# 全国硕士研究生招生考试

# 专题串讲课——管综(数学)

主讲:媛媛老师

邮箱:family7662@dingtalk.com

# 串讲课5:排列组合与概率

# 串讲课5:排列组合与概率

| | 2015 | 2016 | 2017 | 2018 | 2019 | 2020 | 2021 | 2022 | 2023 | 2024 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 排列组合 | 1 | 2 | 1 | 3 | 1 | 1 | 1 | 2 | 3 | 1 |
| 概率 | 2 | 2 | 3 | 2 | 1 | 3 | 2 | 2 | 2 | 3 |

# 专题串讲课5:排列组合与概率

PART--01 排列组合

PART--02 概率

PART--03 正难则反

# PART--01 排列组合

# 一、基本计数原理★

1. 分类加法计数原理

完成一件事有两类不同方案（两类不同方案中的方法互不相同），在第 1 类方案中有$n$种不同的方法，在第2类方案中有$m$种不同的方法，那么完成这件事共有$N=m+n$种不同的方法.

2. 分步乘法计数原理

完成一件事需要两个步骤，做第 1 步有$m$种不同的方法，做第 2 步有$n$种不同的方法，那么完成这件事共有$N=m\times n$种不同的方法.

## 二.排列与组合★

1. 排列

从$n$个不同元素中取出$m$（$m \le n$）个元素，并按照一定的顺序排成一列，叫做从$n$个不同元素中取出$m$个元素的一个排列，所有不同排列个数叫排列数，用$A_n^m$表示. $A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$

2. 组合

从$n$个不同元素中取出$m$（$m \le n$）个元素作为一组，叫做从$n$个不同元素中取出m个元素的一个组合，所有不同组合的个数叫组合数，用$C_n^m$表示.

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{A_m^m} = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}$$

# 练习

1. （2022）如图所示，用4种颜色对图中五块区域进行涂色，每块区域涂一种颜色，且相邻的两块区域颜色不同，则不同的涂色方法有【E】

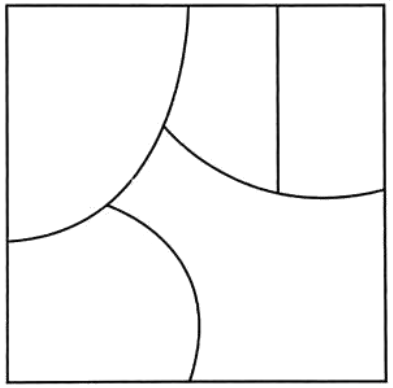
A. 12种

B. 24种

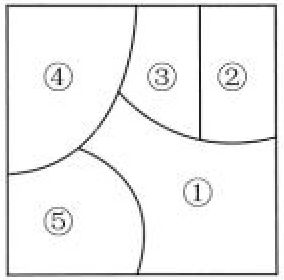
C. 32种

D. 48种

E. 96种



【解析】




第一步：给相邻区域最多的区域①上色，有4种涂法.

第二步：给区域②上色，有3种涂法（与区域①颜色不同）.

第三步：给区域③上色，有2种涂法（与区域①和区域②颜色不同）.

第四步：给区域④上色，有2种涂法（与区域①和区域③颜色不同）.

第五步：给区域⑤上色，有2种涂法（与区域①和区域④颜色不同）.

综上，使用分步乘法原理，得到最终的涂色方法有 $4\times3\times2\times2\times2=96$ 种.

故选E.

# 练习

师大课堂 SHI DA KE TANG

2.（2012）某商店经营15种商品，每次在橱窗内陈列5种，若每两次陈列的商品不完全相同，则最多可陈列【B】

A. 3000次

B. 3003次

C. 4000次

D. 4003次

E. 4300次

【解析】

根据题意，每两次陈列的商品不完全相同，即每次陈列商品的方法均不相同.

15 种商品，选出 5 种陈列：$C_{15}^{5}=\frac{15\times14\times13\times12\times11}{5\times4\times3\times2\times1}=3003$. 即多可陈列 3003 次. 故选 B.

# 练习

3. （2021）甲、乙两组同学中，甲组有3名男同学、3名女同学；乙组有4名男同学、2名女同学. 从甲、乙两组中各选出2名同学，这4人中恰有1名女同学的选法有____种.【D】

A. 26

B. 54

C. 70

D. 78

E. 105

【解析】根据题意可知，4人中恰有1名女同学分为两种情况：

①该名女同学来自甲组（甲组选1男1女，乙组选2男）：$C_3^1C_3^1C_4^2=54$.

