第三节　函数

第二章 第三节函数

师大课堂 SHI DA KE TANG

年度	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023
考频	0	1	1	2	0	2	2	0	0

第二章　第三节函数

一、集合

1.集合的概念

（1）集合：将能够确切指定的一些对象看成一个整体，这个整体就叫作集合，简称集.

（2）元素：集合中各个对象叫作这个集合的元素.

（3）表示：集合通常用大写的拉丁字母表示，如A, B, C, P, Q等，元素通常用小写的拉丁字母表示，如a, b, c, p, q等.

一、集合

2.元素与集合的关系

（1）属于：如果a是集合A的元素，就说a属于A，记作$a \in A$.

（2）不属于：如果a不是集合A的元素，就说a不属于A，记作$a \notin A$.

一、集合

3.集合中元素的特性

（1）确定性：按照明确的判断标准给定一个元素或者在这个集合里或者不在，不能模棱两可.

（2）互异性：集合中的元素互不相同.例如：集合$A=\{1,a\}$，则a不能等于1.

（3）无序性：集合中的元素没有一定的顺序.例如：集合$\{1,3,5\}$和集合$\{3,5,1\}$是同一个集合.

一、集合

4.集合的表示方法

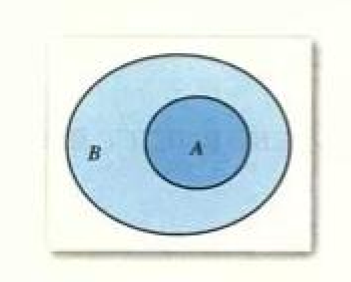
（1）列举法

$A=\{0,1,2,3\}$

（2）描述法

$D=\{x\in R|x<10\}$或$D=\{x|x<10\}$

（3）图示法（文氏图）



一、集合

4.集合的表示方法

（4）符号法

复数集	C
实数集	R
整数集	Z
有理数集	Q
自然数集（非负整数集）	N
正整数集	N^*或N_+或N^+
说明：根据国家标准，“0”是自然数.	

一、集合

6.集合的关系与运算

（1）子集

如果集合A的任何一个元素都是集合B的元素，则称A是B的子集，记为$A\subseteq B$或$B\supseteq A$，读作“A包含于B”或“B包含A”.

（2）相等的集合

若$A\subseteq B$，且$B\subseteq A$，则称$A=B$.

（3）真子集

若$A\subseteq B$且$A\neq B$，则称A是B的真子集，记作$A\subsetneqq B$.

一、集合

6.集合的关系与运算

（4）空集$\varnothing$

空集是任何集合的子集；空集是任何非空集合的真子集.

（5）全集

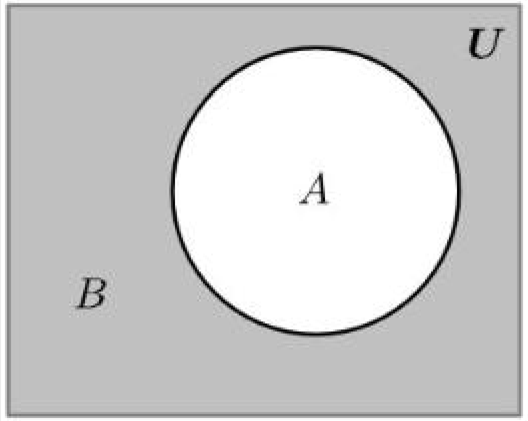
若一个集合含有所要研究的各个集合的全部元素，那么这个集合就可以看作一个全集，全集记作U.

一、集合

6.集合的关系与运算

（6）补集

对于集合U，若集合$A \subseteq U$，那么由S中所有不属于A的元素组成的集合，叫做U中子集的补集（或余集），记作$C_U A$或$\overline{A}$.



