第四节　数列综合应用

第三章 第四节数列综合应用

- 一、递推公式
- 二、等差数列和等比数列的结合
- 三、数列和方程的结合
- 四、数列应用题

一、递推公式

1.定义：a_n与a_{n-1}或a_{n+1}的关系式

若已知数列的递推关系式及首项，可以写出其他项

例：数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，对于所有的$n\geq 2$都有$a_1a_2\cdots a_n=n^2$,求a_5.

一、递推公式

2.常用思路

（1）列举法

一般通过递推公式找到前几个元素数值的规律，来判断后面元素的数值.先列举前面若干项，寻找规律，一般是周期循环的规律.

例：设$a_1=1, a_2=2, \cdots a_{n+1}=|a_n-a_{n-1}|(n\geq 2)$,则$a_{100}+a_{101}+a_{102}=$？

一、递推公式

2.常用思路

（2）累加法：写出若干项，然后将各项相加.

适用于类等差数列：$a_{n+1}=a_n+f(n)$或$a_{n+1}-a_n=f(n)$

$\Rightarrow a_n=a_1+f(1)+f(2)+f(3)+\cdots f(n-1)$

一、递推公式

2.常用思路

（2）累加法

【例1】设数列$\{a_n\}$满足$a_1=1, a_{n+1}=a_n+\frac{n}{3}(n\geq 1)$，则$a_{100}=$(　　).

A.1650　　B.1651　　C.$\frac{5050}{3}$　　D.3300　　E.3301

一、递推公式

师大课堂 SHI DA KE TANG

2.常用思路

（2）累加法

【例1】设数列$\{a_n\}$满足$a_1=1, a_{n+1}=a_n+\frac{n}{3}(n\geq 1)$，则$a_{100}=$(　　).

A.1650　　B.1651　　C.$\frac{5050}{3}$　　D.3300　　E.3301

【解析】

因为$a_{n+1}=a_n+\frac{n}{3}$，所以$\begin{cases} a_2-a_1=\frac{1}{3} \\ a_3-a_2=\frac{2}{3} \\ \vdots \\ a_n-a_{n-1}=\frac{n-1}{3} \end{cases}$，累加可得

$$a_n-a_1=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\cdots+\frac{n-1}{3}=\frac{(n-1)\left(\frac{1}{3}+\frac{n-1}{3}\right)}{2}\Rightarrow a_n-1=\frac{n(n-1)}{6},$$

故$a_{100}=1+\frac{100\times 99}{6}=1651.$

一、递推公式

2.常用思路

（3）累乘法：写出若干项，然后将各项相乘.

适用于类等比数列：$a_{n+1}=a_n\cdot f(n)$或$\frac{a_{n+1}}{a_n}=f(n)$

$\Rightarrow a_n=a_1\cdot f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)\cdot\cdots f(n-1)$

一、递推公式

2.常用思路

（3）累乘法

【例2】设数列$\{a_n\}$满足$a_1=1, \frac{a_{n+1}}{a_n}=e^n(n \geq 1)$，则$a_{101}=$（　）.

A.e^{2050}　　B.e^{3050}　　C.e^{4050}　　D.e^{5050}　　E.e^{6050}

一.递推公式

2.常用思路

（3）累乘法

【例2】设数列$\{a_n\}$满足$a_1=1, \frac{a_{n+1}}{a_n}=e^n(n\geq 1)$，则$a_{101}=$(   ).

A.e^{2050}　　B.e^{3050}　　C.e^{4050}　　D.e^{5050}　　E.e^{6050}

【解析】

因为$\frac{a_{n+1}}{a_n}=e^n(n\geqslant 1)$，所以$\begin{cases}\frac{a_2}{a_1}=e^1\\ \frac{a_3}{a_2}=e^2\\ \vdots\\ \frac{a_n}{a_{n-1}}=e^{n-1}\end{cases}$，累乘可得$\frac{a_n}{a_1}=e^{1+2+3+\cdots+n-1}\Rightarrow a_{101}=e^{5050}$.

一、递推公式

师大课堂 SHI DA KE TANG

2.常用思路

（4）构造数列

将某部分看成一个新数列，新数列是符合等差或等比数列，求出新数列后，再求原数列.

新数列：$b_{n+1}-b_n$ =常数　　$\frac{b_{n+1}}{b_n}$ =常数

若出现$a_{n+1}=qa_n+d$，凑配成$a_{n+1}+c=q(a_n+c)$，其中$c=\frac{d}{q-1}$

新数列$\{a_n+c\}$是以a_1+c为首项，q为公比的等比数列.

