

Studium - Analysis

V: 1.0

Inhalt

1 Elementare Grundlagen	2
1.1 Mengen	2
1.1.1 Menge der natürlichen Zahlen	2
1.1.2 Menge der rationalen Zahlen	2
1.1.3 Keine Rationale Zahlen	2
1.2 Ungleichungen, Beträge, Intervalle	3
1.2.1 Allgemein	3
1.2.2 Intervalle	3
1.2.3 Betrag	3
1.2.4 Binomische Formeln	3
1.2.5 Potenzen, Logarithmen, Wurzeln	4
1.3 Logarithmus	4
1.4 Quadratische Gleichungen	4
2 Folgen und Reihen	4
2.1 Folgen - Definition	5
2.1.1 Arithmetische Folgen	5
2.1.2 Geometrische Folgen	5
2.2 Reihen - Definition	5
2.2.1 n-te Partialsumme einer arithmetischen Reihe	6
2.2.2 Gauss'sche Aufgabe	6
2.2.3 n-te Partialsumme einer geometrischen Reihe	6
2.3 Folgen - Eigenschaften	6
2.3.1 Beschränkung	6
2.3.2 Monotonie	7
2.3.3 Grenzwerte	7
3 Glossar	8

1 Elementare Grundlagen

1.1 Mengen

1.1.1 Menge der natürlichen Zahlen

$$\mathbb{N} = \{ 1, 2, 3, 4, \dots \}$$

Eigenschaften

1. Jede natürliche Zahl $\epsilon \mathbb{N}$ hat genau einen Nachfolger, nämlich $n + 1$
2. Jede von 1 verschiedene natürliche Zahl n hat genau einen Vorgänger $n - 1$. Die Zahl 1 hat keinen Vorgänger.

Rechenoperationen

- $n_1 + n_2 \in \mathbb{N}$
- $n_1 \cdot n_2 \in \mathbb{N}$

1.1.2 Menge der rationalen Zahlen

$$\mathbb{Q} = \{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z} \text{ mit } b \neq 0 \}$$

| → mit der Eigenschaft

Rechenoperationen

- +
- -
- ·
- /

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \Leftrightarrow a_1 \cdot b_2 = a_2 \cdot b_1$$

$$\frac{a_1}{b_2} + \frac{a_2}{b_2} \Leftrightarrow \frac{a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1}{b_1 \cdot b_2}$$

$$\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} \Leftrightarrow \frac{a_1 \cdot a_2}{b_1 \cdot b_2}$$

Rationale Zahlen lassen sich als periodische Dezimalzahlen darstellen:

$$\frac{6}{11} = 0.45454545 = 0.\overline{45}$$

1.1.3 Keine Rationale Zahlen

- $\sqrt{2} = 1.141421$
- $\pi = 3.141592$

⇒ Menge der reellen Zahlen \mathbb{R}

Rechenoperationen

- +

- -
- ·
- /

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

→ Alle \mathbb{N} sind in \mathbb{Z} enthalten, ...

1.2 Ungleichungen, Beträge, Intervalle

1.2.1 Allgemein

:

- $a < b$, falls a links von b liegt
- $a = b$, falls beide Zahlen zusammenfallen
- $a > b$, falls a rechts von b liegt

$a < b, /a, b > 0$:

- $a < b \Rightarrow a + c < b + c$ für alle $c \in \mathbb{R}$
- $a \cdot b < b \cdot c$ für $c > 0$
- $a \cdot b > b \cdot c$ für $c < 0$

$a > 0, b > 0 \Rightarrow a \cdot b > 0$

$a < 0, b < 0 \Rightarrow a \cdot b > 0$ (minus mal minus = plus)

1.2.2 Intervalle

$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$ abgeschlossenes Intervall

$(a, b) =]a, b[= \{x \mid a < x < b\}$ offenes Intervall

$]a, b[= \{x \mid a < x \leq b\}$ halb offenes Intervall

1.2.3 Betrag

Der Betrag $|a|$ einer Zahl a ist der Abstand dieser Zahl vom Nullpunkt auf der Zahlengerade:

$|a| = a$ oder $-a$

- falls $a \geq 0$
- falls $a < 0$

Beispiel: $|-5| = -(-5) = 5$

1.2.4 Binomische Formeln

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

1.2.5 Potenzen, Logarithmen, Wurzeln

$$a + a + a + \dots + a = n \cdot a$$

$a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a = a^n$ | a : Basis, n : Exponent

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}}$$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$${}^n\sqrt{a} = a^{\frac{2}{3}}$$

$$\text{Beispiel: } \frac{1}{8^{\frac{-2}{3}}} = 8^{\frac{2}{3}} = {}^3\sqrt{64} = 4$$

