全国硕士研究生招生考试

专题串讲课——管综(数学)

主讲:媛媛老师

邮箱:family7662@dingtalk.com

串讲课2:函数、方程与不等式

专题串讲课2:函数、方程与不等式

	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024
函数方程	3	2	3	2	2	1	1	2	1	3	3
不等式	2	1	2	1	2	2	2	0	1	2	3

专题串讲课2:函数、方程与不等式

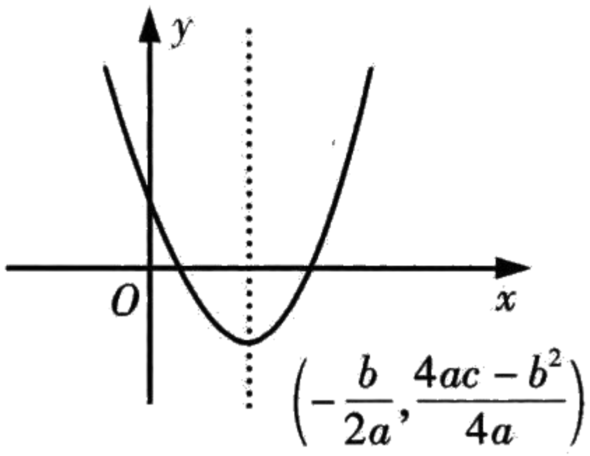
- PART--01　一元二次函数
- PART--02　一元二次方程
- PART--03　一元二次不等式
- PART--04　均值不等式

PART--01 一元二次函数

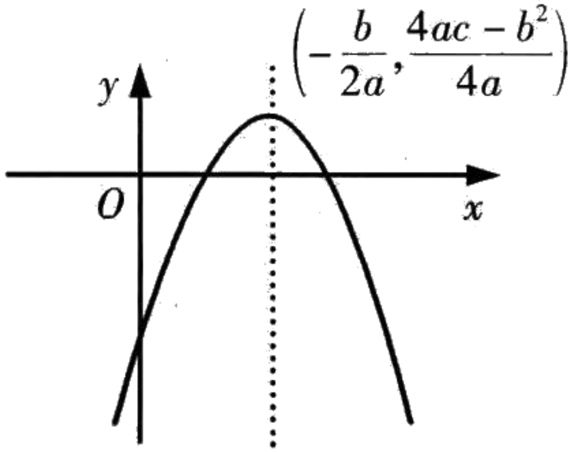
一元二次函数★

一元二次函数$y = ax^2 + bx + c(a \neq 0)$

对称轴： $x = -\frac{b}{2a}$， 最值：$\frac{4ac-b^2}{4a}$（对称轴在定义域内）



$a > 0$



$a < 0$

练习

1. （2013）已知抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 的对称轴为 $x = 1$，且过点 $(-1, 1)$，则【A】

A. $b=-2$，$c=-2$

B. $b=2$，$c=2$

C. $b=-2$，$c=2$

D. $b=-1$，$c=-1$

E. $b=1$，$c=1$

【解析】

根据题意，抛物线 $y=x^2+bx+c$ 的对称轴为 $x=1 \Rightarrow x=-\frac{b}{2}=1 \Rightarrow b=-2$.

且抛物线 $y=x^2-2x+c$ 过点（-1，1）$\Rightarrow 1=(-1)^2-2\times(-1)+c \Rightarrow c=-2$. 故选 A.

练习

2.（2020）设函数$f(x)=(ax-1)(x-4)$，则在$x=4$左侧附近有$f(x)<0$.

【A】

（1）$a>\frac{1}{4}$.

（2）$a<4$.

【解析】

条件（1），$a>\frac{1}{4}$，此时函数$f(x)$为二次函数，函数开口向上，有两个零点$x=4$和$x=\frac{1}{a}$.

又$\because \frac{1}{a}<4$. $\therefore$在$x=4$的左侧附近有$f(x)<0$. 故条件（1）充分.

条件(2)，$a<4$. 举反例，当$a=0$时，则$f(x)=-(x-4)=4-x$，则在$x=4$的左侧附近有$f(x)>0$. 故条件（2）不充分.

综上，故选A.

PART--02 一元二次方程

一、判别式★

一元二次方程$ax^2+bx+c=0$

判别式：$\Delta=b^2-4ac$

$\Delta>0$，有两个不等实根

$\Delta=0$，有两个相等实根

$\Delta<0$，无实根.

