全国硕士研究生招生考试

管综数学

主讲:媛媛老师

邮箱:family7662@dingtalk.com

第六章 应用题

一、比例问题

（一）比例问题

1.部分量和总量的关系

总量＝部分量÷部分量对应比例　　部分量＝总量×部分量对应比例

2.“比”和“是”的关系

（1）A比B大（小）$p\%\Leftrightarrow A=B\cdot(1\pm p\%)$

（2）A是B的$p\%\Leftrightarrow A=B\cdot p\%$

一.比例问题

（一）比例问题

3.题型

（1）简单比例应用题

简单的比例计算问题，可以通过看见比例后设的方法进行求解.

（2）比例统一应用题

应用题中出现多个比例时需要进行统一，通过求公共量的最小公倍数将比例统一后，再进行求解.

（3）比例调整应用题：①内部调整　②外部调整

一、比例问题

【例1】甲仓存粮30吨，乙仓存粮40吨，要再往甲仓和乙仓共运去粮食80吨，使甲仓粮食是乙仓粮食数量的1.5倍，应运往乙仓的粮食是(　).

(A)15吨　　(B)20吨　　(C)25吨　　(D)30吨　　(E)35吨

一.比例问题

【例1】甲仓存粮30吨，乙仓存粮40吨，要再往甲仓和乙仓共运去粮食80吨，使甲仓粮食是乙仓粮食数量的1.5倍，应运往乙仓的粮食是(　).

(A)15吨　(B)20吨　(C)25吨　(D)30吨　(E)35吨

【解析】设运往乙仓的粮食为x吨，运往甲仓的粮食为(80-x)吨，由题可得：

(30+80-x)/(40+x)=1.5，解得x=20，选B.

【技巧】最后总粮食为30+40+80=150(吨)，由于甲乙之比为3:2，故最后乙仓的粮食占五分之二，为60吨，故运往乙仓的粮食为20吨.

一、比例问题

【例2】若某人以1000元购买A,B,C三种商品，且所用金额之比为1:1.5:2.5,则他购买A,B,C三种商品的金额(单位：元)依次是(   ).

(A)100,300,600　　(B)150,225,400　　(C)150,300,550

(D)200,300,500　　(E)200,250,550

一、比例问题

【例2】若某人以1000元购买A,B,C三种商品，且所用金额之比为1:1.5:2.5,则他购买A,B,C三种商品的金额(单位：元)依次是(　　).

(A)100,300,600　　(B)150,225,400　　(C)150,300,550

(D)200,300,500　　(E)200,250,550

【解析】由1+1.5+2.5=5得到每种商品占的比例，购买A的金额为$1000\times\frac{1}{5}$==200，

购买B的金额为$1000\times\frac{1.5}{5}$ =300，购买C的金额为$1000\times\frac{2.5}{5}$=500. 选D.

【技巧】根据1:1.5:2.5，验证选项即可，只有D满足.

一、比例问题

【例3】甲、乙、丙三名工人加工一批零件，甲工人完成了总件数的34%,乙、丙两工人完成的件数之比是6:5,已知丙工人完成了45件，则甲工人完成了(　).

(A)48件　　(B)51件　　(C)60件　　(D)63件　　(E)132件

一、比例问题

师大课堂 SHI DA KE TANG

【例3】甲、乙、丙三名工人加工一批零件，甲工人完成了总件数的34%,乙、丙两工人完成的件数之比是6:5,已知丙工人完成了45件，则甲工人完成了(　).

(A)48件　　(B)51件　　(C)60件　　(D)63件　　(E)132件

【解析】由于甲工人完成了总件数的34%, 乙、丙两工人完成了总件数的66%, 又由于乙、丙的件数之比是6:5, 故丙完成了30%, 又已知丙工人完成了45件，故总数为150件，则甲完成了150×34%=51（件）. 选B.

一、比例问题

【例4】某工厂人员由技术人员、行政人员和工人组成，共有男职工420人，是女职工的$1\frac{1}{3}$倍，其中行政人员占全体职工的20%,技术人员比工人少$\frac{1}{25}$,那么该工厂有工人(　).

(A)200人　　(B)250人　　(C)300人　　(D)350人　　(E)400人

一、比例问题

【例4】某工厂人员由技术人员、行政人员和工人组成，共有男职工420人，是女职工的$1\frac{1}{3}$倍，其中行政人员占全体职工的20%,技术人员比工人少$\frac{1}{25}$,那么该工厂有工人(　).

(A)200人　　(B)250人　　(C)300人　　(D)350人　　(E)400人

【解析】女职工：$420\div\frac{4}{3}$=315（人），技术：工人=24:25.全工厂总人数为315+420=735（人），故工人有(315+420)×(1−20%)×$\frac{25}{49}$=300（人），从而选C.

一、比例问题

（二）变化率

1.变化率

变化率 = 变化量÷变前量× 100%=$\frac{|现值-原值|}{原值}$ × 100%

⇒现值 = 原值×（1 + 变化率）　原值 = 现值÷（1 + 变化率）

包含增长率和下降率

✓ 增长率$p\%$，原值A，则现值$A(1+p\%)$

✓ 下降率$p\%$，原值A，则现值$A(1-p\%)$

一、比例问题

（二）变化率

2.增长率

（1）概念

✓ 作为对比参照的时期称为基期；描述基期的具体数值称为基期量

✓ 相对于基期的称为现期；描述现期的具体数值称为现期量.

✓ 增长量 = 现期量 - 基期量 = 基期量×增长率 = $\frac{\text{现期量}}{1+\text{增长率}}$×增长率

✓ 增长率 = （现期量 - 基期量）÷基期量 = 增长量÷基期量

= 增长量÷（现期量 - 增长量）

一.比例问题

（二）变化率

2.增长率

（2）增减性（$a, b, m > 0$）

✓ 当$\frac{a}{b} > 1$时，$\frac{a+m}{b+m} < \frac{a}{b}$

✓ 当$\frac{a}{b} < 1$时，$\frac{a+m}{b+m} > \frac{a}{b}$

一.比例问题

（二）变化率

2.增长率

（3）分类

✓ 连续增长问题：某变量在a值基础上连续增长了n次，其各次增长率分别为p_1，p_2，…，p_n，则其终值$b=a(1+p_1)(1+p_2)\ldots(1+p_n)$.

