管理类专业学位硕士研究生入学统一考试

数学

管理类联考 公式汇总

适用于MBA、MPA、MPAcc、MEM

目 录

第一章 数与式

一、实数

1. 常见整除的特点

能被 2 整除的数	个位为 0，2，4，6，8
能被 3 整除的数	各数位数字之和必能被 3 整除
能被 4 整除的数	末两位（个位和十位）数字必能被 4 整除
能被 5 整除的数	个位为 0 或 5
能被 6 整除的数	同时满足能被 2 利 3 整除的条件
能被 9 整除的数	各数位数字之和必能被 9 整除
能被 10 整除的数	个位必为 0
能被 11 整除的数	从右向左，奇数位数字之和减去偶数位数字之和能被 11 整除（包括 0）
能被 $n!$ 整除的数	连续 n 个正整数的乘积能被 $n!$ 整除 $n!=1\times2\times3\times\cdots\times n$，读作 n 的阶乘

2. 倍数、约数

当 a 能被 b 整除时，称 a 是 b 的倍数，b 是 a 的约数.

$(a,b)\times[a,b]=ab$，其中 (a,b) 表示最大公约数，$[a,b]$ 表示最小公倍数.

3. 已知整数 a 能被整数 b 整除，则 ka 能被 b 整除.（a、b、k 均为整数）.

4. 已知 ka 是 b 的倍数，且 k 和 b 互质，则 a 是 b 的倍数.（a、b、k 均为整数）.

5. 已知 k 被 a 除的余数以及 k 被 b 除的余数，则可以确定 k 被 $[a,b]$ 除的余数.（$[a,b]$ 表示最小公倍数，其余确定不了）.

6. 有理数和无理数的运算规则

（1）有理数之间的加减乘除，结果必为有理数；

（2）有理数与无理数的乘除为 0 或无理数；

（3）有理数与无理数的加减必为无理数；

（4）若 a,b 为有理数，λ 为无理数，且满足 $a+b\lambda=0$，则有 $a=b=0$.

（5）常见的无理数：

π	e	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{7}$	$\sqrt{8}$	$\sqrt{10}$
3.142	2.718	1.414	1.732	2.236	2.449	2.646	2.828	3.162

7.奇数与偶数的运算

奇数±奇数＝偶数；奇数±偶数＝奇数；偶数±偶数＝偶数（加减：同偶异奇）

奇数×偶数＝偶数；奇数×奇数＝奇数；偶数×偶数＝偶数（乘法：有偶则偶）

注意：0是偶数.两个相邻整数必为一奇一偶.

二、质数、合数

1.1既不是质数也不是合数.

2.2是最小的质数，也是唯一的偶质数，也就是说，除了2以外剩下的质数都为奇数.

3.4是最小的合数.

4.30以内的质数：2，3，5，7，11，13，17，19，23，29.

5.97是最大的两位数的质数.

三、集合

1.常见的数集的表示符号

N^*（或N_+）	表示正整数集.
N	表示非负整数集，即自然数集.
Z	表示整数集.
Q	表示有理数集.
R	表示实数集.
C	表示复数集.
说明：根据国家标准，“0”是自然数.	

2.集合中元素的性质

集合中的元素必须满足：确定性、互异性、无序性.

3.集合的表示方法

列举法、描述法、图示法.

4.集合与集合的关系

子集	如果集合A的任何一个元素都是集合B的元素，则称A是B的子集，记为A⊆B或B⊇A，读作“A包含于B”或“B包含A”.
相等的集合	若A⊆B，且B⊆A，则称A＝B.

真子集	若 A⊆B 且 A≠B，则称 A 是 B 的真子集，记作 A⊊B（或 B⊋A）.
空集	空集是任何集合的子集；空集是任何非空集合的真子集.（∅）
交集	由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合，叫做 A 与 B 的交集，记作 A∩B.
并集	由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合，叫做 A 与 B 的并集，记作 A∪B.
补集	对于集合 S，若集合 A⊆S，那么由 S 中所有不属于 A 的元素组成的集合，叫做 S 中子集 A 的补集（或余集），记作C_sA，或简记作CA.
全集	若一个集合含有所要研究的各个集合的全部元素，那么这个集合就可以看作一个全集，全集记作 U.

注意：由n个元素所组成的集合，其子集的个数为2^n个，真子集的个数为2^n-1个，非空子集的个数为2^n-1个，非空真子集的个数为2^n-2个.

四、数据描述

1. 算术平均值

设有n个数$x_1,x_2,\cdots,x_n$，称$\overline{x}=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$为这$n$个数的算术平均值，简记为

$$\overline{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}$$

2. 几何平均值

设有n个正数$x_1,x_2,\cdots,x_n$，称$x_g=\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$为这$n$个正数的几何平均值，简记为

$$x_g=\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}x_i}$$

注意：几何平均值是对于正数而言的.

3. 方差

设一组样本数据$x_1,x_2,\cdots,x_n$，其平均数为$\overline{x}$，则称

$S^2=\dfrac{1}{n}[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2]=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$ 为这个样本的方差.

（反映数据的波动大小，方差大，波动大；方差小，波动小）

扩展公式：$S^2=\dfrac{1}{n}[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2]=\dfrac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}-(\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n})^2$.

4. 标准差

因为方差和原始数据的单位不同，且平方后可能夸大了离差的程度，将方差的算术平方根称为这组数据的标准差，即$S=\sqrt{\frac{1}{n}[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2]}$（反映数据的波动大小，标准差大，波动大；标准差小，波动小）.

5. 众数

一组数据中出现次数最多的数据. 反映数据的集中趋势.

6. 中位数

反映数据的中间值.

7. 平均数

$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$（反映数据的平均水平）.

五、平均数和方差计算技巧

1. 算术平均值的求法

（1）利用计算公式：$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$.

（2）利用性质：若$x_1,x_2,\cdots,x_n$的平均数为$\bar{x}$，则$kx_1+b,kx_2+b,\cdots,kx_n+b$的平均数是$k\bar{x}+b$.

2. 方差的求法

（1）利用计算公式：$S^2=\frac{1}{n}[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2]=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$.

（2）利用性质：如果一组数$x_1,x_2,\cdots,x_n$的平均数是$\bar{x}$，方差为S^2，那么

①新数据$ax_1,ax_2,\cdots,ax_n$的平均数是$a\bar{x}$，方差为a^2S^2.

②新数据$x_1+b,x_2+b,\cdots,x_n+b$的平均数是$\bar{x}+b$，方差为S^2.

③新数据$ax_1+b,ax_2+b,\cdots,ax_n+b$的平均数是$a\bar{x}+b$，方差为$a^2S^2$.

六、比例的基本性质

1. $a:b=c:d\Leftrightarrow ad=bc$

2. $a:b=c:d\Leftrightarrow b:a=d:c\Leftrightarrow b:d=a:c\Leftrightarrow d:b=c:a$

3. 重要定理

合比定理	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$
分比定理	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$
合分比定理	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$
等比定理	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\cdots=\frac{m}{k}=\frac{a+c+\cdots+m}{b+d+\cdots+k}=\frac{a}{b}\left(b+d+\cdots+k\neq 0\right)$

七、绝对值

1. $|a|=\begin{cases}a & a\geq 0\\ -a & a<0\end{cases}$.

2. 对称性：$|-a|=|a|$，互为相反数的两个数的绝对值相等.

3. 等价性：$\sqrt{a^2}=|a|$，$|a|^2=|a^2|=a^2$（$a\in R$）.

4. 自比性：$\frac{|x|}{x}=\frac{x}{|x|}=\begin{cases}1, & x>0\\ -1, & x<0\end{cases}$.

5. 非负性：即$|a|\geq 0$，任何实数a的绝对值非负.

6. $|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$，$\left|\frac{b}{a}\right|=\frac{|b|}{|a|}$

7. 绝对值三角不等式

（1）基本形式：$||a|-|b||\leq|a\pm b|\leq|a|+|b|$

（2）等号成立条件：

表达式	**成立条件**	**示例**
$|a|+|b|=|a+b|$	$ab\geq 0$	$|-3|+|-5|=|-3-5|$
$|a|+|b|=|a-b|$	$ab\leq 0$	$|3|+|-5|=|3+5|$
$||a|-|b||=|a+b|$	$ab\leq 0$	$||-5|-|3||=|-5+3|$
$||a|-|b||=|a-b|$	$ab\geq 0$	$||-5|-|-3||=|-5+3|$

（3）大小成立条件：

表达式	成立条件	示例
$\lvert a\rvert+\lvert b\rvert>\lvert a+b\rvert$	$ab<0$	$\lvert -3\rvert+\lvert 5\rvert>\lvert -3+5\rvert$
$\lvert a\rvert+\lvert b\rvert>\lvert a-b\rvert$	$ab>0$	$\lvert -3\rvert+\lvert -5\rvert>\lvert -3+5\rvert$
$\lvert\lvert a\rvert-\lvert b\rvert\rvert<\lvert a+b\rvert$	$ab>0$	$\lvert\lvert -5\rvert-\lvert -3\rvert\rvert<\lvert -5-3\rvert$
$\lvert\lvert a\rvert-\lvert b\rvert\rvert<\lvert a-b\rvert$	$ab<0$	$\lvert\lvert -5\rvert-\lvert 3\rvert\rvert<\lvert -5-3\rvert$

8. 绝对值的几何意义

（1）平底锅型：$f(x)=|x-a|+|x-b|$，此种函数表达式，没有最大值，只有最小值. 且在两个零点之间取得最小值$|a-b|$. 图像的表现为两头高，中间平，类似于平底锅.

