第五节 不等式

第二章　第五节不等式

年度	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023
考频	2	3	1	1	1	0	0	1	4

第二章 第五节不等式

一、不等式的性质

1.不等式的定义

用不等号连接的两个（或两个以上）解析式称为不等式，使不等式成立的未知数的取值称为不等式的解（不等号包括 >、 <、 ≤、 ≥、 ≠ 五种）.

$$a-\mathrm{b}>0 \Leftrightarrow a>\mathrm{b}$$

一、不等式的性质

2.不等式的分类

按照不等式的解的情况可以将不等式分为以下三类：

（1）绝对不等式：解集为R的不等式$x^2 \geq 0$

（2）条件不等式：解集为实数集的非空真子集的不等式

（3）矛盾不等式：解集为空集的不等式$2 > 3, x^2 < 0$

一、不等式的性质

3.不等式的基本性质（注意推导关系，有的无法逆推）

（1）传递性：$\begin{cases} a>b \\ b>c \end{cases} \Rightarrow a>c$

（2）同向相加性：$\left.\begin{matrix} a>b \\ c>d \end{matrix}\right\} \Rightarrow a+c>b+d$

（3）同向皆正相乘性：$\left.\begin{matrix} a>b>0 \\ c>d>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow ac>bd$

（4）同号倒数性：$a>b>0 \Leftrightarrow \frac{1}{b}>\frac{1}{a}>0$ $a<b<0 \Leftrightarrow \frac{1}{b}<\frac{1}{a}<0$

（5）皆正乘（开）方性：$a>b>0 \Rightarrow a^n>b^n>0, \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}>0 (n \in Z_+)$

一、不等式的性质

3.不等式的基本性质

【例1】下列说法不正确的是（　　）.

A.若$a>b$,则$ac^2>bc^2(c\neq 0)$

B.若$a>b$,则$b<a$

C.若$a>b$,则$-a>-b$

D.若$a>b,b>c$则$a>c$

E.若$|a|>|b|$，则$a^2>b^2$

一、不等式的性质

3.不等式的基本性质

【例1】下列说法不正确的是（　　）.

A.若$a>b$,则$ac^2>bc^2(c\neq 0)$

B.若$a>b$,则$b<a$

C.若$a>b$,则$-a>-b$

D.若$a>b,b>c$则$a>c$

E.若$|a|>|b|$，则$a^2>b^2$

【解析】 $a>b$，不等式的两边同时乘以-1，根据不等式的基本性质，得$-a<-b$，所以C选项不正确.

一、不等式的性质

4.不等式的解

（1）不等式的解

使不等式成立的未知数的值叫作不等式的解.一般的，一个含有未知数的不等式的所有解，组成这个不等式的解的集合，简称这个不等式的解集.

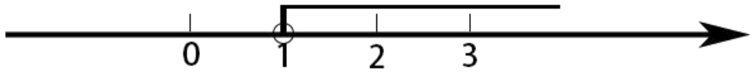
一、不等式的性质

4.不等式的解

（2）不等式解集的表示方法

✓ 用不等式表示.

✓ 用数轴表示.（注意：空心和实心）



一、不等式的性质

4.不等式的解

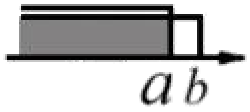
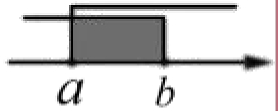
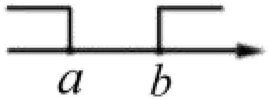
（3）解一元不等式的步骤

去分母，去括号，移项，合并同类项，系数化为1

$$3-\frac{1}{4}(3y-1)\geq\frac{5}{8}(3+y)$$

一、不等式的性质

5.不等式组

不等式组	数轴表示	解集	口诀
$\begin{cases}x\ge a\\x\ge b\end{cases}$		$x \ge b$	大大取较大（同大取大）
$\begin{cases}x\le a\\x\le b\end{cases}$		$x \le a$	小小取较小（同小取小）
$\begin{cases}x\ge a\\x\le b\end{cases}$		$a \le x \le b$	大小、小大中间找
$\begin{cases}x\le a\\x\ge b\end{cases}$		无解	大大、小小无处找

一、不等式的性质

师大课堂 SHI DA KE TANG

5.不等式组

【例2】若不等式组$\begin{cases}2x-1>3(x-1)\\x<m\end{cases}$的解是$x<2$，那么$m$的取值范围是（　　）.

