



# HEMS inductance estimation (report)

Levitation subsystem - Dynamics

WRITTEN BY	Ferran de Andrés
REVIEWED BY	Javier Luján Federico Lluesma
LAST UPDATED	12/01/2022
LAST REVIEWED	12/01/2022



# Índice:

<b>1.- Introducción</b>	<b>2</b>
<b>2.- Metodología</b>	<b>3</b>
<b>3.- Resultados</b>	<b>8</b>
3.1.- Estimación de la inductancia	8
3.2.- Modelos	9
3.1.- Look-up table	9
3.2.- Modelo no-lineal (sigmoid - tanh)	9
3.3.- Modelo escalón	11
<b>4.- Conclusiones</b>	<b>12</b>
<b>5.- Referencias</b>	<b>14</b>



# 1.- Introducción

El objetivo del presente estudio es estimar la inductancia y su variación en función de la intensidad y el air gap. Se parte de una base de datos (considerados de alta fidelidad) procedentes de un *megabarrido* mediante el software JMAG desarrollada por el subsistema de propulsión.

El resto de documentos/archivos que complementan a este son los siguientes:

- [01. Archivo de versiones](#): archivo de versiones del modelo. Cada carpeta (subida también a la NAS<sup>1</sup>) contiene:
  - Carpeta *lib*, siendo ésta la librería de funciones desarrolladas.
  - Carpeta *plots*, con *scripts* utilizados para la creación de los documentos, con algunas funciones interesantes que se pueden utilizar en el futuro. Carpeta *old*, con los archivos de versiones anteriores.
  - Carpeta *figures*, con las versiones vectorizadas o en alta calidad de las figuras presentadas en este documento.
  - *data.mat* → Base de datos actualizada en formato MATLAB *struct*, con los siguientes datos:
    - *air\_gap* (1x49 *double*)
    - *current* (1x33 *double*)
    - *force* (49x33 *double*)
    - *magnetic\_flux* (49x33 *double*)
    - *inductance* (49x31 *double*)<sup>2</sup> → Resultado del estudio
  - *model\_fit.sfit* → sesión de la herramienta *Curve Fitting* utilizada en el estudio.
  - *main.m* → script principal (y el único que se debería abrir).

---

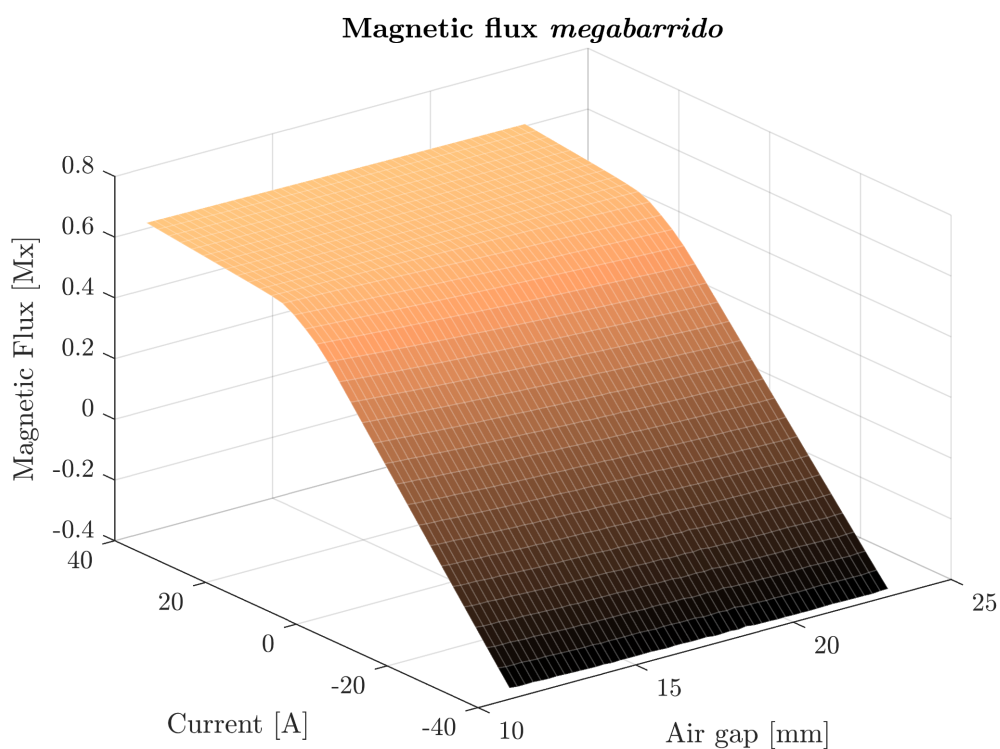
<sup>1</sup> Z:\H7\2. Ingeniería\00. Dynamics\2. Inductance analysis (HEMS)

