



# 全国硕士研究生招生考试

## 2021年数学真题

---

主讲:媛媛老师



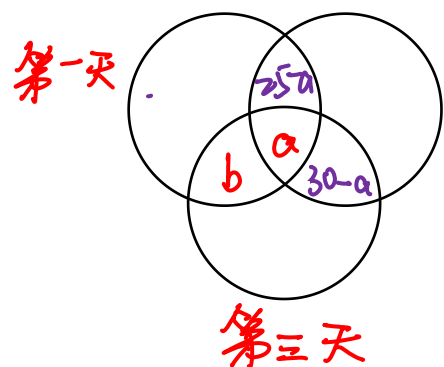
邮箱:family7662@dingtalk.com

# 一、问题求解

---

1.某便利店第一天售出50种商品，第二天售出45种商品，第三天售出60种商品，前两天售出的商品有25种相同，后两天售出的商品有30种相同.这三天售出的商品至少有\_\_种.【 】

- A.70
- B.75
- C.80
- D.85
- E.100



设三天均售出的商品有  $a$  种

第一天和第三天售出的商品有  $b$  种

则第一天单独售出商品  $50 - 25 - b = 25 - b$  种

第二天单独售出商品  $45 - 25 - (30 - a) = a - 10$  种

第三天单独售出商品  $60 - 30 - b = 30 - b$  种

$$\Rightarrow \text{共计 } (25 - b) + (a - 10) + (30 - b) + (25 - a) + a + b + (30 - a) \\ = 100 - b \text{ 种}$$

只需  $b$  取最大即可  $\because 25 - b \geq 0, 30 - b \geq 0 \therefore b \leq 25 \Rightarrow$  至少 共计  $100 - 25 = 75$  种

2.三位年轻人的年龄成等差数列，且最大与最小的两人年龄之差的10倍是另一人的年龄，则三人中年龄最大的是\_\_岁。【 】

A.19

法一:

设  $a, a+d, a+2d$

法二:

设  $a-d, a, a+d$

B.20

$$10(a+2d-a) = a+d$$

$$10[a+d-(a-d)] = a$$

C.21

$$20d = a+d$$

$$20d = a$$

D.22

$$\Rightarrow a = 19d$$

$$\Rightarrow 19d, 20d, \boxed{21d}$$

E.23

$$\Rightarrow 19d, 20d, \boxed{21d}$$

$$3. \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}} = \text{【 】}$$

A.9

B.10

C.11

D.  $3\sqrt{11} - 1$

E.  $3\sqrt{11}$

有理化

$$\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{(n+1) - n} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

$$\text{原式} = (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \cdots + (\sqrt{100} - \sqrt{99})$$

$$= -1 + \sqrt{100}$$

$$= -1 + 10$$

$$= 9$$

4. 设 $p, q$ 是小于10的质数, 则满足条件 $1 < \frac{q}{p} < 2$ 的 $p, q$ 有\_\_\_\_组. 【 】

A.2

B.3

C.4

D.5

E.6

$$p, q = 2, 3, 5, 7 \Rightarrow p < q < 2p$$

$$\textcircled{1} p=2, q=3$$

$$\textcircled{2} p=3, q=5$$

$$\textcircled{3} p=5, q=7$$

$\Rightarrow$  共3组

5. 设二次函数  $f(x) = ax^2 + bx + c$  , 且  $f(2) = f(0)$  , 则  $\frac{f(3)-f(2)}{f(2)-f(1)} =$  【 】

A.2

$$f(2) = 4a + 2b + c \quad f(0) = c \Rightarrow 4a + 2b = 0 \Rightarrow b = -2a$$

B.3

$$f(3) = 9a + 3b + c \quad f(1) = a + b + c$$

C.4

$$\Rightarrow \frac{f(3)-f(2)}{f(2)-f(1)} = \frac{9a+3b+c - (4a+2b+c)}{4a+2b+c - (a+b+c)} = \frac{5a+b}{3a+b} = \frac{5a-2a}{3a-2a} = \frac{3a}{a} = 3$$

D.5

E.6

6.如图，由 $P$ 到 $Q$ 的电路中有三个元件，分别标有 $T_1$ ， $T_2$ ， $T_3$ ，电流能通过 $T_1, T_2, T_3$ ，的概率分别是0.9，0.9，0.99，假设电流能否通过三个元件是相互独立的，则电流能在 $P$ ， $Q$ 之间通过的概率是【 】