1.3 Logarithmus

$$\log_2 8 = \frac{\log 8}{\log 2} = \frac{\ln 8}{\ln 2} = 3$$

Rechenregeln für Logarithmus

$$\log(a \cdot b) = \log a + \log b$$

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$$

$$\log a^n = n \cdot \log a$$

$$\log^n \sqrt{a} = \log a^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log a$$

1.4 Quadratische Gleichungen

Mitternachtsformel

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

PQ Formel

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

2 Folgen und Reihen

1, 2, 3, 4, 5

1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$

$\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$

2, 4, 8, 16, 32, 64

2.1 Folgen - Definition

Eine Funktion, die jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ eine reelle Zahl zuordnet, heißt: Zahlenfolge und wird mit $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ oder $\{a_n\}$ mit $n \in \mathbb{N}$ bezeichnet. Die a_n heißenglieder der Folge; a_1 heißt Anfangsglied.

$1, 2, 3, 4, 5, \dots | a_n = n |$ arithmetisch

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots | a_n = \frac{1}{n} |$ nicht arithm., nicht geom.

$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots | a_n = \frac{n}{n+1} |$ nicht arithm. nicht geom.

$2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots | a_n = 2^n |$ geometrische Folge

2.1.1 Arithmetische Folgen

Eine Folge $\{a_n\}$, bei der für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$a_{n+1} - a_n = d = \text{const.}$, heißt **arithmetische Folge**. d steht für die Differenz.

Beispiel

$5, 8, 11, 14, 17 | d = 3$

$11, 6, 1, -4, -9 | d = -5$

Wegen der konstanten Differenz d zweier Folgenglieder ist eine arithmetische Folge eindeutig durch das Anfangsglied a_1 und die konstante Differenz d bestimmt.

$a_1; a_2; a_3; \dots; a_n$

$a_1; a_1 + d; a_1 + 2d; \dots; a_1 + (n-1)d$

Allgemeines Folgenglied einer arithmetischen Folge $a_n = a_1 + (n-1)d$

2.1.2 Geometrische Folgen

Eine Folge $\{a_n\}$, bei der für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q = \text{const.}$ heißt **geometrische Folge**. q steht für den Quotienten.

Beispiel

$2, 4, 8, 16, 32, \dots | q = 2$

$\frac{4}{3}, \frac{4}{9}, \frac{4}{27}, \frac{4}{81}, \dots | q = \frac{1}{3}$

Wegen des konstanten Quotienten q ist eine geometrische Folge eindeutig durch a_1 und q bestimmt.

$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$

$a_1, a_1 \cdot q, a_1 \cdot q^2, a_1 \cdot q^3, \dots, a_1 \cdot q^{n-1}$

Allgemeines Folgenglied einer geometrischen Folge $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

2.2 Reihen - Definition

Gegeben sei eine Zahlenfolge $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$: man bezeichnet die Addition der Folgenglieder als **unendliche Reihe** oder **Reihe**.

Die Summe $S_n = \sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ heißt n -te Partialsumme oder n -te Teilsumme.

Eine arithmetische/geometrische Reihe ist eine Reihe, deren Glieder den Gesetzen einer arithmetischen/geometrischen Folge gehorchen.

2.2.1 n-te Partialsumme einer arithmetischen Reihe

Die n -te Partialsumme S_n einer arithmetischen Folge:

1. $S_n = a_1 + a_1 + d + \dots + a_1 + (n-2)d + a_1 + (n-1)d$
 2. $S_n = a_1 + (n-1)d + a_1 + (n-2)d + \dots + a_1 + d + a_1$
1. + 2. $2S_n = [2a_1 + (n-1)d] + [2a_1 + (n-1)d] + \dots + [2a_1 + (n-1)d] + [2a_1 + (n-1)d]$
 $\Rightarrow n$ -mal

$$2S_n = n \cdot (2a_1 + (n-1)d) \mid : 2$$

n-te Partialsumme einer arithmetischen Reihe $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_1 + (n-1)d)$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

2.2.2 Gauss'sche Aufgabe

$$S_{100} = \sum_{i=1}^{100} i = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 100 =$$

$$\frac{100}{2} \cdot (1 + 100) = \frac{100 \cdot 101}{2} = 5050$$

Summe der natürlichen Zahlen $1, 2, 3, 4, 5, \dots, n$

$$S_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

2.2.3 n-te Partialsumme einer geometrischen Reihe

Die n -te Partialsumme S_n einer geometrischen Folge:

1. $S_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \dots + a_1 \cdot q^{a-2} + a_1 \cdot q^{n-1}$
 2. $S_n = a_1 \cdot q^{n-1} + a_1 \cdot q^{a-2} + \dots + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q + a_1$
1. + 2. $q \cdot S_n - S_n = -a_1 + a_1 q^n$

$$q \cdot S_n - S_n = \frac{a_1 \cdot (-1 + q^n)}{-a_1 + a_1 \cdot q}$$

n-te Partialsumme einer geometrischen Reihe $S_n \cdot (q - 1) = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$

2.3 Folgen - Eigenschaften

2.3.1 Beschränkung

Eine Folge $\{a_n\}$ heißt beschränkt, wenn für alleglieder der Folge gilt:

$$|a_n| \leq c = \text{const.}, c \text{ heißt Schranke}$$

Beispiel

$a_n = (-2)^n$ ist nicht beschränkt, da die Folgenglieder beliebig groß bzw. klein werden können.

Beispiel 2

$a_n = \frac{1}{n}$ ist beschränkt, da für alle Folgenglieder gilt: $|a_n| \leq 1 \Rightarrow$ Schranke $c = 1$

$$0 < \frac{1}{u} \leq 1$$

2.3.2 Monotonie

Gilt für eine Zahlenfolge $\{a_n\}$:

$a_n < / \leq / = / \geq / > a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so heißt die Folge:

- streng monoton wachsend
- monoton wachsend
- monoton fallend
- streng monoton fallend

Beispiel

$$a_n = 4n - 3$$

$$4(n+1) - 3 = a_{n+1}$$

$$a_n < a_{n+1} \Rightarrow 4n \text{ unterschied} \Rightarrow \text{streng monoton steigend}$$

Beispiel 2

$$a_n = n - n^2$$

$$(n+1) - (n+1)^2 = a_{n+1}$$

$$n + 1 - (n^2 + 2n + 1) = a_{n+1}$$

$$n - n^2 - 2n = a_{n+1}$$

$$a_n = n - n^2 > n - n^2 - 2n = a_n + 1 \mid n - n^2 = a_n$$

a_n ist streng monoton fallend

Beispiel 3

$a_n = 2$ ist monoton wachsend und monoton fallend (2, 2, 2, 2, ...)

Beispiel 4

$$a_n = \frac{n}{2^n} \mid \frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{8}, \dots$$

ist monoton fallend da $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$

2.3.3 Grenzwerte

Die Glieder der Folge $a_n = 2n(2, 4, 6, 8, 10, \dots)$ werden mit wachsendem n immer größer. Man sagt: "Die Folge wächst über alle Grenzen."

Gleiches gilt für $a_n = -3n(-3, -6, -9, -12, \dots)$.

Die Folge $a_n = \frac{1}{n}(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots)$ nähert sich mit größer werdenden n dem Wert 0 an. Der Wert 0 wird nicht erreicht.

Man schreibt $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

"Limes $\frac{1}{n}$ für n geht gegen ∞ ist gleich 0"

Eine Folge, deren Glieder einem Grenzwert zustreben, heißt **konvergente Folge** (gegenstück ist die **divergente Folge**).

Eine Folge mit dem Grenzwert 0 heißt **Nullfolge**.

Beispiel

$$a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$$

$$a_1 = (-1)^1 + \frac{1}{1} = 0$$

$$a_2 = (-1)^2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$a_3 = (-1)^3 + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$$

$$a_4 = (-1)^4 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

$$a_5 = (-1)^5 + \frac{1}{5} = -\frac{4}{5}$$

$$a_6 = (-1)^6 + \frac{1}{6} = \frac{7}{6}$$

$$a_7 = (-1)^7 + \frac{1}{7} = -\frac{6}{7}$$

$(-1)^n \Rightarrow 0$ für n gerade; < 0 für n ungerade

\Rightarrow Vorzeichenwechsel

"alternierende" Folge; alterniernd = wechselnd

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [(-1)^n + \frac{1}{n}] = +1 \text{ für gerade; } -1 \text{ für ungerade}$$

Die Folge $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ ist beschränkt, da gilt:

$$|a_n| \leq 1.5 = \frac{3}{2} \mid c = 1.5$$

$$a_n \in]-1; 1.5]$$

Grenzwerte von Folgen, deren Glieder aus Polynomen n -ten Grades bestehen:

Beispiel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2}{4n^2+n+5} \rightarrow \frac{3}{4} \text{ weil man mit } n^2 \text{ alle Werte multipliziert}$$

Beispiel 2

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3}{4n^2+n+5} \rightarrow \infty$$

Beispiel 3

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2}{4n^3+n+5} = 0$$

3 Glossar

- Explizite / Rekursive Definition