管理类专业学位硕士研究生入学统一考试

数学

管理类联考 笔试一本通

适用于MBA、MPA、MPAcc、MEM

前 言

这是一套针对管理类联考专业学位硕士研究生入学考试应试备考的必备丛书。

管理类联考专业包括工商管理硕士（MBA）、公共管理硕士（MPA）、工程管理硕士（MEM，含四个方向：工程管理、项目管理、工业工程与管理、物流工程与管理）、旅游管理硕士（MTA）、会计硕士（MPAcc）、图书情报硕士（MLIS）、审计硕士（MAud）。

本套丛书是师大老师们根据自身的教学教研经验，发挥专业知识能力，以最新考试大纲为蓝本，以科学化的备考方法为指导，以最有效、最快速提高学生成绩为目的，形成的一整套系统、科学的教材。

本书《管综-数学笔试一本通》是系列图书之一，围绕的是数学这一科目，数学在管理类联考中考查考生运用数学基础知识、基本方法分析和解决问题的能力；分析、推理、论证等逻辑思维能力；文字材料理解能力以及分析能力。试题涉及初等数学、社会热点，考查的知识点基本是小学、初中、高中学习的内容，其内容总体难度低于高考数学。

（一）算术	1. 整数 （1）整数及其运算 （2）整除、公倍数、公约数 （3）奇数、偶数 （4）质数、合数 2. 分数、小数、百分数 3. 比与比例 4. 数轴与绝对值
（二）代数	1. 整式 （1）整式及其运算 （2）整式的因式与因式分解 2. 分式及其运算 3. 函数 （1）集合 （2）一元二次函数及其图像 （3）指数函数、对数函数 4. 代数方程

	（1）一元一次方程 （2）一元二次方程 （3）二元一次方程组 5. 不等式 （1）不等式的性质 （2）均值不等式 （3）不等式求解 一元一次不等式（组），一元二次不等式，简单绝对值不等式，简单分式不等式 6. 数列、等差数列、等比数列
（三）几何	1. 平面图形 （1）三角形 （2）四边形（矩形、平行四边形、梯形） （3）圆与扇形 2. 空间几何体 （1）长方体 （2）柱体 （3）球体 3. 平面解析几何 （1）平面直角坐标系 （2）直线方程与圆的方程 （3）两点间距离公式与点到直线的距离公式
（四）数据分析	1. 计数原理 （1）加法原理、乘法原理 （2）排列与排列数 （3）组合与组合数 2. 数据描述 （1）平均值 （2）方差与标准差 （3）数据的图表表示（直方图，饼图，数表）

	3.概率 （1）事件及其简单运算 （2）加法公式 （3）乘法公式 （4）古典概型 （5）伯努利概型

希望考生根据自己的需求制定合理的复习计划，在参考本系列丛书的基础上，真正做到吃透每一本书中的每一个考点，真正掌握专业硕士联考的核心，相信大家一定能在考试中取得自己理想的成绩。

最后祝愿所有的考研人，成功上岸，实现梦想！

目 录

第一章 算术

第一节 实数

知识点 1 实数及其运算

1. 实数的概念

有理数和无理数统称为实数.

数学上，实数定义为与数轴上的点相对应的数. 实数可以直观地看作有限小数与无限小数，实数和数轴上的点一一对应. 实数集通常用字母 R 表示，实数是不可数的.

2. 实数的分类

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\left\{\begin{array}{l}\text{整数}\begin{cases}\left.\begin{array}{l}\text{正整数}\\\text{零}\end{array}\right\}\text{自然数}\\\text{负整数}\end{cases}\\\text{分数}\begin{cases}\text{正分数}\\\text{负分数}\end{cases}\end{array}\right\}\text{有限小数或无限循环小数}\\\text{无理数}\left.\begin{cases}\text{正无理数}\\\text{负无理数}\end{cases}\right\}\text{无限不循环小数}\end{cases}$$

3. 有理数与无理数

（1）有理数【整数和分数统称为有理数】

凡是能写成 $m=\frac{p}{q}$（p、q为整数，$q\neq0$，p、q互质）的数 m 都是有理数.

（2）无理数【无限不循环小数】

凡不能写成 $m=\frac{p}{q}$（p、q为整数，$q\neq0$，p、q互质）的数 m 都是无理数.

（3）有理数与无理数的运算【熟记】

有理数±有理数＝有理数	有理数×有理数＝有理数	有理数÷非零有理数＝有理数
有理数±无理数＝无理数	非零有理数×无理数＝无理数	非零有理数÷无理数＝无理数
无理数±无理数＝不确定	无理数×无理数＝不确定	无理数÷无理数＝不确定

（4）常见的无理数

$$
\text{常见无理数}\begin{cases}\pi=3.14\cdots,\ e=2.7182\cdots\\ \text{开不尽的根号：如 }\sqrt{2}\\ \text{取不尽的对数}\end{cases}
$$

其中：π 为圆周率；e 为自然常数.

技巧点拨

【熟记】

π	e	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{7}$	$\sqrt{8}$	$\sqrt{10}$
3.142	2.718	1.414	1.732	2.236	2.449	2.646	2.828	3.162

4. 整数

（1）定义：整数是正整数、0 和负整数的集合，像－3，－2，－1，0，1，2，3，10 等这样的数；大于 0 的整数为正整数，小于 0 的整数为负整数；零既不是正整数也不是负整数，它是介于正整数和负整数的数.

（2）整数的分类

$$
\text{整数}\begin{cases}\left.\begin{array}{l}\text{正整数}\\ \text{零}\end{array}\right\}\text{自然数}\\ \text{负整数}\end{cases}\qquad \text{整数}\begin{cases}\text{奇数}\\ \text{偶数}\end{cases}
$$

5. 自然数

0 与正整数叫做自然数，又称为非负整数.

自然数 N：0，1，2，…

注意：最小的自然数为 0.

知识点 2 整除、公倍数、公约数

1. 数的整除

$$
\underset{\text{（被除数）}}{f}\div\underset{\text{（除数）}}{g}=\underset{\text{（商数）}}{h}\cdots\underset{\text{（余数）}}{r}
$$

其中，f，h 为正整数，g，r均为正整数.

$f\div g$ 的表达方式：①f除以 g .②f被 g 除.③ g 除f.④ g 去除f

也可以写成乘法：$\underset{(被除数)}{f}=\underset{(除数)}{g}\times\underset{(商数)}{h}+\underset{(余数)}{r}$.

若 $0\leqslant r<g$，则存在唯一的 h，r，使得 $f=gh+r$.

当 $r=0$ 时，即 $f=gh$，称 f 可以被 g 整除. g，h 是 f 的约数（因数），f 是 g，h 的倍数，此时商数 $h=\dfrac{f}{g}$.

技巧点拨

能被 2 整除的数	个位为 0，2，4，6，8.
能被 3 整除的数	各数位数字之和必能被 3 整除.
能被 4 整除的数	末两位（个位和十位）数字必能被 4 整除.
能被 5 整除的数	个位为 0 或 5.
能被 6 整除的数	同时满足能被 2 和 3 整除的条件.
能被 7 整除的数	末三位数与末三位数以前的数字所表示的数之差能被 7 整除的整数.
能被 8 整除的数	末三位（个位、十位和百位）数字必能被 8 整除.
能被 9 整除的数	各数位数字之和必能被 9 整除.
能被 10 整除的数	个位必为 0.
能被 11 整除的数	从右向左，奇数位数字之和减去偶数位数字之和能被 11 整除（包括 0）.

2. 公倍数与公约数的定义

（1）公倍数

①公倍数：如果一个正整数 c 能被正整数 a 整除，又能被正整数 b 整除，则称 c 为 a 与 b 的公倍数.

②最小公倍数：a 与 b 公倍数中最小的一个，叫作它们的最小公倍数，记为 $[a,b]$.

（2）公约数

①约数：a 能够正整除 b，a 就是 b 的约数.

②公约数：如果一个正整数 c 既是正整数 a 的约数，又是正整数 b 的约数，那么 c 叫作 a 与 b 的公约数.

③最大公约数：两个数的公约数中最大的一个，叫作这两个数的最大公约数，记为(a,b).

若$(a,b)=1$，则称a与b互质.

3. 公倍数与公约数的定理

两个正整数的乘积等于他们的最大公约数和最小公倍数的乘积，即$ab=(a,b)\cdot[a,b]$.

4. 最小公倍数和最大公约数的求法

（1）短除法

例题精选

求 84 与 96 的最大公约数与最小公倍数.

【答案】

$$\begin{array}{r|cc} 2 & 84 & 96 \\ \hline 2 & 42 & 48 \\ \hline 3 & 21 & 24 \\ \hline & 7 & 8 \end{array}$$

故有：$84=2\times2\times3\times7$.

$96=2\times2\times3\times8$.

$(a,b)=2\times2\times3$.

$[a,b]=2\times2\times3\times7\times8$.

（2）质因数分解法

先把这几个数分解质因数，再把它们一切公有的质因数和其中几个数公有的质因数以及每个数独有的质因数全部连乘起来，所得的积就是它们的最小公倍数.

（3）公式法

由于两个数的乘积等于这两个数的最大公约数与最小公倍数的积，即$(a,b)\cdot[a,b]=ab$.

所以，求两个数的最小公倍数，就可以先求出它们的最大公约数，然后用上述公式求出它们的最小公倍数.

求多个自然数的最小公倍数，可以先求出其中两个数的最小公倍数，再求这个最小公倍数与第三个数的最小公倍数，依次求下去，直到最后一个为止. 最后所得的那个最小公倍数，就是所求的几个数的最小公倍数.

知识点 3 奇数、偶数

1. 奇数

不能被 2 整除的整数，可以表示为 $2n+1$ 或 $2n-1$. 其中，n 为整数.

2. 偶数

能被 2 整除的整数，可以表示为 $2n$. 其中，n 为整数.

3. 运算规律（奇偶性）

奇数±奇数=偶数	奇数×奇数=奇数
奇数±偶数=奇数	奇数×偶数=偶数
偶数±偶数=偶数	偶数×偶数=偶数

注意：0 是偶数. 两个相邻整数必为一奇一偶.

应试口诀

加减法中，同偶异奇；乘法中，有偶则偶.

知识点 4 质数、合数

1. 质数

如果一个大于 1 的正整数，只能被 1 和它本身整除，那么这个正整数叫作质数（质数也称素数）. 如 2，3，5，…

2. 合数

如果一个大于 1 的正整数除了能被 1 和它本身整除外，还能被其他的正整数整除，这个正整数叫作合数（或复合数）. 如 4，6，8，9，…

3. 分解质因数

把一个合数分解为若干个质因数的乘积的形式，称为分解质因数. 如 12=2×2×3.

任何合数都能写成几个质数的积.

4. 互质

公约数只有 1 的两个整数称为互质整数，如 4 和 9.

注意：不一定是质数才互质.

5. 既约分数

又称最简分数，指的是分子与分母互质的分数，其中分子、分母不一定为质数.

6. 重要性质

（1）质数和合数都在正整数范围，且有无数多个. 1 既不是质数也不是合数.

（2）2 是唯一的既是质数又是偶数的整数，即是唯一的偶质数. 大于 2 的质数必为奇数. 质数中只有一个偶数 2，最小的质数为 2.

（3）最小的合数为 4.

（4）如果两个质数的和或差是奇数，那么其中必有一个是 2；如果两个质数的积是偶数，那么其中也必有一个是 2.

技巧点拨

【熟记】

100 以内的质数：2，3，5，7，11，13，17，19，23，29，31，37，41，43，47，53，59，61，67，71，73，79，83，89，97. [最大的两位数质数：97]

知识点 5 平方根、算术平方根

1. 平方根

若 $x^2=a$，则 x 就为 a 的平方根，即 $x=\pm\sqrt{a}$.

0 的平方根仍为 0，负数没有平方根.

2. 算术平方根

一个正数有两个互为相反数的平方根，其中正的平方根称为算术平方根.

0 的平方根和算数平方根均为 0.

第二节 分数、小数、百分数

知识点 1 分数、小数、百分数

1. 分数

（1）定义：把单位“1”平均分成若干份，表示这样的一份或几份的数叫分数.

$$分数\begin{cases}真分数：分子<分母，如\dfrac{3}{7}\\[2ex]假分数：分子\geq分母，如\dfrac{7}{5}\end{cases}$$

（2）分数的运算：分数的四则运算“先通分，后约分”，最终化为最简分数.（通分找分母的最小公倍数.约分找分子与分母的最大公约数，最简分数为分子、分母互质.）

2. 小数

（1）定义：由整数部分和小数部分两部分所组成的数叫做小数.小数是实数的一种特殊的表现形式.所有分数都可以表示成小数，小数中的圆点叫做小数点，它是一个小数的整数部分和小数部分的分界号.其中整数部分是零的小数叫做纯小数，整数部分不是零的小数叫做混小数（或带小数）.

$$小数\begin{cases}纯小数：整数部分为\ 0\ 的小数，比如\ 0.21\\混小数：整数部分不为\ 0\ 的小数，比如\ 3.21\end{cases}$$

（2）小数的分类：

$$小数\begin{cases}有限小数：比如\ 0.21\\无限小数\begin{cases}循环小数\begin{cases}纯循环小数：比如\ 0.\dot{2}\dot{1}\\混循环小数：比如\ 0.3\dot{1}\dot{2}\end{cases}\\不循环小数：比如\ \sqrt{2}\end{cases}\end{cases}$$

①有限小数：小数部分后有有限个数位的小数.有限小数都属于有理数，可以化成分数形式.

②无限循环小数：从小数部分的某一位起，一个数字或几个数字，依次不断地重复出现的小数叫做循环小数.

③无限不循环小数：小数部分有无限多个数字，且没有依次不断地重复出现的一个数字或几个数字的小数叫做无限不循环小数.无限不循环小数也就是无理数，不能化成分数形

式.

（3）小数与分数互化

①有限小数化为分数

用 10，100，1 000 等做分母，如$0.21=\dfrac{21}{100}$.

②纯循环小数化为分数

要用 9，99，999 等这样的数作为分母，其中“9”的个数等于一个循环节数字的个数；一个循环节的数字所组成的数，就是这个分数的分子.

公式可表示为：$0.\underbrace{\dot{a}b\cdots\dot{g}}_{\text{循环节位数}}=\dfrac{ab\cdots g}{\underbrace{99\cdots9}_{\text{9的个数为循环节位数}}}$，如$0.\dot{2}\dot{1}=\dfrac{21}{99}=\dfrac{7}{33}$.

③混循环小数化为分数

分母要用 9 与 0，其中“9”的个数等于一个循环节数字的个数，“0”的个数等于不循环的数字个数；分子是不循环的数字与一个循环节的数字所组成的数，再减去不循环的数字.

公式可表示为：$0.\underbrace{ab\cdots c}_{m}\underbrace{\dot{d}\cdots\dot{g}}_{n}=\dfrac{ab\cdots g-ab\cdots c}{\underbrace{99\cdots9}_{n}\underbrace{00\cdots0}_{m}}$，其中$m$代表小数点后不循环的位数，$n$代表循环节的位数. 比如$0.3\dot{1}\dot{2}=\dfrac{312-3}{990}=\dfrac{309}{990}=\dfrac{103}{330}$.

3. 百分数

（1）定义：一个数占另一个数的百分之几的数，叫做百分数. 百分数也叫做百分率或者百分比. 百分数通常不写成分数的形式，而是在分子后面加上百分号“%”来表示.

（2）分数与百分数的区别

①意义不同，百分数只表示两个数的倍比关系，不能带单位名称；分数既可以表示具体的数，又可以表示两个数的关系，表示具体数时可带单位名称.

②百分数不可以约分，而分数一般通过约分化成最简分数.

③任何一个百分数都可以写成分母是 100 的分数，而分母是 100 的分数并不都具有百分数的意义.

④应用范围的不同，百分数在生产和生活中，常用于调查、统计、分析和比较，而分数常常在计算、测量中得不到整数结果时使用.

第三节 比与比例

知识点 1 比与比例

1. 比

两个数a，b相除，又可称为这两个数的比，记为$a:b$，即$a:b=\frac{a}{b}$. 若a，b相除的商为k，则称k为a，b的比值.

2. 比例

相等的比称为比例，记作$a:b=c:d$或$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. 其中a和d称为比例外项，b和c称为比例内项.

比例中项：当$a:b=b:d$时，称b为a和d的比例中项，又称"等比中项".

知识点 2 比例的性质及定理

1. 比例的基本性质

（1）内项积等于外项积，即若$a:b=c:d$，则$ad=bc$.

（2）比的前项和后项都乘以或除以一个不为零的数，比值不变，即$a:b=ak:bk$（$k\neq0$）.

（3）$a:b=b:d\Leftrightarrow b^2=ad$.

2. 比例定理（以下公式的任一分母均不等于 0）

更比定理	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$
反比定理	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$
合比定理	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$
分比定理	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$
合分比定理	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$
等比定理	如果$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\ldots=\frac{m}{n}(b+d+\ldots+n\neq0)$，

	那么 $\dfrac{a+c+\ldots+m}{b+d+\ldots+n}=\dfrac{a}{b}$

3. 正比例函数和反比例函数

（1）正比例

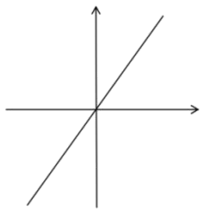
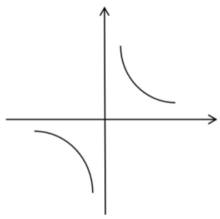
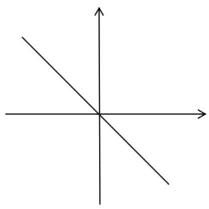
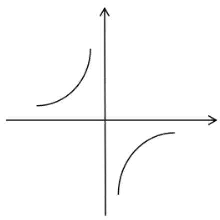
若 $y=kx$（k 不为零），则称 y 与 x 成正比，k 称为比例系数.

正比例函数的图像为过原点的直线.

（2）反比例

若 $y=\dfrac{k}{x}$（k 不为零），则称 y 与 x 成反比，k 称为比例系数.

（3）正比例函数与反比例函数的图像

函数		正比例函数	反比例函数
表达式		$y=kx$（$k\neq 0$）	$y=\dfrac{k}{x}$（$k\neq 0$）
图像	$k>0$		
	$k<0$		
性质	$k>0$	图像分布在一、三象限内，在每个象限内y值随着x值的增大而增大	图像分布在一、三象限内，在每个象限内y值随着x值的增大而减小
	$k<0$	图像分布在二、四象限内，在每个象限内y值随着x值的增大而减小	图像分布在二、四象限内，在每个象限内y值随着x值的增大而增大
自变量取值范围		全体实数	除 0 以外的全体实数
函数取值范围		全体实数	除 0 以外的全体实数

第四节 数据描述

知识点 1 平均值

1. 中位数

将一组数据按照由小到大（或由大到小）的顺序排列，处于最中间位置的一个数据（或中间两个数据的平均数）就是这组数据的中位数.

2. 众数

一组数据中出现次数最多的数据.

3. 平均值（平均数）

平均值是统计学中反映一组数据的集中趋势或中心位置的度量.

平均值包含算术平均值、几何平均值和加权平均值等.

（1）算术平均值

设n个数x_1，x_2，…，x_n，称$\overline{x}=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$为这$n$个数的算术平均值，简记为：

$$\overline{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}$$

根据定义可知：①负数也存在算术平均值.②0 的算术平均值是 0.

（2）几何平均值

设 n 个正数x_1，x_2，…，x_n，称 $x_g=\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$ 为这 n 个正数的几何平均值，简记为：

$$x_g=\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}x_i}$$

根据定义可知：①负数不存在几何平均值.②0 不存在几何平均值.

（3）加权平均值

设n个数x_1，x_2，…，x_n的权分别是w_1，w_2，…，w_n，称$\overline{x}=\dfrac{x_1w_1+x_2w_2+\cdots+x_nw_n}{w_1+w_2+\cdots+w_n}$

为这n个数的加权平均值.（注：$w_1+w_2+\cdots+w_n=n$）

知识点 2 极差、方差与标准差

1. 极差

（1）定义

极差＝最大值－最小值.

（2）意义

极差是用来反映一组数据变化范围的大小. 只对极端值较为敏感，而不能表示其他更多的意义.

2. 方差

设n个数x_1，x_2，…，x_n，那么方差 $S^2=\frac{1}{n}[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2]$，也记作$D(x)$.

应试口诀

先平均，再求差，然后平方，最后再平均.

（1）扩展公式

$$\begin{aligned}S^2&=\frac{1}{n}[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2]\\&=\frac{1}{n}[x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2-n(\overline{x})^2]\\&=\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}-\overline{x}^2\\&=\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}-(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n})^2\end{aligned}$$

（2）平均数与方差的性质

①若原数据：x_1，x_2，…，x_n的平均数为$\overline{x}$，方差为S^2；则新数据：ax_1，ax_2，…，ax_n的平均数是$a\overline{x}$，方差为a^2S^2.