A.0.8019

B.0.9989

C.0.999

D.0.9999

E.0.99999

这题则反

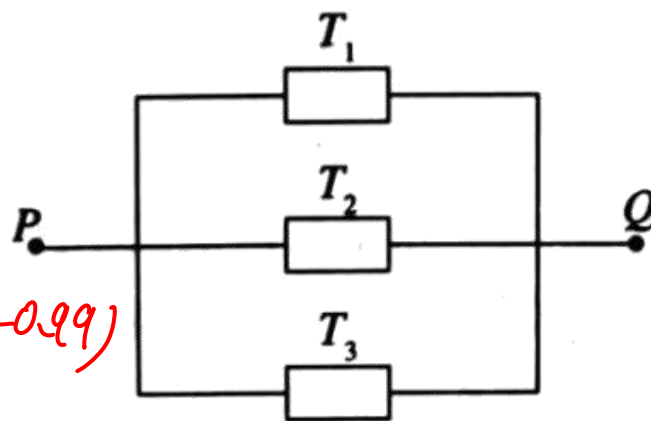
$p = 1 - \text{不通过}$

$\approx 1 - (1-0.9) \times (1-0.9) \times (1-0.99)$

$\approx 1 - 0.1 \times 0.1 \times 0.01$

$\approx 1 - 0.001$

$\approx 0.999$





7.若球体的内接正方体的体积为 $8m^3$ ，则该球体的表面积为【 】

A.  $4\pi m^2$

B.  $6\pi m^2$

C.  $8\pi m^2$

D.  $12\pi m^2$

E.  $24\pi m^2$

直径 = 体对角线

$$V_{\text{正}} = a^3 = 8 \Rightarrow a = 2$$

$$\Rightarrow l = \sqrt{3}a = 2\sqrt{3} = 2R \Rightarrow R = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow S_{\text{球}} = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot (\sqrt{3})^2 = 12\pi$$

8.甲、乙两组同学中，甲组有3名男同学、3名女同学；乙组有4名男同学、2名女同学.从甲、乙两组中各选出2名同学，这4人中恰有1名女同学的选法有\_\_种.【 】

A.26

B.54

C.70

D.78

E.105

①女同学来自甲：甲=1女1男 乙=2男

$$C_3^1 C_3^1 \cdot C_4^2 = 3 \times 3 \times \frac{4 \times 3}{2} = 54$$

②女同学来自乙：甲=2男 乙=1女1男

$$C_3^2 \cdot C_2^1 \cdot C_4^1 = 3 \times 2 \times 4 = 24$$

⇒共  $54 + 24 = 78$  种

9.如图，正六边形的边长为1，分别以正六边形的顶点 $O$ ， $P$ ， $Q$ 为圆心，以1为半径作圆弧，则阴影部分的面积为【 】

A.  $\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}$

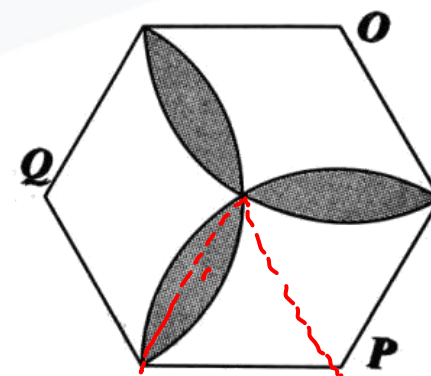
B.  $\pi - \frac{3\sqrt{3}}{4}$

C.  $\frac{\pi}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{4}$

D.  $\frac{\pi}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{8}$

E.  $2\pi - 3\sqrt{3}$

$$\begin{aligned}
 S_{\text{阴影}} &= 6S = 6(S_{\text{扇}} - S_{\Delta}) \\
 &= 6\left(\frac{60^\circ}{360^\circ}\pi \cdot 1^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 1^2\right) \\
 &= 6\left(\frac{1}{6}\pi - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \\
 &= \pi - \frac{3}{2}\sqrt{3}
 \end{aligned}$$



10. 已知 $ABCD$ 是圆 $x^2 + y^2 = 25$ 的内接四边形，若 $A, C$ 是直线 $x = 3$ 与圆 $x^2 + y^2 = 25$ 的交点，则四边形面积的最大值为【 】

