第二节 等差数列

第三章　第二节等差数列

年度	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023
考频	2	0	1	1	1	1	1	1	0

第三章　第二节等差数列

一、定义

如果在数列$\{a_n\}$中，$a_{n+1}-a_n=d$（常数）$(n\in N_+)$，则称数列$\{a_n\}$为等差数列，d为公差.

（1）$d\in R$，d可正可负可为0

（2）常数数列也为等差数列（$d=0$）

二.通项公式

师大课堂
SHI DA KE TANG

1.基本公式

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

2.扩展公式

$$a_n = a_k + (n-k)d$$

二.通项公式

3.函数特征

当公差$d \neq 0$时，a_n可抽象成关于n的一次函数

$$a_n = f(n) = dn + (a_1 - d)$$

二.通项公式

4.已知a_m，a_n，则$d=\frac{a_n-a_m}{n-m}$

二.通项公式

【例1】一等差数列中，$3a_1+2a_6=0$，$a_4+a_5=-3$，该等差数列的公差是（　）.

A.-2　　B.-1　　C.1　　D.2　　E.3

二.通项公式

【例1】一等差数列中，$3a_1+2a_6=0$，$a_4+a_5=-3$，该等差数列的公差是（　）.

A.-2　B.-1　C.1　D.2　E.3

【解析】由已知 $3a_1+2(a_1+5d)=0$，$a_1+3d+a_1+4d=-3$，解得 $a_1=2$，$d=-1$. 选 B.

本题将其他项元素利用公式 $a_n=a_1+(n-1)d$ 转化为 a_1 和 d 来表示.

二、通项公式

【例2】如果数列$x, a_1, a_2, a_3 \cdots a_m, y$和数列$x, b_1, b_2, b_3 \cdots b_n, y$都是等差数列，则$(a_2 - a_1)$与$(b_4 - b_2)$的比值是（　　）.

A.$\frac{n}{2m}$　　B.$\frac{n+1}{2m}$　　C.$\frac{n+1}{2(m+1)}$　　D.$\frac{n+1}{m+1}$　　E.$\frac{n-1}{m+1}$

二、通项公式

【例2】如果数列$x, a_1, a_2, a_3 \cdots a_m, y$和数列$x, b_1, b_2, b_3 \cdots b_n, y$都是等差数列，则$(a_2 - a_1)$与$(b_4 - b_2)$的比值是（　）.

A.$\frac{n}{2m}$　B.$\frac{n+1}{2m}$　C.$\frac{n+1}{2(m+1)}$　D.$\frac{n+1}{m+1}$　E.$\frac{n-1}{m+1}$

【解析】设两数列的公差分别为 a 和 b，则有

$$x, a_1, a_2, a_3, \cdots, a_m, y \Rightarrow \frac{a_2 - a_1}{y - x} = \frac{a}{(m+1)a} \Rightarrow a_2 - a_1 = \frac{y - x}{m+1};$$

$$x, b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n, y \Rightarrow \frac{b_4 - b_2}{y - x} = \frac{2b}{(n+1)b} \Rightarrow b_4 - b_2 = \frac{2(y - x)}{n+1};$$

$$\Rightarrow \frac{a_2 - a_1}{b_4 - b_2} = \frac{n+1}{2(m+1)}，选 C.$$

三.数列的前n项和

1.基本公式

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

2.扩展公式

$$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$$

三、数列的前n项和

3.函数特征

当公差$d \neq 0$时，S_n可抽象成关于n的不含常数项的二次函数

$$S_n = f(n) = \frac{d}{2}n^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)n$$

特征：（1）常数项为零

（2）开口方向由d的符号决定

（3）二次项系数为半公差$\frac{d}{2}$

（4）对称轴$x = \frac{1}{2} - \frac{a_1}{d}$（求最值）

三、数列的前n项和

3.函数特征

$$a_n = dn + (a_1 - d)$$

$$S_n = \frac{d}{2}n^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)n$$

（1）已知$S_n = An^2 + Bn$，则$a_n = 2An + (B - A)$

（2）已知$S_n = An^2 + Bn + C$，则$a_n = \begin{cases} A + B + C, n = 1 \\ 2An + (B - A), n \geq 2 \end{cases}$

三.数列的前n项和

【例3】已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=n(2n+1)$，则39是该数列的第（　）项.

A.6　　B.7　　C.8　　D.9　　E.10

三、数列的前n项和

【例3】已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n = n(2n+1)$，则39是该数列的第（　　）项.

A.6　　B.7　　C.8　　D.9　　E.10

【解析】先求通项，当 $n=1$ 时，$a_1=3$，

当 $n\geq 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2n^2+n-2(n-1)^2-(n-1)=4n-1$，

当 $n=1$ 时，满足 $a_n=4n-1$，所以数列的通项公式为 $a_n=4n-1$.

设 39 是该数列的第 n 项，则 $39=4n-1$，$n=10$，即 39 是该数列的第 10 项. 选 E.

三、数列的前n项和

【例4】在等差数列$\{a_n\}$中$S_4=12$，$S_{10}=150$，则$S_{18}=$（　）.

A.558　　B.568　　C.572　　D.628　　E.658

三.数列的前n项和

【例4】在等差数列$\{a_n\}$中$S_4=12$，$S_{10}=150$，则$S_{18}=$(　　).

A.558　　B.568　　C.572　　D.628　　E.658

【解析】

由 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$，得$\frac{S_n}{n}=a_1+\frac{n-1}{2}d$，故$\begin{cases}\frac{S_4}{4}=a_1+\frac{3}{2}d=3\\ \frac{S_{10}}{10}=a_1+\frac{9}{2}d=15\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d=4\\ a_1=-3\end{cases}$

又$\frac{S_{18}}{18}=a_1+\frac{17}{2}d$，$S_{18}=558$．选 A.

