第三节　解析几何

第四章　第三节解析几何

年度	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023
考频	2	2	1	2	3	2	2	0	2

第四章 第三节解析几何

师大课堂 SHI DA KE TANG

一、平面直角坐标系

二、直线方程与圆的方程

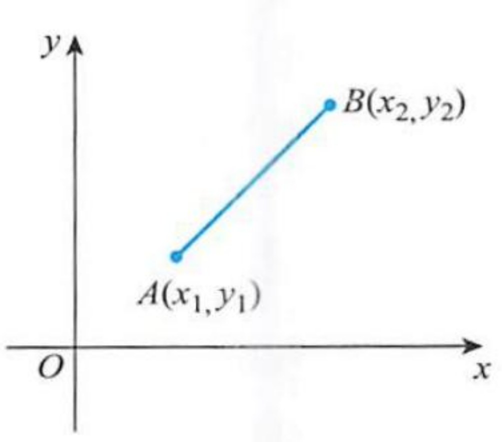
一、平面直角坐标系

1.点在平面直角坐标系中的表示：$P(x,y)$

2.两点$A(x_1,y_1)$与$B(x_2,y_2)$中点的坐标：$\left(\frac{x_1+x_2}{2}\ ,\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

3.两点$A(x_1,y_1)$与$B(x_2,y_2)$的距离公式：

$$d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$



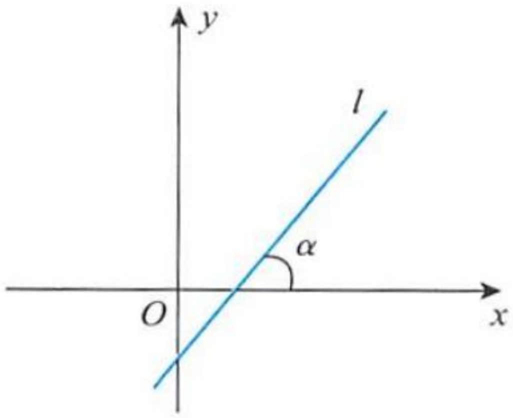
二.直线方程与圆的方程

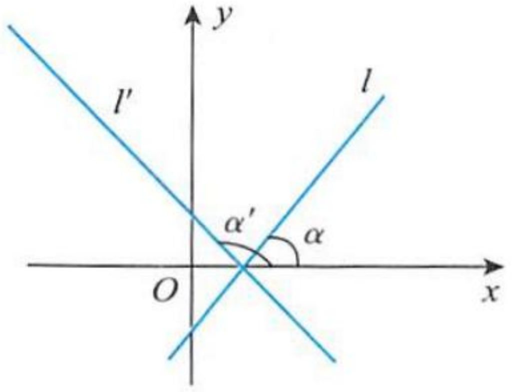
（一）平面直线

1.相关概念

（1）倾斜角

直线向上方向与x轴正方向所成的夹角，称为倾斜角，记为α， $\alpha \in [0，\pi)$





二.直线方程与圆的方程

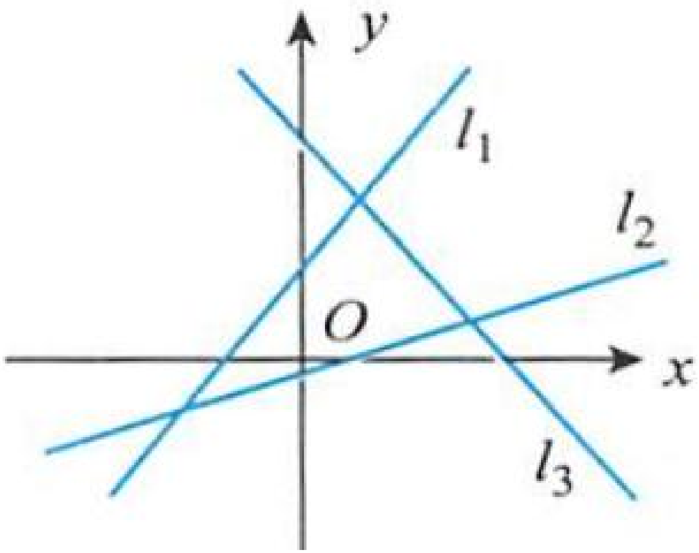
（一）平面直线

1.相关概念

（2）斜率k

$k = tan\alpha$ ，$\alpha \neq \frac{\pi}{2}$

k的绝对值越大，直线越陡峭.



