管理类专业学位硕士研究生入学统一考试

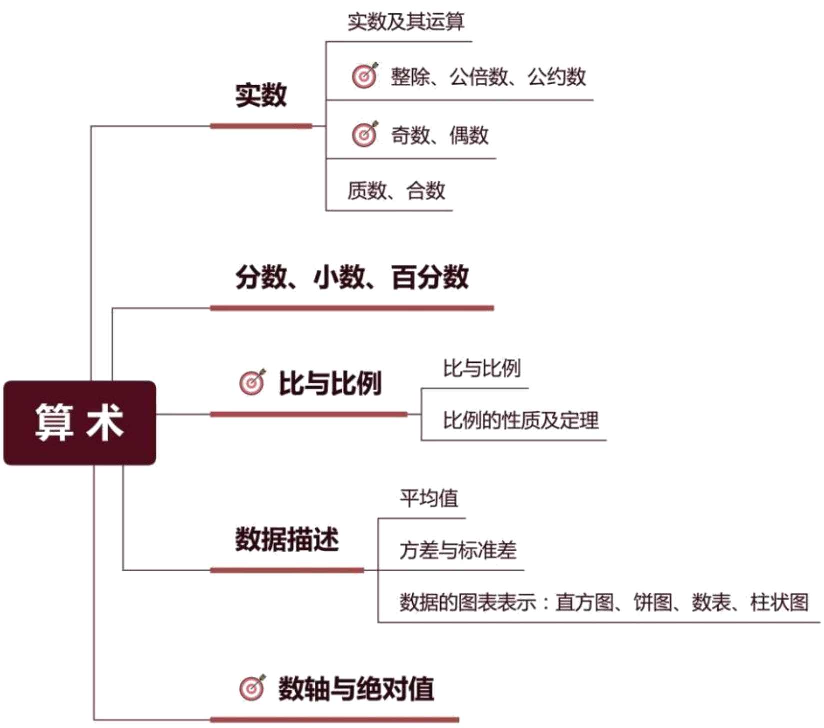
数学

管理类联考 导练手册

适用于MBA、MPA、MPAcc、MEM

第一章 算术

知识脉络



真题呈现

一、实数

1. （2023）$\sqrt{5+2\sqrt{6}}-\sqrt{3}=$【 】

A. $\sqrt{2}$

B. $\sqrt{3}$

C. $\sqrt{6}$

D. $2\sqrt{2}$

E. $2\sqrt{3}$

【答案】A　　【考查】无理数运算

【解析】根据题意，得：$\sqrt{5+2\sqrt{6}}-\sqrt{3}=\sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2}-\sqrt{3}=\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{3}=\sqrt{2}$.

故选 A.

2.（2023）有体育、美术、音乐、舞蹈 4 个兴趣班，每名同学至少参加 2 个，则至少有 12 名同学参加的兴趣班完全相同.【 】

（1）参加兴趣班的同学共有 125 人.

（2）参加 2 个兴趣班的同学有 70 人.

【答案】D　　　　【考查】整数的除法

【解析】根据题意，得：每个人可以选择 2 个、3 个或 4 个兴趣班，即每个人的选择共有 $C_4^2+C_4^3+C_4^4=11$ 种.

条件（1），参加兴趣班的同学共有 125 人.将这 125 人尽可能平均分到 11 种选择中去，则 125÷11＝11……4，即有每种选择都可以平均分到 11 个人，还剩下 4 个人没有选择，那这 4 个人只能再去选择这 11 种选择，即至少有 12 名同学参加的兴趣班完全相同.故条件（1）充分.

条件（2），参加 2 个兴趣班的同学有 70 人.选择 2 个兴趣班，则每个人有 $C_4^2=6$ 种选择，将这 70 人尽可能平均分到这 6 种选择中去，则 70÷6＝11……4，与条件（1）等价，即有每种选择都可以平均分到 11 个人，还剩下 4 个人没有选择，那这 4 个人只能再去选择这 6 种选择，即至少有 12 名同学参加的兴趣班完全相同.故条件（2）充分.

综上，故选 D.

3.（2023）已知 m，n，p 是三个不同的质数，则能确定 m，n，p 乘积.【 】

（1）$m+n+p=16$.

（2）$m+n+p=20$.

【答案】A　　　　【考查】质数问题

【解析】条件（1），$m+n+p=16$，则这三个数中必是两奇一偶，唯一的偶质数是 2.

设 $m=2\Rightarrow n+p=14=3+11\Rightarrow m\cdot n\cdot p=2\times3\times11=66$.即能确定 m，n，p 乘积.故条件（1）充分.

条件（2），$m+n+p=20$，则这三个数中必是两奇一偶，唯一的偶质数是 2.设 $m=2\Rightarrow n$

$+p=18=5+13$ 或 $n+p=18=7+11 \Rightarrow m \cdot n \cdot p=2\times5\times13=130$ 或 $m \cdot n \cdot p=2\times7\times11=154$. m，n，p 乘积的结果有两种. 即不能确定 m，n，p 乘积. 故条件（2）不充分.

综上，故选 A.

4.（2022）一个自然数的各位数字都是 105 的质因数，且每个质因数至多出现一次，则这样的自然数有【 】

A. 6 个

B. 9 个

C. 12 个

D. 15 个

E. 27 个

【答案】D　　　　　　　　　【考查】算术——质因数分解

【解析】根据题意可知 $105=3\times5\times7$. 则 105 的质因数有 3、5、7 这三个数. 因为没有说明这个自然数是几位数. 因此可以分成以下三种情况：

①自然数为 1 位数：$A_3^1=3$ 种情况.

②自然数为 2 位数：$A_3^2=6$ 种情况.

③自然数为 3 位数：$A_3^3=6$ 种情况.

综上，满足题意的自然数共有 $3+6+6=15$. 故选 D.

二、比与比例

1.（2015）若实数 a，b，c 满足 $a:b:c=1:2:5$，且 $a+b+c=24$，则 $a^2+b^2+c^2=$【 】

A. 30

B. 90

C. 120

D. 240

E. 270

【答案】E　　　　　　　　　【考查】比与比例

【解析】根据题意，设 $a=k$，$b=2k$，$c=5k$. $\because a+b+c=k+2k+5k=8k=24$. $\therefore k=3$.

因此，$a^2+b^2+c^2=k^2+(2k)^2+(5k)^2=k^2+4k^2+25k^2=30k^2=30\times3^2=30\times9=270$.

故选 E.

2.（2008）若$a:b=\frac{1}{3}:\frac{1}{4}$，则$\frac{12a+16b}{12a-8b}=$【 】

A. 2

B. 3

C. 4

D. −3

E. −2

【答案】C　　　　　　　　【考查】比与比例

【解析】根据题意，将已知条件化简后，$a:b=4:3$，则$\frac{12a+16b}{12a-8b}=\frac{48+48}{48-24}=4$. 故选 C.

三、数据描述

1.（2023）跳水比赛中，裁判给某选手的一个动作打分，其平均值为 8.6，方差为 1.1，若去掉一个最高分 9.7 和一个最低分 7.3，则剩余得分的【 】

A. 平均值变小，方差变大

B. 平均值变小，方差变小

C. 平均值变小，方差不变

D. 平均值变大，方差变大

E. 平均值变大，方差变小

【答案】E　　　　　　　　【考查】平均值、方差

【解析】∵去掉的分数的平均值为$(9.7+7.3)\div 2=8.5<8.6$，低于原数据的平均值.

∴剩余得分的平均值变大.

∵去掉最高分和最低分之后，数据波动性变小. ∴剩余得分的方差变小.

综上所述，故选 E.

2.（2021）某班增加两名同学，则该班同学的平均身高增加了.【 】

（1）增加的两名同学的平均身高与原来男同学的平均身高相同.

（2）原来男同学的平均身高大于女同学的平均身高.

【答案】C　　　　　　　　【考查】算术——平均值

【解析】条件（1），增加的两名同学的平均身高与原来男同学的平均身高相同，但是不清楚女生的平均身高. 故条件（1）不充分.

条件（2），原来男同学的平均身高大于女同学的平均身高，但是未说明增加两名同学的平均身高情况. 故条件（2）不充分.

条件（1）和条件（2）单独都不充分，考虑条件（1）（2）联合.

平均身高＝（男同学平均身高＋女同学平均身高）÷（男同学人数＋女同学人数）.
条件（1）（2）联合得：男同学平均身高＞女同学平均身高，增加了两名同学的平均身高＝原来男同学的平均身高，所以增加的两名同学的平均身高＞班级原平均身高.
即增加了两名同学后，该班同学的平均身高增加了. 故条件（1）（2）联合起来充分.
综上，故选 C.

3.（2020）某人在同一观众群体中调查了对五部电影的看法，得到如下数据：

电影	第一部	第二部	第三部	第四部	第五部
好评率	0.25	0.5	0.3	0.8	0.4
差评率	0.75	0.5	0.7	0.2	0.6

据此数据，观众意见分歧最大的前两部电影依次是【 】
A. 第一部、第三部
B. 第二部、第三部
C. 第二部、第五部
D. 第四部、第一部
E. 第四部、第二部

【答案】C　　　　　　【考查】数据描述
【解析】极差＝最大值－最小值.
极差越小，观众的意见争议（分歧）也就越大. 极差越大，观众的意见争议（分歧）也就越小.
根据题意得，这五部电影的极差的绝对值依次为 0.5，0，0.4，0.6，0.2.
所以观众对这五部电影的意见分歧由大到小为：第二部、第五部、第三部、第一部、第四部，即观众意见分歧最大的前两部电影依次是第二部、第五部. 故选 C.

四、数轴与绝对值

1.（2021）设a，b为实数，则能确定$|a|+|b|$的值.【 】
（1）已知$|a+b|$的值.
（2）已知$|a-b|$的值.

【答案】C　　　　　　【考查】算术——绝对值三角不等式
【解析】条件（1），已知$|a+b|$的值，取特值分析.
①当$a=1$，$b=-1$时，$|a+b|=0$，$|a|+|b|=2$.
②当$a=2$，$b=-2$时，$|a+b|=0$，$|a|+|b|=4$.

故条件（1）不充分.

条件（2），已知$|a-b|$的值，取特值分析.

①当$a=1$，$b=1$时，$|a-b|=0$，$|a|+|b|=2$.

②当$a=2$，$b=2$时，$|a-b|=0$，$|a|+|b|=4$.

故条件（2）不充分.

条件（1）和条件（2）单独都不充分，考虑条件（1）（2）联合.

①若$|a-b|\leqslant|a+b| \Rightarrow ab\geqslant0$，则$|a|+|b|=|a+b|$.

②若$|a-b|\geqslant|a+b| \Rightarrow ab\leqslant0$，则$|a|+|b|=|a-b|$.

故条件（1）（2）联合起来充分.

综上，故选C.

2.（2019）设实数a，b满足$ab=6$，$|a+b|+|a-b|=6$，则$a^2+b^2=$【 】

A. 10

B. 11

C. 12

D. 13

E. 14

【答案】D　　　　【考查】绝对值

【解析】方法一：根据题意，$ab=6>0$，则a，b同号.

①若同正，可设$a\geqslant b>0$，$|a+b|+|a-b|=a+b+a-b=2a=6$，解得$a=3$，$b=\frac{6}{a}=2$. 代入得：$a^2+b^2=13$.

②若同负，可设$a\leqslant b<0$，$|a+b|+|a-b|=-a-b-a+b=-2a=6$，解得$a=-3$，$b=\frac{6}{a}=-2$. 代入得：$a^2+b^2=13$.

方法二：$\because |a+b|+|a-b|=6$. $\therefore \sqrt{a^2+b^2+2ab}+\sqrt{a^2+b^2-2ab}=6$.

将$ab=6$代入得$\sqrt{a^2+b^2+12}+\sqrt{a^2+b^2-12}=6 \Rightarrow \sqrt{a^2+b^2+12}=6-\sqrt{a^2+b^2-12}$.

整理得：$\sqrt{a^2+b^2-12}=1$. 解得$a^2+b^2=13$.

故选D.

真题演练

一、问题求解：第 1～15 小题，每小题 3 分，共 45 分。下列每题给出的 A、B、C、D、E 五个选项中，只有一项是符合试题要求的。

1.（2000）$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{99\times100}=$【 】

A. $\frac{99}{100}$

B. $\frac{100}{101}$

C. $\frac{99}{101}$

D. $\frac{97}{100}$

2.（2001）已知 $|a|=5$，$|b|=7$，$ab<0$，则 $|a-b|=$【 】

A. 2

B. -2

C. 12

D. -12

3.（2002）设 $\frac{1}{x}:\frac{1}{y}:\frac{1}{z}=4:5:6$，则使 $x+y+z=74$ 成立的 y 值是【 】

A. 24

B. 36

C. $\frac{74}{3}$

D. $\frac{37}{2}$

4.（2002）若 $\frac{a+b-c}{c}=\frac{a-b+c}{b}=\frac{-a+b+c}{a}=k$，则 k 的值为【 】

A. 1

B. 1 或 -2

C. -1 或 2

D. -2

5.（2003）已知$\left|\frac{5x-3}{2x+5}\right|=\frac{3-5x}{2x+5}$，则实数$x$的取值范围是【 】

A. $x<-\frac{5}{2}$或$x\geqslant\frac{3}{5}$

B. $-\frac{5}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3}{5}$

C. $-\frac{5}{2}<x\leqslant\frac{3}{5}$

D. $-\frac{3}{5}\leqslant x<\frac{5}{2}$

E. 以上结论均不正确

6.（2007）设$y=|x-2|+|x+2|$，则下列结论正确的是【 】

A. y没有最小值

B. 只有一个x使y取到最小值

C. 有无穷多个x使y取到最大值

D. 有无穷多个x使y取到最小值

E. 以上均不对

7.（2008）以下命题中正确的是【 】

A. 两个数的和为正数，则这两个数都是正数

B. 两个数的差为负数，则这两个数都是负数

C. 两个数中较大的一个其绝对值也较大

D. 加上一个负数，等于减去这个数的绝对值

E. 一个数的 2 倍大于这个数本身

8.（2008）一个大于 1 的自然数的算术平方根为a，则与该自然数左右相邻的两个自然数的算术平方根分别为【 】

A. $\sqrt{a}-1$，$\sqrt{a}+1$

B. $a-1$，$a+1$

C. $\sqrt{a-1}$，$\sqrt{a+1}$

D. $\sqrt{a^2-1}$，$\sqrt{a^2+1}$

E. a^2-1，a^2+1

9.（2008）$|3x+2|+2x^2-12xy+18y^2=0$，则 $2y-3x=$【 】

A. $-\frac{14}{9}$

B. $-\frac{2}{9}$

C. 0

D. $\frac{2}{9}$

E. $\frac{14}{9}$

10.（2008）设a，b，c为整数，且$|a-b|^{20}+|c-a|^{41}=1$，则$|a-b|+|a-c|+|b-c|=$【 】

A. 2

B. 3

C. 4

D. -3

E. -2

11.（2009）若x，y是有理数，且满足$(1+2\sqrt{3})x+(1-\sqrt{3})y-2+5\sqrt{3}=0$，则$x$，$y$的值分别为【 】

A. 1，3

B. -1，2

C. -1，3

D. 1，2

E. 以上结论都不正确

12.（2009）已知实数a，b，x，y满足$y+\left|\sqrt{x}-\sqrt{2}\right|=1-a^2$和$|x-2|=y-1-b^2$，则$3^{x+y}+3^{a+b}$ $=$【 】

A. 25

B. 26

C. 27

D. 28

E. 29

13. （2009）设$y=|x-a|+|x-20|+|x-a-20|$，其中 $0<a<20$，则对于满足$a\leqslant x\leqslant 20$ 的x值，y的最小值是【 】

A. 10

B. 15

C. 20

D. 2

E. 30

14. （2011）若实数a，b，c满足$|a-3|+\sqrt{3b+5}+(5c-4)^2=0$，则$abc=$【 】

A. -4

B. $-\frac{5}{3}$

C. $-\frac{4}{3}$

D. $\frac{4}{5}$

E. 3

15. （2011）设a，b，c是小于 12 的三个不同的质数（素数），且$|a-b|+|b-c|+|c-a|=8$，则$a+b+c=$【 】

A. 10

B. 12

C. 14

D. 15

E. 19

二、条件充分性判断：第 16～25 小题，每小题 3 分，共 30 分。要求判断每题给出的条件（1）和条件（2）能否充分支持题干所陈述的结论。A、B、C、D、E 五个选项为判断结果，请选择一项符合试题要求的判断。

A. 条件（1）充分，但条件（2）不充分。

B. 条件（2）充分，但条件（1）不充分。

C. 条件（1）和（2）单独都不充分，但条件（1）和条件（2）联合起来充分。

D. 条件（1）充分，条件（2）也充分。

E. 条件（1）和（2）单独都不充分，条件（1）和条件（2）联合起来也不充分。

16.（2003）可以确定$\frac{|x+y|}{x-y}=2$.【 】

（1）$\frac{x}{y}=3$.

（2）$\frac{x}{y}=\frac{1}{3}$.

17.（2004）$\sqrt{a^2b}=-a\sqrt{b}$.【 】

（1）$a>0$，$b<0$.

（2）$a<0$，$b>0$.

18.（2007）m是一个整数.【 】

（1）若$m=\frac{p}{q}$，其中p与q为非零整数，且m^2是一个整数.

（2）若$m=\frac{p}{q}$，其中p与q为非零整数，且$\frac{2m+4}{3}$是一个整数.

19.（2007）$x>y$.【 】

（1）若x和y都是正整数，且$x^2<y$.

（2）若x和y都是正整数，且$\sqrt{x}<y$.

20.（2007）$a<-1<1<-a$.【 】

（1）a为实数，$a+1<0$.

（2）a为实数，$|a|<1$.

21.（2008）$ab^2<cb^2$.【 】

（1）实数a，b，c满足$a+b+c=0$.

（2）实数a，b，c满足$a<b<c$.

22.（2008）$a>b$.【 】

（1）a，b为实数，且$a^2>b^2$.

（2）a，b为实数，且$(\frac{1}{2})^a<(\frac{1}{2})^b$.

23.（2008）$\frac{n}{14}$是一个整数.【 】

（1）n是一个整数，且$\frac{3n}{14}$也是一个整数.

（2）n是一个整数，且$\frac{n}{7}$也是一个整数.

24.（2009）$2^{x+y}+2^{a+b}=17$.

（1）a，b，x，y满足$y+\left|\sqrt{x}-\sqrt{3}\right|=1-a^2+\sqrt{3}b$.

（2）a，b，x，y满足$|x-3|+\sqrt{3}b=y-1-b^2$.

25.（2010）有偶数位来宾.【 】

（1）聚会时所有来宾都被安排坐在一张圆桌周围，且每位来宾与其邻座性别不同.

（2）聚会时男宾人数是女宾人数的两倍.

参考答案

答案速查

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	C	A	B	C	D	D	D	E	A
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
C	D	C	A	D	E	B	A	E	A
21	22	23	24	25					
E	B	A	C	A					

1.【答案】A　　【考查】实数的性质及运算

【解析】$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{99\times100}=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\cdots+(\frac{1}{99}-\frac{1}{100})$

$=1-\frac{1}{100}=\frac{99}{100}$. 故选A.

2.【答案】C　　【考查】绝对值的三角不等式

【解析】[补充：本题使用的三角不等式为：若$ab<0$，有$|a-b|=|a|+|b|$；$|a+b|=\big||a|-|b|\big|$]

∵$ab<0$. ∴根据三角不等式得：$|a-b|=|a|+|b|=5+7=12$. 故选 C.

3.【答案】A　　【考查】比例的运算

【解析】$\frac{1}{x}:\frac{1}{y}:\frac{1}{z}=4:5:6\Rightarrow x:y:z=\frac{1}{4}:\frac{1}{5}:\frac{1}{6}=15:12:10$. ∵$x+y+z=74$. ∴$y=74\times\frac{12}{15+12+10}=24$. 故选 A.

4.【答案】B　　【考查】比例定理的应用

【解析】根据题意得：$\begin{cases}a+b-c=ck & ①\\ a-b+c=bk & ②\\ -a+b+c=ak & ③\end{cases}\Rightarrow ①+②+③=(a+b+c)=(a+b+c)k$，即$(a+b+c)(k-1)=0$. ∴$a+b+c=0$或$k=1$. 若$a+b+c=0$，则$\frac{a+b-c}{c}=k=-2$. 综上，$k=1$或$k=-2$. 故选 B.

5.【答案】C　　【考查】绝对值的定义

【解析】根据题意得：去掉绝对值后变成了相反数，则绝对值内部$\frac{5x-3}{2x+5}\leqslant 0$. 即$(5x-3)(2x+5)\leqslant 0\left(x\neq-\frac{5}{2}\right)$，解得：$-\frac{5}{2}<x\leqslant\frac{3}{5}$. 故选 C.

6.【答案】D　　【考查】绝对值的三角不等式

【解析】函数$y=|x-2|+|x+2|=\begin{cases}-2x, & x<-2\\ 4, & -2\le x\le 2\\ 2x, & x>2\end{cases}$是分段函数，在分段点$x\in[-2,2]$之间，函数恒取最小值 4. 故选 D.

7.【答案】D　　【考查】实数的运算

【解析】A. 两个数的和为正数，只能得到至少有一个数为正数. 则 A 选项错误.
B. 两个数的差为负数，这两个数的符号不确定. 则 B 选项错误.
C. 只有当两个数都为正数时，该描述才正确. 则 C 选项错误.
E. 对于正数才成立. 则 E 选项错误.

综上，故选 D.

8.【答案】D　　【考查】实数的运算

【解析】一个大于 1 的自然数的算术平方根为a，则原自然数为a^2，该自然数左右相邻的两个自然数为a^2-1 和a^2+1，再开方得到算术平方根分别为$\sqrt{a^2-1}$，$\sqrt{a^2+1}$. 故选 D.

9.【答案】E　　【考查】实数的运算

【解析】$|3x+2|+2x^2-12xy+18y^2=0\Rightarrow|3x+2|+2(x-3y)^2=0\Rightarrow x=-\frac{2}{3}$，$y=-\frac{2}{9}$. 则 $2y-3x=\frac{14}{9}$. 故选 E.

10.【答案】A　　【考查】绝对值的性质

【解析】$\because a$，b，c为整数. $\therefore |a-b|$ 和$|c-a|$均为非负整数. 又$|a-b|^{20}+|c-a|^{41}=1$. 则$|a-b|$和$|c-a|$一个为 0，一个为 1. 设$|a-b|=0$，$|c-a|=1$. 则$a=b$. 代入$|a-b|+|a-c|+|b-c|=2|a-c|=2$. 故选 A.

11.【答案】C　　【考查】有理数与无理数的性质

【解析】$(1+2\sqrt{3})x+(1-\sqrt{3})y-2+5\sqrt{3}=(x+y-2)+(2x-y+5)\sqrt{3}=0\Rightarrow\begin{cases}x+y-2=0\\2x-y+5=0\end{cases}$，

解得：$\begin{cases}x=-1\\y=3\end{cases}$. 故选 C.

12.【答案】D　　【考查】实数的运算

【解析】$y+\left|\sqrt{x}-\sqrt{2}\right|=1-a^2\Rightarrow y-1+a^2+\left|\sqrt{x}-\sqrt{2}\right|=0$（式①）. $|x-2|=y-1-b^2\Rightarrow|x-2|+b^2+1-y=0$（式②）. ①+②$=|x-2|+b^2+a^2+\left|\sqrt{x}-\sqrt{2}\right|=0$，解得：$x=2$，$a=b=0$. 再代入$y+\left|\sqrt{x}-\sqrt{2}\right|=1-a^2$，解得：$y=1$. 则$3^{x+y}+3^{a+b}=3^{2+1}+3^{0+0}=28$. 故选 D.

13.【答案】C　　【考查】绝对值的运算

【解析】$\because a\leqslant x\leqslant 20$. $\therefore$可将原式去掉绝对值符号化简为$y=x-a+20-x+a+20-x=40-x$. 当$x=20$ 时，y取得最小值 20. 故选 C.

14.【答案】A　　　　　　　　　　【考查】非负性

【解析】根据非负性得：$a-3=0$，$3b+5=0$，$5c-4=0$. 解得：$a=3$，$b=-\frac{5}{3}$，$c=\frac{4}{5}$，则$abc=-4$. 故选 A.

15.【答案】D　　　　　　　　　　【考查】质数与绝对值

【解析】根据题意，可设$a>b>c$. 则$|a-b|+|b-c|+|c-a|=a-b+b-c+a-c=2(a-c)=8\Rightarrow a-c=4$. ∵小于 12 的质数有 2，3，5，7，11. ∴只能$a=7$，$b=5$，$c=3$才满足. 即$a+b+c=3+5+7=15$. 故选 D.

16.【答案】E　　　　　　　　　　【考查】绝对值的运算

【解析】条件（1），$\frac{x}{y}=3\Rightarrow x=3y$. 则$\frac{|x+y|}{x-y}=\frac{|3y+y|}{3y-y}=\frac{2|y|}{y}=\begin{cases}2, & y>0\\ -2, & y<0\end{cases}$. 由于无法确定分母$y$的正负号，则无法确定分式的值. 故条件（1）不充分.

条件（2），$\frac{x}{y}=\frac{1}{3}\Rightarrow y=3x$. 则$\frac{|x+y|}{x-y}=\frac{|x+3x|}{x-3x}=\frac{2|x|}{-x}=\begin{cases}-2, & x>0\\ 2, & x<0\end{cases}$. 由于无法确定分母$x$的正负号，则无法确定分式的值. 故条件（2）不充分.

综上，故选 E.

17.【答案】B　　　　　　　　　　【考查】实数的运算

【解析】根据题意得：$\sqrt{a^2b}$ 在$b\geqslant 0$时才有意义.

条件（1），$a>0$，$b<0\Rightarrow b<0$ 与上述结论$b\geqslant 0$矛盾. 故条件（1）不充分.

条件（2），$a<0$，$b>0$，根据根式的性质得：$\sqrt{a^2b}=\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{b}=|a|\sqrt{b}=-a\sqrt{b}$. 与题干结论一致，故条件（2）充分.

综上，故选 B.

18.【答案】A　　　　　　　　　　【考查】有理数的性质；整数的判断

【解析】由“$m=\frac{p}{q}$，其中p与q为非零整数”$\Leftrightarrow$“m是有理数”.

条件（1），已知m^2为整数，对此整数开根号才能得到m. 对一个整数开根号只有两种结果，要么开得尽（其结果必为整数），要么开不尽（其结果为无理数）. 条件要求“m是有理数”，那么m^2开方必然能开得尽，其结果必为整数. 与题干结论一致，故条件（1）充分.

条件（2），取特值，令$\frac{2m+4}{3}=1$，解得：$m=-\frac{1}{2}$. 即m不是一个整数. 故条件（2）不充分.

综上，故选 A.

19.【答案】E　　　　　　　　【考查】实数的大小比较

【解析】条件（1），若x和y都是正整数，且$x^2<y$ ⇒举反例：$x=1$，$y=2$，$x<y$. 与题干结论$x>y$矛盾. 故条件（1）不充分.

条件（2），若x和y都是正整数，且$\sqrt{x}<y$ ⇒举反例：$x=1$，$y=2$，$x<y$. 与题干结论$x>y$矛盾. 故条件（2）不充分.

条件（1）和条件（2）单独都不充分，考虑条件（1）（2）联合.

条件（1）（2）联合，举反例：$x=1$，$y=2$，$x<y$. 与题干结论$x>y$矛盾. 故条件（1）（2）联合起来也不充分.

综上，故选 E.

20.【答案】A　　　　　　　　【考查】实数的大小比较

【解析】条件（1），a为实数，$a+1<0$⇒ $a<-1$，$-a>1$⇒ $a<-1<1<-a$. 故条件（1）充分.

条件（2），a为实数，$|a|<1$⇒$-1<a<1$. 与题干结论$a<-1<1<-a$矛盾. 故条件（2）不充分.

综上，故选 A.

21.【答案】E　　　　　　　　【考查】实数的大小比较

【解析】根据题意：不等式两边同时除以b^2可将不等式化简为$a<c$，但前提条件是$b\neq0$. 如果$b=0$，就得到$ab^2=cb^2$，题干$ab^2<cb^2$不成立. 那么$b=0$ 就是题干成立的一个反例.

条件（1），实数a，b，c满足$a+b+c=0$⇒举反例：$b=0$⇒ $ab^2=cb^2$. 与题干结论$ab^2<cb^2$矛盾. 故条件（1）不充分.

条件（2），实数a，b，c满足$a<b<c$. ⇒举反例：$b=0$⇒ $ab^2=cb^2$. 与题干结论$ab^2<cb^2$矛盾. 故条件（2）不充分.

条件（1）和条件（2）单独都不充分，考虑条件（1）（2）联合.

条件（1）（2）联合，举反例：$b=0$⇒ $ab^2=cb^2$. 与题干结论$ab^2<cb^2$矛盾. 故条件（1）（2）联合起来也不充分.

综上，故选 E.

22.【答案】B　　　　　　　　【考查】实数的大小比较；指数函数的单调性

【解析】条件（1），a，b为实数，且$a^2>b^2\Rightarrow|a|>|b|$，但不知道$a$，$b$的正负，则无法推出$a>b$. 故条件（1）不充分.

条件（2），a，b为实数，且$(\frac{1}{2})^a<(\frac{1}{2})^b\Rightarrow$根据指数函数的单调性：当 0＜底数＜1，指数函数是单调递减的. 则可以得到：$a>b$. 故条件（2）充分.

综上，故选 B.

23.【答案】A　　　　　　　　【考查】整数的性质

【解析】条件（1），n是一个整数，且$\frac{3n}{14}$也是一个整数⇒∵3 不是 14 的约数. ∴n是 14 的倍数. 则$\frac{n}{14}$是一个整数. 故条件（1）充分.

条件（2），n是一个整数，且$\frac{n}{7}$也是一个整数⇒n是 7 的倍数，但不一定是 14 的倍数（举反例：当$n=7$时，$\frac{n}{7}=1$是整数，但$\frac{n}{14}=\frac{1}{2}$不是整数）. 故条件（2）不充分.

综上，故选 A.

24.【答案】C　　　　　　　　【考查】绝对值的非负性

【解析】条件（1），a，b，x，y满足$y+\left|\sqrt{x}-\sqrt{3}\right|=1-a^2+\sqrt{3}b$，四个未知数，只有一个方程，则无法确定未知数的值. 故条件（1）不充分.

条件（2），a，b，x，y满足$|x-3|+\sqrt{3}b=y-1-b^2$，四个未知数，只有一个方程，则无法确定未知数的值. 故条件（2）不充分.

条件（1）和条件（2）单独都不充分，考虑条件（1）（2）联合.

条件（1）（2）联合得：$\begin{cases} y+\left|\sqrt{x}-\sqrt{3}\right|=1-a^2+\sqrt{3}b & ① \\ |x-3|+\sqrt{3}b=y-1-b^2 & ② \end{cases}\Rightarrow$①＋②$=\left|\sqrt{x}-\sqrt{3}\right|+|x-3|+a^2+b^2=0$. 根据非负性解得：$x=3$，$a=0$，$b=0$，代入原式得：$y=1$. 则$2^{x+y}+2^{a+b}=2^{3+1}+2^{0+0}=17$. 故条件（1）（2）联合起来充分.

综上，故选 C.

25.【答案】A　　　　　　　　【考查】奇数、偶数的性质

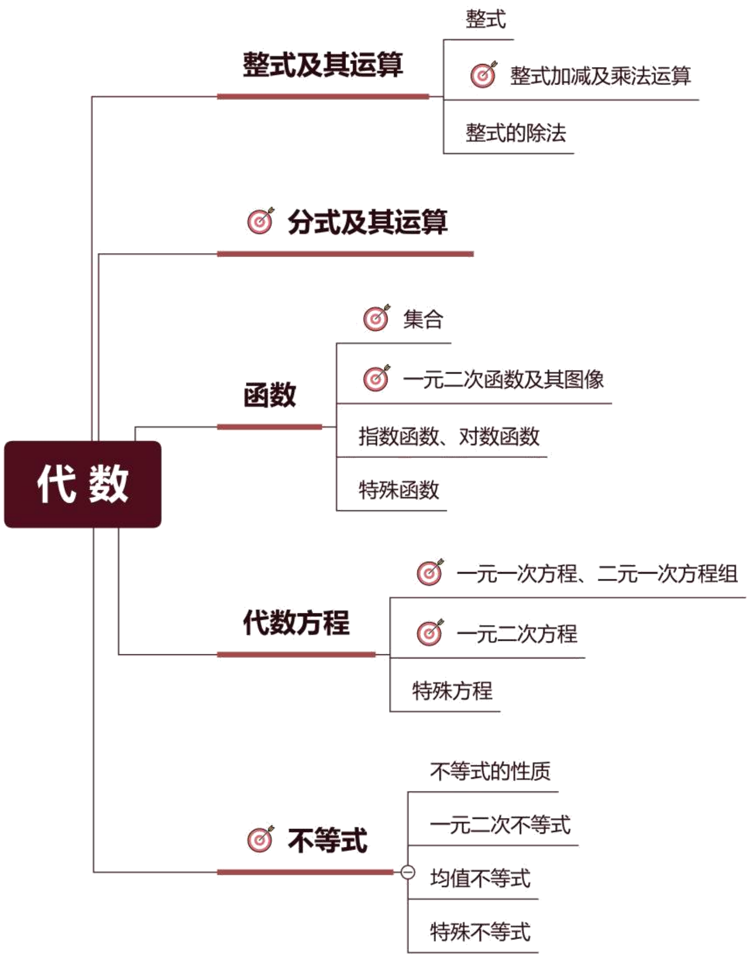
【解析】条件（1），聚会时所有来宾都被安排坐在一张圆桌周围，且每位来宾与其邻座性别不同⇒男女交错围坐一圈，说明男女人数一样多，即总人数为偶数. 故条件（1）充分.

条件（2），聚会时男宾人数是女宾人数的两倍⇒设女宾人数为n，则男宾人数为 $2n$. 所以来宾总人数为$n+2n=3n$. 当n为奇数时，总人数 $3n$为奇数（奇数×奇数＝奇数）. 与题干结论“有偶数位来宾”矛盾. 故条件（2）不充分.

综上，故选 A.

第二章 代数

知识脉络



真题呈现

一、整式及其运算

1.（2022）设x，y为实数，则$f(x, y)=x^2+4xy+5y^2-2y+2$ 的最小值为【 】

A. 1

B. $\frac{1}{2}$

C. 2

D. $\frac{3}{2}$

E. 3

【答案】A　　　　　　　　【考查】完全平方公式、二次函数最值问题、非负性

【解析】根据题意得$f(x,y)=x^2+4xy+5y^2-2y+2=(x^2+4xy+4y^2)+(y^2-2y+1)+1=(x+2y)^2+(y-1)^2+1$. $\because (x+2y)^2\geqslant 0$，$(y-1)^2\geqslant 0$. $\therefore$ 当$(x+2y)^2=0$，$(y-1)^2=0$时，$f(x,y)$取最小值$\Rightarrow$最小值为1. 故选A.

2. （2018）设实数a，b满足$|a-b|=2$，$|a^3-b^3|=26$，则$a^2+b^2=$【　】

A. 30

B. 22

C. 15

D. 13

E. 10

【答案】E　　　　　　　　【考查】因式分解、绝对值

【解析】$\because |a-b|=2\Rightarrow (a-b)^2=4$.

$\therefore$ 当$a>b$时，$a-b=2$，则$|a^3-b^3|=a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)=(a-b)[(a-b)^2+3ab]=2\times(4+3ab)=26$. 解得：$ab=3$.

当$a<b$时，$b-a=2$，则$|a^3-b^3|=b^3-a^3=(b-a)(b^2+ab+a^2)=(b-a)[(b-a)^2+3ab]=2\times(4+3ab)=26$. 解得：$ab=3$.

综上所述，$a^2+b^2=a^2+b^2-2ab+2ab=(a-b)^2+2ab=4+2\times3=10$. 故选E.

3. （2018）设m，n是正整数，则能确定$m+n$的值.【　】

（1）$\frac{1}{m}+\frac{3}{n}=1$.

（2）$\frac{1}{m}+\frac{2}{n}=1$.

【答案】D　　　　　　　　【考查】因式分解、方程

【解析】方法一：

条件（1），$\frac{1}{m}+\frac{3}{n}=1\Rightarrow mn-n-3m=0\Rightarrow n(m-1)-3m=0$.

根据因式分解可凑：$n(m-1)-3m+3-3=0\Rightarrow n(m-1)-3(m-1)-3=0\Rightarrow (m-1)(n-3)=3$.

$\because m$，n是正整数. $\therefore$则有$\begin{cases}m_1-1=1\\n_1-3=3\end{cases}$或$\begin{cases}m_2-1=3\\n_2-3=1\end{cases}\Rightarrow$解得$\begin{cases}m_1=2\\n_1=6\end{cases}$或$\begin{cases}m_2=4\\n_2=4\end{cases}$.

$m_1+n_1=8$ 或$m_2+n_2=8\Rightarrow m+n=8$. 即$m+n$的值确定. 故条件（1）充分.

条件（2），$\frac{1}{m}+\frac{2}{n}=1\Rightarrow mn-n-2m=0\Rightarrow n(m-1)-2m=0$.

根据因式分解可凑：$n(m-1)-2m+2-2=0\Rightarrow n(m-1)-2(m-1)-2=0\Rightarrow (m-1)(n-2)=2$.

$\because m$，n是正整数. $\therefore$则有$\begin{cases}m_1-1=1\\n_1-2=2\end{cases}$或$\begin{cases}m_2-1=2\\n_2-2=1\end{cases}\Rightarrow$解得$\begin{cases}m_1=2\\n_1=4\end{cases}$或$\begin{cases}m_2=3\\n_2=3\end{cases}$.

$m_1+n_1=6$ 或$m_2+n_2=6\Rightarrow m+n=6$. 即$m+n$的值确定. 故条件（2）充分.

综上，故选 D.

方法二：

条件（1），$\frac{1}{m}+\frac{3}{n}=1\Rightarrow\frac{1}{m}=1-\frac{3}{n}\Rightarrow\frac{1}{m}=\frac{n-3}{n}\Rightarrow m=\frac{n}{n-3}=\frac{n-3+3}{n-3}=1+\frac{3}{n-3}$.

$\because m$，n是正整数. $\therefore$则有$n-3=1$ 或$n-3=3$. 解得$n=4$ 或$n=6$.

因此，当$n=4$ 时，$m=4$，$m+n=8$；当$n=6$ 时，$m=2$，$m+n=8$.

即$m+n$的值确定. 故条件（1）充分.

条件（2），$\frac{1}{m}+\frac{2}{n}=1\Rightarrow\frac{1}{m}=1-\frac{2}{n}\Rightarrow\frac{1}{m}=\frac{n-2}{n}\Rightarrow m=\frac{n}{n-2}=\frac{n-2+2}{n-2}=1+\frac{2}{n-2}$.

$\because m$，n是正整数. $\therefore$则有$n-2=1$ 或$n-2=2$. 解得$n=3$ 或$n=4$.

因此，当$n=3$ 时，$m=3$，$m+n=6$；当$n=4$ 时，$m=2$，$m+n=6$.

即$m+n$的值确定. 故条件（2）充分.

综上，故选 D.

4.（2016）设x，y是实数，则可以确定x^3+y^3的最小值.【 】

（1）$xy=1$.

（2）$x+y=2$.

【答案】B　　【考查】平方和立方的公式、最值问题、均值不等式

【解析】根据题意，$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$.

条件（1），举反例：当$x=-\infty$，$y=\frac{1}{-\infty}$时，无法确定x^3+y^3的最小值. 故条件（1）不充分.

条件（2），∵$x+y=2$. ∴$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=2^3-3\cdot xy\cdot 2=8-6xy$.（思考：若 $8-6xy$ 有最小值/xy 有最大值，xy 和 $x+y$ 之间也许通过均值不等式可以产生联系，但均值不等式使用的前提是 x，y 是非负数. ∵已知 $x+y=2$，x，y 都是实数. ∴x，y 不可能都是负数，也许其中有一个为负，或者两个都非负⇒当 x，y 其中有一个为负时，$xy<0$；当 x，y 都非负时，$xy>0$）. 经过思考得：只用讨论 x，y 都非负时，xy 有最大值. 所以可以用均值不等式.

根据均值不等式：当 x，y 都非负时，$x+y\geqslant 2\sqrt{xy}$，所以 $\sqrt{xy}\leqslant 1$，即 xy 最大值为 1. 则 $x^3+y^3=8-6xy\geqslant 8-6\times 1=2$. 即可以确定 x^3+y^3 的最小值. 故条件（2）充分.

综上，故选 B.

二、分式及其运算

1.（2022）已知 x 为正实数，则能确定 $x-\frac{1}{x}$ 的值.【 】

（1）已知 $\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$ 的值.

（2）已知 $x^2-\frac{1}{x^2}$ 的值.

【答案】B　　　　【考查】分式

【解析】条件（1），设 $\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}=a$，则 $(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}})^2=a^2\Rightarrow x+\frac{1}{x}+2=a^2\Rightarrow x+\frac{1}{x}=a^2-2$，两边同时平方：$(x+\frac{1}{x})^2=(a^2-2)^2\Rightarrow x^2+2+\frac{1}{x^2}=(a^2-2)^2\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=(a^2-2)^2-2$.

则 $(x-\frac{1}{x})^2=x^2+\frac{1}{x^2}-2=(a^2-2)^2-4\Rightarrow x-\frac{1}{x}=\pm\sqrt{(a^2-2)^2-4}$. 无法确定 $x-\frac{1}{x}$ 的值. 故条件（1）不充分.

条件(2)，设 $x^2-\frac{1}{x^2}=a$，两边同时乘以 x^2：$x^4-1=ax^2\Rightarrow x^4-ax^2-1=0\Rightarrow x_1^2=\frac{a-\sqrt{a^2+4}}{2}$（为负数，舍去）或 $x_2^2=\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}$. 又∵$x$ 为正实数. ∴$x=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}}$，有唯一的值，因此能确定 $x-\frac{1}{x}$ 的值. 故条件（2）充分.

综上，故选 B.

2.（2021）$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}=$【 】

A. 9

B. 10

C. 11

D. $3\sqrt{11}-1$

E. $3\sqrt{11}$

【答案】A　　　　　　　　　　【考查】分式——裂项相消法

【解析】$\because \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$.

$\therefore$原式$=\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+...+\sqrt{100}-\sqrt{99}=-1+\sqrt{100}=-1+10=9$.

故选A.

3.（2020）已知实数x满足$x^2+\frac{1}{x^2}-3x-\frac{3}{x}+2=0$，则$x^3+\frac{1}{x^3}=$【 】

A. 12

B. 15

C. 18

D. 24

E. 27

【答案】C　　　　　　　　　　【考查】分式

【解析】$x^2+\frac{1}{x^2}-3x-\frac{3}{x}+2=0 \Rightarrow \left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=0 \Rightarrow \left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{1}{x}-3\right)=0$.

