师大课堂
SHI DA KE TANG

基础必修—管综（数学）

函 数 方 程

主讲老师：媛媛老师

邮箱：family7662@dingtalk.com

目录

Contents

一、一元二次函数

一元二次函数及其图像

函数

（1）定义

设A，B是非空的实数集，如果对于集合A中的任意一个数x，按照某种确定的对应关系f，在集合B中都有唯一确定的数y和它对应，那么就称$f:A \to B$为集合A到集合B的一个函数，记作$y=f(x), x \in A$.其中，x叫做自变量，x的取值范围A叫函数的定义域；y叫做因变量（函数值），函数值的集合叫做函数的值域.其中，定义域/值域通常用集合或区间表示.

$A=\{x|a \leq x \leq b\} \Leftrightarrow [a,b]$闭区间　　$A=\{x|a<x<b\} \Leftrightarrow (a,b)$开区间

$A=\{x|a<x \leq b\} \Leftrightarrow (a,b]$半开半闭区间

$A=\{x|x \geq a\} \Leftrightarrow [a,+\infty)$　　$A=\{x|x \leq b\} \Leftrightarrow (-\infty,b]$

$R \Leftrightarrow (-\infty,+\infty)$

一元二次函数及其图像

函数

（2）性质

- 单调性：利用函数图像研究函数值随自变量增大而增大（减小）.

设函数$f(x)$,在定义域有两点x_1，x_2,其函数值分别为$f(x_1)$，$f(x_2)$

✓单调递增

当$x_1 > x_2$时，有$f(x_1) > f(x_2)$或当$x_1 < x_2$时，有$f(x_1) < f(x_2)$

✓单调递减

当$x_1 > x_2$时，有$f(x_1) < f(x_2)$或当$x_1 < x_2$时，有$f(x_1) > f(x_2)$

一元二次函数及其图像

函数

（2）性质

- 奇偶性

设函数$f(x)$的定义域关于原点对称，若$f(x)=f(-x)$，则称$f(x)$为偶函数，其函数图像关于y轴对称；若$f(x)=-f(-x)$，则称$f(x)$为奇函数，其函数图像关于原点对称.

一元二次函数及其图像

1.基本公式

（1）一般式：$y=ax^2+bx+c\left(a\neq 0\right)$

（2）顶点式：$y=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\dfrac{4ac-b^2}{4a}\left(a\neq 0\right)$

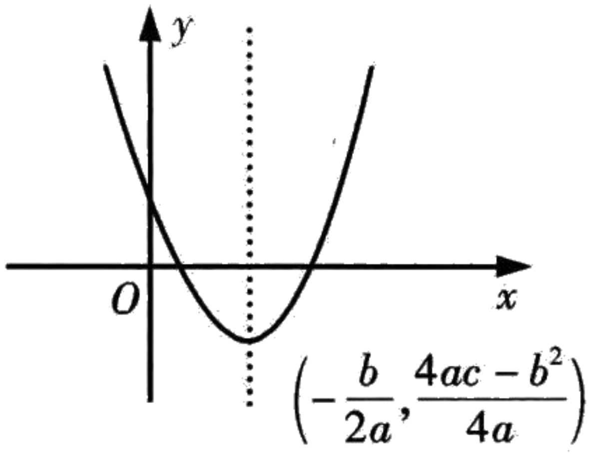
（3）交点式（两根式）：$y=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\left(a\neq 0\right)$

一元二次函数及其图像

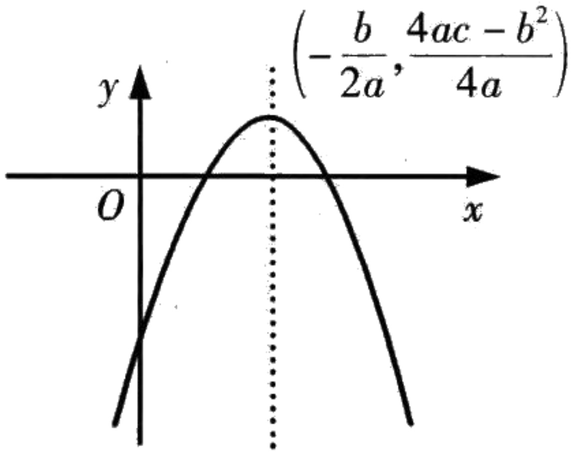
2.图像 $y=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\dfrac{4ac-b^2}{4a}(a\neq 0)$

（1）对称轴： $x=-\dfrac{b}{2a}$ （2）顶点坐标：$\left(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$

两抛物线形状相同：a绝对值相同，与b,c无关



$a>0$



$a<0$

练习

1.已知函数$f(x)=x^2+2(k-1)x+2$只在区间$(-\infty,4]$上是单调减函数，则实数k的值为(　).