二.直线方程与圆的方程

（一）平面直线

1.相关概念

（2）斜率k

过两点$A(x_1,y_1)$与$B(x_2,y_2)$的直线的斜率$k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$，$(x_1\neq x_2)$

特殊的，过点$A(x_1,y_1)$与原点的直线的斜率$k=\frac{y_1}{x_1}$

二、直线方程与圆的方程

【例1】已知三点A(a，2)，B(3，7)，C(-2，-9a)在一条直线上，则实数a的值为(　　)

(A)$a=-2$或$a=\frac{2}{9}$　(B)$a=2$或$a=-\frac{2}{9}$　(C)$a=2$或$a=\frac{2}{9}$

(D)$a=-2$或$a=-\frac{2}{9}$　(E)$a=2$或$a=\frac{1}{9}$

二、直线方程与圆的方程

【例1】已知三点A(a，2)，B(3，7)，C(-2，-9a)在一条直线上，则实数a的值为(C　)

(A)$a=-2$或$a=\frac{2}{9}$　　(B)$a=2$或$a=-\frac{2}{9}$　　(C)$a=2$或$a=\frac{2}{9}$

(D)$a=-2$或$a=-\frac{2}{9}$　　(E)$a=2$或$a=\frac{1}{9}$

【解析】因为A，B，C三点在一条直线上，所以$k_{AB}=k_{BC}$.

$k_{AB}=\frac{7-2}{3-a}=\frac{5}{3-a}$，$k_{BC}=\frac{7+9a}{3+2}=\frac{7+9a}{5}$，$\frac{5}{3-a}=\frac{7+9a}{5}\Rightarrow a=2$ 或 $a=\frac{2}{9}$，选 C.

二.直线方程与圆的方程

（一）平面直线

2.直线的方程

（1）斜截式

斜率为k，在y轴的截距为b：$y = kx + b$

（2）点斜式

过点$A(x_0, y_0)$，斜率为k：$y - y_0 = k(x - x_0)$

以上两种不包括y轴和平行于y轴的直线

二.直线方程与圆的方程

（一）平面直线

2.直线的方程

（3）两点式

过两点$A(x_1,y_1)$与$B(x_2,y_2)$：$\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$

不包括坐标轴和平行于坐标轴的直线

（4）截距式

在x轴的截距为a，在y轴的截距为b：$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$

不包括经过原点的直线以及平行于坐标轴的直线

二.直线方程与圆的方程

（一）平面直线

2.直线的方程

（5）一般式

$Ax+By+C=0$（A、B不同时为0）

斜率$k=-\frac{A}{B}$，在x轴的截距为$-\frac{C}{A}$，在y轴的截距为$-\frac{C}{B}$

二.直线方程与圆的方程

（一）平面直线

【例2】过点(5，8)且截距互为相反数的直线有(　　)

(A)1　　(B)2　　(C)3　　(D)4　　(E)无穷多

二.直线方程与圆的方程

（一）平面直线

【例2】过点(5，8)且截距互为相反数的直线有(B)

(A)1　　(B)2　　(C)3　　(D)4　　(E)无穷多

【解析】设截距分别为 a 和 $-a$，根据截距式列式得：$\frac{5}{a}+\frac{8}{-a}=1$，解得 $a=-3$，所以方程为 $x-y+3=0$．同时还需要考虑直线经过原点的情况，利用点斜式，设直线方程为 $y=kx$，代入 $(5，8)$，解得 $k=\frac{8}{5}$，直线方程为 $8x-5y=0$．共 2 条直线，选 B.

