，则它的腰长为(B).

A.32　　B.34　　C.36　　D.38　　E.40

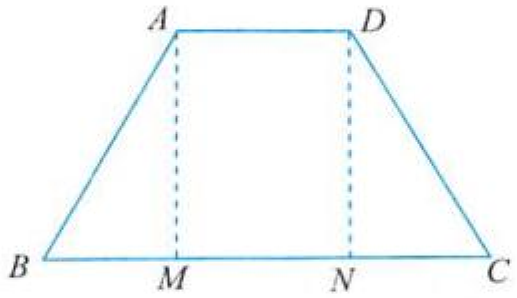
四边形 $ABCD$ 为等腰梯形，得到 $AB=CD$，$\angle B=\angle C$.

由 $\angle AMB=\angle DNC=90^\circ$，得到 $\triangle ABM\cong\triangle DCN$（AAS），故 $BM=CN$.

由 $\angle AMN=\angle MND=\angle ADN=90^\circ$，四边形 $AMND$ 为矩形，所以 $AD=MN$. 因为 $BC=49$，$AD=15$，

$BM=CN=\frac{1}{2}(BC-AD)=\frac{1}{2}(49-15)=17$，

因为 $\angle B=60^\circ$，$\angle BAM=30^\circ$，得到 $AB=2BM=34$.

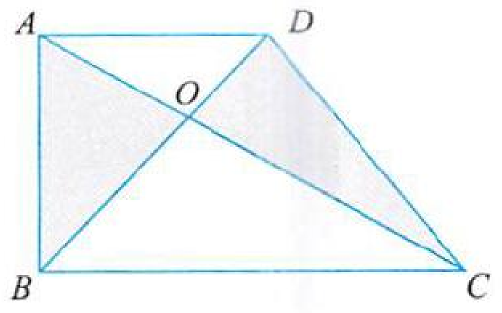


三.四边形

（六）梯形

【例2】如图，在梯形ABCD中，AD//BC，三角形AOD的面积为8，梯形的上底长是下底长的$\frac{2}{3}$，,则阴影部分的面积是(　　).

A.24　　B.25　　C.26　　D.27　　E.28



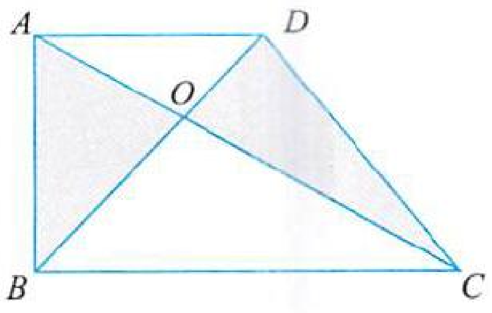
三、四边形

（六）梯形

【例2】如图，在梯形ABCD中，AD//BC，三角形AOD的面积为8，梯形的上底长是下底长的$\frac{2}{3}$，,则阴影部分的面积是(A　).

A.24　　B.25　　C.26　　D.27　　E.28

【解析】因为 $S_{\triangle AOD}=8$，已知梯形的上底长是下底长的$\frac{2}{3}$，$\frac{S_{\triangle AOD}}{S_{\triangle COD}}=\frac{AO}{OC}=\frac{AD}{BC}=\frac{2}{3}$，故 $S_{\triangle COD}=12$，又 $S_{\triangle AOB}=S_{\triangle COD}$，$S_{阴影}=24$，选 A.



第一节 平面几何

四、圆与扇形

四、圆与扇形

（一）角的弧度

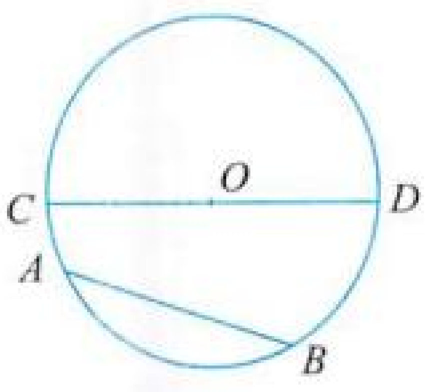
把圆弧长度和半径的比值称为对一个圆心角的弧度.

度与弧度的换算关系:1弧度=$\frac{180°}{\pi}$，1°=$\frac{\pi}{180}$弧度

常用的角:

$360°=2\pi$，$180°=\pi$，$90°=\frac{\pi}{2}$，$60°=\frac{\pi}{3}$，$45°=\frac{\pi}{4}$，$30°=\frac{\pi}{6}$

四、圆与扇形

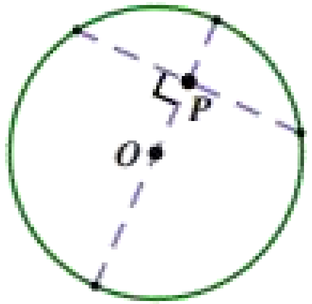


（二）与圆有关的定义及定理

1.弦

连接圆上任意两点的线段叫作弦.