A. - 3

B. 5

C. 1

D. $\frac{1}{2}$

E. 2

练习

1.已知函数$f(x) = x^2 + 2(k-1)x + 2$只在区间$(-\infty, 4]$上是单调减函数，则实数k的值为(**A**).

A. - 3

B. 5

C. 1

D. $\frac{1}{2}$

E. 2

【解析】已知函数开口方向向上，并且只在区间$(-\infty, 4]$上是单调减函数，则$-\frac{b}{2a} = 4$，$-\frac{2(k-1)}{2} = 4$，则$k = -3$.

练习

2.已知$a,b,c\in R$，函数$f(x)=ax^2+bx+c$，若$f(0)=f(3)>f(1)$，则（　）

A.$a>0$，$3a+b=0$

B.$a<0$，$3a+b=0$

C.$a>0$，$2a+b=0$

D.$a<0$，$2a+b=0$

E.$a>0$，$3a+2b=0$

练习

2.已知$a, b, c \in R$，函数$f(x) = ax^2 + bx + c$，若$f(0) = f(3) > f(1)$，则（ A ）

A.$a > 0$，$3a+b=0$

B.$a < 0$，$3a+b=0$

C.$a > 0$，$2a+b=0$

D.$a < 0$，$2a+b=0$

E.$a > 0$，$3a + 2b = 0$

【解析】$f(0) = 0 + 0 + c = c, f(3) = 9a + 3b + c$, 根据$f(0) = f(3)$可知，$9a + 3b = 0$，化简$3a+b=0$.

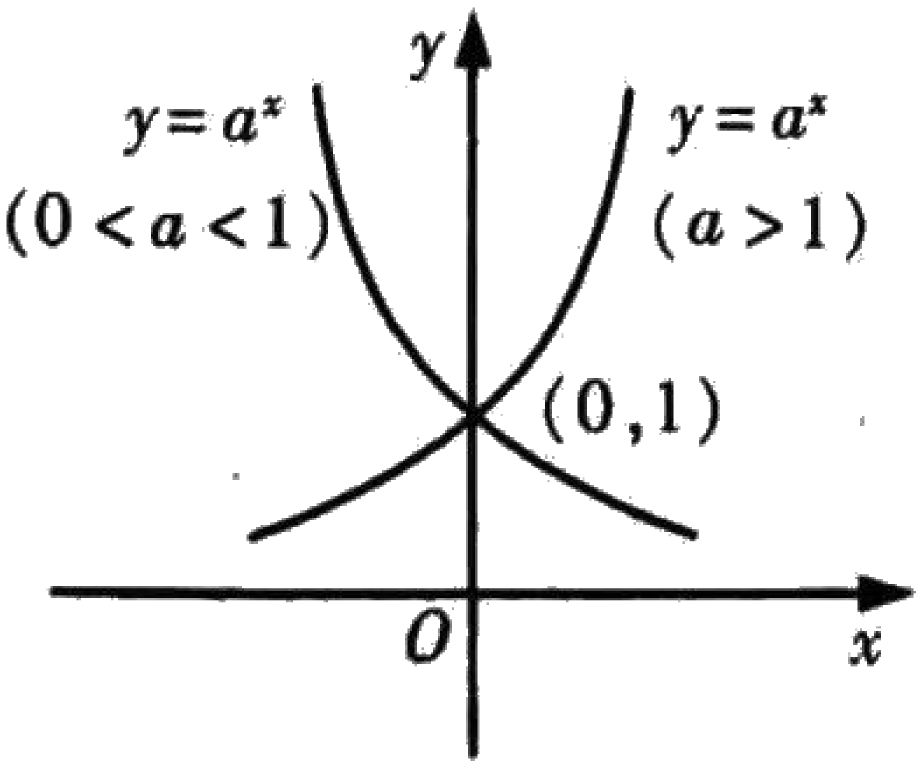
又因为$f(0) = f(3) > f(1)$，可知二次函数开口向上，所以$a > 0$.故选A.

