

ХАОТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА В ФИЗИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ СО СТРАННЫМ АТТРАКТОРОМ ТИПА СМЕЙЛА – ВИЛЬЯМСА

С. П. Кузнецов, Е. П. Селезнев

*Институт радиотехники и электроники РАН,
Саратовский филиал*

Предложена и реализована в эксперименте неавтономная нелинейная система, которая при описании в терминах четырехмерного отображения Пуанкаре характеризуется наличием гиперболического странного аттрактора типа Смейла – Вильямса. Система построена на основе двух связанных осцилляторов Ван-дер-Поля, у которых характерные частоты отличаются вдвое, а параметр, управляющий бифуркацией рождения предельного цикла, подвергается медленному периодическому изменению в обоих осцилляторах в противофазе, так что реализуется эстафетная передача возбуждения от одного осциллятора к другому по очереди. Качественно поясняются механизм функционирования системы и причины возникновения хаоса. Сформулирована система дифференциальных уравнений и приводятся данные численных расчетов, подтверждающие наличие хаотического аттрактора. Выполнен численно тест на гиперболичность, основанный на статистическом анализе распределения углов между устойчивым и неустойчивым подпространствами векторов возмущения хаотической траектории. Представлены экспериментальные результаты исследования системы, демонстрирующие качественное соответствие с результатами численного моделирования.

1. Введение

Математическая теория динамического хаоса в нелинейных системах, базирующаяся на строгом аксиоматическом фундаменте, использует концепцию гиперболичности [1-7]. Это подразумевает, что все существенные траектории в фазовом пространстве динамической системы имеют седловой тип, с хорошо определенными подпространствами устойчивых и неустойчивых направлений в окрестности траектории. Гиперболические системы диссипативного типа, в которых динамика сопровождается сжатием фазового объема, демонстрируют странные аттракторы с сильными хаотическими свойствами. В учебниках и монографиях по нелинейной динамике примеры гиперболических аттракторов представлены искусственными математическими конструкциями, такими, как аттрактор Плыкина и соленоид Смейла – Вильямса [1-8].

Аттрактор Смейла – Вильямса имеет место в модельной диссипативной динамической системе, задаваемой отображением трехмерного фазового пространства в себя (рис.1). Рассмотрим трехмерную область в форме тора (а). Представляя его для наглядности, как резиновый бублик, растянем его в длину, сложим вдвое и вложим в исходный тор (б). Чтобы он там поместился, приходится предположить, что в ходе процедуры площадь поперечного сечения сокращается более, чем в два раза, т.е. общий объем бублика уменьшается (диссипативность). На рисунке (в) показано, как выглядит образ исходного тора после двух итераций отображения, а на рисунке (г) – получающийся в пределе большого числа шагов соленоид Смейла – Вильямса. Поперечное сечение объекта в процессе построения имеет вид одного, затем двух, четырех, восьми и так далее кружков. Очередной шаг построения состоит в том, что внутри каждого кружка выделяются две области в форме кружков меньшего размера, которые оставляются для следующего шага, а все остальное множество исключается. Таким образом, в пределе большого числа шагов формируется поперечная фрактальная структура аттрактора, аналогичная канторову множеству.

Гиперболические странные аттракторы, представителем которых служит соленоид Смейла – Вильямса, являются, как доказано, грубыми (структурно устойчивыми) [1-5]. Грубость означает нечувствительность характера движений и структуры взаимного расположения траекторий в фазовом пространстве по отношению к вариации уравнений, задающих динамику системы. В частности, канторова структура странного гиперболического аттрактора сохраняется без бифуркаций, по крайней мере, пока вариации не слишком велики. Показатель Ляпунова, ответственный за характерную для хаоса чувствительность

динамики по отношению к возмущениям начальных условий, зависит от параметров гладким образом (без провалов в отрицательную область, присутствующих обычно в случае негиперболического аттрактора).

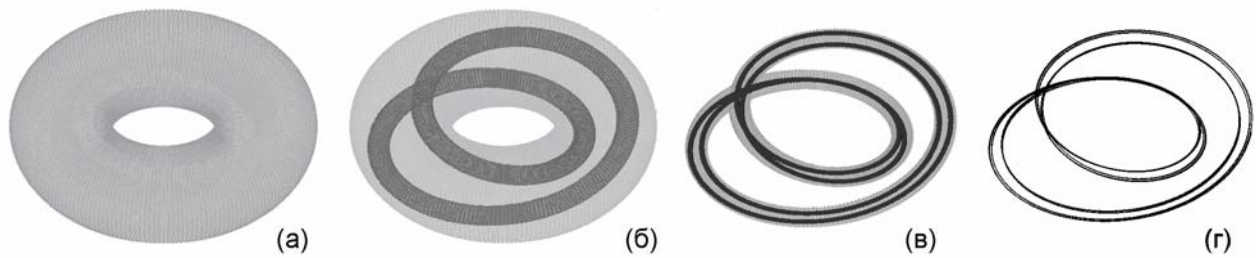


Рис.1. Построение аттрактора отображения трехмерного фазового пространства в себя. Область в форме тора (а) растягивают в длину, складывают вдвое, сжимают в поперечном направлении и вкладывают внутрь исходного тора (б). На рис. (в) показано, как выглядит образ исходного тора после двух итераций отображения, а на рис. (г) представлен соленоид Смейла – Вильямса, получающийся в пределе большого числа шагов итераций.

Представляется, однако, что математическая теория гиперболического хаоса никогда не была применена убедительно к какому-либо физическому объекту, несмотря на то, что ее концепции сплошь и рядом привлекаются для интерпретации хаотического поведения реалистических нелинейных систем.

С другой стороны, широко исследуемые физически мотивированные нелинейные системы со сложной динамикой, например, хаотические автогенераторы, нелинейные осцилляторы с периодическим внешним воздействием, модель Ресслера и др. не относятся к классу систем с гиперболическими аттракторами [7-10]. Как правило, наблюдаемый в них хаос связан с так называемым квазиаттрактором, который наряду с хаотическими траекториями включает также устойчивые орбиты большого периода. (Последние обычно не различимы при численном решении уравнений на компьютере из-за узости бассейнов притяжения.) Строгое математическое описание квазиаттракторов остается не решенной проблемой, хотя в физических системах негиперболичность эффективно маскируется в силу присутствия шума. В модели Лоренца в определенной области параметров хаотический аттрактор, как доказано, обладает основными свойствами гиперболических аттракторов (с оговорками, касающимися нарушения в некоторых деталях аксиоматических положений гиперболической теории), и динамика характеризуется как квазигиперболическая [11, 12].

Известно немного теоретических работ, в которых обсуждаются примеры гиперболического хаоса в системах, описываемых дифференциальными уравнениями. В работе [13] рассмотрена механическая система, названная «тройным соединением», которая в отсутствие трения допускает описание в терминах орбит на поверхности отрицательной кривизны. В диссипативном случае при добавлении обратной связи это должно приводить, как ожидается, к возникновению гиперболического хаотического аттрактора. В работе [14] сконструирован искусственный пример потоковой системы с трехмерным фазовым пространством, имеющей в сечении Пуанкаре аттрактор Плыкина. Этот пример, однако, выглядит слишком сложным, чтобы можно было говорить о возможности его реализации в физической системе. Наконец, в работе [15] приводится аргументация в пользу существования аттрактора Плыкина в сечении Пуанкаре трехмерной потоковой системы, мотивированной проблемами нейродинамики.