✓ 平均增长率：若初值为a，末值为b，平均增长率为q，增长次数为n，则其末值$b=a(1+q)^n$或$q=\sqrt[n]{\frac{b}{a}}-1$

一、比例问题

【例5】商店本月的计划销售额为20万元，由于开展了促销活动，上半月完成了计划的60%,若全月要超额完成计划的25%,则下半月应完成销售额(　　).

(A)12万元　　(B)13万元　　(C)14万元　　(D)15万元　　(E)16万元

一、比例问题

【例5】商店本月的计划销售额为20万元，由于开展了促销活动，上半月完成了计划的60%,若全月要超额完成计划的25%,则下半月应完成销售额(　　).

(A)12万元　　(B)13万元　　(C)14万元　　(D)15万元　　(E)16万元

【解析】先求出全月的总额，再利用等式下半月=全月-上半月求解. 20×(1+25%)−20×60%=13. 选B.

一.比例问题

【例6】银行的一年定期存款利率为10%,某人于2016年1月1日存入10000元，2019年1月1日取出，若按复利计算，他取出时所得的本金和利息共计是(　).

(A)10300元　(B)10303元　(C)13000元　(D)13310元　(E)14641元

一.比例问题

【例6】银行的一年定期存款利率为10%,某人于2016年1月1日存入10000元，2019年1月1日取出，若按复利计算，他取出时所得的本金和利息共计是(　).

(A)10300元　　(B)10303元　　(C)13000元　　(D)13310元　　(E)14641元

【解析】可记住结论，若本金为a,年利率为p,那么n年后，本息共$a\times(1+p)^n$.本息共计$10000\times(1+10\%)^3=13310$元.选D.

二.路程问题

1.基本公式：路程S，速度v，时间t　　$S=vt$

2.相遇、追及问题

（1）相遇问题

①直线相遇：路程＝速度和×时间，$S=v_1t+v_2t=(v_1+v_2)t.$

假设相遇次数为n次，两端的路程为S，同向往返相遇两人的路程和为$2nS$；反向往返相遇两人的路程和为$(2n-1)S$

②环形相遇n次：n倍环形周长＝速度和×时间，$nC=(v_1+v_2)t.$

二.路程问题

2.相遇、追及问题

（2）追及问题（$v_1 > v_2$）

①直线追及：路程 = 速度差×时间，$S = v_1 t - v_2 t = (v_1 - v_2)t$

②环形追及n次：n倍环形周长 = 速度差×时间，$nC = (v_1 - v_2)t$

二.路程问题

【例7】甲、乙两汽车从相距695千米的两地出发，相向而行.乙汽车比甲汽车迟2个小时出发，甲汽车每小时行驶55千米，若乙汽车出发后5小时与甲汽车相遇，则乙汽车每小时行驶(　).

(A)55千米　　(B)58千米　　(C)60千米　　(D)62千米　　(E)65千米

二.路程问题

【例7】甲、乙两汽车从相距695千米的两地出发，相向而行.乙汽车比甲汽车迟2个小时出发，甲汽车每小时行驶55千米，若乙汽车出发后5小时与甲汽车相遇，则乙汽车每小时行驶(　).

(A)55千米　　(B)58千米　　(C)60千米　　(D)62千米　　(E)65千米

【解析】乙车出发时，两车距离为695-55×2=585(千米),5小时后两车相遇，每小时两车共行驶585÷5=117(千米),故乙车每小时行驶117-55=62(千米).选D.

二.路程问题

【例8】从甲地到乙地，水路比公路近40千米，上午10:00,一艘轮船在静水中从甲地驶往乙地，下午1:00,一辆汽车从甲地开往乙地，最后船、车同时到达乙地.若汽车的速度是每小时40千米，轮船的速度是汽车的$\frac{3}{5}$,则甲、乙两地的公路长为(　).

(A)320千米　(B)300千米　(C)280千米　(D)260千米　(E)240千米

二.路程问题

【例8】从甲地到乙地，水路比公路近40千米，上午10:00,一艘轮船在静水中从甲地驶往乙地，下午1:00,一辆汽车从甲地开往乙地，最后船、车同时到达乙地.若汽车的速度是每小时40千米，轮船的速度是汽车的$\frac{3}{5}$,则甲、乙两地的公路长为(   ).

(A)320千米　　(B)300千米　　(C)280千米　　(D)260千米　　(E)240千米

【解析】设公路长为x千米，则$\frac{x}{40}+3=\frac{x-40}{40\times\frac{3}{5}}$，解得x=280. 选C.

二.路程问题

3.类型

（1）绕圈问题

①圆圈型的路程问题

从同一起点同时出发，周长为S，第一次相遇时间为t

✓ 反向运动：路程＝速度和×时间，$S=v_1t+v_2t=(v_1+v_2)t.$

✓ 同向运动：路程＝速度差×时间，$S=v_1t-v_2t=(v_1-v_2)t$

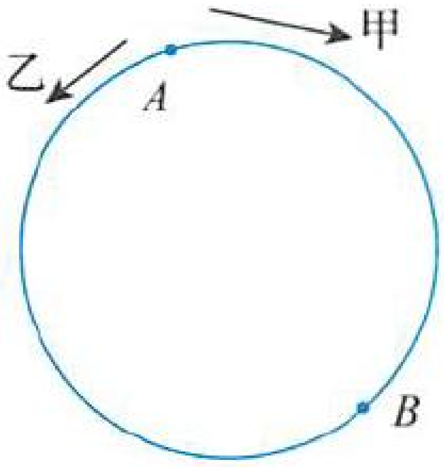
二.路程问题

3.类型

（1）绕圈问题

②t一定

✓ 反向绕圈



每相遇一次，二者共同跑完一圈$S_{甲}+S_{乙}=s$

若相遇n次，$S_{甲}+S_{乙}=ns$；$\frac{S_{甲}}{S_{乙}}=\frac{v_{甲}}{v_{乙}}=\frac{ns-S_{乙}}{S_{乙}}$

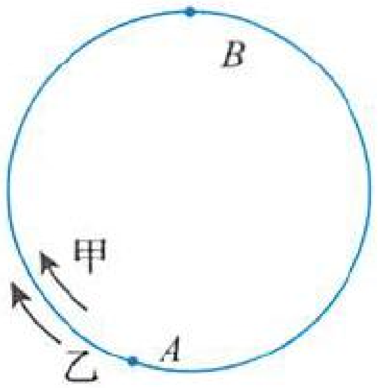
二.路程问题

3.类型

（1）绕圈问题

②t一定

✓ 同向绕圈



每追上一次，快的比慢的多一圈$S_{甲}-S_{乙}=s$

若相遇n次，$S_{甲}-S_{乙}=ns$；$\frac{S_{甲}}{S_{乙}}=\frac{v_{甲}}{v_{乙}}=\frac{ns+S_{乙}}{S_{乙}}$

求第 k次相遇情况，可以将第$k-1$次相遇看成起点进行分析考虑.