抛物线$y=ax^2+bx+c$

与直线$y=0$（x轴）是否相交

x轴与抛物线相交，有2个交点

x轴与抛物线相切，有1个交点

x轴与抛物线相离，无交点

一、判别式★

一元二次方程$ax^2+bx+c=d$

$\Rightarrow ax^2+bx+(c-d)=0$

判别式：$\Delta=b^2-4a(c-d)$

$\Delta>0$，有两个不等实根

$\Delta=0$，有两个相等实根

$\Delta<0$，无实根.

抛物线$y=ax^2+bx+c$

与直线$y=d$是否相交

直线与抛物线相交，有2个交点

直线与抛物线相切，有1个交点

直线与抛物线相离，无交点

练习

3. （2019）关于x的方程$x^2+ax+b-1=0$有实根.【D】

（1）$a+b=0$.

（2）$a-b=0$.

【解析】

根据题意得，方程有实根，即$\Delta\geqslant0\Rightarrow\Delta=a^2-4(b-1)=a^2-4b+4\geqslant0$.

条件（1），$a+b=0$，则$b=-a$. 则$\Delta=a^2-4b+4=a^2+4a+4=(a+2)^2\geqslant0$，方程有实根.

故条件（1）充分.

条件（2），$a-b=0$，则$a=b$. 则$\Delta=a^2-4b+4=a^2-4a+4=(a-2)^2\geqslant0$，方程有实根. 故条件（2）充分.

综上，故选D.

练习

4.（2014）已知二次函数$f(x)=ax^2+bx+c$，则能确定a,b,c的值.【C】

（1）曲线$y=f(x)$过点（0，0）和点（1，1）.

（2）曲线$y=f(x)$与直线$y=a+b$相切.

【解析】

条件(1)，根据条件，将点(0, 0)和点(1, 1)代入$f(x)=ax^2+bx+c$得$\begin{cases}0=0+0+c\\1=a+b+c\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c=0\\a+b=1\end{cases}$.

只能确定c的值，则不能确定a，b的值. 故条件（1）不充分.

条件(2)，根据条件，直线与抛物线水平相切，即直线过抛物线的顶点$\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$. $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$

$=\frac{4ac-b^2}{4a}=a+b$. 则不能确定a，b，c的值. 故条件（2）不充分.

条件（1）和条件（2）单独都不充分，考虑条件（1）（2）联合.

条件（1）（2）联合有$\begin{cases}c=0\\a+b=1\\\frac{4ac-b^2}{4a}=a+b\end{cases}$ $\Rightarrow 4a\times0-b^2=4a\cdot(a+b)\Rightarrow -b^2=4a^2+4ab\Rightarrow 4a^2+$

$4ab+b^2=0\Rightarrow(2a+b)^2=0\Rightarrow b=-2a\Rightarrow b=-2\times(1-b)\Rightarrow b=2$. 即$a=-1$，$b=2$，$c=0$.

因此，能确定a，b，c的值. 故条件（1）（2）联合起来充分.

综上，故选C.

练习

5.（2017）直线$y=ax+b$与抛物线$y=x^2$有两个交点.【B】

（1）$a^2>4b$

（2）$b>0$

【解析】

根据题意，联立方程组$\begin{cases} y=ax+b \\ y=x^2 \end{cases} \Rightarrow x^2-ax-b=0$.

∵直线与抛物线有两个交点. ∴$\Delta=a^2+4b>0$.

条件（1），$a^2>4b \Rightarrow a^2-4b>0$ 与上述结论$a^2+4b>0$ 相矛盾. 故条件（1）不充分.

条件（2），∵$a^2\geqslant 0$ 且$b>0\Rightarrow\Delta=a^2+4b>0$，与上述结论$a^2+4b>0$ 相一致. 故条件（2）充分.

综上，故选 B.

练习

6.（2016）已知$f(x)=x^2+ax+b$，则$0\leqslant f(1)\leqslant 1$.【D】

（1）在区间[0，1]中有两个零点.

（2）在区间[1，2]中有两个零点.

【解析】

$f(x)$的抛物线图像开口向上，对称轴$x=-\frac{a}{2}$.

