Studium - Analysis

V: 1.0

Inhalt

1 Elementare Grundlagen

1.1 Mengen

1.1.1 Menge der natürlichen Zahlen

$\mathbb{N} = \{ 1, 2, 3, 4, ... \}$

Eigenschaften

1. Jede natürliche Zahl $\epsilon\mathbb{N}$ hat genau einen Nachfolger, nämlich $n+1$
2. Jede von 1 verschiedene natürliche Zahl n hat genau einen Vorgänger $n-1$. Die Zahl 1 hat keinen Vorgänger.

Rechenoperationen

- $n_1 + n_2 \;\; \epsilon\mathbb{N}$
- $n_1 \cdot n_2 \;\; \epsilon\mathbb{N}$

1.1.2 Menge der rationalen Zahlen

$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \;\; \epsilon\mathbb{Z}$ mit $b \neq 0\}$

$|\rightarrow$ mit der Eigenschaft

Rechenoperationen

- +
- -
- ·
- /

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} <=> a_1 \cdot b_2 = a_2 \cdot b_1$$

$$\frac{a_1}{b_2} + \frac{a_2}{b_2} <=> \frac{a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1}{b_1 \cdot b_2}$$

$$\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} <=> \frac{a_1 \cdot a_2}{b_1 \cdot b_2}$$

Rationale Zahlen lassen sich als periodische Dezimalzahlen darstellen:

$\frac{6}{11} = 0.45454545 = 0.\overline{45}$

1.1.3 Keine Rationale Zahlen

- $\sqrt{2} = 1.141421$
- $\pi = 3.141592$

$\Rightarrow$ Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$

Rechenoperationen

- +

- -
- ·
- /

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

$\rightarrow$ Alle $\mathbb{N}$ sind in $\mathbb{Z}$ enthalten, ...

1.2 Ungleichungen, Beträge, Intervalle

1.2.1 Allgemein

:

- $a < b$, falls a links von b liegt
- $a = b$, falls beide Zahlen zusammenfallen
- $a > b$, falls a rechts von b liegt

$a < b, /a, b > 0$:

- $a < b \Rightarrow a + c < b + c$ für alle $c\epsilon\mathbb{R}$
- $a \cdot b < b \cdot c$ für $c > 0$
- $a \cdot b > b \cdot c$ für $c < 0$

$a > 0, b > 0 \Rightarrow a \cdot b > 0$

$a < 0, b < 0 \Rightarrow a \cdot b > 0$ (minus mal minus = plus)

1.2.2 Intervalle

$[a, b] = \{a \mid a \leq x \leq b\}$ abgeschlossenes Intervall

$(a, b) =]a, b[= \{x \mid a < x < b\}$ offenes Intervall

$]a, b[= \{x \mid a < x \leq b\}$ halb offenes Intervall

1.2.3 Betrag

Der Betrag $|a|$ einer Zahl a ist der Abstand dieser Zahl vom Nullpunkt auf der Zahlengerade:

$|a| = a$ oder $-a$

- falls $a \geq 0$
- falls $a < 0$

Beispiel: $|-5| = -(-5) = 5$

1.2.4 Binomische Formeln

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

1.2.5 Potenzen, Logarithmen, Wurzeln

$a + a + a + ... + a = n \cdot a$

$a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a = a^n$ | a: Basis, n: Exponent

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$a^n = \frac{1}{a^{-n}}$

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

$a^n \cdot a^n = (a \cdot b)^n$

$^n\sqrt{a} = a^{\frac{2}{3}}$

Beispiel: $\frac{1}{8^{\frac{-2}{3}}} = 8^{\frac{2}{3}} =^3 \sqrt{64} = 4$

1.3 Logarithmus

$log_2 8 = \frac{log 8}{log 2} = \frac{ln 8}{ln 2} = 3$

Rechenregeln für Logarithmus

$log(a \cdot b) = log\ a + log\ b$

$log(\frac{a}{b}) = log\ a - log\ b$

$log a^n = n \cdot log\ a$

$log^n\sqrt{a} = log\ a^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} log\ a$

