管理类专业学位硕士研究生入学统一考试

数学

管理类联考 要点笔记

适用于MBA、MPA、MPAcc、MEM

目 录

第一章 数与式

第一节 数

（一）数的分类

$$
\text{数}\begin{cases}
\text{实数（}R\text{）}\begin{cases}
\text{有理数（}Q\text{）}\begin{cases}
\text{整数（}Z\text{）}\begin{cases}\text{自然数（}N\text{）}\\ \text{负整数（}Z-\text{）}\end{cases}\\
\text{分数（小数）}
\end{cases}\\
\text{无理数（}\overline{Q}\text{）}\begin{cases}
①\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5}\cdots\\
②\pi,\ e\\
③\lg 2,\lg 3,\log_3 2\cdots
\end{cases}
\end{cases}\\
\text{虚数}\Rightarrow i^2=-1\quad \sqrt{-1}=i
\end{cases}
$$

注意：自然数≠正整数，自然数比正整数多 0.

（二）平方根、算术平方根

1. 平方根：有正负±.
2. 算术平方根：只有正的.

（三）质数、合数

1. 质数

如果一个大于 1 的正整数，只能被 1 和它本身整除（只有 1 和它本身两个约数），那么这个正整数叫做质数（质数也称素数）. 如：2，3，5，7⋯.

2. 合数

一个正整数除了能被 1 和它本身整除之外，还能被其他的正整数整除（除了 1 和它本身之外，还有其他约数），这样的正整数叫做合数.

（四）绝对值

$$
|x|=\sqrt{x^2}=\begin{cases} x,\ \ x\geq 0\\ -x,\ \ x<0\end{cases}
$$

意义：$d\geq 0$.

技巧：看本身的符号，本身正是本身，本身负就变号.

（五）奇数、偶数

1. 奇数：不能被 2 整除的数.

2. 偶数：能被 2 整除的数.

注意：0 是偶数.

$$\text{运算法则}\begin{cases}\text{加法}\begin{cases}\text{奇}+\text{奇}=\text{偶}\\\text{奇}+\text{偶}=\text{奇}\\\text{偶}+\text{偶}=\text{偶}\end{cases}\\\text{乘法}\begin{cases}\text{奇}\times\text{奇}=\text{奇}\\\text{奇}\times\text{偶}=\text{偶}\\\text{偶}\times\text{偶}=\text{偶}\end{cases}\end{cases}$$

注意：连续两个自然数的积为偶数.

（六）平均数

1. 算术平均值

设有 n 个数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，称 $\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$ 为这 n 个数的算术平均值，简记为

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}$$

2. 几何平均值

设有 n 个正数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，称 $x_g=\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$ 为这 n 个正数的几何平均值，简记为

$$x_g=\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}x_i}$$

注意：$\bar{x}\ge x_g\Rightarrow\frac{x_1+x_2+\cdots x_n}{n}\ge\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\Rightarrow x_1+x_2+\cdots x_n\ge n\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$

$(x_1,x_2\cdots x_n\in R+,\text{当}x_1=x_2=\cdots=x_n\text{时}$，等号成立）

（七）众数、中位数

1. 众数：在一组给出的数据中，出现次数最多的数称为众数.

2. 中位数：给出的一组数据，将数据由小到大排列，若有奇数个数据，则正中间的数为中位数；若有偶数个数据，则中位数为中间两个数的平均数.

（八）整除数

2，5→看末位.

3，9→看数位上的数字之和.

6，15，18，45（综合上述 2，5，3，9）→看末位且看数位上的数字之和.

4，25→看末 2 位.

8，125→看末 3 位.

（九）公约数、公倍数

1. 公约数

设a，b是两个整数，若整数p满足$p|a$且$p|b$，则称p是a，b的一个公约数.

整数a，b的公因数中最大的那个叫作a，b的最大公约数.

2. 公倍数

设a，b是两个整数，若整数p满足$a|p$且$b|p$，则称p是a，b的一个公倍数.

整数a，b的公倍数中最小的那个叫作a，b的最小公倍数.

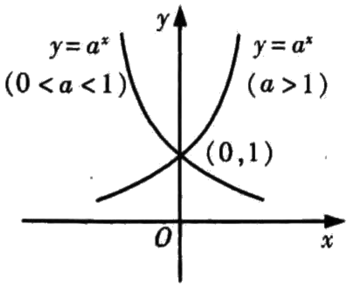
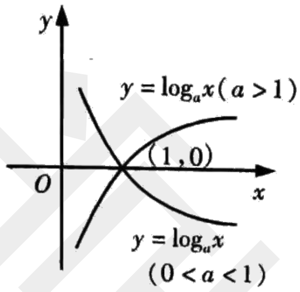
（十）指数和对数

1. 指数和对数运算公式

名称	指数	对数
定义	$a^x=N$	$\log_a N=x$
关系式	$a^x=N \Leftrightarrow \log_a N=x\ (a>0,a\neq 1,N>0)$	
运算性质	（1）$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$，$a^m\div a^n=a^{m-n}$ （2）$\left(a^m\right)^n=\left(a^n\right)^m=a^{m\cdot n}$ （3）$(ab)^n=a^nb^n$，$\left(\frac{b}{a}\right)^m=\frac{b^m}{a^m}$ （4）$a^0=1$，$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$ （5）$a^{\frac{1}{m}}=\sqrt[m]{a}$	（1）$\log_a 1=0$，$\log_a a=1$ （2）$\log_a m+\log_a n=\log_a mn$ （3）$\log_a m-\log_a n=\log_a \frac{m}{n}$ （4）$\log_a m^n=n\log_a m$，$\log_{a^m} b^n=\frac{n}{m}\log_a b$ （5）$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$，$\log_a b\cdot\log_b a=1$ （6）$a^{\log_a n}=n$，经验公式：$a^{lgb}=b^{lga}$

注意：在对数运算中，当a等于10时，写成$\lg N$.当a等于e时，写成$\ln N$.