解得：$x+\frac{1}{x}=0$（舍去）或$x+\frac{1}{x}=3$.

因此，$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}-1\right)=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3\right]=3\times(3^2-3)=18$.

故选C.

三、函数

1.（2021）设二次函数$f(x)=ax^2+bx+c$，且$f(2)=f(0)$，则$\dfrac{f(3)-f(2)}{f(2)-f(1)}=$【 】

A. 2
B. 3
C. 4
D. 5
E. 6

【答案】B　　【考查】二次函数
【解析】方法一：
根据$f(2)=f(0)$，则对称轴为$x=1$，二次函数顶点式可以写成：$f(x)=a(x-1)^2+m$.

$$\frac{f(3)-f(2)}{f(2)-f(1)}=\frac{a(3-1)^2+m-[a(2-1)^2+m]}{a(2-1)^2+m-[a(1-1)^2+m]}=\frac{3a}{a}=3.$$

方法二：
根据$f(2)=f(0)$，则有 $4a+2b+c=c\Rightarrow b=-2a$.

$$\frac{f(3)-f(2)}{f(2)-f(1)}=\frac{9a+3b+c-(4a+2b+c)}{4a+2b+c-(a+b+c)}=\frac{5a+b}{3a+b}$$. 将$b=-2a$代入得：$\dfrac{5a-2a}{3a-2a}=\dfrac{3a}{a}=3$.

故选 B.

2.（2021）函数$f(x)=x^2-4x-2|x-2|$的最小值为【 】

A. −4
B. −5
C. −6
D. −7
E. −8

【答案】B　　【考查】二次函数
【解析】方法一：
分类讨论.

①当$x-2\geqslant 0$时，$f(x)=x^2-6x+4$，$f(3)_{\min}=-5$.

②当$x-2<0$时，$f(x)=x^2-2x-4$，$f(1)_{\min}=-5$.

方法二：

根据题意得，$f(x)=x^2-4x-2|x-2|=(x^2-4x+4)-2|x-2|-4=(x-2)^2-2|x-2|-4$

$=|x-2|^2-2|x-2|-4=(|x-2|^2-2|x-2|+1)-5=(|x-2|-1)^2-5\geqslant-5$. 因此$f(x)$的最小值为$-5$.

故选 B.

3. （2020）设函数$f(x)=(ax-1)(x-4)$，则在$x=4$左侧附近有$f(x)<0$.【 】

（1）$a>\frac{1}{4}$.

（2）$a<4$.

【答案】A　　　　　【考查】二次函数

【解析】条件（1），$a>\frac{1}{4}$，此时函数$f(x)$为二次函数，函数开口向上，有两个零点$x=4$和$x=\frac{1}{a}$.

又$\because \frac{1}{a}<4$. $\therefore$在$x=4$的左侧附近有$f(x)<0$. 故条件（1）充分.

条件（2），$a<4$. 举反例，当$a=0$时，则$f(x)=-(x-4)=4-x$，则在$x=4$的左侧附近有$f(x)>0$. 故条件（2）不充分.

综上，故选 A.

4. （2018）函数$f(x)=\max\{x^2, -x^2+8\}$的最小值为【 】

A. 8

B. 7

C. 6

D. 5

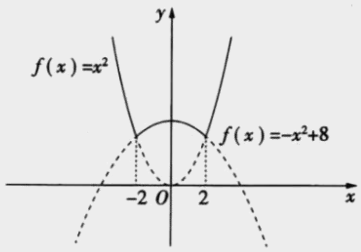
E. 4

【答案】E　　　　　【考查】分段函数

【解析】根据题意，设$x^2=-x^2+8\Rightarrow x^2=4$. 解得：$x_1=2$，$x_2=-2$. 则有：

当$x>2$或$x<-2$时，$f(x)=x^2$. 当$-2\leqslant x\leqslant 2$时，$f(x)=-x^2+8$.

即$f(x)=\begin{cases} x^2 & x<-2 \\ -x^2+8 & -2\le x\le 2 \\ x^2 & x>2 \end{cases}$.根据函数画图，如图所示，呈现“W”型.



因而在分界点取得最小值，即$x=\pm2$时，$f(x)$最小值$=x^2=-x^2+8=4$.
故选E.

5.（2016）已知$f(x)=x^2+ax+b$，则$0\leqslant f(1)\leqslant 1$.【 】
（1）$f(x)$在区间[0，1]中有两个零点.
（2）$f(x)$在区间[1，2]中有两个零点.

【答案】D　　　　　　【考查】二次函数
【解析】方法一：

$f(x)=x^2+ax+b=(x+\frac{a}{2})^2+b-\frac{a^2}{4}$. $f(x)$的抛物线图像开口向上，对称轴$x=-\frac{a}{2}$.

条件（1），$f(x)$在区间[0，1]中有两个零点$\Rightarrow 0\leqslant-\frac{a}{2}\leqslant1$.

$\because f(x)$有两个实数根. $\therefore \Delta=a^2-4b\geqslant0\Rightarrow b\leqslant\frac{a^2}{4}$. 则$f(1)=1+a+b\leqslant a+\frac{a^2}{4}+1=(1+\frac{a}{2})^2$.

$\because 0\leqslant-\frac{a}{2}\leqslant1\Rightarrow-1\leqslant\frac{a}{2}\leqslant0\Rightarrow0\leqslant1+\frac{a}{2}\leqslant1\Rightarrow0\leqslant(1+\frac{a}{2})^2\leqslant1$. $\therefore 0\leqslant f(1)\leqslant1$. 即与题干结论一致. 故条件（1）充分.

条件（2），$f(x)$在区间[1，2]中有两个零点$\Rightarrow 1\leqslant-\frac{a}{2}\leqslant2$.

$\because f(x)$有两个实数根. $\therefore \Delta=a^2-4b\geqslant0\Rightarrow b\leqslant\frac{a^2}{4}$. 则$f(1)=1+a+b\leqslant a+\frac{a^2}{4}+1=(1+\frac{a}{2})^2$.

$\because 1\leqslant-\frac{a}{2}\leqslant2\Rightarrow-2\leqslant\frac{a}{2}\leqslant-1\Rightarrow-1\leqslant1+\frac{a}{2}\leqslant0\Rightarrow0\leqslant(1+\frac{a}{2})^2\leqslant1$. $\therefore 0\leqslant f(1)\leqslant1$. 即与题干结论一致. 故条件（2）充分.
综上，故选D.

方法二：

根据题意，设$f(x)=x^2+ax+b$与x轴的两个交点坐标分别为（x_1，0），（x_2，0）.

则根据$f(x)=x^2+ax+b$和二次函数的零点式$\Rightarrow f(x)=(x-x_1)(x-x_2)\Rightarrow f(1)=(1-x_1)(1-x_2)=(x_1-1)(x_2-1)$.

即 $0\leqslant f(1)\leqslant1\Rightarrow0\leqslant(1-x_1)(1-x_2)\leqslant1$（或 $0\leqslant(x_1-1)(x_2-1)\leqslant1$）.

条件（1），根据条件$f(x)$在区间[0，1]中有两个零点

$\Rightarrow\begin{cases}0\le x_1\le1\\0\le x_2\le1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0\ge -x_1\ge-1\\0\ge -x_2\ge-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1\ge1-x_1\ge0\\1\ge1-x_2\ge0\end{cases}$. 两式相乘$\Rightarrow1\geqslant(1-x_1)(1-x_2)\geqslant0\Rightarrow0\leqslant f(1)\leqslant1$.即与上述题干结论一致.故条件（1）充分.

条件（2），根据$f(x)$在区间[1，2]中有两个零点$\Rightarrow\begin{cases}1\le x_1\le2\\1\le x_2\le2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0\le x_1-1\le1\\0\le x_2-1\le1\end{cases}$.

两式相乘$\Rightarrow0\leqslant(x_1-1)(x_2-1)\leqslant1\Rightarrow0\leqslant f(1)\leqslant1$.即与上述题干结论一致.故条件(2)充分.

综上，故选 D.

四、代数方程

1.（2023）一个分数的分子与分母之和为 38，其分子分母都减去 15，约分后得到$\frac{1}{3}$，则这个分数的分母与分子之差为【 】

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

E. 5

【答案】D 【考查】一般方程

【解析】根据题意，设分子为x，分母为y.则有$\begin{cases}x+y=38\\ \frac{x-15}{y-15}=\frac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow$解得：$x=17$，$y=21$.即这个分数的分母与分子之差为 21－17＝4.故选 D.

2.（2023）方程$x^2-3|x-2|-4=0$的所有实根之和为【 】

A. －4

B. －3

C. −2

D. −1

E. 0

【答案】B　　　　　　【考查】一元二次方程

【解析】根据题意，可分类讨论：

①当$x\geq2$时，$x^2-3(x-2)-4=x^2-3x+2=(x-1)(x-2)=0\Rightarrow$解得：$x_1=1$（舍）或$x_2=2$.

②当$x<2$时，$x^2+3(x-2)-4=x^2+3x-10=(x-2)(x+5)=0\Rightarrow$解得：$x_1=2$（舍）或$x_2=-5$.

综上，方程$x^2-3|x-2|-4=0$的所有实根之和为$2+(-5)=-3$. 故选B.

3. （2023）关于x的方程$x^2-px+q=0$有两个实根a，b. 则$p-q>1$. 【　】

（1）$a>1$.

（2）$b<1$.

【答案】C　　　　　　【考查】一元二次方程韦达定理

【解析】根据题意，得：$\begin{cases}a+b=p\\ab=q\end{cases}$，则$p-q>1$可转化为：$a+b-ab>1\Rightarrow a+b-ab-1>0\Rightarrow a(1-b)-(1-b)>0\Rightarrow(a-1)(1-b)>0\Rightarrow\begin{cases}a-1>0\\1-b>0\end{cases}$.

条件（1），只知道$a>1$，不知道b的取值范围. 则无法判断. 故条件（1）不充分.

条件（2），只知道$b<1$，不知道a的取值范围. 则无法判断. 故条件（2）不充分.

条件（1）和条件（2）单独都不充分，考虑条件（1）（2）联合.

条件（1）（2）联合有：$a>1$，$b<1$，与上述结论一致. 即$p-q>1$. 故条件（1）（2）联合起来充分.

综上，故选C.

4. （2017）直线$y=ax+b$与抛物线$y=x^2$有两个交点. 【　】

（1）$a^2>4b$.

（2）$b>0$.

【答案】B　　　　　　　　　　【考查】一元二次方程

【解析】根据题意，联立方程组$\begin{cases} y=ax+b \\ y=x^2 \end{cases}$ $\Rightarrow x^2-ax-b=0$.

∵直线与抛物线有两个交点. ∴$\Delta=a^2+4b>0$.

条件（1），$a^2>4b \Rightarrow a^2-4b>0$，$b$的值不确定（$b$可取 0 或者负数），则无法判断. 故条件（1）不充分.

条件（2），∵$a^2\geqslant0$ 且$b>0\Rightarrow\Delta=a^2+4b>0$，与上述结论$a^2+4b>0$ 相一致. 故条件（2）充分.

综上，故选 B.

5.（2016）设抛物线$y=x^2+2ax+b$与x轴相交于A，B两点，点C的坐标为（0，2）. 若$\triangle ABC$的面积等于 6，则【　】

A. $a^2+b=9$

B. $a^2-b=9$

C. $a^2-b=36$

D. $a^2-4b=9$

E. $a^2+b=36$

【答案】B　　　　　　　　　　【考查】一元二次方程韦达定理

【解析】根据题意得，设原点为O（0，0），点A和点B的坐标分别为（x_1，0），（x_2，0）.

则$\triangle ABC$的高为$OC \Rightarrow OC=2$.

∵$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot OC=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot 2=6$. ∴$AB=6$.

∵点A和点B是抛物线$y=x^2+2ax+b$与x轴的两个交点.

∴$\Delta=(2a)^2-4\times1\cdot b>0\Rightarrow4a^2-4b>0\Rightarrow a^2>b$.

又∵令$x^2+2ax+b=0$. ∴由韦达定理得$\begin{cases} x_1+x_2=-2a \\ x_1x_2=b \end{cases}$.

则$AB=|x_2-x_1|=6\Rightarrow\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=6\Rightarrow\sqrt{(-2a)^2-4b}=6\Rightarrow4a^2-4b=36\Rightarrow a^2-b=9$.

故选 B.

五、不等式

1.（2023）设 x 为正实数，则 $\frac{x}{8x^3+5x+2}$ 的最大值为【 】

A. $\frac{1}{15}$

B. $\frac{1}{11}$

C. $\frac{1}{9}$

D. $\frac{1}{6}$

E. $\frac{1}{5}$

【答案】B　　　　　　　　【考查】均值不等式

【解析】原式分子分母同时除以 $x \Rightarrow \frac{x}{8x^3+5x+2}=\frac{1}{8x^2+5+\frac{2}{x}}$.

对分母应用均值不等式得：$8x^2+5+\frac{2}{x}=8x^2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+5\geqslant 3\sqrt[3]{8x^2\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}}+5=3\sqrt[3]{8}+5=3\times 2+5=11$，则原式分母的最小值为 11. 即 $\frac{x}{8x^3+5x+2}$ 的最大值为 $\frac{1}{11}$. 故选 B.

2.（2023）设集合 $M=\left\{(x,\ y)\middle|(x-a)^2+(y-b)^2\leq 4\right\}$，$N=\left\{(x,\ y)\middle| x>0,\ y>0\right\}$，则 $M\cap N\neq\varnothing$.【 】

（1）$a<-2$.

（2）$b>2$.

【答案】E　　　　　　　　【考查】多元不等式

【解析】根据题意得，集合 M 表示的是以 $(a,\ b)$ 为圆心，2 为半径的圆上及圆内的点的集合；集合 N 表示的是第一象限的点的集合.

条件（1），$a<-2$，举反例：当 $a=-4$，$b=4$ 时，集合 M 表示的点均在第二象限，$M\cap N=\varnothing$. 与题干结论矛盾. 故条件（1）不充分.

条件（2），$b>2$，举反例：当 $a=-4$，$b=4$ 时，集合 M 表示的点均在第二象限，$M\cap N=\varnothing$. 与题干结论矛盾. 故条件（2）不充分.

条件（1）和条件（2）单独都不充分，考虑条件（1）（2）联合.

条件（1）（2）联合有：$a<-2$ 且$b>2$.举反例：当$a=-4$，$b=4$时，集合M表示的点均在第二象限，$M\cap N=\varnothing$.与题干结论矛盾.故条件（1）（2）联合起来也不充分.

综上，故选 E.

3.（2022）设实数a，b满足$|a-2b|\leqslant 1$，则$|a|>|b|$.【 】

（1）$|b|>1$.

（2）$|b|<1$.

【答案】A　　【考查】绝对值不等式

【解析】根据题意得：$|a-2b|\leqslant 1\Rightarrow -1\leqslant a-2b\leqslant 1\Rightarrow 2b-1\leqslant a\leqslant 2b+1$.

条件（1），$|b|>1\Rightarrow b>1$ 或$b<-1$.

①当$b>1$时，$b>1\Rightarrow b-1>0\Rightarrow 2b-1>b$，结合前提条件$2b-1\leqslant a\leqslant 2b+1$，$a\geqslant 2b-1>b\Rightarrow a>b$.即$|a|>|b|$.

②当$b<-1$时，$b+1<0\Rightarrow 2b+1<b$，结合前提条件$2b-1\leqslant a\leqslant 2b+1$，$b>2b+1\geqslant a\Rightarrow b>a$.即$|a|>|b|$.

结合①②，故条件（1）充分.

条件（2），$|b|<1$，举反例$b=\frac{1}{2}$，$a=0$时满足$|a-2b|\leqslant 1$，但不满足$|a|>|b|$.故条件（2）不充分.

综上，故选 A.

4.（2020）设集合$A=\{x||x-a|<1，x\in R\}$，$B=\{x||x-b|<2，x\in R\}$，则$A\subset B$的充分必要条件是【 】

A. $|a-b|\leqslant 1$

B. $|a-b|\geqslant 1$

C. $|a-b|<1$

D. $|a-b|>1$

E. $|a-b|=1$

【答案】A　　　　　　　　【考查】不等式、集合

【解析】先解出集合$A=\{x||x-a|<1，x\in R\}=\{x|a-1<x<a+1，x\in R\}$.

再解出集合$B=\{x||x-b|<2，x\in R\}=\{x|b-2<x<b+2，x\in R\}$.

$\because A\subset B$表示集合A是集合B的真子集. $\therefore \begin{cases} b-2\le a-1 \\ a+1\le b+2 \end{cases}\Rightarrow -1\leqslant a-b\leqslant 1$. 即$|a-b|\leqslant 1$.

故选 A.

5.（2020）设a，b是正实数，则$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$存在最小值.【 】

（1）已知ab的值.

（2）已知a，b是方程$x^2-(a+b)x+2=0$的不同实根.

【答案】A　　　　　　　　【考查】均值不等式、一元二次方程

【解析】条件（1），因为a，b是正实数，则$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{ab}}$，当$a=b$时，则$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$的最小值可以确定. 故条件（1）充分.

条件（2），因为a，b是方程的不同实根，所以$\begin{cases} \Delta=(a+b)^2-8>0 \\ ab=2 \end{cases}$，且$a$，$b$是正实数，则有$\begin{cases} a+b>2\sqrt{2} \\ ab=2 \end{cases}$，因此$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}=\frac{a+b}{2}>\sqrt{2}$. 无法取得最小值. 故条件（2）不充分.

综上，故选 A.

真题演练

一、问题求解：第 1～15 小题，每小题 3 分，共 45 分。下列每题给出的 A、B、C、D、E 五个选项中，只有一项是符合试题要求的。

1.（1998）若方程$x^2+px+37=0$恰有两个正整数解x_1和x_2，则$\frac{(x_1+1)(x_2+1)}{p}$的值是【 】

A. -2

B. -1

C. $-\frac{1}{2}$

D. 1

E. 2

2. （2006）已知不等式$ax^2+2x+2>0$的解集是$(-\frac{1}{3},\ \frac{1}{2})$，则$a=$【 】

A. -12

B. 6

C. 0

D. 12

E. 以上均不对

3. （2007）若多项式$f(x)=x^3+a^2x^2+x-3a$能被$x-1$整除，则实数$a=$【 】

A. 0

B. 1

C. 0 或 1

D. 2 或-1

E. 2 或 1

4. （2007）一元二次函数$x(1-x)$的最大值为【 】

A. 0.05

B. 0.10

C. 0.15

D. 0.20

E. 0.25

5. （2007）若方程$x^2+px+q=0$的一个根是另一个根的 2 倍，则p和q应满足【 】

A. $p^2=4q$

B. $2p^2=9q$

C. $4p=9q^2$

D. $2p=3q^2$

E. 以上均不对

6.（2008）$\dfrac{(1+3)(1+3^2)(1+3^4)(1+3^8)\cdots(1+3^{32})+\dfrac{1}{2}}{3\times3^2\times3^3\times3^4\times\cdots\times3^{10}}=$【 】

A. $\dfrac{1}{2}\times3^{10}+3^{19}$

B. $\dfrac{1}{2}+3^{19}$

C. $\dfrac{1}{2}\times3^{19}$

D. $\dfrac{1}{2}\times3^{9}$

E. 以上均不对

7.（2008）若△ABC的三边a，b，c满足$a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc$，则△ABC为【 】

A. 等腰三角形

B. 直角三角形

C. 等边三角形

D. 等腰直角三角形

E. 以上均不对

8.（2008）方程$x^2-(1+\sqrt{3})x+\sqrt{3}=0$的两根分别为等腰三角形的腰$a$和底$b$($a<b$)，则该三角形的面积是【 】

A. $\dfrac{\sqrt{11}}{4}$

B. $\dfrac{\sqrt{11}}{8}$

C. $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

D. $\dfrac{\sqrt{3}}{5}$

E. $\dfrac{\sqrt{3}}{8}$

9.（2008）若$y^2-2(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}})y+3<0$对一切正实数$x$恒成立，则$y$的取值范围是【 】

A. $1<y<3$
B. $2<y<4$
C. $1<y<4$
D. $3<y<5$
E. $2<y<5$

10.（2008）直角边之和为 12 的直角三角形面积最大值等于【 】
A. 16
B. 18
C. 20
D. 22
E. 以上均不对

11.（2009）$3x^2+bx+c=0(c\neq0)$的两根为根α，β. 如果以$\alpha+\beta$，$\alpha\beta$为根的一元二次方程是$3x^2-bx+c=0$，则b，c分别为【 】
A. 2，6
B. 3，4
C. −2，−6
D. −3，−6
E. 以上都不正确

12.（2009）若关于x的二次方程$mx^2-(m-1)x+m-5=0$有两个实根α，β，且满足$-1<\alpha<0$和$0<\beta<1$，则m的取值范围是【 】
A. $3<m<4$
B. $4<m<5$
C. $5<m<6$
D. $m>6$或$m<5$
E. $m>5$或$m<4$

13.（2009）方程$\left|x-|2x+1|\right|=4$的根是【 】

A. $x=-5$ 或 $x=1$

B. $x=5$ 或 $x=-1$

C. $x=3$ 或 $x=-\frac{5}{3}$

D. $x=\frac{5}{3}$ 或 $x=-3$

E. 不存在

14.（2010）若$x+\frac{1}{x}=3$，则$\frac{x^2}{x^4+x^2+1}=$【 】

A. $-\frac{1}{8}$

B. $\frac{1}{6}$

C. $\frac{1}{4}$

D. $-\frac{1}{4}$

E. $\frac{1}{8}$

15.（2011）若三次方程$ax^3+bx^2+cx+d=0$的三个不同实根x_1，x_2，x_3，满足：$x_1+x_2+x_3=0$，$x_1x_2x_3=0$，则下列关系中恒成立的是【 】

A. $ac=0$

B. $ac<0$

C. $ac>0$

D. $a+c<0$

E. $a+c>0$

二、条件充分性判断：第 16～25 小题，每小题 3 分，共 30 分。要求判断每题给出的条件（1）和条件（2）能否充分支持题干所陈述的结论。A、B、C、D、E 五个选项为判断结果，请选择一项符合试题要求的判断。

A. 条件（1）充分，但条件（2）不充分。

B. 条件（2）充分，但条件（1）不充分。

C. 条件（1）和（2）单独都不充分，但条件（1）和条件（2）联合起来充分。

D.条件（1）充分，条件（2）也充分。

E.条件（1）和（2）单独都不充分，条件（1）和条件（2）联合起来也不充分。

16.（2005）方程 $4x^2+(a-2)x+a-5=0$ 有两个不等的负实根.【 】

（1）$a<6$.

（2）$a>5$.

17.（2008）$\alpha^2+\beta^2$ 的最小值是 $\frac{1}{2}$.【 】

（1）α 与 β 是方程 $x^2-2ax+(a^2+2a+1)=0$ 的两个实根.

（2）$\alpha\beta=\frac{1}{4}$.

18.（2009）关于 x 的方程 $a^2x^2-(3a^2-8a)x+2a^2-13a+15=0$ 至少有一个整数根.【 】

（1）$a=3$.

（2）$a=5$.

19.（2009）$|\log_a x|>1$.【 】

（1）$x\in[2,4]$，$\frac{1}{2}<a<1$.

（2）$x\in[4,6]$，$1<a<2$.

20.（2009）$\triangle ABC$ 是等边三角形.【 】

（1）$\triangle ABC$ 的三边满足 $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ac$.

（2）$\triangle ABC$ 的三边满足 $a^3-a^2b+ab^2+ac^2-b^3-bc^2=0$.

21.（2010）$ax^3-bx^2+23x-6$ 能被 $(x-2)(x-3)$ 整除.【 】

（1）$a=3$，$b=-16$.

（2）$a=3$，$b=16$.

22.（2010）不等式 $3ax-\frac{5}{2}\leqslant 2a$ 的解集为 $x\leqslant\frac{3}{2}$.【 】

（1）直线 $\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=1$ 与 x 轴的交点是 $(1,0)$.

（2）方程 $\frac{3x-1}{2}-a=\frac{1-a}{3}$ 的根为 $x=1$.

23. （2011）不等式$ax^2+(a-6)x+2>0$对所有实数x成立．【 】

（1）$0<a<3$.

（2）$1<a<5$.

24. （2011）抛物线$y=x^2+(a+2)x+2a$与x轴相切．【 】

（1）$a>0$.

（2）$a^2+a-6=0$.

25. （2011）已知$x(1-kx)^3=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4$对所有实数$x$成立，则$a_1+a_2+a_3+a_4=-8$.【 】

（1）$a_2=-9$.

（2）$a_3=27$.

参考答案

答案速查									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	A	E	E	B	D	C	C	A	B
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
D	B	C	E	B	C	D	D	D	A
21	22	23	24	25					
B	D	E	C	A					

1.【答案】A　　【考查】韦达定理

【解析】根据韦达定理，两正整数根之积$x_1x_2=37$，37 是质数，因此可知两根分别为 1 和 37.

则$x_1+x_2=1+37=38=-p\Rightarrow p=-38$. 则$\frac{(x_1+1)(x_2+1)}{p}=\frac{2\times 38}{-38}=-2$. 故选 A.

2.【答案】A　　【考查】集合；一元二次方程

【解析】一元二次不等式解集的端点就是原一元二次方程的根，因此将$x=\frac{1}{2}$或$-\frac{1}{3}$代入方程$ax^2+2x+2=0$应使方程成立，不难解出$a=-12$. 故选 A.

3.【答案】E　　　　　　　　【考查】整式的除法——因式定理

【解析】根据因式定理，$f(x)$能被$x-1$整除等价于$f(1)=0$，将$x=1$代入原多项式可得：$f(1)=1+a^2+1-3a=0$. 解得：$a=2$或$a=1$. 故选E.

4.【答案】E　　　　　　　　【考查】一元二次函数及其图像

【解析】$x(1-x)=-x^2+x\Rightarrow$对称轴$x=\frac{1}{2}=0.50$，顶点纵坐标$y_{\max}=\frac{1}{4}=0.25$. 故选E.

5.【答案】B　　　　　　　　【考查】韦达定理

【解析】方法一：设$x_1=t$，$x_2=2t$. 由韦达定理可得：$x_1+x_2=-p=3t$，$x_1x_2=q=2t^2$. 两式消掉参数t，可得：$2p^2=9q$.

方法二：采用取特值法，令两根$x_1=1$，$x_2=2$，代入原方程，解得：$p=-3$，$q=2$. 则$2p^2=9q$成立.

故选B.

6.【答案】D　　　　　　　　【考查】整式加减及乘法运算

【解析】根据平方差公式，分子分母同时乘以$(1-3)$得：$\frac{(1-3)(1+3)(1+3^2)\cdots(1+3^{32})-1}{(1-3)\times 3^{\frac{1+10}{2}\times 10}}=\frac{1}{2}\times 3^9$. 故选D.

7.【答案】C　　　　　　　　【考查】整式加减及乘法运算

【解析】$a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc\Rightarrow a^2+b^2+c^2-(ab+ac+bc)=0$.

则$a^2+b^2+c^2-(ab+ac+bc)=a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=\frac{2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2ac-2bc}{2}=\frac{a^2-2ab+b^2+a^2-2ac+c^2+b^2-2bc+c^2}{2}=\frac{(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2}{2}$. 即$(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2=0\Rightarrow a=b=c\Rightarrow\triangle ABC$为等边三角形. 故选C.

8.【答案】C　　　　　　　　【考查】整式加减及乘法运算

【解析】使用十字相乘法：$x^2-(1+\sqrt{3})x+\sqrt{3}=0\Rightarrow(x-1)(x-\sqrt{3})=0$，解得：$x_1=\sqrt{3}$，$x_2$

=1. 根据题意：$a<b\Rightarrow a=1$，$b=\sqrt{3}$，作出底边b上的高h，根据等腰三角形的高平分底边和勾股定理可求出其高$h=\sqrt{1-(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}=\frac{1}{2}$，则其面积$S=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$. 故选 C.

9. 【答案】A　　　　　　【考查】均值不等式

【解析】方法一：由$y^2-2(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}})y+3<0$，得 $2(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}})y>y^2+3$. ∵$2(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}})\geqslant 4>0$，$y^2+3\geqslant 3>0$. ∴$y>0$. 所以，$2(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}})>\frac{y^2+3}{y}$对于一切正实数$x$恒成立. 则$[2(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}})]_{\min}>\frac{y^2+3}{y}$. ∵$2(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}})\geqslant 2\times 2\sqrt{\sqrt{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}}=4$，当且仅当$x=1$时取等号. ∴$[2(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}})]_{\min}=4$. 则 $4>\frac{y^2+3}{y}$，解得：$1<y<3$.

方法二：若$y\leqslant 0$，则原不等式左边恒成立，与已知矛盾，因此必然有$y>0$. 可将原不等式化简变形为$\frac{y^2+3}{2y}<\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$，对于一切正实数$x$，不等号右边式子$\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$的范围是$[2,+\infty)$，最小值是 2，只要保证$\frac{y^2+3}{2y}<2$即可，解不等式$y^2-4y+3<0$得$1<y<3$.

故选 A.

10. 【答案】B　　　　　　【考查】均值不等式

【解析】设两直角边长分别为a和b，则$a+b=12$，$S=\frac{1}{2}ab$. 根据均值不等式，a与b的和为定值 12，乘积ab有最大值. 当$a=b=6$时，ab的最大值$=6\times6=36$，则$S=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}\times36=18$.

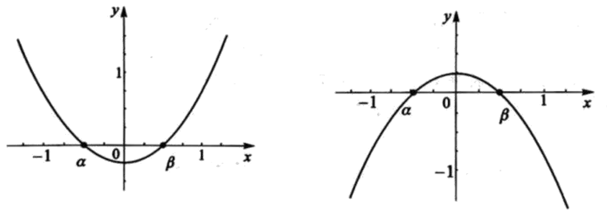
故选 B.

11. 【答案】D　　　　　　【考查】韦达定理

【解析】根据韦达定理，$3x^2+bx+c=0\Rightarrow\alpha+\beta=-\frac{b}{3}$，$\alpha\beta=\frac{c}{3}\Rightarrow\alpha+\beta+\alpha\beta=\frac{c-b}{3}$，$(\alpha+\beta)\alpha\beta=-\frac{bc}{9}$. $3x^2-bx+c=0\Rightarrow\alpha+\beta+\alpha\beta=\frac{b}{3}$，$(\alpha+\beta)\alpha\beta=\frac{c}{3}$. 则有$\frac{c-b}{3}=\frac{b}{3}$，$-\frac{bc}{9}=\frac{c}{3}$，解得：$b=-3$，$c=-6$. 故选 D.

12.【答案】B　　　　　　　　【考查】一元二次方程根的分布

【解析】函数 $f(x)=mx^2-(m-1)x+m-5=0$ 的图像如图所示.



根据零点定理得：$\begin{cases} f(-1)f(0)=(3m-6)(m-5)<0 \\ f(0)f(1)=(m-5)(m-4)<0 \end{cases}$，解得：$4<m<5$. 故选 B.

13.【答案】C　　　　　　　　【考查】特殊方程

【解析】根据题意，分类讨论如下：

①当$x\geqslant-\dfrac{1}{2}$时，$\left|x-|2x+1|\right|=|x-(2x+1)|=|x+1|=x+1=4$，解得：$x=3$.

②当$x<-\dfrac{1}{2}$时，$\left|x-|2x+1|\right|=|x+(2x+1)|=|3x+1|=-(3x+1)=4$，解得：$x=-\dfrac{5}{3}$.

综上所述，$x=3$ 或$x=-\dfrac{5}{3}$. 故选 C.

14.【答案】E　　　　　　　　【考查】分式及其运算

【解析】$\dfrac{x^2}{x^4+x^2+1}=\dfrac{1}{x^2+1+\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{1}{(x+\dfrac{1}{x})^2-2+1}=\dfrac{1}{8}$. 故选 E.

15.【答案】B　　　　　　　　【考查】特殊方程

【解析】已知 $x_1x_2x_3=0$，则三个不同实根 x_1，x_2，x_3 其中一个根为 0. 不妨设 $x_3=0$，代入原方程得$d=0$. 那么原方程化为$ax^3+bx^2+cx=0\Rightarrow x(ax^2+bx+c)=0$，其中 $x_3=0$ 是方程$x=0$的根，那么另外两根 x_1，x_2 是方程$ax^2+bx+c=0$ 的两根. 又知 $x_1+x_2+x_3=x_1+x_2=0$，并且 $x_1\neq x_2\neq x_3=0$，则 x_1，x_2 异号，那么 $x_1x_2=\dfrac{c}{a}<0$，即$ac<0$. 故选 B.

16.【答案】C　　　　　　　　【考查】一元二次方程根的情况

【解析】方程有两个不等负实根，等价于其判别式大于 0，两根之和小于 0. 两根之积大于 0，

即$\begin{cases}\Delta=(a-2)^2-4\times4(a-5)>0\\ \dfrac{2-a}{4}<0\\ \dfrac{a-5}{4}>0\end{cases}$，解得：$5<a<6$ 或$a>14$.

条件（1），$a<6$ 与上述结论范围 $5<a<6$ 或$a>14$ 不一致.故条件（1）不充分.

条件（2），$a>5$ 与上述结论范围 $5<a<6$ 或$a>14$ 不一致.故条件（2）不充分.

条件（1）和条件（2）单独都不充分，考虑条件（1）（2）联合.

条件（1）（2）联合得：$5<a<6$ 满足上述结论范围 $5<a<6$ 或$a>14$ 之一.即能确定方程 $4x^2+(a-2)x+a-5=0$ 有两个不等的负实根.故条件（1）（2）联合起来充分.

综上，故选 C.

17.【答案】D　　　　　　　　【考查】韦达定理

【解析】条件（1），α 与 β 是方程$x^2-2ax+(a^2+2a+1)=0$ 的两个实根$\Rightarrow\Delta=4a^2-4(a^2+2a+1)\geqslant0$，解得：$a\leqslant-\dfrac{1}{2}$.再根据韦达定理，得：$\alpha+\beta=2a$，$\alpha\beta=a^2+2a+1$.则$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(2a)^2-2(a^2+2a+1)=2(a^2-2a-1)$.当$a=-\dfrac{1}{2}$时取得最小值$\dfrac{1}{2}$.与题干结论一致.故条件（1）充分.

条件(2)，$\alpha\beta=\dfrac{1}{4}$.$\because\alpha^2+\beta^2\geqslant2\alpha\beta$.$\therefore\alpha^2+\beta^2\geqslant2\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}$.与题干结论一致.故条件(2)充分.

综上，故选 D.

18.【答案】D　　　　　　　　【考查】一元二次方程根的情况

【解析】$a^2x^2-(3a^2-8a)x+2a^2-13a+15=a^2x^2-(3a^2-8a)x+(a-5)(2a-3)=[ax-(2a-3)][ax-(a-5)]=0$.解得：$x_1=\dfrac{2a-3}{a}$，$x_2=\dfrac{a-5}{a}$.

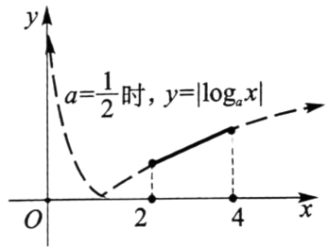
条件(1)，当$a=3$时$\Rightarrow x_1=\dfrac{2a-3}{a}=1$，$x_2=\dfrac{a-5}{a}=-\dfrac{2}{3}$.即有一个整数根.故条件（1）充分.

条件（2），当$a=5$时$\Rightarrow x_1=\dfrac{2a-3}{a}=\dfrac{7}{5}$，$x_2=\dfrac{a-5}{a}=0$.即有一个整数根.故条件（2）充分.

综上，故选 D.

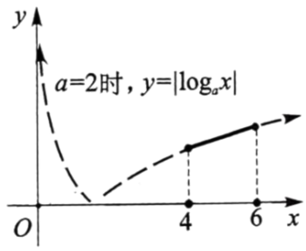
19.【答案】D　　　　　　　　【考查】对数函数的图像和性质

【解析】条件（1），当$x\in[2,4]$，$\dfrac{1}{2}<a<1$时，画出$y=|\log_a x|$的函数图像，如图所示.



在$x\in[2,4]$这段区间上函数单调递增，当$a=\frac{1}{2}$时，函数图像最贴近x轴，此时函数的最小值为$y_{\min}=\left|\log_{0.5}2\right|=1$，由于$a>\frac{1}{2}$，则可以保证$\left|\log_a x\right|>1$在给定区间恒成立. 故条件（1）充分.

条件（2），当$x\in[4,6]$，$1<a<2$时，画出$y=\left|\log_a x\right|$的函数图像，如图所示.



在$x\in[4,6]$这段区间上函数单调递增，当$a=2$时，函数图像最贴近x轴，此时函数的最小值为$y_{\min}=\left|\log_2 4\right|=2$，由于$a<2$，则可以保证$\left|\log_a x\right|>1$在给定区间恒成立. 故条件（2）充分.

综上，故选D.

20.【答案】A　　　　　　　　　【考查】整式加减及乘法运算

【解析】条件（1），$a^2+b^2+c^2=ab+bc+ac\Rightarrow\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2}{2}=0\Rightarrow a=b=c$.

即$\triangle ABC$是等边三角形. 故条件（1）充分.

条件（2），$a^3-a^2b+ab^2+ac^2-b^3-bc^2=0\Rightarrow a^2(a-b)+b^2(a-b)+c^2(a-b)=0\Rightarrow(a-b)(a^2+b^2+c^2)=0\Rightarrow\because a^2+b^2+c^2>0.\ \therefore a=b$，$c$可以任意取值. 则只能判断$\triangle ABC$是等腰三角形，无法确定$\triangle ABC$是等边三角形. 故条件（2）不充分.

综上，故选A.

21.【答案】B　　　　　　　　　【考查】整式的除法——因式定理

【解析】令$f(x)=ax^3-bx^2+23x-6$，根据因式定理可得：$\begin{cases}f(2)=8a-4b+40=0\\f(3)=27a-9b+63=0\end{cases}$，解得：

$a=3$，$b=16$.

条件（1），$a=3$，$b=-16$，与上述结论不符. 故条件（1）不充分.

条件（2），$a=3$，$b=16$，与上述结论一致. 故条件（2）充分.

综上，故选 B.

22.【答案】D　　　　　　【考查】不等式

【解析】条件（1），直线$\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=1$与$x$轴的交点是$(1,0)$，那么$(1,0)$满足方程$\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=1$，代入方程后解得：$a=1$. 将$a=1$代入题干不等式得：$3x-\frac{5}{2}\leqslant 2$，解得：$x\leqslant\frac{3}{2}$. 与题干结论一致. 故条件（1）充分.

条件（2），方程$\frac{3x-1}{2}-a=\frac{1-a}{3}$的根为$x=1$，则$x=1$满足方程$\frac{3x-1}{2}-a=\frac{1-a}{3}$，代入方程后解得：$a=1$. 将$a=1$代入题干不等式得：$3x-\frac{5}{2}\leqslant 2$，解得：$x\leqslant\frac{3}{2}$. 与题干结论一致. 故条件（2）充分.

综上，故选 D.

23.【答案】E　　　　　　【考查】一元二次不等式

【解析】方法一：设$f(x)=ax^2+(a-6)x+2$，若$f(x)$恒大于零，则$f(x)$的图像开口向上，且与x轴没有交点. 即$a>0$，且$\Delta<0$. $\Delta=(a-6)^2-8a<0\Rightarrow 2<a<18$.

条件（1），$0<a<3$不在上述结论$2<a<18$的范围内. 故条件（1）不充分.

条件（2），$1<a<5$不在上述结论$2<a<18$的范围内. 故条件（2）不充分.

条件（1）和条件（2）单独都不充分，考虑条件（1）（2）联合.

条件（1）（2）联合得：$1<a<3$不在上述结论$2<a<18$的范围内. 故条件（1）（2）联合起来也不充分.

综上，故选 E.

方法二：若$ax^2+(a-6)x+2>0$对所有实数x成立，那么一元二次函数$f(x)=ax^2+(a-6)x+2$的二次项系数a必须大于零. $ax^2+(a-6)x+2>0\Rightarrow a[(x-\frac{a-6}{2a})^2+\frac{2}{a}-(\frac{a-6}{2a})^2]>0$，若上述不等式对所有$x$恒成立，则$\frac{2}{a}-(\frac{a-6}{2a})^2>0\Rightarrow a^2-20a+36<0\Rightarrow 2<a<18$.

条件（1），$0<a<3$不在上述结论$2<a<18$的范围内. 故条件（1）不充分.

条件（2），$1<a<5$不在上述结论$2<a<18$的范围内. 故条件（2）不充分.

条件（1）和条件（2）单独都不充分，考虑条件（1）（2）联合.

条件（1）（2）联合得：$1<a<3$不在上述结论$2<a<18$的范围内. 故条件（1）（2）联合起来也不充分.

综上，故选 E.

24.【答案】C　　　　　　　　【考查】一元二次不等式

【解析】抛物线与x轴相切就是抛物线的顶点在x轴上，那么顶点纵坐标$-\frac{\Delta}{4a}=0$，即$\Delta=(a+2)^2-4\times2a=0$. 解得：$a=2$.

条件（1），$a>0$与上述结论$a=2$不一致. 故条件（1）不充分.

条件（2），$a^2+a-6=0\Rightarrow$解得：$a=-3$或$a=2$. 有两个值，当$a=-3$时抛物线$y=x^2+(a+2)x+2a$与x轴不相切. 故条件（2）不充分.

条件（1）和条件（2）单独都不充分，考虑条件（1）（2）联合.

条件（1）（2）联合得：$a=2$与上述结论一致，即能确定抛物线$y=x^2+(a+2)x+2a$与x轴相切. 故条件（1）（2）联合起来充分.

综上，故选 C.

25.【答案】A　　　　　　　　【考查】整式加减及乘法运算

【解析】利用公式$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$，可得：$x(1-kx)^3=x(1^3-3kx+3k^2x^2-k^3x^3)=x-3kx^2+3k^2x^3-k^3x^4=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4$对所有实数$x$成立，则说明对应项系数相等，即$a_1=1$，$a_2=-3k$，$a_3=3k^2$，$a_4=-k^3$.

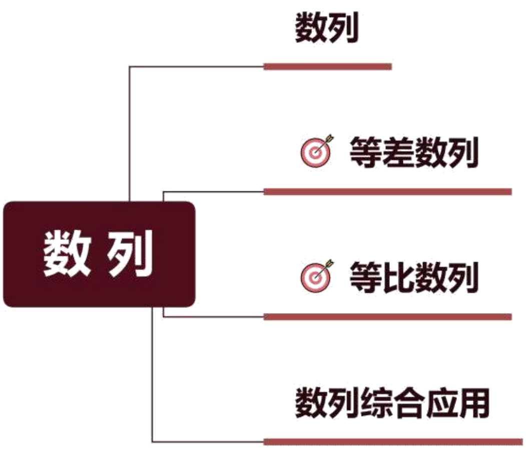
条件（1），$a_2=-9\Rightarrow a_2=-9=-3k\Rightarrow k=3\Rightarrow a_3=3k^2=27$，$a_4=-k^3=-27$. 则$a_1+a_2+a_3+a_4=1-9+27-27=-8$. 故条件（1）充分.

