全国硕士研究生招生考试

专题串讲课——管综(数学)

主讲:媛媛老师

邮箱:family7662@dingtalk.com

专题串讲课——管综(数学)

- 专题串讲课1：数与式
- 专题串讲课2：函数、方程与不等式
- 专题串讲课3：数列
- 专题串讲课4：几何
- 专题串讲课5：排列组合与概率
- 专题串讲课6：应用题

课程TIPS

师大课堂 SHI DA KE TANG

1. 准备好草稿纸、笔，课堂需要练习
2. 课前预习，课后复习
3. 整理错题集

考试题型

题型	题量	分值
问题求解	15道	15×3＝45分
条件充分性判断	10道	10×3＝30分

串讲课1:数与式

专题串讲课1:数与式

	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024
数	1	1	1	2	1	2	1	2	2	2	1
式	1	1	0	1	1	1	1	2	2	1	2

专题串讲课I:数与式

师大课堂 SHI DA KE TANG

PART--01 实数

PART--02 整式

PART--03 分式

PART--01 实数

一、质数★

质数（素数）：大于1的正整数，只能被1和它本身整除

（1）熟记20以内的质数：2、3、5、7、11、13、17、19

（2）唯一的偶质数：2

注意：1不是质数

练习

1.（2015）设m,n是小于20的质数，满足条件$|m-n|=2$的$\{m,n\}$，共有【C】

A. 2组

B. 3组

C. 4组

D. 5组

E. 6组

【解析】

根据题意得，小于20的质数有：2，3，5，7，11，13，17，19.

且$|m-n|=2\Rightarrow m$，n之间的差值为2.

则满足条件$|m-n|=2$的$\{m,n\}$有：$\{3,5\}$，$\{5,7\}$，$\{11,13\}$，$\{17,19\}$共4组.

故选C.

练习

2.（2013）$p=mq+1$为质数.【 】

（1）m为正整数，q为质数.

（2）m,q均为质数.

你需要判断：

条件（1）$\xrightarrow{?}$ 结论

条件（2）$\xrightarrow{?}$ 结论

$\Longrightarrow$ 大方向：下推上

A. 条件（1）充分，但条件（2）不充分。

B. 条件（2）充分，但条件（1）不充分。

C. 条件（1）和（2）单独都不充分，但条件（1）和条件（2）联合起来充分。

D. 条件（1）充分，条件（2）也充分。

E. 条件（1）和（2）单独都不充分，条件（1）和条件（2）联合起来也不充分。

练习

2.（2013）$p=mq+1$为质数.【E】

（1）m为正整数，q为质数.

（2）m,q均为质数.

【解析】

条件（1），m为正整数，q为质数. 举反例：$m=4$，$q=2$，$p=mq+1=4\times2+1=9$，即$p=9$不是质数. 故条件（1）不充分.

条件（2），m，q均为质数. 举反例：$m=2$，$q=7$，$p=mq+1=2\times7+1=15$，即$p=15$不是质数. 故条件（2）不充分.

条件（1）和条件（2）单独都不充分，考虑条件（1）（2）联合.

条件（1）（2）联合后等同于条件（2），故条件（1）（2）联合起来也不充分.

综上，故选 E.

练习

3.（2022）一个自然数的各位数字都是105的质因数，且每个质因数至多出现一次，则这样的自然数有【D】

A. 6个

B. 9个

C. 12个

D. 15个

E. 27个

【解析】

根据题意可知 $105=3\times5\times7$. 则 105 的质因数有 3、5、7 这三个数. 因为没有说明这个自然数是几位数. 因此可以分成以下三种情况:

①自然数为 1 位数：$A_3^1=3$ 种情况.

②自然数为 2 位数：$A_3^2=6$ 种情况.

③自然数为 3 位数：$A_3^3=6$ 种情况.

综上，满足题意的自然数共有 $3+6+6=15$. 故选 D.

