第四节 代数方程

第二章　第四节代数方程

年度	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023
考频	2	3	1	1	1	0	0	1	4

第二章　第四节代数方程

师大课堂 SHI DA KE TANG

一、一元一次方程、二元一次方程组

二、一元二次方程

三、特殊方程

一、一元一次方程、二元一次方程组

师大课堂 SHI DA KE TANG

1.一元一次方程

只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是1，并且含未知数项的系数不是零的整式方程称为一元一次方程.

一般形式为 $ax=b(a\neq0)$，方程的解为 $x=\frac{b}{a}$.

一、一元一次方程、二元一次方程组

师大课堂 SHI DA KE TANG

1.一元一次方程

【例1】若$(m-2)x^{|m^2-3|}+5=0$是关于x的一元一次方程，则m有（　　）种取值情况.

A.0　　B.1　　C.2　　D.3　　E.4

一、一元一次方程、二元一次方程组

1.一元一次方程

【例1】若$(m-2)x^{|m^2-3|}+5=0$是关于x的一元一次方程，则m有（　　）种取值情况.

A.0　　B.1　　C.2　　D.3　　E.4

【解析】

当$|m^2-3|=1$时，解得$m^2=4$或$m^2=2 \Rightarrow m=\pm 2$或$\pm\sqrt{2}$，但当$m=2$时，不是方程，故$m$有3个取值情况．选D.

一、一元一次方程、二元一次方程组

师大课堂 SHI DA KE TANG

1.一元一次方程

解法：①去分母②去括号③移项④合并同类项⑤系数化为1

例：解方程$\frac{x+2}{5}=\frac{x}{4}$.

一、一元一次方程、二元一次方程组

2.二元一次方程组 $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$

（1）解的情况

①如果 $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$, 则方程组有唯一解$(x,y)$.

②如果 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$，则方程组有无穷多解.

③如果 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$，则方程组无解.

一、一元一次方程、二元一次方程组

2.二元一次方程组

（2）二元一次方程组的解法

①加减消元法 $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 & ① \\ a_2x+b_2y=c_2 & ② \end{cases}$

由式①×b_2 - 式②×b_1得：$(a_1b_2-a_2b_1)x=b_2c_1-b_1c_2$

解出x，再将x的值代入式①或式②中，求出y的值，从而得到方程组的解.

一、一元一次方程、二元一次方程组

2.二元一次方程组

（2）二元一次方程组的解法

②代入消元法 $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 & ① \\ a_2x+b_2y=c_2 & ② \end{cases}$

由式①得：$y=\frac{c_1-a_1x}{b_1}(b_1\neq 0)$.

将其代入式②，消去y，得到关于x的一元一次方程，解之可得x.

再将x的值代入式①或式②中，求出y的值，从而得到方程组的解.

一、一元一次方程、二元一次方程组

2.二元一次方程组

例：解方程组$\begin{cases} x+2y=4 \\ 3x+2y=8 \end{cases}$

一、一元一次方程、二元一次方程组

2.二元一次方程组

【例2】若关于x, y的二元一次方程组$\begin{cases} x+5y=-3k \\ x-y=9k \end{cases}$的解也是二元一次方程$2x+3y=6$的解，则$k$的值为（　）.

A.$-\frac{3}{4}$　　B.$\frac{3}{4}$　　C.$\frac{4}{3}$　　D.$-\frac{4}{3}$　　E.1

一、一元一次方程、二元一次方程组

2.二元一次方程组

【例2】若关于x,y的二元一次方程组$\begin{cases}x+5y=-3k\\x-y=9k\end{cases}$的解也是二元一次方程$2x+3y=6$的解，则$k$的值为（　　）.

A.$-\frac{3}{4}$　　B.$\frac{3}{4}$　　C.$\frac{4}{3}$　　D.$-\frac{4}{3}$　　E.1

【解析】由方程组得 $2x=14k$，$y=-2k$．代入 $2x+3y=6$，得 $14k-6k=6$，解得 $k=\frac{3}{4}$．故选 B.

二、一元二次方程

1.一元二次方程

只含一个未知数，且未知数的最高次数是2，且系数不为0的方程，

称为一元二次方程.其一般形式为$ax^2+bx+c=0(a\neq0)$

二、一元二次方程

2.一元二次方程根的情况

判别式Δ= b^2-4ac，此方程的解将依Δ值的不同分为如下三种情况：

（1）当Δ > 0时，方程有两个不等实根x_1，$x_2=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

（2）当Δ = 0时，方程有两个相等实根$x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$.