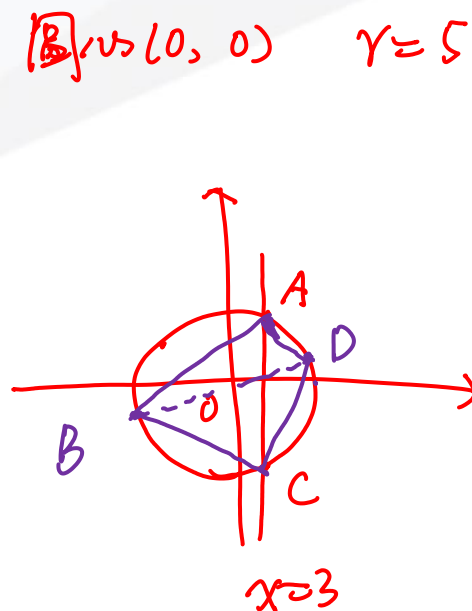
A. 20

B. 24

C. 40

D. 48

E. 80



$$S = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BCD}$$

两三角形面积最大即可  $\Rightarrow$   $BD$  为直径，二者均为直角三角形

$$\Rightarrow S_{\max} = \frac{1}{2} BD (h_1 + h_2)$$

$$x=3 \text{ 代入圆: } 9 + y^2 = 25 \Rightarrow y = 4$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow S_{\max} &= \frac{1}{2} \times 10 \times (4 + 4) \\ &= 40 \end{aligned}$$

11. 从装有1个红球、2个白球、3个黑球的袋中随机取出3个球，则这3个球的颜色至多有两种的概率为【 】

A. 0.3

B. 0.4

C. 0.5

D. 0.6

E. 0.7

正难则反：  $\leq 2$  种  $\xRightarrow{\text{反面}} > 2$  种 即 3 种

$$P = 1 - \frac{C_1^1 \cdot C_2^1 \cdot C_3^1}{C_6^3}$$

$$= 1 - \frac{\frac{1 \times 2 \times 3}{6 \times 5 \times 4}}{2 \times 3} = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10} = 0.7$$

12.某商场利用抽奖方式促销，100个奖券中设有3个一等奖、7个二等奖，则一等奖先于二等奖抽完的概率为【 】

A.0.3

B.0.5

C.0.6

D.0.7

E.0.73

只与一、二等奖有关且最后一个为二等奖

$$P = \frac{A_9^9 G_7^1}{A_{10}^{10}} = \frac{7}{10} = 0.7$$



14. 函数  $f(x) = x^2 - 4x - 2|x - 2|$  的最小值为 【 】

A. - 4

B. - 5

C. - 6

D. - 7

E. - 8

① 当  $x \geq 2$  时  $f(x) = x^2 - 4x - 2(x - 2)$

$$= x^2 - 4x - 2x + 4$$

$$= x^2 - 6x + 4$$

对称轴  $x = \frac{-6}{2} = 3$

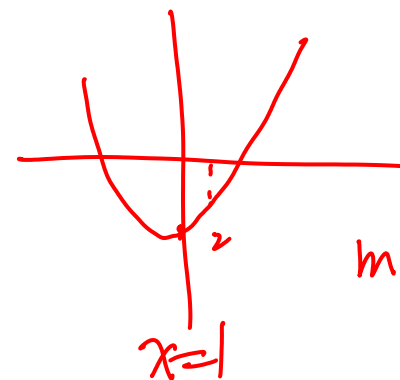


$$\min_{x \geq 2} f(3) = 9 - 18 + 4 = -5$$

② 当  $x < 2$  时  $f(x) = x^2 - 4x + 2(x - 2)$

$$= x^2 - 2x - 4$$

对称轴  $x = \frac{-2}{2} = -1$



$$\min_{x < 2} f(1) = 1 - 2 - 4 = -5$$



15.甲、乙两人相距330千米，他们驾车同时出发，经过2小时相遇，甲继续行驶2小时24分钟后到达乙的出发地，则乙的车速为\_\_千米/小时.

