



基础必修—管综（数学）

# 不 等 式

主讲老师：媛媛老师

邮箱：[family7662@dingtalk.com](mailto:family7662@dingtalk.com)

# 目录

## Contents

---



不等式的性质



一元二次不等式



均值不等式



特殊不等式



# 一、不等式的性质

# 不等式的性质

## 1.不等式的基本性质

(1) 若 $a > b$  , 则 $a \pm c > b \pm c$

(2) 若 $a > b$ ,  $c > 0$  , 则 $ac > bc$

(3) 若 $a > b$ ,  $c < 0$  , 则 $ac < bc$

## 不等式的性质

2.传递性：
$$\begin{cases} a > b \\ b > c \end{cases} \Rightarrow a > c$$

3.同向相加性：
$$\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow a + c > b + d$$

4.同向皆正相乘性：
$$\begin{cases} a > b > 0 \\ c > d > 0 \end{cases} \Rightarrow ac > bd$$

5.同号倒数性：
$$a > b > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{b} > \frac{1}{a} > 0 \quad a < b < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{a} < 0$$

6.皆正乘（开）方性：
$$a > b > 0 \Rightarrow a^n > b^n > 0, \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b} > 0 (n \in \mathbb{Z}_+)$$

## 练习

1. 设  $a$ 、 $b$ 、 $c$  为实数，且  $a > b$ ，则( )

A. 若  $a > 5$ ，则  $b > 5$

B. 若  $a > b > 0$ ，则  $\frac{1}{a} > \frac{1}{b} > 0$

C.  $a^2 > b^2$

D.  $ac > bc$

E.  $a - c > b - c$

## 练习

1. 设  $a$ 、 $b$ 、 $c$  为实数，且  $a > b$ ，则( **E** )

A. 若  $a > 5$ ，则  $b > 5$

B. 若  $a > b > 0$ ，则  $\frac{1}{a} > \frac{1}{b} > 0$

C.  $a^2 > b^2$

D.  $ac > bc$

E.  $a - c > b - c$

【解析】 因为  $a > b$ ，所以  $a - c > b - c$ ，故选 E.

## 二、一元二次不等式





# 一元二次不等式

## 1.一元二次不等式

$$ax^2 + bx + c > 0(\text{或} < 0)$$

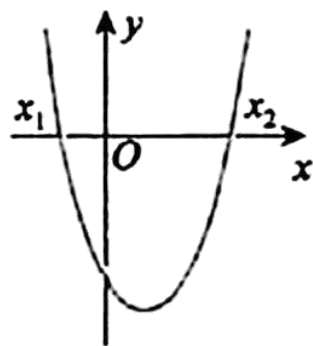
## 2.解一元二次不等式的步骤

- ①先化成标准型： $ax^2 + bx + c > 0(\text{或} < 0)$ ，且  $a > 0$ ；
- ②计算对应方程的判别式 $\Delta$ ；
- ③求对应方程的根；
- ④利用口诀“**大于号取两边，小于号取中间**”写出解集.

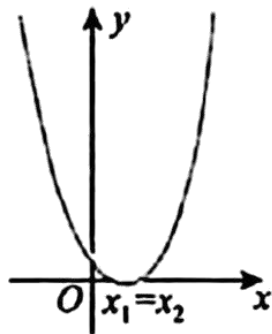


# 一元二次不等式

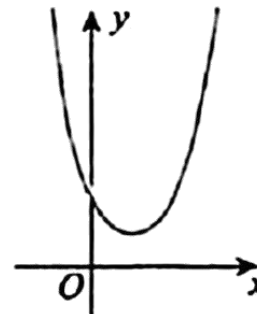
$$y = ax^2 + bx + c$$



$$y = ax^2 + bx + c$$



$$y = ax^2 + bx + c$$



## 练习

2.不等式 $-x^2 + 2x > 0$ 的解集为( )

A. $\{x|x < 0 \text{ 或 } x > 2\}$

B. $\{x|-2 < x < 0\}$

C. $\{x|0 < x < 2\}$

D. $\{x|x < -2 \text{ 或 } x > 0\}$

E. $\{x|x < 0\}$

## 练习

2.不等式 $-x^2 + 2x > 0$ 的解集为( **C** )

A.  $\{x|x < 0 \text{ 或 } x > 2\}$

B.  $\{x|-2 < x < 0\}$

C.  $\{x|0 < x < 2\}$

D.  $\{x|x < -2 \text{ 或 } x > 0\}$

E.  $\{x|x < 0\}$

【解析】先化成标准型得， $x^2 - 2x < 0 \Rightarrow x(x - 2) < 0 \Rightarrow 0 < x < 2$ . 故选C.