二.路程问题

【例9】甲、乙两人从同一起跑线上绕400米跑道同时同向跑步，甲每秒跑6米，乙每秒跑4米.则第二次追上乙时，甲跑了(　　)米.

(A)2400　　(B)2600　　(C)2800　　(D)3000　　(E)3200

二.路程问题

【例9】甲、乙两人从同一起跑线上绕400米跑道同时同向跑步，甲每秒跑6米，乙每秒跑4米.则第二次追上乙时，甲跑了(　　)米.

(A)2400　　(B)2600　　(C)2800　　(D)3000　　(E)3200

【解析】由于两人同时同向跑步，当第二次追上乙时，甲比乙多跑两圈，故所用时间为$800\div(6-4)=400$秒，故甲总共跑了$6\times400=2400$米. 选A.

二.路程问题

3.类型

（2）行船问题

$V_{顺}=V_{静}+V_{水}$；$V_{逆}=V_{静}-V_{水}$

$$\Rightarrow V_{静}=\frac{V_{顺}+V_{逆}}{2},\quad V_{水}=\frac{V_{顺}—V_{逆}}{2}$$

在水中的相遇、追及问题，和一般直线相遇追及公式相同.（水速被抵消）

二、路程问题

【例10】已知船在静水中的速度为25千米/小时，水流的速度为15千米/小时，则此船在相距80千米的两地间往返一次所需时间是(　　).

(A)8小时　　(B)10小时　　(C)12小时　　(D)14小时　　(E)16小时

二.路程问题

【例10】已知船在静水中的速度为25千米/小时，水流的速度为15千米/小时，则此船在相距80千米的两地间往返一次所需时间是(　).

(A)8小时　(B)10小时　(C)12小时　(D)14小时　(E)16小时

【解析】设v代表船速，v_0代表水速，s代表路程，t代表往返所用的时间，则

方法一：$t=\frac{s}{v+v_0}+\frac{s}{v-v_0}=\frac{80}{25+15}+\frac{80}{25-15}=2+8=10.$

方法二：$t=\frac{2vs}{v^2-{v_0}^2}=\frac{2\times25\times80}{25^2-15^2}=10.$ 选B.

二.路程问题

3.类型

（3）火车问题

✓ 火车经过电线杆/静止的行人：$S = L_{火车} = v_{火车}t$

✓ 火车经过移动的行人：

相遇$S = L_{火车} = (v_{火车} + v_{人})t$

追及$S = L_{火车} = (v_{火车} - v_{人})t$

二.路程问题

3.类型

（3）火车问题

✓ 火车经过桥/隧道：$S = L_{火车} + L_{桥} = v_{火车}t$

✓ 火车经过火车：

相遇$S = L_{火车1} + L_{火车2} = (v_{火车1} + v_{火车2})t$

追及$S = L_{火车1} + L_{火车2} = (v_{火车1} - v_{火车2})t$

二.路程问题

【例11】在有上、下行的轨道上，两列火车相向开来，若甲车长187米，每秒行驶25米，乙车长173米，每秒行驶20米，则从两车头相遇到车尾离开，需要(　).

(A)12秒　　(B)11秒　　(C)10秒　　(D)9秒　　(E)8秒

二.路程问题

【例11】在有上、下行的轨道上，两列火车相向开来，若甲车长187米，每秒行驶25米，乙车长173米，每秒行驶20米，则从两车头相遇到车尾离开，需要(　).

(A)12秒　(B)11秒　(C)10秒　(D)9秒　(E)8秒

【解析】从两车头相遇到车尾离开，走的相对路程为两车长之和，由于是相向开来，故相对速度为两者速度之和，所以时间为$\frac{187+173}{25+20}=8$(秒).选E.

二、路程问题

【例12】一列火车长75米，通过525米长的桥梁需要40秒，若以同样的速度穿过300米的隧道，则需要(　).

(A)20秒　(B)约23秒　(C)25秒　(D)约27秒　(E)约28秒

二.路程问题

【例12】一列火车长75米，通过525米长的桥梁需要40秒，若以同样的速度穿过300米的隧道，则需要(　).

(A)20秒　(B)约23秒　(C)25秒　(D)约27秒　(E)约28秒

【解析】设通过300米的隧道需要t秒. $\frac{75+525}{40}=\frac{75+300}{t}\Rightarrow t=25$.选C.

三.工程问题

1.基本公式

工作总量＝工作效率×工作时间；工作时间＝工作总量÷工作效率；

工作效率＝工作总量÷工作时间

2.单位“1”法

在处理工程问题时，可以将总的工作量看做“1”，若甲单独完成需要m天，乙单独完成需要n天，则甲的工作效率为$\frac{1}{m}$，乙的工作效率为$\frac{1}{n}$；甲乙合作的效率为$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$；甲乙合作完成需要的时间为$\frac{1}{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}=\frac{mn}{m+n}$.

三.工程问题

【例13】某厂一生产流水线，若15秒可生产4件产品，则1小时该流水线可生产(　)产品.

(A)480件　　(B)540件　　(C)720件　　(D)960件　　(E)1080件

三.工程问题

【例13】某厂一生产流水线，若15秒可生产4件产品，则1小时该流水线可生产(　)产品.

(A)480件　　(B)540件　　(C)720件　　(D)960件　　(E)1080件

【解析】1小时为3600秒，可生产$\frac{3600}{15}\times 4=960$(件). 选D.

三.工程问题

【例14】一批货物要运进仓库.由甲、乙两队合运9小时，可运进全部货物的50%,乙队单独运则要30小时才能运完，又知甲队每小时可运进3吨，则这批货物共有(　).

(A)135吨　(B)140吨　(C)145吨　(D)150吨　(E)155吨

三.工程问题

【例14】一批货物要运进仓库.由甲、乙两队合运9小时，可运进全部货物的50%,乙队单独运则要30小时才能运完，又知甲队每小时可运进3吨，则这批货物共有(　).

(A)135吨　　(B)140吨　　(C)145吨　　(D)150吨　　(E)155吨

【解析】设共有货物x吨，乙队每小时可运y吨. 则$\begin{cases}9(y+3)=\frac{1}{2}x\\x=30y\end{cases}$⇒x=135, y=4. 5. 选A.

