全国硕士研究生招生考试

专题串讲课——管综(数学)

主讲:媛媛老师

邮箱:family7662@dingtalk.com

师大课堂
SHI DA KE TANG

串讲课3:数列

专题串讲课3:数列

师大课堂 SHI DA KE TANG

	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024
数列	2	3	1	1	2	3	2	2	3	2	3

专题串讲课3:数列

师大课堂 SHI DA KE TANG

- PART--01　等差数列
- PART--02　等比数列
- PART--03　中项应用
- PART--04　递推数列

PART--01 等差数列

等差数列公式★

1. 定义：$a_{n+1} - a_n = d$

2. 通项公式：$a_n = a_1 + (n-1)d = dn + (a_1 - d)$

抽象为一次函数$y = ax + b$

若$m + n = p + q$，则$a_m + a_n = a_p + a_q$

等差数列公式★

3. 前n项和：$S_n=\frac{1}{2}n(a_1+a_n)=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{d}{2}n^2+(a_1-\frac{d}{2})n$

抽象为不含常数项的二次函数$y=ax^2+bx$

最值：（1）对称轴$n=-\frac{b}{2a}=\frac{1}{2}-\frac{a_1}{d}$

（2）令$a_n=0$，求出n.

✓ 若n为整数，则在S_n和S_{n-1}处同时取得最值

✓ 若n为小数，则取n的整数部分m，在S_m处取得最值

练习

1. （2024）已知等差数列$\{a_n\}$满足$a_2a_3=a_1a_4+50$，且$a_2+a_3<a_1+a_5$，则公差为_____.【C】

A. 2

B. −2

C. 5

D. −5

E. 10

【解析】

由$a_2a_3=a_1a_4+50$，得$(a_1+d)(a_1+2d)=a_1(a_1+3d)+50$，即$a_1^2+2a_1d+a_1d+2d^2=a_1^2+3a_1d+50$，

化简得$2d^2=50$，$d^2=25$，解得$d=\pm 5$.

因为$a_2+a_3<a_1+a_5$，所以$a_1+d+a_1+2d<a_1+a_1+4d$，化简得$d>0$. 所以d=5.

故选C.

练习

2.（2015）已知$\{a_n\}$是公差大于零的等差数列，S_n是$\{a_n\}$的前n项和，则

$S_n \geq S_{10}$ $(n = 1, 2\cdots)$【D】

（1）$a_{10} = 0$

（2）$a_{11} \cdot a_{10} < 0$

【解析】

根据题意得，$\{a_n\}$是公差大于零的等差数列，说明该数列单调递增.

条件（1），∵$a_{10}=0$且公差$d>0$. ∴前9项a_1，a_2，…，a_9都小于0. 因此，从a_{11}开始必然是正数，则有$S_{10}=S_9+a_{10}=S_9$为最小值. 符合题干结论. 故条件（1）充分.

条件（2），∵$a_{11}a_{10}<0$. ∴a_{11}，a_{10}异号且公差$d>0\Rightarrow$可以确定$a_{11}>0$，$a_{10}<0$. 因此，前10项a_1，a_2，…，a_{10}都小于0，$S_{10}<0$，则有$S_{11}=S_{10}+a_{11}>S_{10}$. 符合题干结论. 故条件（2）充分.

综上，故选D.

练习

3.（2013）已知$\{a_n\}$是等差数列，若a_2与a_{10}是方程$x^2-10x-9=0$的两个根，则$a_5+a_7=$【D】

A. -10

B. -9

C. 9

D. 10

E. 12

【解析】

由根与系数关系得：

$x^2-10x-9=0$ 的两根a_2与$a_{10}\Rightarrow a_2+a_{10}=-\dfrac{b}{a}=10$；$a_2\cdot a_{10}=\dfrac{c}{a}=-9$.

又∵$\{a_n\}$为等差数列，∴根据等差数列的性质：若$m+n=p+q$，则$a_m+a_n=a_p+a_q$.

即$a_5+a_7=a_2+a_{10}=10$. 故选D.

练习

4.（2019）设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，则数列$\{a_n\}$是等差数列.【A】

（1）$S_n=n^2+2n, n=1,2,3\cdots$

（2）$S_n=n^2+2n+1, n=1,2,3\cdots$

练习

5.（2020）若等差数列$\{a_n\}$满足a_1=8，且$a_2+a_4=a_1$，则$\{a_n\}$前n项和的最大值为【E】

A. 16

B. 17

C. 18

D. 19

E. 20

【解析】

方法一：$a_2+a_4=2a_3=a_1=8 \Rightarrow a_3=4 \Rightarrow d=\frac{a_3-a_1}{3-1}=-2 \Rightarrow a_5=a_3+2d=4-4=0$.