2. 图像与性质

名称	指数函数	对数函数
表达式	$y=a^x\left(a>0,a\neq1\right)$	$y=\log_a x\left(a>0,a\neq1\right)$
图像		
性质	定义域：R；值域：（0，＋∞） 恒过点（0，1） 当$0<a<1$，在定义域上单调递减 当$a>1$，在定义域上单调递增	定义域：（0，＋∞）；值域：R 恒过点（1，0） 当$0<a<1$，在定义域上单调递减 当$a>1$，在定义域上单调递增
关系	$y=a^x$与$y=\log_a x$互为反函数，两者图像关于$y=x$对称	

第二节 式

式
- 1. 整式
- 2. 分式
- 3. 根式

（一）整式

1. 常用的公式

（1）$a^2-b^2=\left(a+b\right)\left(a-b\right)$（平方差公式）

（2）$\left(a\pm b\right)^2=a^2\pm2ab+b^2$（完全平方公式）

（3）$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$（立方公式）

（4）$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$（立方差公式）

（5）$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$（立方和公式）

（6）$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$（配方公式）

（7）$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]$（配方公式）

（8）$a^3+b^3+c^3-3abc=\frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]$

2. 常用三个经验公式

（1）$1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$

（2）$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

（3）$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2=(1+2+3+\cdots+n)^2$

3. 非负性

（1）$x^2\geq 0\Rightarrow(ax\pm by)^{2n}\geq 0$

（2）$|y|\geq 0\Rightarrow|ax\pm by|\geq 0$

（3）$\sqrt{z}\geq 0\Rightarrow\sqrt[2n]{ax\pm by}\geq 0$

4. 综合除法（余式定理）

整式 $f(x)$ 除以整式 $q(x)$ 的商式为 $g(x)$，余式为 $r(x)$，则有 $f(x)=q(x)g(x)+r(x)$,当$q(x)$等于0时，$f(x)=r(x)$.

（二）分式

1. 繁分式

$$\frac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{D}}=\frac{\frac{A}{B}\times BD}{\frac{C}{D}\times BD}=\frac{AD}{BC}$$

如：$\frac{1}{\frac{1}{x}}=x$

2. 常用三个经验公式（裂项相消法）

（1） $\dfrac{1}{x(x+1)}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}$

（2） $\dfrac{1}{x(x+k)}=\dfrac{1}{k}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+k}\right)$

（3） $\dfrac{1}{1\times2}+\dfrac{1}{2\times3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}=1-\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{n}{n+1}$

（三）根式

1. 常用经验公式

$\dfrac{1}{\sqrt{x+1}\pm\sqrt{x}}=\sqrt{x+1}\mp\sqrt{x}$（分母有理化）

$\dfrac{1}{\sqrt{x+k}\pm\sqrt{x}}=\dfrac{1}{k}\left(\sqrt{x+k}\mp\sqrt{x}\right)$

第二章 应用题

第一节 比例问题

按比例分配的应用题，是把一个数量按一定的比例进行分配.

1. 根据已知条件（共占多少份，对应每份为多少）把已知数量与份数对应起来，把题中的比例转化成一个数的几分之几来计算.

$$\text{某量的数量}=\text{总数量}\times\frac{\text{某量的份数}}{\text{总份数}}$$

2. 可设参量“k”化为整数比，求单个量份数，即求各个量的值. 若各个量间的比为$a:b:c$，则可设为ak，bk，ck，即有$ak+bk+ck=$总数量.

第二节 利润问题

利润＝售价－进价

$$\text{利润率}=\frac{\text{利润}}{\text{进价}}\times100\%=\frac{\text{售价}-\text{进价}}{\text{进价}}\times100\%$$

技巧：特殊值法，可直接设初始值为 1.

第三节 工程问题

1. 工作量、工作效率、工作时间之间的关系

工作量＝工作效率×工作时间

工作时间＝工作量÷工作效率

工作效率＝工作量÷工作时间

2. 若甲单独完成需要 m 天，乙单独完成需要 n 天，则：

甲的效率为$\frac{1}{m}$，乙的效率为$\frac{1}{n}$

甲、乙合作的效率为$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$

甲、乙合作完成需要的时间为$\frac{1}{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}=\frac{mn}{m+n}$

甲、乙两人合作完成：工作总量＝甲完成的工作量＋乙完成的工作量

第四节 行程问题

1. 路程S、速度v、时间t之间的关系

$S=vt$，$t=\frac{S}{v}$，$v=\frac{S}{t}$

2. 相遇追及问题（$v_1>v_2$）

相遇问题：$S_{相遇}=S_1+S_2=vt_1+vt_2=(v_1+v_2)t$

追及问题：$S_{追及}=S_1-S_2=vt_1-vt_2=(v_1-v_2)t$

3. 顺（逆）水问题

$v_{顺水}=v_{船}+v_{水}$

$v_{逆水}=v_{船}-v_{水}$

【推广】顺风、逆风、上坡、下坡

技巧：画图分析

第五节 浓度问题

1. 溶质、溶剂、溶液

溶液＝溶质＋溶剂

$浓度=\frac{溶质}{溶液}\times100\%=\frac{溶质}{溶质+溶剂}\times100\%$

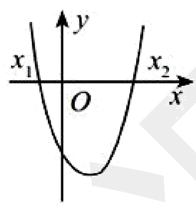
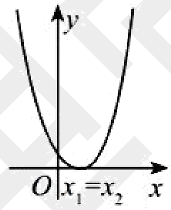
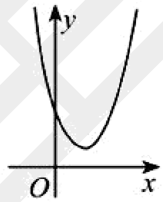
2. 浓度对比

设两种溶液质量分别为M_1，M_2，浓度分别为c_1，c_2，混合后溶液浓度为c，则 $M_1c_1+M_2c_2=(M_1+M_2)c$.

第六节 数字分配及综合问题

1. 平均数
2. 数的概念
3. 经济学
4. 年龄问题

第三章 函数、方程和不等式

$\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$的根	有两个相异实根 $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	有两个相等实根 $x_{1,2}=\dfrac{-b}{2a}$	没有实根
$ax^2+bx+c>0$ $(a>0)$的解集	$(-\infty,\ x_1)\cup(x_2,\ +\infty)$	$x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq-\dfrac{b}{2a}$	$(-\infty,+\infty)$
$ax^2+bx+c<0$ $(a>0)$的解集	$(x_1,\ x_2)$	无解	无解
二次函数 $y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$的图象			

【注意】

1. 二次函数

（1）a决定开口的方向和大小：$a>0$时开口向上，$a<0$时开口向下；$|a|$越大开口越小，$|a|$越小开口越大.