$\overline{A} = B$

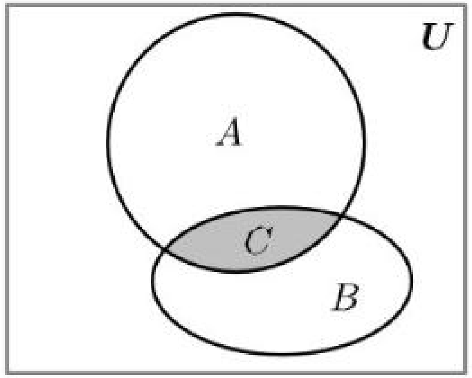
$\overline{\varnothing} = U$

一、集合

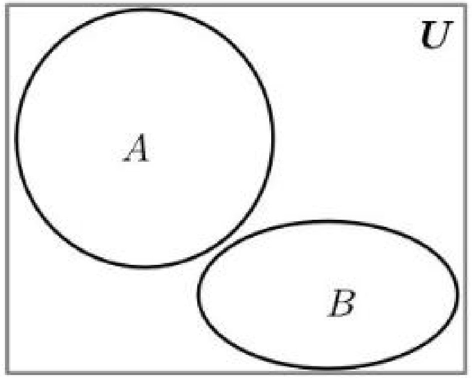
6.集合的关系与运算

（7）交集

由所有属于集合A且属于集合B的元素所组成的集合，叫做A与B的交集，记作$A \cap B$.



$A \cap B = C$



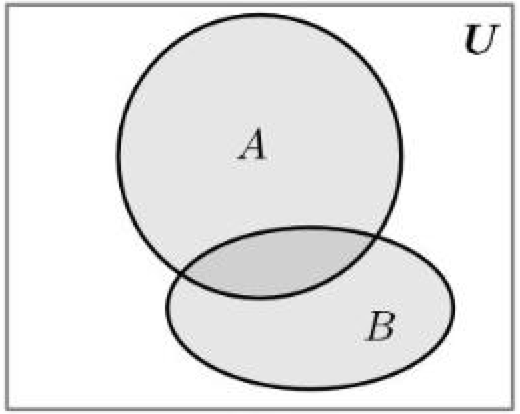
$A \cap B = \varnothing$

一、集合

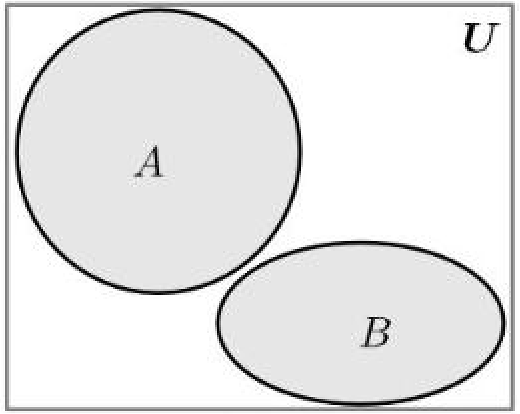
6.集合的关系与运算

（8）并集

由所有属于集合A或属于集合B的元素所组成的集合，叫做A与B的并集，记作$A\cup B$.



$A\cup B$



$A\cup B$

一、集合

6.集合的关系与运算

由n个元素所组成的集合，其子集的个数为2^n个，真子集的个数为2^n-1个，非空子集的个数为2^n-1个，非空真子集的个数为2^n-2个.

一、集合

7.德摩根定律

（1）$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$：A并B的补集等于A的补集交B的补集

$U = \{0,1,2,3,\}$　$A = \{2,3\}$　$B = \{1,3\}$

$A \cup B = \{1,2,3,\} \Rightarrow \overline{A \cup B} = \{0\}$

$\overline{A} = \{0,1\}$　$\overline{B} = \{0,2\} \Rightarrow \overline{A} \cap \overline{B} = \{0\}$

（2）$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$：A交B的补集等于A的补集并上B的补集

一、集合

【例1】在以下六种写法中，错误写法的个数有（　　）个.

