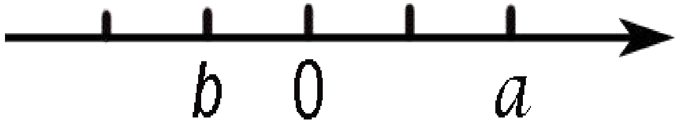
第五节 数轴与绝对值

第一章 第五节数轴与绝对值

年度	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023
考频	0	0	1	1	1	0	1	1	0

一、数轴

规定了原点、正方向和单位长度的直线叫数轴.数轴上的点与实数一一对应，也可以用数轴来比较两个实数的大小.



1.数轴的三要素：原点、正方向和单位长度.

2.在数轴上表示两个数的点，右边的点表示的数大（0右边的数是正数），左边的点表示的数小（0左边的数是负数）.

二.绝对值

1.代数意义

$$|a| = \begin{cases} a, a > 0 \\ 0, a = 0 \\ -a, a < 0 \end{cases}$$

二.绝对值

2.几何意义

$|a|$表示在数轴上点a与原点0的距离.

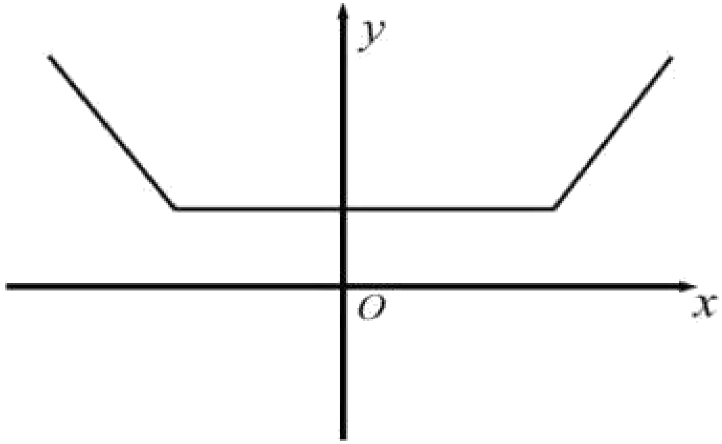
$|a-b|$表示在数轴上点a与点b之间的距离.

$|x-a|+|x-b|+|x-c|$表示在数轴上x点到a点、b点与c点的距离之和.

二.绝对值

2.几何意义

（1）平底锅型：$f(x) = |x-a| + |x-b|$，表示在数轴上x点到a点与b点的距离之和.此种函数表达式，没有最大值，只有最小值$|a-b|$.且在两个零点之间取得最小值$|a-b|$.图像的表现为两头高，中间平，类似于平底锅.



二.绝对值

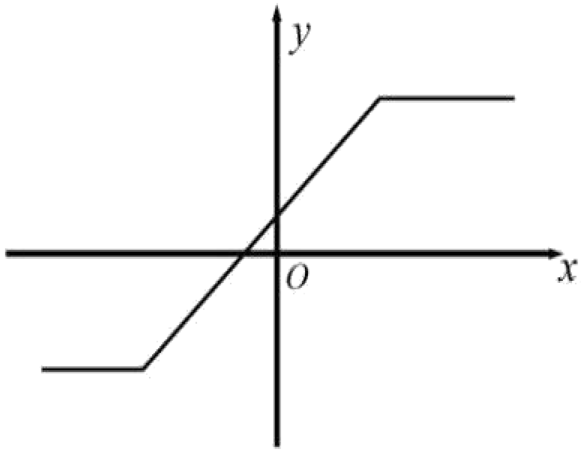
2.几何意义

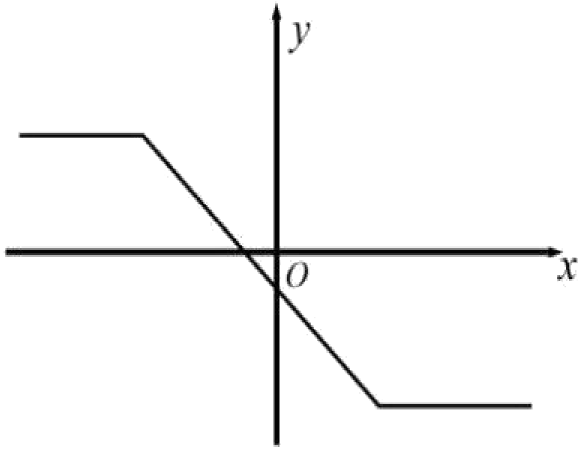
（1）平底锅型：$f(x)=|x-a|+|x-b|$，表示在数轴上x点到a点与b点的距离之和.

