师大课堂
SHI DA KE TANG

基础必修—管综（数学）

整式与分式

主讲老师：媛媛老师

邮箱：family7662@dingtalk.com

目录
Contents

一、 整式及其运算

基本公式

1.平方差公式

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

2.完全平方公式

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$$

师大课堂
SHI DA KE TANG

基本公式

1.已知实数a，b满足$a+b=1, a^2-b^2=9$，则$ab=$（　）

A. - 3

B. - 12

C. - 20

D.20

E.12

基本公式

1.已知实数a，b满足$a+b=1, a^2-b^2=9$，则$ab=$（ **C** ）

A. - 3

B. - 12

C. - 20

D.20

E.12

【解析】因为$a+b=1, a^2-b^2=(a+b)(a-b)=9$，可得$a-b$=9，对$a+b=1$，$a-b=9$两边平方得$\begin{cases} a^2+2ab+b^2=1 \\ a^2-2ab+b^2=81 \end{cases}$，可得$ab=-20$.故选C.

基本公式

2.已知$x^2-3x+1=0$，则$\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}-2}=$(　)

A.$\frac{1}{5}$

B.5

C.$\sqrt{5}$

D.$\sqrt{15}$

E.1

基本公式

2.已知$x^2-3x+1=0$，则$\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}-2}=$（ C ）

A.$\frac{1}{5}$

B.5

C.$\sqrt{5}$

D.$\sqrt{15}$

E.1

【解析】$x^2-3x+1=0$等式两边同时除以x，可得$x-3+\frac{1}{x}=0$ $\Rightarrow x+\frac{1}{x}=3\Rightarrow\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2\cdot x\cdot\frac{1}{x}=x^2+\frac{1}{x^2}+2\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$，则$\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}-2}=\sqrt{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4}=\sqrt{3^2-4}=\sqrt{5}$.故选C.

基本公式

3.立方和（差）公式

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

4.和与差的立方公式

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

拓展： $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2}\right)$$

$$x^4 + \frac{1}{x^4} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 2$$

基本公式

3.(2011)已知$x^2+y^2=9, xy=4$，则$\frac{x+y}{x^3+y^3+x+y}=$（　）

A.$\frac{1}{2}$　　B.$\frac{1}{5}$　　C.$\frac{1}{6}$　　D.$\frac{1}{13}$　　E.$\frac{1}{14}$

基本公式

3.(2011)已知$x^2+y^2=9, xy=4$，则$\frac{x+y}{x^3+y^3+x+y}=$（ C ）

A.$\frac{1}{2}$　　B.$\frac{1}{5}$　　C.$\frac{1}{6}$　　D.$\frac{1}{13}$　　E.$\frac{1}{14}$

【解析】$\frac{x+y}{x^3+y^3+x+y}=\frac{x+y}{(x+y)(x^2-xy+y^2)+x+y}=\frac{1}{x^2-xy+y^2+1}=\frac{1}{6}$.故选C.

基本公式

5.三个数和的平方

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$$

$$a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2]$$

基本公式

4.(2008)若ΔABC的三边a, b, c满足$a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc$，则ΔABC为（　）

A.等腰三角形

B.直角三角形

C.等边三角形

D.等腰直角三角形

E.以上均不对

基本公式

4.(2008)若ΔABC的三边a,b,c满足$a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc$，则ΔABC为（ C ）

A.等腰三角形

B.直角三角形

C.等边三角形

D.等腰直角三角形

E.以上均不对

【解析】$a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc$，那么$a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2]=0$，所以$a=b=c$，故选C.

整式的除法

1.因式定理（整除）

$f(x)$含有$(ax-b)$因式$\Leftrightarrow f(x)$能被$(ax-b)$整除$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{f(\frac{b}{a})=0}$

例：$f(x)=$（$3x-1$）$g(x)$，则$f(\frac{1}{3})=0$

师大课堂
SHI DA KE TANG

整式的除法

2.余式定理（非整除）

$f(x)$除以$(ax-b)$的余式为$\boldsymbol{f(\frac{b}{a})}$.　（当除式为一次表达式时，余式就为常数）

例：$f(x)=(3x-1)g(x)+1$，则$f(\frac{1}{3})=1$

整式的除法

5.（2007）若多项式$f(x)=x^3+a^2x^2+x-3a$能被$x-1$整除，则实数$a=$(　)

A.0

B.1

C.0或1

D.2或-1

E.2或1

整式的除法

5.（2007）若多项式$f(x)=x^3+a^2x^2+x-3a$能被$x-1$整除，则实数$a=$(E)

A.0

B.1

C.0或1

D.2或-1

E.2或1

【解析】根据因式定理，$f(x)$能被$x-1$整除等价于$f(1)=0$，将$x=1$代入原多项式可得$f(1)=1^3+a^2+1-3a=0$，解得$a=2$或$a=1$.故选E.