A.$m=2$　　B.$m>2$　　C.$m<2$　　D.$m\geq 2$　　E.$m\leq 2$

一、不等式的性质

5.不等式组

【例2】若不等式组$\begin{cases}2x-1>3(x-1)\\ x<m\end{cases}$的解是$x<2$，那么$m$的取值范围是（　）.

A.$m=2$　　B.$m>2$　　C.$m<2$　　D.$m\geq 2$　　E.$m\leq 2$

【解析】原不等式组可化为$\begin{cases}x<2\\ x<m\end{cases}$，又知不等式组的解是$x<2$，根据不等式组解的确定方法"同小取小"可知$m\geqslant 2$．选D.

一、不等式的性质

师大课堂 SHI DA KE TANG

5.不等式组

【例3】若不等式组$\begin{cases} x-m<0 \\ 7-2x\leq 1 \end{cases}$的整数解共有4个，那么$m$的取值范围是（　）.

A.$6<m<7$　　B.$6\leq m<7$　　C.$6\leq m\leq 7$

D.$6<m\leq 7$　　E.$6<m<8$

一、不等式的性质

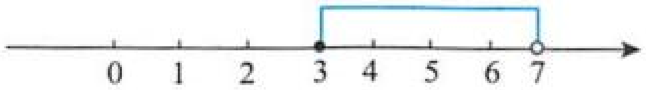
5.不等式组

【例3】若不等式组$\begin{cases} x-m<0 \\ 7-2x\leq 1 \end{cases}$的整数解共有4个，那么$m$的取值范围是（　）.

A.$6<m<7$　　B.$6\leq m<7$　　C.$6\leq m\leq 7$

D.$6<m\leq 7$　　E.$6<m<8$

【解析】　解得原不等式组的解为$3\leqslant x<m$，表示在数轴上如图，由图可得：$6<m\leqslant 7$. 选 D.



二、一元二次不等式

1.一元二次不等式的标准形式 $ax^2+bx+c>0$(或<0)

2.解一元二次不等式的步骤

①先化成标准型 $ax^2+bx+c>0$(或<0)，且 $a>0$

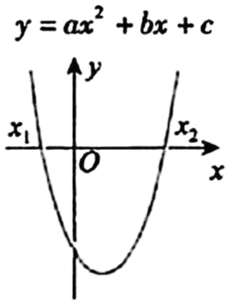
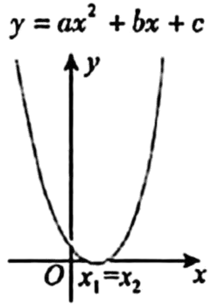
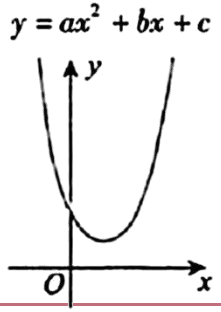
②计算对应方程的判别式Δ；

③求对应方程的根；

④利用口诀“大于零在两边，小于零在中间”写出解集.

二、一元二次不等式

3.函数、方程、不等式的关系

$a>0$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
$y=ax^2+bx+c$			
$ax^2+bx+c=0$			
$ax^2+bx+c>0$			
$ax^2+bx+c<0$			

二、一元二次不等式

【例4】已知$-2x^2+bx+c\geq 0$的解为$-\frac{1}{2}\leq x\leq 3$，则c为（　）.

A.$\frac{1}{3}$　　B.3　　C.$-\frac{1}{3}$　　D.-3　　E.2

二、一元二次不等式

【例4】已知$-2x^2+bx+c\geq 0$的解为$-\frac{1}{2}\leq x\leq 3$，则c为（　）.