二.绝对值

2.几何意义

（2）“Z”字型：$f(x)=|x-a|-|x-b|$，表示在数轴上x点到a点与b点的距离之差.此种函数表达式，既有最大值也有最小值，分别在零点的两侧取得且两个最值为$\pm|a-b|$.图像的表现为两头平，中间斜.





二.绝对值

2.几何意义

（2）"Z"字型：$f(x)=|x-a|-|x-b|$，表示在数轴上x点到a点与b点的距离之差.

二.绝对值

2.几何意义

（3）相反数

绝对值相等，正负号相反的两个数互为相反数.

实数a、b互为相反数，则$a+b=0$.

0自身互为相反数.

（4）实数a、b互为倒数，则$ab=1$.

二.绝对值

3.性质

（1）基本不等式

适合不等式$|x| < a$（$a > 0$）的所有实数所对应的就是全部与原点距离小于a的点，即$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$

同理可得$|x| > a \Leftrightarrow x < -a$或$x > a$

（2）对称性

$|-a| = |a|$，即互为相反数的两个数的绝对值相等.

二.绝对值

3.性质

（3）等价性

$$|a| = \sqrt{a^2}$$

$$|a|^2 = |a^2| = |-a^2| = a^2$$

（4）自比性

$$\frac{|a|}{a} = \frac{a}{|a|} = \begin{cases} 1, a > 0 \\ -1, a < 0 \end{cases}$$

二.绝对值

3.性质

（5）非负性

$$|a| \geq 0$$

具有非负性的数还有偶次方（根），如$a^2, a^4, \sqrt{a}$

若干个具有非负性质的数之和等于零时，则每个非负数应该为零;有限个非负数之和仍为非负数.$|a| + b^2 + \sqrt{c} \leq 0 \Rightarrow a = b = c = 0$

（6）$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|, \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

二、绝对值

师大课堂
SHI DA KE TANG

4. $|a|$与a的关系

若$|a|=a$，则$a\geqslant 0$	若$|a|=-a$，则$a\leqslant 0$
若$|a|>a$，则$a<0$	若$|a|>-a$，则$a>0$
若$|a|<a$，则$a\in\varnothing$	若$|a|<-a$，则$a\in\varnothing$
若$|a|\geqslant a$，则$a\in R$	若$|a|\geqslant -a$，则$a\in R$
若$|a|\leqslant a$，则$a\geqslant 0$	若$|a|\leqslant -a$，则$a\leqslant 0$

二.绝对值

【例1】若a,b,c满足$|a-3|+\sqrt{3b+5}+(5c-4)^2=0$，则$abc=$（　　）.

A.-4　　B.$-\frac{5}{3}$　　C.$-\frac{4}{3}$　　D.$\frac{4}{5}$　　E.3

二.绝对值

【例1】若a,b,c满足$|a-3|+\sqrt{3b+5}+(5c-4)^2=0$，则$abc=$（　　）.

A.-4　　B.$-\frac{5}{3}$　　C.$-\frac{4}{3}$　　D.$\frac{4}{5}$　　E.3

【解析】由非负性得到 $a-3=0$，$3b+5=0$，$5c-4=0$，解得 $a=3$，$b=-\frac{5}{3}$，$c=\frac{4}{5}$，所以 $abc=-4$. 选 A.

二.绝对值

【例2】$|x-1|+|x-3|=4-2x$，其非负整数解有（　　）个.

A.0　　B.1　　C.2　　D.3　　E.无数

二.绝对值

【例2】$|x-1|+|x-3|=4-2x$，其非负整数解有（　　）个.