练习

4.（2020）从1至10这10个整数中任取3个数，恰有1个质数的概率是【B】

A. $\frac{2}{3}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{5}{12}$

D. $\frac{2}{5}$

E. $\frac{1}{120}$

【解析】

10 以内的质数有：2，3，5，7. 故 10 以内的质数有 4 个，非质数有 6 个.

从 10 个整数中任取 3 个数的取法有 $C_{10}^3=120$(种). 任取的 3 个数中恰有 1 个质数的取法有 $C_4^1C_6^2=60$（种）. 则符合题意所求的概率是 $\frac{C_4^1C_6^2}{C_{10}^3}=\frac{1}{2}$. 故选 B.

二、奇偶性★

奇±奇＝偶	奇×奇＝奇
奇±偶＝奇	奇×偶＝偶
偶±偶＝偶	偶×偶＝偶

★加减口诀：同偶异奇
乘法口诀：有偶则偶

补充：奇±奇±奇＝奇→奇数个奇数相±为奇

奇±奇±奇±奇＝偶→偶数个奇数相±为偶

练习

5.（2012）已知 m，n 是正整数，则m是偶数.【D】

（1）$3m+2n$ 是偶数.

（2）$3m^2+2n^2$ 是偶数.

【解析】

条件（1），$3m+2n$是偶数$\Rightarrow 2n$是偶数$\Rightarrow 3m$是偶数$\Rightarrow 3$ 是奇数$\Rightarrow m$是偶数. 故条件（1）充分.

条件（2），$3m^2+2n^2$是偶数$\Rightarrow 2n^2$是偶数$\Rightarrow 3m^2$是偶数$\Rightarrow 3$ 是奇数$\Rightarrow m^2$是偶数$\Rightarrow m$是偶数. 故条件（2）充分.

综上，故选 D.

练习

6.（2023）已知 m，n，p是三个不同的质数，则能确定m，n，p的乘积.【A】

（1）$m+n+p=16$.

（2）$m+n+p=20$.

条件（1），$m+n+p=16$.

则这三个数中必是两奇一偶，唯一的偶质数是2.

设$m=2\Rightarrow n+p=14=3+11\Rightarrow m\cdot n\cdot p=2\times 3\times 11=66$.

即能确定m，n，p乘积. 故条件（1）充分.

条件（2），$m+n+p=20$.

则这三个数中必是两奇一偶，唯一的偶质数是2.

设$m=2\Rightarrow n+p=18=5+13$ 或 $n+p=18=7+11$

$\Rightarrow m\cdot n\cdot p=2\times 5\times 13=130$ 或 $m\cdot n\cdot p=2\times 7\times 11=154$.

m，n，p乘积的结果有两种. 不能确定m，n，p乘积.

故条件（2）不充分.

综上，故选A.

三.整除★

被除数÷除数＝商……余数

被除数＝商×除数+余数

整除：$a|b$ “a整除b”或“b能被a整除”，余数为0

能被整除的个数→商

练习

7.（2019）设n为正整数，则能确定n除以5的余数.【E】

（1）已知n除以2的余数.

（2）已知n除以3的余数.

【解析】

条件（1），举反例：当$n=7$时，$7\div2=3\cdots1$，$7\div5=1\cdots2$；当$n=13$时，$13\div2=6\cdots1$，$13\div5=2\cdots3$.则不能确定n除以5的余数.故条件（1）不充分.

条件（2），举反例：当$n=7$时，$7\div3=2\cdots1$，$7\div5=1\cdots2$；当$n=13$时，$13\div3=4\cdots1$，$13\div5=2\cdots3$.则不能确定n除以5的余数.故条件（2）不充分.

条件（1）和条件（2）单独都不充分，考虑条件（1）（2）联合.

