

# Studium - Analysis

V: 1.0

## Inhalt

<b>1 Elementare Grundlagen</b>	<b>2</b>
1.1 Mengen . . . . .	2
1.1.1 Menge der natürlichen Zahlen . . . . .	2
1.1.2 Menge der rationalen Zahlen . . . . .	2
1.1.3 Keine Rationale Zahlen . . . . .	2
1.2 Ungleichungen, Beträge, Intervalle . . . . .	3
1.2.1 Allgemein . . . . .	3
1.2.2 Intervalle . . . . .	3
1.2.3 Betrag . . . . .	3
1.2.4 Binomische Formeln . . . . .	3
1.2.5 Potenzen, Logarithmen, Wurzeln . . . . .	4
1.3 Logarithmus . . . . .	4
1.4 Quadratische Gleichungen . . . . .	4
<b>2 Folgen und Reihen</b>	<b>4</b>
2.1 Folgen - Definition . . . . .	5
2.1.1 Arithmetische Folgen . . . . .	5
2.1.2 Geometrische Folgen . . . . .	5
2.2 Reihen - Definition . . . . .	5
2.2.1 n-te Partialsumme einer arithmetischen Reihe . . . . .	6
2.2.2 Gauss'sche Aufgabe . . . . .	6
2.2.3 n-te Partialsumme einer geometrischen Reihe . . . . .	6
2.3 Folgen - Eigenschaften . . . . .	6
2.3.1 Beschränkung . . . . .	6
2.3.2 Monotonie . . . . .	7
2.3.3 Grenzwerte . . . . .	7
<b>3 Glossar</b>	<b>8</b>

# 1 Elementare Grundlagen

## 1.1 Mengen

### 1.1.1 Menge der natürlichen Zahlen

$$\mathbb{N} = \{ 1, 2, 3, 4, \dots \}$$

#### Eigenschaften

1. Jede natürliche Zahl  $\epsilon \mathbb{N}$  hat genau einen Nachfolger, nämlich  $n + 1$
2. Jede von 1 verschiedene natürliche Zahl  $n$  hat genau einen Vorgänger  $n - 1$ . Die Zahl 1 hat keinen Vorgänger.

#### Rechenoperationen

- $n_1 + n_2 \in \mathbb{N}$
- $n_1 \cdot n_2 \in \mathbb{N}$

### 1.1.2 Menge der rationalen Zahlen

$$\mathbb{Q} = \{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z} \text{ mit } b \neq 0 \}$$

| → mit der Eigenschaft

#### Rechenoperationen

- +
- -
- ·
- /

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \Leftrightarrow a_1 \cdot b_2 = a_2 \cdot b_1$$

$$\frac{a_1}{b_2} + \frac{a_2}{b_2} \Leftrightarrow \frac{a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1}{b_1 \cdot b_2}$$

$$\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} \Leftrightarrow \frac{a_1 \cdot a_2}{b_1 \cdot b_2}$$

Rationale Zahlen lassen sich als periodische Dezimalzahlen darstellen:

$$\frac{6}{11} = 0.45454545 = 0.\overline{45}$$

### 1.1.3 Keine Rationale Zahlen

- $\sqrt{2} = 1.141421$
- $\pi = 3.141592$

⇒ Menge der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$

#### Rechenoperationen

- +

- -
- ·
- /

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

→ Alle  $\mathbb{N}$  sind in  $\mathbb{Z}$  enthalten, ...

## 1.2 Ungleichungen, Beträge, Intervalle

### 1.2.1 Allgemein

:

- $a < b$ , falls  $a$  links von  $b$  liegt
- $a = b$ , falls beide Zahlen zusammenfallen
- $a > b$ , falls  $a$  rechts von  $b$  liegt

$a < b, /a, b > 0$ :

- $a < b \Rightarrow a + c < b + c$  für alle  $c \in \mathbb{R}$
- $a \cdot b < b \cdot c$  für  $c > 0$
- $a \cdot b > b \cdot c$  für  $c < 0$

$a > 0, b > 0 \Rightarrow a \cdot b > 0$

$a < 0, b < 0 \Rightarrow a \cdot b > 0$  (minus mal minus = plus)

### 1.2.2 Intervalle

$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$  abgeschlossenes Intervall

$(a, b) = ]a, b[ = \{x \mid a < x < b\}$  offenes Intervall

$]a, b[ = \{x \mid a < x \leq b\}$  halb offenes Intervall

### 1.2.3 Betrag

Der Betrag  $|a|$  einer Zahl  $a$  ist der Abstand dieser Zahl vom Nullpunkt auf der Zahlengerade:

$|a| = a$  oder  $-a$

- falls  $a \geq 0$
- falls  $a < 0$

Beispiel:  $|-5| = -(-5) = 5$

### 1.2.4 Binomische Formeln

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

### 1.2.5 Potenzen, Logarithmen, Wurzeln

$$a + a + a + \dots + a = n \cdot a$$

$a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a = a^n$  |  $a$ : Basis,  $n$ : Exponent

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}}$$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$${}^n\sqrt{a} = a^{\frac{2}{3}}$$

$$\text{Beispiel: } \frac{1}{8^{\frac{-2}{3}}} = 8^{\frac{2}{3}} = {}^3\sqrt{64} = 4$$

### 1.3 Logarithmus

$$\log_2 8 = \frac{\log 8}{\log 2} = \frac{\ln 8}{\ln 2} = 3$$

#### Rechenregeln für Logarithmus

$$\log(a \cdot b) = \log a + \log b$$

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$$

$$\log a^n = n \cdot \log a$$

$$\log^n \sqrt{a} = \log a^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log a$$

### 1.4 Quadratische Gleichungen

#### Mitternachtsformel

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

#### PQ Formel

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

## 2 Folgen und Reihen

1, 2, 3, 4, 5

1,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{5}$

$\frac{1}{2}$ ,  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{3}{4}$ ,  $\frac{4}{5}$ ,  $\frac{5}{6}$

2, 4, 8, 16, 32, 64

## 2.1 Folgen - Definition

Eine Funktion, die jeder natürlichen Zahl  $n \in \mathbb{N}$  eine reelle Zahl zuordnet, heißt: Zahlenfolge und wird mit  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  oder  $\{a_n\}$  mit  $n \in \mathbb{N}$  bezeichnet. Die  $a_n$  heißenglieder der Folge;  $a_1$  heißt Anfangsglied.

$1, 2, 3, 4, 5, \dots | a_n = n |$  arithmetisch

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots | a_n = \frac{1}{n} |$  nicht arithm., nicht geom.

$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots | a_n = \frac{n}{n+1} |$  nicht arithm. nicht geom.

$2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots | a_n = 2^n |$  geometrische Folge

### 2.1.1 Arithmetische Folgen

Eine Folge  $\{a_n\}$ , bei der für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

$a_{n+1} - a_n = d = \text{const.}$ , heißt **arithmetische Folge**.  $d$  steht für die Differenz.

#### Beispiel

$5, 8, 11, 14, 17 | d = 3$

$11, 6, 1, -4, -9 | d = -5$

Wegen der konstanten Differenz  $d$  zweier Folgenglieder ist eine arithmetische Folge eindeutig durch das Anfangsglied  $a_1$  und die konstante Differenz  $d$  bestimmt.

$a_1; a_2; a_3; \dots; a_n$

$a_1; a_1 + d; a_1 + 2d; \dots; a_1 + (n-1)d$

**Allgemeines Folgenglied einer arithmetischen Folge**  $a_n = a_1 + (n-1)d$

### 2.1.2 Geometrische Folgen

Eine Folge  $\{a_n\}$ , bei der für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q = \text{const.}$  heißt **geometrische Folge**.  $q$  steht für den Quotienten.

#### Beispiel

$2, 4, 8, 16, 32, \dots | q = 2$

$\frac{4}{3}, \frac{4}{9}, \frac{4}{27}, \frac{4}{81}, \dots | q = \frac{1}{3}$

Wegen des konstanten Quotienten  $q$  ist eine geometrische Folge eindeutig durch  $a_1$  und  $q$  bestimmt.

$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$

$a_1, a_1 \cdot q, a_1 \cdot q^2, a_1 \cdot q^3, \dots, a_1 \cdot q^{n-1}$

**Allgemeines Folgenglied einer geometrischen Folge**  $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

## 2.2 Reihen - Definition

Gegeben sei eine Zahlenfolge  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ : man bezeichnet die Addition der Folgenglieder als **unendliche Reihe** oder **Reihe**.

Die Summe  $S_n = \sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n$  heißt  $n$ -te Partialsumme oder  $n$ -te Teilsumme.

Eine arithmetische/geometrische Reihe ist eine Reihe, deren Glieder den Gesetzen einer arithmetischen/geometrischen Folge gehorchen.