## 练习

3.若关于 $x$ 的一元二次不等式 $x^2 - 3x + k \leq 0$ 的解集为空集，则 $k$ 的取值范围是( )

A.  $k > 2$

B.  $0 < k \leq 2$

C.  $k \leq 2$

D.  $k > \frac{9}{4}$

E.  $k < \frac{9}{4}$

## 练习

3.若关于 $x$ 的一元二次不等式 $x^2 - 3x + k \leq 0$ 的解集为空集，则 $k$ 的取值范围是( **D** )

A.  $k > 2$

B.  $0 < k \leq 2$

C.  $k \leq 2$

D.  $k > \frac{9}{4}$

E.  $k < \frac{9}{4}$

【解析】不等式所对应的二次函数开口向上，要使得不等式的解集为空集，需要令

$\Delta < 0$ ，即 $9 - 4k < 0$ ，解得 $k > \frac{9}{4}$ ，故选D.

# 三、均值不等式

# 均值不等式

## 1.定义

当  $x_1, x_2, \dots, x_n$  为  $n$  个正实数时,  $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$ , 当且仅当  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$  时, 等号成立.

成立条件：**一正二定三相等**

一正：指的是所有数据均为正数.

二定：和定积最大；积定和最小.

三相等：当且仅当  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$  时, 等号成立.



## 均值不等式

### 2. 常见形式

( 1 )  $a, b \in R^+ \Rightarrow a + b \geq 2\sqrt{ab}, ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ , 当且仅当  $a = b$  时等号成立

( 2 )  $a, b \in R \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab, ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$ , 当且仅当  $a = b$  时等号成立

( 3 )  $a, b, c \in R^+ \Rightarrow a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}, abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$ , 当且仅当  $a = b = c$  时等号成立

( 4 )  $a + \frac{1}{a} \geq 2 (a > 0)$  ( 当且仅当  $a = \frac{1}{a}$  即  $a = 1$  时等号成立 )

## 练习

4. 设两个正数  $a$ 、 $b$  满足  $a + b = 20$ ，则  $ab$  的最大值为( )

A. 100

B. 400

C. 50

D. 200

E. 10

## 练习

4. 设两个正数  $a$ 、 $b$  满足  $a + b = 20$ ，则  $ab$  的最大值为( **A** )

A. 100

B. 400

C. 50

D. 200

E. 10

【解析】 因为  $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ ，所以  $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$

$\Rightarrow ab \leq \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{400}{4} = 100$ ，故选 A.

## 练习

5. 若  $x > 0$ , 则  $2x + \frac{8}{x}$  的最小值为( )

A. 2

B. 4

C. 6

D. 8

E. 10

## 练习

5. 若  $x > 0$ , 则  $2x + \frac{8}{x}$  的最小值为( **D** )

A. 2

B. 4

C. 6

D. 8

E. 10

【解析】 因为  $x > 0$ ,  $2x + \frac{8}{x} \geq 2\sqrt{2x \cdot \frac{8}{x}} = 8$ , 故选 D.

## 练习

6. 已知  $m > 0$ 、 $n > 0$ ，则  $(m + n) \left( \frac{1}{m} + \frac{4}{n} \right)$  的最小值为( )

A. 18

B. 15

C. 12

D. 9

E. 6

## ▶ 练习

6. 已知  $m > 0$ 、 $n > 0$ ，则  $(m + n) \left( \frac{1}{m} + \frac{4}{n} \right)$  的最小值为( **D** )

A.18

B.15

C.12

D.9

E.6

【解析】  $(m + n) \left( \frac{1}{m} + \frac{4}{n} \right) = 1 + \frac{4m}{n} + \frac{n}{m} + 4 = 5 + \frac{4m}{n} + \frac{n}{m}$

因为  $m > 0$ 、 $n > 0$ ，所以  $\frac{4m}{n} > 0$ ， $\frac{n}{m} > 0$ ，则原式  $= 5 + \frac{4m}{n} + \frac{n}{m}$

$$\geq 5 + 2\sqrt{\frac{4m}{n} \cdot \frac{n}{m}} = 5 + 2 \times 2 = 9, \text{ 故选D.}$$

## 练习

7. 已知  $x < \frac{5}{4}$ ，则函数  $y = 4x - 2 + \frac{1}{4x-5}$  的最大值为 ( )

A.1

B.2

C.4

D.6

E.8



## ▶ 练习

7. 已知  $x < \frac{5}{4}$ , 则函数  $y = 4x - 2 + \frac{1}{4x-5}$  的最大值为 ( A )

A.1

B.2

C.4

D.6

E.8

【解析】 因为  $x < \frac{5}{4}$ , 则  $4x - 5 < 0$ , 需要提出一个负号, 使  $5 -$

$4x > 0$ , 再凑积为定值, 则  $y = 4x - 5 + 3 + \frac{1}{4x-5} = -(5 - 4x +$

$\frac{1}{5-4x}) + 3 \leq -2\sqrt{(5-4x) \cdot \frac{1}{5-4x}} + 3 = 1$ . 当且仅当  $5 - 4x = \frac{1}{5-4x}$ ,

即  $x = 1$  时取等号. 故当  $x = 1$  时,  $y$  取最大值 1, 故选 A.

