全国硕士研究生招生考试

专题串讲课——管综(数学)

主讲:媛媛老师

邮箱:family7662@dingtalk.com

串讲课4:几何

专题串讲课4:几何

师大课堂 SHI DA KE TANG

	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024
平面几何	3	3	2	3	2	2	3	2	5	1	3
立体几何	2	2	1	2	1	2	1	1	0	1	1
解析几何	1	2	2	1	2	3	2	2	0	2	3

专题串讲课4:几何

师大课堂 SHI DA KE TANG

PART--01 三角形

PART--02 割补法

PART--03 圆柱与球

PART--04 直线与圆的位置关系

PART--01 三角形

一、基本公式★

1. 三边关系：$a-b<c<a+b$

直角三角形：勾股定理$a^2+b^2=c^2$

2. 三角形的内角和为$180°$

3. 三角形面积：$S=\frac{1}{2}ah$　　等底等高的三角形面积相等

等边三角形：$S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

正弦定理：$S=\frac{1}{2}absinC$

练习

1.（2013）ΔABC的边长分别为 a， b， c，则ΔABC为直角三角形.【B】

（1）$(c^2-a^2-b^2)(a^2-b^2)=0$

（2）ΔABC的面积为$\frac{1}{2}ab$.

【解析】

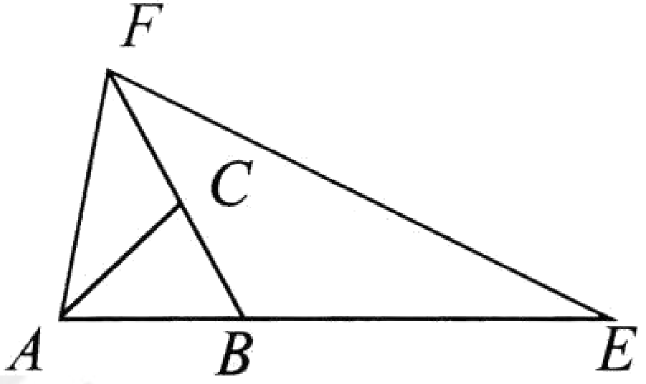
条件（1），$(c^2-a^2-b^2)(a^2-b^2)=0\Rightarrow c^2=a^2+b^2$或$a=b$. 则$\triangle ABC$为直角三角形或等腰三角形. 故条件（1）不充分.

条件（2），$\triangle ABC$的面积为$\frac{1}{2}ab\Rightarrow S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ab\Rightarrow\sin C=1\Rightarrow\angle C=90^\circ$. 即$\triangle ABC$为直角三角形. 故条件（2）充分.

综上，故选 B.

练习

2. （2014）如图所示，已知$AE=3AB$，$BF=2BC$，若ΔABC的面积是2，则ΔAEF的面积是【B】



A. 14

B. 12

C. 10

D. 8

E. 6

【解析】

根据题意，$S_{\triangle AEF}=S_{\triangle ABF}+S_{\triangle BEF}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ACF}+S_{\triangle BEF}$.

∵$S_{\triangle ABC}$和$S_{\triangle ACF}$的顶点都为$A\Rightarrow S_{\triangle ABC}$和$S_{\triangle ACF}$的高相同，且$BF=2BC\Rightarrow C$为$BF$的中点，即$BC=CF$.

∴根据“顶点相同，等底同高”$\Rightarrow S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ACF}=2\Rightarrow S_{\triangle ABF}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ACF}=4$.

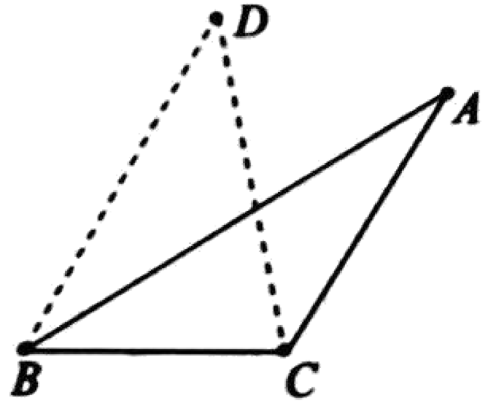
又∵$S_{\triangle ABF}$和$S_{\triangle BEF}$的顶点都为$F\Rightarrow S_{\triangle ABF}$和$S_{\triangle BEF}$的高相同，且$AE=3AB\Rightarrow AB:BE=1:2$.

