Studium - Analysis

V: 1.0

Inhalt

1 Elementare Grundlagen

1.1 Mengen

1.1.1 Menge der natürlichen Zahlen

$\mathbb{N} = \{$ 1, 2, 3, 4, ... $\}$

Eigenschaften

1. Jede natürliche Zahl $\epsilon\mathbb{N}$ hat genau einen Nachfolger, nämlich $n+1$
2. Jede von 1 verschiedene natürliche Zahl n hat genau einen Vorgänger $n-1$. Die Zahl 1 hat keinen Vorgänger.

Rechenoperationen

- $n_1 + n_2 \ \ \epsilon\mathbb{N}$
- $n_1 \cdot n_2 \ \ \epsilon\mathbb{N}$

1.1.2 Menge der rationalen Zahlen

$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \ \ \epsilon\mathbb{Z}$ mit $b \neq 0\}$

$|\rightarrow$ mit der Eigenschaft

Rechenoperationen

- +
- -
- ·
- /

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} <=> a_1 \cdot b_2 = a_2 \cdot b_1$$

$$\frac{a_1}{b_2} + \frac{a_2}{b_2} <=> \frac{a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1}{b_1 \cdot b_2}$$

$$\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} <=> \frac{a_1 \cdot a_2}{b_1 \cdot b_2}$$

Rationale Zahlen lassen sich als periodische Dezimalzahlen darstellen:

$\frac{6}{11} = 0.45454545 = 0.\overline{45}$

1.1.3 Keine Rationale Zahlen

- $\sqrt{2} = 1.141421$
- $\pi = 3.141592$

$\Rightarrow$ Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$

Rechenoperationen

- +

- -
- ·
- /

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

$\rightarrow$ Alle $\mathbb{N}$ sind in $\mathbb{Z}$ enthalten, ...

1.2 Ungleichungen, Beträge, Intervalle

1.2.1 Allgemein

:

- $a < b$, falls a links von b liegt
- $a = b$, falls beide Zahlen zusammenfallen
- $a > b$, falls a rechts von b liegt

$a < b, /a, b > 0$:

- $a < b \Rightarrow a + c < b + c$ für alle $c \epsilon \mathbb{R}$
- $a \cdot b < b \cdot c$ für $c > 0$
- $a \cdot b > b \cdot c$ für $c < 0$

$a > 0, b > 0 \Rightarrow a \cdot b > 0$

$a < 0, b < 0 \Rightarrow a \cdot b > 0$ (minus mal minus = plus)

1.2.2 Intervalle

$[a, b] = \{a \mid a \leq x \leq b\}$ abgeschlossenes Intervall

$(a, b) =]a, b[= \{x \mid a < x < b\}$ offenes Intervall

$]a, b[= \{x \mid a < x \leq b\}$ halb offenes Intervall

1.2.3 Betrag

Der Betrag $|a|$ einer Zahl a ist der Abstand dieser Zahl vom Nullpunkt auf der Zahlengerade:

$|a| = a$ oder $-a$

- falls $a \geq 0$
- falls $a < 0$

Beispiel: $|-5| = -(-5) = 5$

1.2.4 Binomische Formeln

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

1.2.5 Potenzen, Logarithmen, Wurzeln

$a + a + a + ... + a = n \cdot a$

$a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a = a^n$ | a: Basis, n: Exponent

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$a^n = \frac{1}{a^{-n}}$

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

$a^n \cdot a^n = (a \cdot b)^n$

$^n\sqrt{a} = a^{\frac{2}{3}}$

Beispiel: $\frac{1}{8^{\frac{-2}{3}}} = 8^{\frac{2}{3}} =^3 \sqrt{64} = 4$

1.3 Logarithmus

$log_2 8 = \frac{log8}{log2} = \frac{ln8}{ln2} = 3$

Rechenregeln für Logarithmus

$log(a \cdot b) = log\ a + log\ b$

$log(\frac{a}{b}) = log\ a - log\ b$

$loga^n = n \cdot log\ a$

$log^n\sqrt{a} = log\ a^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}log\ a$

1.4 Quadratische Gleichungen

Mitternachtsformel

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

PQ Formel

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

2 Folgen und Reihen

$1, 2, 3, 4, 5$

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$

$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}$

$2, 4, 8, 16, 32, 64$

2.1 Folgen - Definition

Eine Funktion, die jeder natürlichen Zahl $n \epsilon \mathbb{N}$ eine reelle Zahl zuordnet, heißt: Zahlenfolge und wird mit $a_1, a_2, a_3, ...a_n, ...$ oder $\{a_n\}$ mit $n \epsilon \mathbb{N}$ bezeichnet. Die a_n heißen glieder der Folge; a_1 heißt Anfangsglied.