A.$\frac{1}{3}$　　B.3　　C.$-\frac{1}{3}$　　D.-3　　E.2

【解析】由$-2x^2+bx+c\geqslant 0$的解为$-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 3$，得到方程$-2x^2+bx+c=0$的两根为$-\frac{1}{2}$和3，根据韦达定理$x_1x_2=\frac{c}{-2}=-\frac{3}{2}\Rightarrow c=3$．选B.

二、一元二次不等式

【例5】关于x的二次不等式$ax^2+(a-1)x+a-1<0$的解集为R，求a的取值范围.

二、一元二次不等式

【例5】关于x的二次不等式$ax^2+(a-1)x+a-1<0$的解集为R，求a的取值范围.

【解析】由题意知，要使原不等式的解集为 **R**，必须$\begin{cases} a<0 \\ \Delta<0 \end{cases}$，

即$\begin{cases} a<0 \\ (a-1)^2-4a(a-1)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<0 \\ 3a^2-2a-1>0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a<0 \\ a>1 \text{ 或 } a<-\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow a<-\frac{1}{3}$，故 a 的取值范围是 $a\in\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)$.

二、一元二次不等式

【例6】（条件充分性判断）不等式$ax^2+(a-6)x+2>0$的解集为R.

（1）$0<a<3$

（2）$1<a<5$

二、一元二次不等式

【例6】（条件充分性判断）不等式$ax^2+(a-6)x+2>0$的解集为R.

（1）$0<a<3$

（2）$1<a<5$

【解析】①当 $a=0$ 时，$-6x+2>0$，不恒成立.

②当 $a\neq0$ 时，$\begin{cases}a>0\\ \Delta<0\Rightarrow(a-6)^2-4a\times2<0\end{cases}\Rightarrow 2<a<18$，

即 $2<a<18$. 条件（1）不充分；条件(2)不充分.

联合两个条件，得到 $1<a<3$，也不充分. 选 E.

此题要注意两点：

(1) 此不等式是否是二次的，所以要看 x^2 的系数是否为零；

(2) 如果是二次不等式，再根据开口方向和判别式来分析.

二、一元二次不等式

【例7】已知$x^4-x^2-2\leq 0$的解集包含（　　）整数.

A.2　　B.3　　C.4　　D.5　　E.无穷多

二、一元二次不等式

【例7】已知$x^4 - x^2 - 2 \leq 0$的解集包含（　　）整数.

A.2　　B.3　　C.4　　D.5　　E.无穷多

【解析】$(x^2-2)(x^2+1)\leqslant 0 \Rightarrow x^2-2\leqslant 0$，得$-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}$．解集包含$-1$，0，1，共3个整数．选 B.

遇到高次不等式，进行因式分解后再求解．另外，本题因式(x^2+1)恒为正.

三.均值不等式

1.定义

当$x_1, x_2, \cdots x_n$为n个正实数时，$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$，当且仅当

$x_1 = x_2 = \cdots = x_n$时等号成立.

成立条件：一正二定三相等

一正：指的是所有数据均为正数.

二定：和定积最大；积定和最小.

三相等：当且仅当$x_1 = x_2 = \cdots = x_n$时，等号成立.

三.均值不等式

2.常见形式

（1）$a,b\in R^{+}\Rightarrow a+b\geq 2\sqrt{ab}, ab\leq\left(\frac{a+b}{2}\right)^{2}$,当且仅当$a=b$时等号成立.

（2）$a,b,c\in R^{+}\Rightarrow a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}, abc\leq\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{3}$,当且仅当$a=b=c$时等号成立

（3）$a,b\in R\Rightarrow a^{2}+b^{2}\geq 2ab, ab\leq\frac{a^{2}+b^{2}}{2}$,当且仅当$a=b$时等号成立.

（4）$a+\frac{1}{a}\geq 2(a>0)$（当且仅当$a=1$时等号成立）；$a+\frac{1}{a}\leq -2(a<0)$（当且仅当$a=-1$时等号成立）

三.均值不等式

【例8】如果a,b满足$0<a<b,a+b=1$，则$\frac{1}{2},a,2ab,a^2+b^2$中值最大的是（　　）.