（2）“Z”字型：$f(x)=|x-a|-|x-b|$此种函数表达式，既有最大值也有最小值，分别在零点的两侧取得且两个最值为$\pm|a-b|$. 图像的表现为两头平，中间斜.

9. 根号有意义与根式非负性

$\sqrt{a}\Rightarrow a\geq 0,\sqrt{a}\geq 0$	$\sqrt{a^2}=\lvert a\rvert$
$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\Rightarrow a\geq 0,b\geq 0$	$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\Rightarrow a\geq 0,b\geq 0$

10.

a、b、c的正负性	$\frac{a}{\lvert a\rvert}+\frac{b}{\lvert b\rvert}+\frac{c}{\lvert c\rvert}$的值
a、b、c中 3 个都为正	3
a、b、c中 2 个为正 1 个为负	1
a、b、c中 1 个为正 2 个为负	－1
a、b、c中 3 个都为负	－3

	$a+b+c>0$	$a+b+c=0$	$a+b+c<0$
$abc>0$	a、b、c中 3 正/1 正 2 负	a、b、c中 1 正 2 负	a、b、c中 1 正 2 负
$abc<0$	a、b、c中 2 正 1 负	a、b、c中 2 正 1 负	a、b、c中 3 负/2 正 1 负

八、因式分解 $\Leftrightarrow$ 整式的乘法

1. $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$（平方差公式）

2. $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$（完全平方公式）

3. $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$（配方公式）

4. $\frac{1}{2}\left[(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2\right]=a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca$（配方公式）

5. $\frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$（配方公式）

6. $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$（立方公式）

7. $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$（立方公式）

8. $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$（立方和公式）

9. $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$（立方差公式）

10. $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)=a^3+b^3+c^3-3abc$

11. $(a^2+b^2)(a+b)(a-b)=a^4-b^4$

九、分式裂项运算

1. 基本公式

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

$$\frac{1}{n(n+k)}=\frac{1}{k}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}\right)$$

$$\frac{1}{x(x+1)(x+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x(x+1)}-\frac{1}{(x+1)(x+2)}\right]$$

$\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$（分母有理化，再消项）

$\frac{1}{\sqrt{n+k}+\sqrt{n}}=\frac{1}{k}\left(\sqrt{n+k}-\sqrt{n}\right)$（分母有理化，再消项）

2. 多个括号求积：凑平方差公式法

$$(a+1)(a^2+1)(a^4+1)(a^8+1)(a^{16}+1)(a^{32}+1)=\frac{a^{64}-1}{a-1}(a\neq 1)$$

3. 因式定理与余式定理

若整式 $f(x)$ 除以 $(x-a)$ 所得的商式为 $h(x)$，余式为 $r(x)$，

则有 $f(x)=(x-a)\cdot h(x)+r(x)$，此时 $f(a)=r(a)$.

如果 $r(x)=0$，称为整式 $f(x)$ 能被 $(x-a)$ 整除，或 $(x-a)$ 是 $f(x)$ 的因式，

此时 $f(a)=0$.

4. 分式重要定理

合比定理	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$（等式左右同加 1）
分比定理	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$（等式左右同减 1）
等比定理	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\cdots=\frac{m}{k}=\frac{a+c+\cdots+m}{b+d+\cdots+k}=\frac{a}{b}(b+d+\cdots+k\neq 0)$
更比定理	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$
反比定理	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$

增减性变化关系：若 $a>b>0,m>0$，则 $\frac{b}{a}<\frac{b+m}{a+m}$.

5. 经典代数运算

已知 $x+\frac{1}{x}=3$，可以推出以下结论：

（1）$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=7$

（2）$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}-1\right)=18$

（3）$x-\frac{1}{x}=\pm\sqrt{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4}=\pm\sqrt{5}$

第二章 应用题

一、比例问题

$$变化率=\frac{变化量}{变前量}\times100\%=\frac{|现值-原值|}{原值}\times100\%=\left|\frac{现值}{原值}-1\right|\times100\%$$

注意：变化率包括增长率和下降率，所以上式用绝对值表示.

1. 增加率 $p\%\xrightarrow{原值a}$ 现值 $a(1+p\%)$；下降率 $p\%\xrightarrow{原值a}$ 现值 $a(1-p\%)$.

注意：一件商品先提价 $p\%$ 再降价 $p\%$，或者先降价 $p\%$ 再提价 $p\%$，回不到原价，应该比原价小，因为 $a(1+p\%)(1-p\%)=a(1-p\%)(1+p\%)<a$.

2. 增减性（$a,b,m>0$）

当 $\frac{a}{b}>1$ 时，则 $\frac{a+m}{b+m}<\frac{a}{b}$；当 $0<\frac{a}{b}<1$ 时，则 $\frac{a+m}{b+m}>\frac{a}{b}$.

3. 恢复原值：原值先降 $p\%$，再增 $\frac{p\%}{1-p\%}$ 才能恢复原值；或者先增 $p\%$ 再降 $\frac{p\%}{1+p\%}$ 才能恢复原值.

4. （1）甲比乙大 $p\%\Leftrightarrow\frac{甲-乙}{乙}=p\%\Leftrightarrow甲=乙(1+p\%)$；

（2）甲比乙少 $p\%\Leftrightarrow甲=乙(1-p\%)$；

（3）甲是乙的 $p\%\Leftrightarrow甲=乙\cdot p\%$.

注意：甲比乙大 $p\%\neq$ 乙比甲小 $p\%$（因为基准量不同），甲比乙大 $p\%\Leftrightarrow$ 乙比甲小 $\frac{p\%}{1+p\%}$.

5. $总量=\frac{部分量}{对应占的比例}\xrightarrow{变形}\begin{cases}部分量=总量\times所占的比例\\部分量=总量\times对应所占的百分比\end{cases}$

6. 数量÷该数量对应的比例＝单位 1；单位 1×比例＝该比例对应的数量.

二、利润问题

1. 利润＝售价－进价

2. $利润率=\frac{利润}{进价}\times100\%=\frac{售价-进价}{进价}\times100\%=\left(\frac{售价}{进价}-1\right)\times100\%$

3. 售价＝进价×（1＋利润率）＝进价＋利润

4. 总销售额＝单个销售额×销量

三、路程问题

1. 路程S、速度v、时间t之间的关系：$S=vt$，$t=\frac{S}{v}$，$v=\frac{S}{t}$.

2. 相遇、追及问题

（1）直线相遇：路程＝速度和×时间，$S_{相遇}=S_1+S_2=v_1t+v_2t=(v_1+v_2)t$.

（2）直线追及：路程＝速度差×时间，$S_{追及}=S_1-S_2=v_1t-v_2t=(v_1-v_2)t$.

（3）环形相遇n次：n倍环形周长＝速度和×时间，$nC=(v_1+v_2)\times t$.

（4）环形追及n次：n倍环形周长＝速度差×时间，$nC=(v_1-v_2)\times t$.

3. 3个情境

（1）绕圈问题

①圆圈型的路程问题（从同一起点同时出发，周长为S，第一次相遇时间为t）：

反向运动：$S=S_1+S_2=v_1t+v_2t=(v_1+v_2)t$

同向运动：$S=S_1-S_2=v_1t-v_2t=(v_1-v_2)t$

②t一定

反向绕圈：$\frac{S_{甲}}{S_{乙}}=\frac{v_{甲}}{v_{乙}}$；每相遇一次，二者共同跑完一圈；

同向绕圈：$\frac{S_{甲}}{S_{乙}}=\frac{v_{甲}}{v_{乙}}$；每追上一次，快的比慢的多一圈.

（2）行船问题

设船在静水中的速度为$v_{船}$，水流的速度为$v_{水}$，

（顺水问题）船在顺流而下时的速度为$v_{顺水}=v_{船}+v_{水}$；

（逆水问题）船在逆流而上时的速度为$v_{逆水}=v_{船}-v_{水}$.

在水中的相遇和追及问题，和一般直线相遇追及公式相同.（因为水速被抵消）

（3）火车问题

火车经过电线杆/静止的行人：$S=L_{火车}=v_{火车}t$.

火车经过移动的行人：相遇$S=L_{火车}=\left(v_{火车}+v_{人}\right)t$；追及$S=L_{火车}=\left(v_{火车}-v_{人}\right)t$

火车经过桥/隧道：$S=L_{火车}+L_{桥}=v_{火车}t$.

火车经过火车：相遇$S=L_{火车1}+L_{火车2}=\left(v_{火车1}+v_{火车2}\right)t$；

追及$S=L_{火车1}-L_{火车2}=\left(v_{火车1}-v_{火车2}\right)t$.

4. 相对速度（两个物体运动时，可将一个作为参照物，看成相对静止的）

同向运动：$v_{同向}=v_1-v_2$.

相向运动：$v_{相向}=v_1+v_2$.

【拓展】：相对运动

适用范围：两个对象同时运动时，可使用相对运动.

相对路程：选择其中一个对象作为参照物（静止）.

相对速度：迎面而来，速度相加；同向而去，速度相减.

四、工程问题

1. 基本公式

工作总量＝工作效率×工作时间；

工作时间＝工作总量÷工作效率；

工作效率＝工作总量÷工作时间.

2. 单位“1”法

在处理工程问题时，可以将总的工作量看做“1”，若甲单独完成需要m天，乙单独完成需要n天，则有以下结论：

甲的效率为$\frac{1}{m}$，乙的效率为$\frac{1}{n}$；

甲乙合作的效率为$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$；

甲乙合作完成需要的时间为$\dfrac{1}{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}=\dfrac{mn}{m+n}$.