（1）$\{0\}\in\{0,1\}$　（2）$\varnothing\subsetneqq\{0\}$　（3）$\{0,-1,1\}=\{-1,0,1\}$

（4）$0\in\varnothing$　（5）$Z=\{\text{全体整数}\}$　（6）$\{(0,0)\}=\{0\}$

A.2　　B.3　　C.4　　D.5　　E.6

一.集合

【例1】在以下六种写法中，错误写法的个数有（　　）个.

（1）$\{0\} \in \{0, 1\}$　（2）$\emptyset \subsetneqq \{0\}$　（3）$\{0, -1, 1\} = \{-1, 0, 1\}$

（4）$0 \in \emptyset$　（5）$Z = \{$全体整数$\}$　（6）$\{(0, 0)\} = \{0\}$

A.2　　B.3　　C.4　　D.5　　E.6

【解析】（1）是两个集合的关系，不能用“$\in$”，故写法不正确；

（2）空集是任何非空集合的真子集，故写法正确；

（3）集合中的元素具有无序性，只要集合中的所有元素相同，两个集合就相等；

（4）$\emptyset$表示空集，空集中无任何元素，所以应是$0 \notin \emptyset$，故写法不正确；

（5）集合符号“$\{\}$”本身就表示全体元素之意，故此“全体”两字不应写，故写法不正确；

（6）等式左边集合的元素是平面上的原点，而右边集合的元素是数零，故不相等.

故选C.

二、一元二次函数及其图像

函数

（1）定义

设A，B是非空的实数集，如果对于集合A中的任意一个数x，按照某种确定的对应关系f，在集合B中都有唯一确定的数y和它对应，那么就称f：$A \to B$为集合A到集合B的一个函数，记作$y = f(x), x \in A$.其中，x叫做自变量，x的取值范围A叫函数的定义域；y叫做因变量（函数值），函数值的集合叫做函数的值域.

二、一元二次函数及其图像

函数

（1）定义

区间

$A=\{x|a\le x\le b\}\Leftrightarrow[a,b]$闭区间

$A=\{x|a<x<b\}\Leftrightarrow(a,b)$开区间

$A=\{x|a<x\le b\}\Leftrightarrow(a,b]$半开半闭区间

$A=\{x|x\ge a\}\Leftrightarrow[a,+\infty)$

$A=\{x|x\le b\}\Leftrightarrow(-\infty,b]$

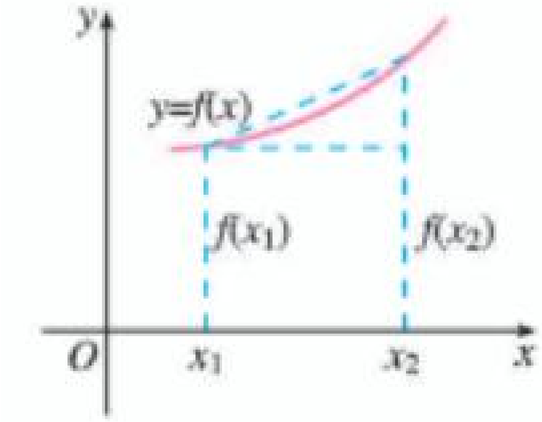
$R\Leftrightarrow(-\infty,+\infty)$

二、一元二次函数及其图像

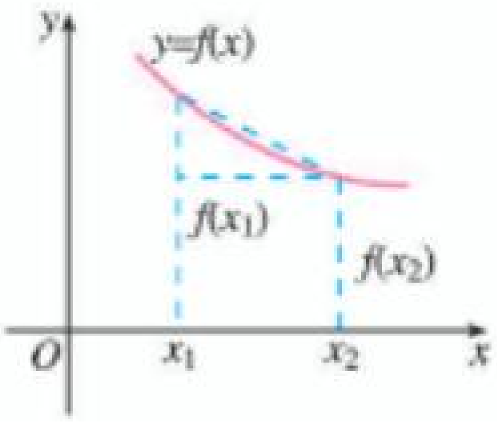
函数

（2）性质

①单调性：利用函数图像研究函数值随自变量增大而增大（减小）.