∵等差数列的性质可知，$d=-2<0$. ∴$\{a_n\}$为递减的等差数列，且$a_4=2$，$a_5=0$，$a_6=-2$.

所以数列$\{a_n\}$前n项和的最大值在第4项与第5项取得，即$S_{max}=\frac{(8+0)\times 5}{2}=20$.

方法二：根据题意，$a_2+a_4=a_1=8 \Rightarrow d=-2$. ∵$S_n=\frac{d}{2}n^2+(a_1-\frac{d}{2})n=-n^2+9n$（$n$为正整数）.

∴当n为4或5的时候取得最大值. 即$S_4=S_5=20$.

故选E.

PART--02 等比数列

等比数列公式★

1. 定义：$\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$（q为常数且 $\neq 0$，$n\geq 1$）

2. 通项公式：$a_n=a_1\cdot q^{n-1}$

若$m+n=c+d$，则$a_m\cdot a_n=a_c\cdot a_d$

3. 前n项和：$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}\Longrightarrow S_n=-t\cdot q^n+t$，其中$t=\frac{a_1}{1-q}$

练习

6.（2021）已知数列$\{a_n\}$，则数列$\{a_n\}$为等比数列.【C】

（1）$a_na_{n+1}>0$.

（2）$a_{n+1}^2-2a_n^2-a_na_{n+1}=0$.

【解析】

条件（1），$a_na_{n+1}>0\Rightarrow a_n$与$a_{n+1}$同号，无法判断数列$\{a_n\}$为等比数列. 故条件（1）不充分.

条件（2），$a_{n+1}^2-2a_n^2-a_na_{n+1}=0$，因式分解得：$(a_{n+1}-2a_n)(a_{n+1}+a_n)=0$.

因此$a_{n+1}=2a_n$或$a_{n+1}=-a_n$，故这种情况下会出现$a_n=0$（等比数列中不能含有0）. 故条件（2）不充分.

条件（1）和条件（2）单独都不充分，考虑条件（1）（2）联合.

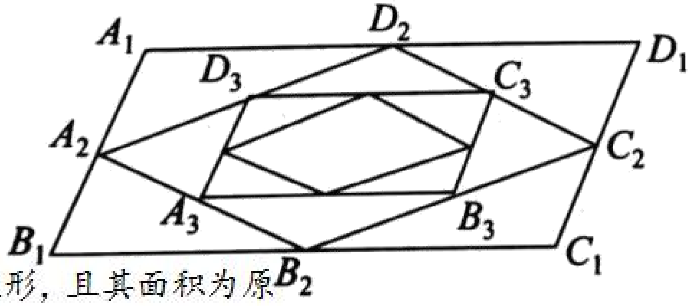
条件（1）（2）联合得：因为a_n与a_{n+1}同号，所以排除条件（2）中$a_{n+1}=-a_n$的情况.

即$a_{n+1}=2a_n\Rightarrow$数列$\{a_n\}$为等比数列. 故条件（1）（2）联合起来充分.

综上，故选C.

练习

7.（2018）如图所示，四边形$A_1B_1C_1D_1$是平行四边形，$A_2B_2C_2D_2$分别是四边形四边的中点，$A_3B_3C_3D_3$分别是四边形$A_2B_2C_2D_2$四边的中点，依次下去，得到四边形序列$A_nB_nC_nD_n$（n=1，2，3，…）. 设$A_nB_nC_nD_n$的面积为S_n，且$S_1=12$，则$S_1+S_2+S_3\cdots=$【C】



A. 16

B. 20

C. 24

D. 28

E. 30

【解析】

根据四边形性质可得，任意四边形各边中点依次连接所得四边形为平行四边形，且其面积为原四边形面积的$\frac{1}{2}$. $S_1=12$，则$S_2=6$，$S_3=3$，…，因此$\{S_n\}$是首项为12，公比为$\frac{1}{2}$的等比数列.

由等比数列前n项和公式得：$S_1+S_2+S_3+\cdots=\frac{S_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{12[1-(\frac{1}{2})^n]}{1-\frac{1}{2}}=24-24(\frac{1}{2})^n$.

因为$(\frac{1}{2})^n$无限接近于0，所以$S_1+S_2+S_3+\cdots=24-24\times0=24$. 故选C.