<sup>2</sup> Cuenta con 2 columnas menos debido a el uso de los contornos en el método numérico desarrollado en la metodología

## 2.- Metodología

Atendiendo a la literatura [1] la inductancia es la relación entre la variación infinitesimal del flujo magnético y la variación infinitesimal de la corriente que produce este flujo (i.e. la derivada del flujo magnético con respecto a la corriente). Las unidades de inductancia son Henrys (H).

Teniendo el mapa del flujo magnético en función de la corriente y el air gap (véase **Figura 1**), se pretende estimar la inductancia aproximando el operador diferencial.



**Figura 1.** Flujo magnético en función de intensidad y air gap obtenido del *megabarrido*

Por tanto, el objetivo es el de aproximar el operador diferencial, tal que

$$\frac{d\Phi(i)}{di} \approx D\Phi(i),$$

donde  $D$  es la discretización<sup>3</sup> del diferencial.

---

<sup>3</sup> Aproximación numérica



**Si no te interesa el detalle de la derivación numérica, pincha [aquí](#).**

Según el teorema de expansión de Taylor, para una función cualquiera  $u$  con un paso  $h$ :

$$u(x+h) = \sum_{\alpha=1}^n \frac{D^{\alpha}u(x)}{\alpha!} h^{\alpha} + R,$$

donde el error  $R$  es

$$R = \frac{u^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} h^{n+1}.$$

Olvidando por un momento la física y las características específicas del presente estudio (con un pasos de corriente y air gap constantes), se considera interesante desarrollar la discretización del operador diferencial generalizado para cualquier tipo de malla (es decir, para pasos no-constantes).

En este caso general, el teorema de expansión de Taylor se puede reformular tal que

$$u(x_{i+1}) = \sum_{\alpha=1}^n \frac{D^{\alpha}u(x_i)}{\alpha!} h_{i+1}^{\alpha} + R_i,$$

donde el error  $R_i$  es

$$R_i = \frac{u^{(n+1)}(\xi_i)}{(n+1)!} h_{i+1}^{n+1}.$$

En este caso general,  $h_i$  representa el *backstep*, y  $h_{i+1}$  el *forwardstep*, tal que

$$\begin{aligned} h_i &= x_i - x_{i-1} \\ h_{i+1} &= x_{i+1} - x_i \end{aligned}$$

Se desarrolla un operador diferencial con la forma

$$Du(x_i) = \alpha_i u(x_{i-1}) + \beta_i u(x_i) + \gamma_i u(x_{i+1})$$



ya que, tal y como se comprobará más adelante en este documento, se trata de un operador con un factor de convergencia cuadrático  $\mathcal{O}(h^2)$  (mientras que otros operadores usados normalmente presentan un error proporcional a  $\mathcal{O}(h)$  [2]).



Aplicando el teorema de expansión de Taylor se obtiene

$$u'(x_i) \approx \alpha_i \left[ u(x_i) - h_i u'(x_i) + \frac{1}{2} h_i^2 u''(x_i) \right] + \beta_i u(x_i) + \gamma_i \left[ u(x_i) + h_{i+1} u'(x_i) + \frac{1}{2} h_{i+1}^2 u''(x_i) \right].$$