单调递增



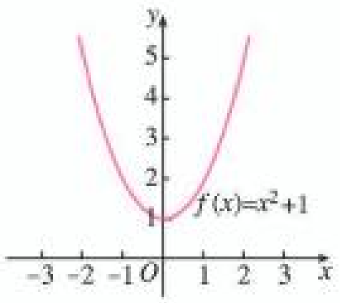
单调递减

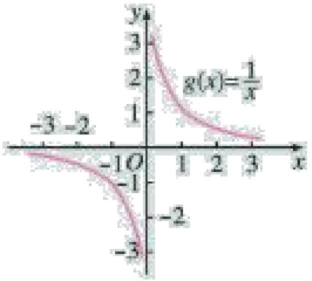
二、一元二次函数及其图像

函数

（2）性质

②奇偶性：设函数$f(x)$的定义域为D，对于任一$x \in D$,若满足$f(-x)=f(x)$，则称$f(x)$为偶函数，函数图像关于y轴对称；若满足$f(-x)=-f(x)$，则称$f(x)$为奇函数，函数图像关于原点对称.





二、一元二次函数及其图像

函数

（2）性质

③周期性

④有界性

二、一元二次函数及其图像

1.基本公式 $(a\neq 0)$

（1）一般式

$$y=ax^2+bx+c$$

（2）顶点式

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$$

（3）交点式（两根式）

$$y=a(x-x_1)(x-x_2)$$

二、一元二次函数及其图像

2.**图像和性质** $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$

定义域：R

顶点坐标（最值）：$\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$

与y轴的截距：$y=c(x=0)$　　与y轴的交点：$(0,c)$

对称轴：$x=-\frac{b}{2a}$

当$b=c=0$时，$y=ax^2$.关于y轴对称，顶点坐标$(0,0)$

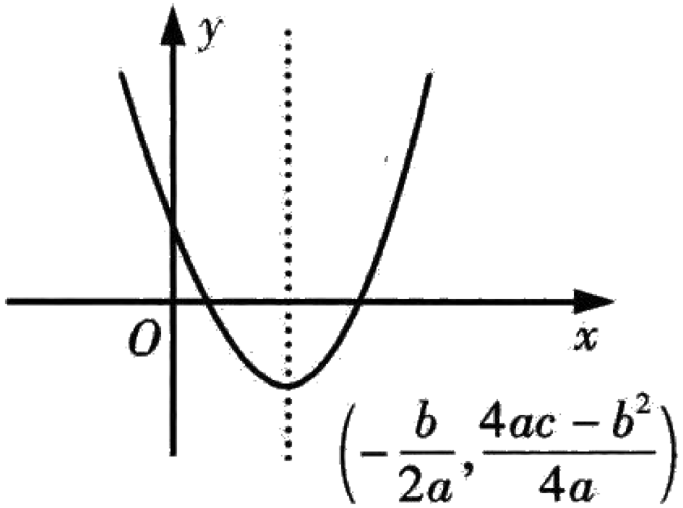
二、一元二次函数及其图像

2.**图像和性质** $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$

（1）$a>0$：开口向上

顶点处取得最小值

单调性：



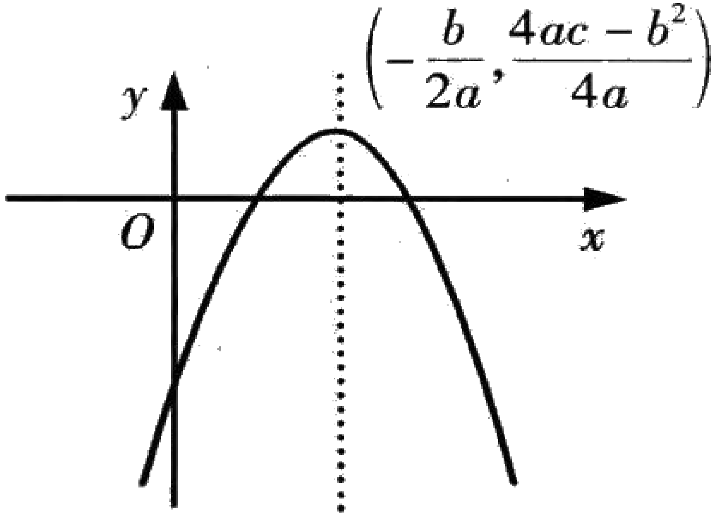
二、一元二次函数及其图像

2.**图像和性质** $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$

（2）$a<0$：开口向下