二、 指数函数和对数函数

指数函数

$y = a^x$ $(a > 0$且$a \neq 1)$ $(x \in R)$

指数函数



1.当$a > 1$时，指数函数单调递增

2.当$0 < a < 1$时，指数函数单调递减

3.指数函数必过点（0，1）

指数运算法则

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

$$a^0 = 1\ (a \neq 0)$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$$

$$(ab)^n = a^n b^n$$

$$\left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}$$

对数函数

$y = \log_a x$　（$a > 0$且$a \neq 1$）$(x > 0)$

常用对数：$a = 10 \Rightarrow y = log_{10}x = lgx$

自然对数：$a = e \Rightarrow y = log_e x = lnx$（无理数$e = 2.71828\cdots$）

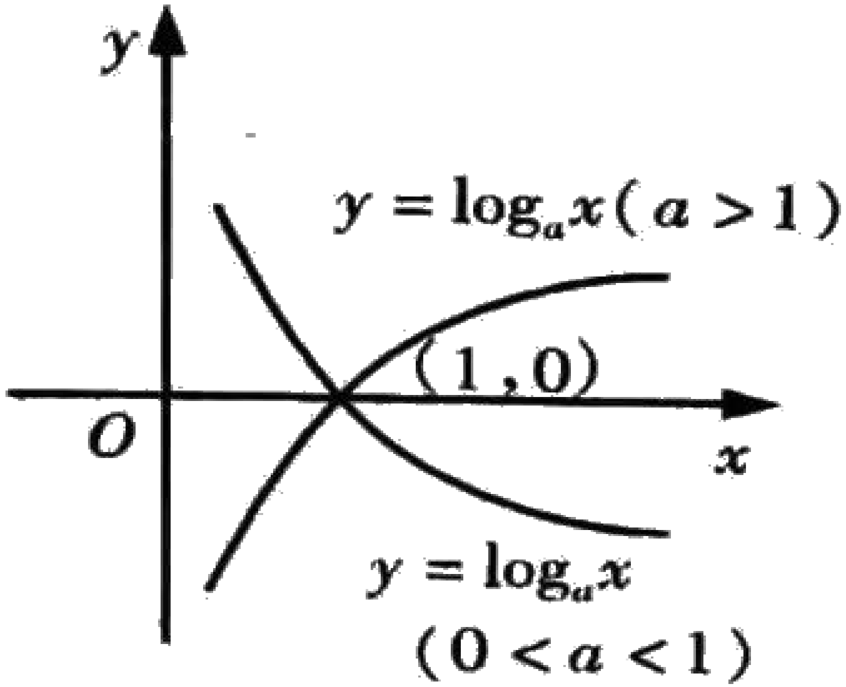
指数、对数

$$y = \text{😅} \Leftrightarrow log_{\text{😄}}\text{😅} = \text{💧}$$

对数函数

$$y = \log_a x \quad （a > 0 且 a \neq 1）(x > 0)$$

对数函数



1.当$a>1$时，对数函数单调递增

2.当$0<a<1$时，对数函数单调递减

3.对数函数必过点（1，0）

对数运算法则

$$\log_a m + \log_a n = \log_a mn$$

$$\log_a m - \log_a n = \log_a \frac{m}{n}$$

$$\log_a m^n = n \log_a m$$

换底公式：$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

对数运算法则

$$a^{\log_a n} = n$$

$$\log_a a^m = m$$

$$\log_a 1 = 0 \qquad \log_a a = 1$$

师大课堂 SHI DA KE TANG

练习

3.$log_3 1+16^{\frac{1}{2}}+(-2)^0=$（ ）

A.2

B.3

C.4

D.5

E.6

练习

3.$log_3 1 + 16^{\frac{1}{2}} + (-2)^0 =$ （ **D** ）

A.2

B.3

C.4

D.5

E.6

【解析】$log_3 1 + 16^{\frac{1}{2}} + (-2)^0 = 0 + 4 + 1 = 5$，故选D.

练习

4. $3^{\frac{5}{3}} \times 3^{\frac{1}{3}} - log_4 10 - log_4 \frac{8}{5} =$ (　　)

A.3

B.4

C.5

D.6

E.7

师大课堂 SHI DA KE TANG

练习

4. $3^{\frac{5}{3}} \times 3^{\frac{1}{3}} - log_4 10 - log_4 \frac{8}{5} =$ （ **E** ）

A.3

B.4

C.5

D.6

E.7

【解析】$3^{\frac{5}{3}} \times 3^{\frac{1}{3}} - log_4 10 - log_4 \frac{8}{5} = 3^2 - \left(log_4 10 + log_4 \frac{8}{5}\right) = 9 - log_4 16 = 9 - 2 = 7$, 故选E.