二.直线方程与圆的方程

（一）平面直线

【例3】下列四个命题中，正确的有(　　)个

①经过定点 P(x_0, y_0)的直线都可以用方程$y - y_0 = k(x - x_0)$表示

②经过任意两个不同的点$P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$的直线都可以用方程

$(y - y_1)\cdot(x_2 - x_1) = (x - x_1)\cdot(y_2 - y_1)$表示

③不经过原点的直线都可以用方程 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$表示

④经过定点 A(0，b)的直线都可以用方程$y = kx + b$表示

(A)1　　(B)2　　(C)3　　(D)4　　(E)无穷多

二、直线方程与圆的方程

【例3】下列四个命题中，正确的有(B)个

①经过定点 $P(x_0, y_0)$的直线都可以用方程$y - y_0 = k(x - x_0)$表示

②经过任意两个不同的点$P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$的直线都可以用方程

$(y - y_1)\cdot(x_2 - x_1) = (x - x_1)\cdot(y_2 - y_1)$表示

③不经过原点的直线都可以用方程 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 表示

④经过定点 A(0，b)的直线都可以用方程$y = kx + b$表示

(A)1　(B)2　(C)3　(D)4　(E)无穷多

【解析】①中过点 $P_0(x_0, y_0)$与 x 轴垂直的直线 $x=x_0$ 不能用 $y-y_0=k(x-x_0)$表示．因为其斜率 k 不存在；③中不过原点但在 x 轴或 y 轴无截距的直线 $y=b(b\neq0)$或 $x=a(a\neq0)$不能用方程$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 表示；④中过 $A(0, b)$的直线 $x=0$ 不能用方程 $y=kx+b$ 表示．故只有②正确，选 B.

二.直线方程与圆的方程

（一）平面直线

3.两直线的位置关系

两条直线的位置关系	斜截式 l_1：$y=k_1x+b_1$； l_2：$y=k_2x+b_2$	一般式 l_1：$a_1x+b_1y+c_1=0$； l_2：$a_2x+b_2y+c_2=0$
平行	$l_1 /\!/ l_2 \Leftrightarrow k_1=k_2$，$b_1\neq b_2$	$l_1 /\!/ l_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$
相交	$k_1\neq k_2$	$\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$
垂直	$l_1\perp l_2\Leftrightarrow k_1k_2=-1$	$l_1\perp l_2\Leftrightarrow\frac{a_1}{b_1}\cdot\frac{a_2}{b_2}=-1\Leftrightarrow a_1a_2+b_1b_2=0$

师大课堂 SHI DA KE TANG

二.直线方程与圆的方程

（一）平面直线

4.点到直线的距离公式

点$A(x_1,y_1)$到直线$Ax+By+C=0$的距离$d=\dfrac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

5.两平行直线间的距离公式

l_1: $ax+by+c_1=0$; l_2: $ax+by+c_2=0$

$$d=\frac{|c_1-c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

二、直线方程与圆的方程

（一）平面直线

【例4】$l_1: 3x-4y+2=0; l_2: 6x-8y+C=0$，$l_1$与$l_2$之间的距离为$\frac{1}{2}$，则$C$为（　　）

(A)-1　　(B)-3或7　　(C)1或-9　　(D)-1或9　　(E)$-\frac{1}{2}$或$\frac{9}{2}$

二、直线方程与圆的方程

（一）平面直线

【例4】$l_1: 3x-4y+2=0; l_2: 6x-8y+C=0$，$l_1$与$l_2$之间的距离为$\frac{1}{2}$，则$C$为（ D ）

(A)-1　　(B)-3或7　　(C)1或-9　　(D)-1或9　　(E)$-\frac{1}{2}$或$\frac{9}{2}$

【解析】先将 l_2 转化为 $3x-4y+\frac{C}{2}=0$，再由公式得到：

$$d=\frac{\left|\frac{C}{2}-2\right|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{1}{2}$$，得 $C=-1$ 或 9，故选 D.