一、递推公式

2.常用思路

（4）构造数列

【例3】设数列$\{a_n\}$满足$a_n \neq 0(n \geq 1), a_1 = \frac{1}{2}$，前$n$项和$S_n$满足$a_n = \frac{2{S_n}^2}{2S_n - 1}$，则$\frac{1}{S_{100}} =$（　）.

A.100　　B.200　　C.300　　D.400　　E.600

一.递推公式

2.常用思路

（4）构造数列

【例3】设数列$\{a_n\}$满足$a_n \neq 0(n \geq 1), a_1 = \frac{1}{2}$，前$n$项和$S_n$满足$a_n = \frac{2{S_n}^2}{2S_n-1}$，则$\frac{1}{S_{100}} = ($　　$)$.

A.100　　B.200　　C.300　　D.400　　E.600

【解析】

$a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{2S_n^2}{2S_n-1} \Rightarrow 2S_n^2 - S_n - 2S_nS_{n-1} + S_{n-1} = 2S_n^2 \Rightarrow -S_n - 2S_nS_{n-1} + S_{n-1} = 0$，两边除以$S_{n-1}S_n \Rightarrow \frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_{n-1}} = 2$，所以$\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$是以首项为2，公差为2的等差数列．故$\frac{1}{S_{100}} = 200$.

本题的难点在于要通过$a_n = S_n - S_{n-1}$，转化为只含S_n与S_{n-1}的关系式，然后再转化为$\frac{1}{S_n}$与$\frac{1}{S_{n-1}}$的关系式，根据定义判断数列是等差还是等比.

一、递推公式

2.常用思路

（4）构造数列

【例4】设数列$\{a_n\}$，$a_1=1, a_{n+1}=2a_n+3$，则$a_{99}=$（　　）.

A.$2^{101}-3$　　B.$2^{99}+3$　　C.$2^{99}-3$　　D.$2^{100}-3$　　E.$2^{100}-3$

一.递推公式

2.常用思路

（4）构造数列

【例4】设数列$\{a_n\}$，$a_1=1,a_{n+1}=2a_n+3$，则$a_{99}=$（　）.

A.$2^{101}-3$　B.$2^{99}+3$　C.$2^{99}-3$　D.$2^{100}-3$　E.$2^{100}-3$

【解析】

把常数 3 分配成两个数相加到 a_{n+1} 和 a_n 上，变成 $a_{n+1}+c=q(a_n+c)$ 的形式，$a_{n+1}=2a_n+3\Rightarrow a_{n+1}+3=2(a_n+3)$.

设 $b_n=a_n+3$，则$\{b_n\}$是公比为 2 的等比数列，由 $b_1=a_1+3=4$，

得 $b_n=b_1q^{n-1}=4\times 2^{n-1}=2^{n+1}=a_n+3$，故 $a_n=2^{n+1}-3$，验证知符合 $n=1$.

综上，数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2^{n+1}-3$，$a_{99}=2^{100}-3$.

一、递推公式

【例5】设$a_1=1, S_n=n^2a_n$，则下列叙述正确的有（　）个.

（1）$a_2=\frac{1}{3}$（2）$\{a_n\}$为等差数列（3）$a_n=\frac{2}{n(n+1)}$（4）$S_{10}=\frac{20}{11}$

A.0　B.1　C.2　D.3　E.4

一、递推公式

【例5】设$a_1=1, S_n=n^2a_n$，则下列叙述正确的有（　）个.

（1）$a_2=\frac{1}{3}$（2）$\{a_n\}$为等差数列（3）$a_n=\frac{2}{n(n+1)}$（4）$S_{10}=\frac{20}{11}$

A.0　　B.1　　C.2　　D.3　　E.4

【解析】

$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2a_n-(n-1)^2a_{n-1}$，从而有$a_n=\frac{n-1}{n+1}a_{n-1}$，

因为$a_1=1$，所以$a_2=\frac{1}{3}$，$a_3=\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}$，$a_4=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}$，$a_5=\frac{4}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}$，…

所以$a_n=\frac{(n-1)(n-2)\times\cdots\times3\times2\times1}{(n+1)n(n-1)\times\cdots\times4\times3}=\frac{2}{n(n+1)}$，$S_n=n^2a_n=\frac{2n}{n+1}$.