三.工程问题

【例15】一项工程由甲、乙两人合作30天可完成.甲队单独做24天后，乙队加人，两队合作10天后，甲队调走，乙队继续做了17天才完成.若这项工程由甲队单独做，则需要(　).

(A)60天　　(B)70天　　(C)80天　　(D)90天　　(E)100天

三.工程问题

【例15】一项工程由甲、乙两人合作30天可完成.甲队单独做24天后，乙队加人，两队合作10天后，甲队调走，乙队继续做了17天才完成.若这项工程由甲队单独做，则需要(　).

(A)60天　　(B)70天　　(C)80天　　(D)90天　　(E)100天

【解析】设甲单独做需要x天完成，则乙的工作效率是$\frac{1}{30}-\frac{1}{x}$,

根据题意有$\frac{24}{x}+\frac{10}{30}+17\times\left(\frac{1}{30}-\frac{1}{x}\right)=1$, 解得x=70. 选B.

四.浓度问题

1.基本公式

溶液量＝溶质量＋溶剂量

溶质量＝浓度×溶液量

$$浓度=\frac{溶质量}{溶液量}\times100\%=\frac{溶质量}{溶质量+溶剂量}\times100\%$$

盐水＝盐＋水　　医用酒精＝纯酒精＋水

【注】溶质是浓度问题的计算标准，浓度通常用百分数表示.

四.浓度问题

2.蒸发/加水/加浓问题

特征：仅有溶质或溶剂的量发生变化，抓不变量，转换为“比例变化问题”.

方法1：溶质/溶液守恒列方程.

方法2：看作“比例变化问题”，统一不变量.

3.溶液配比/混合问题

方法1：溶质守恒列方程.

方法2：十字交叉法.

四、浓度问题

4.反复注水问题（直接套用公式）

（1）原来浓度为x的溶液a升，倒出b升后，再用水加满，浓度变为$x(1-\frac{b}{a})$，上述操作重复n次，浓度变为$x\left(1-\frac{b}{a}\right)^n$

（2）设已知溶液质量为M，浓度为C_0，每次操作中先倒出M_0溶液，再加入M_0溶剂（清水），重复n次，浓度为$C_n=C_0\left(\frac{M-M_0}{M}\right)^n=C_0\left(1-\frac{M_0}{M}\right)^n$.

四.浓度问题

4.反复注水问题（直接套用公式）

（3）设已知溶液质量为M，浓度为C_0，每次操作中先倒入M_0溶剂（清水），再倒出M_0溶液，重复n次，浓度为$C_n = C_0\left(\frac{M}{M+M_0}\right)^n$

四、浓度问题

5.浓度置换公式

设一份溶液，原浓度为a，现浓度为b，容器的容积为V，第一次倒出m_1溶液后用水加满，第二次倒出m_2溶液后用水加满……，第n次倒出溶液后用水加满，则有$a\cdot\frac{V-m_1}{V}\cdot\frac{V-m_2}{V}\cdots\cdot\frac{V-m_n}{V}=b$

【注】题目没有特殊说明，纯溶液的浓度默认其浓度为100%.

四.浓度问题

【总结】

✓ 稀释问题：加溶剂，溶质不变.（以溶质不变列等式求解）

✓ 加浓问题：加溶质，溶剂不变.（以溶剂不变列等式求解）

✓ 浓缩问题（蒸发问题）：减溶剂，溶质不变.（以溶质不变列等式求解）

✓ 置换问题：用一定量溶剂置换等量溶液.（浓度置换公式）

✓ 混合问题：用两种浓度不同的溶液进行混合形成新溶液.（用杠杆原理）

四.浓度问题

【例16】含盐15%的盐水40千克蒸发掉部分水分后变成了含盐24%的盐水，蒸发掉的水分质量为(　)千克.

(A)19　　(B)18　　(C)17　　(D)16　　(E)15

四、浓度问题

【例16】含盐15%的盐水40千克蒸发掉部分水分后变成了含盐24%的盐水，蒸发掉的水分质量为(   )千克.

(A)19　　(B)18　　(C)17　　(D)16　　(E)15

【解析】设蒸发掉水的质量为x千克，根据溶质不变，列方程得：

$40\times15\%=(40-x)\times24\%$, $x=15$. 选E.

【技巧】比例法.

盐：水=3:17=6:34变为盐：水=6:19，水少了34−19=15(份)，故蒸发的水为$\frac{40}{40}\times15=15$(千克)

四.浓度问题

【例17】有含盐8%的盐水40千克，要配制成含盐20%的盐水，应加(　)千克盐.

(A)5　　(B)6　　(C)7　　(D)8　　(E)4

四.浓度问题

【例17】有含盐8%的盐水40千克，要配制成含盐20%的盐水，应加(　)千克盐.

(A)5　　(B)6　　(C)7　　(D)8　　(E)4

【解析】设应加盐x千克，根据溶剂守恒：$40(1-8\%)=(40+x)(1-20\%)\Rightarrow x=6$. 故应加盐6千克，选B.

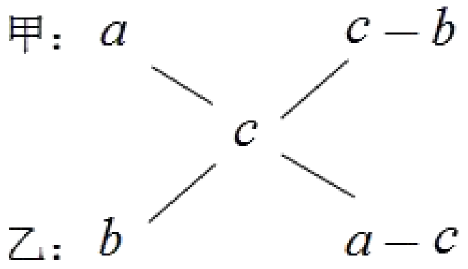
五.杠杆原理(交叉比例法.十字交叉法)

1.适用情况

当一个整体按照某个标准分为两部分时，可以根据杠杆原理得到交叉法，快速求出两部分的数量比，交叉法不仅仅局限于平均值问题，只要涉及一个大量，一个小量以及他们混合后的平均量，一般都可以用交叉法计算，例如溶液的配比问题.

2.技巧

甲、乙的数量比为$(c-b):(a-c)$.



五、杠杆原理(交叉比例法、十字交叉法)

师大课堂
SHI DA KE TANG

【例18】公司有职工50人，理论知识考核平均成绩为81分，按成绩将公司职工分为优秀与非优秀两类，优秀职工的平均成绩为90分，非优秀职工的平均成绩是75分，则非优秀职工的人数为(　).