В настоящей статье мы предлагаем простой и прозрачный пример физической неавтономной системы, которая, как можно предположить на основании представленных качественных соображений и численных расчетов, обладает гиперболическим странным аттрактором. При описании в терминах стробоскопического отображения Пуанкаре, это аттрактор того же самого вида как соленоид Смейла – Вильямса, вложенный в четырехмерное (а не трехмерное) фазовое пространство.

2. Схема и принцип действия системы на основе связанных генераторов Ван-дер-Поля

Обратимся к показанной на рис.2 схеме радиотехнического устройства, которое представляет собой неавтономную колебательную систему, сконструированную на базе двух подсистем – осцилляторов Ван-дер-Поля с характерными частотами ω_0 и $2\omega_0$, соответственно. Каждый из двух осцилляторов содержит колебательный контур, образованный катушкой индуктивности $L_{1,2}$ и емкостью, соответственно, $C_{1,2}$, так что $\omega_0 = 1/\sqrt{L_1 C_1}$, $2\omega_0 = 1/\sqrt{L_2 C_2}$. Отрицательное сопротивление ($-R_{1,2}$) вносится специальным элементом на основе операционного усилителя, причем величину отрицательного сопротивления можно считать практически постоянной в рабочем интервале напряжений при колебаниях в контурах. Нелинейная проводимость, обеспечивающая увеличение потерь энергии с ростом амплитуды колебаний, вводится элементом, составленным из полупроводниковых диодов в виде двух параллельно соединенных ветвей с противоположным направлением пропускания тока. Полевой транзистор вносит в колебательный контур практически линейную положительную проводимость, величина которой регулируется напряжением, подаваемым на затвор транзистора. Это напряжение медленно изменяется во времени, совершая колебания периода $T = 2\pi N/\omega_0$, где N – целое число, причем на одном полупериоде этого процесса первый осциллятор находится в режиме генерации колебаний, а второй под порогом генерации. На следующем полупериоде они меняются ролями. Первый генератор действует на второй через посредство нелинейного квадратичного элемента A_1 . Производимая при этом вторая гармоника сигнала служит затравкой для возникающих колебаний второго осциллятора в диапазоне частот вблизи $2\omega_0$, когда он выходит за порог генерации. В свою очередь, второй генератор действует на первый через посредство нелинейного элемента A_2 , осуществляющего смещение поступающего сигнала и вспомогательного сигнала на частоте ω_0 . При этом появляется составляющая на разностной частоте, которая попадает в резонансный диапазон для первого осциллятора и служит затравкой, когда он начинает генерировать. Таким образом, оба осциллятора, составляющих схему, по очереди передают возбуждение один другому, что можно охарактеризовать как эстафетный механизм.

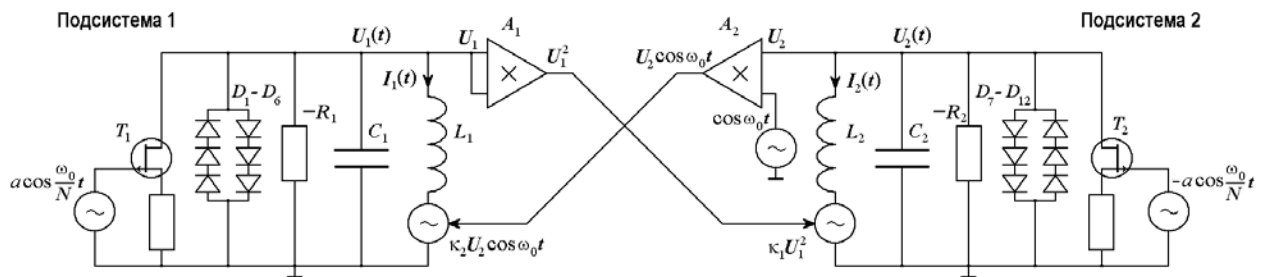


Рис.2. Схема устройства на основе двух связанных подсистем – осцилляторов Ван-дер-Поля с периодически меняющимися параметрами, обладающая странным аттрактором типа Смейла – Вильямса (см. пояснения в тексте)

Поясним, почему схема функционирует как генератор хаоса. Предположим, что на стадии генерации первого осциллятора его колебания имеют некоторую фазу φ : $U_1 \propto \cos(\omega_0 t + \varphi)$. Сигнал U_1^2 на выходе нелинейного элемента A_1 , содержит вторую гармонику: $\cos(2\omega_0 t + 2\varphi)$, и его фаза есть 2φ . Когда полупериод заканчивается, и начинает генерировать второй осциллятор, возникающие колебания переменной U_2 получают ту же самую фазу 2φ . Благодаря смещению этих колебаний со вспомогательным сигналом частоты ω_0 на нелинейном элементе A_2 , удвоенная фаза передается в исходный частотный диапазон. Таким образом, на новой стадии возбуждения первого осциллятора он получит фазу 2φ . Очевидно, значения фазы первого генератора на последующих стадиях даются, по крайней мере в определенном приближении, отображением вида

$$\varphi_{n+1} = 2\varphi_n \pmod{2\pi}. \quad (1)$$

Как известно, динамика, описываемая этим отображением, хаотическая. Это хорошо изученный пример хаоса, отображение «зуб пилы» (saw-tooth map) [1,4,6,7]. В частности, для него легко установить присутствие неустойчивости движения по отношению к возмущению начальных условий, являющейся основным характерным атрибутом хаотической динамики. В самом деле, из уравнения (1) очевидно, что на каждом шаге итераций малое возмущение исходного состояния возрастает вдвое.

Будем рассматривать динамику нашей системы двух взаимодействующих осцилляторов стробоскопически, отслеживая дискретную последовательность мгновенных состояний с периодом внешнего воздействия T . Формально говоря, такое описание сводится к итерациям некоторого отображения четырехмерного пространства в себя. Действительно, мгновенное состояние системы определяется набором четырех переменных, характеризующих напряжение и ток в обоих колебательных контурах, $\mathbf{V} = \{U_1, I_1, U_2, I_2\}$. Если в некоторый момент времени $t = nT$ задан вектор $\mathbf{V} = \mathbf{V}_n$, то динамика системы однозначно определит эти же переменные через период воздействия: $\mathbf{V}_{n+1} = \mathbf{F}(\mathbf{V}_n)$.

В четырехмерном пространстве состояний направление, связанное с фазой φ , отвечает расширению, а три остальных направления – сжатию. Интерпретируя действие стробоскопического отображения $\mathbf{V}_{n+1} = \mathbf{F}(\mathbf{V}_n)$ геометрически, мы можем вообразить вложенный в 4-мерное пространство тороид (прямое произведение одномерной окружности и трехмерного шара) и связать одну итерацию отображения с продольным растяжением и поперечным сжатием этого объекта, вкладываемого затем дважды сложенным внутрь исходной области. Это точно соответствует конструкции гиперболического аттрактора Смейла – Вильямса. Таким образом, можно предположить, что в данной системе реализуется гиперболический хаотический аттрактор. Далее мы представим численные результаты, свидетельствующие в пользу этого предположения.

3. Система дифференциальных уравнений

Составим систему уравнений, описывающих динамику предлагаемой схемы. Для каждой подсистемы записываем уравнение Кирхгофа, выражающее равенство нулю суммарного тока в параллельных ветвях схемы, и уравнение, связывающее напряжение и ток через катушку индуктивности:

$$\begin{aligned} C_1 \frac{dU_1}{dt} + I_1 - \frac{U_1}{R_1} + f(U_1) + U_1(g_1 - k_1 a \cos \omega_0 t / N) &= 0, \\ L_1 \frac{dI_1}{dt} &= U_1 + \kappa_2 U_2 \cos \omega_0 t, \\ C_2 \frac{dU_2}{dt} + I_2 - \frac{U_2}{R_2} + f(U_2) + U_2(g_2 + k_2 a \cos \omega_0 t / N) &= 0, \\ L_2 \frac{dI_2}{dt} &= U_2 + \kappa_1 U_1^2. \end{aligned} \quad (2)$$

В этих уравнениях функция $f(U) \approx \alpha U + \beta U^3$ характеризует зависимость тока от напряжения для нелинейного элемента, составленного из полупроводниковых диодов, $\kappa_{1,2}$ – коэффициенты передачи в цепях, обеспечивающих связь между двумя подсистемами, множитель $(g \pm ka \cos \omega_0 t / N)$ отвечает проводимости, вносимой в контур полевым транзистором при наличии переменного напряжения на затворе $\pm a \cos \omega_0 t / N$.