②该名女同学来自乙组（甲组选2男，乙组选1男1女）：$C_3^2C_4^1C_2^1=24$.

因此这4人中恰有1名女同学的选取方法共有 $54+24=78$ 种.

故选D.

# 三.分堆与分配★

## （一）分堆与分配

1.分堆

（1）指定数量分堆　　例如：4个小球，平均分成两组，每组2个小球

（2）未指定数量分堆　例如：3个小球，分成两组，每组至少1个小球

（3）指定元素的分堆　例如：6个人分成三组，每组2个人，且甲乙在同一组

2.分配

出现不同的归属对象，转化为分配问题.先分堆再排序.

例如：4封不同的信投入3个不同的信箱

# 三.分堆与分配★

例1：把3个不同的小球放到2个相同的盒子里，要求每个盒子不为空（每个盒子至少有1个小球），共有多少种放法？

每个盒子的球数为1个和2个

第一步：从3个小球中任选一个放在其中一个盒子里$C_3^1$

第二步：将剩下的2个小球放在另一个盒子里$C_2^2$

故共有$C_3^1 \cdot C_2^2 = 3$种放法

# 三.分堆与分配★



例2：把4个不同的小球放到2个相同的盒子里，要求每个盒子不为空（每个盒子至少有1个小球），共有多少种放法？

盒子的球数可以分别为1个和3个、2个和2个

第一种：先从4个小球中任选一个放在其中一个盒子里$C_4^1$，再将剩下的3个小球放在另一个盒子里$C_3^3$，共有$C_4^1 \cdot C_3^3 = 4$种放法

第二种：先从4个小球中任选两个放在其中一个盒子里$C_4^2$，再将剩下的2个小球放在另一个盒子里$C_2^2$，共有$C_4^2 \cdot C_2^2 = 6$种放法？？

# 三.分堆与分配★

例2：把4个不同的小球放到2个相同的盒子里，要求每个盒子不为空（每个盒子至少有1个小球），共有多少种放法？

球：甲　乙　丙　丁

①甲乙　丙丁　　④乙丙　甲丁

②甲丙　乙丁　　⑤乙丁　甲丙

③甲丁　乙丙　　⑥丙丁　甲乙

【注意】有重复！！重复的原因是把这两组全排列了（有顺序），但实际这两组没有顺序的，故应该消序，除以$A_2^2$

# 三.分堆与分配★

例2：把4个不同的小球放到2个相同的盒子里，要求每个盒子不为空（每个盒子至少有1个小球），共有多少种放法？

盒子的球数可以分别为1个和3个、2个和2个

第一种：先从4个小球中任选一个放在其中一个盒子里$C_4^1$，再将剩下的3个小球放在另一个盒子里$C_3^3$，共有$C_4^1 \cdot C_3^3 = 4$种放法

第二种：先从4个小球中任选两个放在其中一个盒子里$C_4^2$，再将剩下的2个小球放在另一个盒子里$C_2^2$，每组数量都是2，共两组，再除以$A_2^2$消序，

共有$\frac{C_4^2 \cdot C_2^2}{A_2^2} = 3$种放法. 综上共有4+3=7种放法.

# 三.分堆与分配★

（一）分堆与分配

被分配元素不相同，并且要求受分配元素至少分得一个.

分堆时，出现相同数量的堆数时，要除以相同堆数的阶乘/全排列，以消除顺序.

（二）局部元素定序/相同

出现部分元素需按一定的顺序/相同时进行排列时，则要除以这部分元素数量的阶乘或全排列，以消除顺序.

# 三.分堆与分配★

## （二）局部元素定序/相同

例3：甲乙丙丁四人排队，甲乙顺序一定，共有多少种排法？$\frac{A_4^4}{A_2^2}$

例4：2个$a$，1个$b$，1个$c$排列，共有多少种排法？$\frac{A_4^4}{A_2^2}$

# 练习

4.（2017）将6人分成3组，每组2人，则不同的分组方式共有【B】.

A. 12种

B. 15种

C. 30种

D. 45种

E. 90种

【解析】

根据不同元素均匀分组的计算方法可得$\frac{C_6^2C_4^2C_2^2}{A_3^3}=\frac{\frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{2\times1\times2\times1\times2\times1}}{3\times2\times1}=\frac{90}{6}=15$（种）. 故选B.