(A)30　　(B)25　　(C)20　　(D)22　　(E)24

五、杠杆原理(交叉比例法、十字交叉法)

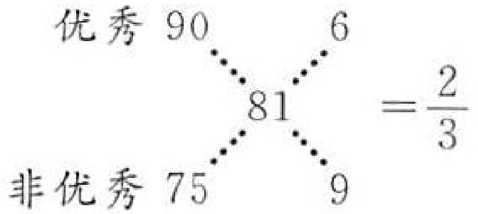
师大课堂 SHI DA KE TANG

【例18】公司有职工50人，理论知识考核平均成绩为81分，按成绩将公司职工分为优秀与非优秀两类，优秀职工的平均成绩为90分，非优秀职工的平均成绩是75分，则非优秀职工的人数为(　).

(A)30　　(B)25　　(C)20　　(D)22　　(E)24

【解析】方法一：设非优秀职工为x人. $81\times50=75x+90\times(50-x)\Rightarrow x=30$, 选A.

方法二：(交叉法)通过交叉得到优秀职工：非优秀职工=2:3,从而得到非优秀职工为30人，选A.



六.利润问题

师大课堂 SHI DA KE TANG

1.基本公式

（1）利润＝售价 - 进价（成本）＝利润率×进价（成本）

（2）利润率$=\frac{利润}{进价}\times100\%=\frac{售价-进价}{进价}\times100\%=(\frac{售价}{进价}-1)\times100\%$

（3）售价＝进价×（1＋利润率）＝进价＋利润

（4）折扣价＝原价×折扣

六.利润问题

2.商品价格变动

（1）商品先提价$p\%$，再降价$p\%$，是无法恢复原价的，比原价低.

假设原价为A，则现价为$A(1+p\%)(1-p\%)<A$

（2）恢复原价

先提价$p\%$，需再降价$\frac{p\%}{1+p\%}$才能恢复原价

先降价$p\%$，需再提价$\frac{p\%}{1-p\%}$才能恢复原价

六.利润问题

【例19】某投资者以2万元购买甲、乙两种股票，甲股票的价格为8元/股，乙股票的价格为4元/股，他们的投资额之比是4:1.在甲、乙股票分别为10元/股和3元/股时，该投资者全部抛出这两种股票，他共获利(　).

(A)3000元　(B)3600元　(C)4000元　(D)5000元　(E)5300元

六.利润问题

师大课堂 SHI DA KE TANG

【例19】某投资者以2万元购买甲、乙两种股票，甲股票的价格为8元/股，乙股票的价格为4元/股，他们的投资额之比是4:1.在甲、乙股票分别为10元/股和3元/股时，该投资者全部抛出这两种股票，他共获利(　　).

(A)3000元　　(B)3600元　　(C)4000元　　(D)5000元　　(E)5300元

【解析】根据投资额之比是4:1，可得投资者投资甲股票1.6万元，买了2000股；投资乙股票0.4万元，买了1000股.甲股票每股赚了2元，乙股票每股赔了1元，最后共获利4000—1000=3000(元).选A.

【点睛】首先根据投资额之比求出每种股票的数量，总利润=每股利润×数量.

六.利润问题

【例20】某电子产品一月份按原定价的80%出售，能获利20%,二月份由于进价降低，按同样原定价的75%出售，却能获利25%,那么二月份进价是一月份的(　).

(A)92%　　(B)90%　　(C)85%　　(D)80%　　(E)75%

六.利润问题

【例20】某电子产品一月份按原定价的80%出售，能获利20%,二月份由于进价降低，按同样原定价的75%出售，却能获利25%,那么二月份进价是一月份的(　).

(A)92%　(B)90%　(C)85%　(D)80%　(E)75%

【解析】设本产品原定价为x，一月份进价为y_1，二月份进价为y_2，则根据题意有

$$\begin{cases}\dfrac{0.8x-y_1}{y_1}=0.2\\ \dfrac{0.75x-y_2}{y_2}=0.25\end{cases}，从而有\begin{cases}y_1=\dfrac{2}{3}x\\ y_2=\dfrac{3}{5}x\end{cases}，则\frac{y_2}{y_1}=\frac{3}{5}\times\frac{3}{2}=\frac{9}{10}=90\%.$$ 选B.

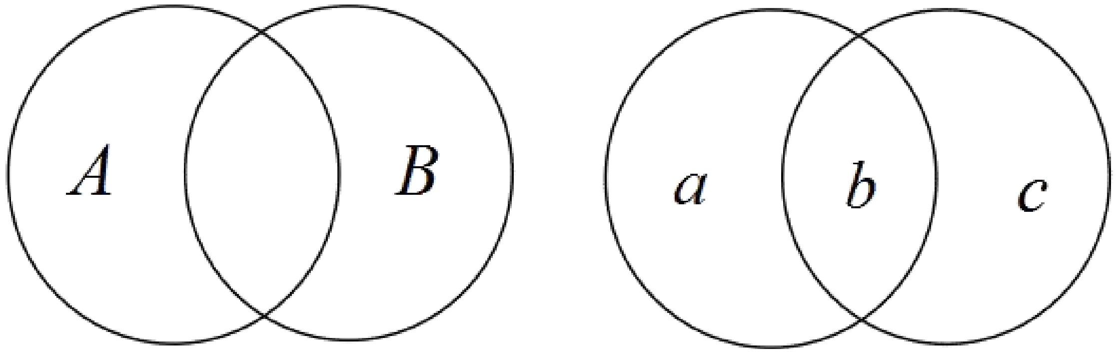
【点睛】考查比例问题，此类问题关键思路是找准基准量.本题也可以令基准量为100进行求解.

七.集合问题(集合问题几何化)

1.两个集合

$A = a + b; B = b + c$

$A \cup B = A + B - A \cap B = (a + b) + (b + c) - b = a + b + c$



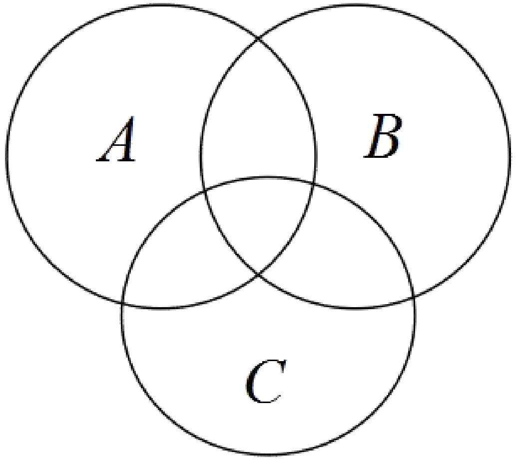
七.集合问题(集合问题几何化)