Reordenando la última expresión en términos de las derivadas y asumiendo que el error se calculará en una parte posterior de este desarrollo:

$$u'(x_i) = (\alpha_i + \beta_i + \gamma_i)u(x_i) + (-h_i\alpha_i + h_{i+1}\gamma_i)u'(x_i) + \left( \frac{1}{2}h_i^2\alpha_i + \frac{1}{2}h_{i+1}^2\gamma_i \right) u''(x_i),$$

y en este punto ya podemos calcular los coeficientes, es decir

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -h_i & 0 & h_{i+1} \\ \frac{1}{2}h_i^2 & 0 & \frac{1}{2}h_{i+1}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \\ \gamma_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

lo cual tiene como resultado

$$\begin{cases} \alpha_i = -\frac{h_{i+1}}{h_i H_i} \\ \beta_i = \frac{h_{i+1}^2 - h_i^2}{h_i h_{i+1} H_i} \\ \gamma_i = \frac{h_i}{h_{i+1} H_i} \end{cases},$$

donde

$$H_i = h_i + h_{i+1}.$$



El error general de este método se puede calcular como

$$|R_i| = \left| D^{(a)} u(x_i) - u'(x_i) \right| = |\alpha_i \left( u(x_i) - h_i u'(x_i) + \frac{1}{2} h_i^2 u''(x_i) - \frac{1}{3!} h_i^3 u'''(x_i) + \dots \right) + \beta_i u(x_i) + \gamma_i \left( u(x_i) + h_{i+1} u'(x_i) + \frac{1}{2} h_{i+1}^2 u''(x_i) + \frac{1}{3!} h_{i+1}^3 u'''(x_i) + \dots \right) - u'(x_i)|.$$

Teniendo en cuenta el sistema de ecuaciones resuelto en la primera expresión de la [página 5](#), y sustituyendo los coeficientes por los obtenidos, la expresión del error se puede simplificar tal que

$$|R_i| = \left| -\frac{1}{3!} \alpha_i h_i^3 u^{(3)}(\xi_1) + \frac{1}{3!} h_{i+1}^3 u^{(3)}(\xi_2) \right|,$$

lo cual puede ser expresado como

$$\begin{aligned} |R_i| &= \left| \frac{1}{6} \frac{h_i h_{i+1}}{H_i} \left( h_i u^{(3)}(\xi_1) + h_{i+1} u^{(3)}(\xi_2) \right) \right| \leq \\ &\left| \frac{1}{6} \frac{h_i h_{i+1}}{H_i} \max(h_i, h_{i+1}) \left( u^{(3)}(\xi_1) + u^{(3)}(\xi_2) \right) \right| \leq \\ &\left| \frac{1}{3} \frac{h_i h_{i+1}}{H_i} \max(h_i, h_{i+1}) \max_{\xi \in [h, 1-h]} (u^{(3)}(\xi)) \right|, \end{aligned}$$

y, en consecuencia,

$$R_i = O(h^2) \quad \blacksquare$$

Por tanto, el operador diferencial discretizado, generalizado para cualquier tipo de malla y con un error proporcional al paso al cuadrado, se puede expresar como





$$D \cdot \begin{bmatrix} u(x_1) \\ \vdots \\ u(x_{N-1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_i & \beta_i & \gamma_i & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & & 0 & \alpha_i & \beta_i & \gamma_i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u(x_0) \\ \vdots \\ u(x_N) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N-2}$$

donde los parámetros *alpha*, *beta* y *gamma* se han calculado previamente. Las condiciones de contorno del sistema se pueden añadir como una fuente externa, de manera que la matriz principal se pueda expresar como una matriz tridiagonal dispersa, mejorando la eficiencia de cálculo y almacenamiento de la misma y aportando escalabilidad a la función. Este paso se puede observar en la **Figura 2**.

$$D \cdot \begin{bmatrix} u(x_1) \\ \vdots \\ u(x_{N-1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_i & \gamma_i & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_i & \beta_i & \gamma_i & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & & \gamma_i \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_i & \beta_i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u(x_1) \\ \vdots \\ u(x_{N-1}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_i u(x_0) \\ \vdots \\ \gamma_i u(x_N) \end{bmatrix}$$

Matriz tridiagonal  
dispersa (N-2)x(N-2)

Vector de contorno  
(sólo el elemento #1 y  
último son no-zero)

Sistema equivalente al anterior pero tratando con matrices dispersas y cuadradas  
(todo ventajas)