条件（2），$a_3=27\Rightarrow a_3=27=3k^2\Rightarrow k=\pm3$. 当$k=3$时，与条件（1）等价；当$k=-3$时，$a_1+a_2+a_3+a_4=1+9+27+27=64\neq-8$. 故条件（2）不充分.

综上，故选 A.

第三章 数列

知识脉络



真题呈现

一、等差数列

1.（2022）已知正数列$\{a_n\}$，则$\{a_n\}$是等差数列.【 】

（1）$a_{n+1}^2-a_n^2=2n$，$n=1$，2，3，$\cdots$.

（2）$a_1+a_3=2a_2$.

【答案】C　　【考查】等差数列

【解析】条件（1），$a_2^2-a_1^2=2\times1$，$a_3^2-a_2^2=2\times2$，$\cdots$，$a_n^2-a_{n-1}^2=2(n-1)$.

利用累加法，则有：$a_2^2-a_1^2+(a_3^2-a_2^2)+\cdots+(a_n^2-a_{n-1}^2)=2\times1+2\times2+\cdots+2(n-1)$.

$a_n^2-a_1^2=2[1+2+\ldots+(n-1)]\Rightarrow a_n^2-a_1^2=2\cdot(n-1)\cdot\dfrac{1+(n-1)}{2}\Rightarrow a_n^2-a_1^2=n(n-1)\Rightarrow$

$a_n^2=n(n-1)+a_1^2$. 未知a_1，无法判断a_n，不能推出$\{a_n\}$是等差数列. 故条件（1）不充分.

条件（2），$a_1+a_3=2a_2$，只能确定前三项为等差数列，无法确定$\{a_n\}$是等差数列. 故条件（2）不充分.

条件（1）和条件（2）单独都不充分，考虑条件（1）（2）联合.

条件（1）（2）联合可得：$\begin{cases} a_2^2-a_1^2=2 \\ a_3^2-a_2^2=4 \\ a_1+a_3=2a_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1=\dfrac{1}{2} \\ a_2=\dfrac{3}{2} \\ a_3=\dfrac{5}{2} \end{cases}$，$a_n^2=n(n-1)+a_1^2 \Rightarrow a_n^2=n^2-n+\dfrac{1}{4}=$

$(n-\dfrac{1}{2})^2 \Rightarrow a_n=n-\dfrac{1}{2}$，即数列$\{a_n\}$是等差数列. 故条件（1）（2）联合起来充分.

综上，故选 C.

2.（2020）若等差数列$\{a_n\}$满足$a_1=8$，且$a_2+a_4=a_1$，则$\{a_n\}$前n项和的最大值为【 】

A. 16

B. 17

C. 18

D. 19

E. 20

【答案】E　　　　　　　【考查】等差数列

【解析】方法一：

$a_2+a_4=2a_3=a_1=8 \Rightarrow a_3=4 \Rightarrow d=\dfrac{a_3-a_1}{3-1}=-2 \Rightarrow a_5=a_3+2d=4-4=0$.

∵等差数列的性质可知，$d=-2<0$.

∴$\{a_n\}$为递减的等差数列，且$a_4=2$，$a_5=0$，$a_6=-2$.

所以数列$\{a_n\}$前n项和的最大值在第 4 项与第 5 项取得，即$S_{max}=\dfrac{(8+0)\times 5}{2}=20$.

方法二：

根据题意，$a_2+a_4=a_1=8 \Rightarrow d=-2$. ∵$S_n=\dfrac{d}{2}n^2+(a_1-\dfrac{d}{2})n=-n^2+9n$（$n$为正整数）.

∴当n为 4 或 5 的时候取得最大值. 即$S_4=S_5=20$.

故选 E.

3.（2019）设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，则数列$\{a_n\}$是等差数列.【 】

（1）$S_n=n^2+2n$，$n=1$，2，3，⋯.

（2）$S_n=n^2+2n+1$，$n=1$，2，3，⋯.

【答案】A　　　　　　　　【考查】等差数列

【解析】方法一：

需要注意两个问题：①首项是否也满足通项公式. ②利用$a_n=S_n-S_{n-1}$求通项公式.

条件（1），$S_n=n^2+2n$，则$S_1=a_1=3$，$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2+2n-[(n-1)^2+2(n-1)]=2n+1$. 验证$a_1=3$与$S_1=a_1=3$相同且满足$An^2+Bn$的形式,则数列$\{a_n\}$是等差数列. 故条件（1）充分.

条件（2），$S_n=n^2+2n+1$，则$S_1=a_1=4$，$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2+2n+1-[(n-1)^2+2(n-1)+1]=2n+1$. 验证满足$An^2+Bn$的形式，但是$a_1=3$与$S_1=a_1=4$矛盾，则数列$\{a_n\}$不是等差数列. 故条件（2）不充分.

综上，故选A.

方法二：

根据等差数列求和公式可得：$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{d}{2}n^2+\frac{2a_1-d}{2}n=An^2+Bn$.

可得等差数列的前n项和公式可整理成一个没有常数项的二次函数表达式（$n\in Z_+$）.

条件（1），$S_n=n^2+2n$满足An^2+Bn的形式，且没有常数项，因此数列$\{a_n\}$是等差数列. 故条件（1）充分.

条件（2），$S_n=n^2+2n+1$不满足An^2+Bn的形式，有常数项1，因此数列$\{a_n\}$不是等差数列. 故条件（2）不充分.

综上，故选A.

4.（2018）设$\{a_n\}$为等差数列，则能确定$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_9$的值.【 】

（1）已知a_1的值.

（2）已知a_5的值.

【答案】B　　　　　　　　【考查】等差数列的性质

【解析】根据等差数列的等差中项公式得，$a_1+a_9=a_2+a_8=a_3+a_7=a_4+a_6=2a_5$.

则$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_9=S_9=9a_5=9(a_1+4d)\Rightarrow$确定$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_9$的值与$a_5$或者$a_1$、$d$有关.

条件（1），只知道a_1的值，不知公差d的值，则不能确定$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_9$的值. 故条件（1）不充分.

条件（2），只知道a_5的值. 根据上述推论可知，则能确定$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_9$的值. 故条件（2）充分.

综上，故选B.

5.（2017）已知$\{a_n\}$为等差数列，且$a_2-a_5+a_8=9$，则$a_1+a_2+\cdots+a_9=$【 】

A. 27

B. 45

C. 54

D. 81

E. 162

【答案】D　　　　　　　　　【考查】等差数列的性质

【解析】∵$\{a_n\}$为等差数列. ∴等差数列的性质得：若$m+n=p+q$，则$a_m+a_n=a_p+a_q$.

则有$a_2+a_8=2a_5 \Rightarrow a_2-a_5+a_8=2a_5-a_5=9 \Rightarrow a_5=9$.

即$a_1+a_2+\cdots+a_9=(a_1+a_9)+(a_2+a_8)+(a_3+a_7)+(a_4+a_6)+a_5=9a_5=9\times9=81$. 故选 D.

二、等比数列

1.（2023）已知等比数列$\{a_n\}$的公比大于 1，则$\{a_n\}$单调递增.【 】

（1）a_1是方程$x^2-x-2=0$的根.

（2）a_1是方程$x^2+x-6=0$的根.

【答案】C　　　　　　　　　【考查】等比数列

【解析】根据题意，设$a_n=a_1q^{n-1}(q>1)$. ∵$q>1$. ∴q^{n-1}为递增. 要想使a_n为递增数列，满足$a_1>0$即可.

条件（1），a_1是方程$x^2-x-2=0$的根$\Rightarrow(x+1)(x-2)=0$，解得：$a_1=-1$或 2. a_1存在小于 0 的情况（当$a_1=-1$时，$q>1$，则$\{a_n\}$单调递减），与上述结论矛盾. 故条件（1）不充分.

条件（2），a_1是方程$x^2+x-6=0$的根$\Rightarrow(x+3)(x-2)=0$，解得：$a_1=-3$或 2. a_1存在小于 0 的情况（当$a_1=-3$时，$q>1$，则$\{a_n\}$单调递减），与上述结论矛盾. 故条件（2）不充分.

条件（1）和条件（2）单独都不充分，考虑条件（1）（2）联合.

条件（1）（2）联合可确定$a_1=2>0$，满足$a_1>0$（当$a_1=2$时，$q>1$，则$\{a_n\}$单调递增）.

与上述结论一致. 故条件（1）（2）联合起来充分.
综上，故选 C.

2.（2023）设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，则a_2，a_3，a_4，…为等比数列.【 】

（1）$S_{n+1}>S_n$，$n=1$，2，3，….

（2）$\{S_n\}$是等比数列.

【答案】C 【考查】等比数列

【解析】条件（1），$S_{n+1}>S_n$，$n=1$，2，3，…⇒可知$a_{n+1}>0$，S_n是递增，说明数列是递增数列. 举反例：数列$\{a_n\}$为 1，2，3，4，…，n，$n+1$，但a_2，a_3，a_4，…为等差数列. 与题干结论矛盾. 故条件（1）不充分.

条件（2），$\{S_n\}$是等比数列⇒举反例：$S_n=1$，$a_1=1$，$a_2=a_3=a_4=\cdots=a_n=0$，不满足a_2，a_3，a_4，…为等比数列，与题干结论矛盾. 故条件（2）不充分.

条件（1）和条件（2）单独都不充分，考虑条件（1）（2）联合.

条件（1）（2）联合有：设$\{S_n\}$的公比为q，由于$S_{n+1}>S_n$，所以$q\neq1$，则$\begin{cases}S_n=S_1q^{n-1} & ① \\ S_{n-1}=S_1q^{n-2} & ②\end{cases}$

①−②得：$a_n=a_1q^{n-2}(q-1)$（$n\geqslant2$）. $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{a_1q^{n-2}(q-1)}{a_1q^{n-3}(q-1)}=q$（$n\geqslant2$）. 所以第二项以后成等比数列. 即$a_2$，$a_3$，$a_4$，…为等比数列. 故条件（1）（2）联合起来充分.

综上，故选 C.

3.（2022）已知a，b为实数，则能确定$\dfrac{a}{b}$的值.【 】

（1）a，b，$a+b$成等比数列.

（2）$a(a+b)>0$.

【答案】E 【考查】等比数列.

【解析】条件（1），a，b，$a+b$成等比数列⇒$b^2=a(a+b)$⇒$b^2=a^2+ab$，两边同时除以b^2：$1=(\dfrac{a}{b})^2+\dfrac{a}{b}$. 令$\dfrac{a}{b}=t$，原方程可化简为：$t^2+t-1=0$. 解得：$t_1=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$或$t_2=$

$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$，$\frac{a}{b}$的值不唯一.即不能确定$\frac{a}{b}$的值.故条件（1）不充分.

条件（2），$a(a+b)>0$，只能得出a与$a+b$为同号，无法确定$\frac{a}{b}$的值.故条件（2）不充分.

条件（1）和条件（2）单独都不充分，考虑条件（1）（2）联合.

条件（1）（2）联合后，无法判断a与b是否同号，仍然无法确定$\frac{a}{b}$的值.故条件（1）（2）联合起来也不充分.

综上，故选E.

三、数列综合应用

1.（2022）某直角三角形的三边a，b，c成等比数列，则能确定公比的值.【 】

（1）a是直角边长.

（2）c是斜边长.

【答案】D　　　　【考查】数列综合应用

【解析】设公比为q，则$b=aq$，$c=aq^2$.

条件（1），a是直角边.∵a，b，c成等比数列⇒$b^2=ac$，∴b为另一直角边，c为斜边.

又∵直角三角形.∴由勾股定理得:$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow (aq^2)^2=a^2+(aq)^2$.化简得:$1+q^2=q^4 \Rightarrow q^2=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow q=\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$.$q$有唯一正数解，即能确定公比的值.故条件（1）充分.

条件（2），c是斜边.∵a，b，c成等比数列⇒$b^2=ac$，∴a、b均为直角边.

又∵直角三角形.∴由勾股定理得:$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow (aq^2)^2=a^2+(aq)^2$.化简得:$1+q^2=q^4 \Rightarrow q^2=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow q=\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$.$q$有唯一正数解，即能确定公比的值.故条件（2）充分.

综上，故选D.

2.（2020）已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_2=2$，且$a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$（$n=1$，2，3，…），则$a_{100}=$【 】

A. 1

B. －1

C. 2

D. -2

E. 0

【答案】B　　【考查】数列综合应用

【解析】通过列举可以得到：$a_1=1$，$a_2=2$，$a_3=1$，$a_4=-1$，$a_5=-2$，$a_6=-1$，$a_7=1$，$a_8=2$，$a_9=1$，$a_{10}=-1$，…，故此可以发现，每 6 项进行一次循环，则可以判定该数列为周期数列，即周期为 6. 因为 $100\div6=16\cdots4$. 所以$a_{100}=a_{96+4}=a_4=-1$. 故选 B.

3.（2019）设数列$\{a_n\}$满足$a_1=0$，$a_{n+1}-2a_n=1$，则$a_{100}=$【 】

A. $2^{99}-1$

B. 2^{99}

C. $2^{99}+1$

D. $2^{100}-1$

E. $2^{100}+1$

【答案】A　　【考查】数列综合应用

【解析】方法一：

既不是等比数列也不是等差数列，需要拼凑出新的数列，使它满足等差或等比数列.

根据题意得，$a_{n+1}-2a_n=1$ 满足$a_{n+1}=pa_n+m$的形式，因而可以转化为$a_{n+1}+t=p(a_n+t)$的形式.

因此，$a_{n+1}+1=2(a_n+1)$，因而$\{a_n+1\}$是一个等比数列，且首项为 1，公比为 2.

则由等比数列的通项公式可知：$a_n+1=2^{n-1}$. 即$a_{100}=2^{99}-1$.

方法二：

根据题意得，$a_{n+1}=2a_n+1$，利用待定系数法.

设$a_{n+1}+x=2(a_n+x)$，整理得$a_{n+1}=2a_n+x$.

由两式相等得$x=1$，则$\dfrac{a_{n+1}+1}{a_n+1}=2$，所以数列$\{a_n+1\}$构成以 1 为首项，2 为公比的等比数列.

即数列$\{a_n+1\}$的通项公式为$a_n+1=2^{n-1}$，整理得$a_n=2^{n-1}-1$. 即$a_{100}=2^{99}-1$.

故选 A.

4.（2018）甲、乙、丙三人的年收入成等比数列，则能确定乙的年收入的最大值.【 】

（1）已知甲、丙两人的年收入之和.

（2）已知甲、丙两人的年收入之积.

【答案】D 【考查】数列综合应用

【解析】根据题意，设甲、乙、丙三人的年收入分别为x，y，z（x，y，z均大于0）.

由等比数列的等比中项公式得，$y^2=xz \Rightarrow y=\sqrt{xz}$.

条件（1），已知甲、丙两人的年收入之和$\Rightarrow$ $x+z$为定值.

由均值不等式可得，$y=\sqrt{xz}\leq\dfrac{x+z}{2}$，当且仅当$x=z$时，$y=\sqrt{xz}$有最大值，即确定乙的年收入的最大值. 故条件（1）充分.

条件（2），已知甲、丙两人的年收入之积$\Rightarrow$ xz为定值. 由上述结论得，$y=\sqrt{xz}$是定值，最大值为$\sqrt{xz}$. 即确定乙的年收入的最大值. 故条件（2）充分.

综上，故选D.

5.（2017）设a，b是两个不相等的实数. 则函数$f(x)=x^2+2ax+b$的最小值小于零.【 】

（1）1，a，b成等差数列.

（2）1，a，b成等比数列.

【答案】A 【考查】数列综合应用

【解析】方法一：

根据题意得，函数$f(x)=x^2+2ax+b$为一元二次函数$\Rightarrow$二次函数的性质：开口向上，有最小值$\Rightarrow$在对称轴$x=-a$处，取得最小值$\Rightarrow f(-a)=(-a)^2+2a(-a)+b=-a^2+b<0\Rightarrow a^2-b>0$.

条件（1），1，a，b成等差数列，根据等差数列的等差中项公式得：$2a=1+b \Rightarrow b=2a-1$.

代入上述结论验证：$a^2-2a+1>0\Rightarrow (a-1)^2>0$.

$\because$1，a，b成等差数列，且$a\neq b$，$a\neq 1$.

$\therefore (a-1)^2>0$ 恒成立. 与上述结论一致. 故条件（1）充分.

条件（2），1，a，b成等比数列，根据等比数列的等比中项公式得：$a^2=b$. 代入上述结论验证：$a^2-a^2=0$. 与上述结论不一致. 故条件（2）不充分.

综上，故选A.

方法二：

根据题意得，函数$f(x)=x^2+2ax+b$为一元二次函数$\Rightarrow$抛物线开口向上，且其最小值小于零$\Rightarrow\Delta=4a^2-4b=4(a^2-b)>0$.

条件（1），根据等差数列的等差中项公式得：$2a=1+b \Rightarrow a=\dfrac{b+1}{2}$. 则$\Delta=4[(\dfrac{b+1}{2})^2-b]=(b-1)^2$，且$b\neq a \Rightarrow b\neq\dfrac{b+1}{2}\Rightarrow b\neq 1\Rightarrow$一定有$\Delta=(b-1)^2>0$，与上述结论一致. 故条件（1）

充分.
条件（2），根据等比数列的等比中项公式得：$a^2=b\Rightarrow\Delta=4(b-b)=0$，与上述结论不一致.故条件（2）不充分.
综上，故选 A.

6.（2016）已知数列a_1，a_2，…，a_{10}，则$a_1-a_2+a_3-\cdots+a_9-a_{10}\geqslant0$.【 】
（1）$a_n\geqslant a_{n+1}$，$n=1$，2，3，…，9.
（2）$a_n^2\geqslant a_{n+1}^2$，$n=1$，2，3，…，9.

【答案】A 【考查】数列综合应用
【解析】条件（1），$a_n\geqslant a_{n+1}\Rightarrow a_n-a_{n+1}\geqslant0\Rightarrow$数列$a_1$，$a_2$，…，$a_{10}$递减$\Rightarrow$（$a_1-a_2$）+（$a_3-a_4$）+…+（$a_9-a_{10}$）$\geqslant0$.符合结论.故条件（1）充分.
条件（2），$a_n^2\geqslant a_{n+1}^2\Rightarrow a_n^2-a_{n+1}^2\geqslant0\Rightarrow a_n\leqslant a_{n+1}$或$a_n\geqslant a_{n+1}$.无法得出结论.故条件（2）不充分.
综上，故选 A.

7.（2015）已知$M=(a_1+a_2+\ldots+a_{n-1})\cdot(a_2+a_3+\ldots+a_n)$，$N=(a_1+a_2+\ldots+a_n)\cdot(a_2+a_3+\ldots+a_{n-1})$，则$M>N$.【 】
（1）$a_1>0$.
（2）$a_1a_n>0$.

【答案】B 【考查】数列综合应用
【解析】根据题意，设$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$.则有：
$M=(a_1+a_2+\ldots+a_{n-1})\cdot(a_2+a_3+\ldots+a_n)=S_{n-1}(S_n-a_1)$.
$N=(a_1+a_2+\ldots+a_n)\cdot(a_2+a_3+\ldots+a_{n-1})=S_n(S_{n-1}-a_1)$.
比较两数的关系，这里可以用作差法.即$M-N=S_{n-1}(S_n-a_1)-S_n(S_{n-1}-a_1)=a_1(S_n-S_{n-1})$.
条件（1），$a_1>0$，但不能确定(S_n-S_{n-1})的符号.即不能确定$M>N$.故条件（1）不充分.
条件（2），$a_1a_n>0$.$\because a_n=S_n-S_{n-1}$.$\therefore M-N=a_1(S_n-S_{n-1})=a_1a_n>0\Rightarrow M-N>0\Rightarrow M>N$.故条件（2）充分.
综上，故选 B.

8.（2013）设$a_1=1$，$a_2=k$，$a_{n+1}=|a_n-a_{n-1}|$（$n\geq2$），则$a_{100}+a_{101}+a_{102}=2$.【 】

（1）$k=2$.

（2）k是小于 20 的正整数.

【答案】D　　　　　　【考查】数列综合应用

【解析】条件（1），$k=2$. $a_1=1$，$a_2=2$，$a_3=|a_2-a_1|=1$，$a_4=|a_3-a_2|=1$，$a_5=|a_4-a_3|=0$，$a_6=|a_5-a_4|=1$，$a_7=|a_6-a_5|=1$，$a_8=|a_7-a_6|=0$，…，依次类推，从第 3 项开始循环 1，1，0，1，1，0，…，则该周期为 3. 因此，100÷3=33……1⇒ $a_{100}=1$；101÷3=33……2⇒ $a_{101}=0$；102÷3=34⇒ $a_{102}=1$. 即$a_{100}+a_{101}+a_{102}=1+0+1=2$. 故条件（1）充分.

条件（2），k是小于 20 的正整数.

当$k=1$时，数列为 1，1，0，1，1，0，…，从第 1 项开始循环，周期为 3，则充分.

当$k=2$时，数列为 1，2，1，1，0，1，1，0，…，从第 3 项开始循环，周期为 3，则充分.

当$k=3$时，数列为 1，3，2，1，1，0，1，1，0，…，从第 4 项开始循环，周期为 3，则充分.

当$k=4$时，数列为 1，4，3，1，2，1，1，0，1，1，0，…，从第 6 项开始循环，周期为 3，则充分.

依次类推.

当$k=19$时，数列为 1，19，18，1，17，16，1，15，14，1，13，12，1，11，10，1，9，8，1，7，6，1，5，4，1，3，2，1，1，0，1，1，0，…，从第 28 项开始循环，周期为 3，则充分.

故条件（2）充分.

综上，故选 D.

真题演练

一、问题求解：第 1～15 小题，每小题 3 分，共 45 分。下列每题给出的 A、B、C、D、E 五个选项中，只有一项是符合试题要求的。

1.（1998）若在等差数列中前 5 项和$S_5=15$，前 15 项和$S_{15}=120$，则前 10 项和S_{10}为【 】

A. 40

B. 45

C. 50

D. 55

E. 60

2.（1999）求和$S_n=3+2\times 3^2+3\times 3^3+4\times 3^4+\cdots+n\times 3^n$的结果为【 】

A. $\frac{3(3^n-1)}{4}+\frac{n\cdot 3^n}{2}$

B. $\frac{3(1-3^n)}{4}+\frac{3^{n+1}}{2}$

C. $\frac{3(1-3^n)}{4}+\frac{(n+2)\cdot 3^n}{2}$

D. $\frac{3(3^n-1)}{4}+\frac{3^n}{2}$

E. $\frac{3(1-3^n)}{4}+\frac{n\cdot 3^{n+1}}{2}$

3.（2001）在等差数列$\{a_n\}$中，$a_3=2$，$a_{11}=6$；数列$\{b_n\}$是等比数列，若$b_2=a_3$，$b_3=\frac{1}{a_2}$，

则满足$b_n>\frac{1}{a_{26}}$的最大的n是【 】

A. 3

B. 4

C. 5

D. 6

4.（2002）设有两个数列$\{\sqrt{2}-1，a\sqrt{3}，\sqrt{2}+1\}$和$\left\{\sqrt{2}-1，\frac{a\sqrt{6}}{2}，\sqrt{2}+1\right\}$，使前者成为等差数列，后者成为等比数列的实数$a$的值有个.【 】

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

5.（2003）若平面内有 10 条直线，其中任何两条不平行，且任何三条不共点（即不相交于一点），则这 10 条直线将平面分成了【 】

A. 21 部分

B. 32 部分

C. 43 部分

D. 56 部分

E. 77 部分

6.（2006）将放有乒乓球的 577 个盒子从左到右排成一行，如果最左边的盒子里放了 6 个乒乓球，且每相邻的 4 个盒子里共有 32 个乒乓球，那么最右边的盒子里的乒乓球个数为【 】

A. 6

B. 7

C. 8

D. 9

E. 以上均不对

7.（2007）$\dfrac{\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^3+\cdots+(\frac{1}{2})^8}{0.1+0.2+0.3+\cdots+0.9}=$【 】

A. $\dfrac{85}{768}$

B. $\dfrac{85}{512}$

C. $\dfrac{85}{384}$

D. $\dfrac{255}{256}$

E. 以上均不对

8.（2008）下列通项公式表示的数列为等差数列的是【】

A. $a_n=\dfrac{n}{n-1}$

B. $a_n=n^2-1$

C. $a_n=5n+(-1)^n$

D. $a_n=3n-1$

E. $a_n=\sqrt{n}-\sqrt[3]{n}$

9.（2008）P是以a为边长的正方形，P_1是以P的四边中点为顶点的正方 0 形，P_2是以P_1的四边中点为顶点的正方形，P_i是以P_{i-1}的四边中点为顶点的正方形，则P_6的面积是【　】

A. $\frac{a^2}{16}$

B. $\frac{a^2}{32}$

C. $\frac{a^2}{40}$

D. $\frac{a^2}{48}$

E. $\frac{a^2}{64}$

10.（2008）如果数列$\{a_n\}$的前n项的和$S_n=\frac{3}{2}a_n-3$，那么这个数列的通项公式是【　】

A. $a_n=2(n^2+n+1)$

B. $a_n=3\times 2^n$

C. $a_n=3n+1$

D. $a_n=2\times 3^n$

E. 以上均不对

11.（2009）若数列$\{a_n\}$中，$a_n\neq 0\,(n\geqslant 1)$，$a_1=\frac{1}{2}$，前$n$项和$S_n$，满足$a_n=\frac{2S_n^2}{2S_n-1}\,(n\geqslant 2)$，则$\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$是【　】

A. 首项为 2、公比为$\frac{1}{2}$的等比数列

B. 首项为 2、公比为 2 的等比数列

C. 既非等差数列也非等比数列

D. 首项为 2、公差为$\frac{1}{2}$的等差数列

E. 首项为 2、公差为 2 的等差数列

12.（2009）设直线$nx+(n+1)y=1$（n为正整数）与两坐标轴围成的三角形面积S_n（$n=1,2,\cdots,2\ 009$），则$S_1+S_2+\cdots+S_{2\ 009}=$【 】

A. $\frac{1}{2}\times\frac{2\ 009}{2\ 008}$

B. $\frac{1}{2}\times\frac{2\ 008}{2\ 009}$

C. $\frac{1}{2}\times\frac{2\ 009}{2\ 010}$

D. $\frac{1}{2}\times\frac{2\ 010}{2\ 009}$

E. 以上都不正确

13.（2009）$(1+x)+(1+x)^2+\cdots+(1+x)^n=a_1(x-1)+2a_2(x-1)^2+\cdots+na_n(x-1)^n$，则$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=$【 】

A. $\frac{3^n-1}{2}$

B. $\frac{3^{n+1}-1}{2}$

C. $\frac{3^{n+1}-3}{2}$

D. $\frac{3^n-3}{2}$

E. $\frac{3^n-3}{4}$

14.（2010）某地震灾区现居民住房的总面积为a平方米，当地政府计划每年以 10%的住房增长率建设新房，并决定每年拆除固定数量的危旧房. 如果 10 年后该地的住房总面积正好比现有住房面积增加一倍，那么，每年应该拆除危旧房的面积是____平方米.（注：$1.1^9\approx2.4$，$1.1^{10}\approx2.6$，$1.1^{11}\approx2.9$，精确到小数点后一位）【 】

A. $\frac{1}{80}a$

B. $\frac{1}{40}a$

C. $\frac{3}{80}a$

D. $\frac{1}{20}a$

E. 以上均不对

15. （2011）若等比数列$\{a_n\}$满足$a_2a_4+2a_3a_5+a_2a_8=25$，且$a_1>0$，则$a_3+a_5=$【 】

A. 8

B. 5

C. 2

D. -2

E. -5

二、条件充分性判断：第 16～25 小题，每小题 3 分，共 30 分。要求判断每题给出的条件（1）和条件（2）能否充分支持题干所陈述的结论。A、B、C、D、E 五个选项为判断结果，请选择一项符合试题要求的判断。

A. 条件（1）充分，但条件（2）不充分。

B. 条件（2）充分，但条件（1）不充分。

C. 条件（1）和（2）单独都不充分，但条件（1）和条件（2）联合起来充分。

D. 条件（1）充分，条件（2）也充分。

E. 条件（1）和（2）单独都不充分，条件（1）和条件（2）联合起来也不充分。

16. （2003）数列$\{a_n\}$的前k项和$a_1+a_2+\cdots+a_k$与随后k项和$a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_{2k}$之比与$k$无关.【 】

（1）$a_n=2n-1$.

（2）$a_n=2n$.

17. （2003）$\frac{a+b}{a^2+b^2}=-\frac{1}{3}$.【 】

（1）a^2，1，b^2成等差数列.

（2）$\frac{1}{a}$，1，$\frac{1}{b}$成等比数列.

18. （2004）方程组$\begin{cases}x+y=a\\y+z=4\\z+x=2\end{cases}$，得$x$，$y$，$z$等差.【 】

（1）$a=1$.

（2）$a=0$.

19. （2007）三个实数$S_{丙}=975$的算术平均数为 4.【 】

（1）x_1+6，x_2-2，x_3+5 的算术平均数为 4.

（2）x_2为x_1和x_3的等差中项，且$x_2=4$.

20. （2008）$a_1a_8<a_4a_5$.【 】

（1）$\{a_n\}$为等差数列，且$a_1>0$.

（2）$\{a_n\}$为等差数列，公差$d\neq 0$.

21. （2009）等差数列$\{a_n\}$的前 18 项和$S_{18}=\frac{19}{2}$.【 】

（1）$a_3=\frac{1}{6}$，$a_6=\frac{1}{3}$.

（2）$a_3=\frac{1}{4}$，$a_6=\frac{1}{2}$.

22. （2009）$a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_n^2=\frac{1}{3}(4^n-1)$.【 】

（1）数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2^n$.

（2）数列$\{a_n\}$中，对任意正整数n，有$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=2^n-1$.

23. （2010）甲企业一年的总产值为$\frac{a}{p}[(1+p)^{12}-1]$.【 】

（1）甲企业一月份的产值为a，以后每月产值的增长率为p.

（2）甲企业一月份的产值为$\frac{a}{2}$，以后每月产值的增长率为 $2p$.

24. （2010）$x_n=1-\frac{1}{2^n}(n=1,2,\cdots)$.【 】

（1）$x_1=\frac{1}{2}$，$x_{n+1}=\frac{1}{2}(1-x_n)(n=1,2,\cdots)$.

（2）$x_1=\frac{1}{2}$，$x_{n+1}=\frac{1}{2}(1+x_n)(n=1,2,\cdots)$.

25.（2011）已知数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=\dfrac{a_n+2}{a_n+1}$（$n=1$，2，…）. 则$a_2=a_3=a_4$.【 】

（1）$a_1=\sqrt{2}$.

（2）$a_1=-\sqrt{2}$.

参考答案

答案速查									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	E	B	B	D	A	C	D	E	D
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
E	C	C	C	B	A	E	B	B	B
21	22	23	24	25					
A	B	A	B	D					

1.【答案】D　　　　　　　【考查】等差数列

【解析】根据结论：“$\{a_n\}$是等差数列，公差为d，S_n是其前n项和，则S_n，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$，…也是等差数列，公差为$D=n^2d$”，可知S_5，$S_{10}-S_5$，$S_{15}-S_{10}$，…成等差数列，即$2(S_{10}-S_5)=S_5+S_{15}-S_{10}$，解得：$S_{10}=55$. 故选 D.

2.【答案】E　　　　　　　【考查】错位相减法

【解析】等式左右两边同时乘以 3 得 $3S_n=3^2+2\times 3^3+3\times 3^4+4\times 3^5+\cdots+n\times 3^{n+1}$，将所得等式与已知等式错位相减得到：$-2S_n=3+3^2+3^3+\cdots+3^n-n\times 3^{n+1}$，所以$S_n=\dfrac{3(1-3^n)}{4}+\dfrac{n\cdot 3^{n+1}}{2}$. 故选 E.

3.【答案】B　　　　　　　【考查】等差数列

【解析】由题意，等差数列的公差$d=\dfrac{a_{11}-a_3}{8}=\dfrac{1}{2}$，知$a_2=1.5$，$a_1=1$，$a_n=1+\dfrac{1}{2}(n-1)$. 等比数列的公比$q=\dfrac{b_3}{b_2}=\dfrac{1}{a_2a_3}=\dfrac{1}{3}$，知$b_1=\dfrac{b_2}{q}=6$，$b_n=6\times(\dfrac{1}{3})^{n-1}$，那么$b_n>\dfrac{1}{a_{26}}$就是$6\times(\dfrac{1}{3})^{n-1}$

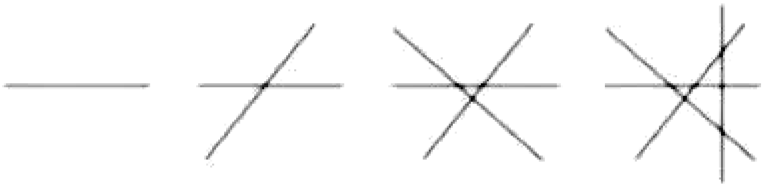
$>\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2}\times(26-1)}$，解得：$n<5$，则$n$最大取 4. 故选 B.

4.【答案】B　　　　　　　　　【考查】数列综合应用

【解析】依题意有：$\begin{cases}2a\sqrt{3}=\sqrt{2}-1+\sqrt{2}+1\\ (\dfrac{a\sqrt{6}}{2})^2=(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)\end{cases}$，解得：$a=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$，只有一个$a$. 故选 B.

5.【答案】D　　　　　　　　　【考查】数列综合应用

【解析】设n条直线（不共点）将平面分成的部分数为a. 根据题意可画图，如图所示.



由图可得：$a_1=2$，$a_2=4$，$a_3=7$，$a_4=11$，…

由此发现以下规律：$a_2-a_1=2$，$a_3-a_2=3$，$a_4-a_3=4$，…，$a_{10}-a_9=10$.

把这些等式相加，可得：$a_{10}-a_1=2+3+4+\cdots+10=54$. 因此，$a_{10}=56$. 故选 D.

6.【答案】A　　　　　　　　　【考查】周期数列

【解析】依题意“每相邻 4 个盒子里共有 32 个乒乓球”，得盒中球的个数是以 4 为周期的周期数列，第 577 个盒子刚好是 144×4+1=577(个)，即 577 项之前有 144 个周期，第 577 项是第 145 个周期的第一项，与最左边盒子的球数 6 相等. [注：若数列$\{a_n\}$任意相邻T项之和为一个定值，则该数列是一个周期数列，周期为T.]故选 A.

7.【答案】C　　　　　　　　　【考查】等比数列

【解析】不难看出，分子是首项为$\dfrac{1}{2}$、公比是$\dfrac{1}{2}$的等比数列前 8 项的和；分母是首项为 0.1、公差为 0.1 的等差数列前 9 项的和，因此其算式值为$\dfrac{\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1-(\frac{1}{2})^8}{1-\frac{1}{2}}}{\dfrac{(0.1+0.9)\times9}{2}}=\dfrac{85}{384}$. 故选 C.

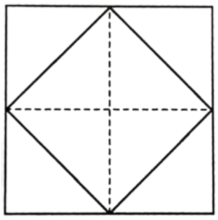
8.【答案】D　　　　　　　　　【考查】等差数列

【解析】当$a_n=3n-1$时，$a_{n-1}=3(n-1)-1$，故$a_n-a_{n-1}=3n-1-[3(n-1)-1]=3$，由此

可得$\{a_n\}$是等差数列. 可以验证，当$n=1$，2，3 时，其他选项均不是等差数列. [注：可记住结论：等差数列的通项公式$a_n=dn+a_1-d$是关于n的一次函数.]故选 D.

9.【答案】E　　　　　　　　【考查】数列综合应用

【解析】根据题意可画图，如图所示.



图中的三角形都是等腰直角三角形，不难看出，正方形P_{n+1}的面积是正方形P_n面积的$\frac{1}{2}$，故可以将正方形P_n的面积看成公比为$\frac{1}{2}$的等比数列，其首项$S_P=a^2$，$S_{P_1}=\frac{1}{2}a^2$，可推知$S_{P_6}=(\frac{1}{2})^6S_P=\frac{a^2}{64}$. 故选 E.

10.【答案】D　　　　　　　　【考查】等比数列

【解析】$a_n=S_n-S_{n-1}=(\frac{3}{2}a_n-3)-(\frac{3}{2}a_{n-1}-3)=\frac{3}{2}a_n-\frac{3}{2}a_{n-1}$，即$a_n=3a_{n-1}$，可知数列$\{a_n\}$为公比是 3 的等比数列，为求其首项，可令$n=1$，得：$S_1=a_1=\frac{3}{2}a_1-3$，解得：$a_1=6$，于是得到$a_n=6\times3^{n-1}=2\times3^n$. 故选 D.

11.【答案】E　　　　　　　　【考查】等差数列

【解析】令$a_n=S_n-S_{n-1}$，则有$S_n-S_{n-1}=\frac{2S_n^2}{2S_n-1}$，整理化简可得：$S_n+2S_nS_{n-1}-S_{n-1}=0$，等式左右两边同时除以$S_nS_{n-1}$，可得$\frac{1}{S_n}-\frac{1}{S_{n-1}}=2$，此时可知$\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$是公差为 2 的等差数列. 故选 E.

12.【答案】C　　　　　　　　【考查】数列综合应用

【解析】不难写出直线的截距式方程$\frac{x}{\frac{1}{n}}+\frac{y}{\frac{1}{n+1}}=1$，可知三角形面积$S_n=\frac{1}{2n(n+1)}$，求$S_n$前 2 009 项的和，即求$\frac{1}{2}(\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{2\,009\times2\,010})$，裂项后答案为$\frac{1}{2}\times\frac{2\,009}{2\,010}$. 故选 C.

13.【答案】C　　　　　　　　　　【考查】数列综合应用

【解析】令$x=2$ 可得所求表达式$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=3+3^2+\cdots+3^n=\frac{3\times(1-3^n)}{1-3}=\frac{3^{n+1}-3}{2}$. 故选 C.

14.【答案】C　　　　　　　　　　【考查】数列综合应用

【解析】用x_n表示该地区第n年的住房面积，每年拆除住房面积为b平方米，依题意有$x_1=a$，$x_n=(1+10\%)x_{n-1}-b=1.1x_{n-1}-b$，等号两边同时减掉 $10b$可得$x_n-10b=1.1x_{n-1}-11b$，即$x_n-10b=1.1(x_{n-1}-10b)$，即$\{x_n-10b\}$是公比为 1.1 的等比数列，则$x_n-10b=(x_1-10b)\times 1.1^{n-1}\Leftrightarrow x_n=(a-10b)\times 1.1^{n-1}+10b$，“10 年后的住房面积”是第 11 年的住房面积，即$x_{11}=(a-10b)\times 1.1^{11-1}+10b=2a$；又$1.1^{10}\approx 2.6$，解得：$b=\frac{3}{80}a$. 故选 C.

15.【答案】B　　　　　　　　　　【考查】等比数列

【解析】根据等比数列的中项公式，$a_2a_4=a_3^2$，$a_2a_8=a_5^2$，故$a_2a_4+2a_3a_5+a_2a_8=a_3^2+2a_3a_5+a_5^2=(a_3+a_5)^2=25\Leftrightarrow a_3+a_5=\pm 5$，又$a_1>0$，无论公比$q>0$ 还是$q<0$，都有$a_3+a_5=5$. 故选 B.

16.【答案】A　　　　　　　　　　【考查】数列综合应用

【解析】数列$\{a_n\}$的前k项的中项是$a_{\frac{1+k}{2}}$，故前k项和$a_1+a_2+\cdots+a_k=k\,a_{\frac{1+k}{2}}$，随后$k$项的中项是$a_{\frac{k+1+2k}{2}}=a_{\frac{3k+1}{2}}$，故随后$k$项和$a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_{2k}=k\,a_{\frac{3k+1}{2}}$，因此可得它们的比为

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_{2k}}=\frac{ka_{\frac{k+1}{2}}}{ka_{\frac{3k+1}{2}}}=\frac{a_{\frac{k+1}{2}}}{a_{\frac{3k+1}{2}}}.$$

条件（1），当$a_n=2n-1$ 时，$\frac{a_{\frac{k+1}{2}}}{a_{\frac{3k+1}{2}}}=\frac{2(\frac{k+1}{2})-1}{2(\frac{3k+1}{2})-1}=\frac{k}{3k}=\frac{1}{3}$，与$k$无关. 与题干结论一致. 故条件（1）充分.

条件（2），当$a_n=2n$时，$\frac{a_{\frac{k+1}{2}}}{a_{\frac{3k+1}{2}}}=\frac{2(\frac{k+1}{2})}{2(\frac{3k+1}{2})}=\frac{k+1}{3k+1}$，与$k$有关. 与题干结论不一致. 故条件（2）

不充分.

综上，故选 A.

17.【答案】E　　　　　　　　【考查】数列综合应用

【解析】条件（1），a^2，1，b^2成等差数列$\Rightarrow a^2+b^2=2$.一个方程两个未知数，无法计算.故条件（1）不充分.

条件（2），$\frac{1}{a}$，1，$\frac{1}{b}$成等比数列$\Rightarrow \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}=1\Rightarrow ab=1$.一个方程两个未知数，无法计算.故条件（2）不充分.

条件（1）和条件（2）单独都不充分，考虑条件（1）（2）联合.

条件（1）（2）联合有：$\begin{cases}a^2+b^2=2\\ab=1\end{cases}\Rightarrow a^2+2ab+b^2=4\Rightarrow a+b=\pm2$.则$\frac{a+b}{a^2+b^2}=\frac{\pm2}{2}=\pm1$，有两个值，即无法确定$\frac{a+b}{a^2+b^2}$的值，且计算结果与题干结论不一致.故条件（1）（2）联合起来也不充分.

综上，故选 E.

18.【答案】B　　　　　　　　【考查】数列综合应用

【解析】方法一：

x，y，z等差$\Rightarrow y-x=z-y$，$y+z=4$与$z+x=2$相减得$y-x=2$，$z+x=2$与$x+y=a$相减得$z-y=2-a$，因此必须有$a=0$.

条件（1），$a=1\neq0$与上述结论不一致.故条件（1）不充分.

条件（2），$a=0$与上述结论一致.故条件（2）充分.

综上，故选 B.

