全国硕士研究生招生考试

管综数学

主讲:媛媛老师

邮箱:family7662@dingtalk.com

第二章　代数

- 第二章 代数
  - 第一节 整式及其运算
  - 第二节 分式及其运算
  - 第三节 函数
  - 第四节 代数方程
  - 第五节 不等式

第一节 整式及其运算

第二章　第一节整式及其运算

一、整式

二、整式加减及乘法运算

三、整式的除法

一、整式

1.代数式

由数和字母经过有限次的加、减、乘、除、乘方、开方等代数运算得到的式子，称为代数式.单个数字或字母也是代数式.

$$\text{代数式}\begin{cases}\text{有理式}\begin{cases}\text{整式}\begin{cases}\text{单项式}\\\text{多项式}\end{cases}\\\text{分式：}\dfrac{1}{x}\end{cases}\\\text{无理式：}\sqrt{x+1}\end{cases}$$

一.整式

2.整式

在整式中除数不能含有字母.

（1）单项式

$$\boxed{5}a^{\boxed{3}}b^{\boxed{1}}$$

系数

次数/幂

单项式的次：3+1=4

（2）多项式

$$\boxed{a^3b^1}+\boxed{x^{\boxed{5}}b^{\boxed{3}}}+\boxed{33}$$

多项式的次：5+3=8

多项式的项：三项

一、整式

（3）同类项

若两个单项式所含字母相同，并且相同字母的幂也相同，则称这两个单项式为同类项.

（4）多项式相等

若两个多项式的对应项、系数均相等，则称这两个多项式相等.

二.整式加减及乘法运算

1.整式的加减

去括号，合并同类项.

合并同类项时“系数相加减，字母不变”.

$2x^2y-(5x^2y+3xy)+xy$

二.整式加减及乘法运算

2.整式的乘法

采用分配律，即每个整式的各项要互相乘，再合并同类项.

【注：单项式相乘“系数相乘，次方相加”】

$$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$$

$$(3x+1)(2+x)$$

二.整式加减及乘法运算

3.基本公式

（1）平方差公式

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

$x^2-4=$

$3-\left(x+\sqrt{3}\right)^2=$

$(x+4)(x-4)=$

$\left(\sqrt{5}-x\right)\left(x+\sqrt{5}\right)=$

二.整式加减及乘法运算

3.基本公式

（1）平方差公式

【例1】$(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)=(\quad)$

$A.2^{16}-4$　　$B.2^{16}+2$　　$C.2^{16}-2$　　$D.2^{16}+1$　　$E.2^{16}-1$

二.整式加减及乘法运算

3.基本公式

（1）平方差公式

【例1】$(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)=(\quad)$

$A.\ 2^{16}-4$　$B.\ 2^{16}+2$　$C.\ 2^{16}-2$　$D.\ 2^{16}+1$　$E.\ 2^{16}-1$

【解析】$(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)$

$=\frac{(2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)}{2-1}=\frac{(2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)}{2-1}$

$=\frac{(2^4-1)(2^4+1)(2^8+1)}{2-1}=\frac{(2^8-1)(2^8+1)}{2-1}=\frac{2^{16}-1}{2-1}=2^{16}-1$，故选 E.

二.整式加减及乘法运算

3.基本公式

（2）完全平方公式

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

练习：

$(x+3)^2=$

$(5-x)^2=$

二.整式加减及乘法运算

3.基本公式

（2）完全平方公式

【例2】若$x^2+\frac{1}{x^2}=7$,则$x+\frac{1}{x}=$（　　）

$A.3$　　$B.-3$　　$C.\pm 3$　　$D.4$　　$E.\pm 4$

二.整式加减及乘法运算

3.基本公式

（2）完全平方公式

【例2】若$x^2+\frac{1}{x^2}=7$,则$x+\frac{1}{x}=$（   ）

$A.3$　　$B.-3$　　$C.\pm 3$　　$D.4$　　$E.\pm 4$

【解析】$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=7$；$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=9 \Rightarrow x+\frac{1}{x}=\pm 3$. 选 C.