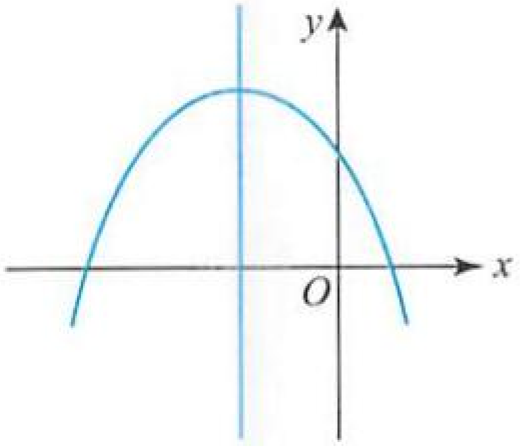
顶点处取得最大值

单调性：



二、一元二次函数及其图像

【例2】已知一元二次函数$y = ax^2 + bx + c$的图像如图所示，则a, b, c满足（　　）.



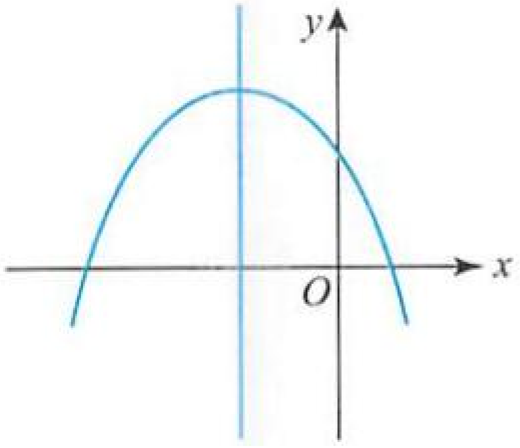
A. $a < 0, b < 0, c > 0$　　B. $a < 0, b < 0, c < 0$

C. $a < 0, b > 0, c > 0$　　D. $a > 0, b < 0, c > 0$

E. $a > 0, b > 0, c > 0$

二、一元二次函数及其图像

【例2】已知一元二次函数$y = ax^2 + bx + c$的图像如图所示，则a, b, c满足（　　）.



A. $a < 0, b < 0, c > 0$　　B. $a < 0, b < 0, c < 0$

C. $a < 0, b > 0, c > 0$　　D. $a > 0, b < 0, c > 0$

E. $a > 0, b > 0, c > 0$

【解析】首先根据开口向下，可以得到$a<0$，再根据对称轴在y轴左侧，可以得到$b<0$，再根据y轴的截距为正，可以得到$c>0$，从而选A.

二、一元二次函数及其图像

【例3】已知函数$y = x^2 - 4ax$，当$1 \leq x \leq 3$时，是单调递增的函数，则a的取值范围是（　　）.

A. $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$　　B. $(-\infty, 1]$　　C. $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$

D. $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$　　E. $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$

二、一元二次函数及其图像

【例3】已知函数$y = x^2 - 4ax$，当$1 \le x \le 3$时，是单调递增的函数，则a的取值范围是（　　）.