条件（1）（2）联合，举反例：当$n=7$时，$7\div2=3\cdots1$，$7\div3=2\cdots1$，$7\div5=1\cdots2$；当$n=13$时，$13\div2=6\cdots1$，$13\div3=4\cdots1$，$13\div5=2\cdots3$.则不能确定n除以5的余数.故条件（1）（2）联合起来也不充分.

综上，故选E.

练习

8.（2017）在1到100之间，能被9整除的整数的平均值是【D】

A. 27

B. 36

C. 45

D. 54

E. 63

【解析】

根据题意得，$100\div 9=11\cdots 1$.

由整除的周期性得 100 以内能被 9 整除的数共有 11 个. 这些数构成以 9 为首项，99 为末项的等差数列.

∵等差数列求和公式可得：总和$=\frac{(9+99)\times 11}{2}$. ∴平均值$=\frac{(9+99)\times 11}{2\times 11}=54$. 故选 D.

练习

9.（2018）从标号为1到10的10张卡片中随机抽取2张，它们的标号之和能被5整除的概率为【A】

A. $\frac{1}{5}$

B. $\frac{1}{9}$

C. $\frac{2}{9}$

D. $\frac{2}{15}$

E. $\frac{7}{45}$

【解析】

根据题意，从 10 张卡片中抽取 2 张的总事件个数为$C_{10}^{2}=45$.

10 张卡片中随机抽取 2 张可以被 5 整除的组合有（1，4），（1，9），（2，3），（2，8），（3，7），（4，6），（5，10），（6，9），（7，8）共 9 个目标事件.

因此，所求事件的概率为 $\frac{9}{45}=\frac{1}{5}$. 故选 A.

四、数据描述★

设有n个数x_1，x_2，…，x_n

1. 算术平均值：$\overline{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$

2. 方差：$S^2=\frac{1}{n}[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2]$

3. 标准差：$S=\sqrt{S^2}=\sqrt{\frac{1}{n}[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2]}$

练习

10.（2016）设有两组数据S_1：3，4，5，6，7和S_2：4，5，6，7，a，则能确定a的值.【A】

（1）S_1与S_2的均值相等.

（2）S_1与S_2的方差相等.

【解析】

S_1的均值：$\frac{3+4+5+6+7}{5}=5$；S_1的方差：$\frac{1}{5}[(3-5)^2+(4-5)^2+(5-5)^2+(6-5)^2+(7-5)^2]=2$.

S_2的均值：$\frac{4+5+6+7+a}{5}$；S_2的方差：$\frac{1}{5}[4^2+5^2+6^2+7^2+a^2-5\times(\frac{4+5+6+7+a}{5})^2]=\frac{1}{25}(4a^2-44a+146)$.

条件（1），S_1与S_2的均值相等$\Rightarrow 5=\frac{4+5+6+7+a}{5}\Rightarrow a=3$. 即能确定$a$的值. 故条件（1）充分.

条件（2），S_1与S_2的方差相等$\Rightarrow 2=\frac{1}{25}(4a^2-44a+146)\Rightarrow 4a^2-44a+96=0$，解得$a=3$或$a=8$，结果不唯一. 即不能确定$a$的值. 故条件（2）不充分.

综上，故选 A.

练习

11. （2019）某校理学院五个系每年的录取人数如下表：

系别	数学系	物理系	化学系	生物系	地学系
录取人数	60	120	90	60	30

今年与去年相比，物理系的录取平均分没变，则理学院的录取平均分升高了.【C】

（1）数学系的录取平均分升高了3分，生物系的录取平均分降低了2分.

（2）化学系的录取平均分升高了1分，地学系的录取平均分降低了4分.

【解析】

条件（1）和条件（2）单独都不充分，考虑条件（1）（2）联合.

条件（1）（2）联合有，数学系总分提高了 $60\times3=180$（分）；物理系的录取平均分没变；化学系总分提高了 $90\times1=90$（分）；生物系总分降低了 $60\times2=120$（分）；地学系总分降低了 $30\times4=120$（分）.