2.直径



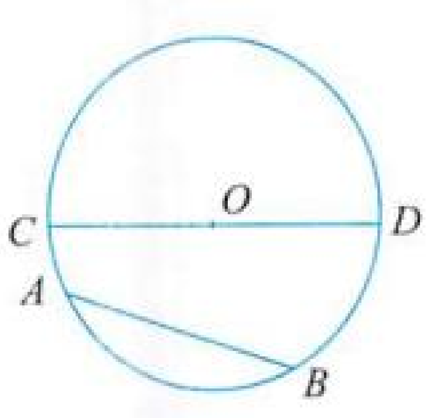
经过圆心的弦叫作直径.直径等于半径的2倍.

【过点P的最长弦为直径，最短弦为过点P垂直于直径的弦.】

四、圆与扇形

（二）与圆有关的定义及定理

3.弧、优弧、劣弧

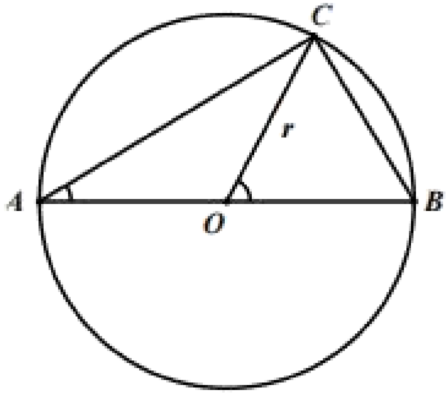


圆上任意两点间的部分叫作圆弧，简称弧.

大于半圆的弧叫作优弧(多用三个字母表示)；小于半圆的弧叫作劣弧(多用两个字母表示).

四、圆与扇形

（二）与圆有关的定义及定理



4.圆心角：顶点在圆心的角叫作圆心角.

5.弦心距：从圆心到弦的距离叫作弦心距.

➢ 弧、弦、弦心距、圆心角之间的关系定理

在同圆或等圆中，相等的圆心角所对的弧相等，所对的弦相等，所对的弦的弦心距相等.

四、圆与扇形

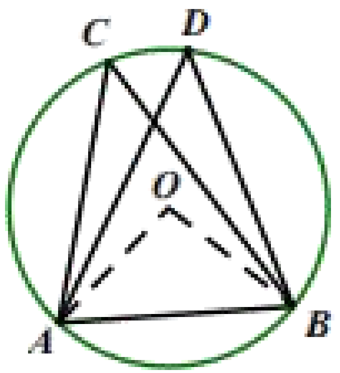
（二）与圆有关的定义及定理

6.圆周角：顶点在圆上，并且两边都和圆相交的角叫作圆周角.

7.圆周角定理

一条弧所对的圆周角等于它所对的圆心角的一半.

推论1：同弧或等弧所对的圆周角相等；同圆或等圆中，相等的圆周角所对的弧也相等.

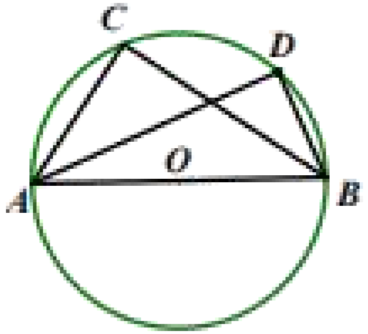


四、圆与扇形

（二）与圆有关的定义及定理

7. 圆周角定理

推论2：半圆(或直径)所对的圆周角是直角；90°的圆周角所对的弦是直径.



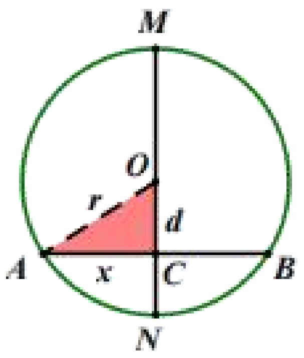
四、圆与扇形

（二）与圆有关的定义及定理

8. 垂径定理

直径MN平分且垂直AB.