A.$\frac{1}{2}$　　B.a　　C.$2ab$　　D.a^2+b^2　　E.一样大

三.均值不等式

【例8】如果a,b满足$0<a<b,a+b=1$，则$\frac{1}{2},a,2ab,a^2+b^2$中值最大的是（　）.

A.$\frac{1}{2}$　　B.a　　C.$2ab$　　D.a^2+b^2　　E.一样大

【解析】方法一：由 $0<a<b$，得到 $1=a+b>2a$，所以 $a<\frac{1}{2}$，

又 $a^2+b^2\geqslant 2ab$，故最大数一定不是 a 和 $2ab$，

又 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=1-2ab$，

因为 $1=a+b>2\sqrt{ab}$，所以 $ab<\frac{1}{4}$，得到 $1-2ab>1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，即 $a^2+b^2>\frac{1}{2}$. 选 D.

方法二：特值检验法：取 $a=\frac{1}{3}$，$b=\frac{2}{3}$，则 $2ab=\frac{4}{9}$，$a^2+b^2=\frac{5}{9}$，由 $\frac{5}{9}>\frac{1}{2}>\frac{4}{9}>\frac{1}{3}$，得 a^2+b^2 最大.

三.均值不等式

【例9】函数$f(x)=x+\frac{4}{x}+3$在$(-\infty, -2]$上（　　）.

A.无最大值，有最小值7　　B.无最大值，有最小值-1

C.有最大值7，有最小值-1　　D.有最大值-1，无最小值

E.无最大值也无最小值

三.均值不等式

【例9】函数$f(x)=x+\frac{4}{x}+3$在$(-\infty,-2]$上（　）.

A.无最大值，有最小值7　　B.无最大值，有最小值-1

C.有最大值7，有最小值-1　　D.有最大值-1，无最小值

E.无最大值也无最小值

【解析】由 $x\leqslant-2$，所以 $f(x)=x+\frac{4}{x}+3=-\left[-x+\left(-\frac{4}{x}\right)\right]+3\leqslant-2\sqrt{(-x)\cdot\left(-\frac{4}{x}\right)}+3=-1$，当且仅当 $-x=-\frac{4}{x}$，即 $x=-2$ 时，取等号，从而 $f(x)$ 有最大值 -1，无最小值，选 D.

三.均值不等式

【例10】已知$x < \frac{5}{4}$，则函数$y = 4x - 2 + \frac{1}{4x-5}$的最大值为（　　）.

A.1　　B.2　　C.4　　D.6　　E.8

三.均值不等式

【例10】已知$x<\frac{5}{4}$，则函数$y=4x-2+\frac{1}{4x-5}$的最大值为（　）.

A.1　　B.2　　C.4　　D.6　　E.8

【解析】因 $4x-5<0$，所以首先要“调整”符号，又$(4x-2)\cdot\frac{1}{4x-5}$不是常数，所以对$4x-2$要进行拆、凑项，$y=4x-2+\frac{1}{4x-5}=-\left(5-4x+\frac{1}{5-4x}\right)+3\leqslant-2+3=1$，

当且仅当 $5-4x=\frac{1}{5-4x}$，即 $x=1$ 时，上式等号成立，

故当 $x=1$ 时，$y_{\max}=1$. 选 A.

本题需要调整项的符号，又要配凑项的系数，使其积为定值.

三.均值不等式

【例11】当$0 < x < 4$，则函数$y = x(8 - 2x)$的最大值为（   ）.

A.1　　B.2　　C.4　　D.6　　E.8

三.均值不等式

【例11】当$0 < x < 4$，则函数$y = x(8 - 2x)$的最大值为（　）.

A.1　　B.2　　C.4　　D.6　　E.8

【解析】由 $0<x<4$ 知，$8-2x>0$，利用均值不等式求最值，必须和为定值或积为定值，此题为两个式子积的形式，但其和不是定值．注意到 $2x+(8-2x)=8$ 为定值，故只需将 $y=x(8-2x)$ 凑上一个系数即可．

$$y=x(8-2x)=\frac{1}{2}[2x\cdot(8-2x)]\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{2x+8-2x}{2}\right)^2=8,$$

当 $2x=8-2x$，即 $x=2$ 时取等号，当 $x=2$ 时，$y=x(8-2x)$ 的最大值为 8．选 E．

本题无法直接运用均值不等式求解，但凑系数后可得到和为定值，从而可利用均值不等式求最大值．

三.均值不等式

【例12】函数$y=\frac{x^2+7x+10}{x+1}(x>-1)$的最小值为（　）.