3. 效率取整

使用条件：题目给出不同个体单独完成的工作时间；

做题策略：将工作总量取为工作时间的最小公倍数.

4. 等工作量法

使用条件：题目给出不同个体合作完成的工作时间；

做题策略：将不同工作主体的工作时间拆开表达；通过对比找到不同主体完成相同工作所用的时间比；放大或缩小相应倍数.

五、交叉法（平均值问题）

1. 总数相等法：

全体人数×全体平均分＝男生人数×男生平均分＋女生人数×女生平均分

2. 加权平均法：

全体平均分＝男生平均分×男生人数占比＋女生平均分×女生人数占比

3. 十字交叉法

（例如：全班平均分为 80 分，男生平均成绩为 83 分，女生平均成绩为 78 分）

$$\begin{array}{ccccc} \text{男生：}83\text{分} & & & & 80-78=2\text{分} \\ & \ddots & & \therefore & \\ & & 80\text{分} & & \Rightarrow \dfrac{\text{男生人数}}{\text{女生人数}}=\dfrac{2}{3} \\ & \therefore & & \ddots & \\ \text{女生：}78\text{分} & & & & 83-80=3\text{分} \end{array}$$

六、浓度问题

1. 基本公式

溶液＝溶质＋溶剂

$$\text{浓度}=\frac{\text{溶质}}{\text{溶液}}\times 100\%=\frac{\text{溶质}}{\text{溶质}+\text{溶剂}}\times 100\%$$

盐水＝盐＋水

医用酒精＝纯酒精＋水

2. 蒸发/加水/加浓问题

特征：仅有溶质或溶剂的量发生变化，抓不变量，转换为“比例变化问题”.

方法 1：溶质/溶液守恒列方程.

方法 2：看作“比例变化问题”，统一不变量.

3. 溶液配比/混合问题

方法 1：溶质守恒列方程.

方法 2：十字交叉法.

4. 溶液配比相关的确定性问题

（1）已知甲、乙、丙三杯盐水溶液的浓度和溶液质量之比，可确定甲、乙、丙混合后的盐水浓度.

（2）已知甲、乙两溶液按照各种比例关系混合所得溶液浓度间的比例关系，无法确定甲、乙溶液的浓度.

（3）已知甲、乙两溶液按照两种不同比例关系混合所得溶液的浓度的具体值，可确定甲、乙溶液的浓度.

5. 反复注水问题（直接套用公式）

（1）原来浓度为x的溶液a升，倒出b升后，再用水加满，浓度变为$x\left(1-\frac{b}{a}\right)$，上述操作重复$n$次，浓度变为$x\left(1-\frac{b}{a}\right)^n$.

（2）设已知溶液质量为M，每次操作中先倒出M_0g 溶液，再加入M_0g 溶剂（清水），重复n次，$c_n=c_0(\frac{M-M_0}{M})^n=c_0(1-\frac{M_0}{M})^n$.

（3）设已知溶液质量为M，每次操作中先倒入M_0g 溶剂（清水），再倒出M_0g 溶液，重复n次，$c_n=c_0(\frac{M}{M+M_0})^n$.

七、集合问题

1. 两个集合

$A\cup B=A+B-A\cap B$

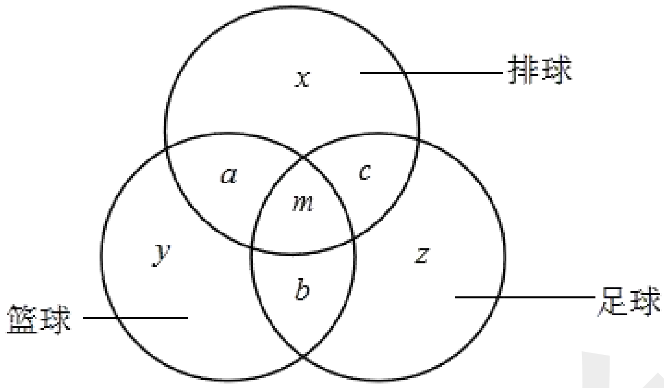
2. 三个集合

（1）$A\cup B\cup C=A+B+C-A\cap B-B\cap C-A\cap C+A\cap B\cap C$

（2）设M只有一种证，N只有两种证，P为三种证齐全：

$A\cup B\cup C=M+N+P$；$A+B+C=M+2N+3P$；$A+B+C=A\cup B\cup C+N+2P$.

3. 图示



x, y, z 分别表示只会篮球、足球、排球的人数.

a, b, c 分别表示只会篮球排球、足球排球、篮球足球的人数.

m 表示篮球、足球、排球都会的人数.

$x+y+z$ 表示只会一种球类的人数.

$a+b+c$ 表示只会两种球类的人数.

$x+y+z+a+b+c+m$ 表示至少会一种球类的人数.

$a+b+c+m$ 表示至少会两种球类的人数.

八、线性规划问题

1. 线性规划的解题步骤:

总结起来可以分三步，即“三步法”:

第一步，根据题目写出限定条件对应的不等式组.

第二步，将不等式转化为方程，解出边界交点.

第三步，若交点为整数，则直接代入目标函数求出最值. 若交点不是整数，则讨论取整，然后再代入目标函数求出最值.

2. 交点为整数点

如果交点为整数点，比较简单，则直接代入目标函数分析即可.

3. 交点为非整数点

如果交点为非整数点，需要讨论其附近的两个整数，得到四个点（x 有两种情况，y 有两种情况），再将其中能满足要求的点代入目标函数分析即可.

九、不定方程问题

1. 不定方程的求解

（1）未知数个数＞方程个数的方程，但限定解为整数或正整数.

（2）解法：奇偶性；整除；代入验证；结合不等式.

2. 整式不定方程

先根据题目转化为$ax+by=c$形式的不定方程，然后结合整除、倍数和奇偶特征分析讨论求解.

3. 分式不定方程

对于分式不定方程$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=c$，先转化为整式方程，进行因式分解，然后讨论取值.

4. 平方不定方程

结合平方的非负性及平方数的特征进行分析求解.

5. 整体取值不定方程

类型不定方程不是分析某一个变量的取值，而是分析某个表达式整体的取值情况，其方法是先由题得到一个等式，然后对系数做变换，转化为不等式，进而讨论范围得到答案.

十、至多至少问题

1. 分蛋糕原理

对于总量固定的题型，要确定某一部分至少（多）的数量，转化为其他部分最多（少）的数量.

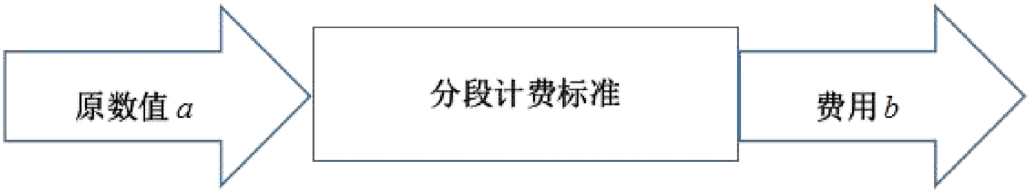
2. 平均原理

先求出所有人全部答对或答错的情况，然后按照标准平均分配，根据分完以后多余的数量来求解至少或至多问题.

3. 表达式变形

涉及多个变量的表达式问题，其模板是：若已知$ax+by+cz=d$，求$x+y+z$的至少或至多时，将$ax+by+cz=d$变形为：所求＋剩余＝d，这样就可以分析至少或至多了.

十一、分段计费问题



1. 求费用

已知原值，按照所给的区间，分别计算费用，再求总费用.

2. 求原值

已知费用求原值的题目要难一些，因为要逆向思维. 首先需要求出分界点的数值，判断所给的费用对应的区间，再根据计费方式求解费用.

十二、其它问题

1. 植树问题

非封闭区域：棵数＝段数＋1；封闭区域：棵数＝段数.

2. 年龄问题

同步增长，差值不变.

师大课堂
SHI DA KE TANG

第三章 函数方程和不等式

一、函数

1. 一元二次函数

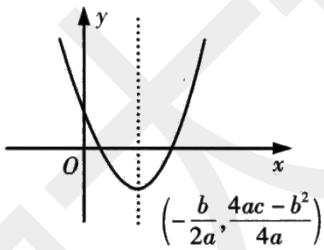
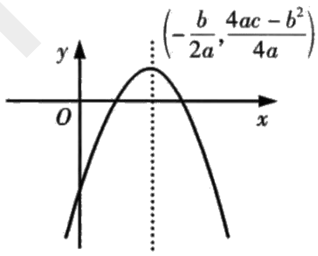
（1）基本公式

一般式：$y=ax^2+bx+c$（$a\neq0$）

顶点式：$y=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\dfrac{4ac-b^2}{4a}$（$a\neq0$）

交点式：$y=a(x-x_1)(x-x_2)$（$a\neq0$）

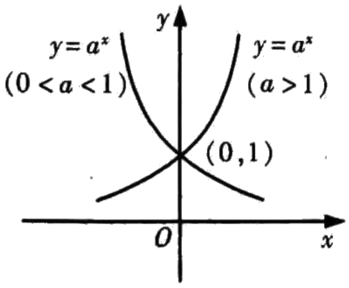
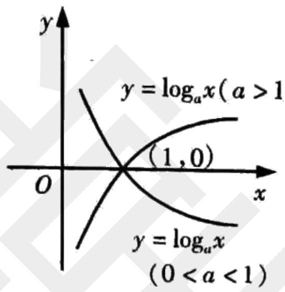
（2）函数$y=ax^2+bx+c$（$a\neq0$）的图像和性质

一元二次函数		
函数式	$y=ax^2+bx+c$（$a\neq0$）	
a的取值	$a>0$	$a<0$
定义域	R	R
开口方向	开口向上	开口向下
图像		
顶点坐标	$(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a})$	
y轴截距	$y=c$（当$c=0$时，一元二次函数图像过坐标原点）	
与y轴的交点	（0，c）	（0，$-c$）
对称轴	关于直线$x=-\dfrac{b}{2a}$对称（当$b=0$时，一元二次函数图像关于y轴对称）	
单调性	在$x\leq-\dfrac{b}{2a}$上单调递减 在$x>-\dfrac{b}{2a}$上单调递增	在$x\leq-\dfrac{b}{2a}$上单调递增 在$x>-\dfrac{b}{2a}$上单调递减
最大值与最小值	当$x=-\dfrac{b}{2a}$时，$y_{最小值}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$	当$x=-\dfrac{b}{2a}$时，$y_{最大值}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$

注意：$y=ax^2$是二次函数的特殊形式，即b、c=0 的情况. $y=ax^2$关于y轴对称，顶点坐标是（0，0）.