# 练习

5.（2018）将6张不同的卡片2张一组分别装入甲、乙、丙3个袋中，若指定的2张卡片要在同一组，则不同的装法有【B】

A. 12种

B. 18种

C. 24种

D. 30种

E. 36种

【解析】

2 张指定卡片在同一组，剩余 4 张进行均匀分组得$\frac{C_4^2C_2^2}{A_2^2}$，再将三组卡片分别作为三个元素分配到甲、乙、丙 3 个袋中，则共有$\frac{C_4^2C_2^2}{A_2^2}A_3^3=18$ 种不同的装法.

故选 B.

# 练习

6.（2023）快递员收到3个同城快递任务，取送地点各不相同，取送件可穿插进行，不同的送件方式有【D】

A. 6种

B. 27种

C. 36种

D. 90种

E. 360种

【解析】

方法一：

根据题意，得：取三件快递的动作可分别对应记为$A_1$、$A_2$、$A_3$，送快递的动作可分别记为$B_1$，$B_2$，$B_3$. 取快递和送快递的动作可穿插随意进行，因此全排列共有$A_6^6$种情况. 但由于同一件物品只能是先取才能送，所以$A_1$必须在$B_1$的前面，同理$A_2$必须在$B_2$的前面，$A_3$必须在$B_3$的前面，则进行消除这三组的顺序，即不同的送件方式有$\frac{A_6^6}{A_2^2A_2^2A_2^2}=\frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{2\times1\times2\times1\times2\times1}=90$种.

方法二：

根据题意，得：取送快递共有六个步骤，三个取，三个送. 若需要送完一份快递，按先取后送的顺序完成（“一取一送”顺序固定）. 在六个动作中任选两个作为第一个快递，剩下的四个动作中任选两个作为第二个快递，剩下的两个动作为最后一个快递，即不同的送件方式有$C_6^2C_4^2C_2^2=90$种.

故选D.

# PART--02 概率

# 一、古典概型★

$$P(A)=\frac{\text{事件}A\text{包含的基本事件数}k}{\text{样本空间中基本事件总数}n}$$

# 练习



7.（2024）将3张写有不同数字的卡片随机地排成一排，数字面朝下. 翻开左边和中间的2张卡片，如果中间卡片上的数字大，那么取中间的卡片，否则取右边的卡片. 则取出的卡片上的数字的为最大的概率为_____.【C】

A. $\frac{5}{6}$

B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{1}{3}$

E. $\frac{1}{4}$

$p=\frac{k}{n}$

n: 3张卡片全排列 $A_3^3=3\times2\times1=6$

k: ①列举:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 小 中 大 | 取中 | | |
| 小 大 中 | 取大 | ✓ | |
| 中 小 大 | 取大 | ✓ | |
| 中 大 小 | 取大 | ✓ | |
| 大 小 中 | 取中 | | |
| 大 中 小 | 取中 | | |

$k=3 \Rightarrow p=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

② 取出卡片为最大

1° 中间：中间>左边 2种

2° 右边 中间<左边 1种

$\Rightarrow 2+1=3$种

$\Rightarrow p=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

# 练习

8.（2012）在一次商品促销活动中，主持人出示了一个9位数，让顾客猜测商品的价格. 商品的价格是该9位数中从左到右相邻的3个数字组成的3位数. 若主持人出示的是513535319，则顾客一次猜中价格的概率是【B】

A. $\frac{1}{7}$

B. $\frac{1}{6}$

C. $\frac{1}{5}$

D. $\frac{2}{7}$

E. $\frac{1}{3}$

【解析】

根据题意，商品的价格可能为：513，135，353，535，531，319 共 6 种情况. 6 种情况中只有 1 种情况是商品的价格.

则顾客一次猜中价格的概率是 $\frac{1}{6}$. 故选 B.

# 练习

9.（2017）甲从1，2，3中抽取一个数，记为$a$；乙从1，2，3，4中抽取一个数，记为$b$. 规定当$a>b$或者$a+1<b$时甲获胜，则甲获胜的概率为【E】

A. $\frac{1}{6}$

B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{5}{12}$

E. $\frac{1}{2}$

【解析】

根据题意得，甲、乙各取一数总共有$C_3^1C_4^1=3\times4=12$种取法，即总的基本事件数为12.

第一类：当$a>b$时甲获胜. 当$a=2$时，$b=1$；当$a=3$时，$b=1$或$b=2$，共3种情况.

第二类：当$a+1<b$时甲获胜. 当$a=1$时，$b=3$或$b=4$；当$a=2$时，$b=4$，共3种情况.

因此，所求事件包含的基本事件数为$3+3=6$，即甲获胜的概率为$P=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$. 故选E.