A.1　　B.2　　C.4　　D.6　　E.9

三.均值不等式

【例12】函数$y=\dfrac{x^2+7x+10}{x+1}(x>-1)$的最小值为（　）.

A.1　　B.2　　C.4　　D.6　　E.9

【解析】因为 $x>-1$，所以 $x+1>0$.

$$y=\frac{x^2+7x+10}{x+1}=\frac{(x+1)^2+5(x+1)+4}{x+1}=x+1+\frac{4}{x+1}+5.$$

当 $x>-1$，即 $x+1>0$ 时，$y\geq 2\sqrt{(x+1)\cdot\dfrac{4}{x+1}}+5=9$，

当且仅当 $x+1=\dfrac{4}{x+1}$，即 $x=1$ 时，等号成立.

故当 $x=1$ 时，函数 $y=\dfrac{x^2+7x+10}{x+1}(x>-1)$取得最小值为 9. 选 E.

三.均值不等式

【例13】已知$x>0, y>0, x+2y+2xy=8$，则$x+2y$的最小值为（　）.

A.3　　B.4　　C.$\frac{9}{2}$　　D.$\frac{11}{2}$　　E.5

三.均值不等式

【例13】已知$x>0, y>0, x+2y+2xy=8$，则$x+2y$的最小值为（　）.

A.3　　B.4　　C.$\frac{9}{2}$　　D.$\frac{11}{2}$　　E.5

【解析】因为 $x+2y+2xy=8$，得到 $y=\frac{8-x}{2x+2}>0$，所以 $-1<x<8$，

从而 $x+2y=x+2\cdot\frac{8-x}{2x+2}=x+1+\frac{9}{x+1}-2\geqslant 2\sqrt{(x+1)\cdot\frac{9}{x+1}}-2=4$，

当且仅当 $x+1=\frac{9}{x+1}$ 时“=”成立，此时 $x=2$，$y=1$，故选 B.

三.均值不等式

【例14】已知$x>0,y>0,\frac{1}{x}+\frac{9}{y}=1$，则$x+y$的最小值为（　）.

A.10　　B.12　　C.14　　D.16　　E.19

三.均值不等式

【例14】已知$x>0, y>0, \frac{1}{x}+\frac{9}{y}=1$，则$x+y$的最小值为（　）.

A.10　　B.12　　C.14　　D.16　　E.19

【解析】由 $x>0$，$y>0$，$\frac{1}{x}+\frac{9}{y}=1$，得到 $x+y=(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{9}{y}\right)=\frac{y}{x}+\frac{9x}{y}+10\geqslant 6+10=16$，当且仅当$\frac{y}{x}=\frac{9x}{y}$时，上式等号成立，又$\frac{1}{x}+\frac{9}{y}=1$，可得 $x=4$，$y=12$ 时，$(x+y)_{\min}=16$．选 D.

四、特殊不等式

1.绝对值不等式（去掉绝对值符号）

（1）分段讨论法 $|f(x)|=\begin{cases} f(x) & f(x)\geq 0 \\ -f(x) & f(x)<0 \end{cases}$

【例15】不等式$|x-1|+|x+2|<5$，解集中包含（　　）个整数.

A.0　　B.2　　C.3　　D.4　　E.无穷多

四、特殊不等式

1.绝对值不等式（去掉绝对值符号）

（1）分段讨论法 $|f(x)|=\begin{cases} f(x) & f(x)\geq 0 \\ -f(x) & f(x)<0 \end{cases}$

【例15】不等式$|x-1|+|x+2|<5$，解集中包含（　　）个整数.