方法二：

条件（1），将$a=1$代入方程组解得：$x=-\frac{1}{2}$，$y=\frac{3}{2}$，$z=\frac{5}{2}$，$2y\neq x+z$.即x，y，z不构成等差.故条件（1）不充分.

条件（2），将$a=0$代入方程组解得：$x=-1$，$y=1$，$z=3$，$2y=x+z$.即x，y，z构成等差.故条件（2）充分.

综上，故选 B.

19.【答案】B　　　　　　　　【考查】数列综合应用

【解析】条件（1），x_1+6，x_2-2，x_3+5的算术平均数为4$\Rightarrow x_1+6+x_2-2+x_3+5=12\Rightarrow x_1+x_2+x_3=3$，其算术平均值为1.与题干结论不一致.故条件（1）不充分.

条件（2），x_2为x_1和x_3的等差中项，且$x_2=4\Rightarrow 2x_2=x_1+x_3=8\Rightarrow x_1+x_2+x_3=12$，其算术平

均值为 4. 与题干结论一致. 故条件（2）充分.
综上，故选 B.

20.【答案】B　　　　　　　　【考查】等差数列

【解析】根据题意，设$\{a_n\}$为等差数列. $a_1a_8=a_1(a_1+7d)=a_1^2+7a_1d$. $a_4a_5=(a_1+3d)(a_1+4d)=a_1^2+7a_1d+12d^2$. 则$a_1a_8<a_4a_5 \Leftrightarrow a_1^2+7a_1d<a_1^2+7a_1d+12d^2 \Leftrightarrow 0<12d^2 \Leftrightarrow d\neq 0$.

条件（1），$\{a_n\}$为等差数列，且$a_1>0 \Rightarrow$当等差数列公差$d=0$时，所有项均相等$a_1a_8=a_4a_5$. 则与题干结论不一致. 故条件（1）不充分.

条件（2），$\{a_n\}$为等差数列，公差$d\neq 0$，与上述结论一致. 故条件（2）充分.

综上，故选 B.

21.【答案】A　　　　　　　　【考查】等差数列

【解析】条件（1），$a_6-a_3=3d \Leftrightarrow d=\frac{1}{18}$. $a_{16}=a_6+(16-6)d=\frac{8}{9}$. 则$S_{18}=\frac{a_1+a_{18}}{2}\times 18=\frac{a_3+a_{16}}{2}\times 18=\frac{19}{2}$. 与题干结论一致. 故条件（1）充分.

条件（2），$a_6-a_3=3d \Leftrightarrow d=\frac{1}{12}$. $a_{16}=a_6+(16-6)d=\frac{4}{3}$. 则$S_{18}=\frac{a_1+a_{18}}{2}\times 18=\frac{a_3+a_{16}}{2}\times 18=\frac{57}{2}\neq\frac{19}{2}$. 与题干结论不一致. 故条件（2）不充分.

综上，故选 A.

22.【答案】B　　　　　　　　【考查】等比数列

【解析】条件（1），$a_n=2^n$，可知数列$\{a_n\}$是首项为 2、公比为 2 的等比数列，那么$\{a_n^2\}$就是首项为 4、公比为 4 的等比数列，故$\{a_n^2\}$的前n项和可以根据等比数列的求和公式得到，即$a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_n^2=\frac{4(1-4^n)}{1-4}=\frac{4}{3}(4^n-1)$，与题干结论不一致. 故条件（1）不充分.

条件（2），$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=2^n-1$ ①；$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}=2^{n-1}-1$ ②. ∵由①−②得：$a_n=2^n-2^{n-1}=2^{n-1}$. ∴$\{a_n\}$是等比数列. 因此$a_n^2=(2^{n-1})^2=4^{n-1}$. 则数列$\{a_n^2\}$是首项为 1、公比为 4 的等比数列. 即$a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_n^2=\frac{4^n-1}{4-1}=\frac{1}{3}(4^n-1)$，与题干结论一致. 故条件（2）充分.

综上，故选 B.

23.【答案】A 【考查】数列综合应用

【解析】条件（1），甲企业每月的产值是首项为a、公比为$(1+p)$的等比数列，一年12个月，故全年总产值$\frac{a[1-(1+p)^{12}]}{1-(1+p)}=\frac{a}{p}[(1+p)^{12}-1]$. 与题干结论一致. 故条件（1）充分.

条件（2），甲企业每月的产值是首项为$\frac{a}{2}$、公比为$(1+2p)$的等比数列，一年12个月，故全年总产值$\frac{\frac{a}{2}[1-(1+2p)^{12}]}{1-(1+2p)}=\frac{a}{4p}[(1+2p)^{12}-1]$. 与题干结论不一致. 故条件（2）不充分.

综上，故选A.

24.【答案】B 【考查】数列综合应用

【解析】条件(1)，$x_{n+1}=\frac{1}{2}(1-x_n)\Leftrightarrow x_{n+1}-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}(1-x_n)-\frac{1}{3}\Leftrightarrow x_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}(x_n-\frac{1}{3})$，即数列$\left\{x_n-\frac{1}{3}\right\}$是公比为$-\frac{1}{2}$的等比数列，则$x_n-\frac{1}{3}=(x_1-\frac{1}{3})\times(-\frac{1}{2})^{n-1}=\frac{1}{6}(-\frac{1}{2})^{n-1}$，可得$x_n=\frac{1}{6}(-\frac{1}{2})^{n-1}+\frac{1}{3}$，与题干结论不一致. 故条件（1）不充分.

条件(2)，$x_{n+1}=\frac{1}{2}(1+x_n)\Leftrightarrow x_{n+1}-1=\frac{1}{2}(1+x_n)-1\Leftrightarrow x_{n+1}-1=\frac{1}{2}(x_n-1)$，即数列$\{x_n-1\}$是公比为$\frac{1}{2}$的等比数列，则$x_n-1=(x_1-1)(\frac{1}{2})^{n-1}$，代入整理可得$x_n=1-\frac{1}{2^n}$，与题干结论一致. 故条件（2）充分.

综上，故选B.

25.【答案】D 【考查】数列综合应用

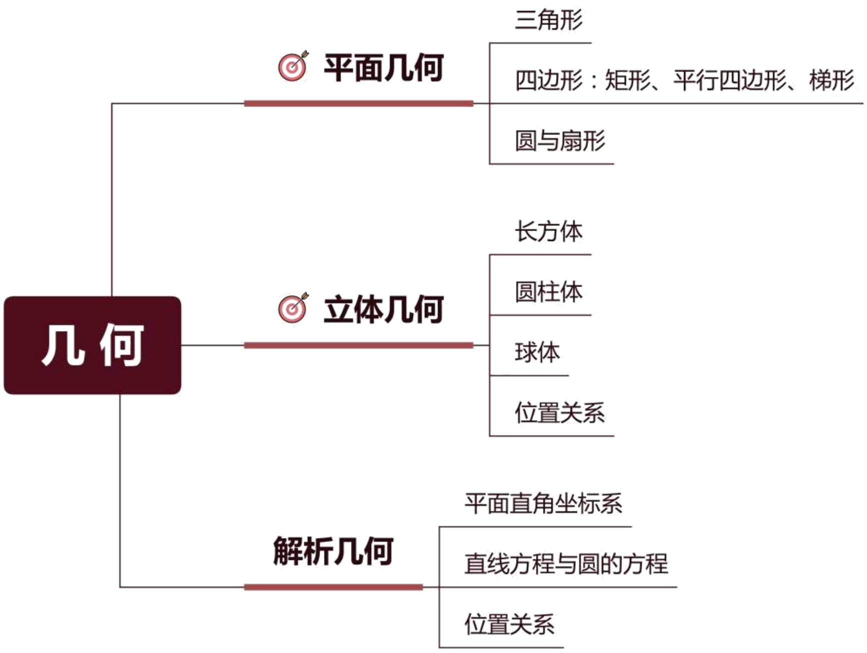
【解析】条件（1），当$a_1=\sqrt{2}$时，$a_2=\frac{a_1+2}{a_1+1}=\frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}+1}=\frac{(\sqrt{2}+2)(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=\sqrt{2}$，$a_3=\frac{a_2+2}{a_2+1}=\sqrt{2}$，$a_4=\frac{a_3+2}{a_3+1}=\sqrt{2}\Rightarrow a_2=a_3=a_4$. 与题干结论一致. 故条件（1）充分.

条件（2），当$a_1=-\sqrt{2}$时，$a_2=\frac{a_1+2}{a_1+1}=\frac{2-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}=\frac{(2-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}=-\sqrt{2}$，$a_3=\frac{a_2+2}{a_2+1}=-\sqrt{2}$，$a_4=\frac{a_3+2}{a_3+1}=-\sqrt{2}\Rightarrow a_2=a_3=a_4$. 与题干结论一致. 故条件（2）充分.

综上，故选D.

第四章 几何

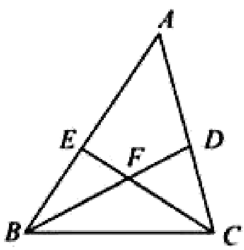
知识脉络



真题呈现

一、平面几何

1.（2023）如图所示，在三角形 ABC 中，$\angle BAC=60°$，BD 平分 $\angle ABC$ 交 AC 于 D，CE 平分 $\angle ACB$ 交 AB 于 E，BD 和 CE 交于 F，则 $\angle EFB=$【 】



第 1 题图

A. 45°

B. 52.5°

C. 60°

D. 67.5°

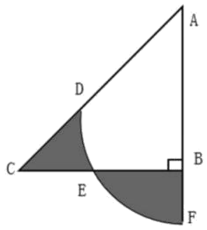
E. 75°

【答案】C　　　　　　　　　　【考查】三角形

【解析】∵ $\angle ABD=\angle DBC$，$\angle ACE=\angle BCE$，$\angle ABC+\angle ACB=120°$．

∴ $\angle EFB=\angle FBC+\angle FCB=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB)=\frac{1}{2}\times 120°=60°$．故选 C.

2.（2022）如图所示，$\triangle ABC$是等腰直角三角形，以A为圆心的圆弧交AC于D，交BC于E，交AB的延长线于F，若曲边三角形CDE的面积与BEF的面积相等，则$\frac{AD}{AC}=$【　】



第 2 题图

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

B. $\frac{2}{\sqrt{5}}$

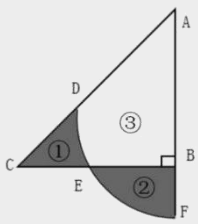
C. $\sqrt{\frac{3}{\pi}}$

D. $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

E. $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$

【答案】E　　　　　　　　　　【考查】平面几何——面积问题

【解析】



方法一：根据题意可设$AB=BC=1$，则$AC=\sqrt{2}$，由于曲边三角形CDE的面积与BEF的面积相等，则$S_{①}+S_{③}=S_{②}+S_{③}$，即扇形$S_{扇ADF}=S_{\triangle ABC}$，$\frac{45°}{360°}\cdot\pi\cdot AD^2=\frac{1}{2}\times1\times1$，可得$AD^2=\frac{4}{\pi}$，所以$\frac{AD^2}{AC^2}=\frac{2}{\pi}\Rightarrow\frac{AD}{AC}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

方法二：由于$\triangle ABC$是等腰直角三角形，因此斜边AC上的高为斜边AC的$\frac{1}{2}$，由于曲边三角形CDE的面积与BEF的面积相等，即扇形$S_{扇ADF}=S_{\triangle ABC}$，可得$\frac{45°}{360°}\cdot\pi\cdot AD^2=\frac{1}{2}AC\times\frac{1}{2}AC$，因此$\frac{\pi}{8}AD^2=\frac{1}{4}AC^2$，即$\frac{AD^2}{AC^2}=\frac{2}{\pi}\Rightarrow\frac{AD}{AC}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

故选E.

3.（2022）在直角三角形ABC中，D是斜边AC的中点，以AD为直径的圆交AB于E，若$\triangle ABC$的面积为8，则$\triangle AED$的面积为【　】

A. 1

B. 2

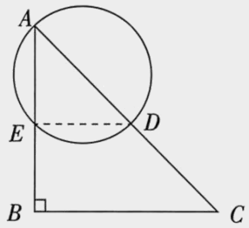
C. 3

D. 4

E. 6

【答案】B　　　　【考查】平面几何——三角形相似

【解析】根据题意，连接ED，可画图，如图所示.



∵AD是直径，直径所对应的圆周角为90°．∴$\angle AED=90°$．∴$ED\parallel BC$.

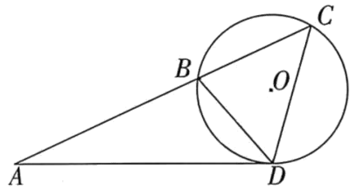
又∵$\triangle AED$和$\triangle ABC$有一个公共角$\angle A$. ∴$\triangle AED\sim\triangle ABC$.

由于D为AC的中点，则相似比为$AD:AC=1:2$.

即面积比为$S_{\triangle AED}:S_{\triangle ABC}=1:4\Rightarrow S_{\triangle AED}=\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}=\frac{1}{4}\times8=2$.

故选B.

4.（2022）如图所示，AD与圆相切于点D，AC与圆相交于点B，点C，则能确定$\triangle ABD$与$\triangle BCD$的面积比.【 】



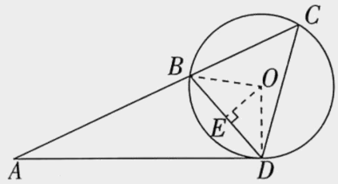
第 4 题图

（1）已知$\dfrac{AD}{CD}$.

（2）已知$\dfrac{BD}{CD}$.

【答案】B 【考查】平面几何——三角形相似

【解析】



连接圆心OB、OD，过圆心O作$OE\perp BD$于点E，即$\triangle OBD$是等腰三角形$\Rightarrow \angle BOE=\angle DOE$.

$\because \angle BOD$与$\angle BCD$是弧BD所对的圆心角和圆周角（同弧所对的圆周角是圆心角的一半）.

$\therefore \angle BCD=\angle BOE=\angle DOE$.

$\because AD$与圆相切于点D（即$\angle ADO=90°$）.

$\therefore \angle DOE+\angle EDO=\angle ADB+\angle ODE=90°$. 即$\angle BCD=\angle ADB$.

又$\because \angle A=\angle A$. $\therefore \triangle ABD\sim\triangle ADC$.

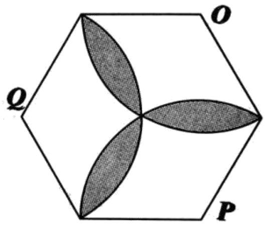
则有相似比为：$\dfrac{AD}{AC}=\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{BD}{DC}$. 故可以求出$S_{\triangle ABD}$与$S_{\triangle ADC}$的面积比，从而确定$\triangle ABD$与$\triangle BCD$的面积比.

条件（1），根据条件已知$\dfrac{AD}{CD}$的值，不满足相似比$\dfrac{AD}{AC}=\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{BD}{DC}$中的一组，故无法确定面积比. 故条件（1）不充分.

条件（2），根据已知$\dfrac{BD}{CD}$的值，满足相似比$\dfrac{AD}{AC}=\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{BD}{DC}$中的一组，故可以确定面积比. 故条件（2）充分.

综上，故选 B.

5.（2021）如图，正六边形的边长为 1，分别以正六边形的顶点O，P，Q为圆心，以 1 为半径作圆弧，则阴影部分的面积为【　】



第 5 题图

A. $\pi-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

B. $\pi-\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

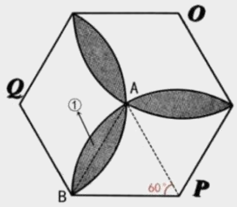
C. $\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

D. $\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$

E. $2\pi-3\sqrt{3}$

【答案】A　　　　　　　　　　【考查】平面几何——不规则图形面积

【解析】根据题意可画图，如图所示.



由图可得：$S_{①}=S_{扇形PAB}-S_{\triangle PAB}$. 共有 6 个$S_{①}$.

∵正六边形的边长为 1 且以O，P，Q为圆心，1 为半径作圆弧. ∴$\angle APB=60°$.

又∵$AP=PB=1$，$\angle APB=60°$ ∴$\triangle PAB$为等腰三角形.

则$S_{扇形PAB}=\dfrac{60°}{360°}\pi 1^2=\dfrac{\pi}{6}$. $S_{\triangle PAB}=\dfrac{1}{2}\times1\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

即阴影部分的面积为 $6S_{①}=6$（$S_{扇形PAB}-S_{\triangle PAB}$）$=6\times$（$\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$）$=\pi-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

故选 A.

6. （2021）给定两个直角三角形，则这两个直角三角形相似.【 】

（1）每个直角三角形的边长成等比数列.

（2）每个直角三角形的边长成等差数列.

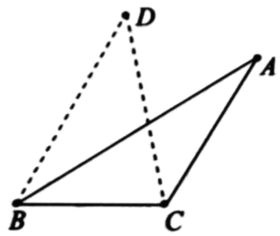
【答案】D 【考查】平面几何——三角形相似

【解析】条件（1），根据条件可设两个直角三角形的三边分别为a，aq_1，aq_1^2和b，bq_2，bq_2^2，（$q_1>1$，$q_2>1$）. 根据勾股定理得：$a^2+(aq_1)^2=(aq_1^2)^2$，$b^2+(bq_2)^2=(bq_2^2)^2 \Rightarrow q_1^2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，$q_2^2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. 即$\frac{q_1}{q_2}=1$. 则有$\frac{a}{b}=\frac{aq_1}{bq_2}=\frac{aq_1^2}{bq_2^2}$，三边对应成比例，则两个直角三角形相似. 故条件（1）充分.

条件（2），根据条件可设两个直角三角形的三边分别为a，$a+d_1$，$a+2d_1$和b，$b+d_2$，$b+2d_2$，（$d_1>0$，$d_2>0$）. 根据勾股定理得：$a^2+(a+d_1)^2=(a+2d_1)^2$，$b^2+(b+d_2)^2=(b+2d_2)^2 \Rightarrow a=3d_1$，$b=3d_2$. 则两个三角形三边分别为$3d_1$，$4d_1$，$5d_1$和$3d_2$，$4d_2$，$5d_2$，则$\frac{3d_1}{3d_2}=\frac{4d_1}{4d_2}=\frac{5d_1}{5d_2}$，三边对应成比例，则两个直角三角形相似. 故条件（2）充分.

综上，故选D.

7. （2020）如图，在△ABC中，∠ABC=30°，将线段AB绕点B旋转至DB，使∠DBC=60°，则△DBC与△ABC的面积之比为【 】



第 7 题图

A. 1

B. $\sqrt{2}$

C. 2

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

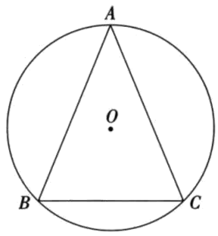
E. $\sqrt{3}$

【答案】E　　　　　　　　　　　　【考查】平面几何——三角形

【解析】根据题意得，将线段AB绕点B旋转至DB，则$DB=AB$.

由正弦定理可得：$\dfrac{S_{\Delta DBC}}{S_{\Delta ABC}}=\dfrac{\frac{1}{2}\cdot DB\cdot BC\cdot \sin\angle DBC}{\frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC\cdot \sin\angle ABC}=\dfrac{\sin 60^\circ}{\sin 30^\circ}=\sqrt{3}$. 故选 E.

8.（2020）如图，圆O的内接△ABC是等腰三角形，底边$BC=6$，顶角为$\dfrac{\pi}{4}$，则圆O的面积为【　】



第 8 题图

A. 12π

B. 16π

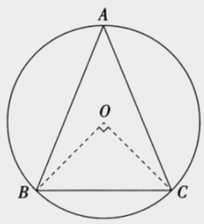
C. 18π

D. 32π

E. 36π

【答案】C　　　　　　　　　　　　【考查】平面几何——三角形外接圆

【解析】根据题意，连接OB，OC，如图所示.



OB，OC均为圆O的半径.

∵已知$\angle BAC=\dfrac{\pi}{4}$且同弧所对的圆心角是圆周角的 2 倍.

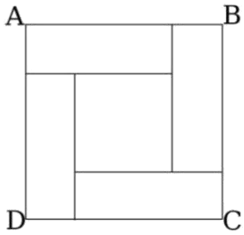
∴$\angle BOC=2\angle BAC=\dfrac{\pi}{2}=90^\circ$．即三角形$BOC$为等腰直角三角形.

在等腰直角三角形BOC中，$BC=6$，$OB=OC$. 由勾股定理得：

$OB^2+OC^2=BC^2\Rightarrow OB^2+OC^2=36\Rightarrow OB^2=OC^2=18\Rightarrow OB=OC=3\sqrt{2}$，即$r=3\sqrt{2}$.

故圆O的面积为$S=\pi r^2=\left(3\sqrt{2}\right)^2\pi=18\ \pi$. 故选 C.

9.（2016）如图，正方形$ABCD$由四个相同的长方形和一个小正方形拼成，则能确定小正方形的面积.【 】



第 9 题图

（1）已知正方形$ABCD$的面积.

（2）已知长方形的长与宽之比.

【答案】C　　　　　　　　　　【考查】平面几何——正方形、长方形

【解析】根据题意，设长方形的长、宽分别为a, b，则$S_{大正方形}=(a+b)^2, S_{小正方形}=(a-b)^2$.

条件（1），已知正方形$ABCD$的面积⇒ $a+b$的值可以确定，但无法确定a，b的值，即不能确定小正方形的面积. 故条件（1）不充分.

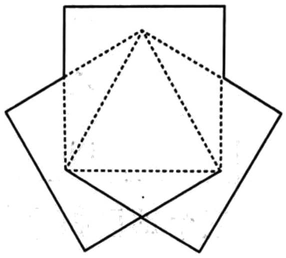
条件（2），已知长方形的长与宽之比⇒$\frac{a}{b}$的值可以确定，但无法确定a，b的值，即不能确定小正方形的面积. 故条件（2）不充分.

条件（1）和条件（2）单独都不充分，考虑条件（1）（2）联合.

条件（1）（2）联合，$a+b$的值和$\frac{a}{b}$的值都可以确定，则能确定a，b的值，即能确定小正方形的面积. 故条件（1）（2）联合起来充分.

综上，故选 C.

10.（2012）如图，三个边长为 1 的正方形所组成区域（实线区域）的面积为【 】



第 10 题图

A. $3-\sqrt{2}$

B. $3-\frac{3\sqrt{2}}{4}$

C. $3-\sqrt{3}$

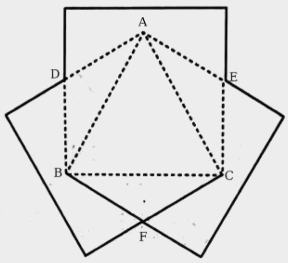
D. $3-\frac{\sqrt{3}}{2}$

E. $3-\frac{3\sqrt{3}}{4}$

【答案】E 【考查】平面几何

【解析】根据题意，三个边长为 1 的正方形所组成区域（实线区域）的面积为$S_{实践}=3\cdot S_{正方形}-S_{重叠部分}$.

重叠部分由 2 个边长为 1 的等边三角形和 3 个小三角形组成.



$\because \triangle ABC$为等边三角形$\Rightarrow S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}$. $\therefore \angle ABC=\angle ACB=\angle BAC=60°$.

则有$\angle ABD=\angle FBC=\angle FCB=\angle ECA=\angle EAC=\angle DAB=30°$.

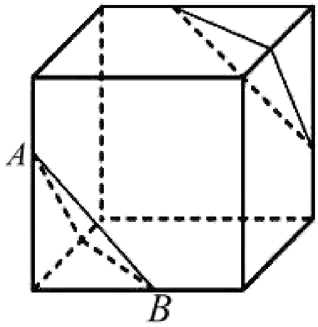
则$\triangle DAB$、$\triangle FBC$、$\triangle EAC$为底角为 30° 的等腰三角形$\Rightarrow S_{\triangle DAB}+S_{\triangle FBC}+S_{\triangle EAC}=S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

因此，$S_{实践}=3\cdot S_{正方形}-2\cdot S_{\triangle ABC}-(S_{\triangle DAB}+S_{\triangle FBC}+S_{\triangle EAC})=3\cdot S_{正方形}-3\cdot S_{\triangle ABC}=3-3\times\frac{\sqrt{3}}{4}=3-\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

故选 E.

二、立体几何

1.（2023）如图所示，从一个棱长为6的正方体中截去两个相同的正三棱锥，若正三棱锥的边长 $AB=4\sqrt{2}$，则剩余几何体的表面积为【 】



第1题图

A. 168

B. $168+16\sqrt{3}$

C. $168+32\sqrt{3}$

D. $112+32\sqrt{3}$

E. $124+32\sqrt{3}$

【答案】B　　【考查】立体几何

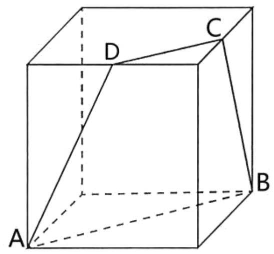
【解析】正三棱锥：底面是正三角形，侧面都是等腰直角三角形.

$AB=$ 正三角形的边长 $=$ 等腰直角三角形的底边 $=4\sqrt{2}\Rightarrow$ 等腰直角三角形的腰 $=\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=4$.

由图可得，剩余几何体的表面积可以用整个正方体的表面积减去两个正三棱锥的表面积（六个等腰直角三角形），加上截取后形成的两个正三角形的面积. 即 $S_{剩余几何体}=S_{正}-6S_{等腰直角三角形}+2S_{正三角形}=6\times6\times6-6\times\dfrac{1}{2}\times4\times4+2\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times(4\sqrt{2})^2=168+16\sqrt{3}$.

故选B.

2.（2022）如图所示，在棱长为 2 的正方体中，A，B为两顶点，C，D为所在棱的中点，则 $S_{四边形ABCD}$ ＝【 】



第 2 题图

A. $\frac{9}{2}$

B. $\frac{7}{2}$

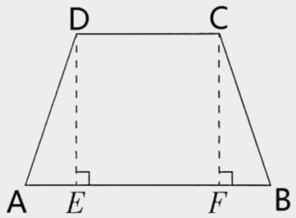
C. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

D. $2\sqrt{5}$

E. $3\sqrt{2}$

【答案】A　　【考查】立体几何——正方体、平面几何——梯形

【解析】



由题意得：①$AB // CD$ ⇒四边形$ABCD$是梯形. ②C，D为所在棱的中点⇒ $AD＝BC＝\sqrt{2^2+1^2}＝\sqrt{5}$. ③$AB＝\sqrt{2^2+2^2}＝2\sqrt{2}$. $CD＝\sqrt{1^2+1^2}＝\sqrt{2}$.

由①＋②⇒四边形$ABCD$是等腰梯形. 如图所示，过点C作$CF\perp AB$，过点D作$DE\perp AB$. 则有$AE＝BF＝\frac{(2\sqrt{2}-\sqrt{2})}{2}＝\frac{\sqrt{2}}{2}$. 则梯形的高$DE＝\sqrt{AD^2-AE^2}＝\sqrt{(\sqrt{5})^2-(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}＝\frac{3\sqrt{2}}{2}＝CF$. 所以等腰梯形$ABCD$的面积为$S＝\frac{1}{2}\times$（上底＋下底）$\times$高$＝\frac{1}{2}\times$（$\sqrt{2}$＋$2\sqrt{2}$）$\times\frac{3\sqrt{2}}{2}＝\frac{9}{2}$.

故选 A.

3.（2021）若球体的内接正方体的体积为 8 m^3，则该球体的表面积为【 】

A. 4π m^2

B. 6π m^2

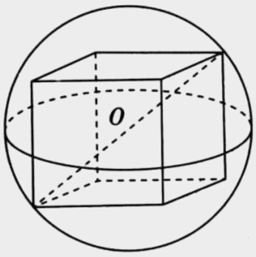
C. 8π m^2

D. 12π m^2

E. 24π m^2

【答案】D　　　　　　　　【考查】立体几何——球内接正方体

【解析】根据题意可画图，如图所示.



设正方体的棱长为a. ∵正方体的体积为$a^3=8$. ∴解得$a=2$.

∵正方体的体对角线为球的直径. ∴设正方体外接球的半径为R. 则有$\sqrt{3}a=2R\Rightarrow R=\sqrt{3}$.

所以球的表面积为$S=4\pi R^2=4\pi(\sqrt{3})^2=12\pi$（$m^2$）. 故选 D.

4.（2020）在长方体中，能确定长方体的体对角线长度.【 】

（1）已知长方体一个顶点的三个面的面积.

（2）已知长方体一个顶点的三个面的对角线长度.

【答案】D　　　　　　　　【考查】立体几何——长方体

【解析】设长方体的长、宽、高分别为a，b，c，则其对角线的长度为$\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

条件（1），已知长方体一个顶点的三个面的面积，不妨设三个面的面积分别为x，y，z，

则有：$\begin{cases}ab=x\\ac=y\\bc=z\end{cases}$，则$abc=\sqrt{xyz}\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{\sqrt{xyz}}{z}\\b=\dfrac{\sqrt{xyz}}{y}\\c=\dfrac{\sqrt{xyz}}{x}\end{cases}$，则体对角线$\sqrt{a^2+b^2+c^2}$的值可以确定. 故条件

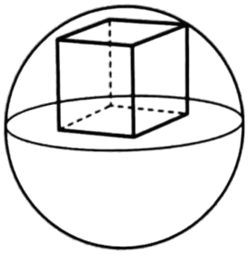
（1）充分.

条件（2），已知长方体一个顶点的三个面的对角线长度，不妨设三个面的对角线长度分别为x，y，z，则有：$\begin{cases}\sqrt{a^2+b^2}=x\\ \sqrt{a^2+c^2}=y\\ \sqrt{b^2+c^2}=z\end{cases}$，则$\begin{cases}a^2+b^2=x^2\\ a^2+c^2=y^2\\ b^2+c^2=z^2\end{cases}$，所以$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2+z^2}{2}}$，

则体对角线$\sqrt{a^2+b^2+c^2}$的值可以确定.故条件（2）充分.

综上，故选D.

5.（2019）如图，正方体位于半径为3的球内，且其一面位于球的大圆上，则正方体表面积最大为【E】



第5题图

A. 12

B. 18

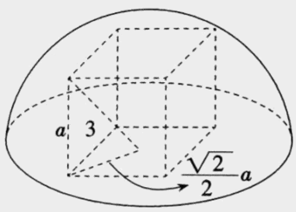
C. 24

D. 30

E. 36

【答案】E　　　　【考查】立体几何——球、正方体

【解析】

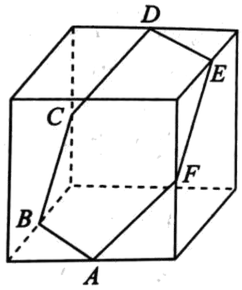


根据题意得，正方体内接于半球时表面积最大.

设正方体边长为a，由勾股定理得$(\frac{\sqrt{2}}{2}a)^2+a^2=3^2 \Rightarrow a=\sqrt{6} \Rightarrow S_{表}=6a^2=36$.

即正方体表面积最大为36.故选E.

6.（2019）如图，六边形$ABCDEF$是平面与棱长为 2 的正方体所截得到的. 若A，B，D，E分别是相应棱的中点，则六边形$ABCDEF$的面积为【 】



第 6 题图

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

B. $\sqrt{3}$

C. $2\sqrt{3}$

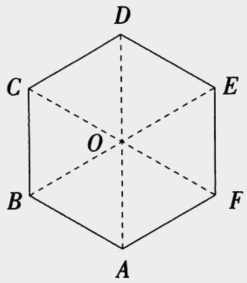
D. $3\sqrt{3}$

E. $4\sqrt{3}$

【答案】D　　　　　　　　【考查】立体几何——正方体

【解析】根据题意得，截出的六边形$ABCDEF$为正六边形，且边长为$DE=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$.

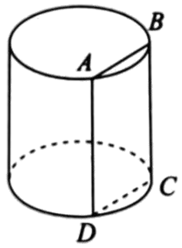
根据题意可画图，连接正六边形的所有对角线. 如图所示.



正三角形的面积公式$S_{正三角形}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times(边长)^2$.

因此，$S_{ABCDEF}=6S_{正三角形}=6\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times(\sqrt{2})^2=3\sqrt{3}$. 故选 D.

7.（2018）如图，圆柱体的底面半径为 2，高为 3，垂直于底面的平面截圆柱体所得截面为矩形$ABCD$. 若弦AB所对的圆心角为$\frac{\pi}{3}$，则截掉部分（较小部分）的体积为【　】



第 7 题图

A. $\pi-3$

B. $2\pi-6$

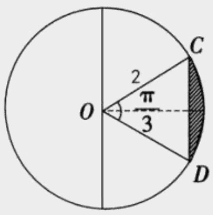
C. $\pi-\frac{3\sqrt{3}}{2}$

D. $2\pi-3\sqrt{3}$

E. $\pi-\sqrt{3}$

【答案】D　　　　　　　　【考查】立体几何——圆柱体、平面几何——圆与扇形

【解析】根据题意可画图，如图所示.（提示：$\frac{\pi}{3}=60°$，等边三角形的面积为$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$，a为边长）

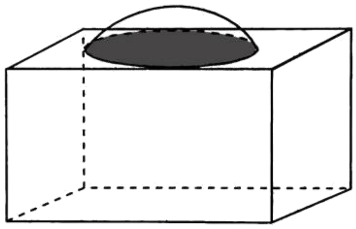


通过水平横截面观察，可得所求柱体的底面为弓形（图中的阴影部分）.

则有：$S_{阴影}=S_{扇形COD}-S_{\triangle COD}=\frac{60°}{360°}\pi r^2-\frac{\sqrt{3}}{4}r^2=\frac{1}{6}\pi 2^2-\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2=\frac{2\pi}{3}-\sqrt{3}$.

因此，体积$V=S_{阴影}h=\left(\frac{2\pi}{3}-\sqrt{3}\right)\times 3=2\pi-3\sqrt{3}$. 故选 D.

8.（2017）如图，一个铁球沉入水池中.则能确定铁球的体积.【 】



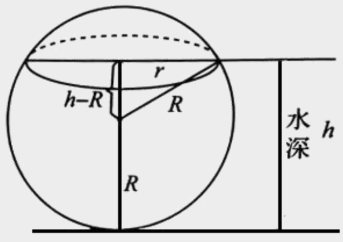
第 8 题图

（1）已知铁球露出水面的高度.

（2）已知水深及铁球与水面交线的周长.

【答案】B　　　　　　　　【考查】立体几何——球体

【解析】根据题意可画图，如图所示.



条件（1），已知铁球露出水面的高度，但并不能确定此高度和半径的关系，故不能确定铁球的体积.故条件（1）不充分.

条件（2），∵已知水深及铁球与水面交线的周长.

∴设水深为h，铁球的半径为R，铁球与水面的平面圆的周长为$C=2\pi r$.

则球心到水面的距离为$h-R$，铁球与水面的平面圆半径为$r=\dfrac{C}{2\pi}$.

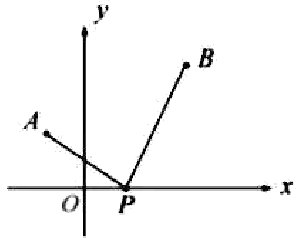
由图可得，铁球与水面的平面圆半径r、球心到水面的距离$h-R$和铁球的半径R构成直角三角形.

则由勾股定理得$R^2=r^2+(h-R)^2\Rightarrow R=\dfrac{r^2+h^2}{2h}=\dfrac{(\frac{C}{2\pi})^2+h^2}{2h}$.即铁球的体积$V=\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{4}{3}\pi[\dfrac{(\frac{C}{2\pi})^2+h^2}{2h}]^3$.因为$C$和$h$已知，所以能确定铁球的体积.故条件（2）充分.

综上，故选 B.

三、解析几何

1.（2023）如图所示，已知点 A（-1，2），点 B（3，4），若点 P（m，0）使得 $|PB|-|PA|$ 最大，则【 】



第 1 题图

A. $m=-5$

B. $m=-3$

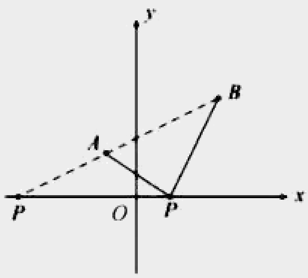
C. $m=-1$

D. $m=1$

E. $m=3$

【答案】A　　　　【考查】解析几何

【解析】根据题意可画图，连接 P、A、B，如图所示.



根据三角形三边的性质，任意两边之差小于第三边可得：$|PB|-|PA|<|AB|$.

当 P、A、B 三点共线时，$|PB|-|PA|$ 可得最大值 $|AB|$. 则有 $\frac{4-2}{3-(-1)}=\frac{2-0}{(-1)-m}\Rightarrow$ 解得：$m=-5$. 故选 A.

2.（2023）设 x，y 是实数，则 $\sqrt{x^2+y^2}$ 有最小值和最大值.【 】

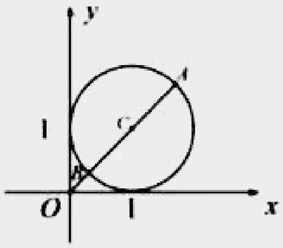
（1）$(x-1)^2+(y-1)^2=1$.

（2）$y=x+1$.

【答案】A　　　　　　　　【考查】解析几何——最值问题

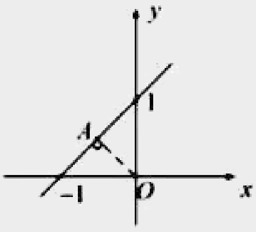
【解析】根据题意，设$d=\sqrt{x^2+y^2}$. 则d为点(x, y)到原点$O(0, 0)$的距离.

条件（1），根据$(x-1)^2+(y-1)^2=1$可画图（圆C），如图所示.



点(x, y)为圆周上任意一点，到原点$O(0, 0)$的距离的最大值是OA（$OA=\sqrt{2}+1$），最小值是OB（$OB=\sqrt{2}-1$）. 即$\sqrt{x^2+y^2}$有最小值和最大值，符合题干结论. 故条件（1）充分.

条件（2），根据$y=x+1$可画图，如图所示.



点(x, y)为直线上任意一点，到原点$O(0, 0)$的距离的最小值为OA（$OA=\frac{\sqrt{2}}{2}$），没有最大值. 即$\sqrt{x^2+y^2}$有最小值，没有最大值，不符合题干结论. 故条件（2）不充分.

综上，故选A.

3.（2021）已知$ABCD$是圆$x^2+y^2=25$的内接四边形，若A，C是直线$x=3$与圆$x^2+y^2=25$的交点，则四边形$ABCD$面积的最大值为【　】

A. 20

B. 24

C. 40

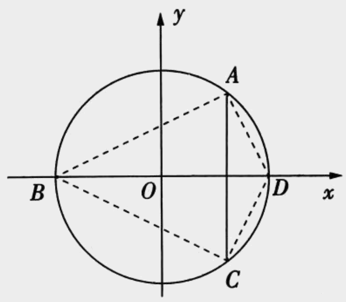
D. 48

E. 80

【答案】C　　　　　　　　　　【考查】解析几何

【解析】由题意得$\begin{cases}x^2+y^2=25\\x=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=3\\y=\pm4\end{cases}$，圆的半径为5.因此$A$（3，4），$C$（3，−4）$\Rightarrow|AC|$＝8.

根据题意可画图，如图所示.设三角形ABC和三角形ADC的高分别为h_1，h_2.



由图可得：四边形$ABCD$可分为三角形ABC和三角形$ADC\Rightarrow S_{四边形ABCD}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ADC}=\frac{1}{2}|AC|h_1+\frac{1}{2}|AC|h_2=4(h_1+h_2)$.

为了保证$S_{四边形ABCD}$最大，则$S_{\triangle ABC}$和$S_{\triangle ADC}$分别都要取最大值.

因为点B和点D为动态变化，所以当点B和点D分别在（−5，0）和（5，0）上时，两个三角形的面积同时最大.即$|BD|$＝10为圆的直径，则$S_{四边形ABCD}=4(h_1+h_2)=4\times10=40$.

故选C.

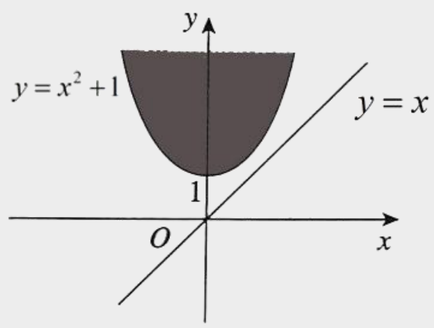
4.（2021）设x，y为实数，则能确定$x\leqslant y$.【　】

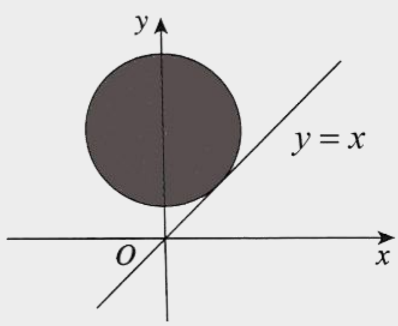
（1）$x^2\leqslant y-1$.

（2）$x^2+(y-2)^2\leqslant2$.

【答案】D　　　　　　　　　　【考查】解析几何——线性规划

【解析】根据题意可画图，如图所示.





条件（1），联立$\begin{cases} y=x \\ y=x^2+1 \end{cases} \Rightarrow x^2-x+1=0$，其中判别式$\Delta=1-4=-3<0$.

所以直线与抛物线无交点，如上图（左边）所示，抛物线恒在直线的上方. 即所有$x^2 \leqslant y-1$的点都满足$x \leqslant y$. 故条件（1）充分.

条件（2），圆心为（0，2），半径为$r=\sqrt{2}$，则圆心到直线$y=x$的距离为$d=\frac{|0-2|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$ $=r$，故该圆与直线相切，如上图（右边）所示，且圆心在直线上方，那么圆内的点恒在直线上方. 即$x^2+(y-2)^2 \leqslant 2$的点都满足$x \leqslant y$. 故条件（2）充分.

综上，故选D.

5.（2021）设a为实数，圆C：$x^2+y^2=ax+ay$，则能确定圆C的方程.【 】

（1）直线$x+y=1$与圆C相切.

（2）直线$x-y=1$与圆C相切.

【答案】A　　　　【考查】解析几何——直线与圆的位置关系

【解析】根据题意得：$x^2+y^2=ax+ay \Leftrightarrow \left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{2}$.

则圆C的圆心为（$\frac{a}{2}$，$\frac{a}{2}$），半径$r=\frac{\sqrt{2}}{2}|a|$.

条件（1），直线$x+y=1$与圆C相切，圆心到直线的距离$d=\frac{\left|\frac{a}{2}+\frac{a}{2}-1\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|a-1|}{\sqrt{2}}$. 即$\frac{|a-1|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}|a| \Rightarrow a=\frac{1}{2}$. 故圆$C$的方程为$\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{8}$. 故条件（1）充分.