（3）当Δ < 0时，方程无实根.

二、一元二次方程

3.一元二次方程的解法

（1）直接开平方法

对形如$(x+a)^2=b$（b≥0）的方程两边直接开平方而转化为两个一元一次方程的方法.

二、一元二次方程

3.一元二次方程的解法

（2）配方法

步骤：①转化②系数化1③移项④配方⑤变形⑥开方⑦求解

例：解方程$x(x+4)-2=0$.

二、一元二次方程

3.一元二次方程的解法

（3）公式法

步骤：①把方程转化为一般形式.

②确定a,b,c的值.

③当$b^2-4ac\geq 0$时代入求根公式.

例：解方程$x^2+2x+3=0$.

二、一元二次方程

3.一元二次方程的解法

（4）因式分解法

若$ab = 0$，则$a = 0$或$b = 0$.

步骤：①将方程右边化为0.

②将方程左边分解为两个一次因式的乘积.

③令每个因式等于0，得到两个一元一次方程乘积的形式，解这两个一元一次方程，它们的解就是原一元二次方程的解.

二、一元二次方程

3.一元二次方程的解法

（4）因式分解法

例：解方程$3x(x+2)=5(x+2)$.

二、一元二次方程

3.一元二次方程的解法

【例3】关于x的二次方程$a^2x^2-(3a^2-8a)x+2a^2-13a+15=0$至少有一个整数根，则满足要求的正整数$a$有（　　）个取值.

A.6　　B.1　　C.3　　D.2　　E.4

二、一元二次方程

3.一元二次方程的解法

【例3】关于x的二次方程$a^2x^2-(3a^2-8a)x+2a^2-13a+15=0$至少有一个整数根，则满足要求的正整数$a$有（　　）个取值.

A.6　　B.1　　C.3　　D.2　　E.4

【解析】先对方程进行十字相乘分解：

$a^2x^2-(3a^2-8a)x+2a^2-13a+15=[ax-(2a-3)][ax-(a-5)]=0$，

从而得到方程两根 $x_1=\frac{2a-3}{a}=2-\frac{3}{a}$，$x_2=\frac{a-5}{a}=1-\frac{5}{a}$，

显然 $a=1$，3，5 时，方程至少有一个整数根，选 C.

二、一元二次方程

4.根与系数的关系（韦达定理）

x_1，x_2是方程$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$的两个根，则

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$$

$$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$$

二、一元二次方程

4.根与系数的关系（韦达定理）

【例4】解某个一元二次方程，甲看错了常数项，解得两根为8和2，乙看错了一次项，解得两根为-9和-1，则正确解为（　　）.

A.-8和-2　　B.9和1　　C.9和-1

D.-3和3　　E.-9和-1

二、一元二次方程

师大课堂 SHI DA KE TANG

4.根与系数的关系（韦达定理）

【例4】解某个一元二次方程，甲看错了常数项，解得两根为8和2，乙看错了一次项，解得两根为−9和−1，则正确解为（　）.

A.−8和−2　　B.9和1　　C.9和−1

D.−3和3　　E.−9和−1

【解析】由于甲把常数项看错了，不影响两根之和：$x_1+x_2=8+2=10$. 由于乙把一次项系数看错了，不影响两根之积：$x_1x_2=(-9)\times(-1)=9$. 所以得到正确方程为 $x^2-10x+9=0$，两根为 1 和 9，选 B.

二、一元二次方程

4.根与系数的关系（韦达定理）

【例5】若方程$x^2+px+37=0$恰有两个正整数解x_1和x_2，则$\frac{(x_1+1)(x_2+1)}{p}$为（　）.

A.-2　　B.-1　　C.$-\frac{1}{2}$　　D.1　　E.2

二、一元二次方程

4.根与系数的关系（韦达定理）

【例5】若方程$x^2+px+37=0$恰有两个正整数解x_1和x_2，则$\frac{(x_1+1)(x_2+1)}{p}$为（　　）.

A.-2　　B.-1　　C.$-\frac{1}{2}$　　D.1　　E.2

【解析】根据韦达定理，$x_1x_2=37$，又有x_1和x_2为两个正整数解，且37为质数，故一根为1，另一根为37. $p=-(x_1+x_2)=-38$，故$\frac{(x_1+1)(x_2+1)}{p}=\frac{2\times38}{-38}=-2$，选A.