【评注】在使用公式前，必须先统一两直线的系数，否则会误选 B 或 E.

二、直线方程与圆的方程

（一）平面直线

【例5】直线$2x-y-4=0$与$y=x$及x轴围成的三角形的面积为（　　）

(A)2　　(B)$\frac{5}{2}$　　(C)3　　(D)4　　(E)5

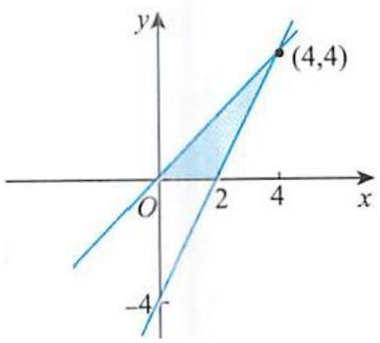
二.直线方程与圆的方程

（一）平面直线

【例5】直线$2x-y-4=0$与$y=x$及x轴围成的三角形的面积为（ D ）

(A)2　　(B)$\frac{5}{2}$　　(C)3　　(D)4　　(E)5

【解析】先求两直线的交点$\begin{cases}2x-y-4=0\\y=x\end{cases}$，得交点坐标为（4，4），再画图，

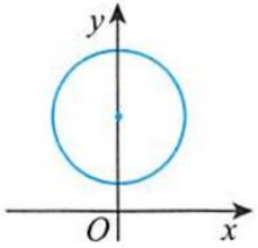
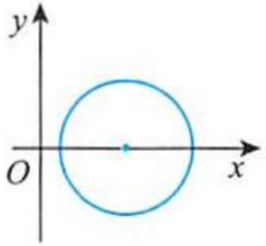


可得三角形的面积为$S=\frac{1}{2}\times2\times4=4$，选 D.

二.直线方程与圆的方程

（二）圆的方程

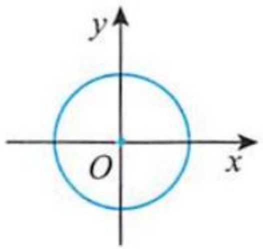
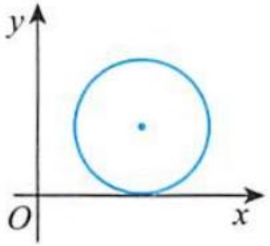
1.标准方程：$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

特殊的圆	方程	图像	特征
$x_0=0$	$x^2+(y-y_0)^2=r^2$		圆心在 y 轴
$y_0=0$	$(x-x_0)^2+y^2=r^2$		圆心在 x 轴

二.直线方程与圆的方程

（二）圆的方程

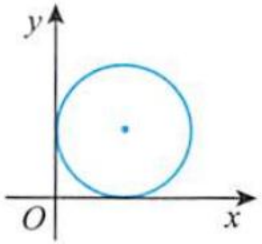
1.标准方程：$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

特殊的圆	方程	图像	特征
$x_0=y_0=0$	$x^2+y^2=r^2$		圆心在原点上
$\lvert y_0 \rvert=r$	$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$		与 x 轴相切

二.直线方程与圆的方程

（二）圆的方程

1.标准方程：$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

特殊的圆	方程	图像	特征
$\lvert x_0\rvert=\lvert y_0\rvert=r$	$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$		与两轴相切