PART--03 中项应用

中项应用★

题目特征：题中出现三项成等差或者三项成等比表述

1. 等差中项：$2a_n = a_{n-k} + a_{n+k}$

2. 等比中项：$a_n^2 = a_{n-k} \cdot a_{n+k}$（任意一项均不能为零）

练习

8.（2021）三位年轻人的年龄成等差数列，且最大与最小的两人年龄之差的10倍是另一人的年龄，则三人中年龄最大的是____岁.【C】

A. 19

B. 20

C. 21

D. 22

E. 23

【解析】

∵年龄成等差数列.∴可以设三人的年龄按照从小到大依次为$a-d$，a，$a+d$.

又∵最大与最小的两人年龄之差的10倍是另一人的年龄.∴$10[(a+d)-(a-d)]=a$.

化简得：$20d=a$.则三位年轻人的年龄分别为$19d$，$20d$，$21d$.

∵年龄只能为正整数.∴当$d=1$时，三人的年龄分别为19，20，21.

则三人中年龄最大的是21岁.故选C.

练习

9.（2019）甲、乙、丙三人各自拥有不超过10本图书，甲再购入2本图书后，他们拥有的图书数量能构成等比数列，则能确定甲拥有图书的数量.【C】

（1）已知乙拥有的图书数量.

（2）已知丙拥有的图书数量.

【解析】

根据题意，设甲拥有的图书数量为x，乙拥有的图书数量为y，丙拥有的图书数量为z，则x，y，$z\leqslant 10$. 可列方程：$(x+2)\cdot z=y^2$.

条件（1），举反例：$y=4$时，$x=2$，$z=4$或$x=6$，$z=2$，无法确定甲拥有的图书数量. 故条件（1）不充分.

条件（2），举反例，$z=1$时，$x=7$，$y=3$或$x=2$，$y=2$，无法确定甲拥有的图书数量. 故条件（2）不充分.

条件（1）和条件（2）单独都不充分，考虑条件（1）（2）联合.

条件（1）（2）联合，y确定，z确定，则可以求出唯一的x. 故条件（1）（2）联合起来充分.

综上，故选C.

练习

师大课堂 SHI DA KE TANG

10.（2018）甲、乙、丙三人的年收入成等比数列，则能确定乙的年收入的最大值.【D】

（1）已知甲、丙两人的年收入之和.

（2）已知甲、丙两人的年收入之积.

【解析】

根据题意，设甲、乙、丙三人的年收入分别为x，y，z（x，y，z均大于0）.

由等比数列的等比中项公式得，$y^2=xz\Rightarrow y=\sqrt{xz}$.

条件（1），已知甲、丙两人的年收入之和$\Rightarrow x+z$为定值.

由均值不等式可得，$y=\sqrt{xz}\leqslant\frac{x+z}{2}$，当且仅当$x=z$时，$y=\sqrt{xz}$有最大值，即确定乙的年收入的最大值. 故条件（1）充分.

条件（2），已知甲、丙两人的年收入之积$\Rightarrow xz$为定值. 由上述结论得，$y=\sqrt{xz}$是定值，最大值为$\sqrt{xz}$. 即确定乙的年收入的最大值. 故条件（2）充分.

综上，故选D.

练习

11．（2017）设a，b是两个不相等的实数. 则函数$f(x)=x^2+2ax+b$的最小值小于零.【A】

（1）1，a，b成等差数列.

（2）1，a，b成等比数列.

【解析】

根据题意得，函数$f(x)=x^2+2ax+b$为一元二次函数⇒二次函数的性质：开口向上，有最小值⇒在对称轴$x=-a$处，取得最小值⇒ $f(-a)=(-a)^2+2a(-a)+b=-a^2+b<0$⇒ $a^2-b>0$.

条件（1），1，a，b成等差数列，根据等差数列的等差中项公式得：$2a=1+b \Rightarrow b=2a-1$.

代入上述结论验证：$a^2-2a+1>0$⇒ $(a-1)^2>0$.

∵1，a，b成等差数列，且$a\neq b$，$a\neq 1$.

∴$(a-1)^2>0$ 恒成立. 与上述结论一致. 故条件（1）充分.

条件（2），1，a，b成等比数列，根据等比数列的等比中项公式得：$a^2=b$. 代入上述结论验证：$a^2-a^2=0$. 与上述结论不一致. 故条件（2）不充分.

综上，故选 A.

练习

12.（2022）已知a,b为实数，则能确定$\frac{a}{b}$的值.【E】

（1）$a,b,a+b$成等比数列.

（2）$a(a+b)>0$.

【解析】

条件（1），a，b，$a+b$成等比数列$\Rightarrow b^2=a(a+b)\Rightarrow b^2=a^2+ab$，两边同时除以$b^2$：$1=(\frac{a}{b})^2+\frac{a}{b}$. 令$\frac{a}{b}=t$，原方程可化简为：$t^2+t-1=0$. 解得：$t_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$或$t_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$，$\frac{a}{b}$的值不唯一. 即不能确定$\frac{a}{b}$的值. 故条件（1）不充分.