即理学院总的录取分数变化为 $60\times3+120\times0+90\times1-60\times2-30\times4=30$（分）.

因此，理学院总分提高了，其录取平均分必然提高. 故条件（1）（2）联合起来充分.

综上，故选 C.

练习

12.（2023）跳水比赛中，裁判给某选手的一个动作打分，其平均值为8.6，方差为1.1，若去掉一个最高分9.7和一个最低分7.3，则剩余得分的【E】

A. 平均值变小，方差变大

B. 平均值变小，方差变小

C. 平均值变小，方差不变

D. 平均值变大，方差变大

E. 平均值变大，方差变小

【解析】

∵去掉的分数的平均值为 (9.7+7.3) ÷2=8.5<8.6，低于原数据的平均值. ∴剩余得分的平均值变大.

∵去掉最高分和最低分之后，数据波动性变小. ∴剩余得分的方差变小.

综上所述，故选 E.

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=n\bar{x}_n$$

$$\square+9.7+7.3=n\bar{x}_n$$

$$\bar{x}_{新}=\frac{n\bar{x}_n-9.7-7.3}{n-2}\Rightarrow(n-2)\bar{x}_{新}=n\bar{x}_n-9.7-7.3$$

$$=(n-2)\bar{x}_n+2\bar{x}_n-9.7-7.3$$

$$\Rightarrow(n-2)(\bar{x}_{新}-\bar{x}_n)=2\times8.6-9.7-7.3>0$$

PART--02 整式

基本公式★

1. 平方差公式：$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

2. 完全平方公式：$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

3. 立方和差公式：$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

练习

师大课堂 SHI DA KE TANG

13.（2018）设实数a，b满足$|a-b|=2$，$\left|a^3-b^3\right|=26$，

则$a^2+b^2=$【E】

A. 30

B. 22

C. 15

D. 13

E. 10

【解析】

$\because |a-b|=2 \Rightarrow (a-b)^2=4$.

$\therefore$当$a>b$时，$a-b=2$，则$|a^3-b^3|=a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)=(a-b)[(a-b)^2+3ab]$

$=2\times(4+3ab)=26$. 解得：$ab=3$.

当$a<b$时，$b-a=2$，则$|a^3-b^3|=b^3-a^3=(b-a)(b^2+ab+a^2)=(b-a)[(b-a)^2+3ab]$

$=2\times(4+3ab)=26$. 解得：$ab=3$.

综上所述，$a^2+b^2=a^2+b^2-2ab+2ab=(a-b)^2+2ab=4+2\times3=10$. 故选E.

练习

14.（2019）能确定小明的年龄.【C】

（1）小明的年龄是完全平方数.

（2）20年后小明的年龄是完全平方数.

【解析】

条件（1），举例：1，4，9，16，…等，无法确定小明的年龄.故条件（1）不充分.

条件（2），举例：25，36，49，64，…等，无法确定小明的年龄.故条件（2）不充分.

条件（1）和条件（2）单独都不充分，考虑条件（1）（2）联合.

条件（1）（2）联合，设小明现在的年龄为x^2，20 年后的年龄为y^2.（x，$y\in Z_+$）

则$x^2+20=y^2$，整理得$y^2-x^2=20\Rightarrow(y-x)(y+x)=20=1\times20=2\times10=4\times5$.

$\because y-x$与$y+x$奇偶性相同.$\therefore y-x$与$y+x$只能同为偶数.

因此$\begin{cases}y-x=2\\y+x=10\end{cases}$，解得：$\begin{cases}x=4\\y=6\end{cases}$.即小明的年龄为$x^2=4^2=16$.故条件（1）（2）联合起来充分.

综上，故选C.

练习

15.（2024）已知n是正整数，则$\frac{n^2}{3}$余数为1.【D】

（1）$\frac{n}{3}$余1

（2）$\frac{n}{3}$余2

【解析】

若$\frac{n^2}{3}$余数为1，则有$n^2=3k+1$，即$\frac{n^2}{3}=k+\frac{1}{3}$.