条件（1），$f(x)$在区间[0，1]中有两个零点$\Rightarrow 0\leqslant -\frac{a}{2}\leqslant 1$.

$\because f(x)$有两个实数根. $\therefore \Delta=a^2-4b\geqslant 0\Rightarrow b\leqslant \frac{a^2}{4}$. 则$f(1)=1+a+b\leqslant a+\frac{a^2}{4}+1=(1+\frac{a}{2})^2$.

$\because 0\leqslant -\frac{a}{2}\leqslant 1\Rightarrow -1\leqslant \frac{a}{2}\leqslant 0\Rightarrow 0\leqslant 1+\frac{a}{2}\leqslant 1\Rightarrow 0\leqslant (1+\frac{a}{2})^2\leqslant 1$. $\therefore 0\leqslant f(1)\leqslant 1$. 即与题干结论一致.

故条件（1）充分.

条件（2），$f(x)$在区间[1，2]中有两个零点$\Rightarrow 1\leqslant -\frac{a}{2}\leqslant 2$.

$\because f(x)$有两个实数根. $\therefore \Delta=a^2-4b\geqslant 0\Rightarrow b\leqslant \frac{a^2}{4}$. 则$f(1)=1+a+b\leqslant a+\frac{a^2}{4}+1=(1+\frac{a}{2})^2$.

$\because 1\leqslant -\frac{a}{2}\leqslant 2\Rightarrow -2\leqslant \frac{a}{2}\leqslant -1\Rightarrow -1\leqslant 1+\frac{a}{2}\leqslant 0\Rightarrow 0\leqslant (1+\frac{a}{2})^2\leqslant 1$. $\therefore 0\leqslant f(1)\leqslant 1$. 即与题干结论一致. 故条件（2）充分.

综上，故选D.

二、韦达定理★

一元二次方程$ax^2+bx+c=0$的两个根为x_1，x_2

韦达定理：$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1x_2=\frac{c}{a}$（前提$\Delta\geq 0$）

变式：

$x_1{}^2+x_2{}^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$

$|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$ （x_1，x_2的距离）

练习

7.（2023）关于x的方程$x^2-px+q=0$有两个实根a，b. 则$p-q>1$.【C】

（1）$a>1$.

（2）$b<1$.

【解析】

根据题意，得：$\begin{cases}a+b=p\\ab=q\end{cases}$，则 $p-q>1$ 可转化为：$a+b-ab>1\Rightarrow a+b-ab-1>0\Rightarrow a(1-b)-(1-b)>0\Rightarrow(a-1)(1-b)>0\Rightarrow\begin{cases}a-1>0\\1-b>0\end{cases}$.

条件（1），只知道$a>1$，不知道b的取值范围. 则无法判断. 故条件（1）不充分.

条件（2），只知道$b<1$，不知道a的取值范围. 则无法判断. 故条件（2）不充分.

条件（1）和条件（2）单独都不充分，考虑条件（1）（2）联合.

条件（1）（2）联合有：$a>1$，$b<1$，与上述结论一致. 即 $p-q>1$. 故条件（1）（2）联合起来充分.

综上，故选 C.

练习

8.（2016）设抛物线$y = x^2 + 2ax + b$与x轴相交于A，B两点，点C的坐标为（0，2），若ΔABC的面积等于6，则【B】

A. $a^2 + b = 9$

B. $a^2 - b = 9$

C. $a^2 - b = 36$

D. $a^2 - 4b = 9$

E. $a^2 + b = 36$

【解析】

根据题意得，设原点为O（0，0），点A和点B的坐标分别为（x_1，0），（x_2，0）.

则$\triangle ABC$的高为$OC \Rightarrow OC=2$.

$\because S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2} \cdot AB \cdot OC=\frac{1}{2} \cdot AB \cdot 2=6. \therefore AB=6.$

$\because$点A和点B是抛物线$y=x^2+2ax+b$与x轴的两个交点.

$\therefore \Delta=(2a)^2-4\times1 \cdot b>0 \Rightarrow 4a^2-4b>0 \Rightarrow a^2>b.$

又$\because$令$x^2+2ax+b=0$. $\therefore$由韦达定理得$\begin{cases} x_1+x_2=-2a \\ x_1x_2=b \end{cases}$.