$1, 2, 3, 4, 5, ...$ | $a_n = n$ | arithmetisch

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, ...$ | $a_n = \frac{1}{n}$ | nicht arithm., nicht geom.

$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, ...$ | $a_n = \frac{n}{n+1}$ | nicht arithm. nicht geom.

$2, 4, 8, 16, 32, 64, ...$ | $a_n = 2^n$ | geometrische Folge

2.1.1 Arithmetische Folgen

Eine Folge $\{a_n\}$, bei der für alle $n \epsilon \mathbb{N}$ gilt:

$a_{n+1} - a_n = d = const.$, heißt **arithmetische Folge**. d Steht für die differenz.

Beispiel

$5, 8, 11, 14, 17$ | $d = 3$

$11, 6, 1, -4, -9$ | $d = -5$

Wegen der konstanten Differenz d zweier Folgenglieder ist eine arithmetische Folge eindeutig durch das Anfangsglied a_1 und die konstante differenz d bestimmt.

$a_1; a_2; a_3; ...; a_n$

$a_1; a_1 + d; a_1 + 2d; ...; a_1 + (n-1)d$

Allgemeines Folgenglied einer arithmetischen Folge $a_n = a_1 + (n-1)d$

2.1.2 Geometrische Folgen

Eine Folge $\{a_n\}$, bei für alle $n \epsilon \mathbb{N}$ gilt:

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q = const.$ heißt **geometrische Folge**. q steht für den Quotient.

Beispiel

$2, 4, 8, 16, 32, ...$ | $q = 2$

$\frac{4}{3}, \frac{4}{9}, \frac{4}{27}, \frac{4}{81}, ...$ | $q = \frac{1}{3}$

Wegen des konstanten Quotienten q ist eine geometrische Folge eindeutig durch a_1 und q bestimmt.

$a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n$

$a_1, a_1 \cdot q, a_1 \cdot q^2, a_1 \cdot q^3, ..., a_1 \cdot q^{n-1}$

Allgemeines Folgenglied einer geometrischen Folge $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

2.2 Reihen - Definition

Gegeben sei eine Zahlenfolge $a_1 + a_2 + a_3 + ...$: man bezeichnet die Addition der Folgenglieder als **unendliche Reihe** oder **Reihe**.

Die Summe $S_n = \sum_{i=1}^{n} a; = a_1 + a_2 + ... + a_n$ heißt n-te Partialsumme oder n-te Teilsumme.

Eine arithmetische/geometrische Reihe ist eine Reihe, deren Glieder den Gesetzen einer arithmetischen/geometrischen Folge gehorchen.

2.2.1 n-te Partialsumme einer arithmetischen Reihe

Die n-te Partialsumme S_n einer arithmetischen Folge:

1. $S_n = a_1 + a_1 + d + ... + a_1 + (n-2)d + a_1 + (n-1)d$

2. $S_n = a_1 + (n-1)d + a_1 + (n-2)d + ... + a_1 + d + a_1$

1. + 2. $2S_n = [2a_1 + (n-1)d] + [2a_1 + (n-1)d] + ... + [2a_1 + (n-1)d] + [2a_1 + (n-1)d]$

$\Rightarrow n$-mal

$2S_n = n \cdot (2a_1 + (n-1)d) \mid : 2$

n-te Partialsumme einer arithmetischen Reihe $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$

$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$

$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_1 + (n-1)d)$

$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

2.2.2 Gauss'sche Aufgabe

$$S_{100} = \sum_{i=1}^{100} i = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + 100 =$$

$\frac{100}{2} \cdot (1 + 100) = \frac{100 \cdot 101}{2} = 5050$

Summe der natürlichen Zahlen $1, 2, 3, 4, 5, ..., n$

$S_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$

2.2.3 n-te Partialsumme einer geometrischen Reihe

Die n-te Partialsumme S_n einer geometirschen Folge:

1. $S_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + ... + a_1 \cdot q^{a-2} + a_1 \cdot q^{n-1}$

2. $S_n = a_1 \cdot q^{n-1} + a_1 \cdot q^{a-2} + ... + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q + a_1$

1. + 2. $q \cdot S_n - S_n = -a_1 + a_1 q^n$

$q \cdot S_n - S_n = \frac{a_1 \cdot (-1+q^n)}{-a_1 + a_1 \cdot q}$

n-te Partialsumme einer geometrischen Reihe $S_n \cdot (q-1) = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}$

2.3 Folgen - Eigenschaften

2.3.1 Beschränkung

Eine Folge $\{a_n\}$ heißt beschränkt, wenn für alle glieder der Folge gilt:

$|a_n| \leq c = const.$, c heißt Schranke

Beispiel

$a_n = (-2)^n$ ist nicht beschränkt, da die Folgenglieder beliebig groß bzw. klein werden können.