三、 最值函数

最值函数

（1）max表示最大值函数.

比如$max\{x,y,z\}$表示x,y,z中最大的数.

（2）min表示最小值函数.

比如$min\{x,y,z\}$表示x,y,z中最小的数.

练习

5.设$f(x) = min\{x + 2，10 - x\}$，则函数$f(x)$的最大值为（　）

A.2

B.3

C.4

D.5

E.6

练习

5.设$f(x)=min\{x+2, 10-x\}$，则函数$f(x)$的最大值为（ E ）

A.2

B.3

C.4

D.5

E.6

【解析】画图可找到最小值为两函数交点，联立得交点为$x=4$，则函数$f(x)$的最大值为6，故选E.

练习

6.设$f(x)=max\{3x+6，x^2-4\}$，求函数$f(x)$的最小值为（　）

A.-2

B.-1

C.0

D.1

E.2

练习

6.设$f(x)=max\{3x+6，x^2-4\}$，求函数$f(x)$的最小值为（ C ）

A.-2

B.-1

C.0

D.1

E.2

【解析】画图可找到最值为两函数交点，联立得交点为$x=-2$或$x=5$,代入$f(-2)=0$，$f(5)=21$，故选C.

四、 一元二次方程

一元二次方程

1.一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$

解法：

- ✓ 直接开平方法
- ✓ 配方法
- ✓ 因式分解法
- ✓ 求根公式（判别式）

一元二次方程

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}=0$$

1.一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$

判别式：$\Delta=b^2-4ac$

（1）当$\Delta>0$时，方程有两个不等实根，根的表达式为x_1，$x_2=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

（2）当$\Delta=0$时，方程有两个相等实根$x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$

（3）当$\Delta<0$时，方程无实根.

师大课堂
SHI DA KE TANG

练习

7.关于x的方程$mx^2+(2m-1)x+(m-3)=0$有两个不相等的实数根.

（1）$m<3$.

（2）$m\geq 1$.

你需要判断：

条件（1）$\xrightarrow{?}$ 结论

条件（2）$\xrightarrow{?}$ 结论

$\Longrightarrow$ 大方向：下推上

A. 条件（1）充分，但条件（2）不充分。

B. 条件（2）充分，但条件（1）不充分。

C. 条件（1）和（2）单独都不充分，但条件（1）和条件（2）联合起来充分。

D. 条件（1）充分，条件（2）也充分。

E. 条件（1）和（2）单独都不充分，条件（1）和条件（2）联合起来也不充分。

练习

7.关于x的方程$mx^2+(2m-1)x+(m-3)=0$有两个不相等的实数根.

（1）$m<3$.

（2）$m\geq 1$.

练习

7.关于x的方程$mx^2+(2m-1)x+(m-3)=0$有两个不相等的实数根.

（1）$m<3$.

（2）$m\geq 1$.

【解析】①由于方程有两个不相等的实数根，所以$m\neq 0$.

②要使得方程有两个不相等的实数根，令$\Delta=(2m-1)^2-4m(m-3)>0$.

由①②可得，$m>-\frac{1}{8}$且$m\neq0$. 明显条件（1）不充分，条件（2）充分，故选B.

一元二次方程

2.根与系数的关系（韦达定理）

x_1，x_2是方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的两个根，则 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$

练习

8.已知方程$2x^2+(2m-n)x+n=0$的两个根分别为1和2，则$m+n$为( )

A.2

B.3

C.5

D.6

E.7

练习

8.已知方程$2x^2+(2m-n)x+n=0$的两个根分别为1和2，则$m+n$为(**B**)

A.2

B.3

C.5

D.6

E.7

【解析】因为方程的两个根分别为1和2，所以$x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{2m-n}{2}=3$，$x_1x_2=\frac{n}{2}=2$,所以$m=-1$，$n=4$，所以$m+n=3$，故选B.