师大课堂
SHI DA KE TANG

整式的除法

6.已知多项式：$f(x) = 3x^3 - 2x^2 + kx - 7$除以$x + 2$的余数为-3，则$k$的值为(   )

A.-18

B.18

C.-6

D.6

E.5

整式的除法

6.已知多项式：$f(x)=3x^3-2x^2+kx-7$除以$x+2$的余数为-3，则k的值为(A)

A.-18

B.18

C.-6

D.6

E.5

【解析】根据余式定理，$f(x)$除以$x+2$的余数为-3，令$x+2=0$，$x=-2$，$f(x)=f(-2)=3\times(-2)^3-2\times(-2)^2+k\times(-2)-7=-3$，解得$k=-18$.故选A.

二、 分式及其运算

裂项运算

1. $$\frac{1}{n(n+k)}=\frac{1}{k}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}\right)$$

裂项运算

7.已知$|ab-2|$与$|a-1|$互为相反数，那么代数式$\frac{1}{ab}+\frac{1}{(a+1)(b+1)}+\frac{1}{(a+2)(b+2)}+\cdots+\frac{1}{(a+2016)(b+2016)}=$（ ）

A.$\frac{2013}{2014}$　B.$\frac{2014}{2015}$　C.$\frac{2015}{2016}$　D.$\frac{2016}{2017}$　E.$\frac{2017}{2018}$

裂项运算

7.已知$|ab-2|$与$|a-1|$互为相反数，那么代数式$\frac{1}{ab}+\frac{1}{(a+1)(b+1)}+\frac{1}{(a+2)(b+2)}+\cdots+\frac{1}{(a+2016)(b+2016)}=$（ **E** ）

A.$\frac{2013}{2014}$　　B.$\frac{2014}{2015}$　　C.$\frac{2015}{2016}$　　D.$\frac{2016}{2017}$　　E.$\frac{2017}{2018}$

【解析】由于$|ab-2|$与$|a-1|$互为相反数，所以ab=2，a=1，解得$b=2$，原式$=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{(2017)(2018)}=1-\frac{1}{2018}=\frac{2017}{2018}$，选E.

裂项运算

2.

$$\frac{1}{\sqrt{n+k}+\sqrt{n}}=\frac{1}{k}\left(\sqrt{n+k}-\sqrt{n}\right)$$ （分母有理化，再消项）

裂项运算

8. $\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}=(\quad)$

A.9　　B.10　　C.11　　D.$3\sqrt{11}-1$　　E.$3\sqrt{11}$

裂项运算

8. $\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}=$ (A)

A.9　　B.10　　C.11　　D.$3\sqrt{11}-1$　　E.$3\sqrt{11}$

【解析】因为$\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$.
所以原式=$\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{100}-\sqrt{99}=-1+\sqrt{100}=-1+10=9$，故选A.

三、 集合

集合基本概念

1.元素与集合的关系：

若a是集合A中的元素，记作$\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}$,表示a**属于**集合A 。

若a不是集合A中的元素，记作$\boldsymbol{a} \notin \boldsymbol{A}$ ，表示a**不属于**集合A 。

2.空集：不含有任何元素的集合叫做**空集**，记作$\emptyset$。

自然数集	正整数集	整数集	实数集
N(0∈N)	N^+或N_+	Z	R

集合的表示方法

1.列举法：把集合中的元素一一列举出来并写在大括号内。例如：小于4的自然数的集合为$\{0，1，2，3\}$.

2.描述法：把集合中元素的共同特性描述出来写在大括号内。例如：不等式$x-3>1$的解集可表示为$\{x|x>4\}$.