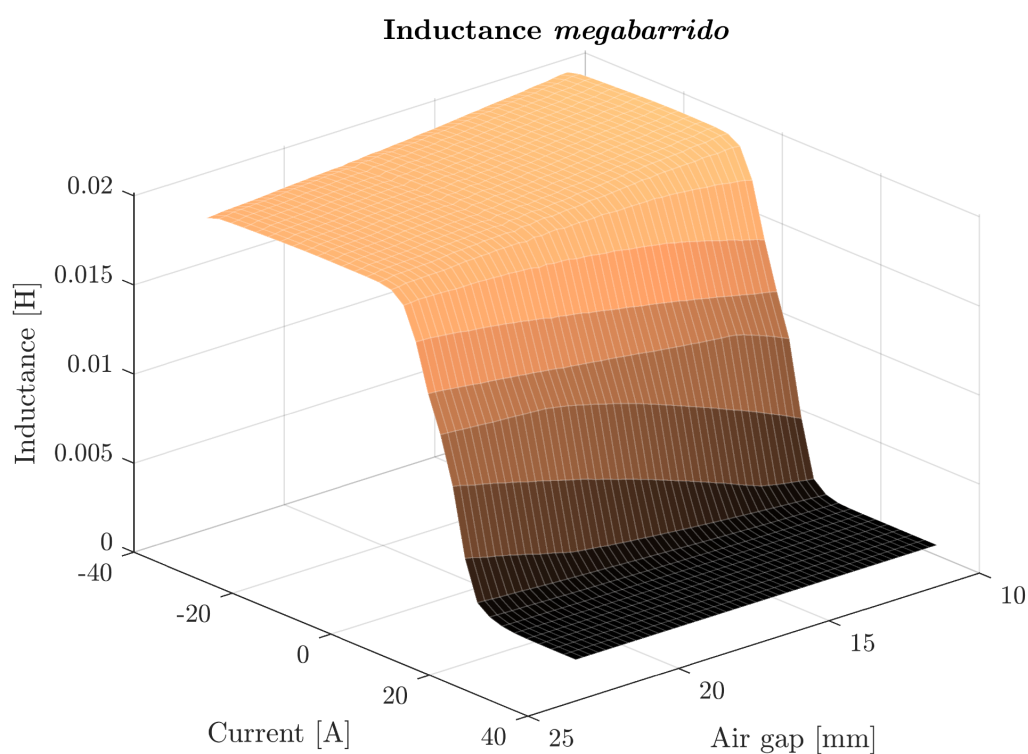
**Figura 2.** Esquema del operador diferencial desarrollado usando la matriz reducida con los contornos por separado.

## 3.- Resultados

En esta sección se presentan los resultados de la estimación de la inductancia, y se proponen varios modelos para tenerla en cuenta en los modelos dinámicos y algoritmos de control del equipo.

### 3.1.- Estimación de la inductancia

En la **Figura 3** se puede observar el resultado de la estimación de la inductancia como la derivada del flujo magnético mediante la metodología descrita.



**Figura 3.** Inductancia en función de intensidad y air gap obtenido a partir de la derivada numérica del flujo magnético (véase **Figura 1**)



## 3.2.- Modelos

Para el manejo de los resultados se proponen varias opciones, desde el uso de una lookup table directamente con los datos obtenidos, hasta modelos de aproximación de dichos datos (lectura interesante para la elección de modelos en las **diapositivas 18 a 20 del modelo dinámico**)

### 3.1.- Look-up table

La estructura de datos '*data.mat*' descrita en la introducción de este documento contiene una matriz con los resultados de la derivada del flujo magnético con la corriente.

Esta matriz, representada en la **Figura 3**, se puede utilizar como una lookup table (LUT), reemplazando la evaluación de la inductancia en función de la intensidad en tiempo real por una operación de indexación de matrices sencilla y barata.

### 3.2.- Modelo no-lineal (sigmoid - tanh)

Observando la **Figura 3**, se puede ver una función similar a un *sigmoide* o *tangente hiperbólica* en función de la intensidad. Estas son funciones muy utilizadas en análisis de datos puesto que se utilizan como funciones de activación no-lineal de redes neuronales.

En cuanto al air gap, en primera aproximación se ve un comportamiento cuasi constante. Aun así, se partirá con la hipótesis de que esta relación es lineal.

