

## 算术

### 1. 质数、合数

1 既不是质数也不是合数；2 是唯一的既是质数又是偶数的整数，最小的合数为 4。

### 2. 等比定理

如果  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \dots = \frac{m}{n} (b+d+\dots+n \neq 0)$ ，那么  $\frac{a+c+\dots+m}{b+d+\dots+n} = \frac{a}{b}$

### 3. 绝对值

(1) 非负性： $|a| \geq 0$ ， $|a| + b^2 + \sqrt{c} \leq 0 \Rightarrow a=b=c=0$

(2) 绝对值三角不等式： $||a|-|b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$

### 4. 数据描述

(1) 方差： $S^2 = \frac{1}{n}[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2]$

(2) 标准差： $S = \sqrt{\frac{1}{n}[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2]}$

## 代数

### 1. 整式

(1) 平方差公式： $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

(2) 完全平方公式： $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$

### 2. 分式

(1) 裂项运算（分母有理化，再消项）：

$$\frac{1}{n(n+k)} = \frac{1}{k} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+k} \right); \frac{1}{\sqrt{n+k} + \sqrt{n}} = \frac{1}{k} (\sqrt{n+k} - \sqrt{n})$$

(2) 多个括号求积（凑平方差公式法）：

$$(a+1)(a^2+1)(a^4+1)(a^8+1)(a^{16}+1)(a^{32}+1) = \frac{a^{64}-1}{a-1} (a \neq 1)$$

### 3. 方程

(1) 一元二次方程  $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$

令  $\Delta = b^2 - 4ac$ ，此方程的解将依  $\Delta$  值的不同分为三种情况：

当  $\Delta > 0$  时，方程有两个不等实根；当  $\Delta = 0$  时，方程有两个相等实根；当  $\Delta < 0$  时，方程无实根。

(2) 根与系数的关系（韦达定理）

$$x_1, x_2 \text{ 是方程的两个根，则 } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

## 数列

### 1. 等差数列

(1) 公式： $a_n = a_1 + (n-1)d$ ； $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$

(2) 性质

❖  $a, b, c$  成等差数列  $\rightarrow b$  是  $a$  和  $c$  的等差中项  $\rightarrow 2b = a + c$

❖ 若  $m, n, p, q \in \mathbb{Z}^+$ ， $m+n=p+q$ ，则  $a_m + a_n = a_p + a_q$

### 2. 等比数列

$$(1) a_n = a_1 q^{n-1}; S_n = \begin{cases} na_1 & q=1 \\ \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1-a_n q}{1-q} = \frac{a_1-a_{n+1}}{1-q} & q \neq 1 \end{cases}$$

(2) 性质

❖  $a, b, c$  成等比数列  $\rightarrow b$  是  $a$  和  $c$  的等比中项  $\rightarrow b^2 = ac$

❖ 若  $m, n, p, q \in \mathbb{Z}^+$ ， $m+n=p+q$ ，则  $a_m \cdot a_n = a_p \cdot a_q$

### 3. 均值不等式

$a, b \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab}, ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ ，当且仅当  $a=b$  时等号成立。

## 几何

### 1. 平面几何

#### (1) 三角形

直角三角形中， $30^\circ$  角所对的边是斜边的一半，三边之比为

$1 : \sqrt{3} : 2$ ；面积公式  $S = \frac{1}{2}ah$ ；等边三角形  $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ ； $S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

#### (2) 四边形

平行四边形： $S_{\text{平行四边形}} = \text{底边} \times \text{高}$ ；梯形： $S_{\text{梯形}} = (\text{上底} + \text{下底}) \times \text{高} \div 2$

#### (3) 圆与扇形

❖ 圆： $C_{\text{周长}} = 2 \cdot \pi \cdot r$ ； $S_{\text{圆}} = \pi \cdot r^2$

❖ 扇形：弧长  $l = \frac{\alpha^\circ}{360^\circ} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r$ ； $S_{\text{扇形}} = \frac{\alpha^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot r^2 = \frac{1}{2} \cdot l \cdot r$

### 2. 解析几何

(1) 中点  $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ ；两点距离  $d = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$

(2) 点到直线的距离： $d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

(3) 圆的标准方程： $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

## 数据分析

古典概型： $P(A) = \frac{A \text{ 包含的基本事件的个数}}{\text{基本事件的总数}} = \frac{m}{n}$

## 应用题

### 1. 比例问题

现值 = 原值  $\times (1 + \text{变化率})$ ；原值 = 现值  $\div (1 + \text{变化率})$

总量 = 部分量  $\div$  部分量对应比例  $\xrightarrow{\text{变形}}$  部分量 = 总量  $\times$  部分量对应比例

### 2. 行程问题

直线相遇： $S_{\text{相遇}} = S_1 + S_2 = v_1 t + v_2 t = (v_1 + v_2) \cdot t$

直线追及： $S_{\text{追及}} = S_1 - S_2 = v_1 t - v_2 t = (v_1 - v_2) \cdot t$

### 3. 工程问题

售价 = 进价  $\times (1 + \text{利润率}) = \text{进价} + \text{利润}$

$$\text{利润率} = \frac{\text{利润}}{\text{进价}} \times 100\% = \frac{\text{售价} - \text{进价}}{\text{进价}} \times 100\% = \left( \frac{\text{售价}}{\text{进价}} - 1 \right) \times 100\%$$