С использованием безразмерных переменных

$$\tau = \omega_0 t / 2\pi \quad x = U_1 \left(\frac{6\pi\beta}{\omega_0 C_1} \right)^{1/2}, \quad u = I_1 \left(\frac{6\pi\beta}{\omega_0^3 C_1^3} \right)^{1/2},$$

$$y = U_2 \left(\frac{6\pi\beta}{\omega_0 C_2} \right)^{1/2}, \quad v = I_2 \left(\frac{3\pi\beta}{2\omega_0^3 C_2^3} \right)^{1/2}, \quad (3)$$

и параметров

$$\begin{aligned} A_1 &= 2\pi k_1 a / \omega_0 C_1, \quad A_2 = 2\pi k_2 a / \omega_0 C_2, \\ h_1 &= 2\pi\omega_0^{-1} C_1^{-1} (R_1^{-1} - \alpha - g_1), \quad h_2 = 2\pi\omega_0^{-1} C_2^{-1} (R_2^{-1} - \alpha - g_2), \\ \varepsilon_1 &= \kappa_1 \sqrt{\frac{\omega_0 C_1^2}{6\pi\beta C_2}}, \quad \varepsilon_2 = \kappa_2 \sqrt{\frac{C_2}{C_1}}. \end{aligned} \quad (4)$$

приходим к следующей системе уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} + 2\pi u - (h_1 + A_1 \cos 2\pi\tau/N)x + \frac{1}{3}x^3 &= 0, \\ \dot{u} &= 2\pi(x + \varepsilon_2 y \cos 2\pi\tau), \\ \dot{y} + 4\pi v - (h_2 - A_2 \cos 2\pi\tau/N)y + \frac{1}{3}y^3 &= 0, \\ \dot{v} &= 4\pi(y + \varepsilon_1 x^2). \end{aligned} \quad (5)$$

Каждая из двух подсистем описывается парой уравнений первого порядка, допускающей представление в виде уравнения Ван-дер-Поля с изменяющимися во времени коэффициентами. Динамические переменные (x, u) отвечают первому, а (y, v) второму осциллятору. С учетом использованной нормировки, характерная круговая частота первого осциллятора равна 2π (что соответствует периоду $\Delta\tau=1$), а второго 4π . Множитель $h_{1,2} \pm A_{1,2} \cos 2\pi\tau/N$ представляет медленно осциллирующий во времени параметр, управляющий бифуркацией рождения цикла в одной и другой подсистеме.

В следующем разделе, основываясь на численном решении уравнений (5), мы продемонстрируем наличие в системе аттрактора типа Смейла – Вильямса.

4. Хаотический аттрактор в математической модели

На рис.3 показаны типичные образцы временных зависимостей переменных x и y , полученных из численного решения уравнений (5) методом Рунге – Кутты при $N = 8$ и значениях параметров $A_1 = 1,5$, $A_2 = 6$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0,1$, $h_1 = h_2 = 0$. На диаграмме (а) представлена одна реализация, а на диаграмме (б) – набор примерно из десятка реализаций, отвечающих последовательным участкам одного и того же генерируемого сигнала. Из первого рисунка видно, что имеет место поочередное возбуждение первого (черная кривая) и второго (серая кривая) осцилляторов; возбуждение как бы по эстафете передается по очереди от одного осциллятора к другому. Из второго рисунка можно сделать на визуальном уровне заключение о непериодичности процесса. Более тщательный анализ показывает, что на самом деле имеет место хаос, который проявляет себя в случайном смещении максимумов и минимумов функций $x(t)$ и $y(t)$ относительно огибающей генерируемых колебаний на последовательных стадиях возбуждения осцилляторов.

На рис.4а показан фазовый портрет аттрактора в проекции на плоскость переменных (x, \dot{x}) . На диаграмме рис.4б на той же плоскости отложены точки, отвечающие последовательности моментов времени $\tau_n = nN$, т.е. представлен портрет аттрактора в стробоскопическом сечении. На рис.4в приведена эмпирическая диаграмма для фазы первого осциллятора, где по горизонтальной оси отложена величина фазы, относящаяся к моменту времени τ_n , а по вертикали – к моменту времени τ_{n+1} . Фазы определяются посредством соотношения

$$\varphi = \begin{cases} \arctg(-(2\pi)^{-1} \dot{x}/x), & x > 0, \\ \pi + \arctg(-(2\pi)^{-1} \dot{x}/x), & x < 0. \end{cases} \quad (6)$$

Как видно из рисунка, отображение для фазы топологически эквивалентно соотношению (1). (Некоторые искажения возникают из-за неточности качественных рассуждений при выводе формулы (1), а также самого определения фазы; соответствие становится лучше при больших отношениях периодов N .)

Для вычисления показателей Ляпунова с помощью алгоритма Бенеттина [16,17] проводилось одновременное решение уравнений (5) и четырех комплектов линеаризованных уравнений для возмущений:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= -2\pi\tilde{y} - x^2\tilde{x} + (h_1 + A_1 \cos 2\pi\tau/N)\tilde{x}, \\ \dot{\tilde{u}} &= 2\pi(\tilde{x} + \varepsilon_2\tilde{y} \cos 2\pi\tau), \\ \dot{\tilde{y}} &= -4\pi\tilde{v} - y^2\tilde{y} + (h_2 - A_2 \cos 2\pi\tau/N)\tilde{y}, \\ \dot{\tilde{v}} &= 4\pi(\tilde{y} + 2\varepsilon_1 x\tilde{x}).\end{aligned}\tag{7}$$

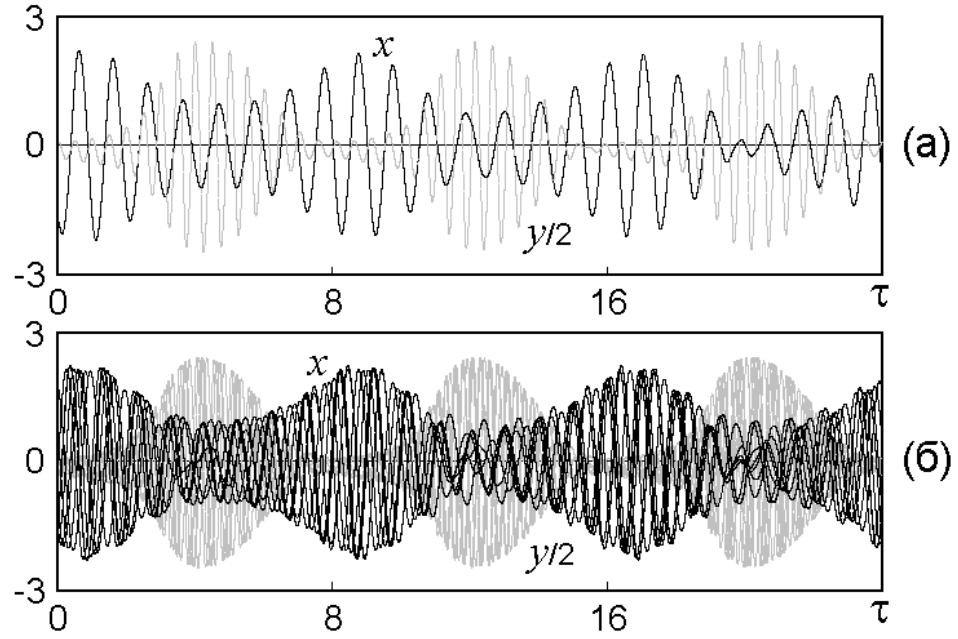


Рис. 3. Типичные образцы временной зависимости для переменных x и y , полученной из численного решения уравнений (5) для $N = 8$, $A_1 = 1,5$, $A_2 = 6$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0,1$, $h_1 = h_2 = 0$. На диаграмме (а) показана одна реализация, а на диаграмме (б) – порядка десяти наложенных друг на друга реализаций – участков одного и того же сигнала, что иллюстрирует неперiodический (фактически, хаотический) характер динамики