2. 指数函数与对数函数

（1）指数函数与对数函数的图像和性质

		指数函数	对数函数
函数式		$y=a^x\ (a>0,a\neq 1)$	$y=\log_a x\ (a>0,a\neq 1)$
定义域		R	（0，＋∞）
值域		（0，＋∞）	R
图像			
两者关系		$y=a^x$与$y=\log_a x$互为反函数，两者图像关于$y=x$对称	
奇偶性		非奇非偶	
性质	①	$y>0$（图像在x轴上方）	$x>0$（图像在y轴右方）
	②	$a^0=1$【图像恒过（0，1）】	$\log_a 1=0$【图像恒过（1，0）】
	③	$a>1$时，$a^x\begin{cases}>1,(x>0)\\=1,(x=0)\\<1,(x<0)\end{cases}$ $0<a<1$时，$a^x\begin{cases}<1,(x>0)\\=1,(x=0)\\>1,(x<0)\end{cases}$	$a>1$时，$\log_a x\begin{cases}>0,(x>1)\\=0,(x=1)\\<0,(0<x<1)\end{cases}$ $0<a<1$时，$\log_a x\begin{cases}<0,(x>1)\\=0,(x=1)\\>0,(0<x<1)\end{cases}$
	④	$a>1$时，在R上是单调递增 $0<a<1$时，在R上是单调递减	$a>1$时，在$(0,+\infty)$上是单调递增 $0<a<1$时，在$(0,+\infty)$上是单调递减
	⑤	$a>1$时，底数越大，图像越靠近y轴 $0<a<1$时，底数越小，图像越靠近y轴	$a>1$时，底数越大，图像越靠近x轴 $0<a<1$时，底数越小，图像越靠近x轴

（2）指数函数运算公式

$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$	$a^m\div a^n=a^{m-n}$	$(a^m)^n=a^{mn}$	$(ab)^n=a^nb^n$	$\left(\dfrac{b}{a}\right)^n=\dfrac{b^n}{a^n}$	$a^0=1\ (a\neq 0)$

$a^{\frac{n}{m}}=\sqrt[m]{a^n}$， 特别的$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}$，$\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}$ $(a\ge 0)$	$a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$，特别的$\left(\dfrac{b}{a}\right)^{-n}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^n$

（3）对数函数运算公式

设$a>0$，$a\ne 1$，$b,m,n>0$，那么有如下计算法则：

同底对数	$\log_a m+\log_a n=\log_a mn$；$\log_a m-\log_a n=\log_a \dfrac{m}{n}$
幂的对数	$\log_a m^n=n\log_a m$；$\log_{a^m} b^n=\dfrac{n}{m}\log_a b$
换底公式	$\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$，一般$c$取 10 或$e$
对数恒等式	$a^{\log_a n}=n$；$\log_a a^m=m$

二、一元二次方程

1. 基本性质

一般形式	$ax^2+bx+c=0\ (a\ne 0)$
一般形式的解	$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\ (\Delta=b^2-4ac\ge 0)$
根的判别式	$\Delta=b^2-4ac\begin{cases}\Delta>0 \text{ 有两个不相等的实数根 } x_1=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},x_2=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\\ \Delta=0 \text{ 有两个相等的实数根 } x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}\\ \Delta<0 \text{ 没有实数根}\end{cases}$
根与系数关系 （韦达定理）	$x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$；$x_1x_2=\dfrac{c}{a}$

2. 运算公式（韦达定理拓展）

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=-\frac{b}{c}$$

$$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{(x_1x_2)^2}=\frac{b^2-2ac}{c^2}$$

$$|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-\frac{4c}{a}}=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|}$$

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\frac{b^2-2ac}{a^2}$$

$$x_1^2-x_2^2=(x_1+x_2)(x_1-x_2)$$

$$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)(x_1^2+x_2^2-x_1x_2)$$

3. 两根的符号情况 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$

（1）方程有两个正根 $\begin{cases}x_1+x_2>0\\ x_1x_2>0\\ \Delta\geq 0\end{cases}$.

（2）方程有两个负根 $\begin{cases}x_1+x_2<0\\ x_1x_2>0\\ \Delta\geq 0\end{cases}$，可简化为 a,b,c 同号且 $\Delta\geq 0$.

（3）方程有一正根一负根 $\begin{cases}x_1x_2<0\\ \Delta>0\end{cases}$，可简化为 a,c 异号即可.

若再要求|正根|>|负根|，有 $\begin{cases}x_1+x_2>0\\ x_1x_2<0\\ \Delta>0\end{cases}$.

三、不等式

1. 基本性质

（1）传递性：$a>b,b>c\Rightarrow a>c$.

（2）同向相加性：$\left.\begin{matrix}a>b\\ c>d\end{matrix}\right\}\Rightarrow a+c>b+d$.

（3）同向皆正相乘性：$\left.\begin{matrix}a>b>0\\ c>d>0\end{matrix}\right\}\Rightarrow ac>bd$.

（4）皆正倒数性：$a>b>0\Rightarrow\frac{1}{b}>\frac{1}{a}>0$

（5）皆正乘（开）方性：$a>b>c\Rightarrow a^n>b^n>0(n\in Z_+)$

2. 分式不等式

$\frac{f(x)}{g(x)}>0(<0)\Leftrightarrow f(x)\cdot g(x)>0(<0)$.

$\frac{f(x)}{g(x)}\geq 0(\leq 0)\Leftrightarrow f(x)\cdot g(x)\geq 0(\leq 0)$且$g(x)\neq 0$.

3. 一元二次不等式

	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
$ax^2+bx+c=0\ (a>0)$ **的根**	**有两相异实根** $x_1,x_2(x_1<x_2)$	**有两相等实根** $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$	**无实根**
$ax^2+bx+c>0\ (a>0)$ 的解集	$\{x\mid x<x_1或x>x_2\}$	$\left\{x\mid x\neq-\frac{b}{2a}\right\}$	R
$ax^2+bx+c<0\ (a>0)$ 的解集	$\{x\mid x_1<x<x_2\}$	$\varnothing$	$\varnothing$

四、均值不等式

1. 定义

当 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为 n 个正实数时，他们的算术平均数不小于几何平均数，即 $\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\geq\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$，当且仅当$x_1=x_2=\cdots=x_n$时，等号成立.

成立条件：一正二定三相等

一正：指的是所有数据均为正数.

二定：和定积最大；积定和最小.

三相等：当且仅当$x_1=x_2=\cdots=x_n$时，等号成立.

2. 常见形式

（1）$a,b\in R^+\Rightarrow a+b\geq 2\sqrt{ab},ab\leq\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$,当且仅当$a=b$时等号成立.

（2）$a,b,c\in R^{+}\Rightarrow a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc},abc\leq\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{3}$,当且仅当$a=b=c$时等号成立

（3）$a,b\in R\Rightarrow a^{2}+b^{2}\geq 2ab,ab\leq\frac{a^{2}+b^{2}}{2}$,当且仅当$a=b$时等号成立.

（4）$a+\frac{1}{a}\geq 2\left(a>0\right)$（当且仅当$a=1$时等号成立）；$a+\frac{1}{a}\leq -2\left(a<0\right)$（当且仅当$a=-1$时等号成立）

3. 特殊

（1）伯努利不等式：设$n\in N^{+},n>1,t>0$，则$t^{n}\geq 1+n(t-1)$，当且仅当$t=1$时等号成立.

（2）柯西不等式：已知实数a,b,c,d，则$(a^{2}+b^{2})(c^{2}+d^{2})\geq(ac+bd)^{2}$，$\sqrt{(a^{2}+b^{2})(c^{2}+d^{2})}\geq\left|ac+bd\right|$，当且仅当$ad=bc$时等号成立.

第四章 平面几何

一、三角形

1. 三角形的边和角

（1）任意两边之和大于第三边，即 $a+b>c$；任意两边之差小于第三边，即 $a-b<c$.

（2）三角形内角之和 180°，外角等于不相邻的两个内角之和.

（3）三角形中大边对大角，大角对大边.

（4）直角三角形中，30°角的对应边是斜边的一半，三边之比为 $1:\sqrt{3}:2$.

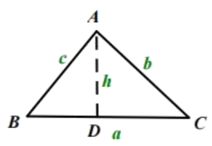
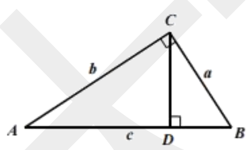
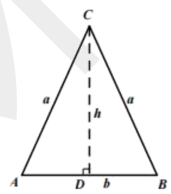
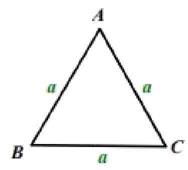
直角三角形中，一个内角为 45°，三边之比为 $1:1:\sqrt{2}$.