Se busca, por tanto, una función del tipo

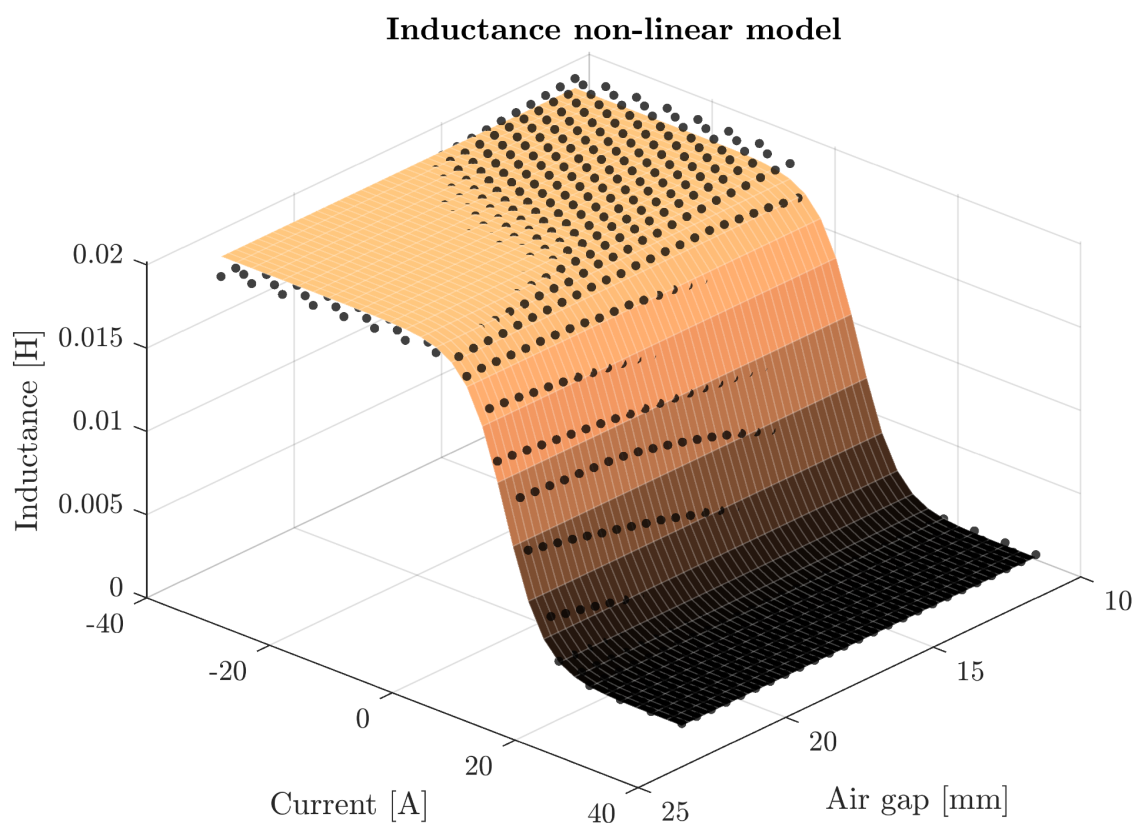
$$a \cdot \tanh(b \cdot I + c) + d \cdot x_{\text{air gap}} + e$$

donde los parámetros de la *a* a la *e* deben ser entrenados con los datos obtenidos. Se utiliza una partición del 80% de los datos para entrenamiento del modelo y 20% para validación.

El modelo obtenido se puede observar en la **Figura 4** sobrepuesto a los datos originales, y consta con los siguientes parámetros:

$a = -0.008752,$   
 $b = 0.1609,$   
 $c = 1.389,$   
 $d = 0,$   
 $e = 0.01042.$

.Es de destacar que, aunque se ha forzado al modelo a buscar una relación lineal con el air gap, el resultado con menor error tras el entrenamiento del mismo es aquel en el que no existe dicha relación, es decir, **la inductancia se asume que no es función del air gap.**