故（1）（3）（4）正确，选 D.

一、递推公式

师大课堂 SHI DA KE TANG

【例6】设$a_1=3,a_n=S_n+2^n$，则下列叙述正确的有（　）个.

（1）$a_3=18$（2）$a_4=44$（3）$S_n=(2n+1)2^{n-1}$（4）$S_4=72$

A.0　　B.1　　C.2　　D.3　　E.4

一、递推公式

【例6】设$a_1=3, a_n=S_n+2^n$，则下列叙述正确的有（　　）个.

（1）$a_3=18$（2）$a_4=44$（3）$S_n=(2n+1)2^{n-1}$（4）$S_4=72$

A.0　　B.1　　C.2　　D.3　　E.4

【解析】

因为 $a_n=S_n-S_{n-1}$，所以 $S_n-2S_{n-1}=2^n$，得 $\frac{S_n}{2^n}-\frac{S_{n-1}}{2^{n-1}}=1$. 设 $b_n=\frac{S_n}{2^n}$，则 $\{b_n\}$ 是公差为 1 的等差数列，故 $b_n=b_1+n-1$. 又 $b_1=\frac{S_1}{2}=\frac{a_1}{2}=\frac{3}{2}$，故 $\frac{S_n}{2^n}=n+\frac{1}{2}$，从而 $S_n=(2n+1)2^{n-1}$. 当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=(2n+3)2^{n-2}$.

所以 $a_n=\begin{cases}3 & n=1\\ (2n+3)\cdot 2^{n-2} & n\geqslant 2\end{cases}$，$S_n=(2n+1)2^{n-1}$.

故四个叙述都正确，选 E.

二、等差数列和等比数列的结合

【例7】等比数列$\{a_n\}$的公差$d \neq 0$，且a_1, a_3, a_9成等比数列，则

$\frac{a_1+a_3+a_9}{a_2+a_4+a_{10}} = ($　　$)$.

A.$\frac{9}{10}$　　B.4　　C.-4　　D.$\frac{13}{16}$　　E.无法确定

二、等差数列和等比数列的结合

【例7】等比数列$\{a_n\}$的公差$d \neq 0$，且a_1, a_3, a_9成等比数列，则

$\frac{a_1+a_3+a_9}{a_2+a_4+a_{10}}=$（　）.

A.$\frac{9}{10}$　　B.4　　C.-4　　D.$\frac{13}{16}$　　E.无法确定

【解析】由 a_1，a_3，a_9 成等比数列得 $a_1 \cdot a_9=a_3^2$，$a_1(a_1+8d)=(a_1+2d)^2$，$a_1^2+8a_1d=a_1^2+4a_1d+4d^2$，$a_1d=d^2 \Rightarrow a_1=d$，$a_n=a_1+(n-1)d=nd$，

原式$=\frac{a_1+a_3+a_9}{a_2+a_4+a_{10}}=\frac{a_1+a_3+a_9}{a_1+a_3+a_9+3d}=\frac{(1+3+9)d}{(1+3+9+3)d}=\frac{13}{16}$，选 D.

二、等差数列和等比数列的结合

【例8】有4个数，前3个数成等差数列，它们的和为12，后3个数成等比数列，它们的和是19，则这4个数之积为（　）.

A.432或-18000　　B.-432或18000　　C.-432或-18000

D.432或18000　　E.432或-18000

二、等差数列和等比数列的结合

【例8】有4个数，前3个数成等差数列，它们的和为12，后3个数成等比数列，它们的和是19，则这4个数之积为（　）.

A.432或−18000　B.−432或18000　C.−432或−18000

D.432或18000　E.432或−18000

【解析】方法一：设第 2 个数为 a，第 3 个数为 b，记第 1 个、第 4 个数分别为 x_1，x_4.

由 $x_1+b=2a\Rightarrow x_1=2a-b$，$x_1+a+b=12$；

由 $ax_4=b^2\Rightarrow x_4=\dfrac{b^2}{a}$，$x_4+a+b=19$；

$$\Rightarrow\begin{cases}2a-b+a+b=12\\ \dfrac{b^2}{a}+a+b=19\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3a=12\\ \dfrac{b^2}{a}+a+b=19\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=4\\ b=6\text{ 或 }-10\end{cases}$$

若 $a=4$，$b=6\Rightarrow\begin{cases}x_1=2a-b=2\\ x_4=\dfrac{b^2}{a}=9\end{cases}\Rightarrow 2\times4\times6\times9=432$，

若 $a=4$，$b=-10\Rightarrow\begin{cases}x_1=2a-b=18\\ x_4=\dfrac{b^2}{a}=25\end{cases}\Rightarrow 18\times4\times(-10)\times25=-18000$.

