第三节　等比数列

第三章　第三节等比数列

师大课堂 SHI DA KE TANG

一、定义

二、通项公式

三、数列的前n项和

四、重要性质

一、定义

师大课堂 SHI DA KE TANG

如果在数列$\{a_n\}$中，$\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$（常数）$(n\in N_+)$，则称数列$\{a_n\}$为等比数列，q为公比.

等比数列中任何一个元素都不能为0，公比也不能为0

二.通项公式

$$a_n = a_1 q^{n-1} = a_k q^{n-k} = \frac{a_1}{q} q^n$$

二、通项公式

【例1】若$2, 3^x - 1, 3^x + 3$成等比数列,则$x =$ (　　).

A.$log_3 5$　　B.$log_3 6$　　C.$log_3 7$　　D.3　　E.4

二、通项公式

【例1】若$2, 3^x-1, 3^x+3$成等比数列,则$x=$(　　).

A.$log_3 5$　　B.$log_3 6$　　C.$log_3 7$　　D.3　　E.4

【解析】2，3^x-1，3^x+3 成等比数列，则$(3^x-1)^2=2(3^x+3)$，
即$(3^x-1)^2-2\times(3^x-1)-8=(3^x-1-4)(3^x-1+2)=0$，
可得 $3^x=5$ 或 $3^x=-1$（舍去），即 $x=\log_3 5$．选 A.

三、数列的前n项和

$$S_n=\begin{cases} na_1 & q=1 \\ \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\dfrac{a_1-a_nq}{1-q}=\dfrac{a_1-a_{n+1}}{1-q} & q\neq 1 \end{cases}$$

三、数列的前n项和

【例3】等比数列$\{a_n\}$中，若$a_1a_3=36$，$a_2+a_4=60$，$S_n>400$，n的最小值为（　）.

A.4　　B.5　　C.6　　D.7　　E.8

三、数列的前n项和

【例3】等比数列$\{a_n\}$中，若$a_1a_3=36$，$a_2+a_4=60$，$S_n>400$，n的最小值为（　　）.

A.4　　B.5　　C.6　　D.7　　E.8

【解析】

因为 $a_1a_3=a_1^2q^2=36$，所以 $a_1q=\pm6$，

又因为 $a_2+a_4=a_1q(1+q^2)=60$，且 $1+q^2>0$，所以 $a_1q>0$，

故 $a_1q=6$，$1+q^2=10$，解得 $\begin{cases}a_1=2\\q=3\end{cases}$.

当 $a_1=2$，$q=3$ 时，$S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\dfrac{2(3^n-1)}{2}>400\Rightarrow3^n>401$，所以 $n\geq6$.

故 n 的最小值为 6，选 C.（$3^5=243$，$3^6=729$）

三、数列的前n项和

【例4】等比数列$\{a_n\}$的前5项和等于2，紧接在后面的10项和等于12，再紧接其后的15项和为S，则$S =$（　）.

A.112　　B.112或-378　　C.-112或378　　D.-378　　E.-112

三、数列的前n项和

【例4】等比数列$\{a_n\}$的前5项和等于2，紧接在后面的10项和等于12，再紧接其后的15项和为S，则$S=$（　）.

A.112　　B.112或-378　　C.-112或378　　D.-378　　E.-112

【解析】

$$\begin{cases}S_5=2\\S_{15}-S_5=12\\S_{30}-S_{15}=S\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}S_5=2\\S_{15}=14\\S_{30}=14+S\end{cases}$$

$\frac{S_{15}}{S_5}=\frac{1-q^{15}}{1-q^5}=q^{10}+q^5+1=7\Rightarrow q^5=2$ 或 -3，$\frac{S_{30}}{S_{15}}=\frac{1-q^{30}}{1-q^{15}}=1+q^{15}=9$ 或 -26，即

$S_{30}=126$ 或 -364，又 $S_{30}=S+14\Rightarrow S=S_{30}-14\Rightarrow S=112$ 或 -378，选 B.

四.重要性质

（1）若 $m,n,p,q\in Z_+$ ，$m+n=p+q$, 则 $a_m\cdot a_n=a_p\cdot a_q$

四.重要性质

【例5】等比数列$\{a_n\}$中，若$a_2a_9=-512$，$a_3+a_8=124$，且公比$q\in Z$，则$a_{10}=$（　）.

A.124　　B.64　　C.512　　D.-124　　E.-512

四、重要性质

【例5】等比数列$\{a_n\}$中，若$a_2a_9=-512$，$a_3+a_8=124$，且公比$q\in Z$，则$a_{10}=$（　）.

A.124　　B.64　　C.512　　D.-124　　E.-512

【解析】

$a_3a_8=a_2a_9=-512$，又 $a_3+a_8=124$，则将 a_3，a_8 看成方程 $x^2-124x-512=0$ 的两个根，得 $a_3=-4$，$a_8=128$，则 $q=-2$，$a_{10}=512$. 选 C.

四.重要性质

【例6】等比数列$\{a_n\}$中，若a_6，a_{10}是方程$2x^2-11x+6=0$的两根，则$a_8=$(　　).

A.$\sqrt{3}$　　B.3　　C.$\pm\sqrt{3}$　　D.±3　　E.-3

四.重要性质

【例6】等比数列$\{a_n\}$中，若a_6，a_{10}是方程$2x^2-11x+6=0$的两根，则$a_8=$（　）.

A.$\sqrt{3}$　　B.3　　C.$\pm\sqrt{3}$　　D.± 3　　E.-3

【解析】

$a_8^2=a_6a_{10}=3 \Rightarrow a_8=\pm\sqrt{3}$，又 $a_6+a_{10}=\dfrac{11}{2}$，则 $a_6>0$，$a_{10}>0$，故 $a_8=\sqrt{3}$. 选 A.

四.重要性质

（2）若S_n为等比数列的前n项和，则S_n，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$，…仍为等比数列，其公比q^n

四.重要性质

【例7】等比数列$\{a_n\}$中，已知$S_4 = 36, S_8 = 54,$，则$S_{12} = $(　　).

A.63　　B.68　　C.76　　D.89　　E.92

四、重要性质

【例7】等比数列$\{a_n\}$中，已知$S_4=36, S_8=54,$，则$S_{12}=$（　）.

A.63　　B.68　　C.76　　D.89　　E.92

【解析】

对于等比数列，S_n，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$仍为等比数列，即36，18，$S_{12}-54$为等比数列，得$S_{12}-54=9$，$S_{12}=63$. 选A.

四.重要性质

（3）若$|q| < 1$，$q \neq 0$，则等比数列所有项和$S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}$.