1.4 Quadratische Gleichungen

Mitternachtsformel

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

PQ Formel

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

2 Folgen und Reihen

$1, 2, 3, 4, 5$

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$

$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}$

$2, 4, 8, 16, 32, 64$

2.1 Folgen - Definition

Eine Funktion, die jeder natürlichen Zahl $n\epsilon\mathbb{N}$ eine reelle Zahl zuordnet, heißt: Zahlenfolge und wird mit $a_1, a_2, a_3, ...a_n, ...$ oder $\{a_n\}$ mit $n\epsilon\mathbb{N}$ bezeichnet. Die a_n heißen glieder der Folge; a_1 heißt Anfangsglied.

$1, 2, 3, 4, 5, ...$ | $a_n = n$ | arithmetisch

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, ...$ | $a_n = \frac{1}{n}$ | nicht arithm., nicht geom.

$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, ...$ | $a_n = \frac{n}{n+1}$ | nicht arithm. nicht geom.

$2, 4, 8, 16, 32, 64, ...$ | $a_n = 2^n$ | geometrische Folge

2.1.1 Arithmetische Folgen

Eine Folge $\{a_n\}$, bei der für alle $n\epsilon\mathbb{N}$ gilt:

$a_{n+1} - a_n = d = const.$, heißt **arithmetische Folge**. d Steht für die differenz.

Beispiel

$5, 8, 11, 14, 17$ | $d = 3$

$11, 6, 1, -4, -9$ | $d = -5$

Wegen der konstanten Differenz d zweier Folgenglieder ist eine arithmetische Folge eindeutig durch das Anfangsglied a_1 und die konstante differenz d bestimmt.

$a_1; a_2; a_3; ...; a_n$

$a_1; a_1 + d; a_1 + 2d; ...; a_1 + (n-1)d$

Allgemeines Folgenglied einer arithmetischen Folge $a_n = a_1 + (n-1)d$

2.1.2 Geometrische Folgen

Eine Folge $\{a_n\}$, bei für alle $n\epsilon\mathbb{N}$ gilt:

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q = const.$ heißt **geometrische Folge**. q steht für den Quotient.

Beispiel

$2, 4, 8, 16, 32, ...$ | $q = 2$

$\frac{4}{3}, \frac{4}{9}, \frac{4}{27}, \frac{4}{81}, ...$ | $q = \frac{1}{3}$

Wegen des konstanten Quotienten q ist eine geometrische Folge eindeutig durch a_1 und q bestimmt.

$a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n$

$a_1, a_1 \cdot q, a_1 \cdot q^2, a_1 \cdot q^3, ..., a_1 \cdot q^{n-1}$

Allgemeines Folgenglied einer geometrischen Folge $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

2.2 Reihen - Definition

Gegeben sei eine Zahlenfolge $a_1+a_2+a_3+...$: man bezeichnet die Addition der Folgenglieder als **unendliche Reihe** oder **Reihe**.

Die Summe $S_n = \sum_{i=1}^{n} a; = a_1 + a_2 + ... + a_n$ heißt n-te Partialsumme oder n-te Teilsumme.

Eine arithmetische/geometrische Reihe ist eine Reihe, deren Glieder den Gesetzen einer arithmetischen/geometrischen Folge gehorchen.

2.2.1 n-te Partialsumme einer arithmetischen Reihe

Die n-te Partialsumme S_n einer arithmetischen Folge:

1. $S_n = a_1 + a_1 + d + ... + a_1 + (n-2)d + a_1 + (n-1)d$

2. $S_n = a_1 + (n-1)d + a_1 + (n-2)d + ... + a_1 + d + a_1$

1. + 2. $2S_n = [2a_1 + (n-1)d] + [2a_1 + (n-1)d] + ... + [2a_1 + (n-1)d] + [2a_1 + (n-1)d]$

$\Rightarrow n$-mal

$2S_n = n \cdot (2a_1 + (n-1)d) \mid : 2$

n-te Partialsumme einer arithmetischen Reihe $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$