（2）对称轴：$x=-\dfrac{b}{2a}$

（3）与y轴的交点：$(0,c)$.

（4）顶点：$\left(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$

（5）$y=ax^2+bx+c$ 的最值求法：$y=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\dfrac{4ac-b^2}{4a}$

① 当 $a>0$, $x=-\dfrac{b}{2a}$ 时，$y_{\min}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$.

② 当 $a<0$, $x=-\dfrac{b}{2a}$ 时，$y_{\max}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$.

2. 一元二次方程

（1）$c=0\to x_1=0$

（2）$a+b+c=0\to x_1=1$

（3）$a+c=b\to x_1=-1$

（4）韦达定理：$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$

3. 不等式

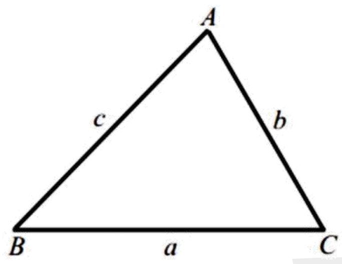
当$\Delta>0$时，先求x_1和x_2，再求解集$\begin{cases}\text{小于取中间}\\ \text{大于取两边}\end{cases}$.

第四章 平面几何

第一节 三角形

（一）三角形

1. 任意三角形



（1）角的关系

$$\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$$

补充：所有多边形的内角和都为$(n-2)\times 180^\circ$.

所有多边形的外角和为 360° .

（2）边的关系

$$|b-c|<a<b+c$$

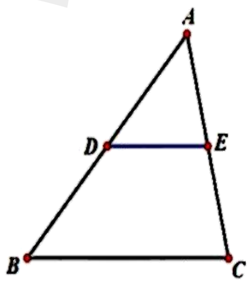
（3）边、角关系

①大边对大角，小边对小角

②正弦定理

③余弦定理

（4）中位线定理



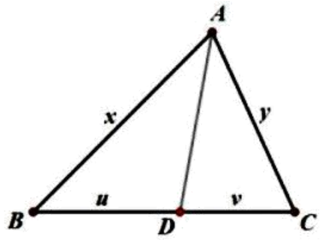
D、E 分别为 AB、AC 的中点，DE 为△ABC 的中位线.

①DE∥BC

②$DE=\frac{1}{2}BC$

③$\triangle ADE\backsim\triangle ABC$

（5）角平分线定理



AD 为△ABC 中∠A 的内角平分线$\frac{AB}{AC}:\frac{BD}{DC}$，即：$\frac{x}{y}:\frac{u}{v}$

（6）“五心定理”

①外心（O）：三条边的垂直平分线（中垂线）的交点外接圆圆心.

②内心（O'）：三内角平分线的交点内切圆圆心.注意：$S_{\Delta}=\frac{1}{2}(a+b+c)r$

③重心（G）：三条中线的交点.

④垂心（H）：三条高线的交点.

⑤旁心（I）：三角形中一个角的内角平分线和另外两角的外角平分线必交于一点.

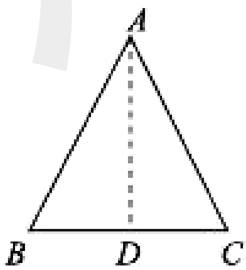
2.特殊三角形

等腰三角形

等边三角形（正三角形）

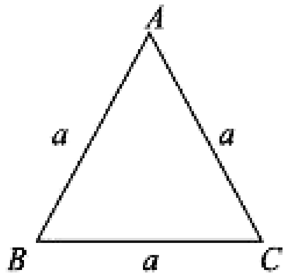
直角三角形（$Rt\triangle$）

（1）等腰三角形



“三线合一”
中线
高线
角平分线

（2）等边三角形（正三角形）



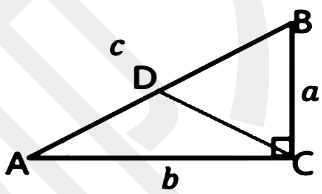
“四心合一”（除旁心外）：

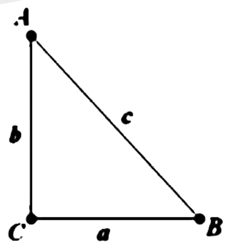
- 内心
- 外心
- 重心
- 垂心

$h=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$

$S_{正\Delta}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^{2}$

（3）直角三角形（$Rt\triangle$）





①∠A＋∠B＝90°（互余）

②$a^2+b^2=c^2$

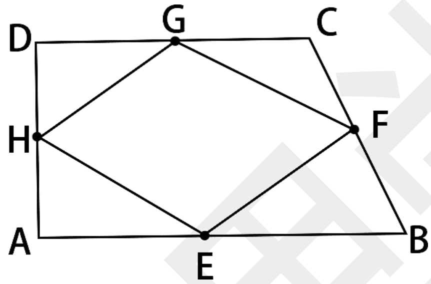
③CD＝$\frac{1}{2}$ AB（D 为外心）

④1：$\sqrt{3}$：2（有一个角为 30°）

第二节 四边形

- 任意四边形
  - 梯形：有一组对边平行
    - 直角梯形
    - 等腰梯形
  - 平行四边形：有两组对边平行
    - 矩形
    - 菱形

1. 任意四边形



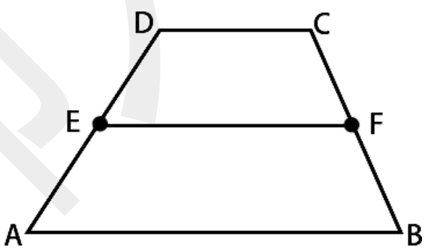
E、F、G、H 分别为 AB、BC、CD、DA 的中点.

（1） $S_{EFGH}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$

（2）EFGH 为平行四边形.

注意：任意四边形内角和＝外角和＝360°.

2. 梯形

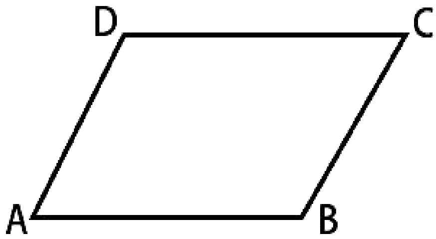


E、F 分别为 AD、BC 的中点.