条件（2），直线$x-y=1$与圆C相切，圆心到直线的距离$d=\frac{\left|\frac{a}{2}-\frac{a}{2}-1\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|-1|}{\sqrt{2}}$. 即$\frac{|-1|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}|a| \Rightarrow a=\pm 1$. 故圆$C$的方程无法唯一确定. 故条件（2）不充分.

综上，故选A.

6. （2020）设实数x，y满足$|x-2|+|y-2|\leqslant 2$，则x^2+y^2的取值范围是【 】

A. [2，18]

B. [2，20]

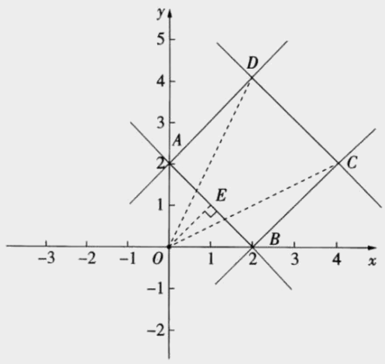
C. [2，36]

D. [4，18]

E. [4，20]

【答案】B　　　　　　　　【考查】解析几何

【解析】根据题意可画图，$|x-2|+|y-2|\leqslant 2$ 表示如图所示的四条直线围成的正方形区域（包含边界）.



AB所在直线方程为：$2-x+2-y=2\Rightarrow y=-x+2$.

BC所在直线方程为：$x-2+2-y=2\Rightarrow y=x-2$.

CD所在直线方程为：$x-2+y-2=2\Rightarrow y=-x+6$.

DA所在直线方程为：$2-x+y-2=2\Rightarrow y=x+2$.

x^2+y^2表示正方形区域的动点（x，y）到定点（0，0）距离的平方.

由图可知，$(x^2+y^2)_{\min}=OE^2=(\sqrt{2})^2=2$，$(x^2+y^2)_{\max}=OD^2=OC^2=4^2+2^2=20$.

所以x^2+y^2的取值范围是[2，20]. 故选 B.

7. （2019）设圆C与圆$(x-5)^2+y^2=2$关于直线$y=2x$对称，则圆C的方程为【 】

A. $(x-3)^2+(y-4)^2=2$

B. $(x+4)^2+(y-3)^2=2$

C. $(x-3)^2+(y+4)^2=2$

D. $(x+3)^2+(y+4)^2=2$

E. $(x+3)^2+(y-4)^2=2$

【答案】E　　　　　　　　　　【考查】解析几何——圆

【解析】根据题意得，$(x-5)^2+y^2=2$ 的圆心为（5，0）．

根据圆与圆对称的性质可知，两圆圆心对称，半径相等.

则设圆心（5，0）关于$y=2x$的对称点为（a，b）．

则满足方程组$\begin{cases}\dfrac{0+b}{2}=2\cdot\dfrac{5+a}{2}\\ \dfrac{b-0}{a-5}\times 2=-1\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=-3\\ b=4\end{cases}$，则圆$C$的圆心为（−3，4）．

即圆C的方程为$(x+3)^2+(y-4)^2=2$．故选 E.

8．（2016）圆$x^2+y^2-6x+4y=0$上到原点距离最远的点是【　】

A．（−3，2）

B．（3，−2）

C．（6，4）

D．（−6，4）

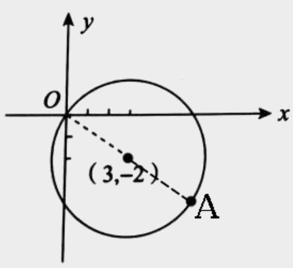
E．（6，−4）

【答案】E　　　　　　　　　　【考查】解析几何——点与圆的位置关系

【解析】将圆的方程$x^2+y^2-6x+4y=0$转化为标准式$(x-3)^2+(y+2)^2=13$.

则圆心为（3，−2），半径为$\sqrt{13}$.将原点（0，0）代入圆的方程可得原点在圆上.

根据上述内容可画图，如图所示.



则圆上到原点距离最远的点是点A（过圆心的直径OA）．圆心是OA的中点.

可得点A的坐标是（6，−4）．故选 E.

9．（2016）已知M是一个平面有限点集，则平面上存在到M中各点距离相等的点.【　】

（1）M中只有三个点.

（2）M中的任意三个点都不共线.

【答案】C　　　　　　　　　　【考查】解析几何

【解析】条件（1），M中只有三个点. 举反例：若三点共线，那么肯定不存在一点，到直线上三个点的距离都相等. 即平面上不存在到M中各点距离相等的点. 故条件（1）不充分.

条件（2），M中的任意三个点都不共线. 举反例：若M中任意四点构成凹四边形（对角和不为 180°）时，无法满足所有点均在圆上. 即平面上不存在到M中各点距离相等的点. 故条件（2）不充分.

条件（1）和条件（2）单独都不充分，考虑条件（1）（2）联合.

条件（1）（2）联合，有三个点且三点不共线，则三点可构成三角形. 三角形才可以确定有外接圆，所求点就是外接圆的圆心（外心）. 则根据三角形的外心性质，三角形的外心到三角形三个顶点的距离都相等，长度且等于外接圆的半径. 故条件（1）（2）联合起来充分.

综上，故选 C.

10.（2013）点（0，4）关于直线 $2x+y+1=0$ 的对称点为【　】

A.（2，0）

B.（－3，0）

C.（－6，1）

D.（4，2）

E.（－4，2）

【答案】E　　　　　　　　　　【考查】解析几何——关于直线对称点

【解析】【注意：①两点的中点在对称直线上；②两点连线所在的直线与对称直线垂直.】

根据题意，设对称点坐标为（a，b），因此中点坐标为（$\frac{a}{2}$，$\frac{b+4}{2}$）.

则有$\begin{cases} 2\times\frac{a}{2}+\frac{b+4}{2}+1=0 \\ \frac{b-4}{a}\times(-2)=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-4 \\ b=2 \end{cases}$. 即对称点为（－4，2）. 故选 E.

11.（2013）已知平面区域$D_1=\{(x，y)|x^2+y^2\le 9\}$，$D_2=\{(x，y)|(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\le 9\}$. 则$D_1$，$D_2$覆盖区域的边界长度为 8π.【　】

（1）$x_0^2+y_0^2=9$.

（2）$x_0+y_0=3$.

【答案】A 【考查】解析几何——两圆之间的位置关系

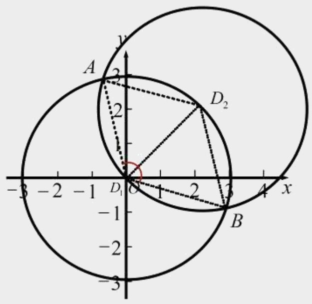
【解析】根据题意，$D_1=\{(x, y)|x^2+y^2\le 9\}\Rightarrow$圆心$D_1$为（0，0），半径$r_1$为 3，圆的内部.

$D_2=\{(x, y)|(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\le 9\}\Rightarrow$圆心$D_2$为（$x_0$，$y_0$），半径$r_2$为 3，圆的内部.

圆心距$D_1D_2=\sqrt{x_0^2+y_0^2}$.

D_1，D_2覆盖区域的边界长度$\Rightarrow$ D_1的外轮廓（弧AB）＋D_2的外轮廓（弧AB）.

条件（1），$x_0^2+y_0^2=9\Rightarrow$圆心距$D_1D_2=3$，即D_1与D_2相交. 根据题意可画图，如图所示.



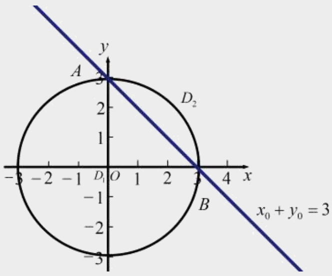
$\because D_1A=D_1B=D_1D_2=D_2A=D_2B=r_1=r_2=3$.

$\therefore \triangle D_1AD_2$和$\triangle D_1BD_2$是等边三角形，且$\triangle D_1AD_2\cong\triangle D_1BD_2$.

则$\angle AD_1B=\angle AD_2B=120°=\frac{2}{3}\pi$，弧$AD_1B=$弧$AD_2B=$圆心角弧度数×半径$=\frac{2}{3}\pi\times 3=2\pi$.

即D_1，D_2覆盖区域的边界长度$=C_{D_1}-$弧$AD_1B+C_{D_2}-$弧$AD_2B=2\pi\times 3-2\pi+2\pi\times 3-2\pi=8\pi$. 故条件（1）充分.

条件（2），$x_0+y_0=3\Rightarrow$ D_2的圆心在该直线上任一点. 根据题意可画图，如图所示.



$\because D_2$的圆心在直线$x_0+y_0=3$ 上任一点. $\therefore D_1$，D_2存在外离、外切、相交等情况.

若D_1，D_2存在外离的情况，则D_1，D_2覆盖区域的边界长度$=C_{D_1}+C_{D_2}=2\pi\times 3+2\pi\times 3=12\pi$. 故条件（2）不充分.

综上，故选 A.

12.（2012）在直角坐标系中，若平面区域D中所有点的坐标（x，y）均满足 $0\leqslant x\leqslant 6$，$0\leqslant y\leqslant 6$，$|y-x|\leqslant 3$，$x^2+y^2\geqslant 9$，则D的面积是【 】

A. $\frac{9}{4}(1+4\pi)$

B. $9(4-\frac{\pi}{4})$

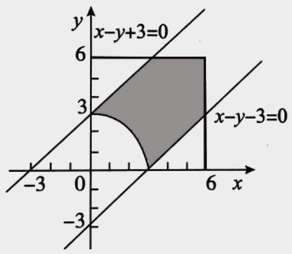
C. $9(3-\frac{\pi}{4})$

D. $\frac{9}{4}(2+\pi)$

E. $\frac{9}{4}(1+\pi)$

【答案】C 【考查】解析几何

【解析】根据题意可画图，如图所示，阴影部分面积即为区域D的面积.



$x^2+y^2\geqslant 9$ 的边界圆为$x^2+y^2=9$，圆心为（0，0），半径为 3.

$0\leqslant x\leqslant 6$，$0\leqslant y\leqslant 6\Rightarrow$正方形边长为 6.

$|y-x|\leqslant 3\Rightarrow\begin{cases}x-y+3=0\\x-y-3=0\end{cases}\Rightarrow$三角形为等腰直角三角形，直角边为 3.

则区域D的面积为$S_D=S_{正方形}-2S_{三角形}-\frac{1}{4}S_{圆}=36-9-\frac{9}{4}\pi=27-\frac{9}{4}\pi=9\left(3-\frac{\pi}{4}\right)$.

故选 C.

真题演练

一、问题求解：第 1～15 小题，每小题 3 分，共 45 分。下列每题给出的 A、B、C、D、E 五个选项中，只有一项是符合试题要求的。

1.（1997）一个长方体，长与宽之比是 2∶1，宽与高之比是 3∶2，若长方体的全部棱长之和是 220 厘米，则长方体的体积是____立方厘米.【 】

A. 2 880

B. 7 200

C. 4 600

D. 4 500

E. 3 600

2.（1997）$ab<0$ 时，直线$y=ax+b$必然【 】

A. 经过第一、二、四象限

B. 经过第一、三、四象限

C. 在y轴上的截距为正数

D. 在x轴上的截距为正数

E. 在x轴上的截距为负数

3.（1998）已知直线l的方程为$x+2y-4=0$，点A的坐标为(5，7)，过点A作直线垂直于l，则垂足的坐标为【 】

A. (6，5)

B. (5，6)

C. (2，1)

D. (−2，6)

E. $(\frac{1}{2}，3)$

4.（1999）已知直线l_1：$(a+2)x+(1-a)y-3=0$ 和直线l_2：$(a-1)x+(2a+3)y+2=0$ 互相垂直，则a等于【 】

A. −1

B. 1

C. ±1

D. $-\frac{3}{2}$

E. 0

5.（1999）在等腰三角形ABC中，$AB=AC$，$BC=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，且AB，AC的长分别是方程$x^2-\sqrt{2}mx+\frac{3m-1}{4}=0$ 的两个根，△ABC的面积为【 】

A. $\frac{\sqrt{5}}{9}$

B. $\frac{2\sqrt{5}}{9}$

C. $\frac{5\sqrt{5}}{9}$

D. $\frac{\sqrt{5}}{3}$

E. $\frac{\sqrt{5}}{18}$

6.（1999）一个圆柱的高减少到原来的 70%，底半径增加到原来的 130%，则它的体积【 】
A. 不变
B. 增加到原来的 121%
C. 增加到原来的 130%
D. 增加到原来的 118.3%
E. 减少到原来的 91%

7.（2000）已知a，b，c是△ABC的三边长，并且$a=c=1$，若$(b-x)^2-4(a-x)(c-x)=0$有相同实根，则△ABC为【 】
A. 等边三角形
B. 等腰三角形
C. 直角三角形
D. 钝角三角形

8.（2003）设P是正方形$ABCD$外的一点，$PB=10$厘米，△APB的面积是 80 平方厘米，△CPB的面积是 90 平方厘米，则正方形$ABCD$的面积为____平方厘米.【 】
A. 720
B. 580
C. 640
D. 600
E. 560

9.（2007）点$P_0(2，3)$关于直线$x+y=0$的对称点是【 】

A. (4，3)

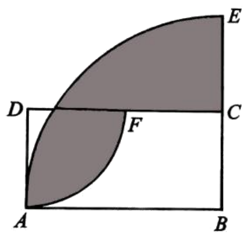
B.（-2，-3）

C.（-3，-2）

D.（-2，3）

E.（-4，-3）

10.（2008）如下图所示，长方形$ABCD$中的$AB=10$ cm，$BC=5$ cm，以AB和AD分别为半径作$\frac{1}{4}$圆，则图中阴影部分的面积为____cm^2.【 】



第 10 题图

A. $25-\frac{25}{2}\pi$

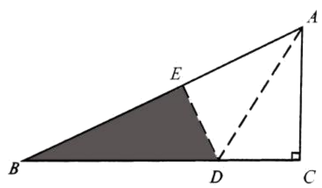
B. $25+\frac{125}{2}\pi$

C. $50+\frac{25}{4}\pi$

D. $\frac{125}{4}\pi-50$

E. 以上均不对

11.（2009）直角三角形ABC的斜边$AB=13$厘米，直角边$AC=5$厘米，把AC对折到AB上去与斜边相重合，点C与点E重合，折痕为AD(见下图)，则图中阴影部分的面积为____平方厘米.【 】



第 11 题图

A. 20

B. $\frac{40}{3}$

C. $\frac{38}{3}$

D. 14

E. 12

12. （2009）曲线$x^2-2x+y^2=0$上的点到直线$3x+4y-12=0$的最短距离是【 】

A. $\frac{3}{5}$

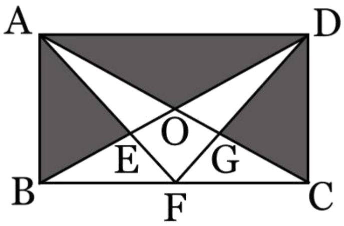
B. $\frac{4}{5}$

C. 1

D. $\frac{4}{3}$

E. $\sqrt{2}$

13. （2010）如下图所示，长方形$ABCD$的两边分别为 8 m 和 6 m，四边形$OEFG$的面积是 4 m^2，则阴影部分的面积为【 】



第 13 题图

A. 32 m^2

B. 28 m^2

C. 24 m^2

D. 20 m^2

E. 16 m^2

14. （2010）已知直线$ax-by+3=0(a>0, b>0)$过圆$x^2+4x+y^2-2y+1=0$的圆心，则ab的最大值为【 】

A. $\frac{9}{16}$

B. $\frac{11}{16}$

C. $\frac{3}{4}$

D. $\frac{9}{8}$

E. $\frac{9}{4}$

15.（2010）若圆的方程是$x^2+y^2=1$，则它的右半圆（在第一象限和第四象限内的部分）的方程是【 】

A. $y-\sqrt{1-x^2}=0$

B. $x-\sqrt{1-y^2}=0$

C. $y+\sqrt{1-x^2}=0$

D. $x+\sqrt{1-y^2}=0$

E. $x^2+y^2=\frac{1}{2}$

二、条件充分性判断：第 16～25 小题，每小题 3 分，共 30 分。要求判断每题给出的条件（1）和条件（2）能否充分支持题干所陈述的结论。A、B、C、D、E 五个选项为判断结果，请选择一项符合试题要求的判断。

A.条件（1）充分，但条件（2）不充分。

B.条件（2）充分，但条件（1）不充分。

C.条件（1）和（2）单独都不充分，但条件（1）和条件（2）联合起来充分。

D.条件（1）充分，条件（2）也充分。

E.条件（1）和（2）单独都不充分，条件（1）和条件（2）联合起来也不充分。

16.（2007）三角形ABC的面积保持不变.【 】

（1）底边AB增加了 2 厘米，AB上的高h减少了 2 厘米.

（2）底边AB扩大了 1 倍，AB上的高h减少了 50%.

17.（2008）方程 $3x^2+[2b-4(a+c)]x+(4ac-b^2)=0$ 有相等的实根.【 】

（1）a，b，c是等边三角形的三条边.

（2）a，b，c是等腰三角形的三条边.

18.（2008）曲线$ax^2+by^2=1$通过 4 个定点.【 】

（1）$a+b=1$.

（2）$a+b=2$.

19.（2008）动点$(x，y)$的轨迹是圆.【 】

（1）$|x-1|+|y|=4$.

（2）$3(x^2+y^2)+6x-9y+1=0$.

20.（2008）圆C_1：$(x-\frac{3}{2})^2+(y-2)^2=r^2$与圆$C_2$：$x^2-6x+y^2-8y=0$有交点.【 】

（1）$0<r<\frac{5}{2}$.

（2）$r>\frac{15}{2}$.

21.（2008）$a=-4$.【 】

（1）点$A(1,0)$关于直线$x-y+1=0$的对称点是$A'(\frac{a}{4},-\frac{a}{2})$.

（2）直线l_1：$(2+a)x+5y=1$与直线l_2：$ax+(2+a)y=2$垂直.

22.（2009）圆$(x-1)^2+(y-2)^2=4$和直线$(1+2\lambda)x+(1-\lambda)y-3-3\lambda=0$相交于两点.【 】

（1）$\lambda=\frac{2\sqrt{3}}{5}$.

（2）$\lambda=\frac{5\sqrt{3}}{2}$.

23.（2010）直线$y=k(x+2)$是圆$x^2+y^2=1$的一条切线.【 】

（1）$k=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

（2）$k=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

24.（2011）已知三角形ABC的三条边分别为a，b，c，则三角形ABC是等腰直角三角形.【 】

（1）$(a-b)(c^2-a^2-b^2)=0$.

（2）$c=\sqrt{2}b$.

25.（2011）直线$ax+by+3=0$被圆$(x-2)^2+(y-1)^2=4$截得的线段的长度为$2\sqrt{3}$.【 】

（1）$a=0$，$b=-1$.

（2）$a=-1$，$b=0$.

参考答案

答案速查									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	D	C	C	A	D	A	B	C	D
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
B	B	B	D	B	B	A	D	B	E
21	22	23	24	25					
A	D	D	C	B					

1.【答案】D　　　　　　　　【考查】长方体

【解析】设长方体长、宽、高分别为a，b，c.则全部棱长之和$4(a+b+c)=220\Rightarrow a+b+c=55$.又知$a:b=2:1$，$b:c=3=4$ 500.故选D.

：2.则$a:b:c=6:3:2\Rightarrow a=30$，$b=15$，$c=10$.体积$V=abc$

2.【答案】D　　　　　　　　【考查】直线及其方程

【解析】①当$a>0$，$b<0$时，直线经过第一、三、四象限.②当$a<0$，$b>0$时，直线经过第一、二、四象限.结合①②，则A、B选项错误.y轴截距为b，b的值无法判断，则C选项错误.当$y=0$时，可以算出直线在x轴上的截距$x=-\dfrac{b}{a}>0$，则D选项正确，E选项错误.故选D.

3.【答案】C　　　　　　　　【考查】解析几何

【解析】所求直线与已知直线l垂直$\Rightarrow$它们斜率的乘积为-1，则所求直线的斜率为2.

又已知所求直线过点$A(5,7)$，可以写出点斜式方程$y-7=2(x-5)$，两条直线的交点就是垂足，可联立两直线方程得：$\begin{cases}x+2y-4=0\\y-7=2(x-5)\end{cases}$，解得：交点坐标(2，1).故选C.

4.【答案】C　　　　　　　　【考查】解析几何

【解析】两条直线互相垂直，在直线一般式方程中体现为x，y对应项系数之积的和为0，即$(a+2)(a-1)+(1-a)(2a+3)=0$，解得$a=\pm1$.故选C.

5.【答案】A　　　　　　　　【考查】三角形

【解析】$AB=AC$，则方程有两个相等实根，其判别式$\Delta=(\sqrt{2}m)^2-4\times\dfrac{3m-1}{4}=0$.解得：$m=1$或$m=\dfrac{1}{2}$.当$m=\dfrac{1}{2}$时，两根之和$AB+AC=\dfrac{\sqrt{2}}{2}<\dfrac{2\sqrt{2}}{3}=BC$无法构成三角形，因此$m$的值只有

一个，即$m=1$.所以$AB+AC=\sqrt{2}$，得$AB=AC=\frac{\sqrt{2}}{2}$，作出BC边上的高为$\sqrt{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2-(\frac{\sqrt{2}}{3})^2}=\sqrt{\frac{5}{18}}$，得到该三角形的面积$S=\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\sqrt{\frac{5}{18}}=\frac{\sqrt{5}}{9}$.故选 A.

6.【答案】D　　　　　　　　【考查】圆柱体

【解析】设圆柱体原底半径为r，高为h，体积为V，变化后的体积为V'.

根据圆柱体积公式得：$V'=\pi(1.3r)^2(0.7h)=\pi r^2h\cdot1.69\times0.7=1.183\pi r^2h=1.183V$.则它的体积增加到原来的 118.3%.故选 D.

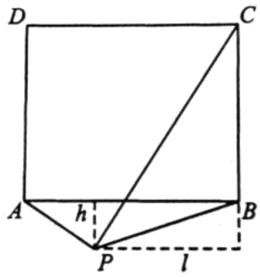
[技巧：圆柱底半径变为原来的a倍，圆柱体积会变为原来的a^2倍；圆柱高变为原来的b倍，体积也变为原来的b倍.]

7.【答案】A　　　　　　　　【考查】三角形

【解析】方程经化简后得：$3x^2+(2b-8)x-(b^2-4)=0$有相同实根，则其判别式$\Delta=(2b-8)^2+4\times3\times(b^2-4)=0\Rightarrow$解得：$b=1$.即$a=b=c=1\Rightarrow$三角形为等边三角形.故选 A.

8.【答案】B　　　　　　　　【考查】正方形

【解析】根据题意可画图，过P作AB，BC的垂线h，l，如图所示.



设正方形边长为x.根据题意得：$S_{\triangle APB}=\frac{1}{2}xh=80$，$S_{\triangle CPB}=\frac{1}{2}xl=90\Rightarrow h=\frac{160}{x}$，$l=\frac{180}{x}$.

则$PB^2=h^2+l^2=(\frac{160}{x})^2+(\frac{180}{x})^2=100\Rightarrow x^2=580$.即正方形$ABCD$的面积为 580 平方厘米.故选 B.

9.【答案】C　　　　　　　　【考查】解析几何

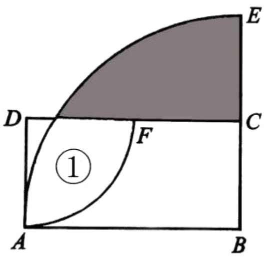
【解析】点关于直线对称就是同时满足两个条件：①对称点的中点在对称轴上；②对称点连线

垂直于对称轴. 则可设所求对称点坐标$(x_0，y_0)$，结合①②条件可得：$\begin{cases} \dfrac{x_0+2}{2}+\dfrac{y_0+3}{2}=0 \\ \dfrac{y_0-3}{x_0-2}\times(-1)=-1 \end{cases}$，解

得：$\begin{cases} x_0=-3 \\ y_0=-2 \end{cases}$⇒对称点坐标(－3，－2). 故选 C.

10.【答案】D　　　　　　　　【考查】扇形；长方形

【解析】根据题意可画图，如图所示.

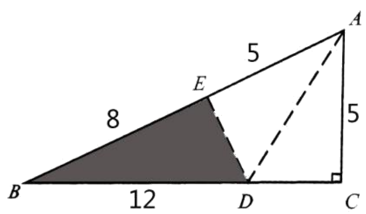


扇形ADF与扇形ABE可以拼出整个图形的轮廓，其中阴影①部分为 2 层，其余部分均为一层，减去矩形面积后，刚好剩下所求阴影面积. 则$S_{阴影}=S_{扇形ADF}+S_{扇形ABE}-S_{ABCD}=\frac{1}{4}\pi(10^2+5^2)-5\times10=\frac{125}{4}\pi-50$. 故选 D.

11.【答案】B　　　　　　　　【考查】三角形

【解析】$BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=12$，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BC=30$.

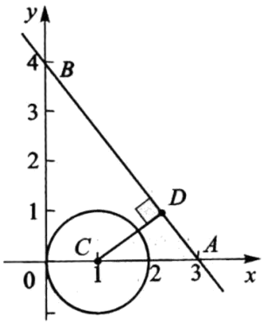
根据题意，把AC对折到AB上去，$\triangle ACD\cong\triangle AED$. 则有$AE=AC=5$，$BE=AB-AE=13-5=8$.（如图所示）



$\angle AED=\angle C=\angle BED=90°$，$\triangle BED\backsim\triangle BCA$，相似比$\frac{BE}{BC}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$，面积比$\frac{S_{\triangle BED}}{S_{\triangle BCA}}=(\frac{2}{3})^2=\frac{4}{9}$. 则$S_{\triangle BED}=\frac{4}{9}S_{\triangle ABC}=\frac{4}{9}\times30=\frac{40}{3}$. 故选 B.

12.【答案】B　　　　　　　　　【考查】解析几何

【解析】$x^2-2x+y^2=0$ 配方后可得圆的方程为 $(x-1)^2+y^2=1$，圆心为(1，0)，半径 $r=1$. 直线在 x，y 坐标轴上的截距分别为 4，3. 根据题意可画图，如图所示.



由图可知，圆上的点到已知直线最短距离为圆心到直线距离与半径之差，圆心(1，0)到直线的距离 $d=\frac{|3-12|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{9}{5}$. 则最短距离为 $\frac{9}{5}-1=\frac{4}{5}$. 故选 B.

13.【答案】B　　　　　　　　　【考查】长方形；三角形

【解析】由于阴影部分的面积较多，则可以先求空白部分的面积.

$S_{空白}=S_{\triangle AFC}+S_{\triangle DFB}-S_{OEFG}=\frac{1}{2}\cdot FC\cdot AB+\frac{1}{2}\cdot FB\cdot AB-4=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot(FC+FB)-4=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC-4=20(\mathrm{m}^2)$. 则 $S_{阴影}=S_{ABCD}-S_{空白}=6\times8-20=28(\mathrm{m}^2)$. 故选 B.

14.【答案】D　　　　　　　　　【考查】解析几何

【解析】$x^2+4x+y^2-2y+1=0$ 配方后可得：圆的方程为 $(x+2)^2+(y-1)^2=4$，圆心为 $(-2,1)$ 满足直线的方程，可得到 $-2a-b+3=0$，即 $2a+b=3$，则 $b=3-2a$，$ab=a(3-2a)=-2a^2+3a$. 这是一个关于 a 的二次函数，抛物线开口向下，$a\in(0,+\infty)$，在 $a=\frac{3}{4}$ 对称轴处取得最大值 $ab_{\max}=\frac{9}{8}$. 故选 D.

15.【答案】B　　　　　　　　　【考查】解析几何

【解析】由 $x^2+y^2=1$ 可得 $x=\pm\sqrt{1-y^2}$，右半圆上所有点的横坐标均大于 0，即满足 $x>0$，那么方程就是 $x=\sqrt{1-y^2}$，即 $x-\sqrt{1-y^2}=0$. [A 选项表示上半圆，C 选项表示下半圆，D 选项表示左半圆]故选 B.

16.【答案】B　　　　　　　　【考查】三角形

【解析】根据三角形的面积公式$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot h$.

条件(1),底边AB增加了2厘米,AB上的高h减少了2厘米⇒此时的三角形ABC的面积$=\frac{1}{2}\cdot(AB+2)\cdot(h-2)=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot h-AB+h-2$.面积有变化，与题干结论不一致.故条件（1）不充分.

条件（2），底边AB扩大了1倍，AB上的高h减少了50%⇒此时的三角形ABC的面积$=\frac{1}{2}\cdot 2AB\cdot\frac{1}{2}h=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot h$.面积没有变化，与题干结论一致.故条件（2）充分.

综上，故选B.

17.【答案】A　　　　　　　　【考查】三角形

【解析】根据题意可得：方程判别式$\Delta=[2b-4(a+c)]^2-12(4ac-b^2)$.

条件（1），a，b，c是等边三角形的三条边⇒$a=b=c$.代入方程判别式Δ得(以a代入)：$\Delta=[2a-4(a+a)]^2-12(4a^2-a^2)=36a^2-36a^2=0$.则方程有相等的实根.故条件（1）充分.

条件（2），a，b，c是等腰三角形的三条边⇒当a，b，c中只有两者相等，第三者不定时无法得到$\Delta=0$.则无法确定方程有相等的实根.故条件（2）不充分.

综上，故选A.

18.【答案】D　　　　　　　　【考查】解析几何

【解析】条件（1），当$a+b=1$时，将$b=1-a$代入题干中，得到曲线方程$ax^2+(1-a)y^2=1$.方程中只含a一个参数，并且参数a可以任意取值，将含有a的项整理到一起，可得：$(x^2-y^2)a+y^2-1=0$，当参数a任意取值时，方程要保证等号成立，就必须要有$x^2-y^2=0$，$y^2-1=0$，解得：$x=\pm1$，$y=\pm1$.则4个顶点分别为$(1,1)(1,-1)(-1,1)(-1,-1)$，与题干结论一致.故条件（1）充分.

条件（2），当$a+b=2$时，$b=2-a$代入题干中，得到曲线方程$ax^2+(2-a)y^2=1$.方程中只含a一个参数，并且参数a可以任意取值，将含有a的项整理到一起，可得：$(x^2-y^2)a+2y^2-1=0$，当参数a任意取值时，方程要保证等号成立，就必须要有$x^2-y^2=0$，$2y^2-1=0$，解得：$x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，$y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.则4个顶点分别为$(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$，与题干结论一致.故条件（2）充分.

综上，故选D.

19.【答案】B　　　　　　　　【考查】解析几何

【解析】条件（1），$|x-1|+|y|=4$⇒方程含有绝对值，不含二次项，轨迹一定不是圆.故条件（1）不充分.

条件(2)，$3(x^2+y^2)+6x-9y+1=0$⇒配方后可得：$(\sqrt{3}x+\sqrt{3})^2+(\sqrt{3}y-\frac{3\sqrt{3}}{2})^2=\frac{35}{4}$或$(x+1)^2+(y-\frac{3}{2})^2=\frac{35}{12}$⇒方程是圆的方程，则轨迹一定是圆.故条件（2）充分.

综上，故选B.

20.【答案】E　　　　　　　　【考查】解析几何

【解析】圆C_2：$x^2-6x+y^2-8y=0$经过配方可得：$(x-3)^2+(y-4)^2=25$，圆心坐标为(3，4)，半径为5.圆C_1与圆C_2有交点⇔两圆圆心距离$|r-5|\leqslant|C_1C_2|\leqslant r+5$⇔$|r-5|\leqslant\frac{5}{2}$，解得：$\frac{5}{2}\leqslant r\leqslant\frac{15}{2}$.

条件（1），$0<r<\frac{5}{2}$不在上述结论$\frac{5}{2}\leqslant r\leqslant\frac{15}{2}$的范围内.故条件（1）不充分.

条件（2），$r>\frac{15}{2}$不在上述结论$\frac{5}{2}\leqslant r\leqslant\frac{15}{2}$的范围内.故条件（2）不充分.

条件（1）和条件（2）单独都不充分，考虑条件（1）（2）联合.

条件（1）（2）联合的范围为空集，故条件（1）（2）联合起来也不充分.

综上，故选E.

21.【答案】A　　　　　　　　【考查】解析几何

【解析】条件（1），点$A(1,0)$关于直线$x-y+1=0$的对称点是$A'(\frac{a}{4},-\frac{a}{2})$⇒根据两点关于直线对称的等价条件：①对称点的中点在对称轴上；②对称点连线垂直于对称轴.可得：A'坐标为$(-1,2)$，解得：$a=-4$，与题干结论一致.故条件（1）充分.

条件（2），直线l_1：$(2+a)x+5y=1$与直线l_2：$ax+(2+a)y=2$垂直⇒根据两直线垂直等价条件：两直线斜率乘积为-1（x，y对应项系数乘积之和为0）得到：$a(2+a)+5(2+a)=0$，解得：$a=-2$或$a=-5$，与题干结论不一致.故条件（2）不充分.

综上，故选A.

22.【答案】D　　　　　　　　【考查】解析几何

【解析】题干中直线的方程只含λ一个参数，可将直线方程整理为$(2x-y-3)\lambda+(x+y-3)$

$=0$，不考虑条件，当λ为任意参数时，为保证等式成立，只能$\begin{cases}2x-y-3=0\\x+y-3=0\end{cases}$，解得：$\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$.

那么无论参数λ如何取值，点(2，1)代入方程均使得方程成立，即直线必过点(2，1)，且点(2，1)在圆的内部，所以直线必然与圆相交于两点.

条件（1），$\lambda=\frac{2\sqrt{3}}{5}$⇒无论参数$\lambda$如何取值，直线必然与圆相交于两点.故条件（1）充分.

条件（2），$\lambda=\frac{5\sqrt{3}}{2}$⇒无论参数$\lambda$如何取值，直线必然与圆相交于两点.故条件（2）充分.

综上，故选D.

23.【答案】D　　　　　　　　【考查】解析几何

【解析】直线$y=k(x+2)$与圆$x^2+y^2=1$相切，即圆心(0，0)到直线$y=k(x+2)$的距离$d=\frac{|2k|}{\sqrt{k^2+1^2}}=1$，解得：$k=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

条件（1），$k=-\frac{\sqrt{3}}{3}$⇒符合上述结论.故条件（1）充分.

条件（2），$k=\frac{\sqrt{3}}{3}$⇒符合上述结论.故条件（2）充分.

综上，故选D.

24.【答案】C　　　　　　　　【考查】三角形

【解析】条件（1），$(a-b)(c^2-a^2-b^2)=0\Rightarrow a-b=0$或$c^2-a^2-b^2=0\Rightarrow a=b$或$a^2+b^2=c^2$，则$\triangle ABC$是直角三角形或等腰三角形.无法确定三角形$ABC$是等腰直角三角形.故条件（1）不充分.

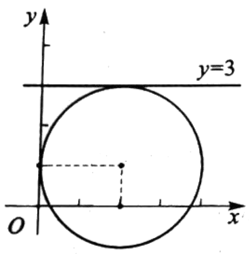
条件（2），$c=\sqrt{2}b$，无法判断a，b，c的三边关系.无法确定三角形ABC是等腰直角三角形.故条件（2）不充分.

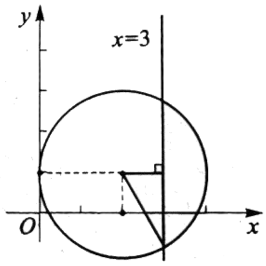
条件（1）和条件（2）单独都不充分，考虑条件（1）（2）联合.

条件（1）（2）联合得：①当$a=b$时，$c=\sqrt{2}b\Rightarrow c=\sqrt{2}b=\sqrt{2}a\Rightarrow c^2=(\sqrt{2}a)^2=2a^2=a^2+b^2$.即三角形$ABC$是等腰直角三角形.②当$a^2+b^2=c^2$时，$c=\sqrt{2}b\Rightarrow c^2=(\sqrt{2}b)^2=2b^2\Rightarrow a^2+b^2=c^2=2b^2\Rightarrow a=b$.即三角形$ABC$是等腰直角三角形..故条件（1）（2）联合起来充分.

综上，故选C.

25.【答案】B　　　　　　　　　　　【考查】解析几何

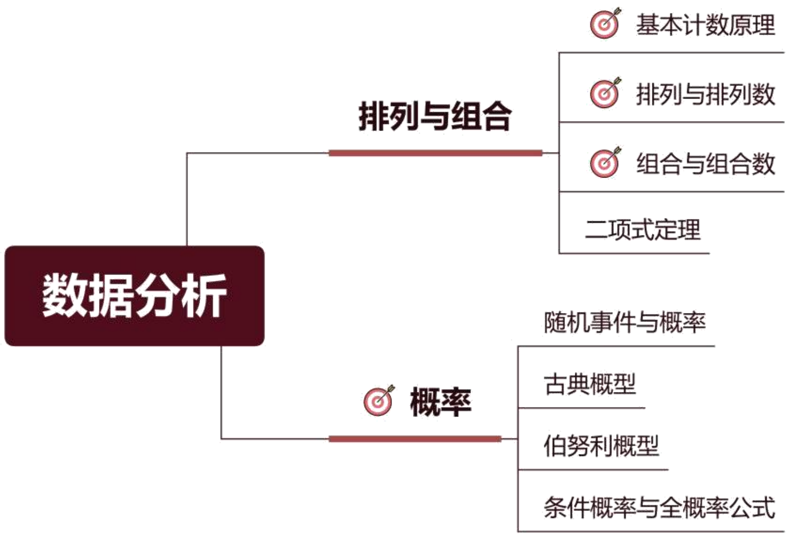




条件（1），当a=0，b=−1 时，直线方程为y=3 是一条水平线，画出图形，发现刚好与圆相切（见左上图所示）.直线没有被圆截得的线段，与题干结论不一致.故条件（1）不充分.
条件（2），当a=−1，b=0 时，直线方程为x=3 是一条竖直线，与圆相交(见右上图所示)，为求弦长，作出弦心距，圆心(2，1)到弦x=3 的距离为 1，则弦长为 $2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{3}$，与题干结论一致.故条件（2）充分.
综上，故选 B.

第五章 数据分析

知识脉络



真题呈现

一、排列与组合

1.（2023）某公司财务部有 2 名男员工、3 名女员工，销售部有 4 名男员工、1 名女员工，现要从中选 2 名男员工、1 名女员工组成工作小组，并要求每部门至少有 1 名员工入选，则工作小组的构成方式有【 】

A. 24 种

B. 36 种

C. 50 种

D. 51 种

E. 68 种

【答案】D　　　　【考查】计数原理

【解析】方法一：正面分析.

根据题意，正面分析可分四种情况：

①财务部选 2 名男员工，销售部选 1 名女员工，则有$C_2^2C_1^1=1$.

②财务部选 1 名男员工和 1 名女员工，销售部选 1 名男员工，则有$C_2^1C_3^1C_4^1=24$.

③财务部选 1 名男员工，销售部选 1 名男员工和 1 名女员工，则有$C_2^1C_4^1C_1^1$＝8.

④财务部选 1 名女员工，销售部选 2 名男员工，则有$C_3^1C_4^2$＝18.

综上，则工作小组的构成方式共有 1＋24＋8＋18＝51 种.
方法二：反面分析.
根据题意，正面考虑的情况太多，我们可以从反面分析.
财务部有 2 名男员工、3 名女员工，销售部有 4 名男员工、1 名女员工，即从 6 名男员工、4 名女员工中选出 2 名男员工、1 名女员工，则工作小组的构成方式共有$C_6^2C_4^1$＝60 种.

反面分析可分两种情况：

①选出的 2 名男员工、1 名女员工都来自财务部，则有$C_2^2C_3^1$＝3.

②选出的 2 名男员工、1 名女员工都来自销售部，则有$C_4^2C_1^1$＝6.

综上，则工作小组的构成方式共有 60－3－6＝51 种.
故选 D.

2.（2023）由于疫情防控，电影院要求不同家庭之间至少间隔 1 个座位，同一家庭的成员座位要相连，两个家庭去看电影，一家 3 人，一家 2 人，现有一排 7 个相连的座位，则符合要求的坐法有【 】

A. 36 种

B. 48 种

C. 72 种

D. 144 种

E. 216 种

【答案】C　　　　【考查】相邻不相邻问题

【解析】相邻问题用捆绑法，不相邻问题用插空法. 根据题意，得：两家共 5 个人，会占用 5 个座位，则剩下 2 个座位形成 3 个空，再将这两家人各自捆绑好，然后再进行插空，则符合要求的坐法有$A_3^3A_2^2A_3^2$＝72 种. 故选 C.

3.（2023）快递员收到 3 个同城快递任务，取送地点各不相同，取送件可穿插进行，不同的送件方式有【 】

A. 6 种

B. 27 种

C. 36 种

D. 90 种

E. 360 种

【答案】D　　　　　　　　【考查】排列组合

【解析】方法一：

根据题意，得：取三件快递的动作可分别对应记为A_1、A_2、A_3，送快递的动作可分别记为B_1，B_2，B_3.取快递和送快递的动作可穿插随意进行，因此全排列共有A_6^6种情况.但由于同一件物品只能是先取才能送，所以A_1必须在B_1的前面，同理A_2必须在B_2的前面，A_3必须在B_3的前面，则进行消除这三组的顺序，即不同的送件方式有$\frac{A_6^6}{A_2^2A_2^2A_2^2}=\frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{2\times1\times2\times1\times2\times1}=$ 90 种.

方法二：

根据题意，得：取送快递共有六个步骤，三个取，三个送.若需要送完一份快递，按先取后送的顺序完成（“一取一送”顺序固定）.即不同的送件方式有$C_6^2C_4^2C_2^2=90$种.

故选 D.

4.（2022）甲、乙两支足球队进行比赛，比分为 4∶2，且在比赛过程中乙队没有领先过，则不同的进球顺序有【　】

A. 6 种

B. 8 种

C. 9 种

D. 10 种

E. 12 种

【答案】C　　　　　　　　【考查】排列组合

【解析】方法一（分类分析法）：根据题意得乙没有领先过，则第一次进球必须是甲，剩下的 5 次进球情况可以分为以下情况：

①第二球是乙进的，则第三球必须是甲进的，则剩下 3 次进球满足 1 次是乙即可.即$C_3^1=3$种.

②第二球是甲进的，此时甲已经进了 2 球，则剩下 4 次进球满足 2 次是甲，2 次是乙即可.即$C_4^2=6$种.

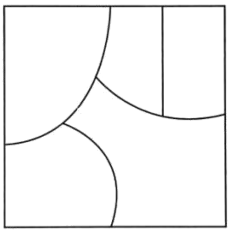
综上，满足题意的不同进球顺序共有 $3+6=9$ 种.