A.0　　B.2　　C.3　　D.4　　E.无穷多

【解析】由$|x-1|=0$，$|x+2|=0$，得$x=1$，$x=-2$. -2和1把实数集合分成三个区间，即$x<-2$，$-2\leqslant x\leqslant 1$，$x>1$，按这三个区间可去绝对值，故可按这三个区间讨论.

当$x<-2$时，得$\begin{cases} x<-2 \\ -(x-1)-(x+2)<5 \end{cases}$，解得$-3<x<-2$；

当$-2\leqslant x\leqslant 1$时，得$\begin{cases} -2\leqslant x\leqslant 1 \\ -(x-1)+(x+2)<5 \end{cases}$，解得$-2\leqslant x\leqslant 1$；

当$x>1$时，得$\begin{cases} x>1 \\ (x-1)+(x+2)<5 \end{cases}$，解得$1<x<2$.

综上，原不等式的解集为$\{x|-3<x<2\}$，选D.

四、特殊不等式

1.绝对值不等式（去掉绝对值符号）

（2）平方法 $(|f(x)|)^2=[f(x)]^2$

【例16】不等式$|x-1|>|2x-3|$，解集中包含（　　）个整数.

A.0　　B.1　　C.2　　D.3　　E.无穷多

四、特殊不等式

1.绝对值不等式（去掉绝对值符号）

（2）平方法 $(|f(x)|)^2=[f(x)]^2$

【例16】不等式$|x-1|>|2x-3|$，解集中包含（　　）个整数.

A.0　　B.1　　C.2　　D.3　　E.无穷多

【解析】原不等式$\Leftrightarrow(x-1)^2>(2x-3)^2\Leftrightarrow(2x-3)^2-(x-1)^2<0$

$\Leftrightarrow(2x-3+x-1)(2x-3-x+1)<0\Leftrightarrow(3x-4)(x-2)<0\Leftrightarrow\frac{4}{3}<x<2$，选 A.

求解中以先平方后移项再用平方差公式分解因式为宜.

四、特殊不等式

1.绝对值不等式（去掉绝对值符号）

（3）公式法

$$|f(x)|<a(a>0)\Leftrightarrow -a<f(x)<a$$

$$|f(x)|>a(a>0)\Leftrightarrow f(x)<-a\text{或}f(x)>a$$

$$|f(x)|<g(x)\Leftrightarrow -g(x)<f(x)<g(x)$$

$$|f(x)|>g(x)\Leftrightarrow f(x)>g(x)\text{或}f(x)<-g(x)$$

四、特殊不等式

1.绝对值不等式（去掉绝对值符号）

（3）公式法

【例17】关于x的不等式$\frac{1}{|2x-3|} > 2$，解集中包含（　　）个整数.

A.0　　B.1　　C.2　　D.3　　E.无穷多

四、特殊不等式

1.绝对值不等式（去掉绝对值符号）

（3）公式法

【例17】关于x的不等式$\frac{1}{|2x-3|}>2$，解集中包含（　　）个整数.

A.0　　B.1　　C.2　　D.3　　E.无穷多

【解析】

原不等式等价于$\begin{cases}2x-3\neq 0\\|2x-3|<\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\neq\frac{3}{2}\\\frac{5}{4}<x<\frac{7}{4}\end{cases}$，选 A.

四、特殊不等式

1.绝对值不等式（去掉绝对值符号）

（3）公式法

【例18】关于x的不等式$|x^2+3x-8|<10$，解集中包含（　　）个整数.

A.0　　B.2　　C.4　　D.6　　E.无穷多

四、特殊不等式

1.绝对值不等式（去掉绝对值符号）

（3）公式法

【例18】关于x的不等式$|x^2+3x-8|<10$，解集中包含（　　）个整数.

A.0　　B.2　　C.4　　D.6　　E.无穷多

【解析】

原不等式等价于$-10<x^2+3x-8<10$，即$\begin{cases}x^2+3x-8>-10\\x^2+3x-8<10\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>-1\text{ 或 }x<-2\\-6<x<3\end{cases}$，

所以原不等式的解集为$(-6,-2)\cup(-1,3)$，选D.