（1）EF 为中位线，DC+AB＝2EF

（2）$S_{梯}=\frac{1}{2}$（DE+AB）$\times h$＝EF$\times h$

3. 平行四边形



（1）对角相等

（2）邻角互补

（3）对角线相互平分

（4）面积＝底×高

第三节 圆

1. 任意三角形都有外接圆和内切圆

2. 正三角形的外接圆和内切圆

（正三角形的边长为a，外接圆的半径为R，内切圆的半径为r）

（1）同心圆

（2）$R=2r$

（3）$a=\sqrt{3}R=2\sqrt{3}r$

3. 直角三角形的外接圆和内切圆

（直角三角形的三条边分别为a、b、c，外接圆的半径为R，内切圆的半径为r）

（1）$c=2R$

（2）$a+b-c=2r$

4. 任意四边形的外接圆和内切圆条件

（1）四边形有外接圆的条件：对角互补.

（2）四边形有内切圆的条件：对边和相等.

5. 正方形的外接圆和内切圆

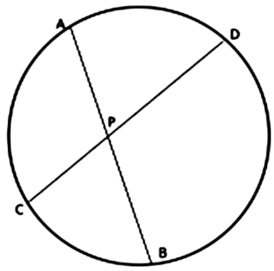
（正方形的边长为a，外接圆的半径为R，内切圆的半径为r）

（1）同心圆

（2）$2R=\sqrt{2}a$

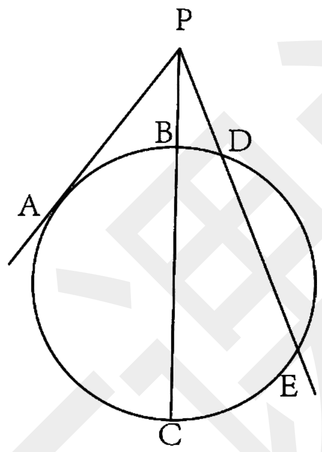
（3）$a=2r$

6. 相交弦定理



PA • PB＝PC • PD

7. 切割线定理



PA^2＝PB • PC＝PD • PE

8. 几个基本公式

（1）优弧：大于半圆的弧

劣弧：小于半圆的弧

（2）圆周长：$C_{周长}=2\cdot\pi\cdot r=\pi\cdot d$

弧长：$l=\dfrac{\theta^\circ}{360^\circ}\cdot 2\cdot\pi\cdot r$

圆面积：$S_{圆}=\pi\cdot r^2$

扇形面积：$S_{扇形}=\dfrac{\alpha^\circ}{360^\circ}\cdot\pi\cdot r^2=\dfrac{1}{2}\cdot l\cdot r$

弓形面积：$S_{弓形}=S_{扇形AOC}-S_{\Delta AOC}$

9. 阴影部分面积的求法

（1）逆向思维法

（2）“三字经”法：①并②补③辅

第五章 立体几何

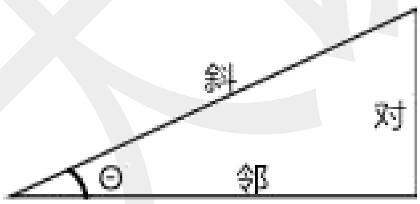
第一节 多面体、旋转体

立体几何图形	侧面积	全面积	体积	对角线（母线）
长方体（a，b，c）		$2(ab+bc+ca)$	abc	$\sqrt{a^2+b^2+c^2}$
正方体（a）	$4a^2$	$6a^2$	a^3	$\sqrt{3}a$
圆柱（R，h）	$2\pi Rh$	$2\pi Rh+2\pi R^2$	πR^2h	h
圆锥（R，h，l）	πRl	$\pi Rl+\pi R^2$	$\frac{1}{3}\pi R^2h$	$l=\sqrt{R^2+h^2}$
球（R）		$4\pi R^2$	$\frac{4}{3}\pi R^3$	

第二节 三角函数

（一）三角函数定义

1. 三角函数定义



（1）$\sin\theta=\frac{对}{斜}$

（2）$\cos\theta=\frac{邻}{斜}$

（3）$\tan\theta=\frac{对}{邻}$

2. 互倒关系

$\sin\theta\cdot\csc\theta=1$；$\cos\theta\cdot\sec\theta=1$；$\tan\theta\cdot\cot\theta=1$.

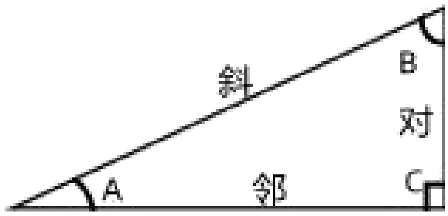
3. 平方关系

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$；$\sec^2\theta+\tan^2\theta=1$；$\csc^2\theta+\cot^2\theta=1$.

4. 商值关系

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$；$\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$.

5. 互余关系



若 A＋B＝90°

（1）sinA＝cosB → cosA＝sinB

（2）tanA＝cotB → cotA＝tanB

（3）$\sin^2A+\cos^2A=1\rightarrow\sin^2A+\sin^2B=1\rightarrow\cos^2A+\cos^2B=1$

6. 互补关系

若 A＋B＝180°

（1）sinA＝sinB

（2）cosA＝－cosB（互为相反数）

（3）tanA＝－tanB（互为相反数）

7. 特殊角的三角函数值

角度	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
弧度	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	不存在	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

8. 正弦定理

（1）$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B$

（2）$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R\rightarrow a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C\rightarrow\begin{cases}a=2R\sin A\\b=2R\sin b\\c=2R\sin c\end{cases}$（$R$为外接圆半径）

9. 余弦定理

（1）$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

（2）$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$

（3）$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

（4）$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

第六章 数列

第一节 数列内容归纳总结

类别 知识点	等差数列	等比数列
定义	每一项与它前一项的差 等于同一个常数	每一项与它前一项的比 等于同一个常数
通项 a_n	$a_n=a_1+(n-1)d=a_k+(n-k)d$	$a_n=a_1q^{n-1}=a_kq^{n-k}$
前 n 项和 S_n	$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$	$S_n=\begin{cases}na_1, & q=1\\ \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}, & q\neq0,且\ q\neq1\end{cases}$
中项	$\frac{a+b}{2}$	$\pm\sqrt{ab}(ab>0)$

类别 知识点	等差数列	等比数列
$m+n=p+q$	$a_m+a_n=a_p+a_q$	$a_m\cdot a_n=a_p\cdot a_q$
公差 d、公比 q	$a_n=a_m+(n-m)d,d=\frac{a_n-a_m}{n-m}$	$a_n=a_mq^{n-m},q^{n-m}=\frac{a_n}{a_m}$