∴根据“顶点相同，共高，面积比等于底边比”$\Rightarrow S_{\triangle ABF}:S_{\triangle BEF}=1:2\Rightarrow S_{\triangle BEF}=2S_{\triangle ABF}=8$.

即$S_{\triangle AEF}=S_{\triangle ABF}+S_{\triangle BEF}=4+8=12$. 故选 B.

练习

3.（2020）如图，在ΔABC中，$\angle ABC=30°$，将线段AB绕点B旋转至DB，使$\angle DBC=60°$，则ΔDBC与ΔABC的面积之比为【E】



A. 1

B. $\sqrt{2}$

C. 2

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

E. $\sqrt{3}$

【解析】

根据题意得，将线段AB绕点B旋转至DB，则$DB=AB$.

由正弦定理可得：$\frac{S_{\Delta DBC}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot DB\cdot BC\cdot \sin\angle DBC}{\frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC\cdot \sin\angle ABC}=\frac{\sin 60°}{\sin 30°}=\sqrt{3}$.

故选 E.

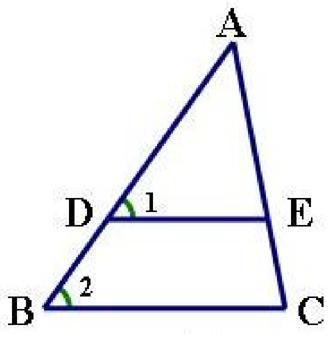
二、相似三角形★

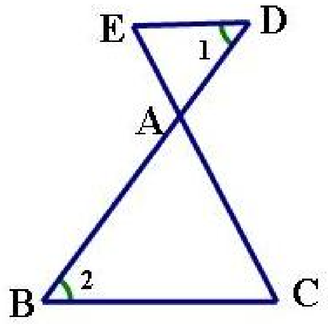
1. 判定：

✓ 三边对应成比例

✓ 两边对应成比例且夹角相等

✓ 两对应角相等





2. 性质

相似三角形面积比等于相似比的平方

相似比：$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}=k$

练习

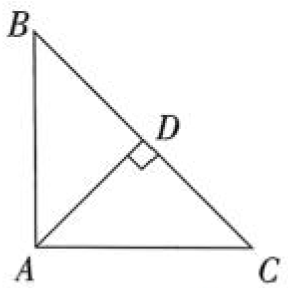
4.（2022）在$\triangle ABC$中，D为BC边上的点，BD、AB、BC成等比数列，则$\angle BAC=90°$．【B】

（1）$BD = DC$.

（2）$AD \perp BC$.

【解析】

根据题意可画图，如图所示.



$\because BD$、AB、BC成等比数列. $\therefore AB^2=BD\cdot BC \Rightarrow \dfrac{AB}{BC}=\dfrac{BD}{AB}$.

又$\because \angle B$为公共角. $\therefore \triangle BDA\sim\triangle BAC$. 则$\angle BDA=\angle BAC$.

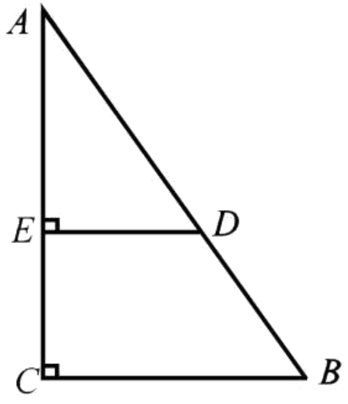
条件（1），已知$BD=DC$，则$AB^2=BD\cdot BC=2BD^2 \Rightarrow AB=\sqrt{2}BD$，此时对应的角度无法确定，即无法得到结论. 故条件（1）不充分.

条件（2），已知$AD\perp BC$，则$\angle BDA=\angle CDA=90°$，满足$\triangle BDA\sim\triangle BAC$，即$\angle BAC=\angle BDA=90°$. 故条件（2）充分.

综上，故选 B.

练习

5.（2013）如图，在直角三角形ABC中，AC＝4，BC＝3，DE∥BC. 已知梯形BCED的面积为3，则DE的长为【D】



A. $\sqrt{3}$

B. $\sqrt{3}+1$

C. $4\sqrt{3}-4$

D. $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

E. $\sqrt{2}+1$

【解析】

根据题意，在直角三角形ABC中，$DE /\!/ BC$.