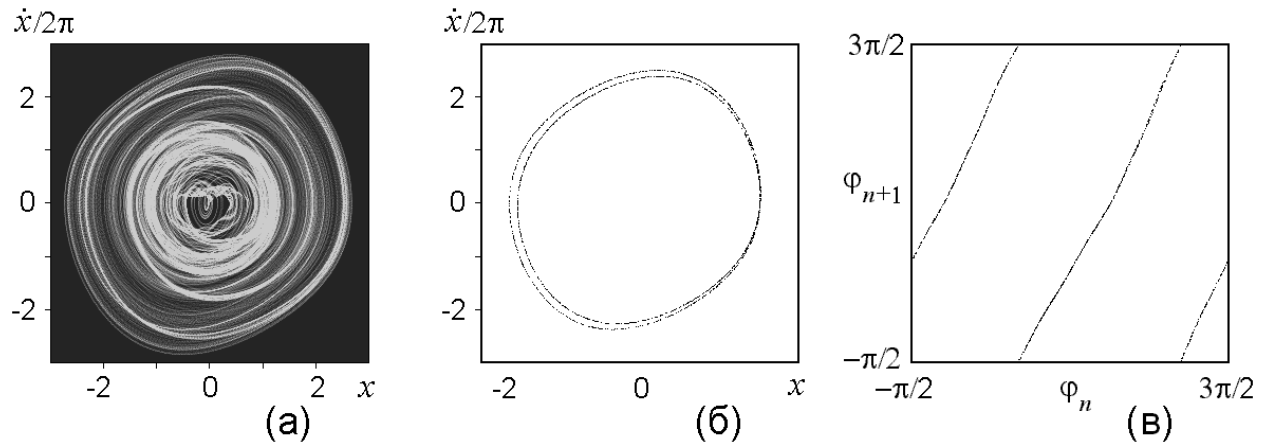


Рис. 4. Портрет аттрактора в проекции на плоскость динамических переменных первого осциллятора (x, \dot{x}) (а), стробоскопическое сечение аттрактора для последовательности моментов времени $\tau_n = nN$ (б) и эмпирическая диаграмма, где по горизонтальной и вертикальной оси отложены значения фазы первого осциллятора в последовательные моменты времени τ_n и τ_{n+1} (в). Значения параметров $N = 8$, $A_1 = 1,5$, $A_2 = 6$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0,1$, $h_1 = h_2 = 0$.

По ходу решения, на каждом шаге схемы интегрирования выполнялась ортогонализация Грама – Шмидта и нормализация для четырех векторов, и определялись средние скорости роста или уменьшения накапливающихся сумм логарифмов норм векторов возмущения (после ортогонализации, но перед нормализацией). Очевидно, четыре показателя Ляпунова для дифференциальных уравнений λ_k и для стробоскопического отображения Λ_k связаны соотношением $\lambda_k = N^{-1} \Lambda_k$. Согласно результатам вычислений, показатели Ляпунова для аттрактора стробоскопического отображения при упомянутых параметрах составили $\Lambda_1 \approx 0,69 \approx \ln 2$, $\Lambda_2 \approx -6,64$, $\Lambda_3 \approx -11,12$, $\Lambda_4 \approx -22,24$. Наличие положительного показателя Λ_1 служит количественным подтверждением присутствия хаоса. (Отметим отсутствие нулевого показателя, что естественно для отображений и неавтономных систем с непрерывным временем.)

На рис.5 показана зависимость показателей Ляпунова Λ_k от параметра A_1 при $A_2/A_1 = \text{const} = 4$. Наибольший показатель Ляпунова Λ_1 остается почти постоянным в широком интервале изменения параметра и близок к величине $\ln 2$, а остальные демонстрируют плавную зависимость от параметра. Такой характер поведения показателей Ляпунова согласуется с предположением о гиперболической природе наблюдаемого аттрактора. Левый край диаграммы, где начинается заметное уменьшение показателя Λ_1 , соответствует нарушению гиперболичности.

Если аттрактор действительно гиперболический, хаотическая динамика должна быть грубой, а значит сохранять свой характер при вариации уравнений. Численные расчеты подтверждают, что это действительно так. В частности, динамическое поведение аналогичной природы наблюдается и при других целочисленных N , включая существенно меньшие. Например, на рис.6 показан портрет странного аттрактора в проекции на плоскость (x, \dot{x}) и его стробоскопическое сечение для случая $N=4$. Для этого аттрактора показатели Ляпунова $\Lambda_1 \approx 0,68$, $\Lambda_2 \approx -2,52$, $\Lambda_3 \approx -4,20$, $\Lambda_4 \approx -6,72$. Отметим ясно видимую на диаграмме (б) фрактальную поперечную структуру "лент", составляющих аттрактор. С очевидностью, он выглядит именно так, как должен выглядеть аттрактор Смейла – Вильямса (ср. с рис.1г). В данном случае фрактальную поперечную структуру полос можно различить и на диаграмме для фаз (в).

По формуле Каплана – Йорке [3,7,8] оценка фрактальной размерности аттрактора, как объекта в стробоскопическом сечении, в данном случае дает $D = 1 + |\Lambda_1 / \Lambda_2| \approx 1,37$ (так называемая ляпуновская размерность). Согласно вычислениям по алгоритму Грассбергера – Прокаччия [18,3,7,8], корреляционная размерность аттрактора в стробоскопическом сечении составляет $D \approx 1,4$, что находится в разумном соответствии с ляпуновской размерностью. Полная размерность аттрактора, вложенного в пятимерное расширенное фазовое пространство неавтономной системы, на единицу больше: $d = D + 1 \approx 2,4$.