练习

9.已知x_1，x_2是方程$x^2-ax-1=0$的两个根，则$x_1^2+x_2^2=$(　)

A.a^2+2

B.a^2+1

C.a^2-1

D.a^2-2

E.$a+2$

练习

9.已知x_1，x_2是方程$x^2-ax-1=0$的两个根，则$x_1^2+x_2^2=$(A)

A.a^2+2

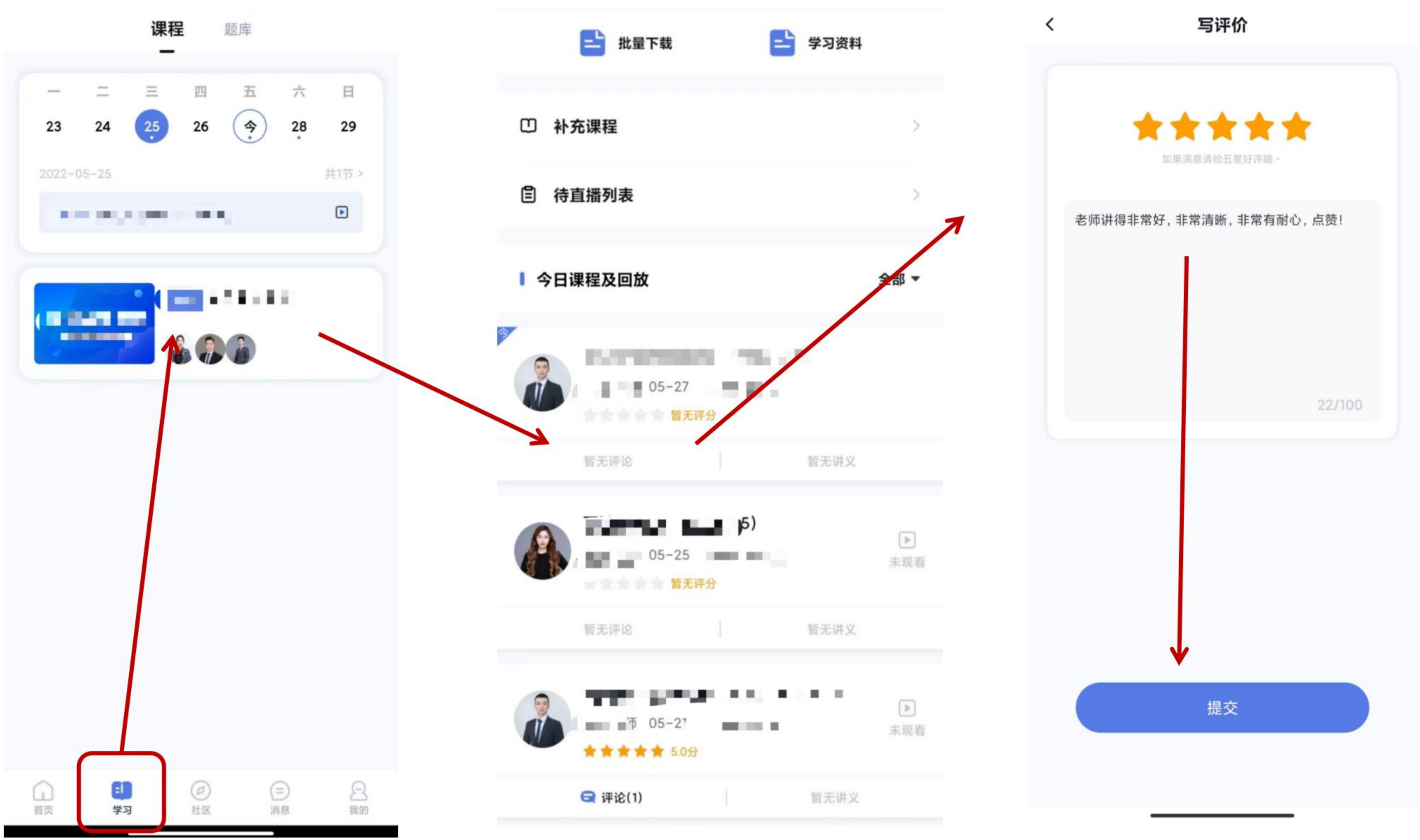
B.a^2+1

C.a^2-1

D.a^2-2

E.$a+2$

【解析】$x_1+x_2=a, x_1x_2=-1, x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=a^2+2$, 故选A.



学习→点击课程→点击评价(5星好评)→提交评价

师大课堂
SHI DA KE TANG

感谢您的观看

主讲老师：媛媛老师

邮箱：family7662@dingtalk.com