集合的表示方法

3.区间表示法

开区间：$a < x < b \Rightarrow (a, b)$

闭区间：$a \leq x \leq b \Rightarrow [a, b]$

半开半闭区间：$a < x \leq b \Rightarrow (a, b]$

$x < b \Rightarrow (-\infty, b)$，$-\infty$（负无穷大）　$x \geq a \Rightarrow [a, +\infty)$，$+\infty$（正无穷大）

师大课堂 SHI DA KE TANG

集合与集合的关系

1.子集：如果集合A的任何一个元素都是集合B的元素，则称A是B的**子集**，记作$\boldsymbol{A \subseteq B}$，读作A包含于B。

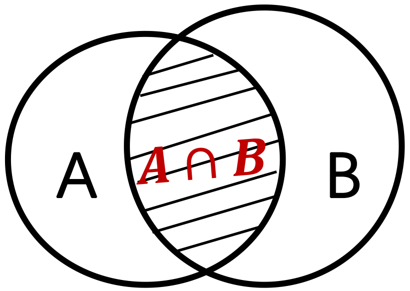
对于任一集合A，规定$\emptyset \subseteq \boldsymbol{A}$，$A \subseteq A$.

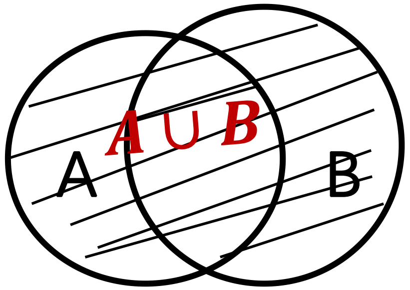
2.真子集：$\boldsymbol{A \subseteq B}$且$\boldsymbol{A \neq B}$记作$\boldsymbol{A \subsetneq B}$。读作A真包含于B。

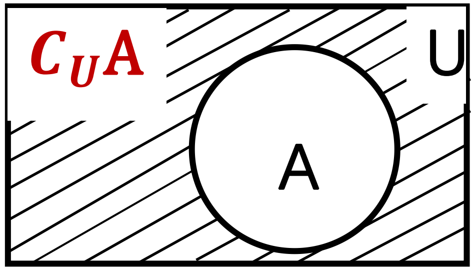
一个集合内有n个元素，则其子集数量为2^n，真子集个数为2^n-1，非空子集的个数为2^n-1个，非空真子集的个数为2^n-2个.

集合与集合的关系

交集	由所有属于集合A且属于集合B的元素所组成的集合，叫做A与B的交集，记作$\boldsymbol{A\cap B}$.
并集	由所有属于集合A或属于集合B的元素所组成的集合，叫做A与B的并集，记作$\boldsymbol{A\cup B}$.
补集	对于集合A，若集合$A\subseteq U$，那么由U中所有不属于A的元素组成的集合，叫做U中子集A的补集（或余集），记作$\boldsymbol{C_U A}$.







集合符号总结

1. $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}$,a属于集合A ，$\boldsymbol{a} \notin \boldsymbol{A}$，$a$不属于集合$A$

2. ∅空集，N自然数集，N^+正整数集，Z整数集，R实数集

3. 子集：$\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B}$，$A$包含于B，有$2^n$个

4. 真子集：$\boldsymbol{A} \subsetneqq \boldsymbol{B}$，$A$真包含于B，有$2^n-1$个

5. 交集：$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$，A交B

6. 并集：$\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$，A并B

7. 补集：$\boldsymbol{C_U A}$，A在U中的补集

师大课堂
SHI DA KE TANG

集合

9.若集合$A=\{1，2，a^2-3a-1\}$，$B=\{1，3\}$，且B⊆A，则a=(　)

A. - 4或1

B. - 1或4

C. - 1

D. - 4

E.1

集合

9.若集合$A=\{1,2,a^2-3a-1\}$，$B=\{1,3\}$，且B⊆A，则a=(**B**)

A. - 4或1

B. - 1或4

C. - 1

D. - 4

E.1

【解析】由题意可知，B⊆A，那么$a^2-3a-1=3$，解得：$a=4$或$a=-1$. 故选B.