Beispiel 2

$a_n = \frac{1}{n}$ ist beschränkt, da für alle Folgendglieder gilt: $|a_n| \leq 1 \Rightarrow$ Schranke $c = 1$

$0 < \frac{1}{u} \leq 1$

2.3.2 Monotonie

Gilt für eine Zahlenfolge $\{a_n\}$:

$a_n < / \leq / = / \geq / > a_{n+1}$ für alle $n \epsilon \mathbb{N}$, so heißt die Folge:

- streng monoton wachsend
- monoton wachsend
- monoton fallend
- streng monoton fallend

Beispiel

$a_n = 4n - 3$

$4(n+1) - 3 = a_{n+1}$

$a_n < a_{n+1} \Rightarrow 4n$ unterschied $\Rightarrow$ streng monton steigend

Beispiel 2

$$
\begin{aligned}
a_n &= n - n^2 \\
a_{n+1} &= (n+1) - (n+1)^2 \\
a_{n+1} &= n + 1 - (n^2 + 2n + 1) \\
a_{n+1} &= n - n^2 - 2n \\
a_n = n - n^2 > n - n^2 - 2n &= a_{n+1} \mid n - n^2 = a_n
\end{aligned}
$$

a_n ist streng monoton fallend

Beispiel 3

$a_n = 2$ ist monoton wachsend und monoton fallend $(2, 2, 2, 2, ...)$

Beispiel 4

$$a_n = \frac{n}{2^n} \mid \frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{8}, ...$$

ist monton fallend da $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$

2.3.3 Grenzwerte

Die Glieder der Folge $a_n = 2n(2, 4, 6, 8, 10, ...)$ werden mit wachsendem n immer größer. Man sagt: "Die Folge wächst über alle Grenzen."

Gleiches gilt für $a_n = -3n(-3, -6, -9, -12, ...)$.

Die Folge $a_n = \frac{1}{n}(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...)$ nähert sich mit größer werdenen n dem Wert 0 an. Der Wert 0 wird nicht erriecht.

Man schreibt $\lim_{n \to \inf} \frac{1}{n} = 0$

"Limes $\frac{1}{n}$ für n geht gegen $\inf$ ist gleich 0"

Eine Folge, deren Glieder einem Grenzwert zustreben, heißt **konvergente Folge** (gegenstück ist die **divergente Folge**).

Eine Folge mit dem grenzwert 0 heißt **Nullfolge**.

Beispiel

$$
\begin{aligned}
a_1 &= (-1)^1 + \frac{1}{1} = 0 \\
a_2 &= (-1)^2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\
a_3 &= (-1)^3 + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3} \\
a_4 &= (-1)^4 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \\
a_5 &= (-1)^5 + \frac{1}{5} = -\frac{4}{5} \\
a_6 &= (-1)^6 + \frac{1}{6} = \frac{7}{6} \\
a_7 &= (-1)^7 + \frac{1}{7} = -\frac{6}{7}
\end{aligned}
$$

$(-1)^n => 0$ für n gerade; < 0 für n ungerade

$\Rightarrow$ Vorzeichenwechsel

"alterniernde" Folge; alterniernd = wechselnd

$\lim_{n\to\infty}[(-1)^n + \frac{1}{n}] = +1$ für gerade; -1 für ungerade

Die Folge $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ ist beschränk, da gilt:

$$|a_n| \leq 1.5 = \frac{3}{2}|c = 1.5 \quad a_n\epsilon \ ]-1; 1.5]$$

Grenzwerte von Folgen, deren Glieder aus Polynomen n-ten Grades bestehen:

Beispiel

$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2}{4n^2+n+5} \to \frac{3}{4}$ weil man mit n^2 alle Werte multipliziert

Beispiel 2

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^3}{4n^2+n+5} \to \infty$$

Beispiel 3

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2}{4n^3+n+5} = 0$$

2.4 Reihen - Eigenschaften

2.4.1 Grenzwerte von Reihen

Bei arithmetischen Reihen gibt es keinen Grenzwert.