$\because$ 在$\triangle ABC$和$\triangle ADE$中 $\begin{cases} \angle ACB=\angle AED \\ \angle A=\angle A \\ \angle ABC=\angle ADE \end{cases}$ $\therefore \triangle ABC \backsim \triangle ADE$（AAA）.

又$\because S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BC=\frac{1}{2}\times4\times3=6$. $S_{梯形BCED}=3$. $\therefore S_{\triangle ADE}=S_{\triangle ABC}-S_{梯形BCED}=6-3=3$.

由相似三角形面积比等于边长比的平方，得$S_{\triangle ABC}:S_{\triangle ADE}=(BC:DE)^2 \Rightarrow 6:3=(3:DE)^2 \Rightarrow DE=\frac{3\sqrt{2}}{2}$. 故选D.

练习

6.（2022）在直角三角形ABC中，D是斜边AC的中点，以AD为直径的圆交AB于E，若△ABC的面积为8，则△AED的面积为【B】

A. 1

B. 2

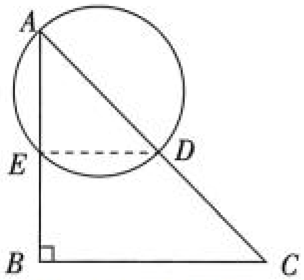
C. 3

D. 4

E. 6

【解析】

根据题意，连接ED，可画图，如图所示.



∵AD是直径，直径所对应的圆周角为90°．∴$\angle AED=90°$．∴$ED//BC$.

又∵△AED和△ABC有一个公共角$\angle A$. ∴△AED∽△ABC.

由于D为AC的中点，则相似比为$AD:AC=1:2$.

即面积比为$S_{\triangle AED}:S_{\triangle ABC}=1:4 \Rightarrow S_{\triangle AED}=\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}=\frac{1}{4}\times 8=2$. 故选B.

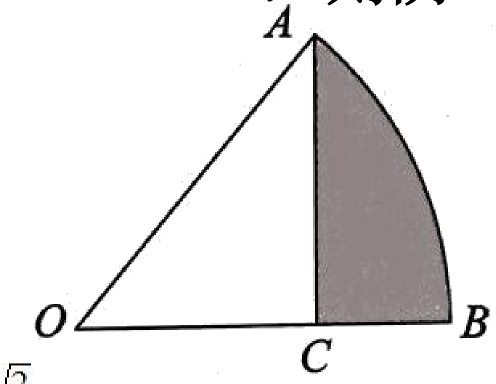
PART--02 割补法

割补法★

求不规则图形的面积：通过割补法转变为规则图形

练习

7.（2017）如图，在扇形AOB中，$\angle AOB=\frac{\pi}{4}$，$OA=1$，$AC\perp OB$，则阴影部分的面积为【A】



A. $\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}$

B. $\frac{\pi}{8}-\frac{1}{8}$

C. $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$

D. $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}$

E. $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{8}$

【解析】

根据题意得，$S_{阴影部分}=S_{扇形AOB}-S_{\triangle AOC}$.

$\because AC\perp OB$且$\angle AOB=\frac{\pi}{4}$、$OA=1$. $\therefore \triangle AOC$是等腰直角三角形，$OC=AC$. 即$OC=AC=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

则$S_{阴影部分}=S_{扇形AOB}-S_{\triangle AOC}=\frac{45^\circ}{360^\circ}\pi\cdot 1^2-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{8}\pi-\frac{1}{4}$. 故选A.

练习

8.（2024）如图，正三角形ABC边长为3，以A为圆心，以2为半径作圆弧，再分别以B，C为圆心，以1为半径作圆弧，则阴影面积为____.【B】

A. $\frac{9}{4}\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}$

B. $\frac{9}{4}\sqrt{3}-\pi$

C. $\frac{9}{8}\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}$

D. $\frac{9}{8}\sqrt{3}-\pi$

E. $\frac{3}{4}\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}$

【解析】

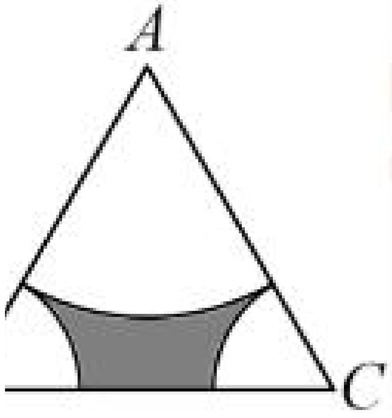
阴影面积为正三角形面积减去一个圆心角为60°，弧长为2的扇形面积，再减去两个圆心角为60°，弧长为1的扇形面积.