二.整式加减及乘法运算

3.基本公式

（2）完全平方公式

【例3】若$x^2-3x+1=0$,则$\left|x-\frac{1}{x}\right|=$（　）

$A.\sqrt{2}$　$B.\sqrt{3}$　$C.1$　$D.2$　$E.\sqrt{5}$

二.整式加减及乘法运算

师大课堂 SHI DA KE TANG

3.基本公式

（2）完全平方公式

【例3】若$x^2-3x+1=0$,则$\left|x-\frac{1}{x}\right|=$（　）

$A.\sqrt{2}$　$B.\sqrt{3}$　$C.1$　$D.2$　$E.\sqrt{5}$

【解析】

$x^2-3x+1=0\Leftrightarrow x+\frac{1}{x}=3$，$\left|x-\frac{1}{x}\right|=\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}-2}=\sqrt{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4}=\sqrt{5}$，故选 E.

二.整式加减及乘法运算

师大课堂 SHI DA KE TANG

3.基本公式

（3）三个数和的平方

①$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

若$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$，则$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2$

二.整式加减及乘法运算

3.基本公式

（3）三个数和的平方

【例4】若实数a,b,c满足$a+b+c=1$和$\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+3}+\frac{1}{c+4}=0$，则$(a+2)^2+(b+3)^2+(c+4)^2=(\quad)$

$A.10$　　$B.50$　　$C.80$　　$D.100$　　$E.200$

二.整式加减及乘法运算

3.基本公式

（3）三个数和的平方

【例4】若实数a,b,c满足$a+b+c=1$和$\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+3}+\frac{1}{c+4}=0$，则$(a+2)^2+(b+3)^2+(c+4)^2=$（ ）

$A.10$ $B.50$ $C.80$ $D.100$ $E.200$

【解析】 由$\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+3}+\frac{1}{c+4}=0$，

得$(a+2)^2+(b+3)^2+(c+4)^2=(a+2+b+3+c+4)^2=10^2=100.$

二.整式加减及乘法运算

3.基本公式

（3）三个数和的平方

② $a^2+b^2+c^2\pm ab\pm bc\pm ca=\frac{1}{2}\left[(a\pm b)^2+(b\pm c)^2+(c\pm a)^2\right]$

二.整式加减及乘法运算

3.基本公式

（4）立方和（差）公式

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

$x^3\pm 1=(x\pm 1)(x^2\mp x+1)$

二、整式加减及乘法运算

3.基本公式

（4）立方和（差）公式

【例5】已知$a-b=2$，$a^3-b^3=28$，则$a^2+b^2=$（　）

$A.6$　　$B.8$　　$C.\frac{14}{3}$　　$D.5$　　$E.\frac{32}{3}$

二.整式加减及乘法运算

3.基本公式

（4）立方和（差）公式

【例5】已知$a-b=2$，$a^3-b^3=28$，则$a^2+b^2=$（　）

$A.6$　　$B.8$　　$C.\frac{14}{3}$　　$D.5$　　$E.\frac{32}{3}$

【解析】 $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)=28 \Rightarrow a^2+ab+b^2=14$，

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2=4$，故 $a^2+b^2=\frac{32}{3}$，选 E.

二.整式加减及乘法运算

3.基本公式

（5）和与差的立方公式

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2\mathrm{b} + 3ab^2 \pm b^3$$

二.整式加减及乘法运算

3.基本公式

（6）常用配方公式

$a^3+b^3+c^3=3abc \Rightarrow a=b=c$或$a+b+c=0$

推论：

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$

二.整式加减及乘法运算

4.因式分解

（1）概念

把一个多项式化成几个最简整式的积的形式，要分解到不能再分解为止.