即 4 个数之积为 432 或 −18000，选 A.

二、等差数列和等比数列的结合

【例8】有4个数，前3个数成等差数列，它们的和为12，后3个数成等比数列，它们的和是19，则这4个数之积为（　）.

A.432或−18000　　B.−432或18000　　C.−432或−18000

D.432或18000　　E.432或−18000

【解析】

方法二：设这4个数为 a，b，c，d，则前3个数之和 $a+b+c=3b=12 \Rightarrow b=4$，后3个数之和 $b+c+d=4+c+\frac{c^2}{4}=19 \Rightarrow c=6$ 或 -10.

（1）当 $c=6$ 时，$a=2$，$d=9$，有 $abcd=2\times4\times6\times9=432$.

（2）当 $c=-10$ 时，$a=18$，$d=25$，有 $abcd=-18000$，所以选 A.

三、数列和方程的结合

【例9】已知a, b, c既成等差又成等比，设α与β是方程$ax^2 + bx - c = 0$的两根，且$\alpha > \beta$，则$\alpha^3\beta - \alpha\beta^3 = $(   ).

A.$\sqrt{2}$ B.$\sqrt{5}$ C.$2\sqrt{2}$ D.$2\sqrt{5}$ E.无法确定

三、数列和方程的结合

【例9】已知a,b,c既成等差又成等比，设α与β是方程$ax^2+bx-c=0$的两根，且$\alpha>\beta$，则$\alpha^3\beta-\alpha\beta^3=$（　　）.

A.$\sqrt{2}$　　B.$\sqrt{5}$　　C.$2\sqrt{2}$　　D.$2\sqrt{5}$　　E.无法确定

【解析】

因为既成等差又成等比的数列为非零的常数列，从而 $a=b=c\neq0$，原方程化为 $x^2+x-1=0$，根据韦达定理：$\alpha^3\beta-\alpha\beta^3=\alpha\beta(\alpha^2-\beta^2)=\alpha\beta[(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)]=(-1)\times[(-1)\times(\alpha-\beta)]$，$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=5$，$\alpha>\beta$，从而 $\alpha-\beta=\sqrt{5}$，所以原式$=\sqrt{5}$，选 B.

四、数列应用题

1.等差数列应用题

当出现差值为定值的应用题时，采用等差数列分析求解.

【例10】三名小孩中有一名学龄前儿童(年龄不足6岁)，他们的年龄都是质数(素数)，且依次相差6岁，他们的年龄之和为（　）.

A.21　B.27　C.33　D.39　E.51

四、数列应用题

1.等差数列应用题

当出现差值为定值的应用题时，采用等差数列分析求解.

【例10】三名小孩中有一名学龄前儿童(年龄不足6岁)，他们的年龄都是质数(素数)，且依次相差6岁，他们的年龄之和为（　　）.

A.21　　B.27　　C.33　　D.39　　E.51

【解析】不足 6 岁的儿童年龄可能的值为 2，3，5．当等于 2 的时候，另外两人的年龄为 8 和 14（合数，不满足题意）；同理，当等于 3 的时候也不满足；只有当年龄为 5 的时候，另外两人的年龄为 11 和 17（都是质数），它们的和为 33．选 C.

四、数列应用题

1.等差数列应用题

【例11】用分期付款的方式购买一件家用电器，价格为1150元.购买当天先付150元，以后每月这一天都交付50元，并加付欠款的利息，月利率为1%，若交付150元以后的第一个月开始算分期付款的第一日.则分期付款的第10个月该交付（　）元.

A.58　B.57.5　C.57　D.56　E.55.5

四.数列应用题

1.等差数列应用题

【例11】用分期付款的方式购买一件家用电器，价格为1150元.购买当天先付150元，以后每月这一天都交付50元，并加付欠款的利息，月利率为1%，若交付150元以后的第一个月开始算分期付款的第一日.则分期付款的第10个月该交付（　）元.