## 练习

8. 当  $0 < x < 4$  , 则函数  $y = x(8 - 2x)$  的最大值为(     )

A.1

B.2

C.4

D.6

E.8

## 练习

8. 当  $0 < x < 4$  , 则函数  $y = x(8 - 2x)$  的最大值为( **E** )

A.1

B.2

C.4

D.6

E.8

【解析】 因为  $8 - 2x > 0$  , 需凑和为定值, 则  $y = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot (8 - 2x)$   
 $\leq \frac{1}{2} \left[ \frac{2x + (8 - 2x)}{2} \right]^2 = 8$ . 当且仅当  $2x = 8 - 2x$  即  $x = 2$  时取等号, 故当  $x = 2$   
时,  $y$  取最大值 8, 故选 E.

# 四、特殊不等式

# 特殊不等式

## 1. 绝对值不等式

(1) 分段讨论法：
$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & f(x) \geq 0 \\ -f(x) & f(x) < 0 \end{cases}$$

(2) 平方法：
$$(|f(x)|)^2 = [f(x)]^2$$

(3) 公式法：
$$|f(x)| < a (a > 0) \Leftrightarrow -a < f(x) < a$$

$$|f(x)| > a (a > 0) \Leftrightarrow f(x) < -a \text{ 或 } f(x) > a$$

大于号取两边，小于号取中间

## 练习

9. 不等式  $|2x - 3| \leq 1$  的解集为 ( )

A.  $\{x | 1 \leq x \leq 2\}$

B.  $\{x | x \leq -1 \text{ 或 } x \geq 2\}$

C.  $\{x | 1 \leq x \leq 3\}$

D.  $\{x | 2 \leq x \leq 3\}$

E.  $\{x | x \leq -2 \text{ 或 } x \geq 1\}$

## 练习

9. 不等式  $|2x - 3| \leq 1$  的解集为 ( **A** )

A.  $\{x | 1 \leq x \leq 2\}$

B.  $\{x | x \leq -1 \text{ 或 } x \geq 2\}$

C.  $\{x | 1 \leq x \leq 3\}$

D.  $\{x | 2 \leq x \leq 3\}$

E.  $\{x | x \leq -2 \text{ 或 } x \geq 1\}$

**【解析】** 因为  $|2x - 3| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq 2x - 3 \leq 1$ , 所以  $1 \leq x \leq 2$ , 故选A.

## 特殊不等式

### 2.绝对值三角不等式

(1) 基本形式  $||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$

(2) 等号成立条件：**同号** $ab \geq 0$ ，**异号** $ab \leq 0$

表达式	成立条件	示例
$ a  +  b  =  a + b $	$ab \geq 0$	$ -3  +  -5  =  -3 - 5 $
$ a  +  b  =  a - b $	$ab \leq 0$	$ 3  +  -5  =  3 + 5 $
$  a  -  b   =  a + b $	$ab \leq 0$	$  -5  -  3   =  -5 + 3 $
$  a  -  b   =  a - b $	$ab \geq 0$	$  -5  -  -3   =  -5 + 3 $



## 特殊不等式

### 2.绝对值三角不等式

(1) 基本形式  $||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$

(3) 不等号成立条件：**等号成立的反面**

表达式	成立条件	示例
$ a  +  b  >  a + b $	$ab < 0$	$ -3  +  5  >  -3 + 5 $
$ a  +  b  >  a - b $	$ab > 0$	$ -3  +  -5  >  -3 - 5 $
$  a  -  b   <  a + b $	$ab > 0$	$  -5  -  -3   <  -5 - 3 $
$  a  -  b   <  a - b $	$ab < 0$	$  -5  -  3   <  -5 - 3 $

## 练习

10.  $|x + 1| + |x - 3|$  的最小值为 ( )

A.1

B.2

C.3

D.4

E.-2

## 练习

10.  $|x + 1| + |x - 3|$  的最小值为 ( **D** )