【 】

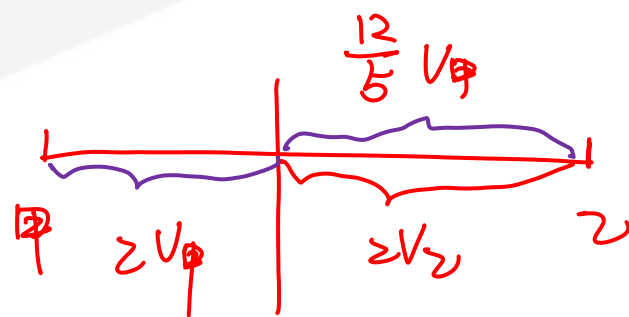
A.70

B.75

C.80

D.90

E.96



$$2\text{小时}24\text{分} = (2 + \frac{24}{60})h$$

$$= (2 + \frac{2}{5})h$$

$$= \frac{12}{5}h$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2(V_{\text{甲}} + V_{\text{乙}}) = 330 \\ \frac{12}{5}V_{\text{甲}} = 2V_{\text{乙}} \end{cases} \Rightarrow V_{\text{甲}} + V_{\text{乙}} = 165$$

$$\Rightarrow V_{\text{甲}} = 2V_{\text{乙}} \cdot \frac{5}{12} = \frac{5}{6}V_{\text{乙}}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{6}V_{\text{乙}} + V_{\text{乙}} = 165$$

$$\frac{11}{6}V_{\text{乙}} = 165 \Rightarrow V_{\text{乙}} = 165 \times \frac{6}{11} = 15 \times 6 = 90$$

## 二、条件充分性判断

---

- A.条件 ( 1 ) 充分 , 但条件 ( 2 ) 不充分
- B.条件 ( 2 ) 充分 , 但条件 ( 1 ) 不充分
- C.条件 ( 1 ) 和 ( 2 ) 单独都不充分 , 但条件 ( 1 ) 和条件 ( 2 ) 联合起来充分
- D.条件 ( 1 ) 充分 , 条件 ( 2 ) 也充分
- E.条件 ( 1 ) 和 ( 2 ) 单独都不充分 , 条件 ( 1 ) 和条件 ( 2 ) 联合起来也不充分

16. 某班增加两名同学，则该班同学的平均身高增加了。【 】

(1) 增加的两名同学的平均身高与原来男同学的平均身高相同。

(2) 原来男同学的平均身高大于女同学的平均身高。

联合：  

$$\bar{x}_{\text{新}} = \bar{x}_{\text{原男}} > \bar{x}_{\text{原全}} \quad \bar{x}_{\text{原男}} > \bar{x}_{\text{原女}}$$

$$\Rightarrow \bar{x}_{\text{新}} > \bar{x}_{\text{原全}} \quad \checkmark$$

C

原：2, 1, 1, 0      $\bar{x} = \frac{2+1+1+0}{4} = 1$

增：0 < 1      $\bar{x} = \frac{2+1+1+0+0}{5} = \frac{4}{5} < 1 \quad \downarrow$

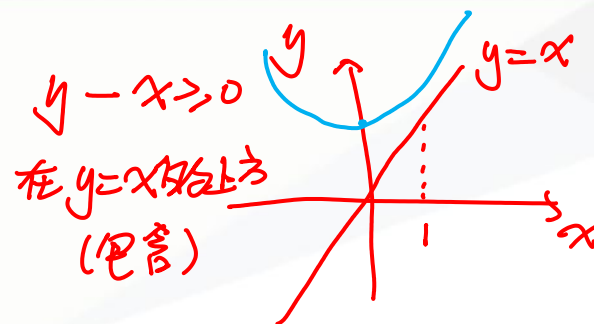
增：2 > 1      $\bar{x} = \frac{2+1+1+0+2}{5} = \frac{6}{5} > 1 \quad \uparrow$

17. 设  $x, y$  为实数, 则能确定  $x \leq y$ . 【 】

(1)  $x^2 \leq y - 1$ .

(2)  $x^2 + (y - 2)^2 \leq 2$ .