类别 知识点	等差数列	等比数列
几个经验公式	(1)$a_m=n,a_n=m\Rightarrow a_{m+n}=0$ (2)$S_m=n,S_n=m\Rightarrow S_{m+n}=-(m+n)$ (3)$S_m=S_n(m\neq n)\Rightarrow S_{m+n}=0$	$A(1\pm p\%)^n=B$, n 为经过的周期, A 为起点(初始)值, B 为终点(终)值, $p\%$ 为平均增长(亏损)率
巧设未知量:三个数 五个数 四个数	$x-d,x,x+d$ $x-2d,x-d,x,x+d,x+2d$ $x-3d,x-d,x+d,x+3d$	$\frac{x}{q},x,xq$ $\frac{x}{q^2},\frac{x}{q},x,xq,xq^2$ $\frac{x}{q^3},\frac{x}{q},xq,xq^3$

类别 / 知识点	等差数列	等比数列
第 1 个 10 项和为 A 第 2 个 10 项和为 B 第 3 个 10 项和为 C …	A、B、C、…也成等差数列	A、B、C、…也成等比数列
推广到 m 项和	同样成立，也为等差数列	同样成立，也为等比数列

第二节 求S_n

（一）由$S_n \to a_n$

$a_n = S_n - S_{n-1}(n \geq 2)$

注意：一定要验证首项是否成立.

（二）由$a_n \to S_n$

1. 等差、等比参考上述表格

（1）知识点：前n项和S_n

（2）知识点：第 1 个 10 项和为 A……

（3）知识点：推广到m项和

2. 整式求和

（1）$a_n = c \to S_n = nc$

（2）$a_n = n \to S_n = 1+2+3+\cdots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$

（3）$a_n = n^2 \to S_n = 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

（4）$a_n = n^3 \to S_n = 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = (1+2+3+\cdots+n)^2 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$

【归纳】求和时只看a_n，不看表象.

3. 分式、根式求和

（1）分式求和：$a_n = \dfrac{1}{n(n+1)} \to S_n = \dfrac{n}{n+1}$

（2）根式求和：$a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \sqrt{n+1}-\sqrt{n} \to S_n = \sqrt{n+1}-1$

第七章 解析几何

第一节 平面直角坐标系

1. 点

2. 两点间距离公式

两点 $P_1(x_1,y_1)$与$P_2(x_2,y_2)$之间的距离 $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

3. 定比分点

（1）中点坐标

两点 $P_1(x_1,y_1)$与$P_2(x_2,y_2)$的中点坐标$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$.

（2）坐标形式

在平面直角坐标系内，已知两点 $A(x_1,y_1)$与$B(x_2,y_2)$；在两点连线上有一点P，设它的坐标为（x，y），且$\overrightarrow{AP}$：$\overrightarrow{PB}$=λ，那么我们说P分有向线段$\overrightarrow{AB}$的比为λ.

$\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}}=\lambda$；$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$；$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$.

当P为内分点时，λ>0；当P为外分点时，λ<0（$\lambda\neq 1$）；当P与A重合时，λ=0；当P与B重合时，λ不存在.

第二节 直线方程

1. 倾斜角、斜率、截距

（1）倾斜角

直线与 x 轴正方向所成的夹角，称为倾斜角，记为α. 其中$\alpha\in[0，\pi)$.

（2）斜率k

倾斜角的正切值为斜率，记为$k=\tan\alpha,\left(\alpha\neq\frac{\pi}{2}\right)$. $k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$.

（3）x轴上的截距：a

（4）y轴上的截距：b

2. 直线方程的求法

（1）可令所求直线方程为：$y=kx+b$（标准式）

（2） $Ax+By+C=0$（一般式）$\Rightarrow y=-\dfrac{A}{B}x-\dfrac{C}{B}$

3. 两直线的位置关系

位置关系	一般式 $l_1:A_1x+B_1y+C_1=0$ $l_2:A_2x+B_2y+C_2=0$	斜截式 $l_1:y=k_1x+b_1$ $l_2:y=k_2x+b_2$
平行	$\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}\neq\dfrac{C_1}{C_2}$	$k_1=k_2, b_1\neq b_2$
重合	$\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$	$k_1=k_2, b_1=b_2$
相交	$\dfrac{A_1}{A_2}\neq\dfrac{B_1}{B_2}$	$k_1\neq k_2$
垂直	$A_1A_2+B_1B_2=0$	$k_1k_2=-1$

4. 两直线夹角公式

设两条直线l_1，l_2的斜率分别为k_1，k_2，且$k_1k_2\neq-1$，直线l_1（逆时针旋转）到l_2的角为θ（$\theta\in[0,\pi)$），则 $\tan\theta=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$；直线$l_1$，$l_2$的夹角为θ（$\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$），则 $\tan\theta=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|$.

5. 点到线的距离

（1）点在线上：点的坐标满足直线方程，代入成立.

（2）点在线外：点的坐标不满足直线方程，代入不成立.

设直线l方程为$Ax+By+C=0$，$P(x_0,y_0)$，则点P到直线l的距离为$d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

第三节 圆方程

1. 定义

动点$P(x，y)$到定点$O(m，n)$距离等于定长的轨迹. $|PO|=\sqrt{(x-m)^2+(y-n)^2}=R$.

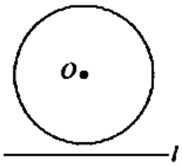
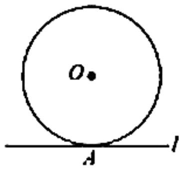
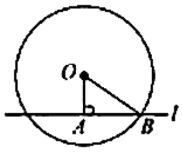
2. 圆的一般方程

$x^2+y^2+ax+by+c=0$.