②若原数据：x_1，x_2，…，x_n的平均数为$\overline{x}$，方差为S^2，则新数据：x_1+b，x_2+b，…，x_n+b的平均数为$\overline{x}+b$，方差为S^2.

③若原数据：x_1，x_2，…，x_n的平均数为$\overline{x}$，方差为S^2，则新数据：ax_1+b，ax_2+b，…，

ax_n+b的平均数为$a\overline{x}+b$，方差为a^2S^2.

推理过程

（以性质③为例）

原数据：

平均数$=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\overline{x}$.

方差$=\dfrac{1}{n}[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2]=S^2$.

新数据：

$$\begin{aligned}\text{平均数}&=\frac{(ax_1+b)+(ax_2+b)+\cdots+(ax_n+b)}{n}\\&=\frac{ax_1+b+ax_2+b+\cdots+ax_n+b}{n}\\&=\frac{(ax_1+ax_2+\cdots+ax_n)+nb}{n}\\&=\frac{a(x_1+x_2+\cdots+x_n)+nb}{n}\\&=a\cdot\frac{(x_1+x_2+\cdots+x_n)}{n}+\frac{nb}{n}\\&=a\overline{x}+b.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{方差}&=\frac{1}{n}[[(ax_1+b)-(a\overline{x}+b)]^2+[(ax_2+b)-(a\overline{x}+b)]^2+\cdots+[(ax_n+b)-(a\overline{x}+b)]^2]\\&=\frac{1}{n}[(ax_1+b-a\overline{x}-b)^2+(ax_2+b-a\overline{x}-b)^2+\cdots+(ax_n+b-a\overline{x}-b)^2]\\&=\frac{1}{n}[(ax_1-a\overline{x})^2+(ax_2-a\overline{x})^2+\cdots+(ax_n-a\overline{x})^2]\\&=\frac{1}{n}[a^2(x_1-\overline{x})^2+a^2(x_2-\overline{x})^2+\cdots+a^2(x_n-\overline{x})^2]\\&=a^2\cdot\frac{1}{n}[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2]\\&=a^2S^2\end{aligned}$$

3. 标准差

$$S=\sqrt{\frac{1}{n}[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2]}$$
$$=\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}-\overline{x}^2}$$

也记作$\sqrt{D(x)}$.

（1）方差与标准差

相同之处：方差和标准差都是反应一组数据离散程度的统计量.

不同之处：数据的单位和方差的单位是不一致的，方差的单位是数据单位的平方，标准差的单位与所研究数据单位一致.

技巧点拨

平均数	反映数据的平均水平
众数	反映数据的集中趋势
中位数	反映数据的中间值
方差	反映数据的波动大小，方差大，波动大；方差小，波动小
标准差	反映数据的波动大小，标准差大，波动大；标准差小，波动小
平均数、众数和中位数：反映数据的总体趋势	

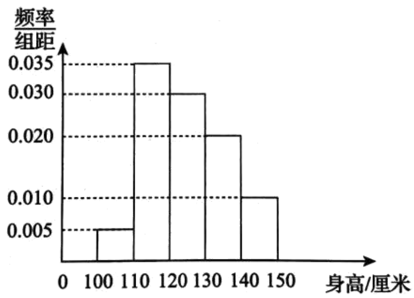
知识点 3 数据的图表表示：直方图、饼图、数表、柱状图

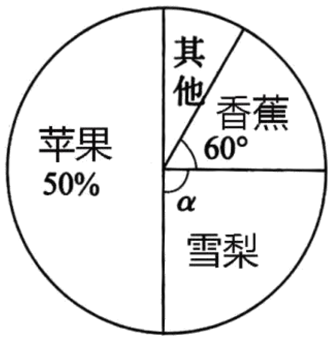
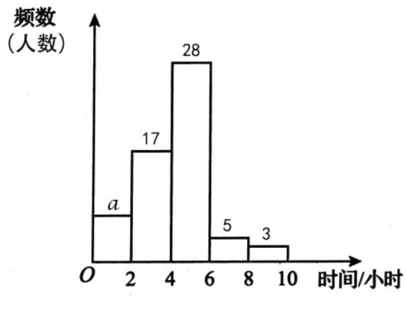
1.数据定义

（1）频数：是指某个数据出现的次数.

（2）频率：频数与数据总个数之比.

2.数据的图表表示

<table>
<tr><th>数据的图表</th><th>定义</th><th>示例图</th></tr>
<tr><td>直方图</td><td>把数据分为若干个小组，每组的组距保持一致，并在直角坐标系的横轴上标出每组的位置（以组距作为底），计算每组所包含的数据个数（频数），以该组的“频率/组距”为高作矩形，这样得出若干个矩形构成的图叫做直方图.
（1）组距的确定：一般是人为确定，不能太大也不能太小.
（2）组数的确定：组数＝极差/组距.
（3）每组频率的确定：频率＝频数/数据容量.
（4）每组所确定的矩形的面积＝组距×$\dfrac{频率}{组距}$＝频率.
（5）频率直方图下的总面积等于 1（各个矩形面积之和等于 1）.
（6）分组时要遵循“不重不漏”的原则：“不重”是指某一个数据只能分在其中的某一组，不能在其他组中出现；“不漏”是指组别能够穷尽，即在所分的全部组别中每项数据都能分在其中的某一组，不能</td><td></td></tr>
</table>

数据的图表	定义	示例图
	遗漏.（分组时采用左闭右开的区间表示） （7）在直方图中，众数是最高矩形底边中点的横坐标；中位数左边和右边的直方图的面积相等；平均数是直方图的重心，它等于每个小矩形的面积乘以小矩形底边中点横坐标之和.	
饼图	饼图是一个划分为几个扇形的圆形统计图表，用于描述量、频率或百分比之间的相对关系. 在饼图中，每个扇区的弧长（以及圆心角和面积）大小为其所表示的数量的比例. 这些扇区合在一起刚好是一个完全的圆形. 顾名思义，这些扇区拼成了一个切开的饼形图案. 其所用公式为：某部分所占的百分比等于对应扇形所占整个圆周的比例.	
柱状图	柱状图是一种以长方形的长度为变量的表达图形的统计报告图，它由一系列高度不等的纵向条纹表示数据分布的情况，用来比较两个或以上的数值（不同时间或者不同条件），它只有一个变量，通常利用于较小的数据集分析. 柱状图亦可横向排列，或用多维方式表达.	

<table>
<tr><th>数据的图表</th><th>定义</th><th>示例图</th></tr>
<tr><td>数表</td><td>数表是以两行表格的形式反映数据信息的统计图形，第一行表示分布区间或散点值. 第二行表示对应的度量值（频率、频数）.</td><td><table><tr><td>销售额/万元</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>销售员人数</td><td>1</td><td>3</td></tr></table></td></tr>
</table>

技巧点拨

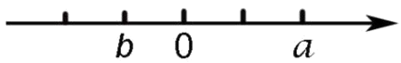
1. 直方图能显示数据的分布情况.
2. 饼图能显示部分在总体中所占百分比.
3. 柱状图能显示每组中的具体数据.
4. 数表能显示数据的频率.

第五节 数轴与绝对值

知识点 1 数轴与绝对值

1. 数轴

规定了原点、正方向和单位长度的直线叫数轴. 数轴上的点与实数一一对应，也可以用数轴来比较两个实数的大小.



（1）数轴的三要素：原点、正方向和单位长度.

（2）在数轴上表示两个数的点，右边的点表示的数大（0 右边的数是正数），左边的点表示的数小（0 左边的数是负数）.

2. 绝对值

（1）代数意义

$$|a|=\begin{cases} a & a>0 \\ 0 & a=0 \\ -a & a<0 \end{cases}$$

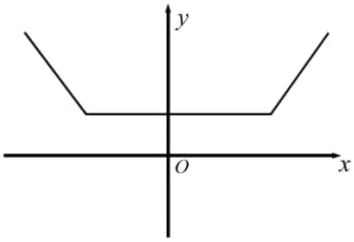
（2）几何意义

$|a|$表示在数轴上a点与原点 0 的距离.

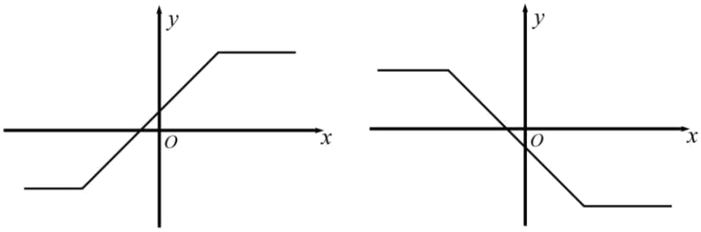
$|a-b|$表示在数轴上a点与b点之间的距离.

$|x-a|+|x-b|+|x-c|$表示在数轴上x点到a点、b点与c点的距离之和.

①平底锅型：$f(x)=|x-a|+|x-b|$，表示在数轴上x点到a点与b点的距离之和.此种函数表达式，没有最大值，只有最小值.且在两个零点之间取得最小值$|a-b|$.图像的表现为两头高，中间平，类似于平底锅.



②"Z"字型：$f(x)=|x-a|-|x-b|$，表示在数轴上x点到a点与b点的距离之差.此种函数表达式，既有最大值也有最小值，分别在零点的两侧取得且两个最值为$\pm|a-b|$.图像的表现为两头平，中间斜.



（3）绝对值相等，正负号相反的两个数互为相反数，特别地，0与自身互为相反数.

实数a、b互为相反数，则$a+b=0$.

（4）实数a、b互为倒数，则$ab=1$.（$a\neq0$，$b\neq0$）

3.绝对值的性质

非负性	$\lvert a\rvert\geqslant0$，$\lvert a\rvert+b^2+\sqrt{c}\leqslant0\Rightarrow a=b=c=0$
对称性	$\lvert -a\rvert=\lvert a\rvert$
等价性	$\lvert a\rvert=\sqrt{a^2}$，$\lvert a\rvert^2=\lvert a^2\rvert=\lvert -a\rvert^2=a^2$

自比性	$\frac{\lvert a\rvert}{a}=\frac{a}{\lvert a\rvert}=\begin{cases}1 & a>0\\-1 & a<0\end{cases}$
基本不等式	$-\lvert a\rvert \leqslant a \leqslant \lvert a\rvert$
$\lvert a\cdot b\rvert=\lvert a\rvert\cdot\lvert b\rvert$，$\left\lvert\frac{a}{b}\right\rvert=\frac{\lvert a\rvert}{\lvert b\rvert}$（$b\neq 0$）	

4. $\lvert a\rvert$与a的关系

若$\lvert a\rvert=a$，则$a\geqslant 0$	若$\lvert a\rvert=-a$，则$a\leqslant 0$
若$\lvert a\rvert>a$，则$a<0$	若$\lvert a\rvert>-a$，则$a>0$
若$\lvert a\rvert<a$，则$a\in\varnothing$	若$\lvert a\rvert<-a$，则$a\in\varnothing$
若$\lvert a\rvert\geqslant a$，则$a\in R$	若$\lvert a\rvert\geqslant -a$，则$a\in R$
若$\lvert a\rvert\leqslant a$，则$a\geqslant 0$	若$\lvert a\rvert\leqslant -a$，则$a\leqslant 0$

5. 绝对值三角不等式

（1）基本形式

$$\big\lvert\lvert a\rvert-\lvert b\rvert\big\rvert\leq\lvert a\pm b\rvert\leq\lvert a\rvert+\lvert b\rvert$$

（2）等号成立条件

表达式	成立条件	示例
$\lvert a\rvert+\lvert b\rvert=\lvert a+b\rvert$	$ab\geq 0$	$\lvert-3\rvert+\lvert-5\rvert=\lvert-3-5\rvert$
$\lvert a\rvert+\lvert b\rvert=\lvert a-b\rvert$	$ab\leq 0$	$\lvert 3\rvert+\lvert-5\rvert=\lvert 3+5\rvert$
$\big\lvert\lvert a\rvert-\lvert b\rvert\big\rvert=\lvert a+b\rvert$	$ab\leq 0$	$\big\lvert\lvert-5\rvert-\lvert 3\rvert\big\rvert=\lvert-5+3\rvert$
$\big\lvert\lvert a\rvert-\lvert b\rvert\big\rvert=\lvert a-b\rvert$	$ab\geq 0$	$\big\lvert\lvert-5\rvert-\lvert-3\rvert\big\rvert=\lvert-5+3\rvert$

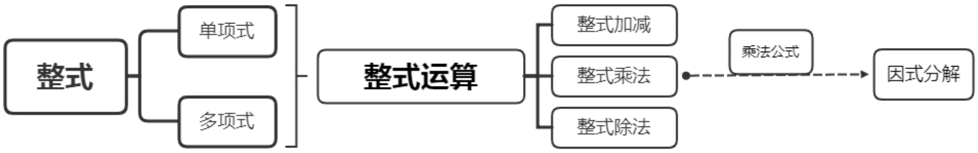
（3）大小成立条件

表达式	成立条件	示例
$\lvert a\rvert+\lvert b\rvert>\lvert a+b\rvert$	$ab<0$	$\lvert -3\rvert+\lvert 5\rvert>\lvert -3+5\rvert$
$\lvert a\rvert+\lvert b\rvert>\lvert a-b\rvert$	$ab>0$	$\lvert -3\rvert+\lvert -5\rvert>\lvert -3+5\rvert$
$\lvert\lvert a\rvert-\lvert b\rvert\rvert<\lvert a+b\rvert$	$ab>0$	$\lvert\lvert -5\rvert-\lvert -3\rvert\rvert<\lvert -5-3\rvert$
$\lvert\lvert a\rvert-\lvert b\rvert\rvert<\lvert a-b\rvert$	$ab<0$	$\lvert\lvert -5\rvert-\lvert 3\rvert\rvert<\lvert -5-3\rvert$

第二章 代数

第一节 整式及其运算

知识点 1 整式



1. 整式的相关概念

（1）代数式：由数和字母经过有限次的加、减、乘、除、乘方、开方等代数运算得到的式子，称为代数式. 单个数字或字母也是代数式.

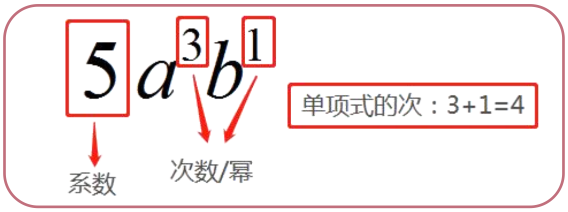
$$\text{代数式}\begin{cases}\text{有理式}\begin{cases}\text{整式}\\ \text{分式：如}\dfrac{1}{x}\end{cases}\\ \text{无理式：如}\sqrt{x+1}\end{cases}$$

（2）整式：单项式和多项式统称为整式，是有理式中的一部分. 在有理式中可以包含加、减、乘、除、乘方五种运算，但在整式中除数不能含有字母.

（3）单项式：有限个数字与字母的乘积叫作单项式.

①单项式的次：单项式每一个字母因子的次方之和叫作单项式的次.

②单项式的系数：单项式字母前的常数叫作单项式的系数.



（4）多项式：有限个单项式相加减叫作多项式.

①多项式的次：多项式中的单项式的最高次叫作多项式的次.

②多项式的项：在多项式中，每个单项式叫作多项式的项，其中不含字母的项叫作常数项，一个多项式有几项就叫作几项式.（多项式中的符号看作各项的性质符号）

$$\boxed{a^3b^1}+\boxed{x^{\boxed{5}}b^3}+\boxed{33}$$

多项式的次：5+3=8

多项式的项：三项

（5）同类项：若两个单项式所含字母相同，并且相同字母的幂也相同，则称这两个单项式为同类项.

（6）多项式相等：若两个多项式的对应项、系数均相等，则称这两个多项式相等.

知识点 2 整式加减及乘法运算

1. 整式的加减

去括号，合并同类项.【注：合并同类项时“系数相加减，字母不变”】

2. 整式的乘法

采用分配律，也就是每个整式的各项要互相乘，再把所得积相加，再合并同类项.

比如 $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$.

【注：单项式相乘“系数相乘，次方相加”】

3. 基本公式

平方差公式	$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$
完全平方公式	$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$
三个数和的平方	$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$
	$a^2+b^2+c^2\pm ab\pm bc\pm ca=\frac{1}{2}\left[(a\pm b)^2+(b\pm c)^2+(c\pm a)^2\right]$
	若 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$，则 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2$
立方和（差）公式	$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$
和与差的立方公式	$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$
常把 1 看作 1^3	$x^3\pm 1=(x\pm 1)(x^2\mp x+1)$

常用配方公式	$a^3+b^3+c^3=3abc \Rightarrow a=b=c$或$a+b+c=0$
	$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$

4. 因式分解

（1）概念

把一个多项式化成几个最简整式的积的形式，这种变形叫做因式分解.

①因式分解的实质是一种恒等变形，是一种化和为积的表现形式.（和⇒积）

②因式分解与整式的乘法是互逆的.

$$a^2+2ab+b^2 \underset{\text{整式的乘法}}{\overset{\text{因式分解}}{\rightleftarrows}} (a+b)^2$$

③在因式分解的结果中，每个因式都必须是整式.

④因式分解要分解到不能再分解为止.

（2）因式分解的一般方法

①提公因式法

如果多项式的各项有公因式，可以把这个公因式提到括号外面，将多项式写成因式乘积的形式，这种分解因式的方法叫作提公因式法.

例题精选

将$4ab^2-6a^2b$因式分解

【答案】

$$4ab^2-6a^2b$$

系数：4 和 6，其最大公因数是 2

字母：a和b

幂：a最低次幂是 1，b最低次幂是 1

公因式：$2ab$

$$4ab^2-6a^2b=2ab(2b-3a)$$

②运用基本公式法

③分组分解法（2+2 分法、3+1 分法）

例题精选

将 $ax+ay+bx+by$ 因式分解

【答案】

$$ax+ay+bx+by=(ax+ay)+(bx+by)=a(x+y)+b(x+y)=(a+b)(x+y)$$

④十字相乘法

十字相乘法能用于二次三项式 $abx^2+(bp+aq)x+pq$ 型的分解因式.

十字相乘法的一般步骤：

竖分二次项与常数项，交叉相乘和相加，检验确定，横写因式.

口诀：拆两头，凑中间，横写因式不能乱.

例题精选

将 $3x^2-10x+3$ 因式分解

【答案】

$$\boxed{3x^2}\boxed{-10x}\boxed{+3}$$

$$\begin{array}{ccc} \boxed{\begin{array}{c} x \\ 3x \end{array}} & \times & \boxed{\begin{array}{c} -3 \\ -1 \end{array}} \\ \hline \end{array}$$

$$-x-9x=\boxed{-10x}$$

$$3x^2-10x+3=(x-3)(3x-1)$$

⑤换元法

⑥双十字相乘法

分解二次三项式时，常用十字相乘法，对于某些二元二次六项式时，就用双十字相乘法.

双十字相乘法的一般步骤：

分解x^2，分解常数项，凑关于x的一次项系数（常数项一旦确定不能再变），分解y^2，凑关于y的一次项系数，验证关于xy的系数.

例题精选

将 $2x^2-3xy+y^2+8x-5y+6$ 因式分解

【答案】

$$2x^2-3xy+\boxed{y^2}+8x\boxed{-5y+6}$$

$$\begin{array}{ccc} 2x & -y & 2 \\ x & -y & 3 \end{array}$$

$$\boxed{-2xy-xy=-3xy}$$

$$\boxed{-3y-2y=-5y}$$

$$\boxed{6x+2x=8x}$$

$$2x^2-3xy+y^2+8x-5y+6=(2x-y+2)(x-y+3)$$

技巧点拨

因式分解的方法选择：

①如果多项式的各项有公因式，那么先提公因式；

②提出公因式或无公因式可提，再考虑可否运用公式或十字相乘法；

③对二次三项式，应先尝试用十字相乘法分解，不行的再用求根公式法；

④最后考虑用分组分解法、换元法和双十字相乘法（二元二次六项式）.

知识点 3 整式的除法

1. 整式的除法

整式 $F(x)$ 除以整式 $f(x)$ 的商式为 $g(x)$，余式为 $r(x)$，则有 $F(x)=f(x)g(x)+r(x)$，并且 $r(x)$ 的次数要小于 $f(x)$ 的次数.

当 $r(x)=0$ 时，$F(x)=f(x)g(x)$，此时称 $F(x)$ 能被 $f(x)$ 整除，记作 $f(x)|F(x)$.