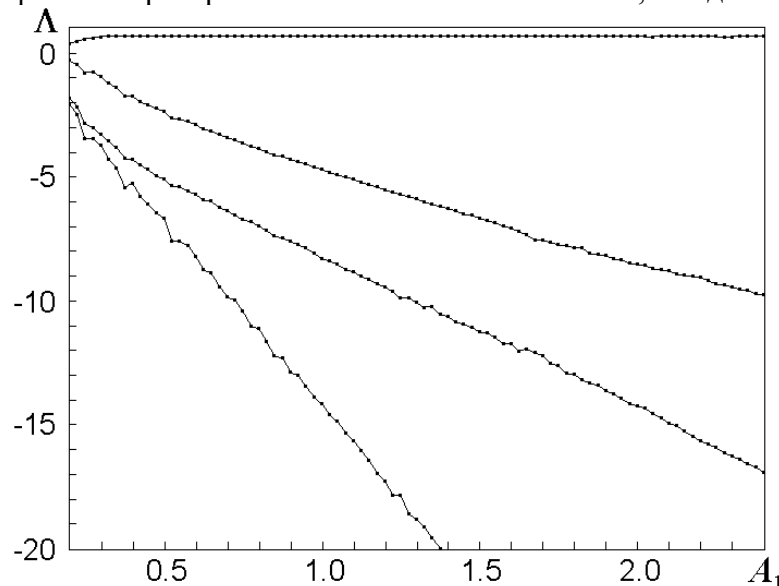


Рис. 5. Полученные численно показатели Ляпунова стробоскопического отображения в зависимости от параметра A_1 , при $N=8$, $A_2 = 4A_1$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0,1$, $h_1 = h_2 = 0$. Наибольший показатель остается почти постоянным во всем интервале гиперболичности и находится в хорошем соответствии с оценкой $\Lambda_1 \approx \ln 2$

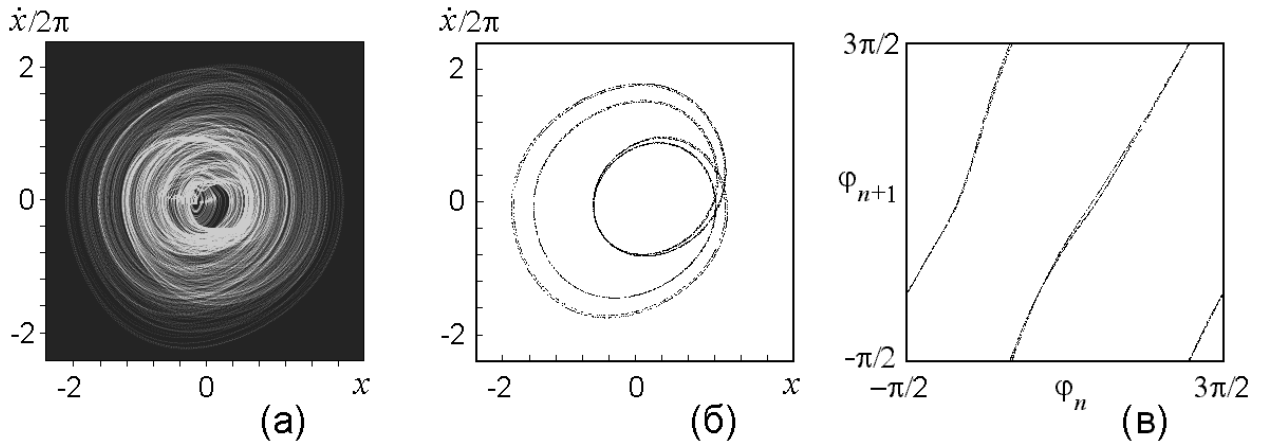


Рис. 6. Портрет аттрактора в проекции на плоскость динамических переменных первого осциллятора (x, \dot{x}) (а), стробоскопическое сечение аттрактора для последовательности моментов времени $\tau_n = nN$ (б) и эмпирическая диаграмма, где по горизонтальной и вертикальной оси отложены значения фазы первого осциллятора в последовательные моменты времени τ_n и τ_{n+1} (в). Значения параметров $N = 4$, $A_1 = 1,5$, $A_2 = 6$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0,1$, $h_1 = h_2 = 0$.

На рис.7 показаны спектры колебаний первого и второго осцилляторов в рассматриваемом режиме генерации хаоса. Для их построения использовался метод статистической оценки спектральной плотности мощности, рекомендуемый в теории случайных процессов и состоящий в разбиении имеющейся реализации на участки конечной протяженности, выполнении преобразования Фурье для каждого участка и последующем усреднении квадратов амплитуд спектральных компонент. Как можно усмотреть из рисунка, спектр, очевидно, сплошной. Для первого осциллятора он сосредоточен в диапазоне вблизи частоты $\omega_0 = 2\pi$, а для второго – вблизи $2\omega_0 = 4\pi$. Отметим очевидную из рисунка непрерывную зависимость спектральной плотности мощности от частоты и отсутствие «изрезанности» спектра, характерной, как правило, для спектров, порождаемых негиперболическими аттракторами. Можно отметить присутствие относительно узких пиков спектральной плотности в низкочастотной части спектра второго осциллятора. Это связано, очевидно, с эффектом детектирования при смещении вспомогательного сигнала и колебаний первого осциллятора на элементе связи с квадратичной нелинейностью.

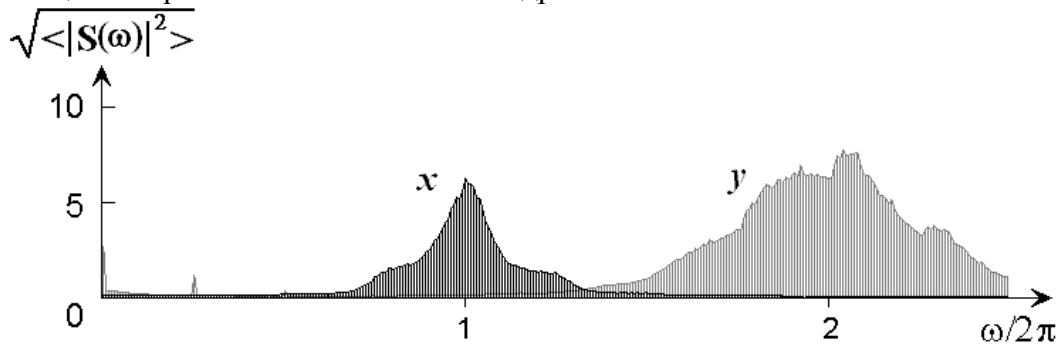


Рис. 7. Спектры колебаний в первом (x) и втором (y) осцилляторах в хаотическом режиме. По вертикальной оси отложен корень квадратный из спектральной плотности мощности. Значения параметров: $N=4$, $A_1 = 1,5$, $A_2 = 6$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0,1$, $h_1 = h_2 = 0$.

Интересно выполнить прямую численную проверку свойства гиперболичности аттрактора. Идея такого теста была предложена в работах [19] и [20] и применялась для проверки гиперболичности траекторий динамических систем, имеющих одно устойчивое и одно неустойчивое направление. Процедура состоит в вычислении векторов малых возмущений вдоль траектории в прямом и обратном времени с измерением угла между этими векторами в точках траектории. Если нулевые значения угла не встречаются, то есть статистическое распределение углов отделено от нуля, то делается заключение, что динамика гиперболическая. Если статистическое распределение показывает ненулевую вероятность для нулевого угла, то это свидетельствует о негиперболическом поведении из-за наличия

касаний устойчивых и неустойчивых многообразий. В диссипативном случае именно эти касания ответственны за возникновение квазиаттрактора в негиперболических системах.

Применительно к нашей системе метод нуждается в модификации. Во-первых, мы хотим работать с описанием в терминах стробоскопического отображения, с тем, чтобы непосредственно связать результаты с конструкцией Смейла – Вильямса. Во-вторых, в нашем случае только неустойчивое подпространство одномерное, тогда как устойчивое является трехмерным. Соответствующим образом адаптированный алгоритм состоит в следующем. Сначала находим из численного решения уравнений (5) достаточно протяженную представительную орбиту на аттракторе $\{x(\tau), u(\tau), y(\tau), v(\tau)\}$. Далее, решаем численно уравнения (7) для возмущений траектории в прямом времени. По ходу решения, на каждом шаге выполняется нормализация вектора $\mathbf{a}(\tau) = \{\tilde{x}(\tau), \tilde{u}(\tau), \tilde{y}(\tau), \tilde{v}(\tau)\}$ с тем, чтобы исключить расхожимость. Далее, решаем три комплекта уравнений (7) в обратном времени вдоль той же самой траектории, что дает три вектора $\{\mathbf{b}(\tau), \mathbf{c}(\tau), \mathbf{d}(\tau)\}$. Чтобы избежать превалирования одного вектора и расхожимости, используем ортогонализацию Грама – Шмидта и нормализацию векторов на каждом шаге численного интегрирования.