$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$

$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_1 + (n-1)d)$

$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

2.2.2 Gauss'sche Aufgabe

$$S_{100} = \sum_{i=1}^{100} i = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + 100 =$$

$\frac{100}{2} \cdot (1 + 100) = \frac{100 \cdot 101}{2} = 5050$

Summe der natürlichen Zahlen $1, 2, 3, 4, 5, ..., n$

$S_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$

2.2.3 n-te Partialsumme einer geometrischen Reihe

Die n-te Partialsumme S_n einer geometirschen Folge:

1. $S_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + ... + a_1 \cdot q^{a-2} + a_1 \cdot q^{n-1}$

2. $S_n = a_1 \cdot q^{n-1} + a_1 \cdot q^{a-2} + ... + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q + a_1$

1. + 2. $q \cdot S_n - S_n = -a_1 + a_1 q^n$

$q \cdot S_n - S_n = \frac{a_1 \cdot (-1 + q^n)}{-a_1 + a_1 \cdot q}$

n-te Partialsumme einer geometrischen Reihe $S_n \cdot (q-1) = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}$

2.3 Folgen - Eigenschaften

2.3.1 Beschränkung

Eine Folge $\{a_n\}$ heißt beschränkt, wenn für alle glieder der Folge gilt:

$|a_n| \leq c = const.$, c heißt Schranke

Beispiel

$a_n = (-2)^n$ ist nicht beschränkt, da die Folgenglieder beliebig groß bzw. klein werden können.

Beispiel 2

$a_n = \frac{1}{n}$ ist beschränkt, da für alle Folgendglieder gilt: $|a_n| \leq 1 \Rightarrow$ Schranke $c = 1$

$0 < \frac{1}{u} \leq 1$

2.3.2 Monotonie

Gilt für eine Zahlenfolge $\{a_n\}$:

$a_n < / \leq / = / \geq / > a_{n+1}$ für alle $n \epsilon \mathbb{N}$, so heißt die Folge:

- streng monoton wachsend
- monoton wachsend
- monoton fallend
- streng monoton fallend

Beispiel

$a_n = 4n - 3$

$4(n+1) - 3 = a_{n+1}$

$a_n < a_{n+1} \Rightarrow 4n$ unterschied $\Rightarrow$ streng monton steigend

Beispiel 2

$$\begin{aligned} a_n &= n - n^2 \\ a_{n+1} &= (n+1) - (n+1)^2 \\ a_{n+1} &= n + 1 - (n^2 + 2n + 1) \\ a_{n+1} &= n - n^2 - 2n \\ a_n = n - n^2 > n - n^2 - 2n &= a_{n+1} \mid n - n^2 = a_n \end{aligned}$$

a_n ist streng monoton fallend

Beispiel 3

$a_n = 2$ ist monoton wachsend und monoton fallend $(2, 2, 2, 2, ...)$

Beispiel 4

$$a_n = \frac{n}{2^n} \mid \frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{8}, ...$$

ist monton fallend da $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$

2.3.3 Grenzwerte

Die Glieder der Folge $a_n = 2n(2, 4, 6, 8, 10, ...)$ werden mit wachsendem n immer größer. Man sagt: "Die Folge wächst über alle Grenzen."

Gleiches gilt für $a_n = -3n(-3, -6, -9, -12, ...)$.

Die Folge $a_n = \frac{1}{n}(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...)$ nähert sich mit größer werdenen n dem Wert 0 an. Der Wert 0 wird nicht erriecht.

Man schreibt $\lim_{n \to \inf} \frac{1}{n} = 0$

"Limes $\frac{1}{n}$ für n geht gegen $\inf$ ist gleich 0"

Eine Folge, deren Glieder einem Grenzwert zustreben, heißt **konvergente Folge** (gegenstück ist die **divergente Folge**).

Eine Folge mit dem grenzwert 0 heißt **Nullfolge**.