条件（2），$a(a+b)>0$，只能得出a与$a+b$为同号，无法确定$\frac{a}{b}$的值. 故条件（2）不充分.

条件（1）和条件（2）单独都不充分，考虑条件（1）（2）联合.

条件（1）（2）联合后，无法判断a与b是否同号，仍然无法确定$\frac{a}{b}$的值. 故条件（1）（2）联合起来也不充分.

综上，故选E.

PART--04 递推数列

一、周期数列★

出现a_n与a_{n-1}或a_{n+1}的关系式（递推公式）

列举若干项找规律

若为周期数列，求第n项⟶看n除以T的余数

练习

13.（2006）将放有乒乓球的577个盒子从左到右排成一行，如果最左边的盒子里放了6个乒乓球，且每相邻的4个盒子里共有32个乒乓球，那么最右边的盒子里的乒乓球个数为【A】

A. 6

B. 7

C. 8

D. 9

E. 以上均不对

6 a_2 □ □ □ a_5 □ □ □ □ □

$a_1+a_2+a_3+a_4=32$

$a_2+a_3+a_4+a_5=32$

$\Rightarrow a_1=a_5 \Rightarrow a_n=a_{n+4} \quad T=4$

$577\div4$ — $a_{577}=a_1$

144
4/577
4
17
16
17
16
1

练习

14.（2020）已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_2=2$，且$a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$（$n=1$，2，3，…），则$a_{100}=$【B】

A. 1

B. −1

C. 2

D. −2

E. 0

【解析】

通过列举可以得到：$a_1=1$，$a_2=2$，$a_3=1$，$a_4=-1$，$a_5=-2$，$a_6=-1$，$a_7=1$，$a_8=2$，$a_9=1$，$a_{10}=-1$，…，故此可以发现，每6项进行一次循环，则可以判定该数列为周期数列，即周期为6. 因为$100\div6=16\cdots4$. 所以$a_{100}=a_{96+4}=a_4=-1$. 故选B.

练习

15.（2013）设$a_1=1$，$a_2=k$，$a_{n+1}=|a_n-a_{n-1}|(n\geq 2)$，则$a_{100}+a_{101}+a_{102}=2$【D】

（1）$k=2$.

（2）k是小于20的正整数.

【解析】

条件（1），$k=2$. $a_1=1$，$a_2=2$，$a_3=|a_2-a_1|=1$，$a_4=|a_3-a_2|=1$，$a_5=|a_4-a_3|=0$，$a_6=|a_5-a_4|=1$，$a_7=|a_6-a_5|=1$，$a_8=|a_7-a_6|=0$，…，依次类推，从第3项开始循环1，1，0，1，1，0，…，则该周期为3. 因此，$100\div 3=33\cdots\cdots 1\Rightarrow a_{100}=1$；$101\div 3=33\cdots\cdots 2\Rightarrow a_{101}=1$；$102\div 3=34\Rightarrow a_{102}=0$. 即$a_{100}+a_{101}+a_{102}=1+1+0=2$. 故条件（1）充分.

条件（2），k是小于20的正整数.

当$k=1$时，数列为1，1，0，1，1，0，…，从第1项开始循环，周期为3，则充分.

当$k=2$时，数列为1，2，1，1，0，1，1，0，…，从第3项开始循环，周期为3，则充分.

当$k=3$时，数列为1，3，2，1，1，0，1，1，0，…，从第4项开始循环，周期为3，则充分.

当$k=4$时，数列为1，4，3，1，2，1，1，0，1，1，0，…，从第6项开始循环，周期为3，则充分.

依次类推.

当$k=19$时，数列为1，19，18，1，17，16，1，15，14，1，13，12，1，11，10，1，9，8，1，7，6，1，5，4，1，3，2，1，1，0，1，1，0，…，从第28项开始循环，周期为3，则充分.

故条件（2）充分.

综上，故选D.