В каждой точке стробоскопического сечения $\tau_n = nN$ вектор $\mathbf{a}_n = \mathbf{a}(\tau_n)$ определяет неустойчивое направление возмущения траектории, а всевозможные линейные комбинации $\{\mathbf{b}_n, \mathbf{c}_n, \mathbf{d}_n\} = \{\mathbf{b}(\tau_n), \mathbf{c}(\tau_n), \mathbf{d}(\tau_n)\}$ – трехмерное устойчивое подпространство векторов возмущения.

Для оценки угла α между одномерным неустойчивым подпространством и трехмерным устойчивым подпространством сначала строим вектор \mathbf{v}_n , ортогональный к трехмерному подпространству, с компонентами, определяемыми из системы линейных уравнений $\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{b}_n = 0$, $\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{c}_n = 0$, $\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{d}_n = 0$. Затем вычисляем угол $\beta_n \in [0, \pi/2]$ между векторами \mathbf{v}_n и \mathbf{a}_n : $\cos \beta = |\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{a}_n| / |\mathbf{v}_n| |\mathbf{a}_n|$, и полагаем $\alpha_n = \pi/2 - \beta_n$.

На рис.8 показаны гистограммы для распределения углов α_n , построенные по результатам вычислений на компьютере. Диаграммы (а) и (б) получены для двух упомянутых выше наборов параметров. Оба распределения с очевидностью отделены от нулевых значений α , т.е. тест подтверждает гиперболичность аттрактора. На диаграмме (в) показана для сравнения гистограмма при задании параметров, не обеспечивающем гиперболичность. (Заключение о негиперболичности аттрактора в этом случае можно сделать также на основании поведения показателя Ляпунова, см. левый край диаграммы на рис. 5.)

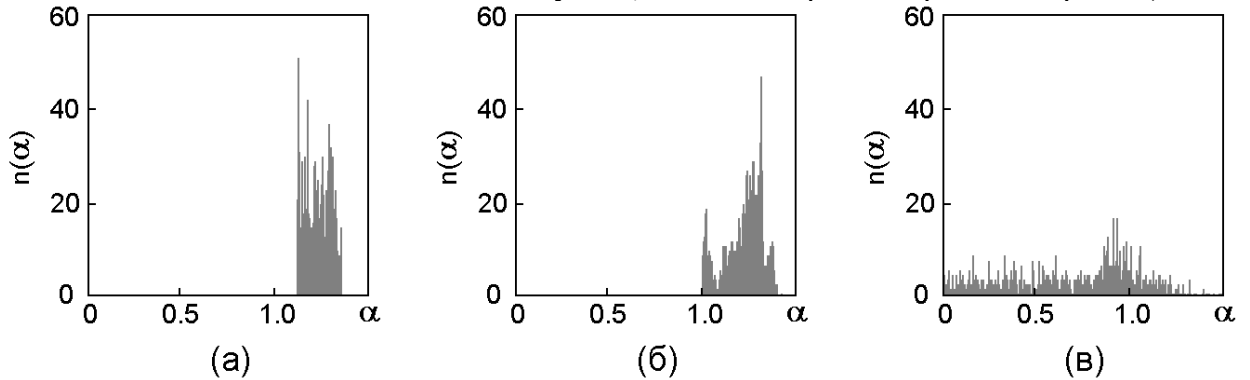


Рис. 8. Гистограммы для распределений углов α между устойчивым и неустойчивым подпространствами для системы (5), полученные из вычислительной процедуры, описанной в тексте. Панели (а) и (б) отвечают гиперболическому аттрактору при $A_1 = 1,5$, $A_2 = 6$, $h_{1,2} = 0$, $\varepsilon_{1,2} = 0,1$, соответственно для $N=8$ (а) и $N=4$ (б), а панель (в) – негиперболическому аттрактору при $A_1 = 0,2$, $A_2 = 0,8$, $h_{1,2} = 0$, $\varepsilon_{1,2} = 0,1$, $N = 8$

5. Экспериментальные результаты

Для проведения экспериментального исследования схема, представленная на рис.1, была реализована в виде лабораторного устройства. Конденсаторы в колебательных контурах имели емкость $C_1 = 20$ нФ и $C_2 = 5$ нФ. Катушки L_1 и L_2 выполнены на ферритовых

сердечниках 2000НМ с одинаковой индуктивностью, около 1 Гн. Соответственно, рабочая частота двух осцилляторов составляла $f_1 = \omega_0/2\pi = 1090$ Гц и $f_2 = 2f_1 = 2180$ Гц. Элемент отрицательного сопротивления реализован на операционном усилителе 140УД26, а нелинейный элемент – на диодах КД102. Для внесения в колебательные контура изменяющейся во времени проводимости использованы полевые транзисторы КП303Г. Нелинейные элементы, через которые осуществлялась связь обеих подсистем, выполнены на основе аналоговых умножителей 525ПС2.

Напряжения U_1 и U_2 , снимаемые, соответственно, с первого и второго контура, можно было подавать на регистрирующую аппаратуру (осциллограф, анализатор спектра) или вводить в компьютер в виде временного ряда через посредство аналого-цифрового преобразователя АДМ12-3 (12-разрядный, максимальная частота дискретизации 3 МГц). Функции \dot{U}_1 и \dot{U}_2 получались как результат аналогового дифференцирования с использованием стандартной дифференцирующей цепочки, содержащей емкость 500 пФ, резистор 62 кОм и операционный усилитель 140УД26.

В эксперименте при надлежащем подборе параметров в системе можно было наблюдать хаотические колебания, обусловленные эстафетной передачей возбуждения от одного осциллятора к другому в соответствии с механизмом, рассмотренным в предыдущих разделах. На рис.7 слева показаны типичные образцы временных зависимостей переменного напряжения в режиме хаотической генерации в одной и другой подсистеме при отношении частоты медленного изменения параметров и частоты вспомогательного сигнала $N = 8$ и $N = 4$. Диаграммы построены на компьютере с использованием записанных в память временных рядов, полученных посредством аналого-цифрового преобразования напряжений $U_1(t)$ и $U_2(t)$. Частота выборки составляла 200 кГц, т.е. на период характерной частоты генерации ω_0 приходилось примерно 200 точек.

Справа на рис.7 приведены эмпирические «итерационные диаграммы» для фазы первого осциллятора. Для их построения в компьютер вводился двухкомпонентный временной ряд. Одна компонента отвечала выборке сигнала $U_1(t)$ с периодом медленной вариации параметров $T = 2\pi N/\omega_0$ в моменты времени, примерно соответствующие максимуму амплитуды колебаний первого осциллятора. В качестве второй компоненты фигурировала производная сигнала $U_1(t)$ на выходе дифференцирующей цепочки в те же моменты времени. Фаза определялась по формуле, аналогичной соотношению (6). По горизонтальной и вертикальной оси на графике отложены значения фазы, относящиеся к последовательным моментам выборки. То обстоятельство, что отображение для фазы топологически эквивалентно хаотическому отображению «зуб пилы» (1), существенно для интерпретации наблюдаемого в эксперименте аттрактора, как гиперболического.

