



全国硕士研究生招生考试

管综数学极简模式

一元二次不等式恒成立问题

主讲人:夏天老师

一元二次不等式恒成立问题★

基本步骤:

1. 将一边变为零 (不等式函数化)

2. 二次项系数化为正

3. $\Delta < 0$ (无解), 恒成立

① 恒 > 0 : $a > 0$, $\Delta < 0$

② 恒 < 0 : $a < 0$, $\Delta < 0$

4. 求根: 十字相乘法、公式法 $\left(\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)$ (大于号取两边, 小于号取中间)

一元二次不等式恒成立问题

1.(2011)不等式 $ax^2 + (a - 6)x + 2 > 0$ 对所有实数 x 都成立. 【 】

(1) $0 < a < 3$

(2) $1 < a < 5$

一元二次不等式恒成立问题

1.(2011)不等式 $ax^2 + (a - 6)x + 2 > 0$ 对所有实数 x 都成立. 【E】

(1) $0 < a < 3$

(2) $1 < a < 5$

恒成立 $\Rightarrow \Delta < 0$. 恒大于0 $\Rightarrow \Delta < 0$ 

$$\Delta = b^2 - 4ac = (a-6)^2 - 4a \times 2$$

$$= (a-6)^2 - 8a$$

$$= a^2 - 12a + 36 - 8a$$

$$= a^2 - 20a + 100 - 100 + 36$$

$$= (a-10)^2 - 64$$

$$\Delta = (a-10)^2 - 8^2 < 0$$

$$(a-10+8)(a-10-8) < 0$$

$$(a-2)(a-18) < 0 \Rightarrow 2 < a < 18$$

条件(1). $0 < a < 3$ 不在 $2 < a < 18$ 之内. 故不充分

条件(2). $1 < a < 5$ 不在 $2 < a < 18$ 之内. 也不充分.

联合 $1 < a < 3$ 也不在 $2 < a < 18$ 之内. 故也不充分.

选E

一元二次不等式恒成立问题

2. (2014) 不等式 $|x^2 + 2x + a| \leq 1$ 的

解集为空集 【 】

(1) $a < 0$

(2) $a > 2$

一元二次不等式恒成立问题

2. (2014) 不等式 $|x^2 + 2x + a| \leq 1$ 的解集为空集 【B】

(1) $a < 0$

(2) $a > 2$

空集的反面为恒成立

$|x^2 + 2x + a| \leq 1$ 解集为空集

$\Rightarrow |x^2 + 2x + a| > 1$ 恒成立

分情况讨论去绝对值

$$\begin{cases} x^2 + 2x + a < -1 \\ x^2 + 2x + a > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 2x + a + 1 < 0 \\ x^2 + 2x + a - 1 > 0 \end{cases}$$

① $x^2 + 2x + a + 1 < 0$, $\because 1 > 0$, 开口向上,
 $a > 0$, $f(x)$ 不可能恒小于 0, 舍去.

② $x^2 + 2x + a - 1 > 0$, $\because 1 > 0$, 开口向上,

要使 $x^2 + 2x + a - 1 > 0$ 恒成立 $\Rightarrow \Delta < 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4(a - 1) < 0 \Rightarrow 4[1 - (a - 1)] < 0$$

$$\Rightarrow 2 - a < 0 \Rightarrow a > 2$$

条件(1) $a < 0$ 与 $a > 2$ 不充分 条件(2) $a > 2$ 充分选 B