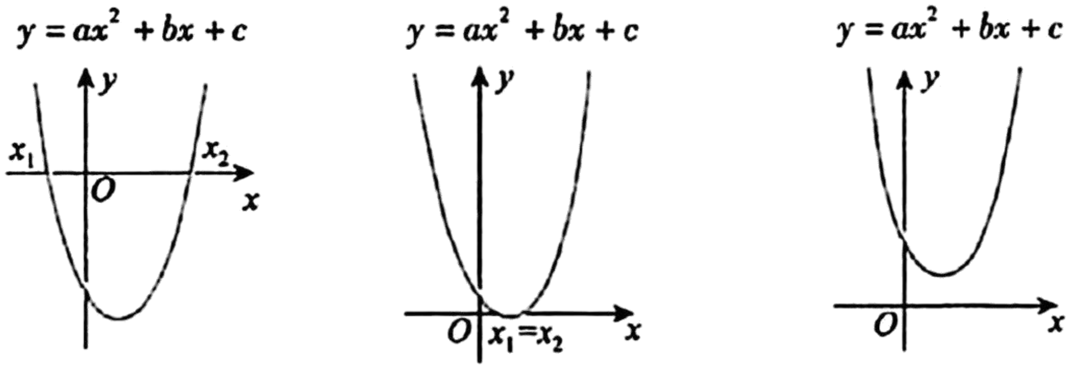
则$AB=|x_2-x_1|=6 \Rightarrow \sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=6 \Rightarrow \sqrt{(-2a)^2-4b}=6 \Rightarrow 4a^2-4b=36 \Rightarrow a^2-b=9.$

故选 B.

PART--03 一元二次不等式

解题步骤★

1. 化成标准型：$ax^2+bx+c>0$（<0）,且$a>0$
2. 计算判别式Δ
3. 求根：十字相乘法、公式法
4. 结合函数图像判断解集



口诀：大于号取两边，小于号取中间

练习

9.（2006）已知不等式$ax^2+2x+2>0$的解集是$\left(-\frac{1}{3},\ \frac{1}{2}\right)$，则$a$=【A】

A. -12

B. 6

C. 0

D. 12

E. 以上均不对

根

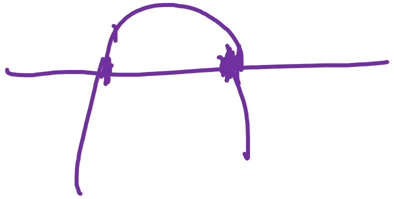
$x_1=-\frac{1}{3}$　$x_2=\frac{1}{2}$　法一：将 $x=-\frac{1}{3}$ 代入 $ax^2+2x+2=0$

法二：根关系 韦达定理 $x_1x_2=\frac{2}{a}$ $\Rightarrow \frac{2}{a}=-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2}{a}=-\frac{1}{6} \Rightarrow a=-12$

$1\times a=2\times(-6)$

$x_1+x_2=-\frac{2}{a}$

法三：开口向下　$a<0$



练习

在x轴上方 恒成立

10.（2011）不等式$ax^2+(a-6)x+2>0$对所有实数x都成立.【E】

E

（1）$0<a<3$

（2）$1<a<5$

$\begin{cases} a>0 \\ \Delta<0 \end{cases}$

$\Delta=(a-6)^2-4\times a\times 2=a^2+36-12a-8a=a^2-20a+36$

$=(a-2)(a-18)<0$

$\Rightarrow\begin{cases} a>0 \\ 2<a<18 \end{cases}\Rightarrow 2<a<18$

2 18

条件(1)：$0<a<3$ 不在$(2,18)$内 ×

条件(2)：$1<a<5$ 不在$(2,18)$内 ×

联合(1)+(2) $\begin{cases} 0<a<3 \\ 1<a<5 \end{cases}$ 0 1 3 5 $\Rightarrow 1<a<3$ 不在$(2,18)$内 ×

练习

11.（2014）不等式$|x^2+2x+a|\leq 1$的解集为空集.【B】

（1）$a<0$

（2）$a>2$

【解析】

根据题意，$|x^2+2x+a|\leqslant 1$ 的解集为空集$\Rightarrow|x^2+2x+a|>1$ 恒成立.

$x^2+2x+a>1$ 或$x^2+2x+a<-1$（舍），即$\Delta<0\Rightarrow a>2$.