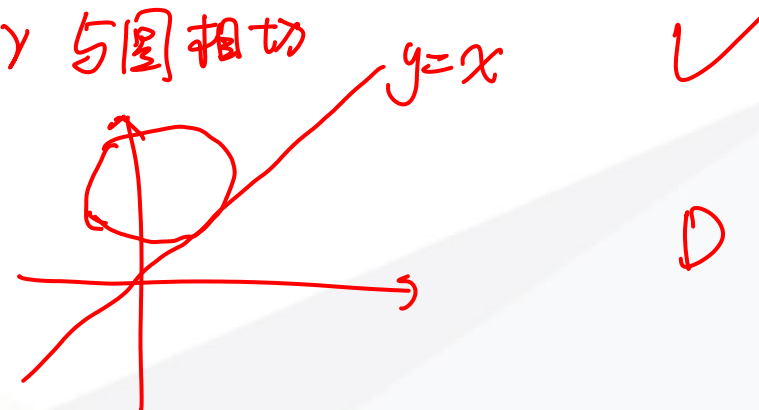
(1)  $\begin{cases} x^2 \leq y - 1 \\ x = y \end{cases} \Rightarrow x^2 \leq x - 1 \Rightarrow x^2 - x + 1 \leq 0$   
 $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$  无实数解



$y = x^2 + 1$  过  $(0, 1)$  的抛物线 ✓

(2) 圆  $(0, 2)$   $r = \sqrt{2}$

圆心到  $x - y = 0$  的距离  $d = \frac{|0 - 2|}{\sqrt{1+1}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} = r$  与圆相切



18.清理一块场地，则甲、乙、丙三人能在2天内完成。【 】

(1) 甲、乙两人需要3天完成.

(2) 甲、丙两人需要4天完成.

$$(V_{\text{甲}} + V_{\text{乙}} + V_{\text{丙}}) \cdot 2 = 1$$

$$(1) (V_{\text{甲}} + V_{\text{乙}}) \cdot 3 = 1 \quad \times$$

$$(2) (V_{\text{甲}} + V_{\text{丙}}) \cdot 4 = 1 \quad \times$$

联合无法求出  $V_{\text{甲}}$ 、 $V_{\text{乙}}$ 、 $V_{\text{丙}}$  正

19. 某单位进行投票表决，已知该单位的男、女员工人数之比为3 : 2，  
则能确定至少有50%的女员工参加了投票。【 】

(1) 投赞成票的人数超过总人数的40%。

(2) 参加投票的女员工比男员工多。

$$\text{女员工人数} = \frac{2}{5} \text{总人数}$$

$$\Rightarrow \text{总人数} = \frac{5}{2} \text{女员工人数}$$

$$\text{联合: } \begin{cases} \frac{\text{投票人数}}{\text{总人数}} > 40\% \\ \text{女投票人数} > \text{男投票人数} \end{cases}$$

$$\therefore \frac{\text{投票人数}}{\text{总人数}} = \frac{\text{女投票人数} + \text{男投票人数}}{\text{总人数}}$$

$$\therefore \frac{\text{女投票人数}}{\text{总人数}} > 20\%$$

$$\Rightarrow \frac{\text{女投票人数}}{\frac{5}{2} \text{女员工人数}} > 20\%$$

$$\Rightarrow \frac{\text{女投票人数}}{\text{女员工人数}} > 20\% \cdot \frac{5}{2} = 50\% \quad \checkmark$$

20. 设  $a, b$  为实数, 则能确定  $|a| + |b|$  的值. 【 】

(1) 已知  $|a + b|$  的值.

(2) 已知  $|a - b|$  的值.

$$||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$$

$$|a + b| = |a| + |b| \text{ 成立条件 } ab \geq 0$$

$$|a - b| = |a| + |b| \text{ 成立条件 } ab \leq 0$$

(1) 可举  $ab < 0$  的反例 (2) 可举  $ab > 0$  的反例

联合:  $ab \geq 0$  时  $|a| + |b| = |a + b|$

$ab \leq 0$  时  $|a| + |b| = |a - b|$

✓ C

$$|a + b| = 0$$

$$(1) a = 1 \quad b = -1$$

$$|a| + |b| = 2$$

$$\text{或 } a = 2 \quad b = -2$$

$$|a| + |b| = 4$$

$$(2) |a - b| = 0$$

$$\text{① } a = 1 \quad b = 1$$

$$\text{② } a = 2 \quad b = 2$$



21. 设  $a$  为实数, 圆  $C: x^2 + y^2 = ax + ay$ , 则能确定圆  $C$  的方程. 【 】

(1) 直线  $x + y = 1$  与圆  $C$  相切.