四、特殊不等式

1.绝对值不等式（去掉绝对值符号）

（3）公式法

【例19】关于x的不等式$|x^2-9|\le x+3$，解集中包含（   ）个整数.

A.0　　B.2　　C.3　　D.4　　E.无穷多

四、特殊不等式

1.绝对值不等式（去掉绝对值符号）

（3）公式法

【例19】关于x的不等式$|x^2-9|\le x+3$，解集中包含（　　）个整数.

A.0　　B.2　　C.3　　D.4　　E.无穷多

【解析】

方法一：原不等式$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-9\geqslant 0\\x^2-9\leqslant x+3\end{cases}$ ①　或　$\begin{cases}x^2-9<0\\9-x^2\leqslant x+3\end{cases}$ ②

由①解得 $x=-3$ 或 $3\leqslant x\leqslant 4$，由②解得 $2\leqslant x<3$，

所以原不等式的解集是$\{x|2\leqslant x\leqslant 4$ 或 $x=-3\}$.

方法二：原不等式等价于$-(x+3)\leqslant x^2-9\leqslant x+3\Leftrightarrow\begin{cases}x\leqslant -3 \text{ 或 } x\geqslant 2\\-3\leqslant x\leqslant 4\end{cases}$

$\Leftrightarrow x=-3$ 或 $2\leqslant x\leqslant 4$，

所以原不等式的解集是$\{x|2\leqslant x\leqslant 4$ 或 $x=-3\}$.

四、特殊不等式

1.绝对值不等式（去掉绝对值符号）

（4）图像法：如果画图比较容易，可以画出图像来分析.

【例19】关于x的不等式$|x^2-9|\leq x+3$，解集中包含（　）个整数.

A.0　　B.2　　C.3　　D.4　　E.无穷多

四、特殊不等式

1.绝对值不等式（去掉绝对值符号）

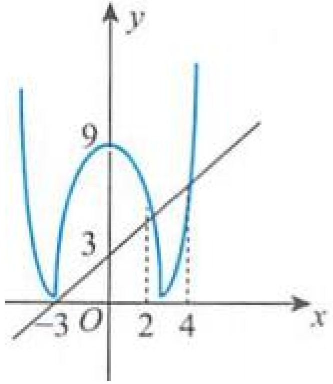
（4）图像法：如果画图比较容易，可以画出图像来分析.

【例19】关于x的不等式$|x^2-9|\le x+3$，解集中包含（　）个整数.

A.0　　B.2　　C.3　　D.4　　E.无穷多

【解析】 方法三：设$y_1=|x^2-9|$，$y_2=x+3(x\geq-3)$，由$|x^2-9|=x+3$解得$x_1=4$，$x_2=-3$，$x_3=2$，在同一坐标系下作出它们的图像，由图得使$y_1\leq y_2$的x的范围是$x=-3$或$2\leq x\leq4$，所以原不等式的解集是$\{x|2\leq x\leq4$或$x=-3\}$，选D.

运用数形结合策略要解出两函数图像的交点.



四、特殊不等式

2.分式不等式

（1）简单分式不等式

$$\frac{x-a}{x-b} \geq 0(a<b)$$

$$\frac{x-a}{x-b} \leq 0(a<b)$$

四、特殊不等式

2.分式不等式

（2）其他分式不等式

$$\frac{f(x)}{g(x)}>0 \Leftrightarrow f(x)\cdot g(x)>0$$

$$\frac{f(x)}{g(x)}<0 \Leftrightarrow f(x)\cdot g(x)<0$$

$$\frac{f(x)}{g(x)}\geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)g(x)\geq 0 \\ g(x)\neq 0 \end{cases}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)}\leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)g(x)\leq 0 \\ g(x)\neq 0 \end{cases}$$

四、特殊不等式

2.分式不等式

【例20】不等式$\frac{2x-1}{x-1}>\frac{x+3}{x+1}$的解集中包含（　）个质数.

A.0　　B.1　　C.4　　D.2　　E.无穷多

四、特殊不等式

师大课堂 SHI DA KE TANG

2.分式不等式

【例20】不等式$\frac{2x-1}{x-1}>\frac{x+3}{x+1}$的解集中包含（　　）个质数.