即：$S_{阴影DEGF}=S_{三角形ABC}-S_{扇形ADE}-S_{扇形BDF}-S_{扇形CGE}$

$S_{三角形ABC}=\frac{1}{2}\times 3\times\frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{9\sqrt{3}}{4}$，$S_{扇形ADE}=\frac{60\cdot\pi\cdot 2^2}{360}=\frac{2}{3}\pi$，$S_{扇形BDF}=S_{扇形CGE}=\frac{60\cdot\pi\cdot 1^2}{360}=\frac{1}{6}\pi$.

所以$S_{阴影DEGF}=\frac{9\sqrt{3}}{4}-\frac{2}{3}\pi-\frac{1}{6}\pi\times 2=\frac{9\sqrt{3}}{4}-\pi$.

故选B.



PART--03 圆柱与球

公式★

1. 圆柱　体积：$V = \pi r^2 h$

侧面积：$S = 2\pi rh$

全面积：$F = S_{侧} + 2S_{底} = 2\pi rh + 2\pi r^2$

2. 球　面积：$S = 4\pi R^2$

体积：$V = \frac{4}{3}\pi R^3$

练习

9.（2015）有一根圆柱形铁管，管壁厚度为0.1米，内径为1.8米，长度为2米.若将该铁管熔化后浇铸成长方体，则该长方体的体积为（单位：立方米；$\pi\approx3.14$）【C】

A. $0.38m^3$

B. $0.59m^3$

C. $1.19m^3$

D. $5.09m^3$

E. $6.28m^3$

【解析】

铁管熔化后体积不变，求铸成长方体的体积，即求圆柱形铁管体积.

∵圆柱形铁管内径为1.8米，则内半径（r）为$1.8\div2=0.9$米，管壁厚度为0.1米.

∴铁管外半径（R）为$0.9+0.1=1$米.

因此，$V_{铁管}=V_{大圆柱}-V_{小圆柱}=\pi\cdot R^2\cdot h-\pi r^2\cdot h=\pi\cdot h\cdot(R^2-r^2)=3.14\times2\times(1^2-0.9^2)=1.1932$

$\approx1.19m^3$.故选C.

练习

10.（2013）将体积为$4\pi cm^3$和$32\pi cm^3$的两个实心金属球熔化后铸成一个实心大球，则大球的表面积为【B】

A. $32\pi cm^2$

B. $36\pi cm^2$

C. $38\pi cm^2$

D. $40\pi cm^2$

E. $42\pi cm^2$

【解析】

根据题意，大球的体积为$\frac{4}{3}\pi \cdot R^3=4\pi+32\pi=36\pi \Rightarrow R=3 \cdot cm$.

则有$S_{球表面积}=4\pi \cdot R^2=4\pi \cdot 3^2=4\times 9\times \pi=36\pi \cdot cm^2$. 故选B.

练习

11.（2018）如图，圆柱体的底面半径为2，高为3，垂直于底面的平面截圆柱体所得截面为矩形$ABCD$.若弦AB所对的圆心角为$\frac{\pi}{3}$，则截掉部分（较小部分）的体积为【D】