条件（1），$a<0$ 与结论$a>2$ 的范围不一致. 故条件（1）不充分.

条件（2），$a>2$ 与结论$a>2$ 的范围一致. 故条件（2）充分.

综上，故选 B.

PART--04 均值不等式

均值不等式★

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$$

$x^2+y^2 \geq 2xy$，$x+y \geq 2\sqrt{xy}$，$x+\frac{1}{x} \geq 2$

$x+y+z \geq 3\sqrt[3]{xyz}$

一正：所有数据均为正数.

二定：和定积最大；积定和最小.（解决最值问题）

三相等：当且仅当$x_1=x_2=\cdots=x_n$时，等号成立.

练习

12.（2020）设$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$是正实数，则$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$存在最小值.【A】

（1）已知$\boldsymbol{ab}$的值.

（2）已知$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$是方程$x^2-(a+b)x+2=0$的不同实根.

【解析】

条件（1），因为a，b是正实数，则$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{ab}}$，当$a=b$时，则$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$的最小值可以确定.

故条件（1）充分.

条件（2），因为a，b是方程的不同实根，所以$\begin{cases}\Delta=(a+b)^2-8>0\\ab=2\end{cases}$，且$a$，$b$是正实数，则有

$\begin{cases}a+b>2\sqrt{2}\\ab=2\end{cases}$，因此$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}=\frac{a+b}{2}>\sqrt{2}$. 无法取得最小值. 故条件（2）不充分.

综上，故选 A.

练习

13.（2019）有甲、乙两袋奖券，获奖率分别为p和q. 某人从两袋中各随机抽取1张奖券，则此人获奖的概率不小于$\frac{3}{4}$.【D】

（1）已知$p+q=1$.

（2）已知$pq=\frac{1}{4}$.

【解析】

根据题意得，甲袋获奖概率为p，乙袋获奖概率为q，此人不获奖的概率为$(1-p)(1-q)$，则此人获奖的概率为P（A）$=1-(1-p)(1-q)=p+q-pq$.

由均值不等式：$(\frac{a+b}{2})^2\geqslant ab\Rightarrow(\frac{p+q}{2})^2\geqslant pq$，即$(p+q)^2\geqslant 4pq$.

条件（1），已知$p+q=1$且$0<p<1$，$0<q<1$，由均值不等式得$(p+q)^2\geqslant 4pq\Rightarrow pq\leqslant\frac{1}{4}$.

则P（A）$=p+q-pq\geqslant\frac{3}{4}$. 故条件（1）充分.

条件（2），已知$pq=\frac{1}{4}$且$0<p<1$，$0<q<1$，由均值不等式得$(p+q)^2\geqslant 4pq\Rightarrow p+q\geqslant 1$.

则P（A）$=p+q-pq\geqslant\frac{3}{4}$. 故条件（2）充分.

综上，故选D.

练习

14.（2024）函数$\frac{x^4+5x^2+16}{x^2}$的最小值为_____.【B】

A. 12

B. 13

C. 14

D. 15

E. 16

【解析】

函数 $f(x)=\frac{x^4+5x^2+16}{x^2}=x^2+5+\frac{16}{x^2}\geq 5+2\sqrt{x^2\cdot\frac{16}{x^2}}=5+2\times\sqrt{16}=5+2\times 4=13$.

当且仅当 $x^2=\frac{16}{x^2}$ 时等号成立，即 $x=\pm 2$ 时不等式取等号.

故选 B.

练习

15.（2019）设函数$f(x)=2x+\frac{a}{x^2}(a>0)$在$(0,+\infty)$内的最小值为$f(x_0)=12$，则$x_0=$【B】