$$r^2 = d^2 + x^2$$

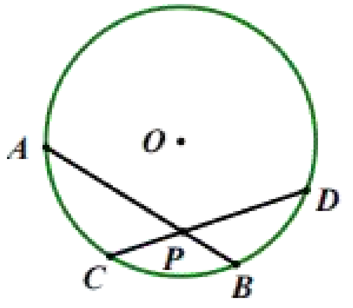


四、圆与扇形

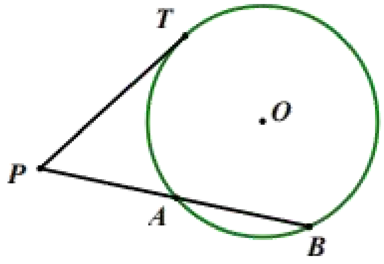
（二）与圆有关的定义及定理

【拓展】

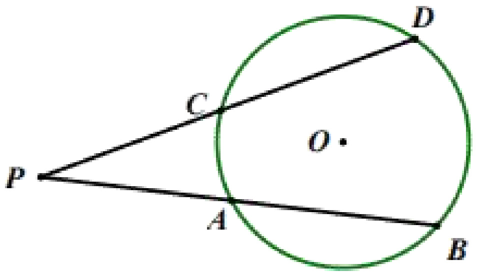
1.相交弦定理：$PA \cdot PB = PC \cdot PD$



2.切割线定理：$PT^2 = PA \cdot PB$



3.割线定理：$PA \cdot PB = PC \cdot PD$



师大课堂 SHI DA KE TANG

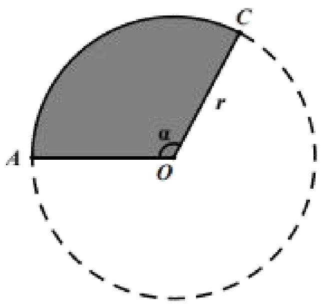
四、圆与扇形

（三）圆与扇形相关公式

1.圆

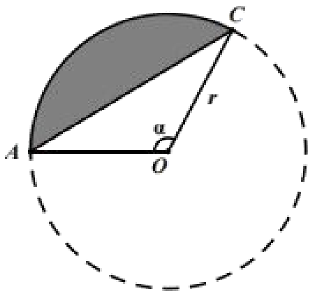
周长：$l = 2\pi r = \pi d$　　　面积：$S = \pi r^2$

2.扇形



弧长：$l = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi r$　　　面积：$S = \frac{\alpha}{360°} \cdot \pi r^2$

3.弓形



面积=扇形面积 - 三角形面积

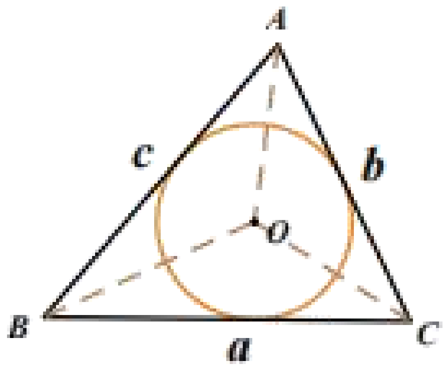
四、圆与扇形

（四）圆与三角形

1.三角形的内切圆

内切圆的圆心：内心（顶角的角平分线的交点）

（1）内心到各边距离相等



（2）$S_{三角形}=\frac{1}{2}ar_{内}+\frac{1}{2}br_{内}+\frac{1}{2}cr_{内}=\frac{1}{2}(a+b+c)\cdot r_{内}$

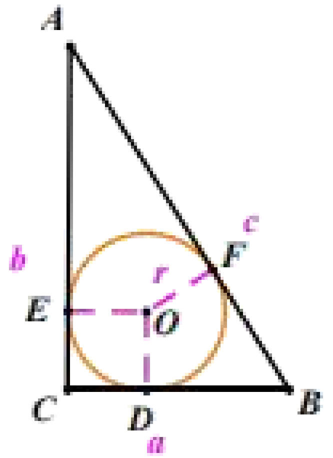
$$\Rightarrow r_{内}=\frac{2S_{三角形}}{a+b+c}$$

四、圆与扇形

（四）圆与三角形

1.三角形的内切圆

（3）直角三角形：$r_{内}=\dfrac{2S_{三角形}}{a+b+c}=\dfrac{2\cdot\frac{1}{2}ab}{a+b+c}=\dfrac{ab}{a+b+c}$