2. 因式定理（整除）

$f(x)$ 含有 $(ax-b)$ 因式 $\Leftrightarrow f(x)$ 能被 $(ax-b)$ 整除 $\Leftrightarrow f(\frac{b}{a})=0$.

3. 余式定理（非整除）

由于余式的次数要小于除式，所以当除式为一次表达式时，余式就为常数，从而得到余式定理：$f(x)$ 除以 $(ax-b)$ 的余式为 $f(\frac{b}{a})$.

第二节 分式及其运算

知识点 1 分式及其运算

1. 分式的概念

用 A,B 表示两个整式，$A\div B$ 就可以表示成 $\frac{A}{B}$ 的形式，如果除式 B 中含有字母且 $B\neq 0$，式子 $\frac{A}{B}$ 就叫作分式.

2. 分式的性质

分式基本性质	性质		分式的分子与分母都乘以（或除以）同一个不为零的整式，分式的值不变
	表示		$\frac{A}{B}=\frac{AM}{BM}$，$\frac{A}{B}=\frac{A\div M}{B\div M}$（$M$ 为不等于零的整式）
	应用	符号法则	分子、分母与分式本身的符号，改变其中任何两个，分式的值不变 $\frac{-a}{-b}=\frac{a}{b}$，$\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}=-\frac{a}{b}$
		约分	把一个分式的分子与分母的所有公因式约去叫作约分
		通分	把几个异分母的分式分别化成与原本的分式相等的同分母的分式叫作通分

3. 分式的运算（表格内分母均不为 0）

分式运	加减法则	同分母：同分母的分式相加减，把分式的分子相加减，分母不变 $\frac{a}{c}\pm\frac{b}{c}=\frac{a\pm b}{c}$
		异分母：异分母的分式相加减，先通分变为同分母的分式，然后再加减

算		$\dfrac{a}{c}\pm\dfrac{b}{d}=\dfrac{ad\pm bc}{cd}$
	乘法法则	分式乘以分式：用分子的积做积的分子，分母的积做积的分母 $\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{c}{d}=\dfrac{ac}{bd}$
	除法法则	分式除以分式：把除式的分子、分母颠倒位置后，与被除式相乘 $\dfrac{a}{b}\div\dfrac{c}{d}=\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{d}{c}=\dfrac{ad}{bc}$
	乘方法则与繁分式	分式的乘方：把分式的分子、分母各自乘方$(\dfrac{a}{b})^n=\dfrac{a^n}{b^n}$（$n$为正整数） 繁分式的运算： （1）可以利用除法法则进行运算 （2）可以用分式的基本性质化简繁分式（繁分式：分子或分母本身至少有一个是分式）
	裂项运算	$\dfrac{1}{n(n+k)}=\dfrac{1}{k}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+k}\right)$
		$\dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{x(x+1)}-\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}\right]$
		$\dfrac{1}{\sqrt{n+k}+\sqrt{n}}=\dfrac{1}{k}\left(\sqrt{n+k}-\sqrt{n}\right)$（分母有理化，再消项）
	多个括号求积：凑平方差公式法	$(a+1)(a^2+1)(a^4+1)(a^8+1)(a^{16}+1)(a^{32}+1)=\dfrac{a^{64}-1}{a-1}(a\neq1)$

4. 最简分式

分式的分子与分母没有公因式时，叫作最简分式. 一个分式的最后形式必须是最简分式，分式化为最简分式时通常采用约分的方法.

第三节 函数

知识点 1 集合

1. 集合的概念

（1）集合：将能够确切指定的一些对象看成一个整体，这个整体就叫作集合，简称集.

（2）元素：集合中各个对象叫作这个集合的元素.

（3）表示：集合通常用大写的拉丁字母表示，如 A，B，C，P，Q 等，元素通常用小写的拉丁字母表示，如 a，b，c，p，q 等.

2. 元素与集合的关系

（1）属于：如果 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于 A，记作 $a\in A$.

（2）不属于：如果 a 不是集合 A 的元素，就说 a 不属于 A，记作 $a\notin A$.

3. 集合中元素的特性

（1）确定性：按照明确的标准判断给定一个元素，或者在这个集合里，或者不在，不能模棱两可. 集合中的元素必须是确定的.

（2）互异性：集合中的元素互不相同. 例如：集合 $A=\{1,a\}$，则 a 不能等于 1.

（3）无序性：集合中的元素没有一定的顺序. 例如：集合 $\{1,5,3\}$ 和集合 $\{3,1,5\}$ 是同一个集合.

4. 集合的表示方法

列举法、描述法、图示法和符号法.

5. 常用数集的符号

复数集	C
实数集	R
整数集	Z
有理数集	Q
自然数集（非负整数集）	N
正整数集	N^* 或 N_+
说明：根据国家标准，“0”是自然数.	

6. 集合的关系与运算

子集	如果集合A的任何一个元素都是集合B的元素，则称A是B的子集，记为$A \subseteq B$或$B \supseteq A$，读作“A包含于B”或“B包含A”．
相等的集合	若$A \subseteq B$，且$B \subseteq A$，则称$A=B$.
真子集	若$A \subseteq B$且$A \neq B$，则称A是B的真子集，记作$A \subsetneq B$（或$B \supsetneq A$）．
空集	空集是任何集合的子集；空集是任何非空集合的真子集.（$\varnothing$）
交集	由所有属于集合A且属于集合B的元素所组成的集合，叫做A与B的交集，记作$A \cap B$.
并集	由所有属于集合A或属于集合B的元素所组成的集合，叫做A与B的并集，记作$A \cup B$.
全集	若一个集合含有所要研究的各个集合的全部元素，那么这个集合就可以看作一个全集，全集记作U.
补集	对于集合U，若集合$A \subseteq U$，那么由U中所有不属于A的元素组成的集合，叫做U中子集A的补集（或余集），记作$C_U A$或$\overline{A}$.
注意：由n个元素所组成的集合，其子集的个数为2^n个，真子集的个数为2^n-1个，非空子集的个数为2^n-1个，非空真子集的个数为2^n-2个.	

知识点 2 一元二次函数及其图像

1. 基本公式$(a \neq 0)$

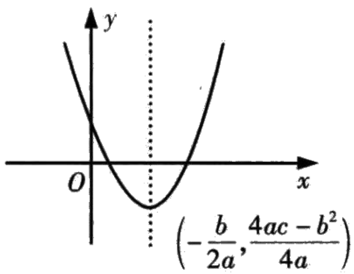
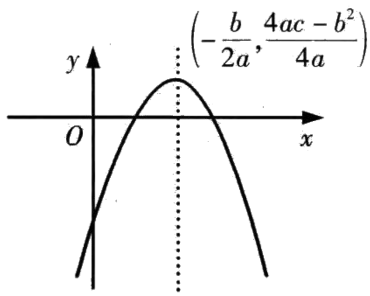
一般式：$y=ax^2+bx+c$

顶点式：$y=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\dfrac{4ac-b^2}{4a}$

交点式（两根式）：$y=a(x-x_1)(x-x_2)$

【注】x_1和x_2表示一元二次函数与x轴的两个交点，或方程的两个根.

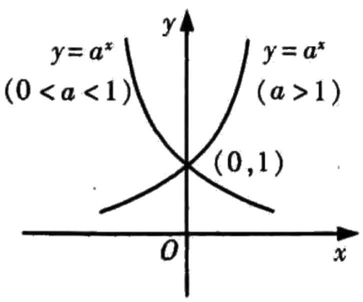
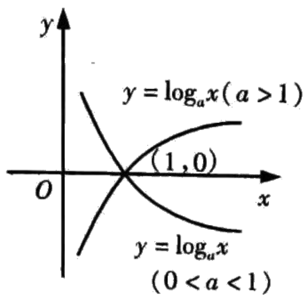
2. 函数 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ 的图像和性质

一元二次函数		
a的取值	$a>0$	$a<0$
定义域	R	R
开口方向	开口向上	开口向下
图像		
顶点坐标	$\left(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$	
y 轴截距	$y=c$ （当 $c=0$ 时，一元二次函数图像过坐标原点）	
与 y 轴的交点	（0，c）	（0，c）
对称轴	关于直线 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 对称 （当 $b=0$ 时，一元二次函数图像关于 y 轴对称）	
单调性	在 $x\le-\dfrac{b}{2a}$ 上单调递减	在 $x\le-\dfrac{b}{2a}$ 上单调递增

一元二次函数		
	在 $x > -\dfrac{b}{2a}$ 上单调递增	在 $x > -\dfrac{b}{2a}$ 上单调递减
最大值与最小值	当 $x = -\dfrac{b}{2a}$ 时，$y_{最小值} = \dfrac{4ac-b^2}{4a}$	当 $x = -\dfrac{b}{2a}$ 时，$y_{最大值} = \dfrac{4ac-b^2}{4a}$
注意：$y = ax^2$ 是二次函数的特殊形式，即 b、$c = 0$ 的情况．$y = ax^2$ 关于 y 轴对称，顶点坐标是（0，0）．		

知识点 3 指数函数、对数函数

1. 指数函数与对数函数的图像和性质

	指数函数	对数函数
函数式	$y = a^x\ (a > 0,\ 且 a \neq 1)$	$y = \log_a x\ (a > 0,\ 且 a \neq 1)$
定义域	R	$(0,+\infty)$
值域	$(0,+\infty)$	R
图像		
两者关系	$y = a^x$ 与 $y = \log_a x$ 互为反函数，两者图像关于 $y = x$ 对称	
奇偶性	非奇非偶	
性 ①	$y > 0$（图像在 x 轴上方）	$x > 0$（图像在 y 轴右方）

		指数函数	对数函数
质	②	$a^0=1$【图像恒过（0，1）】	$\log_a 1=0$【图像恒过（1，0）】
	③	$a>1$时，$a^x\begin{cases}>1,(x>0)\\=1,(x=0)\\<1,(x<0)\end{cases}$ $0<a<1$时，$a^x\begin{cases}<1,(x>0)\\=1,(x=0)\\>1,(x<0)\end{cases}$	$a>1$时，$\log_a x\begin{cases}>0,(x>1)\\=0,(x=1)\\<0,(0<x<1)\end{cases}$ $0<a<1$时，$\log_a x\begin{cases}<0,(x>1)\\=0,(x=1)\\>0,(0<x<1)\end{cases}$
	④	$a>1$时，在R上是单调递增 $0<a<1$时，在R上是单调递减	$a>1$时，在$(0,+\infty)$上是单调递增 $0<a<1$时，在$(0,+\infty)$上是单调递减
	⑤	$a>1$时，底数越大，图像越靠近y轴 $0<a<1$时，底数越小，图像越靠近y轴	$a>1$时，底数越大，图像越靠近x轴 $0<a<1$时，底数越小，图像越靠近x轴

其中在对数函数中，当$a=10$时，$y=log_{10}x=\lg x$（常用对数）；当$a=e$时，$y=log_e x=\ln x$（自然对数）.

2. 指数函数和对数函数运算公式

（1）指数函数运算公式

$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$	$a^m\div a^n=a^{m-n}$	$\left(a^m\right)^n=a^{mn}$	$\left(ab\right)^n=a^n b^n$
$\left(\frac{b}{a}\right)^n=\frac{b^n}{a^n}$	$a^{\frac{n}{m}}=\sqrt[m]{a^n}$	$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$	$a^0=1\ \left(a\neq 0\right)$

（2）对数函数运算公式

如果$a>0$，且$a\neq 1$，b，m，$n>0$，那么有如下计算法则：

同底对数：$\log_a m+\log_a n=\log_a mn$；$\log_a m-\log_a n=\log_a \frac{m}{n}$.

幂的对数：$\log_a m^n = n\log_a m$；$\log_{a^m} b^n = \frac{n}{m}\log_a b$.

换底公式：$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$，一般 c 取 10 或 e.

对数恒等式：$a^{\log_a n} = n$；$\log_a a^m = m$.

特殊：$\log_a 1 = 0$；$\log_a a = 1$.

知识点 4 特殊函数

1. 最值函数

（1）max 表示最大值函数.

比如 $\max\{x, y, z\}$ 表示 x，y，z 中最大的数.

（2）min 表示最小值函数.

比如 $\min\{x, y, z\}$ 表示 x，y，z 中最小的数.

2. 绝对值函数

（1）$y = |ax+b|$

先画 $y = ax+b$ 的图像，再将 x 轴下方的图像翻到 x 轴上方.

（2）$y = |ax^2+bx+c|$

先画 $y = ax^2+bx+c$ 的图像，再将 x 轴下方的图像翻到 x 轴上方.

（3）$|ax+by| = c$

表示两条平行的直线 $ax+by = \pm c$，且两者关于原点对称.

（4）$|ax|+|by| = c$

当 $a = b$ 时，表示正方形；当 $a \neq b$ 时，表示菱形.

（5）$|xy|+ab=a|x|+b|y|$

分析：$|xy|+ab=a|x|+b|y| \Rightarrow |xy|-a|x|-b|y|+ab=0 \Rightarrow |x|(|y|-a)-b(|y|-a)=0$

$\Rightarrow (|x|-b)(|y|-a)=0 \Rightarrow |x|=b$或$|y|=a$，故表示由 $x=\pm b, y=\pm a$ 围成的图形，当 $a=b$ 时，表示正方形；当 $a\neq b$ 时，表示矩形.

3. 分段函数

有些函数，对于其定义域内的自变量 x 的不同值，不能用一个统一的解析式表示，而是要用两个或两个以上的式子表示，这类函数称为分段函数. 分段函数表示不同的取值范围对应不同的表达式.

$$y=|x|=\begin{cases} x & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -x & x<0 \end{cases}；\quad y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases} 1 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -1 & x<0 \end{cases}；\quad D(x)=\begin{cases} 1 & x\text{为有理数} \\ 0 & x\text{为无理数} \end{cases}.$$

4. 复合函数

已知函数 $y=f(u)$，又 $u=g(x)$，则称函数 $y=f(g(x))$ 为函数 $y=f(u)$ 与 $u=g(x)$ 的复合函数. 其中 y 称为因变量，x 称为自变量，u 称为中间变量.

注意：$g(x)$ 的值域对应 $y=f(u)$ 的定义域.

第四节 代数方程

知识点 1 一元一次方程、二元一次方程组

1. 一元一次方程

只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是 1，并且含未知数项的系数不是零的整式方程称为一元一次方程. 其一般形式为 $ax=b(a\neq 0)$，方程的解为 $x=\dfrac{b}{a}$.

（1）一元一次方程解法的一般步骤：

①去分母：在方程两边都乘以各分母的最小公倍数；

②去括号：先去小括号，再去中括号，最后去大括号；（括号外有减号的话一定要变号）

③移项：把含有未知数的项都移到方程的一边，其他项都移到方程的另一边；（移项要变号）

④合并同类项：把方程化成$ax=b$（$a\neq0$）的形式；

⑤系数化为 1：在方程两边都除以未知数的系数a，得到方程的解$x=\frac{b}{a}$.

2. 二元一次方程组

形如$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1\\a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$的方程组为二元一次方程组，采用消元法或代入法求解.

（1）有三种解的情况：

①如果$\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$，则方程组有唯一解$(x,y)$.

②如果$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$，则方程组有无穷多解.

③如果$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$，则方程组无解.

注意：可以将二元一次方程组的情况，看作两条直线的位置关系.上述三种情况分别对应两条直线相交、重合、平行.

（2）二元一次方程组的解法

①加减消元法

$$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1 & ①\\a_2x+b_2y=c_2 & ②\end{cases}$$

由式①×b_2－式②×b_1得：$(a_1b_2-a_2b_1)x=b_2c_1-b_1c_2$.

解出x，再将x的值代入式①或式②中，求出y的值，从而得到方程组的解.

②代入消元法

$$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1 & ①\\a_2x+b_2y=c_2 & ②\end{cases}$$

由式①可得：$y=\frac{c_1-a_1x}{b_1}$（$b_1\neq0$）.

将其代入式②，消去y，得到关于x的一元一次方程，解之可得x.

再将x的值代入式①或式②中，求出y的值，从而得到方程组的解.

知识点 2 一元二次方程

1. 一元二次方程

只含一个未知数，且未知数的最高次数是 2，且系数不为 0 的方程，称为一元二次方程.

其一般形式为$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$.

2. 一元二次方程根的情况

令判别式$\Delta=b^2-4ac$，此方程的解将依Δ值的不同分为如下三种情况：

（1）当$\Delta>0$时，方程有两个不等实根，根的表达式为x_1，$x_2=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

（2）当$\Delta=0$时，方程有两个相等实根$x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$.

（3）当$\Delta<0$时，方程无实根.

由于Δ在判断一元二次方程的解的三种情况时的重要作用，称$\Delta=b^2-4ac$为一元二次方程的判别式.

3. 一元二次方程的解法

（1）直接开平方法

对形如$(x+a)^2=b$（$b\geq 0$）的方程两边直接开平方而转化为两个一元一次方程的方法.

$$x+a=\pm\sqrt{b}\Rightarrow x_1=-a+\sqrt{b}，x_2=-a-\sqrt{b}.$$

（2）配方法

通过把方程配成完全平方形式得到一元二次方程的根的方法. 配方法的依据是完全平方公式.

①转化：将题目的一元二次方程化为$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$的形式.

②系数化 1：将二次项系数化为 1.

③移项：将常数项移到等号右侧.

④配方：等号左右两边同时加上一次项系数一半的平方.

⑤变形：将等号左边的代数式写成完全平方公式的形式.

⑥开方：左右同时开平方.

⑦求解：整理即可得到原方程的根.

（3）公式法

用求根公式求出一元二次方程的解的方法. 公式法是通过配方推导出来的.

求根公式：x_1，$x_2=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$（$b^2-4ac\geq 0$）.

步骤：

①把方程转化为一般形式.

②确定a，b，c的值.

③求出b^2-4ac的值，当$b^2-4ac\geq 0$时代入求根公式.

（4）因式分解法

用因式分解的方法求一元二次方程的根的方法叫做因式分解法.

理论根据：若$ab=0$，则$a=0$或$b=0$.

步骤：

①将方程右边化为0.

②将方程左边分解为两个一次因式的乘积.

③令每个因式等于0，得到两个一元一次方程乘积的形式，解这两个一元一次方程，它们的解就是原一元二次方程的解.

因式分解的方法：提公因式法、公式法、十字相乘法等.

4. 根与系数的关系（韦达定理）

$\boxed{x_1,x_2\text{是方程}ax^2+bx+c=0(a\neq 0)\text{的两根}}\rightleftharpoons\boxed{x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}，\quad x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}}$.

5. 韦达定理的扩展应用

【利用韦达定理可以求出关于两个根的对称轮换式的数值】

（1）$\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}=-\dfrac{b}{c}$

（2）$\dfrac{1}{x_1^2}+\dfrac{1}{x_2^2}=\dfrac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{(x_1x_2)^2}=\dfrac{b^2-2ac}{c^2}$

（3）$|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2}=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-\frac{4c}{a}}=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|}$

（4）$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\frac{b^2-2ac}{a^2}$

（5）$x_1^2-x_2^2=(x_1+x_2)(x_1-x_2)$

（6）$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)=(x_1+x_2)[(x_1+x_2)^2-3x_1x_2]$

知识点 3 特殊方程

1. 绝对值方程

常用处理绝对值的方法：

（1）分段讨论法

根据绝对值的正负情况来分类讨论，其缺点是运算量较大，只有当绝对值比较简单时，才分段讨论求解.

（2）平方法

采用平方来去掉绝对值，利用公式$|x|^2=x^2$来分析求解，平方法的缺点是次方升高，一般结合平方差公式来转移此缺点.

（3）图像法

图像法比较直观，通过常见绝对值图像来分析.

2. 分式方程

解分式方程的步骤是：方程两边都乘以最简公分母，将分式方程转化为整式方程，求出根以后，要验证原分式的分母是否有意义.

注意：分式方程本身隐含着分母不为 0 的条件，当把分式方程转化为整式方程后，方程中未知数允许取值的范围扩大了，如果转化后的整式方程的根恰好使原方程中分母的值为 0，就会出现不适合原方程的根——增根；因为解分式方程可能出现增根，所以解分式方程必须验根.

3. 无理方程

解无理方程，一般通过方程两边同时乘方，使之转化为有理方程，从而求出方程的解，

求完以后要验证根号是否有意义.

注意：解无理方程时，由于方程两边同时乘方，未知数的取值范围可能会扩大，有产生增根的可能.因此，最后必须进行验根.

4.指数或对数方程

一般遇到指数或对数方程，都要先经过换元，转化成常见的一元二次方程进行讨论分析，在换元的过程中，一定要注意换元前后变量的取值范围的变化.

注意：在解对数方程的时候，还要验证定义域.

第五节 不等式

知识点 1 不等式的性质

1.不等式的定义

用不等号连接的两个（或两个以上）解析式称为不等式，使不等式成立的未知数的取值范围称为不等式的解（不等号包括>、<、⩽、⩾、≠五种）.