A. $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$　　B. $(-\infty, 1]$　　C. $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$

D. $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$　　E. $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$

【解析】

抛物线的单调性主要根据开口方向与对称轴来判断，本题抛物线开口向上，因此对称轴应该在所给区间的左侧时，图像在$1 \leqslant x \leqslant 3$是单调递增的，所以$2a \leqslant 1 \Rightarrow a \leqslant \frac{1}{2}$，选A.

二、一元二次函数及其图像

【例4】函数$y = x^2 - 2x - 5$在区间$[-1,5]$上的最大值与最小值之差为（　　）.

$A.6$　　B. 12　　C. 16　　D. 18　　E. 22

二、一元二次函数及其图像

【例4】函数$y = x^2 - 2x - 5$在区间$[-1,5]$上的最大值与最小值之差为（　　）.

$A.6$　　B. 12　　C. 16　　D. 18　　E. 22

【解析】

原函数化为 $y=x^2-2x-5=(x-1)^2-6$，

因为开口向上，当 $x=1$ 时，$y_{min}=-6$. 当 $x=5$ 时，$y_{max}=(5-1)^2-6=10$.

$y_{max}-y_{min}=10-(-6)=16$，选 C.

三、指数函数、对数函数

1.图像和性质

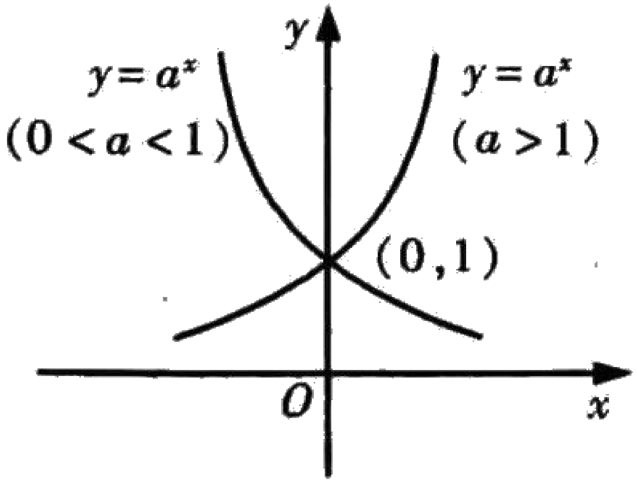
（1）指数函数 $y=a^{x}\ (a>0,a\neq 1)$

定义域：R

值域：$(0,+\infty)$

$a>1$时，底数越大，图像越靠近y轴

$0<a<1$时，底数越小，图像越靠近y轴



三、指数函数、对数函数

1.图像和性质

（2）对数函数 $y=\log_a x\ (a>0,a\neq 1)$

定义域：$(0,+\infty)$

值域：R

常用对数：$a=10\Rightarrow y=log_{10}x=lgx$

自然对数：$a=e\Rightarrow y=log_{e}x=lnx$（无理数$e=2.71828\cdots$）

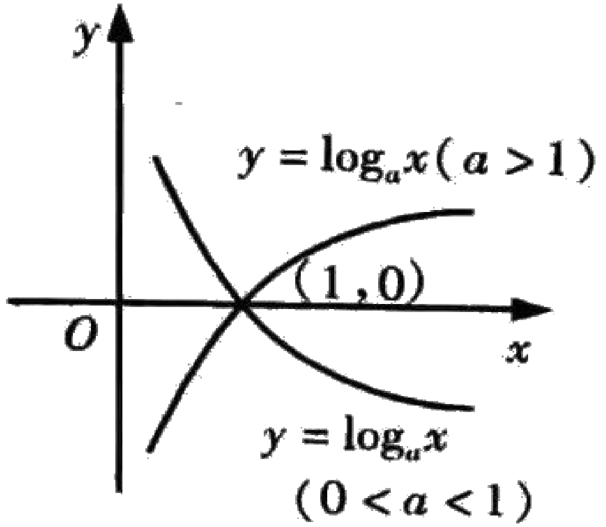
三、指数函数、对数函数

1.**图像和性质**

（2）对数函数 $y=\log_a x\ (a>0,a\neq 1)$

$a>1$时，底数越大，图像越靠近x轴

$0<a<1$时，底数越小，图像越靠近x轴



三.指数函数.对数函数

2.运算公式

（1）指数函数

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$　　$a^m \div a^n = a^{m-n}$　　$\left(a^m\right)^n = a^{mn}$　　$(ab)^n = a^n b^n$