（5）在锐角三角形中，最长边的平方＜剩余两边的平方和.

在直角三角形中，最长边的平方＝剩余两边的平方和（勾股定理）.

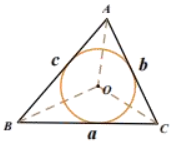
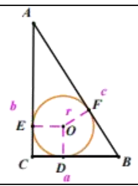
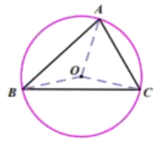
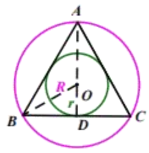
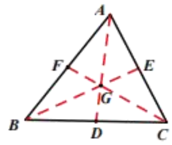
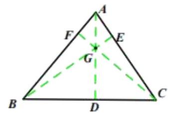
在钝角三角形中，最长边的平方＞剩余两边的平方和.

2. 三角形的性质及相关公式

名称	一般三角形	直角三角形	等腰三角形	等边三角形
图形				
相关内容及公式	$S=\frac{1}{2}ah$ $S=\frac{1}{2}ab\sin C$ $=\frac{1}{2}bc\sin A$ $=\frac{1}{2}ac\sin B$	（1）勾股定理：$a^2+b^2=c^2$ （2）常用的勾股数： （3，4，5）；（6，8，10）； （5，12，13）；（7，24，25）； （8，15，17）	等腰三角形的顶角平分线、底边上的中线，底边上的高重合，即“三线合一”	$h=\frac{\sqrt{3}}{2}a$ $S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

3. 三角形的四心

名称	内心	外心	重心	垂心
定义	内切圆的圆心； 顶角的角平分线的交点	外接圆的圆心； 底边中垂线的交点	底边中线的交点	底边高线的交点

名称	内心	外心	重心	垂心
图形	 	 		
相关性质	（1）内心到各边距离相等； （2）$S=\frac{1}{2}(a+b+c)r$ $=\frac{1}{2}rC_{周长}$ （3）$Rt\Delta$中：$r=\frac{a+b-c}{2}$	（1）外心到各顶点距离相等； （2）等边△的外接圆与内切圆半径之比：$\frac{R}{r}=\frac{2}{1}$	$\frac{AG}{GD}=\frac{BG}{GE}=\frac{CG}{GF}=\frac{2}{1}$	/

4. 三角形全等与相似

（1）全等、相似的判定

全等的判定		相似的判定
SSS（边边边）	三边对应相等的三角形全等	对应边成比例，对应角相等
SAS（边角边）	两边及其夹角对应相等的三角形全等	
ASA（角边角）	两角及其夹边对应相等的三角形全等	只需两对应角相等
AAS（角角边）	两角及其一角的对边对应相等的三角形全等	
HL（斜边、直角边）	斜边及一条直角边相等的直角三角形全等	只需一锐角相等

（2）相似结论

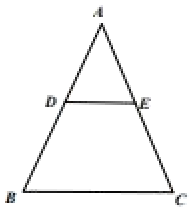
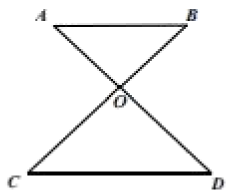
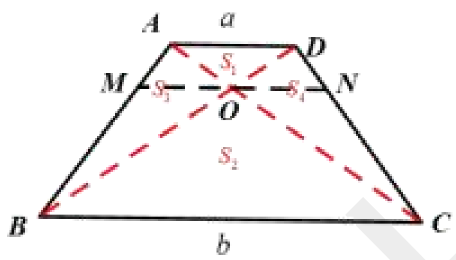
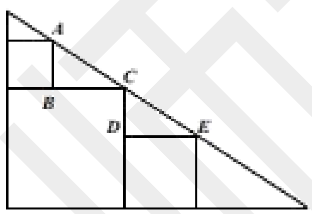
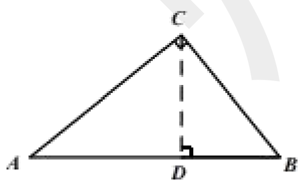
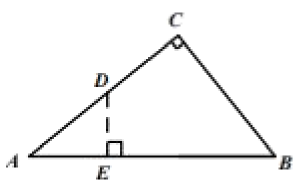
相似三角形（相似图形）对应边的比相等（即为相似比）. $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}=k$.

相似三角形（相似图形）的高、中线、角平分线的比也等于相似比.

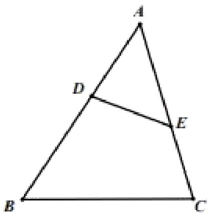
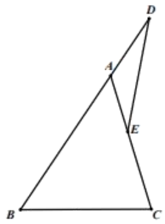
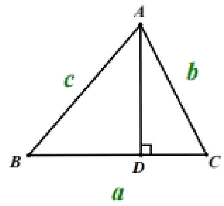
相似三角形（相似图形）的周长比等于相似比. $\frac{C_1}{C_2}=k$.

相似三角形（相似图形）的面积比等于相似比的平方. $\frac{S_1}{S_2}=k^2$.

3. 相似模型

图	模型
	A 字型：ΔADE~ΔABC
	8 字型：ΔABO~ΔDCO
	梯形：ΔADO~ΔCBO $\frac{AD}{CB}=\frac{AO}{CO}=\frac{DO}{BO}=\frac{a}{b}=\frac{S_1}{S_3}=\frac{S_4}{S_2}$ 梯形面积三条性质：$\frac{S_1}{S_2}=\left(\frac{a}{b}\right)^2$，$S_3=S_4,S_1S_2=S_3S_4$ $MN // AD, MN=\frac{2ab}{a+b}$（调和平均数）
	楼梯图形：ΔABC~ΔCDE
	双垂直图形： ΔACD~ΔCBD~ΔABC ΔADE~ΔABC

（4）（拓展）余弦定理与鸟头定理

鸟头定理：共角三角形		余弦定理
		
$\frac{S_{\Delta ADE}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot AD\cdot AE\cdot\sin\angle A}{\frac{1}{2}\cdot AB\cdot AC\cdot\sin\angle A}$ $=\frac{AD\cdot AE}{AB\cdot AC}$	$\frac{S_{\Delta ADE}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot AD\cdot AE\cdot\sin\angle DAE}{\frac{1}{2}\cdot AB\cdot AC\cdot\sin\angle BAC}$ $=\frac{AD\cdot AE}{AB\cdot AC}$	$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$ $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ $a^2+b^2=c^2\Leftrightarrow$ 直角Δ $a^2+b^2>c^2\Leftrightarrow$ 锐角Δ $a^2+b^2<c^2\Leftrightarrow$ 钝角Δ

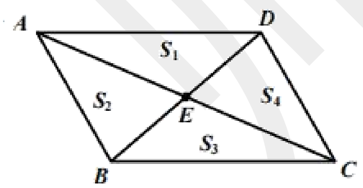
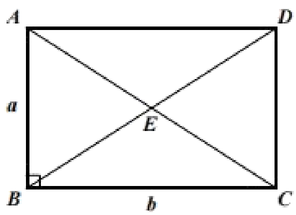
二、四边形

1. 边与角

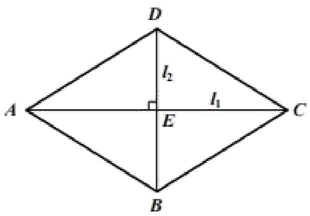
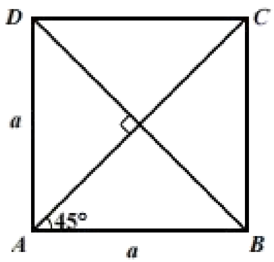
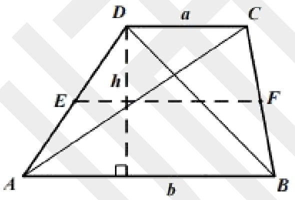
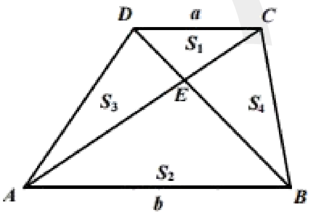
（1）n边形内角和：$(n-2)\times180^\circ$.

（2）n边形对角线条数：$\frac{(n-3)\times n}{2}$.

2. 四边形的性质及相关公式

名称	图形	相关内容及公式
平行四边形		（1）定义：一组对边平行且相等的四边形叫平行四边形 （2）性质： ①两条对角线 AC 和 BD 互相平分 ②两条对角线 AC 和 BD 将整个平行四边形面积四等分 （3）公式：$S_{平行四边形}=$底边$\times$高
矩形		（1）定义：有一个角是 90°的平行四边形叫做矩形 （2）性质： ①平行四边形的所有性质都满足 ②矩形的对角线相等 （3）公式：$C_{周长}=2\cdot(a+b)$；$S_{面积}=ab$

师大课堂

名称	图形	相关内容及公式
菱形		（1）定义：有一组邻边相等的平行四边形叫做菱形 （2）性质： ①两条对角线 AC 和 BD 互相垂直且平分 ②菱形面积等于对角线乘积的一半 （3）公式：$S_{菱形}=\frac{1}{2}\cdot l_1\cdot l_2$
正方形		（1）定义：四条边都相等、四个角都是直角的四边形是正方形 （2）性质： ①对角线互相垂直，对角线相等且互相平分，每条对角线平分一组对角 ②既是中心对称图形，又是轴对称图形（有四条对称轴） ③正方形的一条对角线把正方形分成两个全等的等腰直角三角形，对角线与边的夹角是 45° ④正方形的两条对角线把正方形分成四个全等的等腰直角三角形 ⑤正方形具有平行四边形、菱形、矩形的一切性质与特性 （3）公式：$C_{周长}=4a$；$S_{面积}=a^2$；对角线 $AC=BD=\sqrt{2}a$
梯形		（1）定义：只有一组对边平行的四边形叫梯形 （2）性质： 两腰中点连线 EF 平行于上底和下底 （3）公式：$EF=\frac{1}{2}(a+b)$；$S_{梯形}=\frac{(a+b)\cdot h}{2}$ = 中位线×高
梯形（拓展）		（1）$\frac{S_1}{S_2}=\left(\frac{a}{b}\right)^2$ （2）$S_3=S_4$ （3）$S_1S_2=S_3S_4$

三、圆与扇形

1. 定义

把圆弧长度和半径的比值称为对一个圆周角的弧度.