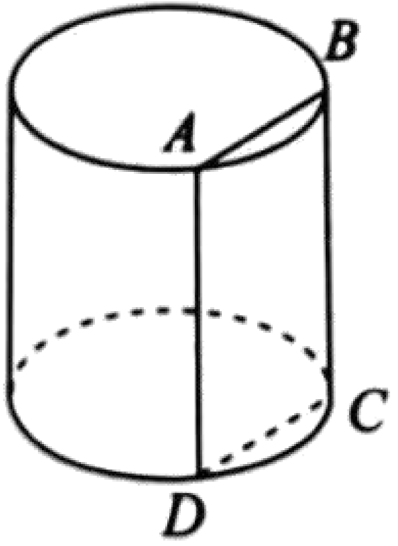
A. $\pi-3$

B. $2\pi-6$

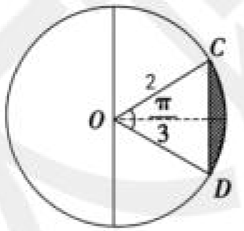
C. $\pi-\frac{3\sqrt{3}}{2}$

D. $2\pi-3\sqrt{3}$

E. $\pi-\sqrt{3}$



【解析】



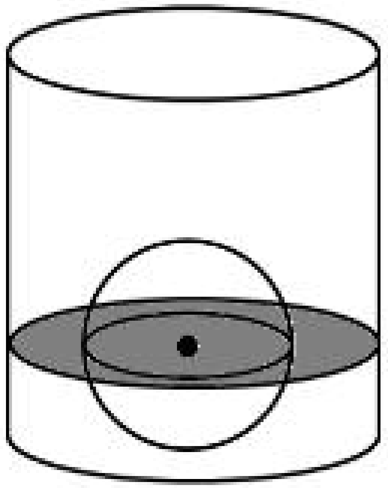
通过水平横截面观察，可得所求柱体的底面为弓形（图中的阴影部分）.

则有：$S_{阴影}=S_{扇形COD}-S_{\triangle COD}=\frac{60^\circ}{360^\circ}\pi r^2-\frac{\sqrt{3}}{4}r^2=\frac{1}{6}\pi 2^2-\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2=\frac{2\pi}{3}-\sqrt{3}$.

因此，体积$V=S_{阴影}h=\left(\frac{2\pi}{3}-\sqrt{3}\right)\times 3=2\pi-3\sqrt{3}$. 故选D.

练习

12.（2024）如图，圆柱形容器的底面半径是$2r$, 将半径为r的铁球放入容器后，液面的高度为r，液面原来的高度为_____.【E】



A. $\frac{r}{6}$

B. $\frac{r}{3}$

C. $\frac{r}{2}$

D. $\frac{2r}{3}$

E. $\frac{5r}{6}$

【解析】

因为将半径为r的铁球放入容器后，液面的高度为r，所以液面浸没了半个球.

设液面原来的高度为x，则放球之前容器内液体的体积V_1为$V_1=S_{底面积}\times 高_1=\pi\cdot(2r)^2\cdot x=4r^2\pi x$.

因为放球之后液面的高度为r，所以放球之后容器内液体的体积V_2为$V_2=S_{底面积}\times 高_2=\pi\cdot(2r)^2\cdot r=4r^3\pi$.

因为放球之后容器内液体的体积V_2=放球之前容器内液体的体积V_1+液面浸没的半个半径为r的球的体积，所以有：$4r^3\pi=4r^2\pi x+\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi r^3$，化简得：$r-x=\frac{1}{6}r$，即$x=\frac{5}{6}r$.

故选 E.