(2) 直线  $x - y = 1$  与圆  $C$  相切.

$$(1) \begin{cases} x^2 + y^2 = ax + ay \\ x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow (1-y)^2 + y^2 - a(1-y) - ay = 0$$

A

$$1 + y^2 - 2y + y^2 - a + ay - ay = 0$$

$$2y^2 - 2y + (1-a) = 0$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow 4 - 8(1-a) = 0 \Rightarrow a \quad \checkmark$$

$$(2) \begin{cases} x^2 + y^2 = ax + ay \\ x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow (1+y)^2 + y^2 - a(1+y) - ay = 0$$

$$1 + y^2 + 2y + y^2 - a - ay - ay = 0$$

$$\Rightarrow 2y^2 + (2-2a)y + (1-a) = 0$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow (2-2a)^2 - 8(1-a) = 0 \Rightarrow 4(1-a)^2 - 8(1-a) = 0 \Rightarrow (1-a)(1-a-2) = 0 \quad \times$$

22. 某人购买了果汁、牛奶和咖啡三种物品，已知果汁每瓶12元，牛奶每盒15元，咖啡每盒35元，则能确定所买各种物品的数量。【 】

(1) 总花费为104元.

设果汁:  $x$  牛奶:  $y$  咖啡:  $z$

(2) 总花费为215元.

$$(1) 12x + 15y + 35z = 104$$

$$\text{若 } z=1, \text{ 则 } 12x + 15y = 104 - 35 = 69 \Rightarrow 4x + 5y = 32$$

$$\Rightarrow y=2 \quad 4x = 32 - 10 = 22 \quad x \quad \Rightarrow \text{无解}$$

$$y=4 \quad 4x = 32 - 20 = 12 \Rightarrow x=3 \quad \checkmark$$

$$(2) 12x + 15y + 35z = 215$$

$$\text{若 } z=1, \text{ 则 } 12x + 15y = 215 - 35 = 180 \Rightarrow 4x + 5y = 60$$

$$\Rightarrow 4x = 60 - 5y = 5(12 - y) \Rightarrow x \text{ 为 } 5 \text{ 的倍数}$$

$$\Rightarrow x=5 \quad 5y = 60 - 20 = 40 \Rightarrow y=8 \quad \checkmark \quad \Rightarrow \text{有解}$$

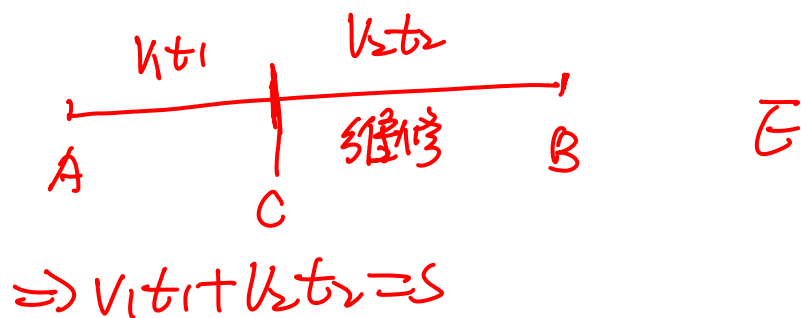
$$x=10 \quad 5y = 60 - 40 = 20 \Rightarrow y=4 \quad \times$$

A

23. 某人开车去上班，有一段路因维修限速通行，则可以算出此人上班的距离. 【 】

(1) 路上比平时多用了半小时.

(2) 已知维修路段的通行速度.



24. 已知数列 $\{a_n\}$ ，则数列 $\{a_n\}$ 为等比数列. 【 】

(1)  $a_n a_{n+1} > 0$ .

(2)  $a_{n+1}^2 - 2a_n^2 - a_n a_{n+1} = 0$ .