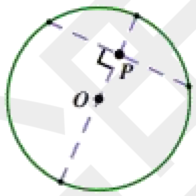
2. 度与弧度及常用的换算

（1）度与弧度的换算关系：1 弧度 $=\frac{180°}{\pi}$；$1°=\frac{\pi}{180°}$弧度.

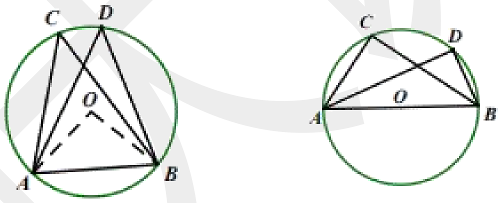
（2）常用的换算：

角度	30°	45°	60°	90°	120°	150°	180°	360°
弧度	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	2π

3. 圆中的基本性质



（1）弦：过点 P 的最长弦为直径，最短弦为过点 P 垂直于直径的弦.



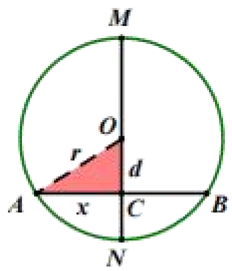
（2）同一段弦对应的圆周角相同，即 $\angle ACB=\angle ADB$；

同一段弦对应的圆心角是圆周角的 2 倍，即 $\angle AOB=2\angle ACB=2\angle ADB$；

直径对应的圆周角为 90°，即 $\angle ACB=\angle ADB=90°$.

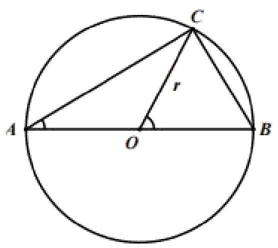
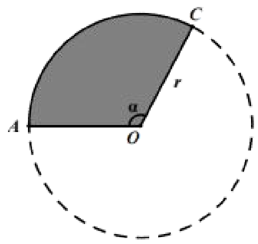
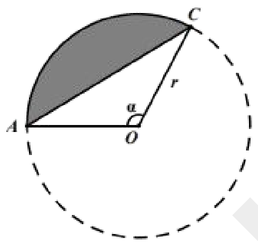
4. 垂径定理（重要）

平面、立体、解析几何中，解决圆与弦（直线）的问题时使用，构造直角三角形，利用勾股定理解决问题.

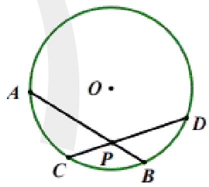
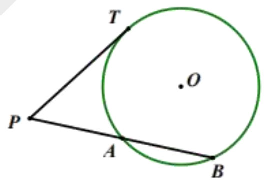
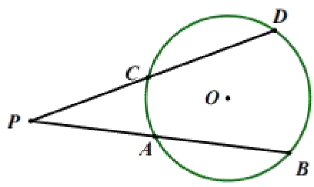


直径 MN 平分且垂直 AB：$r^2=d^2+x^2$.

5. 圆、扇形、弓形

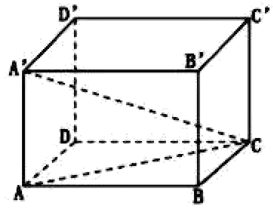
圆		（1）圆心为 O，半径为 r （2）公式：$C_{周长}=2\cdot\pi\cdot r$；$S_{圆}=\pi\cdot r^2$ （3）圆心角与圆周角： $\angle COB$ 为圆心角，$\angle CAB$ 为圆周角； 圆心角等于圆周角的 2 倍，即 $\angle COB=2\angle CAB$
扇形		（1）α为扇形角的角度，r 为扇形半径 （2）公式： 扇形弧长：$l=\frac{\alpha^\circ}{360^\circ}\cdot 2\cdot\pi\cdot r$ 扇形面积：$S_{扇形}=\frac{\alpha^\circ}{360^\circ}\cdot\pi\cdot r^2=\frac{1}{2}\cdot l\cdot r$
弓形		公式：$S_{弓形}=S_{扇形AOC}-S_{\Delta AOC}$

6. 拓展

相交弦定理		$PA\cdot PB=PC\cdot PD$
切割线定理		$PT^2=PA\cdot PB$
割线定理		$PA\cdot PB=PC\cdot PD$

第五章 立体几何

一、长方体



设 3 条相邻的棱边长是a,b,c.

1. 全面积：$F=2(ab+bc+ac)$.

2. 体积：$V=abc$.

3. 体对角线：$d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

4. 所有棱长和：$l=4(a+b+c)$.

当$a=b=c$时的长方体称为正方体，且有$S_{全}=6a^2,V=a^3,d=\sqrt{3}a$.

二、柱体

1. 柱体的分类

圆柱：底面为圆的柱体称为圆柱.

棱柱：底面对多边形的柱体称为棱柱，底面为n边形的就称为n棱柱.

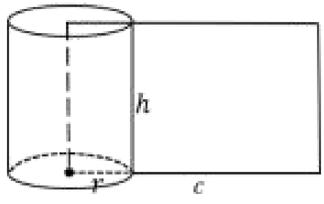
2. 柱体的一般公式

无论是圆柱还是棱柱，侧面展开图均为矩形，其中一边长为底面的周长，另一边为柱体的高.

侧面积：$S=$底面周长$\times$高（展开矩形的面积）.

体积：$V=$底面积$\times$高.

3. 对于圆柱的公式



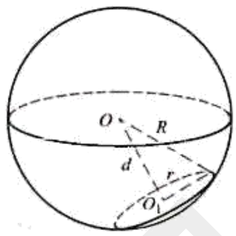
设高为h，底面半径为r.

体积：$V=\pi\cdot r^2\cdot h.$

侧面积：$S=2\cdot\pi\cdot r\cdot h$（其侧面展开图为一个长为$2\cdot\pi\cdot r$，宽为$h$的长方形）.

全面积：$F=S_{侧}+2S_{底}=2\cdot\pi\cdot r\cdot h+2\cdot\pi\cdot r^2$.

三、球



1. 面积：$S_{球面}=4\pi R^2$（R为球半径）.

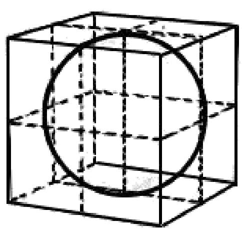
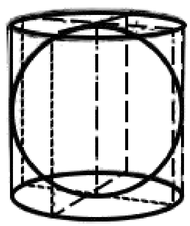
2. 体积：$V_{球}=\dfrac{4}{3}\pi R^3$（$R$为球半径）.

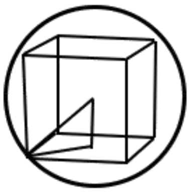
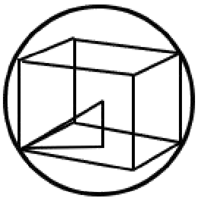
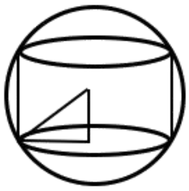
四、位置关系

设圆柱底面半径为r，球半径为R，圆柱的高为h.

几何体	内切球	外接球
长方体	无，只有正方体才有	体对角线 $l=2R$
正方体	棱长 $a=2R$	体对角线 $l=2R\left(2R=\sqrt{3}a\right)$
圆柱	只有轴截面是正方形的圆柱才有，此时有 $2r=h=2R$	$\sqrt{h^2+(2r)^2}=2R$

（补充）：

内切球（半径为R）		
	边长为a的正方体：$R=\dfrac{a}{2}$	等边圆柱（底面半径为r）：$R=r$

外接球（半径为R）				
	正方体（边长为a）	长方体（三边长分别为a，b，c）	圆柱（底面半径为r，高为h）	正三棱柱（边长为a，高为h）
	$R=\dfrac{\sqrt{3}a}{2}$	$R=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}$	$(2R)^2=(2r)^2+h^2$	$R^2=\left(\dfrac{\sqrt{3}a}{3}\right)^2+\left(\dfrac{h}{2}\right)^2$

师大课堂

第六章 数列

一、等差数列

1. 通项公式：$a_n=a_1+(n-1)d$；$a_m=a_n+(m-n)d$.

2. 前 n 项和公式：$S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d$.

3. 函数特征：$S_n=\dfrac{d}{2}n^2+\left(a_1-\dfrac{d}{2}\right)n$.

注意：当公差 d 不为 0 时，可将其抽象成关于 n 的二次函数.

4. 性质

（1）a,b,c 成等差数列→ b 是 a和c 的等差中项→ $2b=a+c$.