二、一元二次方程

5.韦达定理的扩展应用

【利用韦达定理可以求出关于两个根的对称轮换式的数值】

（1）$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=-\frac{b}{c}$

（2）$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{(x_1x_2)^2}=\frac{b^2-2ac}{c^2}$

（3）$|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2}=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-\frac{4c}{a}}=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|}$

二、一元二次方程

5.韦达定理的扩展应用

【利用韦达定理可以求出关于两个根的对称轮换式的数值】

（4）$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\dfrac{b^2-2ac}{a^2}$

（5）$x_1^2-x_2^2=(x_1+x_2)(x_1-x_2)$

（6）$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)=(x_1+x_2)[(x_1+x_2)^2-3x_1x_2]$

二、一元二次方程

5.韦达定理的扩展应用

【例6】α与β是方程$x^2-2ax+a^2+2a+1=0$的两个实根，则$\alpha^2+\beta^2$的最小值是（　）.

A.-4　　B.-2　　C.-1　　D.$\frac{1}{2}$　　E.2

二、一元二次方程

5.韦达定理的扩展应用

【例6】α与β是方程$x^2-2ax+a^2+2a+1=0$的两个实根，则$\alpha^2+\beta^2$的最小值是（　）.

A.-4　　B.-2　　C.-1　　D.$\frac{1}{2}$　　E.2

【解析】$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=2(a^2-2a-1)$，而判别式$\Delta=4a^2-4(a^2+2a+1)=4(-2a-1)\geqslant 0\Rightarrow a\leqslant -\frac{1}{2}$，所以当$a=-\frac{1}{2}$时，其最小值为$\frac{1}{2}$，选D.

容易忽略a的取值范围，对于方程不要忘记验证判别式.本题实际上是在某一区间上二次函数的最值问题.

三、特殊方程

1.绝对值方程（去绝对值符号）

（1）分段讨论法

根据绝对值的正负情况来分类讨论，适用于当绝对值比较简单.

（2）平方法

采用平方来去掉绝对值，利用公式来分析求解.

（3）图像法

图像法比较直观，通过常见绝对值图像来分析.

三、特殊方程

1.绝对值方程

【例7】已知关于x的方程$|5x-4|+a=0$无解，$|4x-3|+b=0$有两个解，$|3x-2|+c=0$只有一个解，则化简$|a-c|+|c-b|-|a-b|$的结果是（　）.

A.$2a$　　B.$2b$　　C.$2c$　　D.0　　E.$2a+b$

三、特殊方程

师大课堂 SHI DA KE TANG

1.绝对值方程

【例7】已知关于x的方程$|5x-4|+a=0$无解，$|4x-3|+b=0$有两个解，$|3x-2|+c=0$只有一个解，则化简$|a-c|+|c-b|-|a-b|$的结果是（　）.

A.$2a$　　B.$2b$　　C.$2c$　　D.0　　E.$2a+b$

【解析】根据关于x的方程$|5x-4|+a=0$无解，$|4x-3|+b=0$有两个解，$|3x-2|+c=0$只有一个解，可判断出a，b，c的取值范围，进而求解.

由$|5x-4|+a=0$无解，可得出：$a>0$，

由$|4x-3|+b=0$有两个解，可得出：$b<0$，

由$|3x-2|+c=0$只有一个解，可得出：$c=0$，

故$|a-c|+|c-b|-|a-b|$可化简为：$|a|+|b|-|a-b|=a-b-a+b=0$. 故选D.

三、特殊方程

1.绝对值方程

【例8】方程$|3x|+|x-2|=4$的解的个数是（　）.

A.0　　B.1　　C.2　　D.3　　E.4

三、特殊方程

1.绝对值方程

【例8】方程$|3x|+|x-2|=4$的解的个数是（　　）.

A.0　　B.1　　C.2　　D.3　　E.4

【解析】根据 x 的取值范围去绝对值，所以需要分类讨论：①当 $x\geqslant 2$ 时；②当 $0<x<2$ 时；③当 $x\leqslant 0$ 时，根据 x 的三种取值范围来解原方程.

①当 $x\geqslant 2$ 时，由原方程，得 $3x+x-2=4$，即 $4x-2=4$，解得 $x=\frac{3}{2}$（舍去）；

②当 $0<x<2$ 时，由原方程，得 $3x-x+2=4$，解得 $x=1$；

③当 $x\leqslant 0$ 时，由原方程，得 $-3x-x+2=4$，解得 $x=-\frac{1}{2}$.

综上所述，原方程有 2 个解. 故选 C.