2.不等式的分类

按照不等式的解的情况可以将不等式分为以下三类：

（1）绝对不等式：解集为 R 的不等式；

（2）条件不等式：解集为实数集的非空真子集的不等式；

（3）矛盾不等式：解集为空集的不等式.

3.不等式的基本性质（注意推导关系，有的无法逆推）

（1）传递性：$\begin{cases} a>b \\ b>c \end{cases} \Rightarrow a>c$.

（2）同向相加性：$\left.\begin{matrix} a>b \\ c>d \end{matrix}\right\} \Rightarrow a+c>b+d$.

（3）同向皆正相乘性：$\left.\begin{matrix} a>b>0 \\ c>d>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow ac>bd$.

（4）同号倒数性：$a>b>0 \Leftrightarrow \frac{1}{b}>\frac{1}{a}>0$，$a<b<0 \Leftrightarrow \frac{1}{b}<\frac{1}{a}<0$.

（5）如果 $a>b>0$，那么 $a^n>b^n(n\in N,\ n\geq 2)$.

（6）如果 $a>b>0$，那么 $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}(n\in N,\ n\geq 2)$.

4. 不等式的解

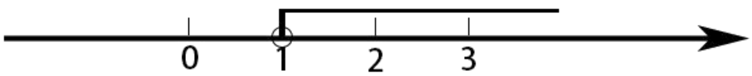
（1）不等式的解

使不等式成立的未知数的值叫作不等式的解. 一般地，一个含有未知数的不等式的所有解，组成这个不等式的解的集合，简称这个不等式的解集.

（2）不等式解集的表示方法

①用不等式表示. 如：$x\leqslant 1$ 或 $x<-1$.

②用数轴表示.（注意：空心和实心）如：$x>1$.



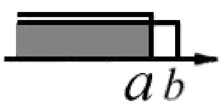
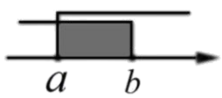
（3）解一元不等式的步骤

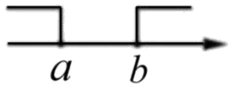
去分母，去括号，移项，合并同类项，系数化为 1（注意是否需要变号）.

5. 不等式组

分别求出组成不等式组的每个不等式的解集后，再求这些解集的交集.

由两个一元一次不等式组成的不等式组的解集通常有如下四种类型（其中 $a<b$）

不等式组	数轴表示	解集	口诀
$\begin{cases}x\geq a\\x\geq b\end{cases}$		$x\geq b$	大大取较大
$\begin{cases}x\leq a\\x\leq b\end{cases}$		$x\leq a$	小小取较小
$\begin{cases}x\geq a\\x\leq b\end{cases}$		$a\leq x\leq b$	大小、小大 中间找

$\begin{cases} x \le a \\ x \ge b \end{cases}$		无解	大大、小小 无处找

知识点 2 一元二次不等式

1. 一元二次不等式的标准形式

$$ax^2+bx+c>0(或<0).$$

其他非标准形式的不等式可以通过等价变形转化为标准形式.

2. 解一元二次不等式的步骤

①先化成标准型：$ax^2+bx+c>0(或<0)$，且 $a>0$；

②计算对应一元二次方程的判别式 $\Delta=b^2-4ac$；

③求对应一元二次方程的根 $x_1,x_2=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$；

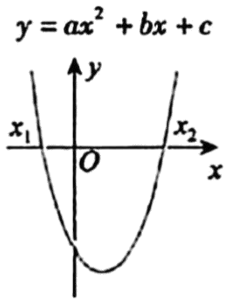
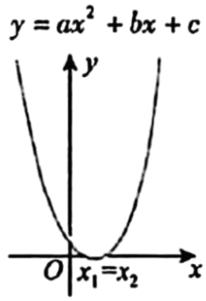
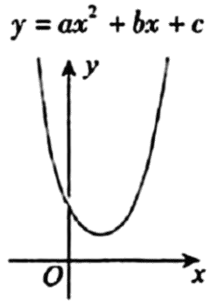
④利用口诀“大于零在两边，小于零在中间”写出解集.

3. 函数、方程、不等式的关系

解一元二次不等式时，就是要善于利用相应的二次函数的图像进行解题分析，要能抓住一元二次方程的根与一元二次不等式的解集区间的端点值的联系.

对于一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a>0)$，设 $\Delta=b^2-4ac$，它的解按照 $\Delta>0$，$\Delta=0$，$\Delta<0$ 可分为三种情况. 相应地，二次函数 $y=ax^2+bx+c(a>0)$ 的图象与 x 轴的位置关系也分为三种情况. 因此，可分三种情况来讨论对应的一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$（$a>0$）的解集.

$\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$

$\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
二次函数 $y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$ 的图像			
一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$ 的根	有两相异实根 x_1，$x_2(x_1<x_2)$	有两相等实根 $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$	无实根
$ax^2+bx+c>0$ $(a>0)$ 的解集	$\{x\vert x<x_1\text{或}x>x_2\}$	$\left\{x\middle\vert x\neq-\dfrac{b}{2a}\right\}$	R
$ax^2+bx+c<0$ $(a>0)$ 的解集	$\{x\vert x_1<x<x_2\}$	$\varnothing$	$\varnothing$

知识点 3　均值不等式

1. 定义

当 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为 n 个正实数时，它们的算术平均不小于它们的几何平均，即 $\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\geq\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$，当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时，等号成立.

成立条件：一正二定三相等

一正：指的是所有数据均为正数.

二定：和定积最大；积定和最小.

三相等：当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 时，等号成立.

2. 常见形式

（1）基本不等式：如果 a，$b>0$，那么 $a+b \geq 2\sqrt{ab}$，当且仅当 $a=b$ 时，等号成立.

（2）几何平均不等式：如果 a，b，$c \in R_+$，那么 $\dfrac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$，当且仅当 $a=b=c$ 时，等号成立.

（3）$a,b \in R \Rightarrow a^2+b^2 \geq 2ab, ab \leq \dfrac{a^2+b^2}{2}$，当且仅当 $a=b$ 时等号成立.

（4）$a+\dfrac{1}{a} \geq 2(a>0)$（当且仅当 $a=1$ 时等号成立）；$a+\dfrac{1}{a} \leq -2(a<0)$（当且仅当 $a=-1$ 时等号成立）.

知识点 4 特殊不等式

1. 绝对值不等式

解绝对值不等式的基本思想是去掉绝对值符号，把含有绝对值号的不等式等价转化为不含绝对值号的不等式求解，常用的方法有：

（1）分段讨论法

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & f(x) \geq 0 \\ -f(x) & f(x) < 0 \end{cases}$$

（2）平方法

$$(|f(x)|)^2 = [f(x)]^2$$

（3）公式法

$$|f(x)| < a(a>0) \Leftrightarrow -a < f(x) < a$$

$$|f(x)| > a(a>0) \Leftrightarrow f(x) < -a \text{或} f(x) > a$$

扩展：$|f(x)|<g(x)\Leftrightarrow -g(x)<f(x)<g(x)$（$g(x)$ 为正）；

$|f(x)|>g(x)\Leftrightarrow f(x)>g(x)$ 或 $f(x)<-g(x)$（$g(x)$ 为正）.

（4）图像法

如果画图比较容易，可以画出图像来分析.

2. 分式不等式

（1）简单分式不等式

①$\dfrac{x-a}{x-b}\geq 0(a<b)$ 的解集为 $\{x|x\leq a$ 或 $x>b\}$；

②$\dfrac{x-a}{x-b}\leq 0(a<b)$ 的解集为 $\{x|a\leq x<b\}$.

（2）其他分式不等式

分式不等式的解法一般通过移项整理成标准 $\dfrac{f(x)}{g(x)}>0$ 或 $\dfrac{f(x)}{g(x)}<0$，再等价化成整式不等式来解.

①$\dfrac{f(x)}{g(x)}>0\Leftrightarrow f(x)\cdot g(x)>0$.

②$\dfrac{f(x)}{g(x)}<0\Leftrightarrow f(x)\cdot g(x)<0$

③$\dfrac{f(x)}{g(x)}\geq 0\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)g(x)\geq 0 \\ g(x)\neq 0 \end{cases}$.

④$\dfrac{f(x)}{g(x)}\leq 0\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)g(x)\leq 0 \\ g(x)\neq 0 \end{cases}$

最后再讨论各因子的符号或按数轴标根法写出解集.

3. 高次不等式——穿线法

“数轴穿线法”用于解一元高次不等式非常方便，其解题步骤如下：

（1）分解因式，化成若干个因式的乘积；

（2）作等价变形，便于判断因式的符号，例如：x^2+1,x^2+x+1,x^2-3x+5 等，这

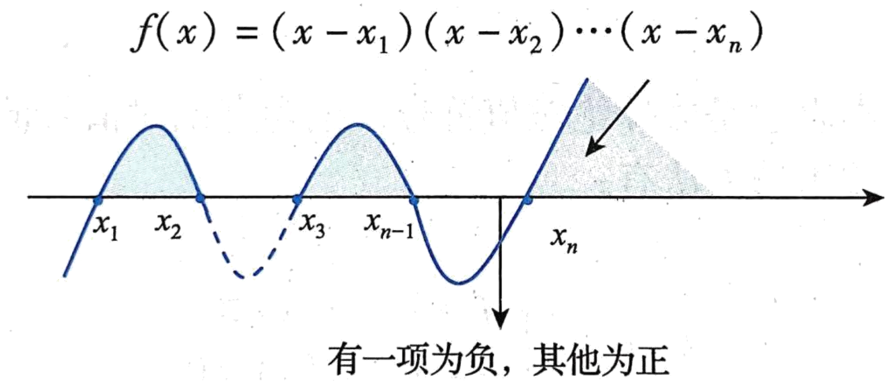
些因式的共同点是：无论 x 取何值，式子的代数值均大于零；

（3）由小到大，从左到右标出与不等式对应的方程的根；

（4）从右上角起，“穿针引线”；

（5）重根的处理，依“奇穿偶不穿”（对于偶数次方的因式，该零点不穿）原则；

（6）画出解集的示意区域，如下图，从左到右写出解集.



阴影部分为 $f(x)>0$ 的解集.

注意：图像在数轴上方代表大于零，在数轴下方代表小于零；x 的系数都要转化为正数来分析.

4. 无理不等式

对于无理不等式，一般是通过平方转化为有理不等式进行求解. 在求解时，注意根号要有意义.

5. 指数、对数不等式

遇到指数或对数不等式，结合单调性进行分析，或者换元转化为一般的不等式求解.

6. 柯西不等式

若 a，b，c，d 都是实数，则 $(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geq(ac+bd)^2$，当且仅当 $ad=bc$ 时，等号成立.

第三章 数列

第一节 数列

知识点 1 数列

1. 数列的定义

按照一定顺序排列着的一列数称为数列.

一般形式：a_1，a_2，a_3,…，a_n,…，简记为$\{a_n\}$.

注意：

（1）没有 a_0

（2）数列$\{a_n\}$可以理解为以正整数集（或它的有限子集）为定义域的函数，因此可以运用函数的观念分析和解决有关数列问题.

（3）递推式是数列特有的表示法，如果一个数列的相邻两项或多项之间的关系可以用一个式子来表示，那么这个式子叫做这个数列的递推公式，如 $a_n = 3a_{n-1}(n \geq 2)$，递推式更能反映数列的特征.

2. 数列的分类

（1）有穷数列（项数有限）；无穷数列（项数无限）

（2）递增数列（$a_n > a_{n-1}$）；递减数列（$a_n < a_{n-1}$）

（3）摆动数列：例如-1, 1，-1, 1，-1……

（4）常数数列：例如 1, 1, 1……

3. 通项公式

$a_n = f(n)$（数列$\{a_n\}$的第 n 项与序号 n 之间的关系式）.

注意：并非每一个数列都可以写出通项公式；有些数列的通项公式也并非是唯一的.

4 数列的前 n 项和

数列的前 n 项和记为 $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$.

5. a_n 与 S_n 的关系（重要）

（1）已知 a_n，求 S_n. 公式：

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

（2）已知 S_n，求 a_n. 公式：

$$a_n = \begin{cases} a_1 = S_1 & n = 1 \\ S_n - S_{n-1} & n \geq 2 \end{cases}$$

第二节 等差数列

知识点 1 等差数列

1. 定义

一般地，如果一个数列从第 2 项起，每一项与它的前一项的差都等于同一个常数，那么这个数列就叫做等差数列，这个常数叫做等差数列的公差，公差通常用字母 d 表示，其中 $d \in R$. 常数数列也为等差数列（$d = 0$）.

2. 通项 a_n

$$a_n = a_1 + (n-1)d = a_k + (n-k)d = nd + a_1 - d$$

若已知 a_m, a_n，则公差 $d = \dfrac{a_n - a_m}{n - m}$.

3. 前 n 项和 S_n

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = \frac{d}{2}n^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)n$$

4. 重要性质

（1）若 m，n，p，$q \in Z_+$，$m + n = p + q$，则 $a_m + a_n = a_p + a_q$.

成立条件：①脚标之和相等②等号两端的项数分别相等

推广：若 $m+n=2p$，则 $a_m+a_n=2a_p$.

（2）若 S_n 为等差数列的前 n 项和，则 S_n，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$，…仍为等差数列，其公差为 n^2d；

（3）等差数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的前 n 项和分别用 S_n，T_n 表示，则 $\dfrac{a_k}{b_k}=\dfrac{S_{2k-1}}{T_{2k-1}}$.

第三节 等比数列

知识点 1 等比数列

1. 定义

一般地，如果一个数列从第 2 项起，每一项与它的前一项的比都等于同一常数，那么这个数列叫做等比数列，这个常数叫做等比数列的公比，公比通常用字母 q 表示（$q\neq 0$）.

2. 通项

$$a_n=a_1q^{n-1}=a_kq^{n-k}=\frac{a_1}{q}q^n$$

已知 a_m,a_n，则 $\dfrac{a_n}{a_m}=q^{n-m}$.

3. 前 n 项和 S_n

$$S_n=\begin{cases} na_1 & q=1 \\ \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\dfrac{a_1-a_nq}{1-q}=\dfrac{a_1-a_{n+1}}{1-q} & q\neq 1 \end{cases}$$

4. 重要性质

（1）若 m，n，p，$q\in Z_+$，$m+n=p+q$，则 $a_m\cdot a_n=a_p\cdot a_q$；

（2）若 S_n 为等比数列前 n 项和，则 S_n，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$，…仍为等比数列，其

公比为 q^n；

（3）若 $|q|<1$，则等比数列所有项和 $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{a_1}{1-q}$.

极限（了解）：$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{a_1}{1-q}$ 表示当 $n\to\infty$（n 趋于无穷大）时，S_n 无限接近于 $\dfrac{a_1}{1-q}$.

第四节 数列综合应用

知识点 1 数列综合应用

1. 递推公式

a_n 与 a_{n+1} 或 a_{n-1} 的关系式称为递推公式，若已知数列的递推关系式及首项，可以写出其他项，因此递推公式是确定数列的一种重要方式.

2. 递推公式的常用思路

（1）列举法

一般通过递推公式找到前几个元素数值的规律，来判断后面元素的数值. 先列举前面若干项，寻找规律，一般是周期循环的规律.

（2）累加法

写出若干项，然后将各项相加.

适用于类等差数列：$a_{n+1}-a_n=f(n)$ 或 $a_{n+1}=a_n+f(n)$

则 $a_n=a_1+f(1)+f(2)+\cdots+f(n-1)$

（3）累乘法

写出若干项，然后将各项相乘.

适用于类等比数列：$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=f(n)$ 或 $a_{n+1}=a_n\cdot f(n)$

则 $a_n=a_1\cdot f(1)\cdot f(2)\cdot\cdots\cdot f(n-1)$

（4）构造数列

将某部分看成一个新数列，新数列是等差或等比数列，求出新数列后，再求原数列.

3.等差数列应用题

当出现差值为定值的应用题时，采用等差数列分析求解.

4.等比数列应用题

当出现比值为定值的应用题时，采用等比数列分析求解.

第四章 几何

第一节 平面几何

知识点 1 线与角

1. 角

（1）定义

有公共端点的两条射线组成的图形叫作角，这个公共端点叫作角的顶点，这两条射线叫作角的边.

当角的两边在一条直线上时，组成的角叫作平角. 平角的一半叫作直角. 小于直角的角叫作锐角. 大于直角且小于平角的角叫作钝角.

如果两个角的和是一个直角，那么这两个角互为余角，其中一个角叫作另一个角的余角.

如果两个角的和是一个平角，那么这两个角互为补角，其中一个角叫作另一个角的补角.

（2）表示方法

①用数字表示单独的角

②用小写的希腊字母表示单独的一个角

③用一个大写英文字母表示一个独立(在一个顶点处只有一个角)的角

④用三个大写英文字母表示任一个角【一定要把顶点字母写在中间，边上的字母写在两侧】

（3）角的平分线

一条射线把一个角分成两个相等的角，这条射线叫作这个角的平分线.

性质：

①角平分线上的点到这个角的两边的距离相等.

②到一个角的两边距离相等的点在这个角的平分线上.

2. 相交线中的角

（1）邻补角与对顶角

两条直线相交，可以得到四个角，其中有公共顶点但没有公共边的两个角互为对顶角，有公共顶点且有一条公共边的两个角互为邻补角.

邻补角互补，对顶角相等.

（2）垂线

两条直线相交所成的四个角中，有一个角是直角时，称这两条直线互相垂直，其中一条直线叫作另一条直线的垂线，它们的交点叫作垂足.直线 AB，CD 互相垂直，记作“AB⊥CD”（或“CD⊥AB”）

性质:

①在同一平面内，过一点有且只有一条直线与已知直线垂直.

②垂线段最短：直线外一点与直线上各点连接的所有线段中，垂线段最短.

3.平行线

（1）定义

在同一个平面内，不相交的两条直线叫作平行线，平行用符号“∥”表示，如“AB∥CD”，读作“AB 平行于 CD”

同一平面内，两条直线的位置关系只有两种:相交或平行.

注意：

①平行线是无限延伸的，无论怎样延伸也不相交.

②当遇到线段、射线平行时，指的是线段、射线所在的直线平行.

（2）平行线公理及其推论

公理：经过直线外一点，有且只有一条直线与这条直线平行.

推论：如果两条直线都和第三条直线平行，那么这两条直线也互相平行.

（3）平行线的判定

平行线的判定公理：同位角相等，两直线平行.

平行线的判定定理：①内错角相等，两直线平行.②同旁内角互补，两直线平行.

补充平行线的判定方法:①平行于同一条直线的两直线平行.②垂直于同一条直线的两直线平行.③平行线的定义.

（4）平行线的性质

①两直线平行，同位角相等.

②两直线平行，内错角相等.

③两直线平行，同旁内角互补.

知识点 2 三角形

1. 三角形的边和角

（1）任意两边之和大于第三边，即 $a+b>c$；任意两边之差小于第三边，即 $a-b<c$.

（2）三角形内角之和 180°，外角等于不相邻的两个内角之和.

（3）三角形中大边对大角，大角对大边.

（4）直角三角形中，30°角所对的边是斜边的一半，三边之比为 $1:\sqrt{3}:2$.

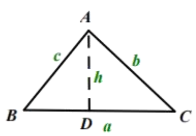
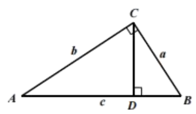
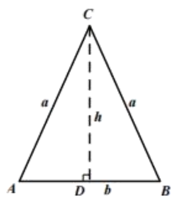
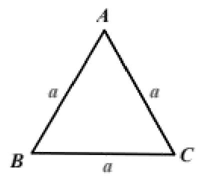
直角三角形中，一个内角为 45°，三边之比为 $1:1:\sqrt{2}$.

（5）在锐角三角形中，最长边的平方＜剩余两边的平方和.

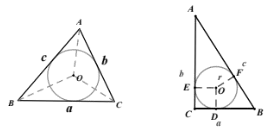
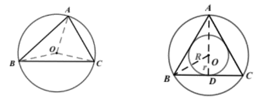
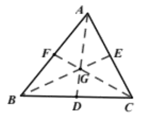
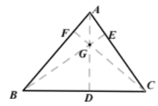
在直角三角形中，最长边的平方＝剩余两边的平方和（勾股定理）.

在钝角三角形中，最长边的平方＞剩余两边的平方和.