Beispiel

$$a_1 = (-1)^1 + \frac{1}{1} = 0$$
$$a_2 = (-1)^2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$
$$a_3 = (-1)^3 + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$$
$$a_4 = (-1)^4 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$
$$a_5 = (-1)^5 + \frac{1}{5} = -\frac{4}{5}$$
$$a_6 = (-1)^6 + \frac{1}{6} = \frac{7}{6}$$
$$a_7 = (-1)^7 + \frac{1}{7} = -\frac{6}{7}$$

$(-1)^n => 0$ für n gerade; < 0 für n ungerade

$\Rightarrow$ Vorzeichenwechsel

"alterniernde" Folge; alterniernd = wechselnd

$\lim_{n\to\infty} [(-1)^n + \frac{1}{n}] = +1$ für gerade; -1 für ungerade

Die Folge $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ ist beschränk, da gilt:

$$|a_n| \leq 1.5 = \frac{3}{2} | c = 1.5 \quad a_n \epsilon \ ]-1; 1.5]$$

Grenzwerte von Folgen, deren Glieder aus Polynomen n-ten Grades bestehen:

Beispiel

$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2}{4n^2+n+5} \to \frac{3}{4}$ weil man mit n^2 alle Werte multipliziert

Beispiel 2

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^3}{4n^2+n+5} \to \infty$$

Beispiel 3

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2}{4n^3+n+5} = 0$$

2.4 Reihen - Eigenschaften

2.4.1 Grenzwerte von Reihen

Bei arithmetischen Reihen gibt es keinen Grenzwert.

Bei geometrischen Reihen einen Grenzwert, sofern für den Quotienten q gilt: $|q| < 1$. Der Grenzwert ist dann:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i \; q^{i-1} = a_i \cdot \frac{1}{1-q}$$

Beispiel

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2n-1} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... \end{aligned}$$

Anfangsglied $a_1 = 1; q = \frac{1}{2}$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

Beispiel 2

$$\sum_{i=2}^{\infty} 5 \cdot (\frac{1}{3})^i = \frac{5}{9} + \frac{5}{27} + \frac{5}{81} + ... = \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{5}{9\frac{1}{3}} \cdot \frac{3}{2} = \frac{5}{6}$$

Beachte das $i = 2$!

Für $i = 1$ wäre der Grenzwert $\frac{5}{6} + \frac{5}{3} = \frac{5}{2}$. Dabei ist $\frac{5}{3}$ der Wert für $i = 1$ **nicht** summiert.

3 Finanz Mathematik

3.1 Definitionen

3.1.1 Begriffe

3.1.2 Einfache Verzinsung

Keine Verzinsung der zinsen einer Periode in den nachfolgenden Perioden.

Wie viel erhält man für 800€nach 2 Jahren, wenn dieser Betrag mit $4,5\%$ p.a. (per anno)

800€: Kapital

36€: Zinsen (1. Jahr)

36€: Zinsen (2. Jahr)

C_0 Anfangskapital / auch "Barwert"

C_t Zeitwert

C_n Endkapital / auch "Endwert"

n Kaptialüberlassungsdauer

i Zinssatz dezimal

P Zinssatz/Zinsfuß in %

$(1+i)^n = q^n$ Aufzinsfaktor

$\frac{1}{(1+i)^n} = \frac{1}{q}$ Abzinsungs-/Dirkontierungsfaktor

3.1.3 Allgemein - Einfache Verzinsung

$$C_n = C_0 \cdot (1 + i \cdot n)$$

3.1.4 Zinseszinsliche Verzinsung

Die Zinsen werden dem Kapital zugeschlagen und in Folgeperioden mitverzinst.

Beispiel

$$\begin{aligned} C_0 &= 800 \\ i &= 0.045 \\ n &= 2 \end{aligned}$$

C_0 = 800€$C_1 = 800 + 800 \cdot 0.045 = 836$€$C_2 = 836 + 836 \cdot 0.045 = 873.62$€

3.1.5 Allgemein - Zinseszinsliche Verzinsung

$$C_n = C_0 \cdot (1 + i)^n$$

4 Glossar

- Explizite / Rekurisve Definition