方法二（穷举法）：

第一球	第二球	第三球	第四球	第五球	第六球
甲（1：0）	甲（2：0）	甲（3：0）	甲（4：0）	乙（4：1）	乙（4：2）
			乙（3：1）	甲（4：1）	乙（4：2）
				乙（3：2）	甲（4：2）
		乙（2：1）	甲（3：1）	甲（4：1）	乙（4：2）
				乙（3：2）	甲（4：2）
			乙（2：2）	甲（3：2）	甲（4：2）
	乙（1：1）	甲（2：1）	甲（3：1）	甲（4：1）	乙（4：2）
				乙（3：2）	甲（4：2）
			乙（2：2）	甲（3：2）	甲（4：2）

故选 C.

5.（2022）如图所示，用 4 种颜色对图中五块区域进行涂色，每块区域涂一种颜色，且相邻的两块区域颜色不同，则不同的涂色方法有【 】



第 5 题图

A. 12 种

B. 24 种

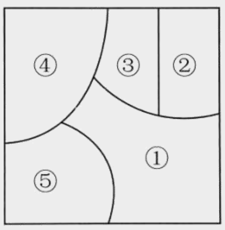
C. 32 种

D. 48 种

E. 96 种

【答案】E　　　　【考查】排列组合——涂色问题（计数原理）

【解析】首先给题干图中的区域编号，如图所示.



第一步：给相邻区域最多的区域①上色，有 4 种涂法.
第二步：给区域②上色，有 3 种涂法（与区域①颜色不同）.
第三步：给区域③上色，有 2 种涂法（与区域①和区域②颜色不同）.
第四步：给区域④上色，有 2 种涂法（与区域①和区域③颜色不同）.
第五步：给区域⑤上色，有 2 种涂法（与区域①和区域④颜色不同）.
综上，使用分步乘法原理，得到最终的涂色方法有 4×3×2×2×2＝96 种.
故选 E.

6.（2021）甲、乙两组同学中，甲组有 3 名男同学、3 名女同学；乙组有 4 名男同学、2 名女同学.从甲、乙两组中各选出 2 名同学，这 4 人中恰有 1 名女同学的选法有____种.【 】
A. 26
B. 54
C. 70
D. 78
E. 105

【答案】D　　　　【考查】排列组合
【解析】根据题意可知，4 人中恰有 1 名女同学分为两种情况：
①该名女同学来自甲组（甲组选 1 男 1 女，乙组选 2 男）：$C_3^1C_3^1C_4^2=54$.
②该名女同学来自乙组（甲组选 2 男，乙组选 1 男 1 女）：$C_3^2C_4^1C_2^1=24$.
因此这 4 人中恰有 1 名女同学的选取方法共有 54＋24＝78 种.
故选 D.

7.（2020）某科室有 4 名男职员，2 名女职员，若将这 6 名职员分为 3 组，每组 2 人，且女职员不同组，则不同的安排方式有____种.【 】
A. 4
B. 6
C. 9
D. 12
E. 15

【答案】D　　　　【考查】排列组合——分组问题
【解析】方法一：理解为定向分组，2 名女职员各自从 4 名男职员中选取 1 名男职员成组

$C_4^1C_3^1$，剩下的 2 名男职员成一组C_2^2.所以不同的安排方式共有$C_4^1C_3^1C_2^2$＝4×3×1＝12（种）.

方法二：由于正面“女职员不同组”的情况太多，所以可以采取反面考虑，反面是“女职员同一组”.

根据题意，只有 2 名女职员，则女职员同一组的分组方式为：$\frac{C_4^2C_2^2}{2!}$.

因此，女职员不同组的安排方式为：$\frac{C_6^2C_4^2C_2^2}{3!}-\frac{C_4^2C_2^2}{2!}$＝12（种）.

故选 D.

8.（2019）某中学的 5 个学科各推荐了 2 名教师作为支教候选人.若从中选派来自不同学科的 2 人参加支教工作，则不同的选派方式有【 】

A.20 种

B.24 种

C.30 种

D.40 种

E.45 种

【答案】D　　【考查】排列组合

【解析】根据题意得，总共的选派方法有：C_{10}^2＝45（种）.

由于正面“来自不同学科的 2 人参加支教工作”的情况很多，所以可以采取反面考虑，反面是“来自相同学科的 2 人参加支教工作”.

“来自相同学科的 2 人参加支教工作”的选派方式有 $5C_2^2$＝5（种）.

则“来自不同学科的 2 人参加支教工作”不同的选派方式有$C_{10}^2-5C_2^2$＝45－5＝40（种）.

故选 D.

9.（2018）将 6 张不同的卡片 2 张一组分别装入甲、乙、丙 3 个袋中，若指定的 2 张卡片要在同一组，则不同的装法有【 】

A.12 种

B.18 种

C.24 种

D.30 种

E. 36 种

【答案】B　　　　　　　　　　【考查】排列组合

【解析】方法一：袋子选卡片，其中一个袋子放指定的两张卡片，即有C_3^1种分法.

第二个袋子选剩下的非指定 4 张卡片中的 2 张，即有C_4^2种分法.

第三个袋子选最后的 2 张卡片，即有C_2^2种分法.

则共有$C_3^1C_4^2C_2^2=3\times6\times1=18$ 种不同的装法.

方法二：2 张指定卡片在同一组，剩余 4 张进行均匀分组得$\frac{C_4^2C_2^2}{A_2^2}$，再将三组卡片分别作为三个元素分配到甲、乙、丙 3 个袋中，则共有$\frac{C_4^2C_2^2}{A_2^2}A_3^3=18$ 种不同的装法.

故选 B.

10. (2018) 某单位为检查 3 个部门的工作，由这 3 个部门的主任和外聘的 3 名人员组成检查组，分 2 人一组检查工作，每组有 1 名外聘人员，规定本部门主任不能检查本部门，则不同的安排方式有【　】

A. 6 种

B. 8 种

C. 12 种

D. 18 种

E. 36 种

【答案】C　　　　　　　　　　【考查】排列组合

【解析】方法一：根据题意得：

①3 名外聘人员分到 3 个主任的小组，每组 1 人，共有$A_3^3=6$ 种.

②3 个部门主任不检查自己的组，即$D_3=2$ 种.

则总的安排方式有 $6\times2=12$ 种.

方法二：根据题意，可知本题为不同元素的错排问题. 共分为 2 步：

①3 个主任的完全错排有 2 种.

②3 名外聘人员的全排有A_3^3种.

则总的安排方式有 $2\cdot A_3^3=2\times6=12$ 种.

故选 C.

11.（2016）某委员会由三个不同专业的人员构成，三个专业的人数分别为 2，3，4. 从中选派 2 位不同专业的委员外出调研，则不同的选派方式有【 】

A. 36 种

B. 26 种

C. 12 种

D. 8 种

E. 6 种

【答案】B　　　　【考查】排列组合

【解析】方法一：

根据题意，设三个不同专业分别为X，Y，Z.

选派 2 位不同专业的委员外出调研的情况有：（X，Y），（X，Z），（Y，Z）.

每个专业各选 1 位，则不同的选派方式有：$C_2^1C_3^1+C_2^1C_4^1+C_3^1C_4^1=26$（种）.

方法二：

由于正面“选派 2 位不同专业的委员外出调研”的情况很多，所以可以采取反面考虑，反面是“选派 2 位同专业的委员外出调研”.

根据题意，从三个不同专业选派 2 位委员外出调研的方式有：$C_9^2=\frac{9\times 8}{2\times 1}=36$（种）.

选派 2 位同专业的委员外出调研的方式有：$C_2^2+C_3^2+C_4^2=1+3+6=10$（种）.

则选派 2 位不同专业的委员外出调研的方式有：$36-10=26$（种）.

故选 B.

12.（2015）平面上有 5 条平行直线与另一组n条平行直线垂直，若两组平行直线共构成 280 个矩形，则$n=$【 】

A. 5

B. 6

C. 7

D. 8

E. 9

【答案】D　　　　【考查】排列组合

【解析】根据题意得，平面上共有$n+5$条直线，要使直线构成矩形，需确定矩形的 2 条长

和 2 条宽（长相互平行、宽相互平行、长和宽相互垂直）.

矩形的 2 条长是从 5 条平行直线中选取 2 条，2 条宽一定从与长垂直的n条直线中选取的 2 条.

则有$C_5^2 \cdot C_n^2=280 \Rightarrow C_n^2=28 \Rightarrow n=8$. 故选 D.

13.（2013）在$(x^2+3x+1)^5$的展开式中，x^2的系数为【 】

A. 5

B. 10

C. 45

D. 90

E. 95

【答案】E　　　　【考查】排列组合——二项式定理

【解析】方法一：根据题意，$(x^2+3x+1)^5=[x^2+(3x+1)]^5$.

第一项：$C_5^1 \cdot (x^2)^1 \cdot (3x+1)^4$.

此项中的$(x^2)^1$与$(3x+1)^4$的常数项相乘得到x^2项，由于$(3x+1)^4$的常数项为 1，所以x^2项的系数为C_5^1.

第二项：$C_5^0 \cdot (x^2)^0 \cdot (3x+1)^5$.

此项中任选 2 个$(3x+1)$相乘得到x^2项，此x^2项为$C_5^2 \cdot (3x)^2 \cdot 1^3$，系数为$C_5^0 \times C_5^2 \times 3^2 \times 1^3 = C_5^2 \times 3^2$.

综上所述：在$(x^2+3x+1)^5$的展开式中，x^2的系数为$C_5^1 + C_5^2 \times 3^2 = 95$.

方法二：

$(x^2+3x+1)^5=(x^2+3x+1)(x^2+3x+1)(x^2+3x+1)(x^2+3x+1)(x^2+3x+1)$.

含x^2的情况有：①选 1 个x^2，其余选常数项 1；②选 2 个 $3x$，其余选常数项 1.

因此，$C_5^1 \cdot (x^2)^1 \cdot 1^4 + C_5^2 \cdot (3x)^2 \cdot 1^3 = 95x^2 \Rightarrow$即$x^2$的系数为 95.

故选 E.

14.（2013）三个科室的人数分别为 6，3，2，因工作需要，每晚要安排 3 人值班，则在两个月内可以使每晚的值班人员不完全相同.【 】

（1）值班人员不能来自同一个科室.

（2）值班人员来自三个不同科室.

【答案】A　　　　　　【考查】排列组合

【解析】根据题意，在两个月内使每晚的值班人员不完全相同，即要求值班安排不能小于 60 种.

条件（1），由于正面“值班人员不能来自同一个科室”的情况很多，所以可以采取反面考虑，反面是“值班人员来自同一个科室”. 则“值班人员来自同一个科室”的安排有$C_6^3+C_3^3$种.

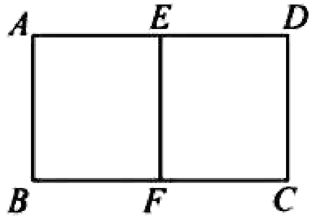
因此，“值班人员不能来自同一个科室”的安排有$C_{11}^3-(C_6^3+C_3^3)=\frac{11\times10\times9}{3\times2\times1}-(\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}+1)=144$ 种，即 144＞60. 故条件（1）充分.

条件（2），值班人员来自三个不同科室，每科室选 1 人的安排有$C_6^1C_3^1C_2^1=6\times3\times2=36$ 种，即 36＜60. 故条件（2）不充分.

综上，故选 A.

二、概率

1.（2023）如图所示，在矩形 $ABCD$ 中，$AD=2AB$，E，F 分别为 AD，BC 的中点，从 A、B、C、D、E、F 中任意取 3 个点，则这 3 个点为顶点可以组成直角三角形的概率为【 】



第 1 题图

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{11}{20}$

C. $\frac{3}{5}$

D. $\frac{13}{20}$

E. $\frac{7}{10}$

【答案】E　　　　　　　　【考查】古典概型

【解析】方法一：正面分析.

从A、B、C、D、E、F六个点中任意取 3 个点，总的情况有$C_6^3=20$种. 现在组成一个直角三角形，会出现分别以A、B、C、D、E、F为直角的三角形，可分六种情况：

①以A为直角的三角形有：$\triangle BAE$、$\triangle BAD$.（2 个）

②以B为直角的三角形有：$\triangle ABF$、$\triangle ABC$.（2 个）

③以C为直角的三角形有：$\triangle DCF$、$\triangle DCB$.（2 个）

④以D为直角的三角形有：$\triangle CDE$、$\triangle CDA$.（2 个）

⑤以E为直角的三角形有：$\triangle AEF$、$\triangle DEF$、$\triangle BEC$.（3 个）

⑥以F为直角的三角形有：$\triangle BFE$、$\triangle CFE$、$\triangle AFD$.（3 个）

综上，这 3 个点为顶点可以组成直角三角形有 $2+2+2+2+3+3=14$ 种. 则这 3 个点为顶点可以组成直角三角形的概率为$\frac{14}{20}=\frac{7}{10}$.

方法二：反面分析.

根据题意，正面考虑的情况太多，我们可以从反面分析.

从A、B、C、D、E、F六个点中任意取 3 个点，总的情况有$C_6^3=20$种. 反面情况是这 3 个点无法组成直角三角形，可分两种情况：

①3 点共线，有：(A,E,D)、(B,F,C).（2 个）

②钝角三角形，有：$\triangle AEC$、$\triangle DEB$、$\triangle BFD$、$\triangle CFA$.（4 个）

综上，则这 3 个点为顶点可以组成直角三角形的概率为 $1-\frac{6}{20}=\frac{14}{20}=\frac{7}{10}$.

故选 E.

2.（2023）甲有两张牌a，b，乙有两张牌x，y，甲、乙各任意取出一张牌，则甲取出的牌不小于乙取出的牌的概率不小于$\frac{1}{2}$.【 】

（1）$a>x$.

（2）$a+b>x+y$.

【答案】B　　　　　　　　【考查】古典概型

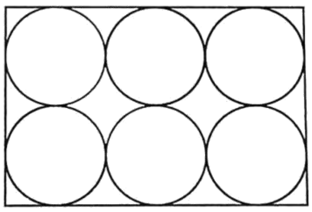
【解析】条件（1），$a>x\Rightarrow$设$x>b$，$y>b$，$y>a$. 举例：$a=3$，$b=1$，$x=2$，$y=$

4，取出牌的情况有(3，2)，(3，4)，(1，2)，(1，4). 此时甲不小于乙的概率为 $P=\frac{1}{C_2^1C_2^1}$ $=\frac{1}{4}<\frac{1}{2}$. 与题干结论矛盾. 故条件（1）不充分.

条件（2），$a+b>x+y\Rightarrow$ 设 $a\geqslant b$，$x\geqslant y$，则 $2a\geqslant a+b>x+y\geqslant 2y\Rightarrow 2a>2y\Rightarrow a>y$. 可分三种情况：①$a\geqslant x$，$a>y$，$b>x$. 举例：$a=5$，$b=4$，$x=2$，$y=3$，取出牌的情况有(5，2)，(5，3)，(4，2)，(4，3). 此时甲不小于乙的概率为 $P=1$. ②$a\geqslant x$，$a>y$，$b<y$. 举例：$a=5$，$b=1$，$x=2$，$y=3$，取出牌的情况有(5，2)，(5，3)，(1，2)，(1，3). 此时甲不小于乙的概率为 $P=\frac{2}{C_2^1C_2^1}=\frac{1}{2}$. ③$a<x$，$a>y\Rightarrow x+b>a+b>x+y\Rightarrow b>y$. 举例：$a=4$，$b=3$，$x=5$，$y=2$，取出牌的情况有(4，5)，(4，2)，(3，5)，(3，2). 此时甲不小于乙的概率为 $P=\frac{2}{C_2^1C_2^1}=\frac{1}{2}$. 结合①②③可得：甲取出的牌不小于乙取出的牌的概率 $P\geqslant\frac{1}{2}$，与题干结论一致. 故条件（2）充分.

综上，故选 B.

3.（2022）如图所示，已知相邻的圆都相切，从这 6 个圆中随机取 2 个，则这 2 个圆不相切的概率为【 】



第 3 题图

A. $\frac{8}{15}$

B. $\frac{7}{15}$

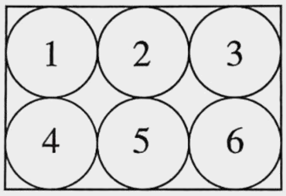
C. $\frac{3}{5}$

D. $\frac{2}{5}$

E. $\frac{2}{3}$

【答案】A　　　　　　　　　【考查】古典概型

【解析】



方法一：根据题意，可将六个圆按照顺序标上序号，如图所示．则基本事件数为$C_6^2=15$，不相邻的情况有（1，3），（1，5），（1，6），（2，4），（2，6），（3，4），（3，5），（4，6）共 8 种，所以不相邻的概率为$P=\frac{8}{C_6^2}=\frac{8}{15}$.

方法二：根据题意，可将六个圆按照顺序标上序号，如图所示．则基本事件数为$C_6^2=15$，两个圆相邻的情况有（1，2），（1，4），（2，3），（2，5），（3，6），（4，5），（5，6）共 7 种，所以两个圆不相邻的概率为$P=1-\frac{7}{C_6^2}=\frac{8}{15}$.

故选 A.

4.（2022）4 名男生和 2 名女生随机站成一排，女生既不在两端也不相邻的概率为【　】

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{5}{12}$

C. $\frac{3}{8}$

D. $\frac{1}{3}$

E. $\frac{1}{5}$

【答案】E　　　　　　　　　【考查】古典概型

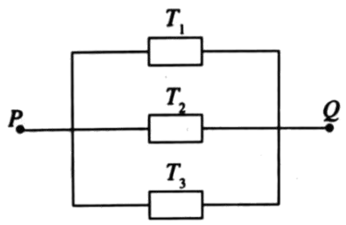
【解析】根据题意可知基本事件总数为$A_6^6=720$种情况.

先将 4 名男生排序A_4^4，然后女生不在两端且不相邻，故有 3 个空位可以插入⇒$C_3^2A_2^2$.

即女生既不在两端也不相邻的概率为$\frac{A_4^4C_3^2A_2^2}{A_6^6}=\frac{4\times3\times2\times1\times\frac{3\times2\times1}{2\times1}\times2\times1}{6\times5\times4\times3\times2\times1}=\frac{1}{5}$.

故选 E.

5.（2021）如图，由P到Q的电路中有三个元件，分别标有T_1，T_2，T_3，电流能通过T_1，T_2，T_3的概率分别是 0.9，0.9，0.99，假设电流能否通过三个元件是相互独立的，则电流能在P，Q之间通过的概率是【 】



第 5 题图

A. 0.8019
B. 0.9989
C. 0.999
D. 0.9999
E. 0.99999

【答案】D　　【考查】相互独立事件

【解析】由题意可知，电流能在P，Q之间通过，且电流能否通过三个元件是相互独立的，因此电流能在T_1，T_2，T_3中至少有一个通过.

由于正面“电流能在P，Q之间通过”的情况很多，所以可以采取反面考虑，反面是“电流不能在P，Q之间通过”，即表示电流在T_1，T_2，T_3三个元件中都不能通过.

因此“电流不能在P，Q之间通过”概率为（1－0.9）×（1－0.9）×（1－0.99）＝0.0001.
故电流能在P，Q之间通过的概率＝1－电流不能在P，Q之间通过的概率＝1－0.0001＝0.9999. 故选 D.

6.（2021）从装有 1 个红球、2 个白球、3 个黑球的袋中随机取出 3 个球，则这 3 个球的颜色至多有两种的概率为【 】

A. 0.3

B. 0. 4

C. 0. 5

D. 0. 6

E. 0. 7

【答案】E　　　　　　　　　【考查】古典概型

【解析】从 6 个球中随机取出 3 个球的基本事件总数为C_6^3.

由于正面“3 个球的颜色至多有两种”的情况很多，所以可以采取反面考虑，反面是“3 个球的颜色为三种不同的颜色”.

“3 个球的颜色为三种不同的颜色”的基本事件个数为$C_1^1C_2^1C_3^1$. 故这 3 个球的颜色至多有两种的概率$P=1-\frac{C_1^1C_2^1C_3^1}{C_6^3}=1-\frac{1\times2\times3}{\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}}=\frac{7}{10}$. 故选 E.

7.（2021）某商场利用抽奖方式促销，100 个奖券中设有 3 个一等奖、7 个二等奖，则一等奖先于二等奖抽完的概率为【 】

A. 0. 3

B. 0. 5

C. 0. 6

D. 0. 7

E. 0. 73

【答案】D　　　　　　　　　【考查】古典概型

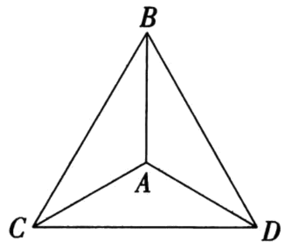
【解析】根据题意得，100 个奖券中有奖的奖券一共有 10 张（3 张一等奖和 7 张二等奖），其它奖券不影响本题的结果. 因此 10 张奖券的基本事件总数为A_{10}^{10}.

一等奖先于二等奖抽完的概率实际就是指最后一次一定要抽中的是二等奖. 即 7 张二等奖选一张出来放在最后一次抽，其余的 9 张奖券全排列$C_7^1A_9^9$.

故一等奖先于二等奖抽完的概率为$\frac{C_7^1A_9^9}{A_{10}^{10}}=\frac{7\times9!}{10!}=\frac{7}{10}$.

故选 D.

8.（2020）如图，节点A，B，C，D两两相连，从一个节点沿线段到另一个节点当作一步，若机器人从节点A出发，随机走了三步，则机器人从未到达过节点C的概率为【E】



第 8 题图

A. $\frac{4}{9}$

B. $\frac{11}{27}$

C. $\frac{10}{27}$

D. $\frac{19}{27}$

E. $\frac{8}{27}$

【答案】E　　　　　　　　【考查】古典概型

【解析】机器人每走一步，均有 3 种选择，则随机走三步，总的可能的方法数为$3^3=27$（种）.机器人不过节点C，则机器人每走一步，均有 2 种选择，则共有$2^3=8$（种）走法.故所求的概率为$\frac{8}{27}$.故选 E.

9.（2020）某商场甲、乙两种品牌的手机共有 20 部，从中任取 2 部，恰有 1 部甲品牌手机的概率为P，则$P>\frac{1}{2}$.【　】

（1）甲品牌手机不少于 8 部.

（2）乙品牌手机多于 7 部.

【答案】C　　　　　　　　【考查】古典概型

【解析】根据题意，设甲品牌手机有x部，则乙品牌手机有 $20-x$部，从 20 部手机中任取 2 部，恰有 1 部甲品牌手机的概率为$P=\frac{C_x^1C_{20-x}^1}{C_{20}^2}=\frac{x(20-x)}{190}=\frac{-(x-10)^2+100}{190}$.

若$P>\frac{1}{2}$，则有$\frac{-(x-10)^2+100}{190}>\frac{1}{2}\Rightarrow(x-10)^2<5\Rightarrow10-\sqrt{5}<x<10+\sqrt{5}$.

即需证明：$8\leqslant x<13$.

条件（1），只能确定$x \geq 8$，但无法确定$x < 13$. 故条件（1）不充分.
条件（2），只能确定$x < 13$，但无法确定$x \geq 8$. 故条件（2）不充分.
条件（1）和条件（2）单独都不充分，考虑条件（1）（2）联合.
条件（1）（2）联合得，$\begin{cases} x \geq 8 \\ 20 - x > 7 \end{cases} \Rightarrow 8 \leq x < 13$. 故条件（1）（2）联合起来充分.
综上，故选C.

10.（2019）在分别标记了数字1，2，3，4，5，6的6张卡片中，甲随机抽取1张后，乙从余下的卡片中再随机抽取2张，乙的卡片数字之和大于甲的卡片数字的概率为【 】

A. $\frac{11}{60}$
B. $\frac{13}{60}$
C. $\frac{43}{60}$
D. $\frac{47}{60}$
E. $\frac{49}{60}$

【答案】D　　　　　【考查】古典概型
【解析】根据题意，总事件数为：$C_6^1 C_5^2 = 60$.
由于正面“乙的卡片数字之和大于甲的卡片数字”的情况很多，所以可以采取反面考虑，反面是“乙的卡片数字之和小于、等于甲的卡片数字”，共有13种情况，分别为：
①甲为3时，则乙为1＋2.
②甲为4时，则乙为1＋2，1＋3.
③甲为5时，则乙为1＋2，1＋3，1＋4，2＋3.
④甲为6时，则乙为1＋2，1＋3，1＋4，1＋5，2＋3，2＋4.
综上，P（乙的卡片数字之和大于甲的卡片数字）$= 1 - \frac{13}{60} = \frac{47}{60}$. 故选D.

11.（2019）有甲、乙两袋奖券，获奖率分别为p和q. 某人从两袋中各随机抽取1张奖券，则此人获奖的概率不小于$\frac{3}{4}$.【 】
（1）已知$p + q = 1$.

（2）已知$pq=\frac{1}{4}$.

【答案】D　　　　　　　　　【考查】独立事件、均值不等式

【解析】根据题意得，甲袋获奖概率为p，乙袋获奖概率为q，此人不获奖的概率为$(1-p)(1-q)$，则此人获奖的概率为P（A）$=1-(1-p)(1-q)=p+q-pq$.

由均值不等式：$(\frac{a+b}{2})^2\geqslant ab\Rightarrow(\frac{p+q}{2})^2\geqslant pq$，即$(p+q)^2\geqslant 4pq$.

条件（1），已知$p+q=1$且$0<p<1$，$0<q<1$，由均值不等式得$(p+q)^2\geqslant 4pq\Rightarrow pq\leqslant\frac{1}{4}$.

则P（A）$=p+q-pq\geqslant\frac{3}{4}$. 故条件（1）充分.

条件（2），已知$pq=\frac{1}{4}$且$0<p<1$，$0<q<1$，由均值不等式得$(p+q)^2\geqslant 4pq\Rightarrow p+q\geqslant 1$.

则P（A）$=p+q-pq\geqslant\frac{3}{4}$. 故条件（2）充分.

综上，故选D.

12.（2018）甲、乙两人进行围棋比赛，约定先胜2盘者赢得比赛. 已知每盘棋甲获胜的概率是0.6，乙获胜的概率是0.4. 若乙在第一盘获胜，则甲赢得比赛的概率为【　】

A. 0.144

B. 0.288

C. 0.36

D. 0.4

E. 0.6

【答案】C　　　　　　　　　【考查】独立事件

【解析】根据题意得，乙在第一盘获胜. 若甲赢得比赛，甲只能在第二盘和第三盘中都获胜，所以甲赢得比赛的概率为0.6×0.6=0.36.

故选C.

13.（2017）甲从1，2，3中抽取一个数，记为a；乙从1，2，3，4中抽取一个数，记为b. 规定当$a>b$或者$a+1<b$时甲获胜，则甲获胜的概率为【　】

A. $\frac{1}{6}$

B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{5}{12}$

E. $\frac{1}{2}$

【答案】E　　　　　　　　　【考查】古典概型

【解析】根据题意得，甲、乙各取一数总共有$C_3^1C_4^1=3\times4=12$种取法，即总的基本事件数为12.

第一类：当$a>b$时甲获胜.当$a=2$时，$b=1$；当$a=3$时，$b=1$或$b=2$，共3种情况.

第二类：当$a+1<b$时甲获胜.当$a=1$时，$b=3$或$b=4$；当$a=2$时，$b=4$，共3种情况.

因此，所求事件包含的基本事件数为$3+3=6$，即甲获胜的概率为$P=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$.

故选E.

14.（2017）某人参加资格考试，有A类和B类选择，A类的合格标准是抽3道题至少会做2道，B类的合格标准是抽2道题需都会做.则此人参加A类合格的机会大.【　】

（1）此人A类题中有60%会做.

（2）此人B类题中有80%会做.

【答案】C　　　　　　　　　【考查】伯努利概型

【解析】根据题意，伯努利概型公式得：$P_n(k)=C_n^k\cdot p^k\cdot q^{n-k}$（$n=0$，1，2，…，$n$），其中$q=1-p$.

条件（1），已知A类题会做的概率，但无法确定B类题会做的概率.无法比较.故条件（1）不充分.

条件（2），已知B类题会做的概率，但无法确定A类题会做的概率.无法比较.故条件（2）不充分.

条件（1）和条件（2）单独都不充分，考虑条件（1）（2）联合.

条件（1）（2）联合起来，则有：

$P(A)=P_3(2)+P_3(3)=C_3^2(0.6)^2(0.4)^1+C_3^3(0.6)^3(0.4)^0=0.648$.

$P(B)=P_2(2)=C_2^2(0.8)^2(0.2)^0=0.64$.

比较：$0.648>0.64$.因而此人参加A类合格的机会大.故条件（1）（2）联合起来充分.

综上，故选C.

15.（2015）某次网球比赛的四强对阵为甲对乙，丙对丁，两场比赛的胜者将争夺冠军.选手之间相互获胜的概率如下：

获胜概率	甲	乙	丙	丁
甲获胜概率		0.3	0.3	0.8
乙获胜概率	0.7		0.6	0.3
丙获胜概率	0.7	0.4		0.5
丁获胜概率	0.2	0.7	0.5	

则甲获得冠军的概率为【 】

A. 0.165

B. 0.245

C. 0.275

D. 0.315

E. 0.330

【答案】A 【考查】独立事件

【解析】想要甲获得冠军，则第一轮甲对乙必须获胜.根据甲第二轮的对手分两种情况：

第①种情况：

第二轮对手是丙，丙需要先胜丁，甲先胜乙再胜丙，概率为 $0.3\times0.5\times0.3=0.045$.

第②种情况：

第二轮对手是丁，丁胜丙，甲再胜丁，概率为 $0.3\times0.5\times0.8=0.12$.

综上，甲获得冠军的概率为 $0.045+0.12=0.165$.故选 A.

16.（2015）信封中装有 10 张奖券，只有 1 张有奖.从信封中同时抽取 2 张奖券，中奖的概率记为P；从信封中每次抽取 1 张奖券后放回，如此重复抽取n次，中奖的概率记为Q，则$P<Q$.【 】

（1）$n=2$.

（2）$n=3$.

【答案】B 【考查】古典概型

【解析】根据题意得，从信封中同时抽取 2 张奖券，中奖的概率记为$P=\frac{C_1^1C_9^1}{C_{10}^2}=\frac{1}{5}=0.2$.

从信封中每次抽取 1 张奖券后放回，即有放回抽取“n次均不中奖”的概率为0.9^n，则$Q=1-0.9^n$.

条件（1），当$n=2$时，$Q=1-0.9^2=1-0.81=0.19<0.2=P$.即$Q<P$.故条件（1）不充分.

条件（2），当$n=3$时，$Q=1-0.9^3=1-0.729=0.271>0.2=P$. 即$Q>P$. 故条件（2）充分.
综上，故选 B.

17.（2014）掷一枚均匀的硬币若干次，当正面向上的次数大于反面向上的次数时停止，则在 4 次之内停止的概率为【 】

A. $\frac{1}{8}$

B. $\frac{3}{8}$

C. $\frac{5}{8}$

D. $\frac{3}{16}$

E. $\frac{5}{16}$

【答案】C　　　　　　　　　【考查】古典概型

【解析】根据题意，“当正面向上的次数大于反面向上的次数时停止”，在 4 次之内停止的情况有：

1 次停止：第 1 次掷到正面，停止掷硬币的概率$P_1=\frac{1}{2}$.

3 次停止：第 1 次掷到反面，第 2 次和第 3 次掷到正面，停止掷硬币的概率$P_2=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$.

2 次（一正一反）和 4 次（两正两反），掷到正面和反面的次数相等，不符合停止的要求，则可排除. 因此，在 4 次之内停止的概率为$P=P_1+P_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}=\frac{5}{8}$. 故选 C.

18.（2013）档案馆在一个库房中安装了n个烟火感应报警器，每个报警器遇到烟火成功报警的概率均为p. 该库房遇到烟火发出报警的概率达到 0.999.【 】

（1）$n=3$，$p=0.9$.

（2）$n=2$，$p=0.97$.

【答案】D　　　　　　　　　【考查】独立事件

【解析】公式：$p_{（发出报警）}+p_{（不会发出报警）}=1$

条件（1），$n=3$，$p=0.9\Rightarrow 3$ 个烟火感应报警器遇到烟火发出报警的概率为$p=1-(1-0.9)^3$

$=1-0.001=0.999$.故条件（1）充分.

条件（2），$n=2$，$p=0.97\Rightarrow 2$ 个烟火感应报警器遇到烟火发出报警的概率为$p=1-(1-0.97)^2=1-0.0009=0.9991\approx 0.999$.故条件（2）充分.

综上，故选 D.

真题演练

一、问题求解：第 1～15 小题，每小题 3 分，共 45 分。下列每题给出的 A、B、C、D、E 五个选项中，只有一项是符合试题要求的。

1.（1997）某公司电话号码有 5 位，若第一位数字必须是 5，其余各位可以是 0 到 9 中的任意一个，则由完全不同的数字组成的电话号码的个数是【 】

A. 126

B. 1 260

C. 3 024

D. 5 040

E. 30 240

2.（1998）有 3 个人，每人都以相同的概率被分配到 4 间房的每一间中，某指定房间中恰有 2 人的概率是【 】

A. $\frac{1}{64}$

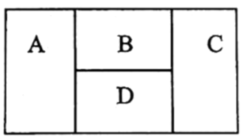
B. $\frac{3}{64}$

C. $\frac{9}{64}$

D. $\frac{5}{32}$

E. $\frac{3}{16}$

3.（2000）如下图所示，用 5 种不同的颜色涂在图中 4 个区域里，每一区域涂上一种颜色，且相邻区域的颜色必须不同，则共有不同的涂法____种.【 】



第 3 题图

A. 120

B. 140

C. 160

D. 180

4.（2001）在共有 10 个座位的小会议室内随机地坐上 6 名与会者，则指定的 4 个座位被坐满的概率是【 】

A. $\frac{1}{14}$

B. $\frac{1}{13}$

C. $\frac{1}{12}$

D. $\frac{1}{11}$

5.（2002）在盛有 10 只螺母的盒子中有 0 只，1 只，2 只，…，10 只铜螺母是等可能的，今向盒中放入一个铜螺母，然后随机从盒中取出一个螺母，则这个螺母为铜螺母的概率是【 】

A. $\frac{6}{11}$

B. $\frac{5}{10}$

C. $\frac{5}{11}$

D. $\frac{4}{11}$

6.（2006）一批产品的合格率为 95%，而合格品中一等品占 60%，其余为二等品. 现从中任取一件检验，这件产品是二等品的概率为【 】

A. 0.57

B. 0.38

C. 0.35

D. 0.26

E. 以上均不对

7.（2008）某乒乓球男子单打决赛在甲、乙两选手间进行比赛用 7 局 4 胜制. 已知每局比赛甲选手战胜乙选手的概率为 0.7，则甲选手以 4∶1 战胜乙选手的概率为【 】

A. 0.84×0.7^3

B. 0.7×0.7^3

C. 0.3×0.7^3

D. 0.9×0.7^3

E. 以上均不对

8. （2008）若以连续掷两枚骰子分别得到的点数a与b作为点M的坐标，则点M落入圆$x^2+y^2=18$内（不含圆周）的概率是【　】

A. $\frac{7}{36}$

B. $\frac{2}{9}$

C. $\frac{1}{4}$

D. $\frac{5}{18}$

E. $\frac{11}{36}$

9. （2008）有 2 排座位，前排 6 个座，后排 7 个座.若安排 2 人就坐，规定前排中间 2 个座位不能坐，且此 2 人始终不能相邻而坐，则不同的坐法种数为【　】

A. 92

B. 93

C. 94

D. 95

E. 96

10. （2009）若将 10 只相同的球随机放入编号为 1，2，3，4 的 4 个盒子中，则每个盒子不空的投放方法有【　】

A. 72

B. 84

C. 96

D. 108

E. 120

11.（2010）在一次竞猜活动中，设有 5 关，如果连续通过 2 关就算闯关成功，小王通过每关的概率都是$\frac{1}{2}$，他闯关成功的概率为【 】

A. $\frac{1}{8}$

B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{3}{8}$

D. $\frac{4}{8}$

E. $\frac{19}{32}$

12.（2010）在 10 道备选试题中，甲能答对 8 题，乙能答对 6 题. 若某次考试从这 10 道备选题中随机抽出 3 道作为考题，至少答对 2 题才算合格，则甲、乙两人考试都合格的概率是【 】

A. $\frac{28}{45}$

B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{14}{15}$

D. $\frac{26}{45}$

E. $\frac{8}{15}$

13.（2011）10 名网球选手中有 2 名种子选手. 现将他们分成 2 组，每组 5 人，则 2 名种子选手不在同一组的概率为【 】

A. $\frac{5}{18}$

B. $\frac{4}{9}$

C. $\frac{5}{9}$

D. $\frac{1}{2}$

E. $\frac{2}{3}$

14.（2011）现从 5 名管理类专业、4 名经济类专业和 1 名财会专业的学生中随机派出一个 3 人小组，则该小组中 3 个专业各有 1 名学生的概率为【 】

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{4}$

D. $\frac{1}{5}$

E. $\frac{1}{6}$

15.（2011）在 8 名志愿者中，只能做英语翻译的有 4 人，只能做法语翻译的有 3 人，既能做英语翻译又能做法语翻译的有 1 人.现从这些志愿者中选取 3 人做翻译工作，确保英语和法语都有翻译的不同选法共有____种.【 】

A. 12

B. 18

C. 21

D. 30

E. 51

二、条件充分性判断：第 16～25 小题，每小题 3 分，共 30 分。要求判断每题给出的条件（1）和条件（2）能否充分支持题干所陈述的结论。A、B、C、D、E 五个选项为判断结果，请选择一项符合试题要求的判断。

A.条件（1）充分，但条件（2）不充分。

B.条件（2）充分，但条件（1）不充分。

C.条件（1）和（2）单独都不充分，但条件（1）和条件（2）联合起来充分。

D.条件（1）充分，条件（2）也充分。

E.条件（1）和（2）单独都不充分，条件（1）和条件（2）联合起来也不充分。

16.（2007）从含有 2 件次品、$n-2$（$n>2$）件正品的n件产品中随机抽查 2 件，其中恰有 1 件次品的概率为 0.6.【 】

（1）$n=5$.

（2）$n=6$.

17.（2008）公路 AB 上各站之间共有 90 种不同的车票.【 】

（1）公路 AB 上有 10 个车站，每两站之间都有往返车票.

（2）公路 AB 上有 9 个车站，每两站之间都有往返车票.

18.（2008）$C_n^4 > C_n^6$.【 】

（1）$n=10$.

（2）$n=9$.

19.（2008）张三以卧姿射击 10 次，命中靶子 7 次的概率是 $\frac{15}{128}$.【 】

（1）张三以卧姿打靶的命中率是 0.2.

（2）张三以卧姿打靶的命中率是 0.5.

20.（2009）点 (s,t) 落入圆 $(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$ 内的概率是 $\frac{1}{4}$.【 】

（1）s，t 是连续掷一枚骰子两次所得到的点数，$a=3$.

（2）s，t 是连续掷一枚骰子两次所得到的点数，$a=2$.

21.（2009）命中来犯敌机的概率是 99%.【 】

（1）每枚导弹命中率为 0.6.

（2）至多同时向来犯敌机发射 4 枚导弹.

22.（2010）12 支篮球队进行单循环比赛，完成全部比赛共需 11 天.【 】

（1）每天每队只比赛 1 场.

（2）每天每队只比赛 2 场.

23.（2010）$C_{31}^{4n-1}=C_{31}^{n+7}$.【 】

（1）$n^2-7n+12=0$.

（2）$n^2-10n+24=0$.

24.（2011）现有 3 名男生和 2 名女生参加面试，则面试的排序法有 24 种.【 】

（1）第一位面试的是女生.

（2）第二位面试的是指定的某位男生.

25.（2011）某种流感在流行.从人群中任意找出 3 人，则其中至少有 1 人患该种流感的概率为 0.271.【 】

（1）该流感的发病率为 0.3.

（2）该流感的发病率为 0.1.

参考答案

答案速查									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	C	D	A	A	B	A	D	C	B
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
E	A	C	E	E	A	A	B	B	B
21	22	23	24	25					
E	A	E	B	B					

1.【答案】C　　　　　　　　【考查】排列与组合

【解析】第一步：分析第一位，要求第一位数字必须是 5，只有 1 种方法.

第二步：分析第二位：按照要求“电话号码由完全不同的数字组成”第二位数字不能是第一位的 5，故有 9 种方法.

第三步：分析第三位，第三位数字不能是前两位用过的数字，故有 8 种方法.

以此类推，第四位有 7 种方法，第五位有 6 种方法，故共有 9×8×7×6=3 024（种）方法.

故选 C.

2.【答案】C　　　　　　　　【考查】排列与组合

【解析】方法一：随机试验为“将 3 个人分配到 4 间房中”，总情况数为 4^3.

所求随机事件A=指定房间中恰有 2 人，即指定房间中有 2 人，另 1 人在剩余 3 间非指定房间中的某一间中，故情况数为$C_3^2C_3^1$，因此$P(A)=\frac{C_3^2C_3^1}{4^3}=\frac{9}{64}$.

方法二：将 3 人设为甲、乙、丙 3 人，所有人分配到每一间房的概率都是$\frac{1}{4}$，并且是相互独立的，故其中 2 人（甲、乙）同时分配到指定房间的概率为$(\frac{1}{4})^2$，另一人分配到非指定房间的概率为$1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$，由于还需确定哪 2 人被分配到指定房间，有$C_3^2$种情况，故所求概率$P=C_3^2\times$

$(\frac{1}{4})^2\times\frac{3}{4}=\frac{9}{64}$.

故选 C.

3.【答案】D　　　　　　　　　【考查】排列与组合

【解析】涂这 4 块区域分 4 步.

第一步，涂A，有 5 种方法.

第二步，涂B，要求与A不同色有 4 种方法.

第三步，涂D，要求与A、B均不同色有 3 种方法.

第四步，涂C，要求与B、D均不同色有 3 种方法.

故共 5×4×3×3＝180（种）方法. 故选 D.

4.【答案】A　　　　　　　　　【考查】概率

【解析】方法一：随机试验为“6 名与会者随机地坐到 10 个座位中的某 6 个座位上”，总情况数为$C_{10}^{6}\times 6!=P_{10}^{6}$.

所求随机事件A＝指定的 4 个座位被坐满，情况数为$C_6^4\times 4!\times C_6^2\times 2!$，故$P(A)=\frac{C_6^4\times 4!\times C_6^2\times 2!}{C_{10}^{6}\times 6!}=\frac{1}{14}$.

方法二：10 个座位坐 6 个人，每个座位被坐的概率均为$\frac{6}{10}$，指定的第一个座位被坐的概率是$\frac{6}{10}$，在这个座位已经被坐的条件下，还有 9 个座位 5 个人，每个座位被坐的概率为$\frac{5}{9}$，指定的第二个座位被坐的概率是$\frac{5}{9}$，以此类推，根据乘法公式，指定的 4 个座位被坐的概率是$P=\frac{6}{10}\times\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}\times\frac{3}{7}=\frac{1}{14}$.