$\left(\dfrac{b}{a}\right)^n = \dfrac{b^n}{a^n}$　　$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$　　$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$　　$a^0 = 1\ (a \neq 0)$

三、指数函数、对数函数

2.**运算公式**

（2）对数函数

同底对数：$\log_a m+\log_a n=\log_a mn$　　$\log_a m-\log_a n=\log_a \frac{m}{n}$

幂的对数：$\log_a m^n=n\log_a m$　　$\log_{a^m} b^n=\frac{n}{m}\log_a b$

换底公式：$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$，一般$c$取10或$e$.

三、指数函数、对数函数

2.**运算公式**

（2）对数函数

对数恒等式：$a^{\log_a n}=n$　　$\log_a a^m=m$

特殊：$\log_a 1=0$　　$\log_a a=1$

三.指数函数.对数函数

【例5】已知点$(2，1)$与点$(1，2)$在函数$f(x)=2^{ax+b}$上，则$f(-1)$的值为（　）

$A.1$　　B. 2　　C. 3　　D. 6　　E. 8

三、指数函数、对数函数

【例5】已知点(2，1)与点(1，2)在函数$f(x)=2^{ax+b}$上，则$f(-1)$的值为（　）

$A.1$　　B. 2　　C. 3　　D. 6　　E. 8

【解析】由题，将点代入函数中，$2^{2a+b}=1$，$2^{a+b}=2$，得到$2a+b=0$，$a+b=1$，解得$a=-1$，$b=2$，故$f(x)=2^{-x+2}$，则$f(-1)=8$，选E.

三、指数函数、对数函数

【例6】若$a = 3^{555}$，$b = 4^{444}$，$c = 5^{333}$，则a，b，c的大小关系是

（　）

A. $a > b > c$　　B. $\mathrm{b} > c > a$　　C. $b > a > c$

D. $c > \mathrm{b} > a$　　E. $a > c > b$

三、指数函数、对数函数

【例6】若$a=3^{555}$，$b=4^{444}$，$c=5^{333}$，则a，b，c的大小关系是（　）

A. $a>b>c$　　B. $b>c>a$　　C. $b>a>c$

D. $c>b>a$　　E. $a>c>b$

【解析】 $a=3^{555}=(3^5)^{111}=243^{111}$，$b=4^{444}=(4^4)^{111}=256^{111}$，$c=5^{333}=(5^3)^{111}=125^{111}$，$b>a>c$，故选 C.

三.指数函数.对数函数

【例7】若$a = \pi^{0.3}$，$b = log_{\pi}3$，$c = 3^{0}$，则a，b，c的大小关系是（　）

A. $a > b > c$　　B. $\mathrm{b} > c > a$　　C. $b > a > c$

D. $a > \mathrm{c} > b$　　E. $c > a > b$

三、指数函数、对数函数

【例7】若$a=\pi^{0.3}$，$b=log_{\pi}3$，$c=3^{0}$，则a，b，c的大小关系是（　）

A. $a>b>c$　　B. $b>c>a$　　C. $b>a>c$

D. $a>c>b$　　E. $c>a>b$

【解析】因为$a=\pi^{0.3}>\pi^{0}=1$，$b=\log_{\pi}3<\log_{\pi}\pi=1$，$c=3^{0}=1$，

从而有$a>1$，$b<1$，$c=1$，故$a>c>b$，选D.