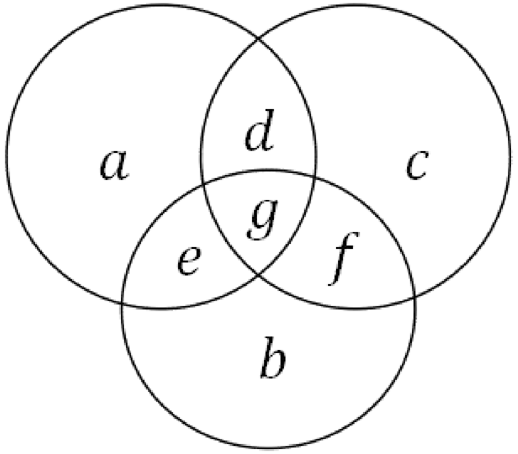
2.三个集合

$A = a + d + e + g; B = c + d + g + f; C = e + g + f + b$

$A \cap B = d + g; B \cap C = f + g; A \cap C = e + g$

$A \cup B \cup C = A + B + C - A \cap B - B \cap C - A \cap C + A \cap B \cap C$





七、集合问题(集合问题几何化)

【例21】现有50名学生都做物理、化学实验，如果物理实验做正确的有40人，化学实验做正确的有31人，两种实验都做错的有4人，则两种实验都做正确的有(　　).

(A)27人　　(B)25人　　(C)19人　　(D)10人　　(E)8人

七.集合问题(集合问题几何化)

【例21】现有50名学生都做物理、化学实验，如果物理实验做正确的有40人，化学实验做正确的有31人，两种实验都做错的有4人，则两种实验都做正确的有(　　).

(A)27人　　(B)25人　　(C)19人　　(D)10人　　(E)8人

【解析】设物理实验做正确和化学实验做正确分别为事件A和B. 直接代入公式：$50=31+40+4-A\cap B$, 得$A\cap B=25$, 所以选B.

七.集合问题(集合问题几何化)

【例22】某年级的课外学科小组分为数学、语文、外语三个小组，参加数学小组的有23人，参加语文小组的有27人，参加外语小组的有18人.同时参加数学、语文两个小组的有4人，同时参加数学、外语小组的有7人，同时参加语文、外语小组的有5人.三个小组都参加的有2人.则这个年级参加课外学科小组共有(　　)人.

(A) 42　　(B) 44　　(C) 48　　(D) 52　　(E) 54

七.集合问题(集合问题几何化)

师大课堂 SHI DA KE TANG

【例22】某年级的课外学科小组分为数学、语文、外语三个小组，参加数学小组的有23人，参加语文小组的有27人，参加外语小组的有18人.同时参加数学、语文两个小组的有4人，同时参加数学、外语小组的有7人，同时参加语文、外语小组的有5人.三个小组都参加的有2人.则这个年级参加课外学科小组共有(　　)人.

(A) 42　　(B) 44　　(C) 48　　(D) 52　　(E) 54

【解析】设A={数学小组的同学},B={语文小组的同学},C={外语小组的同学}, $A\cap B$={参加数学、语文小组的同学}, $A\cap C$={参加数学、外语小组的同学}, $B\cap C$={参加语文、外语小组的同学}, $A\cap B\cap C$={三个小组都参加的同学}.

由题意知：$A=23, B=27, C=18, A\cap B=4, A\cap C=7, B\cap C=5, A\cap B\cap C=2$,

根据公式得：$A\cup B\cup C=A+B+C-A\cap B-A\cap C-B\cap C+A\cap B\cap C=23+27+18-(4+5+7)+2=54$, 选E.

八.不定方程问题

1.特征

✓ 未知数的个数多于方程的个数

✓ 方程的解通常不止一个

2.解题思路

不定方程一般有无数个解，但是结合题意，往往是求自然数解或者整数解，实际只要求出无数个解中的特殊解，有时还要加上其他限制，这时的解就是有限的和确定的.

八、不定方程问题

解不定方程可以用以下原则来缩小范围：

（1）从系数大的开始讨论

（2）奇偶性讨论

（3）倍数原理

（4）尾数原理

八、不定方程问题

【例23】在年底的献爱心活动中，某单位共有100人参加捐款，经统计，捐款总额是19000元，个人捐款数额有100元、500元和2000元三种.该单位捐款100元的人数为(　　).

(A) 85　　(B) 80　　(C) 75　　(D) 72　　(E) 68

八.不定方程问题

【例23】在年底的献爱心活动中，某单位共有100人参加捐款，经统计，捐款总额是19000元，个人捐款数额有100元、500元和2000元三种.该单位捐款100元的人数为(　　).

(A) 85　　(B) 80　　(C) 75　　(D) 72　　(E) 68

【解析】设捐款100元的有x人，500元的有y人，2000元的有z人，

$\begin{cases} x+y+z=100 \\ 100x+500y+2000z=19000 \end{cases}$，化简得4y+19z=90，根据整除性，解得y=13，z=2，x=85，选A.

八、不定方程问题

师大课堂 SHI DA KE TANG

【例24】若1只兔子可换2只鸡，2只兔子可换3只鸭，5只兔子可换7只鹅.某人用20只兔子换得鸡鸭鹅共30只，并且鸭和鹅各至少8只.则鸡与鸭的总和比鹅多(　　)只.

(A) 1　　(B)2　　(C) 3　　(D) 4　　(E) 5

八.不定方程问题

【例24】若1只兔子可换2只鸡，2只兔子可换3只鸭，5只兔子可换7只鹅.某人用20只兔子换得鸡鸭鹅共30只，并且鸭和鹅各至少8只.则鸡与鸭的总和比鹅多(　　)只.

(A) 1　　(B)2　　(C) 3　　(D) 4　　(E) 5

【解析】设鸡有x只，鸭有y只，鹅有z只.

$$\begin{cases} x+y+z=30① \\ \frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y+\frac{5}{7}z=20② \end{cases}$$

将方程②化简为21x+28y+30z=840③

①×30-③，得9x+2y=60，又y≥8，x≥8，根据9的倍数和奇偶性得到x=4，y=12，x=14，所以鸡鸭鹅分别为4只、12只、14只，故选B.