A.0　　B.1　　C.4　　D.2　　E.无穷多

【解析】

原不等式可化为$\frac{2x-1}{x-1}-\frac{x+3}{x+1}>0$，整理得$\frac{x^2-x+2}{(x-1)(x+1)}>0$，由于$x^2-x+2$恒大于零，故可转化为$(x-1)(x+1)>0$，从而得到$x<-1$或$x>1$，包含无数个质数，故选E.

四.特殊不等式

2.分式不等式

【例21】若$a > 0, b > 0$，则不等式$-b < \frac{1}{x} < a$等价于（　　）.

A.$-\frac{1}{b} < x < 0$或$0 < x < \frac{1}{a}$　　B.$-\frac{1}{a} < x < \frac{1}{b}$

C.$x < -\frac{1}{a}$或$x > \frac{1}{b}$　　D.$x < -\frac{1}{b}$或$x > \frac{1}{a}$　　E.以上均不正确

四、特殊不等式

2.分式不等式

【例21】若$a>0,b>0$，则不等式$-b<\frac{1}{x}<a$等价于（　）.

A.$-\frac{1}{b}<x<0$或$0<x<\frac{1}{a}$　　B.$-\frac{1}{a}<x<\frac{1}{b}$

C.$x<-\frac{1}{a}$或$x>\frac{1}{b}$　　D.$x<-\frac{1}{b}$或$x>\frac{1}{a}$　　E.以上均不正确

【解析】

$$-b<\frac{1}{x}<a\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{x}+b>0\\\frac{1}{x}-a<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1+bx}{x}>0\\\frac{1-ax}{x}<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x(bx+1)>0\\x(1-ax)<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\text{ 或 }x<-\frac{1}{b}\\x>\frac{1}{a}\text{ 或 }x<0\end{cases}$$

$\Rightarrow x<-\frac{1}{b}$或$x>\frac{1}{a}$. 故选 D.

四、特殊不等式

3.高次不等式——穿线法

适用于一元高次不等式（x的系数都要转化为正数）

（1）分解因式，化成若干个因式的乘积；

（2）作等价变形，便于判断因式的符号；

（3）由小到大，从左到右标出与不等式对应的方程的根；

（4）从右上角起，“穿针引线”；

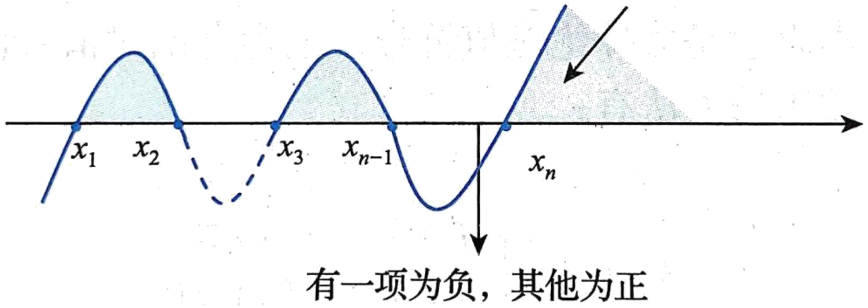
（5）重根的处理，依“奇穿偶不穿”原则；

（6）画出解集的示意区域，从左到右写出解集.

四、特殊不等式

3.高次不等式——穿线法

$$f(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$$



四、特殊不等式

4.无理不等式

对于无理不等式，一般是通过平方转化为有理不等式进行求解.在求解时，注意根号要有意义.

5.指数、对数不等式

遇到指数或对数不等式，结合单调性进行分析，或者换元转化为一般的不等式求解.

四、特殊不等式

6.柯西不等式

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geq(ac+bd)^2$$

- 第二章 代数
  - 第一节 整式及其运算
  - 第二节 分式及其运算
  - 第三节 函数
  - 第四节 代数方程
  - 第五节 不等式
    - 一、不等式的性质
    - 二、一元二次不等式
    - 三、均值不等式
    - 四、特殊不等式

师大课堂
SHI DA KE TANG

感谢聆听

主讲:媛媛老师
邮箱:family7662@dingtalk.com