二、递推数列★

出现$a_{n+1}=qa_n+d$

凑配成$a_{n+1}+c=q(a_n+c)$，其中$c=\frac{d}{q-1}$

师大课堂
SHI DA KE TANG

练习

16.（2019）设数列$\{a_n\}$满足$a_1=0$，$a_{n+1}-2a_n=1$，则$a_{100}=$【A】

A. $2^{99}-1$

B. 2^{99}

C. $2^{99}+1$

D. $2^{100}-1$

E. $2^{100}-1$

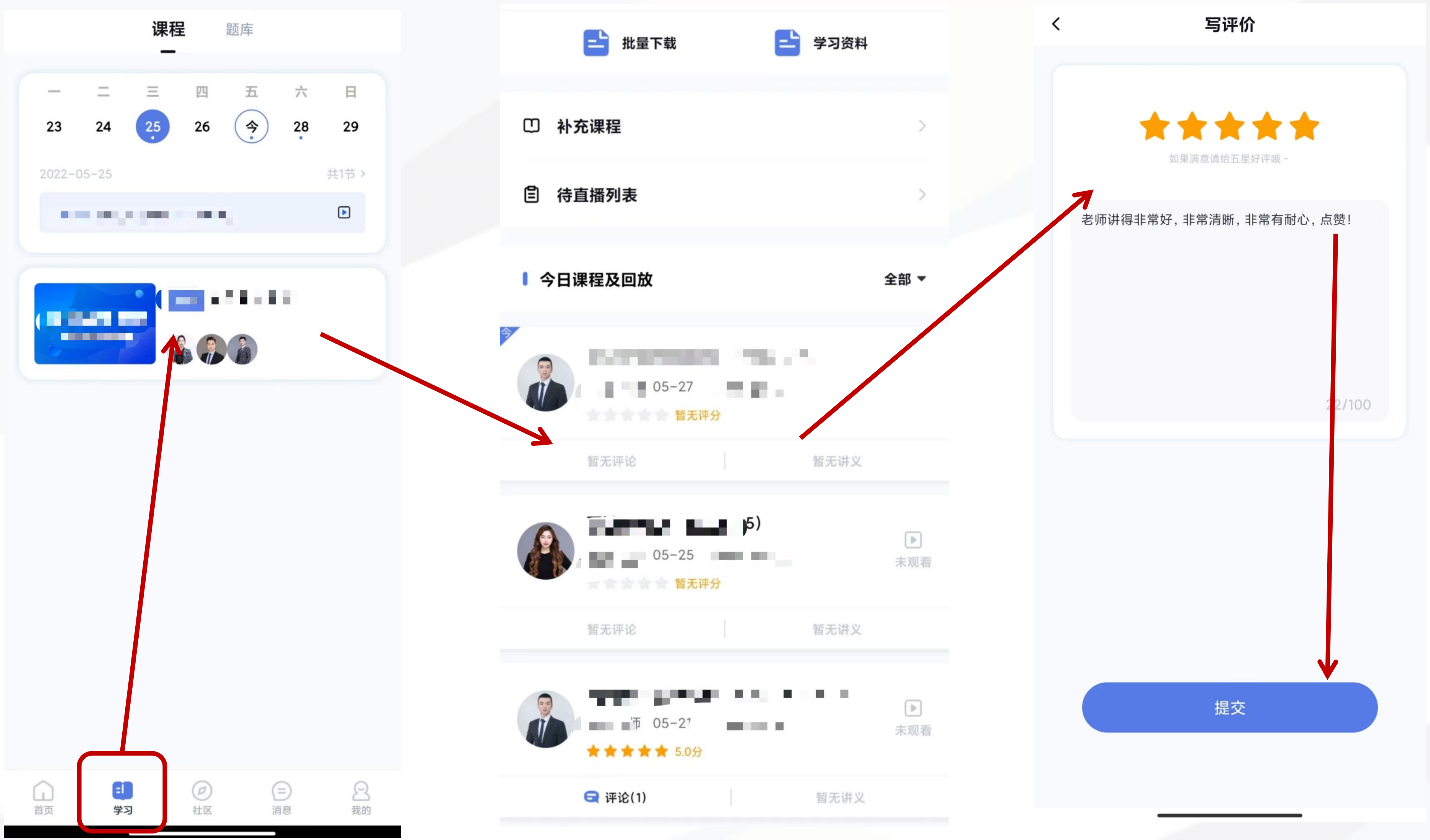
【解析】

设$a_{n+1}+x=2(a_n+x)$，整理得$a_{n+1}=2a_n+x$.

由两式相等得$x=1$，则$\frac{a_{n+1}+1}{a_n+1}=2$，所以数列$\{a_n+1\}$构成以 1 为首项，2 为公比的等比数列.

即数列$\{a_n+1\}$的通项公式为$a_n+1=2^{n-1}$，整理得$a_n=2^{n-1}-1$. 即$a_{100}=2^{99}-1$.

故选 A.



师大云课堂→学习→点击课程→点击评价(5星好评)→提交评价

师大课堂
SHI DA KE TANG

感 谢 聆 听

主讲:媛媛老师
邮箱:family7662@dingtalk.com