PART--04直线与圆的位置关系

一、直线、圆的方程★

1. 直线l：$Ax+By+C=0$（一般式）

2. 圆：$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$（标准式）

圆心(x_0, y_0)到直线l的距离：$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

二.位置关系★

1. d与r的大小

（1）相离：$d > r$

（2）相切：$d = r$

（3）相交：$d < r$

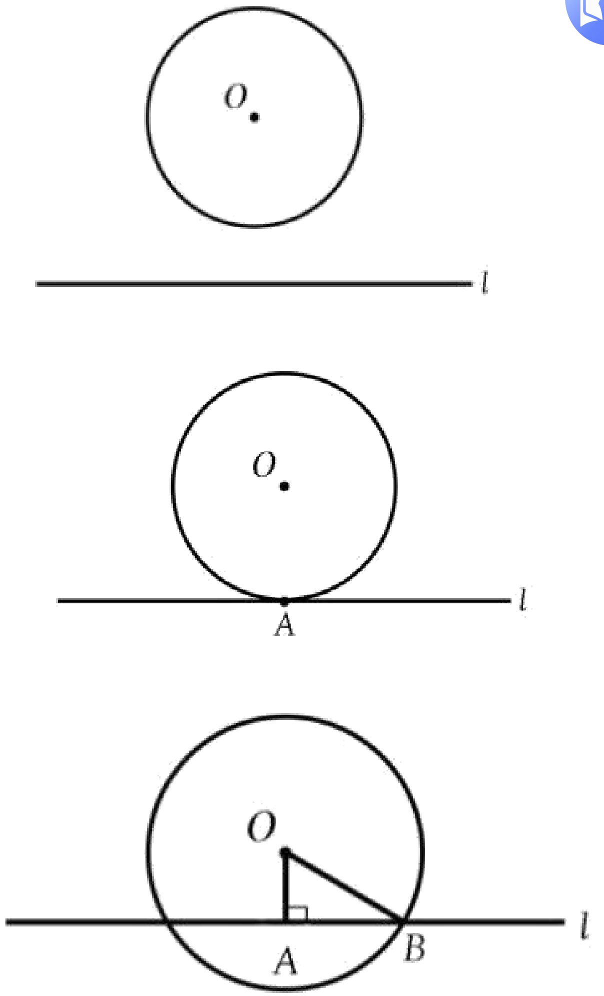
2. 直线与圆交点的个数

联立直线与圆方程所得一元二次方程根的个数

（1）相离：0个($\Delta < 0$)

（2）相切：1个($\Delta = 0$)

（3）相交：2个($\Delta > 0$)



练习

13. （2018）已知圆C：$x^2+(y-a)^2=b$. 若圆在点（1，2）处的切线与y轴的交点为（0，3），则$ab=$【E】

A. -2

B. -1

C. 0

D. 1

E. 2

【解析】

根据题意得，圆心C（0，a），可设点（1，2）为点P.

则有：$k_{切}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{3-2}{0-1}=-1$.

$\because k_{切}\cdot k_{OP}=-1$. $\therefore k_{OP}=1$.

则过OP的直线为$y-2=1(x-1)\Rightarrow y=x+1$. 将圆心$C$（0，$a$）代入$a=0+1\Rightarrow a=1$.

$\because$点（1，2）在圆上，则$1^2+(2-a)^2=b$.

$\therefore$将$a=1$代入得$b=2$. 则$ab=1\times2=2$.

故选E.

练习

14.（2017）圆$x^2+y^2-ax-by+c=0$与x轴相切. 则能确定c的值.【A】

（1）已知a的值.

（2）已知b的值.

【解析】

根据题意可联立方程得：$\begin{cases} x^2+y^2-ax-by+c=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow x^2-ax+c=0.$

则$\Delta=b^2-4ac=(-a)^2-4\cdot 1\cdot c=a^2-4c=0$. 由此可得：$c$的值与$a$有相关关系.

条件（1），已知a的值，则$\Delta=a^2-4c=0$，可以确定c的值. 故条件（1）充分.

条件（2），已知b的值，无法确定c的值. 故条件（2）不充分.

综上，故选 A.

练习

15.（2015）若直线$y=ax$与圆$(x-a)^2+y^2=1$相切，则$a^2=$【E】

A. $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

B. $1+\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

D. $1+\frac{\sqrt{5}}{3}$

E. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

【解析】

∵圆$(x-a)^2+y^2=1$. ∴圆心为（a，0），半径（r）为1.

∵直线$y=ax$与圆$(x-a)^2+y^2=1$相切. ∴直线与圆心的距离$d=\frac{|a^2|}{\sqrt{a^2+1}}=r=1\Rightarrow a^4=a^2+1$.

令$a^2=t$，则$t^2=t+1\Rightarrow t^2-t-1=0\Rightarrow t=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\times1\times(-1)}}{2\times1}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

因为a^2为正数，所以$a^2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. 故选E.

练习

16.（2019）直线$y = kx$与圆$x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$有两个交点.【A】