条件（1），若$\frac{n}{3}$余1，则有$n=3k+1$，即$n^2=(3k+1)^2=9k^2+6k+1$，此时$\frac{n^2}{3}=3k^2+2k+\frac{1}{3}$，

其余数为1. 故条件（1）充分.

条件（2），若$\frac{n}{3}$余2，则有则有$n=3k+2$，即$n^2=(3k+2)^2=9k^2+12k+4=9k^2+12k+3+1$，

此时$\frac{n^2}{3}=3k^2+4k+1+\frac{1}{3}$，其余数为1. 故条件（2）充分.

故选D.

PART--03 分式

拓展公式★

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$$

$$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2-1+\frac{1}{x^2}\right)$$

$$x^4+\frac{1}{x^4}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2$$

练习

16.（2015）已知p，q为非零实数，则能确定$\frac{p}{q(p-1)}$的值.【B】

（1）$p+q=1$.

（2）$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

【解析】

条件（1），$p+q=1\Rightarrow q=1-p$. 则$\frac{p}{q(p-1)}=\frac{p}{(1-p)(p-1)}=-\frac{p}{(1-p)^2}$. 因为$p$为非零实数，可任意取值，所以$-\frac{p}{(1-p)^2}$的值不固定. 即不能确定$\frac{p}{q(p-1)}$的值. 故条件（1）不充分.

条件（2），$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\Rightarrow\frac{q+p}{pq}=1\Rightarrow q+p=pq$. 则$\frac{p}{q(p-1)}=\frac{p}{pq-q}=\frac{p}{q+p-q}=1$. 则能确定$\frac{p}{q(p-1)}$的值. 故条件（2）充分.

综上，故选 B.

练习

17.（2014）设x是非零实数，则$x^3+\frac{1}{x^3}=18$.【A】

(1) $x+\frac{1}{x}=3$

(2) $x^2+\frac{1}{x^2}=7$

【解析】

根据题意，$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}-1\right)$.

条件(1)，$x+\frac{1}{x}=3$ 代入$x^3+\frac{1}{x^3}$得：$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}-1\right)=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2+2+\frac{1}{x^2}-1-2\right)$

$=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3\right]=3\times(3^2-3)=18$. 则能确定$x^3+\frac{1}{x^3}=18$. 故条件（1）充分.

条件（2），$x^2+\frac{1}{x^2}=7\Rightarrow x^2+2+\frac{1}{x^2}=7+2\Rightarrow\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=9\Rightarrow x+\frac{1}{x}=\pm3$. 当$x+\frac{1}{x}=3$时，$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}-1\right)=3\times(7-1)=18$；当$x+\frac{1}{x}=-3$时，$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}-1\right)$

$=-3\times(7-1)=-18$. 则结果不唯一，即不能确定$x^3+\frac{1}{x^3}=18$. 故条件（2）不充分.

综上，故选 A.