A.1

B.2

C.3

D.4

E.-2

【解析】  $|x + 1| + |x - 3| \geq |(x + 1) - (x - 3)| = |4| = 4$ ，故选D。

## 练习

11. 已知函数  $f(x) = |3 - x| + |x - m|$  的最小值为 1，则  $m$  为 ( )

A.  $m = 3$

B.  $m = 2$

C.  $m = 4$

D.  $m = 2$  或  $m = 4$

E.  $m = 1$  或  $m = 3$

## 练习

11. 已知函数  $f(x) = |3 - x| + |x - m|$  的最小值为 1，则  $m$  为 ( **D** )

A.  $m = 3$

B.  $m = 2$

C.  $m = 4$

D.  $m = 2$  或  $m = 4$

E.  $m = 1$  或  $m = 3$

【解析】  $f(x) = |3 - x| + |x - m| \geq |(3 - x) + (x - m)| = |3 - m| = 1$ ，  
所以  $m = 2$  或  $m = 4$ ，故选 D。

## 特殊不等式

### 3. 分式不等式

$$\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)g(x) \geq 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)g(x) \leq 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$$

## 练习

12. 不等式  $\frac{2x-3}{x+1} > 0$  的解集是( )

A.  $1 < x < \frac{3}{2}$

B.  $-1 < x < 3$

C.  $x < -1$  或  $x > \frac{3}{2}$

D.  $-1 < x < \frac{3}{2}$

E.  $x < 1$  或  $x > \frac{3}{2}$

## 练习

12. 不等式  $\frac{2x-3}{x+1} > 0$  的解集是( C )

A.  $1 < x < \frac{3}{2}$

B.  $-1 < x < 3$

C.  $x < -1$  或  $x > \frac{3}{2}$

D.  $-1 < x < \frac{3}{2}$

E.  $x < 1$  或  $x > \frac{3}{2}$

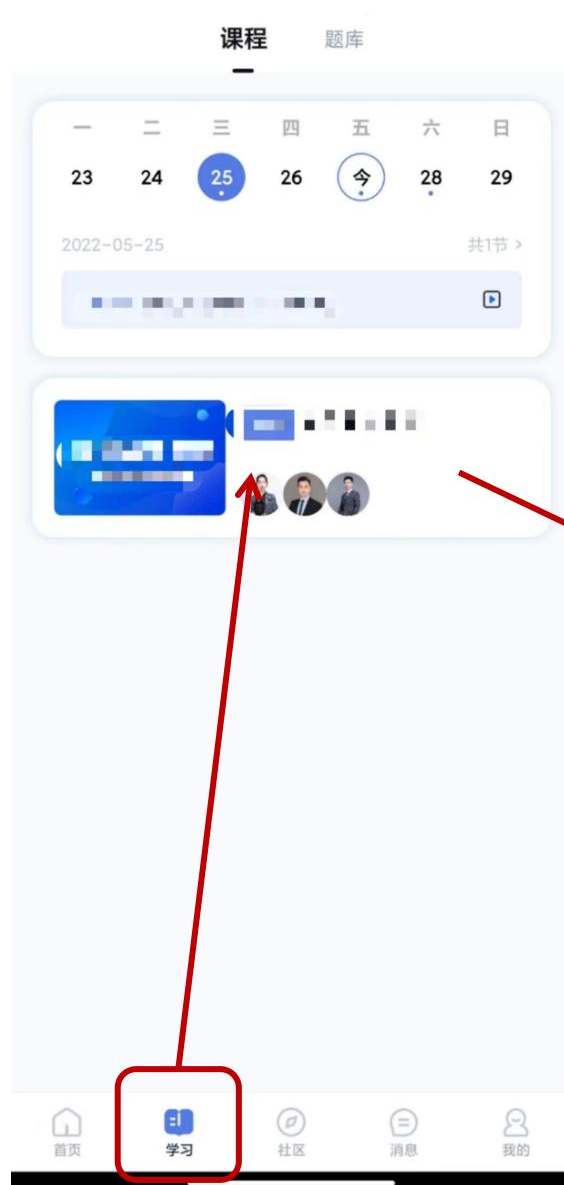
【解析】  $\frac{2x-3}{x+1} > 0$

$$\therefore \frac{2x-3}{x+1} \cdot (x+1)^2 > 0 \cdot (x+1)^2$$

$$\therefore (2x-3)(x+1) > 0, \text{ 故原不等式的解集为 } \left\{ x \mid x < -1 \text{ 或 } x > \frac{3}{2} \right\}$$

注意：不能像方程那样直接去分母，  
因为分母的正负不知





学习→点击课程→点击评价(5星好评)→提交评价



# 感谢您的观看

主讲老师：媛媛老师

邮箱：[family7662@dingtalk.com](mailto:family7662@dingtalk.com)