# 练习



10.（2021）某商场利用抽奖方式促销，100个奖券中设有3个一等奖、7个二等奖，则一等奖先于二等奖抽完的概率为【D】

A. 0. 3

B. 0. 5

C. 0. 6

D. 0. 7

E. 0. 73

【解析】

根据题意得，100 个奖券中有奖的奖券一共有 10 张（3 张一等奖和 7 张二等奖），其它奖券不影响本题的结果. 因此 10 张奖券的基本事件总数为$A_{10}^{10}$.

一等奖先于二等奖抽完的概率实际就是指最后一次一定要抽中的是二等奖. 即 7 张二等奖选一张出来放在最后一次抽，其余的 9 张奖券全排列$C_7^1A_9^9$.

故一等奖先于二等奖抽完的概率为$\frac{C_7^1A_9^9}{A_{10}^{10}}=\frac{7\times 9!}{10!}=\frac{7}{10}$. 故选 D.

## 二、独立事件★

两事件中任一事件的发生不影响另一事件的概率

相互独立的事件$A$与$B$同时发生的概率＝事件$A$的概率×事件$B$的概率

$$P(AB)=P(A)\times P(B)$$

# 练习

11.（2017）某试卷由15道选择题组成，每道题有4个选项，只有一项是符合试题要求的.甲有6道题能确定正确选项，有5道题能排除2个错误选项，有4道题能排除1个错误选项.若从每题排除后剩余的选项中选1个作为答案，则甲得满分的概率为【B】

A. $\frac{1}{2^4}\cdot\frac{1}{3^5}$

B. $\frac{1}{2^5}\cdot\frac{1}{3^4}$

C. $\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^4}$

D. $\frac{1}{2^4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^5$

E. $\frac{1}{2^4}+\left(\frac{3}{4}\right)^5$

【解析】

根据题意可得以下推理：

排除2个错误选项就得2选1，则每道题答对的概率为$\frac{1}{2}$ ⇒共5道题，则全部答对的概率为$(\frac{1}{2})^5$.

排除1个错误选项就得3选1，则每道题答对的概率为$\frac{1}{3}$ ⇒共4道题，则全部答对的概率为$(\frac{1}{3})^4$.

甲得满分的概率=全部题目都答对的概率$=(\frac{1}{2})^5\cdot(\frac{1}{3})^4=\frac{1}{2^5}\cdot\frac{1}{3^4}$.故选B.

# 练习

12.（2014）掷一枚均匀的硬币若干次，当正面向上次数大于反面向上次数时停止，则在4次之内停止的概率为【C】

A. $\frac{1}{8}$

B. $\frac{3}{8}$

C. $\frac{5}{8}$

D. $\frac{3}{16}$

E. $\frac{5}{16}$

【解析】

根据题意，“当正面向上的次数大于反面向上的次数时停止”，在4次之内停止的情况有：

1次停止：第1次掷到正面，停止掷硬币的概率$P_1=\frac{1}{2}$.

3次停止：第1次掷到反面，第2次和第3次掷到正面，停止掷硬币的概率$P_2=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$.

2次（一正一反）和4次（两正两反），掷到正面和反面的次数相等，不符合停止的要求，则可排除. 因此，在4次之内停止的概率为$P=P_1+P_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}=\frac{5}{8}$. 故选C.

# 练习

13. （2018）甲、乙两人进行围棋比赛，约定先胜2盘者赢得比赛. 已知每盘棋甲获胜的概率是0.6，乙获胜的概率是0.4. 若乙在第一盘获胜，则甲赢得比赛的概率为【C】

A. 0.144

B. 0.288

C. 0.36

D. 0.4

E. 0.6

【解析】

根据题意得，乙在第一盘获胜. 若甲赢得比赛，甲只能在第二盘和第三盘中都获胜，所以甲赢得比赛的概率为 $0.6\times0.6=0.36$. 故选C.

## 三.伯努利概型★

设在一次试验中，事件$A$发生的概率为$p(0 < p < 1)$，则在$n$次独立重复试验中这个事件恰好发生$k$次的概率为：

$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$，$k = 0, 1, 2 \cdots n$，其中$q = 1 - p$.