故选 A.

5.【答案】A　　　　　　　　　【考查】概率

【解析】方法一：根据题意得，向盒中放入 1 个铜螺母后，盒子中一共有 11 个螺母，而原来盒中有 0 只，1 只，2 只，…，10 只铜螺母的概率都是$\frac{1}{11}$，根据加法公式和乘法公式，随机取一螺母为铜螺母的概率为$P=\frac{1}{11}\times\frac{0}{11}+\frac{1}{11}\times\frac{1}{11}+\cdots+\frac{1}{11}\times\frac{11}{11}=\frac{1}{11}\times(\frac{0}{11}+\cdots+\frac{11}{11})=\frac{6}{11}$.

方法二：根据题意，设A_i＝盒中有i个铜螺母，B＝取出的螺母为铜螺母. 则$P(B)=\sum_{i=1}^{10}P(A_i)(\frac{B}{A_i})$

$=\frac{1}{11}\sum_{i=0}^{6}\frac{i+1}{11}=\frac{6}{11}$.

故选 A.

6.【答案】B 【考查】概率

【解析】合格品中一等品占 60%，则二等品占 40%，因此任取一只是二等品的 B 是 95%×40%=0.38. 故选 B.

7.【答案】A 【考查】概率

【解析】要求甲选手以 4∶1 取胜，则第 5 局甲选手要胜且在前 4 局比赛中甲选手胜 3 局输 1 局，那么所求概率为$P=C_4^3\times 0.7^3\times 0.3\times 0.7=0.84\times 0.7^3$. 故选 A.

8.【答案】 【考查】概率

【解析】根据古典概型计算公式，点M共有 36 种情况：(1，1)(1，2)(2，1)⋯(6，6)，故样本空间样本点个数（即分母）为 36. 其中，落入圆$x^2+y^2=18$内的点的坐标要满足$x^2+y^2<18$，它们分别是：(1，1)(1，2)(1，3)(1，4)(2，1)(2，2)(2，3)(3，1)(3，2)(4，1)共 10 个，故点M落入圆内的概率为$\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$. 故选 D.

9.【答案】C 【考查】排列组合

【解析】方法一：根据题意，分类：

①两人同前排，共$C_2^1\times C_2^1\times 2!=8$（种）方法.

②两人同后排，采取插空法，共$C_6^2\times 2!=30$（种）方法.

③两人一前一后，共$C_4^1\times C_7^1\times 2!=56$（种）方法.

结合①②③得，共 8+30+56=94（种）方法.

方法二：由于正面“2 人不能相邻而坐”的情况很多，所以可以采取反面考虑，反面是“2 人相邻而坐”.

“2 人相邻而坐”的情况数为 8×2!，则“2 人不能相邻而坐”的情况数为$C_{11}^2\times 2!-8\times 2!=94$.

故选 C.

10.【答案】B　　　　　　　　　　【考查】排列组合

【解析】根据隔板法，10 个元素 9 个空，分 4 组隔 3 板，则投放方法有C_9^3=84. 故选 B.

11.【答案】E　　　　　　　　　　【考查】概率

【解析】根据闯关数分类：

①仅闯 2 关就成功，2 关都通过，概率为$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$；

②闯 3 关成功，第一关没能通过，第二、三两关都通过，概率为$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$.

③闯 4 关成功，第三、四关必须都通过，第二关必须没通过（如果第二关通过、第三关也通过，则闯 3 关就成功，不必闯第四关），第一关是否通过不用考虑，概率为$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$.

④闯 5 关成功，第四、五关必须都通过，第三关必须没通过（如果第三关通过，第四关也通过，则闯 4 关就成功，不必闯第五关），这样只要前 2 关不是 2 次都通过即可（前 2 关如果 2 次都通过，只闯 2 关就可以了，不必继续闯关），概率为$(1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2})\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{32}$.

结合①②③④可得，闯关成功的概率为$\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{2}{32}=\frac{19}{32}$. 故选 E.

12.【答案】A　　　　　　　　　　【考查】概率

【解析】[甲、乙两人的两次抽取属于“有放回抽取”，即甲选出 3 道题目后放回，乙再选 3 道题目]

根据题意得，“甲、乙两人分别从 10 题中抽取 3 题”，两人考试是否合格对对方不造成影响，相互独立，故可分别计算甲、乙两人合格的概率.

甲合格的概率为$P_{甲}=1-\frac{C_8^1C_2^2}{C_{10}^3}=\frac{14}{15}$，乙合格的概率为$P_{乙}=\frac{C_6^3+C_6^2C_4^1}{C_{10}^3}=\frac{2}{3}$.

根据独立事件乘法公式，两人都合格的概率为$P=P_{甲}\cdot P_{乙}=\frac{14}{15}\times\frac{2}{3}=\frac{28}{45}$. 故选 A.

13.【答案】C　　　　　　　　　　【考查】概率

【解析】方法一：随机试验是“将 10 名网球选手分成 2 组，每组 5 人”，将 2 组看成不同的 2 组，总情况数为$C_{10}^5C_5^5$. 所求随机事件A=甲、乙 2 名种子选手不同组，按照乘法原理分析.

第一步：将甲、乙 2 名种子选手分到 2 组中去，每组 1 人，有 2！种方案.

第二步：将剩余 8 名非种子选手分到 2 组中去，每组 4 人，有$C_8^4C_4^4$种方案，故共 2！$\times C_8^4C_4^4$种情况.

所以$P(A)=\dfrac{2!\times C_8^4\times C_4^4}{C_{10}^5\times C_5^5}=\dfrac{5}{9}$.

方法二：将分组过程想象成抽签，10 名选手 10 个签，5 个签为A组签，另外 5 个签为B组签，每人抽一个签，抽到哪个签去哪个组，甲选手随意抽一个签，接下来乙选手抽，留给乙选手 9 个签，其中与甲同组的有 4 个签，与甲不同组的有 5 个签，则乙选手抽到与甲不同组的签的概率为$\dfrac{5}{9}$.

故选 C.

14.【答案】E　　　　　　　　【考查】概率

【解析】随机试验是“从 5＋4＋1＝10（名）学生中任选 3 人”，总情况数为C_{10}^3. 所求随机事件A＝3 个专业各有 1 名学生，情况数为$C_5^1C_4^1C_1^1$，则$P(A)=\dfrac{C_5^1C_4^1C_1^1}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{6}$. 故选 E.

15.【答案】E　　　　　　　　【考查】排列组合

【解析】方法一：根据题意，按照只会英语的 4 人被选中的人数分类讨论：

①选中 2 人，$C_4^2C_4^1$＝24（种）.

②选中 1 人，$C_4^1C_4^2$＝24（种）.

③选中 0 人，$C_1^1C_3^2$＝3（种）.

结合①②③，则共有 24＋24＋3＝51（种）方法.

方法二：由于正面“英语和法语的翻译都有”的情况很多，所以可以采取反面考虑，反面是“全是英语翻译或全是法语翻译”. 则“全是英语翻译或全是法语翻译”的选法有$C_8^3-C_4^3-C_3^3$＝51（种）.

故选 E.

16.【答案】A　　　　　　　　【考查】概率

【解析】随机试验是“从n件产品中随机抽查 2 件”，总情况数为C_n^2. 所求随机事件A＝所取 2 件产品中恰有 1 件次品，即所取的 2 件产品中，一件是 2 件次品中的某一件，另一件是$n-2$件正品中的某一件，情况数为$C_2^1C_{n-2}^1$. 则$P(A)=\dfrac{C_2^1C_{n-2}^1}{C_n^2}$.

条件（1），$n=5 \Rightarrow P(A)=\dfrac{C_2^1C_{n-2}^1}{C_n^2}=\dfrac{C_2^1C_{5-2}^1}{C_5^2}=\dfrac{C_2^1C_3^1}{C_5^2}=0.6$，与题干结论一致.故条件（1）充分.

条件（2），$n=6 \Rightarrow P(A)=\dfrac{C_2^1C_{n-2}^1}{C_n^2}=\dfrac{C_2^1C_{6-2}^1}{C_6^2}=\dfrac{C_2^1C_4^1}{C_6^2}=\dfrac{8}{15}\neq 0.6$，与题干结论不一致.故条件（2）不充分.

综上，故选 A.

17.【答案】A　　　　　　【考查】排列组合

【解析】条件（1），公路 AB 上有 10 个车站，每两站之间都有往返车票⇒只要将车票的起点和终点确定，车票就确定了.因此分两步：第一步确定起点，10 个车站均有可能作为起点，有 10 种方法；第二步确定终点（起点与终点不能相同），有 9 种方法，则共有 $10\times9=90$（种）车票，与题干结论一致.故条件（1）充分.

条件(2)，公路 AB 上有 9 个车站，每两站之间都有往返车票⇒只要将车票的起点和终点确定，车票就确定了.因此分两步：第一步确定起点，9 个车站均有可能作为起点，有 9 种方法；第二步确定终点（起点与终点不能相同），有 8 种方法，则共有 $9\times8=72$（种）车票$\neq 90$（种）车票，与题干结论不一致.故条件（2）不充分.

综上，故选 A.

18.【答案】B　　　　　　【考查】概率

【解析】条件（1），当$n=10$时，$C_{10}^4=\dfrac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}=210$，$C_{10}^6=\dfrac{10\times9\times8\times7\times6\times5}{6\times5\times4\times3\times2\times1}=210$.则$C_{10}^4=C_{10}^6$，与题干结论不一致.故条件（1）不充分.

条件（2），当$n=9$时，$C_9^4=\dfrac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1}=126$，$C_{10}^6=\dfrac{9\times8\times7\times6\times5\times4}{6\times5\times4\times3\times2\times1}=84$.则 $126>84 \Rightarrow C_{10}^4>C_{10}^6$，与题干结论一致.故条件（2）充分.

综上，故选 B.

19.【答案】B　　　　　　【考查】概率

【解析】张三射击 10 次，每次命中靶子的概率相同，可以看成 10 次伯努利试验.假设每次命中的概率为p，则每次不命中靶子的概率为 $1-p$.根据伯努利公式，10 次射击中命中靶子 7 次，另外 3 次不命中的概率为$C_{10}^7p^7(1-p)^3$.

条件（1），张三以卧姿打靶的命中率是 0.2⇒ $p=0.2=\frac{1}{5}\Rightarrow C_{10}^{7}(\frac{1}{5})^{7}(1-\frac{1}{5})^{3}=120\times\frac{4^{3}}{5^{10}}=\frac{1536}{1953125}\neq\frac{15}{128}$，与题干结论不一致. 故条件（1）不充分.

条件(2)，张三以卧姿打靶的命中率是 0.5⇒ $p=0.5=\frac{1}{2}\Rightarrow C_{10}^{7}(\frac{1}{2})^{7}(1-\frac{1}{2})^{3}=120\times\frac{1}{2^{10}}=\frac{15}{128}$，与题干结论一致. 故条件（2）充分.

综上，故选 B.

20.【答案】B　　　　　　　　【考查】概率

【解析】a值不同，半径不同，圆的大小不同，落入圆内的概率也不同.

s，t是连续掷一枚骰子两次所得到的点数：(1，1)(1，2)(1，3)(1，4)(1，5)(1，6)(2，1)(2，2)(2，3)(2，4)(2，5)(2，6)(3，1)(3，2)(3，3)(3，4)(3，5)(3，6)(4，1)(4，2)(4，3)(4，4)(4，5)(4，6)(5，1)(5，2)(5，3)(5，4)(5，5)(5，6)(6，1)(6，2)(6，3)(6，4)(6，5)(6，6)共 36 种情况.

条件（1），$a=3\Rightarrow(x-3)^{2}+(y-3)^{2}=3^{2}$，圆心为(3，3)，半径 3. 未落入圆内的有(1，6)(2，6)(3，6)(4，6)(5，6)(6，1)(6，2)(6，3)(6，4)(6，5)(6，6)共 11 种情况，则落入圆内的概率为 $1-\frac{11}{36}=\frac{25}{36}\neq\frac{1}{4}$，与题干结论不一致. 故条件（1）不充分.

条件（2），$a=2\Rightarrow(x-2)^{2}+(y-2)^{2}=2^{2}$，圆心为(2，2)，半径 2. 落入圆内的有(1，1)(1，2)(1，3)(2，1)（2，2）(2，3)(3，1)(3，2)(3，3)共 9 种情况，则落入圆内的概率为 $\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$，与题干结论一致. 故条件（2）充分.

综上，故选 B.

21.【答案】E　　　　　　　　【考查】概率

【解析】条件（1），每枚导弹命中率为 0.6. 举反例：如果只发射一枚导弹，命中概率是 0.6，不能达到命中来犯敌机的概率是 99%，与题干结论不一致. 故条件（1）不充分.

条件（2），至多同时向来犯敌机发射 4 枚导弹. 举反例：如果每枚导弹的命中率是零，不能达到命中来犯敌机的概率是 99%，与题干结论不一致. 故条件（2）不充分.

条件（1）和条件（2）单独都不充分，考虑条件（1）（2）联合.

条件（1）（2）联合得：每枚导弹命中率为 0.6，至多同时向来犯敌机发射 4 枚导弹. 可分类：

①4 枚导弹中命中 1 枚的概率是$C_4^1\times0.6\times(1-0.6)^3$.

②4 枚导弹中命中 2 枚的概率是$C_4^2\times0.6^2\times(1-0.6)^2$.

③4 枚导弹中命中 3 枚的概率是$C_4^3\times0.6^3\times(1-0.6)^1$.

④4 枚导弹中命中 1 枚的概率是$C_4^4\times0.6^4$.

∴结合①②③④得：$C_4^1\times0.6\times(1-0.6)^3+C_4^2\times0.6^2\times(1-0.6)^2+C_4^3\times0.6^3\times(1-0.6)^1+C_4^4\times0.6^4=97.44\%\neq99\%$，与题干结论不一致. 故条件（1）（2）联合起来也不充分.

综上，选 E.

22.【答案】A　　　　　　　　【考查】排列组合

【解析】12 支队伍打单循环赛，每支队伍有 11 个对手，每支队伍需要打 11 场比赛，全部比赛场次为$C_{12}^2=66$ 场.

条件（1），每天每队只比赛 1 场⇒12 支球队每天比赛 6 场，全部比赛天数＝66÷6＝11 天，与题干结论一致. 故条件（1）充分.

条件（2），每天每队只比赛 2 场⇒12 支球队每天比赛 12 场，全部比赛天数＝66÷12＝5.5 天，与题干结论不一致. 故条件（2）不充分.

综上，故选 A.

23.【答案】E　　　　　　　　【考查】排列组合

【解析】$C_{31}^{4n-1}=C_{31}^{n+7}\Leftrightarrow 4n-1=n+7$ 或 $4n-1+n+7=31$. 解得：$n=5$.

条件（1），$n^2-7n+12=0\Rightarrow$解得：$n=4$ 或$n=3$，与上述结论不一致. 故条件（1）不充分.

条件（2），$n^2-10n+24=0\Rightarrow$解得：$n=4$ 或$n=6$，与上述结论不一致. 故条件（2）不充分.

条件（1）和条件（2）单独都不充分，考虑条件（1）（2）联合.

条件（1）（2）联合得：$n=4$，与上述结论不一致. 故条件（1）（2）联合起来也不充分.

综上，故选 E.

24.【答案】B　　　　　　　　【考查】排列组合

【解析】条件（1），第一位面试的是女生⇒第一步：分析第一位，要求第一位面试的是女生，可以是 2 名女生中的任意一名，有 2 种方法. 第二步：分析第二位，第二位没有任何要求，由于第一位已经面试过 1 名女生，第二位可以面试除了第一位面试过的女生以外剩余的任意 4 人，有 4 种方法. 以此类推，第三步分析第三位有 3 种方法；第四步分析第四位有 2 种方法；第五步只有 1 种方法，则共有 2×4×3×2×1＝48（种）方法≠24（种）方法，与题干结论不一致. 故条件（1）不充分.

条件（2），第二位面试的是指定的某位男生⇒第一步：分析第二位，要求面试的是指定的某位男生，故第一步只有 1 种方法. 第二步：分析第一位，第一位没有任何要求，由于第二位已

经面试过 1 名指定的某位男生，第一位可以面试除了第二位面试过的指定的某位男生以外剩余的任意 4 人，有 4 种方法. 以此类推，第三步分析第三位有 3 种方法；第四步分析第四位有 2 种方法；第五步只有 1 种方法，则共有 1×4×3×2×1＝24（种）方法，与题干结论一致. 故条件（2）充分.

综上，故选 B.

25.【答案】B　　【考查】概率

【解析】根据题意，设每人患病的概率均为p，不患病的概率就为 1－p.

“至少 1 人患病”的正面可分为 3 类：

①1 人患病，另 2 人不患病，概率为$C_3^1p(1-p)^2$.

②2 人患病，1 人不患病，概率为$C_3^2p^2(1-p)$.

③3 人均患病，概率为p^3.

结合①②③，“至少 1 人患病”的概率为$C_3^1p(1-p)^2+C_3^2p^2(1-p)+p^3$.

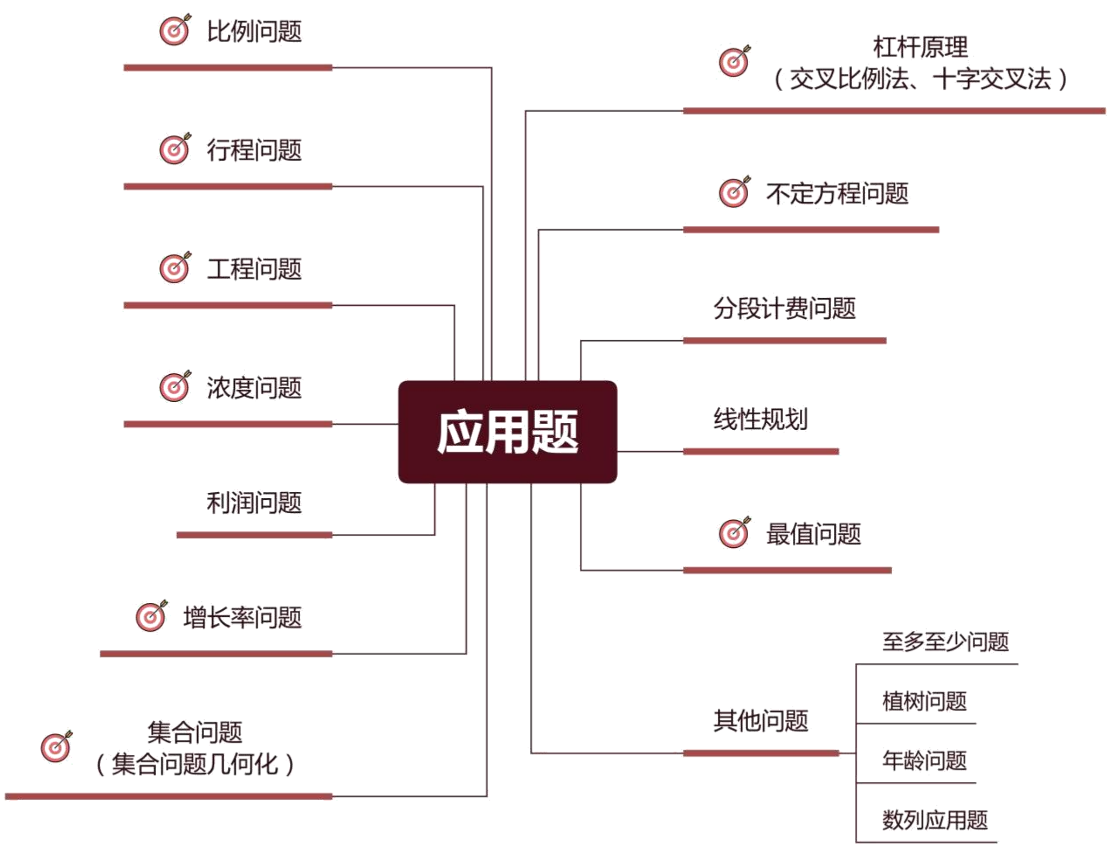
条件（1），当p＝0.3 时，“至少 1 人患病”的概率为$C_3^1\times0.3\times(1-0.3)^2+C_3^2\times0.3^2\times0.7+0.3^3=0.657\neq0.271$，与题干结论不一致. 故条件（1）不充分.

条件（2），当p＝0.1 时，“至少 1 人患病”的概率为$C_3^1\times0.1\times(1-0.1)^2+C_3^2\times0.1^2\times0.9+0.1^3=0.271$，与题干结论一致. 故条件（2）充分.

综上，故选 B.

第六章 应用题

知识脉络



真题呈现

一、比例问题

1.（2023）已知甲、乙两公司的利润之比为 3∶4，甲、丙两公司的利润之比为 1∶2，若乙公司的利润为 3 000 万元，则丙公司的利润为【 】

A. 5 000 万元

B. 4 500 万元

C. 4 000 万元

D. 3 500 万元

E. 2 500 万元

【答案】B　　　　【考查】应用题——比例问题

【解析】根据题意得：甲∶乙＝3∶4、甲∶丙＝1∶2⇒甲∶乙∶丙＝3∶4∶6.
乙公司4份对应3 000元⇒1份对应750元.则丙公司6份即为6×750＝4 500元.
故选B.

2.（2016）某家庭在一年的总支出中，子女教育支出与生活资料支出的比为3∶8，文化娱乐支出与子女教育支出的比为1∶2.已知文化娱乐支出占家庭总支出的10.5%，则生活资料支出占家庭总支出的【 】

A.40%

B.42%

C.48%

D.56%

E.64%

【答案】D　　【考查】应用题——比例问题

【解析】方法一：（注：三者的比例关系中间桥梁是“子女教育支出”，因而找出“子女教育支出”两个比之间的公倍数）

根据题意得，子女教育支出∶生活资料支出＝3∶8＝6∶16.

文化娱乐支出∶子女教育支出＝1∶2＝3∶6.

因此，文化娱乐支出∶子女教育支出∶生活资料支出＝3∶6∶16.

∵文化娱乐支出占家庭总支出的10.5%.∴家庭总支出为 $10.5\%\div\frac{3}{25}$.

则生活资料支出占家庭总支出的 $10.5\%\div\frac{3}{25}\times\frac{16}{25}=56\%$.

方法二：根据题意，设子女教育支出为x，生活资料支出为y，文化娱乐支出为z.

则有$z:x=1:2$，$x:y=3:8\Rightarrow x:y:z=6:16:3$.

再设$z=3k=10.5\%\Rightarrow k=3.5\%$，则$y=16k=16\times3.5\%=56\%$.

故选D.

3.（2013）甲、乙两商店同时购进了一批某品牌电视机，当甲店售出15台时，乙店售出10台，此时两店的库存之比为8∶7，库存之差为5.甲、乙两商店的总进货量为【 】

A.75台

B.80台

C.85台

D.100台

E.125台

【答案】D 【考查】应用题——比例问题

【解析】根据题意，甲、乙两商店的库存之比为 8∶7，库存之差为 5⇒相差一份的比对应的电视机数量是 5 台.

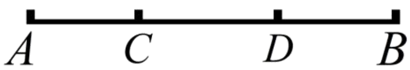
则可推出：甲商店的库存有 $8\times5=40$（台）；乙商店的库存有 $7\times5=35$（台）.

因此，甲、乙两商店的总进货量为 $40+35+15+10=100$（台）.

故选 D.

二、行程问题

1.（2023）甲、乙两车分别从A、B两地同时出发，相向而行，1 小时后，甲车到达C点，乙车到达D点（如图所示），则能确定A、B两地的距离.【 】



第 1 题图

（1）已知C、D两地的距离.

（2）已知甲、乙两车的速度比.

【答案】E 【考查】应用题——路程问题（行程问题）

【解析】根据题意，设甲车的速度为$v_{甲}$，乙车的速度为$v_{乙}$. 则$AC=v_{甲}\cdot1=v_{甲}$，$DB=v_{乙}\cdot1=v_{乙}$. 即$AB=AC+CD+DB=v_{甲}+CD+v_{乙}$.

条件（1），已知C、D两地的距离⇒已知CD的长度，但$v_{甲}$和$v_{乙}$的数值无法确定. 即不能确定A、B两地的距离. 故条件（1）不充分.

条件（2），已知甲、乙两车的速度比⇒已知$v_{甲}$和$v_{乙}$的比值，但$v_{甲}$和$v_{乙}$的数值无法确定，CD的长度也无法确定. 即不能确定A、B两地的距离. 故条件（2）不充分.

条件（1）和条件（2）单独都不充分，考虑条件（1）（2）联合.

考虑条件（1）（2）联合有：已知CD的长度，$v_{甲}$和$v_{乙}$的比值. 但$v_{甲}$和$v_{乙}$的数值无法确定. 即不能确定A、B两地的距离. 故条件（1）（2）联合起来也不充分.

综上，故选 E.

2. (2022) 已知A，B两地相距 208 km，甲、乙、丙三车的速度分别为 60 km/h，80 km/h，90 km/h，甲、乙两车从A地出发去B地，丙车从B地出发去A地，三车同时出发，当丙车与甲、乙两车的距离相等时，用时【 】

A. 70 min

B. 75 min

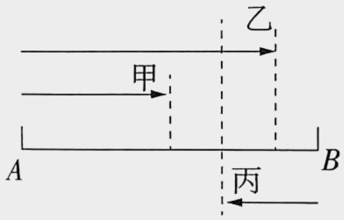
C. 78 min

D. 80 min

E. 86 min

【答案】C　　【考查】应用题——路程问题（行程问题）

【解析】根据题意可画图，如图所示.



方法一：设用时t小时后，甲车的路程：$60t$；乙车的路程：$80t$；丙车的路程：$90t$.

丙车与甲、乙两车的距离相等.

丙车与甲车的距离为：$208-60t-90t$.

丙车与乙车的距离为：$80t+90t-208$.

可列方程为：$208-60t-90t=80t+90t-208 \Rightarrow t=\frac{13}{10}$小时$=78$ min.

方法二：设用时t小时后，甲车的路程：$60t$；乙车的路程：$80t$；丙车的路程：$90t$.

由图可得，甲、乙两车相距$20t$，故有甲车的路程与丙车的路程相距$10t$等于AB两地距离，乙车的路程与丙车的路程多$10t$等于AB两地距离.

即可列方程：$60t+90t+10t=208$（或$80t+90t-10t=208$）$\Rightarrow t=\frac{13}{10}$小时$=78$ min.

故选 C.

3. (2021) 甲、乙两人相距 330 千米，他们驾车同时出发，经过 2 小时相遇，甲继续行驶 2 小时 24 分钟后到达乙的出发地，则乙的车速为____千米/小时.【 】

A. 70

B. 75

C. 80

D. 90

E. 96

【答案】D　　　　　　　　　　【考查】应用题——路程问题（行程问题）

【解析】方法一：设甲、乙两人的速度分别为v_1千米/小时、v_2千米/小时.（注：2 小时 24 分钟要换算）.

根据题意有：$\begin{cases}(v_1+v_2)\times 2=330\\ v_1\times\left(2+2\dfrac{24}{60}\right)=330\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}v_1=75\\ v_2=90\end{cases}$. 则乙的车速为 90 千米/小时.

方法二：甲从出发地到相遇位置所用时间为 120 分钟（2 小时），从相遇位置到乙出发地所用时间为 144 分钟（2 小时 24 分钟），则时间比为 120∶144＝5∶6，故两段路程比为 5∶6，即甲、乙的速度比为 5∶6.

∵路程÷相遇时间＝速度和. ∴330÷2＝165（千米）.

故乙的速度为 $165\times\dfrac{6}{11}=90$（千米/小时）.

故选 D.

三、工程问题

1.（2022）一项工程施工 3 天后，因故障停工 2 天，之后工程队提高工作效率 20%，仍能按原计划完成. 则原计划工期为【　】

A. 9 天

B. 10 天

C. 12 天

D. 15 天

E. 18 天

【答案】D　　　　　　　　　　【考查】应用题——工程问题

【解析】方法一：根据题意可知提高效率前后工作总量不变，此时工作效率p与工作时间t成反比，即 $\dfrac{p_{原}}{p_{提}}=\dfrac{1}{(1+0.2)}=\dfrac{5}{6}$，则 $\dfrac{t_{原}}{t_{提}}=\dfrac{6}{5}$，$\Delta t=6-5=1$ 份，而提高工作效率前后时间相差 2 天，即 1 份对应 2 天. 原计划时间为 6×2＝12 天，由于效率提高前已经施工了 3 天，所以原计划工期为 12＋3＝15 天.

方法二：设原计划工作x天，每天的工作效率为 1，则剩余工作量为（$x-3$），剩余工作时间为（$x-5$），之后提高工作效率 20%，即每天的工作效率为 1.2，还能按照原计划完成工作，则有 1.2（$x-5$）＝1（$x-3$）$\Rightarrow x=15$.

故选 D.

2.（2021）清理一块场地，则甲、乙、丙三人能在 2 天内完成.【 】

（1）甲、乙两人需要 3 天完成.

（2）甲、丙两人需要 4 天完成.

【答案】E　　【考查】应用题——工程问题

【解析】条件（1），丙的工作效率未知.故条件（1）不充分.

条件（2），乙的工作效率未知.故条件（2）不充分.

条件（1）和条件（2）单独都不充分，考虑条件（1）（2）联合.

设工作总量为 1，甲、乙、丙的效率分别为$v_{甲}$、$v_{乙}$、$v_{丙}$.

条件（1）（2）联合得：$\begin{cases} v_{甲}+v_{乙}=\dfrac{1}{3} \\ v_{甲}+v_{丙}=\dfrac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow v_{甲}+(v_{甲}+v_{乙}+v_{丙})=\dfrac{7}{12}$.

因为甲的工作效率未知，所以条件（1）（2）联合起来也不充分.

综上，故选 E.

3.（2019）某车间计划 10 天完成一项任务，工作 3 天后因故停工 2 天.若仍要按原计划完成任务，则工作效率需要提高【 】

A. 20%

B. 30%

C. 40%

D. 50%

E. 60%

【答案】C　　【考查】应用题——工程问题

【解析】根据题意，设工作总量为 1，则计划每天的工作效率为$\dfrac{1}{10}$.

前面三天的工作总量为$\dfrac{3}{10}$，剩余的工作总量为$1-\dfrac{3}{10}=\dfrac{7}{10}$.

根据题意，剩余的工作时间为 $10-3-2=5$ 天，因此剩下 5 天的工作效率为$\dfrac{7}{10}\div 5=\dfrac{7}{50}$.

现在的工作效率比原来的工作效率高$\dfrac{7}{50}-\dfrac{1}{10}=\dfrac{2}{50}$.

因此，需在原工作效率上提高$\dfrac{2}{50}\div\dfrac{1}{10}=\dfrac{2}{5}\times 100\%=40\%$.

即提高 40%的工作效率才能按原计划完成.

故选 C.

四、浓度问题

1.（2021）现有甲、乙两种浓度的酒精，已知用 10 升甲酒精和 12 升乙酒精可以配成浓度为 70%的酒精，用 20 升甲酒精和 8 升乙酒精可以配成浓度为 80%的酒精，则甲酒精的浓度为【 】

A. 72%

B. 80%

C. 84%

D. 88%

E. 91%

【答案】E　　　　　　　　【考查】应用题——浓度问题

【解析】方法一：根据题意，设甲的浓度为x，乙的浓度为y.

$\begin{cases}10x+12y=0.7\times(10+22)\\20x+8y=0.8\times(20+8)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=91\%\\y=52.5\%\end{cases}$. 因此，甲的浓度为 91%，乙的浓度为 52.5%.

方法二：根据题意，设甲的浓度为x，乙的浓度为y. 使用十字交叉法得：

甲：x　　　　$0.7-y$　　　　　　甲：x　　　　$0.8-y$

　　　70%　　　　$=\dfrac{10}{12}$　　　　　　80%　　　　$=\dfrac{20}{8}$

乙：y　　　　$x-0.7$　　　　　　乙：y　　　　$x-0.8$

即：$\begin{cases}\dfrac{0.7-y}{x-0.7}=\dfrac{10}{12}\\\dfrac{0.8-y}{x-0.8}=\dfrac{20}{8}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=91\%\\y=52.5\%\end{cases}$. 故甲的浓度为 91%，乙的浓度为 52.5%.

故选 E.

2.（2016）将 2 升甲酒精和 1 升乙酒精混合得到丙酒精，则能确定甲、乙两种酒精的浓度.【 】

（1）1 升甲酒精和 5 升乙酒精混合后的浓度是丙酒精浓度的$\dfrac{1}{2}$倍.

（2）1 升甲酒精和 2 升乙酒精混合后的浓度是丙酒精浓度的$\dfrac{2}{3}$倍.

【答案】E　　　　　　　　【考查】应用题——浓度问题

【解析】根据题意，设甲、乙两种酒精的浓度分别为x，y，则混合后得到的丙酒精浓度为$\dfrac{2x+y}{3}$.

条件（1），根据条件得$\dfrac{x+5y}{6}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2x+y}{3}$，化简得：$x=4y$. 无法确定$x$，$y$的值，即不能确定甲、乙两种酒精的浓度. 故条件（1）不充分.

条件（2），根据条件得$\frac{x+2y}{3}=\frac{2}{3}\cdot\frac{2x+y}{3}$，化简得：$x=4y$. 无法确定$x$，$y$的值，即不能确定甲、乙两种酒精的浓度. 故条件（2）不充分.

条件（1）和条件（2）单独都不充分，考虑条件（1）（2）联合.

∵条件（1）和条件（2）等价. ∴无法确定x，y的值，即不能确定甲、乙两种酒精的浓度. 故条件（1）（2）联合起来也不充分.

综上，故选 E.

3.（2014）某容器中装满了浓度为 90%的酒精，倒出 1 升后用水将容器注满，搅拌均匀后又倒出 1 升，再用水将容器注满. 已知此时的酒精浓度为 40%，则该容器的容积是【 】

A. 2.5 升

B. 3 升

C. 3.5 升

D. 4 升

E. 4.5 升

【答案】B　　　　【考查】应用题——浓度问题

【解析】【注：反复稀释公式，初始浓度$\cdot(\frac{v-m}{v})^n=$现在浓度（n为次数）】

根据题意，设该容器的容积为V升.

则 $90\%\cdot(\frac{V-1}{V})^2=40\%$，解得$V=3$.

即该容器的容积是 3 升. 故选 B.

五、利润问题

1.（2022）某商品的成本利润为 12%，若其成本降低 20%而售价不变，则利润率为【 】

A. 32%

B. 35%

C. 40%

D. 45%

E. 48%

【答案】C　　　　【考查】应用题——利润问题

【解析】由于所求为百分数，故可用特值法.

根据题意可设成本为 100 元，成本利润为 12%，则售价为 100×（1＋12%）＝112 元.

成本降价 20%，则新的成本为 100×（1－20%）＝80 元，售价不变，则降低成本后的利润率为 $\frac{112-80}{80}$×100%＝40%. 故选 C.

六、增长率问题

1.（2023）油价上涨 5%后，加一箱油比原来多花 20 元，一个月后油价下降了 4%，则加一箱油需要花【 】

A. 384 元

B. 401 元

C. 402.8 元

D. 403.2 元

E. 404 元

【答案】D　　【考查】应用题——增长率问题

【解析】根据题意，设油的原价为 x. 可得：0.05x＝20. 解得：x＝400.

则涨价 5%再降价 4%后价格为：400(1＋5%)(1－4%)＝403.2（元）. 故选 D.

2.（2020）某产品去年涨价 10%，今年涨价 20%，则该产品这两年涨价【 】

A. 15%

B. 16%

C. 30%

D. 32%

E. 33%

【答案】D　　【考查】应用题——增长率问题

【解析】根据题意，设该产品前年的价格为单位“1”，则今年涨价后的价格为 1×（1＋10%）×（1＋20%）＝1.32，所以该产品这两年的增长率为（1.32－1）÷1×100%＝32%. 故选 D.

3.（2018）如果甲公司的年终奖总额增加 25%，乙公司的年终奖总额减少 10%，两者相等，则能确定两公司的员工人数之比.【 】

（1）甲公司的人均年终奖与乙公司的相同.

（2）两公司的员工人数之比与两公司的年终奖总额之比相等.

【答案】D　　【考查】应用题——增长率问题

【解析】根据题意，设甲公司的年终奖总额为x，乙公司的年终奖总额为y，甲公司的人数为a，乙公司的人数为b. 则有x（1＋25%）＝y（1－10%）$\Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{18}{25}$.

条件（1），甲公司的人均年终奖与乙公司的相同$\Rightarrow \frac{x}{a}=\frac{y}{b}\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{x}{y}=\frac{18}{25}$，即能确定两公司的员工人数之比. 故条件（1）充分.

条件（2），两公司的员工人数之比与两公司的年终奖总额之比相等$\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{x}{y}=\frac{18}{25}$，即能确定两公司的员工人数之比. 故条件（2）充分.

综上，故选D.

4.（2017）某品牌的电冰箱连续两次降价10%后的售价是降价前的【　】

A. 80%

B. 81%

C. 82%

D. 83%

E. 85%

【答案】B　　【考查】应用题——增长率问题

【解析】变化率＝$\frac{变化量}{变前量}$×100%.

根据题意，设降价前的售价为a，则两次降价后的售价为$a(1-10\%)^2$.

$\frac{a(1-10\%)^2}{a}\times 100\%=0.9^2\times 100\%=0.81\times 100\%=81\%$.

故选B.

七、集合问题（集合问题几何化）

1.（2022）将75名学生分成25组，每组3人，则能确定女生人数.【　】

（1）已知全是男生的组数和全是女生的组数.

（2）只有1名男生的组数和只有1名女生的组数相等.

【答案】C　　　　　　　　【考查】应用题——集合问题

【解析】根据题意可知所分的组共有 4 种情况.（$a+b+c+d=25$）

①男生：3. 女生：0.——组数为a.

②男生：2. 女生：1.——组数为b.

③男生：1. 女生：2.——组数为c.

④男生：0. 女生：3.——组数为d.

条件（1），已知a、d，只能确定a、d中的女生人数，但不知道b、c，即无法确定b、c中的女生人数.故最终无法确定女生人数.故条件（1）不充分.

条件（2），已知$b=c$，只能确定b、c中的女生人数，但不知道a、d，即无法确定a、d中的女生人数.故最终无法确定女生人数.故条件（2）不充分.

条件（1）和条件（2）单独都不充分，考虑条件（1）（2）联合.

条件（1）（2）联立后：已知a、d，且$b=c$，$a+b+c+d=25$，即此时女生人数能唯一确定.故条件（1）（2）联合起来充分.

综上，故选 C.

2.（2018）有 96 位顾客至少购买了甲、乙、丙三种商品中的一种，经调查：同时购买了甲、乙两种商品的有 8 位，同时购买了甲、丙两种商品的有 12 位，同时购买了乙、丙两种商品的有 6 位，同时购买了三种商品的有 2 位，则仅购买一种商品的顾客有【　】

A. 70 位

B. 72 位

C. 74 位

D. 76 位

E. 82 位

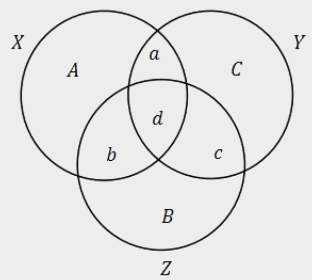
【答案】C　　　　　　　　【考查】应用题——集合问题

【解析】根据题意，设$X\cup Y\cup Z$表示至少购买了甲、乙、丙三种商品中的一种的人数.

A，B，C分别表示只购买甲、乙、丙三种商品中的一种的人数.

a，b，c表示购买两种商品的人数，d表示购买三种商品的人数.

综上可画图，如图所示.



由图可得：其中购买三种商品的人数重复计算三次需要减去两次.

则$X\cup Y\cup Z=A+B+C+(a+b+c)-2d\Rightarrow 96=(A+B+C)+(8+12+6)-2\times 2\Rightarrow A+B+C=74$.

故选 C.

3.（2017）老师问班上 50 名同学周末复习的情况，结果有 20 人复习过数学、30 人复习过语文、6 人复习过英语，且同时复习了数学和语文的有 10 人、语文和英语的有 2 人、英语和数学的有 3 人.若同时复习过这三门课的人数为 0，则没复习过这三门课程的学生人数为【 】

A. 7

B. 8

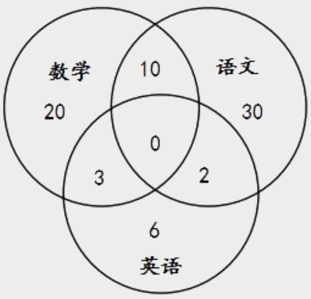
C. 9

D. 10

E. 11

【答案】C　　　　　　【考查】应用题——集合问题

【解析】根据题意可画图，如图所示.



容斥问题的公式：$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|B\cap C|-|A\cap C|+|A\cap B\cap C|$.

设语文、数学、英语分别对应A、B、C.

则$|A|+|B|+|C|=30+20+6=56$. $|A\cap B|=10$. $|B\cap C|=3$. $|A\cap C|=2$. $|A\cap B\cap C|=0$.

因此，复习过三门课的学生人数为$|A\cup B\cup C|=56-10-3-2+0=41$（人）.

即没有复习过这三门课的学生人数为 $50-41=9$（人）. 故选 C.

八、杠杆原理（交叉比例法、十字交叉法）

1.（2022）两个人数不相等的班级，数学测验的平均分不相等，则能确定人数多的班.【 】

（1）已知两个班的平均分.

（2）已知两个班的总平均分.

【答案】C　　　　　　　　【考查】十字交叉法

【解析】根据题意可设两个班级分别为 1 班、2 班.

∵1 班人数×1 班平均分＋2 班人数×2 班平均分＝（1 班人数＋2 班人数）×总平均分.

∴适合使用十字交叉法.

1 班：1 班平均分　　　　总平均分－2 班平均分　　1 班人数

总平均分

2 班：2 班平均分　　　　1 班平均分－总平均分　　2 班人数

故：$\frac{\text{总平均分}-2\text{班平均分}}{1\text{班平均分}-\text{总平均分}}=k=\frac{1\text{班人数}}{2\text{班人数}}$. 当$k$＞1 时，1 班人数多；当$k$＜1 时，2 班人数多.

条件（1），只知道两个班的平均分，缺失两个班的总平均分，无法求出k的大小，故不能确定人数多的班. 故条件（1）不充分.

条件（2），只知道两个班的总平均分，缺失两个班的平均分，无法求出k的大小，故不能确定人数多的班. 故条件（2）不充分.

条件（1）和条件（2）单独都不充分，考虑条件（1）（2）联合.

条件（1）（2）联立后可得两个班的平均分和两个班的总平均分，可以求出k的大小，故能确定人数多的班. 故条件（1）（2）联合起来充分.

综上，故选 C.