二.直线方程与圆的方程

（二）圆的方程

2.一般方程：$x^2+y^2+ax+by+c=0$

配方后：$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2-4c}{4}$

成立的前提：$a^2+b^2-4c>0$

二.直线方程与圆的方程

（二）圆的方程

【例6】方程$x^2+y^2+4mx-2y+5m=0$表示圆的充分必要条件是（　　）

(A)$\frac{1}{4}<m<1$　　(B)$m<\frac{1}{4}$或$m>1$　　(C)$m<\frac{1}{4}$　　(D)$m>1$

(E)$1<m<4$

二、直线方程与圆的方程

（二）圆的方程

【例6】方程$x^2+y^2+4mx-2y+5m=0$表示圆的充分必要条件是（ B ）

(A)$\frac{1}{4}<m<1$　　(B)$m<\frac{1}{4}$或$m>1$　　(C)$m<\frac{1}{4}$　　(D)$m>1$

(E)$1<m<4$

【解析】$x^2+y^2+4mx-2y+5m=0\Rightarrow(x+2m)^2+(y-1)^2=4m^2+1-5m$，只要$4m^2+1-5m>0$即可，得$m<\frac{1}{4}$或$m>1$，选B.

二.直线方程与圆的方程

（二）圆的方程

3.位置关系

（1）点与圆的位置关系

$P(x_p,y_p)$　　$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$

$$(x_p-x_0)^2+(y_p-y_0)^2\begin{cases}<r^2,\text{点在圆内.}\\=r^2,\text{点在圆上.}\\>r^2,\text{点在圆外.}\end{cases}$$

二.直线方程与圆的方程

（二）圆的方程

3.位置关系

（2）直线与圆的位置关系

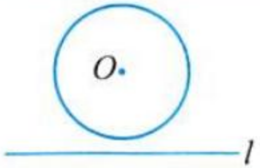
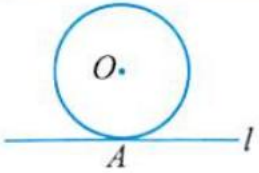
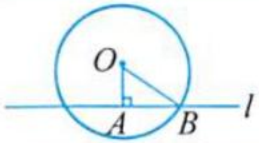
- ✓ 相交：直线和圆有两个公共点
- ✓ 相切：直线和圆有唯一公共点
- ✓ 相离：直线和圆没有公共点

二.直线方程与圆的方程

（二）圆的方程

3.位置关系

（2）直线与圆的位置关系

直线与圆位置关系	图形	成立条件（几何表示）
直线与圆相离		$d>r$
直线与圆相切		$d=r$
直线与圆相交		$d<r$

二、直线方程与圆的方程

（二）圆的方程

【例7】圆$(x-a)^2+(y-2)^2=4(a>0)$及直线$l:x-y+3=0$，当l被圆截得的弦长为$2\sqrt{3}$时，$a=$（　　）

(A)$\sqrt{2}$　　(B)$2-\sqrt{2}$　　(C)$\sqrt{2}-1$　　(D)$-\sqrt{2}-1$　　(E)$\pm\sqrt{2}-1$

二、直线方程与圆的方程

（二）圆的方程

【例7】圆$(x-a)^2+(y-2)^2=4(a>0)$及直线$l:x-y+3=0$，当l被圆截得的弦长为$2\sqrt{3}$时，$a=$（　C　）

(A)$\sqrt{2}$　　(B)$2-\sqrt{2}$　　(C)$\sqrt{2}-1$　　(D)$-\sqrt{2}-1$　　(E)$\pm\sqrt{2}-1$

【解析】根据题意，圆心到直线 l 的距离为 $d=\dfrac{|a-2+3|}{\sqrt{2}}$，有 $d^2+(\sqrt{3})^2=r^2$，即$\dfrac{a^2+2a+1}{2}+3=4$，解得 $a=\pm\sqrt{2}-1$，又由 $a>0$，故选 C.