2. 三角形的性质及相关公式

名称	一般三角形	直角三角形	等腰三角形	等边三角形
图形				
相关内容及公式	$S=\frac{1}{2}ah$ $S=\frac{1}{2}ab\sin C$ $=\frac{1}{2}bc\sin A$ $=\frac{1}{2}ac\sin B$	（1）勾股定理： $a^2+b^2=c^2$ （2）常用的勾股数：（3，4，5）；（6，8，10）；（5，12，13）；（7，24，25）；（8，15，17）	等腰三角形的顶角平分线、底边上的中线，底边上的高重合，即“三线合一”	$h=\frac{\sqrt{3}}{2}a$ $S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

3. 三角形的四心

名称	内心	外心	重心	垂心
定义	内切圆的圆心； 顶角的角平分线的交点	外接圆的圆心； 底边中垂线的交点	底边中线的交点	底边高线的交点
图形				
相关性质	（1）内心到各边距离相等； （2）$S=\frac{1}{2}(a+b+c)r$ $=\frac{1}{2}rC_{周长}$ （3） $Rt\Delta$中：$r=\frac{a+b-c}{2}$	（1）外心到各顶点距离相等； （2）等边△的外接圆与内切圆半径之比： $\frac{R}{r}=\frac{2}{1}$	$\frac{AG}{GD}=\frac{BG}{GE}=\frac{CG}{GF}=\frac{2}{1}$	

4. 三角形全等与相似

（1）全等、相似的判定

全等的判定		相似的判定
SSS（边边边）	三边对应相等的三角形全等	三边对应成比例
SAS（边角边）	两边及其夹角对应相等的三角形全等	两边对应成比例且夹角相等
ASA（角边角）	两角及其夹边对应相等的三角形全等	两对应角相等
AAS（角角边）	两角及其一角的对边对应相等的三角形全等	
HL（斜边、直角边）	斜边及一条直角边相等的直角三角形全等	一锐角相等

（2）相似结论

相似三角形（相似图形）对应边的比相等（即为相似比）. $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}=k$.

相似三角形（相似图形）的高、中线、角平分线的比也等于相似比.

相似三角形（相似图形）的周长比等于相似比. $\frac{C_1}{C_2}=k$.

相似三角形（相似图形）的面积比等于相似比的平方. $\frac{S_1}{S_2}=k^2$.

（3）相似模型

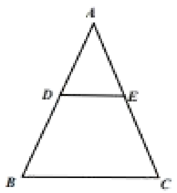
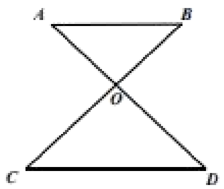
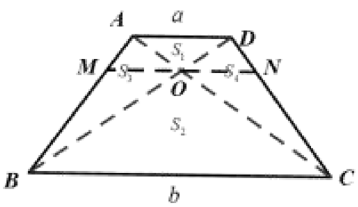
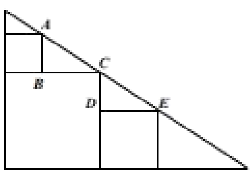
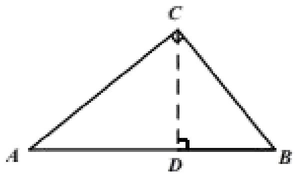
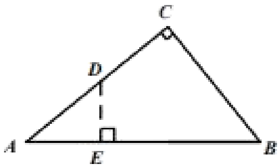
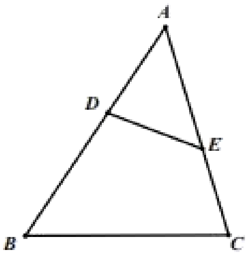
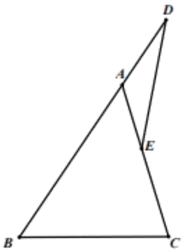
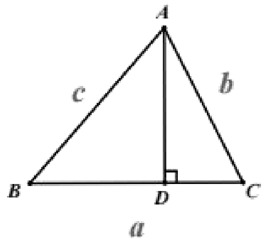
图	模型
	A 字型：$\Delta ADE \sim \Delta ABC$
	8 字型：$\Delta ABO \sim \Delta DCO$
	梯形：$\Delta ADO \sim \Delta CBO$ $\frac{AD}{CB}=\frac{AO}{CO}=\frac{DO}{BO}=\frac{a}{b}=\frac{S_1}{S_3}=\frac{S_4}{S_2}$ 梯形面积三条性质：$\frac{S_1}{S_2}=\left(\frac{a}{b}\right)^2$， $S_3=S_4, S_1S_2=S_3S_4$ $MN // AD, MN=\frac{2ab}{a+b}$ （调和平均数）
	楼梯图形：$\Delta ABC \sim \Delta CDE$

图	模型
	双垂直图形： $\Delta ACD \sim \Delta CBD \sim \Delta ABC$
	$\Delta ADE \sim \Delta ABC$

（4）（拓展）余弦定理与鸟头定理

鸟头定理：共角三角形		余弦定理
		
$\frac{S_{\Delta ADE}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot AD\cdot AE\cdot\sin\angle A}{\frac{1}{2}\cdot AB\cdot AC\cdot\sin\angle A}=\frac{AD\cdot AE}{AB\cdot AC}$	$\frac{S_{\Delta ADE}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot AD\cdot AE\cdot\sin\angle DAE}{\frac{1}{2}\cdot AB\cdot AC\cdot\sin\angle BAC}=\frac{AD\cdot AE}{AB\cdot AC}$	$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$ $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ $a^2+b^2=c^2 \Leftrightarrow$ 直角Δ $a^2+b^2>c^2 \Leftrightarrow$ 锐角Δ $a^2+b^2<c^2 \Leftrightarrow$ 钝角Δ

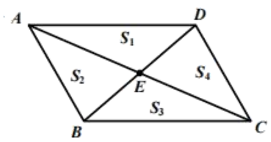
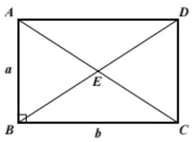
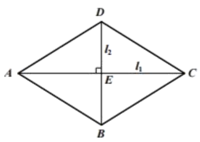
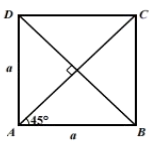
知识点 3 四边形：矩形、平行四边形、梯形

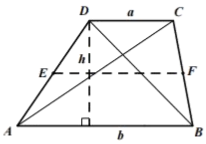
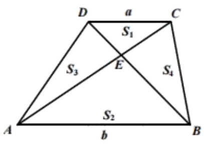
1.边与角

（1）n 边形内角和：$(n-2)\times180^\circ$.

（2）n 边形对角线条数：$\dfrac{(n-3)\times n}{2}$.

2.四边形图形和性质

平行四边形		（1）定义：一组对边平行且相等的四边形叫平行四边形 （2）性质： ①两条对角线 AC 和 BD 互相平分 ②两条对角线 AC 和 BD 将整个平行四边形面积四等分 （3）公式：$S_{平行四边形}=底边\times高$
矩形		（1）定义：有一个角是 90°的平行四边形叫做矩形 （2）性质： ①平行四边形的所有性质都满足 ②矩形的对角线相等 （3）公式：$C_{周长}=2\cdot(a+b)$；$S_{面积}=ab$
菱形		（1）定义：有一组邻边相等的平行四边形叫做菱形 （2）性质： ①两条对角线 AC 和 BD 互相垂直且平分 ②菱形面积等于对角线乘积的一半 （3）公式：$S_{菱形}=\dfrac{1}{2}\cdot l_1\cdot l_2$
正方形		（1）定义：四条边都相等、四个角都是直角的四边形是正方形 （2）性质： ①对角线互相垂直，对角线相等且互相平分，每条对角线平分一组对角

		②既是中心对称图形，又是轴对称图形（有四条对称轴） ③正方形的一条对角线把正方形分成两个全等的等腰直角三角形，对角线与边的夹角是 45° ④正方形的两条对角线把正方形分成四个全等的等腰直角三角形 ⑤正方形具有平行四边形、菱形、矩形的一切性质与特性 （3）公式： $C_{周长}=4a$； $S_{面积}=a^2$；对角线 $AC=BD=\sqrt{2}a$
梯形		（1）定义：只有一组对边平行的四边形叫梯形 （2）性质：两腰中点连线 EF 平行于上底和下底 （3）公式： $EF=\frac{1}{2}(a+b)$； $S_{梯形}=\frac{(a+b)\cdot h}{2}=$中位线×高
梯形（拓展—蝶形定理）		（1）$\frac{S_1}{S_2}=\left(\frac{a}{b}\right)^2$ （2）$S_3=S_4$ （3）$S_1S_2=S_3S_4$

知识点 4 圆与扇形

1. 弧度定义

弧度是角的度量单位. 弧度是指在一个圆中，弧长和半径之比，即弧度＝弧长÷半径.

2. 度与弧度及常用的换算

（1）度与弧度的换算关系：1 弧度＝$\dfrac{180°}{\pi}$；1°＝$\dfrac{\pi}{180}$弧度.

（2）常用的换算：

角度	30°	45°	60°	90°	120°	180°	360°
弧度	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{2\pi}{3}$	π	2π

3. 圆中的基本性质

（1）弦：过点 P 的最长弦为直径，最短弦为过点 P 垂直于直径的弦.

（2）圆心角：顶点在圆心的角叫作圆心角.

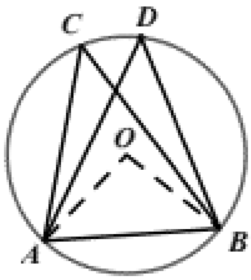
（3）圆周角：顶点在圆上，并且两边都和圆相交的角叫作圆周角.

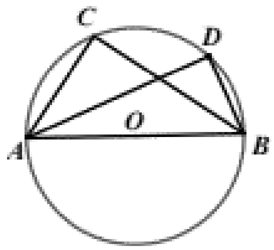
（4）圆周角定理：

同一段弦对应的圆周角相同，即 $\angle ACB=\angle ADB$；

同一段弦对应的圆心角是圆周角的 2 倍，即在如下左图中 $\angle AOB=2\angle ACB=2\angle ADB$；

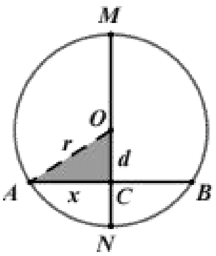
直径对应的圆周角为 90°，即在如下右图中 $\angle ACB=\angle ADB=90°$.





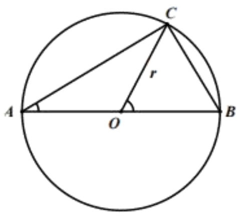
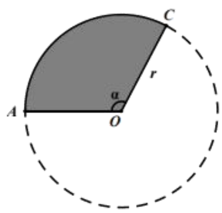
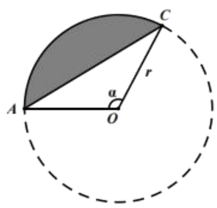
4. 垂径定理（重要）

平面、立体、解析几何中，解决圆与弦（直线）的问题时使用，构造直角三角形，利用勾股定理解决问题！

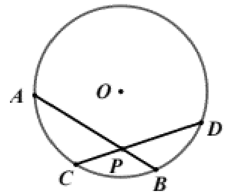
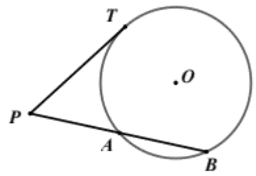
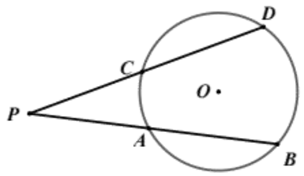


垂径定理：垂直于弦的直径平分弦，并且平分弦所对的两条弧. 如图，直径 MN 平分且垂直 AB：$r^2=d^2+x^2$.

5. 圆、扇形、弓形

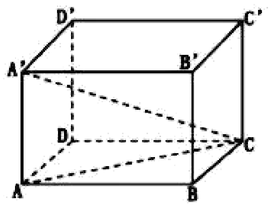
圆		（1）圆心为O，半径为r （2）公式：$C_{周长}=2\cdot\pi\cdot r$；$S_{圆}=\pi\cdot r^2$ （3）圆心角与圆周角： $\angle COB$ 为圆心角，$\angle CAB$ 为圆周角； 圆心角等于圆周角的 2 倍，即 $\angle COB=2\angle CAB$
扇形		（1）α 为扇形角的角度，r 为扇形半径 （2）公式： 扇形弧长：$l=\dfrac{\alpha°}{360°}\cdot 2\cdot\pi\cdot r$ 扇形面积：$S_{扇形}=\dfrac{\alpha°}{360°}\cdot\pi\cdot r^2=\dfrac{1}{2}\cdot l\cdot r$
弓形		公式：$S_{弓形}=S_{扇形AOC}-S_{\Delta AOC}$

6. 拓展

相交弦定理		$PA \cdot PB = PC \cdot PD$
切割线定理		$PT^2 = PA \cdot PB$
割线定理		$PA \cdot PB = PC \cdot PD$

第二节 立体几何

知识点 1 长方体



设 3 条相邻的棱边长是 a,b,c .

1. 全面积： $F = 2(ab + bc + ac)$.

2. 体积： $V = abc$.

3. 体对角线： $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

4. 所有棱长和： $l = 4(a + b + c)$.

当 $a = b = c$ 时，长方体称为正方体，且有 $S_{全} = 6a^2$， $V = a^3$， $d = \sqrt{3}a$.

知识点 2 圆柱体

1. 柱体的分类

圆柱：底面为圆的柱体称为圆柱.

棱柱：底面为多边形的柱体称为棱柱，底面为n边形的柱体就称为n棱柱.

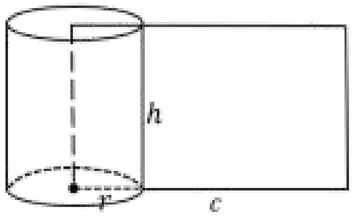
2. 柱体的一般公式

无论是圆柱还是棱柱，侧面展开图均为矩形，其中一边长为底面的周长，另一边为柱体的高.

侧面积：S＝底面周长×高（展开矩形的面积）.

体积：V＝底面积×高.

3. 对于圆柱的公式



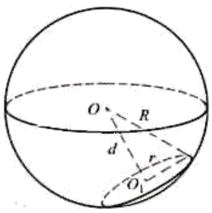
设高为h，底面半径为r.

体积：$V=\pi\cdot r^2\cdot h$.

侧面积：$S=2\cdot\pi\cdot r\cdot h$（其侧面展开图为一个长为$2\cdot\pi\cdot r$，宽为$h$的长方形）.

全面积：$F=S_{侧}+2S_{底}=2\cdot\pi\cdot r\cdot h+2\cdot\pi\cdot r^2$.

知识点 3 球体



1. **面积**：$S_{球面}=4\pi R^2$（R 为球半径）.

2. **体积**：$V_{球}=\dfrac{4}{3}\pi R^3$（$R$ 为球半径）.

知识点 4 位置关系

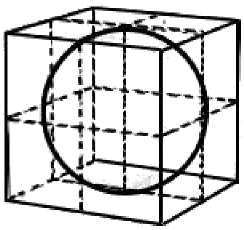
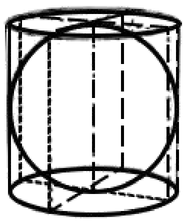
几何体的外接球：几何体的顶点都在同一个球面上的球.

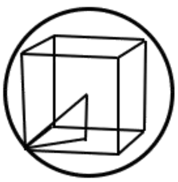
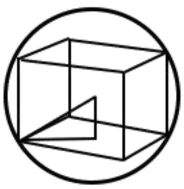
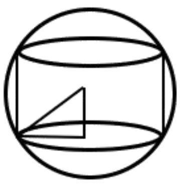
几何体的内切球：与几何体的各个面都相切的球.

设圆柱底面半径为 r，球半径为 R，圆柱的高为 h.

几何体	内切球	外接球
长方体	无，只有正方体才有	体对角线 $l=2R$
正方体	棱长 $a=2R$	体对角线 $l=2R(2R=\sqrt{3}a)$
圆柱	只有轴截面是正方形的圆柱才有，此时有 $2r=h=2R$	$\sqrt{h^2+(2r)^2}=2R$

（补充）：

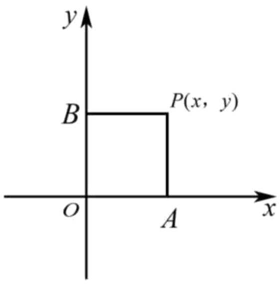
内切球（半径为 R）		
	边长为a的正方体：$R=\dfrac{a}{2}$	等边圆柱（底面半径为r）：$R=r$

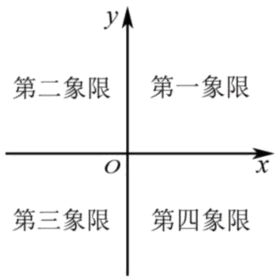
外接球（半				
	正方体	长方体	圆柱	正三棱柱

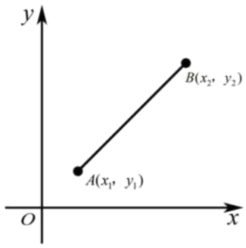
径为R）	（边长为a）	（三边长分别为a，b，c）	（底面半径为r，高为h）	（边长为a，高为h）
	$R=\dfrac{\sqrt{3}a}{2}$	$R=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}$	$(2R)^2=(2r)^2+h^2$	$R^2=\left(\dfrac{\sqrt{3}a}{3}\right)^2+\left(\dfrac{h}{2}\right)^2$

第三节 解析几何

知识点 1 平面直角坐标系







1. 点在平面直角坐标系中的表示：$P(x,y)$.

2. 两点距离公式：两点 $A(x_1,y_1)$与$B(x_2,y_2)$之间的距离 $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

3. 中点坐标公式：两点 $A(x_1,y_1)$与$B(x_2,y_2)$的中点坐标$\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$.

4. 点到直线的距离：点 $P(x_1,y_1)$ 到直线 $Ax+By+C=0$ 的距离为 d，则 $d=\dfrac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

5. 两平行直线之间的距离：

设 l_1：$ax+by+c_1=0$；l_2：$ax+by+c_2=0$，那么 l_1 与 l_2 之间的距离为

$d=\dfrac{|c_1-c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

6. 倾斜角：直线l向上的方向与x轴正方向之间所成的夹角，称为倾斜角，记为α. 其中α∈$[0，\pi)$.

7. 斜率：直线倾斜角的正切值为直线的斜率，记为$k=\tan\alpha,\left(\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}\right)$.

倾斜角 α	0°	30° $(\frac{\pi}{6})$	45° $(\frac{\pi}{4})$	60° $(\frac{\pi}{3})$	90° $(\frac{\pi}{2})$	120° $(\frac{2\pi}{3})$	135° $(\frac{3\pi}{4})$	150° $(\frac{5\pi}{6})$	180° (π)
斜率 $k=\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	不存在	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

知识点 2 直线方程与圆的方程

1. **直线方程**

名称	已知条件	方程形式	说明
点斜式	直线过点$P(x_1,y_1)$和斜率k	$y-y_1=k(x-x_1)$	不包括y轴和平行于y轴的直线
斜截式	斜率k和直线在y轴的截距b	$y=kx+b$	不包括y轴和平行于y轴的直线
截距式	直线在x轴上的截距是a（$a\neq0$） 直线在y轴上的截距是b（$b\neq0$）	$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$	不包括经过原点的直线以及平行于坐标轴的直线
两点式	直线过点$P(x_1,y_1)$和点$P(x_2,y_2)$（$x_1\neq x_2$， $y_2\neq y_1$）	$\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$	不包括坐标轴和平行于坐标轴的直线

名称	已知条件	方程形式	说明
一般式	A、B 不同时为零	$Ax+By+C=0$	任何一条直线都可以写成此种形式

2. 圆的方程

（1）圆的标准方程

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，其中 (a,b) 是圆心的坐标，r 是圆的半径.

（2）圆的一般方程

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

配方后得到：$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2-4c}{4}$，要求 $a^2+b^2-4c>0$.

圆心坐标 $\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}\right)$，半径 $r=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}>0$.

知识点 2 位置关系

1. 两条直线位置关系

两条直线的位置关系	斜截式 l_1: $y=k_1x+b_1$ l_2: $y=k_2x+b_2$	一般式 l_1: $a_1x+b_1y+c_1=0$ l_2: $a_2x+b_2y+c_2=0$
平行	$l_1//l_2 \Leftrightarrow k_1=k_2$，$b_1\neq b_2$	$l_1//l_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$
相交	$k_1\neq k_2$	$\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$

两条直线的位置关系	斜截式 l_1：$y=k_1x+b_1$ l_2：$y=k_2x+b_2$	一般式 l_1：$a_1x+b_1y+c_1=0$ l_2：$a_2x+b_2y+c_2=0$
垂直	$l_1\perp l_2\Leftrightarrow k_1k_2=-1$	$l_1\perp l_2\Leftrightarrow\frac{a_1}{b_1}\cdot\frac{a_2}{b_2}=-1\Leftrightarrow$ $a_1a_2+b_1b_2=0$

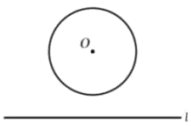
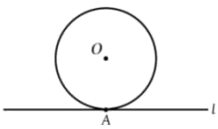
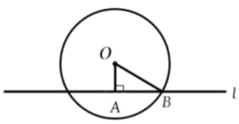
2. 点与圆的位置关系

点 $P(x_p,y_p)$，圆 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$，则

$$(x_p-x_0)^2+(y_p-y_0)^2\begin{cases}<r^2, & \text{点在圆内.}\\=r^2, & \text{点在圆上.}\\>r^2, & \text{点在圆外.}\end{cases}$$

3. 直线与圆位置关系

直线 l：$y=kx+b$；圆 O：$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$，d 为圆心 (x_0,y_0) 到直线 l 的距离.