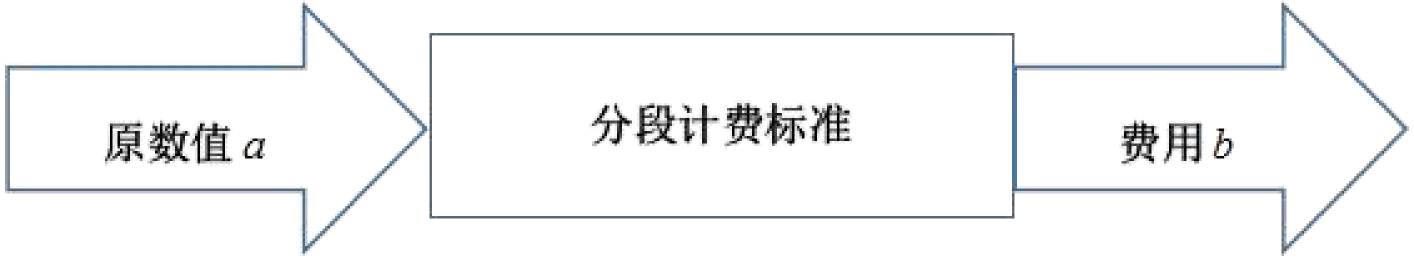
九.分段计费问题

1.求费用

已知原值，按照所给的区间，分别计算费用，再求总费用.

2.求原值

已知费用求原值.首先求出分界点的数值，判断所给的费用对应的区间，再根据计费方式求解费用.



九、分段计费问题

【例25】某自来水公司的水费计算方法如下:每户每月用水不超过5吨的，每吨收费4元，超过5吨的，每吨收取较高标准的费用.已知9月份张家的用水量比李家的用水量多50%，张家和李家的水费分别是90元和55元，则用水量超过5吨的收费标准是(　　).

(A)5元/吨　　(B)5.5元/吨　　(C)6元/吨　　(D)6.5元/吨　　(E)7元/吨

九、分段计费问题

【例25】某自来水公司的水费计算方法如下:每户每月用水不超过5吨的，每吨收费4元，超过5吨的，每吨收取较高标准的费用.已知9月份张家的用水量比李家的用水量多50%，张家和李家的水费分别是90元和55元，则用水量超过5吨的收费标准是(　　).

(A)5元/吨　(B)5.5元/吨　(C)6元/吨　(D)6.5元/吨　(E)7元/吨

【解析】设李家用水量为x吨，则张家为1.5x吨，用水量超过5吨的收费标准是u元/吨.

方法一：列方程组$\begin{cases} 5\times 4+(x-5)u=55 \\ 5\times 4+(1.5x-5)u=90 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xu-5u=35 \\ 1.5xu-5u=70 \end{cases}$

两式消去x，得u=7.

方法二：张家比李家多用0.5x吨水，这部分水是按照较高标准收费，故0.5xu=90−55=35，再由李家的用水（x−5）u=55−20，得u=7.选E.

十.线性规划

1.特征

求线性目标函数在线性约束条件下的最大值或最小值

2.解题思路

（1）根据题目写出限定条件对应的不等式组.

（2）将不等式转化为方程，解出边界交点.

若为实际问题，需考虑：①交点为整数，则直接代入目标函数求出最值

②交点不是整数，则讨论取整，然后再代入目标函数求出最值.

若为函数的最值，可直接将交点代入目标函数中.

十.线性规划

1.一次不等式组

【例26】变量x,y满足条件$\begin{cases} x-4y\leq -3 \\ 3x+5y\leq 25 \\ x\geq 1 \end{cases}$，设$z=2x+y$，$z$的最大值和最小值分别为（ A ）.

(A)12，3　　(B) 14，3　　(C)12，4　　(D)14，4　　(E)15，3

十.线性规划

2.几何相关

【例27】如果点P在平面区域$\begin{cases}2x-y+2\geq 0\\ x+y-2\leq 0\\ 2y-1\geq 0\end{cases}$内，点$Q$在曲线$x^2+(y+2)^2=1$上，那么$|PQ|$的最小值为（ A　）.

(A)$\frac{3}{2}$　　(B) $\frac{4}{\sqrt{5}}-1$　　(C)$2\sqrt{2}-1$　　(D)$\sqrt{2}-1$　　(E)2

十.线性规划

2.几何相关

【例28】设实数x,y满足$|x-2|+|y-2|\le 2$，则x^2+y^2的取值范围是（ B ）.

(A)$[2，18]$　(B) $[2，20]$　(C)$[2，36]$　(D)$[4，18]$　(E)$[4，20]$

十一、其他问题

师大课堂 SHI DA KE TANG

1.至多至少问题

（1）分蛋糕原理（ “反面思想” ）

对于总量固定的题型，要确定某一部分至少（多）的数量，转化为其他部分最多（少）的数量.

十一、其他问题

1.至多至少问题

（1）分蛋糕原理（ “反面思想” ）

【例29】五名选手在一次数学竞赛中共得404分，每人得分互不相等，每位选手的得分都是整数，并且其中得分最高的选手得90分.那么得分最少的选手至多得(E)分.

(A) 67　(B) 68　(C) 72　(D) 75　(E)77

十一、其他问题

1.至多至少问题

（1）分蛋糕原理（ “反面思想” ）

【例30】某体育队共有100人，擅长打篮球的有76人，擅长打排球的有83人，擅长打乒乓球的有90 人，擅长打羽毛球的有84人，擅长踢足球的有70人，则至少有(C)人5项都擅长.

(A) 1　　(B) 2　　(C)3　　(D) 4　　(E)5

十一.其他问题

1.至多至少问题

（2）抽屉原理

✓将$n+1$件或更多件的物体随意地放到n个抽屉中去，那么，至少有一个抽屉中的物体个数不少于2个

✓将多于$m \times n$个（即$m \times n+1$，$m \times n+2$，...）物体任意放到n个抽屉中去，那么，至少有一个抽屉中的物体个数不少于$(m+1)$个.

十一.其他问题

1.至多至少问题

（2）抽屉原理

【例31】某学校高一年级有165个学生，都参加篮球、足球和乒乓球三项体育活动中的1项、2项或3项，其中至少可以找到(D)个同学参加项目相同的活动.

(A) 3 (B)7 (C)23 (D) 24 (E)25

十一、其他问题

2.植树问题（间隔问题）

（1）对于直线型（开放型）植树问题，如果长度为k米，每隔n米植树，

则一共需要$\frac{k}{n}+1$棵树.【植树数量$=\frac{总长}{间距}+1$】

（2）对于圆圈型（封闭型）植树问题，如果周长为k米，每隔n米植树，

则一共需要$\frac{k}{n}$棵树.【植树数量$=\frac{总长}{间距}$】

十一、其他问题

2.植树问题（间隔问题）

【例32】一条长为1200米的道路的一边每隔30米已经挖好坑植树，后又改为每隔25米植树.则需要新挖k个坑，需要填上n个坑，则下列正确的为(　　).