二、直线方程与圆的方程

（二）圆的方程

【例8】过点$(-2,0)$的直线l与圆$x^2+y^2=2x$有两个交点，则斜率k的取值范围为（　　）

(A)$\left(-2\sqrt{2},2\sqrt{2}\right)$　(B)$\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$　(C)$\left(-\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

(D)$\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$　(E)$\left(-\frac{1}{8},\frac{1}{8}\right)$

二、直线方程与圆的方程

（二）圆的方程

【例8】过点$(-2,0)$的直线l与圆$x^2+y^2=2x$有两个交点，则斜率k的取值范围为（ C ）

(A)$\left(-2\sqrt{2},2\sqrt{2}\right)$　(B)$\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$　(C)$\left(-\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

(D)$\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$　(E)$\left(-\frac{1}{8},\frac{1}{8}\right)$

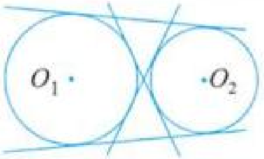
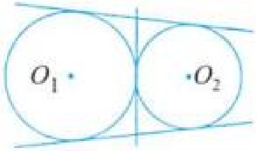
【解析】根据题意此直线应该为 $y=kx+2k$，直线和圆有两个交点，那么方程 $x^2+(kx+2k)^2=2x$，即 $(k^2+1)x^2+(4k^2-2)x+4k^2=0$ 有两个不同的实数根，则有 $4(2k^2-1)^2-4\times4k^2(k^2+1)=4(1-8k^2)>0$，解得 $-\frac{\sqrt{2}}{4}<k<\frac{\sqrt{2}}{4}$，选 C.

二、直线方程与圆的方程

（二）圆的方程

3.位置关系

（3）圆与圆的位置关系

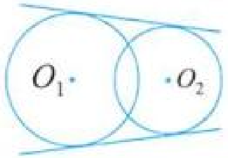
两圆位置关系	图形	成立条件（几何表示）	内公切线条数	外公切线条数
外离		$d>r_1+r_2$	2	2
外切		$d=r_1+r_2$	1	2

二、直线方程与圆的方程

（二）圆的方程

3.位置关系

（3）圆与圆的位置关系

两圆位置关系	图形	成立条件（几何表示）	内公切线条数	外公切线条数
相交		$\lvert r_1-r_2\rvert<d<r_1+r_2$	0	2
内切		$d=\lvert r_1-r_2\rvert$	0	1
内含		$d<\lvert r_1-r_2\rvert$	0	0

二、直线方程与圆的方程

（二）圆的方程

【例9】(条件充分性判断)半径分别为2和5的两个圆，圆心坐标分别为$(a，1)$和$(2，b)$,则它们有4条公切线.

(1)点 P$(a，b)$在圆$(x-2)^2+(y-1)^2=49$内

(2)点P$(a，b)$在圆$(x-2)^2+(y-1)^2=49$外

二.直线方程与圆的方程

（二）圆的方程

【例9】(条件充分性判断)半径分别为2和5的两个圆，圆心坐标分别为$(a，1)$和$(2，b)$,则它们有4条公切线.

(1)点 $P(a，b)$在圆$(x-2)^2+(y-1)^2=49$内

(2)点$P(a，b)$在圆$(x-2)^2+(y-1)^2=49$外

【解析】两个圆有 4 条公切线$\Leftrightarrow$两个圆相离$\Leftrightarrow d>r_1+r_2\Leftrightarrow\sqrt{(2-a)^2+(b-1)^2}>7\Leftrightarrow(a-2)^2+(b-1)^2>49$. 故选 B.

三.对称问题

1.中心对称

（1）定义

把一个图形绕某个点旋转 180°后能与另一个图形重合，这两个图形关于这个点对称，这个点称为对称中心.