练习

18.（2020）已知实数x满足$x^2+\frac{1}{x^2}-3x-\frac{3}{x}+2=0$，则$x^3+\frac{1}{x^3}=$【C】

A. 12

B. 15

C. 18

D. 24

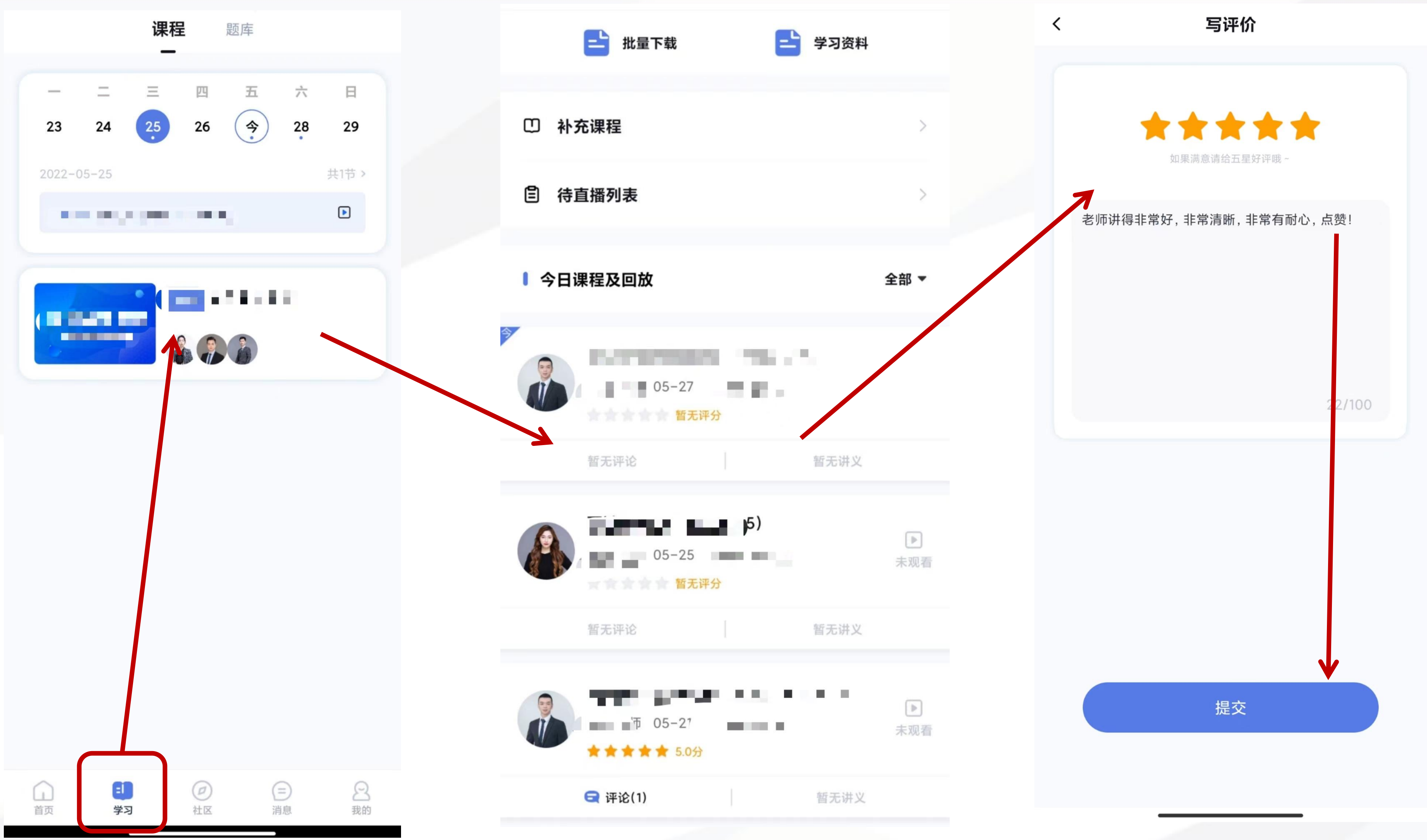
E. 27

【解析】

$x^2+\frac{1}{x^2}-3x-\frac{3}{x}+2=0\Rightarrow\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=0\Rightarrow\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{1}{x}-3\right)=0.$

解得：$x+\frac{1}{x}=0$（舍去）或$x+\frac{1}{x}=3$.

因此，$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}-1\right)=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3\right]=3\times(3^2-3)=18$. 故选C.



师大云课堂→学习→点击课程→点击评价(5星好评)→提交评价

师大课堂
SHI DA KE TANG

感 谢 聆 听

主讲:媛媛老师
邮箱:family7662@dingtalk.com