三.数列的前n项和

【例5】等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$a_2=9$，$S_4=40$，常数c为（　　）时，数列$\{\sqrt{S_n+c}\}$成等差数列.

A.4或9　　B.4　　C.9　　D.3　　E.8

三、数列的前n项和

【例5】等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$a_2=9$，$S_4=40$，常数c为（　）时，数列$\{\sqrt{S_n+c}\}$成等差数列.

A.4或9　　B.4　　C.9　　D.3　　E.8

【解析】由$a_2=9$，$S_4=40$，得$a_1=7$，$d=2$，故$a_n=2n+5$，$S_n=n^2+6n$，$\sqrt{S_n+c}=\sqrt{n^2+6n+c}$，故当$c=9$时，$\sqrt{S_n+c}=n+3$是等差数列，选C.

四、重要性质

1.若$m+n=p+q$，则$a_m+a_n=a_p+a_q$

成立条件：（1）脚标之和相等（2）等号两端的项数分别相等

推广：若$m+n=2p$，则$a_m+a_n=a_p+a_p=2a_p$

$$\Rightarrow S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=\frac{n\cdot 2a_{\frac{n+1}{2}}}{2}=n\times a_{\frac{n+1}{2}}$$

师大课堂 SHI DA KE TANG

四.重要性质

【例4】在等差数列$\{a_n\}$中$S_4=12$，$S_{10}=150$，则$S_{18}=$（   ）.

A.558　B.568　C.572　D.628　E.658

$S_n=n\times a_{\frac{n+1}{2}}$

四.重要性质

【例6】已知等差数列$\{a_n\}$中，a_1和a_{10}是方程$x^2-3x-7=0$的两根，则$a_3+a_8=$（　）.

A.3或-3　　B.4　　C.3　　D.-3　　E.-4

四.重要性质

【例6】已知等差数列$\{a_n\}$中，a_1和a_{10}是方程$x^2-3x-7=0$的两根，则$a_3+a_8=$（　　）.

A.3或-3　　B.4　　C.3　　D.-3　　E.-4

【解析】a_1和a_{10}是方程$x^2-3x-7=0$的两根，知$a_1+a_{10}=3$，又$\{a_n\}$是等差数列，$a_3+a_8=a_1+a_{10}=3$．选C.

四.重要性质

【例7】已知等差数列$\{a_n\}$中，若$a_2+a_5+a_8+a_{11}=48$，则$S_{12}=$（　）.

A.96　　B.48　　C.144　　D.160　　E.240

四.重要性质

【例7】已知等差数列$\{a_n\}$中，若$a_2+a_5+a_8+a_{11}=48$，则$S_{12}=$（　）.

A.96　　B.48　　C.144　　D.160　　E.240

【解析】$a_2+a_5+a_8+a_{11}=48$，则 $a_1+a_{12}=a_2+a_{11}=a_5+a_8=24$，

又 $S_{12}=6(a_1+a_{12})=6\times24=144$. 选 C.

四.重要性质

2.若S_n为等差数列的前n项和，则S_n，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$，…仍为等差数列，其公差n^2d

四.重要性质

2.若S_n为等差数列的前n项和，则S_n，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$，...仍为等差数列，其公差n^2d

推广：a,b,c成等差$\Leftrightarrow 2b=a+c$（等差中项）

$$2(S_{2n}-S_n)=S_n+(S_{3n}-S_{2n})\Rightarrow S_{3n}=3(S_{2n}-S_n)$$

四.重要性质

【例8】已知等差数列$\{a_n\}$中，S_n为其前n项和，$S_4=30,S_8=90$，则$S_{12}=$（　　）.

A.150　　B.160　　C.180　　D.190　　E.200

四.重要性质

【例8】已知等差数列$\{a_n\}$中，S_n为其前n项和，$S_4=30,S_8=90$，则$S_{12}=$（　　）.

A.150　　B.160　　C.180　　D.190　　E.200

【解析】$S_4=30$，$S_8=90\Rightarrow S_8-S_4=60$，又 S_4，S_8-S_4，$S_{12}-S_8$ 成等差数列，可得 $S_{12}-S_8=90\Rightarrow S_{12}=180$. 选 C.

四.重要性质

3.等差数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的前n项和分别用S_n，T_n表示，则$\frac{a_k}{b_k}=\frac{S_{2k-1}}{T_{2k-1}}$

四.重要性质

【例8】等差数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的前n项和分别用S_n，T_n表示，且$\frac{S_n}{T_n}=\frac{5n+3}{2n-1}$,则$\frac{a_5}{b_5}=$(　　).

A.$\frac{48}{13}$　　B.$\frac{49}{15}$　　C.$\frac{48}{17}$　　D.$\frac{49}{19}$　　E.$\frac{49}{17}$

四.重要性质

师大课堂 SHI DA KE TANG

【例8】等差数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的前n项和分别用S_n，T_n表示，且$\frac{S_n}{T_n}=\frac{5n+3}{2n-1}$,则$\frac{a_5}{b_5}=$（　）.

A.$\frac{48}{13}$　B.$\frac{49}{15}$　C.$\frac{48}{17}$　D.$\frac{49}{19}$　E.$\frac{49}{17}$

【解析】$\frac{a_5}{b_5}=\frac{S_9}{T_9}=\frac{5\times9+3}{2\times9-1}=\frac{48}{17}$，选 C.