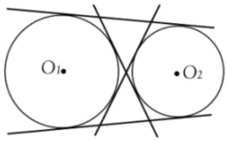
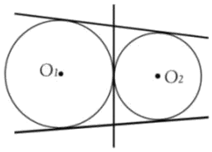
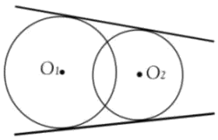
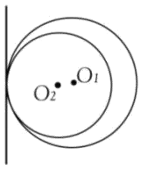
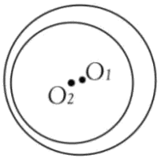
直线与圆位置关系	图形	成立条件（几何表示）
直线与圆相离		$d>r$
直线与圆相切		$d=r$
直线与圆相交		$d<r$

注意：在直线与圆的位置关系中，常常用到一个重要的三角形 $Rt\Delta OAB$ 做计算.

4. 圆与圆位置关系

圆 O_1：$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=r_1^2$；圆 O_2：$(x-x_2)^2+(y-y_2)^2=r_2^2$

设 $r_1>r_2$；d 为圆心 (x_1,y_1) 与圆心 (x_2,y_2) 的圆心距.

两圆位置关系	图形	成立条件（几何表示）	公共内切线条数	公共外切线条数
外离		$d>r_1+r_2$	2	2
外切		$d=r_1+r_2$	1	2
相交		$r_1-r_2<d<r_1+r_2$	0	2
内切		$d=r_1-r_2$	0	1
内含		$d<r_1-r_2$	0	0

5. 对称问题（五种基本对称）

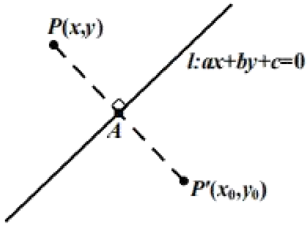
（1）点关于点对称

对称点为中点，利用中点坐标公式求解.

（2）点关于直线对称

A. $pp'\perp l$ 即斜率互为“负倒数”.

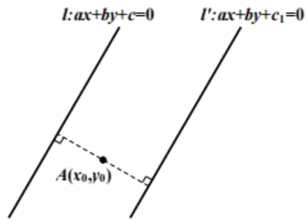
B. p 和 p' 的中点 A 在对称轴上即中点 A 满足对称轴方程.



（3）直线关于点对称

A. $l // l'$，即 l'：$ax+by+c_1=0$（这里只含有 c_1 一个未知数）.

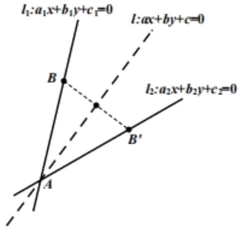
B. 对称点 A (x_0,y_0) 到直线 l 和 l' 距离相等（再利用点到直线距离公式可求 c_1）.



（4）直线关于直线对称

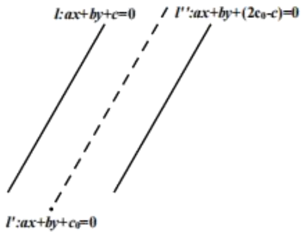
A. 三线共点，联立 l 与 l_1 求出点 A 坐标，其也满足 l_2 方程.

B. 在 l_1 上任取一点 B，求点 B 关于直线 l 对称的点 B'，点 B' 也满足 l_2 方程.



（5）平行直线对称

将对称轴视为“中点”，巧用中点坐标公式求解，l''：$ax+by+(2c_0-c)=0$.



（6）拓展——五种特殊对称

对称方式	**点** $p(x_0,y_0)$	**直线** l**：** $ax+by+c=0$	**规律**
关于 x 轴对称	$p'(x_0,-y_0)$	l'：$ax-by+c=0$	将 y 换成 $-y$
关于 y 轴对称	$p'(-x_0,y_0)$	l'：$-ax+by+c=0$	将 x 换成 $-x$
关于原点对称	$p'(-x_0,-y_0)$	l'：$ax+by-c=0$	将 x 换成 $-x$，将 y 换成 $-y$
关于 $y=x$ 对称	$p'(y_0,x_0)$	l'：$ay+bx+c=0$	将 x 与 y 交换
关于 $y=-x$ 对称	$p'(-y_0,-x_0)$	l'：$ay+bx-c=0$	将 x 换成 $-y$，将 y 换成 $-x$

第五章 数据分析

第一节 排列与组合

知识点 1 基本计数原理

1. 分类加法计数原理

完成一件事有两类不同方案（两类不同方案中的方法互不相同），在第 1 类方案中有 m 种不同的方法，在第 2 类方案中有 n 种不同的方法，那么完成这件事共有 $N=m+n$ 种不同的方法.

运用加法原理计数，关键在于合理分类，不重不漏.

2. 分步乘法计数原理

完成一件事需要两个步骤，做第 1 步有 m 种不同的方法，做第 2 步有 n 种不同的方法，那么完成这件事共有 $N=m\times n$ 种不同的方法.

知识点 2 排列与排列数

1. 排列

一般地，从 n 个不同元素中取出 m $(m\leqslant n)$ 个元素，并按照一定的顺序排成一列，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列.

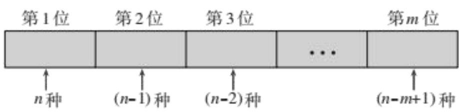
根据排列的定义，两个排列相同的充要条件是：两个排列的元素完全相同，且元素的排列顺序也相同. 例如：123 与 134 的元素不完全相同，它们是不同的排列；123 与 132 虽然元素完全相同，但元素的排列顺序不同，它们也是不同的排列.

2. 排列数

我们把从 n 个不同元素中取出 m $(m\leqslant n)$ 个元素的所有不同排列的个数，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数，用符号 A_n^m 表示.

3. 排列数公式

一般地，求排列数 A_n^m 可以按依次填 m 个空位来考虑：



假定有排好顺序的 m 个空位，如图所示，从 n 个不同元素中取出 m 个元素去填空，一个空位填上一个元素，每一种填法就对应一个排列. 因此，所有不同填法的种数就是排列数 A_n^m .

填空可以分为 m 个步骤完成：

第 1 步，从 n 个不同元素中任选 1 个填在第 1 位，有 n 种选法；

第 2 步，从剩下的 $(n-1)$ 个元素中任选 1 个填在第 2 位，有 $(n-1)$ 种选法；

第 3 步，从剩下的 $(n-2)$ 个元素中任选 1 个填在第 3 位，有 $(n-2)$ 种选法；

……

第 m 步，从剩下的 $[n-(m-1)]$ 个元素中任选 1 个填在第 m 位，有 $(n-m+1)$ 种选法.

根据分步乘法计数原理，m 个空位的填法种数为 $n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$.

这样我们就得到公式：

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$$

这里，$m,n \in N^*$，并且 $m \le n$. 这个公式叫做排列数公式.

特别地，我们把 n 个不同的元素全部取出的一个排列，叫做 n 个元素的一个全排列. 这时，排列数公式中 $m=n$，即有：

$$A_n^n = n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times3\times2\times1$$

也就是说，将 n 个不同的元素全部取出的排列数，等于正整数 1 到 n 的连乘积. 正整数 1 到 n 的连乘积，叫做 n 的阶乘，用 $n!$ 表示. 于是，n 个元素的全排列数公式可以写成：

$$A_n^n = n!$$

另外，我们规定，$0!=1$.

事实上，有：

$$
\begin{aligned}
A_n^m &= n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)\\
&= \frac{n\times(n-1)\times(n-2)\times\dots\times(n-m+1)\times(n-m)\times\dots\times2\times1}{(n-m)\times\dots\times2\times1}\\
&= \frac{A_n^n}{A_{n-m}^{n-m}}\\
&= \frac{n!}{(n-m)!}
\end{aligned}
$$

因此，排列数公式还可以写成

$$A_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}$$

知识点 3 组合与组合数

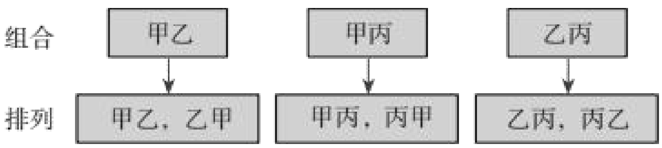
1. 组合

一般地，从 n 个不同元素中取出 m（$m\leqslant n$）个元素作为一组，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个组合.

知识点拨

从排列与组合的定义可以知道，两者都是从 n 个不同元素中取出 m（$m\leqslant n$）个元素，这是它们的共同点．但排列与元素的顺序有关，而组合与元素的顺序无关.

例如：“甲乙”与“乙甲”的元素完全相同，但元素的排列顺序不同，因此它们是相同的组合，不同的排列．[“元素相同、顺序不同的两个组合相同”“元素相同、顺序不同的两个排列不同”]. 这样，以“元素相同”为标准分类，就可以建立起排列和组合之间的对应关系，如图所示：



2. 组合数

从 n 个不同元素中取出 m（$m\leqslant n$）个元素的所有不同组合的个数，叫做从 n 个不同元

素中取出 m 个元素的组合数，用符号 C_n^m 表示.

3. 组合数公式

求“从 n 个元素中取出 m 个元素的排列数 A_n^m”，可以看作由以下两个步骤得到：

第 1 步，从 n 个不同元素中取出 m 个元素作为一组，共有 C_n^m 种不同的取法；

第 2 步，将取出的 m 个元素作全排列，共有 A_m^m 种不同的排法.

根据分步乘法计数原理，有：$A_n^m = C_n^m \cdot A_m^m$

因此，$C_n^m = \dfrac{A_n^m}{A_m^m} = \dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}$.

这里，$n,m \in N^*$，并且 $m \le n$. 这个公式叫做组合数公式.

因为 $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$，所以，上面的组合数公式还可以写成 $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$.

另外，我们规定，$C_n^0 = 1$.

4. 组合数的性质

（1）$C_n^m = C_n^{n-m}$

（2）$C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1}$

（3）$C_n^x = C_n^y \Rightarrow x = y$ 或 $x + y = n$

（4）$C_n^0 = C_n^n = 1$；$C_n^1 = C_n^{n-1} = n$

（5）$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$

（6）$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \cdots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \cdots = 2^{n-1}$

知识点 4 二项式定理

1. 定义

$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b^1+\cdots+C_n^ka^{n-k}b^k+\cdots+C_n^nb^n$， $n\in N^*$ 叫做二项式定理.

右边的多项式叫做 $(a+b)^n$ 的二项展开式，其中各项的系数 C_n^k（$k=0,1,2,\cdots,n$）叫做二项式系数. 式中的 $C_n^ka^{n-k}b^k$ 叫做二项展开式的通项，用 T_{k+1} 表示，即通项为展开式的第 $k+1$ 项：$T_{k+1}=C_n^ka^{n-k}b^k$.

2. 二项式系数的性质

$(a+b)^n$ 的展开式的二项式系数：C_n^0， C_n^1， C_n^2，…， C_n^k ，…， C_n^n.

（1）对称性：$C_n^m=C_n^{n-m}$

（2）增减性与最大值：

因为 $C_n^k=\dfrac{n(n-1)\ldots(n-k+2)(n-k+1)}{(k-1)!k}=C_n^{k-1}\dfrac{n-k+1}{k}$，即 $\dfrac{C_n^k}{C_n^{k-1}}=\dfrac{n-k+1}{k}$，所以，当 $\dfrac{n-k+1}{k}>1$，即 $k<\dfrac{n+1}{2}$ 时，C_n^k 随 k 的增加而增大；由对称性知，$k>\dfrac{n+1}{2}$ 时，C_n^k 随 k 的增加而减小. 当 n 是偶数时，中间的一项 $C_n^{\frac{n}{2}}$ 取得最大值；当 n 是奇数时，中间的两项 $C_n^{\frac{n-1}{2}}$ 与 $C_n^{\frac{n+1}{2}}$ 相等，且同时取得最大值.

（3）各二项式系数的和：

①$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n$

②$C_n^0+C_n^2+C_n^4+\cdots=C_n^1+C_n^3+C_n^5+\cdots=2^{n-1}$

第二节 概率

知识点 1 随机事件与概率

1. 有限样本空间与随机事件

（1）有限样本空间

对随机现象的实现和对它的观察称为随机试验，简称试验，常用字母 E 表示.

我们感兴趣的是具有以下特点的随机试验：

①试验可以在相同条件下重复进行.

②试验的所有可能结果是明确可知的，并且不止一个.

③每次试验总是恰好出现这些可能结果中的一个，但事先不能确定出现哪一个结果.

随机试验 E 的每个可能的基本结果称为样本点，全体样本点的集合称为试验 E 的样本空间. 一般用 Ω 表示样本空间，用 ω 表示样本点.

如果一个随机试验有 n 个可能结果 ω_1，ω_2，…，ω_n，则称样本空间 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$ 为有限样本空间.

（2）随机事件

一般地，随机试验中的每个随机事件都可以用这个试验的样本空间的子集来表示. 为了叙述方便，我们将样本空间 Ω 的子集称为随机事件，简称事件，并把只包含一个样本点的事件称为基本事件.

随机事件一般用大写字母 A， B， C，…表示. 在每次试验中，当且仅当 A 中某个样本点出现时，称为事件 A 发生.

Ω 作为自身的子集，包含了所有的样本点，在每次试验中总有一个样本点发生，所以 Ω 总会发生，称 Ω 为必然事件.

空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点，在每次试验中都不会发生，称 $\varnothing$ 为不可能事件.

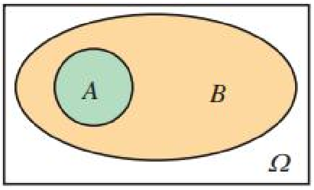
必然事件与不可能事件不具有随机性. 为了方便统一处理，将必然事件和不可能事件作为随机事件的两个极端情形. 这样，每个事件都是样本空间 Ω 的一个子集.

2. 事件的关系和运算

（1）包含

一般地，若事件 A 发生，则事件 B 一定发生，我们就称事件 B 包含事件 A（或事件 A

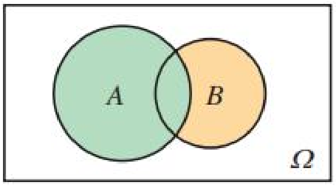
包含于事件 B ），记作 $B\supseteq A$ 或 $A\subseteq B$ ）. 如图所示.



特别地，如果事件 B 包含事件 A，事件 A 也包含事件 B，即 $B\supseteq A$ 且 $A\supseteq B$，则称事件 A 与事件 B 相等，记作 $A=B$.

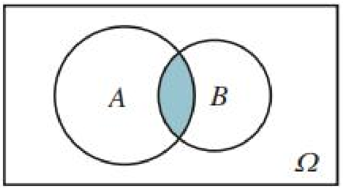
（2）并事件（或和事件）

一般地，事件 A 与事件 B 至少有一个发生，这样的一个事件中的样本点或者在事件 A 中，或者在事件 B 中，我们称这个事件为事件 A 与事件 B 的并事件（或和事件），记作 $A\cup B$（或 $A+B$ ）. 如图所示，图中的绿色区域和黄色区域表示这个并事件.



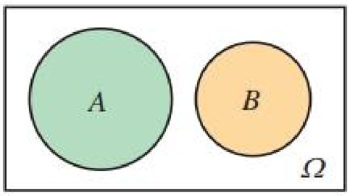
（3）交事件（或积事件）

一般地，事件 A 与事件 B 同时发生，这样的一个事件中的样本点既在事件 A 中，也在事件 B 中，我们称这样的一个事件为事件 A 与事件 B 的交事件（或积事件），记作 $A\cap B$（或 AB ）. 如图所示，图中的蓝色区域表示这个交事件.



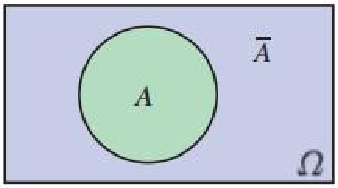
（4）互斥（或互不相容）

一般地，如果事件 A 与事件 B 不能同时发生，也就是说 $A\cap B$ 是一个不可能事件，即 $A\cap B=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 互斥（或互不相容）. 如图所示.



（5）互为对立

一般地，如果事件 A 和事件 B 在任何一次试验中有且仅有一个发生，即 $A\cup B=\Omega$，且 $A\cap B=\varnothing$，那么称事件 A 与事件 B 互为对立. 事件 A 的对立事件记为 $\overline{A}$，如图所示.



知识点拨

事件的关系或运算	含义	符号表示
包含	A 发生导致 B 发生	$A\subseteq B$
并事件（和事件）	A 与 B 至少一个发生	$A\cup B$ 或 $A+B$
交事件（积事件）	A 与 B 同时发生	$A\cap B$ 或 AB
互斥（互不相容）	A 与 B 不能同时发生	$A\cap B=\varnothing$
互为对立	A 与 B 有且仅有一个发生	$A\cap B=\varnothing$，$A\cup B=\Omega$

3. 概率

研究随机现象，最重要的是知道随机事件发生的可能性大小. 对一个随机事件发生可能性大小的度量（数值）称为随机事件发生的概率，事件 A 发生的概率用 $P(A)$ 表示.

由概率的定义可知：任何事件的概率都是非负的；在每次试验中，必然事件一定发生，不可能事件一定不会发生.

4. 概率的基本性质

性质 1 对任意的事件 A，都有 $0\le P(A)\le 1$.

性质 2 必然事件的概率为 1，不可能事件的概率为 0，即 $P(\Omega)=1$，$P(\varnothing)=0$.

性质 3 如果事件 A 与事件 B 互斥，那么 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.

性质 4 如果事件 A 与事件 B 互为对立事件，那么 $P(B)=1-P(A)$，$P(A)=1-P(B)$

【提供“正难则反”的思想：$P(正)=1-P(反)$】.

性质 5 如果 $A\subseteq B$，那么 $P(A)\le P(B)$.

性质 6 设 A，B 是一个随机试验中的两个事件，有:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B).$$

知识点 2 古典概型

1. 定义

若一个随机试验 E 具有如下特征：

（1）有限性：样本空间的样本点只有有限个.

（2）等可能性：每个样本点发生的可能性相等.

则称这个试验为古典概型试验，其数学模型为古典概率模型，简称古典概型.

一般地，设试验 E 是古典概型，样本空间 Ω 包含 n 个样本点，事件 A 包含其中的 k 个样本点，则定义事件 A 的概率为：

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{A\text{包含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}$$

其中，$n(A)$ 和 $n(\Omega)$ 分别表示事件 A 和样本空间 Ω 包含的样本点个数.

知识点拨

求解古典概型问题的一般思路：

（1）明确试验的条件及要观察的结果，用适当的符号（字母、数字、数组等）表示试验的可能结果（借助图表可以帮助我们不重不漏地列出所有的可能结果）.

（2）根据实际问题情境判断样本点的等可能性.

（3）计算样本点总个数及事件 A 包含的样本点个数，求出事件 A 的概率.

2. 分类

（1）取样或取球

（2）分房古典概率

分房问题也就是放球进箱问题，就是把一些球随意地放到盒子或者是箱子中去，要求不同，放的方法也就不同. 样本点数的计算方法既会用到排列数，又会用到组合数.

（3）数字古典概率

对于数字相关的古典概型，要注意数字是否可以重复使用，如果数字可以重复使用，那么就会结合方幂法. 此外，数字问题常用元素位置法，将每个数字看成元素，将每个数位看成位置. 有时数字还会涉及运算式，也就是所取的数字要满足某表达式，此时要用列举法分析.

3. 常用背景

（1）抽奖、尝试密码.

（2）不放回取球.

（3）取出后放回（分房模型）.

（4）至少和至多.

知识点 3 伯努利概型

1. 事件的相互独立性

一般地，当 $P(AB)=P(A)P(B)$ 时，就称事件 A 与事件 B 相互独立（简称独立）. 事件 A 与 B 相互独立的直观理解是，事件 A 是否发生不会影响事件 B 发生的概率，事件 B 是否发生也不会影响事件 A 发生的概率.