由勾股定理可得：$r_{内}=\dfrac{a+b-c}{2}$

（4）等边三角形：$r_{内}=\dfrac{\sqrt{3}a}{6}$

四、圆与扇形

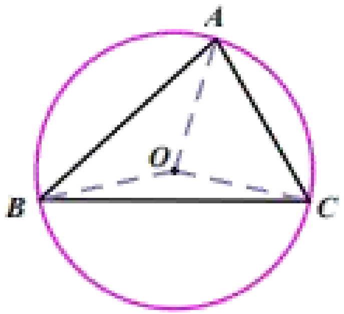
（四）圆与三角形

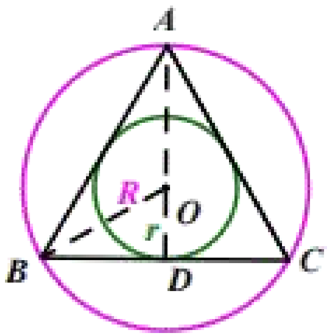
2.三角形的外接圆

外接圆的圆心：外心（底边中垂线的交点）

（1）外心到各顶点距离相等

（2）等边三角形的外接圆与内切圆半径之比为2：1

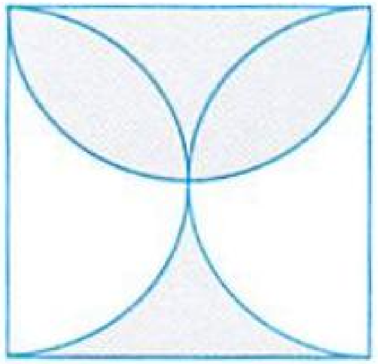




四、圆与扇形

【例1】如图，在一个边长为2的正方形内，分别以它的三条边为直径向内作三个半圆，则图中阴影部分的面积为(　　)

A. 0.5　　B.1　　C.1.5　　D.2　　E.2.2

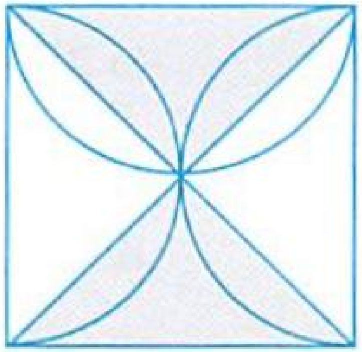


四、圆与扇形

【例1】如图，在一个边长为2的正方形内，分别以它的三条边为直径向内作三个半圆，则图中阴影部分的面积为(　D　)

A. 0.5　　B.1　　C.1.5　　D.2　　E.2.2

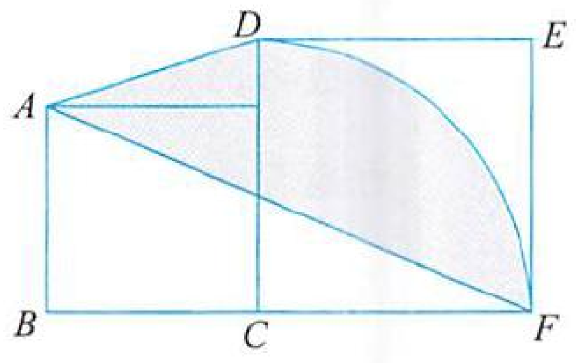
【解析】采用割补法，如果将阴影半圆中的2个弓形移到下面的等腰直角三角形中，那么就形成两个相同的等腰直角三角形，所以阴影部分的面积等于两个等腰直角三角形的面积和，即正方形面积的一半，所以阴影部分的面积等于 $2^2\times\frac{1}{2}=2$. 选 D.



四、圆与扇形

【例2】如图，两个正方形摆放在一起，其中大正方形边长为12，那么阴影部分面积是(　　)

A. 32π　　B.32　　C.36　　D.36π　　E.38π



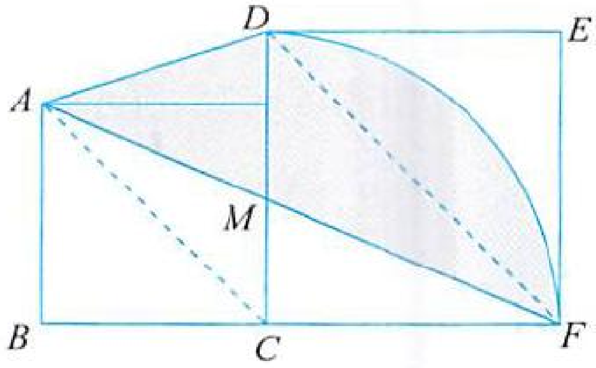
四、圆与扇形

【例2】如图，两个正方形摆放在一起，其中大正方形边长为12，那么阴影部分面积是(　D　)

A. 32π　　B.32　　C.36　　D.36π　　E.38π

【解析】方法一：设小正方形的边长为 a，则三角形 ABF 与梯形 $ABCD$ 的面积均为 $(a+12)\times a\div 2$.

阴影部分为大正方形＋梯形 $ABCD$－三角形 ABF－右上角不规则部分＝大正方形－右上角不规则部分＝$\frac{1}{4}$圆．因此阴影部分面积为 $\pi\times12\times12\div4=36\pi$.



方法二：连接 AC，DF，设 AF 与 CD 的交点为 M，由于四边形 $ACFD$ 是梯形，根据梯形蝴蝶定理有 $S_{\triangle ADM}=S_{\triangle CMF}$，所以 $S_{阴影}=S_{扇形DCF}=\pi\times12\times12\div4=36\pi$，选 D.

- 第四章 几何
  - 第一节 平面几何
    - 一、线与角
    - 二、三角形
    - 三、四边形
    - 四、圆与扇形
  - 第二节 立体几何
  - 第三节 解析几何