(A)$k=41$　　(B)$k=39$　　(C)$n=30$　　(D) $n=31$　　(E) $n=32$

十一、其他问题

2.植树问题（间隔问题）

【例32】一条长为1200米的道路的一边每隔30米已经挖好坑植树，后又改为每隔25米植树.则需要新挖k个坑，需要填上n个坑，则下列正确的为(　　).

(A)$k=41$　　(B)$k=39$　　(C)$n=30$　　(D) $n=31$　　(E) $n=32$

【解析】原来已经挖好1200/30+1=41(个)坑，现在需要1200/25+1=49(个)坑，原来可以利用的坑1200/150+1=9(个)，故需要新挖49−9=40(个)坑，需要填上41−9=32(个)坑，选E.

十一、其他问题

2.植树问题（间隔问题）

【例33】国庆节到了，同学们用鲜花装扮校园，他们把16盆鲜花摆放在圆形花坛上，每两盆花之间间隔10厘米.那么这个花坛一圈的长度为(C).(不考虑花盆所占长度)

(A)1.4米 (B)1.5米 (C)1.6米 (D)1.7米 (E) 1.8米

十一、其他问题

3.年龄问题

（1）年龄同步增长：n年后，每人都增加n岁.

（2）年龄差值不变：两人的年龄差不变，两人年龄之间的倍数关系随着年龄的增长在发生变化.

十一、其他问题

3.年龄问题

【例34】哥哥5年前的年龄等于7年后弟弟的年龄，哥哥4年后的年龄与弟弟3年前的年龄和是35岁，则哥哥今年的年龄为(　　).

(A) 22　　(B) 23　　(C)24　　(D) 25　　(E) 26

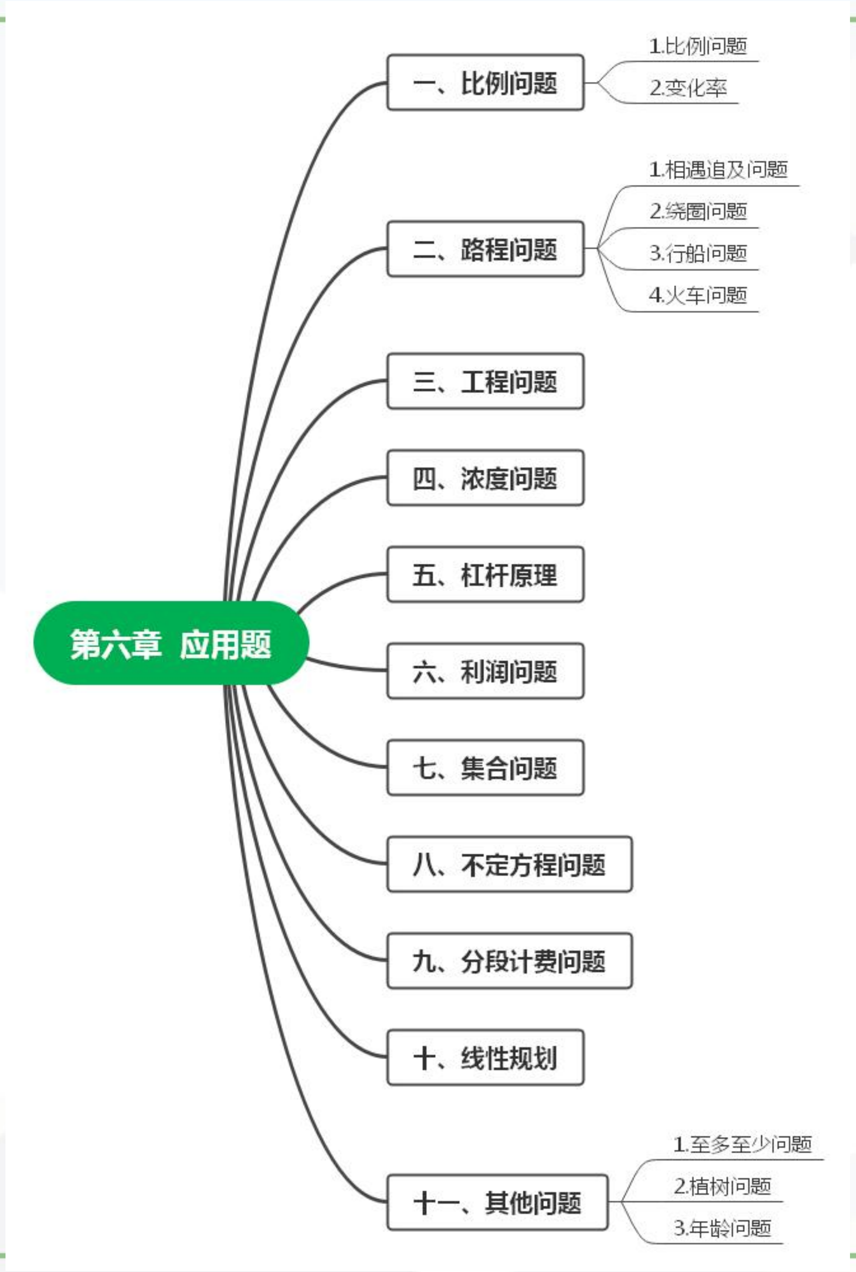
十一、其他问题

3.年龄问题

【例34】哥哥5年前的年龄等于7年后弟弟的年龄，哥哥4年后的年龄与弟弟3年前的年龄和是35岁，则哥哥今年的年龄为(　　).

(A) 22　　(B) 23　　(C)24　　(D) 25　　(E) 26

【解析】如果弟弟今年为x岁，弟弟7年后是(7+x)岁，哥哥今年为(x+12)岁，哥哥4年后为(x+16)岁，弟弟3年前为(x—3)岁.列方程得x+16+x−3=35,x=11,哥哥今年11+12=23(岁)，选B.


第六章 应用题
一、比例问题
1.比例问题
2.变化率
二、路程问题
1.相遇追及问题
2.绕圈问题
3.行船问题
4.火车问题
三、工程问题
四、浓度问题
五、杠杆原理
六、利润问题
七、集合问题
八、不定方程问题
九、分段计费问题
十、线性规划
十一、其他问题
1.至多至少问题
2.植树问题
3.年龄问题

感 谢 聆 听

主讲:媛媛老师
邮箱:family7662@dingtalk.com