如果事件 A 与 B 相互独立，则 $\overline{A}$ 与 B， A 与 $\overline{B}$， $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也相互独立.

独立事件 A 和事件 B 至少有一个发生的概率为：

$$
\begin{aligned}
&P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)\\
&=P(A)+P(B)-P(A)P(B)-P(A)P(B)+P(A)P(B)\\
&=P(A)\cdot[1-P(B)]+P(B)\cdot[1-P(A)]+P(A)P(B)\\
&=P(A)P(\overline{B})+P(B)P(\overline{A})+P(A)P(B)\\
&=P(A)P(\overline{B})+P(B)P(\overline{A})+P(A)P(B)+P(\overline{A})P(\overline{B})-P(\overline{A})P(\overline{B})\\
&=P(A)\cdot\left[P(B)+P(\overline{B})\right]+P(\overline{A})\cdot\left[P(B)+P(\overline{B})\right]-P(\overline{A})P(\overline{B})\\
&=P(A)\times 1+P(\overline{A})\times 1-P(\overline{A})P(\overline{B})=P(A)+P(\overline{A})-P(\overline{A})P(\overline{B})=1-P(\overline{A})P(\overline{B})
\end{aligned}
$$

【注】互斥的两个事件是一次试验中的两个不会同时发生的事件，相互独立的两个事件是两次试验中互不影响的两个事件.

2. 独立重复试验

在相同条件下，将某试验重复进行 n 次，且每次试验中任何一事件的概率不受其他次试验结果的影响，此种试验称为 n 次独立重复试验.

3. 伯努利概型的定义

若一个随机试验 E 具备以下特征：

（1）各次试验相互独立，即某一次的试验结果对其他次均无影响.

（2）试验在相同条件下重复进行 n 次.

（3）每次试验结果仅有两个，即 A 和 $\overline{A}$.

则称该试验为伯努利概型.

4. 伯努利概型的公式

（1）设在一次试验中，事件 A 发生的概率为 $p(0<p<1)$，那么在 n 次独立重复试验中这个事件恰好发生 k 次的概率为 $P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}$， $k=0,1,2,\cdots,n$，其中 $q=1-p$.

特殊情况：

$k=n$ 时，即在 n 次独立重复试验中事件 A 全部发生，概率为 $P_n(n)=C_n^n p^n(1-p)^0=p^n$.

$k=0$ 时，即在 n 次独立重复试验中事件 A 没有发生，概率为 $P_n(0)=C_n^0 p^0(1-p)^n=(1-p)^n$.

（2）设在一次试验中，事件 A 发生的概率为 $p(0<p<1)$，则在伯努利试验序列中，事件 A 在第 k 次试验中才首次发生的概率为 $p(1-p)^{k-1}$,（$k=1,2,\cdots$）.

5. 常用背景

（1）连续的 n 次的射击.

（2）连续的掷 n 次硬币.

（3）连续的 n 次投篮.

知识点 4 条件概率与全概率公式

1. 条件概率

（1）定义

一般地，设 A， B 为两个随机事件，且 $P(A)>0$，称

$$P(B \mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

为在事件 A 发生的条件下，事件 B 发生的条件概率，简称条件概率.

（2）概率的乘法公式

由条件概率的定义，对任意两个事件 A 与 B，若 $P(A)>0$，则有：

$$P(AB)=P(A)P(B \mid A)$$

我们称上式为概率的乘法公式.

2. 全概率公式

一般地，设 A_1， A_2，…， A_n 是一组两两互斥的事件， $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n=\Omega$，且 $P(A_i)>0$， $i=1,2,\cdots,n$，则对任意的事件 $B \subseteq \Omega$，有：

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i)$$

我们称上面的公式为全概率公式. 全概率公式是概率论中最基本的公式之一.

第六章 应用题

知识点 1 比例问题

1. 原值和现值的关系

（1）现值＝原值×（1＋变化率）

（2）原值＝现值÷（1＋变化率）

2. 部分量和总量的关系

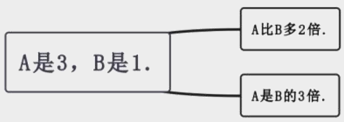
总量＝部分量÷部分量对应比例 $\xrightarrow{\text{变形}}$ 部分量＝总量×部分量对应比例

3. “比”和“是”的关系

（1） A 比 B 大（小） $p\%\Leftrightarrow A=B\cdot(1\pm p\%)$

（2） A 是 B 的 $p\%\Leftrightarrow A=B\cdot p\%$

知识呈现



4. 变化率问题

变化率＝变化量÷变前量

5. 基准量问题

两个量做比较时，被当做 1 的量为“基准量”，被比较的量叫“比较量”.

比较量÷基准量＝比值（倍数）；基准量＝比较量÷比值.

例：爸爸的体重是 80 千克，妈妈的体重是 56 千克，把爸爸的体重当做 1，则妈妈的体重相当于 $56\div80=\dfrac{7}{10}=0.7$.

6. 类型

（1）简单比例应用题

简单的比例计算问题，可以通过看见比例后设 k 的方法进行求解.

（2）比例统一应用题

应用题中出现多个比例时需要进行统一，通过求公共量的最小公倍数将比例统一后，再进行求解.

（3）比例调整应用题

①内部调整　　　　②外部调整

例题精选

【2018】学科竞赛设一等奖、二等奖和三等奖，比例为1∶3∶8，获奖率为30%，已知10人获得一等奖，则参加竞赛的人数为【　】

A. 300　　B. 400　　C. 500　　D. 550　　E. 600

【答案】本题考查应用题——比与比例.

方法一：根据题意得，一等奖占总获奖的比例为：$\frac{1}{1+3+8}=\frac{1}{12}$.

∵10人获得一等奖. ∴获奖总人数为：$10\div\frac{1}{12}=120$（人）.

又∵总获奖率$=\frac{\text{获奖总人数}}{\text{参加竞赛总人数}}$，由于已知总获奖率为30%和获奖总人数为120人.

∴参加竞赛的总人数为：$120\div30\%=400$（人）.

方法二：∵已知总获奖率为30%，且按1∶3∶8的比例分配.

∴一等奖的获奖率为：$30\%\times\frac{1}{1+3+8}=\frac{1}{40}$.

二等奖的获奖率为：$30\%\times\frac{3}{1+3+8}=\frac{3}{40}$.

三等奖的获奖率为：$30\%\times\frac{8}{1+3+8}=\frac{1}{5}$.

又∵10人获得一等奖. ∴参加竞赛的总人数为：$10\div\frac{1}{40}=400$（人）.

方法三：根据题意，设每份为k，则三种奖项获奖人数分别为k，$3k$，$8k$.

已知10人获得一等奖⇒$k=10$.

因此，获奖总人数：$k+3k+8k=12k=120$.

则参加竞赛的总人数为：$120\div30\%=400$（人）.

故选 B.

知识点 2 行程问题

1. 路程 S、速度 v、时间 t 之间的关系： $S=vt$，$t=\dfrac{S}{v}$，$v=\dfrac{S}{t}$.

2. 相遇、追及问题

（1）相遇问题

①直线相遇：路程＝速度和×相遇时间，$S_{相遇}=S_1+S_2=v_1t+v_2t=(v_1+v_2)\cdot t$.

②环形相遇 n 次：n 倍环形周长＝速度和×时间，$nC=(v_1+v_2)\cdot t$.

（2）追及问题（$v_1>v_2$）

①直线追及：路程＝速度差×时间，$S_{相遇}=S_1-S_2=v_1t-v_2t=(v_1-v_2)\cdot t$.

②环形追及 n 次：n 倍环形周长＝速度差×时间，$nC=(v_1-v_2)\cdot t$.

3. 3 个情境

（1）绕圈问题

①圆圈型的路程问题（从同一起点同时出发，周长为 S，第一次相遇时间为 t）

反向运动：$S=S_1+S_2=v_1t+v_2t=(v_1+v_2)\cdot t$.

同向运动：$S=S_1-S_2=v_1t-v_2t=(v_1-v_2)\cdot t$.

②t 一定

反向绕圈：$\dfrac{S_{甲}}{S_{乙}}=\dfrac{v_{甲}}{v_{乙}}$；每相遇一次，二者共同跑完一圈；

同向绕圈：$\dfrac{S_{甲}}{S_{乙}}=\dfrac{v_{甲}}{v_{乙}}$；每追上一次，快的比慢的多一圈.

（2）行船问题

设船在静水中的速度为 $v_{船}$，水流的速度为 $v_{水}$，

（顺水问题）船在顺流而下时的速度为$v_{顺水}=v_{船}+v_{水}$；

（逆水问题）船在逆流而上时的速度为$v_{逆水}=v_{船}-v_{水}$.

在水中的相遇、追及问题，和一般直线相遇追及公式相同.（水速被抵消）

（3）火车问题

火车经过电线杆/静止的行人：$S=L_{火车}=v_{火车}t$.

火车经过移动的行人：相遇$S=L_{火车}=\left(v_{火车}+v_{人}\right)t$；追及$S=L_{火车}=\left(v_{火车}-v_{人}\right)t$

火车经过桥/隧道：$S=L_{火车}+L_{桥}=v_{火车}t$.

火车经过火车：相遇$S=L_{火车1}+L_{火车2}=\left(v_{火车1}+v_{火车2}\right)t$；

追及$S=L_{火车1}+L_{火车2}=\left(v_{火车1}-v_{火车2}\right)t$.

4. 相对速度（两个物体运动时，可将一个作为参照物，看成相对静止的）

同向运动：$v_{同向}=v_1-v_2$.

相向运动：$v_{相向}=v_1+v_2$.

【拓展】：相对运动

适用范围：两个对象同时运动时，可使用相对运动.

相对路程：选择其中一个对象作为参照物（静止）.

相对速度：迎面而来，速度相加；同向而去，速度相减.

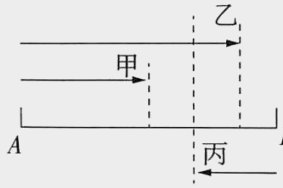
例题精选

【2022】已知A，B两地相距208 km，甲、乙、丙三车的速度分别为60 km/h，80 km/h，90 km/h，甲、乙两车从A地出发去B地，丙车从B地出发去A地，三车同时出发，当丙车与甲、乙两车的距离相等时，用时【 】

A. 70 min　　B. 75 min　　C. 78 min　　D. 80 min　　E. 86 min

【答案】本题考查应用题——路程问题（行程问题）.

根据题意可画图，如图所示.



方法一：设用时t小时后，甲车的路程：$60t$；乙车的路程：$80t$；丙车的路程：$90t$.

丙车与甲、乙两车的距离相等.

丙车与甲车的距离为：$208-60t-90t$.

丙车与乙车的距离为：$80t+90t-208$.

可列方程为：$208-60t-90t=80t+90t-208\Rightarrow t=\frac{13}{10}$小时$=78$ min.

方法二：设用时t小时后，甲车的路程：$60t$；乙车的路程：$80t$；丙车的路程：$90t$.

由图可得，甲、乙两车相距$20t$，故有甲车的路程与丙车的路程相距$10t$等于AB两地距离，乙车的路程与丙车的路程多$10t$等于AB两地距离.

即可列方程：$60t+90t+10t=208$（或$80t+90t-10t=208$）$\Rightarrow t=\frac{13}{10}$小时$=78$ min.

故选C.

知识点 3 工程问题

1. 基本公式

工作总量＝工作效率×工作时间；

工作时间＝工作总量÷工作效率；

工作效率＝工作总量÷工作时间.

2. 单位“1”法

在处理工程问题时，可以将总的工作量看做“1”，若甲单独完成需要m天，乙单独完成需要n天，则有以下结论：

甲的工作效率为$\frac{1}{m}$，乙的工作效率为$\frac{1}{n}$；甲乙合作的效率为$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$；甲乙合作完成需

要的时间为$\dfrac{1}{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}=\dfrac{mn}{m+n}$.

3.类型

（1）合作完工：若干个单位合作时的总工作效率等于各单位工作效率之和.

（2）交替完工：若干个单位交替完成某项工程时，工程总量等于各单位完成的工程量之和.

例题精选

【2022】一项工程施工 3 天后，因故障停工 2 天，之后工程队提高工作效率 20%，仍能按原计划完成. 则原计划工期为【 】

A. 9 天　　B. 10 天　　C. 12 天　　D. 15 天　　E. 18 天

【答案】本题考查应用题——工程问题.

方法一：根据题意可知提高效率前后工作总量不变，此时工作效率p与工作时间t成反比，即$\dfrac{p_{原}}{p_{提}}=\dfrac{1}{(1+0.2)}=\dfrac{5}{6}$，则$\dfrac{t_{原}}{t_{提}}=\dfrac{6}{5}$，$\Delta t=6-5=1$ 份，而提高工作效率前后时间相差 2 天，即 1 份对应 2 天. 原计划时间为 $6\times2=12$ 天，由于效率提高前已经施工了 3 天，所以原计划工期为 $12+3=15$ 天.

方法二：设原计划工作x天，每天的工作效率为 1，总工作量为 $x\cdot1=x$，则施工 3 天完成了 $3\times1=3$ 的工作量，施工 3 天后的剩余工作量为（$x-3$）. 因为停工两天后还能按原计划完成，所以剩余工作时间为（$x-2-3$）＝（$x-5$）天，因为停工后再开工的工作效率提高了 20%，即新的每天的工作效率为 1.2. 因为还能按照原计划完成工作，所以在剩余的（$x-5$）天的工作时间中以新的工作效率工作能完成剩余的工作量，则有 $1.2(x-5)=(x-3)\Rightarrow x=15$.

故选 D.

知识点 4　浓度问题

1.基本公式

溶液量＝溶质量＋溶剂量

溶质量＝浓度×溶液量

浓度$=\dfrac{溶质量}{溶液量}\times 100\%=\dfrac{溶质量}{溶质量+溶剂量}\times 100\%$

盐水＝盐＋水

医用酒精＝纯酒精＋水

【注】溶质是浓度问题的计算标准，浓度通常用百分数表示.

2.蒸发/加水/加浓问题

特征：仅有溶质或溶剂的量发生变化，抓不变量，转换为“比例变化问题”.

方法 1：溶质/溶剂守恒列方程.

方法 2：看作“比例变化问题”，统一不变量.

3.溶液配比/混合问题

方法 1：溶质守恒列方程.

方法 2：十字交叉法.

4.溶液配比相关的确定性问题

（1）已知甲、乙、丙三杯盐水溶液的浓度和溶液质量之比，可确定甲、乙、丙混合后的盐水浓度.

（2）已知甲、乙两溶液按照各种比例关系混合所得溶液浓度间的比例关系，无法确定甲、乙溶液的浓度.

（3）已知甲、乙两溶液按照两种不同比例关系混合所得溶液的浓度的具体值，可确定甲、乙溶液的浓度.

5.反复注水问题（直接套用公式）

（1）原来浓度为x的溶液a升，倒出b升后，再用水加满，浓度变为$x\left(1-\dfrac{b}{a}\right)$，上述操作重复$n$次，浓度变为$x\left(1-\dfrac{b}{a}\right)^n$.

（2）设已知溶液质量为M，每次操作中先倒出M_0溶液，再加入M_0溶剂（清水），重复n次，$c_n=c_0\left(\dfrac{M-M_0}{M}\right)^n=c_0\left(1-\dfrac{M_0}{M}\right)^n$.（$c_n$为操作$n$次后溶液的浓度，从而$c_0$代表原来的溶液的浓度，下同）

（3）设已知溶液质量为M，每次操作中先倒入M_0溶剂（清水），再倒出M_0溶液，

重复n次，$c_n = c_0(\frac{M}{M+M_0})^n$.

6. 浓度置换公式

设一份溶液，原浓度为a，现浓度为b，容器的容积为V，第一次倒出m_1溶液后用水加满，第二次倒出m_2溶液后用水加满……，第n次倒出m_n溶液后用水加满，则有

$$a \cdot \frac{V-m_1}{V} \cdot \frac{V-m_2}{V} \cdot \cdots \cdot \frac{V-m_n}{V} = b$$

【注】题目没有特殊说明，纯溶液的浓度默认其浓度为100%.

技巧点拨

1. 稀释问题：加溶剂，溶质不变.（以溶质不变列等式求解）
2. 加浓问题：加溶质，溶剂不变.（以溶剂不变列等式求解）
3. 浓缩问题（蒸发问题）：减溶剂，溶质不变.（以溶质不变列等式求解）
4. 置换问题：用一定量溶剂置换等量溶液.（浓度置换公式）
5. 混合问题：用两种浓度不同的溶液进行混合形成新溶液.（用杠杆原理交叉法）

例题精选

【2016】将2升甲酒精和1升乙酒精混合得到丙酒精，则能确定甲、乙两种酒精的浓度.【 】

（1）1升甲酒精和5升乙酒精混合后的浓度是丙酒精浓度的$\frac{1}{2}$倍.

（2）1升甲酒精和2升乙酒精混合后的浓度是丙酒精浓度的$\frac{2}{3}$倍.

A. 条件（1）充分，但条件（2）不充分。

B. 条件（2）充分，但条件（1）不充分。

C. 条件（1）和（2）单独都不充分，但条件（1）和条件（2）联合起来充分。

D. 条件（1）充分，条件（2）也充分。

E. 条件（1）和（2）单独都不充分，条件（1）和条件（2）联合起来也不充分。

【答案】本题考查应用题——浓度问题.

根据题意，设甲、乙两种酒精的浓度分别为x，y，则混合后得到的丙酒精浓

度为$\dfrac{2x+y}{3}$.

条件（1），根据条件得$\dfrac{x+5y}{6}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2x+y}{3}$，化简得：$x=4y$. 无法确定$x$，$y$的值，即不能确定甲、乙两种酒精的浓度. 故条件（1）不充分.

条件（2），根据条件得$\dfrac{x+2y}{3}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{2x+y}{3}$，化简得：$x=4y$. 无法确定$x$，$y$的值，即不能确定甲、乙两种酒精的浓度. 故条件（2）不充分.

条件（1）和条件（2）单独都不充分，考虑条件（1）（2）联合.

∵条件（1）和条件（2）等价.

∴无法确定x，y的值，即不能确定甲、乙两种酒精的浓度. 故条件（1）（2）联合起来也不充分.

综上，故选 E.

知识点 5 利润问题

1. 基本公式

（1）利润＝售价－进价（成本）＝利润率×进价（成本）

（2）利润率＝$\dfrac{\text{利润}}{\text{进价}}\times 100\%=\dfrac{\text{售价}-\text{进价}}{\text{进价}}\times 100\%=\left(\dfrac{\text{售价}}{\text{进价}}-1\right)\times 100\%$

（3）售价＝进价×（1＋利润率）＝进价＋利润

（4）折扣价＝原价×折扣

2. 恢复原值

（1）一件商品先提价$p\%$再降价$p\%$，或者先降价$p\%$再提价$p\%$，回不到原价，应该比原价小，因为$a(1-p)(1+p)=a(1-p^2)<1$.

（2）恢复原值：原值先降$p\%$，再增$\dfrac{p\%}{1-p\%}$才能恢复原值；或者先增$p\%$再降$\dfrac{p\%}{1+p\%}$才能恢复原值.

例题精选

【2022】某商品的成本利润为 12%，若其成本降低 20%而售价不变，则利润率为【 】

A. 32%　　B. 35%　　C. 40%　　D. 45%　　E. 48%

【答案】本题考查应用题——利润问题.

由于所求为百分数，故可用特值法.

根据题意可设成本为 100 元，成本利润为 12%，则售价为 100×（1＋12%）＝112 元.

成本降价 20%，则新的成本为 100×（1－20%）＝80 元，售价不变，则降低成本后的利润率为 $\frac{112-80}{80}$×100%＝40%. 故选 C.

知识点 6 增长率问题

1. 概念

（1）基期与现期

作为对比参照的时期称为基期，相对于基期的时期称为现期.

（2）基期量与现期量

描述基期的具体数值称为基期量，描述现期的具体数值称为现期量.

（3）增长量：指社会经济现象在一定时期内增长（或减少）的绝对量.

$$增长量＝现期量－基期量＝基期量×增长率＝\frac{现期量}{1+增长率}×增长率$$

（4）增长率：指现期量与基期量之间进行比较的一种相对指标，是一个百分数.

增长率＝（现期量－基期量）÷基期量＝增长量÷基期量＝增长量÷（现期量－增长量）

【注】减少量为带负号的增长量；减少率为带负号的增长率.

2. 增加率 $p\% \xrightarrow{原值a}$ 现值 $a(1+p\%)$；下降率 $p\% \xrightarrow{原值a}$ 现值 $a(1-p\%)$.