(1) X

(2)  $(a_{n+1} - 2a_n)(a_{n+1} + a_n) = 0$

$\Rightarrow a_{n+1} = 2a_n$  或  $a_{n+1} = -a_n$

均可取0 X

联合  $\begin{cases} a_n a_{n+1} > 0 \\ a_{n+1} = 2a_n \text{ 或 } a_{n+1} = -a_n \end{cases}$

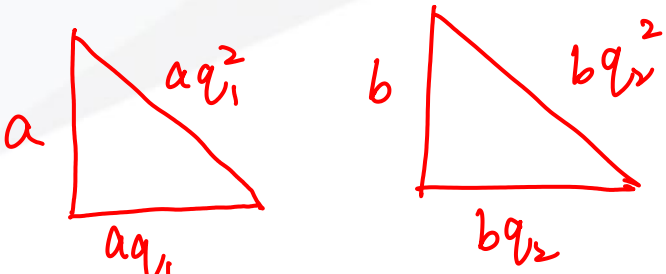
$\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$  且均不为0 V C

25. 给定两个直角三角形，则这两个直角三角形相似。【 】

(1) 每个直角三角形的边长成等比数列。

(2) 每个直角三角形的边长成等差数列。

(1)



$(q_1 > 1, q_2 > 1)$   $\frac{a}{b} = \frac{aq_1}{bq_2} = \frac{aq_1^2}{bq_2^2}$

$$a^2 + a^2 q_1^2 = a^2 q_1^4 \quad \text{and} \quad b^2 + b^2 q_2^2 = b^2 q_2^4$$

$$\Rightarrow 1 + q_1^2 = q_1^4 \quad \Rightarrow q_1 = q_2 \quad \Rightarrow \text{相似} \quad \checkmark$$

(2)

$$a^2 + (a+d_1)^2 = (a+2d_1)^2$$

$$\Rightarrow a^2 + a^2 + d_1^2 + 2ad_1 = a^2 + 4d_1^2 + 4ad_1$$

$$\Rightarrow a^2 - 3d_1^2 - 2ad_1 = 0$$

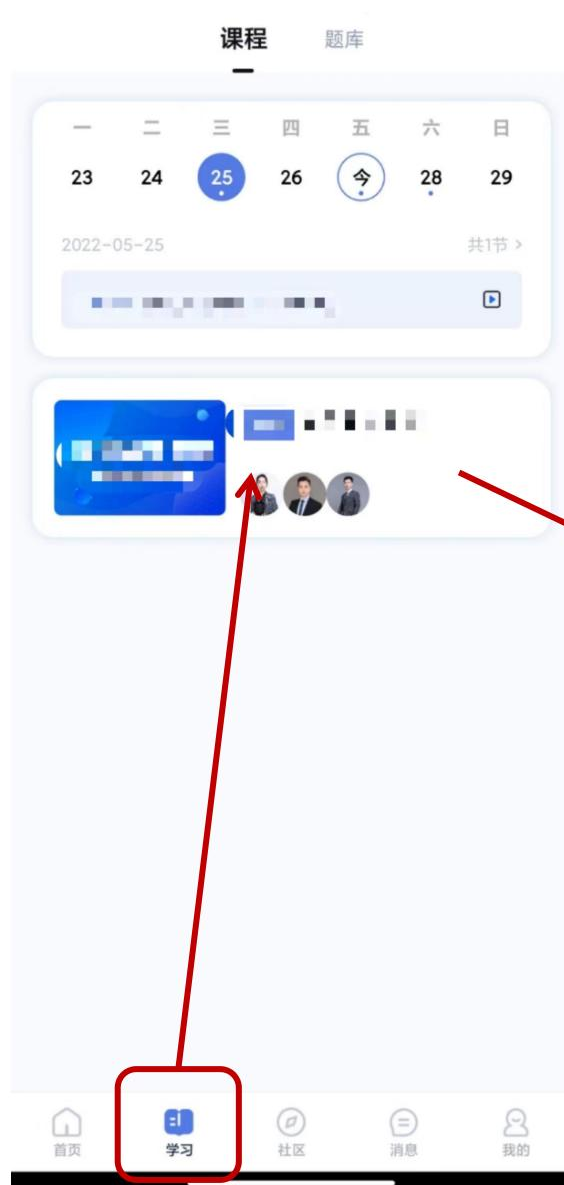
$$(a - 3d_1)(a + d_1) = 0 \quad \Rightarrow a = 3d_1 \quad \text{or} \quad a = -d_1 \text{ (舍去)}$$

同理  $b = 3d_2$

$$\frac{a}{b} = \frac{a+d_1}{b+d_2} = \frac{a+2d_1}{b+2d_2} = \frac{d_1}{d_2}$$

$\Rightarrow \text{相似} \quad \checkmark$

D



学习→点击课程→点击评价(5星好评)→提交评价

# 感谢聆听

---

主讲:媛媛老师

邮箱:family7662@dingtalk.com