（2）若 $m,n,p,q\in Z^+$，$m+n=p+q$，则 $a_m+a_n=a_p+a_q$；若 $m+n=2p$，则 $a_m+a_n=2a_p$.

（3）若 S_n 为等差数列的前 n 项和，则 S_n，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$，…仍为等差数列，其公差 n^2d.

（4）$S_n=na_{\frac{(n+1)}{2}}$，例如 $S_7=7a_{\frac{(7+1)}{2}}=7a_4$.

（5）两个等差数列前 n 项和之比有：$\dfrac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}}=\dfrac{a_n}{b_n}$.

二、等比数列

1. 通项公式：$a_n=a_1q^{n-1}$；$a_m=a_nq^{m-n}$.

2. 前 n 项和公式：$S_n=\begin{cases}na_1 & (q=1)\\ \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\dfrac{a_1-a_nq}{1-q} & (q\neq 0且q\neq 1)\end{cases}$.

3. 函数特征：$S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\dfrac{a_1}{1-q}-\dfrac{a_1}{1-q}\cdot q^n=B-Bq^n(q\neq 1)$

4. 性质

（1）a,b,c 成等比数列→ b 是 a和c 的等比中项→ $b^2=ac$.

（2）若 $m,n,p,q\in Z^+$，$m+n=p+q$，则 $a_m\cdot a_n=a_p\cdot a_q$；若 $m+n=2p$，则 $a_m\cdot a_n=a_p^2$.

（3）若 S_n 为等差比列的前 n 项和，则 S_n，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$，…仍为等比数列，其公比 q^n.

（4）当 $q\neq 1$ 时，$\frac{S_m}{S_n}=\frac{1-q^m}{1-q^n}$.

（5）无穷等比数列所有项之和：$S=\frac{a_1}{1-q}(|q|<1)$.

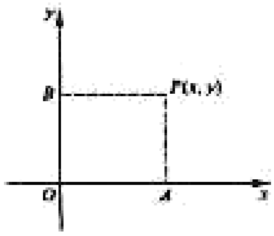
三、S_n 与 a_n 的关系

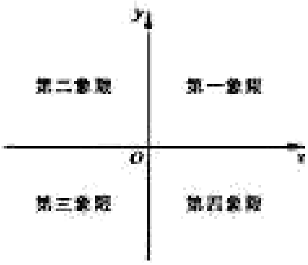
$$a_n=\begin{cases}a_1=S_1(n=1)\\ S_n-S_{n-1}(n\geq 2)\end{cases}$$

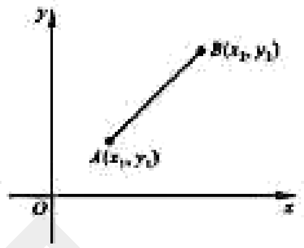
师大课堂

第七章 解析几何

一、平面直角坐标系







1. 点在平面直角坐标系中的表示：$P(x,y)$.

2. 两点距离公式：两点 $A(x_1,y_1)$与$B(x_2,y_2)$之间的距离 $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

3. 中点坐标公式：两点 $A(x_1,y_1)$与$B(x_2,y_2)$的中点坐标$\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$.

4. 点到直线的距离：点 $P(x_1,y_1)$ 到直线 Ax＋By＋C＝0 的距离为 d，则 $d=\dfrac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

5. 两平行直线之间的距离：

设 l_1：$ax+by+c_1=0$；l_2：$ax+by+c_2=0$，那么 l_1与l_2之间的距离为 $d=\dfrac{|c_1-c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

二、平面直线的倾斜角和斜率

1. 倾斜角：直线与 x 轴正方向所成的夹角，称为倾斜角，记为α. 其中α ∈ [0，π).

2. 斜率：倾斜角的正切值为斜率，记为 $k=\tan\alpha,\left(\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}\right)$.

倾斜角 α	0°	30° （$\frac{\pi}{6}$）	45° （$\frac{\pi}{4}$）	60° （$\frac{\pi}{3}$）	90° （$\frac{\pi}{2}$）	120° （$\frac{2\pi}{3}$）	135° （$\frac{3\pi}{4}$）	150° （$\frac{5\pi}{6}$）	180° （2π）
斜率 $k=\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	不存在	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	∞

3. 两点斜率公式：设直线l上有两个点$P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)$，则$k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1},(x_1\neq x_2)$.

三、直线方程

名称	已知条件	方程形式	说明
点斜式	直线过点$P_1(x_1,y_1)$和斜率k	$y-y_0=k(x-x_0)$	不包括 y 轴和平行于 y 轴的直线
斜截式	斜率k和直线在y轴的截距b	$y=kx+b$	不包括 y 轴和平行于 y 轴的直线
截距式	直线在x轴上的截距是a（$a\neq0$） 直线在y轴上的截距是b（$b\neq0$）	$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$	不包括经过原点的直线以及平行于坐标轴的直线
两点式	直线过点$P_1(x_1,y_1)$和点$P_2(x_2,y_2)(x_1\neq x_2,y_1\neq y_2)$	$\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$	不包括坐标轴和平行于坐标轴的直线
一般式	A、B不同时为零	$Ax+By+C=0$	任何一条直线都可以写成此种形式

四、圆的方程

1. 圆的标准方程

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，其中（a，b）是圆心的坐标，r是圆的半径.

2. 圆的一般方程

$x^2+y^2+ax+by+c=0$.

配方后得到：$\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{b}{2}\right)^2=\dfrac{a^2+b^2-4c}{4}$，要求$a^2+b^2-4c>0$. 圆心坐标$\left(-\dfrac{a}{2},-\dfrac{b}{2}\right)$，

半径$r=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}>0$.

五、位置关系

1. 两条直线位置关系

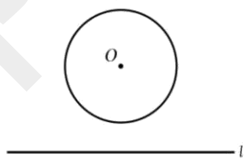
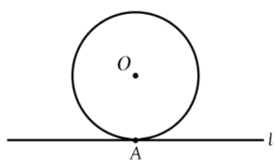
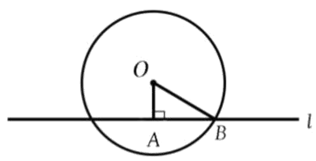
两条直线的位置关系	**斜截式** l_1：$y=k_1x+b_1$ l_2：$y=k_2x+b_2$	**一般式** l_1：$a_1x+b_1y+c_1=0$ l_2：$a_2x+b_2y+c_2=0$
平行	$l_1 // l_2 \Leftrightarrow k_1=k_2$，$b_1 \neq b_2$	$l_1 // l_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$
相交	$k_1 \neq k_2$	$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$
垂直	$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1k_2=-1$	$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1}\cdot\frac{a_2}{b_2}=-1 \Leftrightarrow a_1a_2+b_1b_2=0$

2. 点与圆的位置关系

点 $P(x_p,y_p)$，圆 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$，则 $(x_p-x_0)^2+(y_p-y_0)^2\begin{cases}<r^2,\text{点在圆内.}\\=r^2,\text{点在圆上.}\\>r^2,\text{点在圆外.}\end{cases}$

3. 直线与圆位置关系

直线l：$y=kx+b$；圆O：$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$，d为圆心（x_0，y_0）到直线l的距离.

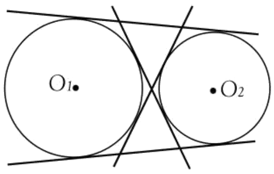
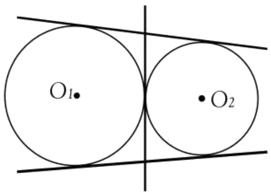
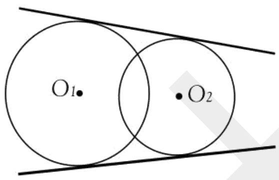
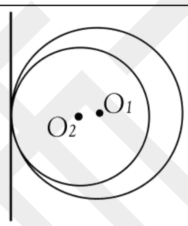
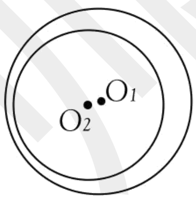
直线与圆位置关系	图形	成立条件（几何表示）
直线与圆相离		$d>r$
直线与圆相切		$d=r$
直线与圆相交		$d<r$

注意：在直线与圆的位置关系中，常常用到一个重要的三角形 $Rt\Delta OAB$ 做计算.

4. 圆与圆位置关系

圆 O_1： $(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=r_1^2$； 圆 O_2： $(x-x_2)^2+(y-y_2)^2=r_2^2$

（设 $r_1>r_2$ ）； d 为圆心 (x_1,y_1) 与 (x_2,y_2) 的圆心距.

两圆位置关系	图形	成立条件（几何表示）	公共内切线条数	公共外切线条数
外离		$d>r_1+r_2$	2	2
外切		$d=r_1+r_2$	1	2
相交		$r_1-r_2<d<r_1+r_2$	0	2
内切		$d=r_1-r_2$	0	1
内含		$d<r_1-r_2$	0	0

5. 对称问题（五种基本对称）

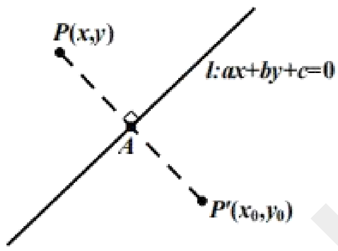
（1）点关于点对称

对称点为中点，利用中点坐标公式求解.