Bei geometrischen Reihen einen Grenzwert, sofern für den Quotienten q gilt: $|q| < 1$. Der Grenzwert ist dann:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i \; q^{i-1} = a_i \cdot \frac{1}{1-q}$$

Beispiel

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2n-1} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... \end{aligned}$$

Anfangsglied $a_1 = 1; q = \frac{1}{2}$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

Beispiel 2

$$\sum_{i=2}^{\infty} 5 \cdot (\frac{1}{3})^i = \frac{5}{9} + \frac{5}{27} + \frac{5}{81} + ... = \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{5}{9\frac{1}{3}} \cdot \frac{3}{2} = \frac{5}{6}$$

Beachte das $i = 2$!

Für $i = 1$ wäre der Grenzwert $\frac{5}{6} + \frac{5}{3} = \frac{5}{2}$. Dabei ist $\frac{5}{3}$ der Wert für $i = 1$ **nicht** summiert.

3 Finanz Mathematik

3.1 Definitionen

3.1.1 Begriffe

3.1.2 Einfache Verzinsung

Keine Verzinsung der zinsen einer Periode in den nachfolgenden Perioden.

Wie viel erhält man für 800€nach 2 Jahren, wenn dieser Betrag mit $4,5\%$ p.a. (per anno)

800€: Kapital

36€: Zinsen (1. Jahr)

36€: Zinsen (2. Jahr)

C_0 Anfangskapital / auch "Barwert"

C_t Zeitwert

C_n Endkapital / auch "Endwert"

n Kaptialüberlassungsdauer

i Zinssatz dezimal

P Zinssatz/Zinsfuß in %

$(1+i)^n = q^n$ Aufzinsfaktor

$\frac{1}{(1+i)^n} = \frac{1}{q}$ Abzinsungs-/Dirkontierungsfaktor

3.1.3 Allgemein - Einfache Verzinsung

$$C_n = C_0 \cdot (1 + i \cdot n)$$

3.1.4 Zinseszinsliche Verzinsung

Die Zinsen werden dem Kapital zugeschlagen und in Folgeperioden mitverzinst.

Beispiel

$$C_0 = 800$$
$$i = 0.045$$
$$n = 2$$

$C_0 =$ 800€$C_1 = 800 + 800 \cdot 0.045 = 836$€$C_2 = 836 + 836 \cdot 0.045 = 873.62$€

3.1.5 Allgemein - Zinseszinsliche Verzinsung

$$C_n = C_0 \cdot (1 + i)^n$$

3.1.6 Einfache Verzinsung

Keine Verzinsung der zinsen einer Periode in den nachfolgenden Perioden.

Wie viel erhält man für 800€nach 2 Jahren, wenn dieser Betrag mit $4,5\%$ p.a. (per anno)

800€: Kapital

36€: Zinsen (1. Jahr)

36€: Zinsen (2. Jahr)

C_0 Anfangskapital / auch "Barwert"

C_t Zeitwert

C_n Endkapital / auch "Endwert"

n Kaptialüberlassungsdauer

i Zinssatz dezimal

P Zinssatz/Zinsfuß in %

$(1+i)^n = q^n$ Aufzinsfaktor

$\frac{1}{(1+i)^n} = \frac{1}{q}$ Abzinsungs-/Dirkontierungsfaktor

3.1.7 Allgemein - Einfache Verzinsung

$$C_n = C_0 \cdot (1 + i \cdot n)$$

3.1.8 Zinseszinsliche Verzinsung

Die Zinsen werden dem Kapital zugeschlagen und in Folgeperioden mitverzinst.

Beispiel

$$\begin{aligned} C_0 &= 800 \\ i &= 0.045 \\ n &= 2 \end{aligned}$$

$C_0 = 800€ C_1 = 800 + 800 \cdot 0.045 = 836€ C_2 = 836 + 836 \cdot 0.045 = 873.62€$

3.1.9 Allgemein - Zinseszinsliche Verzinsung

$$C_n = C_0 \cdot (1 + i)^n$$

4 Ableiten

4.1 Ableitungsregeln

Aufbau: Name der Regel.
Erste Formel die allgemeine Formel (neutral).
Zweite Formel (optional) ein Zahlenbeispiel.