师大课堂
SHI DA KE TANG

集合

10.若集合$A=\{(x,y)|y=x\}$，$B=\left\{(x,y)\middle|\frac{y}{x}=1\right\}$，则$A$与$B$的关系是(　)

A.$B\subsetneq A$

B.$A\subsetneq B$

C.$A\in B$

D.$A\notin B$

E.$A=B$

集合

10.若集合$A=\{(x,y)|y=x\}$，$B=\left\{(x,y)\middle|\frac{y}{x}=1\right\}$，则$A$与$B$的关系是(**A**)

A.$B\subsetneqq A$

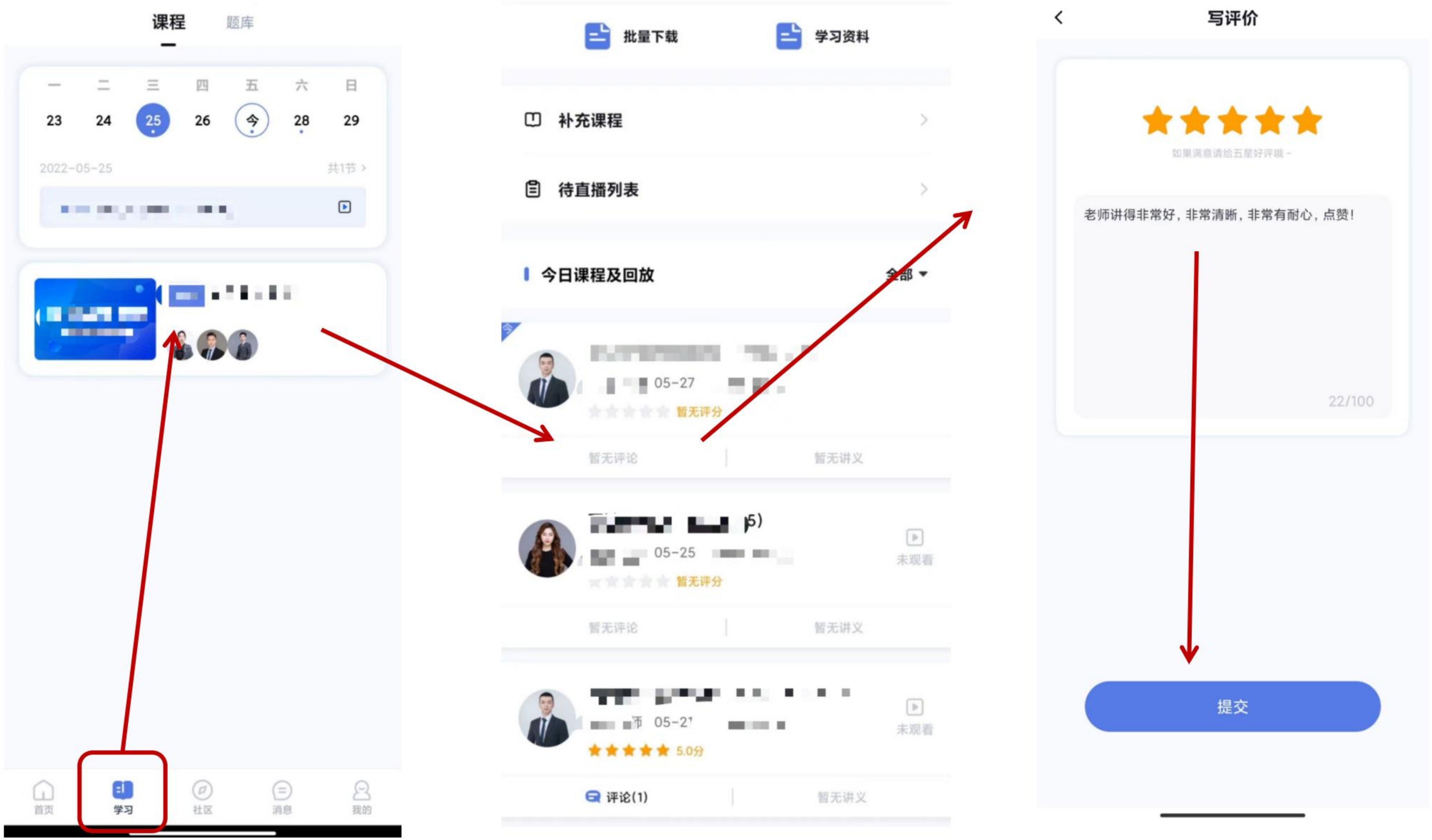
B.$A\subsetneqq B$

C.$A\in B$

D.$A\notin B$

E.$A=B$

【解析】由题意可知，因为集合A中的点满足：$y=x$，集合B中的点满足：$y=x$且$x\neq 0$，所以B是A的真子集.故选A.



学习→点击课程→点击评价(5星好评)→提交评价

感谢您的观看

主讲老师： 媛媛老师

邮箱：family7662@dingtalk.com