### 2.2.1 n-te Partialsumme einer arithmetischen Reihe

Die  $n$ -te Partialsumme  $S_n$  einer arithmetischen Folge:

1.  $S_n = a_1 + a_1 + d + \dots + a_1 + (n-2)d + a_1 + (n-1)d$
  2.  $S_n = a_1 + (n-1)d + a_1 + (n-2)d + \dots + a_1 + d + a_1$
1. + 2.  $2S_n = [2a_1 + (n-1)d] + [2a_1 + (n-1)d] + \dots + [2a_1 + (n-1)d] + [2a_1 + (n-1)d]$   
 $\Rightarrow n$ -mal

$$2S_n = n \cdot (2a_1 + (n-1)d) \mid : 2$$

**n-te Partialsumme einer arithmetischen Reihe**  $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_1 + (n-1)d)$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

### 2.2.2 Gauss'sche Aufgabe

$$S_{100} = \sum_{i=1}^{100} i = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 100 =$$

$$\frac{100}{2} \cdot (1 + 100) = \frac{100 \cdot 101}{2} = 5050$$

Summe der natürlichen Zahlen  $1, 2, 3, 4, 5, \dots, n$

$$S_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

### 2.2.3 n-te Partialsumme einer geometrischen Reihe

Die  $n$ -te Partialsumme  $S_n$  einer geometrischen Folge:

1.  $S_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \dots + a_1 \cdot q^{a-2} + a_1 \cdot q^{n-1}$
  2.  $S_n = a_1 \cdot q^{n-1} + a_1 \cdot q^{a-2} + \dots + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q + a_1$
1. + 2.  $q \cdot S_n - S_n = -a_1 + a_1 q^n$
- $$q \cdot S_n - S_n = \frac{a_1 \cdot (-1 + q^n)}{-a_1 + a_1 \cdot q}$$

**n-te Partialsumme einer geometrischen Reihe**  $S_n \cdot (q - 1) = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$

## 2.3 Folgen - Eigenschaften

### 2.3.1 Beschränkung

Eine Folge  $\{a_n\}$  heißt beschränkt, wenn für alleglieder der Folge gilt:

$$|a_n| \leq c = \text{const.}, c \text{ heißt Schranke}$$

#### Beispiel

$a_n = (-2)^n$  ist nicht beschränkt, da die Folgenglieder beliebig groß bzw. klein werden können.

#### Beispiel 2

$a_n = \frac{1}{n}$  ist beschränkt, da für alle Folgenglieder gilt:  $|a_n| \leq 1 \Rightarrow$  Schranke  $c = 1$

$$0 < \frac{1}{u} \leq 1$$

### 2.3.2 Monotonie

Gilt für eine Zahlenfolge  $\{a_n\}$ :

$a_n < / \leq / = / \geq / > a_{n+1}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , so heißt die Folge:

- streng monoton wachsend
- monoton wachsend
- monoton fallend
- streng monoton fallend

#### Beispiel

$$a_n = 4n - 3$$

$$4(n+1) - 3 = a_{n+1}$$

$$a_n < a_{n+1} \Rightarrow 4n \text{ unterschied} \Rightarrow \text{streng monoton steigend}$$

#### Beispiel 2

$$a_n = n - n^2$$

$$(n+1) - (n+1)^2 = a_{n+1}$$

$$n + 1 - (n^2 + 2n + 1) = a_{n+1}$$

$$n - n^2 - 2n = a_{n+1}$$

$$a_n = n - n^2 > n - n^2 - 2n = a_n + 1 \mid n - n^2 = a_n$$

$a_n$  ist streng monoton fallend

#### Beispiel 3

$a_n = 2$  ist monoton wachsend und monoton fallend (2, 2, 2, 2, ...)

#### Beispiel 4

$$a_n = \frac{n}{2^n} \mid \frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{8}, \dots$$

ist monoton fallend da  $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$

### 2.3.3 Grenzwerte

Die Glieder der Folge  $a_n = 2n(2, 4, 6, 8, 10, \dots)$  werden mit wachsendem  $n$  immer größer. Man sagt: "Die Folge wächst über alle Grenzen."

Gleiches gilt für  $a_n = -3n(-3, -6, -9, -12, \dots)$ .

Die Folge  $a_n = \frac{1}{n}(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots)$  nähert sich mit größer werdenden  $n$  dem Wert 0 an. Der Wert 0 wird nicht erreicht.

Man schreibt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

"Limes  $\frac{1}{n}$  für  $n$  geht gegen  $\infty$  ist gleich 0"

Eine Folge, deren Glieder einem Grenzwert zustreben, heißt **konvergente Folge** (gegenstück ist die **divergente Folge**).

Eine Folge mit dem Grenzwert 0 heißt **Nullfolge**.

### **Beispiel**

$$a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$$

$$a_1 = (-1)^1 + \frac{1}{1} = 0$$

$$a_2 = (-1)^2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$a_3 = (-1)^3 + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$$

$$a_4 = (-1)^4 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

$$a_5 = (-1)^5 + \frac{1}{5} = -\frac{4}{5}$$

$$a_6 = (-1)^6 + \frac{1}{6} = \frac{7}{6}$$

$$a_7 = (-1)^7 + \frac{1}{7} = -\frac{6}{7}$$

### **3 Glossar**

- Explizite / Rekursive Definition