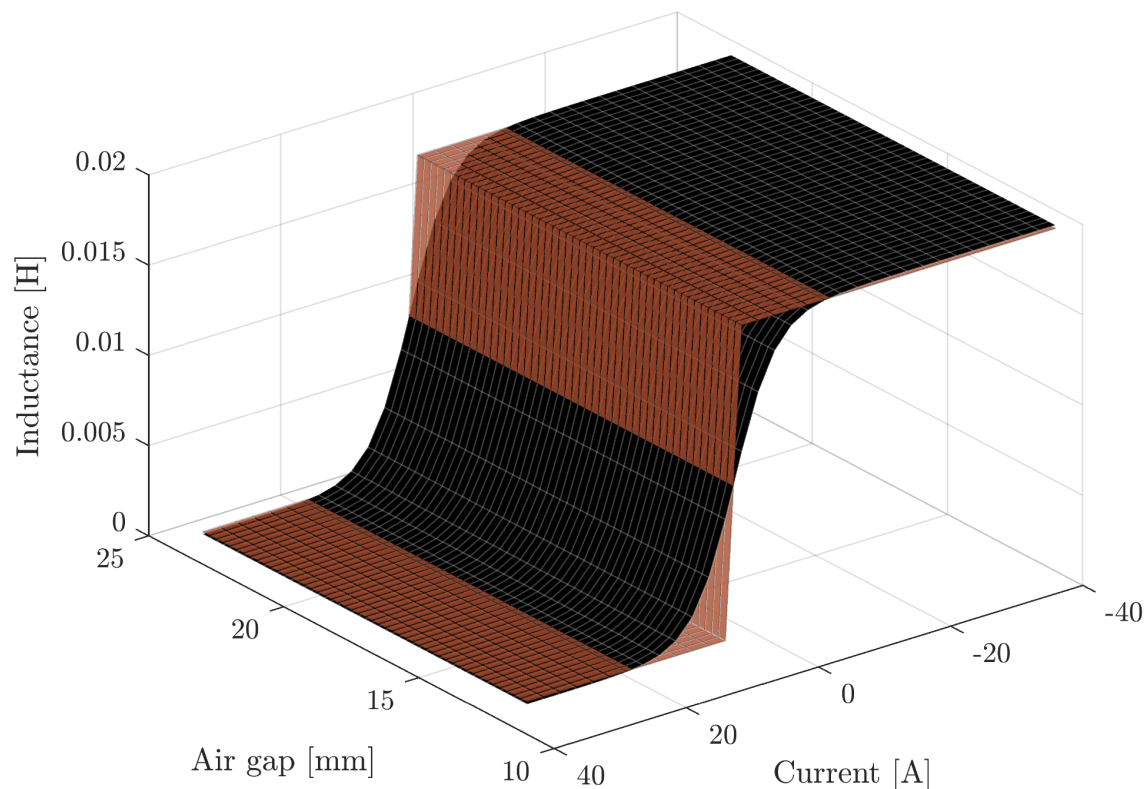
**Figura 4.** Modelo no-lineal de la inductancia en función de intensidad y air gap (superficie) sobrepuesto a los datos reales (puntos negros)

### 3.3.- Modelo escalón

En la mayoría de publicaciones científicas consultadas se asume que se trabaja en todo momento en condiciones de operación lejanas de la zona de saturación, y se considera la inductancia como constante.

Esto motiva a pensar que un modelo tipo escalón puede inducir un error asumible, a la vez que simplifica mucho la formulación del modelo con respecto al descrito en la [Sección 3.2](#).

En la [Figura 5](#) se pueden observar ambos modelos superpuestos.