$k = n$时，即在$n$次独立重复试验中事件$A$全部发生，概率为$p^n$

$k = 0$时，即在$n$次独立重复试验中事件$A$没有发生，概率为$(1 - p)^n$

# 练习

14.（2017）某人参加资格考试，有*A*类和*B*类选择，*A*类的合格标准是抽3道题至少会做2道，*B*类的合格标准是抽2道题需都会做. 则此人参加*A*类合格的机会大.【C】

（1）此人*A*类题中有60%会做

（2）此人*A*类题中有80%会做

【解析】

条件（1），已知*A*类题会做的概率，但无法确定*B*类题会做的概率. 无法比较. 故条件（1）不充分.

条件（2），已知*B*类题会做的概率，但无法确定*A*类题会做的概率. 无法比较. 故条件（2）不充分.

条件（1）和条件（2）单独都不充分，考虑条件（1）（2）联合.

条件（1）（2）联合起来，则有：

$P(A)=P_3(2)+P_3(3)=C_3^2(0.6)^2(0.4)^1+C_3^3(0.6)^3(0.4)^0=0.648.$

$P(B)=P_2(2)=C_2^2(0.8)^2(0.2)^0=0.64.$

比较：0.648>0.64. 因而此人参加*A*类合格的机会大. 故条件（1）（2）联合起来充分.

综上，故选C.

# PART--03 正难则反

## 正难则反★

若事件的正面情况较多，可以从反面入手，既适用于排列组合也适用于概率.

# 练习



15. （2023）某公司财务部有2名男员工、3名女员工，销售部有4名男员工、1名女员工，现要从中选2名男员工、1名女员工组成工作小组，并要求每部门至少有1名员工入选，则工作小组的构成方式有【D】

A. 24种

B. 36种

C. 50种

D. 51种

E. 68种

【解析】

根据题意，正面考虑的情况太多，我们可以从反面分析.

财务部有 2 名男员工、3 名女员工，销售部有 4 名男员工、1 名女员工，即从 6 名男员工、4 名女员工中选出 2 名男员工、1 名女员工，则工作小组的构成方式共有$C_6^2C_4^1=60$ 种.

反面分析可分两种情况：

①选出的 2 名男员工、1 名女员工都来自财务部，则有$C_2^2C_3^1=3$.

②选出的 2 名男员工、1 名女员工都来自销售部，则有$C_4^2C_1^1=6$.

综上，则工作小组的构成方式共有 60−3−6=51 种.

故选 D.

# 练习

师大课堂 SHI DA KE TANG

16. （2019）某中学的5个学科各推荐了2名教师作为支教候选人.若从中选派来自不同学科的2人参加支教工作，则不同的选派方式有【D】

A. 20种

B. 24种

C. 30种

D. 40种

E. 45种

【解析】

根据题意得，总共的选派方法有：$C_{10}^{2}=45$（种）.

由于正面“来自不同学科的2人参加支教工作”的情况很多，所以可以采取反面考虑，反面是“来自相同学科的2人参加支教工作”.

“来自相同学科的2人参加支教工作”的选派方式有$5C_{2}^{2}=5$（种）.

则“来自不同学科的2人参加支教工作”不同的选派方式有$C_{10}^{2}-5C_{2}^{2}=45-5=40$（种）.

故选D.

# 练习

17.（2021）从装有1个红球、2个白球、3个黑球的袋中随机取出3个球，则这3个球的颜色至多有两种的概率为【E】

A. 0.3

B. 0.4

C. 0.5

D. 0.6

E. 0.7

【解析】

从6个球中随机取出3个球的基本事件总数为$C_6^3$.

由于正面"3个球的颜色至多有两种"的情况很多，所以可以采取反面考虑，反面是"3个球的颜色为三种不同的颜色".

"3个球的颜色为三种不同的颜色"的基本事件个数为$C_1^1C_2^1C_3^1$.

故这3个球的颜色至多有两种的概率 $P=1-\dfrac{C_1^1C_2^1C_3^1}{C_6^3}=1-\dfrac{1\times2\times3}{\dfrac{6\times5\times4}{3\times2\times1}}=\dfrac{7}{10}$.

故选E.