A.58　B.57.5　C.57　D.56　E.55.5

【解析】设每次所付欠款顺次构成数列$\{a_n\}$，则$a_1=50+1000\times0.01=60$，$a_2=50+(1000-50)\times0.01=59.5$，$a_3=50+(1000-50\times2)\times0.01=59$，…，$a_n=60-0.5(n-1)$

所以$\{a_n\}$是以60为首项，-0.5为公差的等差数列，

故$a_{10}=60-9\times0.5=55.5$，选E.

四、数列应用题

1.等差数列应用题

【例12】某渔业公司今年初用98万元购进一艘渔船用于捕捞，每一年需要各种费用12万元.从第二年起包括维修费在内每年所需费用比上一年增加4万元.该船每年捕捞总收入50 万元.捕捞几年后，平均利润的最大值是（ ）万元.

A.13 B.12 C.11 D.10 E.9

四、数列应用题

1.等差数列应用题

【例12】某渔业公司今年初用98万元购进一艘渔船用于捕捞，每一年需要各种费用12万元.从第二年起包括维修费在内每年所需费用比上一年增加4万元.该船每年捕捞总收入50 万元.捕捞几年后，平均利润的最大值是（　　）万元.

A.13　B.12　C.11　D.10　E.9

【解析】设船捕捞n后的总盈利为y万元，则$y=50n-98-\left[12n+\frac{n(n-1)}{2}\times 4\right]=-2n^2+40n-98$. 年平均利润为$\frac{y}{n}=-2\left(n+\frac{49}{n}-20\right)\leq -2\left(2\sqrt{n\cdot\frac{49}{n}}-20\right)=12$，当且仅当$n=\frac{49}{n}$，即$n=7$时上式取等号. 所以捕捞7年后的平均利润最大，最大平均利润是12万元，选B.

四、数列应用题

师大课堂 SHI DA KE TANG

2.等比数列应用题

当出现比值为定值的应用题时，采用等比数列分析求解.

【例13】银行的一年定期存款利率为10%，某人于2011年1月1日存入10000元，2014年1月1日取出，若按复利计算，他取出时所得的本金和利息共计是（　　）元.

A.10300　　B.10303　　C.13000　　D.13310　　E.14641

四、数列应用题

2.等比数列应用题

当出现比值为定值的应用题时，采用等比数列分析求解.

【例13】银行的一年定期存款利率为10%，某人于2011年1月1日存入10000元，2014年1月1日取出，若按复利计算，他取出时所得的本金和利息共计是（　）元.

A.10300　B.10303　C.13000　D.13310　E.14641

【解析】可记住结论，若本金为a，年利率为p，那么n年后，本息共$a\times(1+p)^n$. 本息共计$10000\times(1+10\%)^3=13310$元. 选D.

四、数列应用题

2.等比数列应用题

【例14】有一个细胞基团，每小时消亡2个，余下的每个分裂成2个，设最初有细胞7个，则6个小时后的细胞个数为（　）个.

A.186　B.188　C.192　D.196　E.198

四、数列应用题

2.等比数列应用题

【例14】有一个细胞基团，每小时消亡2个，余下的每个分裂成2个，设最初有细胞7个，则6个小时后的细胞个数为（　　）个.

A.186　B.188　C.192　D.196　E.198

【解析】本题考查递推公式．设 n 个小时后的细胞个数为 a_n，则有 $a_n=2(a_{n-1}-2)$，变形为 $a_n-4=2(a_{n-1}-4)$，得到 $\frac{a_n-4}{a_{n-1}-4}=2$，令 $b_n=a_n-4$，可以得到 $\frac{b_n}{b_{n-1}}=2$，b_n 是公比为 2 的等比数列．$a_1=(7-2)\times2=10$，又由 $b_1=a_1-4=6$，所以 $b_n=6\cdot2^{n-1}$，则 $a_n=b_n+4=3\cdot2^n+4$．故 $a_6=196$，选 D.

另解：本题也可以列举分析.

1 小时：$a_1=(7-2)\times2=10$；2 小时：$a_2=(10-2)\times2=16$；

3 小时：$a_3=(16-2)\times2=28$；4 小时：$a_4=(28-2)\times2=52$；

5 小时：$a_5=(52-2)\times2=100$；6 小时：$a_6=(100-2)\times2=196$.

a_1 并不为 7，$a_1=(7-2)\times2=10$.

师大课堂
SHI DA KE TANG

感 谢 聆 听

主讲:媛媛老师
邮箱:family7662@dingtalk.com