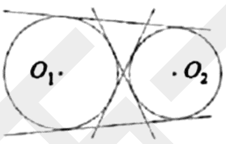
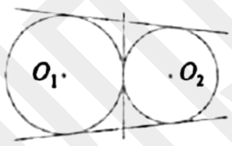
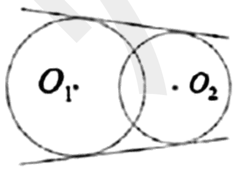
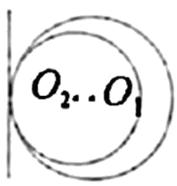
3. 点和圆的位置关系

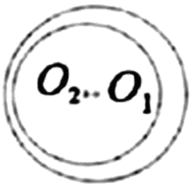
点 $P(x_p,y_p)$，圆 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$，则 $(x_p-x_0)^2+(y_p-y_0)^2\begin{cases}<r^2,\text{点在圆内.}\\=r^2,\text{点在圆上.}\\>r^2,\text{点在圆外.}\end{cases}$

4. 直线和圆的位置关系

直线与圆的位置关系	图形	几何意义	代数意义
相离		$d>r$	$\begin{cases} y=kx+b \\ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2 \end{cases}$ 无实数根，即 $\Delta<0$
相切		$d=r$	$\begin{cases} y=kx+b \\ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2 \end{cases}$ 有两个相等实数根，即 $\Delta=0$
相交		$d<r$	$\begin{cases} y=kx+b \\ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2 \end{cases}$ 有两个不相等实数根，即 $\Delta>0$

5. 圆和圆的位置关系

两圆位置关系	图形	成立条件（几何表示）	公共内切线条数	公共外切线条数
外离		$d>r_1+r_2$	2	2
外切		$d=r_1+r_2$	1	2
相交		$r_1-r_2<d<r_1+r_2$	0	2
内切		$d=r_1-r_2$	0	1

两圆位置 关系	图形	成立条件 （几何表示）	公共内切线 条数	公共外切线 条数
内含		$d < r_1 - r_2$	0	0

第八章 排列组合与二项式定理

第一节 排列组合

（一）两个基本定理

1. 加法原理

做一件事，完成它有n类办法，在第一类办法中有m_1种不同的方法，在第二类办法中有m_2种不同的方法，……，在第n类办法中有m_n种不同的方法，那么完成这件事共有 $N=m_1+m_2+\cdots+m_n$种不同的方法.

2. 乘法原理

做一件事，完成它需要分成n个步骤，做第一步有m_1种不同的方法，做第二步有m_2种不同的方法，……，做第n步有m_n种不同的方法，那么完成这件事共有 $N=m_1\times m_2\times\cdots\times m_n$种不同的方法.

（二）排列

1. 排列的定义

从n个不同元素中，任意取出m（$m\leqslant n$）个元素，按照一定的顺序排成的一列，叫做从n个不同元素中任取m个元素的一个排列. 注意这里的m，n都为自然数.

显然，含有相同元素，且元素排列顺序完全相同的两个排列是同一个排列.

2. 排列数公式

从n个不同元素中任取m（$m\leqslant n$）个元素的所有排列的总数，叫做从n个不同元素中任取m（$m\leqslant n$）个元素的排列数，用符号P_n^m表示. 当$m=n$时，即从n个不同元素中任取n个元素的排列，叫做n个元素的全排列，也叫做n的阶乘，用符号$n!$表示. 注意这里的m，n都为自然数.

排列数公式：$P_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$；

$P_n^m=\dfrac{n!}{(n-m)!}$；$P_n^n=n!$.

【注意】$P_n^0=1$，$n!=1\times2\times3\times\cdots\times n$，规定$0!=1$.

【归纳】常见排列问题（有序的）：①站成一排. ②数字问题. ③循环赛.

（三）组合

1. 组合的定义

从n个不同元素中，任意取出m（$m\leqslant n$）个元素并成一组，叫做从n个不同元素中任取m个元素的一个组合. 注意这里的m，n都为自然数.

显然，含有相同元素的两个组合是同一个组合.

2. 组合数公式

从n个不同元素中任取m（$m\leqslant n$）个元素的所有组合的总数，叫做从n个不同元素中任取m（$m\leqslant n$）个元素的组合数，用符号C_n^m表示. 注意这里的m，n都为自然数.

组合数公式：$C_n^m=\frac{P_n^m}{P_m^m}=\frac{P_n^m}{m!}=\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}=\frac{n!}{m!(n-m)!}$.

规定：$C_n^0=1$，$C_n^n=1$.

【归纳】常见组合问题（无序）：①点、线、面. ②抽取产品. ③单循环赛（淘汰赛）.

3. 组合数的性质

（1）$C_n^m=C_n^{n-m}$

注意这里的m，n都为自然数. 两边下标同，上标之和等于下标，则两式相等.

（2）$C_n^x=C_n^y\Rightarrow x=y$ 或 $x+y=n$

（3）$C_n^m+C_n^{m-1}=C_{n+1}^m$

（4）$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n$

（5）$C_n^0+C_n^2+C_n^4+\cdots=2^{n-1}$（偶数项的和）

（6）$C_n^1+C_n^3+C_n^5+\cdots=2^{n-1}$（奇数项的和）

【注意】$P_n^m=m!C_n^m$.

第二节 二项式定理

（一）二项式定理

$(a+b)^n=\sum_{r=0}^{n}C_n^r a^{n-r}b^r$，二项式定理的右式叫做$(a+b)^n$的二项展开式，共有$n+1$项.

（二）二项展开式的通项公式

$T_n(r+1)=C_n^r a^{n-r}b^r(0\le r\le n,r\in Z)$，其中$C_n^0,C_n^1,C_n^2,\cdots,C_n^n$叫做展开式中各项的二项式系数.

（三）二项式系数的性质

1. $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n$

2. 展开式中存在二项式系数最大项

当$n=2k$，即有偶数项时，展开式的中间一项的二项式系数最大，即$T_n(k+1)=C_n^k a^{n-k}b^k$

的二项式系数最大.

当$n=2k+1$,即有奇数项时,展开式中间两项的二项式系数相等且最大,即为$T_n(k+1)=C_n^k a^{n-k} b^k$,$T_n(k+2)=C_n^{k+1} a^{n-k-1} b^{k+1}$,且这两项的二项式系数相等,即$C_n^k=C_n^{k+1}$($n=2k+1$).

第九章 概率

第一节 集合与事件

（一）集合的有关概念

1.集合的概念

集合：把一些能确定的对象看成一个整体，就说这个整体是由这些对象组成的一个集合.构成集合的每个对象叫做这个集合的元素.

2.常用数集及记法

非负整数集（自然数集）：全体非负整数的集合，记作 N.