# 练习

18.（2012）经统计，某机场的一个安检口每天中午办理安检手续的乘客人数及相应的概率如下表：

| 乘客人数 | 0~5 | 6~10 | 11~15 | 16~20 | 21~25 | 25 以上 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 概率 | 0.1 | 0.2 | 0.2 | 0.25 | 0.2 | 0.05 |

该安检口2天中至少有1天中午办理安检手续的乘客人数超过15的概率是【E】

A. 0.2

B. 0.25

C. 0.4

D. 0.5

E. 0.75

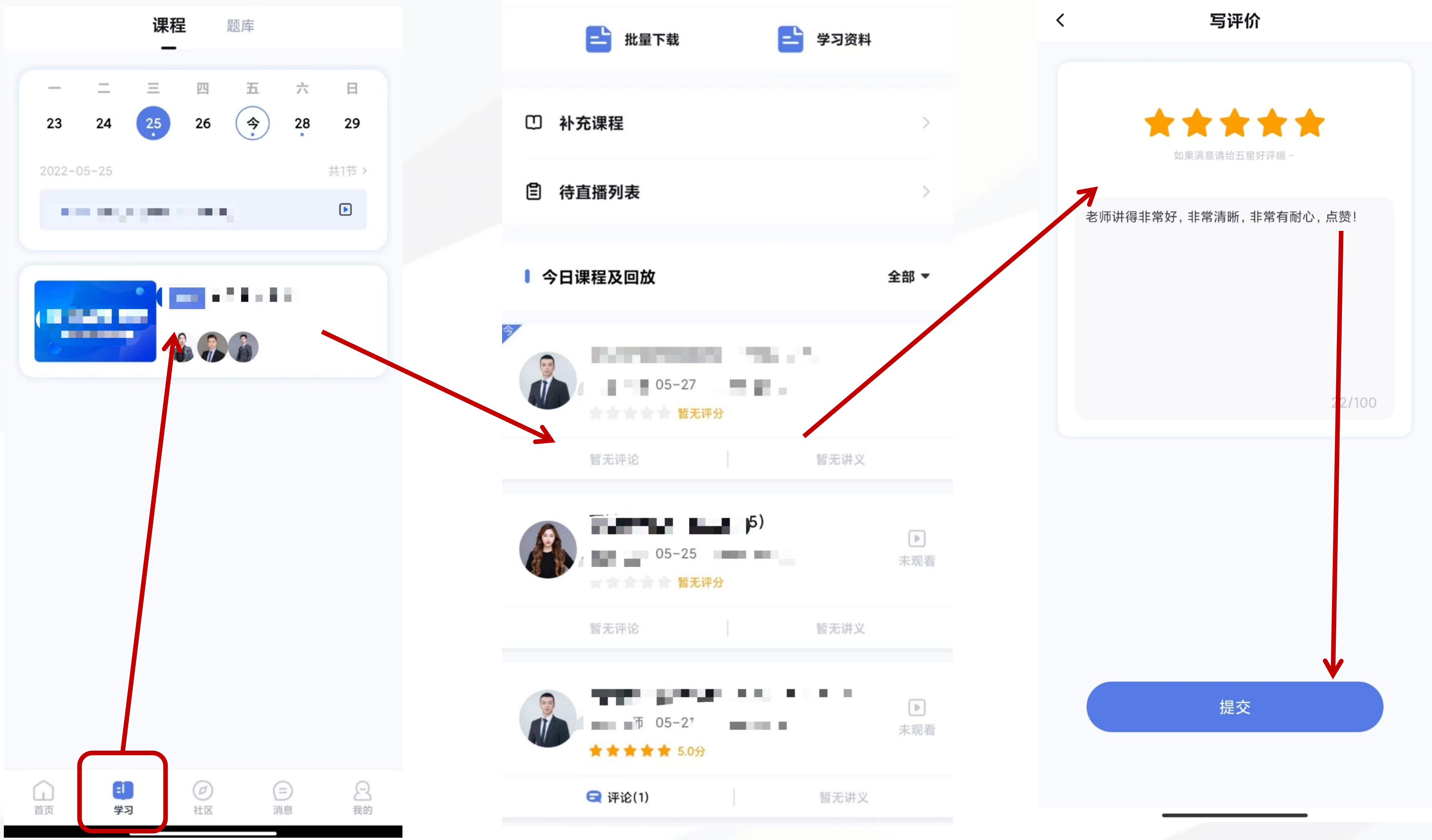
【解析】

根据题意，由于正面“2 天中至少有 1 天中午办理安检手续的乘客人数超过 15”的情况很多，所以可以采取反面考虑，反面是“2 天中午办理安检手续的乘客人数都没有超过 15”.

2 天中午办理安检手续的乘客人数都没有超过 15 的概率是$(0.1+0.2+0.2)^2=0.25$.

则该安检口 2 天中至少有 1 天中午办理安检手续的乘客人数超过 15 的概率是 $1-0.25=0.75$.

故选 E.




**师大云课堂→学习→点击课程→点击评价(5星好评)→提交评价**

# 感 谢 聆 听

主讲:媛媛老师
邮箱:family7662@dingtalk.com