На рис.10 слева показана фотография фазового портрета аттрактора с экрана осциллографа в режиме генерации хаоса при $N=4$. На входы горизонтального и вертикального отклонения электронного луча подавались, соответственно, переменное напряжение от первой подсистемы $U_1(t)$ и сигнал с выхода дифференцирующей цепочки, пропорциональный производной по времени $\dot{U}_1(t)$. Выдержка при съемке была порядка нескольких секунд, чтобы отобразить достаточно большое число характерных периодов движения изображающей точки на аттракторе. Отметим очевидное сходство с рис.6а. На рис.10 приведен также портрет аттрактора в стробоскопическом сечении в проекции на плоскость (U_1, \dot{U}_1) , полученный из того же двухкомпонентного временного ряда, который использовался при построении эмпирической итерационной диаграммы на рис.9г. Видно, что этот портрет выглядит в точности как изображение соленоида Смейла – Вильямса. Отдельно на вставке показан фрагмент, демонстрирующий в увеличенном виде тонкую фрактальную структуру «полос», из которых построен аттрактор.

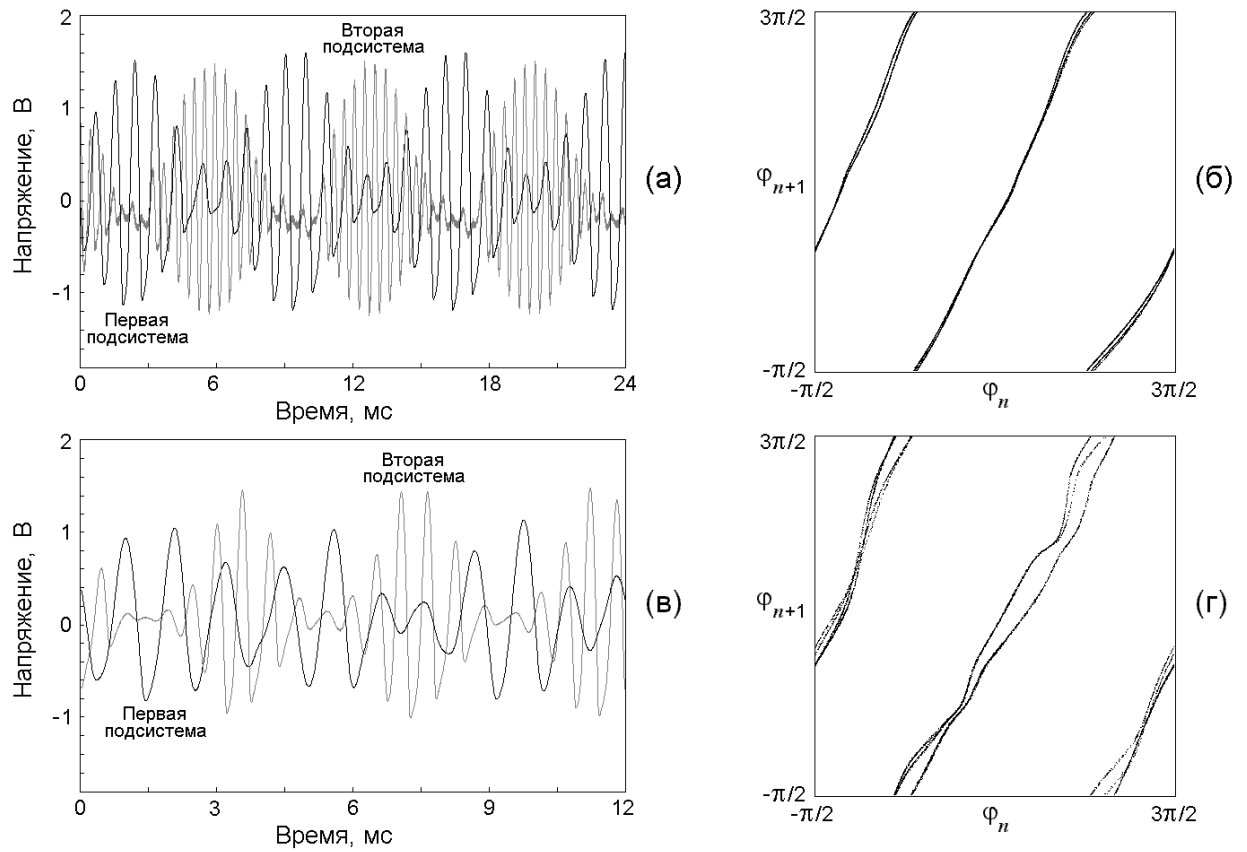


Рис. 9. Типичные образцы полученных в эксперименте временных зависимостей переменного напряжения первой и второй подсистем в режиме хаотической генерации и эмпирические итерационные диаграммы для фазы первой подсистемы при $N = 8$ (а, б) и $N = 4$ (в, г). Можно отметить, что при $N=4$ диаграмма для фазы имеет фрактальную структуру, выраженную заметно сильнее, чем в соответствующей ситуации при численном моделировании.

Вычисление корреляционной размерности аттрактора по методу Грассбергера-Прокаччия на основе обработки временного ряда с частотой выборки 200 кГц дало величину $d \approx 2.3$, что разумно согласуется с результатом для аналогичной ситуации при численном моделировании. Оценка старшего ляпуновского показателя стробоскопического отображения посредством алгоритма [21], основанного на обработке временного ряда с выборкой периода $T = 2\pi N / \omega_0$, дало результат $\Lambda \approx 0.73$, что находится в неплохом соответствии с оценкой $\Lambda \approx \ln 2$.

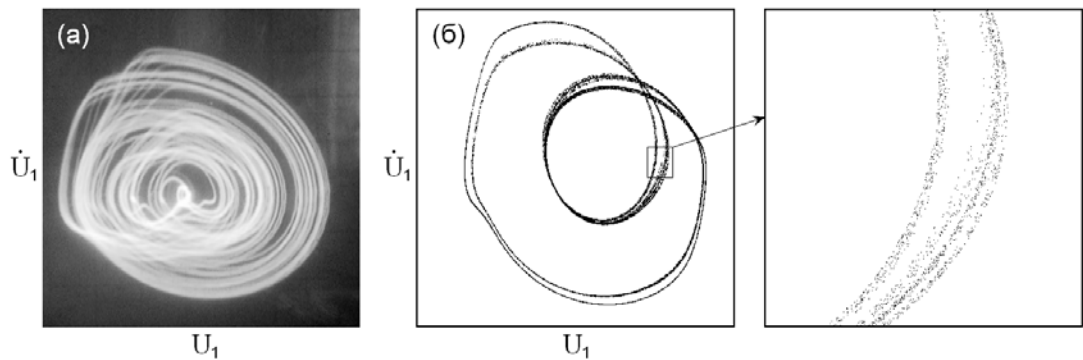


Рис. 10. Фотография с экрана осциллографа портрета аттрактора в проекции на плоскость динамических переменных первого осциллятора (U_1, \dot{U}_1) при $N=4$ (а) и стробоскопическое сечение этого аттрактора (б) для последовательности моментов времени, соответствующих максимуму амплитуды первого осциллятора и следующих с периодом $T = 2\pi N / \omega_0$. На вставке показан в увеличенном виде фрагмент картинки, демонстрирующий тонкую фрактальную структуру «полос», из которых построен аттрактор.

На рис.11 показаны спектры колебаний первого и второго осцилляторов, сфотографированные с экрана анализатора спектра в режиме генерации хаоса при $N=4$. Для экономии места и для наглядности сопоставления с результатами численного моделирования, мы приводим две фотографии смонтированные на одном графике в оформлении, аналогичном рис.7. Спектр колебаний обоих осцилляторов сплошной; для первого осциллятора он рас-

положен в диапазоне вблизи частоты ω_0 , а для второго – вблизи $2\omega_0$. Отметим очевидное сходство со спектром, полученным при численном моделировании. В качестве отличий, по-видимому, непринципиальных, можно обратить внимание на несколько большую степень изрезанности спектра в экспериментальной системе, присутствие вторичного максимума спектральной плотности в первом осцилляторе вблизи частоты второй гармоники, а также отсутствие узких пиков спектральной плотности в низкочастотной области во втором осцилляторе.