三、特殊方程

2.分式方程

步骤：

（1）方程两边都乘以最简公分母，将分式方程转化为整式方程

（2）验根：求出根以后，要验证原分式的分母是否有意义.（可能会有增根）

三.特殊方程

2.分式方程

【例9】已知关于x的方程$\frac{1}{x^2-x}+\frac{k-5}{x^2+x}=\frac{k-1}{x^2-1}$无解，那么$k=$（　　）.

A.3或6　　B.6或9　　C.3或9

D.3、6或9　　E.1或3

三、特殊方程

2.分式方程

【例9】已知关于x的方程$\frac{1}{x^2-x}+\frac{k-5}{x^2+x}=\frac{k-1}{x^2-1}$无解，那么$k=$（　　）.

A.3或6　　B.6或9　　C.3或9

D.3、6或9　　E.1或3

【解析】两边同乘以$x(x+1)(x-1)$，得$(x+1)+(k-5)(x-1)=x(k-1)$，解得$x=\frac{6-k}{3}$. 原方程的增根可能是0、1、-1，当$x=0$时，$\frac{6-k}{3}=0$，则$k=6$；当$x=1$时，$\frac{6-k}{3}=1$，则$k=3$；当$x=-1$时，$\frac{6-k}{3}=-1$，则$k=9$. 所以当$k=3$，6，9时方程无解，选D.

三、特殊方程

师大课堂 SHI DA KE TANG

3.无理方程

方程两边同时乘方，使之转化为有理方程，从而求出方程的解，求完以后要验证根号是否有意义.

$$\sqrt{2x-1}+\sqrt{1-2x}=0$$

三、特殊方程

4.指数或对数方程

先经过换元，转化成常见的一元二次方程进行讨论分析，在换元的过程中，一定要注意换元前后变量的取值范围的变化.

注意：在解对数方程的时候，还要验证定义域.

三、特殊方程

4.指数或对数方程

（1）指数方程的解法

①同底去底法

$$a^{f(x)}=a^{g(x)}\Rightarrow f(x)=g(x)$$

②化成对数式

$$a^{f(x)}=b\Rightarrow f(x)=log_a b$$

③取同底对数

$$a^{f(x)}=b^{g(x)}\Leftrightarrow lga^{f(x)}=lgb^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)lga=g(x)lgb$$

三、特殊方程

4.指数或对数方程

（2）对数方程的解法

①同底去底法

$$log_a f(x) = log_a g(x) \Rightarrow f(x) = g(x)$$

②化成指数式

$$a^{f(x)} = b \Rightarrow f(x) = log_a b$$

③取同底指数

$$log_a f(x) = b \Rightarrow f(x) = a^b$$

三、特殊方程

4.指数或对数方程

【例10】关于x的方程$9^x-4\times 3^x+3=0$所有实根之和为（　　）.

A.1　　B.2　　C.3　　D.4　　E.6

三、特殊方程

4.指数或对数方程

【例10】关于x的方程$9^x-4\times 3^x+3=0$所有实根之和为（　　）.

A.1　　B.2　　C.3　　D.4　　E.6

【解析】由$(3^x)^2-4\times 3^x+3=0\Rightarrow(3^x-1)(3^x-3)=0\Rightarrow 3^x=1$或$3\Rightarrow x=0$或1．故选A.

三、特殊方程

4.指数或对数方程

【例11】关于x的方程$2log_a^2x-7log_ax+3=0$有一个根是2，且a为整数，则另一个根为（　）.

A.16　　B.32　　C.40　　D.44　　E.64

三、特殊方程

4.指数或对数方程

【例11】关于x的方程$2log_a^2x-7log_ax+3=0$有一个根是2，且a为整数，则另一个根为（　）.

A.16　　B.32　　C.40　　D.44　　E.64

【解析】根据十字相乘因式分解得到 $(\log_a x-3)(2\log_a x-1)=0$，

由于方程有一个根为 2，故 $(\log_a 2-3)(2\log_a 2-1)=0$，

得到$\log_a 2=3$ 或$\log_a 2=\frac{1}{2}$，又 a 为整数，故 $a=4$，

则方程为 $(\log_4 x-3)(2\log_4 x-1)=0$，故另一根为 64. 选 E.

第二章 代数

- 第一节 整式及其运算
- 第二节 分式及其运算
- 第三节 函数
- 第四节 代数方程
  - 一、一元一次方程、二元一次方程组
  - 二、一元二次方程
  - 三、特殊方程
- 第五节 不等式