（2）性质

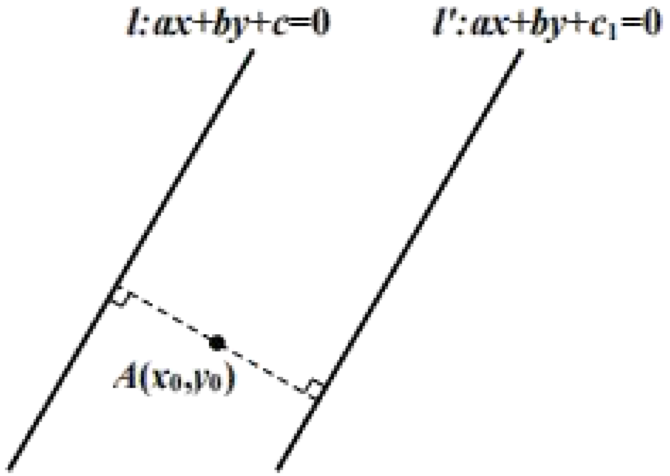
关于某个点成中心对称的两个图形，对称点的连线都经过对称中心，且被对称中心平分.

三.对称问题

1.中心对称

（3）点关于点对称

（4）直线关于点对称



【两直线关于某点中心对称，那么这两条直线必为平行直线，且该点到两直线的距离相等.】

三.对称问题

1.中心对称

【例10】已知点A的坐标为$(-1,1)$，直线l的方程为$3x+y=0$，那么直线l关于点A 的对称直线l'与两坐标轴围成的三角形面积为（　　）

(A)2　　(B)$\frac{4}{3}$　　(C)3　　(D)$\frac{7}{3}$　　(E)$\frac{8}{3}$

三.对称问题

1.中心对称

【例10】已知点A的坐标为$(-1,1)$，直线l的方程为$3x+y=0$，那么直线l关于点A 的对称直线l'与两坐标轴围成的三角形面积为（ E ）

(A)2　(B)$\frac{4}{3}$　(C)3　(D)$\frac{7}{3}$　(E)$\frac{8}{3}$

【解析】从直线 l 上任取两点，如$(0,0)$，$\left(-\frac{1}{3},1\right)$，它们关于点 A 的对称点分别为$(-2,2)$，$\left(-\frac{5}{3},1\right)$，故 l' 的方程为$\frac{x+2}{-\frac{5}{3}+2}=\frac{y-2}{1-2}$，即 $3x+y+4=0$，与两坐标轴围成三角形的面积 $S=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\times 4=\frac{8}{3}$，选 E.

三.对称问题

师大课堂 SHI DA KE TANG

2.轴对称

（1）定义

把一个图形沿着某条直线对折以后能与另一个图形重合，这两个图形关于这条直线对称这条直线叫作对称轴

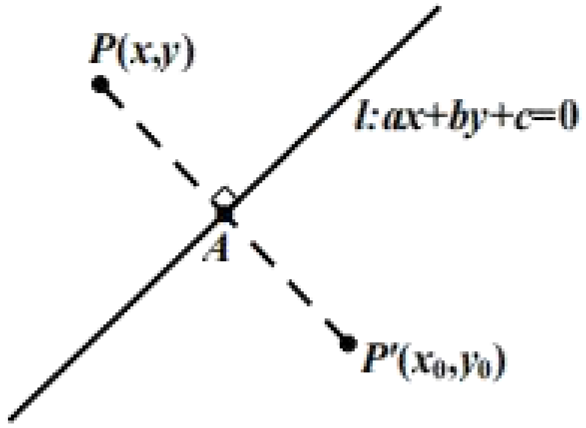
（2）性质

- ✓ 关于某条直线对称的两个图形，平行的对称线段平行且相等
- ✓ 不平行的对称线段相交或其延长线相交，交点一定在对称轴上
- ✓ 对称点的连线都被对称轴垂直平分

三.对称问题

2.轴对称

（3）点关于直线对称



三.对称问题

2.轴对称

【例11】点A$(1,-1)$关于直线$x+y=1$的对称点的坐标是 (　　)

(A)$(2,0)$　　(B)$(1,0)$　　(C)$(-1,0)$　　(D)$(0,-2)$　　(E)$(-1,1)$

三.对称问题

师大课堂 SHI DA KE TANG

2.轴对称

【例11】点A(1, − 1)关于直线$x+y=1$的对称点的坐标是 (　A　)