A. 5

B. 4

C. 3

D. 2

E. 1

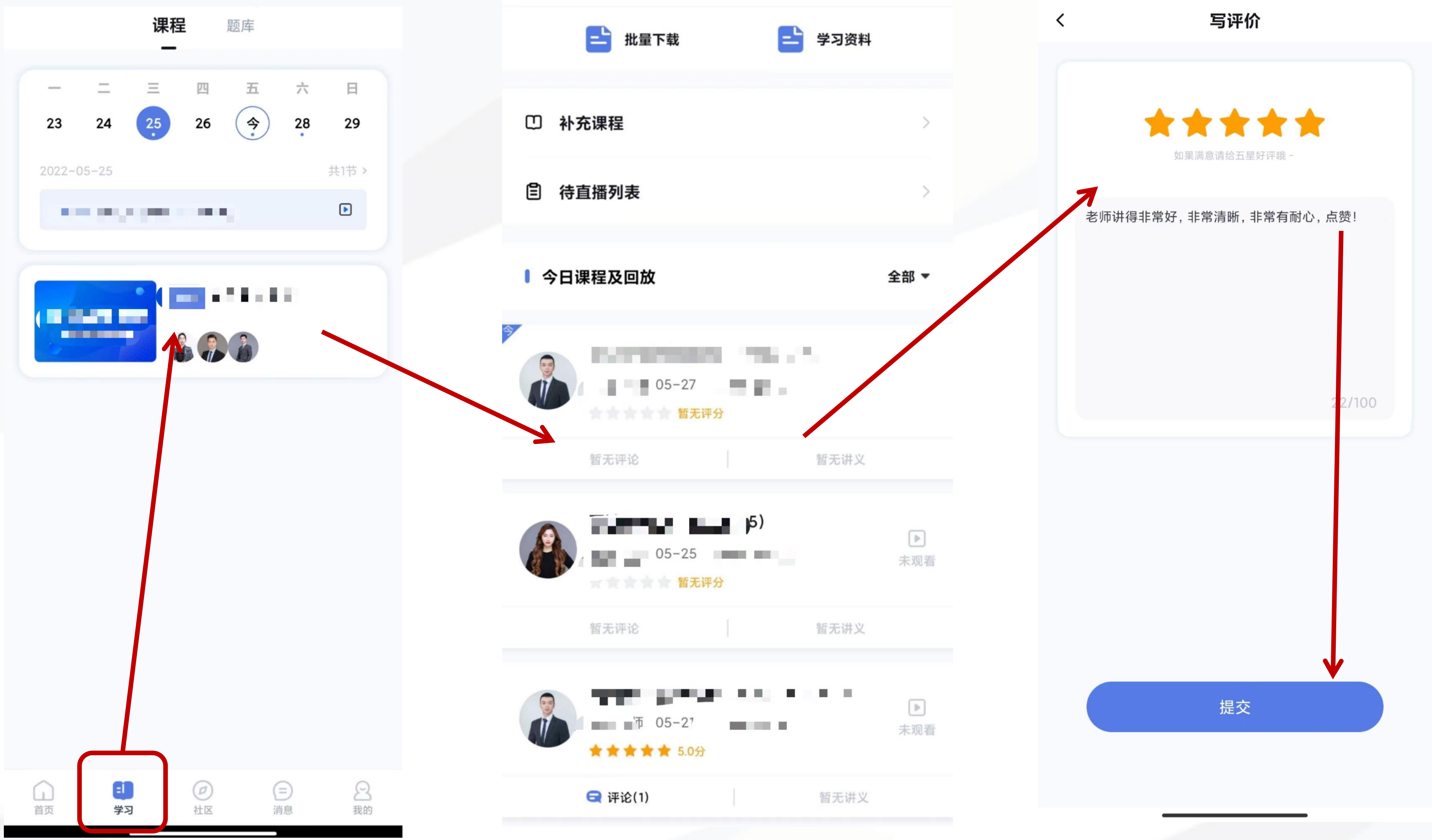
【解析】

根据题意，原式整理得：$f(x)=2x+\frac{a}{x^2}=x+x+\frac{a}{x^2}(a>0，x>0)$，则利用均值不等式可得：

$f(x)=x+x+\frac{a}{x^2}\geq 3\sqrt[3]{x\cdot x\cdot\frac{a}{x^2}}$，即$f(x)\geq 3\sqrt[3]{a}$.

又∵最小值$f(x_0)=12$. ∴ $f(x_0)\geq 3\sqrt[3]{a}=12$，即$a=64$.

故当且仅当$x_0=x_0=\frac{a}{x_0^2}$时，即$x_0=\frac{64}{x_0^2}$时，解得$x_0=4$时取最小值. 故选B.



师大云课堂→学习→点击课程→点击评价(5星好评)→提交评价

师大课堂
SHI DA KE TANG

感 谢 聆 听

主讲:媛媛老师
邮箱:family7662@dingtalk.com