3. 增减性（a，b，$m>0$）

当 $\frac{a}{b}>1$ 时，则 $\frac{a+m}{b+m}<\frac{a}{b}$.　　当 $0<\frac{a}{b}<1$ 时，则 $\frac{a+m}{b+m}>\frac{a}{b}$.

4. 分类

（1）连续增长问题

某变量在 a 值基础上连续增长了 n 次，其各次增长率分别为 p_1，p_2，…，p_n，则其终值 $b=a(1+p_1)(1+p_2)\cdots(1+p_n)$.

（2）平均增长率

若初值为a，末值为b，平均增长率为q，增长次数为n，则其末值$b=a(1+q)^n$或$q=\sqrt[n]{\frac{b}{a}}-1$.

例题精选

【2020】某产品去年涨价 10%，今年涨价 20%，则该产品这两年涨价【 】

A. 15%　　B. 16%　　C. 30%　　D. 32%　　E. 33%

【答案】本题考查应用题——增长率问题.

根据题意，设该产品前年的价格为单位“1”，则今年涨价后的价格为 1×（1＋10%）×（1＋20%）＝1.32，所以该产品这两年的增长率为（1.32－1）÷1×100%＝32%.

故选 D.

知识点 7 集合问题（集合问题几何化）

1. 解题思路

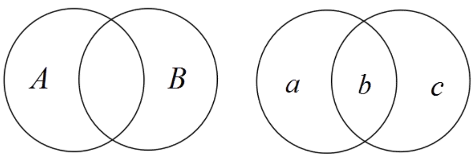
（1）出题思路：三个量.

（2）出题方向：①给了每一个集合（圈）的数值.②没有给每一个集合（圈）的数值.

（3）注意字眼：对于同时满足两个集合（圈）的部分是否包含同时满足三个集合（圈）的问题，如果不包含，题目一定会有非常明确的自然语言的表达，例如“仅仅”“只有”，如果没有特殊说明，一般理解为两个集合（圈）的部分都包含三个集合（圈）的部分，此时一定要将“非仅”转化为“仅”，然后再按照集合问题几何化的思路进行分析求解.

（4）根据题意画文氏图——基本模型.

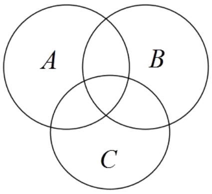
①两者容斥

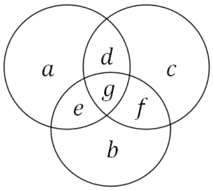


如图所示，A，B表示两个集合，$A=a+b$，$B=b+c$.

则 $A \cup B = A + B - A \cap B \Rightarrow a + b + c = [(a+b)+(b+c)] - b$.

②三者容斥





如图所示，A，B，C 表示三个集合，$A = a + d + g + e$，$B = c + d + g + f$，$C = b + e + g + f$.

则 $A \cup B \cup C = A + B + C - A \cap B - B \cap C - A \cap C + A \cap B \cap C \Rightarrow A \cup B \cup C = A + B + C - (d+g) - (f+g) - (e+g) + g$.

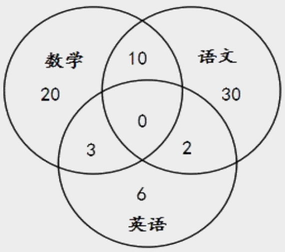
例题精选

【2017】老师问班上 50 名同学周末复习的情况，结果有 20 人复习过数学、30 人复习过语文、6 人复习过英语，且同时复习了数学和语文的有 10 人、语文和英语的有 2 人、英语和数学的有 3 人. 若同时复习过这三门课的人数为 0，则没复习过这三门课程的学生人数为【 】

A. 7　　B. 8　　C. 9　　D. 10　　E. 11

【解析】本题考查应用题——集合问题.

根据题意可画图，如图所示.



容斥问题的公式：$A \cup B \cup C = A + B + C - A \cap B - B \cap C - A \cap C + A \cap B \cap C$.

设语文、数学、英语分别对应 A、B、C.

则 $A + B + C = 30 + 20 + 6 = 56$. $A \cap B = 10$. $B \cap C = 3$. $A \cap C = 2$. $A \cap B \cap C = 0$.

因此，复习过三门课的学生人数为 $A \cup B \cup C = 56 - 10 - 3 - 2 + 0 = 41$（人）.

即没有复习过这三门课的学生人数为 50−41=9（人）.
故选 C.

知识点 8 杠杆原理（交叉比例法、十字交叉法）

1. 适用情况

当一个整体按照某个标准分为两部分时，可以根据杠杆原理得到交叉法，快速求出两部分的数量比，交叉法不仅仅局限于平均值问题，只要涉及一个大量，一个小量以及他们混合后的平均量，一般都可以用交叉法计算，例如溶液的配比问题.

2. 技巧

$$\begin{array}{ccccc} \text{甲：}a & & & & c-b \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & c & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ \text{乙：}b & & & & a-c \end{array}$$

则甲、乙的数量比为$(c-b):(a-c)$.

【步骤】先上下列出甲、乙的数值，分别与整体的值进行相减，这样就可以得出甲、乙的数量比.

例题精选

【2021】现有甲、乙两种浓度的酒精，已知用 10 升甲酒精和 12 升乙酒精可以配成浓度为 70%的酒精，用 20 升甲酒精和 8 升乙酒精可以配成浓度为 80%的酒精，则甲酒精的浓度为【 】

A. 72% B. 80% C. 84% D. 88% E. 91%

【答案】本题考查应用题——浓度问题.
根据题意，设甲的浓度为x，乙的浓度为y. 使用十字交叉法得：

$$\begin{array}{ccccc} \text{甲：}x & & & & 0.7-y \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & 70\% & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ \text{乙：}y & & & & x-0.7 \end{array} = \frac{10}{12} \qquad \begin{array}{ccccc} \text{甲：}x & & & & 0.8-y \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & 80\% & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ \text{乙：}y & & & & x-0.8 \end{array} = \frac{20}{8}$$

即：$\begin{cases}\dfrac{0.7-y}{x-0.7}=\dfrac{10}{12}\\ \dfrac{0.8-y}{x-0.8}=\dfrac{20}{8}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=91\%\\ y=52.5\%\end{cases}$.

故甲的浓度为 91%，乙的浓度为 52.5%.

故选 E.

知识点 9 不定方程问题

1. 特征

在应用题中出现了两个（甚至更多）未知量，而数量关系却少于未知量的个数，我们列出的就是不定方程. 不定方程一般是指未知数的个数多于方程个数的方程. 这样的方程的解通常不止一个.

2. 解题思路

不定方程一般有无数个解，但是结合题意，实际只要我们求出无数个解中的特殊解，往往是求自然数解或者整数解. 有时还要加上其他限制，这时的解就是有限的和确定的.

解不定方程可以用以下原则来缩小范围：

（1）从系数大的开始讨论.

（2）奇偶性讨论.

（3）倍数原理.

（4）尾数原理.

例题精选

【2022】某公司有甲、乙、丙三个部门，若从甲部门调 26 人到丙部门，则丙部门是甲部门人数的 6 倍，若从乙部门调 5 人到丙部门，则丙部门的人数与乙部门人数相等. 甲、乙两部门人数之差除以 5 的余数为【 】

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3　　E. 4

【答案】本题考查应用题——不定方程.

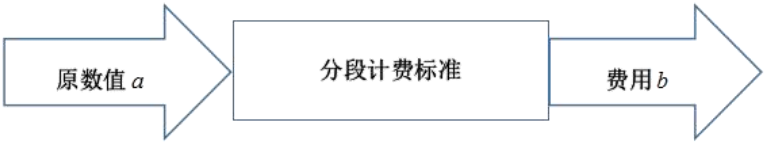
设甲、乙、丙三个部门分别有 x、y、z 人.

根据题意可得 $\begin{cases}6(x-26)=z+26\\ y-5=z+5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}6x-156=z+26\\ y-5=z+5\end{cases}\Rightarrow 6x-y=172$，

即$y=6x-172$，因此可得$x-y=x-(6x-172)\Rightarrow x-y=-5x+172$，$-5x$一定是5的倍数，除以5的余数为0，172除以5的余数为2，则甲部门与乙部分人数之差除以5可得余数为2.

故选C.

知识点 10 分段计费问题



1. 求费用

已知原值，按照所给的区间，分别计算费用，再求总费用.

2. 求原值

已知费用求原值的题目要难一些，因为要逆向思维. 首先需要求出分界点的数值，判断所给的费用对应的区间，再根据计费方式求解费用.

技巧点拨

1. 分段计费是指不同的范围对应着不同的计费方式，比如电费、水费、税费等等.

2. 解题思路

（1）先计算每个分界点的值，确定所给的数值落在哪个范围.

（2）对应选取正确的计费表达式，按照所给的标准进行求解.

例题精选

【2018】某单位采取分段收费的方式收取网络流量（单位：GB）费用：每月流量20（含）以内免费，流量20到30（含）的每GB收费1元，流量30到40（含）的每GB收费3元，流量40以上的每GB收费5元，小王这个月用了45GB的流量，则他应该交费【 】

A. 45元　　B. 65元　　C. 75元　　D. 85元　　E. 135元

【答案】本题考查应用题——分段计费.

根据题意，小王这个月用了45GB的流量，所以其应交的网络流量费用分为四部分：

第一部分：20GB的部分免费.

第二部分：20GB 到 30GB（含）每 GB 收费 1 元（30－20）×1＝10（元）.

第三部分：30GB 到 40GB（含）每 GB 收费 3 元（40－30）×3＝30（元）.

第四部分：40GB 以上每 GB 收费 5 元（45－40）×5＝25（元）.

综上，因此共需交费：0＋10＋30＋25＝65（元）.

故选 B.

知识点 11 线性规划

1.特征

线性规划所研究的是，在一定条件下，合理安排人力、物力等资源，使经济效果达到最好.一般地，求线性目标函数在线性约束条件下的最大值或最小值的问题，统称为线性规划问题.

2.解题思路

（1）根据题目写出限定条件对应的不等式组.

（2）将不等式转化为方程，解出边界交点.

（3）若为实际问题，需考虑：①交点为整数，则直接代入目标函数求出最值.②交点不是整数，则讨论取整，然后再代入目标函数求出最值.若为函数最值，可直接将交点代入目标函数中.

例题精选

【2021】设 x，y 为实数，则能确定 $x\leqslant y$.【 】

（1）$x^2\leqslant y-1$.

（2）$x^2+(y-2)^2\leqslant 2$.

A.条件（1）充分，但条件（2）不充分。

B.条件（2）充分，但条件（1）不充分。

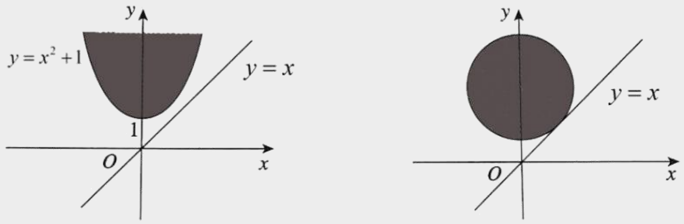
C.条件（1）和（2）单独都不充分，但条件（1）和条件（2）联合起来充分。

D.条件（1）充分，条件（2）也充分。

E.条件（1）和（2）单独都不充分，条件（1）和条件（2）联合起来也不充分。

【答案】本题考查解析几何——线性规划.

根据题意可画图，如图所示.



条件（1），联立$\begin{cases}y=x\\y=x^2+1\end{cases}\Rightarrow x^2-x+1=0$，其中判别式$\Delta=1-4=-3<0$.

所以直线与抛物线无交点，如上图（左边）所示，抛物线恒在直线的上方.即所有$x^2\leqslant y-1$的点都满足$x\leqslant y$.故条件（1）充分.

条件（2），圆心为（0，2），半径为$r=\sqrt{2}$，则圆心到直线$y=x$的距离为$d=\frac{|0-2|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}=r$，故该圆与直线相切，如上图（右边）所示，且圆心在直线上方，那么圆内的点恒在直线上方.即$x^2+(y-2)^2\leqslant 2$的点都满足$x\leqslant y$.故条件(2)充分.

综上，故选D.

知识点 12 最值问题

最值问题一般要结合函数来分析，一般结合二次函数（主要利用二次函数的顶点公式求解）和平均值定理求解.

最值问题的求解步骤是：先设未知变量，然后根据题目建立函数表达式，最后利用函数的特征求解最值.

例题精选

【2018】设函数$f(x)=x^2+ax$，则$f(x)$的最小值与$f\big(f(x)\big)$的最小值相等.【 】

（1）$a\geqslant 2$.

（2）$a\leqslant 0$.

A.条件（1）充分，但条件（2）不充分。

B.条件（2）充分，但条件（1）不充分。

C. 条件（1）和（2）单独都不充分，但条件（1）和条件（2）联合起来充分。

D. 条件（1）充分，条件（2）也充分。

E. 条件（1）和（2）单独都不充分，条件（1）和条件（2）联合起来也不充分。

【答案】本题考查二次函数——最值问题.

根据题意，$f(x)=x^2+ax$的对称轴为$x=-\frac{a}{2}\Rightarrow f(x)$的最小值为$f\left(-\frac{a}{2}\right)=-\frac{a^2}{4}\Rightarrow$值域为$\left[-\frac{a^2}{4},+\infty\right)$. 令$f(x)=t$，则$f(t)=t^2+at$. $f(t)$的定义域为$\left[-\frac{a^2}{4},+\infty\right)$.

$\because f(x)$的最小值与$f(t)$的最小值相等.

$\therefore f(t)$的最小值为$-\frac{a^2}{4}\Rightarrow f(t)$在$t=-\frac{a}{2}$时取得最小值$\Rightarrow f(x)_{\min}\leqslant-\frac{a}{2}$.

即$-\frac{a^2}{4}\leqslant-\frac{a}{2}\Rightarrow$解得$a\geqslant2$或$a\leqslant0$.

条件（1），$a\geqslant2$在$a\geqslant2$或$a\leqslant0$的范围内. 故条件（1）充分.

条件（2），$a\leqslant0$在$a\geqslant2$或$a\leqslant0$的范围内. 故条件（2）充分.

综上，故选D.

知识点 13 其他问题

1. 至多至少问题

（1）分蛋糕原理：对于总量固定的题型，要确定某一部分至少（多）的数量，转化为其他部分最多（少）的数量.

表达式变形：涉及多个变量的表达式问题. 模型：若已知$ax+by+cz=d$，求$x+y+z$的至少或至多时，将$ax+by+cz=d$变形为：所求+剩余$=d$，这样就可以分析至少或至多了.

（2）抽屉原理

①将 $n+1$ 件或更多件的物体随意地放到 n 个抽屉中去，那么，至少有一个抽屉中的物体个数不少于 2 个

②将多于 $m\times n$ 个（即 $m\times n+1, m\times n+2,\cdots$）物体任意放到 n 个抽屉中去，那么，至少有一个抽屉中的物体个数不少于 $(m+1)$ 个.

例题精选

【2013】某单位年终共发了 100 万元奖金，奖金金额分别是一等奖 1.5 万元，二等奖 1 万元，三等奖 0.5 万元，则该单位至少有 100 人.【 】

（1）得二等奖的人数最多.

（2）得三等奖的人数最多.

A. 条件（1）充分，但条件（2）不充分。

B. 条件（2）充分，但条件（1）不充分。

C. 条件（1）和（2）单独都不充分，但条件（1）和条件（2）联合起来充分。

D. 条件（1）充分，条件（2）也充分。

E. 条件（1）和（2）单独都不充分，条件（1）和条件（2）联合起来也不充分。

【解析】本题考查至多至少问题.

根据题意，设一等奖的人数为 x，二等奖的人数为 y，三等奖的人数为 z.

则有 $1.5x+y+0.5z=100\Rightarrow x+y+z=100-(0.5x-0.5z)=100-0.5(x-z)$. 当 $x-z\leqslant 0$ 时，则确定该单位至少有 100 人.

条件（1），得二等奖的人数最多 $\Rightarrow y$ 的值最大，但不能确定 x，z 的值，则不能确定该单位至少有 100 人. 故条件（1）不充分.

条件（2），得三等奖的人数最多 $\Rightarrow z$ 的值最大，则 $x-z<0$，即 $x+y+z=100-0.5(x-z)>100$. 因此，可以确定该单位至少有 100 人. 故条件（2）充分.

综上，故选 B.

2. 植树问题（间隔问题）

（1）对于直线型（开放型）植树问题，如果长度为 k 米，每隔 n 米植树，则一共需要 $\frac{k}{n}+1$ 棵树. [植树数量 $=\frac{\text{总长}}{\text{间距}}+1$]

（2）对于圆圈型（封闭型）植树问题，如果周长为 k 米，每隔 n 米植树，则一共需要 $\frac{k}{n}$ 棵树. [植树数量 $=\frac{\text{总长}}{\text{间距}}$]

例题精选

【2019】将一批树苗种在一个正方形花园的边上，四角都种. 如果每隔 3 米种一棵，那么剩余 10 棵树苗；如果每隔 2 米种一棵，那么恰好种满正方形的 3 条边，则这批树苗有【 】

A. 54 棵　　B. 60 棵　　C. 70 棵　　D. 82 棵　　E. 94 棵

【解析】本题考查应用题——植树问题.

[在封闭路线上植树，植树总棵数＝总长÷间距. 在非封闭路线上植树，若两端都植树，植树总棵数＝总长÷间距＋1.]

设正方形边长为 x.

①四角都种，每隔 3 米种一棵，则每条边上有 $\frac{x}{3}$ 棵树，4 条边都种后还剩余 10 棵树，

则所种树总数为 $4\times\frac{x}{3}+10=\frac{4}{3}x+10$.

②四个角都种树且每隔 2 米种一棵树，种满 3 条边，

则所种树总数为 $3\times\frac{x}{2}+1=\frac{3}{2}x+1$.

根据题意得：$\frac{4}{3}x+10=\frac{3}{2}x+1$. 解得：$x=54$. 这批树苗共有 $\frac{3}{2}\times54+1=82$ 棵.

故选 D.

3. 年龄问题

（1）年龄同步增长：n 年后，每人都增加 n 岁.

（2）年龄差值不变：两人的年龄差不变，但是，两人年龄之间的倍数关系随着年龄的增长在发生变化.

应试口诀

年龄的差值恒定；年龄的同步增长.

例题精选

【2019】能确定小明的年龄.【 】

（1）小明的年龄是完全平方数.

（2）20 年后小明的年龄是完全平方数.

A. 条件（1）充分，但条件（2）不充分。

B. 条件（2）充分，但条件（1）不充分。

C. 条件（1）和（2）单独都不充分，但条件（1）和条件（2）联合起来充分。

D. 条件（1）充分，条件（2）也充分。

E. 条件（1）和（2）单独都不充分，条件（1）和条件（2）联合起来也不充分。

【答案】本题考查应用题——年龄问题（完全平方）.

条件（1），举例：1，4，9，16，…等，无法确定小明的年龄. 故条件（1）不充分.

条件（2），举例：25，36，49，64，…等，无法确定小明的年龄. 故条件（2）不充分.

条件（1）和条件（2）单独都不充分，考虑条件（1）（2）联合.

条件（1）（2）联合，设小明现在的年龄为x^2，20 年后的年龄为y^2.（$x,y\in Z_+$）

则$x^2+20=y^2$，整理得$y^2-x^2=20\Rightarrow(y-x)(y+x)=20=1\times20=2\times10=4\times5$.

$\because y-x$与$y+x$奇偶性相同. $\therefore y-x$与$y+x$只能同为偶数.

因此$\begin{cases}y-x=2\\y+x=10\end{cases}$，解得：$\begin{cases}x=4\\y=6\end{cases}$. 即小明的年龄为$x^2=4^2=16$. 故条件（1）（2）联合起来充分.

综上，故选 C.

4. 数列应用题

对于数列应用题，根据题意确定所构成数列的首项和公差（公比），然后利用数列的中项定理公式、通项公式及求和公式进行求解.

例题精选

【2017】甲、乙、丙三种货车的载重量成等差数列，2 辆甲种车和 1 辆乙种车的满载量为 95 吨，1 辆甲种车和 3 辆丙种车的满载量为 150 吨，则用甲、乙、丙分别各 1 辆车一次最多运送货物【 】

A. 125 吨　B. 120 吨　C. 115 吨　D. 110 吨　E. 105 吨

【答案】本题考查等差数列——等差中项.

根据等差数列的特征，设甲、乙、丙载重量分别为$x-a$，x，$x+a$.

则有$\begin{cases}2(x-a)+x=95\\(x-a)+3(x+a)=150\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x-2a=95\\4x+2a=150\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=35\\a=5\end{cases}$.

因此，甲、乙、丙各1辆车一次最多运送货物为$(x-a)+x+(x+a)=3x=3\times35=105$（吨）. 故选E.

师大博学
SHI DA BO XUE