（2）因式分解的一般方法

①提公因式法

②运用基本公式法

③分组分解法

④十字相乘法

⑤换元法

⑥双十字相乘法：用于二元二次六项式

二、整式加减及乘法运算

4.因式分解

①提公因式法

【例6】将$4ab^2-6a^2b$因式分解

二、整式加减及乘法运算

4.因式分解

②运用基本公式法

③分组分解法（2 + 2分法、3 + 1分法）

分组后可以提取公因式或运用基本公式

【例7】将$ax+ay+bx+by$因式分解

二、整式加减及乘法运算

4.因式分解

④十字相乘法

用于二次三项式型$abx^2+(bp+aq)x+pq$的分解因式.

步骤：竖分二次项与常数项，交叉相乘和相加，检验确定，横写因式.

口诀：拆两头，凑中间，横写因式不能乱.

二、整式加减及乘法运算

4.因式分解

【例8】将$3x^2-10x+3$因式分解

二.整式加减及乘法运算

4.因式分解

⑤换元法

二.整式加减及乘法运算

4.因式分解

⑥双十字相乘法：用于二元二次六项式.

步骤：分解x^2，分解常数项，凑关于x的一次项系数（常数项一旦确定不能再变），分解y^2，凑关于y的一次项系数，验证关于xy的系数.

【例9】将$2x^2-3xy+y^2+8x-5y+6$因式分解

二.整式加减及乘法运算

4.因式分解

【例9】将$2x^2-3xy+y^2+8x-5y+6$因式分解

$$2x^2-3xy\boxed{+y^2}+8x\boxed{-5y+6}$$

$$\begin{array}{ccc} 2x & -y & 2 \\ x & -y & 3 \end{array}$$

$$\boxed{-2xy-xy=-3xy}$$

$$\boxed{-3y-2y=-5y}$$

$$\boxed{6x+2x=8x}$$

二.整式加减及乘法运算

因式分解的方法选择：

①各项有公因式，先提公因式；

②提出公因式或无公因式可提，再考虑可否运用公式或十字相乘法；

③对二次三项式，应先尝试用十字相乘法分解，不行的再用求根公式法；

④最后考虑用分组分解法、换元法和双十字相乘法（二元二次六项式）.

三.整式的除法

1.整式的除法

整式$F(x)$除以整式$f(x)$的商式为$g(x)$，余式为$r(x)$，则有

$F(x)=f(x)g(x)+r(x)$，并且$r(x)$的次数要小于$f(x)$的次数.

当$r(x)=0$时，$F(x)=f(x)g(x)$，此时称$F(x)$能被$f(x)$整除，记作

$f(x)|F(x)$.

三.整式的除法

2.因式定理（整除）

$f(x)$含有因式$ax-b \Leftrightarrow f(x)$被$ax-b$整除$\Leftrightarrow f\left(\frac{b}{a}\right)=0$.

三.整式的除法

2.因式定理（整除）

【例10】若多项式$f(x)=x^3+a^2x^2+3x-3a$能被$x+1$整除，则实数$a=$（　　）

$A.0$　　B. 1　　C. 0或1　　D. 2或-1　　E. -1或4

三.整式的除法

2.因式定理（整除）

【例10】若多项式$f(x)=x^3+a^2x^2+3x-3a$能被$x+1$整除，则实数$a=$（　　）

$A.0$　　B. 1　　C. 0或1　　D. 2或-1　　E. -1或4

【解析】

根据因式定理，有 $f(-1)=-1+a^2-3-3a=0$，解得 $a=-1$ 或 $a=4$．所以选 E.

三、整式的除法

3.余式定理（非整除）

由于余式的次数要小于除式，所以当除式为一次表达式时，余式就为常数，从而得到余式定理：$f(x)$除以$ax-b$的余式为$f\left(\frac{b}{a}\right)$.

第二章 代数

- 第一节 整式及其运算
  - 一、整式
  - 二、整式加减及乘法运算
  - 三、整式的除法
- 第二节 分式及其运算
- 第三节 函数
- 第四节 代数方程
- 第五节 不等式