Konstantenregel:

$$\begin{aligned} & f(x) = n \\ \Longrightarrow \ & f'(x) = 0 \end{aligned}$$

Potenzregel:

$$\begin{aligned} & f(x) = x^n \\ \Longrightarrow \ & f'(x) = n \cdot x^{n-1} \end{aligned}$$

Faktorregel:

$$\begin{aligned} & f(x) = a \cdot g(x) \\ \Longrightarrow \ & f'(x) = a \cdot g'(x) \end{aligned}$$

Summenregel/Differenzregel:

$$\begin{aligned} & f(x) = g(x) + h(x) \\ \Longrightarrow \ & f'(x) = g'(x) + h'(x) \end{aligned}$$

Produktregel:

$$\begin{aligned} & f(x) = u(x) \cdot v(x) \\ \Longrightarrow \ & f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \end{aligned}$$

Kettenregel:

$$\begin{aligned} & f(x) = u(v(x)) \\ \Longrightarrow \ & f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x) \end{aligned}$$

4.1.1 Zu Beachten

- $ln(x)$ abgeleitet ist $\frac{1}{x}$
- e^x abgeleitet bleibt gleich (e^x). Bei e wird die Kettenregel angewendet.

4.2 Monotonie und Grümmung

Montonie:
Monotonie bezieht sich auf das Verhalten einer Funktion in Bezug darauf, ob sie stetig zunimmt oder abnimmt. Eine Funktion wird als monoton steigend bezeichnet, wenn für zwei Punkte x_1 und x_2 mit $x_1 < x_2$ der Funktionswert an x_1 kleiner oder gleich dem Funktionswert an x_2 ist. Umgekehrt wird eine Funktion als monoton fallend bezeichnet, wenn für zwei Punkte x_1 und x_2 mit $x_1 > x_2$ der Funktionswert an x_1 größer oder gleich dem Funktionswert an x_2 ist.

Krümmung:
Die Krümmung einer Funktion beschreibt, wie stark eine Kurve von einer Geraden abweicht. Mathematisch gesehen wird die Krümmung einer Funktion durch die zweite Ableitung der Funktion beschrieben. Eine positive zweite Ableitung bedeutet, dass die Funktion eine nach oben geöffnete Krümmung (konkav) hat, während eine negative zweite Ableitung eine nach unten geöffnete Krümmung (konvex) anzeigt. Eine Krümmung von null bedeutet, dass die Funktion an dieser Stelle eine Wendepunkt hat, wo die Krümmung ihre Richtung ändert.

4.3 Extrem- und Wendepunkte

Extrempunkte:
Extrempunkte sind Punkte auf dem Graphen einer Funktion, an denen die Funktion entweder ein lokales Maximum oder Minimum erreicht.

- **Lokales Maximum**: An einem lokalen Maximum ist der Funktionswert größer als in der unmittelbaren Umgebung. Mathematisch bedeutet dies, dass die erste Ableitung der Funktion an diesem Punkt null ist ($f'(x) = 0$) und die zweite Ableitung negativ ist ($f''(x) < 0$).
- **Lokales Minimum**: An einem lokalen Minimum ist der Funktionswert kleiner als in der unmittelbaren Umgebung. Hier ist ebenfalls die erste Ableitung null ($f'(x) = 0$), jedoch ist die zweite Ableitung positiv ($f''(x) > 0$).

Wendepunkte:
Ein Wendepunkt ist ein Punkt auf dem Graphen einer Funktion, an dem sich das Krümmungsverhalten ändert. Das bedeutet, die Funktion wechselt an diesem Punkt von konkarv (rechtsgekrümmt) zu konvex (linksgekrümmt) oder umgekehrt.

- **Bestimmung von Wendepunkten**: Ein Wendepunkt liegt vor, wenn die zweite Ableitung der Funktion null ist ($f''(x) = 0$) und die dritte Ableitung nicht null ist ($f'''(x) \neq 0$).
- Gilt für einen Wendepunkt x_0 zusätzlich $f'(x_0) = 0$, so handelt es sich um einen Sattelpunk

4.4 Partielle Differentiation

Differentiation von Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen.

Beispiel: Der Ertrag (Output) hängt von mehreren Inputfaktoren (Faktor A und Faktor B) ab. Oft kann nur einer der Inputfaktoren erhöht werden, während der andere Faktor konstant bleibt.

Allgemein:

$$z = f(x, y)$$

Für die Steigung in Richtung der x/y-Achse gilt, dass der jeweils anderer Wert konstant ist.

Da die jeweils unabhängige Variable konstant gehalten wird, entspricht die Vorgehensweise der partiellen Differentiation der Vorgehensweise der Differentiation mit einer Variable.

Ist eine reelle Funktion $z = f(x, y)$ partiell differenzierbar nach beiden Variablen, dann heißt der Vektor:

TODO!(HIER FEHLT NOCH RICHTIGES RECHENBEISPIEL)!

4.5 Extremwerte bei Funktionen mit mehrere Variablen

5 Glossar

- Explizite / Rekurisve Definition