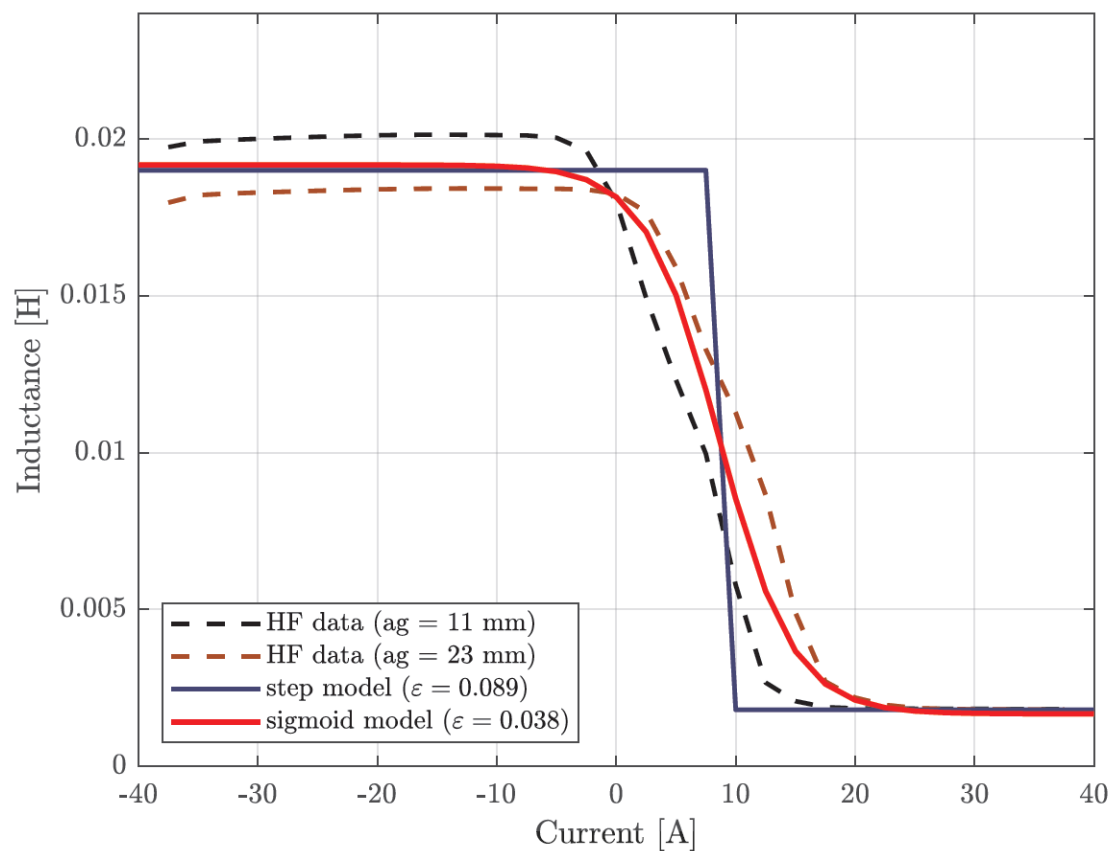


**Figura 5.** Modelo basado en escalón (en ocre) y modelo basado en sigmoides (en negro) de la inductancia en función de intensidad y air gap

## 4.- Conclusiones

La primera conclusión importante derivada del estudio es que la dependencia de la inductancia con el air gap es despreciable.

Asumiendo esto, en la **Figura 6** se presenta el valor máximo y mínimo de la inductancia calculado mediante la metodología numérica descrita, así como los dos modelos propuestos.



**Figura 6.** Inductancia en función de la corriente. En líneas discontinuas, los valores calculados a partir del flujo magnético. El error (epsilon) de los modelos *step* y *sigmoid* es el error cuadrático relativo en tanto por uno

A nivel teórico, el modelo de la tangente hiperbólica es el más interesante, puesto que presenta un error mínimo (error cuadrático relativo del 3%), y permite una representación continua y no discreta de la inductancia en función del air gap y la corriente en el rango de funcionamiento.



En la mayoría de publicaciones científicas consultadas se asume que se trabaja en todo momento en condiciones de operación lejanas de la zona de saturación, y se considera la inductancia como constante, lo que motiva a pensar que el modelo escalón (con un error cuadrático relativo del 9%) es una buena opción.

A nivel computacional y para la implementación de esta relación en el algoritmo de control, la solución más eficiente acarreado un error menor que asumir la inductancia como constante es utilizar la matriz de inductancia presentada en la **Figura 3** y en la estructura de datos *data.mat* como una lookup table.



## 5.- Referencias

[1] Y. Singh. *Electromagnetic Field Theory* (2011). Accessible [here](#).

[2] F. de Andrés. *Lecture notes of the course Advanced Numerical Mathematics II (lectured by Dr. Volker Mehrmann)* (2021). Accessible [here](#).