（2）点关于直线对称

A. $pp'\perp l$ 即斜率互为“负倒数”.

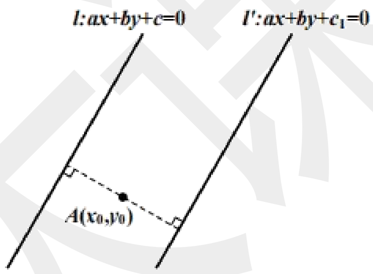
B. p 和 p' 的中点 A 在对称轴上即中点 A 满足对称轴方程.



（3）直线关于点对称

A. $l // l'$，即 l'： $ax+by+c_1=0$（这里只含有 c_1 一个未知数）.

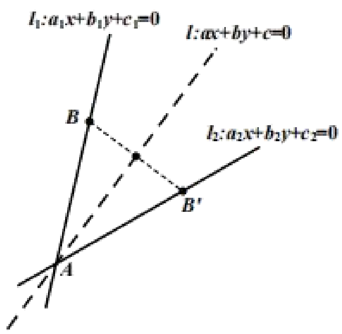
B. 对称点 A (x_0,y_0) 到直线 l 和 l' 距离相等（再利用点到直线距离公式可求 c_1）.



（4）直线关于直线对称

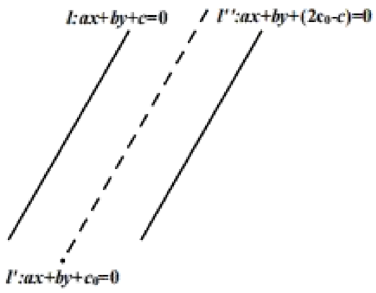
A. 三线共点，联立 l 与 l_1 求出点 A 坐标，其也满足 l_2 方程.

B. 在 l_1 上任取一点 B，求点 B 关于直线 l 对称的点 B'，点 B' 也满足 l_2 方程.



（5）平行直线对称

将对称轴视为“中点”，巧用中点坐标公式求解，l''： $ax+by+(2c_0-c)=0$.



（6）拓展——五种特殊对称

对称方式	**点** $p(x_0,y_0)$	**直线** l**：** $ax+by+c=0$	**规律**
关于 x 轴对称	$p'(x_0,-y_0)$	l'： $ax-by+c=0$	将 y 换成 $-y$
关于 y 轴对称	$p'(-x_0,y_0)$	l'： $-ax+by+c=0$	将 x 换成 $-x$
关于原点对称	$p'(-x_0,-y_0)$	l'： $ax+by-c=0$	将 x 换成 $-x$，将 y 换成 $-y$
关于 $y=x$ 对称	$p'(y_0,x_0)$	l'： $ay+bx+c=0$	将 x 与 y 交换
关于 $y=-x$ 对称	$p'(-y_0,-x_0)$	l'： $ay+bx-c=0$	将 x 换成 $-y$，将 y 换成 $-x$

第八章 排列组合

一、组合数

1. 基本公式

$$
\begin{aligned}
C_n^m &= \frac{\text{从}n\text{开始从大往小，数}m\text{个数连乘}}{\text{从}1\text{开始从小往大，数}m\text{个数连乘}} \\
&= \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m(m-1)\cdots\cdot 2\cdot 1} \\
&= \frac{n!}{m!(n-m)!} \\
&= \frac{A_n^m}{m!}
\end{aligned}
$$

2. 组合数的性质

（1） $C_n^m = C_n^{n-m}$

（2） $C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1}$

（3） $C_n^x = C_n^y \Rightarrow x = y$ 或 $x + y = n$

（4） $C_n^0 = C_n^n = 1$； $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$

（5） $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$

（6） $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \cdots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \cdots = 2^{n-1}$

二、排列数

1. 基本公式

$$P_n^m = A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

$$A_n^n = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 = n!$$

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!} = C_n^m \cdot m!$$

三、常用方法及例题

1. 相邻问题的捆绑法

【例 1】6 名同学排成一排，其中甲乙两人必须在一起的，不同排法共有多少种？

【解析】因甲、乙两人要排在一起，故将甲乙两人捆在一起，视做一人，与其余 4 人全排列. 共有A_5^5种方法，但甲乙两人之间的排列有A_2^2种方法，由分布乘法原理可知，共有$A_5^5\times A_2^2=240$ 种不同的排法.

2. 不相邻问题的插空法

【例 2】6 人站成一排，甲、乙、丙任何两人都不相邻的排法共有多少种？

【解析】第 1 步，除甲乙丙外，其他三个人的排法有A_3^3种；第 2 步，三个人共形成 4 个空，让甲乙丙三个人在这 4 个空中任选三个进行排列，其排法有A_4^3种，由分步乘法计数原理的共有$A_3^3\times A_4^3$种.

3. 错排问题穷举法

2 个元素错排共有 1 种排法；3 个元素错排共有 2 种排法；4 个元素错排共有 9 种排法；5 个元素错排共有 44 种排法.

【例 3】小明带了 1 张 5 元、4 张 2 元的纸币和 8 枚 1 元的硬币，现在他要买一本 8 元的小说，则他有____种付钱方式.

【解析】按照题目的要求，采用枚举可以把所有的排法列出，具体如下：

$8=5+2+1=5+1+1+1=2+2+2+2=2+2+2+1+1=2+2+1+1+1+1=2+1+1+1+1+1+1=1+1+1+1+1+1+1+1$. 一共 7 种.

4. 定序问题

【例 4】某班新年联欢会，原定的 5 个节目已排成节目单，开演前又增加了两个新节目，如果将这两个新节目插入原节目当中，那么不同插法的总数为多少？

【解析】方法一：新增加的节目分别记为甲和乙，要完成这一事件，可分成两步：第 1 步把甲插入共有 6 种方法，第 2 步把乙插入共有 7 种方法，应用分步乘法计数原理可知共用$6\times 7=42$ 种方法.

方法二：将 7 个节目进行全排列时，共有 A_7^7 种方法，而原有的 5 个节目全排列时共有A_5^5种方法，共排法种数为$A_7^7\div A_5^5=42$.

5. 分组问题与分配问题

【例 5】3 名医生和 6 名护士被分配到 3 所学校为学生体检，每校分配 1 名医生和 2 名护士，则不同的分配方法共有____.

【解析】先将 3 名医生和 6 名护士平均分为 3 组，有$C_6^2C_4^2=90$ 种分法，再分配给 3 所学校，共有 $90\times A_3^3=540$ 种不同的分配方法.

6. 隔板法

【例 6】10 个相同的小球放到 3 个不同的盒子中，每个盒子都不空，共有____种不同的放法.

【解析】10 个相同的小球中有 9 个空档，从 9 个空档中任选 2 个插入隔板，将小球分成 3 部分，再相应地放入 3 个小盒中，有 C_9^2＝36 种不同的放法.

四、二项式定理

1. 定义（其中k＝0，1，2，…，n）：

$$(a+b)^n=\overbrace{(a+b)(a+b)\cdots(a+b)}^{n个}=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+C_n^ka^{n-k}b^k+C_n^nb^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^ka^{n-k}b^k$$

2. 通项公式

二项式展开式中，共有n＋1 项（原因：k＝0，1，2，…，n）

其中第k＋1 项为$T_{k+1}=C_n^ka^{n-k}b^k$（k＝0，1，2，…，n）.

3. 总结归纳

二项式定理		公式$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+\cdots+C_n^{n-1}ab^{n-1}+C_n^nb^n$所表示的定理称为二项式定理
二项式展开式的特征	通项公式	第k＋1 项为$T_{k+1}=C_n^ka^{n-k}b^k$（k＝0，1，2，…，n）
	项数	展开式共n＋1 项
	指数	a的指数，由$n\xrightarrow{逐项减1}0$；b的指数：由$0\xrightarrow{逐项加1}n$；各项a与b的指数之和为n
	展开式的最大系数	当n为偶数时，则中间项$\left(第\frac{n}{2}+1项\right)$系数$C_n^{\frac{n}{2}}$最大； 当$n$为奇数时，则中间项$\left(第\frac{n+1}{2}和\frac{n+3}{2}项\right)$系数$C_n^{\frac{n+1}{2}}$最大
展开式系数之间的关系		（1）$C_n^r=C_n^{n-r}$，即与首末等距的两项系数相等； （2）$C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=2^n$，即展开式各项系数之和为 2^n； （3）$C_n^0+C_n^2+C_n^4\cdots=C_n^1+C_n^3+C_n^5\cdots=2^{n-1}$，即奇数项系数和等于偶数项系数和

第九章 概率

一、古典概型

对于古典概型，如果随机事件A包含的基本事件个数为m，基本事件的总数为n，则$P(A)=\dfrac{A\text{包含的基本事件的个数}}{\text{基本事件的总数}}=\dfrac{m}{n}$.

（1）抽奖、尝试密码

（2）不放回取球

（3）取出后放回（分房模型）

（4）至少和至多

二、独立事件

1. 独立不重复：设A，B是两相互独立事件，则$P(AB)=P(A)P(B)$.

2. 对立事件：要么事件A发生，要么事件B发生，$P(A)+P(B)=1$.

提供“正难则反”的思想：$P(\text{正})=1-P(\text{反})$.

三、伯努利模型

1. 伯努利模型的常用背景

（1）连续的n次的射击；

（2）连续的掷n次硬币；

（3）连续的n次投篮.

2. 伯努利模型的公式

（1）设在一次试验中，事件A发生的概率为$p(0<p<1)$，则在n重伯努利试验中，事件A恰好发生k次的概率为：$p_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},(k=0,1,2,\dots,n)$.

（2）设在一次试验中，事件A首次发生的概率为$p(0<p<1)$，则在伯努利试验序列中，事件A在第k次试验中才首次发生的概率为$p(1-p)^{k-1},(k=1,2,\dots)$.