В экспериментальном исследовании проверку допускают не все моменты, обсужденные применительно к численным расчетам в предыдущем разделе. Например, представляется затруднительным получить полный спектр показателей Ляпунова или выполнить тест на гиперболичность. Тем не менее, в целом весь набор полученных результатов позволяет уверенно утверждать, что в эксперименте мы имеем дело с тем же объектом, что и в теоретическом рассмотрении – странным аттрактором типа Смейла – Вильямса в неавтономной колебательной системе.

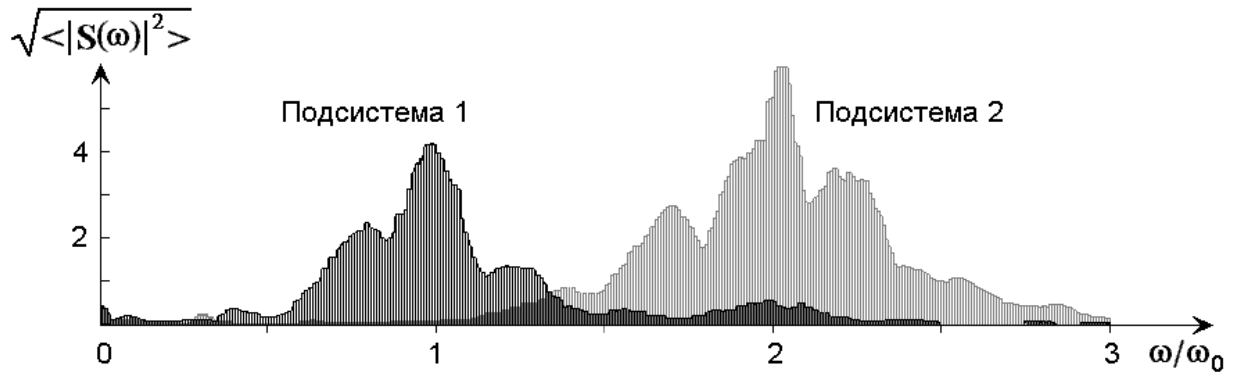


Рис.11. Спектры колебаний двух подсистем в режиме генерации хаоса $N=4$. Диаграмма построена путем наложения двух изображений, полученных фотографированием с экрана анализатора спектра.

6. Заключение

В данной работе представлен пример физической системы, обладающей странным хаотическим аттрактором, который, как позволяют предполагать имеющиеся данные, относится к классу гиперболических аттракторов. Было бы желательно иметь математическое доказательство гиперболической природы хаоса в этой системе, но его разработка составляет самостоятельную задачу и выходит за рамки настоящего исследования, выполненного на уровне взаимно дополняющих друг друга качественных соображений, компьютерных результатов и экспериментов.

Как мы полагаем, появление примера физической системы с гиперболическим хаотическим аттрактором имеет принципиальное значение для дальнейшего развития нелинейной динамики и ее приложений. С точки зрения исследователей, занимающихся анализом реальных систем физической и иной природы, это, в определенном смысле, «прорыв в гиперболическую область». Очевидно, используя данный пример, как отправную точку, и опираясь на присущее гиперболическим аттракторам свойство грубости, можно строить и другие примеры систем с гиперболическими хаотическими аттракторами. В самом деле, модификация правых частей уравнений не будет разрушать гиперболичность, по крайней мере, пока изменения не слишком велики. Наличие физических систем с гиперболическим хаосом открывает возможности для приложений глубоко проработанного раздела математики – гиперболической теории, а также переводит в практическую плоскость задачу сравнительного исследования гиперболического и негиперболического хаоса в теории и эксперименте.

Авторы благодарны Б.П. Безручко за поддержку настоящей работы в ее экспериментальной части, а также В.С. Анищенко, В.С. Афраймовичу, R.S. MacKay, Л.А. Мельникову, А.С. Пиковскому, М.Г. Розенблюму за полезное обсуждение. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 03–02–16192 и № 05–02–16305).

Литература

- [1] Я.Г. Синай, в кн. *Нелинейные волны*, Наука, Москва (1979), с. 192.
- [2] *Современные проблемы математики. Фундаментальные направления*. Итоги науки и техники, т.2. Под ред. Р.В. Гамкрелидзе. Изд. ВИНТИ АН СССР, Москва (1985).
- [3] J.-P. Eckmann and D. Ruelle, *Rev. Mod. Phys.*, **57**, 617 (1985).
- [4] А.Б. Каток, Б. Хасселблат. *Введение в современную теорию динамических систем*. Пер. с англ. Изд. «Факториал», Москва (1999).
- [5] V. Afraimovich and S.-B. Hsu, *Lectures on chaotic dynamical systems*, AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, **28**, American Mathematical Society, Providence, RI; International Press, Somerville, MA (2003).
- [6] R.L. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Addison-Wesley, New York (1989).
- [7] E. Ott, *Chaos in Dynamical Systems*, Cambridge University Press (1993).
- [8] С.П. Кузнецов, *Динамический хаос*, Физматлит, Москва (2001).
- [9] S.E. Newhouse, *Publ. Math. IHES*, **50**, 101 (1979); V. S. Afraimovich and L.P. Shil'nikov, in book: *Nonlinear Dynamics and Turbulence*, eds. G.I. Barenblatt, G. Ioss, and D.D. Joseph, Pitman, Boston, London, Melbourne (1983), p. 1.
- [10] В.С.Анищенко, В.В.Астахов, Т.Е. Вадивасова, А.Б. Нейман, Г.И. Стрелкова, Л. Шиманский-Гайер, *Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах*, Инст. Компьютерных исследований, Москва – Ижевск (2003).
- [11] В.С. Афраймович, В.В. Быков, Л.П. Шильников, ДАН СССР, **234**, 336 (1977).
- [12] K. Mischaikow and M. Mrozek, *Bull. AMS*, **32**, 66 (1995); *Mathematics of Computation*, **67** (223), 1023 (1998); K. Mischaikow, M. Mrozek, A.Szymczak, *J. Diff. Equ.* **169**, 17 (2001).
- [13] T.J. Hunt and R.S. MacKay, *Nonlinearity* **16**, 1499 (2003).
- [14] T.J. Hunt, PhD Thesis, Univ. of Cambridge (2000).
- [15] V. Belykh, I. Belykh and E. Mosekilde, *Int. J. of Bifurcation and Chaos* **15**, No 11, 3567 (2005).
- [16] G. Benettin, L. Galgani, A. Giorgilli and J.M. Strelcyn, *Meccanica* **15**, 9 (1980).
- [17] F. Christiansen and H.H. Rugh, *Nonlinearity* **10**, 1063 (1997).
- [18] P.Grassberger and I. Procaccia, *Physica* **D9**, 189 (1983).
- [19] Y.-C. Lai, C. Grebogi, J.A. Yorke and I. Kan, *Nonlinearity* **6**, 779 (1993).
- [20] V.S. Anishchenko, A.S. Kopeikin, J. Kurths, T.E. Vadivasova, and G.I. Strelkova, *Phys. Lett.* **A270**, 301 (2000).
- [21] A. Wolf, J.B. Swift, H.L. Swinney, and J.A. Vastano, *Physica* **D16**, 285 (1985).