正整数集：非负整数集内排除 0 的集合，记作 N^+.

整数集：全体整数的集合，记作 Z.

有理数集：全体有理数的集合，记作 Q.

实数集：全体实数的集合，记作 R.

空集：不含有任何元素的集合，记作∅.

3.元素与集合的关系

属于：如果a是集合 A 的元素，就说a属于 A，记作$a\in A$.

不属于：如果a不是集合 A 的元素，就说a不属于 A，记作$a\notin A$.

4.集合中元素的特性

确定性：按照明确的判断标准，给定一个元素或者在这个集合里或者不在，不能模棱两可（无法肯定）.

互异性：集合中的元素没有重复.

无序性：集合中的元素没有一定的顺序.

5.集合间的关系

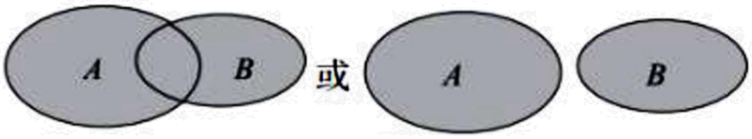
（1）对于两个集合 A，B，若任意$a\in A$，都有$a\in B$，则称集合 A 被集合 B 所包含（或集合 B 包含集合 A），记作 $A\subseteq B$，或 $B\supseteq A$，此时称集合 A 是集合 B 的子集.空集是任何集合的子集，即有$\varnothing\subseteq A$（特别地，$\varnothing\subseteq\varnothing$）.

（2）若 AB，且存在$a\in B$但$a\notin A$，则称集合 A 是集合 B 的真子集，记作 $A\subset B$，或 $B\supset A$.

【注意】若 $A\subseteq B$，则集合 A 是集合 B 的充分条件，反之不成立.

6.集合的运算

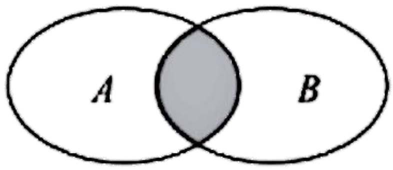
（1）并集：由集合 A，B 的所有元素组成的集合，叫做集合 A，B 的并集，记作 $A\cup B$，常写作 A＋B.用图表示如下（阴影部分表示）：



两个集合 A，B 并集的运算有下列性质：

$A\cup B=B\cup A$，$A\cup A=A$，$A\cup\varnothing=A$.

（2）交集：由属于集合 A 且属于集合 B 的所有元素组成的集合，叫做集合 A，B 的交集，记作 $A\cap B$，常写作 AB.用图表示如下（阴影部分表示）：



两个集合 A，B 交集的运算有下列性质：

$A\cap B=B\cap A$，$A\cap A=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$.

（3）补集：若集合 A 是集合 I 的一个子集，由集合 I 中所有不属于集合 A 的元素组成的集合，叫做集合$\overline{A}$在集合 I 中的补集，记作 A，其中集合 I 叫做全集.用图表示如下（阴影部分表示）：

补集的运算有下列性质：

$A\cup\overline{A}=I$，$A\cap\overline{A}=\varnothing$，$\overline{\overline{A}}=A$，$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

（二）必然事件、不可能事件与随机事件

在一定的条件下必然发生的事件叫做必然事件，如“在标准大气压下，水的温度达到 100°C 时沸腾”，这是必然事件.

在一定的条件下不可能发生的事件叫做不可能事件，如“在常温下，铁熔化”，这就是不可能事件.

在一定的条件下可能发生也可能不发生的事件叫做随机事件，如“掷一枚硬币，正面向上”，就是随机事件.

我们常用大写英文字母 A，B，C，…表示事件，如设“掷两枚均匀的硬币，至少有一枚正面向上”为事件 A.

以下均是随机事件的例子：

某射手发射一发子弹，命中环数是 10 环；

某电话总机在一小时内接到少于 50 次呼叫；

从一批灯泡中任取一只，测试出其寿命大于 1 000 小时.

在随机事件中，有些事件可以看成是某些事件组合而成的，而有些事件则不能分解为其他

事件的组合.不能分解为其他事件组合的最简单事件称为基本事件.例如,在掷一个骰子的试验中，其出现的点数“1点”“2点”“3点……6点”都是基本事件.“奇数点”也是随机事件，但不是基本事件，它是由“1点”“3点”“5点”这三个基本事件组成的，只要这三个基本事件中的一个发生了，随机事件“奇数点”就发生了.

在一次试验中，事件A发生的含义是，当且仅当A中的某一个基本事件发生，事件A发生也称为事件A出现.

（三）事件的特性

1.互斥(互不相容）事件：在一次试验中，有两个事件A和B，若其中一个出现，便排斥另一个事件的出现，称这两个事件是互斥的，否则称这两个事件是相容的.

例如，掷一个骰子的试验.设事件A：出现1点或5点；事件B：出现2点或3点；事件C：出现偶数点；事件D：出现奇数点.显然，事件A与B是互斥的，事件C与D也是互斥的，事件A与D是相容的，事件B与C是相容的.

2.等可能事件：在试验中，有n个事件A，A_1，……，A_n，如果各事件A，发生的可能性都相等，则称这n个事件是等可能的.

例如，掷骰子试验中事件C和事件D是等可能的.

再例如，对于掷硬币试验，事件“正面朝上”和事件“正面朝下”是等可能的.

3.完备事件组：在试验中，有n个事件A_1，A_2，……，A_n，如果试验结果至少为其中之一，则称这n个事件对于这个试验是完备的.

例如：在前面举例中掷骰子的试验中，事件A，B，C对于这个试验是完备的.

（四）样本空间

样本空间是指由试验的全部事件构成的集合.由于任何一次试验的结果必然会有一个基本事件出现，因此，样本空间作为一个事件就是必然事件，用Ω表示.每一个基本事件称为样本空间的一个样本点.

事件A发生，就是事件A中包含的样本点在试验中出现.由于不可能事件不包含任何样本点，所以不可能事件就是空集.

例如：掷一枚硬币两次，观察什么面朝上，要求考虑顺序.

这个试验的样本空间为L＝{（正，正），（正，反），（反，正），（反，反）}.

（五）事件间的关系及其运算

在一个样本空间中，可以定义多个事件，在概率论中常要讨论不同事件之间的关系和运算.因为基本事件、样本空间可以看成元素、集合，所以用集合的观点来解决这部分问题，更简洁直观通常用几何图形来表示.