2.（2018）为了解某公司员工的年龄结构，按男、女人数的比例进行了随机抽样，结果如下：

男员工年龄（岁）	23	26	28	30	32	34	36	38	41
女员工年龄（岁）	23	25	27	27	29	31			

根据表中数据估计，该公司男员工的平均年龄与全体员工的平均年龄分别是____.（单位：岁）

【　】

A. 32，30

B. 32，29.5

C. 32，27

D. 30，27

E. 29.5，27

【答案】A　　　　　　　　【考查】十字交叉法

【解析】根据题意，男员工的平均年龄为 $\bar{x}_{男}=\frac{23+26+28+30+32+34+36+38+41}{9}=32$

（岁）.

女员工的平均年龄为 $\bar{x}_{女}=\dfrac{23+25+27+27+29+31}{6}=27$（岁）.

设全体员工的平均年龄为$\bar{x}$，由十字交叉法得：

$$\begin{array}{ccccc} 男：32 & & & & \bar{x}-27 \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & \bar{x} & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ 女：27 & & & & 32-\bar{x} \end{array}$$

则有：$\dfrac{\bar{x}-27}{32-\bar{x}}=\dfrac{9}{6}=\dfrac{3}{2}\Rightarrow 2\bar{x}-54=96-3\bar{x}\Rightarrow 5\bar{x}=150\Rightarrow \bar{x}=30.$

由此可得：男员工的平均年龄为 32 岁，全体员工的平均年龄为 30 岁.

故选 A.

九、不定方程问题

1.（2022）桌面上放有 8 只杯子，将其中的 3 只杯子翻转（杯口朝上与朝下互换）作为一次操作.8 只杯口朝上的杯子，经n次操作后，杯口全部朝下，则n的最小值是【　】

A. 3

B. 4

C. 5

D. 6

E. 8

【答案】B　　　　　　　　【考查】应用题——不定方程

【解析】方法一：将 8 只杯子分别编号为 1～8. 第一次翻转 1（下）、2（下）、3（下）；第二次翻转 3（上）、4（下）、5（下）；第三次翻转 5（上）、6（下）、7（下）；第四次翻转 3（下）、5（下）、8（下）. 则最少需要 4 次.

方法二：现已知 8 个杯子的杯口全部朝上，想将其全部翻转杯口朝下，需要将每个杯子翻转奇数次，而 8 个杯子最少翻转 8 次，且杯口朝下后的杯子在翻转过程中，想再次杯口朝下需要继续被翻转 2 次. 设有x个杯子被反复翻转，则杯子被翻转的总次数可表示为 $8+2x$ 次. 而每次翻转 3 个杯子，相当于每次翻转 3 次，设一共翻了n次，则n次翻转后总计翻转$3n$次，所以 $8+2x=3n$，当 $x=2$ 时，n取得最小整数 4.

故选 B.

2.（2022）某公司有甲、乙、丙三个部门，若从甲部门调 26 人到丙部门，则丙部门是甲部门人数的 6 倍，若从乙部门调 5 人到丙部门，则丙部门的人数与乙部门人数相等. 甲、乙两部门人数之差除以 5 的余数为【 】

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

E. 4

【答案】C　　　　　　【考查】应用题——不定方程

【解析】设甲、乙、丙三个部门分别有x、y、z人.

根据题意可得：$\begin{cases}6(x-26)=z+26\\y-5=z+5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}6x-156=z+26\\y-5=z+5\end{cases}\Rightarrow 6x-y=172$，即$y=6x-172$.

因此可得$x-y=x-(6x-172)\Rightarrow x-y=-5x+172$，$-5x$一定是 5 的倍数，除以 5 的余数为 0，172 除以 5 的余数为 2，则甲部门与乙部分人数之差除以 5 可得余数为 2.

故选 C.

3.（2021）某人购买了果汁、牛奶和咖啡三种物品，已知果汁每瓶 12 元，牛奶每盒 15 元，咖啡每盒 35 元，则能确定所买各种物品的数量.【 】

（1）总花费为 104 元.

（2）总花费为 215 元.

【答案】A　　　　　　【考查】应用题——不定方程

【解析】设购买了果汁、牛奶和咖啡三种物品的数量分别为x，y，z（x，y，z 都为正整数）.

条件（1），根据题意得：$12x+15y+35z=104$. 从系数最大的$35z$开始代数试算.

①当$z=1$时，解得：$x=2$，$y=3$. ②当$z=2$时，无整数解.

即购买果汁 2 瓶，牛奶 3 盒和咖啡 1 盒总花费 104 元. 故条件（1）充分.

条件（2），根据题意得：$12x+15y+35z=215$. 从系数最大的$35z$开始代数试算.

当$z=1$时，解得：$x=5$，$y=8$或$x=10$，$y=4$，有两组解，因此无法确定物品具体购买的数量. 故条件（2）不充分.

综上，故选 A.

十、分段计费问题

1.（2018）某单位采取分段收费的方式收取网络流量（单位：GB）费用：每月流量 20（含）以内免费，流量 20 到 30（含）的每 GB 收费 1 元，流量 30 到 40（含）的每 GB 收费 3 元，流量 40 以上的每 GB 收费 5 元，小王这个月用了 45GB 的流量，则他应该交费【 】

A. 45 元

B. 65 元

C. 75 元

D. 85 元

E. 135 元

【答案】B　　　　【考查】应用题——分段计费

【解析】根据题意，小王这个月用了 45GB 的流量，所以其应交的网络流量费用分为四部分：

第一部分：20GB 的部分免费.

第二部分：20GB 到 30GB（含）每 GB 收费 1 元⇒（30－20）×1＝10（元）.

第三部分：30GB 到 40GB（含）每 GB 收费 3 元⇒（40－30）×3＝30（元）.

第四部分：40GB 以上每 GB 收费 5 元⇒（45－40）×5＝25（元）.

综上，因此共需交费：0＋10＋30＋25＝65（元）.

故选 B.

十一、线性规划

1.（2012）某公司计划运送 180 台电视机和 110 台洗衣机下乡. 现有两种货车，甲种货车每辆最多可载 40 台电视机和 10 台洗衣机，乙种货车每辆最多可载 20 台电视机和 20 台洗衣机. 已知甲、乙两种货车的租金分别是每辆 400 元和 360 元，则最少的运费是【 】

A. 2 560 元

B. 2 600 元

C. 2 640 元

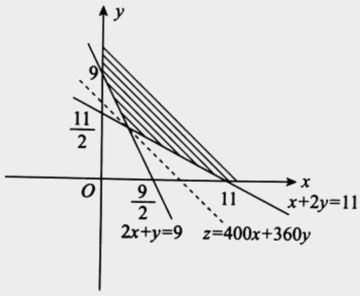
D. 2 680 元

E. 2 720 元

【答案】B　　　　【考查】应用题——线性规划

【解析】根据题意，设需甲货车和乙货车分别为x辆、y辆，运费为z元.

则有$\begin{cases}40x+20y\geq 180\\10x+20y\geq 110\end{cases}$，$z=400x+360y$. 可画图得：



化简得：$\begin{cases}2x+y\geq 9\\ x+2y\geq 11\end{cases}$. 结合图，最少运费在临界交点取得，交点为（$\frac{7}{3}$，$\frac{13}{3}$）.

∵x，y为整数. ∴$\begin{cases}x=2\\ y=5\end{cases}$或$\begin{cases}x=3\\ y=4\end{cases}$.

当$\begin{cases}x=2\\ y=5\end{cases}$时，$z=400x+360y=400\times 2+360\times 5=2\ 600$（元）.

当$\begin{cases}x=3\\ y=4\end{cases}$时，$z=400x+360y=400\times 3+360\times 4=2\ 640$（元）.

综上，2 600＜2 640，即最少的运费是 2 600 元. 故选 B.

十二、最值问题

1.（2023）8 个班参加植树活动，共植树 195 棵，则能确定各班植树棵数的最小值.【 】

（1）各班植树的棵数均不相同.

（2）各班植树棵数的最大值是 28.

【答案】C　　　　【考查】应用题——最值问题

【解析】根据题意，设 8 个班分别为x_1，x_2，x_3，x_4，x_5，x_6，x_7，x_8.

条件（1），各班植树的棵数均不相同⇒$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8=195$，有多种组合，无法判断各班植树的具体情况. 即不能确定各班植树棵数的最小值. 故条件（1）不充分.

条件（2），各班植树棵数的最大值是 28⇒$x_1\leqslant x_2\leqslant x_3\leqslant x_4\leqslant x_5\leqslant x_6\leqslant x_7\leqslant x_8=28$. 可知植树最大值，其他班植树情况未知. 即不能确定各班植树棵数的最小值. 故条件（2）不充分.

条件（1）和条件（2）单独都不充分，考虑条件（1）（2）联合.

条件（1）（2）联合有：各班植树的棵数均不相同，且最大值为 28. 若求植树棵数的最小值，则其他班植树尽可能多，所以其他 7 个班植树棵数分别为 28，27，26，25，24，23，22，因此植树最少的班植树棵数为 $195-28-27-26-25-24-23-22=20$. 则能确定各班

植树棵数的最小值.故条件（1）（2）联合起来充分.
综上，故选 C.

2.（2021）某便利店第一天售出 50 种商品，第二天售出 45 种商品，第三天售出 60 种商品，前两天售出的商品有 25 种相同，后两天售出的商品有 30 种相同.这三天售出的商品至少有种.【 】

A.70

B.75

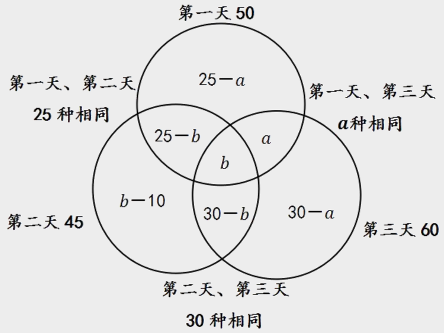
C.80

D.85

E.100

【答案】B 【考查】应用题——最值问题.

【解析】设三天都售出的商品有b种，仅在第一天和第三天共同售出的商品有a种，根据题意可画图，并将其它部分的数值补充，如图所示.



三天售出的商品种类数为：$25-a+b-10+30-a+25-b+30-b+a+b=100-a$.

所以，当a取最大值时，整体种类数最少.

又因为 $50-(25+a)\geqslant 0$ 和 $60-(30+a)\geqslant 0$，则$a\leqslant 25$.

故这三天售出的商品种类数至少是 $100-25=75$ 种.故选 B.

3.（2020）一项考试的总成绩由甲、乙、丙三部分组成：总成绩＝甲成绩×30%＋乙成绩×20%＋丙成绩×50%.考试通过的标准是：每部分≥50 分，且总成绩≥60 分.已知某人甲成绩 70 分，乙成绩 75 分，且通过了这项考试，则此人丙成绩的分数至少是【 】

A.48

B.50

C.55

D.60

E.62

【答案】B　　【考查】应用题——最值问题

【解析】设此人丙成绩的分数为x，则其通过该项考试必须满足：

$\begin{cases} x \ge 50 \\ 70 \times 30\% + 75 \times 20\% + 50\% x \ge 60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge 50 \\ x \ge 48 \end{cases} \Rightarrow x \geqslant 50$. 即此人丙成绩的分数至少是 50 分.

故选 B.

十三、其他问题

1.（2012）已知三种水果的平均价格为 10 元/千克，则每种水果的价格均不超过 18 元/千克.【　】

（1）三种水果中价格最低的为 6 元/千克.

（2）购买重量分别是 1 千克、1 千克和 2 千克的三种水果共用了 46 元.

【答案】D　　【考查】应用题——至多至少问题

【解析】根据题意，设三种水果的价格分别为x，y，z元.

条件（1），根据条件，设$z=6$，则有$\frac{x+y+6}{3}=10 \Rightarrow x+y=24$，$x=24-y \geqslant 6 \Rightarrow y \leqslant 18$，可得每种水果的价格均不超过 18 元/千克. 故条件（1）充分.

条件（2），根据条件，$\begin{cases} \frac{x+y+z}{3}=10 \\ x+y+2z=46 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=14 \\ z=16 \end{cases}$，可得每种水果的价格均不超过 18 元/千克. 故条件（2）充分.

综上，故选 D.

2.（2019）将一批树苗种在一个正方形花园的边上，四角都种. 如果每隔 3 米种一棵，那么剩余 10 棵树苗；如果每隔 2 米种一棵，那么恰好种满正方形的 3 条边，则这批树苗有【　】

A. 54 棵

B. 60 棵

C. 70 棵

D. 82 棵

E. 94 棵

【答案】D　　【考查】应用题——植树问题

【解析】[在封闭路线上植树，植树总棵数＝总长÷间距. 在非封闭路线上植树，若两端都

植树，植树总棵数＝总长÷间距＋1.]
因此可设正方形边长为x.
四个角都种树且每隔 3 米种一棵树，四边种满，则所种树总数为$\frac{4}{3}x$.
四个角都种树且每隔 2 米种一棵树，种满三边，则所种树总数为$\frac{3}{2}x+1$.
根据题意得：$\frac{4}{3}x+10=\frac{3}{2}x+1$.解得：$x=54$.这批树苗共有$\frac{3}{2}x+1=82$棵.
故选 D.

3.（2019）能确定小明的年龄.【 】
（1）小明的年龄是完全平方数.
（2）20 年后小明的年龄是完全平方数.

【答案】C　　　　【考查】应用题——年龄问题（完全平方）
【解析】条件（1），举例：1，4，9，16，…等，无法确定小明的年龄.故条件（1）不充分.
条件（2），举例：25，36，49，64，…等，无法确定小明的年龄.故条件（2）不充分.
条件（1）和条件（2）单独都不充分，考虑条件（1）（2）联合.
条件（1）（2）联合，设小明现在的年龄为x^2，20 年后的年龄为y^2.（x，$y\in Z_+$）
则$x^2+20=y^2$，整理得$y^2-x^2=20\Rightarrow(y-x)(y+x)=20=1\times20=2\times10=4\times5$.
$\because y-x$与$y+x$奇偶性相同.$\therefore y-x$与$y+x$只能同为偶数.
因此$\begin{cases}y-x=2\\y+x=10\end{cases}$，解得：$\begin{cases}x=4\\y=6\end{cases}$.即小明的年龄为$x^2=4^2=16$.故条件（1）（2）联合起来充分.
综上，故选 C.

4.（2021）三位年轻人的年龄成等差数列，且最大与最小的两人年龄之差的 10 倍是另一人的年龄，则三人中年龄最大的是____岁.【 】
A. 19
B. 20
C. 21
D. 22
E. 23

【答案】C 【考查】数列应用题

【解析】∵年龄成等差数列. ∴可以设三人的年龄按照从小到大依次为$a-d$，a，$a+d$.

又∵最大与最小的两人年龄之差的10倍是另一人的年龄. ∴$10[(a+d)-(a-d)]=a$.

化简得：$20d=a$. 则三位年轻人的年龄分别为$19d$，$20d$，$21d$.

∵年龄只能为正整数. ∴当$d=1$时，三人的年龄分别为19，20，21.

则三人中年龄最大的是21岁. 故选C.

真题演练

一、问题求解：第1～15小题，每小题3分，共45分。下列每题给出的A、B、C、D、E五个选项中，只有一项是符合试题要求的。

1.（1999）一项工程由甲、乙两队合作30天可完成. 甲队单独做24天后，乙队加入，两队合作10天后甲队调走，乙队继续做了17天才完成. 若这项工程由甲队单独做，则需要【 】

A. 60天

B. 70天

C. 80天

D. 90天

E. 100天

2.（2002）奖金发给甲、乙、丙、丁四人，其中$\frac{1}{5}$发给甲，$\frac{1}{3}$发给乙，发给丙的奖金数正好是甲、乙奖金之差的3倍，已知发给丁的奖金为200元，则这批奖金为【 】

A. 1 500元

B. 2 000元

C. 2 500元

D. 3 000元

3.（2006）甲、乙两项工程分别由一、二工程队负责完成. 晴天时，一队完成甲工程需要12天，二队完成乙工程需要15天；雨天时一队的效率是晴天时的60%，二队的效率是晴天时的80%，结果两队同时开工并同时完成各自的工程，那么在这段工期内，雨天的天数为【 】

A. 8

B. 10

C. 12

D. 15

E. 以上都不正确

4.（2007）甲、乙、丙三人进行百米赛跑（假设他们的速度不变），甲到达终点时，乙距终点还差 10 米，丙距终点还差 16 米. 那么乙到达终点时，丙距终点还有【 】

A. $\frac{22}{3}$

B. $\frac{20}{3}$

C. $\frac{15}{3}$

D. $\frac{10}{3}$

E. 以上均不对

5.（2007）某电镀厂两次改进操作方法，使用锌量比原来节省 15%，则平均每次节约【 】

A. 42.5%

B. 7.5%

C. $1-\sqrt{0.85}$

D. $1+\sqrt{0.85}$

E. 以上均不对

6.（2007）某自来水公司的水费计算方法如下：每户每月用水不超过 5 吨的，每吨收费 4 元；超过 5 吨的，每吨收取较高标准的费用. 已知 9 月份张家的用水量比李家的用水量多 50%，张家和李家的水费分别是 90 元和 55 元，则用水量超过 5 吨的收费标准是【 】

A. 5 元/吨

B. 5.5 元/吨

C. 6 元/吨

D. 6.5 元/吨

E. 7 元/吨

7.（2007）王女士以一笔资金分别投入股市和基金，但因故需抽回一部分资金，若从股市中抽回 10%，从基金中抽回 5%，则其总投资额减少 8%；若从股市和基金的投资额中各抽回 15%和 10%，则其总投资额减少 130 万元，其总投资额为【 】

A. 1 000 万元

B. 1 500 万元

C. 2 000 万元

D.2 500 万元

E.3 000 万元

8.（2010）甲商店销售某种商品，该商品的进价每件 90 元，若每件定为 100 元，则一天内能售出 500 件，在此基础上，定价每增 1 元，一天便少售出 10 件.甲商店欲获得最大利润，则该商品的定价应为【 】

A.115 元

B.120 元

C.125 元

D.130 元

E.135 元

9.（2010）电影开演时观众中女士与男士人数之比为 5∶4，开演后无观众入场，放映一个小时后，女士中的 20%、男士中的 15%离场，则此时在场的女士与男士人数之比为【 】

A.4∶5

B.1∶1

C.5∶4

D.20∶17

E.85∶64

10.（2010）某商品的成本为 240 元，若按该商品标价的 8 折出售，利润率是 15%，则该商品的标价为【 】

A.276 元

B.331 元

C.345 元

D.360 元

E.400 元

11.（2011）一列火车匀速行驶时，通过一座长为 250 米的桥梁需要 10 秒，通过一座长为 450 米的桥梁需要 15 秒，该火车通过长为 1 050 米的桥梁需要【 】

A.22 秒

B.25 秒

C.28 秒

D.30 秒

E.35 秒

12. （2011）某种新鲜水果的含水量为 98%，一天后的含水量降为 97.5%.某商店以每斤 1 元的价格购进了 1 000 斤新鲜水果，预计当天能售出 60%，两天内售完.要使利润维持在 20%，则每斤水果的平均售价应定为【 】

A.1.2 元

B.1.25 元

C.1.3 元

D.1.35 元

E.1.4 元

13. （2011）某年级 60 名学生中，有 30 人参加合唱团、45 人参加运动队，其中参加合唱团而未参加运动队的有 8 人，则参加运动队而未参加合唱团的有【 】

A.15 人

B.22 人

C.23 人

D.30 人

E.37 人

14. （2011）在年底的献爱心活动中，某单位共有 100 人参加捐款，经统计，捐款总额是 19 000 元，个人捐款数额有 100 元、500 元和 2 000 元三种，该单位捐款 500 元的人数为【 】

A.13

B.18

C.25

D.30

E.28

15. （2011）某地区平均每天产生生活垃圾 700 吨，由甲、乙两个处理厂处理.甲厂每小时可处理垃圾 55 吨，所需费用为 550 元；乙厂每小时可处理垃圾 45 吨，所需费用为 495 元.如果该地区每天的垃圾处理费不能超过 7 370 元，那么甲厂每天处理垃圾的时间至少需要【 】

A.6 小时

B.7 小时

C.8 小时

D.9 小时

E.10 小时

二、条件充分性判断：第 16～25 小题，每小题 3 分，共 30 分。要求判断每题给出的条件（1）和条件（2）能否充分支持题干所陈述的结论。A、B、C、D、E 五个选项为判断结果，请选择一项符合试题要求的判断。

A.条件（1）充分，但条件（2）不充分。

B.条件（2）充分，但条件（1）不充分。

C.条件（1）和（2）单独都不充分，但条件（1）和条件（2）联合起来充分。

D.条件（1）充分，条件（2）也充分。

E.条件（1）和（2）单独都不充分，条件（1）和条件（2）联合起来也不充分。

16.（2003）某公司得到一笔贷款共 68 万元用于下属三个工厂的设备改造，结果甲、乙、丙三个工厂按比例分别得到 36 万元、24 万元和 8 万元.【　】

（1）甲、乙、丙三个工厂按$\frac{1}{2}:\frac{1}{3}:\frac{1}{9}$的比例分配贷款.

（2）甲、乙、丙三个工厂按 9∶6∶2 的比例分配贷款.

17.（2004）A 公司 2003 年六月份的产值是一月份产值的a倍.【　】

（1）在 2003 年上半年，A 公司月产值的平均增长率为$\sqrt[5]{a}$.

（2）在 2003 年上半年，A 公司月产值的平均增长率为$\sqrt[5]{a}-1$.

18.（2007）一满杯酒的容积为$\frac{1}{8}$升.【　】

（1）瓶中有$\frac{3}{4}$升酒，再倒入 1 满杯酒可使瓶中的酒增至$\frac{7}{8}$升.

（2）瓶中有$\frac{3}{4}$升酒，再从瓶中倒出 2 满杯酒可使瓶中的酒减至$\frac{1}{2}$升.

19.（2007）管径相同的三条不同管道甲、乙、丙可同时向某基地容积为 1 000 立方米的油罐供油，则丙管道的供油速度比甲管道供油速度大.【　】

（1）甲、乙同时供油 10 天可注满油罐.

（2）乙、丙同时供油 5 天可注满油罐.

20.（2008）本学期某大学的a个学生或者付x元的全额学费或者付半额学费，则付全额学费的学生所付的学费占a个学生所付学费总额的比率是$\frac{1}{3}$.【　】

（1）在这a个学生中 20%的人付全额学费.

（2）这a个学生本学期共付 9 120 元学费.

21.（2008）申请驾照时必须参加理论考试和路考且两种考试均通过，若在同一批学员中有70%的人通过了理论考试，80%的人通过了路考，则最后领到驾驶执照的人有60%.【 】
（1）10%的人两种考试都没通过.
（2）20%的人仅通过了路考.

22.（2008）一件含有25张一类贺卡和30张二类贺卡的邮包总重量（不计包装重量）为700克.【 】
（1）一类贺卡重量是二类贺卡重量的3倍.
（2）一张一类贺卡与两张二类贺卡的总重量是$\frac{100}{3}$克.

23.（2010）售出一件甲商品比售出一件乙商品利润要高.【 】
（1）售出5件甲商品，4件乙商品共获利50元.
（2）售出4件甲商品，5件乙商品共获利47元.

24.（2010）甲企业今年人均成本是去年的60%.【 】
（1）甲企业今年总成本比去年减少25%，员工人数增加25%.
（2）甲企业今年总成本比去年减少28%，员工人数增加20%.

25.（2011）甲、乙两人赛跑，则甲的速度是6米/秒.【 】
（1）乙比甲先跑12米，甲起跑后6秒追上乙.
（2）乙比甲先跑2.5秒，甲起跑后5秒追上乙.

参考答案

答案速查									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	D	D	B	C	E	A	B	D	C
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
D	C	C	A	A	D	E	D	C	A
21	22	23	24	25					
D	C	C	D	C					

1.【答案】B　　　　　　　　【考查】工程问题

【解析】设甲队效率为x，乙队效率为y.

根据题意可得：$\begin{cases}30(x+y)=1\\24x+10(x+y)+17y=1\end{cases}\Rightarrow$解得：$\begin{cases}x=\dfrac{1}{70}\\y=\dfrac{2}{105}\end{cases}$. 则甲队单独完成需要 70 天. 故选 B.

2.【答案】D　　【考查】比例问题

【解析】设奖金总额为x元.

根据题意得：发给丙的奖金是$(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5})\times3=\dfrac{2}{5}$.

则可列方程得：$x(1-\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{3}-\dfrac{2}{5})=200\Rightarrow$解得：$x=3\ 000$. 故选 D.

3.【答案】D　　【考查】工程问题

【解析】设工期内晴天天数为x天，雨天天数为y天.

根据题意得：$\begin{cases}\dfrac{1}{12}x+\dfrac{1}{12}\times60\%y=1\\\dfrac{1}{15}x+\dfrac{1}{15}\times80\%y=1\end{cases}\Rightarrow$解得：$\begin{cases}x=3\\y=15\end{cases}$. 故选 D.

4.【答案】B　　【考查】路程问题（行程问题）

【解析】甲到达终点时，三者所用时间相同，三者所跑路程比就是速度比，即$v_{甲}:v_{乙}:v_{丙}=100:(100-10):(100-16)=100:90:84$.

乙到达终点时，乙、丙二人所跑路程比就是二者的速度比$v_{乙}:v_{丙}=90:84=100:S_{丙}$. 解得：$\dfrac{280}{3}$. 因此丙距终点还有 $100-\dfrac{280}{3}=\dfrac{20}{3}$米. 故选 B.

5.【答案】C　　【考查】增长率问题

【解析】设平均每次节约x.

根据题意得：$1\times(1-x)^2=1-15\%$. 解得：$x=1-\sqrt{0.85}$. 故选 C.

6.【答案】E　　【考查】分段计费

【解析】根据题意得：两家水费均大于 $4\times5=20$ 元.

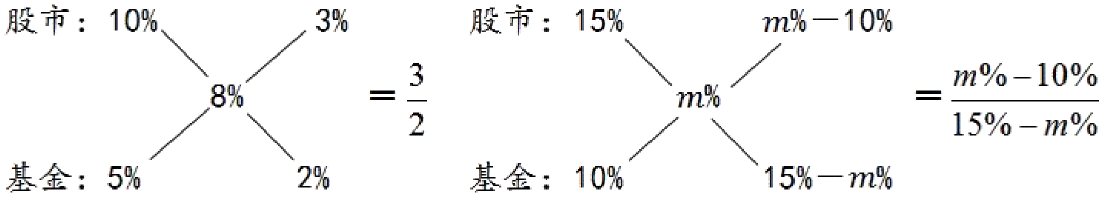
设李家用水量为x吨，张家用水量为 $1.5x$吨，超过 5 吨的收费标准为y元/吨.

则有：$\begin{cases}20+(x-5)y=55 & ①\\20+(1.5x-5)y=90 & ②\end{cases}$，①×1.5−②得：$\begin{cases}x=10\\y=7\end{cases}$. 即用水量超过 5 吨的收费标准是 7

元/吨. 故选 E.

7.【答案】A　　　　　　　　　　【考查】杠杆原理（交叉比例法、十字交叉法）

【解析】设从股市和基金的投资额中各抽回 15%和 10%，则其总投资额减少m%.



由于投资数量比不变，因此$\frac{m\%-10\%}{15\%-m\%}=\frac{3}{2}\Rightarrow m\%$＝13%，因此总投资额为$\frac{130}{13\%}$＝1 000（万元）. 故选 A.

8.【答案】B　　　　　　　　　　【考查】最值问题

【解析】设定价比原定价高了x元，利润为y元.

根据题意得：y＝(100＋x－90)(500－10x)＝(10＋x)(500－10x)＝5 000－100x＋500x－10x^2＝－10(x^2－40x－500). 则当$x=-\frac{-40}{2}$＝20 时，利润最高，即该商品的定价为 100＋20＝120 元. 故选 B.

9.【答案】D　　　　　　　　　　【考查】比例问题

【解析】根据题意得：设电影开演时女士人数为 5k，男士人数为 4k.

放映一个小时后，还剩下的女士人数为 5k(1－20%)＝4k，男士人数为 4k(1－15%)＝3.4k.

则此时在场的女士与男士人数之比为 4k︰3.4k＝20︰17. 故选 D.

10.【答案】C　　　　　　　　　　【考查】利润问题

【解析】根据题意得：该商品的利润＝240×15%＝36 元. 实际售价＝利润＋成本＝240＋36＝276 元. ∵实际售价是标价的 8 折. ∴标价＝276÷80%＝345 元. 故选 C.

11.【答案】D　　　　　　　　　　【考查】路程问题（行程问题）

【解析】设火车长度为x米，速度为v米/秒.

通过一座长为 250 米的桥梁需要 10 秒⇒250＋x＝10v　①.

通过一座长为 450 米的桥梁需要 15 秒⇒450＋x＝15v　②.

联立①②，可得：x＝150，v＝40.

因此，该火车通过长为 1 050 米的桥梁需要的时间是(1 050＋150)÷40＝30 秒. 故选 D.

12.【答案】C　　　　　　　　【考查】浓度问题

【解析】方法一：由水果含水量为98%可得，水∶果＝98∶2＝49∶1. 一天之后水果含水量97.5%，这个过程只有水分蒸发减少了，果肉成分不变，水∶果＝97.5∶2.5＝39∶1，前后果肉均为1份，不难看出，第一天共49＋1＝50(份)水果，到了第二天重量变为39＋1＝40(份)，重量会变成前一天的$\frac{4}{5}$. 根据题意得：共1 000斤水果，第一天卖出600斤后，剩余400斤. 到了第二天剩余的400斤水果重量会缩水$\frac{4}{5}$，减少为$400\times\frac{4}{5}=320$(斤)，故该商店实际只卖出600＋320＝920斤水果.

设平均每斤水果的定价为x元.

则根据利润率公式可得：$920x=1\ 000\times1\times(1+20\%)$. 解得：$x\approx1.3$.

方法二：[复习：果核重量＝苹果重量×含核率＝苹果重量×(1－含水率)]

设平均每斤水果的定价为x元.

第一天，销售的苹果重量为60%×1 000＝600斤.

第二天，剩下的1 000－600＝400斤苹果，含水量从98%降为97.5%，含核率从2%变为2.5%.

∵果核重量不变，苹果重量和含核率成反比.

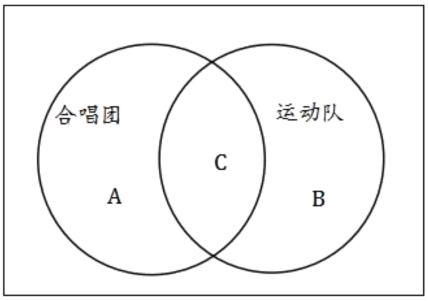
∴含水量降低后的苹果重量＝400×2÷2.5＝320斤.

进价为1×1 000＝1 000元，两天合计的销售利润维持在20%，则销售额至少1 000×1×(1＋20%)＝1 200元. 即$600x+320x=1\ 200$. 解得：$x\approx1.3$.

故选C.

13.【答案】C　　　　　　　　【考查】集合问题（集合问题几何化）

【解析】根据题意可画图，A表示仅参加合唱团的人，B表示仅参加运动队的人，C表示同时参加合唱团和运动队的人. 如图所示.



结合题意和图可得：参加合唱团的人：A＋C＝30；参加运动队的人：B＋C＝45.

∵A＝8. ∴C＝22. 则B＝45－C＝45－22＝23（人）. 即参加运动队而未参加合唱团的有23人.

故选C.

14.【答案】A　　　　　　　　【考查】不定方程问题

【解析】设捐款100元、500元、2 000元的人数分别为x，y，z.

根据题意得：$\begin{cases} x+y+z=100 \\ 100x+500y+2\,000z=19\,000 \end{cases}$ ⇒$4y+19z=90$.

由于$4y$和90都是偶数，则z为偶数，可以从小到大验证整数解，当$z=2$时，解得$y=13$. 故选A.

15.【答案】A　　　　　　　　【考查】线性规划

【解析】设甲厂每天处理垃圾的时间为x小时，乙厂每天处理垃圾的时间为y小时.

根据题意得：$\begin{cases} 55x+45y=700 & ① \\ 550x+495y\le 7\,370 & ② \end{cases}$ ⇒②式化简得：$50x+45y\leqslant 670$　③⇒由①式得：$45y=700-55x$，代入③得：$50x+700-55x\leqslant 670$. 解得：$x\geqslant 6$. 即甲厂每天处理垃圾的时间至少需要6小时. 故选A.

16.【答案】D　　　　　　　　【考查】比例问题

【解析】条件（1），甲、乙、丙三个工厂按$\frac{1}{2}:\frac{1}{3}:\frac{1}{9}$的比例分配贷款⇒甲：乙：丙=9：6：2. 则可设贷款总额为17份，即甲工厂得到9份36万元（$68\times\frac{9}{17}=36$）；乙工厂得到6份24万元（$68\times\frac{6}{17}=24$）；丙工厂得到2份8万元（$68\times\frac{2}{17}=8$）. 与题干结论一致. 故条件（1）充分.

条件（2），甲、乙、丙三个工厂按9：6：2的比例分配贷款⇒与条件（1）等价. 故条件（2）充分.

综上，故选D.

17.【答案】E　　　　　　　　【考查】增长率问题

【解析】方法一：条件（1），在2003年上半年，A公司月产值的平均增长率为$\sqrt[5]{a}$⇒六月产值为$(1+\sqrt[5]{a})^5\neq a$，与题干结论不一致. 故条件（1）不充分.

条件（2），在2003年上半年，A公司月产值的平均增长率为$\sqrt[6]{a}-1$⇒六月产值为$(1+\sqrt[6]{a})^5\neq a$，与题干结论不一致. 故条件（2）不充分.

综上，故选E.

方法二：根据题意得：六月份到一月份经过了5次增长，设平均增长率为x. 则$(1+x)^5=a$. 解得：$x=\sqrt[5]{a}-1$.

条件（1），在 2003 年上半年，A 公司月产值的平均增长率为 $\sqrt[5]{a} \neq \sqrt[5]{a}-1$，与上述结论不一致.故条件（1）不充分.

条件（2），在 2003 年上半年，A 公司月产值的平均增长率为 $\sqrt[6]{a}-1 \neq \sqrt[5]{a}-1$，与上述结论不一致.故条件（2）不充分.

综上，故选 E.

18.【答案】D　　　　　　　　　　【考查】其他问题

【解析】设一满杯酒的容积为x升.

条件（1），瓶中有$\frac{3}{4}$升酒，再倒入 1 满杯酒可使瓶中的酒增至$\frac{7}{8}$升$\Rightarrow \frac{3}{4}+x=\frac{7}{8} \Rightarrow x=\frac{1}{8}$，与题干结论一致.故条件（1）充分.

条件（2），瓶中有$\frac{3}{4}$升酒，再从瓶中倒出 2 满杯酒可使瓶中的酒减至$\frac{1}{2}$升$\Rightarrow \frac{3}{4}-2x=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{1}{8}$，与题干结论一致.故条件（2）充分.

综上，故选 D.

19.【答案】C　　　　　　　　　　【考查】工程问题

【解析】根据题意：设甲、乙、丙管道的供油速度分别为x立方米/天、y立方米/天、z立方米/天.

条件（1），甲、乙同时供油 10 天可注满油罐$\Rightarrow 10(x+y)=1\ 000 \Rightarrow x+y=100$.两个未知数一个方程无法确定对应未知数的值且不知道丙管道的供油速度.则无法比较甲管道和丙管道的供油速度.故条件（1）不充分.

条件（2），乙、丙同时供油 5 天可注满油罐$\Rightarrow 5(y+z)=1\ 000 \Rightarrow y+z=200$.两个未知数一个方程无法确定对应未知数的值且不知道甲管道的供油速度.则无法比较甲管道和丙管道的供油速度.故条件（2）不充分.

条件（1）和条件（2）单独都不充分，考虑条件（1）（2）联合.

条件（1）（2）联合得：$\begin{cases} x+y=100 & ① \\ y+z=200 & ② \end{cases} \Rightarrow$②−①得：$z-x=100>0 \Rightarrow z>x$.即丙管道的供油速度比甲管道供油速度大.故条件（1）（2）联合起来充分.

综上，故选 C.

20.【答案】A　　　　　　　　　　【考查】比例问题

【解析】条件（1），在这a个学生中 20%的人付全额学费$\Rightarrow 20\%a$学生每人都付全额学费x元，

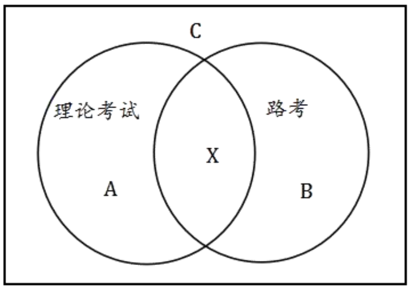
共 20%ax元；另外 80%a学生每人付学费$\frac{x}{2}$元，共 40%ax元. 则所有学生共付学费 60%ax元. 因此，付全额学费的学生所付的学费占a个学生所付学费总额的比率是$\frac{20\%ax}{60\%ax}=\frac{1}{3}$，与题干结论一致. 故条件（1）充分.

条件（2），这a个学生本学期共付 9 120 元学费. 设付全额学费学生的比例为n，则付半额学费学生的比例为 1－n. 可得：$nax+(1-n)a\cdot 0.5x=9\ 120\Rightarrow 0.5axn+0.5ax=9\ 120$. 无法从此方程得到$n$的值，即无法确定付全额学费的学生所付的学费占$a$个学生所付学费总额的比率. 故条件（2）不充分.

综上，故选 A.

21.【答案】D　　　　　　　　【考查】集合问题（集合问题几何化）

【解析】根据题意可画图，A 表示仅通过理论考试的人，B 表示仅通过路考的人，X 表示同时理论考试和路考都通过，即可以拿到驾照的人. 如图所示.



由图可得：通过理论考试的人：A＋X＝70%　①；通过路考的人：B＋X＝80%　②.

条件（1），10%的人两种考试都没通过⇒即 C＝10%. ∴A＋X＋B＝90%　③. 结合①②③，解得：X＝60%，

与题干结论一致. 故条件（1）充分.

条件（2），20%的人仅通过了路考⇒即 B＝20%. ∴将 B＝20%代入②得：X＝60%，与题干结论一致. 故条件（2）充分.

综上，故选 D.

22.【答案】C　　　　　　　　【考查】其他问题

【解析】设一张一类贺卡的重量为x克，一张二类贺卡的重量为y克.

条件（1），一类贺卡重量是二类贺卡重量的 3 倍⇒ $x=3y$. 两个未知数一个方程无法确定对应未知数的值. 即无法确定邮包的总重量. 故条件（1）不充分.

条件（2），一张一类贺卡与两张二类贺卡的总重量是$\frac{100}{3}$克⇒ $x+2y=\frac{100}{3}$. 两个未知数一个方程无法确定对应未知数的值. 即无法确定邮包的总重量. 故条件（2）不充分.

条件（1）和条件（2）单独都不充分，考虑条件（1）（2）联合.

条件（1）（2）联合得：$\begin{cases} x=3y & ① \\ x+2y=\dfrac{100}{3} & ② \end{cases}$ ⇒解得：$\begin{cases} x=20 \\ y=\dfrac{20}{3} \end{cases}$ ⇒$25x+30y=25\times20+30\times\dfrac{20}{3}=$ 700(克)，与题干结论一致. 故条件（1）（2）联合起来充分.

综上，故选 C.

23.【答案】C　　　　　　　　　【考查】利润问题

【解析】设一件甲商品利润为x元，一件乙商品利润为y元.

条件（1），售出 5 件甲商品，4 件乙商品共获利 50 元⇒$5x+4y=50$. 两个未知数一个方程无法确定对应未知数的值. 即无法比较售出一件甲商品和售出一件乙商品的利润大小. 故条件(1)不充分.

条件（2），售出 4 件甲商品，5 件乙商品共获利 47 元⇒$4x+5y=47$. 两个未知数一个方程无法确定对应未知数的值. 即无法比较售出一件甲商品和售出一件乙商品的利润大小. 故条件(2)不充分.

条件（1）和条件（2）单独都不充分，考虑条件（1）（2）联合.

条件（1）（2）联合得：$\begin{cases} 5x+4y=50 & ① \\ 4x+5y=47 & ② \end{cases}$ ⇒①－②得：$x-y=3>0$⇒ $x>y$. 即售出一件甲商品比售出一件乙商品利润要高. 故条件（1）（2）联合起来充分.

综上，故选 C.

24.【答案】D　　　　　　　　　【考查】增长率问题

【解析】[复习：人均成本$=\dfrac{\text{总成本}}{\text{总人数}}$]

条件（1），甲企业今年总成本比去年减少 25%，员工人数增加 25%⇒今年总成本＝(1－25%)×去年总成本；今年人数＝(1＋25%)×去年人数⇒今年人均成本＝$\dfrac{\text{今年总成本}}{\text{今年人数}}=\dfrac{0.75\times\text{去年总成本}}{1.25\times\text{去年人数}}$＝60%×去年人均成本，即甲企业今年人均成本是去年人均成本的 60%. 故条件（1）充分.

条件（2），甲企业今年总成本比去年减少 28%，员工人数增加 20%⇒今年总成本＝(1－28%)×去年总成本；今年人数＝(1＋20%)×去年人数⇒今年人均成本＝$\dfrac{\text{今年总成本}}{\text{今年人数}}=$

$\frac{0.72\times\text{去年总成本}}{1.2\times\text{去年人数}}$=60%×去年人均成本，即甲企业今年人均成本是去年人均成本的60%.故条件（2）充分.

综上，故选D.

25.【答案】C　　【考查】路程问题（行程问题）——追及问题

【解析】设甲的速度为$v_{甲}$米/秒，乙的速度为$v_{乙}$米/秒.

条件（1），乙比甲先跑12米，甲起跑后6秒追上乙⇒$6(v_{甲}-v_{乙})=12$.两个未知数一个方程无法确定对应未知数的值，即无法求出甲的速度$v_{甲}$.故条件（1）不充分.

条件（2），乙比甲先跑2.5秒，甲起跑后5秒追上乙⇒可得：追及路程差为$2.5v_{乙}$ ⇒$5(v_{甲}-v_{乙})=2.5v_{乙}$.两个未知数一个方程无法确定对应未知数的值，即无法求出甲的速度$v_{甲}$.故条件（2）不充分.

条件（1）和条件（2）单独都不充分，考虑条件（1）（2）联合.

条件（1）（2）联合得：$\begin{cases}6(v_{甲}-v_{乙})=12 & ① \\ 5(v_{甲}-v_{乙})=2.5v_{乙} & ②\end{cases}$⇒解得：$\begin{cases}v_{甲}=6 \\ v_{乙}=4\end{cases}$，即甲的速度是6米/秒.故条件（1）（2）联合起来充分.

综上，故选C.