A.0　　B.1　　C.2　　D.3　　E.无数

【解析】当 $x\geqslant3$ 时，原式$=(x-1)+(x-3)=2x-4=4-2x$，解得 $x=2<3$，舍掉；
当 $1<x<3$ 时，原式$=(x-1)+(3-x)=2=4-2x$，解得 $x=1$，舍掉；
当 $x\leqslant1$ 时，原式$=(1-x)+(3-x)=4-2x$，即 $x\leqslant1$ 均成立；
故非负整数解为 0 或 1，只有 2 个，选 C.

二.绝对值

【例3】（条件充分性判断）$\frac{b+c}{|a|}+\frac{c+a}{|b|}+\frac{b+a}{|c|}=1$

（1）实数a,b,c满足$a+b+c=0$

（2）实数a,b,c满足$abc>0$

二.绝对值

【例3】（条件充分性判断）$\frac{b+c}{|a|}+\frac{c+a}{|b|}+\frac{b+a}{|c|}=1$

（1）实数a,b,c满足$a+b+c=0$

（2）实数a,b,c满足$abc>0$

【解析】显然单独不充分，联合起来，得到 a，b，c 两负一正，所以代入题干可得：

$$\frac{b+c}{|a|}+\frac{c+a}{|b|}+\frac{a+b}{|c|}=-\left(\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}\right)=1.$$ 选 C.

二.绝对值

5.绝对值三角不等式

（1）基本形式

$$||a|-|b|| \leq |a \pm b| \leq |a|+|b|$$

二.绝对值

5.绝对值三角不等式$||a|-|b|| \le |a \pm b| \le |a|+|b|$

（2）等号成立条件（同号$ab \ge 0$，异号$ab \le 0$）

表达式	成立条件	示例
$\|a\|+\|b\|=\|a+b\|$	$ab \ge 0$	$\|-3\|+\|-5\|=\|-3-5\|$
$\|a\|+\|b\|=\|a-b\|$	$ab \le 0$	$\|3\|+\|-5\|=\|3+5\|$
$\|\|a\|-\|b\|\|=\|a+b\|$	$ab \le 0$	$\|\|-5\|-\|3\|\|=\|-5+3\|$
$\|\|a\|-\|b\|\|=\|a-b\|$	$ab \ge 0$	$\|\|-5\|-\|-3\|\|=\|-5+3\|$

二.绝对值

5.绝对值三角不等式$||a|-|b|| \leq |a \pm b| \leq |a|+|b|$

（3）大小成立条件（等号成立的反面）

表达式	成立条件	示例
$\|a\|+\|b\|>\|a+b\|$	$ab<0$	$\|-3\|+\|5\|>\|-3+5\|$
$\|a\|+\|b\|>\|a-b\|$	$ab>0$	$\|-3\|+\|-5\|>\|-3+5\|$
$\|\|a\|-\|b\|\|<\|a+b\|$	$ab>0$	$\|\|-5\|-\|-3\|\|<\|-5-3\|$
$\|\|a\|-\|b\|\|<\|a-b\|$	$ab<0$	$\|\|-5\|-\|3\|\|<\|-5-3\|$

二.绝对值

师大课堂 SHI DA KE TANG

【例4】已知$|2x-a|\leq 1$, $|2x-y|\leq 1$,则$|y-a|$的最大值是（　　）

A.1　　B.3　　C.2　　D.4　　E.5

二.绝对值

【例4】已知$|2x-a|\leq 1$, $|2x-y|\leq 1$,则$|y-a|$的最大值是(　　)

A.1　　B.3　　C.2　　D.4　　E.5

【解析】

根据三角不等式$|y-a|=|(2x-a)-(2x-y)|\leqslant|2x-a|+|2x-y|\leqslant 1+1=2$，从而选C.

- **第一章 算术**
  - 第一节 实数
  - 第二节 分数、小数、百分数
  - 第三节 比与比例
  - 第四节 数据描述
  - 第五节 数轴与绝对值
    - 一、数轴
    - 二、绝对值
      - 1.代数意义
      - 2.几何意义
      - 3.性质
      - 4.|a|与a的关系
      - 5.绝对值三角不等式

感 谢 聆 听

主讲:媛媛老师
邮箱:family7662@dingtalk.com