（1）包含关系

如果事件 A 的每一个样本点都包含在事件 B 中. 或者事件 A 发生必然导致事件 B 发生，称事件 B 包含事件 A，或称事件 A 包含于事件 B 中，记作 A⊂B 或 B⊃A.

【注意】$A \subseteq A$

（2）相等关系

如果事件 A 包含事件 B，事件 B 也包含事件 A，则称事件 A 与事件 B 相等，即 A 与 B 中的样本点完全相同，记作 A＝B.

（3）事件的并（和）

两个事件 A、B 中至少有一个发生，这是一个事件，称为事件 A 与事件 B 的并. 它是由事件 A 和 B 中的所有样本点构成的集合，记作 A∪B 或 A＋B.

（4）事件的交（积）

两个事件 A 与 B 同时发生，这是一个事件，称为事件 A 与事件 B 的交. 它是由既属于 A 又属于 B 的所有公共样本点构成的集合，记作 A∩B 或 AB.

（5）对立事件

事件“非 A”，称为事件 A 的对立事件或逆事件. 它是由样本空间中所有不属于 A 的样本点构成的集合，记作 A.

（6）事件的差

事件 A 发生而事件 B 不发生，这是一个事件，称为事件 A 与事件 B 的差. 它是由属于 A 而不属于 B 的样本点构成的集合. 记作 A－B.

（7）互不相容事件

若事件 A 与事件 B 不能同时发生，则称事件 A 与事件 B 是互斥的，或称它们是互不相容的.

事件运算的一些性质：

①交换律：A∪B＝B∪A，AB＝BA，A＋B＝B＋A.

②结合律：A∪（B∪C）＝（A∪B）∪C，A（BC）＝（AB）C.

③分配律：（A∪B）C＝AC∪BC，（AB）∪C＝（A∪C）（B∪C）.

④德摩根律：A∪B＝A∩B，A∩B＝A∪B. $\Rightarrow \overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$或$\overline{A}+\overline{B}=\overline{AB}$.

第二节 古典概率

（一）古典概率

重复同一试验，若进行n次试验，事件 A 发生了k次，则称$\frac{k}{n}$为事件 A 发生的频率在大量重复同一试验时，事件 A 发生的频率$\frac{k}{n}$将趋近于某个常数，我们就把这个常数叫做事件 A 的概率，记作 P（A）. 事件 A 的概率的定义也可表述为：设随机试验 T 满足下列条件：它的样本空间含

有有限个（n个）样本点，每个样本点发生是等可能的，称此试验为古典概型试验.对于任意事件 A，若 A 包含k个样本点（$k\leqslant n$），则比值$\frac{k}{n}$称为事件 A 的概率，即事件 A 发生的可能性，记为 P（A），即 P（A）$=\frac{k}{n}$.

$$P(A)=\frac{\text{事件}A\text{包含的基本事件数}k}{\text{样本空间中基本事件总数}n}$$

概率 P（A）具有如下性质：

1.任何事件 A 的概率 P（A）必定是[0，1]中的一个数值，即 0≤P（A）≤1.

2.P（Ω）=1，P（∅）=0.

3.对任意两个事件 A，B，有 P（A∪B）=P（A）+P（B）−P（AB），P（A+B+C）=P（A）+P（B）+P（C）−P（AB）−P（BC）−P（AC）+P（ABC）.

4.若事件A_1，A_2，……，A_n.两两互斥，则有 P（$A_1+A_2+\cdots+A_n$）=P（A_1）+P（A_2）+…+P（A_n）.

5.P（$\overline{A}$）=1−P（A）.

（二）概率的加法公式

根据概率的性质，若事件A_1，A_2，……，A_n.两两互斥，则有 P（$A_1+A_2+\cdots+A_n$）=P（A_1）+P（A_2）+…+P（A_n），此式称为概率的加法公式.

（三）独立事件

1.独立事件

如果两事件中任一事件的发生不影响另一事件的概率，则称这两事件是相互独立的.

2.定义

若 P（AB）=P（A）P（B），则称两事件 A 和 B 是相互独立的.可将其理解为相互独立事件同时发生的概率，即 P（A•B）=P（A）•P（B）.

3.常用结论

（1）如果事件A_1，A_2，……，A_n相互独立，那么这n个事件同时发生的概率，等于每个事件发生的概率的积，即 P（$A_1A_2\cdots A_n$）=P（A_1）P（A_2）…P（A_n）.

（2）如果事件A_1，A_2，……，A_n相互独立，那么这n个事件都不发生的概率，等于每个事件不发生的概率的积，即 P（$\overline{A_1A_2\cdots A_n}$）=P（$\overline{A_1}$）P（$\overline{A_2}$）…P（$\overline{A_n}$）.

（3）如果事件A_1，A_2，……，A_n相互独立，那么求这n个事件至少有一个发生的概率，可以从其反面求解，即先求A_1，A_2，……，A_n都不发生的概率，即每个事件不发生的概率的积，故有 P（$A_1+A_2+\cdots+A_n$）=1−P（$\overline{A_1}$）P（$\overline{A_2}$）…P（$\overline{A_n}$）.

【注意】独立与互斥的区别：两事件 A，B 独立，则常有 AB≠∅，即 A 与 B 非互斥；事实

上，若 A 与 B 互斥，则 P（AB）＝0，而当 P（A）＞0，P（B）＞0 时，P（A）P（B）＞0，可知 P（AB）≠P（A）P（B）. 因此两事件互斥并不能得出这两个事件就独立的结论. 互斥事件与相互独立事件研究的都是两个事件的关系，但互斥的两个事件是一次试验中的两个事件，相互独立的两个事件是在两次试验中得到的，注意区别.

第三节 二项分布求概率

（一）独立重复试验

在相同条件下，将某试验重复进行n次，且每次试验中任何一事件的概率不受其他次试验结果的影响，此种试验称为n次独立重复试验.

（二）伯努利定理（二项分布）

在一次试验中，事件 A 发生的概率为 $p(0<p<1)$，则在 n 次独立重复试验中，事件 A 恰好发生 k 次的概率为：$p_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},(k=0,1,2,\ldots,n)$.

或可表示为 $p_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k},(k=0,1,2,\ldots,n)$ 其中$q=1-p$.