三、指数函数、对数函数

【例8】关于x的函数$y=\left(lg\frac{x}{3}\right)\cdot\left(lg\frac{x}{12}\right)$的最小值是（　　）

A. $lg^2 2$　　B. $lg^2 4$　　C. $lg2$

D. $-lg^2 2$　　E. $-lg^2 4$

三、指数函数、对数函数

【例8】关于x的函数$y=\left(lg\frac{x}{3}\right)\cdot\left(lg\frac{x}{12}\right)$的最小值是（　）

A. $lg^2 2$　　B. $lg^2 4$　　C. $lg2$

D. $-lg^2 2$　　E. $-lg^2 4$

【解析】

$y=(\lg x-\lg 3)(\lg x-\lg 12)=\lg^2 x-(\lg 3+\lg 12)\lg x+\lg 3\cdot\lg 12$，看作二次函数，所以

当 $\lg x=\frac{\lg 3+\lg 12}{2}=\lg 6$，即 $x=6$ 时，

y 有最小值 $\frac{4\lg 3\cdot\lg 12-(\lg 3+\lg 12)^2}{4}=\frac{-\lg^2 4}{4}=-\lg^2 2$，所以选 D.

四、特殊函数

1.最值函数

（1）max表示最大值函数.

比如$max\{x, y, z\}$表示x, y, z中最大的数.

（2）min表示最小值函数.

比如$max\{x, y, z\}$表示x, y, z中最小的数.

四、特殊函数

2.绝对值函数

（1）$y = |ax + b|$

先画$y = ax + b$的图像，再将x轴下方的图像翻到x轴上方.

例：$y = |x + 1|$

四、特殊函数

2.绝对值函数

（2）$y=|ax^2+bx+c|$

先画$y=ax^2+bx+c$的图像，再将x轴下方的图像翻到x轴上方.

师大课堂
SHI DA KE TANG

四、特殊函数

2.绝对值函数

（3）$|ax+by|=c$

表示两条平行的直线$ax+by=\pm c$，且两者关于原点对称.

例：$|x+y|=1$

四、特殊函数

2.绝对值函数

（4）$|ax| + |by| = c$

当$a = b$时，表示正方形；当$a \neq b$时，表示菱形.

例：$|x| + |y| = 1$

$\Rightarrow$当$x \geq 0, y \geq 0$时，$x + y = 1$

当$x \geq 0, y < 0$时，$x - y = 1$

当$x < 0, y \geq 0$时，$-x + y = 1$

当$x < 0, y < 0$时，$-x - y = 1$

四、特殊函数

2.绝对值函数

（5）$|xy|+ab=a|x|+b|y|$

表示由$x=\pm b,y=\pm a$围成的图形，当$a=b$时，表示正方形；当$a\neq b$时，表示矩形.

$$|xy|+ab-a|x|-b|y|=0\Rightarrow|x|(|y|-a)-b(|y|-a)=0$$

$$\Rightarrow(|x|-b)(|y|-a)=0$$

$$\Rightarrow|x|=b\text{或}|y|=a$$

$$\Rightarrow x=\pm b,y=\pm a$$

四、特殊函数

3.分段函数

表示不同的取值范围对应不同的表达式.

$$y=|x|=\begin{cases} x & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -x & x<0 \end{cases}$$

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases} 1 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$$

$$D(x)=\begin{cases} 1 & x\text{为有理数} \\ 0 & x\text{为无理数} \end{cases}$$

四、特殊函数

4.复合函数

已知函数$y=f(u)$，又$u=g(x)$，则称函数$y=f[g(x)]$为函数$y=f(u)$与$u=g(x)$的复合函数.其中y称为因变量，x称为自变量，u称为中间变量.

注意：$g(x)$的值域对应$y=f(u)$的定义域.

- 第二章 代数
  - 第一节 整式及其运算
  - 第二节 分式及其运算
  - 第三节 函数
    - 一、集合
    - 二、一元二次函数及其图像
    - 三、指数函数、对数函数
    - 四、特殊函数
  - 第四节 代数方程
  - 第五节 不等式