（1）$-\frac{\sqrt{3}}{3} < k < 0.$

（2）$0 < k < \frac{\sqrt{2}}{2}.$

【解析】

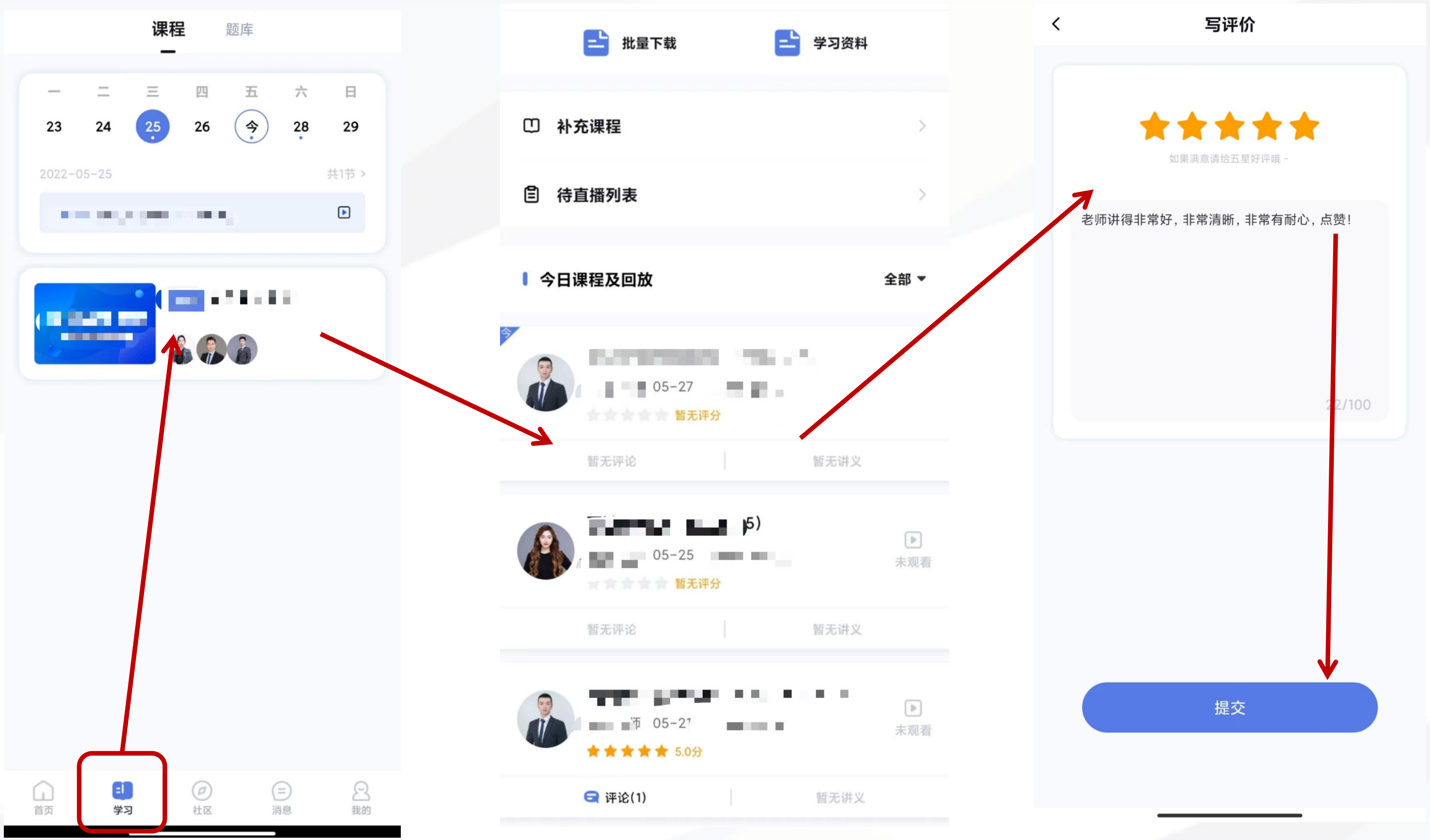
根据题意得，圆的方程可以转化为$(x-2)^2+y^2=1$，则圆心为（2，0），半径为 1.

∵直线与圆有两个交点. ∴圆心到直线距离$d=\frac{|2k|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}<1\Rightarrow$解得：$-\frac{\sqrt{3}}{3}<k<\frac{\sqrt{3}}{3}$.

条件（1），$-\frac{\sqrt{3}}{3}<k<0$在$-\frac{\sqrt{3}}{3}<k<\frac{\sqrt{3}}{3}$的范围内. 故条件（1）充分.

条件（2），因为$\frac{\sqrt{2}}{2}>\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以$0<k<\frac{\sqrt{2}}{2}$超出了$-\frac{\sqrt{3}}{3}<k<\frac{\sqrt{3}}{3}$. 故条件（2）不充分.

综上，故选 A.



师大云课堂→学习→点击课程→点击评价(5星好评)→提交评价

感 谢 聆 听

主讲:媛媛老师

邮箱:family7662@dingtalk.com