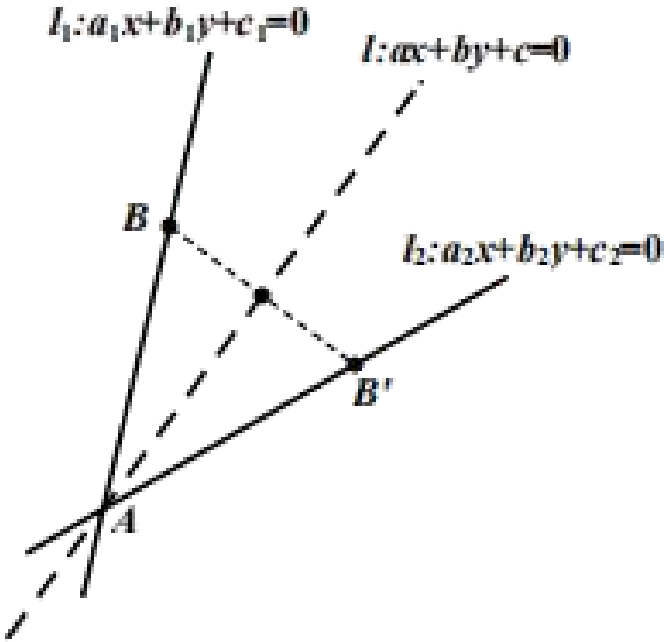
(A)(2,0)　　(B)(1,0)　　(C)(−1,0)　　(D)(0, − 2)　　(E)(−1,1)

【解析】设A'坐标为(x_0, y_0)，则有$\begin{cases}\dfrac{1+x_0}{2}+\dfrac{y_0-1}{2}=1\\(-1)\times\dfrac{y_0+1}{x_0-1}=-1\end{cases}$，解得$\begin{cases}x_0=2\\y_0=0\end{cases}$，故选A.

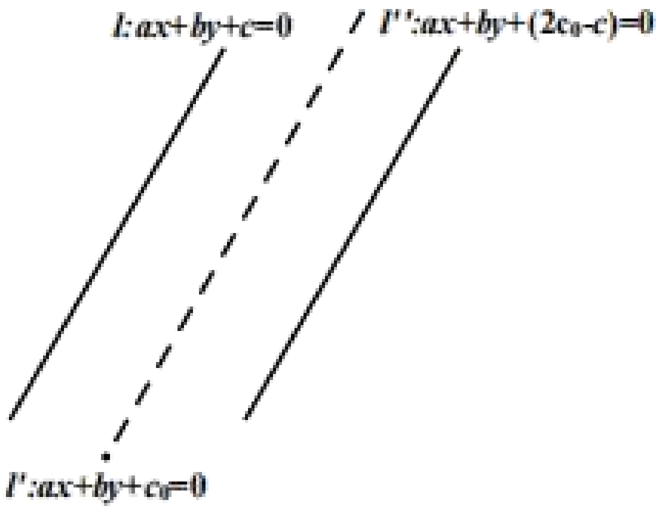
三.对称问题

2.轴对称

（4）直线关于直线对称



（5）平行直线对称



三.对称问题

3.特殊的对称

对称方式	点 $p(x_0, y_0)$	直线 $l: ax+by+c=0$
关于 x 轴对称	$p'(x_0, -y_0)$	$l': ax-by+c=0$
关于 y 轴对称	$p'(-x_0, y_0)$	$l': -ax+by+c=0$
关于原点对称	$p'(-x_0, -y_0)$	$l': ax+by-c=0$
关于 $y=x$ 对称	$p'(y_0, x_0)$	$l': ay+bx+c=0$
关于 $y=-x$ 对称	$p'(-y_0, -x_0)$	$l': ay+bx-c=0$

感 谢 聆 听

主讲:媛媛老师
邮箱:family7662@dingtalk.com